

MECÁNICA PARA INGENIERÍA

# ESTÁTICA

TEORÍA Y PROBLEMAS RESUELTOS

William M. Bonilla Jiménez

Héctor C. Terán Herrera

Héctor R. Reinoso Peñaherrera



**ESPE**

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA



MECÁNICA PARA INGENIERÍA.  
ESTÁTICA  
TEORÍA Y PROBLEMAS RESUELTOS

M.Sc. William M. Bonilla Jiménez.

M.Sc. Héctor C. Terán Herrera.

M.Sc. Héctor R. Reinoso Peñaherrera

## **Mecánica para ingeniería estática teoría y problemas resueltos.**

William M. Bonilla Jiménez.  
Héctor C. Terán Herrera.  
Héctor R. Reinoso Peñaherrera

ISBN: 976-9978-301-97-5

Todos los derechos reservados

Revisión de pares académicos:

Ing. Julio Pino Ph.D

Ing. Idalberto Macias Ph.D

Aprobado por la **Comisión Editorial** de la **Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

Coronel Ramiro Pazmiño. Presidente

Edición: David Andrade Aguirre

daa06@yahoo.es

Diseño: Oscar Murillo

El contenido, uso de fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias es de exclusiva responsabilidad del autor.

**Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

www.espe.edu.ec

Sangolquí, Ecuador.

Primera edición, diciembre de 2016

## Dedicatoria

Los autores dedican la presente obra a:

A DIOS Todopoderoso por ser la fuente de inspiración y fortaleza de cada día para cumplir nuestras metas.



## Agradecimiento

Los autores quieren agradecer a:

A DIOS Todopoderoso por brindarnos cada día vida, salud, alegría y  
fortaleza para alcanzar nuestros objetivos.

Nuestros familiares, amigos, conocidos y todas esas personas que  
aportaron su grano de arena en los momentos más difíciles.

La Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE por abrir las puertas a  
nuestros conocimientos y servicios.





## Prólogo

La ESTÁTICA trata con el equilibrio de los cuerpos, esto es, aquellos que están en reposo o se mueven con velocidad constante, sometidos a la acción externa de cargas puntuales y distribuidas, así como de momentos.

En el presente libro, se tratan temas que en la mayoría de programas de las universidades se analizan y que son muy importantes en la formación profesional de los Ingenieros Mecánicos, Civiles, Automotrices, Mecatrónicos y Electromecánicos.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado de los cursos de Estática en la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.

El presente libro consta de 5 capítulos y bibliografía.

En el primer capítulo se analiza la Estática de las partículas, muestra cómo sumar fuerzas y resolverlas en componentes, expresa cómo determinar la magnitud y el sentido de un vector.

En el segundo capítulo se estudia el Equilibrio de las Partículas, introduce el concepto de diagrama de cuerpo libre y como resolver problemas de equilibrio de partículas usando las ecuaciones de equilibrio.

En el tercer capítulo se analiza el concepto de momento de una fuerza y muestra cómo calcularla en dos y tres dimensiones, proporciona un método para encontrar el momento de una fuerza con respecto a un eje específico, define el momento de un par.

En el cuarto capítulo se analiza el Equilibrio de Cuerpos Rígidos, desarrolla las ecuaciones de equilibrio, muestra cómo resolver problemas de equilibrio de un cuerpo rígido usando las ecuaciones.

En el quinto capítulo se realiza el Análisis de Estructuras, se analizan diversos tipos de armaduras, a través del método de los nudos y método de las secciones, se analiza las fuerzas que actúan sobre los miembros de armazones y máquinas compuestos por miembros conectados mediante pasadores.

El presente texto está dirigido a estudiantes de ingeniería mecánica, civil, automotriz, mecatrónica, electromecánica y docentes que imparten los cursos de Estática; así como, a ingenieros e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis alumnos de Estática de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE; quienes con sus consultas me motivaron a escribir el presente libro y con su energía renovada me permitieron culminar con éxito este trabajo.

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	15
¿QUÉ ES LA MECÁNICA?.....	15
SISTEMA DE UNIDADES.....	15
CAPÍTULO 1.....	16
ESTÁTICA DE LAS PARTÍCULAS.....	16
1.1 INTRODUCCIÓN.....	16
1.2 FUERZA SOBRE UNA PARTÍCULA. RESULTANTE DE DOS FUERZAS.....	16
1.3 VECTORES.....	17
1.4 ADICIÓN DE VECTORES.....	18
1.5 RESULTANTE DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES.....	21
1.6 DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES.....	21
1.7 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA. VECTORES UNITARIOS.....	22
1.8 ADICIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL PLANO.....	24
1.10 FUERZAS EN EL ESPACIO.....	29
1.12 NUMERACIÓN DE LOS OCTANTES.....	41
1.13 ADICIÓN DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO.....	43
1.14 SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES.....	44
CAPÍTULO 2.....	51
EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA.....	51
2.1 OBJETIVOS DEL CAPÍTULO.....	51
2.2 EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO.....	51
2.3 DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE.....	52
2.3.1 Procedimiento para realizar el Diagrama del Cuerpo Libre.....	54
2.5 EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN TRES DIMENSIONES.....	65
CAPÍTULO 3.....	75
SISTEMA DE FUERZAS Y MOMENTOS.....	75
3.1 OBJETIVOS DEL CAPÍTULO.....	75
3.2 INTRODUCCIÓN.....	75
3.3 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO ( $M_o$ ).....	75
3.4 COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE FUERZA.....	79
3.5 TEOREMA DE VARIGNON.....	80
3.8 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DADO.....	96
3.10 MOMENTO DE UN PAR.....	104
3.11 LOS PARES PUEDEN REPRESENTARSE POR MEDIO DE VECTORES.....	106
3.13 REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZA Y PAR.....	113
3.14 REDUCCION DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y PAR.....	113

CAPÍTULO 4.....	121
EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS.....	121
4.1 OBJETIVOS DEL CAPÍTULO.....	121
4.2 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN 2D.....	121
4.2.1 Soporte de pasador.....	122
4.2.2 Soporte de rodillo.....	123
4.2.3 Soporte de empotramiento.....	123
4.4 TIPOS DE CARGA.....	131
4.4.1 Cargas puntuales.....	132
4.4.2 Cargas uniformes distribuidas.....	132
4.4.3 Cargas variables distribuidas.....	133
4.4.4 Momento concentrado.....	134
4.6 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN 3 DIMENSIONES.....	143
4.6.1 Soporte de bola y cuenca.....	145
4.6.2 Soporte de rodillo.....	145
4.6.3 Articulación.....	146
4.6.4 Coginete.....	146
4.6.5 Soporte fijo.....	147
CAPÍTULO 5.....	159
ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS.....	159
5.1 OBJETIVOS DEL CAPÍTULO.....	159
5.2 INTRODUCCIÓN.....	159
5.3 ARMADURAS.....	159
5.3.1 Miembros de fuerza cero.....	164
5.3.2 Método de los nodos.....	167
5.3.3 Método de las secciones.....	168
5.5 ARMAZONES O BASTIDORES.....	177
5.7 MÁQUINAS.....	186
REFERENCIAS.....	200
BIBLIOGRAFÍA.....	200

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Cuadro de designación de octantes con su respectivos signos.....	42
Tabla 2. Reacciones de soportes bidimensionales .....	124
Tabla 3. Soportes y reacciones tridimensionales.....	148

## ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 1. Magnitud Resultante .....	25
Ecuación 2. Componentes escalares .....	31
Ecuación 3. Cosenos Directores.....	32
Ecuación 4. Componentes rectangulares, dado ángulos directores.....	36
Ecuación 5. Para obtener un ángulo director, dados dos ángulos directores.....	36
Ecuación 6. Ángulos Directores .....	39
Ecuación 7. Sistema de Fuerzas Concurrentes.....	44
Ecuación 8. Magnitud y ángulos directores en 3D.....	45
Ecuación 9. Equilibrio de una partícula en un plano.....	51
Ecuación 10. Fuerza elástica .....	53
Ecuación 11. Equilibrio de una partícula en 3D.....	65
Ecuación 12. Ecuaciones escalares, equilibrio de una partícula en 3D.....	65
Ecuación 13. Momento de una fuerza con respecto a un punto.....	76
Ecuación 14. Momento de una fuerza con respecto a un punto (Magnitud) .....	78
Ecuación 15. Momento de una fuerza con respecto a un punto arbitrario.....	79
Ecuación 16. Componentes Rectangulares del Momento de una fuerza con respecto a un punto .....	80
Ecuación 17 Proyección de un vector P sobre el eje OL.....	96
Ecuación 18. Producto triple mixto de 3 vectores.....	97
Ecuación 19. Producto Vectorial.....	97
Ecuación 20. Equivalencias de un par .....	104
Ecuación 21. Momento de un par .....	105
Ecuación 22. Fuerza y Par .....	113
Ecuación 23. Sistema equivalente Fuerza - Par.....	114
Ecuación 24. Ecuaciones de equilibrio escalares.....	122
Ecuación 25. Magnitud de la fuerza resultante .....	132
Ecuación 26. Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones.....	144
Ecuación 27. Ecuaciones de equilibrio nodo A .....	166
Ecuación 28. Equilibrio en el nodo D .....	167

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Dirección de una Fuerza.....	16
Figura 2. Fuerza Resultante.....	17
Figura 3. Vectores Paralelos.....	18
Figura 4. Vectores Opuestos.....	18
Figura 5. Método del Paralelogramo.....	19
Figura 6. Vectores Conmutativos.....	19
Figura 7. Resta de Vectores.....	20
Figura 8. Método del Polígono.....	21
Figura 9. Fuerzas Contenidas en un mismo plano.....	21
Figura 10. Descomposición de dos Fuerzas.....	22
Figura 11. Componentes Rectangulares de una Fuerza.....	23
Figura 12. Descomposición de una Fuerza.....	24
Figura 13. Adición de varias Fuerzas.....	24
Figura 14. Interpretación gráfica ejemplo 1.1.....	26
Figura 15. Interpretación gráfica del ejercicio 1.2.....	27
Figura 16. Interpretación gráfica ejercicio 1.3.....	28
Figura 17. (a) Fuerza en el Espacio.....	30
Figura 18. (b) Fuerza en el Espacio.....	30
Figura 19. (c) Fuerza en el Espacio.....	31
Figura 20. Interpretación gráfica ejercicio 1.4.....	32
Figura 21. Interpretación gráfica ejercicio 1.5.....	33
Figura 22. Interpretación gráfica ejercicio 1.6.....	34
Figura 23. Componentes Rectangulares de una Fuerza dados los ángulos Directores.....	35
Figura 24. Cables unidos a la armella del ejercicio 1.7.....	37
Figura 25. Vector fuerza dirigido a lo largo de su línea de acción.....	38
Figura 26. Interpretación gráfica ejercicio 1.8.....	39
Figura 27. Interpretación gráfica ejercicio 1.9.....	40
Figura 28. (a) Octantes en el espacio.....	42
Figura 29. (b) Octantes en el espacio.....	42
Figura 30. Numeración de los Octantes.....	43
Figura 31. Adición de Fuerzas Concurrentes en el espacio.....	44
Figura 32. Interpretación gráfica ejercicio 1.10.....	45
Figura 33. Interpretación gráfica ejercicio 1.11.....	47
Figura 34. Interpretación gráfica ejercicio 1.12.....	49
Figura 35. Partícula en equilibrio.....	52
Figura 36. Alargamiento de un resorte.....	53

Figura 37. Tensión en cables .....	54
Figura 38. (a) Aislamiento bloque Inferior .....	55
Figura 39. (b) Indicación de las Fuerzas.....	55
Figura 40. Interpretación gráfica ejercicio 2.1.....	56
Figura 41. Interpretación gráfica ejercicio 2.2.....	59
Figura 42. Interpretación gráfica ejercicio 2.3.....	62
Figura 43. Interpretación gráfica ejercicio 2.4.....	66
Figura 44. Interpretación gráfica ejercicio 2.5.....	68
Figura 45. Interpretación gráfica ejercicio 2.6.....	71
Figura 46. Momento de una fuerza con respecto a un punto.....	76
Figura 47. Regla de la mano derecha.....	77
Figura 48. Momento de una fuerza en el plano.....	79
Figura 49. Componentes rectangulares del momento de fuerza .....	79
Figura 50. Momento de varias fuerzas concurrentes con respecto al punto O.....	81
Figura 51. Momento de una Fuerza con respecto al punto O ejercicio 3.1 .....	82
Figura 52. Interpretación gráfica ejercicio 3.2.....	85
Figura 53. Interpretación gráfica ejercicio 3.3.....	86
Figura 54. Interpretación gráfica ejercicio 3.4.....	88
Figura 55. Interpretación gráfica ejercicio 3.5.....	90
Figura 56. Proyección de un vector P sobre la recta OL .....	94
Figura 57. Ángulos Directores.....	95
Figura 58. Momento de F con respecto al eje OL.....	97
Figura 59. Interpretación gráfica del ejercicio 3.6.....	98
Figura 60. Interpretación gráfica ejercicio 3.7.....	101
Figura 61. Interpretación gráfica ejercicio 3.8.....	103
Figura 62. Par .....	104
Figura 63. Pares que definen momentos iguales .....	104
Figura 64. Momento de un Par.....	105
Figura 65. Pares representada por medio de vectores .....	106
Figura 66. Interpretación gráfica ejercicio 3.9.....	107
Figura 67. Interpretación gráfica ejercicio 3.10.....	108
Figura 68. Interpretación gráfica ejercicio 3.11.....	110
Figura 69. Sistema fuerza a par .....	113
Figura 70. Sistema de fuerzas a una fuerza y un par .....	114
Figura 71. Interpretación gráfica ejercicio 3.12.....	115
Figura 72. Ejercicio 3.13 .....	117
Figura 73. Interpretación gráfica ejercicio 3.14.....	118
Figura 74. DCL soporte de pasador.....	123

Figura 75. DCL Soporte de rodillo y sistemas equivalentes. ....	123
Figura 76. DCL Soporte de empotramiento. ....	124
Figura 77. Ejercicio 4.1 .....	125
Figura 78. Bastidor ejercicio 4.2.....	127
Figura 79. Interpretación gráfica ejercicio 4.3.....	129
Figura 80. Carga Puntual .....	132
Figura 81. Carga Uniforme Distribuida .....	132
Figura 82. Carga variable distribuida .....	133
Figura 83. Momento Concentrado.....	134
Figura 84. Interpretación gráfica ejercicio 4.4.....	135
Figura 85. Sistema de Cargas ejercicio 4.5 .....	136
Figura 86. Interpretación gráfica ejercicio 4.6.....	141
Figura 87. Soporte bola y cuenca .....	145
Figura 88. Soporte de rodillo .....	145
Figura 89. Articulación .....	146
Figura 90. Cojinete .....	147
Figura 91. Soporte fijo.....	148
Figura 92. Placa soportada por bisagras ejercicio 4.7.....	150
Figura 93. Ensamble de tuberías ejercicio 4.8.....	153
Figura 94. Máquina ejercicio 4.9.....	156
Figura 95. Ejemplos de Armaduras .....	160
Figura 96. Elemento de una armadura sujeto a dos fuerzas.....	160
Figura 97. Partes de una armadura de puente.....	161
Figura 98. Armadura de techo tipo Pratt.....	161
Figura 99. Armadura de puente tipo Pratt .....	161
Figura 100. Armadura de techo tipo Howe.....	162
Figura 101. Armadura de puente tipo Howe.....	162
Figura 102. Armadura de techo tipo Fink.....	162
Figura 103. Armadura de techo tipo Fink (cuerda inferior arqueada) .....	163
Figura 105. Armadura de puente tipo Warren.....	163
Figura 106. Armadura de puente K.....	163
Figura 107. Armadura .....	165
Figura 108. Miembros de fuerza cero (primera regla) .....	165
Figura 109. Armadura .....	166
Figura 110. Miembros de fuerza cero (segunda regla) Ilustración: William Bonilla .....	166
Figura 111. Método de los nodos .....	168
Figura 112. Método de las secciones.....	169
Figura 113. Gráfico ejercicio 5.1.....	170



Figura 114. Gráfico ejercicio 5.2.....	171
Figura 115 Reacciones en apoyos, fuerzas internas, barras nulas.....	173
Figura 116. Gráfico del ejercicio 5.3 .....	175
Figura 117. Armazones o Bastidores .....	178
Figura 118. Gráfico del ejercicio 5.4 .....	178
Figura 119. Gráfico ejercicio 5.5.....	181
Figura 120. Gráfico del ejercicio 5.6.....	183
Figura 121. Máquina.....	186
Figura 122. Obtención de los diagramas de cuerpo libre de los elementos.....	187
Figura 123 Gráfico del ejercicio 5.7 .....	188
Figura 124 Gráfico del ejercicio 5.8.....	189
Figura 125 Gráfico del ejercicio 5.9.....	191
Figura 126. Gráfica del ejercicio 5.10 .....	194
Figura 127. Gráfico del ejercicio 5.11 .....	196
Figura No. 15 Elementos del Plan De Negocio.....	105



## INTRODUCCIÓN

### ¿QUÉ ES LA MECÁNICA?

La mecánica es una rama de la física que se ocupa del estado de reposo o movimiento de cuerpos que están sometidos a la acción de fuerzas. En general, este tema se subdivide en tres ramas: mecánica del cuerpo rígido, mecánica del cuerpo deformable y mecánica de fluidos. Esta asignatura trata sólo la mecánica del cuerpo rígido ya que ésta constituye una base adecuada para el diseño y análisis de muchos tipos de dispositivos estructurales, mecánicos o eléctricos, que se encuentran en la ingeniería.

La mecánica del cuerpo rígido se divide en dos áreas: estática y dinámica.

La estática trata con el equilibrio de los cuerpos, esto es, aquellos que están en reposo o se mueven con velocidad constante; mientras que la DINÁMICA trata el movimiento acelerado de los cuerpos.

Aquí el tema de la dinámica será presentado en dos partes:

CINEMÁTICA.- Que trata sólo con los aspectos geométricos del movimiento.

CINÉTICA.- La cual analiza las fuerzas que causan el movimiento.

#### SISTEMA DE UNIDADES

Las unidades básicas son: longitud, masa y tiempo, y se llaman metro (m), kilogramo (kg) y segundo (s). La unidad de fuerza es una unidad derivada y es el Newton (N). Se le puede decir que es la fuerza que proporciona una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  a una masa de 1 kilogramo.

$$1\text{N} = (1\text{kg})(1\text{m/s}^2) = 1\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Las unidades del SI usadas por los ingenieros para medir la magnitud de una fuerza son el Newton (N) y su múltiplo el kilonewton (kN), igual a 1 000 N, mientras que las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos, empleadas con el mismo fin, son la libra (lb) y su múltiplo el kilolibra (kip), igual a 1000 lb.



# Capítulo 1

## ESTÁTICA DE LAS PARTICULAS



## ESTÁTICA DE LAS PARTÍCULAS

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan en una o más partículas. Se sustituirá dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula por una sola fuerza. Se derivarán las relaciones que existen entre las distintas fuerzas que actúan sobre una partícula en equilibrio y se usarán para determinar algunas de las fuerzas que actúan sobre dicha partícula. El uso de la palabra “partícula” quiere decir que el tamaño y la forma de los cuerpos en consideración no afectarán en la solución de los problemas tratados, y que todas las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo dado se supondrán aplicadas en un mismo punto. (BEER & JOHNSTON, 2010)

### FUERZAS EN UN PLANO

#### 1.2 FUERZA SOBRE UNA PARTÍCULA. RESULTANTE DE DOS FUERZAS

Fuerza es un empujón o un tirón que ejerce un cuerpo contra otro, incluyendo la gravedad, electrostática, magnetismo e influencias de contacto. Fuerza es un vector cuantitativo, teniendo una magnitud, dirección y un punto de aplicación. Pero las fuerzas sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación.

La dirección de una fuerza se define por la línea de acción y el sentido de la fuerza. La línea de acción es la línea recta infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza; se caracteriza por el ángulo que forma con algún eje fijo (Figura 1).



Figura 1. Dirección de una Fuerza  
Ilustración William Bonilla

La fuerza en sí se representa por un segmento de esa línea; mediante el uso de una escala apropiada, puede escogerse la longitud de este segmento para representar la magnitud de la fuerza.

El sentido de la fuerza debe indicarse por una punta de flecha. En la definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas como las mostradas en la (figura 2), que tienen la misma magnitud y la misma línea de acción pero diferente sentido, tendrán efectos opuestos sobre una partícula.

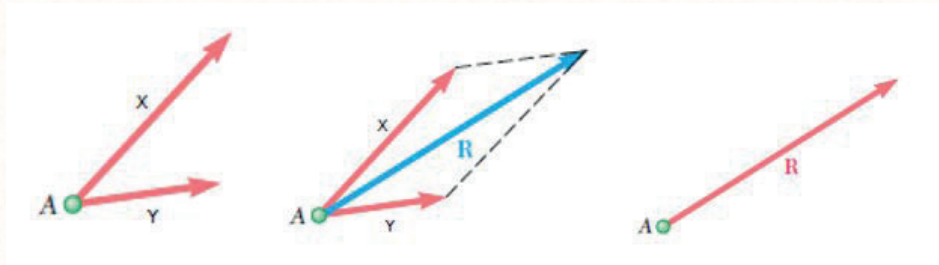


Figura 2. Fuerza Resultante  
Ilustración William Bonilla

### 1.3 VECTORES

Los vectores se definen como expresiones matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo.

Los vectores se representan por flechas y se distinguen de las cantidades escalares.

La magnitud del vector  $X$  se representa como  $X$ . Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama vector fijo o ligado, y no puede cambiarse su posición sin modificar las condiciones del problema.

Dos vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son iguales, tengan o no el mismo punto de aplicación (figura 3); los vectores iguales pueden representarse por la misma letra.



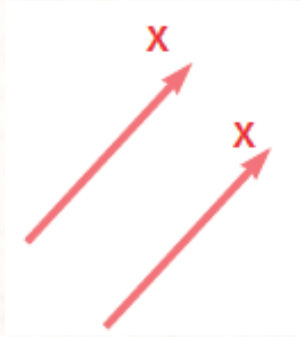


Figura 3. Vectores Paralelos  
Ilustración William Bonilla

El vector negativo de un vector  $X$  se define como aquel que tiene la misma magnitud que  $X$  y una dirección opuesta a la de  $X$  (Figura 4); el negativo del vector  $X$  se representa por  $-X$ .

A los vectores  $X$  y  $-X$  se les llama vectores iguales y opuestos. Se tiene  $X + (-X) = 0$

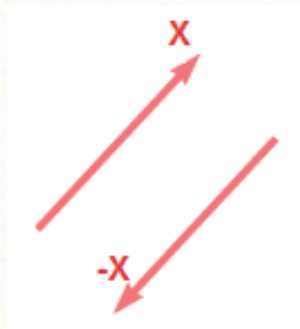


Figura 4. Vectores Opuestos  
Ilustración William Bonilla

#### 1.4 ADICIÓN DE VECTORES

Se sabe que, por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores  $X$  e  $Y$  se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto  $A$  y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a  $X$  y a  $Y$  (Figura 5).

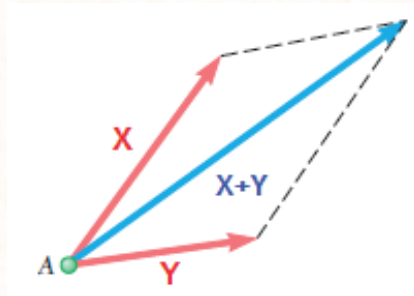


Figura 5. Método del Paralelogramo  
Ilustración William Bonilla

La diagonal que pasa por A representa la suma vectorial de X e Y, y se representa por  $X + Y$ . El hecho de que el signo + se usa para representar tanto la suma vectorial como la escalar no debe causar ninguna confusión, si las cantidades vectoriales y escalares siempre se distinguen con cuidado.

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores X e Y no depende del orden en que X e Y se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es conmutativa, y se escribe:

$$X + Y = Y + X$$

De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse colocando X e Y de punta a cola y uniendo la cola de X con la punta de Y. En la (figura 6) se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

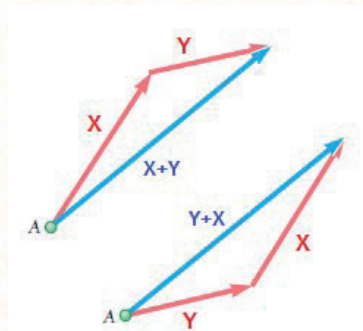


Figura 6. Vectores Conmutativos  
Ilustración William Bonilla

La resta de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De manera que el vector  $P + Q$  que representa la diferencia de los vectores  $P$  y  $Q$  se obtiene agregándole a  $P$  el vector negativo  $-Q$  (Figura 7).

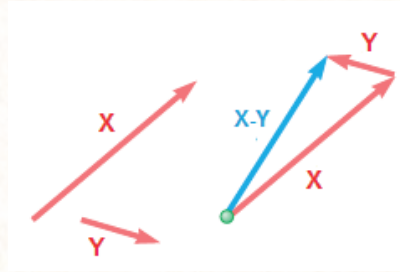


Figura 7. Resta de Vectores  
Ilustración William Bonilla

Se escribe  $X - Y = X + (-Y)$

Ahora se considerará la suma de tres o más vectores. La suma de tres vectores  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  se obtendrá por definición, sumando primero los vectores  $X$  e  $Y$ , agregando el vector  $Z$  al vector  $X + Y$ . De manera que:

$$X + Y + Z = (X + Y) + Z$$

Si los vectores dados son coplanares, es decir, si están contenidos en el mismo plano, la suma puede obtenerse fácilmente en forma gráfica.

Se observa que el resultado obtenido permanecerá sin cambio, los vectores  $Y$  y  $Z$  se hubieran reemplazado por la suma de  $Y + Z$ .

Entonces se puede escribir  $X + Y + Z = (X + Y) + Z = X + (Y + Z)$  esta ecuación expresa el hecho de que la adición de vectores es asociativa.

Es importante recordar que ya se demostró que la suma vectorial de dos vectores es también conmutativa, por lo que se escribe

$$X + Y + Z = (X + Y) + Z = Z + (X + Y) = Z + (Y + X) = Z + Y + X$$

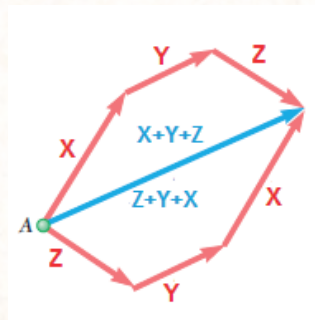


Figura 8. Método del Polígono  
Ilustración William Bonilla

### 1.5 RESULTANTE DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES

Una partícula A sujeta a varias fuerzas coplanares, es decir, a varias fuerzas contenidas en el mismo plano (Figura 9). Como todas estas fuerzas pasan por A, se dice que son concurrentes. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre A pueden sumarse con la regla del polígono (figura 9). Puesto que el uso de la regla del polígono es equivalente, el vector R obtenido representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen, es decir, la fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula A que las fuerzas dadas.

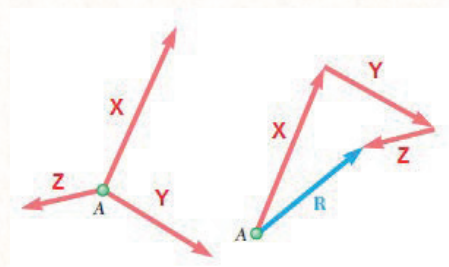


Figura 9. Fuerzas Contenidas en un mismo plano  
Ilustración William Bonilla

### 1.6 DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES

Se ha visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza F que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula.

A estas fuerzas se les llama componentes de la fuerza original  $F$ , y al proceso de sustituirlas en lugar de  $F$  se le llama descomposición de la fuerza  $F$  en sus componentes. En este sentido, para cada fuerza  $F$  existe un número infinito de conjuntos de componentes (Figura 10).

Dos casos son de especial interés:

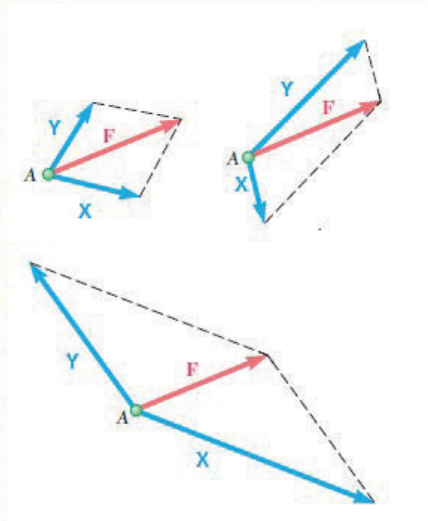


Figura 10. Descomposición de dos Fuerzas  
Ilustración William Bonilla

## 1.7 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA. VECTORES UNITARIOS

Es conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes perpendiculares entre sí. En la figura 11, la fuerza  $F$  se ha descompuesto en una componente  $F_x$  a lo largo del eje  $x$  y una componente  $F_y$  a lo largo del eje  $y$ . El paralelogramo trazado para obtener las dos componentes es un rectángulo, y las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$  se llaman componentes rectangulares.

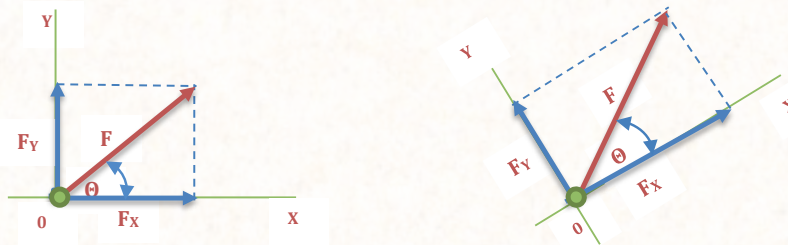


Figura 11. Componentes Rectangulares de una Fuerza.  
Ilustración William Bonilla

Los ejes  $x$  e  $y$  suelen elegirse a lo largo de las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, como se muestra en la (figura 11); sin embargo, pueden seleccionarse en cualquiera de las otras dos direcciones perpendiculares.

En este punto se introducirán dos vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos  $x$  e  $y$ . A estos vectores se les llama vectores unitarios y se representan por  $i$  y  $j$ , respectivamente. Al recordar la definición del producto de un escalar y un vector dado, se observa que las componentes rectangulares  $F_x$  y  $F_y$  de una fuerza  $F$  pueden obtenerse con la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios  $i$  y  $j$  por escalares apropiados.

Se escribe:

$$F_x = Fxi \qquad F_y = Fyj$$

$$F = Fxi + Fyj$$

Mientras que los escalares  $F_x$  y  $F_y$  pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido de  $F_x$  y  $F_y$ , sus valores absolutos son respectivamente iguales a las magnitudes de las componentes de las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$ . Los escalares  $F_x$  y  $F_y$  se llaman componentes escalares de la fuerza  $F$ , mientras que las componentes reales de la fuerza  $F_x$  y  $F_y$  son las componentes vectoriales de  $F$ .

Si se representa con  $F$  la magnitud de la fuerza  $F$  y con  $\theta$  el ángulo entre  $F$  y el eje  $x$ , medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj desde el eje  $x$  positivo (figura 12), se pueden expresar las componentes escalares de  $F$  como sigue:

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

Se observa que las relaciones obtenidas se satisfacen para cualquier valor del ángulo  $\theta$  entre  $0$  y  $360^\circ$  y que éstas definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares  $F_x$  y  $F_y$

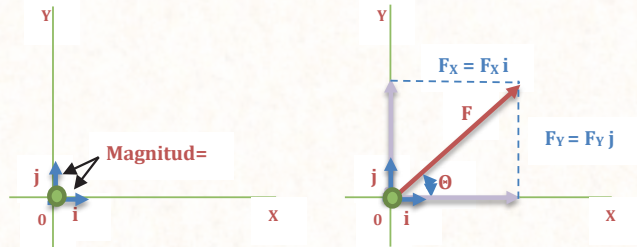


Figura 12. Descomposición de una Fuerza  
Ilustración William Bonilla

### 1.8 ADICIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL PLANO

Cuando se suman tres o más fuerzas, no puede obtenerse una solución trigonométrica práctica. En este caso se obtiene una solución analítica del problema si se descompone cada fuerza en sus elementos rectangulares. Considérese, las tres fuerzas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  que actúan sobre una partícula  $A$  (figura 13). Su resultante  $R$  está definida por la relación

$$R = X + Y + Z$$

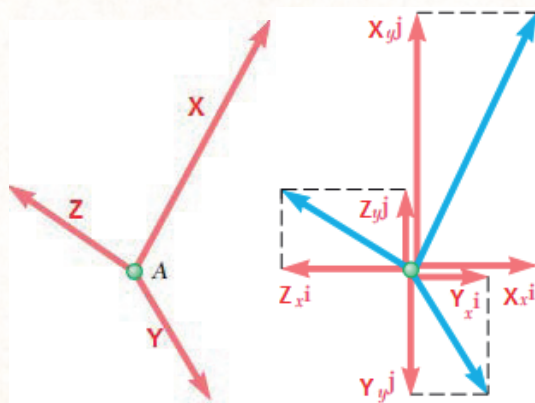


Figura 13. Adición de varias Fuerzas  
Ilustración William Bonilla

En sus componentes rectangulares, se escribe:

$$R_{xi} + R_{yj} = X_{xi} + X_{yj} + Y_{xi} + Y_{yj} + Z_{xi} + Z_{yj}$$
$$R\vec{i} + R\vec{j} = (X_x + Y_x + Z_x)\vec{i} + (X_y + Y_y + Z_y)\vec{j}$$

Donde se tiene que:

$$R_x = X_x + Y_x + Z_x \quad R_y = X_y + Y_y + Z_y$$

O, en forma breve:

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y$$

Las componentes escalares  $R_x$  y  $R_y$  de la resultante  $R$  de varias fuerzas se obtienen separando de manera algebraica las correspondientes componentes escalares de las fuerzas dadas.

La magnitud de la resultante y la dirección que forma con el eje de coordenadas se obtienen:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{Ecuación 1. Magnitud Resultante}$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$$

## EJERCICIOS RESUELTOS

### EJEMPLO 1.1

Si se sabe que la tensión en el cable BC es de 725 N, determine la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B de la viga AB.



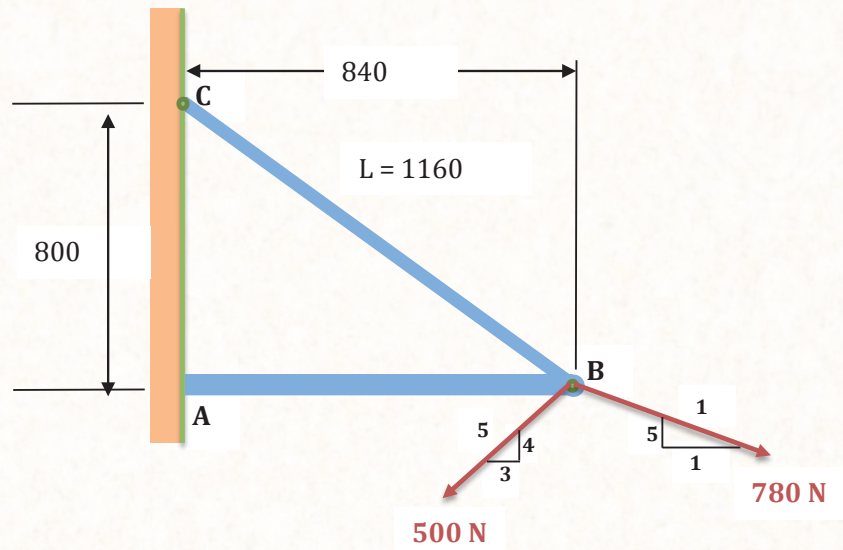


Figura 14. Interpretación gráfica ejemplo 1.1  
Ilustración William Bonilla

**Solución:**

$$\text{Tensión BC: } F_x = -(725\text{N}) \frac{840}{1160}$$

$$F_x = -525\text{N}$$

$$F_y = (725\text{N}) \frac{800}{1160}$$

$$F_y = 500\text{N}$$

$$\text{Fuerza de 500 N: } F_x = -(500\text{N}) \frac{3}{5} = -300\text{N}$$

$$F_y = -(500\text{N}) \frac{4}{5} = -400\text{N}$$

$$\text{Fuerza de 780 N: } F_x = (780\text{N}) \frac{12}{13} = 720\text{N}$$

$$F_y = -(780\text{N}) \frac{5}{13} = -300\text{N}$$

$$R_x = \Sigma F_x = -105\text{N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = -200N$$

$$R = \sqrt{(-105N)^2 + (-200)^2}$$

$$R = 225.89N$$

$$\tan \alpha = \frac{200}{105} \qquad \alpha = \tan^{-1} \frac{200}{105} \qquad \alpha = 62.3$$

### EJERCICIO 1.2

Si se sabe que  $\alpha = 40^\circ$ , determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

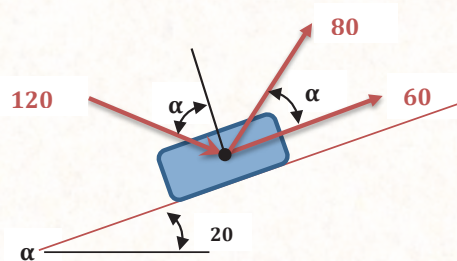


Figura 15. Interpretación gráfica del ejercicio 1.2  
Ilustración William Bonilla

### Solución:

Fuerza de 60 lb:

$$F_x = (60 \text{ lb}) \cos 20^\circ = 56.38 \text{ lb}$$

$$F_y = (60 \text{ lb}) \sen 20^\circ = 20.52 \text{ lb}$$

**Fuerza de 120 lb:**

$$F_x = (120 \text{ lb}) \cos 30^\circ = 103.92 \text{ lb}$$

$$F_y = -(120 \text{ lb}) \sen 30^\circ = -60 \text{ lb}$$

Fuerza de 80 lb:

$$F_x = (80 \text{ lb}) \cos 60^\circ = 40 \text{ lb}$$

$$F_y = (80 \text{ lb}) \text{ sen } 60^\circ = 69.28 \text{ lb}$$

$$R_x = \Sigma F_x = 200.3 \text{ lb}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 29.8 \text{ lb}$$

$$R = \sqrt{(200.3)^2 + (29.8)^2}$$

$$R = 202.5 \text{ lb}$$

$$\tan \theta = \frac{29.8}{200.3}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{29.8}{200.3} \quad \theta = 8.4$$

### EJERCICIO 1.3

Se aplican tres fuerzas a la ménsula. Determine el rango de valores de la magnitud de la fuerza P para los cuales la resultante de las tres fuerzas no excede 2400 N.

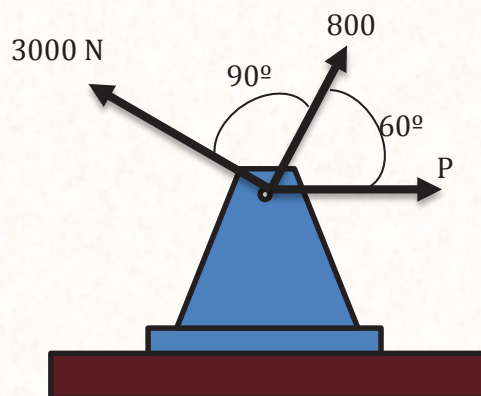
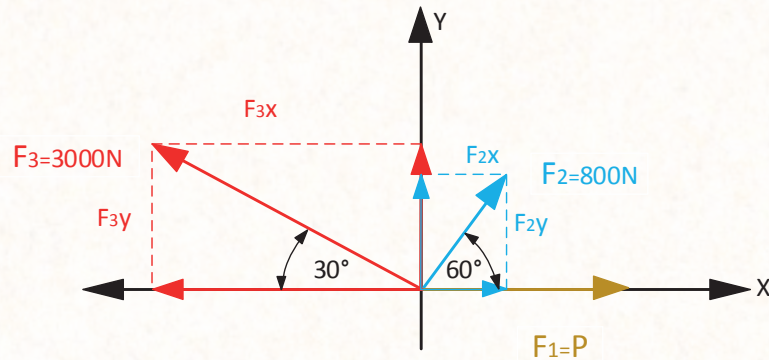


Figura 16. Interpretación gráfica ejercicio 1.3

Ilustración William Bonilla



**Solución:**

$$\vec{F}_1 = P\vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = 800 \cos(60)\vec{i} + 800\text{sen}(60)\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = 400\vec{i} + 692,82\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = -3000 \cos(30)\vec{i} + 3000\text{sen}(30)\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = -2598,07\vec{i} + 1500\vec{j}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow R_x &= \sum F_x = P + 400 - 2598,08 \\ &= P - 2198,08 \end{aligned}$$

$$\uparrow R_y = \sum F_y = 692,82 + 1500 = 2192,82$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \leq 2400$$

$$\sqrt{(P - 2198,08)^2 + (2192,82)^2} \leq 2400$$

$$(P - 2198,08)^2 + (2192,82)^2 \leq (2400)^2$$

$$|P - 2198,08| \leq 975,47$$

$$-975,47 \leq P - 2198,08 \leq 975,47$$

$$1222,6\text{N} \leq P \leq 3173,5\text{N}$$

$$1222,6\text{N} \leq P \leq 3173,5\text{N}$$

**1.10 FUERZAS EN EL ESPACIO**

En este capítulo vamos a analizar ejercicios que presentan una fuerza en el espacio, es decir en 3 dimensiones y como descomponer una fuerza en función de sus componentes rectangulares dados los diferentes casos

**Caso 1:**

Para definir la dirección de F, se traza el plano vertical OBAC que contiene a F y que se muestra en la Figura 17 a. Este plano pasa a través del eje vertical "y"; su orientación está definida por el ángulo  $\varphi$  que forma con el plano xy, mientras

que la dirección de  $F$  dentro del plano está por el ángulo  $\theta_y$  que forma  $F$  con el eje  $y$ .

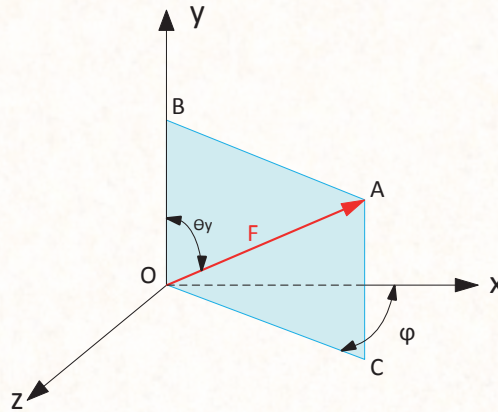


Figura 17. (a) Fuerza en el Espacio  
Ilustración William Bonilla

Como se observa en las siguientes (figuras 17 b y c), la fuerza  $F$  se puede descomponer en 2 componentes: una vertical  $F_y$  y una horizontal  $F_h$ , mismas que se encuentran en el plano  $OBAC$ . La fuerza horizontal  $F_h$  a su vez tiene componentes en el eje  $x$  y en el eje  $z$ .

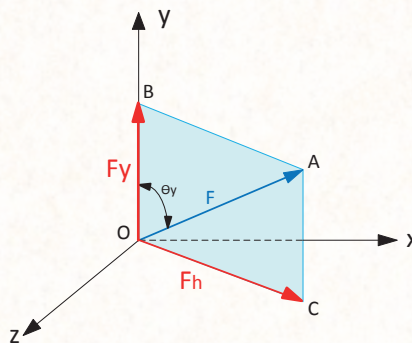


Figura 18. (b) Fuerza en el Espacio  
Ilustración William Bonilla

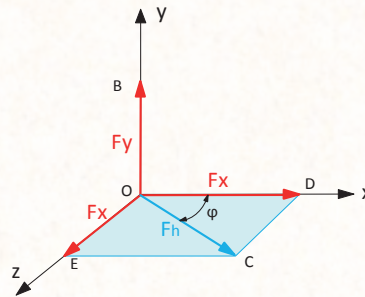


Figura 19. (c) Fuerza en el Espacio  
Ilustración William Bonilla

Análisis en el plano  $OBAC$  de la figura 18 b tenemos:

Triángulo  $OBA$

$$\cos \theta_y = \frac{F_y}{F}$$

$$\text{sen } \theta_y = \frac{F_h}{F}$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_h = F \text{ sen } \theta_y$$

Trabajando en el triángulo  $ODC$  de la figura 19 c tenemos:

$$\cos \varphi = \frac{F_x}{F_h}$$

$$\text{sen } \varphi = \frac{F_z}{F_h}$$

$$F_x = F \text{ sen } \theta_y \cos \varphi$$

$$F_z = F \text{ sen } \theta_y \text{ sen } \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} F_y = F \cos \theta_y \\ F_x = F \text{ sen } \theta_y \cos \varphi \\ F_z = F \text{ sen } \theta_y \text{ sen } \varphi \end{array} \right\} \text{Componentes escalares}$$

Ecuación 2. Componentes escalares

En forma vectorial con el uso de los vectores unitarios  $i, j$  y  $k$ , que se encuentran a lo largo de los ejes  $x, y, z$ , tenemos:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (\text{Magnitud})$$

Cosenos directores:

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

Ecuación 3. Cosenos Directores

### 1.11 EJERCICIOS RESUELTOS

#### EJERCICIO 1.4

Determine: a) las componentes x, y, z de la fuerza  $F_1 = 800 \text{ N}$  y b) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza con los ejes coordenados

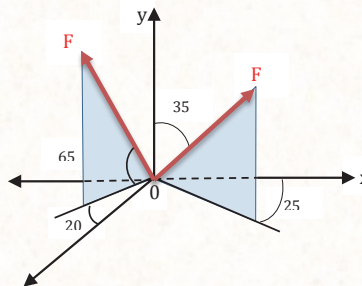


Figura 20. Interpretación gráfica ejercicio 1.4

Ilustración William Bonilla

**Solución:**

a)  $F_x = F \operatorname{sen} \theta_y \cos \varphi$

$$F_x = 800 \operatorname{sen} 35^\circ \cos 25^\circ$$

$$F_x = 415,869 \text{ N}$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_y = 800 \cos 35^\circ$$

$$F_y = 655,32 \text{ N}$$

$$F_z = F \operatorname{sen} \theta_y \operatorname{sen} \varphi$$

$$F_z = 800 \operatorname{sen} 35^\circ \operatorname{sen} 25^\circ$$

$$F_z = 193,92 \text{ N}$$

$$\vec{F} = (415,86i + 655,32j + 193,92k)\text{N}$$

$$\text{b) } \cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\theta_x = 58,67^\circ \qquad \theta_y = 35^\circ \qquad \theta_z = 75,97^\circ$$

### EJERCICIO 1.5

Determine: a) las componentes x, y, z de la fuerza  $F_2 = 975 \text{ N}$  y b) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza con los ejes coordenados.

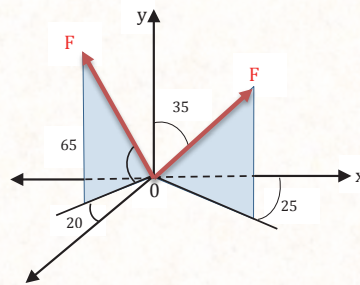


Figura 21. Interpretación gráfica ejercicio 1.5  
Ilustración William Bonilla

### Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } F_x &= F \sen \theta_y \cos \varphi \\ F_x &= 975 \sen 25^\circ \cos 110^\circ \\ F_x &= -140,93 \text{ N} \\ \\ F_y &= F \cos \theta_y \\ F_y &= 975 \cos 25^\circ \\ F_y &= 883,65 \text{ N} \\ \\ F_z &= F \sen \theta_y \sen \varphi \\ F_z &= 975 \sen 25^\circ \sen 110^\circ \\ F_z &= 387,20 \text{ N} \end{aligned}$$



$$\vec{F} = (-140,93i + 883,65j + 387,20k)N$$

$$b) \cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\theta_x = 98,31^\circ \qquad \theta_y = 25^\circ \qquad \theta_z = 66,60^\circ$$

### EJERCICIO 1.6

Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de  $30^\circ$  respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Si se sabe que la componente x de la fuerza ejercida por el alambre AD sobre la placa es de 98 N, determine a) la tensión en el alambre AD, b) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza ejercida en A con los ejes coordenados.

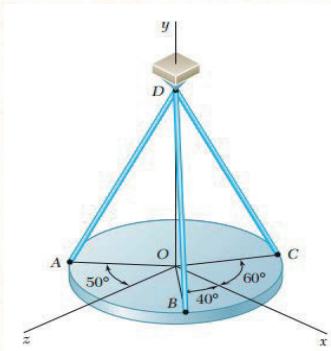


Figura 22. Interpretación gráfica ejercicio 1.6  
(BEER & JOHNSTON, 2010)

### Solución:

$$F_x = F \sin \theta_y \cos \varphi$$

$$F = \frac{F_x}{\sin \theta_y \cos \varphi}$$

$$F = \frac{98}{\sin 30^\circ \cos 320^\circ}$$

$$F = 255,86\text{N}$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_y = 255,86 \cos 30^\circ$$

$$F_y = 221,58 \text{ Fz} = F \sin \theta_y \sin \varphi$$

$$F_z = 255,86 \sin 30^\circ \sin 320^\circ$$

$$F_z = -82,23 \text{ N}$$

$$\text{a) } \vec{F} = (98\mathbf{i} + 221,58\mathbf{j} - 82,23\mathbf{k})\text{N}$$

$$\text{b) } \cos \theta_x = \frac{F_x}{F}$$

$$\theta_x = 67,48^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{F_y}{F}$$

$$\theta_y = 30^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\theta_z = 108,74^\circ$$

**Caso 2:**

Ángulos directores:  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$

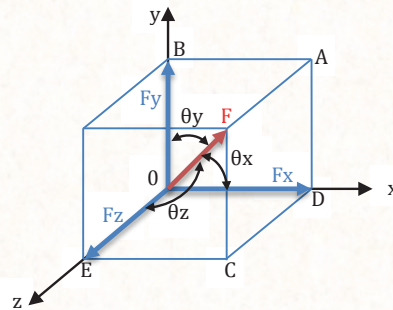


Figura 23. Componentes Rectangulares de una Fuerza dados los ángulos Directores

Ilustración William Bonilla

Análisis en el triángulo ODA:

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \longrightarrow F_x = F \cos \theta_x$$

Análisis en el triángulo OBA:

$$\cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \longrightarrow F_y = F \cos \theta_y$$

Análisis en el triángulo OEA:

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \longrightarrow F_z = F \cos \theta_z$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = F \cos \theta_x \\ F_y = F \cos \theta_y \\ F_z = F \cos \theta_z \end{array} \right\} \text{Componentes escalares}$$

Las componentes rectangulares o en forma vectorial cartesiana tenemos

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (\text{Magnitud})$$

El vector fuerza en función de su magnitud y vector unitario, se expresa:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{U}_F$$

$$\vec{U}_F = \frac{F_x}{F} \vec{i} + \frac{F_y}{F} \vec{j} + \frac{F_z}{F} \vec{k}$$

$$\vec{U}_F = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k} \quad (\text{Vector unitario de } F)$$

$\vec{F} = F(\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$  (Fórmula para obtener las componentes rectangulares de una F, dados los ángulos directores)

Ecuación 4. Componentes rectangulares, dado ángulos directores

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad \text{Magnitud del vector unitario}$$

Ecuación 5. Para obtener un ángulo director, dados dos ángulos directores

### EJERCICIO 1.7

Los cables unidos a la armella están sometidos a las tres fuerzas mostradas en la figura. Expresa cada fuerza en forma vectorial cartesiana.

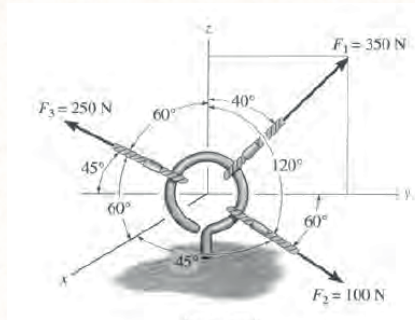


Figura 24. Cables unidos a la armella del ejercicio 1.7  
(HIBBELER, 2004)

### Solución

$$\vec{F} = F(\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

$$\vec{F}_1 = 350 (\cos 90^\circ \vec{i} + \cos 50^\circ \vec{j} + \cos 40^\circ \vec{k})N$$

$$\vec{F}_1 = (0 \vec{i} + 224.97 \vec{j} + 268.77 \vec{k})N$$

$$\vec{F}_2 = 100 (\cos 45^\circ \vec{i} + \cos 60^\circ \vec{j} + \cos 120^\circ \vec{k})N$$

$$\vec{F}_2 = (70.77 \vec{i} + 50 \vec{j} - 50 \vec{k})N$$

$$\vec{F}_3 = 250 (\cos 60^\circ \vec{i} + \cos 135^\circ \vec{j} + \cos 60^\circ \vec{k})N$$

$$\vec{F}_3 = (125 \vec{i} - 176.77 \vec{j} + 125 \vec{k})N$$

### Caso 3:

Vector fuerza dirigido a lo largo de su línea de acción.

En la mayoría de las aplicaciones la dirección de la fuerza  $F$  se define por las coordenadas de dos puntos  $A(x_1, y_1, z_1)$  y  $B(x_2, y_2, z_2)$  que se encuentran sobre la línea de acción. Se considerará el vector  $\vec{AB}$  que va de  $A$  hacia  $B$  y tiene el mismo sentido de la fuerza  $F$ . Representando las componentes escalares  $dx, dy, dz$  respectivamente, como se en la (figura 25) se tiene:

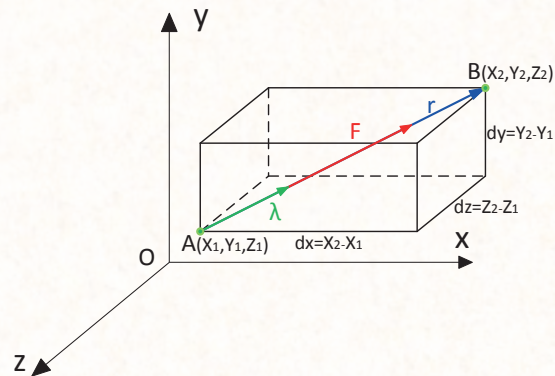


Figura 25. Vector fuerza dirigido a lo largo de su línea de acción  
Ilustración William Bonilla

El vector fuerza se expresa en función de su magnitud y vector unitario.

$$\vec{F} = F\vec{U}_F$$

$$\vec{U}_F = \vec{U}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB}$$

$\vec{AB}$  = Vector que va de A hacia B

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$\vec{AB} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$AB = d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\vec{U}_F = \vec{U}_{AB} = \frac{dx}{d}\vec{i} + \frac{dy}{d}\vec{j} + \frac{dz}{d}\vec{k}$$

$$\vec{F} = \frac{Fdx}{d}\vec{i} + \frac{Fdy}{d}\vec{j} + \frac{Fdz}{d}\vec{k}$$

$$F_x = \frac{F * dx}{d}$$

$$F_y = \frac{F * dy}{d}$$

$$F_x = \frac{F \cdot dy}{d}$$

Los ángulos directores se pueden determinar mediante las ecuaciones.

$$\cos \theta_x = \frac{dx}{d}; \cos \theta_y = \frac{dy}{d}; \cos \theta_z = \frac{dz}{d}$$

Ecuación 6. Ángulos Directores

### EJERCICIO 1.8

Dos tractores jalan un árbol con las fuerzas mostradas. Represente la fuerza BA como un vector cartesiano, y luego determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección.

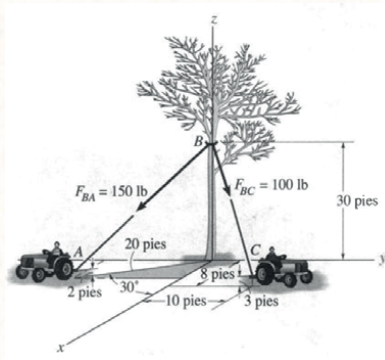
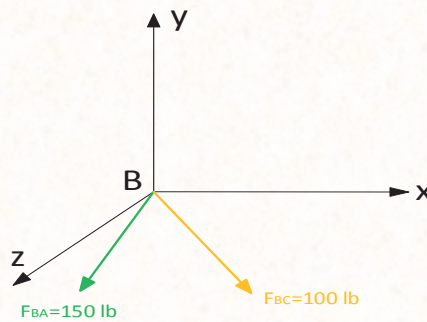


Figura 26. Interpretación gráfica ejercicio 1.8  
(HIBBELER, 2004)



**Solución:**

$$\vec{F}_{BA} = F_{BA} * \vec{U}_{BA}$$

$$\vec{U}_{BA} = \frac{\vec{BA}}{BA}$$

$$\vec{BA} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{BA} = (17.32 - 0)\vec{i} + (-10 - 0)\vec{j} + (2 - 30)\vec{k}$$

$$\vec{BA} = (17.32\vec{i} - 10\vec{j} - 20\vec{k})ft$$

$$BA = \sqrt{(17.32)^2 + (-10)^2 + (-20)^2}$$

$$BA = 34.41ft$$

$$\vec{U}_{BA} = (0.507\vec{i} - 0.290\vec{j} - 0.813\vec{k})$$

$$\vec{F}_{BA} = 150lb (0.507\vec{i} - 0.290\vec{j} - 0.813\vec{k})$$

$$\vec{F}_{BA} = (76.05\vec{i} - 43.59\vec{j} - 122.06\vec{k})N$$

**EJERCICIO 1.9**

La placa circular mostrada en la figura está parcialmente soportada por el cable AB si la fuerza en el cable sobre el gancho en A  $F=500N$  exprese  $F$  como un vector cartesiano:

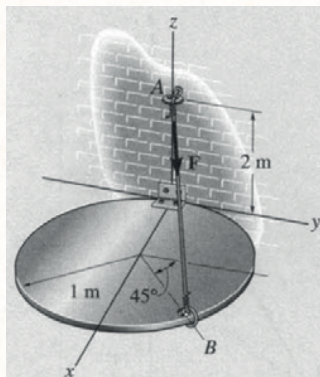
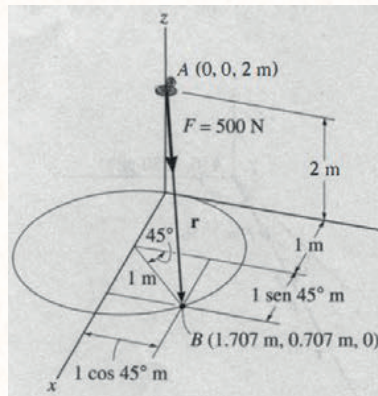


Figura 27. Interpretación gráfica ejercicio 1.9

(HIBBELER, 2004)



**Solución:**

$$\vec{F} = F \vec{U}_{AB}$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$\vec{AB} = (1.707\vec{i} + 0.707\vec{j} - 2\vec{k})$$

$$AB = \sqrt{1.707^2 + 0.707^2 + 2^2}$$

$$AB = 2.72$$

$$\vec{U}_{AB} = (0.627\vec{i} + 0.259\vec{j} - 0.735\vec{k})$$

$$\vec{F} = 500(0.627\vec{i} + 0.259\vec{j} - 0.735\vec{k})$$

$$\vec{F} = (313.5\vec{i} + 129\vec{j} - 367.5\vec{k})\text{N}$$

**1.12 NUMERACIÓN DE LOS OCTANTES**

El uso del sistema de coordenadas cartesianas para describir el espacio tridimensional se compone de un origen y seis ejes abiertos que son perpendiculares. Estos ejes definen tres planos que dividen el espacio en ocho piezas de datos conocidos como octantes, como se muestra en la figura. Piense en estos planos como cortar el espacio de tres maneras: de izquierda a derecha y de arriba a abajo y de adelante hacia atrás.



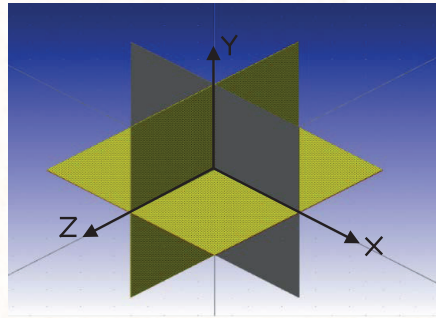


Figura 28. (a) Octantes en el espacio

Ilustración Héctor Terán

Tabla 1. Cuadro de designación de octantes con su respectivos signos

OCTANTE	COMPONENTE EN X	COMPONENTE EN Y	COMPONENTE EN Z
<b>I</b>	+	+	+
<b>II</b>	-	+	+
<b>III</b>	-	-	+
<b>IV</b>	+	-	+
<b>V</b>	+	+	-
<b>VI</b>	-	+	-
<b>VII</b>	-	-	-
<b>VIII</b>	+	-	-

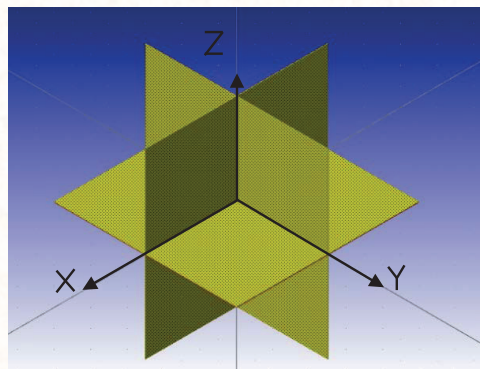


Figura 29. (b) Octantes en el espacio  
Ilustración Héctor Terán

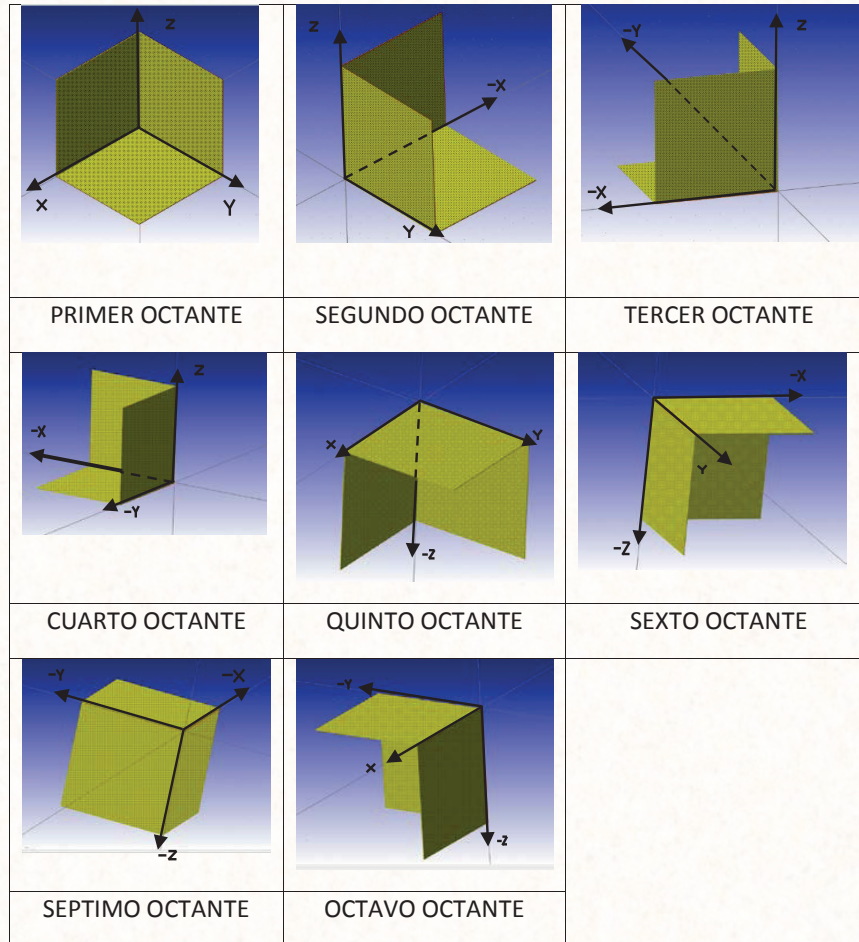


Figura 30. Numeración de los Octantes  
Ilustración Héctor Terán

### 1.13 ADICIÓN DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO

Cuando se suman tres o más fuerzas, no puede obtenerse una solución trigonométrica práctica. En este caso se obtiene una solución analítica del problema si se descompone cada fuerza en sus elementos rectangulares.

Las operaciones vectoriales de suma de dos o más vectores se simplifican considerablemente si los vectores son expresados en términos de sus

elementos rectangulares. Por ejemplo, si  $\vec{A} = Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\vec{k}$  Y  $\vec{B} = Bx\vec{i} + By\vec{j} + Bz\vec{k}$ , (figura 31), entonces el vector resultante, R, tiene componentes que representan las sumas escalares de las componentes  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , es decir. (Mecanica Vectorial para Ingenieros Estatica, 2004)

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (Ax + Bx)\vec{i} + (Ay + By)\vec{j} + (Az + Bz)\vec{k}$$

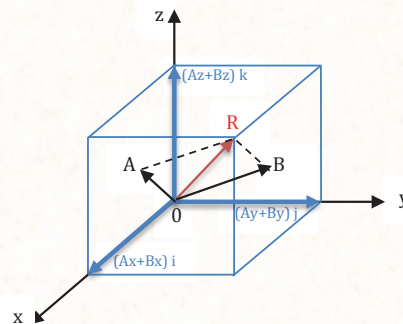


Figura 31. Adición de Fuerzas Concurrentes en el espacio.

Ilustración William Bonilla

#### 1.14 SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES

Si el concepto anterior de suma vectorial es generalizado y aplicado a un sistema vectorial de todas las fuerzas concurrentes, entonces la fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas presentes en el sistema y puede escribirse como. (HIBBELER, 2004)

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \sum Fx\vec{i} + \sum Fy\vec{j} + \sum Fz\vec{k}$$

Ecuación 7. Sistema de Fuerzas Concurrentes

Aquí,  $R_x = \sum Fx$ ,  $R_y = \sum Fy$ , y  $R_z = \sum Fz$  representan las sumas algebraicas de las respectivas componentes x, y, z o  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  de cada fuerza presente en el sistema.

La magnitud de la resultante y los ángulos directores  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  que forman con cada eje de coordenadas se obtienen:

Magnitud:  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

Ángulos directores:

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R}, \cos \theta_y = \frac{R_y}{R}, \cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$

Ecuación 8. Magnitud y ángulos directores en 3D

### 1.15 EJERCICIOS RESUELTOS

#### EJERCICIO 1.10

La barra OA soporta una carga P Y esta Sostenido por dos cables, según muestra la figura Si en el cable AB la tensión es de 510 N y en el cable AC es de 763 N, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los lados del cable.

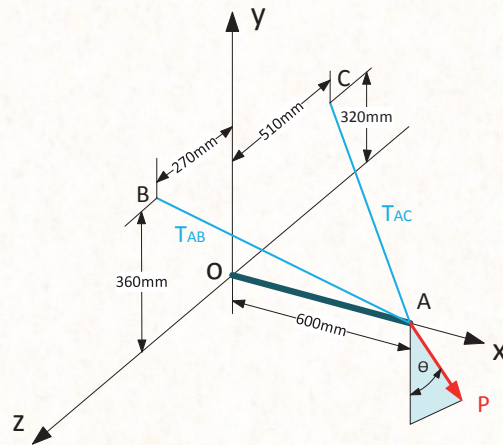


Figura 32. Interpretación gráfica ejercicio 1.10  
Ilustración William Bonilla

**Solución:**

$$\vec{A} = (0.6 \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})m$$

$$\vec{B} = (0\vec{i} + 0.36\vec{j} + 0.27\vec{k})m$$

$$\vec{A} = (0\vec{i} + 0.32\vec{j} - 0.510\vec{k})m$$

$$\vec{F}_{BA} = F_{BA} \vec{U}_{AB}$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$\vec{AB} = (-0.6\vec{i} + 0.36\vec{j} + 0.27\vec{k})m$$

$$AB = \sqrt{(-0.6)^2 + (0.36)^2 + (0.27)^2}$$

$$AB=0.75m$$

$$\vec{F}_{BA} = 510N(-0.8\vec{i} + 0.48\vec{j} + 0.36\vec{k})$$

$$\vec{F}_{BA} = (-408\vec{i} + 244.8\vec{j} + 183.6\vec{k})N$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{BA} \vec{U}_{AC}$$

$$\vec{U}_{AC} = \frac{\vec{AC}}{AC}$$

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A}$$

$$\vec{AC} = (-0.6\vec{i} + 0.32\vec{j} - 0.510\vec{k})m$$

$$AC = \sqrt{(-0.6)^2 + (0.32)^2 + (0.51)^2}$$

$$AC=0.85m$$

$$\vec{F}_{AC} = 765N(-0.71\vec{i} + 0.37\vec{j} - 0.6\vec{k})$$

$$\vec{F}_{AC} = (-543.15\vec{i} + 283.05\vec{j} - 459\vec{k})N$$

$$R_x = (-408 - 543.15)N$$

$$R_x = -951.15N$$

$$R_y = (244.8 + 288.05)N$$

$$R_y = 527.85N$$

$$R_z = (183.6 - 459)N$$

$$R_z = -275.4 N$$

$$\vec{F}_R = (-951.15 \vec{i} + 527.85 \vec{j} - 275.4 \vec{k})$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R}$$

$$\cos \theta_x = \frac{-951.15}{1122.12}$$

$$\cos \theta_x = 147.59^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R}$$

$$\cos \theta_y = \frac{527.85}{1122.12}$$

$$\cos \theta_y = 61.94^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$

$$\cos \theta_z = \frac{275.4}{1122.12}$$

$$\cos \theta_z = 104.21^\circ$$

### EJERCICIO 1.11

Tres fuerzas actúan sobre el anillo. Si la fuerza resultante  $F_R$  tiene la magnitud y la dirección que se muestran en la figura, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza  $F_3$ .

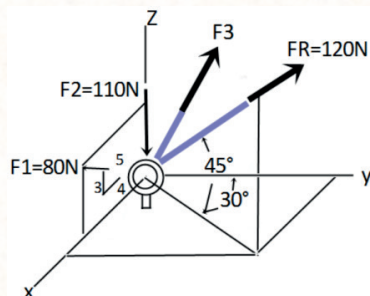


Figura 33. Interpretación gráfica ejercicio 1.11  
Ilustración William Bonilla

**Solución:**

$$\vec{F}_R = 120N(\cos(45)\sin(30)\vec{i} + \cos(45)\cos(30)\vec{j} + \sin(45)\vec{k})$$

$$\vec{F}_R = (42.43\vec{i} + 73.48\vec{j} + 84.85\vec{k})N$$

$$\vec{F}_1 = \left(80\left(\frac{4}{5}\right)\vec{i} + 0\vec{j} + 80\left(\frac{3}{5}\right)\vec{k}\right)N$$

$$\vec{F}_1 = (64\vec{i} + 0\vec{j} + 48\vec{k})N$$

$$\vec{F}_2 = -110\vec{k} N$$

$$F_3 = (F_{3x}\vec{i} + F_{3y}\vec{j} + F_{3z}\vec{k})N$$

$$\sum F_x: 42.43 = 64 + 0 + F_{3x}$$

$$\sum F_y: 73.48 = 0 + 0 + F_{3y}$$

$$\sum F_z: 84.85 = 48 - 110 + F_{3z}$$

$$F_{3x} = -21.58$$

$$F_{3y} = 73.48$$

$$F_{3z} = 146.85$$

$$F_3 = \sqrt{21.58^2 + 73.48^2 + 146.85^2}$$

$$F_3 = 165.61N$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-21.58}{165.61}\right)$$

$$= 97.48$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{73.48}{165.61}\right)$$

$$= 63.66$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{146.85}{165.61}\right)$$

$$= 27.53$$

**EJERCICIO 1.12**

Si la resultante de las tres fuerzas es  $\mathbf{F}_R = \{-900\mathbf{k}\}$  lb, determine la magnitud de la fuerza en cada cadena.

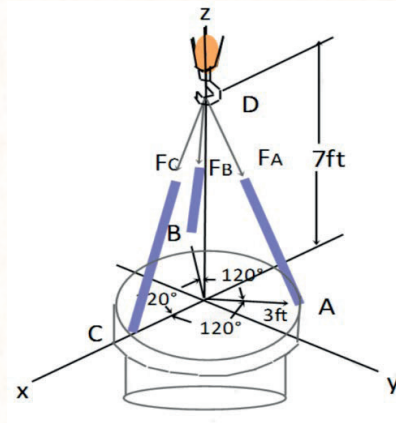


Figura 34. Interpretación gráfica ejercicio 1.12

Ilustración William Bonilla

**Solución:**

$$\vec{D} = (0; 0; 7)\text{ft}$$

$$\vec{A} = (-3\text{sen}30^\circ; 3\text{cos}30^\circ; 0)\text{ft}$$

$$\vec{A} = (-1.5; 2.6; 0)\text{ft}$$

$$\vec{B} = (-3\text{sen}30^\circ; -3\text{cos}30^\circ; 0)\text{ft}$$

$$\vec{B} = (-1.5; -2.6; 0)\text{ft}$$

$$\vec{C} = (3; 0; 0)\text{ft}$$

$$\vec{DA} = (-1.5; 2.6; -7)\text{ft}$$

$$\vec{DB} = (-1.5; -2.6; -7)\text{ft}$$

$$\vec{DC} = (3; 0; -7)\text{ft}$$

$$\vec{F}_A = F_A \frac{\vec{DA}}{DA}$$

$$\vec{F}_A = F_A(-0.19\vec{i} + 0.34\vec{j} - 0.92\vec{k})\text{lb}$$

$$\vec{F}_B = F_B \frac{\vec{DB}}{DB}$$

$$\vec{F}_B = F_B(-0.19\vec{i} - 0.34\vec{j} - 0.92\vec{k})\text{lb}$$



$$\vec{F}_C = F_C \frac{\vec{DC}}{DC}$$

$$\vec{F}_C = F_C(0.39\vec{i} + 0\vec{j} - 0.92\vec{k})\text{lb}$$

$$F_A = F_B = F_C$$

$$\sum F_x: 0 = -0.19F_A - 0.19F_B + 0.39F_C$$

$$\sum F_y: 0 = 0.34F_A - 0.34F_B$$

$$\sum F_z: -900 = -0.92F_A - 0.92F_B - 0.9F_C$$

$$F_A = F_B = F_C = 326.08 \text{ lb}$$



# Capítulo 2

## EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA



## EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA

### 2.1 OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar el concepto de diagrama de cuerpo libre (D.C.L) para una partícula y analizar los respectivos pasos.
- Mostrar cómo se resuelven los problemas de equilibrio de una partícula, mediante las ecuaciones de equilibrio.

### 2.2 EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO

Si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio. (BEER & JOHNSTON, 2010)

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue:

*Si la fuerza resultante que actúa sobre una Partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento)*

Estableciéndose matemáticamente como:

$$R = \sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Sea las fuerzas que se encuentran en el plano x – y como en la (figura 35), por lo que cada fuerza puede descomponerse en sus componentes i y j, para lograr el equilibrio, las fuerzas deben sumarse para producir una fuerza resultante cero, de la siguiente manera:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\sum F_{xi} + \sum F_{yj} = 0$$

Ecuación 9. Equilibrio de una partícula en un plano

Para la ecuación vectorial, ambas componentes x e y deben estar igualadas a cero.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

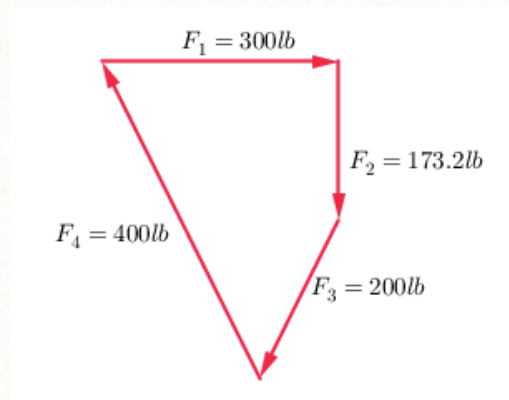
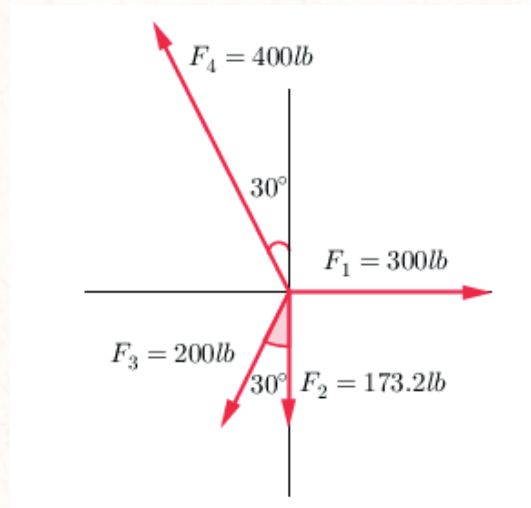


Figura 35. Partícula en equilibrio

Ilustración William Bonilla

### 2.3 DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE

Al aplicar la ecuación de equilibrio, tomaremos en cuenta todas las fuerzas conocidas y desconocidas que actúan sobre la partícula. El mejor camino para realizar esto es indicar la partícula como aislada y libre de su entorno. El dibujo que muestra la partícula con todas las fuerzas que actúan sobre ella se denomina Diagrama del Cuerpo Libre (DCL).

Previo a la explicación de un Proceso Formal para realizar el Diagrama del Cuerpo Libre, es necesario dar a conocer dos tipos de conexiones que frecuentemente se presentan en problemas de equilibrio de partículas.

**Resortes:** Sea un resorte elástico lineal o cuerda de longitud no alargada  $l_0$ , se usa como soporte de la partícula, su longitud cambiará directamente proporcional a la fuerza  $F$  que actúe sobre la partícula. La constante  $k$  de resorte es una característica que define la “elasticidad” del mismo.

La magnitud de la fuerza ejercida en un resorte con rigidez  $k$  que está deformado una distancia  $s = l - l_0$ , medida desde su posición sin carga es:

$$\mathbf{F} = ks$$

Ecuación 10. Fuerza elástica

Para  $s$  positiva, causa un alargamiento, entonces  $\mathbf{F}$  debe estirar el resorte; mientras que si es negativa, causa un acortamiento, por lo que  $\mathbf{F}$  debe empujar el resorte.

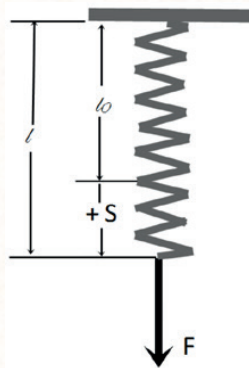


Figura 36. Alargamiento de un resorte

Ilustración William Bonilla

**Cables y poleas:** Un cable puede soportar sólo soportar una tensión o fuerza que lo jala, que actuará en la dirección del cable. La tensión desarrollada en un cable continuo que pasa por una polea que no tiene fricción, debe tener magnitud constante para mantener el cable en equilibrio; por lo que para

cualquier ángulo  $\theta$  como el que se indica en la figura el cable está sometido a una tensión en toda su longitud.

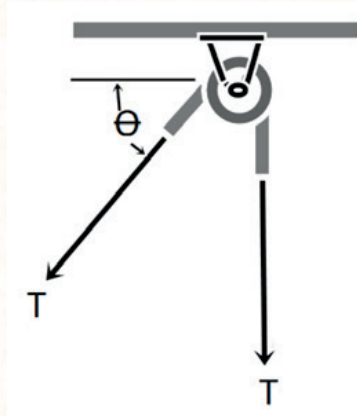


Figura 37. Tensión en cables  
Ilustración William Bonilla

### 2.3.1 Procedimiento para realizar el Diagrama del Cuerpo Libre

- Identificar el cuerpo a aislar, la elección suele estar dictada por las fuerzas particulares que se quiere determinar.
- Representar en un boceto el cuerpo aislado de su entorno.- Indicando las dimensiones y ángulos pertinentes, el boceto debe ser razonablemente preciso, en que se pueden omitir detalles que no son relevantes.
- Dibujar los vectores que indiquen las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo aislado designándolas apropiadamente, nunca se debe olvidar indicar la fuerza gravitatoria, además del nivel de referencia.

#### Ejemplo:

Realice el Diagrama del Cuerpo Libre del bloque inferior en la siguiente figura:



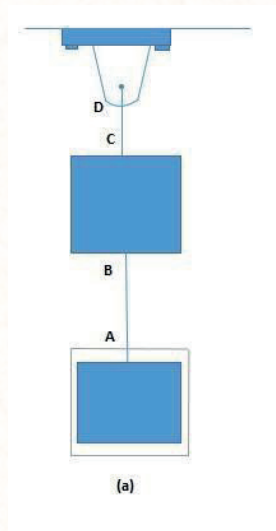


Figura 38. (a) Aislamiento bloque Inferior  
Ilustración William Bonilla

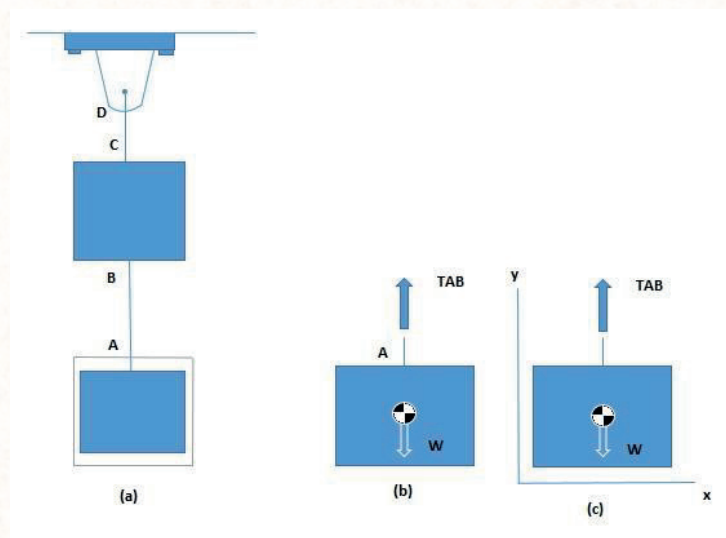


Figura 39. (b) Indicación de las Fuerzas  
Ilustración William Bonilla

a) Aislamiento del bloque inferior y parte del cable AB.

b) La indicación de las fuerzas exteriores completa el D.C.L

c) Introducción de un nivel de referencia o sistema de coordenado.

Sea el caso realizar el D.C.L de los dos bloques, no se tomará en cuenta la tensión del cable AB, debido a que no está intersecado por la línea entrecortada que aísla al cuerpo de su entorno.

## 2.4 EJERCICIOS RESUELTOS

### EJERCICIO 2.1

El cubo y su contenido tienen una masa de 60kg. Si el cable de BAC es de 15m de largo, determinar la distancia "y" a la polea en A para el equilibrio. No tomar en cuenta el tamaño de la polea.

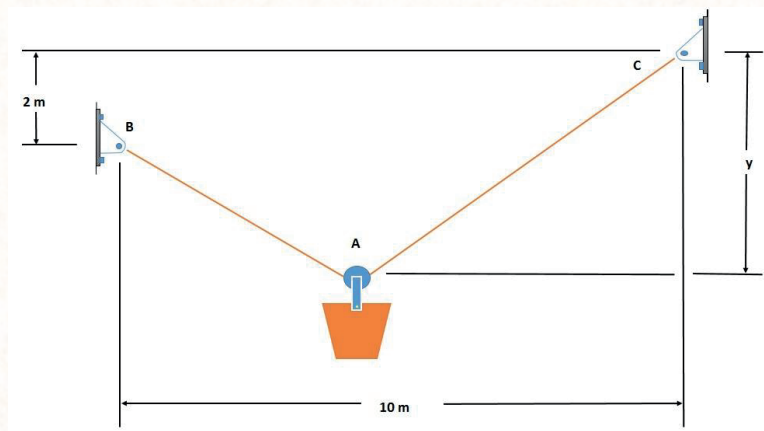
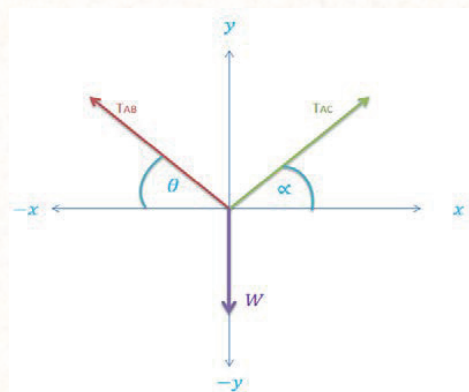


Figura 40. Interpretación gráfica ejercicio 2.1  
Ilustración William Bonilla



**Solución:**

$$\overline{T_{AB}} = T_{AB} (-\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$$

$$\overline{T_{AC}} = T_{AC} (\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j})$$

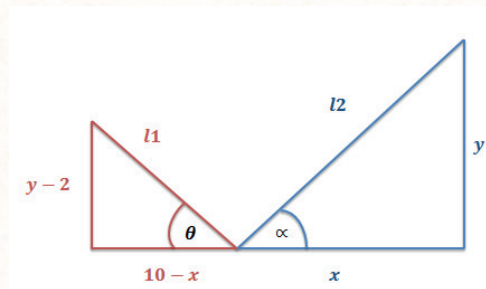
Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_X = 0$$

$$-T_{AB} \cos \theta \mathbf{i} + T_{AC} \cos \alpha \mathbf{i} = 0$$

$$\cos \alpha = \cos \theta$$

$$\alpha = \theta$$



∴ Triángulos semejantes

Geometría:

$$l1 = \sqrt{(10-x)^2 + (y-2)^2}$$

$$l2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$l1 + l2 = 15$$

$$\sqrt{(10-x)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 15$$

Los lados son proporcionales por ser triángulos semejantes.

$$\frac{10-x}{x} = \frac{y-2}{y} = \frac{\sqrt{(10-x)^2 + (y-2)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

DE (1)

$$\frac{10 - x}{x} = \frac{\sqrt{(10 - x)^2 + (y - 2)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$15 = \sqrt{x^2 + y^2} + \left(1 + \frac{10 - x}{x}\right)$$

$$\frac{15}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 + \frac{10 - x}{x}$$

$$\left(\frac{15}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = \left(\frac{10}{x}\right)^2$$

$$\frac{225}{x^2 + y^2} = \frac{100}{x^2}$$

$$225x^2 = 100x^2 + 100y^2$$

$$125x^2 = 100y^2$$

$$y = \sqrt{\frac{5}{4}} x \quad (3)$$

$$15 = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(10 - x)^2 + (y - 2)^2} \times \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2)$$

$$15 = \sqrt{x^2 + y^2} \left[1 + \sqrt{(10 - x)^2 + (y - 2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]$$

De la ecuación (1) en (2)

De la ecuación (1).

$$\frac{10 - x}{x} = \frac{y - 2}{y} \quad (4)$$

Reemplazamos ecuación (3) en (4)

$$\frac{10 - x}{x} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}x - 2}{\sqrt{\frac{5}{4}}x}$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}} \times (10 - x) = \sqrt{\frac{5}{4}}x - 2$$

$$5\sqrt{5} - \sqrt{\frac{5}{4}}x = \sqrt{\frac{5}{4}}x - 2$$

$$-\sqrt{5}x = -2 - 5\sqrt{5}$$

$$x = 5.89\text{m}$$

$$y = \sqrt{\frac{5}{4}}x$$

$$y = \sqrt{\frac{5}{4}}(5.89)$$

$$y = 6.59\text{m}$$

## EJERCICIO 2.2

Determine la longitud no alargada del resorte AC si una fuerza  $P = 100$  lb genera el ángulo  $\theta = 50^\circ$  para la posición de equilibrio. La cuerda AB tiene 2.5 pies de longitud. Considere  $k = 40$  lb/pie.

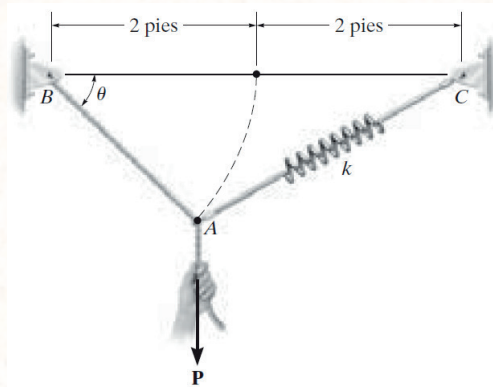
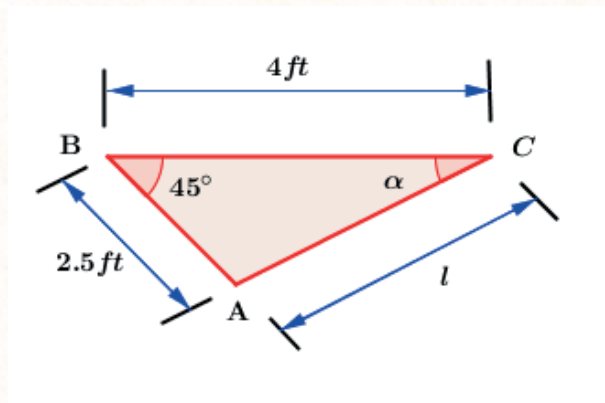


Figura 41. Interpretación gráfica ejercicio 2.2 (HIBBELER, 2010)

$\Delta ABC$



**Solución:**

Aplicando ley de cosenos en el  $\Delta ABC$ .

$$l^2 = 4^2 + 2.5^2 - (2)(2.5)(4)(\cos 45^\circ)$$

$$l^2 = 16 + 6.25 - (2)(2.5)(4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

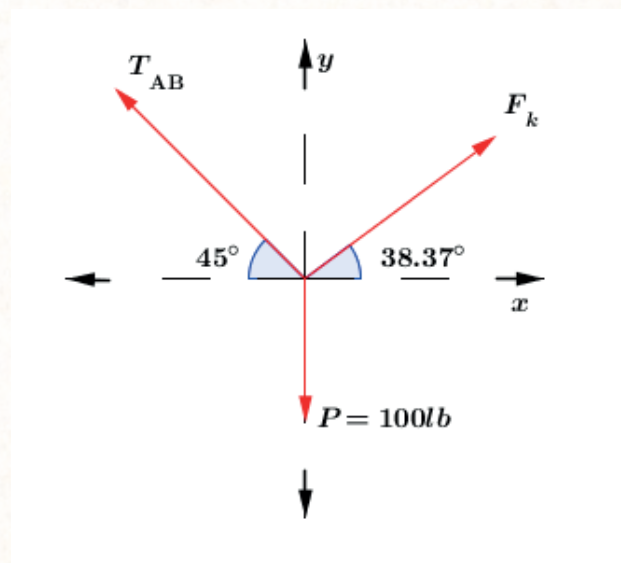
$$l = 2.84 \text{ ft}$$

Aplicando ley de senos en el  $\Delta ABC$

$$\frac{\text{sen } 45^\circ}{2.84} = \frac{\text{sen } \alpha}{2.5}$$

$$\alpha = 38.37^\circ$$

D.C.L DE LA FIGURA



Ecuaciones de Equilibrio

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\textcircled{1} F_k \cos 38.37^\circ - T_{AB} \cos 45^\circ = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$F_k \sin 38.37^\circ + T_{AB} \sin 45^\circ = 100 \text{ lb}$$

$$\textcircled{2} Fk = \frac{100\text{lb} - TAB\text{sen}45^\circ}{\text{sen}38.37^\circ}$$

Reemplazo  $\textcircled{2}$  en  $\textcircled{1}$

$$\left(\frac{100\text{lb} - TAB\text{sen}45^\circ}{\text{sen}38.37^\circ}\right) \cos 38.37^\circ - TAB\cos 45^\circ = 0$$

$$126.30\text{lb} - 0.893TAB - 0.707TAB = 0$$

$$TAB = 78.93 \text{ lb}$$

$$Fk = \frac{100\text{lb} - TAB\text{sen}45^\circ}{\text{sen}38.37^\circ}$$

$$Fk = \frac{100\text{lb} - (78.93 \text{ lb})\text{sen}45^\circ}{\text{sen}38.37^\circ}$$

$$Fk = 71.18 \text{ lb}$$

$$Fk = kx$$

$$Fk = k(l - l_0)$$

$$l_0 = \frac{kl - Fk}{k}$$

$$l_0 = \frac{(40\text{lb/ft})(2.84\text{ft}) - 71.18 \text{ lb}}{40\text{lb/ft}}$$

$$l_0 = 1.06 \text{ ft}$$

### EJERCICIO 2.3

Determine la masa de cada uno de los cilindros si provocan un hundimiento de  $s = 0.25 \text{ m}$  cuando están suspendidos de los anillos en A y B. Tener en cuenta que  $s = 0$  cuando los anillos son eliminados.



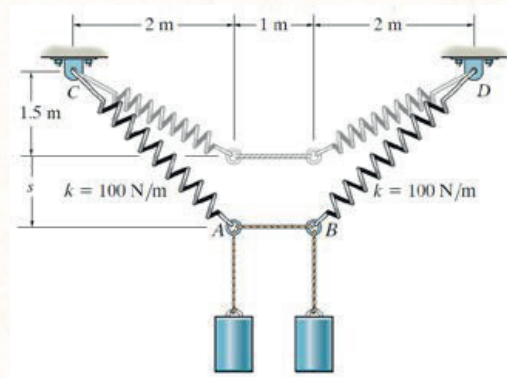
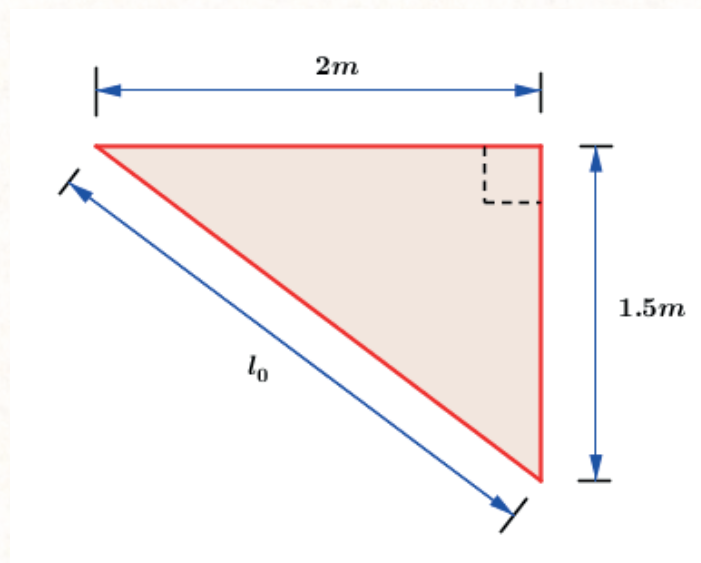


Figura 42. Interpretación gráfica ejercicio 2.3  
(HIBBELER, 2010)

**Solución:**

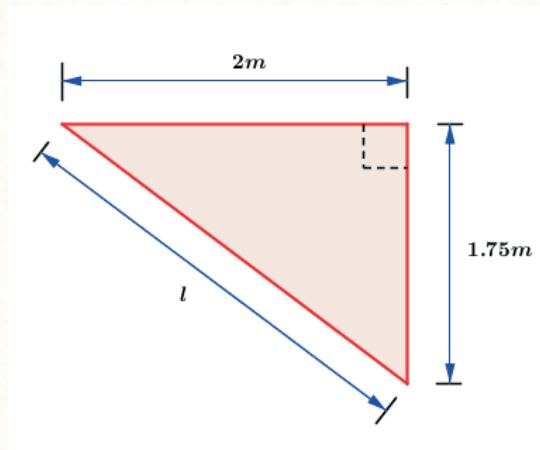
$\Delta 1$  Para la longitud inicial  $l_0$



$$l_0 = \sqrt{2^2 + 1.5^2}$$

$$l_0 = 2.5 \text{ m}$$

$\Delta 2$  Para la longitud final  $l$



$$l = \sqrt{2^2 + 1.75^2}$$

$$l = 2.657 \text{ m}$$

$$x = l - l_0$$

$$x = 2.657 \text{ m} - 2.5 \text{ m}$$

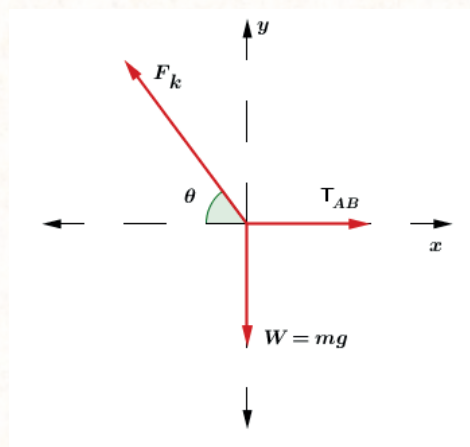
$$x = 0.157 \text{ m}$$

$$F_k = kx$$

$$F_k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} (0.157 \text{ m})$$

$$F_k = 15.75 \text{ N}$$

D.C.L en el punto A ( $\Delta 2$ )



$$\tan\theta = \frac{1.75}{2}$$

$$\tan\theta = 41.18^\circ$$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

$$\leftrightarrow \sum F_x = 0$$

$$T_{AB} - 15.75N \cos 41.18^\circ = 0$$

$$T_{AB} = 11.85 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$F_k \sin 41.18^\circ = W$$

$$W = 15.75N \sin 41.18^\circ$$

$$W = 10.37 \text{ N}$$

$$m = \frac{W}{g}$$

$$m = \frac{10.37N}{9.81m/s^2}$$

$$m = 1.05 \text{ Kg}$$

## 2.5 EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN TRES DIMENSIONES

Las situaciones de equilibrio que hemos considerado hasta ahora implicaron sólo fuerzas coplanares. Cuando el sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio es tridimensional, podemos expresar la suma de las fuerzas externas como. (BEDFORD & FOWLER, 2008)

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = 0$$

$$\sum (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) = 0$$

$$\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = 0$$

Ecuación 11. Equilibrio de una partícula en 3D

Esta ecuación se cumple si y sólo si.

$$i) \sum F_x = 0$$

$$j) \sum F_y = 0$$

$$k) \sum F_z = 0$$

Ecuación 12. Ecuaciones escalares, equilibrio de una partícula en 3D

Las sumas de las componentes x, y y z de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio deben ser iguales a cero.

## 2.6 EJERCICIOS RESUELTOS

### EJERCICIO 2.4

La bola de 80 lb está suspendida del anillo horizontal usando tres resortes cada resorte tiene longitud no alargada de 1.5 ft y rigidez de 50 lb/ft. Determine la distancia vertical  $h$  del anillo hasta el punto A por equilibrio.

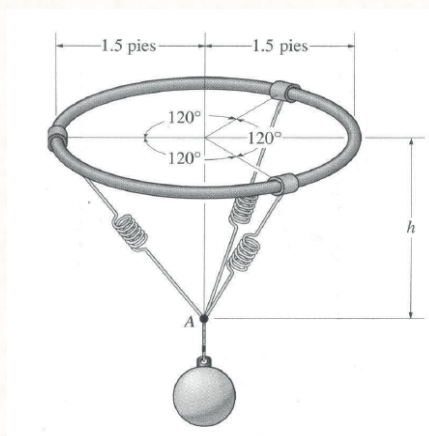
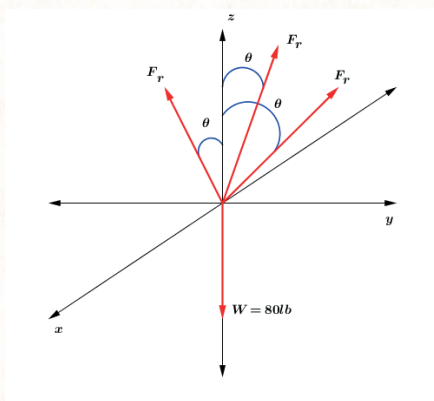
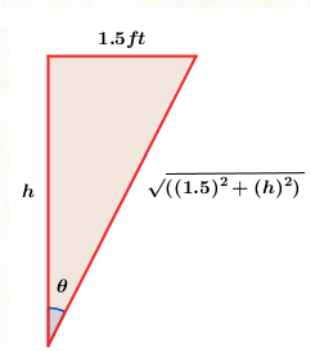


Figura 43. Interpretación gráfica ejercicio 2.4  
(HIBBELER, 2010)

Diagrama de cuerpo libre en el punto A:



Solución:



$$\uparrow \sum F_z = 0$$

$$-W + 3F_T = 0$$

$$-W + 3F_T \cos \theta = 0$$

$$-80 + \frac{3h}{\sqrt{(1.5)^2 + h^2}} F_T = 0$$

$$80 = \frac{3h}{\sqrt{(1.5)^2 + h^2}} \left[ 50 \left( \sqrt{(1.5)^2 + h^2} - 1.5 \right) \right]$$

$$80 = \frac{3h}{\sqrt{(1.5)^2 + h^2}} \left( 50 \sqrt{(1.5)^2 + h^2} - 75 \right)$$

$$80 = 150h - \frac{225h}{\sqrt{(1.5)^2 + h^2}}$$

$$(80 - 150h)^2 = \frac{50625h^2}{(1.5)^2 + h^2}$$

$$[80^2 - (2)(80)(150)h + (150h)^2](1.5^2 + h^2) = 50625h^2$$

$$h = 1.64 \text{ ft}$$

## EJERCICIO 2.5

Una pieza de máquina de peso  $W$  esta sostenida temporalmente por los cables AB, AC, ADE. El cable ADE está unido al anillo en A, pasa por la polea en D y regresa al anillo para unirse después al soporte en E. Si  $W=1400\text{N}$ , determine la tensión de cada cable. (La tensión es la misma en todas las porciones del cable AED).

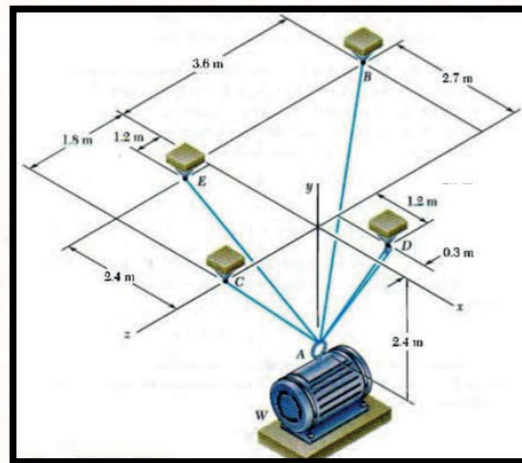


Figura 44. Interpretación gráfica ejercicio 2.5  
(BEER & JOHNSTON, 2010)

$$A(0, -2.4, 0)m$$

$$B(-2.7, 0, -3.6)m$$

$$C(0, 0, 1.8)m$$

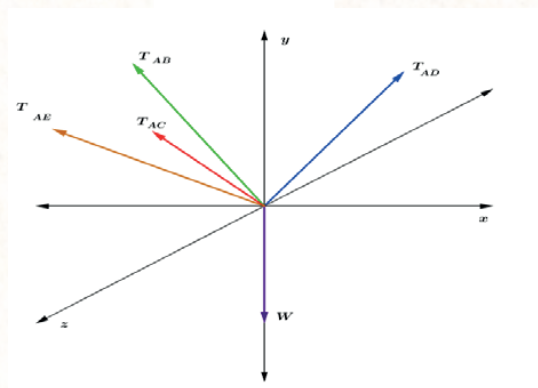
$$D(1.2, 0, -0.3)m$$

$$E(-2.4, 0, 1.2)m$$

$$T_{AE} = T$$

$$T_{AD} = 2T$$

DCL del anillo A.



**Solución:**

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} * \vec{U}_{AB}$$

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \left( \frac{-2.7\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j} - 3.6\mathbf{k}}{5.1} \right)$$

$$\vec{T}_{AB} = \left( -\frac{9}{17} T_{AB} \mathbf{i} + \frac{8}{17} T_{AB} \mathbf{j} - \frac{12}{17} T_{AB} \mathbf{k} \right) N$$

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC} * \vec{U}_{AC}$$

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC} \left( \frac{0\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j} + 1.8\mathbf{k}}{3} \right)$$

$$\vec{T}_{AC} = \left( 0 + 0.8 T_{AC} \mathbf{j} + 0.6 T_{AC} \mathbf{k} \right) N$$

$$\vec{T}_{AD} = 2T * \vec{U}_{AD}$$

$$\vec{T}_{AD} = 2T \left( \frac{1.2\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k}}{2.7} \right)$$

$$\vec{T}_{AD} = \left( \frac{8}{9} T \mathbf{i} + \frac{16}{9} T \mathbf{j} - \frac{2}{9} T \mathbf{k} \right) N$$

$$\vec{T}_{AE} = T_{AE} * \vec{U}_{AE}$$

$$\vec{T}_{AE} = T \left( \frac{-2.4\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j} + 1.2\mathbf{k}}{3.6} \right)$$

$$\vec{T}_{AE} = \left( -\frac{2}{3} T \mathbf{i} + \frac{2}{3} T \mathbf{j} + \frac{1}{3} T \mathbf{k} \right) N$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$\sum F_x = 0$$

$$-\frac{9}{17} T_{AB} + \frac{8}{9} T - \frac{2}{3} T = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\frac{8}{17} T_{AB} + 0.8 T_{AC} + \frac{16}{9} T + \frac{2}{3} T = 1400 \quad (2)$$



$$\sum F_z = 0$$

$$-\frac{12}{17}T_{AB} + 0.6T_{AC} - \frac{2}{9}T + \frac{1}{3}T = 0 \quad (3)$$

Resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3); se obtiene:

$$T_{AB} = 203N$$

$$T_{AC} = 149.6N$$

$$T = 485N$$

### EJERCICIO 2.6

Un contenedor de peso  $W$  está suspendido del aro  $A$ ; al cual se unen los cables  $AC$  y  $AE$ . Una fuerza  $P$  se aplica al extremo  $F$  de un tercer cable que pesa sobre una polea en  $B$  y a través del anillo  $A$  y que está unido al soporte en  $D$ . Si se sabe que  $W = 800N$  Determine la magnitud de  $P$ . (Sugerencia: La tensión es la misma en todos los tramos del cable  $FBAD$ ).

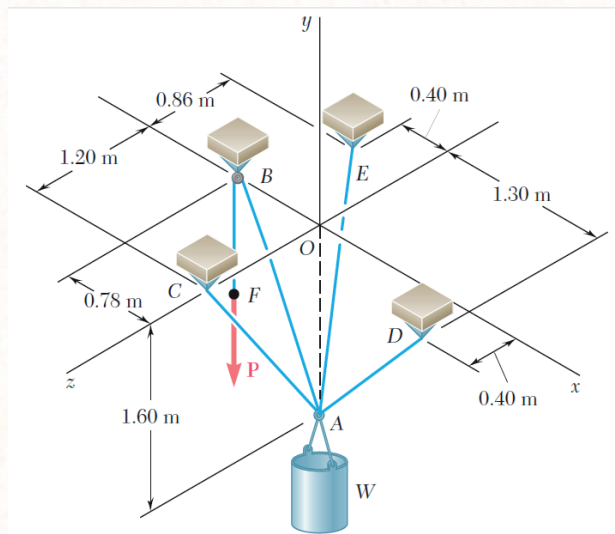
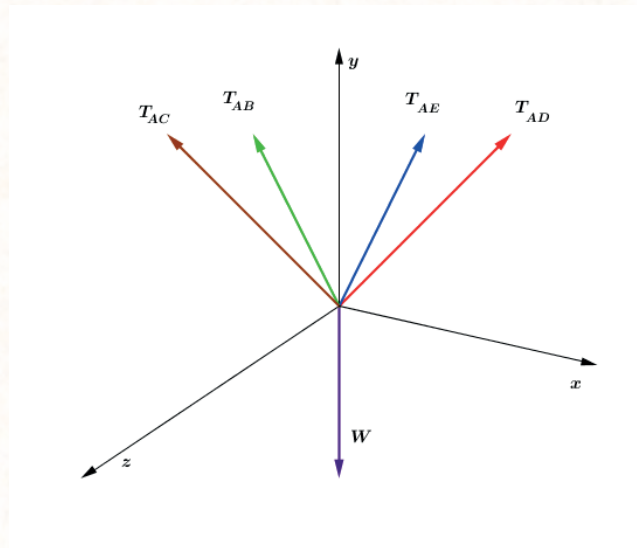


Figura 45. Interpretación gráfica ejercicio 2.6  
(BEER & JOHNSTON, 2010)

DCL en el Punto A



**Solución:**

$$A = (0; -1,6; 0)\text{m}$$

$$C = (0; 0; 1,2)\text{m}$$

$$B = (-0,78; 0; 0)\text{m}$$

$$E = (-0,4; 0; -0,86)\text{m}$$

$$D = (1,3; 0; 0,4)\text{m}$$

$$\mathbb{R} = \sum F = 0$$

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC} \vec{U}_{AC}$$

$$\vec{U}_{AC} = \frac{\vec{AC}}{AC} = \frac{(0\vec{i} + 1,6\vec{j} + 1,2\vec{k})\text{m}}{\sqrt{(1,6)^2 + (1,2)^2}} = 2\text{m}$$

$$T_{AC} = 0,8T_{AC}\vec{j} + 0,6T_{AC}\vec{k} \quad (1)$$

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \vec{U}_{AB}$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{(-0,780\vec{i} + 1,6\vec{j} + 0\vec{k})\text{m}}{\sqrt{((-0,78)^2) + (1,6)^2}} = 1,78\text{m}$$

$$\overline{T_{AB}} = -0,438T_{AB}\mathbf{i} + 0,898T_{AB}\mathbf{j} \quad (2)$$

$$\overline{T_{AB}} = T_{AB}\overline{U_{AB}}$$

$$\overline{U_{AC}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AE} = \frac{(-0,4\mathbf{i} + 1,6\mathbf{j} - 0,86\mathbf{k})\text{m}}{\sqrt{((-0,4)^2) + (1,6)^2 + (-0,86)^2}} = 1,86\mathbf{m}$$

$$\overline{T_{AB}} = -0,215T_{AB}\mathbf{i} + 0,86T_{AB}\mathbf{j} - 0,462T_{AB}\mathbf{k} \quad (3)$$

$$\overline{T_{AD}} = T_{AD}\overline{U_{AD}}$$

$$\overline{U_{AD}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{(1,3\mathbf{i} + 1,6\mathbf{j} + 0,4\mathbf{k})\text{m}}{\sqrt{(1,3)^2 + (1,6)^2 + (0,4)^2}} = 2,1\mathbf{m}$$

$$\overline{T_{AD}} = 0,619T_{AD}\mathbf{i} + 0,761T_{AD}\mathbf{j} + 0,19T_{AD}\mathbf{k} \quad (4)$$

$$W = -800\mathbf{j}$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$\sum F_x = 0$$

$$-0,438T_{AB} - 0,215T_{AB} + 0,619T_{AD} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$0,8T_{AC} + 0,898T_{AB} + 0,860T_{AB} + 0,761T_{AD} = 800 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0$$

$$0,6T_{AC} - 0,462T_{AB} + 0,190T_{AD} = 0 \quad (3)$$

$T_{AB} = T_{AD} = P$ ; en la ecuación (1)

$$-0,438P - 0,215T_{AB} + 0,619P = 0$$

$$0,181P = 0,215T_{AB}$$

$$T_{AE} = \frac{0,181P}{0,215} \quad (4) = 317,89N$$

(4) en (3)

$$0,6T_{AC} - 0,462 \left( \frac{0,181P}{0,215} \right) + 0,190P = 0$$

$$0,6T_{AC} = 0,388P - 0,19P$$

$$T_{AC} = 0,331P \quad (5) = 125,20N$$

(4) y (5) en (2)

$$0,8(0,331P) + 0,898P + 0,860 \left( \frac{0,181P}{0,215} \right) + 0,761P = 800$$

$$0,264P + 0,898P + 0,724P + 0,761P = 800$$

$$P = \left( \frac{800N}{2,647} \right)$$

$$P = 302,23 N$$

# Capítulo 3

## SISTEMA DE FUERZAS Y MOMENTOS



## SISTEMA DE FUERZAS Y MOMENTOS

### 3.1 OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar el concepto del momento de una fuerza y mostrar cómo calcularla en dos y tres dimensiones.
- Proporcionar un método para encontrar el momento de una fuerza con respecto a un eje específico.
- Definir el momento de un par.
- Presentar métodos para determinar las resultantes de sistemas de fuerzas no concurrentes.
- Indicar cómo reducir una carga simple distribuida a una fuerza resultante con una ubicación específica.

### 3.2 INTRODUCCIÓN

Los efectos de las fuerzas dependen no sólo de sus magnitudes y direcciones, sino también de los momentos que ejercen. El momento de una fuerza es una medida de su tendencia a causar giros. Los momentos causan el giro de maquinaria como la manivela de un barco de vela, las ruedas de un vehículo, los cigüeñales y las turbinas. Aun si la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es nula, éstas pueden ejercer un momento, que se denomina par. Si un cuerpo está en equilibrio, la suma de los momentos respecto a cualquier punto debido a las fuerzas externas y pares actuantes en él es igual a cero. Antes de que continúe su estudio del diagrama de cuerpo libre y del equilibrio, es necesario que usted se familiarice con los momentos, los pares, y el concepto de sistemas equivalentes de fuerzas y momentos.

### 3.3 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO ( $M_o$ )

Los momentos son vectores. El vector momento,  $\mathbf{M}_o$ , para una fuerza con respecto al punto O es el producto vectorial entre la fuerza  $\mathbf{F}$  y el vector formado desde el punto O hasta el punto de aplicación de la fuerza, conocido como vector posición,  $\mathbf{r}$ , como se muestra en la (figura 46).

## SISTEMA DE FUERZAS Y MOMENTOS

### 3.1 OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar el concepto del momento de una fuerza y mostrar cómo calcularla en dos y tres dimensiones.
- Proporcionar un método para encontrar el momento de una fuerza con respecto a un eje específico.
- Definir el momento de un par.
- Presentar métodos para determinar las resultantes de sistemas de fuerzas no concurrentes.
- Indicar cómo reducir una carga simple distribuida a una fuerza resultante con una ubicación específica.

### 3.2 INTRODUCCIÓN

Los efectos de las fuerzas dependen no sólo de sus magnitudes y direcciones, sino también de los momentos que ejercen. El momento de una fuerza es una medida de su tendencia a causar giros. Los momentos causan el giro de maquinaria como la manivela de un barco de vela, las ruedas de un vehículo, los cigüeñales y las turbinas. Aun si la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es nula, éstas pueden ejercer un momento, que se denomina par. Si un cuerpo está en equilibrio, la suma de los momentos respecto a cualquier punto debido a las fuerzas externas y pares actuantes en él es igual a cero. Antes de que continúe su estudio del diagrama de cuerpo libre y del equilibrio, es necesario que usted se familiarice con los momentos, los pares, y el concepto de sistemas equivalentes de fuerzas y momentos.

### 3.3 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO ( $M_o$ )

Los momentos son vectores. El vector momento,  $\mathbf{M}_o$ , para una fuerza con respecto al punto O es el producto vectorial entre la fuerza  $\mathbf{F}$  y el vector formado desde el punto O hasta el punto de aplicación de la fuerza, conocido como vector posición,  $\mathbf{r}$ , como se muestra en la (figura 46).



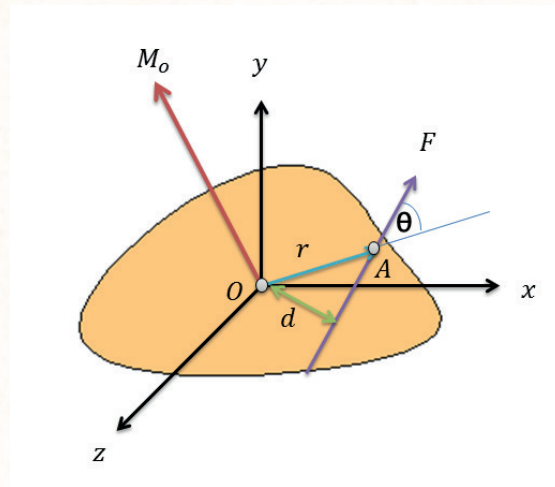


Figura 46. Momento de una fuerza con respecto a un punto.

Ilustración William Bonilla

La fórmula para calcular vectorialmente el momento de fuerza con respecto a un punto 0 es:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \otimes \mathbf{F}$$

Ecuación 13. Momento de una fuerza con respecto a un punto

Dónde:

$\mathbf{M}_O$  = Momento de una fuerza con respecto al punto 0.

$\mathbf{r}$  = Vector Posición del punto A con respecto al punto 0.

$\mathbf{F}$  = Vector Fuerza aplicada en el punto A.

El vector del momento de la fuerza con respecto al punto  $O$ , siempre será perpendicular al plano que contiene el vector posición  $\mathbf{r}$  y la fuerza  $\mathbf{F}$ . El sentido del vector  $\mathbf{M}_O$  estará definido por el giro del vector posición  $\mathbf{r}$  con el vector  $\mathbf{F}$ , de esta manera si el giro es en sentido anti horario, contrario a las manecillas del reloj el momento será positivo, si el giro es en sentido horario, en el sentido de las manecillas del reloj el momento será negativo.

La regla de la mano derecha también es muy útil al momento de determinar el sentido del momento. Para aplicar esta regla cerramos la mano de manera que

los dedos estén cerrados en el mismo sentido de la rotación que  $\mathbf{F}$  genera al cuerpo. El pulgar señalará el sentido del momento.

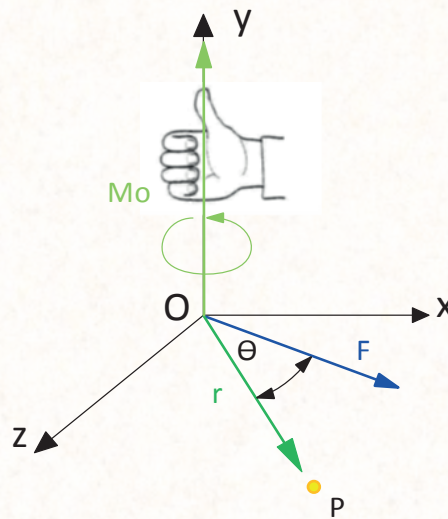
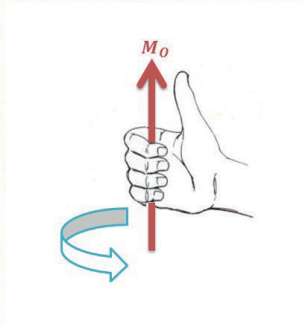


Figura 47. Regla de la mano derecha

Ilustración William Bonilla

Para hallar la magnitud del vector  $M_o = |\mathbf{M_o}|$  utilizamos la siguiente fórmula:

$$M_o = F * d$$

$$\text{sen}\theta = \frac{d}{r}$$

$$d = r * \text{sen}\theta$$

$$M_o = F * r * \text{sen}\theta$$

Ecuación 14. Momento de una fuerza con respecto a un punto (Magnitud)

Dónde:

$d$  = Brazo de palanca o longitud perpendicular a la línea de acción de la fuerza desde el punto  $O$ .

$\theta$  = Es el ángulo formado entre las líneas de acción del vector de posición  $\mathbf{r}$  y la fuerza  $\mathbf{F}$  [ $\theta \leq 180^\circ$ ]

**Unidades:**

Los momentos tienen dimensiones primarias de longitud multiplicado por la fuerza.

En el Sistema Internacional de unidades el momento de fuerza se mide en:

$$M_O = N \cdot m$$

En el Sistema Inglés el momento de fuerza se mide en:

$$M_O = lb \cdot ft$$

$$M_O = lb \cdot in$$

En el Plano podemos representar el momento como se muestra en las figuras

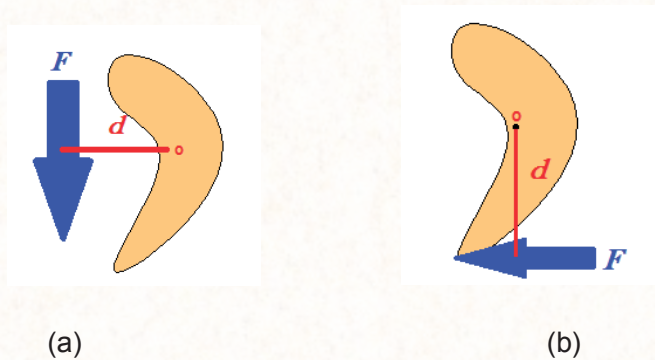


Figura 48. Momento de una fuerza en el plano

Ilustración William Bonilla

$$M_O = +F \cdot d \quad (a)$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} + d \vec{U}$$

$$M_O = -F + d \quad (b)$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} + d \vec{U}$$

La magnitud de  $M_O$  mide la tendencia de la fuerza  $\vec{F}$  a hacer rotar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de  $M_O$ .

### 3.4 COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE FUERZA

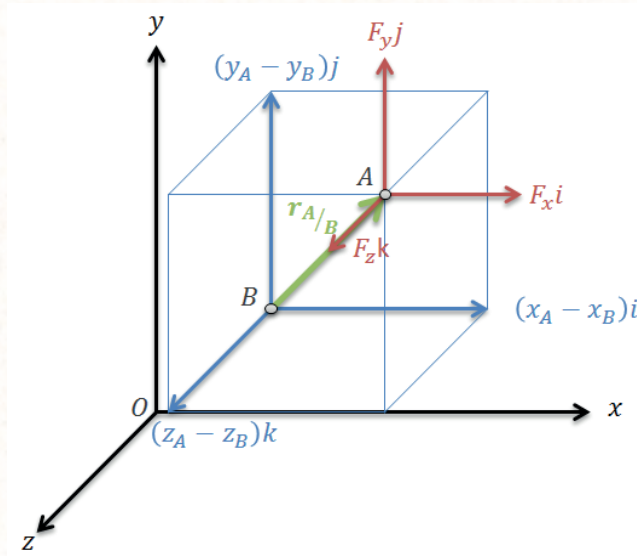


Figura 49. Componentes rectangulares del momento de fuerza

Ilustración William Bonilla

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$

Ecuación 15. Momento de una fuerza con respecto a un punto arbitrario

$\vec{M}_B$  = Momento de una fuerza con respecto al punto B

$\vec{r}_{A/B}$  = Vector de posición de A con respecto a B

$\vec{F}$  = Fuerza en función de sus componentes rectangulares

El vector de posición de A con respecto a B, se puede obtener.

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_{A/B} = (x_A - x_B)\mathbf{i} + (y_A - y_B)\mathbf{j} + (z_A - z_B)\mathbf{k}$$

$$\vec{r}_{A/B} = x_{A/B}\mathbf{i} + y_{A/B}\mathbf{j} + z_{A/B}\mathbf{k}$$

El momento de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto B, se puede obtener al resolver el siguiente determinante.

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_B = (F_z * y_{A/B} - F_y * z_{A/B})\mathbf{i} - (F_z * x_{A/B} - F_x * z_{A/B})\mathbf{j} + (F_y * x_{A/B} - F_x * y_{A/B})\mathbf{k}$$

$M_x$	$F_z * y_{A/B}$	$F_y * z_{A/B}$
$M_y$	$F_z * x_{A/B}$	$F_x * z_{A/B}$
$M_z$	$F_y * x_{A/B}$	$F_x * y_{A/B}$

Ecuación 16. Componentes Rectangulares del Momento de una fuerza con respecto a un punto

Componentes rectangulares del momento de una fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto B

### 3.5 TEOREMA DE VARIGNON

Si las fuerzas  $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$  Están ejercidas en un mismo punto A (Figura 50), y si se representa por  $\vec{r}$  al vector de posición, entonces el momento de esas fuerzas concurrentes se puede obtener mediante la ecuación.

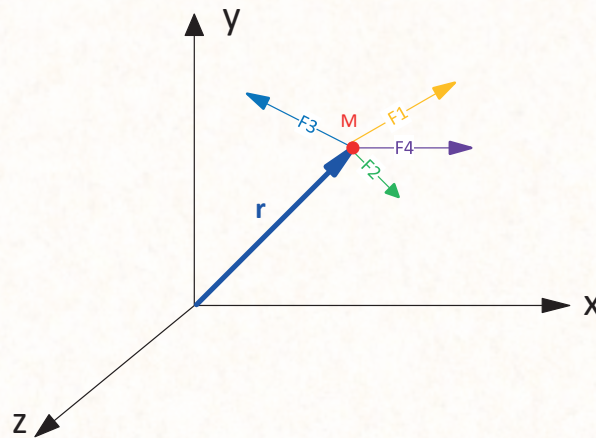


Figura 50. Momento de varias fuerzas concurrentes con respecto al punto O.

Ilustración William Bonilla

$$\vec{M}_O = \vec{r} \otimes (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + +\vec{F}_4 \dots) ( )$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \otimes \vec{F}_1 + \vec{r} \otimes \vec{F}_2 + \vec{r} \otimes \vec{F}_3 + \vec{r} \otimes \vec{F}_4 \dots)$$

### 3.6 EJERCICIOS RESUELTOS

#### EJERCICIO 3.1

Una fuerza vertical de 100 lb se aplica en el extremo de una palanca que está unida a una flecha en el punto O. Determine a) El momento de la fuerza de 100 lb respecto a O; b) La fuerza horizontal aplicada en A que origina el mismo momento respecto a O; c) La fuerza mínima aplicada e A que origina el mismo momento respecto a O; d) Que tan lejos de la flecha debe actuar una fuerza vertical de 240 lb para originar el mismo momento con respecto a O; e) ¿Si algunas de las fuerzas obtenidas de los incisos b, c, d es equivalente a la fuerza original?

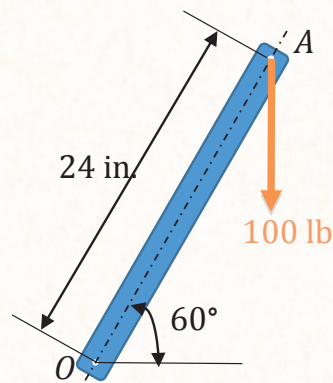
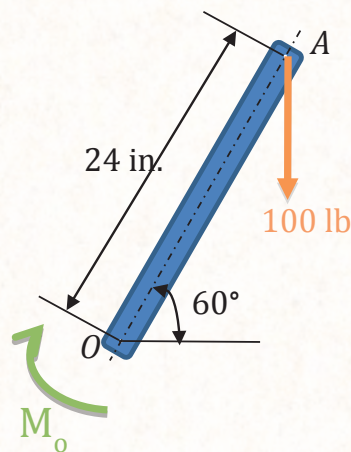


Figura 51. Momento de una Fuerza con respecto al punto O ejercicio 3.1

Ilustración William Bonilla

**Solución:**

a)



$$M_o = F \cdot d$$

$$M_o = -1000\text{lb} \cdot 24\text{in} \cdot \cos 60^\circ$$

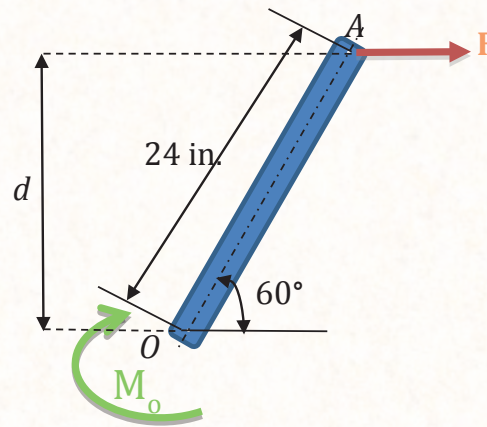
$$M_o = -1000\text{lb} \cdot 12\text{in}$$

$$M_o = -1200 \text{ lb in}$$

$$\vec{M}_o = 1200 \text{ lb in } \curvearrowright$$

$$\vec{M}_o = -1200 \text{ lb} \cdot \text{in } \vec{k}$$

b)



$$d = 24 \text{ in} \cdot \sin 60^\circ$$

$$d = 20.78 \text{ in}$$

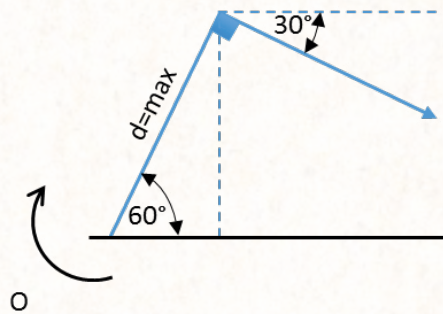
$$M_o = F \cdot d$$

$$1200 \text{ lb in} = F \cdot 20.78 \text{ in}$$

$$F = 57.74 \text{ lb}$$

$$F = 57.74 \text{ lb} \rightarrow$$

c)



$$M_o = F \cdot d$$

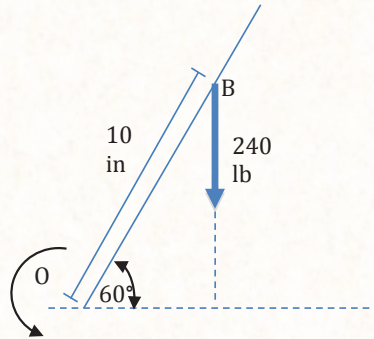
$$1200 \text{ lb in} = F \cdot 24 \text{ in}$$

$$F = 50 \text{ lb}$$



$$F = 50 \text{ lb}, 330^\circ$$

d)



$$M_o = F \cdot d$$

$$d = \frac{M_o}{F}$$

$$d = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in}}{240 \text{ lb}} = 5 \text{ in}$$

$$x = \frac{5 \text{ in}}{\cos 60} = 10 \text{ in}$$

### EJERCICIO 3.2

Calcular el momento resultante con respecto al punto A y B de la viga mostrada.

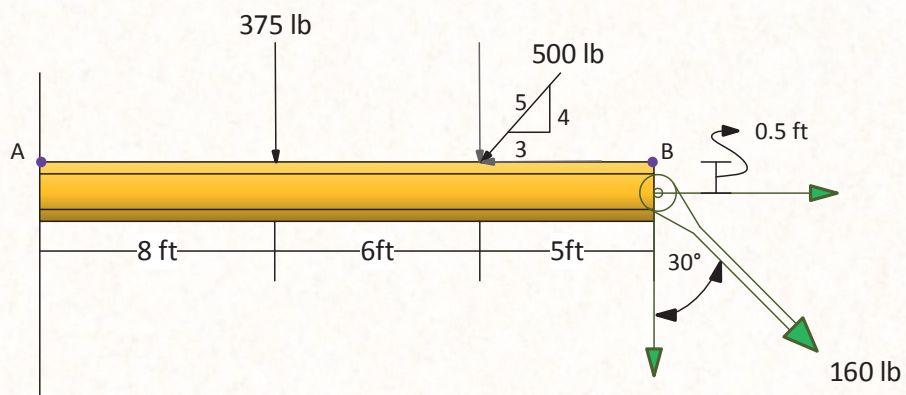


Figura 52. Interpretación gráfica ejercicio 3.2

Ilustración William Bonilla

**Solución:**

$$M_A = \sum F \cdot d$$

$$M_A = -375\text{lb} \cdot 8\text{ft} - 400\text{lb} \cdot 14\text{ft} + 80\text{lb} \cdot 0.5\text{ft} - 138.56\text{ lb} \cdot 19\text{ft}$$

$$M_A = -11192.64\text{ lb in.}$$

$$M_A = 11192.64\text{ lb in } \odot$$

$$M_B = \sum F \cdot d$$

$$M_B = 375\text{lb} \cdot 11\text{ft} + 400\text{lb} \cdot 5\text{ft} + 80\text{lb} \cdot 0.5\text{ft}$$

$$M_B = 6165\text{ lb in.}$$

$$M_B = 6165\text{ lb in.}$$

### EJERCICIO 3.3

EL puntal AB de la tapadera de 1 m de diámetro ejerce una fuerza de 450 N en el punto B. Determine el momento de esta fuerza con respecto al punto O.

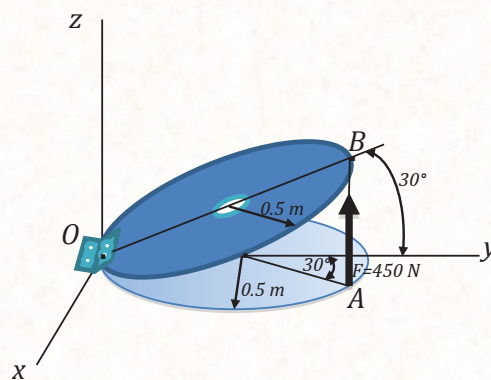


Figura 53. Interpretación gráfica ejercicio 3.3

Ilustración William Bonilla

$$B = (0; 1 * \cos 30^\circ; 1 * \sin 30^\circ) \text{ m}$$

$$B = (0; 0.866; 0.5) \text{ m}$$

$$\vec{r}_B = (0\mathbf{i}; 0.866\mathbf{j}; 0.5\mathbf{k}) \text{ m}$$

$$A = (0.5 * \sin 30^\circ; 0.5 + 0.5 \cos 30^\circ; 0) \text{ m}$$

$$A = (0.25; 0.933; 0) \text{ m}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_B \otimes \vec{F}_{AD}$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} * \vec{U}_{AB}$$

$$\vec{F}_{AD} = 450 * \vec{U}_{AB}$$

$$\vec{U}_{AD} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{AB}$$

$$\vec{U}_{AD} = \frac{(-0.25\mathbf{i} - 0.064\mathbf{j} + 0.5\mathbf{k})}{\sqrt{(-0.25)^2 + (-0.064)^2 + (0.5)^2}}$$

$$\vec{U}_{AD} = -0.444\mathbf{i} - 0.113\mathbf{j} + 0.869\mathbf{k}$$

$$\vec{F}_{AD} = 450 * (-0.444\mathbf{i} - 0.113\mathbf{j} + 0.869\mathbf{k})$$

$$\vec{F}_{AD} = (-199.8 \mathbf{i} - 50.85 \mathbf{j} + 391.05 \mathbf{k})$$

$$\vec{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0 & 0.866 & 0.5 \\ -199.8 & -50.85 & 391.05 \end{bmatrix}$$

$$\vec{M}_O = (338.64 - (-25.425))\mathbf{i} - (0 - (99.9))\mathbf{j} + (0 - (-173.02))\mathbf{k}$$

$$= (364.065 \mathbf{i} - 99.9\mathbf{j} + 173.02\mathbf{k}) \text{ N.m}$$

$$\vec{M}_O = 415.25 \text{ N.m}$$

$$\theta_x = 28.75^\circ$$

$$\theta_y = 103.91^\circ$$

$$\theta_z = 65.37^\circ$$

### EJERCICIO 3.4

El Collarín de 200 Kg en A se mantiene en su lugar sobre la barra vertical; lisa por medio del cable AB. Determine el momento respecto a la base de la Barra (Punto C de las coordenadas  $x=2m$ ;  $y = z = 0m$ ). Debido a la fuerza ejercida por el cable sobre el collarín.

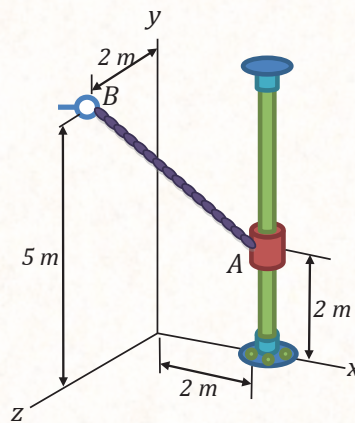
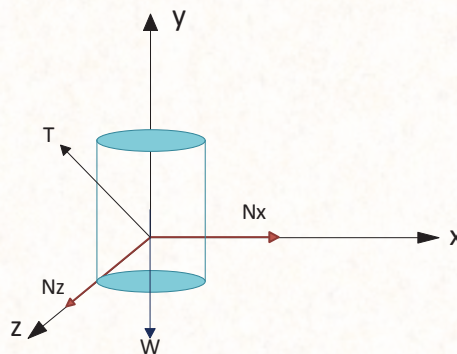


Figura 54. Interpretación gráfica ejercicio 3.4

Ilustración William Bonilla

D.C.L del collarín A



**Solución:**

$$\overline{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$$

$$\overline{AB} = (0\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k})$$

$$\overline{AB} = (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

$$\overline{T_{AB}} = T_{AB} * \overline{U_{AB}}$$

$$\overline{T_{AB}} = T_{AB} * \frac{(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{\sqrt{17}}$$

$$\overline{T_{AB}} = T_{AB} * (-0.485\mathbf{i} + 0.727\mathbf{j} + 0.485\mathbf{k}) \quad (1)$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$N_x - 0.485T_{AB} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$0.727T_{AB} - W = 0$$

$$T_{AB} = \frac{W}{0.727} = \frac{(200 \text{ Kg}) * (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{0.727}$$

$T_{AB} = 2698.762\text{N}$  en (1), se obtiene la tensión AB en forma vectorial cartesiana.

$$\overline{T_{AB}} = (-1308.89\mathbf{i} + 1961.99\mathbf{j} + 1308.89\mathbf{k})$$

$$\sum F_z = 0$$

$$N_z - 0.485T_{AB} = 0$$

$$N_z = 1308.89$$

$$\vec{r}_{A/C} = \vec{r}_A - \vec{r}_C$$

$$\vec{r}_{A/C} = (0\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k})\text{m}$$

$$\vec{M}_C = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -1308.89 & 1961.99 & 1308.89 \end{bmatrix}$$

$$\vec{M}_C = (2617.78)\hat{i} - (0)\hat{j} + (2617.78)\hat{k}$$

$$M_C = 3702.09 \text{ N}\cdot\text{m}$$

### EJERCICIO 3.5

Para evaluar qué tan bueno es el diseño del poste de acero vertical que se muestra en la figura. Usted debe determinar el momento respecto a la base del poste debido a la fuerza ejercida sobre el punto B por el cable AB. Una celda de carga montada sobre el cable AC indica que la tensión en dicho cable es de 22 kN ¿Cuál es el valor del momento?

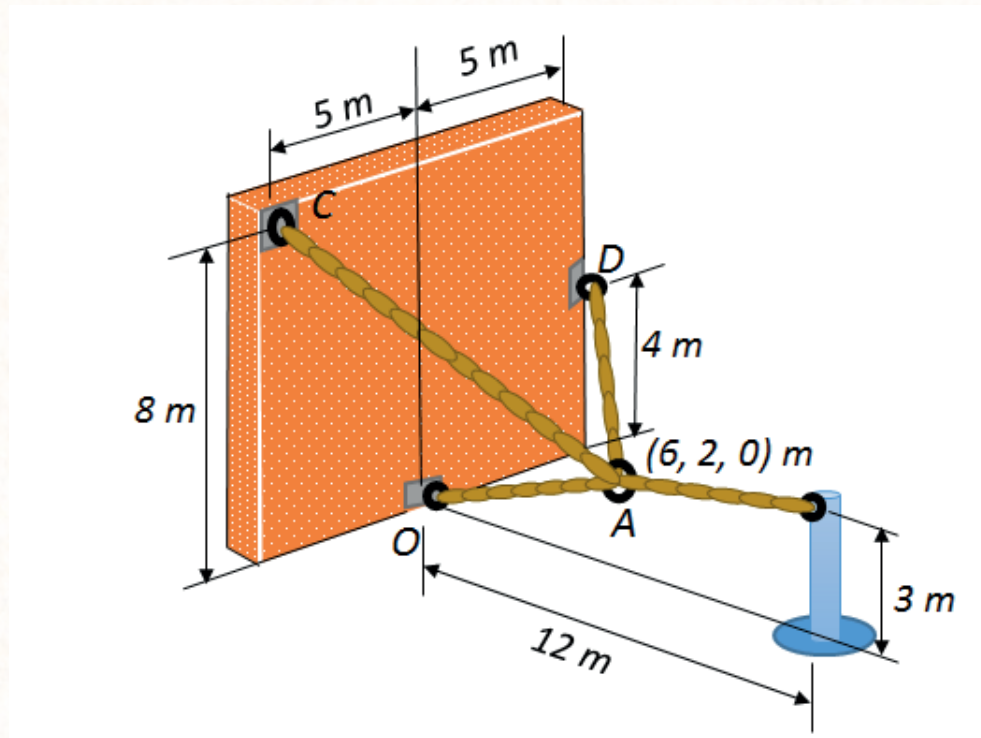
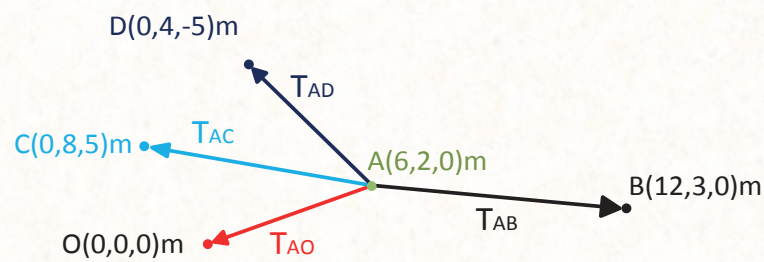


Figura 55. Interpretación gráfica ejercicio 3.5

Ilustración William Bonilla

**D.C.L del punto A**



**Solución:**

$$C = (0, 8, 5)\text{m}$$

$$D = (0, 4, -5)\text{m}$$

$$A = (6, 2, 0)\text{m}$$

$$B = (12, 3, 0)\text{m}$$

$$\overline{T_{AC}} = T_{AC} + U_{AC}$$

$$\overline{U}_{AC} = \frac{\overline{AC}}{AC} = \frac{\overline{C} - \overline{A}}{AC}$$

$$\overline{U}_{AC} = \frac{(-6\overline{i} + 6\overline{j} + 5\overline{k})}{\sqrt{(-6)^2 + (6)^2 + (5)^2}}$$

$$\overline{T}_{AC} = T_{AC} * \frac{(-6\overline{i} + 6\overline{j} + 5\overline{k})}{\sqrt{(-6)^2 + (6)^2 + (5)^2}} = T_{AC} * \frac{(-6\overline{i} + 6\overline{j} + 5\overline{k})m}{9.849m}$$

$$\overline{T}_{AC} = T_{AC}(-0.609\overline{i} + 0.609\overline{j} + 0.508\overline{k})$$

$$\overline{T}_{AC} = 22kN(-0.609\overline{i} + 0.609\overline{j} + 0.508\overline{k})$$

$$\overline{T}_{AC} = 22kN(-0.609\overline{i} + 0.609\overline{j} + 0.508\overline{k})$$

$$\overline{T}_{AC} = (-13.398\overline{i} + 13.398\overline{j} + 11.176\overline{k})kN$$

$$\overline{T}_{AO} = T_{AO} * \overline{U}_{AO}$$

$$\overline{U}_{AO} = \frac{(-6\overline{i} - 2\overline{j} - 0\overline{k})m}{\sqrt{(-6)^2 + (2)^2 + (-0)^2}m} = \frac{(-6\overline{i} - 2\overline{j} - 0\overline{k})m}{6.324m}$$

$$\overline{T}_{AO} = (-0.949T_{AO}\overline{i} - 0.316T_{AO}\overline{j} - 0\overline{k})$$

$$\overline{T}_{AD} = T_{AD} * \overline{U}_{AD}$$

$$\overline{U}_{AD} = \frac{(-6\overline{i} + 2\overline{j} - 5\overline{k})m}{\sqrt{(-6)^2 + (2)^2 + (-5)^2}m} = \frac{(-6\overline{i} + 2\overline{j} - 5\overline{k})m}{8.062m}$$

$$\overline{T}_{AD} = (-0.744T_{AD}\overline{i} + 0.248T_{AD}\overline{j} - 0.620T_{AD}\overline{k})$$

$$\overline{T}_{AB} = T_{AB} * \overline{U}_{AB}$$

$$\overline{U}_{AB} = \frac{(6\overline{i} + 1\overline{j} + 0\overline{k})m}{\sqrt{(6)^2 + (1)^2 + (0)^2}m} = \frac{(6\overline{i} + 1\overline{j} + 0\overline{k})m}{6.083m}$$

$$\overline{T}_{AB} = (0.986T_{AB}\overline{i} + 0.164T_{AB}\overline{j} + 0\overline{k})$$



Para el equilibrio en A,  $\sum F_A = 0$

$$\sum F_A = \overline{T_{AC}} + \overline{T_{AO}} + \overline{T_{AD}} + \overline{T_{AB}} = 0$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$-13.398 - 0.949T_{AO} - 0.744T_{AD} + 0.986T_{AB} = 0 \quad (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$13.398 - 0.316T_{AO} + 0.248T_{AD} + 0.164T_{AB} = 0 \quad (2)$$

$$+ \sum F_z = 0$$

$$11.176 - 0T_{AO} - 0.620T_{AD} + 0T_{AB} = 0 \quad (3)$$

De (3).

$$T_{AD} = 18.026 \text{ kN}$$

Reemplazando y resolviendo las ecuaciones, se obtiene.

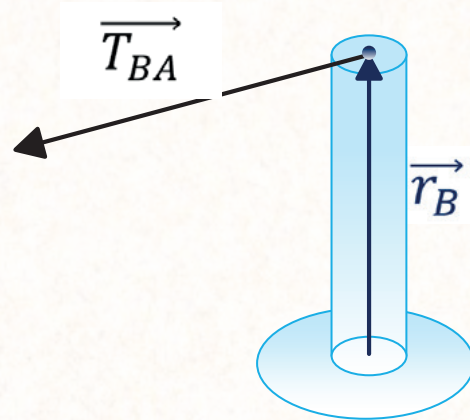
$$T_{AB} = 163.05 \text{ kN}$$

$$T_{AO} = 141.28 \text{ kN}$$

Expresamos  $T_{AB}$  en forma vectorial cartesiana.

$$\overline{T_{AB}} = (160.8 \mathbf{i} + 26.8 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}) \text{ kN}$$

La fuerza que actúa en B, por el cable AB es.



$$\vec{T}_{BA} = -\vec{T}_{AB}$$

$$\vec{T}_{BA} = (-160.8 \hat{i} - 26.8 \hat{j} + 0 \hat{k}) \text{ kN}$$

$$\vec{M}_{\text{base}} = \vec{r}_B \otimes \vec{T}_{BA}$$

$$\vec{r}_B = (0 \hat{i} + 3 \hat{j} + 0 \hat{k})$$

$$\vec{M}_{\text{base}} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ -160.8 & -26.8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{M}_{\text{base}} = 482.4 \hat{k} \text{ (kN.m)}$$

### 3.7 PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UN EJE DADO

Suponga el vector  $P$  que forma un ángulo  $\Theta$  con el eje  $OL$ , la proyección del vector  $P$  sobre el eje  $OL$  es igual a  $P_{OL}$ .

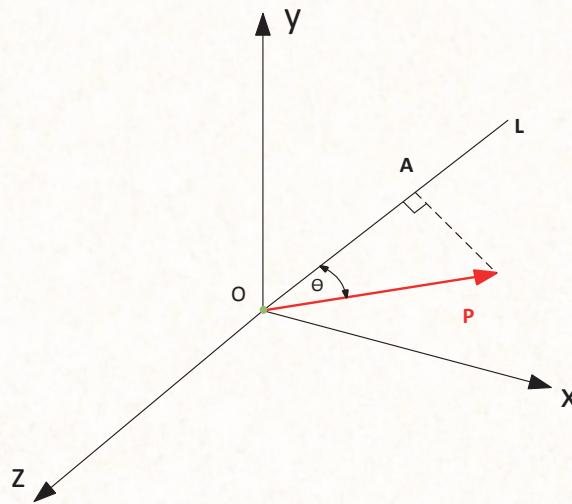
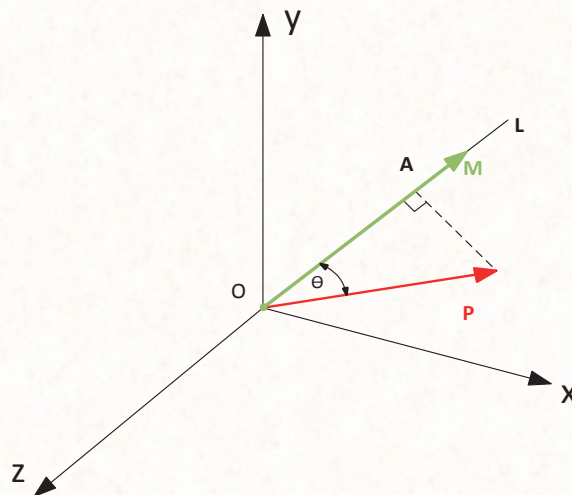


Figura 56. Proyección de un vector P sobre la recta OL  
Ilustración William Bonilla

$$P_{OL} = P \cos \theta$$

La proyección  $P_{OL}$  al obtener su módulo, será igual al valor de la longitud del segmento OA; será positiva si OA tiene el mismo sentido que OL, esto se da en el caso si, el ángulo  $\theta$  es agudo, si no es así, será negativo.



Consideremos ahora un vector M (con el mismo sentido) dirigido a lo largo de OL, el producto escalar de P y M se puede expresar como:

$$P \cdot M = PM \cos \theta = P_{OL} M$$

Por lo que se puede concluir que

$$P_{OL} = \frac{P \cdot M}{M} = P \cdot \mu_M$$

$$P_{OL} = \frac{P \cdot M}{M} = \frac{P_X M_X + P_Y M_Y + P_Z M_Z}{M}$$

En el caso particular, cuando el vector seleccionado a lo largo de OL es el vector unitario  $\mu$  (figura 57), se escribe:

$$P_{OL} = P \cdot \mu$$

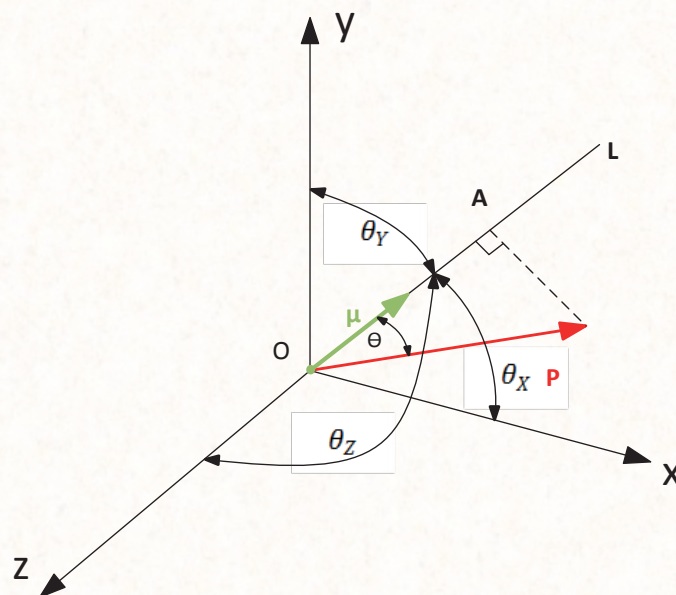


Figura 57. Ángulos Directores  
Ilustración William Bonilla

Al descomponer  $P$  y  $\mu$  en sus componentes rectangulares y recordar que las componentes del unitario a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de OL, la proyección del vector  $P$  sobre el eje OL se describe como

$$P_{OL} = P_X \cos \theta_X + P_Y \cos \theta_Y + P_Z \cos \theta_Z$$

Ecuación 17 Proyección de un vector P sobre el eje OL

Donde  $\theta_x, \theta_y$  y  $\theta_z$  son los ángulos directores de la recta OL.

### 3.8 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DADO

Tome en cuenta una fuerza  $\mathbf{F}$  que se aplica a un cuerpo rígido y el momento  $\mathbf{M}_O$  de la fuerza generado con respecto al origen. Sea OL un eje que atraviesa el origen; el momento  $\mathbf{M}_{OL}$  de  $\mathbf{F}$  con respecto al eje OL se define como la proyección OC del momento  $\mathbf{M}_O$  sobre el eje OL (ver figura 58). Representando al vector unitario del eje O-L como  $\overline{\mu_{OL}}$  tenemos:

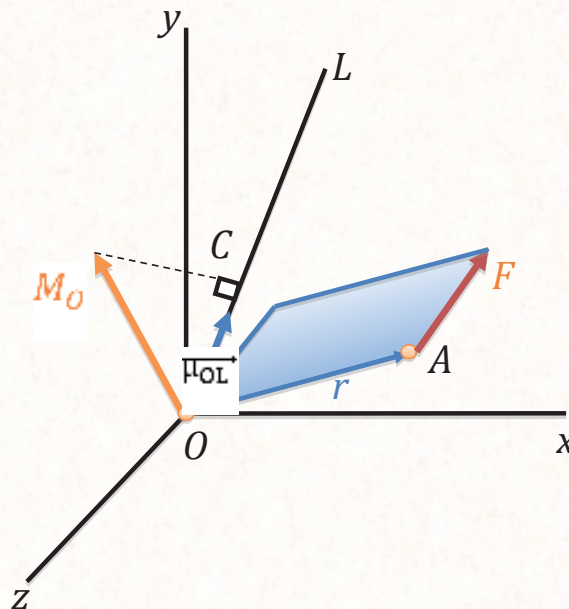


Figura 58. Momento de F con respecto al eje OL  
Ilustración William Bonilla

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{OL} = \overline{\mu_{OL}} \cdot \mathbf{M}_O$$

$$\mathbf{M}_{OL} = \overline{\mu_{OL}} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \text{ Producto triple mixto de tres vectores.}$$

Ecuación 18. Producto triple mixto de 3 vectores

Teniendo los vectores posición, fuerza y unitario procedemos a realizar el producto triple mixto de tres vectores

$$\overline{\mu_{OL}} = \mu_x \overline{i} + \mu_y \overline{j} + \mu_z \overline{k} \quad \text{Vector Unitario}$$

$$\overline{r} = x \overline{i} + y \overline{j} + z \overline{k} \quad \text{Coordenadas del punto de aplicación de F}$$

$$\overline{F} = F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k} \quad \text{Componentes del vector Fuerza}$$

$$\begin{vmatrix} \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

El determinante se resuelve como se indica.

$$\mathbf{M}_{OL} = \mu_x(yF_z - F_y z) - \mu_y(xF_z - F_x z) + \mu_z(xF_y - F_x y)$$

Escalar:

$$\mathbf{M}_{OL} = \overline{\mu_{OL}} \cdot (\overline{r} \times \overline{F})$$

Vector:

$$\overline{\mathbf{M}_{OL}} = (\overline{\mu_{OL}} \cdot \overline{\mathbf{M}_O}) + \overline{\mu_{OL}}$$

Ecuación 19. Producto Vectorial

### 3.9 EJERCICIOS RESUELTOS

#### EJERCICIO 3.6

La Placa triangular ABC se sostiene mediante soportes de rótula en B Y D y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE Y CF. Si la fuerza ejercida por el cable AE en A es de 55N, determine el momento de esta Fuerza respecto de la línea que une los puntos D y B.

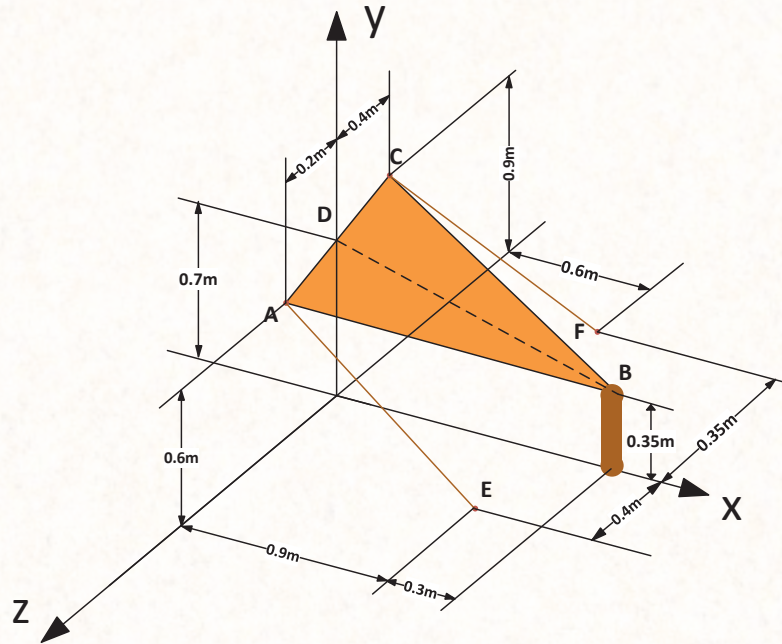


Figura 59. Interpretación gráfica del ejercicio 3.6  
Ilustración William Bonilla

**Solución:**

$$\overline{T_{AE}} = T_{AE} \overline{\mu_{AE}}$$

$$\overline{\mu_{AE}} = \frac{\overline{AE}}{AE} = \frac{(0.9\overline{i} - 0.6\overline{j} + 0.2\overline{k})m}{1.1m}$$

$$\overline{T_{AE}} = 55N (0.818\overline{i} - 0.545\overline{j} + 0.181\overline{k})$$

$$\overline{T_{AE}} = (45\overline{i} - 30\overline{j} + 10\overline{k})N$$

$$\overline{M_{OB}} = \overline{\mu_{OB}} \cdot \overline{M_O}$$

$$\overline{M_{OB}} = \overline{\mu_{OB}} \cdot (\overline{r_{AO}} \times \overline{T_{AE}})$$

$$\overline{\mu_{OB}} = \frac{\overline{OB}}{OB} = \frac{\overline{y} - \overline{y'}}{OB}$$

$$\overline{\mu_{DB}} = \frac{(1.2r - 0.35r + 0.8K)m}{\sqrt{(1.2)^2 + (0.35)^2 m}}$$

$$\overline{\mu_{DB}} = (0.96r - 0.28r + 0)$$

$$\overline{r_{A/D}} = (0r - 0.1r + 0.2K)m$$

$$M_{DB} = \begin{vmatrix} 0.96 & -0.28 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.2 \\ 45 & -30 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= [(-0.1)(10) - (-30)(0.2)]0.96 - [0(10) - 45(0.2)](-0.28) + 0$$

$M_{DB} = 2.28 \text{ N.m}$  Quiere decir que la fuerza hace rotar a la placa triangular en sentido anti horario, visto desde B

$$\overline{M_{DB}} = M_{DB} \times \overline{\mu_{DB}}$$

$$\overline{M_{DB}} = (2.188r - 0.638)Nm$$

Para otro vector posición

$$M_{DB} = \overline{\mu_{DB}} \cdot \overline{M_E}$$

$$M_{DB} = \overline{\mu_{DB}} \cdot (\overline{r_{E/B}} \times \overline{T_{AE}})$$

$$\overline{r_{E/B}} = (-0.3r - 0.35r + 0.4K)$$

$$M_{DB} = \begin{vmatrix} 0.96 & -0.28 & 0 \\ -0.3 & -0.35 & 0.4 \\ 45 & -30 & 10 \end{vmatrix}$$



$$= [(-0.35)(10) - (-30)(0.4)]0.96 - [(-0.3)(10) - (45)(0.4)](-0.28) = 8.16 - 5.88$$

$$= 2.28 \text{ N.m}$$

### EJERCICIO 3.7

El marco CD está articulado en A y D y se sostiene mediante un cable, el cual pasa por un anillo colocado en B y está unido a ganchos G y H. Si la tensión en el cable es de 1125N, determine el momento respecto a la diagonal AD, de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BH del cable.

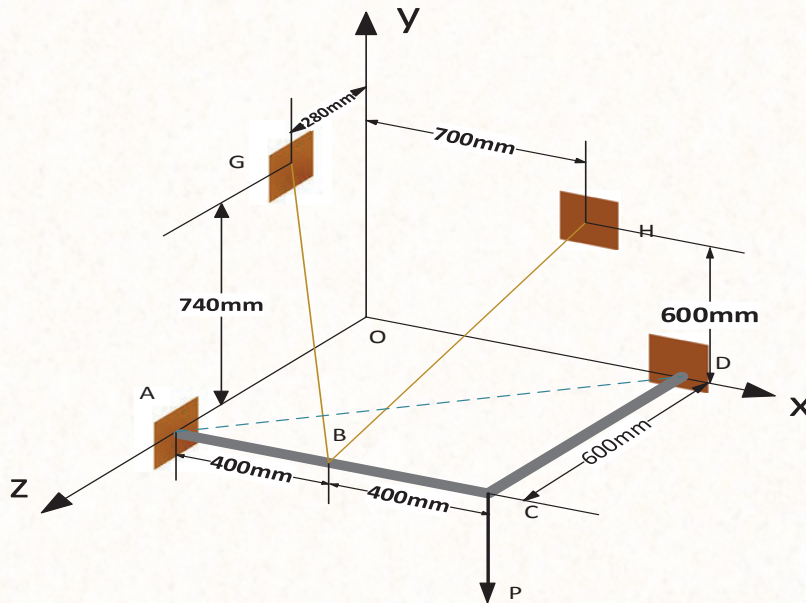


Figura 60. Interpretación gráfica ejercicio 3.7

Ilustración William Bonilla

**Solución:**

$$\vec{r}_{H/D} = (-0.1\hat{i} + 0.6\hat{j} + 0\hat{k})\text{m}$$

$$\vec{F}_{BH} = F_{BH} \cdot \mu_{BH}$$

$$\vec{F}_{BH} = 1125\text{N} \frac{(0.3\hat{i} + 0.6\hat{j} - 0.6\hat{k})\text{m}}{0.9\text{m}}$$

$$\overline{F_{BN}} = 1125N (0.333 + 0.666 r - 0.666R)$$

$$\overline{F_{BN}} = 375r + 750 r - 750R)M$$

$$M_{AD} = \mu_{AD} \cdot \overline{M_D}$$

$$M_{AD} = \mu_{AD} \cdot (\overline{r_{HD}} \times \overline{F_{BN}})$$

$$\mu_{AD} = \frac{(0.8r + 0 r - 0.6R) m}{1 m}$$

$$\mu_{AD} = (0.8 r - 0.6 r)$$

$$M_{AD} = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ -0.1 & 0.6 & 0 \\ 375 & 750 & -750 \end{vmatrix}$$

$$M_{AD} = [(0.6)(-750)(0.8)] - [(-0.1)(-750)](-0.6) + 0$$

$M_{AD} = -315 \text{ N.m}$  El signo negativo indica que el marco acodado ACD, rota alrededor del eje AD en sentido horario, visto desde D.

### EJERCICIO 3.8

Si la tensión en el cable CE que se muestra en la figura es de 160 lb. Determine el momento resultante, de la fuerza ejercida por el cable sobre la cubierta en C y a la fuerza aplicada en D; respecto a la línea que pasa por las bisagras A y B.

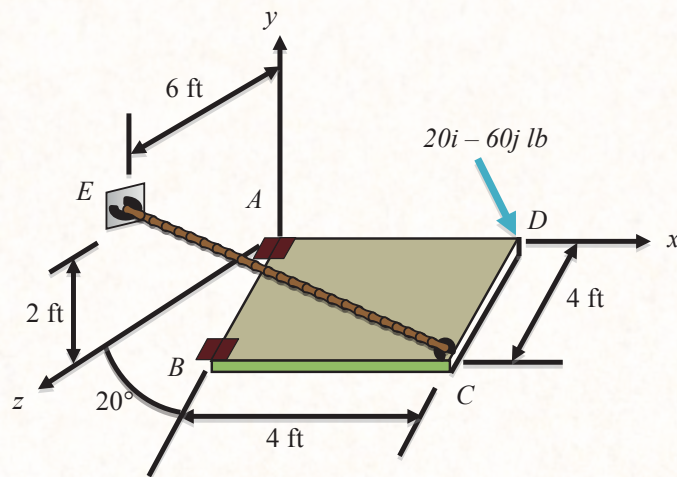


Figura 61. Interpretación gráfica ejercicio 3.8  
Ilustración William Bonilla

**Solución:**

$$\operatorname{sen}20^\circ = \frac{-y}{4} \quad \operatorname{cos}20^\circ = \frac{z}{4}$$

$$y = -1.36 \text{ ft}$$

$$z = 3.75 \text{ ft}$$

Puntos:

$$E(0, 2, 6) \text{ ft}$$

$$C(4, -1.36, 3.75) \text{ ft}$$

$$\overline{M}_{AB} = \overline{u}_{AB} \odot \overline{M}_B + \overline{u}_{AY} \odot \overline{M}_A$$

$$\overline{u}_{AY} = 0 \text{ i} - \operatorname{sen}20^\circ \text{ j} + \operatorname{cos}20^\circ \text{ k}$$

$$\overline{r}_C = (4 \text{ i} + 0 \text{ j} + 0 \text{ k}) \text{ ft}$$

$$\overline{T}_{CE} = \overline{u}_{EC} \cdot T_{CE}$$

$$\overline{T}_{CE} = 160 \text{ lb} \left( -\frac{4}{5.688} \text{ i} + \frac{3.36}{5.688} \text{ j} + \frac{2.25}{5.688} \text{ k} \right)$$

$$\vec{T}_{CF} = (-112.518 i + 94.515 j + 63.291 k) \text{ lb}$$

$$M_{AB1} = \begin{vmatrix} 0 & -\text{sen}20^\circ & \text{cos}20^\circ \\ 4 & 0 & 0 \\ -112.518 & 94.515 & 63.291 \end{vmatrix}$$

$$M_{AB1} = 441.847 \text{ lb.ft}$$

$$M_{AB2} = \begin{vmatrix} 0 & -\text{sen}20^\circ & \text{cos}20^\circ \\ 4 & 0 & 0 \\ 20 & -60 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{AB2} = -225.526 \text{ lb.ft}$$

$$M_{AB} = M_{AB1} + M_{AB2}$$

$$M_{AB} = 216.32 \text{ lb.ft}$$

### 3.10 MOMENTO DE UN PAR

Se dice que dos fuerzas  $F$  y  $-F$  que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par.

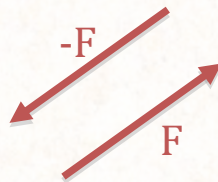


Figura 62. Par

Ilustración William Bonilla

A partir de la definición del momento de un par también se concluye que dos pares, uno constituido por las fuerzas  $F_1$  y  $-F_1$ , y el otro constituido por las fuerzas  $F_2$  y  $-F_2$  (figura 62) tendrán momentos igual si: (BEER & JOHNSTON, 2010)

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

Ecuación 20. Equivalencias de un par

Y si los dos pares se encuentran en planos paralelos (o en el mismo plano) y tienen el mismo sentido.

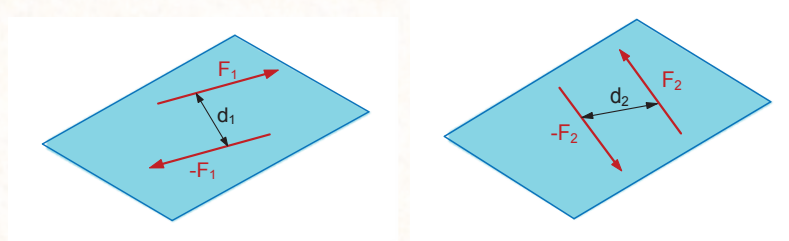


Figura 63. Pares que definen momentos iguales

Ilustración William Bonilla

Para obtener el momento de un Par de forma vectorial ( $M$ ), se aplica la siguiente ecuación.

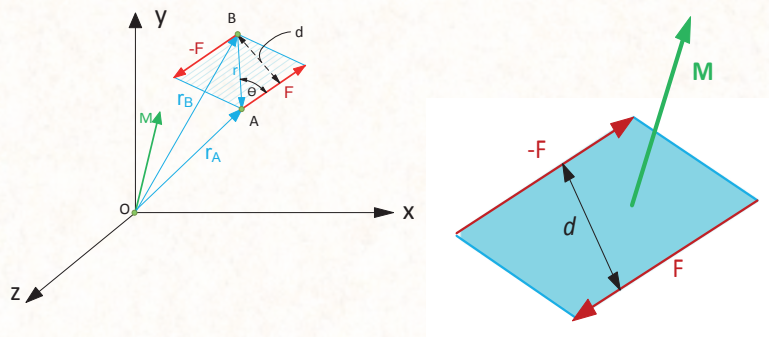


Figura 64. Momento de un Par

Ilustración William Bonilla

Primero realizamos la suma vectorial de los vectores posición en la figura.

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

Al representar con  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$ , respectivamente, a los vectores de posición de los puntos de aplicación de  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$ , se encuentra que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a  $O$  es.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \otimes \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \otimes (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \otimes \mathbf{F}$$

Si se define  $r_A - r_B = r$ , donde  $r$  es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, se concluye que la suma de los momentos de  $F$  y  $-F$ , con respecto a  $O$ , está representado por el vector.

$$\vec{M} = r \otimes F$$

Ecuación 21. Momento de un par

El vector  $\vec{M}$  se conoce como el *momento del par*; se trata de un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud está dada por.

$$M = rF \sin \theta = Fd$$

Donde  $d$  es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de  $F$  y  $-F$ . El sentido de  $\vec{M}$  está definido por la regla de la mano derecha.

### 3.11 LOS PARES PUEDEN REPRESENTARSE POR MEDIO DE VECTORES

El vector del par, como el momento de un par es un vector libre. Por tanto, su punto de aplicación puede ser elegido en el origen del sistema de referencia si así se desea (Figura 64). Además, el vector del momento  $M$  se puede descomponer en función sus componentes rectangulares (Figura 65).

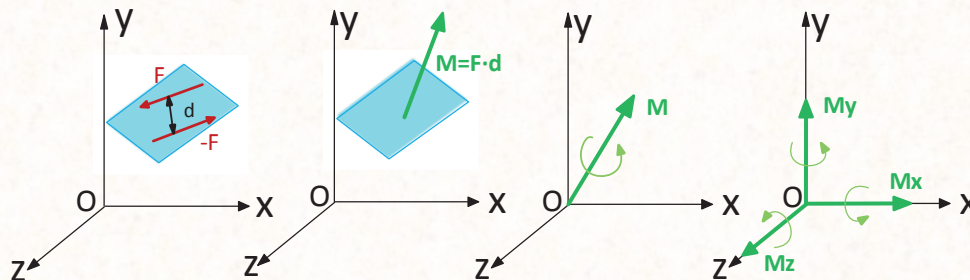


Figura 65. Pares representada por medio de vectores  
Ilustración William Bonilla

### 3.12 EJERCICIOS RESUELTOS

#### EJERCICIO 3.9

Reemplace los dos pares que actúan sobre la columna tubular en la figura por un momento par resultante.

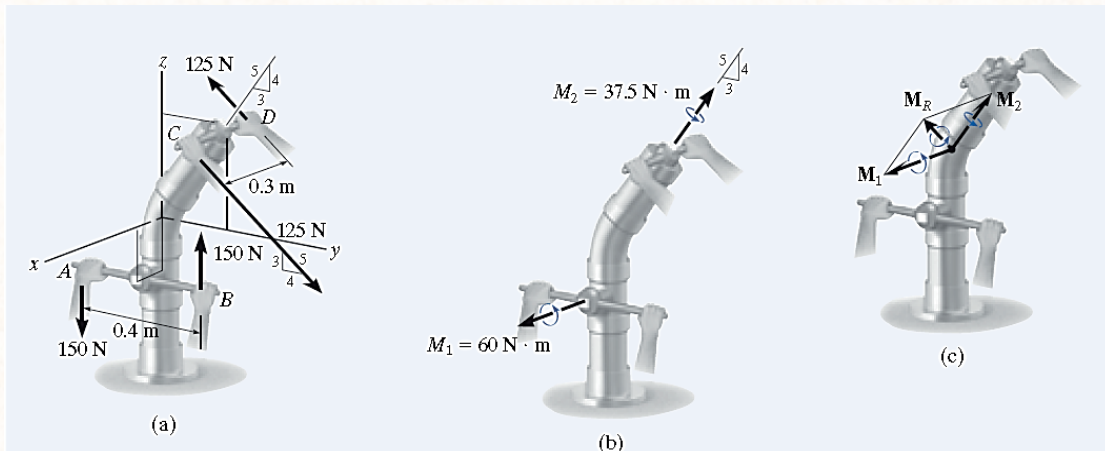


Figura 66. Interpretación gráfica ejercicio 3.9  
(HIBBELER, 2010)

**Solución:**

$$\overline{M1} = \overline{r_{y/A}} \otimes F$$

$$\overline{M1} = 0,4 \mathbf{j} \otimes 150 \mathbf{k}$$

$$\overline{M1} = 60 \mathbf{i} \text{ Nm}$$

$$\overline{M2} = \overline{r_{z/D}} \otimes F$$

$$Fy = \left( 125 \times \frac{4}{5} \right)$$

$$F\overline{y} = 100 \mathbf{j}$$

$$Fz = \left( 125 \times \frac{3}{5} \right)$$

$$Fz = -75 \text{ k}$$

$$Mz = (0,3i) \otimes (100j - 75k)$$

$$Mz = (30k + 22,5j) \text{ N.m}$$

$$MR = M1 + Mz$$

$$MR = (60i + 22,5j + 30k) \text{ N.m}$$

$$MR = 70,75 \text{ N.m}$$

### EJERCICIO 3.10

Si  $P=15 \text{ N}$  reemplace los tres pares por un solo par equivalente especifique su magnitud y la dirección de su eje.

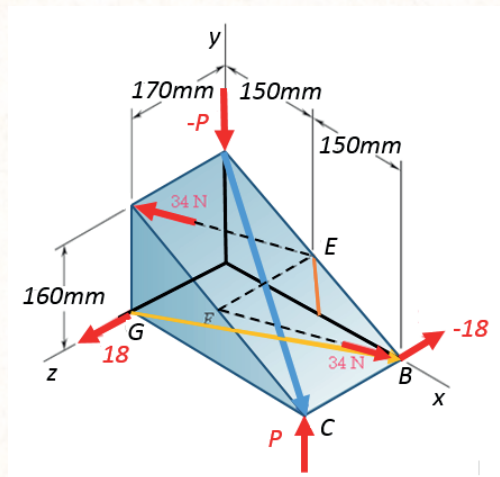


Figura 67. Interpretación gráfica ejercicio 3.10

Ilustración William Bonilla

**Solución:**

$$F = 18 \text{ N}$$

$$M1 = r_{y/AG} \otimes F$$

$$M1 = (0,3i + 0j - 0,17k) \otimes (-18k)$$

$$M1 = 5,4j \text{ Nm}$$



$$P = 15 \text{ N}$$

$$M2 = r_{C/A} \otimes P$$

$$r_{C/A} = (0,3i - 0,16j + 0,17k)\text{m}$$

$$M2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0,3 & -0,16 & +0,17 \\ 0 & 15 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M2 = (-2,55i + 4,5 k)\text{N.m}$$

$$M3 = r_{E/D} \otimes FED$$

$$\overrightarrow{F_{ED}} = F_{ED} + U_{ED}$$

$$U_{ED} = \frac{ED}{|ED|}$$

$$\frac{y}{0,16} = \frac{0,15}{0,3}$$

$$y = 0,08\text{m}$$

$$ED = (-0,15i + 0,08j + 0,17k)\text{m}$$

$$|ED| = 0,24\text{m}$$

$$U_{ED} = \frac{-0,15i + 0,08j + 0,17k}{0,24}$$

$$U_{ED} = -0,625i + 0,333j + 0,708k$$

$$F_{ED} = 34\text{N}(-0,625i + 0,333j + 0,708k)$$

$$F_{ED} = (-21,25i + 11,33j + 24,08k)\text{N}$$

$$M3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -0,17 \\ -21,25 & 11,33 & 24,08 \end{vmatrix}$$

$$M3 = (1,92i + 3,61j)\text{N.m}$$

$$\overline{MR} = \overline{M1} + \overline{M2} + \overline{M3}$$

$$\overline{MR} = (-0.63i + 9.01j + 4.5k) N \cdot m$$

$$\overline{MR} = 10.09 N \cdot m$$

$$\cos \theta_x = \frac{-0.63}{10.09}$$

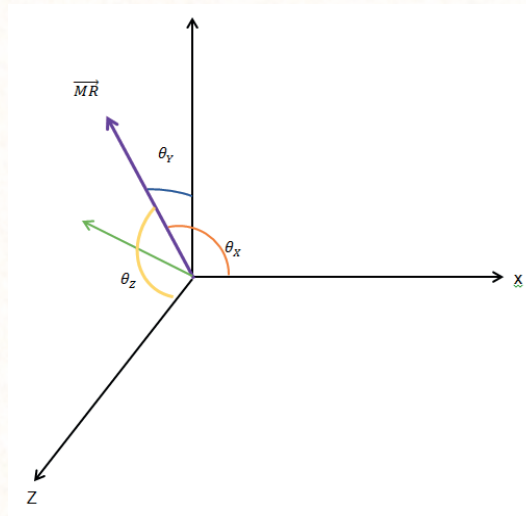
$$\theta_x = 93.58^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{9.01}{10.09}$$

$$\theta_y = 26.75^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{4.5}{10.09}$$

$$\theta_z = 63.51^\circ$$



### EJERCICIO 3.11

Dado  $P = 32 \text{ lb}$ , sustituya los tres pares por un solo par equivalente, determine su magnitud y los ángulos directores.

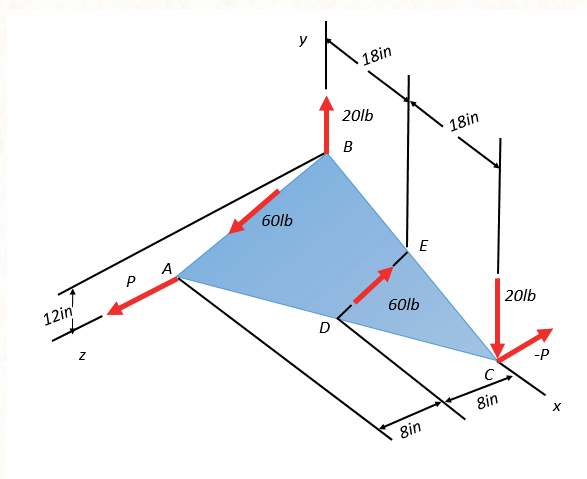
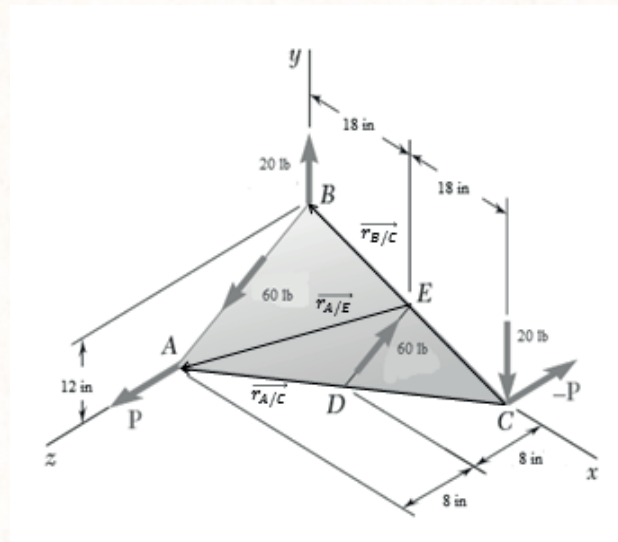


Figura 68. Interpretación gráfica ejercicio 3.11

Ilustración William Bonilla



**Solución:**

$$\vec{M}_1 = (\vec{r}_{A/C} \otimes P)$$

$$\vec{r}_{A/C} = (-36\vec{i} + 16\vec{k}) \text{ in}$$

$$\vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -36 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 32 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_1 = (1152\vec{j}) \text{ lb in}$$

$$\vec{M}_2 = (\vec{r}_{B/C} \otimes 20\vec{j})$$

$$\vec{r}_{B/C} = (-36\vec{i} + 12\vec{j}) \text{ in}$$

$$\vec{M}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -36 & 12 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_2 = (-720\vec{k}) \text{ lb in}$$

$$\vec{M}_3 = (\vec{r}_{A/E} \otimes \vec{F}_{BA})$$

$$\vec{r}_{A/E} = (-18\hat{i} - 6\hat{j} + 16\hat{k}) \text{ in}$$

$$\vec{F}_{BA} = 60 \text{ lb } \mu_{BA}$$

$$\mu_{BA} = \frac{-12\hat{j} + 16\hat{k}}{20}$$

$$\mu_{BA} = -0,6\hat{j} + 0,8\hat{k}$$

$$\vec{F}_{BA} = (-36\hat{j} + 48\hat{k}) \text{ lb}$$

$$\vec{M}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -18 & -6 & 16 \\ 0 & -36 & 48 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_3 = (288\hat{i} + 864\hat{j} + 648\hat{k}) \text{ lb in}$$

$$\vec{M}_7 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

$$\vec{M}_7 = (288\hat{i} + 2016\hat{j} - 72\hat{k}) \text{ lb in}$$

$$M_7 = 2037,74 \text{ lb in}$$

$$\cos \theta_x = \frac{288}{2037,74}$$

$$\cos \theta_y = \frac{2016}{2037,74}$$

$$\cos \theta_z = \frac{-72}{2037,74}$$

$$\theta_x = 81,87^\circ$$

$$\theta_y = 8,37^\circ$$

$$\theta_z = 92,02^\circ$$

### 3.13 REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZA Y PAR

Una fuerza  $F$  que opere sobre un cuerpo rígido puede ser trasladado a un punto cualesquiera "O" siempre y cuando se agregue un par  $M_O$  cuyo momento sea igual al momento de  $F$  con respecto al punto "O".

Pueden unirse dos fuerzas al punto O, una igual a  $F$  y otra igual a  $-F$ , sin modificar, el efecto que la fuerza original tiene sobre el cuerpo rígido Figura (b). Como una consecuencia de esta transformación, ahora una fuerza  $F$  se aplica en O; las otras dos fuerzas forman un par con un momento.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \otimes \vec{F}$$

Ecuación 22. Fuerza y Par

Por tanto, cualquier fuerza  $F$  que actúe sobre un cuerpo rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario O siempre y cuando se agregue un par cuyo momento sea igual al momento de  $F$  con respecto a O. (BEER & JOHNSTON, 2010)

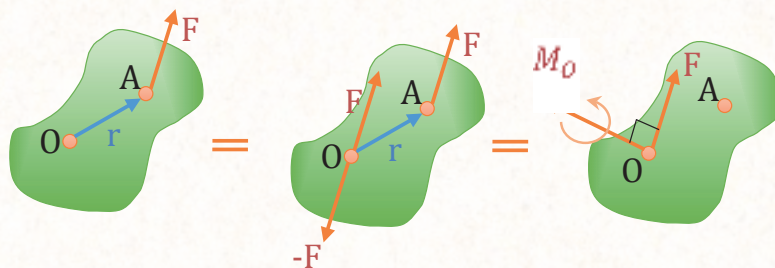


Figura 69. Sistema fuerza a par

Ilustración William Bonilla

### 3.14 REDUCCION DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y PAR

Considérese un sistema de fuerzas  $F_1, F_2, F_3$ , que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos  $A_1, A_2, A_3$ , definidos por los vectores de posición  $r_1, r_2$ , y  $r_3$ . Como se observa en la sección anterior,  $F_1$ , puede ser trasladada de  $A_1$  a un punto dado O, si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento  $M_O$  igual al momento de  $F_1$  con respecto a O,  $M_O = r_1 \otimes F_1$ , las fuerzas originales, ahora actuando en O, y los vectores de par que han sido agregados.

Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante  $R$ . (BEER & JOHNSTON, 2010)

El sistema equivalente fuerza-par está definido por las ecuaciones.

$$R = \sum F \quad M_O^R = \sum M_O = \sum r \otimes F$$

$$\overline{M}_O^R = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 \quad R = F_1 + F_2 + F_3$$

Ecuación 23. Sistema equivalente Fuerza - Par

Donde:

$M_O^R$  = Momento resultante con respecto a  $O$

$r$  = vector posición

$R$  = Resultante

$F$  = Fuerza

$M$  = Momento

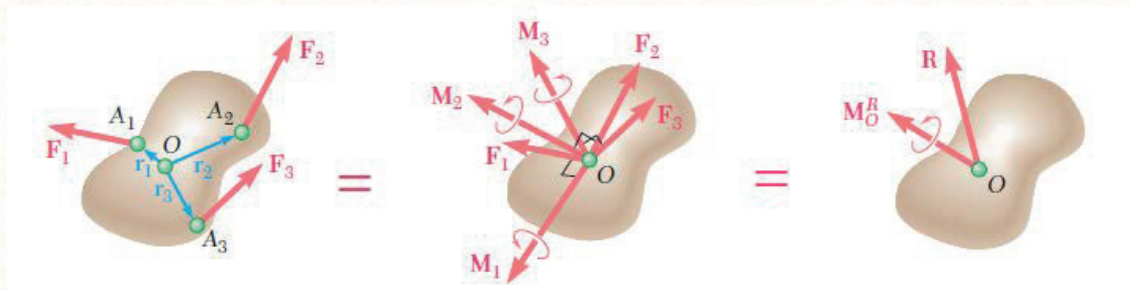


Figura 70. Sistema de fuerzas a una fuerza y un par (BEER & JOHNSTON, 2010)

### 3.15 EJERCICIOS RESUELTOS

#### EJERCICIO 3.12

La tensión en el cable unido al extremo C de un aguilón ajustable ABC es de 600 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable en C por un sistema equivalente fuerza-par.

- En A
- En B

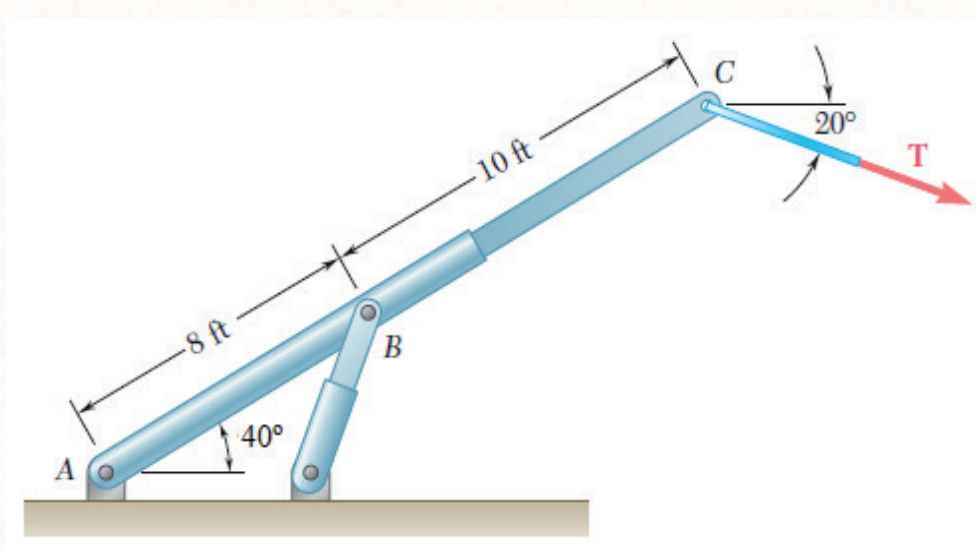


Figura 71. Interpretación gráfica ejercicio 3.12  
(BEER & JOHNSTON, 2010)

**a) Solución:**

$$T_x = 600 \text{ lb} \cos 20$$

$$T_x = 563.82 \text{ lb}$$

$$T_y = 600 \text{ lb} \sin 20$$

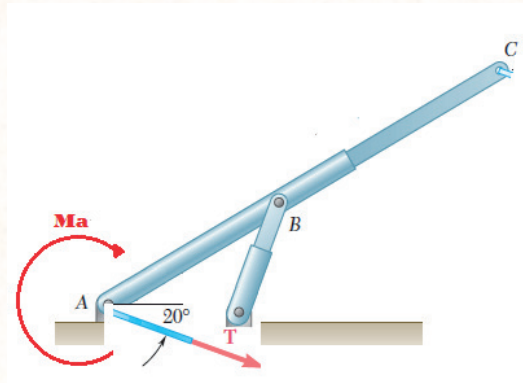
$$T_y = 205.21 \text{ lb}$$

$$\sum M_A = -(563.62 \text{ lb})(18 * \sin 40 \text{ ft}) - (-205.21 \text{ lb})(18 * \cos 40)$$

$$\sum M_A = -3691.58 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$\overline{M}_A = 3691.58 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad \cup$$

$$T = 600 \text{ lb}, 340^\circ$$



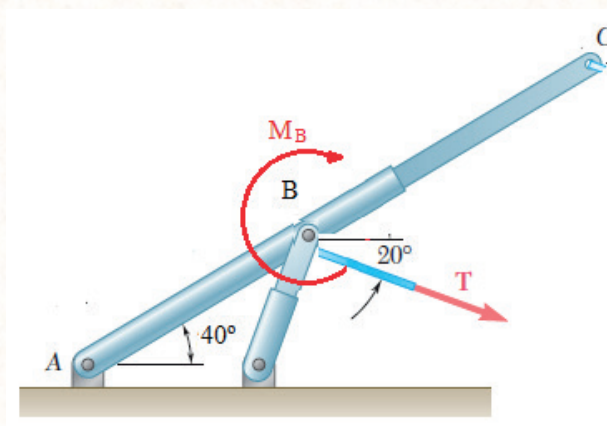
b)

$$\sum M_A = -(563.62 \text{ lb})(10 \sin 40 \text{ ft}) - (205.21 \text{ lb})(10 \cos 40)$$

$$\sum M_A = -5194.88 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$\overline{M}_B = 5194.88 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad \cup$$

$$T = 600 \text{ lb}, 340^\circ$$



### EJERCICIO 3.13

Reemplace el sistema de fuerzas actuando sobre la viga por una fuerza y momento de un par equivalentes en el punto B. El grosor de la viga es de 0.5 m



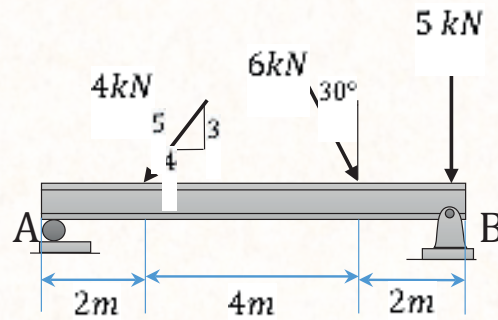
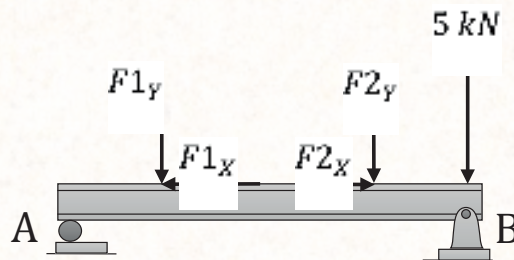


Figura 72. Ejercicio 3.13  
 Ilustración William Bonilla  
 Descomposición de las fuerzas



Solución:

$$F1_x = 4 \text{ kN} \frac{4}{5} = 3.2 \text{ kN}$$

$$F1_y = 4 \text{ kN} \frac{3}{5} = 2.4 \text{ kN}$$

$$F2_x = 6 \text{ kN} \sin 30 = 3 \text{ kN}$$

$$F2_y = 6 \text{ kN} \cos 30 = 5.2 \text{ kN}$$

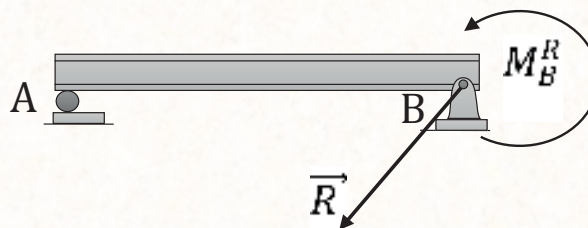
$$\curvearrowright \sum M_B^H = (3.2 \text{ kN})(0.5 \text{ m}) + (2.4 \text{ kN})(6 \text{ m}) - (3 \text{ kN})(0.5 \text{ m}) + (5.2 \text{ kN})(2 \text{ m})$$

$$M_B^R = 24.9 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \curvearrowright$$

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

$$R = (3 - 3.2) \text{ kN} \vec{i} + (-2.4 - 5.2 - 5) \text{ kN} \vec{j}$$

$$R = (-0.2 \vec{i} - 12.6 \vec{j}) \text{ kN}$$



**EJERCICIO 3.14**

Una fuerza  $F_1$  de 77 N y un par  $M_1$  de  $31 \text{ N} \cdot \text{m}$  se aplican en la esquina E de la placa doblada que se muestra en la figura. Si  $F_1$  y  $M_1$  deben reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par ( $F_2, M_2$ ) en la esquina de B y si  $(M_2)_z = 0$ , determine.

- a. La distancia  $d$
- b.  $F_2$  y  $M_2$ .

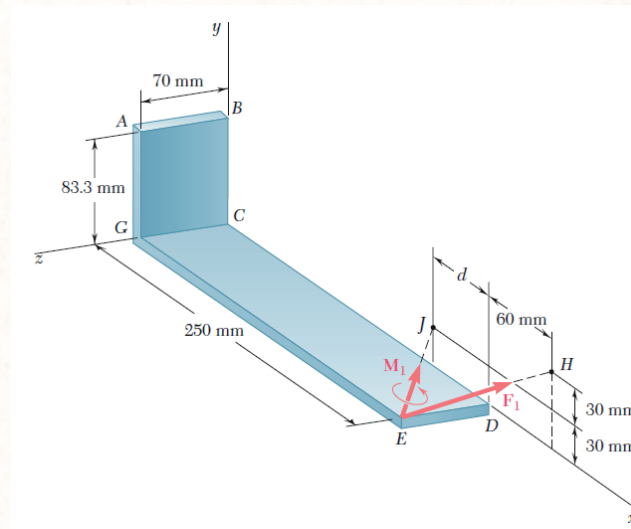
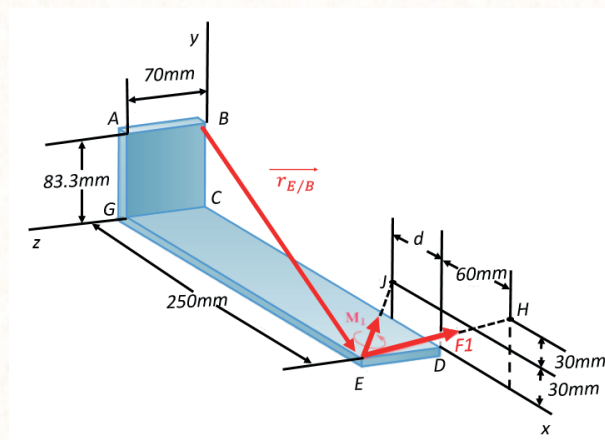


Figura 73. Interpretación gráfica ejercicio 3.14  
(BEER & JOHNSTON, 2010)



**Solución:**

a)

$$M_2 = M_E + M_1 = (r_{E/B} \otimes F_1) + M_1$$

$$\overline{r_{E/G}} = (0.25 \mathbf{i} - 0.0833 \mathbf{j} + 0.07 \mathbf{k}) \text{ m}$$

$$\overline{F_1} = F_1 \overline{U_{EH}}$$

$$\overline{F_1} = 77 \text{ N} \left( \frac{0.06 \mathbf{i} + 0.06 \mathbf{j} - 0.07 \mathbf{k}}{0.11} \right)$$

$$\overline{F_1} = (42 \mathbf{i} + 42 \mathbf{j} - 49 \mathbf{k}) \text{ N}$$

$$\overline{M_1} = M_1 \overline{U_{EJ}}$$

$$\overline{M_1} = 31 \text{ N.m} \left( \frac{-d \mathbf{i} + 0.03 \mathbf{j} - 0.07 \mathbf{k}}{\sqrt{d^2 + 0.0058}} \right)$$

$$\overline{M_1} = \left( \frac{-31d \mathbf{i} + 0.93 \mathbf{j} - 2.17 \mathbf{k}}{\sqrt{d^2 + 0.0058}} \right) \text{ N.m}$$

$$\overline{M_G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.25 & -0.0833 & 0.07 \\ 42 & 42 & -49 \end{vmatrix} + \overline{M_1}$$

$$\overline{M_G} = [(4.087 - 2.94)\mathbf{i} - (-12.25 - 2.94)\mathbf{j} + (10.5 + 3.49)\mathbf{k}] + \overline{M_1}$$

$$\overline{M_G} = (1.14 \mathbf{i} + 15.19 \mathbf{j} + 14 \mathbf{k}) \text{ N.m} + \left( \frac{-31d \mathbf{i} + 0.93 \mathbf{j} - 2.17 \mathbf{k}}{\sqrt{d^2 + 0.0058}} \right) \text{ N.m}$$

$$(\overline{M_2})_z = 0$$

$$14 \mathbf{k} + \frac{-2.17 \mathbf{k}}{\sqrt{d^2 + 0.0058}} = \mathbf{0}$$

$$\sqrt{d^2 + 0.0058} (14) - 2.17 = 0$$

$$(d^2 + 0.0058)(196) = 4.71$$

$$d^2 = 0.018225$$

$$d = 0.135 \text{ m}$$

b)

$$\overline{M_1} = \left( \frac{-31(0.135) \mathbf{i} + 0.93 \mathbf{j} - 2.17 \mathbf{k}}{\sqrt{0.135^2 + 0.0058}} \right)$$

$$\overline{M_1} = (-27 \mathbf{i} + 6 \mathbf{j} - 14 \mathbf{k}) \text{ N.m}$$

$$\overline{M_G} = (1.14 \mathbf{i} + 15.19 \mathbf{j} + 14 \mathbf{k}) \text{ N.m} + (-27 \mathbf{i} + 6 \mathbf{j} - 14 \mathbf{k}) \text{ N.m}$$

$$\overline{M_2} = \overline{M_G} = (-25.86 \mathbf{i} + 21.19 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}) \text{ N.m}$$

$$\overline{F_1} = \overline{F_2}$$

$$\overline{F_2} = (42 \mathbf{i} + 42 \mathbf{j} - 49 \mathbf{k}) \text{ N}$$



# Capítulo 4

## EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS



## EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

### 4.1 OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido.
- Presentar el concepto de diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido. (Revisar capítulo II, Ítem 2.3)
- Mostrar cómo resolver problemas de equilibrio de cuerpo rígido usando las ecuaciones de equilibrio.

### 4.2 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN 2D

Para (BEER & JOHNSTON, 2010) expresa que cuando la fuerza y el par son iguales a cero, las fuerzas externas forman un sistema equivalente a cero y se dice que el cuerpo rígido se encuentra en equilibrio.

Es necesario desarrollar las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido sometido a “n” fuerzas externas y “m” pares.

Cuando un objeto sobre el cual actúa un sistema de fuerzas y momentos está en equilibrio, se satisfacen las siguientes condiciones:

1. La suma de las fuerzas es igual a cero:

$$\sum F = 0$$

2. La suma de los momentos respecto a cualquier punto es igual a cero:

$$\sum M_{\text{cualquier punto}} = 0$$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESCALARES.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_{\text{cualquier punto}} = 0$$

Ecuación 24. Ecuaciones de equilibrio escalares

Para resolver un ejercicio relacionado con el equilibrio de un cuerpo es necesario tomar en cuenta todas las fuerzas que actúen sobre este para ello se debe realizar el D.C.L. del mismo.

## SOPORTES

Donde sea que nos encontremos parados el piso nos soporta, si nos sentamos en una silla esta nos soporta, lo que expresa el hecho de que los soportes “reaccionan”.

### 4.2.1 Soporte de pasador

Para (BEDFORD & FOWLER, 2008), expresa que el soporte no puede generar un par respecto al eje del pasador para impedir el giro. Así, un soporte de pasador no puede generar un par respecto al eje del pasador pero sí puede ejercer una fuerza sobre un cuerpo en cualquier dirección, lo que comúnmente se expresa representando la fuerza en términos de sus componentes.

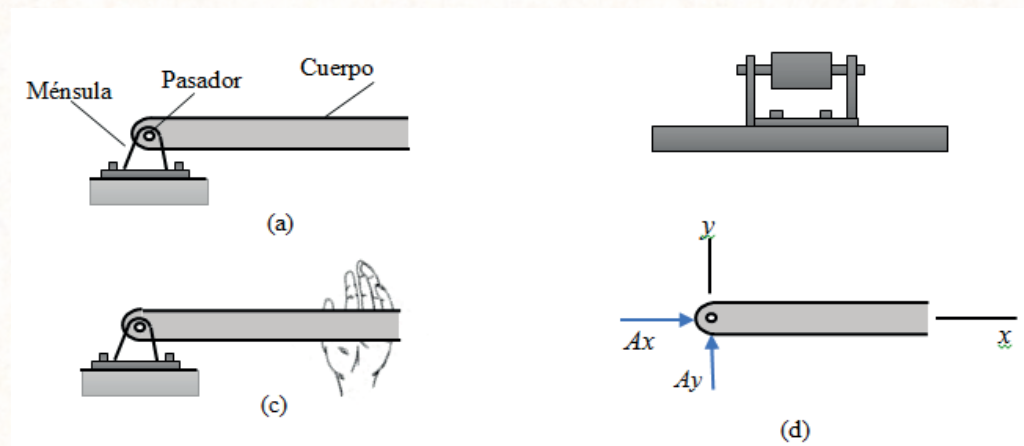


Figura 74. DCL soporte de pasador

Ilustración William Bonilla

### 4.2.2 Soporte de rodillo

Muy similar al soporte de pasador pero esta vez puede moverse paralelo a la superficie porque se encuentra soportado por un rodillo así solo se genera una reacción normal a la superficie.



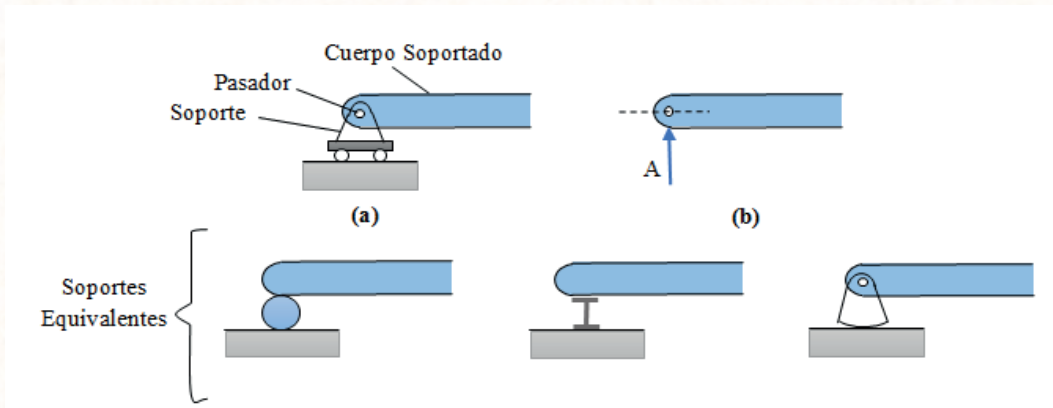


Figura 75. DCL Soporte de rodillo y sistemas equivalentes.  
Ilustración William Bonilla

### 4.2.3 Soporte de empotramiento

Para (BEDFORD & FOWLER, 2008), expresa que el soporte de empotramiento, o soporte fijo, presenta el objeto soportado literalmente empotrado en la pared. Un empotramiento puede generar dos componentes de fuerza y un par.

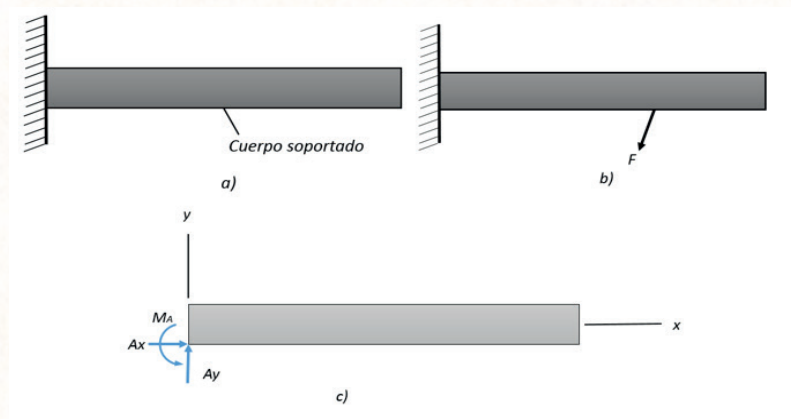
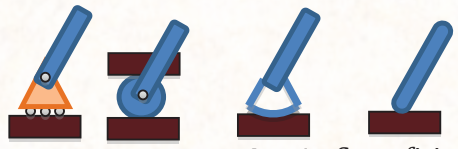

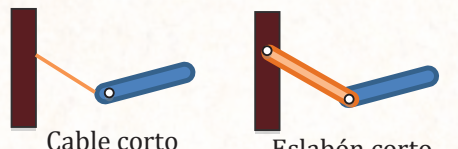
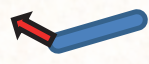
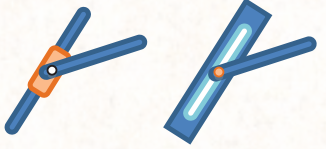
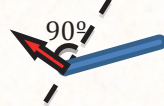
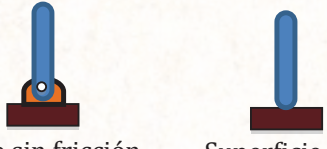
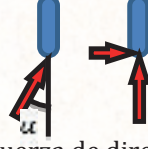
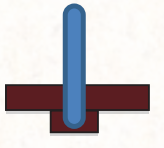
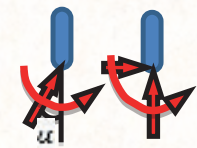


Figura 76. DCL Soporte de empotramiento.  
Ilustración William Bonilla

Tabla 2. Reacciones de soportes bidimensionales

Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas

 <p>Rodillos o Balancí Superficie sin fricción</p>	 <p>Fuerza con línea de acción</p>	1
 <p>Cable corto Eslabón corto</p>	 <p>Fuerza con línea de acción</p>	1
 <p>Collarín sobre una barra sin Perno sin fricción en una ranura</p>	 <p>Fuerza con línea de acción conocida</p>	1
 <p>Perno sin fricción, articulación o Superficie</p>	 <p>Fuerza de dirección desconocida</p>	2
 <p>Apoyo fijo</p>	 <p>Fuerza y par</p>	3

### 4.3 EJERCICIOS RESUELTOS

#### EJERCICIO 4.1

Determine la reacciones en los pasadores A y B, el resorte tiene una longitud no alargada de 80 mm.

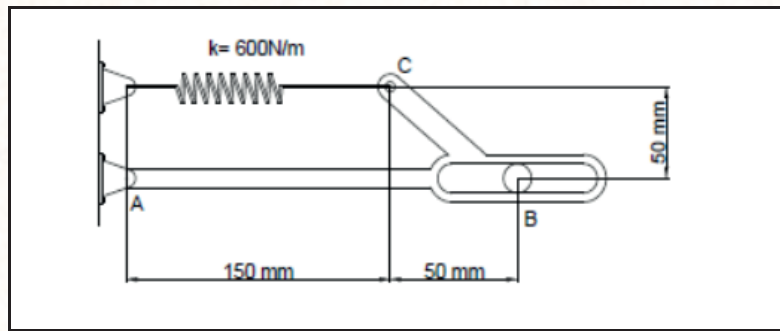
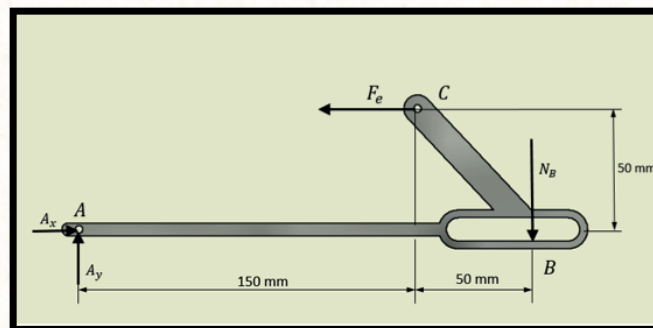


Figura 77. Ejercicio 4.1  
Ilustración William Bonilla

Dibujamos un croquis del cuerpo aislado de su entorno con sus respectivas fuerzas reacciones y tensiones

**DCL**



**Solución:**

$$F_e = k + x$$

$$F_e = 600 + (0.15 - 0.08)$$

$$F_e = 42 \text{ N}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad \uparrow + \sum F_y = 0$$

$$Ax - F_e = 0$$

$$Ay - NB = 0$$

$$Ax - 42 = 0$$

$$Ay = 10.5 \text{ N } \uparrow$$

$$\Delta x = 42 \text{ N} \rightarrow$$

$$\sum M_A = 0$$

$$42 + 0.05 - NB + 0.2 = 0$$

$$NB = 10.5 \text{ N}$$

$$NB = 10.5 \text{ N} \downarrow$$

### EJERCICIO 4.2

Si se sabe que la tensión en el alambre BD es de 1300 N, determine la reacción del bastidor mostrados en el apoyo fijo C.

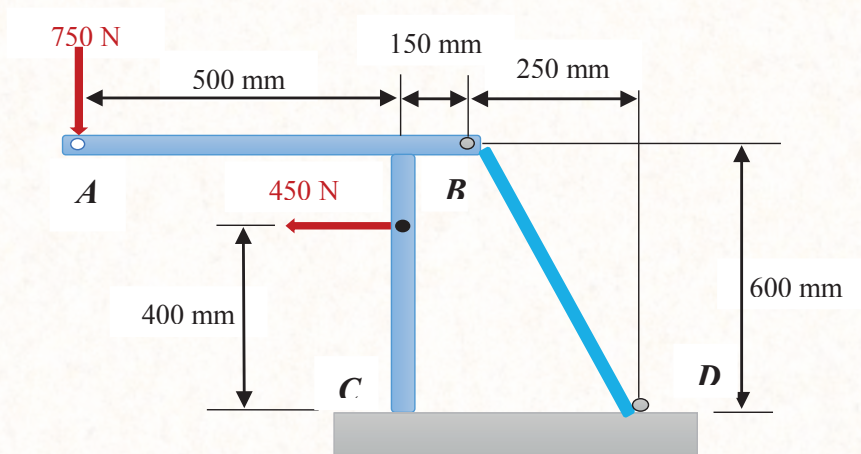
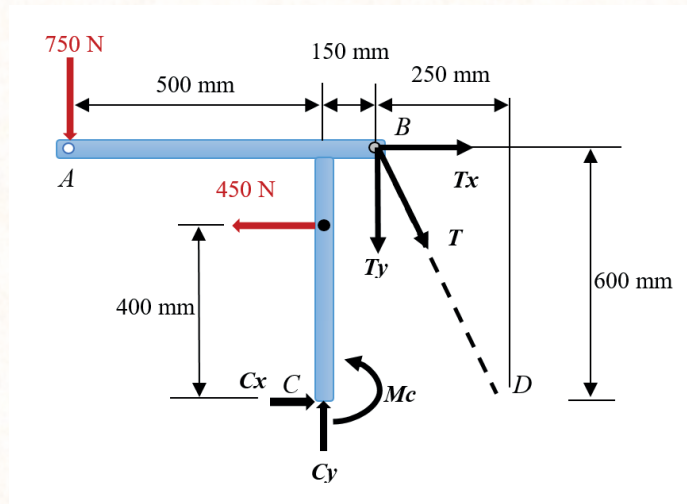


Figura 78. Bastidor ejercicio 4.2

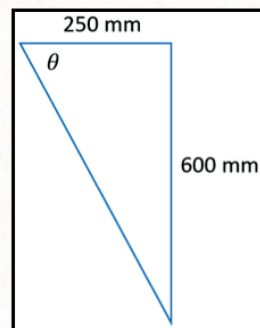
Ilustración William Bonilla

### DCL Bastidor

Dibujamos un croquis del cuerpo aislado de su entorno con sus respectivas fuerzas reacciones y tensiones.



**Solución.**



$$\tan \theta = \frac{600}{250}$$

$$\theta = \tan^{-1} 2.4$$

$$\theta = 67.38$$

$$T_y = 1300 \sin 67.38^\circ$$

$$T_y = 1200 \text{ N}$$

$$T_x = 1300 \cos 67.38$$

$$T_x = 500 \text{ N}$$

$$\sum M_c = 0$$

$$M_c + (750 * 0.5) + (450 * 0.4) - (500 * 0.6) - (1200 * 0.15) = 0$$

$$M_c = -75 \text{ N.m}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-450 + 500 + C_x = 0$$

$$C_x = -50 \text{ N}$$

$$C_x = 50 \text{ N} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-750 - 1200 + C_y = 0$$

$$C_y = 1950 \text{ N} \uparrow$$

### EJERCICIO 4.3

Un sistema de bocinas está suspendido mediante cables unidos en D y E. La masa del sistema de bocinas es 160 Kg y su peso actúa en G. Determine las tensiones en los cables y las reacciones en A y C.

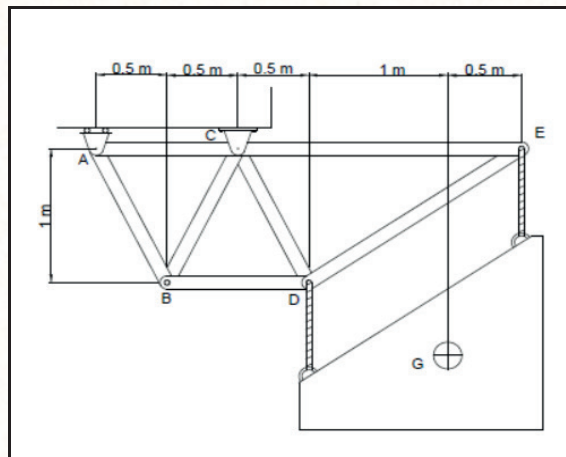
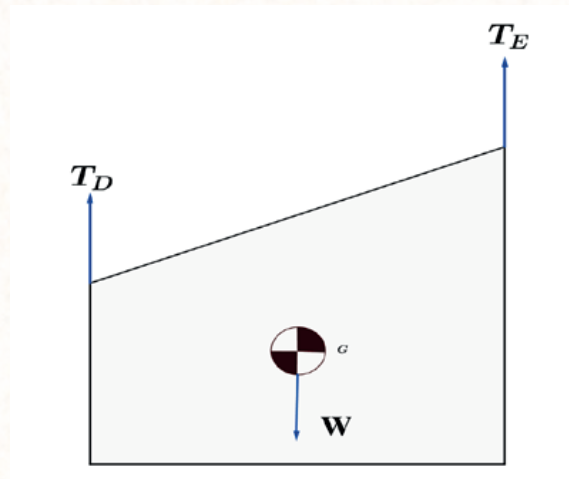


Figura 79. Interpretación gráfica ejercicio 4.3

Ilustración William Bonilla

**D. C.L (Sistema de Bocinas)****Solución:**

$$\sum M_D = 0$$

$$T_E(1.5m) - 1569.6N(1m) = 0$$

$$T_E = 1046.4 N$$

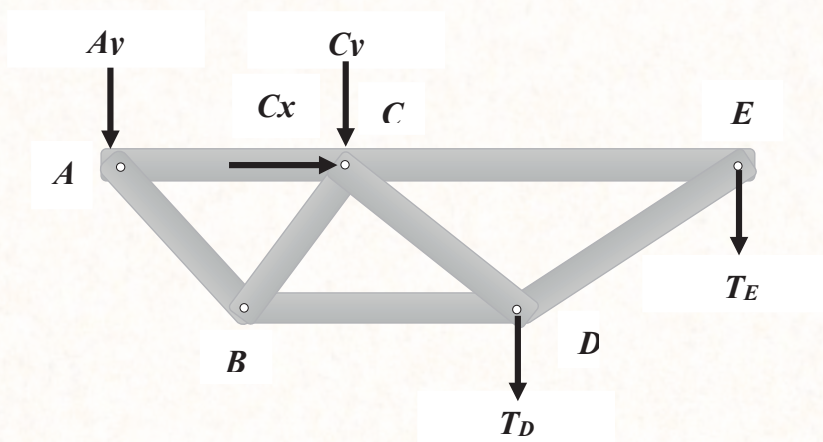
$$\sum F_y = 0$$

$$T_E + T_D - W = 0$$

$$T_D = W - T_E$$

$$T_D = 523.2 N$$

**D.C.L de la Armadura.**



$$\sum M_A = 0$$

$$-C_y(1m) - 523.2N(1.5m) - 1046.4N(3m) = 0$$

$$C_y = -3924 N$$

$$\bar{C}_y = 3924 N \uparrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$C_x = 0 N$$

$$\sum M_C = 0$$

$$A_y(1m) - 523.2N(0.5m) - 1046.4N(2m) = 0$$

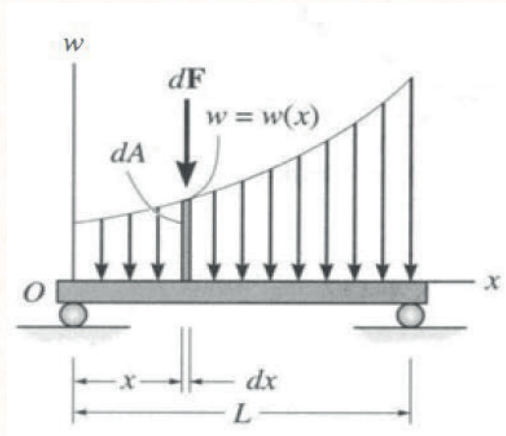
$$\bar{A}_y = 2354.4 N \downarrow$$

#### 4.4 TIPOS DE CARGA

Las cargas distribuidas son determinadas usando una función de carga  $w = w(x)$  que indica la intensidad de la carga a lo largo del cuerpo. Esta

intensidad es medida en  $\frac{N}{m}$ ,  $\frac{lb}{pie}$  o  $\frac{lb}{in}$ .





(HIBBELER, 2010)

$$dF = w(x)dx = dA$$

Ecuación 25. Magnitud de la fuerza resultante

Los efectos externamente causados por una carga distribuida coplanar que actúa sobre un cuerpo pueden ser representados por una sola fuerza resultante.

La carga o fuerza resultante es proporcional al área que representa, el punto de aplicación depende de la figura que represente.

#### 4.4.1 Cargas puntuales

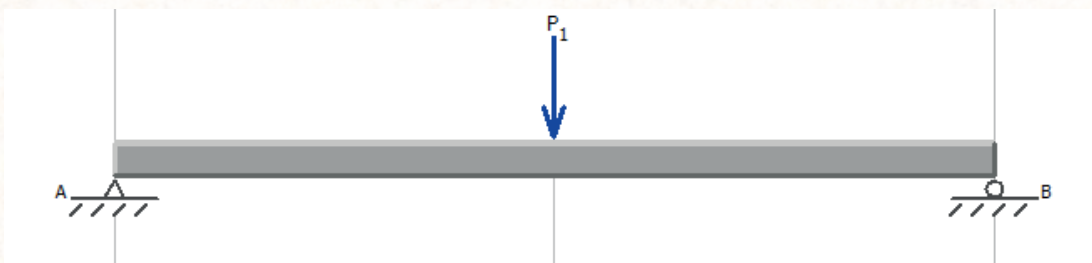


Figura 80. Carga Puntual  
Ilustración William Bonilla

#### 4.4.2 Cargas uniformes distribuidas

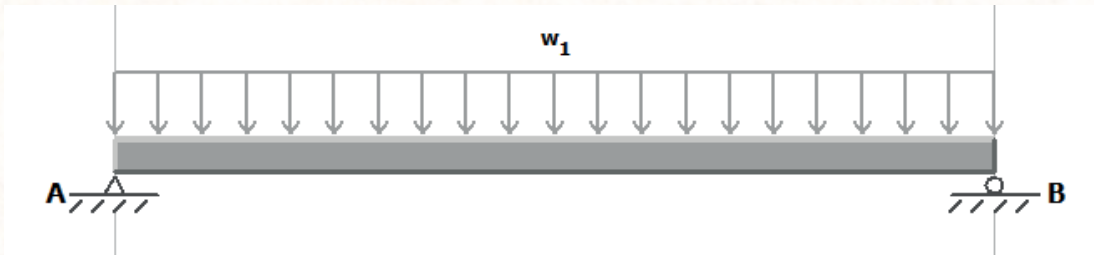
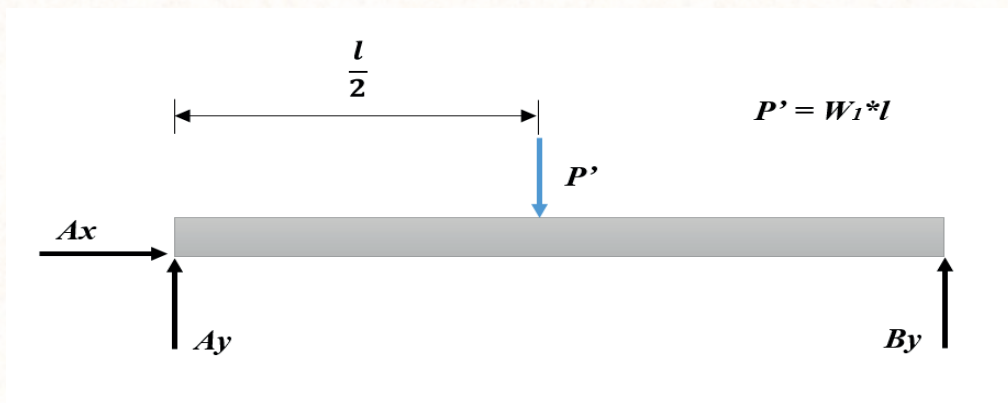


Figura 81. Carga Uniforme Distribuida  
Ilustración William Bonilla

#### Diagrama de cuerpo libre



#### 4.4.3 Cargas variables distribuidas

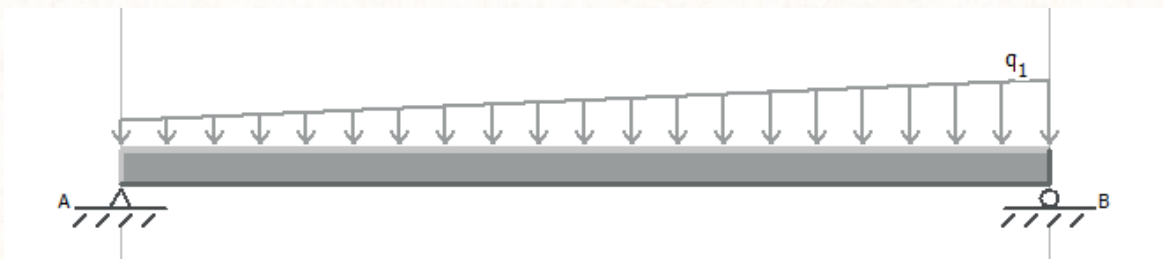
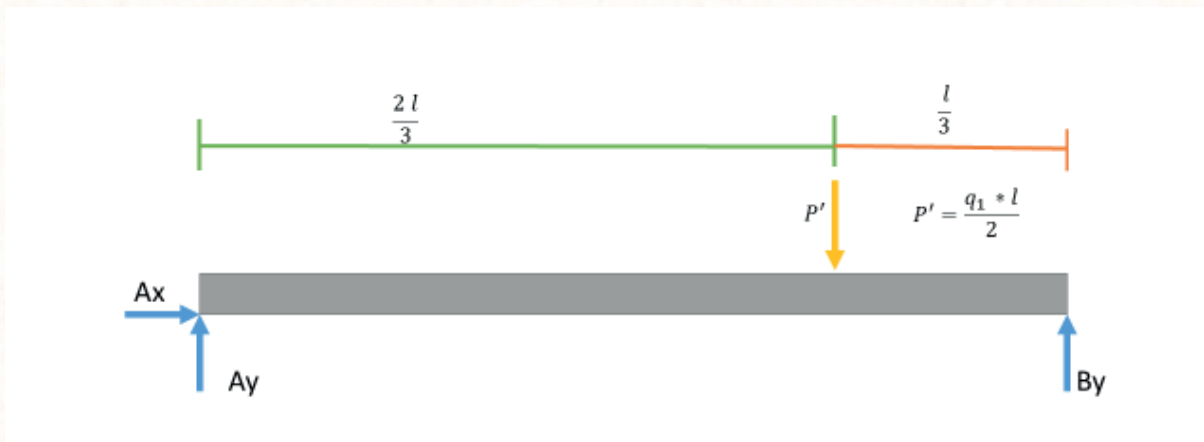


Figura 82. Carga variable distribuida  
Ilustración William Bonilla

#### Diagrama de cuerpo libre



#### 4.4.4 Momento concentrado

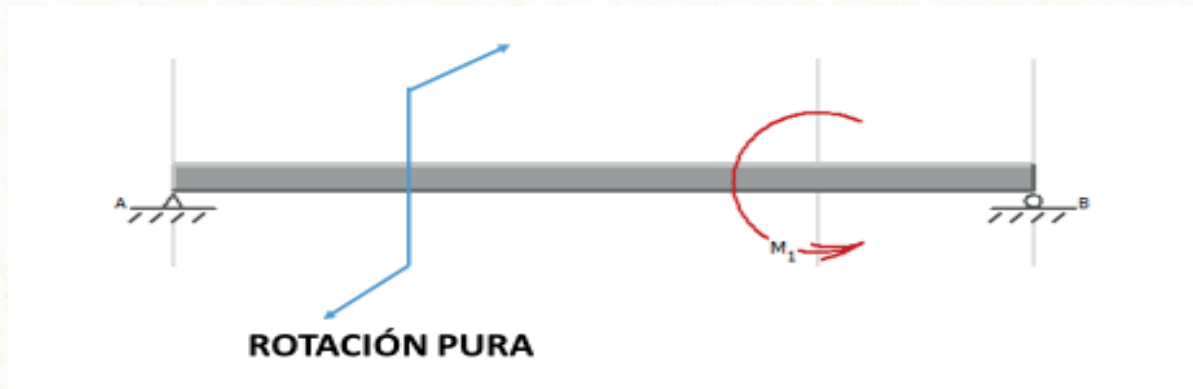


Figura 83. Momento Concentrado

Ilustración William Bonilla

### 4.5 EJERCICIOS RESUELTOS

#### EJERCICIO 4.4

El muro de contención AD está sometido a presiones de agua y de tierra de relleno. Suponiendo que AD está articulada en el terreno en A, determine las reacciones horizontal y vertical en ese punto y también la tensión requerida en el ancla BC necesaria para el equilibrio. El muro tiene una masa de 1200 Kg

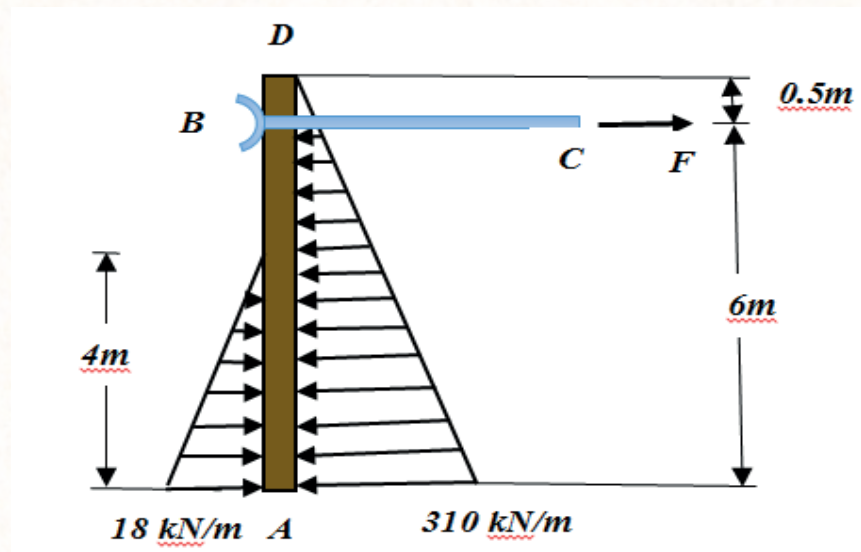
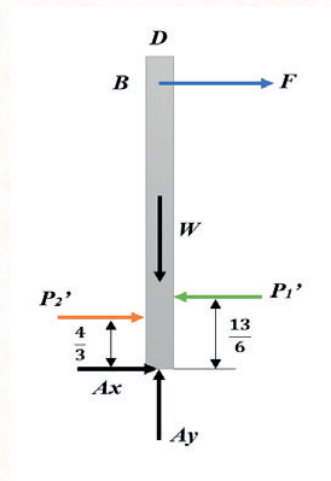


Figura 84. Interpretación gráfica ejercicio 4.4  
Ilustración William Bonilla

D.C.L (Barra B)



Solución:

$$P'_1 = \frac{310 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 6.5 \text{ m}}{2} = 1007.5 \text{ kN}$$

$$P'_2 = \frac{118 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m}}{2} = 236 \text{ kN}$$

$$W = 1200 \text{ kg} * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 11.772 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$1007.5 \text{ kN} \left( \frac{13}{6} \text{ m} \right) - 236 \text{ kN} \left( \frac{4}{3} \text{ m} \right) - F(6 \text{ m}) = 0$$

$$F = 311.375 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$236 \text{ kN} - 1007.5 \text{ kN} + Ax + 311.375 \text{ kN} = 0$$

$$Ax = 460.125 \text{ kN}$$

$$\bar{A}_x = 460.125 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$Ay - W = 0$$

$$Ay = W$$

$$Ay = 11.772 \text{ kN}$$

$$\bar{A}_y = 11.772 \text{ kN} \uparrow$$

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

$$A = 460.28 \text{ kN}$$

#### EJERCICIO 4.5

Sabiendo que el siguiente sistema se encuentra en equilibrio donde en C y E existen rotulas, determinar las componentes de reacción en los apoyos A, B, D y F

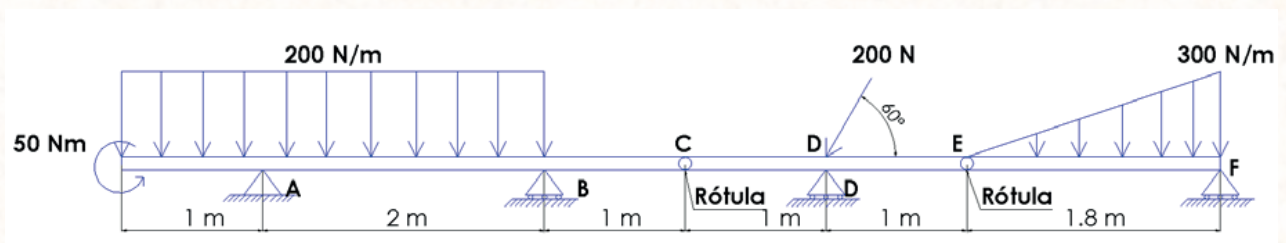


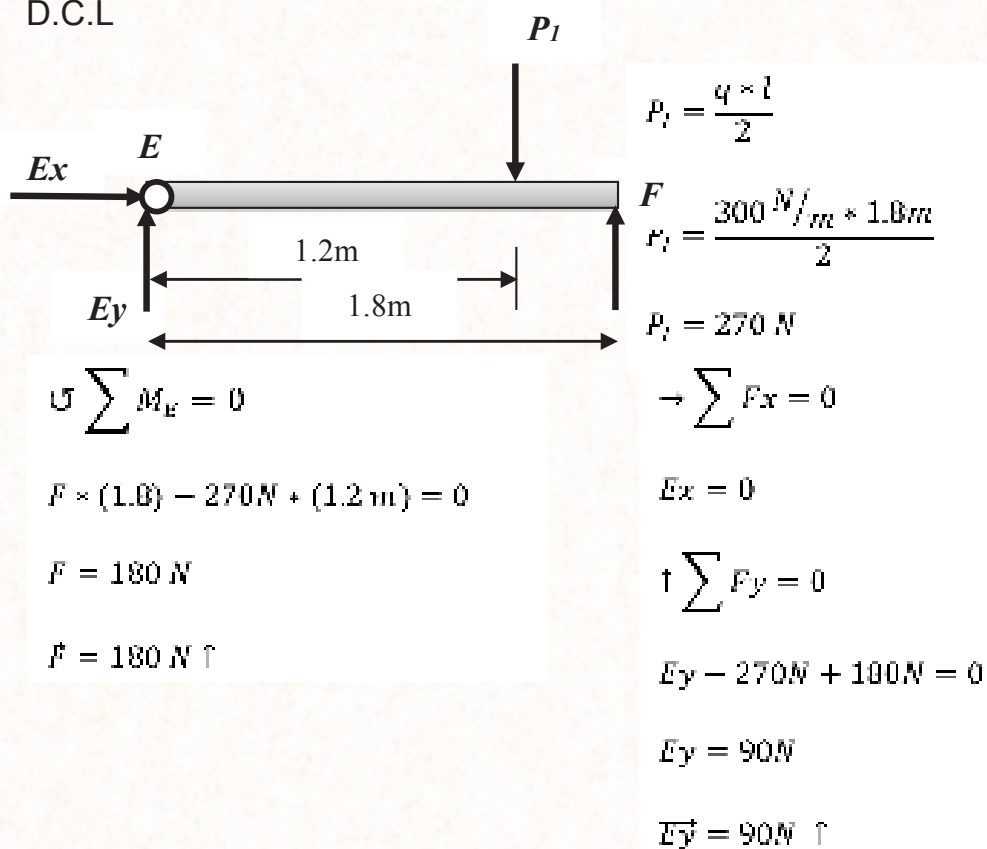
Figura 85. Sistema de Cargas ejercicio 4.5

Ilustración William Bonilla

**Solución:**

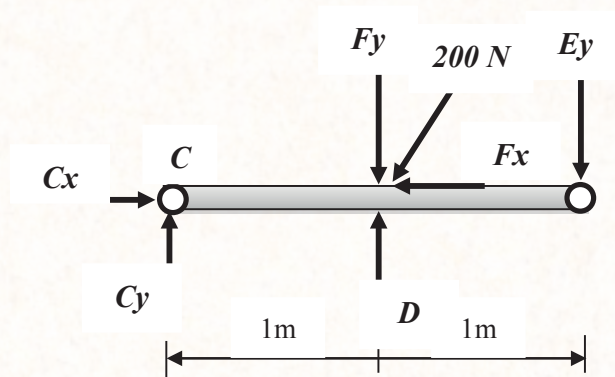
TRAMO EF

D.C.L



TRAMO CDE

D.C.L.



$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$C_x - 100 \text{ N} = 0$$

$$C_x = 100 \text{ N}$$

$$\vec{C}_x = 100 \text{ N} \rightarrow$$

$$\circlearrowleft \sum M_c = 0$$

$$-173.21 \text{ N}(1 \text{ m}) + D * (1 \text{ m}) - 90 \text{ N} * (2 \text{ m}) = 0$$

$$D = 353.205 \text{ N}$$

$$\vec{D} = 353.205 \text{ N} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

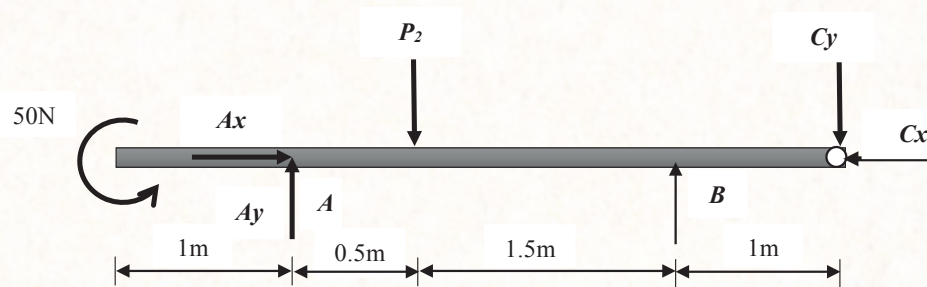
$$C_y - 173.21 \text{ N} + 353.205 \text{ N} - 90 \text{ N} = 0$$

$$C_y = -90 \text{ N}$$

$$\vec{C}_y = 90 \text{ N} \downarrow$$

### TRAMO ABC

D.C.L



$$P_2 = q \cdot l$$

$$P_2 = 200 \frac{N}{m} \cdot 3m$$

$$P_2 = 600N$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$Ax - Cx = 0$$

$$Ax = Cx$$

$$Ax = 100N$$

$$\vec{A}_x = 100N \rightarrow$$

$$\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$50Nm - 600N(0.5m) + B(2m) - (-90N)(3m) = 0$$

$$B = -10N$$

$$\vec{B} = 10N \downarrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$Ay - 600N + B - Cy = 0$$

$$Ay = 600N - (-10N) + (-90N)$$

$$Ay = 520N$$

$$\vec{A}_y = 520N \uparrow$$

$$|A| = \sqrt{Ay^2 + Ax^2}$$

$$|A| = \sqrt{100^2 + 520^2}$$



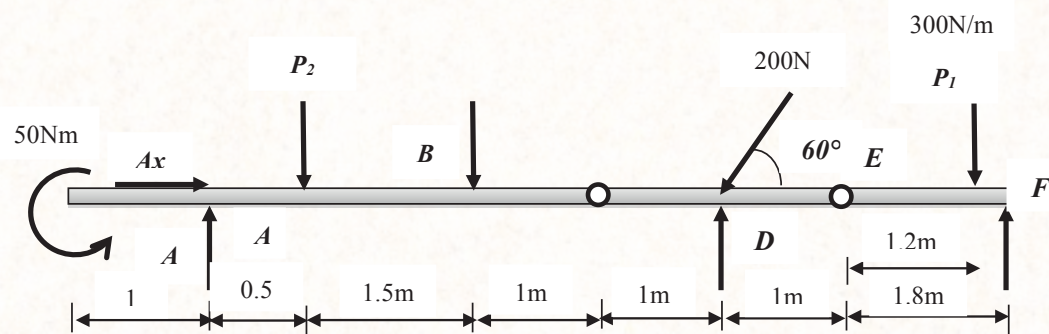
$$|A| = 529.520 \text{ N}$$

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{520}{100}$$

$$\theta = 79.11$$

Ahora comprobamos el equilibrio de toda la viga, incorporando las reacciones obtenidas en el cálculo previo.



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow 100 - 200 \cos(60) = 0$$

$$0 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B + D + F - 200 \sin(60) - P_2 - P_1 = 0$$

$$520 - 10 + 353.205 + 180 - 173.205 - 600 - 270 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\curvearrow \sum M_A = 0$$

$$50 \text{ Nm} - P_2(0.5) - B(2) + D(4) - 200 \sin(60)(4) - P_1(6.2) + F(6.8) = 0$$

$$50 - (0.5 + 600) - (10 + 2) + (353.205 + 4) - (173.205 \times 4) - (270 \times 6.2) + (180 \times 6.8) = 0$$

$$0 = 0$$

**EJERCICIO 4.6**

Calcular las reacciones en los apoyos A, B, C y comprobar que los cálculos en las reacciones son correctos.

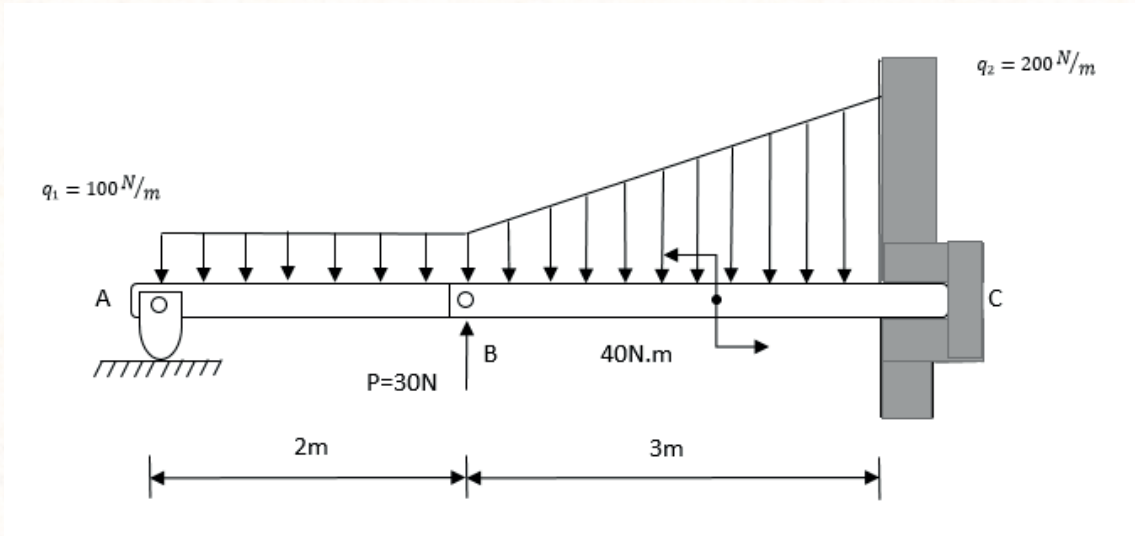
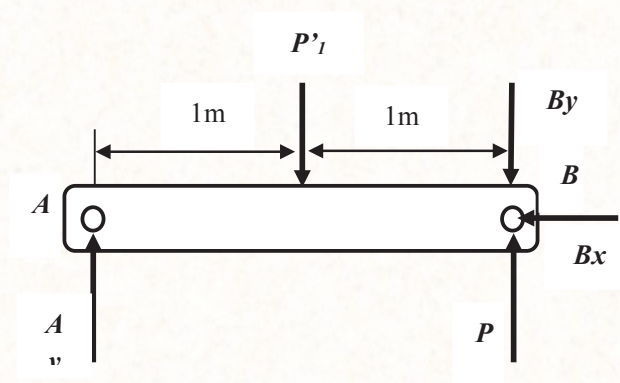


Figura 86. Interpretación gráfica ejercicio 4.6

Ilustración William Bonilla

**D.C.L. Tramo AB**



$$P'_1 = q_1 \cdot l$$

$$= 100 \text{ N/m} \times 2 \text{ m}$$

$$= 200 \text{ N}$$

$$\sum MB = 0$$

$$200 \text{ N} \times (1 \text{ m}) - Ay \times (2 \text{ m}) = 0$$

$$Ay = 100 \text{ N}$$

$$\uparrow Ay = 100 \text{ N}$$

$$\rightarrow + \sum Fx = 0$$

$$Bx = 0$$

$$\uparrow + \sum Fy = 0$$

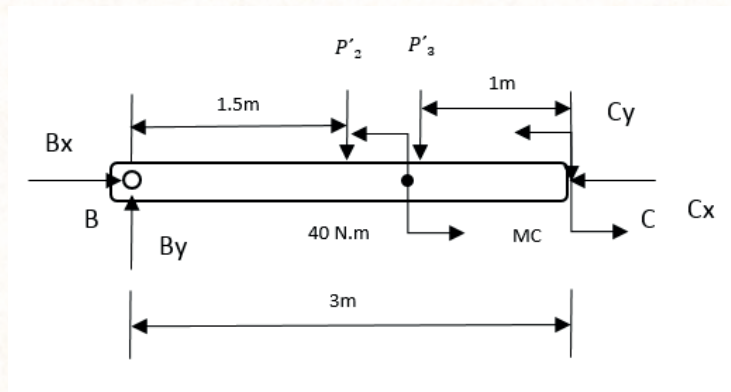
$$P - By + Ay - 200 \text{ N} = 0$$

$$By = 30 \text{ N} + 100 \text{ N} - 200 \text{ N}$$

$$By = -70 \text{ N}$$

$$\uparrow By = 70 \text{ N}$$

**D.C.L. Tramo BC**



$$P'_2 = q_1 \cdot l$$

$$= 100 \text{ N/m} \times 3 \text{ m}$$

$$= 300 \text{ N}$$

$$P'_3 = \frac{(q_2 - q_1) \cdot l}{2}$$

$$= \frac{100 \text{ N/m} \cdot 3 \text{ m}}{2}$$

$$= 150 \text{ N}$$

$$+\circlearrowleft \sum MC = 0$$

$$MC - (-70N)(3m) + 300N \times (1.5m) + 150N \times (1m) + 40Nm = 0$$

$$MC = -850N \cdot m$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$B_x - C_x = 0$$

$$= 0$$

$$-70N - 300N - 150N - C_y$$

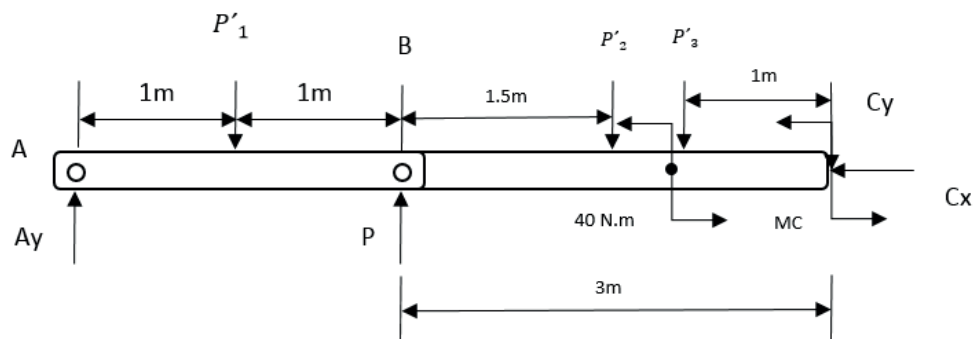
$$B_x = C_x = 0$$

$$C_y = -520N$$

$$C_y = 520N \uparrow$$

**Comprobación:**

**D.C.L.**



$$+\circlearrowleft \sum MA = 0$$

$$-200N(1m) + 30N(2m) - 300N(3.5m) - 150N(4m) + 40N \cdot m - 850N \cdot m + 520N(5m) = 0$$

$$0 = 0$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$100N - 200N - 300N - 150N - (-520N) + 30N = 0$$

$$0 = 0$$

#### 4.6 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN 3 DIMENSIONES

Se ha visto que cuando un cuerpo en equilibrio está sometido a un sistema bidimensional de fuerzas y momentos, no se pueden obtener más de tres ecuaciones independientes de equilibrio. En el caso de un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se pueden obtener hasta seis ecuaciones independientes de equilibrio.

Las tres componentes de la suma de las fuerzas deben ser iguales a cero y las tres componentes de la suma de los momentos respecto a cualquier punto deben también ser iguales a cero. (BEDFORD & FOWLER, 2008)

$$\sum F = 0$$

$$\sum M_{\text{cualquier punto}} = \sum (r \otimes F) = 0$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \quad (1) \qquad \qquad \qquad \sum M_x = 0 \quad (4)$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad (2) \qquad \qquad \qquad \sum M_y = 0 \quad (5)$$

$$\swarrow + \sum F_z = 0 \quad (3) \qquad \qquad \qquad \sum M_z = 0 \quad (6)$$

Ecuación 26. Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones

La suma de los momentos pueden evaluarse respecto a cualquier punto. Aunque se pueden obtener mas ecuaciones sumando momentos a otros puntos, estas no serian independientes de las seis ecuaciones iniciales. *No se pueden obtener mas de seis ecuaciones de equilibrio independientes a partir de un diagrama de cuerpo libre dado; entonces, pueden determinarse cuando mucho seis fuerzas o pares desconocidos*

Los pasos requeridos para determinar reacciones en tres dimensiones resultan familiares por las aplicaciones bidimensionales que se han realizado. Primero obtener un diagrama de cuerpo libre aislando un objeto y mostrando las cargas y reacciones que actuan sobre este, despues use las ecuaciones (1) - (6) para determinar las reacciones.

#### Soportes

Se presentan cinco convenciones que suelen utilizarse en problemas tridimensionales. De nuevo, aun cuando los soportes reales no se parezcan

fisicamente a esos modelos, se representaran mediante los modelos si estos ejercen las mismas (o aproximadamente) reacciones.

#### 4.6.1 Soporte de bola y cuenca.

En el soporte de bola y cuenca, el cuerpo soportado esta unido a una bola encerrada dentro de una cuenca esferica. La cuenca permite que la bola gire libremente (ignorando la friccion) pero impide que se traslade en cualquier direccion

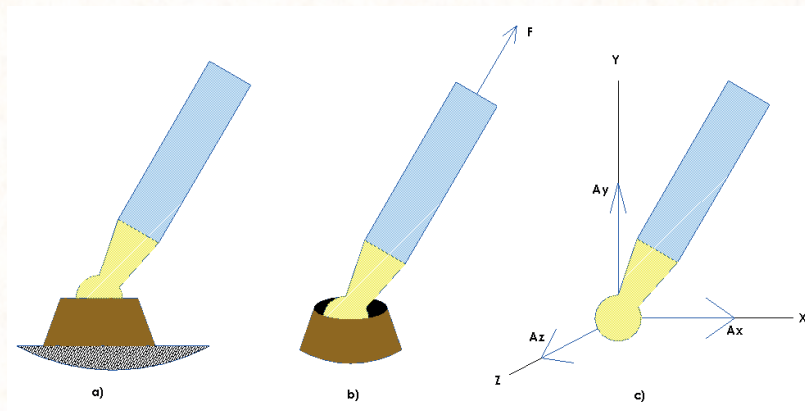


Figura 87. Soporte bola y cuenca  
Ilustración William Bonilla

#### 4.6.2 Soporte de rodillo

El soporte de rodillo es un soporte de bola y cuenca que puede rodar sobre una superficie de apoyo

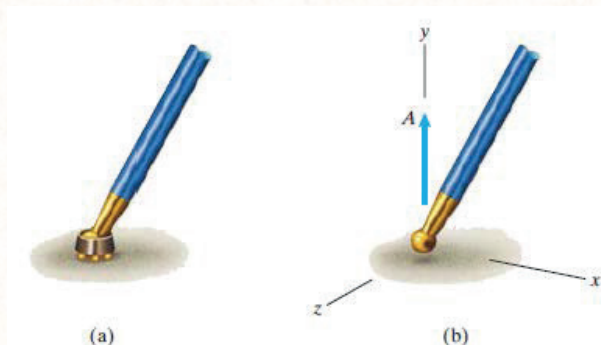


Figura 88. Soporte de rodillo  
(BEDFORD & FOWLER, 2008)

### 4.6.3 Articulación

El soporte articulación es el que se utiliza comunmente para sostener puertas. Permite que el cuerpo soportado gire respecto a una línea o *eje de la articulación*.

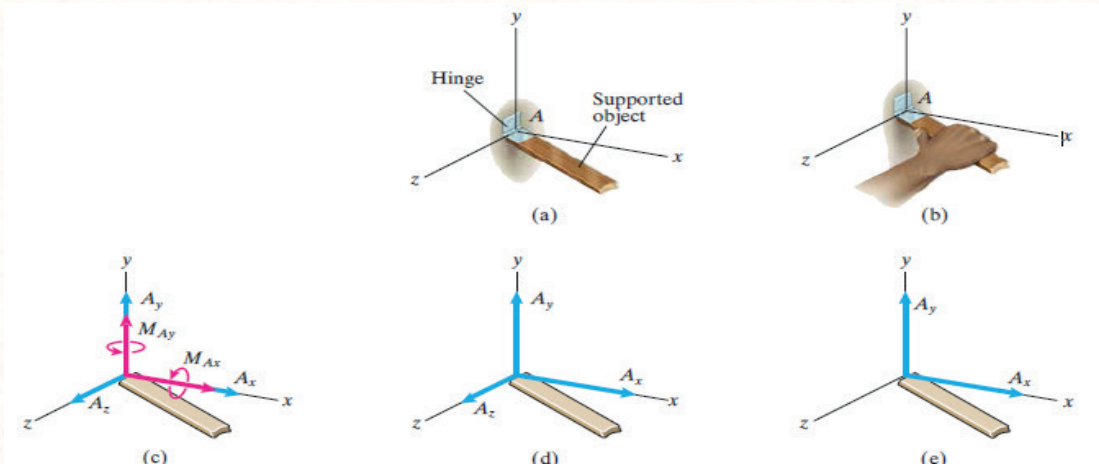


Figura 89. Articulación  
(BEDFORD & FOWLER, 2008)

### 4.6.4 Coginete

El coginete es un soporte que puede girar alrededor de su eje. Las ecuaciones son idénticas a las generadas por una articulación

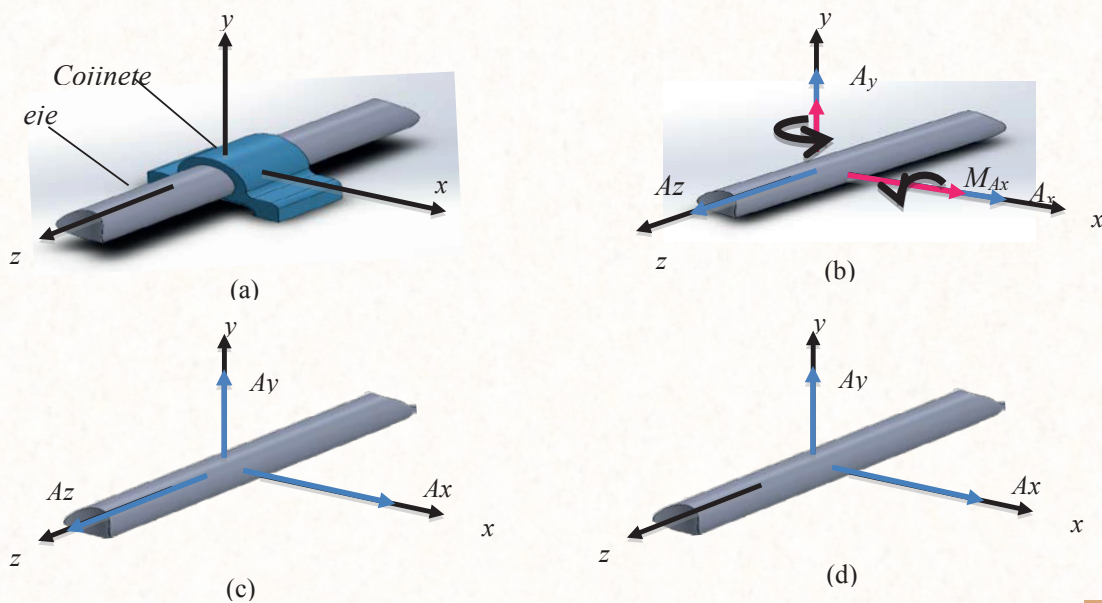


Figura 90. Cojinete  
Ilustración William Bonilla

#### 4.6.5 Soporte fijo

El soporte fijo es capaz de ejercer fuerzas en el eje x, y,z, así como pares  $M_{Ax}$ ,  $M_{Ay}$  y  $M_{Az}$  respecto a cada eje coordenado

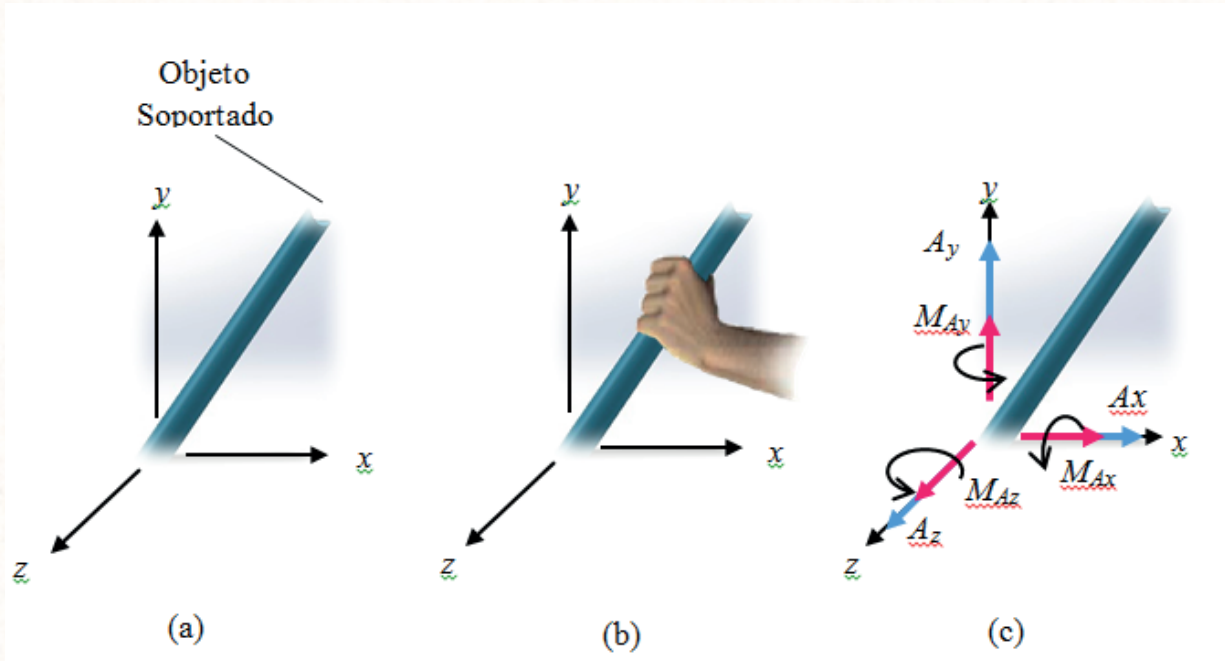

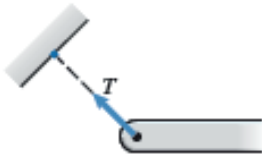
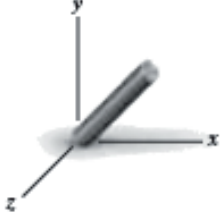
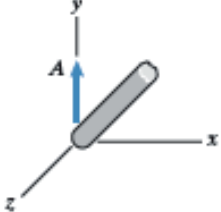
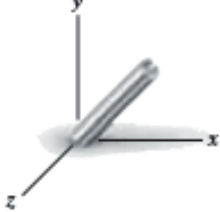
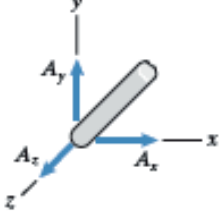

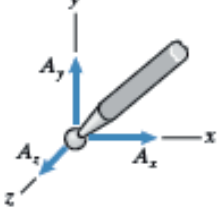

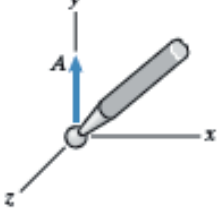


Figura 91. Soporte fijo  
Ilustración William Bonilla

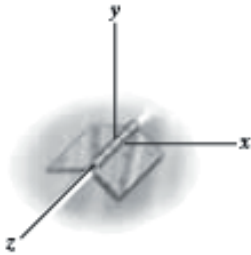
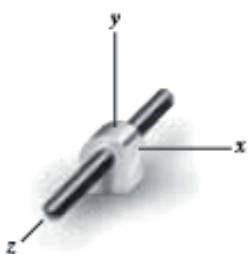
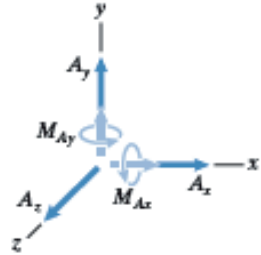
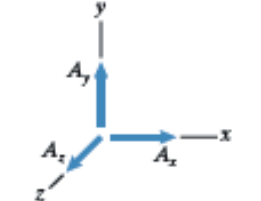
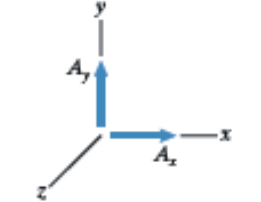
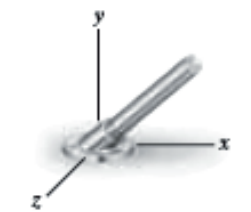
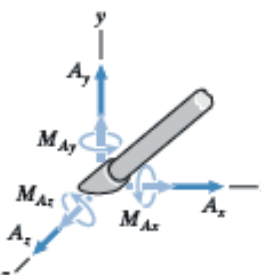
Tabla 3. Soportes y reacciones tridimensionales



Soportes	Reacciones
 <p data-bbox="545 499 695 527">Cuerda o cable</p>	 <p data-bbox="927 499 1105 527">Una fuerza colineal</p>
 <p data-bbox="467 783 764 810">Contacto con una superficie lisa</p>	 <p data-bbox="927 783 1105 810">Una fuerza normal</p>
 <p data-bbox="467 1056 789 1083">Contacto con una superficie rugosa</p>	 <p data-bbox="889 1056 1146 1083">Tres componentes de fuerza</p>
 <p data-bbox="500 1329 732 1356">Soporte de bola y cuenca</p>	 <p data-bbox="889 1329 1146 1356">Tres componentes de fuerza</p>
 <p data-bbox="524 1602 703 1629">Soporte de rodillos</p>	 <p data-bbox="927 1602 1105 1629">Una fuerza normal</p>

(BEDFORD & FOWLER, 2008)

Tabla 3. Continuación.

Soportes	Reacciones
 <p data-bbox="592 577 841 651">Articulación (El eje z es paralelo al eje de la articulación)</p>  <p data-bbox="592 1018 841 1092">Cojinete (El eje z es paralelo al eje de la flecha soportada)</p>	 <p data-bbox="950 556 1209 609">Tres componentes de fuerza, Dos componentes de par</p>  <p data-bbox="950 829 1209 871">(Cuando no se ejercen pares)</p>  <p data-bbox="950 1092 1209 1144">(Cuando no se generan pares ni fuerza axial)</p>
 <p data-bbox="592 1459 841 1501">Soporte fijo (empotrado)</p>	 <p data-bbox="950 1459 1209 1512">Tres componentes de fuerza, tres componentes de par</p>

(BEDFORD & FOWLER, 2008)

## 4.7 EJERCICIOS RESUELTOS

### EJERCICIO 4.7

La placa de la figura esta soportada por bisagras en A y B y por el cable CE; esta cargada por una fuerza en D. Las bisagras no generan pares sobre la placa ¿Qué valor tiene la tensión en el cable CE?

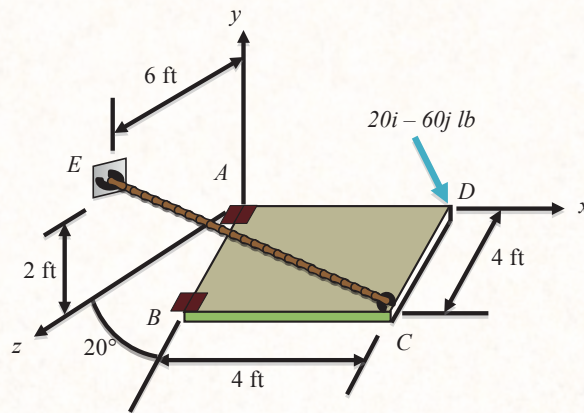
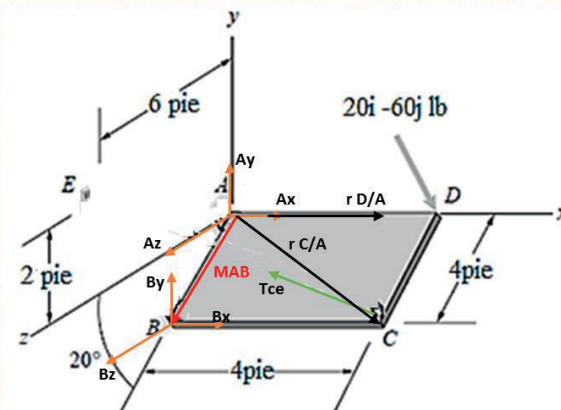


Figura 92. Placa soportada por bisagras ejercicio 4.7

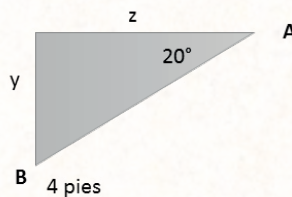
Ilustración William Bonilla

D. C. L



**Solución:**

En el triángulo formado en el plano yz y los puntos A y B se obtiene:



$$\text{sen } 20^\circ = y/4$$

$$\text{cos } 20^\circ = z/4$$

$$y = 1.368 \text{ ft}$$

$$z = 3.758 \text{ ft}$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{0i - 1.368j + 3.758k}{\sqrt{1.368^2 + 3.758^2}}$$

$$\vec{U}_{AB} = 0i - 0.342j + 0.939k$$

$$\vec{r}_{D/A} = (4i + 0j + 0k) \text{ pies}$$

$$\vec{r}_{C/A} = (4i - 1.368j + 3.758k) \text{ pies}$$

Sacamos la tensión de la cuerda respecto a sus coordenadas

$$\vec{T}_{CE} = T_{CE} \left( \frac{-4i + 3.368j + 2.241k}{\sqrt{4^2 + 3.368^2 + 2.241^2}} \right)$$

$$\vec{T}_{CE} = T_{CE}(-0.703i + 0.592j + 0.3939k)$$

$$\sum \vec{M}_{AB} = 0$$

$$\sum \vec{U}_{AB} \odot \vec{M}_A = 0$$

$$\vec{U}_{AB} \odot (\vec{r}_{D/A} \otimes D) + \vec{U}_{AB} \odot (\vec{r}_{C/A} \otimes \vec{T}_{CE}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -0.342 & 0.939 \\ 4 & 0 & 0 \\ 20 & -60 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -0.342 & 0.939 \\ 4 & -1.368 & 3.75 \\ -0.703 & 0.592 & 0.3939 \end{vmatrix} T_{CE} = 0$$

$$0.939(4 * (-60)) + [0.342(4 * 0.3939 - 3.75(-0.703)) + 0.939(4 * 0.592 - (-0.703 * -1.368))]T_{CE} = 0$$

$$-225.36 + 2.76T_{CE} = 0$$

$$\vec{T}_{CE} = 81.6 \text{ lb}$$

**EJERCICIO 4.8**

Para regar las plantas que se muestran en la figura, un jardinero une los tres tramos de tubería AB, BC, CD adaptados con rociadores, se sostiene el ensamble usando apoyos articulados en A y D y mediante el cable EF. Si la tubería tiene una masa por unidad de longitud de  $1.25\text{kg/m}$ , determine la tensión en el cable.

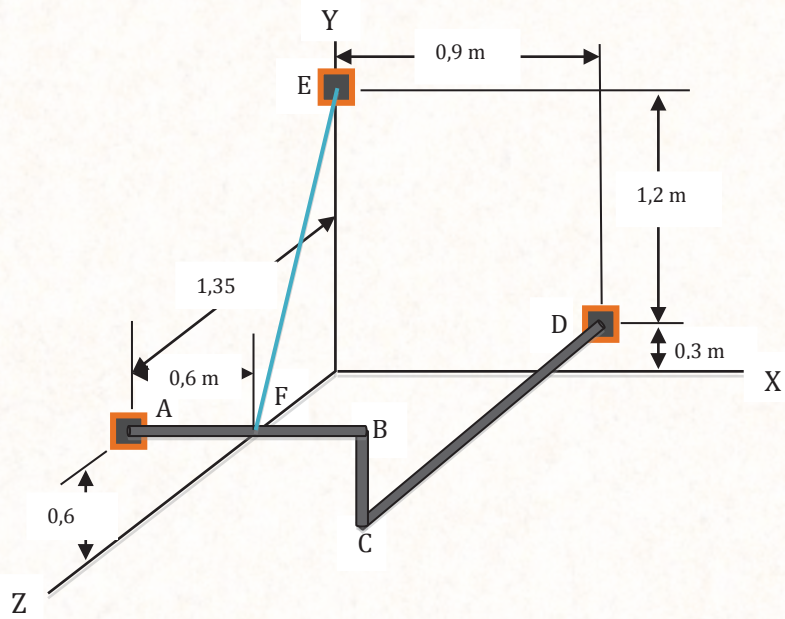
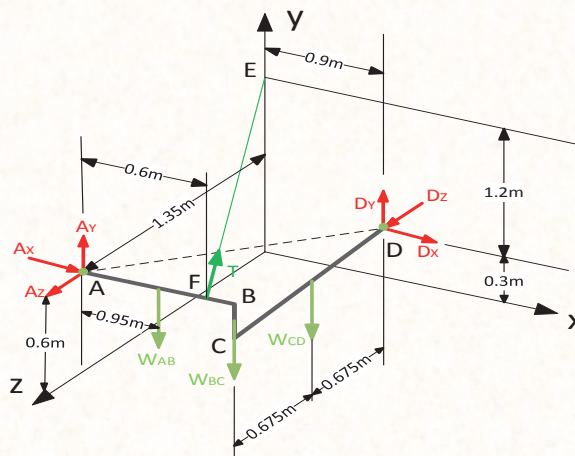


Figura 93. Ensamble de tuberías ejercicio 4.8

*Ilustración William Bonilla*



**Solución:**

$$W_{AB} = -1.25 \left( \frac{kg}{m} \right) * 9.81 \left( \frac{m}{s^2} \right) + 0.9m(r) = -11.0363(N)r$$

$$W_{BC} = -1.25 \left( \frac{kg}{m} \right) * 9.81 \left( \frac{m}{s^2} \right) * 0.3m(r) = -3.6788(N)r$$

$$W_{CD} = -1.25 \left( \frac{kg}{m} \right) * 9.81 \left( \frac{m}{s^2} \right) * 1.35m(r) = -16.5544(N)r$$

$$T = T \frac{FE}{FE} = T \frac{-0.6r + 0.9j - 1.35k}{\sqrt{33.25}} = \frac{T}{\sqrt{33.25}} (-2r + 3j - 4.5k)$$

$$U_{AD} = \frac{AD}{AD} = \frac{0.9r - 0.3j - 1.35k}{1.65}$$

$$U_{AD} = \frac{6}{11}r - \frac{2}{11}j - \frac{9}{11}k$$

$$r_{E/A} = (0.45 m)r$$

$$r_{F/A} = (0.6 m)r$$

$$r_{B/A} = (0.9 m)r$$

$$r_{D/A} = (0.9 m)r - (0.3 m)j - (0.675 m)k$$

$$\sum M_{AD} = 0$$

$$U_{AD} \cdot (r_{G/A} \otimes W_{BC}) + U_{AD} \cdot (r_{Y/A} \otimes T) + U_{AD} \cdot (r_{B/A} \otimes W_{BC}) +$$

$$U_{AD} \cdot (r_{H/A} \otimes W_{CD}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -9 \\ 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -11.0363 & 0 \end{vmatrix} \left( \frac{1}{11} \right) + \begin{vmatrix} 6 & -2 & -9 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -4.5 \end{vmatrix} \left( \frac{T}{11\sqrt{33.25}} \right)$$

$$+ \begin{vmatrix} 6 & -2 & -9 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & -3.6788 & 0 \end{vmatrix} \left( \frac{1}{11} \right) + \begin{vmatrix} 6 & -2 & -9 \\ 0.9 & -0.3 & -0.675 \\ 0 & -16.5544 & 0 \end{vmatrix} \left( \frac{1}{11} \right) = 0$$

$$4.0634 - 0.34054T + 2.7089 + 6.0950 = 0$$

$$T_{BC} = T = 37.8 \text{ (N)}$$

#### EJERCICIO 4.9

Para la porción de máquina mostrada en la figura, la polea A de 100mm de diámetro y la rueda B están fijadas a un eje, sostenido por cojinetes instalados en C y D. El resorte tiene constante igual a 366[N/m] y no está deformado cuando  $\theta = 0$ , y el cojinete puesto en C no ejerce ninguna fuerza axial. Si  $\theta = 180$ , y la máquina está en reposo y equilibrio, determinar:

- La tensión T
- Las reacciones en C y D.

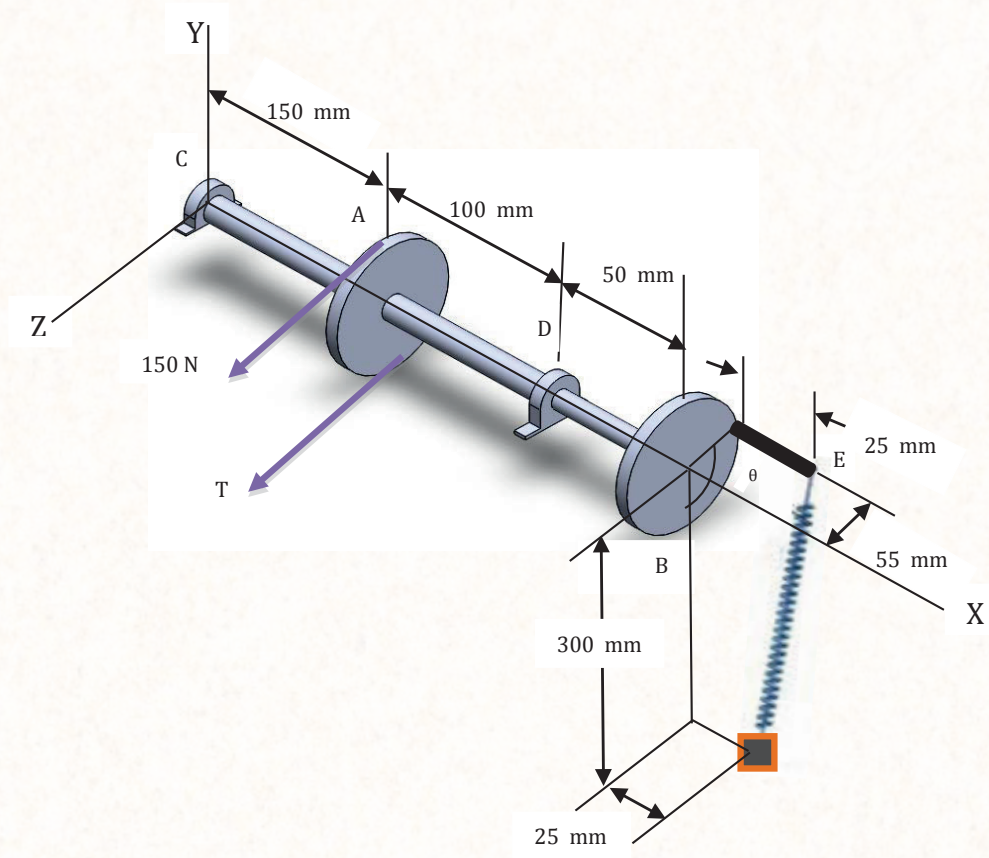


Figura 94. Máquina ejercicio 4.9

*Ilustración William Bonilla*

**Solución:**

$$F_k = kx$$

$$x = 355\text{mm} - 245\text{mm}$$

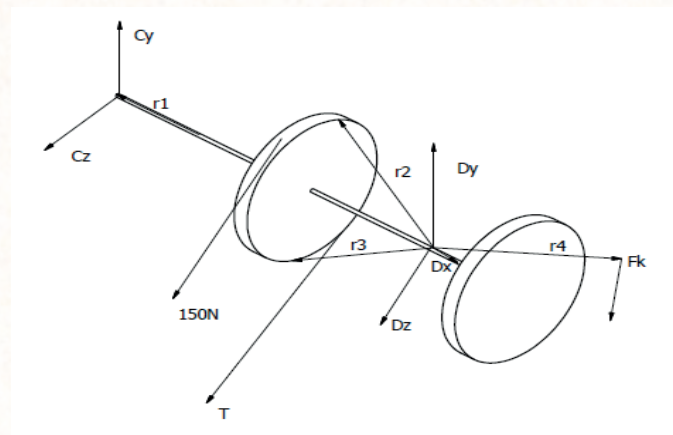
$$x = 110\text{ mm}$$

$$F_k = 366 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] (0.11\text{m})$$

$$F_k = -40.26\text{ N } j$$



**D.C.L**



$$\sum \vec{M}_O = r_1 \otimes C + r_2 \otimes (150)\vec{k} + r_3 \otimes T + r_4 \otimes F_k = 0$$

$$r_1 = -0.25i \text{ m}$$

$$r_2 = (-0.1i + 0.05j) \text{ m}$$

$$r_3 = (-0.1i - 0.05j) \text{ m}$$

$$r_4 = (0.075i + 0.055j) \text{ m}$$

$$\sum \vec{M}_O =$$

$$\begin{vmatrix} r & j & k \\ -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & C_y & C_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & j & k \\ -0.1 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & j & k \\ -0.1 & -0.05 & 0 \\ 0 & 0 & T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & j \\ 0.075 & 0.055 \\ 0 & -40.26 \end{vmatrix}$$

$$0 = (0.25C_z)j - (0.25C_y)k + (7.5)r + (15)j + (-0.05T)r + (0.1T)j - (3.0195)k$$

$$0 = (7.5 - 0.05T)r + (0.25C_z + 15 + 0.1T)j + (-0.25C_y - 3.0195)k$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

$$7.5 - 0.05T = 0$$

$$C_z = [(0.1)(-150) - 15]/0.25$$

$$C_y = -12.078 \text{ N}$$

$$T = 150 \text{ N}$$

$$C_z = -120 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$D_x = 0$$

$$C_y + D_y - Fk = 0$$

$$C_z + 150 + 150 + D_z = 0$$

$$D_y = 52.34 \text{ N}$$

$$D_z = -180 \text{ N}$$

$$C = (0i - 12.08j - 120k) \text{ N}$$

$$D = (52.32i - 180k) \text{ N}$$

# Capítulo 5

## ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS



## ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

### 5.1 OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mostrar como determinar las fuerzas en los elementos de una armadura usando el método de los nodos y el método de las secciones.
- Analizar las fuerzas que actúan sobre los elementos de armazones y máquinas compuestos por elementos conectados mediante pasadores.

### 5.2 INTRODUCCIÓN

En ingeniería, el término estructura se puede referir a cualquier objeto que tenga la capacidad de soportar y ejercer cargas. (BEER & JOHNSTON, 2010)

Se considerarán tres categorías amplias de estructuras.

### 5.3 ARMADURAS

Son aquellas que están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias. Las armaduras consisten exclusivamente de elementos rectos que están conectados en nodos localizados en los extremos de cada elemento. (BEER & JOHNSTON, 2010)

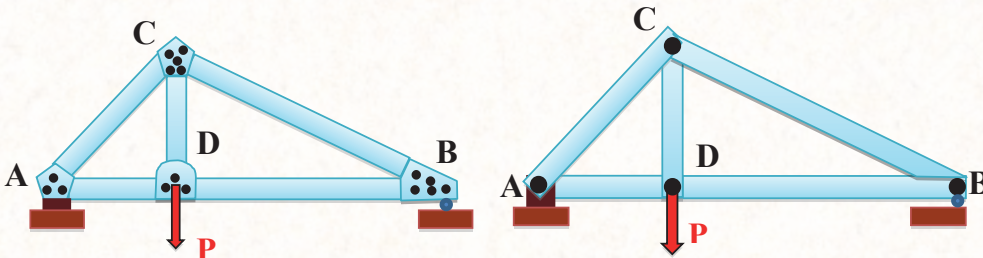


Figura 95. Ejemplos de Armaduras

*Ilustración William Bonilla*

Por tanto, los elementos de una armadura son elementos sujetos a dos fuerzas, esto es, elementos sobre los cuales actúan dos fuerzas iguales y opuestas que están dirigidas a lo largo del elemento.

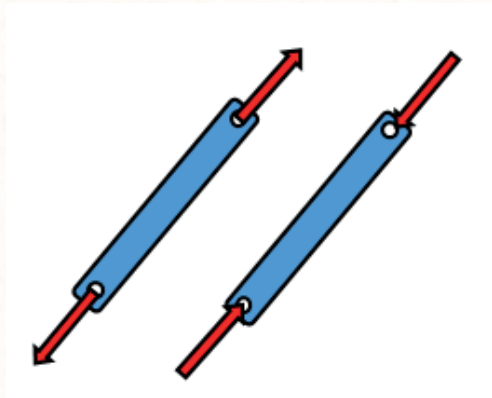


Figura 96. Elemento de una armadura sujeto a dos fuerzas  
Ilustración William Bonilla

Una armadura o marco es un conjunto de miembros axiales conectados (miembro dos-fuerzas). Los puntos de conexión son conocidos como juntas, nodos o uniones. El peso de los miembros no se toma en cuenta y las cargas de la armadura son aplicadas solo en los nodos. Una celda estructural se compone de todos los miembros cerrados en un lazo. Para que la armadura sea estable (sea una armadura rígida), todas las celdas estructurales deben ser triángulos. La figura 36 identifica cuerdas, postes finales, paneles, y otros elementos de una estructura de puente típica.

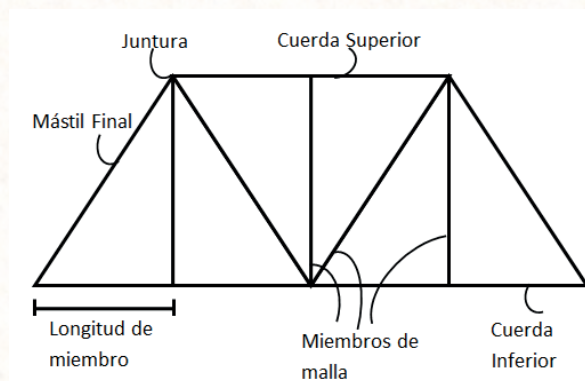


Figura 97. Partes de una armadura de puente  
Ilustración William Bonilla

Varios tipos de armaduras poseen nombres específicos. Algunos de los nombres más comunes de armaduras son mostrados a continuación.

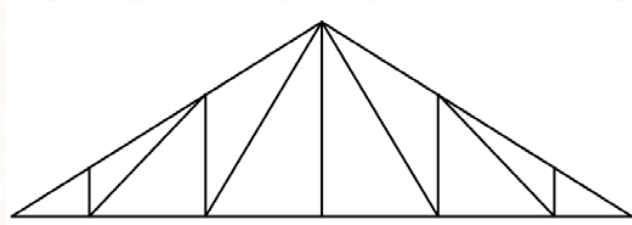


Figura 98. Armadura de techo tipo Pratt  
*Ilustración William Bonilla*

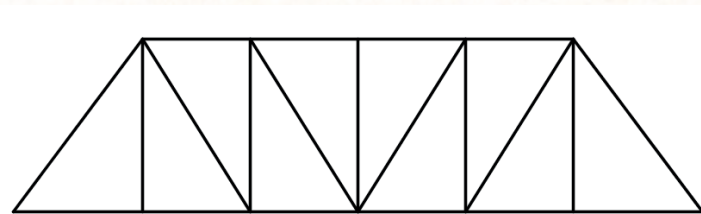


Figura 99. Armadura de puente tipo Pratt  
*Ilustración William Bonilla*

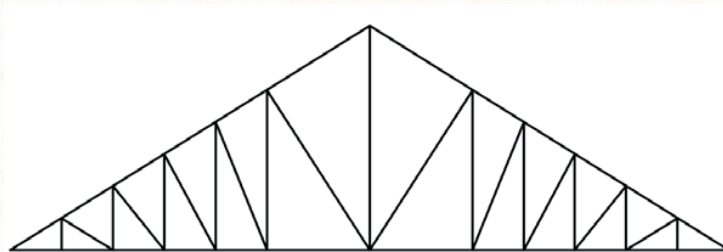


Figura 100. Armadura de techo tipo Howe  
*Ilustración William Bonilla*

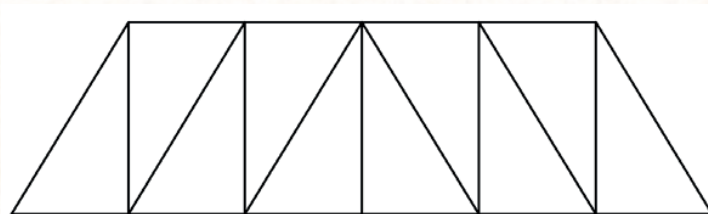


Figura 101. Armadura de puente tipo Howe

Ilustración William Bonilla

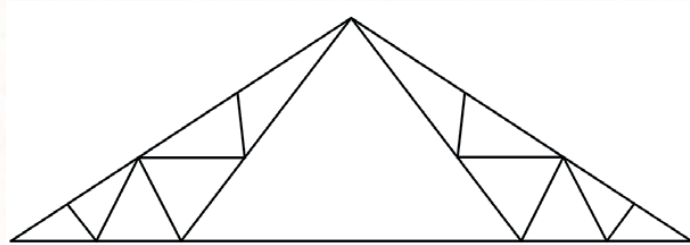


Figura 102. Armadura de techo tipo Fink

Ilustración William Bonilla

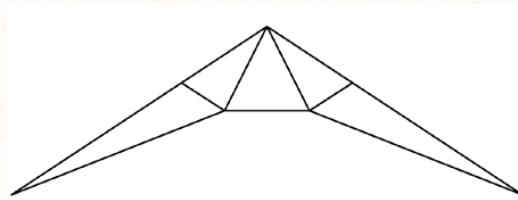


Figura 103. Armadura de techo tipo Fink (cuerda inferior arqueada)

Ilustración William Bonilla

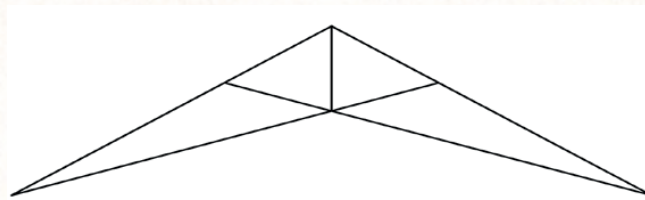


Figura 104. Armadura de techo tipo tijera

Ilustración William Bonilla

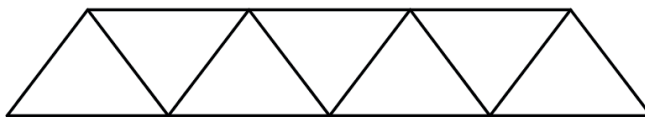


Figura 105. Armadura de puente tipo Warren



Ilustración William Bonilla

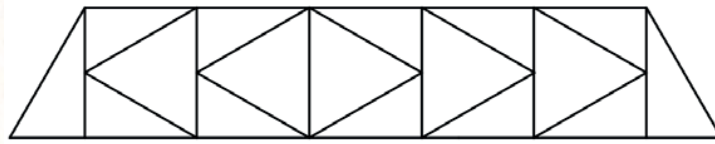


Figura 106. Armadura de puente K

Ilustración William Bonilla

Las cargas de las armaduras son consideradas para actuar sólo en el nivel de las mismas, entonces las armaduras son analizadas como estructuras bidimensionales. Las fuerzas dentro de la armadura mantienen varias partes unidas de la misma y son conocidas como fuerzas internas. Las fuerzas internas son encontradas al dibujar el diagrama de cuerpo libre.

Aunque los diagramas de cuerpo libre de los miembros de las armaduras pueden ser dibujados, esto no se hace generalmente. En lugar de ello se realiza los diagramas de cuerpo libre de los nodos. Un nodo en compresión se muestra con las flechas de la fuerza apuntando hacia el pasador, lejos del miembro, de manera similar, un pasador de tensión se muestra con las flechas de fuerza en dirección opuesta al nodo.

Con armaduras de puentes soportados en los extremos y con carga hacia abajo en las articulaciones, las cuerdas están casi siempre en compresión, los paneles finales y las cuerdas inferiores están casi siempre en tensión.

Puesto que los miembros de la armadura son axiales, las fuerzas en las articulaciones de la armadura son concurrentes. Solo una fuerza de equilibrio debe ser ejecutada en cada nodo, la suma de las fuerzas en cada dirección de coordenadas es igual a cero.

### 5.3.1 Miembros de fuerza cero

El análisis de armaduras usando el método de los nodos se simplifica considerablemente cuando es posible determinar primero qué miembros no soportan carga. Esos miembros de fuerza cero se usan para incrementar la estabilidad de la armadura durante la construcción y para proporcionar soporte si la carga aplicada se modifica. Los miembros de fuerza cero de una armadura generalmente pueden ser determinados por inspección de cada uno de sus nudos. (HIBBELER, 2004)

Como regla general para HIBBELER (2004), si sólo dos miembros forman un nudo de armadura y ninguna carga externa o reacción de soporte es aplicada al nudo, los miembros deben ser miembros de fuerza cero (ver figura 107 y 108)

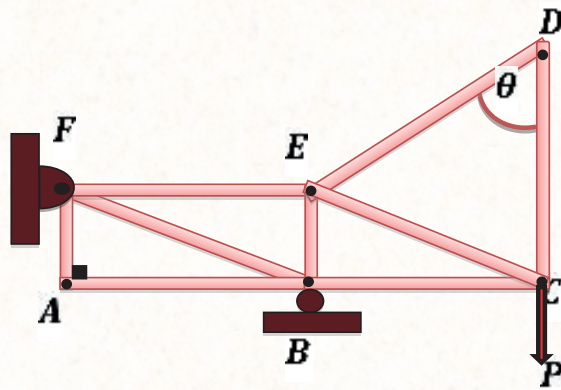


Figura 107. Armadura  
Ilustración William Bonilla

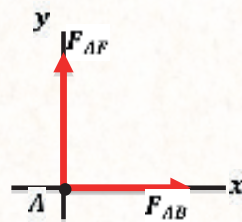


Figura 108. Miembros de fuerza cero (primera regla)  
Ilustración William Bonilla

$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0; F_{AB} = 0$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0; F_{AD} = 0$$

Ecuación 27. Ecuaciones de equilibrio nodo A

Para HIBBELER (2004), en general, si tres miembros forman un nudo de armadura en el cual dos de los miembros son colineales, el tercer miembro es un miembro de fuerza cero siempre que ninguna fuerza exterior o reacción de soporte esté aplicada al nudo (ver figura 109 y 110)

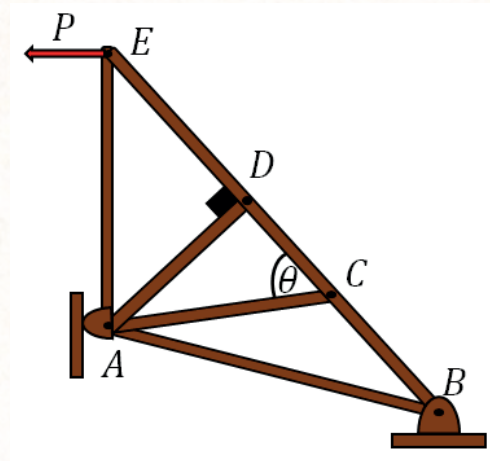


Figura 109. Armadura  
Ilustración: William Bonilla

D.C.L Nodo D

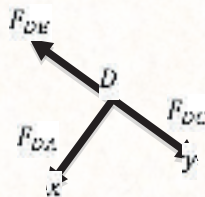


Figura 110. Miembros de fuerza cero (segunda regla)  
Ilustración: William Bonilla

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_{DA} = 0$$

$$\rightarrow \sum F_y = 0; \quad F_{DC} = F_{DE}$$

Ecuación 28. Equilibrio en el nodo D

**Existen dos métodos para el análisis de armaduras:**

### 5.3.2 Método de los nodos

El método de los nodos es uno de los métodos que pueden ser utilizados para encontrar las fuerzas internas en cada miembro de la armadura. Éste método es útil cuando la mayoría o todas las fuerzas de los miembros de la armadura deben ser calculados. Porque este método avanza desde el nodo hasta el nodo adyacente, no es conveniente cuando se va a calcular una sola fuerza de un miembro aislado.

El método de los nodos es una aplicación directa de las ecuaciones de equilibrio en las direcciones X y Y. Tradicionalmente, el método comienza por encontrar las reacciones que soportan la armadura. Después el nodo en una de las reacciones es evaluado, el cual determina todas las fuerzas formadas dentro del nodo. Luego, conociendo una o más de las fuerzas del paso previo, un nodo adyacente es analizado. El proceso es repetido hasta que todas las incógnitas sean determinadas.

En un nodo pueden haber hasta dos fuerzas desconocidas, cada una de las cuales pueden tener componentes X y Y. Ya que hay dos ecuaciones de equilibrio, las dos incógnitas pueden ser determinadas. A pesar de determinar, el sentido de una fuerza será a menudo desconocido. Si el sentido no puede ser determinado por lógica, se puede hacer una decisión arbitraria. Si la dirección escogida es desconocida, la fuerza será negativa.

Ocasionalmente, habrá tres fuerzas desconocidas en ese caso, una ecuación adicional debe ser derivada del nodo adyacente.

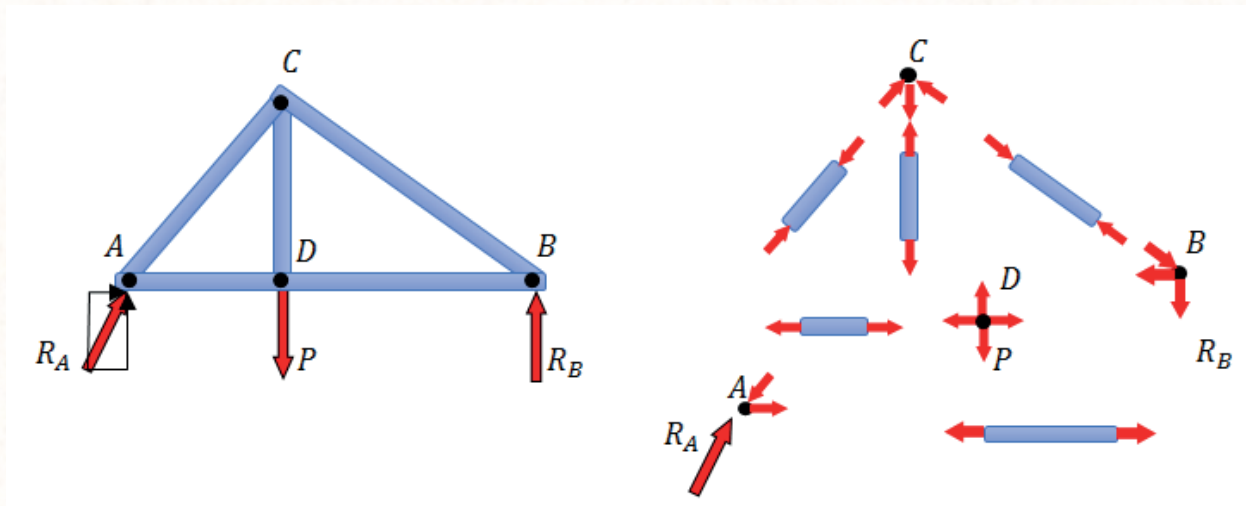


Figura 111. Método de los nodos

Ilustración: William Bonilla

### 5.3.3 Método de las secciones.

El método de las secciones es un enfoque directo para encontrar fuerzas en cualquier miembro de la armadura. Este método es conveniente sólo cuando pocas fuerzas de los miembros de la armadura son desconocidas.

Como en el método previo, el primer paso es hallar las reacciones de los apoyos. Después un corte es realizado de un lado al otro de la armadura, pasando a través de los miembros desconocidos. (Conociendo donde cortar la armadura es la parte clave de éste método. Tal conocimiento es desarrollado solo con la práctica.) Finalmente, todas las tres condiciones de equilibrio son aplicadas como se necesite a la porción restante de armadura. Ya que deben existir tres ecuaciones de equilibrio, el corte no puede pasar a través de más de tres miembros en el cual las fuerzas son desconocidas. Ver figura 112

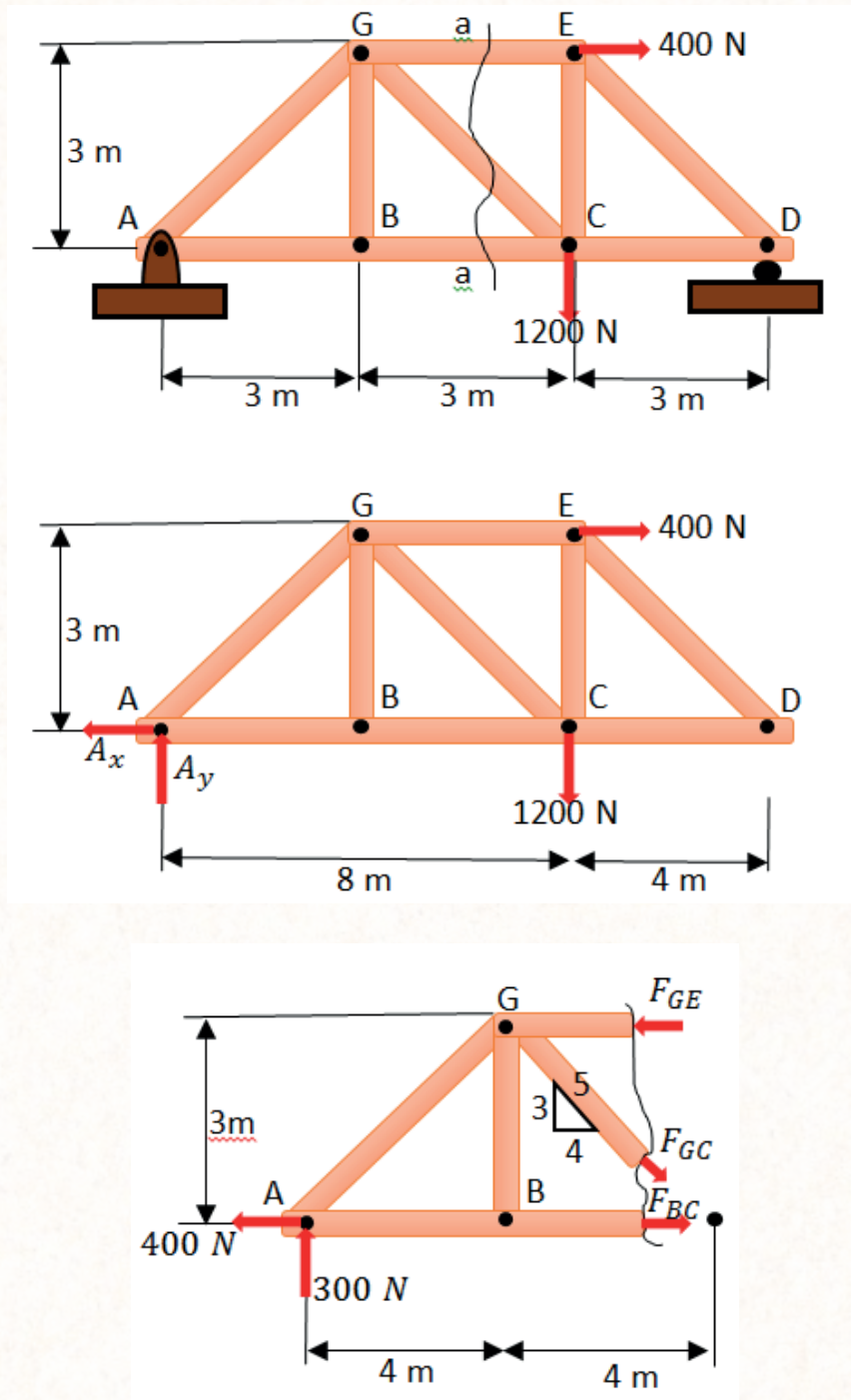


Figura 112. Método de las secciones  
Ilustración William Bonilla

#### 5.4 EJERCICIOS RESUELTOS

**EJERCICIO 5.1**

La armadura en Cantiléver soporta una fuerza vertical de 600 000 N. ¿Cuál es la fuerza axial del miembro CF? E indique si está a tensión (T) o bien a compresión (C).

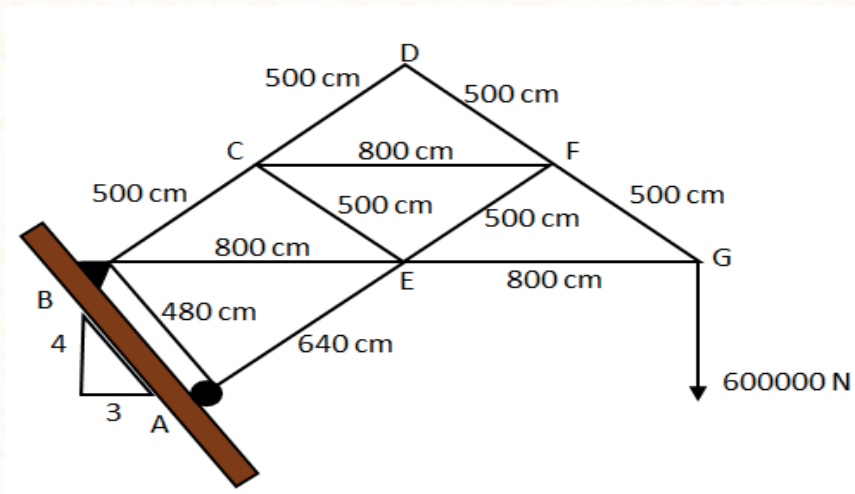
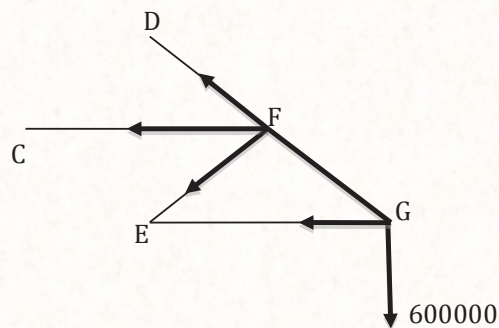


Figura 113. Gráfico ejercicio 5.1  
Ilustración: William Bonilla

**D.C.L de la sección de la estructura**



**Solución:**

Los elementos CD y DF son miembros de fuerza cero

Use el método de las secciones y aplique sumatoria de momentos en el punto E

$$\sum M_E = 0$$

$$0 = (600\,000\text{N}) \times (800\text{cm}) - CF \times (300\text{cm})$$

$$CF = \frac{(600\,000\text{N}) \times (800\text{cm})}{(300\text{cm})}$$

$$CF = 1\,600\,000\text{ N (T)}$$

### EJERCICIO 5.2

Para la siguiente armadura:

- Calcular las reacciones en los apoyos
- Indicar que barras no trabajan
- Determinar las fuerzas axiales en las barras restantes

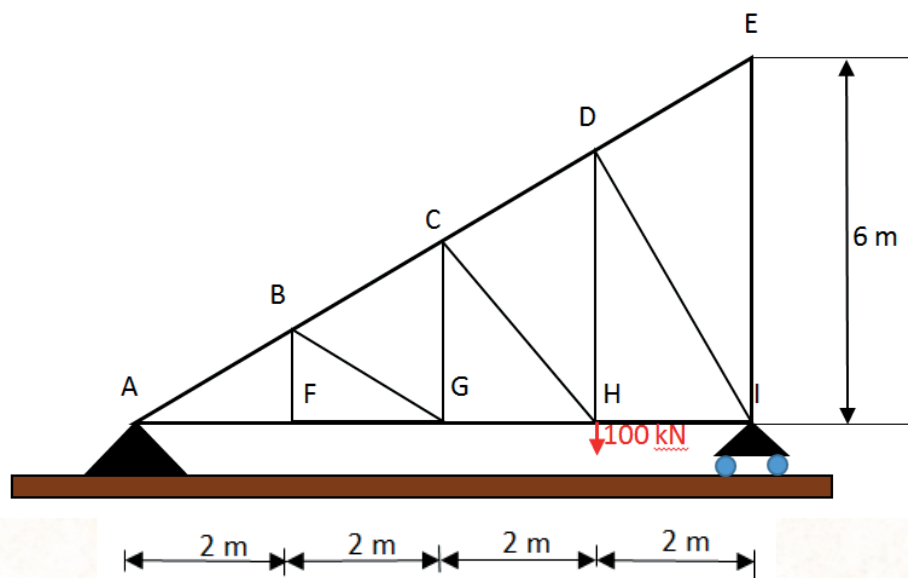
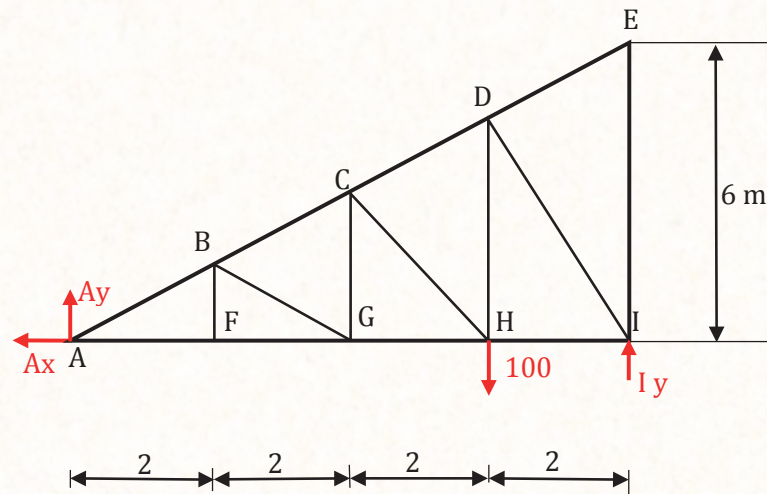


Figura 114. Gráfico ejercicio 5.2  
Ilustración: William Bonilla

### D.C.L DE LA ARMADURA



**Solución:**

- a) Aplicamos las ecuaciones de equilibrio para calcular las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0$$

$$I_y \cdot (8) - (100) \cdot (6) = 0$$

$$I_y = 75 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + 75 - 100 = 0$$

$$A_y = 25 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

- b) Si analizamos el nodo E y aplicamos la primera regla de miembros fuerza cero, se tendrá que las barras ED y EI son nulas. Luego, aplicamos la segunda regla al nodo F, siendo la barra FB nula y continuamos con esta regla en los nodos B, G y C, siendo nulas las barras BG, GC y CH. Las reacciones en los apoyos, las barras nulas y las fuerzas internas en el resto de barras se muestran en la figura 42, esquematizando las barras nulas con un círculo.

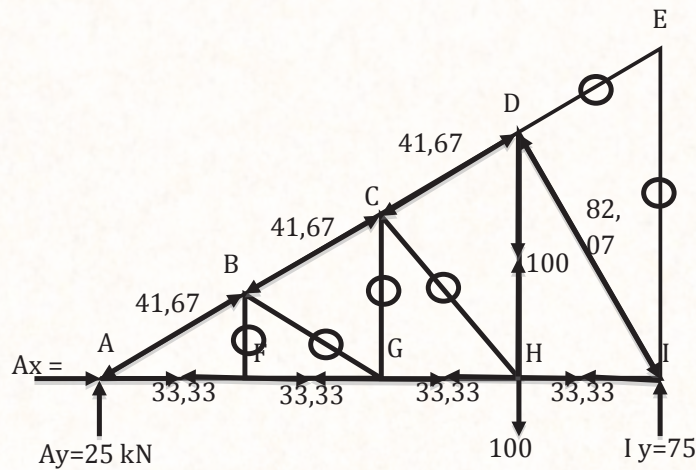
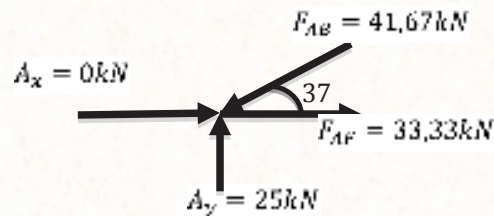


Figura 15 Reacciones en apoyos, fuerzas internas, barras nulas  
Ilustración: William Bonilla

C) Aplicamos el método de los nodos para determinar las fuerzas internas en el resto de barras.

**D.C.L DEL NODO "A"**



$$\sum F_y = 0$$

$$25 - F_{AB} \sin 37^\circ = 0$$

$$F_{AB} = 41.67 \text{ kN (C)}$$

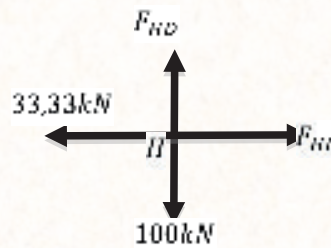
$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AF} - 41.67 \cos 37^\circ = 0$$

$$F_{AF} = 33.33 \text{ kN (T)}$$

Ahora, pasamos al nodo F, en el cual, la barra FB es nula y las fuerzas internas en las barras AF y FG son iguales. Lo mismo sucede con las barras FG y GH, así como en AB y BC, BC y CD.

**D.C.L. DEL NODO "H"**



$$\sum F_x = 0$$

$$F_{HI} - 33.33 = 0$$

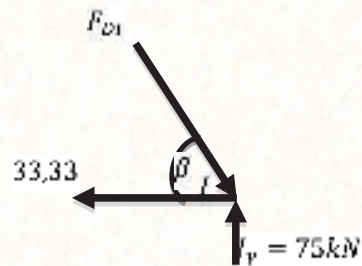
$$F_{HI} = 33.33\text{ kN (T)}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{HI} - 100 = 0$$

$$F_{HI} = 100\text{ kN (T)}$$

#### D.C.L. DEL NODO "I"



Previamente, calculamos el valor del ángulo  $\beta$

$$\text{tg } \beta = \frac{4.5}{2}$$

$$\beta = 66.04^\circ$$

Ahora, calculamos la fuerza interna en la barra DI:

$$\sum F_y = 0$$

$$75 - F_{DI} * \sin 66.04^\circ = 0$$

$$F_{DI} = 82.07\text{ kN (C)}$$

Como comprobación, efectuamos el equilibrio en el eje horizontal:

$$\sum F_x = 0$$

$$(82.07) * (\cos 66.04^\circ) - 33.33 = 0$$

Con esto, no es necesario comprobar el equilibrio del nodo D, el cual también será correcto.

**EJERCICIO 5.3**

Determine las fuerzas axiales en los elementos BC y CD de la armadura mostrada.

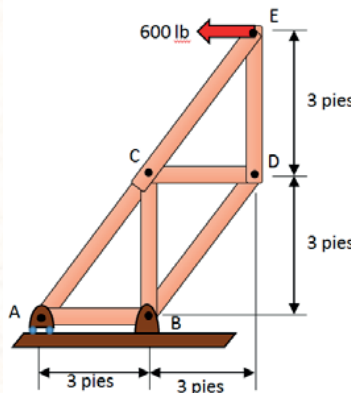


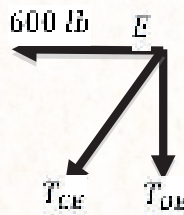
Figura 116. Gráfico del ejercicio 5.3

Ilustración: William Bonilla

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{3}{4} \right)$$

$$\alpha = 36.9^\circ$$

**D.C.L. NODO "E"**



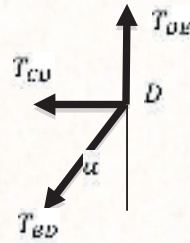
$$\sum F_x = 0$$

$$-(600 \text{ lb}) - T_{CE} * \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-T_{DE} - T_{CE} * \cos \alpha = 0$$

**D.C.L. NODO "D"**



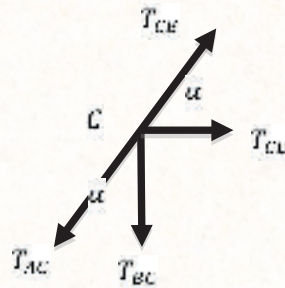
$$\sum F_x = 0$$

$$-T_{CD} - T_{ED} * \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T_{DE} - T_{ED} * \cos \alpha = 0$$

**D.C.L. NODO "C"**



$$\sum F_x = 0$$

$$T_{CD} + T_{CE} * \sin \alpha - T_{AC} * \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T_{CE} * \cos \alpha - T_{AC} * \cos \alpha - T_{BC} = 0$$

Resolviendo las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$$T_{CE} = -100 \text{ lb}$$

$$T_{DE} = 800 \text{ lb}$$

$$T_{CD} = -600 \text{ lb}$$

$$T_{AC} = -2000 \text{ lb}$$

$$T_{BC} = 800 \text{ lb}$$

$$T_{ED} = 1000 \text{ lb}$$

Un valor positivo significa que elemento está sometido a tensión y un valor negativo significa que está a compresión

$$BC = 800 \text{ lb (T)}$$

$$CD = 600 \text{ lb (C)}$$

### 5.5 ARMAZONES O BASTIDORES

Son aquellos que están diseñados para soportar cargas, se usan también como estructuras estacionarias. Los armazones siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas, esto es, un elemento sobre el cual actúan tres o más fuerzas que, en general, no están dirigidas a lo largo del elemento. (ver figura 117) (BEER & JOHNSTON, 2007)

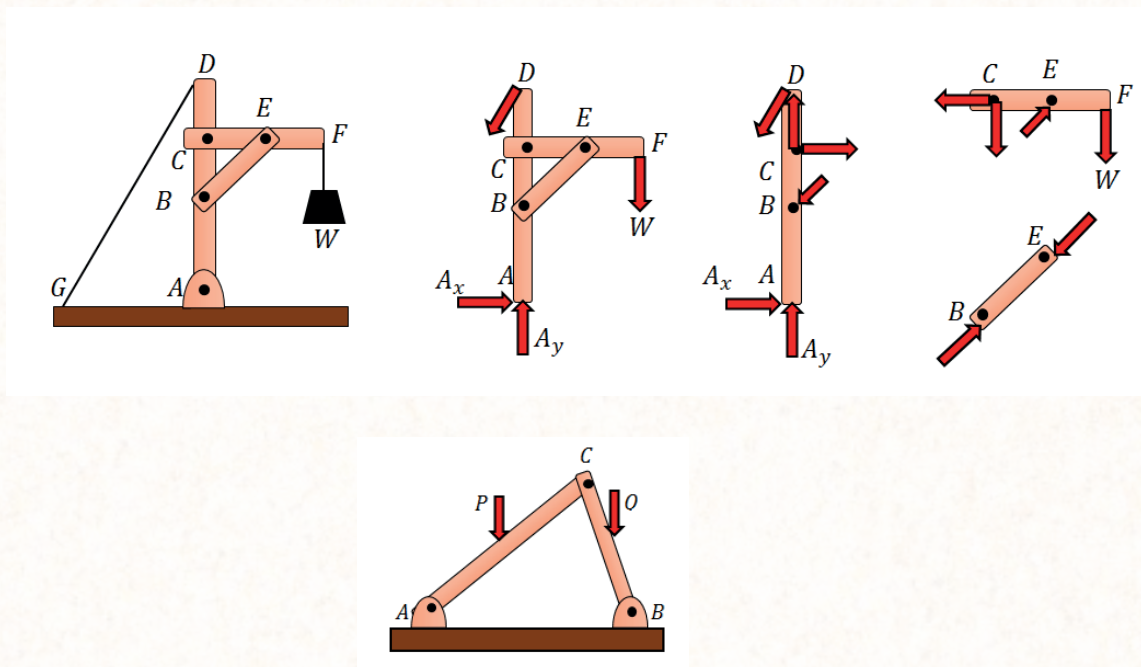


Figura 117. Armazones o Bastidores

Ilustración: William Bonilla

## 5.6 EJERCICIOS RESUELTOS

### EJERCICIO 5.4

El armazón de la figura está sometido a un par de 200 N-m. Determine las reacciones en los apoyos A, C y B

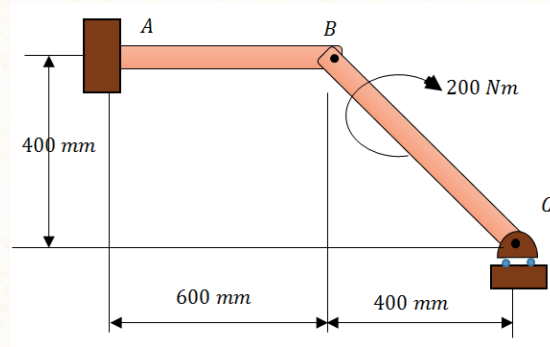
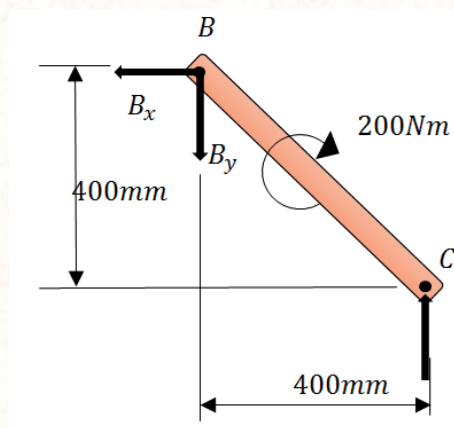


Figura 118. Gráfico del ejercicio 5.4

Ilustración: William Bonilla

**Solución:**

#### D.C.L (Barra B-C)



**\*Análisis (B-C)**



$$+ \sum M_B = 0$$

$$-200 + C(0.4) = 0$$

$$C = 500N$$

$$C = 500N \uparrow$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0$$

$$-By + 500 = 0$$

$$By = 500N$$

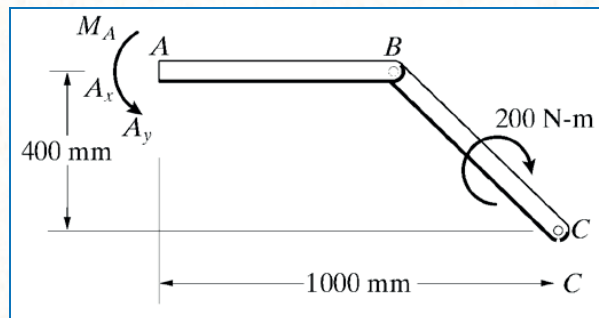
$$B\bar{y} = 500N \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum Fx = 0$$

$$-Bx = 0$$

$$B\bar{x} = 0N$$

**D.C.L (Barra A-B-C)**



**Análisis (A-B-C)**

$$+\curvearrowright \sum M_i = 0$$

$$M_A - 200N.m + 500N(1m) = 0$$

$$M_A = -300N.m$$

$$\bar{M}_A = 300N.m \curvearrowright$$

$$\uparrow \sum Fy = 0$$



$$\sum Ay + 500 = 0$$

$$Ay = -500N$$

$$\bar{A}y = 500N \downarrow$$

$$\rightarrow \sum Fx = 0$$

$$Ax = 0$$

$$\bar{A}x = 0N$$

### EJERCICIO 5.5

El peso del objeto suspendido es de  $W=40\text{lb}$ . Determine la tensión en el resorte y la reacción en F. (El elemento ranurado DE es vertical)

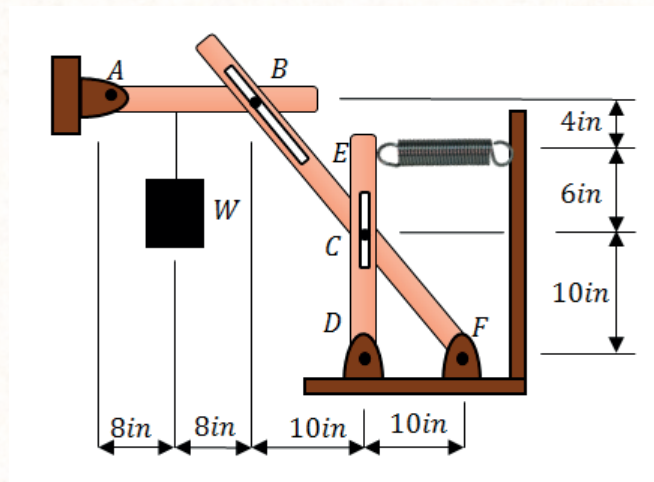


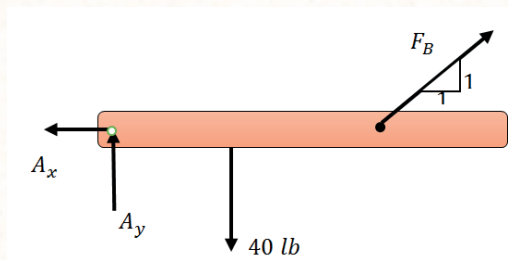
Figura 119. Gráfico ejercicio 5.5

Ilustración: William Bonilla

### Solución:

Iniciamos con el miembro AB

D.C.L. miembro AB

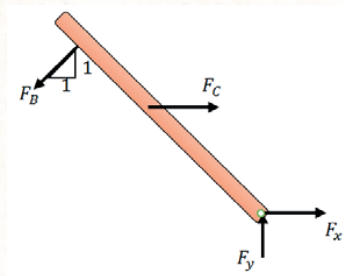


$$+\circlearrowleft \sum M_A = -(40\text{lb})(8\text{in}) + \frac{1}{\sqrt{2}}F_B(16\text{in}) = 0$$

$$F_B = 28.3 \text{ lb}$$

Ahora examinamos BCF

D.C.L ELEMENTO BCF



$$+\circlearrowleft \sum M_F = (F_B)(20\sqrt{2})\text{in} - F_C(10\text{in}) = 0$$

$$F_C = 80 \text{ lb}$$

$$+\rightarrow \sum F_X = -\frac{1}{\sqrt{2}}F_B + F_C + F_X = 0$$

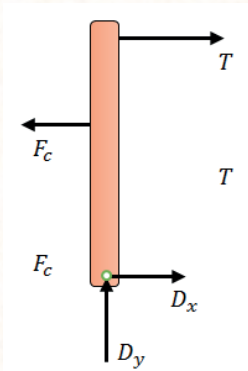
$$F_X = -60 \text{ lb}$$

$$+\uparrow \sum F_Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}F_B + F_Y = 0$$

$$F_Y = 20 \text{ lb}$$

Finalmente examinamos DCE

D.C.L DEL ELEMENTO DCE



$$+\circlearrowleft \sum M_D = -T(16\text{in}) + F_c(10\text{in}) = 0$$

$$T = 50 \text{ lb}$$

Tensión en el resorte = 50 lb

$$F_x = -60 \text{ lb}$$

$$F_y = 20 \text{ lb}$$

### EJERCICIO 5.6

La grúa de pared soporta una carga de 700 [lb]. Determinar las reacciones en los pasadores **A** y **B**. También determine la fuerza axial del cable en el cabrestante **W**.

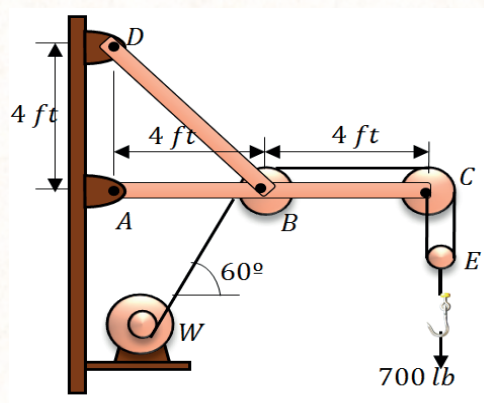
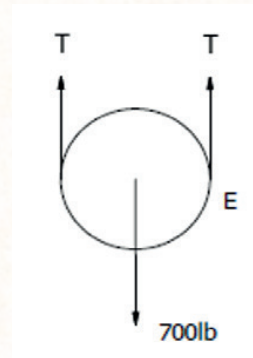


Figura 120. Gráfico del ejercicio 5.6

Ilustración: William Bonilla

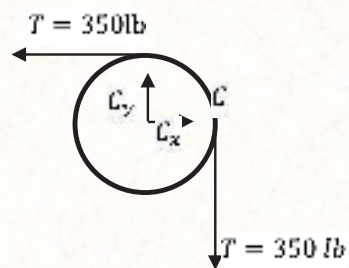
**Solución:**

*DCL de la polea E*



$$T = 350 \text{ lb}$$

*DCL de la polea C*



$$T = 350 \text{ lb}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$C_y - T = 0$$

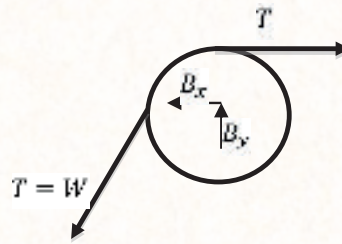
$$\overline{C_y} = 350 \text{ lb } \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$C_x - T = 0$$

$$\overline{C_x} = 350 \text{ lb } \rightarrow$$

*DCL de la polea B*



$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$350 - B_x - 350 \cos 60^\circ = 0$$

$$B_x = 175 \text{ lb}$$

$$\overline{B_x} = 175 \text{ lb} \leftarrow$$

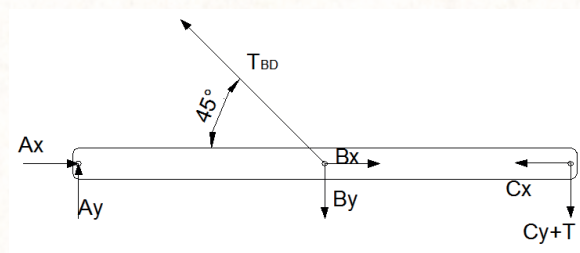
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$\overline{B_y} - 350 \sin 60^\circ = 0$$

$$B_y = 303.11 \text{ lb}$$

$$\overline{B_y} = 303.11 \text{ lb} \uparrow$$

DCL de la barra AC



$$C_y + T = 750 \text{ lb}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$T_{BD} \sin(45)(4\text{ft}) - (303.11\text{lb})(4\text{ft}) - (700\text{lb})(8\text{ft}) = 0$$

$$\overline{T_{BD}} = 2408.56 \text{ lb (Tensión)}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x - 2408.56\text{lb} \cos 45 + 175 - 350 = 0$$

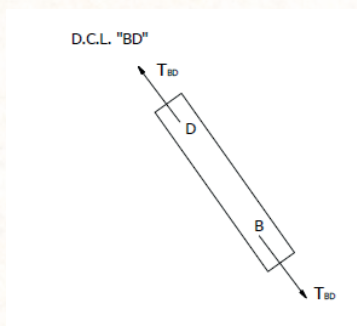
$$\bar{A}x = 1878.11 \text{ lb} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + 2408.56 \sin 45 - 303.11 - 700 = 0$$

$$A_y = -700 \text{ lb}$$

$$\bar{A}y = 700 \text{ lb} \downarrow$$



$$D_x = 2408.56 \cos 45 \text{ lb}$$

$$D_y = 2408.56 \sin 45 \text{ lb}$$

$$\bar{D}x = 1703.11 \text{ lb} \leftarrow$$

$$\bar{D}y = 1703.11 \text{ lb} \uparrow$$

## 5.7 MÁQUINAS

Son aquellas que están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas. Son estructuras que contienen partes en movimiento. Las máquinas, al igual que los armazones, siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas. (BEER & JOHNSTON, 2007). Ver figura 121.

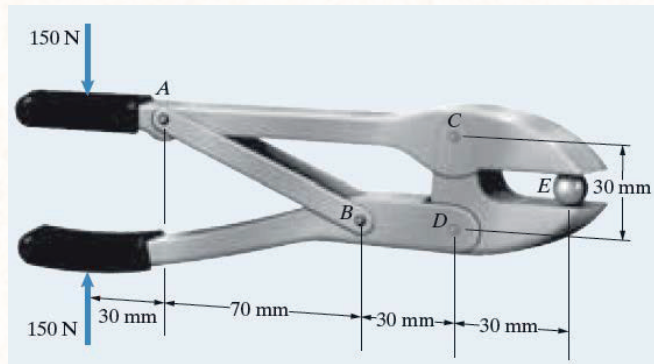


Figura 121. Máquina  
(BEDFORD & FOWLER, Mecánica para Ingeniería Estática, 2008)

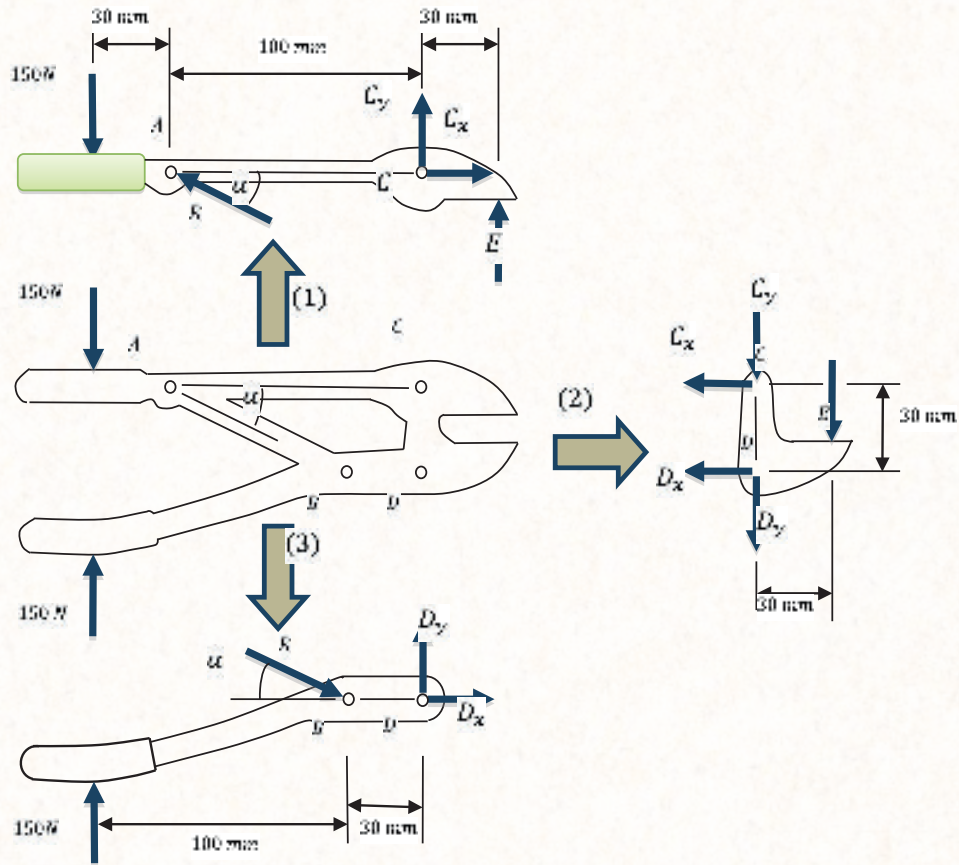


Figura 122. Obtención de los diagramas de cuerpo libre de los elementos  
Ilustración: William Bonilla

5.8 EJERCICIOS RESUELTOS

**EJERCICIO 5.7**

La pala de la excavadora es soportada por un apoyo en E y las dos fuerzas del miembro BC.  $W = 200 \text{ lb}$  peso de la pala que actúa en el punto de muestra. Determine las reacciones de la pala en E y la magnitud de la fuerza axial en las dos fuerzas del miembro BC.

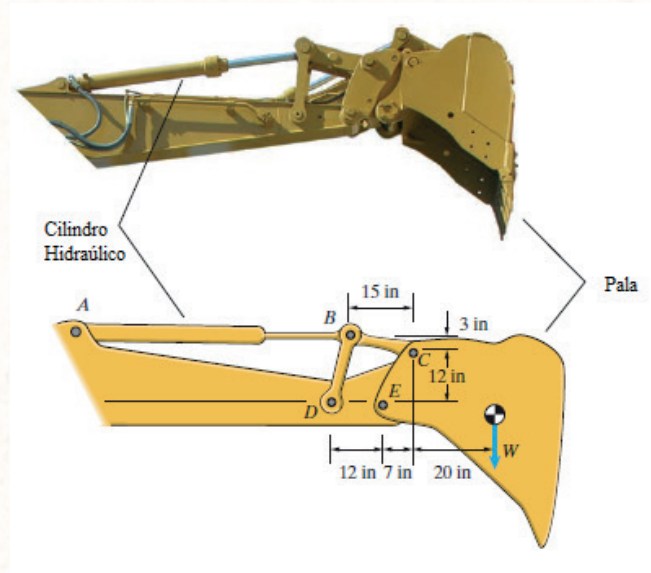
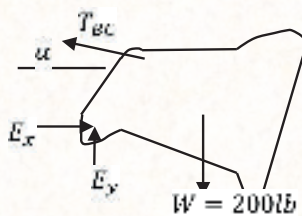


Figura 123 Gráfico del ejercicio 5.7  
(BEDFORD & FOWLER, Mecánica para Ingeniería Estática, 2008)

**Solución:**

Examinamos la pala

D.C.L de la pala.



Ecuaciones de equilibrio para la pala son:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{3}{15} \right) = 11.3^\circ$$



$$+\rightarrow \sum F_x = E_x - T_{BC} \cos(\alpha) = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = E_y + T_{BC} \sin(\alpha) - 200 \text{ lb} = 0$$

$$+\curvearrowright \sum M_C = -(200 \text{ lb})(20 \text{ in}) + E_x(12 \text{ in}) - E_y(7 \text{ in}) = 0$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$E_x = 403.02 \text{ lb}$$

$$E_y = 119.46 \text{ lb}$$

$$T_{BC} (\text{Fuerza axial}) = 410.99 \text{ lb}$$

### EJERCICIO 5.8

Se ejerce una fuerza de 30N sobre los mangos de la tijera. Determine la magnitud de la fuerza ejercida sobre el perno en A.

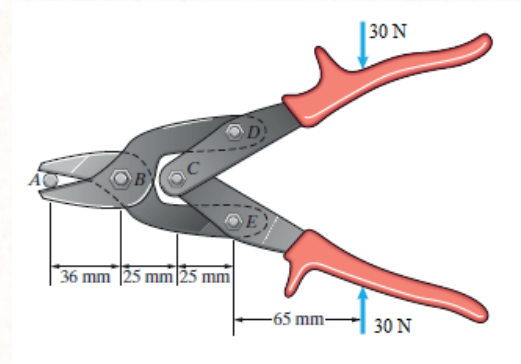


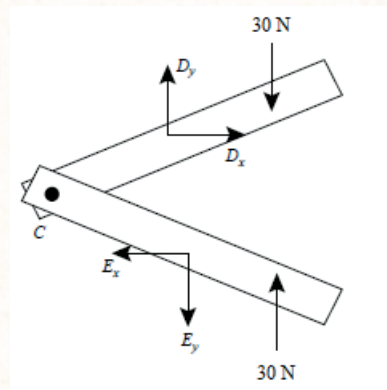
Figura 124 Gráfico del ejercicio 5.8  
(BEDFORD & FOWLER, Mecánica para Ingeniería Estática, 2008)

### Solución:

Asumimos que la tijera es simétrica.

Considere las dos piezas CD y CE:

D.C.L.



$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$E_x = D_x$$

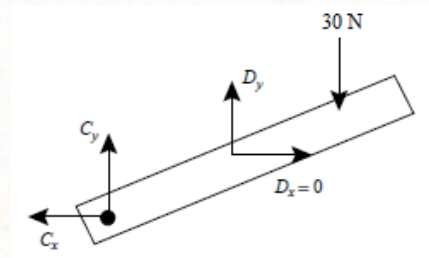
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$E_y = D_y$$

$$+\curvearrowright \sum M_C = 0$$

$$E_x = D_x = 0$$

Ahora examinemos CD:

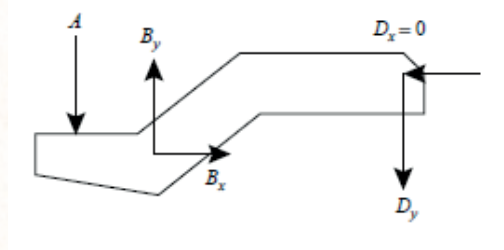


$$+\curvearrowright \sum M_C = -(30 \text{ N})(90 \text{ mm}) + D_y(25 \text{ mm}) = 0$$

$$D_y = 108 \text{ N}$$

$$D_y = 108 \text{ N} \uparrow$$

Finalmente examinemos DBA:



$$+\circlearrowleft \sum M_D = A(36\text{mm}) - D_y(50\text{mm}) = 0$$

$$A = 150 \text{ N (Compresión)}$$

### EJERCICIO 5.9

La articulación de cuatro barras opera las horquillas de una carretilla elevadora tenedor. La fuerza en el apoyo de las horquillas es de  $W = 6 \text{ kN}$ . Determine las reacciones en miembro del CDE.

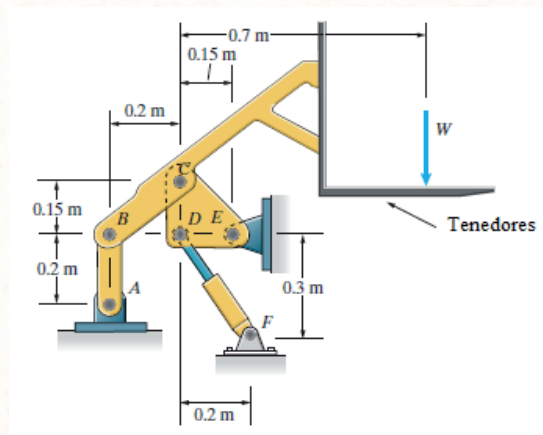
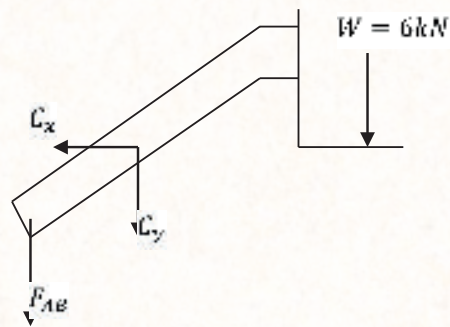


Figura 125 Gráfico del ejercicio 5.9

(BEDFORD & FOWLER, Mecánica para Ingeniería Estática, 2008)

**Solución:**

Consideremos el cuerpo BC. Nota que AB es un cuerpo de 2 fuerzas.



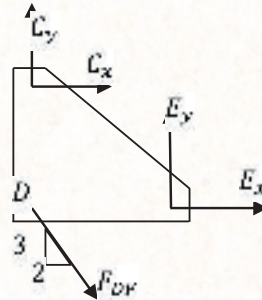
$$+\rightarrow \sum F_x = -C_x = 0$$

$$+\curvearrowright \sum M_B = -C_y(0.2 \text{ m}) - (6 \text{ kN})(0.9 \text{ m}) = 0$$

$$C_x = 0; C_y = -27 \text{ kN}$$

$$\overline{C_y} = 27 \text{ kN } \uparrow$$

Ahora examinemos CDE. Nota que DF es un cuerpo de 2 fuerzas.



$$+\curvearrowright \sum M_E = -C_y(0.15 \text{ m}) - C_x(0.15) + \frac{3}{\sqrt{13}} F_{DF}(0.15 \text{ m}) = 0$$

$$+\rightarrow \sum F_x = C_x + E_x + \frac{2}{\sqrt{13}} F_{DF} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = C_y + E_y - \frac{3}{\sqrt{13}} F_{DF} = 0$$

Resolviendo las ecuaciones encontramos:

$$F_{DF} = -32449.96 \text{ N}$$

$$F_{DF} = 32449.96 \text{ N (Compresión)}$$

$$E_x = 18 \text{ kN}$$

$$\vec{E}_x = 18 \text{ kN} \rightarrow$$

$$E_y = 0$$

### EJERCICIO 5.10

La persona de la figura ejerce fuerzas de 40[N] sobre los mangos de la pinza de presión. Determine:

- La magnitud de las fuerzas que ejercen la pinza sobre el perno en A.
- La magnitud de la fuerza que ejercen entre sí en el punto B.
- Encuentre la fuerza axial del elemento de dos fuerzas DE, indique la tensión [T] o bien la compresión [C].
- Calcule también la ventaja mecánica de la máquina.

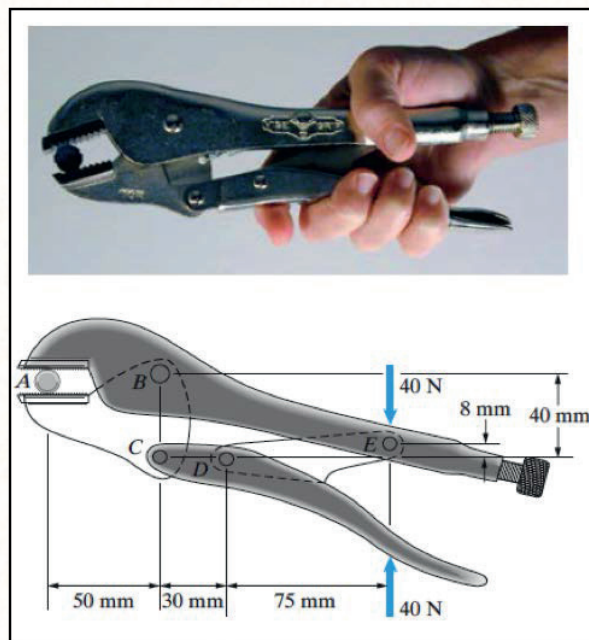
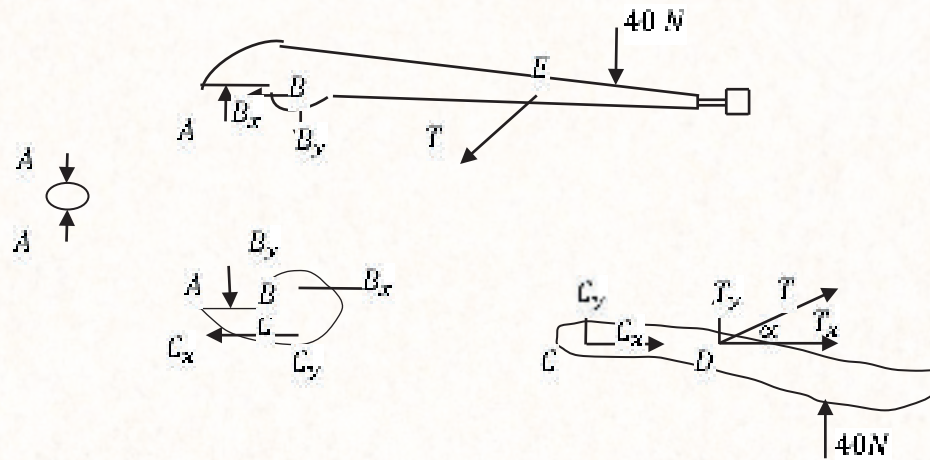


Figura 126. Gráfica del ejercicio 5.10

(BEDFORD & FOWLER, Mecánica para Ingeniería Estática, 2008)

D.C.L. de los elementos.



**Solución:**

$$\tan \alpha = \frac{8}{75}$$

$$\alpha = 6.088^\circ$$

$$\sum M_c = 0$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$40N \cdot 105mm + T \sin \alpha \cdot 30mm = 0$$

$$C_x + T_x = 0$$

$$C_y + T_y + 40 = 0$$

$$T = -\frac{40N \cdot 105mm}{\sin(6.088^\circ) \cdot 30mm}$$

$$C_x = -T \cos 6.088^\circ$$

$$C_y = -T_y - 40$$

$$T = -1319.945 [N]$$

$$C_x = -T \cos 6.088^\circ$$

$$C_y = 100 - 40$$

$$T = 1319.945 [N] [C]$$

$$C_x = 1312.5 [N]$$

$$C_y = 100 [N]$$

$$\bar{C}\bar{x} = 1312.5 \text{ [N]} \rightarrow$$

$$\bar{C}\bar{y} = 100 \text{ [N]} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \qquad \rightarrow \sum F_x = 0 \qquad \uparrow \sum F_y = 0$$

$$-1312.5\text{N} \times 40\text{mm} + A \times 50\text{mm} = 0 \qquad B_x - C_x = 0$$

$$B_y - C_y - A = 0$$

$$A = \frac{1312.5\text{N} \cdot 40\text{mm}}{50\text{mm}}$$

$$B_x = C_x$$

$$B_y = C_y + 1050$$

$$A = 1050 \text{ [N]}$$

$$B_x = 1312.5 \text{ [N]}$$

$$B_y = 100 + 1050$$

$$A = 1050 \text{ [N]} \uparrow$$

$$\bar{B}\bar{x} = 1312.5 \text{ [N]} \rightarrow$$

$$\bar{B}\bar{y} = 1150 \text{ [N]} \uparrow$$

$$v.m. = \frac{F.resistente}{F.matriz}$$

$$v.m. = \frac{1050 \text{ [N]}}{40 \text{ [N]}}$$

$$v.m. = 26.2$$

### EJERCICIO 5.11

Dados los pesos  $w_1=5\text{kN}$  y  $w_2=12\text{kN}$ . Calcule las fuerzas axiales de los elementos CB y DH e indique si están a compresión o tensión, también determine las fuerzas sobre el elemento ACDE en los puntos A Y E.

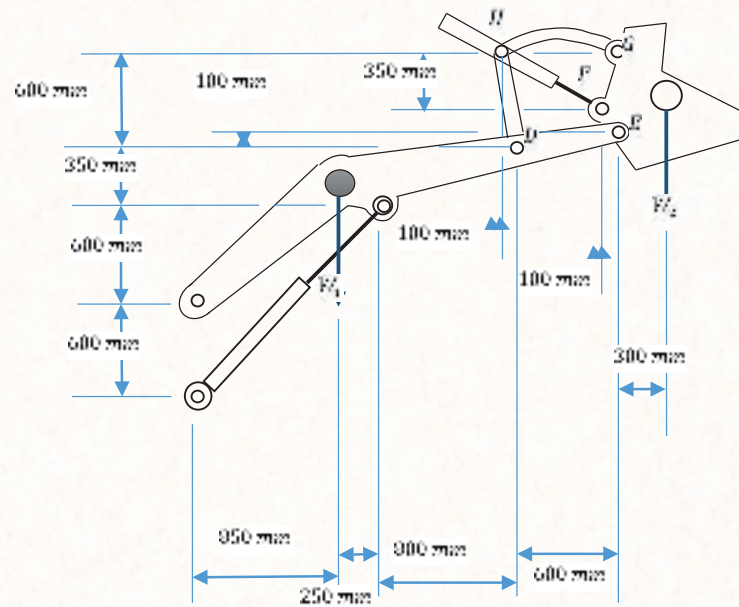
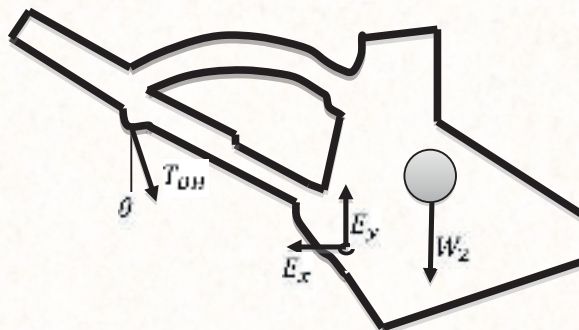


Figura 127. Gráfico del ejercicio 5.11  
Ilustración: William Bonilla

D.C.L. de la Pala.



Solución:



$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{100}{600} \right)$$

$$\theta = 9.47^\circ$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_E = 0$$

$$-W_2(300\text{mm}) - T_{DHx}(500\text{mm}) + T_{DHy}(700\text{mm}) = 0$$

$$-12\text{kN}(300\text{mm}) + T_{DH}[700\text{mm}(\cos 9.47^\circ) - 500\text{mm}(\sin 9.47^\circ)] = 0$$

$$T_{DH} = \frac{12\text{kN}(300\text{mm})}{(700\text{mm}(\cos 9.47^\circ) - 500\text{mm}(\sin 9.47^\circ))}$$

$$T_{DH} = 5.91\text{kN} (T)$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$T_{DHx} - E_x = 0$$

$$E_x = T_{DH} \sin 9.47^\circ$$

$$E_x = 0.97\text{kN} \leftarrow$$

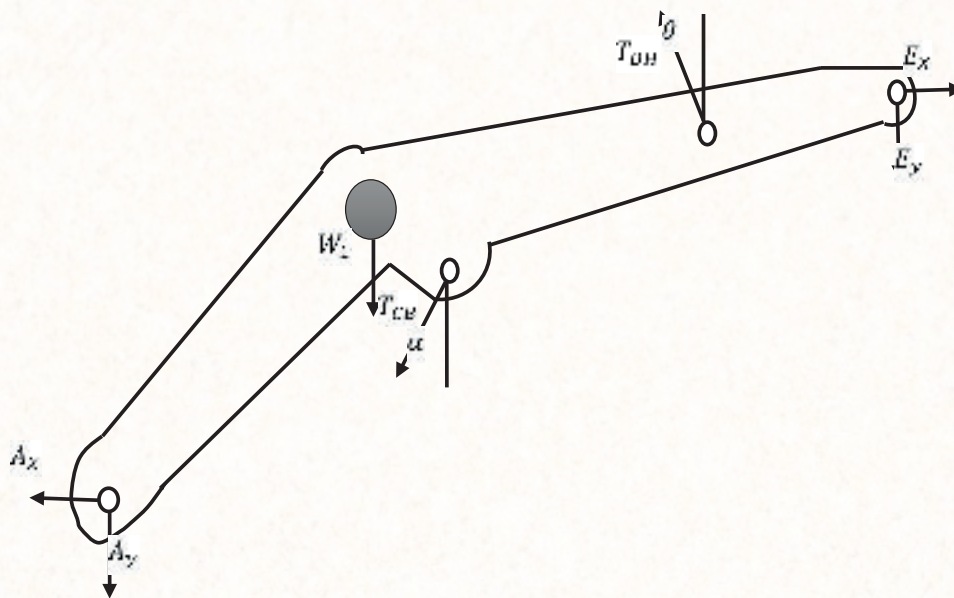
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-T_{DHy} + E_y - W_2 = 0$$

$$E_y = T_{DH} \cos 9.47^\circ + W_2$$

$$E_y = 17.83\text{kN} \uparrow$$

D.C.L. ELEMENTO ADE



$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{1100}{1200} \right)$$

$$\alpha = 47.49^\circ$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$$

$$-W_1(850\text{mm}) + T_{CB}x(600\text{mm}) - T_{CB}y(1100\text{mm}) + T_{DB}x(950\text{mm}) + T_{DB}y(1900\text{mm}) - E_y(2500\text{mm}) - E_x(1050\text{mm}) = 0$$

$$T_{CB}(600\text{mm}(\sin 47.49^\circ) - 1100\text{mm}(\cos 47.49^\circ)) = W_1(850\text{mm}) - T_{DB}x(950\text{mm}) - T_{DB}y(1900\text{mm}) + E_y(2500\text{mm}) + E_x(1050\text{mm})$$

$$T_{CB} = \frac{5\text{kN}(850\text{mm}) - 0.97\text{kN}(950\text{mm}) - 5.83\text{kN}(1900\text{mm}) + 17.83\text{kN}(2500\text{mm}) + 0.97\text{kN}(1050\text{mm})}{(600\text{mm}(\sin 47.49^\circ) - 1100\text{mm}(\cos 47.49^\circ))}$$

$$T_{CB} = -125.73\text{kN}$$

$$T_{CB} = 125.73\text{kN (C)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-A_x - T_{CB}x - T_{DB}x + E_x = 0$$

$$\Delta x = -T_{CB}x - T_{DN}x + Ex$$

$$\Delta x = T_{CB} \operatorname{sen} 47.49^\circ - 0.97 \text{ kN} + 0.97 \text{ kN}$$

$$\bar{\Delta x} = 92.68 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+\rightarrow \Sigma Fy = 0$$

$$-\Delta y - W_1 - T_{CB}y + T_{DN}y - Ey = 0$$

$$\Delta y = -W_1 - T_{CB}y + T_{DN}y - Ey$$

$$\Delta y = -5 \text{ kN} + T_{CB} \cos 47.49^\circ + 5.83 \text{ kN} - 17.83 \text{ kN}$$

$$\bar{\Delta y} = 67.96 \text{ kN} \downarrow$$

## REFERENCIAS.

BEER, F., & JOHNSTON, R. (2010). Mexico: McGRAW-HILL.

HIBBELER. (2004). Mexico: Pearson.

BEER, F., & JOHNSTON, R. (2007). Mexico: Mc GRAW-HILL.

BEDFORD, A., & FOWLER, W. (2008). Mecánica para Ingeniería Estática. México D.F.: ADDISON WESLEY LONGMAN DE MÉXICO, SA DE C.V.

VILLARREAL. (2011). *ESTÁTICA - PROBLEMAS RESUELTOS*. LIMA.

*Mecanica Vectorial para Ingenieros Estatica*. (2004). Mexico: PEARSON EDUCACIÓN.

PYTEL, A. (2000). *Momentos de una Fuerza*. Mexico: copirigth.

Pytel, A., & Kiusalaas, J. (2012). En A. Pytel, & J. Kiusalaas. México D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

HIBBELER, R. (2010). México: PEARSON EDUCACIÓN, México, 2004.

BEDFORD, A., & FOWLER, W. (2000). México: Pearson Educación.

## **BIBLIOGRAFÍA.**

Amé, R. M. (2011). *Mecánica aplicada al diseño de los elementos de máquinas temas básicos de resistencia de materiales aplicables al diseño de árboles y ejes*. Argentina: Editorial Nobuko. Recuperado de <http://www.ebrary.com>

Bedford, A. & Fowler, W. (1996). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison-Wesley Longman.

Bisplinghoff, R. L.; Mar, J. W. & Pian, T.H. (1990). *Statics of deformable solids*. New York: Dover Publications.

Fernández, S. Á., Lampurlanés, C. J., & Puigdomènech, F. L. (2012). *Problemas de resistencia de materiales*. España: Edicions de la Universitat de Lleida. Recuperado de <http://www.ebrary.com>

Fitzgerald, R. W. (1996). *Mecánica de Materiales*. México: Editorial Fondo Educativo Interamericano.

Hilson, B. (1993). *Basic structural behaviour*. London: Thomas Telford.

Jackson, J. H., & Wirtz, H. G. (2009). *Estática y resistencia de materiales*. México: McGraw-Hill Interamericana. Retrieved from <http://www.ebrary.com>

Lardner, T. J., & Archer, R. (1996). *Mecánica de sólidos*. México: McGraw-Hill Interamericana. Recuperado de <http://www.ebrary.com>

Meriam, J. L., Kraige, L. G. (1999). *Mecánica para ingenieros: estática*. (3a. ed.). España: Editorial Reverté, S.A.

Ortiz, B. L. (2007). *Resistencia de materiales* (3a. ed.). España: McGraw-Hill España. Recuperado de <http://www.ebrary.com>

Rodríguez-Avial, L. M., & González-Alberto, G. A. (2010). *Fundamentos de resistencia de materiales*. España: UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia. Recuperado de <http://www.ebrary.com>

Ruiz, G. & Otros. (1982). *Introducción al comportamiento estructural*. Madrid: Seminario de Diseño de Estructuras.

Schodek, D. L. (1992). Structures. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall, Inc.

Seward, D. (1994). Understanding Structures. Analysis, materials, design. Houndmills (Hampshire): The MacMillan Pres Ltd.

Timoshenko, S. P. (1980). Resistencia de materiales. Madrid: Espasa Calpe S.A.; tomo I.

Timoshenko, S. P. & Gere, J. M. (1974). Mecánica de materiales. México: U.T.E.H.A.

Timoshenko, S. P. & Young, D. H. (1983). Teoría de las estructuras. Bilbao: Urmo.

Torroja, E. (1991). Razón y ser de los tipos estructurales. (7a. ed.). Madrid: Editorial CSIC.

## Autores

William Moisés Bonilla Jiménez, Ingeniero Mecánico, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo ESPOCH, Diplomado Superior en Gestión del Aprendizaje Universitario, Magister en Gestión de Energías. Investiga en temas: Diseño de elementos de máquinas, Utilización de energías renovables en generación eléctrica para sistemas mecánicos.

Héctor Cochise Terán Herrera, Ingeniero Electromecánico, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Magister en Gestión de Energías y Magister en Seguridad Industrial y Riesgos del trabajo. Investiga en temas: Mecanizado en Máquinas Herramientas convencionales y de Control Numérico Computarizado, Procesos de soldadura , Metalurgia y Tecnología de la Fundición ,Energías renovables, Automatización Industrial.

Héctor Raúl Reinoso Peñaherrera, Ingeniero Mecánico, Escuela Politécnica Nacional, Master en Administración y Empresas, Egresado Magister en Diseño Mecánico, Diplomado Superior en Auditoria y Gestión Energética, Diploma Superior en Diseño, Gestión y Evaluación de Proyectos de Desarrollo. Investiga en temas: Diseño de elementos de máquinas, procesos de fabricación de materiales, resistencia de materiales, equipos y dispositivos que ayuden en el desarrollo de habilidades en niños con capacidades especiales (autismo, PCI, Down).



# ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

ISBN: 978-9978-301-97-5



9 789978 301975