



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN INNOVACIÓN
Y TRANSFERENCIA TECNOLÓGICA

TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MAGISTER EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PROMOCIÓN PRIMERA

TEMA: “DESARROLLO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE
LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
CLÁSICAS”

AUTOR: FABIÁN MARCELO ORDÓÑEZ MORENO

DIRECTOR: DR. NELSON SUBÍA

SANGOLQUÍ, 2015

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

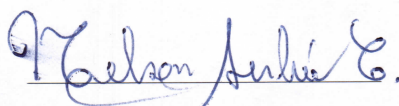
CERTIFICACIÓN DEL DIRECTOR

Dr. Nelson Subía

CERTIFICA:

Que el trabajo titulado "Desarrollo analítico y numérico de las ecuaciones diferenciales clásicas", realizado por el maestrante Ordóñez Moreno Fabián Marcelo, ha sido guiado y revisado periódicamente, cumpliendo con las normas establecidas por el Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, por tanto, se autoriza su presentación para los fines legales pertinentes.

Sangolquí, Abril 2015



Dr. Nelson Subía

DIRECTOR DE LA TESIS

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD

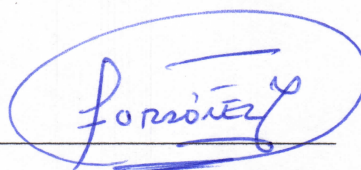
Yo: Ordóñez Moreno Fabián Marcelo

DECLARO QUE:

La tesis de grado titulada "Desarrollo analítico y numérico de las ecuaciones diferenciales clásicas", ha sido desarrollada con base a una profunda investigación, respetando derechos intelectuales de terceros, conforme a las citas correspondientes, cuyas fuentes constan en la bibliografía. Consecuentemente este trabajo es de mi autoría.

En virtud de esta declaración, me responsabilizo del contenido, veracidad y alcance científico de la tesis de grado en mención.

Sangolquí, Abril 2015



Fabián Ordóñez M.

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

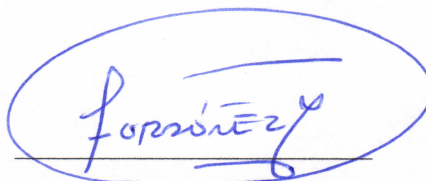
AUTORIZACIÓN

Yo: Ordóñez Moreno Fabián Marcelo

AUTORIZO:

A la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, la publicación en la biblioteca virtual de la institución, de mi trabajo denominado: "Desarrollo analítico y numérico de las ecuaciones diferenciales clásicas", cuyo contenido, ideas y criterios son de mi exclusiva responsabilidad y autoría.

Sangolquí, Abril 2015



Fabián Ordóñez M.

AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento y gratitud a la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE quienes apoyaron mis estudios para lograr el propósito planteado.

Al Dr. Nelson Subía, Director de la Tesis quién con sus altos conocimientos permanentemente orientó el desarrollo del trabajo.

A mi compañero Ing. Patricio Pugarín por su apoyo en la elaboración de la investigación.

*Esta tesis de grado, la dedico de forma muy especial a mi madre quién desde la eternidad
guía todos mis pasos, para ella con infinito amor y gratitud*

Índice general

Certificación del director	I
Declaración de responsabilidad	II
Autorización	III
Agradecimientos	V
Índice de figuras	XI
Índice de cuadros	XII
Resumen	XIII
Abstract	XIV
Introducción	1
1. Ecuaciones diferenciales parciales	3
1.1. Marco Teórico	3
1.2. Métodos de solución	10
1.2.1. Método de Separación de Variables	10
1.2.2. Aproximaciones Numéricas	11
1.3. Errores	13
1.3.1. Error absoluto medio	13
1.3.2. Error relativo medio	13
1.3.3. Error relativo medio cuadrático	14
1.4. Justificación	14
1.5. Objetivos	14
1.5.1. Objetivo General	14

1.5.2. Objetivos Específicos	14
2. Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas	15
2.1. Ecuación del calor	15
2.1.1. Deducción de la ecuación del calor en una varilla	15
2.2. Método de separación de variables y condiciones de contorno	18
2.3. Solución de ecuaciones homogéneas	18
2.3.1. Análisis de la ecuación del calor: condición de Dirichlet	21
2.3.2. Análisis de la ecuación del calor en una varilla: condición de Neu- mann	25
2.3.3. Ecuación del calor bidimensional	30
2.4. Solución de ecuaciones no homogéneas	33
2.5. Problemas de Aplicación	35
2.6. Métodos numéricos con diferencias finitas	53
2.6.1. Deducción de la ecuación en derivadas parciales parabólica en di- ferencias finitas por el método de Crank-Nicholson	53
2.7. Comparaciones	60
3. Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas	70
3.1. Cuerdas vibrantes	70
3.1.1. Deducción de la ecuación para cuerda vibrante	70
3.2. Método de separación de variables con condiciones de contorno.	72
3.2.1. Solución de ecuaciones homogéneas y no homogéneas	72
3.3. Problemas de aplicación	75
3.4. Métodos numéricos con diferencias finitas	94
3.4.1. Deducción de la ecuación en derivadas parciales hiperbólicas en diferencias finitas	94
3.5. Comparaciones	99
4. Ecuaciones diferenciales parciales elípticas	106
4.1. Método de separación de variables con condiciones de contorno	106
4.1.1. Condiciones de Dirichlet para una placa rectangular	107
4.1.2. Condiciones de Neumann para una placa rectangular	111
4.2. Problemas de aplicación	114
4.3. Métodos numéricos con diferencias finitas	120

4.3.1. Deducción de la ecuación en derivadas parciales elíptica en diferencias finitas	120
4.4. Comparaciones	125
5. Conclusiones y recomendaciones	130
Anexo A	132
Matriz de datos Problema 2.5.1	132
Matriz de datos Problema 2.5.2	138
Matriz de datos Problema 2.5.3	144
Matriz de datos Problema 2.5.4	151
Matriz de datos Problema 3.3.1	157
Matriz de datos Problema 3.3.2	161
Matriz de datos Problema 3.3.3	166
Matriz de datos Problema 4.3.1	168
Matriz de datos Problema 4.3.2	174
Anexo B	180
Algoritmo interpolador de Newton	180
Algoritmo 1 que resuelve un sistema tridiagonal	180
Algoritmo 2 que resuelve un sistema tridiagonal	181
Algoritmo que permite determinar la convergencia de las series infinitas	181
Algoritmo que permite determinar la matriz de datos de la EDP utilizando el método de separación de variables, gráfica y perfiles	182
Algoritmo que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación del calor utilizando diferencias finitas	183
Algoritmo que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación del calor utilizando diferencias finitas con fuente térmica	184
Algoritmo que permite encontrar el error medio absoluto y relativo medio cuadrático	185
Algoritmo que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación de ondas utilizando diferencias finitas	186
Algoritmo que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación de Laplace en una placa rectangular utilizando diferencias finitas	187
Bibliografía	189

Índice de figuras

2.1. Energía térmica en un anillo circular infinitesimal	16
2.2. Gráfica y perfiles de la función temperatura U para diferentes tiempos . . .	40
2.3. Gráfica de la función temperatura U	45
2.4. Perfiles de la función temperatura U para diferentes tiempos	45
2.5. Gráfica de la función temperatura U para diferentes tiempos	50
2.6. Gráfica de la función temperatura U para diferentes tiempos	50
2.7. Gráfica y perfiles de la función temperatura U para diferentes tiempos . . .	52
2.8. Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecuación del calor	55
2.9. Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.025; 0.50; 0.75$ y 0.975	60
2.10. Evolución del error absoluto y relativo Problema 2.5.1.	63
2.11. Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.025; 0.25; 0.75$ y 0.975	63
2.12. Evolución del error absoluto y relativo Problema 2.5.2.	66
2.13. Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.05; 0.50; 1.5$ y 1.95	67
2.14. Evolución del error absoluto y relativo Problema 2.5.4.	69
3.1. Tensión y ángulo dependen de x y t en una cuerda	71
3.2. Gráfica y perfiles de la función desplazamiento y para diferentes tiempos . .	80
3.3. Gráfica y perfiles de la función desplazamiento y para diferentes tiempos . .	84
3.4. Gráfica y perfiles de la función desplazamiento y para diferentes tiempos . .	94
3.5. Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecuación de onda	95
3.6. Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.025; 0.25; 0.75$ y 0.975	99

3.7. Evolución del error absoluto y relativo Problema 3.3.1.	101
3.8. Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.03; 0.33; 0.40$ y 0.97	102
3.9. Evolución del error absoluto y relativo Problema 3.3.2.	105
4.1. Grafico de la función temperatura U	116
4.2. Grafico de la función temperatura U	120
4.3. Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecua- ción de Laplace	121
4.4. Evolución del error absoluto y relativo Problema 4.3.1.	127
4.5. Evolución del error absoluto y relativo Problema 4.3.2.	129

Índice de cuadros

2.1. Error absoluto y relativo Problema 2.5.1.	62
2.2. Error absoluto y relativo Problema 2.5.2.	66
2.3. Error absoluto y relativo Problema 2.5.4.	69
3.1. Error absoluto y relativo Problema 3.3.1.	102
3.2. Error absoluto y relativo Problema 3.3.2.	105
4.1. Error absoluto y relativo Problema 4.3.1.	127
4.2. Error absoluto y relativo Problema 4.3.2.	129
5.1. Resumen de errores absolutos y relativos	131

RESUMEN

La teoría clásica de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDP's) las clasifica en tres grandes grupos: elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Así, el modelo elíptico por excelencia involucra el operador de Laplace, en donde la variable tiempo está ausente, permitiendo describir estados estacionarios o de equilibrio. Las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas, representadas por la ecuación del calor y de ondas respectivamente, son los modelos más clásicos y representativos en el contexto de las EDP's de evolución. Sus características matemáticas son muy distintas, pues mientras la ecuación del calor permite describir fenómenos altamente irreversibles en tiempo, por ejemplo en la dinámica de fluidos o en fenómenos de difusión, la ecuación de ondas describe fenómenos de propagación completamente reversibles en el tiempo, por ejemplo en elasticidad o en la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas. El objetivo de la presente investigación, es resolver las EDP's clásicas, aplicando el método analítico de separación de variables y la aproximación numérica por el método de diferencias finitas, para contrastar las soluciones y analizar el error existente. El enfoque que se ofrecerá en este trabajo con las EDP's, será aplicativo y divulgativo; es decir, no se efectuará un análisis del más alto rigor matemático, sino se mostrarán los métodos más usuales para resolver algunas de las EDP's clásicas, utilizando para ello aplicaciones orientadas a la ingeniería.

PALABRAS CLAVE

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

DIFERENCIAS FINITAS

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

CONDICIONES DE DIRICHLET Y NEUMANN

ABSTRACT

The classical theory of Partial Differential Equations (PDEs) classifies them into three groups: elliptic, parabolic and hyperbolic. Thus the ultimate elliptical model involves the Laplace operator, where the time variable is absent, allowing describe stationary or equilibrium states. The parabolic and hyperbolic equations, represented by the heat equation and wave respectively, are the most classic and representative in the context of the EDP's evolution models. Its mathematical properties are very different, because while the heat equation can describe highly irreversible phenomena in time, for example in fluid dynamics or diffusion phenomena, wave equation describing the propagation phenomena completely reversible in time, for example in elasticity or the propagation of acoustic or electromagnetic waves. The objective of this research is to solve the EDP's classic, applying the analytical method of separation of variables and numerical approximation by finite difference method to contrast the solutions and analyze the existing error. The approach offered in this paper with EDP's, will applicative and informative; ie no analysis of the highest mathematical rigor will be made, but the most common methods are shown to resolve some of the EDP's classic, using engineering oriented applications.

KEYWORDS

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

FINITE DIFFERENCES

METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

DIRICHLET CONDITIONS AND NEUMANN

Introducción

En la búsqueda de soluciones a los diferentes tipos de problemas presentados en las ramas de la ingeniería, el modelamiento matemático juega un papel preponderante. Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) derivadas a partir de la modelación, requieren soluciones que ayuden a entender el fenómeno modelado y, a partir de este entendimiento, ayuden a la toma de decisiones. Sin embargo, no siempre es factible obtener soluciones analíticas de las EDP's; por lo cual, a partir de los métodos numéricos se busca encontrar una aproximación a la solución requerida.

Modelar un problema de la vida real desde el punto de vista matemático, en el que se haga intervenir dos o más variables independientes, conduce a menudo a las EDP's. Este trabajo pretende exponer los conocimientos que, a nuestro juicio, son básicos para que un estudiante de ingeniería pueda entender, plantear y desarrollar un modelo matemático basados en EDP's. Por tal virtud, se abordará los tres tipos que más se utilizan y que son la base para formulaciones mas complejas y reales. Las EDP's clásicas que vamos a tratar son:

Parabólicas, corresponden a problemas que se presentan al estudiar los procesos como conductibilidad térmica, difusión, aplicaciones financieras. Como ejemplo se tiene el modelo unidimensional del flujo de calor en un alambre aislado de longitud L .

Hiperbólicas, corresponden a problemas que refieren a fenómenos oscilatorios: vibraciones de cuerda, membranas, oscilaciones electromagnéticas. Un ejemplo es el modelo unidimensional de la cuerda vibrante.

Elípticas, son problemas que aparecen al estudiar procesos estacionarios, es decir que no cambian con el tiempo. Como ejemplo consideramos la función potencial que podría representar el régimen permanente de un potencial electrostático o el régimen permanente de la distribución de la temperatura en una región rectangular del plano [13].

Para resolver analíticamente los diferentes problemas de EDP's, el método de separación de variables se constituye en el más importante y utilizado, a través del cual se

encuentra las soluciones representadas por series infinitas de funciones ortogonales o Series de Fourier. Es importante resaltar que existen muchos problemas que no se pueden resolver satisfactoriamente mediante técnicas analíticas, por lo que es necesario obtener aproximaciones numéricas de sus soluciones. Así, el método que se propone utilizar, es el de las diferencias finitas, que se basa en las fórmulas para aproximar las derivadas de una función.

El estudio que se presenta, resuelve las EDP's clásicas, aplicando el método analítico de separación de variables para contrastar con la solución obtenida a través de la aproximación numérica por el método de las diferencias finitas.

En el capítulo 2, se inicia con la deducción de la ecuación del calor, luego se desarrolla un método general que permite resolver las EDP relativas a problemas de conducción de calor unidimensionales para casos homogéneos y no homogéneos; además, se trata también el caso bidimensional.

El capítulo 3, se colige la ecuación de una cuerda vibrante, se plantea un método general para resolver EDP relativas a cuerda vibrante y problemas relacionados con la ecuación de ondas unidimensionales, analizando los casos homogéneos y no homogéneos, en donde actúa una fuerza externa.

En el capítulo 4 se estudia la ecuación de Laplace, de igual forma, se analiza un método general para resolver problemas de conducción del calor para placas rectangulares que representan la solución de casos homogéneos.

Cada solución encontrada, es verificada al reemplazar en la EDP y en sus condiciones de contorno. Para la comprobación de las condiciones iniciales se desarrolla un algoritmo.

Luego, los ejercicios planteados son resueltos por diferencias finitas, a través de algoritmos planteados en los libros de consulta, utilizando para ello MATLAB, que es un lenguaje de alto nivel utilizado en cálculo numérico.

Para comparar la solución analítica y numérica, se desarrolla un algoritmo que permite analizar el error.

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales parciales

1.1. Marco Teórico

El uso de ecuaciones en derivadas parciales es utilizado en muchos campos de la física y la ingeniería, como por ejemplo: acústica, aerodinámica, elasticidad, transferencia de calor, meteorología, mecánica cuántica, electrostática, es ampliamente difundida y de ahí el interés y necesidad por su estudio y conocimiento.

Una ecuación en derivadas parciales es una ecuación diferencial cuya incógnita es una función que depende de más de una variable, en donde el orden de la ecuación se considera el de la derivada parcial más alta y se representan de la siguiente manera

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\right) = 0$$

con $u = u(x, y, \dots)$ es la variable dependiente [11], [12].

Nuestro interés ahora es encontrar las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden lineal y homogénea, cuyo desarrollo se realiza a continuación [1], [10].

Una EDO de este tipo, se representa así:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{con } a \neq 0, b, c \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

La función exponencial $e^{\lambda x}$ se puede considerarse como solución de dicha ecuación, pues

cumple con la condición planteada. Al substituir en (1.1), se consigue

$$\begin{aligned} a(e^{\lambda x})'' + b(e^{\lambda x})' + c(e^{\lambda x}) &= 0 \\ a(\lambda^2 e^{\lambda x}) + b(\lambda e^{\lambda x}) + c(e^{\lambda x}) &= 0 \\ e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) &= 0 \end{aligned}$$

Por el teorema del factor cero y como $e^{\lambda x} \neq 0$, entonces se debe cumplir que la ecuación cuadrática es cero.

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Ahora, vamos a analizar sus raíces, que vienen dadas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Discriminante positivo

Las soluciones de EDO (1.1) son de la forma $e^{\lambda_1 x}$ y $e^{\lambda_2 x}$, puesto que λ_1 y λ_2 son las raíces de una ecuación de segundo grado, además, éstas deben ser linealmente independientes. Para comprobar aquello, determinemos el wronskiano de las funciones solución planteadas.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \lambda_2 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \\ &= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

Como $\lambda_2 - \lambda_1$ es diferente de cero, pues por condición del caso que estamos tratando, $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Además, sabemos que las funciones exponenciales no toman el valor de cero, entonces concluimos que el valor de dicho determinante es diferente de cero, lo que significa que dichas funciones son linealmente independientes.

Por tanto, la solución general de (1.1), se expresa como una combinación lineal de las soluciones encontradas.

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{1.2}$$

■ Discriminante nulo

Para este caso, existe una solución que es de la forma $e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}$. Para determinar la segunda solución, se realiza a través del método de reducción de orden para EDO's. Para ello, multiplicamos a la primera raíz por otra función v .

$$y = v(x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}$$

Determinamos ahora su primera derivada, expresando como factores de las dos funciones utilizadas.

$$\begin{aligned} y' &= v'(x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} - \frac{b}{2a}v(x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \\ &= e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \left(v'(x) - \frac{b}{2a}v(x) \right) \end{aligned}$$

Luego, calculamos su segunda derivada, y expresamos en forma similar a la primera derivada.

$$\begin{aligned} y'' &= v''(x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} - \frac{b}{2a}v'(x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} - \frac{b}{2a}v'(x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} + \frac{b^2}{4a^2}v(x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \\ &= e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \left[v''(x) - \frac{b}{2a}v'(x) - \frac{b}{2a}v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}v(x) \right] \\ &= e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \left[v''(x) - \frac{b}{a}v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}v(x) \right] \end{aligned}$$

Substituyendo la función y las respectivas derivadas en (1.1) y simplificando, se consigue la ecuación diferencial siguiente.

$$\begin{aligned} a \left[v''(x) - \frac{b}{a}v'(x) - \frac{b^2}{4a^2}v(x) \right] + b \left(v'(x) - \frac{b}{2a}v(x) \right) + cv &= 0 \\ av'' - bv + \frac{b^2}{4a}v + bv' - \frac{b^2}{2a}v + cv &= 0 \\ av'' + \left(\frac{b^2v - 2b^2v + 4acv}{4a} \right) &= 0 \\ av'' + \left(\frac{4acv - b^2v}{4a} \right) &= 0 \\ av'' - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)v &= 0 \end{aligned}$$

Haciendo cumplir la condición de nulidad del discriminante, se consigue

$$av'' = 0$$

$$v'' = 0$$

Integrando, se forma una función lineal.

$$v(x) = c_1x + c_2$$

Entonces, la solución buscada está dada por

$$y = (c_1x + c_2)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}$$

Se acostumbra a utilizar sólo la ecuación $y = xe^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}$. Estas soluciones deben ser linealmente independientes, lo que se verifica calculando el wronskiano.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} & xe^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \\ -\frac{b}{2a}e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} & e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} - \frac{bx}{2a}e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \left[e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} - \frac{bx}{2a}e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \right] + \frac{bx}{2a}e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \\ &= e^{-\left(\frac{b}{a}\right)x} - \frac{bx}{2a}e^{-\left(\frac{b}{a}\right)x} + \frac{bx}{2a}e^{-\left(\frac{b}{a}\right)x} \\ &= e^{-\left(\frac{b}{a}\right)x} \end{aligned}$$

La función exponencial encontrada nunca puede ser cero, lo que significa que las soluciones determinadas son linealmente independientes. Por lo tanto, la solución general está constituida por la combinación lineal de sus raíces.

$$y = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x} \tag{1.3}$$

- Discriminante negativo

Las raíces en este caso son números complejos, que podrían representarse como $\alpha + i\beta$, sus soluciones serán del tipo $e^{(\alpha \pm i\beta)x}$. Por tanto, la solución general de (1.1), esta

conformada por la combinación lineal de las soluciones planteadas.

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (1.4)$$

Dichas soluciones deben ser transformadas y presentadas con números reales. Recordemos el desarrollo de Taylor para la función exponencial e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Si se reemplaza x por ix y luego la serie descomponemos en la suma de dos series, la una cuando n toma valores pares y la otra cuando n toma valores impares.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

De hecho, la primera serie representa el desarrollo de Taylor para el coseno y la segunda para el seno, por tanto, podemos concluir que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad (1.5)$$

Ahora, si sustituimos x por $-x$, se tiene

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \operatorname{sen}(x) \quad (1.6)$$

Aplicando las ecuaciones (1.5) y (1.6) a las soluciones planteadas, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)x} &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)] \\ e^{(\alpha-i\beta)x} &= e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \\ &= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x)] \end{aligned}$$

Ahora, desarrollemos la suma y la diferencia de las soluciones planteadas, encontrando otras funciones que son soluciones de (1.1), pues toda combinación lineal de

las soluciones, es solución en base al principio de superposición.

$$\begin{aligned}
 e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} &= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)] + e^{\alpha x} [\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x)] \\
 &= 2e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\
 e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} &= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)] - e^{\alpha x} [\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x)] \\
 &= 2ie^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)
 \end{aligned}$$

Las funciones $e^{\alpha x} \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ se pueden considerar las soluciones de valores reales de (1.1). Además, el wronskiano aplicado a estas funciones verifica su independencia lineal.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 W(y_1, y_2) &= e^{\alpha x} \cos(\beta x) [\alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x)] - e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \\
 &\quad [\alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)] \\
 &= e^{2\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \cos(\beta x) + \beta e^{2\alpha x} \cos^2(\beta x) - \alpha e^{2\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \cos(\beta x) + \\
 &\quad \beta x e^{2\alpha x} \operatorname{sen}^2(\beta x) \\
 &= \beta e^{2\alpha x} [\operatorname{sen}^2(\beta x) + \cos^2(\beta x)] \\
 &= \beta e^{2\alpha x}
 \end{aligned}$$

Como la función exponencial resultante no puede ser cero y el valor de β tampoco, pues la condición es que sea imaginario, entonces, las soluciones son linealmente independientes.

Esto, nos permite decir que la solución general real de (1.1), es

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y = e^{\alpha x} [c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)] \quad (1.7)$$

Para determinar la solución general de una EDP's, se utiliza principalmente el método de separación de variables, el mismo que permite determinar las soluciones producto que son de la forma deducida en (1.2), (1.3) y (1.7). En cada capítulo se deduce las soluciones generales y particulares de las diferentes EDP's, luego son aplicadas en los diferentes problemas

planteados.

Las EDP's parabólicas, son modeladas a través de la EDP que depende de x y de t , con las condiciones inicial y de contorno siguientes:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (1.8)$$

$$C.I. \quad U(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$C.C. \quad \begin{cases} U(0, t) = T_1 \\ U(L, t) = T_2 \end{cases}, \quad t > 0$$

La ecuación del calor (1.8) representa el caso homogéneo, al sumar una fuente térmica Q , obtenemos el caso no homogéneo, que también es tratado en el capítulo correspondiente.

Cuando la parte espacial se presenta con dos variables, tenemos la EDP parabólica bidimensional (homogénea), que se presenta en la siguiente forma.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right], \quad t > 0; \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$C.I. \quad U(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < H$$

$$C.C. \quad \begin{cases} U(x, 0, t) = U(x, H, t) = 0, & 0 < x < L; \quad t > 0 \\ U(0, y, t) = U(L, y, t) = 0, & 0 < y < H; \quad t > 0 \end{cases}$$

Las EDP's hiperbólicas, depende de x y de t , con las condiciones inicial y de contorno siguientes:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (1.9)$$

$$C.C. \quad y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$C.I. \quad \begin{cases} y(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}, \quad 0 < x < L$$

Cuando en la ecuación hiperbólica (1.9) aparece una fuerza externa F , aparece el caso no homogéneo, su estudio se presenta en el respectivo capítulo.

Y las EDP's elípticas, vienen dadas por EDP que depende de x y de y , con las condiciones de contorno siguientes, denominada ecuación de Laplace bidimensional.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H \quad (1.10)$$

$$C.C. \begin{cases} U(0, y) = g_1(y) & \text{para } 0 < y < H \\ U(L, y) = g_2(y) & \text{para } 0 < y < H \\ U(x, 0) = f_1(x) & \text{para } 0 < x < L \\ U(x, H) = f_2(x) & \text{para } 0 < x < L \end{cases}$$

Si se aumenta la variable z , obtenemos la EDP en tres dimensiones o ecuación de Laplace tridimensional.

1.2. Métodos de solución

En este trabajo se considera dos formas para encontrar la solución de una EDP. Desde el punto de vista analítico el método de separación de variables y, desde el punto de vista numérico el método de las diferencias finitas.

1.2.1. Método de Separación de Variables

Este método se utiliza cuando la ecuación diferencial parcial y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas, por ejemplo en la ecuación del calor, de cuerda vibrante o en la ecuación de Laplace.

El método consiste en reemplazar a la función principal por un producto de dos funciones, que bien puede ser X , T o Y . Así, por ejemplo para la ecuación del calor (parabólica) U se reemplaza con $X \cdot T$, en el de ondas (hiperbólica) y se utiliza el mismo reemplazo anterior y, para la ecuación de Laplace (elíptica) U con $X \cdot Y$.

Para su determinación, se debe realizar en forma secuencial, los siguientes pasos [11].

- Reemplazar en la solución general de la EDP por el producto de funciones que depende, en particular para la ecuación del calor, la función temperatura U debe substituirse por

$$U(x, t) = X(x)T(t) \tag{1.11}$$

donde X y T dependen de x y t respectivamente;

- Agrupar en cada lado de la ecuación a las funciones con sus respectivas derivadas;
- Igualar a una constante denominada de separación λ ;
- Al aplicar el método de separación de variables la derivada parcial inicial se transforma en una derivada ordinaria, con lo que se forma un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias;

- La ecuación temporal es una integral con soluciones de tipo exponencial o polinómica;
- Determinar λ a través de las condiciones de contorno;
- La ecuación espacial que es una EDO de segundo orden y lineal, se reemplaza por las soluciones que serán deducidas;
- La solución general se constituye en el producto de las soluciones de las EDO determinadas en el paso anterior;
- Por el principio de superposición planteamos una serie infinita;
- Se aplica la condición inicial o de contorno, lo que nos permite determinar los coeficientes A_n y/o B_n aplicando la propiedad de ortogonalidad de los senos o cosenos;
- Se construye la solución general final en términos de los coeficientes calculados y de las funciones encontradas.

Las condiciones de contorno que se tratan en los problemas planteados, son:

- Dirichlet, donde la función se describe para cada punto de el contorno de la región;
- Neumann, donde se prefijan los valores de la derivada de la función sobre el contorno.
- Algunos problemas plantean condiciones mixtas, es decir sus datos son referidos a las fronteras de la función y a la derivada de la función.

1.2.2. Aproximaciones Numéricas

Es importante resaltar que muchos problemas no se pueden resolver satisfactoriamente mediante técnicas analíticas elementales, por lo que es necesario obtener aproximaciones numéricas de las soluciones. El método propuesto es el de **Diferencias Finitas**, que se basa en la utilización de fórmulas para aproximar las derivadas de una función. Estas fórmulas de aproximación de las derivadas de una función pueden ser: centradas, progresivas o regresivas, con un orden de la aproximación $O(h^n)$.

Diferencias finitas es un método general que permite la solución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales definidas en dominios finitos. Para ello, se discretiza la ecuación con una malla rectangular con puntos de una distancia h y k para los ejes x e y , respectivamente [16].

Un mallado sobre el intervalo $[a, b]$ es un conjunto de puntos x_0, x_1, \dots, x_N , tales que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

La distribución de puntos realizada tiene como objetivo reducir el error cometido, en las aproximaciones, al discretizar una ecuación diferencial [15].

A continuación, demostramos las fórmulas de diferencias finitas, que se utilizan para deducir los métodos de solución para las ecuaciones en derivadas parciales [3].

- Diferencias finitas para la primera derivada progresiva de orden $O(h)$

Se realiza el desarrollo de Taylor para $f(x + h)$, lo que permite deducir la relación.

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + f'(x).h + \frac{f''(c).h^2}{2!} \\ f'(x) &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{f''(c).h}{2!} \\ f'(x) &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + O(h) \end{aligned}$$

- Diferencias finitas para la primera derivada regresiva de orden $O(h)$

En forma similar a la demostración anterior, utilizando el desarrollo de Taylor para $f(x - h)$, se determina la fórmula.

$$\begin{aligned} f(x - h) &= f(x) - f'(x).h + \frac{f''(c).h^2}{2!} \\ f'(x) &= \frac{f(x) - f(x - h)}{h} + \frac{f''(c).h}{2!} \\ f'(x) &= \frac{f(x) - f(x - h)}{h} + O(h) \end{aligned}$$

- Diferencias finitas centradas para la primera derivada de orden $O(h^2)$

Para su determinación se utiliza el desarrollo de Taylor para $f(x + h)$ y $f(x - h)$, así

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + f'(x).h + \frac{f''(x).h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(\epsilon_1).h^3}{3!} \\ f(x - h) &= f(x) - f'(x).h + \frac{f''(x).h^2}{2!} - \frac{f^{(3)}(\epsilon_2).h^3}{3!} \\ f(x + h) - f(x - h) &= 2f'(x).h + \frac{h^3(f^{(3)}(\epsilon_1) + f^{(3)}(\epsilon_2))}{3!} \\ &= 2f'(x).h + \frac{2h^3(f^{(3)}(\epsilon))}{3!} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2(f^{(3)}(\epsilon))}{3!}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - O(h^2)$$

- Diferencias finitas centradas para la segunda derivada de orden $O(h^2)$

Para determinar la segunda derivada, se utiliza el orden de aproximación siguiente.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \frac{f''(x).h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x).h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(\epsilon_1).h^4}{4!}$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x).h + \frac{f''(x).h^2}{2!} - \frac{f^{(3)}(x).h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(\epsilon_2).h^4}{4!}$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2f''(x).h^2}{2!} + \frac{h^4(f^{(4)}(\epsilon_1) + f^{(4)}(\epsilon_2))}{4!}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h^2} - \frac{h^2(f^{(4)}(\epsilon))}{12}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h^2} - O(h^2)$$

1.3. Errores

1.3.1. Error absoluto medio

El error absoluto medio se determina como el promedio para cada columna (tiempo o variable espacial y) del valor absoluto de la matriz resultante de la diferencia de las matrices de datos consideradas exactas con las aproximadas.

$$Ea = \frac{|a_{i,j} - \tilde{a}_{i,j}|}{n}$$

1.3.2. Error relativo medio

El error relativo medio se determina como el promedio para cada columna (tiempo o variable espacial y) de la matriz resultante del valor absoluto de la diferencia de las matrices de datos consideradas exactas con las aproximadas, dividida para la matriz de datos exacta.

$$Er = \frac{\sum_{i,j}^{n,m} \left[\frac{|a_{i,j} - \tilde{a}_{i,j}|}{a_{i,j}} \right]}{n}$$

1.3.3. Error relativo medio cuadrático

El error relativo medio cuadrático se determina como la raíz cuadrada del promedio de cada columna (tiempo o variable espacial y) de la matriz diferencia entre las matrices de datos consideradas exactas con las aproximadas, dividida para la matriz de datos exacta, elevadas al cuadrado.

$$Er = \sqrt{\frac{\sum_{i,j}^{n,m} \frac{(a_{i,j} - \tilde{a}_{i,j})^2}{(a_{i,j})^2}}{n}}$$

1.4. Justificación

Las EDP's se constituyen en un importante recurso para resolver un buen grupo de problemas relacionados con la ciencia e ingeniería. Entonces, se necesita desarrollar procesos didácticos que permitan entender y aplicar para solucionar los diferentes tipos de problemas que se puedan presentar.

Los métodos aproximados se constituyen una alternativa de solución para las EDP que tienen solución analítica y también los que no lo tienen, logrando resultados satisfactorios y confiables.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Resolver las ecuaciones diferenciales parciales clásicas, aplicando los métodos analíticos y numéricos, determinando su grado de confiabilidad y, presentados en forma didáctica como un material científico, útil para el aprendizaje de las EDP's.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Desarrollar las metodologías clásicas de solución analítica de las EDP's.
- Desarrollar las metodologías de solución aproximada de las EDP clásicas.
- Determinar la validez de las soluciones numéricas de las EDP's contrastando con las soluciones analíticas en donde sea posible.
- Presentar un material didáctico para la enseñanza de las EDP's a nivel superior.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

2.1. Ecuación del calor

Los cambios en la temperatura que se experimentan en una región de un determinado cuerpo, en un intervalo de tiempo son modelados a través de las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, que representan la ecuación del calor.

2.1.1. Deducción de la ecuación del calor en una varilla

La energía térmica existente en una superficie circular, en una varilla unidimensional, está dada por el producto de la densidad de energía (δ_e) por el volumen del anillo circular infinitesimal formado $V = S \cdot \Delta x$, donde S es la sección circular y Δx el espesor infinitesimal existente entre las secciones circulares [2].

$$E_T = \delta_e S \Delta x \quad (2.1)$$

Si derivamos parcialmente con respecto al tiempo la ecuación (2.1), obtenemos la variación de la energía térmica.

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\delta_e S \Delta x]$$

El flujo de calor ϕ , que depende de x y de t viene dado por la relación:

$$\phi = \frac{E_T}{t}$$

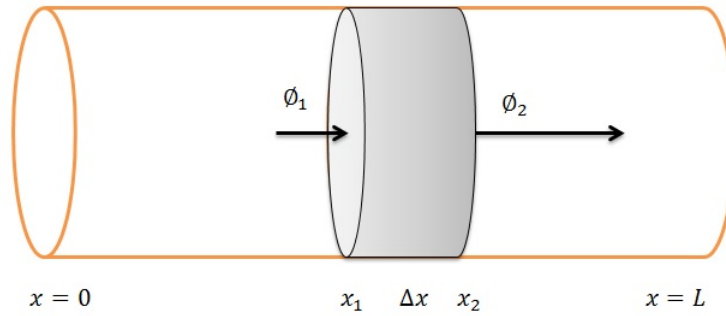


Figura 2.1: Energía térmica en un anillo circular infinitesimal

La ley de conservación de la energía establece:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\delta_e S \Delta x] = \phi_1 S - \phi_2 S + Q S \Delta x$$

donde ϕ_1 es el flujo de calor en la frontera izquierda y ϕ_2 en la frontera derecha del anillo formado; Q es la energía interna por unidad de tiempo.

Dividiendo para el volumen infinitesimal y evaluando el límite planteado, logramos que las superficies de las fronteras sean lo más cercanas posibles, logrando así una mejor aproximación.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_e}{\partial t} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\phi_1 - \phi_2}{\Delta x} \right] + Q \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta x} \right] + Q \end{aligned}$$

Por la definición de derivada parcial, tenemos:

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \quad (2.2)$$

Si en la fórmula de la densidad de un material δ , se despeja la masa y se reemplaza el volumen, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{m}{V} \\ m &= \delta V \end{aligned}$$

$$m = \delta S \Delta x \quad (2.3)$$

Recordemos ahora la relación de energía térmica, conocido el calor específico.

$$E_T = m c_e U(x, t)$$

Reemplazando (2.3), conseguimos

$$E_T = \delta S \Delta x c_e U(x, t) \quad (2.4)$$

Igualando las ecuaciones de energías (2.1) y (2.4)

$$\begin{aligned} \delta_e S \Delta x &= \delta S \Delta x c_e U \\ \delta_e &= c_e \delta U \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.2), la densidad de energía δ_e , se forma la siguiente ecuación.

$$c_e \delta \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \quad (2.5)$$

Fourier determinó que el flujo de calor cumple la siguiente ecuación:

$$\phi = -K_0 \frac{\partial U}{\partial x}$$

en donde K_0 es la conductividad térmica.

Si reemplazamos dicha ecuación en (2.5), se logra deducir la ecuación del calor.

$$\begin{aligned} c_e \delta \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-K_0 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + Q \\ c_e \delta \frac{\partial U}{\partial t} &= K_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + Q \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{K_0}{c_e \delta} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{Q}{c_e \delta} \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{Q}{c_e \delta} \end{aligned}$$

con $c^2 = \frac{K_0}{c_e \delta}$, constante conocida como difusividad térmica.

2.2. Método de separación de variables y condiciones de contorno

Al emplear dicho método, se realiza el reemplazo en la función temperatura U por el producto de las funciones XT , determinando así las soluciones producto que constituyen EDO's, luego se aplican las condiciones de contorno e iniciales, determinando así la solución general y particular.

La metodología para utilizar separación de variables a las EDP's, planteada en el marco teórico requiere que tanto la ecuación como las condiciones de contorno deben ser lineales y homogéneas, es decir no debe existir fuentes térmicas que actúen sobre el cuerpo $Q = 0$, es decir cuando se tiene el caso homogéneo.

El caso no homogéneo se presenta cuando $Q \neq 0$ y se analiza en el problema 2.5.4.

2.3. Solución de ecuaciones homogéneas

La EDP homogénea de la conducción del calor en una varilla unidimensional en el que los coeficientes térmicos son constantes, viene representada por la expresión siguiente [2], [5].

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t > 0 \quad 0 < x < L \quad (2.6)$$

$$\text{C.I.} \quad U(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \quad (2.7)$$

$$\text{C.C} \quad U(0, t) = U(L, t) = 0 \quad t > 0 \quad (2.8)$$

Si en la ecuación del calor (2.6), reemplazamos (1.11) así como la condición dada para las fuentes $Q = 0$, se obtiene

$$\frac{\partial [X(x)T(t)]}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 [X(x)T(t)]}{\partial x^2}$$

Ahora, se deriva en forma parcial con respecto a t y x las variables de la ecuación se asocian con sus respectivas derivadas, como se indica a continuación.

$$\begin{aligned} X(x) \frac{dT}{dt} &= c^2 \frac{d^2 X}{dx^2} T(t) \\ \frac{dT}{c^2 T dt} &= \frac{d^2 X}{X dx^2} T(t) \end{aligned}$$

La igualdad de las razones dadas, forman una proporción que puede ser igualado a un valor

constante: λ .

$$\frac{dT}{c^2 T dt} = \frac{d^2 X}{X dx^2} = \lambda$$

De la proporción, podemos plantear dos EDO's, la una temporal y la otra espacial, como se presenta a continuación.

$$\frac{dT}{T dt} = \lambda c^2 \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda X \quad (2.10)$$

A continuación, vamos a resolver cada una de las EDO's que resultaron de aplicar el método de separación de variables.

Para la ecuación temporal, su solución se consigue integrando, llegando a determinar una función exponencial.

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T} &= \int \lambda c^2 dt \\ \text{Ln } T &= \lambda c^2 t + \text{Ln } k \\ T &= e^{\lambda c^2 t + \text{Ln } k} \\ T &= e^{\lambda c^2 t} e^{\text{Ln } k} \\ T(t) &= k e^{\lambda c^2 t} \end{aligned}$$

La EDO espacial que es de segundo orden y lineal, genera soluciones como las expresadas en (1.2), (1.3) y (1.7), en cualquiera de los casos analizados debe ser decreciente, ahí se modelará en forma correcta la distribución del calor. Para ello, la componente exponencial debe ser negativa, esto se logra asignando a la constante de separación λ el signo (-).

$$\frac{dT}{c^2 T dt} = \frac{d^2 X}{X dx^2} = -\lambda$$

De aquí, se deduce las siguientes ecuaciones escritas con una notación más simple.

$$T' + c^2 \lambda T = 0 \quad (2.11)$$

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (2.12)$$

Entonces, la ecuación temporal podemos expresar de la siguiente forma

$$T(t) = k e^{-\lambda c^2 t} \quad (2.13)$$

Una solución para (2.12) es una función de la forma $X(x) = e^{mx}$, si se substituye en dicha ecuación, se forma la ecuación auxiliar.

$$m^2 e^{mx} + \lambda e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + \lambda) = 0$$

Como la función exponencial no puede ser cero, entonces el factor $m^2 + \lambda$ debe cumplir dicha condición, donde λ puede ser positivo, cero o negativo.

$$m^2 + \lambda = 0$$

$$m = \pm\sqrt{-\lambda}$$

- Si $\lambda > 0$

Para este caso, las raíces serían $m = \pm\sqrt{\lambda}i$ y al reemplazar en (1.7), en donde $\alpha = 0$ y $\beta = \sqrt{\lambda}$, la solución vendría dada por

$$y = e^0 [c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)]$$

$$y = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.14)$$

- $\lambda = 0$

Esta condición reemplazada en (1.3) permite encontrar la solución siguiente

$$y = c_1 e^0 + c_2 x e^0$$

$$y = c_1 + c_2 x \quad (2.15)$$

- $\lambda < 0$

Las raíces bajo esta condición son $m = \pm\sqrt{\lambda}$, que substituidas en (1.2), permiten determinar la solución.

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} \quad (2.16)$$

La solución general de la función temperatura U por el método de separación de variables, se expresa como el producto de las funciones T y cualquiera de las funciones X determinadas.

2.3.1. Análisis de la ecuación del calor: condición de Dirichlet

A continuación vamos a determinar la solución general y particular del problema de calor planteado, que cumple las siguientes condiciones [2], [5].

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad t > 0 \quad 0 < x < L$$

$$\text{C.I. } U(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$\text{C.C. } U(0, t) = U(L, t) = 0, \quad \text{si } t > 0$$

Las condiciones de contorno, permiten obtener la siguiente información.

$$U(0, t) = 0$$

$$X(0)T(t) = 0$$

$$X(0) = 0$$

$$U(L, t) = 0$$

$$X(L)T(t) = 0$$

$$X(L) = 0$$

La ecuación espacial $X'' + \lambda X = 0$, genera dos soluciones de tipo exponencial $X(x) = e^{\pm\sqrt{-\lambda}x}$ en donde λ puede ser real e inclusive imaginario.

- $\lambda > 0$

Bajo la condición dada, la función tiene un exponente imaginario. Se aplica la ecuación (2.14).

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \text{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

Reemplazando la primera condición de contorno, determinamos c_1

$$X(0) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} 0) + c_2 \text{sen}(\sqrt{\lambda} 0)$$

$$0 = c_1$$

$$X(x) = c_2 \text{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

Con la segunda condición de contorno, se logra determinar el valor de λ

$$X(L) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L)$$

$$0 = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L)$$

Por el teorema del factor cero, se presentan dos opciones, si $c_2 = 0$ crearía una solución trivial, por lo tanto $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, que una ecuación trigonométrica en donde vamos a calcular λ .

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}L = \sin^{-1}(0)$$

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad \text{con } n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

La función solución de la EDO planteada, está dada por

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.17)$$

■ $\lambda = 0$

Para este caso, empleamos la expresión (2.15).

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

Substituyendo la primera condición de contorno $X(0) = 0$, se calcula c_1 .

$$X(0) = c_1 + c_2 * 0$$

$$c_1 = 0$$

$$X(x) = c_2 x$$

Con la segunda condición $X(L) = 0$ y $c_1 = 0$, se obtiene

$$X(L) = c_1 + c_2 * L$$

$$c_2 * L = 0$$

$$c_2 = 0$$

Esto significa que es una solución trivial, por lo que λ no permite generar una solución.

■ $\lambda < 0$

Si $\lambda = -\alpha$ con $\alpha > 0$ nos permite visualizar de mejor manera las soluciones de la ecuación $X'' - \alpha X = 0$. Estas se consiguen aplicando la relación (2.16).

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}$$

Al reemplazar la primera condición de contorno en la ecuación, obtenemos una ecuación que relaciona las constantes c_1 y c_2 .

$$X(0) = c_1 e^{\sqrt{\alpha}(0)} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}(0)}$$

$$0 = c_1 * (1) + c_2 * (1)$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_2 = -c_1$$

Substituyendo la segunda condición de contorno y la condición encontrada, concluimos una expresión matemática que se señala a continuación.

$$X(L) = c_1 e^{\sqrt{\alpha}(L)} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}(L)}$$

$$0 = c_1 e^{\sqrt{\alpha}(L)} - c_1 e^{-\sqrt{\alpha}(L)}$$

$$c_1 (e^{\sqrt{\alpha}(L)} - e^{-\sqrt{\alpha}(L)}) = 0$$

Demostremos ahora que el factor $(e^{\sqrt{\alpha}(L)} - e^{-\sqrt{\alpha}(L)})$ es un real diferente de cero. Para ello, supongamos lo contrario, es decir que es igual a cero.

$$e^{\sqrt{\alpha}(L)} - e^{-\sqrt{\alpha}(L)} = 0$$

$$e^{\sqrt{\alpha}(L)} = e^{-\sqrt{\alpha}(L)}$$

$$\sqrt{\alpha}(L) = -\sqrt{\alpha}(L)$$

$$2\sqrt{\alpha}(L) = 0$$

$$\alpha = 0$$

Pero, en este caso $\alpha > 0$, entonces se presenta una contradicción que interpretamos que lo supuesto es falso; es decir, el factor es diferente de cero.

Por lo tanto, la única opción es que $c_2 = 0$, que significa que es una solución trivial y que el valor de λ no admite crear otra solución.

La solución a la ecuación del calor planteada está conformada por el producto de las funciones X cuando $\lambda > 0$, T y $B = c_2 * k$, se expresa así:

$$U(x, t) = B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.18)$$

Cualquier combinación lineal de estas soluciones será también solución de la ecuación del calor aplicando el principio de superposición, formándose así una serie infinita, como se indica a continuación.

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t} \right] \quad (2.19)$$

Si en (2.19) se substituye la condición inicial $U(x, 0) = f(x)$, se logra la siguiente expresión.

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.20)$$

Ahora, nos interesa encontrar el coeficiente B_n , y para ello se utiliza la propiedad de ortogonalidad de los senos con n y m enteros positivos.

$$\int_0^b \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{b}{2} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (2.21)$$

Si se multiplica la ecuación (2.20) por el factor $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ se construye los factores que exige la propiedad (2.21).

$$f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]$$

Integrando y aplicando propiedades, tenemos

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Por (2.21), se obtienen ceros para las diferentes expresiones que se van desarrollando, y $\frac{L}{2}$ cuando $m = n$.

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = B_n \left[\frac{L}{2} \right]$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (2.22)$$

La solución de la ecuación del calor, se exhibe a continuación.

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t} \right] \quad (2.23)$$

2.3.2. Análisis de la ecuación del calor en una varilla: condición de Neumann

Ahora, vamos a determinar la solución general del siguiente problema de calor planteado, que cumple las siguientes condiciones [2], [5].

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial U}{\partial t}(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

Utilizando el método de separación de variables, planteamos las siguientes ecuaciones

$$T' + c^2 \lambda T = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (2.25)$$

con $T(t) = k e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}$.

Empleando las condiciones de frontera, se tiene

$$U(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = X'(x)T(t)$$

$$0 = X'(0)T(t)$$

$$X'(0) = 0$$

$$0 = X'(L)T(t)$$

$$X'(L) = 0$$

Por lo tanto, podemos decir que la condición de Neumann, en 0 y L es nula.

$$X'(0) = X'(L) = 0 \quad (2.26)$$

Ahora, se debe analizar los posibles valores que puede tomar la constante λ .

- $\lambda > 0$

La solución general espacial de la ecuación (2.24) conseguimos aplicando (2.14).

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.27)$$

Su derivada, es

$$X'(x) = \sqrt{\lambda} [-c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)] \quad (2.28)$$

Reemplazando la primera condición de contorno de (2.26) en (2.28), se logra determinar c_2 .

$$\begin{aligned} X'(0) &= \sqrt{\lambda} [-c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} \cdot 0) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 0)] \\ 0 &= c_2 \sqrt{\lambda} \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando c_2 en las ecuaciones (2.27) y (2.28), conseguimos

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$\frac{dX}{dx} = -c_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

Substituyendo la segunda condición de contorno de (2.26), logramos encontrar una ecuación trigonométrica que nos permite determinar λ

$$\begin{aligned} X'(L) &= -c_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} \cdot L) \\ -c_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) &= 0 \end{aligned}$$

Como buscamos soluciones no triviales, debe cumplir que $c_1 \neq 0$ y $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0$, deducido anteriormente y expresado por $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, la función solución espacial para este caso, es

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Ahora, el producto de las soluciones que conforman la solución con $A = c_1 k$, se muestra a continuación.

$$U(x, t) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.29)$$

■ $\lambda = 0$

La solución general dada por (2.15) y su derivada se enuncian a continuación.

$$X(x) = c_1 + c_2 x \quad (2.30)$$

$$X'(x) = c_2 \quad (2.31)$$

La primera condición de contorno de (2.26), nos permite determinar c_2 .

$$X'(0) = c_2$$

$$c_2 = 0$$

Y con la segunda condición de contorno de (2.26), que también determina la misma constante c_2 .

$$X'(L) = c_2$$

$$c_2 = 0$$

Reemplazando en (2.30), obtenemos

$$X(x) = c_1$$

La solución producto para este caso, es

$$U(x, t) = c_1 k e^{-c^2 \lambda t}$$

$$U(x, t) = A e^{-c^2 0 t}$$

$$U(x, t) = A$$

■ $\lambda < 0$

La solución general dada por (2.16) y su derivada se enuncian a continuación.

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} \quad (2.32)$$

$$X'(x) = c_1 \lambda e^{\lambda x} - c_2 \lambda e^{-\lambda x} \quad (2.33)$$

Al aplicar la primera condición de contorno de (2.26), obtenemos la siguiente condición

$$X'(0) = c_1 \lambda - c_2 \lambda$$

$$0 = c_1 - c_2$$

$$c_1 = c_2$$

La segunda condición de contorno de (2.26) y la condición $c_1 = c_2$, permite crear la siguiente expresión

$$X'(L) = c_1 \lambda e^{\lambda L} - c_1 \lambda e^{-\lambda L}$$

$$0 = c_1 \lambda (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L})$$

Vamos a verificar que el factor $e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}$ no puede ser cero, a través del método de reducción al absurdo.

$$e^{\lambda L} - e^{-\lambda L} = 0$$

$$e^{\lambda L} = e^{-\lambda L}$$

$$\lambda L = -\lambda L$$

$$2\lambda L = 0$$

$$\lambda = 0$$

Pero, para el caso en análisis $\lambda < 0$, entonces concluimos que el factor no es cero. Por lo tanto, $c_1 = c_2 = 0$, que significa que la solución es trivial, es decir no existen valores de λ negativos que originen una solución.

Conocidas todas las posibles soluciones y bajo el principio de superposición, planteamos la solución.

$$U(x, t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.34)$$

La condición inicial $f(x) = U(x, 0)$ reemplazada en (2.34) genera la expresión siguiente.

$$U(x, 0) = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.35)$$

Necesitamos calcular los coeficientes A y A_n , para ello se utiliza la propiedad de ortogonalidad de los cosenos, con n y m enteros positivos.

$$\int_0^b \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{b}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \\ b & \text{si } m = n = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Si se multiplica por el factor $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ a la relación (2.35), y a la sumatoria de la expresión se inicia desde $n = 0$ lo que incluye en la fórmula el valor de A , integrando a ambos lados, se tiene

$$\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Dicha propiedad permite dos posibilidades de solución, cuando $m = n = 0$ y $m = n \neq 0$. La propiedad presenta soluciones diferentes de 0 solo cuando n y m son iguales. Entonces, cuando se cumple la condición $n = m$, se consigue

$$\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = A_n \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Analicemos ahora las dos opciones que pueden presentarse.

- $m = n = 0$

Al reemplazar esta condición podemos calcular A .

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi x(0)}{L}\right) dx &= A \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x(0)}{L}\right) dx \\ \int_0^L f(x)(1) dx &= AL \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad (2.37)$$

- $m = n \neq 0$

La substitución de esta condición nos permite calcular los coeficientes A_1, A_2, \dots

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= A_n \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= A_n \left(\frac{L}{2}\right) \end{aligned}$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.38)$$

Si $t \rightarrow \infty$ la solución que es una serie infinita converge a A .

2.3.3. Ecuación del calor bidimensional

Una EDP bajo las siguientes condiciones, se denomina bidimensional [4], [5], [8].

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right], \quad t > 0; \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < H \quad (2.39)$$

$$\text{C.I. } U(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < H$$

$$\text{C.C. } \begin{cases} U(x, 0, t) = U(x, H, t) = 0, & 0 < x < L; \quad t > 0 \\ U(0, y, t) = U(L, y, t) = 0, & 0 < y < H; \quad t > 0 \end{cases}$$

Utilizando el método de separación de variables, debemos substituir por el producto dicha función solución $U(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, para obtener

$$\frac{\partial(X(x)Y(y)T(t))}{\partial t} = c^2 \left[\frac{\partial^2(X(x)Y(y)T(t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(X(x)Y(y)T(t))}{\partial y^2} \right]$$

Por facilidad, se obvia mencionar las incógnitas e igualando a 0, se tiene

$$XYT' - c^2X''YT - c^2XY''T = 0$$

Luego, se divide cada término para c^2XYT .

$$\frac{T'}{c^2T} - \frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y} = 0$$

Se asigna ahora a $-\frac{X''}{X} = \alpha$, $-\frac{Y''}{Y} = \beta$ con lo que podemos desarrollar la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \frac{T'}{c^2 T} + \alpha + \beta &= 0 \\ \frac{T'}{T} &= -c^2(\alpha + \beta) \\ \frac{dT}{T} &= -c^2(\alpha + \beta)dt \\ \int \frac{dT}{T} &= \int -c^2(\alpha + \beta)dt \\ \ln(T) &= -c^2(\alpha + \beta)t + \ln(c_1) \\ T(t) &= e^{-c^2(\alpha + \beta)t + \ln(c_1)} \\ T(t) &= e^{-c^2(\alpha + \beta)t} e^{\ln(c_1)} \\ T(t) &= c_1 e^{-c^2(\alpha + \beta)t} \end{aligned}$$

Como $\frac{X''}{X} = -\alpha$, con $\alpha > 0$, tenemos la EDO $X'' + \alpha X = 0$, cuya solución fue deducida anteriormente.

$$X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\alpha}x) + c_3 \sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (2.40)$$

Las condiciones de contorno del problema, indican que

$$U(0, y, t) = X(0)Y(y)T(t) = 0$$

$$x(0) = 0$$

$$U(L, y, t) = X(L)Y(y)T(t) = 0$$

$$x(L) = 0$$

Reemplazadas en (2.40), determinamos c_2 y α .

$$X(0) = c_2 \cos(\sqrt{\alpha} \cdot 0) + c_3 \sin(\sqrt{\alpha} \cdot 0)$$

$$0 = c_2$$

$$X(L) = c_2 \cos(\sqrt{\alpha}L) + c_3 \sin(\sqrt{\alpha}L)$$

$$0 = c_3 \sin(\sqrt{\alpha}L)$$

Pero, c_3 no puede ser 0 ya que obtendríamos una ecuación trivial, concluimos entonces

$$\sin(\sqrt{\alpha}L) = 0$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha}L &= m\pi \\ \alpha &= \frac{m^2\pi^2}{L^2}\end{aligned}$$

Entonces, la solución $X(x)$ viene dada por

$$X(x) = c_3 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

La ecuación $\frac{Y''}{Y} = -\beta$, con $\beta > 0$, genera la EDO $Y'' + \beta Y = 0$, cuya solución es

$$Y(y) = c_4 \cos(\sqrt{\beta}y) + c_5 \operatorname{sen}(\sqrt{\beta}y) \quad (2.41)$$

Las condiciones de contorno del problema, indican que

$$U(x, 0, t) = X(x)Y(0)T(t) = 0$$

$$Y(0) = 0$$

$$Y(x, H, t) = X(x)Y(H)T(t) = 0$$

$$Y(H) = 0$$

Reemplazadas en (2.41), se determina c_4 y β .

$$Y(0) = c_4 \cos(\sqrt{\beta} \cdot 0) + c_5 \operatorname{sen}(\sqrt{\beta} \cdot 0)$$

$$0 = c_4$$

$$X(H) = c_4 \cos(\sqrt{\beta}H) + c_5 \operatorname{sen}(\sqrt{\beta}H)$$

$$0 = c_5 \operatorname{sen}(\sqrt{\beta}H)$$

$c_5 \neq 0$, para que la solución no sea trivial, entonces se concluye

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\beta}H) = 0$$

$$\sqrt{\beta}H = n\pi$$

$$\beta = \frac{n^2\pi^2}{H^2}$$

La solución $Y(y)$, es

$$Y(y) = c_5 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{H}\right)$$

Reemplazando α y β en T

$$T(t) = c_1 e^{-c^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2}{H^2} \right) t}$$

$$T(t) = c_1 e^{-c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2} \right) t}$$

Entonces, la solución se presenta a continuación.

$$U(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n} e^{-c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2} \right) t} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) \quad (2.42)$$

Si sustituimos la condición inicial, obtenemos las ecuaciones que nos permitirán descubrir los coeficientes B_m y B_n ($B_m \cdot B_n = B_{m,n}$).

$$U(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right)$$

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right)$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right)$$

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right)$$

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx \quad (2.43)$$

$$B_n = \frac{2}{H} \int_0^H f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) dy \quad (2.44)$$

Reemplazando $B_{m,n}$ en (2.42) hemos determinado la solución general de la EDP.

$$U(x, y, t) = \frac{4}{LH} \sum_{m,n=1}^{\infty} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx \int_0^H f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) dy$$

$$e^{-c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2} \right) t} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) \quad (2.45)$$

2.4. Solución de ecuaciones no homogéneas

Para resolver una EDP no homogénea, la solución general se determina sumando la solución general de la ecuación homogénea U_h con una solución particular cualquiera de la ecuación no homogénea U_p .

$$U(x) = U_h + U_p$$

Si la EDP viene dada bajo las siguientes condiciones, con U_0 y U_1 constantes.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (2.46)$$

$$\text{C.I.} \quad U(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi$$

$$\text{C.C} \quad \begin{cases} U(0, t) = U_0, & t > 0 \\ U(L, t) = U_1, & t > 0 \end{cases}$$

La solución general de la ecuación parcial no homogénea (2.46), viene dada por la expresión, donde $h(x) = U_0 + \left[\frac{U_1 - U_0}{L} \right] x$ [5].

$$U(x, t) = U_0 + \left[\frac{U_1 - U_0}{L} \right] x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} t} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \int_0^L \beta_n(s) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} (t-s)} ds \right]$$

Los coeficientes B_n y $B_n(t)$, se determinan a través de las expresiones presentadas a continuación.

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - h(x)] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$B_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L Q(x, t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

A continuación, verificamos que la solución planteada cumple las condiciones de contorno, iniciales y la EDP.

$$U(0, t) = U_0 + \left[\frac{U_1 - U_0}{L} \right] 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi 0}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} t} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi 0}{L} \right) \int_0^L \beta_n(s) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} (t-s)} ds \right] \\ = U_0$$

$$U(L, t) = U_0 + \left[\frac{U_1 - U_0}{L} \right] L + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi L}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} t} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^L \beta_n(s) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} (t-s)} ds \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi L}{L} \right) \right] \\ = U_0 + U_1 - U_0 + 0 + 0 \\ = U_1$$

$$U(x, 0) = h(x) + f(x) - h(x) \\ = f(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} t} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \int_0^L \beta_n(s) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} (t-s)} ds \right] \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} t} \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \int_0^L \beta_n(s) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} (t-s)} ds \right]\end{aligned}$$

Además, sabemos que

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Entonces la solución planteada cumple con las condiciones de contorno, iniciales y la EDP planteada.

2.5. Problemas de Aplicación

PROBLEMA 2.5.1.

Considérese una varilla unidimensional cuya constante de difusividad térmica $c^2 = 1,45$, en donde no actúan fuentes de energía térmica. Encontrar una expresión para la función temperatura U que cumpla con las siguientes condiciones [7].

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 1,45 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.I. } U(x, 0) = x, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.C. } U(0, t) = U(L, t), \quad \text{si } t > 0$$

Reemplacemos los datos del problema planteado en (2.19) que representa la solución.

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \right]$$

Las condiciones iniciales nos permiten calcular el coeficiente B_n .

$$U(x, 0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right], \quad 0 < x < 2$$

$$B_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx$$

Si integramos B_n por partes, se consigue la siguiente expresión

$$B_n = \frac{4}{n\pi} (-1)^{(n+1)}$$

La solución, es

$$U(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{(n+1)}}{n} e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right]$$

Comprobemos ahora que la solución encontrada cumple las condiciones de contorno, iniciales y la EDP.

$$U(0, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{(n+1)}}{n} e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi 0}{2} \right) \right]$$

$$= 0$$

$$U(2, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{(n+1)}}{n} e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \operatorname{sen} \left(\frac{2n\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 0$$

$$U(x, 0) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right]$$

Como ejemplo se desarrolla la serie con $x = 1$, debe converger a 1.

$$1 \approx \frac{4}{\pi} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} \right) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2\pi) + \dots \right]$$

Para verificar la condición inicial $U(x, 0) = x$, ejecutamos el código planteado, la serie ha de converger a un número real, si el error calculado es 0 significa que la serie converge al valor que toma la función.

En el programa n representa el número de términos que suma la serie, f la condición inicial, $conver$ representa la convergencia de la serie, $Cini$ la función dada como condición inicial y evaluada para los diferentes valores de la variable x y $error$ que representa el valor absoluto de la diferencia entre los datos calculados

```
function [A]=CI251(n, f)
fprintf('\t Conver. \t Cini. \t Error')
fx=inline(f);
U=0;
x=0.1:0.1:1.98;
```

```

s=length(x);
for i=1:s
    for k=1:n
        U = U + 4*(-1)^(k+1)*sin(k*pi*x(i)/2)/(k*pi);
    end
    conver(i)=U;
    U=0;
end
for i=1:s
    p(i)=fx(x(i));
end
for i=1:s
    Error(i) = abs(p(i)-conver(i));
end
A=zeros(s,3);
A(:,1)=conver;
A(:,2)=p;
A(:,3)=Error;
end

```

```
>> [A]=CI251(100000,'x')
```

```
Conver.   Cini.   Error
```

```
A =
```

0.1000	0.1000	0.0000
0.2000	0.2000	0.0000
0.3000	0.3000	0.0000
0.4000	0.4000	0.0000
0.5000	0.5000	0.0000
0.6000	0.6000	0.0000
0.7000	0.7000	0.0000
0.8000	0.8000	0.0000

0.9000	0.9000	0.0000
1.0000	1.0000	0.0000
1.1000	1.1000	0.0000
1.2000	1.2000	0.0000
1.3000	1.3000	0.0000
1.4000	1.4000	0.0000
1.5000	1.5000	0.0000
1.6000	1.6000	0.0000
1.7000	1.7000	0.0000
1.8000	1.8000	0.0000
1.8999	1.9000	0.0001

La primera derivada parcial temporal de U así como la segunda derivada parcial espacial, se desarrolla a continuación.

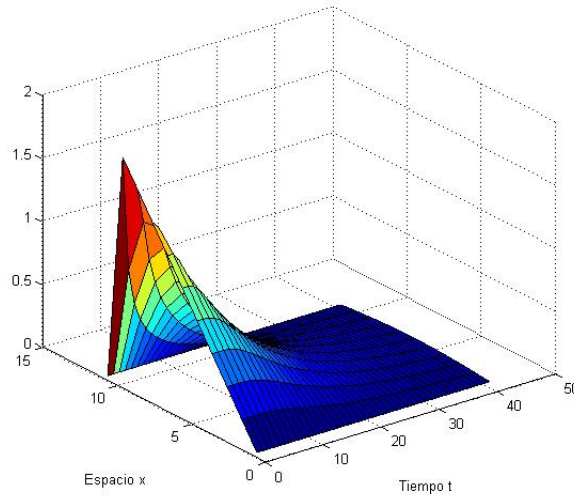
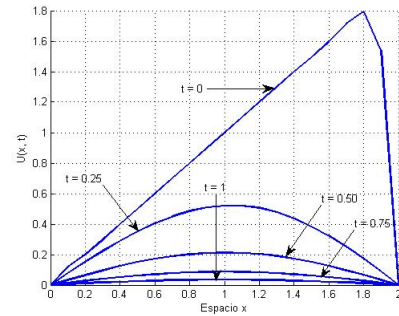
$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \left[-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) \right] \right\} \\
&= -1,45\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[n (-1)^{(n+1)} e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right] \\
\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{(n+1)}}{n} e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \frac{n\pi}{2} \right] \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{(n+1)} e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right] \\
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{(n+1)} e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \left[-\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right] \frac{n\pi}{2} \right\} \\
&= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[n (-1)^{(n+1)} e^{-1,45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

La solución determinada cumple con la EDP, las condiciones iniciales y de contorno, por tanto $U(x, t)$ es solución.

Ahora, construimos un código que calcule una matriz de datos de la función temperatura (Anexo A), que permita elaborar su gráfica Figura 2.2 a) en donde a la variable x la subdividimos en 11 partes en $]0, 2[$ a t en 41 partes en $]0, 1[$, Además, se presenta en la Figura 2.2 b) los perfiles de la función.

Programa que permite determinar la matriz de datos de la ecuación del calor utilizando el método de separación de variables, su gráfica y sus perfiles, en donde a y b son los valores finales de las variables x y t respectivamente, n y m representan el número de nodos en los intervalos analizados, sumando las soluciones parciales desde 1 hasta p

```
function [U]=Problema251(a,b,n,m,p)
h1=a/(n-1);
h2=b/(m-1);
x=0:h1:a;
t=0:h2:b;
U=zeros(n,m);
for k=1:p
    for j=1:m;
        for i=1:n;
            U(i,j)=U(i,j)+4/pi*(-1)^(k+1)/k*exp(-1.45...
                *k^2*pi^2*t(j)/4)*sin(k*pi*x(i)/2);
        end
    end
end
surf(U)
figure(2)
for k=1:10:m
    P=U(:,k);
    P1=InterpolacionNewton(x,P);
    z=0:0.1:a;
    Q=polyval(P1,z);
    hold on
    plot(z,Q,'LineWidth',1.50)
    grid on
end
end
```

(a) Función temperatura U 

(b) Tiempo 0, 0.25, 0.50, 0.75 y 1

Figura 2.2: Gráfica y perfiles de la función temperatura U para diferentes tiempos**PROBLEMA 2.5.2.**

Una varilla unidimensional que tiene un coeficiente de difusividad $c^2 = 1,16$ y sin fuentes de energía térmica, encontrar una serie que represente la temperatura U , bajo las siguientes condiciones.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 1,16 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.I. } U(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.C } U(0, t) = U(2, t) = 0, \quad t > 0$$

La solución cumple la ecuación (2.19).

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-1,16\left(\frac{n^2\pi^2}{4}\right)t} \right]$$

Substituyendo $U(x, 0)$, obtenemos B_n .

$$U(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right], \quad 0 < x < 2$$

$$B_n = \frac{2}{2} \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

Integrando por partes se obtiene una integral cíclica, resuelta a continuación.

$$u = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Rightarrow du = \frac{n\pi}{2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$dv = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow v = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{2} \left[\left[\frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right] \Big|_0^2 - \frac{2}{\pi} \frac{n\pi}{2} \int_0^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right]$$

$$= 0 - n \int_0^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$u = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Rightarrow du = -\frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$dv = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \Rightarrow v = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$B_n = -n \left[\left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right] \Big|_0^2 - \frac{2}{\pi} \frac{n\pi}{2} \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right]$$

$$= \left[\frac{2n}{\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right] \Big|_0^2 + n^2 \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$B_n - n^2 B_n = \left[\frac{2n}{\pi} \cos\left(\frac{n\pi \cdot 2}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2}\right) \right] - \left[\frac{2n}{\pi} \cos\left(\frac{n\pi \cdot 0}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2}\right) \right]$$

$$B_n - n^2 B_n = \frac{2n}{\pi} \cos(n\pi) \cos \pi - \frac{2n}{\pi}$$

$$B_n = \frac{\frac{2n}{\pi} [(-1)^n + 1]}{n^2 - 1}$$

Si n es un número par o impar, entonces el coeficiente B_n puede expresarse así

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{4n}{\pi(n^2 - 1)} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Cuando n entero par el coeficiente toma valores reales diferentes de cero, entonces podemos reemplazar a n con $2n$ y la solución se expresa así.

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-1,16n^2\pi^2 t} \right]$$

La solución encontrada cumple las condiciones de contorno, como se demuestra a continuación.

$$\begin{aligned}
 U(0, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \operatorname{sen}(n\pi \cdot 0) e^{-1,16n^2\pi^2 t} \right] \\
 &= 0 \\
 U(2, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \operatorname{sen}(2n\pi) e^{-1,16n^2\pi^2 t} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

La condición inicial debe cumplir que

$$\begin{aligned}
 U(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \operatorname{sen}(n\pi x) \right] \\
 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \operatorname{sen}(n\pi x) \right]
 \end{aligned}$$

Ahora, como $x \in]0, 2[$, se toma $x = 0,5$ para desarrollar la serie, en la que se debe cumplir

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \operatorname{sen}(0,5n\pi) \right] \\
 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &\approx \frac{8}{\pi} \left[\frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{15} \operatorname{sen}(\pi) + \frac{3}{35} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{4}{63} \operatorname{sen}(2\pi) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Para verificar la condición inicial $U(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, ejecutamos el código planteado, consiguiendo que el error sea cero, es decir la serie converge al valor respectivo de la función.

```

function [A]=CI252(n,f)
fprintf('\t Convergencia. \t Cini. \t Error')
fx=inline(f);
U=0;
x=0.1:0.1:1.98;
s=length(x);
for i=1:s
    for k=1:n
        U = U + 8*k*sin(k*pi*x(i))/((4*k.^2-1)*pi);
    end
    conver(i)=U;

```

```

    U=0;
end
for i=1:s
    p(i)=fx(x(i));
end
for i=1:s
    Error(i) = abs(p(i)-conver(i));
end
A=zeros(s,3);
A(:,1)=conver;
A(:,2)=p;
A(:,3)=Error;
end

```

```
>> [A]=CI252(100000,'cos(pi*x/2)')
```

```

    Conver.    Cini.    Error
A =
    0.9877    0.9877    0.0000
    0.9510    0.9511    0.0000
    0.8910    0.8910    0.0000
    0.8090    0.8090    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.5878    0.5878    0.0000
    0.4540    0.4540    0.0000
    0.3090    0.3090    0.0000
    0.1564    0.1564    0.0000
   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.1564   -0.1564    0.0000
   -0.3090   -0.3090    0.0000
   -0.4540   -0.4540    0.0000
   -0.5878   -0.5878    0.0000
   -0.7071   -0.7071    0.0000
   -0.8090   -0.8090    0.0000

```


-0.8910	-0.8910	0.0000
-0.9510	-0.9511	0.0000
-0.9877	-0.9877	0.0000

La primera derivada parcial con respecto al tiempo, es:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -1,16 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n^3\pi}{4n^2-1} \text{sen}(n\pi x) e^{-1,16n^2\pi^2 t} \right]$$

La segunda derivada parcial espacial de U , es:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n^2}{4n^2-1} \cos(n\pi x) e^{-1,16n^2\pi^2 t} \right]$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n^3\pi}{4n^2-1} \text{sen}(n\pi x) e^{-1,16n^2\pi^2 t} \right]$$

La solución encontrada cumple con la EDP y sus condiciones de contorno e inicial, entonces $U(x, t)$ es solución.

El siguiente algoritmo, permite determinar la matriz de datos de la función temperatura (Anexo A) y elaborar su gráfica Figura 2.3 a), en donde a la variable x la subdividimos en 11 partes en $]0, 2[$ a t en 41 partes en $]0, 1[$, así como los perfiles de la función temperatura para diferentes tiempos (Figura 2.4 a) y b)).

```
function [U]=Problema252(a,b,n,m,p)
h1=a/(n-1);
h2=b/(m-1);
x=0:h1:a;
t=0:h2:b;
U=zeros(n,m);
for k=1:1:p
    for i=1:n;
        for j=1:m;
            U(i,j)=U(i,j)+8*k*sin(k*pi*x(i))*exp(-1.16...
                *k^2*pi^2*t(j))/(pi*(4*k^2-1));
        end
    end
end
end
surf(U)
figure(2)
```

```

for k=21:10:m
    P=U(:,k);
    P1=InterpolacionNewton(x,P);
    z=0:0.1:a;
    Q=polyval(P1,z);
    plot(z,Q,'LineWidth',1.50)
    hold on
    grid on
end
end

```

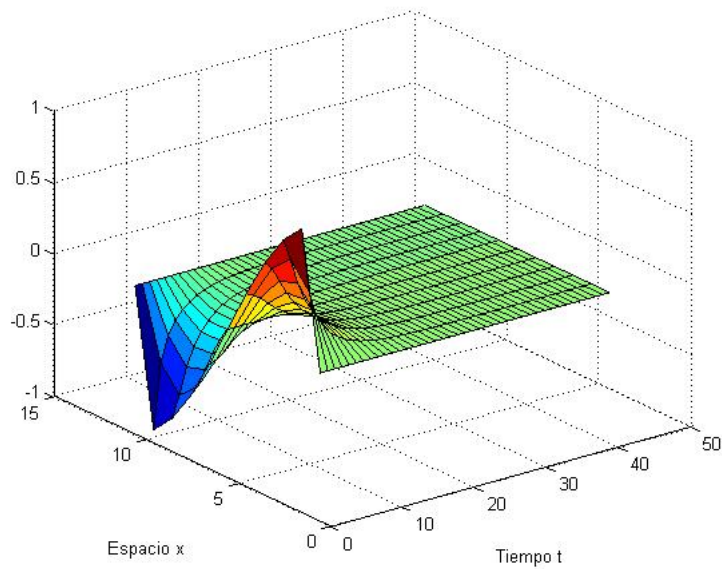
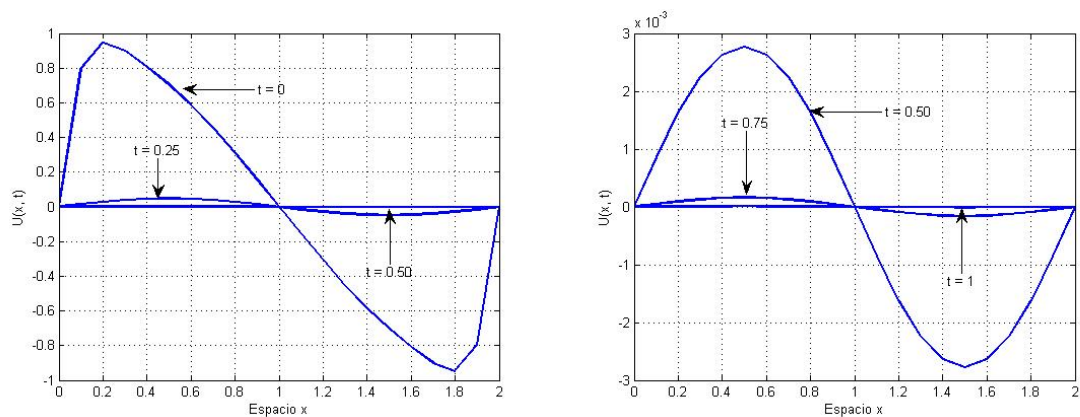


Figura 2.3: Gráfica de la función temperatura U



(a) Tiempo 0, 0.25 y 0.50

(b) Tiempo 0.50, 0.75 y 1

Figura 2.4: Perfiles de la función temperatura U para diferentes tiempos

PROBLEMA 2.5.3.

Determinar la expresión que represente la temperatura U en una placa rectangular, bajo las siguientes condiciones.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad t > 0; \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1$$

$$\text{C.I. } U(x, y, 0) = (x - x^2)(y - y^2), \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1$$

$$\text{C.C. } \begin{cases} U(x, 0, t) = U(x, 1, t) = 0, & 0 < x < 1; \quad t > 0 \\ U(0, y, t) = U(1, y, t) = 0, & 0 < y < 1; \quad t > 0 \end{cases}$$

Identifiquemos algunos datos del problema planteado: $L = 1$, $H = 1$, $c = 1$, $f(x) = x - x^2$ y $f(y) = y - y^2$ reemplazando en las ecuaciones (2.43) y (2.44), podemos determinar los coeficientes B_m y B_n respectivamente al resolver las integrales planteadas.

$$B_m = \frac{2}{1} \int_0^1 (x - x^2) \text{sen}(m\pi x) dx$$

$$B_n = \frac{2}{1} \int_0^1 (y - y^2) \text{sen}(n\pi y) dy$$

Integrando por partes cada una de ellas, conseguimos

$$B_m = 4 \left[\frac{(-1)^m + 1}{m^3 \pi^3} \right]$$

$$B_n = 4 \left[\frac{(-1)^n + 1}{n^3 \pi^3} \right]$$

Si m o n es un entero par o impar, se crean las condiciones siguientes

$$B_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es par} \\ \frac{8}{m^3 \pi^3} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{8}{n^3 \pi^3} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Para la solución, sustituimos m por $2m - 1$ y n con $2n - 1$, puesto que las soluciones existen para los números impares.

$$U(x, y, t) = \frac{64}{\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m - 1)\pi x] \text{sen} [(2n - 1)\pi y] e^{-[(2m-1)^2 + (2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m - 1)^3 (2n - 1)^3}$$

Ahora, se prueba que cumple las condiciones de contorno, la EDP y la condición inicial.

$$\begin{aligned}
U(0, y, t) &= \frac{64}{\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m-1)(\pi)(0)] \text{sen} [(2n-1)\pi y] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&= 0 \\
U(1, y, t) &= \frac{64}{\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m-1)(\pi)(1)] \text{sen} [(2n-1)\pi y] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&= 0 \\
U(x, 0, t) &= \frac{64}{\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m-1)\pi x] \text{sen} [(2n-1)(\pi)(0)] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&= 0 \\
U(x, 1, t) &= \frac{64}{\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m-1)\pi x] \text{sen} [(2n-1)(\pi)(1)] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&= 0 \\
\frac{\partial U}{\partial t}(x, y, t) &= -\frac{64}{\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m-1)\pi x] \text{sen} [(2n-1)\pi y] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&\quad [(2m-1)^2 + (2n-1)^2] \\
\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, t) &= \frac{64}{\pi^5} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\cos [(2m-1)\pi x] \text{sen} [(2n-1)\pi y] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&\quad (2m-1) \\
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, y, t) &= -\frac{64}{\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m-1)\pi x] \text{sen} [(2n-1)\pi y] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&\quad (2m-1)^2 \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x, y, t) &= \frac{64}{\pi^5} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m-1)\pi x] \cos [(2n-1)\pi y] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&\quad (2n-1) \\
\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x, y, t) &= -\frac{64}{\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m-1)\pi x] \text{sen} [(2n-1)\pi y] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&\quad (2n-1)^2 \\
&\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x, y, t) = \\
&\quad -\frac{64}{\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2m-1)\pi x] \text{sen} [(2n-1)\pi y] e^{-[(2m-1)^2+(2n-1)^2]\pi^2 t}}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
&\quad [(2m-1)^2 + (2n-1)^2] \\
\implies \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(x, y, 0) &= \frac{64}{\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2m-1)\pi x] \text{sen}[(2n-1)\pi y]}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
 (x-x^2)(y-y^2) &= \frac{64}{\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2m-1)\pi x] \text{sen}[(2n-1)\pi y]}{(2m-1)^3(2n-1)^3} \\
 x-x^2 &= \frac{8}{\pi^3} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2m-1)\pi x]}{(2m-1)^3} \\
 y-y^2 &= \frac{8}{\pi^3} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2n-1)\pi y]}{(2n-1)^3}
 \end{aligned}$$

Las series cuando $x = 0,5$ o $y = 0,5$ deben converger a 0,25, respectivamente.

$$0,25 = \frac{8}{\pi^3} \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{27} + \frac{\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{125} + \dots \right]$$

Ahora, el código nos permite calcular el límite de la serie para diferentes valores del intervalo $]0, 1[$ y el error muestra que cumple la convergencia.

```

function [A]=CI253(n,f)
fprintf('\t Convergencia. \t Cini. \t Error')
fx=inline(f);
U=0;
x=0.1:0.1:0.99;
s=length(x);
for i=1:s
    for k=1:n
        U = U + 8*sin((2*k-1)*pi*x(i))/((2*k-1)^3*pi^3);
    end
    conver(i)=U;
    U=0;
end
for i=1:s
    p(i)=fx(x(i));
end
for i=1:s
    Error(i) = abs(p(i)-conver(i));
end
A=zeros(s,3);
A(:,1)=conver;

```

```

A(:,2)=p;
A(:,3)=Error;
end
>> [A]=CI253(10000,'x-x^2')
    Conver.    Cini.    Error
A =
    0.0900    0.0900    0.0000
    0.1600    0.1600    0.0000
    0.2100    0.2100    0.0000
    0.2400    0.2400    0.0000
    0.2500    0.2500    0.0000
    0.2400    0.2400    0.0000
    0.2100    0.2100    0.0000
    0.1600    0.1600    0.0000
    0.0900    0.0900    0.0000

```

La solución encontrada cumple con las condiciones de contorno, inicial y la EDP, entonces U es solución.

A continuación se presenta un código, que calcula las matrices de resultados para la función temperatura bidimensional (Anexo A) para diferentes tiempos y sus respectivas gráficas Figura 2.5 a) y b) y 2.6 a) y b). A la variable x la subdividimos en 11 partes en $]0, 1[$ a t en 21 partes en $]0, 1[$.

Se puede observar a través de la escala o en las matrices de resultados, si se incrementa el tiempo, la temperatura desciende.

```

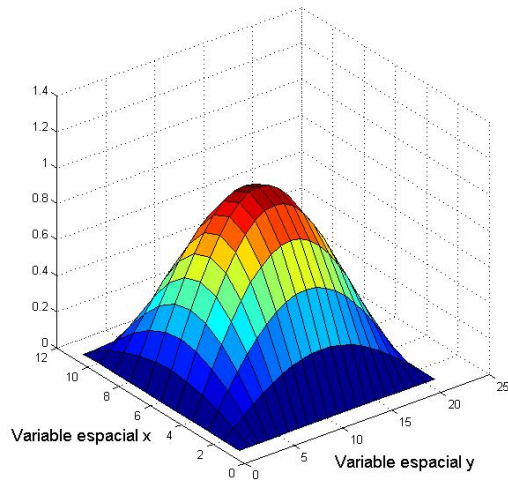
function [U] = Problema253(p,q,a,b,c,k)
h1=a/(p-1);
h2=b/(q-1);
x=0:h1:a;
y=0:h2:b;
t=c;
for i=1:p
    for j =1:q
        cont=0;
        for m=1:k
            cont=cont+sin((2*m-1)*pi*x(i))*sin((2*m-1)...

```

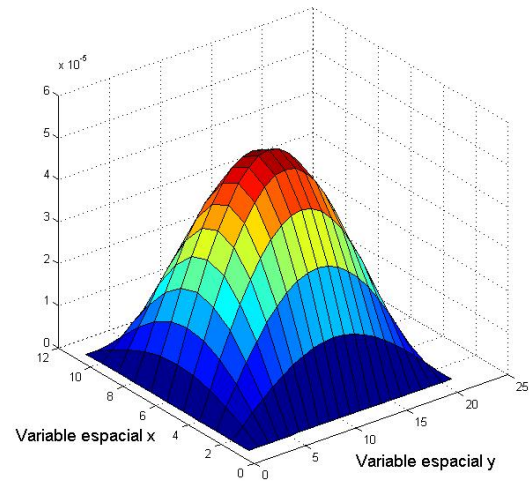
```

*pi*y(j))*exp(-((2*m-1)^2+(2*m-1)^2)...
*pi^2*t)/((2*m-1)^6);
end
U(i,j)=cont;
end
end
surf(U)
end

```

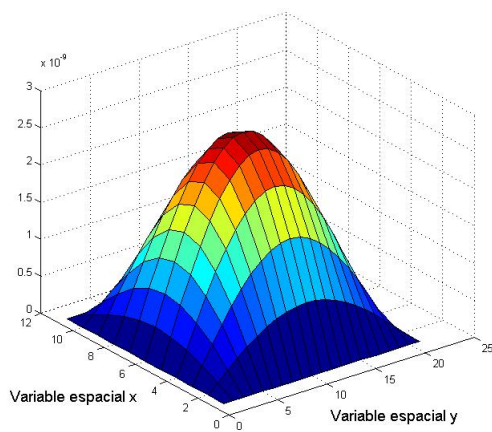


(a) Tiempo 0

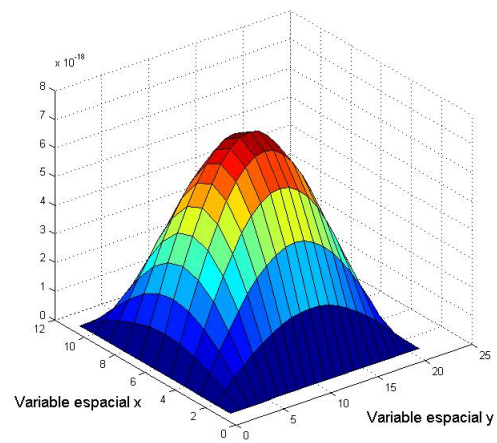


(b) Tiempo 0.5

Figura 2.5: Gráfica de la función temperatura U para diferentes tiempos



(a) Tiempo 1



(b) Tiempo 2

Figura 2.6: Gráfica de la función temperatura U para diferentes tiempos

PROBLEMA 2.5.4.

Determinar la solución general para la función temperatura $U(x, t)$ en una varilla unidimensional que tiene un coeficiente de difusividad $c^2 = 2$ y cumple las siguientes condiciones.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + xe^{-t}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \quad (2.47)$$

$$\text{C.I. } U(x, 0) = x(\pi - x), \quad 0 < x < \pi$$

$$\text{C.C. } U(0, t) = U(L, t) = 0, \quad t > 0$$

Identifiquemos algunos datos como la fuente térmica $Q(x, t) = xe^{-t}$ y la condición inicial $f(x) = x(\pi - x)$. Ahora, se reemplaza la información del problema en las ecuaciones planteadas en el numeral (2.4) pág. 34.

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{\pi} \right) e^{-\frac{2n^2\pi^2}{\pi^2}t} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{\pi} \right) \int_0^L \beta_n(s) e^{-\frac{2n^2\pi^2}{\pi^2}(t-s)} ds \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen}(nx) e^{-2n^2t} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}(nx) \int_0^{\pi} \beta_n(s) e^{-2n^2(t-s)} ds \right] \end{aligned}$$

Substituyendo en B_n se obtiene la expresión siguiente, integrado por partes se logra calcular dicho coeficiente.

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^{n+1} + 1] \end{aligned}$$

El coeficiente β_n calculamos a través de la integral siguiente, al resolver logramos encontrar el valor buscado.

$$\begin{aligned} B_n(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} xe^{-t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{\pi} \right) dx \\ &= \left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n(4n^2 - 1)} \right] (e^{-t} - e^{-4n^2t}) \end{aligned}$$

La solución que representa la función temperatura U , está dada por la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^{n+1} + 1] \operatorname{sen}(nx) e^{-2n^2t} \right\} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n(4n^2 - 1)} \right] (e^{-t} - e^{-4n^2t}) \operatorname{sen}(nx) \right\} \end{aligned}$$

Se calcula la matriz de resultados de la función temperatura (Anexo A) con la ayuda del algoritmo, la Figura 2.7 a) representa la gráfica de la función. Además, se presenta los perfiles de la función para diferentes tiempos en la Figura 2.7 b), donde la variable x la subdividimos en 11 partes en $]0, \pi[$, a t en 41 partes en $]0, 2[$.

```
function [U]=Problema254(a,b,n,m,p)
h1=a/(n-1);
h2=b/(m-1);
x=0:h1:a;
t=0:h2:b;
U=zeros(n,m);
for k=1:p
    for j=1:m;
        for i=1:n;
            U(i,j)=U(i,j)+4*((-1)^(k+1)+1)*sin(k*x(i))*exp(-2*k.^2*...
            t(j))/(pi*k.^3)+2*(-1)^(k+1)*sin(k*x(i))*(exp(-t(j))...
            -exp(-2*k^2*t(j)))/(k*(4*k^2-1));
        end
    end
end
end
end
```

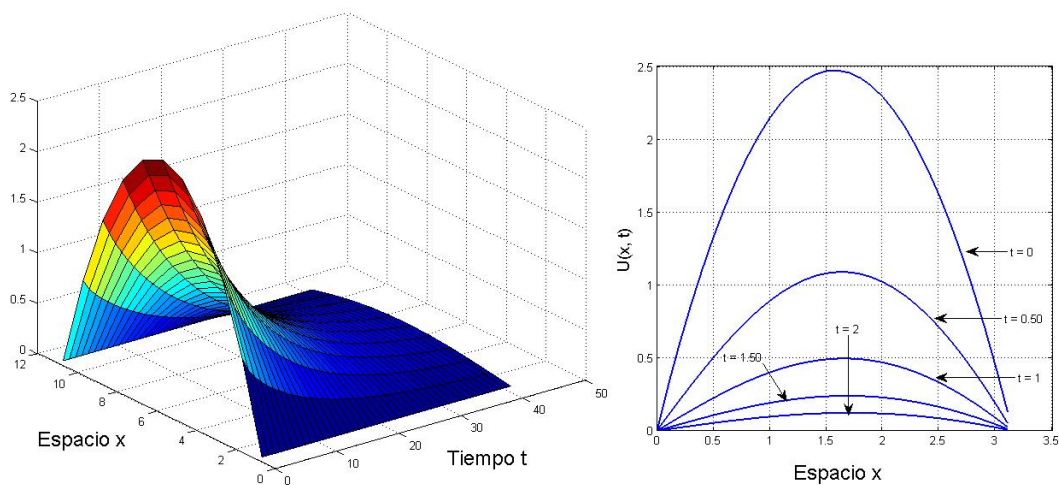


Figura 2.7: Gráfica y perfiles de la función temperatura U para diferentes tiempos

2.6. Métodos numéricos con diferencias finitas

Se utiliza la siguiente notación:

$$f(x + h) = f_{i+1}$$

$$f(x - h) = f_{i-1}$$

$$f(x) = f_i$$

$$f(x + 2h) = f_{i+2}$$

$$f(x - 2h) = f_{i-2}$$

Entonces, las fórmulas deducidas se pueden expresar en la siguiente forma

$$f'(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad \text{progresiva de orden } O(h) \quad (2.48)$$

$$f'(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad \text{regresiva de orden } O(h) \quad (2.49)$$

$$f'(x) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad \text{centrada de orden } O(h^2) \quad (2.50)$$

$$f''(x) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad \text{centrada de orden } O(h^2) \quad (2.51)$$

Estas relaciones son reemplazadas en las EDP's logrando construir ecuaciones que permiten aproximar cualquier solución.

2.6.1. Deducción de la ecuación en derivadas parciales parabólica en diferencias finitas por el método de Crank-Nicholson

Este método implícito, utilizado para aproximar la ecuación del calor, consiste en encontrar una aproximación numérica en un punto situado entre dos filas de la malla, punto medio [3].

Determinemos ahora cada una de las expresiones de la ecuación del calor, utilizando diferencias finitas centradas, para $(x, t + \frac{k}{2})$

$$U_t(x, t) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \quad \text{Progresiva}$$

$$U_t(x, t + k) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \quad \text{Regresiva}$$

Sumando las ecuaciones planteadas, obtenemos

$$\begin{aligned} U_t(x, t) + U_t(x, t + k) &= 2 \left[\frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \right] \\ \frac{U(x, t) + U(x, t + k)}{2} &= \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \\ U_t(x, t + \frac{k}{2}) &= \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \end{aligned}$$

Haciendo cumplir la aproximación $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$, tenemos

$$U_t(x, t) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} \quad (2.52)$$

De igual manera realizamos para $U_{xx}(x, t + \frac{k}{2})$, pero con diferencias centradas.

$$\begin{aligned} U_{xx}(x, t) &= \frac{U(x + h, t) - 2U(x, t) + U(x - h, t)}{h^2} \\ U_{xx}(x, t + k) &= \frac{U(x + h, t + k) - 2U(x, t + k) + U(x - h, t + k)}{h^2} \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones planteadas y dividiendo para 2, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{U_{xx}(x, t) + U_{xx}(x, t + k)}{2} &= \\ \frac{U(x + h, t) - 2U(x, t) + U(x - h, t) + U(x + h, t + k) - 2U(x, t + k) + U(x - h, t + k)}{2h^2} \\ U_{xx}(x, t + \frac{k}{2}) &= \\ \frac{U(x + h, t) - 2U(x, t) + U(x - h, t) + U(x + h, t + k) - 2U(x, t + k) + U(x - h, t + k)}{2h^2} \\ U_{xx}(x, t + \frac{k}{2}) &= \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j} + U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{2h^2} \quad (2.53) \end{aligned}$$

Reemplazando (2.52) y (2.53) en la ecuación del calor, obtenemos

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = c^2 \frac{U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{2h^2} \quad (2.54)$$

Se asigna $r = \frac{c^2 k}{h^2}$ y despejando los términos que se indican en la ecuación (2.54), se consigue la siguiente ecuación para $i = 2, 3, \dots, n - 1$.

$$-rU_{i-1,j+1} + (2 + 2r)U_{i,j+1} - rU_{i+1,j+1} = (2 - 2r)U_{i,j} + r(U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) \quad (2.55)$$

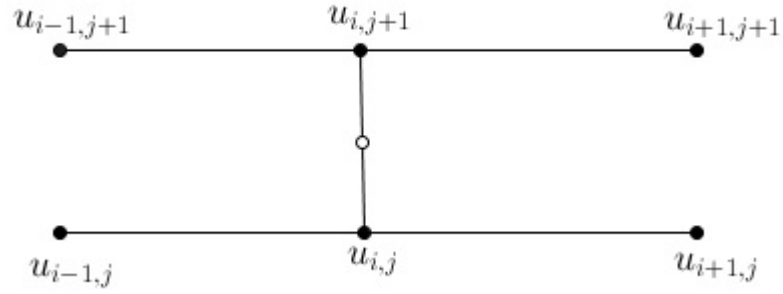


Figura 2.8: Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecuación del calor

Encontremos ahora algunas ecuaciones que genera (2.55) para $i = 2, 3, \dots, n - 1$, considerando las condiciones de contorno siguientes:

$$U_{1,j} = U_{1,j+1}$$

$$U_{n,j} = U_{n,j+1}$$

$$i = 2$$

$$-rU_{1,j+1} + (2 + 2r)U_{2,j+1} - rU_{3,j+1} = (2 - 2r)U_{2,j} + rU_{1,j} + rU_{3,j}$$

$$(2 + 2r)U_{2,j+1} - rU_{3,j+1} = 2rU_{1,j} + (2 - 2r)U_{2,j} + rU_{3,j}$$

$$i = 3$$

$$-rU_{2,j+1} + (2 + 2r)U_{3,j+1} - rU_{4,j+1} = (2 - 2r)U_{3,j} + rU_{2,j} + rU_{4,j}$$

$$(2 + 2r)U_{3,j+1} - rU_{4,j+1} = rU_{2,j} + (2 - 2r)U_{3,j} + rU_{4,j}$$

$$i = p$$

$$-rU_{p-1,j+1} + (2 + 2r)U_{p,j+1} - rU_{p+1,j+1} = (2 - 2r)U_{p,j} + rU_{p-1,j} + rU_{p+1,j}$$

$$(2 + 2r)U_{p,j+1} - rU_{p+1,j+1} = rU_{p-1,j} + (2 - 2r)U_{p,j} + rU_{p+1,j}$$

$$i = n - 2$$

$$-rU_{n-3,j+1} + (2 + 2r)U_{n-2,j+1} - rU_{n-1,j+1} = (2 - 2r)U_{n-2,j} + rU_{n-3,j} + rU_{n-1,j}$$

$$(2 + 2r)U_{n-2,j+1} - rU_{n-1,j+1} = rU_{n-3,j} + (2 - 2r)U_{n-2,j} + rU_{n-1,j}$$

$$i = n - 1$$

$$-rU_{n-2,j+1} + (2 + 2r)U_{n-1,j+1} - rU_{n,j+1} = (2 - 2r)U_{n-1,j} + rU_{n-2,j} + rU_{n,j}$$

$$(2 + 2r)U_{n-1,j+1} - rU_{n,j+1} = rU_{n-2,j} + (2 - 2r)U_{n-1,j} + rU_{n,j}$$

Con las ecuaciones desarrolladas, construimos el sistema tridiagonal lineal, se resuelve en un computador utilizando un programa destinado para ello.

Dicho sistema, se presenta como matrices en el que la primera representa la matriz tridiagonal formada por los coeficientes de las incógnitas en forma ordenada, la segunda está conformada por las incógnitas y en la última se ubican los terminos independientes.

$$\begin{bmatrix} 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2r & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ \vdots \\ U_{i,j+1} \\ \vdots \\ U_{n-2,j+1} \\ U_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2rU_{1,j} + (2-2r)U_{2,j} + rU_{3,j} \\ rU_{2,j} + (2-2r)U_{3,j} + rU_{4,j} \\ \vdots \\ rU_{p-1,j} + (2-2r)U_{p,j} + rU_{p+1,j} \\ \vdots \\ rU_{n-3,j} + (2-2r)U_{n-2,j} + rU_{n-1,j} \\ rU_{n-2,j} + (2-2r)U_{n-1,j} + 2rU_{n,j} \end{bmatrix}$$

Solución numérica del Problema 251

Dada la ecuación del calor con las condiciones iniciales y de contorno, utilizando el método de diferencias finitas vamos a determinar una aproximación. Para ello, formamos una malla con 11 filas de alto y 41 columnas de ancho.

$$U_t(x, t) = 1,45 U_{x,x}(x, t), \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.I. } U(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\text{C.C. } U(0, t) = U(2, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Con el siguiente algoritmo, se generan las aproximaciones buscadas y la matriz de resultados (Anexo A) [3].

Algoritmo que utiliza el método de diferencias finitas para la ecuación del calor por Crank-Nicholson, permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación del calor, donde a y b son extremos finales de los intervalos de x y t respectivamente, n y m son el número de nodos en los intervalos de análisis, c la constante de separación, f condición inicial, $g1$ y $g2$ condiciones de contorno

```
function [U]=DifCNPproblema251(f,g1,g2,a,b,c,n,m)
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c^2*k/h^2;
s1=2+2/r;
s2=2/r-2;
U=zeros(n, m);
U(1,1:m)=g1;
U(n,1:m)=g2;
U(2:n-1,1)=feval(f,h:h:(n-2)*h)';
Vd(1,1:n)=s1*ones(1, n);
Vd(1)=1;
Vd(n)=1;
Va=-ones(1,n-1);
Va(n-1)=0;
Vc=-ones(1,n-1);
Vc(1)=0;
Vb(1)=g1;
Vb(n)=g2;
for j =2:m
```

```

for i=2:n-1
    Vb(i)=U(i-1, j-1)+U(i+1, j-1)+s2*U(i, j-1);
end
X=sistem_Tridiagonal(Va,Vd,Vc,Vb,n);
U(1:n, j)=X';
end
end

```

Solución numérica del Problema 252

Dada la ecuación del calor con las condiciones iniciales y de contorno, utilizando el método de diferencias finitas vamos a determinar una aproximación. Para ello, formamos una malla con 11 filas de alto y 41 columnas de ancho.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 1,16 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.I. } U(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\text{C.C } U(0, t) = U(2, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Aplicando el algoritmo de la solución numérica del Problema 2.5.1. página 57-58, se obtienen las aproximaciones buscadas y la matriz de resultados (Anexo A).

Solución numérica del Problema 254

Dada la ecuación del calor con las condiciones iniciales, de contorno y una fuente térmica, utilizando el método de diferencias finitas vamos a determinar una aproximación. Para ello, formamos una malla con 11 filas de alto y 41 columnas de ancho.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + xe^{-t}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi$$

$$\text{C.I. } U(x, 0) = x(\pi - x), \quad 0 < x < \pi$$

$$\text{C.C } U(0, t) = U(L, t) = 0, \quad t > 0$$

Con el algoritmo presentado a continuación, se obtienen las aproximaciones buscadas y la matriz de resultados (Anexo A) [6].

Algoritmo que utiliza el método de diferencias finitas para la ecuación del calor por Crank-Nicholson con fuente, donde $\phi(x) = U(x, 0)$ es la condición inicial, $U(0, t) = A = A(t)$, $U(L, t) = B = B(t)$ condiciones de contorno, n número de intervalos en x , m número de intervalos en t , $q = Q(x, t)$ fuente térmica, L y T extremos derechos de los intervalos de x y t respectivamente

```
function [U]=DifCNProblema254(phi,L,A,B,T,n,m,alpha,q)
h=L/(n+1);
k=T/(m+1);
U=zeros(m+2,n+2);
x=0:h:L;
t=0:k:T;
U(:,1)=feval(A,t)';
U(:,n+2)=feval(B,t)';
for i=2:(n+1)
    U(1,i)=feval(phi,x(i));
end
for j=2:(m+2)
    for i=2:(n+1)
        mu(i)=k*feval(alpha,t(j-1),x(i),U(j-1,i))/h^2;
        mu2(i)=k*feval(alpha,t(j),x(i),U(j-1,i))/h^2;
        q1(i)=feval(q,x(i),t(j-1));
        q2(i)=feval(q,x(i),t(j));
    end
    S=diag(2*(1-mu2(2:n+1)))+diag(mu2(3:n+1),-1) + ...
diag(mu(2:n),1);
    V=zeros(n,1);
    V(1)=mu(2)*U(j-1,1)+mu2(2)*U(j,1);
    V(n)=mu(n+1)*U(j-1,n+2)+mu2(n+1)*U(j,n+2);
    Q=k*(q1(2:n+1)+q2(2:n+1))';
    c=S*((U(j-1,2:(n+1))))'+V+Q;
    a=-mu2(2:n+1);
    b=a;
    a(n)=0;
```



```

b(1)=0;
U(j,2:n+1)=TDMAsolver(a,2*(1+mu2(2:n+1)),b,c);
end
U=U';

```

2.7. Comparaciones

En esta sección así como en las siguientes, se analiza las diferencias que presentan las soluciones encontradas por métodos matemáticos con las calculadas por métodos numéricos, exhibidos en gráficas.

Problema 251

Al comparar las soluciones matemáticas U_e representadas con color rojo y las aproximadas U representadas en azul para diferentes tiempos, podemos notar que se establecen pequeñas diferencias que apreciamos a través de los gráficos de la Figura 2.9.

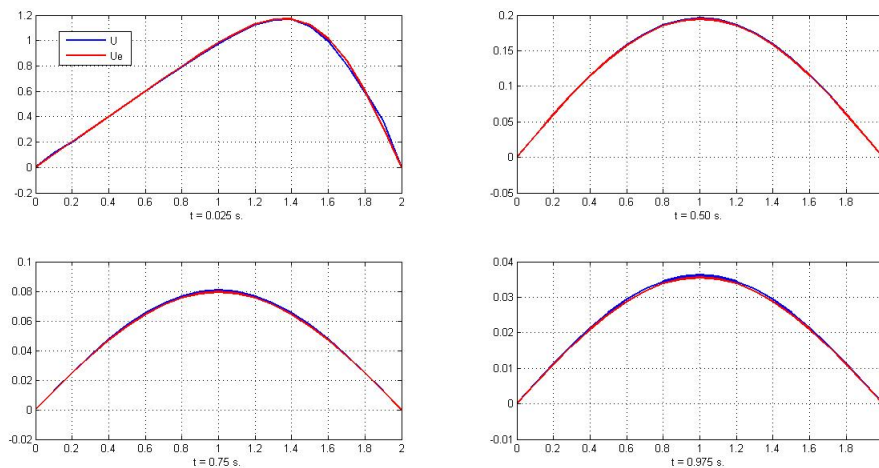


Figura 2.9: Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.025; 0.50; 0.75$ y 0.975

El código siguiente calcula las matrices de datos de los errores absoluto y relativo y sus respectivas gráficas ilustradas en la Figura 2.10.

Programa que permite encontrar el error medio absoluto y relativo medio cuadrático, conocidas las matrices de datos de la solución analítica U_e y aproximada U

```
function [A R]=FeARProblema251(Ue, U)
```

```

n=11;
m=41;
Err(2:n-1,2:m)=abs(Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m));
Err(n,:)=0;
for k=1:m
    A(k)=sum(Err(:,k)/n);
end
t=1:m;
subplot(2,1,1)
plot(t,A)
grid
Err(2:n-1,2:m)=(Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m))./Ue(2:n-1,2:m).^2;
Err(n,:)=0;
for k=1:m
    R(k)=(sum(Err(:,k)/n)).^(0.5);
end
subplot(2,1,2)
plot(t,R)
grid
end

>> [A R]=FeARProblema251(Ue,U)

```

A =

Columns 1 through 6

0	0.0131	0.0048	0.0037	0.0028	0.0023
---	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 7 through 12

0.0018	0.0014	0.0011	0.0008	0.0006	0.0004
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 13 through 18

0.0003	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 19 through 24

0.0006	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	0.0007
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 25 through 30

```

0.0007    0.0007    0.0007    0.0007    0.0006    0.0006
Columns 31 through 36
0.0006    0.0006    0.0006    0.0005    0.0005    0.0005
Columns 37 through 41
0.0005    0.0004    0.0004    0.0004    0.0004

```

R =

```

Columns 1 through 6
      0    0.0334    0.0086    0.0063    0.0051    0.0049
Columns 7 through 12
0.0046    0.0042    0.0036    0.0031    0.0025    0.0020
Columns 13 through 18
0.0016    0.0014    0.0016    0.0019    0.0024    0.0030
Columns 19 through 24
0.0036    0.0042    0.0048    0.0054    0.0060    0.0066
Columns 25 through 30
0.0072    0.0078    0.0084    0.0090    0.0097    0.0103
Columns 31 through 36
0.0109    0.0115    0.0121    0.0128    0.0134    0.0140
Columns 37 through 41
0.0146    0.0152    0.0159    0.0165    0.0171

```

El máximo error absoluto y relativo es de $0,013^o$ y $0,033^o$ respectivamente, cuando $t = 0,025$. El mínimo relativo para el error absoluto se encuentra cuando $0,3 \leq t \leq 0,35$ con un valor de $0,0003$, el error relativo cuando $t = 0,325$ y toma el valor de $0,0014$.

Error/Tiempo	$t = 0,025$	$0,3 \leq t \leq 0,35$	$t = 0,025$	$t = 0,325$
Error máximo absoluto	0,013			
Error mínimo absoluto		0,0003		
Error máximo relativo			0,033	
Error mínimo relativo				0,0014

Cuadro 2.1: Error absoluto y relativo Problema 2.5.1.

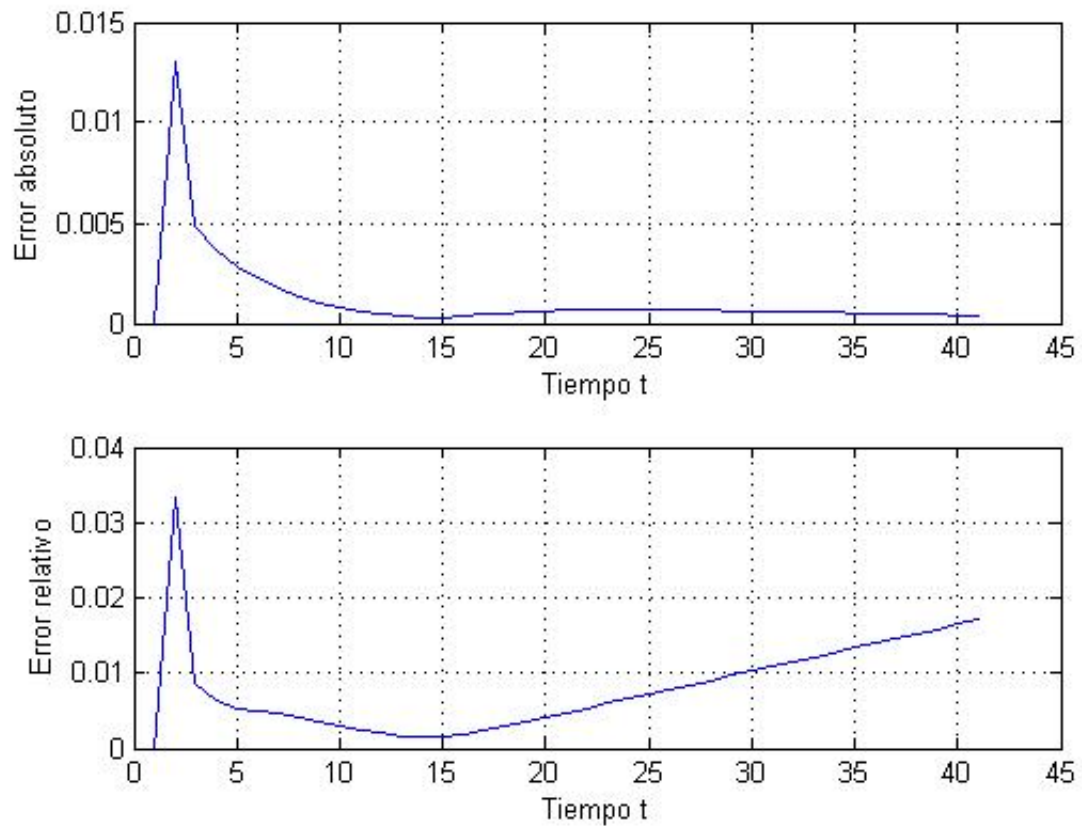


Figura 2.10: Evolución del error absoluto y relativo Problema 2.5.1.

Problema 252

En las gráficas de la Figura 2.11, podemos apreciar las mínimas diferencias que existen entre las soluciones matemáticas U_e se presentan en color rojo y las aproximadas U en color azul, para diferentes tiempos.

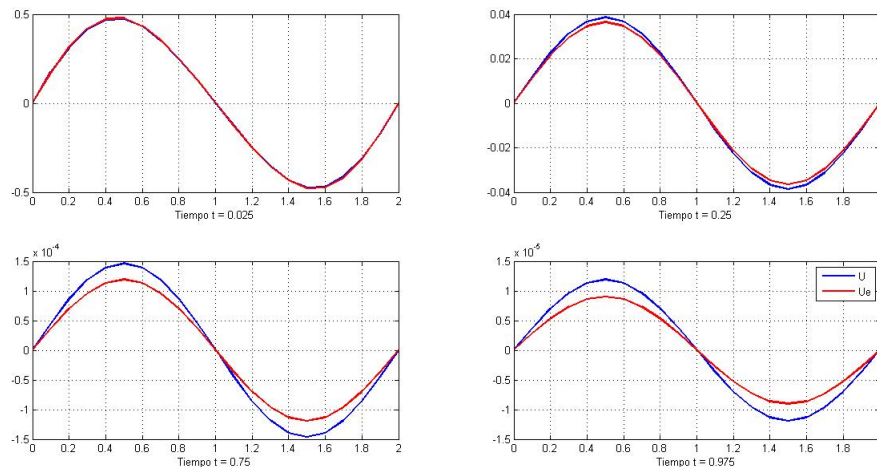


Figura 2.11: Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.025; 0.25; 0.75$ y 0.975

El código siguiente genera las matrices de datos de los errores absoluto y relativo y sus respectivas gráficas ilustradas en la Figura 2.12.

Programa que permite encontrar el error medio absoluto y relativo medio, conocidas las matrices de datos de la solución matemática U_e y aproximada U

```
function [A R]=FeARProblema252(Ue,U)
n=11;
m=41;
Err(2:n-1,2:m)=abs(Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m));
Err(n,:)=0;
for k=1:m
    A(k)=sum(Err(:,k)/n);
end
t=1:m;
subplot(2,1,1)
plot(t,A)
grid
Err1(2:n-1,2:m)=(Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m))./Ue(2:n-1,2:m).^2;
Err1(n,:)=0;
for k=1:m
    R(k)=(sum(Err1(:,k)/n)).^(0.5);
end
subplot(2,1,2)
plot(t,R)
grid
end

>> [A R]=FeARProblema252(Ue, U)

A =

Columns 1 through 6
    0    0.0084    0.0029    0.0006    0.0007    0.0014
Columns 7 through 12
```

0.0017	0.0018	0.0017	0.0016	0.0014	0.0012
Columns 13 through 18					
0.0010	0.0009	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004
Columns 19 through 24					
0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
Columns 25 through 30					
0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
Columns 31 through 36					
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Columns 37 through 41					
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	

R =

1.0e+003 *

Columns 1 through 6					
0	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004
Columns 7 through 12					
0.0006	0.0008	0.0010	0.0013	0.0017	0.0021
Columns 13 through 18					
0.0027	0.0034	0.0043	0.0054	0.0068	0.0085
Columns 19 through 24					
0.0105	0.0131	0.0162	0.0202	0.0251	0.0311
Columns 25 through 30					
0.0386	0.0479	0.0594	0.0737	0.0915	0.1135
Columns 31 through 36					
0.1408	0.1746	0.2165	0.2686	0.3331	0.4130
Columns 37 through 41					
0.5123	0.6352	0.7877	0.9769	1.2115	

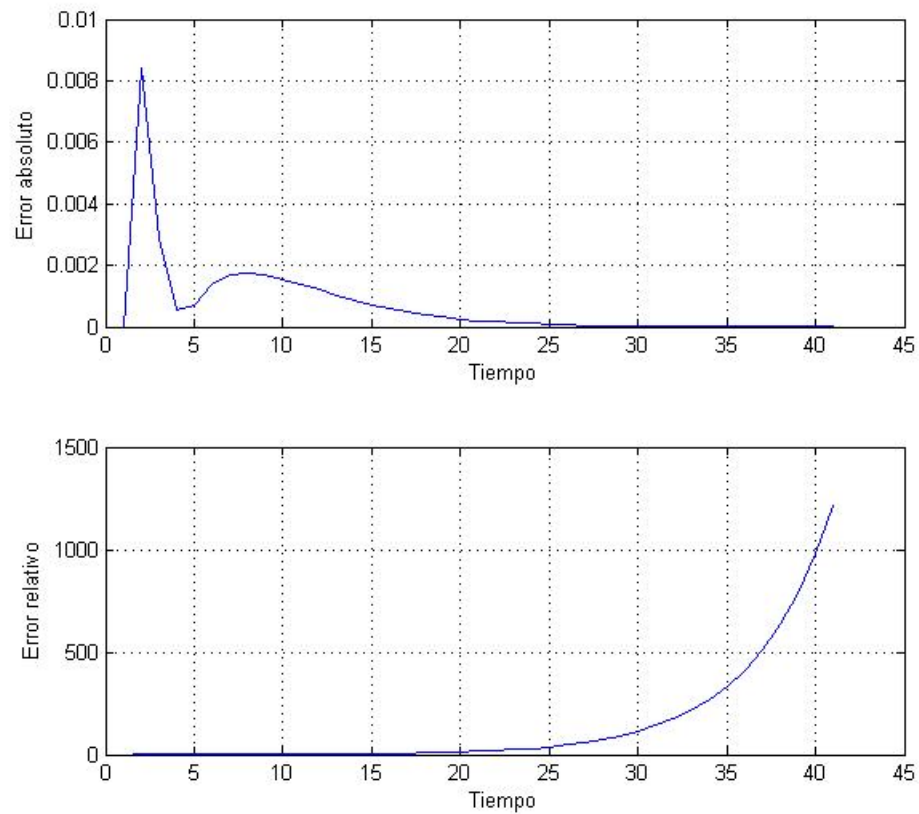


Figura 2.12: Evolución del error absoluto y relativo Problema 2.5.2.

El error absoluto máximo es de $0,0084^{\circ}$ cuando $t = 0,025$, luego decrece, se incrementa en valores menores a $0,001^{\circ}$ hasta acercarse a 0. En cambio, el error medio relativo es creciente debido a que los valores en los últimos niveles son muy pequeños.

Error/Tiempo	$t = 0,025$
Error máximo absoluto	0,084

Cuadro 2.2: Error absoluto y relativo Problema 2.5.2.

Problema 254

En las gráficas de la Figura 2.13, podemos apreciar las diferencias existentes entre las soluciones matemáticas U_e y las aproximadas U para diferentes tiempos.

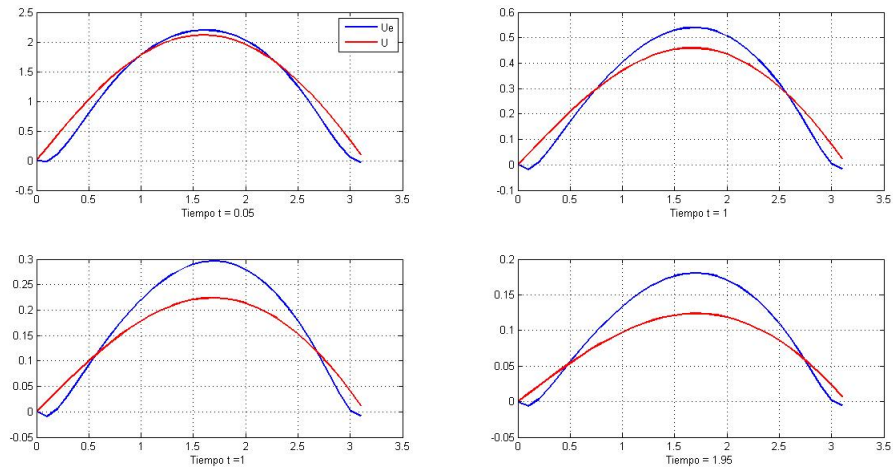


Figura 2.13: Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.05; 0.50; 1.5$ y 1.95

El código siguiente calcula las matrices de datos de los errores absoluto y relativo y sus respectivas gráficas ilustradas en la Figura 2.14.

```
function [A R]=FeARProblema254(Ue, U)
n=11;
m=41;
Err(2:n-1,2:m)=abs(Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m));
Err(n,:)=0;
for k=1:m
    A(k)=sum(Err(:,k)/n);
end
t=1:m;
subplot(2,1,1)
plot(t,A)
grid
Err1(2:n-1,2:m)=(Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m))./Ue(2:n-1,2:m);
Err1(n,:)=0;
for k=1:m
    R(k)=abs(sum(Err1(:,k)/n));
end
subplot(2,1,2)
plot(t,R)
grid
```


end

>> [A R]=FeARProblema254(Ue, U)

A =

Columns 1 through 6

0 0.0882 0.1052 0.1061 0.1009 0.0941

Columns 7 through 12

0.0872 0.0809 0.0751 0.0698 0.0652 0.0609

Columns 13 through 18

0.0571 0.0537 0.0506 0.0486 0.0468 0.0451

Columns 19 through 24

0.0435 0.0426 0.0419 0.0411 0.0403 0.0395

Columns 25 through 30

0.0387 0.0379 0.0371 0.0362 0.0356 0.0351

Columns 31 through 36

0.0344 0.0338 0.0331 0.0323 0.0316 0.0308

Columns 37 through 41

0.0300 0.0292 0.0284 0.0275 0.0267

R =

Columns 1 through 6

0 0.0787 0.0914 0.1003 0.1029 0.1038

Columns 7 through 12

0.1032 0.1017 0.0994 0.0965 0.0929 0.0887

Columns 13 through 18

0.0839 0.0785 0.0726 0.0663 0.0594 0.0521

Columns 19 through 24

0.0444 0.0363 0.0278 0.0190 0.0098 0.0004

Columns 25 through 30

0.0092 0.0191 0.0292 0.0394 0.0498 0.0603

Columns 31 through 36

0.0709 0.0816 0.0923 0.1030 0.1137 0.1244
 Columns 37 through 41
 0.1351 0.1457 0.1562 0.1666 0.1769

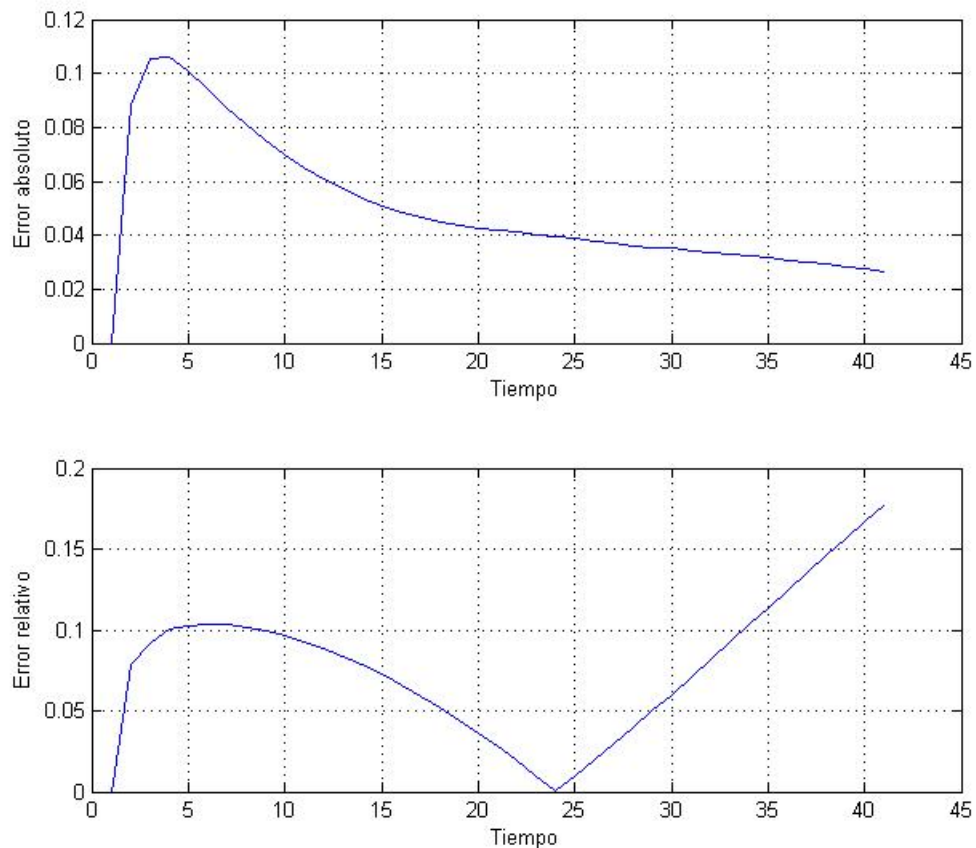


Figura 2.14: Evolución del error absoluto y relativo Problema 2.5.4.

Error/Tiempo	$t = 0,15$	$t = 0,25$	$t = 1,15$
Error máximo absoluto	0,1061		
Error máximo relativo		0,1038	
Error mínimo relativo			0,0004

Cuadro 2.3: Error absoluto y relativo Problema 2.5.4.

La Figura 2.14 evidencia el error absoluto máximo es de 0,1061° cuando $t = 0,15$, y luego decrece . El error relativo máximo se presenta cuando $t = 0,25$ con un valor de 0,1038, decrece a un mínimo cuando $t = 1,15$ y toma un valor de 0,0004 y luego se incrementa hasta el tiempo final que se analiza y es de 0,1666.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas

3.1. Cuerdas vibrantes

La ecuación de una cuerda vibrante se modeliza a través de una ecuación diferencial parcial hiperbólica de la forma $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, en donde c representa una constante equivalente a la velocidad de propagación de la onda. Para su determinación se analiza una cuerda elástica de longitud L sujeta por los extremos y que al actuar una fuerza externa, empieza a vibrar.

3.1.1. Deducción de la ecuación para cuerda vibrante

Consideremos una cuerda tensa que vibra con los extremos sujetos. A la cuerda se le aplica una fuerza hacia arriba, de manera que cualquier partícula se traslada desde un punto inicial $P_0(x_0, 0)$ hasta un punto $P(x, y)$ después de haber transcurrido un tiempo t [2].

Como P_0 y P son puntos muy cercanos, entonces la recta que los une es prácticamente vertical h (despreciamos la componente horizontal). Entonces, podemos concluir que el desplazamiento vertical y depende de x y de t , $h = y(x, t)$

Imaginemos un fragmento muy pequeño de la cuerda, en el eje X , entre x y Δx con densidad lineal δ , en la que despejamos su masa.

$$\delta = \frac{m}{\Delta x}$$
$$m = \delta \Delta x$$

La tensión T es la fuerza ejercida en los extremos por el resto de la cuerda, depende de x y de t , tiene una dirección tangencial, representada en la Figura 3.1.

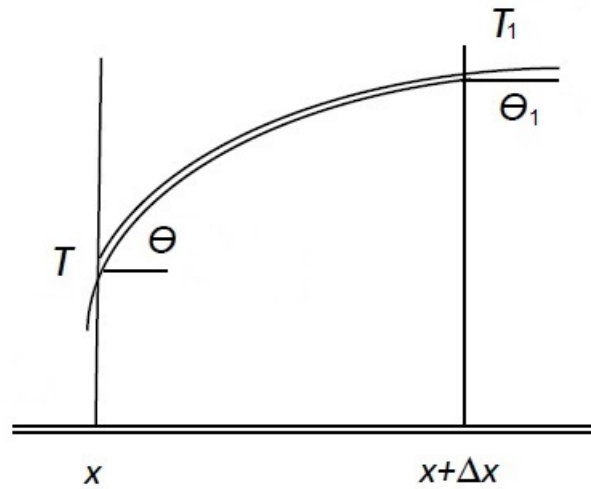


Figura 3.1: Tensión y ángulo dependen de x y t en una cuerda

El ángulo que describe la tensión con el eje horizontal θ , cumple

$$\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

La aceleración viene dada por

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Haciendo cumplir la segunda ley de Newton para las fuerzas que actúan verticalmente $\sum F_y = ma$, ya que en la dirección del eje X se desprecian. Estas fuerzas verticales existentes incluida F que representa la componente vertical de la fuerza que actúa sobre el cuerpo multiplicada por su masa, para luego dividir para Δx y evaluar el límite indicado, permiten obtener una derivada parcial con respecto a x .

$$\begin{aligned} T_1 \sin \theta_1 - T \sin \theta + \delta \Delta x F &= \delta \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{T_1 \sin \theta_1 - T \sin \theta}{\Delta x} + \delta F &= \delta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T_1 \sin \theta_1 - T \sin \theta}{\Delta x} + \delta F &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} [T \sin \theta] + \delta F &= \delta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Cuando un ángulo es pequeño, se puede aproximar $\sin \theta \approx \tan \theta$, que reemplazada por la

derivada parcial, formamos la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}[T \tan \theta] + \delta F &= \delta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \delta F &= \delta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\end{aligned}$$

La tensión T viene a constituirse en una constante, entonces las vibraciones verticales se rigen por la siguiente relación

$$T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \delta F = \delta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Se divide para δ y se asigna $c^2 = \frac{T}{\delta}$, la ecuación de ondas unidimensional, viene dado por

$$\begin{aligned}\frac{T}{\delta} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + F &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F\end{aligned}$$

3.2. Método de separación de variables con condiciones de contorno.

Al emplear dicho método, se realiza el reemplazo en la función desplazamiento y por el producto de las funciones XT , determinando así las soluciones producto que constituyen EDO's, luego se aplican las condiciones de contorno e iniciales, determinando así la solución general y particular, como no actúan fuerzas externas, se tiene el caso homogéneo.

En el caso no homogéneo se considera la actuación de una fuerza externa $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F$, se analiza este caso en el problema 3.3.3.

3.2.1. Solución de ecuaciones homogéneas y no homogéneas

Vamos a analizar el caso de una cuerda vibrante uniforme sin fuerzas externas y con extremos fijos, es decir una EDP homogénea [2], [5]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (3.2)$$

cuyas condiciones de contorno, son

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, t > 0 \quad (3.3)$$

Las condiciones iniciales, representan la posición y la velocidad inicial.

$$C.I. \begin{cases} y(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad 0 < x < L \quad (3.4)$$

Aplicamos el método de separación de variables en la que la ecuación $y(x, t) = X(x)T(t)$ sustituimos en (3.2) a las ecuaciones homogéneas.

$$\frac{\partial^2 [X(x)T(t)]}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 [X(x)T(t)]}{\partial x^2}$$

$$X(x) \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 T(t) \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Utilizando una notación más simple y asignando a la constante de separación λ el signo (-), se forman las siguientes ecuaciones.

$$XT'' = c^2 TX''$$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Entonces, obtenemos las siguientes EDO's.

$$T'' + c^2 \lambda T = 0 \quad (3.5)$$

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (3.6)$$

Reemplazando las condiciones de contorno, se deduce los siguientes datos.

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

$$y(0, t) = X(0)T(t)$$

$$X(0) = 0$$

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

$$y(L, t) = X(L)T(t)$$

$$X(L) = 0$$

La solución a la ecuación espacial viene dada por la ecuación (2.14), encontrando además $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$ y $X(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Y para la ecuación temporal, la solución general expresada por (2.14), es de la forma $T(t) = c_3 \cos(c\sqrt{\lambda}t) + c_4 \operatorname{sen}(c\sqrt{\lambda}t)$; reemplazando λ en la ecuación temporal, se logra

$$T(t) = c_3 \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi t}{L}\right)$$

La solución se expresa como el producto de XT .

$$y(x, t) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[c_3 \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \right]$$

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi t}{L}\right)$$

Se asigna $A = c_2 \cdot c_3$ y $B = c_2 \cdot c_4$ y por el principio de superposición, podemos plantear la siguiente ecuación.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \right] \quad (3.7)$$

Reemplazando las condiciones iniciales, se logran determinar los coeficientes de las series A_n y B_n .

$$y(x, 0) = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi(0)}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi(0)}{L}\right) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi(0)}{L}\right) \left(\frac{cn\pi}{L}\right) \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi(0)}{L}\right) \left(\frac{cn\pi}{L}\right) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

Los coeficientes de dichas series vienen dados por (2.22).

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi c B_n}{L} &= \frac{2}{L} \int_0^L \left[g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \\ B_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \left[g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

Cuando existe desplazamiento inicial $y(x, 0) = f(x)$, la solución se determina con la siguiente relación.

$$y(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{cn\pi t}{L} \right) \right] \quad (3.10)$$

Cuando existe velocidad inicial $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, la solución se determina a través de la siguiente relación.

$$y(x, t) = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{cn\pi t}{L} \right) \right] \quad (3.11)$$

De existir desplazamiento y velocidad inicial, se suman las soluciones (3.10) y (3.11).

3.3. Problemas de aplicación

PROBLEMA 3.3.1.

Consideremos una cuerda elástica de longitud π , fija en sus extremos con $c^2 = 4$. Determinar la función de desplazamiento $y(x, t)$, sujeta a las siguientes condiciones.

$$C.C. \quad y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \quad t \geq 0$$

$$C.I. \quad \begin{cases} y(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \pi x - x^2 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Aplicando la ecuación (3.9) y substituyendo los datos del problema, se consigue

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \operatorname{sen}(nx) dx$$

Al integrar por partes, se obtiene el valor de B_n .

$$B_n = -\frac{2}{n^4\pi}[(-1)^n - 1]$$

La relación encontrada puede resumirse verificando cuando es un entero par o impar, como detallamos en la siguiente expresión.

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{\pi n^4} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Luego, con la ecuación (3.11) se determina la solución $y(x, t)$, reemplazando n por $2n - 1$ debido a que el coeficiente B_n calculado toma valor diferente de cero para n impar.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^4} \text{sen}[(2n-1)x] \text{sen}[(4n-2)t]$$

Se debe comprobar que la solución encontrada cumple las condiciones de contorno, iniciales y la EDP.

$$\begin{aligned} y(0, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^4} \text{sen}[(2n-1)(0)] \text{sen}[(4n-2)t] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\pi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^4} \text{sen}[(2n-1)(\pi)] \text{sen}[(4n-2)t] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^4} \text{sen}[(2n-1)x] \text{sen}[(4n-2)(0)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3} \text{sen}[(2n-1)x] \\ \pi x - x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi(2n-1)^3} \text{sen}[(2n-1)x] \right) \end{aligned}$$

Como ejemplo se toma $x = 2$ ($0 < x < \pi$) y se forma la siguiente serie

$$\begin{aligned} 2\pi - 4 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3} \text{sen}[(2n-1)x] \\ 2,2832 &\approx \frac{8}{\pi} \text{sen}(2) + \frac{8}{27\pi} \text{sen}(6) + \frac{8}{125\pi} \text{sen}(10) + \frac{8}{343\pi} \text{sen}(14) + \dots \end{aligned}$$

Para verificar la condición inicial $y(x, 0) = \pi x - x^2$, ejecutamos el código planteado que nos permite comprobar la convergencia de la serie en dicho intervalo para algunos valores, el error que se aproxima a cero, comprueba que la serie converge a dichos datos.

```
function [A]=CI331(n,f)
fprintf('\t Conver. \t Cini. \t Error')
fx=inline(f);
U=0;
x=0.1:0.1:3.1;
s=length(x);
for i=1:s
    for k=1:n
        U = U + 8*sin((2*k-1)*x(i))/(pi*(2*k-1)^3);;
    end
    conver(i)=U;
    U=0;
end
for i=1:s
    p(i)=fx(x(i));
end
for i=1:s
    Error(i) = abs(p(i)-conver(i));
end
A=zeros(s,3);
A(:,1)=conver;
A(:,2)=p;
A(:,3)=Error;
end

>> [A]=CI331(10000,'pi*x-x^2')
    Conver.    Cini.    Error
A =

    0.3042    0.3042    0.0000
    0.5883    0.5883    0.0000
```

0.8525	0.8525	0.0000
1.0966	1.0966	0.0000
1.3208	1.3208	0.0000
1.5250	1.5250	0.0000
1.7091	1.7091	0.0000
1.8733	1.8733	0.0000
2.0174	2.0174	0.0000
2.1416	2.1416	0.0000
2.2458	2.2458	0.0000
2.3299	2.3299	0.0000
2.3941	2.3941	0.0000
2.4382	2.4382	0.0000
2.4624	2.4624	0.0000
2.4665	2.4665	0.0000
2.4507	2.4507	0.0000
2.4149	2.4149	0.0000
2.3590	2.3590	0.0000
2.2832	2.2832	0.0000
2.1873	2.1873	0.0000
2.0715	2.0715	0.0000
1.9357	1.9357	0.0000
1.7798	1.7798	0.0000
1.6040	1.6040	0.0000
1.4081	1.4081	0.0000
1.1923	1.1923	0.0000
0.9565	0.9565	0.0000
0.7006	0.7006	0.0000
0.4248	0.4248	0.0000
0.1289	0.1289	0.0000

A continuación, se desarrolla la primera derivada con respecto al tiempo y la segunda con respecto al espacio.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(2n-1)}{\pi(2n-1)^4} \cos[(2n-1)x] \operatorname{sen}[(4n-2)t] \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^3} \cos[(2n-1)x] \operatorname{sen}[(4n-2)t] \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \operatorname{sen}[(2n-1)x] \operatorname{sen}[(4n-2)t] \\
\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi(2n-1)^3} \operatorname{sen}[(2n-1)x] \cos[(4n-2)t] \right) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16}{\pi(2n-1)^2} \operatorname{sen}[(2n-1)x] \operatorname{sen}[(4n-2)t] \right)
\end{aligned}$$

Entonces, podemos decir que la solución encontrada es solución del problema planteado.

A continuación determinamos la matriz de resultados (Anexo A) de la función desplazamiento y utilizando el código planteado, dicha información es utilizada para construir la gráfica (Figura 3.2 a); la variable x se subdivide en 11 partes en $]0, \pi[$ y t en 21 partes en $]0, 3[$. Se exhibe los perfiles de la función en la figura 3.2 b).

```

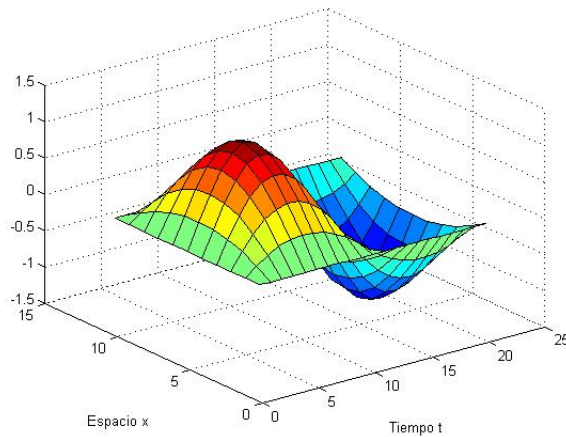
function [y]=Problema331(a,b,n,m,p)
h1=a/(n-1);
h2=b/(m-1);
x=0:h1:a;
t=0:h2:b;
y=zeros(n,m);
for k=1:p
    for i=1:n;
        for j=1:m;
            y(i,j)=y(i,j)+4*sin((2*k-1)*x(i))*sin((4*k-2)*t(j))...
                /((2*k-1)^4*pi);
        end
    end
end
surf(y)
figure(2)
for k=1:5:21
    P=y(:,k);
    P1=InterpolacionNewton(x,P);

```

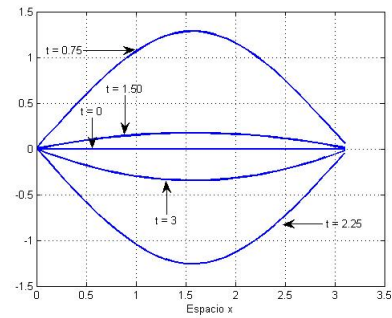
```

z=0:0.1:a;
Q=polyval(P1,z);
plot(z,Q,'LineWidth',1.5)
hold on
grid on
end

```



(a) Función desplazamiento y



(b) Tiempo 0, 0.75, 1.50, 2.25 y 3

Figura 3.2: Gráfica y perfiles de la función desplazamiento y para diferentes tiempos

PROBLEMA 3.3.2.

Una cuerda elástica mide 1 unidad, fija en sus extremos y constante $c^2 = 2,25$. Determinar la función de desplazamiento $y(x, t)$, sujeta a las siguientes condiciones.

$$C.C. \quad y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad t \geq 0$$

$$C.I. \quad \begin{cases} y(x, 0) = x(1 - x), \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

La solución general $y(x, t)$, viene dada por la ecuación (3.10), al reemplazar los datos, obtenemos

$$y(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^1 (x - x^2) \operatorname{sen}(n\pi x) dx \right] \operatorname{sen}(n\pi x) \cos(1,5n\pi t) \right\}$$

B_n , se consigue aplicando la fórmula (3.8)

$$B_n = 2 \int_0^1 (x - x^2) \operatorname{sen}(n\pi x) dx$$

Integrando y simplificando, conseguimos

$$B_n = \frac{4(-1)^{n+1} + 4}{n^3 \pi^3}$$

Además, podemos expresar al coeficiente cuando n es entero par o impar.

$$B_n = \begin{cases} \frac{8}{n^3 \pi^3} & \text{n impar} \\ 0 & \text{n par} \end{cases}$$

En la solución, n es reemplazada por $2n - 1$, ya que hay solución cuando n es impar.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x] \cos[(3n-1,5)\pi t] \right\}$$

Vamos a probar que la solución encontrada cumple las condiciones de contorno, iniciales y la EDP.

$$y(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] \operatorname{sen}[(2n-1)\pi \cdot 0] \cos[(3n-1,5)\pi t] \right\}$$

$$y(0, t) = 0$$

$$y(1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] \operatorname{sen}[(2n-1)\pi \cdot 1] \cos[(3n-1,5)\pi t] \right\}$$

$$y(1, t) = 0$$

Para la condición inicial, como ejemplo se toma $x = 0,5$, la serie formada debe converger a 0,25

$$0,5 - 0,5^2 \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] \operatorname{sen}[(n-0,5)\pi] \right\}$$

$$0,25 \approx \left[\frac{2}{\pi^3} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{27\pi^3} \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} \right) + \frac{2}{125\pi^3} \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{2} \right) + \dots \right]$$

Ahora, se verifica para algunos $x \in [0, 1]$, a través del programa, al ser el error aproximadamente cero, esta cumple la convergencia.

function [A]=CI332(n,f)

```

fprintf('\t Conver. \t Cini. \t Error')
fx=inline(f);
U=0;
x=0.1:0.1:0.98;
s=length(x);
for i=1:s
    for k=1:n
        U = U + 8*sin((2*k-1)*x(i)*pi)...
            /((2*k-1)^3*pi^3);
    end
    conver(i)=U;
    U=0;
end
for i=1:s
    p(i)=fx(x(i));
end
for i=1:s
    Error(i) = abs(p(i)-conver(i));
end
A=zeros(s,3);
A(:,1)=conver;
A(:,2)=p;
A(:,3)=Error;
end

```

```
>> [A]=CI332(10000,'x-x^2')
```

```
Conver.    Cini.    Error
```

```
A =
```

```

0.0900    0.0900    0.0000
0.1600    0.1600    0.0000
0.2100    0.2100    0.0000
0.2400    0.2400    0.0000

```

0.2500	0.2500	0.0000
0.2400	0.2400	0.0000
0.2100	0.2100	0.0000
0.1600	0.1600	0.0000
0.0900	0.0900	0.0000

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] (3n-1,5)\pi \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x] \operatorname{sen}[(3n-1,5)\pi \cdot 0] \right\} \\ g(x) &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] (3n-1,5)\pi \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x] \operatorname{sen}[(3n-1,5)\pi t] \right\} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] (3n-1,5)^2 \pi^2 \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x] \cos[(3n-1,5)\pi t] \right\} \\ &= -2,25 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] (2n-1)^2 \pi^2 \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x] \cos[(3n-1,5)\pi t] \right\} \\ \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] (2n-1)\pi \cos[(2n-1)\pi x] \cos[(3n-1,5)\pi t] \right\} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3} \right] (2n-1)^2 \pi^2 \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x] \cos[(3n-1,5)\pi t] \right\} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2,25 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Al cumplir las condiciones analizadas y la EDP, podemos decir que es solución.

Se construye la matriz de resultados de la función desplazamiento y (Anexo A) utilizando para ello el código presentado a continuación, el mismo que permite elaborar su gráfica exhibida en la Figura 3.3 a), en donde a la variable x se subdivide en 11 partes en $]0, 1[$ a t en 31 partes en $]0, 1[$. Los perfiles de la función para diferentes tiempos se pueden observar en la Figura 3.3 b).

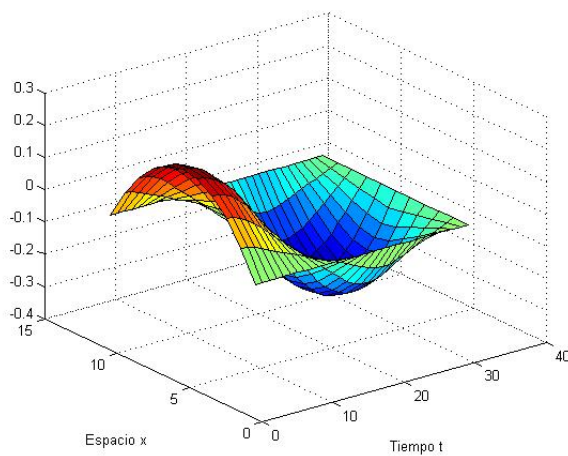
```
function [y]=Problema332(a,b,n,m,p)
h1=a/(n-1);
h2=b/(m-1);
x=0:h1:a;
t=0:h2:b;
y=zeros(n,m);
for k=1:p
    for i=1:n;
        for j=1:m;
```



```

y(i, j)=y(i, j)+8*sin((2*k-1)*pi*x(i))...
*cos((3*k-1.5)*pi*t(j))/((2*k-1)^3*pi^3);
end
end
end
surf(y)
figure(2)
for k=1:5:m
P=y(:,k);
P1=InterpolacionNewton(x,P);
z=0:0.1:a;
Q=polyval(P1,z);
plot(z,Q,'LineWidth',1.50)
hold on
grid on
end
end
end

```



(a) Función desplazamiento y

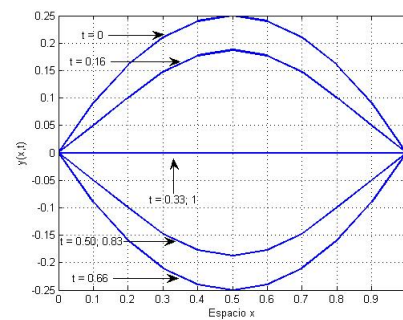
(b) Tiempo 0, 0.16, 0.33, 0.50, 0.66, 0.83,
1

Figura 3.3: Gráfica y perfiles de la función desplazamiento y para diferentes tiempos

PROBLEMA 3.3.3.

Una cuerda elástica mide π unidades y de constante $c^2 = 1$. Determinar la función de desplazamiento $y(x, t)$, sujeta a las siguientes condiciones.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Px^2 \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0$$

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \quad t > 0$$

$$C.I. \begin{cases} y(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 2 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

La EDP planteada representa el caso no homogéneo, que no es posible resolver por el método de Fourier en forma directa, su resolución se detalla a continuación [4], [5].

$$y(x, t) = H(x, t) + \alpha(x)$$

Substituyendo $y(x, t)$ en la ecuación diferencial original, esta se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(H + \alpha)}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2(H + \alpha)}{\partial x^2} + Px^2 \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + Px^2 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + Px^2 \end{aligned}$$

Ahora, para considerar a la EDP como homogénea, debe cumplir

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + Px^2 = 0$$

Integrando dos veces, conseguimos la función $\alpha(x)$.

$$\begin{aligned} \alpha''(x) + Px^2 &= 0 \\ \alpha'(x) &= -\frac{Px^3}{3} + Q \\ \alpha(x) &= -\frac{Px^4}{12} + Qx + R \end{aligned}$$

El objetivo es encontrar los coeficientes P , Q y R , para ello usamos las condiciones de frontera reemplazando en la solución y .

$$y(0, t) = H(0, t) + \alpha(0) = 0$$

Esto es posible solamente cuando $\alpha(0) = 0$, con lo cual se determina el valor de R .

$$\alpha(0) = -\frac{P(0)^4}{12} + Q(0) + R = 0$$

$$R = 0$$

Usando la segunda condición de contorno, se tiene

$$\begin{aligned} y(\pi, t) &= H(\pi, t) + \alpha(\pi) = 0 \\ 0 &= H(\pi, t) - \frac{P\pi^4}{12} + Q\pi \end{aligned}$$

Luego, debe cumplir la condición $\alpha(\pi) = 0$, que permite determinar Q .

$$\begin{aligned} -\frac{P\pi^4}{12} + Q\pi &= 0 \\ Q &= \frac{P\pi^3}{12} \end{aligned}$$

Entonces, $\alpha(x)$ viene dado por la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -\frac{Px^4}{12} + \frac{P\pi^3x}{12} \\ &= \frac{1}{12}Px(\pi^3 - x^3) \end{aligned}$$

Determinemos ahora la condición inicial para $H(x, 0)$ y para su derivada.

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= H(x, 0) + \alpha(x) \\ H(x, 0) &= y(x, 0) - \alpha(x) \\ &= 0 - \alpha(x) \\ &= -\frac{1}{12}Px(x^3 - \pi^3) \\ y(x, t) &= H(x, t) + \alpha(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) + 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= \frac{\partial H}{\partial t}(x, 0) = 2\end{aligned}$$

Planteamos entonces un problema para $H(x, t)$ equivalente al que debemos resolver, con $P = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + x^2 \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ C.C. &\begin{cases} H(0, t) = 0, \\ H(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad t \geq 0 \\ C.I. &\begin{cases} H(x, 0) = \frac{1}{12}x(x^3 - \pi^3), \\ \frac{\partial H}{\partial t}(x, 0) = 2 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \pi\end{aligned}$$

Como en el problema existe desplazamiento y velocidad inicial, la solución vendrá dada por la suma de las soluciones para el desplazamiento y para la velocidad. Reemplazando los datos, se obtiene

$$\begin{aligned}H(x, t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_0^{\pi} \frac{1}{12} x(x^3 - \pi^3) \operatorname{sen}(nx) dx \right) \operatorname{sen}(nx) \cos(nt) \right] + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}(nx) dx \right) \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(nt) \right]\end{aligned}$$

Ahora, se aplica las fórmulas (3.8) y (3.9) e integrando por partes, se determinan los coeficientes A_n y B_n respectivamente.

$$\begin{aligned}A_n &= \int_0^{\pi} \frac{1}{12} x(x^3 - \pi^3) \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{12\pi^2(-1)^n}{n^3} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^5} \\ B_n &= \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{n}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $H(x, t)$ se expresa en la siguiente forma

$$H(x, t) = \frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n^3} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^5} \right) \text{sen}(nx) \cos(nt) \right] + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \text{sen}(nx) \text{sen}(nt) \right]$$

Entonces, la solución $y(x, t) = H(x, t) + \alpha(x)$ se presenta a continuación.

$$y(x, t) = \frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n^3} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^5} \right) \text{sen}(nx) \cos(nt) \right] + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \text{sen}(nx) \text{sen}(nt) \right] + \frac{1}{12}x(\pi^3 - x^3)$$

La solución encontrada debe cumplir las condiciones de contorno y la EDP.

$$y(0, t) = \frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n^3} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^5} \right) \text{sen}(n(0)) \cos(nt) \right] + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \text{sen}(n(0)) \text{sen}(nt) \right] + \frac{1}{12}(0)(\pi^3 - 0^3) \\ = 0$$

$$y(\pi, t) = \frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n^3} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^5} \right) \text{sen}(n\pi) \cos(nt) \right] + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \text{sen}(n\pi) \text{sen}(nt) \right] + \frac{1}{12}\pi(\pi^3 - \pi^3) \\ = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n^2} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^4} \right) \text{sen}(nx) \text{sen}(nt) \right] + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \text{sen}(nx) \cos(nt) \right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = -\frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^3} \right) \text{sen}(nx) \cos(nt) \right] - \\ - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [(1 - (-1)^n) \text{sen}(nx) \text{sen}(nt)]$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n^2} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^4} \right) \cos(nx) \cos(nt) \right] + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \cos(nx) \text{sen}(nt) \right] + \frac{1}{12}(\pi^3 - 4x^3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) &= -\frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^3} \right) \cos(nx) \sin(nt) \right] - \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [(1 - (-1)^n) \sin(nx) \sin(nt)] - x^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2 \end{aligned}$$

Luego, se verifica el cumplimiento de las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= \frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n^3} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^5} \right) \sin(nx) \right] + \frac{1}{12}x(\pi^3 - x^3) \\ 0 &= \frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n^3} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^5} \right) \sin(nx) \right] + \frac{1}{12}x(\pi^3 - x^3) \\ \frac{1}{12}x(\pi^3 - x^3) &= \frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12\pi^2(-1)^n}{n^3} + \frac{24 - 24(-1)^n}{n^5} \right) \sin(nx) \right] \end{aligned}$$

Si tomamos $x = 1$ ($0 \leq x \leq \pi$), la serie debe converger a $\frac{1}{12}(\pi^3 - 1)$.

$$\frac{1}{12}(\pi^3 - 1) \approx \frac{1}{6\pi} \left[(-12\pi^2 + 48) \sin(1) + \frac{3}{2}\pi^2 \sin(2) + \left(-\frac{4}{9}\pi^2 + \frac{16}{81} \right) \sin(3) + \dots \right]$$

Ahora, se da algunos valores y con ayuda del siguiente algoritmo, que permite verificar si la condición inicial cumple.

```
function [A]=CI333(n, f)
fprintf('\t Cini. \t Conver. \t Error')
fx=inline(f);
y=0;
x=0.1:0.1:3.1;
s=length(x);
for i=1:s
    for k=1:n
        y = y + (12*pi^2*(-1)^k/k^3 + 24/k^5-24*...
            (-1)^k/k^5)*sin(k*x(i))/(6*pi);
    end
    conver(i)=y;
    y=0;
end
for i=1:s
    p(i)=fx(x(i));
```

```
end
Error(i) = abs(p(i)-conver(i));
A=zeros(s,3);
A(:,1)=p;
A(:,2)=conver;
A(:,3)=Error;

>> [A]=CI333(1000,'x*(x^3-pi^3)/12')
    Cini.    Conver.    Error
A =
   -0.2584   -0.2584         0
   -0.5166   -0.5166         0
   -0.7745   -0.7745         0
   -1.0314   -1.0314         0
   -1.2867   -1.2867         0
   -1.5395   -1.5395         0
   -1.7887   -1.7887         0
   -2.0330   -2.0330         0
   -2.2708   -2.2708         0
   -2.5005   -2.5005         0
   -2.7202   -2.7202         0
   -2.9278   -2.9278         0
   -3.1210   -3.1210         0
   -3.2973   -3.2973         0
   -3.4539   -3.4539         0
   -3.5880   -3.5880         0
   -3.6965   -3.6965         0
   -3.7761   -3.7761         0
   -3.8233   -3.8233         0
   -3.8344   -3.8344         0
   -3.8054   -3.8054         0
   -3.7324   -3.7324         0
   -3.6109   -3.6109         0
   -3.4365   -3.4365         0
```

-3.2044	-3.2044	0
-2.9099	-2.9099	0
-2.5477	-2.5477	0
-2.1127	-2.1127	0
-1.5992	-1.5992	0
-1.0016	-1.0016	0
-0.3139	-0.3139	0.0000

Por último, verificamos la velocidad inicial cuyo valor es 2.

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \text{sen}(nx) \right]$$

Si se toma $x = 1$ ($0 \leq x \leq \pi$), la serie debe converger a 2.

$$2 \approx \frac{4}{\pi} \left[2 \text{sen}(1) + \frac{2}{3} \text{sen}(3) + \frac{2}{5} \text{sen}(5) + \dots \right]$$

Hallamos el límite de la serie a través del siguiente código, que verifica a través del error su convergencia.

```
function [A]=CI333v(n, f)
fprintf('\t Convergencia. \t Cini. \t Error')
fx=inline(f);
U=0;
x=0.1:0.1:3.1;
s=length(x);
for i=1:s
    for k=1:n
        U = U + 4*((1-(-1)^k)/k)*sin(k*x(i))/pi;
    end
    conver(i)=U;
    U=0;
end
for i=1:s
    p(i)=fx(x(i));
end
for i=1:s
```


2.0000	2.0000	0.0000
2.0000	2.0000	0.0000
2.0000	2.0000	0.0000
2.0000	2.0000	0.0000
2.0000	2.0000	0.0000
2.0001	2.0000	0.0001
1.9997	2.0000	0.0003

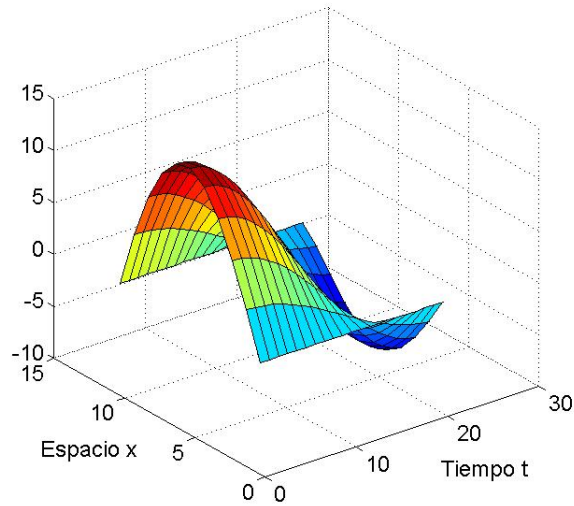
Se construye la matriz de resultados de la función desplazamiento (Anexo A) con el programa planteado y su gráfica Figura 3.4 a), en donde a la variable x la subdividimos en 11 partes en $]0, \pi[$ a t en 21 partes en $]0, 3[$. Los perfiles de la función para diferentes tiempos se exhiben en la Figura 3.4 b).

```
function [y]=Problema333(a,b,n,m,p)
h1=a/(n-1);
h2=b/(m-1);
x=0:h1:a;
t=0:h2:b;
y=zeros(n,m);
for k=1:p
    for i=1:n;
        for j=1:m;
            y(i,j)=y(i,j)+(12*pi^2/k^3+(24-24*(-1)^k)/k^5)...
                *sin(k*x(i))*cos(k*t(j))/(6*pi)+4*(1-(-1)^n)...
                *sin(k*x(i))*cos(k*t(j))/(k^2*pi)+(pi^3*x(i)...
                -x(i)^4)/12;
        end
    end
end
surf(y)
figure(2)
for k=1:5:21
    P=y(:,k);
    P1=InterpolacionNewton(x,P);
    z=0:0.1:a;
    Q=polyval(P1,z);
end
```

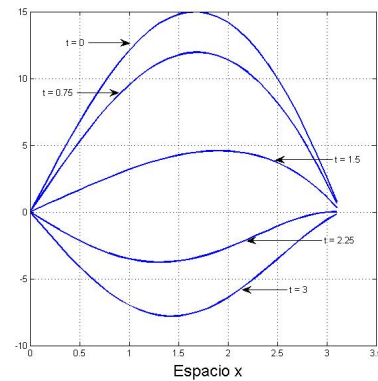
```

plot(z,Q,'LineWidth',1.5)
hold on
grid on
end
end

```



(a) Función desplazamiento y



(b) Tiempo 0, 0.75, 1.5, 2.25, 3

Figura 3.4: Gráfica y perfiles de la función desplazamiento y para diferentes tiempos

3.4. Métodos numéricos con diferencias finitas

3.4.1. Deducción de la ecuación en derivadas parciales hiperbólicas en diferencias finitas

La ecuación de ondas con sus condiciones de contorno e iniciales, modelado por la siguiente EDP.

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \quad (3.12)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad 0 < t < b$$

$$C.I. \begin{cases} y(x, 0) = f(x), \\ y_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq a$$

Se construye una malla formada por un rectángulo cuyo largo es a subdividido en $n - 1$ partes y ancho b subdividido en $(m - 1)$ partes, lo que genera $(n - 1)(m - 1)$ rectángulos,

con lados $h = \frac{a}{n-1}$ y $k = \frac{b}{m-1}$, como indica la Figura 3.5 [3].

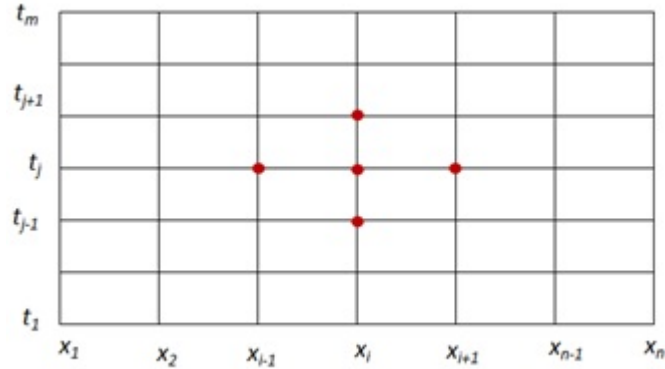


Figura 3.5: Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecuación de onda

El proceso se inicia en la primera fila, en donde la solución viene dado por $y(x_i, t_1) = f(x_i)$. Para determinar las aproximaciones en las filas sucesivas, se aplica la ecuación en diferencias finitas, es decir para cada $j = 2, 3, \dots, m$, se calcula $y_{i,j} \approx y(x_i, t_j)$: con $i = 1, 2, \dots, n$.

Substituyendo las ecuaciones de diferencias centradas para la segunda derivada (2.51) con respecto a t y a x respectivamente para cada término de la ecuación de onda (3.12) y despreciando el orden de aproximación, se plantean las siguientes ecuaciones.

$$y_{tt}(x, t) = \frac{y(x, t+k) - 2y(x, t) + y(x, t-k)}{k^2}$$

$$y_{xx}(x, t) = \frac{y(x+h, t) - 2y(x, t) + y(x-h, t)}{h^2}$$

Reemplazando en la ecuación de onda las aproximaciones, se tiene

$$\frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h^2}$$

Asignamos $r^2 = \frac{c^2 k^2}{h^2}$, se consigue la siguiente expresión.

$$y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1} = r^2(y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j})$$

Despejando el término de la fila i y de la columna $j+1$

$$y_{i,j+1} = (2 - 2r^2)y_{i,j} + r^2(y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) - y_{i-1,j}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (3.13)$$

Para garantizar la estabilidad de la ecuación (3.13) es necesario que r cumpla con la condición $r \leq 1$.

Para calcular la tercera fila y las siguientes, se necesita conocer las aproximaciones en los puntos de la primera fila, que viene dada por la función f y de segunda fila, que se determina a través de la segunda condición inicial g .

Para ello, se emplea el desarrollo de Taylor, alrededor de $(x_i, 0)$ y despreciando el orden de aproximación, se establece la siguiente relación.

$$y(x_i, k) = y(x_i, 0) + y_t(x_i, 0)k \quad (3.14)$$

Reemplazando $y(x_i, 0) = f_i$ y $y_t(x_i, 0) = g_i$ en (3.14), se construye una primera aproximación a los valores de la segunda fila.

$$y_{i,2} = f_i + kg_i \quad i = 2, 3, \dots, n - 1 \quad (3.15)$$

Ahora, establecemos el desarrollo de Taylor alrededor de $(x_i, 0)$ con un orden de aproximación mayor como se indica a continuación, con el objetivo de mejorar la aproximación a los valores de la segunda fila.

$$y(x_i, k) = y(x_i, 0) + y_t(x_i, 0)k + \frac{y_{tt}(x_i, 0)k^2}{2} \quad (3.16)$$

En la ecuación (3.12), reemplazamos la fórmula de diferencias finitas centradas (2.51), con lo que accedemos a la siguiente ecuación.

$$y_{tt}(x_i, 0) = c^2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad (3.17)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.15) y (3.17) en (3.16), simplificando y agrupando, conseguimos la aproximación mejorada.

$$y(x_i, k) = f_i + kg_i + \frac{c^2 k^2}{2h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

$$y_{i,2} = (1 - r^2)f_i + kg_i + \frac{r^2}{2} (f_{i+1} - f_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n - 1$$

Solución numérica del Problema 3.3.1.

Dada la ecuación de onda con las condiciones iniciales y de contorno, utilizando el método de diferencias finitas se va a determinar una aproximación.

$$y_{t,t}(x, t) = 4 y_{x,x}(x, t), \quad 0 < t < 3, \quad 0 < x < \pi$$

$$\text{C.C. } y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$\text{C.I. } \begin{cases} y(x, 0) = 0 \\ y_t(x, 0) = \pi x - x^2 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Para ello, formamos una malla con 11 filas de alto y 21 columnas de ancho, en donde r debe cumplir la condición de estabilidad $r \leq 1$.

$$h = \frac{\pi}{11 - 1} = \frac{\pi}{10}$$

$$k = \frac{3}{21 - 1} = \frac{3}{20}$$

$$r = \frac{2 * 3 * 10}{20 * \pi} = 0,9549\dots$$

El algoritmo expuesto a continuación, permite encontrar las aproximaciones buscadas, la matriz de resultados (Anexo A) [3].

Programa que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación de ondas, donde a y b son extremos finales de los intervalos de x y t respectivamente, n y m son el número de nodos de los intervalos de análisis, c la constante de separación, $f = y(x, 0)$, $g = y_t(x, 0)$, condiciones iniciales

```
function [y]=DifProblema331(f,g,a,b,c,n,m)
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c*k/h;
r1=r^2;
r2=r^2/2;
s1=1-r1;
s2=2-2*r1;
y=zeros(n, m);
```

```

for i=2:n-1
y(i,1)=feval(f,h*(i-1));
y(i,2)=s1*feval(f,h*(i-1))+k*feval(g,h*(i-1))+r2*(feval(f,h*i)...
+feval(f,h*(i-2)));
end
for j=3:m
for i=2:(n-1)
y(i,j)=s2*y(i,j-1)+r1*(y(i-1,j-1)+y(i+1,j-1))-y(i,j-2);
end
end
end
end

```

Solución numérica del Problema 3.3.2.

Dada la ecuación de onda con las condiciones iniciales y de contorno, utilizando el método de diferencias finitas se va a determinar una aproximación.

$$y_{t,t}(x,t) = 2,25 y_{x,x}(x,t), \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < 1$$

$$\text{C.C } y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{C.I. } \begin{cases} y(x,0) = x(1-x) \\ y_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$h = \frac{1}{11-1} = \frac{1}{10}$$

$$k = \frac{1}{31-1} = \frac{1}{30}$$

$$r = \frac{1,5 * 10}{1 * 30} = 0,5$$

Para ello, formamos una malla con 11 filas de alto y 31 columnas de ancho, lo que permite cumplir con la condición de estabilidad. Aplicando el algoritmo de la solución numérica del Problema 3.3.1. página 97-98, se generan las aproximaciones buscadas (Anexo A).

3.5. Comparaciones

Análisis del Problema 3.3.1.

Las gráficas de la Figura 3.6 permite observar las diferencias existentes entre las soluciones analizadas.

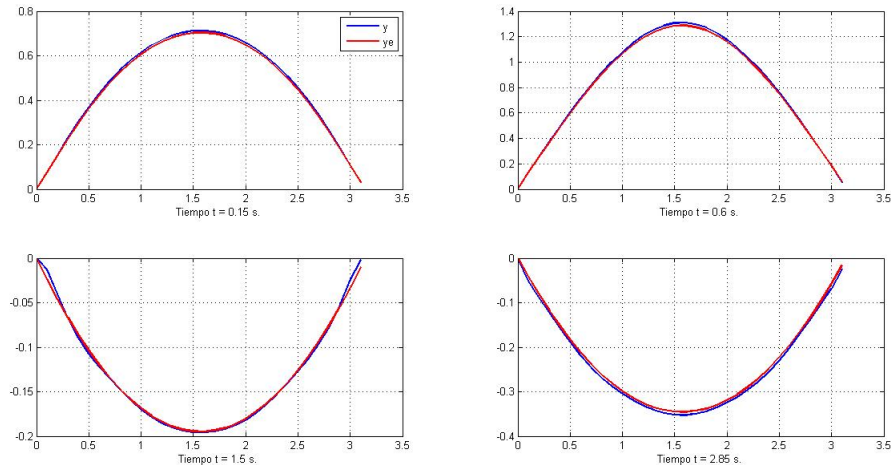


Figura 3.6: Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.025; 0.25; 0.75$ y 0.975

A través del siguiente algoritmo, se determina la matriz de datos que nos permite analizar y graficar la evolución del error absoluto y relativo.

```
function [A R]=FeARProblema331(ye,y)
n=11;
m=21;
Err(2:n-1,2:m)=abs(ye(2:n-1,2:m)-y(2:n-1,2:m));
Err(n,:)=0;
for k=1:m
    A(k)=sum(Err(:,k)/n);
end
t=1:m;
subplot(2,1,1)
plot(t,A)
grid
Err1(2:n-1,2:m)=((ye(2:n-1,2:m)-y(2:n-1,2:m))./ye(2:n-1,2:m)).^2;
Err1(n,:)=0;
for k=1:m
```



```

    R(k)=(sum(Err1(:,k)/n)).^(0.5);
end
subplot(2,1,2)
plot(t,R)
grid
end

>> [A R]=FeARProblema331(ye,y)

A =

Columns 1 through 6

    0    0.0037    0.0067    0.0088    0.0103    0.0109

Columns 7 through 12

    0.0108    0.0100    0.0083    0.0059    0.0028    0.0010

Columns 13 through 18

    0.0047    0.0074    0.0093    0.0106    0.0110    0.0107

Columns 19 through 21

    0.0096    0.0078    0.0052

R =

Columns 1 through 6

    0    0.0193    0.0159    0.0141    0.0134    0.0132

Columns 7 through 12

```

0.0134 0.0141 0.0156 0.0191 0.0328 0.0095

Columns 13 through 18

0.0166 0.0143 0.0132 0.0132 0.0133 0.0139

Columns 19 through 21

0.0153 0.0180 0.0266

El error medio absoluto presentado en la Figura 3.7 nos refleja que el máximo error se presenta en $t = 2,4$ y es $0,011u$ y el mínimo cuando $t = 1,65$ siendo de $0,0010u$. El error máximo relativo aparece cuando $t = 1,5$ siendo $0,0328$ y el mínimo en $t = 1,65$ con un valor de $0,0095$.

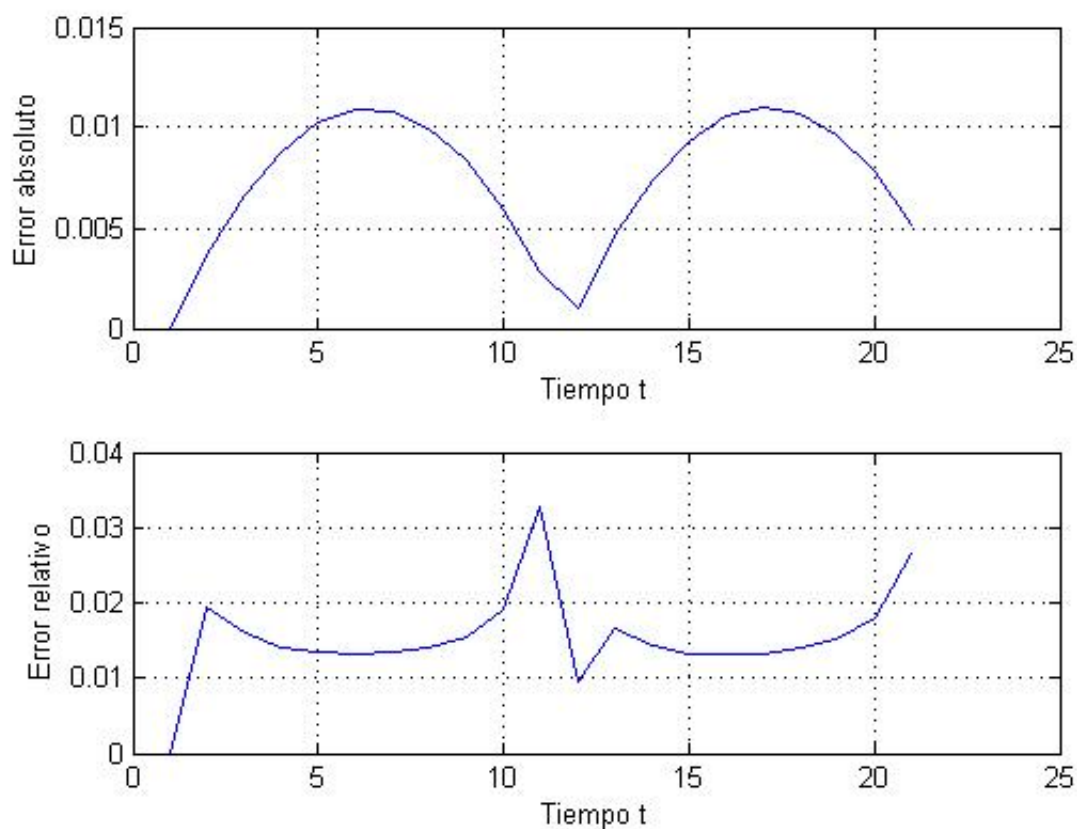


Figura 3.7: Evolución del error absoluto y relativo Problema 3.3.1.

Error/Tiempo	$t = 2,4$	$t = 1,65$	$t = 1,5$	$t = 1,65$
Error máximo absoluto	0,011			
Error mínimo absoluto		0,0010		
Error máximo relativo			0,0328	
Error mínimo relativo				0,0095

Cuadro 3.1: Error absoluto y relativo Problema 3.3.1.

Análisis del Problema 3.3.2.

Las gráficas que se exhiben en la Figura 3.8 representan las diferencias existentes entre las soluciones analíticas U_e y las soluciones aproximadas U del problema planteado, está representado en azul la solución aproximada y en rojo la solución considerada exacta.

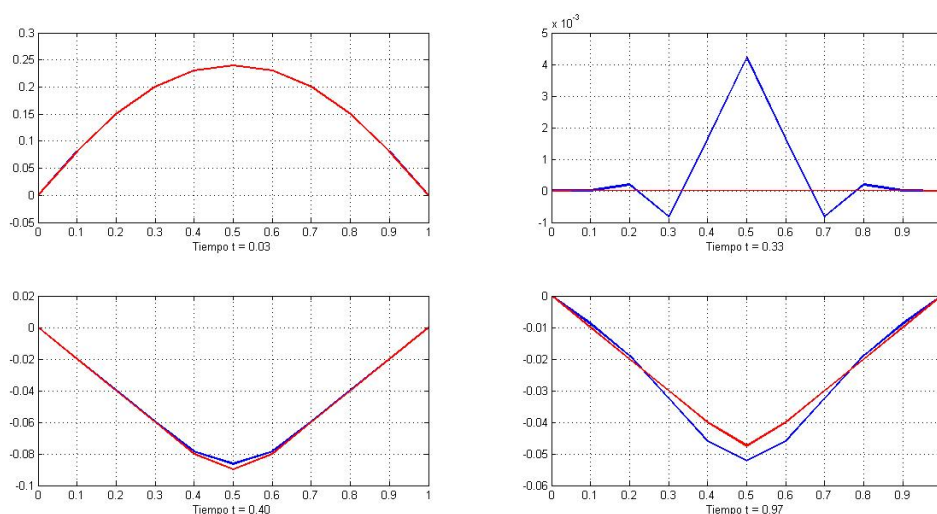


Figura 3.8: Gráfica comparativa entre la solución matemática U_e y numérica U para los tiempos $t = 0.03; 0.33; 0.40$ y 0.97

La matriz de datos determinada a través del siguiente algoritmo, nos permite analizar y graficar la evolución del error absoluto y relativo, ilustrado en la Figura 3.9.

```
function [A R]=FeARProblema332 (ye, y)
n=11;
m=31;
Err (2:n-1, 2:m)=abs (ye (2:n-1, 2:m) -y (2:n-1, 2:m) );
Err (n, :)=0;
for k=1:m
    A(k)=sum (Err (:, k) /n) ;
end
t=1:m;
```

```

subplot(2,1,1)
plot(t,A)
grid
Err1(2:n-1,2:m)=( (ye(2:n-1,2:m)-y(2:n-1,2:m)) ./ye(2:n-1,2:m)) .^2;
Err1(n,:)=0;
for k=1:m
    R(k)=(sum(Err1(:,k)/n)) .^ (0.5);
end
subplot(2,1,2)
plot(t,R)
grid
end

>> [A R]=FeARProblema332(ye, y)

```

A =

Columns 1 through 6

0	0.0000	0.0001	0.0002	0.0002	0.0004
---	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 7 through 12

0.0005	0.0005	0.0007	0.0007	0.0009	0.0009
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 13 through 18

0.0007	0.0007	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 19 through 24

0.0015	0.0013	0.0009	0.0006	0.0013	0.0016
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 25 through 30

0.0018	0.0018	0.0018	0.0023	0.0023	0.0023
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Column 31

0.0023

R =

Columns 1 through 6

0	0.0000	0.0033	0.0057	0.0041	0.0073
---	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 7 through 12

0.0072	0.0101	0.0146	0.0291	0.9045	0.0447
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 13 through 18

0.0156	0.0114	0.0131	0.0126	0.0129	0.0154
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 19 through 24

0.0191	0.0211	0.0135	0.0053	0.0218	0.0365
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 25 through 30

0.0370	0.0274	0.0255	0.0490	0.0718	0.0926
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Column 31

0.9045

El error medio absoluto presentado en la Figura 3.9, nos refleja que el máximo error en el intervalo $0,9 \leq t \leq 0,97$ es $0,0023u$ y un mínimo cuando $t = 0,7$ es $0,0006u$. El error relativo nos indica que el máximo se presenta para $t = 0,33$ siendo $0,9045$, el mínimo en

$t = 0,2$ con un valor de 0,0072.

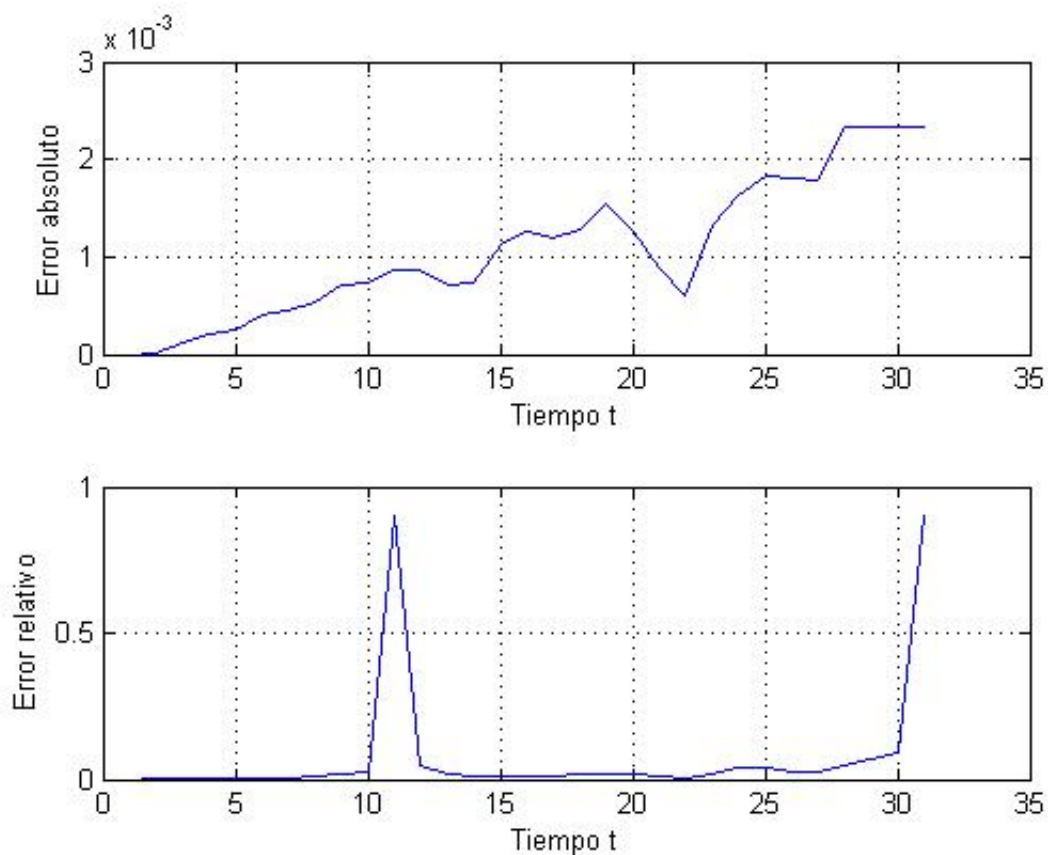


Figura 3.9: Evolución del error absoluto y relativo Problema 3.3.2.

Error/Tiempo	$0,90 \leq t \leq 0,97$	$t = 0,70$	$t = 0,33$	$t = 0,20$
Error máximo absoluto	0,023			
Error mínimo absoluto		0,0006		
Error máximo relativo			0,9045	
Error mínimo relativo				0,0072

Cuadro 3.2: Error absoluto y relativo Problema 3.3.2.

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

Cuando se realiza el estudio de problemas que tengan independencia del tiempo por ejemplo la distribución de calor en una placa rectangular, en un disco, cubo, esfera, para el potencial electrostático cumpliendo condiciones de contorno de Dirichlet o de Neumann, éstas se modelizan a través de EDP elípticas de la forma $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

4.1. Método de separación de variables con condiciones de contorno

Si a la ecuación bidimensional del calor se elimina la parte diferencial temporal, obtenemos la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H \quad (4.1)$$

Empleando el método de separación de variables, se reemplaza en la función U el producto de las funciones $X \cdot Y$, determinando así las soluciones producto que constituyen EDO's, luego se aplican las condiciones de contorno e iniciales, con lo que se encuentra la solución general y particular, como no actúan fuentes térmicas, se tiene el caso homogéneo.

La función temperatura U es analizada en un rectángulo, con las condiciones de contorno siguientes [2], [5].

$$C.C. \begin{cases} U(0, y) = g_1(y) & \text{para } 0 < y < H \\ U(L, y) = g_2(y) & \text{para } 0 < y < H \\ U(x, 0) = f_1(x) & \text{para } 0 < x < L \\ U(x, H) = f_2(x) & \text{para } 0 < x < L \end{cases}$$

Para determinar la solución U , se resuelve cada una de las condiciones de contorno no homogéneas con las otras tres condiciones consideradas como homogéneas, es decir, se puede llegar a determinar hasta 4 soluciones parciales. La solución, por el principio de superposición, estará representado por la suma de dichas soluciones.

$$U(x, y) = S_1(x, y) + S_2(x, y) + S_3(x, y) + S_4(x, y)$$

4.1.1. Condiciones de Dirichlet para una placa rectangular

Sea la EDP. Encontrar una expresión que represente la función temperatura U , con las condiciones siguientes [2], [5].

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$U(x, H) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$U(0, y) = U(L, y) = 0, \quad 0 < y < H$$

De las condiciones de contorno homogéneas, se logra establecer la siguiente información.

$$U(x, 0) = 0$$

$$X(x)Y(0) = 0$$

$$Y(0) = 0$$

$$U(0, y) = 0$$

$$X(0)Y(y) = 0$$

$$X(0) = 0$$

$$U(L, y) = 0$$

$$X(L)Y(y) = 0$$

$$X(L) = 0$$

Si sustituimos la solución producto en la ecuación de Laplace, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial y^2} &= 0 \\ Y(y)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}$$

Escribiendo la ecuación diferencial sin variables y agrupando a las derivadas con sus respectivas funciones X , Y e igualando a una constante $-\lambda$, se tiene

$$\begin{aligned}X''Y + Y''X &= 0 \\ X''Y &= -Y''X \\ \frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} = -\lambda\end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales que resultan, son:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4.2}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0 \tag{4.3}$$

La función solución de (4.2) está dada por la ecuación (2.12)

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

Al reemplazar las condiciones de contorno, conseguimos que $c_1 = 0$ y $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$. Entonces, la solución para X , viene dada por

$$X(x) = c_2 \sin \left(\frac{n\pi x}{L}\right), n \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

La función solución de (4.3) es la ecuación (2.14), donde también se puede utilizar la siguiente expresión equivalente.

$$Y(y) = c_3 \cosh \sqrt{\lambda}y + c_4 \sinh \sqrt{\lambda}y$$

Al reemplazar la condición de contorno y el valor de λ , conseguimos que $c_3 = 0$. La solución para Y , es:

$$Y(y) = c_4 \sinh \left(\frac{n\pi y}{L}\right), n \in \mathbb{N} \tag{4.5}$$

Entonces, la solución producto se expresa como indica la siguiente relación, en donde $c_2 * c_4 = B$.

$$U(x, y) = B \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \quad (4.6)$$

Las combinaciones lineales de (4.6) y por el principio de superposición, se forma la solución.

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \right] \quad (4.7)$$

Ahora, empleando la condición $U(x, H) = f(x)$, se obtiene

$$U(x, H) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi H}{L} \right) \right]$$

Utilizando la ecuación (2.22), se consigue determinar el coeficiente B_n .

$$B_n \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi H}{L} \right) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{L \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi H}{L} \right)} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (4.8)$$

Entonces, la expresión que representa U , es

$$U(x, y) = \frac{2}{L \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi H}{L} \right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \right]$$

Ahora, se analiza cuando las condiciones de frontera vienen dadas como se indica a continuación [1], [7].

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$U(x, 0) = U(x, H) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$U(0, y) = 0, \quad 0 < y < H$$

$$U(L, y) = f(y), \quad 0 < y < H$$

De las condiciones de contorno homogéneas, se logra establecer la siguiente información.

$$U(x, 0) = 0$$

$$X(x)Y(0) = 0$$

$$Y(0) = 0$$

$$U(x, H) = 0$$

$$X(0)Y(H) = 0$$

$$Y(H) = 0$$

$$U(0, y) = 0$$

$$X(0)Y(y) = 0$$

$$X(0) = 0$$

Observar que las ecuaciones diferenciales que resultan, son agrupadas con el signo negativo en X , para obtener

$$X''Y + Y''X = 0$$

$$X''Y = -Y''X$$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{4.9}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \tag{4.10}$$

La función solución de (4.10) está dada por la ecuación (2.12)

$$Y(y) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}y + c_2 \sen \sqrt{\lambda}y$$

Al reemplazar las condiciones de contorno, conseguimos que $c_1 = 0$ y $\lambda = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2$. Entonces, la solución para Y , viene dada por

$$Y(y) = c_2 \sen \left(\frac{n\pi y}{H}\right), n \in \mathbb{N} \tag{4.11}$$

La función solución de (4.9) es la ecuación (2.14), o la expresión equivalente.

$$X(x) = c_3 \cosh \sqrt{\lambda}x + c_4 \senh \sqrt{\lambda}x$$

Al reemplazar la condición de contorno conseguimos que $c_3 = 0$, y reemplazando el valor de λ , la solución para X , es:

$$X(x) = c_4 \senh \left(\frac{n\pi x}{H}\right), n \in \mathbb{N} \tag{4.12}$$

La solución se expresa como el producto de (4.11) y (4.12), en donde $c_2 \cdot c_4 = B$.

$$U(x, y) = B \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi x}{H} \right) \quad (4.13)$$

Las combinaciones lineales de (4.13) y por el principio de superposición, permiten escribir la ecuación siguiente

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi x}{H} \right) \right] \quad (4.14)$$

Reemplazando la condición $U(L, y) = f(y)$, se obtiene

$$U(L, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi L}{H} \right) \right]$$

Utilizando la ecuación (2.22), se consigue determinar el coeficiente B_n .

$$B_n \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi L}{H} \right) = \frac{2}{H} \int_0^H f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) dy$$

$$B_n = \frac{2}{H \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi L}{H} \right)} \int_0^H f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) dy \quad (4.15)$$

Entonces, la solución U viene dado por la siguiente expresión

$$U(x, y) = \frac{2}{H \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi L}{H} \right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^H f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) dy \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi x}{H} \right) \right]$$

4.1.2. Condiciones de Neumann para una placa rectangular

Dada la EDP con las condiciones de contorno siguientes, encontrar una expresión que represente la función temperatura U [5].

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, H) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial U}{\partial x}(L, y) = 0, \quad 0 < y < H$$

Reemplazando $U = X \cdot Y$, se obtienen las EDO's.

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (4.16)$$

$$Y'' - \lambda Y = 0 \quad (4.17)$$

Las soluciones X e Y están dadas por las ecuaciones (2.12) y (2.14) en su forma equivalente, respectivamente.

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x$$

$$Y(y) = c_3 \cosh \sqrt{\lambda}y + c_4 \operatorname{senh} \sqrt{\lambda}y$$

Haciendo cumplir las condiciones de contorno homogéneas, conseguimos los siguientes datos.

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, H) = 0$$

$$X(x)Y'(H) = 0$$

$$Y'(H) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, y) = 0$$

$$X'(0)Y(y) = 0$$

$$X'(0) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(L, y) = 0$$

$$X'(L)Y(y) = 0$$

$$X'(L) = 0$$

Aplicando las condiciones de contorno en la función solución X , se logra determinar c_2 .

$$X'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$c_2 = 0$$

$$X'(L) = -c_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L)$$

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ahora, se reemplaza la condición de contorno $Y'(H) = 0$ y λ en la función Y , obteniendo c_4 .

$$\begin{aligned} Y'(y) &= c_3 \sqrt{\lambda} \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}y) + c_4 \sqrt{\lambda} \operatorname{cosh}(\sqrt{\lambda}y) \\ Y'(H) &= c_3 \sqrt{\lambda} \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}H) + c_4 \sqrt{\lambda} \operatorname{cosh}(\sqrt{\lambda}H) \\ c_4 &= -\frac{c_3 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)}{\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \end{aligned}$$

Se reemplaza en la función temperatura U las funciones encontradas X , Y , la constante c_4 , asigna a $c_1 \cdot c_3 = B$, para obtener la función solución, que viene expresada como se indica a continuación.

$$\begin{aligned} U(x, y) &= c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[c_3 \operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + c_4 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right] \\ &= c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[c_3 \operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) - \frac{c_3 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)}{\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right] \\ &= \frac{c_1 \cdot c_3 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right] \\ &= \frac{B \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi y}{L} - \frac{n\pi H}{L}\right) \right] \\ &= \frac{B \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi(y-H)}{L}\right) \right] \end{aligned}$$

Por el principio de superposición, al realizar las combinaciones lineales de la función temperatura U , se forma la siguiente serie.

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi(y-H)}{L}\right) \right]}{\operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \right\} \quad (4.18)$$

B_n se calcula de manera similar a los procesos desarrollados en problemas anteriores, utilizando las fórmulas (2.37) y (2.38).

4.2. Problemas de aplicación

Problema 4.3.1

Determinar la distribución de temperaturas en una placa rectangular que está sometida a las siguientes condiciones.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$C.C. \begin{cases} U(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ U(x, 1) = \text{sen}(\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ U(0, y) = U(1, y) = 0 & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

La ecuación (4.7) representa la solución del problema planteado, al reemplazar los datos conocidos, se obtiene

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \text{sen}(n\pi x) \text{senh}(n\pi y)]$$

Aplicando la condición $U(x, 1) = \text{sen}(\pi x)$, tenemos:

$$\text{sen}(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \text{sen}(n\pi x) \text{senh}(n\pi)]$$

El coeficiente B_n se determina a través de (2.22).

$$B_n = \frac{2}{\text{senh}(n\pi)} \int_0^1 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(n\pi x) dx$$

Como se presenta una integral del producto de dos funciones seno, se aplica la propiedad de ortogonalidad de los senos (2.21), con lo que encuentra el valor del entero n en el que existe solución, además se calcula el coeficiente B_n .

$$\pi = n\pi$$

$$n = 1$$

$$B_n = \frac{1}{\text{senh}(\pi)}$$

Entonces, la solución cumple sólo para $n = 1$.

$$U(x, y) = \frac{\text{sen}(\pi x) \text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)}$$

La solución debe cumplir con las condiciones de contorno y la EDP.

$$\begin{aligned}
 U(x, 0) &= \frac{\text{sen}(\pi x) \text{senh}(\pi \cdot 0)}{\text{senh}(\pi)} \\
 &= 0 \\
 U(0, y) &= \frac{\text{sen}(n\pi \cdot 0) \text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)} \\
 &= 0 \\
 U(1, y) &= \frac{\text{sen}(\pi) \text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)} \\
 &= 0 \\
 \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\pi \cos(\pi x) \text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)} \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -\frac{\pi^2 \text{sen}(\pi x) \text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)} \\
 \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\pi \text{sen}(\pi x) \text{cosh}(\pi y)}{\cosh(\pi)} \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \frac{\pi^2 \text{sen}(\pi x) \text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)} \\
 &\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned}$$

Para verificar la condición $U(x, 1) = \text{sen}(\pi x)$, se determina cuando $n = 1$, pues sólo para dicho valor existe solución. Se forma la siguiente identidad.

$$\text{sen}(\pi x) = \text{sen}(\pi x)$$

Esto, se interpreta que cumple para todo valor de la variable x , en particular para los valores que la variable toma en el intervalo analizado.

Se construye a través del algoritmo planteado la matriz de datos de la función temperatura (Anexo A) que permite realizar su gráfica e ilustrado en la Figura 4.1, para lo cual a la variable x se subdivide en 21 partes en el intervalo $]0, 1[$; a y en 21 partes $]0, 1[$.

```

function [U]=Problema431(a,b,n,m,p)
h1=a/(n-1);
h2=b/(m-1);
x=0:h1:a;
y=0:h2:b;
U=zeros(n,m);

```



```

for k=1:p
    for j=1:m;
        for i=1:n;
            U(i,j)=U(i,j)+ sin(k*pi*x(i))*sinh(k*pi*(y(j)))...
                /sinh(pi);
        end
    end
end
end
surf(U)
end

```

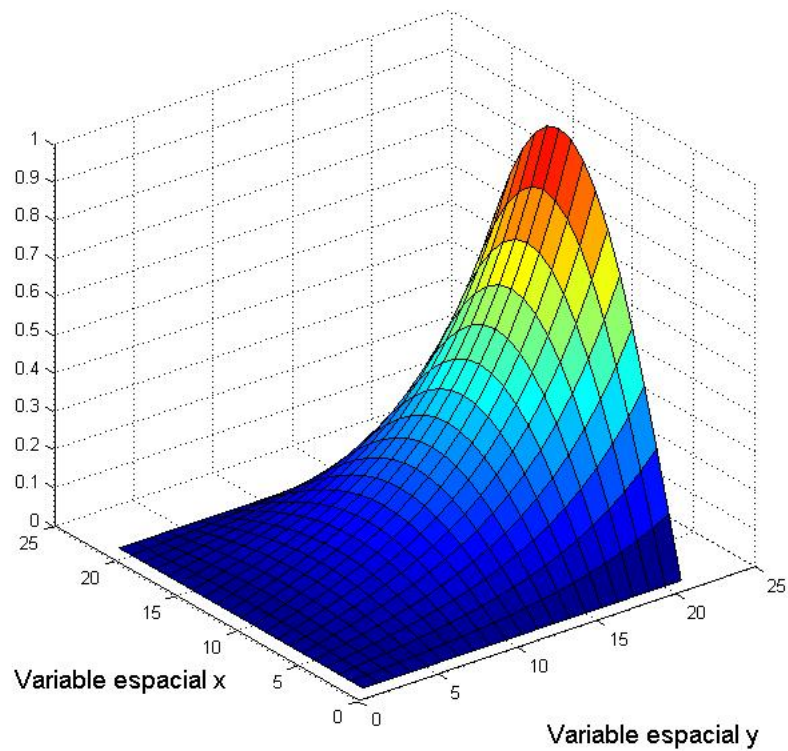


Figura 4.1: Grafico de la función temperatura U

Problema 4.3.2

Encontrar la serie que representa la distribución de temperaturas en una placa rectangular que cumple las siguientes condiciones.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

$$C.C. \begin{cases} U(x, 0) = U(x, 1) & 0 < x < 1 \\ U(0, y) = 0 & 0 < y < 1 \\ U(1, y) = y(1 - y) & 0 < y < 1 \end{cases}$$

La solución viene dada por la ecuación (4.14).

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \right]$$

Aplicando la condición $U(1, y) = y(1 - y)$, tenemos:

$$y(1 - y) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \sinh(n\pi) \sin(n\pi y)]$$

El coeficiente B_n se determina utilizando (4.15) al reemplazar la información dada.

$$B_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 y(1 - y) \sin(n\pi y) dy$$

Integrando por partes, se determina el coeficiente B_n .

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{8}{\pi^3 n^3 \sin(n\pi)} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En la solución, se reemplaza n por $2n - 1$, ya que existe solución para los enteros impares, obteniendo la siguiente expresión.

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8 \sinh[(2n - 1)\pi x] \sin[(2n - 1)\pi y]}{\pi^3 (2n - 1)^3 \sinh[(2n - 1)\pi]} \right\}$$

La solución debe cumplir con las condiciones de contorno y la EDP.

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8 \sinh[(2n - 1)\pi x] \sin[(2n - 1)\pi \cdot 0]}{\pi^3 (2n - 1)^3 \sinh[(2n - 1)\pi]} \right\}$$

$$= 0$$

$$U(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8 \sinh[(2n - 1)\pi x] \sin[(2n - 1)\pi]}{\pi^3 (2n - 1)^3 \sinh[(2n - 1)\pi]} \right\}$$

$$= 0$$

$$U(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8 \sinh[(2n-1)\pi \cdot 0] \sin[(2n-1)\pi y]}{\pi^3 (2n-1)^3 \sinh[(2n-1)\pi]} \right\}$$

$$= 0$$

La condición $U(1, y) = y(1 - y)$, se prueba para cualquier valor del intervalo, por ejemplo para $x = 0,5$, al desarrollar la la serie que se detalla a continuación, ésta debe converger a 0,25

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8 \sin[(2n-1)\pi y]}{\pi^3 (2n-1)^3} \right\}$$

$$0,25 = \frac{8 \sin(0,5\pi)}{\pi^3} + \frac{8 \sin(1,5\pi)}{27\pi^3} + \frac{8 \sin(2,5\pi)}{125\pi^3} + \dots$$

El siguiente algoritmo, muestra como la serie converge para cualquier valor de la variable en el intervalo de análisis, el error calculado lo demuestra.

```
function [A]=CI432(n,f)
fprintf('\t Convergencia. \t Cini. \t Error')
fx=inline(f);
U=0;
y=0.1:0.1:0.98;
s=length(y);
for i=1:s
    for k=1:n
        U = U + 8*sin((2*k-1)*pi*y(i))/(pi^3*(2*k-1)^3);
    end
    conver(i)=U;
    U=0;
end
for i=1:s
    p(i)=fx(y(i));
end
for i=1:s
    Error(i) = abs(p(i)-conver(i));
end
A=zeros(s,3);
A(:,1)=conver;
```

```

A(:,2)=p;
A(:,3)=Error;
end

>> [A]=CI332(100,'y*(1-y)')

```

```

Conver.   Cini.   Error

A =

    0.0900    0.0900    0.0000
    0.1600    0.1600    0.0000
    0.2100    0.2100    0.0000
    0.2400    0.2400    0.0000
    0.2500    0.2500    0.0000
    0.2400    0.2400    0.0000
    0.2100    0.2100    0.0000
    0.1600    0.1600    0.0000
    0.0900    0.0900    0.0000

```

Se construye a través del código siguiente, la matriz de resultados de la función temperatura (Anexo A) y su gráfica (Figura 4.2), en donde a la variable x la subdividimos en 21 partes en $]0, 1[$ a y en 21 partes en $]0, 1[$.

```

function [U]=Problema432(a,b,n,m,p)
h1=a/(n-1);
h2=b/(m-1);
x=0:h1:a;
y=0:h2:b;
U=zeros(n,m);
for k=1:p
    for j=1:m;
        for i=1:n;
            U(i,j)=U(i,j)+(8*sinh((2*k-1)*pi*x(i))*sin((2*k-1)...
                *pi*y(j)))/(pi^3*sinh((2*k-1)*pi)*(2*k-1)^3);
        end
    end
end

```

```

end
end
U=U' ;
surf(U)
end

```

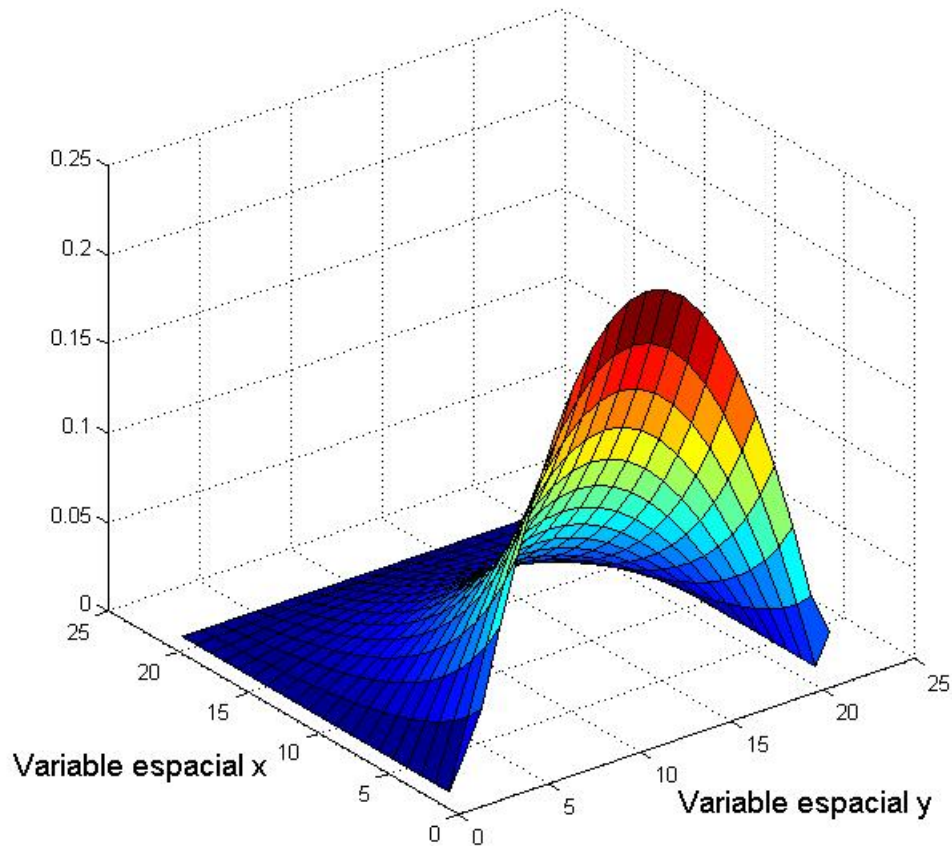


Figura 4.2: Grafico de la función temperatura U

4.3. Métodos numéricos con diferencias finitas

4.3.1. Deducción de la ecuación en derivadas parciales elíptica en diferencias finitas

La ecuación de Laplace con sus condiciones de contorno están dadas por:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$C.C. \begin{cases} U(0, y) = g_1(y) & 0 < y < H \\ U(L, y) = g_2(y) & 0 < y < H \\ U(x, 0) = f_1(x) & 0 < x < L \\ U(x, H) = f_2(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

Aplicando la ecuación de diferencias finitas (2.49) a los sumandos de la ecuación de Laplace, sin tomar en cuenta su orden de aproximación, se establecen las siguientes relaciones [3].

$$U_{xx} = \frac{U(x+h, y) + U(x-h, y) - 2U(x, y)}{h^2}$$

$$U_{yy} = \frac{U(x, y+h) + U(x, y-h) - 2U(x, y)}{h^2}$$

Entonces, la ecuación de Laplace estará representada por la ecuación

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= \frac{U(x+h, y) + U(x-h, y) + U(x, y+h) + U(x, y-h) - 4U(x, y)}{h^2} \\ 0 &= \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} \end{aligned}$$

La ecuación de Laplace en diferencias finitas, para $i = 2, 3, \dots, n-1$ y $j = 2, 3, \dots, m-1$, está representada por la siguiente relación.

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (4.19)$$

Al formar un rectángulo con $0 < x < L$ y $0 < y < H$, subdividido en $(n-1)(m-1)$ cuadrados de lado h , con $L = nh$ y $H = mh$, ilustrados en la Figura 4.3.

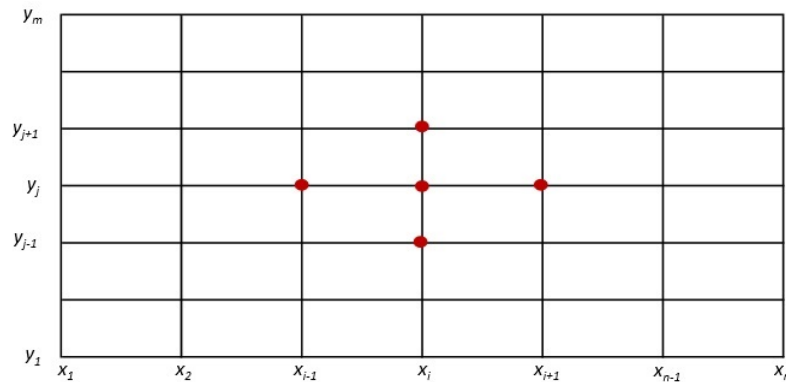


Figura 4.3: Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecuación de Laplace

Las condiciones de contorno planteadas, son

$$u(x_1, y_j) = u_{1,j} \quad 2 \leq j \leq m - 1$$

$$u(x_i, y_1) = u_{i,1} \quad 2 \leq i \leq n - 1$$

$$u(x_n, y_j) = u_{n,j} \quad 2 \leq j \leq m - 1$$

$$u(x_i, y_m) = u_{i,m} \quad 2 \leq i \leq n - 1$$

La ecuación (4.19) aplicada a cada uno de los puntos de la malla, permite crear un sistema de banda lineal de ecuaciones. A continuación, desarrollamos algunas ecuaciones que se formarían utilizando la ecuación de Laplace en diferencias finitas, para 9 puntos interiores.

$$U_{3,2} + U_{1,2} + U_{2,3} + U_{2,1} - 4U_{2,2} = 0$$

$$U_{4,2} + U_{2,2} + U_{3,3} + U_{3,1} - 4U_{3,2} = 0$$

$$U_{5,2} + U_{3,2} + U_{4,3} + U_{4,1} - 4U_{4,2} = 0$$

$$U_{3,3} + U_{1,3} + U_{2,4} + U_{2,2} - 4U_{2,3} = 0$$

$$U_{4,3} + U_{2,3} + U_{3,4} + U_{3,2} - 4U_{3,3} = 0$$

$$U_{5,3} + U_{3,3} + U_{4,4} + U_{4,2} - 4U_{4,3} = 0$$

$$U_{3,4} + U_{1,4} + U_{2,5} + U_{2,3} - 4U_{2,4} = 0$$

$$U_{4,4} + U_{2,4} + U_{3,5} + U_{3,3} - 4U_{3,4} = 0$$

$$U_{5,4} + U_{3,4} + U_{4,5} + U_{4,3} - 4U_{4,4} = 0$$

Ahora, se expresa al sistema encontrado como matrices, en donde la primera matriz es diagonal por bloques.

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2,2} \\ U_{3,2} \\ U_{4,2} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \\ U_{4,3} \\ U_{2,4} \\ U_{3,4} \\ U_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2U_{2,1} - U_{1,2} \\ -U_{3,1} \\ -U_{4,1} - U_{5,1} \\ -U_{1,3} \\ 0 \\ -U_{5,3} \\ -U_{2,5} - U_{1,4} \\ -U_{3,5} \\ -U_{4,5} - U_{5,4} \end{bmatrix}$$

Pero, este método precisa resolver el sistema con un elevado número de ecuaciones, para solucionar este inconveniente se puede acelerar la convergencia a través del método de sobrerelajación, en donde a la ecuación expresada en diferencias finitas se multiplica por un factor w , mostrado en el algoritmo.

Solución numérica del Problema 4.3.1.

Dada la siguiente EDP con sus condiciones de contorno.

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1$$

$$C.C. \begin{cases} U(x, 0) = 0 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ U(x, 1) = \text{sen}(\pi x) & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ U(0, y) = U(1, y) = 0 & \text{para } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Se debe encontrar una aproximación, para ello se construye una malla con 21 filas de alto y 21 columnas de ancho y se aplica el método de diferencias finitas, a través del siguiente algoritmo, cuya matriz de resultados se presenta en el Anexo A [3].

Programa que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación de Laplace, donde a y b son extremos finales de los intervalos de x e y respectivamente, $f_1 = U(x, 0)$; $f_2 = U(x, L)$; $f_3 = U(0, y)$ y $f_4 = U(H, y)$. Se supone que el incremento en x en y son iguales a h y que existen dos números naturales m y n tales que $L = nh$ y $H = mh$

```
function [U]=DifProblema431(f1,f2,f3,f4,a,b,h,tol,max1)
n=fix(a/h)+1;
m=fix(b/h)+1;
ave=(a*(feval(f1,0)+feval(f2,0))...
      + b*(feval(f3,0)+feval(f4,0)))/(2*a+2*b);
U=ave*ones(n, m);
U(1,1:m)=feval(f3,0:h:(m-1)*h)';
U(n,1:m)=feval(f4,0:h:(m-1)*h)';
U(1:n,1)=feval(f1,0:h:(n-1)*h);
U(1:n,m)=feval(f2,0:h:(n-1)*h);
U(1,1)=(U(1,2)+U(2,1))/2;
U(1,m)=(U(1,m-1)+U(2,m))/2;
```



```

U(n,1)=(U(n-1,1)+U(n,2))/2;
U(n,m)=(U(n-1,m)+U(n,m-1))/2;
w=4/(2+sqrt(4-(cos(pi/(n-1))...
    +cos(pi/(m-1)))^2));
err=1;
cnt=0;
while((err>tol)&(cnt<=max1))
    err=0;
    for j=2:m-1
        for i=2:n-1
            relx=w*(U(i,j+1)+U(i,j-1)+U(i+1,j)...
                +U(i-1,j)-4*U(i,j))/4;
            U(i,j)=U(i,j)+relx;
            if(err<=abs(relx));
                err=abs(relx);
            end
        end
    end
    cnt=cnt+1;
end
U=flipud(U);
surf(U)
end

```

Solución numérica del Problema 4.3.2.

Sea la siguiente EDP elíptica con las condiciones de contorno dadas.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

$$C.C. \begin{cases} U(x,0) = U(x,1) & 0 < x < 1 \\ U(0,y) = 0 & 0 < y < 1 \\ U(1,y) = y(1-y) & 0 < y < 1 \end{cases}$$

Para determinar una aproximación, se construye una malla con 21 filas de alto y 21 columnas de ancho y por el método de diferencias finitas se logra dicho propósito empleando el

algoritmo del Problema 4.3.1. página 123-124. La matriz de resultados se presenta en el Anexo A.

4.4. Comparaciones

Análisis del Problema 4.3.1.

A través del siguiente código, se calcula la matriz de datos que nos permite comparar, analizar y graficar la evolución del error absoluto y relativo entre las solución obtenida a través de procesos matemáticos con las soluciones aproximadas.

```
function [A R]=FeARProblema431(Ue, U)
n=21;
m=21;
Err(2:n-1,2:m)=abs(Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m));
Err(n,:)=0;
for k=1:m
    A(k)=sum(Err(:,k)/n);
end
t=1:m;
subplot(2,1,1)
plot(t,A)
grid
Err1(2:n-1,2:m)=abs((Ue(2:n-1,2:m)...
-U(2:n-1,2:m))./Ue(2:n-1,2:m));
Err1(n,:)=0;
for k=1:m
    R(k)=sum(Err1(:,k)/n);
end
subplot(2,1,2)
plot(t,R)
grid
end
>> [A R]=FeARProblema431(Ue, U)
```

A =

1.0e-003 *

Columns 1 through 6

0	0.0364	0.0729	0.1094	0.1461	0.1827
---	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 7 through 12

0.2193	0.2555	0.2909	0.3248	0.3565	0.3847
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 13 through 18

0.4079	0.4240	0.4305	0.4238	0.3998	0.3531
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 19 through 21

0.2768	0.1626	0.0000
--------	--------	--------

R =

Columns 1 through 6

0	0.0040	0.0039	0.0039	0.0038	0.0036
---	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 7 through 12

0.0035	0.0033	0.0031	0.0029	0.0027	0.0024
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 13 through 18

0.0022	0.0019	0.0017	0.0014	0.0011	0.0008
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 19 through 21

0.0006	0.0003	0.0000
--------	--------	--------

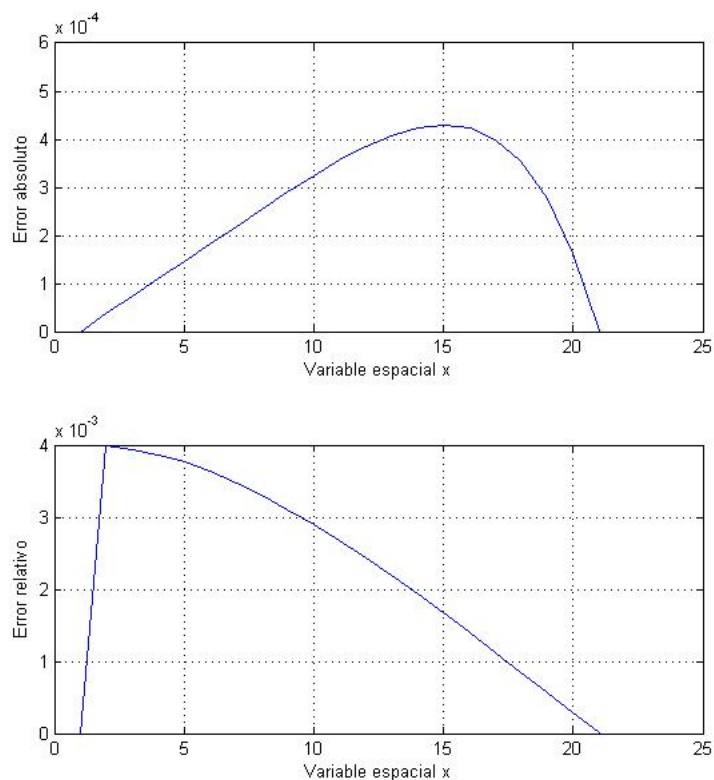


Figura 4.4: Evolución del error absoluto y relativo Problema 4.3.1.

El máximo error medio absoluto (Figura 4.4) se encuentra en la posición $y = 0,7u$ y es $0,4305 \times 10^{-3}u$. El máximo error relativo se presenta en la posición $y = 0,1u$ siendo 0,0040.

Error/Variable espacial y	$y = 0,70$	$y = 0,10$
Error máximo absoluto	0,00043	
Error máximo relativo		0,0040

Cuadro 4.1: Error absoluto y relativo Problema 4.3.1.

Análisis del Problema 4.3.2.

La matriz de datos que nos permite comparar, analizar y graficar la evolución del error absoluto y relativo entre las solución obtenida a través de procesos matemáticos con las soluciones aproximadas, se consigue a través del siguiente algoritmo.

```

function [A R]=FeARProblema432(Ue, U)
n=21;
m=21;
Err(2:n-1,2:m)=abs(Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m));
Err(n,:)=0;
for k=1:m

```

```

    A(k)=sum(Err(:,k)/n);
end
t=1:m;
subplot(2,1,1)
plot(t,A)
grid
Err1(2:n-1,2:m)=abs((Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m))./Ue(2:n-1,2:m));
Err1(n,:)=0;
for k=1:m
    R(k)=sum(Err1(:,k)/n);
end
subplot(2,1,2)
plot(t,R)
grid
end
>> [A R]=FeARProblema432(Ue, U)
A =
    1.0e-003 *
    Columns 1 through 6
         0    0.0094    0.0188    0.0283    0.0378    0.0473
    Columns 7 through 12
    0.0569    0.0663    0.0757    0.0848    0.0934    0.1014
    Columns 13 through 18
    0.1084    0.1139    0.1174    0.1181    0.1149    0.1063
    Columns 19 through 21
    0.0896    0.0590    0.0000

R =

    Columns 1 through 6
         0    0.0040    0.0040    0.0039    0.0038    0.0037
    Columns 7 through 12
    0.0035    0.0034    0.0032    0.0030    0.0028    0.0026
    Columns 13 through 18

```

0.0024 0.0022 0.0019 0.0017 0.0015 0.0013
 Columns 19 through 21
 0.0010 0.0007 0.0000

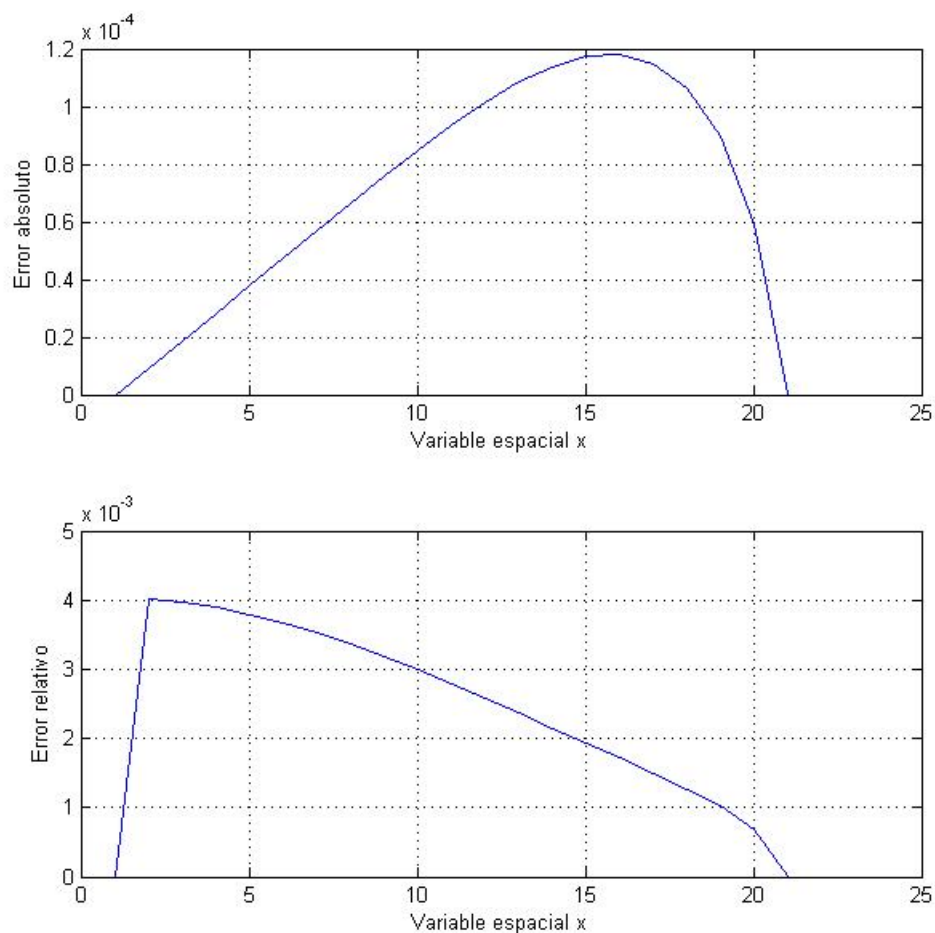


Figura 4.5: Evolución del error absoluto y relativo Problema 4.3.2.

El máximo error medio absoluto (Figura 4.5), se da en la posición $y = 0,75u$ y tiene un valor de $0,4081 \times 10^{-4}u$. El máximo error relativo aparece en el intervalo de la posición de $0,05 \leq y \leq 0,10u$, siendo 0,0040.

Error/Variable espacial y	$y = 0,75$	$0,05 \leq y \leq 0,10$
Error máximo absoluto	$0,1181 \cdot 10^{-4}$	
Error máximo relativo		0,0040

Cuadro 4.2: Error absoluto y relativo Problema 4.3.2.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

1. El método analítico más utilizado para resolver EDP's es el método de separación de variables. Permite encontrar las soluciones generales y particulares. Si se trata de casos no homogéneos, se resuelve como homogéneo y se suma una solución particular no homogénea.
2. La gran mayoría de EDP's son posibles de resolver por aproximaciones numéricas, aún aquellas que no tienen solución analítica. El método de diferencias finitas logra resolverlas reemplazando las funciones que tienen derivadas por las fórmulas deducidas, transformando un problema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones.
3. El método aproximado por diferencias finitas, se constituye en un método alternativo de solución y de comprobación para las soluciones de las EDP's.
4. El cuadro 5.1 resume los errores absolutos y relativos promedios encontrados al comparar las soluciones analíticas con las aproximadas, en donde se precisa lo siguiente:
 - El error promedio absoluto máximo en los problemas analizados es de 0,1061; el mínimo es cero, pues existen tiempos o posiciones en que las soluciones coinciden.
 - El error promedio relativo máximo es de 0,1038; el mínimo es 0.

Los errores obtenidos al comparar entre las soluciones analíticas y aproximadas se pueden considerar dentro de un margen de error aceptable, por lo que los métodos numéricos propuestos son altamente confiables.

Prob./Error	Error abs. máx.	Error abs. mín.	Error rel. máx.	Error rel. mín.
Problema 251	0.0130	0.0003	0.033	0.0014
Problema 252	0.0840	0.0000	↗	0.0000
Problema 254	0.1061	0.0000	0.1038	0.0004
Problema 331	0.0110	0.0010	0.0328	0.0095
Problema 332	0.0230	0.0006	0.9450	0.0072
Problema 431	0.00043	0.0000	0.0040	0.0000
Problema 432	0.000012	0.0000	0.0040	0.0000

Cuadro 5.1: Resumen de errores absolutos y relativos

5. El cálculo de las soluciones aproximadas a través de los diferentes métodos planteados en los problemas resueltos para las ecuaciones parabólicas, hiperbólicas y elípticas, son estables, éstas no dependen del número de nodos o de intervalos que subdividimos a las variables, con excepción de las hiperbólicas en las que $r \leq 1$.
6. Para resolver EDP's por el método de diferencias finitas se reemplaza por sus respectivas fórmulas, cuyo orden de aproximación es de $O(h)$ o $O(h^2)$, lo que permite construir un sistema tridiagonal simple o por bloques y con él elaborar el algoritmo que calcula las soluciones aproximadas.
7. Implementar un curso optativo como vínculo entre las asignaturas de Análisis Numérico y Matemática Superior para Ingeniería, en los que se pueden desarrollar algoritmos que permitan resolver otros modelos de ejercicios y problemas de EDP's homogéneas y no homogéneas, para casos particulares y en forma general para problemas uni y bidimensionales.

Anexo A: Matrices de Resultados

Resultados del Problema 2.5.1.

```
>> [U]=Problema251(2,1,11,41,500)
```

U =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0.1998	0.2000	0.2000	0.1998	0.1984	0.1949
0.3996	0.4000	0.3999	0.3988	0.3941	0.3844
0.5994	0.6000	0.5995	0.5946	0.5813	0.5599
0.7991	0.8000	0.7967	0.7798	0.7483	0.7075
0.9987	0.9996	0.9827	0.9360	0.8734	0.8065
1.1982	1.1941	1.1287	1.0274	0.9252	0.8321
1.3975	1.3483	1.1698	1.0035	0.8696	0.7620
1.5961	1.3252	1.0130	0.8179	0.6848	0.5871
1.7920	0.8848	0.6011	0.4639	0.3793	0.3205
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.1890	0.1810	0.1715	0.1612	0.1505	0.1398
0.3700	0.3521	0.3320	0.3107	0.2892	0.2680
0.5326	0.5017	0.4692	0.4364	0.4043	0.3733
0.6624	0.6160	0.5703	0.5263	0.4845	0.4454
0.7411	0.6792	0.6218	0.5690	0.5204	0.4760
0.7497	0.6771	0.6130	0.5562	0.5054	0.4600
0.6741	0.6007	0.5384	0.4848	0.4381	0.3969
0.5116	0.4511	0.4012	0.3591	0.3230	0.2917
0.2766	0.2422	0.2143	0.1911	0.1714	0.1545
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.1294	0.1194	0.1100	0.1011	0.0928	0.0852
0.2476	0.2282	0.2099	0.1928	0.1769	0.1622
0.3439	0.3162	0.2904	0.2664	0.2443	0.2238
0.4089	0.3750	0.3437	0.3148	0.2882	0.2638
0.4353	0.3980	0.3640	0.3328	0.3044	0.2783
0.4191	0.3821	0.3487	0.3183	0.2907	0.2656
0.3604	0.3278	0.2985	0.2721	0.2482	0.2266
0.2642	0.2398	0.2180	0.1985	0.1809	0.1650
0.1396	0.1266	0.1150	0.1046	0.0953	0.0869
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 19 through 24

0	0	0	0	0	0
0.0781	0.0715	0.0655	0.0599	0.0549	0.0502
0.1486	0.1361	0.1246	0.1141	0.1044	0.0955
0.2049	0.1876	0.1717	0.1571	0.1437	0.1315
0.2415	0.2209	0.2021	0.1849	0.1691	0.1547
0.2545	0.2327	0.2128	0.1946	0.1780	0.1627
0.2427	0.2218	0.2027	0.1853	0.1694	0.1549
0.2069	0.1890	0.1726	0.1578	0.1442	0.1318
0.1506	0.1375	0.1256	0.1147	0.1048	0.0958
0.0792	0.0723	0.0661	0.0603	0.0551	0.0504
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 25 through 30

0	0	0	0	0	0
0.0459	0.0420	0.0384	0.0351	0.0321	0.0294
0.0874	0.0799	0.0731	0.0668	0.0611	0.0559

0.1203	0.1100	0.1006	0.0920	0.0842	0.0770
0.1415	0.1294	0.1183	0.1082	0.0989	0.0905
0.1488	0.1361	0.1244	0.1138	0.1041	0.0952
0.1416	0.1295	0.1184	0.1082	0.0990	0.0905
0.1205	0.1102	0.1007	0.0921	0.0842	0.0770
0.0876	0.0801	0.0732	0.0669	0.0612	0.0559
0.0461	0.0421	0.0385	0.0352	0.0322	0.0294
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 31 through 36

0	0	0	0	0	0
0.0269	0.0246	0.0225	0.0206	0.0188	0.0172
0.0511	0.0468	0.0428	0.0391	0.0358	0.0327
0.0704	0.0644	0.0589	0.0538	0.0492	0.0450
0.0827	0.0757	0.0692	0.0633	0.0579	0.0529
0.0870	0.0796	0.0728	0.0665	0.0608	0.0556
0.0828	0.0757	0.0692	0.0633	0.0579	0.0529
0.0704	0.0644	0.0589	0.0538	0.0492	0.0450
0.0512	0.0468	0.0428	0.0391	0.0358	0.0327
0.0269	0.0246	0.0225	0.0206	0.0188	0.0172
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 37 through 41

0	0	0	0	0
0.0157	0.0144	0.0131	0.0120	0.0110
0.0299	0.0273	0.0250	0.0229	0.0209
0.0412	0.0376	0.0344	0.0315	0.0288
0.0484	0.0442	0.0405	0.0370	0.0338
0.0509	0.0465	0.0425	0.0389	0.0356
0.0484	0.0442	0.0405	0.0370	0.0338
0.0412	0.0376	0.0344	0.0315	0.0288
0.0299	0.0273	0.0250	0.0229	0.0209

0.0157	0.0144	0.0131	0.0120	0.0110
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Resultados por métodos numéricos del Problema 2.5.1.

```
>> [U]=DifCNProblema251('x',0,0,2,1,sqrt(1.45),11,41)
```

U =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0.2000	0.2000	0.1998	0.1992	0.1973	0.1935
0.4000	0.3999	0.3994	0.3971	0.3915	0.3816
0.6000	0.5997	0.5978	0.5912	0.5774	0.5560
0.8000	0.7990	0.7925	0.7746	0.7434	0.7031
1.0000	0.9959	0.9753	0.9302	0.8684	0.8024
1.2000	1.1836	1.1219	1.0226	0.9204	0.8288
1.4000	1.3353	1.1685	0.9958	0.8660	0.7595
1.6000	1.3441	0.9898	0.8130	0.6811	0.5857
1.8000	0.7884	0.5936	0.4577	0.3777	0.3197
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.1875	0.1796	0.1704	0.1602	0.1498	0.1393
0.3672	0.3496	0.3299	0.3090	0.2879	0.2671
0.5290	0.4987	0.4667	0.4345	0.4028	0.3723
0.6586	0.6129	0.5679	0.5245	0.4833	0.4446
0.7378	0.6767	0.6200	0.5677	0.5196	0.4755
0.7473	0.6755	0.6120	0.5556	0.5052	0.4600
0.6727	0.5999	0.5381	0.4848	0.4383	0.3973
0.5109	0.4509	0.4012	0.3593	0.3234	0.2921
0.2764	0.2422	0.2145	0.1913	0.1717	0.1548

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.1291	0.1192	0.1099	0.1011	0.0929	0.0853
0.2470	0.2279	0.2098	0.1929	0.1772	0.1626
0.3433	0.3160	0.2904	0.2667	0.2447	0.2244
0.4084	0.3749	0.3439	0.3152	0.2889	0.2646
0.4352	0.3982	0.3644	0.3335	0.3051	0.2792
0.4193	0.3826	0.3493	0.3190	0.2915	0.2665
0.3609	0.3284	0.2992	0.2729	0.2490	0.2274
0.2647	0.2403	0.2186	0.1991	0.1815	0.1657
0.1400	0.1269	0.1153	0.1050	0.0956	0.0872
0	0	0	0	0	0

Columns 19 through 24

0	0	0	0	0	0
0.0783	0.0718	0.0658	0.0603	0.0552	0.0505
0.1491	0.1367	0.1252	0.1147	0.1050	0.0962
0.2056	0.1884	0.1725	0.1580	0.1447	0.1324
0.2423	0.2219	0.2031	0.1859	0.1702	0.1558
0.2555	0.2338	0.2139	0.1958	0.1791	0.1639
0.2437	0.2228	0.2038	0.1864	0.1705	0.1560
0.2078	0.1899	0.1736	0.1588	0.1452	0.1328
0.1513	0.1382	0.1263	0.1154	0.1056	0.0965
0.0796	0.0727	0.0664	0.0607	0.0555	0.0508
0	0	0	0	0	0

Columns 25 through 30

0	0	0	0	0	0
0.0463	0.0424	0.0388	0.0355	0.0325	0.0297

0.0880	0.0806	0.0738	0.0675	0.0618	0.0565
0.1212	0.1109	0.1015	0.0929	0.0850	0.0778
0.1426	0.1305	0.1194	0.1093	0.1000	0.0915
0.1500	0.1373	0.1256	0.1149	0.1052	0.0962
0.1427	0.1306	0.1195	0.1093	0.1000	0.0915
0.1215	0.1111	0.1017	0.0930	0.0851	0.0779
0.0883	0.0808	0.0739	0.0676	0.0618	0.0566
0.0464	0.0425	0.0389	0.0355	0.0325	0.0298
0	0	0	0	0	0

Columns 31 through 36

0	0	0	0	0	0
0.0272	0.0249	0.0228	0.0208	0.0191	0.0175
0.0517	0.0474	0.0433	0.0397	0.0363	0.0332
0.0712	0.0652	0.0596	0.0546	0.0499	0.0457
0.0837	0.0766	0.0701	0.0642	0.0587	0.0537
0.0881	0.0806	0.0737	0.0675	0.0617	0.0565
0.0838	0.0766	0.0701	0.0642	0.0587	0.0537
0.0713	0.0652	0.0597	0.0546	0.0500	0.0457
0.0518	0.0474	0.0433	0.0397	0.0363	0.0332
0.0272	0.0249	0.0228	0.0209	0.0191	0.0175
0	0	0	0	0	0

Columns 37 through 41

0	0	0	0	0
0.0160	0.0146	0.0134	0.0122	0.0112
0.0304	0.0278	0.0254	0.0233	0.0213
0.0418	0.0383	0.0350	0.0320	0.0293
0.0492	0.0450	0.0412	0.0377	0.0345
0.0517	0.0473	0.0433	0.0396	0.0362
0.0492	0.0450	0.0412	0.0377	0.0345
0.0418	0.0383	0.0350	0.0320	0.0293

0.0304	0.0278	0.0254	0.0233	0.0213
0.0160	0.0146	0.0134	0.0122	0.0112
0	0	0	0	0

Resultados del Problema 2.5.2.

```
>> [U]=Problema252(2,1,11,41,50000)
```

U =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0.9510	0.4943	0.3154	0.2219	0.1621	0.1203
0.8090	0.6585	0.4749	0.3484	0.2590	0.1936
0.5878	0.5346	0.4345	0.3356	0.2549	0.1923
0.3090	0.2868	0.2500	0.2011	0.1555	0.1182
-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.3090	-0.2868	-0.2500	-0.2011	-0.1555	-0.1182
-0.5878	-0.5346	-0.4345	-0.3356	-0.2549	-0.1923
-0.8090	-0.6585	-0.4749	-0.3484	-0.2590	-0.1936
-0.9510	-0.4943	-0.3154	-0.2219	-0.1621	-0.1203
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.0899	0.0674	0.0506	0.0380	0.0285	0.0214
0.1452	0.1089	0.0818	0.0614	0.0461	0.0346
0.1447	0.1088	0.0818	0.0614	0.0461	0.0346
0.0892	0.0672	0.0505	0.0379	0.0285	0.0214
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0892	-0.0672	-0.0505	-0.0379	-0.0285	-0.0214
-0.1447	-0.1088	-0.0818	-0.0614	-0.0461	-0.0346
-0.1452	-0.1089	-0.0818	-0.0614	-0.0461	-0.0346

-0.0899	-0.0674	-0.0506	-0.0380	-0.0285	-0.0214
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.0161	0.0121	0.0091	0.0068	0.0051	0.0038
0.0260	0.0195	0.0147	0.0110	0.0083	0.0062
0.0260	0.0195	0.0147	0.0110	0.0083	0.0062
0.0161	0.0121	0.0091	0.0068	0.0051	0.0038
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0161	-0.0121	-0.0091	-0.0068	-0.0051	-0.0038
-0.0260	-0.0195	-0.0147	-0.0110	-0.0083	-0.0062
-0.0260	-0.0195	-0.0147	-0.0110	-0.0083	-0.0062
-0.0161	-0.0121	-0.0091	-0.0068	-0.0051	-0.0038
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 19 through 24

0	0	0	0	0	0
0.0029	0.0022	0.0016	0.0012	0.0009	0.0007
0.0047	0.0035	0.0026	0.0020	0.0015	0.0011
0.0047	0.0035	0.0026	0.0020	0.0015	0.0011
0.0029	0.0022	0.0016	0.0012	0.0009	0.0007
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0029	-0.0022	-0.0016	-0.0012	-0.0009	-0.0007
-0.0047	-0.0035	-0.0026	-0.0020	-0.0015	-0.0011
-0.0047	-0.0035	-0.0026	-0.0020	-0.0015	-0.0011
-0.0029	-0.0022	-0.0016	-0.0012	-0.0009	-0.0007
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 25 through 30

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

0.0005	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001
0.0008	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002
0.0008	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002
0.0005	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0005	-0.0004	-0.0003	-0.0002	-0.0002	-0.0001
-0.0008	-0.0006	-0.0005	-0.0004	-0.0003	-0.0002
-0.0008	-0.0006	-0.0005	-0.0004	-0.0003	-0.0002
-0.0005	-0.0004	-0.0003	-0.0002	-0.0002	-0.0001
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 31 through 36

0	0	0	0	0	0
0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0002	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000
-0.0002	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000
-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 37 through 41

0	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

```

-0.0000    -0.0000    -0.0000    -0.0000    -0.0000
-0.0000    -0.0000    -0.0000    -0.0000    -0.0000
-0.0000    -0.0000    -0.0000    -0.0000    -0.0000
-0.0000    -0.0000    -0.0000    -0.0000    -0.0000

```

Resultados utilizando métodos numéricos del Problema 2.5.2.

```
>> [U]=DifCNPproblema252('cos(pi*x/2)',0,0,2,1,sqrt(1.16),11,41)
```

U =

Columns 1 through 6

```

          0          0          0          0          0          0
0.9511    0.4603    0.3105    0.2211    0.1630    0.1219
0.8090    0.6598    0.4688    0.3477    0.2603    0.1961
0.5878    0.5269    0.4326    0.3346    0.2560    0.1946
0.3090    0.2835    0.2468    0.2006    0.1561    0.1196
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
-0.3090   -0.2835   -0.2468   -0.2006   -0.1561   -0.1196
-0.5878   -0.5269   -0.4326   -0.3346   -0.2560   -0.1946
-0.8090   -0.6598   -0.4688   -0.3477   -0.2603   -0.1961
-0.9511   -0.4603   -0.3105   -0.2211   -0.1630   -0.1219
          0          0          0          0          0          0

```

Columns 7 through 12

```

          0          0          0          0          0          0
0.0917    0.0693    0.0524    0.0396    0.0300    0.0227
0.1481    0.1120    0.0847    0.0641    0.0485    0.0367
0.1476    0.1118    0.0846    0.0641    0.0485    0.0367
0.0910    0.0690    0.0523    0.0396    0.0300    0.0227
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
-0.0910   -0.0690   -0.0523   -0.0396   -0.0300   -0.0227
-0.1476   -0.1118   -0.0846   -0.0641   -0.0485   -0.0367

```

-0.1481	-0.1120	-0.0847	-0.0641	-0.0485	-0.0367
-0.0917	-0.0693	-0.0524	-0.0396	-0.0300	-0.0227
0	0	0	0	0	0

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.0172	0.0130	0.0098	0.0074	0.0056	0.0043
0.0278	0.0210	0.0159	0.0120	0.0091	0.0069
0.0278	0.0210	0.0159	0.0120	0.0091	0.0069
0.0172	0.0130	0.0098	0.0074	0.0056	0.0043
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0172	-0.0130	-0.0098	-0.0074	-0.0056	-0.0043
-0.0278	-0.0210	-0.0159	-0.0120	-0.0091	-0.0069
-0.0278	-0.0210	-0.0159	-0.0120	-0.0091	-0.0069
-0.0172	-0.0130	-0.0098	-0.0074	-0.0056	-0.0043
0	0	0	0	0	0

Columns 19 through 24

0	0	0	0	0	0
0.0032	0.0024	0.0018	0.0014	0.0011	0.0008
0.0052	0.0039	0.0030	0.0023	0.0017	0.0013
0.0052	0.0039	0.0030	0.0023	0.0017	0.0013
0.0032	0.0024	0.0018	0.0014	0.0011	0.0008
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0032	-0.0024	-0.0018	-0.0014	-0.0011	-0.0008
-0.0052	-0.0039	-0.0030	-0.0023	-0.0017	-0.0013
-0.0052	-0.0039	-0.0030	-0.0023	-0.0017	-0.0013
-0.0032	-0.0024	-0.0018	-0.0014	-0.0011	-0.0008
0	0	0	0	0	0

Columns 25 through 30

0	0	0	0	0	0
0.0006	0.0005	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002
0.0010	0.0007	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002
0.0010	0.0007	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002
0.0006	0.0005	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0006	-0.0005	-0.0003	-0.0003	-0.0002	-0.0002
-0.0010	-0.0007	-0.0006	-0.0004	-0.0003	-0.0002
-0.0010	-0.0007	-0.0006	-0.0004	-0.0003	-0.0002
-0.0006	-0.0005	-0.0003	-0.0003	-0.0002	-0.0002
0	0	0	0	0	0

Columns 31 through 36

0	0	0	0	0	0
0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0002	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0000
-0.0002	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0000
-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000
0	0	0	0	0	0

Columns 37 through 41

0	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

```

-0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000
-0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000
-0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000
-0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000
          0          0          0          0          0

```

Resultados del Problema 2.5.3.

Tiempo $t = 0$

```
>> [U] = Problema253(11,21,1,1,0,100)
```

U =

Columns 1 through 6

```

          0          0          0          0          0          0
0      0.0489    0.0965    0.1414    0.1827    0.2192
0      0.0925    0.1827    0.2681    0.3467    0.4166
0      0.1267    0.2503    0.3677    0.4759    0.5724
0      0.1484    0.2932    0.4310    0.5582    0.6719
0      0.1559    0.3080    0.4527    0.5865    0.7061
0      0.1484    0.2932    0.4310    0.5582    0.6719
0      0.1267    0.2503    0.3677    0.4759    0.5724
0      0.0925    0.1827    0.2681    0.3467    0.4166
0      0.0489    0.0965    0.1414    0.1827    0.2192
0      0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

```

Columns 7 through 12

```

          0          0          0          0          0          0
0.2503    0.2751    0.2932    0.3043    0.3080    0.3043
0.4759    0.5235    0.5582    0.5794    0.5865    0.5794
0.6547    0.7208    0.7692    0.7986    0.8085    0.7986
0.7692    0.8475    0.9050    0.9401    0.9519    0.9401

```

0.8085	0.8912	0.9519	0.9890	1.0014	0.9890
0.7692	0.8475	0.9050	0.9401	0.9519	0.9401
0.6547	0.7208	0.7692	0.7986	0.8085	0.7986
0.4759	0.5235	0.5582	0.5794	0.5865	0.5794
0.2503	0.2751	0.2932	0.3043	0.3080	0.3043
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.2932	0.2751	0.2503	0.2192	0.1827	0.1414
0.5582	0.5235	0.4759	0.4166	0.3467	0.2681
0.7692	0.7208	0.6547	0.5724	0.4759	0.3677
0.9050	0.8475	0.7692	0.6719	0.5582	0.4310
0.9519	0.8912	0.8085	0.7061	0.5865	0.4527
0.9050	0.8475	0.7692	0.6719	0.5582	0.4310
0.7692	0.7208	0.6547	0.5724	0.4759	0.3677
0.5582	0.5235	0.4759	0.4166	0.3467	0.2681
0.2932	0.2751	0.2503	0.2192	0.1827	0.1414
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 19 through 21

0	0	0
0.0965	0.0489	0.0000
0.1827	0.0925	0.0000
0.2503	0.1267	0.0000
0.2932	0.1484	0.0000
0.3080	0.1559	0.0000
0.2932	0.1484	0.0000
0.2503	0.1267	0.0000
0.1827	0.0925	0.0000
0.0965	0.0489	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000

Tiempo $t = 0,5$

```
>> [U] = Problema253(11,21,1,1,0.5,100)
```

U =

1.0e-004 *

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0.0250	0.0494	0.0726	0.0939	0.1130
0	0.0476	0.0939	0.1380	0.1787	0.2150
0	0.0655	0.1293	0.1900	0.2460	0.2959
0	0.0770	0.1520	0.2233	0.2891	0.3478
0	0.0809	0.1598	0.2348	0.3040	0.3657
0	0.0770	0.1520	0.2233	0.2891	0.3478
0	0.0655	0.1293	0.1900	0.2460	0.2959
0	0.0476	0.0939	0.1380	0.1787	0.2150
0	0.0250	0.0494	0.0726	0.0939	0.1130
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.1293	0.1424	0.1520	0.1579	0.1598	0.1579
0.2460	0.2709	0.2891	0.3003	0.3040	0.3003
0.3385	0.3728	0.3980	0.4133	0.4184	0.4133
0.3980	0.4383	0.4678	0.4859	0.4919	0.4859
0.4184	0.4609	0.4919	0.5109	0.5172	0.5109
0.3980	0.4383	0.4678	0.4859	0.4919	0.4859
0.3385	0.3728	0.3980	0.4133	0.4184	0.4133
0.2460	0.2709	0.2891	0.3003	0.3040	0.3003
0.1293	0.1424	0.1520	0.1579	0.1598	0.1579
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.1520	0.1424	0.1293	0.1130	0.0939	0.0726
0.2891	0.2709	0.2460	0.2150	0.1787	0.1380
0.3980	0.3728	0.3385	0.2959	0.2460	0.1900
0.4678	0.4383	0.3980	0.3478	0.2891	0.2233
0.4919	0.4609	0.4184	0.3657	0.3040	0.2348
0.4678	0.4383	0.3980	0.3478	0.2891	0.2233
0.3980	0.3728	0.3385	0.2959	0.2460	0.1900
0.2891	0.2709	0.2460	0.2150	0.1787	0.1380
0.1520	0.1424	0.1293	0.1130	0.0939	0.0726
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 19 through 21

0	0	0
0.0494	0.0250	0.0000
0.0939	0.0476	0.0000
0.1293	0.0655	0.0000
0.1520	0.0770	0.0000
0.1598	0.0809	0.0000
0.1520	0.0770	0.0000
0.1293	0.0655	0.0000
0.0939	0.0476	0.0000
0.0494	0.0250	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000

Tiempo $t = 1$

>> [U] = Problema253(11,21,1,1,1,100)

U =

1.0e-008 *

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0.0129	0.0255	0.0375	0.0486	0.0585
0	0.0246	0.0486	0.0714	0.0924	0.1112
0	0.0339	0.0669	0.0983	0.1272	0.1530
0	0.0398	0.0786	0.1155	0.1496	0.1799
0	0.0419	0.0827	0.1215	0.1572	0.1892
0	0.0398	0.0786	0.1155	0.1496	0.1799
0	0.0339	0.0669	0.0983	0.1272	0.1530
0	0.0246	0.0486	0.0714	0.0924	0.1112
0	0.0129	0.0255	0.0375	0.0486	0.0585
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.0669	0.0737	0.0786	0.0817	0.0827	0.0817
0.1272	0.1401	0.1496	0.1553	0.1572	0.1553
0.1751	0.1928	0.2058	0.2138	0.2164	0.2138
0.2058	0.2267	0.2420	0.2513	0.2544	0.2513
0.2164	0.2384	0.2544	0.2642	0.2675	0.2642
0.2058	0.2267	0.2420	0.2513	0.2544	0.2513
0.1751	0.1928	0.2058	0.2138	0.2164	0.2138
0.1272	0.1401	0.1496	0.1553	0.1572	0.1553
0.0669	0.0737	0.0786	0.0817	0.0827	0.0817
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.0786	0.0737	0.0669	0.0585	0.0486	0.0375

0.1496	0.1401	0.1272	0.1112	0.0924	0.0714
0.2058	0.1928	0.1751	0.1530	0.1272	0.0983
0.2420	0.2267	0.2058	0.1799	0.1496	0.1155
0.2544	0.2384	0.2164	0.1892	0.1572	0.1215
0.2420	0.2267	0.2058	0.1799	0.1496	0.1155
0.2058	0.1928	0.1751	0.1530	0.1272	0.0983
0.1496	0.1401	0.1272	0.1112	0.0924	0.0714
0.0786	0.0737	0.0669	0.0585	0.0486	0.0375
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 19 through 21

0	0	0
0.0255	0.0129	0.0000
0.0486	0.0246	0.0000
0.0669	0.0339	0.0000
0.0786	0.0398	0.0000
0.0827	0.0419	0.0000
0.0786	0.0398	0.0000
0.0669	0.0339	0.0000
0.0486	0.0246	0.0000
0.0255	0.0129	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000

Tiempo $t = 2$

[U] = Problema253(11,21,1,1,2,100)

U =

1.0e-017 *

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

0	0.0346	0.0683	0.1004	0.1300	0.1564
0	0.0658	0.1300	0.1910	0.2473	0.2975
0	0.0906	0.1789	0.2629	0.3403	0.4094
0	0.1065	0.2103	0.3090	0.4001	0.4813
0	0.1120	0.2212	0.3249	0.4207	0.5061
0	0.1065	0.2103	0.3090	0.4001	0.4813
0	0.0906	0.1789	0.2629	0.3403	0.4094
0	0.0658	0.1300	0.1910	0.2473	0.2975
0	0.0346	0.0683	0.1004	0.1300	0.1564
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.1789	0.1971	0.2103	0.2184	0.2212	0.2184
0.3403	0.3748	0.4001	0.4155	0.4207	0.4155
0.4684	0.5159	0.5507	0.5719	0.5790	0.5719
0.5507	0.6065	0.6474	0.6723	0.6807	0.6723
0.5790	0.6377	0.6807	0.7069	0.7157	0.7069
0.5507	0.6065	0.6474	0.6723	0.6807	0.6723
0.4684	0.5159	0.5507	0.5719	0.5790	0.5719
0.3403	0.3748	0.4001	0.4155	0.4207	0.4155
0.1789	0.1971	0.2103	0.2184	0.2212	0.2184
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.2103	0.1971	0.1789	0.1564	0.1300	0.1004
0.4001	0.3748	0.3403	0.2975	0.2473	0.1910
0.5507	0.5159	0.4684	0.4094	0.3403	0.2629
0.6474	0.6065	0.5507	0.4813	0.4001	0.3090
0.6807	0.6377	0.5790	0.5061	0.4207	0.3249
0.6474	0.6065	0.5507	0.4813	0.4001	0.3090

0.5507	0.5159	0.4684	0.4094	0.3403	0.2629
0.4001	0.3748	0.3403	0.2975	0.2473	0.1910
0.2103	0.1971	0.1789	0.1564	0.1300	0.1004
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 19 through 21

0	0	0
0.0683	0.0346	0.0000
0.1300	0.0658	0.0000
0.1789	0.0906	0.0000
0.2103	0.1065	0.0000
0.2212	0.1120	0.0000
0.2103	0.1065	0.0000
0.1789	0.0906	0.0000
0.1300	0.0658	0.0000
0.0683	0.0346	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000

Resultados del Problema 2.5.4.

```
>> [U]=Problema254(pi,2,11,41,5000)
```

U =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0.8883	0.7482	0.6641	0.5989	0.5441	0.4964
1.5791	1.3980	1.2550	1.1373	1.0358	0.9463
2.0726	1.8859	1.7149	1.5636	1.4289	1.3080
2.3687	2.1857	2.0075	1.8410	1.6881	1.5486
2.4674	2.2905	2.1155	1.9476	1.7907	1.6461
2.3687	2.1995	2.0333	1.8749	1.7269	1.5900
2.0726	1.9135	1.7635	1.6256	1.4986	1.3814

1.5791	1.4368	1.3172	1.2127	1.1183	1.0320
0.8883	0.7859	0.7171	0.6597	0.6087	0.5622
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.4540	0.4159	0.3815	0.3503	0.3220	0.2961
0.8662	0.7940	0.7287	0.6694	0.6154	0.5662
1.1989	1.1000	1.0102	0.9285	0.8541	0.7861
1.4216	1.3058	1.2003	1.1041	1.0162	0.9360
1.5133	1.3919	1.2807	1.1791	1.0862	1.0011
1.4639	1.3481	1.2418	1.1445	1.0553	0.9735
1.2735	1.1743	1.0830	0.9992	0.9223	0.8517
0.9525	0.8794	0.8120	0.7501	0.6932	0.6408
0.5196	0.4803	0.4441	0.4108	0.3801	0.3518
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.2726	0.2511	0.2314	0.2135	0.1970	0.1819
0.5213	0.4803	0.4428	0.4085	0.3771	0.3483
0.7241	0.6674	0.6155	0.5680	0.5245	0.4847
0.8626	0.7954	0.7340	0.6777	0.6261	0.5788
0.9233	0.8520	0.7867	0.7268	0.6719	0.6215
0.8985	0.8298	0.7668	0.7090	0.6559	0.6072
0.7869	0.7274	0.6728	0.6226	0.5766	0.5342
0.5927	0.5485	0.5079	0.4706	0.4362	0.4046
0.3258	0.3019	0.2799	0.2596	0.2410	0.2238
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 19 through 24

0	0	0	0	0	0
0.1681	0.1555	0.1439	0.1332	0.1234	0.1144
0.3219	0.2977	0.2756	0.2552	0.2364	0.2192
0.4481	0.4146	0.3838	0.3555	0.3296	0.3057
0.5354	0.4956	0.4590	0.4254	0.3945	0.3660
0.5753	0.5328	0.4938	0.4579	0.4249	0.3945
0.5625	0.5213	0.4835	0.4487	0.4167	0.3872
0.4953	0.4595	0.4265	0.3962	0.3682	0.3425
0.3755	0.3488	0.3241	0.3014	0.2804	0.2610
0.2080	0.1934	0.1799	0.1675	0.1561	0.1455
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 25 through 30

0	0	0	0	0	0
0.1061	0.0985	0.0915	0.0850	0.0790	0.0736
0.2034	0.1888	0.1754	0.1630	0.1516	0.1411
0.2837	0.2634	0.2448	0.2276	0.2118	0.1972
0.3399	0.3158	0.2936	0.2731	0.2542	0.2368
0.3665	0.3407	0.3169	0.2950	0.2748	0.2561
0.3600	0.3349	0.3117	0.2904	0.2706	0.2524
0.3187	0.2968	0.2765	0.2578	0.2405	0.2244
0.2432	0.2267	0.2114	0.1973	0.1842	0.1721
0.1357	0.1266	0.1182	0.1105	0.1033	0.0966
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 31 through 36

0	0	0	0	0	0
0.0685	0.0638	0.0595	0.0555	0.0518	0.0484
0.1314	0.1225	0.1142	0.1065	0.0994	0.0929
0.1837	0.1712	0.1597	0.1490	0.1391	0.1300
0.2206	0.2058	0.1920	0.1792	0.1674	0.1565
0.2388	0.2228	0.2080	0.1943	0.1816	0.1698

0.2355	0.2199	0.2054	0.1920	0.1796	0.1681
0.2096	0.1959	0.1831	0.1713	0.1604	0.1502
0.1609	0.1505	0.1409	0.1319	0.1236	0.1158
0.0904	0.0846	0.0793	0.0743	0.0697	0.0654
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 37 through 41

0	0	0	0	0
0.0452	0.0422	0.0395	0.0370	0.0346
0.0868	0.0812	0.0759	0.0711	0.0666
0.1215	0.1137	0.1064	0.0996	0.0933
0.1464	0.1370	0.1282	0.1201	0.1126
0.1589	0.1488	0.1394	0.1306	0.1225
0.1574	0.1475	0.1382	0.1296	0.1216
0.1407	0.1320	0.1238	0.1162	0.1091
0.1086	0.1019	0.0957	0.0899	0.0845
0.0614	0.0577	0.0542	0.0510	0.0479
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Resultados por métodos numéricos del Problema 2.5.4.

```
>> [U]=DifCNProblema254('x*(pi-x)',pi,'0','0',2,8,38,'2','x*exp(-t)')
```

U =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0.8883	0.3992	0.3387	0.2804	0.2496	0.2241
1.5791	1.3276	1.0957	0.9731	0.8724	0.7928
2.0726	1.8963	1.6971	1.5245	1.3858	1.2643
2.3687	2.2235	2.0606	1.8909	1.7322	1.5885
2.4674	2.3405	2.1978	2.0394	1.8793	1.7294
2.3687	2.2530	2.1138	1.9594	1.8087	1.6683

2.0726	1.9531	1.7948	1.6455	1.5184	1.4013
1.5791	1.4029	1.2121	1.1090	1.0174	0.9403
0.8883	0.4601	0.4152	0.3643	0.3356	0.3099
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.2040	0.1865	0.1712	0.1575	0.1453	0.1342
0.7239	0.6637	0.6101	0.5621	0.5189	0.4798
1.1580	1.0632	0.9784	0.9021	0.8333	0.7709
1.4587	1.3418	1.2364	1.1411	1.0548	0.9765
1.5922	1.4673	1.3540	1.2512	1.1578	1.0729
1.5390	1.4209	1.3133	1.2153	1.1260	1.0447
1.2950	1.1977	1.1090	1.0279	0.9539	0.8862
0.8702	0.8065	0.7483	0.6949	0.6461	0.6014
0.2879	0.2678	0.2495	0.2326	0.2170	0.2027
0	0	0	0	0	0

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.1243	0.1152	0.1069	0.0994	0.0926	0.0863
0.4444	0.4122	0.3829	0.3561	0.3317	0.3093
0.7143	0.6628	0.6158	0.5730	0.5338	0.4979
0.9054	0.8406	0.7815	0.7275	0.6780	0.6327
0.9956	0.9251	0.8607	0.8017	0.7477	0.6982
0.9705	0.9026	0.8406	0.7837	0.7316	0.6837
0.8243	0.7677	0.7158	0.6682	0.6244	0.5841
0.5603	0.5227	0.4881	0.4563	0.4270	0.4000
0.1895	0.1774	0.1661	0.1558	0.1462	0.1373
0	0	0	0	0	0

Columns 19 through 24

0	0	0	0	0	0
0.0805	0.0752	0.0704	0.0659	0.0617	0.0579
0.2887	0.2698	0.2525	0.2364	0.2217	0.2080
0.4649	0.4346	0.4067	0.3810	0.3572	0.3353
0.5910	0.5527	0.5175	0.4849	0.4548	0.4270
0.6526	0.6107	0.5720	0.5363	0.5033	0.4727
0.6395	0.5989	0.5614	0.5267	0.4946	0.4648
0.5469	0.5127	0.4810	0.4516	0.4244	0.3992
0.3750	0.3519	0.3306	0.3108	0.2923	0.2752
0.1290	0.1214	0.1143	0.1076	0.1015	0.0957
0	0	0	0	0	0

Columns 25 through 30

0	0	0	0	0	0
0.0544	0.0511	0.0480	0.0452	0.0426	0.0401
0.1953	0.1836	0.1727	0.1626	0.1531	0.1444
0.3149	0.2961	0.2786	0.2623	0.2471	0.2329
0.4012	0.3773	0.3551	0.3344	0.3151	0.2972
0.4443	0.4180	0.3935	0.3708	0.3495	0.3297
0.4372	0.4115	0.3876	0.3653	0.3446	0.3252
0.3757	0.3539	0.3336	0.3146	0.2969	0.2803
0.2593	0.2444	0.2306	0.2176	0.2055	0.1942
0.0903	0.0853	0.0806	0.0762	0.0720	0.0681
0	0	0	0	0	0

Columns 31 through 36

0	0	0	0	0	0
0.0378	0.0357	0.0337	0.0319	0.0301	0.0285
0.1362	0.1285	0.1213	0.1146	0.1084	0.1025
0.2198	0.2074	0.1959	0.1851	0.1750	0.1655
0.2804	0.2647	0.2500	0.2363	0.2234	0.2113

0.3112	0.2939	0.2776	0.2624	0.2482	0.2348
0.3070	0.2900	0.2741	0.2592	0.2452	0.2321
0.2648	0.2503	0.2366	0.2239	0.2118	0.2005
0.1836	0.1736	0.1642	0.1554	0.1472	0.1394
0.0645	0.0611	0.0578	0.0548	0.0519	0.0492
0	0	0	0	0	0

Columns 37 through 41

0	0	0	0	0
0.0269	0.0255	0.0241	0.0228	0.0216
0.0969	0.0917	0.0869	0.0823	0.0779
0.1566	0.1482	0.1403	0.1329	0.1259
0.1999	0.1893	0.1792	0.1698	0.1609
0.2222	0.2104	0.1993	0.1888	0.1789
0.2197	0.2080	0.1971	0.1868	0.1770
0.1899	0.1799	0.1705	0.1616	0.1532
0.1320	0.1251	0.1186	0.1125	0.1067
0.0467	0.0442	0.0420	0.0398	0.0378
0	0	0	0	0

Resultados del Problema 3.3.1.

```
>> y=Problema331(pi,3,11,21,500)
```

y =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0.1287	0.2344	0.3117	0.3608	0.3816
0	0.2324	0.4377	0.5925	0.6906	0.7322
0	0.3064	0.5858	0.8112	0.9584	1.0208
0	0.3508	0.6746	0.9444	1.1332	1.2164
0	0.3656	0.7042	0.9888	1.1924	1.2881

0	0.3508	0.6746	0.9444	1.1332	1.2164
0	0.3064	0.5858	0.8112	0.9584	1.0208
0	0.2324	0.4377	0.5925	0.6906	0.7322
0	0.1287	0.2344	0.3117	0.3608	0.3816
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.3742	0.3384	0.2744	0.1821	0.0624	-0.0697
0.7173	0.6458	0.5178	0.3343	0.1113	-0.1244
0.9985	0.8912	0.7005	0.4433	0.1463	-0.1635
1.1866	1.0453	0.8103	0.5086	0.1672	-0.1869
1.2527	1.0967	0.8469	0.5304	0.1742	-0.1948
1.1866	1.0453	0.8103	0.5086	0.1672	-0.1869
0.9985	0.8912	0.7005	0.4433	0.1463	-0.1635
0.7173	0.6458	0.5178	0.3343	0.1113	-0.1244
0.3742	0.3384	0.2744	0.1821	0.0624	-0.0697
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
-0.1880	-0.2787	-0.3412	-0.3753	-0.3812	-0.3588
-0.3459	-0.5265	-0.6513	-0.7196	-0.7314	-0.6866
-0.4590	-0.7132	-0.8995	-1.0019	-1.0196	-0.9524
-0.5269	-0.8255	-1.0559	-1.1912	-1.2148	-1.1252
-0.5495	-0.8629	-1.1081	-1.2581	-1.2860	-1.1836
-0.5269	-0.8255	-1.0559	-1.1912	-1.2148	-1.1252
-0.4590	-0.7132	-0.8995	-1.0019	-1.0196	-0.9524
-0.3459	-0.5265	-0.6513	-0.7196	-0.7314	-0.6866
-0.1880	-0.2787	-0.3412	-0.3753	-0.3812	-0.3588
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 19 through 21

0	0	0
-0.3081	-0.2292	-0.1220
-0.5853	-0.4274	-0.2198
-0.8004	-0.5713	-0.2897
-0.9312	-0.6576	-0.3316
-0.9748	-0.6864	-0.3456
-0.9312	-0.6576	-0.3316
-0.8004	-0.5713	-0.2897
-0.5853	-0.4274	-0.2198
-0.3081	-0.2292	-0.1220
-0.0000	-0.0000	-0.0000

Resultados por métodos numéricos del Problema 3.3.1.

```
>> [y]=DifProblema331('0','pi*x-x^2',pi,3,2,11,21)
```

y =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0.1332	0.2395	0.3163	0.3658	0.3864
0	0.2369	0.4467	0.6026	0.6999	0.7421
0	0.3109	0.5948	0.8247	0.9736	1.0349
0	0.3553	0.6836	0.9579	1.1512	1.2365
0	0.3701	0.7132	1.0023	1.2104	1.3106
0	0.3553	0.6836	0.9579	1.1512	1.2365
0	0.3109	0.5948	0.8247	0.9736	1.0349
0	0.2369	0.4467	0.6026	0.6999	0.7421
0	0.1332	0.2395	0.3163	0.3658	0.3864
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.3790	0.3433	0.2792	0.1870	0.0664	-0.0707
0.7269	0.6554	0.5276	0.3428	0.1147	-0.1261
1.0131	0.9057	0.7135	0.4511	0.1491	-0.1643
1.2055	1.0630	0.8225	0.5160	0.1710	-0.1886
1.2757	1.1128	0.8591	0.5387	0.1770	-0.1956
1.2055	1.0630	0.8225	0.5160	0.1710	-0.1886
1.0131	0.9057	0.7135	0.4511	0.1491	-0.1643
0.7269	0.6554	0.5276	0.3428	0.1147	-0.1261
0.3790	0.3433	0.2792	0.1870	0.0664	-0.0707
0	0	0	0	0	0

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
-0.1938	-0.2838	-0.3455	-0.3806	-0.3858	-0.3636
-0.3512	-0.5365	-0.6618	-0.7284	-0.7415	-0.6962
-0.4650	-0.7234	-0.9138	-1.0176	-1.0332	-0.9672
-0.5324	-0.8357	-1.0709	-1.2101	-1.2353	-1.1437
-0.5553	-0.8733	-1.1227	-1.2776	-1.3093	-1.2061
-0.5324	-0.8357	-1.0709	-1.2101	-1.2353	-1.1437
-0.4650	-0.7234	-0.9138	-1.0176	-1.0332	-0.9672
-0.3512	-0.5365	-0.6618	-0.7284	-0.7415	-0.6962
-0.1938	-0.2838	-0.3455	-0.3806	-0.3858	-0.3636
0	0	0	0	0	0

Columns 19 through 21

0	0	0
-0.3131	-0.2338	-0.1269
-0.5947	-0.4374	-0.2275
-0.8151	-0.5832	-0.2962
-0.9480	-0.6686	-0.3374

-0.9891	-0.6972	-0.3531
-0.9480	-0.6686	-0.3374
-0.8151	-0.5832	-0.2962
-0.5947	-0.4374	-0.2275
-0.3131	-0.2338	-0.1269
0	0	0

Resultados del Problema 3.3.2.

```
>> y=Problema332(1,1,11,31,500)
```

y =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0.0900	0.0875	0.0800	0.0700	0.0600	0.0500
0.1600	0.1575	0.1500	0.1375	0.1200	0.1000
0.2100	0.2075	0.2000	0.1875	0.1700	0.1475
0.2400	0.2375	0.2300	0.2175	0.2000	0.1775
0.2500	0.2475	0.2400	0.2275	0.2100	0.1875
0.2400	0.2375	0.2300	0.2175	0.2000	0.1775
0.2100	0.2075	0.2000	0.1875	0.1700	0.1475
0.1600	0.1575	0.1500	0.1375	0.1200	0.1000
0.0900	0.0875	0.0800	0.0700	0.0600	0.0500
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.0400	0.0300	0.0200	0.0100	0.0000	-0.0100
0.0800	0.0600	0.0400	0.0200	0.0000	-0.0200
0.1200	0.0900	0.0600	0.0300	0.0000	-0.0300
0.1500	0.1175	0.0800	0.0400	0.0000	-0.0400
0.1600	0.1275	0.0900	0.0475	0.0000	-0.0475

0.1500	0.1175	0.0800	0.0400	0.0000	-0.0400
0.1200	0.0900	0.0600	0.0300	0.0000	-0.0300
0.0800	0.0600	0.0400	0.0200	0.0000	-0.0200
0.0400	0.0300	0.0200	0.0100	0.0000	-0.0100
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
-0.0200	-0.0300	-0.0400	-0.0500	-0.0600	-0.0700
-0.0400	-0.0600	-0.0800	-0.1000	-0.1200	-0.1375
-0.0600	-0.0900	-0.1200	-0.1475	-0.1700	-0.1875
-0.0800	-0.1175	-0.1500	-0.1775	-0.2000	-0.2175
-0.0900	-0.1275	-0.1600	-0.1875	-0.2100	-0.2275
-0.0800	-0.1175	-0.1500	-0.1775	-0.2000	-0.2175
-0.0600	-0.0900	-0.1200	-0.1475	-0.1700	-0.1875
-0.0400	-0.0600	-0.0800	-0.1000	-0.1200	-0.1375
-0.0200	-0.0300	-0.0400	-0.0500	-0.0600	-0.0700
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 19 through 24

0	0	0	0	0	0
-0.0800	-0.0875	-0.0900	-0.0875	-0.0800	-0.0700
-0.1500	-0.1575	-0.1600	-0.1575	-0.1500	-0.1375
-0.2000	-0.2075	-0.2100	-0.2075	-0.2000	-0.1875
-0.2300	-0.2375	-0.2400	-0.2375	-0.2300	-0.2175
-0.2400	-0.2475	-0.2500	-0.2475	-0.2400	-0.2275
-0.2300	-0.2375	-0.2400	-0.2375	-0.2300	-0.2175
-0.2000	-0.2075	-0.2100	-0.2075	-0.2000	-0.1875
-0.1500	-0.1575	-0.1600	-0.1575	-0.1500	-0.1375
-0.0800	-0.0875	-0.0900	-0.0875	-0.0800	-0.0700
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 25 through 30

0	0	0	0	0	0
-0.0600	-0.0500	-0.0400	-0.0300	-0.0200	-0.0100
-0.1200	-0.1000	-0.0800	-0.0600	-0.0400	-0.0200
-0.1700	-0.1475	-0.1200	-0.0900	-0.0600	-0.0300
-0.2000	-0.1775	-0.1500	-0.1175	-0.0800	-0.0400
-0.2100	-0.1875	-0.1600	-0.1275	-0.0900	-0.0475
-0.2000	-0.1775	-0.1500	-0.1175	-0.0800	-0.0400
-0.1700	-0.1475	-0.1200	-0.0900	-0.0600	-0.0300
-0.1200	-0.1000	-0.0800	-0.0600	-0.0400	-0.0200
-0.0600	-0.0500	-0.0400	-0.0300	-0.0200	-0.0100
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Column 31

0
-0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0000

Resultados por métodos numéricos del Problema 3.3.2.

```
>> [y]=DifProblema332('x-x^2','0',1,1,1.5,11,31)
```

y =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0.0900	0.0875	0.0806	0.0709	0.0602	0.0496
0.1600	0.1575	0.1500	0.1377	0.1211	0.1015
0.2100	0.2075	0.2000	0.1875	0.1700	0.1478
0.2400	0.2375	0.2300	0.2175	0.2000	0.1775
0.2500	0.2475	0.2400	0.2275	0.2100	0.1875
0.2400	0.2375	0.2300	0.2175	0.2000	0.1775
0.2100	0.2075	0.2000	0.1875	0.1700	0.1478
0.1600	0.1575	0.1500	0.1377	0.1211	0.1015
0.0900	0.0875	0.0806	0.0709	0.0602	0.0496
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.0396	0.0300	0.0202	0.0102	0.0000	-0.0101
0.0806	0.0596	0.0393	0.0197	0.0002	-0.0196
0.1215	0.0920	0.0610	0.0297	-0.0008	-0.0305
0.1501	0.1180	0.0818	0.0425	0.0017	-0.0392
0.1600	0.1276	0.0903	0.0488	0.0042	-0.0417
0.1501	0.1180	0.0818	0.0425	0.0017	-0.0392
0.1215	0.0920	0.0610	0.0297	-0.0008	-0.0305
0.0806	0.0596	0.0393	0.0197	0.0002	-0.0196
0.0396	0.0300	0.0202	0.0102	0.0000	-0.0101
0	0	0	0	0	0

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
-0.0201	-0.0300	-0.0399	-0.0498	-0.0595	-0.0688
-0.0398	-0.0600	-0.0799	-0.0990	-0.1170	-0.1333
-0.0597	-0.0885	-0.1169	-0.1438	-0.1677	-0.1871
-0.0785	-0.1151	-0.1480	-0.1766	-0.2003	-0.2185

-0.0864	-0.1271	-0.1619	-0.1897	-0.2110	-0.2269
-0.0785	-0.1151	-0.1480	-0.1766	-0.2003	-0.2185
-0.0597	-0.0885	-0.1169	-0.1438	-0.1677	-0.1871
-0.0398	-0.0600	-0.0799	-0.0990	-0.1170	-0.1333
-0.0201	-0.0300	-0.0399	-0.0498	-0.0595	-0.0688
0	0	0	0	0	0

Columns 19 through 24

0	0	0	0	0	0
-0.0770	-0.0834	-0.0873	-0.0878	-0.0842	-0.0765
-0.1470	-0.1566	-0.1609	-0.1593	-0.1519	-0.1395
-0.2009	-0.2087	-0.2108	-0.2076	-0.1996	-0.1872
-0.2309	-0.2378	-0.2396	-0.2368	-0.2296	-0.2177
-0.2387	-0.2466	-0.2501	-0.2483	-0.2408	-0.2276
-0.2309	-0.2378	-0.2396	-0.2368	-0.2296	-0.2177
-0.2009	-0.2087	-0.2108	-0.2076	-0.1996	-0.1872
-0.1470	-0.1566	-0.1609	-0.1593	-0.1519	-0.1395
-0.0770	-0.0834	-0.0873	-0.0878	-0.0842	-0.0765
0	0	0	0	0	0

Columns 25 through 30

0	0	0	0	0	0
-0.0654	-0.0525	-0.0394	-0.0275	-0.0175	-0.0088
-0.1232	-0.1043	-0.0838	-0.0622	-0.0404	-0.0190
-0.1705	-0.1495	-0.1244	-0.0958	-0.0647	-0.0323
-0.2007	-0.1783	-0.1510	-0.1192	-0.0840	-0.0461
-0.2095	-0.1870	-0.1601	-0.1287	-0.0925	-0.0521
-0.2007	-0.1783	-0.1510	-0.1192	-0.0840	-0.0461
-0.1705	-0.1495	-0.1244	-0.0958	-0.0647	-0.0323
-0.1232	-0.1043	-0.0838	-0.0622	-0.0404	-0.0190
-0.0654	-0.0525	-0.0394	-0.0275	-0.0175	-0.0088
0	0	0	0	0	0

Column 31

```

      0
    -0.0005
      0.0017
    -0.0000
    -0.0062
    -0.0087
    -0.0062
    -0.0000
      0.0017
    -0.0005
      0
  
```

Resultados del Problema 3.3.3.

```
>> [y]=Problema333(pi,3,11,21,1)
```

y =

Columns 1 through 6

```

      0      0      0      0      0      0
    4.3264  4.2869  4.1693  3.9764  3.7123  3.3831
    8.2972  8.2221  7.9986  7.6315  7.1293  6.5031
   11.5730  11.4696  11.1619  10.6567  9.9654  9.1036
   13.8585  13.7370  13.3753  12.7814  11.9688  10.9556
   14.9275  14.7998  14.4194  13.7950  12.9405  11.8752
   14.6378  14.5163  14.1546  13.5607  12.7480  11.7348
   12.9367  12.8334  12.5256  12.0205  11.3292  10.4673
    9.8558  9.7807  9.5571  9.1901  8.6878  8.0616
    5.4953  5.4558  5.3383  5.1453  4.8812  4.5520
    0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
  
```

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
2.9962	2.5601	2.0848	1.5808	1.0596	0.5328
5.7670	4.9376	4.0335	3.0749	2.0835	1.0814
8.0905	6.9489	5.7044	4.3851	3.0205	1.6413
9.7646	8.4226	6.9596	5.4087	3.8045	2.1831
10.6229	9.2118	7.6736	6.0428	4.3561	2.6513
10.5439	9.2018	7.7389	6.1879	4.5838	2.9624
9.4542	8.3126	7.0682	5.7488	4.3842	3.0050
7.3256	6.4962	5.5920	4.6335	3.6420	2.6400
4.1651	3.7290	3.2537	2.7497	2.2285	1.7017
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.0122	-0.4904	-0.9638	-1.3974	-1.7813	-2.1071
0.0913	-0.8648	-1.7653	-2.5899	-3.3203	-3.9398
0.2784	-1.0375	-2.2769	-3.4119	-4.4171	-5.2699
0.5810	-0.9660	-2.4229	-3.7573	-4.9390	-5.9415
0.9667	-0.6599	-2.1918	-3.5948	-4.8373	-5.8914
1.3603	-0.1867	-1.6437	-2.9780	-4.1597	-5.1622
1.6422	0.3262	-0.9131	-2.0482	-3.0534	-3.9062
1.6498	0.6937	-0.2067	-1.0314	-1.7617	-2.3813
1.1811	0.6785	0.2051	-0.2285	-0.6124	-0.9381
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Columns 19 through 21

0	0	0
-2.3673	-2.5561	-2.6693
-4.4348	-4.7940	-5.0093
-5.9511	-6.4455	-6.7419

```

-6.7423   -7.3235   -7.6719
-6.7335   -7.3446   -7.7109
-5.9630   -6.5442   -6.8926
-4.5874   -5.0818   -5.3782
-2.8762   -3.2354   -3.4508
-1.1984   -1.3872   -1.5004
-0.0000   -0.0000   -0.0000

```

Resultados del Problema 4.3.1.

```
>> [U]=Problema431(1,1,21,21,1)
```

```
U =
```

```
Columns 1 through 6
```

```

0         0         0         0         0         0
0    0.0021    0.0043    0.0066    0.0091    0.0118
0    0.0042    0.0085    0.0131    0.0179    0.0232
0    0.0062    0.0126    0.0192    0.0264    0.0341
0    0.0080    0.0163    0.0249    0.0341    0.0442
0    0.0097    0.0196    0.0299    0.0411    0.0532
0    0.0110    0.0224    0.0342    0.0470    0.0609
0    0.0122    0.0246    0.0377    0.0517    0.0670
0    0.0130    0.0263    0.0403    0.0552    0.0715
0    0.0135    0.0273    0.0418    0.0573    0.0743
0    0.0137    0.0277    0.0423    0.0581    0.0752
0    0.0135    0.0273    0.0418    0.0573    0.0743
0    0.0130    0.0263    0.0403    0.0552    0.0715
0    0.0122    0.0246    0.0377    0.0517    0.0670
0    0.0110    0.0224    0.0342    0.0470    0.0609
0    0.0097    0.0196    0.0299    0.0411    0.0532
0    0.0080    0.0163    0.0249    0.0341    0.0442
0    0.0062    0.0126    0.0192    0.0264    0.0341
0    0.0042    0.0085    0.0131    0.0179    0.0232

```

0	0.0021	0.0043	0.0066	0.0091	0.0118
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.0147	0.0181	0.0219	0.0262	0.0312	0.0369
0.0291	0.0357	0.0432	0.0517	0.0616	0.0729
0.0428	0.0525	0.0635	0.0760	0.0905	0.1071
0.0554	0.0679	0.0822	0.0984	0.1171	0.1387
0.0666	0.0817	0.0989	0.1184	0.1409	0.1669
0.0762	0.0935	0.1131	0.1355	0.1612	0.1909
0.0840	0.1030	0.1246	0.1492	0.1775	0.2103
0.0896	0.1099	0.1330	0.1593	0.1895	0.2245
0.0931	0.1142	0.1381	0.1654	0.1968	0.2331
0.0942	0.1156	0.1398	0.1675	0.1993	0.2360
0.0931	0.1142	0.1381	0.1654	0.1968	0.2331
0.0896	0.1099	0.1330	0.1593	0.1895	0.2245
0.0840	0.1030	0.1246	0.1492	0.1775	0.2103
0.0762	0.0935	0.1131	0.1355	0.1612	0.1909
0.0666	0.0817	0.0989	0.1184	0.1409	0.1669
0.0554	0.0679	0.0822	0.0984	0.1171	0.1387
0.0428	0.0525	0.0635	0.0760	0.0905	0.1071
0.0291	0.0357	0.0432	0.0517	0.0616	0.0729
0.0147	0.0181	0.0219	0.0262	0.0312	0.0369
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.0436	0.0513	0.0603	0.0708	0.0831	0.0974
0.0861	0.1014	0.1192	0.1399	0.1641	0.1923
0.1265	0.1489	0.1751	0.2055	0.2411	0.2826
0.1637	0.1928	0.2266	0.2661	0.3121	0.3658

0.1970	0.2319	0.2727	0.3201	0.3755	0.4401
0.2254	0.2654	0.3119	0.3662	0.4296	0.5035
0.2482	0.2923	0.3436	0.4033	0.4731	0.5546
0.2649	0.3120	0.3667	0.4305	0.5050	0.5919
0.2751	0.3240	0.3808	0.4471	0.5244	0.6147
0.2786	0.3280	0.3856	0.4527	0.5310	0.6224
0.2751	0.3240	0.3808	0.4471	0.5244	0.6147
0.2649	0.3120	0.3667	0.4305	0.5050	0.5919
0.2482	0.2923	0.3436	0.4033	0.4731	0.5546
0.2254	0.2654	0.3119	0.3662	0.4296	0.5035
0.1970	0.2319	0.2727	0.3201	0.3755	0.4401
0.1637	0.1928	0.2266	0.2661	0.3121	0.3658
0.1265	0.1489	0.1751	0.2055	0.2411	0.2826
0.0861	0.1014	0.1192	0.1399	0.1641	0.1923
0.0436	0.0513	0.0603	0.0708	0.0831	0.0974
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 19 through 21

0	0	0
0.1141	0.1336	0.1564
0.2253	0.2639	0.3090
0.3311	0.3877	0.4540
0.4286	0.5020	0.5878
0.5156	0.6039	0.7071
0.5899	0.6909	0.8090
0.6497	0.7610	0.8910
0.6935	0.8122	0.9511
0.7202	0.8435	0.9877
0.7292	0.8540	1.0000
0.7202	0.8435	0.9877
0.6935	0.8122	0.9511
0.6497	0.7610	0.8910
0.5899	0.6909	0.8090

0.5156	0.6039	0.7071
0.4286	0.5020	0.5878
0.3311	0.3877	0.4540
0.2253	0.2639	0.3090
0.1141	0.1336	0.1564
0.0000	0.0000	0.0000

Resultados por métodos numéricos del Problema 4.3.1.

```
>> DifProblema431('0','sin(pi*x)','0','0',1,1,1/20,1e-8,1000)
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 6
```

0	0	0	0	0	0
0	0.0021	0.0043	0.0067	0.0091	0.0118
0	0.0042	0.0086	0.0131	0.0180	0.0233
0	0.0062	0.0126	0.0193	0.0265	0.0343
0	0.0081	0.0163	0.0250	0.0343	0.0444
0	0.0097	0.0196	0.0301	0.0412	0.0534
0	0.0111	0.0225	0.0344	0.0472	0.0611
0	0.0122	0.0247	0.0379	0.0519	0.0673
0	0.0130	0.0264	0.0404	0.0554	0.0718
0	0.0135	0.0274	0.0420	0.0576	0.0746
0	0.0137	0.0278	0.0425	0.0583	0.0755
0	0.0135	0.0274	0.0420	0.0576	0.0746
0	0.0130	0.0264	0.0404	0.0554	0.0718
0	0.0122	0.0247	0.0379	0.0519	0.0673
0	0.0111	0.0225	0.0344	0.0472	0.0611
0	0.0097	0.0196	0.0301	0.0412	0.0534
0	0.0081	0.0163	0.0250	0.0343	0.0444
0	0.0062	0.0126	0.0193	0.0265	0.0343
0	0.0042	0.0086	0.0131	0.0180	0.0233
0	0.0021	0.0043	0.0067	0.0091	0.0118

0 0 0 0 0 0

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.0148	0.0181	0.0219	0.0263	0.0313	0.0370
0.0292	0.0358	0.0433	0.0519	0.0618	0.0731
0.0429	0.0527	0.0637	0.0763	0.0907	0.1074
0.0556	0.0682	0.0825	0.0987	0.1175	0.1391
0.0669	0.0820	0.0992	0.1188	0.1413	0.1673
0.0765	0.0939	0.1135	0.1359	0.1617	0.1914
0.0843	0.1034	0.1250	0.1497	0.1781	0.2108
0.0900	0.1103	0.1334	0.1598	0.1901	0.2251
0.0934	0.1146	0.1386	0.1659	0.1974	0.2337
0.0946	0.1160	0.1403	0.1680	0.1999	0.2366
0.0934	0.1146	0.1386	0.1659	0.1974	0.2337
0.0900	0.1103	0.1334	0.1598	0.1901	0.2251
0.0843	0.1034	0.1250	0.1497	0.1781	0.2108
0.0765	0.0939	0.1135	0.1359	0.1617	0.1914
0.0669	0.0820	0.0992	0.1188	0.1413	0.1673
0.0556	0.0682	0.0825	0.0987	0.1175	0.1391
0.0429	0.0527	0.0637	0.0763	0.0907	0.1074
0.0292	0.0358	0.0433	0.0519	0.0618	0.0731
0.0148	0.0181	0.0219	0.0263	0.0313	0.0370
0	0	0	0	0	0

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.0437	0.0514	0.0604	0.0709	0.0832	0.0975
0.0863	0.1016	0.1194	0.1401	0.1643	0.1925
0.1268	0.1492	0.1754	0.2058	0.2414	0.2828
0.1641	0.1932	0.2271	0.2665	0.3125	0.3662
0.1975	0.2324	0.2732	0.3206	0.3759	0.4405

0.2259	0.2659	0.3125	0.3668	0.4301	0.5040
0.2488	0.2929	0.3442	0.4040	0.4737	0.5551
0.2656	0.3126	0.3674	0.4312	0.5056	0.5925
0.2758	0.3247	0.3815	0.4478	0.5251	0.6153
0.2792	0.3287	0.3863	0.4534	0.5316	0.6230
0.2758	0.3247	0.3815	0.4478	0.5251	0.6153
0.2656	0.3126	0.3674	0.4312	0.5056	0.5925
0.2488	0.2929	0.3442	0.4040	0.4737	0.5551
0.2259	0.2659	0.3125	0.3668	0.4301	0.5040
0.1975	0.2324	0.2732	0.3206	0.3759	0.4405
0.1641	0.1932	0.2271	0.2665	0.3125	0.3662
0.1268	0.1492	0.1754	0.2058	0.2414	0.2828
0.0863	0.1016	0.1194	0.1401	0.1643	0.1925
0.0437	0.0514	0.0604	0.0709	0.0832	0.0975
0	0	0	0	0	0

Columns 19 through 21

0	0	0.0782
0.1141	0.1336	0.1564
0.2255	0.2640	0.3090
0.3313	0.3879	0.4540
0.4289	0.5022	0.5878
0.5160	0.6041	0.7071
0.5903	0.6912	0.8090
0.6501	0.7612	0.8910
0.6940	0.8125	0.9511
0.7207	0.8438	0.9877
0.7297	0.8543	1.0000
0.7207	0.8438	0.9877
0.6940	0.8125	0.9511
0.6501	0.7612	0.8910
0.5903	0.6912	0.8090
0.5160	0.6041	0.7071

0.4289	0.5022	0.5878
0.3313	0.3879	0.4540
0.2255	0.2640	0.3090
0.1141	0.1336	0.1564
0	0	0.0782

Resultados del Problema 4.3.2.

```
>> [U]=Problema332(1,1,21,21,100)
```

U =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0.0006	0.0011	0.0017	0.0023	0.0030
0	0.0011	0.0022	0.0034	0.0046	0.0060
0	0.0016	0.0032	0.0050	0.0068	0.0088
0	0.0021	0.0042	0.0064	0.0088	0.0114
0	0.0025	0.0050	0.0077	0.0106	0.0137
0	0.0029	0.0058	0.0088	0.0121	0.0157
0	0.0031	0.0064	0.0097	0.0133	0.0173
0	0.0034	0.0068	0.0104	0.0142	0.0185
0	0.0035	0.0070	0.0108	0.0148	0.0192
0	0.0035	0.0071	0.0109	0.0150	0.0194
0	0.0035	0.0070	0.0108	0.0148	0.0192
0	0.0034	0.0068	0.0104	0.0142	0.0185
0	0.0031	0.0064	0.0097	0.0133	0.0173
0	0.0029	0.0058	0.0088	0.0121	0.0157
0	0.0025	0.0050	0.0077	0.0106	0.0137
0	0.0021	0.0042	0.0064	0.0088	0.0114
0	0.0016	0.0032	0.0050	0.0068	0.0088
0	0.0011	0.0022	0.0034	0.0046	0.0060
0	0.0006	0.0011	0.0017	0.0023	0.0030
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081	0.0096
0.0075	0.0092	0.0112	0.0134	0.0160	0.0189
0.0111	0.0136	0.0164	0.0197	0.0234	0.0278
0.0143	0.0175	0.0212	0.0254	0.0303	0.0359
0.0172	0.0211	0.0255	0.0306	0.0364	0.0432
0.0197	0.0241	0.0292	0.0350	0.0416	0.0493
0.0217	0.0266	0.0321	0.0385	0.0458	0.0542
0.0231	0.0284	0.0343	0.0411	0.0488	0.0578
0.0240	0.0294	0.0356	0.0426	0.0507	0.0600
0.0243	0.0298	0.0360	0.0432	0.0513	0.0608
0.0240	0.0294	0.0356	0.0426	0.0507	0.0600
0.0231	0.0284	0.0343	0.0411	0.0488	0.0578
0.0217	0.0266	0.0321	0.0385	0.0458	0.0542
0.0197	0.0241	0.0292	0.0350	0.0416	0.0493
0.0172	0.0211	0.0255	0.0306	0.0364	0.0432
0.0143	0.0175	0.0212	0.0254	0.0303	0.0359
0.0111	0.0136	0.0164	0.0197	0.0234	0.0278
0.0075	0.0092	0.0112	0.0134	0.0160	0.0189
0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081	0.0096
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.0113	0.0134	0.0158	0.0187	0.0222	0.0263
0.0224	0.0264	0.0312	0.0369	0.0436	0.0517
0.0329	0.0388	0.0457	0.0539	0.0637	0.0753
0.0425	0.0501	0.0590	0.0695	0.0819	0.0966
0.0510	0.0601	0.0707	0.0832	0.0978	0.1150
0.0582	0.0686	0.0806	0.0947	0.1112	0.1305

0.0640	0.0753	0.0885	0.1039	0.1218	0.1426
0.0682	0.0803	0.0943	0.1106	0.1294	0.1514
0.0708	0.0833	0.0978	0.1146	0.1341	0.1567
0.0717	0.0843	0.0989	0.1159	0.1356	0.1584
0.0708	0.0833	0.0978	0.1146	0.1341	0.1567
0.0682	0.0803	0.0943	0.1106	0.1294	0.1514
0.0640	0.0753	0.0885	0.1039	0.1218	0.1426
0.0582	0.0686	0.0806	0.0947	0.1112	0.1305
0.0510	0.0601	0.0707	0.0832	0.0978	0.1150
0.0425	0.0501	0.0590	0.0695	0.0819	0.0966
0.0329	0.0388	0.0457	0.0539	0.0637	0.0753
0.0224	0.0264	0.0312	0.0369	0.0436	0.0517
0.0113	0.0134	0.0158	0.0187	0.0222	0.0263
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 19 through 21

0	0	0
0.0315	0.0382	0.0475
0.0617	0.0741	0.0900
0.0894	0.1065	0.1275
0.1140	0.1349	0.1600
0.1353	0.1593	0.1875
0.1530	0.1793	0.2100
0.1668	0.1949	0.2275
0.1768	0.2062	0.2400
0.1828	0.2129	0.2475
0.1848	0.2151	0.2500
0.1828	0.2129	0.2475
0.1768	0.2062	0.2400
0.1668	0.1949	0.2275
0.1530	0.1793	0.2100
0.1353	0.1593	0.1875
0.1140	0.1349	0.1600

0.0894	0.1065	0.1275
0.0617	0.0741	0.0900
0.0315	0.0382	0.0475
0.0000	0.0000	0.0000

Resultados por métodos numéricos del Problema 4.3.2.

```
>> DifProblema332('0','0','0','y*(1-y)',1,1,1/20,1e-8,1000)
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 6
```

0	0	0	0	0	0
0	0.0006	0.0011	0.0017	0.0024	0.0031
0	0.0011	0.0022	0.0034	0.0047	0.0060
0	0.0016	0.0033	0.0050	0.0068	0.0089
0	0.0021	0.0042	0.0065	0.0088	0.0115
0	0.0025	0.0051	0.0078	0.0106	0.0138
0	0.0029	0.0058	0.0089	0.0122	0.0158
0	0.0032	0.0064	0.0098	0.0134	0.0174
0	0.0034	0.0068	0.0104	0.0143	0.0185
0	0.0035	0.0071	0.0108	0.0149	0.0192
0	0.0035	0.0072	0.0110	0.0150	0.0195
0	0.0035	0.0071	0.0108	0.0149	0.0192
0	0.0034	0.0068	0.0104	0.0143	0.0185
0	0.0032	0.0064	0.0098	0.0134	0.0174
0	0.0029	0.0058	0.0089	0.0122	0.0158
0	0.0025	0.0051	0.0078	0.0106	0.0138
0	0.0021	0.0042	0.0065	0.0088	0.0115
0	0.0016	0.0033	0.0050	0.0068	0.0089
0	0.0011	0.0022	0.0034	0.0047	0.0060
0	0.0006	0.0011	0.0017	0.0024	0.0031
0	0	0	0	0	0

```
Columns 7 through 12
```

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081	0.0096
0.0076	0.0093	0.0112	0.0134	0.0160	0.0190
0.0111	0.0136	0.0165	0.0197	0.0235	0.0279
0.0144	0.0176	0.0213	0.0255	0.0304	0.0360
0.0173	0.0212	0.0256	0.0307	0.0365	0.0433
0.0198	0.0242	0.0293	0.0351	0.0417	0.0494
0.0217	0.0267	0.0322	0.0386	0.0459	0.0544
0.0232	0.0285	0.0344	0.0412	0.0490	0.0580
0.0241	0.0295	0.0357	0.0428	0.0508	0.0602
0.0244	0.0299	0.0362	0.0433	0.0515	0.0609
0.0241	0.0295	0.0357	0.0428	0.0508	0.0602
0.0232	0.0285	0.0344	0.0412	0.0490	0.0580
0.0217	0.0267	0.0322	0.0386	0.0459	0.0544
0.0198	0.0242	0.0293	0.0351	0.0417	0.0494
0.0173	0.0212	0.0256	0.0307	0.0365	0.0433
0.0144	0.0176	0.0213	0.0255	0.0304	0.0360
0.0111	0.0136	0.0165	0.0197	0.0235	0.0279
0.0076	0.0093	0.0112	0.0134	0.0160	0.0190
0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081	0.0096
0	0	0	0	0	0

Columns 13 through 18

0	0	0	0	0	0
0.0114	0.0134	0.0159	0.0188	0.0222	0.0264
0.0225	0.0265	0.0313	0.0370	0.0437	0.0518
0.0329	0.0389	0.0459	0.0541	0.0638	0.0755
0.0426	0.0502	0.0591	0.0697	0.0820	0.0967
0.0511	0.0602	0.0709	0.0833	0.0980	0.1152
0.0584	0.0687	0.0808	0.0949	0.1113	0.1306
0.0642	0.0755	0.0887	0.1041	0.1219	0.1427
0.0684	0.0804	0.0944	0.1107	0.1296	0.1515
0.0710	0.0834	0.0979	0.1147	0.1342	0.1568
0.0718	0.0845	0.0991	0.1161	0.1358	0.1585

0.0710	0.0834	0.0979	0.1147	0.1342	0.1568
0.0684	0.0804	0.0944	0.1107	0.1296	0.1515
0.0642	0.0755	0.0887	0.1041	0.1219	0.1427
0.0584	0.0687	0.0808	0.0949	0.1113	0.1306
0.0511	0.0602	0.0709	0.0833	0.0980	0.1152
0.0426	0.0502	0.0591	0.0697	0.0820	0.0967
0.0329	0.0389	0.0459	0.0541	0.0638	0.0755
0.0225	0.0265	0.0313	0.0370	0.0437	0.0518
0.0114	0.0134	0.0159	0.0188	0.0222	0.0264
0	0	0	0	0	0

Columns 19 through 21

0	0	0.0238
0.0316	0.0383	0.0475
0.0618	0.0742	0.0900
0.0895	0.1065	0.1275
0.1142	0.1350	0.1600
0.1354	0.1593	0.1875
0.1531	0.1793	0.2100
0.1669	0.1950	0.2275
0.1769	0.2062	0.2400
0.1829	0.2129	0.2475
0.1849	0.2152	0.2500
0.1829	0.2129	0.2475
0.1769	0.2062	0.2400
0.1669	0.1950	0.2275
0.1531	0.1793	0.2100
0.1354	0.1593	0.1875
0.1142	0.1350	0.1600
0.0895	0.1065	0.1275
0.0618	0.0742	0.0900
0.0316	0.0383	0.0475
0	0	0.0238

Anexo B: Tabla de Algoritmos

Algoritmo para interpolar por el método de Newton

Algoritmo que permite interpolar utilizando el método de Newton [3].

```
function C=InterpolacionNewton(x,y)
m = length(x);
A=zeros(m,m);
A(:,1)=y;
for j=2:m
    for k=j:m
        A(k,j)=(A(k,j-1) - A(k-1,j-1))/(x(k) - x(k-j+1));
    end
end
A;
C=A(m,m);
for k=m-1:-1:1
    C=conv(C,poly(x(k)));
    m=length(C);
    C(m)=C(m)+A(k,k);
end
```

Algoritmo 1 que resuelve un sistema tridiagonal

```
function D=sistem_Tridiagonal(A,B,C,D,n)
A=[0 A];
for i=2:n
    r=A(i)/B(i-1);
    B(i)=B(i)-r*C(i-1);
    D(i)=D(i)-r*D(i-1);
end
D(n)=D(n)/B(n);
for i=n-1:-1:1
    D(i)=(D(i)-C(i)*D(i+1))/B(i);
end
end
```

Algoritmo 2 que resuelve un sistema tridiagonal

El algoritmo de Thomas se utiliza para resolver sistemas lineales tridiagonales, es un método simplificado de Gauss [14].

```
function x = TDMA solver(a,b,c,d)
N = length(d);
c(1) = c(1) / b(1);
d(1) = d(1) / b(1);
for n = 2:1:N
    temp = b(n) - a(n) * c(n - 1);
    c(n) = c(n) / temp;
    d(n) = (d(n) - a(n) * d(n - 1)) / temp;
end
x(N) = d(N);
for n = (N - 1):-1:1
    x(n) = d(n) - c(n) * x(n + 1);
end
end
```

Algoritmo que permite determinar la convergencia de las series infinitas que representen las condiciones iniciales o de contorno

En el programa n representa el número de términos que suma la serie, f la condición inicial, $conver$ representa la convergencia de la serie, $Cini$ la función dada como condición inicial y evaluada para los diferentes valores de la variable x y $error$ que representa el valor absoluto de la diferencia entre los datos calculados

```
function [A]=CI(n,f)
fprintf('\t Converg. \t Cini. \t Error')
U=0;
x=0+\epsilon:h:L;
s=length(x);
for i=1:s
    for k=1:n
        U = U + Serie infinita codificada;
    end
end
```

```

        conver(i)=U;
        U=0;
    end
    for i=1:s
        p(i)=fx(x(i));
    end
    for i=1:s
        Error(i) = abs(p(i)-conver(i));
    end
    A=zeros(s,3);
    A(:,1)=conver;
    A(:,2)=p;
    A(:,3)=Error;
end

```

Algoritmo que permite determinar la matriz de datos de la EDP utilizando el método de separación de variables, su gráfica y sus perfiles

Programa que permite determinar la matriz de datos de la ecuación del calor utilizando el método de separación de variables, gráfica y perfiles, en donde a y b son los valores finales de las variables x y t respectivamente, n y m representan el número de nodos en los intervalos analizados, sumando las soluciones parciales desde 1 hasta p

```

function [U]=Problema(a,b,n,m,p)
h1=a/(n-1);
h2=b/(m-1);
x=0:h1:a;
t=0:h2:b;
U=zeros(n,m);
for k=1:p
    for j=1:m;
        for i=1:n;
            U(i,j)=U(i,j)+ EDP codificada;
        end
    end
end
end

```

```

surf(U)
figure(2)
for k=1:m
P=U(:,k);
P1=InterpolacionNewton(x,P);
z=0:0.1:a;
Q=polyval(P1,z);
hold on
plot(z,Q,'LineWidth',1.50)
grid on
end
end

```

Algoritmo que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación del calor utilizando diferencias finitas

Algoritmo que utiliza el método de diferencias finitas para la ecuación del calor por Crank-Nicholson, permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación del calor, donde a y b son extremos finales de los intervalos de x y t respectivamente, n y m son el número de nodos en los intervalos de análisis, c la constante de separación, f condición inicial, $g1$ y $g2$ condiciones de contorno [3].

```

function [U]=DifCN(f,g1,g2,a,b,c,n,m)
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c^2*k/h^2;
s1=2+2/r;
s2=2/r-2;
U=zeros(n,m);
U(1,1:m)=g1;
U(n,1:m)=g2;
U(2:n-1,1)=feval(f,h:h:(n-2)*h)';
Vd(1,1:n)=s1*ones(1,n);
Vd(1)=1;
Vd(n)=1;
Va=-ones(1,n-1);

```

```

Va(n-1)=0;
Vc=-ones(1,n-1);
Vc(1)=0;
Vb(1)=g1;
Vb(n)=g2;
for j =2:m
    for i=2:n-1
        Vb(i)=U(i-1, j-1)+U(i+1, j-1)+s2*U(i, j-1);
    end
    X=sistem_Tridiagonal(Va,Vd,Vc,Vb,n);
    U(1:n, j)=X';
end
end

```

Algoritmo que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación del calor utilizando diferencias finitas con fuente térmica

Algoritmo que utiliza el método de diferencias finitas para la ecuación del calor por Crank-Nicholson con fuente térmica, donde $\phi(x) = U(x, 0)$ es la condición inicial, $U(0, t) = A = A(t)$, $U(L, t) = B = B(t)$ condiciones de contorno, n número de intervalos en x , m número de intervalos en t , $q = Q(x, t)$ fuente térmica, L y T extremos derechos de los intervalos de x y t respectivamente [6].

```

function [U]=DifCN(phi,L,A,B,T,n,m,alpha,q)
h=L/(n+1);
k=T/(m+1);
U=zeros(m+2,n+2);
x=0:h:L;
t=0:k:T;
U(:,1)=feval(A,t)';
U(:,n+2)=feval(B,t)';
for i=2:(n+1)
    U(1, i)=feval(phi,x(i));
end
for j=2:(m+2)
    for i=2:(n+1)

```

```

mu(i)=k*feval(alpha,t(j-1),x(i),U(j-1,i))/h^2;
mu2(i)=k*feval(alpha,t(j),x(i),U(j-1,i))/h^2;
q1(i)=feval(q,x(i),t(j-1));
q2(i)=feval(q,x(i),t(j));
end
S=diag(2*(1-mu2(2:n+1)))+diag(mu2(3:n+1),-1)+diag(mu(2:n),1);
V=zeros(n,1);
V(1)=mu(2)*U(j-1,1)+mu2(2)*U(j,1);
V(n)=mu(n+1)*U(j-1,n+2)+mu2(n+1)*U(j,n+2);
Q=k*(q1(2:n+1)+q2(2:n+1))';
c=S*((U(j-1,2:(n+1))))'+V+Q;
a=-mu2(2:n+1);
b=a;
a(n)=0;
b(1)=0;
U(j,2:n+1)=TDMAsolver(a,2*(1+mu2(2:n+1)),b,c);
end
U=U';

```

Algoritmo que permite encontrar el error medio absoluto y relativo medio cuadrático

Programa que permite encontrar el error medio absoluto y relativo medio cuadrático, conocidas las matrices de datos de la solución matemática U_e y aproximada U .

```

function [A R]=FeAR(Ue, U)
n=; número de nodos a x
m=; número de nodos a t o y
Err(2:n-1,2:m)=abs(Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m));
Err(n,:)=0;
for k=1:m
    A(k)=sum(Err(:,k)/n);
end
t=1:m;
subplot(2,1,1)
plot(t,A)
grid

```

```

Err(2:n-1,2:m)=( (Ue(2:n-1,2:m)-U(2:n-1,2:m)) ./Ue(2:n-1,2:m) ) .^2;
Err(n,:)=0;
for k=1:m
    R(k)=(sum(Err(:,k)/n) ) .^(0.5);
end
subplot(2,1,2)
plot(t,R)
grid
end

```

Algoritmo que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación de ondas utilizando diferencias finitas

Programa que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación de ondas, donde a y b son extremos finales de los intervalos de x y t respectivamente, n y m son el número de nodos de los intervalos de análisis, c la constante de separación, $f = y(x, 0)$, $g = y_t(x, 0)$, condiciones iniciales [3].

```

function [y]=Dif(f,g,a,b,c,n,m)
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c*k/h;
r1=r^2;
r2=r^2/2;
s1=1-r1;
s2=2-2*r1;
y=zeros(n, m);
for i=2:n-1
y(i,1)=feval(f,h*(i-1));
y(i,2)=s1*feval(f,h*(i-1))+k*feval(g,h*(i-1))+r2*(feval(f,h*i)...
    +feval(f,h*(i-2)));
end
for j=3:m
    for i=2:(n-1)
        y(i,j)=s2*y(i,j-1)+r1*(y(i-1,j-1)+y(i+1,j-1))-y(i,j-2);
    end
end

```

end

end

Algoritmo que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación de Laplace en una placa rectangular utilizando diferencias finitas

Programa que permite encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación de Laplace por diferencias finitas, donde a y b son extremos finales de los intervalos de x e y respectivamente, $f_1 = U(x, 0)$; $f_2 = U(x, L)$; $f_3 = U(0, y)$ y $f_4 = U(H, y)$. Se supone que el incremento en x en y son iguales a h y que existen dos números naturales m y n tales que $L = nh$ y $H = mh$ [3].

```
function [U]=Dif(f1,f2,f3,f4,a,b,h,tol,max1)
n=fix(a/h)+1;
m=fix(b/h)+1;
ave=(a*(feval(f1,0)+feval(f2,0))...
      + b*(feval(f3,0)+feval(f4,0)))/(2*a+2*b);
U=ave*ones(n, m);
U(1,1:m)=feval(f3,0:h:(m-1)*h)';
U(n,1:m)=feval(f4,0:h:(m-1)*h)';
U(1:n,1)=feval(f1,0:h:(n-1)*h);
U(1:n,m)=feval(f2,0:h:(n-1)*h);
U(1,1)=(U(1,2)+U(2,1))/2;
U(1,m)=(U(1,m-1)+U(2,m))/2;
U(n,1)=(U(n-1,1)+U(n,2))/2;
U(n,m)=(U(n-1,m)+U(n,m-1))/2;
w=4/(2+sqrt(4-(cos(pi/(n-1))...
      +cos(pi/(m-1)))^2));
err=1;
cnt=0;
while((err>tol)&(cnt<=max1))
    err=0;
    for j=2:m-1
        for i=2:n-1
            relx=w*(U(i,j+1)+U(i,j-1)+U(i+1,j)...
                    +U(i-1,j)-4*U(i,j))/4;
```



```
        U(i,j)=U(i,j)+relx;  
        if(err<=abs(relx));  
            err=abs(relx);  
        end  
    end  
end  
cnt=cnt+1;  
end  
U=flipud(U);  
surf(U)  
end
```

Bibliografía

- [1] Boyce, W. & DiPrima, R. (1987). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Tercera edición. Impresiones Editoriales S.A. Mexico D.F.
- [2] Haberman, R. (2003). *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Tercera edición. Pearson Educación, S.A. Madrid.
- [3] Mathews, J. & Fink K. (2000). *Métodos Numéricos con Matlab*. Tercera edición. Prentice Hall. Madrid.
- [4] Mayorga, J. (2014). *Matemática Superior para Ingeniería*. Preimpresión.
- [5] O'Neil, P. (2008). *Matemáticas avanzadas para Ingeniería*. Sexta edición. International Thomson Editores, S.A. de C.V. México.
- [6] Stanoyevitch, A. (2005). *Introduction to Numerical Ordinary and partial differential equations using matlab*. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey.
- [7] Trench, W. (2002). *Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*. International Thomson Editores, S.A. de C.V. México
- [8] Williamson, R & Crowell, R. (1975). *Cálculo de Funciones Vectoriales*. Editorial Prentice/Hall Internacional. Madrid.
- [9] Wrede, R. & Spiegel, M. (2004). *Cálculo Avanzado*. McGraw-Hill / Interamericana de España S.A.U. España.
- [10] Zill, D.(2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, Novena edición. Editorial Progreso S.A. de C.V. México, D.F.

WEBGRAFÍA

- [11] García, V. s/f: *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, <http://dcb.fic.unam.mx/users/veronicaahgc/ED/ECDPARCIALES.pdf>. Descargado 25-02-2015
- [12] UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA, s/f: *Ecuaciones en derivadas parciales*, <http://www.pagines.ma1.upc.edu/~edis/edp.pdf>. Descargado 06-03-2015
- [13] Romero, S. & Moreno, F. & Rodriguez I. (2001). *Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's)*, http://www.uhu.es/sixto.romero/EDP_libro.pdf. Descargado 06-03-2015
- [14] Wikipedia, s/f: *Algoritmo de Thomas*, http://pt.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Thomas. Descargado 12-03-2015
- [15] Universidad Nacional Autónoma de México, s/f: *Mallado*, http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla/articles/maiscon_lic_97.pdf. Descargado 11-03-2014
- [16] Universidad Autónoma de Madrid, s/f: *Método de Diferencias Finitas*, http://www.uam.es/personal_pdi./ciencias/carlosp/html/pid/DiferenciasFinitas.html. Descargado 14-03-2014