



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y
MECÁNICA

CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

TRABAJO DE TITULACIÓN, PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

TEMA:

“VALIDACIÓN DE COEFICIENTES PARA EL ANÁLISIS DE
ESFUERZOS EN PLACAS CIRCULARES CON CARGAS
SIMÉTRICAS”

AUTOR:

CHAGLLA RIVERA, JORGE ERNESTO

DIRECTOR:

MSC. GUERRERO HINOJOSA, BYRON ANDRÉS

SANGOLQUÍ

2019



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación, **"VALIDACIÓN DE COEFICIENTES PARA EL ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN PLACAS CIRCULARES CON CARGAS SIMÉTRICAS"** fue realizado por el señor **Chaglla Rivera, Jorge Ernesto** el mismo que ha sido revisado en su totalidad, analizado por la herramienta de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 4 de diciembre de 2018

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Byron Guerrero Hinojosa', written over a horizontal line.

MSC. GUERRERO HINOJOSA, BYRON ANDRÉS
C.I. 1716659758



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD

Yo, *Chaglla Rivera, Jorge Ernesto*, declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **“VALIDACIÓN DE COEFICIENTES PARA EL ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN PLACAS CIRCULARES CON CARGAS SIMÉTRICAS”** es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros considerándose en las citas bibliográficas.

Consecuentemente el contenido de la investigación mencionada es veraz.

Sangolquí, 4 de diciembre de 2018

Una firma manuscrita en tinta azul que parece decir 'Chaglla Rivera'.

CHAGLLA RIVERA, JORGE ERNESTO
C.I. 100363912-5



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS

INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA


DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y LA MECÁNICA

CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

AUTORIZACIÓN

Yo, *Chaglla Rivera, Jorge Ernesto* autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: **"VALIDACIÓN DE COEFICIENTES PARA EL ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN PLACAS CIRCULARES CON CARGAS SIMÉTRICAS"** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 4 de diciembre de 2018



CHAGLLA RIVERA, JORGE ERNESTO
C.I. 100363912-5

DEDICATORIA

*Para mis padres, con todo mi corazón.
Fanny y Ernesto.*

AGRADECIMIENTO

A mis padres, Fanny y Ernesto, que gracias a su esfuerzo, paciencia y tolerancia han hecho posible la culminación de mi carrera profesional. Les amo con todo mi corazón.

A mis hermanos, amigos y familiares que en varios momentos difíciles nunca dejaron de alentarme y apoyarme con su cariño y comprensión.

A las empresas auspiciantes que han puesto toda la confianza en esta investigación para cumplir el objetivo de solucionar temas de eficiencia ingenieril, útiles en el desarrollo del país.

A los docentes y todo el personal administrativo de la Universidad de las Fuerzas Armadas – “ESPE que, al contribuir con su granito de arena en mi educación, forjaron experiencia y conocimiento para una vida llena de ética y profesionalismo.

SIMBOLOGÍA

Coordenadas Cartesianas

$x, y, z =$ *Coordenadas cartesianas* [mm]

$dx, dy, dz =$ *Diferenciales de estudio*

$\theta_x, \theta_y =$ *Pendientes de la superficie deformada*

$M_x, M_y =$ *Momentos flectores* [N. mm]

$M_{xy} =$ *Momento Torsor* [N. mm]

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z =$ *Deformaciones unitarias*

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz} =$ *Deformaciones transversales* [Mpa]

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z =$ *Esfuerzo normales* [Mpa]

$\tau_{xy} =$ *Esfuerzo cortante* [Mpa]

Coordenadas Cilíndricas

$k =$ *Cofieciente para determinar el máximo esfuerzo*

$k_1 =$ *Cofieciente para determinar la máxima deflexión*

$a =$ *Radio externo de la placa* [mm]

$b =$ *Radio interno de la placa* [mm]

$h =$ *Espesor de la placa* [mm]

$\frac{a}{b} =$ *Relación entre radios de la placa*

$E =$ *Módulo de elasticidad del material* [MPa]

$u =$ *Cofieciente de Poisson*

$D =$ *Rigidez a la flexión de la placa*

$\text{Área} =$ *Área de la placa anular* [mm²]

$\text{Área}_{\text{Efect}} =$ *Área de estudio de la placa de experimento* [mm²]

$A =$ *Punto de análisis en el plano medio de la placa*

$r, \theta, z =$ *Coordenadas cilíndricas*

$dr, d\theta, dz, d\varphi, dw =$ Diferenciales de estudio

$r =$ Radio de un punto de la placa [mm]

$\theta =$ Ángulo de la proyección del vector posición sobre el plano [rad]

$z =$ Coordenada vertical o altura [mm]

$r_r, r_t =$ Radios de curvatura principales [mm]

$P =$ Carga total aplicada simétricamente a lo largo del borde [N]

$P_{Maq} =$ Carga total aplicada en maquina de ensayos [N]

$P_{Placa} =$ Carga total aplicada en placa de ensayos [N]

$Q =$ Carga distribuida simétricamente aplicada sobre la superficie de la placa [MPa]

$V_r, V_t =$ Fuerzas de corte por unidad de longitud [N] / [MPa]

$\varphi =$ Pendiente de la superficie deflexionada

$w =$ Deflexión de la placa [mm]

$w_{Max} =$ Deflexión maxima de la placa [mm]

$w_{Exper} =$ Deflexión experimental de la placa de estudio [mm]

$\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_z =$ Deformaciones unitarias

$M_r, M_t =$ Momentos flectores [N.mm]

$M_{rt} =$ Momento torsor [N.mm]

$\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z =$ Esfuerzo normales [Mpa]

$\tau_{rt} =$ Esfuerzo cortante [Mpa]

$\sigma_{r Max.}, \sigma_{t Max.} =$ Esfuerzos normales máximos [Mpa]

$BCS =$ Condiciones de borde

$c1, c2, c3 =$ Constantes de integración

$d, e =$ Tamaño del elemeto finito en bordes de la placa [mm]

$\alpha =$ Número adimensional que indica convergencia en mallado libre

$\delta_{Comp. Reloj 1,2} =$ Medida del comparador de reloj palpador [mm]

ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIÓN.....	i
AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD.....	ii
AUTORIZACIÓN	iii
DEDICATORIA.....	iv
AGRADECIMIENTO.....	v
SIMBOLOGÍA.....	vi
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	viii
ÍNDICE DE FIGURAS	x
ÍNDICE DE TABLAS.....	xi
ÍNDICE DE ANEXOS	xii
RESUMEN.....	xiii
ABSTRACT	xiv
1. CAPÍTULO INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Justificación e importancia	7
1.3. Alcance.....	8
1.4. Objetivos	9
1.4.1. Objetivo general.....	9
1.4.2. Objetivos específicos	9
2. CAPÍTULO REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.....	10
2.1. Teoría clásica de placas.....	10
2.1.1. Análisis de flexión estática de placas circulares isotrópicas	12
2.1.2. Casos prácticos	20
2.1.3. Coeficientes k y k_1	21
2.2. Simulaciones Numéricas	22
2.2.1. Introducción	22
2.2.2. Análisis de placas y membranas utilizando FEM.....	22
3. CAPÍTULO VALIDACIÓN Y DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES	PARA EL ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN PLACAS
CIRCULARES ISOTRÓPICAS CON CARGAS SIMÉTRICAS.....	27
3.1. Soluciones Analíticas	27

3.1.1.	Ecuaciones de gobierno	27
3.1.2.	Extrapolación de coeficientes	33
3.1.3.	Coeficientes k_1 para Deflexión	33
3.1.4.	Coeficientes k para Esfuerzo	35
3.2.	Simulaciones Numéricas	39
3.2.1.	Dominio computacional y análisis de mallas.....	39
3.2.2.	Determinación de nuevos coeficientes a través de simulaciones numéricas.....	45
4.	CAPÍTULO PRUEBAS Y EXPERIMENTACIÓN	49
4.1.	Metodología para la preparación de pruebas	49
4.1.1.	Fabricación de Probetas y Soportes	54
4.1.2.	Ubicación y colocación de Galgas o Strain Gages:	56
4.2.	Procedimiento experimental	58
4.3.	Comprobación de resultados por el método experimental	61
4.4.	Retos en las mediciones	64
5.	CAPÍTULO ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	67
5.1.	Validación de coeficientes por los modelos teórico y computacional.	67
5.2.	Resultados de los modelos teórico, computacional y experimental	69
	en un punto de la placa circular anular.....	69
5.2.1.	Comparacion del modelo teorico vs computacional.....	70
5.2.2.	Comparacion del modelo computacional vs experimental	71
5.2.3.	Comparacion del modelo experimental vs teórico	71
6.	CAPÍTULO CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	74
6.1.	Conclusiones.....	74
6.2.	Recomendaciones.....	76
6.3.	Trabajos Futuros	76
7.	BIBLIOGRAFÍA	78

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Casos de estudio para placas con un agujero en el centro.....	3
Figura 2 Deformación real y supuesta de la normal al plano medio de una placa delgada en coordenadas cartesianas.....	11
Figura 3 Tensiones normales y cortante de una placa delgada en coordenadas cartesianas.....	12
Figura 4 Placa circular anular. (a) Placa antes de la flexión. (b) Placa durante la flexión.....	13
Figura 5 Deflexión simétrica de placas circulares bajo cargas axisimétricas.....	14
Figura 6 Deformación unitaria para el caso de flexión axisimétrica en una placa delgada.....	15
Figura 7 Sección de una placa circular tensionada en la dirección radial.....	16
Figura 8 Elemento diferencial de una placa circular.....	18
Figura 9 Casos de estudio para placas con un agujero en el centro.....	20
Figura 10 Estructura a) discreta y b) continua.....	23
Figura 11 Discretización de un sistema continuo.....	23
Figura 12 Elementos finitos bidimensionales.....	24
Figura 13 Caso de estudio 3 (a) Esquema (b) Deflexión de la placa (c) Variación de V y Q en una distancia r.....	29
Figura 14 Representación del coeficiente k_1 en su relación de radios a/b	37
Figura 15 Representación del coeficiente k en su relación de radios a/b	37
Figura 16 Mallado en una placa circular delgada a) Libre y b) Estructurada.....	39
Figura 17 Convergencia de Coef. k y k_1 del caso 3 en $a/b=1.25$, con diferentes elementos finitos utilizando una Malla Estructurada.....	42
Figura 18 Representación del tamaño del elemento finito d y e , en un mallado libre.....	43
Figura 19 Convergencia de Coef. k y k_1 del caso 3 en $a/b=1.25$, con diferentes elementos finitos utilizando una Mallado Libre.....	43
Figura 20 Convergencia de Coef. k y k_1 del caso 3 en $a/b=1.25$ con diferentes relaciones d/e , utilizando una Mallado Libre.....	44
Figura 21 Comparación del Mejor Mallado y Elemento Finito.....	45
Figura 22 Convergencia de Coef. k y k_1 del caso 3 en $a/b=1.2$, utilizando un Mallado Libre con $d/e=4$	46
Figura 23 Esquema del plan de experimento. a) Componentes usados. b) Funcionamiento del plan.....	49
Figura 24 Probeta de Estudio.....	51
Figura 25 Máquina de ensayos MTS, junto a soportes estructurales y probeta de ensayo.....	52
Figura 26 Posición de la instrumentación. a) Comparador de Reloj Palpador y, b) Galgas extensométricas.....	53
Figura 27 Proceso de construcción en probetas y soportes.....	56

Figura 28	Posición de extensómetros en probeta de ensayo. Vista Superior.....	57
Figura 29	Compresión de los soportes estructurales generando flexión..... axisimétrica en la placa experimental.....	59
Figura 30	Ejecución de los ensayos bajo el plan de experimento propuesto.....	60
Figura 31	Esquema del experimento propuesto. a) Sección transversal. b)..... Detalle B, que indica la carga Q sobre el área efectiva de la placa.....	61
Figura 32	Comparación de mediciones bajo los modelos teórico y..... experimental en una sección simétrica de la placa.....	64
Figura 33	Correcciones de variables presentadas en ensayos a) Utilización..... de galgas de espesor de 0.03mm para mejor axisimetría y b) Mejora..... de defectos geométricos y calibración de probeta, soportes y máquina..... MTS.....	66
Figura 34	Coefficientes obtenidos por los modelos teórico y computacional.....	67
Figura 35	Probeta de estudio por FEM a) BCS y carga aplicada. b) deflexión..... en la placa de estudio.....	69
Figura 36	Esfuerzos en las probetas a) Radial y b) Tangencial.....	72
Figura 37	Deflexión en las probetas.....	73

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	<i>Coefficientes k y k_1 para determinar tensión y deflexión máxima.....</i>	3
Tabla 2	<i>Coefficientes k y k_1 para determinar tensión y deflexión máxima en..... placas con un agujero en su centro.....</i>	21
Tabla 3	<i>Tipos de elementos finitos utilizados en el análisis estático de placas..... planas por FEM.....</i>	25
Tabla 4	Condiciones de borde y fuerza de corte por unidad de longitud en..... todos los casos.....	28
Tabla 5	<i>Coefficientes nuevos y existentes para determinar deflexión y..... esfuerzo máximo en 10 casos prácticos de placas anulares.....</i>	38
Tabla 6	<i>Datos de placa estudio por FEM para análisis de malla y elemento..... finito.....</i>	41
Tabla 7	<i>Número adimensional α que indica la convergencia en relaciones..... a/b usando un mallado libre.....</i>	46
Tabla 8	<i>Análisis de convergencia y error de los coeficientes k y k_1..... determinados por FEM para $a/b=1.2$, del caso 3.....</i>	47
Tabla 9	<i>Coefficientes k y k_1 generados por el método FEM.....</i>	48
Tabla 10	<i>Resumen de los componentes utilizados para generar flexión..... axisimétrica usando un plan de experimentos propuesto mostrado..... en la Figura 23.....</i>	49

Tabla 11 Equipos e instrumentos de medición para cada variable de estudio..... durante la flexión.....	52
Tabla 12 Materiales seleccionados para cada geometría de los componentes..... de ensayo.....	55
Tabla 13 Procesos de corte usados para la fabricación de los componentes..... de ensayo.....	55
Tabla 14 Procedimiento de armado para la fabricación de los diferentes..... componentes de ensayo.....	55
Tabla 15 Posición radial de la instrumentación en las probetas de estudio..... experimental.....	57
Tabla 16 Geometría de la placa de estudio experimental y carga aplicada.....	61
Tabla 17 Resultados experimentales obtenidos para una posición r	63
Tabla 18 Resumen de los resultados experimentales obtenidos en las..... posiciones de las probetas.....	64
Tabla 19 Validación de coeficientes k y k_1 , generados por el modelo..... teórico y computacional FEM.....	68
Tabla 20 Resultados obtenidos por FEM en las posiciones de instrumentación..... de las probetas.....	70
Tabla 21 Resultados obtenidos por Teoría en las posiciones de..... instrumentación de las probetas.....	70
Tabla 22 Comparaciones de los modelos teórico, experimental y..... computacional en la posición de la instrumentación de las..... probetas.....	71
Tabla 23 Variación de esfuerzos en la probeta de estudio por FEM a una..... posición radial.....	72

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo I Ecuaciones de gobierno para cada caso.

Anexo II Tablas de análisis de mallado.

Anexo III Especificaciones de los equipos e instrumentos utilizados.

Anexo IV Planos.

RESUMEN

Para el diseño de placas delgadas circulares isotrópicas con un agujero en el centro que están bajo cargas axisimétricas y en un medio elástico-lineal, es muy común el uso del estudio de (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959), basado en la teoría clásica de placas. Los casos prácticos que presentan los autores facilitan la determinación de la deflexión y esfuerzo máximo en las placas anulares a través de coeficientes numéricos, lo que ayuda al ingeniero de diseño o fabricante una aproximación rápida y confiable. En este trabajo se desarrolla y valida nuevos coeficientes con una relación diferente de radios en placas anulares usando los mismos casos prácticos mencionados, ampliando la capacidad de uso a diferentes aplicaciones industriales en donde no se requiere de cargas de gran magnitud. Los coeficientes obtenidos mediante la solución exacta derivada por la ecuación diferencial de la teoría clásica de placas, fueron validados con los generados a partir del uso de un programa computacional de elementos finitos para todos los casos. Éstos resultados presentaron una buena aproximación, por lo que claramente nos da una alta confiabilidad en su uso. Se realiza un ensayo de un caso particular de manera experimental para comprobar los resultados obtenidos en un punto de la placa, y se discute sus resultados.

PALABRAS CLAVE

- **ESFUERZO Y DEFLEXIÓN**
- **PLACA ANULAR CIRCULAR**
- **TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS**
- **COEFICIENTES K Y K1**

ABSTRACT

For design of thin isotropic circular plates with a hole in the center that are under axisymmetric loads and in an elastic-linear medium, it is very common to use the study of (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959), based on the classical theory of plates. The practical cases presented by the authors facilitate the determination of deflection and maximum stress on the annular plates through numerical coefficients, thus helping the design engineer or manufacturer to quick and reliable approach. In this work, new coefficients are developed and validated with a different ratio of radius in annular plates, expanding the capacity of use to different industrial applications where high loads are not required. The coefficients obtained by the exact solution derived from the differential equation of the classical plate theory, were validated with those generated from the use of a finite element computational program, for all cases. These results presented a good approximation, which clearly gives us a high reliability in its use. A test experimental of a particular case is also carried out to check the results obtained in a point of the plate, and its results are discussed.

KEY WORDS

- **STRESS AND DEFLECTION**
- **CIRCULAR ANNULAR PLATE**
- **CLASSICAL PLATE THEORIES**
- **COEFFICIENTS K γ K_1**

1. CAPÍTULO INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Durante los siglos XVII y XVIII se desarrollaron varias teorías científicas y técnicas de solución relacionadas a las placas delgadas. A lo largo de la historia, los primeros estudios analíticos y experimentales en placas se dedicaron exclusivamente a las vibraciones libres. Entre los aportes más significativos desarrollados por ingenieros, científicos y físicos están los siguientes: L. Euler (1707–1783) resolvió los problemas de las vibraciones libres en membranas elásticas, J. Bernoulli (1759–1789) extiende el estudio de Euler hacia las placas, Chladni (1756–1827) describe varios experimentos con placas vibrantes y modos de vibración libre, y finalmente, S. Germain (1776–1831) y J. Lagrange (1736-1813) desarrollan la primera ecuación diferencial que describe las vibraciones libres en las placas (Szilard, 2004).

Haciendo uso de mencionados estudios, fue (Navier, 1819) quien aplicando las hipótesis de Bernoulli que fueron utilizadas con éxito para la flexión en vigas, define correctamente la primera ecuación diferencial del comportamiento de placas sometidas a cargas laterales estáticas, sin embargo, esta no era completa en su totalidad (Szilard, 2004).

Una de las más importantes contribuciones a la teoría de placas delgadas fue por parte del científico (Kirchhoff, 1876), al desarrollar la primera teoría completa acerca de la flexión en placas delgadas. Basándose en las hipótesis de Bernoulli para vigas, y la ecuación diferencial a flexión en placas de Navier, pero usando un enfoque de energía diferente (Szilard, 2004). Kirchhoff declaró algunas suposiciones básicas conocidas como “Hipótesis de Kirchhoff”, mediante las cuales simplificó la energía

funcional para las placas 3D. Demostró bajo ciertas condiciones, la ecuación de Germain – Lagrange, así como también, la ecuación de Euler y declaró que los bordes de la placa solo pueden soportar dos condiciones de contorno (Ventsel, E., & Krauthammer, T., 2001). A la teoría propuesta por Kirchhoff se la denomina “Teoría clásica de placas” por su gran aporte a la ingeniería estructural.

Lord Kelvin y Tait (1883) demostraron que los bordes de las placas están sujetos únicamente a fuerzas de corte y de momento. Y (Love, 1926) en su trabajo, usa algunas hipótesis propuestas por Kirchhoff y amplía considerablemente la rigurosa teoría de las placas al aplicar soluciones de problemas bidimensionales de elasticidad a las placas (Timoshenko, 1983).

Los ingenieros (Wahl & Lobo, 1930) estudian dentro de la ingeniería estructural, las placas planas delgadas en formas circulares de un espesor uniforme con cargas axisimétricas y varias condiciones de borde para pequeñas deflexiones. Basadas en la teoría clásica de placas, proponen la solución en 8 casos de importancia práctica para el estudio de placas circulares con un agujero en el centro. Se concluye la determinación de las máximas deflexiones y tensiones en mencionadas placas a través de coeficientes k y k_1 , en una relación $\frac{a}{b}$, en donde a es el radio mayor la placa y b el radio menor. Después de poco tiempo, (Way, 1934) presenta un estudio para grandes deflexiones en placas circulares planas sin agujeros en su centro sujetadas en su borde. En dicho estudio presenta una gráfica para encontrar una constante B , y junto con las medidas y propiedades de la placa, se determina su esfuerzo máximo. Los estudios mencionados son aptos para materiales que no exceden el límite elástico y que tienen un coeficiente de Poisson de 0.3 (Acero). En (Wahl, A. M. & Stewart Way, 1936) se resumen las dos publicaciones y dan una guía

de como poder utilizar los coeficientes y constantes para determinar la tensión máxima y su deflexión.

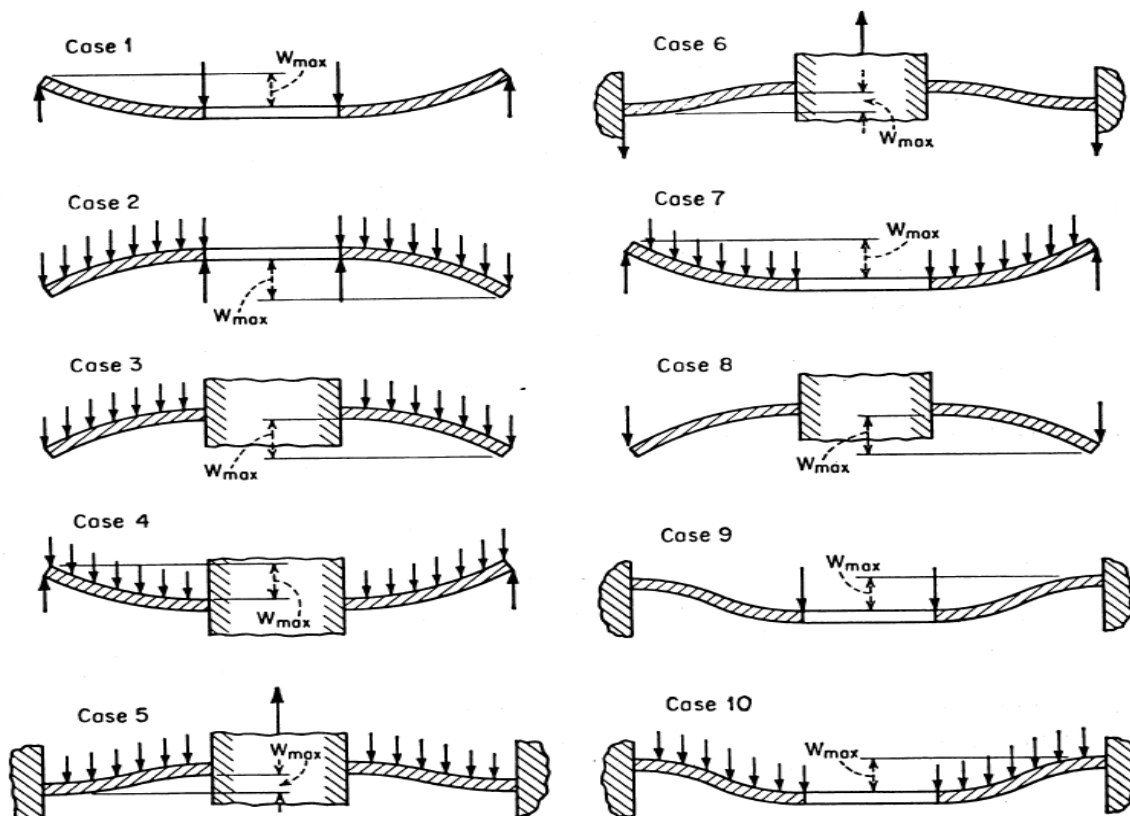


Figura 1 Casos de estudio para placas con un agujero en el centro

Fuente: (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959)

Tabla 1

Coeficientes k y k_1 para determinar tensión y deflexión máxima.

$a/b =$	1.25		1.5		2		3		4		5	
Case	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1
1	1.10	0.341	1.26	0.519	1.48	0.672	1.88	0.734	2.17	0.724	2.34	0.704
2	0.66	0.202	1.19	0.491	2.04	0.902	3.34	1.220	4.30	1.300	5.10	1.310
3	0.135	0.00231	0.410	0.0183	1.04	0.0938	2.15	0.293	2.99	0.448	3.69	0.564
4	0.122	0.00343	0.336	0.0313	0.74	0.1250	1.21	0.291	1.45	0.417	1.59	0.492
5	0.090	0.00077	0.273	0.0062	0.71	0.0329	1.54	0.110	2.23	0.179	2.80	0.234
6	0.115	0.00129	0.220	0.0064	0.405	0.0237	0.703	0.062	0.933	0.092	1.13	0.114
7	0.592	0.184	0.976	0.414	1.440	0.664	1.880	0.824	2.08	0.830	2.19	0.813
8	0.227	0.00510	0.428	0.0249	0.753	0.0877	1.205	0.209	1.514	0.293	1.745	0.350
9	0.194	0.00504	0.320	0.0242	0.454	0.0810	0.673	0.172	1.021	0.217	1.305	0.238
10	0.105	0.00199	0.259	0.0139	0.480	0.0575	0.657	0.130	0.710	0.162	0.730	0.175

Fuente: (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959)

(McPherson, Ramberg, & Levy, 1942) realizan ensayos en la región elástica de placas planas circulares delgadas bajo presiones normales, que tienen fijados sus bordes externos. Describen un accesorio para realizar mencionados ensayos en placas planas circulares de 5 pulgadas de diámetro usando diferentes materiales, en las que se tomó especial cuidado en la sujeción rígida. Se concluye que las deflexiones en el centro y los esfuerzos en las fibras externas a bajas presiones presenta buenas aproximaciones con los valores teóricos, en los que se incluye la teoría de Kirchhoff.

(Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959) mediante su amplia teoría de placas y cascarones determina métodos de solución para el cálculo de deflexión y tensión en placas circulares y rectangulares, con cargas axisimétricas y transversales respectivamente. Dicho estudio, aplica para varios casos particulares de importancia práctica en el ámbito industrial en los que se incluye las placas circulares con un agujero circular en el centro, en el cual se propone dos casos más de los estudiados por (Wahl & Lobo, 1930), ver Figura 1. Cabe recalcar que no existen coeficientes para una relación $\frac{a}{b} < 1.25$ (Ver tabla 1), necesarios en distintas aplicaciones en donde las cargas aplicadas no son tan altas, lo que produce un sobredimensionamiento en el diseño de las placas circulares anulares al tomar el mínimo valor que nos ofrece el autor, que es de 1.25.

En la década de los 80, (Chiu, 1986) determina la solución de una placa circular bajo una carga uniforme con diferentes tipos de condiciones de borde, usando un programa computacional de elementos finitos llamado ANSYS, en el que usa un elemento finito cuadrilátero tipo cáscara (STIF 63). Realiza una comparación de

resultados con una solución analítica, en la que aclara que el FEM es muy versátil y presenta buenas aproximaciones.

En los últimos años, (Sukla, 2009) estudia el comportamiento estructural de una placa circular rigidizada por refuerzos radiales bajo cargas estáticas uniformes, utilizando una o más vigas. Dicho estudio, lo realizó mediante el método de los elementos finitos usando el programa computacional ANSYS, con un elemento sólido tetraédrico de 10 nodos (Solid 187). Se estudia el comportamiento lineal y no lineal de las vigas utilizadas en la placa, carga estática y dinámica. Concluye que la adición de refuerzos aumenta la capacidad de carga, y aún más, si aumentamos la cantidad de rigidizadores.

A continuación, (Vanam, Rajyalakshmi, & Inala, 2012) hacen un análisis estático de una placa rectangular isotrópica con varias condiciones de contorno y varios tipos de aplicaciones de carga. Se lleva a cabo un análisis de elementos finitos considerando un elemento finito cuadrilátero de cuatro nodos (SHELL 63), utilizando el software ANSYS y una programación en MATLAB. Posteriormente, se compara los resultados de los métodos estudiados y se concluye que se obtiene resultados similares al de la solución exacta determinada por Kirchhoff.

(Vrabie M. & Baetu S. A., 2013) presentan un caso de estudio de una placa de hormigón armado en el que se analiza su desplazamiento por FEM mediante SAP 2000 y ANSYS 12. Para este último, utilizando un elemento finito 2D tipo cáscara SHEL 63 y SHELL 181, y un elemento sólido 3D SOLID 65. Se concluye que los resultados por FEM se comparan muy bien con los analíticos, y se recomienda utilizar el SHELL 181 que posee menos grados de libertad.

(Gujar P. S. & Ladhane K. B., 2015) estudiaron el efecto de la variación que posee el espesor de una placa circular isotrópica sobre su deformación y esfuerzo a flexión estática utilizando el método analítico y un software de Elementos Finitos ANSYS. Se consideran las condiciones de contorno simplemente soportadas y fijadas, sometidas a una carga uniformemente distribuida y una carga central concentrada. Se concluye que la deflexión y los esfuerzos en placas delgadas disminuyen al aumentar el espesor.

(Gujar & Pendhari, 2016) modelan y analizan la flexión estática de una placa circular isotrópica empotrada y apoyada, mediante el software ANSYS usando un elemento finito tipo cáscara con cuatro nodos (SHELL 63). Investigan el efecto que incide el uso de varios tipos de mallas, analizando su convergencia a las soluciones analíticas de una placa. Se concluye que el mallado tipo "Mapeo Multi zona" presenta las mejores aproximaciones, siguiéndole el mallado libre con elementos cuadriláteros.

Los estudios mencionados nos dan un claro enfoque del estudio de placas delgadas, el desarrollo y uso muy común de la teoría clásica de placas para diferentes propósitos y aplicaciones. Ante una nueva era de eficiencia en el diseño estructural, nos vemos obligados a estudiar y desarrollar nuevas técnicas para que se utilicen los menores recursos posibles. La facilidad y la rápida respuesta que proponen los autores (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959) al diseño de placas delgadas circulares con un agujero en el centro, se presentan en ciertas relaciones radiales, por lo que, ante aplicaciones que no requieren cargas de gran magnitud el ingeniero de diseño debe utilizar la mínima relación. Conociendo un nuevo

coeficiente que responda antes cargas más bajas se aporta al medio que nos rodea con la menor utilización de recursos.

El propósito de esta tesis implica un estudio analítico y computacional de nuevos coeficientes para el análisis de esfuerzos y deflexiones en placas circulares isotrópicas con cargas axisimétricas.

1.2. Justificación e importancia

Las placas circulares anulares se usan ampliamente en muchas aplicaciones de ingeniería como sujeción de tubería para el transporte de fluidos, recipientes a presión, separación de fluidos en intercambiadores de calor, sujeción de piezas de trabajo, aplicaciones con guías y utillajes, estructuras metálicas, entre otros. Las placas utilizadas en mencionadas aplicaciones usualmente están sujetas a cargas axisimétricas, lo que genera esfuerzos de flexión axisimétrica en la placa. La flexión de las placas se refiere a la deformación de la placa en dirección perpendicular al plano de la placa bajo la acción de fuerzas y momentos externos, por lo tanto, el análisis de flexión de la placa es de suma importancia. La deflexión en una placa circular anular isotrópica con cargas axisimétricas puede determinarse resolviendo los casos prácticos que presenta (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959), basados en la teoría clásica de placas.

La importancia de este proyecto se centrará en la generación y validación de nuevos coeficientes k y k_1 establecidos por (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959), permitiendo determinar la mayor deflexión y tensión en placas circulares isotrópicas con cargas estáticas axisimétricas para varios casos particulares de importancia práctica en donde las cargas aplicadas no son representativas. Una vez

que se conocen las tensiones, las teorías de falla se pueden usar para determinar si una placa fallará bajo dicha carga dada.

Al no existir coeficientes para una relación $\frac{a}{b} < 1.25$, necesarios en distintas aplicaciones de la industria en donde las cargas aplicadas no son tan altas, el ingeniero mecánico o fabricante se ve obligado a diseñar la placa circular con la mínima relación establecida, generando así, un diseño sobredimensionado y utilizando más recursos (acero, soldadura, energía, entre otros) de los necesarios, afectando al medio que nos rodea.

Al utilizar los nuevos coeficientes se puede determinar un diseño más aproximado a la realidad, optimizando costos y recursos al reducir el tamaño de la placa circular lo que significa el cuidado del medio ambiente que es esencial en esta nueva generación.

Para el análisis de flexión estática de una placa circular isotrópica se utilizará el método analítico, es decir, la teoría clásica de placas y un software de elementos finitos FEM. Adicionalmente para comprobar los resultados, se realizarán experimentos para un caso práctico de los mencionados anteriormente de suma importancia.

1.3. Alcance

El presente proyecto tiene el alcance de validar y generar nuevos coeficientes k y k_1 establecidos por (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959) en su trabajo teoría de placas y cascarones, que permiten determinar la mayor deflexión, y su mayor tensión en placas circulares isotrópicas con cargas estáticas axisimétricas para varios casos particulares de importancia práctica. Para la creación de dichos coeficientes se utilizará el método analítico y un software de Elementos Finitos FEM.

Se realizarán experimentos de un caso particular que comprueben los resultados generados por los métodos descritos y se discutirán sus resultados.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Validar y determinar los coeficientes para el análisis de esfuerzos en placas circulares isotrópicas con cargas simétricas cuando la relación $\frac{a}{b} < 1.25$ comparando las soluciones analíticas con simulaciones numéricas.

1.4.2. Objetivos específicos

- Realizar una simulación numérica para cada caso con sus respectivas condiciones de frontera.
- Analizar la convergencia y estudio del mallado con la finalidad de optimizar el costo computacional y obtener soluciones confiables.
- Analizar las variables que influyen en los coeficientes para cada caso.
- Ensayar un caso particular de manera experimental para comprobar los resultados obtenidos.
- Determinar los posibles errores que se pueden generar en los diferentes métodos de análisis.
- Identificar aplicaciones tecnológicas para el uso de la optimización de recursos al seleccionar un coeficiente más aproximado a la realidad.

2. CAPÍTULO REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

2.1. Teoría clásica de placas

Una placa es un elemento estructural plano y delgado que al estar cargado lateralmente su comportamiento se modeliza por la teoría clásica de placas mediante el desplazamiento de su plano medio, en donde, el esfuerzo que predomina en las placas es el de flexión. La teoría clásica de placas delgadas está basada en las hipótesis de Kirchhoff-Love, las cuales hacen suposiciones de las hipótesis hechas por Bernoulli-Navier usadas en la teoría simple de vigas (Chandrashekhara, 2001).

Para estudiar a una placa, ésta debe ser de un material isotrópico y trabajar en un medio elástico - lineal. Así como también, tiene que ser delgada; el espesor será menor a 1/5 de su longitud efectiva. A continuación, se presentan las hipótesis que maneja la teoría en un sistema de coordenadas cartesianas:

1. Los puntos del interior de una placa delgada solo sufren desplazamiento en la dirección perpendicular al plano medio de la misma (Galán, 2015).
2. Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio, tienen el mismo desplazamiento perpendicular a plano medio (Análisis de placas y lámina, s.f.)
3. La deflexión del plano medio de la placa es pequeña comparado con su espesor, por lo que su pendiente es pequeña, y al ser evaluada al cuadrado se considera despreciable con respecto a la unidad. (Chandrashekhara, 2001)
4. Las deformaciones son pequeñas y las cargas se aplican sobre la estructura sin deformar (Galán, 2015). La deformación normal en la dirección de la vertical ε_z se la considera despreciable, lo que permite limitar el espesor de la placa.

5. Las normales al plano medio se mantienen rectas y ortogonales a la deformada del plano medio durante la flexión. Esto significa que las deformaciones transversales se consideran despreciables ($\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$), así como sus esfuerzos. Por lo tanto, la deflexión de la placa está asociada principalmente por las deformaciones de curvatura. (Chandrashekhara, 2001)
- Al igual que con las vigas, la regla empírica para que estas tensiones puedan ignorarse, es que la deformación de la placa debe ser inferior al 10% de su espesor (Burvill, 2013). En la Figura 2, se muestra la deformación real y supuesta de la normal al plano medio en una placa delgada.
6. El plano medio de la placa permanece sin restricciones después de la flexión, por lo que se considera un plano neutral (Chandrashekhara, 2001). Esta condición se satisface si la placa se dobla en una superficie desarrollable y no existe fuerzas externas a parte de las cargas laterales aplicadas.
7. La tensión normal σ_z al plano medio es muy pequeña comparada con los dos componentes de tensión normal σ_x y σ_y , por lo tanto, es despreciable.

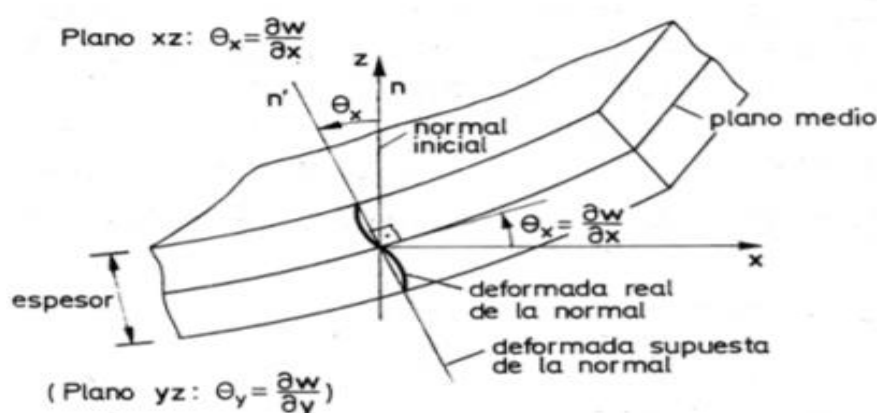


Figura 2 Deformación real y supuesta de la normal al plano medio de una placa delgada en coordenadas cartesianas.

Fuente: (Análisis de placas y lámina, s.f.)

Las hipótesis de la teoría reducen el problema de la placa tridimensional a bidimensional, por lo tanto, existirían solamente esfuerzos normales σ_x y σ_y , además de su esfuerzo cortante τ_{xy} ; siendo funciones de 2 coordenadas, x y y (Ver Figura 3). Mencionados esfuerzos pueden ser expresados en términos de la deflexión de la placa. (Chandrashekhara, 2001)

Éstas suposiciones que se basan en el desplazamiento de la placa no son estrictamente ciertas, ya que en éstas se desprecian algunos efectos reales (esfuerzos de corte en todos los planos, estiramiento del plano medio, entre otros) que se presentan en la placa, pero proporcionan una teoría con suficiente precisión para los propósitos de diseño más prácticos.

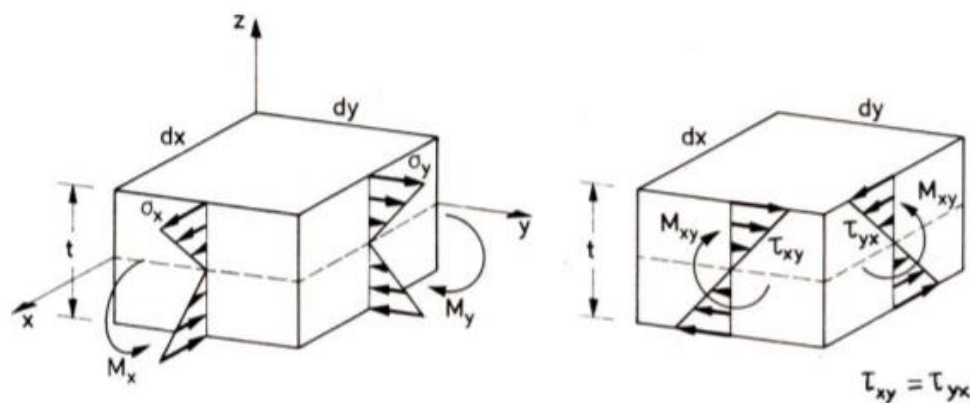


Figura 3 Tensiones normales y cortante de una placa delgada en coordenadas cartesianas.

Fuente: (Análisis de placas y lámina, s.f.)

2.1.1. Análisis de flexión estática de placas circulares isotrópicas

En general, el desarrollo de las ecuaciones básicas de gobierno para el análisis de flexión estática en placas circulares isotrópicas se realiza en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . En la Figura 4b, se muestra la flexión axisimétrica de una placa circular de espesor constante provocada por una carga que está simétricamente distribuida alrededor de su eje perpendicular, a través de su centro. Esta situación

genera que la deflexión de la superficie media de la placa, también sea simétrica. En todos los puntos igualmente distantes del centro de la placa, las deflexiones serán las mismas y es suficiente considerar una sección diametral a través de su eje de simetría para calcular deflexiones y esfuerzos. (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959).

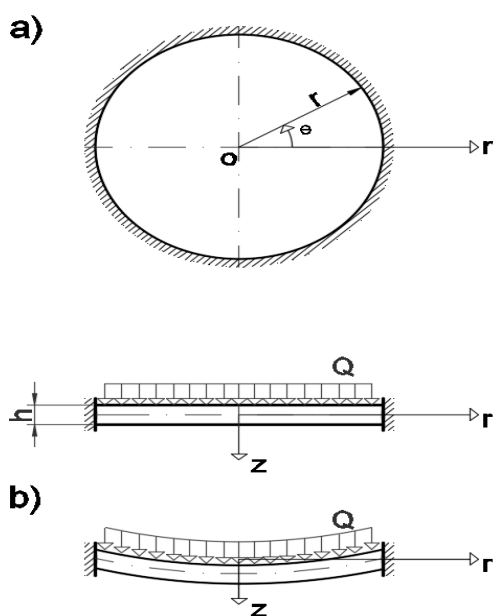


Figura 4 Placa circular anular.
 (a) Placa antes de la flexión.
 (b) Placa durante la flexión.

La condición de flexión axisimétrica en una placa se garantiza al tener una geometría de revolución completa ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), al igual que, la carga aplicada y condiciones de borde características no son independientes del ángulo θ . Tomando así, a r como la única variable independiente y dejando la utilización de las derivadas parciales. Por lo tanto, la deflexión y los esfuerzos en una placa circular dependerán únicamente de la posición radial r .

Otra condición para garantizar una flexión axisimétrica, es que durante la flexión el esfuerzo cortante (τ_{rt}) es despreciable y la relación entre los momentos flectores existentes y las curvaturas, es la de una flexión pura en una placa (Chiu, 1986).

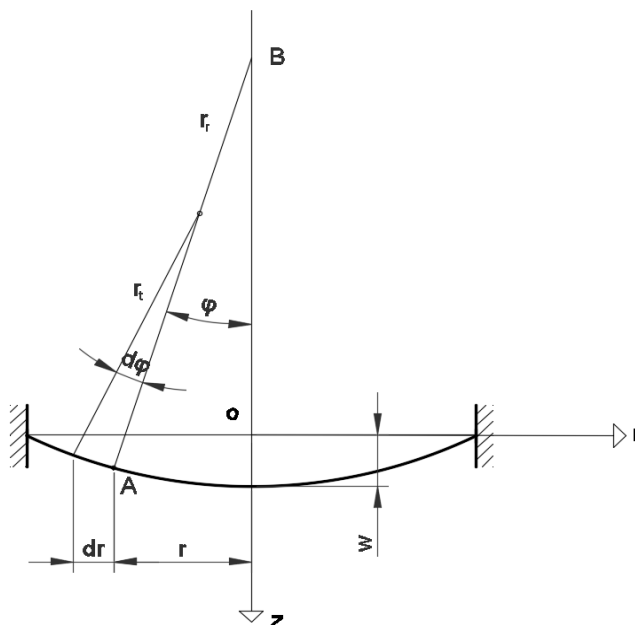


Figura 5 Deflexión simétrica de placas circulares bajo cargas axisimétricas.

Basándonos en las hipótesis de la teoría clásica de placas se procede a determinar la ecuación diferencial que gobierna la deflexión general en una placa circular considerada isotrópica.

En la Figura 5, se puede apreciar una sección diametral de una placa circular deflexionada con su eje de simetría oz , correspondiente a la Figura 4. Analizando un punto cualquiera A del plano medio de la placa, que está a una distancia radial r , se observa su desplazamiento w en la dirección z . Haciendo un análisis en la dirección radial y usando relaciones trigonométricas, para pequeñas deformaciones tenemos que la pendiente máxima en el punto A es:

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} \quad [1]$$

Por lo tanto, la curvatura de la placa en la misma dirección radial, es:

$$\frac{1}{r_r} = -\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr} \quad [2a]$$

De igual manera, para un pequeño valor de φ en la dirección tangencial tenemos:

$$r_t \sin \varphi = r$$

$$\frac{1}{r_t} = \frac{\varphi}{r} = \frac{dw}{dr} \quad [2b]$$

Definiendo así, los radios de curvatura principales r_r y r_t de la superficie deflexionada en el punto A . Ahora, las deformaciones unitarias en las direcciones radial y tangencial, para el caso de deformación axisimétrica se definen por el arco que forman las normales.

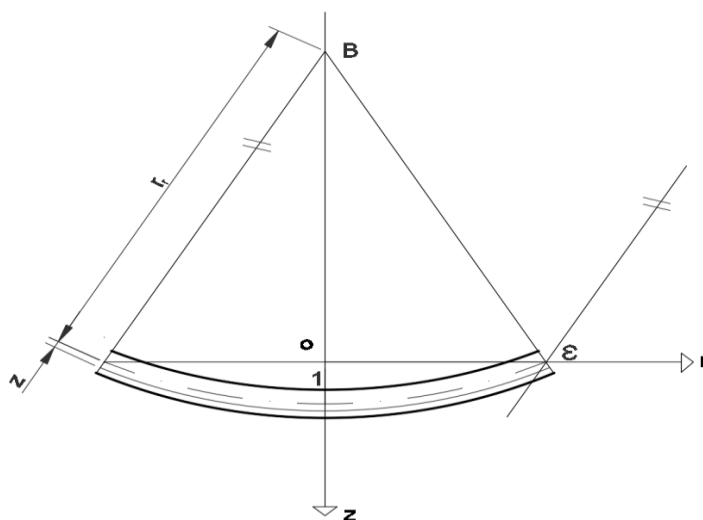


Figura 6 Deformación unitaria para el caso de flexión axisimétrica en una placa delgada

Tomando una sección del plano medio antes de la deformación que mida una unidad. Ya una vez deformada, solo está sección continúa midiendo la unidad (Ver Figura 6). Si analizamos una fibra a una distancia z debajo del plano medio, la sección de ésta medirá más de la unidad, puesto que es traccionada y sufre un alargamiento conocido como deformación unitaria ε .

$$\frac{r}{z} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Tomando este alargamiento en la dirección radial, tenemos que ε_r es:

$$\varepsilon_r = \frac{z}{r_r} \quad [3a]$$

De la misma forma, el alargamiento en la dirección tangencial es:

$$\varepsilon_t = \frac{z}{r_t} \quad [3b]$$

Sabiendo que, el estudio de la flexión en las placas delgadas se considera en un estado plano de tensiones, al sustituir los alargamientos de las Ecuaciones [3a] y [3b] en la Ley Generalizada de Hooke para el estado de biaxialidad (relaciones esfuerzo – deformación), y asumiendo que el tercer esfuerzo normal es cero ($\sigma_z = 0$), se obtienen los esfuerzos en las direcciones principales para un material con módulo de elasticidad E y una relación de Poisson u :

$$\sigma_r = \frac{Ez}{1-u^2} \left(\frac{1}{r_r} + \frac{u}{r_t} \right) = \frac{Ez}{1-u^2} \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{u}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad [4a]$$

$$\sigma_t = \frac{Ez}{1-u^2} \left(\frac{1}{r_t} + \frac{u}{r_r} \right) = \frac{Ez}{1-u^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + u \frac{d^2w}{dr^2} \right) \quad [4b]$$

En la Figura 7, se observa la distribución del esfuerzo normal por unidad de espesor en la dirección radial.

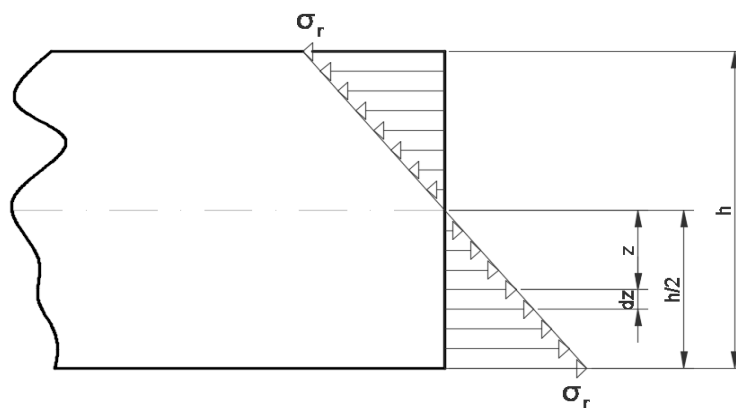


Figura 7 Sección de una placa circular tensionada en la dirección radial.

Los esfuerzos están relacionados con los momentos por unidad de longitud. Aplicando los momentos flectores a los bordes de la placa para causar flexión, tenemos que:

$$M_r = \int_{-h/2}^{+h/2} z \sigma_r dz$$

$$M_t = \int_{-h/2}^{+h/2} z \sigma_t dz$$

Reemplazando las ecuaciones [4a] y [4b], resolviendo se tiene que:

$$M_r = \frac{E}{1-u^2} \left(\frac{1}{r_r} + \frac{u}{r_t} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-u^2)} \left(\frac{1}{r_r} + \frac{u}{r_t} \right)$$

$$M_t = \frac{Eh^3}{12(1-u^2)} \left(\frac{1}{r_t} + \frac{u}{r_r} \right)$$

Donde, D es la rigidez a la flexión de la placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-u^2)}$$

Entonces, las ecuaciones de los momentos flectores son:

$$M_r = D \left(\frac{1}{r_r} + \frac{u}{r_t} \right) \quad [5a]$$

$$M_t = D \left(\frac{1}{r_t} + \frac{u}{r_r} \right) \quad [5b]$$

Las ecuaciones [5a] y [5b] son el equivalente de $M = EI$ en la teoría simple de vigas (Burvill, 2013). Los máximos esfuerzos en una placa circular cargada axisimétricamente se los puede determinar al reemplazar las ecuaciones [2] en [5], sabiendo que w es sólo una función de r , entonces:

$$M_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + u \frac{\varphi}{r} \right) = D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{u}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad [6a]$$

$$M_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + u \frac{d\varphi}{dr} \right) = D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + u \frac{d^2w}{dr^2} \right) \quad [6b]$$

Ahora, combinando las ecuaciones [4] y [6], tenemos:

$$\sigma_r = 12 \frac{M_r z}{h^3}$$

$$\sigma_t = 12 \frac{M_t z}{h^3}$$

Donde, el máximo y mínimo valor del esfuerzo están en $\pm \frac{h}{2}$, siendo los límites del espesor de la placa. Por lo que quedan definidas como:

$$\sigma_{r \text{ MAX.MIN}} = \pm 6 \frac{M_r}{h^2} \quad [7a]$$

$$\sigma_{t \text{ MAX.MIN}} = \pm 6 \frac{M_t}{h^2} \quad [7b]$$

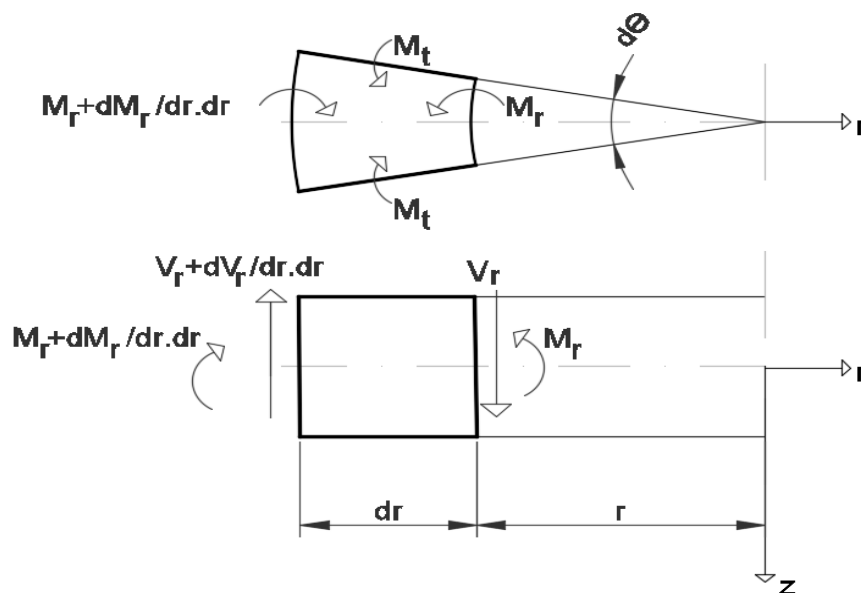


Figura 8 Elemento diferencial de una placa circular

El equilibrio de un elemento diferencial de una placa circular cargada, está dado por las variaciones en la fuerza de corte y momentos flectores por unidad de longitud (Ver Figura 8). Se puede apreciar que, como resultado de la simetría se anulan los

momentos y fuerzas que dependen de la variable θ , que son: $M_{rt} = V_t = 0$. Por lo tanto, solo M_r , M_t y V_r existen al ser función de r y no variar con respecto a θ .

Ahora, sumando los momentos en el plano rz sobre el centro del elemento bajo las condiciones de equilibrio, y además, sabiendo que para pequeñas deflexiones $d\theta$, $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, entonces tenemos:

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr\right)(r + dr)d\theta - M_r r d\theta - 2(M_t dr) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \left(V_r + \frac{dV_r}{dr} dr\right)(r + dr)d\theta \frac{dr}{2} + (V_r r d\theta) \frac{dr}{2} = 0$$

Desarrollando e ignorando los términos diferenciales de orden mayor a 2, se obtiene:

$$M_r + r \frac{dM_r}{dr} - M_t + V_r r = 0$$

Reemplazando las ecuaciones [6a] y [6b], tenemos:

$$D \left(\frac{d\varphi}{dr} + u \frac{\varphi}{r} \right) + rD \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{u}{r} \frac{d\varphi}{dr} - u \frac{\varphi}{r^2} \right) - D \left(\frac{\varphi}{r} + u \frac{d\varphi}{dr} \right) + rV_r = 0$$

Ahora, simplificando:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{V_r}{D}$$

Agrupando la expresión anterior, puede ser representada como:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = -\frac{V}{D} \quad [8]$$

Determinando así, la ecuación de gobierno diferencial de deflexión en una placa circular que da solución para cualquier problema de placas circulares bajo cargas axisimétricas. Al integrar ésta ecuación, se introducen constantes de integración que deben ser encontradas por las condiciones de borde características de la placa anular.

2.1.2. Casos prácticos

Basado en la flexión estática de una placa circular, (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959) presentan 10 casos prácticos de placas circulares con un agujero en su centro bajo cargas axisimétricas (Ver Figura 9). En todos los casos, el espesor de la placa deber ser pequeño (menor a 1/5 de su ancho de la placa circular), y el material debe ser isotrópico y no superar el límite de elasticidad.

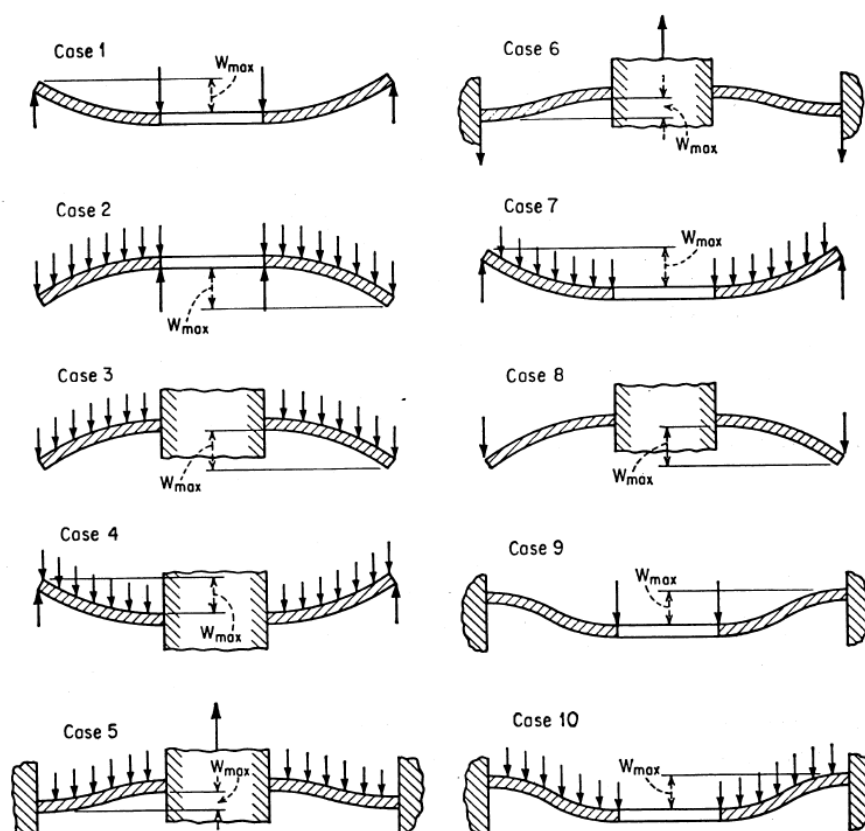


Figura 9 Casos de estudio para placas con un agujero en el centro.

Fuente: (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959)

Dichos casos de estudio, están bajo las siguientes consideraciones:

1. Soportado / empotrado en su radio externo ($r = a$) o interno ($r = b$).
2. Aplicado una carga axisimétrica distribuida sobre su superficie Q / a lo largo del borde P en la placa circular anular.

En todos los casos, el máximo esfuerzo y deflexión están dados por las ecuaciones [9a] y [9b], respectivamente; en la que dependen de la aplicación de la carga y sus condiciones de borde características.

$$\sigma_{Max} = k \frac{qa^2}{h^2} \quad o \quad \sigma_{Max} = \frac{kP}{h^2} \quad [9a]$$

$$w_{Max} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad o \quad w_{Max} = k_1 \frac{Pa^2}{Eh^3} \quad [9b]$$

2.1.3. Coeficientes k y k_1

Los coeficientes k y k_1 que se observan en las ecuaciones [9a] y [9b], están determinados para varias proporciones de radios a/b y una relación de Poisson $\nu = 0.3$. (Tabla 2). Existe un único coeficiente para cada tipo de carga aplicada y soporte usado en los bordes de la placa.

Tabla 2

Coeficientes k y k_1 para determinar tensión y deflexión máxima en placas con un agujero en su centro.

$a/b =$	1.25		1.5		2		3		4		5	
Case	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1
1	1.10	0.341	1.26	0.519	1.48	0.672	1.88	0.734	2.17	0.724	2.34	0.704
2	0.66	0.202	1.19	0.491	2.04	0.902	3.34	1.220	4.30	1.300	5.10	1.310
3	0.135	0.00231	0.410	0.0183	1.04	0.0938	2.15	0.293	2.99	0.448	3.69	0.564
4	0.122	0.00343	0.336	0.0313	0.74	0.1250	1.21	0.291	1.45	0.417	1.59	0.492
5	0.090	0.00077	0.273	0.0062	0.71	0.0329	1.54	0.110	2.23	0.179	2.80	0.234
6	0.115	0.00129	0.220	0.0064	0.405	0.0237	0.703	0.062	0.933	0.092	1.13	0.114
7	0.592	0.184	0.976	0.414	1.440	0.664	1.880	0.824	2.08	0.830	2.19	0.813
8	0.227	0.00510	0.428	0.0249	0.753	0.0877	1.205	0.209	1.514	0.293	1.745	0.350
9	0.194	0.00504	0.320	0.0242	0.454	0.0810	0.673	0.172	1.021	0.217	1.305	0.238
10	0.105	0.00199	0.259	0.0139	0.480	0.0575	0.657	0.130	0.710	0.162	0.730	0.175

Fuente: (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959)

2.2. Simulaciones Numéricas

2.2.1. Introducción

El método de los elementos finitos (FEM) es una poderosa técnica de análisis numérico que ayuda a obtener aproximaciones confiables a la resolución de grandes problemas de ingeniería que tienen geometrías complejas y diferentes condiciones de servicio, que mediante los métodos analíticos resultan algo tediosos de resolver.

FEM encuentra soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales parciales (PDE) y sus sistemas, dividiendo los problemas grandes en pequeños elementos que se pueden resolver el uno con el otro (Discretización). Las ecuaciones las resuelve usando el método Galerkin con funciones de aproximación polinómicas, y su solución se obtiene por la eliminación de las derivadas espaciales de la PDE. (Sukla, 2009)

En la actualidad, existen diferentes programas computacionales que resuelven problemas de ingeniería usando el método FEM. Poseen diferentes técnicas numéricas computacionales efectivas que ayudan a obtener un mejor rendimiento, lo que reduce el gasto computacional de análisis.

Y en los últimos años, gracias al desarrollo de la tecnología se ha incrementado la potencia de las computadoras (hardware), promoviendo el uso del método FEM en la industria y la investigación.

2.2.2. Análisis de placas y membranas utilizando FEM

Para el análisis de elementos estructurales, usualmente se les clasifica como: discretos y continuos (Ver Figura 10). Las deformaciones en estructuras discretas pueden definirse de manera exacta mediante un número finito de parámetros, como

los puntos de unión de elementos. Cosa que no ocurre en las estructuras continuas, el número de puntos de unión es infinito, por lo tanto, es imposible estudiarlas utilizando el mismo método (Celigüeta Lizarza J. T., 2011). Las estructuras continuas son muy frecuentes en ingeniería, y las placas circulares con un agujero en el centro son parte de este sistema.

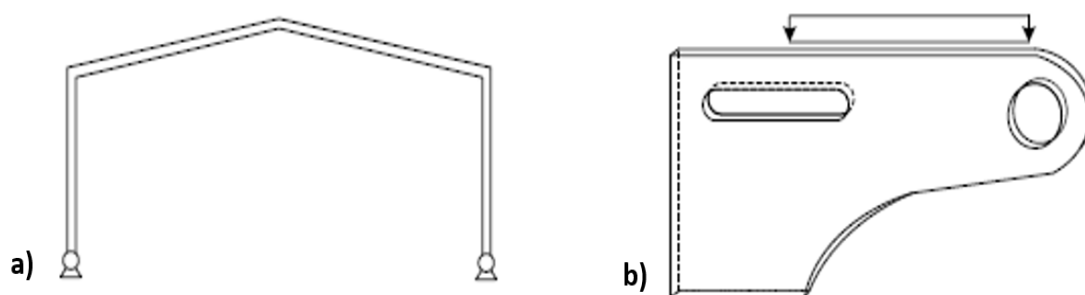


Figura 10 Estructura a) discreta y b) continua

Fuente: (Celigüeta Lizarza J. T., 2011)

Los sistemas continuos se han venido estudiando mediante el método analítico cuando se tratan de geometrías sencillas y condiciones de contorno simples. Sin embargo, el método FEM es una alternativa para solucionar problemas más complejos.

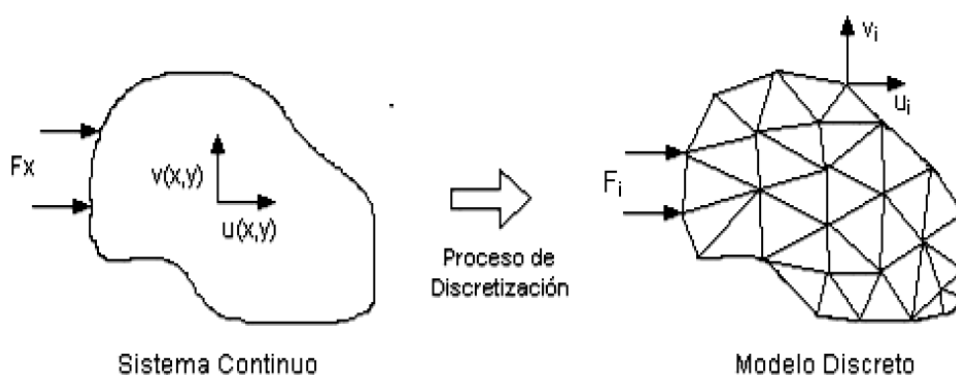


Figura 11 Discretización de un sistema continuo

Fuente: (Hutton, 2004)

Para la resolución de éstos sistemas mediante el FEM se recurre a la hipótesis de discretización (Ver Figura 11), que se basa en la división del continuo a través de

líneas o superficies imaginarias en una serie de regiones contiguas y disjuntas entre sí, de formas geométricas sencillas y normalizadas, llamadas elementos finitos (Celigüeta Lizarza J. T., 2011). Dichos elementos se unen por puntos llamados nodos, y sus desplazamientos son las incógnitas del problema, ya que, para cada elemento existen fuerzas concentradas en éstos que equilibran las tensiones del contorno del elemento. Para el análisis de problemas cuya configuración pueda ser descrita en términos de dos variables independientes, se usan elementos finitos en 2 dimensiones (Ver Figura 12). (RAO, 2011)

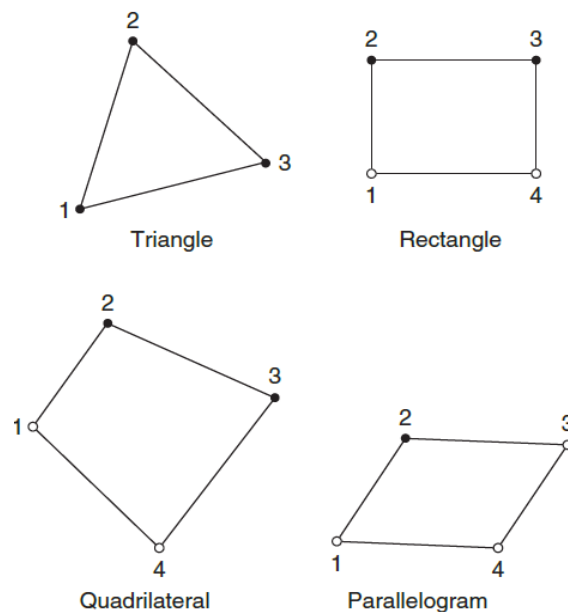


Figura 12 Elementos finitos bidimensionales

Fuente: (RAO, 2011)

Estudiando el tipo de elemento finito adecuado para el análisis de placas delgadas cargadas sobre su plano, que se las considera en un estado de esfuerzos en el plano, los elementos principales son: el triangular y cuadrilátero. Se prefieren a los elementos cuadriláteros cuando se presenta una isotropía geométrica, y a los triangulares en irregularidades de la geometría.

En la Tabla 3 se resumen los tipos de elementos finitos utilizados en varios estudios estáticos de placas delgadas bajo cargas laterales sobre su plano por el método FEM. Se muestra una justificación del tipo de elemento usado en un software computacional FEM.

Tabla 3

Tipos de elementos finitos utilizados en el análisis estático de placas planas por FEM

AUTOR	ESTUDIA	TIPO DE ELEMENTO	PROGRAMA FEM	JUSTIFICACIÓN
(Chiu, 1986)	PLACA CIRCULAR	Cuadrilateral shell element (STIF 63)	ANSYS	Recomendación ANSYS, pequeñas deformaciones en el plano.
(Vanam, Rajyalakshmi, & Inala, 2012)	PLACA RECTANGULAR	Cuadrilátero de 4 nodos (SHELL 63)	ANSYS	Capacidades de flexión.
(Sukla, 2009)	PLACA CIRCULAR CON RIGIDIZADORES	Tetraedro de 10 nodos	ANSYS	Contacto entre dos cuerpos
(Gujar & Pendhari, 2016)	PLACA CIRCULAR	Tipo Cáscara (Shell 63) Cuadrilateral element	ANSYS	Capacidades de doblado y membrana.
(Gujar P. S. & Ladhane K. B., 2015)	PLACA CIRCULAR	Four Node SHELL181	ANSYS	Elemento 2D con 6 grados de libertad.
(Banerjee, Chen J., Kathirgamanathan, A., & Raj D., 2011)	PLACA RECTANGULAR	SHELL181 y SOLSH190	ANSYS	Uso de elementos de placa y cáscara en delgadas estructuras
(Vrabie M. & Baetu S. A., 2013)	PLACA CIRCULAR DE HORMIGON ARMADO	SHELL 63, SHELL 181, Y 3D SOLID 65	ANSYS	Recomienda SHELL 181, posee menor grados de libertad.
ABAQUS MANUAL	ELEMENTOS TIPO CÁSCARA	S8R5, S4R5, STR165, S8R, S9R5, SAXA	ABAQUS	Adecuado para placas delgadas y gruesas.

De acuerdo a las investigaciones realizadas, se concluye que el elemento tipo cáscara es el más ideal para modelar placas delgadas ya que posee capacidades de flexión y permiten cargas en el plano y en dirección normal. Cada nodo posee 6 grados de libertad (3 traslacionales y 3 rotacionales), rigidización a la tensión, y grandes capacidades de deflexión. Por lo tanto, se converge más rápido a la solución, a diferencia de los elementos sólidos tridimensionales que necesitan más recursos computacionales.

En un análisis FEM, es muy necesario hacer una refinación óptima de mallado para obtener el mejor ahorro computacional. Dicho mallado, consiste en aumentar el número de nodos y elementos, generando más soluciones a las ecuaciones PDE y presentando así, una mayor precisión a la convergencia de resultados obtenidos por la solución analítica.

3. CAPÍTULO

VALIDACIÓN Y DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES PARA EL ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN PLACAS CIRCULARES ISOTRÓPICAS CON CARGAS SIMÉTRICAS

3.1. Soluciones Analíticas

3.1.1. Ecuaciones de gobierno

En ésta sección, se estudian las ecuaciones de gobierno para los 10 casos de importancia práctica planteados por (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959). Los casos se diferencian por el tipo de carga aplicada y las condiciones de borde características de cada caso.

Como se estudió en el Capítulo 2, la flexión estática de una placa circular isotrópica bajo cargas axisimétricas en el medio elástico se rige bajo la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = -\frac{V}{D} \quad [8]$$

Donde, D es el módulo de rigidez de la placa:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Y, V es la fuerza de corte por unidad de longitud, que es la representación de la carga axisimétrica (ya sea Q o P) aplicada en la superficie de la placa a lo largo de su posición radial. Se la determina por las ecuaciones de equilibrio en la dirección de la carga aplicada $\sum F_z = 0$.

Si obtenemos los valores mencionados de V y D , y reemplazamos en la ecuación [8], integrando y simplificando las veces necesarias determinamos las ecuaciones de la pendiente [10a] y deflexión [10b] de la placa en función de r .

$$\varphi[r] = -\frac{dw}{dr} \quad [10a]$$

$$w(r) = \frac{d^2w}{dr^2} \quad [10b]$$

Tabla 4

Condiciones de borde y fuerza de corte por unidad de longitud en todos los casos.

CASO	BCS1	BCS2	BCS3	V
1	$M_r(a) = 0$	$M_r(b) = 0$	$w(a) = 0$	$V = \frac{P}{2\pi r}$
2	$M_r(a) = 0$	$M_r(b) = 0$	$w(b) = 0$	$V = \frac{Qa^2}{2r} - \frac{Qr}{2}$
3	$M_r(a) = 0$	$\varphi(b) = 0$	$w(b) = 0$	$V = \frac{Qa^2}{2r} - \frac{Qr}{2}$
4	$M_r(a) = 0$	$\varphi(b) = 0$	$w(a) = 0$	$V = \frac{Qr}{2} - \frac{Qb^2}{2r}$
5	$\varphi(a) = 0$	$\varphi(b) = 0$	$w(b) = 0$	$V = \frac{Qa^2}{2r} - \frac{Qr}{2}$
6	$\varphi(a) = 0$	$\varphi(b) = 0$	$w(b) = 0$	$V = \frac{P}{2\pi r}$
7	$M_r(a) = 0$	$M_r(b) = 0$	$w(a) = 0$	$V = \frac{Qr}{2} - \frac{Qb^2}{2r}$
8	$M_r(a) = 0$	$\varphi(b) = 0$	$w(b) = 0$	$V = \frac{P}{2\pi r}$
9	$\varphi(a) = 0$	$M_r(b) = 0$	$w(a) = 0$	$V = \frac{P}{2\pi r}$
10	$\varphi(a) = 0$	$M_r(b) = 0$	$w(a) = 0$	$V = \frac{Qr}{2} - \frac{Qb^2}{2r}$

Las constantes de integración generadas se determinan por las condiciones de borde (BCS) y la fuerza de corte V , que su combinación es única para cada caso.

Entonces, para determinar las ecuaciones de gobierno y por medio de éstas los coeficientes k y k_1 en cada caso, se deben definir correctamente a V y BCS. Éstos requerimientos, se resumen en la Tabla 4 en la que se aprecia claramente las diferencias que tiene caso dados por el momento flector, pendiente, deflexión y carga en la placa circular delgada anular.

Se desarrollan las ecuaciones de gobierno paso a paso de un caso en especial, el caso práctico 3. Las ecuaciones de los demás casos se resumen en el Anexo I. En la Figura 13a, se puede apreciar el esquema del caso 3, que consiste en una placa circular anular empotrada en su borde interior y libre en su exterior, en la que actúa una carga normal distribuida alrededor del centro sobre su superficie Q .

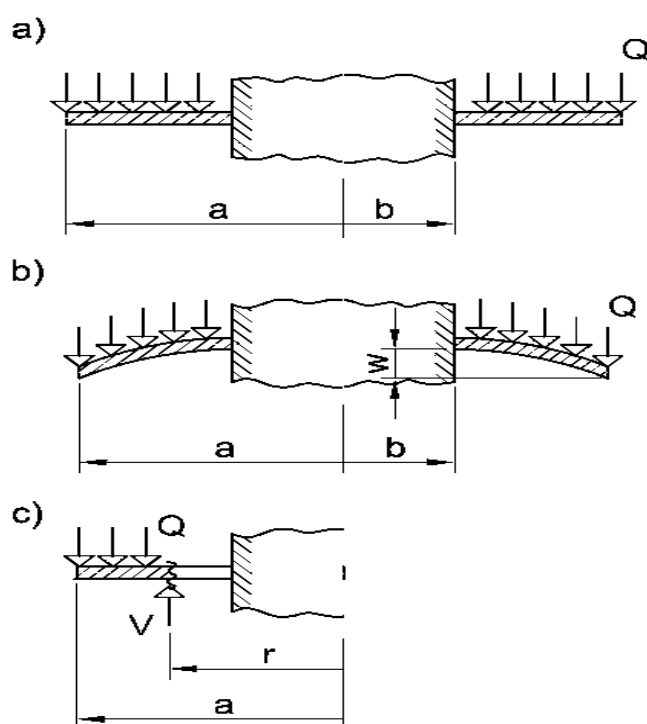


Figura 13 Caso de estudio 3 (a) Esquema (b) Deflexión de la placa (c) Variación de V y Q en una distancia r .

La aplicación más común del uso de este caso es en el diseño de anclaje de tuberías forzadas embebidas en hormigón. En la Figura 13b, se muestra la deformación de mencionada placa y en la Figura 13c la variación de la fuerza de corte V y la carga Q , a lo largo de una posición r de la placa anular.

Mediante la estática, haciendo una sumatoria de fuerzas presentes en la dirección z de acuerdo a Figura 13c, y despejando a V , tenemos:

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0 \\ Q \pi (a^2 - r^2) &= 2 \pi r V \\ V &= \frac{Qa^2}{2r} - \frac{Qr}{2}\end{aligned}\quad [11]$$

De la ecuación general de deflexión en una placa circular isotrópica, sabemos que:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = -\frac{V}{D} \quad [8]$$

Reemplazando [11] en [8], se tiene:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{D} \left(\frac{Qa^2}{2r} - \frac{Qr}{2} \right)$$

Integrando y despejando las veces necesarias para determinar $\frac{dw}{dr}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) &= \frac{Qa^2 r \ln(r)}{2D} - \frac{Qr^3}{4D} + c_1 r \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{Qa^2 r [2\ln(r) - 1]}{8D} - \frac{Qr^3}{16D} + \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r}\end{aligned}$$

Por la ecuación [1], sabemos que $\varphi[r] = -\frac{dw}{dr}$, por lo tanto, la ecuación de la pendiente de la superficie deformada es:

$$\varphi(r) = -\frac{Q a^2 r [2\ln(r) - 1]}{8D} + \frac{Qr^3}{16D} - \frac{r c_1}{2} - \frac{c_2}{r} \quad [12a]$$

Integrando nuevamente, se obtiene la ecuación de deflexión en la placa:

$$w(r) = \frac{Q a^2 r^2 [Ln(r) - 1]}{8D} - \frac{Q r^4}{64D} + c1 \frac{r^2}{4} + c2 Ln[r] + c3 \quad [12b]$$

Para determinar las ecuaciones que gobiernan en este caso, encontramos las constantes de integración mediante sus condiciones de borde (Ver Tabla 4), que son:

- Momento radial $M_r = 0$ en extremo $r = a$, por ser libre a la rotación:

$$M_r(a) = \left[D \left(\frac{\partial f(r)}{\partial r} + u * \left(\frac{f(r)}{r} \right) \right) \right]_{r=a} = 0 \quad [13a]$$

- Pendiente despreciable en empotramiento $\varphi(r) = 0$, en $r = b$:

$$[\varphi(r)]_{r=b} = \varphi(b) = 0 \quad [13b]$$

- La deflexión $w(r) = 0$ cuando $r = b$, por restringirse en apoyo:

$$[w(r)]_{r=b} = w(b) = 0 \quad [13c]$$

Las constantes $c1$ y $c2$, pueden ser obtenidas resolviendo el sistema de ecuaciones [13a] y [13b], al ser reemplazadas en [6a] y [12a], respectivamente. Con éstos valores se obtiene $c3$, al ser reemplazadas en [12b].

$$c1 = - \left[-a^4 Q - 2 a^2 b^2 Q - b^4 Q - 3 a^4 Q u + 2 a^2 b^2 Q u + b^4 Q u + 4 a^4 Q Ln(a) + 4 a^4 Q u Ln(a) + 4 a^2 b^2 Q Ln(b) - 4 a^2 b^2 Q u Ln(b) \right] / 8 D (a^2 + b^2 + a^2 u - b^2 u)$$

$$c2 = - \left[-a^4 b^2 Q - a^2 b^4 Q + a^4 b^2 Q u - a^2 b^4 Q u - 4 a^4 b^2 Q Ln(a) - 4 a^4 b^2 Q u Ln(a) + 4 a^4 b^2 Q Ln(b) + 4 a^4 b^2 Q u Ln(b) \right] / 16 D (a^2 + b^2 + a^2 u - b^2 u)$$

$$c3 = -b^2 Q [6a^4 + 5a^2 b^2 - b^4 + 2a^4 u - 3a^2 b^2 u + b^4 u + 8a^4 Ln(a) + 8a^4 u Ln(a) - 12a^4 Log(b) - 4a^2 b^2 Ln(b) - 4a^4 u Ln(b) - 4a^2 b^2 u Ln(b) -$$

$$\frac{16a^4 \text{Ln}(a)\text{Ln}(b) - 16a^4 u\text{Ln}(a)\text{Ln}(b) + 16a^4 \text{Ln}(b)^2 + 16a^4 u\text{Ln}(b)^2}{64D(-a^2 - b^2 - a^2 u + b^2 u)}$$

Una vez obtenidas las constantes de integración, reemplazamos en [12a] y [12b]:

- Ecuación de la pendiente

$$\begin{aligned} \varphi(r) = Q[& -a^4 b^2 - a^2 b^4 + a^4 r^2 - b^4 r^2 + a^2 r^4 + b^2 r^4 + a^4 b^2 u \\ & - a^2 b^4 u - a^4 r^2 u + b^4 r^2 u + a^2 r^4 u - b^2 r^4 u \\ & - 4 a^4 b^2 \text{Ln}(a) + 4 a^4 r^2 \text{Ln}(a) - 4 a^4 b^2 u \text{Ln}(a) \\ & + 4 a^4 r^2 u \text{Ln}(a) + 4 a^4 b^2 \text{Ln}(b) + 4 a^2 b^2 r^2 \text{Ln}(b) \\ & + 4 a^4 b^2 u \text{Ln}(b) - 4 a^2 b^2 r^2 u \text{Ln}(b) - 4 a^4 r^2 \text{Ln}(r) \\ & - 4 a^2 b^2 r^2 \text{Ln}(r) - 4 a^4 r^2 u \text{Ln}(r) + 4 a^2 b^2 r^2 u \text{Ln}(r)] \\ & / 16 D r (a^2 + b^2 + a^2 u - b^2 u) [15] \end{aligned} \quad [14a]$$

Ecuación de deflexión

$$\begin{aligned} w(r) = -Q [& 6 a^4 b^2 + 5 a^2 b^4 - b^6 - 6 a^4 r^2 - 4 a^2 b^2 r^2 + 2 b^4 r^2 - a^2 r^4 \\ & - b^2 r^4 + 2 a^4 b^2 u - 3 a^2 b^4 u + b^6 u - 2 a^4 r^2 u \\ & + 4 a^2 b^2 r^2 u - 2 b^4 r^2 u - a^2 r^4 u + b^2 r^4 u + 8 a^4 b^2 \text{Ln}(a) \\ & - 8 a^4 r^2 \text{Ln}(a) + 8 a^4 b^2 u \text{Ln}(a) - 8 a^4 r^2 u \text{Ln}(a) \\ & - 12 a^4 b^2 \text{Ln}(b) - 4 a^2 b^4 \text{Ln}(b) - 8 a^2 b^2 r^2 \text{Ln}(b) \\ & - 4 a^4 b^2 u \text{Ln}(b) - 4 a^2 b^4 u \text{Ln}(b) + 8 a^2 b^2 r^2 u \text{Ln}(b) \\ & - 16 a^4 b^2 \text{Ln}(a)\text{Ln}(b) - 16 a^4 b^2 u \text{Ln}(a)\text{Ln}(b) \\ & + 16 a^4 b^2 \text{Ln}(b)^2 + 16 a^4 b^2 u \text{Ln}(b)^2 + 4 a^4 b^2 \text{Ln}(r) \\ & + 4 a^2 b^4 \text{Ln}(r) + 8 a^4 r^2 \text{Ln}(r) + 8 a^2 b^2 r^2 \text{Ln}(r) \\ & - 4 a^4 b^2 u \text{Ln}(r) + 4 a^2 b^4 u \text{Ln}(r) + 8 a^4 r^2 u \text{Ln}(r) \\ & - 8 a^2 b^2 r^2 u \text{Ln}(r) + 16 a^4 b^2 \text{Ln}(a)\text{Ln}(r) \\ & + 16 a^4 b^2 u \text{Ln}(a)\text{Ln}(r) - 16 a^4 b^2 \text{Ln}(b)\text{Ln}(r) \\ & - 16 a^4 b^2 u \text{Ln}(b)\text{Ln}(r)] / 64 D (-a^2 - b^2 - a^2 u + b^2 u) \end{aligned} \quad [14b]$$

Obteniendo así, las ecuaciones de gobierno para determinar el comportamiento de la flexión en una placa circular bajo las condiciones del caso 3, en la que es posible analizar cualquier punto intermedio de la placa.

3.1.2. Extrapolación de coeficientes

Con el objeto de extrapolar los coeficientes k y k_1 que facilite el cálculo del comportamiento de la placa, se utilizarán las ecuaciones de gobierno determinadas en la sección anterior y se reemplazará para los valores definidos como:

- Material de la placa: Acero $E = 211000$ [MPa]; $u = 0.3$
- Las nuevas relaciones: $\frac{a}{b} = 1.05 ; 1.10 ; 1.15 ; 1.20$

3.1.3. Coeficientes k_1 para Deflexión

La deflexión máxima de la placa se da al evaluar $w(r)$ en $r = a$:

$$\begin{aligned}
 [w(r)]_{r=a} &= w(a) \\
 &= Q [7a^6 - a^4b^2 - 7a^2b^4 + b^6 + 3a^6u - 7a^4b^2u + 5a^2b^4u \\
 &\quad - b^6u - 20a^4b^2\text{Ln}(a) - 4a^2b^4\text{Ln}(a) + 4a^4b^2u\text{Ln}(a) \\
 &\quad - 4a^2b^4u\text{Ln}(a) - 16a^4b^2\text{Ln}(a)^2 - 16a^4b^2u\text{Ln}(a)^2 \\
 &\quad + 20a^4b^2\text{Ln}(b) + 4a^2b^4\text{Ln}(b) - 4a^4b^2u\text{Ln}(b) + 4a^2b^4u\text{Ln}(b) \\
 &\quad + 32a^4b^2\text{Ln}(a)\text{Log}(b) + 32a^4b^2u\text{Ln}(a)\text{Log}(b) - 16a^4b^2\text{Ln}(b)^2 \\
 &\quad - 16a^4b^2u\text{Log}(b)^2] / 64D(a^2 + b^2 + a^2u - b^2u)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Ahora, evaluando la rigidez a la flexión de la placa $D = \frac{E h^3}{12(1-u^2)}$ y $u = 0.3$,

tenemos:

$$w_{MAX} = \frac{1}{(1.3a^2 + 0.7b^2)h^3L} 0.170625Q(7.9a^6 - 3.1a^4b^2 - 5.5a^2b^4 + 0.7b^6 - 18.8a^4b^2\text{Ln}(a) - 5.2a^2b^4\text{Log}(a) - 20.8a^4b^2\text{Ln}(a)^2 + 18.8a^4b^2\text{Ln}(b) + 5.2a^2b^4\text{Ln}(b) + 41.6a^4b^2\text{Ln}(a)\text{Ln}(b) - 20.8a^4b^2\text{Ln}(b)^2)$$

Determinando el valor de k_1 para una relación existente $\frac{a}{b} = 1.25$, comprobando así la veracidad del análisis, evaluamos la ecuación anterior para $b = \frac{a}{1.25}$. Por lo tanto:

$$[w_{MAX}]_{b \rightarrow \frac{a}{1.25}} = -\frac{Qa^4}{h^3E} 0.0976 [3.8467 + 14.1619\text{Ln}[0.8] - 13.312\text{Ln}[0.8]^2]$$

$$[w_{MAX}]_{b \rightarrow \frac{a}{1.25}} = -0.002314 \frac{Qa^4}{h^3E} = k_1 \frac{Qa^4}{h^3E}$$

Al simplificar, se obtiene la misma ecuación de la deflexión máxima que propone el autor [9b], y el coeficiente obtenido es el mismo que se muestra en la Tabla 2. De manera que podemos afirmar la veracidad del modelo de estudio.

Ahora, extrapolando una nueva relación $\frac{a}{b} = 1.2$, tenemos:

$$[w_{MAX}]_{b \rightarrow \frac{a}{1.20}} = -\frac{Qa^4}{h^3E} 0.0955[3.3292 + 15.5632 \text{Ln}(0.8333) - 14.444\text{Ln}(0.8333)^2]$$

$$[w_{MAX}]_{b \rightarrow \frac{a}{1.20}} = -0.001107 \frac{Qa^4}{h^3E} = k_1 \frac{Qa^4}{h^3E}$$

Determinando así, un nuevo coeficiente k_1 para el cálculo de la mayor deflexión en placas de menor geometría. Para comprobar y determinar los demás coeficientes de las relaciones existentes y las nuevas ($\frac{a}{b} = 1.05 ; 1.10 \dots 4, 5$) se utilizó el mismo procedimiento.

3.1.4. Coeficientes k para Esfuerzo

El esfuerzo máximo se da en el momento máximo que posee la placa. Se evalúan dichos momentos (ecuaciones [6a] y [6b]), en los bordes interno y externo de la placa. El momento radial para el caso 3 se presenta sólo en $r = b$, y queda definido como:

$$M_r(b) = \left[D \left(\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + u * \frac{\varphi(r)}{r} \right) \right]_{r=b}$$

$$M_r(b) = Q[-2a^4b^2 + 2b^6 - 6a^4b^2u + 8a^2b^4u - 2b^6u + 8a^4b^2\text{Ln}(a) + 8a^4b^2u\text{Ln}(a) - 8a^4b^2\text{Ln}(b) - 8a^4b^2u\text{Ln}(b)] / 16b^2(a^2 + b^2 + a^2u - b^2u)$$

Mientras que el momento angular, se presenta en $r = a$ y $r = b$, y queda definido como:

$$M_t(a) = \left[D \left(\frac{\varphi(r)}{r} + u * \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \right) \right]_{r=a}$$

$$M_t(a) = Q[2a^6 - 2a^2b^4 - 2a^6u^2 + 2a^2b^4u^2 - 8a^4b^2\text{Ln}(a) + 8a^4b^2u^2\text{Ln}(a) + 8a^4b^2\text{Ln}(b) - 8a^4b^2u^2\text{Ln}(b)] / 16a^2(a^2 + b^2 + a^2u - b^2u)$$

$$M_t(b) = \left[D \left(\frac{\varphi(r)}{r} + u * \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \right) \right]_{r=b}$$

$$M_t(b) = Q[-2a^4b^2u + 2b^6u - 6a^4b^2u^2 + 8a^2b^4u^2 - 2b^6u^2 + 8a^4b^2u\text{Ln}(a) + 8a^4b^2u^2\text{Ln}(a) - 8a^4b^2u\text{Ln}(b) - 8a^4b^2u^2\text{Ln}(b)] / 16b^2(a^2 + b^2 + a^2u - b^2u)$$

Los esfuerzos máximos están definidos por las ecuaciones [7a] y [7b], con $D = \frac{E h^3}{12(1-u^2)}$ y $u = 0.3$. Evaluando los máximos esfuerzos, con los momentos obtenidos tenemos:

$$\sigma_{r(b)_{MAX.}} = 0.75Q[-2.7142a^4 + 1.7142a^2b^2 + 1.b^4 + 7.4285a^4\text{Ln}(a) - 7.4285a^4\text{Ln}(b)] / (1.8574a^2 + 1.b^2)h^2 \quad [16a]$$

$$\sigma_{t(a)_{MAX.}} = 0.525Q \left[a^4 - b^4 + 4a^2b^2\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) \right] / (a^2 + 0.538b^2)h^2 \quad [16b]$$

$$\sigma_{t(b)_{MAX.}} = 0.225Q \left[-2.714a^4 + 1.714a^2b^2 + b^4 + 7.428a^4\text{Ln}\left(\frac{a}{b}\right) \right] / (1.857a^2 + b^2)h^2 \quad [16c]$$

Determinando de igual manera, una relacion existente $\frac{a}{b} = 1.25$, despejando b y reemplazando en los esfuerzos máximos, se verificará cual es el que tiene mayor incidencia, y así el coeficiente k_1 . Por lo tanto:

$$\left[\sigma_{r(b)_{MAX.}} \right]_{b \rightarrow \frac{a}{1.25}} = 0.1351 \frac{a^2 Q}{h^2}$$

$$\left[\sigma_{t(a)_{MAX.}} \right]_{b \rightarrow \frac{a}{1.25}} = 0.0074 \frac{a^2 Q}{h^2}$$

$$\left[\sigma_{t(b)_{MAX.}} \right]_{b \rightarrow \frac{a}{1.25}} = 0.0405 \frac{a^2 Q}{h^2}$$

Al observar los valores de los esfuerzos, el mayor coeficiente que provoca el mayor esfuerzo es el del esfuerzo radial cuando $r = b$, por lo tanto, para el caso 3: $k = 0.1351$. Éste valor coincide con el propuesto por el autor (Ver Tabla 2).

Comprobando el k existente, se define la extrapolación para una nueva relación $\frac{a}{b} = 1.20$, repitiendo el mismo procedimiento anterior. Por lo que tenemos:

$$\left[\sigma_{r(b)_{MAX.}} \right]_{b \rightarrow \frac{a}{1.20}} = 0.0919 \frac{a^2 Q}{h^2}$$

Se ha determinado un nuevo coeficiente k para el cálculo del mayor esfuerzo, para comprobar y determinar los demás coeficientes de las relaciones existentes y las nuevas ($\frac{a}{b} = 1.05 ; 1.10 \dots 4,5$) se utilizó el mismo procedimiento.

Se resumen los coeficientes k y k_1 , nuevos y ya existentes en la Tabla 5, y una representación de sus valores en relación de sus radios $\frac{a}{b}$, en las Figuras 14 y 15.

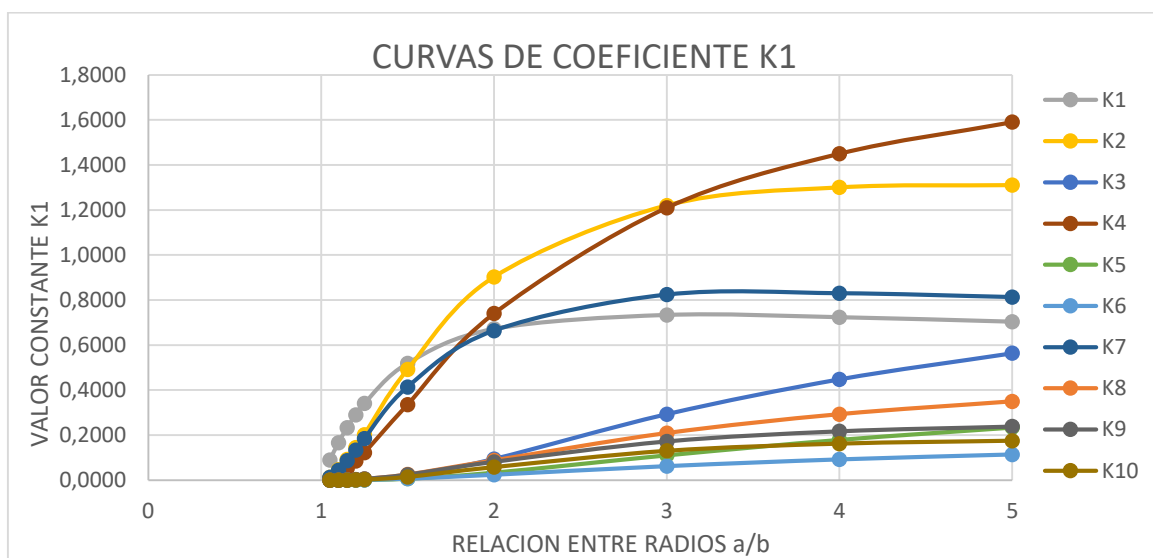


Figura 14 Representación del coeficiente k_1 en su relación de radios a/b .

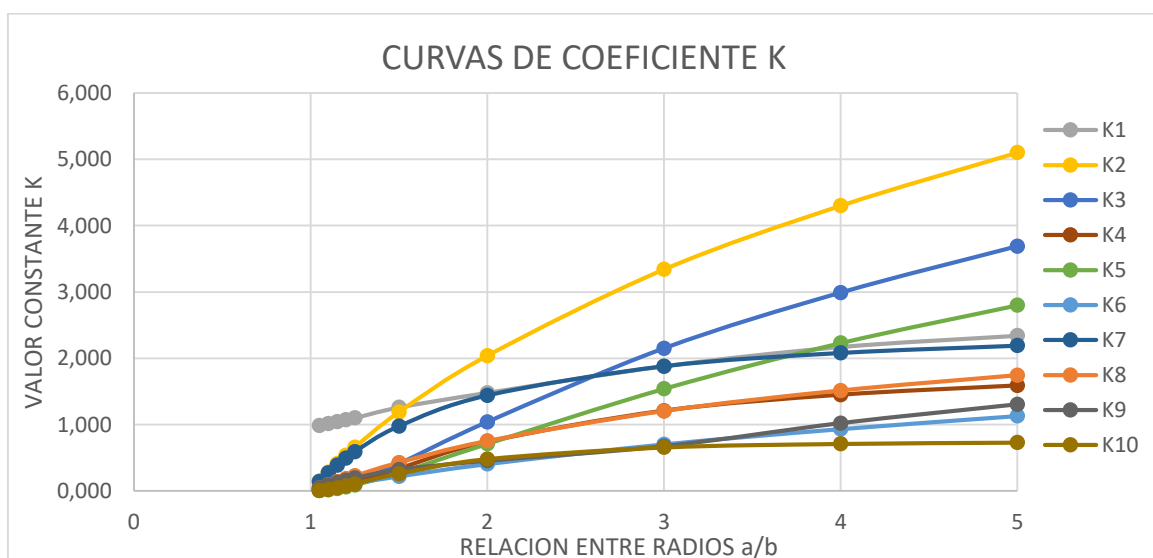


Figura 15 Representación del coeficiente k en su relación de radios a/b .

Tabla 5

Coefficientes nuevos y existentes para determinar deflexión y esfuerzo máximo en 10 casos prácticos de placas anulares.

a/b	1.05		1.10		1.15		1.2		1.25		1.5		2		3		4		5	
CA SO	k	k1	k	k1	k	k1	k	k1	k	k1	k	k1	k	k1	k	k1	k	k1	k	k1
1	0.98 6	0.0888	1.01 6	0.1655	1.04 6	0.2322	1.07 5	0.2904	1.10	0.341	1.26	0.519	1.48	0.672	1.88	0.73 4	2.17	0.72 4	2.34	0.70 4
2	0.14 5	0.0131	0.28 3	0.0461	0.41 3	0.0916	0.53 8	0.1449	0.66	0.202	1.19	0.491	2.04	0.902	3.34	1.22	4.30	1.30	5.10	1.31
3	0.00 7	0.00000	0.02 6	0.0001	0.05 5	0.0004	0.09 2	0.0011	0.13 5	0.0023	0.41	0.018 3	1.04	0.093 8	2.15	0.29 3	2.99	0.44 8	3.69	0.56 4
4	0.00 7	0.00001	0.02 5	0.0001	0.05 2	0.0006	0.08 5	0.0016	0.12 2	0.0034	0.33 6	0.031 3	0.74	0.125	1.21	0.29 1	1.45	0.41 7	1.59	0.49 2
5	0.00 5	0.00000	0.01 7	0.0000	0.03 7	0.0001	0.06 4	0.0003	0.09 7	0.0007	0.27 3	0.006 2	0.71	0.032 9	1.54	0.11	2.23	0.17 9	2.80	0.23 4
6	0.02 4	0.00001	0.04 7	0.0001	0.07 0	0.0003	0.09 4	0.0007	0.11 5	0.0012	0.22 9	0.006 4	0.40 5	0.023 7	0.70 3	0.06 2	0.93 3	0.09 2	1.13	0.11 4
7	0.14 2	0.01282	0.27 1	0.0442	0.38 8	0.0863	0.49 4	0.1339	0.59 2	0.184	0.97 6	0.414	1.44	0.664	1.88	0.82 4	2.08	0.83 0	2.19	0.81 3
8	0.04 7	0.00006	0.09 4	0.0004	0.13 9	0.0013	0.18 7	0.0029	0.22 7	0.0051	0.42 8	0.024 9	0.75 3	0.087 7	1.20 5	0.20 9	1.51 4	0.29 3	1.74 5	0.35
9	0.04 6	0.00006	0.08 8	0.0004	0.12 6	0.0013	0.16 6	0.0028	0.19 4	0.0050	0.32 4	0.024 2	0.45 4	0.081	0.67 3	0.17 2	1.02 1	0.21 7	1.30 5	0.23 8
10	0.00 7	0.00000	0.02 3	0.0000	0.04 7	0.0003	0.07 7	0.0009	0.10 5	0.0019	0.25 9	0.013 9	0.48	0.057 5	0.65 7	0.13	0.71	0.16 2	0.73	0.17 5

Coefficientes nuevos por Sol. Analítica

Coefficientes existentes

3.2. Simulaciones Numéricas

3.2.1. Dominio computacional y análisis de mallas

Con el objetivo de optimizar el costo computacional y obtener soluciones confiables por FEM, se realiza una comparación de resultados utilizando mallas y elementos finitos recomendados. Entre los tipos de mallados diferentes que son muy utilizados en la práctica para este tipo de geometría, tenemos (Ver Figura 16):

- **Mallado Estructurado:** Utilizado generalmente para el análisis de geometrías simétricas, comparte un mismo radio en común y presenta una buena relación de aspecto.
- **Mallado Libre:** Es el definido por el programa computacional, y adapta la discretización a cualquier geometría. Es posible dar un tamaño al elemento finito en diferentes zonas o bordes de la placa.

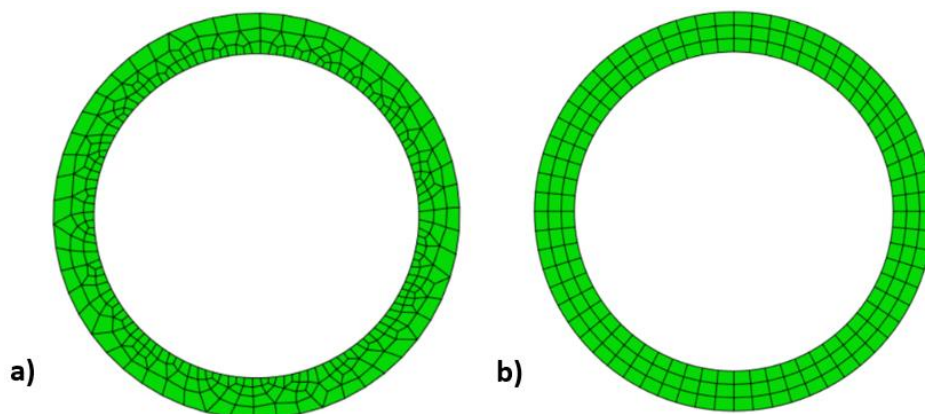


Figura 16 Mallado en una placa circular delgada a) Libre y b) Estructurada

Cabe recalcar que cada mallado se basa en el tipo de elemento finito usado. Como se estudió en la sección 2.2.2 el elemento finito recomendado para el análisis de placas planas circulares es el bidimensional cuadrilátero tipo cáscara (Shell). Para este estudio comparativo se analizará este elemento como lineal y cuadrático,

conjuntamente con un elemento tridimensional hexaedro. Los 3 tipos de elementos finitos muestran las siguientes características:

- Elemento 2D Tipo Cáscara Lineal (4 nodos): Recomendado para determinar deflexión en placas. Adecuado para deformaciones pequeñas en placas delgadas.
- Elemento 2D Tipo Cáscara Cuadrático (8 nodos): Recomendado para placas con espesores medianos y gruesos, se obtienen buenos resultados cuando se predomina la flexión en la placa.
- Elemento 3D Hexaedro Cuadrático (20 nodos): Recomendado para la deformación en cuerpo sólidos bajo el análisis mecánico estático.

Se procede a estudiar los diferentes mallados y elementos finitos obteniendo por el método FEM los coeficientes k y k_1 , en la relación existente $\frac{a}{b} = 1.25$ del caso 3 propuesto por (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959). Con estos valores, se comprobará la eficiencia y confiabilidad del método de elementos finitos ya que se compara con los obtenidos analíticamente.

Como lo menciona la teoría, el problema se resuelve en 3 fases:

- Preprocesamiento: Construcción de la geometría de la placa, propiedades del material, definición del tipo de elemento finito y mallado, aplicación de cargas y condiciones de frontera
- Procesamiento: Cálculos de soluciones aproximadas por parte del software computacional de elementos finitos.
- Postprocesamiento: Análisis de resultados de esfuerzos y desplazamientos

Se ejecuta cada una de las fases usando como datos de la placa de estudio los mostrados en la Tabla 6.

Tabla 6

Datos de placa estudio por FEM para análisis de malla y elemento finito.

GEOMETRÍA PLACA:	MATERIAL: ACERO	CASO 3 a / b = 1.25	CARGA APLICADA	PUNTO DE ANÁLISIS:
a = 127[mm]	E = 210000[MPa]	K = 0.135	Q = 11.185[MPa]	$\sigma_r(b) = 101.6$ [mm]
b = 101.6[mm]	u = 0.3	$K_1 = 0.00231$	$W_{max.} = 1$ [mm]	$\sigma_t(b) = 101.6$ [mm]
h = 3.175[mm]				w(a) = 127 [mm]

La obtención de los coeficientes por el método de los elementos finitos se la realiza de forma indirecta. Una vez que se han obtenido los resultados de la deflexión y esfuerzo máximo, siendo estos comprobados por una convergencia al incrementar el número de elementos, procedemos a reemplazar en la teoría y despejar el mencionado coeficiente.

El máximo esfuerzo y deflexión en la placa se presentan por las ecuaciones [9a] y [9b], respectivamente. Acoplado a nuestro caso de estudio 3, tenemos que:

$$\sigma_{Max} = \sigma_r(b) = k \frac{Q * a^2}{h^2}$$

$$w_{Max} = w(a) = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

Y, despejando los coeficientes se obtiene que:

$$k = \frac{\sigma_r(b) * h^2}{Q * a^2} \quad [17a]$$

$$k_1 = \frac{w(a) * E * h^3}{P * a^4} \quad [17b]$$

En el Anexo II, la Tabla II-1 muestra las soluciones del análisis de la placa de estudio utilizando un mallado tipo estructurado con los 3 tipos de elementos finitos a

estudiar. Y en la Figura 17, se muestra la convergencia de sus soluciones en la que se puede observar que los elementos finitos bidimensionales tipo cáscara (Shell) son más eficientes que el tridimensional hexaedro, y entre éstos, el mejor es el del tipo cuadrático de 8 nodos, que al tener más nodos genera más soluciones.

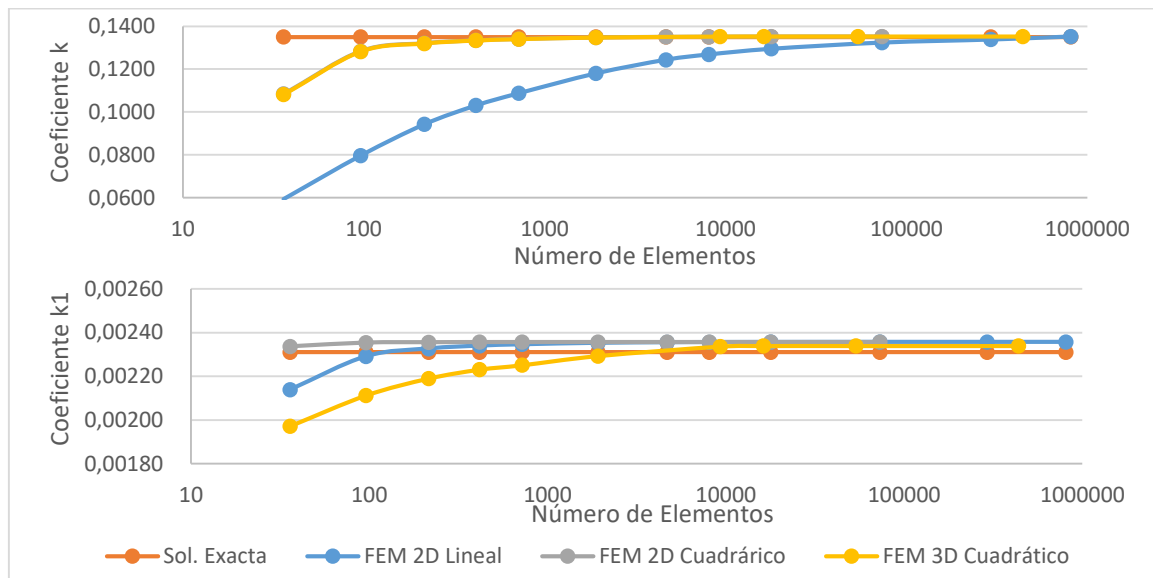


Figura 17 Convergencia de Coef. k y k1 del caso 3 en $a/b=1.25$, con diferentes elementos finitos utilizando una Malla Estructurada.

Ahora, estudiando la flexión en la placa circular por un mallado libre bajo los mismos parámetros anteriores con la diferencia de que, en éste, es posible hacer una variación del tamaño del elemento finito en sus bordes externos con un valor d y en sus internos con e (Ver Figura 18).

Se toma un valor constante $\frac{d}{e} = 3$, para que al variar el número de elementos esta relación se mantenga constante y así validar su eficiencia. En la Tabla II-2, se presentan las soluciones del análisis realizado en una placa utilizando el mallado propuesto.

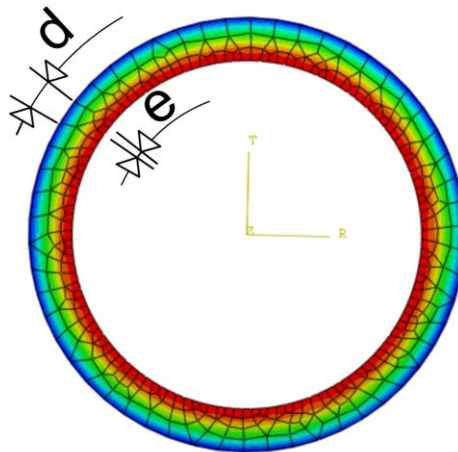


Figura 18 Representación del tamaño del elemento finito d y e , en un mallado libre.

En la Figura 19 se muestra la convergencia de sus soluciones. Se concluye que al igual que el mallado estructural, el mejor elemento es el tipo cuadrático de 8 nodos, ya que tiende a converger en las dos soluciones con un número menor de elementos.

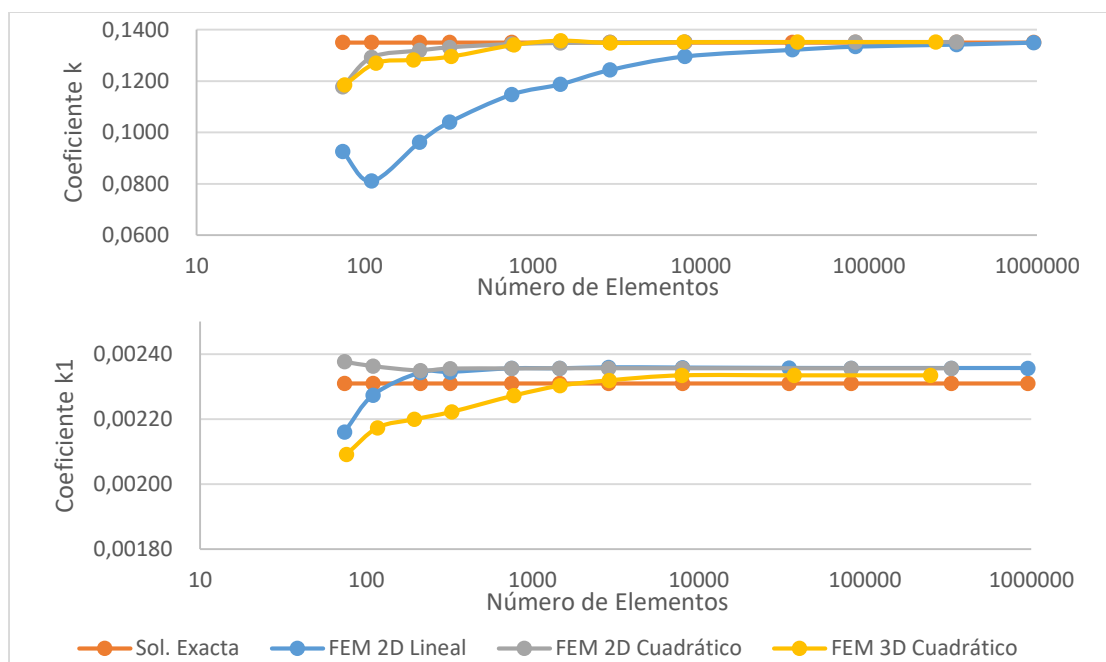


Figura 19 Convergencia de Coef. k y k_1 del caso 3 en $a/b=1.25$, con diferentes elementos finitos utilizando una Mallado Libre.

Se ha comprobado la eficiencia del mallado libre utilizando diferentes elementos finitos para la relación $\frac{d}{e} = 3$. Sin embargo, aún queda comprobar cuál relación $\frac{d}{e}$ en este tipo de mallado es la más óptima. En la Tabla II-3 se muestran las soluciones de una placa circular bajo diferentes relaciones de tamaño del elemento finito $\frac{d}{e}$. Y, en la Figura 20 se aprecia las convergencias de mencionadas soluciones. Se observa que, si existe una variación en la rápida convergencia de la solución, sin embargo, no es tan considerable pero sí genera mayor precisión. Para una mayor relación a $\frac{d}{e} = 4$, ya no existe tal consideración, así que, se puede dar por eficiente el uso de esta relación en el tipo de mallado libre.

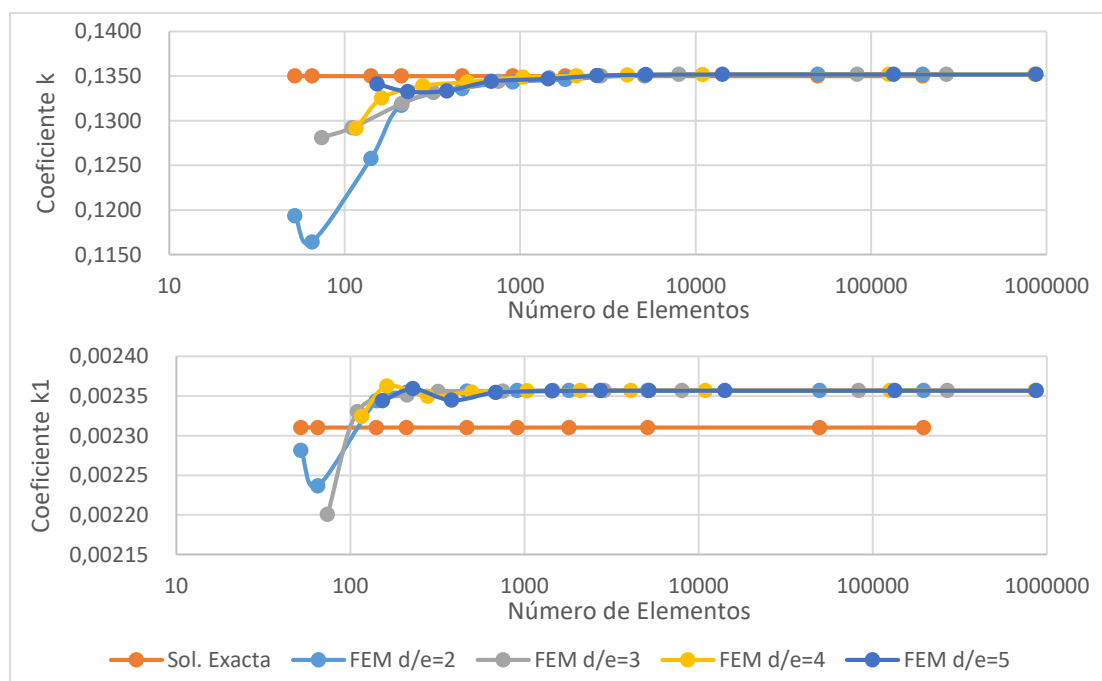


Figura 20 Convergencia de Coef. k y k1 del caso 3 en $a/b=1.25$ con diferentes relaciones d/e , utilizando una Mallado Libre.

Finalmente, se resumen las mejores soluciones de mallado y elemento finito, para el análisis de placas circulares anulares utilizando el método del elemento finito en la Figura 21. El mallado estructurado y el libre (con $\frac{d}{e} = 4$), acompañado de un

elemento finito bidimensional tipo cáscara (Shell) cuadrático, son los más eficientes y se pueden aplicar para los demás casos de estudio.

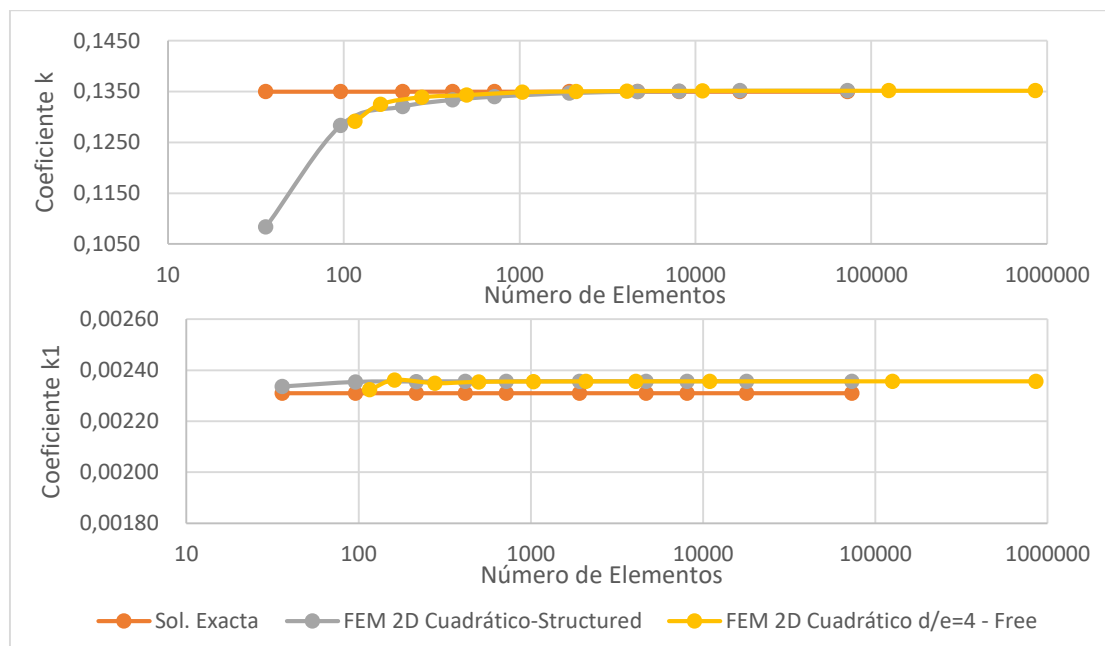


Figura 21 Comparación del Mejor Mallado y Elemento Finito.

3.2.2. Determinación de nuevos coeficientes a través de simulaciones numéricas

En la sección anterior, para el estudio del análisis más óptimo de malla y elemento finito, se determinaron coeficientes k y k_1 por FEM para una relación existente a/b , llegando a su convergencia y realizando una comparación con los desarrollados analíticamente por su autor.

Se procede a determinar los nuevos coeficientes k y k_1 por FEM, utilizando el mismo método para nuevas relaciones $\frac{a}{b} = 1.2, 1.15, 1.10$ y 1.05 . De igual manera, se realiza la convergencia y comparación de los resultados con los obtenidos por el método analítico desarrollados en la sección anterior presentados en la Tabla 5.

Desarrollando el caso 3, en $\frac{a}{b} = 1.2$ continuando con el estudio de un caso específico que es un ejemplo para el desarrollo de los demás. Se muestra en la Tabla 8: la geometría, mallado, propiedades del material, carga aplicada, puntos de análisis y los resultados obtenidos de la flexión de la placa bajo las condiciones del caso. Y en la Figura 22, la convergencia de sus soluciones.

Tabla 7

Número adimensional α que indica la convergencia en relaciones a/b usando un mallado libre.

a/b	1.25	1.20	1.15	1.10	1.05
$\alpha = e/b$	0.0246	0.0246	0.0172	0.0123	0.0074

Repitiendo el mismo método para las demás relaciones en todos los casos, se resumen los resultados en la Tabla 9. Adicionalmente, en éste análisis se presenta en la Tabla 7, un número adimensional $\alpha = e/b$, que indica la convergencia de las soluciones para un mallado libre.

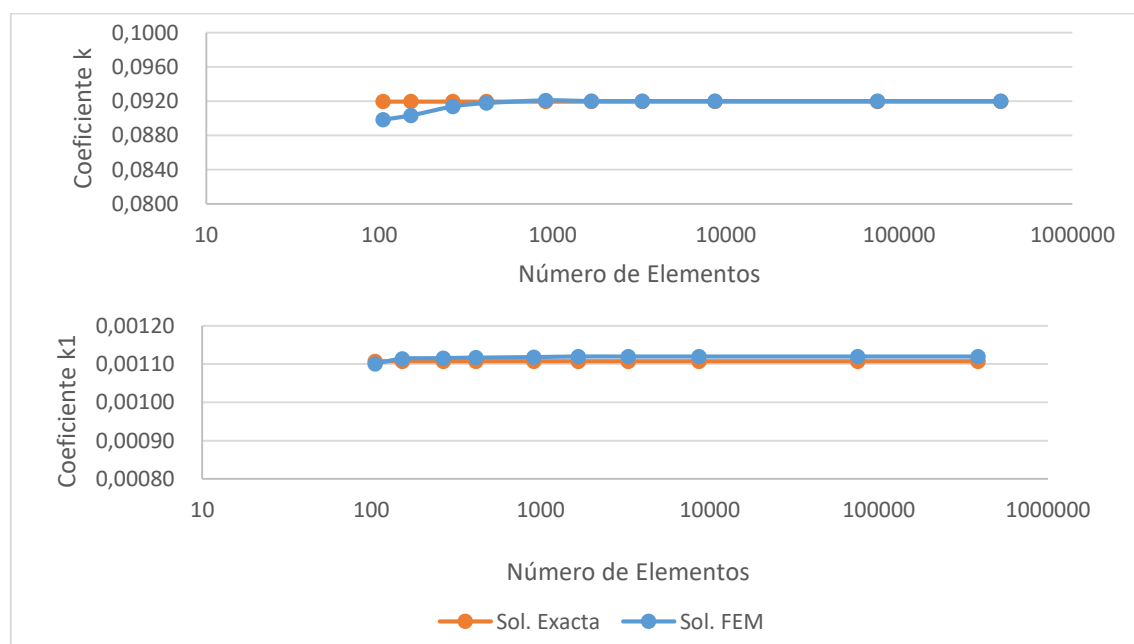


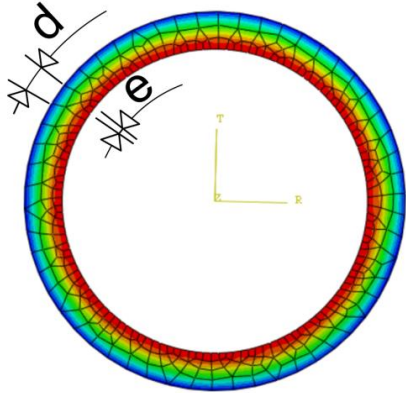
Figura 22 Convergencia de Coef. k y k1 del caso 3 en $a/b=1.2$, utilizando un Mallado Libre con $d/e=4$.

Tabla 8

Análisis de convergencia y error de los coeficientes k y $k1$ determinados por FEM para $a/b=1.2$, del caso 3.

a / b = 1.20											
GEOMETRÍA:	a	121.92	[mm]	MATERIAL:	ACERO	E	210000	[MPa]	PUNTO DE ANÁLISIS:	p1	p2
	b	101.6	[mm]		u	0.3	r [mm]	-101.6		-121.92	
	h	2	[mm]		Área	14268.8	[mm ²]				

CASO 3													
Valores:	Wmax.	0.05	mm	Q	0.34340	[MPa]	P	4899.93	[N]	K	0.09195	k1	0.00111

TIPO	ESQUEMA	ITERACIÓN	d	e	d/e	Esfuerzo S11 r=b [MPa]	Coef. FEM	Coef. T.	Error [%]	Error A. [%]	Deflexión r=a [mm]	Coef. FEM	Coef. T.	Error [%]	Error A. [%]	ELEMENTOS
2D Tipo Cáscara Cuadrático MALLADO: LIBRE		1	40	10.0	4.0	1.1465E+02	0.0898	0.0920	2.29	2.29	4.9711E-02	0.00110	0.00111	0.58	0.58	105
		2	30	7.50	4.0	1.1527E+02	0.0903	0.0920	1.77	0.52	5.0300E-02	0.00111	0.00111	0.60	0.02	152
		3	20	5.00	4.0	1.1659E+02	0.0914	0.0920	0.64	1.13	5.0380E-02	0.00112	0.00111	0.76	0.16	265
		4	15	3.75	4.0	1.1710E+02	0.0918	0.0920	0.21	0.44	5.0440E-02	0.00112	0.00111	0.88	0.12	414
		5	10	2.50	4.0	1.1750E+02	0.0921	0.0920	0.13	0.07	5.0500E-02	0.00112	0.00111	1.00	0.12	911
		6	7	1.75	4.0	1.1740E+02	0.0920	0.0920	0.05	0.09	5.0570E-02	0.00112	0.00111	1.14	0.14	1669
		7	5	1.25	4.0	1.1740E+02	0.0920	0.0920	0.05	-	5.0570E-02	0.00112	0.00111	1.14	-	3292
		8	3	0.75	4.0	1.1740E+02	0.0920	0.0920	0.05	-	5.0570E-02	0.00112	0.00111	1.14	-	8620
		9	1	0.25	4.0	1.1740E+02	0.0920	0.0920	0.05	-	5.0570E-02	0.00112	0.00111	1.14	-	74798
		10	0.5	0.13	4.0	1.1740E+02	0.0920	0.0920	0.05	-	5.0570E-02	0.00112	0.00111	1.14	-	384927

Convergencia

e Coeficiente e/b 2.5 [mm] 0.0246

Tabla 9
Coeficientes k y k1 generados por el método FEM.

		CASOS DE ESTUDIO									
a /b	Coef.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.05	k	0.984	0.146	0.007	0.007	0.0047	0.0234	0.1424	0.0466	0.0442	0.0066
	k1	0.0869	0.0131	0.0000072	1.160E-05	2.46E-06	1.63E-05	0.01280	6.44E-05	6.17E-05	6.97E-06
1.10	k	0.995	0.286	0.0262	0.0255	0.0173	0.0455	0.274	0.0923	0.086	0.0233
	k1	0.1621	0.0460	0.000097	0.00015	3.30E-05	0.000117	0.0442	0.000459	0.00044	9.1E-05
1.15	k	1.032	0.415	0.0552	0.0522	0.0365	0.068	0.389	0.138	0.1254	0.0469
	k1	0.2290	0.0916	0.00042	0.000644	0.000141	0.00035	0.0862	0.00138	0.00135	0.000378
1.20	k	1.063	0.540	0.092	0.0851	0.0609	0.0909	0.497	0.1825	0.1610	0.07497
	k1	0.2873	0.1448	0.00112	0.00170	0.00038	0.00075	0.1338	0.00293	0.00286	0.00099
1.25	k	1.094	0.656	0.135	0.1221	0.0893	0.113	0.5919	0.225	0.1927	0.1043
	k1	0.339	0.202	0.00234	0.0035	0.00080	0.0013	0.1838	0.00515	0.00502	0.00201

■ Coeficientes nuevos por FEM

■ Coeficientes existentes

4. CAPÍTULO PRUEBAS Y EXPERIMENTACIÓN

4.1. Metodología para la preparación de pruebas

Los experimentos se aplican para el caso 3, en la relación $\frac{a}{b} = 1.20$. Los coeficientes k y k_1 para éste caso, ya han sido obtenidos por el modelo analítico y computacional FEM en el capítulo anterior. En la Figura 23 se muestra un esquema del plan de experimento propuesto para generar flexión axisimétrica en una placa anular bajo las condiciones del caso. La Tabla 10 resume todos los componentes utilizados.

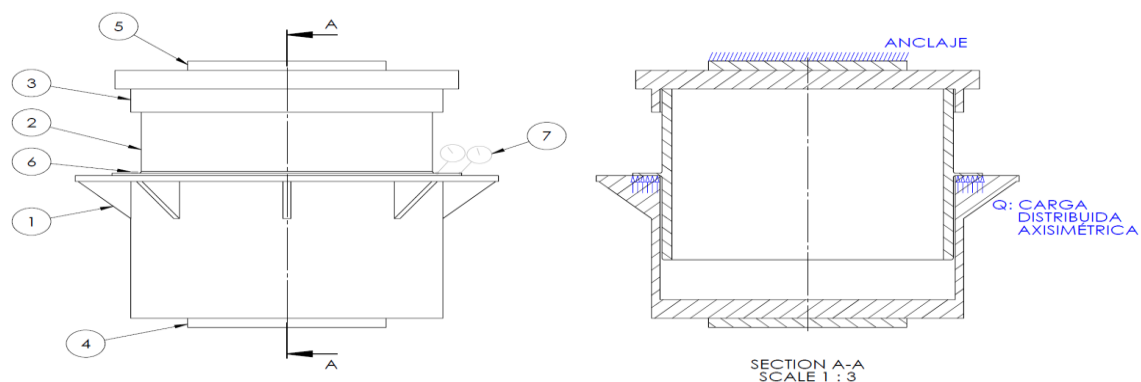


Figura 23 Esquema del plan de experimento. a) Componentes usados.
b) Funcionamiento del plan

Tabla 10

Resumen de los componentes utilizados para generar flexión axisimétrica usando un plan de experimentos propuesto mostrado en la Figura 23.

N.º DE ELEMENTO	DESCRIPCIÓN	CANTIDAD
1	Soporte inferior	1
2	Probeta	4
3	Soporte superior	1
4	Placa inferior de prensa	1
5	Placa superior de prensa	1
6	Galgas extensométricas	8
7	Reloj comparador palpador	2

El objetivo del plan es aplicar una carga axisimétrica distribuida, mediante una compresión sólo en una superficie de la placa anular con la ayuda de soportes estructurales, generando así, la deflexión axisimétrica y midiendo las variables necesarias con la ayuda de equipos e instrumentos de medida. Se propone el siguiente plan de experimento basado en las siguientes consideraciones:

1. Las dimensiones de la placa anular se limitan al tamaño del sensor extensómetro (medidor de deformaciones), que es de 7.8x3.8mm, ya que se ubican en sentido radial y tangencial. Así como también el hecho de mantener la relación $\frac{a}{b} = 1.20$. En la Figura 26b se muestra el sensor adherido a la placa de estudio y en el Anexo III las especificaciones técnicas.
2. El empotramiento del borde interior de la placa metálica se garantiza por una soldadura en todo su borde, a un tubo de acero. Posteriormente, todo el conjunto es mecanizado sus caras, bordes y filete de soldadura, en éste último, se deja un redondeo para disminuir la concentración de esfuerzos.

Bajo éstas condiciones, se propuso la fabricación de las probetas (Ver Sección 4.1.1), y su esquema y geometría (Ver Figura 24). Debido a que, sólo una sección de la probeta se va a asentar sobre un soporte estructural, se toma como $b = 112.2mm$ y $a = 134.25$ que es el radio exterior. Comprobando los requerimientos que menciona la teoría, para la placa circular anular, tenemos:

$$\text{Placa delgada: } h < \frac{1}{5} \text{ longitud efectiva} \rightarrow h < \frac{1}{5}(a - b)$$

$$2.5 < 4.41 \quad , \text{Sí.}$$

$$\text{Relación } \frac{a}{b}: \quad \frac{a}{b} = 1.197 \sim 1.2 \quad , \text{Sí.}$$

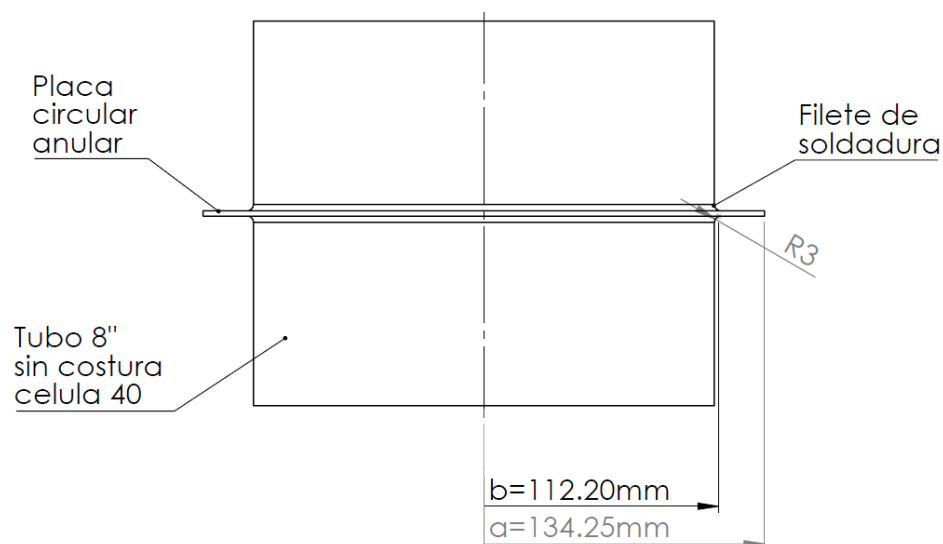


Figura 24 Probeta de Estudio.

Como se puede apreciar, el diseño de la probeta según este plan de experimentos se ha asemejado al establecido por la teoría.

3. La elección de la máquina de ensayos para generar compresión sobre la placa que producirá la flexión axisimétrica, se basa en el tamaño de dicha placa circular. Dentro del Laboratorio de Mecánica de Materiales de la “Universidad de las Fuerza Armadas ESPE”, se encuentra la Máquina de Ensayos MTS que, por sus grandes dimensiones, es la más apta para el uso de los experimentos (Ver Figura 25).
4. Como se muestra en la Figura 23b, la carga axisimétrica se transmite por el cilindro de la Máquina MTS al anclar un soporte estructural inferior, y sobre éste, se asienta una superficie de la placa. Por otro lado, en la cara del tubo libre de la probeta se asienta un soporte estructural superior, que simplemente descansa sobre la probeta. Al hacer una compresión, toda la carga axial se transmite al área de la placa de estudio. En la Figura 25, se aprecia a la máquina de ensayos MTS, junto a la probeta y soportes.



Figura 25 Máquina de ensayos MTS, junto a soportes estructurales y probeta de ensayo.

5. Las variables a medir durante la flexión son: 1) Deformación unitaria, con la que posteriormente se calculará los esfuerzos radiales y tangenciales en la placa, y 2) Deflexión máxima. Los equipos e instrumentos utilizados para medir cada variable y su procedimiento se muestran en la Tabla 11.

Tabla 11

Equipos e instrumentos de medición para cada variable de estudio durante la flexión.

Variables	Instrumentación	Ubicación
Deformación Unitaria	<ul style="list-style-type: none"> • 2 Galgas extensiométricas (Strain Gage) • 1 Lector de deformaciones unitarias de 120 ohmios. 	Las galgas se ubican en lo más próximo a su borde que genera el mayor esfuerzo: una en dirección radial, y otra en dirección tangencial. Ver Figura 26b y sección 4.1.2.
Deflexión	<ul style="list-style-type: none"> • 2 Comparador de Reloj Palpador de resolución 0.01mm, y alcance de 0-0.8 mm. • 2 Base soporte universal para comparador 	Los comparadores de reloj, se ubican en dirección radial a la placa, en lo más próximo a sus bordes: uno en el interno, y el otro en el externo. De tal manera que, al hacer una diferencia se obtiene la deflexión total sólo de la placa W_{Exper} . Ver Figura 26a.

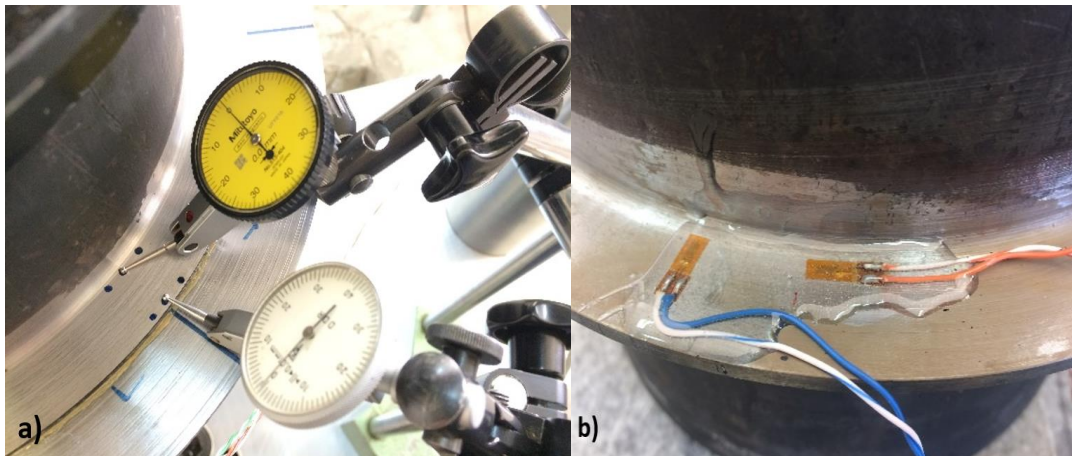


Figura 26 Posición de la instrumentación. a) Comparador de Reloj Palpador y, b) Galgas extensométricas.

6. Se calculan los esfuerzo radiales y tangenciales una vez que se hayan medido las deformaciones unitarias, mediante la Ley Generalizada de Hooke para el estado de biaxialidad, mediante las ecuaciones [4a] y [4b] mostradas en el Capítulo 2. Tomando a $E = 210000$ [MPa] y $u = 0.3$, ya que el material de la probeta es de acero.

$$\sigma_r = -\frac{E}{1-u^2}(\varepsilon_r + u \cdot \varepsilon_t) \quad [4a]$$

$$\sigma_t = -\frac{E}{1-u^2}(\varepsilon_t + u \cdot \varepsilon_r) \quad [4b]$$

Con éstos esfuerzos es posible determinar indirectamente los coeficientes k y k_1 mediante las ecuaciones [9a] y [9b], como se lo realizó en el capítulo 3 al obtener los coeficientes por FEM. Mientras que, la deflexión en la placa se obtiene por la diferencia de las medidas de los comparadores de reloj palpador ubicadas los más cerca a sus bordes, y así, se desprecia cualquier otra deformación o junta de los componentes de ensayo.

$$w_{Experimento} = \delta_{Comp. Reloj 1} - \delta_{Comp. Reloj 2} \quad [18]$$

4.1.1. Fabricación de Probetas y Soportes

A partir del diseño de experimentos propuesto en la sección anterior, se construyen 4 probetas y 2 soportes estructurales de acuerdo a un plano conjunto y de detalle que se presentan en el Anexo IV. El procedimiento de fabricación para éstos componentes de ensayo posee una cierta similitud. A continuación, se muestran los pasos que se siguieron para su fabricación:

1. Selección de materiales: Los materiales se seleccionaron basándose en la geometría que tiene cada componente. Se detallan una lista en la Tabla 12.
2. Corte: Los cortes se realizaron de acuerdo a los planos de cada componente presentados en el Anexo IV. Se muestra un resumen del procedimiento utilizado en la Tabla 13.
3. Armado: Los componentes se armaron bajo el procedimiento mostrado en la Tabla 14 y el uso de los planos de detalle.
4. Soldadura: Todos los elementos pertenecientes a sus componentes se soldaron con un proceso GMAW basándose en los planos del Anexo IV. En la Figura 27d, se muestra la soldadura aplicada en la probeta.
5. Mecanizado: El mecanizado se realiza en ciertas superficies de los componentes usando un torno NC (Ver Figura 27b). En el Anexo IV, se indica dichas superficies de mecanizado, así como también, sus acabados superficiales y tolerancias geométricas y dimensionales necesarias.
6. Verificación de la geometría: Inicialmente, se realizó una inspección visual para determinar la calidad en las superficies mecanizadas. Y posteriormente, se efectuó una comparación de la cilindridad y planicidad de las áreas más críticas utilizando un comparador de reloj palpador.

Tabla 12

Materiales seleccionados para cada geometría de los componentes de ensayo.

4 Probetas:	a) 4 Placas circular de acero ASTM A36mm de $\phi = 280 \text{ mm}$, $e = 6 \text{ mm}$. b) 4 Cilindros de Tubería sin costura cédula de 40. $\phi = 8''$ con $L = 185 \text{ mm}$.
1 Soporte Inferior:	a) 1 Base de plancha de acero ASTM A36 de $\phi = 240 \text{ mm}$, $e = 22 \text{ mm}$. b) 1 Cilindro rolado ASTM A36 de $\phi_{Ext.} = 236 \text{ mm}$, $e = 6 \text{ mm}$, $L = 150 \text{ mm}$. c) 8 Rigidizadores triangulares ASTM A36 de 40x40x6mm d) 1 Placa circular de acero ASTM A36mm de $\phi = 330 \text{ mm}$, $e = 8 \text{ mm}$.
1 Soporte Superior:	a) 1 Base de plancha de acero ASTM A36 de $\phi = 260 \text{ mm}$, $e = 22 \text{ mm}$. b) 1 Platina de acero ASTM A36 de 1"X1/4", $L = 800 \text{ mm}$.

Tabla 13

Procesos de corte usados para la fabricación de los componentes de ensayo.

Probeta:	La placa circular se la cortó por soldadura de plasma, mientras que la longitud del tubo sin costura se la realizo con una sierra de cinta eléctrica. Ver Figura 27a.
Soporte Inferior:	Todos los elementos de este componente se cortaron por el proceso de soldadura de plasma. Ver Figura 27c.
Soporte Superior:	

Tabla 14

Procedimiento de armado para la fabricación de los diferentes componentes de ensayo.

Probeta:	La unión entre la placa circular anular y el tubo sin costura se realizó en un torno convencional, con 4 puntos de soldadura distribuidos sobre su centro, y usando un proceso GMAW. Se utilizó una escuadra de medida para verificar su ortogonalidad.
Soporte Inferior:	El armado de todos los elementos de este componente se lo realizó en una mesa de ensamblaje con los respectivos instrumentos de medida necesarios (nivel, escuadra, compás, flexómetro, entre otros.). Para la unión permanente de los componentes, se usó de igual forma, el proceso GMAW.
Soporte Superior:	



Figura 27 Proceso de construcción en probetas y soportes.

4.1.2. Ubicación y colocación de Galgas o Strain Gages:

Para ubicar los sensores en la placa circular se consideran los puntos de mayor esfuerzo según la teoría y el área de la placa experimental donde serán colocados. Según los resultados analíticos, para el caso de estudio 3 los mayores esfuerzos se presentan en el borde interno de la placa ($r = b$). Bajo esta condición, se ubicaron los extensómetros como se muestra en la Figura 28, a una distancia radial de 8 mm de la superficie del tubo sin costura. Y en la Figura 26b, se muestra a una galga extensométrica adherida a la probeta de análisis. Para la colocación de los extensómetros en la placa circular, se realizó el siguiente procedimiento:

1. Limpieza de la zona donde se ubica el sensor, mediante lijas de grano fino y alcohol. Elimina cualquier residuo y garantiza la planicidad.
2. Se marca la posición específica de ubicación, utilizando un rayador o marcador.
3. Se juntan los cables del extensómetro a zapata terminal mediante un pegamento de cinta, y así, mantenerlos juntos hasta pegarlos en la superficie de la placa.

4. Adherencia del sensor y zapata terminal a la placa metálica en la posición marcada, con pegamiento industrial.
5. Soldadura de los terminales del extensómetro y zapata terminal, a cables que transmiten los datos al lector de deformaciones unitarias.
6. Fijación del extensómetro a placa por una pega epóxica, protegiendo y cuidando al sensor extensómetro.

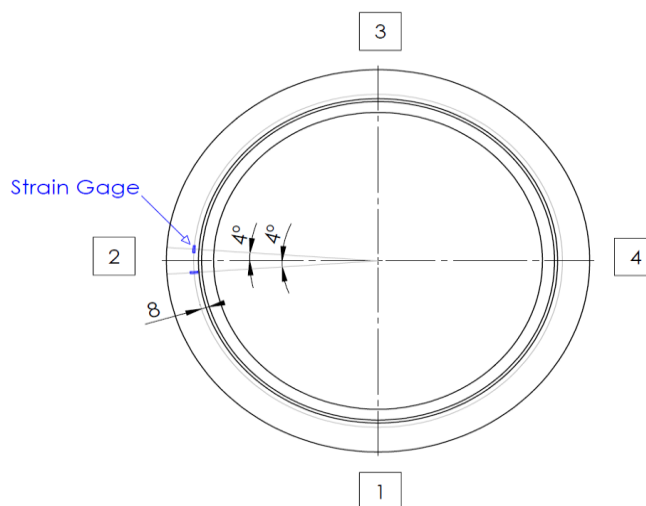


Figura 28 Posición de extensómetros en probeta de ensayo. Vista Superior

Colocada la instrumentación en las probetas, se procede a medir su posición, ya que al ser pequeña el área de análisis, un pequeño desplazamiento puede ser significativo. En la Tabla 15, se muestran las posiciones radiales de la instrumentación en las probetas de estudio.

Tabla 15

Posición radial de la instrumentación en las probetas de estudio experimental.

PROBETA	POSICIÓN RADIAL DE EXTENSÓMETROS [mm]		POSICIÓN RADIAL DE COMPARADOR DE RELOJ PALPADOR [mm]	
	RAD	TANG	COMP 1	COMP 2
1	118.2	118.3	116	128
2	118.7	118.4	116	128
3	118.7	118.2	116	128
4	118.4	118.2	116	128

4.2. Procedimiento experimental

La ejecución de los experimentos se la realizó utilizando la siguiente secuencia:

1. Ubicación de soporte en Máquina MTS. Apagada la máquina de ensayos MTS, se sujeta mediante pernos el soporte estructural inferior al vástago del cilindro de la máquina, para garantizar en lo posible cualquier holgura excesiva o desplazamiento.
2. Preparación de la máquina de ensayos MTS. Antes del encendido de la máquina, se abre una llave de paso de agua para asegurar el enfriamiento de su sistema de potencia por un intercambiador de calor. Luego, se habilita la corriente mediante sus interruptores y se conecta un multímetro en el panel de control de la máquina.
3. Encendemos la máquina MTS. Se realiza el encendido de la máquina de ensayos, se gradúa la máquina para un funcionamiento del 10% y una cantidad de segundos para llegar a 6 Voltios (medida tomada en multímetro), que posteriormente haciendo una relación lineal se obtiene las 3 Toneladas aplicadas.
4. Preparación de la probeta. Para evitar la fricción y calentamiento entre el soporte inferior y la probeta, se agrega un lubricante (grasa sintética) en las superficies de contacto. Luego, se ubica la probeta sobre el soporte estructural inferior, y sobre ésta (en la cara superior libre del tubo), el otro soporte estructural simplemente apoyado.

5. Conexión de Strain Gages. Se realiza la conexión de los 2 strain gages ubicados en la placa circular, a un lector de deformaciones unitarias en los canales 1 y 2. Posteriormente, enceramos los canales.
6. Ubicación de los comparadores de reloj palpadores. Mediante el panel de control de la máquina MTS, aplicamos compresión hasta juntar los componentes. Ubicamos en sentido radial dos comparadores de reloj palpador de acuerdo a la posición determinada en la Tabla 15, de tal forma, que en la diferencia de sus medidas se encuentre sólo la deflexión en la placa. En la Figura 29 se visualiza la posición de los comparadores de reloj durante la flexión en la placa.

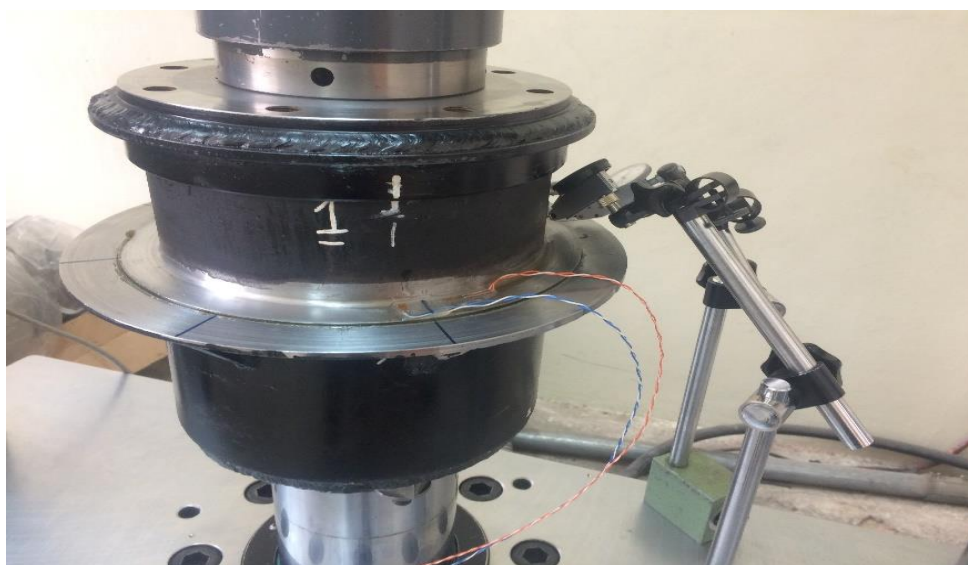


Figura 29 Compresión de los soportes estructurales generando flexión axisimétrica en la placa experimental

7. Lista la máquina y la probeta, realizamos la compresión de los soportes estructurales generando flexión en la placa circular. Cuando el multímetro nos indique una medida de 6 Voltios, tomamos nota del indicador de deformaciones en los canales y de los comparadores de reloj palpadores. Una

vez finalizada la compresión, retiramos los palpadores y separamos los soportes, giramos 90° a la probeta para posteriormente realizar el ensayo en una segunda posición. Se repite este paso, hasta tener medidas en 4 posiciones de la placa (0° , 90° , 180° , 270°).

8. Para efectuar los ensayos de las siguientes probetas, repetimos los procedimientos de 4 a 7. Obteniendo así, en las 4 posiciones de cada probeta las deformaciones en sentido radial y tangencial, así como también, la deflexión de la placa circular anular.

En la Figura 29 se muestran la compresión que generan los soportes estructurales sobre la placa anular circular, y sus respectivos instrumentos de medida. Mientras que, en la Figura 30 se muestran a todos los componentes ejecutando el plan de experimentos de acuerdo al procedimiento propuesto.



Figura 30 Ejecución de los ensayos bajo el plan de experimento propuesto

4.3. Comprobación de resultados por el método experimental

Bajo las consideraciones mencionadas anteriormente en el plan de experimentos propuesto, se resume la geometría de la placa de estudio experimental en la Tabla 16 y en el Figura 31a un esquema del plan de experimento, donde se detalla una sección B que se muestra en la Figura 31b. En ésta última, se observa la carga distribuida aplicada Q en una sección de área efectiva de la placa justo donde existe contacto superficial entre la probeta y el soporte estructural.

Tabla 16

Geometría de la placa de estudio experimental y carga aplicada.

GEOMETRÍA DE LA PLACA			CARGA APLICADA EN ÁREA EFECTIVA		
a	134.25	[mm]	P_{Maq}	3	[Ton]
b	112.2	[mm]	P_{Placa}	2.95	[Ton]
h	2.5	[mm]	$a - b$	22.05	[mm]
$A_{Efect.}$	17072.1	[mm ²]	Q	1.693	[MPa]

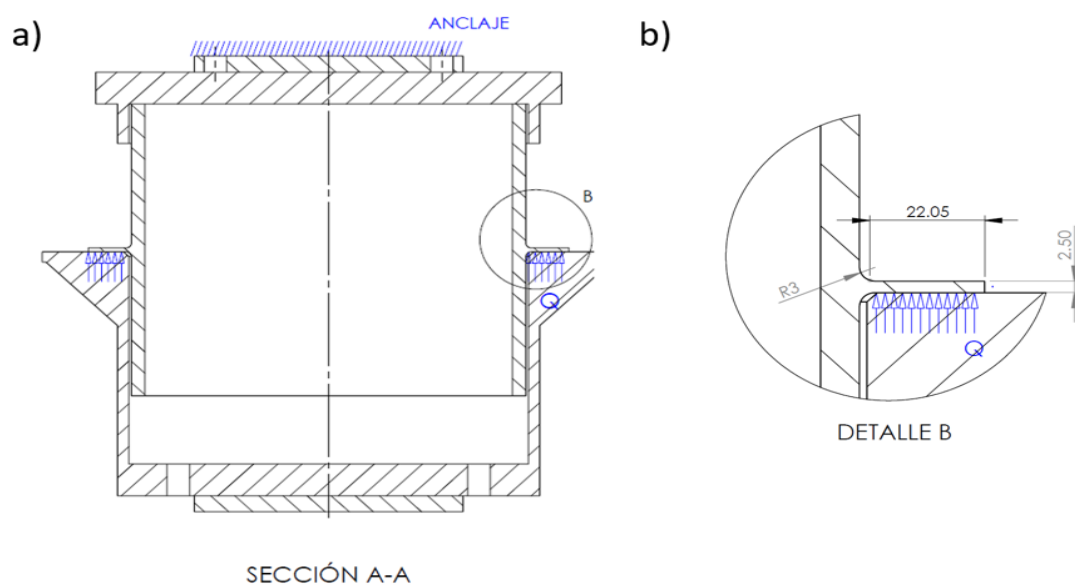


Figura 31 Esquema del experimento propuesto. a) Sección transversal. b) Detalle B, que indica la carga Q sobre el área efectiva de la placa.

Los ensayos se realizaron usando el plan de experimentos propuesto, aplicando una carga en máquina de 3 [Ton]. De la cual, se usó una precarga de 0.05 [Ton] necesaria para juntar la probeta a los soportes estructurales e ubicar los comparadores de reloj, y ser posible medir la deflexión. Por lo tanto, se aplica una carga de 2.95 [Ton] para obtener mediciones sobre la placa circular anular en un área efectiva, lo que nos produce una carga Q que se determina por:

$$Q = \frac{2.95 \text{ [Ton]} * 1000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{Ton}} \right] * 9.8 \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right]}{17072.1 \text{ [mm}^2\text{]}}$$

$$Q = 1.693 \text{ [MPa]}$$

Los resultados obtenidos para las 4 probetas de análisis, a una posición r de su instrumentación se muestran en la Tabla 17. La toma de mediciones se realiza como indica el plan de experimentos, en 4 puntos variando un ángulo de 90° que posteriormente se determina un promedio, analizando así, la condición axisimétrica. Los esfuerzos generados se determinaron por las ecuaciones [4a] y [4b]. Haciendo un ejemplo de cálculo para la probeta 2, tenemos:

$$\sigma_r = \frac{210000 \text{ [MPa]}}{1 - 0.3^2} [(286.25 \times 10 - 6) + 0.3(15 \times 10 - 6)]$$

$$\sigma_r = 67.04 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_t = \frac{210000 \text{ [MPa]}}{1 - 0.3^2} [(1510 - 6) + 0.3(286.25 \times 10 - 6)]$$

$$\sigma_r = 23.278 \text{ [MPa]}$$

Despreciando a la probeta 3, que no registró datos apreciables para el experimento (Ver sección 4.4), se muestra un resumen en la Tabla 18 de los resultados obtenidos en la Tabla 17 y la posición de los sensores en la Tabla 15.

Tabla 17
Resultados experimentales obtenidos para una posición r .

PROBETA #1							
POSICIÓN	DEF UNIT RADIAL (x10-6)	DEF UNIT TANG (x10-6)	δ_1 [mm]	δ_2 [mm]	DEFLEXIÓN [mm]	ESF RADIAL [MPa]	ESF TANG [MPa]
1 (0°)	160	10	0.16	0.14	0.02	35.17	12.23
2 (90°)	131	4	0.18	0.17	0.01		
3 (180°)	138	9	0.12	0.11	0.01		
4 (270°)	173	9	0.15	0.14	0.01		
PROMEDIO	150.5	8			0.013		

PROBETA #2							
POSICIÓN	DEF UNIT RADIAL (x10-6)	DEF UNIT TANG (x10-6)	δ_1 [mm]	δ_2 [mm]	DEFLEXIÓN [mm]	ESF RADIAL [MPa]	ESF TANG [MPa]
1 (0°)	296	8	0.27	0.19	0.08	67.038	23.26
2 (90°)	312	11	0.28	0.19	0.09		
3 (180°)	255	29	0.26	0.18	0.08		
4 (270°)	282	12	0.25	0.18	0.07		
PROMEDIO	286.25	15			0.080		

PROBETA #3							
POSICIÓN	DEF UNIT RADIAL (x10-6)	DEF UNIT TANG (x10-6)	δ_1 [mm]	δ_2 [mm]	DEFLEXIÓN [mm]	ESF RADIAL [MPa]	ESF TANG [MPa]
1 (0°)	12	16	0.2	0.17	0.03	4.45	5.32
2 (90°)	10	17	0.21	0.17	0.04		
3 (180°)	14	18	0.18	0.16	0.02		
4 (270°)	18	25	0.19	0.16	0.03		
PROMEDIO	13.5	19			0.030		

PROBETA #4							
POSICIÓN	DEF UNIT RADIAL (x10-6)	DEF UNIT TANG (x10-6)	δ_1 [mm]	δ_2 [mm]	DEFLEXIÓN [mm]	ESF RADIAL [MPa]	ESF TANG [MPa]
1 (0°)	249	63	0.22	0.18	0.04	48.96	23.93
2 (90°)	168	27	0.2	0.16	0.04		
3 (180°)	155	37	0.2	0.17	0.03		
4 (270°)	225	49	0.19	0.15	0.04		
PROMEDIO	199.25	44			0.038		

Al hacer una comparación de los resultados de la Tabla 18, se puede apreciar que a una pequeña variación en la posición de la instrumentación se generan grandes cambios, sobre todo en los esfuerzos. Por lo tanto, realizar una comparación de los coeficientes k y k_1 no sería muy conveniente, ya que el borde de la placa como lo considera la teoría se encuentra a 8mm del sensor. Sin embargo, podemos comparar éstos resultados, en las posiciones de las probetas por el modelo teórico y computacional.

Tabla 18

Resumen de los resultados experimentales obtenidos en las posiciones de las probetas.

PROBETA	POSICIÓN RADIAL DE LA INSTRUMENTACIÓN [mm]				RESULTADOS EXPERIMENTALES		
	EXT. RAD	EXT. TANG	COMP 1	COMP 2	ESF RADIAL [MPa]	ESF TANGENCIAL [MPa]	DEFLEXION [mm]
1	118.2	118.3	116	128	35.17	12.23	0.0375
2	118.7	118.4	116	128	67.038	23.26	0.08
4	118.4	118.2	116	128	48.96	23.93	0.0125

En la Figura 32, se muestra una comparación de mediciones bajo los modelos teórico y experimental. En la sección 5.2 se realiza una comparación de los modelos teórico, computacional y experimental en la posición que se ubica la instrumentación.

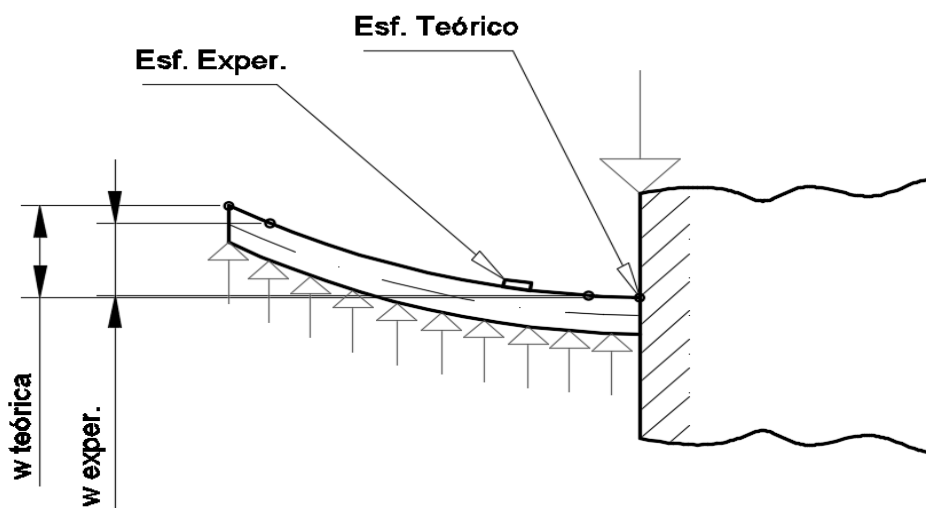


Figura 32 Comparación de mediciones bajo los modelos teórico y experimental en una sección simétrica de la placa.

4.4. Retos en las mediciones

Al momento de realizar los ensayos de flexión axisimétrica en la placa, se presentaron las siguientes dificultades: 1) Esfuerzos no similares, y 2) Falta de repetibilidad en la toma de datos. Las variables a controlar se hicieron muy notables en el experimento pese a que se tuvieron cuidado en el diseño del plan de acción experimental. A continuación, se muestran las más críticas:

- Carga descentrada: Ya sea por defectos de construcción, como también una pequeña desviación en la base de la máquina de compresión.
- Defectos geométricos: Generados por el método de fabricación usado de acuerdo al plan de experimentos.
- Toma de datos no instantánea: Las mediciones de deformación unitaria y deflexión no fueron al instante en 4 posiciones para garantizar cualquier presencia de otra variable como la holgura, debido a que los sensores son muy sensibles.
- Área de estudio muy pequeña: Al ser pequeño el ancho efectivo de la placa experimental, produjo que la ubicación de los extensómetros sea muy crítica, ya que éstos son muy sensibles a una pequeña variación en su posición (angular y radial).

Éstas variables y otras, afectaron las medidas de la deformación unitaria y la deflexión en la placa, al usar el plan de experimentos propuesto. El diseño de dicho plan se basó en la utilización de equipos e instrumentos disponibles, así como también, la relación $\frac{a}{b} = 1.2$ en la que se basa su solución analítica, que para éste caso no fue muy favorable. Ya que, pese a que se utilizaron dimensiones grandes de la placa, su ancho efectivo aún era pequeño. Lo que implica que, a variaciones diminutas de las variables mencionadas se hacen representativas en la flexión axisimétrica de la placa.

Suponiendo que, si se realizará un análisis con una placa más grande con el objetivo de aumentar el área de análisis, sé es necesario soportes estructurales más grandes y rígidos, lo que aumentará las variables a controlar al ser más difícil conseguir una carga axisimétrica, ya que se inducen otro tipo de variantes en todo el

conjunto de ensayos, como es el pandeo de los cilindros de la máquina, tolerancias de mecanizado a gran escala (casi no controlables), calibración de componentes más exigente, entre otros. Aclarando así, que el diseño del plan de experimentos propuesto se ve afectado principalmente por la relación $\frac{a}{b} = 1.2$ y la variación radial de la instrumentación (holguras y juegos de los componentes), que al ser muy sensibles generaron variaciones en sus medidas.

Las variables presentadas se corrigieron en su máximo alcance, y fue posible disminuir tales variaciones, sin embargo, continuaron presentes.

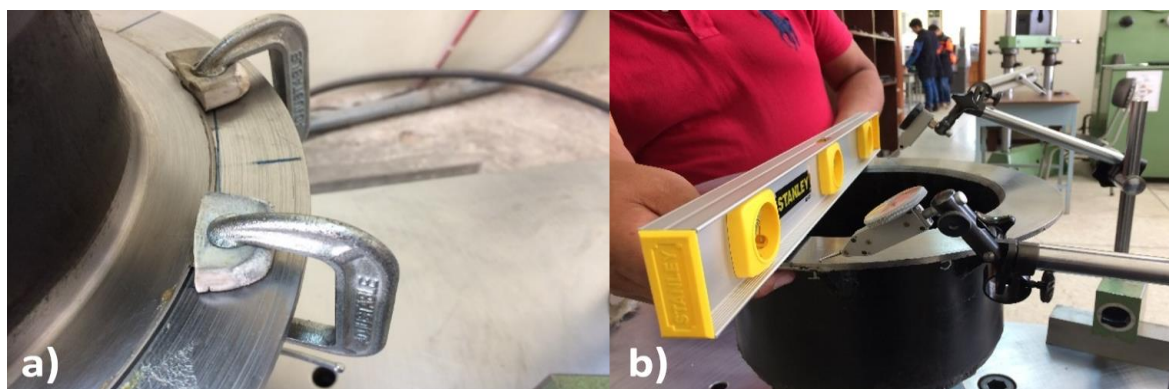


Figura 33 Correcciones de variables presentadas en ensayos a) Utilización de galgas de espesor de 0.03mm para mejor axisimetría y b) Mejora de defectos geométricos y calibración de probeta, soportes y máquina MTS.

En la Figura 33a se observa que para mejorar la axisimetría se utilizaron galgas de espesor de 0.03mm, proporcionadas por el Laboratorio de metrología de la “UFA-ESPE”. Y en la Figura 33b, se observa una calibración del conjunto de los componentes utilizados (máquina, soportes y probeta). Para ésta última corrección, se vió la necesidad de maquinar las placas que utilizaban los cilindros de la máquina MTS, así como también, los componentes (probeta y soportes estructurales) usando un mecanizado más exigente que el anterior.

5. CAPÍTULO ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1. Validación de coeficientes por los modelos teórico y computacional.

La comparación de los resultados obtenidos por los modelos teórico y computacional de los coeficientes k y k_1 , se muestran en la Tabla 19, con sus respectivos errores que fueron muy aceptables, ya que se encuentran debajo del 5%. Bajo éste análisis que ha sido revisado en los capítulos anteriores se afirma que los coeficientes teóricos k y k_1 , han sido validados por el método FEM.

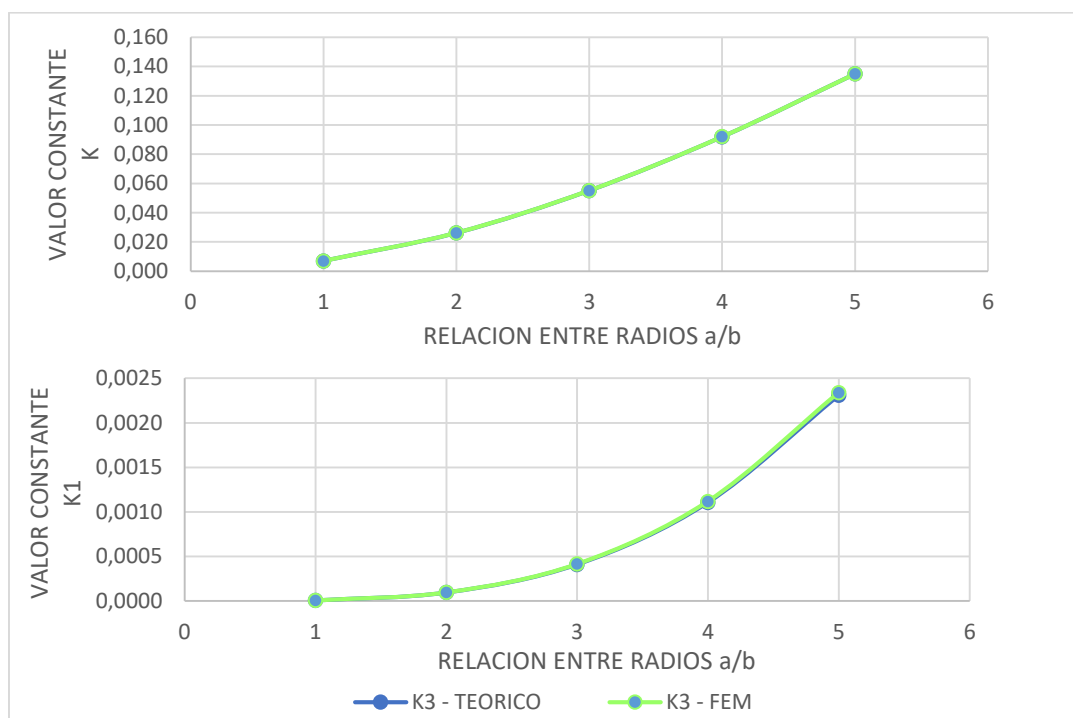


Figura 34 Coeficientes obtenidos por los modelos teórico y computacional

En la Figura 34 se muestra una representación de los de los dos métodos utilizados para la generación de nuevos coeficientes en una relación $a/b = 1.2$ del caso 3, que se llevó a cabo durante todo éste proyecto.

Como se puede apreciar, las gráficas están muy cercanas entre sí, lo que significa que los valores no poseen una diferencia considerable, por lo tanto son aceptables

Tabla 19

Validación de coeficientes k y $k1$, generados por el modelo teórico y computacional FEM.

CASOS DE ESTUDIO																															
		1			2			3			4			5			6			7			8			9			10		
a/b	Co ef.	Analítica	FEM	Error %	Analítica	FEM	Error %	Analítica	FEM	Error %	Analítica	FEM	Error %	Analítica	FEM	Error %	Analítica	FEM	Error %	Analítica	FEM	Error %	Analítica	FEM	Error %	Analítica	FEM	Error %			
1.05	k	0.986	0.984	0.17	0.145	0.146	0.40	0.007	0.007	0.32	0.007	0.007	2.46	0.005	0.0047	0.20	0.024	0.0234	1.16	0.142	0.1424	0.02	0.047	0.0466	1.64	0.046	0.0442	3.53	0.007	0.0066	0.04
	k1	0.0888	0.0869	2.04	0.0131	0.0131	0.20	0.00007	0.000072	1.01	0.00012	1.160E-05	0.02	0.0002	2.46E-06	3.60	0.0016	1.63E-05	1.68	0.01282	0.01280	0.18	0.0064	6.44E-05	0.48	0.0064	6.17E-05	3.60	0.00007	6.97E-06	1.00
1.10	k	1.016	0.995	2.02	0.283	0.286	1.06	0.026	0.0262	0.32	0.025	0.0255	1.79	0.017	0.0173	0.06	0.047	0.0455	3.04	0.271	0.274	1.12	0.094	0.0923	1.62	0.088	0.086	1.55	0.023	0.0233	0.47
	k1	0.1655	0.1621	2.08	0.0461	0.0460	0.08	0.00010	0.000097	1.10	0.00015	0.00015	0.70	0.0003	3.30E-05	3.68	0.0011	0.00117	3.03	0.0442	0.0442	0.06	0.00046	0.000459	0.70	0.00045	0.00044	2.21	0.00009	9.1E-05	1.10
1.15	k	1.046	1.032	1.35	0.413	0.415	0.43	0.055	0.0552	0.12	0.052	0.0522	1.02	0.037	0.0365	0.04	0.070	0.068	2.13	0.388	0.389	0.34	0.139	0.138	1.02	0.126	0.1254	0.80	0.047	0.0469	0.26
	k1	0.2322	0.2290	1.38	0.0916	0.0916	0.04	0.00041	0.00042	1.20	0.00064	0.000644	0.66	0.00014	0.000141	3.60	0.00034	0.00035	3.15	0.0863	0.0862	0.07	0.00137	0.00138	0.70	0.00136	0.00135	1.20	0.00037	0.000378	1.03
1.20	k	1.075	1.063	1.11	0.538	0.540	0.45	0.092	0.092	0.05	0.085	0.0851	0.61	0.061	0.0609	0.04	0.092	0.0909	1.60	0.494	0.497	0.47	0.184	0.1825	0.74	0.162	0.1610	0.50	0.075	0.07497	0.23
	k1	0.2904	0.2873	1.06	0.1449	0.1448	0.05	0.00111	0.00112	1.14	0.00169	0.00170	0.70	0.00037	0.00038	3.45	0.00073	0.00075	3.25	0.1339	0.1338	0.06	0.00291	0.00293	0.80	0.00288	0.00286	0.70	0.00098	0.00099	1.08
1.25	k	1.10	1.094	0.50	0.66	0.656	0.58	0.135	0.135	0.01	0.122	0.1221	0.06	0.090	0.0893	0.75	0.115	0.113	2.02	0.592	0.5919	0.02	0.227	0.225	0.67	0.194	0.1927	0.66	0.105	0.1043	0.63
	k1	0.341	0.339	0.72	0.202	0.202	0.13	0.00231	0.00234	1.33	0.00343	0.00335	1.48	0.00077	0.00080	3.36	0.00129	0.0013	2.84	0.184	0.1838	0.14	0.00510	0.00515	0.91	0.00504	0.00502	0.42	0.00199	0.00201	1.22

5.2. Resultados de los modelos teórico, computacional y experimental en un punto de la placa circular anular

En esta sección, se realiza una comparación de los modelos teórico, computacional y experimental en la posición de la instrumentación ubicada en las probetas de estudio de los ensayos experimentales.

Los valores experimentales se resumen en la Tabla 18, por lo tanto quedan por definir los resultados de los otros métodos. Los valores teóricos y computacionales por FEM, se determinan utilizando los datos de la geometría de la placa circular de ensayo experimental mostrados en la Tabla 16.

Para obtener una mayor aproximación, el análisis por FEM se lo realizó en el espacio modelando la geometría real de la probeta de ensayos, utilizando un elemento finito tridimensional hexaedro, y llegando a su convergencia en su solución. En la Figura 35a se muestra las BCS y carga aplicada, y en la Figura 35b la deflexión en la placa de estudio. Los resultados en las posiciones se muestran en la Tabla 20.

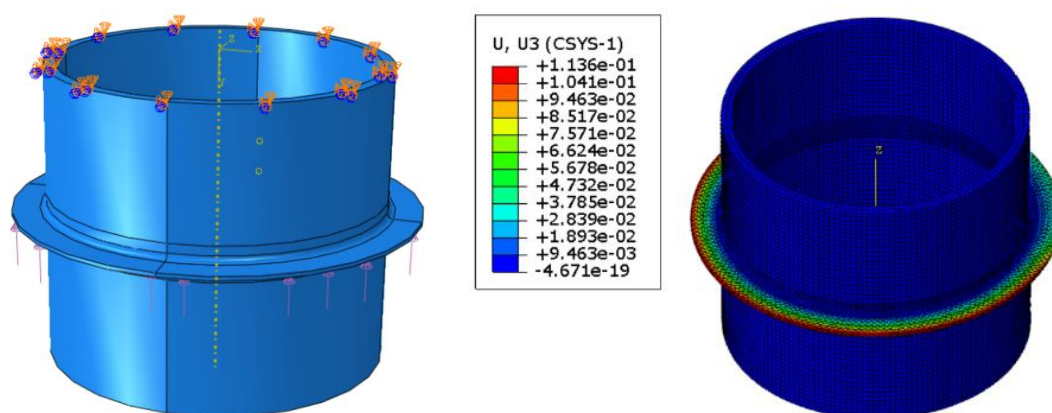


Figura 35 Probeta de estudio por FEM a) BCS y carga aplicada.
b) deflexión en la placa de estudio.

Los valores teóricos se determinaron mediante las ecuaciones de gobierno [14a] y [14b] del caso 3 (obtenidas en el capítulo 3). Resolviendo para r , que son las

posiciones de la instrumentación, se obtiene los resultados mostrados en la Tabla 21. Las comparaciones de todos los modelos de estudio se muestran en la Tabla 22, y la representación de sus esfuerzos y deflexiones en las Figuras 36 y 37, repectivamente.

Tabla 20

Resultados obtenidos por FEM en las posiciones de instrumentación de las probetas.

PROBETA	FEM		
	ESF RADIAL [MPa]	ESF TANGENCIAL [MPa]	DEFLEXIÓN [mm]
1	168.11	67.29	0.093
2	154.33	65.64	0.093
4	162.60	66.59	0.093

Tabla 21

Resultados obtenidos por Teoría en las posiciones de instrumentación de las probetas.

PROBETA	TEORÍA		
	ESF RADIAL [MPa]	ESF TANGENCIAL [MPa]	DEFLEXIÓN [mm]
1	169.48	67.79	0.110
2	157.19	67.16	0.110
4	164.50	68.43	0.110

5.2.1. Comparación del modelo teorico vs computacional

Se puede observar claramente que los esfuerzos entre éstos modelos funcionan muy bien, están dentro de un error que es considerable. Ahora, si observamos los valores de la deflexión, hay una variación entre los modelos con un 15% de error. Esto se pudo haber producido por que el modelo teórico no considera el redondeo que posee la placa (mecanizado del filete de soldadura), y el análisis por FEM considera toda la geometría de la probeta (Ver Figura 24).

5.2.2. Comparación del modelo computacional vs experimental

La variación que poseen los esfuerzos en éstos modelos es muy considerable. Para el mejor de los casos, que fue el de la probeta 2, se registran errores del 60%, que son inaceptables en la ingeniería. Con la comparación de los modelos anteriores y la variación en los resultados que obtienen los sensores a una distancia radial, se asegura que el modelo FEM en ésta comparación es la más proxima a la realidad.

5.2.3. Comparación del modelo experimental vs teórico

Como se observa en la comparación anterior (experimental vs computacional), la gran variación en los esfuerzos radiales y tangenciales se deben a que el sensor se ve afectado a la mínima variación en la posición radial que puede darse por holguras entre la probeta y los soportes estructurales y la deformación circunferencial que posee el tubo por defectos de fabricación. Éste comportamiento se hace muy notorio en ésta comparación. Ahora, para la deflexión, el error aumenta debido a que la teoría no considera el redondeo mecanizado.

Tabla 22

Comparaciones de los modelos teórico, experimental y computacional en la posición de la instrumentación de las probetas.

PROBETA	COMPARACIÓN MODELO TEÓRICO VS EXPERIMENTAL			COMPARACIÓN MODELO EXPERIMENTAL VS FEM			COMPARACIÓN MODELO FEM VS TEÓRICO		
	ESF RADIAL [%]	ESF TANGENCIAL [%]	DEFLEXIÓN [%]	ESF RADIAL [%]	ESF TANGENCIAL [%]	DEFLEXIÓN [%]	ESF RADIAL [%]	ESF TANGENCIAL [%]	DEFLEXIÓN [%]
1	79.25	81.96	65.83	79.08	81.82	59.68	0.81	0.74	15.26
2	57.35	65.37	27.11	56.56	64.56	13.98	1.82	2.26	15.26
4	70.24	65.03	88.61	69.89	64.06	86.56	1.16	2.69	15.26

La deflexión en el modelo experimental no se ve tan afectada como los esfuerzos por los defectos en la geometría (holgura, deformación tubular) o variables a controlar, ya que al comparar con el modelo computacional que considera toda la geometría de la probeta se registran errores del 14%, pequeños para los obtenidos en esfuerzos.

Considerando que el modelo FEM ha sido validado por el modelo teórico, se realiza una variación de los esfuerzos a una distancia r (Ver Tabla 23), se observa que por 1 [mm] de variación se tiene una diferencia cerca de 30 [MPa]. Si analizamos el juego y las holguras que tienen los componentes, la variación de la cilíndricidad que posee el tubo por defectos de fabricación y la alineación de la máquina podemos aseverar que las variables a controlar se hacen presentes en éste diseño de experimento.

Tabla 23

Variación de esfuerzos en la probeta de estudio por FEM a una posición radial.

r [mm]	ESF RADIAL [MPa]	ESF TANGENCIAL [MPa]
117.0	201.2	71.4
118.0	173.6	68.0
119.0	146.1	64.7
120.0	118.5	61.4

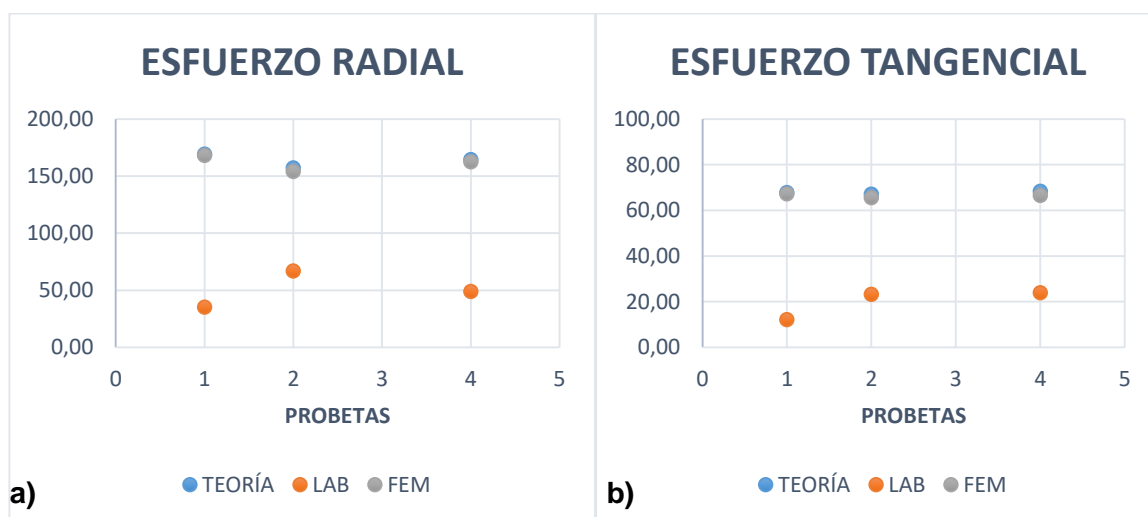


Figura 36 Esfuerzos en las probetas a) Radial y b) Tangencial.

Pese a que no se obtuvieron buenos resultados en los ensayos propuestos, por las diferentes condiciones y causas mencionadas; la literatura nos muestra que la teoría clásica de placas ya fue validada, es decir, funciona bien para el caso experimental. Y como se sabe, que el estudio de flexión estática en placas circulares con un agujero en su centro, se basa en ésta teoría, pues, se asegura que los casos de estudio funcionan para los propósitos de diseño más prácticos.

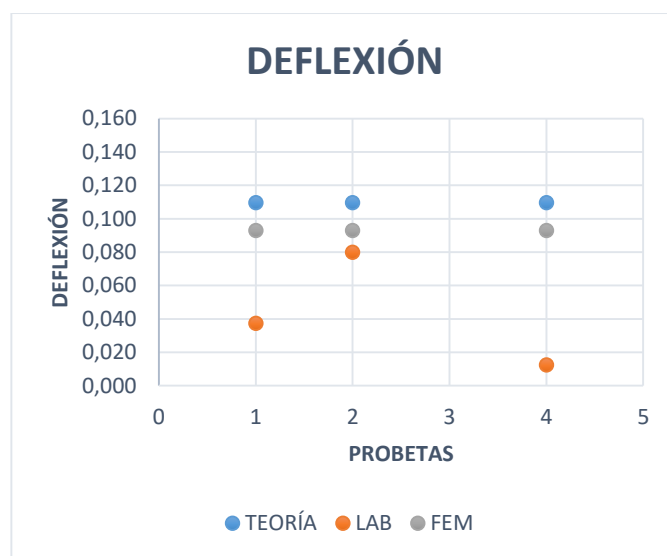


Figura 37 Deflexión en las probetas.

6. CAPÍTULO

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. Conclusiones

- Se determinó y validó nuevos coeficientes para el análisis de esfuerzos en placas circulares isotrópicas con cargas simétricas cuando la relación $\frac{a}{b} = 1.05, 1.10, 1.15, \text{ y } 1.20$. Dichos coeficientes fueron desarrollados por las ecuaciones de gobierno para cada caso en especial, analizando las variables que influyen, como es el tipo de carga y las BCS. Además, fueron validados dichos coeficientes, por los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas realizadas en cada caso, en la que en cada uno se llegó a la convergencia utilizando el menor costo computacional.
- Con el objetivo de optimizar el costo computacional y obtener soluciones confiables por FEM, se realiza una comparación de resultados obteniendo un coeficiente ya existente $\frac{a}{b} = 1.25$, utilizando dos tipos de mallas: estructurada y libre, con un tamaño de elemento global y variante, respectivamente. Así como también el uso de 3 tipos de elementos finitos recomendados en éstas mallas. Se concluye que los parámetros computacionales más óptimos se dan en un mallado estructurado y libre (con $d/e = 4$), al estar acompañado de un elemento finito bidimensional tipo cáscara (Shell) cuadrático. Adicionalmente, en éste análisis se determinó un número adimensional $\alpha = e/b$, que indica la convergencia de las soluciones para un mallado libre.
- Las simulaciones de los casos que poseen condiciones de borde de empotramiento presentaron un error mayor y una convergencia a la solución con más número de elementos, que los casos en donde la placa se encuentra

simplemente apoyada en su borde. Este comportamiento se debe a que se presenta con mayor intensidad el estiramiento del plano medio de la placa, al producirse la flexión se reduce la circunferencia exterior o interior (dependiendo el caso). La teoría desprecia totalmente este comportamiento si la deflexión es inferior al 10% de su espesor, sin embargo, mencionado comportamiento existe, por lo que al hacer la comparación con FEM se ve claramente una diferencia en sus resultados.

- Se realizó un ensayo de manera experimental, para el caso de estudio 3, con $a/b = 1.2$. Los resultados experimentales se vieron afectados principalmente por la variación en la posición de la instrumentación que generaron grandes cambios en los esfuerzos. Este comportamiento se produjo principalmente en las holguras y juegos existentes entre los componentes, en un área pequeña de análisis establecida por la relación a/b mencionada. Por lo tanto, realizar una comparación de los coeficientes k y k_1 no era muy conveniente. Sin embargo, éstos resultados se compararon con los modelos teórico y computacional. Se concluye que el modelo FEM y teórico responden muy bien al comportamiento de la placa, al tener errores considerables. Mientras que, el modelo experimental bajo el plan de experimento, no se asemejó a las consideraciones ideales que exige la teoría, por tanto, sus errores no son admisibles.
- Los nuevos coeficientes obtenidos, colaboran al diseño óptimo de placas circulares anulares bajo cargas axisimétricas. Las placas circulares se usan ampliamente en muchas aplicaciones de ingeniería como sujeción de tubería para el transporte de fluidos, recipientes a presión, sujeción de piezas de

trabajo, placas anulares de anclaje embebidas en hormigón, estructuras metálicas, entre otros y al utilizar los nuevos coeficientes se puede determinar un diseño más aproximado a la realidad, optimizando costos y recursos al reducir el tamaño de la placa circular. Esto permite que los diseños industriales sean más eficientes e indirectamente se colabora con la disminución del impacto ambiental, debido a la reducción en insumos y materiales de acero.

6.2. Recomendaciones

- El uso de un software matemático que resuelve ecuaciones diferenciales es de gran ayuda para el investigador en la comprobación y generación de sus resultados.
- Se observó que la calibración de equipos e instrumentos de medida es esencial, ya que una pequeña variación en las medidas genera grandes diferencias en las tensiones en la probeta.
- Se requiere el uso de procesos de manufactura más precisos en la fabricación de las probetas, reduciendo así, las variables a controlar por defectos de geometría en todos los componentes usados.
- Se recomienda el uso de una instrumentación más adecuada, en lo posible, la más pequeña para reducir la distancia de separación radial entre ésta, y el borde que incide mayores esfuerzos.

6.3. Trabajos Futuros

- Determinar y validar los coeficientes k y k_1 ya existentes mediante el método experimental utilizando en la posible una relación a/b mucho mayor ampliando el área de análisis de la placa circular anular con probetas más

pequeñas, que pueden ser fabricadas más cuidadosamente y la posición de su instrumentación no sea tan considerable, reduciendo así, las variables a controlar que se hicieron muy presentes en este proyecto.

- La comprobación experimental de los coeficientes k y k_1 , para los casos determinados en éste proyecto y los existentes por sus autores (Timoshenko, S. & Woinowsky S., 1959), verificando las variables presentes en las condiciones de borde para cada caso estudiado en éste proyecto.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Alexander Ecker, H. U. (2017). Transfer of axial loads in penstocks Load carrying behaviour with and without thrust rings. *EUROSTEEL*, 938-947.
- AWWA. (2004). *STEEL PIPE MANUAL* (Cuarta ed.). Denver, Colorado, Estados Unidos: AWWA.
- Banerjee, B., Chen J., Kathirgamanathan, A., & Raj D. (2011). *Comparison of ANSYS elements SHELL181 and SOLSH190*. Univ. of Auckland, Res. Rep, New Zealand.
- Budynas R. G. (1977). *Advanced strength and applied stress analysis*. New York: McGraw-Hill.
- Burvill, D. C. (2013). Solid Mechanics Lecture Notes. (T. U. Melboure, Ed.) Australia.
- Celigüeta Lizarza J. T. (2011). *Método de los elementos finitos para análisis estructural* (Cuarta ed.). San Sebastián, Guipúzcoa, España: UNICOPIA C.B.
- Chandrashekhara, K. (2001). *Theory of plates*. Universities press.
- Chiu, S.-R. (1986). *Circular plate analysis using finite element method*. Docoral dissetation, New Jersey Insitute of Technology.
- G. P., & P. S. (28-30 de April de 2016). Static bending analysis of an isotropic circular plate using finite element method. *International Journal of Modern Trends in Engineering and Research*, 492-497.
- Galán, H. Z. (2015). *Manual Didáctico de Estructuras I*. Lulu.
- Gujar P. S., & Ladhane K. B. (5 de 05 de 2015). Bending Analysis of Simply Supported and Clamped Circular Plate. *International Journal of Civil Engineering (SSRG-IJCE)*, 2, 69-75.
- Hutton, D. (2004). *Fundamentals of Finite Element Analysis*. New York: McGraw-Hill.
- J.N. Reddy, C. W. (1999). Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 185-199.
- K. A., & W. R. (1967). Symmetrical bending of thin circular elastic plates on equally spaced point support. *Journal of Research of the National Bureau of Standards-C. Engineering and Instrumentation*, 1-10.
- Kirchhoff, G. (1876). *Vorlesungen uber mathematische Physik* (Vol. 1). Leipzig: B. G. Teubner.
- Logan, D. L. (2012). *FINITE ELEMENT METHOD*. Stamford: Cengage Learning.
- Love, A. E. (1926). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- M. A., R. W., & L. S. (1942). *Normal Pressure Test Of Circular Plates with Clamped Edges*.
- Mekalke, G. C., Kavade, M. V., & Deshpande, S. S. (2012). Analysis of a plate with a circular hole by FEM. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 25-30.

- Molina, J. G. (2010). *Fundamentos del método de elemento finito* (Primera ed.). U.M.S.A.
- Navier, L. M. (1819). *Résumé des Leçons de Méchanique*. Paris: first lecture notes published at the.
- Portal de acceso abierto al conocimiento de la UPC*. (s.f.). Recuperado el 26 de 11 de 2018, de <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/3392/40891-8.pdf?sequence=8&isAllowed=y>
- RAO, S. S. (2011). *Element Method in Engineering*. Elsevier Inc.
- Sukla, B. (2009). *The FEM analysis on circular stiffened plates using ANSYS*. Rourkela, India: National Institute of Technology.
- Szilar, R. (2004). *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. John Wiley & Sons.
- Timoshenko, S. (1983). *History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. New York: Courier Corporation.
- Timoshenko, S. W.-K. (1987). *Theory of Plates and Shells*. New York: McGRAW-HILL.
- Timoshenko, S., & Woinowsky S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. New York: McGRAW-HILL.
- V. B., R. M., & I. R. (2012). Static analysis of an isotropic rectangular plate using finite element analysis (FEA). *Journal of Mechanical Engineering Research*, 4, 148-162.
- Ventsel, E., , & Krauthammer, T. (2001). *Thin plates and shells*. New York: Marcel Dekker.
- Vrabie M., & Baetu S. A. (2013). Comparative analysis of the bending theories for isotropic plates—case study. *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*, 57, 73-85.
- Wahl, A. M., & L. G. (1930). Stresses and Deflections in Flat Circular Plates with Central Holes. *Jr. Trans. A.S.M.E.*, 52, 29.
- Wahl, A. M., & Stewart Way. (March de 1936). Stress and Deflection of Circular Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 3, 28-30.
- Way, S. (1934). Bending of Circular Plates with Large Deflection. *Trans. A.S.M.E.*
- Y. Yadollahi, I. Pakar, & M. Bayat. (2015). Evaluation and comparison of behavior of corrugated steel plate shear walls . *Latin American Journal of Solids and Structures*, 763-786.

ANEXOS