



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA**

**CENTRO DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PROMOCIÓN II**

**TRABAJO DE TITULACIÓN, PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

**TEMA: “ANÁLISIS DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN
SEMIÓTICA EN LA APLICACIÓN DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA
COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN, PARA LA ENSEÑANZA
DE LA CONCEPTUALIZACIÓN Y FORMALIZACIÓN DE LA NOCIÓN
DEL LÍMITE, MEDIANTE UN ENTORNO VIRTUAL DE
APRENDIZAJE”.**

**AUTOR: VELA CHAUCA, HENRY DAVID
DIRECTOR: MSc. CADENA VILLOTA, JUAN RAMÓN
SANGOLQUÍ**

2019



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN,
INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE
TECNOLOGÍA
CENTRO DE POSGRADOS**

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación “**Análisis de registros de representación semiótica en la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, para la enseñanza de la conceptualización y formalización de la noción del límite, mediante un entorno virtual de aprendizaje**”, fue realizado por el señor **Vela Chauca Henry David**, el mismo que ha sido revisado en su totalidad, analizado por la herramienta de verificación de similitud, por lo tanto cumple con los requisitos teóricos, científicos y técnicos, metodológicos legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 30 de octubre del 2019

Una firma manuscrita en tinta azul que parece decir 'Juan Ramón'.

MSc:Juan Ramón, Cadena Villota

1706272521



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA
CENTRO DE POSGRADOS**

AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD

Yo, **Vela Chauca Henry David** con Ci: 171676026-7 , declaro que las ideas y contenidos de éste trabajo de investigación **“Análisis de registros de representación semiótica en la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, para la enseñanza de la conceptualización y formalización de la noción del límite, mediante un entorno virtual de aprendizaje”**, es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando en citas bibliográficas.

Consecuentemente el contenido de la investigación mencionada es veraz.

Sangolquí, 30 de octubre del 2019

Una firma manuscrita en tinta azul, que parece ser la del autor, Henry David Vela Chauca.

Henry David, Vela Chauca

1716760267



CENTRO DE POSGRADOS

AUTORIZACIÓN

Yo, **Vela Chauca Henry David**, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: **“Análisis de registros de representación semiótica en la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, para la enseñanza de la conceptualización y formalización de la noción del límite, mediante un entorno virtual de aprendizaje”**, en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 30 de octubre del 2019

Henry David, Vela Chauca

1716760267

DEDICATORIA

Todo el trabajo y sacrificio le dedico y honro en primer lugar a mi Dios Jehová, quién me ha dado sabiduría, ciencia y conocimiento en todo lo que hago, pues por su gracia he logrado éstos méritos así que él es por quién vivo y sirvo en ésta vida terrenal y sé que lo haré cuando esté en el lugar donde él está.

A mis padres, José Eduardo Vela y María de Lourdes Chauca, que, por sus consejos, oraciones, ejemplo de superación, ejemplo de fe, sacrificio y respeto a las cosas divinas, los honro dedicando éste trabajo.

En especial dedico a mi amada esposa Lorena Isabel Díaz Rivera, quién ha sido una mujer que me ha dado de su apoyo incondicional, el verdadero amor y cariño con el cual me ha sostenido en ésta carrera profesional, éste es parte del sueño que el señor nos ha dado, juntos toda la vida viendo como nuestros sueños se hacen realidad en el amor de Jesucristo.

Y haré de ti una nación grande, te bendeciré y engrandeceré tu nombre, y serás bendición. Bendeciré a los que te bendijeren, y a los que te maldijeren maldeciré, y serán benditas en ti todas las familias de la tierra. .Éxodo 12:2-3

AGRADECIMIENTO

Por su profesionalismo, apoyo incondicional en la realización de éste trabajo y su calidad de persona agradezco con muchas bendiciones al Msc. Juan Ramón Cadena Villota, mi director de tesis.

Al Dr. Edgar Velasco, por la exigencia al presentar un trabajo de calidad y por los valores humanos inspiradores hacia el bien ser y el bien hacer, que doy gracias a Dios por poner a personas como él, con gran ímpetu y excelente dominio del conocimiento.

A todos los maestros de la MEMAT II: Dr. Boris Álvarez, Dr. Juan Mayorga, Msc. Margarita Kustikova, Dr. Edgar Velasco y demás, que son maestros que han marcado mi vida profesional.

MSc. Patricio Pugarín coordinador de la maestría MEMAT II, por su calidad de persona y ayuda en el crecimiento de quienes somos parte de éste proyecto.

Finalmente, a todos mis compañeros de la MEMAT II por su capacidad de perseverancia, amistad, que son valores dignos de reconocer y hacer florecer.

INDICE

DEDICATORIA	iv
AGRADECIMIENTO	v
ÍNDICE DE CONTENIDOS	vi
ÍNDICE DE TABLAS	x
ÍNDICE DE FIGURAS	xi
RESUMEN	xiii
ABSTRACT	xiv

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 LA INVESTIGACIÓN Y SU CONTEXTO	1
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	2
1.2.1 Preguntas de investigación.....	2
1.3 JUSTIFICACIÓN, MOTIVACIÓN	3
1.4 DESCRIPCIÓN SINTÉTICA	4
1.5 ORGANIZACIÓN Y ESTRUCTURA FORMAL DEL TRABAJO	5

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO	6
2.1. CONCEPCIONES DEL LIMITE DE UNA FUNCIÓN REAL	6
2.1.1. Concepción dinámica del límite.....	6
2.1.2. Concepción óptima del límite.....	6
2.1.3. Concepción métrica del límite.....	7
2.2. REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA	7
2.2.1. Objeto matemático	8
2.2.1.1 Tipos de objetos matemáticos.....	8
2.2.2. Representación semiótica	8
2.2.2.1 Semiosis.....	9
2.2.2.2 Noesis.....	9
2.2.3. Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis	9

2.2.3.1 La formación.....	9
2.2.3.2 El tratamiento.....	9
2.2.3.3 La conversión.....	9
2.2.4. Registros de representación semiótica aplicados en la noción del límite.....	10
2.2.4.1 Registro gráfico.....	10
2.2.4.2 Registro natural.....	11
2.2.4.3 Registro simbólico.....	11
2.2.4.3.1 Simbólico de predominio procedimental.....	11
2.2.4.3.2 Simbólico de predominio conceptual.....	12
2.2.5 Semiótica y Noética en la resolución de problemas.....	12
2.3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN INGENIERÍA DIDÁCTICA.....	13
2.3.1. Origen y concepto de Ingeniería Didáctica.....	13
2.3.2. Etapas del proceso de la Ingeniería Didáctica.....	14
2.3.2.1 Análisis preliminar.....	14
2.3.2.2 Análisis a priori.....	15
2.3.2.3 Experimentación.....	15
2.3.2.4 Análisis a posteriori.....	15
2.3.3. Fases de la metodología de Ingeniería Didáctica.....	15
2.3.3.1 Fase de planeación.....	16
2.3.3.2 Fase de diseño.....	16
2.3.3.3. Fase experimental.....	16
2.3.3.4. Fase de validación.....	16
2.4 DISEÑO DE ACTIVIDADES DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN, CONCEPTUALIZACIÓN Y FORMALIZACIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL.....	17
2.4.1 Objeto: Límite como “Idea de aproximación”.....	17
2.4.2 Objeto: Idea del Concepto de límite con sucesiones y series.....	18
2.4.3 Objeto: Concepto de entorno.....	19
2.4.4 Objeto: El Límite en una función real.....	20
2.4.5 Objeto: Concepción dinámica del límite.....	21
2.4.6 Objeto: Cálculo del límite según la concepción dinámica.....	22

2.4.7 Objeto: Concepción óptima del límite.....	23
2.4.8 Objeto: Concepción métrica del límite.....	25
2.4.9 Objeto: Resolución de un problema con límites.....	28
2.5 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS OPERACIONALES.....	28

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO.....	30
3.1. METODOLOGÍA.....	30
3.2. PARADIGMA DE LA INVESTIGACIÓN.....	31
3.3. OBJETIVOS.....	32
3.3.1. Objetivo General.....	32
3.3.2. Objetivos Específicos.....	32
3.4. PROBLEMA GENERAL.....	33
3.5. HIPÓTESIS.....	34
3.5.1. Hipótesis General.....	34
3.5.2. Subhipótesis.....	34
3.5.2.1 Variables e indicadores.....	35
3.6. DEFINICIÓN DE LA POBLACIÓN Y DE LA MUESTRA.....	36
3.7. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS.....	37
3.7.1. Diseño y elaboración de instrumentos.....	37
3.7.2. Validación de los instrumentos.....	38
3.7.3. Plan de actuación. Fases y acciones a realizar (Instrumento).....	39
3.8 FASES Y DISEÑO DE LA INGENIERIA DIDACTICA APLICADA.....	40
3.8.1 Primera fase (PLANEACIÓN).....	40
3.8.1.1 Análisis Epistemológico del concepto de límite.....	40
3.8.1.2 Análisis Cognitivo. Concepción de los estudiantes.....	42
3.8.1.3 Análisis Didáctico. Enseñanza de los textos sobre la noción del límite.....	44
3.8.2 Segunda fase: Análisis a priori de las situaciones didácticas.....	45
3.8.3 Tercera fase: Experimentación.....	46
3.8.3.1 Primera sesión.....	46
3.8.3.2 Segunda sesión.....	47
3.8.3.3 Tercera sesión.....	48

3.8.3.4 Cuarta sesión.....	52
3.7.3.4 Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación.....	54
3.9 PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA.....	58
3.9.1 Análisis de las respuestas de la ingeniería didáctica aplicada.....	58
3.9.1.1 Análisis Actividad 1.....	58
3.9.1.2 Análisis Actividad 2.....	58
3.9.1.3 Análisis Actividad 3.....	59
3.9.1.4 Análisis Actividad 4.....	60
3.9.2 Resultados de la aplicación de la ingeniería didáctica.....	62
 CAPÍTULO IV	
4. MARCO ANALÍTICO.....	64
4.1 EL PROCESO DE INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL.....	64
4.2 PROCEDIMIENTO DE RECOGIDA DE DATOS.....	65
4.3 ANÁLISIS DE DATOS.....	65
4.3.1 Análisis comparativo general de los dos grupos	65
4.3.1.1 Análisis estadístico de datos (Grupo Experimental).....	68
4.3.1.2 Análisis estadístico de datos (Grupo de Control).....	69
4.3.2 Análisis de muestras emparejadas Grupo Experimental	71
4.3.3 Análisis de muestras emparejadas Grupo de Control.	71
4.3.4 Análisis de las variables independientes de los dos grupos.....	73
 CAPÍTULO V	
5. CONCLUSIONES.....	75
5.1. OBJETIVOS E HIPÓTESIS PLANTEADAS.....	75
5.2. NUEVAS PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN.....	75
5.2.1. Aspectos no tratados, pero que serían de interés su tratamiento.....	75
5.2.2. Nuevos trabajos de investigación que completarán este estudio.....	77
5.2.3. Limitaciones del estudio.....	78
 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	 79

ANEXOS

Anexo 1. TEST DE CONOCIMIENTOD

Anexo 2. GRUPO EXPERIMENTO

Anexo 3. GRUPO CONTROL.

Anexo 4. PLATAFORMA VIRTUAL MOODLE

Anexo 5. INSTRUMENTO DE VALIDACIÓN (DATOS DEL EXPERTO)

Anexo 6. CONSTANCIA DE VALIDACIÓN.

Anexo 7. EJEMPLOS GEOGEBRA.

INDICE DE TABLAS

Tabla 1 <i>Diferentes conversiones de registros semióticos en problemas</i>	13
Tabla 2 <i>Proceso semiótico en el objeto Idea de aproximación</i>	17
Tabla 3 <i>Proceso semiótico en el objeto Límite con sucesiones y series</i>	18
Tabla 4 <i>Proceso semiótico en el objeto Concepto de entorno</i>	19
Tabla 5 <i>Proceso semiótico en el objeto Límite en una función real</i>	20
Tabla 6 <i>Proceso semiótico en el objeto Concepción dinámica del límite</i>	21
Tabla 7 <i>Proceso semiótico en el objeto Cálculo del límite según la concepción dinámica</i>	22
Tabla 8 <i>Proceso semiótico en el objeto Concepción óptima del límite</i>	23
Tabla 9 <i>Proceso semiótico en el objeto Concepción métrica del límite</i>	25
Tabla 10 <i>Proceso semiótico en la resolución de problemas con límites</i>	28
Tabla 11 <i>Variables Indicadores</i>	35
Tabla 12 <i>Población y muestra en experimentación</i>	36
Tabla 13 <i>Eventos y Sinergias (instrumento de validación)</i>	39
Tabla 14 <i>Preguntas del pre test</i>	42
Tabla 15 <i>Estructura del diseño para el experimento</i>	45
Tabla 16 <i>Registro tabular de valores cercanos a x</i>	49
Tabla 17 <i>Preguntas objetivas concepción dinámica del límite</i>	57
Tabla 18 <i>Ejercicio de evaluación de las concepciones del límite</i>	61
Tabla 19 <i>Distribución de grupos en el experimento</i>	66
Tabla 20 <i>Análisis de la muestra en experimentación</i>	66
Tabla 21 <i>Estadísticos de los grupos Pre test y Pos test</i>	67
Tabla 22 <i>Prueba “ T Student” Grupo experimental</i>	71
Tabla 23 <i>Prueba “ T Student” Grupo de Control</i>	72
Tabla 24 <i>Prueba “ T Student” variables independientes (Comparación entre los dos grupos)</i>	74

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Estructura Formal del trabajo.....	5
Figura 2 Registro gráfico de la representación de aproximación.....	17
Figura 3 Registro Gráfico Series en la recta numérica.....	18
Figura 4 Registro Tabular de sucesiones.....	18
Figura 5 Registro gráfico representación del entorno en la recta numérica.....	19
Figura 6 Registro gráfico representación de la definición de entorno en la recta	19
Figura 7 Registro gráfico representación dinámica del límite en una función.....	20
Figura 8 Registro tabular de la función real.....	21
Figura 9 Registro gráfico de la concepción dinámica del límite en una función.....	22
Figura 10 Registro gráfico de la concepción óptima del límite en una función.....	24
Figura 11 Registro tabular de la concepción óptima del límite en una función.....	24
Figura 12 Registro gráfico de la concepción dinámica del límite.....	25
Figura 13 Registro gráfico análisis de la concepción métrica del límite.....	26
Figura 14 Registro de dominio procedimental del límite.....	27
Figura 15 Representación de la aproximación hacia un límite.....	47
Figura 16 Representación de la aproximación hacia un límite con series numéricas.....	47
Figura 17 Representación gráfica y tabular con la idea de aproximación (Geogebra).....	50
Figura 18 Calculadora de límites (Geogebra).....	51
Figura 19 Cálculo y representación del límite hacia algún punto x (Geogebra).....	52
Figura 20 Ejemplo de problema del límite de una función.....	53
Figura 21 Pre test-Post test grupo experimental.....	56
Figura 22 Ejercicio de la concepción métrica del límite.....	57
Figura 23 Pre test-Post test grupo experimental.....	68
Figura 24 Diagrama de caja y bigotes Grupo experimental.....	68
Figura 25 Pre test post test grupo control.....	69
Figura 26 Diagrama de caja y bigotes Grupo Control.....	70
Figura 27 Diagrama Caja y bigotes Grupo experimento y control.....	73

RESUMEN

Las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje al momento introducir la noción del límite de una función real en la enseñanza universitaria son innumerables. En este trabajo se analiza la aplicación de diferentes registros de representación semiótica en la enseñanza del concepto y formalización del límite de una función real y resolución de problemas, encaminados en la metodología de investigación científica “Ingeniería Didáctica”, con el propósito de lograr en los estudiantes universitarios un mejoramiento en la comprensión de conceptos y habilidades que permitan resolver problemas y adquieran un fundamento sólido para el cálculo diferencial e integral. En el proceso de la aplicación de la metodología de ingeniería didáctica, desde la segunda fase: concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, se incluye en la planificación la aplicación de registros de representación semiótica para la enseñanza de la conceptualización y formalización del límite de una función real, que son: El Registro Verbal, Analítico, Simbólico: Figural y Algebraico, y el registro Gráfico. (Duval, 1993). En la fase 3 de experimentación se usó el software dinámico de matemática Geogebra y la pizarra virtual (Mimio Studio), para que el estudiante interactúe su aprendizaje con las TICS. La aplicación de la plataforma virtual de aprendizaje Moodle permitió trabajar desde la Fase1: Planeación (Epistemología, Cognitiva, Didáctica), donde existen actividades para consolidar el conocimiento adquirido durante el proceso de enseñanza, en la fase 4: Validación (Recolección de información) se realizó la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori, para obtener resultados de la aplicación de los registros de representación semiótica.

PALABRAS CLAVES:

- **ENSEÑANZA DEL LÍMITE.**
- **SEMIÓTICA Y MATEMÁTICA.**
- **INGENIERÍA DIDÁCTICA.**

ABSTRACT

The difficulties in the teaching-learning process when introducing the notion of the limit of a real function in university education are innumerable. This paper analyzes the application of different registers of semiotic representation in the teaching of the concept and formalization of the limit of a real function, directed in the methodology of scientific research "Didactic Engineering", with the purpose of achieving in the university students an improvement in the understanding of concepts and skills that allow solving problems and acquire a solid foundation for differential and integral calculus. In the process of applying the methodology of didactic engineering, from the second phase: conception and analysis a priori of the didactic situations, it is included in the planning the application of registers of semiotic representation for the teaching of the conceptualization and formalization of the limit of a real function, which are: The Verbal, Analytical, Symbolic Record: Figural and Algebraic, and the Graphic record. (Duval, 1993). In phase 3 of experimentation, the dynamic mathematical software Geogebra and the virtual board (Mimio Studio) were used, so that the student interacts with the ICTs. The application of the Moodle virtual learning platform made it possible to work from Phase1: Planning (Epistemology, Cognitive, Didactic), where there are activities to consolidate the knowledge acquired during the teaching process, in phase 4: Validation (Collection of information) made the comparison between the a priori and a posteriori analyzes, to obtain results of the application of the registers of semiotic representation.

KEYWORDS:

- **TEACHING THE LIMIT.**
- **SEMITICS AND MATHEMATICS.**
- **DIDACTIC ENGINEERING.**

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN

1.1 LA INVESTIGACIÓN Y SU CONTEXTO

En la enseñanza de la educación superior el docente supone que el estudiante ya percibe entiende y que no hace falta mostrar detalles en la enseñanza de un concepto, pues el maestro debe tener claro que cada estudiante tiene diferente tipo o estilo de aprendizaje por tanto no se debería aplicar una enseñanza tradicional, sino que tratar con las necesidades de aprendizaje que tiene cada alumno y se debería tomar en cuenta los recursos didácticos tecnológicos para que el estudiante obtenga un aprendizaje significativo en la conceptualización y noción del límite de una función real en la educación superior. El maestro se ha enfocado solo en proceso: definición-teorema-demostración, impidiendo que el estudiante interprete conceptos y pueda proponer modelos matemáticos.

La matemática en su esencia se la aplicó para entender fenómenos que producen en la naturaleza es decir la realidad interpretada en un lenguaje abstracto, por tanto, solo en el nivel abstracto no se logra un aprendizaje significativo. Con un sólido fundamento en el concepto del objeto matemático permitirá que el estudiante de educación superior resuelva problemas y proponga soluciones en el trayecto de su carrera. No basta solo con la aplicación del uso de herramientas matemáticas virtuales para un mejoramiento del aprendizaje de un concepto, los estudiantes no saben distinguir los diferentes enfoques de un problema porque no se ha desarrollado la identificación y diferenciación de los diferentes tipos de registros de representación semiótica, ya que un signo representa un concepto real o abstracto, en la matemática solo existen los objetos (abstractos), entonces la construcción de un concepto matemático es muy complejo y se necesita de instrumentos metodológicos y didácticos para la comprensión de los mismos. Es un

misterio ¿qué es? y ¿cómo se da la conceptualización?, afirma (Armella, 2001) “*Un principio que nos parece esencial respetar, toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos*”, es decir que para la adquisición del conocimiento es importante el uso de signos con su diferente perspectiva y significado.

Duval (1998), afirma que hay tres actividades cognitivas enlazadas con la semiósis: “*Identificación del objeto o concepto, tratamiento y la conversión*”. Realizando un análisis del estado del arte se toma en cuenta que en: Francia, México, Colombia, Argentina, Perú, han aplicado ésta metodología semiótica en la enseñanza de: funciones, probabilidad, lógica, álgebra, física universitaria, cálculo diferencial, concepto de límites aplicando plataformas virtuales. No se percibe en éstos trabajos la aplicación de diferentes registros semióticos y la ingeniería didáctica para la concepción de la noción del límite de una función real.

En el Ecuador, no se presenta ninguna investigación en cuanto se refiere a registros de representación semiótica bajo los lineamientos de la metodología de investigación científica Ingeniería Didáctica.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la educación superior durante la práctica docente en la Universidad Central del Ecuador, Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación, Escuela de Ciencias Exactas, Carrera de Informática, el maestro debería facilitar la comprensión de conceptos matemáticos mediante la acción de ejecución registros semióticos para que los estudiantes alcancen las habilidades de resolver problemas, interpretar los problemas de un lenguaje natural a un lenguaje simbólico matemático y proponer soluciones.

1.2.1 Preguntas de investigación

Considerando lo dicho anteriormente se evidencia la falta de una nueva propuesta metodológica que mediante el uso de registros semióticos en la enseñanza de límites de una función real encaminados en una metodología de investigación científica “Ingeniería Didáctica”, promueva al estudiante hacia a la curiosidad, e indagación, aumentando su rendimiento académico, entonces se propone la siguiente formulación del problema.

- ✓ ¿Cuáles son los registros de representación semiótica que influyen en la enseñanza del cálculo del límite de una función real?

Se quiere organizar tres actividades cognitivas que consisten en identificar el objeto matemático (formación), realizar el proceso de tratamiento, la conversión de registros semióticos para: acceder, adquirir o comunicar conocimientos matemáticos, donde detallamos los siguientes registros a usar: Registros Verbal, Analítico, Simbólico, Figural, Algebraico, Gráfico. Duval (1993).

- ✓ Con la aplicación de registros de semióticos en la enseñanza de la noción y formalización del límite de una función real, ¿aumentará el nivel de comprensión de dichos conceptos en los estudiantes?

Para encaminar ésta investigación y analizar la propuesta aplicaré una ingeniería didáctica como la metodología de investigación científica, con resultados efectivos coherentes y válidos para éste trabajo.

1.3 JUSTIFICACIÓN, MOTIVACIÓN

La presente investigación evidencia como las innovaciones didácticas y metodológicas que proponen los maestros para mejorar la enseñanza tienen un efecto positivo y de mejoramiento en el proceso de aprendizaje, en nuestro caso aplicando la Ingeniería Didáctica, se verifican las

ventajas de implementar éste nuevo método de enseñanza mediante los registros de representación semiótica, además un aprendizaje significativo y activo con la aplicación del manejo de las TICS, como: el software Geogebra que permite aplicación de conceptos matemáticos , la pizarra digital Mimio Studio con la cual permite una clase activa y la plataforma virtual de aprendizaje Moodle que en nuestra investigación mantiene la estructura de orden en la metodología científica Ingeniería didáctica.

El problema del rendimiento académico, la perdida de los cursos de análisis y cálculo se ven reflejadas en nuestra educación superior, ya que son temas abstractos con alto grado de complejidad en el aprendizaje y es así que para los maestros se constituye como un reto la actividad de enseñanza de la matemática, por tanto el enfoque principal es el aplicar una nueva propuesta de enseñanza de registros semióticos en los estudiantes para que tales desarrollen habilidades y capacidades de identificar, representar , transformar, aplicar conceptos matemáticos para proponer soluciones a problemas en la cotidianidad del mundo, con el fin de reflexionar sobre la información semiótica generada mediante el uso de la tecnología.

1.4 DESCRIPCIÓN SINTÉTICA

Frente al problema de la deserción de estudiantes en la materia de análisis matemático o cursos bases para el cálculo, por causa de la baja comprensión de conceptos y el desconocimiento del uso de estrategias al resolver problemas, en cuanto se refiere al tema del límite de una función real, en los estudiantes de nivel superior, se aplica una metodología didáctica llamada registros de representación semiótica en el aprendizaje de la conceptualización y noción del límite de una función real encaminados en una ingeniería didáctica como metodología de investigación, es decir que si aplicando esta metodología el rendimiento académico de los estudiantes mejora en

comparación de la aplicación de una metodología usual llamada clase magistral donde solo los teoremas y demostraciones son la base de la enseñanza en forma expositiva.

1.5 ORGANIZACIÓN Y ESTRUCTURA FORMAL DEL TRABAJO

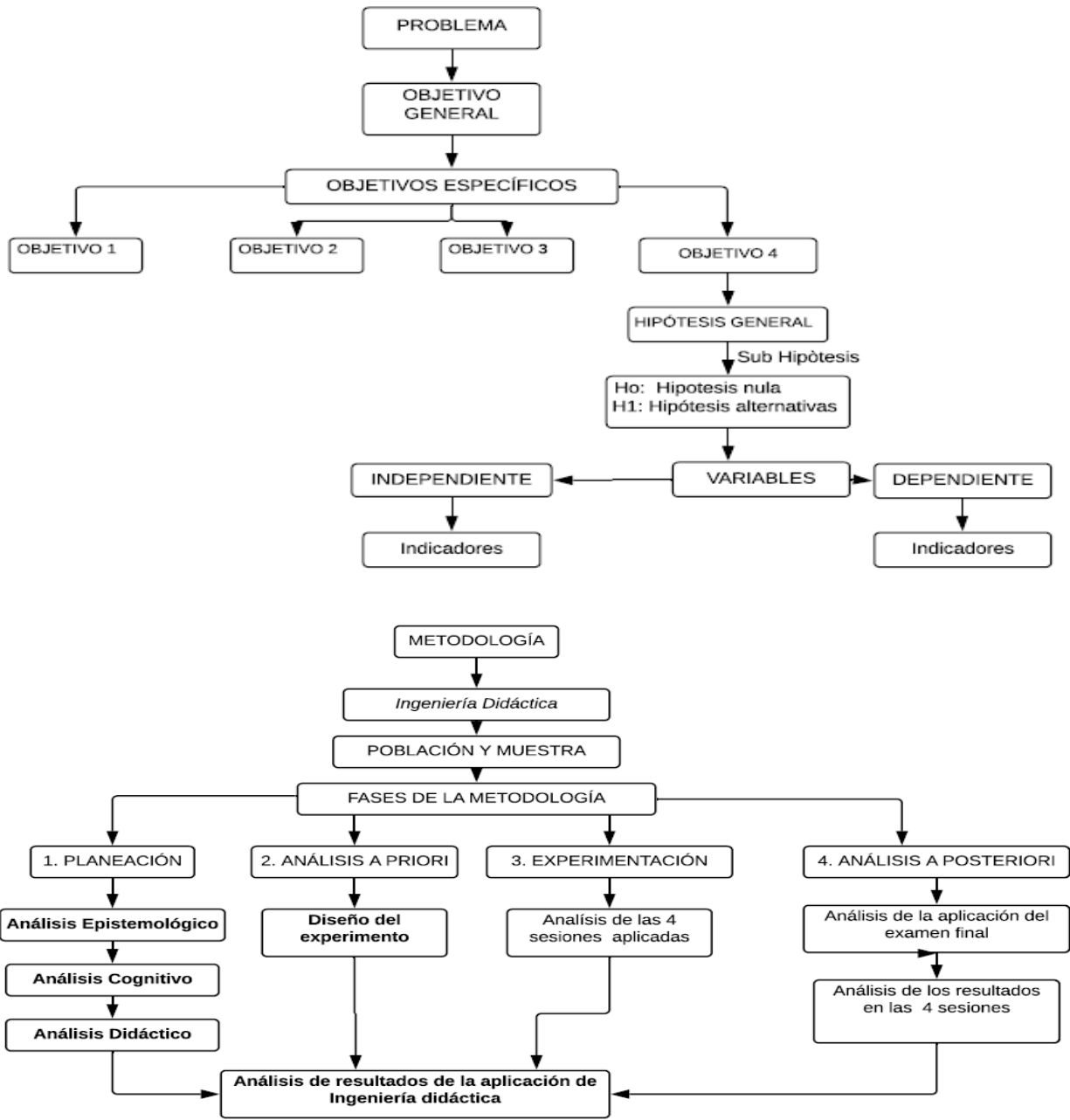


Figura 1 Estructura Formal del trabajo

CAPITULO II

2. MARCO TEÒRICO

2.1. CONCEPCIONES DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL

Partimos de la idea de concepción, que se define como las ideas estructuradas para designar las diferentes posturas y formas en la que el límite se puede encontrar o el estudiante puede identificar en el proceso de solución de problemas, se puede enlistar las concepciones importantes según (López, 2016)

2.1.1 Concepción dinámica del límite

Se entiende cuando en el plano interpretamos el símbolo algebraico

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Es decir: Sea f una función definida en los reales y “ a ” un número elemento de los reales,

“ x ” se acerca al número “ a ”, entonces

“ $f(x)$ ” se acerca a “ L ”

Si: cuando x se acerca a , sus imágenes “ $f(x)$ ” se acerca un número de imagen a L entonces decimos que existe el límite, L , en el punto “ a ”.

2.1.2 Concepción óptima del límite

Está ligado a la idea de entorno reducido es decir: buscar medidas tan pequeñas que se aproximen al límite en x por tanto tendernos como resultado en el eje y otro acercamiento a L , así:

L es el límite de $f(x)$ en “ a ” si, para cualquier valor de K muy cerca a L , existe otro valor llamado h muy cercano a “ a ”, tal que los valores de “ x ” mejoran u optimizan ese valor de h , es decir que están muy cercanos a “ a ”, y hacen que los valores de sus imágenes $f(x)$ también mejoren u optimicen el valor de K cercano a “ L ”, y estén lo más cercano de L . (López, 2016).

2.1.3 Concepción métrica del límite

Es la interpretación de una forma métrica en el plano usando deltas y épsilon muy pequeños para la aproximación al límite L , es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si para todo número $\epsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

2.2 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

En las diferentes técnicas o metodologías para la enseñanza de la matemática, la aplicación de símbolos, es decir: expresiones algebraicas, signos, gráficos, formas geométricas, entre otras, es de suma importancia para que el estudiante aprenda y comprenda conceptos. Los símbolos o signos permiten a los actores del proceso enseñanza aprendizaje a comprender el mundo abstracto, al maestro le permite tener como herramientas significativas para expresar los problemas reales a un lenguaje matemático y explicarlos, para el estudiante le permite organizar, convertir asociar, identificar, etc, con el fin de dar soluciones a problemas reales y sobre todo comprender los conceptos matemáticos.

Tomando en cuenta lo anterior se puede decir que los registros semióticos son los medios de conexión para conocer y entender un concepto matemático. En cuanto a los conceptos de límite es necesario aplicar diferentes representaciones semióticas que permitan el entendimiento de los diferentes objetos matemáticos, como: las definiciones simbólicas, las representaciones en la recta numérica, las tabulaciones e interpretaciones de las mismas y definiciones.

Puesto que los conceptos matemáticos son abstractos, la noción y formalización del límite es uno de los casos donde como maestros en nuestra actividad se debe aplicar diferentes

herramientas didácticas para entender los conceptos. Desde el punto de vista de Duval (1999) puesto que los conceptos u objetos matemáticos no son reales, como en otras cátedras se debe estudiar y aplicar los registros semióticos en la enseñanza de la matemática.

2.2.1 Objeto matemático

Es todo concepto que nos podemos referir, ideas que pueden ayudar a construir un conocimiento, además el objeto matemático ayuda a entender y aprender matemática ya que es un conocimiento abstracto ideas que construyen soluciones a problemas reales y de la imaginación.

2.2.1.1 Tipos de objetos matemáticos:

- ✓ Lingüístico. Viene representado en: términos, expresiones, notaciones, gráficos, con sus respectivos registros el escrito, el oral, el gestual, etc.
- ✓ Situaciones. Se representan en problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios.
- ✓ Acciones. Son los procedimientos en las operaciones, algoritmos o técnicas de cálculo.
- ✓ Conceptos. Representan a definiciones, teoremas, matemáticos
- ✓ Propiedad de los objetos hace referencia a los enunciados en los conceptos
- ✓ Argumentos. Hace referencia a explicaciones de enunciados, deducciones y análisis.

(D'Amore y Godino, 2006, pp. 28-29)

2.2.2 Representación semiótica.

Son representaciones mentales formadas por el uso de signos los cuales son parte de un sistema de representación semiótica, manteniendo su nivel de significancia y funcionamiento. Son importantes porque permiten relacionar las representaciones mentales con la forma de comunicación para el exterior es decir ideas interior, comunicación exterior (signos).

La realización de nuevos conocimientos y el desarrollo de la ciencia se relacionan directamente con la aplicación de sistemas de registros.

2.2.2.1 Semiosis.

Conjunto de símbolos o expresiones cognitivas que permiten llegar a la noesis (conocimiento)

2.2.2.2 Noesis.

Es el mundo de las ideas basadas en la razón es decir apropiación del concepto bien fundamentado.

La noesis no se puede separar de la semiosis, es decir la una depende de la otra . En este sentido, Duval (1999), señala que: *“el aprendizaje de las Matemáticas constituye un campo de estudio ideal para mostrar esta relación”*.

2.2.3 Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis

2.2.3.1 La formación es una actividad de organización y selección de temas de conceptos para la enseñanza de un tema o contenido basados en los registros y representaciones propias semióticas.

2.2.3.2 El tratamiento es la forma de interpretación de la representación del registro semiótico aplicado.

2.2.3.3 La conversión es el proceso de transformación a otro registro semiótico manteniendo la esencia y el contenido de las partes iniciales del registro original, no se debe confundir entre el tratamiento y la conversión ya que son muy diferentes en la acción de la noesis.

Como conclusión se puede decir que todo concepto de cualquier cátedra de conocimiento se debe organizar y coordinar en el puente de los registros semióticos, no solo el lenguaje natural o

verbal sino que coordinar con los demás registros ya que para que la noesis sea significativa en el aprendizaje se debe también considerar los tipos de aprendizaje de los alumnos.

2.2.4 Registros de representación semiótica aplicados en la noción del límite

Para mejorar la enseñanza de cálculo o Análisis Matemático I, en la primera unidad en la educación superior en matemática, nuestro referente es Duval (1999), ya que él enfoca todos los procesos de enseñanza a la aplicación de registros semióticos pensando en el desarrollo de tipos de aprendizaje que tienen los estudiantes al momento de comprender y aplicar conceptos para la resolución de problemas, específicamente en el concepto de límite.

Para aplicar ésta metodología de enseñanza se debe considerar tres actividades cognitivas que demanda el sistema de registros semióticos.

* *Identificar*, el concepto o conceptos que implican distinguirlos en algún objeto como símbolos, gráficos o frases, etc.

* *Permitir su tratamiento*, es permitir el manejo y transformación del objeto dentro del mismo sistema, manteniendo sus propias leyes o reglas del conocimiento inicial, para que su esencia o idea central se vea reflejado en otros cambios de registro.

* *Permitir la conversión*, consiste en convertir las representaciones semióticas en otro sistema de representación. Es decir dos representaciones y en distintos registros de un mismo objeto.

2.2.4.1 Registro gráfico.

En nuestro caso con el tema del límite de una función se refiere a la representación gráfica de la vida cotidiana, representación en la recta numérica, representación en el plano de coordenadas el concepto de límite con la idea de aproximación ya que se puede entender como la visualización del objeto abstracto, ya que es fundamental enfocarse en los

elementos visuales al momento de la enseñanza puesto que el estudiante con el gráfico afirma su entendimiento conceptual del tema matemático.

2.2.4.2 Registro natural

Tiene relación con el lenguaje o idioma por el cual podemos expresar las ideas, se puede realizar explicaciones, deducciones es decir es una forma de comunicación habitual, la cual puede ser oral, escrita, la cual se la trabaja en ésta investigación ya que se proponen ideas, ejemplos con el cual el cerebro realiza actividades de comparación, relación, diferencia, además permite que la imaginación reluzca en los objetos de estudios y el ser humano se apropia del objeto a estudiar.

2.2.4.3 Registro simbólico

En la Matemática se usa mucho el lenguaje simbólico formal, se lo conoce también como lenguaje algebraico que sus conceptos abarcan un único significado, es decir los símbolos hablan por sí solos para dar definiciones, explicaciones de ideas demostradas basadas en las propias reglas y leyes de cada una, por ejemplo la definición del límite de una función tiene tres partes las cuales el estudiante identifica la palabra \lim , x , $F(x)$, y reconoce el procedimiento y funcionamiento de éstos símbolos del cálculo.

2.2.4.4 Simbólico de predominio procedimental

Es aquel en el cual los estudiantes deben aplicar proceso por proceso al resolver un ejercicio, es decir aplican algoritmos de solución, para nuestra investigación se toma en cuenta el proceso de reemplazar variables para saber hacia donde se genera la aproximación tanto en el eje x como en el eje y , y si existen procesos de factorización para los límites se deben aplicar los respectivas estrategias para resolver la situación de problema propuesto.

2.2.4.5 Simbólico de predominio conceptual

En éste registro se necesita manejar los símbolos matemáticos donde se evidencia las definiciones, axiomas, o teoremas desarrollados como conceptos, el estudiante para resolver un problema aplica éstos símbolos y hay casos en que se puede exponer el símbolo e irlo trabando en un registro procedimental para llegar a la respuesta o solución del problema, es necesario que en ésta etapa que el estudiante trabaje de manera lógica y estructurada, ya que se trata de desarrollar el pensamiento formal de un objeto abstracto con procedimientos algebraicos.

El alumno debe aplicar las definiciones y propiedades del límite como por ejemplo hallar un ϵ que satisfaga a un δ es decir hallar el límite de una función aplicando la concepción métrica lo que implica trabajar con mayor rigurosidad, lógica y conceptualizaciones bien fundamentadas.

Duval (1999) dá importancia a las actividades cognitivas a las que se van a desarrollar en la catedra de la matemática y que requieren de registros distintos a la del lenguaje natural para llegar a la comprensión de conceptos, como el lenguaje simbólico, tabular, gráfico.

2.2.5 Semiótica y noética en la resolución de problemas

Partimos del principio de que la semiótica es el camino para alcanzar la noética, por tanto es necesario que al resolver problemas se estructure el algoritmo de solución por medios semióticos es decir:

- 1) Identificar los registros que se manifiesten en el problema
- 2) Identificar el tratamiento, el significado y el significante de cada registro
- 3) Analizar las conversiones que realiza el medio cognitivo para llegar al significado o resolución del problema.

Tabla 1*Diferentes conversiones de registros semióticos en problemas.*

Conversión						
Conversión1		Conversión 3			Conversión 5	
Registro	Lenguaje natural	Gráfico	Aritmético	Simbólico	Tabular	Lenguaje natural
		Conversión2		Conversión 4		SOLUCIÓN

La Tabla1. Explica como de cada registro semiótico cambia por medio de la operación cognitiva CONVERSION, por medio de ésta el estudiante asimila y hace parte suya el conocimiento e identifica las herramientas que tiene y datos para resolver el problema planteado

2.3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN INGENIERÍA DIDÁCTICA

2.3.1 Origen y concepto de Ingeniería Didáctica.

Señala (Michele Artigue, 1995), *”la Ingeniería Didáctica es una metodología que aporta tanto a la investigación en Didáctica de las Matemáticas, como al mejoramiento de las acciones en el aula de clase para la enseñanza de un determinado concepto matemático”*. Las ideas, creatividad de los maestros a veces no se plasman por no conllevar una metodología científica que den validez a sus propuestas de enseñanza, para dar valor de científico se deben usar variables cuantitativas como las cualitativas y ésta metodología nos da aquella apertura de trabajar con dichas variables y exponer éstos trabajos para la innovación educativa en función del aprendizaje del estudiante, la Ingeniería Didáctica es exclusivo para la investigación de conceptos matemáticos ya que ayuda en la adquisición de mejores decisiones que puede hacer el docente investigador al crear y diseñar

innovaciones educativas en la clase y de tal manera se pueda realizar predicciones acerca de un aprendizaje deseable.

Con la aplicación de la Ingeniería Didáctica, se puede trabajar en forma verás en el análisis con variables cuantitativas y cualitativas de grupos experimentales con un grupo control, entregando excelentes resultados válidos, en la comparación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, es decir antes y después de la aplicación metodológica.

2.3.2 Etapas del proceso de la Ingeniería Didáctica

El proceso consiste en las siguientes etapas: el análisis preliminar, a priori, experimentación y análisis a posteriori.

2.3.2.1 Análisis preliminar: Como se interpreta es realizar un análisis antes de la aplicación del experimento es decir verificación y concepción de algunos previos procesos o herramientas necesarias, considera (Artigue, 1998) tres dimensiones importantes

- a. Dimensión epistemológica.** Enfocada al saber matemático de los estudiantes y del entorno educativo respecto al tema.
- b. Dimensión cognitiva.** Identificar las características cognitivas de los estudiantes al cual se va a realizar el experimento.
- c. Dimensión didáctica.** Se enfoca a identificar las características de acción del sistema del entorno de enseñanza.

El análisis preliminar es un aspecto importante ya que se tiene una idea clara de la población con la cual se va a trabajar, por lo que permite usar las respectivas herramientas didácticas, metodologías para cubrir las necesidades de los estudiantes y además nos sirven para realizar inferencias luego en el análisis a posteriori que se establecen por observaciones notadas en la

experimentación, cabe decir que los objetivos planteados o propósitos en ésta dimensión son muy indispensables para el seguimiento y acción de ésta dimensión.

2.3.2.2 Análisis a priori: Se tienen en cuenta cuatro aspectos los cuales no se deben dejar pasar por alto. 1. Identificación de variables, 2. Selección de los temas o contenidos inmersos en el seguimiento didáctico, Acción del nuevo plan didáctico y, finalmente, describimos el propósito a alcanzar en éste experimento con los estudiantes respecto a los temas. Al finalizar se generan hipótesis cuya validación se podrá definir a través de la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori. (Michele Artigue, 1995), señala que: *” el análisis a priori se presenta generalmente desde dos aspectos: una descripción de las características de la situación a-didáctica que se trabajará con los estudiantes y una predicción de las posibles actuaciones de éstos”*.

2.3.2.3 Experimentación: El maestro pone en acción el desarrollo didáctico en el aula, registrando toda información como: pequeñas pruebas, talleres individuales, talleres grupales, actuación en clases, deberes, etc. Con el fin de llegar a satisfacer las respuestas de las variables expuestas en el análisis a priori, en nuestro caso usando la plataforma virtual Moodle con actividades en línea.

2.3.2.4 Análisis a posteriori: Es comparar la información propuesta en el análisis a priori, encaminados en los registros de datos obtenidos en la experimentación, con el objetivo de establecer si el diseño didáctico provocó un impacto en un aprendizaje significativo de los grupos de experimentación.

Además, dentro de la metodología mencionada se requiere incluir registros semióticos en la enseñanza del concepto de la noción del límite de una función real.

2.3.3 Fases de la metodología de Ingeniería Didáctica.

2.3.3.1 Fase de planeación: Se realiza un análisis preliminar, es decir ponemos en acción la **dimensión epistemológica** ya explicada anteriormente, para conocer la situación del público al cual se va a realizar la experimentación. La **dimensión cognitiva**, identificando el nivel cognitivo del público y la **dimensión didáctica** (relaciona el sistema de enseñanza y las características del público) como estudio de los diseños, modelos didácticos y los problemas que muestran los alumnos cuando se relacionan entre ellos.

2.3.3.2 Fase de diseño: Es la aplicación del análisis a priori explicado anteriormente, con el objetivo de determinar las variables de control de diseño didáctico.

2.3.3.3. Fase experimental: Implica la realización o puesta en acción del diseño didáctico fundamentado en la recolección de información de las actividades propuestas en clase.

2.3.3.4. Fase de validación: Examina, compara, comprueba, verifica el análisis a priori y el análisis a posteriori, para sacar conclusiones y con la validez expuesta tomar decisiones en la propuesta de enseñanza o tomar acciones correctivas durante el proceso de acción de las didácticas experimentadas.

Además se pretende superar algunos problemas con la revisión del estado del arte en cuanto a trabajos similares a ésta investigación, revisión del concepto de límites, la metodología de ingeniería didáctica, y la capacitación en el tema del diseño e implementación de la plataforma virtual Moodle donde se incluyen actividades como realización de prueba, talleres según el proceso de la metodología (ID) , así como el diseño de gráficas en el software matemático Geogebra para la representación de algunos registros de relación semiótica.

2.4 DISEÑO DE ACTIVIDADES DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN, CONCEPTUALIZACIÓN Y FORMALIZACIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL

2.4.1 Objeto: Límite como “Idea de aproximación”

Tabla 2

Proceso semiótico en el objeto Idea de aproximación

REGISTRO	REPRESENTACION	TRATAMIENTO
Lenguaje Natural	Concepto general	Es una aproximación hacia algún parámetro propuesto o definido que no se puede sobre pasar de aquello Ejemplo: En la autopista general Rumiñahui existe un letrero que dice velocidad máxima de 90Km, Carlos va a 100Km y tuvo una foto multa por sobre pasar el límite ¿Qué se debe hacer para no tener una multa en la autopista? Solo aproximarse a tal velocidad propuesta
Gráfico	Recta numérica	

Figura 2 Registro gráfico de la representación de aproximación

Frente al aprendizaje de la idea de aproximación del límite se puede usar los registros de representación semiótica: el lenguaje natural donde se lo expresa con palabras y ejemplos reales donde el estudiante puede interpretar dicha idea y el registro gráfico con su respectiva representación y tratamiento donde el estudiante realiza transformaciones abstractas para reflexionar sobre el objeto a tratar como se indica la tabla 2.

2.4.2 Objeto: Idea del Concepto de límite con sucesiones y series.

Tabla 3

Proceso semiótico en el objeto Límite con sucesiones y series

REGISTRO	REPRESENTACION	TRATAMIENTO
Lenguaje natural	Sucesión Geométrica	¿Se puede sumar infinitamente fracciones y llegar a la unidad? En una sucesión geométrica cuando en el término general, n tiende al infinito, la suma o serie geométrica llega hasta un número o parámetro

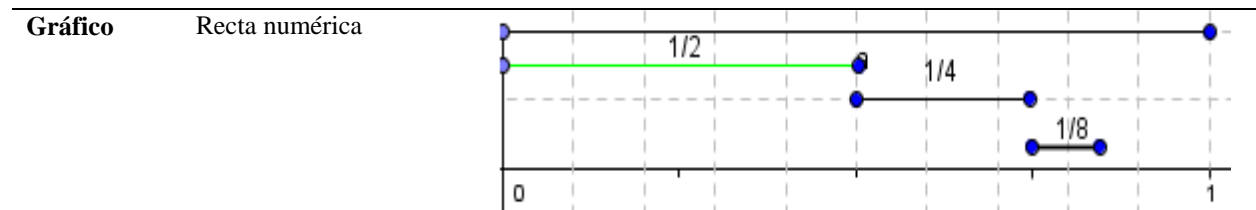


Figura 3 Registro Gráfico Series en la recta numérica

Lenguaje aritmético	Escritura de una sucesión	Sea la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n}$
Lenguaje aritmético	Específico de una serie geométrica	Una serie es definida como sumatoria de los términos de la sucesión $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$
Tabular	Numérica de una sucesión	Observamos el comportamiento de la serie geométrica en la siguiente tabla.

N	S_n	S_n	$ 1 - S_n $
1	$\frac{1}{2}$	0.5	0.5
2	$\frac{3}{4}$	0.75	0.25
3	$\frac{7}{8}$	0.875	0.125
4	$\frac{15}{16}$	0.9375	0.062563
10	$\frac{1023}{1024}$	0.999023437	0.0009765
30		0.999999999	00000000093
.....		1	0

Figura 4 Registro tabular de sucesiones

Para la idea del concepto de límite como sucesiones y series se pueden usar los siguientes registros, lenguaje natural, tabular, lenguaje aritmético y el gráfico para mayor comprensión del estudiante, realizando actividades donde se puedan aplicar éstos registros.

2.4.3 Objeto: Concepto de entorno

Tabla 4

Proceso semiótico en el objeto Concepto de entorno

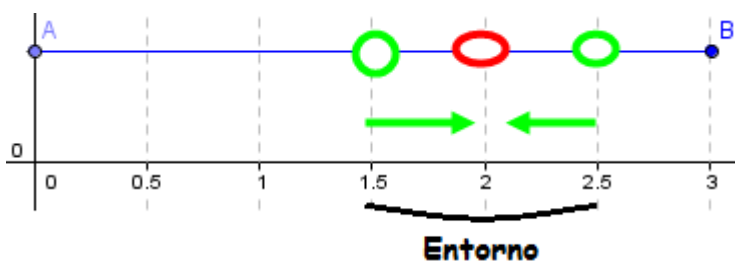
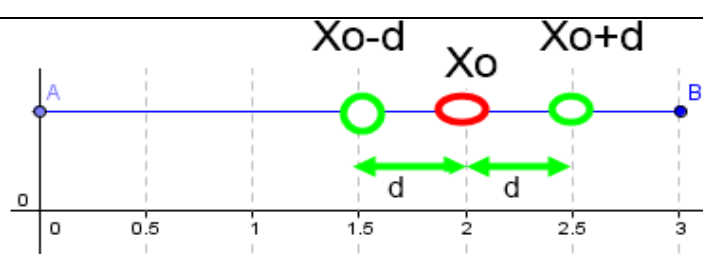
REGISTRO	REPRESENTACION	TRATAMIENTO
Lenguaje Natural	Entorno en la recta	Situado un punto en la recta existen puntos próximos a éste que se acercan por la derecha o por la izquierda, los cuales están separados por una distancia d
Gráfico	Recta numérica de un entorno y aproximación	
Simbólico	Verbal de la Definición de entorno	Entorno, vecindad o proximidad son todos los x del intervalo $]x_0 - d, x_0 + d[$ con $d > 0, d \in \mathbb{R}$
Gráfico	Entorno definición	

Figura 5 Registro gráfico representación del entorno en la recta numérica

Figura 6 Registro gráfico representación de la definición de entorno en la recta numérica

El entorno se puede enseñar bajo los registros de representación semiótica lenguaje natural, gráfico, simbólico, exclusivo en el gráfico ya que se debe percibir qué es lo que sucede en cierto espacio en la recta numérica la aproximación hacia un punto X_0 , y los demás puntos a cierta medida.

2.4.4 Objeto: El Límite en una función real

Tabla 5

Proceso semiótico en el objeto Límite en una función real

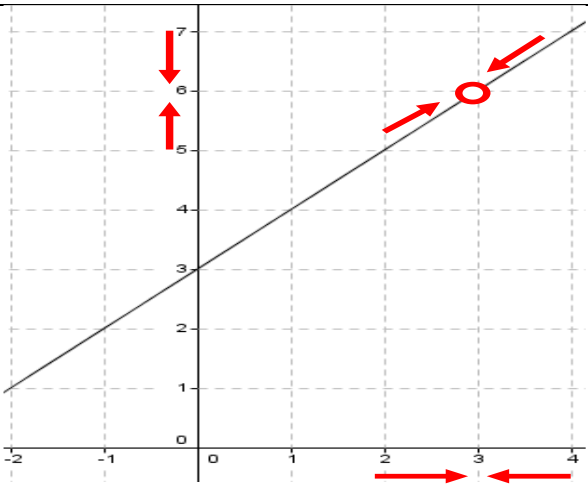
REGISTRO	REPRESENTACION	TRATAMIENTO
Lenguaje natural	Idea del concepto del límite en una función	Toda función representa una gráfica en el plano cartesiano, pero en ésta gráfica puede tener saltos o puntos que no pertenecen a la función o también queremos aproximar algún punto. Si aproximamos a un punto en x tendrá una aproximación también en el eje y
Lenguaje Simbólico	Específico de una función a la Aproximación a una asíntota	Dada una función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, sabemos que en el dominio hay una restricción o la asíntota que es: $X \neq 3$, significa que en $x=3$ no tiene imagen. Pero si podemos analizar lo que pasa en su entorno
Gráfico	Concepción dinámica del límite en una función	

Figura 7 Registro gráfico representación dinámica del límite en una función

Tabular	Estimación numérica del límite	Calcular el límite de $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ para $x \rightarrow 3$
		La imagen de tabla muestra los valores de x cercanos al 3.

x	4	3.5	3.1	3.01	3.001	3	2.999	2.99	2.9
$\frac{x^2-9}{x-3}$	7	6.5	6.1	6.01	6.001	6	5.999	5.99	5.9

Figura 8 Registro tabular de la función real

Por las aproximaciones se puede concluir que cuando x tiene a 3 la

función se aproxima a 6

El límite en una función real se debe dar importancia al registro simbólico ya que necesitamos una definición formal donde el estudiante pueda interpretar y ponerlo en práctica en la acción de identificar ésta definición en el gráfico de una función cualquiera al mismo tiempo relacionar con la función en su forma tabular e interpretar el comportamiento cuando existe un acercamiento a un punto X y por ende existe un acercamiento a un punto Y.

2.4.5 Objeto: Concepción dinámica del límite

Tabla 6

Proceso semiótico en el objeto Concepción dinámica del límite

REGISTRO	REPRESENTACION	TRATAMIENTO
Simbólico	Verbal de la	Sea f una función y “a” un número real,
	Concepción dinámica	“x” se aproxima al número “a”
	del límite	“f(x)” se aproxima a “L”
		Si cuando x se aproxima a a , sus imágenes “f(x)” se acercan a L, entonces se dice que: el límite, L, en el punto “a” existe y se escribe
		$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Gráfico Concepción dinámica
del límite

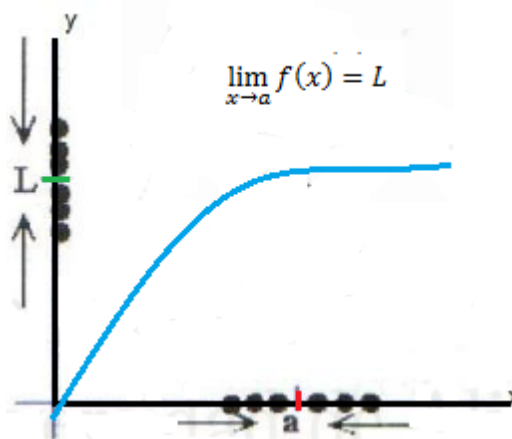


Figura 9 Registro gráfico de la concepción dinámica del límite en una función

Según la propuesta de Mauro Mira López (2016) “*Un estudiante debe conocer y diferenciar la concepción dinámica, métrica, y óptima del límite*”, para un aprendizaje significativo en la concepción del límite de una función se debe enseñar de acuerdo a sus diferentes expresiones y registros de representación semiótica para el caso simbólico y gráfico.

2.4.6 Objeto: Cálculo del límite según la concepción dinámica

Tabla 7

Proceso semiótico en el objeto Cálculo del límite según la concepción dinámica

REGISTRO	REPRESENTACION	TRATAMIENTO
Lenguaje natural	Procedimientos generales	Reemplazamos el valor de x en la función según la notación dada y calculamos.
Simbólico	Simbólica específica	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{2x - 1}$

Como $2(1)-1=1$, por tanto

$2x-1$ es diferente de 0 cuando $x=1$, luego:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-2}{2x-1} = \frac{3(1)-2}{2(1)-1} \quad \text{Se aplica la sustitución directa}$$

$$\frac{3-2}{2-1} = 1 \quad \text{Se realizan las operaciones}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{2x - 1} = 1$$

Simbólico Predominio
procedimental

Calcular el límite de $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

Como factorización: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} =$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} x + 5 = 10$$

Para el cálculo del límite se necesitan el registro lenguaje natural y simbólico específico y procedimental para que el estudiante dado el símbolo pueda operar y saber qué está hallando qué significa aquel número o expresión final del ejercicio o problema.

2.4.7 Objeto: Concepción óptima del límite.

Tabla 8

Proceso semiótico en el objeto Concepción óptima del límite

REGISTRO	REPRESENTACION	TRATAMIENTO
Simbólico	Verbal del límite en la concepción óptima	El valor de L es el límite de f(x) en “a” si, para todo valor de K muy próximo a L, existe otro valor h muy próximo a “a”, tal que los “x” mejoran ese valor de h, es decir que están muy próximos a “a”, hacen que sus imágenes f(x) también mejoren el valor de K cercano a “L”, y estén más cerca de L.

Gráfico Cartesiano de la
concepción óptima del
límite

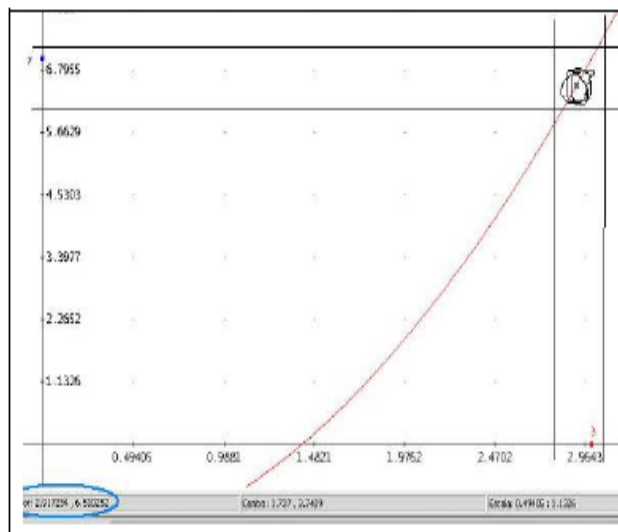


Figura 10 Registro gráfico de la concepción óptima del límite en una función

Fuente: Tesis Doctoral de Mauro Mira López p. 120.

Tabular Números más cercanos
al límite

X	$Y=x^2 - 1$
1.9	
1.99	
1.999	
1.9999	
2.01	
2.001	
2.0001	
2.00001	

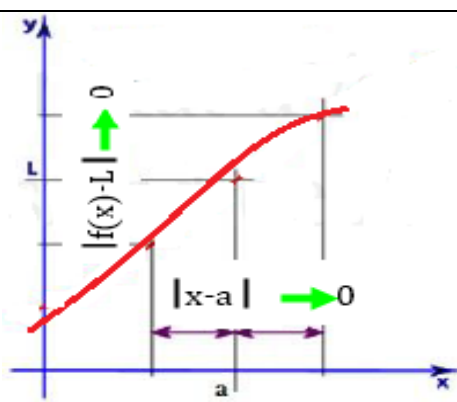
Figura 11 Registro tabular de la concepción óptima del límite en una función

Es necesario buscar valores más próximos a X, que optimicen el cálculo del límite, por tanto se puede usar el registro simbólico en la definición y en la aplicación el registro gráfico donde se puede evidenciar los mejores valores de X que por ende afectan también en valores mejores en Y. Se podría aplicar un registro tabular donde el estudiante ubique números próximos y óptimos es decir los más pequeños que se aproximen por la izquierda y por la derecha del número analizado para hallar el límite.

2.4.8 Objeto: Concepción métrica del límite

Tabla 9

Proceso semiótico en el objeto Concepción métrica del límite

REGISTRO	REPRESENTACION	TRATAMIENTO
Simbólico	Verbal de la concepción métrica del límite	<p>Sea f una función y “a” un número real,</p> <p>Si cuando “x” se aproxima a “a”, sus imágenes “$f(x)$” se aproximan a L entonces decimos que existe el límite, L, en el punto “a” y se escribe</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ <p>Si cuando x-a en valor absoluto se aproxima a 0, “$f(x)$-L” en valor absoluto se aproxima a 0 $0 < x - a < \delta$ entonces $f(x) - L < \epsilon$</p>
Gráfico	Cartesiano	 <p>Figura 12 Registro gráfico de la concepción dinámica del límite Fuente: “Concepciones del concepto de límite” de Medina (2001) p.46.</p>
Simbólico	Verbal definición formal del límite	<p>Se define f como una función, donde el dominio está en un intervalo abierto, donde se encuentre el real “a”.</p> <p>Entonces, se dice que: el límite de $f(x)$ cuando x, se aproxima a “a” es L, y se escribe como:</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ <p>Si para todo número $\epsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que Si $0 < x - a < \delta$ entonces $f(x) - L < \epsilon$</p>

Gráfico

Cartesiano de la
Concepción Métrica
del límite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

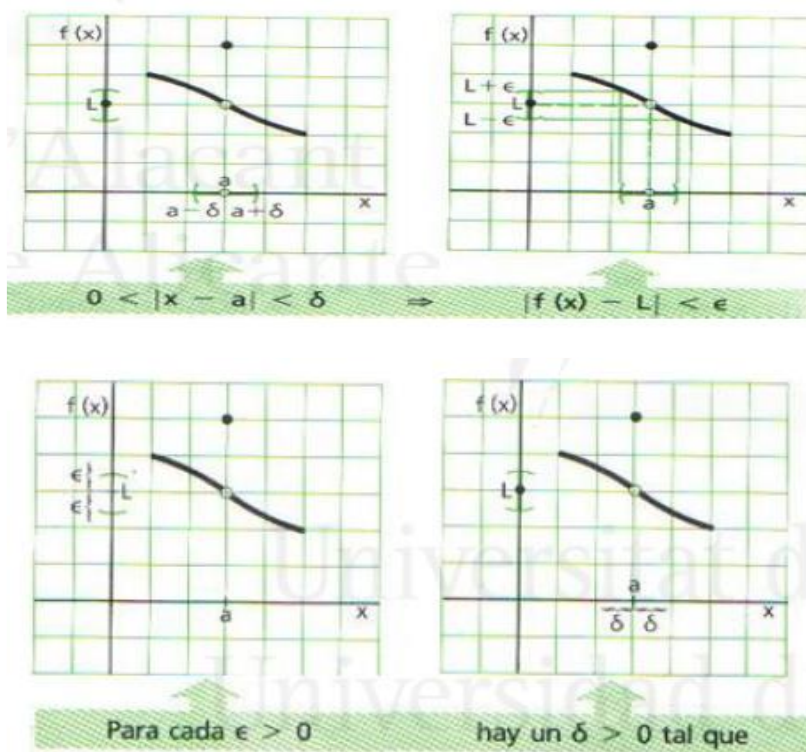


Figura 13 Registro gráfico análisis de la concepción métrica del límite

Fuente: Tesis Doctoral de Mauro Mira López p. 15.

Simbólico

Específico de la
concepción métrica del
límite

Dado el límite

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 = 1$$

Encontrar un d tal que $|(2x - 5) - 1| < 0.01$, siempre que

$$0 < |x - 3| < d$$

Como $\varepsilon = 0.01$ debemos encontrar un d apropiado

$$|(2x - 5) - 1| = |2x - 6| = 2|x - 3|$$

Entonces:

$$2|x - 3| < 0.01$$

Se puede escoger un $d = \frac{0.01}{2} = 0.005$, entonces:

$$0 < |x - 3| < 0.005$$

Se puede observar que 0.005 es el mayor valor de d que garantiza que

$$|(2x - 5) - 1| < 0.01, \text{ siempre que } 0 < |x - 3| < d$$

Demostración..

$$|(2x - 5) - 1| = |2x - 3| < 2(0.005) = 0.01$$

Simbólico Predominio conceptual

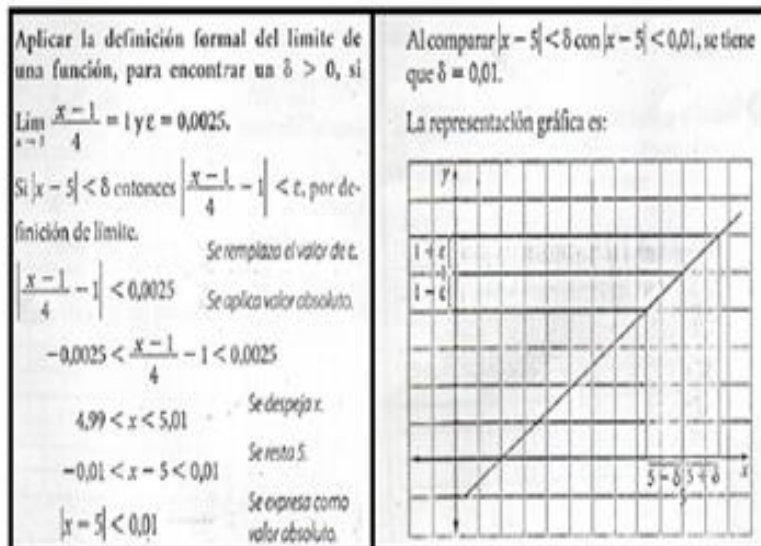


Figura 14 Registro de dominio procedimental del límite

Fuente: Hipertexto 11 Editorial Santillana (2011), p.87.

En la concepción del límite en forma concreta se debe hacer énfasis en la enseñanza de la concepción métrica ya que relaciona profundamente la teoría y la representación y análisis gráfico, podemos partir del registro simbólico donde está dada la definición formal y se puede aplicar los registros gráficos y procedimentales para entender la definición.

2.4.9 Objeto: Resolución de un problema con límites

Tabla 10

Proceso semiótico en la resolución de problemas con límites

Registros	Tratamiento	Conversiones	Soluciones
✓ Lenguaje natural	✓ Expresión verbal del problema	✓ Natural-simbólico	En cada conversión existe una solución del problema general.
✓ Simbólico	✓ Identificación de datos con variables	✓ Simbólico-Gráfico	
✓ Gráfico	✓ Identificación datos en la figura	✓ Gráfico-Aritmético	La solución depende del requerimiento del problema
✓ Aritmético	✓ Identificación numérica de datos	✓ Aritmético-Tabular	
✓ Tabular	✓ Aproximaciones al límite en tablas	✓ Tabular-Natural	
✓ Lenguaje natural	✓ Proposición de soluciones en lenguaje natural.		

Para la resolución de problemas se deben tomar en cuenta los tipos de registros a aplicar, el tratamiento que representa cada registro y sobre todo como influyen éstos cambios en la producción o propuestas de solución de parte de los estudiantes frente a lo planteado. El problema tiene una estructura completa semiótica donde los estudiantes ponen en práctica y diferencian los registros semióticos para realizar las conversiones con las cuales interiorizan el conocimiento mediante procesos cognitivos que envuelven la información para aprender y poner en práctica las conceptualizaciones respecto a contenidos de importancia en la matemática.

2.5 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS OPERACIONALES

- ✓ **Ingeniería didáctica:** Es una metodología de investigación que también se la aplica como una metodología de enseñanza.

- ✓ **Objeto matemático:** Es todas las formas en que se construye, se comunica y se aprende matemáticas como una fórmula, teorema, gráfico o la formulación de un problema.
- ✓ **Registros semióticos:** Conjunto de funciones cognitivas: comunicación, procesamiento, imaginación, etc.
- ✓ **Representación semiótica:** Conjunto de signos que hacen visibles las representaciones mentales a otros objetos.
- ✓ **Noética:** Estudio del pensamiento y formas de adquisición del conocimiento del concepto matemático.

CAPÍTULO III

3 MARCO METODOLÓGICO 3.1 METODOLOGÍA

a) Enfoque.

Nuestro enfoque fue cuantitativo, basado en el diseño experimental ya que se trabajó con la variable independiente a través de la aplicación de los registros semióticos de la Ingeniería Didáctica y se contrastó sus efectos con los resultados del test de rendimiento sobre la comprensión de conceptos y resolución de problemas del límite de una función real en el posttest.

Los sujetos que intervienen en la muestra representan a los cursos de la carrera de Informática tomados al azar por tener las mismas características y que garantiza la homogeneidad de sus grupos.

b) Alcance y delimitación.

Es necesario indicar que el presente trabajo es de carácter Experimental, lo que nos permite establecer resultados y conclusiones, buscando especificar propiedades, características y rasgos importantes describiendo tendencias de un grupo o población que en nuestro caso son estudiantes de nivel superior universitarios de la Facultad de Ciencias de la Educación Carrera de Informática de la UNIVERSIDAD CENTRAL DE ECUADOR.

Además en cuanto a lo que se refiere al tema de límites de una función real, se ha desarrollado la conceptualización de la noción del límite: noción del límite serie y sucesiones, entornos definición, límite de una función real, concepción dinámica del límite, concepción métrica del límite, concepción óptima del límite que son temas para el fundamento y desarrollo del cálculo diferencial e integral.

c) Metodología de la investigación

La investigación tiene un modelo de diseño experimental, donde existen dos grupos: uno de control y uno de tratamiento, a cada grupo se le aplicó el pre test y el pos test que nos permitirá realizar la comparación y análisis de cada grupo y responder a la hipótesis general, *“En cualquier caso, los sujetos pueden ser seleccionados de poblaciones diferentes, o bien se asignan grupos de sujetos a las condiciones control o de tratamiento (diseños de grupos intactos)”* (Cabré, 2012)

3.2 PARADIGMA DE LA INVESTIGACIÓN

El paradigma que sustenta la presente investigación se basa en el paradigma positivista/neopositivista y empírico analítico que tiene sus antecedentes en las grandes teorías de COMTE, DURKHEIN, POPPER y otros, defiende una concepción del mundo determinada:

El concepto de límite de la función real existe para los estudios del cálculo, independiente de quien lo estudia. En este trabajo de investigación se ha analizado y aplicado los registros semióticos en el proceso enseñanza aprendizaje del concepto del límite de una función real, basado en la Metodología de la Ingeniería Didáctica.

Con el planteamiento de una hipótesis deductiva se verificó el orden y el grado de uniformidad que se llevó en las actividades programadas para la comparación de los grupos de prueba y control.

La relación investigador-objeto de estudio es aparente en dos grupos de trabajo experimental y de control, el experimento, se apoya en la estadística de los puntajes t , que cuantifica, verifica y mide la variable de aprendizaje de la conceptualización y formalización del límite de una función real en relación al promedio del rendimiento académico del grupo de estudiantes establecidos en esta investigación respecto a la aplicación de los registros semióticos en

una Ingeniería Didáctica con el promedio del rendimiento académico del grupo de estudiantes donde se aplicó la enseñanza tradicional.

El paradigma aplicado en el informe de la investigación, según Popkewitz (1988) se configura para la investigación educativa en sus supuestos interrelacionados en que la teoría ha de ser universal, no vinculada a contextos específicos ni a las circunstancias, los temas científicos propuestos son independientes de los objetivos y valores de los individuos, se basó en una unidad de análisis de los límites de la función real que fue operativizado en el aula con ayuda de los registros semióticos en la Ingeniería Didáctica.

3.3 OBJETIVOS

3.3.1 Objetivo General

Analizar la aplicación de registros semióticos en el proceso enseñanza aprendizaje del concepto del límite de una función real, basado en la Metodología de la Ingeniería Didáctica.

3.3.2 Objetivos Específicos

- ✓ Identificar las diferentes concepciones del límite de funciones reales.
- ✓ Diseñar actividades de clase que permitan desarrollar el experimento “Registros de representación semiótica para la enseñanza de la conceptualización formalización del límite de una función real”.
- ✓ Aplicar la metodología de investigación científica Ingeniería Didáctica en el proceso enseñanza aprendizaje del límite de una función mediante los registros de representación semiótica

- ✓ Analizar la aplicación de registros semióticos en la incidencia del aumento del nivel de comprensión de conceptos y resolución de problemas de límites, en el grupo de control y experimentación.

3.4 PROBLEMA GENERAL

Por causa de las interrogantes planteadas he decidido poner en acción una nueva forma de enseñanza del límite de una función real con el diseño de los registros de representación semiótica encaminados por la metodología de investigación Ingeniería didáctica para que promueva al estudiante al desarrollo de nuevas técnicas y algoritmos que permitan resolver problemas.

Puesto que el problema es la no comprensión de conceptos en los estudiantes, los registros semióticos en su proceso objeto (concepto), registro, Tratamiento y conversión, llevan a que el aprendizaje sea significativo y activo con el uso de programas matemáticos.

¿Qué impacto produce en el aprendizaje de la noción y formalización del límite de una función real, la aplicación de registros de representación semiótica en los estudiantes de segundo semestre de la carrera de Informática de la Facultad de Filosofía Letras y Ciencias de la Educación, de la Universidad Central del Ecuador,?

Se quiere lograr que se obtenga un nivel alto en la comprensión de conceptos de temas de límites en los estudiantes con la aplicación y uso de registros semióticos, es decir que la nota cuantitativa del promedio de calificaciones sea mayor que el nivel de los estudiantes donde se aplica una enseñanza tradicional es decir una clase magistral, aplicación de teoremas, definiciones basadas en algoritmos y estructuras algebraicas. (Salinas y Alanís, 2009). Se evidenciará en las notas de un post test luego del experimento.

3.5 HIPÓTESIS

3.5.1 Hipótesis General

La inclusión de registros de representación semiótica en la conceptualización, noción y formalización del límite de una función real, bajo los parámetros de una ingeniería didáctica causa un efecto en el promedio del rendimiento académico en los estudiantes de 2do semestre de informática UCE

3.5.2 Sub-hipótesis

H_0 : Hipótesis nula

H_0 : En el aprendizaje de la conceptualización y formalización del límite de una función real, el promedio del rendimiento académico del grupo de estudiantes donde se aplicaron registros semióticos en una Ingeniería Didáctica (ID), es igual al promedio del rendimiento académico del grupo de estudiantes donde se aplicó la enseñanza tradicional.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Donde:

μ_1 : Es el promedio del rendimiento académico del grupo de estudiantes donde se aplicó los registros de representación semiótica en la conceptualización del límite de una función real

μ_2 : Promedio del rendimiento académico de estudiantes donde se aplicó una metodología tradicional (Clase magistral), es decir no se aplicaron los registros de representación semiótica.

Hipótesis Alternativas

H₁: En el aprendizaje de la conceptualización y formalización del límite de una función real, el promedio del rendimiento académico del grupo de estudiantes donde se aplicaron registros semióticos en una Ingeniería Didáctica (ID) es mayor al promedio del rendimiento académico del grupo de estudiantes donde se aplicó la enseñanza tradicional.

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

H₂: En el aprendizaje de la conceptualización y formalización del límite de una función real, el promedio del rendimiento académico del grupo de estudiantes donde se aplicaron registros semióticos en una Ingeniería Didáctica (ID), es menor o igual al promedio del rendimiento académico del grupo de estudiantes donde se aplicó la enseñanza tradicional.

$$H_2: \mu_1 < \mu_2$$

3.5.2.1 Variables e indicadores

Tabla 11
Variables Indicadores

VARIABLES	Dimensiones	Indicador	Ítems
INDEPENDIENTE Registros de representación semiótica en la concepción del límite de una función real	➤ Noción del límite.	➤ Reconoce al límite como	➤ 1 a, 1 b, 1 g
	➤ Concepción dinámica	➤ aproximación en diferentes contextos.	➤ 1c, 1d, 1e, 1f, 1h, 6a
	➤ Concepción óptima	➤ Identifica el proceso dinámico del límite en una función	➤ 1,i, 6b, 2 a,b,c,d
	➤ Concepción métrica	➤ Identifica en una tabla de valores el límite en una concepción óptima.	➤ 6c. 7 (5)
	➤ Solución de problemas	➤ Encuentra un épsilon apropiado para delta	➤ 4
		➤ Usa la definición del límite para dar solución a problemas	

DEPENDIENTE	➤ Mejoramiento del	➤ Test de conocimientos (ANEXO 1)	Todos los ítems
Mejora en la	aprendizaje		
comprensión de			
conceptos del límite de			
una función real			

3.6 DEFINICIÓN DE LA POBLACIÓN Y DE LA MUESTRA

El enfoque de estudios es la educación superior es decir el problema se desarrolla en los estudiantes de las universidades del Ecuador, tomamos como referencia a estudiantes de segundo semestre de la carrera de informática de la facultad de filosofía y letras de la Universidad Central del Ecuador.

La muestra tomada es de tipo no probabilística intencional (Tamara Ozten, 2017), es decir se ha tomado de tres paralelos ABC solo dos paralelos A, C, por el criterio del investigador de homogeneidad en los grupos es decir los elementos de la población tienen características comunes con rasgos similares: los estudiantes toman el curso de cálculo I en el segundo semestre de la carrera de informática, su edad fluctúa entre los 20-22 años entre hombres y mujeres. En la distribución de los estudiantes de segundo semestre en los tres paralelos con un total de 68 alumnos de los cuales tomamos una muestra de los dos cursos: A, C con 46 estudiantes. (ANEXO 2 y 3)

Tabla 12
Población y muestra en experimentación

PARALELO	Número estudiantes
A	24
C	22
Total	46

Como se observa en la tabla 12, se tienen: Dos paralelos como muestra en total 46 estudiantes de los 68 de la población a los cuales los distribuiremos en un grupo experimental, 24 alumnos del paralelo A y en un grupo de control 22 estudiantes del paralelo C. Se realizó ésta distribución al azar sin considerar ningún tipo de argumento tanto por el investigador como el docente encargado de la materia de cálculo I.

3.7 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

3.7.1 Diseño y elaboración de instrumentos

a) Objetivo 1: Para identificar las diferentes concepciones del límite de una función real se ha tomado en consideración la distribución de la forma en que se presenta el límite que realiza (López, 2016), en su tesis doctoral, el límite en su concepción dinámica, el límite en su concepción óptima y en su concepción métrica, proponiendo en el entorno virtual y uso de software matemático Geogebra cada concepción.

b) Objetivo 2: Para el diseño de clases con registros de representación semiótica se tuvo que relacionar los contenidos de la noción y conceptualización del límite con cada registro como: verbal en su forma natural, simbólico, gráfico, tabular, procedimental, realizando tablas las cuales eran distribuidos en el objeto matemático a enseñar registro, representación y tratamiento

c) Objetivo 3: Para aplicar la metodología de investigación científica Ingeniería Didáctica se puso en acción las fases de ésta investigación, en la primera fase de Planeación, se realizó el análisis epistemológico es decir cuál fue su origen y su evolución respecto al límite usando varias fuentes bibliográficas y siendo parte de la experimentación para tener una idea concreta

del límite, análisis cognitivo se aplicó una prueba de diagnóstico a todos los estudiantes de experimento y no experimento que indique el nivel de conocimientos en cuanto al límite y el final de ésta fase el análisis didáctico donde se tomó 5 libros para su respectivo análisis de la forma cómo enseñan el tema de límites. 2da Fase análisis a priori se realizó una tabla donde indica el tema, el propósito, actividades y desarrollo con los registros semióticos. En la 3era fase de experimentación se realizó 4 sesiones en base la fase de planificación y a priori y en la 4ta fase análisis posteriori se aplicó una prueba final donde analizamos cada caso conforme al propósito de cada actividad, es decir los resultados que muestran los estudiantes después de la experimentación.

Objetivo 4; Para el análisis de la incidencia en el nivel académico de los estudiantes mediante los registros semióticos, se tuvo que dar los contenidos en cuatro sesiones con actividades en clase individuales, grupales y deberes, al finalizar el instrumento de toma de datos principal es la aplicación del test de conocimientos 5 preguntas con varios ítems cada una (ANEXO 1), el cual fue el mismo en el pre test, donde intervienen todos los registros enlazados con los contenidos ya dichos anteriormente, aplicados a los dos grupos de experimentación y a los que no se aplicó la metodología (de control) .

3.7.2 Validación de los instrumentos

En cuanto al test de conocimientos aplicado para analizar el nivel académico antes y después del experimento de los estudiantes, se realizó un proceso de validez de constructo, que consiste en buscar coincidir en la aprobación de los ítems generados por el investigador y tres expertos en el tema de cálculo diferencial e integral de diferentes instituciones específicamente en el estudio de límites de una función real, es decir tomar en cuenta las dimensiones de la

investigación relacionándolas con las sinergias respectivas, como dice (Hurtado, 2012,p.792)

se debe considerar pasos para construir ésta validación.

3.7.3 Plan de actuación. Fases y acciones a realizar (Instrumento)

- a) Diseño y construcción de la tabla de operacionalización, donde consta de las dimensiones o eventos de conocimiento que queremos medir con las sinergias respectivas. (ANEXO 5)

Tabla 13

Eventos y Sinergías (instrumento de validación)

EVENTOS	SINERGIAS
Aprendizaje de la noción, conceptualización y formalización del límite de una función real.	<p>➤ Noción del límite. El estudiante reconoce la idea de aproximación en una forma natural y matemática</p>
	<p>➤ Concepción dinámica Reconoce los diferentes símbolos algebraicos de la forma dinámica los aplica y los representa en el plano La aproximación de una hacia x provoca una aproximación hacia un L</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
	<p>➤ Concepción óptima Encontrar los valores más próximos o pequeños que permitan que la aproximación sea óptima se la puede analizar desde una tabla de valores</p>
	<p>➤ Concepción métrica El reconocimiento de delta y de epsilon en el teorema dado por Cauchy $0 < x - a < \delta$ entonces $f(x) - L < \epsilon$</p> <p>➤ Solución de problemas Identifica el estudiante el limite y propone soluciones con la idea general del cálculo</p>

- b) Diseño de evaluación de instrumentos referente a cada sinergia e ítem (ANEXO 6)

- c) Selección de los jueces, se han tomado a docentes de diferentes instituciones especializados en cálculo integral y diferencial, Ing Danny Berrones (Politécnica

Nacional), MSc Fernando Carrera (Instituto Superior Cordillera), Ing. Daniel Cañarte (UCE).

d) Tabulación y comparación de las respuestas de los jueces e investigador aplicación de: (total/num. Itmes), que indica la probabilidad de aceptación del instrumento

e) Cartas de constancia de validación del instrumento (ANEXO 6)

3.8 FASES Y DISEÑO DE LA INGENIERIA DIDACTICA APLICADA

3.8.1 Primera fase (PLANEACIÓN)

3.8.1.1 Análisis Epistemológico del concepto de límite.

Se toma tres consideraciones en la evolución de la conceptualización del límite tomando como referencia investigaciones de Cornu (1983) y Robinet (1983). Para poder conceptualizarlo y formalizarlo al límite, el estudio nace desde la época griega con trabajos de aproximación y análisis de curvas es decir el cálculo del área. Hasta el siglo XIX, se retoma el límite para validar resultados de demostraciones y definiciones generales.

Primera etapa “los métodos infinitesimales”

En ésta etapa todavía no se hablaba del límite de una función, pero se conocen de métodos para resolver, problemas de cinemática, tangentes y cálculo de cuadraturas. Para una breve historia mencionamos algunos autores y sus aportaciones: Eudoxo de Cnido (360 a. C.) y el método de exhausción, Arquímedes (siglo III a. C.) y las cuadraturas, el estudio de las series numéricas de Nicole de Oresme, (1360), Fermat (1601-1665) y los métodos para el cálculo de tangentes de extremos, Barrow (1630-1677) y el método de las tangentes, Kepler

(1571-1630) y los infinitésimos, Cavalieri (1598-1647) y el los indivisibles, dando final a éste periodo.

Segunda etapa. “La supremacía del cálculo”

En la segunda mitad del siglo XVII hasta XVIII. Los procesos infinitos fueron para los matemáticos una nueva forma de trabajo al descubrimiento, podemos nombrar a Newton (1642-1727) y Leibniz (1646- 1716), quienes separan al cálculo de la geometría, pero no de los procesos algebraicos. De las aportaciones de Newton (1712), series infinitas, fluxiones, de Leibniz el cálculo diferencial y series infinitas.

Quienes continúan con las obras de Leibniz fueron Jaques Bernoulli (1654-1705) y Jean Bernoulli (1667-1748), Jean propone la regla de L'Hospital y la serie de Taylor, Leonhard Euler (1707-1883), fusiona el cálculo diferencial de Leibniz y la teoría de las fluxiones, que como resultado nos da el “análisis” que es el estudio de procesos infinitos. Quien se opuso a Leibniz y Euler fue D'Alembert (1717-1783), el cuál pensó que la notación de los diferenciales debería ser sostenida por algún argumento de mayor fundamento e interpreta las proposiciones de Newton como límites.

Tercera etapa. “Aritmetización del análisis”

En éste período, se intenta la construcción del análisis matemático sobre concepciones aritméticas, por enseñar estos nuevos conceptos los matemáticos escribían sus propios manuales y formas de enseñar el cálculo. Louis Cauchy (1821) propone una nueva definición que supone un avance respecto al aporte de D'Alembert: los valores que toma una variable se acercan indefinidamente a un valor fijo, este último valor se llama el límite de todos los demás. Luego aparece una nueva proposición en cuanto al límite de Karl

Weierstrass (1815-1897), que borra todas las ideas subjetivas de Cauchy, la cual la usamos hasta la actualidad.

Sea f una función definida en los reales y “ a ” un número real,

Cuando “ x ” se acerca a “ a ”, sus imágenes “ $f(x)$ ” se acercan al valor de L entonces decimos que existe el límite, L , en el punto “ a ” y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si cuando $x-a$ en valor absoluto se aproxima a 0,

" $f(x)-L$ " en valor absoluto se aproxima a 0

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon \quad (\text{Sonsoles Blázquez, 2006})$$

3.8.1.2 Análisis Cognitivo. Concepción de los estudiantes

Para realizar éste análisis se consideró los pre conocimientos que tienen los estudiantes referentes a la concepción del límite, basados en una prueba de diagnóstico elaborada con preguntas de tipo objetivas y de ensayo. Unidos los dos grupos tenemos 46 estudiantes de la facultad de filosofía de la carrera de informática de dicha universidad.

Tabla 14

Preguntas del pre test

<i>EJERCICIO</i>	<i>RESPUESTA</i>
a) ¿Qué entiende por un límite?	
b) ¿En matemática qué piensa qué es un límite?	
c) ¿Qué significa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$?	
d) ¿Qué significa que x tiende a a ?	

e) Puede realizar un gráfico explicando las variables

x y L

f) Dada la siguiente función $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ calcula

$f(2)=$

g) Elabore una tabla de valores y escriba un número

aproximado que determine el $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3}{x-2}$

Los estudiantes en su mayoría respecto a la pregunta a) responden que es un punto máximo, es un acercamiento a algo, algo que tiene algún fin, b) Son operaciones, cantidades o números, espacio delimitado por puntos, número que expresa hasta dónde llega una función, punto máximo, valor máximo o mínimo, derivación de una función, intervalos a la solución de un problema, expresión matemática, para la pregunta c) L es la función del límite, variable a encontrar, es decir no pueden definir la expresión dada, d) puntos de x que llegan hasta a, la mayoría entregan sin contestar la pregunta. e) La mayoría de estudiantes no respondieron ésta pregunta es decir no saben interpretar gráficamente la simbología del límite, en la pregunta f) se tiene como respuesta 0,1, indeterminado y sin contestar g) la mayoría de estudiantes no contestaron.

Conclusión

Los estudiantes tienen una idea de límite en su razonamiento natural, pero no está entendido como una definición matemática ni tampoco la pueden identificar como símbolo , ni tampoco en el plano cartesiano es decir en el registro gráfico no tienen idea, en cuanto a los cálculos del límite la mayoría del estudiantes si reemplazan los valores pero no pueden expresar a qué

número se aproxima la respuesta correcta, tampoco se puede apreciar que del lenguaje natural verbal no expresan en una manera gráfica, ni tampoco pueden expresar la definición en un registro tabular.

3.8.1.3 Análisis Didáctico. Enseñanza de los textos de la noción del límite

Se analizaron diferentes textos usados por maestros que imparten esta cátedra.

a) Cálculo de una variable James Stewart (7ma edición) (2012).

El texto empieza con problemas de área es decir con el cálculo infinitésimo y problemas de la tangente donde se evidencia la idea de aproximaciones en el plano lo mismo con los problemas de la velocidad luego el límite de una sucesión, se realiza el estudio de sucesiones geométricas que permiten observar a qué número en su suma infinita se aproxima, junto con la resolución de problemas incluyendo la escritura de límite, luego el cálculo de un límite para que el estudiante pueda reemplazar los valores cuando x tiende a a , definición precisa del límite, en esta parte el autor introduce la definición formal de Cauchy con los términos de ϵ y δ

b) Análisis Matemático de Jorge Lara y Jorge Arroba (2007)

Los autores empiezan con la idea de entornos reducidos, realizando una relación entre funciones y desigualdades para observar el comportamiento de pequeños espacios que se aproximan a un número real ϵ , para lo cual va a permitir introducirse en la definición formal del límite de Cauchy, donde desarrollan esta definición con serie de ejemplos y con gráficas que permiten al lector entender la aplicación de estos símbolos en el plano cartesiano luego ingresa a las propiedades del límite de una función.

c) Cálculo de Louis Leithold (7ma edición) University Oxford(1998)

Introducción gráfica a los límites de una función, nos da una idea de aproximación mediante las tablas donde se ubican números los cuales se acercan por la derecha y la

izquierda hacia una asíntota aquella es la introducción manejada por el autor, para definir el límite y los teoremas de una función real, el autor empieza dando la definición formal de Cauchy con su respectiva explicación y ejemplos.

De ésta manera hemos podido analizar como los autores tienen diferentes perspectivas en la enseñanza, algunos muestran primero las aplicaciones y las nociones del límite como Stewart, otros prefieren aclarar la definición de Cauchy y aplicarla directamente en el análisis de funciones con problemas y otros directamente a las aplicaciones de la definición como es el caso de Luis Leitod, hace falta ponerse en la posición del lector que necesita entender la noción del concepto del límite desde su desarrollo epistemológico hasta la actualidad en las aplicaciones, mejor con el uso de representación semiótica en orden del proceso de enseñanza aprendizaje.

3.8.2 Segunda fase: Análisis a priori de las situaciones didácticas.

Como hipótesis de partida de nuestra investigación es que los estudiantes se apropien del concepto de la noción del límite de una función real, identificar los diferentes símbolos y registros de representación semiótica los cuales nos permiten tener una mayor comprensión de la concepción dinámica del límite, concepción óptima del límite y la concepción métrica o teorema de Cauchy.

Tabla 15

Estructura del diseño para el experimento

Sesión	Propósito de la sesión	Talleres	Técnicas/Registros
1	Identificar mediante los registros semióticos al límite en su forma natural y el concepto del límite matemático	Por medio de lluvia de ideas generar un concepto de límite y expresarlo en forma gráfica	Lluvia de ideas Registro: Verbal Gráfico Simbólico

2	Reconocer al límite en una sucesión, en un entorno en la recta real y expresarlo como definición de entorno	Construcción de tablas para analizar las series infinitas y expresarlos como entornos, y proponer ejercicios detallando y explicando la definición de entorno reducido	Historia “El infinito de Ramanuhan” el problema del infinito Registros: Lenguaje natural, simbólico, tabular,
3	Reconocer al límite en una función real e identificar la concepción dinámica del límite	Dada una función y un X_0 , construir una tabla donde se observe la aproximación en el eje x y en el eje y	Clase magistral, demostración. Registros: Simbólico procedimental y gráfico
4	Aplicar la concepción óptima y la concepción métrica del límite en ejercicios y resolución de problemas con registros semióticos	Identificar los valores óptimos en una función mediante geogebra y aplicar la demostración de la concepción métrica en ejercicios propuestos y problemas	Uso de las tics, geogebra para verificar la concepción óptima y la demostración para aplicar la concepción métrica Registros, simbólico, gráfico, simbólico procedimental

3.8.3 Tercera fase: Experimentación.

Éste proceso didáctico se lo desarrolló en cinco sesiones a 24 estudiantes universitarios de la carrera de informática, éstas cinco sesiones se distribuyeron en dos horas cada una donde:

3.8.3.1 Primera sesión: Se realizó una prueba de diagnóstico con preguntas objetivas y de ensayo (análisis) respecto al análisis de funciones como el cálculo del dominio, recorrido asíntotas y además preguntas de respuestas breve para identificar si los estudiantes tenían una idea del límite de una función real, la hora restante con la ayuda de la plataforma virtual

Moodle y el programa geogebra se pudo enseñar la noción del límite y como definición matemática del mismo junto con los registros semióticos los cuales facilitaron el proceso de aprendizaje del estudiante explicados en la tabla 1 vista anteriormente.

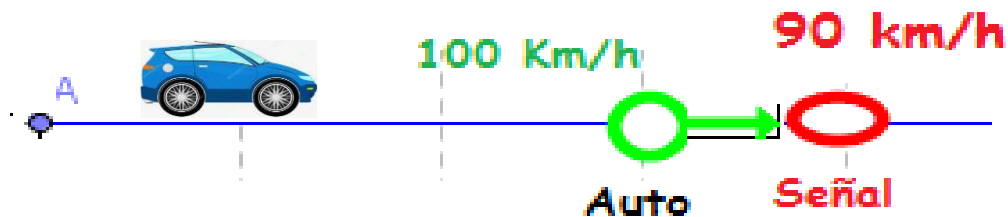


Figura 15 Representación de la aproximación hacia un límite

El parte importante en ésta fase es la relación entre el lenguaje natural en cual se lo pueda interpretar en una gorma gráfica como el límite es una aproximación hacia un objetivo o hacia algo establecido, así como se muestra en la figura 11 el objeto se acerca poco a poco para llegar al cumplimiento de ley.

3.8.3.2 Segunda sesión:

Se introdujo al estudiante en las concepciones del límite vista desde las sucesiones y series geométricas con la idea de aproximación expuestas y desarrolladas en la tabla 2,

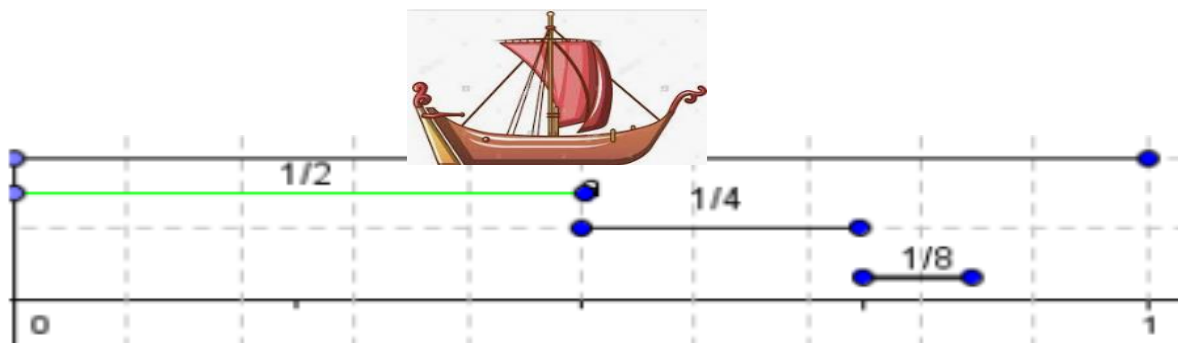


Figura 16 Representación de la aproximación hacia un límite con series numéricas.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

donde se pudo verificar con la realización de tablas las cuales tienen gran relación con los registros de representación semiótica en cuanto al registro tabular y además el gráfico, luego se trabajó con la conceptualización de entorno y la definición matemática donde los estudiantes ya pudieron identificar un entorno hacia un X_0 de referencia.

Luego aplicando el proceso de los registros semióticos presentados en la tabla 3: proceso semiótico del concepto de entorno, se pudo afirmar el conocimiento con la ayuda de los programas informáticos que nos permiten captar fácilmente la transformación de la definición de Entorno que es un registro simbólico con la representación gráfica en la recta numérica, que como objetivo es que el estudiante entienda el concepto de vecindad o proximidad son todos los x del intervalo $]x_0 - d, x_0 + d[$ con $d > 0, d \in \mathbb{R}$.

3.8.3.3 Tercera sesión:

Con los pre conocimientos anteriores respecto a las diferentes concepciones del límite se pudo ya ingresar en la concepción del límite en una función real, como un punto en el plano tiene influencia en otro punto en el eje y , además las aproximaciones que se pueden realizar con la idea de entornos, todo éste tipo de explicaciones y procesos se puede apreciar en la tablas 4 y 5

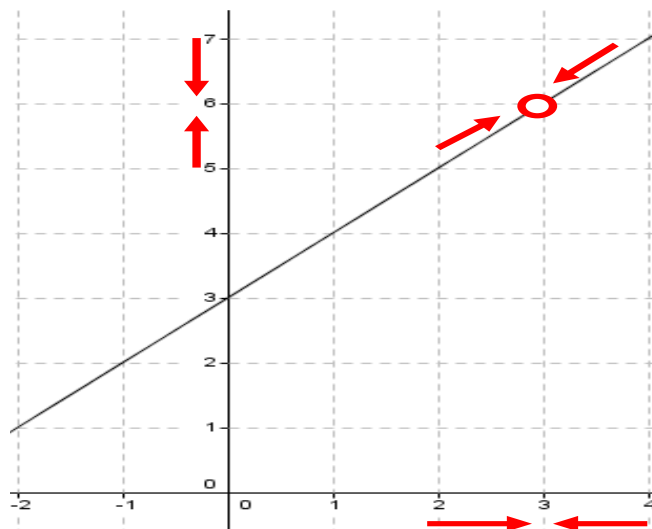


Figura 5

Para ésta actividad se pudo usar registros de representación tabular para explicar las aproximaciones.

Calcular el límite de $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ para $x \rightarrow 3$

La tabla muestra los valores de x cercanos al 3.

Tabla 16

Registro tabular de valores cercanos a x

x	4	3.5	3.1	3.01	3.001	3	2.999	2.99	2.9
$\frac{x^2-9}{x-3}$	7	6.5	6.1	6.01	6.001	6	5.999	5.99	5.9

Las aplicaciones se pueden dar con el uso de Geogebra tanto en la programación y la ayuda que nos brindan ciertos programas como la siguiente figura

Mediante este applet de GeoGebra trabajaremos la idea intuitiva de límite de una función en un punto y en el infinito

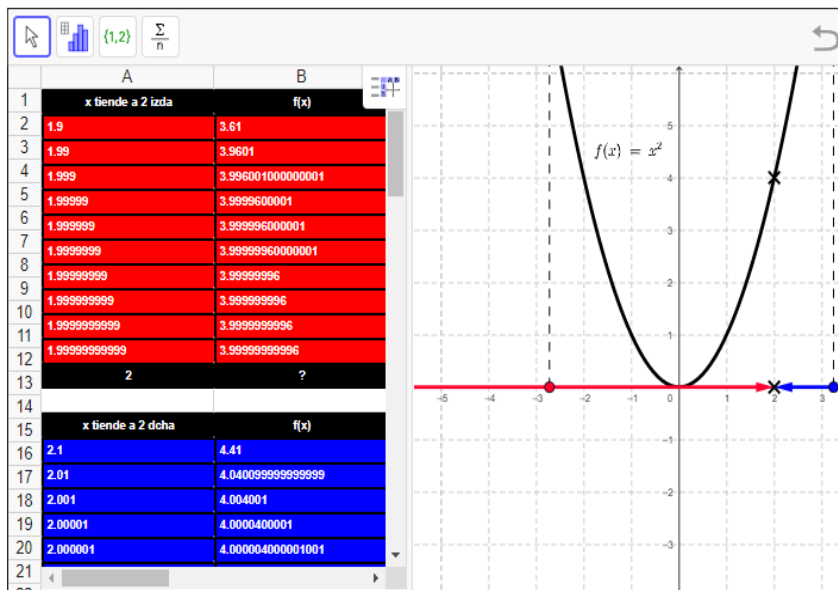


Figura 17 Representación gráfica y tabular con la idea de aproximación (Geogebra)

Fuente: <https://www.geogebra.org/m/rgcpup6H>

Se relaciona el registro tabular donde el estudiante verifica la proximidad tanto por la derecha y la izquierda que tiene relación en encontrar los x más óptimos que por intuición podemos definir cuál es el límite de ésta función por proximidad, además de analizar el registro tabular también se relaciona el registro gráfico don el estudiante realiza después del tratamiento con tablas la transformación para entender el gráfico y los movimientos que se tienen en los ejes y se observa el aproximamiento hacia el límite que es el número 2.

Otra manera de manejar las Tics es la aplicación de la siguiente aplicación llamada calculadora de límites donde el estudiante reconoce los registros simbólicos y ubica el

funcionamiento de cada uno para dar a la transformación por el registro simbólico

procedimental



calculadora de limites

Autor: Fabian

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

ingrese f(x)=

ingrese g(x)=

ingrese x₀=

Resultado : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

Figura 18 Calculadora de límites (Geogebra)

Fuente: <https://www.geogebra.org/m/qr7ERVTM>

Por las aproximaciones se puede concluir que cuando x tiene a 3 la función se aproxima a 6

Realizando ejercicios de la misma metodología para la comprensión, luego se pudo dar la diferencia entre la concepción dinámica del límite, la concepción óptima y la concepción métrica, se pudo trabajar la concepción dinámica con la ayuda de los registros de representación semiótica en cuanto al lenguaje natural, simbólico, gráfico y sobre todo

con el simbólico procedimental, donde los estudiantes pudieron resolver ejercicios y proponer ejercicios.

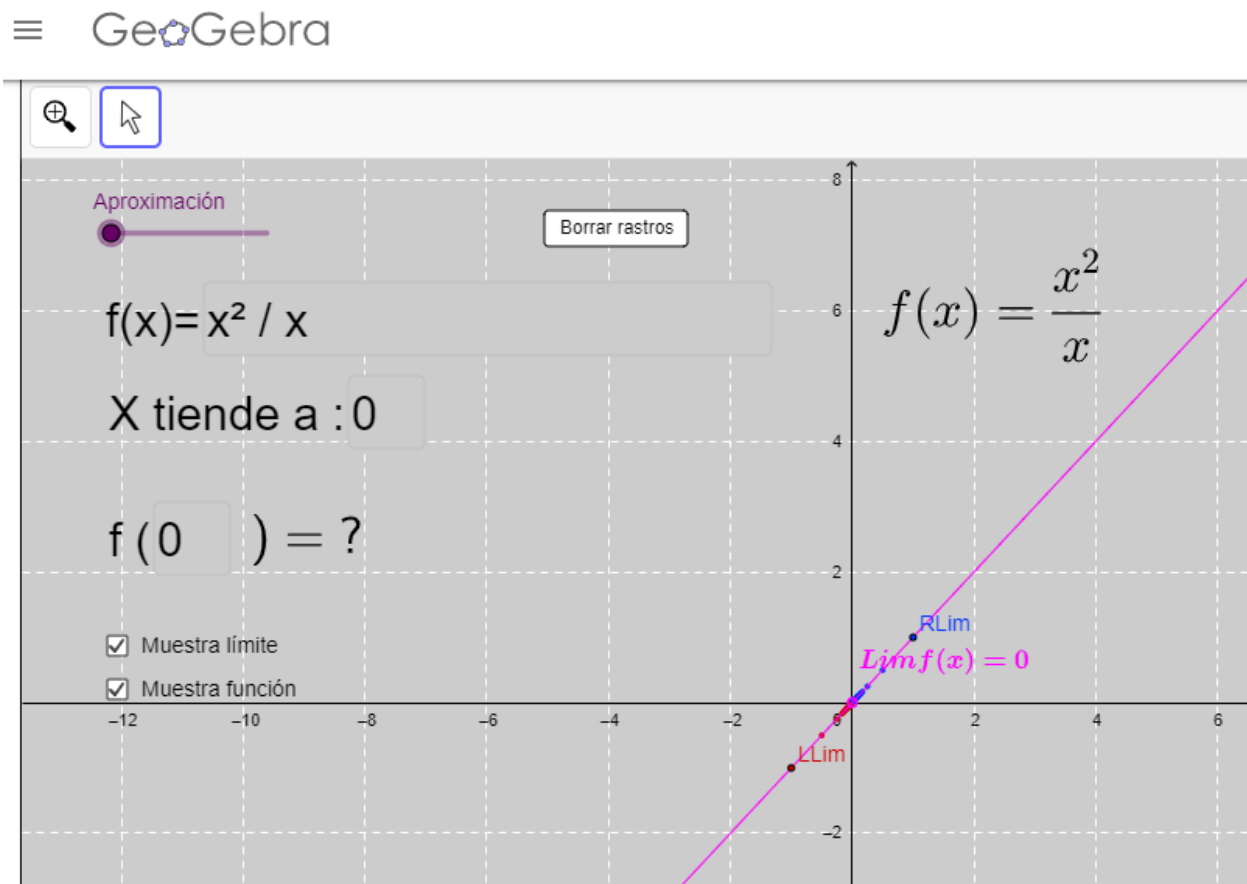


Figura 19 Cálculo y representación del límite hacia algún punto x (Geogebra)

Fuente: <https://www.geogebra.org/m/AHmFUD9a>

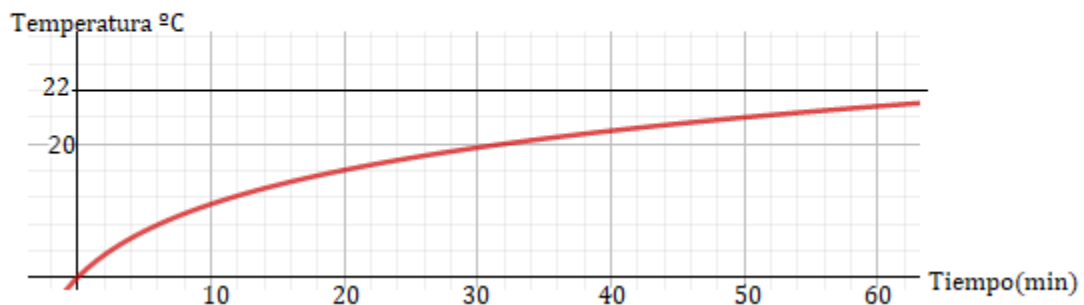
Se proponen ejercicios con aplicaciones en Geogebra para que el estudiante identifique el límite en una función lineal en el registro simbólico de la función y el registro gráfico.

3.8.3.4 Cuarta sesión:

Se puso en acción el hecho de dar solución a problemas referentes a límites para encaminar a los estudiantes hacia el aumento de la forma cognitiva del límite es decir la realidad con el de las aplicaciones abstractas.

Problema:

Se ha sacado de la nevera un vaso de agua y lo hemos dejado encima de la mesa de la cocina. Éste gráfico muestra la temperatura en grados centígrados a medida que pasa el tiempo.



- ¿Qué temperatura alcanza el agua a los 20 min
- ¿Hay cambios de temperatura del agua?
- ¿Cómo cambia en el intervalo 40-60 minutos?
- ¿Qué temperatura alcanzará el agua a los 79.9 minutos, a los 79.99 minutos, a los 79.999..... minutos, 80.1 minutos, 80.01 minutos, 80.001 minutos.....
- La temperatura en el exterior de la nevera es de 22° C. ¿Alcanzará el agua la temperatura del exterior de la nevera?
- Describe con tus palabras el cambio que ha sufrido la temperatura del agua
- Expresa el problema usando la definición del límite con las variables del problema

Figura 20 Ejemplo de problema del límite de una función.

El estudiante debe realizar varias conversiones semióticas para dar solución a cada ítem,

en:

- Natural-Gráfico-Aritmético
- Natural-Gráfico-Aritmético-Natural
- Natural-Gráfico-Aritmético-Natural
- Natural-Gráfico-Aritmético-Tabular-Natural
- Natural-Gráfico-Natural

- f) Natural-Gráfico-Natural
- g) Natural-Aritmético-Gráfico-Simbólico

En el problema la idea de acercamiento hacia un límite se hace evidente además todas las posibles formas y concepciones del límite se desarrollan en el problema, dando importancia al ítem g donde ya propone la definición formal del límite.

En la segunda parte se concluyó con la concepción óptima del límite que lo pudieron observar mediante Geogebra los valores óptimos que se puedan considerar en la aproximación, para luego ingresar en la concepción métrica donde se infunde la definición formal de Cauchy para el límite encontrar un delta y un épsilon, óptimo para la aproximación del límite siguiendo la tabla 8, se concluyó con la toma de una prueba de conocimientos con el objetivo de obtener datos e inferir sobre ellos.

3.8.4 Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación.

Dentro del proceso de nuestra ingeniería didáctica se ha propuesto 4 actividades para poder evaluar a los estudiantes y concluir que el proceso enseñanza aprendizaje ha dado resultados referente a la aplicación de los registros de representación semiótica.

Actividad 1: El objetivo en ésta actividad fue que los estudiantes relacionen conceptos básicos acerca del límite en situaciones reales basados en un registro semiótico de lenguaje natural a un concepto formal del límite en matemática basados en un registro simbólico.

En una test se les preguntó

- a) ¿Qué entiende por un límite?
- b) ¿En matemática qué es un límite?
- g) Cómo expresamos una definición simbólica de entorno?

Actividad 2: El objetivo es que el estudiante ponga en práctica la idea del límite tanto en la concepción natural como en la recta numérica el concepto de entorno a las funciones ya que ésta tiene dos ejes (x,y) que si hay números que se aproximan a un a en x también se aproximan a L en y en una función dada.

c) ¿Qué significa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$?

d) ¿Qué significa que x tiende a a?

e) Puede realizar un gráfico explicando las variables a y L

$$\text{Si: } f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \text{ complete:}$$

<p>a) x tiende a.....</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">X</td> <td style="width: 15%;">1.9</td> <td style="width: 15%;">1.99</td> <td style="width: 15%;">1.999</td> <td style="width: 15%;">1.9999</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">f(x)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">f(x): tiende a.....</p>	X	1.9	1.99	1.999	1.9999	f(x)					<p style="text-align: center;">..... x tiende a</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">2.0001</td> <td style="width: 15%;">2.001</td> <td style="width: 15%;">2.01</td> <td style="width: 15%;">2.1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">f(x)</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">.....f(x) tiende a</p>	2.0001	2.001	2.01	2.1	f(x)			
X	1.9	1.99	1.999	1.9999															
f(x)																			
2.0001	2.001	2.01	2.1																
f(x)																			

b) Escriba

$$\lim_{x \rightarrow} f(x) =$$

Explicamos que si x se mueve también se mueve el eje y hacia algún número el cual también puede ser infinito y usamos la plataforma Moodle donde se enlaza a las aplicaciones de geogebra y el estudiante tiene una enseñanza activa, pues interpreta entre el registro tabular y el gráfico es decir el tratamiento o transformación de la semiosis

Actividad 3: Aquí el objetivo es que el estudiante mediante el registro simbólico procedimental pueda calcular límites usando la concepción dinámica, para la resolución de

problemas y llegue a dominar éste tipo de cálculos, entendiendo el significado de cada variable como de x , $f(x)$, a lím.

f) Dada la siguiente función $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

calcula $f(2)=$

h) Explique la concepción dinámica del límite en el gráfico y con sus propias palabras de una definición simbólica.

EJERCICIO	PROCESO/ RESPUESTA
1). El valor del $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2+2x+1}{2x+1}$ es:	a. $\frac{8}{9}$ b. $\frac{9}{8}$ c. $-\frac{8}{9}$ d. $-\frac{9}{8}$
2). El valor del $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ es:	a. 0 b. No existe c. 6 d. $\frac{0}{0}$
3). El valor del $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ es:	a. 0 b. No existe c. $\frac{0}{0}$ d. $\frac{1}{4}$

Figura 21 Pre test-Post test grupo experimental

Fuente: Hipertexto 11 Editorial Santillana (2011), p.87.

Actividad 4: El objetivo es que el estudiante diferencie el proceso de tratamiento entre las tres concepciones del límite: la concepción dinámica, concepción óptima y la concepción métrica, ya que desde éstas conceptualizaciones el estudiante demuestra sus habilidades de cálculo, aplicación de algoritmos y metodologías para entender al límite y la resolución de problemas, tomando en cuenta el uso de registros de representación semiótica

Tabla 17

Preguntas ensayo concepciones del límite

FUNCIÓN	Halla el límite si lo hay de dicha función cuando $x \rightarrow 1$
Dada la función. $f(x) = \frac{3x - 1}{2}$	a) Aproximación dinámica b) Aproximación óptima c) Aproximación métrica Encontrar un $d > 0$, cuando $\varepsilon = 0.01$

Encuentra el error cometido

5). Si $\lim_{x \rightarrow 1} 4x + 3 = 7$, hallar un $\delta > 0$

Sea $\varepsilon > 0$. Luego, si $|x - 1| < \delta$ entonces $|4x + 3 - 7| < \varepsilon$

Considerando la desigualdad de la derecha, resulta:

$|4x + 3 - 7| < \varepsilon$ Si y solo si $|4x + 4| < \varepsilon$

Si y solo si $4|x + 1| < \varepsilon$

Si y solo si $|x + 1| < \frac{\varepsilon}{4}$

Por lo tanto, δ puede ser cualquier número positivo menor que $\frac{\varepsilon}{4}$. Es decir, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

a. En $|x + 1| < \frac{\varepsilon}{4}$

b. En $|x - 1| < \delta$

c. En $|4x + 4| < \varepsilon$

d. No hay error

Figura 22 Ejercicio de la concepción métrica del límite

Fuente: Hipertexto 11 Editorial Santillana (2011), p.87.

3.9 PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

3.9.1 Análisis de las respuestas de la ingeniería didáctica aplicada

3.9.1.1 Análisis Actividad 1.

En ésta actividad se cumplió el objetivo, ya que los estudiantes demuestran que diferencian entre un concepto natural y matemático del límite gracias a los diferentes registros de representación semiótica, se tienen las siguientes respuestas a las preguntas

a) ¿Qué entiende por un límite?

La mayoría de estudiantes responde que: es una aproximación a un parámetro, es un tope a algo que vamos a llegar, punto máximo de alcance

b) ¿En matemática qué es un límite?

Es una aproximación a un punto en plano o una aproximación a un número

g) Cómo expresamos una definición simbólica de entorno?

La mayoría de estudiantes proponen la definición $]x_0 - d, x_0 + d[$ y la explican en recta numérica y en el plano cartesiano, también proponen una explicación gráfica.

Conclusión.

Los estudiantes desarrollaron una idea clara de los diferentes conceptos del límite en su naturalidad y concepto matemático, pudieron expresar sus respuestas en una forma verbal, simbólica y gráfica para expresar sus ideas dando realce al uso de registros de representación semiótica.

3.9.1.2 Análisis Actividad 2.

Se puede observar que el propósito es ésta actividad se ha cumplido el estudiante tiene una idea de la noción del límite en una función real bajo el concepto de entorno aplicando a las funciones en el análisis del entorno en los dos ejes del plano, los estudiantes responden.

c) ¿Qué significa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$?

Los estudiantes en su mayoría responden: X tiende a a y f(x) tiende a L, es la concepción dinámica del límite, L es la aproximación en el eje y, y a es la aproximación de x

d) ¿Qué significa que x tiende a, a?

x tomará el valor de a, los x se aproximan a, a, a tiene un entorno

e) Puede realizar un gráfico explicando las variables a y L

La mayoría de estudiantes grafican bien a en el eje x y L en el eje y.

Además en el ejercicio propuesto la mayoría de estudiantes identifica las aproximaciones que x tiende a 2 y f(x) tiende a 0.25, claro que existen variantes entre 2.1 en x y 0.25, $\frac{3}{4}$ y otros el problema es en el cálculo y reemplazo que realizan y uso de la calculadora de los estudiantes

Conclusión

Bajo los parámetros de respuestas en los estudiantes se evidencia la comprensión gráfica y simbólica del límite en una función real, identifican los valores de a como aproximación de x y de L como aproximación de f(x), es decir aplican registros de representación semiótica para expresar conceptos del límite de una función y reconocen la definición simbólica $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

3.9.1.3 Análisis Actividad 3

Se observa el cumplimiento de nuestro propósito en ésta actividad los estudiantes resuelven límites aplicando procesos concretos en la solución de ejercicios y problemas, los estudiantes respondieron

h) Explique la concepción dinámica del límite en el gráfico y con sus propias palabras de una definición simbólica

La mayoría de estudiantes proponen la definición simbólica $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, que es correcta en cuanto a la concepción dinámica del límite, en cuanto al gráfico la mayoría si grafica correctamente pero existieron confusiones con la concepción métrica en pocos casos, los estudiantes lo quieren explicar en una forma verbal como: es la aproximación de en los dos ejes x e y

En cuanto a los ejercicios propuestos la mayoría resuelve correctamente, en casos existe la confusión en las respuestas en 0 en la forma indeterminada 0/0, pues son conceptos básicos de la teoría de números reales los cuales se tendría que reforzar, pero de allí los procesos para calcular el límite en la mayoría fueron correctos es decir e registro simbólico procedimental es correcto.

Conclusiones.

Los procedimientos propuestos por los estudiantes al resolver éstos problemas y ejercicios fueron correctos es decir aplican los principios de aproximación y las definiciones simbólicas para resolver el límite de una función, en ciertos casos no está clara la respuesta por el fundamento numérico que es parte de cursos anteriores, el registro simbólico procedimental es correcto lo demuestran los estudiantes.

3.9.1.4 Análisis Actividad 4

El objetivo de ésta actividad se ha cumplido, los estudiantes diferencian los procesos de cálculo y concepciones del límite en sus distintas formas: la concepción dinámica, concepción óptima y la concepción métrica, en las siguientes preguntas los estudiantes responden:

Tabla 18

Ejercicio de evaluación de las concepciones del límite

FUNCIÓN	Halla el límite si lo hay de dicha función cuando $x \rightarrow 1$
Dada la función,	a) Aproximación dinámica
$f(x) = \frac{3x - 1}{2}$	b) Aproximación óptima
	c) Aproximación métrica
	Encontrar un $d > 0$, cuando $\varepsilon = 0.01$

a) La mayoría de estudiantes responden correctamente, **realizan los respectivos reemplazos** en la concepción dinámica incluso se propone la definición simbólica y desarrollan al límite correctamente dando como respuesta 1

b) Los estudiantes proponen una tabla donde ubican números próximos a 1, los más pequeños o cercanos en un entorno próximo con decimales, positivos y negativos tratando de expresar la concepción óptima de buscar los entornos más pequeños

c) Tienen la idea de la concepción métrica es decir proponen la definición y en algunos casos muestran el concepto simbólico del límite en su forma métrica usando épsilon y delta, los reemplazos los formulan correctamente, el problema es los procesos algebraicos que no los realizan correctamente, tienen deficiencias en las reglas de ecuaciones y teoría de números reales.

En el ejercicio de encontrar el error la mayoría de estudiantes si identifican el signo en el proceso que se lo cambió en el valor absoluto y por ende se dio otro valor de delta

Conclusiones

Gracias a los registros de representación semiótica los estudiantes pueden resolver ejercicios desarrollando los diferentes algoritmos de solución y aplicando registros simbólicos, tabulares y procedimentales en las diferentes concepciones del límite, salvo que

se han cometido errores en los temas algebraicos de los estudiantes, pero el objetivo para ésta actividad es satisfactorio

3.9.2 Resultados de la aplicación de la ingeniería didáctica

Los objetivos trazados en la fase posteriori de situaciones didácticas en cada actividad se ve reflejada la comprensión de la noción del límite de una función real en los estudiantes con la ayuda de los registros de representación semiótica así: en la actividad 1: Los estudiantes proponen concepciones del límite en el lenguaje natural y matemático los dos con la concepción de aproximación, además resuelven ejercicios de aproximación en la aplicación de series y sucesiones, en la actividad 2: Se evidencia como los estudiantes entendieron dos registros: el primero el simbólico de la definición de entorno en la recta numérica y la aplicación de el mismo en el plano cartesiano en los dos ejes, el segundo registro simbólico el $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, que dan resultados positivos esperados es decir que entienden el significado de cada una de las variables dando solución a ejercicios aplicando ésta definición, además se pudo interpretar la definición del límite en el plano cartesiano y en el registro tabular, en la actividad 3: Reconocen la concepción dinámica del límite aplicando la definición simbólica del límite a ejercicios propuestos donde se observan errores pero de cálculos numéricos no identifican una forma indeterminada en la respuestas pero en el proceso de cálculo y aplicación de algoritmos de solución si lo realizan bien, en la actividad 4: Identifican los procesos que se deben aplicar a las tres concepciones del límite tanto a la dinámica, óptima y la métrica, recalando que existió en gran manera problemas de álgebra y teoría de números reales al momento de mostrar la solución final, pero en el proceso de la definición métrica “ $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$ “, si lo realizaron correctamente por tanto

sabemos que es éste grupo existen falencias en propiedades de la teoría de números reales y las técnicas algebraicas.

CAPÍTULO IV

4. MARCO ANALÍTICO

4.1. EL PROCESO DE INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL

Dentro del desarrollo de nuestra investigación se aplicó la metodología de la investigación experimental para la hipótesis operacional planteada, se partió de “grupos ya formados de una manera natural” Latorre y Arnal, estudiantes que cursaban el segundo semestre de la carrera de Informática de la Universidad Central del Ecuador.

Al aplicar la prueba de conocimientos en los dos grupos, tanto de control como el experimental, (pretest y postest), se analiza los resultados cualitativos en el ámbito de los conocimientos sobre la noción de límite de una función mediante una ingeniería didáctica en cada grupo y el análisis de la aplicación de los registros de representación semiótica en el proceso

En los dos grupos, se dictó la misma materia de “la noción del límite de una función real”, pero con distintas metodologías.

En el grupo experimental se aplicó una metodología de enseñanza aprendizaje llamada REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA, bajo los parámetros de una metodología de investigación llamada INGENIERÍA DIDÁCTICA, además se aplicó una prueba pretest y post test para la verificación de un mejor rendimiento después de la aplicación de cada metodología.

En el grupo de control se aplicó una metodología tradicional o llamada CLASE MAGISTRAL, donde también se aplicaron un pretest y un postest. Para el experimento se realizó el análisis entre los dos grupos con la nota sobre 10 de las pruebas post test respecto a los grupos de control y experimental para ser verificados dichos cambios a través de la prueba de hipótesis.

En éste capítulo podemos conocer los datos del promedio de la aplicación tanto del pre test como del post de los dos grupos implicados, representados en un modelo estadístico, como es el promedio o media aritmética de cada grupo, la desviación estándar, con el objetivo de inferir sobre éstos datos, planteando hipótesis las cuales serán desarrolladas por la prueba para datos cuantitativos “t Student”, para decidir si se acepta o no las hipótesis plantadas en ésta investigación.

4.2.PROCEDIMIENTO DE RECOGIDA DE DATOS

4.2.1.Para analizar los registros semióticos en la incidencia del aumento del nivel de comprensión de conceptos respecto a la noción y formalización de límite

Los datos se los obtuvo de la aplicación de una prueba pre test y post test, tanto al grupo de control (22 estudiantes) como al grupo de experimentación (24 estudiantes), éste cuestionario consta de 5 preguntas de tipo cerradas y de ensayo para que el estudiante muestre la comprensión de conceptos y resuelva ejercicios con el procedimiento requerido, el cual ha sido aplicado personalmente por el investigador, contando con el respectivo permiso al docente encargado de la cátedra de matemática II, además estas preguntas tienen una escala cuantitativa es decir cada pregunta equivale a 1 punto total sobre 10, toda esta información la trataremos en su forma estadística y prueba de hipótesis t - Student, con el uso de paquete Excel, para posteriormente inferir las conclusiones del caso.

4.3.ANÁLISIS DE DATOS

4.3.1 Análisis comparativo general de los dos grupos

Nuestro enfoque al ser de tipo cuantitativo, los resultados obtenidos para probar la hipótesis se los realizó con el fundamento analítico, numérico y estadístico, donde se tiene mucha relación con los patrones de comportamiento. Se probó que la aplicación de registros de

representación semiótica influye en un aprendizaje óptimo de conceptos y resolución de problemas del límite de una función real.

Con el diseño propuesto y la aplicación del pre test y un post test en cada uno de los grupos, sus resultados se observa en la Tabla 19

Tabla 19
Distribución de grupos en el experimento

Grupos	Pre Test	Tratamiento	Post Test
U_1	Si	Si	Si
U_2	Si	No	Si

Simbología del diseño experimental

U_1 : Es el grupo experimental (Enseñanza de la noción del límite de una función real con la aplicación de la metodología de ingeniería didáctica y los registros de representación semiótica)

U_2 : Grupo de control (Enseñanza de la noción del límite de una función real con la metodología tradicional (Clase magistral)).

Además se distribuyen a los estudiantes en dos grupos, como se apreciar en la siguiente tabla

Tabla 20
Análisis de la muestra en experimentación

Grupos	Número estudiantes	Docentes	Paralelo
U_1 :	24	1	A
U_2 :	22	1	C
Total	46	1	

Como se observa en la tabla 20 se tienen: en el grupo experimental 24 alumnos del paralelo A a cargo de un docente y en el grupo de control tenemos 22 estudiantes, como el número en cada grupo es < 30 se podrá aplicar la prueba de hipótesis “t Student”

El siguiente análisis estadístico indica el comportamiento de cada conjunto de datos, en nuestro caso los dos grupos, se ha considerado mediante dos importantes conceptos estadísticos como la media aritmética y la desviación típica, donde podemos inferir mediante el análisis de las hipótesis.

Tabla 21
Estadísticos de los grupos Pre test y Pos test

	Grupo Experimental		Grupo de control	
	U_1		U_2	
	Media	Des. Típica	Media	Des. Típica
Pre Test	2.479166667	1.664718064	2.054545455	1.22774562
Post Test	7.316666667	0.98319208	6,01363636	1,6051392

En la Tabla 21, se puede observar que existe una diferencia significativa entre la post prueba y la pre prueba, pero para dar una validez estadística aplicamos una prueba “t Student” para dos muestras relacionadas es decir analizamos cada grupo con su respectivo pre test y post test, para luego hacer un análisis en con las variables independientes ya que usamos datos cuantitativos que es el promedio de las calificaciones que obtuvieron los estudiantes en la post prueba.

4.3.1.1 Análisis estadístico de datos (Grupo experimental)

Realizamos un análisis estadístico de datos de cada estudiante en cuanto a la aplicación del pre test y el post test en el grupo experimental.

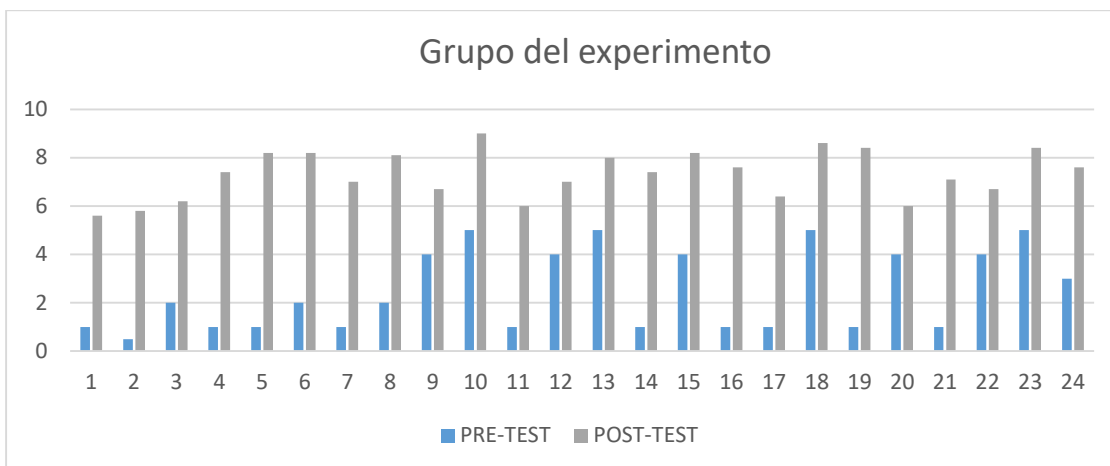


Figura 23 Pre test-Post test grupo experimental

Se puede observar en la distribución de datos una diferencia significativa entre las notas obtenidas del pre test o llamada de diagnóstico y la prueba post test llamada final.

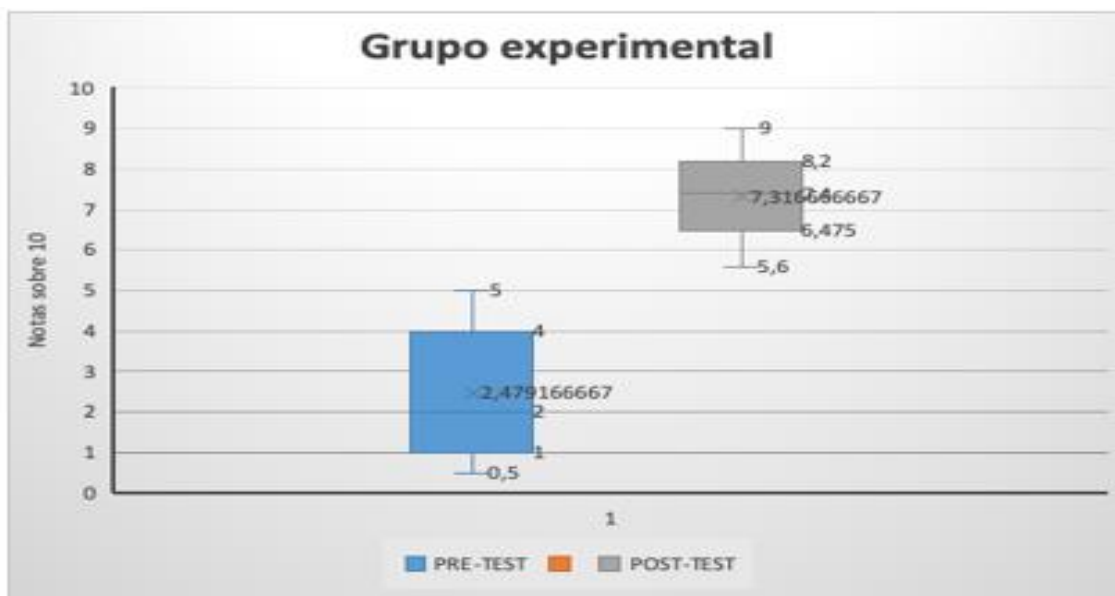


Figura 24 Diagrama de caja y bigotes Grupo experimental.

Para el conjunto de datos del pre test el 50% de los datos o notas están entre 1 a 4 sobre 10, con un valor mínimo de 0.5 y un máximo de 5 como nota más alta, así la del conjunto de datos

tiene una tendencia central hacia la nota de 2.5, por lo que podemos concluir que no tienen los suficientes conocimientos para hablar de un buen manejo del tema de límites.

En cuanto a los datos del post el 50% de datos están entre las notas de 6.5 y 8.2, con un valor mínimos de 5.6 y un valor máximo de 9 como nota del rendimiento después del experimento, todos los datos tienen una tendencia central del 7.1 del promedio en las calificaciones, entonces podemos decir que; los estudiantes dominan las conceptualizaciones del límite de una función.

4.3.1.2 Análisis estadístico de datos (Grupo de control)

Infiriendo sobre los datos estadístico de cada estudiante en cuanto a la aplicación del pre test y el post test en el grupo de control.

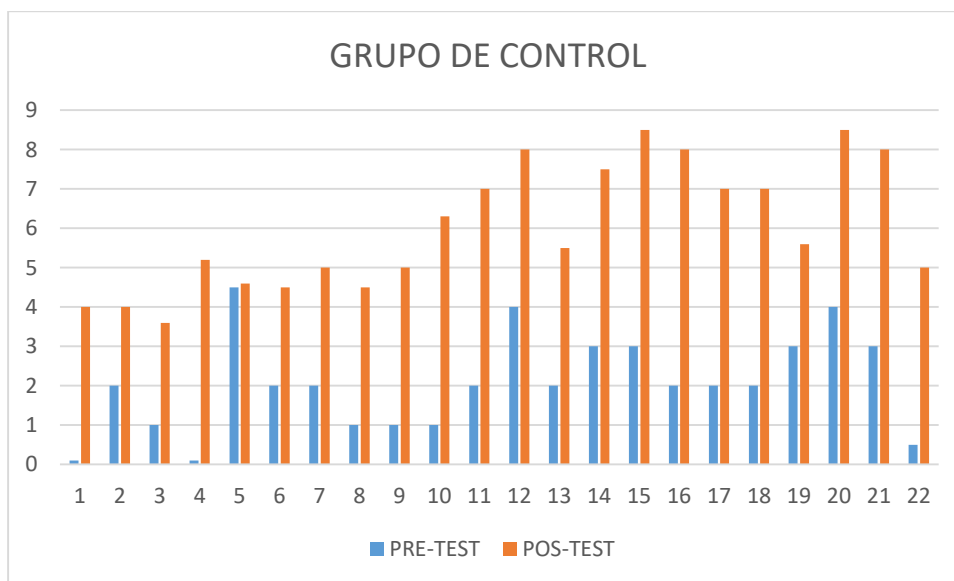


Figura 25 Pre test post test grupo control

Se observa un aumento en el promedio de cada estudiante con la metodología tradicional o clase magistral aplicada en éste grupo en comparación con el pre test realizado, pues se sabe

que en el pre test los estudiantes no se acuerdan de algunos conceptos pero después de dar la clase hay un incremento en el nivel de conocimiento respecto al límite.

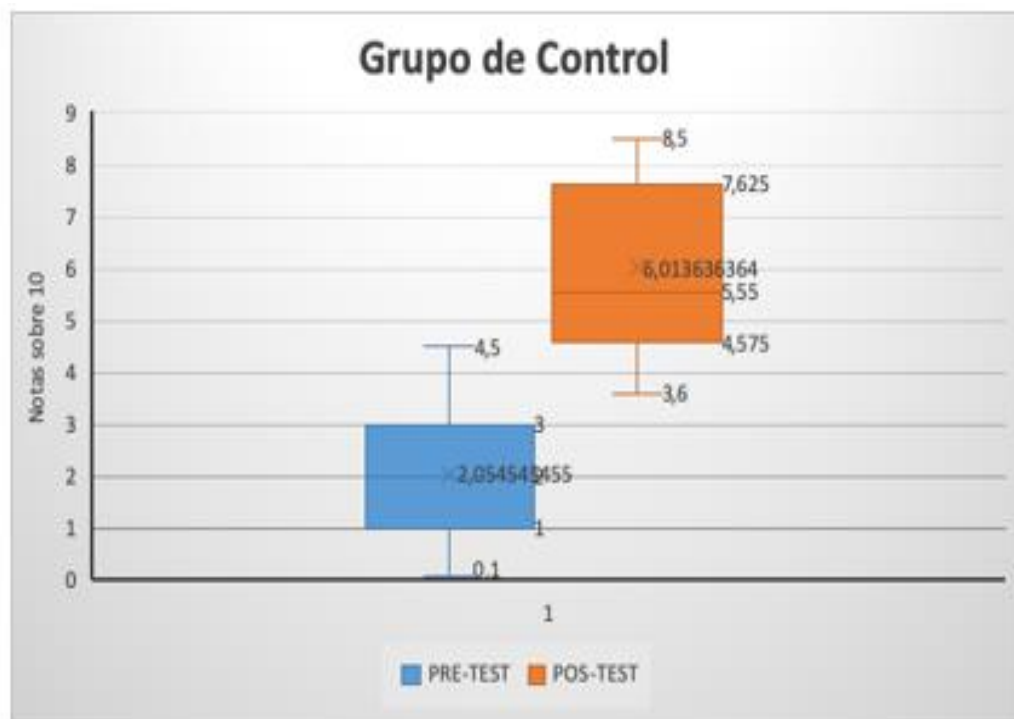


Figura 26 Diagrama de caja y bigotes Grupo Control.

En ésta distribución de datos del pre test el 50% de los datos o notas están entre 1 a 3 sobre 10, con un valor mínimo de 0.1 y un máximo de 4.5 como nota más alta , el conjunto de datos tiene una tendencia central hacia la nota de 2.1, por lo que podemos concluir que no tienen los suficientes conocimientos sobre el tema de límites.

En cuanto a los datos del post test, el 50% de datos están entre las notas de 4.6 y 7.6, con un valor mínimos de 3.6 y un valor máximo de 8.5 como nota del rendimiento después del experimento, todos los datos tienen una tendencia central del 6.01 del promedio en las calificaciones, existe un dominio de habilidades y conocimientos respecto a límites moderado, tomando en cuenta las dos hipótesis para éstos dos casos.

4.3.2 Análisis de muestras emparejadas Grupo Experimental

Tomando en cuenta las dos hipótesis para éstos dos casos, se formulan las siguientes hipótesis para ésta investigación

H_0 : No hay ninguna diferencia significativa en los promedios de las pruebas antes y después de aplicar la metodología de registros de representación semiótica en la concepción del límite de una función real.

H_1 : Existe diferencia significativa en los promedios después de la intervención.

Tabla 22

Prueba “ T Student” Grupo experimental

	<i>Post Test</i>	<i>Pre test</i>
Media	2,479166667	7,316666667
Varianza	2,771286232	0,966666667
Observaciones	24	24
Coeficiente de correlación de Pearson	0,394696429	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	23	
Estadístico t	-15,15322694	
P(T<=t) una cola	0,000000000000092	
Valor crítico de t (una cola)	1,713871527747050	
P(T<=t) dos colas	0,000000000000185	
Valor crítico de t (dos colas)	2,068657610419050	

Como se puede observar en la tabla 19, el valor p es menor que la significancia al 5% , es decir $0.00000 < 0.05$, por tanto nos indica que se rechaza H_0 y se acepta la hipótesis alternativa, es decir que existe una diferencia significativa en los promedios antes y después de la intervención de la metodología de enseñanza mediante registros de representación semiótica .

4.3.3 Análisis de muestras emparejadas Grupo de Control.

Tomando en cuenta las dos hipótesis para éstos dos casos

H_0 : No hay ninguna diferencia significativa en los promedios de las pruebas antes y después de aplicar la metodología tradicional (Clase magistral) de enseñanza del límite de una función real.

H_1 : Existe diferencia significativa en los promedios después de la intervención.

Tabla 23

Prueba “ T Student” Grupo de Control

Prueba t para medias de dos muestras emparejadas		
	<i>Pre test</i>	<i>Post test</i>
Media	2,05454545455	6,01363636
Varianza	1,50735930736	2,57647186
Observaciones	22,00000000000	22
Coeficiente de correlación de Pearson	0,54376632852	
Diferencia hipotética de las medias	0,00000000000	
Grados de libertad	21,00000000000	
Estadístico t	-13,33017039604	
P(T<=t) una cola	0,00000000001	
Valor crítico de t (una cola)	1,72074290281	
P(T<=t) dos colas	0,00000000001	
Valor crítico de t (dos colas)	2,07961384473	

Dado el valor $p < 0.05$ es decir $0.00000 < 0.05$ se rechaza H_0 y se acepta la hipótesis alternativa que existe una diferencia significativa en los promedios de la aplicación de los test antes y después de la metodología tradicional (Clase magistral).

Los resultados de la prueba de hipótesis usada tanto en el grupo de experimento como el de control nos indica que existe una diferencia significativa en el antes y después del proceso enseñanza aprendizaje, ya que los estudiantes al mismo tiempo de tener conocimientos previos del estudio del límite recordaron algunas propiedades que normalmente en las instituciones de bachillerato en los colegios tratan éste tema, es decir los dos grupos aumentaron su aprendizaje independientemente de la metodología de enseñanza que se la pudo aplicar.

4.3.4 Análisis de las variables independientes de los dos grupos

Realizamos un diagrama estadístico de caja y bigotes, para inferir sobre el comportamiento de los dos conjuntos de datos.



Figura 27 Diagrama Caja y bigotes Grupo experimento y control

En el grupo de control el 50% de los datos oscilan entre las calificaciones de 4.5 a 7.6, un valor mínimo de 3.6 y un valor máximo de 8.5 con una tendencia central a 6.01 valor de la media del promedio de calificaciones de la prueba final o post test, lo que indica los estudiantes respecto al límite están próximos al dominio de aprendizajes.

Respecto al grupo de experimento el 50% de alumnos tienen una nota entre 6.5 y 8.2 con una medida de tendencia central de 7.31 es decir existe un aprendizaje significativo, los estudiantes dominan los aprendizajes.

Verificación de hipótesis

Hipótesis nula $H_0: U_1 \leq U_2$. Ho: El rendimiento académico de los estudiantes donde se aplican los registros de representación semiótica en el aprendizaje de la noción del límite es menor o igual que el rendimiento de los estudiantes donde se aplica la técnica de clase magistral.

Hipótesis alternativa $H_1: U_1 > U_2$

H_1 : El rendimiento académico del grupo de alumnos donde se aplican los registros de representación semiótica supera significativamente al rendimiento de los estudiantes del grupo donde se aplica una clase magistral en el aprendizaje de la noción del límite.

Tabla 24

Prueba “ t Student” variables independientes (Comparación entre los dos grupos)

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales		
	Experimento	Control
Media	7,316666667	6,013636364
Varianza	0,966666667	2,576471861
Observaciones	24	22
Varianza agrupada	1,734982782	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	44	
Estadístico t	3,351544395	
P(T<=t) una cola	0,000829397	
Valor crítico de t (una cola)	1,680229977	
P(T<=t) dos colas	0,001658795	
Valor crítico de t (dos colas)	2,015367574	

Puesto que el valor p es < 0.05 , es decir según nuestros cálculos $0.00083 < 0.05$, podemos afirmar que con un 95% de confianza que el grupo experimental supera significativamente al grupo de control en cuanto a un aprendizaje significativo, por ende podemos decir que la hipótesis nula H_0 , la rechazamos y aceptamos la hipótesis alternativa que el grupo de estudiantes donde se aplicaron los registros de representación semiótica para el aprendizaje del límite de una función real el promedio es mayor que el grupo de control que se aplicó una metodología tradicional (Clase magistral). Dando así como resultado de nuestra prueba la aceptación de la hipótesis H_1 .

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES

5.1.OBJETIVOS E HIPÓTESIS PLANTEADAS

Dado el objetivo de nuestra investigación en el hecho de analizar la incidencia de los registros semióticos en el mejoramiento académico de los estudiantes bajo la hipótesis plantada de que existe una diferencia significativa entre los dos grupos de experimentación y control, podemos concluir que: En cada uno de los grupos existe un incremento significativo entre las pruebas pre test y post test, tomando en cuenta que se aplicó prácticamente la misma prueba y es evidente afirmar que los estudiantes al inicio unos no se acordaban del tema ya éste fue presentado en la educación media es decir en el bachillerato , en el caso de los otros estudiantes, nunca habían conocido el tema, después de la aplicación y experimento de grupos si hay un incremento significativo de la nota del promedio del post test.

Para la prueba “t Student”, suponiendo que las varianzas son iguales con las variables independientes es decir los promedios de las notas de cada prueba post test nos indica que el valor p es $0.00083 < 0.05$, podemos afirmar que con un 95% de confianza podemos asegurar que el grupo experimental supera significativamente al grupo de control en cuanto a un aprendizaje significativo.

Entonces se concluye que la aplicación de registros de representación semiótica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la conceptualización de la noción del límite de una función real mejora significativamente el rendimiento académico de los estudiantes.

5.2.NUEVAS PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN

5.2.1.Aspectos no tratados, pero que serían de interés su tratamiento

- ✓ El enfoque a los tipos de aprendizaje que tienen los estudiantes con el uso de registros de representación semiótica en forma organizada, puesto que los estudiantes tienen diferentes formas de aprender algunos escuchando, observando, reflexionando y haciendo, el maestro va a logra llegar a cada tipo de aprendizaje mediante éstos instrumentos.
- ✓ En la resolución de problemas en el momento del tratamiento los registros de representación semiótica sufren un cambio de fase donde los estudiantes tienen la capacidad de identificar el problema en forma de lenguaje natural y lo transforman en una forma simbólica, es decir investigar como el estudiante interpreta o los procesos cerebrales de interpretación o relación con la teoría matemática para resolver un problema con diferentes tipos de solución.
- ✓ El papel del maestros con perfiles creativos para nuevas propuestas de innovar la enseñanza, estas ideas las podemos implementar y al mismo tiempo trabajar a modelo de investigación educativa aplicando la ingeniería didáctica para que permanezcan y sea de fundamento para otras investigaciones.
- ✓ Al ingresar a nuevas teorías al momento del proceso de enseñanza, el maestro debería dar al estudiante la facilidad de comprensión de conceptos con herramientas tecnológicas como GEOGEBRA, MAXIMA, MATLAB, DESCARTES, para que los estudiantes identifiquen de manera gráfica y la transformen a la simbología matemática para la resolución de problemas.

5.2.2. Nuevos trabajos de investigación que completarán este estudio

Bajo los parámetros realizados en ésta investigación se propone las siguientes líneas de investigación.

REGISTROS SEMIÓTICOS

- Qué registros de representación semiótica se aplicarían en la enseñanza del cálculo de la integral definida.
- ¿Se considerarían registros de representación semiótica a las figuras jeroglíficas de las culturas andinas?

INGENIERIA DIDÁCTICA

- Aplicación de la metodología ingeniería didáctica en la enseñanza de la geometría hiperbólica.
- Cuál es la mejor metodología de investigación científica para la enseñanza de la matemática Ingeniería Didáctica o Investigación Basada en el diseño

5.2.3 Limitaciones del estudio

- ✓ No se pudo usar toda la población ya que se consideró el criterio del investigador al tomar solo dos paralelos A y C como muestra de la investigación.
- ✓ Para fortalecer la investigación se debía haber aplicado una prueba post test para sostener mayormente el criterio de resultados basados en la pregunta de investigación
- ✓ Es evidente como los registros de representación semiótica en su proceso (Objeto(concepto) – Tratamiento(Transformación)-Solución), ayudan al estudiante a resolver con facilidad problemas, en cuanto a nuestro estudio se limitó a los conceptos de la noción y formalización del límite de una función real, se debería considerar un estudio de límites laterales, infinitos y continuidad

- ✓ Puesto que existen diferentes tipos de aprendizaje en los estudiantes nos hemos limitado a tratar con el dominio gráfico y matemático.
- ✓ La ingeniería didáctica permite establecer un orden en los nuevos proyectos de clase dando confiabilidad en las nuevas propuestas educativas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Cruz, J., & Ramírez, J. (2009). El entorno de aprendizaje dinámico modular orientado a objetos en la enseñanza del concepto del límite. *Comité Latinoamericano de Matemática y Educativa* , 1681-1689.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gómez, L., & Pantoja, Y. (2013). Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: Una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Sigma* , 26-38.

Londoño, N., Narro, P., & Yatzil, A. (1 de Septiembre de 2013). *Indagando sobre el límite de funciones desde diferentes registros de representación*. Recuperado el 4 de Febrero de 2017, de sitio Web Universidad Autónoma de Coahuila. México:

http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/P5.bbf0a982b7788f.pdf

Navarro, C., Valencia, R., & Miranda, J. J. (2012). Una ingeniería Didáctica para contribuir en la comprensión de la noción del límite en el nivel medio superior. *CLAME* , 630-641.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria 13* , 29-36.

Peña, C., & Cosi, E. (2014). Relación entre los registros de representación semiótica y el aprendizaje del límite de funciones reales en los estudiantes de la facultad de ciencias matemáticas. *PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos* , 45-50.

Radillo, M., & González, L. (3 de Marzo de 2014). *Departamento de Matemáticas, CUCEI*.

Recuperado el 3 de Marzo de 2017, de sitio Web Departamento de Matemáticas, CUCEI:

<http://funes.uniandes.edu.co/5641/1/RadilloEnse%C3%B1anzaALME2014.pdf>

Vianco, N., Botta, R., Castro, N., Yi, M., Martínez, S., Pía, A., y otros. (2008). Diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto del límite. *II REPEM-Memorias*, 316-322.

Michele Artigue, R. D. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá:

Iberoamérica.

Sonsoles Blázquez, T. O. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Relime*, 198-209.

López, M. M. (2016). Desarrollo de la comprensión del límite de una función características de graectorias hipotéticas de aprendizaje. *Unversidad de Alicante*, 345.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, pp. 173–201. México. Cinvestav.

Cabré, R. B. (2012). *Diseño Cuasi experimentales y longitudinales*. Barcelona (España): Ciencias del comportamiento.

Tamara Ozten, C. M. (2017). Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. *Int,J,Morphol*, 227-232.

