

**ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO**

**DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

**CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**PROYECTO DE GRADO PARA LA OBTENCIÓN DEL  
TÍTULO EN INGENIERÍA**

**“ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES ÓPTIMOS  
EN SU FORMA DISCRETA A TRAVÉS DEL ESPACIO DE  
ESTADOS”**

**Edgar Francisco Merino Ruiz**

**SANGOLQUÍ – ECUADOR**

**2010**

## **CERTIFICACIÓN**

Certifico que el presente Proyecto de Grado fue realizado en su totalidad por el **Sr. Edgar Francisco Merino Ruiz** bajo nuestra dirección, como requisito previo para la obtención del título en Ingeniería Electrónica.

---

**Sr. Ing. Rodolfo Gordillo**

**DIRECTOR DE TESIS**

---

**Sr. Ing. Víctor Proaño**

**CODIRECTOR DE TESIS**

## **AGRADECIMIENTO**

Ante todo quisiera agradecer de manera sobre especial a mis padres, Edgar Alonso Merino Peñafiel y Gladys Leonor Ruiz Chávez quienes con su apoyo incondicional supieron encaminarme a lo largo de mi vida estudiantil, quienes me apoyaron económica y espiritualmente, haciendo sacrificios especialmente en el ámbito sentimental que con la culminación de este proyecto espero compensar en algo todo el sacrificio que ellos realizaron.

A mis hermanas Tania Merino y Verónica Merino que de igual manera siempre han sido un apoyo a lo largo de mi vida, a quienes las tengo como un ejemplo a seguir, en el aspecto personal y profesional.

A un hermano más André Ruigrok y a mis dos hermosos sobrinos Tom y Nicolás Ruigrok Merino, André con el apoyo mientras cursaba mis estudios y fuera de ellos también, y mis sobrinos que con su inocencia y su alegría me dan fuerzas de seguir y culminar con esmero y éxito todos mis proyectos.

A todos mis familiares que de una u otra manera siempre están pendientes de mi persona, deseándome a la distancia éxitos y salud, a todos mis amigos que es indudable que han sido un pilar fundamental a quienes valoro mucho y agradezco infinitamente todos los buenos y quizá malos momentos que nos ha tocado pasar.

Por último quisiera agradecer a todos los profesores de la Escuela Politécnica del Ejército quienes me formaron a lo largo de mi etapa universitaria y de una manera muy especial a mi director de tesis Sr. Ing. Rodolfo Gordillo quién con su tutela y conocimiento ayudo a que el proyecto salga adelante, también al

Sr. Ing. Víctor Proaño quien como codirector de tesis mostró un apoyo incondicional al desarrollo del proyecto.

## **DEDICATORIA**

El presente proyecto esta dedicado a mis padres Edgar y Gladys, a quienes como profesionales y personas de bien los tengo como mi ejemplo a seguir, quienes que con su sacrificio me han dado la mejor de las educaciones.

A mis hermanas Tania y Verónica, a mi cunado André y mis sobrinos Tom y Nicolás se los dedico de corazón, una muestra del afecto y cariño que tengo hacia ellos, quienes a lo largo de mi vida siempre han estado a mi lado, sabiendo guiarme y aconsejarme.

A mi familia y amigos soporte fundamental en el transcurrir de mi vida estudiantil.

A los que colaboraron en el desarrollo del proyecto Sr. Ing. Rodolfo Gordillo y Sr. Ing. Víctor Proaño.

## PRÓLOGO

La implementación de controladores digitales automáticos es hoy en día una herramienta fundamental en el desarrollo de los procesos Industriales, por lo que se hace fundamental el estudio y desarrollo de técnicas avanzadas de control que permitan la optimización de los procesos que se llevan a cabo.

El desarrollo integro de este proyecto permitirá tener información primaria acerca del comportamiento de los controladores óptimos basados en la utilización de un computador digital. Esto se traduce en un incremento del conocimiento de las diferentes técnicas de control avanzado, permitiendo establecer mejores criterios al momento de seleccionar una técnica u otra al momento de controlar un determinado problema de control.

En el presente proyecto tiene como objetivo el desarrollo del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG), para lo cual se desarrollara primeramente la parte de los fundamentos teóricos necesarios para la obtención del mismo, como es el Regulador Lineal Cuadrático, problemas de seguimiento y filtro Kalman, realizando el análisis respectivo para la selección adecuada de los componentes finales.

Una vez desarrollado el marco teórico del proyecto se procederá al diseño de los controladores en sí, así como también el análisis del problema de seguimiento y del filtro Kalman, este ultimo, parte fundamental para el desarrollo final del controlador.

Por último se presenta el esquema y la simulación a través de la herramienta Simulink – MatLab, la que nos permite presentar en forma gráfica los resultados de

los controladores propuestos, realizando su respectivo análisis al variar parámetros de diseño para observar el comportamiento del controlador y sus componentes.

# ÍNDICE

| CONTENIDO | PÁGINA |
|-----------|--------|
|-----------|--------|

## CAPÍTULO 1: DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROYECTO

|       |                                   |   |
|-------|-----------------------------------|---|
| 1.1   | Antecedentes.....                 | 1 |
| 1.2   | Justificación e Importancia ..... | 2 |
| 1.3   | Alcance del Proyecto.....         | 3 |
| 1.4   | Objetivos.....                    | 4 |
| 1.4.1 | General.....                      | 4 |
| 1.4.2 | Específicos .....                 | 4 |
| 1.5   | Organización del Informe .....    | 5 |

## CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.1   | Introducción .....   | 6  |
| 2.1.1 | Principio de Optimidad .....   | 8  |
| 2.1.2 | Concepto de Estado .....   | 8  |
| 2.1.3 | Ecuación Diferencial del Vector de Estado .....                                  | 8  |
| 2.1.4 | Solución de la Ecuación Diferencial del Vector de Estado .....                   | 10 |
| 2.1.5 | Solución en Tiempo Discreto de la Ecuación Diferencial del Vector de Estado..... | 13 |
| 2.2   | Regulador Lineal Cuadrático .....  | 15 |
| 2.3   | Seguimiento Lineal Cuadrático.....   | 17 |
| 2.3.1 | En su Forma Continua .....   | 17 |
| 2.3.2 | Aproximaciones Basadas en Modelos de Espacio de Estados .....                    | 19 |
| 2.3.3 | En su Forma Discreta.....  | 22 |
| 2.4   | Filtro Kalman .....  | 23 |
| 2.4.1 | Estimadores Óptimos .....  | 23 |



|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.4.2 | Proceso de Estimación de Estado .....                              | 23 |
| 2.4.3 | Problema de Estimación del Filtro Kalman de una Variable .....     | 24 |
| 2.4.4 | Estimación Lineal en Sistemas Dinámicos – El Filtro de Kalman .... | 26 |
| 2.4.5 | El Algoritmo de Estimación .....                                   | 27 |
| 2.4.6 | Derivación del Algoritmo de Estimación Dinámica.....               | 28 |
| 2.5   | Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano.....                       | 33 |

### **CAPÍTULO 3: ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES ÓPTIMOS DIGITALES EN EL ESPACIO DE ESTADOS**

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 3.1     | Introducción .....   | 34 |
| 3.2     | Diseño del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador .....        | 34 |
| 3.2.1   | Cálculo de la Referencia de Entrada.....                                     | 41 |
| 3.2.2   | Regulador Lineal Cuadrático para un Sistema de Levitación<br>Magnética ..... | 43 |
| 3.2.2.1 | Introducción.....  | 43 |
| 3.2.2.2 | Modelo Continuo Lineal del Levitador Magnético .....                         | 44 |
| 3.3     | Análisis del Regulador LQT Para Problemas de Seguimiento .....               | 47 |
| 3.4     | Análisis del Filtro Kalman para la Estimación de Estados.....                | 55 |
| 3.5     | Diseño de un Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano .....                   | 63 |

### **CAPÍTULO 4: RESULTADOS DE SIMULACIÓN**

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.1   | Introducción .....   | 69 |
| 4.2   | Esquema de Simulación del LQR para un Doble Integrador.....    | 69 |
| 4.3   | Levitador Magnético .....                                      | 75 |
| 4.3.1 | Esquema de Simulación del LQR para El Levitador Magnético..... | 75 |
| 4.3.2 | Resultados de Simulación.....                                  | 77 |
| 4.4   | Esquema de Simulación del LQG para Un Doble Integrador.....    | 79 |

### **CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

|     |                                 |    |
|-----|---------------------------------|----|
| 5.1 | Conclusiones .....              | 82 |
| 5.2 | Recomendaciones.....            | 85 |
|     | Referencias Bibliográficas..... | 86 |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| Anexos.....            | 88  |
| Índice De Figuras..... | 103 |

## CAPÍTULO I

### DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROYECTO

#### 1.1 ANTECEDENTES

La optimización de sistemas dinámicos de control son un problema de constante aparición en la tecnología, economía y la industria, estos aparecen cuando se pretende minimizar la desviación de trayectorias controladas con respecto a una trayectoria dada como modelo, con los que se pretende alcanzar niveles altos de robustez en un controlador.

Diversos problemas en cuanto se refiere a la automatización de una planta se resuelven con las técnicas clásicas de control, las cuales poseen un buen desempeño pero que dejan un margen alto en cuanto a optimización del proceso se refieren.

Las técnicas de control se han desarrollado y perfeccionado a través del tiempo, y hacen del control automático toda una investigación de desarrollo, que se enfoca en la reducción de costos de procesos, en aumentar la calidad de artículos, incrementar niveles de seguridad, entre otros aspectos.

El creciente aumento de complejidad en los diversos sistemas a controlar, la utilización de nuevas tecnologías y la necesidad de operar los sistemas más

económicamente, ha conllevado al mejoramiento de las técnicas a utilizar, llevando a las plantas a condiciones de funcionamiento más idóneo y óptimo.

De hecho se dan innumerables aplicaciones en las diversas áreas de la ingeniería, tales como el diseño de un control óptimo el cual permita garantizar un funcionamiento adecuado del proceso.

En el presente proyecto la idea es implementar un algoritmo de control realimentado que utiliza un Regulador Lineal Cuadrático (LQR), combinado con el filtro de Kalman para la obtención del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG). [1]

## 1.2 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA

La creciente demanda de controladores que mejoren la calidad, el tiempo de producción y aminoren las pérdidas económicas hace que se desarrolle y mejore las técnicas de control existentes. La técnica de control debe tener la capacidad de controlar el proceso de una forma continua y automática con resultados óptimos y coherentes.

Desarrollando las técnicas de control se pretende atenuar las perturbaciones que se presentan en un proceso, la eliminación de errores y un aumento en la seguridad.

Con el desarrollo y aplicación de las técnicas de control un gran número de tareas y cálculos asociados a la manipulación de las variables ha sido delegado a computadores, actuadores y dispositivos especializados para la consecución de los requerimientos de la planta.

La importancia de los sistemas de control óptimos radica en llevar a la planta a un funcionamiento correcto minimizando el uso de tiempo, energía. Controlando problemas como son:

- a. El problema de control final: esto es usado para traer el sistema tan cerca como sea posible a un estado final determinado dentro de un período de tiempo en particular.
- b. El problema de control de tiempo mínimo: es usado para llegar al estado final en el período de tiempo más breve que sea posible.
- c. El problema de control de mínima energía: se usa para transferir el sistema de un estado inicial a un estado final con el gasto mínimo de la energía de control.[2]

El desarrollo integro de este proyecto permitirá tener información primaria acerca del comportamiento de los controladores óptimos basados en la utilización de un computador digital. Esto se traduce en un incremento del conocimiento de las diferentes técnicas de control avanzado, permitiendo establecer mejores criterios al momento de seleccionar una técnica u otra al momento de controlar un determinado problema de control.

### **1.3 ALCANCE DEL PROYECTO**

El presente proyecto tiene como finalidad el análisis y diseño de controladores óptimos en su forma discreta a través del espacio de estados.

Se analizará específicamente cuatro problemas como son:

- a. Regulador Lineal Cuadrático (LQR), el cual suministra una ley de control óptimo para un sistema lineal con un índice de desempeño cuadrático.
- b. El problema de Seguimiento Lineal Cuadrático (LQT), dirigido a aplicar un control  $u(t)$  para mover una planta con el propósito de que el vector de estado  $x(t)$  siga una trayectoria deseada de una manera optima.

- c. Diseño del Filtro Kalman para la estimación de estados.
- d. Finalmente se abordara el diseño del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano, el cual integra al controlador Lineal Cuadrático y de Seguimiento, juntos con el Filtro Kalman.

Para complementar el estudio se desarrollarán rutinas computacionales y diagramas de simulación en MatLab/Simulink, lo cual permitirá de una manera funcional evaluar el desempeño del controlador diseñado.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 General

- Analizar y diseñar controladores óptimos discretos a través del espacio de estados.

### 1.4.2 Específicos

- Diseñar un Regulador Lineal Cuadrático discreto (LQR), con especificaciones de índice de rendimiento cuadrático.
- Analizar el problema de seguimiento lineal cuadrático.
- Analizar el Filtro Kalman para la estimación de estados.
- Diseñar el Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG), integrando los controladores LQR- LQT y Filtro Kalman para su consecución.

## 1.5 ORGANIZACIÓN DEL INFORME

El presente proyecto esta organizado de la manera que se expone a continuación:

Capítulo 1 (Introducción) se presenta la justificación y la importancia del proyecto, así como también los objetivos a cumplir con el desarrollo del mismo.

Capítulo 2 (Marco teórico) se presenta conceptos y métodos utilizados para el desarrollo del proyecto.

Capítulo 3 (Análisis y Diseño de Controladores Óptimos Digitales en el Espacio de Estados) se presenta un panorama del problema de modelado y control en los distintos casos de estudio.

Capítulo 4 (Resultados de Simulación) se presenta en forma gráfica con el análisis correspondiente las simulaciones realizadas en un entorno computacional como es MatLab los controladores desarrollados.

Capítulo 5 (Conclusiones y Recomendaciones) se exponen las conclusiones obtenidas del desarrollo del proyecto así como también las recomendaciones que se desprenden de este.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1 INTRODUCCIÓN

El enfoque principal del control óptimo es el de minimizar el índice de desempeño  $J$ , este índice de desempeño se refiere a una función de costo escalar  $J$ . Esta función de costo o índice de desempeño, suele estar asociado a la energía y por lo tanto esta directamente relacionado con el costo económico del proceso. [4]

En general el problema del control óptimo es el de encontrar un control  $u(t)$ , lo que hace que el sistema de

$$\dot{x} = g(x(t), u(t), t) \quad (2.1)$$

Siga una trayectoria óptima de  $x(t)$  que minimice el criterio de desempeño, o función de costo

$$J = \int_{t_0}^{t_f} h(x(t), u(t), t) dt \quad (2.2)$$



El criterio particular que se utiliza es un funcional cuadrático del estado y la entrada de control

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.3)$$

Donde Q y R son las matrices de ponderación de estado y control respectivamente, siempre son cuadradas y simétricas. J siempre es una cantidad escalar.

Si las variables de estado y de control en la ecuación (2.3) son elevadas al cuadrado, entonces el índice de desempeño viene a ser cuadrático. La ventaja de un índice de desempeño cuadrático para un sistema lineal es que tiene una solución matemática que produce una ley de control lineal de la forma

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.4)$$

[2]

El control que se obtiene de dicho criterio es *lineal*. Como el criterio se basa en funcionales cuadráticos, el método se conoce como *lineal-cuadrático* (LQ), del que se obtiene el *regulador lineal cuadrático* (LQR).

El diseño de observadores siguen criterios similares de optimización solo que el funcional depende de una caracterización estadística de los ruidos que afectan al sistema. En este caso el estimador óptimo lineal-cuadrático se le conoce como el *filtro de Kalman*.

Cuando se combina el *regulador lineal cuadrático* (LQR) con el filtro de Kalman, se obtiene el *controlador lineal-cuadrático-gaussiano* (LQG). [5]

### 2.1.1 PRINCIPIO DE OPTIMIDAD

La teoría de optimización plantea y soluciona el problema de optimizar, generalmente en el sentido de minimizar, un criterio de funcionamiento o función de costo, sujeto al cumplimiento de unas restricciones. Aplicando a sistemas dinámicos, es habitual el empleo de funciones de costo cuadráticas relacionadas con las variables de estado y la señal de control del sistema a controlar, siendo las restricciones las ecuaciones de estado del sistema.

La teoría de optimización trabaja esencialmente en el diseño de controladores óptimos de acuerdo a criterios de costo cuadrático aplicados a sistemas lineales.[11]

### 2.1.2 CONCEPTO DE ESTADO

El estado de un sistema se define por: “El conjunto de variables (llamadas variables de estado) que a un tiempo inicial  $t_0$ , junto con las variables de entrada determinan completamente el comportamiento del sistema para el tiempo  $t \geq t_0$ ”

### 2.1.3 ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL VECTOR DE ESTADO

El estado del sistema es descrito por el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en términos de variables de estado ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) y las variables de entrada ( $u_1, u_2, \dots, u_m$ ) en la forma general

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m \end{aligned} \quad (2.5)$$

El conjunto de ecuaciones (2.5) puede ser combinado en un formato de matriz. Esto resulta en la ecuación diferencial del vector de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) es llamada generalmente como ecuaciones de estado, se tiene que

$\mathbf{x}$  es el vector de estado de dimensión  $n$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$\mathbf{u}$  es el vector de entrada de dimensión  $m$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$\mathbf{A}$  es la matriz del sistema de dimensión  $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$\mathbf{B}$  es la matriz de control de dimensión  $n \times m$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

En general, las salidas ( $y_1, y_2, \dots, y_n$ ) de un sistema lineal puede estar relacionado con las variables de estado y las variables de entrada

$$y = Cx + Du \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) es llamada como ecuaciones de salida

#### 2.1.4 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL VECTOR DE ESTADO

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bu(t) \quad (2.12)$$

Donde  $x(t)$  y  $u(t)$  son escalares en función del tiempo. Tomamos la transformada de Laplace

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s) \quad (2.13)$$

Donde  $x(0)$  es la condición inicial. De la ecuación (2.13)

$$X(s) = \frac{x(0)}{(s-a)} + \frac{b}{(s-a)}U(s) \quad (2.14)$$

Transformada inversa

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (2.15)$$

Donde

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{a^k t^k}{k!} \quad (2.16)$$

Ahora considerando la ecuación diferencial del vector de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.17)$$

Tomando la transformada de Laplace

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (2.18)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

Multiplicando por  $(sI - A)^{-1}$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s) \quad (2.19)$$

Transformada inversa

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

Si el tiempo inicial es  $t_0$ , entonces

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d(\tau) \quad (2.21)$$

La matriz exponencial  $e^{At}$  en la ecuación (2.20) es llamada como matriz de transición de estado  $\Phi(t)$  y representa la respuesta natural del sistema. Por lo tanto

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (2.22)$$

$$\Phi(t) = L^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = e^{At} \quad (2.23)$$

Por otra parte

$$\Phi(t) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} \quad (2.24)$$

Por lo tanto la ecuación (2.20) puede ser escrita como

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (2.25)$$

En la ecuación (2.25) el primer término representa la respuesta a las condiciones iniciales mientras que el término integral representa a la respuesta a la señal de entrada.

La ecuación característica esta dado por

$$|(sI - A)| = 0 \quad (2.26)$$

### 2.1.5 SOLUCIÓN EN TIEMPO DISCRETO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL VECTOR DE ESTADO

La solución en tiempo continuo de la ecuación de estado es dada en la ecuación (2.21). Si el intervalo de tiempo  $(t - t_0)$  en esta ecuación es  $T$ , el tiempo de muestreo en un sistema discreto, entonces la solución en tiempo discreto de la ecuación de estado esta dada por

$$x[(k+1)T] = e^{AT} x(kT) + \left\{ \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \right\} u(kT) \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) puede ser escrita de la forma general

$$x[(k+1)T] = A(T)x(kT) + B(T)u(kT) \quad (2.28)$$

Hay que tomar en cuenta que

$$A(T) \neq A \quad B(T) \neq B$$

La matriz de transición de estado en tiempo discreto  $A(T)$  puede ser computado substituyendo  $T = t$  en las ecuaciones (2.23) y (2.24)

$$A(T) = \Phi(T) = e^{AT} \quad (2.29)$$

O

$$A(T) = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots + \frac{A^k T^k}{k!} \quad (2.30)$$

La matriz de control en tiempo discreto  $B(T)$  de las ecuaciones (2.27) y (2.28) es

$$B(T) = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \quad (2.31)$$

O

$$B(T) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{(k+1)!} \right\} B T$$

Introduciendo T en las llaves

$$B(T) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^{k+1}}{(k+1)!} \right\} B$$

Por lo tanto

$$B(T) = \left\{ IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \dots + \frac{A^k T^{k+1}}{(k+1)!} \right\} B \quad (2.32)$$



## 2.2 REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO

El *regulador lineal cuadrático* (LQR) proporciona una ley de control óptimo para un sistema lineal con un índice de desempeño cuadrático.

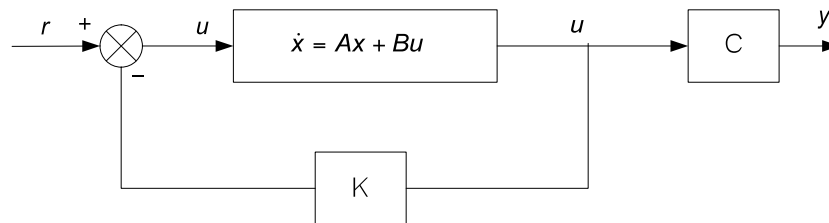


Figura. 2.1. Regulador Óptimo

Queremos controlar el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.2.1)$$

Con una realimentación estática de estados  $u(t) = -Kx(t)$  tal que se minimice el funcional de costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (2.2.2)$$

Con la realimentación, el sistema a lazo cerrado queda

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (2.2.3)$$

Incurriendo en un costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + x^T(t)KRKx(t)) dt \quad (2.2.4)$$

La solución de la ecuación (2.2.3) es  $x(t) = e^{(A-BK)t}x_0$ , la reemplazamos en la expresión del costo, y obtenemos

$$J = x_0^T \left( \int_0^{\infty} e^{(A-BK)^T t} (Q + K^T RK) e^{(A-BK)t} dt \right) x_0 \quad (2.2.5)$$

$$J = x_0^T P x_0$$

Donde hemos definido la matriz

$$P = \int_0^{\infty} e^{(A-BK)^T t} (Q + K^T R K) e^{(A-BK)t} dt \quad (2.2.6)$$

Entonces

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T R K = 0 \quad (2.2.7)$$

La ganancia  $K = R^{-1} B^T P$ , correspondiente al control óptimo, se lo reemplaza en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} 0 &= (A - BR^{-1}B^T P)^T P + P(A - BR^{-1}B^T P) + Q + PBR^{-1}B^T P \\ 0 &= A^T P - PBR^{-1}B^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q + PBR^{-1}B^T P \\ 0 &= A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

La ecuación (2.2.8) es conocida como la ecuación algebraica de Riccati. [5]

De la ecuación (2.28) la solución discreta de la ecuación de estado es

$$x[(k+1)T] = A(T)x(kT) + B(T)u(kT) \quad (2.33)$$

Para facilidad, si  $(kT)$  es escrita como  $(k)$ , entonces

$$x(k+1) = A(T)x(k) + B(T)u(k) \quad (2.34)$$

El índice de desempeño cuadrático discreto es

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k))T \quad (2.35)$$

La solución discreta de la ecuación matricial de Riccati resuelve recursivamente para  $K$  y  $P$  en tiempo invertido, comenzando en el tiempo final, donde

$$K(N - (k + 1)) = [TR + B^T(T)P(N - k)B(T)]^{-1} B^T(T)P(N - k)A(T) \quad (2.36)$$

Y

$$P(N - (k + 1)) = [TQ + K^T(N - (k + 1))TRK(N - (k + 1))] + [A(T) - B(T)K(N - (k + 1))]^T P(N - k)[A(T) - B(T)K(N - (k + 1))] \quad (2.37)$$

Como  $k$  se incrementa de 0 a  $N-1$ , el algoritmo procede para atrás en el tiempo. Cuando se ejecuta en adelante, el control óptimo en el paso  $k$  es

$$u_{opt}(k) = -K(k)x(k) \quad (2.38)$$

La condición de frontera es especificada en el tiempo terminal ( $k=0$ ), donde

$$x^T(N)P(N)x(N) = 0 \quad (2.39)$$

El proceso recursivo en tiempo inverso puede comenzar con  $P(N)=0$  o alternativamente con  $P(N-1)=TQ$ . [2]

## 2.3 SEGUIMIENTO LINEAL CUADRÁTICO

### 2.3.1 EN SU FORMA CONTINUA

El problema del control de seguimiento se utiliza para provocar que el estado del sistema siga lo más cerca posible a un estado histórico, de tal manera que minimice el índice de desempeño. Esta es la generalización del problema de control del regulador.

Está dirigido a la aplicación de un control de la unidad  $u(t)$  para manejar la planta de forma que el vector de estado  $x(t)$  sigue una trayectoria de estado deseado  $r(t)$  en algunos casos de manera óptima.

El índice de desempeño cuadrático en su forma continua viene dado por

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [(r - x)^T Q (r - x) + u^T R u] dt \quad (2.40)$$

Que combinado con la ecuación de seguimiento

$$\dot{s} = (A - BR^{-1}B^T P)^T s - Qr \quad (2.41)$$

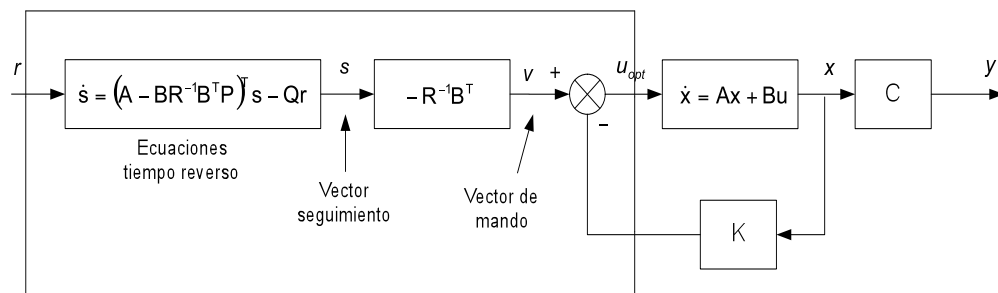


Figura. 2.2. Sistema de Seguimiento Óptimo

La ley de control óptimo es dado por

$$u_{opt} = -R^{-1}B^T P x - R^{-1}B^T s \quad (2.42)$$

Y el vector de mando

$$v = -R^{-1}B^T s \quad (2.43)$$

Y

$$K = R^{-1}B^T P \quad (2.44)$$

Entonces

$$u_{opt} = v - Kx \quad (2.45)$$

### 2.3.2 APROXIMACIONES BASADAS EN MODELOS DE ESPACIO DE ESTADOS

El objetivo es el de realizar aproximaciones en tiempo discreto de controladores descritos por modelos en espacios de estados en tiempo continuo.

Las ecuaciones a ser resueltas se las realiza con mucha más facilidad que al manipularlas cuando trabajamos con ecuaciones en tiempo discreto, se presenta esta opción para el desarrollo más simple de los diversos cálculos que se presentan.

Al trabajar los modelos con ecuaciones en tiempo continuo se hace notoriamente más fácil la resolución de dichas ecuaciones, por lo que una vez obtenidos los resultados se los puede pasar a su forma discreta utilizando las aproximaciones basadas en modelos de espacio de estados.

Los controladores retroalimentados en espacio de estados pueden ser descritos mediante las ecuaciones correspondientes dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.46)$$

Donde todos los estados se asumen que pueden ser medidos. Usando el controlador de la forma

$$u(t) = Mu_c(t) - Lx(t) \quad (2.47)$$

La señal de control en la ecuación (2.47) puede ser implementada en la forma digital muestreando los estados y manteniendo la señal de control constante sobre los intervalos de muestreo. Siendo esto así se tiene que

$$u(kh) = \tilde{M}u_c(kh) - \tilde{L}x(kh) \quad (2.48)$$

La ecuación (2.46) con el controlador en tiempo continuo en la ecuación (2.47) nos da el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A - BL)x + BMu_c = A_c x + BMu_c \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Si  $u_c(t)$  es constante sobre un periodo de muestreo, la ecuación puede ser integrada, y esto nos da

$$x(kh + h) = \Phi_c x(kh) + \Gamma_c Mu_c(kh) \quad (2.49)$$

Donde

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{A_c h} \\ \Gamma &= \int_0^h e^{A_c s} ds B \end{aligned}$$

Si el controlador en tiempo discreto en (2.48) es usado para controlar (2.46), entonces queda

$$x(kh + h) = (\Phi - \Gamma\tilde{L})x(kh) + \Gamma\tilde{M}u_c(kh) \quad (2.50)$$

Donde  $\Phi$  y  $\Gamma$  son las matrices del sistema obtenidas cuando (2.46) es muestreado.

La aproximación para el primer termino viene dado por

$$\begin{aligned} \Phi_c &= \Phi - \Gamma\tilde{L} \\ \tilde{L} &= L_0 + L_1 h/2 \\ \Phi_c &\approx I + (A - BL)h + (A^2 - BLA - ABL + (BL)^2)h^2/2 + \dots \\ \Phi - \Gamma L &\approx I + (A - BL_0)h + (A^2 - ABL_0 - 2BL_1)h + \dots \\ \tilde{L} &= L(I + (A - BL)h/2) \end{aligned} \quad (2.51)$$

La aproximación para el segundo termino viene dado por

$$\begin{aligned} (I - \Phi_c)x^0 &= \Gamma_c M u_c \\ (I - (\Phi - \Gamma\tilde{L}))x^0 &= \Gamma\tilde{M}u_c \\ \tilde{M} &= M_0 + M_1 h/2 \\ \Gamma_c M &\approx BMh + (A - BL)BM h^2/2 + \dots \\ \Gamma\tilde{M} &\approx BM_0 h + (BM_1 + ABM_0)h^2/2 + \dots \\ \tilde{M} &= (I - LBh/2)M \end{aligned} \quad (2.52)$$

Con las ecuaciones obtenidas anteriormente se puede trabajar la planta en tiempo continuo, ya que las ecuaciones en esta forma son mas fáciles de resolver, evitando muchos problemas de cálculo, una vez obtenido el resultado se puede aplicar estas ecuaciones para aproximar adecuadamente al su equivalente en tiempo discreto.

### 2.3.3 EN SU FORMA DISCRETA

En su forma discreta el índice de desempeño cuadrático, escribiendo  $(kT)$  como  $(k)$ , es

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ (r(k) - x(k))^T Q (r(k) - x(k)) + u^T(k) R u(k) \right] \quad (2.53)$$

La minimización discreta da la ecuación recursiva de Riccati (2.36) y (2.37). Estos son operados en tiempo reverso junto con la ecuación de seguimiento de estado discreto en tiempo reverso.

$$s(N - (k + 1)) = F(T)s(N - k) + G(T)r(N - k) \quad (2.54)$$

Teniendo la condición de límite

$$s(N) = 0$$

$F(T)$  y  $G(T)$  son las matrices de transición y control discretas.

El vector de mando  $v$  es dado por

$$v(N - k) = -R^{-1}B^T s(N - k) \quad (2.55)$$

Cuando se opera en adelante en el tiempo, el control óptimo en tiempo  $(kT)$  es

$$u_{opt}(kT) = v(kT) - K(kT)x(kT) \quad (2.56)$$

Los valores de  $x(kT)$  son calculados usando la ecuación de transición de estado de planta. [2]

$$x(k + 1)T = A(T)x(kT) + B(T)u_{opt}(kT) \quad (2.57)$$



## 2.4 FILTRO KALMAN

### 2.4.1 ESTIMADORES ÓPTIMOS

Uno de los factores más importantes en el desempeño de sistemas de control, a menudo no tenido en cuenta, es el efecto de perturbaciones y ruido. Todos los sistemas están sujetos a ruido.

Se trata de generar el mejor observador posible, es decir, el que mejor rechaza el efecto del ruido. Estos observadores suelen llamarse estimadores, el particular a desarrollar es conocido como el *filtro Kalman* [5]

### 2.4.2 PROCESO DE ESTIMACIÓN DE ESTADO

La estimación de estado es el proceso de extraer el mejor cálculo aproximado de la variable de un número de mediciones que contienen ruido. [2]

El filtro de Kalman da una solución efectiva al problema de filtrado lineal Gaussiano. Si la dinámica del sistema y el modelo de observación son lineales y tanto el error del sistema como el error de medida (de los sensores) son Gaussianas, entonces el estimador de mínimos cuadrados puede ser calculado usando el filtro Kalman. Es decir el filtro Kalman da una estimación óptima desde el punto de vista estadístico.

El cálculo del filtro Kalman se hace recursivamente, es decir, en cada iteración, sólo la nueva medida y la última estimación son usadas en el cálculo actual, por lo tanto no hay necesidad de guardar las estimaciones y medidas previas. [10]

### 2.4.3 PROBLEMA DE ESTIMACIÓN DEL FILTRO KALMAN DE UNA VARIABLE

El *filtro Kalman* es una forma complementaria del filtro Weiner. Sea  $A_x$  una medición de un parámetro  $x$  y sea su varianza  $P_a$  dado por

$$P_a = E\{A_x - \bar{A}_x\}^2 \quad (2.58)$$

Donde  $\bar{A}_x$  es la media y  $E\{\}$  es el valor esperado.

Sea  $B_x$  una medición de otro sistema del mismo parámetro y la varianza  $P_b$  es

$$P_b = E\{B_x - \bar{B}_x\}^2 \quad (2.59)$$

Asumiendo que  $x$  puede ser expresada por la relación paramétrica

$$x = A_x K + B_x (1 - K) \quad (2.60)$$

Donde  $K$  es cualquier factor de ponderación entre 0 y 1. El problema es obtener un valor de  $K$  que de una combinación óptima de  $A_x$  y  $B_x$  y por lo tanto la mejor estimación de la variable medida  $x$ , que es dada por el símbolo  $\hat{x}$ .

Sea  $P$  la varianza de la medida ponderada

$$P = E\{x - \bar{x}\}^2 \quad (2.61)$$

El valor óptimo de  $K$  es uno que produce la mínima varianza

$$\frac{dP}{dK} = 0 \quad (2.62)$$

Substituyendo la ecuación (2.60) en la ecuación (2.61) da

$$P = K^2 P_A + (1-K)^2 P_B \quad (2.63)$$

Por lo tanto  $K$  es dado por

$$\frac{d}{dK} \{K^2 P_A + (1-K)^2 P_B\} = 0$$

Del cual

$$K = \frac{P_B}{P_A + P_B} \quad (2.64)$$

Substituyendo la ecuación (2.64) en la ecuación (2.60) tenemos

$$\hat{x} = A_x - \left\{ \frac{P_A}{P_A + P_B} \right\} (A_x - B_x) \quad (2.65)$$

O

$$\hat{x} = A_x - K(A_x - B_x) \quad (2.66)$$

$K$  es la ganancia de Kalman y el error total de la varianza esperado es

$$P = P_A - K(P_A P_B) \quad (2.67)$$

Así que

$$\hat{x} = x + P_A - K(P_A - P_B) \quad (2.68)$$

La ecuación (2.68) es ilustrada en la figura 2.3

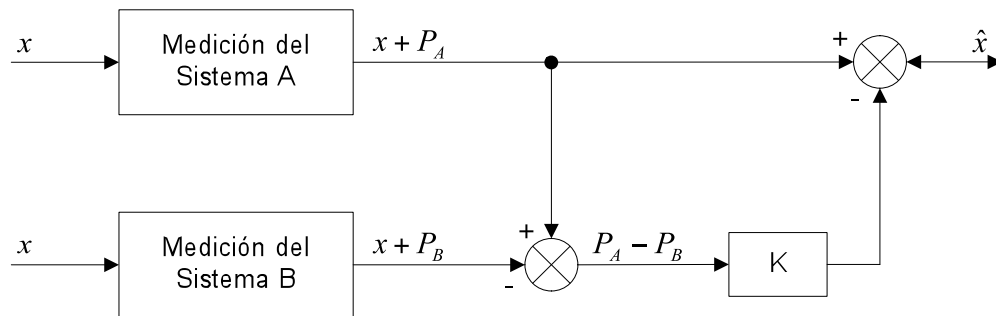


Figura. 2.3. Integración de dos sistemas de medición para obtener una óptima estimación.

[2]

#### 2.4.4 LA ESTIMACIÓN LINEAL EN SISTEMAS DINÁMICOS – EL FILTRO DE KALMAN

El problema de estimación dinámica

Consideremos un sistema dinámico lineal en tiempo discreto descrito por una ecuación vectorial en diferencias con ruido Gaussiano aditivo que modela “perturbaciones no predecibles”. La ecuación de estado es

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.69)$$

Donde  $x(k)$  es el vector de estado,  $u(k)$  es el vector de entrada (que es conocido), y  $w(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , es la secuencia de ruido blanco Gaussiano de media cero con covarianza

$$E[w(k)w(k)'] = Q(k) \quad (2.70)$$

La ecuación de medida es

$$z(k) = C(k)x(k) + v(k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.71)$$

Con  $v(k)$  secuencia de ruido de medida blanco Gaussiano de media cero con covarianza

$$E[v(k)v(k)'] = R(k) \quad (2.72)$$

Las matrices, A, B, C, Q y R se suponen conocidas y que pueden cambiar con el tiempo. En otras palabras, el sistema puede cambiar con el tiempo y los ruidos son no estacionarios.

El estado inicial  $x(0)$  es en general desconocido y se modela como una variable aleatoria Gaussiana con media y covarianza conocidas. Las dos secuencias de ruido y el estado inicial se suponen mutuamente independientes y además los ruidos son independientes.

Las anteriores condiciones se llaman lineales-Gaussianas.

#### 2.4.5 EL ALGORITMO DE ESTIMACIÓN

El algoritmo de estimación comienza con una estimación inicial  $\hat{x}(0/0)$  de  $x(0)$  y la covarianza inicial asociada  $P(0/0)$ , que se supone disponible.

Un ciclo de algoritmo de estimación dinámica (filtro Kalman) consiste en estimar a partir

$$\hat{x}(k/k) = E[x(k) / Z^k] \quad (2.73)$$

Que es la media condicional del estado en el tiempo  $k$ , dadas las observaciones hasta el tiempo  $k$  inclusive, y de la matriz de covarianza asociada

$$P(k/k) = E[(x(k) - \hat{x}(k/k))(x(k) - \hat{x}(k/k))'] \quad (2.74)$$

Las correspondientes variables del siguiente paso,  $\hat{x}(k+1/k+1)$  y  $P(k+1/k+1)$ .

Esto se puede hacer puesto que las variables Gaussianas quedan caracterizadas por sus dos primeros momentos.

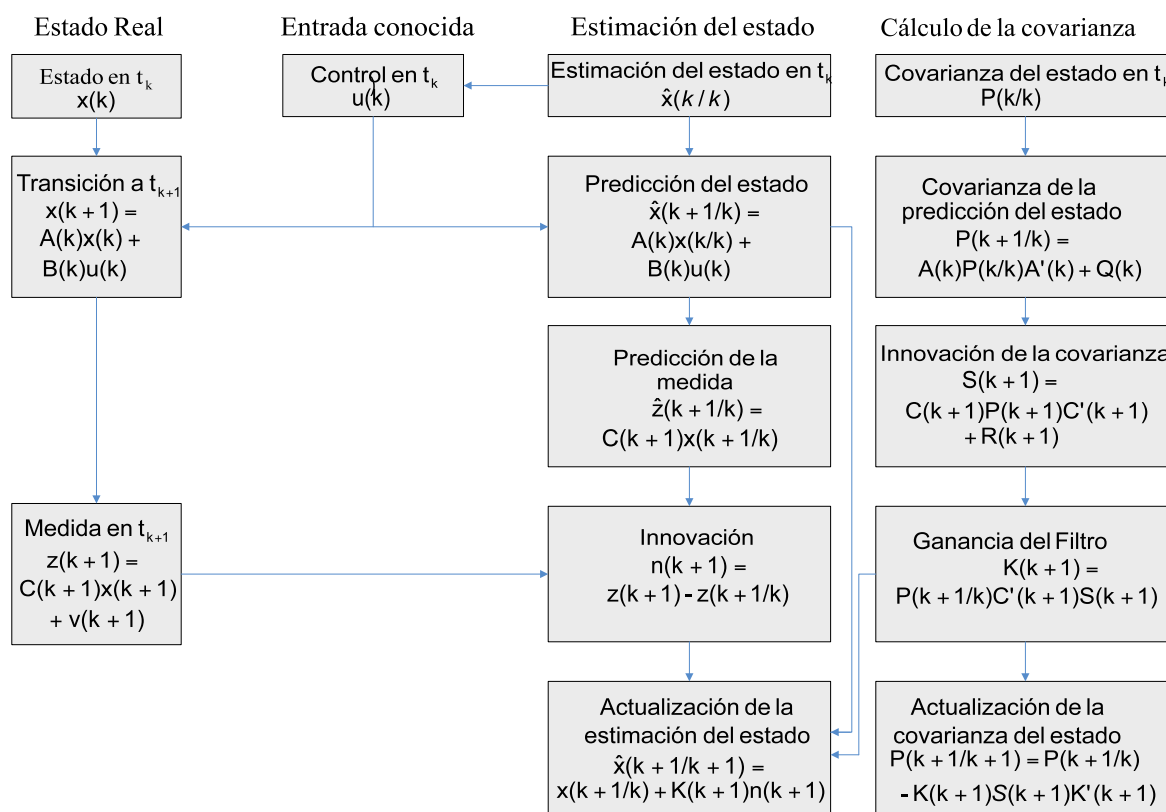


Figura. 2.4. Diagrama de flujo del filtro Kalman

### 2.4.6 DERIVACIÓN DEL ALGORITMO DE ESTIMACIÓN DINÁMICA

La predicción del estado  $\hat{x}(k+1/k) = E[x(k+1)/Z^k]$  se sigue de aplicar a la ecuación de estado  $x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k)$  el operador de esperanza condicionada por  $Z^k$ ,

$$E[x(k+1)/Z^k] = E[A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k)/Z^k] \quad (2.75)$$

Como el ruido del proceso  $w(k)$  es blanco y de media cero, entonces

$$\hat{x}(k+1/k) = A(k)\hat{x}(k/k) + B(k)u(k) \quad (2.76)$$

Restando de la ecuación de estado obtenemos el error de predicción de estado,

$$\tilde{x}(k+1/k) = x(k+1) - \hat{x}(k+1/k) = A(k)\hat{x}(k/k) + w(k) \quad (2.77)$$

La covarianza de la predicción de estado

$$P(k+1/k) = \text{cov}[x(k+1)/Z^k] = \text{cov}[\tilde{x}(k+1/k)/Z^k] \quad (2.78)$$

Se obtiene de la ecuación (2.77)

$$S(k+1) = C(k+1)P(k+1/k)C(k+1)^T + R(k+1) \quad (2.79)$$

La covarianza entre el estado y la medida es, usando la ecuación (2.79)

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}(k+1/k)\tilde{z}(k+1/k)^T / Z^k] &= E[\tilde{x}(k+1/k)[C(k+1)\tilde{x}(k+1/k) + v(k+1)] / Z^k] \\ E[\tilde{x}(k+1/k)\tilde{z}(k+1/k)^T / Z^k] &= P(k+1/k)C(k+1)^T \end{aligned} \quad (2.80)$$

La ganancia del filtro,  $K(k+1) = \text{cov}[x(k+1), z(k+1)/Z^k] \mathcal{S}(k+1)^{-1}$  es

$$K(k+1) = P(k+1/k)C(k+1)'S(k+1)^{-1} \quad (2.81)$$

Por tanto, la estimación actualizada del estado puede ser escrita como

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K(k+1)w(k+1) \quad (2.82)$$

Donde

$$w(k+1) = z(k+1) - \hat{z}(k+1/k) = \tilde{z}(k+1/k) \quad (2.83)$$

Es la innovación. Finalmente, la covarianza actualizada es

$$P(k+1/k+1) = P(k+1/k) - P(k+1/k)C(k+1)'S(k+1)^{-1}C(k+1)P(k+1/k)$$

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1)C(k+1)]P(k+1/k) \quad (2.84)$$

[10]

Problema de estimación del filtro Kalman de múltiples variables de estado

Para generalizar un poco las ecuaciones,

Hay que considerar una planta que es objeto de una secuencia gaussiana de perturbaciones  $w(kT)$  con una matriz de transición de disturbio  $C_d(T)$ . Mediciones  $z(k+1)T$  que contienen una secuencia gaussiana de ruido  $v(k+1)T$  es mostrado en la figura 2.5

La forma general del filtro Kalman usualmente contiene un modelo discreto del sistema junto con un conjunto de ecuaciones recursivas que actualizan continuamente la matriz de ganancia de Kalman  $K$  y la matriz de covarianza del sistema  $P$ .

La estimación del estado  $\hat{x}(k+1/k+1)$  es obtenida de calcular el estado estimado  $\hat{x}(k+1/k)$  de

$$\hat{x}(k+1/k)T = A(T)\hat{x}(k/k)T + B(T)u(kT) \quad (2.85)$$

Y luego determinar el estado estimado en el tiempo  $(k+1)T$  usando

$$\hat{x}(k+1/k+1)T = \hat{x}(k+1/k)T + K(k+1)\{z(k+1)T - C(T)\hat{x}(k+1/k)T\} \quad (2.86)$$



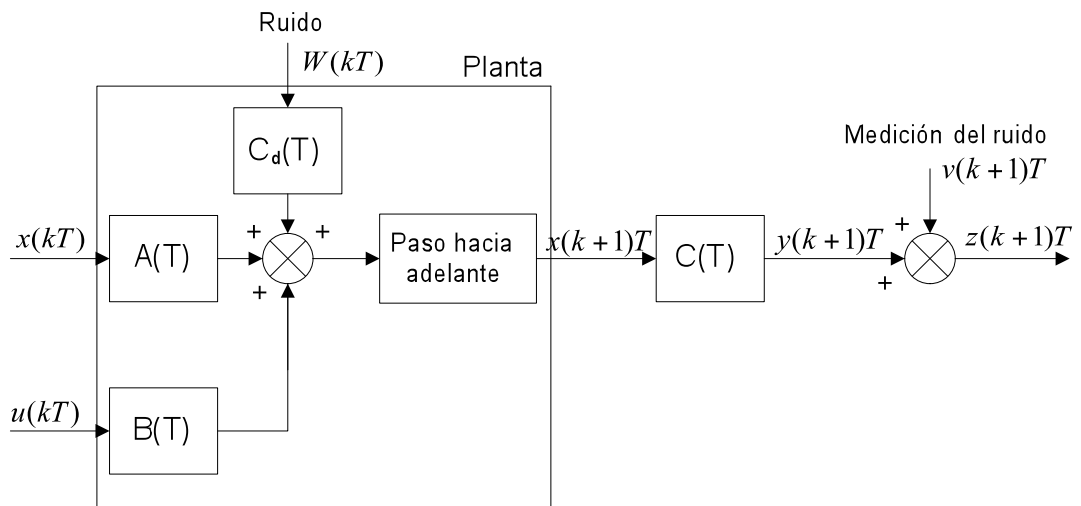
El término  $(k/k)$  representa los datos al tiempo  $k$  basado en la información disponible en el tiempo  $k$ .

El término  $(k+1/k)$  representa los datos usados al tiempo  $k+1$  basado en la información disponible en el tiempo  $k$ .

Similarmente  $(k+1/k+1)$  representa los datos al tiempo  $k+1$  basado en la información disponible en el tiempo  $k+1$ .

El vector de mediciones es dado por

$$z(k+1)T = C(T)x(k+1)T + v(k+1)T \quad (2.87)$$



**Figura. 2.5. Planta con disturbio y medición de ruido**

Donde

$z(k+1)T$  Es el vector de medición

$C(T)$  Es la matriz de medición

$v(k+1)T$  Es la secuencia de ruido gaussiano

La matriz de ganancia de Kalman  $K$  es obtenida del conjunto de ecuaciones recursivas que comienzan de una matriz de covarianza inicial  $P(k/k)$

$$P(k+1/k) = A(T)P(k/k)A^T(T) + C_d(T)QC_d^T(T) \quad (2.88)$$

$$K(k+1) = P(k+1/k)C^T(T) \{ C(T)P(k+1/k)C^T(T) + R \}^{-1} \quad (2.89)$$

$$P(k+1/k+1) = \{ I - K(k+1)C(T) \} P(k+1/k) \quad (2.90)$$

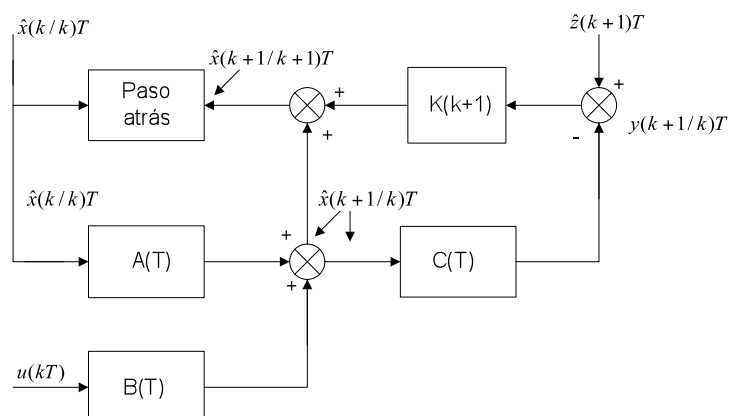
Donde

$C_d(T)$  Es la matriz de transición del disturbio

$Q$  Es la matriz de covarianza del disturbio de ruido

$R$  Es la matriz de covarianza de medición de ruido

Las ecuaciones (2.85) – (2.90) son ilustradas en la figura 2.6 la cual nos muestra el diagrama de bloque del filtro Kalman. [2]



**Figura. 2.6. Filtro Kalman**

## 2.5 CONTROLADOR LINEAL CUADRÁTICO GAUSSIANO

El sistema de control que contiene el Regulador Lineal Cuadrático (LQR) junto con el estimador de estado (filtro Kalman), como se muestra en la figura 2.7, es llamado como el sistema de control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG). [2]

El controlador LQG (*Lineal Cuadrático Gaussiano*) establece cuál es la realimentación óptima que aplicada a un sistema lineal contaminado con ruido blanco Gaussiano es su salida (ruido de medida) y en su entrada (ruido de proceso). El problema es similar al del control LQR, con el añadido de la incertidumbre de las señales ruidosas [11]

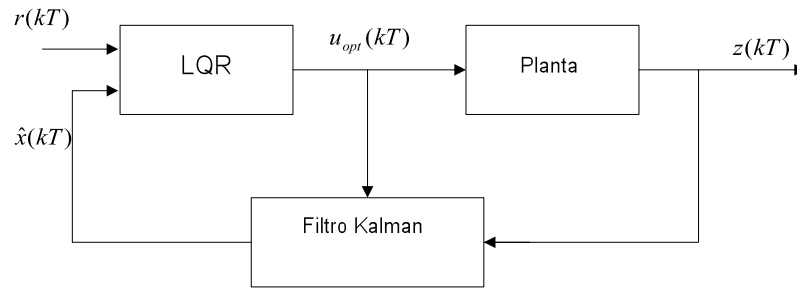


Figura. 2.7. Sistema de control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG)

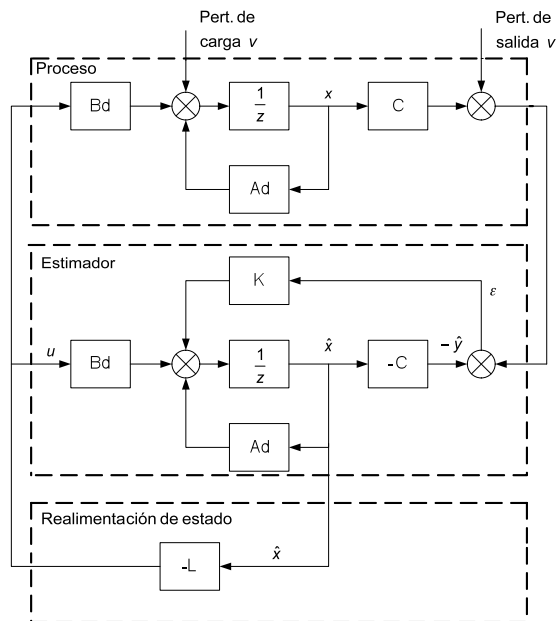


Figura. 2.8. Sistema en lazo cerrado con sus componentes demarcados

## CAPÍTULO III

# ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES ÓPTIMOS DIGITALES EN EL ESPACIO DE ESTADOS

### 3.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se abordará la problemática del diseño en sí del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG). Para el efecto se comenzará por el diseño del Regulador Lineal Cuadrático (LQR), seguido por el análisis de la problemática del seguimiento lineal cuadrático y filtro Kalman.

El método que fue explicado y deducido en el capítulo anterior se lo tomará en cuenta para el diseño del Regulador Lineal Cuadrático.

### 3.2 DISEÑO DEL REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO PARA UN DOBLE INTEGRADOR

El modelo del sistema descrito en el modelo de espacio de estados en tiempo continuo, se lo convierte en su equivalente discreto:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Para el doble integrador el sistema continuo de espacio de estados está dado por:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

El modelo equivalente en el espacio de estados discreto es:

$$x(k+1) = A(T)x(k) + B(T)u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

El índice de desempeño cuadrático está dado por:

$$J = \sum_0^{100} \left[ x^T(k) \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + u(k)^2 \right] T$$

Aproximación para  $A(T)$ , con un tiempo de muestreo de  $T=0.2$  s:

$$A(T) = I + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \dots + \frac{A^kT^k}{k!}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{A^2T^2}{2!} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \frac{0.2^2}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la aproximación de  $B(T)$  se tiene:

$$B(T) = \left\{ IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \dots + \frac{A^kT^{k+1}}{(k+1)!} \right\} B$$

$$IT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * 0.2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{AT^2}{2!} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \frac{0.2^2}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B(T) = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Por tanto el modelo de espacio de estados en tiempo discreto para el doble integrador resulta:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

$$A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B(T) = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

De la ecuación (2.36), la solución discreta de la ecuación matricial de Riccati se tiene:

$$K(N - (k + 1)) = [TR + B^T(T)P(N - k)B(T)]^{-1} B^T(T)P(N - k)A(T)$$

$$P(N - k) = T_s * Q$$

$$= 0.2 * \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B^T(T)P(N - k) = [0.02 \quad 0.2] * \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= [0.04 \quad 0.04]$$

$$K(N - (k + 1)) = \left\{ 0.2 + [0.04 \quad 0.04] * \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} * [0.04 \quad 0.04] * \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0.1916 \quad 0.2299]$$

Para lograr la estimación se necesita únicamente el último valor de K y de P, teniéndose entonces:

$$k = 1$$

Para  $P(N - (k + 1))$

$$P(N - (k + 1)) = [TQ + K^T(N - (k + 1))TRK(N - (k + 1))] + [A(T) - B(T)K(N - (k + 1))]^T P(N - k)[A(T) - B(T)K(N - (k + 1))]$$

$$\begin{aligned} [TQ + K^T(N - (k + 1))TRK(N - (k + 1))] &= 0.2 * \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1916 \\ 0.2299 \end{bmatrix} * 0.2 * \begin{bmatrix} 0.1916 & 0.2299 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2.0073 & 0.0088 \\ 0.0088 & 0.2106 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A(T) - B(T)K(N - (k + 1))] &= \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1916 & 0.2299 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9962 & 0.1954 \\ -0.0383 & 0.9540 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N - (k + 1)) &= \begin{bmatrix} 2.0073 & 0.0088 \\ 0.0088 & 0.2106 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9962 & 0.1954 \\ -0.0383 & 0.9540 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.9962 & 0.1954 \\ -0.0383 & 0.9540 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.9923 & 0.3908 \\ 0.3908 & 0.4690 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$K(N - (k + 1)) = [TR + B^T(T)P(N - k)B(T)]^{-1} B^T(T)P(N - k)A(T)$$

$$\begin{aligned} B^T(T)P(N - k) &= \begin{bmatrix} 0.02 & 0.2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3.9923 & 0.3908 \\ 0.3908 & 0.4690 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.1580 & 0.1016 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$K(N - (k + 1)) = \left\{ 0.2 + [0.1580 \quad 0.1016] * \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} * [0.1580 \quad 0.1016] * \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0.7070 \quad 0.5961]$$

$$k = 2$$

Para  $P(N - (k + 1))$

$$P(N - (k + 1)) = [TQ + K^T(N - (k + 1))TRK(N - (k + 1))] + [A(T) - B(T)K(N - (k + 1))]^T P(N - k)[A(T) - B(T)K(N - (k + 1))]$$

$$[TQ + K^T(N - (k + 1))TRK(N - (k + 1))] = 0.2 * \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7070 \\ 0.5961 \end{bmatrix} * 0.2 * [0.7070 \quad 0.5961]$$

$$= \begin{bmatrix} 2.1000 & 0.0843 \\ 0.0843 & 0.2711 \end{bmatrix}$$

$$[A(T) - B(T)K(N - (k + 1))] = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} * [0.7070 \quad 0.5961]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9859 & 0.1881 \\ -0.1414 & 0.8808 \end{bmatrix}$$

$$P(N - (k + 1)) = \begin{bmatrix} 2.1000 & 0.0843 \\ 0.0843 & 0.2711 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9859 & 0.1881 \\ -0.1414 & 0.8808 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 3.9923 & 0.3908 \\ 0.3908 & 0.4690 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.9859 & 0.1881 \\ -0.1414 & 0.8808 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.8806 & 1.0951 \\ 1.0951 & 0.9056 \end{bmatrix}$$

$$K(N - (k + 1)) = [TR + B^T(T)P(N - k)B(T)]^{-1} B^T(T)P(N - k)A(T)$$

$$B^T(T)P(N-k) = [0.02 \quad 0.2]^* \begin{bmatrix} 5.8806 & 1.0951 \\ 1.0951 & 0.9056 \end{bmatrix}$$

$$= [0.3366 \quad 0.2030]$$

$$K(N-(k+1)) = \left\{ 0.2 + [0.3366 \quad 0.2030]^* \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} * [0.3366 \quad 0.2030]^* \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1.3610 \quad 1.0930]$$

Siguiendo con la resolución de la ecuación de Riccati hasta  $k = 100$  que representa 20 s.

$$k = 3$$

$$P(N-(k+1)) = \begin{bmatrix} 7.42225 & 1.9033 \\ 1.9033 & 1.4833 \end{bmatrix} \quad K(N-(k+1)) = [1.9065 \quad 1.5874]$$

$$k = 4$$

$$P(N-(k+1)) = \begin{bmatrix} 8.4137 & 2.5479 \\ 2.5479 & 2.0422 \end{bmatrix} \quad K(N-(k+1)) = [2.2193 \quad 1.9479]$$

$$k = 5$$

$$P(N-(k+1)) = \begin{bmatrix} 8.9094 & 2.9102 \\ 2.9102 & 2.8442 \end{bmatrix} \quad K(N-(k+1)) = [2.3435 \quad 2.1518]$$

⋮

$$k = 100$$

$$P(N-(k+1)) = \begin{bmatrix} 9.6349 & 3.1780 \\ 3.1780 & 2.8442 \end{bmatrix} \quad K(N-(k+1)) = [2.4146 \quad 2.3264]$$

### 3.2.1 CÁLCULO DE LA REFERENCIA DE ENTRADA

En el sistema se introduce una entrada de referencia  $r(k)$ . Se desea que la salida del sistema  $y(k)$  sea igual a la referencia de entrada en el estado de equilibrio.

En el estado de equilibrio el vector de estado será constante en  $x(k)$  y también lo será el control de entrada en  $u(k)$ .

Se calculan las ganancias  $N_x$  y  $N_u$  de tal manera que  $y(k) = r$

El sistema descrito en el espacio de estados es:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(T)x(k) + B(T)u(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned}x(k) &= N_x \\ u(k) &= N_u\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}N_x &= A(T)N_x + B(T)N_u \\ r &= CN_x\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(T) - I & B(T) \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(T) - I & B(T) \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ley de control viene a ser:

$$\begin{aligned} u(k) &= -K[x(k) - N_x r(k)] + N_u r(k) \\ &= -Kx(k) + (KN_x + N_u)r(k) \\ &= -Kx(k) + Nr(k) \end{aligned}$$

Donde:

$$N = KN_x + N_u$$

Para nuestro sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(T)x(k) + B(T)[Nr(k) - Kx(k)] \\ x(k+1) &= (A(T) - B(T)K)x(k) + B(T)Nr(k) \\ x(k+1) &= A(T)_{cl}x(k) + B(T)_{cl}r(k) \end{aligned}$$

La ganancia para el sistema es:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(T) - I & B(T) \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A(T) - I = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N_u = 0$$

$$N = KN_x + N_u$$

$$N = [2.4146 \quad 2.3264]^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = 2.4146$$

## 3.2.2 REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO PARA UN SISTEMA DE LEVITACIÓN MAGNÉTICA

### 3.2.2.1 INTRODUCCIÓN

El sistema que se estudia en el presente proyecto, es una herramienta ideal para entender de mejor manera el fenómeno de levitación magnética.

Este es un clásico problema de control que se aplica en diferentes campos, tales como en la aplicación del transporte masivo en los trenes de alta velocidad que se impulsan mediante un campo magnético, utilizando el fenómeno de la levitación que produce aquel.

En el caso de estudio del presente proyecto se utiliza una esfera metálica que se trata de mantenerla en levitación con parámetros controlados en un campo magnético producido por un electro magneto. Se pretende simular dicho fenómeno en el entorno computacional de MatLab – Simulink, para lo cual se disponen de archivos “m” los cuales ayudan en la parte gráfica de la simulación del mismo, quedando únicamente el desarrollo del controlador escogido para lograr el efecto deseado. En este caso se optó por el diseño de un controlador digital óptimo lineal cuadrático conocido como control LQ.

En este caso al simular en el entorno computacional se obtuvieron los resultados que se pueden apreciar en las gráficas de las distintas señales. Se puede concluir con mucha certeza que en el modelo físico de la planta este efecto será igual, y este será el beneficio de la simulación antes de ponerla en práctica en el campo real.

### 3.2.2.2 MODELO CONTINUO LINEAL DEL LEVITADOR MAGNÉTICO

El sistema de levitación magnética está descrito en el espacio de estados como sigue a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz A son expresados con las siguientes ecuaciones de la siguiente manera:

$$a_{2,1} = \frac{x_{30}^2}{m} \frac{F_{emP1}}{F_{emP2}^2} e^{-\frac{x_{10}}{F_{emP2}}}$$

$$a_{2,3} = -\frac{2x_{30}}{m} \frac{F_{emP1}}{F_{emP2}} e^{-\frac{x_{10}}{F_{emP2}}}$$

$$a_{3,1} = -(k_i u_0 + c_i - x_{30}) \left( f_{iP1} e^{-\frac{x_{10}}{f_{iP2}}} \right)^{-1}$$

$$f_i(x_{10}) = \frac{f_{iP1}}{f_{iP2}} e^{-\frac{x_{10}}{f_{iP2}}}$$

$$a_{3,3} = -\frac{1}{f_i(x_{10})}$$

$$b_3 = k_i \frac{1}{f_i(x_{10})}$$

Los parámetros para las ecuaciones se indican en la siguiente tabla:

| Parámetros | Valores                  | Unidades            |
|------------|--------------------------|---------------------|
| m          | 0.04481                  | [kg]                |
| g          | 9.81                     | [m/s <sup>2</sup> ] |
| $F_{em}$   | Función de $x_1$ y $x_3$ | [N]                 |
| $F_{emP1}$ | 2.22 e-2                 | [H]                 |
| $F_{emP2}$ | 6.7 e-3                  | [m]                 |
| $F_i(x_1)$ | Función de $x_1$         | [1/s]               |
| $F_{iP1}$  | 3.2 e-3                  | [m·s]               |
| $F_{iP2}$  | 1.146 e-1                | [m]                 |
| $c_i$      | 0.043                    | [A]                 |
| $k_i$      | 2.6                      | [A]                 |
| $X_{3MIN}$ | 0.03884                  | [A]                 |
| $U_{MIN}$  | 0.00498                  |                     |

Tabla.3.2.2.1. Parámetros del levitador magnético tomado experimentalmente

$$x_{10} = 8 \times 10^{-3}$$

$$F_{em0} = \frac{F_{emP1}}{F_{emP2}} e^{-\frac{x_{10}}{F_{emP2}}}$$

$$x_{30} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{F_{em0}}}$$

$$u_0 = \frac{(x_{30} - c_i)}{k_i}$$

$$x_{20} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1464.20 & 0 & -29.65 \\ 0 & 0 & -38.40 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 99.84 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el modelo de espacio de estados en tiempo discreto para el levitador magnético se establece por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 22.9608 & 0.5995 & -0.2310 \\ 877.7505 & 22.9608 & -8.9038 \\ 0 & 0 & 0.0215 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.5556 \\ -23.0655 \\ 2.5441 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

De seguida se calculará la ganancia  $K$  del Regulador Lineal Cuadrático para el sistema, para lo cual sólo se deberá asumir las matrices de ponderación  $Q$  y  $R$ , y proceder con el cálculo como en el caso anterior.

Dadas las matrices de ponderación escogidas para el sistema:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad R = 5$$

Las matrices escogidas deben satisfacer únicamente la propiedad de:

$$Q \geq 0 \text{ y } R > 0$$

Dadas estas condiciones se procede a calcular la ganancia para el controlador.



Ganancia  $K$  para el controlador del levitador magnético dado por:

$$Kd = [-38.8752 \quad -1.0160 \quad 0.3929]$$

*Levitador Magnético LQR (ANEXO B)*

### 3.3 ANÁLISIS DEL REGULADOR LQT PARA PROBLEMAS DE SEGUIMIENTO

Se tiene la planta descrita por la siguiente función en espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Con un factor de desempeño cuadrático:

$$J = \sum \left[ (r_1(kT) - x_1(kT))(r_2(kT) - x_2(kT)) \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(kT) - x_1(kT) \\ r_2(kT) - x_2(kT) \end{bmatrix} + u(kT)^2 \right] T$$

Se requiere que el sistema siga la trayectoria de estado deseado  $r(t)$ , dado por:

$$\begin{bmatrix} r_1(kT) \\ r_2(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \sin(0.6284kT) \\ 0.6 \cos(0.6284kT) \end{bmatrix}$$

En el periodo comprendido entre  $(0 - 20)_s$ , con un tiempo de muestreo de  $T = 0.1s$

Para el sistema continuo propuesto se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

De la ecuación reducida de Riccati se establece:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

$$PA = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{12} & p_{11} - p_{12} \\ -p_{22} & p_{21} - p_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^T P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} - p_{21} & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix}$$

$$PBR^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * 1 * \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{12}p_{21} & p_{12}p_{22} \\ p_{22}p_{21} & p_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Se da la igualdad de las ecuaciones para encontrar los valores respectivos:

$$\begin{bmatrix} -p_{12} & p_{11} - p_{12} \\ -p_{22} & p_{21} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} - p_{21} & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}p_{21} & p_{12}p_{22} \\ p_{22}p_{21} & p_{22}^2 \end{bmatrix} = 0$$

Dado que  $P$  es simétrica se tiene que el valor de  $p_{12}$  y  $p_{21}$  son iguales.

Queda entonces la ecuación expresada de la siguiente forma:

$$-p_{21} - p_{21} + 10 - p_{21}^2 = 0 \quad (3.3.1)$$

$$p_{11} - p_{21} - p_{22} - p_{21}p_{22} = 0 \quad (3.3.2)$$

$$-p_{22} + p_{11} - p_{21} - p_{22}p_{21} = 0 \quad (3.3.3)$$

$$p_{21} - p_{22} + p_{21} - p_{22} + 1 - p_{22}^2 = 0 \quad (3.3.4)$$

Las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3) son exactamente las mismas.

$$p_{21}^2 + 2p_{21} - 10 = 0$$

Resolviendo:

$$p_{12} = p_{21} = 2.3166 \quad y \quad -5.3166$$

Se utiliza el valor positivo de la solución:

$$p_{12} = p_{21} = 2.3166$$

De la ecuación (3.3.4) se tiene:

$$\begin{aligned} p_{21} - p_{22} + p_{21} - p_{22} + 1 - p_{22}^2 &= 0 \\ p_{22}^2 + 2p_{22} - 5.6332 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$p_{22} = 1.5755 \quad y \quad -3.5755$$

Se utiliza el valor positivo de la solución:

$$p_{22} = 1.5755$$

De la ecuación (3.3.2) se tiene:

$$\begin{aligned} p_{11} - p_{21} - p_{22} - p_{21}p_{22} &= 0 \\ p_{11} - 2.3166 - 1.5755 - (2.3166 * 1.5755) &= 0 \\ p_{11} &= 7.5419 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores se tienen:

$$P = \begin{bmatrix} 7.5419 & 2.3166 \\ 2.3166 & 1.5755 \end{bmatrix}$$

La siguiente ecuación da la matriz de estado de lazo cerrado:

$$K = R^{-1}B^T P = 1 * [0 \quad 1]^* \begin{bmatrix} 7.5419 & 2.3166 \\ 2.3166 & 1.5755 \end{bmatrix}$$

Se tiene:

$$K = [2.3166 \quad 1.5755]$$

Este valor representa el valor de la matriz en tiempo continuo y se procede a pasar a su forma discreta:

$$Kd = K * (I + (A - B * K) * Ts / 2)$$

$$Kd = [2.3166 \quad 1.5755]^* \left( I + \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * [2.3166 \quad 1.5755] \right) * 0.1/2 \right)$$

$$Kd = [2.0554 \quad 1.4880]$$

De la ecuación  $\dot{s} = (A - BR^{-1}B^T P) s - Qr$  conjuntamente con las ecuaciones (2.30) y (2.32) se tiene:

$$\dot{s} = (A - BR^{-1}B^T P) s - Qr$$

$$F = (A - BR^{-1}B^T P)$$

$$G = -Q$$

Donde:

$$F = \left( \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] * 1 * \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{cc} 7.5419 & 2.3166 \\ 2.3166 & 1.5755 \end{array} \right] \right)^T$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -3.3166 \\ 1 & -2.5755 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aproximación para  $F(T)$ , con un tiempo de muestreo de  $T = 0.1$  s:

$$F(T) = I + FT + \frac{F^2T^2}{2!} + \dots + \frac{F^kT^k}{k!}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$FT = \begin{bmatrix} 0 & -3.3166 \\ 1 & -2.5755 \end{bmatrix} * 0.1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.3317 \\ 0.1 & -0.2576 \end{bmatrix}$$

$$\frac{F^2T^2}{2!} = \begin{bmatrix} 0 & -3.3166 \\ 1 & -2.5755 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -3.3166 \\ 1 & -2.5755 \end{bmatrix} * \frac{0.1^2}{2} = \begin{bmatrix} -0.0166 & 0.0427 \\ -0.0129 & 0.0166 \end{bmatrix}$$

$$F(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.3317 \\ 0.1 & -0.2576 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0166 & 0.0427 \\ -0.0129 & 0.0166 \end{bmatrix}$$

$$F(T) = \begin{bmatrix} 0.9834 & -0.2890 \\ 0.0871 & 0.7590 \end{bmatrix}$$

Para la aproximación de  $G(T)$  se tiene:

$$G(T) = \left\{ IT + \frac{FT^2}{2!} + \frac{F^2T^3}{3!} + \dots + \frac{F^k T^{k+1}}{(k+1)!} \right\} G$$

$$IT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * 0.1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{FT^2}{2!} = \begin{bmatrix} 0 & -3.3166 \\ 1 & -2.5755 \end{bmatrix} * \frac{0.1^2}{2} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0166 \\ 0.0050 & -0.0129 \end{bmatrix}$$

$$G(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.0166 \\ 0.0050 & -0.0129 \end{bmatrix} \right\} * \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0.0166 \\ -0.0500 & -0.0871 \end{bmatrix}$$

Por tanto la ecuación de seguimiento de estado discreto se establece:

$$\begin{bmatrix} s_1(N - (k + 1)) \\ s_2(N - (k + 1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9834 & -0.2890 \\ 0.0871 & 0.7590 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_1(N - k) \\ s_2(N - k) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -1 & 0.0166 \\ -0.0500 & -0.0871 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r_1(N - k) \\ r_2(N - k) \end{bmatrix}$$

Y

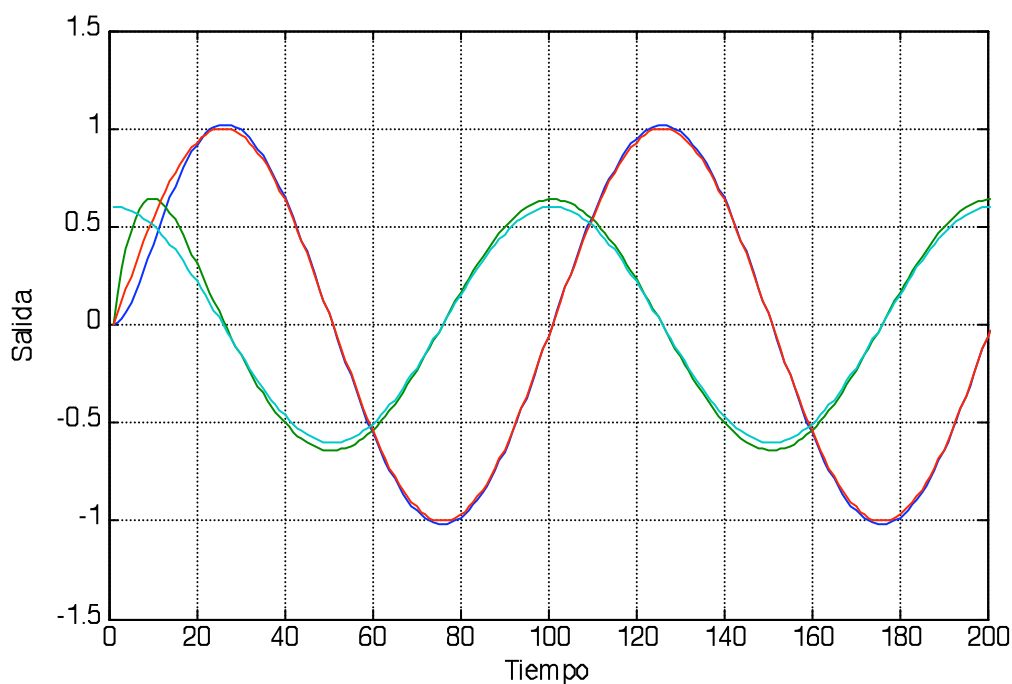
$$v(N - k) = -1 * \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_1(N - k) \\ s_2(N - k) \end{bmatrix}$$

De la ecuación (2.57) resulta:

$$x(k + 1)T = A(T)x(kT) + B(T)u_{opt}(kT)$$

Las matrices  $A(T)$  y  $B(T)$  se obtienen aplicando las ecuaciones (2.30) y (2.32) respectivamente, para lograr entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1)T \\ x_2(k+1)T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9952 & 0.0950 \\ -0.0950 & 0.9002 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0048 \\ 0.0950 \end{bmatrix} * u_{opt}(kT)$$



**Figura. 3.3.1. Salida del sistema, Regulador LQT**



### 3.4 ANÁLISIS DEL FILTRO KALMAN PARA LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS

Se considera un sistema con ruido en tiempo discreto, dado por:

$$x(k+1) = A(T)x(k) + B(T)u(k) + G(T)v(k)$$

$$y(k) = C + w(k)$$

En la cual las nuevas señales que aparecen  $v(k)$  y  $w(k)$  son procesos aleatorios en el sistema, considerados ruido blanco estacionario con media cero, y no correlacionados entre sí.

El objetivo de la construcción del *filtro Kalman* es el de ofrecer una estima óptima del estado, rechazado a la vez el error que puede introducirse al sistema debido a las señales  $v(k)$  y  $w(k)$ .

El *filtro Kalman* actúa como un observador, éste se encargará en cada instante de tiempo “ $t$ ” de estimar cuánto valen las variables de estado “ $x$ ” en base de la salida de la planta “ $y$ ” (medición) y la acción de la señal de control “ $u$ ”.

Se considera el sistema en tiempo continuo:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + w(t)$$

En el cual el término de ruido  $v(t)$  tiene media cero y covarianza  $Q = 0.09$ . El ruido de medición se asume de media cero y covarianza  $R = 0.25$ . El sistema se pasa a su forma discreta con un periodo de muestreo de  $T = 0.05s$ , del sistema de tiempo continuo.

Aproximación para  $A(T)$ , con un tiempo de muestreo de  $T=0.05s$ :

$$A(T) = I + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \dots + \frac{A^kT^k}{k!}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AT = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} * 0.05 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{A^2T^2}{2!} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} * \frac{0.05^2}{2} = \begin{bmatrix} 0.0150 & -0.0200 \\ 0.0200 & 0.0150 \end{bmatrix}$$

$$A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0150 & -0.0200 \\ 0.0200 & 0.0150 \end{bmatrix}$$

$$A(T) = \begin{bmatrix} 0.8150 & 0.0800 \\ -0.0800 & 0.8150 \end{bmatrix}$$

Para la aproximación de  $B(T)$  se tiene:

$$B(T) = \left\{ IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \dots + \frac{A^kT^{k+1}}{(k+1)!} \right\} B$$

$$IT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * 0.05 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$\frac{AT^2}{2!} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} * \frac{0.05^2}{2} = \begin{bmatrix} -0.0050 & 0.0025 \\ -0.0025 & -0.0050 \end{bmatrix}$$

$$B(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0050 & 0.0025 \\ -0.0025 & -0.0050 \end{bmatrix} \right\} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B(T) = \begin{bmatrix} 0.0025 \\ 0.0450 \end{bmatrix}$$

Para la aproximación de  $G(T)$  se tiene:

$$G(T) = \left\{ IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \dots + \frac{A^k T^{k+1}}{(k+1)!} \right\} G$$

$$IT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * 0.05 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$\frac{AT^2}{2!} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} * \frac{0.05^2}{2} = \begin{bmatrix} -0.0050 & 0.0025 \\ -0.0025 & -0.0050 \end{bmatrix}$$

$$G(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0050 & 0.0025 \\ -0.0025 & -0.0050 \end{bmatrix} \right\} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G(T) = \begin{bmatrix} 0.0025 \\ 0.0450 \end{bmatrix}$$

Por tanto el modelo de espacio de estados en tiempo discreto para el sistema se establece como:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8150 & 0.0800 \\ -0.0800 & 0.8150 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0025 \\ 0.0450 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.0025 \\ 0.0450 \end{bmatrix} v(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + w(k)$$

Se construye el filtro Kalman discreto para estimar la evolución del estado del sistema cuando se le aplica la entrada  $u = \text{sen}(kt)$ , con periodo de muestreo de  $T = 0.05\text{s}$ , y sobre el intervalo  $kT \in [0.10]$ s.

Se procede entonces al cálculo de la ganancia de la matriz de Kalman:

$$C_d(T) = \begin{bmatrix} 0.0025 \\ 0.450 \end{bmatrix} \quad C(T) = [1 \quad 0]$$

$$R = 0.025 \quad Q = 0.09$$

La matriz de ganancia de Kalman  $K$  es obtenida del conjunto de ecuaciones recursivas que comienzan de una matriz de covarianza inicial  $P(k/k)$ :

$$P(k/k) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (2.88) se obtiene:

$$P(k+1/k) = A(T)P(k/k)A^T(T) + C_d(T)QC_d^T(T)$$

$$\begin{aligned} P(k+1/k) &= \begin{bmatrix} 0.8150 & 0.0800 \\ -0.0800 & 0.8150 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.8150 & -0.0800 \\ 0.0800 & 0.8150 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0.0025 \\ 0.0450 \end{bmatrix} * 0.09 * \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0450 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6706 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6708 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De la ecuación (2.89) se obtiene:

$$K(k+1) = P(k+1/k)C^T(T) \{ C(T)P(k+1/k)C^T(T) + R \}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 K(k+1) &= \left[ \begin{array}{cc} 0.6706 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6708 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] * \left\{ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{cc} 0.6706 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6708 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] + 0.25 \right\}^{-1} \\
 &= \left[ \begin{array}{c} 0.9641 \\ 0.0000 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Se calcula entonces de la ecuación (2.90):

$$\begin{aligned}
 P(k+1/k+1) &= \left\{ -K(k+1)C(T) \right\} P(k+1/k) \\
 P(k+1/k+1) &= \left\{ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} 0.9641 \\ 0.0000 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] \right\} * \left[ \begin{array}{cc} 0.6706 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6708 \end{array} \right] \\
 &= \left[ \begin{array}{cc} 0.0241 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6708 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Resolviendo recursivamente las ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
 k &= 1 \\
 P(k/k) &= \left[ \begin{array}{cc} 0.0241 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6708 \end{array} \right] \\
 P(k+1/k) &= A(T)P(k/k)A^T(T) + C_d(T)QC_d^T(T) \\
 P(k+1/k) &= \left[ \begin{array}{cc} 0.8150 & 0.0800 \\ -0.0800 & 0.8150 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{cc} 0.0241 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6708 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{cc} 0.8150 & -0.0800 \\ 0.0800 & 0.8150 \end{array} \right] + \\
 &\quad \left[ \begin{array}{c} 0.0025 \\ 0.0450 \end{array} \right] * 0.09 * \left[ \begin{array}{cc} 0.0025 & 0.0450 \end{array} \right] \\
 &= \left[ \begin{array}{cc} 0.0203 & 0.0422 \\ 0.0422 & 0.4459 \end{array} \right] \\
 K(k+1) &= P(k+1/k)C^T(T) \left\{ C(T)P(k+1/k)C^T(T) + R \right\}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.0203 & 0.0422 \\ 0.0422 & 0.4459 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.0203 & 0.0422 \\ 0.0422 & 0.4459 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.025 \right\}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4482 \\ 0.9310 \end{bmatrix}$$

$$P(k+1/k+1) = \{I - K(k+1)C(T)\}P(k+1/k)$$

$$P(k+1/k+1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4482 \\ 0.9310 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} * \begin{bmatrix} 0.0203 & 0.0422 \\ 0.0422 & 0.4459 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0112 & 0.0233 \\ 0.0233 & 0.4066 \end{bmatrix}$$

$$k = 2$$

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.3435 \\ 0.0794 \end{bmatrix}$$

$$k = 3$$

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.2987 \\ 0.8903 \end{bmatrix}$$

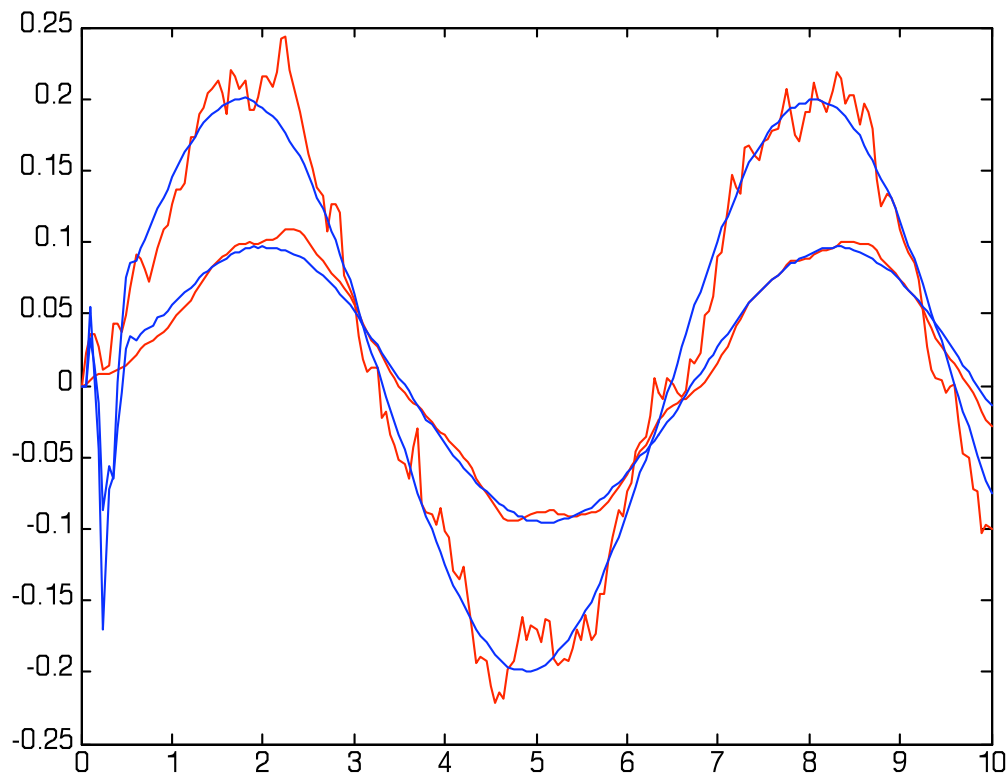
⋮

$$k = 100$$

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.0022 \\ 0.0045 \end{bmatrix}$$

*Filtro Kalman ( ANEXO D )*

Una vez ejecutado el programa se obtiene el siguiente resultado:



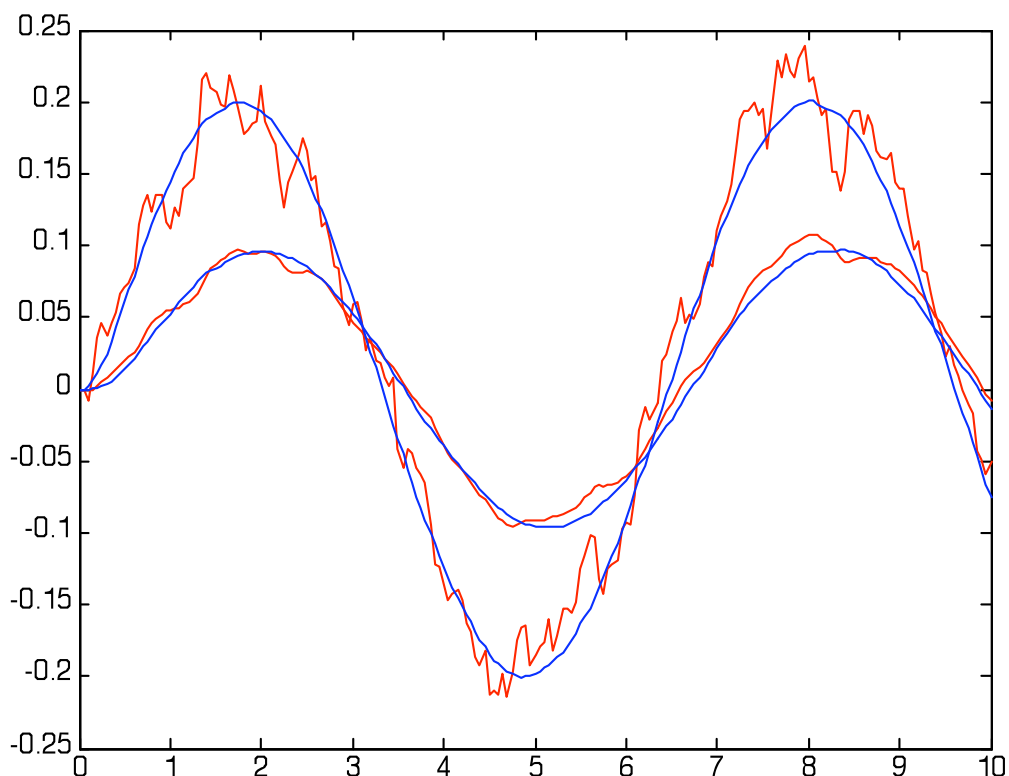
**Figura 3.4.1. Estados verdaderos y estados estimados del sistema**

Como se aprecia en la figura, los estados verdaderos indicados en color rojo para el sistema propuesto, se puede notar claramente la influencia de la perturbación en el proceso, dando así una señal con ruido.

Indicado en color azul se puede apreciar la acción del filtro Kalman en la estima de los estados para el sistema, entregando una señal más suave.

Existe un tiempo corto mientras se llega al valor de la ganancia de Kalman para una estimación adecuada, esto se debe a que el cálculo de la ganancia de Kalman se lo hace mediante ecuaciones recursivas, es decir que dependen del último valor obtenido para el cálculo del siguiente valor, como se aprecia en la figura que no dura más de 1 s.

Por otra parte si primero se calcula la ganancia de Kalman y después se ejecuta la simulación se tendrá desde el inicio la estimación adecuada del sistema evitando así el transitorio del inicio. Para fines didácticos se lo ejecuta de la otra forma para la apreciación del progreso de la estima con la ganancia del filtro Kalman.



**Figura. 3.4.2.** Estados verdaderos y estados estimados del sistema simulado con la ganancia de Kalman.



### 3.5 DISEÑO DE UN CONTROLADOR LINEAL CUADRÁTICO GAUSIANO

Para el diseño del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano se tomarán en cuenta los aspectos desarrollados anteriormente en el presente capítulo, como es el caso de la utilización del Regulador Lineal Cuadrático y la estimación de estado utilizando el Filtro Kalman, los cuales darán como resultado final el diseño del regulador para el sistema.

Sistema continuo en espacio de estados para el doble integrador, incluido el término correspondiente al ruido gaussiano.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) + Cdw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

El índice de desempeño cuadrático esta dado por:

$$J = \sum_0^{100} \left[ x^T(k) \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + u(k)^2 \right] T$$

El modelo de espacio de estados en tiempo discreto para el doble integrador, discretizando la matriz de transición de disturbio  $C_d(T)$

Para la aproximación de  $C_d(T)$  se tiene:

$$C_d(T) = \left\{ IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \dots + \frac{A^k T^{k+1}}{(k+1)!} \right\} Cd$$

$$IT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * 0.2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{AT^2}{2!} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \frac{0.2^2}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Cd(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cd(T) = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

El sistema discreto para el doble integrador queda definido por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$$A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B(T) = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

En el diseño del Regulador Lineal Cuadrático, desarrollado en el primer punto del capítulo se obtuvo la ganancia de realimentación para el sistema definido por:

$$k = 100$$

$$P(N - (k + 1)) = \begin{bmatrix} 9.6349 & 3.1780 \\ 3.1780 & 2.8442 \end{bmatrix} \quad K(N - (k + 1)) = \begin{bmatrix} 2.4146 & 2.3264 \end{bmatrix}$$

Se procede entonces al cálculo de la ganancia de la matriz de Kalman:

$$C_d(T) = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad C(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.025 \quad Q = 0.09$$

La matriz de ganancia de Kalman  $K$  es obtenida del conjunto de ecuaciones recursivas que comienzan de una matriz de covarianza inicial  $P(k/k)$

$$P(k/k) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (2.88) se obtiene:

$$P(k + 1/k) = A(T)P(k/k)A^T(T) + C_d(T)QC_d^T(T)$$

$$\begin{aligned} P(k + 1/k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} * 0.09 * \begin{bmatrix} 0.02 & 0.2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.0400 & 0.2004 \\ 0.2004 & 1.0036 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De la ecuación (2.89) se obtiene:

$$K(k + 1) = P(k + 1/k)C^T(T) \{ C(T)P(k + 1/k)C^T(T) + R \}^{-1}$$

$$K(k+1) = \left[ \begin{array}{cc} 1.0400 & 0.2004 \\ 0.2004 & 1.0036 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] * \left\{ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{cc} 1.0400 & 0.2004 \\ 0.2004 & 1.0036 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] + 0.025 \right\}^{-1}$$

$$= \left[ \begin{array}{c} 0.8062 \\ 0.1553 \end{array} \right]$$

Se calcula entonces de la ecuación (2.90):

$$P(k+1/k+1) = \left\{ I - K(k+1)C(T) \right\} P(k+1/k)$$

$$P(k+1/k+1) = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} 0.8062 \\ 0.1553 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] \right\} * \left[ \begin{array}{cc} 1.0400 & 0.2004 \\ 0.2004 & 1.0036 \end{array} \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{cc} 0.2016 & 0.0388 \\ 0.0388 & 0.9725 \end{array} \right]$$

Resolviendo recursivamente las ecuaciones se tiene:

$$k = 1$$

$$P(k/k) = \left[ \begin{array}{cc} 0.2016 & 0.0388 \\ 0.0388 & 0.9725 \end{array} \right]$$

De la ecuación (2.88) se obtiene:

$$P(k+1/k) = A(T)P(k/k)A^T(T) + C_d(T)QC_d^T(T)$$

$$P(k+1/k) = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{cc} 0.2016 & 0.0388 \\ 0.0388 & 0.9725 \end{array} \right] * \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0.02 \\ 0.2 \end{array} \right] * 0.09 * \left[ \begin{array}{cc} 0.02 & 0.2 \end{array} \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{cc} 0.2560 & 0.2337 \\ 0.2337 & 0.9761 \end{array} \right]$$

De la ecuación (2.89) se obtiene:

$$K(k+1) = P(k+1/k)C^T(T) \{ C(T)P(k+1/k)C^T(T) + R \}^{-1}$$

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.2560 & 0.2337 \\ 0.2337 & 0.9761 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.2560 & 0.2337 \\ 0.2337 & 0.9761 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.025 \right\}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5059 \\ 0.4618 \end{bmatrix}$$

Se calcula de la ecuación (2.90):

$$P(k+1/k+1) = \{ -K(k+1)C(T) \} P(k+1/k)$$

$$P(k+1/k+1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5059 \\ 0.4618 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} * \begin{bmatrix} 0.2560 & 0.2337 \\ 0.2337 & 0.9761 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1265 & 0.1155 \\ 0.1155 & 0.8682 \end{bmatrix}$$

$k = 2$

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.4535 \\ 0.6328 \end{bmatrix}$$

$k = 3$

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.4496 \\ 0.6523 \end{bmatrix}$$

⋮

$k = 200$

$$K(k+1) = \begin{bmatrix} 0.1967 \\ 0.1076 \end{bmatrix}$$

Para fines de la construcción del modelo para la simulación, la matriz  $K$  será llamada o conocida con el nombre de  $M$ .

La ganancia para el sistema está dada por:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(T) - I & B(T) \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A(T) - I = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N_u = 0$$

$$N = KN_x + N_u$$

$$N = [2.4146 \quad 2.3264]^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = 2.4146$$

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS DE SIMULACIÓN

#### 4.1 INTRODUCCIÓN

Para el desarrollo del presente capítulo se presentarán los esquemas y resultados de la simulación de los controladores diseñados en el capítulo anterior, los cuales fueron desarrollados en rutinas de simulación a través de la herramienta de Matlab/Simulink.

#### 4.2 ESQUEMA DE SIMULACIÓN DEL REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO PARA UN DOBLE INTEGRADOR

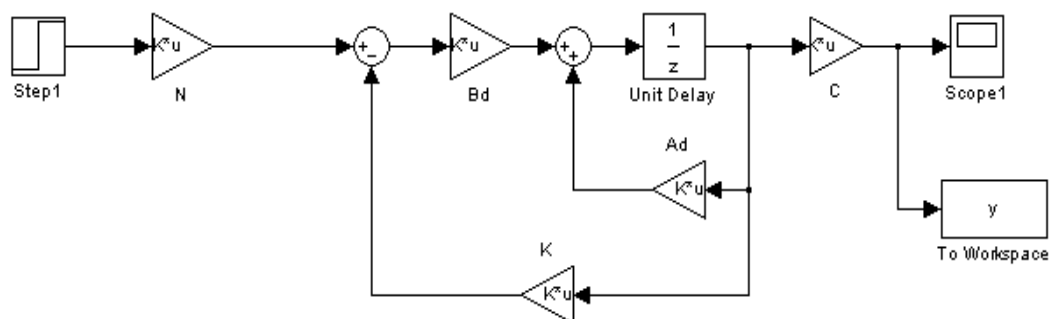
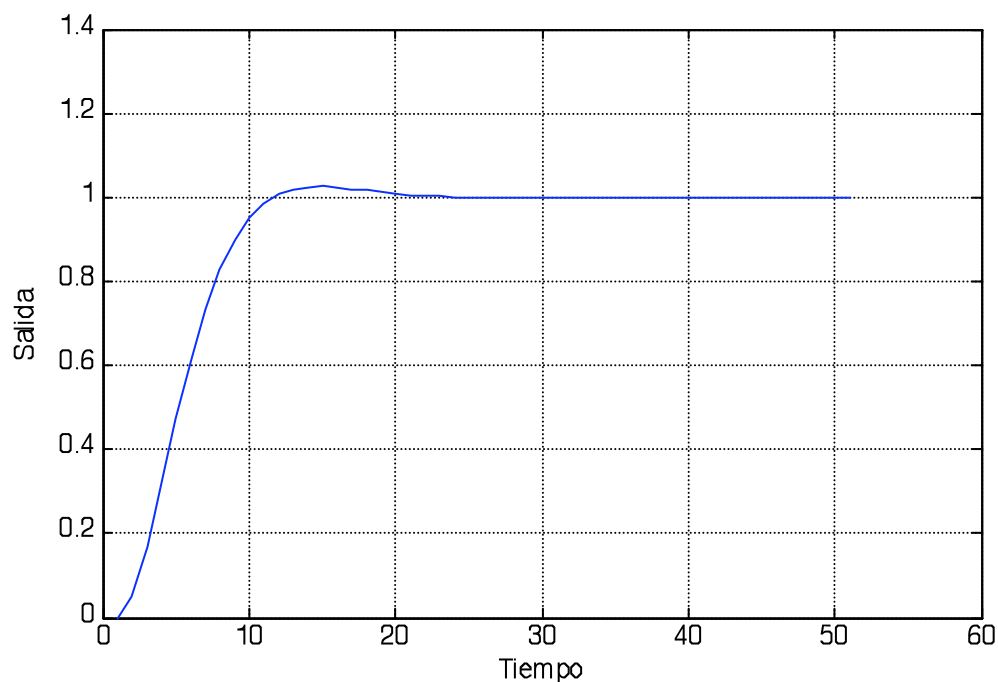


Figura. 4.2.1. Diagrama del Regulador Lineal Cuadrático del Doble Integrador



**Figura. 4.2.2. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador**

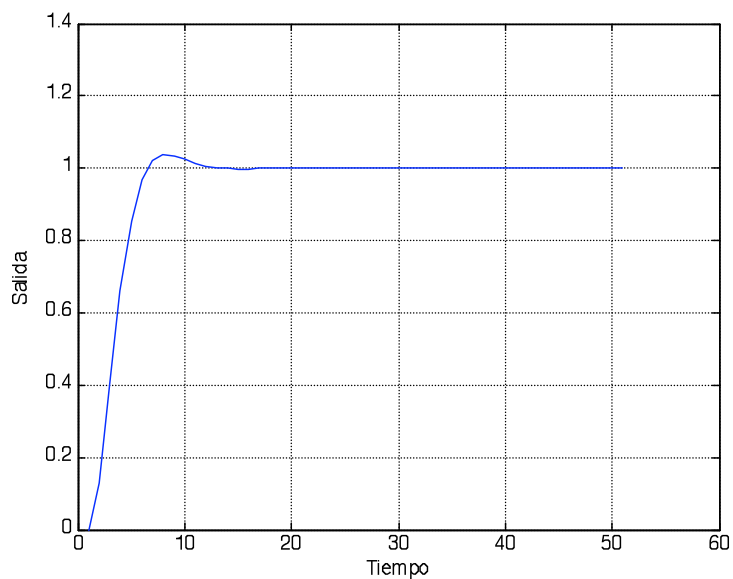
La figura 4.2.2 muestra la salida de un doble integrador al cual se le aplicó el Regulador Lineal Cuadrático (LQR) con las matrices de ponderación seleccionadas en la etapa de diseño.

Como se trata de un controlador óptimo por definición, no se tiene la posibilidad de variar parámetros como los polos de la planta o factor de amortiguamiento, según sea el caso, lo cual si es factible con otros métodos de diseño. En nuestro caso lo que podemos variar para comparar el desempeño del controlador, son las matrices de ponderación  $Q$  y  $R$ .

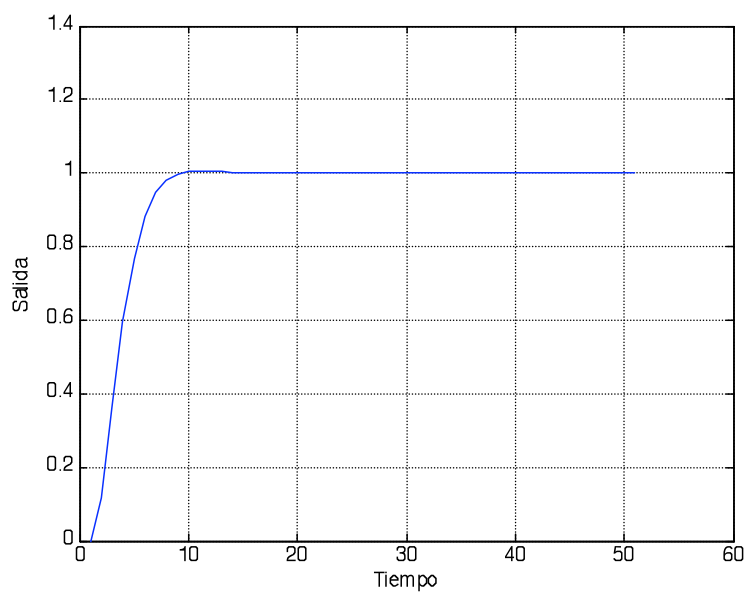
A continuación procederemos a simular la planta con diferentes tipos de matrices de ponderación para ver así el comportamiento de la misma con diferentes valores asignados a dichas matrices.



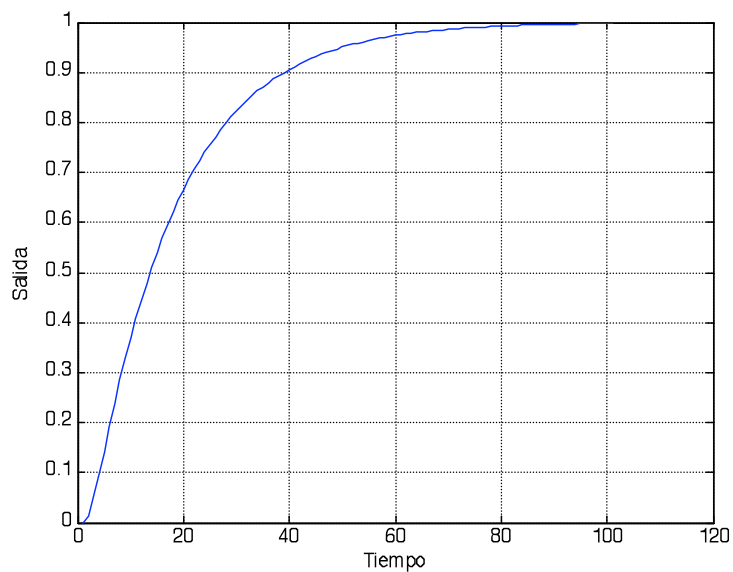
Para la misma planta variando el valor de la matriz Q y manteniendo la Matriz R se tiene:



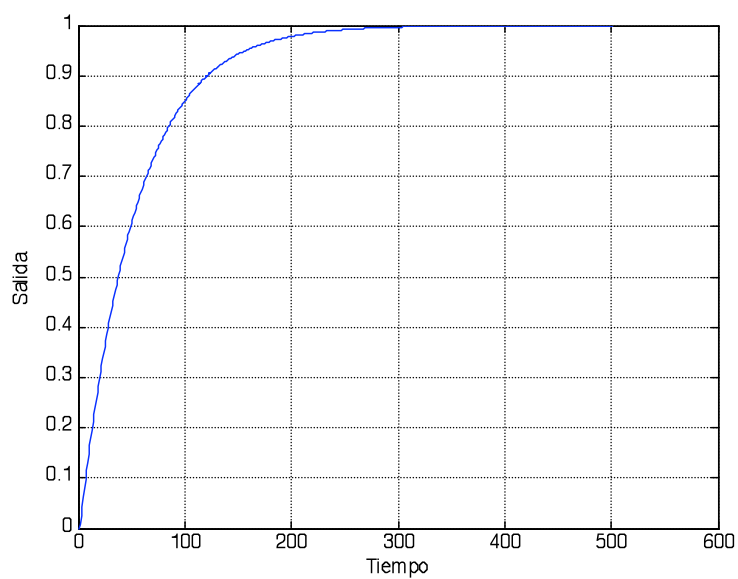
**Figura. 4.2.3. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación  $Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$**



**Figura. 4.2.4. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación  $Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$**



**Figura. 4.2.5. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$**

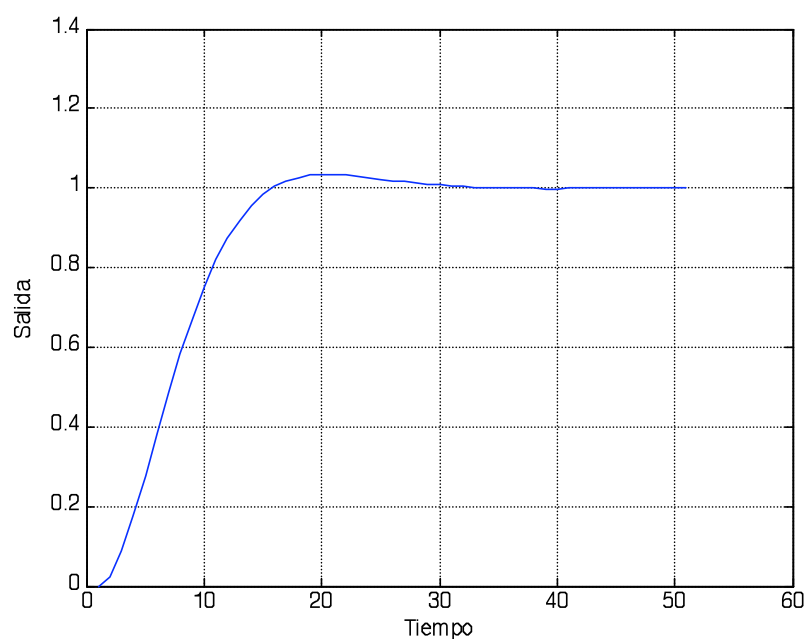


**Figura. 4.2.6. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$**

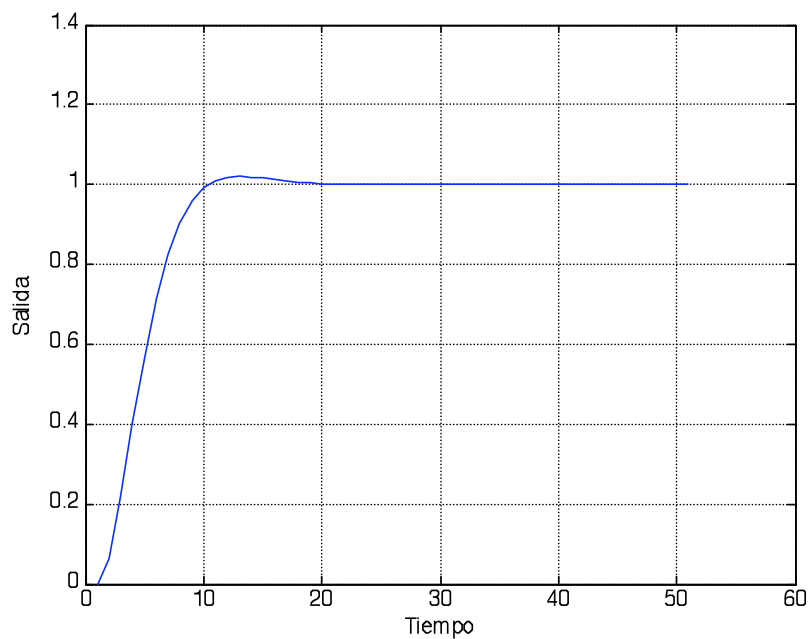
Como se puede apreciar claramente mientras más grande es el valor de la componente de la matriz de ponderación de Q que corresponde al valor de  $q_{22}$ , la planta demora mucho más tiempo en llegar al estado estable.

Mientras que si en la matriz de ponderación se elije un valor más alto para la componente  $q_{11}$ , se llega en un tiempo más corto al estado estable, pero con una señal más brusca en el transitorio inicial, tal cual se puede apreciar en los resultados de las simulaciones para los distintos valores que se ha otorgado a la matriz Q.

Ahora para la misma planta variando el valor de la matriz R y manteniendo la Matriz Q, se obtienen los siguientes resultados.



**Figura. 4.2.7. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación  $R = 5$**



**Figura. 4.2.8. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación  $R = 0.5$**

Se puede apreciar claramente que mientras más grande  $R$ , el sistema demora más tiempo en llegar al estado estable, mientras sigue siendo más pequeña; el tiempo también se reduce para llegar al estado estable.

Se ha demostrado mediante simulación por medio de la herramienta de Matlab/Simulink, el efecto que tiene la selección de las matrices de ponderación en Regulador Lineal Cuadrático, en este caso aplicado a la planta del doble integrador.

### 4.3 LEVITADOR MAGNÉTICO

#### 4.3.1 ESQUEMA DE SIMULACIÓN DEL REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO PARA EL LEVITADOR MAGNÉTICO

En la figura 4.3.1 se muestra el diagrama del Regulador Lineal Cuadrático (LQR), correspondiente al Modelo de Simulink que se implementa en la simulación en el entorno computacional de MatLab. La estructura contiene las siguientes señales: Posición [m], Velocidad [m/s], Corriente [A] y la señal de control.

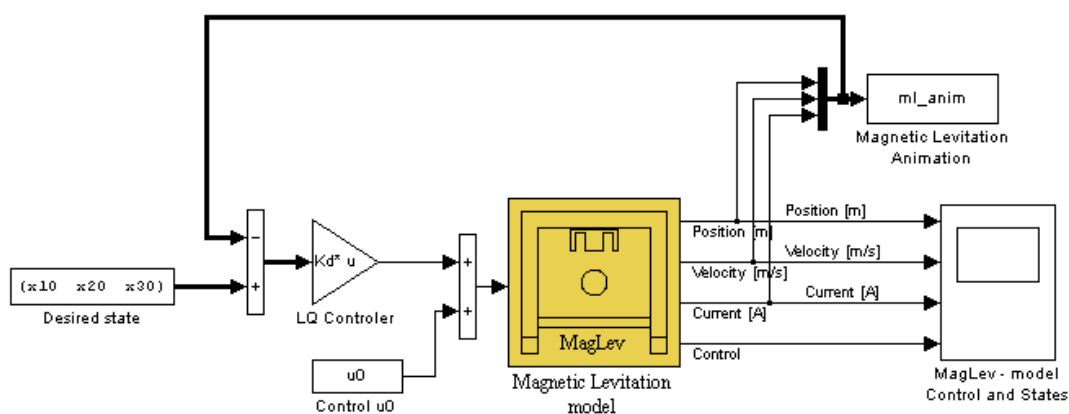


Figura. 4.3.1. Diagrama del Regulador Lineal Cuadrático para un sistema levitador magnético

Si en el entorno de simulación se abre el modelo de levitación magnética haciendo un click en éste, se tiene la siguiente ventana en la cual se tienen los parámetros del modelo, los cuales fueron calculados con anterioridad.

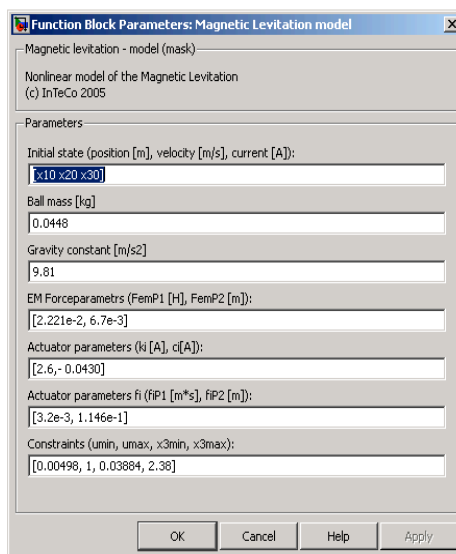


Figura. 4.3.2. Parámetros de la planta

El modelo de Simulink está también equipado con un modelo gráfico animado, el cual reacciona con los resultados generados con la simulación del bloque, el cual da una idea gráfica de lo que esperamos en el modelo físico de la planta, sin necesidad de tener a ésta presente en el momento.

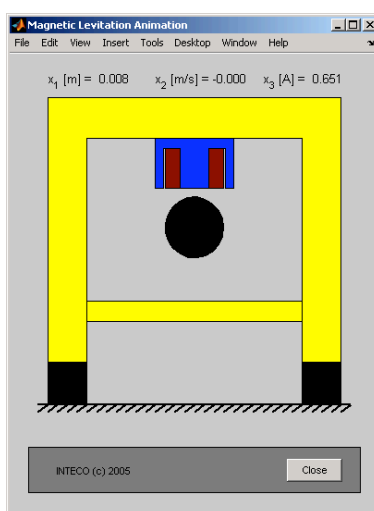


Figura. 4.3.1. Esquema animado de la planta de levitación magnética

### 4.3.2 RESULTADOS DE SIMULACIÓN

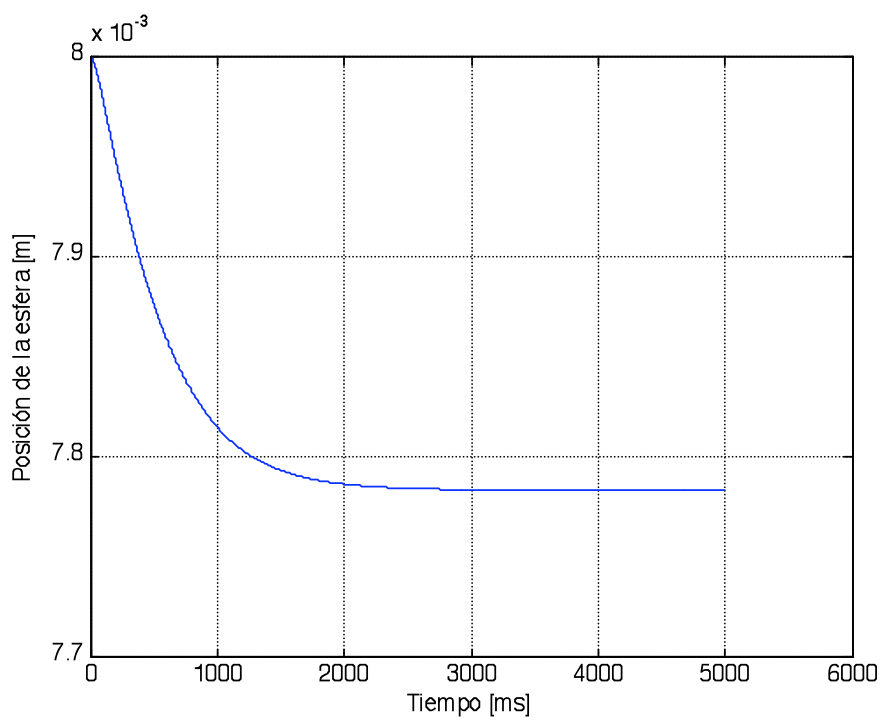


Figura. 4.3.2. Posición de la esfera con respecto al tiempo

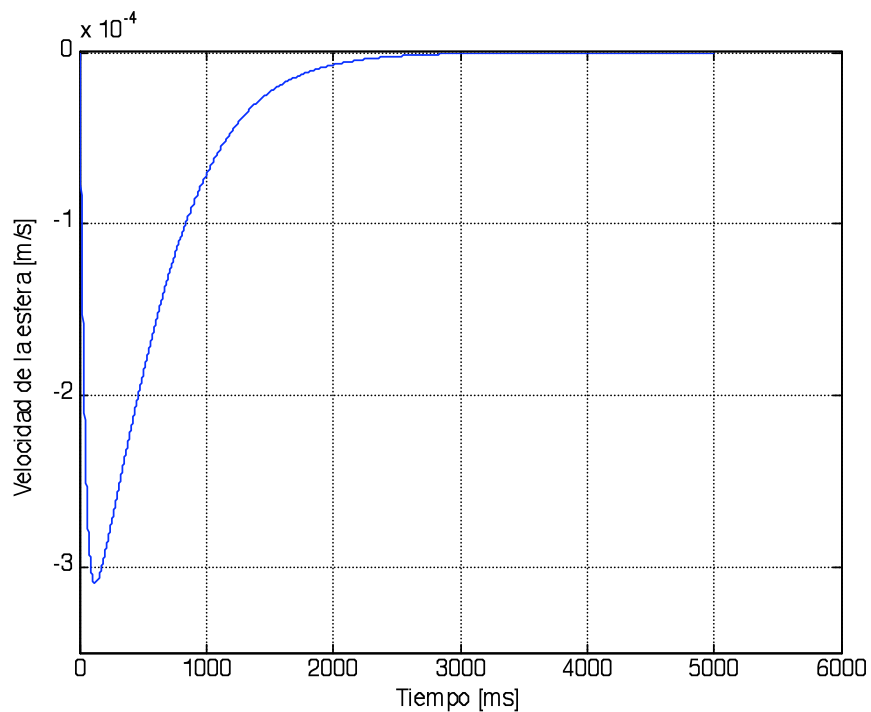
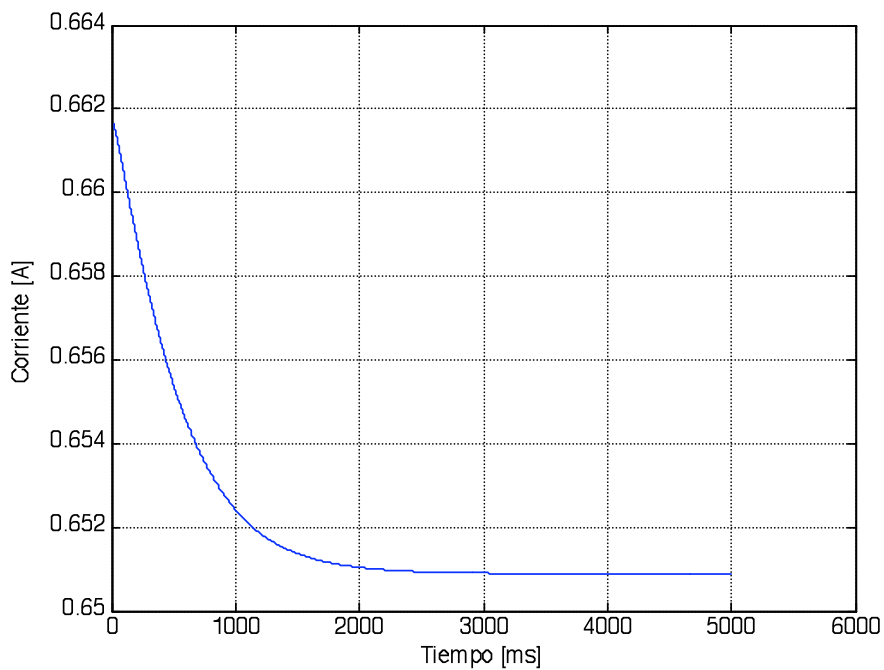
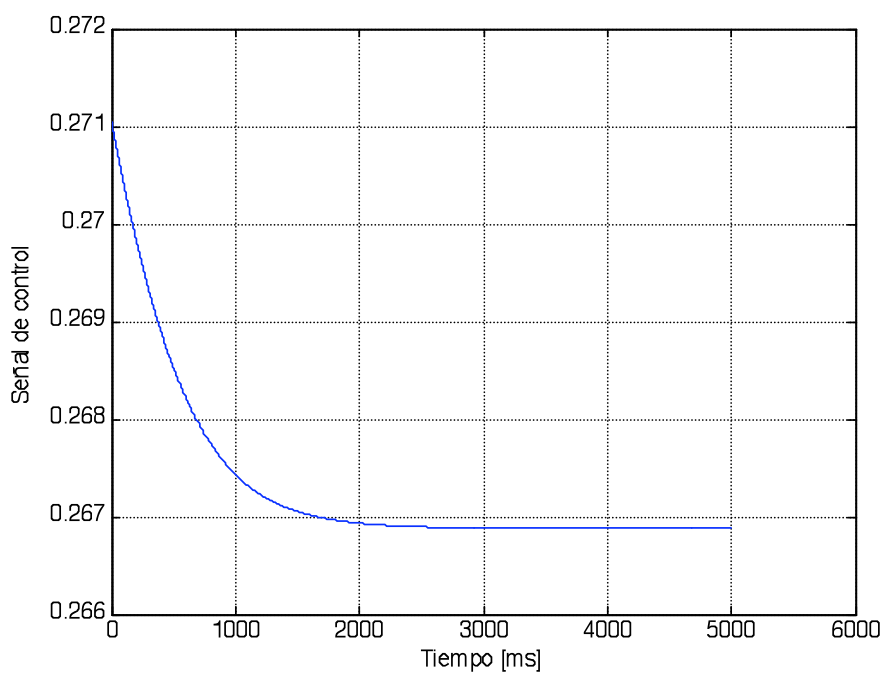


Figura. 4.3.3. Velocidad de la esfera con respecto al tiempo



**Figura. 4.3.4. Corriente de la bobina con respecto al tiempo**



**Figura. 4.3.4. Señal de control con respecto al tiempo**



Como se muestran en las gráficas el objetivo buscado con el diseño del Regulador Lineal Cuadrático se ha conseguido a cabalidad, llegando a controlar la planta de una manera óptima, llegando al estado deseado en un lapso corto de tiempo.

#### 4.4 ESQUEMA DE SIMULACIÓN DEL CONTROLADOR LINEAL CUADRÁTICO GAUSSIANO PARA UN DOBLE INTEGRADOR

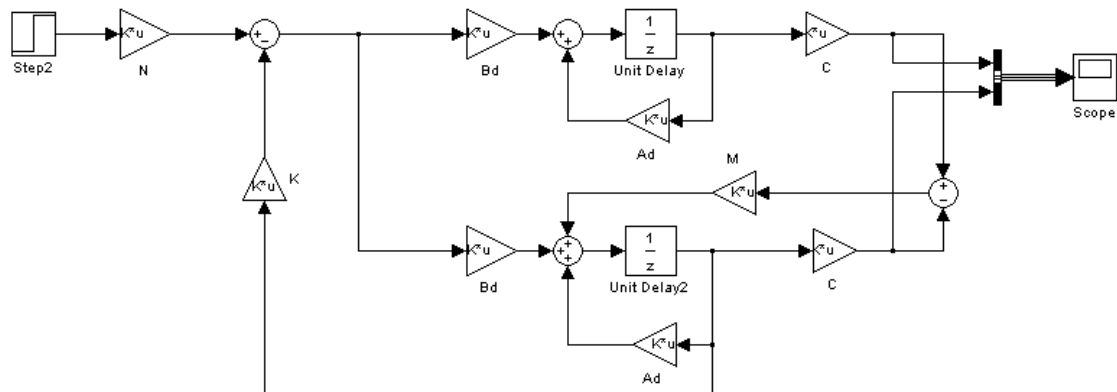


Figura. 4.4.1. Diagrama del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano del Doble Integrador

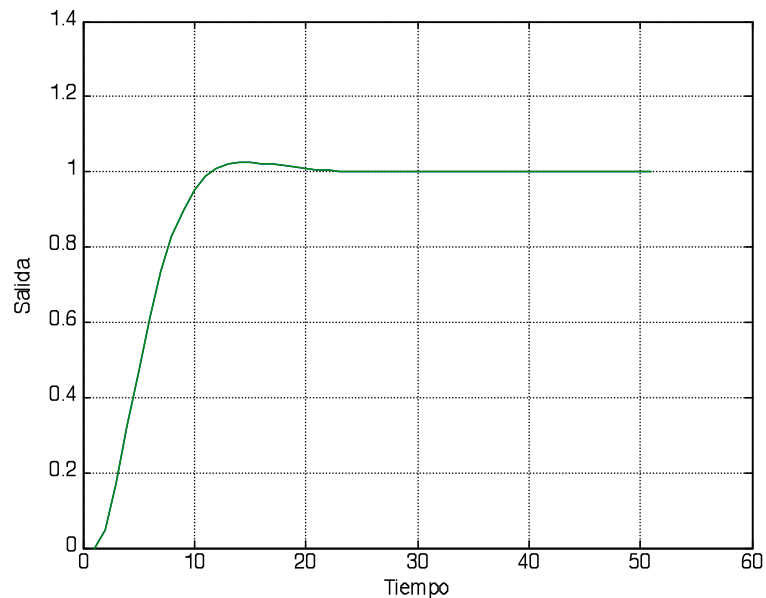
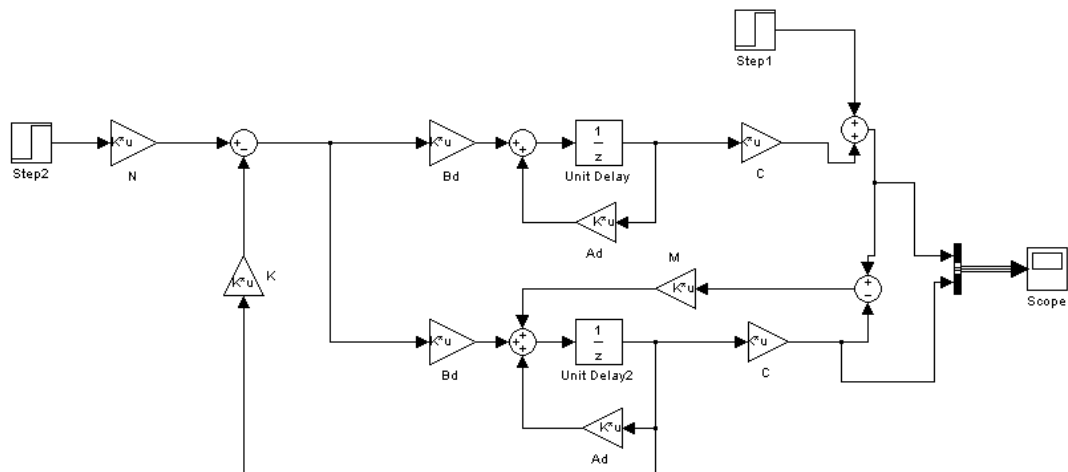


Figura. 4.4.2. Respuesta del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano para un Doble Integrador.

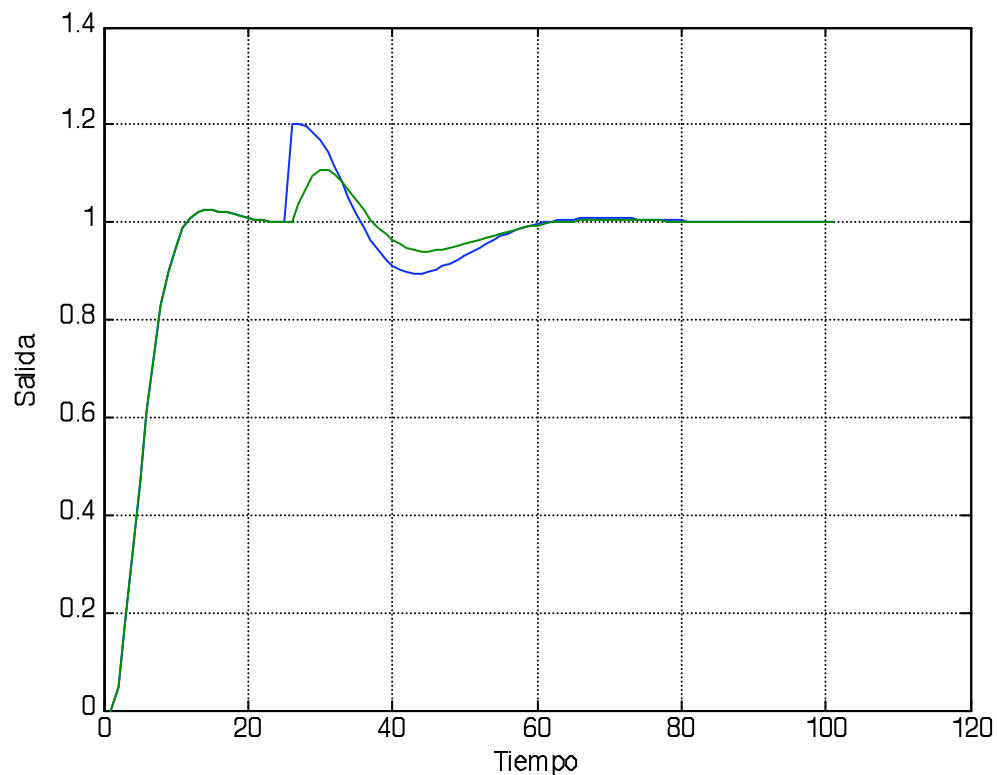
En la presente figura se aprecia que las dos señales de salida, la una correspondiente a la salida de la planta (esta puede ser tomada mediante sensores y aparatos de medición), y la segunda correspondiente a la señal obtenida por medio de la estimación de estados mediante la aplicación del filtro Kalman son exactamente las mismas, por lo que en el gráfico aparece como una única señal de salida; sin embargo, cabe destacar que en ésta se encuentran las dos magnitudes sobrepuestas, que a la vista parece como una sola, lo cual significa que la estimación de estados obtenida y aplicada al sistema fue la correcta y la idónea.

Para demostrar la funcionalidad del filtro Kalman en el controlador se va a aplicar una señal tipo escalón con un valor de amplitud de 0.2 a la salida de la planta en el tiempo  $t = 5s$ , una vez que la planta haya llegado a la estabilidad para apreciar la reacción del sistema.

El siguiente diagrama de Simulink muestra la planta con el añadido de una perturbación a la salida, que es la señal escalón de amplitud de 0.2



**Figura. 4.4.4. Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano para un Doble Integrador, con perturbación**



**Figura. 4.4.4. Respuesta del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano para un Doble Integrador**

En la figura 4.4.4 se puede apreciar el efecto que tiene la señal de perturbación sobre el sistema, ocasionando una anomalía en la salida. La señal en azul corresponde a la planta en sí, mientras que la señal en verde corresponde a la obtenida por medio de la estimación de estados utilizando la técnica del filtro Kalman. La acción de la estimación de estados hace que el sistema regrese en un intervalo de tiempo corto a la normalidad, es decir llegue al punto estable requerido o estipulado en el diseño del controlador.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 5.1 CONCLUSIONES

En el desarrollo del presente proyecto se analizaron y diseñaron controladores óptimos discretos mediante la utilización de espacio de estados.

Se llegó a diseñar el Regulador Lineal Cuadrático con resultados óptimos, válidos para el control del proceso seleccionado, en este caso del doble integrador, así como también se diseñó el Regulador Lineal Cuadrático Gaussiano para el mismo caso llegando al objetivo trazado.

En los análisis del problema de seguimiento y del filtro Kalman válidos para la consecución del Regulador Lineal Cuadrático Gaussiano se observaron varios aportes importantes en el proyecto, tal como el aporte del filtro kalman utilizado como observador en el controlador y la posibilidad de acoplar el seguimiento cuando se excite a la planta con señales variantes en el tiempo, tal como la inserción de una señal senoidal.

Con el desarrollo del presente proyecto se ha puesto en evidencia las siguientes conclusiones:

- La idea principal del diseño de los controladores óptimos es el de minimizar el índice de desempeño o función de costo escalar  $J$ ,

relacionado directamente con la energía y en consecuencia con el costo económico del proceso.

- El índice de desempeño  $J$  es cuadrático, el cual en un sistema lineal produce una ley de control de la forma  $u(t) = -Kx(t)$ . El control que se obtiene de dicho criterio es *lineal*.
- El empleo del filtro Kalman en el control óptimo lineal cuadrático da una solución efectiva al minimizar o rechazar los efectos que producen las señales de ruido blanco gaussiano en la planta. Constituyéndose así en un excelente estimador de estados en el Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano.
- La ventaja de utilizar el filtro de Kalman es que se lo realiza recursivamente, por tanto no hay necesidad de guardar un historial de estimaciones y de medidas previas, sino simplemente con la nueva medida y la última estimación.
- El filtro de Kalman puede combinarse con cualquier control por realimentación de estados, usado como observador. Si se elige el control óptimo LQR, la combinación se la conoce como Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG).
- Por último se diseñó el Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG) fusionando los diferentes aspectos y componentes que lo caracterizan como es el Regulador Lineal Cuadrático (LQR) y el filtro Kalman, logrando un control óptimo de la planta seleccionada y obteniendo un rechazo a la influencia del ruido blanco gaussiano que se puede presentar en la planta debido a condiciones aleatorias de injerencia de ruido en la misma.
- Los controladores diseñados pueden ser programados e implementados fácilmente mediante la utilización de hardware y software existentes en el

mercado, así como la utilización de un microcontrolador, utilizando las funciones planteadas en el proyecto.

- El estudio de los controladores óptimos discretos en el espacio de estados permiten el diseño, simulación e implementación de los controladores en la planta.
- En el diseño del controlador se hace importante el análisis de la respuesta del sistema con diferentes pesos de la función de costo, escogiendo de esta manera la más adecuada para el sistema.

## 5.2 RECOMENDACIONES

- En el presente trabajo se pone a consideración también la utilización del método de solución en tiempo continuo, si es factible se lo puede trabajar de esta manera, llegando a la solución continua, para posteriormente pasarla a su forma discreta, ya que la dificultad matemática en el proceso se ve efectivamente disminuida.
- Las matrices de ponderación  $Q$  y  $R$  es recomendable escogerlas indistintamente, con la única premisa de que tanto  $Q$  como  $R$  deben ser mayores que cero, ya que el cálculo de esas se la realiza tomando en cuenta la desviación máxima de las variables, lo cual en forma experimental supondría la utilización de instrumentos de medición para tomar cada una de estas, y con la facilidad que nos proporciona la herramienta de trabajo MatLab-Simulink se lo puede simular variando estos parámetros y escogiendo la más adecuada combinación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### Libros

1. ÄSTROM, KARL J., **Computer – Controlled Systems**, Tercera Edición, Prentice – Hall, 1997 en EEUU. [1]
2. BURNS, ROLAND S., **Advance Control Engineering**, Primera Edición, Butterworth - Heinemann, 2001. [2]
3. GARRIDO SANTIAGO, **Estimación y Control de Sistemas No-lineales mediante RGO**, Universidad Carlos III, 1999 [10]
4. OGATA, KATSUHIKO, **Discrete – Time Control Systems**, Segunda Edición, Prentice Hall, 1995.
5. OGATA, KATSUHIKO, **Ingeniería de Control Moderna**, Tercera Edición, Prentice Hall, 1998.
6. CURTIS D. JOHNSON, **Process Control Instrumentation Thechnology**, Sexta Edición, Prentice Hall, 2000.
7. C. NAGLE PHILIPS, **Digital Control Systems: Analysis and Design**, Tercera Edición, Prentice May, 1995.



## Internet

8. <http://193.146.57.132/depeca/repositorio/asignaturas/32328/Tema3.pdf>, Control Óptimo de Sistemas Discretos en Variables de Estado [4]
9. <http://iaci.unq.edu.ar/materias/control2/web/clases/Cap9.pdf>, Introducción al Control Óptimo [5]
10. <http://www.scribd.com/doc/7110427/Espacio-de-Estados-Presentacion>, Análisis de Sistemas de Control en el Espacio de Estados [6]
11. [www.uam.es/personal\\_pas/.../control\\_avanzado\\_practico.ppt](http://www.uam.es/personal_pas/.../control_avanzado_practico.ppt), Control Avanzado Práctico [7]
12. [http://iee.uach.cl/downloads/ingelectra2006/09\\_Sanchez.pdf](http://iee.uach.cl/downloads/ingelectra2006/09_Sanchez.pdf), Control Óptimo Robusto de un Aerogenerador con Filtro de Kalman [8]
13. [www.prometeo.unicauca.edu.co/manzamb/Teoria%2520y%2520Dinamica%2520de%2520Sistemas](http://www.prometeo.unicauca.edu.co/manzamb/Teoria%2520y%2520Dinamica%2520de%2520Sistemas), Análisis Básico de sistemas de Control – Ecuaciones de Espacio – Estado [9]
14. <http://www.scribd.com/docs/1j9jpmrdrgswhv6q7icss.pdf>, Análisis de sistemas de control en el espacio de estados

## **ANEXOS**

## **ANEXO A**

### **ALGORITMO DEL CONTROLADOR DIGITAL BASADO EN EL MÉTODO DE ESPACIO DE ESTADOS UTILIZANDO EL REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO**



**%%%%%%%%%% CALCULO DE LA REFERENCIA %%%%%%%%%%%**

```
I=eye(2);           %Matriz identidad
sys=[(Ad-l) Bd;C 0];
NxNu=(sys)^-1*[0;0;1];
Nx=[NxNu(1);NxNu(2)];
Nu=[NxNu(3)];
N=Kd*Nx+Nu;       %Referencia del sistema
gain=N;
```

## **ANEXO B**

### **ALGORITMO DEL CONTROLADOR DIGITAL BASADO EN EL MÉTODO DE ESPACIO DE ESTADOS UTILIZANDO EL REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO PARA EL LEVITADOR MAGNÉTICO**

**%LEVITADOR MAGNÉTICO****%%%%%%%%% OBTENCIÓN DEL MODELO CONTINUO LINEAL %%%%%%%%%%**

close all

**%%%%%%%%% PARÁMETROS DE LA PLANTA %%%%%%%%%%**

```

m=0.04481;
g=9.81
femp1=0.0222;
femp2=0.0067
fip1=0.0032
fip2=0.1146;
ci=-0.043;
ki=2.6;
x10=8e-3;

```

```

Fem0=(femp1/femp2)*exp(-x10/femp2)
x30=sqrt((m*g)/Fem0);
u0=(x30-ci)/ki
x20=0;

```

```

a21=x30^2*femp1*exp(-x10/femp2)/(m*femp2^2);
a23=-2*x30*femp1*exp(-x10/femp2)/(m*femp2);
a31=-(ki*u0+ci-x30)/fip1*exp(-x10/fip2);
fi_x10=fip1/fip2*exp(-x10/fip2)
a33=-1/fi_x10

```

```

a=[0 1 0;a21 0 a23;a31 0 a33]

```

```

b3=ki*1/fi_x10;
b=[0;0;b3]

```

```

c=[1 0 0];
D=0;

```

**%%%%%%%%% FIN DE LA OBTENCIÓN DEL MODELO LINEAL %%%%%%%%%%****%%%%%%%%% ESPACIO DE ESTADOS DISCRETO %%%%%%%%%%**

```

Ts=0.1; %tiempo de muestreo

```

```

[ad,bd]=c2d(a,b,Ts) %matrices A & B de continuo a discreto

```

```

Q=[100 0 0;0 0.001 0;0 0 10]; %matrices de ponderación
R=5;

```

```

[Kd,P]=lqrd(a,b,Q,R,Ts); %ganancia K del sistema

```

## **ANEXO C**

### **ALGORITMO DEL CONTROLADOR DIGITAL BASADO EN EL MÉTODO DE ESPACIO DE ESTADOS UTILIZANDO EL SEGUIMIENTO LINEAL CUADRÁTICO**



**%SEGUIMIENTO LINEAL CUADRÁTICO**

clear all

**%%%%%%%%%%%%%% MODELO EN TIEMPO CONTINUO %%%%%%%%%%%%%%%**

A=[0 1;-1 -1];                    %Matriz A  
 B=[0;1];                            %Matriz B  
 C=[1 0;0 1];                       %Matriz C

**%%%%%%%%%%%%%% LECTURA DE PARÁMETROS %%%%%%%%%%%%%%%**

Q=[10 0;0 1];                    %Matriz de ponderación de estado  
 R=1;                                %Matriz de ponderación de control

**%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACIÓN %%%%%%%%%%%%%%%**

I=[1 0;0 1];                    %Matriz Identidad  
 S=[0;0];                         %ecuación de seguimiento  
 T=0;  
 V=0;                               %vector de mando  
 Ts=0.1;                         %tiempo de muestreo  
 [Ad,Bd]=c2d(A,B,Ts);            %matrices A & B de continuo a discreto  
 P=[0 0;0 0];                    %valor de la matriz de Riccati al tiempo (N-1)  
 H=Bd'\*P;  
 X=Ts\*R+H\*Bd;  
 Y=H\*Ad;  
 K=Y/X;                            %valor de la ganancia de realimentación al tiempo  
                                   %(N-1)

**%%%%%%%%%%%%%% CÁLCULO DE LAS MATRICES F Y G %%%%%%%%%%%%%%%**

[Kc,Pc]=lqr(A,B,Q,R);            %cálculo de la matriz de Riccati y de la ganancia  
 Fc=(A-B\*B'\*Pc)';                %matriz de transición continuo  
 Gc=-Q;                            %matriz de control continuo  
 [Fd,Gd]=c2d(Fc,Gc,Ts)            %matrices F & G de continuo a discreto

```
t=0:Ts:20; rin=[sin(0.6284*t);0.6*cos(0.6284*t)];
```

```
%%%%%%%%% SOLUCIÓN EN TIEMPO REVERSO DE LA ECUACIÓN %%%%%%%%%%
%%%%%%%%% DE RICCATI EN TIEMPO DISCRETO %%%%%%%%%% %%%%%%%%%%
```

```
for i=1:200
L=Ts*Q+K'*Ts*R*K;
M=Ad-Bd*K;
PP1=L+M'*P*M;           %valor de la matriz de Riccati al tiempo (N-(k+1))T
RIN=[-sin(0.6284*T);0.6*cos(0.6284*T)];
SP1=Fd*S+Gd*RIN;       %ecuación de seguimiento
V=-B'*SP1;             %vector de mando
S=SP1;
T=T+Ts;
P=PP1;
H=Bd'*P;
X=Ts*R+H*Bd;
Y=H*Ad;
K=Y/X;                 %valor de la ganancia de realimentación al tiempo
                        %(N-(k+1))T

end
```

## **ANEXO D**

### **ALGORITMO DE LA SOLUCIÓN EN MATLAB DEL FILTRO KALMAN EN TIEMPO DISCRETO**

%%%%%%%%%% FILTRO KALMAN EN TIEMPO DISCRETO %%%%%%%%%%

%%%%%%%%%% SISTEMA EN FORMA DISCRETA %%%%%%%%%%

clear all

```
Ad=[0.8150 0.08;-0.08 0.8150];
Bd=[0.0025;0.0450];
CDd=[0.0025;0.0450];
C=[1 0];
Q=0.09; %covarianza ruido proceso
R=0.025; %covarianza ruido medición
ID=[1 0;0 1];
T=0.05; % tiempo de muestreo
```

%%%%%%%%%% CONDICIONES INICIALES DEL SISTEMA (PARA SIMULAR) %%%%

```
t=0:T:10;
u=sin(t);
x0=[0;0];
x=x0;
y=C*x0;
%condiciones iniciales para el filtro de kalman
xh=[0;0];
xp=xh;
```

%%%%%%%%%% INICIO DEL CÁLCULO DE LA GANANCIA KALMAN %%%%%%%%%%

```
P1=ID; %matriz covarianza sistema inicial
P2=(Ad*P1*Ad')+(CDd*Q*CDd');
X=P2*C';
Y=(C*P2*C')+R;
K=X/Y;
P3=(ID-(K*C))*P2;
```

for k=1:200

```
x(:,k+1)=Ad*x(:,k)+Bd*u(k)+CDd*sqrt(Q)*randn;
y(k+1)=C*x(:,k+1)+sqrt(R)*randn;
xp(:,k+1)=Ad*xh(:,k)+Bd*u(k); % estima a priori
P1=P3; % cálculo de la ganancia de Kalman
```

```

P2=(Ad*P1*Ad'+(CDd*Q*CDd'));
X=P2*C';
Y=(C*P2*C')+R;
K=X/Y;
P3=(ID-(K*C))*P2;
xh(:,k+1)=xp(:,k+1)+K*(y(k+1)-C*xp(:,k+1));           % estima posteriori

end

%%%%%%%%%%%%%% IMPRESIÓN GRÁFICA %%%%%%%%%%%%%%%

plot(t,x,'red')
hold on
plot(t,xp,'blue')
hold off

```

## **ANEXO E**

**ALGORITMO DEL CONTROLADOR DIGITAL BASADO EN EL  
MÉTODO DE ESPACIO DE ESTADOS UTILIZANDO EL  
REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO GAUSSIANO**

```
clear all
```

```
%%%%%%%%%%%%%% MODELO EN TIEMPO CONTINUO %%%%%%%%%%%%%%%
```

```
Ac=[0 1;0 0];      %Matriz A
Bc=[0;1];          %Matriz B
C=[1 0];           %Matriz C
```

```
%%%%%%%%%%%%%% LECTURA DE PARÁMETROS %%%%%%%%%%%%%%%
```

```
Qe=[10 0;0 1];
Re=1;
ID=eye(2);          %matriz identidad 2x2
Ts=0.2;             %tiempo de muestreo
Cdc=[0;1];
R=0.25;
Q=0.09;
```

```
%%%%%%%%%%%%%% DISCRETIZACION DEL SISTEMA %%%%%%%%%%%%%%%
```

```
[Ad,Bd]=c2d(Ac,Bc,Ts);      %matrices A & B de continuo a discreto
[Ad,CDd]=c2d(Ac,Cdc,Ts);   %matriz Cdc de continua a discreta
```

```
%%%%%%%%%%%%%% DISEÑO LQR %%%%%%%%%%%%%%%
```

```
[Kd,P]=lqrd(Ac,Bc,Qe,Re,Ts) %función lqrd genera ganancia de realimentación
```

```
% SOLUCIÓN DISCRETA DE LAS ECUACIONES DEL FILTRO KALMAN %
```

```
P1=ID;
P2=(Ad*P1*Ad')+(CDd*Q*CDd');
X=P2*C';
Y=(C*P2*C')+R;
K=X/Y;
P3=(ID-(K*C))*P2;
```

```
for i=1:200
```





## ÍNDICE DE FIGURAS

| CONTENIDO | PÁGINA |
|-----------|--------|
|-----------|--------|

### CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

|   |    |
|---|----|
| Figura. 2.1. Regulador Óptimo .....   | 15 |
| Figura. 2.2. Sistema de Seguimiento Óptimo.....   | 18 |
| Figura. 2.3. Integración de dos sistemas de medición para obtener una óptima estimación ..... | 26 |
| Figura. 2.4. Diagrama de flujo del filtro Kalman .....  | 28 |
| Figura. 2.5. Planta con disturbio y medición de ruido .....                                   | 31 |
| Figura. 2.6. Filtro Kalman .....  | 32 |
| Figura. 2.7. Sistema de control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG) .....                       | 33 |
| Figura. 2.8. Sistema en lazo cerrado con sus componentes demarcados.....                      | 33 |

### CAPÍTULO 3: ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES ÓPTIMOS DIGITALES EN EL ESPACIO DE ESTADOS

|  |    |
|--|----|
| Tabla.3.2.2.1. Parámetros del levitador magnético tomado experimentalmente .....                           | 45 |
| Figura. 3.3.1. Salida del sistema, Regulador LQT .....   | 54 |
| Figura 3.4.1. Estados verdaderos y estados estimados del sistema .....                                     | 61 |
| Figura. 3.4.2. Estados verdaderos y estados estimados del sistema simulado con la ganancia de Kalman ..... | 62 |

## CAPÍTULO 4: RESULTADOS DE SIMULACIÓN

|  |    |
|--|----|
| Figura. 4.2.1. Diagrama del Regulador Lineal Cuadrático del D. Integrador .....  | 69 |
| Figura. 4.2.2. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador .....  | 70 |
| Figura. 4.2.3. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación $Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .....  | 71 |
| Figura. 4.2.4. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación $Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ ..... | 71 |
| Figura. 4.2.5. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ .....   | 72 |
| Figura. 4.2.6. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ .....  | 72 |
| Figura. 4.2.7. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación $R = 5$ .....   | 73 |
| Figura. 4.2.8. Respuesta del Regulador Lineal Cuadrático para un Doble Integrador, con matriz de ponderación $R = 0.5$ .....   | 74 |
| Figura. 4.3.1. Diagrama del Regulador Lineal Cuadrático para un sistema levitador magnético .....  | 75 |
| Figura. 4.3.2. Parámetros de la planta .....   | 76 |
| Figura. 4.3.1. Esquema animado de la planta de levitación magnética .....  | 76 |
| Figura. 4.3.2. Posición de la esfera con respecto al tiempo.....   | 77 |
| Figura. 4.3.3. Velocidad de la esfera con respecto al tiempo .....   | 77 |
| Figura. 4.3.4. Corriente de la bobina con respecto al tiempo.....  | 78 |
| Figura. 4.3.4. Señal de control con respecto al tiempo .....   | 78 |
| Figura. 4.4.1. Diagrama del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano del Doble Integrador .....   | 79 |
| Figura. 4.4.2. Respuesta del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano para un Doble Integrador.....   | 79 |

|   |    |
|---|----|
| Figura. 4.4.4. Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano para un Doble Integrador, con perturbación ..... | 80 |
| Figura. 4.4.4. Respuesta del Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano para un Doble Integrador.....      | 81 |

25 de Junio del 2010

---

Ing. Víctor Proaño

COORDINADOR DE LA CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

---

Edgar Francisco Merino Ruiz  
AUTOR