

CAPITULO 4

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS DE COMPUESTOS LAMINADOS

4.1 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

4.1.1 INTRODUCCIÓN

El método del elemento finito ha llegado a ser una herramienta poderosa en la solución numérica de un amplio rango de problemas de ingeniería. Las aplicaciones van desde el análisis por deformación y esfuerzo de automóviles, aeronaves, edificios y estructuras de puentes hasta el análisis de los campos del flujo de calor, de fluidos, magnético, filtraciones y otros problemas de flujo. Con los avances en la tecnología de las computadoras y de los sistemas CAD, pueden modelarse problemas complejos con relativa facilidad. En una computadora pueden probarse varias configuraciones alternas antes de construir el primer prototipo. Todo esto sugiere que debemos modernizarnos empleando estos desarrollos para entender la teoría básica, las técnicas de modelado y los aspectos computacionales del método del elemento finito. En este método de análisis, una región compleja que define un continuo se discretiza en formas geométricas simples llamadas elementos finitos. Las propiedades del material y las relaciones gobernantes, son consideradas sobre esos elementos y expresadas en términos de valores desconocidos en los bordes del elemento. Un proceso de ensamble, cuando se consideran debidamente las cargas y restricciones, da lugar a un conjunto de ecuaciones. La solución de esas ecuaciones nos da el comportamiento aproximado del continuo.

4.1.2 ASPECTOS HISTÓRICOS

Las ideas básicas del método del elemento finito se originaron gracias a los avances en el análisis estructural de las aeronaves. En 1941, Hrenikoff presentó una solución de problemas de la elasticidad usando el "método de trabajo del

marco". En un artículo publicado en 1943, Courant usó interpolación polinomial por partes sobre subregiones triangulares para modelar problemas de torsión. Turner y otros investigadores obtuvieron matrices de rigidez para armaduras, vigas y otros elementos y presentaron sus hallazgos en 1956. Clough fue el primero en acuñar y emplear el término elemento finito en 1960.

En los primeros años de la década de 1960, los ingenieros usaron el método para obtener soluciones aproximadas en problemas de análisis de esfuerzos, flujo de fluidos, transferencia de calor y otras áreas. Un libro de Argyris, publicado en 1955, sobre teoremas de energía y métodos matriciales, cimentó métodos adicionales en los estudios del elemento finito. El primer libro sobre elementos finitos por Zienkiewicz y Chung fue publicado en 1967. A finales de la década de 1960 y principios de la siguiente, el análisis por elemento finito se aplicó a problemas no lineales y de grandes deformaciones. El libro de Oden sobre continuos no lineales apareció en 1972.

Las bases matemáticas se fijaron en la década de 1970. Nuevo desarrollo de elementos, estudios de convergencia y otras áreas afines pertenecen a esta categoría.

Actualmente, los avances en computadoras mainframe (las supercomputadoras) y la disponibilidad de poderosas microcomputadoras han puesto este método al alcance de estudiantes e ingenieros que trabajan en industrias pequeñas.

4.1.3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES PARA EL DESARROLLO DEL ELEMENTO FINITO

4.1.3.1 ESFUERZOS Y EQUILIBRIO DE CARGAS

En la figura 4.1 se muestra un cuerpo tridimensional que ocupa un volumen V y tiene una superficie S . Los puntos en el cuerpo están identificados por las coordenadas x , y , z . La frontera del cuerpo se restringe a la región donde se especifica el desplazamiento. Sobre una parte de la frontera se aplica una fuerza

distribuida por unidad de área T , llamada también tracción. Debido a la acción de la fuerza se deforma el cuerpo.

La deformación en un punto $x (= [x, y, z]^T)$ está dada por las tres componentes de su desplazamiento:

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T \quad (4.1)$$

La fuerza distribuida por unidad de volumen, por ejemplo, el peso por unidad de volumen, es el vector f dado por:

$$\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T \quad (4.2)$$

En la figura 4.1 se muestra la fuerza de cuerpo actuando sobre el volumen elemental dV . La tracción superficial T puede darse por el valor de sus componentes en puntos sobre la superficie:

$$\mathbf{T} = [T_x, T_y, T_z]^T \quad (4.3)$$

Ejemplos de tracción son las fuerzas de contacto distribuidas y la acción de la presión. Una carga P actuando en un punto i se representa por sus tres componentes

$$\mathbf{P}_i = [P_x, P_y, P_z]_i^T \quad (4.4)$$

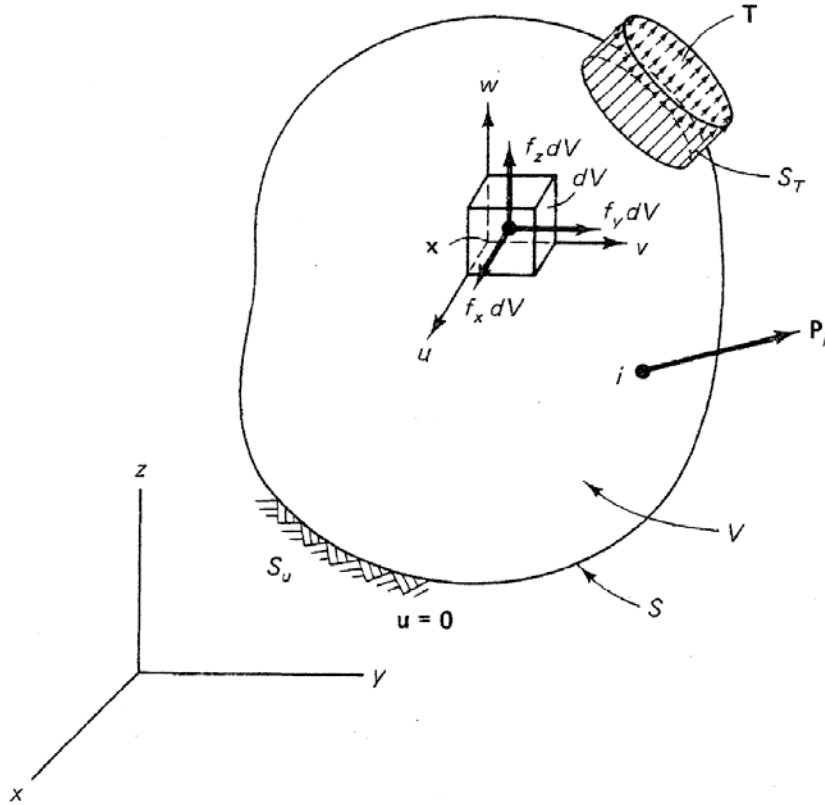


Figura 4.1 Cuerpo tridimensional

En la figura 4.2 se muestran los esfuerzos que actúan sobre el volumen elemental dV . Cuando el volumen dV “se contrae” a un punto, el tensor de esfuerzo se representa colocando sus componentes en una matriz simétrica (3 X 3). Sin embargo, se pueden representar los esfuerzos por medio de sus seis componentes independientes como sigue:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \quad (4.5)$$

donde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son esfuerzos normales y $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ son esfuerzos cortantes. Considerando el equilibrio del volumen elemental mostrado en la figura 4.2. Primero se determinan las fuerzas sobre las caras multiplicando los esfuerzos por las áreas correspondientes.

Tomando en cuenta $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$ y recordando que $dV = dx dy dz$, obtenemos las ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \quad (4.8)$$

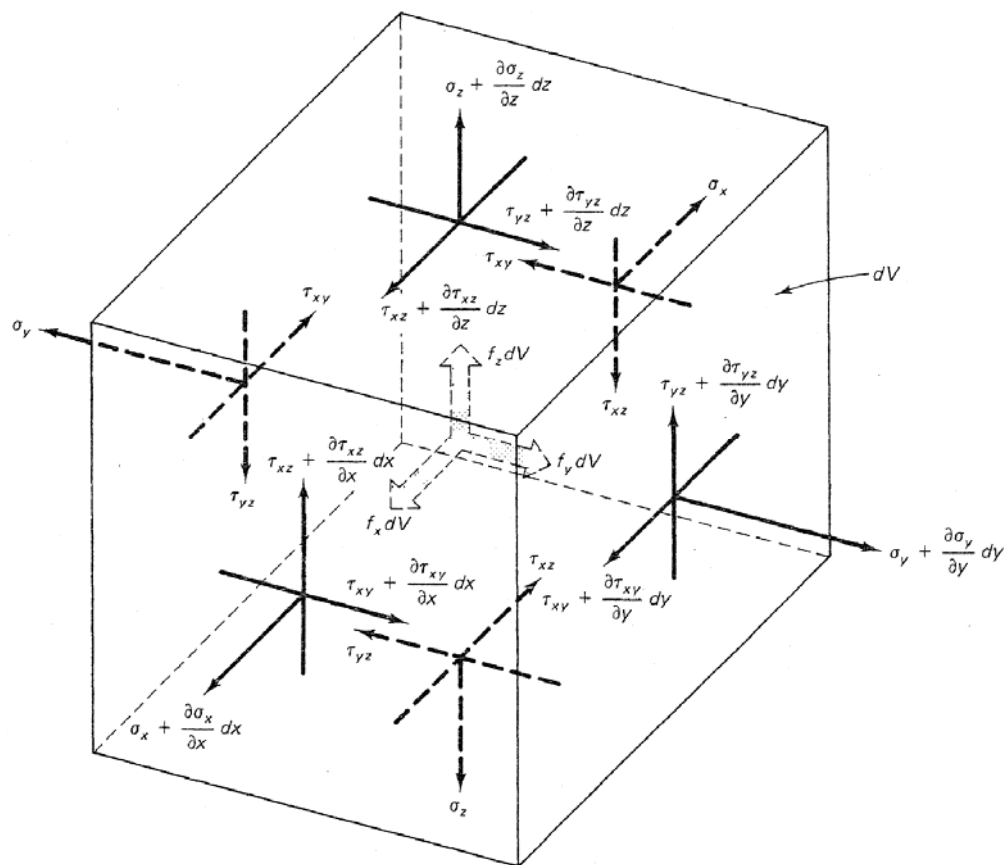


Figura 4.2 Equilibrio de un volumen elemental

4.1.3.2 CONDICIONES DE FRONTERA

De acuerdo a la figura 4.1, se puede observar que hay condiciones de desplazamiento en la frontera y condiciones de carga en la superficie. Si \mathbf{u} se especifica sobre parte de la frontera denotada por S_u , se tiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ Sobre } S_u \quad (4.9)$$

También se puede considerar condiciones de frontera tales como $\mathbf{u} = \mathbf{a}$, donde \mathbf{a} es un desplazamiento.

Se considera ahora el equilibrio del tetraedro elemental $ABCD$, mostrado en la figura 4.3, donde DA , DB y DC son paralelas a los ejes x , y y z , respectivamente, y dA es el área definida por los vértices ABC . Si $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ es la normal unitaria a dA , entonces el área $BDC = n_x dA$, el área $ADC = n_y dA$ y el área $ADB = n_z dA$. La consideración del equilibrio a lo largo de los tres ejes coordenados da:

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = T_x \quad (4.10)$$

$$\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = T_y \quad (4.11)$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = T_z \quad (4.12)$$

Esas condiciones deben satisfacerse sobre la frontera S_i , donde se aplican las tracciones. En esta descripción, las cargas puntuales deben tratarse como cargas distribuidas sobre áreas pequeñas pero finitas.

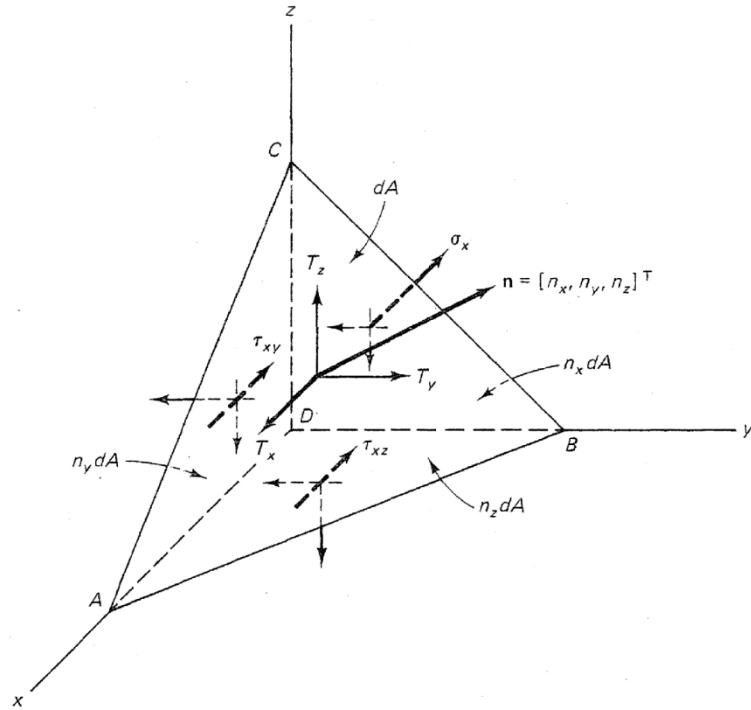


Figura 4.3 Un volumen elemental tipo tetraédrico en la superficie

En la ecuación (4.5) representamos las deformaciones unitarias en una forma vectorial que corresponde a los esfuerzos:

$$\epsilon = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T \quad (4.13)$$

donde $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ son las deformaciones unitarias normales y: $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ son las deformaciones angulares unitarias cortantes.

La figura 4.4 da la deformación de la cara $dx - dy$ para pequeñas deformaciones, que son las consideradas aquí. Tomando en cuenta también las otras caras, podemos escribir:

$$\epsilon = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (4.14)$$

Estas relaciones entre deformaciones unitarias se cumplen para deformaciones pequeñas.

4.1.3.3 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN UNITARIA

Para materiales elásticos lineales, las relaciones esfuerzo-deformación unitaria provienen de la ley de Hooke generalizada. Para materiales isotrópicos, las dos propiedades del material son el módulo de Young (o módulo de elasticidad) E y la relación de Poisson ν . Si se considera un cubo elemental dentro del cuerpo, la ley de Hooke da:

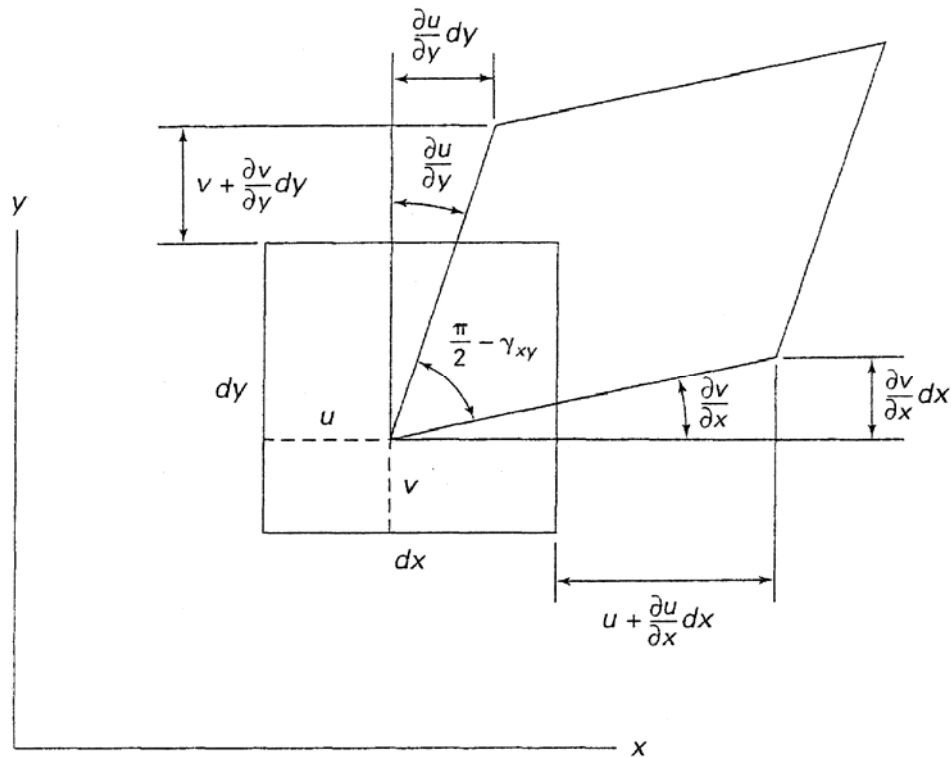


Figura 4.4 Superficie elemental deformada

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (4.15)$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

El módulo de corte (o módulo de rigidez) G , está dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.16)$$

De las relaciones de la ley de Hooke (ecuación 4.15), se puede notar que

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4.17)$$

Sustituyendo $(\sigma_y + \sigma_z)$ y otras relaciones en la ecuación (4.15), se obtienen las relaciones inversas

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (4.18)$$

Donde \mathbf{D} es la matriz simétrica de (6 X 6) del material dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

4.1.3.4 ESFUERZO DE VON MISES

El esfuerzo de von Mises se usa como un criterio para determinar la aparición de una falla en materiales dúctiles. El criterio de falla establece que el esfuerzo de von Mises o debe ser menor que el esfuerzo de fluencia o. del material. En forma de desigualdad, el criterio puede escribirse como

$$\sigma_{VM} \leq \sigma_Y \quad (4.20)$$

El esfuerzo de von Mises σ_{VM} esta dado por:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \quad (4.21)$$

donde I_1 e I_2 son las primeras dos invariantes del tensor de esfuerzo. Para el estado general de esfuerzo, expresado por la ecuación 4.5, I_1 e I_2 están dados por

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (4.22)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2$$

En términos de los esfuerzos principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, las dos invariantes pueden escribirse como

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (4.23)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

Es fácil verificar que el esfuerzo de von Mises dado en la ecuación 4.21 puede expresarse en la forma

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (4.24)$$

Para el estado de esfuerzo plano, se tiene

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y \quad (4.25)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2$$

Y para la deformación unitaria plana

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (4.26)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2$$

Donde $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$

4.2 RESOLUCION UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

4.2.1 FORMULACION DEL ELEMENTO FINITO

Previo a la realización de cualquier cálculo se procede a dividir el volumen en elementos más pequeños como cubos, tetraedros, etc. Para el ejemplo se lo hará en tetraedros de cuatro nodos. A cada nodo se le asigna un número y se lee en las coordenadas x, y, z . En la figura 4.5 se muestra un elemento típico e .

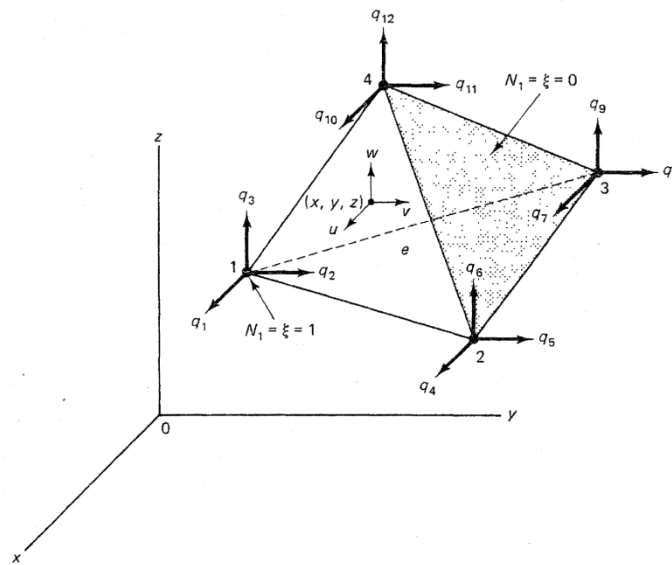


Figura 4.5 Elemento tetraédrico

La conectividad puede ser definida como se muestra en la tabla 4.1.

Tabla 4-1 CONECTIVIDAD

Elemento No.	Nodos			
	1	2	3	4
e	I	J	K	L

Fuente: Introducción Al estudio de elementos finitos de Ingeniería

A cada nodo local i se le asigna los tres grados de libertad $q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}$ y al correspondiente nodo global I le asignamos $Q_{3I-2}, Q_{3I-1}, Q_{3I}$. Los vectores de desplazamiento del elemento y global son entonces

$$q = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_{12}]^T \quad (4.27)$$

$$Q = [Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N]^T \quad (4.28)$$

donde N es el número total de grados de libertad de la estructura, a razón de tres por nodo. Se definen las cuatro funciones de forma tipo Lagrange N_1, N_2, N_3 y N_4 , gracias a las cuales se podrá transformar a partir de un sistema de coordenadas globales x, y, z , a un sistema de coordenadas locales ξ, η, ζ , donde la función de forma N_i tiene un valor de 1 en el nodo i y es cero en los otros tres nodos. Específicamente, N_1 es 0 en los nodos 2, 3 y 4 y crece linealmente hasta 1 en el nodo 1. Usando el elemento maestro mostrado en la figura 4.6, se puede definir las funciones de forma como

$$N_1 = \xi \quad N_2 = \eta \quad N_3 = \zeta \quad N_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad (4.29)$$

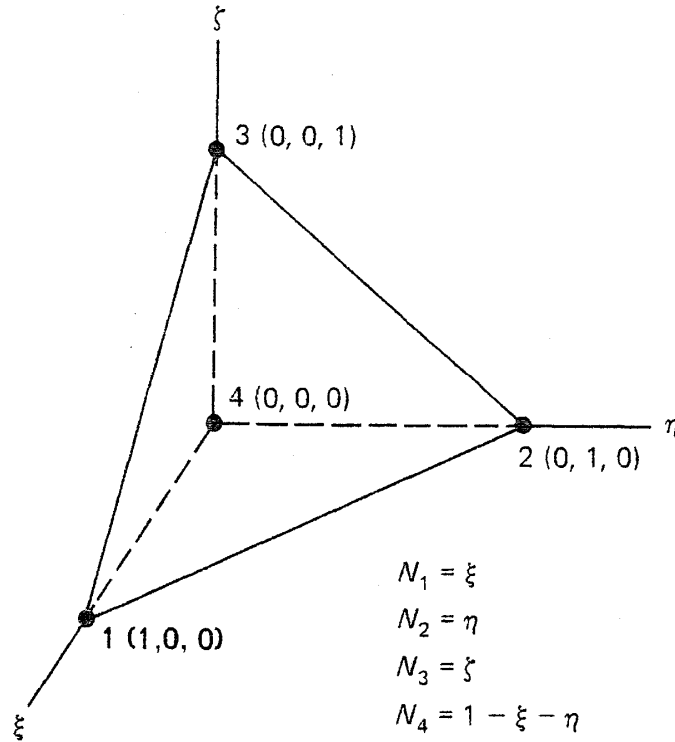


Figura 4.6 Elemento maestro para funciones de forma

Los desplazamientos u, v, w en x pueden escribirse en términos de los valores nodales desconocidos como

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{4.30}$$

donde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Como puede verse que las funciones de forma dadas por la ecuación 4.29 pueden usarse para definir las coordenadas x, y, z del punto en el que se interpolan los desplazamientos u, v, w . La transformación isoparamétrica está dada por

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \tag{4.32}$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4$$

que, al sustituir los valores N_1 dados por la ecuación 4.29 y usar la notación $x_{ij} = x_i - x_j, y_{ij} = y_i - y_j, z_{ij} = z_i - z_j$, conduce a

$$\begin{aligned} x &= x_4 + x_{14}\xi + x_{24}\eta + x_{34}\zeta \\ y &= y_4 + y_{14}\xi + y_{24}\eta + y_{34}\zeta \\ z &= z_4 + z_{14}\xi + z_{24}\eta + z_{34}\zeta \end{aligned} \quad (4.33)$$

Usando la regla de la cadena para derivadas parciales, en este caso u , se obtiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Las derivadas parciales con respecto a ξ, η, ζ , están relacionadas entonces con las derivadas x, y, z por medio de la relación anterior.

El jacobiano \mathbf{J} de la transformación está dado por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{24} & y_{24} & z_{24} \\ x_{34} & y_{24} & z_{34} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Se puede notar aquí que

$$\det \mathbf{J} = x_{14}(y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24}) + y_{14}(z_{24}x_{34} - z_{34}x_{24}) + z_{14}(x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24}) \quad (4.36)$$

Por lo cual el volumen del elemento es

$$Ve = \left| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \right| \quad (4.37)$$

Como $\det \mathbf{J}$ es constante,

$$Ve = |\det \mathbf{J}| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} d\xi d\eta d\zeta \quad (4.38)$$

Y utilizando la formula integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \xi^m \eta^n \zeta^p d\xi d\eta d\zeta = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+3)!} \quad (4.39)$$

Y se obtiene

$$Ve = \frac{1}{6} |\det \mathbf{J}| \quad (4.40)$$

La relación inversa correspondiente a la ecuación 4.34 está dada por

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

donde \mathbf{A} es la inversa de la matriz jacobiana \mathbf{J} dada en la ecuación 4.35:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24} & y_{34}z_{14} - y_{14}z_{34} & y_{14}z_{24} - y_{24}z_{14} \\ z_{24}x_{34} - z_{34}x_{24} & z_{34}x_{14} - z_{14}x_{34} & z_{14}x_{24} - z_{24}x_{14} \\ x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24} & x_{34}y_{14} - x_{14}y_{34} & x_{14}y_{24} - x_{24}y_{14} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Usando las relaciones deformación unitaria-desplazamiento de la ecuación 4.14, la relación entre las derivadas en x, y, z y ξ, η, ζ de la ecuación 4.41 y el campo supuesto de desplazamiento $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$ de la ecuación 4.30, se obtiene

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (4.43)$$

Donde \mathbf{B} es la matriz (6 x12) dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -\tilde{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -\tilde{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -\tilde{A}_3 \\ 0 & A_{31} & A_{21} & 0 & A_{32} & A_{22} & 0 & A_{33} & A_{23} & 0 & -\tilde{A}_3 & -\tilde{A}_2 \\ A_{31} & 0 & A_{11} & A_{32} & 0 & A_{12} & A_{33} & 0 & A_{13} & -\tilde{A}_3 & 0 & -\tilde{A}_1 \\ A_{21} & A_{11} & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & A_{23} & A_{23} & 0 & -\tilde{A}_2 & -\tilde{A}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Donde $\tilde{A}_1 = A_{11} + A_{12} + A_{13}$, $\tilde{A}_2 = A_{21} + A_{22} + A_{23}$, y $\tilde{A}_3 = A_{31} + A_{32} + A_{33}$. Todos los términos de B son constantes. La ecuación 4.43 da entonces deformaciones unitarias constantes después de que se calculan los desplazamientos nodales.

4.2.1.1 Rigidez del elemento

La energía de deformación unitaria, denominada energía cinética de las deformaciones unitarias del elemento en el potencial total está dada por

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{1}{2} \int_e \epsilon^T D \epsilon dV \\
 &= \frac{1}{2} q^T B^T D B q \int_e dV \\
 &= \frac{1}{2} q^T V_e B^T D B q \quad (4.45) \\
 &= \frac{1}{2} q^T k^e q
 \end{aligned}$$

donde la matriz de rigidez del elemento k^e esta dada por

$$k^e = V_e B^T D B \quad (4.46)$$

donde V_e es el volumen del elemento dado por $\frac{1}{6} |\det J|$

4.2.1.2 Términos de fuerza

El término de “potencial” asociado con la fuerza de cuerpo es

$$\begin{aligned}
 \int_e u^T f dV &= q^T \iiint N^T f \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (4.47) \\
 &= q^T f^e
 \end{aligned}$$

Usando la fórmula de integración en la ecuación 4.8, se obtiene

$$f^e = \frac{V_e}{4} [f_x, f_y, f_z, f_x, f_y, f_z, \dots, f_z]^T \quad (4.48)$$

En la ecuación anterior, el vector de fuerza de cuerpo del elemento f es de dimensión 12 X 1.

Note que $V e f_x$ es la componente x de la fuerza de cuerpo que se distribuye a los grados de libertad q_1, q_4, q_7 y q_{10} .

Asi mismo se considera ahora la tracción distribuida uniformemente sobre la superficie de frontera. La superficie de frontera de un tetraedro es un triángulo. Sin pérdida de generalidad, si A_e es la superficie de frontera sobre la que se aplica la tracción, formada por los nodos locales 1, 2 y 3 , entonces

$$\int_{A_e} u^T T dA = q^T \int_{A_e} N^T T dA = q^T T^e \quad (4.49)$$

El vector de carga de tracción en el elemento T^e está dado por

$$T^e = \frac{A_e}{3} [T_x, T_y, T_z, T_x, T_y, T_z, T_x, T_y, T_z, 0, 0, 0] \quad (4.50)$$

4.2.2 CALCULOS DE LOS ESFUERZOS

Después de resolver las ecuaciones anteriores pueden obtenerse los desplazamientos q nodales del elemento. Como $\sigma = D\epsilon$ y $\epsilon = Bq$, los esfuerzos del elemento están dados por

$$\sigma = DBq \quad (4.51)$$

Los tres esfuerzos principales pueden calcularse usando las relaciones dadas abajo mediante el esfuerzo de Von Mises. Las tres invariantes del tensor esfuerzo (3 X 3) son

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (4.52)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yz} \tau_{xz} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

4.2.3 PREPARACIÓN DE LA MALLA

Si bien las regiones tridimensionales complejas pueden llenarse en forma efectiva por elementos tetraédricos, en forma similar a como llenan los elementos triangulares una región bidimensional, es tedioso llevar a cabo la preparación manual de los datos. Para superar esto en regiones simples, es más fácil dividir las regiones en bloques de ocho nodos. El cubo puede dividirse en seis tetraedros, como se muestra en la figura 4.7, con las conectividades como se dan en la tabla 4.2.

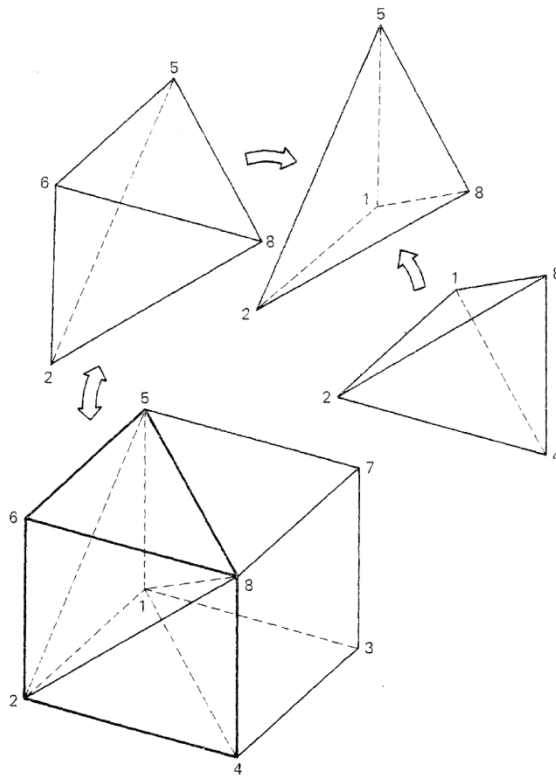


Figura 4.7 División de un cubo en 6 tetraedros

Tabla 4-2 Posiciones nodales de los tetraedros en el cubo

Elemento No.	Nodos			
	1	2	3	4
1	1	2	4	8
2	1	2	8	5
3	2	8	5	6
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

Fuente: Introducción Al estudio de elementos finitos de Ingeniería

El uso del $\det \mathbf{J}$ en el cálculo de B en la ecuación 4.43 y el uso de $\det \mathbf{J}$ en la estimación del Volumen del elemento V_e , nos permite usar los números nodales del elemento en cualquier orden.

Entre los elementos sólidos, esto es válido para tetraedros de cuatro nodos. ya que cada nodo está conectado a los otros tres. Algunos programas pueden necesitar esquemas de numeración consistentes.

4.2.4 ELEMENTOS HEXAÉDRICOS Y ELEMENTOS DE ORDEN SUPERIOR

Para definir la conectividad en los elementos hexaédricos debe seguirse un esquema consistente de numeración de los nodos. Para un hexaedro o elemento ladrillo de ocho nodos, se considerará el mapeo sobre un cubo con lados de 2 unidades colocado simétricamente con coordenadas ξ, η, ζ , como se muestra en la figura 4.8.

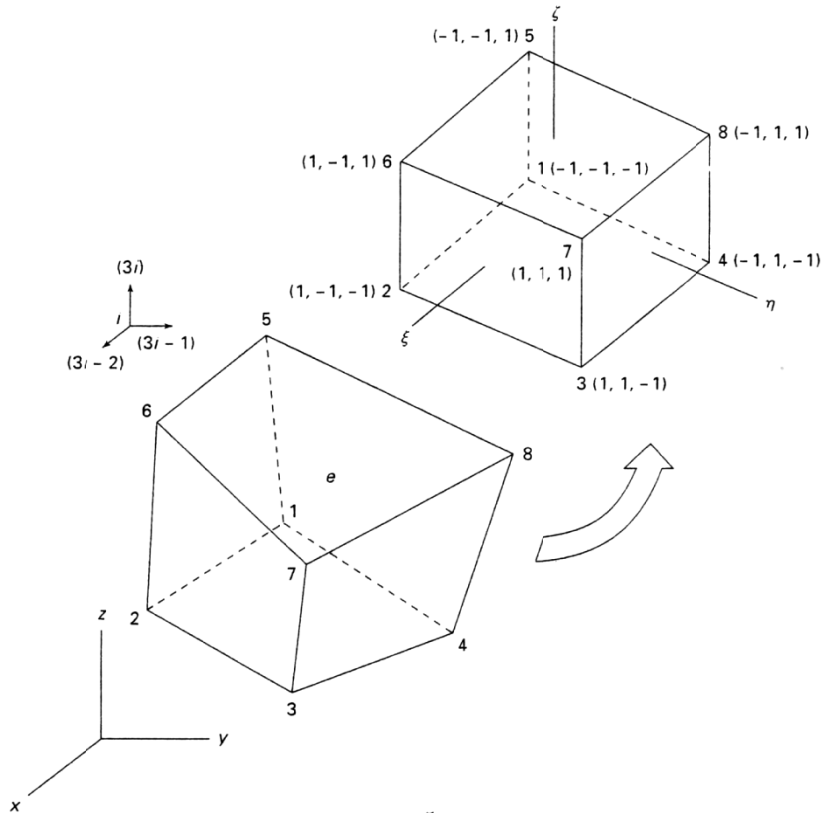


Figura 4.8 Elemento hexaédrico

donde (ξ, η, ζ) representa las coordenadas del nodo i del elemento en el sistema (ξ, η, ζ) . Los desplazamientos nodales del elemento están representados por el vector

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_{24}]^T \quad (4.53)$$

Se utilizan las funciones de forma N , para definir los desplazamientos en cualquier punto dentro del elemento en términos de sus valores nodales:

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_4 + \dots + N_8 q_{22} \\ v &= N_1 q_2 + N_2 q_5 + \dots + N_8 q_{23} \\ w &= N_1 q_3 + N_2 q_6 + \dots + N_8 q_{24} \end{aligned} \quad (4.54)$$

También,

$$x = N1x_1 + N2x_2 + \dots + N8x_8$$

$$y = N1y_1 + N2y_2 + \dots + N8y_8 \quad (4.55)$$

$$z = N1z_1 + N2z_2 + \dots + N8z_8$$

La matriz de rigidez del elemento está dada por

$$k^e = \iiint_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\det \mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (4.56)$$

donde se ha usado $dv = |\det \mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta$ y \mathbf{J} es la matriz jacobiana de (3 X 3). La integración en la ecuación anterior se lleva a cabo numéricamente usando la cuadratura de Gauss.

4.2.5 EJEMPLO DE APLICACIÓN

En la figura 4.9 se muestra un cilindro largo de diámetro interno de 80mm y diámetro de 120mm que cabe bien ajustado en toda su longitud dentro de un agujero. El cilindro se somete entonces a una presión interna de 2MPa. Usando dos elementos sobre una longitud de 10mm, como se muestra, encuentre los desplazamientos en el radio interior.

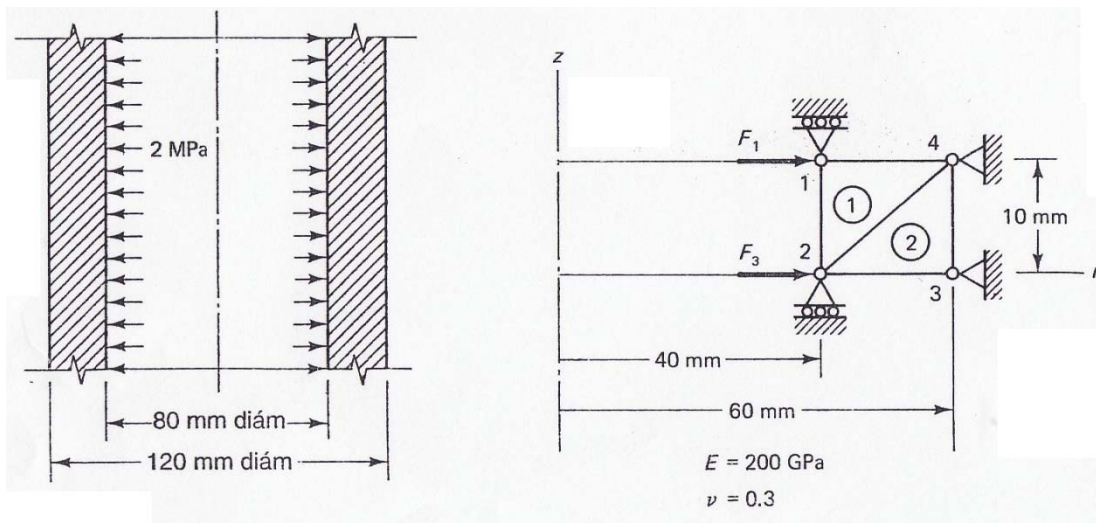


Figura 4.9 Detalle y disposición de las fuerzas en el cilindro

Solución:

Tabla 4-3 Conectividad de los elementos

	CONECTIVIDAD		
ELEMENTO	1	2	3
1	1	2	4
2	2	3	4

Elaboración: Christian León, Alex Vásquez

Tabla 4-4 Coordenadas ubicación de cada nodo

	COORDENADAS	
NODO	R	S
1	40	10
2	40	0
3	60	0
4	60	10

Elaboración: Christian León, Alex Vásquez

Las unidades de longitud se darán en milímetros, en newtons para fuerza y en megapascales para esfuerzos y E. Esas unidades son consistentes. Al sustituir E= 200000 MPa y V= 0.3, resulta

$$D = \begin{bmatrix} 2.69 \times 10^5 & 1.15 \times 10^5 & 0 & 1.15 \times 10^5 \\ 1.15 \times 10^5 & 2.69 \times 10^5 & 0 & 1.15 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 0.77 \times 10^5 & 0 \\ 1.15 \times 10^5 & 1.15 \times 10^5 & 0 & 2.69 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Para ambos elementos, $\det J = 200\text{mm}^2$, $A_e = 100\text{mm}^2$. De las ecuaciones anteriores, las fuerzas F_1 y F_3 están dadas por:

$$F_1 = F_3 = \frac{2\pi r_1 l_e p_i}{2} = \frac{2\pi(40)(10)(2)}{2} = 2514\text{N}$$

Primero se obtiene las matrices B que relacionan las deformaciones unitarias con los desplazamientos nodales.

Para el elemento 1, $\bar{r} = \frac{1}{3}(40 + 40 + 60) = 46.67\text{mm}$

$$\bar{B}^1 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & -0.1 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0.0071 & 0 & 0.0071 & 0 & 0.0071 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2, $\bar{r} = \frac{1}{3}(40 + 60 + 60) = 53.33\text{mm}$

$$\bar{B}^2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.01 \\ 0 & -0.05 & -0.1 & 0.05 & 0.1 & 0 \\ 0.00625 & 0 & 0.00625 & 0 & 0.00625 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices esfuerzo desplazamiento unitario del elemento se obtienen multiplicando **DB**:

$$D\bar{B}^1 = 10^4 \begin{bmatrix} -1.26 & 1.15 & 0.082 & -1.15 & 1.43 & 0 \\ -0.49 & 2.69 & 0.082 & -2.69 & 0.657 & 0.01 \\ 0.77 & -0.385 & -0.77 & 0 & 0 & 0.385 \\ -0.384 & 1.15 & 0.191 & -1.15 & 0.766 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D\bar{B}^2 = 10^4 \begin{bmatrix} -1.27 & 0 & 1.42 & -1.15 & 0.072 & 1.15 \\ -0.503 & 0 & 0.647 & -2.69 & 0.072 & 2.69 \\ 0.77 & -0.385 & -0.77 & 0.385 & 0.77 & 0 \\ -0.407 & 0 & 0.743 & -1.15 & 0.168 & 1.15 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez se obtienen encontrando $2\pi \bar{r} A_e \bar{B}^T D \bar{B}$ para cada elemento.

Gdl global → 1 2 3 4 7 8

$$\llbracket k^1 = 10^7 = \begin{bmatrix} 4.03 & -2.58 & -2.34 & 1.45 & -1.932 & 1.13 \\ & 8.45 & 1.37 & -7.89 & 1.93 & -0.565 \\ & & 2.30 & -0.24 & 0.16 & -1.13 \\ & & & 7.89 & -1.93 & 0 \\ \textit{Simetrica} & & & & 2.25 & 0 \\ & & & & & 0.565 \end{bmatrix}$$

Gdl global → 3 4 5 6 7 8

$$\llbracket k^2 = 10^7 = \begin{bmatrix} 2.05 & 0 & -2.22 & 1.69 & -0.085 & 1.69 \\ & 0.645 & 1.29 & -0.645 & -1.29 & 0 \\ & & 5.11 & -3.46 & -2.42 & 2.17 \\ & & & 9.66 & 1.05 & -9.01 \\ \textit{Simetrica} & & & & 2.62 & 0.241 \\ & & & & & 9.01 \end{bmatrix}$$

Usando el enfoque de eliminación, al ensamblar las matrices con referencia a los grados de libertad 1 y 3, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 4.03 & -2.34 \\ -2.34 & 4.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2514 \\ 2514 \end{Bmatrix}$$

$$Q_1 = 0.014 \times 10^{-2} mm$$

$$Q_3 = 0.0133 \times 10^{-2} mm$$

CALCULO DE LOS ESFUERZOS.

Del conjunto de desplazamientos nodales ya obtenidos, pueden encontrarse los desplazamientos q nodales del elemento por medio de la conectividad. Entonces, usando la relación esfuerzo-deformación unitaria y la relación deformación unitaria-desplazamiento, se obtiene la ecuación 4.51

$$\alpha = DBq$$

Donde \bar{B} es B dada en la ecuación 4.51, evaluada en el centroide del elemento. También se puede notar que σ_θ es un esfuerzo principal. Los dos esfuerzos principales σ_1, σ_2 correspondientes a $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_{rz}$ pueden calcularse usando el círculo de Mohr.

Entonces para calcular los esfuerzos en el elemento del problema se necesita encontrar $\sigma^{eT} = [\sigma_r, \sigma_z, T_{rz}, \sigma_\theta]$ e para cada elemento. De la conectividad establecida anteriormente

$$q^1 = [0.0140, 0, 0.0133, 0, 0, 0]^T \times 10^{-2}$$

$$q^2 = [0.0133, 0, 0, 0, 0, 0]^T \times 10^{-2}$$

Usando el producto de matrices DB^e y q

$$\sigma^e = DB^e q$$

Por lo que se obtiene

$$\sigma^1 = [-166, -58.2, 5.4, 28.4]^T \times 10^{-2} \text{ MPa}$$

$$\sigma^2 = [-169.3, -66.9, 0, -54.1]^T \times 10^{-2} \text{ MPa}$$

4.3 ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DISEÑADA UTILIZANDO EL SOFTWARE ANSYS

4.3.1 PROPIEDADES DE LOS MATERIALES COMPUESTOS A UTILIZAR

Buscando la posibilidad de que este prototipo pueda construirse se probará con distintos materiales disponibles en el mercado local. Para esto se cuenta con las siguientes tablas de propiedades mecánicas, tanto de fibras (tabla 4.5) como de resinas (tabla 4.6). En el caso de que los materiales no ofrezcan la rigidez recomendada, será necesario cambiar el diseño del prototipo.

Para el diseño del prototipo se supondrá que se usará laminados con fibra de vidrio tejida bidireccionalmente (E-Glass) (ver figura 4.10) en matriz epóxica. La mayoría de las estructuras laminadas de compuestos se las hace utilizando paños tejidos en vez de laminados unidireccionales, ya que el paño facilita el laminado manual porque se adapta a superficies complejas y ha sido el material favorito del sector automotriz, el naval, etc., adicionalmente pueden soportar cargas en diferentes ejes, mientras que los preimpregnados unidireccionales son más costosos^[4.1] y en el caso de un preimpregnado de fibra de vidrio en resina epóxica necesita temperatura de -18°C para almacenarse^[4.1], si se lo va a almacenar por un período de un año. Finalmente, se ha podido observar en el Internet que las estructuras de este tipo son construidos mediante láminas tejidas, cortadas y laminadas sobre un molde maquinado en madera. Por lo tanto, el análisis del prototipo se lo realiza suponiendo que se usa laminados con fibra de vidrio tejida bidireccional, para lo cual se necesita determinar las propiedades mecánicas de los constituyentes.

^{4.1} Industrial Plastic & Paints, Fibreglass Reinforcement, <http://www.ippnet.com/EN/main/products/FIBREGLASS/4942/1001.html>



Figura 4.10 Aspecto de fibra de vidrio tejida (woven). ^[4.1]

Existe abundante información sobre las propiedades mecánicas de los constituyentes tanto en literatura técnica como en el Internet. Las propiedades de la fibra de carbono (T300) se las puede tomar de la tabla 4.5 ^[4.2].

Datos que se compaginan con otras fuentes de información, como las dadas en el Volumen 21 del ASM Handbook, que da un valor entre 76 a 78 GPa para el módulo de elasticidad de las fibras ^[4.3].

Para las resinas se utilizarán las especificaciones de la misma referencia ^[4.2], reproducidas en la tabla 4.6. En este caso se seleccionará resina epoxi 3501, cuyas propiedades coinciden con la resina de nombre comercial “System 2000 Epoxi Resin” cuyas propiedades se encuentran en la tabla 4.6.

La Resina System 2000 Epoxi es una resina de baja viscosidad que es diseñada para aplicaciones estructurales, y que se puede usar indistintamente con fibra de carbono, kevlar y fibra de vidrio.

^{4.2} Kollár, L P. y Springer, G.S. (2003). Mechanics of Composite Structures. New York: Cambridge University Press.

^{4.3} ASM. (2001). Volumen21: Composites. ASM International.

Tabla 4-5 Propiedades mecánicas de fibras de refuerzo comunes, donde E_f es el módulo longitudinal, G_f es el módulo cortante, ν_f es el coeficiente de Poisson, s_f es la resistencia tensil, η_f es la elongación máxima y ρ_f es la densidad

Propiedades de las fibras						
Material	E_f GPa	G_f GPa	ν_f	s_f MPa	η_f %	ρ_f g/cm³
Fibra de vidrio						
E-Glass	72	33	0.09	3103	4.3	2.6
S-Glass	87	37	0.18	3792	4.4	2.49
Aramida						
Kevlar 29	83	29	0.44	3620	4.4	1.44
Kevlar 49	124	43	0.45	3620	2.9	1.44
Kevlar 149	172	65	0.33	3448	2.0	1.44
Grafito						
AS4	234	93	0.26	3930	1.7	1.8
IM6	276	109	0.26	5102	1.8	1.74
IM7	276	109	0.26	5309	1.9	1.77
IM8	303	120	0.26	5447	1.8	1.8
PANEX	228	-	0.25	3600	1.6	1.72
T300	231	91	0.27	3241	1.4	1.77
T40	283	107	0.32	5654	2.0	1.8

T50	393	159	0.24	2413	0.6	1.8
T55	379	142	0.33	1724	0.5	1.99
T75	517	204	0.27	2069	0.4	1.99
Boro						
Boron	400	-	0.2	3160	0.79	2.57

Kollár, L.P. y Springer, G.S. (2003)

Tabla 4-6 Propiedades mecánicas de diferentes tipos de resinas

Propiedades de la matriz						
Material	E_m GPa	G_m GPa	v_m	s_m MPa	η_m %	ρ_m g/cm³
Epoxi						
Der 332	3.4	1.2	0.35	64	1.9	1.22
934	4.1	1.5	0.35	83	2.0	1.3
Epon	2.8	1.0	0.35	83	3.0	1.30
3501	4.4	1.6	0.36	69	1.6	1.26
5208	3.9	1.4	0.35	50	1.3	1.27
1962	3.7	1.4	0.35	-	-	1.27
Vinilester						
1222	3.2	-	-	79	2.5	1.3
Poliéster						
7241	3.3	-	-	79	2.4	1.38

Kollár, L.P. y Springer, G.S. (2003).

Una vez seleccionados los constituyentes, se necesita determinar las propiedades macromecánicas del laminado según lo visto en el capítulo 2. La resistencia de las fibras comparativamente con la resina varía en el rango dado en la tabla 4.8:

Tabla 4-7 Propiedades generales de fibras y resinas ^[4.4]

Materiales	Módulos de elasticidad	
	GPa	10 ⁶ psi
Resina	3.4	0.50
Fibra de vidrio	73.1-85.5	10.6-12.4
Fibra aramida	124-179	18-26
Fibra de carbono	204-414	30-60
Fibra de Grafito	414-965	60-140

Vasilev, V.V y Morozov, (2001).

Tabla 4-8 Propiedades de las láminas

Propiedades de las láminas							
Material	v _f %	E ₁ GPa	E ₂ GPa	G ₁₂ GPa	v ₁₂	v ₂₃	ρ _{com} g/cm ³
Grafito – Epoxi							
T300/5208	70	181	10.3	7.17	0.28	0.59	1.6
AS/3501	66	138	8.96	7.1	0.3	0.59	1.6
H-IM6/Epoxy		203	11.2	8.4	0.32	-	-
AS4/APC2		134	8.9	5.1	0.28	0.66	1.6
T300/934							
Tape		148	9.65	4.55	0.3	0.6	-
Cloth(13mil)		74	74	4.55	0.05	-	-
Cloth(7mil)		66	66	4.1	0.04	-	-

^{4.4} Vasilev, V.V y Morozov, (2001). Mechanics and Analysis of Composite Materials. Oxford: Elsevier Science Ltd.

Fibra de vidrio – Epoxi							
Scotchply 1002	45	38.6	8.27	4.14	0.26	-	1.8
S-glass/Epoxi	50	43	8.9	4.5	0.27	0.40	2.0
Woven GI/Epoxi	45	29.7	29.7	5.3	0.17	-	2.2
Aramida – Epoxi							
Kevlar 49	60	76	5.5	2.3	0.34	0.37	1.5
Boron – Epoxi							
B(4)/5505	50	204	18.5	5.59	0.23	-	2.0
B5.6/5505	50	201	21.7	5.4	0.17	-	2.0
E-glass – Vinylester							
E-glass – Vinylester		24.4	6.87	2.89	0.32	-	-

(Kollár y Springer, 2003)^[4.5]

4.3.1.1 DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL LAMINADO

Utilizando de las tablas (4.5) y (4.6) los datos siguientes: para una fibra tipo T300: $E_f = 23.1 \cdot 10^{10}$ Pa, $\nu_f = 0.27$, y para una solución epoxy tipo 934: $E_m = 4.1 \cdot 10^9$ Pa, $\nu_m = 0.35$ y una fracción volumétrica de la fibra $\nu_f = 0.50$ se puede determinar las propiedades de la lámina unidireccional E_{11} , E_{22} , E_{33} , ν_{12} , ν_{13} , ν_{23} , G_{12} , G_{13} , G_{23} , mediante las fórmulas (2.12), (2.17), (2.24) y (2.32).

$$E11 := E_f \cdot v_f + E_m \cdot (1 - v_f) \quad E11 = 1.175 \times 10^{11}$$

$$E22 := \frac{E_f \cdot E_m}{E_f \cdot (1 - v_f) + E_m \cdot v_f} \quad E22 = 8.057 \times 10^9$$

$$E33 := E22 \quad E33 = 8.057 \times 10^9$$

$$v12 := v_f \cdot v_f + v_m \cdot (1 - v_f) \quad v12 = 0.31$$

$$v21 := \frac{E22}{E11} \cdot v12 \quad v21 = 0.021$$

$$v23 := 0.6$$

El valor de v_{23} se lo toma de la tabla (4.8) y es igual a 0.6.

$$G_f := \frac{E_f}{2 \cdot (1 + v_f)} \quad G_f = 9.094 \times 10^{10}$$

$$G_m := \frac{E_m}{2 \cdot (1 + v_m)} \quad G_m = 1.519 \times 10^9$$

$$G12 := \frac{G_f \cdot G_m}{G_f \cdot v_m + G_m \cdot v_f} \quad G12 = 2.987 \times 10^9$$

$$G13 := G12 \quad G13 = 2.987 \times 10^9$$

$$G23 := \frac{E22}{2 \cdot (1 + v23)} \quad G23 = 2.518 \times 10^9$$

A continuación se calculan los términos de la matriz reducida [Q] en base de la ecuación (2.63).

$$Q11 := \frac{E11}{1 - v12 \cdot v21} \quad Q11 = 1.183 \times 10^{11}$$

$$Q22 := \frac{E22}{1 - v12 \cdot v21} \quad Q22 = 8.11 \times 10^9$$

$$Q12 := \frac{v12 \cdot E22}{1 - v12 \cdot v21} \quad Q12 = 2.514 \times 10^9$$

$$Q21 := Q12 \quad Q66 := G12$$

Se necesitan determinar los invariantes U_1 , U_2 , U_3 , U_4 y U_5 según (2.68)

$$U_1 := \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot Q_{11} + 3 \cdot Q_{22} + 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66}) \quad U_1 = 4.954 \times 10^{10}$$

$$U_2 := \frac{1}{2} \cdot (Q_{11} - Q_{22}) \quad U_2 = 5.511 \times 10^{10}$$

$$U_3 := \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) \quad U_3 = 1.368 \times 10^{10}$$

$$U_4 := \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} + 6 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) \quad U_4 = 1.62 \times 10^{10}$$

$$U_5 := \frac{1}{2} \cdot (U_1 - U_4) \quad U_5 = 1.667 \times 10^{10}$$

A continuación se calcula los elementos de la matriz reducida transformada en función de un ángulo θ en base de (2.65).

$$Q_{11}(\theta) := U_1 + U_2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

$$Q_{12}(\theta) := U_4 - U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

$$Q_{22}(\theta) := U_1 - U_2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

$$Q_{16}(\theta) := \frac{1}{2} \cdot U_2 \cdot \sin(2 \cdot \theta) + U_3 \cdot \sin(4 \cdot \theta)$$

$$Q_{26}(\theta) := \frac{1}{2} \cdot U_2 \cdot \sin(2 \cdot \theta) - U_3 \cdot \sin(4 \cdot \theta)$$

$$Q_{66}(\theta) := U_5 - U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

Si se combina la fibra y la resina para formar un tejido en el cual se tiene el mismo número de fibras en la dirección θ y $-\theta$, la rigidez se reduce drásticamente con respecto a la fibra unidireccional, debido a la flexión de la fibra alrededor de otras fibras para producir el tejido. La pérdida de rigidez es de aproximadamente un 37%^[4.4] (ver tabla 4.6). Además, debido a las ondulaciones, es posible que absorba demasiada resina y que pierda resistencia a la compresión.

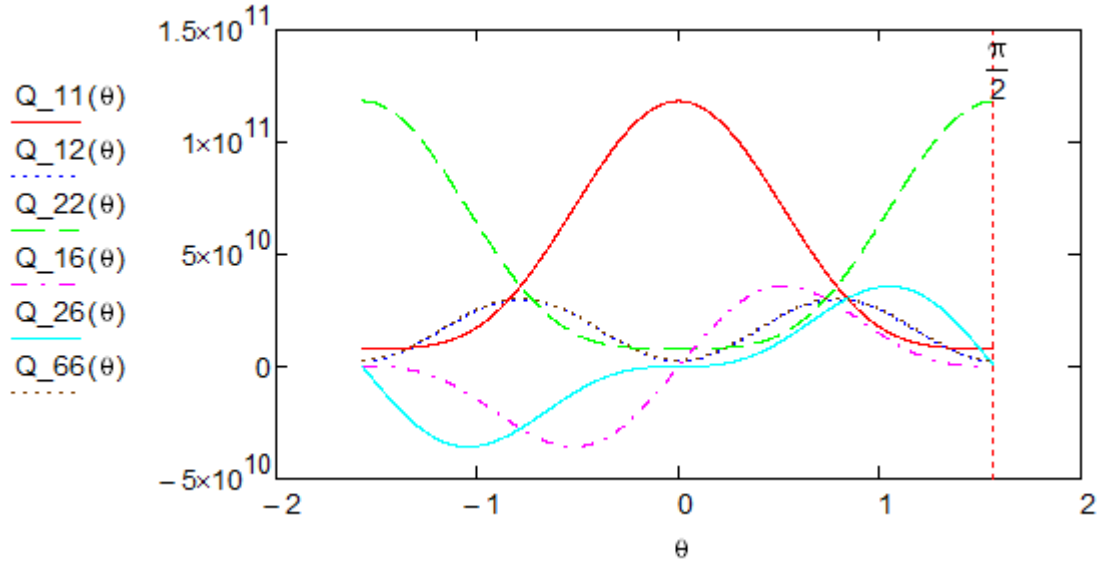


Figura 4.11 Comportamiento de los elementos de la matriz Q para el rango θ

Tabla 4-9 Comparación entre fibras unidireccionales y tejidas. [7.17]

Material de una lámina	Módulo de elasticidad	
	GPa	10^6 psi
Fibra de vidrio unidireccional	34	5
Tejido de fibra de vidrio	24	3.5
Aramida unidireccional	76	11
Tejido de aramida	38	5.6
Carbono unidireccional	124	18
Tejido de carbono	69	8.5

Autores: Christian León, Alex Vásquez

La matriz de rigidez para una lámina tejida es el promedio de las matrices unidireccionales y se calcula mediante la ecuación (4.45) según (Kollár y Springer, 2003), (ver figura 4.9):

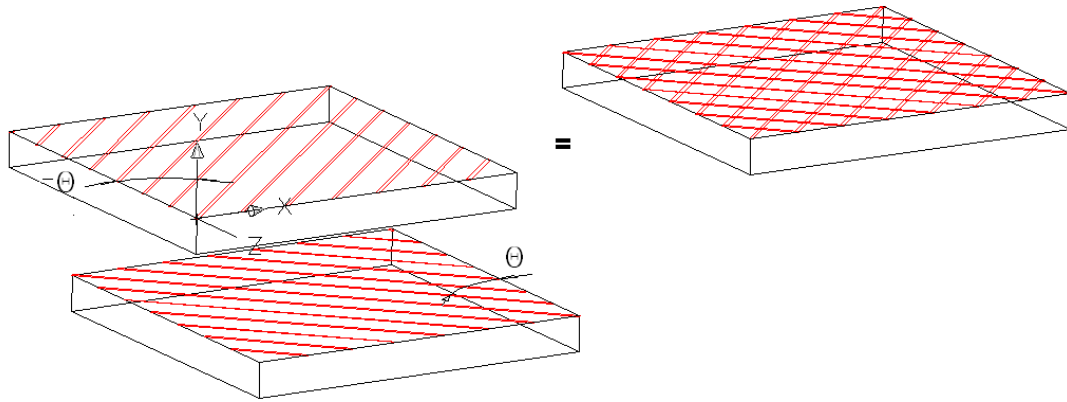


Figura 4.12 Modelado de un tejido (woven)

$$[Q_{\text{woven}}] = \frac{[\bar{Q}(\theta)] + [\bar{Q}(-\theta)]}{2} = \frac{[\bar{Q}(0)] + [\bar{Q}(90)]}{2} \quad (4.57)$$

donde

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1.183 \times 10^{11} & 2.514 \times 10^9 & 0 \\ 2.514 \times 10^9 & 8.11 \times 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 2.987 \times 10^9 \end{pmatrix} \quad \text{Pa}$$

y

$$Q_{90} = \begin{pmatrix} 8.11 \times 10^9 & 2.514 \times 10^9 & 2.315 \times 10^{-8} \\ 2.514 \times 10^9 & 1.183 \times 10^{11} & 6.726 \times 10^{-6} \\ 2.315 \times 10^{-8} & 6.726 \times 10^{-6} & 2.987 \times 10^9 \end{pmatrix} \quad \text{Pa}$$

siendo el promedio:

$$QWOVEN = \begin{pmatrix} 6.322 \times 10^{10} & 2.514 \times 10^9 & 1.158 \times 10^{-8} \\ 2.514 \times 10^9 & 6.322 \times 10^{10} & 3.363 \times 10^{-6} \\ 1.158 \times 10^{-8} & 3.363 \times 10^{-6} & 2.987 \times 10^9 \end{pmatrix} \quad \text{Pa}$$

La matriz de flexibilidad es la inversa de QWOVEN:

$$SVOWEN = \begin{pmatrix} 1.584 \times 10^{-11} & -6.301 \times 10^{-13} & 0 \\ -6.301 \times 10^{-13} & 1.584 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 3.348 \times 10^{-10} \end{pmatrix} \text{Pa}$$

Por lo que las constantes elásticas de la lámina en (Pa) son:

$$E1 := \frac{1}{SVOWEN_{0,0}} \quad E1 = 6.312 \times 10^{10}$$

$$E2 := \frac{1}{SVOWEN_{1,1}} \quad E2 = 6.312 \times 10^{10}$$

$$E3 := E2 \quad E3 = 6.312 \times 10^{10}$$

$$G12 := \frac{1}{SVOWEN_{2,2}} \quad G12 = 2.987 \times 10^9$$

$$G13 = 2.987 \times 10^9$$

$$G23 = 2.518 \times 10^9$$

$$v12 := -SVOWEN_{0,1} \cdot E1$$

$$v12 = 0.04$$

DATO:

$$v23 = 0.6$$

Las propiedades del tejido se resumen en la tabla 4.10:

Tabla 4-10 Propiedades mecánicas de la lámina, calculadas e experimentales

Propiedades mecánicas de la lámina	Calculadas (Pa)	Experimentales Tabla 4.8 (Pa)
E_x	$6.312 \cdot 10^{10}$	$6.600 \cdot 10^{10}$
E_y	$6.312 \cdot 10^{10}$	$6.600 \cdot 10^{10}$
E_z	$6.312 \cdot 10^{10}$	$6.600 \cdot 10^{10}$
G_{xy}	$2.987 \cdot 10^9$	$4.100 \cdot 10^9$
G_{xz}	$2.987 \cdot 10^9$	-
G_{yz}	$2.518 \cdot 10^9$	-
PR_{xy}	0.040	0.040
PR_{yz}	0.6	-
PR_{xz}	0.040	-

Autores: Christian León, Alex Vásquez

Es importante verificar las propiedades para diferentes fracciones volumétricas, por lo que se calcularon estas propiedades para $v_f = (0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 \text{ y } 0.7)$ (ver tabla 4.8). Aquí se observa que la fracción volumétrica influye especialmente en el módulo de elasticidad de la lámina, el cual mejora con el incremento del porcentaje de fibras.

Si se utiliza preimpregnados comerciales se garantizaría que la fracción másica esté entre 40 y 45% del peso total. El límite práctico del porcentaje volumétrico es de 80% pero el estándar industrial es del 60%. Debido a que el laminado es manual, no se garantiza propiedades uniformes; sin embargo, se trabajará con un v_f de 45%. Se puede obtener experimentalmente las fracciones volumétricas adquiriendo los pesos de los constituyentes, tanto por el método de pérdida por ignición como por el método de digestión con ácido nítrico concentrado.

Tabla 4-11 Propiedades de láminas variando el porcentaje de fibras

Propiedades mecánicas	Porcentaje volumétrico de fibra en la matriz						
	0.2	0.3	0.4	0.45	0.5	0.6	0.7
E_x	27.50	39.24	51.08	57.07	63.12	75.48	88.47
E_y	27.50	39.24	51.08	57.07	63.12	75.48	88.47
E_z	27.50	39.24	51.08	57.07	63.12	75.48	88.47
G_{xy}	1.89	2.15	2.50	2.724	2.987	3.704	4.872
PR_{xy}	0.062	0.049	0.042	0.041	0.040	0.040	0.044
PR_{yz}	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
PR_{xz}	0.062	0.049	0.042	0.041	0.040	0.040	0.044

Autores: Christian León, Alex Vásquez

4.3.2 DETERMINACIÓN DEL ESPESOR DEL LAMINADO

Luego de laminar en forma manual, con los materiales disponibles en el mercado, y consultar con personal experimentado en la materia, se llegó a la conclusión de que el espesor de la lámina con resina sería de 0.2 mm. Se utilizaron 10 capas para alcanzar un espesor total de 2 mm lo que dará con la estructura sándwich de espesor 6 mm, un espesor total de 8 mm.

4.3.3 REALIZACIÓN DEL ANÁLISIS DEL PROTOTIPO EN ANSYS

4.3.3.1 PREPROCESADO, IMPORTACIÓN, ELEMENTOS Y MATERIALES

En el programa SolidWorks se debe grabar el modelo superficial con formato IGES según se muestra en la figura (4.13):

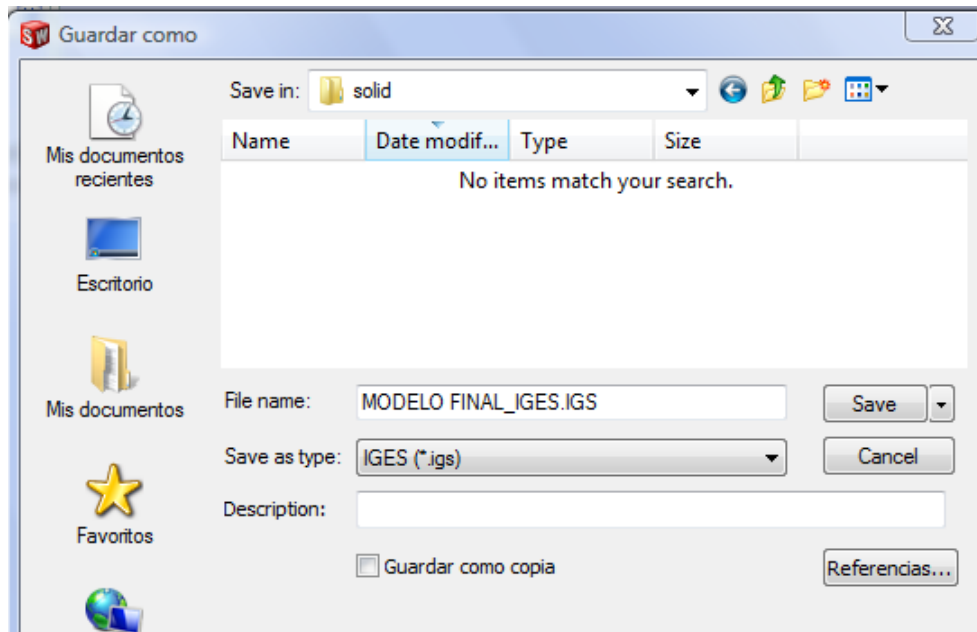
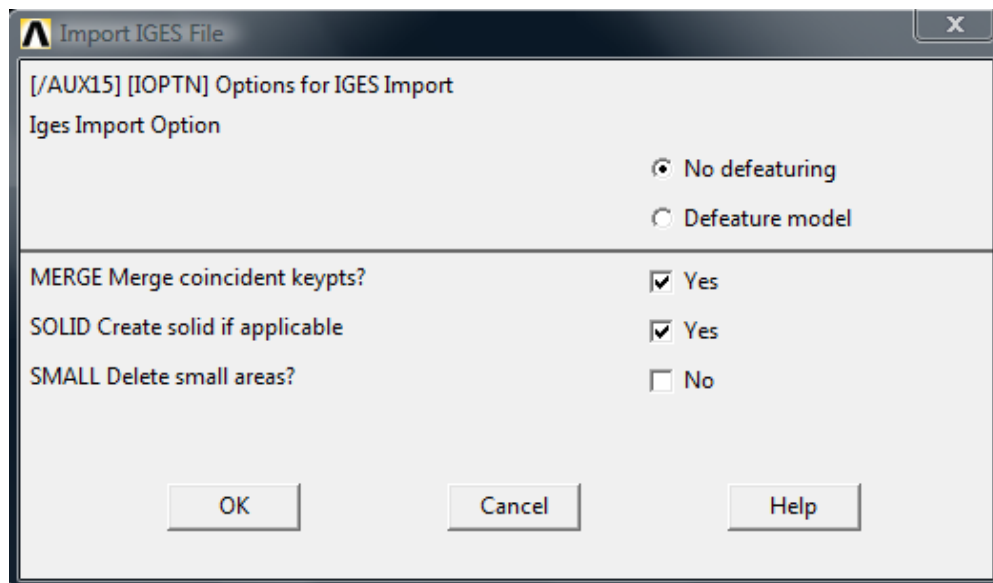


Figura 4.13 Cuadro de diálogo Guardar Como en SolidWorks

A continuación se describirá detalladamente el procedimiento para modelar el prototipo en Ansys. En primer lugar, se importa el modelo en formato IGES. En el menú principal se activa: **File** → **Import** → **IGES**.

Si el modelo no será deformado, el cuadro de diálogo resultante queda de esta manera y se busca el archivo en “Browse” (ver figura 4.14):



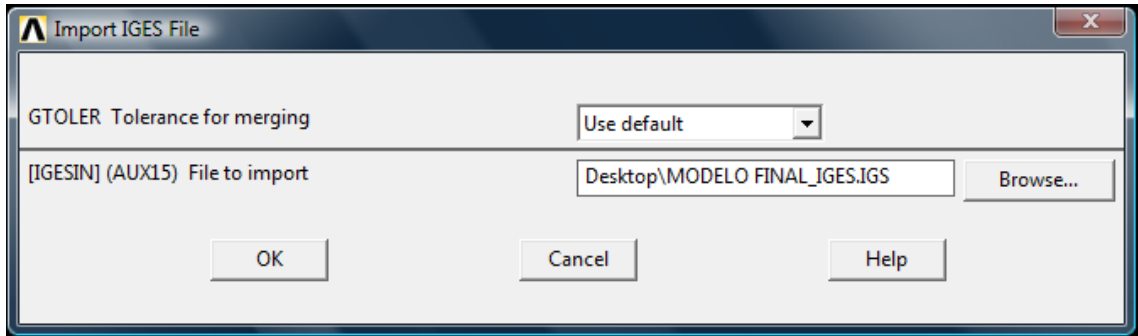


Figura 4.14 Opciones de importación en formato IGES y búsqueda de archivo IGES.

El modelo se denomina: “MODELO FINAL_IGES” y se lo busca, como se indica en la figura (4.15)

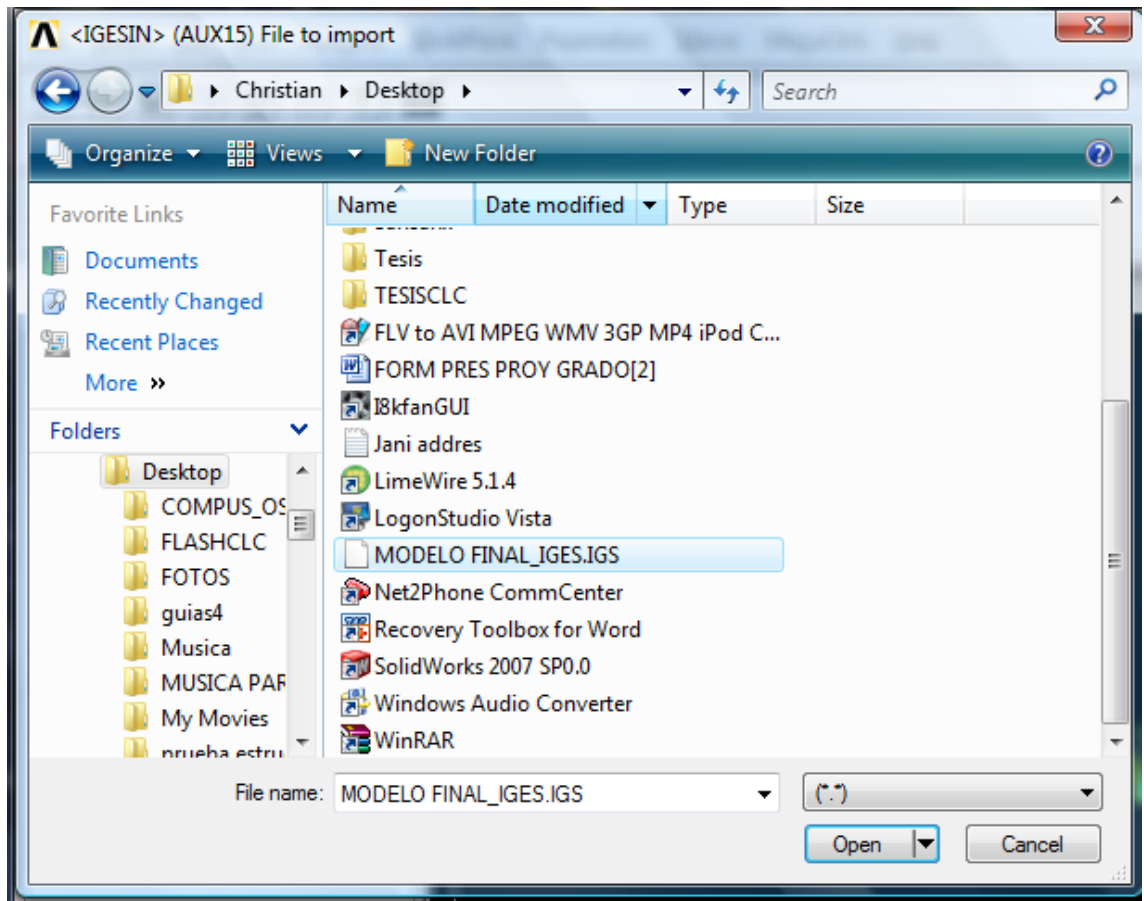


Figura 4.15 Selección del archivo IGES en ANSYS

Una vez que el modelo aparece en pantalla, se verifica que el modelo no presente deformaciones y se lo puede rotar utilizando los botones de rotación según la figura (4.16):

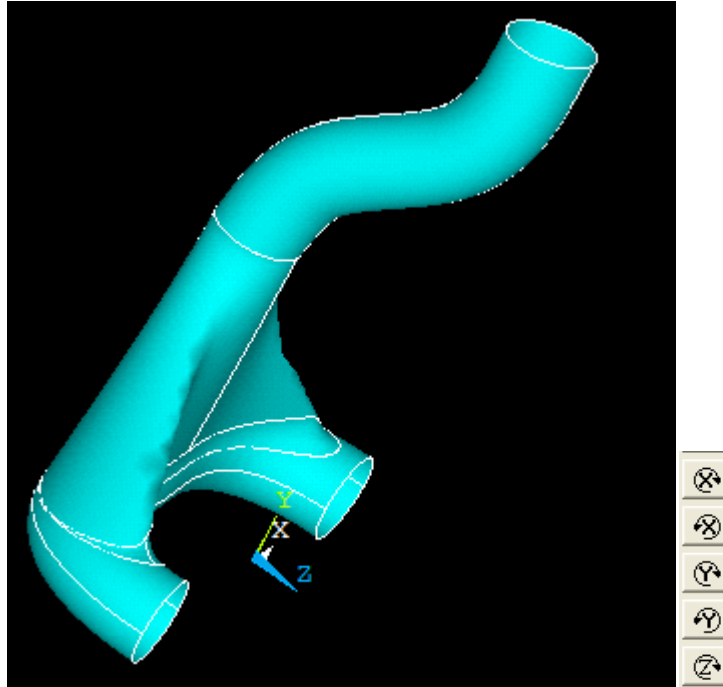


Figura 4.16 Modelo en Ansys y botones de rotación

Se puede seleccionar las unidades de trabajo en **ANSYS Main Menu**, seleccionando **Preprocessor** → **Material Props** → **Material Library** → **Select Units**. Se selecciona el sistema SI en el cuadro de diálogo siguiente (ver figura 4.17):

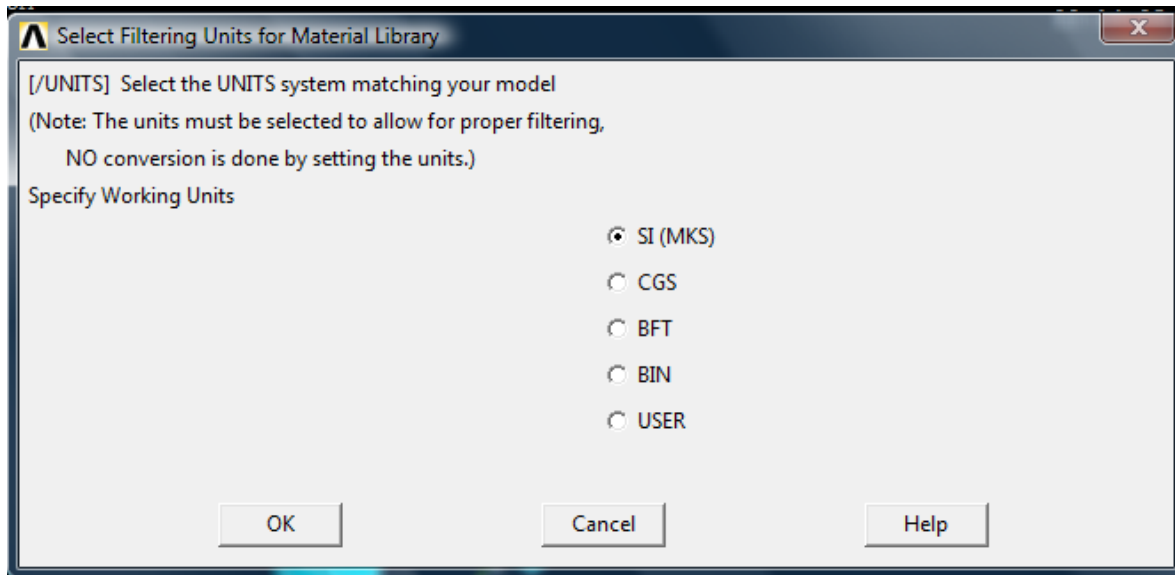


Figura 4.17 Selección de unidades

Se da un título al modelo mediante **File** → **Change Title**, y se despliega la figura (4.18):

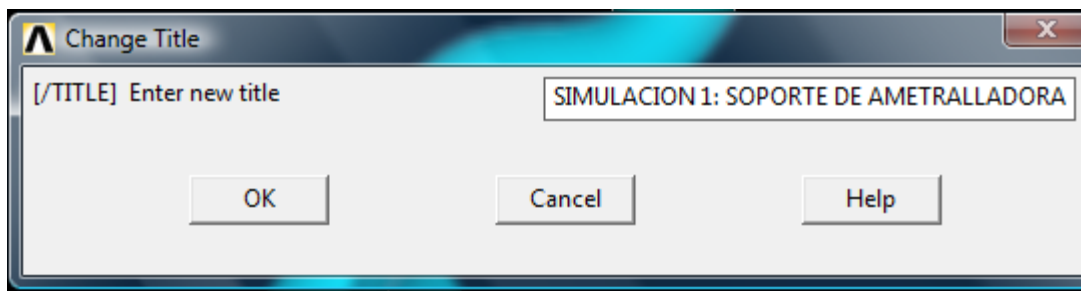


Figura 4.18 Cambio de nombre al modelo

Para que se despliegue el título, en el menú principal se selecciona **Plot** → **Replot**. Adicionalmente se necesita ingresar los parámetros escalares de la tabla (4.12) que es ingresada al programa mediante: **Parameters** → **Scalar Parameters**.

Tabla 4-12 PARAMETROS ESCALARES

Parámetros escalares		
LADO	$10 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	
ÁNGULO	0°	
ESPESOR	$2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ según (4.3.2)	
E_x	$6.312 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	Tabla (4.10)
E_y	$6.312 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	
E_z	$6.312 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	
G_{xy}	$2.987 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	
G_{xz}	$2.987 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	
G_{yz}	$2.518 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	
PR_{xy}	0.040	
PR_{yz}	0.6	
PR_{xz}	0.040	

Autores: Christian León, Alex Vásquez

Al activar **Scalar Parameters** se puede ingresar todas las constantes que definan el problema como son las orientaciones de la lámina, el espesor, las propiedades mecánicas y el tamaño del elemento finito. Estos parámetros pueden ser fácilmente editados, (ver figura 4.19).

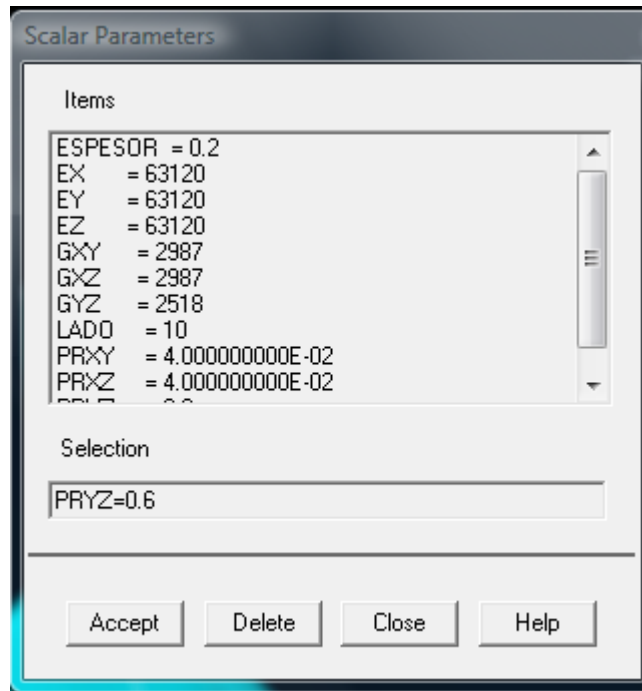


Figura 4.19 Cuadro para ingreso de parámetros escalares

Se ingresan a continuación las propiedades del material en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Material Props** → **Material Models** según la figura (4.20)

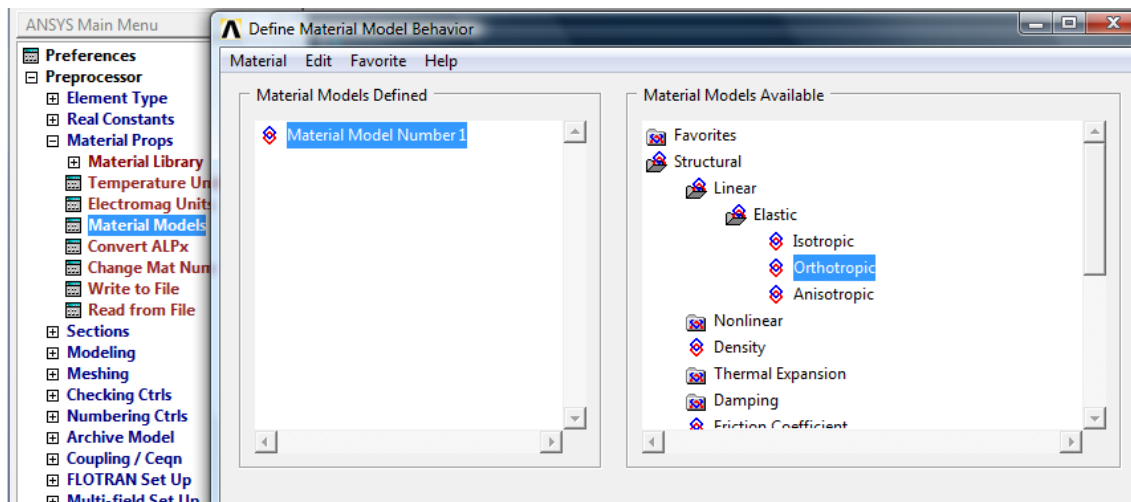


Figura 4.20 Cuadro de selección del tipo de material 1

Al seleccionar material ortotrópico se despliega el siguiente cuadro de diálogo (ver figura 4.21), en el cual se ingresan los parámetros que se pide. Puesto que estos parámetros se encuentran definidos previamente solo se necesita ingresar las siglas que los representan.

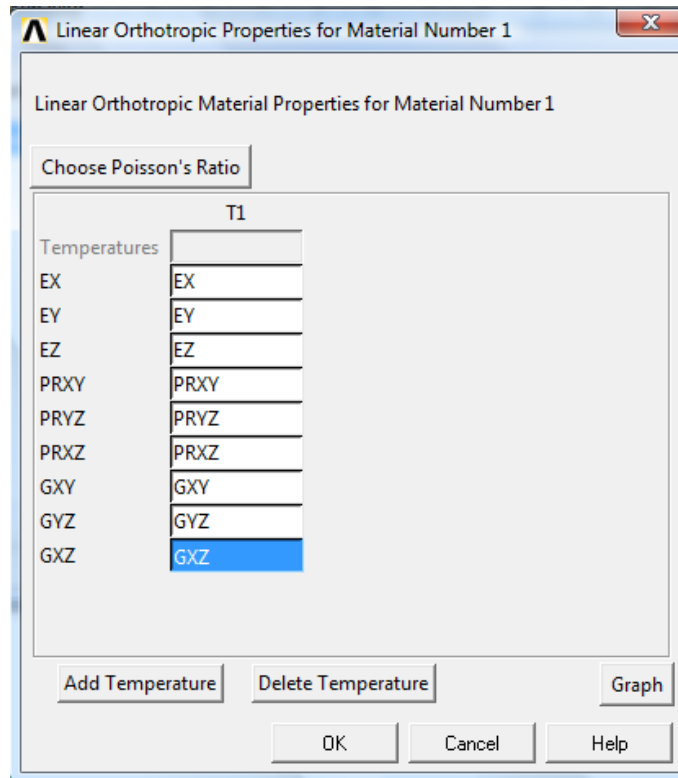


Figura 4.21 Introducción de las propiedades del material a simular

A continuación se selecciona el tipo de elemento finito adecuado para láminas de materiales compuestos de espesor mucho menor que cualquiera de sus lados. Se puede utilizar el elemento membrana (**Shell Linear Layer 99**), elemento lineal que no soporta grandes deformaciones. Se selecciona en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add / Edit / Delete**, en respuesta aparece el cuadro de diálogo y se selecciona **Add** (ver figura 4.22).

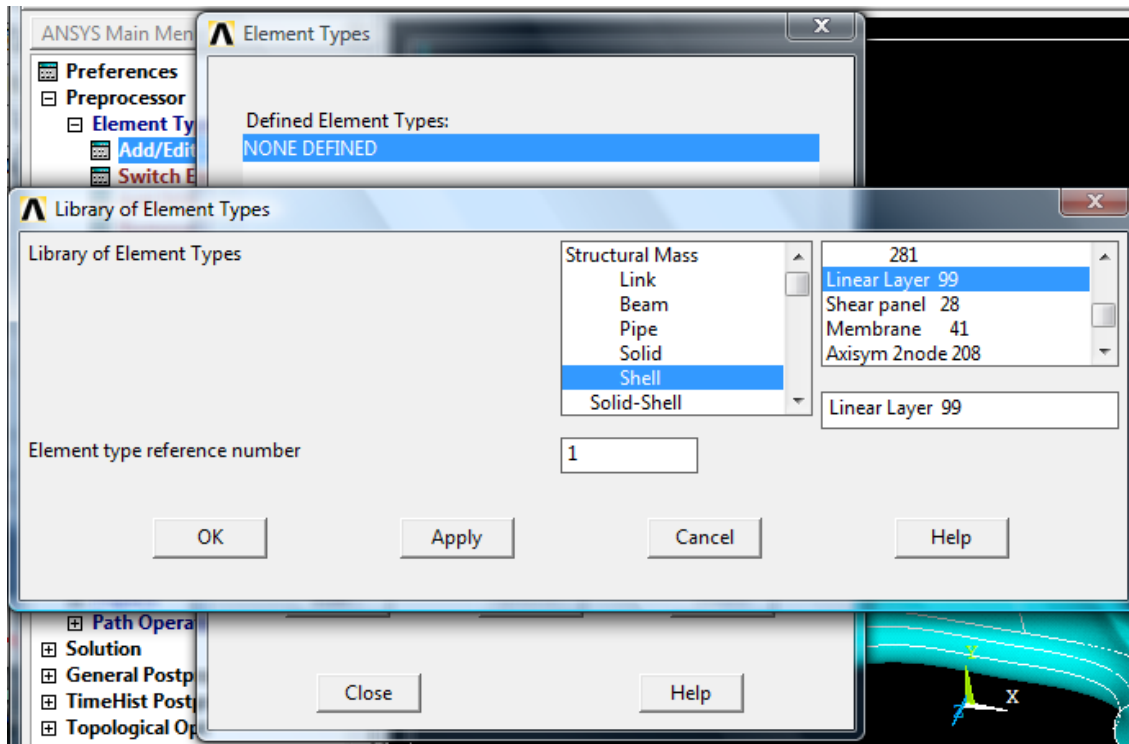


Figura 4.22 Selección de tipos de elementos de biblioteca

El siguiente paso es asignar a este elemento las características mecánicas respectivas en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Real Constants** → **Add / Edit / Delete**, desplegándose un cuadro de dialogo donde se selecciona **Add**; Se activa **Add** y se despliega el cuadro de la figura (4.23), donde se verifica el tipo de elemento utilizado.

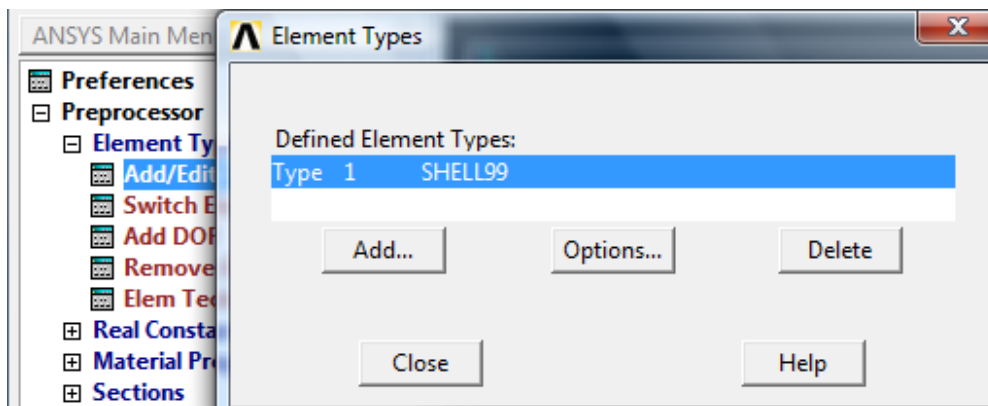


Figura 4.23 Tipo de elemento ingresado a Real Constants

Se activa **OK** y se indica que el elemento seleccionado está definido por el numeral 1 (figura 4.24).

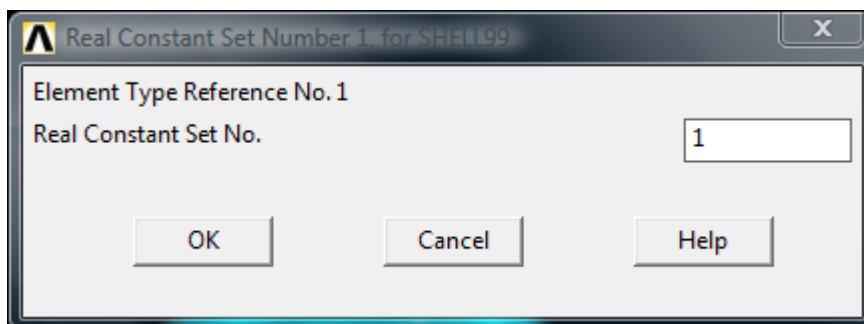


Figura 4.24 Constantes asignadas para el elemento 1

Nuevamente se activa OK y se despliega el siguiente cuadro de diálogo (ver figura 4.25) donde se debe ingresar el número de capas, 10 para obtener un espesor total de 2 mm. En este caso no se necesita simetría, por lo tanto solo se ingresan los siguientes datos:

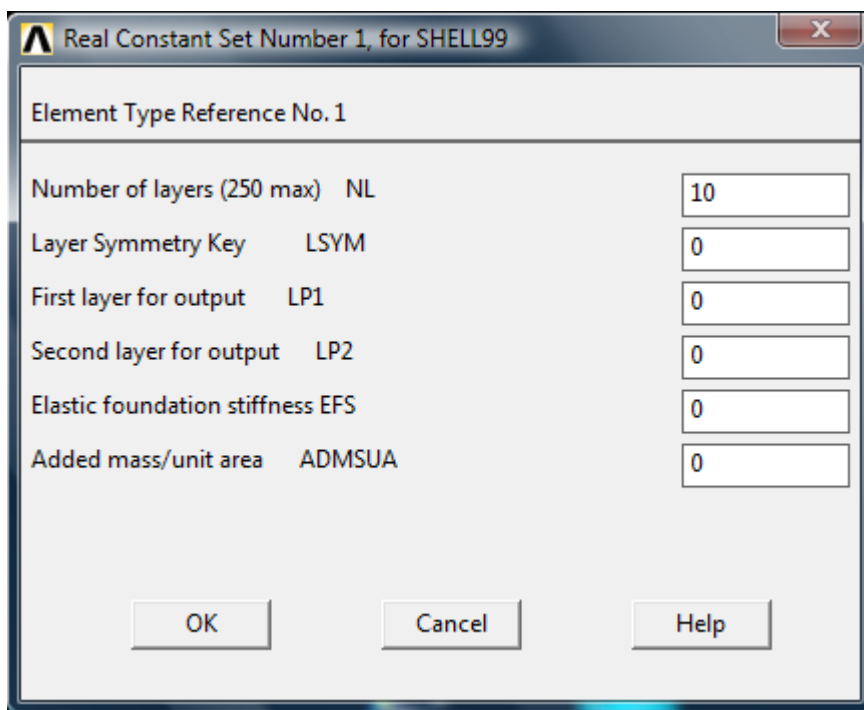


Figura 4.25 Constantes a introducir para el elemento 1

Debido a que se selecciona lámina tejida, no se necesita ingresar los ángulos de rotación THETA (figura 4.26):

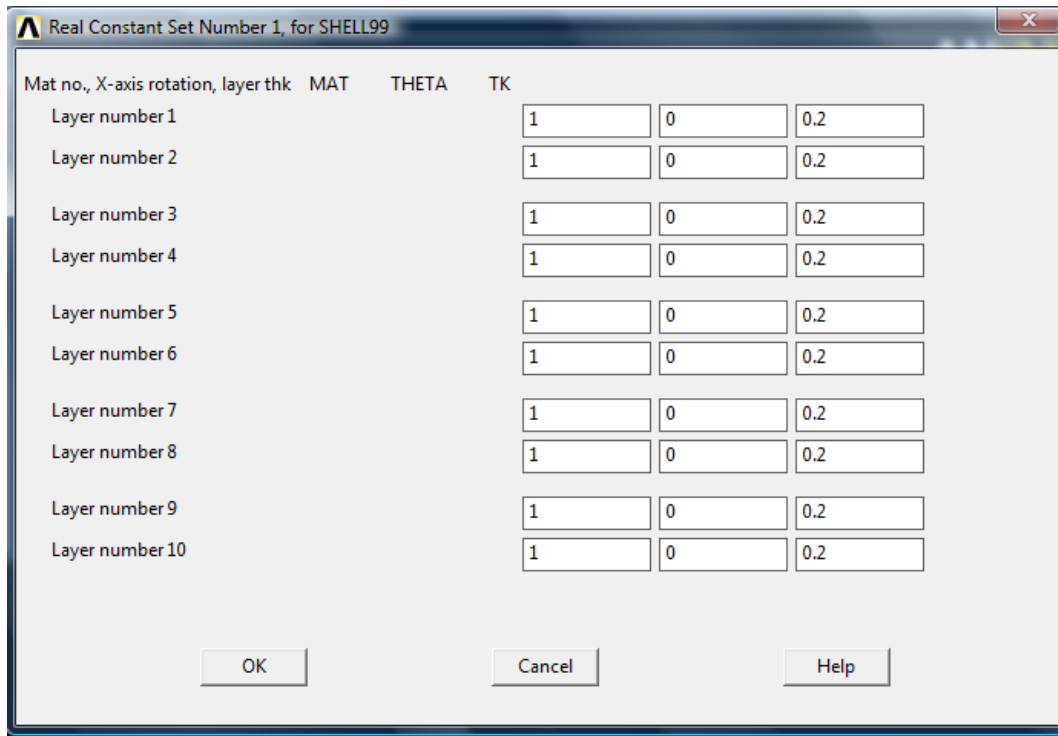


Figura 4.26 Determinación de las orientaciones de las capas

Finalmente se introduce el valor para el tamaño del elemento finito, para lo cual se selecciona en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Meshing** → **Size Cntrls** → **ManualSize** → **Areas** → **All Areas**. Se activa el cuadro de diálogo siguiente y se ingresa la dimensión del elemento finito que estaba dado por el parámetro escalar LADO (figura 4.27).

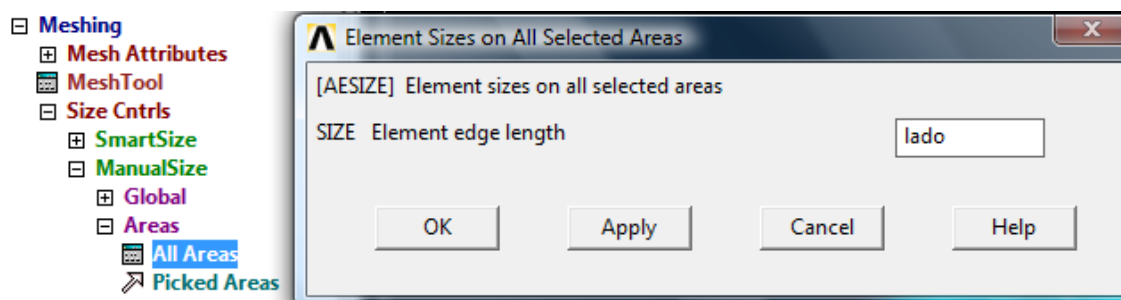


Figura 4.27 Selección de la magnitud del elemento finito

Para mallar el modelo se activa **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Meshing** → **Mesh** → **Areas** → **Free** y se activa **Pick All** para seleccionar todas las áreas (figura 4.28).

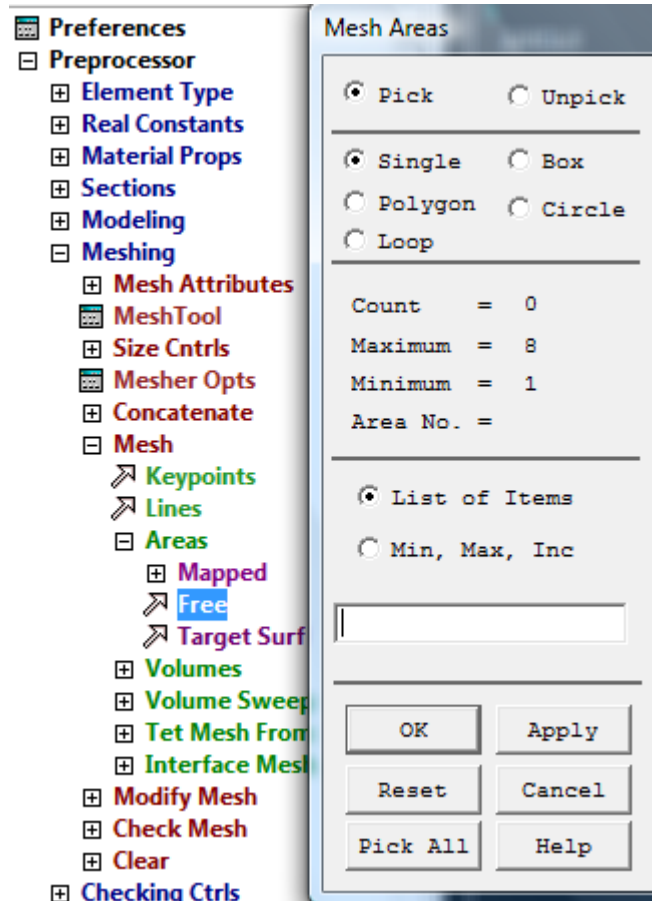


Figura 4.28 Cuadro para selección de elementos a mallar

Después de unos instantes se despliega todas las superficies malladas, según la figura (4.29). El lado del elemento finito es de 10 mm.

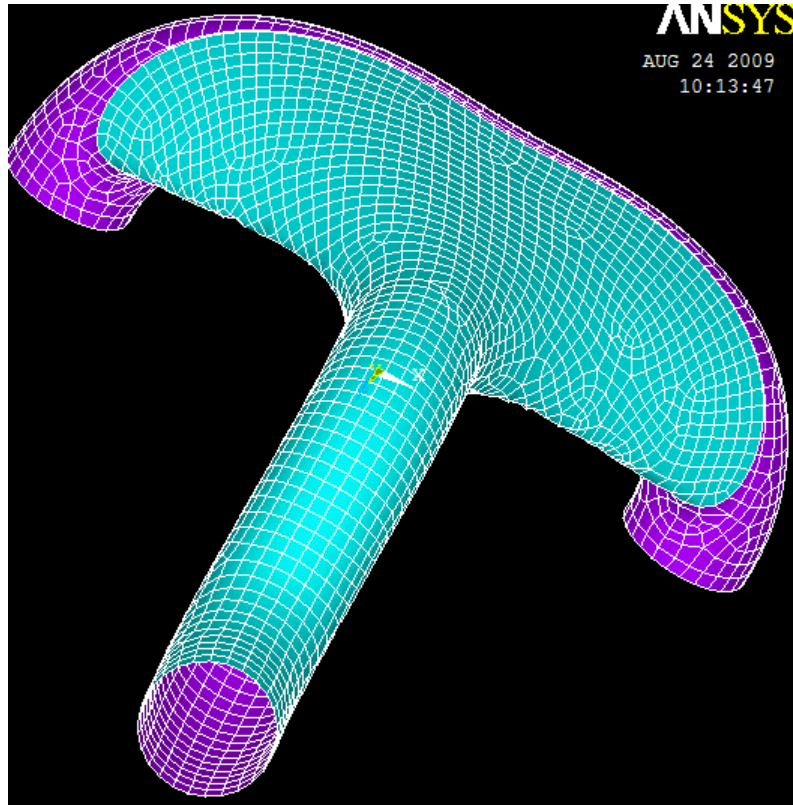


Figura 4.29 Mallado del modelo

Para identificar las líneas donde se colocarán las restricciones se selecciona en la barra de menús la opción **PlotCtrls** → **Numbering** y se activa **LINES** (figura 4.30).



Figura 4.30 Control de numeración

Luego se debe ir a la barra de menús a **Plot** → **Lines**, y se despliegan las líneas numeradas (ver figura 4.31):

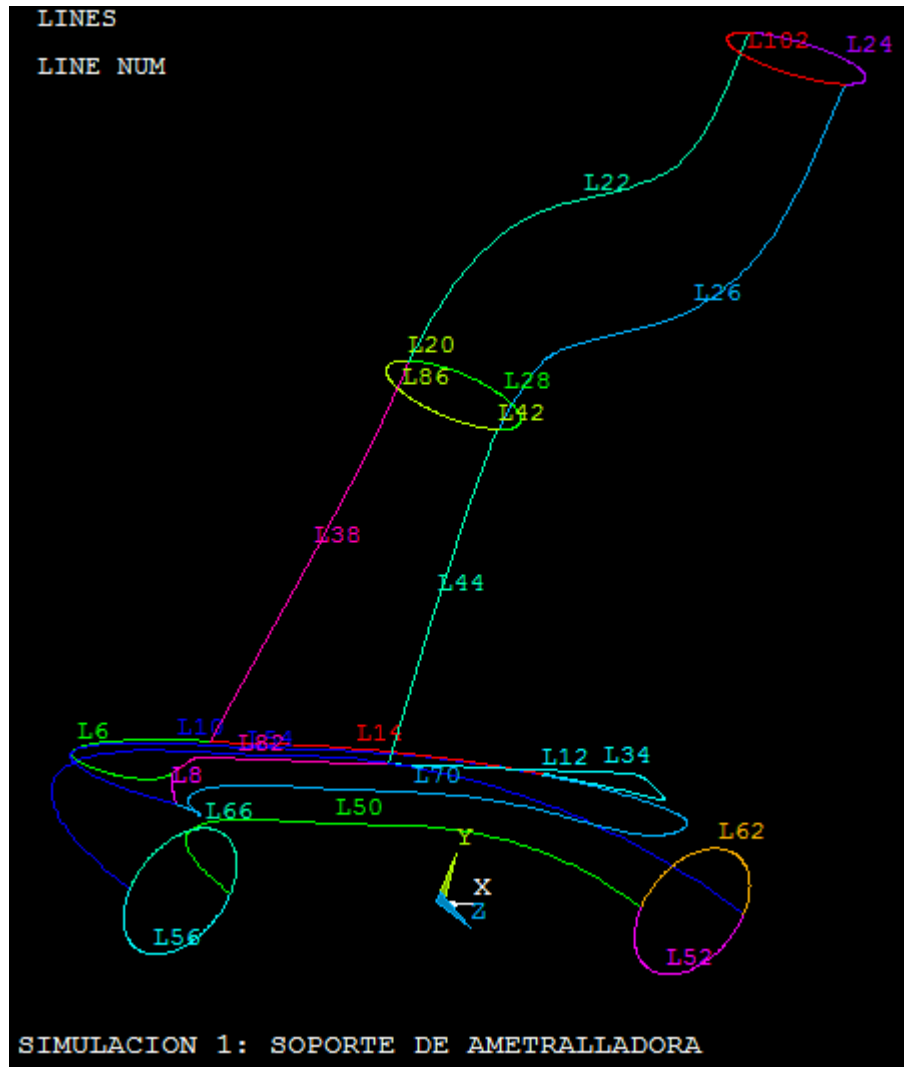
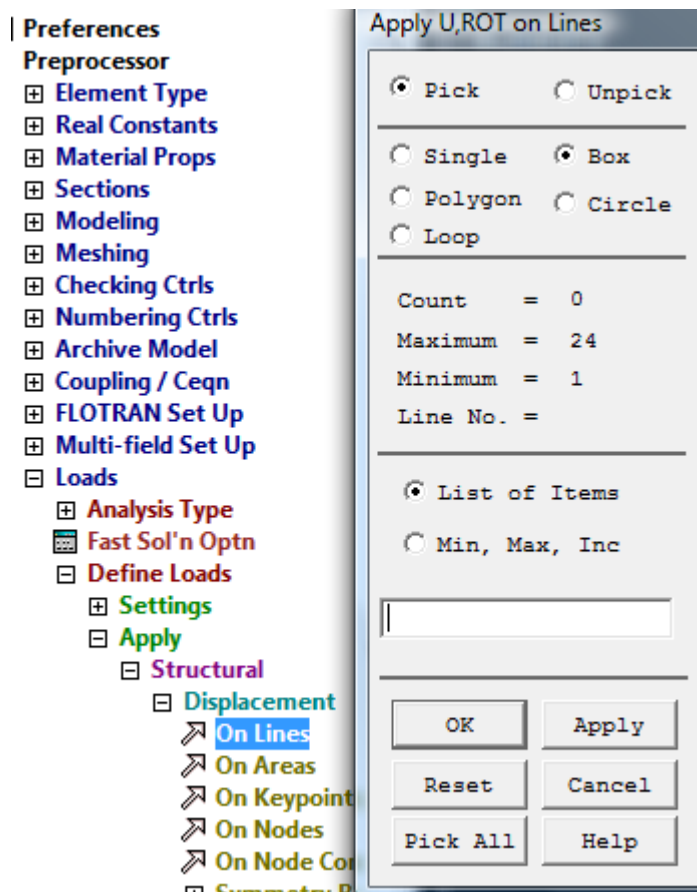


Figura 4.31 Identificación de líneas

4.3.3.2 PREPROCESADO, RESTRICCIONES Y FUERZAS

En este paso se pretende simular la prueba de disparo, para lo cual se ingresan las condiciones de contorno apropiadas del soporte. El apoyo fijo se puede modelar en Ansys restringiendo todos los movimientos y rotaciones de las líneas seleccionadas en la figura (4.32). En **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Loads** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Displacement** → **On Lines**, se eligen las líneas a fijarse.



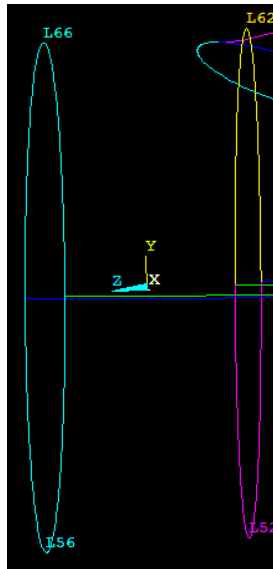


Figura 4.32 Selección de líneas a fijar

Luego se despliega el siguiente cuadro de diálogo que indica cuales son los grados de libertad a ser restringidos en la superficie. Se seleccionan todos (figura 4.33).

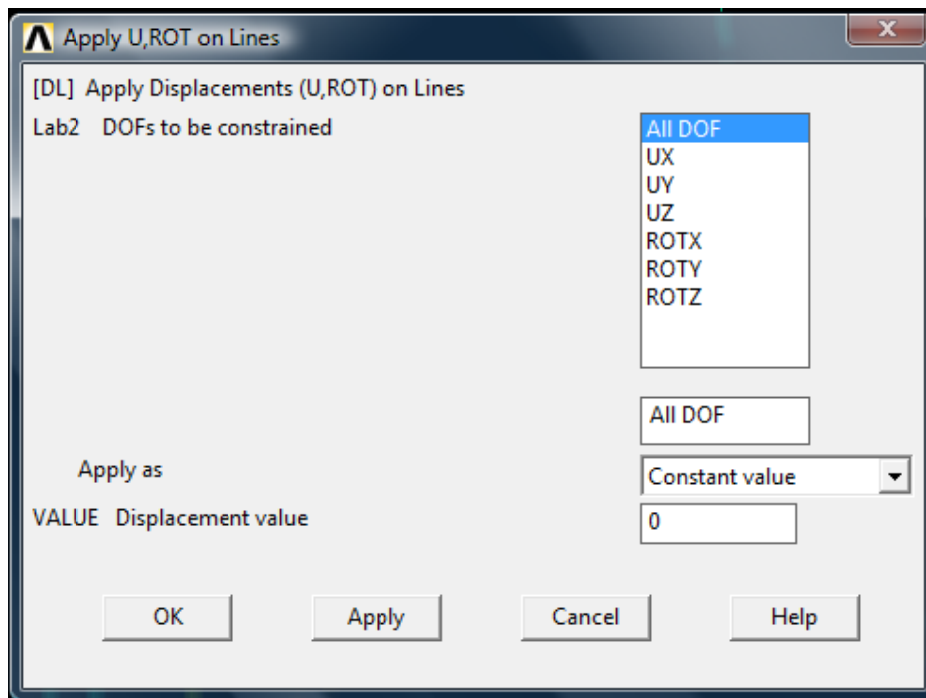


Figura 4.33 Selección de grados de libertad a ser restringidos

El resultado es el despliegue de los siguientes iconos (figura 4.34):



Figura 4.34 Símbolos de restricción.

A continuación se procede a restringir el movimiento de la base de la estructura ya que esta se va a encontrar apoyada directamente en el piso del helicóptero, para lo cual se procede a realizar un procedimiento similar al anterior, con la diferencia que esta vez se seleccionarán nodos en lugar de líneas.

Para poder visualizar el modelo en nodos, se accede al menú **Plot** → **Nodos** y se muestra el elemento como en la figura (4.35).

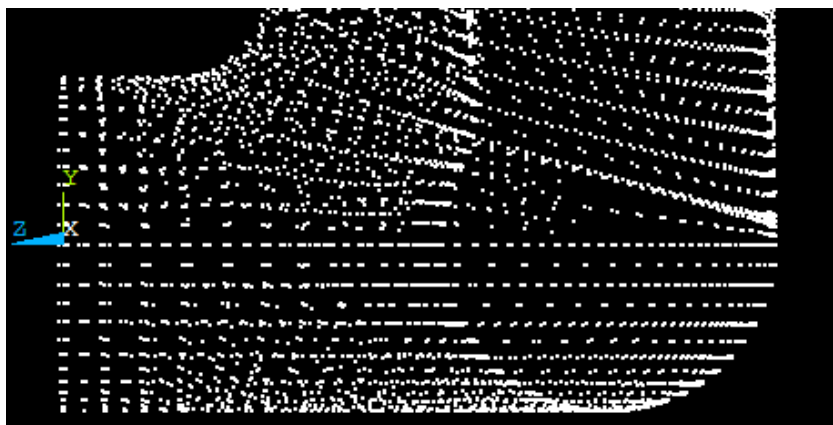


Figura 4.35 Visualización del modelo en nodos

De igual manera, en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Loads** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Displacement** → **On Nodes**, se eligen los nodos a fijarse y se seleccionan todos los grados de libertad a fijar (figura 4.36).

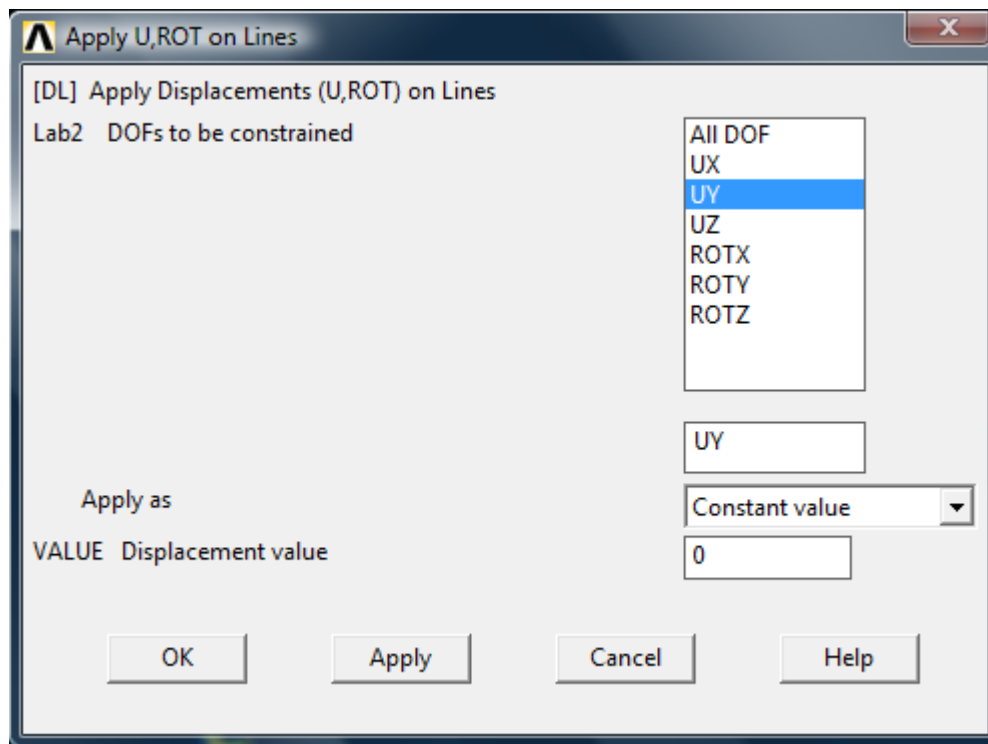


Figura 4.36 Fijación de todos los grados de libertad en los nodos de la base

Para ingresar las fuerzas se necesita identificar puntos de referencia donde aplicarlas. Por ello se necesita distribuir la fuerza en todos los nodos del final en donde se conecta la base de la cuna del soporte de ametralladora.

Por lo que se enfoca en la última línea de nodos del soporte en el extremo del mismo (figura 4.37).



Figura 4.37 Última fila de nodos en el extremo superior del diseño

De igual manera, en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Loads** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Displacement** → **On Nodes**, se eligen los nodos con la opción Box, y se toma en cuenta el número de nodos de la selección como se muestra en (figura 4.38).

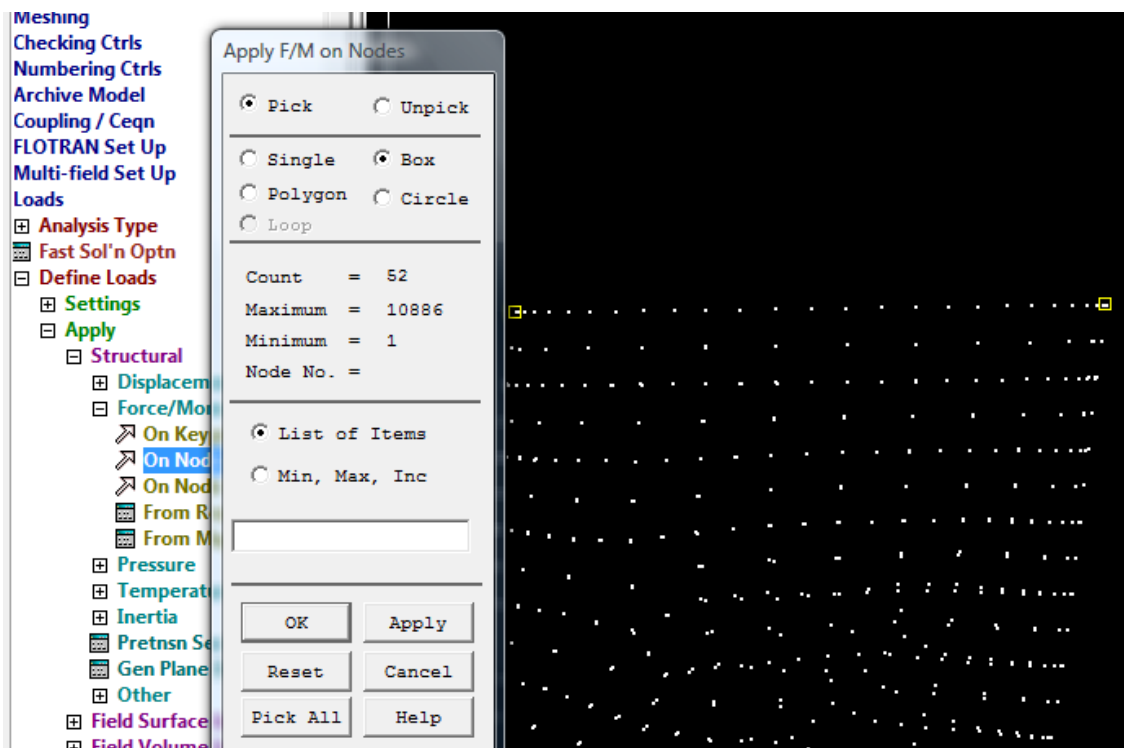


Figura 4.38 Verificación del número de nodos en la línea donde la fuerza se va a aplicar

En la figura se muestra un conteo de 52 nodos en la última línea.

Se conoce de antemano que la carga a incluir debido al peso de la estructura es de 11.8 kg + 10% extras + 6.5kg de la cuna para un total de = 20 kg x 10= 200N / 52 nodos = 3.85 newtons por nodo.

La carga del disparo a incluir será la fuerza calculada anteriormente de $25 \text{ kg} \cdot 10 = 250 \text{ N}$ para el eje $-z$ simulando un disparo del arma; entonces la fuerza por nodo es de $250 / 52 = 4.81 \text{ newtons}$.

Por lo que se procede a incluir la primera fuerza debida al disparo de la ametralladora en el sentido negativo al eje z , el cual se ilustra en la figura 4.39:

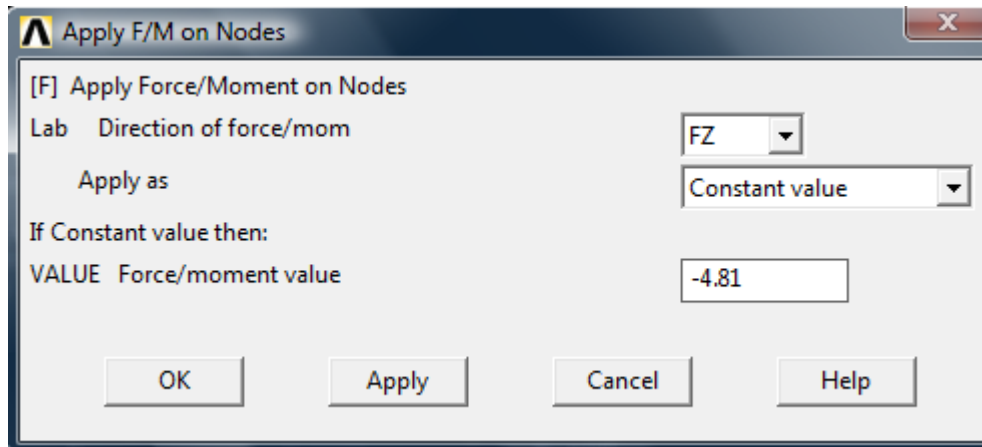


Figura 4.39 Aplicación de la fuerza debido al disparo de la ametralladora

Asimismo, se incluye la segunda fuerza debida al peso de la ametralladora en el sentido negativo al eje y , el cual se ilustra en la figura 4.40:

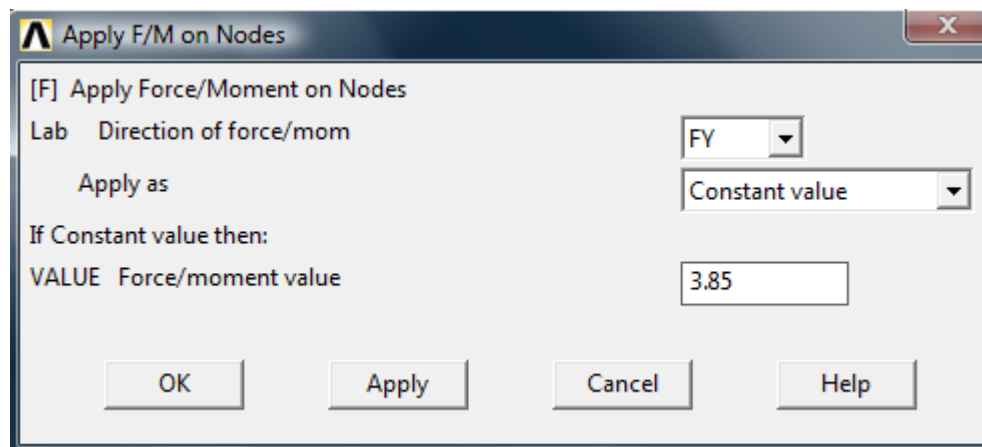


Figura 4.40 Aplicación de la fuerza debido al peso de la ametralladora

Como resultado se muestran la dirección y el sentido de estas dos fuerzas en la figura 4.41:

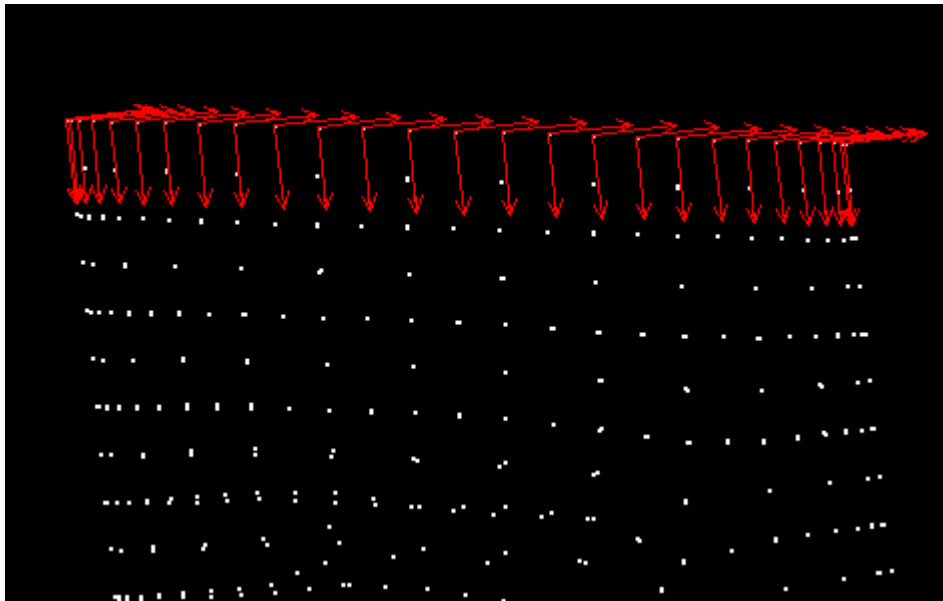


Figura 4.41 Imagen de los vectores de fuerza en el modelo

4.3.3.3 ETAPA DE SOLUCIÓN

Para que el software inicie los cálculos que resolverán el problema se necesita ir a **ANSYS Main Menu** → **Solution** → **Solve** → **Current LS**. La ventana desplegada es la correspondiente a la figura 4.42, la cual se acepta.

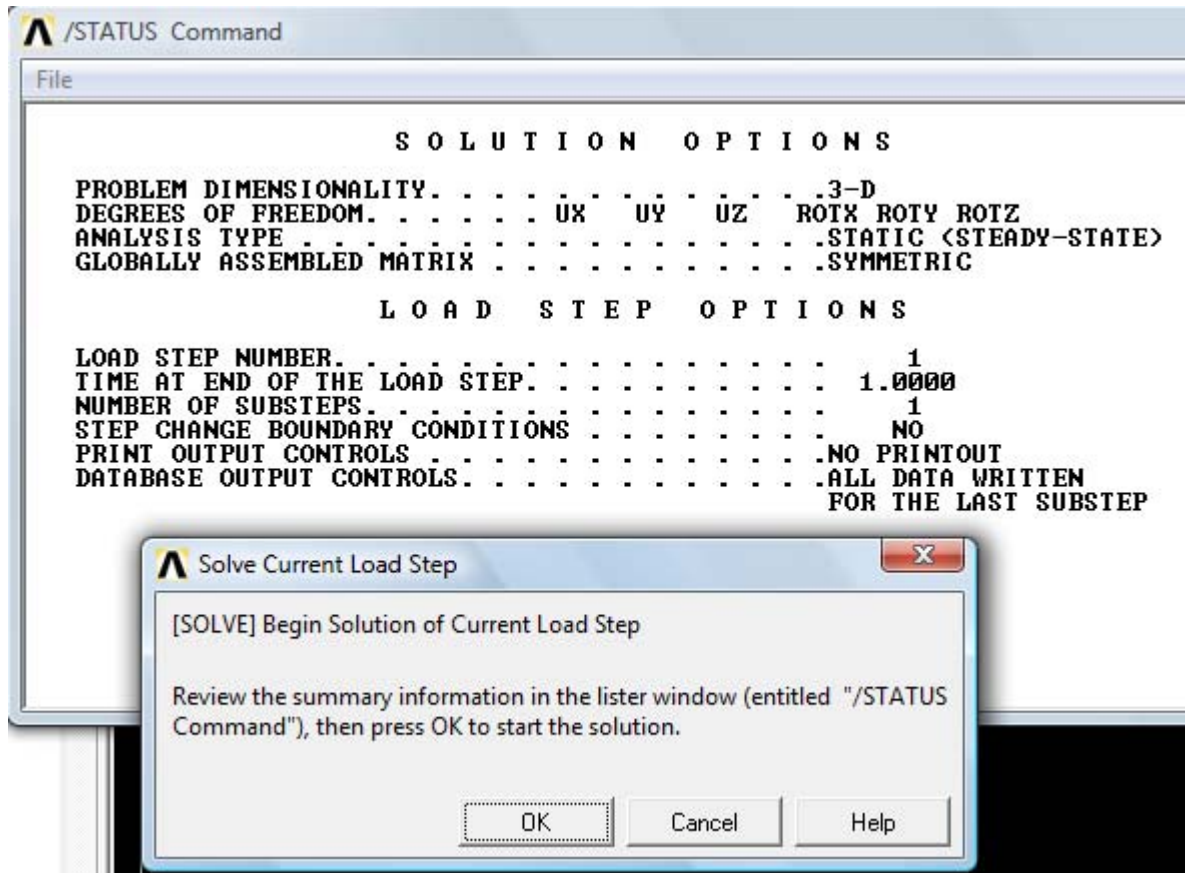


Figura 4.42 Inicio de la etapa de cálculo

Durante la solución se suelen mostrar mensajes de advertencia, los cuales se aceptan con lo cual se permite obtener la solución del problema.

4.3.3.4 POSTPROCESADO

Luego de efectuado el cálculo, se puede revisar los resultados en el postprocesador de Ansys. Por el momento interesan los desplazamientos y verificar si el modelo cumple con la rigidez torsional estipulada.

Lo primero que se puede revisar es el desplazamiento en **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Deformed Shape** (figura 4.43).

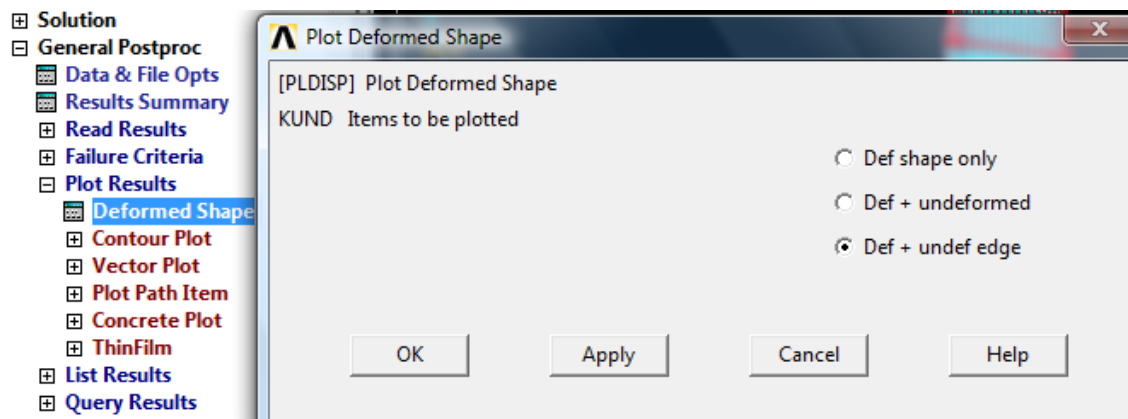


Figura 4.43 Cuadro de diálogos para graficar la deformada

Se observa la vista lateral del modelo deformado (ver figura 4.44)

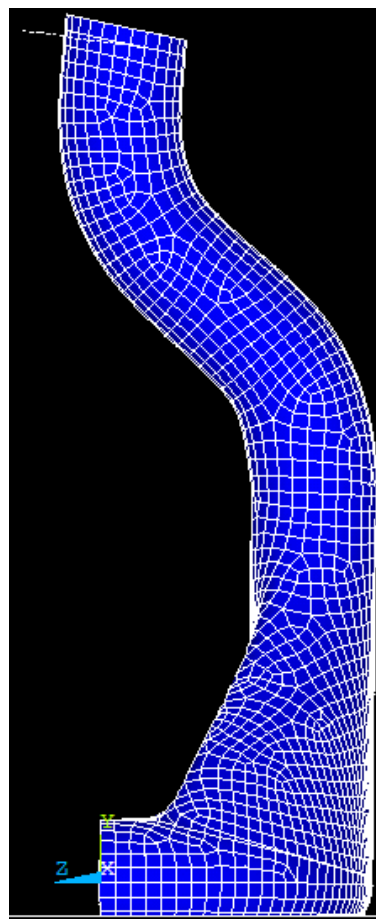


Figura 4.44 Vista lateral del modelo deformado

Ansys también entrega el valor máximo de desplazamiento (ver figura 4.45).

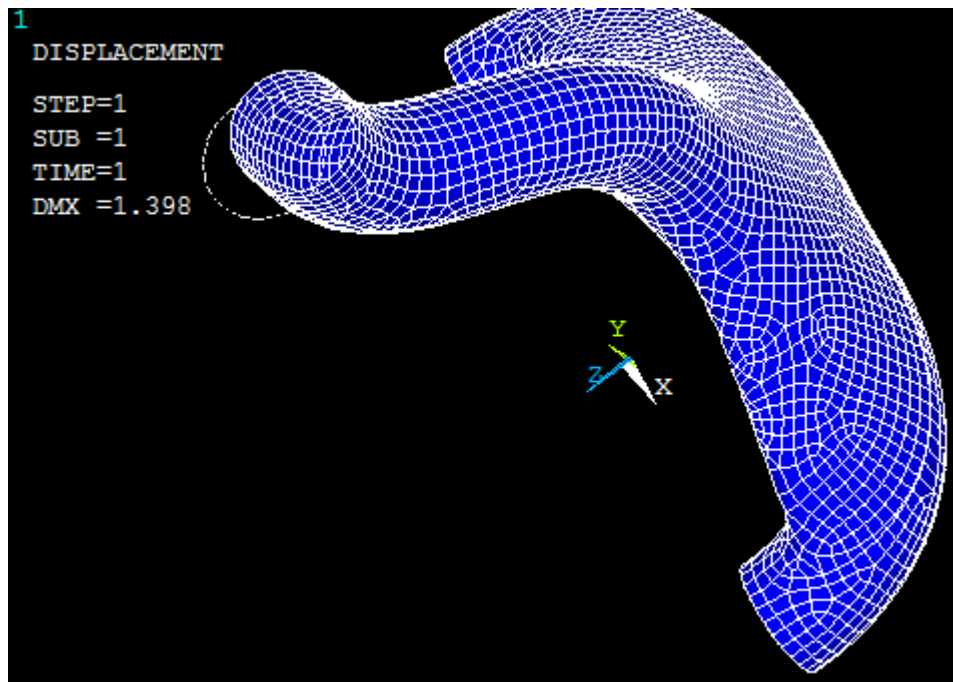


Figura 4.45 Vista del modelo deformado y el valor del desplazamiento máximo

Se obtiene un desplazamiento en el eje x de 1.4 mm aproximadamente, lo cual no inhabilita al funcionamiento normal de la estructura considerando los parámetros de funcionamiento de la misma, los cuales establecen que la estructura no va a ser utilizada para realizar disparos de alta precisión.

Si se quiere cuantificar las zonas que han sufrido más o menos esfuerzos, y asimismo los concentradores de esfuerzos a través de la estructura, se debe ingresar en **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Contour Plot** → **Nodal Solution** (figura 4.46).

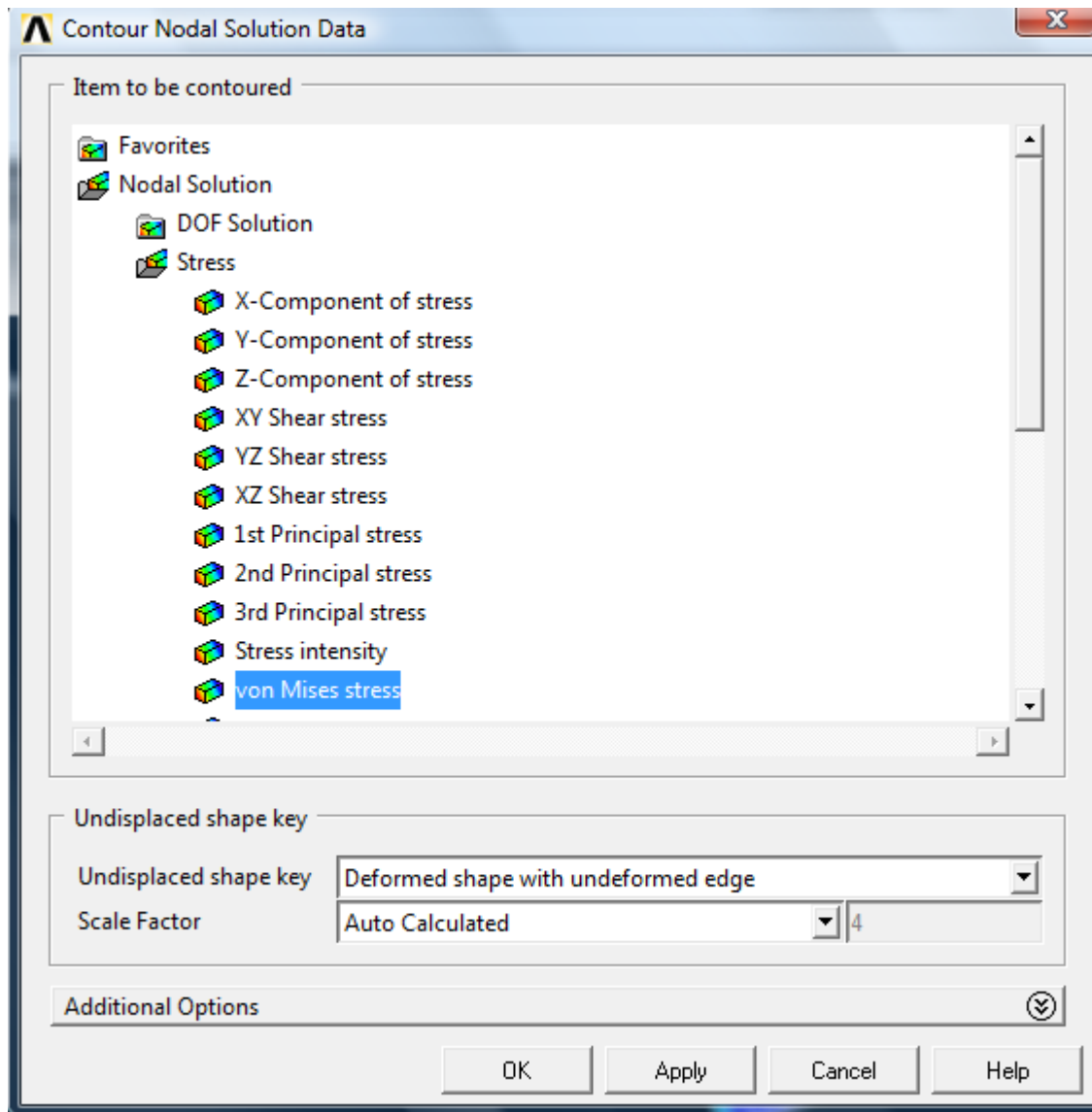


Figura 4.46 Selección de control por esfuerzo de von Mises, en los nodos

El mismo que muestra los siguientes resultados de la figura 4.47:

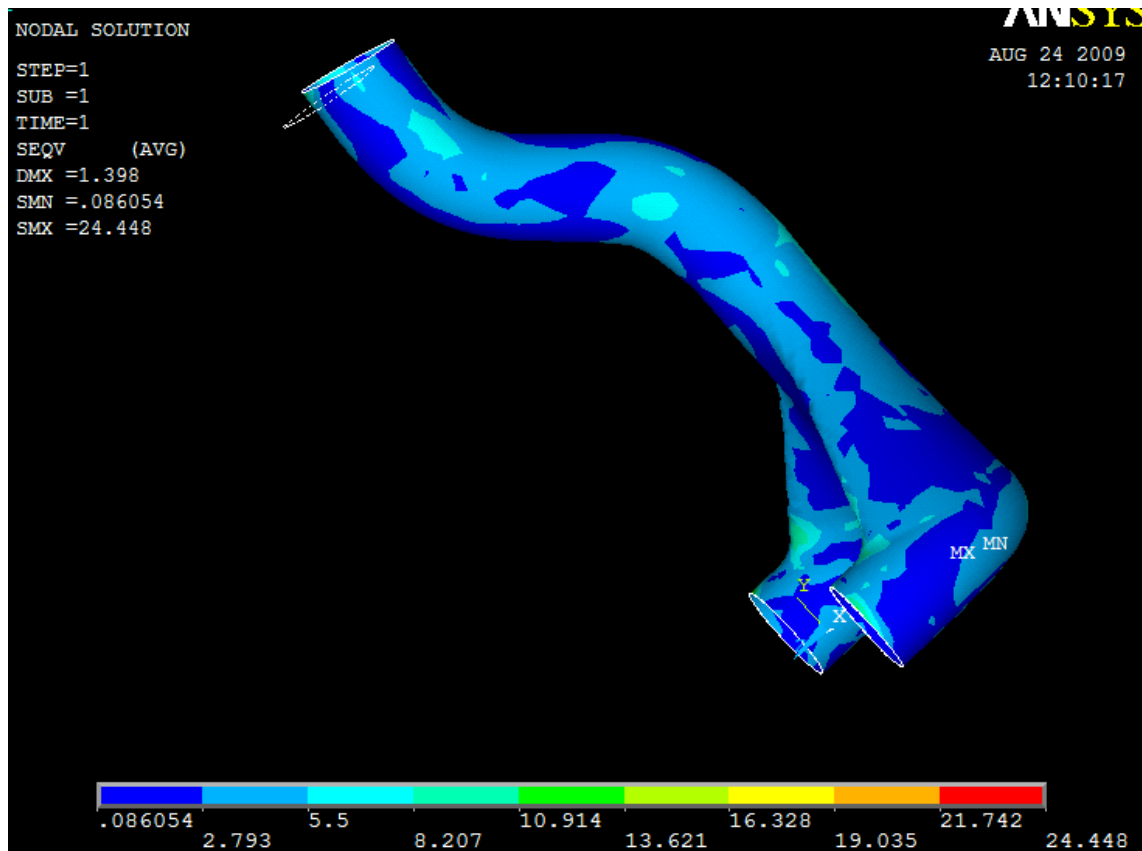


Figura 4.47 Cuantificación del esfuerzo en Mpa

Así mismo se puede observar una concentración de esfuerzos en la parte inferior de la estructura, ya que se restringieron los movimientos libres Del elemento inferior para simular su apoyo al piso del helicóptero (figura 4.48), pero como se observa, el área con dificultad es mínima con respecto a la magnitud de la estructura, por lo que se acepta.

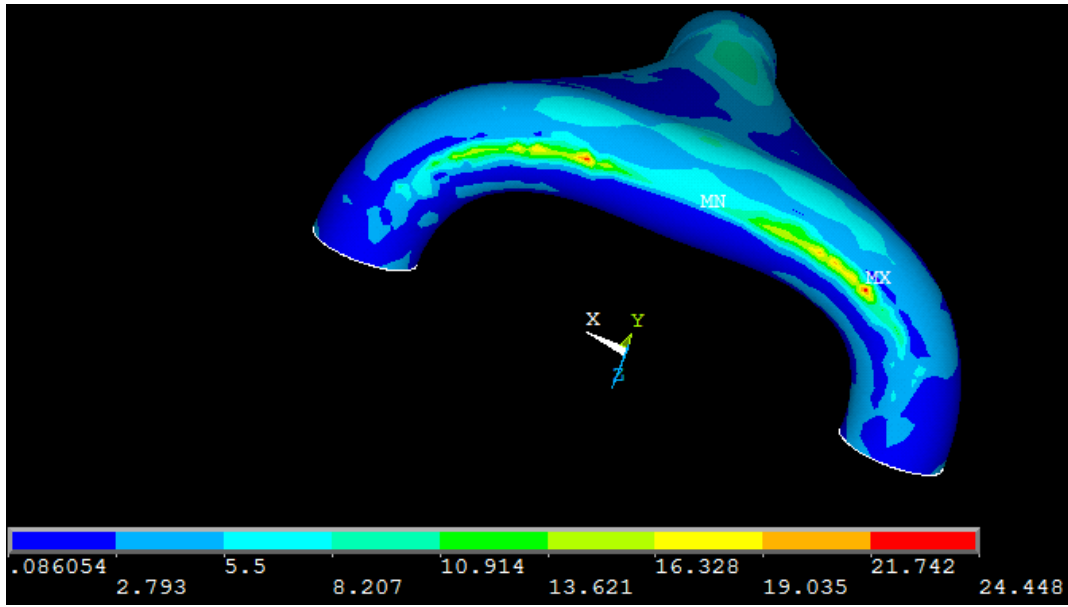


Figura 4.48 Cuantificación del esfuerzo en la parte inferior

De igual manera, si se quiere cuantificar las zonas que han sufrido más o menos desplazamiento se debe ingresar en **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Contour Plot** → **Nodal Solution** (figura 4.49).

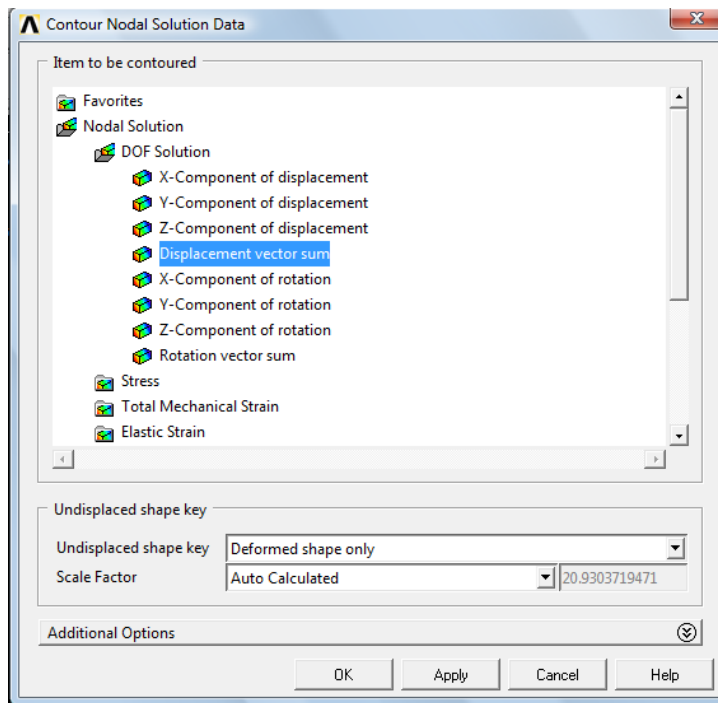


Figura 4.49 Ventana de soluciones de contorno, en nodos

Como resultado se obtienen los resultados de la magnitud del desplazamiento (figura 4.50)

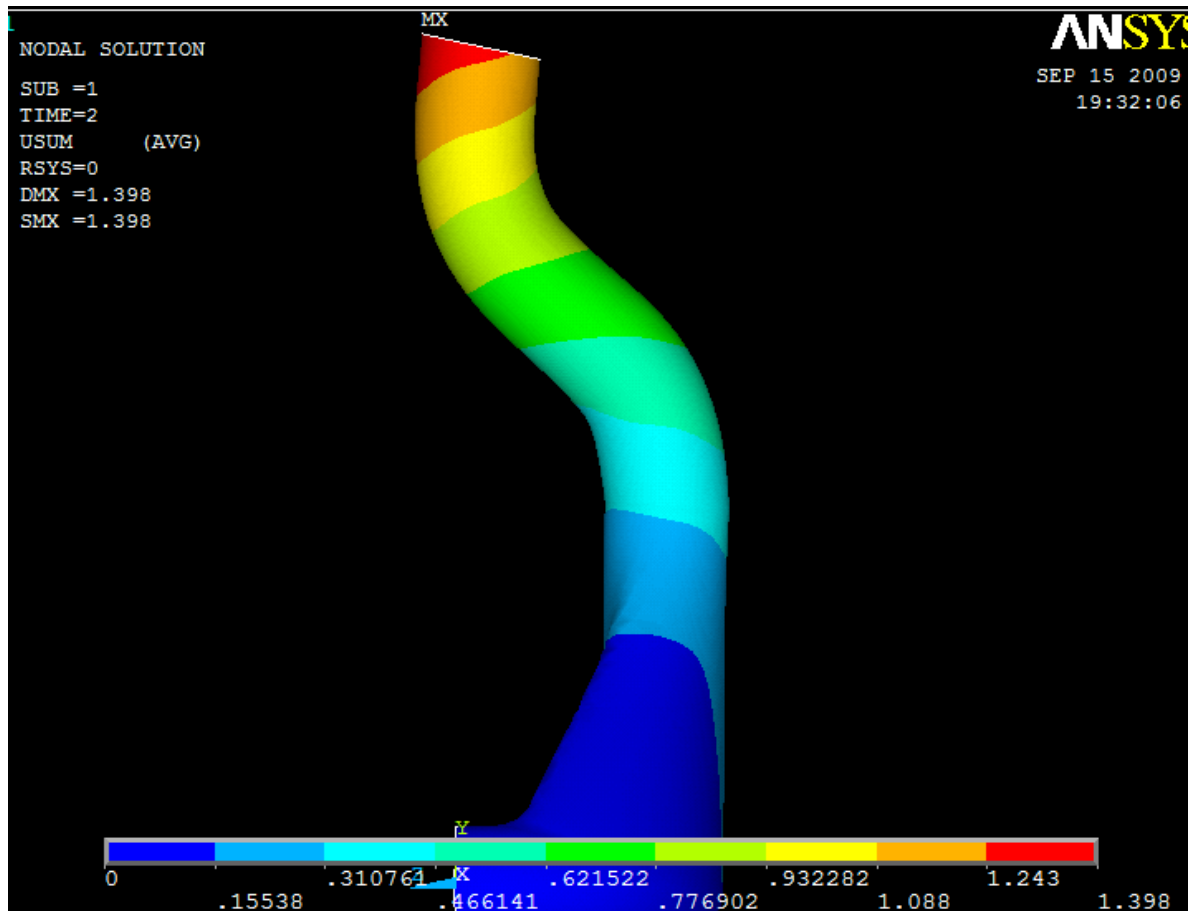


Figura 4.50 Cuantificación del desplazamiento en milímetros

Siendo el valor máximo de desplazamiento el valor antes descrito de aproximadamente 1.4 mm.

Para visualizar los esfuerzos interlaminares se necesita seleccionar **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add/Edit/Delete**, en el cuadro de diálogo que aparece, seleccionar **Options** y en **Storage of Layer data K8** se escoge **All layers**. Nuevamente se postprocesa el archivo. Y se observan los resultados (figura 4.51)

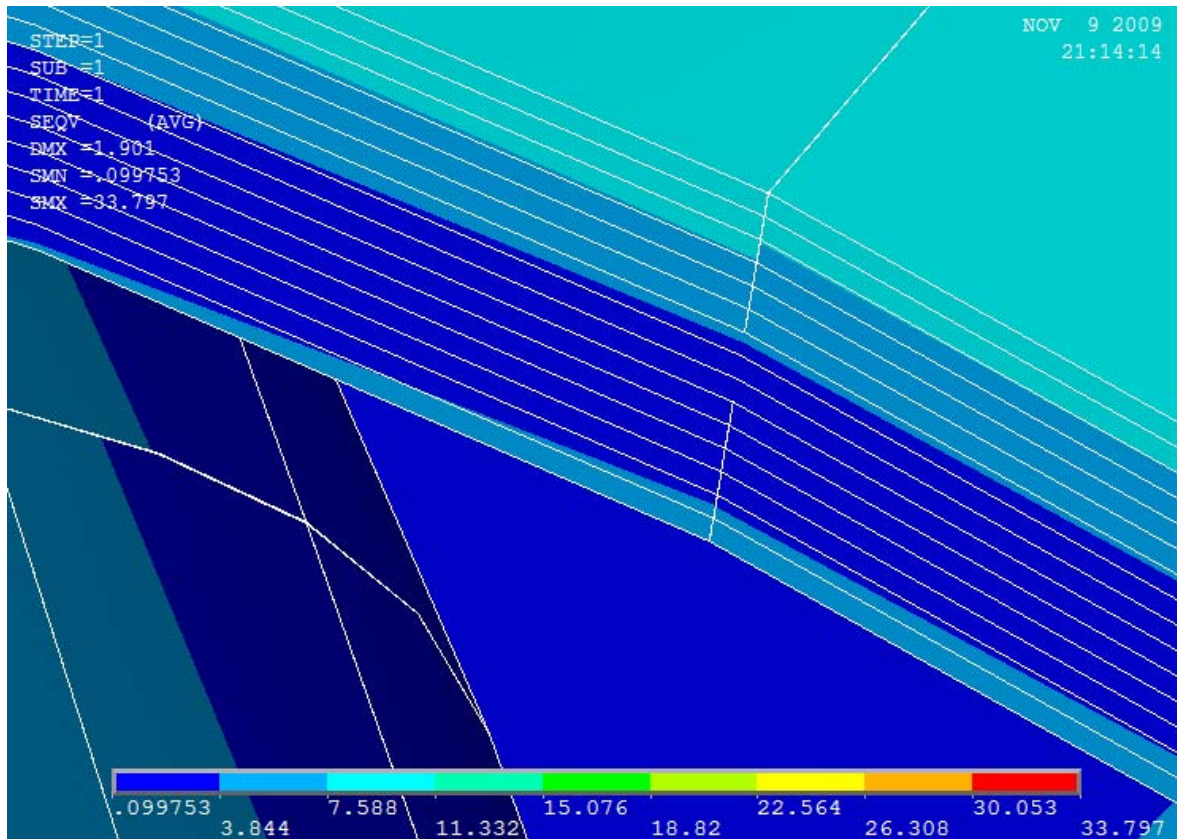


Figura 4.51 Detalle de los esfuerzos según las capas del laminado

4.3.3.5 SIMULACION TIPO TRANSITORIA EN ANSYS

La segunda simulación a realizar en ANSYS comprende el comportamiento de la estructura para un espacio del tiempo comprendido en dos disparos consecutivos, para lo cual se debe simular los distintos escenarios dispuestos como lo serán:

Escenario 1: primer disparo del arma.

Escenario 2: reposo del arma entre disparos.

Escenario 3: segundo disparo del arma.

Escenario 4: reposo del arma.

Espacio de tiempo para cada escenario: 0.03 segundos.

Para realizar esta simulación, se procederá a crear una serie de programas simulando cada uno de los escenarios descritos anteriormente, y luego realizar una sola simulación que comprenda todos los escenarios.

Para realizar este procedimiento primero se selecciona **ANSYS Main Menu** → **Solution** → **Analysis Type** → **New Analysis** y se selecciona la opción transient (figura 4.52).

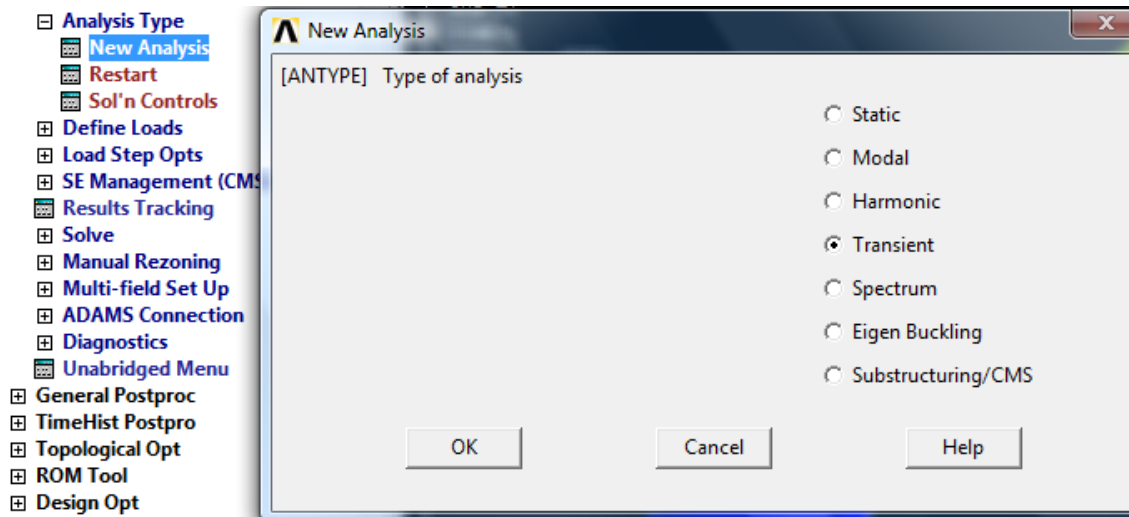


Figura 4.52 Selección de nuevo análisis de tipo transitorio

Luego se selecciona el método de solución, para este caso será completo (full) (figura 4.53).

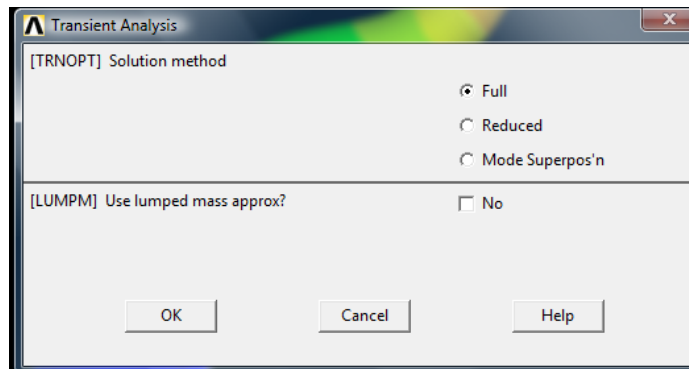


Figura 4.53 Método de solución

Luego para crear los escenarios se dirige a **ANSYS Main Menu** → **Solution** → **Analysis Type** → **Sol 'n Controls**, en el cuadro siguiente se muestra la pestaña basic donde se selecciona los parámetros de acción para este escenario, el tipo de desplazamiento, el tiempo final del escenario (0.03 seg.) y el tiempo de incremento del cálculo (0.001 seg.), y el tipo de soluciones a realizar (figura 4.54).

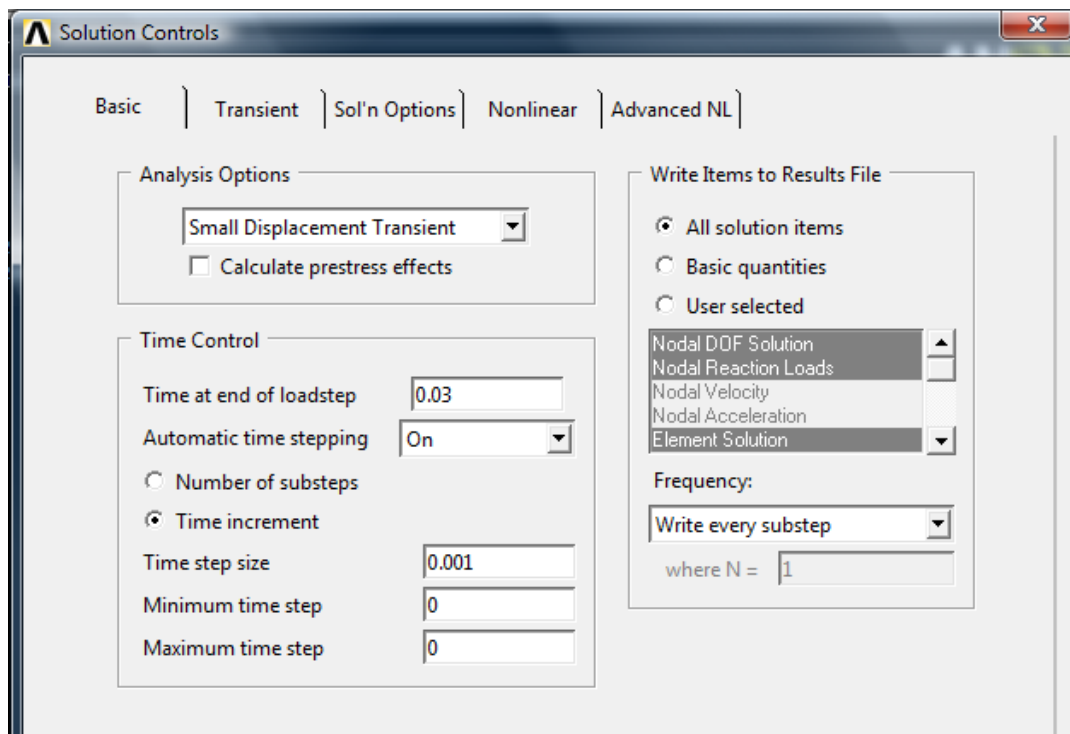


Figura 4.54 Cuadro de controles básicos de solución.

Luego en la pestaña transient se selecciona el efecto transitorio para el escenario, se selecciona en este caso el tipo rampa, con el cual seguirá la acción a través del tiempo (figura 4.55)

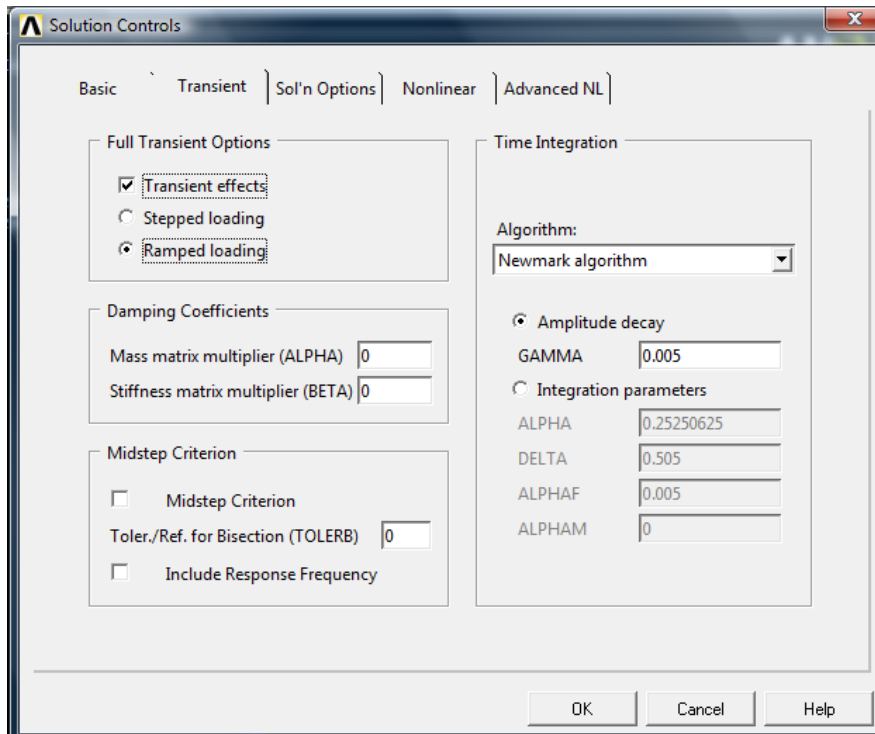


Figura 4.55 Pestaña transient

Luego se acepta estas opciones y se procede a grabar dicho escenario a un archivo LS, con el cual ANSYS crea una secuencia de pasos.

Para esto se dirige a **ANSYS Main Menu** → **Solution** → **Load Step Opts** → **Write LS File** (Figura 4.56), y para este caso esta será el escenario 1

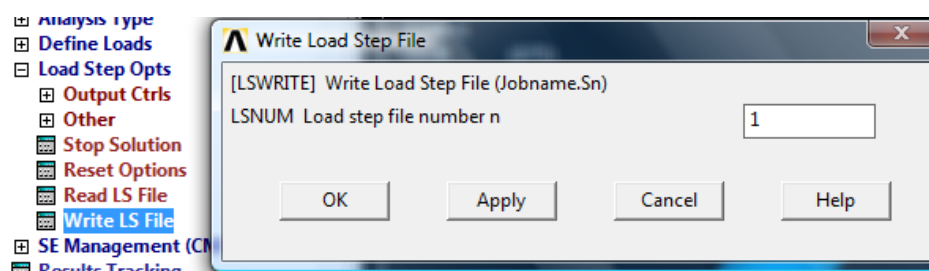


Figura 4.56 Grabar archivo del escenario 1

Luego se debe simular los escenarios 2 y 4 los cuales simulan el espacio de reposo luego de cada disparo realizado, para lo cual se debe eliminar la fuerza del disparo del arma, para lo cual se procede a ir a **ANSYS Main Menu** →

Preprocessor → **Loads** → **Define Loads** → **Delete** → **Force/Moment** → **On Nodes**, en el cuadro siguiente se selecciona *Box* y se selecciona el grupo de nodos que contienen la fuerza del disparo (figura 4.57)

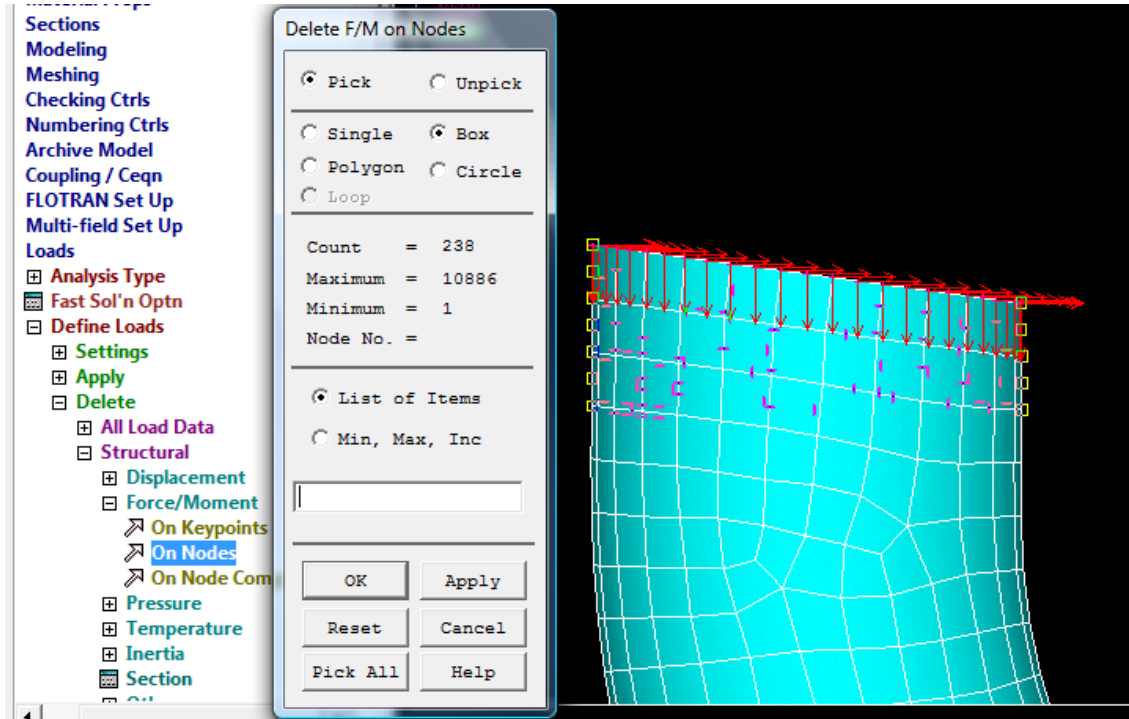


Figura 4.57 Eliminar fuerza del disparo del arma

Luego de dar clic en aceptar se selecciona únicamente el eje donde se encuentra la fuerza a eliminar, en este caso la fuerza en eje z.

Luego para crear el segundo escenario se dirige a **ANSYS Main Menu** → **Solution** → **Analysis Type** → **Sol 'n Controls**, en la pestaña basic donde se selecciona los parámetros de acción para este escenario, el tipo de desplazamiento, el tiempo final del escenario (0.06 seg.) y el tiempo de incremento del cálculo (0.001 seg.), y el tipo de soluciones a realizar (figura 4.58).

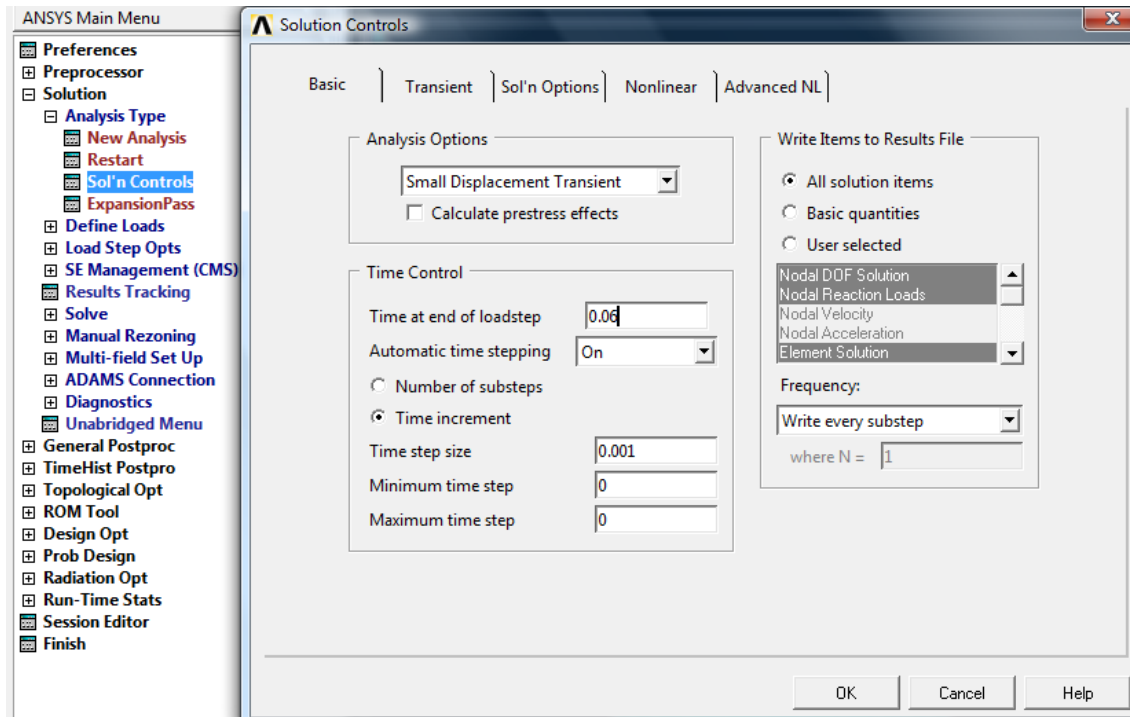


Figura 4.58 Pestaña basic para escenario 2

Este escenario se lo graba de la misma manera con el numero 2 de la secuencia (figura 4.59)

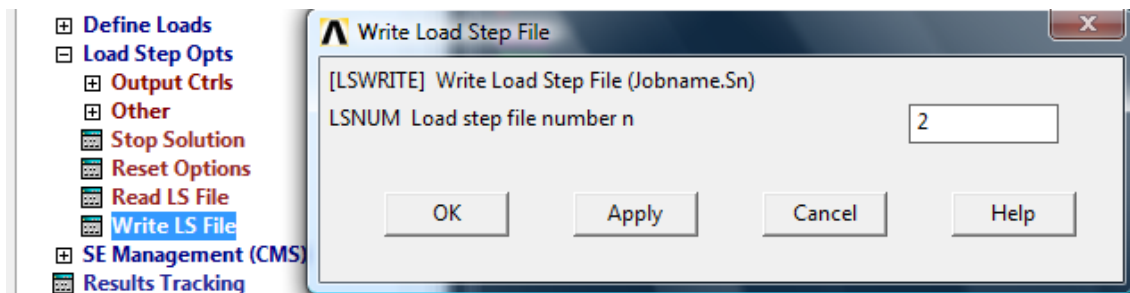


Figura 4.59 Grabar archivo para escenario 2

Para el escenario 4, el cual es el mismo que es escenario 2, con la diferencia que este escenario el tiempo final de operación es 0.12 segundos; por lo que se cambia este dato y se graba dicho archivo LS como el 4.

Finalmente para el escenario 3, el cual es similar al escenario 1 que contiene la fuerza del disparo, con la diferencia que para este escenario el tiempo final de operación es 0.09 segundos, para lo cual se deberá primero leer el escenario 1 para esto se dirige a **ANSYS Main Menu** → **Solution** → **Load Step Opts** → **Read LS File**, (figura 4.60)

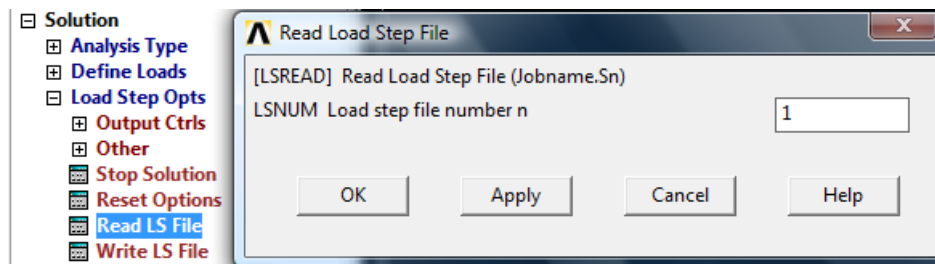


Figura 4.60 Leer el escenario 1

Luego de leer el archivo LS 1, se dirige a **ANSYS Main Menu** → **Solution** → **Analysis Type** → **Sol 'n Controls**, en la pestaña basic, se modifica el tiempo final del escenario a 0.09 seg.

Finalmente se dirige a **ANSYS Main Menu** → **Solution** → **Load Step Opts** → **Write LS File** y para este caso esta será el escenario 3.

Una vez realizada toda la secuencia de 4 escenarios para simular 2 disparos continuos, se procede a resolver la simulación, para lo cual se selecciona **ANSYS Main Menu** → **Solve** → **From LS Files**, y se arma la secuencia desde 1 hasta 4 (figura 4.61).

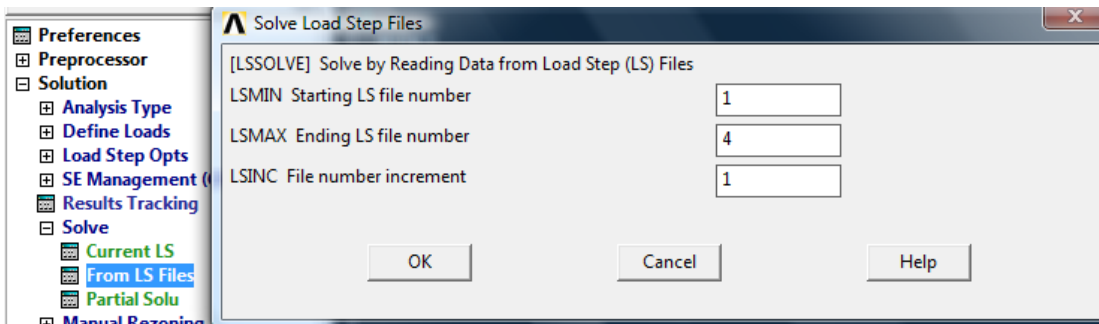


Figura 4.61 Resolución de la simulación en base a distintos escenarios

Este procedimiento puede tomar alrededor de 30 minutos en resolverse, debido a que ANSYS crea un sistema de miles de ecuaciones en base a los datos dispuestos anteriormente.

Luego de terminada la resolución de la simulación dada, se procede a verificar los resultados, para lo cual se seleccionará un punto de la estructura para obtener los datos del desplazamiento críticos del mismo.

Para lo consiguiente se selecciona **ANSYS Main Menu** → **TimeHist Postpro**, del cual se despliega el cuadro **Time History Variables**, se añade una variable de historia en el tiempo para el desplazamiento en el eje del disparo (figura 4.62).

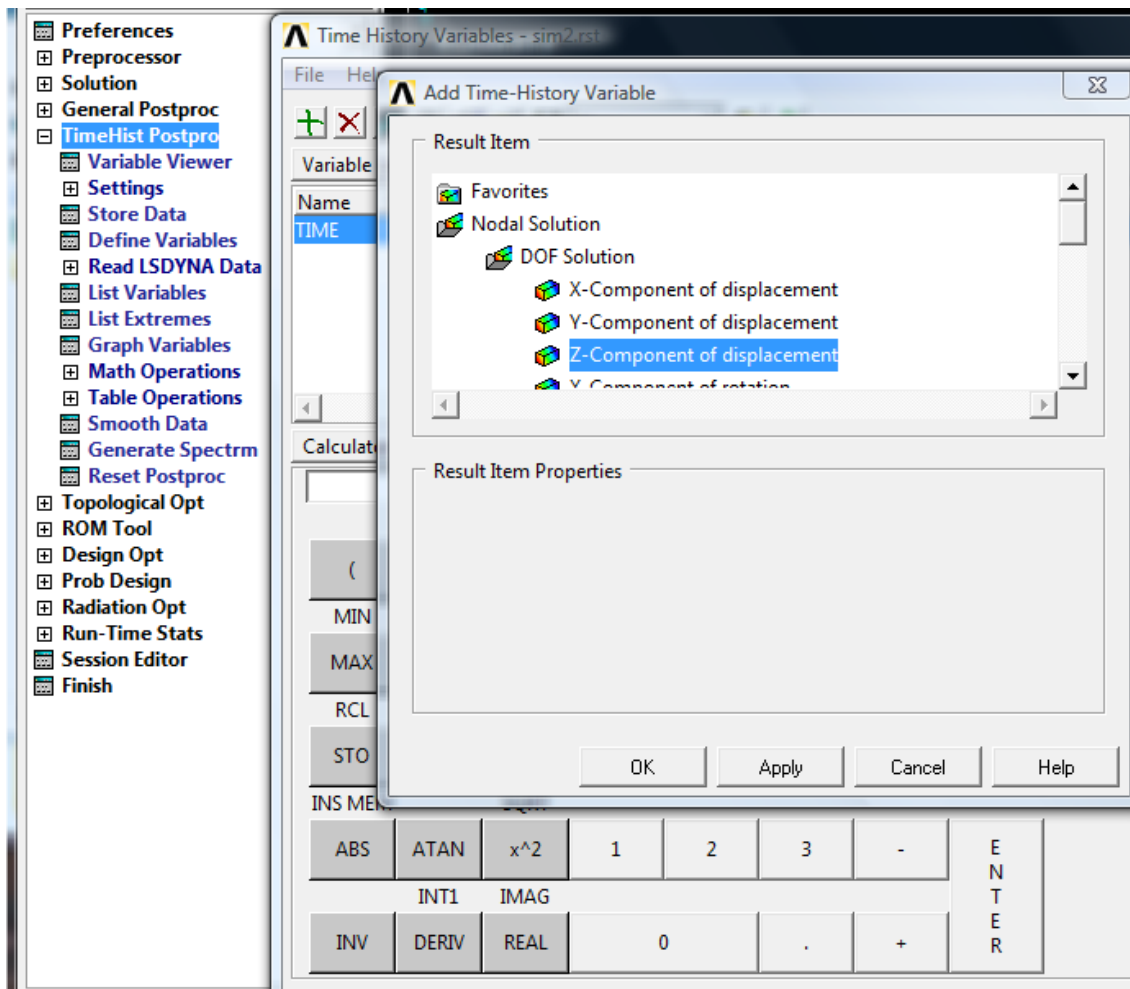


Figura 4.62 Agregar una variable de desplazamiento en función del tiempo

Luego de aceptar esta variable se selecciona el nodo a analizar en el tiempo, para lo cual se selecciona uno de los nodos del extremo de la estructura, la misma que contiene las fuerzas inducidas por los disparos y el peso en el tiempo de dos disparos. (figura 4.63).

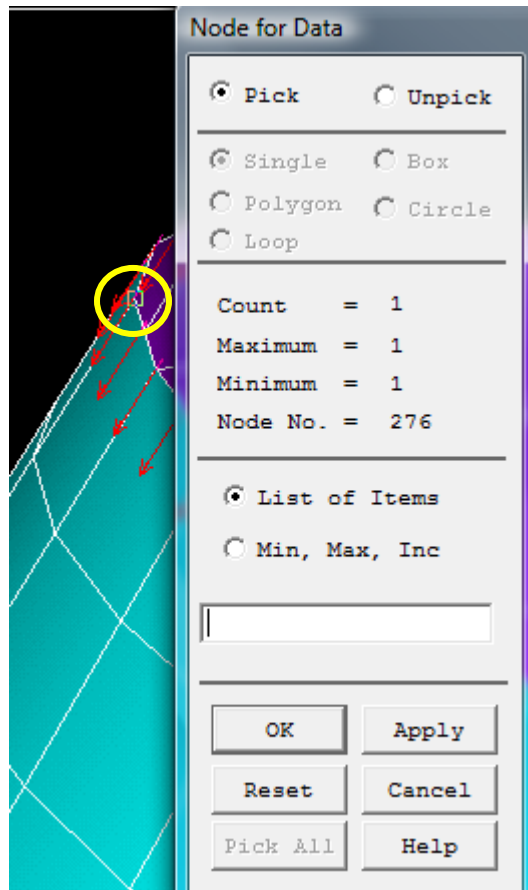


Figura 4.63 Selección de un nodo para análisis

Luego de seleccionar el nodo se retorna al cuadro **time history variables** en el cual se despliega en nodo seleccionado anteriormente y se selecciona dicho nodo y para observar los resultados en éste se selecciona **Graph data** (figura 4.64)

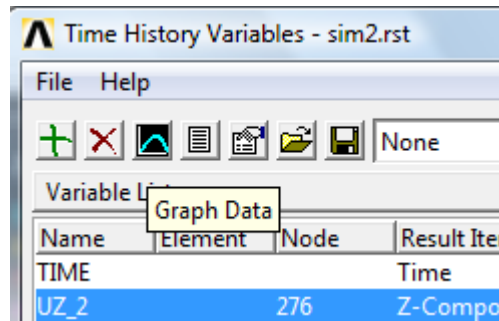


Figura 4.64 Selección del nodo para desplegar gráfico de resultados

Con lo que se despliega la gráfica de los 4 escenarios juntos indicando los desplazamientos en el eje z para cada escenario (figura 4.65)

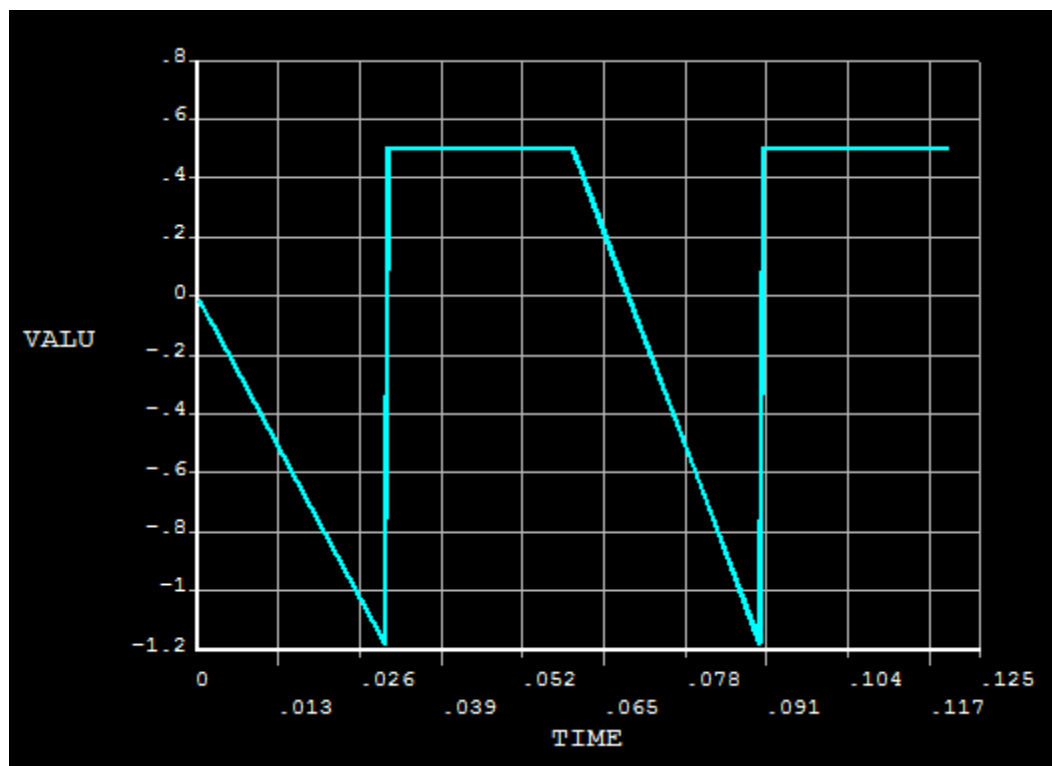


Figura 4.65 Gráfica de desplazamiento – tiempo

Con lo que se puede observar un desplazamiento positivo máximo de 0.5 mm en el sentido +z y de 1.2 mm en sentido -z, valores acordes a la previa simulación estática realizada en ANSYS y satisfactorio para los resultados esperados.

4.3.3.6 SIMULACION TOMANDO EN CUENTA LA TEORIA DE FALLA DE TSAI-WU^[4.5]

La simulación biaxial realizada anteriormente sufre de varias inconvenientes para representar datos experimentales con relación a los datos teóricos emitidos por este criterio, la mejor manera de lograr una mayor precisión es el de incrementar el número de términos que forman parte de la ecuación teórica. Esto aumenta la exactitud con la cual los datos experimentales generarán una curva de comportamiento adecuada; este procedimiento fue presentado por los investigadores Tsai y Wu, y para el mismo se necesita el grado de resistencia en otra dirección, el cual se requiere para poder representar la interacción entre esfuerzos en dos direcciones.

Este criterio postuló que una superficie de falla en un espacio de esfuerzo de seis dimensiones existe en la forma

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (4.58)$$

Donde F_i y F_{ij} son tensores de fuerza de segundo y cuarto rango respectivamente, y para la notación del esfuerzo producido se utiliza $\sigma_4 = \tau_{23}$, $\sigma_5 = \tau_{31}$ y $\sigma_6 = \tau_{12}$ en la ecuación 4.58 lo cual es muy complicado, por lo cual dicha ecuación se la reduce para el caso de una lámina ortotrópica bajo condiciones de esfuerzos sobre el plano

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (4.59)$$

Bajo este criterio de falla se realizará en ANSYS una vez más la simulación en la estructura diseñada, para obtener unos mejores resultados los cuales se aproximen de mejor manera a una situación real.

⁵ Jones, R.M. (1999) *Mechanics of Composite Materials*, Estados Unidos: Taylor & Francis.

Ya que se debe verificar en esta y en las restantes hipótesis de carga si las láminas no fallan cuando se aplique carga. Es decir, si los esfuerzos están dentro de un margen de seguridad. Como se ha visto, los materiales ortotrópicos usan diferentes criterios de falla y para aplicarlos se necesita hallar los esfuerzos admisibles del material, para lo cual se utiliza la tabla 4-14. Adicionalmente, se necesita calcular los coeficientes de acoplamiento de la teoría de Tsai-Wu, que se calculan mediante las expresiones siguientes y la ecuación (4.60).

$$F_{11} = \frac{1}{\sigma_{1T} \cdot \sigma_{1C}} \qquad F_{22} = \frac{1}{\sigma_{2T} \cdot \sigma_{2C}}$$

$$C_{xy} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} = -2.722 \times 10^{-6} \qquad (4.60)$$

TABLA 4-13 RESISTENCIAS ADMISIBLES DE LÁMINAS

Propiedades de las láminas					
375Material	σ_{1T}	σ_{1C}	σ_{2T}	σ_{2C}	T_{12F}
	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
Grafito – Epoxi					
T300/5208	1500	1500	40	246	68
AS/3501	1447	1447	52	206	93
H-IM6/Epoxy	3500	1540	56	150	98
AS4/APC2	2130	1100	80	200	160
T300/934					
tape	1314	1220	43	168	48
Cloth(13mil)	499	352	458	352	46
Cloth(7mil)	375	279	368	278	46

Glass – Epoxi					
Scotchply 1002	1062	610	31	118	72
S-glass/Epoxi	1280	690	49	158	69
Woven GI/Epoxi	367	549	367	549	97
Kevlar					
Kevlar 49	1400	235	12	53	0.34
Boron – Epoxi					
B(4)/5505	1260	2500	61	202	67
B5.6/5505	1380	1600	56	125	62
E-glass – Vinylester					
E-glass - Vinylester	548	803	43	187	64

Fuente: Kollár, L P. y Springer, G.S. (2003). *Mechanics of Composite Structures*

Para calcular el coeficiente de acople (4.60) se utilizan los datos del material T300 cloth (7mil):

$$\sigma_{T1} := 375 \text{ Mpa} \quad \sigma_{C1} := 279 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{T2} := 368 \text{ Mpa} \quad \sigma_{C2} := 278 \text{ Mpa}$$

$$F_{11} := \frac{1}{\sigma_{T1} \cdot \sigma_{C1}} \quad F_{22} := \frac{1}{\sigma_{T2} \cdot \sigma_{C2}}$$

$$C_{XY} := -2 \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} = -9.666 \times 10^{-6}$$

$$C_{XY} = -9.666 \times 10^{-6}$$

Los datos del material T300 cloth (7mil) son ingresados al programa mediante: **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Material Props** → **Failure Criteria** → **Add / Edit**. Se presenta el siguiente cuadro de diálogo y tabla subsiguiente de la figura (4.66):

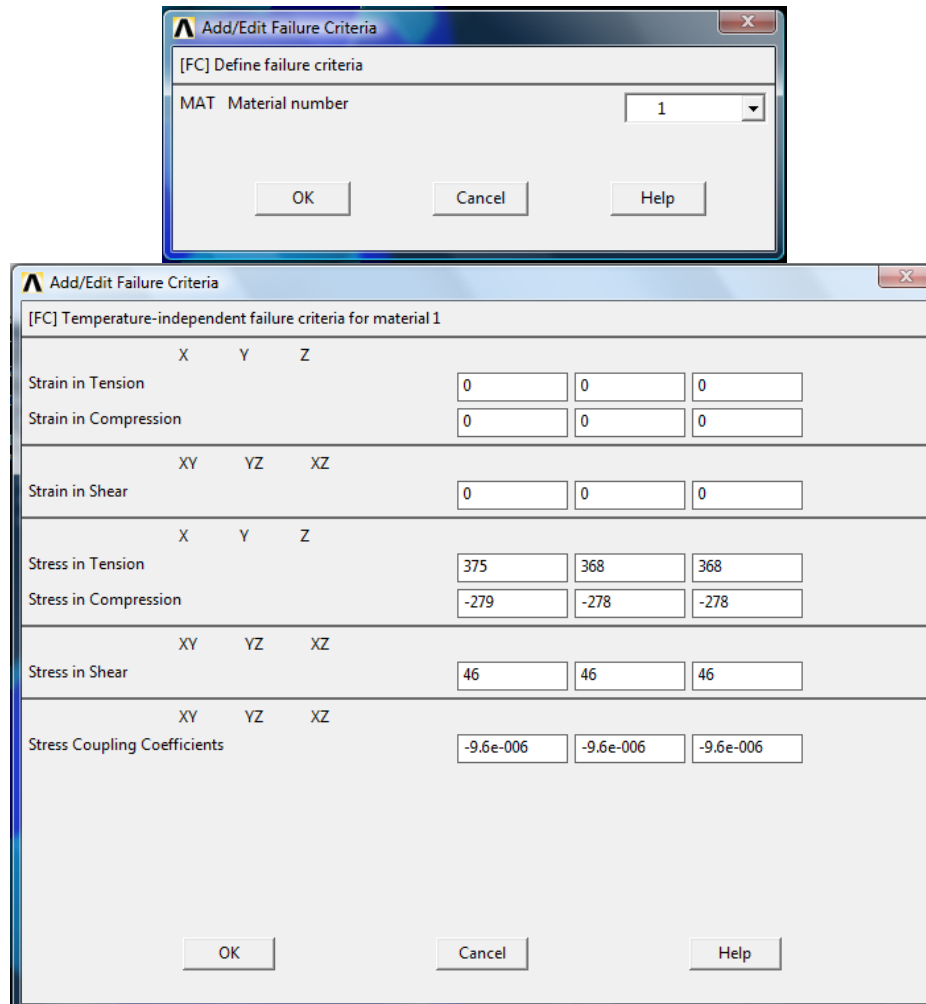


Figura 4.66 Cuadro de ingreso parámetros admisibles de esfuerzo y corte

Una vez introducidos estos valores se procede a resolver nuevamente la simulación, y luego de esto igualmente se postprocesa nuevamente con lo que se obtienen los esfuerzos de Von Mises seleccionando: **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Contour Plot** → **Nodal Solution** (figura 4.67).

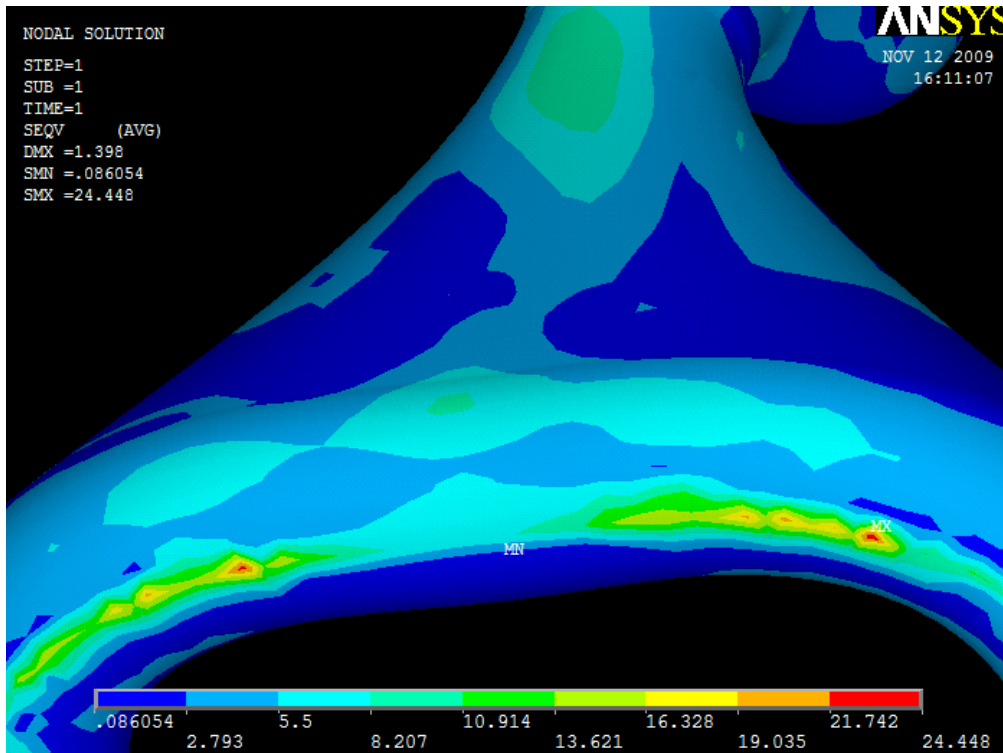


Figura 4.67 Solución nodal utilizando la teoría de falla de Von Mises

Con lo que se puede observar un esfuerzo mayor de 24.45 Mpa en el punto denominado Mx. Igualmente se puede observar la magnitud de los esfuerzos producidos en el extremo del soporte en contacto con el arma (figura 4.68)

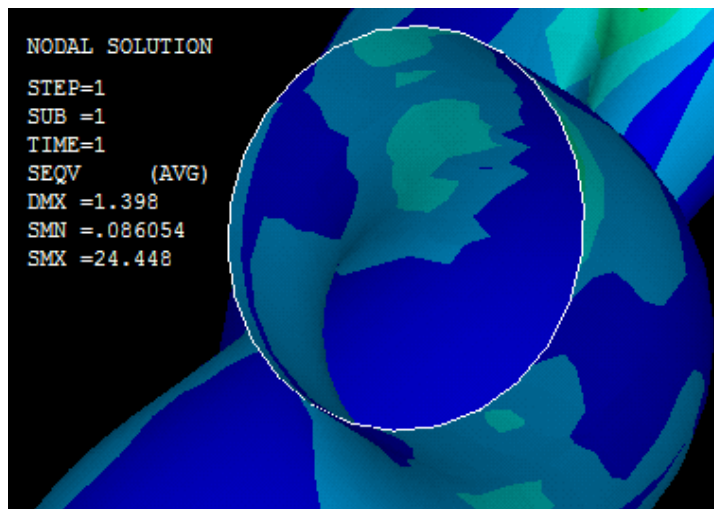


Figura 4.68 Solución nodal utilizando la teoría de falla de Von Mises

El índice de esfuerzo ξ de Tsai-Wu se lo halla de la misma forma, para lo cual se dirige a **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Contour Plot** → **Nodal Solution** → **Failure Criteria** → **Tsai-Wu Strength Index** y se puede visualizar en la figura (4.69):

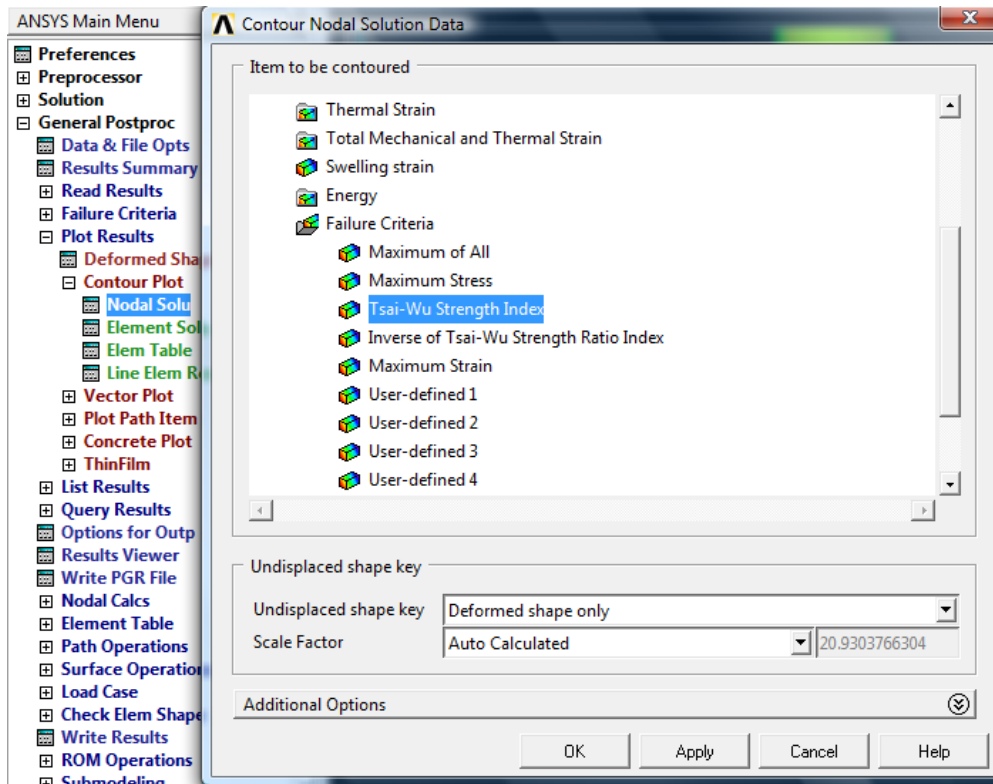


Figura 4.69 Selección del criterio de falla Índice Tsai-Wu

Con lo que se presentan los resultados en la figura 4.70, nótese que el índice máximo de resistencia de Tsai-Wu es de 0.018104, el cual es mucho menor que 1. Esto quiere decir por lo tanto, que el material del laminado no fallará cuando se someta el soporte a la prueba de torsión, gracias a que el factor de seguridad, el cual es el valor inverso de ξ , viene a ser en este caso aceptable.

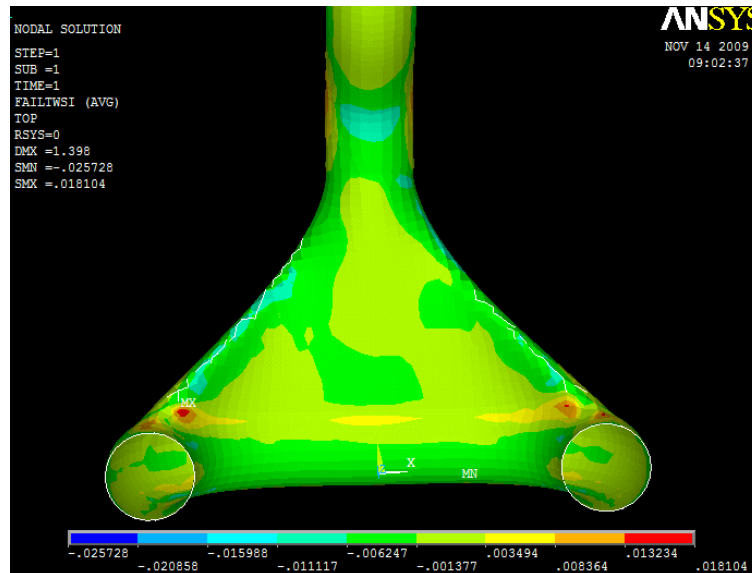


Figura 4.70 Detalle del comportamiento de la estructura empleando el criterio de falla Índice Tsai-Wu

4.3.3.7 ESFUERZOS INTERLAMINARES

Los esfuerzos cortantes interlaminares en compuestos laminados pueden ser significativamente altos sobre una región igual al espesor del laminado cerca de los bordes libres del mismo. Como resultado de los altos esfuerzos interlaminares podría iniciarse la delaminación en los bordes, que no es otra cosa que el despegado de las láminas individuales. La falla por esfuerzo interlaminar es reconocida como uno de los modos críticos de falla de un compuesto laminado. La resistencia al esfuerzo interlaminar depende principalmente de las propiedades de la matriz en lugar de las propiedades de las fibras. La resistencia al esfuerzo interlaminar se incrementa aumentando la resistencia de la matriz. Se puede recomendar para una mejor adhesión el uso de resinas epóxicas en lugar de resinas de poliéster o vinílicas.

Para graficar los esfuerzos interlaminares en Ansys se selecciona **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add / Edit / Delete** → **Options**, donde K6 se selecciona $\neq 0$ (figura 4.71).

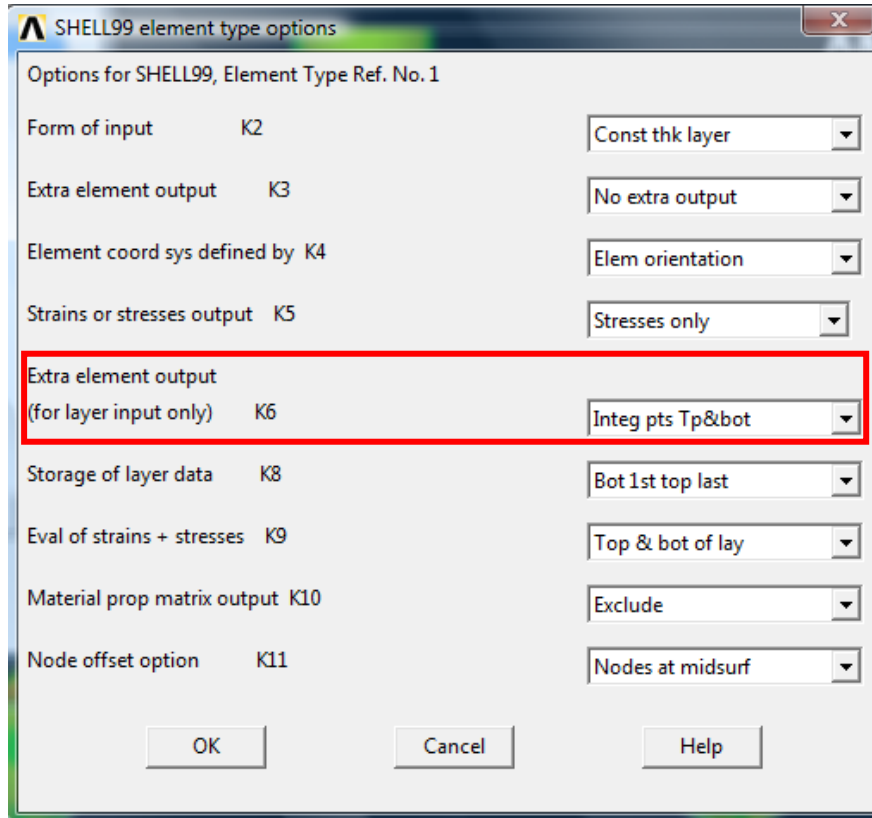


Figura 4.71 Selección de la opción para verificar los esfuerzos interlaminares

Luego de correr la simulación nuevamente, este nuevo parámetro se lo encuentra en **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Element Table** → **Define Table** → **Add** (figura 4.72).

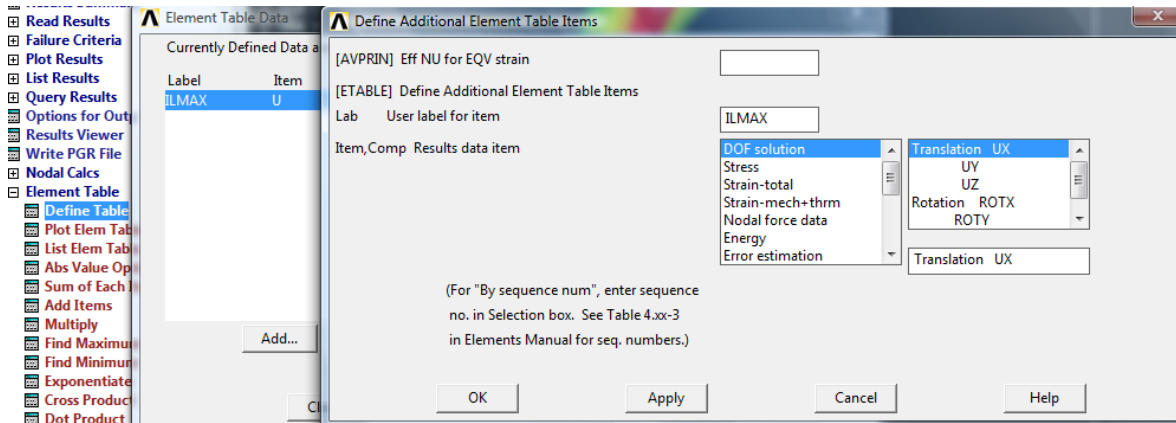


Figura 4.72 Selección de elementos para la tabla solución

En el campo destinado al (**User label for item**) se escribe ILMAX que es el identificador del esfuerzo interlaminar máximo ubicado en la sección **Help** del mismo recuadro (Ver figura 4.72).

Para graficar el resultado se selecciona en **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Contour Plot** → **Element Table** y **OK**, en el cuadro de la figura 4.73:

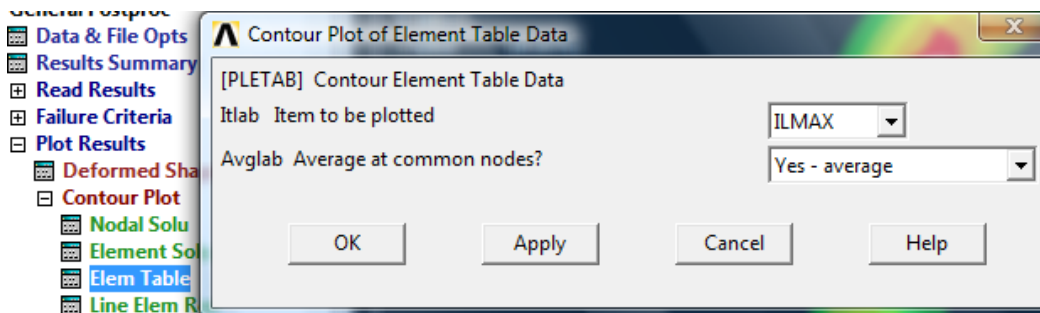


Figura 4.73 cuadro de dialogo para graficar los esfuerzos interlaminares

Los resultados correspondientes se los puede observar en la figura 4.74

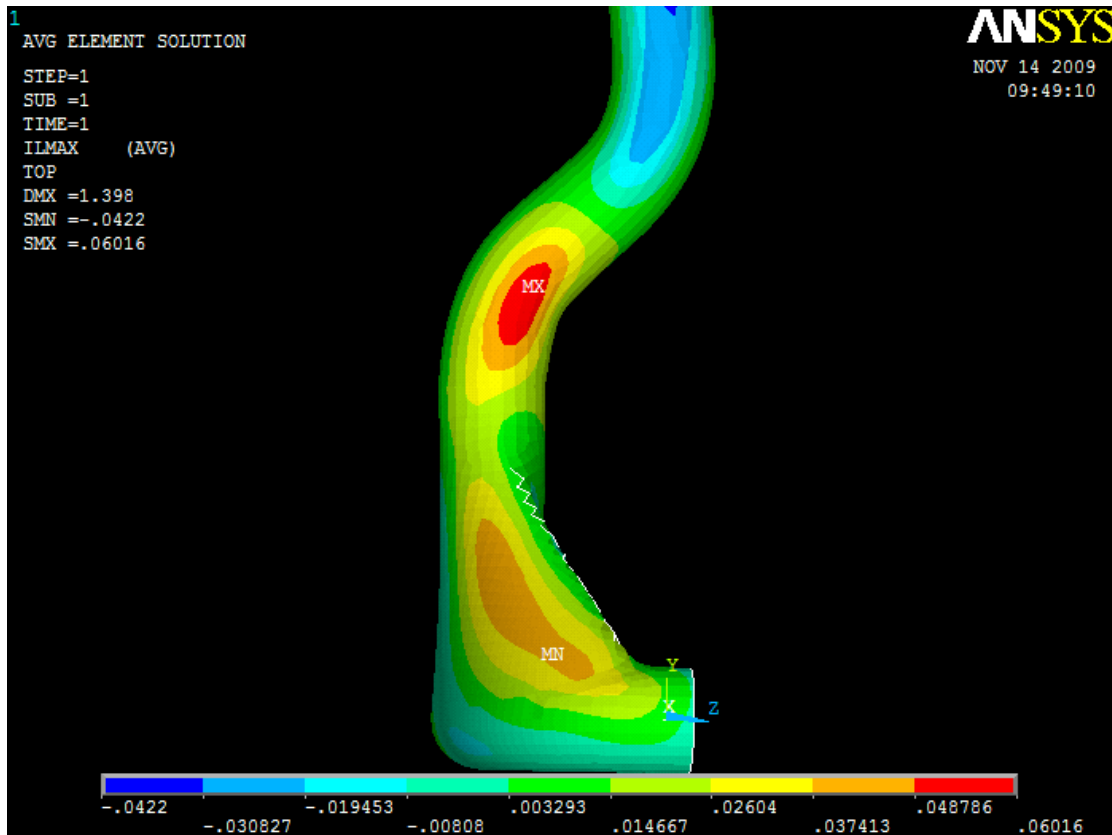


Figura 4.74 Resultados del cálculo de los esfuerzos interlaminares

La figura 4.73 se despliega los resultados, en los cuales se puede observar un valor bastante bajo, 0.06016 MPa, de esfuerzo interlaminar y mucho menor que la resistencia de la resina que es de 4.1 GPa.

4.3.3.8 ANALISIS DEL ESQUEMA DE CONSTRUCCION TIPO SANDWICH

El esquema de laminado tipo sándwich como se explicó en el capítulo 2.4 es un modo de laminado que incluye un núcleo intermedio entre todas las capas laminadas, en cual absorbe la deflexión, resistencia, y carga de temperatura que pueda afectar a la estructura, aumentando así su eficiencia como se observa en la figura 4.75.

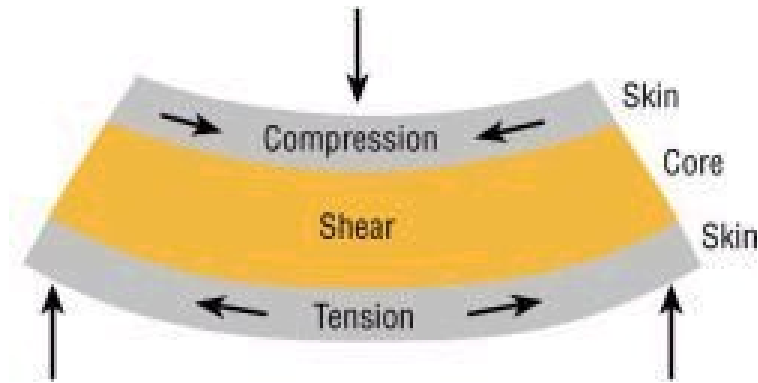


Figura 4.75 Detalle de la reducción de la deflexión por el empleo del esquema tipo sándwich y su funcionamiento

Gracias a la utilización del honeycomb y de la sustancia epoxy necesaria para juntar esta estructura al laminado se pueden reducir los esfuerzos máximos obtenidos en la estructura hasta en un 30%.

Por lo que para su análisis y construcción se realizara un laminado preliminar de 7 capas de fibra de carbono para luego instalar el honeycomb y finalmente realizar el resto del laminado calculado hasta completar las 15 capas como en la Figura 4.76.

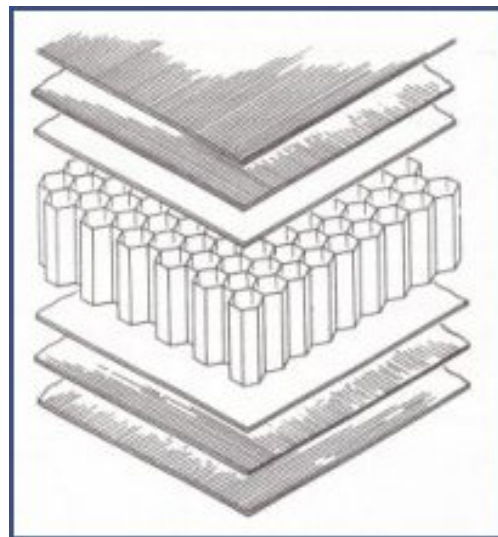


Figura 4.76 Ejemplo de laminación incluyendo el honeycomb

Para realizar este análisis primero se debe obtener las propiedades mecánicas del núcleo a incluir en el laminado, muchas propiedades están tabuladas en las tablas provistas por el fabricante, pero se debe tomar una consideración especial en cuanto al coeficiente de Poisson μ ya que se recomienda para los programas de análisis de elementos finitos, incluir un valor que oscile de 0.1 a 0.5 ya que de acuerdo a las demás propiedades, las cuales serán prácticamente despreciables en comparación a las propiedades del laminado, además que el núcleo ofrece muy poca resistencia, casi despreciable^[4.6]. Para este caso se incluirá un valor conservador de 0.3, el cual es un valor medio en el rango recomendado. Esta y otras propiedades mecánicas del núcleo honeycomb se detalla en la tabla 4.14.

TABLA 4-14 PROPIEDADES MECÁNICAS DEL NÚCLEO TIPO HONEYCOMB

PROPIEDADES NUCLEO HONEYCOMB	
<i>DETALLE</i>	<i>VALOR</i>
MATERIAL	NOMEX
ESPESOR	6 mm
DENSIDAD	4,0 Kg/m ³
Módulo de Elasticidad a cortante (lado de la cinta L)	55 Mpa
Módulo de Elasticidad a cortante (lado transversal W)	33 Mpa
Coefficiente Poisson μ	0,3

Fuente: Christian León, Alex Vásquez

^{4.6} Bitzer T. N. (1997). Honeycomb technology: materials, design, manufacturing Mechanics of Composite applications and testing Structures. Springer, Estados Unidos.

El análisis que se realizará a continuación será para demostrar el porcentaje de reducción de los esfuerzos obtenidos como resultado de la utilización del esquema tipo Sandwich, éste se lo realizará en una barra cuadrada (figura 4.77) que simulara una viga a la cual se le ejecutarán cargas transversales en un extremo y se restringirá todo movimiento en el otro para simular un apoyo empotrado.

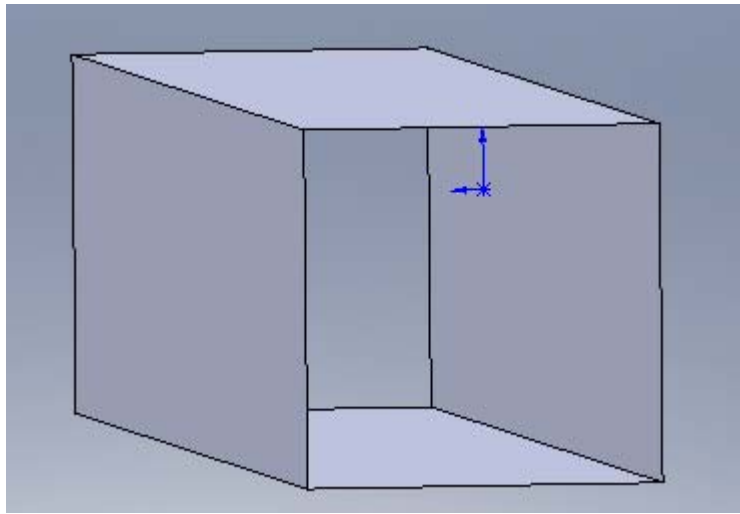


Figura 4.77 Barra cuadrada realizada en solidworks

Una vez en el programa Ansys, se importa el elemento IGES, y primero se procede a ingresar las propiedades de los dos materiales a utilizar, los cuales son la fibra de carbono de tipo ortotrópica acorde a la tabla 4.12 **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Material Props** → **Material Models**. Quedando las propiedades según la figura (4.78)

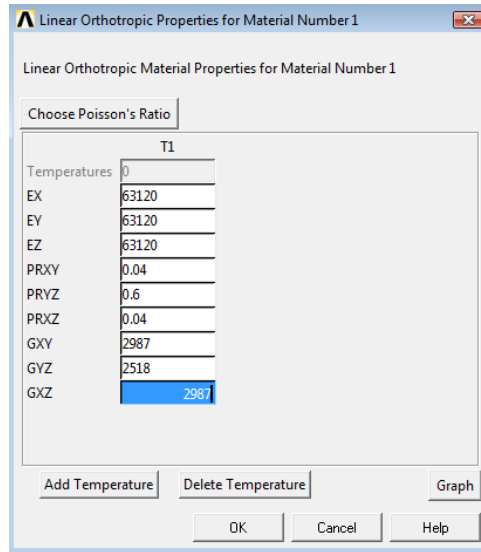


Figura 4.78 Propiedades de la fibra de carbono

Una vez ingresadas las propiedades de la fibra de carbono, se ingresa a **Material** → **New Model** del cuadro Define Material y se ingresa el número de material a introducir de acuerdo a figura 4.79.

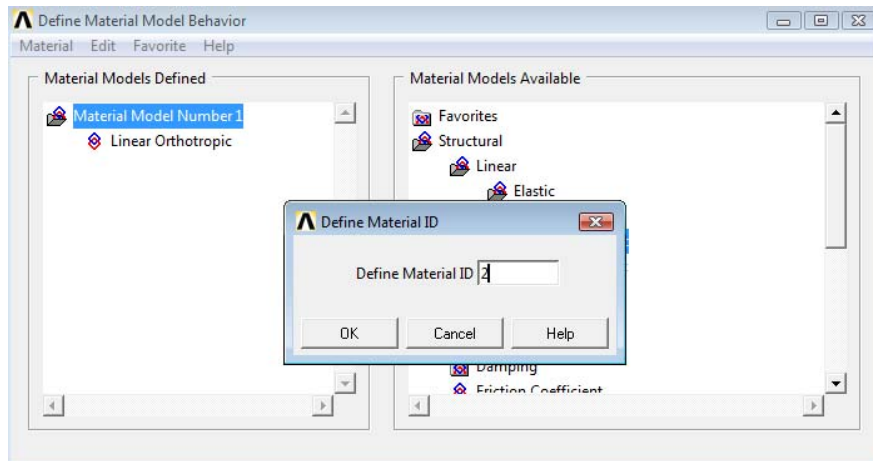


Figura 4.79 Definición del segundo material

Una vez definido el material Model Number 2, el cual será el núcleo de tipo honeycomb, el cual corresponde a un material de tipo isotrópico utilizando las propiedades de la tabla 4.14 como en la figura 4.80.

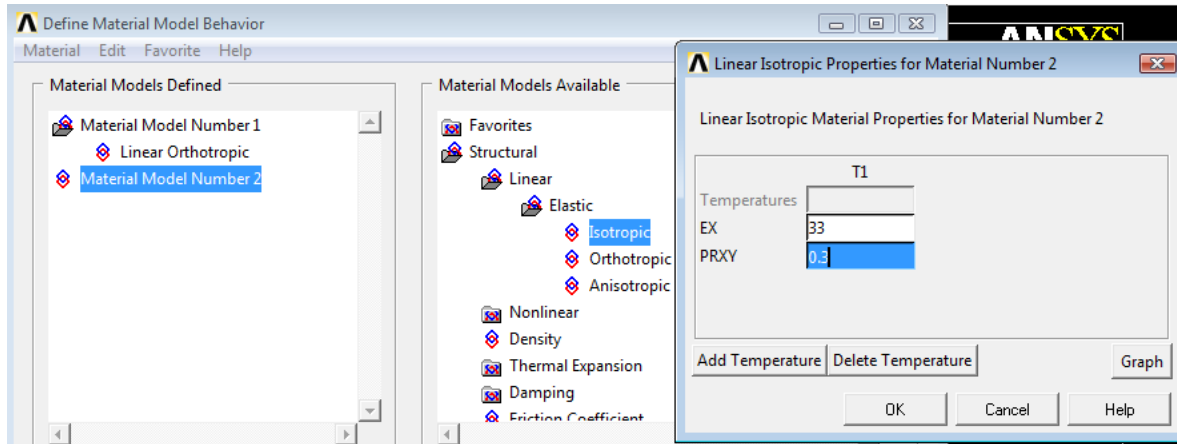


Figura 4.80 Propiedades del Material Number 2

Una vez definidas estas propiedades se cierra el cuadro define material. Luego se procede a utilizar el elemento membrana (**Shell Nonlin Layer 91**), elemento no lineal que permite la implementación de la estructura tipo sándwich. Se selecciona en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add / Edit / Delete**, en respuesta aparece el cuadro de diálogo y se selecciona **Add** (ver figura 4.81).

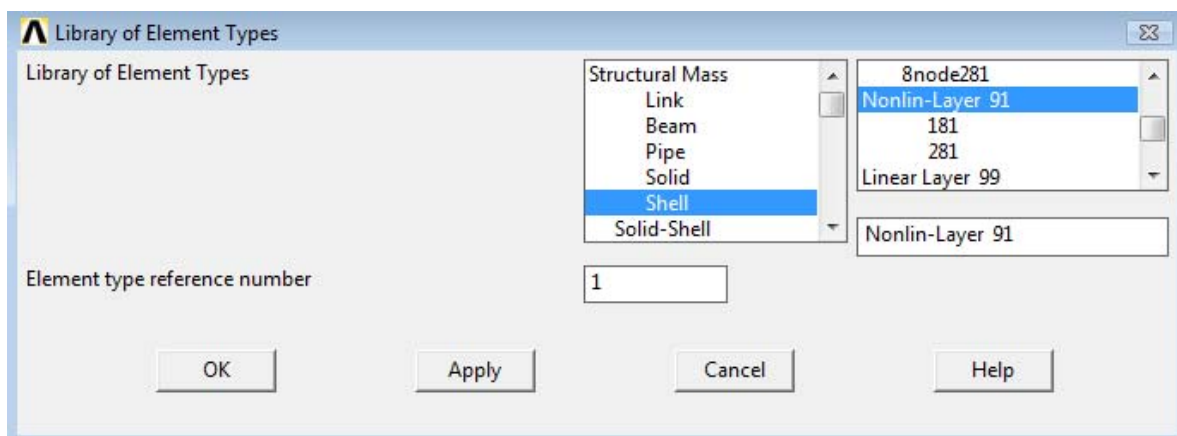


Figura 4.81 Selección del elemento no lineal tipo 91

Una vez seleccionado, se acepta la opción, y de vuelta en el cuadro **element type** se selecciona opciones con lo que se activa el cuadro de opciones para el elemento Shell 91 y se modifica las opciones K6, K8 y K9 para activar el análisis de la estructura tipo sándwich de acuerdo a la figura 4.82.

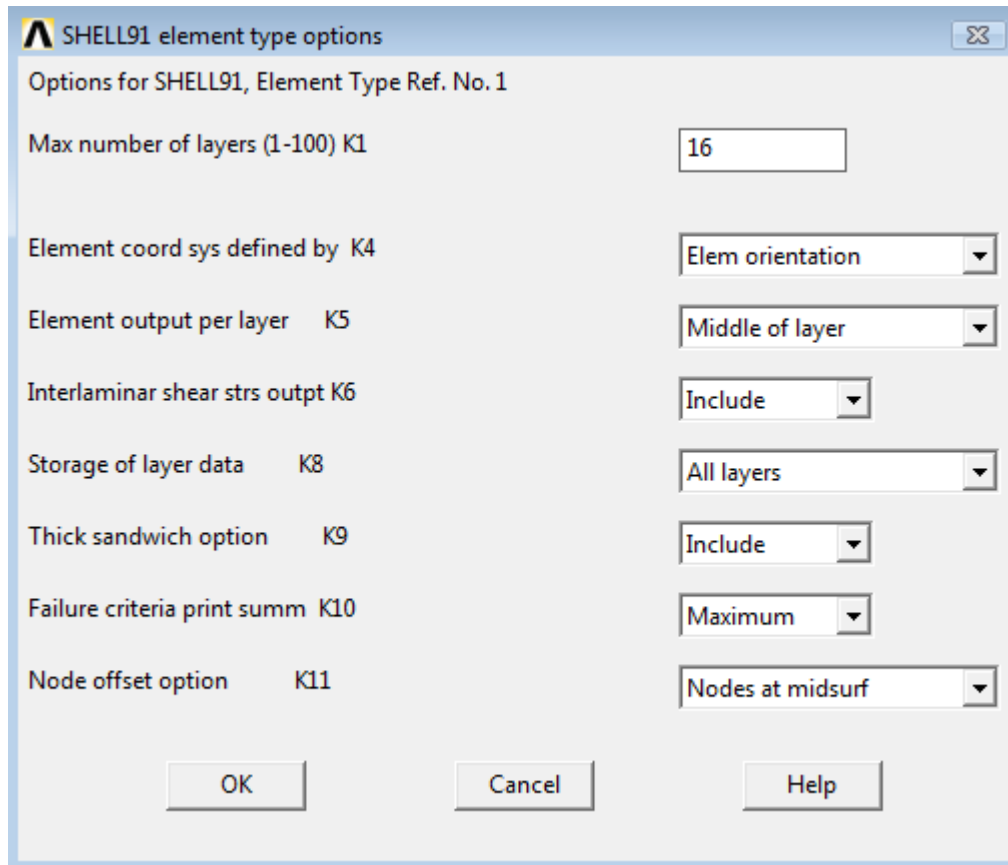


Figura 4.82 Cuadro opciones del elemento no lineal tipo 91 para activar el análisis tipo sándwich

De igual forma se asigna a este elemento las características mecánicas respectivas en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Real Constants** → **Add / Edit / Delete**, desplegándose un cuadro de dialogo donde se selecciona **Add**; Se activa **Add** y se despliega el cuadro donde se verifica el tipo de elemento utilizado. Y después se elige el elemento y se selecciona la opción editar donde se

despliega el cuadro para especificar el número de capas a utilizar, este número será igual al número de capas de fibra de carbono mas una capa del núcleo tipo sándwich para un total de 16 capas de acuerdo a la figura 4.83.

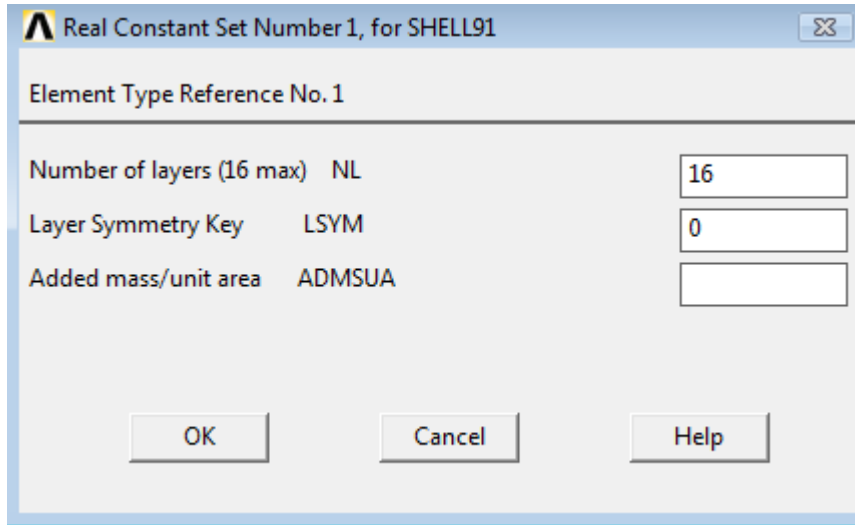


Figura 4.83 Cuadro de constantes para el elemento no lineal tipo 91

Una vez aceptadas estas opciones se procede a introducir los valores de cada una de las capas, en este caso se laminará 7 capas de 0.2 mm de fibra para luego incluir en núcleo de 6mm de espesor y luego se realiza el resto del laminado hasta completar las 15 capas de fibra a realizar, nótese en la figura 4.84 que en la capa correspondiente al núcleo, la propiedad del material se la cambia a 2, que corresponde al material del núcleo honeycomb.

Real Constant Set Number 1, for SHELL91

TK(I), TK(J)	0.2	0.20
TK(K), TK(L)	0.20	0.20
Layer number 3 MAT, THETA	1	0
TK(I), TK(J)	0.20	0.20
TK(K), TK(L)	0.20	0.20
Layer number 4 MAT, THETA	1	0
TK(I), TK(J)	0.20	0.20
TK(K), TK(L)	0.20	0.20
Layer number 5 MAT, THETA	1	0
TK(I), TK(J)	0.20	0.20
TK(K), TK(L)	0.20	0.20
Layer number 6 MAT, THETA	1	0
TK(I), TK(J)	0.20	0.20
TK(K), TK(L)	0.20	0.20
Layer number 7 MAT, THETA	1	0
TK(I), TK(J)	0.20	0.20
TK(K), TK(L)	0.20	0.20
Layer number 8 MAT, THETA	2	0
TK(I), TK(J)	6	6
TK(K), TK(L)	6	6

Press [OK] for next 8 layers

OK Cancel Help

Figura 4.84 Propiedades para cada una de las capas de elemento Shell 91

Igualmente se procede a mallar el elemento, y para observar la distribución de las capas acorde a lo señalado anteriormente, se utiliza el comando **/ESHAPE,1** y el resultado será como en la figura 4.85.

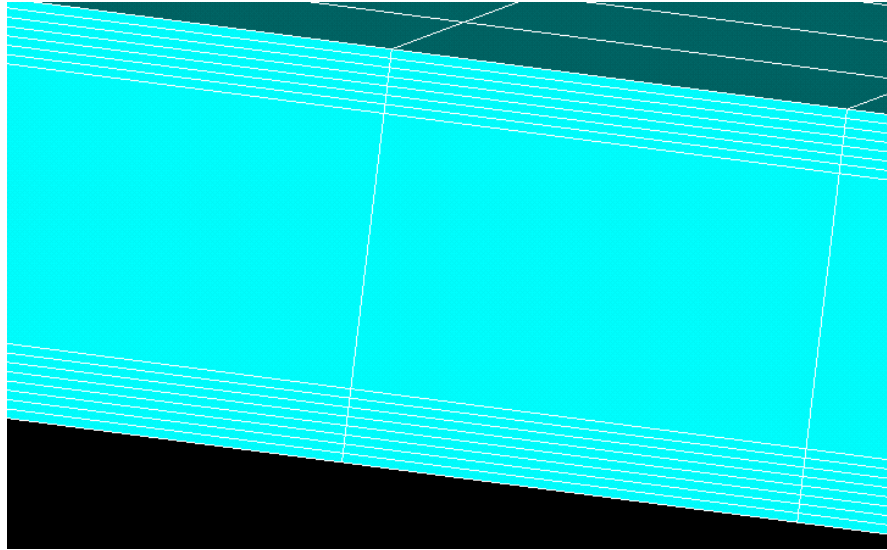


Figura 4.85 Detalle de la distribución del laminado para su análisis

Luego de igual manera se procederá a introducir las fuerzas en los extremos, y de acuerdo a nuestro elemento la fuerza del disparo de 25 Kg o 250 N y así mismo la fuerza debido al peso de 25 Kg o 250 N igualmente; para el otro extremo se lo empotrará para simular una fijación, este resultado previo a correr la simulación se lo puede observar en la figura 4.86.

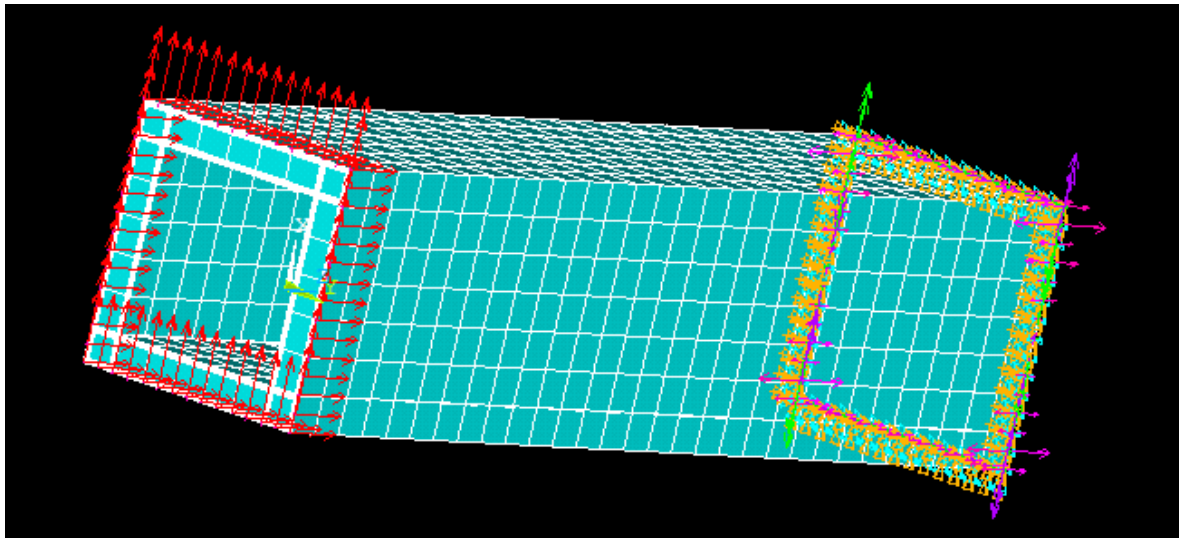


Figura 4.86 Detalle de las cargas en el elemento a ser simulado

Luego de correr la simulación se verifican los resultados y se los compara con una simulación similar pero omitiendo la estructura sándwich en las figuras 4.87, 4.88.

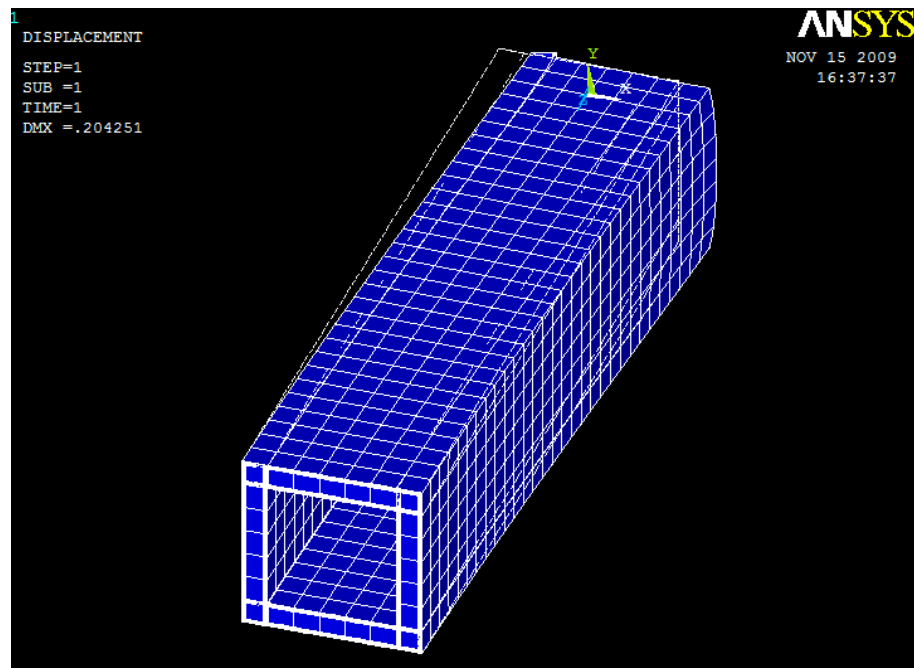
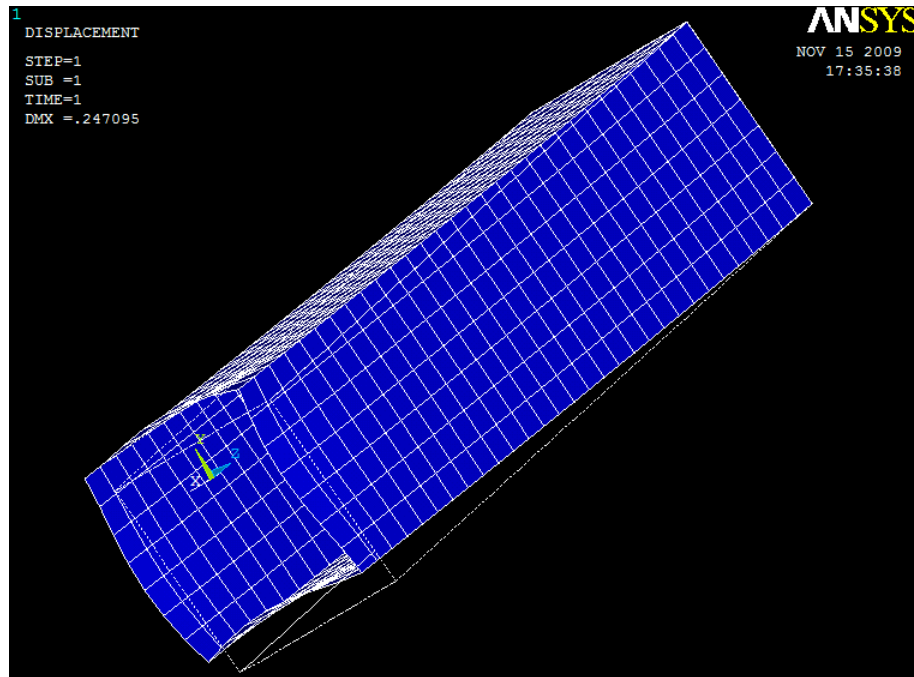


Figura 4.87 Detalle del resultado de la simulación sin emplear el núcleo honeycomb (arriba), y empleando éste (abajo)

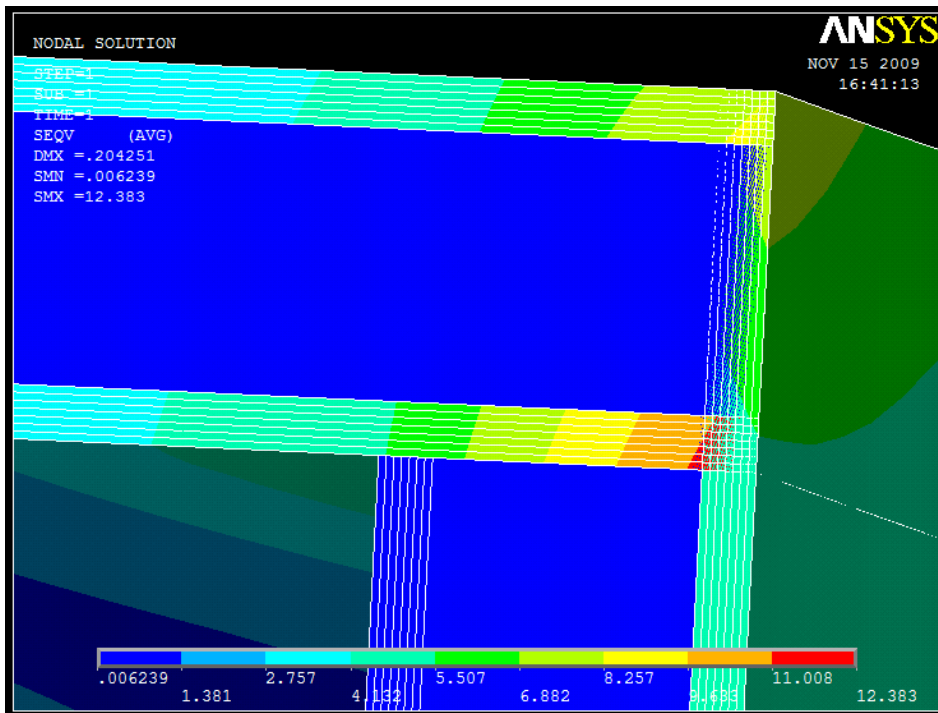
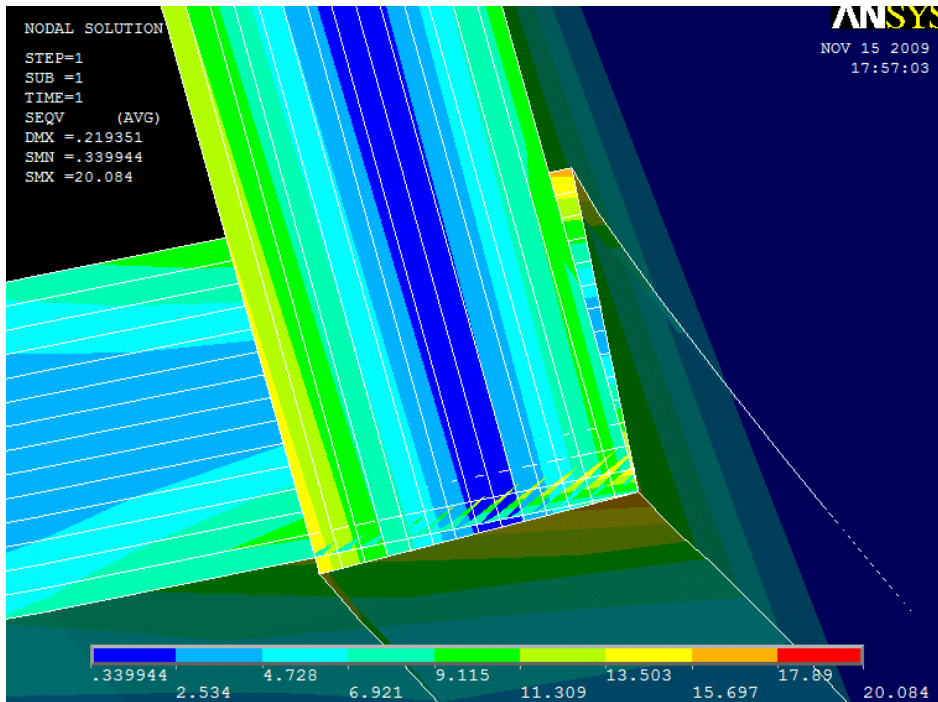


Figura 4.88 Comparación entre el detalle de la magnitud del esfuerzo producido sin el elemento sándwich (arriba), y sobre las láminas y sobre el núcleo en Mpa en el elemento sándwich (abajo).

Para poder verificar el funcionamiento del elemento núcleo, y verificar su funcionamiento acorde a lo detallado en la figura 4.75 se grafica una solución nodal que detalle las cargas totales por cortante producidas en el elemento, los resultados en la figura 4.89.

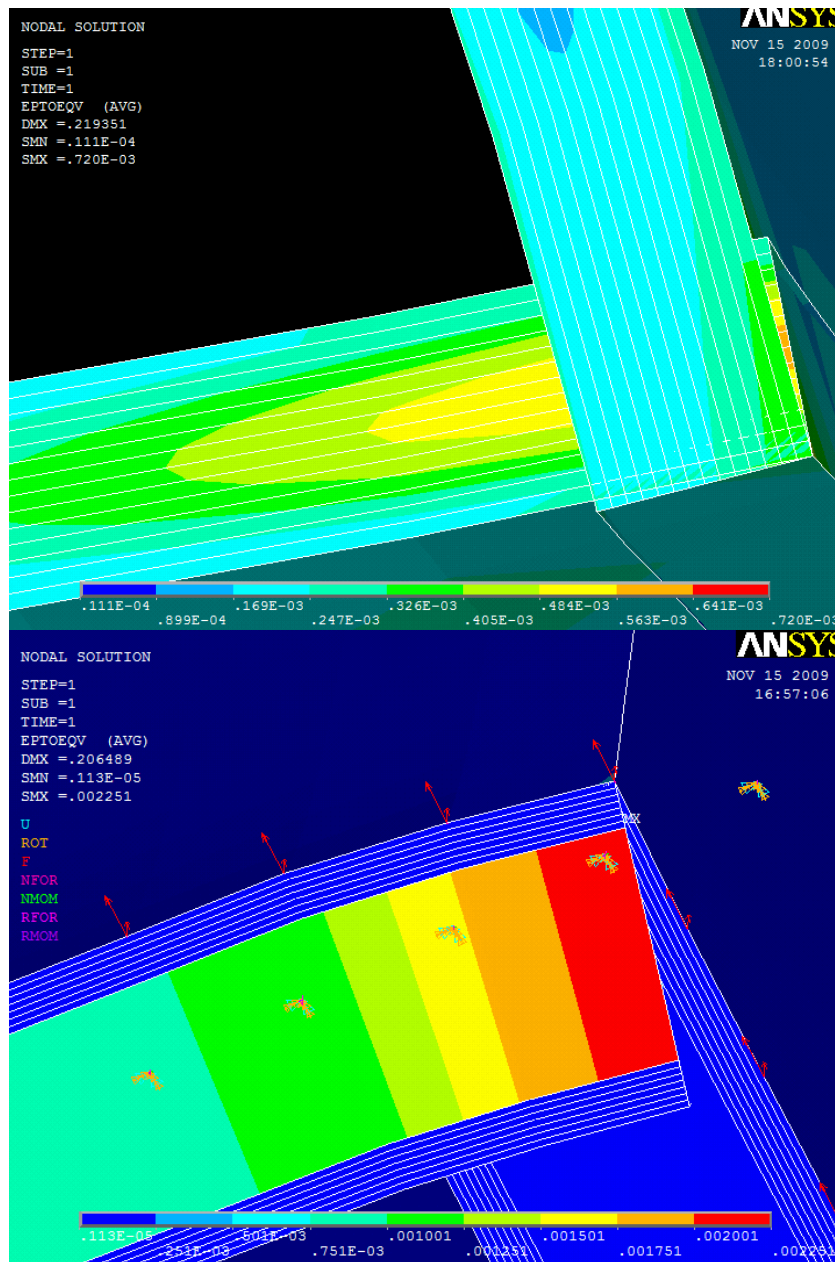


Figura 4.89 Detalle de la magnitud del esfuerzo producido sobre las láminas en un diseño sin honeycomb (arriba) y sobre el núcleo utilizando honeycomb (abajo) en Mpa.

Por lo que se puede concluir luego de realizados estos análisis, de que un laminado utilizando el esquema tipo sándwich y empleando el material honeycomb como núcleo se puede canalizar los esfuerzos cortantes ejercidos hacia esta estructura para así garantizar su correcto funcionamiento y evitar la acumulación de esfuerzos cortantes en el laminado debido a que los materiales compuestos tienen deficiencias para poder reaccionar adecuadamente a este tipo de fuerzas.

4.3.3.9 ANÁLISIS A FATIGA Y ESPERANZA DE VIDA DE LA ESTRUCTURA

La ruptura de un material compuesto causada por cargas cíclicas es un proceso progresivo en el que aparecen y se combinan distintos mecanismos de degradación del laminado. La aparición de pequeñas grietas en la matriz puede traducirse, según las características del laminado, en una propagación de estas grietas hasta producirse una rotura de fibras en las zonas adyacentes y una deslaminación local entre las láminas. Así pues, el mecanismo que produce la fatiga no se asemeja a la nucleación y propagación de un solo defecto, como es el caso de los metales, si no que se origina por una distribución de defectos que van aumentando con el número de ciclos hasta que se produce la rotura de todo el laminado. Por lo tanto muchos de los principales trabajos realizados sobre la fatiga de composites toman como referencia de base el conocimiento previo de la fatiga en metales o en materiales homogéneos.^{4.7}

Un laminado es un material altamente heterogéneo que presenta una gran anisotropía. Estas dos propiedades influyen de manera decisiva en su comportamiento y también en cómo se presenta el mecanismo de degradación por fatiga. Este comportamiento se puede observar a dos escalas: *(i)* a nivel cuasi-macroscópico cada una de las láminas posee un comportamiento mecánico anisótropo y dependiente de la orientación y contenido del refuerzo y *(ii)* a escala microestructural, la gran diferencia en las propiedades de matriz y refuerzo

^{4.7} Andersen, S.I., Lilhot, H. y Lystrup, A. (1996). Properties of composites with long fibres. Design of Composite Structures Against Fatigue, editado por R.M. Meyer.

ocasiona que aparezcan tensiones y deformaciones adicionales a las producidas por las cargas externas. Esto es debido a que la falta de homogeneidad del material da lugar a la aparición de cargas internas entre los distintos componentes del material. Esta distribución de cargas origina fuertes campos tensoriales en dos o tres direcciones que se superponen entre sí, incluso en el caso de carga global unidireccional.

A continuación se presenta una metodología para el tratamiento de la degradación a fatiga causada por la aplicación de cargas cíclicas en un laminado de material compuesto. Esta metodología permitirá, integrar en la *mecánica de medios continuos* la fatiga junto a cualquier otro fenómeno que pueda afectar al comportamiento mecánico del composite como la plasticidad, el daño, los fenómenos viscosos, las grandes deformaciones, etc. Además, la solución presentada permite tratar el fenómeno de acumulación *no lineal* de la degradación a fatiga, aspecto importante cuando se quiere obtener la predicción de vida de una pieza en servicio sujeta a distintos niveles de amplitud de carga. La metodología propuesta se basa en las investigaciones previas de Oller *et al.*(2001), Suero *et al.* (1998) y Mayugo *et al.* (2001,2002).

Para desarrollar correctamente su función a lo largo de su vida en servicio, un elemento estructural debe conservar dos características primordiales. Primero debe mantener su capacidad de admitir carga sin que se produzca la rotura, es decir que en todo momento y en cualquier zona de la pieza los estados de tensiones no deben superar a la *resistencia* del material. En segundo lugar, debe conservar dentro de unos límites su *rigidez* para evitar que se produzcan deformaciones excesivas.

Dado que un material compuesto sometido a cargas cíclicas sufre una degradación que provoca simultáneamente pérdidas en su resistencia efectiva y en su rigidez efectiva, una teoría de degradación a fatiga que se proponga determinar la vida realmente útil de un elemento estructural debe permitir estimar

la evolución de su resistencia y de su rigidez en cada uno de sus puntos materiales a lo largo de toda su vida.

4.3.3.9.1 Definición De La Tensión Cíclica

La degradación por fatiga y todas sus medidas (las curvas S-N, la evolución de la variable resistencia residual, etc.) son dependientes del tipo de tensión cíclica, por lo tanto, se precisa una correcta descripción de los parámetros que la definen.

Cada punto de un elemento estructural, o de una probeta, sometido a cargas cíclicas a lo largo de un periodo de tiempo estará sujeto a una tensión también variable. Para definir esta tensión cíclica se necesitan varios parámetros: valor de tensión máxima, tensión mínima, período, forma de la evolución temporal, etc. (figura 4.90) Mientras que algunos de ellos afectan mucho al comportamiento a fatiga del material, otros influyen de manera inapreciable. Así, comúnmente se admite que los valores de tensión máxima y mínima son parámetros importantes y, en cambio, la frecuencia o la forma de la evolución temporal tienen una influencia más bien escasa.

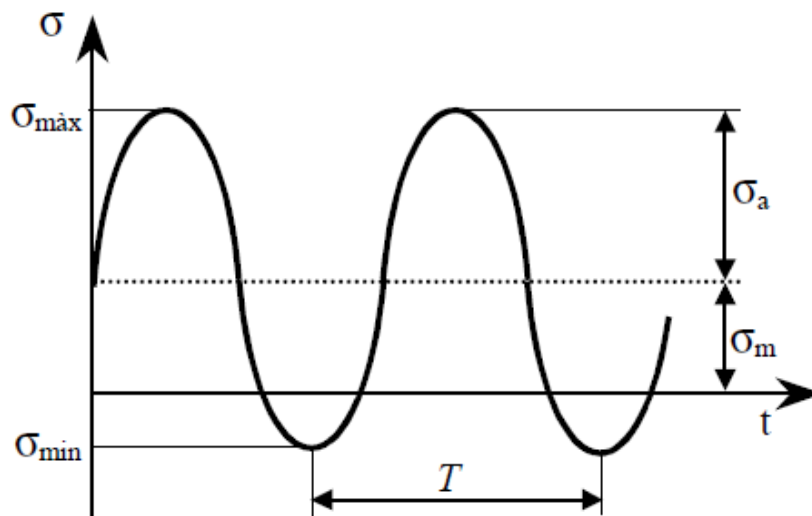


Figura 4.90 Carga cíclica en un período T

A partir de los valores máximos y mínimos de la evolución temporal del nivel de tensiones (σ_{max} y σ_{min}) y es posible calcular los parámetros característicos del tipo de carga cíclica en el modelo propuesto: tensión media, relación de amplitud e índice de reversión. Los valores de los mismos para el escenario propuesto son los siguientes:

$$\text{Tensión Media: } \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{24.448 + 0}{2} = 12.224 \text{ Mpa} \quad (4.61)$$

$$\text{Tensión Alterna (relación de amplitud): } \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{24.448 - 0}{2} = 12.224 \text{ Mpa} \quad (4.62)$$

$$\text{Índice de reversión (R): } R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{0}{24.448} = 0 \quad (4.63)$$

Índice de reversión (Q) o de componente media:

$$Q = \frac{\sigma_m}{\sigma_a} = \frac{12.224}{12.224} = 1 \quad (4.64)$$

Dado que los parámetros expresados anteriormente son dependientes, tan solo con dos de ellos se caracteriza completamente la tensión cíclica. En este trabajo se prefiere utilizar como valores de identificación la tensión máxima (σ_{max}) o la tensión mínima (σ_{min}) y el índice de reversión Q .

La pieza está fabricada por un laminado de matriz de epoxy reforzada por fibras de carbono T300. De este laminado se tienen las características básicas mostradas en la tabla 4-13.

Tomando los resultados experimentales de Gathercole et al. (1994) se obtienen las curvas de degradación que se muestran en la figura 4-91. Como puede apreciarse en estas curvas S-N la simple representación de la mayoría de los resultados en función de la tensión máxima y del índice de reversibilidad no permite formular unas curvas generalizadas S-N coherentes tal como requiere el modelo.

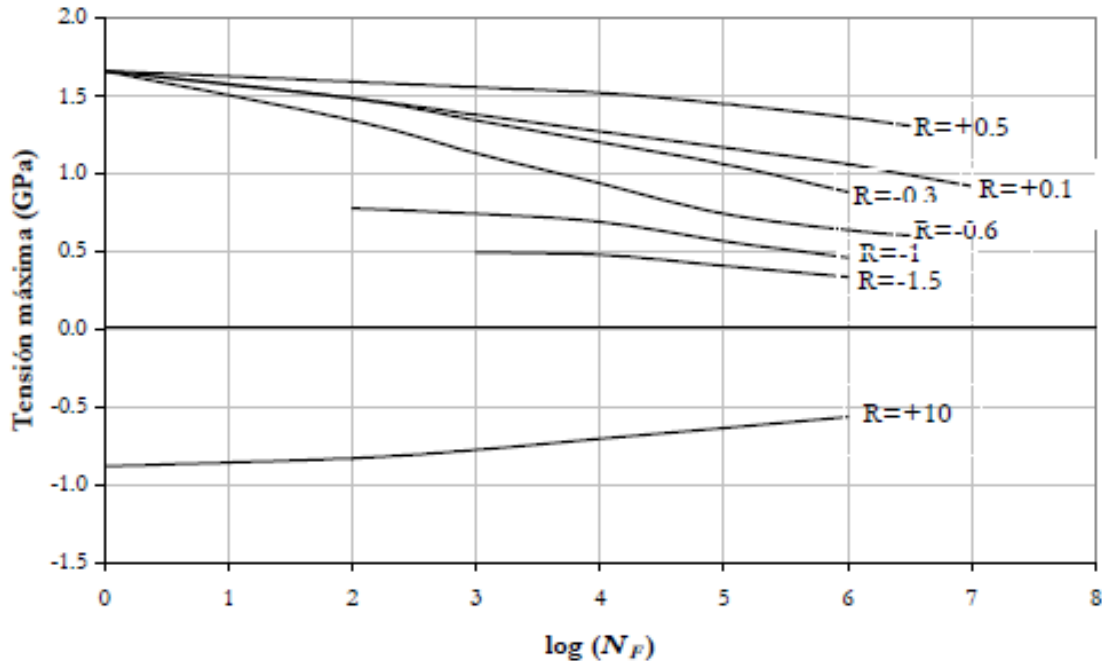


Figura 4.91 Familia de curvas S-N para distintos índices de reversión R , de un laminado de T300/epoxy (Gathercole e al 1994) para una carga cíclica en un período T

A partir de los datos propuestos en la figura 4.91 se puede obtener el número estimado de ciclos N_f a resistir la fibra propuesta bajo una Tensión máxima de 0.025 Gpa con un índice de reversión de 0 con una transpolación de la figura 4.91. y gracias a que la tensión máxima es mucho menor a 0.5 Gpa se puede concluir que el diseño propuesto resistirá una carga cíclica de por lo menos 10^8 ciclos, lo cual denota una vida aproximada de 90 años por lo menos.

Así mismo utilizando los valores de tensión media (0,012224 Gpa) y tensión alterna (0,012224 Gpa) en una curva de vida constante para este material representado en la figura 4.92.

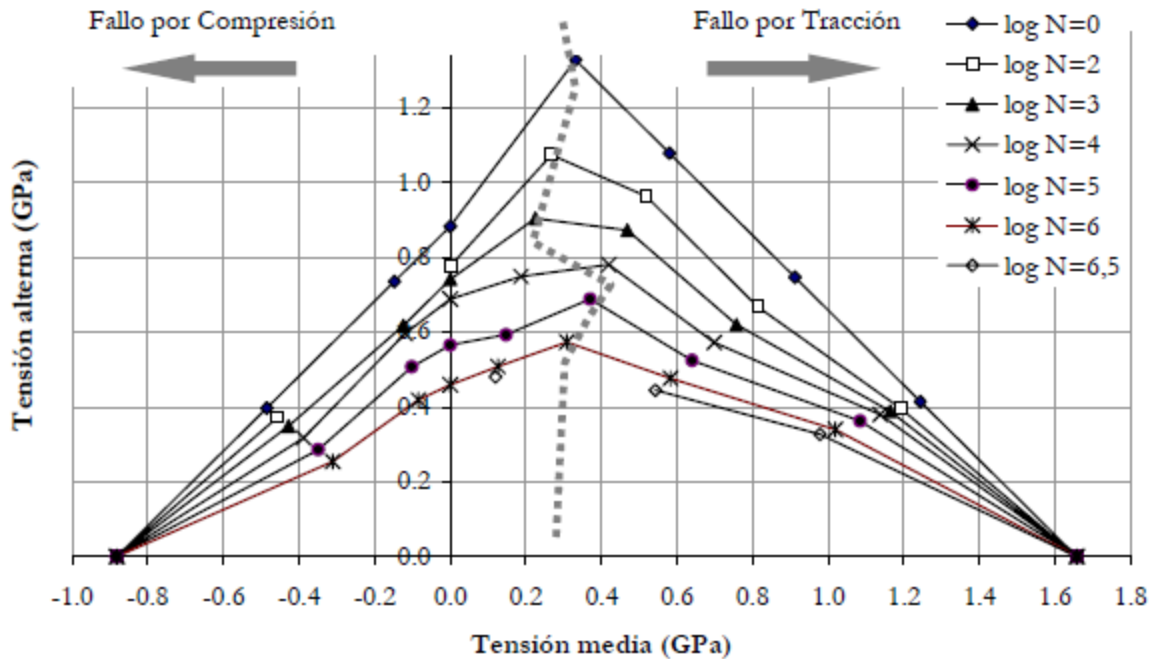


Figura 4.92 Representación mediante curvas de vida constante en el plano σ_a, σ_m en base a los datos experimentales obtenidos por (Gathercole e al 1994) para un laminado de fibra T300/epoxy para una carga cíclica en un período T

En base a los datos de la figura 4.92 se puede concluir que que el diseño propuesto resistirá una carga cíclica de por lo menos $10^{6.5}$ ciclos, lo cual denota una vida aproximada de 25 años por lo menos.

4.3.4 RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA PROPUESTA

Una vez realizados todos los análisis pertinentes al estudio de una estructura de este tipo con la ayuda de un software de análisis utilizando el método de los elementos finitos, se puede concluir que dicha estructura podrá cumplir con los requisitos de diseño en base a las restricciones en cuanto a tamaño y ajuste necesarias, las cuales se detallan en la figura 4.90.

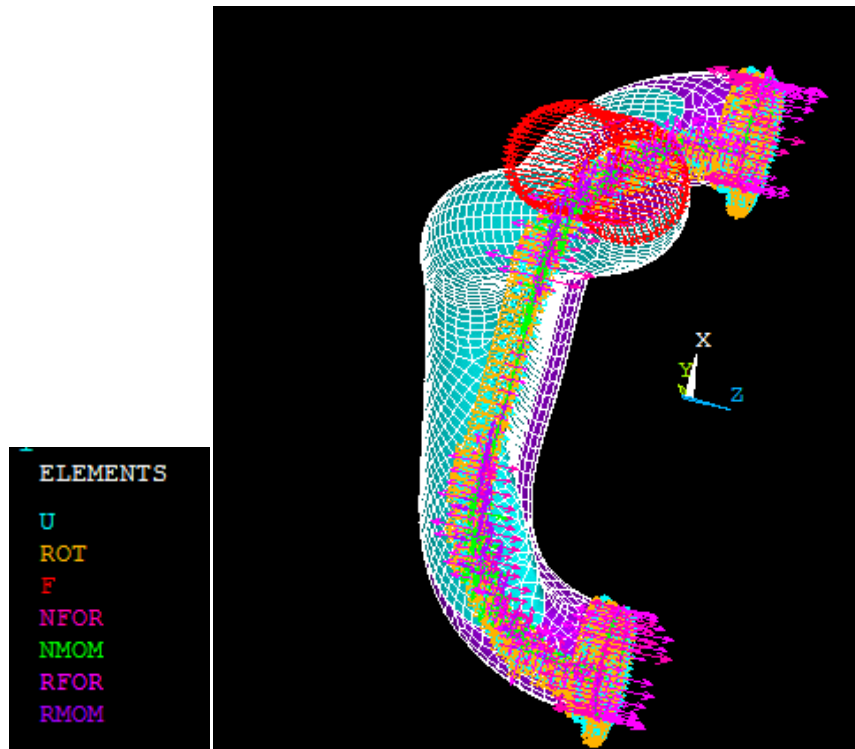


Figura 4.93 Detalle de las restricciones de fuerza y desplazamiento tomadas en cuenta para la simulación de la estructura realizada en ANSYS

A continuación en la tabla 4-15 se detallan los valores obtenidos mediante las simulaciones realizadas a la estructura.

Tabla 4-15 RESULTADOS OBTENIDOS EN LAS SIMULACIONES REALIZADAS EN ANSYS

DETALLE	VALOR	UNIDADES
DIAMETRO TOTAL	70	mm
PESO TOTAL A SOPORTAR	20	Kg
FUERZA DISPARO	25	Kg
DESPLAZAMIENTO MÁXIMO	1,398	mm
TENSIÓN MÁXIMA POR EL DISPARO	24,448	Mpa
FACTOR TSAI-WU OBTENIDO	0,018	
FACTOR SEGURIDAD OBTENIDO	55,5	
ESFUERZO INTERLAMINAR MÁXIMO	0,0606	Mpa
REDUCCION DESPLAZAMIENTO POR USO DE HONEYCOMB	6,30%	

Autores: Christian León, Alex Vásquez.