



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**Comparación de modelos predictivos de ondulación geoidal mediante métodos de
Mínimos Cuadrados Colocación y Redes Neuronales, en la zona rural del cantón
Guayaquil**

Ballesteros Salazar, Karla Vanessa

Departamento de Ciencias de la Tierra y de la Construcción

Carrera de Ingeniería Geográfica y del Medio Ambiente

Trabajo de titulación, previo a la obtención del título de Ingeniera Geógrafa y del Medio
Ambiente

Ing. Leiva González César Alberto, Msc.

1 de abril del 2021



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y DE LA
CONSTRUCCIÓN**

CARRERA DE INGENIERÍA GEOGRÁFICA Y DEL MEDIO AMBIENTE

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación, “**Comparación de modelos predictivos de ondulación geoidal mediante métodos de Mínimos Cuadrados Colocación y Redes Neuronales, en la zona rural del cantón Guayaquil**” fue realizado por la señorita **Ballesteros Salazar Karla Vanessa** el cual ha sido revisado y analizado en su totalidad por la herramienta de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 29 de marzo 2021

Firma:

CESAR
ALBERTO
LEIVA
GONZALEZ

Firmado digitalmente por CESAR
ALBERTO LEIVA GONZALEZ
Nombre de acreditamiento (DN):
o=C=SECURITY DATA SA,
ou=INSTITUTO DE CERTIFICACION DE
INFORMACION,
serialNumber=310202170001,
cn=CESAR ALBERTO LEIVA
GONZALEZ
Fecha: 2021.04.05 09:58:17 -0500

Ing. Leiva González César Alberto, MSc.

C. C. 1715416689



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y DE LA
CONSTRUCCIÓN**

CARRERA DE INGENIERÍA GEOGRÁFICA Y DEL MEDIO AMBIENTE

RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA

Yo, **Ballesteros Salazar, Karla Vanessa**, con cédula de ciudadanía n°1501066987, declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **Comparación de modelos predictivos de ondulación geoidal mediante métodos de Mínimos Cuadrados Colocación y Redes Neuronales, en la zona rural del cantón Guayaquil**, es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos, y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 29 de marzo 2021

Firma

Ballesteros Salazar, Karla Vanessa

C.C.: 1501066987



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y DE LA
CONSTRUCCIÓN**

**CARRERA DE INGENIERÍA GEOGRÁFICA Y DEL MEDIO
AMBIENTE**

AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Yo, **Ballesteros Salazar, Karla Vanessa**, con cédula de ciudadanía n°1501066987, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: **Comparación de modelos predictivos de ondulación geoidal mediante métodos de Mínimos Cuadrados Colocación y Redes Neuronales, en la zona rural del cantón Guayaquil** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 29 de marzo 2021

Firma

Ballesteros Salazar, Karla Vanessa

C.C.: 1501066987

Índice

Índice.....	6
Índice de tablas.....	10
Índice de figuras.....	11
Resumen.....	14
Abstract.....	15
Capítulo I. Introducción.....	16
Planteamiento del Problema.....	16
Antecedentes	17
Justificación e Importancia.....	18
Objetivos.....	20
Objetivo general	20
Objetivos Específicos	20
Hipótesis.....	20
Variables de Investigación	21
Variables independientes	21
Variable dependiente	21
Capítulo II. Marco Teórico	22
Geodesia	22
Definición y objetivo.....	22
Problemas de la geodesia.....	22
Sistemas geodésicos de referencia.....	23
Sistema de referencia local.....	24
Sistema de referencia geocéntrico	25
Marco de referencia.....	25
Superficies de referencia	26

Superficie topográfica.....	26
Geoide	26
Elipsoide	27
Relación entre superficies de referencia	28
Sistemas de coordenadas	29
Coordenadas cartesianas globales tridimensionales	30
Coordenadas elipsoidales.....	30
Coordenadas cartesianas locales topocéntricas	32
Coordenadas planas	33
Coordenadas Planas Transversa de Mercator (Gauss Kruger).	34
Coordenadas Universal Transversa de Mercator (UTM).....	35
Sistema de referencia vertical.....	39
Alturas niveladas	39
Alturas elipsoidales.....	41
Alturas ortométricas.....	42
Alturas normales.....	43
Ondulación geoidal.....	44
Métodos de determinación del geoide.....	45
Modelos geopotenciales.....	45
Earth Gravitational Model 1996 - EGM96.	45
Earth Gravitational Model 2008 - EGM08.	46
Modelos gravimétricos	46
Método geométrico.....	47
Anomalías de gravedad	47
Resolución de cuadrícula.....	48
Ajuste Mínimos Cuadrados.....	49

Modelos matemáticos de ajustes.....	49
Principio de mínimos cuadrados.....	51
Formulación de modelos regulares ordinarios.....	52
Modelo de ajuste mixto.....	54
Modelo de observaciones indirectas.....	55
Modelo de observaciones condicionadas.....	56
Modelo general de Mínimos Cuadrados Colocación.....	57
Modelo funcional.....	57
Modelo estocástico.....	59
Valores estimados.....	59
Estimación de la precisión a posteriori.....	60
Funciones covarianza.....	60
Machine Learning.....	62
Redes neuronales artificiales.....	63
Elementos que componen una red neuronal.....	64
Función de entrada.....	65
Función de activación.....	66
Función de salida.....	66
Mecanismos de aprendizaje.....	66
Aprendizaje supervisado.....	67
Aprendizaje no supervisado.....	67
Perceptrón.....	68
Perceptrón multicapa.....	68
Algoritmos de entrenamiento de una red neuronal artificial.....	70
Algoritmo de retro propagación.....	70
Métodos para minimizar funciones de error.....	71

Capítulo III. Metodología.....	73
Área de intervención	73
Recopilación de información.....	73
Datos posicionamiento GPS	74
Datos altura nivelada.....	75
Generación de una malla de ondulaciones geoidales	75
Método de mínimos cuadrados colocación	77
Selección del modelo matemático	77
Cálculo de la función covarianza empírica de la señal.....	82
Carácter positivo de la función covarianza	87
Cálculo de la función covarianza del ruido	88
Filtrado de las observaciones	88
Ajuste del modelo matemático por mínimos cuadrados colocación	88
Predicción de puntos de ondulación geoidal	90
Método redes neuronales artificiales	91
Definición de los subconjuntos de entrenamiento	91
Arquitectura y entrenamiento de la red neuronal artificial	93
Capítulo IV. Resultados y Discusión	104
Discusión de resultados.....	104
Comprobación de la hipótesis.....	122
Capítulo V. Conclusiones	123
Capítulo VI. Recomendaciones	124
Referencias	125
Anexos	130

Índice de tablas

Tabla 1 Medidas estadísticas de cada modelo matemático.....	79
Tabla 2 Parámetros ajustados del modelo matemático 1	81
Tabla 3 Número de pares para los intervalos de $h=3300$ m	82
Tabla 4 Límites de intervalos de distancias esféricas	83
Tabla 5 Covarianzas empíricas calculadas para los 298 datos de ondulación geoidal del área de estudio	84
Tabla 6 Resultados del ajuste paramétrico del modelo matemático seleccionado para la función covarianza de la señal.	86
Tabla 7 Carácter positivo de la función covarianza.....	87
Tabla 8 Estadísticos del ajuste por mínimos cuadrados colocación.....	89
Tabla 9 Parámetros ajustados con mínimos cuadrados colocación.....	89
Tabla 10 Errores medios cuadráticos obtenidos durante las 12 iteraciones para los conjuntos de entrenamiento, validación y test de la RNA	95
Tabla 11 Gradientes de la función de error para cada una de las iteraciones en el entrenamiento de la RNA	96
Tabla 12 Pesos sinápticos entre la capa de entrada y la capa oculta de la RNA	98
Tabla 13 Pesos sinápticos entre la capa oculta y la capa de salida de la RNA	99
Tabla 14 Bias para la capa oculta de la RNA	100
Tabla 15 Bias para la capa de salida de la RNA	102
Tabla 16 Ondulación geoidal estimada por diferentes modelos de predicción y sus errores en puntos de validación	110
Tabla 17 Estadísticos de los residuales de la comparación de modelos.....	121

Índice de figuras

Figura 1 Tridimensional del Geoide de la Tierra	27
Figura 2 Elipsoide de revolución.....	28
Figura 3 Relación entre elipsoide, geoide y superficie topográfica	29
Figura 4 Sistema de coordenadas cartesianas.....	30
Figura 5 Sistema de coordenadas elipsoidales.....	31
Figura 6 Sistema de coordenadas elipsoidales, proyección del punto P sobre el elipsoide.....	31
Figura 7 Sistema de coordenadas cartesianas locales topocéntricas.....	32
Figura 8 Sistema de coordenadas cartesianas locales	33
Figura 9 Ejemplo de sistema de coordenadas planas proyectadas según el plano	34
Figura 10 Proyección Mercator.....	35
Figura 11 Proyección UTM	36
Figura 12 Relación entre las distancias reales y las proyectadas presenta.....	37
Figura 13 Aplicación del factor K_c a las distancias.....	38
Figura 14 Nivelación geométrica	40
Figura 15 Alturas elipsoidales.....	41
Figura 16 Alturas ortométricas.....	42
Figura 17 Alturas normales.....	43
Figura 18 Ondulación geoidal.....	44
Figura 19. Ejemplo de una red neuronal conectada	64
Figura 20 Comparación entre una neurona biológica (izquierda) y una artificial (derecha).....	65
Figura 21 Ajuste de puntos mediante una función "M"	72
Figura 22 Mapa del área de estudio (zona rural del cantón Guayaquil).....	73
Figura 23 Malla de puntos sobre el área de estudio	76

Figura 24 Gráfica del modelo matemático 1	78
Figura 25 Gráfica del modelo matemático 2	78
Figura 26 Gráfica del modelo matemático 3	78
Figura 27 Gráfica del modelo matemático 4	79
Figura 28 Gráfico de los errores residuales del ajuste paramétrico del modelo funcional	81
Figura 29 Ajuste de la covarianza empírica con el modelo exponencial.....	85
Figura 30 Ajuste de la covarianza empírica con el modelo gaussiano.....	85
Figura 31 Ajuste de la covarianza empírica con el modelo polinomial de orden 1	86
Figura 32 Errores residuales de la predicción de 298 puntos por mínimos cuadrados colocación	91
Figura 33 Puntos GPS/nivelación para el subconjunto de entrenamiento, validación y test de la RNA.....	92
Figura 34 Diseño de la red neuronal artificial.....	94
Figura 35 Minimización de errores en los subconjuntos de entrenamiento, validación y test para la RNA.....	97
Figura 36 Parámetros de entrenamiento de la RNA	97
Figura 37 Residuos de la predicción de 298 datos con RNA	103
Figura 38 Modelo de predicción de ondulación geoidal, por Mínimos Cuadrados Colocación	105
Figura 39 Modelo de predicción de ondulación geoidal, por RNA.....	106
Figura 40 Modelo geoidal EGM96 en el área de estudio.....	108
Figura 41 Modelo geoidal EGM08 en el área de estudio.....	109
Figura 42 Diferencias entre el modelo geoidal por MCC y el modelo RNA. Isolíneas cada 0,05 metros	113

Figura 43 Diferencias entre el modelo geoidal por MCC y el modelo EGM96. Isolíneas cada 0,2 metros	115
Figura 44 Diferencias entre el modelo geoidal por MCC y el modelo EGM08. Isolíneas cada 0,2 metros	116
Figura 45. Diferencias entre el modelo geoidal por MCC y el modelo IGM. Isolíneas cada 0,05 metros	117
Figura 46 Diferencias entre el modelo geoidal por RNA y el modelo EGM96. Isolíneas cada 0,2 metros	118
Figura 47 Diferencias entre el modelo geoidal por RNA y el modelo EGM08. Isolíneas cada 0,2 metros	119
Figura 48. Diferencias entre el modelo geoidal por RNA y el modelo IGM. Isolíneas cada 0,05 metros	120

Resumen

Para la obtención de la altura referida al nivel medio del mar, utilizada en ingeniería y cartografía en el Ecuador, se aplica un método basado únicamente en alturas niveladas utilizando el método de nivelación geométrica, el cual implica una considerable inversión en costos, personal y tiempo por punto medido. La ondulación geoidal se define como la diferencia entre alturas elipsoidales y alturas ortométricas. Para fines prácticos de esta investigación se considera a la altura referida al geoide (altura ortométrica) muy próxima a la altura sobre el nivel medio del mar (altura nivelada). Por lo tanto, es posible la obtención de alturas niveladas en base a datos de ondulación geoidal y de alturas elipsoidales. El objetivo del presente proyecto es comparar modelos predictivos de ondulación geoidal generados mediante métodos de Mínimos Cuadrados Colocación (MCC) y Redes Neuronales Artificiales (RNA) para la obtención de alturas ortométricas en cualquier punto de la zona rural del cantón Guayaquil. Se utilizaron 298 puntos para la generación de los modelos predictivos tanto para el método de mínimos cuadrados colocación como para el método de redes neuronales artificiales, y fueron validados con puntos que fueron excluidos del modelamiento. El modelo predictivo con redes neuronales artificiales fue el que mejor se ajustó a la zona de estudio, con un RMSE de 7,3 cm, mientras que el modelo predictivo generado con mínimos cuadrados colocación obtuvo un RMSE de 8,6 cm.

PALABRAS CLAVE:

- **ALTURA NIVELADA**
- **MÍNIMOS CUADRADOS COLOCACIÓN**
- **REDES NEURONALES ARTIFICIALES**
- **NIVEL MEDIO DEL MAR**
- **ONDULACIÓN GEOIDAL**

Abstract

To obtain the height referred to mean sea level, used in engineering and cartography in Ecuador, a method based solely on leveled heights is applied using the geometric leveling method, which implies a considerable investment in costs, personnel and time per measured point. Geoidal undulation is defined as the difference between ellipsoidal heights and orthometric heights. For practical purposes of this research, the height referred to the geoid (orthometric height) is considered very close to the height above mean sea level (level height). Therefore, it is possible to obtain leveled heights based on geoid undulation data and ellipsoidal heights. The objective of this project is to compare predictive models of geoidal undulation generated by Least Squares Collocation (LSC) and Artificial Neural Networks (ANN) methods to obtain orthometric heights at any point in the rural area of the Guayaquil canton. 298 points were used for the generation of the predictive models for both the method of least squares collocation and for the method of artificial neural networks, and they were validated with points that were excluded from the modeling. The predictive model with artificial neural networks was the one that best adjusted to the study area, with an RMSE of 7.3cm, while the predictive model generated with least squares collocation obtained an RMSE of 8.6 cm.

KEY WORDS:

- **LEVEL HEIGHT**
- **LEAST SQUARES COLLOCATION**
- **ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS**
- **MEAN SEA LEVEL**
- **GEOIDAL UNDULATION**

Capítulo I. Introducción

Planteamiento del Problema

Mientras exista la necesidad de obras de ingeniería que basen sus diseños en el conocimiento del terreno a detalle con altas precisiones, las técnicas de determinación de coordenadas horizontales y verticales de alta precisión son de suma importancia.

Actualmente, es posible determinar las coordenadas referidas a un elipsoide del componente horizontal y vertical de un punto con técnicas GNSS (Global Navigation Satellite System), sin embargo, la componente vertical referida al nivel medio del mar no se puede medir únicamente con dicha técnica, ya que esta proporciona la altura elipsoidal que tiene un carácter geométrico. Para obtener la altura referida al nivel medio del mar, utilizada en ingeniería y cartografía en el Ecuador, se necesita aplicar un método de nivelación como lo realiza el Instituto Geográfico Militar (IGM), institución rectora de la generación de información geodésica en Ecuador, que maneja una Red de Control Básico Vertical basada únicamente en alturas niveladas (Cañizares Cruz, 2015) utilizando el método de nivelación geométrica, el cual implica una considerable inversión en costos, personal y tiempo por punto medido. Por esta razón, para fines de trabajos en donde se requiere alta densidad de puntos, la aplicación de técnicas como las que, actualmente, realiza el IGM se convierten en un problema de eficiencia por su elevado consumo de recursos y tiempo.

Existen distintos métodos para determinar el modelo geoidal, el cual permite calcular la ondulación geoidal de cualquier punto en la superficie terrestre, como modelos geométricos, modelos geopotenciales o modelos gravimétricos. Por lo general los modelos geopotenciales más utilizados son el EGM96 y, actualmente, el EGM08; la aplicación de estos modelos en el Ecuador para obtener la ondulación geoidal puede tener errores de hasta 3 metros.

En el presente proyecto se pretende generar un modelo predictivo de ondulación geoidal con métodos no convencionales, como son mínimos cuadrados colocación y redes neuronales, que junto al posicionamiento geodésico GNSS, permitan obtener alturas referidas al geoide en cualquier punto del área de estudio, y que por fines prácticos de esta investigación se considera muy próximo al nivel medio del mar, con la consiguiente optimización de recursos y la utilización de una sola técnica de medición para la obtención de las coordenadas horizontales y vertical.

Antecedentes

Palacios (2019) en su proyecto de grado generó un modelo predictivo de ondulación geoidal mediante Cokriging para la zona rural del cantón Guayaquil. El autor partió de 332 puntos que fueron divididos en 16, 33, 49, 66 muestras y aplicó Cokriging y Kriging ordinario, residual y universal con la ondulación geoidal derivada del EGM08 como variable auxiliar. Estos modelos fueron validados con puntos excluidos del modelamiento y se calcularon indicadores estadísticos. Palacios determinó que el modelo Cokriging universal con 66 puntos fue el mejor.

Carrión (2013) en su tesis de maestría presenta un método de interpolación basado en el entrenamiento de una Red Neuronal Artificial del tipo Multicapa (RNAM) con datos obtenidos en un área del Ecuador Continental, con el objetivo de obtener valores de ondulación geoidal. Los resultados obtenidos por el autor mediante la interpolación con la RNAM presentan errores menores a 15 centímetros.

Llano y Gonzales (2018) generan un modelo digital de elevaciones (MDE) de las ondulaciones geoidales, aplicando el método GNSS/nivelación a través del entrenamiento y aprendizaje de redes neuronales artificiales utilizando la interfaz gráfica del software Matlab R2015b versión 8.6.0, el proyecto se encuentra ubicado en un sector de la ciudad de Puno, en la zona norte del área urbana con una extensión de 144 has. La formulación de modelos de ondulaciones geoidales se lleva a cabo a través de

cálculos que combinan el posicionamiento GNSS para las alturas elipsoidales y nivelación geométrica para las alturas ortométricas (a través de la relación $N=h-H$). El aprendizaje de la red es de tipo supervisado utilizando una red del tipo backpropagation, culminado el entrenamiento, la red neuronal artificial tiene la capacidad de predecir ondulaciones geoidales (N), a partir de entradas norte y este, seguidamente generan puntos norte y este uniformemente distribuidos (grillado) a cada 50m dentro del perímetro de estudio, éste último para la generación del modelo digital de elevaciones (MDE).

Echeverría y Tierra (2010), en su artículo publicado en la Revista Geoespacial vol. 7, generan un modelo de ondulaciones geoidales del Ecuador continental con la metodología de mínimos cuadrados colocación (LSC), a partir de datos dispersos. Aplicaron el método geométrico para la generación de datos GPS/nivelación. Este modelo permite al usuario transformar alturas elipsoidales en alturas niveladas con respecto al nivel medio del mar en un punto o una grilla de puntos dentro del Ecuador continental.

Justificación e Importancia

La obtención de coordenadas verticales referidas al nivel medio del mar es un proceso que representa alta demanda en costo, personal y tiempo, por lo tanto, la búsqueda de nuevas técnicas para la determinación de las mismas es de suma importancia.

Existen alturas referidas a diferentes superficies como lo son la altura elipsoidal (referida al elipsoide) o la altura ortométrica (referida al geoide), muchas veces denominada altura sobre el nivel medio del mar debido a que el geoide es la superficie equipotencial que mejor se ajusta al nivel medio del mar en una época específica basándose en el principio de que las desviaciones entre ambas superficies son mínimas (Hoyer et al. (2004) citado de Mather (1978)) , y que para fines del presente estudio se

considera al geoide muy próximo al nivel medio del mar, por lo tanto, se supone a la altura ortométrica H y a la altura nivelada H_n como una misma altura. La altura al nivel medio del mar es usada para trabajos de ingeniería y cartografía en el Ecuador, por lo tanto, es de suma importancia obtener esta altura de manera rápida y barata.

En el Proyecto Guayaquil el IGM constituyó una base de datos en los que constan los siguientes campos: coordenadas geográficas latitud y longitud, coordenadas planas proyectadas este y norte, altura elipsoidal, altura nivelada, orden de precisión y técnica de nivelación. En base a estos datos es posible determinar la ondulación geoidal en cada punto mediante la ecuación (1).

$$N = h - H \quad (1)$$

Donde,

N : ondulación geoidal

h : altura elipsoidal

H : altura ortométrica (en este estudio considerada igual a la altura del nivel medio del mar)

Con esta premisa, es permisible la obtención de alturas ortométricas en base a datos de ondulación geoidal y de alturas elipsoidales. La implementación de un modelo predictivo de ondulación geoidal en conjunto con la generación de alturas elipsoidales con posicionamiento GNSS se vuelve una opción para la determinación de la componente vertical referida al geoide (altura ortométrica). Modelos matemáticos y modelos computacionales son posibles alternativas para generar un modelamiento de la variable ondulación geoidal.

Por este motivo es relevante la realización de un modelo predictivo de ondulación geoidal de alta precisión y alta resolución con la capacidad de calcular la ondulación geoidal en cualquier punto mediante interpolación permitiendo reducir costos

significativos referentes al levantamiento de información y densificación de redes de medición horizontal y vertical.

En este estudio se plantea comparar dos métodos no convencionales para el cálculo de estos modelos, mínimos cuadrados colocación y redes neuronales artificiales (modelo de computación). Estos métodos no convencionales se presentan como una posible solución eficiente, permitiendo obtener valores precisos de ondulación a partir de pocos datos de esta variable difícil de muestrear.

Objetivos

Objetivo general

Comparar modelos predictivos de ondulación geoidal generados mediante métodos de Mínimos Cuadrados Colocación y Redes Neuronales para la obtención de alturas ortométricas en cualquier punto de la zona rural del cantón Guayaquil.

Objetivos Específicos

- Generar un modelo predictivo de ondulación geoidal mediante mínimos cuadrados colocación para la obtención de alturas ortométricas.
- Generar un modelo predictivo de ondulación geoidal mediante redes neuronales para la obtención de alturas ortométricas.
- Validar los modelos predictivos de ambos métodos mediante una muestra de puntos que no fueron incluidos en la generación de los modelos para la obtención de modelos precisos y creíbles.

Hipótesis

A partir del método mínimos cuadrados colocación y redes neuronales es posible obtener modelos de ondulación geoidal de alta precisión y resolución.

Variables de Investigación***Variables independientes***

- Altura ortométrica
- Altura elipsoidal
- Latitud geodésica
- Longitud geodésica

Variable dependiente

- Ondulación geoidal

Capítulo II. Marco Teórico

Geodesia

Definición y objetivo

Etimológicamente la palabra Geodesia, del griego $\gamma\eta\delta\alpha\iota\omega$ (dividido la tierra), se define como la medida de las dimensiones de la Tierra (Sevilla de Lerma, 1999). En la actualidad la Geodesia se define brevemente como “la ciencia que estudia la resolución de los problemas relacionados con la figura y dimensiones de la Tierra” (Corchete, 2009).

El objetivo de la Geodesia, según Sevilla de Lerma (1999), es “el estudio y determinación de la forma y dimensiones de la Tierra, de su campo de gravedad, y sus variaciones temporales”; el autor además incluye en esta definición la orientación de la Tierra en el espacio. La determinación de la forma y dimensiones de la Tierra tiene una proyección práctica en lo referente al cálculo de coordenadas de puntos (latitud, longitud, altura) y a la resolución de problemas geométricos sobre su superficie terrestre. En la parte teórica esta ciencia se encarga de estudiar las superficies de equilibrio de una hipotética masa fluida, sometida a las acciones gravitatorias y a un movimiento de rotación (Sevilla de Lerma, 1999).

Según el Instituto Geográfico Nacional del Gobierno de España (2020), una parte fundamental de la geodesia es la materialización de estos puntos sobre el terreno, que constituye las redes geodésicas, conformadas por una serie de puntos (vértices geodésicos o también señales de nivelación), con coordenadas que configuran la base de la cartografía de un país, por lo que también se dice que es “la infraestructura de las infraestructuras”.

Problemas de la geodesia

Según Corchete (2009) se puede dividir los problemas científicos de la Geodesia en:

- Determinación del tipo de superficie matemática que represente suficientemente bien la figura de la Tierra en su totalidad. A este respecto se considera como tal superficie la de un elipsoide de revolución ligeramente aplanado, éste se denomina elipsoide terrestre.
- El estudio de la verdadera figura de la Tierra y su campo de gravedad, entendiendo por verdadera figura de la Tierra, la superficie física de la misma. El estudio de la verdadera figura de la Tierra consiste en determinar las magnitudes geodésicas, que caracterizan las desviaciones de ésta con respecto a la superficie establecida por el elipsoide terrestre.

Los problemas científico-técnicos derivados de los anteriores son múltiples, los más relevantes son:

- Medición de la aceleración de la gravedad.
- Determinaciones astronómicas de las latitudes y longitudes terrestres.
- Observaciones de los satélites artificiales.
- Elaboración de modernos métodos e instrumentos para la ejecución de mediciones y observaciones de alta precisión.
- Desarrollo de métodos topográficos con los que se estudia detalladamente la forma de la superficie terrestre.
- Levantamiento cartográfico de grandes territorios, es decir, representación de la superficie terrestre sobre un plano.

Sistemas geodésicos de referencia

Para el estudio del movimiento y deformaciones de la corteza terrestre y para la determinación de coordenadas sobre la superficie de la Tierra, es necesario un sistema de referencia terrestre, el cual, se convierte en una herramienta indispensable para el posicionamiento de puntos dentro del globo terráqueo.

Sistema de referencia local

El ámbito de aplicación de un sistema de referencia local es estrictamente reducido, es decir, no es universal. El comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (1999) afirmó lo siguiente:

Un sistema geodésico local queda definido por la elección de un elipsoide de referencia y por un punto origen (datum) donde se establece su ubicación en relación con la forma física de la tierra (geoide). Concretamente, el punto datum es aquél en el que se hace coincidir la vertical del lugar con la normal al elipsoide (desviación de la vertical nula) y generalmente se establece la condición de tangencia entre el elipsoide y el geoide. (pág. 3)

El elipsoide elegido y posicionado se adapta bien al geoide en los alrededores del punto datum, pero aumenta la probabilidad de que esta adaptación aminore en medida de su distanciamiento (Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999).

Los parámetros que definen un sistema geodésico local son:

- Semieje mayor a y el achatamiento o aplastamiento $f = (a-b)/a$, necesarios para especificar el elipsoide.
- Coordenadas latitud y longitud, para ubicar el punto datum.
- Acimut de origen en el punto datum a fin de orientar al elipsoide.

Los sistemas geodésicos locales se materializan mediante redes de triangulación de diversos órdenes.

Los sistemas geodésicos locales presentan problemas al encontrarse dos o más redes basadas en diferentes sistemas, por lo que resultan diferencias de coordenadas inaceptables. Otro de los problemas es que son únicamente planimétricos, es decir, no son sistemas tridimensionales (Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999).

Sistema de referencia geocéntrico

El comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (1999) define un sistema geocéntrico como:

Aquél que especifica una terna de ejes ortogonales cartesianos X, Y, Z centrado en el centro de masas de la tierra. Estos sistemas terrestres (fijados a la Tierra) tienen el eje X solidario al meridiano origen de las longitudes y el eje Z próximo al eje de rotación, por lo tanto, este sistema “gira” juntamente con la tierra. Estos sistemas resultan imprescindibles para ubicar puntos ligados al planeta Tierra. A diferencia de los sistemas geodésicos locales, los sistemas geocéntricos son tridimensionales y de alcance global. El concepto de punto datum desaparece, y es reemplazado por el origen y orientación de la terna de referencia. Ejemplos de sistemas geocéntricos terrestres son el WGS84 y el ITRF. (pág. 4)

Marco de referencia

El marco de referencia es la materialización en la superficie terrestre de un sistema de referencia mediante un conjunto de puntos físicos (hitos, mojones) con sus respectivas coordenadas de gran exactitud y precisión.

“En los sistemas geodésicos locales, el marco de referencia está dado por los puntos trigonométricos de distintos órdenes que a través de cadenas y mallas cubren los territorios” (Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999, pág. 4). Por otro lado, en los sistemas geocéntricos, se llevan a cabo redes de puntos medidos usualmente con GPS y vinculados a puntos de redes anteriores, intentando en lo posible minimizar errores sistemáticos y aleatorios (Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999).

Superficies de referencia

Superficie topográfica

La superficie topográfica o superficie física de la Tierra está constituida materialmente por el terreno, es decir, el suelo sobre el que se camina. De acuerdo con Osco (2011) la superficie topográfica es sumamente irregular y además es variable con el tiempo, por acciones naturales y artificiales. Durante muchos años, todas las observaciones y mediciones fueron realizadas sobre la misma: pero a medida que los conocimientos tecnológicos fueron evolucionando esta superficie se dejó de lado para encarar otras formas que más se ajustan a nuestras necesidades.

Geoide

El geoide es de fundamental importancia para la geodesia, la oceanografía y la física de la tierra sólida. Debido a las demandas y la precisión alcanzable de un geoide moderno, la definición clásica del geoide debe ser reconsiderada hoy. En geodesia y oceanografía, el geoide sirve como una superficie de referencia de altura para describir la topografía continental y de la superficie del mar (Torge, 2001).

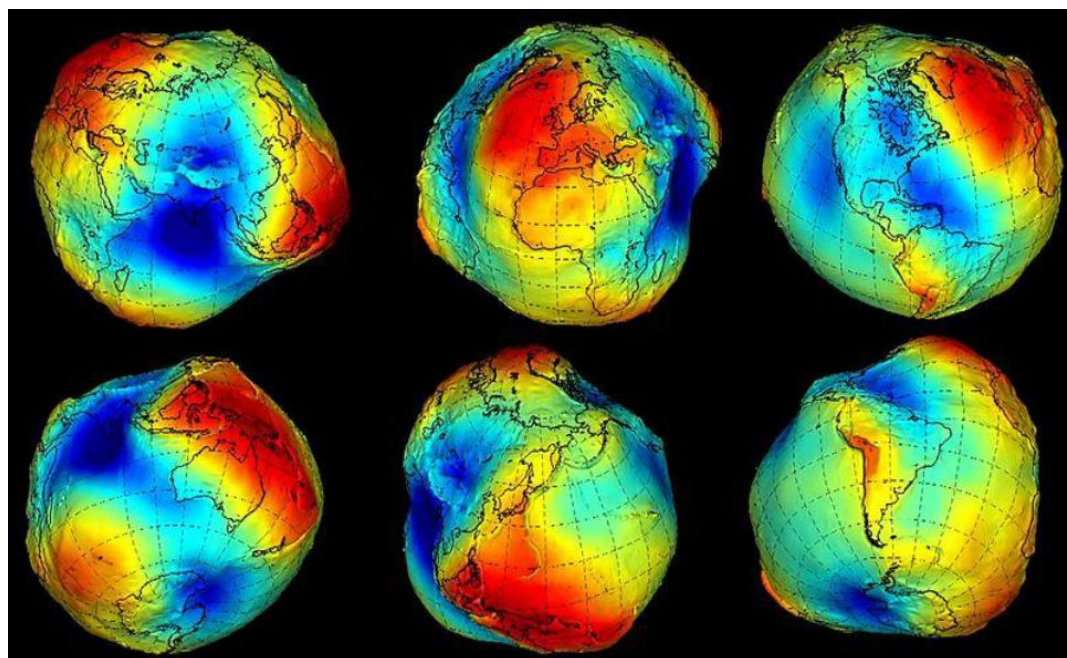
El geoide ha sido introducido por Carl Friedrich Gauss como un modelo refinado de la figura de la tierra. Gauss lo definió como “la superficie equipotencial del campo de gravedad de la tierra que coincide con el nivel medio del mar de los océanos” (Torge, 2001), de modo que la dirección de la plomada sea perpendicular en todos los puntos (Zakatov, 1997).

Esta superficie equipotencial o de nivel materializado por los océanos cuando se prescinde del efecto perturbador de las mareas (casi la superficie del nivel medio de los mares) es la superficie de referencia para la altitud (Instituto Geográfico Nacional de España, 2020).

El geoide se utiliza en geodesia, cartografía y oceanografía como superficie de referencia para alturas y profundidades (topografía continental y del fondo del océano, así como topografía de la superficie del mar) (Torge, 2001).

Figura 1

Tridimensional del Geoide de la Tierra

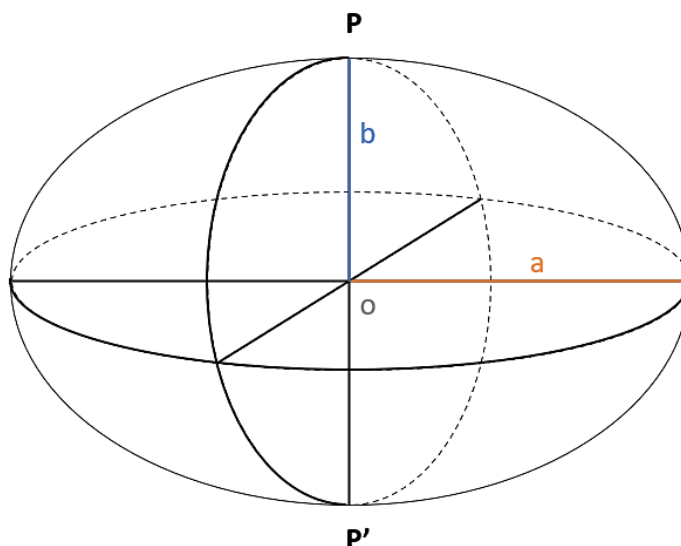


Nota. Tomado de Exploración del espacio, por NASA, (2016), NASA
(<https://www.nasa.gov/>).

Elipsoide

Según Corchete (2009) la principal tarea científica de la Geodesia es el estudio de la figura de la Tierra, el primer problema que se debe resolver es la determinación del tipo de superficie matemática que mejor representa la figura de la Tierra.

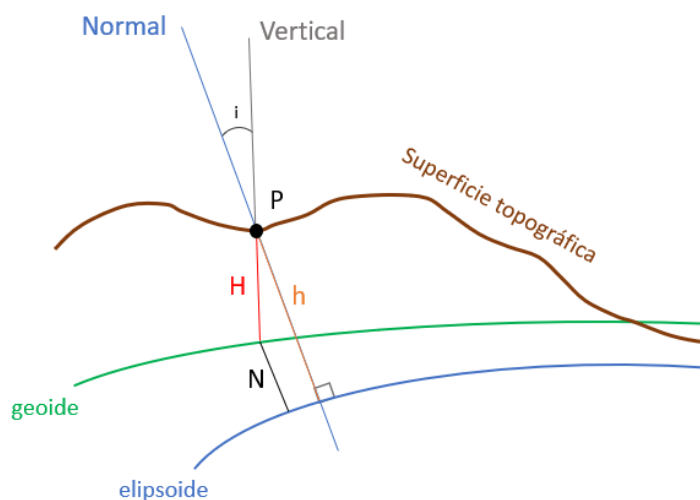
Se considera como tal superficie la de un elipsoide de revolución (superficie engendrada por la rotación de una elipse alrededor de un eje principal) ligeramente aplanado. Esta figura de la Tierra es tan buena, que el geoide se aparta de esta en menos de 100 metros de altura, en el caso de mayor separación (Corchete, 2009).

Figura 2*Elipsoide de revolución***Relación entre superficies de referencia**

Como se visualiza en la Figura 3, la relación entre la superficie topográfica, el elipsoide y el geoide es la ondulación geoidal N , siendo esta la diferencia entre el elipsoide y el geoide, sin embargo, para fines del presente estudio se considera al geoide muy próximo al nivel medio del mar, por lo tanto, la altura ortométrica H y la altura sobre el nivel medio del mar H_n son iguales, como se lo especifica en apartados anteriores.

Figura 3

Relación entre elipsoide, geoide y superficie topográfica



Sistemas de coordenadas

Un sistema de coordenadas sirve para designar de manera unívoca la posición de puntos en líneas, superficies, espacios (1D, 2D, 3D). No es posible “medir” coordenadas, estas se calculan en un sistema (Drewes & Sánchez, 2011). Para definir un sistema de coordenadas se debe especificar:

- Tipo de coordenadas (rectilíneas, curvilíneas, planas, etc.)
- Ubicación del origen
- Orientación de los ejes
- Unidad de medida

Según Drewes y Sánchez (2011) se tienen los siguientes tipos de sistemas de coordenadas:

- Coordenadas cartesianas globales tridimensionales $[X, Y, Z]$
- Coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$
- Coordenadas cartesianas locales topocéntricas $[x, y, z], [n, e, u]$

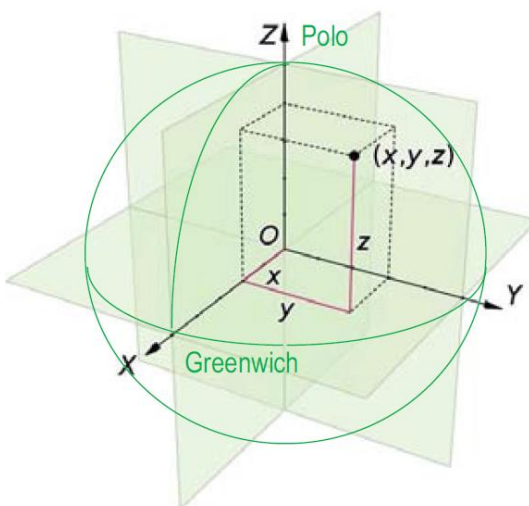
- Coordenadas planas (Mercator, Lambert, azimutal) [N, E]
- Coordenadas referidas a superficies irregulares [H]

Coordenadas cartesianas globales tridimensionales

Los sistemas cartesianos tienen ejes rectilíneos ortogonales y se distinguen los sistemas de mano derecha e izquierda (en geodesia se usa el sistema de mano derecha) (Drewes & Sánchez, 2011).

Figura 4

Sistema de coordenadas cartesianas



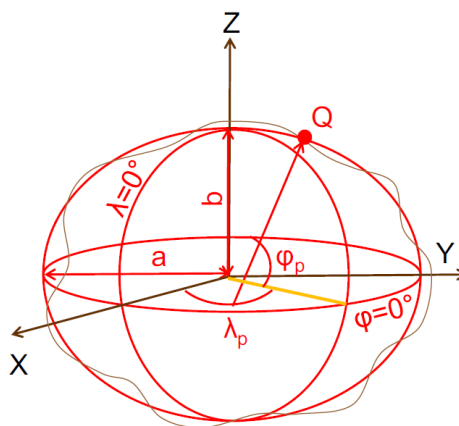
Nota. Tomado de Curso en Sistemas de Referencia, por H. Drewes y L. Sánchez, (2011), IGM.

Coordenadas elipsoidales

La figura terrestre se aproxima mejor con un elipsoide que con una esfera, ya que el achatamiento de la Tierra por rotación produce un semieje menor (b) 21 km más corto que el semieje mayor (a). En geodesia se usa un elipsoide que óptimamente se aproxima al geoide según la definición Gauss-Listing, es decir, que coincide con el nivel medio del mar (en calma). La forma del elipsoide se representa mediante el semieje mayor y el aplastamiento polar (flattening f) o la excentricidad (e) (Drewes & Sánchez, 2011, pág. 4).

Figura 5

Sistema de coordenadas elipsoidales



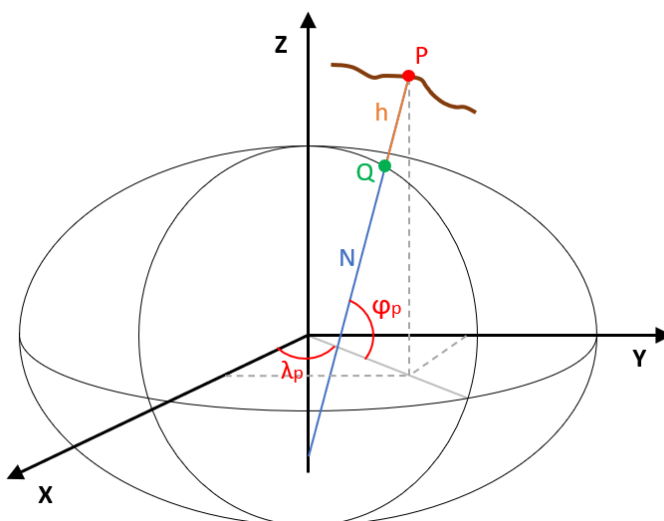
Nota. Tomado de Curso en Sistemas de Referencia, por H. Drewes y L. Sánchez, (2011), IGM.

El sistema elipsoidal de superficie se extiende al espacio mediante la inclusión de la altura h (elipsoidal o geométrica) del punto P sobre el elipsoide, medida a lo largo de la normal. La proyección de P sobre el elipsoide corresponde al punto Q . La terna de coordenadas (φ, λ, h) se conoce como coordenadas curvilíneas.

(Drewes & Sánchez, 2011, pág. 5)

Figura 6

Sistema de coordenadas elipsoidales, proyección del punto P sobre el elipsoide.

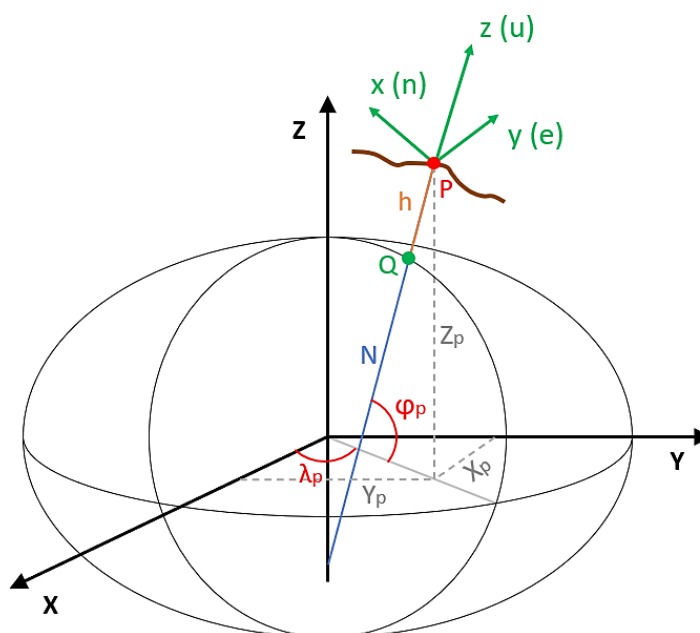


Coordenadas cartesianas locales topocéntricas

Consisten en un sistema de referencia local, ligado al campo de gravedad: orientación en función de la vertical local (cenit, línea de la plomada). El origen es el punto del observador (P): “topocentro”. El eje z apunta en la dirección del cenit, perpendicular al plano x, y. El eje x apunta en hacia el norte elipsoidal (meridiano). El eje y apunta hacia el este y forma así un sistema de mano izquierda. x, y, z equivalen a norte (n), este (e) y “up” (u). (Drewes & Sánchez, 2011, pág. 8)

Figura 7

Sistema de coordenadas cartesianas locales topocéntricas

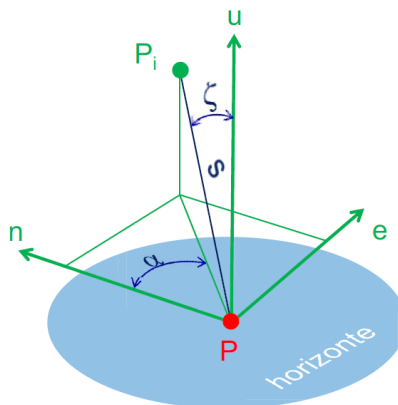


A partir del azimut geodésico α , el ángulo cenital ζ y la distancia s , se describe el punto P_i con respecto a P. El azimut geodésico α se define como ángulo medido en el plano horizontal entre el plano del meridiano elipsoidal de P y el plano vertical que contiene la normal a P y P_i . El ángulo cenital ζ se mide en el plano vertical entre la vertical elipsoidal y la línea de unión, contado positivamente

desde el cenit. La distancia s no se usa en los sistemas astronómicos (solo en geodesia local). (Drewes & Sánchez, 2011, pág. 9)

Figura 8

Sistema de coordenadas cartesianas locales



Nota. Tomado de Curso en Sistemas de Referencia, por H. Drewes y L. Sánchez, (2011), IGM.

Coordenadas planas

Los sistemas de coordenadas planas permiten representar la superficie del elipsoide o de la esfera sobre un plano a partir de reglas matemáticas o geométricas. La representación de una superficie curva sobre un plano no es posible sin distorsión, por lo tanto, se busca la representación que distorsione menos los ángulos, las distancias o las áreas (Drewes & Sánchez, 2011).

En principio se usan tres proyecciones:

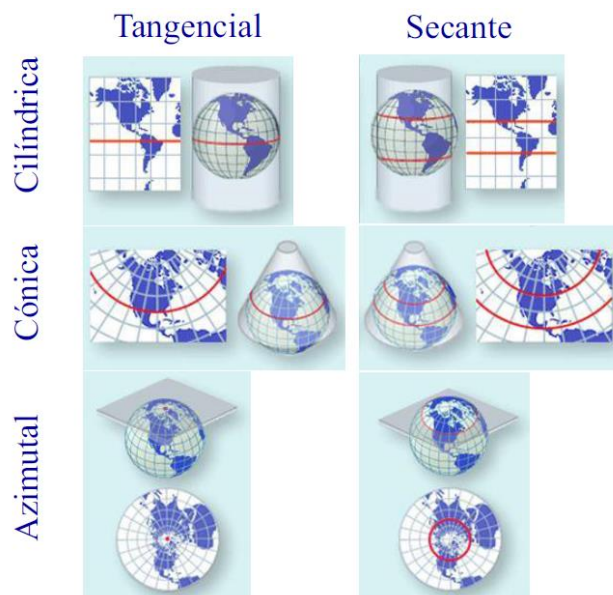
- Proyección sobre un cono
- Proyección sobre un cilindro
- Proyección sobre un plano

La orientación de las superficies puede ser:

- Normal (eje de la superficie paralelo al eje de rotación terrestre)
- Transversal (eje paralelo al ecuador)
- Oblicuo (eje en cualquier dirección)

Figura 9

Ejemplo de sistema de coordenadas planas proyectadas según el plano



Nota. Tomado de Curso en Sistemas de Referencia, por H. Drewes y L.

Sánchez, (2011), IGM.

Las distorsiones métricas pueden agruparse en:

- Conformidad: no presenta distorsión angular (diferencial).
- Equivalencia: propiedades equiáreas.
- Equidistancia: los meridianos y los paralelos se representan en verdadera longitud.

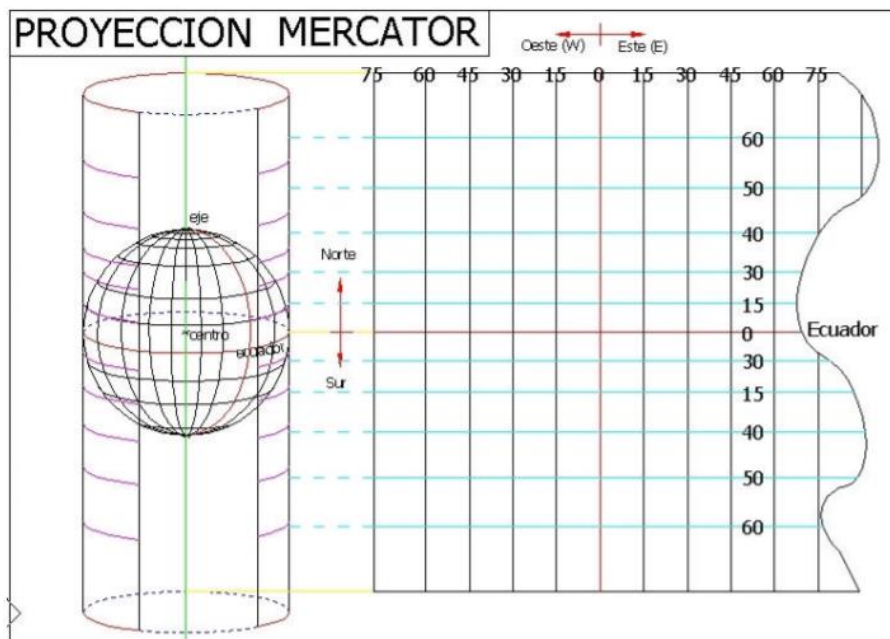
Coordenadas Planas Transversa de Mercator (Gauss Kruger).

El sistema Gauss-Krüger se basa en la proyección cilíndrica transversal. Es una proyección matemática de manera conforme, es decir, sin distorsión angular diferencial. Se aplica regionalmente y se divide en zonas de 3° de ancho en longitud. El meridiano central y el ecuador son líneas rectas mientras que los demás meridianos y paralelos son curvas complejas. La escala es verdadera a lo largo del meridiano central y

constante a lo largo de líneas paralelas al meridiano y aumenta con la distancia del meridiano (Drewes & Sánchez, Curso en Sistemas de Referencia, 2011).

Figura 10

Proyección Mercator



Nota. Tomado de Localizaciones Geográficas. Las Coordenadas Geográficas y la Proyección UTM (Universal Transversa Mercator)., por Fernández Coppel, (2001), Universidad de Valladolid.

Coordenadas Universal Transversa de Mercator (UTM).

La protección Transversa de Mercator toma como base la proyección Mercator, sin embargo, la posición del cilindro de proyección es transversal respecto del eje de la Tierra.

Figura 11

Proyección UTM



Nota. Tomado de Localizaciones Geográficas. Las Coordenadas Geográficas y la Proyección UTM (Universal Transversa Mercator)., por *Fernández Coppel*, (2001), *Universidad de Valladolid*.

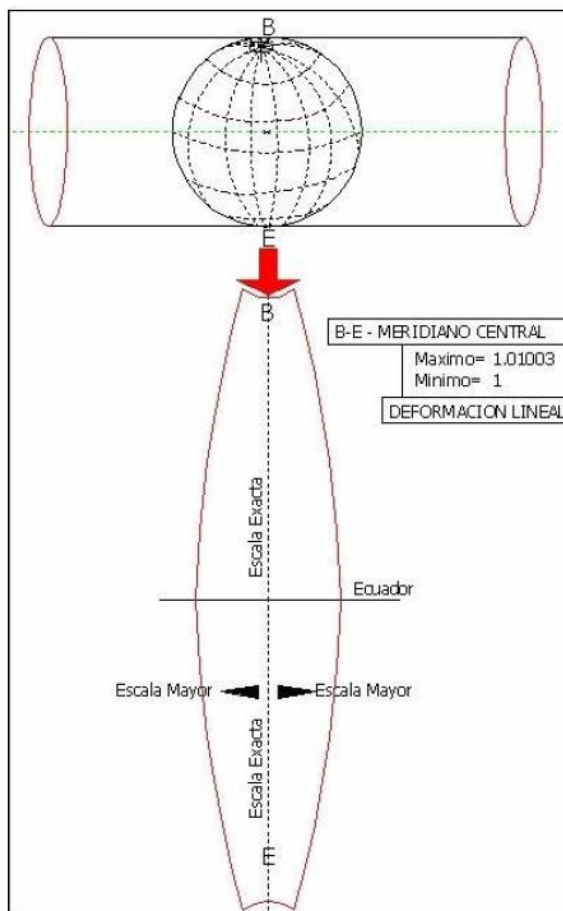
Se define un huso como las posiciones geográficas que ocupan todos los puntos comprendidos entre dos meridianos, cada huso puede contener 3°, 6° u 8°. La proyección UTM genera husos comprendidos entre meridianos de 6° de longitud, generándose en cada huso un meridiano central equidistante 3° de longitud de los extremos de cada huso. Los husos se generan a partir del meridiano de Greenwich, 0° a 6°E y W, 6° a 12° E y W, 12° a 18° E y W, etc. Esta red creada, (“grid”), se forma huso a huso, mediante el empleo de un cilindro distinto para generar cada uno de los husos, siendo cada uno de los cilindros empleados tangente al meridiano central de cada huso, cuya longitud es de 3°, o múltiplo de esta cantidad con 6° de separación (Fernández Coppel, 2001).

Esta situación del cilindro de proyección, tangente al meridiano central del huso proyectado, hace que únicamente una línea sea considerada como auto medida, la del meridiano central. Sobre esta línea, el módulo de deformación lineal K es la unidad (1), creciendo linealmente conforme se aumenta la distancia a este meridiano central. Esta

relación entre las distancias reales y las proyectadas presenta un mínimo de 1 y un máximo de 1,01003, (distorsión lineal desde 0 a 1,003%) (Fernández Coppel, 2001).

Figura 12

Relación entre las distancias reales y las proyectadas presenta

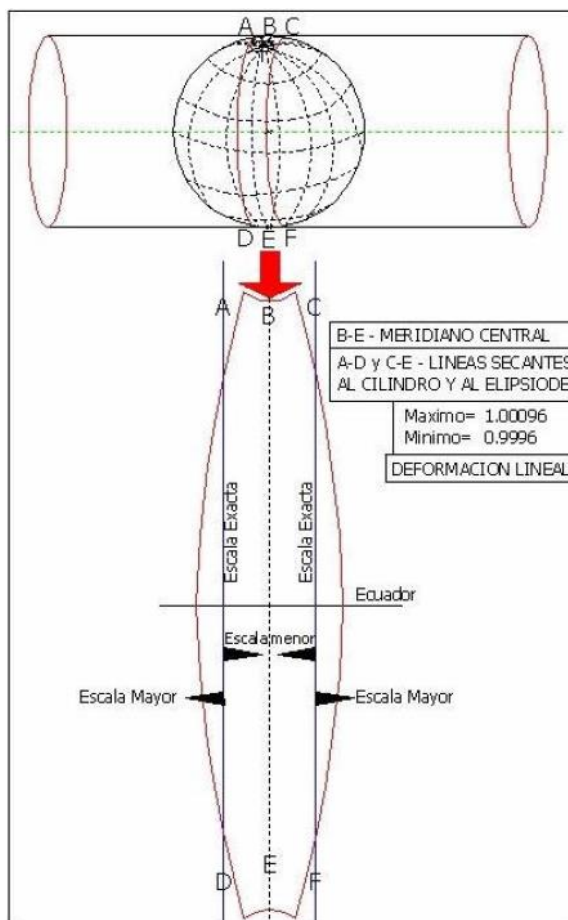


Nota. *Tomado de Localizaciones Geográficas. Las Coordenadas Geográficas y la Proyección UTM (Universal Transversa Mercator)., por Fernández Coppel, (2001), Universidad de Valladolid.*

Para evitar que la distorsión de las magnitudes lineales aumente conforme se aumenta la distancia al meridiano central se aplica un factor $K_c=0,9996$ a las distancias, de modo que la posición del cilindro de proyección sea secante al elipsoide, creándose dos líneas en las que el módulo de anamorfosis lineal sea la unidad (Fernández Coppel, 2001).

Figura 13

Aplicación del factor K_c a las distancias



Nota. *Tomado de Localizaciones Geográficas. Las Coordenadas Geográficas y la Proyección UTM (Universal Transversa Mercator).*, por Fernández Coppel, (2001), Universidad de Valladolid.

La transformación geométrica creada con la proyección hace que únicamente dos líneas se consideren “rectas”, (en la misma dirección de los meridianos y paralelos); el meridiano central del huso y el paralelo 0° (ecuador), en los que ambos coinciden con el meridiano geográfico y el paralelo principal. El meridiano central, por lo tanto, se encuentra orientado en la dirección del Norte Geográfico,

y el paralelo 0° se encuentra orientado en rumbo 90°-180°, dirección Este y Oeste (Fernández Coppel, 2001).

El Ecuador se encuentra atravesado por la línea ecuatorial, por lo tanto, pertenece a dos hemisferios. El Ecuador se extiende en las zonas 17 y 18 M y N y Galápagos pertenece a las zonas 15 y 16 M y N. En general, se indica únicamente el hemisferio: Norte o Sur (Norte = zona M y Sur = zona N).

Sistema de referencia vertical

Para poder representar la superficie topográfica (superficie real de la Tierra) “es necesario referirla a algún modelo matemático, de estos modelos se generan las cartas y mapas desarrollados por la cartografía. Las alturas que usan en la Geodesia se clasifican según su determinación, su aplicación y modelo físico matemático”. (Garafulic Caviedes, 2005, pág. 13)

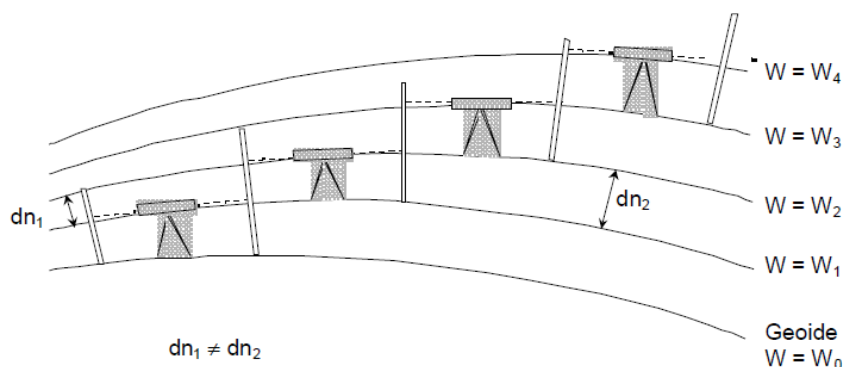
“La altura de un punto sobre la superficie topográfica es la distancia existente entre ésta y una superficie de referencia, medida a lo largo de la línea normal a dicha superficie que pasa por el punto de trabajo”. (Cañizares, Tierra, & Leiva, 2015, pág. 89)

Alturas niveladas

Las alturas niveladas son obtenidas bajo el proceso de nivelación geométrica con métodos ópticos de medición, como se indica en la Figura 14. Las diferencias de nivel observadas varían de acuerdo con el campo de gravedad inherente al sitio en consideración (Drewes, Sánchez, Blitzkow, & Freitas, 1998).

Figura 14

Nivelación geométrica



Nota. Tomado de Sistema de referencia vertical para América del Sur, por Drewes et al., (1998), Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas.

Las cantidades observadas (dn) corresponden con la distancia existente entre las superficies equipotenciales del campo de gravedad terrestre y su sumatoria permite conocer la diferencia de altura entre los puntos de interés. No obstante, debido a la forma elipsoidal de la Tierra y a la distribución irregular de sus masas internas, las superficies equipotenciales no son equidistantes; los valores de desnivel entre éstas, varían de acuerdo con el trayecto de medición.

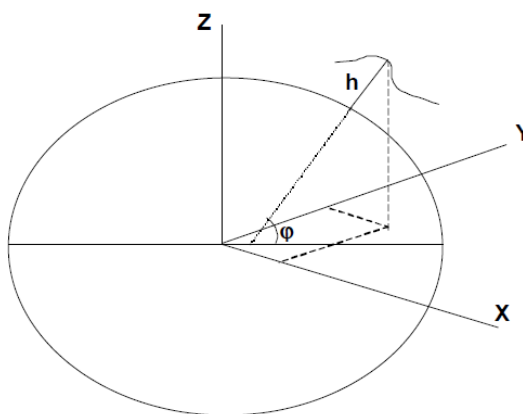
Como estas alturas dependen del camino descrito en el proceso de nivelación, fácilmente pueden obtenerse diferentes valores de altura para un mismo punto, haciendo que sean utilizadas en áreas pequeñas que no requieren considerar ni la figura elipsoidal de la Tierra ni las variaciones de su campo de gravedad. Su aplicación práctica es efectiva solo en redes locales con, aproximadamente, 10 km de extensión. (Drewes, Sánchez, Blitzkow, & Freitas, 1998, pág. 24).

Alturas elipsoidales

Las alturas elipsoidales (h) representan la separación entre la superficie topográfica y el elipsoide, se calcula sobre la línea perpendicular al elipsoide (Figura 15).

Figura 15

Alturas elipsoidales



Nota. Tomado de Sistema de referencia vertical para américa del sur, por Drewes et al., (1998), Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas.

Las alturas elipsoidales son obtenidas a partir de las coordenadas geocéntricas cartesianas (X , Y , Z) definidas sobre un elipsoide de referencia (por ejemplo, el modelo World Geodetic System 1984, WGS84), y determinadas a partir del posicionamiento satelital de los puntos de interés (Drewes, Sánchez, Blitzkow, & Freitas, 1998).

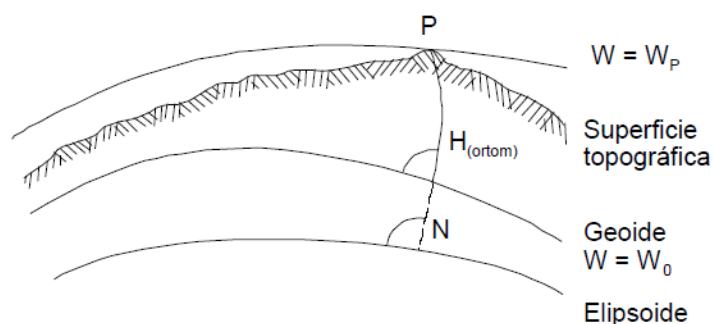
Debido a la utilización masiva de la técnica GPS, es indispensable considerar este tipo de alturas en los registros oficiales de las cantidades directamente medidas. Sin embargo, como éstos no consideran el campo de gravedad terrestre en su determinación, pueden presentar valores iguales en puntos con niveles diferentes, o viceversa, haciendo que su aplicación en la práctica sea mínima. Tal circunstancia exige que éstas sean complementadas con otro tipo que sí considere el campo de gravedad terrestre (Osco Poma, 2011, pág. 10).

Alturas ortométricas

Este tipo de altura es especial por su significado puramente geométrico. La altura ortométrica se define como la distancia vertical entre la superficie física de la Tierra y la superficie del geoide. Esta distancia se mide a lo largo de la línea de plomada, la cual es la curva tangencial a la dirección de la gravedad en cualquier punto. La línea de plomada no es una línea recta, tiene una leve curvatura y giro, ya que la dirección de la gravedad varía dependiendo de las características de densidad local (Vanícek, Santos, Tenzer, & Hernández-Navarro, 2003).

Figura 16

Alturas ortométricas



Nota. Tomado de Sistema de referencia vertical para américa del sur, por Drewes et al., (1998), Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas.

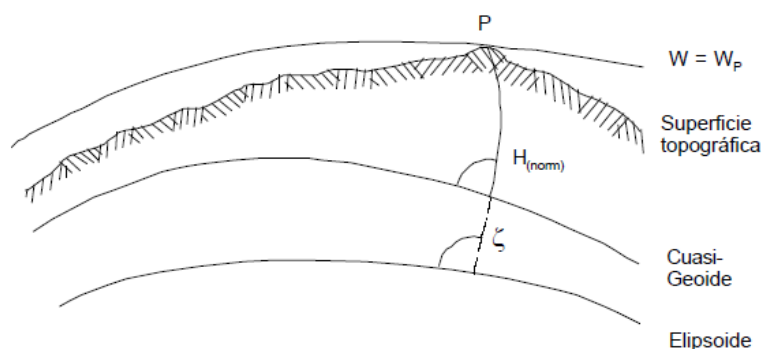
Para evaluar la altura ortométrica con exactitud es necesario conocer el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de plomada. En virtud de que la gravedad a lo largo de la línea de plomada no puede ser medida, el valor medio de la gravedad tiene que ser estimado de la gravedad observada en la superficie de la Tierra aceptándose alguna hipótesis sobre la distribución topográfica de la masa y densidad (Vanícek, Santos, Tenzer, & Hernández-Navarro, 2003).

Alturas normales

Las alturas normales son una aproximación a las alturas ortométricas, describiendo las alturas sobre una superficie ficticia, el quasigeoide. La altura normal H^N requiere el uso de una cantidad conocida como anomalía de altura ζ (Vanícek et al. (2003) citado en Molodensky et al. (1960)). La anomalía de altura se define como la distancia a lo largo de la normal elipsoidal entre el quasigeoide y el elipsoide referencia, o alternativamente, como la distancia entre la superficie de la Tierra y el teluroide. Estas anomalías de alturas son llamadas algunas veces “alturas quasigeoidales”.

Figura 17

Alturas normales



Nota. Tomado de Sistema de referencia vertical para américa del sur, por Drewes et al., (1998), Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas.

La introducción de la altura normal elimina la necesidad de conocer la topografía, ya que en su definición clama por el conocimiento del valor medio de la gravedad normal a lo largo de la normal elipsoidal entre el elipsoide geocéntrico de referencia y el teluroide. Este hecho permite que la altura normal sea calculada exactamente (como exactamente pueda ser determinado el número geopotencial basado en gravedad actual) debido a que no requiere ningún conocimiento sobre la distribución de la densidad topográfica (Vanícek, Santos, Tenzer, & Hernández-Navarro, 2003).

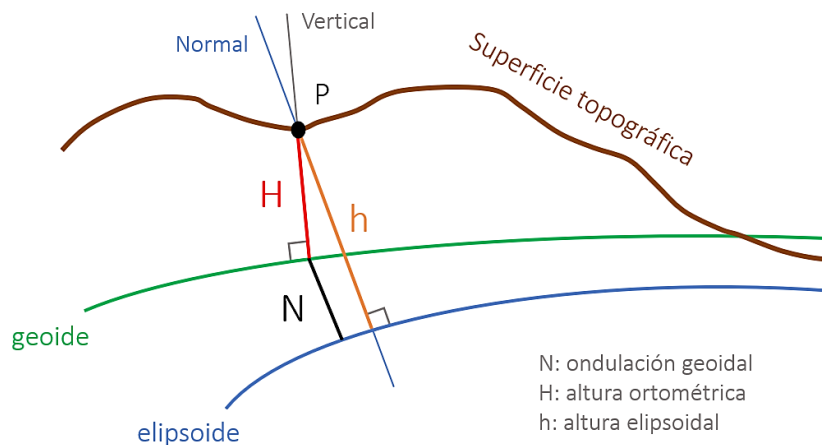
Ondulación geoidal

La ondulación geoidal representa la separación entre la superficie del elipsoide y del geoide, generalmente se simboliza con la letra “N” y es así como se representa en el presente estudio.

La relación entre la altura ortométrica y la altura elipsoidal se expresa por la ecuación (1). Esta expresión indica que no importa cuán exacto pueda ser el valor de la altura elipsoidal (h) dado por GPS, es la ondulación geoidal (N) la que dicta la exactitud final de la altura ortométrica (H). Los valores de N están dados por las diferentes exactitudes de los diferentes modelos geoidales (Vanícek, Santos, Tenzer, & Hernández-Navarro, 2003).

Figura 18

Ondulación geoidal



En la práctica se utiliza la ondulación geoidal para calcular la altura sobre el nivel medio del mar (H_n) partiendo de datos de la altura elipsoidal (h), dado por GPS, y de la ecuación (1), como indica la ecuación (2).

$$H_n = h - N \quad (2)$$

Métodos de determinación del geode

Los Sistemas de Navegación Global por Satélites (GNSS) pueden calcular las coordenadas geodésicas latitud, longitud, y la altura elipsoidal que está referida a un elipsoide. Para fines prácticos en nuestro país es utilizada la altura referida al nivel medio del mar, materializado en el datum vertical “La Libertad” ubicado en la provincia de Santa Elena. Para poder compatibilizar estas alturas es necesario que se disponga de un modelo geoidal y calcular la ondulación geoidal de un punto sobre la superficie terrestre. Existen varios métodos para determinar el modelo geoidal, entre ellos se encuentran los modelos geopotenciales, modelos gravimétricos, y los modelos geométricos. (Instituto Geográfico Militar, 2013)

Modelos geopotenciales

Los modelos geopotenciales del geode combinan información satelital e información gravimétrica en superficie para desarrollar el potencial gravitacional en series de armónicos esféricos (Hofmann y Helmut (2005) citado de Carrión Sánchez (2013)).

Generalmente, los modelos geopotenciales utilizados por los usuarios que utilizan el Sistema GPS (Global Navigation satellite System) son el EGM96 (Earth Gravitational Model 1996) y actualmente el EGM08 (Earth Gravitational Model 2008) (Instituto Geográfico Militar, 2013).

Earth Gravitational Model 1996 - EGM96.

Es un modelo geopotencial de la superficie terrestre constituido de la suma de armónicos esféricos de hasta 360 en orden y grado desarrollado mediante la colaboración de distintos centros de investigación, fundamentalmente la NASA, (acrónimo de National Aeronautics and Space Administration) a través del Centro de vuelo espacial Goddard (GSFC), sumando esfuerzos con la Agencia Nacional de Mapeo e Imágenes (NIMA

por sus siglas en inglés hoy llamado NGA National Geospatial Intelligence Agency), la Universidad del Estado de Ohio en Estados Unidos (OSU), y la Universidad de Texas at Austin. Para su elaboración se obtuvo datos de gravedad de diferentes partes del mundo continental y oceánica; y de datos de diferentes misiones satelitales (Tierra Criollo, 2009).

El EGM96 es una grilla de 0.25 grados a nivel mundial que entrega valores de Ondulación Geoidal (N). Estos valores pueden ser determinados para cualquier punto sobre superficie de la Tierra que tenga coordenadas en el sistema WGS84 (Yáñez Yáñez, 2000).

Earth Gravitational Model 2008 - EGM08.

El modelo EGM08 es un desarrollo completo en armónicos esféricos hasta grado y orden 2159 y contiene coeficientes adicionales extendidos hasta grado 2190 y orden 2159 (National Geospatial - Intelligence Agency, 2020), lo cual implica que registra el campo gravitatorio hasta aproximadamente 20 km de longitud de onda. Este modelo ha sido elaborado con anomalías de gravedad a partir de una rejilla de 5' x 5', cuyos datos proceden de diferentes fuentes, sobre todo misiones altimétricas (GRACE) (Sánchez Sobrino, Daldan Mourón, & Barbadillo Fernández, 2009).

Modelos gravimétricos

El método gravimétrico para la obtención del geoide se basa en el cálculo de la integral de Stokes mediante la medición de anomalías de la gravedad (Hofmann y Helmut (2005) citado de Carrión Sánchez (2013)).

En la determinación de modelos geoidales gravimétricos locales, los valores de gravedad son importantes tanto en el área del Ecuador como en la de los países vecinos y en el océano Pacífico. De la misma manera, se debe disponer de los modelos digitales de elevaciones (Tierra & Acurio, 2017).

Método geométrico

En el método geométrico, según Tierra y Acurio (2017), “la ondulación geoidal es determinada mediante la utilización de satélites artificiales, como es el caso del GPS, conjuntamente, con la nivelación geométrica y gravimetría”.

En el caso de desear establecer un modelo de geoide para áreas de escasa extensión, inferior a una superficie de $2^\circ \times 2^\circ$, y si se usa un modelo de 360° (Núñez , 2006) un método muy empleado es el GPS/nivelación que consiste en determinar la ondulación del geoide directamente de la diferencia entre la cota elipsoidal (obtenida con GPS) y la cota ortométrica (en este estudio considerada igual a la altura sobre el nivel medio del mar) aplicando la ecuación (1). Esta afirmación sólo es válida si las dos magnitudes que intervienen en el cálculo (h y H) fueron determinadas con suficiente precisión.

Conocidas las ondulaciones geoidales de puntos tomados con GPS (con sus respectivas coordenadas) de un sector específico, es posible interpolar dichos datos para conocer la ondulación geoidal en cualquier punto comprendido dentro del área de estudio.

Anomalías de gravedad

La diferencia entre la gravedad medida, reducida a cierto nivel, con respecto a la gravedad teórica (concebida para un modelo sin irregularidades) calculado para un mismo punto se conoce como “Anomalía” (Mayer, 2009). El correcto tratamiento de estas anomalías permite inferir las características de la masa que las produce (Pacino, Melano, & Haberkorn, 2015). Según Hofmann y Moritz (2006) la definición de la anomalía de la gravedad es que tiene, en la superficie de la tierra, la misma forma que en el caso clásico del geoide y el nivel del mar.

La separación geoide – elipsoide (N) se puede calcular mediante la denominada Fórmula de Stokes, que toma en cuenta la distribución de anomalías alrededor de cada punto considerado (Mayer, 2009).

Resolución de cuadrícula

Las definiciones cartográficas se pueden utilizar para estimar la resolución de cuadrícula adecuada para una escala de mapeo dada. Rossiter (2002) propone, como regla general, que el área de tamaño más pequeña de mapeo, es decir, la delimitación legible mínima (DLM), se considera equivalente a cuatro celdas de la cuadrícula. Según Hengl (2006) citando la definición de Vink (1975), la DLM es 0.25 cm² en el mapa, por lo que la resolución de cuadrícula adecuada puede estimarse en función del número de escala (E), como muestra la ecuación (3).

$$p \leq \sqrt{\frac{DLM}{4}} = \frac{\sqrt{E^2 * 0,000025}}{2} = E * 0,0025 \quad (3)$$

donde p es el tamaño de la cuadrícula (píxel) y DLM es el área de delineación mínima legible en el suelo en m². Entonces, para una escala de 1:50K, la DLM es de 6,25 ha y la resolución de cuadrícula adecuada es de 125 m, lo que parece bastante grueso (Hengl, 2006).

La resolución de la cuadrícula también puede estar relacionada con la precisión de ubicación máxima (PUM), que comúnmente varía de 0,25 mm a un máximo de 0,1 mm en el mapa (Vink, 1975). Esto proporciona las resoluciones legibles más pequeñas.

$$p \geq E * PUM = E * 0,00025(0,0001) \quad (4)$$

Esto significa que para una escala de 1:50K, la resolución de cuadrícula legible más pequeña es 12,5m (5 m). Las resoluciones de más de 5 metros realmente no tienen sentido, ya que será difícil visualizarlas o imprimirlas a esta escala de trabajo (Hengl, 2006).

En muchos proyectos de mapeo, se hace un mapa de las muestras puntuales recolectadas en el campo y luego se usa para hacer predicciones. Cuanto más densos son los puntos de observación, mayor es la escala del mapeo (Hengl, 2006). Una regla cartográfica, utilizada por ejemplo en el mapeo del suelo, es que debe haber al menos una observación (idealmente cuatro) por 1 cm² del mapa (Avery, 1987). Según Hengl (2006), este principio se puede utilizar para estimar la escala de un conjunto de datos que consiste solo de puntos muestreados, como muestra la ecuación (5).

$$E = \sqrt{4 * \frac{A}{N} * 10^2} \dots E = \sqrt{\frac{A}{N} * 10^2} \quad (5)$$

Donde A es la superficie del área de estudio en m² y N es el número total de observaciones. De acuerdo a la ecuación (3), el número de escala puede usarse para estimar la resolución de la cuadrícula. Si se toma el número intermedio de 2,5 observaciones por cm² y se combina con $p = E * 0,5 \text{ mm}$ en la regla general del mapa, con un poco de reducción, finalmente se obtiene una fórmula simple (ecuación (6)).

$$p = 0,0791 * \sqrt{\frac{A}{N}} \quad (6)$$

Entonces, por ejemplo, si se trabaja con 100 muestras en un área de 10 km², una resolución de cuadrícula recomendada sería de 25m, que también se puede expresar como 160 píxeles por muestra de punto.

Ajuste Mínimos Cuadrados

Modelos matemáticos de ajustes

Según Sevilla (1987) en todo problema geodésico se involucran tres tipos de elementos de carácter fundamental. En primer lugar, los parámetros, son incógnitas del problema, magnitudes que representan aquello que se desea determinar. En segundo lugar, los observables, son aquellas magnitudes que se puede determinar directa o indirectamente por observación. En tercer lugar, las funciones o relaciones matemáticas

establecidas entre los parámetros y los observables. Al conjunto de parámetros, observables y funciones se los denomina modelo matemático. El modelo matemático está constituido por dos partes: el modelo funcional y el modelo estocástico.

“El modelo funcional o determinista establece las propiedades físicas o geométricas del problema” (Sevilla, 1987), este proporciona las relaciones matemáticas entre las variables involucradas de forma explícita o implícita, sin importar los valores numéricos que tomen dichas variables; estará constituido por las funciones que relacionen los parámetros con los observables e incluyen algunas constantes propias del fenómeno estudiado. La ecuación (7) muestra la forma implícita general en la cual se puede escribir un modelo funcional.

$$F(X, L) = 0 \quad (7)$$

También puede adoptar una forma explícita en L (ecuación (8)),

$$L = F(X) \quad (8)$$

o en X (ecuación (9)),

$$X = F(L) \quad (9)$$

o, en ausencia de parámetros, la forma de un modelo de condición (ecuación (10)).

$$F(L) = 0 \quad (10)$$

“El modelo estocástico establece las características o propiedades estocásticas de las variables aleatorias involucradas en el modelo funcional” (Sevilla, 1987).

Un modelo matemático, tal como la ecuación (7), se verifica exactamente para los valores X de los parámetros y los valores L de las observaciones que se denominan valores ajustados. Las observaciones reales l no coinciden con los valores L porque se ven afectados por el error de observación, representado por el vector v denominado vector de errores residuales, como se muestra en la ecuación (11) (Sevilla, 1987).

$$L = l + v \quad (11)$$

Como lo muestra la ecuación (12), en su forma más general está compuesto por una parte determinista que incluirá el valor esperado del observable y posiblemente una parte aleatoria que sea propia del fenómeno estudiado y no se relacione con el error de observación (Sevilla, 1987).

$$L = l + r + s \quad (12)$$

donde L es el valor ajustado del observable, l es el valor observado, r es el error aleatorio de medida (ruido) y s es otra parte aleatoria propia del campo en el que se realiza el experimento, que no depende del sistema o equipo de medida y que se denomina señal.

Por lo tanto, la parte aleatoria completa del observable (residual v) está constituida por el ruido y la señal (ecuación (13)).

$$v = r + s \quad (13)$$

Principio de mínimos cuadrados

Los problemas de ajuste o compensación en geodesia surgen del hecho de que en general se dispone, después de la fase de observación, de más observaciones de las estrictamente necesarias para la resolución del problema geodésico planteado, además, estas observaciones siempre adolecen de los inevitables errores de observación que son desconocidos.

Si se considera un modelo matemático regular en el que estas observaciones se toman como valores de los observables, desde un punto de vista algebraico y debido a la súper abundancia indicada, se tienen varias posibilidades de obtener soluciones aproximadas del problema, tantas como combinaciones se puedan efectuar con las observaciones tomadas en número mínimo necesario para que cada submodelo particular pueda resolverse.

(Sevilla, 1987, pág. 103)

De entre las infinitas soluciones posibles se desea siempre la mejor y para ello se necesita un criterio adicional que es el de mínimos cuadrados que establece que la suma de los cuadrados de los errores residuales debe ser mínima (Sevilla, 1987); en la ecuación (14) se muestra este principio con la métrica euclídea ordinaria, y si dicha métrica viene definida en el espacio de observaciones por la matriz P, matricialmente se convertiría en la ecuación (15).

$$\sum_{i=1}^m v_i^2 = \text{mínimo} \quad (14)$$

$$v^T P v = \text{mínimo} \quad (15)$$

Formulación de modelos regulares ordinarios

Según Sevilla (1987) existen tres modelos matemáticos regulares ordinariamente empleados en geodesia que son soluciones mínimos cuadrados mínima varianza y son las mejores estimaciones lineales insesgadas del problema.

- Modelo de ajuste mixto (o combinado)
- Modelo de observaciones condicionadas (o de correlatos)
- Modelo de observaciones indirectas (o paramétrico)

En el modelo paramétrico las observaciones están en función de los parámetros; en el modelo de correlatos las observaciones están ligadas a través de ecuaciones de condición y, por último, el método combinado reúne parámetros y observaciones ajustadas unidos por una función no explícita (Lima, 2005). Para la determinación de los parámetros del modelo matemático que calculará las ondulaciones geoidales de la zona rural del cantón Guayaquil se utilizará el modelo de observaciones indirectas (paramétrico).

El modelo de observaciones indirectas, conocido también como modelo paramétrico, permite ajustar observaciones no correlacionadas y se utiliza cuando los

valores observados ajustados están expresados en función de los parámetros ajustados.

Las variables que intervienen en cada modelo son:

m , es el número de observaciones lb .

n , es el número de parámetros X .

c , es el número de condiciones, siendo: $c < m$, $c > n$, $c < m+n$.

X , es el vector de parámetros ajustados de dimensión $(nx1)$.

X_0 , es el vector de valores aproximados de los parámetros X .

x , es el vector de parámetros incógnita (denominado simplemente parámetros), definido por la ecuación (16).

$$x = X - X_0 \quad (16)$$

L , es el vector de valores ajustados de las observaciones de dimensión $(mx1)$.

L_0 , es el vector de valores aproximados de las observaciones.

lb , es el vector de observaciones reales de dimensión $(mx1)$.

v , es el vector de errores residuales (incógnitas) definido por la ecuación (17).

$$v = L - lb \quad (17)$$

P , es la matriz de pesos de las observaciones lb , simétrica y definida positiva de dimensión (mxm) .

Q , es la matriz cofactor a priori de las observaciones lb definida por la ecuación (18).

$$Q = P^{-1} \quad (18)$$

σ_o^2 , es la varianza a priori de la unidad de peso.

Σ , es la matriz de varianza-covarianza a priori de las observaciones Lb definida por la ecuación (19).

$$\Sigma = \sigma_o^2 Q \quad (19)$$

$A = \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_o, L_o}$, es la primera matriz de diseño de dimensión $(c \times n)$.

$B = \frac{\partial F}{\partial L} \Big|_{X_o, L_o}$, es la segunda matriz de diseño de dimensión $(c \times m)$.

Todas las matrices P , Q , Σ , A , B se suponen de rango completo como corresponde a un modelo regular.

t , es el vector de constantes de observación, dado por la ecuación (20).

$$t = -[F(X_o, L_o) + B l_b - B L_o] \quad (20)$$

Modelo de ajuste mixto.

Es un modelo de ajuste mixto de observaciones de condición y parámetros, cuyo modelo funcional es de la forma de la ecuación (7). Si el modelo ya es lineal en X y L y si se toman como valores aproximados L_o las propias observaciones l_b , entonces el modelo funcional toma la forma de la ecuación (21).

$$Ax + Bv - t = 0 \quad (21)$$

El modelo estocástico viene dado por la ecuación (22).

$$E\{v\} = 0, \quad E\{v v^T\} = \Sigma = \sigma_o^2 Q \quad (22)$$

Donde E es el operador esperanza matemática y el superíndice T indica matriz traspuesta también se puede expresar como la ecuación (23).

$$E\{t\} = Ax, \quad \Sigma_{tt} = \sigma_o^2 M \quad (23)$$

Siendo M definida por la ecuación (24).

$$M = B P^{-1} B^T \quad (24)$$

La condición de mínimos cuadrados consiste en minimizar la función matricial representada por la ecuación (25).

$$T(v, \Lambda, x) = v^T P v - 2 \Lambda^T (Ax + Bv - t) \quad (25)$$

Donde Λ es el vector de multiplicadores de Lagrange.

Resolviendo este problema de mínimo se obtienen los valores estimados de los parámetros, residuales y observaciones por las ecuaciones (26), (27) y (28).

$$\hat{x} = (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} t \quad (26)$$

$$\hat{v} = P^{-1} B^T M^{-1} (t - A\hat{x}) = P^{-1} B^T M^{-1} (I - A(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1}) t \quad (27)$$

$$\hat{L} = l_b + \hat{v} \quad (28)$$

La estimación de la varianza a priori de la unidad de peso viene dada por la ecuación (29).

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{c - n} \quad (29)$$

Donde la suma de cuadrados de residuales viene dada por la ecuación (30).

$$\hat{v}^T P \hat{v} = t^T M^{-1} t - t^T M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} t \quad (30)$$

Modelo de observaciones indirectas.

Un caso particular del anterior modelo es el modelo de observaciones indirectas o modelo explícito en los observables. Este modelo viene dado por la ecuación (8) y en este caso el número de ecuaciones coincide con el de observaciones ($c=m$). Su forma lineal viene dada por la ecuación (31).

$$L = Ax + L_o \quad (31)$$

En general la forma linealizada viene dada por la ecuación (32), donde ahora el vector de constantes de observación viene dado por la ecuación (33), siendo $L_o = F(X_o)$.

$$Ax - t = v \quad (32)$$

$$t = l_b - L_o \quad (33)$$

En este modelo solo existe una matriz de diseño A. La condición de mínimos cuadrados se reduce a minimizar la ecuación (34) y las soluciones o valores estimados vienen dadas por las ecuaciones (35), (36) y (37).

$$T(v) = v^T P v \quad (34)$$

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P t \quad (35)$$

$$\hat{v} = A \hat{x} - t = [A(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T P - I] t \quad (36)$$

$$\hat{L} = l_b + \hat{v} = L_o + A(A^T P A)^{-1} A^T P t \quad (37)$$

La precisión a posteriori viene dada por las ecuaciones (38) y (39).

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{c - n} \quad (38)$$

$$\hat{v}^T P \hat{v} = t^T P t - \hat{x}^T (A^T P A)^{-1} \hat{x} \quad (39)$$

Modelo de observaciones condicionadas.

Un caso particular también del primer modelo, es el modelo de observaciones condicionadas en el que no aparecen los parámetros. Este modelo es de la forma de la ecuación (10) y en donde el número de condiciones c es menor que el número de observaciones m ($c < m$). Su forma lineal viene dada por la ecuación (40) y si como valores aproximados L_o se toman las observaciones l_b entonces el vector de constantes toma la forma de la ecuación (41).

$$F(L) = BL + b = 0 \quad (40)$$

$$t = -(B l_b + b) \quad (41)$$

El modelo funcional linealizado viene dado por la (42) y el modelo estocástico por la ecuación (43) o bien la ecuación (44).

$$Bv - t = 0 \quad (42)$$

$$E\{v\} = 0, \quad E\{v v^T\} = \Sigma = \sigma_o^2 Q \quad (43)$$

$$E\{t\} = 0, \quad \Sigma_{tt} = \sigma_o^2 M \quad (44)$$

La función que se debe minimizar es la ecuación (45) y las soluciones o valores estimados son las ecuaciones (46) y (47).

$$T(v, \Lambda) = v^T P v - 2 \Lambda^T (Bv - t) \quad (45)$$

$$\hat{v} = P^{-1} B^T M^{-1} t \quad (46)$$

$$\hat{L} = l_b + \hat{v} \quad (47)$$

La precisión a posteriori viene dada por las ecuaciones (48) y (49).

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{c} \quad (48)$$

$$\hat{v}^T P \hat{v} = t^T M^{-1} t \quad (49)$$

Modelo general de Mínimos Cuadrados Colocación

Se utilizan dos modelos regulares: modelo mixto y el modelo de observaciones indirectas. El modelo mixto establece las fórmulas de colocación mínimos cuadrados, independiente del modelo matemático. El modelo supone que las magnitudes de los parámetros y observaciones están relacionadas por un modelo sencillo de observaciones indirectas, y que las observaciones son condicionadas.

“El modelo general de colocación constituye un caso muy general de mínimos cuadrados, su característica principal es que además de los parámetros y los errores de observación permite estimar otras cantidades aleatorias de gran interés en muchos problemas geodésicos” (Sevilla, 1987, pág. 111).

Modelo funcional

El observable L se supone de la forma de la ecuación (12) que incluye en la observación lb una parte aleatoria de esperanza matemática cero que serán los errores de observación o ruido r , y otra parte también aleatoria de media cero o señal s , siendo r y s no correlacionados (Sevilla, 1987).

Por otra parte, se considera un modelo explícito en L , $L=F(x)$, que en su forma lineal es la ecuación (50), donde L_o es el vector de valores aproximados de las observaciones, x es el vector de parámetros incógnita y A es la primera matriz de diseño de dimensiones cxn (donde c es el número de condiciones y n es el número de parámetros x).

$$L = Ax + L_o \quad (50)$$

Entonces, con las ecuaciones (12) y (50) el modelo funcional de colocación general toma la forma de la ecuación (51), y si el vector de constantes de observación viene dado por la ecuación (52) se puede escribir de la forma de la ecuación (53).

$$Ax + L_o = l_b + s + r \quad (51)$$

$$t = l_b - L_o \quad (52)$$

$$Ax - s - r - t = 0 \quad (53)$$

Para completar el planteamiento del problema de colocación, se supone m observaciones l_b (y por tanto m ruidos r , y m señales s en puntos de observación) y n parámetros x con $m > n$ para disponer de observaciones superabundantes; además, se desea estimar señales en puntos que pueden ser los mismos (señales s) o distintos de los de observación, el vector de señales en los puntos distintos se representa por z y de dimensión k y también no correlacionado con r .

Entonces, la determinación de los parámetros x es un problema de ajuste, la determinación de la señal z en puntos distintos a los de observación es una predicción y la eliminación del ruido es un problema de filtrado. La combinación del ajuste, la predicción y el filtrado constituye el problema de colocación general (Sevilla (1987) citado de Moritz (1980)).

Se define una matriz constituida por 3 matrices: dos matrices identidad cambiadas de signo de dimensiones (mxm) y una matriz de ceros de dimensiones (mxk) .

$$\bar{B} = (-I, 0, -I) \quad (54)$$

Se define un vector v , formado por toda la parte aleatoria del problema (ecuación (55)), entonces se obtiene la ecuación (56).

$$v = \begin{bmatrix} s \\ z \\ r \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$Ax + \bar{B}v - t = 0 \quad (56)$$

Modelo estocástico

Se supone de momento que la varianza de referencia a priori de las observaciones es la unidad, entonces las matrices cofactor coincidirán con las matrices covarianza a priori. La matriz covarianza C_{vv} viene dada por cajas (ecuación (57)).

$$C_{vv} = \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sz} & 0 \\ C_{zs} & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & C_{rr} \end{bmatrix} \quad (57)$$

La parte aleatoria de las observaciones l_b es $s + r$ y $C_{sr} = 0$ (ecuación (58)).

$$C_{l_b l_b} = C_{ss} + C_{rr} = \bar{C} \quad (58)$$

Valores estimados

La consideración formal de la ecuación (56) como un modelo de ajuste mixto con $c=m$ ecuaciones, n parámetros y $2m+k$ observaciones ficticias, permite obtener los valores estimados aplicando las ecuaciones (26) y (27). Se calcula M dada por la ecuación (24).

$$M = \bar{B} P^{-1} \bar{B}^T \quad (59)$$

Sustituyendo las variables de la ecuación (60).

$$M = C_{ss} + C_{rr} = \bar{C} \quad (60)$$

$$\hat{x} = (A^T \bar{C}^{-1} A)^{-1} A^T \bar{C}^{-1} t \quad (61)$$

Análogamente se obtiene:

$$\hat{s} = C_{ss} \bar{C}^{-1} (A\hat{x} - t) \quad (62)$$

$$\hat{z} = C_{zs} \bar{C}^{-1} (A\hat{x} - t) \quad (63)$$

$$\hat{r} = C_{rr} \bar{C}^{-1} (A\hat{x} - t) \quad (64)$$

Como afirma Sevilla (1987), la relación de las señales adicionales z con las observaciones sólo queda establecida por medio de la matriz covarianza C_{zs} que es C_{zlb}

al estar la señal y el ruido no correlacionados. Entonces, siempre que se conozca C_{zlb} las cantidades estimadas o las propias observaciones pueden ser cualquiera, aunque, las señales y el ruido han de ser centradas y no correlacionadas (Sevilla, 1987).

Estimación de la precisión a posteriori

En el modelo de ajuste mixto, la estimación de la varianza a priori de la unidad de peso viene dada por la ecuación (29) que con $c=m$ resulta:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{v}^T C_{vv} \hat{v}}{m - n} \quad (65)$$

Donde por la ecuación (30) y (60) resulta la ecuación (66).

$$\hat{v}^T C_{vv} \hat{v} = t^T [\bar{C}^{-1} - \bar{C}^{-1} A(A^T \bar{C}^{-1} A)^{-1} A^T \bar{C}^{-1}] t \quad (66)$$

En cuanto a las covarianzas a posteriori o covarianzas error, se obtienen también a partir de las correspondientes fórmulas del modelo de referencia, teniendo en cuenta la definición de modelo estocástico.

La matriz $C_{lb \ lb} = \bar{C}$ de covarianzas de las observaciones se considera formada por dos partes: la ecuación (58), correspondiente a la señal C_{ss} en los puntos de observación, y otra parte correspondiente al ruido C_{rr} que es la matriz normalmente utilizada en los cálculos de un ajuste ordinario por mínimos cuadrados.

Funciones covarianza

Uno de los temas más delicados en la aplicación del método de colocación es en el establecimiento de las funciones covarianza a priori. "Las funciones covarianza verdaderas son desconocidas por lo que se aproximan por funciones covarianza calculadas de tal forma que cumplan las propiedades requeridas en particular la de ser funciones definidas positivas" (Sevilla, 1987, pág. 127). En general la función covarianza de la señal s viene definida por la ecuación (67).

$$C_{ss} = C(P, Q) = E[s(P), s(Q)] \quad (67)$$

Donde $s(P)$ y $s(Q)$ son los valores de la señal en dos puntos genéricos P y Q , y E es el operador esperanza matemática. La ecuación (67) debe ser definida positiva y se supone isótropa (solo depende de la distancia entre los puntos P y Q).

$$\begin{aligned} C(P, Q) &= C(d) \\ d &= \text{dist}(P, Q) = |P - Q| \end{aligned} \quad (68)$$

Esto indica que la función covarianza es constante para el punto P y todos los puntos de una circunferencia centrada en P de radio d .

La función covarianza del ruido en el caso de observaciones no correlacionadas respecto a los errores de observación adopta la forma diagonal de la ecuación (69).

$$C_{rr} = \sigma_o^2 I \quad (69)$$

En estas condiciones la matriz covarianza de las observaciones (ecuación (58)) se escribe como la ecuación (70).

$$C_{lb \ lb} = C(d) + \sigma_o^2 I = \bar{C} \quad (70)$$

En virtud de las ecuaciones (68) y (69) para los puntos dato se verifica lo siguiente:

$$\bar{C}(d_{ij}) = \begin{bmatrix} C(0) & C(d_{12}) & \dots & C(d_{1m}) \\ & C(0) & \dots & C(d_{2m}) \\ & & \ddots & \\ & \text{simétrica} & & C(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_o^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_o^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_o^2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Para obtener una estimación empírica puntual de la función covarianza se considera un intervalo de distancia h y se efectúa una clasificación de los datos en grupos de amplitud creciente $h, 2h, 3h$, etc.

$$d_k = k * h \quad k = 1, 2, \dots, \quad (72)$$

Para puntos distintos, resulta para cada k (v es l_b sin parte sistemática).

$$\bar{C}(d_{ij}) = C(d_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{ij} v(P_i) \cdot v(P_j) \quad (73)$$

Donde los índices i y j varían en todos los pares para los que se cumple la siguiente condición:

$$d_k - h < |P_i - P_j| < d_k + h \quad k = 1, 2, \dots, \quad (74)$$

Siendo n_k el número de pares (Sevilla (1987) citado de Barzaghi y Sanso (1983)). Para $h=0$ la relación viene dada por la ecuación (75).

$$\bar{C}(0) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m v^2(P_i) = C(0) + \sigma_o^2 \quad (75)$$

En base a los valores de covarianza que se obtienen por cada grupo de amplitud creciente se genera un gráfico y se ajusta con un tipo de función específica (exponencial, Fourier, gaussiana o polinomial) para obtener una función isótropa (Echeverría & Tierra Criollo, 2010). Para determinar si la matriz covarianza ha sido definida positiva debe cumplir la condición definida por la ecuación (76).

$$C(0)^2 - C(d)^2 \geq 0 \quad (76)$$

Machine Learning

Los humanos y otros animales pueden mostrar comportamientos que se etiquetan como inteligentes al aprender de la experiencia. Las partes importantes del aprendizaje animal, según Marsland (2015), son recordar, adaptar y generalizar: reconocer que la última vez que estuvimos en esta situación (vimos estos datos) probamos alguna acción en particular (proporcionamos este resultado) y funcionó (fue correcto), así que lo intentaremos nuevamente, o no funcionó, así que intentaremos algo diferente.

La última palabra, generalizar, se trata de reconocer la similitud entre diferentes situaciones, de que las cosas que se aplican en un lugar se pueden usar en otro. Esto es lo que hace que el aprendizaje sea útil, porque podemos usar nuestro conocimiento en muchos lugares diferentes.

Machine learning (aprendizaje automático), entonces, se trata de hacer que las computadoras modifiquen o adapten sus acciones para que estas acciones se vuelvan más precisas, donde la precisión se mide por qué tan bien las acciones elegidas reflejan las correctas (Marsland, 2015).

La complejidad computacional de los métodos de aprendizaje automático también es un tema de interés, ya que lo que produce son algoritmos. Es particularmente importante porque se podría desear usar algunos de los métodos en conjuntos de datos muy grandes, por lo que los algoritmos que tienen una complejidad polinómica de alto grado en el tamaño del conjunto de datos serán un problema. La complejidad a menudo se divide en dos partes: la complejidad del entrenamiento y la complejidad de aplicar el algoritmo entrenado. (Marsland, 2015).

Redes neuronales artificiales

Las Redes Neuronales Artificiales (RNA) son un método para resolver problemas para trabajos de clasificación, identificación, diagnóstico, optimización o predicción, es decir, son capaces de encontrar patrones de forma inductiva por medio de los algoritmos de aprendizaje a partir de los datos existentes. Puede presentarse la necesidad de aprendizaje en el tiempo de ejecución y de cierta tolerancia a fallos, en estos casos, las RNA se adaptan reajustando constantemente los “pesos” de sus interconexiones (Salas, 2004).

La unidad de una red neuronal artificial es un procesador elemental llamado neurona que posee la capacidad limitada de calcular, en general, una suma ponderada de sus entradas y luego le aplica una función de activación para obtener una señal que será transmitida a la próxima neurona. Estas neuronas artificiales se agrupan en capas o niveles y poseen un alto grado de conectividad entre ellas, conectividad que es ponderada por los pesos. A través de un algoritmo de aprendizaje supervisado o no supervisado, las RNA ajustan su

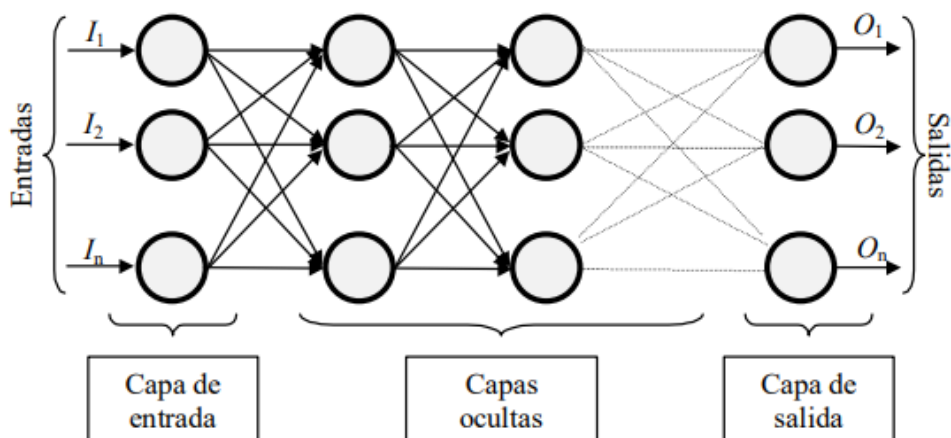
arquitectura y parámetros de manera de poder minimizar alguna función de error que indique el grado de ajuste a los datos y la capacidad de generalización de las RNA. (Salas, 2004, pág. 1)

Elementos que componen una red neuronal.

Una red neuronal artificial está constituida por neuronas interconectadas y arregladas en tres capas, los datos ingresan por la capa de entrada, pasan a través de la capa oculta y salen por la capa de salida, como muestra la Figura 19. La capa oculta puede estar constituida por varias capas (Matich, 2001).

Figura 19.

Ejemplo de una red neuronal conectada



Nota. Tomado de *Redes Neuronales: Conceptos básicos y aplicaciones*, por Matich D.

J., (2001), México, Universidad Tecnológica Nacional.

Es necesario entender cómo las neuronas son utilizadas por una red neuronal. En la Figura 20 se puede observar las similitudes entre una neurona biológica y una neurona artificial, tienen entradas, utilizan pesos y generan salidas.

Figura 20

Comparación entre una neurona biológica (izquierda) y una artificial (derecha)



Nota. Tomado de Redes Neuronales: Conceptos básicos y aplicaciones, por Matich D.

J., (2001), México: Universidad Tecnológica Nacional.

Una neurona es muy pequeña, sin embargo, cuando se combinan un gran número de ellas pueden resolver problemas muy complejos.

Función de entrada.

La neurona trata a muchos valores de entrada como si fueran uno solo; esto recibe el nombre de entrada global. Para solucionar el problema de la forma de combinar estas entradas (in_{i1}, in_{i2}, \dots) dentro de la entrada global (gin_i), se usa la función de entrada, la cual se calcula a partir del vector de entrada (Matich, 2001). La ecuación (77) describe la función de entrada.

$$input_i = (in_{i1} \cdot w_{i1}) * (in_{i2} \cdot w_{i2}) * \dots (in_{in} \cdot w_{in}) \quad (77)$$

donde, * representa al operador apropiado (por ejemplo: máximo, sumatoria, productoria, etc.), n al número de entradas a la neurona N_i y w_i al peso.

“Los valores de entrada se multiplican por los pesos anteriormente ingresados a la neurona, por consiguiente, los pesos que generalmente no están restringidos cambian la medida de influencia que tienen los valores de entrada, es decir, que permiten que un gran valor de entrada tenga solamente una pequeña influencia” (Matich, 2001).

Función de activación.

“Una neurona biológica puede estar activa (excitada) o inactiva (no excitada); es decir, que tiene un estado de activación” (Matich, 2001, pág. 14).

La función de activación calcula el estado de actividad de una neurona transformando la entrada global (menos el umbral, Θ_i) en un valor (estado) de activación, cuyo rango normalmente va de (0 a 1) o de (-1 a 1), esto es así, porque una neurona puede estar totalmente inactiva (0 o -1) o activa (1). La función activación, es una función de la entrada global (gin_i) menos el umbral (Θ_i) (Matich, 2001).

Las funciones más comunes utilizadas en la función de activación son la función lineal (ecuación (81)), función sigmoidea (ecuación (82)) y función tangente hiperbólica (ecuación (83)).

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -1/a \\ a * x & -1/a < x < 1/a \\ 1 & x \geq 1/a \end{cases} \quad \text{con } x = gin_i - \Theta_i, y \ a > 0 \quad (78)$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-gx}} , \quad \text{con } x = gin_i - \Theta_i \quad (79)$$

$$f(x) = \frac{e^{gx} - e^{-gx}}{e^{gx} + e^{-gx}} , \quad \text{con } x = gin_i - \Theta_i \quad (80)$$

Función de salida.

El valor resultante de la función de salida es la salida de la neurona i (out_i), por lo tanto, la función de salida determina qué valor se transfiere a las neuronas vinculadas. Si la función de activación está por debajo de un umbral determinado, ninguna salida se pasa a la neurona subsiguiente. Normalmente, no cualquier valor es permitido como una entrada para una neurona, por lo tanto, los valores de salida están comprendidos en el rango [0, 1] o [-1, 1]. También pueden ser binarios {0, 1} o {-1, 1} (Matich, 2001).

Mecanismos de aprendizaje.

Una red neuronal debe aprender a calcular la salida correcta para cada constelación de entrada en el conjunto de datos, este proceso de aprendizaje se

denomina: proceso de entrenamiento o acondicionamiento. El conjunto de datos sobre el cual este proceso se basa es llamado: conjunto de datos de entrenamiento (Matich, 2001).

La topología de la red y las diferentes funciones de cada neurona (entrada, activación y salida) no pueden cambiar durante el aprendizaje, mientras que los pesos sobre cada una de las conexiones si pueden hacerlo; el aprendizaje de una red neuronal significa: adaptación de los pesos. Se puede afirmar que el proceso de aprendizaje ha terminado, es decir, que la red ha aprendido, cuando los valores de los pesos permanecen estables ($dw_{ij}/dt = 0$) (Matich, 2001).

Un aspecto importante respecto al aprendizaje de las redes neuronales es el conocer cuáles son los criterios que se siguen para cambiar el valor asignado a las conexiones cuando se pretende que la red aprenda una nueva información (Matich, 2001). Hay dos métodos de aprendizaje importantes que pueden distinguirse:

- Aprendizaje supervisado.
- Aprendizaje no supervisado.

Matich (2001) afirma lo siguiente:

Aprendizaje supervisado. El aprendizaje supervisado se caracteriza porque el proceso de aprendizaje se realiza mediante un entrenamiento controlado por un agente externo (supervisor, maestro) que determina la respuesta que debería generar la red a partir de una entrada determinada. El supervisor controla la salida de la red y en caso de que ésta no coincida con la deseada, se procederá a modificar los pesos de las conexiones, con el fin de conseguir que la salida obtenida se aproxime a la deseada.

Aprendizaje no supervisado. Las redes con aprendizaje no supervisado (también conocido como auto supervisado) no requieren influencia externa para ajustar los pesos de las conexiones entre sus neuronas. La red no recibe ninguna información

por parte del entorno que le indique si la salida generada en respuesta a una determinada entrada es o no correcta.

Estas redes deben encontrar las características, regularidades, correlaciones o categorías que se puedan establecer entre los datos que se presenten en su entrada. Existen varias posibilidades en cuanto a la interpretación de la salida de estas redes, que dependen de su estructura y del algoritmo de aprendizaje empleado. (págs. 19-21)

Perceptrón.

El Perceptrón es un modelo de red neuronal diseñado para realizar clasificación de patrones, los parámetros que constituyen las conexiones sinápticas de la red definen superficies discriminantes que sirven para clasificar conjuntos de patrones. El entrenamiento de una red tipo Perceptrón se realiza presentando ejemplos que contienen los diferentes tipos de patrones que se requiera clasificar (Carrión (2013) citado de Basogain (2008)).

Una red de neuronas artificial de tipo Perceptrón está constituida por entradas y neuronas de salida, el número de neuronas se determina dependiendo del tipo de problema que se desea resolver y todas las entradas están conectadas con cada una de las neuronas de salida (Carrión Sánchez, 2013).

Este modelo de red neuronal (monocapa) funciona únicamente para resolver problemas de clasificación en donde las clases son separables linealmente, ya que es capaz de generar únicamente una recta como discriminante y emplea una función lineal. La solución a esta limitante consiste en agregar más capas a la red neuronal para que esta adquiera un carácter no lineal.

Perceptrón multicapa.

Es una red neuronal artificial que resuelve problemas que no son linealmente separables, está formada por múltiples capas de perceptrones simples, lo cual es equivalente a incluir capas ocultas de neuronas dentro de la estructura de la red.

El perceptrón multicapa presenta una capa de entradas que tienen como función transferir la información que ingresa a la red neuronal, las capas ocultas, cuyas neuronas se encargan de dar un tratamiento no lineal a la información que reciben y la capa de salida con neuronas que generan la respuesta de la red para cada entrada recibida. El número de células o neuronas que contienen la capa de salida de la red y la cantidad de entradas de la misma, depende de las particularidades del problema; mientras que el número de neuronas en las capas ocultas se establece durante el entrenamiento y no existe una regla para determinarlo. (Carrión Sánchez, 2013, pág. 61)

En este tipo de red neuronal la información se transfiere de atrás hacia delante (feedforward), cada conexión está definida por la asociación de un peso sináptico y cada neurona está afectada por un umbral (bias) que tiene un valor inicial de 1. La interconexión entre neuronas generalmente se produce entre todas las neuronas de la capa anterior con todas las neuronas de la capa posterior.

Si se designa como x_i a las neuronas de la capa de salida, x_j a las neuronas de la capa oculta (en caso de que exista una sola capa de este tipo), x_k a las entradas de la red, w_{ij} y w_{jk} sus respectivos pesos, y siendo l el número de neuronas de la capa de salida, m el número de neuronas en la capa oculta y n el número de entradas (Carrión Sánchez, 2013), entonces los patrones de entrada en un perceptrón multicapa se propagarán con las activaciones de las neuronas de la capa oculta (ecuación (81)) y las activaciones de las neuronas de la capa de salida (ecuación (82)).

$$a_j = f_2 \left(\sum_{k=1}^n (x_k * w_{jk}) \right) \quad (81)$$

$$a_i = f_1 \left(\sum_{j=1}^m (a_j * w_{ij}) \right) \quad (82)$$

Donde, f_1 y f_2 son las funciones de activación para las neuronas de la capa de salida y las capas ocultas respectivamente.

Según Carrión (2013), en el perceptrón multicapa por lo general se emplean como funciones de transferencia a la función sigmoideal (ecuación (83)) y la función tangente hiperbólica (ecuación (84)).

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (83)$$

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \quad (84)$$

En las redes neuronales monocapa los pesos se ajustan en base a las diferencias de las salidas de la red y las salidas deseadas, a esto se le conoce como regla delta. La regla delta generalizada es una modificación de esta regla para su aplicación en redes neuronales multicapa y consiste en una adaptación del mecanismo de aprendizaje de la regla delta para que esta pueda actualizar los pesos de todas las capas de la red (capas ocultas y capa de salida).

Algoritmos de entrenamiento de una red neuronal artificial.

Durante el entrenamiento, la red neuronal define su capacidad de generalizar las salidas de un determinado problema, para esto ajusta los pesos sinápticos de su estructura conforme se ingresan ejemplos que son la base del aprendizaje, las modificaciones que se realizan sobre los pesos se fundamentan en una regla que determina un algoritmo matemático, la regla delta generalizada es la base para la implementación de algoritmos que permiten el ajuste de los pesos o conexiones sinápticas que se encuentran en la capa de salida y en las capas ocultas de la red (Carrión Sánchez, 2013).

Algoritmo de retro propagación. El algoritmo de retro propagación se basa en la regla delta generalizada y calcula los ajustes para los pesos de las capas ocultas retro propagando los errores que se registran en la capa de salida. El principio de este

algoritmo es la minimización de una función de error respecto a los pesos o parámetros libres de la red (Carrión (2013), citado en Haykin, 2001).

$$\Delta\omega = \frac{\delta E}{\delta\omega} \quad (85)$$

Según Carrión (2013), la función de error usada para el entrenamiento de redes neuronales normalmente es el error medio cuadrático, que para el cálculo del error obtenido para un patrón de entrenamiento de una red neuronal artificial está definida por la ecuación (86).

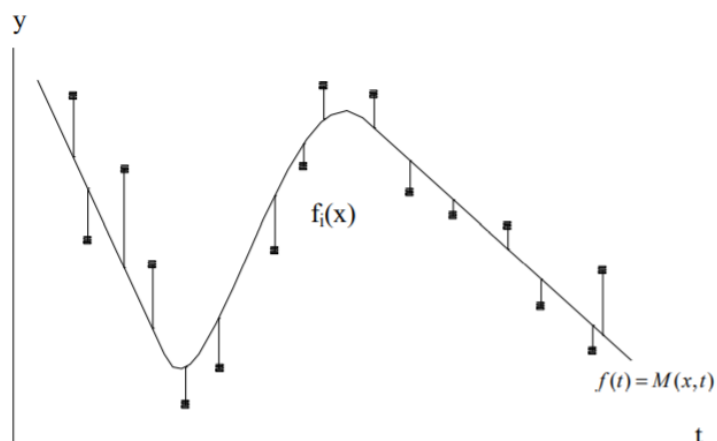
$$e_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (d_i - y_i)^2 \quad (86)$$

En donde, P es el subíndice para los patrones de entrenamiento, e_p es el error de entrenamiento para el patrón p , i es el subíndice para las neuronas de la capa de salida y l es el número de neuronas en la capa de salida, y se calcula por la suma de las diferencias cuadradas de las salidas esperadas (d) y las salidas de la red (y) para un patrón de entrenamiento (p) en las neuronas de la capa de salida.

Métodos para minimizar funciones de error. Según Carrión (2013), los problemas de mínimos cuadrados tienen como objetivo encontrar el mejor ajuste para un conjunto de datos, de tal modo que la suma de los cuadrados de las distancias tomadas en la vertical entre el modelo (curva ajustada) y cada uno de los puntos dato sea la menor posible, como se ilustra en la Figura 21. Las diferencias entre la curva ajustada y cada uno de los datos se denominan residuos.

Figura 21

Ajuste de puntos mediante una función "M"



Nota. Tomado de Generación de una malla de ondulaciones geoidales por el método GPS/nivelación y redes neuronales artificiales a partir de datos dispersos, por Carrión Sánchez J. L., (2013), La Plata: Universidad Nacional de La Plata.

Teniendo m puntos dato de la forma $P(t, y_i)$, donde el subíndice "i" indica el número de punto al que se hace referencia, se deduce la ecuación (87).

$$f_i(x) = y_i - M(x, t_i) \quad (87)$$

Representa la diferencia entre el valor real y el valor estimado por el modelo "M" para la variable "y" en función de la variable "t" y considerando como parámetros del modelo a la variable x (parámetros que definen el modelo).

Existen diversas maneras de resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales, el método de Levenberg – Marquardt consiste en un perfeccionamiento del método de Gauss – Newton que a su vez es una variante del método de Newton. Estos métodos son iterativos, dado un valor inicial x_0 para "x", el método produce una serie de vectores: x_1, x_2 , etc., que se espera converjan para x^* , que es el vector de parámetros "x" que minimiza la suma de los cuadrados de los residuos en el problema de mínimos cuadrados. (Carrión Sánchez, 2013)

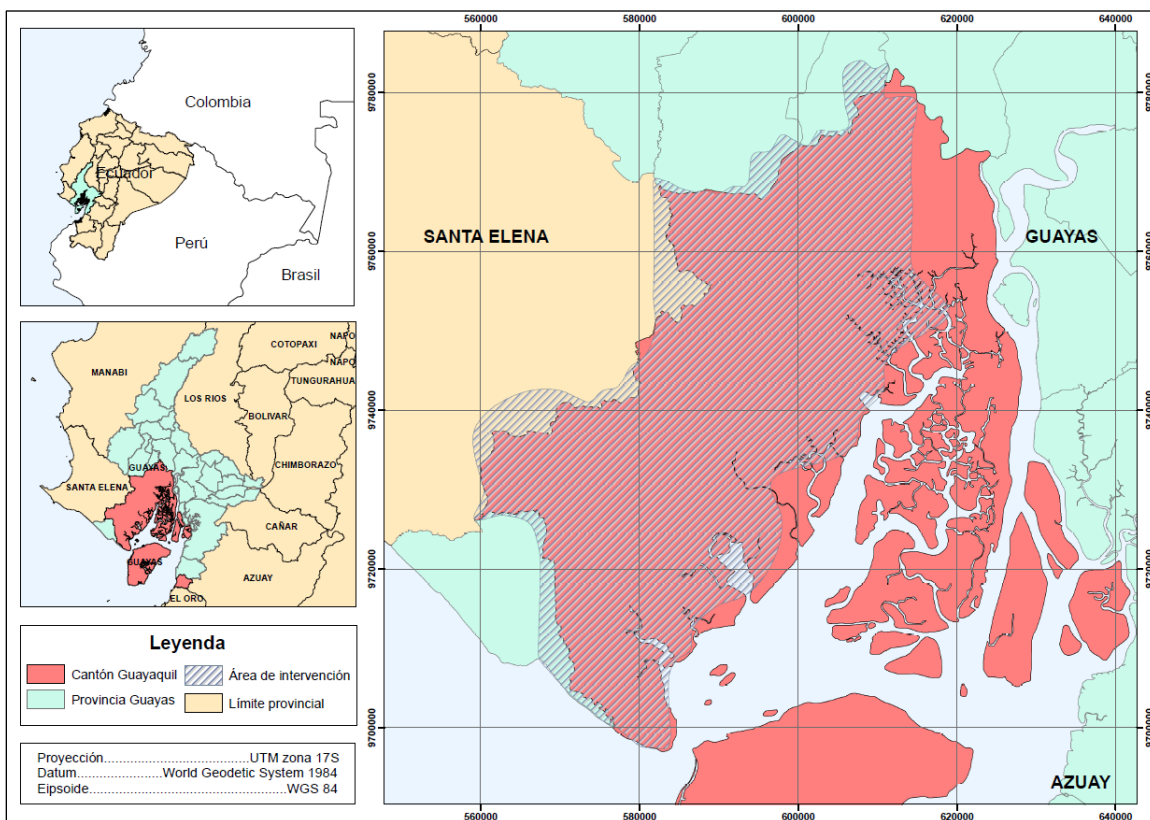
Capítulo III. Metodología

Área de intervención

En la Figura 22 se puede observar el área de estudio que comprende la zona rural del cantón Guayaquil de la provincia del Guayas, Ecuador, con un área aproximada de 230835,056 hectáreas. Las coordenadas están referidas al sistema SIRGAS – WGS84 y su representación en coordenadas planas en UTM zona 17 Sur.

Figura 22

Mapa del área de estudio (zona rural del cantón Guayaquil)



Recopilación de información

La información para el presente estudio se recopiló del denominado Proyecto Guayaquil realizado por el Instituto Geográfico Militar (IGM) en el periodo 2005 – 2006 en la zona rural del cantón Guayaquil, provincia del Guayas, en el que consta control

geodésico suplementario conformado por puntos GPS de precisión y su correspondiente altura sobre el nivel medio del mar.

Se obtuvo una base de datos correspondiente al Proyecto Guayaquil como parte del convenio institucional que mantiene la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE y el Instituto Geográfico Militar. La base de datos consta de los siguientes campos:

- Nombre de punto
- Latitud
- Longitud
- Este
- Norte
- Altura elipsoidal
- Altura nivelada
- Orden de precisión
- Técnica de nivelación

Se realizó un filtrado de puntos y solo se escogieron los puntos obtenidos con nivelación diferencial de segundo orden. Como resultado se obtuvo una base de datos con 332 puntos, de los cuales 298 puntos serán utilizados para la generación de los modelos predictivos, mientras que los 34 puntos restantes (muestra del 10%) serán utilizados para la validación de los modelos generados. Los datos de validación brindarán un estimado sin sesgos de la capacidad de generalización de los modelos predictivos, debido a que no se encuentran involucrados de ninguna forma en el proceso de generación de los modelos.

Datos posicionamiento GPS

El IGM realizó el levantamiento de los puntos con el método estático diferencial, con receptores doble frecuencia con el objetivo de obtener precisiones horizontales

relativas de 5 mm + 1ppm y precisiones verticales relativas de 10 mm + 2ppm, para las coordenadas de latitud y longitud, y altura elipsoidal, respectivamente.

Los datos de GPS de precisión se encuentran en el sistema geodésico de referencia SIRGAS95, con el elipsoide GRS80 y su representación en coordenadas planas se encuentra en la proyección UTM zona 17S (Instituto Geográfico Militar, 2006).

Datos altura nivelada

El IGM determinó las alturas sobre el nivel medio del mar a partir de placas del control básico existente, mediante el método de nivelación geométrica de segundo orden, con tolerancia de $\pm 8,4 \text{ mm } \sqrt{k}$ o con nivelación trigonométrica con recíprocas con tolerancia de $\pm 3,0 \text{ cm } \sqrt{k}$, siendo k la distancia de arrastre de nivelación en kilómetros (Instituto Geográfico Militar, 2006).

Los datos de altura sobre el nivel medio del mar están referidos al datum vertical oficial del país, el mareógrafo de La Libertad, ubicado en la provincia de Santa Elena, que representa el cero al nivel medio del mar en Ecuador.

Generación de una malla de ondulaciones geoidales

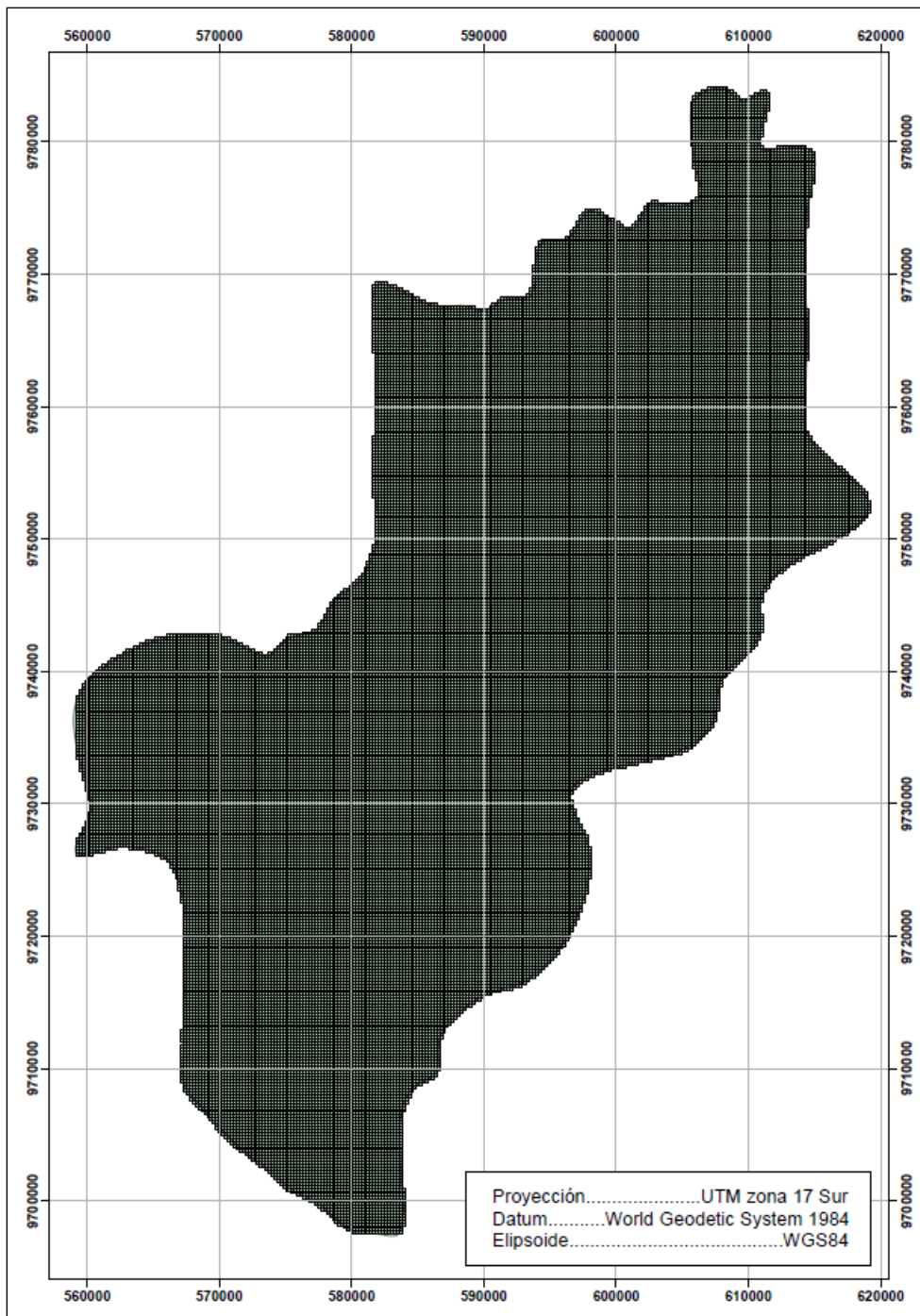
Es posible calcular valores estimados de ondulación geoidal sobre una malla de puntos equidistantes dentro del área de interés (Figura 23), con el fin de generar los modelos predictivos.

Para el cálculo del tamaño de cuadrícula que se requiere para formar la malla de ondulaciones geoidales, se aplicó la ecuación (6) considerando un área de 2308350561,14 m² y 298 puntos de ondulación geoidal muestreados en la zona de estudio. Se obtuvo un tamaño de cuadrícula de aproximadamente 220 metros.

Utilizando un sistema de información geográfica (SIG) se generó una malla en el área de estudio con un total de 48393 puntos con una distancia de 220 metros entre ellos.

Figura 23

Malla de puntos sobre el área de estudio



Método de mínimos cuadrados colocación

Selección del modelo matemático

En primera instancia se realizó la selección del modelo matemático que mejor se ajuste a los 298 datos de GPS/nivelación de la zona de estudio. Para el caso de modelos geoidales de áreas de escasa extensión, Fiedler (1992), Collier y Croft (1997) proponen cuatro modelos matemáticos, los cuales fueron tomados en cuenta para el presente estudio.

$$\text{Modelo 1} \quad Z_i = aE_i + bN_i + c \quad (88)$$

$$\text{Modelo 2} \quad Z_i = aE_i + bN_i + cE_iN_i + d \quad (89)$$

$$\text{Modelo 3} \quad Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e \quad (90)$$

$$\text{Modelo 4} \quad Z_i = aE_i + bN_i + cE_iN_i + dE_i^2 + eN_i^2 + f \quad (91)$$

Donde:

Z_i es la ondulación geoidal en el punto i

E_i, N_i son las coordenadas UTM del punto i

a, b, c, d, f son los parámetros a ajustar del modelo matemático.

Mediante la herramienta *cftool* de MatLab R2015b se grafican los modelos matemáticos para determinar cuál es el que mejor se ajusta a los 298 datos de muestra (Figura 24, Figura 25, Figura 26, Figura 27).

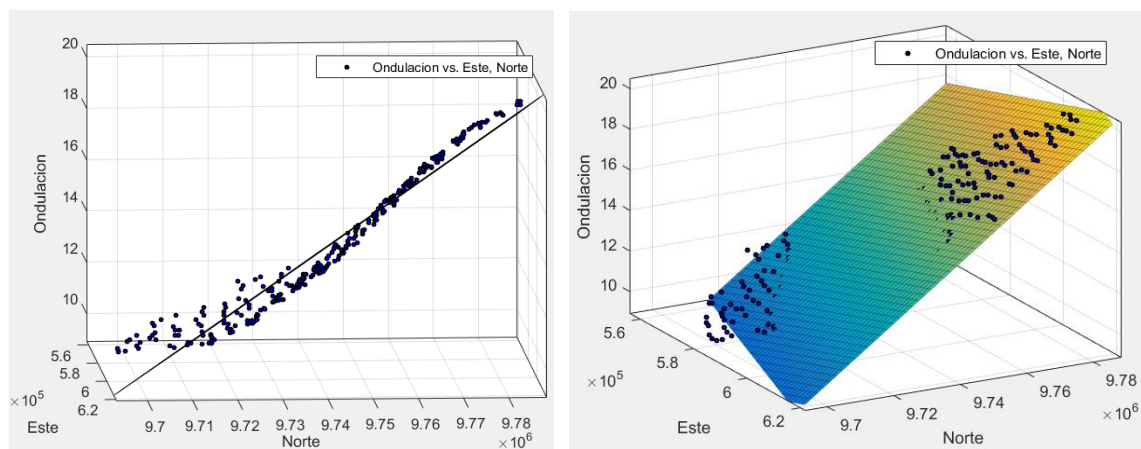
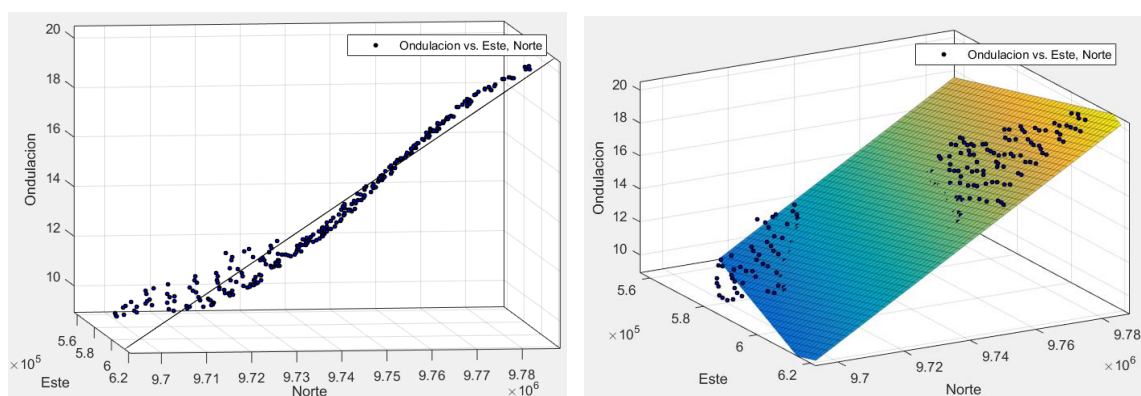
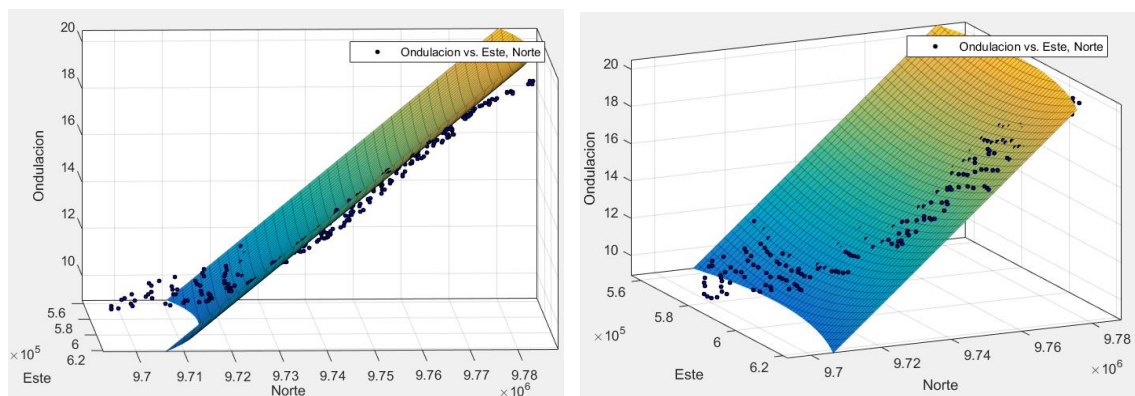
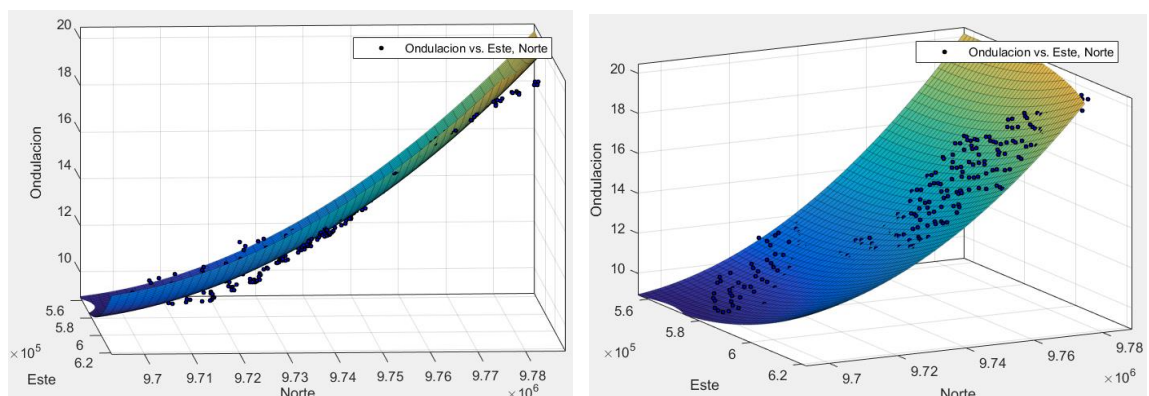
Figura 24*Gráfica del modelo matemático 1***Figura 25***Gráfica del modelo matemático 2***Figura 26***Gráfica del modelo matemático 3*

Figura 27

Gráfica del modelo matemático 4



Para la elección del modelo matemático se consideró el valor de la raíz del error cuadrático medio (RMSE), el coeficiente de determinación (R^2) y el acondicionamiento de la ecuación a los 298 puntos de observación obtenidos de la herramienta *cftool* de MatLab R2015b, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Medidas estadísticas de cada modelo matemático

Modelo	RMSE	R^2	Observación
Modelo 1	0,6358	0,9566	-
Modelo 2	0,6370	0,9566	-
Modelo 3	0,9492	0,9040	-
Modelo 4	0,3536	0,9867	La ecuación está mal condicionada.

El modelo 4 obtuvo los mejores resultados en cuanto a RMSE y coeficiente de determinación, sin embargo, la ecuación está mal condicionada a los datos a diferencia de los demás modelos. El modelo 3 obtuvo los valores menos favorables en cuanto a RMSE y R^2 y los dos modelos restantes (modelo 1 y 2) presentaron valores similares de

RMSE y R^2 , por consiguiente, se eligió el modelo 1 ya que este tiene un menor número de parámetros dentro del modelo matemático.

Para presente estudio se utilizará el modelo matemático 1 (ecuación (88)) como modelo funcional y se considera el modelo matemático que mejor se ajusta a los 298 datos de ondulación geoidal de la zona de estudio.

Se realizó el ajuste de los parámetros del modelo matemático elegido mediante el modelo paramétrico (modelo de observaciones indirectas) de mínimos cuadrados en base a la ecuación (8), que no es más que una forma explícita en L del modelo general de mínimos cuadrados.

Para los parámetros aproximados (X_o) se toman los valores que resultaron de la gráfica con la herramienta *cftool* de MatLab R2015b.

La matriz de coeficientes (A) viene dada por las derivadas de las ecuaciones de los modelos en función de los parámetros, siendo las dimensiones de esta matriz de (cxn) , siendo c el número de condiciones (ecuaciones del modelo) y n el número de parámetros a ajustar. En este caso, las dimensiones de la matriz A son 298×3 , como muestra la ecuación (92).

$$Z_i = aE_i + bN_i + c$$

$$A = \begin{bmatrix} E_1 & N_1 & 1 \\ E_2 & N_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{298} & N_{298} & 1 \end{bmatrix} \quad (92)$$

La matriz de pesos (P) viene dada por la ecuación (93).

$$P = \hat{\sigma}_o^2 I = \begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & P_m \end{bmatrix} \quad (93)$$

Siendo I la matriz identidad de dimensión $(m \times m)$ y $\hat{\sigma}_o^2$ la varianza posteriori, que en el inicio del ajuste toma el valor de 1 y después es distinto.

Aplicando la ecuación (35) se obtuvo el vector de parámetros incógnita (x), para finalmente, y en base a la (16), obtener los parámetros ajustados (X). Los parámetros ajustados del modelo 1 se reflejan en la Tabla 2.

Tabla 2

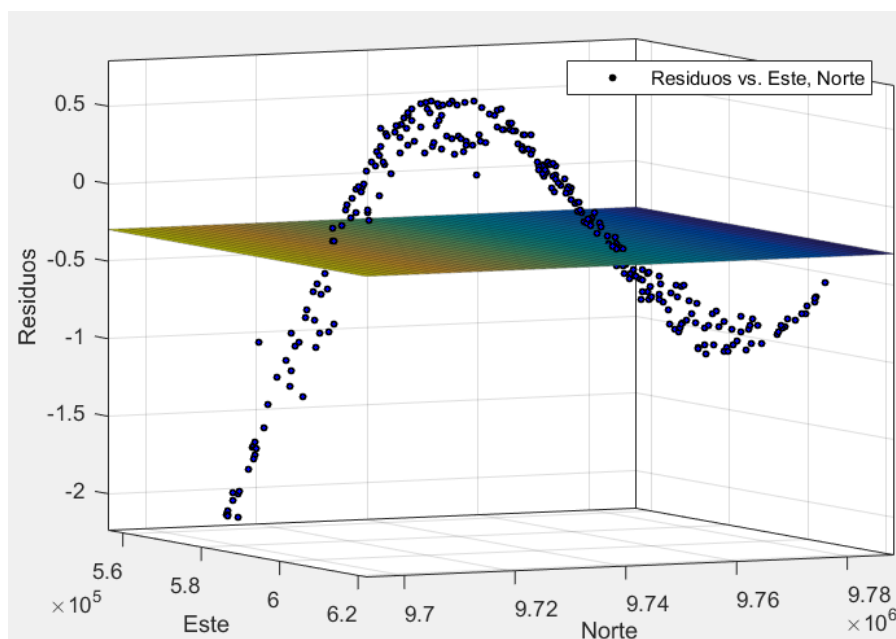
Parámetros ajustados del modelo matemático 1

Parámetro	Valor (m)
a	4,84711E-05
b	0,000121332
c	-1197,01289

Como resultado del ajuste se obtienen los errores residuales de las observaciones, como se observa en la Figura 28, estos residuos tienen un patrón no aleatorio que indica que la parte determinista del modelo no está capturando alguna información predictiva que se está filtrando hacia los residuos.

Figura 28

Gráfico de los errores residuales del ajuste paramétrico del modelo funcional



Cálculo de la función covarianza empírica de la señal

Para obtener la covarianza empírica de la señal se supone la isotropía de la variable ondulación geoidal de las 298 muestras del área de estudio, por lo tanto, se justifica calcular la función covarianza promedio, el cual se puede obtener mediante un promedio ponderado de los valores de covarianza para varios valores de distancia (h).

La determinación del valor de h es importante debido a que puede afectar la función covarianza resultante. Los datos del estudio están presentes en una distribución espacialmente irregular, por lo tanto, se aplicará el criterio de Johnston et al. (2001) quienes indican que el número aproximado de intervalos es 12 y una distancia promedio h determinado por la ecuación (94).

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{A}{n}} \quad (94)$$

Donde A es el área de interés (2308350561,14 m²) y n el número de puntos medidos (298 puntos). Se obtuvo una distancia promedio de aproximadamente 2800 metros, el cual es un punto de partida para obtener un valor donde el número de pares tenga mayor representatividad para todos los intervalos (Luna Ludeña, 2017). Como criterio de selección se utiliza la desviación estándar que determina el número de pares que tenga menor dispersión, siendo el valor $h=3300$ metros el que presenta una uniformidad mayor en el número de pares para cada grupo de amplitud creciente. La Tabla 3 muestra el número de pares de cada intervalo para este valor de h .

Tabla 3

Número de pares para los intervalos de $h=3300$ m

Intervalos	Número de pares
0 - h	774
h - 2h	3094

Intervalos	Número de pares
2h – 3h	4292
3h – 4h	5616
4h – 5h	6408
5h – 6h	6798
6h – 7h	7026
7h – 8h	6908
8h – 9h	6392
9h – 10h	6114
> 10h	5320

Se considera un incremento de distancia (h) de 3300 metros y, con ayuda de la ecuación (74), se efectuó una clasificación de los datos en 11 grupos de amplitud creciente, como lo muestra la Tabla 4.

Tabla 4

Límites de intervalos de distancias esféricas

h_k	Valor de h_k (m)	Intervalos (m)
h_1	1650	0 - 3300
h_2	4950	3300 - 6600
h_3	8250	6600 - 9900
h_4	11550	9900 - 13200
h_5	14850	13200 - 16500
h_6	18150	16500 - 19800
h_7	21450	19800 - 23100
h_8	24750	23100 - 26400

h_k	Valor de h_k (m)	Intervalos (m)
h_9	28050	26400 - 29700
h_{10}	31350	29700 - 33000
h_{11}	34650	> 33000

Aplicando las ecuaciones (73) y (75) se obtuvo un valor de covarianza para cada grupo de amplitud creciente y para los valores de $h(0)$.

Tabla 5

Covarianzas empíricas calculadas para los 298 datos de ondulación geoidal del área de estudio

h_k	Valor de h_k (m)	Covarianza empírica (m)
h_0	0	0,40021
h_1	1650	0,37230
h_2	4950	0,32244
h_3	8250	0,25612
h_4	11550	0,21603
h_5	14850	0,15504
h_6	18150	0,08497
h_7	21450	0,03856
h_8	24750	-0,02324
h_9	28050	-0,08895
h_{10}	31350	-0,15419
h_{11}	34650	-0,21307

Con los valores de covarianza para cada valor de h se genera un gráfico y se ajusta con un tipo de función específica (exponencial, gaussiana o polinomial) para

obtener una función isotrópica (Echeverría & Tierra Criollo, 2010). Los gráficos y estadísticos se generaron mediante la herramienta *cftool* de MatLab R2015b, como se muestra en la Figura 29, Figura 30 y Figura 31.

Figura 29

Ajuste de la covarianza empírica con el modelo exponencial

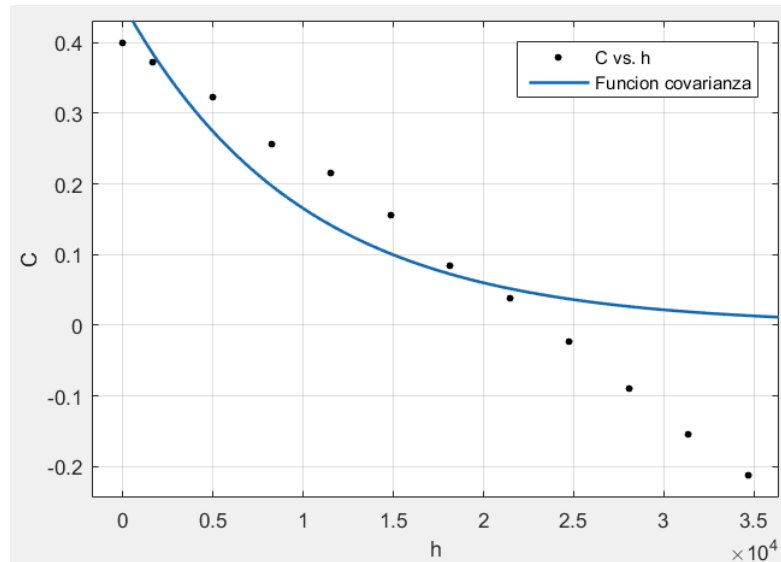


Figura 30

Ajuste de la covarianza empírica con el modelo gaussiano

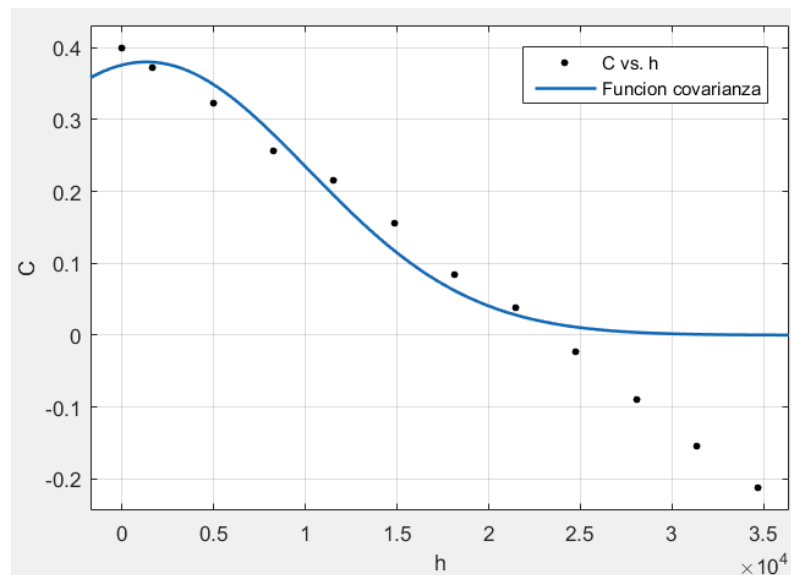
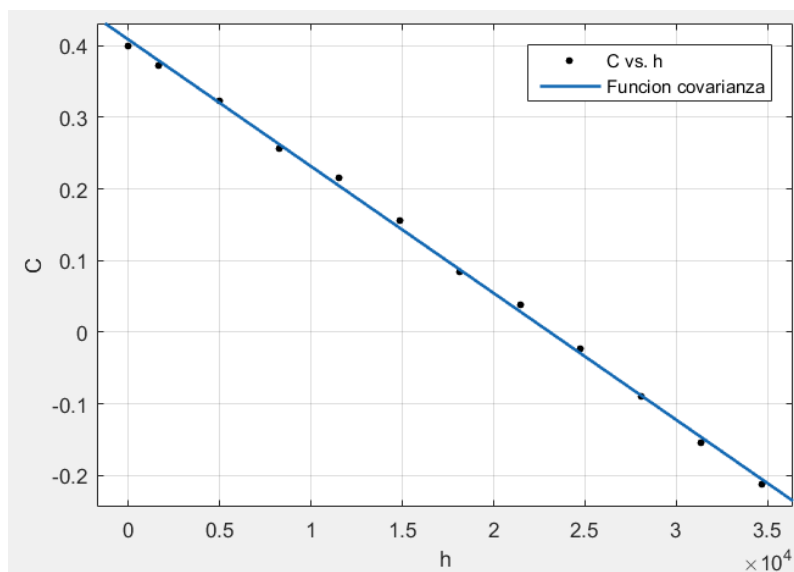


Figura 31

Ajuste de la covarianza empírica con el modelo polinomial de orden 1



Después de la comparación de los 3 modelos matemáticos se determinó que el modelo de ajuste polinomial de orden 1 presenta un gráfico representativo y un menor RMSE respecto a los datos de covarianza empírica. Posteriormente se realizó un ajuste mediante el método paramétrico de mínimos cuadrados del modelo matemático escogido, los resultados del ajuste se reflejan en la Tabla 6.

Tabla 6

Resultados del ajuste paramétrico del modelo matemático seleccionado para la función covarianza de la señal.

Estadísticos	Valor
Grados de libertad $S = (m-n)$	$10 = (12-2)$
Varianza posteriori $\hat{\sigma}_o^2$	0,00007
Residual máximo	0,00834
Media de los residuales	0,00000
Residual mínimo	-0,01220

Estadísticos	Valor
Desviación (σ)	0,00775
Sigma (3σ)	0,02325

Carácter positivo de la función covarianza

Se realizó la comprobación del carácter positivo de la función covarianza aplicando la ecuación (76). Se considera positivo si la diferencia entre la covarianza para distancias de 0 metros y la covarianza para las distancias de los intervalos crecientes es mayor o igual a cero, en la Tabla 7 se observa que todas las diferencias son mayores que cero.

Tabla 7

Carácter positivo de la función covarianza

$C(0)^2 - C(d_k)^2$	Valor (m)
$C(0)^2 - C(d_{k1})^2$	0,02156
$C(0)^2 - C(d_{k2})^2$	0,05621
$C(0)^2 - C(d_{k3})^2$	0,09457
$C(0)^2 - C(d_{k4})^2$	0,11350
$C(0)^2 - C(d_{k5})^2$	0,13613
$C(0)^2 - C(d_{k6})^2$	0,15295
$C(0)^2 - C(d_{k7})^2$	0,15868
$C(0)^2 - C(d_{k8})^2$	0,15963
$C(0)^2 - C(d_{k9})^2$	0,15226
$C(0)^2 - C(d_{k10})^2$	0,13640
$C(0)^2 - C(d_{k11})^2$	0,11477

Cálculo de la función covarianza del ruido

Para ensamblar la matriz de covarianza de ruido (Crr) se aplica la ecuación (69), se tiene una matriz de ceros de dimensiones 298×298 cuya diagonal posee los valores de las precisiones de las medidas de observación. Sin embargo, esas precisiones no constan en la base de datos entregadas por el IGM, por lo tanto, se aplicó el método de prueba-error con diferentes valores de varianza y se determinó que el valor de 0,1 es el que genera menor RMSE en la predicción.

Filtrado de las observaciones

Mediante la ecuación (62) se calculó los valores estimados de las señales de las observaciones (s) para, posteriormente, realizar el filtrado de los m puntos originales de observación ($l_{b\ mcc}$) aplicando la ecuación (95) y utilizando la matriz de los valores de ondulación geoidal aproximados (L_o), la matriz de diseño del ajuste paramétrico inicial (A) y el vector de corrección de los parámetros de ajuste (x).

$$l_{b\ mcc} = L_o + Ax - s \quad (95)$$

Ajuste del modelo matemático por mínimos cuadrados colocación

Se calculó el nuevo vector de constantes de observación (t_{mcc}) mediante la ecuación (52), utilizando la matriz de valores aproximados de ondulación geoidal (L_o) y el vector de las observaciones filtradas ($l_{b\ mcc}$) calculadas en el apartado anterior.

Posteriormente se calculó la nueva matriz de ajuste de parámetros (x_{mcc}) mediante la ecuación (96) que se basa en la ecuación general de colocación por mínimos cuadrados de Moritz (1980) (ecuación (61)) y demostrada y analizada por Sevilla (1987). En esta ecuación se utilizaron la matriz de diseño del ajuste paramétrico inicial (A), la matriz de covarianza de las observaciones (\bar{C}) y el vector de constantes de observación (t_{mcc}), calculadas anteriormente.

$$x_{mcc} = (A^T \bar{C}^{-1} A)^{-1} A^T \bar{C}^{-1} t_{mcc} \quad (96)$$

Utilizando el vector de constantes de observación (t_{mcc}) y el vector de ajuste de parámetros (x_{mcc}), se realizó el ajuste paramétrico con colocación empleando la matriz de covarianza de las observaciones (\bar{C}) como matriz de pesos (P). En la Tabla 8 se reflejan los estadísticos obtenidos del ajuste por mínimos cuadrados colocación y en la Tabla 9 se muestran los valores de los parámetros ajustados por mínimos cuadrados colocación.

Tabla 8

Estadísticos del ajuste por mínimos cuadrados colocación

Estadísticos	Valor (m)
Grados de libertad $S = (m-n)$	294 (298-4)
Varianza a posteriori ($\hat{\sigma}_o^2$)	2,15845
Residual máximo	2,33696
Media de los residuales	1,25247
Residual mínimo	-0,01277
Desviación (σ)	0,75496
Sigma (3σ)	2,26487

Tabla 9

Parámetros ajustados con mínimos cuadrados colocación

Parámetros	Valor (m)
a	1,7898E-05
b	9,4990E-05
c	-919,49699

Predicción de puntos de ondulación geoidal

Para realizar la predicción de valores de ondulación geoidal en nuevos puntos dentro del área de estudio, en primera instancia, se calcula la matriz de distancias entre los nuevos puntos y los 298 puntos de ajuste, por lo tanto, se obtiene una matriz de dimensiones (kxm) .

Posteriormente, se calcula la matriz de covarianza de los nuevos puntos con respecto a los 298 puntos de ajuste (C_{zs}), mediante la aplicación de la función covarianza (modelo matemático polinomial de 1er grado) previamente ajustada.

Finalmente, para la predicción de la ondulación geoidal en nuevos puntos se utiliza los valores de la señal z , obtenidos a partir de la ecuación (63), y los valores de los parámetros ajustados mediante mínimos cuadrados colocación (x_{mmc}), aplicando la ecuación (97).

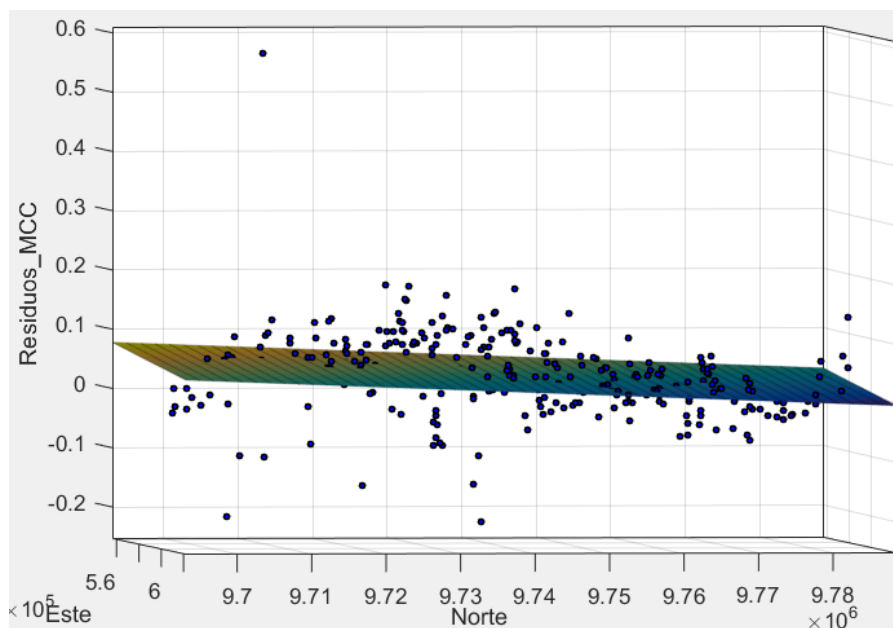
$$l_z = L_{oz} - D x_{mmc} - z \quad (97)$$

Donde, D es la matriz de coeficientes correspondientes a los nuevos puntos, de dimensiones kxn y L_{oz} el vector de observaciones aproximadas en los puntos de predicción obtenida a partir de la aplicación del modelo matemático a ajustar por mínimos cuadrados colocación.

Se realizó la predicción de los 298 puntos de ondulación geoidal que intervinieron en la generación del modelo predictivo y se obtuvo los residuos (errores) de las predicciones como se muestra en la Figura 32. Los residuos caen en un patrón simétrico y tienen una dispersión constante, en contraste con los errores residuales producto del ajuste antes de aplicar mínimos cuadrados colocación (Figura 28). Sin embargo, en la gráfica se observa un valor atípico que corresponde al punto N° 29.

Figura 32

Errores residuales de la predicción de 298 puntos por mínimos cuadrados colocación



Todo el proceso de generación de matrices y ajuste de modelos se realizó con ayuda del programa MatLab R2015b cuyo script se encuentra en el Anexo 1 del presente trabajo.

Método redes neuronales artificiales

Definición de los subconjuntos de entrenamiento

Para realizar el entrenamiento de la red neuronal artificial se definieron tres subconjuntos del total de datos disponibles, un conjunto de datos destinados para el entrenamiento, un segundo conjunto de validación y un tercer conjunto de datos de test.

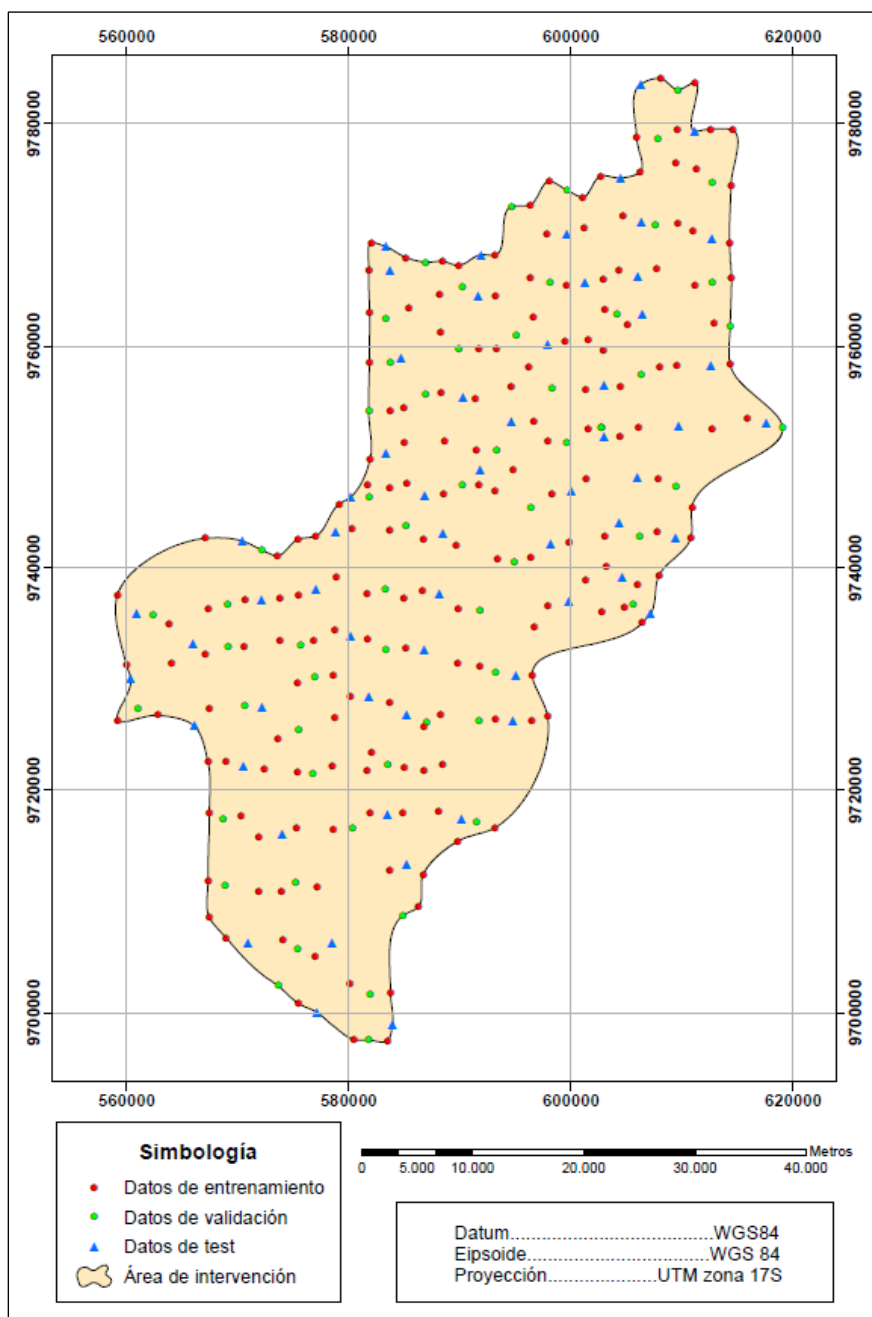
Marsland (2015) asegura que la proporción entre datos de entrenamiento, validación y test depende netamente del investigador, sin embargo, es típico utilizar la proporción 50:25:25 si se tiene numerosos datos y 60:20:20 si no se tiene muchos datos.

Adoptando la proporción 60:20:20 y teniendo en cuenta que el algoritmo necesitará una cantidad razonable de datos de los que aprender, se dividieron a los 298

puntos muestreados de la siguiente manera: 178 se tomaron en cuenta para el entrenamiento de la red neuronal artificial propiamente dicho, 60 puntos como conjunto de validación y 60 puntos en el conjunto de test (Figura 33).

Figura 33

Puntos GPS/nivelación para el subconjunto de entrenamiento, validación y test de la RNA

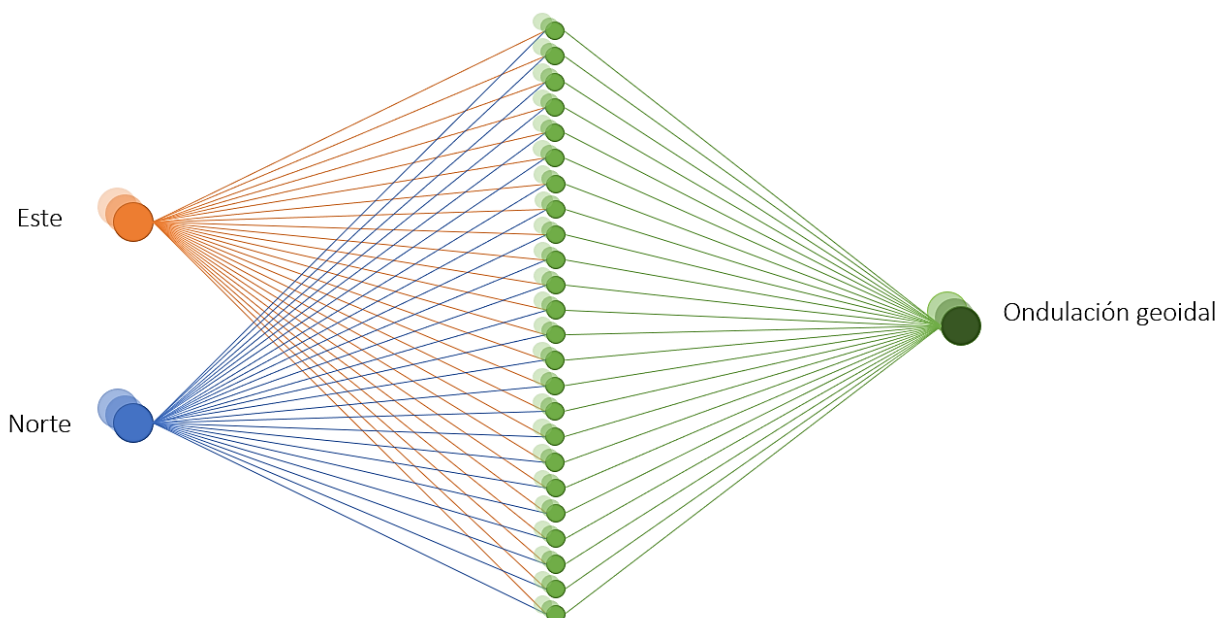


Arquitectura y entrenamiento de la red neuronal artificial

Según José Carrión (2013), el proceso de aprendizaje de la red neuronal se realiza en base al método prueba-error que permite establecer la mejor arquitectura para la red neuronal en función de los errores que genera la misma; se realiza modificaciones en la arquitectura de la red y en los parámetros de entrenamiento hasta que se minimizan los errores que genera la red para los datos de validación y test, experimentando con variaciones en el número de neuronas de la capa oculta y de las funciones de transferencia. Los parámetros de entrenamiento que pueden variar son el número de épocas, cantidad máxima de iteraciones en el entrenamiento, meta (establece el valor que se desea alcanzar en los errores que genera la RNA) y el tiempo de entrenamiento (lapso máximo en el que se realizará el proceso iterativo).

Se estableció, luego del procedimiento de prueba – error, una arquitectura de red de tres capas interconectadas completamente y con 26 neuronas en la capa oculta (Figura 34); el algoritmo de aprendizaje usado fue el de Levenberg – Marquardt. Se definió una función de transferencia tangente sigmoideal para la capa oculta y una función de transferencia lineal para la capa de salida, se fijó un número máximo de 1000 épocas, un tiempo de entrenamiento ilimitado y como meta el valor de cero. La función de error a minimizar por medio del algoritmo de entrenamiento fue el error medio cuadrático (MSE).

Las entradas que se utilizaron para el entrenamiento de la red neuronal artificial fueron las coordenadas Este y Norte de los puntos, mientras que las salidas fueron las ondulaciones geoidales de los mismos.

Figura 34*Diseño de la red neuronal artificial*

Las entradas correspondientes a los datos de entrenamiento, validación y test fueron sometidas a una normalización con media cero y desviación estándar uno (Carrión Sánchez, 2013), con el objetivo de re escalar sus valores numéricos y lograr de esta forma que todas las variables que se incluyen en el problema estén representadas por un rango de valores con una distribución homogénea. La normalización de los datos para el entrenamiento de la RNA se realiza mediante la ecuación (98).

$$y = (x - \bar{x}) * \left(\frac{1}{\sigma x}\right) \quad (98)$$

Donde x son los valores sin normalizar e y son los valores normalizados.

El entrenamiento de la red neuronal artificial se realizó en la plataforma MatLab R2015b con el fin de automatizar el proceso iterativo de ajuste de bias y pesos sinápticos (Anexo 2). El proceso iterativo finaliza cuando el error medio cuadrático que se genera para los datos de validación interrumpe su decrecimiento en seis iteraciones consecutivas (validation checks) (Carrión Sánchez, 2013), estos errores se calculan

para cada conjunto que interviene en el aprendizaje de la red (entrenamiento, validación y test) y después de cada iteración. El aprendizaje óptimo de la red neuronal artificial se consiguió en 12 iteraciones, en la Tabla 10 se detalla los errores cuadráticos medios calculados durante las 12 iteraciones del proceso de aprendizaje de la red.

Tabla 10

Errores medios cuadráticos obtenidos durante las 12 iteraciones para los conjuntos de entrenamiento, validación y test de la RNA

Iteración	Entrenamiento (MSE)	Validación (MSE)	Test (MSE)
0	11,09440	10,88289	10,92689
1	0,01180	0,01555	0,01159
2	0,00219	0,00388	0,00227
3	0,00056	0,00200	0,00063
4	0,00028	0,00151	0,00050
5	0,00024	0,00149	0,00045
6	0,00022	0,00149	0,00042
7	0,00022	0,00149	0,00040
8	0,00021	0,00149	0,00038
9	0,00020	0,00150	0,00037
10	0,00020	0,00152	0,00036
11	0,00019	0,00151	0,00034
12	0,00017	0,00155	0,00033

En la Tabla 11 se muestran los valores del gradiente para la función de error en cada iteración que se establece durante el entrenamiento.

Tabla 11

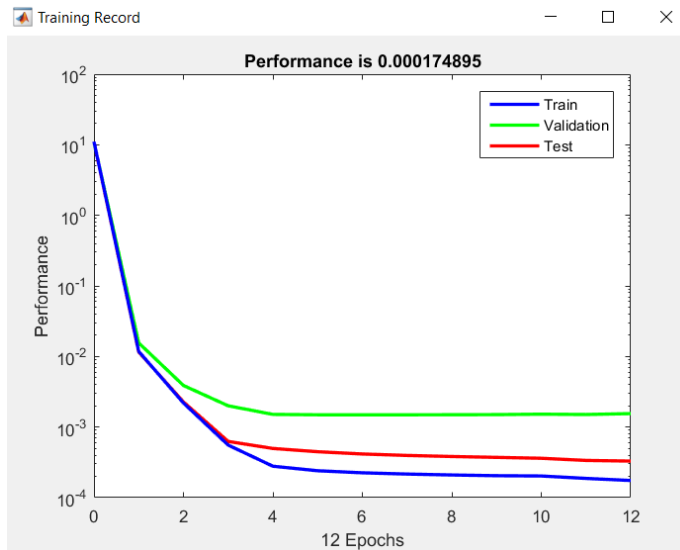
Gradientes de la función de error para cada una de las iteraciones en el entrenamiento de la RNA

Iteración	Gradiente
0	17,03449
1	0,23612
2	0,11585
3	0,02950
4	0,00450
5	0,00160
6	0,00070
7	0,00047
8	0,00031
9	0,00024
10	0,00558
11	0,01250
12	0,00298

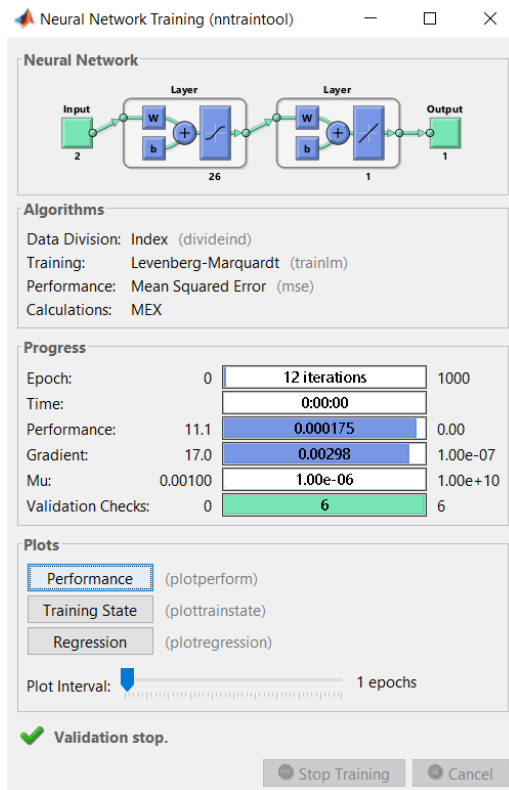
En la iteración número 6 se logró el mejor desempeño de la RNA con un valor del error medio cuadrático (MSE) calculado sobre valores normalizados de 0,0014904 para el conjunto de validación, 0,00022468 para los datos de entrenamiento y 0,00041514 en los datos de test. En la Figura 35 se observa como los errores en los subconjuntos de entrenamiento, validación y test disminuyen conforme avanza el proceso iterativo y en la Figura 36 se observan los parámetros implementados en el entrenamiento de la RNA.

Figura 35

Minimización de errores en los subconjuntos de entrenamiento, validación y test para la RNA

**Figura 36**

Parámetros de entrenamiento de la RNA



Una vez realizado el entrenamiento de la red neuronal artificial se obtuvieron los pesos sinápticos tanto entre la capa de entrada y la capa oculta (Tabla 12), como entre la capa oculta y la capa de salida (Tabla 13); y las bias de la capa oculta (Tabla 14) y de salida (Tabla 15).

Tabla 12

Pesos sinápticos entre la capa de entrada y la capa oculta de la RNA

Neuronas de la capa oculta	Neuronas de la capa de entrada	
	1	2
1	1,64381	2,69001
2	-1,61528	2,73910
3	-2,81125	-1,68493
4	-1,17774	-2,96301
5	-1,65918	3,38119
6	1,39116	3,18914
7	2,75060	2,08047
8	-2,50581	2,26625
9	0,77454	2,23395
10	-3,18789	-1,09186
11	1,66771	1,78969
12	1,83357	-1,44303
13	-2,96634	-1,49963
14	2,53418	1,46246
15	-3,32330	-0,42292
16	2,20766	-1,59558
17	3,01537	1,31113

Neuronas de la capa oculta	Neuronas de la capa de entrada	
	1	2
18	0,94475	3,58419
19	2,94955	0,42752
20	3,40127	0,41401
21	2,56784	1,47047
22	-3,21692	0,84925
23	-2,01788	-3,06963
24	-2,77171	1,84773
25	-2,32864	2,45167
26	-3,11663	-1,39048

Tabla 13

Pesos sinápticos entre la capa oculta y la capa de salida de la RNA

Neuronas de la capa oculta	Neuronas de la capa de salida
	1
1	0,15715
2	-0,23249
3	-0,04570
4	-0,18647
5	-0,06465
6	0,19347
7	0,09044
8	0,09774
9	0,22385

Neuronas de la capa oculta	Neuronas de la capa de salida
	1
10	0,02305
11	0,26584
12	-0,14127
13	0,51229
14	0,72397
15	0,08994
16	-0,10187
17	0,16326
18	0,14946
19	0,40602
20	-0,34997
21	0,03375
22	0,11599
23	0,00223
24	0,18523
25	-0,36207
26	-0,01559

Tabla 14

Bias para la capa oculta de la RNA

Neuronas de la capa oculta	Bias
1	-6,67613
2	7,01906

Neuronas de la capa oculta	Bias
3	5,59316
4	4,89821
5	4,94520
6	-3,65556
7	-3,44811
8	3,24090
9	-0,94358
10	1,35037
11	-0,93116
12	-0,61827
13	-0,36358
14	0,41332
15	-1,47115
16	1,31989
17	2,37540
18	2,45140
19	3,48784
20	3,94755
21	4,96192
22	-4,85294
23	-5,76801
24	-5,86466
25	-6,36854
26	-7,40155

Tabla 15*Bias para la capa de salida de la RNA*

Neuronas de la capa de salida	Bias
1	0,50753

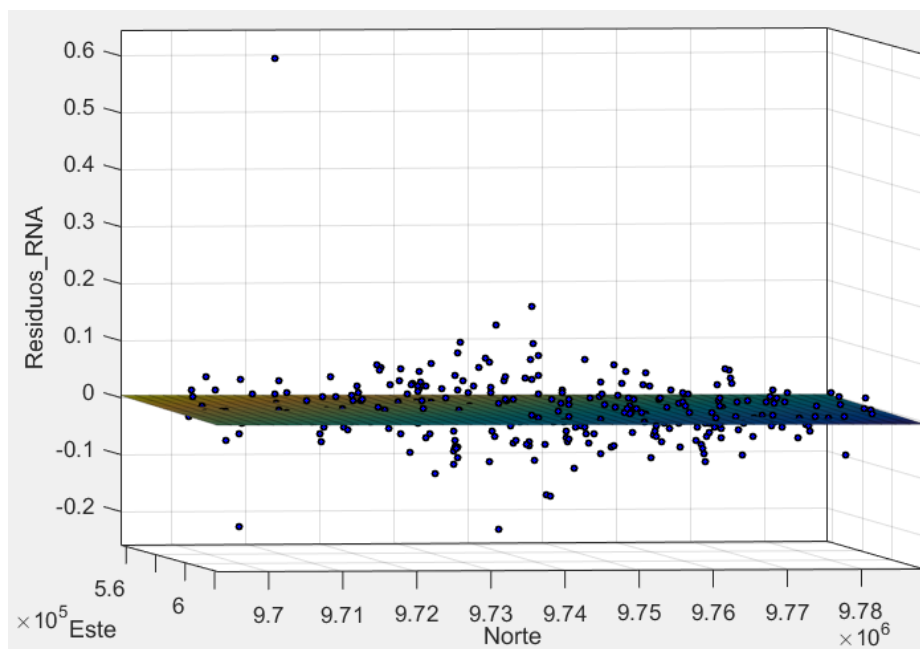
Los pesos sinápticos y las bias obtenidas del entrenamiento de la RNA pueden ser empleados para realizar la estimación de ondulación geoidal en puntos nuevos dentro del área de estudio.

“Los datos del conjunto de entrenamiento ingresan iterativamente a la RNA durante el entrenamiento mientras la modificación en los pesos sinápticos repercute en una reducción de los errores que genera la misma para los datos del conjunto de validación” (Carrión Sánchez, 2013), por esta razón se considera que los datos de validación participan en el aprendizaje y no son un indicador absoluto de la capacidad de generalización de la RNA.

Con los pesos sinápticos y bias obtenidos se realizó la predicción de los 298 puntos de ondulación geoidal que intervienen en la generación del modelo predictivo y se obtuvo los residuos (errores) de las predicciones, como se muestra en la Figura 37 los residuos caen en un patrón simétrico y tienen una dispersión constante, sin embargo, en la gráfica se observa un valor atípico que corresponde al punto N° 29 y es el mismo punto que tiene un valor alto de residuo aplicando el método de Mínimos Cuadrados Colocación como se demuestra en la sección Predicción de puntos de ondulación geoidal.

Figura 37

Residuos de la predicción de 298 datos con RNA



Capítulo IV. Resultados y Discusión

Discusión de resultados

En los residuos de la predicción de ambos métodos, MCC y RNA, se observó un valor atípico, es decir, un valor numéricamente distante del resto de los datos, que corresponde al punto de muestreo N° 29. La discrepancia de este punto de muestreo puede ser producto de un error de tipeo de datos o algún tipo de problema con el proceso de obtención de la muestra.

Para los 48393 puntos de la malla equidistante de 220 metros se calcularon los valores de ondulación geoidal aplicando los dos métodos, Mínimos Cuadrados Colocación y Redes Neuronales Artificiales, desarrollados en los apartados anteriores para obtener los modelos predictivos de ondulación geoidal. El resultado de este proceso se muestra en la Figura 38 y Figura 39.

Figura 38

Modelo de predicción de ondulación geoidal, por Mínimos Cuadrados Colocación

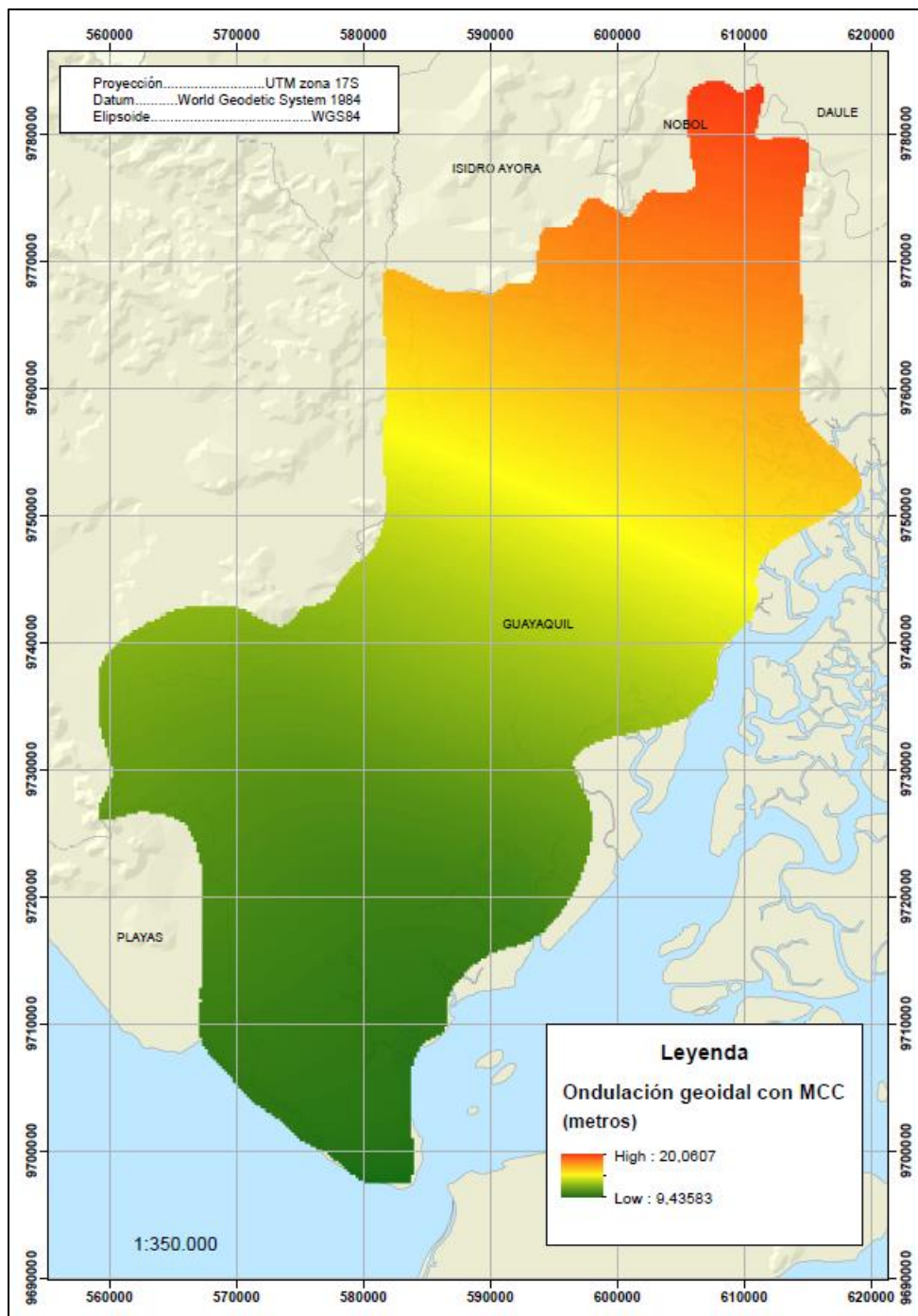
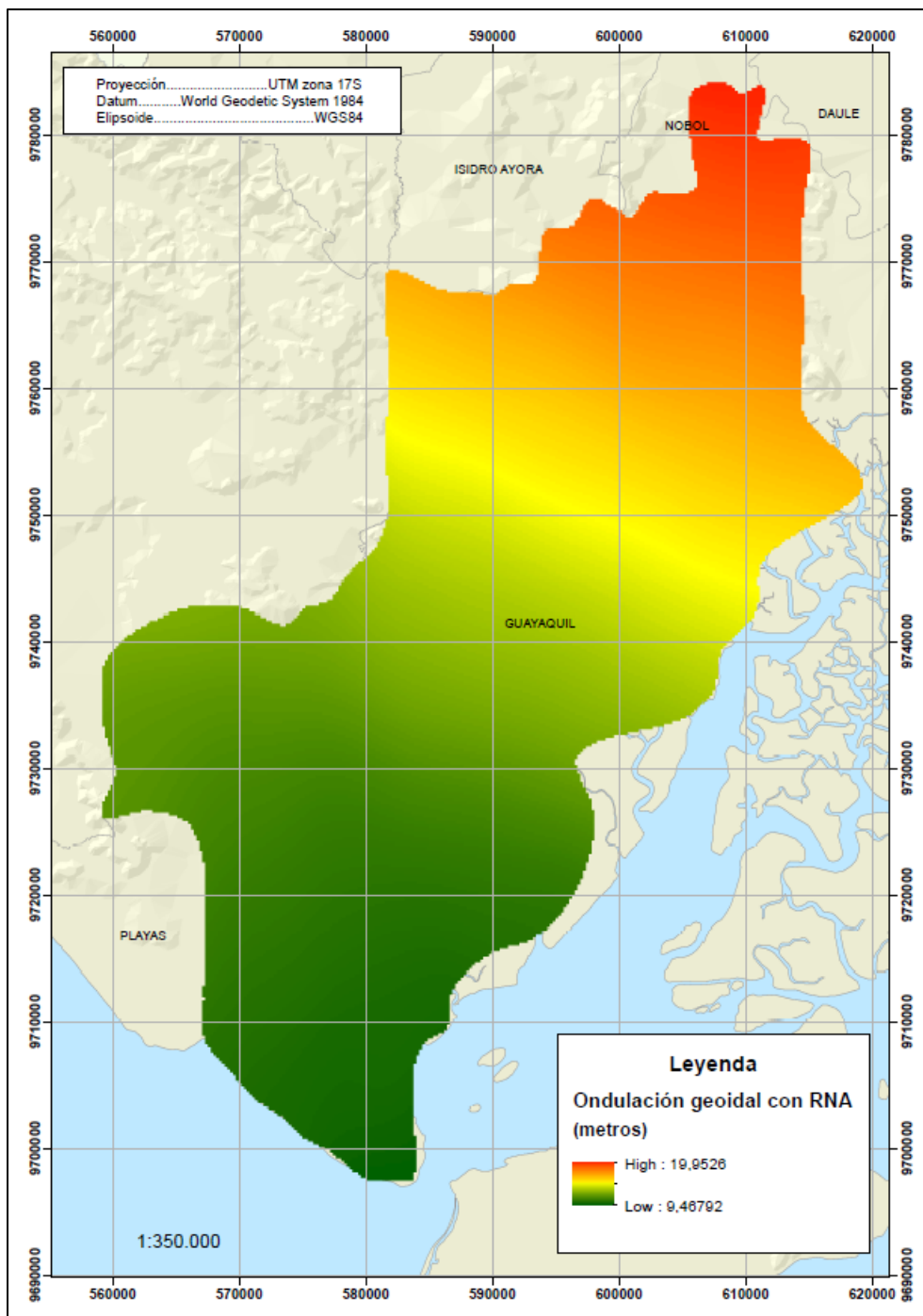


Figura 39

Modelo de predicción de ondulación geoidal, por RNA



La validación de los modelos de predicción de ondulación geoidal consiste en el cálculo de estadísticos simples en función de los errores generados sobre los 34 puntos

de validación que se descartaron por completo del proceso de ajuste en ambos métodos, de esta manera se obtuvo una medida de desempeño de la estimación de la variable ondulación geoidal para cada modelo de predicción.

Adicionalmente, los resultados obtenidos mediante el método de mínimos cuadrados colocación y redes neuronales artificiales son evaluados a través de su comparación con resultados obtenidos mediante modelos geoidales existentes, en este caso, se utilizaron los modelos geopotenciales EGM96 y EGM08, y el modelo de predicción local para el Ecuador continental generado por el IGM obtenido mediante el entrenamiento de una Red Neuronal Artificial del tipo RBF (Radial Basis Functions) a partir de los datos GPS/Nivelación (Instituto Geográfico Militar, 2013). Para calcular los valores estimados de ondulación geoidal con los modelos geopotenciales EGM96 y EGM08 se emplearon ejecutables que permiten la obtención directa de dichos valores, NGA/NASA EGM96, N = M = Modelo Gravitacional de la Tierra 360 (National Geospatial-Intelligence Agency, 2020) y EGM2008 - Versión WGS 84 (National Geospatial - Intelligence Agency, 2020) respectivamente. Para el cálculo de valores de ondulación geoidal con el modelo de predicción local elaborado por el IGM, se utilizó la aplicación de escritorio del geoportal del IGM. En la Figura 40 y la Figura 41 se observan los dos modelos geopotenciales en el área de trabajo, en ambos casos se utilizó la malla equidistante de puntos (220 m).

Figura 40

Modelo geoidal EGM96 en el área de estudio

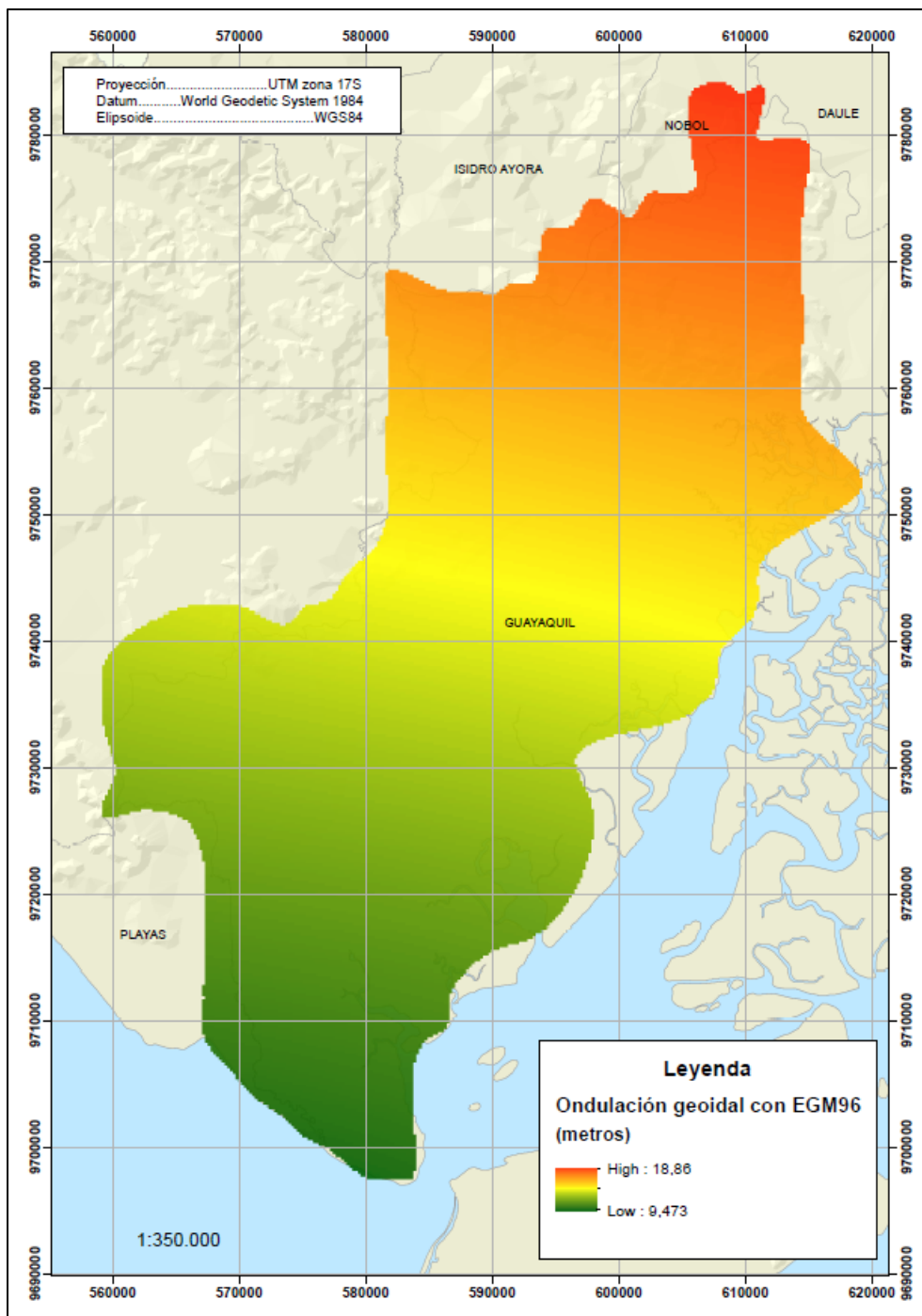
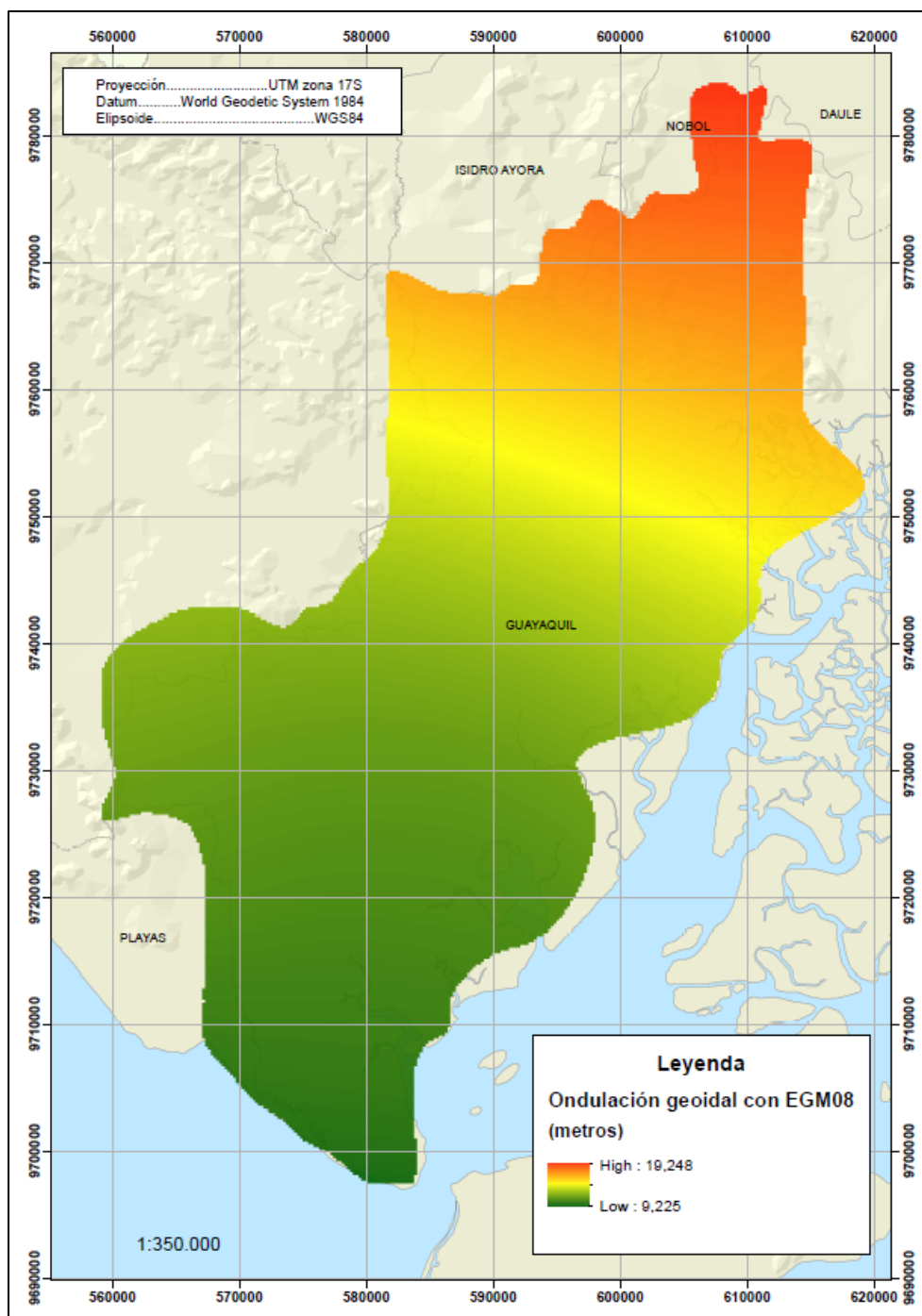


Figura 41

Modelo geoidal EGM08 en el área de estudio



En la Tabla 16 se muestran los resultados de los errores y los estadísticos que se obtuvieron en los 34 puntos de validación de cada modelo geoidal generado.

Tabla 16

Ondulación geoidal estimada por diferentes modelos de predicción y sus errores en puntos de validación

No.	ONDULACIÓN GEOIDAL (m)					ERRORES (m)				
	Observada	MCC	RNA	EGM96	EGM08	MCC	RNA	EGM96	EGM08	IGM
4	9,614	9,517	9,540	9,515	9,289	-0,097	-0,074	-0,099	-0,325	-0,108
10	9,74	9,713	9,655	9,746	9,507	-0,027	-0,085	0,006	-0,233	-0,109
13	9,792	9,766	9,822	9,717	9,528	-0,026	0,030	-0,075	-0,264	0,061
20	10,183	9,949	9,912	9,984	9,738	-0,234	-0,271	-0,199	-0,445	-0,174
21	9,708	9,839	9,755	10,176	9,816	0,131	0,047	0,468	0,108	0,050
27	10,159	10,110	10,088	10,326	9,976	-0,049	-0,071	0,167	-0,183	0,054
35	9,869	9,967	9,886	10,718	10,101	0,098	0,017	0,849	0,232	0,080
43	10,119	10,168	10,108	10,923	10,22	0,049	-0,011	0,804	0,101	0,067
45	10,016	10,095	10,016	11,138	10,282	0,079	0,000	1,122	0,266	0,049
55	10,457	10,461	10,415	11,314	10,466	0,004	-0,042	0,857	0,009	0,008
68	10,406	10,473	10,388	11,651	10,533	0,067	-0,018	1,245	0,127	0,089
73	10,584	10,636	10,517	11,825	10,661	0,052	-0,067	1,241	0,077	0,068
80	10,798	10,925	10,821	12,107	10,748	0,127	0,023	1,309	-0,05	0,066
87	10,831	10,899	10,814	11,807	10,844	0,068	-0,017	0,976	0,013	0,018
106	11,691	11,670	11,659	12,726	11,104	-0,021	-0,032	1,035	-0,587	-0,238
115	11,146	11,238	11,170	12,507	11,15	0,092	0,024	1,361	0,004	0,037
124	12,298	12,410	12,370	13,251	11,636	0,112	0,072	0,953	-0,662	-0,051
145	12,093	11,945	11,989	13,187	11,468	-0,148	-0,104	1,094	-0,625	-0,294
158	12,858	12,984	12,906	13,840	12,131	0,126	0,048	0,982	-0,727	0,004
172	12,515	12,620	12,656	13,802	12,006	0,105	0,141	1,287	-0,509	0,018

No.	ONDULACIÓN GEOIDAL (m)					ERRORES (m)					
	Observada	MCC	RNA	EGM96	EGM08	MCC	RNA	EGM96	EGM08	IGM	
183	13,768	13,909	13,841	14,491	12,962	0,141	0,073	0,723	-0,806	0,070	
191	14,664	14,684	14,676	14,851	13,668	0,020	0,012	0,187	-0,996	-0,029	
204	14,614	14,644	14,663	15,015	13,68	0,030	0,049	0,401	-0,934	-0,010	
212	14,224	14,246	14,176	14,964	13,428	0,022	-0,048	0,740	-0,796	-0,002	
215	15,801	15,850	15,853	15,623	14,862	0,049	0,052	-0,178	-0,939	0,007	
230	15,178	15,213	15,225	15,520	14,336	0,035	0,047	0,342	-0,842	0,033	
240	16,072	16,047	16,008	15,950	15,152	-0,025	-0,064	-0,122	-0,92	-0,048	
245	16,872	16,897	16,915	16,385	16,021	0,025	0,043	-0,487	-0,851	-0,018	
260	15,938	15,939	15,920	16,141	15,296	0,001	-0,018	0,203	-0,642	0,010	
271	17,286	17,268	17,311	16,786	16,498	-0,018	0,025	-0,500	-0,788	-0,054	
281	17,761	17,910	17,867	17,202	17,145	0,149	0,106	-0,559	-0,616	0,148	
283	17,261	17,230	17,185	16,883	16,613	-0,031	-0,076	-0,378	-0,648	-0,033	
304	18,31	18,339	18,333	17,572	17,681	0,029	0,023	-0,738	-0,629	0,034	
317	19,058	19,022	19,054	18,101	18,349	-0,036	-0,004	-0,957	-0,709	0,038	
						Máximo	0,149	0,141	1,361	0,266	0,148
						Mínimo	-0,234	-0,271	-0,957	-0,996	-0,294
						Media	0,026	-0,005	0,414	-0,435	-0,005
						Desviación estándar	0,083	0,074	0,677	0,397	0,092
						RMSE	0,086	0,073	0,785	0,585	0,091

En el caso del método de Redes Neuronales Artificiales, los errores en la estimación de la variable ondulación geoidal fueron menores en comparación con los otros modelos geoidales, teniendo errores máximos comprendidos entre 14 y 27 centímetros, una desviación estándar de 7,4 centímetros y un RMSE de 7,3

centímetros, mientras que los errores en la estimación de la variable ondulación geoidal aplicando el método de Mínimos Cuadrados Colocación registraron errores máximos comprendidos entre 15 y 24 centímetros, una desviación estándar de 8,3 centímetros y un RMSE de 8,6 centímetros.

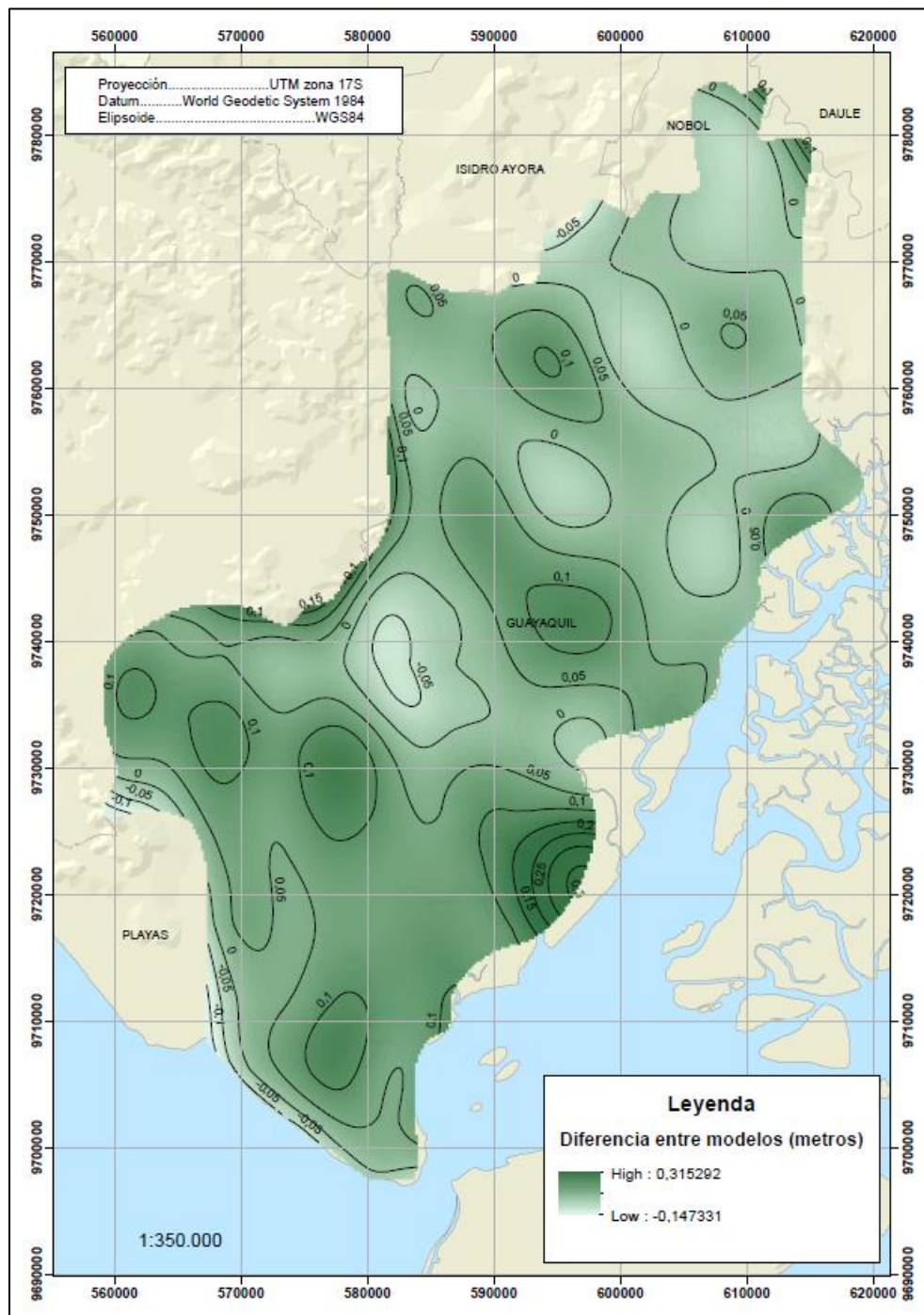
El modelo geoidal EGM96 registra el valor más alto de desviación estándar y RMSE, siendo 67,7 y 78,5 centímetros respectivamente, mientras que el modelo geoidal EGM08 registra una desviación estándar de 39,7 centímetros y RMSE de 58,5 centímetros. Por otro lado, el modelo de predicción local del IGM registra una desviación estándar de 9,2 centímetros y RMSE de 9,1 centímetros.

Los errores que presentan los puntos de validación empleando el método de Mínimos Cuadrados Colocación no superan los 0,27 metros y empleando el método de Redes Neuronales Artificiales no superan los 0,24 metros.

Se realizó la comparación entre los modelos generados con MCC y RNA mediante una representación gráfica de las diferencias y datos estadísticos utilizando la malla de puntos equidistantes (220 m), la Figura 42 muestra las diferencias entre los modelos MCC y RNA de forma gráfica.

Figura 42

Diferencias entre el modelo geoidal por MCC y el modelo RNA. Isolíneas cada 0,05 metros



Se realizó una comparación entre los modelos generados en el presente trabajo (MCC y RNA) y los modelos existentes generados con otras técnicas (EGM96, EGM08, IGM) mediante una representación gráfica de las diferencias y datos estadísticos que reflejan las discrepancias entre modelos utilizando la malla de puntos equidistantes (220 m) generada en apartados anteriores.

En la Figura 43, Figura 44 y Figura 45 se muestran de forma gráfica las diferencias de los modelos EGM96, EGM08 e IGM con el modelo por Mínimos Cuadrados Colocación. La Figura 46, Figura 47 y Figura 47 muestran de forma gráfica las diferencias de los modelos EGM96, EGM08 e IGM con el modelo por Redes Neuronales Artificiales.

Figura 43

Diferencias entre el modelo geoidal por MCC y el modelo EGM96. Isolíneas cada 0,2 metros

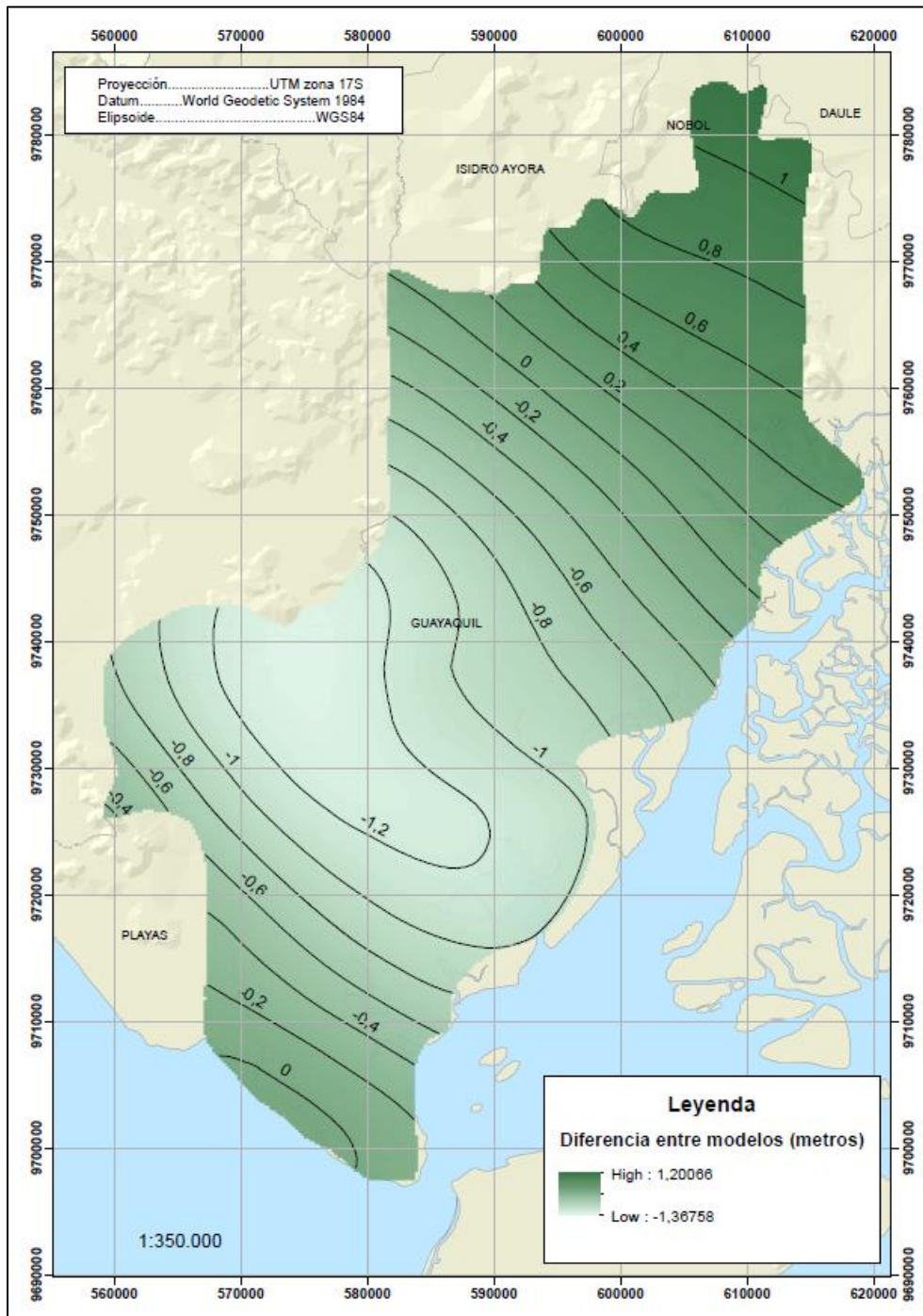


Figura 44

Diferencias entre el modelo geoidal por MCC y el modelo EGM08. Isolíneas cada 0,2 metros

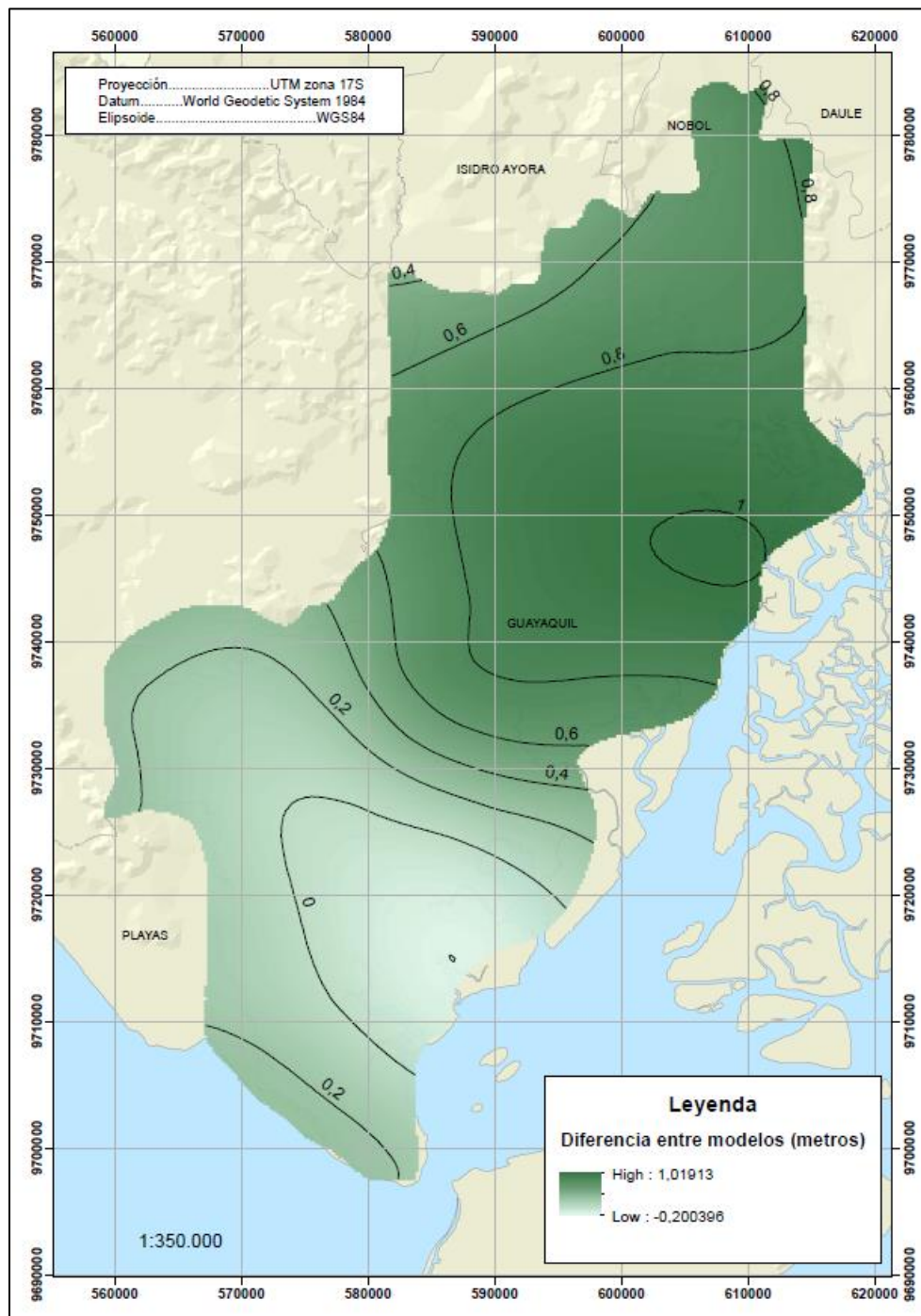


Figura 45.

Diferencias entre el modelo geoidal por MCC y el modelo IGM. Isolíneas cada 0,05 metros

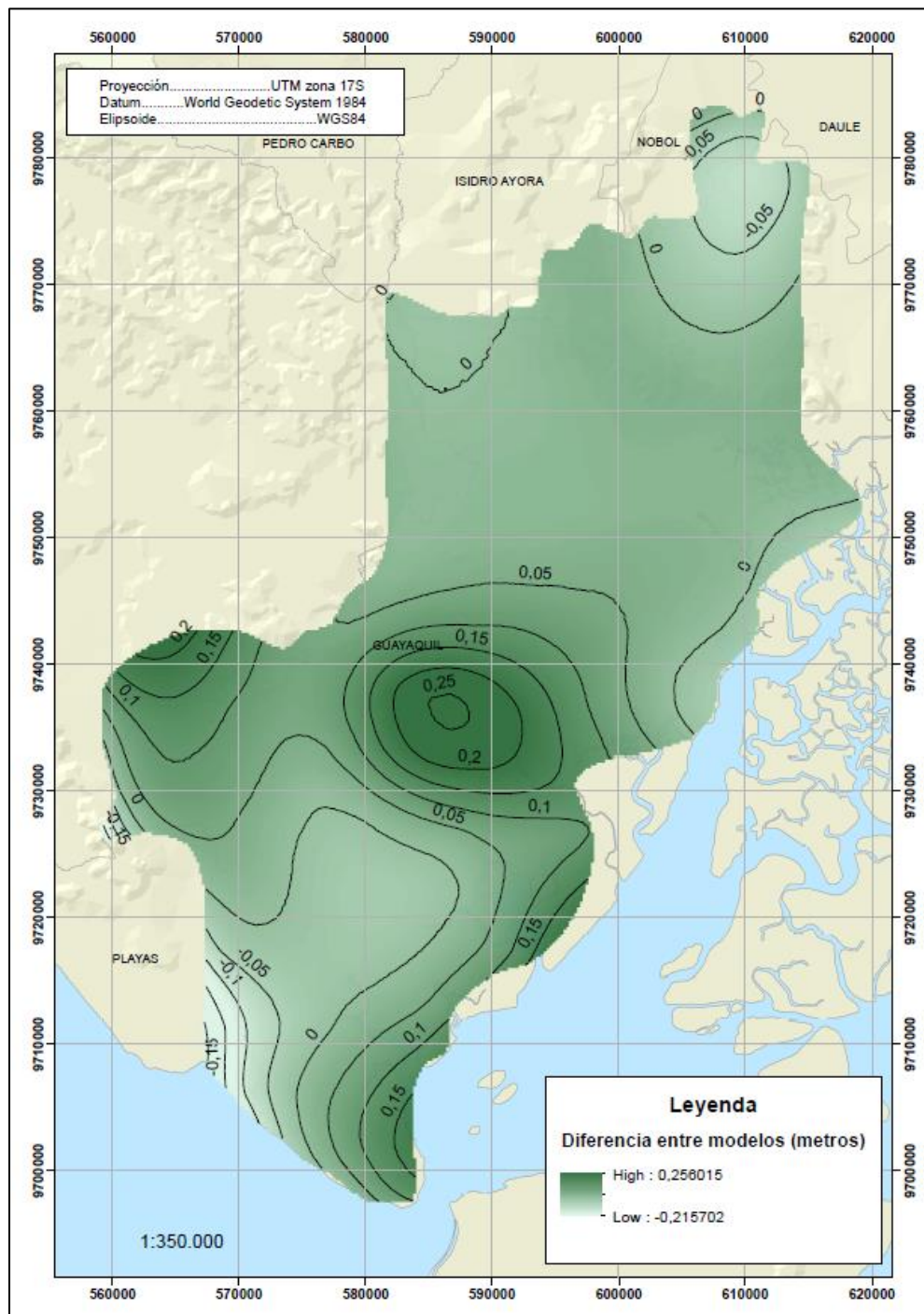


Figura 46

Diferencias entre el modelo geoidal por RNA y el modelo EGM96. Isolíneas cada 0,2 metros

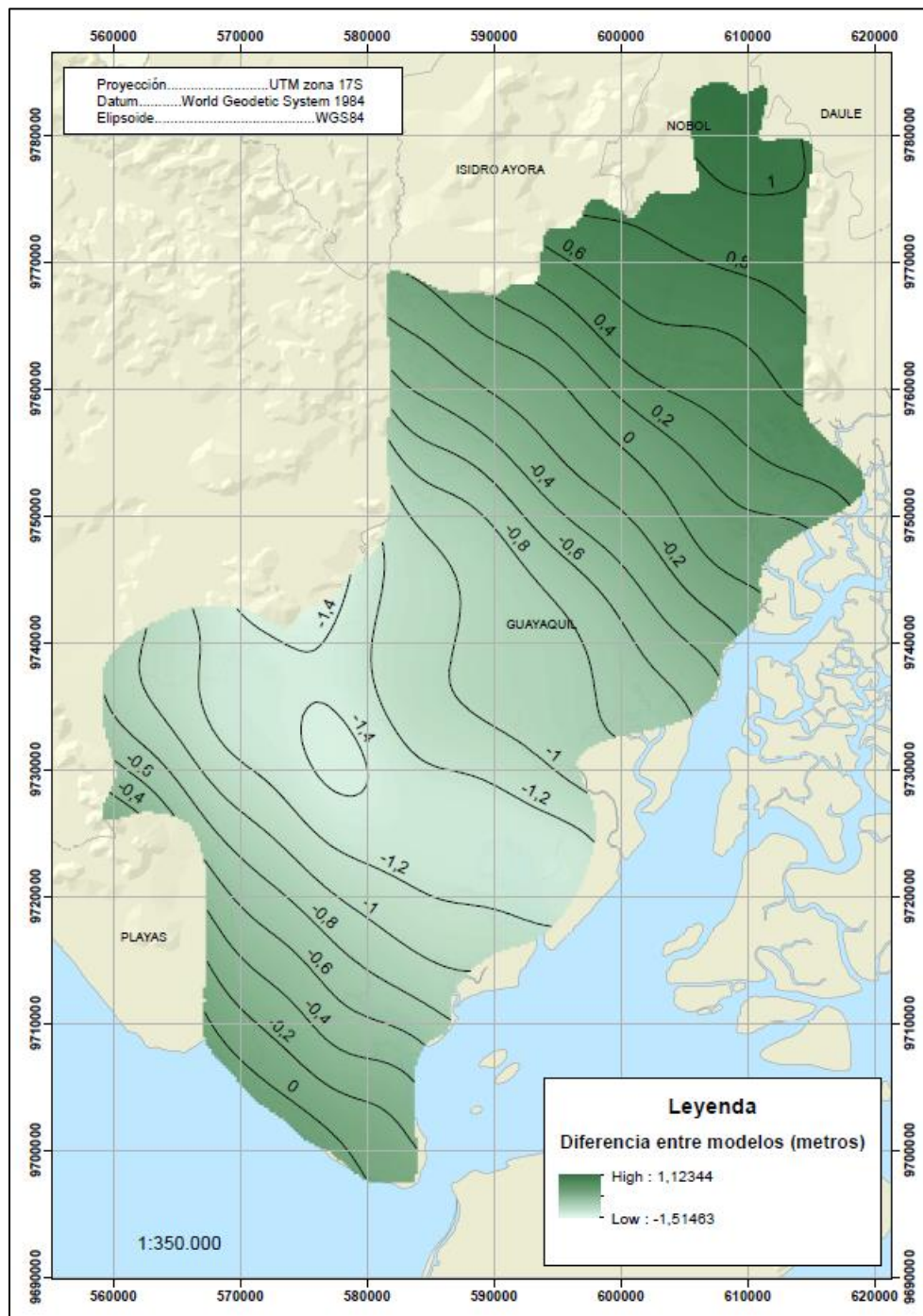


Figura 47

Diferencias entre el modelo geoidal por RNA y el modelo EGM08. Isolíneas cada 0,2 metros

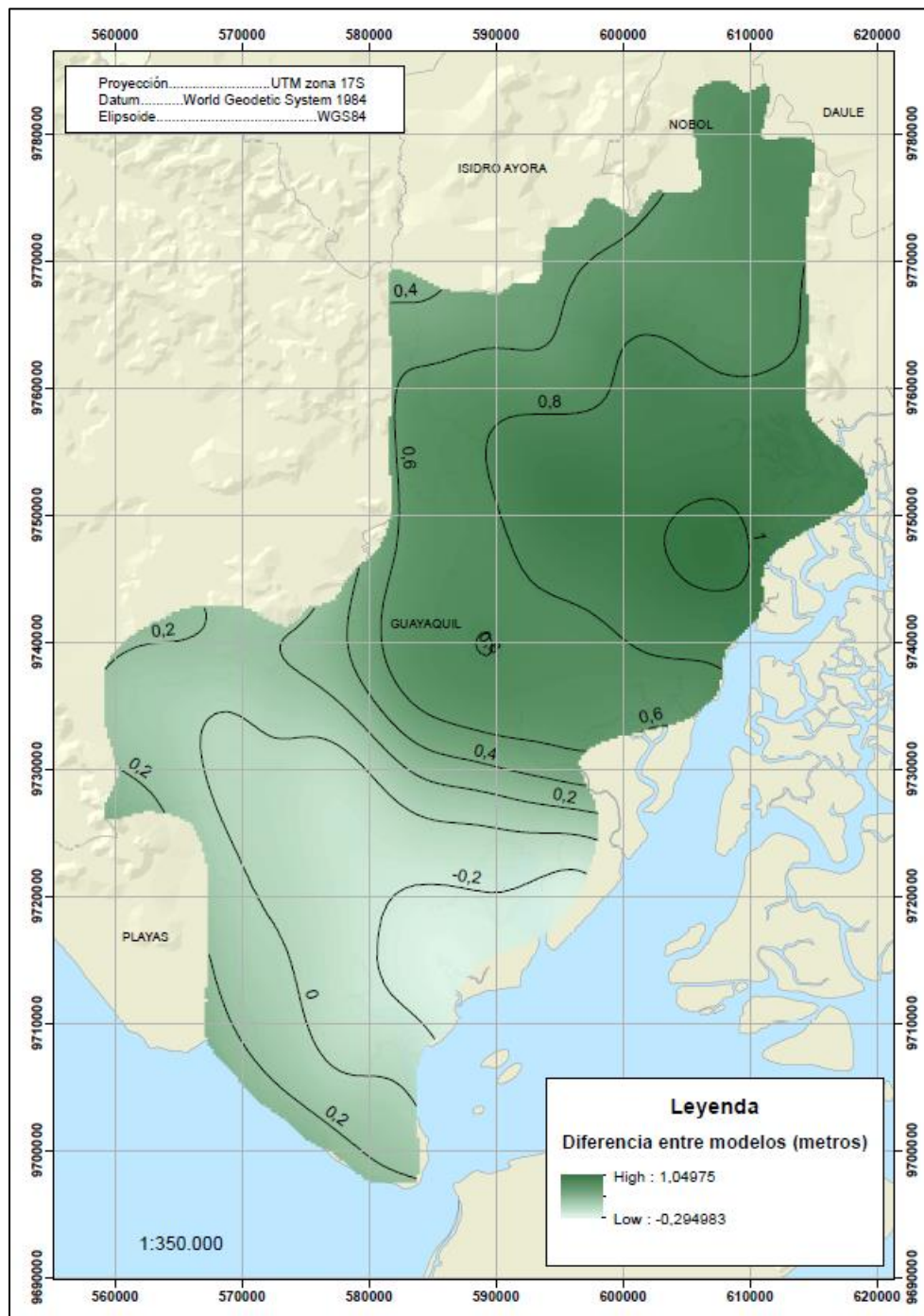
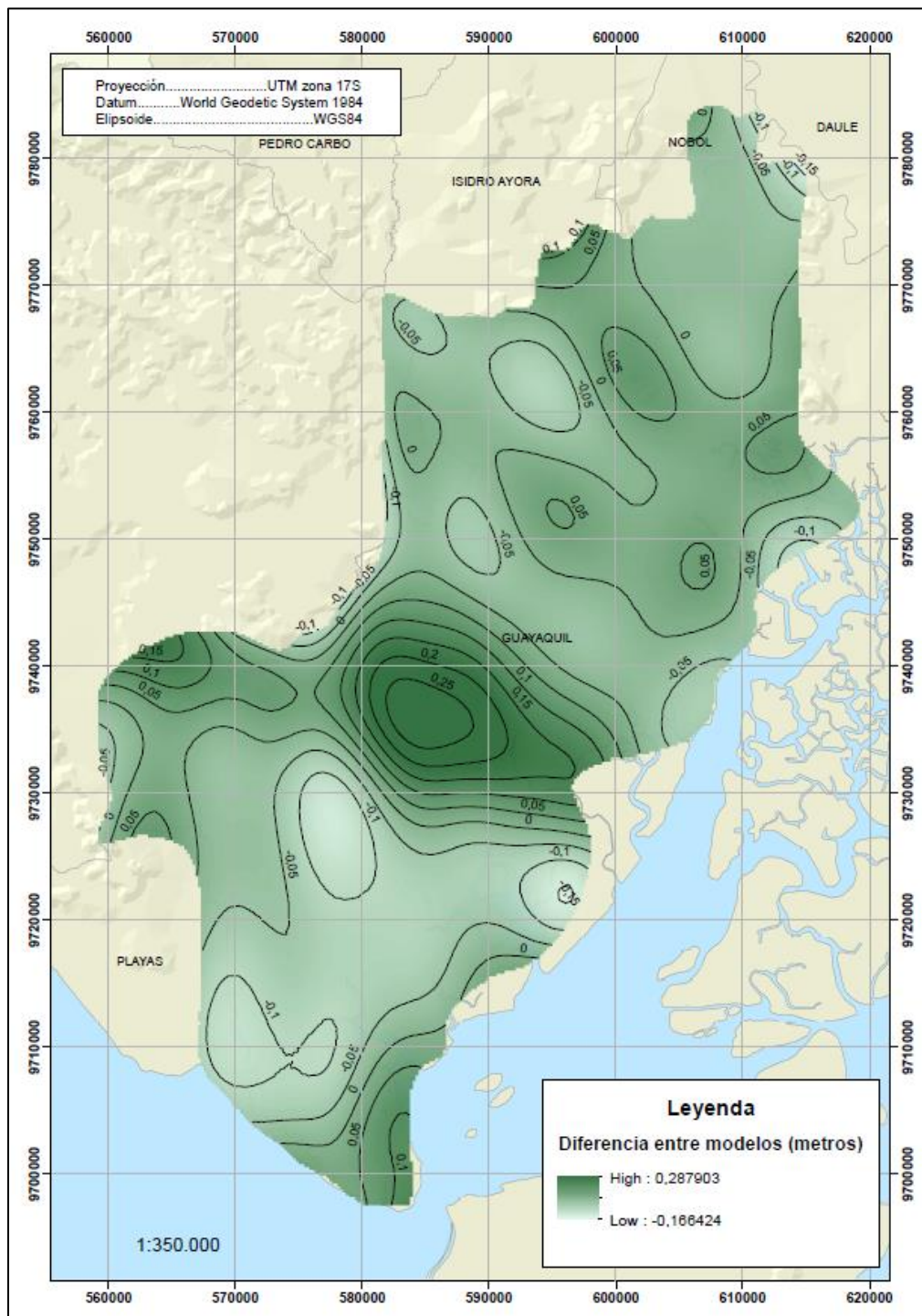


Figura 48.

Diferencias entre el modelo geoidal por RNA y el modelo IGM. Isolíneas cada 0,05 metros



En la Tabla 17 se muestran los estadísticos obtenidos de los residuales al comparar los modelos MCC, RNA, EGM96 y EGM08.

Tabla 17

Estadísticos de los residuales de la comparación de modelos

Modelos Estadísticos	MCC vs.				RNA vs.		
	EGM96	EGM08	IGM	RNA	EGM96	EGM08	IGM
Máximo residual (m)	1,2007	1,0191	0,2560	0,3153	1,1234	1,0498	0,2879
Mínimo residual (m)	-1,3676	-0,2004	-0,2157	-0,1473	-1,5146	-0,2950	-0,1664
Media residual (m)	-0,4161	0,4924	0,0409	0,0410	-0,4571	0,4514	-0,0001
Desviación estándar (m)	0,6784	0,3692	0,0665	0,0502	0,7036	0,3954	0,0764

Como resultado de la comparación del modelo por MCC y el modelo por RNA se obtuvo una desviación estándar de 0,0502 metros, media residual de 0,0410 metros y un residual máximo de 0,3153 metros. Valores similares se obtuvieron en la comparación del modelo por MCC y el modelo IGM con una desviación estándar de 0,0665 metros y un residual máximo de 0,256 metros, y en la comparación del modelo por RNA y el modelo IGM con una desviación estándar de 0,0764 metros y un residual máximo de 0,2879 metros.

Las diferencias más evidentes de la comparación del modelo geoidal por MCC y del modelo geoidal por RNA con otros modelos, se registran en el modelo EGM96 con una desviación estándar de 0,6784 metros para MCC y 0,7036 metros para RNA. Por otro lado, el modelo EGM08 presenta menos discrepancia con respecto al modelo por MCC y al modelo por RNA, obteniendo una desviación estándar de 0,3692 y 0,3954 metros respectivamente.

Comprobación de la hipótesis

Para la mayoría de trabajos de cartografía en el Ecuador se considera una precisión alta obtener valores de ondulación geoidal con un RMSE menor a 9 centímetros, como es el caso de los modelos generados en el presente estudio, tanto con Mínimos Cuadrados Colocación como con Redes Neuronales Artificiales.

En cuanto a la resolución de los modelos, esta se definió en función del número de puntos muestreados y de la superficie del área de estudio aplicando la ecuación (6) que incluye parámetros ya definidos, como el número de observaciones por cada cm^2 en el mapa y que el tamaño de la cuadrícula (píxel) es igual a 0,5 mm en el mapa. Por lo tanto, los modelos generados en el presente estudio se consideran de alta resolución independientemente de la escala que se utilice.

Capítulo V. Conclusiones

Se generó un modelo de predicción de la variable ondulación geoidal, en formato TIFF (Anexo 3), aplicando el método de Mínimos Cuadrados Colocación con 298 puntos muestreados en la zona de estudio, el cual se validó con una muestra de 34 puntos, presentando los siguientes estadísticos: error máximo de 24 centímetros, RMSE de 8,6 centímetros, error medio de 2,6 centímetros y desviación estándar de 8,3 centímetros.

Se generó un modelo de predicción de la variable ondulación geoidal, en formato TIFF (Anexo 4), aplicando el método de Redes Neuronales Artificiales con 289 puntos muestreados en la zona de estudio, el cual se validó con una muestra de 34 puntos, presentando los siguientes estadísticos: error máximo de 27 centímetros, RMSE de 7,3 centímetros, error medio de -0,5 centímetros y desviación estándar de 7,4 centímetros.

La validación de los modelos predictivos de ondulación geoidal generados con Mínimos Cuadrados Colocación y con Redes Neuronales Artificiales se realizó mediante la comparación de la ondulación geoidal calculada y la ondulación geoidal observada de 34 puntos que no fueron incluidos en la generación de los modelos, demostrando que ambos modelos son adecuados para la predicción de la variable ondulación geoidal en la zona rural del cantón Guayaquil obteniendo precisiones similares (8,6 y 7,3 centímetros).

Capítulo VI. Recomendaciones

Los modelos de predicción generados en el presente trabajo garantizan valores de ondulación geoidal de puntos que se encuentren dentro de la zona de estudio y con el margen de error presentados para cada uno de los métodos.

Dentro del método de Mínimos Cuadrados Colocación se recomienda una elección cuidadosa del valor de amplitud creciente (h), debido a que puede afectar la función covarianza empírica, la cual es un factor importante en la aplicación del método.

Dentro del método de Redes Neuronales Artificiales se recomienda el uso del proceso de prueba-error para obtener un aprendizaje óptimo de la red, es decir, que sus parámetros logren que la minimización de los errores sea la mejor.

Para la obtención de mejores resultados de predicción de la variable ondulación geoidal se recomienda un alto nivel de precisión en cuanto a la toma de puntos de observación para garantizar la calidad de las predicciones de la variable.

Se recomienda el uso de los modelos de predicción de MCC y RNA generados para la variable ondulación geoidal para fines cartográficos y de ingeniería, tomando en cuenta los estadísticos de precisión que se obtuvieron para los mismos.

Referencias

- Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio NASA. (2016). *exploración del espacio, administrar el movimiento de satélites artificiales en órbita, de alguna manera buscar vida fuera de la tierra, observar los riesgos de la tierra y crear mapas universales exactos además de predecir los movimientos de los astros*.
Obtenido de NASA: <https://www.nasa.gov/>
- Avery, B. W. (1987). *Soil survey methods: a review*. Bedfordshire, Inglaterra: Soil survey and land research centre.
- Barzaghi, R., & Sanso, F. (1983). Sulla stima empirica della funzione di covarianza. *Bollettino di Geodesia e scienze affini*, 389-415.
- Basogain, X. (2008). *Redes Neuronales Artificiales y sus Aplicaciones*. Bilbao - España: Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Escuela Superior de Ingeniería de Bilbao.
- Cañizares Cruz, C. E. (2015). *Análisis del sistema de alturas para la red de control básica vertical del Ecuador*. Sangolquí: Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE.
- Cañizares, E. C., Tierra, A., & Leiva, C. (2015). Sistema de alturas para el Ecuador. *Congreso de ciencia y tecnología ESPE*, (págs. 77-87). Sangolquí.
- Carrión Sánchez, J. L. (2013). *Generación de una malla de ondulaciones geoidales por el método GPS/nivelación y redes neuronales artificiales a partir de datos dispersos*. La Plata: Universidad Nacional de La Plata.
- Collier, P. A., & Croft, M. J. (1997). Heights from GPS in an engineering environment. *Survey Review*, 76-86.
- Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional. (1999). *Sistemas Geodésicos*.

- Corchete, V. (2009). *Geodesia geométrica y geodesia física: objetivo y aplicaciones*.
Universidad de Almería.
- Corchete, V. (s.f.). *Elipsoide de Revolución. Superficie de referencia y superficie equipotencial*. Almería, España: Universidad de Almería.
- Drewes, H., & Sánchez, L. (2011). *Curso en Sistemas de Referencia*. Santiago de Chile: Instituto Geográfico Militar.
- Drewes, H., Sánchez, L., Blitzkow, D., & Freitas, S. (1998). *Sistema de referencia vertical para américa del sur*. Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas.
- Echeverría, N. A., & Tierra Criollo, A. (2010). Generación de un modelo de ondulaciones geoidales del Ecuador continental a partir de datos dispersos mediante mínimos cuadrados, colocación (LSC). *Revista Geoespacial*, 7, 52-60.
- Fernández Coppel, I. A. (2001). *Localizaciones Geográficas. Las Coordenadas Geográficas y la Proyección UTM (Universal Transversa Mercator)*. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- Fiedler, J. (1992). Orthometric heights from global positioning system. *Journal of Surveying Engineering*, 70-79.
- Garafulic Caviedes, P. (2005). *Geodesia teoría y práctica*. Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.
- Hengl, T. (2006). Finding the right pixel size. *Computers & geosciences*, 1283-1298.
- Hofmann, B., & Helmut, W. (2005). *Physical Geodesy*. Austria: Institut für Navigation und Satellitengeodäsie - Technische Universität Graz.
- Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006). *Physical geodesy*. Springer Science & Business Media.
- Hoyer, M., Wildermann, E., Suárez, H., & Hernández, J. (Diciembre de 2004). *Modelo geoidal combinado para Venezuela (MGCV04)*. (Interciencia, Ed.) Recuperado el

2020 de Marzo de 15, de Scielo:

http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0378-

[18442004001200003&lng=es&tling=es](http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0378-18442004001200003&lng=es&tling=es).

Instituto Geográfico Militar. (2006). *Memoria Técnica del Control Geodésico Suplementario Horizontal y Vertical de los Fotoíndices 9, 14, 15 y 19 del Proyecto Cantón de Guayaquil*. Quito.

Instituto Geográfico Militar. (Julio de 2013). *Cálculo de la altura geoidal del Ecuador Continental*. Obtenido de Geoportal IGM: Geoportal

Instituto Geográfico Nacional de España. (27 de Abril de 2020). *Geodesia*. Obtenido de Centro Nacional de Información Geográfica:

<https://www.ign.es/web/ign/portal/gds-teoria-geodesia>

Johnston, K., Ver Hoef, J. M., & Krivorunchko, K. L. (2001). *Using ArcGis Geostatistical Analyst*. Manual de usuario de ESRI, Redlands.

Lima, P. J. (2005). *Determinación del modelo matemático para obtener las ondulaciones geoidales en un área del Distrito Metropolitano de Quito*. Sangolquí: Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.

Llano Cruz, H., & Gonzalez Aceituno, J. L. (2018). *Generación de modelo digital de elevaciones (MDE) de ondulaciones geoidales usando el método GNSS/nivelación y redes neuronales artificiales a partir de datos dispersos*. Puno: Universidad Nacional del Altiplano.

Luna Ludeña, M. (2017). *Contribución a la definición de un modelo de velocidades de la corteza terrestre para Ecuador a partir de datos GNSS*. E.T.S.I. en Topografía, Geodesia y Cartografía (UPM).

Marsland, S. (2015). *Machine learning: an algorithmic perspective*. CRC press.

Mather, R. (1978). *The role of the geoid in four-dimensional geodesy*. *Marine Geodesy*.

- Matich, D. J. (2001). *Redes Neuronales: Conceptos básicos y aplicaciones*. México: Universidad Tecnológica Nacional.
- Mayer, F. (2009). *Apuntes de Geodesia*. La Plata: Universidad Nacional de La Plata.
- Molodensky, M. S., Eremeev, V. F., & Yrukina, M. J. (1960). *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth, Works of Central Research Institute of Geodesy*. Moscow: Geodezizdat.
- Moritz, H. (1980). *Advanced physical geodesy*. Karlsruhe: Herbert Wichmann.
- National Geospatial-Intelligence Agency. (Mayo de 2020). *NGA/NASA EGM96, N = M = Modelo gravitacional terrestre 360*. Obtenido de NGA: <https://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm96/egm96.html>
- National Geospatial - Intelligence Agency. (21 de Mayo de 2020). *Modelo Gravitacional de la Tierra 2008 (EGM2008)*. Obtenido de NGA.mil: <https://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/index.html>
- Núñez , A. (2006). *Determinación de un geoide de precisión en áreas de pequeña extensión. Aplicación en el Parque Nacional de Doñana*. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña.
- Oscó Poma, G. S. (2011). *Control vertical, observaciones, cálculo y compensación por mínimos cuadrados de un circuito de nivelación geométrica*. La paz: Universidad de San Andrés.
- Pacino, M. C., Melano, G. L., & Haberkorn, A. D. (2015). *Perfil longitudinal de anomalías de gravedad entre las ciudades de Rosario (Santa Fe) y Victoria (Entre Ríos), República Argentina, para fines prospectivos*. Rosario, Argentina.
- Palacios Orejuela, I. F. (2019). *Generación de un modelo de predicción de la variable ondulación geoidal, para la zona rural del cantón Guayaquil, mediante el uso del método cokriging*. Sangolquí: Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE.

- Rossiter, D. G., & Hengl, T. (2002). *Technical note: creating geometrically-correct photo-interpretations, photomosaics, and base maps for a project GIS*. Enschede, Países Bajos: Department of Earth System Analysis.
- Salas, R. (2004). *Redes neuronales artificiales*. Valparaíso: Universidad de Valparaíso. Departamento de Computación.
- Sánchez Sobrino, J. A., Daldan Mourón, A., & Barbadillo Fernández, A. (2009). El nuevo modelo de Geoide para España EGM08-REDNAR. *Del Ilustre Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos En Topografía*, 4-16.
- Sevilla de Lerma, M. J. (1999). *Introducción histórica a la Geodesia*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Sevilla, M. J. (1987). *Colocación mínimos cuadrados*. Madrid: CSIC-UCM-Instituto de Astronomía y Geodesia (IAG).
- Tierra Criollo, A. R. (2009). *Evaluación del EGM08 y EGM96 en el Ecuador a partir de datos GPS y Nivelación Geométrica*. Sangolquí: Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército.
- Tierra, A., & Acurio, V. (2017). Modelo neuronal para la predicción de la ondulación geoidal local en el Ecuador. *Campus*.
- Torge, W. (2001). *Geodesy* (Tercera ed.). Berlín: Walter de Gruyter.
- Vanícek, P., Santos, M., Tenzer, R., & Hernández-Navarro, A. (2003). Algunos Aspectos Sobre Alturas Ortométricas y Normales. *Revista cartográfica*, 76-79.
- Vink, A. P. (1975). *Land use in advancing agriculture*. New York: Springer Science & Business Media.
- Yáñez Yáñez, A. A. (2000). *El modelo gravimétrico mundial EGM96 en la determinación de cotas ortométricas y su relación con las cotas geométricas de los pilares de nivelación de la Red Geodésica Nacional*.
- Zakatov, P. S. (1997). *Curso de Geodesia Superior*.

