



**Estudios de investigación cuantitativa sobre la información educativa respecto de
estudiantes del grupo de alto rendimiento y su efectividad en estudios
universitarios: caso Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.**

Zambrano Badillo, Ney Marcelo

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Trabajo de titulación, previo a la obtención del título de Magíster en Enseñanza de la
Matemática

Mat. Medina Vásquez, Paul Leonardo PhD













30 de septiembre del 2020

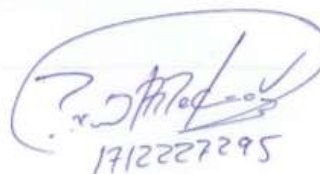
Document Information

Analyzed document	TNZ.pdf (D111214287)
Submitted	8/12/2021 5:18:00 PM
Submitted by	Medina Vasquez Paul Leonardo
Submitter email	plmedina@espe.edu.ec
Similarity	9%
Analysis address	plmedina.espe@analysis.arkund.com



Sources included in the report

W	URL: https://core.ac.uk/download/pdf/196533068.pdf Fetched: 5/1/2021 11:13:20 PM	 3
W	URL: http://semana.mat.uson.mx/semanaxiv/MEMORIASXXIII/MEMORIAS_XXIII_SIDM_2013.pdf Fetched: 7/22/2021 12:36:43 AM	 1
W	URL: https://eva.fcien.udelar.edu.uy/pluginfile.php/3785/mod_resource/content/1/Petrov-Mordecki-Probabilidad-2008.pdf Fetched: 6/15/2021 3:14:36 AM	 2
W	URL: http://servicio.bc.uc.edu.ve/ingenieria/revista/v24n3/vol24n32017.pdf Fetched: 7/5/2021 2:21:37 AM	 1
SA	Inferencia estadística.pdf Document Inferencia estadística.pdf (D103978245)	 1
W	URL: https://eprints.ucm.es/44987/1/TFM_Mar%C3%ADa%20Garnica%20P%C3%A9rez.pdf Fetched: 2/3/2020 8:08:15 PM	 4
W	URL: http://lsi.gov.in:8081/jspui/bitstream/123456789/3653/1/41178_1961_SUB.pdf Fetched: 8/12/2021 5:19:00 PM	 1
W	URL: https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA090825.pdf Fetched: 8/12/2021 5:19:00 PM	 11
W	URL: http://docplayer.ru/79331501-Vstroennye-transformatory-toka.html Fetched: 8/12/2021 5:19:00 PM	 6
SA	tfg_TomasGarriga.pdf Document tfg_TomasGarriga.pdf (D78072959)	 1
W	URL: https://stage.rrc.state.tx.us/media/31828/oilisch8.txt Fetched: 8/12/2021 5:19:00 PM	 3
SA	F.Wiener.pdf Document F.Wiener.pdf (D111115328)	 1



1712227295



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA
DE TECNOLOGÍA**

CENTRO DE POSGRADOS

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación "Estudios de investigación cuantitativa sobre la información educativa respecto de estudiantes del grupo de alto rendimiento y su efectividad en estudios universitarios: caso Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE", fue realizado por el señor Zambrano Badillo Ney Marcelo, el mismo que ha sido revisado en su totalidad, analizado por la herramienta de verificación de similitud, por lo tanto, cumple con los requisitos teóricos, científicos y técnicos, metodológicos legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 30 de septiembre de 2020

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Paúl Leonardo Medina Vásquez'.

Mat: Paúl Leonardo, Medina Vásquez Ph.D.

C.C.: 171222729-5



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA
DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA

Yo, **Zambrano Badillo, Ney Marcelo** con C.C: 060181961-8 , declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: "Estudios de investigación cuantitativa sobre la información educativa respecto de estudiantes del grupo de alto rendimiento y su efectividad en estudios universitarios: caso Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE", es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando en citas bibliográficas.

Consecuentemente el contenido de la investigación mencionada es veraz.

Sangolquí, 30 de septiembre de 2020

Zambrano Badillo, Ney Marcelo.

C.C.: 060181961-8



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA
DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Yo, **Zambrano Badillo, Ney Marcelo** con C.C: 060181961-8, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: "Estudios de investigación cuantitativa sobre la información educativa respecto de estudiantes del grupo de alto rendimiento y su efectividad en estudios universitarios: caso Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE", en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad..

Sangolquí, 30 de septiembre de 2020

Zambrano Badillo, Ney Marcelo.

C.C.: 060181961-8

Dedicatoria

A mis padres, Efen Zambrano y Aida Badillo, por sus consejos, oraciones, ejemplo de superación, a mi madre que con su alzheimer siempre pide que resé para que dios te ayude, a mi padre con su ceguera ilumina el camino de sus hijos.

En especial a mis sobrinos, para que cumplan sus sueños, que la edad no importa.

Con todo cariño, Ney.

Agradecimientos

A mi Dios, quién me ha dado sabiduría, ciencia y conocimiento en todo lo que hago.

Al Mat. Paúl Medina, director de tesis, por su profesionalismo, apoyo incondicional y confiar en mí, para la realización de este trabajo.

Al Ing. Livino Armijos, por su apoyo incondicional, con sus conocimientos y consejos, para la realización de este proyecto.

Al Ing. Patricio Pugarín por el apoyo a la culminación de la carrera. Dios les pague a todos.

Índice de contenidos

Carátula	1
Análisis Urkund	2
Certificación	3
Responsabilidad de autoría	4
Autorización de publicación	5
Dedicatoria	6
Agradecimiento	7
Índice de contenidos	8
Índice de tablas	11
Índice de figuras	13
Resumen	15
Abstract	16
Capítulo I: Introducción	17
Introducción	17
El problema	20
Objetivos	21
Objetivo general	21
Objetivos específicos	21
Estado del arte	22
Deserción estudiantil	22
Deserción estudiantil con Cadenas de Markov	23

Capítulo II: Marco Teórico	25
Procesos estocásticos	25
Explicación de procesos estocásticos	26
Clasificación de los procesos estocásticos de acuerdo al parámetro temporal y el espacio de estado	29
Clasificación de los procesos estocásticos de acuerdo a las características probabilísticas de las v.a.	32
Las cadenas de Markov	34
Probabilidades de transición de n pasos	36
Clasificación de los estados de una cadena de Markov	39
Probabilidades de estado estable	43
Tiempo del primer paso	44
Análisis de los estados absorbentes	46
Capítulo III: Metodología	47
Recolección de datos	47
Capítulo IV: Análisis de resultados	51
Promociones Alumnos GAR	51
Genero Alumnos GAR	53
Titulación de los Alumnos GAR	57
Análisis del total de Alumnos graduados GAR	57
Análisis de graduados GAR en relación al total de alumnos	59
Análisis de graduados GAR en relación al tiempo de graduación	63
Análisis Alumnos GAR, utilizando cadenas de Markov	66

	10
Carreras técnicas	68
Carreras no técnicas	72
Tercera promoción	76
Capítulo V: Conclusiones y Recomendaciones	85
Conclusiones	85
Trabajos futuros	86
Bibliografía	87
Anexos	89

Índice de tablas

Tabla 1	Clasificación de los procesos estocásticos	28
Tabla 2	Matriz de transición	49
Tabla 3	Promociones de los Alumnos GAR	51
Tabla 4	Campus y Genero de los Alumnos GAR	54
Tabla 5	Carreras y Genero de los Alumnos GAR.....	55
Tabla 6	Campus y Graduados de los Alumnos GAR	57
Tabla 7	Promoción y Graduados de los Alumnos GAR	58
Tabla 8	Carrera y Graduados de los Alumnos GAR.....	59
Tabla 9	Campus y Graduados de los Alumnos GAR	60
Tabla 10	Promoción y Graduados de los Alumnos GAR	60
Tabla 11	Carrera y Graduados de los Alumnos GAR	61
Tabla 12	Campus y tiempo de graduación de los Alumnos GAR	63
Tabla 13	Promoción y tiempo de graduación de los Alumnos GAR	64
Tabla 14	Carrera y Graduados de los Alumnos GAR.....	65
Tabla 15	Matriz de probabilidades de transición de las carreras técnicas	69
Tabla 16	Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción	70
Tabla 17	Matriz de Probabilidades de Absorción PA.	71
Tabla 18	Matriz de probabilidades de transición de las carreras no técnicas	73
Tabla 19	Matriz NE del Numero Esperado de períodos antes de la absorción	74
Tabla 20	Matriz de Probabilidades de Adsorción PA.	76
Tabla 21	Matriz de probabilidades de transición de Mecatrónica	77

Tabla 22	Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción	78
Tabla 23	Matriz de Probabilidades de Absorción PA.	80
Tabla 24	Matriz de probabilidades de transición de Finanzas y Auditoría	81
Tabla 25	Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción	83
Tabla 26	Matriz de Probabilidades de Absorción PA.	84

Índice de figuras

Figura 1	Gráfico de un vector aleatorio de dimensión infinita	27
Figura 2	Trayectoria de un movimiento Browniano	27
Figura 3	Probabilidad de transición de 2 etapas	38
Figura 4	Probabilidad de transición de 3 etapas	38
Figura 5	Probabilidad de transición de n etapas	39
Figura 6	Trayectoria de un estado	39
Figura 7	Estado alcanzable	40
Figura 8	Comunicación de Estados	40
Figura 9	Conjunto cerrado	40
Figura 10	Estado absorbente	41
Figura 11	Estado periódico	41
Figura 12	Estado recurrente	42
Figura 13	Estado Transitorio	43
Figura 14	Estado aperiódico	43
Figura 15	Diagrama de transición	48
Figura 16	Promociones de los Alumnos GAR	52
Figura 17	Genero de los Alumnos GAR	53
Figura 18	Campus y Genero de los Alumnos GAR	53
Figura 19	Carrera y Genero de los Alumnos GAR	55
Figura 20	Carrera y Graduados de los Alumnos GAR	63
Figura 21	Carrera y Graduados de los Alumnos GAR	65

Figura 22	Diagrama de transición de los Alumnos GAR de las carreras técnicas	69
Figura 23	Diagrama de transición de los Alumnos GAR de las carreras no técnicas	73
Figura 24	Diagrama de transición de los Alumnos GAR de Macatrónica	77
Figura 25	Diagrama de transición de los Alumnos GAR de Finanzas y Auditoría	82

Resumen

Las Instituciones de Educación Superior enfrentan un problema, la deserción universitaria. El abandono de la universidad por parte de los estudiantes es un impacto negativo al progreso del país en los diferentes campos: sociales, científicos y económicos. Para ello se han empleado una gran cantidad de esfuerzos; tanto económicos, como de talento humano, a fin de que los estudiantes mejoren su rendimiento o aumenten su compromiso académico (Barrero Rivera, 2015). Así, el presente trabajo propone realizar una investigación cuantitativa sobre la información educativa respecto a los estudiantes del denominado Grupo de Alto Rendimiento, GAR, en su efectividad y desenvolvimiento durante los estudios en la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. La información a ser analizada corresponde a los años 2011 - 2019; esta información, puede llegar a evidenciar el comportamiento de dos o más cohortes, es decir, alumnos que iniciaron y terminaron sus estudios dentro del plazo regular establecido en la ESPE. Con el desarrollo de la presente investigación se espera obtener relaciones que permitan evidenciar el desempeño académico de los estudiantes, en base a los resultados obtenidos en su prueba de admisión a la educación superior. Luego de identificar los factores de deserción y aprobación, se llega a identificar un modelo que permita pronosticar el tiempo que los estudiantes pasan en cada uno de los semestres hasta la graduación ó retiro y, de esta manera, simular la tendencia de deserción y efectividad en su trayectoria estudiantil para estudiantes GAR.

PALABRAS CLAVES:

- **ABANDONO DE ESTUDIOS**
- **EDUCACIÓN SUPERIOR**
- **CADENAS DE MARKOV**

Abstract

Higher Education Institutions confront a problem, university desertion. Students dropping out of college is a negative impact on the progress of the country in different fields: social, scientific and economic. For this, a great amount of efforts have been employed; both economic, as well as human talent, in order for students to improve their performance or increase their academic commitment ([Barrero Rivera, 2015](#)). Thus, the present work proposes to conduct a quantitative research on the educational information regarding the students of the so-called High Performance Group, HPG, in their effectiveness and performance during their studies at the Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. The information to be analyzed corresponds to the years 2011 - 2019; this information, can get to evidence the behavior of two or more cohorts, that is, students who began and finished their studies within the regular term established in the ESPE. With the development of the present research, it is expected to obtain relationships that allow evidencing the academic performance of students, based on the results obtained in their admission test to higher education. After identifying the factors of desertion and approval, a model is identified that allows predicting the time that students spend in each of the semesters until graduation or withdrawal and, in this way, simulate the tendency of desertion and effectiveness in their student trajectory for HPG students.

KEY WORDS:

- **ABANDONMENT OF STUDIES**
- **HIGHER EDUCATION**
- **MARKOV CHAINS**

Capítulo I: Introducción

En la Constitución de la República del Ecuador, de acuerdo el Plan Nacional para el Buen Vivir 2009 - 2013, se crea el Sistema Nacional de Nivelación y Admisión (SNNA), como proyecto emblemático de la Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación (SENESCYT). Su objetivo es regular el ingreso a las Instituciones de Educación Superior (IES) públicas, con el principio de igualdad de oportunidades, meritocracia y transparencia. En mayo del 2012 el SNNA se implementó en todo el país, como requisito para entrar a las universidades públicas, el Examen Nacional para la Educación Superior (ENES), que según los documentos oficiales tiene el objetivo de brindar igualdad de oportunidades a las y los ecuatorianos (Mena Andrade et al., 2018).

El ENES evalúa las aptitudes de baja sensibilidad de los estudiantes como: aptitud verbal, numérica y razonamiento abstracto; las cuales, no se relacionan directamente con los planes de estudio del bachillerato. El examen ENES establecido en 2012 se lo califica sobre 1000 puntos. Quienes obtienen las más altas calificaciones, en función de los parámetros establecidos por el SNNA, pertenecen al Grupo de Alto Rendimiento GAR, dichos alumnos tienen mayores opciones para acceder a las plazas en las universidades e institutos públicos del país. Además, se tomaba en cuenta algunos puntos de acción afirmativa; por ejemplo, el lugar donde vive el postulante o si pertenece a una población vulnerable, etc. El peso de la calificación obtenida en la prueba equivale al 85 % y el 15 % es aportado por el récord académico. Sin embargo, se debe tener presente que desde su implementación el examen ENES, en particular, su evaluación y ponderación han sufrido cambios.

En 2016 se eliminó el ENES y el examen Ser Bachiller pasó a tener doble función; así.

■ **Autorización del ingreso a la educación superior de bachilleres**

El ENES medía *aptitudes básicas*, como son: numérica, abstracta y verbal. Este examen no valoraba los *conocimientos* de los bachilleres. La SENESCYT comunicó que, al no medir los conocimientos, no se mide la inteligencia; y, así, con esto se evita discriminar a los bachilleres por factores sociales y económicos.

Los estudiantes GAR se hacían acreedores a becas que ofertaba el gobierno para realizar estudios de tercer y cuarto nivel, en las universidades y politécnicas del país, así también para otros países. Los alumnos tenían que realizar una nivelación donde se recibían materias que necesitaban para el ingreso a los centros de estudios universitarios, tanto nacionales como extranjeros y en algunos casos se los impartía en el idioma del país que fueron seleccionados (Torres, 2020).

■ **El ENES, cambio sus políticas**

El Ministerio de Educación y la SENESCYT, en noviembre del año 2015, comunicaron que a inicios del segundo quimestre del año 2016, las pruebas ser bachiller y ENES se unificarán, teniendo en cuenta que las dos pruebas son muy diferentes, pues ENES mide aptitudes básicas y no conocimientos, en cambio la prueba ser bachiller evalúa las siguientes materias: Estudios Sociales; Ciencias Naturales; Matemáticas; y, Lenguaje y

La SENESCYT, comunicó que el examen consta de 120 preguntas (40 para cada aptitud)

y con un tiempo de duración de 2 horas. Para poder escoger la carrera, dependerá de la nota que se obtuvo. Si adquirió menos de 600 puntos, el estudiante debe tomar el examen nuevamente. Carreras como Medicina y Educación requieren mínimo 800 puntos. Quienes obtienen más de 950 puntos pasan a formar parte del grupo GAR

En el mes de noviembre del años 2019 se cambio el Examen Ser Bachiller:

- Serán un total de 120 preguntas, donde se evaluarán 4 campos: Matemáticas, Lengua y Literatura, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales. Es decir, se eliminaron las preguntas relacionadas a la aptitud Abstracta.
- La duración del examen será de dos horas y media.
- El puntaje para la postulación a la educación superior estará dividido en un 60 % del Ser Bachiller y el 40 % restante será del récord académico del estudiante.

Los alumnos, conjuntamente con sus familias, realizan los mayores esfuerzos para obtener notas muy altas en dicho examen, los estudiantes se prepararon, de acuerdo a la realidad de cada uno de ellos, pues existen institutos privados (que han proliferado, con precios entre USD 90 y más de USD 600) que dictan cursos de preparación. Muchos estudiantes se presentaron al ENES más de una vez. No solo quienes no lograban pasar el examen en la primera oportunidad, sino quienes deseaban mejorar su puntaje para ingresar al GAR, aspirar a otra carrera o conseguir cupo en otra universidad. En 2015 la SENESCYT puso en línea la plataforma para que los estudiantes practiquen el examen; sin embargo, muchos siguieron acudiendo a academias o ayudas particulares (Torres, 2020).

Requisitos para postular en el programa de Becas Internacionales del Grupo de Alto Rendimiento

- Debe ser ecuatoriano en goce de sus derechos.
- Debe poseer su título de bachillerato o cualquier documento que indique aquello.
- Si desea participar en el GAR internacional, deberá contar con una carta de aceptación a un programa de estudios dictado por una institución de educación superior del extranjero.
- Deberá poseer la información correspondiente al programa académico que se desea cursar.
- Pertenecer al GAR.
- Haber aprobado o estar cursando el curso de nivelación especial.
- Finalmente, en caso de tener discapacidad debe ser calificada por la entidad competente.

El problema La deserción de los estudiantes en la educación superior es un problema, que afecta al sistema de educación en el Ecuador. La voluntad por mejorar el conocimiento de los alumnos y tener mayor competitividad con sus congéneres, es de mucha importancia, ya que el fracaso tiene consecuencias sociales, personales e institucionales, pues la deserción educativa puede llegar a generar un impacto negativo en la vida de los educandos, que año con año toman la decisión de desertar.

De forma específica, en esta investigación, con la utilización de un modelo matemático, se busca determinar cuál es el tiempo de permanencia del estudiante GAR en la ESPE, desde que empieza su carrera hasta que se gradúa; de manera particular, la pregunta a responder es:

¿Cuál es el tiempo que permanecen los estudiantes GAR, hasta graduarse, y la probabilidad

de deserción de estos?

Para lo cual, se propone utilizar la teoría de cadenas de Markov para estimar la probabilidad de graduarse o abandonar su carrera.

Objetivos

Objetivo general

Desarrollar un estudio cuantitativo para coadyuvar al desarrollo de estrategias, programas, proyectos y acciones públicas en cuanto a la educación.

Objetivos específicos

Los objetivos del presente trabajo son:

- Elaborar un modelo matemático para predecir la efectividad estudiantil.
- Elaborar un modelo en base a los eventos y datos históricos de los estudiantes.
- Determinar si se presenta mayor deserción en los primeros semestres.
- Precisar cuál es el tiempo de permanencia de un estudiante desde que empieza su carrera hasta que se gradúa.

Estado del arte

A continuación se muestran algunas de las investigaciones encontradas que abordan una temática similar.

Deserción estudiantil

El proceso de adaptación de los alumnos a la vida diaria, en la Universidad de Los altos, en la ciudad de Guadalajara. Se basa en dos fases mixtas; la primera, en el conocimiento cuantitativo y la segunda en el cualitativo, ambas, junto con conocimientos complementarios. En la fase cualitativa se pudo conocer identificar a que carrera son aptos y en la cuantitativa se generaron indicadores para tener información de la comprensión de cada estudiante a las materias. Así, dependiendo de sus estrategias para el estudio y adaptación a la Universidad, se determinó que la adaptación es un proceso complejo y que, el estudiante debe contar con un capital y hábitos que le permita comprender reglas tempranamente, para que llegue al éxito estudiantil (Pérez Pulido, 2016).

Por otra parte, en un estudio más amplio sobre las causas y factores de la deserción universitaria y el desarrolló sobre los niveles de deserción en las Universidades de Ecuador y América Latina (Zambrano et al., 2018) encontraron aspectos como el socio-económico, educativo y psicológico que influyen significativamente en esta problemática. Además; la historia personal y familiar de los estudiantes, así como,; las falencias en la educación media, hacen que la deserción se incremente, sobre todo en los primeros semestres de la Universidad.

La finalidad del gobierno Ecuatoriano en el año 2012, cuando los alumnos rendían el examen de selección para las Universidades (ENES), era conformar un grupo de alumnos con las mejores calificaciones, obtenidas en dicha prueba, para conformar el grupo del alto rendimiento (GAR) y favorecer el ingreso de estudiantes de los grupos más pobres y de diferentes culturas, que históricamente no han sido tomados en cuenta para la Educación Superior; en esta aplicación, 120 estudiantes lograron las más altas calificaciones, y obtuvieron una beca para las Universidades del país o en el extranjero (Mena Andrade et al., 2018).

De manera particular la deserción tiene algunas causas, estas se pueden deberse, desde el curso de nivelación que se dicta antes de ingresar a los primeros semestres de cada facultad, la falta de conocimientos en las áreas matemáticas, físicas y químicas, los sistemas de evaluación, y los recursos económicos insuficientes, por citar algunas razones de la deserción estudiantil (Bravo et al., 2017).

Deserción estudiantil con Cadenas de Markov

La retención estudiantil es un problema para las Universidades, porque es un compromiso con la formación profesional de los estudiantes. En su estudio (González-Campos et al., 2020) investigan sobre la deserción académica en ingeniería, principalmente se basa en la cantidad de veces que pierden una misma materia. Se aplicó cadenas de Markov discretas, para lo cual los estados son equivalentes a la cantidad de veces que repite, o abandona un alumno sus estudios.

En la Universidad del Antiplano, de la ciudad del Perú, en la facultad de Estadística

e Informática, la permanencia de los estudiantes es tomada como un conjunto de acciones que están interrelacionadas para procurar mantener una formación académica; así, se plantea modelar la evolución de la permanencia de los estudiantes en la facultad de Ingeniería, para el periodo 2016 - 2020, con metas y metodologías de desarrollo; por lo cual, se utilizó cadenas de Markov para estimar las probabilidades de que el estudiante se encuentre en un estado o pueda cambiarse en un determinado tiempo. Así, se toma como condición: regular; no regular; reserva de matrícula; se retira de la facultad o egreso. Se analizó la permanencia del estudiante durante su trayecto estudiantil y se concluyó que los estudiantes realizan sus estudios hasta en 15 o más semestres académicos ([Ñaupá, 2017](#)).

Finalmente, en un estudio realizado por ([Rodríguez Ríos, 2012](#)) en la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, se utilizó como muestra a los estudiantes del año 2003 al 2006, para modelar las cadenas de Markov absorbentes. Se aplicó el modelo de regresión logística multinomial para obtener las probabilidades de transición. Con estos datos se pudo determinar el tiempo de permanencia en la universidad, la probabilidad de graduarse y la deserción.

Capítulo II: Marco Teórico

En el presente capítulo se describirán los principales conceptos y técnicas relacionadas a los procesos estocásticos y cadenas de Markov.

Procesos estocásticos

Siguiendo lo establecido por (Rincón, 2012) un proceso estocástico es una colección infinita de variables aleatorias (v.a.), que dependen de la variable tiempo; *ejemplo*, calcular el número total de clientes que han entrado al supermercado en el tiempo t . De manera particular, los procesos estocásticos tienen las siguientes características:

- Es una colección infinita de v.a. indexadas por un parámetro .
- Generalmente dicho parámetro es el tiempo, aunque puede ser cualquier otra dimension física (área, volumen etc.).
- Se denota por $\{X_t, t \in T\}$
- En la práctica, un proceso estocástico se obtiene cuando se observa una v.a. periódicamente.

La v.a. en probabilidades podemos encontrar:

- Individuales (X)
- Vectores de dimensión finita (X_1, X_2, \dots, X_n)

- Vectores de dimensión infinita (X_1, X_2, \dots)

Elementos de un proceso estocástico:

- Definir la variable que se observa periódicamente.
- Periodos de Observación.
- Valores posibles que puede tomar las variables.
- Realizar la matriz de probabilidades de transición.

Explicación de procesos estocásticos

▪ Definición de un proceso estocástico

Cuando un sistema cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo, de acuerdo con una cierta ley de movimiento; si X_t es el estado en tiempo t , el sistema evoluciona de acuerdo a algún mecanismo, con lo cual; X_t es una v.a. para cada valor de t . Las v.a. están relacionadas unas con otras de alguna manera particular.

El proceso estocástico toma como base un espacio de probabilidad (Ω, a, P) para $t \in T \subset R$ y puede enunciarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X_t : (\Omega, a, P) &\rightarrow (R, B) \\ w &\rightarrow X_t(w) \in R, \end{aligned}$$

donde X_t es un v.a. y $\forall w \in \Omega$, $X(w)$ es una función de tiempo.

- Al *conjunto paramétrico* se denomina $T \subset \mathbb{R}$ de subíndices, y este puede ser continuo o numerable.
- El *conjunto de estados* se denomina a E , y tiene los posibles valores que toma las v.a. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$

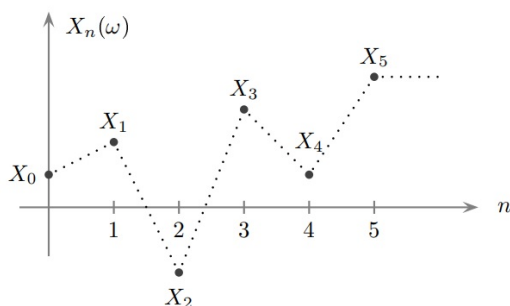
▪ Dirección de procesos estocásticos

Está formada por un conjunto de v.a.

- Vector aleatorio de *dimensión infinita*. Generalmente es un proceso a tiempo discreto y se denota por $X_n; n = 0, 1, \dots$; así, para n , X_n es el valor de X en tiempo n , ver figura 1.

Figura 1

Gráfico de un vector aleatorio de dimensión infinita.

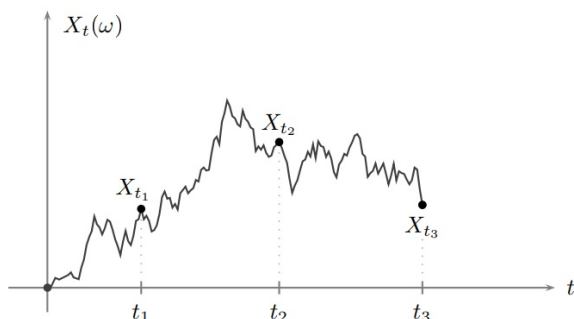


Nota. Gráfica de una trayectoria de un proceso estocástico discreto. Tomado de (Rincón, 2012)

- Trayectoria de un *movimiento Browniano*. Con los valores de t en T , implica que $w \mapsto X_t(w)$ sea una v.a., en cambio para w en Ω fijo, la función $t \mapsto X_t(w)$ se llama trayectoria, ver figura 2.

Figura 2

Trayectoria de un movimiento Browniano



Nota. Gráfica de una trayectoria de un proceso estocástico continuo. Tomado de (Rincón, 2012)

■ Clasificación de Procesos Estocásticos

Se pueden clasificar según su estructura y sus características.

- Por la *estructura*. Los procesos estocásticos se pueden ordenar en cuatro categorías; en particular esto dependerá de T , cuando es un conjunto numerable o continuo, así también. Si la v.a. (X) es otro conjunto numerable o continuo. Esto se puede ver en la tabla 1.

Tabla 1

Clasificación de los procesos estocásticos.

	Tiempo Discreto	Tiempo Continuo
(v.a.d.)	Cadena.	Proceso Puntual.
(v.a.c.)	Sucesión de v.a.	Proceso Continuo.

Nota. Variable aleatoria discreta (**v.a.d.**), Variable aleatoria continua (**v.a.c.**). Tomado de (Rivas

and Delgadillo (2016))

- Por las *características*. Se pueden clasificar los procesos en:
 - Procesos estacionarios,
 - Procesos Markovianos; y,
 - Procesos independientes de incrementos.

Clasificación de los procesos estocásticos de acuerdo al parámetro temporal y el espacio de estado

■ Procesos discretos a tiempo discreto

Un proceso estocástico es una *Cadena* cuando el tiempo tiene una trayectoria discreta, la v.a. adquiere valores discretos en el espacio de los estados.

Ejemplo: Unidades producidas mensualmente de un producto

Un proceso es discreto a tiempo discreto, cuando el espacio de estado S es numerable y el espacio del parámetro temporal T es numerable, es decir, es una sucesión de v.a X_n $n \in N$ que toman valores en el conjunto S si $(S = 0, 1, 2, \dots)$, donde T tiene que ser observada en tiempos definidos, que se describen mediante un periodo (hora, día, semana, etc.) o puede estar dentro de una acción (después de una observación).

Por otra parte, S se puede contar en el sistema y, la probabilidad de transición en una

v.a. X_n son valores de las variables, con lo cual, se tiene:

$$P(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

■ Procesos discretos a tiempo continuo

Es un proceso estocástico de saltos puros, cuando cambian de estados. Se producen de forma aleatoria y aislada; sin embargo, a la variable aleatoria se le asignan valores discretos en estos estados.

Ejemplo: Unidades producidas hasta el instante t

Para el espacio S numerable, con parámetro temporal T infinito no numerable, se trata de una colección de variables $X(t)_{t>0}$ con espacios de estados discretos ($S = 0, 1, 2, \dots$).

T es de la forma $[0, \infty)$, lo cual significa que el estado del sistema se puede observar en cualquier tiempo $T = [t_1, t_2]$.

S es numerable, entonces se puede contar. En este proceso el tiempo t se selecciona de una colección finita de tiempos $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, y la probabilidad es:

$$P(X(t_k) = x_k \mid X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{k-1}) = x_{k-1})$$

■ Procesos continuos a tiempo discreto

Se lo reconoce cuando el proceso es discreto a tiempo continuo. E estado, S es numerable y el parámetro está en un conjunto T infinito no numerable. De esta forma es una colección de variables X_n en un espacio discreto $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Ejemplo: Toneladas de producción diaria de un producto. El espacio de estado S es infinito no numerable y el conjunto T es numerable, las v.a. X_n $n \in N$ toman valores de un estado de forma $S = [a, b]$, $S = R^+$

La observación se hace en tiempos definidos, es algo que no se puede contar pero si se puede medir.

La probabilidad de X_n toma valores en un conjunto A , dado que $S_{(n-1)}$, v.a. toman ciertos valores :

$$P(X_n \in A \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

■ Procesos continuos a tiempo continuo

En un Proceso Continuo los cambios de estado se producen en cualquier instante y hacia cualquier estado, dentro de un espacio continuo de estados.

Ejemplo: Velocidad de un vehículo en el instante t

S es infinito no numerable con el parámetro temporal T , este no es no numerable, el cual es una colección de v.a $X(t)_{t>0}$ con un espacio de estado de $S = [a, b]$, $S = R$.

Su característica es que se puede dar en cualquier instante de tiempo. Un ejemplo representativo es el movimiento Browniano .

La probabilidad se calcula con tiempos finitos $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ y está dada por:

$$P(X(t_k) \in A \mid X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{k-1}) = x_{k-1})$$

(Vir, 2016)

Clasificación de los procesos estocásticos de acuerdo a las características probabilísticas de las v.a.

Están determinadas por diferentes relaciones de dependencia entre las variables X_t que las forman.

■ Procesos con incrementos independientes

Sea $(X_t)_{t \in T}$ un proceso a tiempo continuo.

Se dice un proceso de incrementos independientes si para todos $X(t)$, $t_{m-1} < t_m$ la diferencia $X(t_m) - X(t_{m-1})$, indica su incremento en el intervalo de tiempo $(t_{m-1}, t_m]$.

En X_n , los incrementos se presentan por $X_n - X_{n-1}$, es decir,

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

y son independientes para cualquier tiempo $t_0 < t < t_2 \dots < t_k$, para X_t . Si se trata a tiempos discretos (X_n), los procesos son independientes si para cada n tenemos que

$$X_0, X_1 - X_0, X_2 - X_1, \dots, X_n - X_{n-1}$$

son variables aleatorias independientes. Esto significa que puede haber ocurrido en intervalos ajenos, es decir, no afecta la probabilidad de los eventos relacionados.

■ Procesos de Markov

- Este proceso tiene la propiedad de que el comportamiento de la probabilidad futura esta definida si conocemos el estado actual, para n tiempos $t_1 < \dots < t_n$ se tiene:

$$P_{1|n-1}(y_n, t_n | y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1}) = P_{1|1}(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1})$$

- Este proceso esta señalado por dos funciones $P_1(y_1, t_1)$ y $P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1)$. A partir de estas funciones se puede obtener toda la jerarquía de probabilidades; por ejemplo, para $t_1 < t_2 < t_3$ se tiene:

$$\begin{aligned} P_3(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) &= P_2(y_1, t_1; y_2, t_2)P_{1|2}(y_3, t_3 | y_1, t_1; y_2, t_2) \\ &= P_1(y_1, t_1)P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1)P_{1|1}(y_3, t_3; y_2, t_2) \end{aligned}$$

y este algoritmo se puede seguir para calcular todas las P_n .

■ Procesos estacionarios u homogéneos en el tiempo

Un proceso en tiempo continuo $X(t)$ es estacionario, si la variables $X(t_1 + h), X(t_2 + h), \dots, X(t_k + h)$ son iguales a la distribución de variables $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$, $h > 0$, para cualquier tiempo t_1, t_2, \dots, t_k .

En un tiempo (X_n) se tiene que:

- Es un proceso estrictamente estacionario si la densidad de X_1, X_2, \dots, X_n es igual la densidad de $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{m+n}$, para $\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$.
- Procesos con incremento estacionarios si $X_n - X_{n-1}$ y $X_{n+m} - X_{n+m-1}$, tienen la misma distribución.

Las cadenas de Markov

Se conoce como a la sucesión de observaciones con un determinado número de resultados, con su respectiva probabilidad, los cuales dependen solo del resultado de la etapa inmediatamente anterior. En otras palabras, el evento futuro solo depende del presente y no del pasado.

En un sentido más formal se tiene que si $T \subset R$ y (Ω, a, P) es un espacio de probabilidad tal que

$$X : T \times \Omega \Rightarrow R,$$

donde $t \in T$, y $X(t)$ es un estado del proceso en el instante t .

Una *Cadena de Markov* a tiempos cronológicos t_0, t_1, \dots, t_n , formado por una familia de v.a. $\{X_{t_n}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un proceso Markov si:

$$P\{X_{t_n} = X_n | X_{t_{n-1}} = X_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} = X_n | X_{t_{n-1}} = X_{n-1}\}.$$

Para los procesos markovianos con n v.a que son mutuamente excluyentes, sus probabilidades en un punto determinado del tiempo $t = 0, 1, 2, \dots$ se definen como:

$$P_{ij} = P\{X_t = j | X_{t-1} = i\},$$

con $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, y $t = 0, 1, 2, \dots, T$

Así, la *probabilidad de transición cuando da un paso* es cuando pasa del estado i al estado j en un tiempo $t-1$; por lo tanto, se tiene que

$$\sum_j P_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$P_{ij} \geq 0, \quad (i, j) = 1, 2, \dots, n$$

Elementos de la cadena de Markov

- Espacio de estados $E = E_1, E_2, \dots, E_n$;
- Periodo de transición;
- Matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

siendo $p_{ij} = P(X_{t+1} = E_j / X_t = E_i)$; y,

- Distribución inicial $P^{(0)} = (P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_n^{(0)})$.

Importancia

Las cadenas de Markov permite calcular la probabilidad de un sistema que se encuentra en un estado particular en un momento dado, con lo cual nos permite encontrar el promedio de sus probabilidades para un estado estable.

Ventajas

- Es muy fácil de entender y aplicar.
- Los cálculos de probabilidades se realizan fácilmente.

- Podemos tener con el tiempo una visión clara de los cambios que se puede dar en un sistema.

Desventajas

- Es un proceso de toma de decisiones complejo, a partir de un modelo muy simplificado.

Utilización

- *En la biología* (Predicción y comportamiento de las moléculas).
- *En la Genética* (Las especies y su evolución).
- *En el Marketing* (Comportamiento de clientes).

Probabilidades de transición de n pasos

Si en una matriz de transición P , de una cadena de Markov con el vector de probabilidades iniciales $a^{(0)} = \{a_j^{(0)}, j = 1, 2, \dots, n\}$, se tienen unas probabilidades absolutas $a^{(n)} = \{a_j^{(n)}, j = 1, 2, \dots, n\}$ después de $n > 0$ cambios; podemos definir:

$$a^{(1)} = a^{(0)}P,$$

$$a^{(2)} = a^{(1)}P = a^{(0)}PP = a^{(0)}P^2,$$

$$a^{(3)} = a^{(2)}P = a^{(0)}P^2P = a^{(0)}P^3,$$

$$\vdots$$

$$a^{(n)} = a^{(0)}P^n$$

La matriz P^n se conoce como la matriz de transición de n pasos. A partir de estos cálculos, podemos ver que:

$$P^{(n)} = P^{(n-1)}P$$

y

$$P^n = P^{n-m}P^m, \quad 0 < m < n.$$

Éstas se conocen como ecuaciones de *Chapman-Kolomogorov*.

Podemos manifestar que P_{ij}^n es el elemento ij -ésimo de la matriz P^n , tal que

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1} P_{ik}^m \cdot P_{kj}^{n-m},$$

para $n = 0$, $P_{ij}^0 = P(X_0 = j / X_0 = i)$ y; por lo tanto,

$$P_{ij}^0 = 1, \text{ si } i = j,$$

$$P_{ij}^0 = 0, \text{ si } i \neq j$$

(Taha, 2004)

Gráficos para Cadenas de Markov.

Para cada matriz P indexada no negativa, para un **estado j** , se puede asociar un gráfico de la siguiente manera:

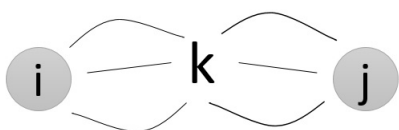
Sea $P_{ij} \in P$, sabiendo que $P_{ij} > 0$ se dibujará un arco dirigido desde **i** hasta **j** , en el cual

se asocia un P_{ij} a tal arco.

Probabilidad de transición de 2 etapas

Figura 3

Probabilidad de transición de 2 etapas.



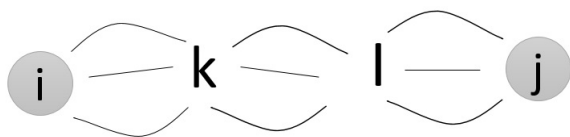
Nota. Gráfico para pasar del estado i al estado j en dos etapas. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

$$P_{ij}^2 = \sum_k P_{ik} \cdot P_{kj}$$

$$P_{ij}^2 = P(X_{m+2} = j / X_m = i)$$

Probabilidad de transición de 3 etapas

Figura 4



Nota. Gráfico para pasar del estado i al estado j en tres etapas. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

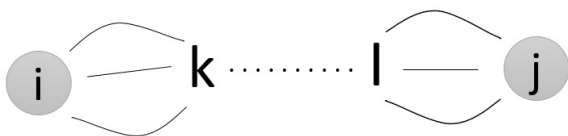
$$P_{ij}^3 = \sum_k \sum_l (P_{ik} \cdot P_{kl} \cdot P_{lj})$$

$$P_{ij}^3 = P(X_{m+3} = j / X_m = i)$$

Probabilidad de transición de n etapas

Figura 5

Probabilidad de transición de n etapas.



Nota. Gráfico para pasar del estado i al estado j en n etapas. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

En base a o indicado podemos generalizar, de tal forma que

$$P^n = P^* . P^* . P^* \dots P \text{ (n veces) y}$$

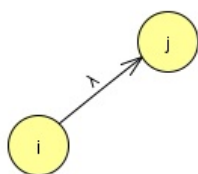
$$P_{ij}^n = P(X_{n+m} = j / X_m = i)$$

Clasificación de los estados de una cadena de Markov

- Cuando se tiene dos estados i y j , su **trayectoria** de i a j , es el procedimiento de cambios que se inicia en i y termina en j , teniendo en cada transición probabilidades mayores que cero.

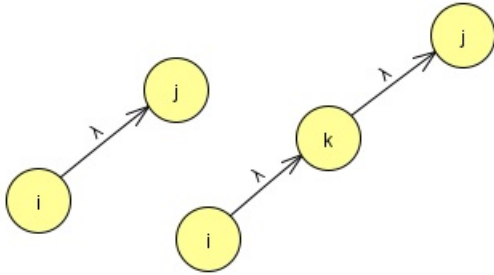
Figura 6

Trayectoria de un estado

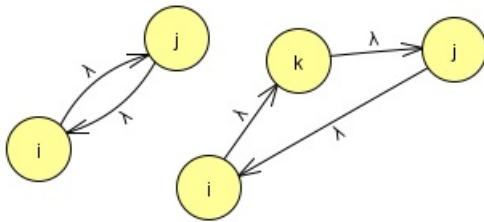


Nota. Gráfico de la trayectoria, para pasar del estado i al estado j . Tomado de (Rojas Polo, 2018)

- Un estado j se lo conoce como **alcanzable**, cuando empieza en el estado i y mantiene una trayectoria, que inicia en i y llega a j . ver figura 7
- Se dice que dos estados i y j se **comunican**, cuando el estado j es asequible el estado i , y el estado i es asequible desde el estado j . ver figura 8

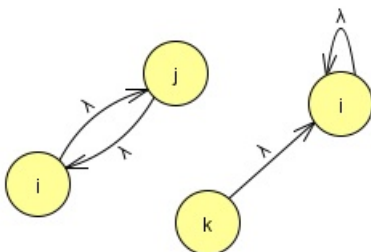
Figura 7*Estado alcanzable*

Nota. Gráfico de la trayectoria, de un estado alcanzable. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

Figura 8*Comunicación de Estados*

Nota. Gráfico de la trayectoria, de la comunicación de estados. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

- Se define como **conjunto cerrado**, si ningún estado fuera de S es asequible cuando comienza en el estado S ,

Figura 9*Conjunto cerrado*

Nota. Gráfico de la trayectoria, de conjuntos cerrados. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

- Se dice **estado absorbente**, es cuando una vez que ingresa al estado, este no puede salir de dicho estado, para E_i se tiene:

$$p_{ii} = 1$$

$$p_{ij} = 0 \quad (i \neq j, j = 1, \dots, m)$$

para i -ésima fila de T .

Figura 10

Estado absorbente



Nota. Gráfico de la trayectoria, para el estado absorbente. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

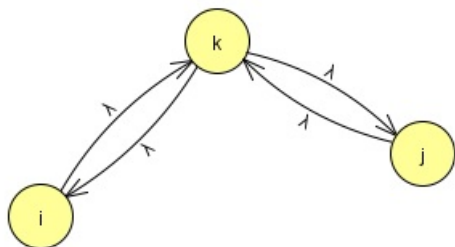
- Se dice **estado periódico**, cuando existe la probabilidad de que se regrese al estado E_i . En particular cuando se encuentre en un paso n , es decir, para $t > 1$ tenemos

$$p_{ii}^{(0)} = 0 \quad \text{para } n \neq t, 2t, 3t, \dots$$

E_i de denomina periódico para un periodo t .

Figura11

Estado periódico



Nota. Gráfico de la trayectoria, para el estado periódico. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

- Se dice **estado recurrente**, cuando para $f_j^{(n)}$, que es la probabilidad para la primera visita al estado E_j para una etapa n , la probabilidad anterior es diferente a $p_{jj}^{(n)}$. En base a esto se tiene que

$$P_{jj}^{(1)} = f_j^{(1)}$$

$$P_{jj}^{(2)} = f_j^{(2)} + f_j^{(1)} P_{jj}^{(1)}$$

$$P_{jj}^{(3)} = f_j^{(3)} + f_j^{(1)} P_{jj}^{(2)} + f_j^{(2)} P_{jj}^{(1)}$$

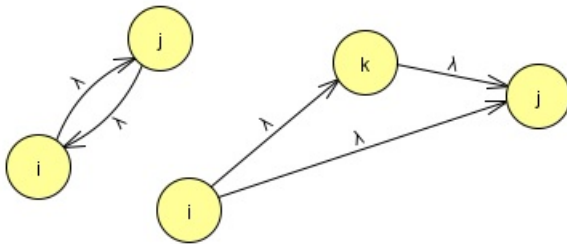
En resumen, encontramos que

$$P_{jj}^{(3)} = f_j^{(3)} + \sum_{r=1}^{n-1} f_j^{(r)} P_{jj}^{(n-r)}.$$

Si tenemos que $f_j = 1$, este se regresa a E_j , con lo cual tenemos el estado recurrente.

Figura 12

Estado recurrente



Nota. Gráfico de la trayectoria, para el Estado recurrente. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

- se dice **estado transitorio**, cuando nos encontramos con un estado recurrente, que cuando se regresa por primera vez la probabilidad es 1; así, un estado j es accesible desde i , pero el estado i no es accesible desde j , y para otros estados tenemos que

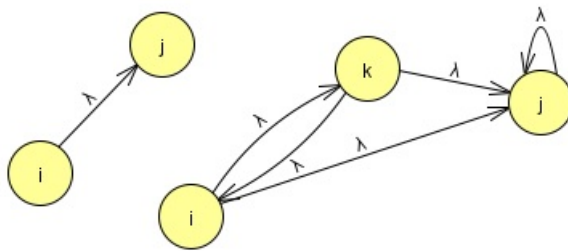
$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < 1,$$

con lo cual no regresa al estado E_j , ver figura 13

- Se dice **estado aperiódico**, es cuando el estado es recurrente y no es periódico, ver figura 14.
- Se dice **estado ergódico**, cuando existen estados que se repiten varias veces, no nulos y son aperiódicos.

Figura 13

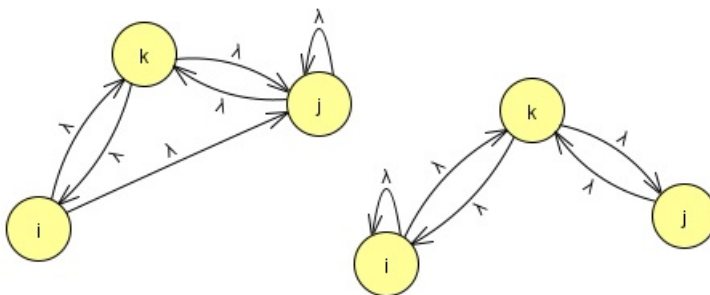
Estado Transitorio



Nota. Gráfico de la trayectoria, para el estado transitorio. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

Figura 14

Estado aperiódico



Nota. Gráfico de la trayectoria, para el estado aperiódico. Tomado de (Rojas Polo, 2018)

Probabilidades de estado estable

Para una matriz P de transición y en una cadena ergódica de S estados, se tiene que

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Estas probabilidades, las cuales son independientes de $\{a_j^{(0)}\}$, se pueden determinar de las ecuaciones

$$\pi = \pi P$$

y

$$\sum_j \pi_j = 1.$$

Lo que $\pi = \pi P$ dice es que las probabilidades π permanecen sin cambiar después de una transición adicional; y, por esta razón, representan la distribución de estado estable.

Un subproducto directo de las probabilidades de estado estable es la determinación del número esperado de transiciones. Esto se conoce como *el tiempo medio del primer retorno* o *tiempo medio de recurrencia* y es el subproducto de las probabilidades del estado estable del número esperado de transiciones, antes de que el sistema regrese a un estado j por primera vez. Se calculan n estados como

$$u_{jj} = \frac{1}{\pi_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Tiempo del primer paso

El *tiempo medio del primer paso* u_{ij} , definido como el número esperado de transiciones para llegar por primera vez al estado j desde el estado i . Los cálculos se tienen en la probabilidad de *al menos* un paso del estado i al estado j , definido como $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, donde $f_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad

del primer paso del estado i al estado j en n transiciones. Se puede determinar una expresión para $f_{ij}^{(n)}$ recursivamente a partir de

$$P_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} P_{ij}^{(n-k)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se supone que la matriz de transiciones $P = \| P_{ij} \|$ tiene m estados.

- Si $f_{ij} < 1$, no es seguro que el sistema pase alguna vez del estado i al estado j y $u_{ij} = \infty$.
- Si $f_{ij} = 1$, la cadena de Markov es ergódica, y el *tiempo medio del primer paso* del estado i al estado j se calcula como

$$u_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}.$$

Una forma más simple de determinar el tiempo medio del primer paso de todos los estados en una matriz de n transiciones, P , es utilizar la siguiente fórmula basada en una matriz

$$\| u_{ij} \| = (I - N_j)^{-1} \mathbf{1}, \quad j \neq i$$

donde

- I : matriz de identidad $(m - 1)$;
- N_j : Matriz de transiciones P , sin su fila j -ésima y columna j -ésima del estado destino j ; y,
- $\mathbf{1}$: vector columna $(m - 1)$ con todos los elementos iguales a 1.

La operación matricial $(I - N_j)^{-1} \mathbf{1}$, suma en esencia las columnas de $(I - N_j)^{-1}$.

Análisis de los estados absorbentes

El análisis de las cadenas de Markov con estados absorbentes puede realizarse de forma conveniente con matrices. En primer lugar, la cadena de Markov se particiona como sigue:

$$P = \left(\begin{array}{c|c} N & A \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

La disposición requiere que todos los estados absorbentes ocupen la esquina sureste de la nueva matriz.

Dada la definición de A , N y el vector columna unitario 1 , se puede demostrar que el:

- Tiempo esperado en el estado j iniciado en el estado i es igual a el elemento (i, j) de $(I - N)^{-1}$;
- Tiempo esperado para la absorción es igual a $(I - N)^{-1}1$; y,
- Probabilidad de la absorción es igual a $(I - N)^{-1}A$.

(Taha, 2012)

Capítulo III: Metodología

Para la deserción estudiantil se puede realizar un análisis como:

- *Fenómeno complejo y multicausal*, pues es un fenómeno complejo, que no se ha podido determinar sus causas con exactitud, ya que involucra factores académicos, personales, institucionales y/o socio demográficos.
- *Exclusión social*, pues no solo se lo toma como un abandono definitivo de las aulas de las Universidades, si no como un abandono de formación académica que tiene repercusiones sociales; y, si esta deserción es temprana, es un fracaso no solo personal, sino también de las Universidades.
- *Estudio cuantitativo*, pues la investigación cuantitativa puede detectar indicadores que ayuden a identificar las causas, los enfoques de cada Universidad o programas académicos; así, con la utilización de modelos matemáticos, se puede explicar el fenómeno desde el campo individual, social, de factores socio-económicos o institucionales.

Recolección de datos

El enfoque dado a la investigación es de carácter cuantitativo, y la recolección de la información se basa en los reportes de la Universidad y la Senescyt.

- **Población y muestra**

Se consideró la información académica de la ESPE, de manera particular los estudiantes denominados GAR, la cual se cuenta desde el año 2010 al 2019. No se cuenta con información socio económica de estudiantes GAR.

■ Diseño del estudio

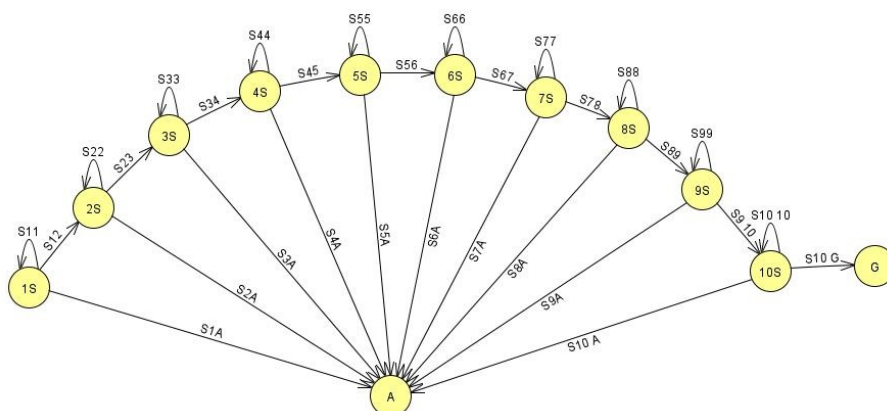
Esta investigación se realizará como estudio de caso, de carácter cuantitativo, donde se identificarán las variables de tipo académicas más relevantes utilizando técnicas estadísticas.

La metodología se sustenta en el modelo de flujos de educación estudiantil, utilizando las cadenas de Markov, pues los estudiantes fluyen de semestre a semestre, hasta alcanzar su graduación. Cuando el estudiante ingresa a realizar sus estudios tiene tres posibilidades:

- Cuando cursa un determinado semestre, si el alumno decide retirarse de la ESPE, se considera como deserción o abandono. En el modelo de Markov se considera un estado absorbente, porque ya no puede seguir estudiando, en la figura 15 se representa como **SiA**, para $i=1...10$.
- El estudiante pierde el semestre y opta por repetir para continuar con sus estudios, en la figura 15 se representa como **Sii**, para $i=1...10$.
- El estudiante pasa el semestre, y sigue sus estudios, hasta que se gradúa, en la figura 15 se representa como **Si(i+1)**, para $i=1...10$. Cuando el alumno se gradúa se considera un estado absorbente.

Figura 15

Diagrama de transición



Nota. Gráfico del diagrama de transición para estudiantes de 10 semestres.

Cada nodo representa un semestre académico, Semestre ($1S, 2S, \dots, 10S, G, A$), cuando el estudiante abandona sus estudios (A), significa que ya no regresa a estudiar, al igual que cuando se gradúa (G). La matriz de transición se muestra en la tabla 2.

Tabla 2

Matriz de transición.

	1S	2S	3S	4S	5S	6S	7S	8S	9S	10S	G	A
1S	S11	S12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	S1A
2S	0	S22	S23	0	0	0	0	0	0	0	0	S2A
3S	0	0	S33	S34	0	0	0	0	0	0	0	S3A
4S	0	0	0	S44	S45	0	0	0	0	0	0	S4A
5S	0	0	0	0	S55	S56	0	0	0	0	0	S5A
6S	0	0	0	0	0	S66	S67	0	0	0	0	S6A
7S	0	0	0	0	0	0	S77	S78	0	0	0	S7A
8S	0	0	0	0	0	0	0	S88	S89	0	0	S8A
9S	0	0	0	0	0	0	0	0	S99	S9 10	0	S9A
10S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	S10 10	S10 G	S10A
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Nota. Tabla de la matriz de transición para alumnos de 10 semestres.

Las filas representan los estados iniciales que puede tener el estudiante y las columnas el estado siguiente, los ceros representan que no es posible ese cambio de estado y, los valores son las 17 probabilidades que se tienen. Estas probabilidades deben sumar 1 por cada fila.

■ **Variable Y_n**

Para modelar el proceso Markoviano se definió la variable Y_n como el promedio ponderado de

las notas y los créditos de las asignaturas cursadas en un semestre n . Esta variable es categórica ordenada y toma tres valores: 1 si el estudiante se retira en ese semestre; 2 si repite y 3 si el estudiante pasa al siguiente semestre.

Cuando un alumno finaliza un periodo de estudio, obtiene unas notas de las asignaturas cursadas; así, con base en estas y sus respectivos créditos académicos, se calcula el promedio ponderado del semestre; por lo cual, si el promedio ponderado da menor que 14, el estudiante pierde el semestre y a la variable dependiente se le asigna 2. Si, por el contrario, el promedio es mayor o igual que 14, se le asigna 3 a la variable dependiente. Si el estudiante se retira, se le coloca 1 a la variable dependiente, en el último semestre que el estudiante haya cursado.

■ **Procedimientos**

En la base de datos de los alumnos GAR se procedió a realizar los procedimientos de reducción, recodificación, integración y de limpieza respectiva de los mismos. Se normalizo dicha base y, se utilizó el programa *Power BI* para identificar la variable dependiente por cada uno de los periodos.

Caso de estudio

- *Definición de estados.* Considerada la información estadística de los alumnos GAR de la ESPE, desde los años 2010 al 2019; encontramos año de ingreso, estudiantes, niveles que han cursado, notas y carrera que han escogido. Con esta base se definirá los estados (E).
- *Construcción de la matriz de transiciones.* Con base en la información presentada semestre por semestre, se contabilizarán a los que pasaron del estado i hacia el estado j , durante el periodo de observación, desde el 2010 al 2019.

Capítulo IV: Análisis de resultados

La información que se tiene de la población, nos facilita calcular datos que permitan tener características de los estudiantes GAR, de la ESPE, desde el año 2010 al 2019, con el fin de identificar el semestre en el cual los estudiantes tendrían mayor probabilidad de desertar de la Universidad. En la base de datos de los alumnos GAR, se encontraron 578 estudiantes que ingresaron a la ESPE para tomar sus respectivas carreras; luego de los cursos de nivelación, 122 alumnos por diferentes motivos desertaron de las aulas, representa el 21,22 %, es decir, no continuaron los estudios en la ESPE. Con los 456 alumnos restantes, se procedió a realizar el respectivo análisis y modelo.

Promociones Alumnos GAR

En esta sección se presenta un análisis descriptivo de los alumnos GAR que ingresaron a estudiar una carrera en la ESPE, clasificados por promoción.

En la tabla 3 se presenta las promociones con el periodo en el cual ingresaron los alumnos.

La figura 16 compara la cantidad de alumnos GAR que han ingresado a estudiar en cada promoción en la ESPE; así, encontramos que en la tercera promoción, ingresaron 293 alumnos GAR, que representan el 64,25 %; las otras 16 promociones representan el 35,75 %. compara la cantidad de alumnos GAR que han ingresado a estudiar en cada promoción en la ESPE; así, encontramos que en la tercera promoción, ingresaron 293 alumnos GAR, que representan el 64,25 %; las otras 16 promociones representan el 35,75 %.

Tabla 3

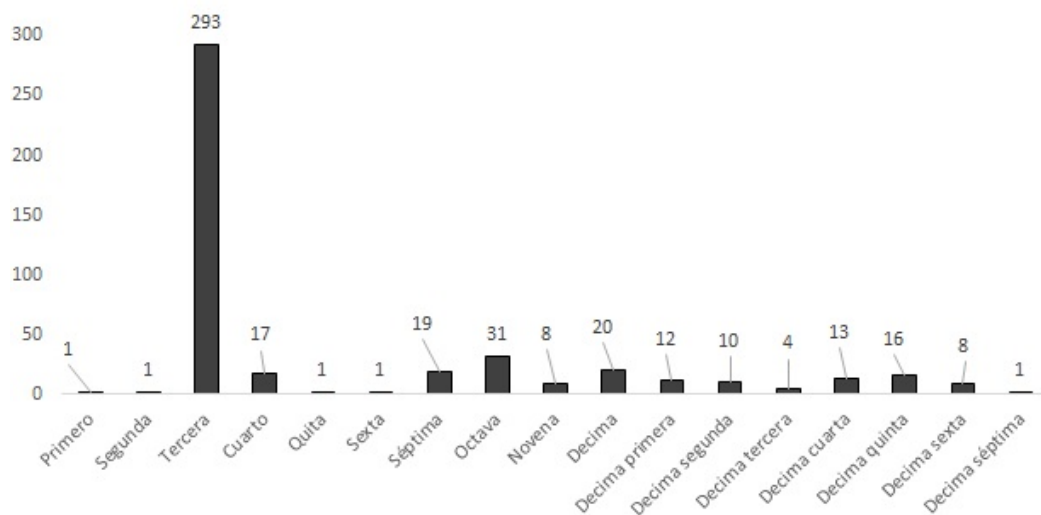
Promociones de los Alumnos GA.

Semestre	Promoción	Estudiantes	%	Semestre	Promoción	Estudiantes	%
Sep10-ene11	Primera	1	0,22 %	Abr15-Ago15	Decima	20	4,39 %
Sep11-feb12	Segunda	1	0,22 %	CCMM 2015	Decima primera	12	2,63 %
Mar12-ago12	Tercera	293	64,25 %	Oct15-Feb16	Decima segunda	10	2,19 %
Sep12-ene13	Cuarta	17	3,73 %	Abr16-Ago16	Decima tercera	4	0,88 %
Ccmm 2013	Quita	1	0,22 %	Oct16-Feb17	Decima cuarta	13	2,85 %
Mar13-Jul13	Sexta	1	0,22 %	Abr17-Ago17	Decima quinta	16	3,51 %
Ago13-Dic13	Séptima	19	4,17 %	Oct17-Feb18	Decima sexta	8	1,75 %
Mar14-Ago14	Octava	31	6,80 %	Abr18-Ago18	Decima séptima	1	0,22 %
Oct14-Feb15	Novena	8	1,75 %				

Nota. Tabla de promociones de alumnos GAR ESPE.

Figura 16

Promociones de los Alumnos GAR

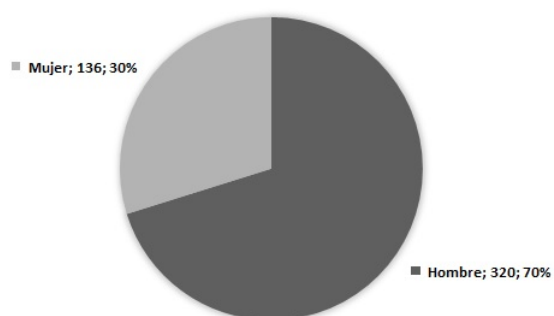


Nota. Gráfico de promociones alumnos GAR.

Genero Alumnos GAR

Figura 17

Genero de los alumnos GAR



Nota. Gráfico de genero de los alumnos GAR.

La figura 17 muestra las proporciones de los alumnos GAR sobre clasificaciones de género. El género masculino representa el 70 %, mientras el género femenino es el 30 % .

Figura 18

Campus y Genero de los Alumnos GAR



Nota. Gráfico campus y genero de los alumnos GAR.

En la figura 18 se compara la cantidad de alumnos GAR por género que han ingresado a estudiar en cada campus en la ESPE; así, encontramos 286 alumnos hombres y 122 mujeres que estudian en el Campus Matriz ESPE. Esto representa el 89,47 %, en comparación con los otros campus.

Tabla 4

Campus y Genero de los Alumnos GAR.

Campus	Hombre	Mujer	Total general
Espe matriz Sangolquí	62,72 %	26,75 %	89,47 %
Espe sede Latacunga	5,92 %	1,54 %	7,46 %
Hacienda el prado	0,44 %	0,66 %	1,10 %
Espe a distancia	0,22 %	0,44 %	0,66 %
Unidad Acad. Especial salinas	0,66 %	0,00 %	0,66 %
Tecnología aeronáutica Itga	0,22 %	0,22 %	0,44 %
Héroes del Cenepa	0,00 %	0,22 %	0,22 %
	70,18 %	29,82 %	100,00 %

Nota. Tabla Campus y Genero de los Alumnos GAR.

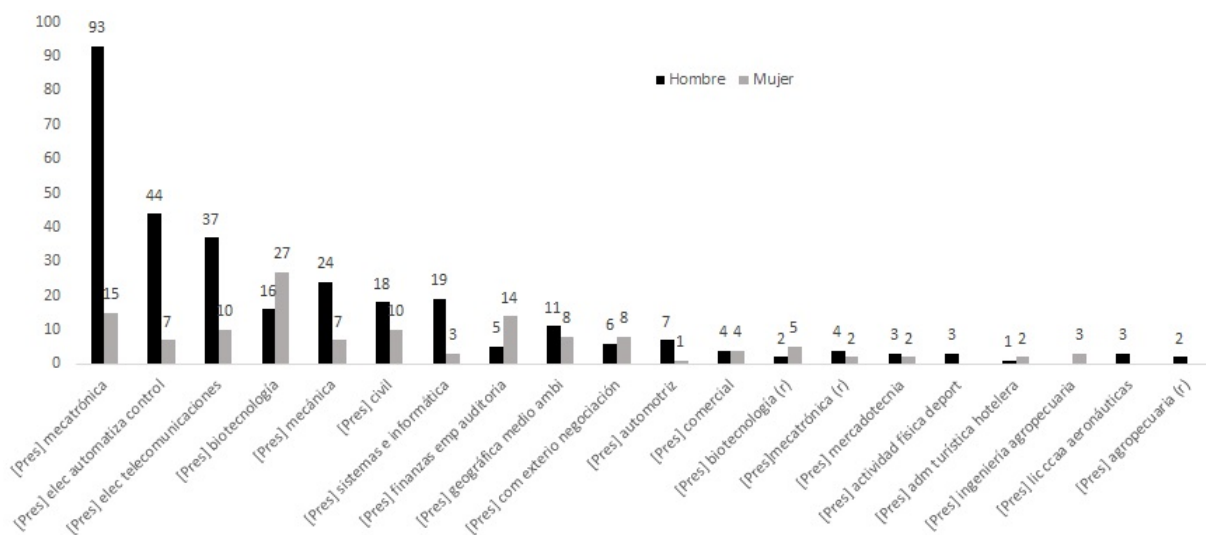
En la tabla 4 encontramos que el 89,47 % de alumnos GAR estudian en el campus ESPE matriz, Sangolquí, y el 10,53 % en los otros campus de la Universidad. Encontramos que el 62,72 % son de género masculino. La menor cantidad de estudiantes GAR estudian en el campus Héroes del Cenepa. En el campus Unidad Acad. Especial Salinas, no tenemos la presencia de estudiantes de género femenino.

En la figura 19, se compara la cantidad de alumnos GAR por género que han ingresado a estudiar en cada Carrera; así, encontramos que 93 hombres y 15 mujeres, estudian la carrera de

Mecatrónica, que representa el 23,68 % de todos los alumnos GAR. Las carreras técnicas son las de mayor preferencia, pues representan el 23,68 %, y se tiene que la preferencia de las mujeres, es para la carrera de Biotecnología con una representación del 5,92 %, luego se encuentra la carrera de Finanzas de Empresas con Auditoria, con un representación del 4,17 %. En tercer lugar, encontramos a las carreras de Ing. Civil, e Ing. Electrónica y Telecomunicaciones, cada una representa el 2,19 %. En las carreras de Lic. CCAA Aeronáuticas; Elec. Instrumentación; Administración de empresas; Tec. Computación; Ing. Software; Tec. m. Aviónica, no encontramos la presencia femenina; y, en las carreras de Ing. Agropecuaria, Tec. Logística y Transporte no se tiene registros de alumnos GAR.

Figura 19

Carrera y Genero de los Alumnos GAR



Nota. Gráfico de Carrera y Genero de los Alumnos GAR.

Tabla 5

Carreras y Genero de los Alumnos GAR.

Carrera	Hombre	Mujer	Total	Carrera	Hombre	Mujer	Total
Pres. Mecatrónica	20,39 %	3,29 %	23,68 %	Pres. Elec e instrumentación	0,44 %	0,00 %	0,44 %
Pres. Elec automatiza control	9,65 %	1,54 %	11,18 %	Pres. Finanzas y auditoria	0,44 %	0,00 %	0,44 %
Pres. Elec telecomunicaciones	8,11 %	2,19 %	10,31 %	Pres. petroquímica	0,22 %	0,22 %	0,44 %
Pres. Biotecnología	3,51 %	5,92 %	9,43 %	Pres. Ingeniería automotriz (r)	0,44 %	0,00 %	0,44 %
Pres. Mecánica	5,26 %	1,54 %	6,80 %	Dist. Adm educativa	0,00 %	0,22 %	0,22 %
Pres. Civil	3,95 %	2,19 %	6,14 %	Dist. Finanzas Emp. auditoria	0,00 %	0,22 %	0,22 %
Pres. Sistemas e informática	4,17 %	0,66 %	4,82 %	Dist. Tec computación	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Finanzas Emp. auditoria	1,10 %	3,07 %	4,17 %	Pres. administración de empre	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Geográfica medio ambi	2,41 %	1,75 %	4,17 %	Pres. Comercio exterior (r)	0,00 %	0,22 %	0,22 %
Pres. Com exterior negociación	1,32 %	1,75 %	3,07 %	Pres. Ing software	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Automotriz	1,54 %	0,22 %	1,75 %	Pres. Mecánica (r)	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Comercial	0,88 %	0,88 %	1,75 %	Pres. Mercadotecnia (r)	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Biotecnología (r)	0,44 %	1,10 %	1,54 %	Pres. Tec ele inst m.avionica	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Mecatrónica (r)	0,88 %	0,44 %	1,32 %	Pres. Tec logística transport	0,00 %	0,22 %	0,22 %
Pres. Mercadotecnia	0,66 %	0,44 %	1,10 %	Pres. Tecnologías infor (r)	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Actividad física deport	0,66 %	0,00 %	0,66 %	Pres. Turismo (r)	0,00 %	0,22 %	0,22 %
Pres. Adm turística hotelera	0,22 %	0,44 %	0,66 %	Pres. electrónica y automa (r)	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Ingeniería agropecuaria	0,00 %	0,66 %	0,66 %	Pres. ingeniería Civil (r)	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Lic ccaa aeronáuticas	0,66 %	0,00 %	0,66 %	Pres. Software (r)	0,22 %	0,00 %	0,22 %
Pres. Agropecuaria (r)	0,44 %	0,00 %	0,44 %	Pres. telecomunicaciones (r)	0,00 %	0,22 %	0,22 %
Pres. Educación infantil	0,22 %	0,22 %	0,44 %				

Nota: (Pres, significa Presencial, Dist, Distancia, (r) Reestructurada)

En la tabla 5 se puede ver el detalle de la distribución de alumnos por carrera y género.

Titulación de los Alumnos GAR

Luego de cumplir con todos los requisitos los alumnos GAR que se han graduado dentro del periodo de estudio y, hasta la fecha de elaboración de este documento (Octubre 2020) fueron: 121 alumnos, que representan el 26.54 %; por otra parte, el promedio de tiempo de graduación es de 6.53 años.

Análisis del total de Alumnos graduados GAR

Tabla 6

Campus y Graduados de los Alumnos GAR.

Campus	Graduados	%
Espe matriz Sangolquí	107	88,43 %
Espe sede Latacunga	9	7,44 %
Unidad Acad. Especial salinas	2	1,65 %
Espe a distancia	1	0,83 %
Hacienda el prado	1	0,83 %
Tecnología aeronáutica Ltga.	1	0,83 %
Total	121	100 %

Nota. Tabla de Campus y Graduados de los Alumnos GAR.

En la tabla 6 encontramos 107 alumnos GAR que se graduaron en el campus ESPE Matriz Sangolquí, es decir, el 88.43 %, luego encontramos a la Espe sede Latacunga con 9 alumnos que corresponde al 7.44 %. En el campus, Espe a distancia; Hacienda el prado y Tecnología aeronáutica Ltga. se graduó 1 solo estudiante.

En la tabla 7 encontramos 88 alumnos GAR que se graduaron en la Promoción tres, es decir, el 72.73 %, luego encontramos a la Promoción ocho con 10 alumnos que corresponde al 8.26 %. En las promociones 5 y 9 se graduó un solo estudiante.

Tabla 7

Promoción y Graduados de los Alumnos GAR.

Promoción	Graduados	%
P3	88	72,73 %
P8	10	8,26 %
P7	9	7,44 %
P4	7	5,79 %
P10	5	4,13 %
P5	1	0,83 %
P9	1	0,83 %
Total	121	100,00 %

Nota. Tabla de Promoción y Graduados de los Alumnos GAR.

En la tabla 8 encontramos 18 alumnos GAR que se graduaron en la carrera de Mecatrónica, que representan el 14,88 % del total de alumnos graduados. Luego encontramos a 15 alumnos GAR en la Carrera de Elec. Automatización y Control que representan el 12,40 %; y; finalmente, en último

lugar encontramos a Tec. Logística Transporte con un alumno Graduado.

Tabla 8

Carrera y Graduados de los Alumnos GAR.

Carrera	Graduados	%	Carrera	Graduados	%
Pres. Mecatrónica	18	14,88 %	Pes. Geográfica medio ambi	4	3,31 %
Pres. Elec Automatización Control	15	12,40 %	Pres. Actividad física deport	2	1,65 %
Pres. Elec Telecomunicaciones	13	10,74 %	Pres. Automotriz	2	1,65 %
Pres. Finanzas emp auditoría	12	9,92 %	Pres. Lic ccaa aeronáuticas	2	1,65 %
Pres. Civil	11	9,09 %	Pres. Mercadotecnia	2	1,65 %
Pres. Com exterior negociación	10	8,26 %	Dist. Tec. Computación	1	0,83 %
Pres, Biotecnología	9	7,44 %	Pres. Elec e instrumentación	1	0,83 %
Pres. Comercial	6	4,96 %	Pres. Ingeniería agropecuaria	1	0,83 %
Pres. Sistemas e informática	6	4,96 %	Pres. Tec Logística Transporte	1	0,83 %
Pres. Mecánica	5	4,13 %			

Nota. Tabla Carrera y Graduados de los Alumnos GAR.

Análisis de graduados GAR en relación al total de alumnos

En relación a los 456 alumnos GAR, en la tabla 9 encontramos la mayor eficiencia de graduados en el campus Unidad Acad. Especial Salinas, de un total de 3 alumnos se gradúan 2, que representan el 66,67 %. De alumnos graduados con referente a los campus, en el campus matriz; encontramos 408 alumnos, de los cuales 107 se graduaron que corresponde a una eficiencia del 26,23 %. En el campus Héroes del Cenepa tenemos un alumno, el cual no se gradúa; en el campus Hacienda el Prado, se tiene 5 alumnos de los cuales 1 alumno se graduó, que corresponde a una eficiencia del 20 %, que es la menor de todos los campus.

En la tabla 10 encontramos la mayor eficiencia de graduados, en la promoción 5, el único estudiante en dicha promoción ya esta graduado, en la promoción cuatro de un total de 18 alumnos, se gradúaron 7 alumnos que corresponde al 38,89% de dicha promoción, En la promoción tres que es donde se encuentra la mayor cantidad de alumnos, se gradúaron 88 que representa el 30.03% de dicha promoción, mientras que con la menor eficiencia encontramos a la promoción 8, de los 8 alumnos, se gradúa solo un alumno.

Tabla 9*Campus y Graduados de los Alumnos GAR*

Campus	T. Alumnos	Graduados	%
Unidad acad. Especial Salinas	3	2	66,67 %
Tecnología aeronáutica Ltga.	2	1	50,00 %
Espe a distancia	3	1	33,33 %
Espe sede Latacunga	34	9	26,47 %
Espe matriz Sangolquí	408	107	26,23 %
Hacienda el prado	5	1	20,00 %
Heroes del Cenepa	1	0	0,00 %
Total	456	121	

Nota. Campus y Graduados de los Alumnos GAR.

Tabla 10*Promoción y Graduados de los Alumnos GAR*

Promociones	T. Alumnos	Graduados	%
P3	293	88	30,03 %
P4	18	7	38,89 %
P5	1	1	100,00 %
P7	19	9	47,37 %
P8	32	10	31,25 %
P9	8	1	12,50 %
P10	20	5	25,00 %
Otras	65		0,00 %
Total	456	121	

Nota. Promoción y Graduados de los Alumnos GAR.

En la tabla 11, encontramos la mayor eficiencia en las carreras no Técnicas; así, tenemos que las carreras de Tec. computación, y Tec. logística transporte, se gradúan el 100 %; y, se observa que en las carreras técnicas la eficiencia se encuentra debajo del 40 %.

Tabla 11

Carrera y Graduados de los Alumnos GAR

Carrera	T. Alumnos	Graduados	%
Dist. Tec computación	1	1	100,00 %
Pres. Tec logistica transport	1	1	100,00 %
Pres. Comercial	8	6	75,00 %
Pres. Com exterior negociación	14	10	71,43 %

Sigue en la página siguiente.

Carrera	T. Alumnos	Graduados	%
Pres. Actividad física deportes	3	2	66,67 %
Pres. Lic ccaa aeronáuticas	3	2	66,67 %
Pres. Finanzas Emp. Auditoría	19	12	63,16 %
Pres. Elec e instrumentación	2	1	50,00 %
Pres. Mercadotecnia	5	2	40,00 %
Pres. Civil	28	11	39,29 %
Pres. Ingeniería Agropecuaria	3	1	33,33 %
Pres. Elec automatización control	51	15	29,41 %
Pres. Elec telecomunicaciones	47	13	27,66 %
Pres. Sistemas e informática	22	6	27,27 %
Pres. Automotriz	8	2	25,00 %
Pres. Geográfica medio ambi	19	4	21,05 %
Pres. Biotecnología	47	9	19,15 %
Pres. Mecatrónica	108	18	16,67 %
Pres. Mecánica	31	5	16,13 %
Otras	36	0	0
Total	456	121	

*Nota.*Carrera y Graduados de los Alumnos GAR.

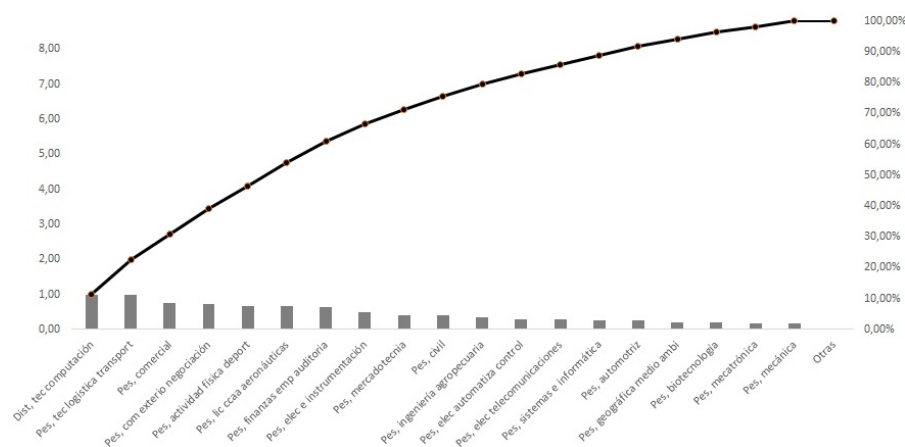
Las **carreras técnicas** se consideran: Elec. e Instrumentación; Civil; Ingeniería Agropecuaria; Elec. Automatización y Control; Elec. Telecomunicaciones, Sistemas e Informática; Automotriz; Geográfica Medio Ambiente; Biotecnología; Mecatrónica; Mecánica.

Las **carreras no técnicas** se consideran: Comercial; Mercadotecnia, Finanzas Emp. Auditoria; Lic CCAA Aeronáuticas; Actividad Física Deporte; Com. Exterior Negociación.

En la figura 20 encontramos que el 75 % de los alumnos GAR graduados pertenecen a las carreras no técnicas y el 25 % son de carreras técnicas, así encontramos que en la carrera Tec. Computación a Distancia, se tiene un solo alumno, el cual ya esta graduado y representa al 100 %. La carrera que tiene mayor cantidad de alumnos 108, es Mecatrónica, se graduaron 18 alumnos, representan el 16,67 %. Luego de los 456 alumnos, se han graduado 121 que representan el 26,54 % y faltan por graduarse el 73,46 %.

Figura 20

Carrera y Graduados de los Alumnos GAR



Nota. Gráfico de Carrera y Graduados de los Alumnos GAR.

Análisis de graduados GAR en relación al tiempo de graduación

En la tabla 12 , encontramos que en el campus ESPE modalidad a distancia, los alumnos GAR son más eficaces, que en el campus Hacienda el Prado, pues se gradúan a los 6,9 años, cuando deberían graduarse a los 5,6 años, donde encontramos que los alumnos de la ESPE a distancia son

menos eficaces en la graduación.

Tabla 12

Campus y tiempo de graduación de los Alumnos GAR .

Campus	Años
Hacienda el prado	6,90
Espe matriz Sangolquí	6,62
Espe sede Latacunga	6,04
Unidad Acad. Especial salinas	5,48
Tecnología aeronáutica Ltga.	4,84
Espe a distancia	4,64

Nota. Tabla de Campus y tiempo de graduación de los Alumnos GAR.

En la tabla 13 , encontramos que en la promoción tres (P3), donde se tiene la mayor cantidad de alumnos GAR, que su tiempo de graduación es de 6,82 años, esta promoción es la menos eficaz, en relación a las otras. La promoción cinco (P5), encontramos a los alumnos GAR que son más eficaces.

Tabla 13

Promoción y tiempo de graduación de los Alumnos GAR.

Campus	Años
P3	6,82
P7	6,06
P4	5,92

Sigue en la página siguiente.

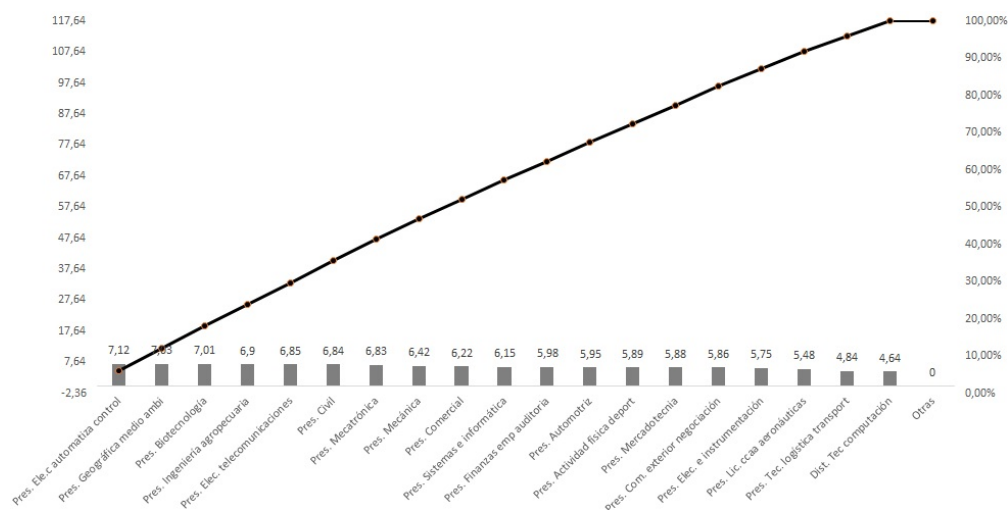
Promoción	Años
P9	5,91
P8	5,68
P10	5,36
P5	4,90

Nota. Tabla de promoción y tiempo de graduación de los Alumnos GAR.

En la figura 21 encontramos que en un 60 % de las carreras técnicas, el promedio en graduarse es de 6,62 a~nos, en comparación con las carreras no técnicas, que tiene un promedio de 5,89 a~nos, lo cual representa el 40 %.

Figura 21

Carrera y Graduados de los Alumnos GAR



Nota. Gráfica de la carrera y Graduados en relación al tiempo de los Alumnos GAR.

En la tabla 14, encontramos que en promedio de graduación de los alumnos de las carreras técnicas es mayor que en las carreras no técnicas. La carrera técnica Presencial Elec. automatización

y control es la de mayor tiempo de los alumnos se demoran en graduarse y, la carrera a distancia Tec. computación es la carrera que menor tiempo le toma a los alumnos graduarse.

Tabla 14

Carrera y Graduados de los Alumnos GAR.

Carreas técnicas	Años	Carreras no técnicas	Años
Pres. Elec. automatización y control	7,12	Pres. Comercial	6,22
Pres. Geográfica medio ambi	7,03	Pres. Finanzas emp auditoria	5,98
Pres. Biotecnología	7,01	Pres. Actividad física deport	5,89
Pres. Ingeniería agropecuaria	6,9	Pres. Mercadotecnia	5,88
Pres. Elec. telecomunicaciones	6,85	Pres. Com. exterior negociación	5,86
Pres. Civil	6,84	Pres. Lic. ccaa aeronáuticas	5,48
Pres. Mecatrónica	6,83		
Pres. Mecánica	6,42	Pres. Tec. logística transport	4,84
Pres. Sistemas e informática	6,15	Dist. Tec computación	4,64
Pres. Automotriz	5,95	Otras	
Pres. Elec. e instrumentación	5,75		
	Promedio		5,89

Nota. Tabla de carreras y Graduados de los Alumnos GAR.

Análisis Alumnos GAR, utilizando cadenas de Markov

Las cadenas de Markov y los procesos de Markov son un tipo especial de procesos estocásticos que poseen la siguiente propiedad.

Propiedad de Markov: Conocido el estado del proceso en un momento dado, su comportamiento futuro no depende del pasado. Dicho de otro modo, **dado el presente, el futuro es independiente del pasado.**

El proceso de Markov, puede ir de un estado a cualquier otro estado, transcurrido un número determinado de transiciones, el sistema muestra un comportamiento estable, donde se puede obtener la probabilidad de estado estable. A este comportamiento (Araque Meza, 2012) se lo denomina probabilidad de comportamiento a largo plazo.

En el cálculo de la matriz de transición para los alumnos GAR, se utiliza una cadena de Markov absorbente, en la cual encontramos dos estados absorbentes, que son: El abandono de la carrera (A) y cuando ya se gradúan (G). Cuando los alumnos ingresen al estado de abandono o se gradúan no pueden pasar a otro estado. En la ESPE este abandono se considera que el alumno ya no puede reingresar a la Universidad, por que ha incurrido en alguna falta establecida en su reglamento o porque ha perdido en tercera matrícula. Al graduarse el alumno se retira de la Universidad; para estos dos estados la probabilidad de transición es 1, es decir $P_{GG} = 1$, y $P_{AA} = 1$.

Las cadenas absorbentes utilizan relaciones matriciales, que permite obtener el promedio de semestres que el alumno GAR curso durante los 10 semestres que dura la carrera antes de graduarse o abandonar. El procedimiento de cadenas absorbentes permite calcular la probabilidad de absorción, la cual indica la probabilidad de que un alumno GAR que ingresa a la ESPE abandone antes de graduarse o de que termine la carrera graduándose.

Cuando se obtiene la matriz de probabilidad de transición ver tabla 2 de los alumnos GAR, aplicando cadenas de Markov absorbentes, se puede determinar:

- La cantidad de semestres en que el alumno GAR puede graduarse o retirarse;
- El número esperado de actividades académicas, materias que el alumno GAR pasa en cualquier semestre; y,

- La probabilidad de abandono o graduación para el alumno GAR que ingresa a la Universidad de las Fuerzas Armadas, a realizar sus estudios académicos.

Número esperado de transición hasta la absorción (NE). Se calcula obteniendo la matriz de transacción, luego se aplica la ecuación $NE = (I - N)^{-1}$, donde I es la Matriz identidad de orden 10×10 , y N es una matriz de probabilidad de transición P_{ij} , de orden 10×10 .

Probabilidades Condicionales de Absorción (PA). Se calcula por la ecuación $PA = NE * A$, que representa la probabilidad de abandono o graduación del alumno GAR, donde NE es el número esperado de transiciones, A es una matriz de orden 10×2 que esta forma por las columnas G, A de la matriz de transición ver tabla 2 .

Carreras técnicas

Se realiza el análisis para los alumnos GAR de las carreras técnicas (*Pres. Geográfica Medio Am- bi; Pres. Elec Automatización y Control; Pres. Ingeniería Agropecuaria; Pres. Sistemas e Informática; Pres. Mecánica; Pres. Biotecnología; Pres. Civil; Pres. Elec. Telecomunicaciones, Pres. Mecatrónica; Pres. Automotriz; Pres. Elec. e Instrumentación; Pres. Software; Pres. Petroquímica*). Los valores para los alumnos GAR correspondientes a cada estado de la cadena de Markov, se obtuvieron con la ayuda del software *Power BI*.¹

De la matriz tabla 15 y diagrama figura 22 de transición podemos observar que:

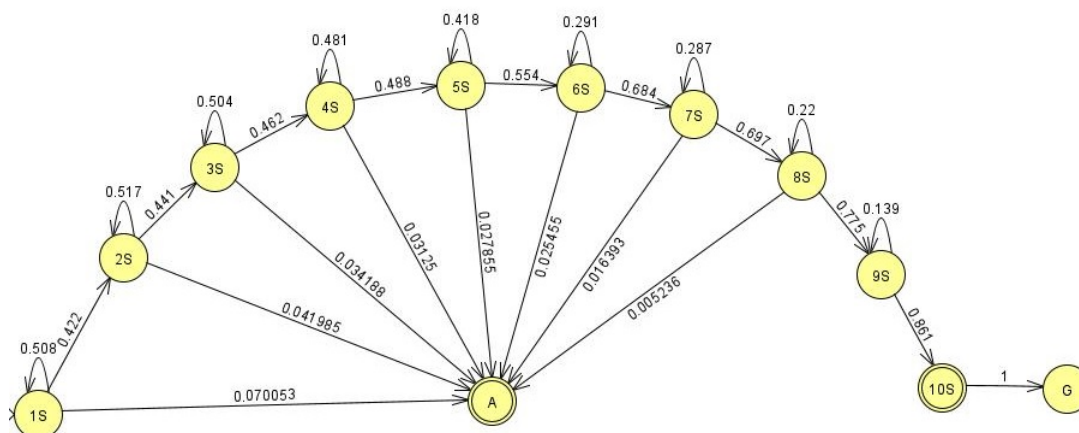
- La deserción o abandono de los alumnos GAR en las carreras técnicas, comienza desde el Primer semestre (1S) con el 7.01 %. Este porcentaje va disminuyendo de acuerdo a como avanzan con

¹Este software presenta un análisis empresarial de Microsoft, su objetivo es proporcionar visualizaciones interactivas y capacidades de inteligencia empresarial con una interfaz lo suficientemente simple para crear informes y paneles.

Nota. Tabla de Matriz de probabilidades de transición de las carreras técnicas.

Figura 22

Diagrama de transición de los Alumnos GAR de las carreras técnicas.



Nota. Gráfica del diagrama de transición de los Alumnos GAR de las carreras técnicas

Tabla 16

Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción.

	1S	2S	3S	4S	5S	6S	7S	8S	9S	10S
1S	2,03203	1,776321	1,579647	1,404131	1,176951	0,920058	0,882025	0,787748	0,708853	0,610401
2S	0	2,071146	1,841829	1,637181	1,372296	1,072764	1,028419	0,918494	0,826505	0,711713
3S	0	0	2,017241	1,793103	1,50299	1,174933	1,126364	1,00597	0,90522	0,779495
4S	0	0	0	1,925926	1,614323	1,261965	1,209798	1,080486	0,972273	0,837235
5S	0	0	0	0	1,717703	1,34278	1,287273	1,14968	1,034537	0,890851
6S	0	0	0	0	0	1,410256	1,35196	1,207452	1,086524	0,935618
7S	0	0	0	0	0	0	1,402299	1,252411	1,126979	0,970454
8S	0	0	0	0	0	0	0	1,281879	1,153496	0,993289
9S	0	0	0	0	0	0	0	0	1,16129	1
10S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Nota. Tabla de Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción

De la matriz *NE*, tabla 16 , antes de la absorción, ésta matriz proporciona el número esperado

de semestres que un alumno GAR se mantiene de un estado a otro; aquí podemos observar que:

- En la intersección de la matriz tabla 16 de la primera fila con la primera columna (1S, 1S), encontramos un valor de 2.032, esto significa que el alumno GAR estará en promedio 2.032 veces (Semestres) en primer semestre (1S).
- Se puede observar que desde el Sexto semestre (6S) en adelante, encontramos valores menores que 1, esto que significa que los alumnos han adelantado algunas materias.
- La cantidad de semestres que el alumno GAR, puede tomar antes de graduarse, se obtiene sumando todos los valores de la fila.

$$T = \sum_{j=1}^{10} NE_{1,j}$$

Por ejemplo:

$$T = 2,03203 + 1,776321 + 1,579647 + 1,404131 + 1,176951 + 0,920058 \\ + 0,882025 + 0,787748 + 0,708853 + 0,610401 = 11,878$$

- El valor 11.878 significa que, el alumno GAR que ingresa a primer semestre (1S) se graduará en 12 semestres aproximadamente.

De la matriz de Probabilidades de Absorción PA , tabla 17 , se observar que:

- La probabilidad de concluir la carrera para un alumno GAR, desde que ingresa al primer semestre (1S), es del 0.61 y de abandonar la carrera es del 0.39.
- Cuando los alumnos llegan a noveno semestre, se puede considerar que todos se gradúan.
- La probabilidad de graduarse para el alumno GAR, aumenta considerablemente cuando llega a sexto semestre (6S).

- Si un alumno GAR ingresa a la ESPE, desde el segundo semestre (2S), la probabilidad de graduarse es del 0.71 y de abandono es del 0.28. Esto implica alumnos que a través de un examen se han exonerado de la nivelación general.

Tabla 17

Matriz de Probabilidades de Absorción PA.

	G	A
1S	0,61	0,39
2S	0,712	0,288
3S	0,779	0,221
4S	0,837	0,163
5S	0,891	0,109
6S	0,936	0,064
7S	0,97	0,03
8S	0,993	0,007
9S	1	0
10S	1	0

Nota. Tabla de Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción

Carreras no técnicas

Se realiza el análisis para los alumnos GAR de las carreras no técnicas (*Pres. Comercial, Pres. Finanzas Emp. Auditoria, Pres. Actividad Física Deporte, Pres. Mercadotecnia, Pres. Com. Exterior Negociación, Pres. Lic. CCAA Aeronáuticas, Pres. Tec. Logística Transporte, Dist. Tec Computación*).

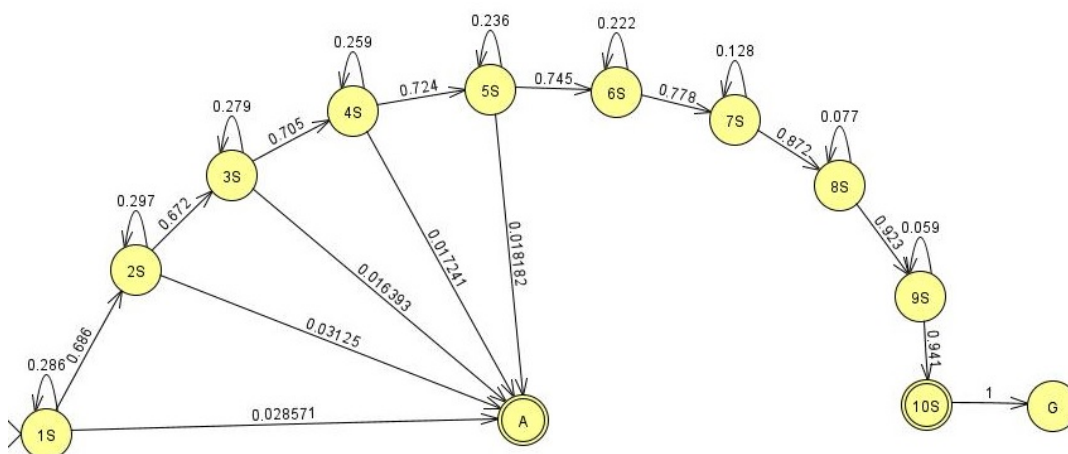
De la matriz, tabla 18, y diagrama, figura 23, de transición podemos observar que:

- La deserción o abandono de los alumnos GAR en las carreras no técnicas, comienza desde el Primer semestre (1S) con 2.86 %. Este porcentaje va disminuyendo de acuerdo a como avanza

Nota. Tabla de Matriz de probabilidades de transición de las carreras no técnicas

Figura 23

Diagrama de transición de los Alumnos GAR de las carreras no técnicas.



Nota. Gráfica del Diagrama de transición de los Alumnos GAR de las carreras no técnicas

Tabla 19

Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción.

	1S	2S	3S	4S	5S	6S	7S	8S	9S	10S
1S	1,4	1,365333	1,271758	1,209212	1,146667	1,099013	0,980492	0,92602	0,908212	0,854788
2S	0	1,422222	1,324747	1,259596	1,194444	1,144805	1,021346	0,964604	0,946054	0,890404
3S	0	0	1,386364	1,318182	1,25	1,198052	1,06885	1,00947	0,990057	0,931818
4S	0	0	0	1,348837	1,27907	1,225914	1,093707	1,032946	1,013081	0,953488
5S	0	0	0	0	1,309524	1,255102	1,119748	1,05754	1,037202	0,97619
6S	0	0	0	0	0	1,285714	1,147059	1,083333	1,0625	1
7S	0	0	0	0	0	0	1,147059	1,083333	1,0625	1
8S	0	0	0	0	0	0	0	1,083333	1,0625	1
9S	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0625	1
10S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Nota. Tabla de Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción

La matriz NE , tabla 19, antes de la absorción, nos proporciona el número esperado de semestres que un alumno GAR se mantiene de un estado a otro; aquí podemos observar que:

- En la intersección de la matriz, tabla 19, de la primera fila con la primera columna ($1S, 1S$), encontramos un valor de 1.4, esto significa que el alumno GAR estará en promedio 1.4 veces (Semestres) en primer semestre ($1S$).
- Se puede observar que desde el Séptimo semestre ($7S$) en adelante, encontramos valores menores que 1, lo cual significa que los alumnos han adelantado algunas materias.
- La cantidad de semestres que el alumno GAR, puede tomar antes de graduarse, se obtiene sumando todos los valores de la fila.

$$T = \sum_{j=1}^{10} NE_{1,j}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} T &= 1,4 + 1,365333 + 1,271758 + 1,209212 + 1,146667 + 1,099013 + 0,980492 \\ &+ 0,92602 + 0,908212 + 0,854788 = 11,161 \end{aligned}$$

- El valor 11.161 significa que el alumno GAR desde que ingresa a primer semestre ($1S$) se graduará en 11 semestres, aproximadamente.

De la matriz de Probabilidades de Absorción PA , tabla 19, se observar que:

- La probabilidad de concluir la carrera para el alumno GAR, cuando ingresa al primer semestre ($1S$), es del 0.85 y de abandonar la carrera es del 0.15.
- Cuando los alumnos llegan al sexto semestre, se puede considerar que todos se graduarán.
- La probabilidad de graduarse para el alumno GAR, se incrementa cuando llega al tercer semestre ($3S$).

- Si un alumno GAR ingresa a la ESPE, en el segundo semestre 2S, la posibilidad de graduarse es del 0.89 y de abandono es de 0.11. Esto implica alumnos que a través de un examen se han exonerado de la nivelación general.

Tabla 20

Matriz de Probabilidades de Absorción PA.

	G	A
1S	0,855	0,145
2S	0,89	0,11
3S	0,932	0,068
4S	0,953	0,047
5S	0,976	0,024
6S	1	0
7S	1	0
8S	1	0
9S	1	0
10S	1	0

Nota. Tabla de Matriz de Probabilidades de Absorción PA

Tercera promoción

Se realiza el análisis para los alumnos GAR de la tercera promoción del campus *Matriz ESPE Sangolquí*; en particular, de la carrera *Mecatrónica*, el departamento que tiene el mayor número de estudiantes.

De la matriz, tabla 21, y diagrama, figura 24, de transición podemos observar que:

- La deserción o abandono de los alumnos GAR en la carrera *Mecatrónica*, comienza desde el

Nota. Tabla de Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción

La matriz NE , tabla 22, antes de la absorción, proporciona el número esperado de semestres que un alumno GAR se mantiene de un estado a otro. Aquí podemos observar que:

- En la intersección de la matriz, tabla 22, de la primera fila con la primera columna ($1S, 1S$), encontramos un valor de 2.02, esto significa que el alumno GAR estará en promedio 2 veces (Semestres) en primer semestre ($1S$).
- Se puede observar que desde el Sexto semestre ($6S$) en adelante, encontramos valores menores que 1, esto significa que los alumnos han adelantado algunas materias.
- La cantidad de semestres que el alumno GAR, puede tomar antes de graduarse, se obtiene sumando todos los valores de la fila.

$$T = \sum_{j=1}^{10} NE_{1,j}$$

Por ejemplo:

$$T = 2,02597 + 1,772345 + 1,852073 + 1,371689 + 0,796458 + 1,01294 + 0,736381 + 0,725052 + 0,725052 + 0,453157 = 11,471$$

- El valor 11.471 significa que el alumno GAR que ingresa a primer semestre ($1S$) se graduará en 11.5 semestres, aproximadamente.

De la matriz de Probabilidades de Absorción PA , tabla 23, se observar que:

- La probabilidad de concluir la carrera para un alumno GAR, desde que ingresa al primer semestre ($1S$), es del 0.45, y de abandonar la carrera es del 0.55

- Cuando los alumnos llegan al sexto semestre, se puede considerar que todos se gradúan.
- La probabilidad de graduarse para el alumno GAR, aumenta considerablemente cuando llega al quinto semestre (5S).
- Si un alumno GAR ingresa a la ESPE desde el segundo semestre (2S), la posibilidad de graduarse es del 0.54, y de abandono es de 0.46. Esto implica que a través de un examen se ha exonerado de la nivelación general.

Tabla 23

Matriz de Probabilidades de Absorción PA.

	G	A
1S	0,453	0,547
2S	0,545	0,455
3S	0,628	0,372
4S	0,747	0,253
5S	0,872	0,128
6S	1	0
7S	1	0
8S	1	0
9S	1	0
10S	1	0

Nota. Tabla de Matriz de Probabilidades de Absorción PA

Se realiza el análisis para los alumnos GAR de la tercera promoción del campus *Matriz ESPE Sangolqui*, de la carrera *Finanzas y Auditoría*, por tener la mayor cantidad de alumnos en las carreras

no Técnicas.

De la matriz, tabla 24 y diagrama figura 25 de transición podemos observar que:

- La deserción o abandono de los alumnos GAR en la carrera Finanzas y Auditoría, comienza desde el Primer semestre (1S) con el 4.16%. Este porcentaje va aumentando de acuerdo como avanza con los semestres, hasta llegar al tercer semestre (3S) con un 5.5%. En el primer semestre (1S) abandona un alumno, en el segundo semestre (2S) abandona otro alumno, para el tercer semestre abandona otro alumno, es decir, que en cada semestre abandona un alumno, hasta llegar al tercer semestre; desde el cuarto semestre en adelante no existe estudiantes que abandonen la carrera.
- La reprobación de semestres se observa desde el primer semestre con un 37.5%, a medida que avancen en los semestres este va disminuyendo, hasta el noveno semestre (8S) con 1.67%; para los semestres (9S y 10S), no se encuentran alumnos que repitan los semestres.
- La aprobación de los semestres por parte de los alumnos GAR, sin repetir el semestre, se da en (1S y 2S) con un valor de 58.3%, a medida que continúan sus estudios por semestre este porcentaje va aumentando; así, encontramos que en (8S y ,9S) se tiene un valor del 83.3%, para el décimo semestre no existen alumnos que repitan.
- Se puede observar que hasta el tercer semestre (3S) existe abandono de alumnos GAR, desde el cuarto semestre (4S) en adelante los alumnos GAR tienden a estabilizarse y no abandonan la carrera.

Tabla 24

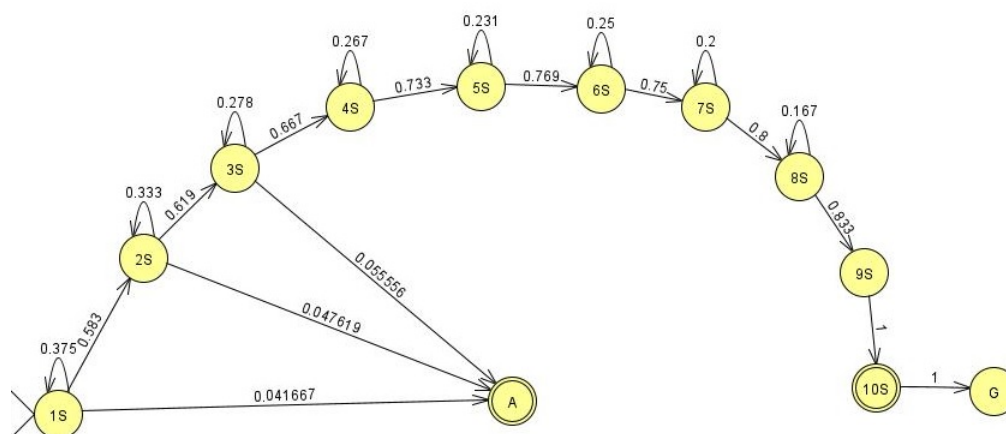
Matriz de probabilidades de transición de Finanzas y Auditoría

	1S	2S	3S	4S	5S	6S	7S	8S	9S	10S	G	A
1S	0,375	0,583	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,041667
2S	0	0,333	0,619	0	0	0	0	0	0	0	0	0,047619
3S	0	0	0,278	0,667	0	0	0	0	0	0	0	0,055556
4S	0	0	0	0,267	0,733	0	0	0	0	0	0	0
5S	0	0	0	0	0,231	0,769	0	0	0	0	0	0
6S	0	0	0	0	0	0,25	0,75	0	0	0	0	0
7S	0	0	0	0	0	0	0,2	0,8	0	0	0	0
8S	0	0	0	0	0	0	0	0,167	0,833	0	0	0
9S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Nota. Tabla de Matriz de probabilidades de transición de Finanzas y Auditoría

Figura 25

Diagrama de transición de los Alumnos GAR de Finanzas y Auditoría.



Nota. Gráfica del Diagrama de transición de los Alumnos GAR de Finanzas y Auditoría.

La matriz NE , tabla 25, antes de la absorción, proporciona el número esperado de semestres que un alumno GAR se mantiene de un estado a otro; aquí podemos observar que:

Nota. Tabla de Matriz NE del Número Esperado de períodos antes de la absorción

De la matriz de Probabilidades de Absorción PA , tabla 26, se observa que:

- La probabilidad de concluir la carrera para un alumno GAR, desde que ingresa al primer semestre (1S), es de 0.80, y de abandonar la carrera es del 0.20.
- Cuando los alumnos llegan al cuarto semestre, se puede considerar que todos se graduarán.
- La probabilidad de graduarse para el alumno GAR, aumenta considerablemente cuando llega al tercer semestre (3S).
- Si un alumno GAR ingresa a la ESPE desde el segundo semestre (2S), la probabilidad de graduarse es del 0.85, y de abandono es de 0.15. Esto implica alumnos que a través de un examen se han exonerado de la nivelación general.

Tabla 26

Matriz de Probabilidades de Absorción PA.

	G	A
1S	0,8	0,2
2S	0,857	0,143
3S	0,923	0,077
4S	1	0
5S	1	0
6S	1	0
7S	1	0
8S	1	0
9S	1	0
10S	1	0

Nota. Tabla de Matriz de Probabilidades de Absorción PA

Capítulo V: Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

Según los resultados de la investigación de los alumnos GAR, que estudiaron en la ESPE, entre los periodos 2010 al 2019, se puede concluir que:

- El estudio sobre la deserción de los estudiantes GAR se tomó desde el punto de vista cuantitativo, es decir, por su trayectoria estudiantil semestre por semestre, hasta culminar en su graduación.
- La deserción de los alumnos GAR, afecta tanto a los estudiantes que abandonaron sus estudios como al estado Ecuatoriano, ya que este fue el que financio la carrera estudiantil.
- Las mayores probabilidades de abandono de los alumnos, las podemos encontrar dentro de los dos primeros semestres de estudios. Se podría explicar este abandono, debido a su formación académica previa.
- Cuando el alumno llega al cuarto semestre, las probabilidades de graduarse aumentan significativamente; además, el alumno ha generado lazos con compañeros, profesores y con el entorno de estudio de su carrera.
- Los alumnos GAR al seguir una carrera técnica, tiene mayor dificultad en graduarse, en comparación con las carreras no técnicas.
- Existe mayor deserción de los alumnos GAR en las carreras técnicas.

Trabajos futuros

- Completar este estudio con datos sociales culturales y económicos de los alumnos GAR.
- Realizar un estudio comparativo, de los estudiantes GAR, con los estudiantes que no pertenecían a este grupo, a fin de contrastar los resultados y evolución.

Bibliografía

- Araque Meza, J. H. (2012). *Implementación De Talleres Basados En Cadenas De Markov De Tiempo Discreto Con Probabilidades Estacionarias; Para La Asignatura Investigación De Operaciones Ii*. Universidad Industrial de Santander, Escuela De Estudios Industriales. 67
- Barrero Rivera, F. (2015). *Investigación en Deserción Estudiantil Universitaria: Educación, cultura y significados*. Bogotá: Universidad Militar Nueva Granada. Bogotá: Universidad Militar Nueva Granada. 15, 16
- Bravo, F., Illescas, L., Larriva, S., and Peña, M. (2017). *Causas de Deserción en el Ingreso a la Universidad; un Estudio de Caso*. Cuenca: Revista de la Facultad de Ciencias Químicas. 23
- González-Campos, J. A., Carvajal-Muquillaza, C. M., and Aspeé-Chacón, J. E. (2020). *Modelación de la deserción universitaria mediante cadenas de Markov*. Venezuela: Universidad de Carabobo. 23
- Mena Andrade, M. S., Celorio Moreno, G. A., Córdoba, A., and Belalcázar Cadena, G. F. (2018). *Perfil de los estudiantes que forman parte del grupo de alto rendimiento (GAR)*. Quito: Universidad Andina Simón Bolívar. 17, 23
- Ñaupá, D. M. (2017). *Simulación de la dinámica de permanencia estudiantil en la Facultad de Ingeniería Estadística e Informática de la UNA-Puno, 2005–2020*. Universidad Nacional del Altiplano. 24
- Pérez Pulido, I. (2016). *El proceso de adaptación de los estudiantes a la universidad en el Centro*

- Universitario de Los Altos de la Universidad de Guadalajara*. Jalisco: Departamento de Psicología, Educación y Salud. 22
- Rincón, L. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM: obtenido de <http://lya.fciencias.unam.mx/lars/libros/procesos2012.pdf>. 25, 27, 28
- Rivas, D. and Delgadillo, R. (2016). *Procesos Estocásticos*. Colombia: Universidad de Los Andes. 28
- Rodríguez Ríos, C. Y. (2012). *Diseño de un modelo estocástico usando cadenas de Markov para pronosticar la deserción académica de estudiantes de Ingeniería caso: Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana. 24
- Rojas Polo, J. (2018). *Investigación de Operaciones, Cadenas de Markov*. Perú: Universidad Católica. 38, 39, 40, 41, 42, 43
- Taha, A. (2012). *Investigación de Operaciones*. Pearson Educación. 46
- Taha, H. A. (2004). *Investigación de operaciones*. Pearson Educación. 37
- Torres, R. M. (2020). *Otra Educación*. Obtenido de <https://otra-educacion.blogspot.com/2015/06/puntajes-perfectos-enes-ecuador.html>. 18, 19
- Vir, R. (2016). *Introducción a los procesos estocásticos*. UNADM: Universidad de México. UnADM: Universidad de México, obtenido de https://www.academia.edu/8745384/Procesos_estocásticosUnidad_1_Introduccion_a_los_procesos_estocásticos.32
- Zambrano, G., Rodríguez, K., and Guevara, L. (2018). *Análisis de la deserción estudiantil en las universidades del Ecuador y América Latina*. Revista Pertinencia Académica. 22

Anexos