



Modelación y simulación de procesos de infiltración de agua en los suelos en zonas no saturadas

Guamán Jachero, Manuel Jesús de los Ángeles

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

Maestría en la Enseñanza de la Matemática

Trabajo de Titulación, Previo a la Obtención del Título de Magister en la Enseñanza de la
Matemática

Mgs. Albuja Proaño, Guillermo Alexis

6 de noviembre del 202



Document Information

Analyzed document	TH_26_09_20_MJAGJ.pdf (D80448368)
Submitted	10/1/2020 11:22:00 PM
Submitted by	Bernis Ricardo
Submitter email	rmbernis@espe.edu.ec
Similarity	0%
Analysis address	rmbernis.espe@analysis.orkund.com

Sources included in the report



GUILLERMO
ALEXIS ALBUJA
PROAÑO

Guillermo Albuja
CI: 1712454063



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación **“Modelación y simulación de procesos de infiltración de agua en los suelos en zonas no saturadas”**, fue realizado por el señor **Guamán Jachero, Manuel Jesús de los Ángeles**, el mismo que ha sido revisado y analizado en su totalidad, por la herramienta de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 20 de junio del 2020

Firma:

Mgs. Albuja Proaño, Guillermo Alexis

Director
C.C.: 1712454063



**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA**

CENTRO DE POSGRADOS

RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA

Yo, **Guamán Jachero, Manuel Jesús de los Ángeles**, con cédula de ciudadanía n° 0300847571, declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **“Modelación y simulación de procesos de infiltración de agua en los suelos en zonas no saturadas”** es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 20 de junio del 2020

Firma:

Guamán Jachero, Manuel Jesús de los Ángeles

C.C.: 0300847571



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y

TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Yo **Guamán Jachero Manuel Jesús de los Ángeles**, con cédula de ciudadanía n° 0300847571, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: **“Modelación y simulación de procesos de infiltración de agua en los suelos en zonas no saturadas”** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 20 de junio del 2020

Firma:

Guamán Jachero, Manuel Jesús de los Ángeles

C.C.: 0300847571

DEDICATORIA

A mi amada esposa Julia, por ser el pilar fundamental de mi vida, quien me ha apoyado y siempre ha estado pendiente de mis estudios aun en la distancia, cuando tenía de viajar por largas horas hacia la Universidad; y ha soportado mi ausencia con paciencia y amor.

A mis adorados hijos, Gabriel, Christopher y Jean, quienes siempre me inspiran para seguir adelante.

A mis padres que ha sido ejemplo de trabajo y responsabilidad.

Manuel Jesús Guamán Jachero

AGRADECIMIENTO

A Dios Padre Todopoderoso, a Jesús, a la Virgen del Cisne y al Espíritu Santo, que han iluminado mi mente con su ciencia, sabiduría, inteligencia y consejo, y han mantenido mi fortaleza, para vencer la serie de obstáculos económicos y riesgos en los largos viajes hacia la Universidad.

A mi Tutor de tesis, Mgs. Guillermo Alexis Albuja Proaño, por su orientación, por su predisposición para ayudarme en todo momento, por su total desprendimiento con sus valiosos conocimientos y por su motivación para la elaboración de la tesis.

A la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, por darme la oportunidad de prepararme, obtener esta maestría e incrementar mis conocimientos.

A todo el personal docente que impartieron las diferentes asignaturas, en especial al Ing. Marco Vergara, Mgs. Jorge Lara, Mgs. Guillermo Albuja, Ph.D. Juan Mayorga, Ph.D. Margarita Kostikova, Mgs. Ramiro Delgado, Ph.D. Nelson Subía, Mgs. Richard Berniz, Mgs. Carlos Montenegro y Ph.D. Paul Medina, quienes me apoyaron y estuvieron pendientes de mi permanencia en la maestría.

A los Coordinadores de la maestría, Ing. Nelson Núñez, Mag. Patricio Pugarin por su apoyo incondicional

Manuel Jesús Guamán Jachero

ÍNDICE DE CONTENIDOS

URKUND.....	2
CERTIFICACIÓN.....	3
RESPONSABILIDAD.....	4
AUTORIZACIÓN.....	5
DEDICATORIA.....	6
AGRADECIMIENTO.....	7
ÍNDICE DE CONTENIDOS.....	8
ÍNDICE DE TABLAS.....	12
INDICE DE FIGURAS.....	13
RESUMEN.....	14
ABSTRACT.....	15
CAPITULO 1.....	16
Modelos Físicos de Contaminación del Suelo.....	16
Clasificación de los Terrenos.....	16
<i>Características de los Suelos</i>	16
Parámetros Físicos Hidrogeológicos.....	17
<i>Parámetros Geológicos</i>	17
<i>Parámetros Climatológicos</i>	20
Parámetros Físicos de Contaminación.....	21
Coeficiente de Difusión del Ión Nitrato o de Difusividad.....	21
<i>Cobertura Vegetal</i>	21
<i>Naturaleza de los Cultivos</i>	21
CAPITULO 2.....	26
Modelos Matemáticos de Infiltración.....	26
Resultados Fundamentales del Análisis Vectorial.....	26
<i>Definiciones Matemáticas Importantes</i>	26
Volumen de Control y Superficie de Control.....	30
<i>Teorema de la Divergencia de Gauss</i>	31
<i>Teorema del Transporte de Flujo de Reynolds</i>	32
<i>Ecuación de Continuidad o de Conservación de la Masa</i>	33
Ecuaciones de Balance de Materia.....	34

<i>Aplicaciones</i>	38
Modelos de Contaminación del Suelo	40
<i>La Convección</i>	40
Término Difusivo: Ley de Fick.....	40
<i>Término Convectivo</i>	42
<i>Ley de Darcy-Buckingham</i>	47
CAPITULO 3	48
Ecuación de Richards, Existencia y Unicidad	48
El Modelo de Cranck-Nicholson.....	48
Condiciones Iniciales y de Frontera.....	49
<i>Condiciones Iniciales</i>	49
<i>Condiciones de Frontera</i>	49
Ecuación de Richards.....	49
<i>Ecuaciones de Mualem-van Genuchten</i>	51
<i>Infiltración – Ecuación de Richards</i>	51
<i>Diagrama de Flujo Método de Richards-Philip (1957-1969)</i>	53
Existencia y de la Ecuación de Richards.....	54
<i>Importancia del Teorema para una Ecuación Diferencial</i>	54
Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones en una Ecuación Diferencial.....	55
<i>Existencia de Solución de la Ecuación de Richards</i>	57
<i>Unicidad de Solución</i>	70
CAPÍTULO 4	74
Método de Volúmenes Finitos, Modelos Matemáticos y Metodología de la Simulación	74
Modelos Matemáticos.....	74
Tipos y Naturaleza de Variables de un Modelo.....	74
Resultados de Modelos Matemáticos	75
Tipos de Ecuaciones y Funciones.....	75
Esquema numérico.....	75
<i>Utilidad de la Simulación Numérica</i>	75
Metodología Proceso de la Simulación.....	75
<i>Posición del Problema</i>	75
<i>Elaboración del Modelo Matemático</i>	75

<i>Elaboración del Modelo Numérico. Métodos numéricos</i>	76
<i>Elaboración del programa computacional</i>	77
<i>Verificación del Programa</i>	77
<i>Validación de los Modelos Matemáticos, Numéricos y Computacionales.</i>	77
<i>Análisis de Resultados. Calibración</i>	78
<i>Implementación de la Solución</i>	78
Método de Volúmenes finitos	78
Aplicación del Método de Volúmenes Finitos	79
Conceptos Básicos	79
<i>Definición</i>	80
CAPITULO 5	83
Métodos de Linealización para la Ecuación de Richards	83
Linealización de la Ecuación de Richards Mediante el Método de Picard Modificado	83
Descripción Matemática del Método de Volúmenes Finitos	83
<i>Discretización del Dominio</i>	84
<i>Esquema de Discretización Numérica</i>	85
<i>Algoritmo Computacional</i>	92
Linealización de la Ecuación de Richards Mediante el L-esquema	94
<i>Contenido de Humedad y su Derivada</i>	94
<i>Conductividad Hidráulica (K) o permeabilidad</i>	95
<i>Curva del contenido de humedad $\theta(\Psi)$</i>	95
<i>Capacidad Hidráulica $C(\Psi)$</i>	96
Resultados de Convergencia de L-esquema	97
<i>Algoritmo Computacional</i>	103
CAPITULO 6	105
Programa Computacional y Resultados Numéricos	105
Programa Computacional en Matlab	105
Aspectos Computacionales del Método de Volúmenes Finitos	105
<i>Pre proceso</i>	105
<i>Proceso</i>	106
<i>Post proceso</i>	106
<i>Evaluación de los Resultados Numéricos</i>	106
Validación Del Algoritmo Numérico	107

Cuadros de Resultados	108
Validación Del Programa Computacional	109
CAPITULO 7.....	113
Conclusiones y Recomendaciones	113
Conclusiones.....	113
Recomendaciones	114
Bibliografía	115

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Clases de suelos y sus características.....	16
Tabla 2 Coeficiente de almacenamiento	18
Tabla 3 Tipos de porosidad de los materiales	18
Tabla 4 Clases de conductividad y sus características	19
Tabla 5 Tipos de cultivo y sus características	21
Tabla 6 Resultados de los modelos matemáticos.....	74
Tabla 7 Media aritmética, geométrica y armónica.....	92
Tabla 8 Malla temporal (M).....	108
Tabla 9 Malla espacial (N).....	108
Tabla 10 Malla temporal, comparación de métodos	110

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Características de los suelos	17
Figura 2 Volumen y superficie de control.....	30
Figura 3 Interpretación física del flujo a través de $\Gamma(t)$	35
Figura 4 Interpretación física de la velocidad total en $\Omega(t)$ y $\Gamma(t)$	37
Figura 5 Movimiento de las moléculas	40
Figura 6 Transporte difusivo	42
Figura 7 Ley de Darcy	42
Figura 8 Transporte convectivo	43
Figura 9 Volumen de control para el desarrollo de la ecuación de continuidad en un medio poroso no saturado	52
Figura 10 Diagrama de flujo del método de Richards. Philip	53
Figura 11 Teorema de existencia.....	56
Figura 12 Ejemplo del teorema de existencia y unicidad.....	57
Figura 13 Esquema Explicito e Implícito	86
Figura 14 Discretización espacial	89
Figura 15 Discretización espacial L-Esquemas	101
Figura 16 Solución aproximada y solución exacta	109
Figura 17 Método de Picard.....	111
Figura 18 Método del L-esquemas	112

RESUMEN

La contaminación del suelo debido a la infiltración de líquidos contaminados en medios porosos es un problema grave y si es que no se toman medidas adecuadas, el suelo seguirá contaminando la producción de alimentos, afectando en cadena al ser humano, a las plantas y a los animales. De aquí se origina la necesidad de desarrollar un modelo matemático para prevenir o disminuir la contaminación. El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo matemático y construir un esquema numérico convergente y estable, para la simulación de procesos de infiltración de agua en los suelos en zonas no saturadas, mediante la obtención de la Ecuación de Richards y su aproximación por el método de Volúmenes Finitos. Para este trabajo se utilizó la investigación aplicada, descriptiva y analítica; la experimental, en la programación se manipularon las variables para correr el programa en Matlab; se utiliza la modelización matemática y se emplearon los métodos numéricos. Como resultados se obtuvieron: un algoritmo numérico estable y eficiente para resolver la ecuación de Richard's y un programa computacional. Es posible construir un algoritmo para la infiltración de aguas en medios porosos. Los métodos de Picard modificado y el L-esquema han demostrado ser robustos y estables, sobre todo el L-esquema que garantiza la convergencia global del método. Recomendamos diseñar algoritmos de programación paralela de modo que varias instrucciones se ejecuten al mismo tiempo con lo cual se conseguirá minimizar el error en un tiempo razonable.

PALABRAS CLAVES:

- **INFILTRACIÓN EN SUELO NO SATURADO**
- **ECUACIÓN DE RICHARDS**
- **VOLÚMENES FINITOS**
- **PICARD MODIFICADO**
- **L-ESQUEMAS**

ABSTRACT

Soil contamination due to the infiltration of contaminated liquids into porous media is a serious problem and if adequate measures are not taken, the contaminated soil will produce food, chain-affecting humans, plants and animals. Hence the need to develop a mathematical model to prevent or decrease the contamination. The objective of this work is to develop a mathematical model and build a stable and convergent numerical scheme, for the simulation of water infiltration processes in soils in unsaturated zones, by obtaining the Richards equation and its approximation by the method of Finite Volumes. For this work I use applied, descriptive and analytical research; the experimental one, in the programming the variables were manipulated to run the program in Matlab; mathematical modeling is used and numerical methods are used. The results obtained were: a stable and efficient numerical algorithm to solve the Richard's equation and computer program. It is possible to build an algorithm for water infiltration in porous media. The modified Picard methods and the L-scheme have proven to be robust and stable, especially the L-scheme which guarantees the global convergence of the method. We recommend designing parallel programming algorithms so that several instructions are executed at the same time, thus minimizing the error in a reasonable time.

KEYWORDS:

- **INFILTRATION IN UNSATURATED SOIL**
- **RICHARDS EQUATION**
- **FINITE VOLUMES**
- **MODIFIED PICARD**
- **L-SCHEMES**

CAPITULO 1

Modelos Físicos de Contaminación del Suelo

Clasificación de los Terrenos

De acuerdo al comportamiento con respecto a la presencia del agua. Se clasifican en arcillosos, arenosos y luminosos:

Características de los Suelos

Tabla 1

Clases de suelos y sus características

	Arcillosos	Arenosos	Luminosos
Color	Amarillo o rojizo	Gris, blanco, rojizo, amarillo o negro	Gris, blanco
Retención agua y nutrientes	Mucha retención de agua y nutrientes	Baja retención de agua y nutrientes	Retienen agua y nutrientes, pero sin inundarse
Forma	Conservan la forma que le damos con nuestras manos	Cuando están secos se rompen al coger con las manos	
Construcción cintas y bolas	Se pueden construir cintas de hasta 5 cm y se puede formar una bola	No se puede formar una bola con nuestras manos	No se pueden formar cintas entre los dedos; se pueden construir bolas pero se rompen fácilmente
Drenaje	Se encharcan fácilmente, provocando inundaciones o volviéndose lodosos	Fáciles para el drenaje y susceptibles a la erosión	Las partículas tienen las tasas de infiltración y drenaje intermedios entre el suelo arcilloso y la arenosa
Otras	Es parecido a la plastilina cuando se moja Cuando se mojan son pegajosos y cuando se secan formando grietas		Contienen bastante limo Es muy compacto, pero no tanto como los arcillosos Son producidos por la sedimentación de materiales muy finos

Aptos para la agricultura	arrastrados por el agua o depositados por el viento
Se llaman húmedos y pesados	Se encuentran junto a los lechos de los ríos y son muy fértiles

Estas características se muestran en la figura 1.1.

Figura 1

Características de los suelos



Nota. Variación en la infiltración según la textura del suelo
Tomado de Guanotoa Eliseo 2015

Parámetros Físicos Hidrogeológicos

Parámetros Geológicos

Las características geológicas son muy importantes en la hidrología, ya que de la velocidad del movimiento depende de la estructura y disposición litológica de las formaciones del suelo, para que el agua pueda moverse en el suelo. Estas propiedades son:

El Coeficiente de Almacenamiento. Es el volumen de agua liberado por una columna de base unidad y cuya altura es todo el espesor del acuífero cuando el nivel piezométrico desciende una unidad. El concepto de porosidad eficaz, definida por volumen de agua drenada por gravedad por volumen total, encaja perfectamente en la definición de coeficiente de almacenamiento, si se considera 1 m^2 de acuífero libre y se

se hace descender 1 m. su superficie freática el volumen de agua que se extrae será la porosidad eficaz.

El coeficiente de almacenamiento al igual que la porosidad eficaz, es adimensional. Los valores del coeficiente son los siguientes:

Tabla 2

Coefficientes de almacenamiento

Acuífero	Valor	Equivalencia
Acuíferos libres:	$3 \cdot 10^{-1}$ a 10^{-2}	(0,3 a 0,01).
Acuíferos semiconfinados	10^{-3} a 10^{-4} .	(0,001 a 0,0001)
Acuíferos confinados	10^{-5} a 10^{-6} .	(0,00001 a 0,000001)

La Porosidad. Son los intersticios que tiene un material geológico y su valor se da en porcentaje, que indica el volumen de material ocupado por dichos intersticios. La porosidad se puede aplicar a material granular o material fracturado, incluso existen materiales granulares compactos que se encuentran fracturados y presentan lo que se llama doble porosidad.

Tabla 3

Tipos de porosidad de los materiales

Tipo de porosidad	Porcentaje
Porosidad baja	Inferior al 5%,
Porosidad media	Entre 5 y 20%
Porosidad alta	Más del 20%.

La Permeabilidad. Es la facilidad que tiene un material geológico para dejar pasar cualquier fluido, a través de sus intersticios. Cuando el fluido es agua, se llama conductividad hidráulica, este concepto incorpora densidad y viscosidad del agua. Se tienen dos clases de permeabilidad:

Tabla 4*Clases de conductividad y sus características*

Conductividad hidráulica de los términos granulares,	La conductividad de medios fracturados
Conductividad pequeña	Conductividad grande
La permeabilidad continua, que es la que se presenta cuando los poros o intersticios están comunicados entre sí	<p>Que se presenta cuando el agua se mueve a través de fisuras o grietas de las rocas.</p> <p>Las formaciones o materiales geológicos tienen un alto porcentaje de porosidad</p> <p>Además es necesario que sus poros estén comunicados o las fracturas estén intercomunicadas</p>

Las formaciones geológicas se clasifican en cuanto a su permeabilidad en: permeables e impermeables.

Permeables. Formaciones geológicas permeables

- **Muy permeables:** lavas cavernosas, gravas y arenas gruesas.
- **Permeables:** arenas finas, conglomerados, areniscas, calizas no muy fracturadas.
- **Poco permeables:** gravas con arcillas, margas, calizas margosas.

Impermeables. Entre ellos tenemos:

- **Impermeables:** pizarras cristalinas, areniscas antiguas, calizas cristalinas, calizas compactas no cavernosas, cuarcita.
- **Muy impermeables:** granitos y rocas de masa, pizarras arcillosas, gneis, arcillas.

En forma estricta no existen materiales totalmente impermeables dependen de la escala geológica considerada.

La Transmisividad. La transmisividad es el producto de la conductividad o de la permeabilidad hidráulica por el espesor saturado, en medios homogéneos.

Este parámetro, que se incluye en los modelos de simulación hidráulica del acuífero puede ser determinado mediante bombeos de ensayo. Para ello se necesitan dos puntos de observación, dos sondeos que estén abiertos en el mismo acuífero que se está bombeando; se miden las distancias y los descensos, y conocido el caudal de bombeo se despeja la transmisividad, de acuerdo con la fórmula de Thais (1935) ([2], pág. 49).

Potencial Hidráulico. Hubbert (1940) define potencial como el parámetro físico, capaz de ser medido en cada punto en un sistema de flujo, cuyas características son tales que el flujo ocurre siempre desde las regiones con valores más altos hasta los que tienen valores más bajos, sin importar la dirección en espacio ([2], pág. 50).

La Forma del Terreno. La forma e inclinación del terreno influyen en el drenaje del agua, la forma de la pendiente permite la filtración del agua en mayor o menor porcentaje.

Parámetros Climatológicos

La climatología es muy determinante en el flujo del agua subterránea y el transporte de los contaminantes desde la superficie del suelo hasta los acuíferos. Entre ellas tenemos

Pluviosidad. Llamada también precipitación, en cantidad y en duración es muy importante ya que la mayor parte del agua del subsuelo proviene de la infiltración de las aguas procedentes de las lluvias.

Las zonas lluviosas constituyen, zonas de alimentación de agua subterránea, por lo que en las zonas secas el agua subterránea no proviene de la infiltración directa, y

más bien procede de regiones lejanas, en donde la lluvia se infiltra y llega lentamente hasta ellas.

Temperatura. La temperatura influye en el flujo del agua subterránea, ya que incide directamente en la evaporación de agua superficial libre o del suelo; por otra parte, la temperatura es el factor climático de mayor correlación con la evapotranspiración real.

Parámetros Físicos de Contaminación

Coefficiente de Difusión del Ión Nitrato o de Difusividad

Es el cociente entre la transmisividad y el coeficiente de almacenamiento, y se mide en L^2/T (área, tiempo). En el caso del ión nitrato, el coeficiente de difusión a dilución infinita es $1.9018 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{día}$ ([2], pág. 59).

Cobertura Vegetal

En la producción agrícola, con el fin de mejorar la agricultura se tiende a contaminar el suelo con la utilización de fertilizantes y plaguicidas que, aplicadas en exceso, pueden alcanzar las aguas superficiales y subterráneas. En la cobertura vegetal se consideran los siguientes aspectos:

Naturaleza de los Cultivos.

Tabla 5

Tipos de cultivos y sus características

Tipos de cultivos	Características	Ejemplos
Cultivos herbáceos	Es el gran número de siembras anuales de gran importancia	El trigo, la cebada, el maíz, etc.
Cultivos leñosos	Utilizan el terreno durante largos periodos de tiempo y no necesitan ser replantados después de cada cosecha. Incluye tierras ocupadas por árboles	Arboles de pera y manzana Se excluye la tierra dedicada a árboles para la producción de leña o

	frutales y árboles de fruto seco	madera, como el eucalipto, ciprés, nogal, capulí, etc.
Cultivo seco	No necesitan riego artificial sino que les basta con el agua de lluvia	los cereales, el trigo, la cebada y árboles frutales
Cultivo de regadío	Necesitan regarse artificialmente.	El maíz, el arroz, la remolacha azucarera; las hortalizas como la zanahoria, lechuga, col, pimiento y el tomate.

Abonado Recomendado. Los fertilizantes más utilizados son los derivados nitrogenados; la forma de nitrógeno predominante en el suelo es el N-orgánico, el cual no está a disposición de las plantas ya que éstas sólo pueden absorber tal elemento en la forma nítrica y en menor grado en la amoniacal: el NH_3 (amoníaco), el NH_4^+ (ion amonio) o el NO_3^- (ion nitrato) aportados con los fertilizantes minerales.

Las plantas absorben el nitrógeno bajo dos formas, la nítrica que es la predominante debido a la disponibilidad del suelo, y amoniacal. Las bajas temperaturas o un pH bajo favorecen la absorción amoniacal. En climas de mucha pluviosidad, en donde las pérdidas de nitratos por lixiviación son muy importantes, la absorción del nitrógeno amoniacal predomina sobre la del nítrico.

Algunas bacterias convierten amoníaco en nitrito y otras transforman este en nitrato. La bacteria (*Rhizobium*) se aloja en nódulos de las raíces de las leguminosas (alfalfa, alubia, etc.) y por eso esta clase de plantas son tan interesantes para hacer un abonado natural de los suelos.

Donde existe un exceso de materia orgánica en el mantillo, en condiciones anaerobias, hay otras bacterias que producen desnitrificación, convirtiendo los compuestos de Nitrógeno en N_2 (nitrógeno gaseoso), lo que hace que se pierda de nuevo nitrógeno del ecosistema a la atmósfera.

A pesar de este ciclo, el Nitrógeno suele ser uno de los elementos que escasean y que es factor limitante de la productividad de muchos ecosistemas. Tradicionalmente se han abonado los suelos con nitratos para mejorar los rendimientos agrícolas.

Prácticas de Abonado. La contaminación difusa de las aguas es provocada por la aplicación excesiva o inadecuada de los fertilizantes nitrogenados en la agricultura. La contaminación difusa por nitrato, es el vertido indiscriminado de ión NO_3^- (ion nitrato) en el suelo y consecuentemente en el agua, hasta alcanzar los 50 mg/l de concentración máxima admisible establecida.

La agricultura contribuye en más del 60% de los aportes de nitratos a las aguas. Las zonas que más contaminan las aguas subterráneas son las de agricultura intensiva. El exceso de abonado, puede elevar el contenido de nitrato por la parte comestible de las hortalizas, lo que vuelve peligroso para el consumo humano.

En el momento de la siembra o plantación, la cantidad de nitrógeno mineral disponible en el suelo puede ser mucho mayor que las necesidades del cultivo, y se suma a esto, los aportes excesivos de materia orgánica, en muchos casos de rápida descomposición.

Abonos Orgánicos. Son productos naturales ricos en nitrógeno como el guano o el nitrato de Chile. Desde que se consiguió la síntesis artificial de amoníaco, se fabrican abonos nitrogenados que se emplean actualmente en la agricultura.

Abonos Inorgánicos. Son todos los productos cuya función principal es proporcionar elementos nutrientes a las plantas, obtenido mediante extracción o mediante procedimientos industriales de carácter físico o químico, cuyos nutrientes declarados se presentan en forma mineral. Entre los abonos minerales más comunes tenemos: los abonos nítricos, de acción rápida; abonos amoniacales y ureicos, de acción lenta; abonos nítrico – amoniacales, combinan la acción de amoniacales y nítricos; y abonos de liberación lenta ([2], pág. 63).

Lixiviación de Abonos Nitrogenados. La lixiviación, o extracción sólido-líquido, es un proceso en el que un disolvente líquido pasa a través de un sólido pulverizado para que se produzca la disolución de uno o más de los componentes solubles del sólido.

El nitrógeno lixiviado se desplaza en forma de nitrógeno inorgánico hacia las profundidades del suelo, alcanzando los acuíferos. Las pérdidas por ese proceso ocurren en forma de nitrato ya que el amonio se encuentra inmovilizado, fijado o adsorbido, o bien se ha transformado en nitrato en los procesos de nitrificación. Entre los factores que influyen en la lixiviación tenemos:

- Los factores que inciden en mayor medida en la lixiviación son el clima (evapotranspiración), práctica agrícola, cantidad de agua empleada en el riego y características del perfil de la zona no saturada.
- La frecuencia y duración de las precipitaciones también influye ya que el agua que se infiltra se comporta como un vector de transporte del nitrato.
- La temperatura, por su parte, regula la actividad de los microorganismos.
- El tipo de cultivo incide, pues aquellos con fuerte demanda de nitrógeno disminuyen los riesgos de lixiviación; también incide el periodo de crecimiento de las plantas, el desarrollo radicular y los residuos que quedan después de las cosechas. La cantidad de materia orgánica presente es primordial como fuente de energía para la biomasa que interviene en el ciclo del nitrógeno (mineralización, nitrificación, inmovilización y desnitrificación).
- Las partículas arcillosas influyen ya que provocan la absorción y fijación del amonio. Los suelos arcillosos o con intercalaciones semipermeables contribuyen a que el flujo de agua sea más lento y permiten que existan condiciones anaeróbicas y, además, la velocidad del movimiento de agua es más elevada.

Infiltración del Contaminante Nitrato. Los mecanismos de llegada del contaminante nitrato son:

- Bird B., Stewart W, Lightfood E. (como citó Gálvez, 2014, p65) dicen que los de propagación a partir del suelo que incluyen los casos de arrastres de contaminantes desde la superficie del terreno por las aguas de infiltración (vertidos con contenido nítrico sobre el terreno, uso de fertilizantes, etc.;
- Los de infiltración de las aguas superficiales contaminadas desde los ríos, acequias, etc., provocadas por la acción humana;
- Los de propagación desde la zona no saturada cuyos ejemplos más típicos son los sistemas de tratamiento de aguas residuales domésticas y de embalsamiento superficial de residuos líquidos de procedencia nítrica.
- Bird B., Stewart W, Lightfood E. (como citó Gálvez, 2014, p65) piensan que los factores que influyen en la infiltración de los compuestos nitrogenados son: difusión y dispersión del ión nitrato, permeabilidad y anisotropía del acuífero, y distribución de las entradas de agua y nitratos.

CAPITULO 2.

Modelos Matemáticos de Infiltración.

Resultados Fundamentales del Análisis Vectorial

Definiciones Matemáticas Importantes

Definición de Espacio Vectorial. Supongamos que tenemos:

- a) Un $(\mathbf{V}, +)$ un grupo abeliano, que tiene la propiedad conmutativa, asociativa, elemento neutro y simétrico con respecto a la suma, es decir se tiene un conjunto \mathbf{V} no vacío y la operación suma.
- b) También tenemos $(\mathbf{k}, +, \cdot)$ un cuerpo cuyo conjunto tiene las operaciones de suma y producto, con propiedades del producto que son conmutativa, asociativa, elemento neutro uno, simétrica y distributiva con respecto a la suma,

Entonces diremos que \mathbf{V} es un \mathbf{k} espacio vectorial (**ev**), si existe una ley de composición externa de \mathbf{k} sobre \mathbf{V} .

Ya sabemos que una ley de composición externa de \mathbf{k} sobre \mathbf{V} es una operación que a cada pareja $\mathbf{k} \times \mathbf{V}$ le hace corresponder \mathbf{V} o sea, $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} \\ \alpha, v \rightarrow \alpha v \end{smallmatrix} \right)$ tal que se satisface los siguientes axiomas:

- i. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha v + \alpha w \quad \forall \alpha \in K, \quad \forall v, w \in V$ LCE es el producto
- ii. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v \quad \forall \alpha \beta \in K, \quad \forall v \in V$ LCE es el producto
- iii. $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \beta) v \quad \forall \alpha \beta \in K, \quad \forall v \in V$ LCE, dos productos
- iv. $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

A los elementos de K le denotamos con letra griegas y se los llama escalares y los de V se denominan vectores

Para obtener un espacio vectorial, se necesitan tres aspectos

- i) Un grupo abeliano
- ii) Un cuerpo

iii) Una Ley de composición externa LCE del cuerpo sobre el grupo abeliano, de forma que se satisfacen los 4 axiomas

De forma similar;

Se nota por \mathbb{R}^n al conjunto de las n-uplas ordenadas de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) es decir que

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}; \forall i = 1, \dots, n\}$$

en el cual define dos operaciones entre sus elementos: suma y producto por escalar.

Para todo $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:

Suma: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

Producto: $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

Producto Escalar. Dados los vectores $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$; su producto escalar que lo notaremos por $\vec{x} \cdot \vec{y}$, está dado por:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Norma o Longitud del Vector. La norma o longitud del vector \vec{x} que lo denotaremos por $\|\vec{x}\|$: está dada por:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Angulo Formado por dos Vectores. Dados dos vectores \vec{x}, \vec{y} de \mathbb{R}^n , el coseno del ángulo que forman los dos vectores está dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}, \quad \|\vec{x}\| \neq 0, \quad \|\vec{y}\| \neq 0, \quad \text{donde } 0 \leq \theta \leq \pi$$

Se tiene que

- si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ o si $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, entonces $\vec{x} \cdot \vec{y} \geq 0$, es decir,

$$\text{si } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ o si } 270^\circ \leq \theta \leq 360^\circ, \quad \text{entonces } \vec{x} \cdot \vec{y} \geq 0$$

- y si $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, entonces $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq 0$

$$\text{y si } 90^\circ \leq \theta \leq 270^\circ, \quad \text{entonces } \vec{x} \cdot \vec{y} \leq 0$$

Vectores Ortogonales. Dos vectores \vec{x} , \vec{y} de \mathbb{R}^n son ortogonales si su producto escalar es nulo es decir,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \text{ y se nota } \vec{x} \perp \vec{y}$$

Gradiente de una Función. Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R}^n abierto y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que sus derivadas parciales de primer orden existen, entonces el gradiente de f en $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es el vector de \mathbb{R}^n definido por,

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, \dots, x_n) &= \nabla f(\vec{x}) \\ \nabla f(\vec{x}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) \end{aligned}$$

Divergencia de un Campo Diferenciable. Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R}^n abierto ($n \geq 2$) y \vec{F} un campo diferenciable en $\vec{x} \in \Omega$, existen f_1, f_2, \dots, f_n campos escalares diferenciables en \vec{x} tal que,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n f_i \vec{e}_i.$$

La divergencia de \vec{F} se define como,

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{F}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \\ \text{div}(\vec{F}) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{aligned}$$

La divergencia de \vec{F} también se puede denotar como $\nabla \cdot \vec{F}$ cuando

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

Laplaciano de un Campo Escalar. Sea un dominio acotado de \mathbb{R}^n y $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que posee segundas derivadas parciales en todo punto de Ω . Si $\vec{F} = \nabla g$, entonces

$$\text{div}(\vec{F}) = \text{div}(\nabla g)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) + \cdots \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_n} \right)
 \end{aligned}$$

Se denomina Laplaciano de g y se le denota con Δg , donde Δ es el operador de Laplace, es decir,

$$\Delta g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \cdots \cdots \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}$$

Otra notación del Laplaciano de g es $\nabla^2 g$. Observe que,

$$\Delta g = \nabla^2 g = \nabla \cdot (\nabla g)$$

Grafica de la Función Vectorial $\vec{\alpha}$. Sea I un intervalo abierto de \mathbb{R} . Una función vectorial $\vec{\alpha}$ de I en \mathbb{R}^n la notaremos $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son funciones reales y para $t \in I$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$

El conjunto

$$\Gamma = \{(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \mid t \in I\}$$

se lo denomina grafica de la función vectorial $\vec{\alpha}$

Si $n=2$ geoméricamente representa una curva en el plano y si $n=3$ geoméricamente es una curva en el espacio. Esta curva la llamaremos camino definido por $\vec{\alpha}$

- **Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son funciones derivables** en cualquier punto $t \in I$, la derivada de $\vec{\alpha}$ en t se define como

$$\vec{\alpha}'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))$$

La derivada $\vec{\alpha}'(t)$ se interpreta geoméricamente como el vector tangente a la curva Γ en el punto $\vec{\alpha}(t)$, $t \in I$

- **Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son funciones integrables** en $[a, b] \subset I$, la integral de la función vectorial $\vec{\alpha}$ se define como,

$$\int_a^b \vec{\alpha}(t) dt = \left(\int_a^b \alpha_1(t) dt, \dots \dots \int_a^b \alpha_n(t) dt \right)$$

Integral de Línea de \vec{F} . Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^n , $I = [a, b]$ un intervalo de \mathbb{R} , $\vec{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función vectorial derivable en $]a, b[$ con Γ su recorrido tal que $\Gamma \subset \Omega$.
Sea $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial definido en Ω . La integral de \vec{F} a lo largo de Γ se define como,

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\alpha = \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \alpha'_1(t) dt$$

Siempre que la integral del segundo miembro exista.

Volumen de Control y Superficie de Control

Un volumen de control y superficie de control se define así:

Un volumen de control es un volumen imaginario (subconjunto medible de \mathbb{R}^3) limitado por una superficie cerrada. La superficie que limita el volumen de control se llama superficie de control. El volumen y la superficie de control pueden ser fijas o móviles. En el volumen puede entrar materia o también puede salir materia. Generalmente este volumen de control es dependiente del tiempo t : Se supone que el volumen de control se desplaza con la misma velocidad que el fluido y que la velocidad en todo punto de la superficie del volumen de control es igual a la velocidad del fluido. (Gálvez, 2014, p.29).

Figura 2

Volumen y superficie de control



Teorema de la Divergencia de Gauss

Si se tiene Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^3 con Γ su frontera, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ y $\overline{\mathbf{F}}: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tal que $\text{div}(\overline{\mathbf{F}})$ integrable en Ω y $\overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}$ integrable sobre Γ :
Entonces se obtiene,

$$\int_{\Omega} \text{div}(\overline{\mathbf{F}}) dx = \int_{\Gamma} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}} ds$$

Donde $\overline{\mathbf{F}} = (f_1, f_2, f_3)$, $\text{div}(\overline{\mathbf{F}}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ donde $\overline{\mathbf{n}}$ es el vector normal exterior a Γ . Se observa que la integral del lado izquierdo es una integral triple y la integral del lado derecho es una integral de superficie.

Sea $x_0 \in \Gamma$ y $\overline{\mathbf{n}}(x_0)$ el vector normal exterior a Γ en x_0

Sea $\theta \in [0, \pi]$ el ángulo que forman $\overline{\mathbf{F}}(x_0)$ y $\overline{\mathbf{n}}(x_0)$.

Entonces,

- $\overline{\mathbf{F}}(x_0) \cdot \overline{\mathbf{n}}(x_0) \geq 0$ si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, en cuyo caso $\overline{\mathbf{F}}(x_0)$ está dirigido hacia el **exterior** de Ω y significa que **existe salida de flujo** a través de la frontera Γ ;
- Si $\overline{\mathbf{F}}(x_0) \cdot \overline{\mathbf{n}}(x_0) \leq 0$ si $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, es decir $\overline{\mathbf{F}}(x_0)$ está dirigido hacia el **interior** de Ω y significa que **ingresa flujo** a través de Γ

La integral del primer miembro representa el **flujo acumulado** en el dominio Ω y la integral de línea

$$\oint_{\Gamma} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}} ds$$

representa la circulación de $\overline{\mathbf{F}}$ a lo largo de Ω

Si $\overline{\mathbf{F}} = \nabla \mathbf{g}$, entonces

$$\int_{\Omega} \text{div}(\overline{\mathbf{F}}) dx = \int_{\Omega} \text{div}(\nabla \mathbf{g}) dx = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{g} dx$$

Luego

$$\int_{\Omega} \Delta g \, dx = \int_{\Gamma} \nabla g \cdot \vec{n} \, ds$$

El término $\nabla g \cdot \vec{n}$ se llama derivada normal de g con respecto a la normal en

Γ y se le nota con $\frac{\partial g}{\partial n}$, esto es,

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \vec{n}$$

Teorema del Transporte de Flujo de Reynolds

Sea $T > 0$, $\Omega \in \mathbb{R}^3$ cerrado, acotado con $\Omega^0 \neq \emptyset$ y Γ su frontera. Para $T \in [0, T]$, $\Omega(t) \subset \Omega$ cerrado y acotado con $\Omega^0(t) \neq \emptyset$ y $\Gamma(t)$ su frontera, \vec{n} el vector normal exterior a $\Gamma(t)$.

Sea f una función real definida en $\Omega \times [0, T]$ tal que para cada $t \in [0, T]$, $f(\cdot, t)$, $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$, $\text{div}(f(\cdot, t) \vec{v}(\cdot, t))$, integrales en $\Omega \times [0, T]$ donde $\vec{v}(\cdot, t)$ es un conjunto vectorial continuo (diferenciable en $\Omega^0 \times [0, T]$) en $\Omega \times [0, T]$ y representa la velocidad local de $\Omega(t)$, entonces,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, y, z, t) \, dx dy dz = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) \, dx dy dz + \int_{\Gamma(t)} f(x, y, z, t) \vec{v}(x, y, z, t) \cdot \vec{n} \, ds$$

El teorema nos dice que: la tasa de variación de la integral de f sobre el volumen $\Omega(t)$, es igual a la integral sobre $\Omega(t)$ de la variación de f con respecto al tiempo más el flujo de f a través de la frontera $\Gamma(t)$.

La interpretación física del teorema es: la rapidez de cambio del flujo en el volumen de control es igual a la rapidez de flujo que entra al volumen de control más el flujo en la frontera:

- Si $f \vec{v} \cdot \vec{n} > 0$ existe salida de flujo de la frontera
- Si $f \vec{v} \cdot \vec{n} < 0$ ingresa flujo a través de la frontera

- Si $f\vec{v}, \vec{n} = \mathbf{0}$ no existe entrada ni salida de flujo

Ecuación de Continuidad o de Conservación de la Masa

Albuja (2013) afirma: “La densidad de un flujo (líquido o gas) homogéneo depende de algunos factores tales como la temperatura y la presión a la que está sometido.

Para los líquidos, la densidad varía muy poco dentro de amplios límites de presión y temperatura” (p 22).

En este estudio, los líquidos que no están sujetos a una fuente contaminante serán considerados de densidad constante, pero si el líquido está sujeto a una fuente contaminante cambiará de densidad.

La densidad de los gases es muy sensible a los cambios de temperatura y presión

- La densidad se define como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad o$$

$$\rho = \frac{dm}{dx}$$

Y sus unidades de medida son $\frac{kg}{m^3}$ o también $\frac{g}{cm^3}$

Sea $\Omega(t)$ el volumen de control que se mueve con una velocidad de $v, t \in [T_1, T_2]$

La densidad del fluido contenido en el volumen de control $\Omega(t)$ es,

$$\rho(x, t) = \frac{dm(t)}{dx} ,$$

Despejamos $dm(t)$

$$dm(t) = \rho(x, t)dx$$

Integrando sobre el volumen de control $\Omega(t)$ se tiene,

$$m(t) = \int_{\Omega(t)} dm(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(x, t)dx$$

Derivando con respecto al tiempo, tenemos,

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx$$

Por el teorema de transporte de Reynolds, se tiene

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dx$$

Sistema Conservatorio. Un sistema es conservativo si la masa del sistema no se crea, ni se destruye; es decir que la masa permanece constante durante todo el proceso, esto es

$$\frac{dm(t)}{dt} = 0 \quad \text{para todo } t \geq 0, \text{ es decir,}$$

$$\int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dx = 0$$

Como la integral anterior es válida para cualquier volumen de control $\Omega(t)$, se demuestra que,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{cpt de } \Omega \text{ en } T_1, T_2[$$

Ecuaciones de Balance de Materia

Brezis (como cito Gálvez, 2014) dice que, si un fluido contiene varios componentes con concentraciones diferentes en distintos puntos, existe un proceso de intercambio en el sistema de la zona de más alta concentración a la más baja ([9])

Gálvez (2014) propone: "Sea $\Omega(t) \subset \Omega$, para $n = 1, 2 \text{ o } 3$, con $\Gamma(t)$ su frontera y \vec{n} el vector normal exterior a $\Gamma(t)$. En $\Omega(t)$ esta definida una función c que depende de t , se supone que c y $\frac{\partial c}{\partial t}$ son integrables en $\Omega(t)$ " (p36).

Se define

$$K(t) = \int_{\Omega(t)} c(x, t) dx, \quad t > 0$$

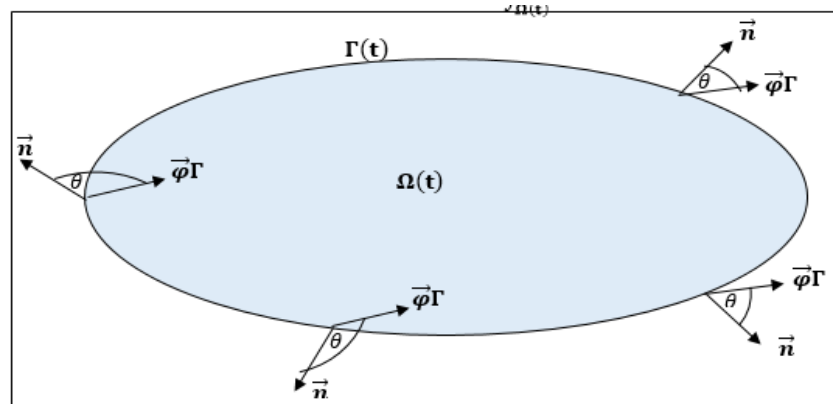
La variación de $K(t)$ durante un tiempo dt se debe a las siguientes causas:

- Existe un flujo de la magnitud extensiva a través de la frontera $\Gamma(t)$ ligado al movimiento del soporte material y representado por un campo de vectores $\vec{\varphi}_\Gamma = c\vec{v}$. El flujo total a través de $\Gamma(t)$ está dado por,

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{r}}(t) &= \int_{\Omega(t)} \vec{\varphi}_\Gamma \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \int_{\Omega(t)} c\vec{v} \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \int_{\Omega(t)} \text{div.}(c\vec{v}) \, dx\end{aligned}$$

Figura 3

Interpretación física del flujo a través de $\Gamma(t)$



Fuente: (Gálvez 2014)

Si $\Phi_{\mathbf{r}} > 0$, existe salida de flujo a través de la frontera $\Gamma(t)$

Si $\Phi_{\mathbf{r}} < 0$, el flujo entra a través de la frontera $\Gamma(t)$

Con $\vec{\varphi}_\Gamma \cdot \vec{n} = \|\vec{\varphi}_\Gamma\| \|\vec{n}\| \cos(\theta)$, donde

- Si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos(\theta) \geq 0$, entonces $\vec{\varphi}_\Gamma \cdot \vec{n} \geq 0$
- Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, $\cos(\theta) < 0$, entonces $\vec{\varphi}_\Gamma \cdot \vec{n} < 0$
- Si $\vec{\varphi}_\Gamma = 0$, se sabe que $\Gamma(t)$ es una pared impenetrable o se trata de un sistema cerrado.

- Pueden existir fuentes en la entidad física considerada, sea al interior de $\Omega(t)$ o sea sobre la frontera $\Gamma(t)$.

Denotemos por,

$q\Omega = q\Omega(x, y, z, t)$, al flujo volumico local de fuentes o sumideros de $\Omega(t)$

para $(x, y, z, t) \in \Omega(t)$

$q\Gamma = q\Gamma(x, y, z, t)$, al flujo volumico superficial local en $\Gamma(t)$ para

$(x, y, z, t) \in \Gamma(t)$

Se tiene que,

Si $q\Omega > 0$, se trata de una fuente (entrada)

Si $q\Omega < 0$, se trata de un pozo (salida)

En el caso $q\Gamma$ se introduce un vector de densidad de flujo de fuentes sobre $\Gamma(t)$

$$q\Gamma = \overrightarrow{q\Gamma} \cdot \vec{n}$$

Entonces, si $q\Gamma > 0$ es una salida y si $q\Gamma < 0$ es una entrada

- Denotemos con Q_Γ el flujo total de fuentes sobre $\Gamma(t)$ y Q_Ω el débito total de fuentes de volumen.

El balance $K(t)$ sobre $\Omega(t)$ durante dt se establece como,

$$\begin{aligned} dK(t) &= \frac{\partial K(t)}{\partial t} dt \\ &= Q_\Omega dt - Q_\Gamma dt - \Phi r(t) dt \end{aligned}$$

Luego

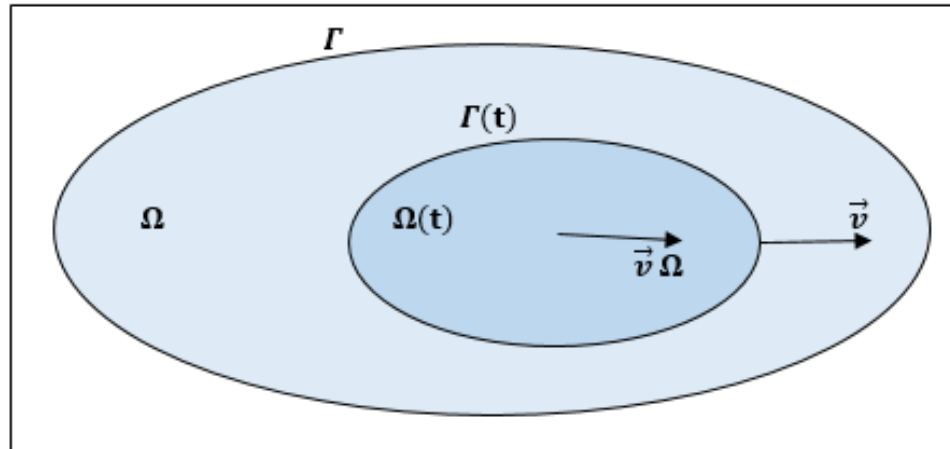
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} c(x, t) dx + \int_{\Gamma(t)} c\vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega(t)} q\Omega(x, t) dx - \int_{\Gamma(t)} q\Gamma(s, t) ds .$$

Si $\Omega(t) = \Omega$, $t \geq 0$ y por el teorema de derivación bajo el signo de integración se tiene,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(c\vec{v}) dx = \int_{\Omega} q\Omega(x, t) dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(q\vec{\Gamma}) dx$$

Figura 4

Interpretación física de la velocidad total en $\Omega(t)$ y $\Gamma(t)$



Fuente: (Gálvez 2014)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} c(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(c\vec{v}\Omega) \right) dx$$

Luego

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(c\vec{v}\Omega) \right) dx + \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(c\vec{v}) = \int_{\Omega(t)} q\Omega(x, t) dx - \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(q\vec{\Gamma}) dx$$

De donde,

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(c\vec{v}\Gamma) \right) dx = \int_{\Omega(t)} (q\Omega(x, t) - \operatorname{div}(q\vec{\Gamma})) dx$$

Con $\vec{v}T = \vec{v} + \vec{v}\Omega$

Como $\Omega(t)$ es medible y arbitrario $\Omega(t) \subset \Omega$, $t \geq 0$

Por el teorema fundamental del cálculo de variaciones (eliminando el signo de integral a los dos miembros en la ecuación anterior), se tiene

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(c\vec{v}T) = q\Omega(x, t) - \operatorname{div}(q\vec{\Gamma})$$

Donde

c , es la densidad volumica de la magnitud considerada,

$q\Omega$, es del débito volumico de fuentes o sumideros

$\vec{q}\Gamma$, es la densidad de fuentes de superficie (de la frontera) ([1], [3])

Aplicaciones

Balance de Masa Total. Ponemos $c(x, t) = \rho(x, t)$ densidad de fluido (material).

Entonces,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \text{div}(\rho \vec{v}) = q\Omega(x, t) - \text{div}(\vec{q}\Gamma)$$

Por el principio de conservación de la masa, “la masa ni se crea ni se destruye, se transforma” resulta que $q\Omega = 0$ y $\vec{q}\Gamma = 0$. Luego (el segundo miembro de la ecuación anterior desaparece) se tiene,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Que se conoce como ecuación de continuidad

Balance Sobre Una Constituyente (Dos Especies A y B). Con dos especies A y B que dan lugar a una mezcla. Ponemos $c = \rho_A$ densidad de la especie A (M/L^3), (ρ es la densidad)

$qI = qI, A$, tasa de producción local de A (M/L^3), $qI, A \neq 0$

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_A + \rho_B) + \text{div}((\rho_A + \rho_B)\vec{v}) \right) dx = \int_{\Omega(t)} ((qI, A + qI, B) - \text{div}(\vec{q}_s)) dx$$

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div}((\rho_A)\vec{v}) \right) dx = \int_{\Omega(t)} (qI, A - \text{div}(\vec{q}_s)) dx$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div}((\rho_A)\vec{v}) = qI, A - \text{div}(\vec{q}_s)$$

Si ρ_A se reemplaza por la concentración de la especie A, se obtiene

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \text{div}((c_A \vec{v})) = qI, A - \text{div}(\vec{q}_s)$$

Donde $\vec{q}_s = -D(c_A)\nabla c_A$ es el coeficiente de dispersión de Fick

El termino $\text{div}(c_A \vec{v})$ se interpreta como el transporte advectivo

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \text{div}((c_A \vec{v})) - \text{div}(D(c_A)\nabla c_A) = qI, A$$

Se conoce como ecuación de transporte de la especie A en la mezcla

Si notamos con $\vec{q}_{s,dif}$ al flujo superficial local difusivo y $\vec{q}_{s,quim}$ al flujo superficial local químico

Si

$$\vec{q}_s = \vec{q}_{s,dif} + \vec{q}_{s,quim}$$

Con $\vec{q}_{s,dif} = -D(c_A)\nabla c_A$

y $\vec{q}_{s,quim} = -d\nabla c_A$ se tiene,

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \text{div}((c_A \vec{v})) - \text{div}(D(c_A)\nabla c_A) - \text{div}(d \nabla c_A) = qI, A$$

Para $d > 0$ constante, $\text{div}(d\nabla c_A) = d \text{div}(\nabla c_A) = d\Delta c_A$ y en consecuencia,

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \text{div}((c_A \vec{v})) - \text{div}(D(c_A)\nabla c_A) - d \Delta c_A = qI, A$$

Si $qI, A = qI, ads + f$, y $qI, ads = d_{ad}C_A^\alpha$ (ley de adsorción de Freundlich con $0 < \alpha <$

1) se obtiene

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \text{div}(D(c_A)\nabla c_A) + \text{div}((c_A \vec{v})) + d_{ad}C_A^\alpha = f$$

si $\alpha = 1$, \vec{v} constante, $r = d_{ad}$ y $D = D(c_A)$, se tiene,

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \text{div}(D\nabla c_A) + \vec{v} \cdot \nabla c_A + r c_A = f$$

Modelos de Contaminación del Suelo

La Convección

Es el arrastre del contaminante debido al movimiento del fluido en el medio poroso. Para la descripción de dicho movimiento se introduce una velocidad ficticia denominada velocidad de Darcy $\vec{v} = (\mathbf{x}, t)$ y representa la velocidad del fluido en el medio si este se considera como continuo. Se considera en ella, que el fluido pasa a través de toda la sección del medio poroso, sin eliminar la parte sólida del medio.

De este modo, la velocidad a la que el elemento transportado se mueve en los poros, viene dada por:

$$v(x, t) = \frac{\vec{v}(x, t)}{W_c}$$

$v(x, t)$ Velocidad del elemento transportado
 $\vec{v}(x, t)$ velocidad de Darcy
 W_c coeficiente, porosidad cinemática

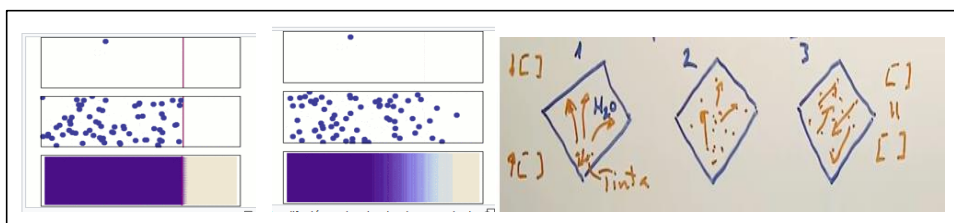
; donde W_c es un coeficiente denominado porosidad cinemática, que depende del elemento transportado y del medio, y que representa el porcentaje del fluido móvil contenido en el medio poroso.

Bird B, Stewart W, Lightfoot E. (como cito en Gálvez, 2014, p 43) dice que la difusión es un proceso de transporte ligado a la agitación molecular de las partículas de contaminante miscibles en el seno del fluido contenido en el medio poroso. El flujo de una sustancia, por medio de este mecanismo de transporte a través de un elemento de área dA está dado por la ley de Fick.

Término Difusivo: Ley de Fick

Figura 5

Movimiento de las moléculas



En la difusión molecular, inicialmente hay moléculas de soluto en el lado izquierdo de una barrera (línea color púrpura) y no hay ninguna en la derecha. Cuando se elimina la barrera, el soluto se difunde para ocupar completamente el contenedor.

- **En la parte superior:** Una única molécula se mueve en forma aleatoria.
- **Centro:** Con un mayor número de moléculas, se observa una clara tendencia de parte del soluto a llenar más uniformemente el contenedor.
- **Inferior:** Con un enorme número de moléculas de soluto, la aleatoriedad se convierte en indetectable: el soluto parece moverse suave y sistemáticamente desde las áreas de alta concentración a las áreas de baja concentración. Este suave flujo es descrito por las leyes de Fick.

La Ley de Fick. Estudia la rapidez en alcanzar el equilibrio entre las dos sustancias

$$T_{\text{difusion}} = \frac{A \text{ de la superficie } \times \text{ diferencia de concentraciones (grad)}}{d \text{ distancia que deben recorrer las moléculas}}$$

La Ley de Fick sostiene que el flujo difusivo que atraviesa una superficie es directamente proporcional al gradiente de concentración.

Fick estableció que la cantidad de transporte de materia según una dirección x , a través de una sección de área unitaria y por unidad de tiempo, es decir, el flujo en dirección x , es proporcional al gradiente de la concentración de la materia y va en el sentido de la zona de más concentración a la de menos concentración, de ahí el signo menos que aparece en la ecuación:

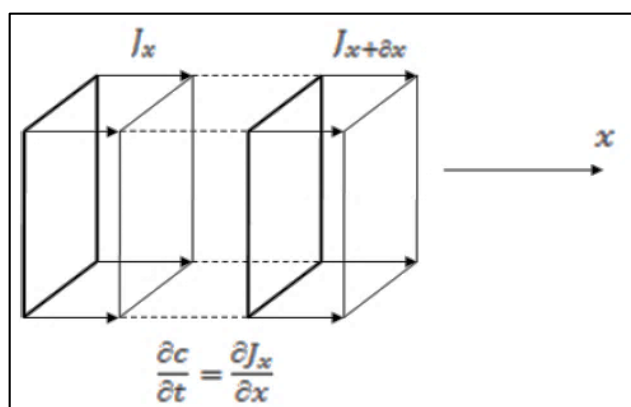
$$J_x = -D\nabla c$$

donde

D es el coeficiente de difusión (L^2/T)

C es la concentración del contaminante (M/L^3)

$\nabla \cdot J_x$ es el término difusivo de la ecuación de transporte del contaminante

Figura 6*Transporte difusivo*

Fuente: (Gálvez 2014)

Término Convectivo

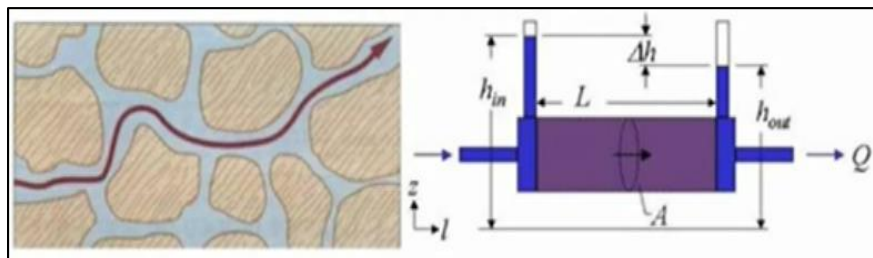
Ley de Darcy. Esta ley estudia el movimiento de fluidos en medios porosos. Si se tiene el gasto de agua Q y la caída de presión Δh que pasa a través de una columna de arena de área transversal A ; se obtiene la relación de que el gasto por unidad de área, es proporcional al gradiente de presión

$$\frac{Q}{A} \propto \frac{\Delta p}{L}$$

La razón de proporcionalidad depende del tipo de medio poroso por donde fluye el agua.

Despejando Q en la ecuación anterior se tiene:

$$Q = KA \frac{\Delta p}{L} \quad \text{Ley de Darcy}$$

Figura 7*Ley de Darcy*

Donde k es la permeabilidad o conductividad hidráulica

Gálvez (2014) afirma que “la conductividad hidráulica se asume constante para suelos saturados, pero decrece rápidamente cuando decrece la humedad. Esto es debido a que cuando el agua drena los poros se vacían y la sección de flujo efectivo es mucho menor” p 45.

Como consecuencia, el descenso del valor de K es mucho más rápido en suelos con capacidad drenante (arenas) que en suelos con poros de menor tamaño (arcillas).

La permeabilidad K depende de la naturaleza del terreno, de la forma, de la distribución de tamaños y de la orientación de sus partículas, pero también depende del fluido.

Para medios porosos la constante de permeabilidad K es,

$$K = k \frac{\rho g}{\eta} \quad \text{Porosidad, toruosidad, temperatura}$$

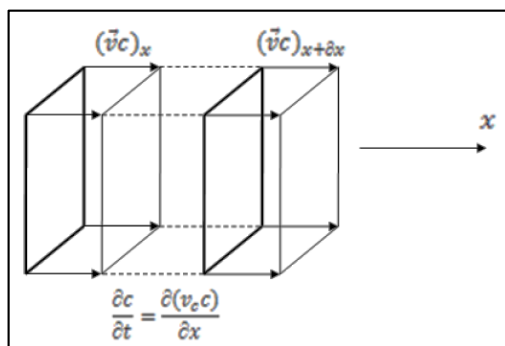
Donde k es la permeabilidad intrínseca

Considerando una permeabilidad macroscópica media, la variación es progresiva y suave, salvo a lo sumo donde hay una solución de continuidad en cuanto a la naturaleza del terreno se refiere.

La velocidad de Darcy definida como se ha visto, para terrenos saturados o no saturados, conforman el término convectivo o de arrastre de contaminante $\nabla(\vec{v}, C)$.

Figura 8

Transporte convectivo



Fuente: (Gálvez 2014)

La ecuación de transporte proviene de suponer la conservación de la masa sobre el contaminante:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \text{div}(j) + rc = f$$

Donde

- c es la concentración del contaminante en el acuífero (función incógnita) (L/T^3),
- r es la reacción química del contaminante con el subsuelo,
- t variable temporal,
- j es el flujo de masa que puede tener lugar por difusión y convección.

El flujo de masa es:

$$j = j_d + j_a,$$

donde j_d es el flujo debido a la difusión molecular y j_a el flujo debido a la convección.

La difusión molecular viene dada por la ley de Fick:

$$j_d = -D\nabla c$$

El flujo convectivo se puede expresar como el producto de la velocidad de Darcy por la concentración del contaminante:

$$j_a = \vec{v}c.$$

Por lo tanto, podemos escribir el flujo de masa como:

$$j = -D\nabla c + \vec{v}c.$$

Sustituyendo j en la expresión de la conservación de la masa del contaminante se tiene la ecuación resultante:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \text{div}(D\nabla c) + \vec{v} \cdot \nabla c + rc = f$$

El flujo de contaminante que se difunde y es arrastrado por un fluido en un medio poroso es gobernado por la ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \text{div}(D\nabla c) + \vec{v} \cdot \nabla c + rc = f, \text{ sobre } \Omega \times]0, T[$$

Donde,

- Ω es un conjunto abierto acotado de \mathbb{R}^2 ,
- D es el coeficiente (función) de difusión-dispersión (L/T^2),
- \vec{v} es la velocidad del agua en el acuífero (L/T),
- r es la reacción química del contaminante con el subsuelo,
- f es la infiltración del contaminante en el acuífero ($M/L^3, T$),
- t variable temporal,
- c es la concentración del contaminante en el acuífero (función incógnita) (L/T^3)

Ecuación de Darcy, Modelo Matemático y Ecuaciones de Gobierno. Esta ecuación en términos de potencial mátrico con coordenada vertical que crece hacia arriba, se expresa unidimensionalmente como:

$$q = -K * \left(\frac{dh}{dz} + 1 \right) \quad (1)$$

Para este proceso se tiene la siguiente forma de la ecuación de continuidad:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{dq}{dz} \quad (2)$$

La capacidad específica del suelo se define como:

$$C(h) = \frac{d\theta}{dh} \quad (3)$$

Donde:

Q es el caudal

$K(h)$ es la conductividad hidráulica

h es el potencial mátrico

z es la profundidad

θ es la humedad volumétrica del suelo

Condiciones Iniciales de la Ley de Darcy. Se define el estado inicial de la variable, en este caso la concentración del contaminante, lo que supone la condición inicial. Los cálculos de la concentración del contaminante a lo largo del tiempo tomarán como punto de partida dicha condición inicial, que se puede formular:

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_n) = c_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \bar{\Omega}$$

Condiciones de Frontera de la Ley de Darcy. En los problemas parabólicos hay algunas condiciones de frontera para describir lo que sucede en la frontera del dominio físico en el que se produce el transporte de masa.

La Condición de Dirichlet. Se da cuando en un tramo de frontera Γ_d el nivel medio de concentración del contaminante es conocido. Por ejemplo, se puede asimilar a una condición de Dirichlet la zona de contacto del acuífero con un río o lago cuyo nivel de contaminación no sea directamente dependiente de la contaminación del acuífero. Se formula como

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in \Gamma_d \times [0, T]$$

La Condición de Neumann. Se da cuando en un tramo de frontera Γ_n el flujo del contaminante que atraviesa la frontera es conocida. Un caso particularmente importante, es la frontera estanca de Neumann, de flujo nulo. A menudo se puede asimilar a este tipo de condición un tramo de frontera divisoria de cuenca en la que el flujo hidráulico sea nulo y, en consecuencia, el del contaminante muy reducido o nulo. La condición en la frontera tipo Neumann se formula como

$$\frac{\partial c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial n} = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in \Gamma_n \times [0, T]$$

Donde $\Gamma_d \cup \Gamma_n = \Gamma$, $\Gamma_d^0 \cap \Gamma_n^0 = \emptyset$, Ω la frontera de Γ

Ley de Darcy-Buckingham

Buckingham observó que la ley de Darcy podía ser extendida para describir el flujo en un medio poroso no saturado.

$$v_x = -K(\theta) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -K(\theta) \cdot \frac{\partial(\psi + z)}{\partial x}$$

donde la conductividad hidráulica es una función del contenido de humedad, θ , y de la succión, ψ

Los factores que describen la relación entre la humedad y la conductividad hidráulica son:

- Poros grandes se vacían primero.
- Líneas de flujo aumentan en longitud.
- Área de escurrimiento disminuye

CAPITULO 3

Ecuación de Richards, Existencia y Unicidad

El Modelo de Cranck-Nicholson.

El modelo implícito Cranck-Nicholson (MCN), se aproxima la derivada temporal en un tiempo de medio paso mediante una diferencia centrada, mientras que la derivada espacial se aproxima tomando una media aritmética de las diferencias centradas del caudal en tiempos enteros continuos:

$$C(h_i^j) * \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{q_{i+\frac{1}{2}}^j - q_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta z} + \frac{q_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - q_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}}{\Delta z} \right)$$

Se reemplazan los caudales por las ecuaciones (9) y (10) y se reagrupa para llegar a la siguiente expresión que se utiliza en el algoritmo:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t * K(h_{i+\frac{1}{2}}^j)}{2 * \Delta z^2 * C(h_i^{j+\frac{1}{2}})} * h_{i+1}^j + \left(1 - \frac{\Delta t * \left(K(h_{i+\frac{1}{2}}^j) + K(h_{i-\frac{1}{2}}^j) \right)}{2 * \Delta z^2 * C(h_i^{j+\frac{1}{2}})} \right) * h_i^j + \frac{\Delta t * K(h_{i-\frac{1}{2}}^j)}{2 * \Delta z^2 * C(h_i^{j+\frac{1}{2}})} \\ & * h_{i-1}^j + \frac{\Delta t}{2 * \Delta z * C(h_i^{j+\frac{1}{2}})} * \left(K(h_{i+\frac{1}{2}}^j) - K(h_{i-\frac{1}{2}}^j) + K(h_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}) - K(h_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}) \right) \\ & * h_{i-1}^{j+1} \\ & = -\frac{\Delta t * K(h_{i+\frac{1}{2}}^{j+1})}{2 * \Delta z^2 * C(h_i^{j+\frac{1}{2}})} * h_{i+1}^{j+1} + \left(1 + \frac{\Delta t * \left(K(h_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}) + K(h_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}) \right)}{2 * \Delta z^2 * C(h_i^{j+\frac{1}{2}})} \right) * h_i^{j+1} \\ & - \frac{\Delta t * K(h_{i-\frac{1}{2}}^{j+1})}{2 * \Delta z^2 * C(h_i^{j+\frac{1}{2}})} \end{aligned}$$

Esta es la ecuación general de un nodo para el modelo Cranck-Nicholson que será utilizada más adelante para calcular la infiltración en el suelo.

Condiciones Iniciales y de Frontera

Condiciones Iniciales

En el campo de las ecuaciones diferenciales, un problema de valor inicial, también llamado como el problema de Cauchy, es una ecuación diferencial ordinaria junto con un valor especificado, llamado la condición inicial, de la función desconocida en un punto dado del dominio de la función.

Condiciones de Frontera.

Las condiciones de frontera de Cauchy en ecuaciones diferenciales ordinarias o en ecuaciones diferenciales parciales imponen valores específicos a la solución de una ecuación diferencial que se toma de la frontera del dominio y de la derivada normal a la frontera. Esto es igual a imponer dos tipos de condiciones: la condición de frontera de Dirichlet y la condición de frontera de Neumann.

Las condiciones de Cauchy son también llamadas condiciones de valor inicial o valores iniciales o simplemente valores de Cauchy.

Un problema con valores en la frontera consiste de una ecuación diferencial y los valores inicial o en la frontera requeridos para resolver la ecuación. La solución a este problema satisface la ecuación diferencial en cualquier lado dentro de la frontera y en la frontera misma.

Ecuación de Richards

De manera general, es la suma de la Ley de Darcy, Ley de conservación de la masa y la ecuación de continuidad para el volumen de control dado.

La ecuación de Richards describe el proceso de filtración mediante el cual penetra el agua en un medio poroso, para suelos no saturados. Esta ecuación y las ecuaciones

constitutivas asociadas no son lineales. Se puede resolver usando distintas aproximaciones en diferencias finitas y es posible analizar la velocidad de cálculo y la sensibilidad en los resultados para diferentes valores de paso de tiempo.

Para la resolución de la ecuación de Richards se pueden utilizar tres métodos de cálculo; método explícito (ME), método implícito simple (MIS) y el método de Crank-Nicholson (MCN). En el problema planteado, se tomarán las condiciones de frontera de Dirichlet.

Los tres modelos convergen a la misma solución por el análisis de sensibilidad para la variable t . El modelo de Crank-Nicholson tiene los menores errores relativos en la zona del frente húmedo, el que, a pesar de su mayor complejidad, requiere un tiempo de cómputo reducido.

En este trabajo se proponen distintos métodos para la solución de este problema, y se busca relacionar entre error cometido del modelo y tiempo de cómputo necesario. Se encuentra una mayor complejidad en la zona no saturada por las variaciones no lineales de la conductividad y la capacidad con la humedad.

Debido a esto, se propone la aplicación de métodos numéricos para la obtención de distintos modelos que resuelven el problema. Los modelos que se proponen son en diferencias finitas ya que tienen una formulación relativamente simple y pueden implementarse fácilmente (Pedrozo H., Rosenberg M, Schvezov c. p2)

La Ecuación de Richards se obtiene a partir de la combinación de las ecuaciones (1), (2) y (3) descritas anteriormente:

$$C(h) * \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dz} \left(K(h) * \frac{dh}{dz} + 1 \right) \quad (4)$$

Dónde:

$C(h)$ es la capacidad hidráulica específica del suelo

q es el caudal por unidad de área,

h es el potencial mátrico debido a la succión,

t es el tiempo,

z es la profundidad,

$K(h)$ es la conductividad hidráulica,

θ es la humedad volumétrica del suelo,

Ecuaciones de Mualem-van Genuchten

Para describir la variación de la conductividad hidráulica $K(h)$ y la capacidad hidráulica específica $C(h)$ con respecto al potencial se utilizan las ecuaciones de Mualem-van Genuchten:

$$K(h) = K_s * \frac{[1 - (\alpha * |h|^{n-1} * (1 + (\alpha * |h|)^n)^{-m}]^2}{(1 + (\alpha * |h|)^n)^{n/2}}$$

$$\theta(h) = \frac{(\theta_s - \theta_r)}{(1 + (\alpha * |h|)^n)^m} + \theta_r$$

$$C(h) = \frac{m * n * \alpha^n * (\theta_r - \theta_s) * |h|^{n-1}}{[(1 + (\alpha * |h|)^n)^{m+1}]}$$

Donde:

θ_s es la humedad volumétrica del suelo saturado,

θ_r Es la humedad volumétrica residual del suelo,

α, n, m , son parámetros que dependen del suelo,

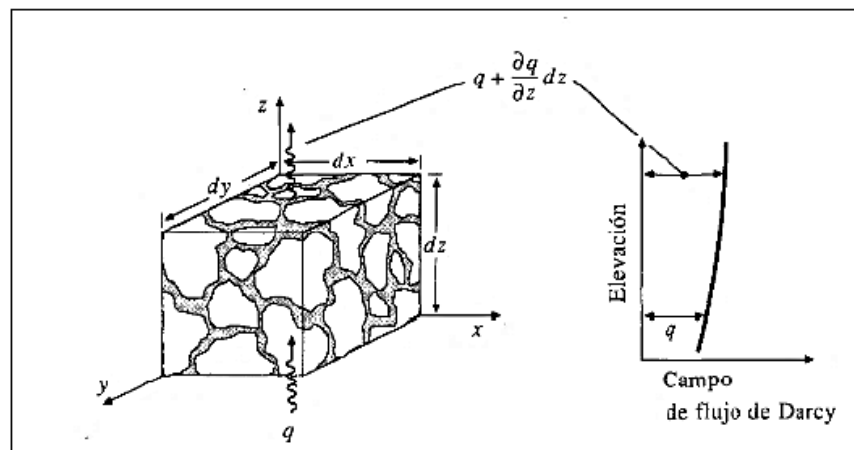
Es la conductividad hidráulica saturada.

Infiltración – Ecuación de Richards

La ecuación de Richards para flujo en medios porosos no saturados es no lineal. No es posible obtener soluciones cerradas de las ecuaciones de Richards que tengan en cuenta distintas condiciones de contorno y geometría compleja (Espinoza, 1993).

Figura 9

Volumen de control para el desarrollo de la ecuación de continuidad en un medio poroso no saturado



Fuente: Chow, Maidment, & Mays, 1994

La ecuación que describe el flujo del agua de un medio anisotrópico saturado o no saturado, que normalmente se refiere como la ecuación de Richards (Main y Larson, 1973) se expresa como:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_x k_{rw}(\psi)}{\mu_w} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k_y k_{rw}(\psi)}{\mu_w} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k_z k_{rw}(\psi)}{\mu_w} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]$$

Donde:

∂ , es la derivada parcial,

k_x, k_y, k_z , permeabilidades intrínsecas correspondientes a las direcciones respectivas

k_{rw} , permeabilidad relativa a la fase líquida

ϕ , (Variante de ψ) es una constante, altura piezométrica

θ_w , es la cantidad volumétrica de la fase w ,

μ_i es la viscosidad dinámica de la fase fluida i y,

ψ (psi) es la succión ($z - \phi$).

Esta ecuación nos permite calcular los perfiles de humedad del suelo y, en consecuencia, la infiltración

Similarmente se expresa la ecuación para la fase gaseosa en un medio poroso incompresible.

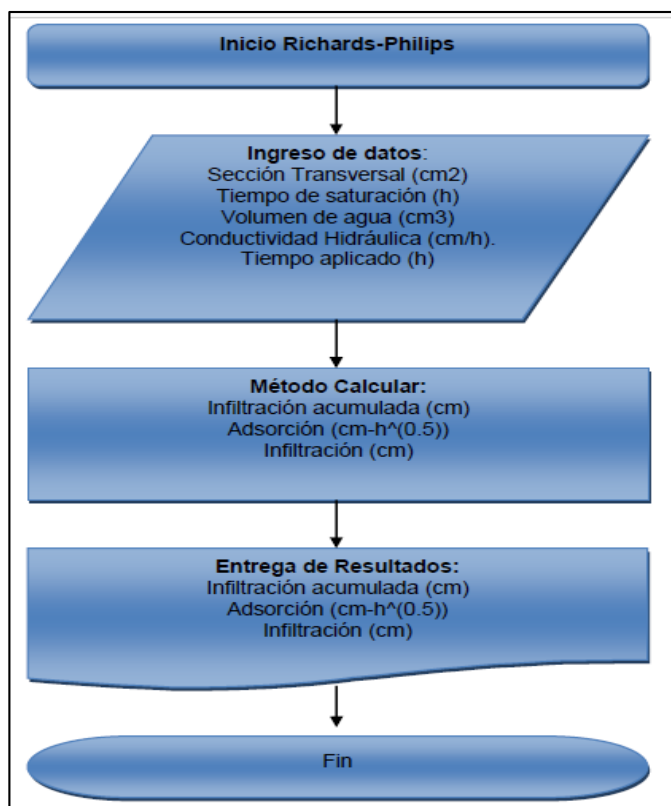
$$\frac{\partial \theta_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_x k_{ra}(\psi)}{\mu_a} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k_y k_{ra}(\psi)}{\mu_a} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k_z k_{ra}(\psi)}{\mu_a} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]$$

Si se considera que el movimiento del aire no produce un efecto apreciable en el movimiento del agua, se puede utilizar sólo la primera de las ecuaciones para describir el flujo en un medio no saturado (Philip, 1969; Neuman, 1973; Rubin, 1969; Wallace, 1975; Christe y Gaillard, 1989). (Reina S, Reina T., p3).

Diagrama de Flujo Método de Richards-Philip (1957-1969)

Figura 10

Diagrama de flujo del método de Richards. Philip



Fuente: Rivadeneira, 2013

Existencia y de la Ecuación de Richards.

Importancia del Teorema para una Ecuación Diferencial.

Para una ecuación diferencial, este teorema nos indica si existe o no solución y si esta solución es única o no, dado un valor inicial (problema de Cauchy).

Ejemplos:

1. Única solución,

$$\frac{dy}{dx} = -y, \text{ para un valor inicial } y(1) = 3,$$

Trasladando y y dy al primer miembro, se tiene, $\frac{dy}{y} = -dx$

Integrando tenemos, $\int \frac{dy}{y} = \int -dx$

$$\ln y = -x + C_1$$

Despejando y , $y = Ce^{-x}$

Reemplazamos $y(1) = 3$, $3 = Ce^{-1}$

$$\frac{3}{e^{-1}} = C$$

$$C = 3e$$

Reemplazando $C = 3e$ en el valor de y ,

$$y = Ce^{-x}$$

$$y = (3e)e^{-x}$$

$$y = 3e^{-x+1} \text{ es una unica solucion}$$

2. Dos soluciones.

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \text{ para un valor inicial de } y(0) = 0,$$

Trasladando y y dy al primer miembro, $\frac{dy}{dx} = 2(y)^{1/2}$

$$\frac{dy}{(y)^{\frac{1}{2}}} = 2dx$$

$$(y)^{-\frac{1}{2}} dy = 2dx$$

Integrando, $\int (y)^{-\frac{1}{2}} dy = \int 2dx$

Despejando y tenemos $y = x^2$, *Es una solución*

Pero también tiene otra solución que es $y = 0$

3. Ninguna solución

$$y^2 + x^2 y' = 0, \quad \text{para un valor inicial } y(0) = 1$$

Calculando y se tiene,

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$y = \frac{-x}{1 + Cx}$$

Reemplazando $y(0) = 1$, en el valor de y , tenemos,

$$1 = \frac{-0}{1 + C(0)}$$

$$1 = 0, \text{ lo cual es un absurdo}$$

No existe solución que satisfice la condición inicial

Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones en una Ecuación Diferencial

Un problema de valor inicial (PVI o Problema de Cauchy) tiene al menos una solución definida en algún intervalo que contiene al punto a , si $f(x, y)$ es continua en algún rectángulo plano XY que contiene el punto (a, b) (Teorema de la existencia)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) & \text{derivada de la función} \\ y(a) = b & \text{valor inicial} \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$f(x, y) = \frac{1}{x+y}, \text{ para el valor inicial } (0,0), (1, -1), (2, -2), (a, -a),$$

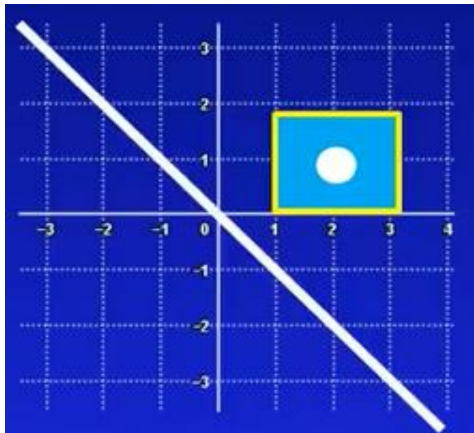
no es continua, por tanto no tiene solución,

En cambio, $(x, y) = \frac{1}{x+y}$, para el valor inicial $(2,1)$, se ve que tiene al

menos una solución, sin necesidad de derivar y sin integrar

Figura 11

Teorema de existencia



Fuente. Video teorema de existencia y unicidad, EDO de primer orden

Si además, la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial y}$ es continua en ese rectángulo, entonces la solución es única en algún intervalo (tal vez más pequeño) que contiene el punto $x = a$ (Teorema de unicidad)

La derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial y}$ no es condición necesaria, es decir que $\frac{\partial y}{\partial y}$ no tiene por qué cumplirse para que la solución sea única, existe una condición un poco más débil y menos estricta, que nos garantiza que la solución es única (si $f(x, y)$ es una función Lipschitz en el rectángulo).

Ejemplo

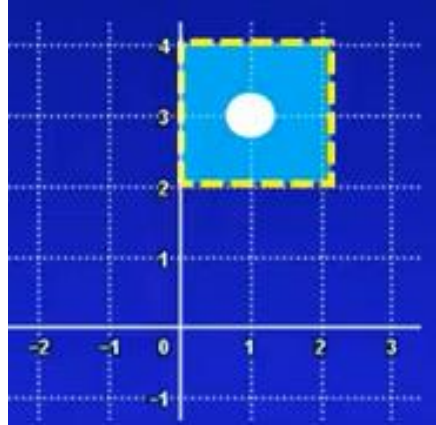
$$\frac{dy}{dx} = -y, \text{ en el punto } p(1, 3) \text{ o sea, } y(1) = 3$$

- $f(x, y) = -y$ es una función polinómica, continua en todo \mathbb{R}^2
 $R = \{(x, y) | 0 < x < 2, 2 < y < 4\}$, lo que es lo mismo,
 $R = (0, 2) \times (2, 4)$, al ser continua en este rectángulo, existe solución
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$, es una función constante, por tanto es continua en todo \mathbb{R}^2

Por tanto, tiene solución única

Figura 12

Ejemplo del teorema de existencia y unicidad



Fuente. Video teorema de existencia y unicidad, EDO de primer orden

Existencia de Solución de la Ecuación de Richards

La existencia y unicidad de la ecuación de Richards fue obtenido del artículo "Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. [Luckhaus, 1983]"

Suposición de los datos.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es abierto, acotado, y con frontera Lipschitz,

$$\Gamma \subset \partial\Omega \text{ es medible con } H^{n-1}(\Gamma) > 0, \text{ y } 0 < T < \infty.$$

2. \mathbf{b} es un campo de vector monótono y \mathbf{a} gradiente continuo, es decir, hay una función convexa $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ en C^1 con $\mathbf{b} = \nabla\Phi$. Podemos suponer que $\mathbf{b}(0) = 0$. Definida

0. Definida

$$\Psi(\mathbf{z}) = \Psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{z}) := \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^m} \int_0^1 (\mathbf{z} - \mathbf{b}(s\sigma)) \cdot \sigma ds.$$

$$= \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^m} (\mathbf{z} \cdot \sigma - \Phi(\sigma) + \Phi(0)).$$

La convexidad de Φ implica que

$$\mathbf{B}(\mathbf{z}) := \Psi(\mathbf{b}(\mathbf{z})) = \mathbf{b}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} - \Phi(\mathbf{z}) + \Phi(0)$$

$$= \int_0^1 (b(z) - b(sz)) \cdot z ds = \int_0^z (b(z) - b(s)) \cdot ds,$$

3. $a(b(z); p)$ es continua en z y p y elíptica en el sentido que

$$(a(z, p_1) - a(z, p_2)) \cdot (p_1 - p_2) \geq c|p_1 - p_2|^r$$

con $1 < r < \infty$, y $f(b(z))$ es continua en z .

4. La siguiente condición se satisface:

$$|a(b(z), p) + |f(b(z))|| \leq c(1 + B(z)^{(r-1)/r} + r + |p|^{r-1}).$$

En general, los coeficientes a, b, f también puede depender de t y x .

Observación. La convexidad de Φ implica que

$$B(z) - B(z_0) \geq (b(z) - b(z_0)) \cdot z_0$$

para todo $z, z_0 \in \mathbb{R}^m$. Si cambiamos $\sigma = \frac{1}{\delta|b(z)|} b(z)$ en la

definición anterior vemos que

$$B(z) \geq \int_0^1 (b(z) - b(s\sigma)) \cdot ds \geq \frac{1}{\delta} |b(z)| - \sup_{|\sigma| \leq \frac{1}{\delta}} |b(\sigma')|$$

de modo que

$$|b(z)| \leq \delta B(z) + \sup_{|\sigma| \leq \frac{1}{\delta}} |b(\sigma)|.$$

Datos Iniciales y de Frontera.

1. Asumimos que u^D es en $L^P(0, T; H^{1,r}(\Omega))$ y en $L^\infty(]0, T[\times \Omega)$, y definimos

$$V := v \in H^{1,r}(\Omega) / v = 0 \text{ en } \Gamma.$$

2. Asumimos $\Psi(b^0) \in L^1(\Omega)$, y que b^0 aplicación en el rango de b . Por lo tanto, hay una función medible u^0 con $b^0 = b(u^0)$.

Solución Débil. Asumir 1,3. Llamamos $u \in u^D + L^P(0, T; V)$ una solución débil del problema inicial de valores de contorno, si se cumplen las propiedades:

1. $b(u) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ y $\partial_t b(u) \in L^{r^*}(0, T; V^*)$ con valor inicial b^0 , que es,

$$\int_0^T \langle \partial_t b(u), \zeta \rangle + \int_0^T \int_\Omega (b(u) - b^0) \partial_t \zeta = 0$$

para cada función test $\zeta \in L^p(0, T; V) \cap H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ con $\zeta(T) = 0$.

2. $a(b(u), \nabla u), f(b(u)) \in L^r([0, T] \times \Omega)$ y u satisface la ecuación diferencial, que es,

$$\int_0^T \langle \partial_t b(u), \zeta \rangle + \int_0^T \int_\Omega a(b(u), \nabla u) \cdot \nabla \zeta = \int_0^T \int_\Omega f(b(u)) \zeta$$

para cada $\zeta \in L^r(0, T; V)$.

La herramienta principal para probar la existencia de la solución débil es dar un estimador de energía, que sigue, si podemos justificar la fórmula

$$\int_0^T \partial_t b(u) \cdot u = B(u(T)) - B(u^0).$$

Esto está hecho en el siguiente lema.

Lema. Suponga 2,1,3 se satisface con $\partial_t u^D \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$.

Si $u \in u^D + L^r(0, T; V)$ cumple 1.4.1, entonces

$$B(u) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega));$$

y para casi todo t la siguiente fórmula tiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega B(u(t)) - \int_\Omega B(u^0) &= \\ &= \int_0^t \int_\Omega \langle \partial_t b(u), u - u^D \rangle - \int_0^t \int_\Omega (b(u) - b(u^0)) \partial_t u^D \\ &\quad + \int_\Omega (b(u(t)) - b(u^0)) u^D(t). \end{aligned}$$

Prueba,

- a) tenemos para casi todo $t > 0$ puntualmente en Ω

$$B(u(t)) - B(u(t-h)) \leq (b(u(t)) - b(u(t-h))) \cdot u(t)$$

- b) y para $t > h$

$$B(u(t)) - B(u(t-h)) \geq (b(u(t)) - b(u(t-h))) \cdot u(t-h).$$

Donde $u(t) := u^0$ para $-h < t < 0$, por lo tanto $b(u(t-h)) = b^0$.
 Multiplicando la primera desigualdad con $\lambda_\varepsilon(t)$ y la segunda desigualdad con $\lambda_\varepsilon(t-h)$, donde

$$\lambda_\varepsilon := \min\left(1, \frac{1}{|u|}\right)$$

Ahora podemos integrar cada Ω y obtener para la primera desigualdad

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon(t) B(u(t)) - B(u(t-h)) &\leq \int_{\Omega} (b(u(t)) - b(u(t-h))) \lambda_\varepsilon(t) u(t) \\ &= \langle b(u(t)) - b(u(t-h)), (\lambda_\varepsilon u)(t) - u^D(t) \rangle + \int_{\Omega} (b(u(t)) - b(u(t-h))) u^D(t), \end{aligned}$$

eligiendo ζ con $\varepsilon u^D \leq 1$. Dejando $\varepsilon \rightarrow 0$ e integrando t de 0 a τ obtenemos.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^{\tau} \int_{\Omega} B(u) - \int_{\Omega} B(u^0) &\leq \int_0^{\tau} \langle \partial_t^{-h} b(u), u - u^D \rangle - \int_0^{\tau-h} \int_{\Omega} (b(u) - b(u^0)) \\ &\quad \cdot \partial_t^h u^D \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^0 \int_{\Omega} (b(u) - b(u^0)) \cdot u^D - \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Omega} (b(u) - b(u^0)) \cdot u^D \end{aligned}$$

De manera similar, la segunda desigualdad produce la integración de t de h a τ

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^{\tau} \int_{\Omega} B(u) - \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Omega} B(u) \\ &\geq \int_0^{\tau-h} \langle \partial_t^h b(u), u - u^D \rangle - \int_h^{\tau} \int_{\Omega} (b(u) - b(u^0)) \cdot \partial_t^{-h} u^D \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^{\tau} \int_{\Omega} (b(u) - b(u^0)) \cdot u^D - \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Omega} (b(u) - b(u^0)) \cdot u^D \end{aligned}$$

Como $h \rightarrow 0$ los primeros tres términos en el lado derecho cubren los límites deseados para casi todo τ . Lo mismo es verdad para el primer término de la izquierda, por lo tanto, la primera desigualdad prueba que

$$B(u) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$$

Por lo tanto, para demostrar el Lema tenemos que mostrar que

$$\int_0^h \int_\Omega (B(u) - B(u^0)) - (b(u) - b(u^0)) \cdot u^D$$

se convierte en no negativo en el límite $h \downarrow 0$. Primero observamos que

$$\int_E b(u(t)) \rightarrow 0$$

uniformemente en t como $E \in \Omega$ va a cero en medida. Esto nos permite sustituir u^D por una función $C_{0\infty}(\Omega)$. Podríamos usar el mismo argumento para el término $B(u) - B(u^0)$ provisto de u^0 es acotada. Como en general no es así, aproximaremos B por.

$$B^R(u^0) := \sup_{|\sigma| \leq R} \int_0^\sigma (b(u^0) - b(s)) ds.$$

Entonces $B^R(u^0) \uparrow B(u^0)$ casi en todas partes, como $R \uparrow \infty$ pero desde $B(u^0) \in L^1(\Omega)$ esta convergencia también está en $L^1(\Omega)$. Luego, vamos a elegir funciones $v_R \in L^\infty(\Omega)$ con

$$\|b(u^0) - v_R\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{1}{R^2}$$

y entonces la función $u_R(t) \in L^\infty(\Omega)$ con

$$|u_R| \leq R \text{ y } u_r - u^D \in C_0^\infty(\Omega)$$

(donde R debería ser mayor que el supremo de $|u^D|$) tal que la norma L^1 de

$$\sup_{|\sigma| \leq R} \int_0^\sigma (v_r - b(s)) ds - \int_0^{u^R(t)} (v_r - b(s)) ds$$

es menor que $\frac{1}{R}$ para cada t . Entonces concluimos que para $R \uparrow \infty$ y uniformemente en t

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (B(u(t)) - B(u^0)) &\leftarrow \int_{\Omega} (B(u(t)) - B^R(u^0)) \\ &\geq \int_{\Omega} \left(\int_0^{u_R(t)} (b(u(t)) - b(s)) ds - \int_0^{u_R(t)} (v_R - b(s)) ds \right) - \frac{2}{R} \\ &\geq \int_{\Omega} (b(u(t)) - v_R) \cdot u_R(t) - \frac{2}{R} \\ &\geq \int_{\Omega} (b(u(t)) - b(u^0)) \cdot u_R - \frac{3}{R}, \end{aligned}$$

inferimos que

$$\begin{aligned} \limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Omega} (B(u) - (b(u) - b(u^0)) \cdot u^D) \\ &\geq \lim_{R \uparrow \infty} \limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Omega} (b(u) - b(u^0)) \cdot (u_R - u^D) \\ &= \lim_{R \uparrow \infty} \limsup_{h \downarrow 0} \int_0^h \langle \partial_t b(u(t)), \frac{1}{h} \int_t^h (u_R - u^D) \rangle dt = 0. \end{aligned}$$

Observación. Bajo los supuestos en b Lema 2,1,5 se mantiene para datos más generales de Dirichlet u^D . Si, por ejemplo b satisface una condición de crecimiento

$$|b(z)| \leq C \cdot (1 + |z|^\alpha)$$

con $0 < \alpha < r$, y si $b^0 \in L^{r/\alpha}(\Omega)$, entonces necesitamos solo

$$u^D \in L^r(0, T; H^{1, r_\alpha}(\Omega) \cap H^{1, r_\alpha}(0, T; L^{r_\alpha}(\Omega)))$$

donde $r_\alpha := \left(\frac{r}{\alpha}\right)^*$.

El interés de la siguiente modificación del Lema 2,1,5 reside en que se puede aplicar también cuando los datos de Dirichlet saltan en el tiempo. **La solución de la ecuación de calor** puede usarse como continuación de los datos de Dirichlet en el interior. La enunciación es:

Supongamos que b es Lipschitz continua, y supongamos que 2,1,3 satisface con $\partial_t u^D \in L^r(0, T; V^*)$ tal que

$$\frac{1}{h} \int_0^{T-h} \int_{\Omega} (u^D(t+h) - u^D(t))(b(u^D(t+h)) - b(u^D(t))) dt$$

tiende a cero por $h \downarrow 0$, y tal que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Omega} \int_{u^D}^{u^0} (b(u^0) - b(s)) ds$$

existe y es finito. Si $u \in u^D + L^r(0, T; V)$ satisface 2,1,4 entonces

$$B(u) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)),$$

y para casi todo t , la siguiente fórmula tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{u^D(t)}^{u(t)} (b(u(t)) - b(s)) ds = \\ \int_0^t \int_{\Omega} \langle \partial_t b(u), u - u^D \rangle - \int_0^t \int_{\Omega} \langle \partial_t u^D, b(u) - b(u^D) \rangle \\ + \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Omega} \int_{u^D}^{u^0} (b(u^0) - b(s)) ds \end{aligned}$$

Teorema de existencia. Supongamos que los datos satisfacen 2,1,1 y 2,1,3, y asumamos que cualquiera de las dos $\partial_t u^D \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ o que se cumplen las suposiciones en 2,1,6. Entonces existe una solución débil.

Prueba. Realizaremos la prueba solo en el primer caso, ya que en el segundo caso solo se aplicará 2,1,6 en lugar de 2,1,5.

El plan de la prueba es el siguiente: aproximamos la ecuación diferencial por discretización del tiempo, es decir, reemplazamos $\partial_t b(u)$ por el cociente de diferencia hacia atrás $\partial_t^{-h} b(u)$. Así llegamos al problema elíptico, que puede resolverse mediante el procedimiento de Galerkin. Para esto elegimos funciones linealmente independientes $e_i \in V \cap L^\infty$, de modo que el subespacio abarcado por estas funciones es denso en V . Buscamos una función

$$u_{hm}(t, x) = u_h^D(t, x) + \sum_{i=1}^m \alpha_{hmi}(t) e_i(x)$$

con $\alpha_{hmi} \in L^\infty(]0, T[)$ tal que para casi todo t en $]0, T[$ la igualdad

$$\int_{\Omega} \partial_t^{-h} u_{hm}(t) \zeta + \int_{\Omega} a(b(u_{hm}(t)), \nabla u_{hm}(t)) \nabla \zeta - \int_{\Omega} f(b(u_{hm}(t))) \zeta = 0$$

contiene para todas las funciones de prueba $\zeta \in V_m := \text{span} \{e_1, \dots, e_m\}$ donde los datos iniciales son dados por

$$u_{hm}(t) := u_h^0(t) \quad -h < t < 0.$$

(También se podría cambiar $b(u_{hm}(t-h))$ en lugar de $b(u_{hm}(t))$ en los términos a y f). Elegimos la aproximación de los **datos iniciales y de borde** de manera que u_h^0 es acotada, por ejemplo

$$u_h^0 := \min\left(1, \frac{1}{h|u^0|}\right) u^0;$$

y tal que u_h^D **es independiente del tiempo** en cada intervalo $](k-1)h, kh[$ por ejemplo

$$u_h^D(t, x) = \frac{1}{h} \oint u^D(s, x) ds \quad \text{para } (k-1)h \leq t \leq kh$$

donde por simplicidad se supone que $\frac{T}{h}$ es un número entero. Esta elección de u_h^D implica que podemos determinar $u_{hm}(t)$ inductivamente para $t \in](k-1)h, kh[$ como una solución de un problema elíptico. De hecho, si $u_{hm}(t-h)$ es conocido, el lado izquierdo de la ecuación anterior define una aplicación continua $\Phi_{hm} : R^m \rightarrow R^m$ donde los parámetros m son los coeficientes desconocidos de $u_{hm}(t)$. Desde $B(z) \leq zb(z)$ y

$$b(u_h^D + z)u_h^D \leq \delta(u_h^D + z)b(u_h^D + z) + C(\delta)$$

esta aplicación cumple con la siguiente estimación donde usamos la notación $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{hm}(\alpha) \cdot \alpha \geq \\
& \geq c \int_{\Omega} |\nabla v|^r + \frac{1}{h} \int_{\Omega} (b(u_h^D(t) + v) - b(u_{hm}(t-h)))v - C \int_{\Omega} (1 + B(u_h^D(t) + v) \\
& \quad + |\nabla u_h^D|^r) \\
& \geq c \int_{\Omega} |\nabla v|^r + \left(\frac{1}{2h} - C\right) \int_{\Omega} (u_h^D(t) + v)b(u_h^D(t) + v) \\
& \quad - C(h) \left(1 + \int_{\Omega} |b(u_{hm}(t-h))|^{r/(r-1)}\right)
\end{aligned}$$

Si h es lo suficientemente pequeño e independiente de m , el segundo término no es negativo, por lo tanto Φ_{hm} tiene un cero, es decir $u_{hm}(t)$ existe. Probamos la convergencia de la función u_{hm} como $(h, m) \rightarrow (0, \infty)$ en tres pasos. Primero obtenemos una estimación a priori al multiplicar la ecuación con $u_{hm} - u_h^D$. Entonces controlamos la dependencia del tiempo al multiplicar con las diferencias de tiempo $\partial_t^{kh} u_{hm}$, lo que resulta en la compacidad de las funciones $b(u_{hm})$ en L^1 .

Finalmente demostramos la convergencia fuerte de u_{hm} multiplicando la ecuación con $u_{hm} - u$, donde u es el límite débil obtenido en el primer paso. En el primer paso, pruebe con $\zeta = u_{hm}(t) - u_h^D(t)$ e integre en t de 0 a τ . La parte parabólica estimamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \int_{\Omega} \partial_t^{-h} b(u_{hm})(u_{hm} - u_h^D) \geq \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^\tau \int_{\Omega} B(u_{hm}) - \int_{\Omega} B(u_h^0) \\
& \quad + \int_0^\tau \int_{\Omega} b(u_{hm}) - b(u_h^0) \partial_t^h u_h^D - \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^\tau (b(u_{hm}(t)) - b(u_h^0)) u_h^D(t \\
& \quad + h) dt. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Para la parte elíptica obtenemos las estimaciones usuales. Por lo tanto, utilizando la suposición de u^D y el argumento de Gronwall, obtenemos la estimación a priori

$$\sup_{0 \leq r \leq \tau} \int_{\Omega} B(u_{hm}(t)) + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_{hm}|^r \leq C$$

Se deduce que $u_{hm} \rightarrow u$ débilmente en $L^r(0, T; V)$ para una subsucesión $(h, m) \rightarrow (0, \infty)$.

Ahora sea $k \in N$ y usamos como función de prueba

$$\zeta(t) := \partial_t^{kh}(u_{hm} - u_h^D)(\tau) \quad \text{para } jh \leq t \leq (j+k)h$$

con $(j-1)h \leq \tau \leq jh$ y $1 \leq j \leq \frac{T}{h} - k$. Integrando sobre τ y usando la estimación de energía anterior

$$\int_0^{T-kh} (b(u_{hm}(\tau + kh)) - b(u_{hm}(\tau))) (u_{hm}(\tau + kh) - u_{hm}(\tau)) dt \leq Ckh.$$

Pero como u_{hm} es una función de paso en el tiempo, vemos que esto también se satisface si reemplazamos kh por cualquier número positivo. Esto implica que $b(u_{hm})$ convergen a $b(u)$ en $L^1(]0, T[\times \Omega)$ para una subsucesión, que se probará en el Lema 2,1,9 siguiente. Este lema también muestra que $B(u) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$. La estimación a priori implica además que hay funciones λ_{hm} acotadas en $L^{r^*}(0, T; V^*)$ tales que

$$\int_0^T \langle \lambda_{hm}, \zeta \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t^{-h} b(u_{hm}) \zeta = - \int_0^{T-h} \int_{\Omega} (b(u_{hm}) - b(u_h^D)) \partial_t^h \zeta$$

Para $\zeta \in L^r(0, T; V_m)$ con $\zeta(t) = 0$ part $> T - h$. Por lo tanto para una subsucesión $\lambda_h \rightarrow \lambda$ débilmente en $L^{r^*}(0, T; V^*)$. Concluimos que $b(u)$ satisface 2,4,1, que es $\lambda = \partial_t b(u)$, por lo tanto, 1,5 puede ser aplicado a u . Para probar la convergencia fuerte de ∇u_{hm} tomamos

$$\zeta = u_{hm} - (u_h^D + v_{hm})$$

como función de prueba en el intervalo $]0, t_h[$, donde $t_h = k_h h$ con $(k_h - 1)h < t < k_h h$ dado $t \in]0, T[$, y donde $v_{hm} \in L^r(0, T; V_m)$ son aproximaciones de $u -$

u^D en $L^r(0, T; V)$ y tiempo independiente en cada intervalo $[(k-1)h, kh]$.

Tenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle \partial_t^{-h} b(u_{hm}, \zeta) \rangle + c \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \zeta|^r \\ & \leq - \int_0^t \int_{\Omega} a(b(u_{hm}), \nabla(u_h^D + v_{hm})) \nabla \zeta + \int_0^t \int_{\Omega} f(b(u_{hm})) \zeta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Primero consideremos el término parabólico

$$\int_0^t \langle \partial_t^{-h} b(u_{hm}, \zeta) \rangle = \int_0^t \langle \partial_t^{-h} b(u_{hm}), u_{hm} - u_h^D \rangle - \int_0^t \langle \partial_t^{-h} b(u), u - u^D \rangle + \sigma(1),$$

donde el símbolo de Landau $\sigma(1)$ como de costumbre denota cualquier término que converja a cero como $h \rightarrow 0$ y $m \rightarrow \infty$. Usando (2,7,1) en la primera integral en el lado derecho y el Lema 2,1,5 en el segundo que tenemos para casi todo t la relación

$$\int_0^t \langle \partial_t^{-h} b(u_{hm}, \zeta) \rangle \geq \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \int_{\Omega} B(u(t)) + \sigma(1)$$

ahora vamos a estimar el lado derecho de (2,7,2). La desigualdad de Cauchy y la convergencia débil de ζ a 0 nos permiten estimar

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\Omega} a(b(u_{hm}), \nabla(u_h^D + v_{hm})) \nabla \zeta \right| \\ & \leq \delta \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \zeta|^r + C_{\delta} \int_0^t \int_{\Omega} \left| a(b(u_{hm}), \nabla(u_h^D + v_{hm}^m)) - a(b(u), \nabla u) \right|^{r^*} \\ & \quad + \sigma(1) \end{aligned}$$

Podemos estimar la segunda integral de la derecha, por ejemplo

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \left| a(b(u), \nabla u) - a(b(u_{hm}), \nabla(u_h^D + v_{hm})) \min \left(1, \frac{1 + B(u)}{1 + B(u_{hm})} \right)^{\frac{1}{r^*}} \right|^{r^*} \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} \left| a(b(u_{hm}), \nabla(u_h^D + v_{hm})) \left(1 - \min \left(1, \frac{1 + B(u)}{1 + B(u_{hm})} \right) \right)^{\frac{1}{r^*}} \right|^{r^*} \end{aligned}$$

Usando la condición de crecimiento en a y la convergencia puntual de $b(u_{hm})$ vemos que la primera integral va a cero por el teorema de convergencia dominada por Lebesgue. La segunda integral de la derecha es estimada por

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla(u_h^D + v_{hm})|^r \left(1 - \min \left(1, \frac{1 + B(u)}{1 + B(u_{hm})} \right)^{\frac{1}{r^*}} \right)^{r^*} \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \max \left(0, (1 + B(u_{hm}))^{\frac{1}{r^*}} - (1 + B(u))^{\frac{1}{r^*}} \right)^{r^*}$$

Los primeros términos tienden a cero como antes, y la segunda integral es menos que

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} \max(0, B(u_{hm}) - B(u)) \leq \int_0^t \int_{\Omega} B(u_{hm}) - B(u) + \sigma(1).$$

donde $B(u_{hm}) \rightarrow B(u)$ casi en todas partes. Dado que el término f puede manejarse de forma similar a la parte elíptica a , vamos a juntar todo lo que es para casi todo t

$$\int_{\Omega} (B(u_{hm}(t)) - B(u(t))) + c \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla(u_{hm}) - u|^r \\ \leq C \int_0^t \int_{\Omega} B(u_{hm} - B(u)) + \sigma(1).$$

Luego, un argumento de Gronwall aplicado a la función acotada no-negativa

$$\Phi(t) := \limsup_{h \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (B(u_{hm}(t)))$$

dado para $t < T$

$$\nabla u_{hm} \rightarrow \nabla u \text{ debilmente en } L^r(]0, t[\times \Omega)$$

Por lo tanto

$$a(b(u_{hm}); \nabla u_{hm}) \rightarrow a(b(u), \nabla u),$$

$$f(b(u_{hm})) \rightarrow f(b(u))$$

casi en todas partes, por lo tanto, débilmente en $L^r(]0, t[\times \Omega)$ lo que demuestra que u es una solución débil.

Lema. Si dos aplicaciones v_1 y v_2 en $H^{1,r}(\Omega)$ satisfacen las estimaciones

$$\|v_i\|_{H^{1,r}(\Omega)} \leq M, \quad \|B(v_i)\|_{L^1(\Omega)} \leq M \quad i = 1, 2$$

y

$$\int_{\Omega} (b(v_2) - b(v_1))(v_2 - v_1) \leq \delta,$$

entonces

$$\int_{\Omega} |b(v_2) - b(v_1)| \leq \omega_M(\delta)$$

con funciones continuas ω_M satisfaciendo $\omega_M(0) = 0$.

Lema. Suponga que u_ε converge débilmente en $L^r(0, T; H^{1,r}(\Omega))$ a u con el estimador

$$\frac{1}{h} \int_0^{T-h} \int_{\Omega} (b(u_\varepsilon(t+h)) - b(u_\varepsilon(t)))(u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t)) dt \leq C$$

$$\text{y} \quad \int_{\Omega} B(u_\varepsilon(t)) \leq C \quad \text{para } 0 < t < T$$

Entonces $b(u_\varepsilon) \rightarrow b(u)$ en $L^1(]0, T[\times \Omega)$ y $B(u_\varepsilon) \rightarrow B(u)$ casi en cualquier parte.

Generalizaciones. Todos los argumentos siguen siendo los mismos, si asumimos que los coeficientes $a, b, y f$ dependen sobre x . También dependen del tiempo en la parte elíptica, que es, para a y f , no hace diferencia, excepto que en 3,1,7 tenemos que usar aproximaciones a_h y f_h que son por partes constantes en tiempo, y por ejemplo definimos como u_h^D en 3,1,7. Si queremos dependencia en el tiempo de b necesitamos suposiciones apropiadas sobre términos adicionales en la prueba causada por la parte parabólica. Dos posibilidades ya se dieron en 3,1,5 y 3,1,6, para los datos estos pueden ser transformados en

$$\widehat{b}(t, x, z) := b(z + u^D(t, x)),$$

$$\widehat{u}^D(t, x, z) := 0,$$

esto es, sobre valores homogéneos en la frontera pero dependientes del tiempo \widehat{b} . No es difícil especificar supuestos, incluidos estos dos ejemplos ver [Alt and Luckhaus, 1983].

Unicidad de Solución

Para la ecuación singular podemos probar la unicidad de la solución en la clase de soluciones regulares, con lo que queremos decir soluciones u tal que $\delta_t b(u)$ es una función (ver 2,2,2). Pero no podemos probar la regularidad de todas las soluciones débiles incluso bajo condiciones regulares en los datos. La razón es que $\delta_t b(u)$ no es un término monótono, por lo tanto, el procedimiento habitual de diferenciar la ecuación no conduce a estimaciones a priori. Para obtener estimaciones a priori probamos la ecuación débil con $\partial_t(u - uD)$ en vez. Por lo tanto obtenemos la existencia de al menos una solución regular para el sistema del tipo variacional (ver 2,2,3). En el caso espacial de una parte elíptica lineal puede probarse la unicidad en la clase de soluciones débiles (ver 2,2,4). La unicidad resulta en ver 2,2,2 está formulado como un Teorema de Comparación. Por lo tanto, definimos lo siguiente.

Definiciones. Llamamos $u \in L^r(0, T; H^{1,r}(\Omega))$ a la subsolución (supersolución), si $u \leq (\geq) u^D$ en $]0; T[\times \Gamma$, y si 1,4 se cumple con $=$ reemplazando por $\leq (\geq)$ para toda función test ζ con $\zeta(0) \leq 0$ en 2,4,1 y $\zeta \geq 0$ en 2,4,2.

Lema de Gronwall. Sean $g(t)$ y $v(t)$ dos funciones continuas en $C([0; T])$. Sea $h \in L^1(0, T)$ tal que $h(t) \geq 0$, c.t.p. $t \in [0, T]$ se tiene

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t h(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Entonces

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t h(\tau)v(\tau)e^{H(t)-H(\tau)}d\tau$$

$$= e^{H(t)} \left[g(0) + \int_0^t g'(\tau) e^{-H(\tau)} d\tau \right], t \in [0, T]$$

con $H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$, donde la segunda de esta desigualdad se cumple para funciones $g(t)$ diferenciables. (Vease [Wloka,], págs. 436-337).

Una consecuencia muy importante del lema anterior es que si $v(t) \in C([0; T])$ con $v(t) \geq 0$ y se cumple que

$$v(t) \leq c \int_0^t v(\tau) d\tau \quad \text{para } t \in [0, T],$$

entonces, $v(t) \equiv 0$. (Esto es inmediato haciendo $g(t) = 0$ y $h(t) = c$) (Ver Cachaguay and Patricio, 2014).

Se realizará la demostración por el método de Galerkin.

Teorema de comparación. Suponga que los datos tienen la propiedad de la continuidad

$$\begin{aligned} & |a(b(z_2), p) - a(b(z_1), p)| \\ & \leq C \cdot |z_2 - z_1|^{\frac{r-1}{r}} \cdot (1 + B(z_1))^{\frac{r-1}{r}} + B(z_2)^{\frac{r-1}{r}} + |p|^{r-1}, \\ & f(z_2) - f(z_1) \leq C(z_2 - z_1) \quad \text{para } z_2 > z_1. \end{aligned}$$

Si u_- es una subsolución y u_+ una supersolución tal que $B(u_{\pm})$ y

$$\partial_t(b(u_-) - b(u_+))$$

están en $L^1(]0, T[\times \Omega)$, entonces $u_- \leq u_+$.

Prueba. Para pequeños $\delta > 0$ sea

$$\psi_\delta(z) := \min \left(1, \max \left(\frac{z}{\delta}, 0 \right) \right)$$

y el conjunto $\zeta := \psi_\delta(u_- - u_+)$ en el intervalo de tiempo $]0, t[$ como función de prueba en la desigualdad 2,2,4,2 para u_- y u_+ . Entonces

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t (b(u_-) - b(u_+)) \psi_{\delta}(u_- - u_+) \\
& \quad + \frac{C}{\delta} \int_0^t \int_{\Omega} \chi_{(0 < u_- - u_+ < \delta)} |\nabla(u_- - u_+)|^r \\
& \leq \frac{C}{\delta} \int_0^t \int_{\Omega} \chi_{(0 < u_- - u_+ < \delta)} |a(b(u_-), \nabla u_+) - a(b(u_+), \nabla u_+)|^{r^*} \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega} \chi_{(0 < u_- - u_+ < \delta)} \max(0, f(b(u_-)) - f(b(u_+))) \\
& \leq C \int_0^t \int_{\Omega} \chi_{(0 < u_- - u_+ < \delta)} (1 + B(u_-) + B(u_+) + |\nabla u_+|^r) \\
& \quad + C \int_0^t \int_{\Omega} \max(b(u_-) - b(u_+), 0).
\end{aligned}$$

El primer término del lado derecho tiende a cero cuando $\delta \rightarrow 0$, y el termino parabólico en la izquierda converge a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} \chi_{(0 < u_- - u_+ < \delta)} \partial_t (b(u_-) - b(u_+)) \\
& = \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t \max(b(u_-) - b(u_+), 0) - \int_{\Omega} \max(b(u_-) - b(u_+), 0)
\end{aligned}$$

para la desigualdad en 1.4.1 para u_- y u_+ . Entonces por el lema de Gronwall's $b(u_-) \leq b(u_+)$, en particular $b(u_-) = b(u_+)$ en el conjunto $\{u_- > u_+\}$. Si vamos con esta información en el primer estimador arriba vemos que se cancela cada término excepto el término elíptico en la izquierda.

Así obtenemos $\nabla(u_- - u_+) = 0$ en $\{0 < u_- - u_+ < \delta\}$, en otras palabras el $\max(0, \min(u_- - u_+, \delta)) = \text{constante}$. Esto implica $u_- \leq u_+$, donde esto es verdad en $]0, T[\times \Gamma$. En el resto de esta sección consideramos los sistemas. Primero, demostremos la existencia de una solución regular.

Teorema. Asuma 2.2.1 con $r \geq 2$, y b es Lipschitz continua. Supongamos que existe una función continua A de $b(z)$ y p tal que $\nabla_p A = a$, y tal que $\nabla_z A$ y $\nabla_z f$ son medibles con

$$|\nabla_z A(b(z), p)|^2 + |\nabla_z f(b(z))|^2 + |A(b(z), 0)| = C(1 + B(z) + |p|^r).$$

Además para la condición inicial y de frontera asuma que, $u^D \in H^{1,r}(0, T; H^{1,r}(\Omega))$ y $b^0 = b(u^0)$ para algún u^0 con $u^0 - u^D(0) \in V$. Entonces existe una solución débil u con $\partial_t b(u) \in L^2(]0, T[\times \Omega)$.

Teorema. Suponga 2,2,1 con $r = 2$ y

$$a(t, x, b(z), p) = A(t, x)p + e(b(z)),$$

donde $A(t, x)$ es una matriz simétrica y medible en t y x tal que para algún $\alpha > 0$

$$A - \alpha I \quad \text{y} \quad A - \alpha \delta_t A$$

son definidas positivas. Además, suponga que

$$|e(b(z_2)) - e(b(z_1))|^2 + |f(b(z_2)) - f(b(z_1))|^2 \leq C(b(z_2) - b(z_1))(z_2 - z_1)$$

Entonces existe al menos una solución débil.

CAPÍTULO 4

Método de Volúmenes Finitos, Modelos Matemáticos y Metodología de la Simulación

Modelos Matemáticos

La modelización matemática es la representación de un problema de la vida real, que en varios casos no es matemático, en un problema matemático, para lo cual se usa del lenguaje de la matemática, luego se resuelve el problema matemático y su solución la interpretamos en términos del problema original real. Con esto se gana en percepción en situaciones originales del mundo real.

En la modelización matemática se capta en forma de ecuaciones, algunas características de un sistema para un uso específico tal como: para control de filtración de fluidos, optimización, posibles estudios de seguridad (Benalcázar H, 2016).

Tabla 6

Resultados de los modelos matemáticos

Ecuaciones	Funciones
Ecuaciones algebraicas	Funciones reales como polinomios, funciones racionales, funciones exponenciales, logarítmicas, funciones trigonométricas y combinaciones de estas.
Ecuaciones algebraico diferenciales.	Funcionales en espacios de dimensión finita, discretos o continuos, con o sin restricciones.
Ecuaciones diferenciales ordinarias.	Funciones lógicas
Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.	Funcionales en espacios de dimensión infinita con o sin restricciones
Ecuaciones integro diferenciales.	
Combinaciones de las anteriores	
Ecuaciones diferenciales estocásticas	

Tipos y Naturaleza de Variables de un Modelo

Los modelos matemáticos describen un intercambio de información entre las variables dependientes e independientes que pueden ser de naturaleza: biológicas,

económicas, sociales, químicas o físicas. Estas variables podrían ser: la altura, la carga de fluido, el tiempo, cantidad de humedad, cabezal de presión, cantidad de nitrato, área de un recipiente o terreno y volumen de líquido.

Resultados de Modelos Matemáticos

Los resultados de modelos matemáticos son: ecuaciones o funciones

Tipos de Ecuaciones y Funciones

Esquema numérico

Utilidad de la Simulación Numérica

La simulación numérica sirve para predecir acontecimientos o fenómenos como:

- Fenómenos naturales, con procesos de infiltración del agua,
- Comportamiento de la dinámica y cinética de fluidos.
- Sistemas de educación,
- Costos de ciclo de vida,
- Desarrollo arquitectónico,
- Análisis de riesgos, formación y evaluación,
- Tráfico de vehículos.

Metodología Proceso de la Simulación

Posición del Problema

Se localiza con precisión el problema a estudiar y se plantea el problema; se definen los fenómenos biológicos, físicos, químicos o económicos; se deducen las variables y parámetros; se definen los responsables del proyecto, los objetivos, los métodos para llegar a los objetivos, la importancia del problema y los beneficiarios.

Elaboración del Modelo Matemático

En la rama de la mecánica, un modelo matemático se construye, generalmente, mediante el uso de leyes fundamentales de comportamiento, de la termodinámica y de la cinética química.

Entre las leyes fundamentales, tenemos: conservación de la masa, conservación de la energía, conservación de la cantidad de movimiento, la segunda ley de Newton.

Entre las leyes de comportamiento se tienen, Ley de Dick de la difusión, Ley de Darcy del flujo en un medio poroso, Ley de Newton de viscosidad de un líquido.

Cada problema tiene su propio modelo, no hay una fórmula mágica. Mientras más perfecto es el modelo, es más complejo y más difícil de solucionar. En este paso, se deben realizar la simplificación del modelo matemático, pero sin pérdida de información

Elaboración del Modelo Numérico. Métodos numéricos

Una vez obtenido las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, se procede a la resolución. Para lo cual primero hay que averiguar si tiene o no solución, o si tiene varias soluciones. Es útil este paso ya que permite conocer las hipótesis bajo las cuales nuestro problema tiene solución y bajo qué condiciones no tiene solución. En algunos casos, en el estudio de la existencia de soluciones se construye un método numérico. Si las soluciones analíticas son complejas se debe proceder a su aproximación numérica. Si no es posible obtener soluciones analíticas, como la ecuación de Richard por ejemplo, se deben obtener soluciones numéricas que se calculan mediante métodos y técnicas de discretización, como el método de volúmenes finitos, adecuados que permiten obtener algoritmos de aproximación y con estos elaborar los respectivos programas computacionales, por ejemplo, un algoritmo para la linealización mediante Picard o L-esquemas. En general, estos métodos deben estar bien condicionados y estables numéricamente. En los métodos que generan sucesiones, estas deben ser convergentes.

Características de un Algoritmo. El algoritmo debe reunir las características siguientes: aplicabilidad general, simplicidad, confiabilidad y seguridad. Si para un mismo problema son posibles varios métodos, se debe escoger el algoritmo considerando el volumen de memoria que consume, el tiempo de ejecución para el número de operaciones, la exactitud de la solución que a su vez se relaciona con la convergencia.

Métodos numéricos. Los métodos numéricos son técnicas que tiene algoritmos basados en operaciones aritméticas para la solución de problemas matemáticos. Son una suma de las matemáticas más la computación. Los métodos que más se utilizan en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, en derivadas parciales o de ecuaciones integrales que surgen en mecánica de fluidos son: 1. Volúmenes Finitos (FVM), 2. Diferencias finitas (FDM). 3. Elementos finitos (FEM). 4. Ultimarla (MM). 5. Descomposición de dominios (DDM).). Estos métodos de discretización conducen a un sistema de ecuaciones. Si el sistema es lineal, puede ser resuelto por métodos directos o iterativos, pero si el sistema es no lineal, se utiliza los métodos iterativos.

Elaboración del programa computacional

Un programa computacional tiene la estructura siguiente: 1. Lectura de los datos de entrada. 2. Preparación de los datos de entrada. 3. Ejecución del algoritmo numérico. 4. Preparación de los datos de salida. 5. Presentación de resultados. Los programas computacionales tienen que ser siempre modulares.

Verificación del Programa

“Cada programa computacional tiene que ser probado con datos de entrada muy variados, a fin de asegurarse que el algoritmo está correctamente elaborado y que los resultados son correctos o muy aceptables” (Benalcázar Gómez, 2015, p. 159). Se debe buscar ejemplos que se conozcan las soluciones exactas para compararse con las soluciones numéricas.

Validación de los Modelos Matemáticos, Numéricos y Computacionales.

En el mercado ya existen programas elaborados que resuelven el problema, que no son tan aconsejables para adaptar a nuestro estudio. Se debe elaborar un programa que asegure y corresponda al método numérico que ayude a calcular la solución aproximada de nuestro modelo matemático. Si no se dispone de programas computacionales, debe generarse al menos un método numérico de aproximación de la

solución del problema y a continuación se debe elaborar el respectivo programa computacional que incluye pruebas para garantizar la calidad de la solución numérica. Adicionalmente, se debe demostrar matemáticamente que el método propuesto es convergente. En lo posible comparar soluciones exactas con las soluciones numéricas.

Análisis de Resultados. Calibración

En la mecánica de fluidos generalmente se obtienen como resultados: 1. Tablas de datos. 2. Gráficas de funciones. 3. Curvas de nivel. 4. Trayectorias de flujos. 5. Visualización de dominios 2d y 3d. 6. Mapas y sistemas integrados (SIG). 7. Informes y reportes gerenciales. Cuando se tiene solución numérica su aproximación, se procede a interpretar los resultados y comparar con el problema propuesto. Este análisis permite mejorar el modelo matemático y calibrarlo según las necesidades.

Implementación de la Solución

Se procede a la corrida del programa y se puede cotejar con otros programas. Los softwares libres más utilizados son: Octave, Java, Scilab; entre los softwares comerciales tenemos Matlab, Comsol Multiphysics.

Método de Volúmenes finitos

El método de volúmenes finitos unidimensional espacial se basa en dividir el dominio en varios intervalos, los volúmenes finitos, que lo llamamos celdas, y buscamos en cada uno de ellos una aproximación de la integral de la variable conservativa w . En cada paso de tiempo actualizaremos estos valores utilizando aproximaciones del flujo a través de las fronteras de los volúmenes finitos.

El siguiente contenido fue tomado de [Cendón, 2008],[Le Veque, 2000].

Este método tiene sus raíces en la dinámica de fluidos. Primero se desarrolló el llamado método marcador y celda para analizar problemas de flujo de fluido incompresible con superficies libres. Luego el método se convirtió en el método de elección para el análisis de problemas relacionados con el flujo de fluidos y otros fenómenos de transporte. Pese

a que existen otros métodos famosos para la resolución en el análisis numérico tal como: el método de elementos finitos que se ha utilizado tradicionalmente para resolver problemas en mecánica sólida, mientras que el método de diferencias finitas y volúmenes finitos se han usado tradicionalmente para resolver problemas de flujo de fluidos y transferencia de calor. [Mazumder, 2015].

Este método y el método de diferencias finitas tienen sus raíces iniciales en la dinámica de fluidos computacional (CFD) y los fenómenos de transporte.

El primer paso del método consiste en dividir el dominio computacional en un conjunto de volúmenes de control conocidos como celdas. Generalmente, estas celdas pueden ser de forma y tamaño arbitrarios, aunque, comúnmente, las celdas son polígonos convexos (en 2D) o poliedros (en 3D), es decir, están delimitados por bordes rectos (en 2D) o superficies planas (en 3D). Si la superficie delimitada es curva, se aproxima mediante bordes rectos o caras planas. Estas superficies discretas de límite son conocidas como caras de la celda o simplemente caras.

Los vértices de las celdas, por otro lado, se llaman nodos, y son de hecho, los mismos nodos que se utilizan en el método de diferencia finita. Toda la información se almacena en los centroides geométricos de las celdas, conocidos como centros celulares o centro de celda.

Aplicación del Método de Volúmenes Finitos

El método de volúmenes finitos con frecuencia es interpretado directamente como una aproximación de diferencias finitas de la ecuación diferencial. Sin embargo, como precisa R. Le Veque [Le Veque, 2002], los métodos de volúmenes finitos provienen inicialmente de la forma integral de la ley de conservación.

Conceptos Básicos

Seguidamente, la definición dada por E. Godlewski y P. A. Raviart en [Godlewski and Raviart, 2013] nos entrega la forma general de los sistemas de leyes de conservación.

Definición

Sea ω un subconjunto de \mathbb{R}^p y sean, f_j , $0 \leq j \leq d$, d funciones regulares de ω en \mathbb{R}^p :

$$f_j: \omega \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad 0 \leq j \leq d$$

La forma general de un *sistema de leyes de conservación* es

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(w)) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

donde $w = (w_1, \dots, w_p)$ el *vector de las variables conservativas*, es la función vectorial:

$$w: \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \Omega$$

$$(x_1, \dots, x_d, t) \rightarrow (w_1, \dots, w_p)$$

El conjunto Ω se llama *conjunto de los estados* y las funciones $f_j = (f_{1j}, \dots, f_{pj})$

funciones de flujo $f_{ij}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Formalmente, el sistema (2,1) representa la conservación de las cantidades (w_1, \dots, w_p) . Si consideramos un dominio arbitrario $D \subset \mathbb{R}^d$ e integramos (2,1) sobre D se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_D w(x, t) dx + \sum_{j=1}^d \int_{\partial D} f_j(w) \cdot \eta_j ds = 0;$$

siendo ∂D la *frontera de D* y $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$ el vector normal exterior unitario a ∂D . Por lo tanto, la variación de $\int_D w(x, t) dx$ con el tiempo es igual al flujo que entra a través de una frontera

$$- \sum_{j=1}^d \int_{\partial D} f_j(w) \cdot \eta_j ds$$

El método de volúmenes finitos en una dimensión espacial se basa en dividir el dominio espacial en intervalos iguales, los volúmenes finitos, también llamados celdas, buscan en cada una de las celdas una aproximación de la integral de la variable conservativa w . En cada paso de tiempo actualizaremos estos valores utilizando

aproximaciones del flujo a través de las fronteras de los volúmenes finitos. [Cendón, 2008].

El dominio espacial $[a, b]$ se discretiza tomando una malla arbitraria $C_{\Delta x}$, donde $x_i : i = 1, \dots, M$ es el conjunto de los nodos de $C_{\Delta x}$, **siendo Δx la norma de la malla $C_{\Delta x}$** :

$$\Delta x = \frac{\sup}{x_i \in \Delta x} |x_i - x_{i-1}|.$$

C_i es la celda o el volumen finito se define como:

$$\begin{aligned} C_i &= \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \left(x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}, x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto su *área longitud* es $A_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$.

Por simplicidad consideramos $A_i = \Delta x$, $i = 1, \dots, M$.

Por tanto, el valor buscado w_i^n aproximara el valor medio de w sobre la celda C_i en el instante t_n :

$$\begin{aligned} w_i^n &\approx \frac{1}{A_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w(x, t^n) dx \\ &= \frac{1}{A_i} \int_{C_i} w(x, t^n) dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Si w es una función regular, entonces la integral en (2,2) coincide con el valor de w en el nodo de la celda.

Se debe garantizar que el método numérico sea conservativo en el sentido de que imite a la solución exacta.

La integral de la ley de conservación $w_t + f(w)_x = 0$, en cada celda C_i , está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} w(x, t) dx = f(w(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) - f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)). \quad (4.3)$$

Así, se puede emplear esta expresión para desarrollar un algoritmo explícito en la evolución temporal: Es decir dadas w_i^n , las aproximaciones promedios en las celdas en el tiempo t_n , queremos aproximar w_i^{n+1} , los valores promedios en las celdas en el siguiente tiempo t_{n+1} después de un paso de tiempo de longitud $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

Es así que integrando (2,3) en el tiempo $t = t_n$ y $t = t_{n+1}$ obtenemos,

$$\int_{C_i} w(x, t_{n+1}) dx - \int_{C_i} w(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt$$

Así reordenando términos y dividiendo por Δt se tiene,

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} w(x, t_{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} w(x, t_n) dx - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \quad (4.4)$$

En la expresión anterior nos explica como en la celda de w debe ser actualizado exactamente desde (2,2) en un paso de tiempo.

No podemos evaluar exactamente las integrales en el tiempo del segundo miembro de (2,4), ya que $w(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)$ varía con el tiempo a lo largo de la celda, y no tiene solución exacta con la que trabajar, así que debemos estudiar métodos numéricos de la forma

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (4.5)$$

Donde $f_{i+\frac{1}{2}}^n$ es una aproximación del valor medio del flujo en el plano xt a lo largo de la recta $x = x_{i+\frac{1}{2}}$, con t variando entre t_n y t_{n+1} .

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n \approx \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \quad (4.6)$$

Al aproximar este valor promedio del flujo empleando los valores de w^n , entonces tenemos una discretización total de la ley de conservación.

CAPITULO 5

Métodos de Linealización para la Ecuación de Richards

Linealización de la Ecuación de Richards Mediante el Método de Picard Modificado

La ecuación de Richards necesita usar aproximaciones numéricas, debido que no tiene solución analítica; desarrollaremos la discretización de la ecuación de Richards en forma mixta (1) usando el método de volúmenes finitos, como la dirección predominante del flujo de agua en la zona vadosa es vertical, así la ecuación unidimensional de flujo de fluidos en medios porosos es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\theta}{\partial z} \left(K \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + z \right) \right) \\ &= \nabla [K \nabla (\Psi + z)]\end{aligned}$$

Descripción Matemática del Método de Volúmenes Finitos

Un algoritmo de volúmenes finitos para resolver un problema definido mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno tiene los siguientes pasos:

1. El problema se reformula en forma variacional.
2. En el dominio de variables independientes (usualmente un dominio espacial para problemas dependientes del tiempo) se divide mediante una partición en subdominios, llamados celdas o volúmenes finitos. En relación a la partición anterior se construye un espacio vectorial de dimensión finita, llamado espacio de volúmenes finitos.
3. Planteamos los dos tipos de esquemas a resolver, el esquema explícito y el esquema implícito, luego de haber discretizado la ecuación de Richard para la forma mixta Unidimensional. El esquema explícito e implícito son aproximaciones utilizadas en análisis numérico para obtener el tiempo - soluciones dependientes de ecuaciones diferenciales ordinarias y parcial. El esquema explícito calcula el

estado del sistema en un momento posterior al estado actual del sistema, mientras que el esquema implícito son la solución de una ecuación que ambos estados de sistema actuales y posteriores. (Pineda: 2018, 39)

4. Lo anterior origina un sistema con un número finito de ecuaciones y con un número grande de ecuaciones y de incógnitas. La cantidad de incógnitas será igual a la dimensión del espacio vectorial de volúmenes finitos obtenido y, generalmente, mientras mayor sea dimensión mejor será la aproximación numérica obtenida.
5. Finalmente, cálculo numérico de la solución del sistema de ecuaciones.

El proceso anterior permite construir un problema de cálculo diferencial en un problema de álgebra lineal. Este problema se plantea sobre un espacio vectorial de dimensión infinita, pero que puede resolverse aproximadamente encontrando una proyección sobre un subespacio de dimensión finita, y por tanto con un número finito de ecuaciones (aunque en general el número de ecuaciones será elevado típicamente de miles o incluso centenares de miles). La discretización en volúmenes finitos permite construir un algoritmo sencillo, logrando además que la solución por este método sea generalmente muy exacta en un conjunto finito de puntos. Estos puntos coinciden usualmente con los vértices de los volúmenes finitos. Para la resolución concreta del enorme sistema de ecuaciones algebraicas en general pueden usarse los métodos convencionales del álgebra lineal en espacios de dimensión finita, aunque se obtiene mejores resultados con métodos iterativos. (Pineda: 2018, 39)

Discretización del Dominio

Sea r la dimensión del \mathbb{R} . Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ con una frontera continua en el sentido de Lipschitz una partición de Ω en "*n volúmenes finitos*", es una colección de n subdominios $\{T_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ que satisface:

1. $\Omega = \cup_{k=1}^n T_k$
2. T_k un conjunto compacto con frontera de Lipschitz continúa
3. $int(T_k) \cap int(T_j) = \emptyset$ para $k \neq j$.

Por sencillez del análisis, todos los “volúmenes finitos” tienen la misma forma, es decir su dominio de referencia son rectas subdivididas por igual longitud. Además, sobre cada elemento de la celda se considerarán algunos puntos especiales, llamados nodos y que generalmente incluirán los vértices del volumen finito (celda) y adicional se requerirá la condición de que elementos adyacentes comparten los nodos o aristas.

Esquema de Discretización Numérica

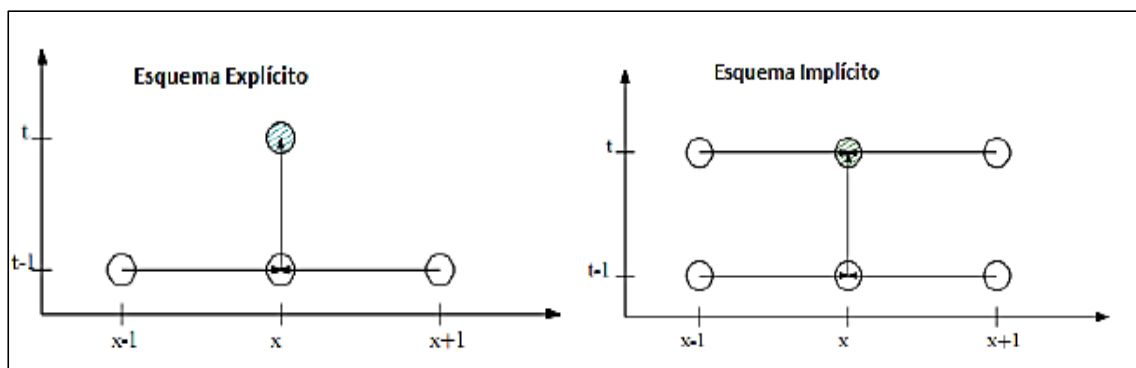
Para la discretización de la ecuación de Richards se utilizó dos esquemas: Esquema explícito y el esquema implícito. La diferencia entre los dos esquemas es que cuando se utilizan esquemas de discretización implícita, la variable que se debe calcular depende de sí misma, mientras que los esquemas explícitos dependen de variables que son independientes de la variable que se va a calcular (Pineda:2018)

En la Figura 5.1 se ve que para el esquema explícito utiliza solo los valores en los pasos espaciales $(x-1)$, (x) y $(x+1)$ en el paso temporal anterior, $(t-1)$, para encontrar el valor de la función en el paso espacial y temporal actual, (x, t) . El cálculo de los pasos actuales está basado únicamente en valores conocidos ya calculados en el paso anterior. Mientras que, en el esquema implícito, los valores espaciales en el paso temporal actual también se tienen en cuenta. Por lo tanto, la función en (x, t) depende de $(x - 1, t)$, y $(x + 1, t)$ además de los valores en el paso temporal anterior. La función que se va a calcular en el esquema implícito depende, por lo tanto, de sí misma y de otras variables desconocidas (Pineda:2018).

Para efectuar la discretización numérica de dicha ecuación se matizaron con los dos esquemas mencionados anteriormente, la causa de este matiz fue para poder llegar a una no-linealidad en nuestra ecuación, con la finalidad de resolver la no-linealidad con el método de Picard modificado y L-esquemas.

Figura 13

Esquema Explícito e Implícito



Fuente: Pineda 2018

Discretización Espacial y Temporal de la Ecuación de Richards Unidimensional. La ecuación unidimensional del flujo cuando es vertical el modelo es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(\Psi)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{K \partial(\Psi)}{\partial z} = 0 & \text{sobre } [-L, 0] \times [0, T] \\ \Psi(z, 0) = \Psi_0 \\ \Psi(L, t) = a_L \\ \Psi(0, t) = a_0 \end{cases}$$

esta ecuación se aplica cuando el flujo es vertical

Discretización Temporal. La resolución a nuestro problema de la ecuación de Richards, primeramente se debe discretizar la variable temporal, para ello, se debe escoger un M_t el cual representa el número de divisiones temporales ver la figura, donde también es una variable fija.

Así definimos: $h_t = \frac{T}{N_t}$ con lo cual se tiene que $t_k = k \cdot h_t$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_t$,

por lo cual, nuestra discretización temporal está dada de la siguiente manera

$$\{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{N_t} = T\}$$

Esquema Implícito Basado en el Cabezal de Presión

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(\Psi)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{K \partial(\Psi)}{\partial z} = 0 & \text{sobre } [-L, 0] \times [0, T] \\ \Psi(z, 0) = \Psi_0 \\ \Psi(L, t) = a_L \\ \Psi(0, t) = a_0 \end{cases}$$

Discretización en el Tiempo

$$h_t = \frac{T}{M}$$

$$t_k = K h_t$$

Las variables a utilizar para discretizar son:

$$\theta(\Psi(z, t_z)) = \theta_k \quad \Psi(z, t_k) = \Psi_k \quad K_k = K(\Psi(z, t_z))$$

Iniciaremos el desarrollo como en el esquema explícito:

$$\frac{\theta^{k+1} - \theta^k}{h_t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K^{k+1} \frac{\partial \Psi^k}{\partial z} \right) - \frac{\partial K^{k+1}}{\partial z} = 0$$

Multiplicamos por h_t ambos lados de la ecuación anterior

$$\theta^{k+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1} \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial z} \right) - h_t \frac{\partial K_{k+1}}{\partial z} = \theta_k$$

Hallar Ψ_{k+1} tal que:

$$\begin{cases} \theta^{k+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1} \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial z} \right) - h_t \frac{\partial K_{k+1}}{\partial z} = \theta_k & \text{sobre } [-L, 0] \times [0, T] \\ \Psi_{k+1}(L) = a_L \\ \Psi_{k+1}(0) = a_0 \end{cases}$$

Para dar solución a la no-linealidad en nuestro problema, aplicaremos el método de

Picard modificado:

$$\theta_{k+1}^{n+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) - h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} = \theta_k \quad (5.1)$$

$$\Psi_{k+1}(L) = a_L$$

$$\Psi_{k+1}(0) = a_0$$

El contenido de humedad θ_{k+1}^{n+1} se le aproximará con el método de Taylor:

$$\theta(\Psi_{k+1}^{n+1}) = \theta(\Psi_{k+1}^n) + \dot{\theta}(\Psi_{k+1}^n)(\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n)$$

$$\text{Donde } \dot{\theta}(\Psi_{k+1}^n) = \frac{\partial \theta(\Psi_{k+1}^{n+1})}{\partial \Psi} = C(\Psi_{k+1}^n)$$

$$\theta_{k+1}^{n+1} = \theta_{k+1}^n + C_{k+1}^n - \Psi_{k+1}^n \quad (5.2)$$

Reemplazando 5.18 en 5.17:

$$C_{k+1}^n(\Psi_{k+1}^{n+1} - h_t - \Psi_{k+1}^n) - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) - h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} = \theta_k - \theta_{k+1}^n \quad (5.3)$$

Organizamos los términos de la ecuación anterior 5.19:

$$C_{k+1}^n \Psi_{k+1}^{n+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) = \theta_k - \theta_{k+1}^n + h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} + C_{k+1}^m \Psi_{k+1}^n$$

Hallar Ψ_{k+1}^{n+1} tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{k+1}^m \Psi_{k+1}^{n+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) = \theta_k - \theta_{k+1}^n + h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} + C_{k+1}^m \Psi_{k+1}^n \\ \Psi_{k+1}^{n+1}(L) = a_L \\ \Psi_{k+1}^{n+1}(0) = a_0 \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Discretización Espacial (i). Desarrollaremos la discretización en la variable

espacial, en donde, se fija la variable N y se define $h_t = \frac{-L}{N}$

El mallado de los volúmenes finitos es puntualizado en los siguientes conjuntos, donde

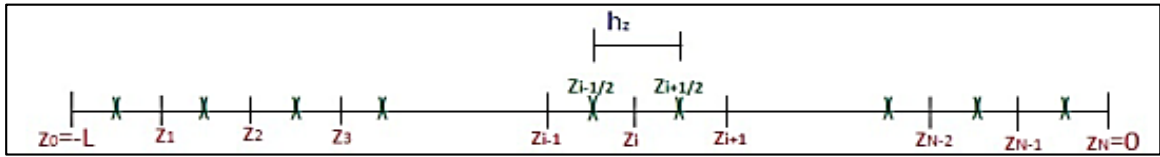
$$z_i = z_0 + h_z$$

$$N = \{z_i | i = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1\}$$

$$z_0 = -L, z_1, z_2, z_3, \dots, z_N = 0$$

Figura 14

Discretización espacial



$$C_{k+1}^n \Psi_{k+1}^{n+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) = \theta_k - \theta_{k+1}^n + h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} + C_{k+1}^n \Psi_{k+1}^n \quad (5,5)$$

Integrando sobre el volumen de control entre $\left[z_{i-\frac{1}{2}} \text{ a } z_{i+\frac{1}{2}} \right]$ en (5,3)

$$\begin{aligned} \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} C_{k+1}^m \Psi_{k+1}^{n+1} - \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) \\ = \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} \theta_k - \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} \theta_{k+1}^n + \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} + \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} C_{k+1}^m \Psi_{k+1}^n \end{aligned} \quad (5,6)$$

Se emplea el teorema fundamental del cálculo y el teorema de la divergencia en

$$\begin{aligned} C_{k+1}^m(z_i) \Psi_{k+1}^{n+1}(z_i) h_z - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} \\ = \theta_k(z_i) h_z - \theta_{k+1}^n(z_i) h_z + h_t (K_{k+1}^n) \Big|_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} + C_{k+1}^m(z_i) \Psi_{k+1}^n(z_i) h_z \end{aligned} \quad (5,7)$$

Notación de variables:

$$C_{k+1}^m = C_{k+1}^{m,i}; \quad \Psi_{k+1}^n(z_i) = \Psi_{k+1}^{n,i}; \quad (K_{k+1}^n) \Big|_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} = K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}}; \quad \theta_k(z_i) = \theta_k^i; \quad \Psi_{k+1}^n(z_{i\pm\frac{1}{2}}) = \Psi_{k+1}^{n,i\pm\frac{1}{2}}$$

Reemplazamos en (5.5)

$$\begin{aligned} C_{k+1}^{m,i} \Psi_{k+1}^{n+1,i} h_z - h_t \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1,i+\frac{1}{2}}}{\partial z} - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1,i-\frac{1}{2}}}{\partial z} \right] \\ = \theta_k^i h_z - \theta_{k+1}^{n,i} h_z + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \right] + C_{k+1}^{m,i} \Psi_{k+1}^{n,i} h_z \end{aligned}$$

En la anterior ecuación se ha aplicado el método de diferencias finitas centrales

Aplicando derivadas parciales dentro del corchete y otros procesos, se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_{k+1}^{m,i} \Psi_{k+1}^{n+1,i} \mathbf{h}_z^2 - h_t \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} (\Psi_{k+1}^{n+1,i+1} - \Psi_{k+1}^{n+1,i}) - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} (\Psi_{k+1}^{n+1,i} - \Psi_{k+1}^{n+1,i-1}) \right] \\ & = \theta_k^i \mathbf{h}_z^2 - \theta_{k+1}^{n,i} \mathbf{h}_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \right] + \mathbf{C}_{k+1}^{m,i} \Psi_{k+1}^{n,i} \mathbf{h}_z^2 \end{aligned}$$

Multiplicado en primer corchete tenemos:

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_{k+1}^{m,i} \Psi_{k+1}^{n+1,i} \mathbf{h}_z^2 - h_t K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,i+1} + h_t K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,i} + h_t K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,i} - h_t K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,i-1} \\ & = \theta_k^i \mathbf{h}_z^2 - \theta_{k+1}^{n,i} \mathbf{h}_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \right] + \mathbf{C}_{k+1}^{m,i} \Psi_{k+1}^{n,i} \mathbf{h}_z^2 \end{aligned}$$

Organizando los términos obtenemos:

$$\begin{aligned} & -h_t K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,i-1} + \left[\mathbf{C}_{k+1}^{m,i} \mathbf{h}_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1,i} - h_t K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,i+1} \\ & = \theta_k^i \mathbf{h}_z^2 - \theta_{k+1}^{n,i} \mathbf{h}_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \right] + \mathbf{C}_{k+1}^{m,i} \Psi_{k+1}^{n,i} \mathbf{h}_z^2 \end{aligned}$$

Condiciones de Frontera. Se tienen las condiciones siguientes:

Condiciones de frontera donde, $\Psi_{k+1}^{n+1,0} = \alpha \mathbf{L}$; $\Psi_{k+1}^{n+1,N} = \alpha \mathbf{0}$;

Con $i = 1$, reemplazamos i con 1 en la ecuacion anterior,

$$\begin{aligned} & -h_t K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,1-1} + \left[\mathbf{C}_{k+1}^{m,1} \mathbf{h}_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1,1} - h_t K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,1+1} \\ & = \theta_k^1 \mathbf{h}_z^2 - \theta_{k+1}^{n,1} \mathbf{h}_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}} \right] + \mathbf{C}_{k+1}^{m,1} \Psi_{k+1}^{n,1} \mathbf{h}_z^2 \end{aligned}$$

Resolvemos las operaciones en los exponentes

$$\begin{aligned} & -h_t K_{k+1}^{n,\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,0} + \left[\mathbf{C}_{k+1}^{m,1} \mathbf{h}_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n,\frac{3}{2}} + K_{k+1}^{n,\frac{1}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1,1} - h_t K_{k+1}^{n,\frac{3}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,2} = \\ & = \theta_k^1 \mathbf{h}_z^2 - \theta_{k+1}^{n,1} \mathbf{h}_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,\frac{3}{2}} - K_{k+1}^{n,\frac{1}{2}} \right] + \mathbf{C}_{k+1}^{m,1} \Psi_{k+1}^{n,1} \mathbf{h}_z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h_t K_{k+1}^{n, \frac{1}{2}} \alpha L + \left[C_{k+1}^{m,1} h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n, \frac{3}{2}} + K_{k+1}^{n, \frac{1}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1,1} - h_t K_{k+1}^{n, \frac{3}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,2} = \\
& = \theta_k^1 h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,1} h_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n, \frac{3}{2}} - K_{k+1}^{n, \frac{1}{2}} \right] + C_{k+1}^{m,1} \Psi_{k+1}^{n,1} h_z^2
\end{aligned}$$

Para utilizar en el algoritmo computacional tomamos de la primera y segunda fila de la ecuación de arriba:

$$A(1, 1) = \left[C_{k+1}^{n,1} h_z^2 - h_t \left(K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad A(1, 2) = -h_t K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}}$$

$$B(1) = \theta_k^1 h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,1} h_z^2 + h_t h_z \left(K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}} \right) + h_t K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}} \alpha L$$

Con $i = N - 1$, reemplazamos i con $n - 1$ en la ecuación anterior, ($\Psi_{k+1}^{n+1,N} = \alpha 0$)

$$\begin{aligned}
& -h_t K_{k+1}^{n, N-1-\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1, N-1-1} + \left[C_{k+1}^{m, N-1} h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n, N-1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n, N-1-\frac{1}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1, N-1} \\
& - h_t K_{k+1}^{n, N-1+\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1, N-1+1} \\
& = \theta_k^{N-1} h_z^2 - \theta_{k+1}^{n, N-1} h_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n, N-1+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n, N-1-\frac{1}{2}} \right] + C_{k+1}^{m, N-1} \Psi_{k+1}^{n, N-1} h_z^2
\end{aligned}$$

Resolvemos las operaciones en los exponentes,

$$\begin{aligned}
& -h_t K_{k+1}^{n, N-\frac{3}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1, N-2} + \left[C_{k+1}^{m, n-1} h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n, N-\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n, N-\frac{3}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1, N-1} - h_t K_{k+1}^{n, N-\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1, N} \\
& = \theta_k^{N-1} h_z^2 - \theta_{k+1}^{n, N-1} h_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n, N-\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n, N-\frac{3}{2}} \right] + C_{k+1}^{m, N-1} \Psi_{k+1}^{n, N-1} h_z^2 \\
& -h_t K_{k+1}^{n, N-\frac{3}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1, N-2} + \left[C_{k+1}^{m, n-1} h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n, N-\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n, N-\frac{3}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1, N-1} - h_t K_{k+1}^{n, N-\frac{1}{2}} \alpha 0 \\
& = \theta_k^{N-1} h_z^2 - \theta_{k+1}^{n, N-1} h_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n, N-\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n, N-\frac{3}{2}} \right] + C_{k+1}^{m, N-1} \Psi_{k+1}^{n, N-1} h_z^2
\end{aligned}$$

Para evaluar $K_{k+1}^{n, i \pm \frac{1}{2}}$ en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
& -h_t K_{k+1}^{n,N-\frac{3}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,N-2} + \left[C_{k+1}^{m,n-1} h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n,N-\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,N-\frac{3}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1,N-1} - h_t K_{k+1}^{n,N-\frac{1}{2}} \alpha_0 \\
& = \theta_k^{N-1} h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,N-1} h_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,N-\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,N-\frac{3}{2}} \right] + C_{k+1}^{m,N-1} \Psi_{k+1}^{n,N-1} h_z^2
\end{aligned}$$

se puede utilizar cualquiera de las siguientes formas:

Tabla 7

Media aritmetica, geométrica y armónica

Media Aritmética	$K_{k+1}^{n,i \pm \frac{1}{2}} = \frac{K_{k+1}^{n,i} + K_{k+1}^{n,i \pm 1}}{2}$
Media Geométrica	$K_{k+1}^{n,i \pm \frac{1}{2}} = \sqrt{K_{k+1}^{n,i} + K_{k+1}^{n,i \pm 1}}$
Media Armónica	$K_{k+1}^{n,i \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{K_{k+1}^{n,i}} + \frac{1}{K_{k+1}^{n,i \pm 1}}}$

Algoritmo Computacional

- $e, Tol, \Psi_0, M, N, L, T, a_0, a_L$
- $h_z = -\frac{L}{M}$
- $h_t = \frac{T}{M}$
- $Sol = zeros(N - 1, M)$
- $Sk = \Psi_0 ones(1, N - 1)$

```

For k = 1 : M
Sk1n = Sk
n = 0
Repeat
A = zeros(N - 1, N - 1)
B = zeros(N - 1, 1)
A(1, 1) = [C_{k+1}^{n,1} h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}})]
A(1, 2) = -h_t K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}}
B(1) = \theta_k^1 h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,1} h_z^2 + h_t h_z (K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}}) + h_t K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}} a_L
    For i = 2 : N - 2
        A(i, i - 1) = -h_t K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}}
        A(i, i) = [C_{k+1}^{n,i} h_z^2 + h_t (K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}})]
        A(i, i + 1) = -h_t K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}}
        B(i) = \theta_k^i h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,i} h_z^2 + h_t h_z (K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}}) + C_{k+1}^{n,i} \Psi_{k+1}^{n,i} h_z^2
    Fin For (i).
A(N - 1, N - 2) = -h_t K_{k+1}^{n,(N-1)-\frac{1}{2}}
A(N - 1, N - 1) = [C_{k+1}^{n,N-1} h_z^2 + h_t (K_{k+1}^{n,(N-1)+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,(N-1)-\frac{1}{2}})]
B(N - 1) = \theta_k^{N-1} h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,N-1} h_z^2 + h_t h_z (K_{k+1}^{n,N-1+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,N-1-\frac{1}{2}}) + h_t K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} a_0
        U = inv(A) * B
        n = n + 1
    Until (||\Psi_{k+1}^{n+1} - U' || \le e) o (n > Tol)
        Sk1n = U'
        Sk = Sk1n
        Sol(:, k) = Sk
    Fin For (k)

```

$$Y = [a_L, Sk, a_0]$$

$$X = L: hz: 0$$

plot(Y, X)

Linealización de la Ecuación de Richards Mediante el L-esquema

El método L esquemas fue propuesto para la ecuación de Richards por Pop, I.S., Radu, F.A. Knabner, P. El método del L-esquema es un método iterativo, robusto y linealmente convergente, por lo que, el L esquema es para resolver la no linealidad de la ecuación de Richards. Por otro lugar, el método L-esquema es el único método que explota la monotonía del contenido de humedad definido como $\theta(\cdot)$.

Además, la tasa de convergencia no depende del tamaño de malla. Los sistemas lineales que surgen después de usar el L-esquema están mucho mejor condicionados que el correspondiente sistema para Newton o métodos modificados de Picard. \

Sea $\Psi_h^{n-1}, \Psi_h^{n,j-1} \in V_h$ y $L > 0$ ser dado. Busquemos $\Psi_h^{n,j} \in V_h$, de modo que tenemos la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} & [\theta(\Psi_h^{n,j-1}, v_h)] + L[\Psi_h^{n,j} - \Psi_h^{n,j-1}, v_h] + \tau [K(\Psi_h^{n,j-1})(\nabla \Psi_h^{n,j} + e_z), \nabla v_h] \\ & = \tau [f^n, v_h] + [\theta(\Psi_h^{n-1}, v_h)] \end{aligned}$$

Se mantiene para todos los valores de $v_h \in V_h$. Para garantizar la convergencia del esquema, la constante L debe satisfacer $L > L_0 \equiv [\sup_{\Psi} (|\theta'(\Psi)|)]$. Explicaremos más detalladamente enseguida.

El esquema no implica el cálculo de ninguna derivada. El elemento clave en el esquema L es la adición de un termino de estabilización $L[\Psi_h^{n,j} - \Psi_h^{n,j-1}, v_h]$, que junto con la monotonía del contenido de humedad $\theta(\cdot)$, asegurará la convergencia del L-esquema.

Contenido de Humedad y su Derivada

La curva característica de humedad del suelo es la relación entre la humedad volumétrica θ y la cabeza de presión. Esta curva describe el estado de energía relativo al

volumen de agua almacenada en un material poroso bajo condiciones variables de saturación, ver en (Stephens, D. B. Vadose zone hydrology, 1995).

Conductividad Hidráulica (K) o permeabilidad

La conductividad hidráulica, también conocida como permeabilidad de un suelo representa la mayor o menor facilidad con que un medio poroso permite el paso de un fluido a través de él por unidad de áreas transversal a la dirección del flujo. Puede expresarse bajo condiciones saturadas y no saturadas. En la zona no saturada este valor no es único ya que depende del contenido de humedad del suelo y también de la presión existente en el sitio de contacto del agua con el suelo.

Curva del contenido de humedad $\theta(\Psi)$

Esta curva permite describir la capacidad que tiene el suelo de almacenar o liberar agua, y que corresponde a la relación entre el volumen volumétrico de agua presente en el suelo y la succión presente en la matriz del suelo (Rawls, 1993).

La siguiente expresión, muestra el modelo propuesto por Van Genuchten para $\theta(\Psi)$. (Van Genuchten, 1980, pág:892–898).

$$\theta(\Psi) = \begin{cases} \theta_{res} + \frac{\theta_{sat} - \theta_{res}}{(1 + (\alpha|\Psi|^n)^m)} \\ \theta_{sat} \end{cases}$$

Donde,

θ_{sat} = Contenido volumétrico saturado de agua

θ_{res} = Contenido volumétrico residual de agua

$m = 1 - 1/n$, donde n es un parámetro empírico

α = Factor de escala.

- $\theta_{res} \leq \theta \leq \theta_{sat}$
- Cuando $\Psi > 0$ el medio esta saturado.

Capacidad Hidráulica $C(\Psi)$

La capacidad hidráulica describe el cambio en la saturación de un medio poroso debido a un cambio en el potencial de presión cuando se está en la zona no saturada [18]. La siguiente expresión, muestra el modelo propuesto por Van Genuchten para $C(\Psi)$.

$$C(\Psi) = \begin{cases} \alpha n \Psi \left(\frac{1}{n} - 1 \right) (\alpha)^{n-1} (\theta_{sat} - \theta_{res}) ((\alpha)^n + 1)^{\frac{1}{n}-2} & \text{para } \Psi \leq 0 \\ 0 & \text{para } \Psi > 0 \end{cases}$$

$$\Psi \alpha = \begin{cases} \theta_{res} + \frac{\theta_{sat} - \theta_{res}}{(1 + (1 + \alpha |\Psi|^n))^m} \\ 0 \end{cases}$$

donde:

θ_{sat} = Contenido volumétrico saturado de agua

θ_{res} = Contenido volumétrico residual de agua

$m = 1 - 1/n$, donde n es un parámetro empírico

Ψ = Conductividad hidráulica

α = Factor de escala.

Observación 1. Obtenemos que el L-esquema presentado anteriormente es ligeramente diferente del considerado por el autor Slodicka, M.: "Un esquema de linealización robusto y eficiente para problemas parabólicos doblemente no lineales y degenerados que surgen en el flujo en medios porosos ". Además, los L-esquemas están considerando con la transformación de Kirchhoff, que no es el curso en el presente documento.

Observación 2. Debe verse que en el caso de una constante "K", los métodos de Newton y el modificado Picard coinciden. Además, si L es reemplazado por la matriz Jacobiana se vuelve a obtener el esquema de Picard modificado.

Cualquier de los métodos de linealización presentados anteriormente conduce a un sistema de ecuaciones lineales para $\Psi_h^{n,j}$ (más precisamente, lo desconocido será el

vector d_h^{nj} con los componentes de Ψ_h^{nj} en una base de V_h). Los derivados del contenido de agua y conductividad hidráulica en el caso del esquema de Picard modificado y el método de Newton se pueden calcular analíticamente o mediante un enfoque de perturbación como lo sugiere, ver en (Forsyth, P.A., Wu, Y.S., Pruess, K., 1995, pág: 25-38) y las integrales que se producen se van aproximando mediante una fórmula en cuadratura.

Para detener las iteraciones, adoptamos un criterio general de convergencia dado por lo siguiente

$$\left\| d_h^{nj} - d_h^{nj-1} \right\| \leq \varepsilon_\alpha - \varepsilon_r \left\| d_h^{nj} \right\|$$

con la norma euclidiana $\| \cdot \|$ y algunas constantes $\varepsilon_\alpha > 0$ y $\varepsilon_r > 0$ con una tolerancia de 10^5 para obtener unos resultados más óptimos.

Resultados de Convergencia de L-esquema.

En esta sección analizaremos rigurosamente la convergencia del esquema L, esta información fue obtenido de (Florian List, 2016).

Denotamos por,

$$e^{nj} = \Psi_h^{nj} - \Psi_h^n$$

El error en la iteración j . Un esquema es convergente si $e^{nj} \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $j \rightarrow \infty$. Las siguientes proposiciones son afirmaciones sobre las funciones de coeficientes y la solución discreta están definiendo en el marco que podemos probar la convergencia del esquema L.

- A1 La función $\theta(\cdot)$ es monotonía, estrictamente creciente y Lipschitz continua.
- A2 La función $K(\cdot)$ es Lipschitz continua y $\exists K_m$ y K_M dos constantes tal que

$$0 < K_m \leq K(\theta) \leq K_M < \infty, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

- A3 La solución del problema (4) satisface $\|\nabla \Psi_h^n\|_\infty \leq \mathbf{M} < \infty$, con $\| \cdot \|_\infty$ denotando $L^\infty(\Omega)$ con norma

Ahora podemos firmar el resultado teórico central de este tema.

Teorema 5.1. Sea $n \in 1, \dots, N$ y supongamos que (A1) y (A3) son verdaderos. Si la constante L y el paso de tiempo se eligen de modo que (P16) a continuación se cumpla, el esquema L (3.6) converge linealmente, con una tasa de convergencia dada por verdaderos,

$$\sqrt{\frac{L}{L + \frac{K_m \tau}{C_\Omega^2}}}$$

La demostración la encontramos en (Florian List, 2016).

Demostración. Si restamos (3.3) de (3.6) obtenemos para cualquier $v_h \in V_h$ para cualquier $j \geq 0$

$$\begin{aligned} & \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}) - \theta(\Psi_h^n), v_h \rangle \\ & + L \langle e^{n,j} - e^{n,j-1}, v_h + \tau \langle \mathbf{K}(\Psi_h^{n,j-1}) \nabla \Psi_h^{n,j} - k(\Psi_h^n), \nabla v_h \rangle \rangle \\ & + \tau \langle \mathbf{K}(\Psi_h^{n,j-1}) - k(\Psi_h^n) e_z, \nabla v_h \rangle = 0 \end{aligned}$$

Probando lo anterior con $v_h = e^{n,j}$ y teniendo en cuenta algunas manipulaciones algebraicas uno consigue lo siguiente

$$\begin{aligned} & \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}) - \theta(\Psi_h^n), e^{n,j-1} \rangle + \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}) - \theta(\Psi_h^n), e^{n,j} - e^{n,j-1} \rangle + \frac{L}{2} \|e^{n,j}\|^2 \\ & + \frac{L}{2} \|e^{n,j} - e^{n,j-1}\|^2 - \frac{L}{2} \|e^{n,j-1}\|^2 - \tau \langle (\Psi_h^{n,j-1}) \nabla \Psi_h^{n,j}, \nabla v_h \rangle \\ & + \langle (k(\Psi_h^{n,j-1}) - K(\Psi_h^n), \nabla e^n, \nabla e^n + \tau \langle \mathbf{k}(\Psi_h^{n,j-1}) - k(\Psi_h^n) e_z, \nabla e^n \rangle) \rangle = 0 \end{aligned}$$

o equivalente a

$$\begin{aligned}
& \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}) - \theta(\Psi_h^n), e^{n,j-1} \rangle + \frac{L}{2} \|e^{n,j}\|^2 + \frac{L}{2} \|e^{n,j} - e^{n,j-1}\|^2 \\
& + \tau \langle (\Psi_h^{n,j-1}) \nabla \Psi_h^{n,j}, \nabla v_h + (\mathbf{k}(\Psi_h^{n,j-1})) \rangle \\
& = \frac{L}{2} \|e^{n,j-1}\|^2 - \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}) - \theta(\Psi_h^n), e^{n,j} - e^{n,j-1} \rangle \\
& - \langle K(\Psi_h^n), \nabla e^n, \nabla e^n + \tau \langle \mathbf{k}(\Psi_h^{n,j-1}) - \mathbf{k}(\Psi_h^n) e_z, \nabla e^n \rangle \rangle
\end{aligned}$$

Usando ahora la monotonidad (La monotonidad de la implicación es una propiedad de muchos sistemas lógicos que afirma que las hipótesis de cualquier hecho derivado pueden extenderse libremente con supuestos adicionales) de $\theta(\cdot)$, usando ahora la monotonidad de $\theta(\cdot)$, su continuidad de Lipschitz (A1), el límite (desde abajo) y la continuidad de Lipschitz de $K(\cdot)$, es decir (A2), el límite de $\nabla \Psi$, y el Young y Cauchy-Desigualdades de Schwarz que se obtienen de la ecuación (3.13),

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L_\theta} \left\| \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}) - \theta(\Psi_h^n), e^{n,j-1} \rangle \right\|^2 + \frac{L}{2} \|e^{n,j}\|^2 + \frac{L}{2} \|e^{n,j} - e^{n,j-1}\|^2 \\
& \leq \frac{L}{2} \|e^{n,j-1}\|^2 + \frac{1}{2L} \|e^{n,j-1} - \theta(\Psi_h^n)\|^2 + \frac{L}{2} \|e^{n,j} - e^{n,j-1}\|^2 \\
& + \frac{\tau(M+1)^2 L_k^2}{2Km} \left\| \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}) - \theta(\Psi_h^n) \rangle \right\|^2 + \frac{\tau Km}{2} \|\nabla e^n\|^2
\end{aligned}$$

Tenemos algunas simplificaciones obvias, la desigualdad (3.14) que se convierte en otra ecuación.

$$L \|e^n\|^2 + \tau Km \|\nabla e^n\|^2 + \left(\frac{2}{L_\theta} - \frac{1}{L} - \frac{\tau(M+1)^2 L_k^2}{2Km} \right) \left\| \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}) - \theta(\Psi_h^n) \rangle \right\|^2 \leq L \|e^{n-1}\|^2$$

Finalmente, eligiendo $L > 0$ y el paso del tiempo τ tal que

$$\frac{2}{L_\theta} - \frac{1}{L} - \frac{\tau(M+1)^2 L_k^2}{2Km}$$

y utilizando la desigualdad de Poincaré (recuerda que la base $e^n \in H_0^1(\Omega)$)

$$\|e^n\| \leq C_\Omega \|\nabla e^{n,j}\|$$

de la ecuación (3.15) sigue la convergencia del esquema (3.6).

$$\|e^n\| \leq \frac{L}{L + \frac{K_m \tau}{C_\Omega^2}} \|e^{n,j-1}\|^2$$

Esquema Implícito

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(\Psi)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi)}{\partial z} = 0 & \text{sobre } [-L, 0] \times [0, T] \\ \Psi(z, 0) = \Psi_0 \\ \Psi(L, t) = a_L \\ \Psi(0, t) = a_0 \end{cases}$$

Discretización en el Tiempo

$$h_t = \frac{T}{N_t}$$

$$t_k = k \cdot h_t$$

Las variables a utilizar para discretizar son:

$$\theta(\Psi(z, t_z)) = \theta_k \quad \Psi(z, t_z) = \Psi_k \quad K_k = K(\Psi(z, t_z))$$

Iniciamos el desarrollo como en el esquema explícito:

$$\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{h_t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1} \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial z} \right) - \frac{\partial K_{k+1}}{\partial z} = 0$$

- multiplicando por h_t , simplificando y por transposición términos se tiene:

$$h_t \cdot \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{h_t} - h_t \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1} \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial z} \right) - h_t \cdot \frac{\partial K_{k+1}}{\partial z} = h_t \cdot 0$$

$$\theta_{k+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1} \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial z} \right) - h_t \frac{\partial K_{k+1}}{\partial z} = \theta_k$$

Hallar Ψ_{k+1} tal que,

$$\begin{cases} \theta_{k+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1} \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial z} \right) - h_t \frac{\partial K_{k+1}}{\partial z} = \theta_k & \text{sobre } [-L, 0] \times [0, T] \\ \Psi_{k+1}(L) = \alpha_L \\ \Psi_{k+1}(0) = \alpha_0 \end{cases}$$

Para dar solución a la no-linealidad en nuestro problema, aplicaremos el método de L-esquema:

$$\theta_{k+1}^{n+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) - h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} = \theta_k \quad (5,17)$$

El contenido de humedad θ_{k+1}^{n+1} se le aproximará con el método de Taylor:

$$\theta(\Psi_{k+1}^{n+1}) = \theta(\Psi_{k+1}^n) + \theta'(\Psi_{k+1}^n)[\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n]$$

Donde $\theta'(\Psi_{k+1}^n) = \frac{\partial \theta(\Psi_{k+1}^{n+1})}{\partial \Psi} \cong L$

$$\theta_{k+1}^{n+1} = \theta_{k+1}^n + L[\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n] \quad (5,18)$$

Reemplazando 5.18 en 5.17

$$L[\Psi_{k+1}^{n+1} - h_t - \Psi_{k+1}^n] - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) - h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} = \theta_k - \theta_{k+1}^n \quad (5,19)$$

Organizamos los términos de la ecuación anterior 5.19:

$$L * \Psi_{k+1}^{n+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) = \theta_k - \theta_{k+1}^n + h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} + L * \Psi_{k+1}^n$$

Hallar Ψ_{k+1}^{n+1} tal que:

$$\begin{cases} L * \Psi_{k+1}^{n+1} - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) = \theta_k - \theta_{k+1}^n + h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} + L * \Psi_{k+1}^n \\ \Psi_{k+1}^{n+1}(L) = \alpha_L \\ \Psi_{k+1}^{n+1}(0) = \alpha_0 \end{cases} \quad (5,20)$$

Discretización Espacial (i). En este apartado desarrollaremos la discretización

en la variable espacial, en donde, se fija la variable N y se define $-\frac{L}{N}$

El mallado de los volúmenes finitos es puntualizado en los siguientes conjuntos, donde

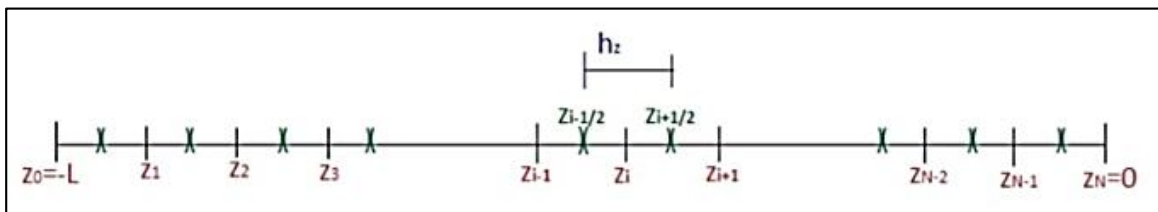
$$z_i = z_0 + i \cdot h_z:$$

$$N = \{z_i | i = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$$

$$= \{z_0 = -L, z_1, z_2, \dots, z_N = 0, \dots\}$$

Figura 15

Discretización espacial L-Esquemas



$$L * (-h_t) - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) = \theta_k - \theta_{k+1}^n + h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} \quad (5,21)$$

Integrando sobre el volumen de control entre $z_{i-\frac{1}{2}}$ y $z_{i+\frac{1}{2}}$ en 5.21

$$\begin{aligned} & \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} L \Psi_{k+1}^{n+1} - \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) \\ & = \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} \theta_k - \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} \theta_{k+1}^n + \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} h_t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} + \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} L \Psi_{k+1}^n \quad (5,22) \end{aligned}$$

Usamos el teorema fundamental del cálculo y el teorema de la divergencia 5.22, por tanto

$$L(z_i) \Psi_{k+1}^{n+1}(z_i) h_z - h_t \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right)_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} = \theta_k(z_i) h_z - \theta_{k+1}^n(z_i) h_z + h_t (K_{k+1}^n)_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} +$$

$$L(z_i) \Psi_{k+1}^n(z_i) h_z \quad (5,23)$$

Notación de variables

$$\Psi_{k+1}^{n+1} z_i = \Psi_{k+1}^{n+1,i}, (z_{i\pm\frac{1}{2}}) = K_{k+1}^{n,i\pm\frac{1}{2}}; \theta_k(z_i) = \theta_k^i; \Psi_{k+1}^n(z_{i\pm\frac{1}{2}}) = \Psi_{k+1}^{n,i\pm\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} & L \Psi_{k+1}^{n+1,i} h_z - h_t \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1,i+\frac{1}{2}}}{\partial z} - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1,i-\frac{1}{2}}}{\partial z} \right] \\ & = \theta_k^i h_z - \theta_{k+1}^{n,i} h_z + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \right] + L \Psi_{k+1}^{n,i} h_z \end{aligned}$$

En la anterior ecuación se ha aplicado el método de diferencias finitas centrales

$$\begin{aligned} & L \Psi_{k+1}^{n+1,i} h_z^2 - h_t \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} (\Psi_{k+1}^{n+1,i+1} - \Psi_{k+1}^{n+1,i}) - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} (\Psi_{k+1}^{n+1,i} - \Psi_{k+1}^{n+1,i-1}) \right] = \theta_k^i h_z^2 - \\ & \theta_{k+1}^{n,i} h_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \right] + L \Psi_{k+1}^{n,i} h_z^2 \quad (5,24) \end{aligned}$$

Organizamos los términos en 5.24, tal que

$$\begin{aligned} & -h_t K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,i-1} + \left[L h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1,i} - h_t K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,i+1} \\ & = \theta_k^i h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,i} h_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}} \right] + L \Psi_{k+1}^{n,i} h_z^2 \end{aligned}$$

Condiciones de Frontera

Donde $\Psi_{k+1}^{n+1,0} = \alpha L$; $\Psi_{k+1}^{n+1,N} = \alpha 0$

$i = 1$

$$\begin{aligned} & -h_t K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,1-1} + \left[L h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1,1} - h_t K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,1+1} \\ & = \theta_k^1 h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,1} h_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}} \right] + L \Psi_{k+1}^{n,1} h_z^2 \end{aligned}$$

$i = N - 1$

$$\begin{aligned} & -h_t K_{k+1}^{n,N-1-\frac{1}{2}} \Psi_{k+1}^{n+1,N-2} + \left[L h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n,N-1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,N-1-\frac{1}{2}}) \right] \Psi_{k+1}^{n+1,N-1} - h_t K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} \alpha_0 \\ & = \theta_k^{N-1} h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,N-1} h_z^2 + h_t h_z \left[K_{k+1}^{n,-1+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,N-1-\frac{1}{2}} \right] + L \Psi_{k+1}^{n,N-1} h_z^2 \end{aligned}$$

Algoritmo Computacional

```
clear, globales;
a = -6; b = 1; c = 0; d = 0,25;
x = a : 0,01 : b;
0,231355018; 2,238325157;
ex = 0,01;
xxx = -1/Alfa * ((n - 1)/(1 + n * m)).(1/n);
L = 0,25/2;
fork = 1 : length(x)
yc(k) = dC(x(k));
end
holdon
e, Tol, Psi0, M, N, L, T, a0, aL
hz = -L/M
ht = T/M

Sol = zeros(N - 1, M)

Sk = Psi0 ones(1, N - 1)
```

```

For k = 1 : M
Sk1n = Sk
n = 0
Repeat
A = zeros(N - 1, N - 1)
B = zeros(N - 1, 1)
A(1, 1) = [C_{k+1}^{n,1} h_z^2 - h_t (K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}})]
A(1, 2) = -h_t K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}}
B(1) = \theta_k^1 h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,1} h_z^2 + h_t h_z (K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}}) + h_t K_{k+1}^{n,1-\frac{1}{2}} a_L
    For i = 2 : N - 2
        A(i, i - 1) = -h_t K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}}
        A(i, i) = [C_{k+1}^{n,i} h_z^2 + h_t (K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}})]
        A(i, i + 1) = -h_t K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}}
        B(i) = \theta_k^i h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,i} h_z^2 + h_t h_z (K_{k+1}^{n,i+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,i-\frac{1}{2}}) + C_{k+1}^{n,i} \Psi_{k+1}^{n,i} h_z^2
    Fin For (i).
A(N - 1, N - 2) = -h_t K_{k+1}^{n,(N-1)-\frac{1}{2}}
A(N - 1, N - 1) = [C_{k+1}^{n,N-1} h_z^2 + h_t (K_{k+1}^{n,(N-1)+\frac{1}{2}} + K_{k+1}^{n,(N-1)-\frac{1}{2}})]
B(N - 1) = \theta_k^{N-1} h_z^2 - \theta_{k+1}^{n,N-1} h_z^2 + h_t h_z (K_{k+1}^{n,N-1+\frac{1}{2}} - K_{k+1}^{n,N-1-\frac{1}{2}}) + h_t K_{k+1}^{n,1+\frac{1}{2}} a_0
        U = inv(A) * B
        n = n + 1
    Until (||\Psi_{k+1}^{n+1} - U' || \le e) o (n > Tol)
        Sk1n = U'
        Sk = Sk1n
    Sol(:, k) = Sk
Fin For (k)

```

$$Y = [a_L, Sk, a_0]$$

$$X = L: hz: 0$$

plot (Y, X)

CAPITULO 6

Programa Computacional y Resultados Numéricos

Programa Computacional en Matlab

Para implementar el modelo desarrollo, se creó un código computacional propio utilizando el software Matlab 17. Las simulaciones fueron calculadas por medio de procesador Intel® core i3-5005U CPU @ 2.00GHz y 8 GB de memoria RAM. El método de Picard y L-esquemas para analizar, tiempos de ejecución e iteraciones la cual podemos hacer una comparación y podemos obtener el óptimo de los métodos de la Ecuación de Richards.

Aspectos Computacionales del Método de Volúmenes Finitos

Se deduce que para aplicar el Método de volúmenes Finitos es requisito indispensable contar con programas de computadora que ayuden en los procesos de cálculo para obtener una aproximación a la solución del problema bajo estudio, en los siguientes aspectos:

Pre proceso

En esta etapa, se considera lo siguiente:

- Mallado, consiste en dividir la región en unidimensional Ω donde se debe resolver la EDP en triángulos. Para tal efecto es necesario disponer de un programa computacional de mallado.
- Datos de parámetros geométricos y físicos relacionados con el problema a resolver.
- Ensamble de las ecuaciones de los elementos triangulares para obtener el sistema de ecuaciones lineales.

Proceso

Consiste en resolver el sistema de ecuaciones lineales y obtener los valores nodos de la variable escalar que se aproxima, en la matriz del sistema es simétrica y en banda.

Post proceso

Computacional los operadores del gradiente de la solución otras variables relacionadas, presentar los datos en forma tabulada y graficar.

Evaluación de los Resultados Numéricos

La precisión relativa de los resultados numéricos obtenidos de los diferentes esquemas generalmente no se compara fácilmente. Dependiendo de los objetivos (comparaciones globales o locales de presión de agua o contenido de agua, valor mínimo o máximo de la variable comparada, etc.), los criterios pueden ser diferentes.

Se pueden hacer comparaciones cuantitativas basadas en un análisis de errores residuales. Evaluamos el rendimiento del modelo calculando las diferencias con una solución exacta de la ecuación de Richards. Para este propósito, utilizamos la solución semi analítica de Philip, así como una solución numérica calculada usando un pequeño paso de tiempo y una cuadrícula muy fina, como se muestra en los ejemplos a continuación. Las siguientes medidas de análisis \cite{u12} se utilizaron en las comparaciones

$$\text{Modeling Efficiency (ME): } ME = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{nn} (h_z - \vec{h})^2}{\sum_{k=1}^{nn} (h_{\vec{k}} - \vec{h})^2}$$

$$\text{Root square error (RSE): } \left[\frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{nn} \left(\frac{h_k - h_{\vec{k}}}{h_{\vec{k}}} \right)^2 \right]^{0,5}$$

$$\text{Relative Error (RE): } \left[\frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{nn} \left(\frac{h_k - h_{\vec{k}}}{h_{\vec{k}}} \right) \right]$$

donde h_k son los valores predichos del modelo, $h_{\vec{k}}$ las presuntas soluciones exactas (es decir, los valores analíticos de la solución de Philip o la solución de cuadrícula densa), nn

es el número de nodos y \vec{h} es la media de los valores calculados. El valor deseado para ME es uno, mientras que los de RSE y RE son cero. ME compara las fluctuaciones en la solución calculada con la solución exacta. La medida RSE es una comparación término por término de la diferencia real entre el valor predicho y el valor calculado. Esta medida proporciona una estimación del error relativo promedio entre las soluciones calculadas y exactas y no diferencia entre la subestimación y la subestimación. Finalmente, RE proporciona la siguiente información: RE es positivo (o Negativo), cuando los valores calculados son en promedio mayores (o Más pequeños) que los valores exactos.

Validación Del Algoritmo Numérico

Se presenta las soluciones aproximadas y exactas en los nodos de la malla para lo cual se ha usado un problema cuya solución se conoce. Para obtener la solución aproximada hemos elegido las siguientes funciones:

La cabeza hidráulica se ha definido como $\Psi(z, t) = z(z + 2)(t - 2)$, asimismo la conductividad hidráulica y el contenido de humedad se emplearon los mismos que se utilizó en el programa. Las condiciones iniciales son iguales a cero, $a = -2m$, $N = 60$, $T = 1h$, $M = 200$, $\Psi(z, t) = g(z)$, donde $g(z) = -2z(z + 2)$, es decir, cuando el tiempo es igual a cero. $Tol = 100$, $error = 0.001$ y la función aproximada es:

$$D\Psi = 2 * (z + 1) * (t - 2)$$

$$D\Psi^2 = 2 * (t - 2)$$

$$Dt\Psi = z * (z + 2)$$

$$f(z, t) = dC(\Psi) * Dt\Psi - dK(\Psi) * (D\Psi + 1) - K(\Psi) * D\Psi^2$$

,donde se representó la primera derivada con D y la segunda derivada con D^2 .

La solución exacta es $\Psi(z, t) = z(z + 2)(t - 2)$

Cuadros de Resultados

Cuadro 6.1: Malla temporal (variable M), constante Malla espacial (N=60); Tiempo del mallado Temporal (T=3600) y Profundidad (a=-40), Dio=60, Día= -1000

Tabla 8

Malla temporal (M)

	Malla Temporal (M)	RE	RSE
1	30	-8.707792862914420	8.854153296808530
2	60	-8.707745528308449	8.854105141586260
3	90	-8.707729668907687	8.854089007203690
4	100	-8.707726474386048	8.854085757262510
5	200	-8.707712141023440	8.854071175331415
6	300	-8.707707532833133	8.854066487506987

Tabla 9

Malla Espacial (N)

	Malla Espacial (N)	RE	RSE
1	30	-8.421686946722838	8.707248797914058
2	60	-8.707726474386048	8.854085757262510
3	90	-8.805302584110976	8.903690165766893
4	100	-8.824970674501683	8.913667566330494
5	200	-8.914603026922833	8.959298774248044

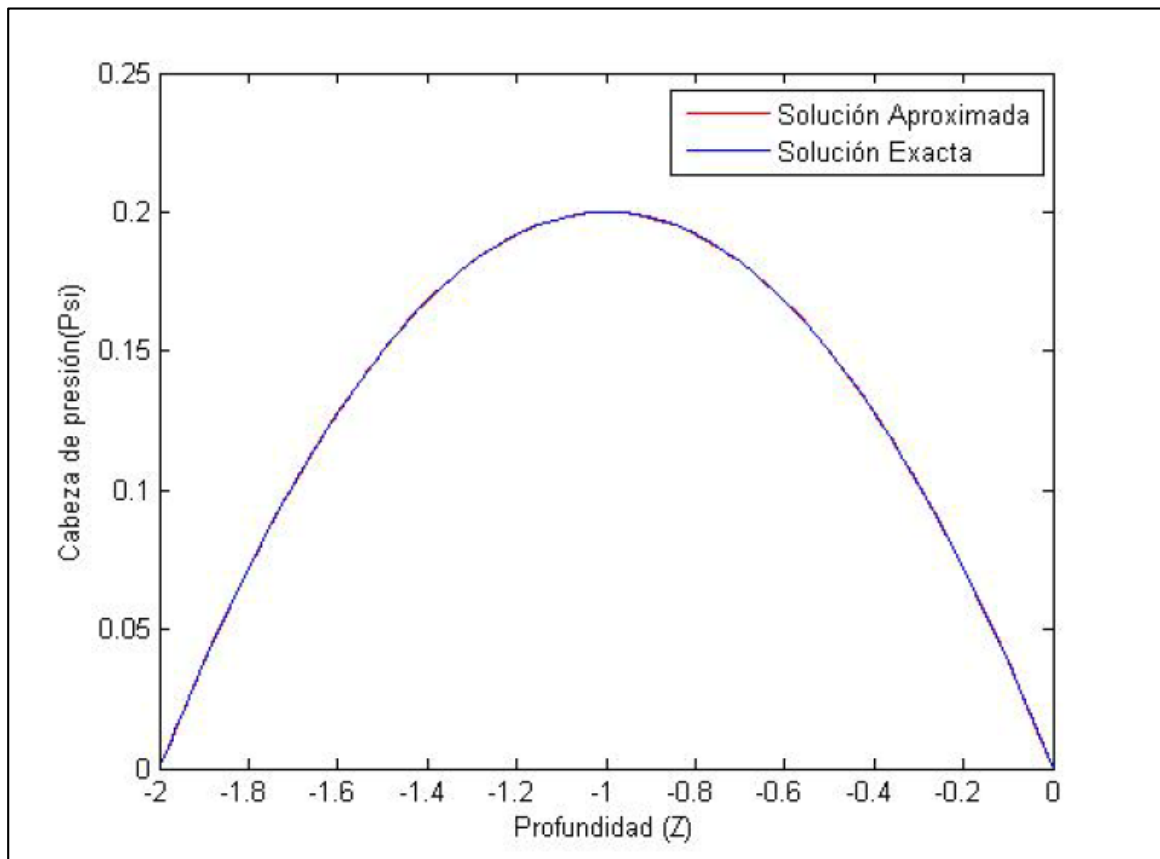
Cuadro 6.2: Malla Espacial (variable N), constante Malla temporal (M=100); Tiempo del mallado Temporal (T=3600) y Profundidad (a=-40), Dio=60, Día= -1000.

Para la presentación de la solución gráfica de nuestro problema, se ha efectuado el programa computacional, Validación, con los parámetros mencionados anteriormente.

La validación de nuestro problema se realizó con el cálculo del error relativo (RE) y con la raíz cuadrada (SRE) en la sección anterior se aclara su funcionamiento. Entonces los cuadros 6.1 y 6.2 nos dice que el error es muy pequeño por lo que la función aproximada es válida. Así el algoritmo es eficiente para el programa computacional.

Figura 16

Solución aproximada y solución exacta



Validación Del Programa Computacional

Para la validación de los programas fue probada en la comparación contra la solución de Celia, fue probada con los esquemas numéricos para dos mallas finas.

La integración del modelo de Van Genuchten con la solución de Celia de la ecuación de Richards para flujos no saturados se usa para comparar las soluciones numéricas:

Cuadro 6.3 Malla temporal (variable M), constante Malla Espacial (N=300); Tiempo del mallado Temporal (T=3600) y Profundidad (a=-40), Dio=60, Día=-1000.

Tabla 10

Malla temporal (M), comparación de métodos

Malla (M)	Método de Picard		Método L-esquema	
	Iteraciones	Tiempo	Iteraciones	Tiempo
30	33.33	0.0038 s	500	1.9924e+03 s
60	23.3167	0.0038 s	500	3.7000e+03 s
90	18.9222	0.0038 s	500	6.1032e+03 s
100	17.9100	0.0040 s	500	1.9924e+03 s
200	12.7400	0.0039 s	500	1.4073e+04 s
300	10.5200	0.0039 s	500	1.9409e+04 s
400	9.3150	0.0039 s	500	2.4515e+04 s
500	8.5380	0.0042 s	500	3.4705e+04 s

A continuación, se muestran las gráficas obtenidas para el método de Picard y también para L-Esquemas.

En estas graficas se pueden apreciar la convergencia de los dos métodos, para los diferentes mallados

Figura 17

Método de Picard

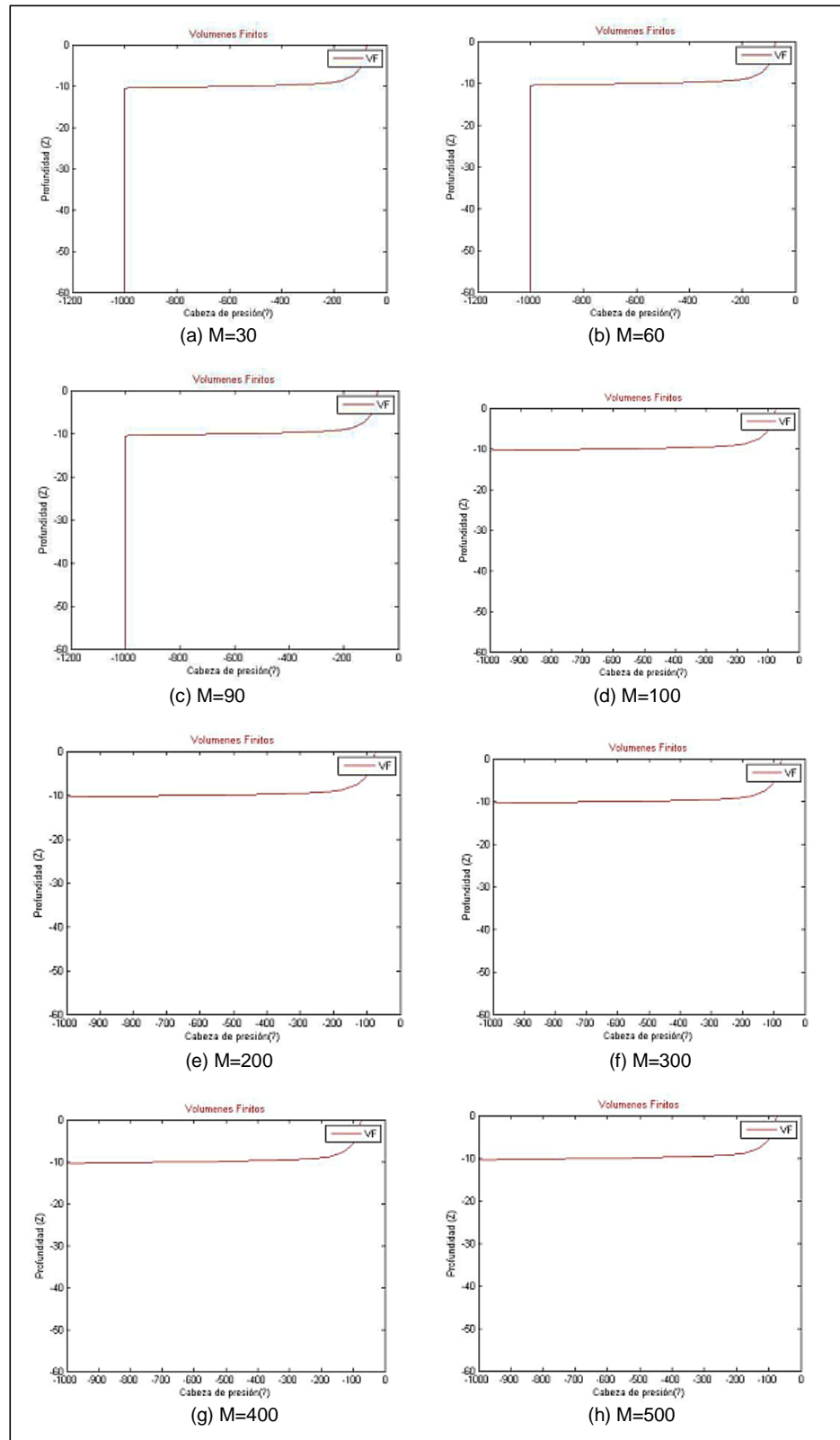
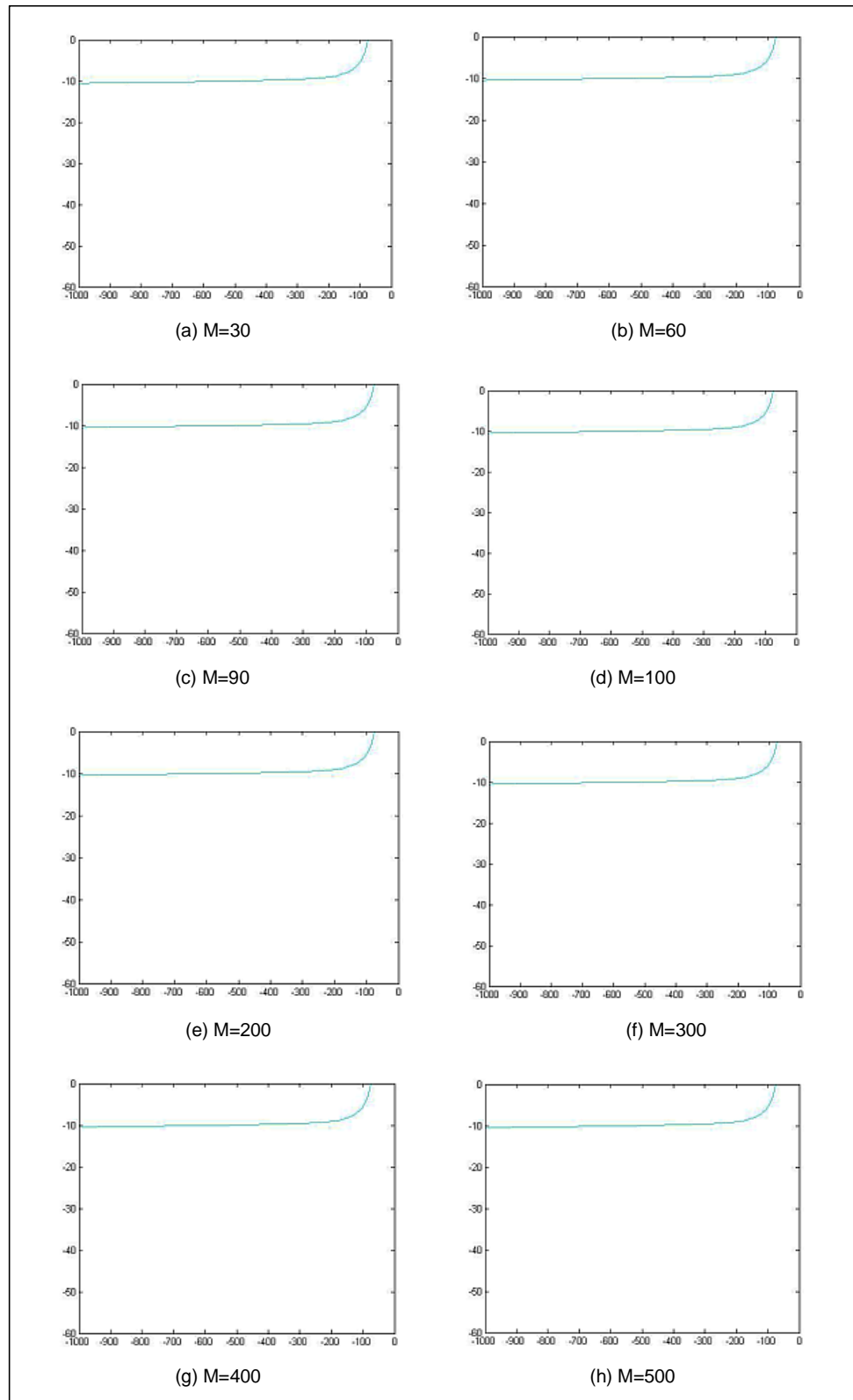


Figura 18*Método del L-esquemas*

CAPITULO 7

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

- La modelización permitió analizar la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Richards tanto para el problema tipo elíptico como para el problema tipo parabólico cuando las funciones involucradas cumplen con ciertas características descritas en el capítulo 3 de este proyecto de investigación.
- Para resolver numéricamente la ecuación de Richards unidimensional usando el método de volúmenes finitos, se debe usar primeramente en la variable temporal una discretización en el tiempo, luego se linealiza la ecuación resultante usando los métodos de Picard y de L-esquemas para finalmente discretizar la variable espacial y de esta manera se consigue el esquema numérico que posteriormente se transforma en un programa computacional.
- Una de las principales causas del tiempo que el computador demora en resolver la ecuación de Richards y así mismo es fuente de errores numéricos, es la solución del sistema de ecuaciones y el proceso de no convergencia de algunos métodos.
- El método de Picard converge más rápidamente, en menor tiempo que el de L esquemas. El método de Picard al crecer la malla el número de iteraciones baja, mientras que en el de L esquemas, el número de iteraciones es constante
- En forma gráfica, el método de L esquemas converge con un mallado más bajo, mientras que el de Picard recién converge con un mallado más alto
- El trabajo presentado no puede interpretarse como si fuese el diseño completo. Más bien, el objetivo es demostrar la forma en que los modelos matemáticos pueden ser puestos en práctica.

Recomendaciones

- Realizar un estudio más profundo en proceso de errores de computación, más generales con el fin de ver la posibilidad de debilitar aún más el rendimiento CPU que deben cumplir las funciones involucradas en el problema de manera que la ecuación de Richards tenga solución única con un mínimo error en optimar el resultado.
- Investigar sobre la posibilidad de reformular la ley de Darcy y así obtener nuevas formas de procesar el algoritmo de la ecuación de Richards.
- Diseñar algoritmos de programación paralela de modo que muchas instrucciones se ejecuten al mismo tiempo con lo cual se conseguirá minimizar el error en un tiempo razonable de máquina.
- Constatar con cuál sería el número de elementos óptimo para conseguir una solución razonable en el menor tiempo, los números de iteraciones con respecto a la ecuación de Richards.

Bibliografía

- Abuja, G, (2013), Ecuación de Richards bidimensional, Modelación y simulación numérica, Trabajo de graduación, Universidad Central del Ecuador, Quito-Ecuador.
- American Psychological Association (2020). Manual de Publicaciones de la American Psychological Association (7 ed.). México, D.F.: Editorial El Manual Moderno.
- Benalcázar H., (2015), ¿Donde habitan los problemas matemáticos de la vida de la vida real?, Quito. Primera edición.
- Castañeda M., y Reyes A., (2004), Solución numérica de la Ecuación de Richards, Trabajo de grado, Universidad Industrial Santander, Bucaramanga.
- Caviedes D., Voullieme, Garcia P., Navarro. y Murillo J. (2013), Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation, LIFTEC, Fluid Mechanics, University of Zaragoza, Spain, Journal of Hydrology 480 (2013) 69–84.
- Florian, L., Florín A., (2016). A study on iterative methods for solving Richards' equation. Paper original, Comput Geosci, Springer, 342-353.
- Forsyth, P.A., Wu, Y.S., Pruess, K.: Robust numerical methods for saturated-unsaturated flow with dry initial conditions in heterogeneous media. Adv. Water Resour. 18,25-38(1995).
- Gálvez, P., (2014), Modelo Matemático, numérico y computacional para la contaminación de aguas subterráneas, Trabajo de graduación, Universidad Central del Ecuador, Quito-Ecuador.
- Guanotoa E., (2015), Modelo Matemático, numérico y computacional para la predecir el

- contenido de agua en suelos agrícolas del territorio ecuatoriano, Trabajo de graduación, Universidad Central del Ecuador, Quito-Ecuador.
- Matefacil, (2018), Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones EDO de Primer Orden, video recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=-21-EtMAGb8>.
- Martínez, J., Schvezov, C., y Rosenberger, M., (2013), Aproximación en diferencias finitas a la ecuación de Richards para transporte de agua en suelos no saturados, *Mecánica Computacional*, volumen XXXII, 2779-2793.
- Medina P., (2016), Seminario de Redacción de Textos. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-Numérica II+D, Adaptación del texto original de la Dra. Ana Molina, Quito.
- McAdams., D., (2008), Teorema de existencia. 2009-04-03. Enciclopedia de Todas las Palabras de la Matemáticas. Recuperado el 23 de febrero 2017, Life is a Story Problem.org. <http://www.allmathwords.org/es/e/existencetheorem.html>.
- Naula, I., Albuja, G., Carrillo, R., e Izurieta, C., (Marzo 2016), Modelación y simulación numérica de la Ecuación de Richards para problemas de infiltración, *Enfoque UTE*, V.7-N1, pp. 46-68
- NN, Ley de Darcy, (2017), Recuperado el 3 de agosto del 2017,\\ file:///C:/Users/Zona/AppData/Local/Temp/tema \$\\%\$ 201-2(2012-2)c-1.pdf
- Pedrozo, H., Rosenberger, M., Schvezov, C., (2015), Comparación entre Modelos en Diferencias Finitas Aplicados a la Infiltración en Suelos, *Revista de ciencia y tecnología*, N. 23, p1-15.
- Pineda R., (2018), Resolución de la ecuación de Richards unidimensional por el método de volúmenes finitos, Universidad Central del Ecuador, Quito – Ecuador.
- Reina S., y Reina T., (1998), Interacción de los procesos de escorrentía e infiltración, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 1-11.
- Rivadeneira E., (2013), Implementación de cinco modelos matemáticos para el cálculo de

la infiltración en el laboratorio virtual de hidrología (HYDROVLAB), Universidad Técnica Particular de Loja, Loja-Ecuador.

Vázquez, M., (2014), Introducción al método de volúmenes finitos, Manuais Universitarios núm. 10., Universidad de Santiago de Compostela, usc. Es/publicaciones.

Zimmerman, E., Esquema explícito para la resolución de la ecuación de Richards, Centro de Investigaciones Hidro ambientales -FCEIA-UNR.

Stephens, D. B. Vadose zone hydrology. CRC press, 1995.

Rawls, J. Infiltration and soil water movement; Handbook of hydrology (1993).

Van Genuchten, M. T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil science society of America journal 44, 5 (1980), 892–898.