Elaboración de un manual para la enseñanza de Álgebra Lineal usando el pensamiento computacional

Valencia Quezada, Miguel Angel

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrado

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Magister en Enseñanza de la Matemática

Dr. Delgado Rodríguez, Ramiro Nanac

28 de Julio del 2021

Ouriginal

Document Information

Analyzed document	tesis M 9.pdf (D85625534)
Submitted	7/13/2021 11:48:00 AM
Submitted by	
Submitter email	rndelgado@espe.edu.ec
Similarity	8%
Analysis address	rndelgado.espe@analysis.urkund.com

Firmado electrónicamente por:
RAMIRO NANAC
DELGADO
RODRIGUEZ

ING. RAMIRO DELGADO RODRIGUEZ

DIRECTOR

Sources included in the report

W	URL: https://archive.org/stream/algebralinealconaplicaciones/algebra%20LINEAL%20CON%20APLICACIONES_djvu.txt Fetched: 9/28/2020 10:35:58 AM	1
W	URL: http://www.mclibre.org/consultar/python/lecciones/python-entrada-teclado.html Fetched: 11/17/2020 12:00:00 AM	1
SA	**algebra-lineal-6ta-edicic3b3n-stanley-i-grossman-s.pdf** Document algebra-lineal-6ta-edicic3b3n-stanley-i-grossman-s.pdf (D38665697)	34
W	URL: https://docplayer.es/21909676-Ing-ramon-morales-higuera.html Fetched: 11/17/2020 12:00:00 AM	1
SA	**GDV Algebra Lineal.docx** Document GDV Algebra Lineal.docx (D80309451)	1
SA	**Matrices, Determinantes y Sistemas ver 5.docx** Document Matrices, Determinantes y Sistemas ver 5.docx (D64133590)	1
W	URL: https://docplayer.es/77506935-Matematicas-empresariales-apuntes.html Fetched: 10/21/2019 10:11:01 PM	1
W	URL: https://edumatematicas.files.wordpress.com/2014/08/algebra-kolman.pdf Fetched: 7/20/2020 3:54:00 AM	2
W	URL: https://victordominguezorg.files.wordpress.com/2018/03/palm_march20181.pdf Fetched: 1/31/2020 8:55:44 AM	1
W	URL: https://archive.org/stream/ALGEBRALINEAL_201508/ALGEBRA%20LINEAL_djvu.txt Fetched: 2/5/2020 7:18:28 AM	4
W	URL: http://www.ehu.eus/ebravo/contenidos/Algebra%20lineal/Algebra.pdf Fetched: 11/16/2020 7:01:12 AM	1
SA	**libro algebra lineal.doc** Document libro algebra lineal.doc (D30904555)	1

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación, "Elaboración de un manual para la enseñanza de Álgebra Lineal usando el pensamiento computacional" fue realizado por el señor Valencia Quezada, Miguel Angel el mismo que ha sido revisado en su totalidad, analizado por la herramienta de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 17 de Noviembre del 2020

Firmado electrónicamente por:

RAMIRO NANAC DELGADO RODRIGUEZ

……………………………………

Dr. Delgado Rodríguez, Ramiro Nanac

C.C.: 1707019178

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

RESPONSABILIDAD DE AUTORIA

Yo, **Valencia Quezada Miguel Angel**, con cédula de ciudadanía nº 0704914597, declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **Elaboración de un manual para la enseñanza de Álgebra Lineal usando el pensamiento computacional** es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas ArmadasESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 17 de Noviembre del 2020

Firmado electrónicamente por:

MIGUEL ANGEL VALENCIA QUEZADA

…………………………………….

Valencia Quezada, Miguel Angel

C.C.: 0704914597

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Yo, **Valencia Quezada, Miguel Angel,** con cédula de ciudadanía No. 0704914597, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación**: Elaboración de un manual para la enseñanza de Álgebra Lineal usando el pensamiento computacional** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido e ideas son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 17 de Noviembre del 2020

Firmado electrónicamente por:

MIGUEL ANGEL VALENCIA QUEZADA

…………………………………….

Valencia Quezada, Miguel Angel

C.C.: 0704914597

Dedicatoria

Este trabajo va dedicado a:

Mis padres por ser fuente de mi inspiración,

Mis hermanos y sobrinos por su apoyo incondicional,

Mis amigos por sus palabras constantes de aliento y

A la persona que con esfuerzo y ahínco me dedicó su tiempo y espacio en todo este trayecto.

Miguel Angel

Agradecimiento

Agradezco a Dios por ser quien me mantiene en pie y me proporciona la fortaleza necesaria para culminar con una meta más en mi vida.

A mi familia por sus sabios consejos y su inquebrantable motivación hacia mi persona, especialmente a mis padres que son la inspiración de mis objetivos.

A la Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE), Centro de Posgrados, por otorgarme la oportunidad de forjarme con sólidos conocimientos relativos a mi formación profesional y aplicarlos en el campo laboral.

A los docentes por la gran labor, dedicación y entrega para con los que formamos el grupo de maestrantes de la III Promoción, y de manera especial al Dr. Paul Medina docente de la Maestría por su excelente trabajo y guía en el presente proyecto.

Al Ing. Patricio Pugarín, por su perseverancia y ardua labor que implica ser coordinador de la maestría y brindarnos un grupo selecto de docentes con un alto grado de experticia profesional.

Un agradecimiento especial al Dr. Juan Mayorga Z. por su importante colaboración, siendo para mí, un guía indispensable en la culminación del presente trabajo.

Finalmente agradezco a mi director, Dr. Ramiro Delgado, quien con esfuerzo y sabiduría me ha sabido guiar de manera permanente durante el desarrollo de la presente tesis para así poder alcanzar la meta propuesta.

Gracias infinitas.

Índice de Contenidos

Índice de Figuras

Resumen

El presente manual operativo fue desarrollado con el fin de apoyar el aprendizaje en la asignatura de Algebra Lineal en estudiantes de Segundo de BGU, valiéndose del pensamiento computacional como medio para la resolución de problemas de manera imaginativa consolidando el razonamiento abstracto matemático. Se utilizó Python debido a que es un software libre como una estrategia metodológica que ayude a operativizar y optimizar el tiempo de los estudiantes de Segundo de BGU en la resolución de ejercicios que a posteriori recibirán el curso de Algebra Lineal más formal. Está diseñado de manera que sea usado a la par de un libro de texto, en el cual se presenta la importancia del pensamiento computacional, aspectos relevantes de la herramienta Python, como la realización de operaciones matemáticas sencillas y el uso de algunas funciones matemáticas que se utilizan en la resolución de ejercicios en los capítulos II, III y IV del presente manual. Así mismo, se desarrollaron los laboratorios que nos enseñan cómo resolver los ejercicios de cada capítulo paso a paso utilizando Python, con el objetivo de que el estudiante se familiarice con el lenguaje de programación. Se presentará al final del manual el código fuente de las funciones creadas para la resolución de los ejercicios.

Para obtener la validación del presente manual, se utilizó el criterio de expertos, para lo cual se seleccionó un experto en Álgebra Lineal, uno en Programación y uno en Pedagogía, los mismos que validaron la propuesta metodológica del presente proyecto.

Palabras clave:

- **PENSAMIENTO COMPUTACIONAL**
- **PYTHON**
- **MATRICES**
- **ESPACIOS VECTORIALES**
- **VECTORES PROPIOS**

Abstract

This operating manual was developed with the purpose of supporting learning in the subject of Linear Algebra for Second of Bachillerato student, using computational thinking as a means of solving problems in an imaginative way, consolidating abstract mathematical reasoning. Python was used because it is free software as a methodological strategy that helps operationalize and optimize the time of Second of Bachillerato students in solving exercises that will subsequently receive the more formal Linear Algebra course. It is designed so that it can be used as a textbook, in which the importance of computational thinking, relevant aspects of the Python tool, such as the performance of simple mathematical operations and the use of some mathematical functions that are used in the resolution of exercises in chapters II, III and IV of this manual. Also, laboratories were developed that teach us how to solve the exercises in each chapter step by step using Python, in order for the student to become familiar with the programming language. The source code of the functions created to solve the exercises will be presented at the end of the manual.

To obtain the validation of this manual, the criteria of experts was used, for which an expert in Linear Algebra, one in Programming and one in Pedagogy was selected, the same ones who validated the methodological proposal of this project.

Keywords:

- **COMPUTATIONAL THINKING**
- **PYTHON**
- **MATRICES**
- **VECTOR SPACES**
- **EIGENVECTORS**

Capítulo I: Pensamiento Computacional y Python

Pensamiento Computacional

En la actualidad el pensamiento computacional está siendo apreciado como una de las competencias de mayor demanda y, por ello su planteamiento en el contexto educativo.

El pensamiento computacional tiene su origen en la década de 1960 pero toma un apogeo en el año 2006 por Jeannette Wing en la revista Communications of ACM., que lo propone como una competencia que debería ser incluida en la formación de todos los niños, puesto que constituye un componente vital del aprendizaje de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y la matemática.

> [El PC]…implica resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano, basándose en los conceptos fundamentales de la ciencia de la computación. El pensamiento computacional incluye una amplia variedad de herramientas mentales que reflejan la amplitud del campo de la computación… [además] representa una actitud y unas habilidades universales que todos los individuos, no sólo los científicos computacionales, deberían aprender y usar” (Wing, 2006).

Desde entonces muchos autores han definido al Pensamiento Computacional, uno de ellos es Peter Denning que considera que el PC es el proceso de pensamientos por el que se formulan problemas de tal manera que sus soluciones puedan ser representadas con pasos computacionales y algoritmos dentro de un modelo computacional dado. (Denning, 2017)

Importancia del Pensamiento Computacional en la Matemática

El pensamiento computacional, al constituirse en una habilidad imprescindible para todos, promueve la capacidad analítica de cada individuo, constituyéndose en competencia básica para el normal desenvolvimiento en una sociedad ya globalizada y digital. Permite múltiples maneras de resolver problemas de manera imaginativa, combinando la parte abstracta con lo concreto, cuyo eje principal es la matemática.

El pensamiento computacional motiva en los individuos la habilidad de formular problemas y solucionarlos con ayuda de herramientas tecnológicas, sistematizando lógicamente los datos obtenidos para representarlos con modelaciones por medio de algoritmos.

Introducción a Python

Python es un lenguaje de programación muy fácil de entender. El aprendiz no requiere tener un alto nivel de conocimiento como programador, ya que su versatilidad está enfocada en la resolución de problemas más que en comprender el lenguaje de programación en sí. Python fue creado a finales de los años ochenta por Guido Van Rossum quien escogió el nombre por su afición al grupo de humor inglés Monty Python (Barrueto, 2010). Es considerado un lenguaje de alto nivel debido a que su estructura es de fácil interpretación al lenguaje humano.

Python es un software de código abierto que está disponible para plataformas como Linux, Unix, Windows, Mac OS, etc., de manera que el mismo código funciona en todos estos sistemas operativos.

Iniciando Python

Para instalar una determinada versión de Python se recomienda recurrir a su sitio web oficial http://www.python.org/, si se desea obtener los paquetes de instalación actuales para Windows, Linux y Mac OS X en sus distintas versiones puede dirigirse a la sección de descargas. Para realizar la instalación de Python de manera muy fácil basta con dirigirse al sitio web https://python-para-impacientes.blogspot.com/2017/02/instalar-python-paso-paso.html donde explica detalladamente su correcta instalación.

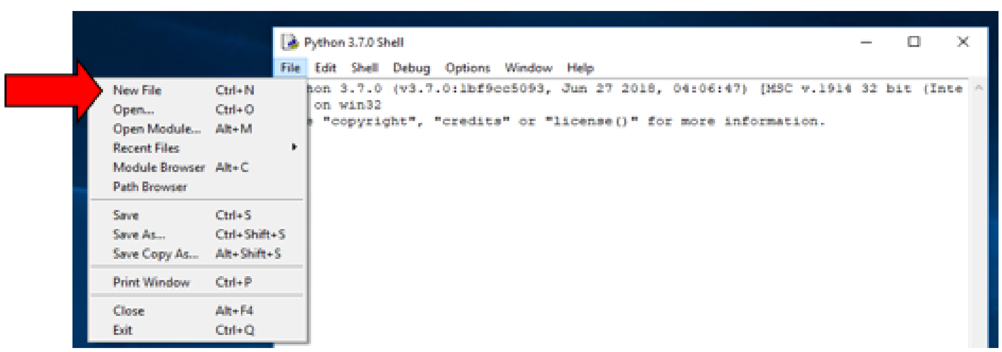
Describamos a continuación como arrancar Python bajo Windows.

1. Menú-inicio y buscar la carpeta de PYTHON, la misma que despliega un menú de aplicaciones como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. *Carpeta Python*

2. Dar “click” en la primera aplicación IDLE (Python3.7 3.2-bit). Muestra la siguiente pantalla (Figura 2).

Figura 2. *Abrir Consola de Compilación*

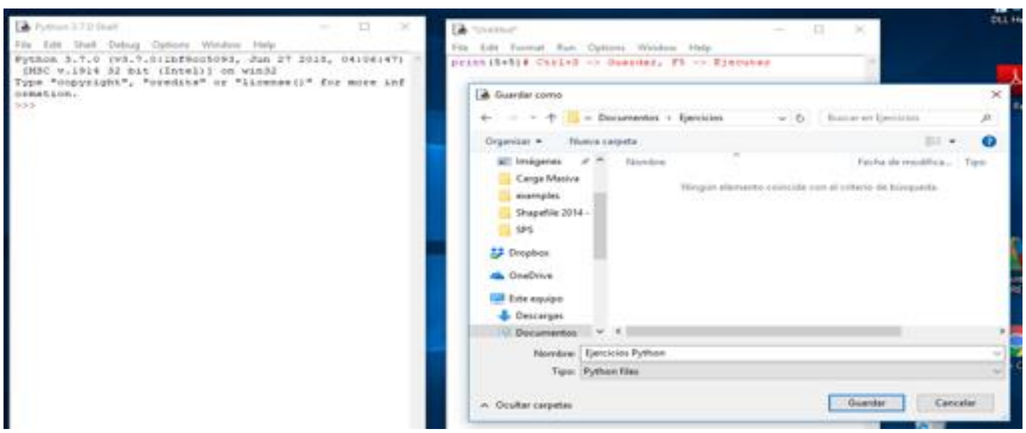


3. La ventana anterior se le conoce como Consola de Compilación. Dar click en FILE seguido NEW FILE, muestra la segunda pantalla que se la conoce como “ventana de programación” ya que es donde se ejecutan los códigos como se muestra en la Figura 3.

Figura 3. *Ventana de Programación*

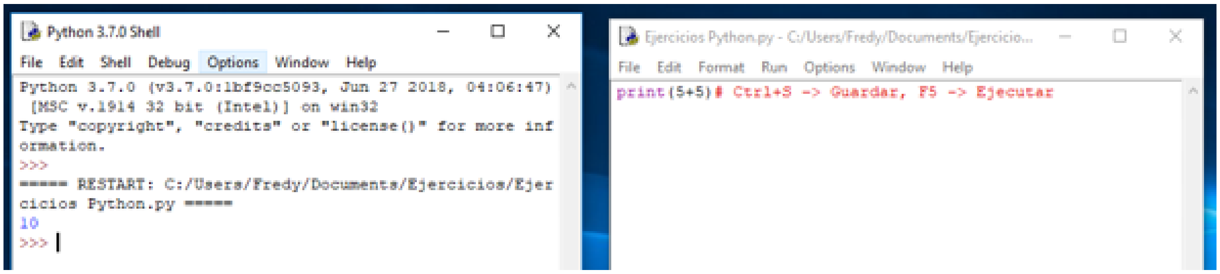
4. Una vez que empieza a programar o crear un código se debe primero guardar (ctrl+s) y luego ejecutar el programa (f5). Crear la carpeta en el sitio donde se guardaran los archivos creados. (Figura 4)

Figura 4. *Guardar archivo Python*



5. Luego de guardar se ejecuta el programa, el mismo que se muestra en la pantalla de compilación así como se muestra en la Figura 5.

Figura 5. *Ejecutable de Python*



Python como calculadora

En la consola de compilación se pueden realizar operaciones matemáticas de forma directa como se muestra en la Figura 6, así como también, utilizar funciones matemáticas básicas como se presentan en la Figura 7.

Figura 6. *Operaciones Básicas*

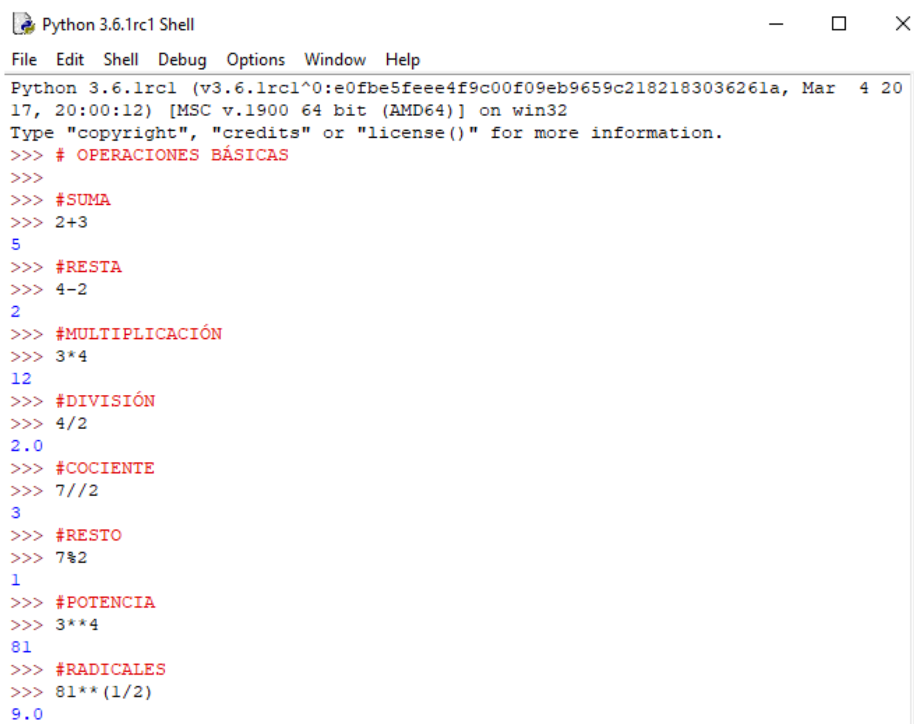


Figura 7. *Funciones Matemáticas*

```
Python 3.6.1rc1 Shell
File  Edit  Shell  Debug  Options  Window  Help
Python 3.6.1rc1 (v3.6.1rc1^0:e0fbe5feee4f9c00f09eb9659c218218303626la, Mar  4 20
17, 20:00:12) [MSC v.1900 64 bit (AMD64)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> # VALOR ABSOLUTO
>>> abs(-5)
5
>>> # COMPLEJOS
>>> complex(3,4)
(3+4j)
>>> complex(3,4)*complex(2,5)
(-14+23j)
>>> b=complex(3,4)
>>> b.real
3.0
>>> b.imag
4.0
>>> # MÁXIMO Y MÍNIMO
>>> max(3,15,2,4)
15
>>> min(-1,5,8,10)
-1
>>> # REDONDEO
>>> round(25.7)
26
>>> round(3.5673,1)
3.6
>>> round(3.5473,1)
3.5
```

También se tiene la clase "math", misma que representa la librería matemática. Antes de operar con ella se debe realizar su importación así como se muestra en la Figura 8.

Figura 8. *Operaciones con Funciones "math"*

```
Python 3.6.1rc1 Shell
File  Edit  Shell  Debug  Options  Window  Help
Python 3.6.1rc1 (v3.6.1rc1^0:e0fbe5feee4f9c00f09eb9659c218218303626la, Mar  4 20
17, 20:00:12) [MSC v.1900 64 bit (AMD64)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> import math
>>> math.sqrt(2)         #Raíz Cuadrada
1.4142135623730951
>>> math.pi              # PI
3.141592653589793
>>> math.log(9)          # Logaritmo Natural
2.1972245773362196
>>> math.log(100,10)     #Logaritmo de base 10
2.0
```

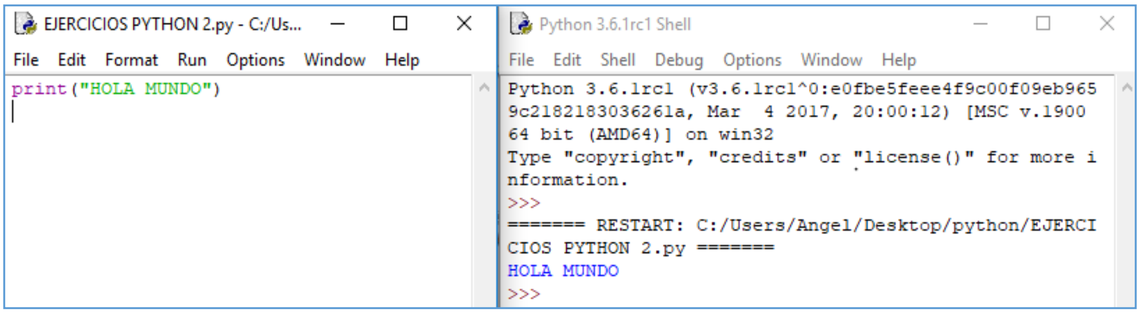
Instrucciones básicas

A continuación se presentan otras instrucciones básicas.

Print

La función print(" ") permite imprimir texto en pantalla como se muestra en la Figura 9.

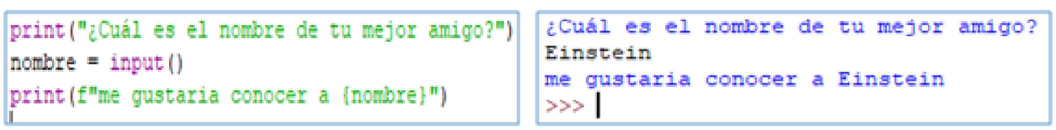
Figura 9. *Función "print"*



Input

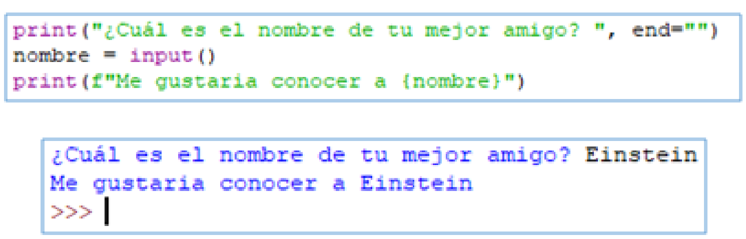
La función input( ) permite ingresar texto escrito por teclado. Figura 10.

Figura 10. *Función "input"*



Si se quiere escribir la pregunta usar la sintaxis mostrada en el ejemplo de la Figura 11.

Figura 11. *Función "print" sin salto de línea*



Si se desea una solución más compacta, utilizar la función input() enviando un argumento, el mismo que se escribe en la pantalla (sin añadir un salto de línea) (Sintes, 2018), así como se muestra en la Figura 12.

Figura 12. *Función "input" sin salto de línea*

```
nombre = input("¿Cuál es el nombre de tu mejor amigo? ")
print(f"Me gustaria conocer a {nombre}")
```

```
¿Cuál es el nombre de tu mejor amigo? Einstein
Me gustaria conocer a Einstein
```

int

La función int() hace que Python reconozca la entrada como un número entero, tal como se muestra en la Figura 13.

Figura 13. *Función "int"*

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
cantidad= int(input("Ingrese su año de nacimiento: "))
print(f"{cantidad} usted tiene {round(2018 - cantidad)} años")
```

```
========== RESTART: C:/Users/Angel/Desktop/python/ej
ercicio int.py ==========
Ingrese su año de nacimiento: 1986
1986 usted tiene 32 años
```

float

La función float() permite a Python interpretar la entrada como un número decimal. Figura 14.

Figura 14. *Función "float"*

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
cantidad= float(input("Ingrese la cantidad en dólares: "))
print(f"{cantidad} dolar equivale a {round(cantidad*2800, 2)} pesos")
```

```
========== RESTART: C:/Users/Angel/Desktop/python/ej
ercicio int.py ==========
Ingrese la cantidad en dólares: 3.75
3.75 dolar equivale a 10500.0 pesos
```

Capítulo II: Matrices, Determinantes Y Sistema de Ecuaciones

Matrices

Se denomina matriz real de p filas y q columnas a un arreglo rectangular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

donde

$$\forall\, i \in \{1, \dots, p\}, \forall\, j \in \{1, \dots, q\}: \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Se denotará el conjunto de todas las matrices reales de orden $p \times q$ por $M_{p\times q}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.1.1

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = 1, c_{12} = -2, c_{13} = 0, c_{21} = 5, c_{22} = 1, c_{23} = 8$$

Usemos ahora Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
# Ingresar una matriz

A = m.Matrix([
    [1, -2, 0],
    [5, 1, 8]
])
```

Otra forma de escribir una matriz es $A = (a_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{R})$ $(i = 1, \dots, p\ y\ j = 1, \dots, q)$ donde indica que A es la matriz de orden $p \times q$ que tiene elementos a_{ij}. El subíndice i $(primer\ subíndice)$ indica que el término a_{ij} está localizado en la $i - ésima$ fila y el subíndice j $(segundo\ subíndice)$ indica que a_{ij} pertenece a la $j - ésima$ columna.

Observación 1. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para denotar las matrices y sus elementos con la misma letra minúscula acompañada de dos subíndices que indican su posición en la matriz; donde, el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna.

Igualdad de matrices

Las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, de orden $p \times q$, son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, p$ y $j = 1, \ldots, q$. Por lo tanto, dos matrices son iguales si los elementos que ocupan la misma posición en ambas matrices coinciden.

Ejemplo 2.1.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Las matrices $A\ y\ B$ son iguales ya que los elementos de la matriz A coinciden y ocupan la misma posición en la matriz B.

Usemos ahora Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
A = m.Matrix([
    [2, 4, 6],
    [-1, 0, 5]
])

B = m.Matrix([
    [2, 4, 6],
    [-1, 0, 5]
])
print(A == B)
True
```

Existen diversos tipos de matrices como los que a continuación se indican.

Vector columna

Son los elementos del conjunto $\mathbb{R}^p = M_{px1}(\mathbb{R})$. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

De manera que las coordenadas de un vector en el plano, en el espacio, etc. se representan mediante un vector columna.

Ejemplo 2.1.3

Vector columna ingresado en Python

```
import MatrixLib.Matrix as m
A = m.Matrix([
    [2],
    [-1],
    [3]
])
print(A)

[2.0]
[-1.0]
[3.0]
```

Vector fila

Los vectores fila de dimensión q son matrices de dimensión $1 \times q$. Es decir, tienen una fila y q columnas. Se escriben de la forma

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1q}).$$

Ejemplo 2.1.4

Vector fila ingresado en Python

```
import MatrixLib.Matrix as m
A = m.Matrix([
    [2, -1, 3]
])
print(A)
[2.0, -1.0, 3.0]
```

Tipos de Matrices

Matriz Cuadrada

Se dice que una matriz es cuadrada cuando el número de filas coincide con el número de columnas. Se denota

$$M_p(\mathbb{R}) = M_{pp}(\mathbb{R}).$$

Ejemplo 2.1.5

Dadas

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

B es matriz cuadrada y A no.

Usemos ahora Python

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# verifica si es cuadrada
A = m.Matrix([
    [-5, 7, 0],
    [1, 2, 4]
])
print(af.is_square(A))
False
```

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# verifica si es cuadrada
B = m.Matrix([
    [3, 0],
    [1, 7]
])
print(af.is_square(B))
True
```

Matriz Diagonal

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama diagonal si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero. Esto es, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Ejemplo 2.1.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices $A \ y \ B$ son matrices diagonales.

Usemos ahora Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# verifica si es diagonal
A = m.Matrix([
    [1, 0, 0],
    [0, 4, 0],
    [0, 0, 3]
])
print(af.is_diagonal(A))
False
```

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# verifica si es diagonal
A = m.Matrix([
    [0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0]
])
print(af.is_diagonal(B))
True
```

Matriz triangular superior

Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son cero.

Ejemplo 2.1.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son cero.

Ejemplo 2.1.8

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Con esto, una matriz es diagonal si, al mismo tiempo, es triangular superior y triangular inferior.

Observación 2. Este tipo de matrices son utilizadas con frecuencia para resolver sistemas de ecuaciones lineales por ser fáciles de manipular.

Matrices opuestas

La matriz opuesta de una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $p \times q$ es otra matriz del mismo orden cuyos elementos son los de la matriz A multiplicados por -1. Su existencia y unicidad está garantizada por la siguiente propiedad

$$\forall A \in M_{pq}(\mathbb{R}), \exists!\, B \in M_{pq}(\mathbb{R}): \quad A + B = B + A = 0_{pq}$$

Ejemplo 2.1.9

La matriz opuesta de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ es $-A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Usemos ahora Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# Da la opuesta de la matriz
A = m.Matrix([
    [2, 3],
    [6, 5]
])
print(af.opose_matrix(A))
[-2.0, -3.0]
[-6.0, -5.0]
```

Matrices unidades

Se dice que $I = (x_{ij}) \in M_p(\mathbb{R})$ es matriz identidad ssi $\forall i, j \in \{1, .., p\}$: $x_{ij} = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es el delta de Kronecker: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.1.10

Crear una matriz unidad en Python

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# Crea una matriz unidad
print(af.create_unit_matrix(4))
[1.0, 0.0, 0.0, 0.0]
[0.0, 1.0, 0.0, 0.0]
[0.0, 0.0, 1.0, 0.0]
[0.0, 0.0, 0.0, 1.0]
```

Matriz Nula

Una matriz nula es la matriz en la cual todos sus elementos son nulos. Su existencia y unicidad está garantizada por la siguiente propiedad

$$\exists!\, 0_{pq} \in M_{pq}(\mathbb{R}), \forall A \in M_{pq}(\mathbb{R}): \quad A + 0_{pq} = 0_{pq} + A = A$$

Ejemplo 2.1.11

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A es una matriz nula de dimensión 2x4.

Operaciones con Matrices

Suma de Matrices

Sean $A, B \in M_{pq}(\mathbb{R})$. La suma de las matrices $A\ y\ B$ es la matriz de la misma dimensión notada por $A + B$, definida por:

$$A + B = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij}\right) = (a_{ij} \quad + \ b_{ij}),$$

es decir, se suman los elementos respectivos.

Multiplicación de una matriz por un escalar

Sea $A \in M_{pq}(\mathbb{R})$ y $k \in \mathbb{R}$. El producto del real k por la matriz A está definida por:

$$kA = k\left(a_{ij}\right) = ka_{ij}.$$

Se denota kA.

Observación 3. La multiplicación de una matriz por un número es prioritaria con respecto a la adición vectorial.

Teorema 2.1.1

Sean $A, B, C \in M_{pq}(\mathbb{R})$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

i. $A + 0 = A$

ii. $0A = 0$

iii. $A + B = B + A$ *ley conmutativa para la suma de matrices*

iv. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *ley asociativa para la suma de matrices*

v. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *ley distributiva para la multiplicación por un escalar*

vi. $IA = A$

vii. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Demostración de iv.

Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{R})$. Por ende

$$
\begin{aligned}
(A + B) + C &= \left[(a_{ij})_{pq} + (b_{ij})_{pq}\right] + \left[(c_{ij})_{pq}\right] \\
&= \left[(a_{ij} + b_{ij})_{pq}\right] + \left[(c_{ij})_{pq}\right] \\
&= \left[(a_{ij} + b_{ij})_{pq} + (c_{ij})_{pq}\right] \\
&= (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})_{pq} \\
&= \left[(a_{ij})_{pq} + (b_{ij} + c_{ij})_{pq}\right] \\
&= \left[(a_{ij})_{pq}\right] + \left[(b_{ij} + c_{ij})_{pq}\right] \\
&= \left[(a_{ij})_{pq}\right] + \left[(b_{ij})_{pq} + (c_{ij})_{pq}\right] \\
&= A + (B + C).
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.1.12

A partir de las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 6 & -5 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$, obtener $A + B$.

Solución.

Tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \text{y } B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 6 & -5 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 6 & -5 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+8 & 4+9 \\ 0+6 & 1+(-5) \\ 8+11 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 6 & -4 \\ 19 & 6 \end{pmatrix}.$$

Usemos ahora Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# Suma de matrices
A = m.Matrix([
    [5, 4],
    [0, 1],
    [8, 2]
])
B = m.Matrix([
    [8, 9],
    [6, -5],
    [11, 4]
])
print(A+B)
[13.0, 13.0]
[6.0, -4.0]
[19.0, 6.0]
```

Ejemplo 2.1.13

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -9 & 7 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 3 & 12 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Verificar que se cumple la propiedad conmutativa.

Solución.

i. Se calcula $A+B$

$$A+B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -9 & 7\\ 11 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 11\\ 3 & 12\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5+9 & 1+11\\ -9+3 & 7+12\\ 11+2 & 2+(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 12\\ -6 & 19\\ 13 & 1\end{pmatrix}.$$

ii. Ahora se calcula $B+A$

$$B+A=\begin{pmatrix}9 & 11\\ 3 & 12\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -9 & 7\\ 11 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9+(-5) & 11+1\\ 3+(-9) & 12+7\\ 2+11 & -1+2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 12\\ -6 & 19\\ 13 & 1\end{pmatrix}.$$

iii. Como $A+B=\begin{pmatrix}4 & 12\\ -6 & 19\\ 13 & 1\end{pmatrix}$ y $B+A=\begin{pmatrix}4 & 12\\ -6 & 19\\ 13 & 1\end{pmatrix}$, entonces se verifica que:

$$A+B=B+A.$$

Usemos ahora Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
A = m.Matrix([
    [-5, 1],
    [-9, 7],
    [11, 2]
])
B = m.Matrix([
    [9, 11],
    [3, 12],
    [2, -1]
])
```

```
print(A+B)
[4.0, 12.0]
[-6.0, 19.0]
[13.0, 1.0]
print(B+A)
[4.0, 12.0]
[-6.0, 19.0]
[13.0, 1.0]
```

Ejemplo 2.1.14

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 15 & 4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ -3 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 14 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. Verificar que se cumple la propiedad asociativa.

Solución.

i. Se calcula $A + (B + C)$.

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 15 & 4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ -3 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 14 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 15 & 4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -9 + 11 & 1 + 2 \\ -3 + 1 & 9 + 14 \\ 5 + (-6) & 0 + 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 15 & 4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 23 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 + 2 & 3 + 3 \\ 15 + (-2) & 4 + 23 \\ 1 + (-1) & 11 + 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 13 & 27 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

ii. Ahora se calcula $(A + B) + C$

$$(A + B) + C = \left[\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 15 & 4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ -3 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 14 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 10+(-9) & 3+1 \\ 15+(-3) & 4+9 \\ 1+5 & 11+0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 14 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 12 & 13 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 14 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+11 & 4+2 \\ 12+1 & 13+14 \\ 6+(-6) & 11+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 13 & 27 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

iii. Como $A+(B+C) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 13 & 27 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$ y $(A+B)+C = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 13 & 27 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$, se verifica que $A+(B+C) = (A+B)+C$.

Usemos ahora Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
A = m.Matrix([
    [10, 3],
    [15, 4],
    [1, 11]
])
B = m.Matrix([
    [-9, 1],
    [-3, 9],
    [5, 0]
])
C = m.Matrix([
    [11, 2],
    [1, 14],
    [-6, 3]
])
# Llamamos E = B+C
E = B+C
print(E)
[2.0, 3.0]
[-2.0, 23.0]
[-1.0, 3.0]
```

```
print(A+E)
[12.0, 6.0]
[13.0, 27.0]
[0.0, 14.0]
# Llamamos D = A+B
D = A+B
print(D)
[1.0, 4.0]
[12.0, 13.0]
[6.0, 11.0]

print(D+C)
[12.0, 6.0]
[13.0, 27.0]
[0.0, 14.0]
```

Por tanto se verifica que $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Ejemplo 2.1.15

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -11 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Verificar que $A + (-A) = O$

Solución.

Primero se escribe la matriz opuesta

$$-A = \begin{pmatrix} -9 & -(-1) \\ -(-11) & -7 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 11 & -7 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora se procede a realizar la operación suma.

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -11 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 11 & -7 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 + (-9) & -1 + 1 \\ -11 + 11 & 7 + (-7) \\ 6 + (-6) & 3 + (-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{32}.$$

Usemos ahora Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
A = m.Matrix([
    [9, -1],
    [-11, 7],
    [6, 3] ])
```

Una vez ingresada la matriz A se procede a obtener su opuesta que se la designa como la matriz A_1

```
A_1 = af.opose_matrix(A)
print(A_1)
[-9.0, 1.0]
[11.0, -7.0]
[-6.0, -3.0]
```

Luego se procede a sumar

```
A_1 = af.opose_matrix(A)
print(A+A_1)
[0.0, 0.0]
[0.0, 0.0]
[0.0, 0.0]
```

Por tanto se verifica que $A + (-A) = 0$.

Ejemplo 2.1.16

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, y $k =$ -2, obtener kA.

Solución.

$$kA = -2\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(3) & -2(-2) & -2(5) \\ -2(-4) & -2(7) & -2(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -10 \\ 8 & -14 & -18 \end{pmatrix}.$$

Usemos ahora Python: Ingresamos la matriz A

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
A = m.Matrix([
    [3, -2, 5],
    [-4, 7, 9]
])
```

Para realizar la multiplicación por un escalar se utiliza la función A.scalarmul( ), y dentro del paréntesis colocamos el escalar correspondiente.

```
print(A.scalarmul(-2))
[-6.0, 4.0, -10.0]
[8.0, -14.0, -18.0]
```

Ejemplo 2.1.17

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 9 & 9 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} y\ B = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 8 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Obtener $2A - 4B$.

Solución.

$$2A - 4B = 2\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 9 & 9 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 8 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(-2) & 2(7) \\ 2(9) & 2(9) \\ 2(15) & 2(-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4(12) & 4(4) \\ 4(8) & 4(-2) \\ 4(0) & 4(6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 18 & 18 \\ 30 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 48 & 16 \\ 32 & -8 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4-48 & 14-16 \\ 18-32 & 18-(-8) \\ 30-0 & -2-24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -52 & -2 \\ -14 & 26 \\ 30 & -26 \end{pmatrix}.$$

Usemos ahora Python. Se ingresa las matrices A y B.

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# Ingreso las matrices A y B
```

```
A = m.Matrix([
    [-2, 7],
    [9, 9],
    [15, -1]
])
B = m.Matrix([
    [12, 4],
    [8, -2],
    [0, 6]
])

# Se llama A_2 = 2A
#Se llama B_4 = -4B
A_2 = A.scalarmul(2)
B_4 = B.scalarmul(-4)

print(A_2)
print('-'*20)
print(B_4)
print('-'*20)
print('2A-4B = ')
print(A_2+B_4)

[-4.0, 14.0]
[18.0, 18.0]
[30.0, -2.0]
--------------------
[-48.0, -16.0]
[-32.0, 8.0]
[0.0, -24.0]
--------------------
2A-4B =
[-52.0, -2.0]
[-14.0, 26.0]
[30.0, -26.0]
```

TALLER 1

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 2 & 8 \\ -5 & 1 & 2 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -8 \\ 9 & 7 & 2 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Obtener a la mano y con Python

a) A+B

b) B+A

c) A+(-B)

d) B+(-A)

e) (–A)+(-B)

2. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{4} & -6 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{10}{2} & -3 & \frac{5}{4} \\ 5{,}5 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} & -3 \\ 5 & \frac{9}{2} & 4 \\ 0 & -2\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}:$$

a) Verificar que se cumple la ley conmutativa del Teorema 2.1.1

b) Verificar que se cumple la ley asociativa del Teorema 2.1.1

Multiplicación de matrices

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{R})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{qr}(\mathbb{R})$. Se define el producto de las matrices A y B como una matriz $C = (c_{ik})$ de dimensión $p \times r$ cuyos elementos son de la forma

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{iq}b_{qk} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}b_{jk}\,, \qquad i = 1, \dots, p, \qquad k = 1, \dots, r.$$

Ejemplo 2.1.18

Sean las matrices $A = (5 \quad 2 \quad -4)_{1\times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1}$. Determinar el producto AB.

Solución.

$$AB = (5(-2) + 2(6) + (-4)(1))_{1\times 1}$$

$$= (-10 + 12 - 4)$$

$$= (-2)$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# Ingresar las matrices A y B
A = m.Matrix([
    [5, 2, -46]
])
B = m.Matrix([
    [-2],
    [6],
    [1]
])
#Multiplicar A por B
AxB = A.matmul_step_by_step(B)
print(AxB)
[ (5 * -2) + (2 * 6) + (-46 * 1) ]
[-44.0]
```

Ejemplo 2.1.19

Sean las matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 13 \\ 4 & -5 & 2 \\ 6 & -9 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ y $Q = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 0 & 6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$. Determinar el producto PQ.

Solución.

$$PQ = \begin{bmatrix} 2(-7) + 8(0) + 13(5) & 2(10) + 8(6) + 13(9) \\ 4(-7) + (-5)(0) + 2(5) & 4(10) + (-5)(6) + 2(9) \\ 6(-7) + (-9)(0) + 1(5) & 6(10) + (-9)(6) + 1(9) \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 + 0 + 65 & 20 + 48 + 117 \\ -28 - 0 + 10 & 40 - 30 + 18 \\ -42 - 0 + 5 & 60 - 54 + 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 51 & 185 \\ -18 & 28 \\ -37 & 15 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# Ingresar las matrices A y B
A = m.Matrix([
    [2, 8, 13],
    [4, -5, 2],
    [6, -9, 1]
])
B = m.Matrix([
    [-7, 10],
    [0, 6],
    [5, 9]
]) #Multiplicar A por B
AxB = A.matmul_step_by_step(B)
print(AxB)
[ (2 * -7) + (8 * 0) + (13 * 5) | (2 * 10) + (8 * 6) + (13 * 9) ]
[ (4 * -7) + (-5 * 0) + (2 * 5) | (4 * 10) + (-5 * 6) + (2 * 9) ]
[ (6 * -7) + (-9 * 0) + (1 * 5) | (6 * 10) + (-9 * 6) + (1 * 9) ]
[51.0, 185.0]
[-18.0, 28.0]
[-37.0, 15.0]
```

Observación 4. Para que el producto entre dos matrices se pueda realizar, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz, y el producto será una matriz de dimensión igual al número de filas de la primera matriz por el número de columnas de la segunda matriz.

Teorema 2.1.2 Ley asociativa de la multiplicación de matrices

$\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R}),\ \forall B \in M_{np}(\mathbb{R}),\ \forall C \in M_{pq}(\mathbb{R}):\quad A(BC) = (AB)C.$

Observación 5. La matriz producto ABC es de dimensión $m \times q$.

Demostración Teorema 2.1.2

Para demostrar que $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R}),\ \forall B \in M_{np}(\mathbb{R}),\ \forall C \in M_{pq}(\mathbb{R}):\ \ A(BC) = (AB)C$, se debe demostrar que

- El tamaño de la matriz resultante del producto $A(BC)$ es igual al tamaño de la matriz resultante del producto $(AB)C$
- La componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$.

Desarrollo

Como la matriz A es de dimensión $m \times n$ y B de dimensión $n \times p$, AB es de $m \times p$. Entonces $(AB)C = (m \times p) \times (p \times q)$ es una matriz de $m \times q$. De manera similar, BC es de $n \times q$ y $A(BC)$ es de $m \times q$ de manera que $(AB)C$ y $A(BC)$ son ambas del mismo tamaño.

Ahora se debe demostrar que la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$.

Llamamos $D = AB$ y $E = BC$.

Entonces se debe demostrar que $(DC)_{ij} = (AE)_{ij}$.

Se tiene por definición de producto matricial que

$$(DC)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kj}$$

Como

$$d_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}$$

Se tiene que

$$(DC)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

Ahora se procede de la misma forma para $(AE)_{ij}$.

$$(AE)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj}$$

Como

$$e_{kj} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj}$$

Se tiene que

$$(AE)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik}\, b_{kl} c_{lj}$$

Por propiedad de sumatoria se sigue

$$(DC)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{il}\, b_{lk} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik}\, b_{kl} c_{lj}$$

Por tanto queda demostrado que $(AE)_{ij} = (DC)_{ij}$.

Teorema 2.1.3

a. Leyes distributivas de la multiplicación de matrices

   i. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R}),\ \forall B \in M_{np}(\mathbb{R}),\ \forall C \in M_{np}(\mathbb{R})\text{:} \quad A(B + C) = AB + AC.$

   ii. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R}),\ \forall B \in M_{mn}(\mathbb{R}),\ \forall C \in M_{np}(\mathbb{R})\text{:} \quad (A + B)C = AC + BC.$

b. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R}),\ \forall B \in M_{np}(\mathbb{R})$ y $k \in \mathbb{R}$: $\quad (kA)B = k(AB) = A(kB) = kAB.$

c. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$: $\quad AI = A$ donde $I \in M_n(\mathbb{R})$.

TALLER 2

1. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -7 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 11 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $k = \frac{1}{2}$. Indique si es posible realizar los siguientes productos y en caso de ser posibles determinar los mismos a mano y usando Python.

a) kM

b) kN

c) kP

d) MN

e) MQ

f) $M(kQ)$

g) QN

h) PQ y QP, indicar si su producto es el mismo.

i) $M(P + N)$

j) $N(kP + MN)$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 15 & -1 \\ 9 & 7 & 11 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

y $k = 3$. Verificar que se cumplen los Teoremas 2.1.2 y 2.1.3.

Matriz transpuesta

Dada $A \in M_{pq}(\mathbb{R})$, se llama matriz transpuesta de A, denotada $A^t \in M_{qp}(\mathbb{R})$, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas de A. Se puede escribir $A^t = (a_{ji})$.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix}.$$

Simplemente se sitúa el reglón i de A como la columna i de A^t y la columna j de A como el reglón j de A^t.

Ejemplo 2.1.20

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, su transpuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
# Ingresar la matriz A
A = m.Matrix([
    [2, 3, 6],
    [-5, 0, 7]
])
# Calcula la matriz transpuesta de A
A_t = af.transpose_matrix(A)
print(A_t)
[2.0, -5.0]
[3.0, 0.0]
[6.0, 7.0]
```

Teorema 2.1.4

i. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R}): (A^t)^t = A$

ii. $\forall A, B \in M_{mn}(\mathbb{R}): (A + B)^t = A^t + B^t$

iii. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in M_{mn}(\mathbb{R}): (\lambda A)^t = \lambda A^t$

iv. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{np}(\mathbb{R}): (AB)^t = B^t A^t$.

Demostración iv. Teorema 2.1.4

AB es una matriz de dimensión $m \times p$, de manera que $(AB)^t$es de orden $p \times m$.

B^t es de orden $p \times n$ y A^t es de orden $n \times m$, de manera que $B^t A^t$ es de orden $p \times m$. De esta forma $(AB)^t$ y $B^t A^t$ tienen el mismo tamaño.

Ahora, el elemento ij de AB es$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$, y éste es el elemento ji de $(AB)^t$. Sean $C = B^t$y $D = A^t$. Entonces el elemento ij, c_{ij}, de C es b_{ji} y el elemento ij, d_{ij}, de D es a_{ji}. Así, el elemento ji de $CD =$ elemento ji de $B^t A^t = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, d_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} =$ elemento ji de $(AB)^t$. Así queda demostrado la parte iv.

Matriz simétrica

Se llama matriz simétrica a una matriz cuadrada que es igual a su transpuesta.

$$A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \qquad \forall i,j = 1,2,\dots,p$$

Ejemplo 2.1.21

1. La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, es simétrica, ya que $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = A$
2. La matriz $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & -1 \\ 9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, es simétrica ya que $B^t = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & -1 \\ 9 & -1 & 0 \end{pmatrix} = B$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af

A = m.Matrix([
    [4, 5],
    [5, 7]
])
#Verificar si es simétrica
print(af.is_simetric(A))
True
```

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af

B = m.Matrix([
    [-4, 8, 9],
    [8, 7, -1],
    [9, -1, 0]
])
print(af.is_simetric(B))
True
```

TALLER 3

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -20 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 13 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ y el escalar $\lambda = -5$, verificar que se cumplen los items i, ii, iii, iv del Teorema 2.1.4

2. A partir de las siguientes matrices, escriba su matriz transpuesta correspondiente

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \sqrt{2} & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3. Indique cuál de las siguientes matrices reales son simétricas. Verifique su respuesta usando Python.

a) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

c) $E = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

d) $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Inversa

Condiciones para existencia

Una matriz cuadrada A es invertible si existe una matriz, que denominaremos A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad.

Ejemplo 2.1.22

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ son inversas la una de la otra. En efecto se tiene que:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(3) + 5(-1) & 2(-5) + 5(2) \\ 1(3) + 3(-1) & 1(-5) + 3(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 - 5 & -10 + 10 \\ 3 - 3 & -5 + 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Obtención de la Inversa de una Matriz.

A continuación, se presenta un ejemplo en el caso más simple: $M_2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.1.23

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. En caso de existir, encuentre A^{-1}.

Solución.

Se busca una matriz B tal que $AB = I_2$. Se escribe $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se realiza el producto

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 5c & 3b + 5d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix}$$

Supongamos que $AB = I$. Se tiene entonces que

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a + 5c & 3b + 5d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde, por la igualdad de matrices se tiene

$$\begin{cases} 3a + 5c = 1 \\ -a + 2c = 0 \\ 3b + 5d = 0 \\ -b + 2d = 1 \end{cases}$$

La solución del sistema de ecuaciones es

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 \\ -5/11 \\ 1/11 \\ 3/11 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz A es invertible, y su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada A de dimensión 2×2 es invertible si y solo si $ad - bc \neq 0$.

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
A = m.Matrix([
    [3, 5],
    [-1, 2]
])
# Calcula la matriz inversa
Inv_A = af.invert_matrix(A)
print(Inv_A)
[0.182, -0.455]
[0.091, 0.273]
```

TALLER 4

1. En caso de existir, determinar a mano y utilizando Python la matriz inversa de las siguientes matrices y verificar que su producto es igual a la matriz identidad.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} \frac{1}{29} & \frac{16}{29} & -\frac{4}{29} \\ \frac{16}{29} & \frac{82}{29} & -\frac{35}{29} \\ -\frac{4}{29} & -\frac{35}{29} & \frac{16}{29} \end{pmatrix}$

2. Verificar a la mano y utilizando Python si las siguientes matrices son inversas la una de la otra.

a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{34} & -\frac{7}{68} \\ -\frac{1}{34} & -\frac{9}{68} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{1}{26} & -\frac{5}{78} \\ \frac{1}{13} & -\frac{1}{52} & -\frac{7}{52} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de p ecuaciones lineales con q incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_q$ al que podemos llamar simplemente sistema lineal, es un conjunto de p ecuaciones lineales, cada una con q incógnitas. Un sistema lineal puede denotarse mediante

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p, \end{cases}$$

en donde:

- Los a_{ij} son números reales y se denominan coeficientes;
- Los x_i se denominan incógnitas o también conocidos como valores numéricos a determinar;
- Los b_i son denominados términos independientes;
- Las soluciones que se buscan en un sistema de ecuaciones es en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Los sistemas de ecuaciones se clasifican dependiendo del número de soluciones reales que estos tengan; así, pueden ser:

- Sistemas incompatibles (S.I): no tienen solución.
- Sistemas compatibles determinados (S.C.D): tienen una sola solución.
- Sistemas compatibles indeterminados (S.C.I): tienen infinitas soluciones.

Notación matricial de un sistema de ecuaciones

La notación matricial usual de un sistema de ecuaciones lineales es

$$AX = b, \quad X \in \mathbb{R}^q$$

donde:

$A = (A_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *se llama matriz de coeficientes del sistema*

$b = (b_i) \in M_{\mathrm{p}\times 1}(\mathbb{R})$ *se llama matriz del término independiente.*

$X = (x_i) \in M_{q\times 1}(\mathbb{R})$ *se llama matriz de incógnitas.*

Ejemplo 2.2.1

Sea el sistema $\begin{cases} x & + & y & = & 10 \\ 6x & + & 7y & = & 34 \end{cases}$, expresar en forma matricial $AX = b$

Solución.

Se escriben las matrices A, X, b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \end{pmatrix},$$

de donde se tiene

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

es decir

$$AX = \begin{pmatrix} x + y \\ 6x - 7y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ 6x - 7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices, se tiene

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 6x - 7y = 34. \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es de la forma:

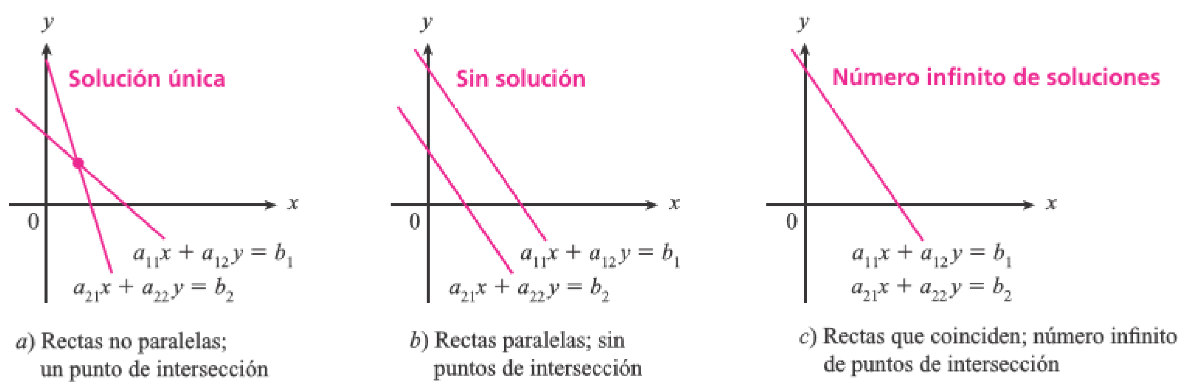
$$\begin{cases} ax & + & by & = & c \\ \tilde{a}x & - & \tilde{b}y & = & \tilde{c} \end{cases} \qquad (S)$$

Resolver el sistema (S), implica encontrar si es que existen los pares ordenados $(x\,, y)$ que satisfagan todas las ecuaciones del sistema simultáneamente.

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede representar geométricamente como se muestra en la *Figura 15*.

La ecuación $ax + \, by = c$ representa una recta R_1 y la ecuación $\tilde{a}x + \tilde{b}y = \tilde{c}$ representa la recta R_2. Las soluciones del sistema (S) son los pares ordenados de coordenadas de los puntos comunes a las dos rectas $R_1 \; y \; R_2$.

Figura 15. *Representación geométrica de los tipos de sistemas de ecuaciones*



Fuente: (Grossman & Flores, 2012)

Método de Gauss – Jordan

Este método utiliza operaciones con matrices para resolver sistemas de ecuaciones con n incógnitas.

A partir del sistema de ecuaciones dado se escribe la matriz aumentada ($A|b$). El método de Gauss-Jordan para resolver $AX = b$ consiste en hallar una matriz escalonada reducida equivalente a $(A|b)$.

Esto se puede realizar tomando en cuenta las operaciones elementales entre filas para obtener sistemas equivalentes, los mismos que son:

- Intercambiar filas.
- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Sumar a una fila el múltiplo de otra.

El orden de las operaciones elementales que se realicen será el siguiente

$$\begin{cases} Op_4 \\ Op_3 \\ Op_2 \\ Op_1 \end{cases}.$$

Ejemplo 2.2.2

Resolver el sistema $\begin{cases} 5x - 2y + z = 6 \\ -6x + 2y - 2z = -8 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$ usando el método de Gauss – Jordán.

Solución.

Se escribe la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 6 \\ -6 & 2 & -2 & -8 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + 6 \cdot F_1 \\ F_2 \leftarrow (5) \cdot F_2 \\ F_3 \leftarrow F_3 + F_1 \\ F_3 \leftarrow (-5) \cdot F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 16 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_3 \leftarrow F_3 + 3 \cdot F_2 \\ F_3 \leftarrow 2 \cdot F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + F_3 \\ F_2 \leftarrow 5 \cdot F_2 \\ F_1 \leftarrow F_1 + F_3 \\ F_1 \leftarrow (-20) \cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -100 & 40 & 0 & -120 \\ 0 & -10 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + 4 \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -100 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & -10 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \leftarrow (-1/100) \cdot F_1 \\ F_2 \leftarrow (-1/10) \cdot F_2 \\ F_3 \leftarrow (1/20) \cdot F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

de donde se encuentra que el sistema tiene una única solución.

$$\begin{array}{ccc} x & = & 2 \\ y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}$$

Por tanto, el conjunto solución del sistema de ecuaciones es:

$$CS = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq
#Ingrese matriz de términos independientes
M = m.Matrix([
        [6],
        [-8],
        [0]
    ])
#Ingrese la matriz de coeficientes
N = m.Matrix([
        [5, -2, 1],
        [-6, 2, -2],
        [1, -1, 3]
    ])
#Resuelve la matriz por el método de Gauss-Jordan
print(eq.EquationSystem(N, M).solution("gauss_jordan"))
[5.0, -2.0, 1.0, 6.0]
[-6.0, 2.0, -2.0, -8.0]
[1.0, -1.0, 3.0, 0.0]
-------------------------
[5.0, 0.0, 0.0, 10.0]
[0.0, -0.4, 0.0, -0.8]
[0.0, 0.0, 4.0, 0.0]
-------------------------
[1.0, 0.0, 0.0, 2.0]
[-0.0, 1.0, -0.0, 2.0]
[0.0, 0.0, 1.0, 0.0]
-------------------------
[2.0]
[2.0]
[0.0]
```

Ejemplo 2.2.4

Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 63,75 dólares por 15 litro de leche, 7 kg de queso y 12 litro de aceite. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 litro de leche cuesta el doble que 1 kg de queso y que 1 litro de aceite cuesta igual que 4 kg de queso.

Solución.

Resolución por el método de Gauss-Jordan. Se define las variables para cada artículo.

L: costo de 1litro de leche.

Q: costo de 1kg de queso.

A: costo de 1 litro de aceite.

Se plantean las ecuaciones a partir del problema

$$\begin{cases} 15L + 7Q + 12A = 63{,}75 \\ 1L = 2Q \\ 1A = 4Q \end{cases}$$

Se ordena el sistema de ecuaciones de acuerdo a las variables utilizadas.

$$\begin{cases} 15L + 7Q + 12A = 63{,}75 \\ 1L - 2Q \qquad = \quad 0 \\ \quad - 4Q + 1A \ = \quad 0 \end{cases}$$

Se escribe la matriz aumentada del sistema de ecuaciones y se procede a realizar las operaciones elementales entre filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 7 & 12 & 63{,}75 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 15 & 7 & 12 & 63{,}75 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftarrow (-1)\cdot F_2]{F_2 \leftarrow F_2 + 15F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -37 & -12 & -63{,}75 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow (-37)\cdot F_3]{F_3 \leftarrow F_3 + 4\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -37 & -12 & -63{,}75 \\ 0 & 0 & -85 & -255 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow (-1/85)\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -37 & -12 & -63{,}75 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 12\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -37 & 0 & -27{,}75 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftarrow 37 \cdot F_1]{F_1 \leftarrow F_1 + (-2) \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 37 & 0 & 0 & 55{,}5 \\ 0 & -37 & 0 & -27{,}75 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (-1/37) \cdot F_2]{F_1 \leftarrow (1/37) \cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}75 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De donde

$$L = 1{,}5,$$

$$Q = 0{,}75,$$

$$A = 3.$$

Se concluye que 1 litro de leche cuesta 1,5 dólares, 1 kg de queso cuesta 0,75 dólares y 1 litro de aceite cuesta 3 dólares.

Ahora trabajemos en Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq

C = m.Matrix([
        [63.75],
        [0],
        [0]
    ])
F = m.Matrix([
        [15, 7, 12],
        [1, -2, 0],
        [0, -4, 1]
    ])
print(eq.EquationSystem(C, F).solution("gauss_jordan"))
-------------------------
[15.0, 7.0, 12.0, 63.75]
[1.0, -2.0, 0.0, 0.0]
[0.0, -4.0, 1.0, 0.0]
-------------------------
[15.0, 0.0, 0.0, 22.5]
[0.0, -2.467, 0.0, -1.85]
[0.0, 0.0, 2.297, 6.892]
```

```
------------------------
[1.0, 0.0, 0.0, 1.5]
[-0.0, 1.0, -0.0, 0.75]
[0.0, 0.0, 1.0, 3.0]
------------------------
[1.5]
[0.75]
[3.0]
```

Ejemplo 2.2.5

Una ferretería posee 3 tipos de tornillos A, B, C. El precio medio de los 3 tornillos es de 1,5 dólares. Un cliente compra 25 unidades de A, 17 de B y 9 de C, debiendo cancelar 73,30 dólares. Otro cliente compra 10 unidades de B y 7 de C y paga 33,40 dólares. Averigua el precio de una unidad A, otra de B y otra de C.

Solución.

Resolución por el método de Gauss-Jordan. Definir las variables para cada artículo.

x: costo de una unidad de A.

y: costo de una unidad de B.

z: costo de una unidad de C.

1. Plantear las ecuaciones a partir del problema.

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 1{,}5 \\ 25x + 17y + 9z = 73{,}30 \\ 10y + 7z = 33{,}40 \end{cases}$$

2. Se convierte la ecuación fraccionaria en entera en el sistema de ecuaciones de acuerdo a las variables utilizadas.

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad z = 4{,}5 \\ 25x + 17y + 9z = 73{,}30 \\ \qquad 10y + 7z = 33{,}40 \end{cases}$$

3. Se escribe la matriz aumentada del sistema de ecuaciones y se procede a realizar las operaciones elementales entre filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}5 \\ 25 & 17 & 9 & 73{,}3 \\ 0 & 10 & 7 & 33{,}4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (-1)\cdot F_2]{F_2 \leftarrow F_2 + 25\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}5 \\ 0 & 8 & 16 & 39{,}2 \\ 0 & 10 & 7 & 33{,}4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow (-4)\cdot F_3]{F_3 \leftarrow F_3 + 5\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}5 \\ 0 & 8 & 16 & 39{,}2 \\ 0 & 0 & 52 & 62{,}4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow (1/52)\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}5 \\ 0 & 8 & 16 & 39{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + 16\cdot F_3 \\ F_2 \leftarrow (-1)\cdot F_2 \\ F_1 \leftarrow F_1 + F_3 \\ F_1 \leftarrow (-1)\cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -3{,}3 \\ 0 & -8 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftarrow (-8)\cdot F_1]{F_1 \leftarrow F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & 6{,}4 \\ 0 & -8 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (-1/8)\cdot F_2]{F_1 \leftarrow (1/8)\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}2 \end{array}\right)$$

De donde

$$x = 0{,}8,$$

$$y = 2{,}5,$$

$$z = 1{,}2.$$

Se concluye que una unidad del tornillo tipo A cuesta $ 0,80, una unidad del tornillo tipo B cuesta $ 2,50 y que una unidad del tornillo tipo C cuesta $ 1,20.

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq
C = m.Matrix([
        [4.5],
        [73.30],
        [33.40]
])
F = m.Matrix([
        [1, 1, 1],
        [25, 17, 9],
        [0, 10, 7]
    ])
print(eq.EquationSystem(F, C).solution("gauss_jordan"))
------------------------
[1.0, 1.0, 1.0, 4.5]
[25.0, 17.0, 9.0, 73.3]
[0.0, 10.0, 7.0, 33.4]
```

```
------------------------
[1.0, 0.0, 0.0, 0.8]
[0.0, -8.0, 0.0, -20.0]
[0.0, 0.0, -13.0, -15.6]
------------------------
[1.0, 0.0, 0.0, 0.8]
[-0.0, 1.0, -0.0, 2.5]
[-0.0, -0.0, 1.0, 1.2]
------------------------
[0.8]
[2.5]
[1.2]
```

Ejemplo 2.2.6

Una sala de video está especializado en películas de tres tipos: infantiles, comedia y terror. Se sabe que: el 20% de las películas infantiles más el 30% de las de comedia representan el 20% del total de las películas. El 60% de las comedias más el 50% de las de terror más del 26% de las infantiles representan la mitad del total de películas. El número de películas de terror es 60 menos que las de comedia. Calcula el número de películas de cada tipo.

Solución.

Resolución por el método de Gauss-Jordan.

Definir las variables para cada artículo.

I = número de películas infantiles.

C = número de películas de comedia.

T = número de películas terror

Plantear las ecuaciones a partir del problema

$$\begin{cases} \frac{20}{100}\mathrm{I} + \frac{30}{100}\mathrm{C} = \frac{20}{100}(\mathrm{I} + \mathrm{C} + \mathrm{T}) \\ \frac{60}{100}\mathrm{C} + \frac{50}{100}\mathrm{T} + \frac{26}{100}\mathrm{I} = \frac{\mathrm{I} + \mathrm{C} + \mathrm{T}}{2} \\ \mathrm{T} = \mathrm{C} - 60 \end{cases}$$

Ordenar y obtener solo ecuaciones enteras en el sistema de ecuaciones de acuerdo a las variables utilizadas.

$$\begin{cases} 20I + 30C = 20(I + C + T) \\ 60C + 50T + 26I = 50(I + C + T) \\ T - C = -60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10C - 20T = 0 \\ -24I + 10C = 0 \\ -C + T = -60 \end{cases}$$

Escribir la matriz aumentada del sistema de ecuaciones y proceder a realizar las operaciones elementales entre filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & -20 & 0 \\ -24 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -60 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -24 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -20 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -60 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow 10 \cdot F_3]{F_3 \leftarrow F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -24 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -600 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow (-1/10) \cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -24 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 20 \cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -24 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 1200 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftarrow (-1) \cdot F_1]{F_1 \leftarrow F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 0 & 0 & 1200 \\ 0 & 10 & 0 & 1200 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (1/10) \cdot F_2]{F_1 \leftarrow (1/24) \cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right)$$

de donde

$$\mathrm{I} = 50,$$

$$\mathrm{C} = 120,$$

$$\mathrm{T} = 60.$$

Se concluye que en la tienda existen 50 películas infantiles, 120 películas de comedia y 60 películas de terror.

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq
C = m.Matrix([
        [0],
        [0],
        [-60]
    ])
```

```
F = m.Matrix([
        [-24, 10, 10],
        [0, 10, -20],
        [0, -1, 1]
    ])

print(eq.EquationSystem(F, C).solution("gauss_jordan"))
[-24.0, 10.0, 10.0, 0.0]
[0.0, 10.0, -20.0, 0.0]
[0.0, -1.0, 1.0, -60.0]
-------------------------
[-24.0, 0.0, 0.0, -1800.0]
[0.0, 10.0, 0.0, 1200.0]
[0.0, 0.0, -1.0, -60.0]
-------------------------
[1.0, -0.0, -0.0, 75.0]
[0.0, 1.0, 0.0, 120.0]
[-0.0, -0.0, 1.0, 60.0]
-------------------------
[75.0]
[120.0]
[60.0]
```

TALLER 5

1. Hallar las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss-Jordan.

Verifique sus respuestas utilizando Python.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4.5x + 2.5y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 4 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ -x + 3y - z = 4 \\ 2x - 6y + 2z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 2y + z = 6 \\ -6x + 2y - 2z = -8 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$

Método de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada, se calcula su matriz inversa a partir de la matriz aumentada $(A|I)$, en donde se realizan operaciones elementales entre filas con el objetivo de transformar las matriz A en la matriz identidad I, y a la vez se logra que la matriz I se convierta en A^{-1}.

$$(A|I) \Rightarrow (I|A^{-1})$$

Ejemplo 2.2.7

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. Determine en caso de existir su inversa utilizando el método de Gauss-Jordan.

Solución.

Escribir la matriz aumentada $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se procede a realizar las operaciones elementales entre filas.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (-3) \cdot F_2]{F_2 \leftarrow F_2 + 5 \cdot F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow (1/13) \cdot F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/13 & -3/13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + (-8) \cdot F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -27/13 & 24/13 \\ 0 & 1 & 5/13 & -3/13 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow (1/3) \cdot F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -9/13 & 8/13 \\ 0 & 1 & 5/13 & -3/13 \end{array}\right)$$

Escribe la matriz inversa.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
A = m.Matrix([
    [3, 8],
    [5, 9]
])
#Calcula la matriz inversa utilizando el
método de Gauss-Jordan
print(af.invert_matrix_gauss(A))
[-0.692, 0.615]
[0.385, -0.231]
```

Ejemplo 2.2.8

Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. En caso de existir determinar B^{-1} utilizando el método de Gauss-Jordan.

Solución.

Escribir la matiz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se procede a realizar las operaciones elementales entre filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + 3 \cdot F_1 \\ F_2 \leftarrow (-2) \cdot F_2 \\ F_3 \leftarrow F_3 + 5 \cdot F_1 \\ F_3 \leftarrow (-2) \cdot F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 22 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3 \leftarrow F_3 + 11 \cdot F_2 \\ F_3 \leftarrow (-2) \cdot F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -79 & 23 & -22 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow (-1/79) \cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -23/79 & 22/79 & -4/79 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + 7 \cdot F_3 \\ F_1 \leftarrow F_1 + F_3 \\ F_1 \leftarrow (-1) \cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & 0 & -102/79 & 22/79 & -4/79 \\ 0 & 4 & 0 & 76/79 & -4/79 & -28/79 \\ 0 & 0 & 1 & -23/79 & 22/79 & -4/79 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \leftarrow F_1 + 3 \cdot F_2 \\ F_1 \leftarrow 2 \cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 24/79 & 32/79 & -92/79 \\ 0 & 4 & 0 & 76/79 & -4/79 & -28/79 \\ 0 & 0 & 1 & -23/79 & 22/79 & -4/79 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \leftarrow (-1/4) \cdot F_1 \\ F_2 \leftarrow (1/4) \cdot F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6/79 & -8/79 & 23/79 \\ 0 & 1 & 0 & 19/79 & -1/79 & -7/79 \\ 0 & 0 & 1 & -23/79 & 22/79 & -4/79 \end{array}\right)$$

Escribir la matriz inversa $\boldsymbol{B^{-1}}$:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{79} & -\frac{8}{79} & \frac{23}{79} \\ \frac{19}{79} & -\frac{1}{79} & -\frac{7}{79} \\ -\frac{23}{79} & \frac{22}{79} & -\frac{4}{79} \end{pmatrix}.$$

Trabajemos ahora con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
A = m.Matrix([
    [2, 6, 1],
    [3, 7, 5],
    [5, 4, 2]
])
print(af.invert_matrix_gauss(A))
[-0.076, -0.101, 0.291]
[0.241, -0.013, -0.089]
[-0.291, 0.278, -0.051]
```

TALLER 6

1. Dadas las siguientes matrices, en caso de existir obtener las matrices inversas utilizando el método de Gauss-Jordan. Verificar sus respuestas utilizando Python para obtener las matrices inversas.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = ?$

b) $B = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = ?$

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = ?$

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 7 & -4 & 6 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$; $D^{-1} = ?$

e) $E = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & -11 \\ 10 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $E^{-1} = ?$

f) $F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{4} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -2 \end{pmatrix}$; $F^{-1} = ?$

g) $G = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 8{,}5 \end{pmatrix}$; $G^{-1} = ?$

h) $H = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 15 & -1 & 20 \\ -5 & 1 & -15 \end{pmatrix}$; $H^{-1} = ?$

i) $I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $I^{-1} = ?$

j) $J = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -8 \\ 6 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $J^{-1} = ?$

Determinantes

Definición 2.1 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el determinante de la matriz A es denotado por $\det\ (A)$ y está definido como:

$$\det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ \in \ \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.3.1

Sea $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, calcular $\det\ (B)$.

Solución.

Por definición se tiene

$$\det\ (B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

entonces

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 3(9) - 6(4)$$

$$= 3$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.Matrix as mt
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import Determinant.Determinant as af
A = m.Matrix([
    [3, 6],
    [4, 9]
])
#Calcula el determinante de una matriz 2x2
af.determinant_2x2(A))
#Imprime el determinante calculado
print(af.determinant_2x2(A))
3
```

Ejemplo 2.3.2

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, el determinante de la matriz A es denotada por $\det(A)$ y está definida como:

$$\det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}.$$

- Si el determinante de la matriz es cero, dicha matriz no admite inversa y recibe el nombre de matriz singular.

Para calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden 3 se utiliza el método de Sarrus, para ello se procede de la siguiente manera:

- se aumenta las dos primeras filas hacia abajo.
- se procede a realizar los productos en diagonal, tomando en cuenta que los productos que van desde la esquina superior izquierda hacia abajo se suman ($\searrow$) y los productos que van desde la esquina superior derecha hacia abajo se restan ($\swarrow$).

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Observación 7. Este método no funciona para determinantes de orden $n \times n$ si $n > 3$.

Ejemplo 2.3.3

Calcular $\det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2(3)(6) + (-5)(2)(3) + (-1)(1)(4) - (-1)(3)(3) - (2)(2)(4) - (-5)(1)(6)$$

$$= 36 - 30 - 4 + 9 - 16 + 30 = 25$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.Matrix as mt
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import Determinant.Determinant as af
A = m.Matrix([
    [2, 1, 3],
    [-5, 3, 4],
    [-1, 2, 6]
])
#Calcula el determinante de una matriz 3x3
Det_A = af.determinant_3x3(A)
#Imprime el determinante calculado
Print(Det_A)
25
```

El determinante de una matriz cuadrada de orden 3 también se puede calcular de la siguiente manera:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Método Por menores

El método por menores se lo denomina también como expansión por cofactores.

Menor

Sea $A \in M_{pq}(\mathbb{R})$ y sea $M_{ij} \in M_{(p-1)(q-1)}(\mathbb{R})$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j.

M_{ij} se llama el $\boldsymbol{menor\ ij}$ de A.

Ejemplo 2.3.4

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{13} y M_{32}.

Solución.

Eliminando el primer renglón y la tercera columna de A se obtiene $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene $M_{32} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Cofactor

Sea $A \in M_{pp}$. El $cofacor\ ij$ de A, denotado por A_{IJ}, está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{ij}|M_{ij}|.$$

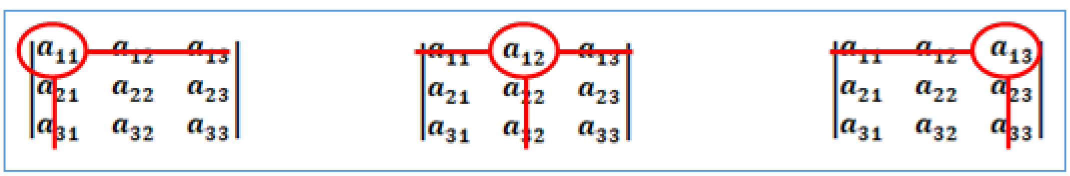
El cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$.

Observe que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & si\ i+j\ es\ par \\ -1 & si\ i+j\ es\ impar \end{cases}$$

En la *figura 16* se muestra el proceso del Método por menores.

Figura 16. *Método por menores*



Ejemplo 2.3.5

Calcular $\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -3 & 11 & 1 \\ 7 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

Solución.

$$\det(\mathrm{A}) = 4\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4(66-5) - 2(-18-7) + 9(-15-77)$$

$$= -534$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.Matrix as mt
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import Determinant.Determinant as af
A = m.Matrix([
    [4, 2, 9],
    [-3, 11, 1],
    [7, 5, 6]
])

print(af.determinant_3x3(A))
-534
```

Observación 8. El método por menores es muy utilizado para calcular determinantes de orden mayor o igual a 4.

TALLER 7

1. Dadas las matrices siguientes, obtener el valor de su respectivo determinante.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 7/2 & 9/4 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 8 & 7 & -9 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -7 & 8 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 1/3 & 5/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 & 4/3 \\ -1/3 & -5/4 & 2 \end{pmatrix}$

h) $H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

i) $I = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 10 & 8 \\ 6 & -4 & -2 & -1 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

Teorema 2.3.1

Sean $A, B \in M_{qq}(\mathbb{R})$. Entonces

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Es decir, el determinante del producto es el producto de los determinantes.

Ejemplo 2.3.6

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Verificar el Teorema 2.3.1.

Solución.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -45 \text{ y } det(B) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 26.$$

Se puede calcular

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 5 \\ -6 & 13 & -8 \\ -2 & 22 & 16 \end{pmatrix}$$

y

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 5 \\ -6 & 13 & -8 \\ -2 & 22 & 16 \end{vmatrix} = -1170 = (-45)(26) = \det(A)\det(B).$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.Matrix as mt
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import Determinant.Determinant as af
A = m.Matrix([
    [1, 2, -1],
    [3, -2, 0],
    [5, 1, 4]
])
B = m.Matrix([
    [-2, 5, 0],
    [0, 1, 4],
    [2, -1, 3]
])
```

```
#Calculamos A*B
A_B= A*B
#Calculamos Determinante de A_B
D_AxB = af.determinant_3x3(A_B)
#Calculamos Determinante de A y Determinante de B
D_A = af.determinant_3x3(A)
D_B = af.determinant_3x3(B)
#Llamamos C al producto de D_A*D_B
C = D_A*D_B
# Se imprime el determinante D_AxB y el producto
# de los determinantes de A y de B
print(D_AxB)
print(C)

-1170
-1170
```

Observación 9. El determinante de la suma no siempre es igual a la suma de los determinantes. Es decir, para la mayoría de los pares de matrices, A, B, $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$ (Grossman & Flores, 2012).

Teorema 2.3.2

$$\forall A \in M_{nn}(\mathbb{R}): det(A^t) = det(A)$$

A continuación se presentan algunas propiedades de los determinantes.

Propiedades

i. Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces $det(A) = 0$

ii. Si el renglón i o columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces $\det(A)$ se multiplica por c. Es decir, si se denota por B esta nueva matriz, entonces

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c|A|.$$

iii. El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det(A)$ por -1.

iv. Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces $\det(A) = 0$.

v. Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces $\det(A) = 0$.

vi. Si se suma un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia (Grossman & Flores, 2012).

TALLER 8

1. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & -7 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, verificar que se cumple el Teorema 2.3.2.

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, verificar que se cumple la propiedad i.

3. Dada la matriz $D = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -10 & -12 & 2 \end{pmatrix}$, verificar que se cumple la propiedad v.

4. Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, verificar que se cumple el Teorema 2.3.1.

5. Sea $c = 2$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, verificar que se cumple la propiedad ii.

Método de Cramer para resolver un Sistema de Ecuaciones.

Conocido como Regla de Cramer, sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este método se usa si y solo si el sistema cumple con las siguientes condiciones:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
- El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Sea el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

La solución se obtiene mediante:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)};\, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)};\, \ldots;\; x_n = \frac{det\,(A_n)}{det(\mathrm{A})}$$

de donde

$$\det\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} : determinante\ de\ los\ coeficientes$$

Para calcular el $det(A_1)$ se reemplaza la columna de los coeficientes de x_1 por la columna de términos independientes. Así:

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ahora, para calcular el $det(A_2)$ se reemplaza la columna de los coeficientes de x_2 por la columna de términos independientes. Así:

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Así sucesivamente, para calcular el $det(A_n)$ se reemplaza la columna de los coeficientes de x_n por la columna de términos independientes. Es decir:

$$det(A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 2.4.1

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -10 \\ 5x - 3y = 22 \end{cases}$$

Solución.

Se escribe la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -10 \\ 5 & -3 & 22 \end{array}\right)$$

Se procede a calcular $det(A), det(A_1), det(A_2)$.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3(-3) - 4(5) = -9 - 20 = -29$$

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 22 & -3 \end{vmatrix} = -10(-3) - 4(22) = 30 - 88 = -58$$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 5 & 22 \end{vmatrix} = 3(22) - (-10)(5) = 66 + 50 = 116$$

Aplicar el Método Regla de Cramer:

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{-58}{-29} = 2 \qquad y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{116}{-29} = -4$$

Escribir la solución del sistema:

$$CS = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq
C = m.Matrix([
        [-10],
        [22]
    ])
F = m.Matrix([
        [3, 4],
        [5, -3]
    ])
#Se resuelve por Cramer
print(eq.EquationSystem(F, C).solution("cramer"))
[2.0]
[-4.0]
```

Ejemplo 2.4.2

En caso de ser posible, resolver el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} 4x + 7y - z = 5 \\ 8x - 3y + 4z = 50 \\ -2x + 6y + 2z = -20 \end{cases}$$

Solución.

Escribir la matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 7 & -1 & 5 \\ 8 & -3 & 4 & 50 \\ -2 & 6 & 2 & -25 \end{array}\right)$$

Calcular $det(A), det(A_1),\ det(A_2), det(A_3)$.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 8 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-3)(2) + 8(6)(-1) + (-2)(7)(4) - (-1)(-3)(-2) - 4(6)(4) - 2(7)(8)$$

$$= -24 - 48 - 56 + 6 - 96 - 112$$

$$= -330$$

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 50 & -3 & 4 \\ -20 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-3)(2) + 50(6)(-1) + (-20)(7)(4) - (-1)(-3)(-20) - 4(6)(5) - 2(7)(50)$$

$$= -30 - 300 - 560 + 60 - 120 - 700$$

$$= -1650$$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 8 & 50 & 4 \\ -2 & -20 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(50)(2) + 8(-20)(-1) + (-2)(5)(4) - (-1)(50)(-2) - 4(-20)(4) - 2(5)(8)$$

$$= 400 + 160 - 40 - 100 + 320 - 80$$

$$= 660$$

$$det(A_3) = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 8 & -3 & 50 \\ -2 & 6 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-3)(-20) + 8(6)(5) + (-2)(7)(50) - (5)(-3)(-2) - 50(6)(4) - (-20)(7)(8)$$

$$= 240 + 240 - 700 - 30 - 1200 + 1120$$

$$= -330$$

Finalmente calcular los valores de las variables x, y, z.

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{-1650}{-330} = 5 \qquad y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{660}{-330} = -2 \qquad z = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{-330}{-330} = 1$$

Escribir la solución del sistema:

$$CS = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq

C = m.Matrix([
        [5],
        [50],
        [-20]
    ])
F = m.Matrix([
        [4, 7, -1],
        [8, -3, 4],
        [-2, 6, 2]
    ])
print(eq.EquationSystem(F, C).solution("cramer"))
[5.0]
[-2.0]
[1.0]
```

Ejemplo 2.4.3

En caso de ser posible, resolver el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -20 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -16 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 - 4x_4 = -12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 40 \end{cases}$$

Solución.

Escribir la matriz aumentada del sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & -20 \\ 5 & -1 & -1 & 3 & -16 \\ 1 & 1 & -7 & -4 & -12 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 40 \end{array}\right)$$

Calcular el determinante del sistema $det\ (A)$.

$$det\ (A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -7 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante de una matriz de orden 4x4, se utiliza el método por menores.

$$det\ (A)\ = 3\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-79) - 4(142) + 1(-67) - 2(-62)$$

$$= -748$$

Ahora se procede a calcular $det\ (A_1)$.

$$det\ (A_1) = \begin{vmatrix} -20 & 4 & 1 & 2 \\ -16 & -1 & -1 & 3 \\ -12 & 1 & -7 & -4 \\ 40 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -20\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -16 & -1 & 3 \\ -12 & -7 & -4 \\ 40 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -16 & -1 & 3 \\ -12 & 1 & -4 \\ 40 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -16 & -1 & -1 \\ -12 & 1 & -7 \\ 40 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -20(-79) - 4(600) + 1(\ 340\ \ ) - 2(508)$$

$$= -1496$$

Calcular el $det\ (A_2)$.

$$det\ (A_2) = \begin{vmatrix} 3 & -20 & 1 & 2 \\ 5 & -16 & -1 & 3 \\ 1 & -12 & -7 & -4 \\ 2 & 40 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -16 & -1 & 3 \\ -12 & -7 & -4 \\ 40 & 4 & 0 \end{vmatrix} - (-20)\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -16 & 3 \\ 1 & -12 & -4 \\ 2 & 40 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -16 & -1 \\ 1 & -12 & -7 \\ 2 & 40 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(600) - (-20)(142) + 1(1120) - 2(1384)$$

$$= 2992$$

Calcular el $det\ (A_3)$

$$det\ (A_3) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -20 & 2 \\ 5 & -1 & -16 & 3 \\ 1 & 1 & -12 & -4 \\ 2 & -3 & 40 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -1 & -16 & 3 \\ 1 & -12 & -4 \\ -3 & 40 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & -16 & 3 \\ 1 & -12 & -4 \\ 2 & 40 & 0 \end{vmatrix} + (-20)\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -1 & -16 \\ 1 & 1 & -12 \\ 2 & -3 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-340) - 4(1120) + (-20)(-67) - 2(164)$$

$$= -4488$$

Proceder a calcular $det\ (A_4)$.

$$det\ (A_4) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -20 \\ 5 & -1 & -1 & -16 \\ 1 & 1 & -7 & -12 \\ 2 & -3 & 4 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -1 & -1 & -16 \\ 1 & -7 & -12 \\ -3 & 4 & 40 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & -1 & -16 \\ 1 & -7 & -12 \\ 2 & 4 & 40 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -1 & -16 \\ 1 & 1 & -12 \\ 2 & -3 & 40 \end{vmatrix} - (-20)\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(508) - 4(-1384) + 1(164) - (-20)(-62)$$

$$= 5984$$

Finalmente aplicar la Regla de Cramer.

$$x_1 = \frac{det\ (A_1)}{det\ (\mathrm{A})} \qquad x_2 = \frac{det\ (A_2)}{det\ (\mathrm{A})} \qquad x_3 = \frac{det\ (A_3)}{det\ (\mathrm{A})} \qquad x_4 = \frac{det\ (A_4)}{det\ (\mathrm{A})}$$

$$= \frac{-1496}{-748} \qquad = \frac{2992}{-748} \qquad = \frac{-4488}{-748} \qquad = \frac{5984}{-748}$$

$$= 2 \qquad = -4 \qquad = 6 \qquad = -8$$

Escribir la solución del sistema

$$CS = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq

C = m.Matrix([
        [-20],
        [-16],
        [-12],
        [40]
    ])
F = m.Matrix([
        [3, 4, 1, 2],
        [5, -1, -1, 3],
        [1, 1, -7, -4],
        [2, -3, 4, 0]
    ])
print(eq.EquationSystem(F, C).solution("cramer"))
[2.0]
[-4.0]
[6.0]
[-8.0]
```

TALLER 9

1. En caso de ser posible, resolver los siguientes sistemas utilizando la Regla de Cramer. Verifique sus resultados usando Python.

a) $\begin{cases} 2x + 4y = -6 \\ 5x - 8y = 39 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = -13 \\ 7x + 5y = -11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x + 3y = 27 \\ 5x - 9y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 2 \\ 7x - 2y + 3z = 30 \\ x + 3y - z = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 50 \\ 7x + 3y - 2z = -25 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 24 \\ 2x + 3y + 4z = -24 \\ 7x + 9z = -102 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 2y - 8z = -34 \\ -2x - 7y + 2z = -11 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - y - z = 13 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -10 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$

Capítulo III: Espacios Vectoriales

Espacios y subespacios vectoriales

Espacio vectorial o lineal

Definición 3.1 Un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ es un conjunto V de objetos llamados vectores, en el que se definen dos operaciones llamadas suma y multiplicación por un escalar que satisfacen las condiciones que se enumeran a continuación.

Notación: Si u, v están en V y si α es un número real, entonces se escribe $u + v$ para la suma de u y v, y αu para el producto escalar de α y u.

Condiciones de un espacio vectorial

1. $(V, +)$ es un grupo conmutativo

i.	$\forall u, v \in V \mid u + v \in V$	Axioma de clausura
ii.	$\forall u, v, w \in V \mid (u + v) + w = u + (v + w)$	Axioma de asociatividad
iii.	$\exists!\, e \in V, \forall u \in V \mid e + u = u + e = u\ (e = 0_v)$	Axioma del neutro aditivo
iv.	$\forall u \in V, \exists!\, u' \in V \mid u + u' = u' + u = e$	Axioma del inverso aditivo
v.	$\forall u, v \in V \mid u + v = v + u$	Axioma de conmutatividad

2.	$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V \mid \alpha u \in V$	Axioma de clausura
3.	$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V \mid (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$	Ley asociativa mixta
4.	$\exists!\, e \in \mathbb{R}, \forall u \in V \mid eu = u \quad (e = 1)$	Axioma neutro
5.	$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V \mid (\alpha + \beta)u = au + \beta u$	Primera ley de distribución
6.	$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V \mid \alpha(u + v) = au + av$	Segunda ley de distribución

Observación 10

1. Los elementos de V se llaman vectores, los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman escalares.
2. La operación $(+)$ se llama suma vectorial, la operación $(\bullet)$ se llama multiplicación por un escalar.
3. El vector 0_v se llama vector nulo o vector cero.

Teorema 3.1.1

Sea V un espacio vectorial. Entonces:

a) $\forall u, v \in V: u + v = v + w \rightarrow u = w$

b) $\forall u \in V: 0.u = 0$

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \alpha\, 0_V = 0_V$

d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V: \alpha u = 0 \;\Rightarrow [\alpha = 0 \;\vee\; u = 0]$.

e) $\forall u \in V:\; (-1)u = -u$.

Demostración

La demostración que se presenta a continuación ha sido tomada del manual de Algebra lineal (Núñez & Sandoval, 2015).

a) $u + 0_v = u$	Axioma del neutro
$u + \big(v + (-v)\big) = u$	Axioma del inverso
$(u + v) + (-v) = u$	Axioma de asociatividad
$v + w + (-v) = u$	Hipótesis
$v + (-v) + w = u$	Axioma de asociatividad
$0_v + w = u$	Axioma del inverso
$u = w$	Axioma del neutro
c) $0_V + 0_V = 0_V$	Axioma del neutro

$\alpha = \alpha$ Axioma reflexivo

$\alpha(0_V + 0_V) = \alpha 0_V$ Axioma reflexivo

$\alpha 0_V + \alpha 0_V = \alpha 0_V$ (1) Axioma distributivo

$-\alpha \cdot u = -\alpha \cdot u$ (2) Axioma reflexivo

$\alpha 0_V + \left(\alpha 0_V + (-\alpha 0_V)\right) = \alpha 0_V + (-\alpha 0_V)$

$\alpha 0_V + 0_V = 0_V$ Axioma del inverso

$\alpha 0_V = 0_V$ Axioma del neutro

d) Por contradicción

Se supone que:

$\neg(\alpha = 0 \vee u = 0_V)$

$\alpha \neq 0 \wedge u \neq 0_V$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ / \ \alpha \neq 0, \exists \frac{1}{\alpha}$

$\alpha 0_V = 0_V$ Hipótesis

$\left(\frac{1}{\alpha}\right) \alpha u = \left(\frac{1}{\alpha}\right) 0_v$

$1. u = 0_V$ Axioma del inverso

$u = 0_V$

Lo que contradice la suposición

$\therefore \alpha = 0 \vee u = 0_V.$

Subespacios vectoriales.

Definición 3.2 Sea un espacio vectorial V. Si se limita las operaciones de suma y multiplicación por escalar para V a un subconjunto no vacío $H \subseteq V$, y éste es un espacio vectorial, se dice que H es un subespacio vectorial de V.

Teorema 3.1.2

Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las dos reglas de cerradura:

a) $Si\ u \in H$ y $v \in H$, entonces $u + v \in H$.

b) $Si\ u \in H$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha u \in H$.

También se pueden resumir las dos reglas como:

- H es un subespacio vectorial de V si y solo si se verifica que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in H: \quad \alpha u + \beta v \in H$$

Combinación lineal

Definición 3.3 Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares se denominan una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ejemplo 3.1.1 Una combinación lineal en $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ es un combinación lineal de $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ya que $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 3.1.2 Una combinación lineal en $M_{32}(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 2 \\ -1 & 15 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, lo que muestra que $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 2 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Conjunto generador

Se dice que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de un espacio vectorial V $generan\ a\ V$ si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de los mismos. Es decir, para todo $v \in V$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Espacio generado por un conjunto de vectores

Definición 3.4 Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k,\ k$ vectores de un espacio vectorial V. El espacio generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Es decir

$$gen\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{v \colon v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_k v_k\}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son escalares arbitrarios.

Teorema 3.1.3

Si $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces $gen\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un subespacio de V.

Ejemplo 3.1.3

Determinar el valor de x para que el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ pertenezca al subespacio $gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Solución.

El vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$ pertenece al subespacio $gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ si y sólo si $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, o sea, si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde

$$
\begin{aligned}
-1 &= \alpha + \beta \\
3 &= 5\alpha + \beta \\
x &= 3\alpha - \beta
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en Python por Cramer se tiene

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq
C = m.Matrix([
        [-1],
        [3]
    ])
F = m.Matrix([
        [1, 1],
        [5, 1]
    ])
print(eq.EquationSystem(F, C).solution("cramer"))
[1.0]
[-2.0]
```

Por tanto se tiene que

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1 \\
\beta &= -2 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.1.4

Determinar el valor de t para que el vector $\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ pertenezca al subespacio $gen = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

Solución.

El vector $\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ pertenece al subespacio $gen = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ si y sólo si $\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, o sea, si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De donde

$$t = -2\alpha + \beta$$
$$-1 = \alpha - \beta$$
$$4 = 4\alpha - 2\beta$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en Python por Cramer se tiene

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq
C = m.Matrix([
        [-1],
        [4]
    ])
```

```
F = m.Matrix([
        [1, -1],
        [4, -2]
    ])
print(eq.EquationSystem(F, C).solution("cramer"))
[3.0]
[4.0]
```

Por tanto se tiene que

$$\alpha = 3$$
$$\beta = 4$$
$$t = -2$$

Ejemplo 3.1.5

En $\mathbb{R}^3$, sean $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0 \right\}$ y $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\}$. Entonces H_1 y H_2 están formados por vectores que están sobre planos que pasan por el origen y son subespacios de $\mathbb{R}^3$. $H_1 \cap H_2$ es la intersección de dos planos y se puede encontrar:

$$x + 2y + 3z = 0$$

$$2x - y - z = 0$$

Escribir la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Se procede a realizar las operaciones elementales entre filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (-1)\cdot F_2]{F_2 \leftarrow F_2 + 2\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftarrow (-5)\cdot F_1]{F_1 \leftarrow F_1 + 2\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftarrow (1/5) F_2]{F_1 \leftarrow (-1/5)\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & {}^{1}/_{5} & 0 \\ 0 & 1 & {}^{7}/_{5} & 0 \end{array}\right).$$

En consecuencia, todas las soluciones del sistema homogéneo están dadas por $\left(-\frac{1}{5}z, -\frac{7}{5}z, z\right)$.

Ejemplo 3.1.6

Comprobar que el vector $u = \binom{2}{4}$ es combinación lineal del vector $v = \binom{1}{2}$.

Solución.

Escribir

$$\binom{2}{4} = \alpha \binom{1}{2}$$

De donde

$$\begin{cases} 2 = 1 \cdot \alpha \\ 4 = 2 \cdot \alpha \end{cases}$$

Por tanto

$$\alpha = 2$$

Son dependientes o proporcionales: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$

u es combinación lineal del vector v.

Ejemplo 3.1.7

¿El vector $w = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ se puede expresar como combinación lineal de $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Solución.

¿Se pueden encontrar α y β de manera que $w = \alpha u + \beta v$?

Se tiene

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manera que

$$\begin{cases} 5 = 2\alpha + 3\beta \\ -1 = \alpha + \beta \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en Python por Cramer se tiene

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
import EquationSystems.Equation_System as eq
C = m.Matrix([
        [5],
        [-1]
    ])
F = m.Matrix([
        [2, 3],
        [1, 1]
    ])
print(eq.EquationSystem(F, C).solution("cramer"))
[2.0]
[-3.0]
```

Por tanto se tiene que

$$\alpha = 2$$
$$\beta = -3$$

Como se encontró los valores para α y β para los que se cumple $w = \alpha u + \beta v$. Por lo tanto si se puede expresar $w = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 3.1.8

Indique si el vector $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertenece al espacio $V = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Solución.

El vector x pertenece a V si y sólo si x es una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, si y sólo si existen escalares λ_1 y λ_2 para los cuales:

$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escribir el sistema en la matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Reduciendo la matriz se obtiene

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Como el sistema es inconsistente, no existen λ_1 y λ_2 que cumplan la relación, y por tanto, x no es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, y por tanto, no pertenece al espacio generado.

Ejemplo 3.1.9

Indique para qué valor del parámetro α del vector $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ pertenece al espacio

$$V = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Solución.

El vector x pertenece a V si y sólo si x es una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$, es decir si y sólo si existen escalares λ_1 y λ_2 para los cuales:

$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$$

Escribir la matriz aumentada del sistema.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & \alpha\\2 & 5 & 3\\1 & 0 & -1\end{array}\right)$$

Formar la matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & \alpha\\0 & 1 & 2\alpha-3\\0 & 0 & 5\alpha-10\end{array}\right)$$

De aquí ver que la única posibilidad para que el sistema sea consistente es que en el último renglón no exista pivote; por tanto,

$$5\alpha - 10 = 0$$

Despejando α, se tiene que

$$\alpha = 2$$

Definición 3.5 (Dependencia e independencia lineal) Sean $v_1, v_2, \dots, v_n, n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen n escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ $no\ todos\ cero$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son linealmente independientes.

Ejemplo 3.1.10

Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes ya que $v_2 = -2v_1$.

Ejemplo 3.1.11

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución.

Suponga que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces multiplicando y sumando se obtiene

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \qquad 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resultando el sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, los vectores serán linealmente dependientes ssi el sistema tiene soluciones no triviales.

Se escribe el sistema usando una matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Se realiza las operaciones elementales entre filas hasta obtener la forma escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (-1)\cdot F_2]{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow 2\cdot F_3]{F_3 \leftarrow F_3 + 3\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \leftarrow (1/3)\cdot F_3]{F_2 \leftarrow (-1/2)\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \exists!\ solución$$

Como existe única solución (la trivial), entonces los vectores $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ son linealmente independientes.

Ejemplo 3.1.12

Determinar si los vectores $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución.

Suponga que $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Entonces multiplicando y sumando se obtiene

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3\\ \lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3\\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Resultando el sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0\\ \lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 &= 0\\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, los vectores serán linealmente dependientes ssi el sistema tiene soluciones no triviales.

Se escribe el sistema usando una matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 8 & 0\end{array}\right)$$

Se realiza las operaciones elementales entre filas hasta obtener la forma escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 8 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + F_1\\ F_2 \leftarrow (-1)\cdot F_2\\ F_3 \leftarrow F_3 + 3\cdot F_1\\ F_3 \leftarrow (-1)\cdot F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + 2\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \leftarrow F_1 + 3\cdot F_2\\ F_1 \leftarrow 2\cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 7 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_1 \leftarrow (1/2)\cdot F_1\\ F_2 \leftarrow (-1/2)\cdot F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 7/2 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Se muestra que el sistema tiene un número infinito de soluciones. La última matriz aumentada se lee

$$\lambda_1 + \frac{7}{2}\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3 = 0$$

Si se hace $\lambda_3 = 1$, se tiene que $\lambda_2 = {}^{1}/_{2}$ y $\lambda_1 = -{}^{7}/_{2}$, de manera que puede confirmarse

$$\frac{-7}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

por tanto los vectores son linealmente dependientes.

TALLER 10

1. Determinar si los vectores $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ son linealmente independientes o linealmente dependiente.

2. Determinar si los vectores $\begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\10\\10\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-2\\-1\\-8\end{pmatrix}$ son linealmente independientes o linealmente dependiente.

3. Determinar si los vectores $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

4. Determinar si los vectores $\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ son linealmente independientes o linealmente dependiente.

5. Determinar para qué valor de p el siguiente conjunto de vectores es linealmente dependiente.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{Bmatrix}6\\p\end{Bmatrix}\right\}$$

Bases y dimensión. Coordenadas. Suma de subespacios.

Base

Definición 3.6 Un conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si

i. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

ii. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a V.

Teorema 3.2.1

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para V y si $v \in V$, entonces existe un conjunto único de escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Demostración

La demostración que se presenta a continuación ha sido tomada de (Grossman & Flores, 2012).

Existe cuando menos un conjunto de dichos escalares porque $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a V. Suponga entonces que v se puede escribir de dos maneras como una combinación lineal de los vectores de la base.

Es decir, suponga que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

Entonces, restando se obtiene la ecuación

$$(\lambda_1 - \beta_1)v_1 + (\lambda_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n - \beta_n)v_n = 0$$

Pero como los v_i son linealmente independientes, esta ecuación se cumple si y sólo si $\lambda_1 - \beta_1 = \lambda_2 - \beta_2 = \cdots = \lambda_n - \beta_n = 0$. Así, $\lambda_1 = \beta_1,\ \lambda_2 = \beta_2, \dots, \lambda_n = \beta_n$ y el teorema queda demostrado.

Teorema 3.2.2

Si $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ son bases en un espacio vectorial V, entonces $m = n$; es decir, cualesquiera dos bases en un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

Ejemplo 3.2.1

Calcule una base del siguiente subespacio.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 / x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \right.$$

$$\left. x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \right\}$$

Solución.

Escribir la matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0\end{array}\right)$$

Resolver por Gauss para obtener la matriz escalonada.

Realizar las operaciones elementales entre filas.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow (-1)\cdot F_3]{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + F_1 \\ F_2 \leftarrow (-1)\cdot F_2 \\ F_3 \leftarrow F_3 + F_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \leftarrow (-2)\cdot F_3]{F_3 \leftarrow F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Como se puede observar la última fila es linealmente dependiente. Por tanto se tiene dos ecuaciones linealmente independientes.

Escribir las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 & (1) \\ 6x_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Del sistema obtenido se tiene que

$$x_3 = 0$$

Por tanto de la ecuación (1) se puede escribir

$$x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 5x_5 = 0$$

De donde

$$x_1 = -2x_2 - 4x_4 - 5x_5$$

$$x_2 = x_2$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = x_4$$

$$x_5 = x_5$$

Ahora, escribir la matriz del subespacio

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 4x_4 - 5x_5 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 4x_4 - 5x_5 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

desarrollando se tiene que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De donde una base del subespacio F es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 3.2.2

Calcular una base del subespacio $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0 \right\}$.

Solución.

Como solo se tiene una ecuación no se puede usar el método de Gauss.

Por tanto, se denomina

$$z = \alpha$$
$$y = \beta$$
$$x - 2\beta + 3\alpha = 0 \rightarrow x = 2\beta - 3\alpha$$

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ entonces se tiene que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta - 3\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se sigue que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Como los vectores $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no son proporcionales, se concluye que $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de S.

Dimensión

Se llama dimensión de un espacio vectorial V al número de vectores que hay en cualquiera de sus bases.

Se denota $\dim(V)$.

Teorema 3.2.3

Suponga que $\dim(V) = n$. Si $u_1, u_2, \dots, u_m$ es un conjunto de m vectores linealmente independientes en V, entonces $m \leq n$.

Demostración

La demostración presentada a continuación ha sido tomada de (Grossman & Flores, 2012).

Sea $u_1, u_2, \dots, u_n$ una base para V. Si $m > n$, entonces, se pueden encontrar constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ no todas cero, tales que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = 0$. Esto contradice la independencia lineal de los vectores v_i.

Teorema 3.2.4

Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces H tiene dimensión finita y

$$dim(H) \leq dim(V).$$

Imagen de una matriz

Definición 3.7 Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Entonces la imagen de A, denotada por $im(A)$, está dada por

$$im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \text{ para alguna } x \in \mathbb{R}^n\}$$

Teorema 3.2.5

Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Entonces la imagen de A $im(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Demostración

Suponga que y_1 y y_2 están en $im(A)$. Entonces

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n / y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2.$$

Por lo tanto,

$$A(\alpha x_1) = \alpha A x_1 = \alpha y_1 \text{ y } A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y_1 + y_2$$

Por lo que αy_1 y $y_1 + y_2$ están en $im(A)$. Así, del teorema 3.1.2, $im(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Rango de una matriz

Definición 3.8 Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Entonces el rango de A, denotado por $\rho(A)$, está dado por

$$\rho(A) = \dim\big(im(A)\big).$$

Teorema 3.2.6

El rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones.

Espacio de los renglones y espacio de las columnas de una matriz

Definición 3.9 Si $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, sean $\{r_1, r_2, \dots r_m\}$ los renglones de A y $\{c_1, c_2, \dots c_n\}$ las columnas de A.

Entonces se define

$$R_A = espacio\ de\ renglones\ de\ A = gen\{r_1, r_2, \dots, r_m\} \text{ y}$$

$$C_A = espacio\ de\ columnas\ de\ A = gen\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

Ejemplo 3.2.3

$dim(\mathbb{R}^2) = 2$, porque $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

$dim(\mathbb{R}^3) = 3$, porque $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es un base para $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.2.4

Calcular la dimensión, una base, unas ecuaciones explícitas (paramétrica) del siguiente subespacio.

$$E_1 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \frac{\mathbb{R}^3}{x} + 2y + z = 0, -x + y - z = 0\right\}$$

E_1 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Se busca las ecuaciones paramétricas.

Escribir el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

Se procede a escribir en forma de matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se sigue

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Entonces, el rango de B es

$$\rho(B) = 2$$

Observando el menor principal se concluye que las dos ecuaciones son linealmente independientes y la variable libre es z. Se sigue que

$$\begin{cases} x + 2y = -z \\ -x + y = \mathrm{z} \end{cases} \rightarrow haciendo\ z = \alpha \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -\alpha \\ -x + y = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y = 0 \\ x = -\alpha \end{matrix}$$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} con\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad ecuaciones\ paramétricas$$

Finalmente se busca una base y la dimensión

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{E_1} = \{(-1,0,1)\} \quad y \quad dim\ (E_1) = 1$$

Coordenadas de un vector en una base

Dado que una base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un sistema generador, se puede expresar cualquier vector w de V como combinación lineal de la base. Además los coeficientes de dicha combinación lineal son únicos, pues si existiesen dos distintos:

$$w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = a_1'v_1 + a_2'v_2 + \cdots + a_n'v_n$$

entonces

$$(a_1 - a_1')v_1 + (a_2 - a_2')v_2 + \cdots + (a_n - a_n')\mathrm{v}_n = 0,$$

y como la base es linealmente independiente, se puede deducir que $a_i = a_i'$ para $i = 1, \dots, n$.

Ejemplo 3.2.5

Calcula las coordenadas del vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ respecto de la base de $\mathbb{R}^2$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución.

Escribir el vector v como combinación lineal de los vectores de la base B.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Realizar el producto

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

Sumando se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2 = -\alpha + 2\beta \\ -1 = \qquad\quad \beta \end{cases}$$

Como $\beta = -1$, sustituir en la primera ecuación

$$2 = -\alpha + 2(-1)$$

De donde

$$\alpha = -4$$

Las coordenadas de v con respecto de B son: -4 y -1

Es decir

$$V = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

Suma de subespacios vectoriales

Definición 3.10 Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.. Si U_1 y U_2 son espacios vectoriales de V, se define $U_1 + U_2$ como el conjunto

$$U_1 + U_2 = \{v = u_1 + u_2 \in V: \quad u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Teorema 3.2.7

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V, entonces $U_1 + U_2$ es subespacio vectorial de V.

Demostración

La demostración que se presenta a continuación ha sido tomada de (Mayorga, 2018).

Tomamos elementos genéricos: $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in U_1 + U_2$. Sabemos que existen vectores $u_1, v_1 \in U_1$ y $u_2, v_2 \in U_2$ tales que

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{y} \quad v = v_1 + v_2.$$

Por tanto:

$$\alpha u + v = (\alpha u_1 + v_1) + (\alpha u_2 + v_2),$$

con $\alpha u_1 + v_1 \in U_1$ y $\alpha u_2 + v_2 \in U_2$. Por tanto $\alpha u + v \in U_1 + U_2$. Puesto que α, u_1 y u_2 fueron elegidos arbitrariamente, se ha probado que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in U_1 + U_2: \quad \alpha u + v \in U_1 + U_2$$

Espacios con producto interno.

Definición 3.11 Una función $F: V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto interno o escalar si satisface las propiedades de Simetría, Propiedad distributiva, Homogeneidad y Positividad:

i. Simetría:

$$\forall u, v \in V: \qquad (u, v) = (v, u);$$

ii. Propiedad distributiva:

$$\forall u, v, w \in V: \qquad (u, v + w) = (u, v) + (u, w);$$

iii. Homogeneidad:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V: (\lambda u, v) = \lambda (u, v);$$

iv. Positividad:

$$\forall u \in V: \quad (u, u) \geq 0;$$
$$(u, u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0.$$

Ejemplo 3.3.1

El producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$ es un producto interno. Sean $u = \binom{u_1}{u_2}, v = \binom{v_1}{v_2}, w = \binom{w_1}{w_2} \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 = v_1 u_1 + v_2 u_2 = (v, u)$.
2. $\alpha(u, v) = \alpha(u_1 v_1 + u_2 v_2) = (\alpha u_1) v_1 + (\alpha u_2) v_2 = (\alpha u, v)$ y análogamente para la otra igualdad $\alpha(u, v) = (u, \alpha v)$.
3. $(u + v, w) = (u_1 + v_1) w_1 + (u_2 + v_2) w_2 = u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2 = (u_1 w_1 + u_2 w_2) + (v_1 w_1 + v_2 w_2) = (u, w) + (v, w)$.
4. $(u, u) = u_1^2 + u_2^2 \geq 0$ y además $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Propiedad extensiva

a) $(u, 0) = (0, u) = 0$.

Norma de un vector

Sea V un espacio vectorial. Se dice que una aplicación $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ es una norma si se cumplen las siguientes propiedades:

Positividad:

$$\forall u \in V: \quad \|u\| \geq 0;$$
$$\|u\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0.$$

Homogeneidad:

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}, \forall u \in V: \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|;$$

Desigualdad triangular:

$$\forall u, v \in V: \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

En este caso se dice que V es un espacio normado.

Observación 11. En un espacio normado V, la distancia entre dos puntos $u, v \in V$, está dada por

$$dist(u, v) = \|u - v\|.$$

Teorema 3.2.8 (Norma asociada a un producto interno)

Sea V un espacio normado con producto interno. Entonces V es un espacio normado cuando es provisto de la aplicación $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

En este caso se dice que $\|\cdot\|$ es la norma asociada al producto interno $(\cdot\,,\ \cdot)$.

Ejemplo 3.3.2

Determinar la norma del vector de $\mathbb{R}^4$ $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solución.

$$\|b\| = \sqrt{(b, b)}$$

$$\|b\| = \sqrt{(-1)^1 + (3)^2 + (-2)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9 + 4 + 25}$$

$$= \sqrt{39}$$

$$\cong 6.2$$

Vectores Unitarios

Los vectores unitarios son una propiedad que involucra al vector y su norma. En forma general, un vector unitario es el que cumple la ecuación

$$\|v\| = 1$$

Vectores ortogonales

Sea un espacio vectorial V con producto interno. Se dice que dos vectores $u, v \in V$ son ortogonales si

$$(u, v) = 0$$

Ejemplo 3.3.3

Sean los vectores $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verificar si son ortogonales.

Solución.

Aplicar el producto escalar ordinario en cuartetos ordenados reales

$$
\begin{aligned}
u \cdot v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (1)(0) + (2)(2) + (-2)(2) + (0)(1) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

de manera que los vectores u y v son ortogonales.

Vectores ortonormales

Sea V un espacio vectorial con producto interno. Se dice que $B \subseteq V$ es ortonormal si y sólo si

i. B es ortogonal;

ii. $\forall u \in B: \quad \|u\| = 1.$

Bases ortogonales y bases ortonormales.

Definición 3.12 Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base para V. Se dice que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal si los vectores $v_1, \dots, v_n$ son ortogonales entre si, es decir si $v_i \cdot v_j = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq n$.

Se dice que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal si es una base ortogonal y $\|v_1\| = 1$ para $i = 1, \dots, n$.

Lema: Si los vectores $v_1, \dots, v_\mathrm{n}$ son ortonormales entre sí, entonces son linealmente independientes.

Matriz ortogonal

Definición 3.13 Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se llama ortogonal si A es invertible y

$$A^{-1} = A^t$$

Ejemplo 3.3.4

Sean los vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verificar si son ortogonales y ortonormales. En caso de que no sea ortonormal convertir la base ortogonal en ortonormal.

Solución.

Ortogonal

Para que sea ortogonal, el producto escalar debe ser 0.

$$e_1 e_2 = (1,2,1)(4,0,-4) = 4 - 4 = 0$$

$$e_1 e_3 = (1,2,1)(1,-1,1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$e_2 e_3 = (4,0,-4)(1,-1,1) = 4 - 4 = 0$$

Como los productos son 0, se cumple la condición de perpendicularidad.

Se concluye que es ortogonal.

Ortonormal

Se calcula la norma de los vectores

$$\|e_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

Basta que $\|e_1\| \neq 1$ para que se compruebe que no es ortonormal.

Convertir la base ortogonal en ortonormal

Se debe normalizar los 3 vectores, es decir, convirtiéndolos en unitarios. Para ello realizar

$$\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}}(1,2,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 0 + 4^2}}(4,0,-4) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(4,0,-4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\hat{e}_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}(1,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Por tanto, la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ es ortonormal.

TALLER 11

1. Expresar en cada caso, el vector u como combinación lineal de $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} (-2, 3, -3)$ y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   a. $u = \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \\ -17 \end{pmatrix}$ b. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Demostrar que el vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3. Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; z - t = -y + x \right\}$. Obtener una base para V y su dimensión.

4. Analiza si $M = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

5. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + t = 0 \,, 2x - 3y - z = 0 \right\}$. Obtener una base para W y su dimensión.

6. Calcula una base ortonormal del subespacio $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - 2y + z - t = 0 \right\}$.

7. Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$, a partir de la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

8. Sean los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verificar si son ortogonales y ortonormales.

En caso de que no sea ortonormal convertir la base ortogonal en ortonormal.

Capítulo IV: Valores y Vectores Propios

Valores y vectores propios de un operador lineal.

Operador Lineal

Sea V, W dos espacios vectoriales. Un operador lineal (transformación lineal) es una función $T: V \to W$ que cumple con las condiciones siguientes:

a) Aditiva: $\forall x, y \in V: T(x+y) = T(x) + T(y)$.

b) Homogeneidad: Sean $\alpha \in \mathbb{R}, x \in V$, entonces se cumple que: $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Las dos propiedades se pueden expresar como:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V: T(\alpha x + y) = \alpha \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y).$$

El primer miembro es combinación lineal de elemento de V. El segundo miembro es combinación lineal de elemento de W.

Valores y vectores propios

Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T si y sólo si

$$\exists u \in V \setminus \{0\}: \quad T(u) = \lambda u.$$

En este caso se dice que u es un vector propio de T asociado a λ.

Observación 12. (Valores y vectores propios de una matriz)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si existe un vector $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Au = \lambda u.$$

Teorema 4.1.1 (Subespacio propio)

Sean V un espacio vectorial $T: V \to V$ lineal y $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de T. Entonces

$$E_T(\lambda) = \{u \in V: \qquad T(u) = \lambda u\}$$

es un subespacio vectorial de V, denominado ***subespacio propio asociado a $\boldsymbol{\lambda}$***.

Teorema 4.1.2 (Caracterización de valores propios)

Sean $n \in \mathbb{N}$, V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con $\dim(V) = n$ y $T \in T(V)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i. λ *es un valor propio de* T.

ii. λ *es un valor propio de* A_T.

iii. *La aplicación* $T - \lambda Id_V$ *no es biyectiva.*

iv. *La matriz* $A_T - \lambda Id_n$ *no es invertible.*

v. $det(A_T - \lambda Id_n) = 0$.

Ejemplo 4.1.1

Dada la matriz

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar los vectores propios correspondientes al valor propio $\lambda = 4$.

Solución.

Los vectores que se buscan son los que verifican la ecuación matricial $(A - \lambda I_3)[v] = 0$. Así, se debe escribir la matriz $A - 4I_3$.

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación que da los vectores propios es

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Resolviendo, se sigue

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow 3 \cdot F_2]{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + 2 \cdot F_1 \\ F_2 \leftarrow (-3) \cdot F_2 \\ F_3 \leftarrow F_2 + 2 \cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftarrow (-2) \cdot F_1]{F_1 \leftarrow F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} 6x - 9y = 0 \\ y = y \\ -3y + 6z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = (3/2)y \\ y = y \\ z = (1/2)y \end{array}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3/2)y \\ y \\ (1/2)y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Como el valor propio es fracción, se le puede dar un valor a y para tener un vector con entradas enteras, en este caso se dará $y = 2$.

Por tanto un vector propio para $\boldsymbol{\lambda} = 4$ es

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Polinomio característico de una matriz.

Para poder obtener de forma sencilla los valores propios de una matriz se tiene el concepto de polinomio característico de una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, que es $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, y el de ecuación característica: $p_A(\lambda) = 0$.

Se observa que el polinomio característico de una matriz de orden $n \times n$ es de grado n. (García & Ramírez)

Proposición 4.1. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Entonces, las raíces de $p_A(\lambda)$ que están en $\mathbb{R}$ son los valores propios de A.

Ejemplo 4.1.2

Hallar los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución.

Se calcula el polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

$$p_A = det\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda) + (-2)(-3)(3) + (2)(3)(2) - (2)(6-\lambda)(3) - (1-\lambda)(-3)(2)$$

$$- (-2)(3)(4-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 40\lambda + 48$$

Ahora hallar las raíces del polinomio. Por lo tanto

$$p_A = -(\lambda - 4)^2(\lambda - 3)$$

Se concluye que 3, 4 son los valores propios de A.

Ejemplo 4.1.3

Calcular todos los vectores propios de la matriz A del Ejemplo 3.1.2.

Solución.

En el Ejemplo 3.1.2 se ha calculado los valores propios. Son $\lambda = 4$ (con multiplicidad 2; es decir, $(\lambda - 4)^2$ es un factor del polinomio característico) y $\lambda = 3$.

También hemos obtenido en el Ejemplo 3.1.2 el vector propio de valor propio 4. Falta hallar los vectores propios para el valor propio 3.

Se procede como en el Ejemplo 3.1.2

Los vectores que se buscan son los que verifican la ecuación matricial $(A - 3I_3)[v] = 0$

Así, se debe escribir la matriz $A - 3I_3$.

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación que da los vectores propios es

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Resolviendo, se sigue

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow F_3 + F_1]{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + F_1 \\ F_2 \leftarrow (-1)\cdot F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (-4)\cdot F_2]{F_2 \leftarrow F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftarrow (-4)\cdot F_1]{F_1 \leftarrow F_1 + 3\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} 8x - 12y = 0 \\ y = y \\ 4z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{3}{2}y \\ y = y \\ z = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3/2)y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el valor propio es fracción, se le puede dar un valor a y distinto de 0 para tener un vector con entradas enteras, en este caso se dará $y = 2$.

Por tanto el vector propio para $\lambda = 3$ es $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 4.1.4

El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ viene dado por

$$p_A = det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Por tanto, el único valor propio de A es 1.

Matrices semejantes

Definición 4.1 Se dice que dos matrices $A\ y\ B\ \in M_{nn}(\mathbb{R})$ son semejantes si existe una matriz $C \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tal que

$$B = C^{-1}AC.$$

Observación 13. Suponga que $B = C^{-1}AC$. Entonces, al multiplicar por la izquierda por C, se obtiene $CB = CC^{-1}AC$, o sea

$$CB = AC.$$

La ecuación $CB = AC$ asiduamente se toma como una definición alternativa de semejanza

Teorema 4.1.3

Si A, B son matrices semejantes de $n \times n$, entonces A y B tiene el mismo polinomio característico y, por consiguiente, tienen los mismos valores característicos.

Demostración

La presente demostración ha sido tomada de (Grossman & Flores, 2012).

Como A y B son matrices semejantes, $B = c^{-1}AC$ y

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= det(C^{-1} - \lambda I) = det[C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda I)C] \\ &= det[C^{-1}(AC - \lambda I)C] = det(C^{-1})\, det(A - \lambda I)\, det(C) \\ &= det(C^{-1})\, det(C)\, det(A - \lambda I) = det(C^{-1}C)\, det(A - \lambda I) \\ &= \det I\, det(A - \lambda I) = det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Esto significa que A y B tienen la misma ecuación característica, y como los valores característicos son raíces de la ecuación característica, tienen los mismos valores característicos.

Multiplicidad de un valor propio

La definición que a continuación se presenta ha sido tomada de (Mayorga, 2018).

Definición 4.2 Sean $n \in \mathbb{N}$, V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con $\dim(V) = n$ y $T: V \to V$ lineal. Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ son los m valores propios de T:

$$\rho(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{r_i},$$

donde

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$$

Para $i \in I_m$, se llama multiplicidad algebraica de λ_i al número r_i.

Para $i \in I_m$, se llama multiplicidad geométrica de λ_i al número $g_i = dim\big(E(\lambda_i)\big)$.

Observación 14. En el marco de la Definición de valores y vectores propios se debe tener presente que la multiplicidad geométrica no puede ser mayor que la multiplicidad algebraica, es decir

$$\forall i \in I_m: \quad dim\big(E(\lambda_1)\big) \leq r_i.$$

Por tanto,

$$r_i = 1 \implies g_i = dim\big(E(\lambda_1)\big) = 1.$$

Valores y vectores propios de una matriz simétrica.

Teorema 4.1.4

Sea $A = \big(a_{ij}\big) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Si λ_1, λ_2 son valores propios distintos de A, entonces los vectores propios x_1, x_2 correspondientes a λ_1 y λ_2 son ortogonales.

Demostración

Sean λ_1, λ_2 valores propios distintos de A y x_1, x_2 vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_2. Entonces

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1,$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2,$$

Luego,

$$\lambda_1 x_1^T x_2 = (\lambda_1 x_1)^T x_2 = (Ax_1)^T x_2 = x_1^T A^T x_2 = x_1^T A x_2 = x_1^T (\lambda_2 x_2) = \lambda_2 x_1^T x_2,$$

de donde

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x_1^T x_2 = 0,$$

como

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$

se sigue que

$$x_1^T x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 \perp x_2.$$

TALLER 12

1. Hallar los valores y vectores propios de la transformación lineal definida por $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

   $f(x,y) = (-x + 2y)$

2. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$calcule los valores y vectores propios correspondiente a cada matriz.

3. Encuentre los valores y vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Encuentre los valores y vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 6 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Diagonalización de matrices.

Definición 4.3 Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, se dice que A es diagonalizable si y solo si A es semejante a una matriz diagonal, es decir si existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible tal que $P^{-1}AP = D$ diagonal.

Es un caso especial de semejanza. Una matriz es diagonalizable cuando es semejante a una matriz diagonal.

Condiciones que una matriz debe cumplir para ser diagonalizable.

$A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Sean $v_1, v_2, \dots, v_n$ vectores propios linealmente independientes de la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se puede construir una matriz P cuyas columnas sean dichos vectores propios:

$$P = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n)$$

P es invertible porque sus columnas son linealmente independiente y por lo tanto tiene rango n $(\det(P) \neq 0)$. Puede demostrarse que: $P^{-1}AP = D$ donde D es una matriz diagonal cuyos elementos son los respectivos valores propios:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.1.5

Diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifique que los siguientes λ son sus valores propios:

$$\lambda = 4$$

$$\lambda = 1$$

Observación 15. Como la matriz tiene dos valores propios distintos se puede asegurar que la matriz es diagonalizable, debido a la propiedad que dice que los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.

Solución.

Los vectores propios son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Escribir la matriz P poniendo los vectores propios como columnas:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora efectuar el cálculo para obtener la matriz diagonal.

$$P^{-1}AP = D$$

Primero se calcula la matriz inversa de P. Para ello se puede utilizar el método que se deseé.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Luego se calcula el producto AP

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 3+1 & 3-2 \\ 2+2 & 2-4 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente se calcula $D = P^{-1}AP$.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2(4)}{3} + \frac{1(4)}{3} & \frac{2(1)}{3} + \frac{1(-2)}{3} \\ \frac{1(4)}{3} - \frac{1(4)}{3} & \frac{1(1)}{3} - \frac{1(-2)}{3} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora trabajemos con Python:

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
A = m.Matrix([
    [3, 1],
    [2, 2]
]) P = m.Matrix([
    [1, 1],
    [1, -2]
])
# FORMULA P^-1*AP = D
P_1 = af.invert_matrix_gauss(P)
AP = A*P
D = P_1 * AP
print('La inversa de la matriz P es:')
print(af.invert_matrix_gauss(P))
print('-'*30)
print(AP)
print('-'*30)
print('La matriz D es:')
print(D)
```

```
La inversa de la matriz P es:
[0.667, 0.333]
[0.333, -0.333]
------------------------------
[4.0, 1.0]
[4.0, -2.0]
------------------------------
La matriz D es:
[4.0, 0.0]
[0.0, 1.0]
```

Ejemplo 4.1.6

Diagonalizar la siguiente matriz si es posible:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución.

Se obtienen los valores propios:

$$\rho(B) = det(B - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - (2)(2)(3-\lambda)$$

$$= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) - 4(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)((1 - 2\lambda + \lambda^2) - 4)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

$$= -(\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

$$= -(\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$$

Los valores propios son:

$$\lambda = 3\ (doble)$$

$$\lambda = -1$$

Observación 16. Suponer que la existencia de un valor propio doble implica que la matriz no es diagonalizable suele ser un error que se comete a menudo.

Los vectores que se buscan son los que verifican la ecuación matricial $(B - \lambda I)(v) = 0$

Primero se procede a calcular $(B - (-1)I)$. (para $\lambda = -1$)

$$(B - (-1)I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora, los vectores propios deben satisfacer la ecuación $(B - \lambda I)(v) = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se aplica Gauss-Jordan para resolver. Escribir la matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Se procede a realizar las operaciones elementales entre filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (-1) \cdot F_2]{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow (1/4) \cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + 8 \cdot F_3 \\ F_2 \leftarrow (-1) \cdot F_2 \\ F_1 \leftarrow F_1 + 4 \cdot F_3 \\ F_1 \leftarrow (-1) \cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

De donde, se tiene que:

$$-2x - 2y = 0$$

$$y = y$$

$$z = 0$$

Por tanto

$$x = -y$$

$$y = y \ \ , y \in \mathbb{R}$$

$$z = 0.$$

Un vector propio para $\lambda = -1$ es

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ , para y=1}$$

Ahora escribir los vectores propios para $\lambda = 3$. Dejar para el lector la verificación de los vectores propios dados

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Una vez calculados los tres vectores propios linealmente independientes, escribir la matriz P, ubicando los vectores propios como columnas:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenida la matriz de vectores propios, se procede finalmente a Diagonalizar la matriz B. Es decir, se debe calcular la matriz resolver $P^{-1}BP = D$.

Se calcula la inversa de P. Escribir P^{-1}.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, se calcula el producto BP.

$$BP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BP = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente calcular la matriz $D = P^{-1}BP$

$$D = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora trabajemos con Python:

Se utiliza Python para resolver $D = P^{-1}BP$.

```
import MatrixLib.Matrix as m
import MatrixLib.AuxiliarFunctions as af
A = m.Matrix([
    [1, 2, 4],
    [2, 1, -4],
    [0, 0, 3]
])
#Matriz de vectores propios
P = m.Matrix([
    [1, 2, -1],
    [1, 0, 1],
    [0, 1, 0]
])
# FORMULA P^-1*AP = D
P_1 = af.invert_matrix_gauss(P)
AP = A*P
D = P_1 * AP
print('La inversa de la matriz P es:')
print(af.invert_matrix_gauss(P))
print('-'*30)
print(AP)
```

```
print('-'*30)
print('La matriz D es:')
print(D)
La inversa de la matriz P es:
[0.5, 0.5, -1.0]
[-0.0, -0.0, 1.0]
[-0.5, 0.5, 1.0]
------------------------------
[3.0, 6.0, 1.0]
[3.0, 0.0, -1.0]
[0.0, 3.0, 0.0]
------------------------------
La matriz D es:
[3.0, 0.0, 0.0]
[0.0, 3.0, 0.0]
[0.0, 0.0, -1.0]
```

TALLER 13

Diagonalizar las siguientes matrices. Utilice Python para resolver $D = P^{-1}BP$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 27 \\ -3 & -3 & 10 \\ -2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Capítulo V: Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

- En la actualidad el pensamiento computacional es considerado como una metodología en la educación del futuro, ya que permite a los estudiantes adquirir las habilidades suficientes para poder crear sus propias herramientas.
- Utilizando la herramienta Python para la enseñanza Algebra Lineal, permite optimizar el tiempo en la resolución de problemas y obtener los resultados de forma rápida a través del enfoque computacional.
- El presente manual permite que los estudiantes puedan analizar los problemas desde un enfoque computacional, permitiéndoles obtener experiencia práctica en programación para la resolución de los mismos.
- En la evaluación de criterios de expertos los mismos que son docentes con larga trayectoria en la enseñanza del Algebra Lineal, Programación y enseñanza para adultos dio como resultado un promedio de 67/72, lo que confirma que el presente manual es apto para la enseñanza del Algebra Lineal en Segundo de BGU.

Recomendaciones

- Fomentar la enseñanza de la Matemática a través de herramientas tecnológicas y de software que sean con licencia de código abierto, puesto que al no ser así, no estaría al alcance de todos los estudiantes.
- Promover el pensamiento computacional como una metodología en educación matemática desde los grados de Educación General Básica hasta el bachillerato, que les permita desarrollar nuevas habilidades en la resolución de problemas.

- Considerando que hoy en día el avance de las tecnologías de la comunicación y la exigencia de una mayor productividad, demandan capacitar a los docentes de Matemática sobre el manejo de herramientas tecnológicas de licencia libre como apoyo en la enseñanza de la asignatura.

Bibliografía

Barrueto, L. (20 de Enero de 2010). *Maestros del Web. Editoriales.* Recuperado el 12 de Julio de 2018, de Maestros del Web. Editoriales: http://www.maestrosdelweb.com/introspectiva-guido-van-rossum-python/

Denning, P. (2017). Remaining Trouble Spots with Computational Thinking. *Communications of ACM*, 35.

García, M., & Ramírez, T. (s.f.). Introducción al Algebra Lineal. En M. García, & R. T., *Introducción al Algebra Lineal.* Proyecto OCW de la UPV/EHU.

Grossman, S., & Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal, séptima edición.* Ciudad de México: McGRAW-HILL.

Mayorga, J. (2018). *Álgebra Lineal para Ciencias e Ingeniería.*

Núñez, J., & Sandoval, I. (2015). *Algebra Lineal.* Quito.

Sintes, B. (16 de Febrero de 2018). *Entrada por teclado.* Recuperado el 16 de Julio de 2018, de http://www.mclibre.org/consultar/python/lecciones/python-entrada-teclado.html

Wing, J. (2006). Computational Thinking. *Communications of ACM*, 33.