

ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO

DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

PROYECTO DE GRADO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO
EN INGENIERÍA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES
DIGITALES PARA EL LEVITADOR ELECTROMAGNÉTICO
MLS

SANTIAGO FABRICIO VILLAGÓMEZ CHOLOTA

Sangolquí - Ecuador

2011

RESUMEN

El presente proyecto trata de la descripción del diseño e implementación de controladores digitales para el sistema de levitación magnética “MLS”, que se utiliza en el laboratorio de servomecanismos de la Escuela Politécnica del Ejército como un modelo para el estudio de sistemas de control. El diseño de los controladores se realizó aplicando técnicas “clásicas” y “modernas”. Para las técnicas clásicas se utilizó el método de diseño por el lugar geométrico de las raíces en el plano s y mediante emulación conseguir el controlador digital deseado, además se realizó en diseño por el método del lugar geométrico de las raíces en el plano z ; consiguiendo controladores tipo PD y PID, además que se explica por qué los controladores tipo P y PI no son viables para el control del MLS. Dentro de las técnicas modernas se utilizó el método de ubicación de polos por realimentación completa de estados.

El proyecto se lo realizó con Matlab, que es el software establecido por INTECO para la identificación de los parámetros que definen el MLS y además debido a que provee las herramientas necesarias para el análisis, diseño e implementación de los diferentes controladores mediante SIMULINK.

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente proyecto de grado titulado: “DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES DIGITALES PARA EL LEVITADOR ELECTROMAGNÉTICO MLS ha sido desarrollado en su totalidad por el señor SANTIAGO FABRICIO VILLAGÓMEZ CHOLOTA con CI: 1803891900, bajo nuestra dirección.

Atentamente

Ing. Víctor Proaño

DIRECTOR

Ing. Edwin Aguilar

CODIRECTOR

AGRADECIMIENTO

Especial agradecimiento a Dios por la oportunidad que me da de vivir cada día y disfrutar de su maravillosa creación. Él es el principio y el fin de todo lo que tengo y soy.

A mis padres, José Ricardo y Ruth Cumandá, por su enorme esfuerzo y gran ejemplo para cumplir un anhelo, una nueva meta de mi vida.

A mis tutores el Ing. Víctor Proaño e Ing. Edwin Aguilar por su guía y colaboración para llevar a cabo este trabajo.

A mis compañeros y amigos, por el convivir y compartir el día a día a lo largo de mi vida universitaria.

A toda mi familia por depositar en mí su confianza y de una u otra forma expresarme su apoyo para alcanzar este objetivo.

Me faltaría palabras y espacio para nombrar a todos quienes han estado a mi lado y forman parte de mi vida, a todos gracias por estar ahí.

DEDICATORIA

A mi papi y mami, Ricardo y Ruth, su gran esfuerzo, espero sea gratificado con el logro de esta meta alcanzada que no es solo mía es especialmente suya.

A mis hermanos Silvia y Diego por su consejo y ejemplo como profesionales, demostrando que se puede lograr lo que uno propone.

A mis amigos, mis hermanos, quienes desinteresadamente me brindan su apoyo y consejo para seguir adelante.

PRÓLOGO

La ESPE ha realizado la adquisición de varios sistemas de control automático. El levitador magnético es uno de estos sistemas. Es un laboratorio completo de sistemas de control listo para experimentar, es una herramienta ideal para la demostración del fenómeno de la levitación electromagnética, este es un problema clásico de control. El LMS tiene sistemas de control implementados como PID y un LQ, el problema de los mismos es que su proceso de diseño no se encuentra documentado.

El diseño de un controlador digital puede realizarse a partir de un modelo matemático que describa a la planta. Este diseño se lo puede llevar a cabo en tiempo continuo para a partir del controlador obtenido encontrar su equivalente en el tiempo discreto o realizando el diseño enteramente en tiempo discreto. Los métodos para diseñar el controlador en el tiempo continuo pueden ser varios y resulta importante establecer el método más conveniente de acuerdo a las características propias del sistema a tratarse.

El diseño de controladores por métodos clásicos de control, específicamente para el MLS se lo realiza por el método del lugar geométrico de las raíces a partir de la función de transferencia en s o z ; que permite observar y estimar la respuesta del sistema de manera gráfica basándose en la respuesta que tendrían los polos a lazo cerrado y además analizar un parámetro muy importante, la estabilidad.

El diseño en el espacio de estados, que es una *técnica avanzada* de control, parte del modelo constituido por las ecuaciones de estado, que proporcionan información de la planta relacionando los estados propiamente dichos y sus derivadas. El MLS es entonces tratado como un sistema SIMO, donde son medibles sus estados: posición, velocidad y corriente, y que permiten realizar el control estableciendo una formulación matricial de las ecuaciones de estado para aplicar los métodos de diseño de controladores, en este caso el de realimentación completa de estados.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1

DESCRIPCIÓN DEL LEVITADOR MAGNÉTICO

1.1.	Generalidades	1
1.2.	Modelo matemático del MLS	1
1.2.1.	Modelo continuo no lineal.....	2
1.2.2.	Obtención de los parámetros del MLS.....	4
	• Sensor.....	4
	• Actuador en modo estático.....	5
	• Control Mínimo.....	8
	• Actuador en modo dinámico	12
1.2.3.	Modelo continuo lineal.....	16

CAPITULO 2

TECNOLOGÍAS DE CONTROL DIGITAL

2.1.	Método por emulación de un controlador continuo.....	18
2.1.1.	Lugar de las raíces en el plano S.	18
2.1.2.	Efecto de la adición de polos y ceros.	24
2.1.3.	Compensador de adelanto-atraso.....	24
	• Compensador de adelanto.	24
	• Compensador de atraso	25
2.1.4.	Controladores de la familia PID	26
	• Controlador P	26
	• Controlador PI.....	27
	• Controlador PD	28

• Controlador PID	29
2.1.5. Equivalentes discretos	29
• Diseño del equivalente discreto mediante integración numérica	30
• Equivalente PID mediante regla de integración trapezoidal o Tustin....	35
• Equivalente PID mediante regla de integración hacia atrás	36
2.1.6. Selección de la frecuencia de muestreo	38
2.2. Método por el Lugar de las raíces en el plano z	40
2.3. Espacio de estado.....	43
2.3.1. Ubicación de polos	46
2.3.2. Seguimiento a la entrada de referencia.....	47

CAPÍTULO 3

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADORES

3.1. Problema de realimentación	52
3.2. Controlador pid digital por emulación del sistema continuo.....	54
3.2.1. Controlador P y PI.....	55
3.2.2. Controlador PD.....	62
3.2.3. Controlador PID	74
3.3. Controlador pid digital utilizando el método del lugar de las raíces en el plano z	83
3.3.1. Controlador PID	84
3.4. Controlador digital en el espacio de estado	88
3.4.1. Controlador por realimentación completa de estados	88

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

4.1. Controlador PD.....	91
--------------------------	----

4.1.1.	Gráficas de implementación	92
4.2.	Controlador PID discreto por integración numérica.....	94
4.2.1.	Gráficas de implementación	95
4.3.	Controlador PID discreto en el plano z	97
4.3.1.	Gráficas de implementación	98
4.4.	Controlador por realimentación completa de estados.....	100
4.4.1.	Gráficas de implementación	100

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1.	Conclusiones.....	104
5.2.	Recomendaciones	107

ANEXOS.....	108
--------------------	------------

BIBLIOGRAFÍA.....	121
--------------------------	------------

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO 1

DESCRIPCIÓN DEL LEVITADOR MAGNÉTICO

Tabla. 1.1. Tabla de parámetros a determinar del MLS	3
Tabla. 1.2. Sensor fotoeléctrico. Relación voltaje vs distancia.....	4
Tabla. 1.3. Constantes del actuador en modo estático para diferentes entradas rampa	7
Tabla. 1.4. Promedio de constantes del actuador en modo estático u_{MIN} , x_{3MIN} , k_i , c_i	7
Tabla. 1.5. Valores de control mínimo para cinco distancias diferentes. x_1 y x_3	9
Tabla. 1.6. Constantes F_{emp1} y F_{emp2} en control mínimo	11
Tabla. 1.7. Constantes del actuador en modo dinámico k_i , f_i	13
Tabla. 1.8. Promedio de constantes del actuador en modo dinámico k_i , f_i	13
Tabla. 1.9. Constantes del actuador en modo dinámico f_{iP1} , f_{iP2}	14
Tabla. 1.10. Promedio de constantes del actuador en modo dinámico f_{1P1} f_{iP2}	15
Tabla. 1.11. Tabla de parámetros del modelo matemático	15

CAPITULO 2

TECNOLOGÍAS DE CONTROL DIGITAL

No existen tablas.

CAPÍTULO 3

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADORES

No existen tablas.

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

No existen tablas.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

No existen tablas.

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

DESCRIPCIÓN DEL LEVITADOR MAGNÉTICO

Figura. 1.1. Respuesta del sensor. Voltaje vs Distancia	5
Figura. 1.2. Modelo para análisis del actuador en modo estático	6
Figura. 1.3. Respuesta del actuador en modo estático para una entrada rampa.....	6
Figura. 1.4. Modelo para el análisis de control mínimo.....	8
Figura. 1.5. Análisis de control mínimo.....	9
Figura. 1.6. Modelo para análisis del actuador en modo dinámico.....	12

CAPITULO 2

TECNOLOGÍAS DE CONTROL DIGITAL

Figura. 2.1. Respuesta de acuerdo a la ubicación de polos en el plano s.....	19
Figura. 2.2. Sistema realimentado.....	20
Figura. 2.3. Ilustración del criterio del ángulo.....	21
Figura. 2.4. Diagrama de bloques familia de controladores PID	26

Figura. 2.5. Esquema de las tres formas de área bajo la curva desde kT hasta $kT-T$	32
Figura. 2.6. Mapeo del plano-s estable hacia el plano-z.	35
Figura. 2.7. Forma general de un sistema de control digital.	40
Figura. 2.8. Respuesta de acuerdo a la ubicación de polos en el plano z.....	42
Figura. 2.9. Contornos constantes de ζ y ω_n en el plano z	43
Figura. 2.10. Modelo de discretización en espacio de estado	44
Figura. 2.11. Estructura para introducir una referencia	48
Figura. 2.12. Esquema de bloques para introducir una entrada de referencia	49
Figura. 2.13. Esquema para introducir una referencia	50

CAPÍTULO 3

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADORES

Figura. 3.1. Diagrama de realimentación negativa	53
Figura. 3.2. Diagrama de realimentación positiva	54
Figura. 3.3. Lugar de las raíces para el MLS	57

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

Figura. 4.1. Modelo real del controlador PD	91
Figura. 4.2. Controlador PD. $r=0.008[m]$	92
Figura. 4.3. Controlador PD. $r=0.008+0.002*\text{sen}(\pi*t)$	93
Figura. 4.4. Controlador PD. $r=0.008[m]$ +señal cuadrada de $A=0.002[m]$, $f=0.5$ [Hz]	93
Figura. 4.5. Modelo real del controlador PID	94
Figura. 4.6. Controlador PID. $r=0.008[m]$	95
Figura. 4.7. Controlador PID. $r=0.008+0.003*\text{sen}(\pi*t)$	96
Figura. 4.8. Controlador PID. $r=0.008+0.003*\text{sen}(\pi/2*t)$	96
Figura. 4.9. Modelo real del controlador PID discreto	97
Figura. 4.10. Controlador PID discreto. $r=0.008[m]$	98
Figura. 4.11. Controlador PID. $r=0.008+0.003*\text{sen}(\pi/2*t)$	99
Figura. 4.12. Controlador discreto PID. $r=0.008[m]$ +señal cuadrada de $A=0.002$, $f=0.4$ [Hz].....	99

Figura. 4.13. Modelo real del controlador por realimentación completa de estados	100
Figura. 4.14. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008[m]$	100
Figura. 4.15. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008 + 0.002*\text{sen}(\pi*t)$	101
Figura. 4.16. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008[m]$	102
Figura. 4.17. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008 + 0.002*\text{sen}(\pi*t)$	102
Figura. 4.18. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008[m]$	103
Figura. 4.19. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008 + 0.002*\text{sen}(\pi*t)$	103

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

No existen figuras.

CAPÍTULO 1

DESCRIPCIÓN DEL LEVITADOR MAGNÉTICO

1.1. GENERALIDADES

El sistema de levitación magnética (MLS por sus siglas en inglés) es un sistema que permite estudiar el fenómeno de levitación magnética y en este caso también el estudio de los sistemas de control.

Es un problema de control clásico usado en aplicaciones prácticas como en trenes de levitación magnética en el cual se aplica soluciones digitales como análogas. El MLS es un sistema dinámico de lazo abierto, no lineal, inestable y variante en el tiempo. El principio básico de operación consiste en aplicar un voltaje a un electroimán para mantener un objeto levitando (esfera metálica), cuya posición es determinada por un sensor.

La levitación del objeto requiere de un controlador en tiempo real. El equilibrio de la fuerza gravitacional y de la electromagnética ha de ser mantenida por el controlador a fin de mantener la esfera a la distancia deseada del electroimán.

El sistema de levitación magnética permite el diseño y simulación de controladores mediante *Matlab*, que siendo un software matemático provee de las herramientas necesarias para el tratamiento de sistemas de control, entre otras aplicaciones.

1.2. MODELO MATEMÁTICO DEL MLS

El MLS posee un modelo que puede ser tratado en *Matlab*, dentro del entorno de texto como un modelo SISO (single-input, single-output) o dentro de *Simulink* como un

modelo SIMO (single-input, multiple-output), para lo cual se necesitan establecer los parámetros que definen a dicho modelo obteniéndolos de la planta física directamente.

Las pruebas realizadas sobre la planta permiten establecer las características del sensor y actuador básicamente; estas se llevan a cabo con las herramientas de identificación propias del sistema.

1.2.1. Modelo continuo no lineal

Las ecuaciones matemáticas que definen a la planta son:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{Ec. 1.1}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{F_{em}}{m} + g \quad \text{Ec. 1.2}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{f_i(x_1)}(k_i u + c_i - x_3) \quad \text{Ec. 1.3}$$

$$F_{em} = x_3^2 \frac{F_{emP1}}{F_{emP2}} \exp\left(-\frac{x_1}{F_{emP2}}\right) \quad \text{Ec. 1.4}$$

$$f_i(x_1) = \frac{f_{iP1}}{f_{iP2}} \exp\left(-\frac{x_1}{f_{iP2}}\right) \quad \text{Ec. 1.5}$$

De las cinco ecuaciones previas se tiene:

x_1 representa la posición [m] de la esfera suspendida, donde:

$$x_1 \in [0, 0.016]$$

x_2 representa la velocidad [m/s] de la esfera suspendida, donde:

$$x_2 \in \mathbb{R}$$

x_3 representa la corriente [A] del electroimán, donde:

$$x_3 \in [x_{3MIN}, 2.38]$$

u representa la señal de control hacia la planta, donde:

$$u \in [u_{MIN}, 1]$$

Los otros términos en las ecuaciones planteadas corresponden a constantes propias del sistema tratado, por lo cual es necesaria su identificación. La siguiente tabla muestra los parámetros que definen al sistema:

Tabla. 1.1. Tabla de parámetros a determinar del MLS

Parámetros	Valores	Unidades
m	0.0448	[Kg]
g	9.78	[m/s ²]
F_{em}	Función de x_1 y x_3	[N]
F_{emP1}	Por determinar	[H]
F_{emP2}	Por determinar	[m]
$f_i(x_1)$	Por determinar	[s]
f_{iP1}	Por determinar	[m · s]
f_{iP2}	Por determinar	[m]
c_i	Por determinar	[A]
k_i	Por determinar	[A]
x_{3MIN}	Por determinar	[A]
u_{MIN}	Por determinar	-

1.2.2. Obtención de los parámetros del MLS.

Los parámetros que se van a ser determinados a fin de definir el modelo del levitador magnético son F_{emP1} , F_{emP2} , $f_i(x_1)$, f_{iP1} , f_{iP2} , c_i , k_i , x_{3MIN} , u_{MIN} .

La adquisición de los parámetros expuestos en la Tabla. 1.1, requiere del análisis de la planta y su comportamiento tomando en cuenta en primer lugar al sensor, actuador en modo estático, control mínimo y actuador en modo dinámico. A continuación se realiza el tratamiento para cada uno de ellos.

- **Sensor**

La distancia de la esfera hacia el electroimán es medida a través de un sensor fotoeléctrico, el mismo que convierte la posición en una señal de voltaje para así ser utilizada internamente. El comportamiento del sensor es factor importante dentro del funcionamiento del MLS.

Para establecer la respuesta del sensor se toma medidas de longitud, sujetando la esfera a un soporte en forma de tornillo que permite cambiar la distancia desde la base del electroimán, 0mm, hasta unos 16 mm que es la variación máxima de distancia que permite el MLS. Se toman 27 medidas variando la posición con media vuelta del tornillo que representa un cambio de 0.7 mm, y se registran los valores de voltaje cada vez, con lo cual se tiene:

Tabla. 1.2. Sensor fotoeléctrico. Relación voltaje vs distancia

#	Distancia (m)	Voltaje (V)	#	Distancia (m)	Voltaje (V)	#	Distancia (m)	Voltaje (V)
1	0.0000	9.0278	10	0.0063	7.6991	19	0.0126	3.1314
2	0.0007	9.0132	11	0.0070	7.1666	20	0.0133	2.8188
3	0.0014	8.9936	12	0.0077	6.5901	21	0.0140	2.5403
4	0.0021	9.0034	13	0.0084	5.9990	22	0.0147	2.3302

5	0.0028	8.9741	14	0.0091	5.4128	23	0.0154	2.1593
6	0.0035	8.8911	15	0.0098	4.8803	24	0.0161	2.0420
7	0.0042	8.7298	16	0.0105	4.3967	25	0.0168	1.9638
8	0.0049	8.4954	17	0.0112	3.9033	26	0.0175	1.9101
9	0.0056	8.1485	18	0.0119	3.4978	27	0.0182	1.8906

La forma de respuesta de posición frente a voltaje para el sensor es no lineal como se muestra en la siguiente figura:

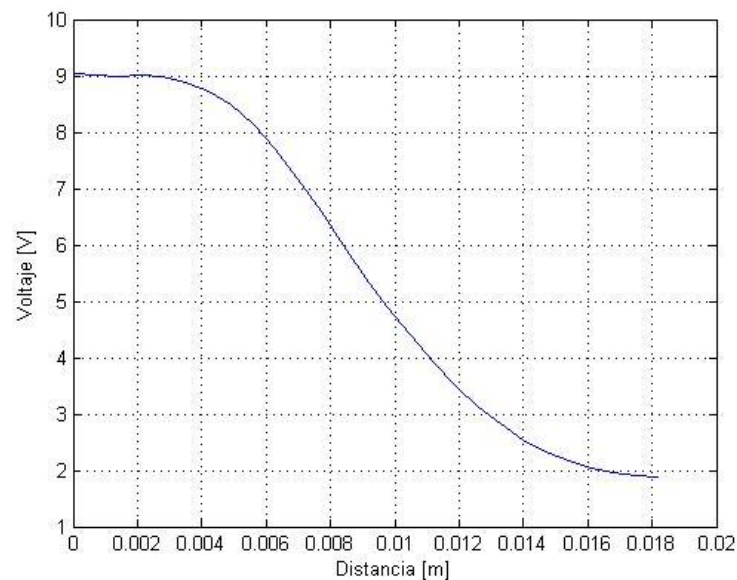


Figura. 1.1. Respuesta del sensor. Voltaje vs Distancia

- **Actuador en modo estático**

El análisis del actuador en modo estático permite establecer las constantes c_i , k_i , x_{3MIN} y u_{MIN} como se detalla a continuación. Estas constantes permitirían establecer la respuesta que tiene el actuador ante una entrada constante como señal de control. Se debe tomar en cuenta que la esfera no está presente pues esta modifica el comportamiento del actuador.

Se construye el modelo en *Simulink*:

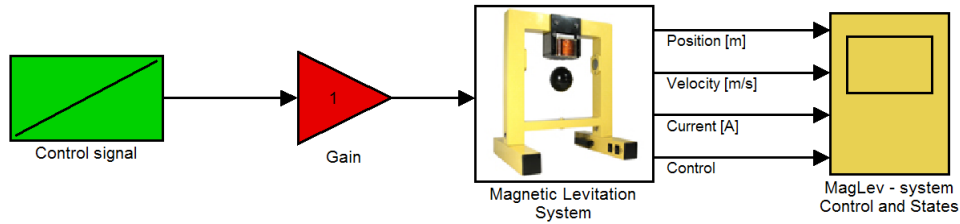


Figura. 1.2. Modelo para análisis del actuador en modo estático

Con este esquema se aplica una señal de control tipo rampa con lo cual se esperaría una respuesta igualmente lineal. El cambio en la ganancia implica que el valor final que toma la señal de control varíe; esta señal de control es aplicada durante 10 seg, de lo cual se obtienen los diferentes valores de corriente.

La Figura. 1.3 muestra la respuesta ante una entrada rampa con pendiente 1/10 y ganancia de 1.0.

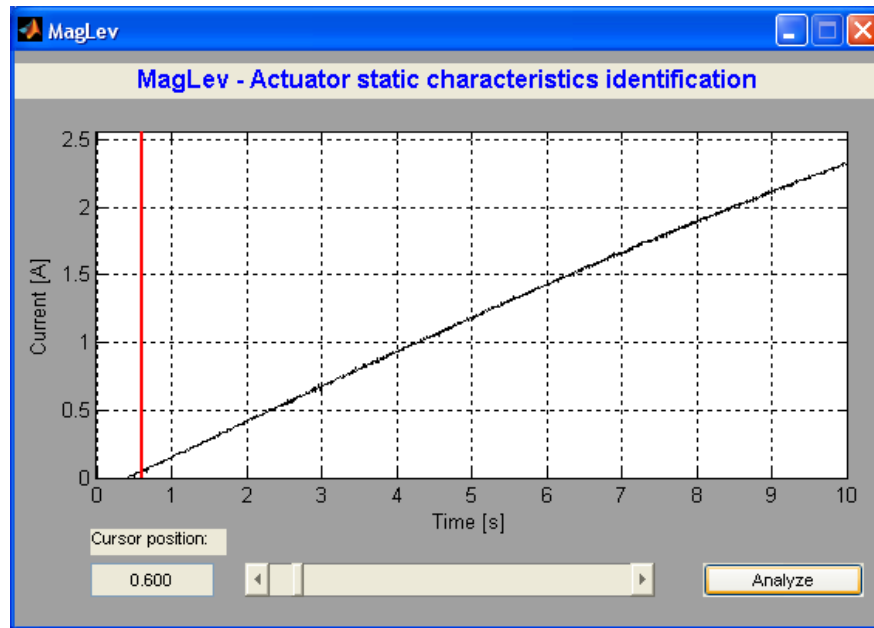


Figura. 1.3. Respuesta del actuador en modo estático para una entrada rampa.

En el gráfico se observa una parte no lineal al inicio trazo y otra donde la respuesta si lo es, por lo cual se necesita realizar una regresión a fin de obtener una función definida por una ecuación de primer orden.

Se realizan diez pruebas para determinar de manera más precisa las constantes que definen la respuesta del actuador ante la entrada de control. La aproximación lineal para obtener las constantes se realizan con la ayuda de las herramientas propias del MLS.

Tabla. 1.3. Constantes del actuador en modo estático para diferentes entradas rampa

Ganancia	u_{MIN}	x_{3MIN} [A]	k_i [A]	c_i [A]
0.1	0.04094	-0.04025	2.55640	-0.10164
0.2	0.04188	-0.03918	2.60069	-0.10518
0.3	0.04182	-0.03927	2.60918	-0.10607
0.4	0.04376	-0.03771	2.59731	-0.10467
0.5	0.04470	-0.03697	2.57991	-0.10174
0.6	0.04764	-0.03388	2.55937	-0.09770
0.7	0.04858	-0.03323	2.53586	-0.09204
0.8	0.04752	-0.03517	2.50775	-0.08401
0.9	0.05346	-0.02876	2.47713	-0.07376
1.0	0.05940	-0.02156	2.44185	-0.06084

Se puede observar que a pesar de que la respuesta supone las mismas constantes en la parte lineal así como para las constantes de control y corriente mínimos, esto no es así, es por eso que se realiza el promedio de cada una de estas constantes.

Tabla. 1.4. Promedio de constantes del actuador en modo estático u_{MIN} , x_{3MIN} , k_i , c_i

	u_{MIN}	x_{3MIN} [A]	k_i [A]	c_i [A]
Promedio	0.04697	-0.03460	2.54655	-0.09276

La ecuación de corriente del actuador en modo estático sería:

$$i(u) = k_i u + c_i$$

- **Control Mínimo**

A continuación se analiza el movimiento forzado de la esfera desde el soporte hacia el electroimán, en oposición de la fuerza de gravedad, de lo cual se pretende obtener la corriente necesaria x_3 para elevar la esfera hacia el electroimán y la distancia x_1 a la cual ocurre este movimiento.

El modelo para la adquisición de estos datos es el mismo que para el modo estático.

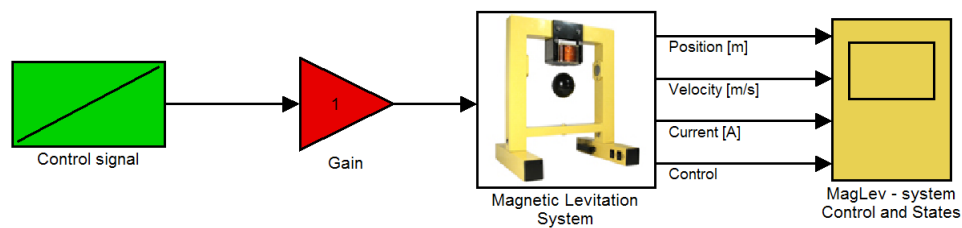


Figura. 1.4. Modelo para el análisis de control mínimo.

Este experimento permitirá calcular los valores de F_{emP1} y F_{emP2} a partir de los datos de corriente y posición como se mostrará posteriormente. De igual manera que en el experimento de la sección previa, los valores de posición y corriente son obtenidos con las herramientas propias del MLS.

La Figura. 1.5 muestra el instante en que el movimiento forzado toma lugar ante la entrada rampa de pendiente 1/10 aplicada durante 10 segundos.

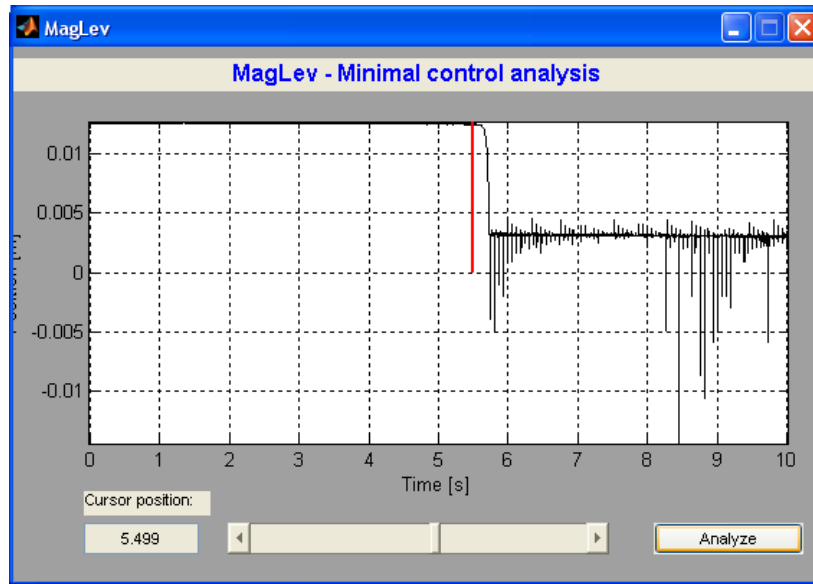


Figura. 1.5. Análisis de control mínimo.

Para obtener las constantes en las cuales ocurre el movimiento, se analiza el instante justo antes de que la distancia entre la esfera y el electroimán empieza rápidamente a decrecer hasta cero.

Se realiza el experimento para 7 distancias diferentes obteniendo los siguientes resultados:

Tabla. 1.5. Valores de control mínimo para cinco distancias diferentes. x_1 y x_3

#	Distancia x_1 [m]	Corriente x_3 [A]
1	0.00413	0.20978
2	0.00563	0.23978
3	0.00700	0.26250
4	0.00835	0.31118
5	0.00974	0.33368
6	0.01112	0.36893
7	0.01252	0.41228

De la Ec. 1.4 existen los parámetros F_{emP1} y F_{emP2} que pueden ser determinados conociendo los otros tres parámetros de la siguiente manera:

De la Tabla. 1.5 se toman las constantes de la primera medición y se reemplazan en la Ec. 1.4:

$$F_{em} = x_3^2 \frac{F_{emP1}}{F_{emP2}} \exp\left(-\frac{x_1}{F_{emP2}}\right)$$

$$F_{emP1} = \frac{F_{em1} \cdot F_{emP2}}{x_{31}^2 \cdot \exp\left(-\frac{x_{11}}{F_{emP2}}\right)} \quad \text{Ec. 1.6}$$

Se procede de igual manera para las constantes de la segunda medición:

$$F_{emP1} = \frac{F_{em2} \cdot F_{emP2}}{x_{32}^2 \cdot \exp\left(-\frac{x_{12}}{F_{emP2}}\right)} \quad \text{Ec. 1.7}$$

Los valores de x_{11} y x_{31} corresponden a los datos de posición y corriente para la primera medición, y los valores de x_{12} , x_{32} corresponden a los datos de posición y corriente para la segunda medición.

Igualando las Ec. 1.6 y Ec. 1.7 se tiene:

$$\frac{F_{em1} \cdot F_{emP2}}{x_{31}^2 \cdot \exp\left(-\frac{x_{11}}{F_{emP2}}\right)} = \frac{F_{em2} \cdot F_{emP2}}{x_{32}^2 \cdot \exp\left(-\frac{x_{12}}{F_{emP2}}\right)}$$

Ya que la F_{em} necesaria para levantar la esfera es la misma sin importar la distancia a la cual se encuentre del electroimán, se tiene:

$$F_{emP2} = \frac{x_{12} - x_{11}}{2 \cdot \ln\left(\frac{x_{32}}{x_{31}}\right)} \quad \text{Ec. 1.8}$$

Por tanto, para obtener el valor de F_{emP1} se reemplaza el valor obtenido mediante la Ec. 1.8 en las ecuaciones Ec. 1.6 o Ec. 1.7, obteniendo así el valor buscado.

Para obtener el valor de las constantes para el resto de valores de la Tabla. 1.5, se aplica las mismas formulas tomando en cuenta los nuevos valores tanto para x_1 y x_3 .

Los valores para F_{emP1} y F_{emP2} se muestran en la siguiente tabla:

$F_{emP1} [H]$	$F_{emP2} [m]$
0.1170168	0.0056020
0.1216147	0.0075345
0.1469374	0.0039899
0.1044882	0.0099080
0.1116414	0.0069061
0.1190979	0.0062873

Para obtener un valor más adecuado de estas constantes se realiza un promedio de las mismas, obteniendo:

Tabla. 1.6. Constantes F_{emP1} y F_{emP2} en control mínimo

$F_{emP1} [H]$	$F_{emP2} [m]$
0.1201327	0.0067046

- **Actuador en modo dinámico**

Ahora se analiza las características dinámicas del electroimán, debido a que la presencia de la esfera en movimiento genera una fuerza electromotriz que disminuye la corriente en la bobina del electroimán.

Este experimento en que se ingresa una entrada pulso, permite establecer las constantes x_1 , k_i , f_i , que son valores que definirán la respuesta del actuador ante la presencia de la esfera metálica, que modifica el comportamiento del electroimán.

El modelo a utilizarse es el siguiente:

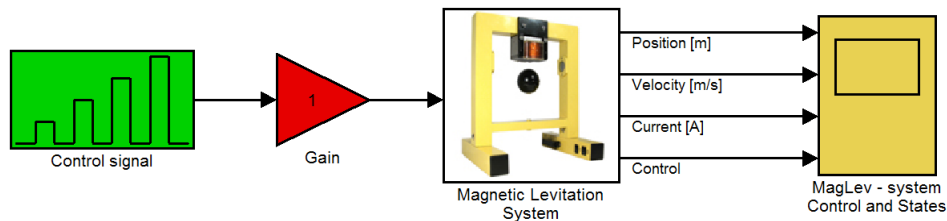


Figura. 1.6. Modelo para análisis del actuador en modo dinámico

Se ingresa una entrada pulso con diferentes amplitudes como se muestra en la Figura. 1.6 para analizar las variación de respuesta del actuador. Así se realiza un ajuste continuo de las constantes con la ayuda de la herramienta de análisis propia del MLS para una mejor optimización.

El experimento se lleva a cabo con presencia de la esfera en diferentes posiciones, obteniendo los siguientes resultados:

Tabla. 1.7. Constantes del actuador en modo dinámico k_i, f_i

#	x_1 [m]	k_i [A]	f_i [s]
1	0.00425	2.37638	0.03282
2	0.00565	2.35717	0.03219
3	0.00705	2.36273	0.03140
4	0.00845	2.35534	0.03086
5	0.00985	2.31507	0.02397
6	0.01125	2.32419	0.02821
7	0.01315	2.33345	0.02973

A fin de obtener valor más apropiado para el correcto funcionamiento del MLS, se promedian los valores obtenidos en la Tabla. 1.7.

Tabla. 1.8. Promedio de constantes del actuador en modo dinámico k_i, f_i

k_i [A]	f_i [s]
2.3463	0.0299

Una vez realizadas las nuevas pruebas sobre el MLS ha arrojado otro valor para k_i . Por lo cual es preciso obtener la media con el valor obtenido anteriormente y mostrada en la Tabla. 1.4, para obtener un valor apropiado que se ajuste al desempeño y respuesta del sistema, de lo cual se tiene:

$$k_i = 2.44643$$

Ahora, en la Ec. 1.5, se observa que los parámetros f_{iP1} y f_{iP2} están en función de las constantes de la Tabla. 1.7, con lo cual se plantea un sistema de ecuaciones, tomando a los datos obtenidos de dos en dos, por tanto para el primer dato:

$$f_i(x_{11}) = \frac{f_{iP1}}{f_{iP2}} \exp\left(-\frac{x_{11}}{f_{iP2}}\right)$$

$$f_{iP1} = \frac{f_i(x_{11}) \cdot f_{iP2}}{\exp\left(-\frac{x_{11}}{f_{iP2}}\right)} \quad \text{Ec. 1.9}$$

E igualmente para el segundo dato:

$$f_{iP1} = \frac{f_i(x_{12}) \cdot f_{iP2}}{\exp\left(-\frac{x_{12}}{f_{iP2}}\right)} \quad \text{Ec. 1.10}$$

Con las Ec. 1.9 y Ec. 1.10, se obtiene:

$$f_{iP2} = \frac{x_{12} - x_{11}}{\ln\left(\frac{f_i(x_{11})}{f_i(x_{12})}\right)} \quad \text{Ec. 1.11}$$

Con los valores obtenidos mediante la Ec. 1.11, se reemplaza en la Ec. 1.9 o Ec. 1.10, para obtener f_{iP1} . Los valores para f_{iP1} y f_{iP2} son:

Tabla. 1.9. Constantes del actuador en modo dinámico f_{iP1} , f_{iP2}

$f_{iP1} [m \cdot s]$	$f_{iP2} [m]$
0.00253	0.02774
0.00201	0.05640
0.00275	0.08022
0.00079	0.00555
-0.00007	-0.00861
-0.00075	-0.03620

Igualmente para obtener un valor acertado de estas constantes, se realiza un promedio de los valores de la Tabla. 1.9.

Tabla. 1.10. Promedio de constantes del actuador en modo dinámico f_{iP1} , f_{iP2}

f_{iP1} [$m \cdot s$]	f_{iP2} [m]
0.00121	0.02835

Una vez se han realizado los experimentos, la tabla de parámetros del modelo MLS queda:

Tabla. 1.11. Tabla de parámetros del modelo matemático

Parámetros	Valores	Unidades
m	0.0448	[Kg]
g	9.78	[m/s^2]
F_{em}	Función de x_1 y x_3	[N]
F_{emP1}	0.120133	[H]
F_{emP2}	0.006705	[m]
$f_i(x_1)$	Función de x_1	[s]
f_{iP1}	0.00121	[$m \cdot s$]
f_{iP2}	0.02835	[m]
c_i	-0.09276	[A]
k_i	2.44643	[A]
x_{3MIN}	-0.03460	[A]
u_{MIN}	0.04697	-

1.2.3. Modelo continuo lineal

El modelo del MLS visto es un modelo altamente no lineal, sin embargo puede ser aproximado por un modelo lineal si se considera que su operación se la realiza en un pequeño rango de operación llamado punto de equilibrio. Es así que el modelo puede ser descrito por las ecuaciones diferenciales que siguen la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{Ec. 1.12}$$

$$y = Cx \quad \text{Ec. 1.13}$$

Las matrices A, B y C, se definen como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Donde:

$$a_{2,1} = \frac{x_3^2 F_{emP1}}{m F_{emP2}^2} \exp\left(-\frac{x_1}{F_{emP2}}\right)$$

$$a_{2,3} = -\frac{2 \cdot x_3 F_{emP1}}{m F_{emP2}} \exp\left(-\frac{x_1}{F_{emP2}}\right)$$

$$a_{3,1} = -(k_i u + c_i - x_3) \left(-\frac{f_{iP1}}{f_{iP2}^2} \exp\left(-\frac{x_1}{f_{iP2}}\right) \right)^2$$

$$a_{3,3} = -f_i^{-1}(x_1)$$

$$b_3 = k_i f_i^{-1}(x_1)$$

El modelo lineal permite obtener una función de transferencia en s , considerando el punto de equilibrio. Se selecciona un punto adecuado, que en este caso será una distancia de 8mm correspondiente al punto medio del rango de operación de distancia.

Los valores que definen las matrices A y B son:

$$a_{2,1} = 1458.6, a_{2,3} = -68.8819, a_{3,1} = 0, a_{3,3} = -31.0685, b_3 = 76.0068$$

De la Ec. 1.4 se obtiene el valor de corriente x_3 como sigue:

$$x_3 = \sqrt{\frac{F_{emP2} \cdot F_{em}}{F_{emP1} \cdot \exp\left(-\frac{x_1}{F_{emP2}}\right)}}$$

$$x_3 = 0.2840$$

De la Ec. 1.3 se determina el valor para u .

$$u = \frac{x_3 - c_i}{k_i}$$

$$u = 0.1540$$

Así la función de transferencia queda:

$$G(s) = \frac{-5235}{s^3 + 31.07s^2 - 1459s - 45320}$$

Ec. 1.14

CAPITULO 2

TECNOLOGÍAS DE CONTROL DIGITAL

2.1. MÉTODO POR EMULACIÓN DE UN CONTROLADOR CONTINUO

Existen varios métodos por los cuales es realizable el diseño de controladores digitales, entre los cuales podemos mencionar a los métodos por emulación de un sistema continuo, mismo que puede ser basado en el diseño por cualquier método aplicable a sistemas continuos. El método utilizado para el diseño del controlador por emulación será el de control clásico mediante el lugar de las raíces.

Una vez se diseñe el controlador por el método elegido, se procede a digitalizar el resultado obtenido a fin de lograr un controlador digital.

2.1.1. Lugar de las raíces en el plano S.

Este método consiste en la variación o reorganización de la forma del lugar de las raíces del sistema mediante la adición de polos y ceros a la planta, a fin de forzar al trazo del lugar de las raíces a pasar por el punto deseado del plano complejo, buscando las mejores características de respuesta de estabilización. Este punto o puntos específicos del trazo, que corresponden a los polos en lazo cerrado, se lo obtiene modificando el valor de ganancia del sistema.

En el uso de este método se debe tener presente la respuesta que presentan los diferentes polos de lazo cerrado de acuerdo a las características que se desea obtener, es decir, al forzar el trazo y seleccionar la ganancia hay que tener presente la variación que se tendrá desde la respuesta actual hacia la respuesta esperada.

El siguiente gráfico muestra las diferentes respuestas de acuerdo a la ubicación de los polos en el plano S:

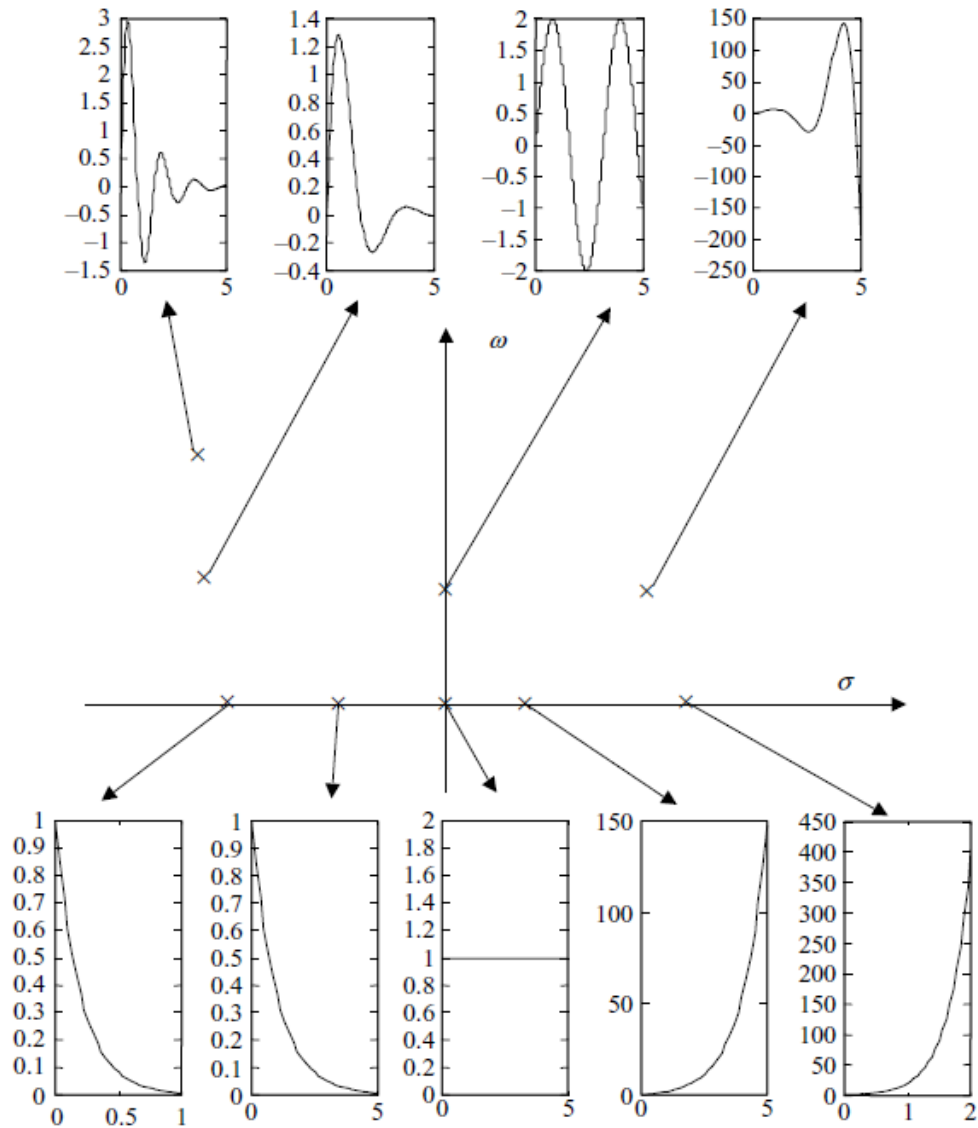


Figura. 2.1. Respuesta de acuerdo a la ubicación de polos en el plano s

Como se puede observar es necesario que los polos seleccionados del trazo mediante el ajuste de ganancia se ubiquen en el semiplano izquierdo S, a fin de lograr estabilidad del sistema controlado, caso contrario se tendrá inestabilidad si estos se desplazan hacia la derecha a partir del eje ω .

El lugar de las raíces es el gráfico del conjunto de los polos en lazo cerrado que se obtienen del sistema de control realimentado, como muestra la Figura. 2.2, donde se considera la realimentación negativa

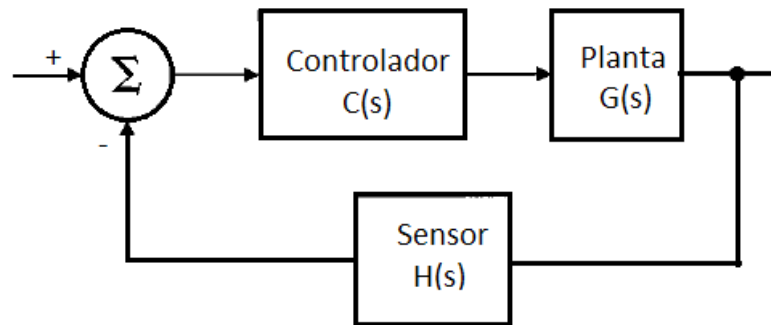


Figura. 2.2. Sistema realimentado

Por tanto la ecuación característica de este sistema está dada por:

$$1 + KC(s)G(s)H(s) = 0 \quad \text{Ec. 2.1}$$

La idea del lugar geométrico de las raíces es que, para un punto s_1 , éste será un punto sobre el lugar de las raíces si y solo si s_1 satisface la Ec. 2.1, para un valor real de K , con $0 \leq K \leq \infty$.

Un valor de s está en el lugar de las raíces si la Ec. 2.1 es satisfecha por tal valor de s , entonces la ecuación puede ser escrita como:

$$K = - \frac{1}{G(s)H(s)} \quad \text{Ec. 2.2}$$

Entonces, si s es un punto del lugar de las raíces, la parte derecha de la Ec. 2.2 evaluada para dicho valor de s dará un número real positivo.

En general $G(s)$ y $H(s)$ son complejos para un valor dado de s , y la Ec. 2.2, es de hecho dos ecuaciones, expresadas como:

$$|K| = \frac{1}{|G(s)H(s)|} \quad \text{Ec. 2.3}$$

donde

$$G(s)H(s) = L(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

y

$$\angle G(s)H(s) = \arg G(s)H(s) = r(180^\circ) \quad r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad \text{Ec. 2.4}$$

La Ec. 2.4 llamada criterio del ángulo puede ser ilustrada como sigue:

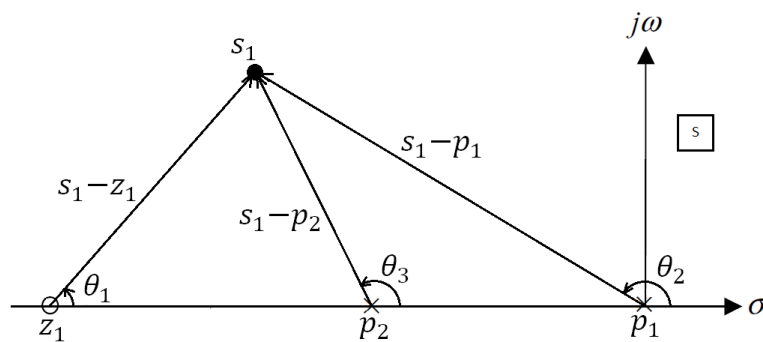


Figura. 2.3. Ilustración del criterio del ángulo

Partiendo de la función:

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad \text{Ec. 2.5}$$

Se va a probar si el punto s_1 está sobre el lugar de las raíces. Note que el ángulo del factor $(s_1 - z_1)$ es θ_1 , el de $(s_1 - p_1)$ es θ_2 y el de $(s_1 - p_2)$ es θ_3 , y la condición del ángulo será:

$$\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \pm 180^\circ$$

$$\sum \angle z_i - \sum \angle p_i = \pm 180^\circ \quad \text{Ec. 2.6}$$

Condición que debe ser satisfecha para que el punto s_1 se encuentre sobre el lugar de las raíces.

Si el punto s_1 , se determina sobre el lugar de las raíces, el valor de K que ubica el lugar en ese punto específico es dado por:

$$K = \frac{-1}{G(s_1)H(s_1)}$$

Se considera a las ecuaciones Ec. 2.3 y Ec. 2.4 como principales en el caso de comprobar si un punto arbitrario pertenece al lugar de las raíces, pero existen lineamientos básicos que permiten esquematizar de forma rápida el lugar de las raíces, y son importantes a la hora de realizar el diseño de compensadores. Estas reglas se resumen así¹:

Regla 1. Las n ramas del lugar de las raíces empiezan en los polos de $L(s)$, y m de estas ramas terminan en los ceros de $L(s)$. Siendo m la cantidad de ceros y n la cantidad de polos.

Regla 2. El trazo del lugar de las raíces está sobre el eje real a la izquierda de un número impar de polos y ceros.

¹ FRANKLIN G., POWELL D., EMAMI-NAEINI A, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 4th Ed.; Chapter 5, Prentice Hall

Regla 3. Para valores grandes de s y K , $n-m$ ramas del lugar de la raíces son asintóticas a líneas con ángulos ϕ_l , radiando desde el punto $s = \alpha$ ubicado sobre el eje real donde:

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, n-m$$

Ec. 2.7

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

Regla 4. El/los ángulo(s) de salida de una rama del lugar de raíces desde un polo de multiplicidad q está dado por

$$q\phi_{l.sal} = \sum \psi_i - \sum_{i \neq l} \phi_i - 180^\circ - 360^\circ(l-1)$$

Ec. 2.8

Y el/los ángulo(s) de arribo de una rama a un cero de multiplicidad q está dada por

$$q\psi_{l.arrib} = \sum \phi_i - \sum_{i \neq l} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ(l-1)$$

Ec. 2.9

Regla 5. El trazo del lugar cruza el eje $j\omega$ en puntos donde el criterio de Routh muestra una transición de raíces en el semi-plano izquierdo hacia raíces en el semi-plano derecho. Cuando $n - m > 2$, al menos una rama del lugar cruzará el eje imaginario.

Regla 6. El lugar tendrá raíces múltiples en puntos del trazo donde

$$\left(b \frac{da}{ds} - a \frac{db}{ds} \right) = 0$$

Ec. 2.10

Y las ramas se acercarán a un punto de q raíces en ángulos separados por

$$\frac{180^\circ + 360^\circ(l - 1)}{q} \quad \text{Ec. 2.11}$$

2.1.2. Efecto de la adición de polos y ceros.

La adición de un polo a la función de transferencia en lazo abierto tiende a modificar el lugar geométrico de las raíces haciendo que este se mueva hacia la derecha con lo cual se tendría una disminución en la estabilidad del sistema y alienta el asentamiento de la respuesta. Así entonces la adición de un cero a la función en lazo abierto tiene como efecto mover el lugar geométrico hacia la izquierda, lo cual tiende a estabilizar y acelerar el asentamiento de la respuesta.

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad \text{Ec. 2.12}$$

2.1.3. Compensador de adelanto-atraso.

Para el diseño de un compensador de adelanto-atraso, es preciso conocer las características del compensador en adelanto y en atraso separadamente, y cómo su función afecta al lugar de las raíces.

- **Compensador de adelanto.**

La compensación en adelanto produce un mejoramiento de la estabilidad y un incremento en la velocidad de respuesta del sistema acompañado por un pequeño cambio en la precisión de estado estable, además su función tiende a desplazar el lugar de las raíces hacia el semiplano izquierdo.

- **Compensador de atraso**

A diferencia del compensador de adelanto, el compensador de atraso tiende a desplazar el lugar de las raíces a la derecha lo cual no es muy deseable pero puede mejorar la respuesta en estado estacionario a costa de aumentar el tiempo de respuesta transitoria y suprime los efectos de las señales de ruido a altas frecuencias.

Entonces, la compensación de adelanto-atraso combina los efectos de los compensadores individuales aunque su uso incrementa en 2 el orden del sistema a ser controlado lo cual lo vuelve más complejo por tanto requiere un diseño más preciso.

La forma del compensador de adelanto-atraso se la obtiene mediante la ubicación en cascada de los compensadores individuales, siendo las funciones de transferencia las siguientes:

Compensador en adelanto:

$$G_{adelanto}(s) = K \frac{(s + z_0)}{(s + p_0)}$$

$$\text{Con } 0 < z_0 < p_0$$

Compensador en atraso:

$$G_{atraso}(s) = K \frac{(s + z_0)}{(s + p_0)}$$

$$\text{Con } z_0 > p_0 > 0$$

2.1.4. Controladores de la familia PID²

Considerando un lazo de control de una entrada y una salida (SISO), como se muestra en la siguiente figura:

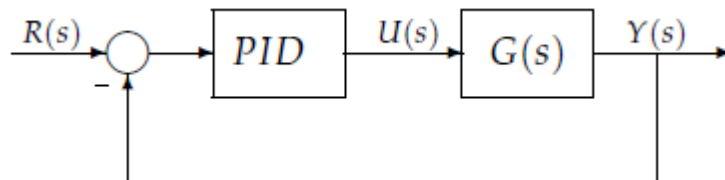


Figura. 2.4. Diagrama de bloques familia de controladores PID

Los miembros de la familia de controladores PID, incluyen tres acciones: proporcional (P), integral (I) y derivativa (D). Estos controladores son los denominados P, PI, PD y PID.

- **Controlador P**

Da una salida del controlador que es proporcional al error, es decir:

$$u(t) = K_p e(t)$$

Que descrita por su función de transferencia queda:

$$C_p(s) = K_p$$

Ec. 2.13

² MAZZONE, Virginia, *Controladores PID*, <http://www.eng.newcastle.edu.au/~jhb519/teaching/caut1/Apuntes/PID.pdf>

Donde K_p es una ganancia proporcional ajustable. Un controlador proporcional puede controlar cualquier planta estable, pero posee desempeño limitado y error en régimen permanente (off-set).

- **Controlador PI**

La acción de *control integral* de una salida del controlador que es proporcional al error acumulado, lo que implica que es un modo de controlar lento.

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Ec. 2.14

$$C_i(s) = \frac{K_i}{s}$$

La señal de control $u(t)$ tiene un valor diferente de cero cuando la señal de error $e(t)$ es cero. Por lo que se concluye que dada una referencia constante, o perturbaciones, el error en régimen permanente es cero.

La acción de *control proporcional-integral*, se define mediante

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Ec. 2.15

Donde T_i se denomina tiempo integral y es quien ajusta la acción integral. La función de transferencia resulta:

$$C_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Ec. 2.16

Con un control proporcional, es necesario que exista error para tener una acción de control distinta de cero. Con acción integral, un error pequeño positivo siempre nos dará una acción de control creciente, y si fuera negativo, la señal de control será decreciente. Este razonamiento sencillo nos muestra que el error en régimen permanente será siempre cero.

Muchos controladores industriales tienen solo acción PI. Se puede demostrar que un control PI es adecuado para todos los procesos donde la dinámica es esencialmente de primer orden. Lo que puede demostrarse en forma sencilla, por ejemplo, mediante un ensayo al escalón.

- **Controlador PD**

La acción de *control proporcional-derivativa*, se define mediante

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{Ec. 2.17}$$

Donde T_d es una constante denominada tiempo derivativo. Esta acción tiene carácter de previsión, lo que hace más rápida la acción de control, aunque tiene la desventaja importante que amplifica las señales de ruido y puede provocar saturación en el actuador. La acción de control derivativa nunca se utiliza por sí sola, debido a que solo es eficaz durante períodos transitorios. La función transferencia de un controlador PD resulta:

$$C_{PD}(s) = K_p + sK_p T_d \quad \text{Ec. 2.18}$$

Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional, permite obtener un controlador de alta sensibilidad, es decir que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Aunque el control derivativo no afecta en forma directa al error el estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema y, por tanto, permite un

valor más grande que la ganancia K , lo cual provoca una mejora en la precisión en estado estable.

- **Controlador PID**

La acción de *control proporcional-integral-derivativa*, es una acción combinada que reúne las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada se obtiene mediante:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{Ec. 2.19}$$

Y su función de transferencia sería

$$C_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad \text{Ec. 2.20}$$

2.1.5. Equivalentes discretos³

El diseño de controlador continuo ha sido previamente tratado y establecido, es donde se puede tomar ventaja de un buen diseño continuo encontrando un equivalente discreto para el mismo.

Este método propiamente llamado *emulación*, es importante conocerlo con propósito de comparación y debido a que es ampliamente usado por ingenieros.

³ FRANKLIN G., POWELL D., WORKMAN M. *Digital Control of Dynamic Systems* 3rd Ed.; Chapter 6, Prentice Hall.

Encontrar un equivalente discreto de un controlador continuo para que tenga aproximadamente las mismas características en todo el rango de frecuencias es el propósito de la emulación. Los métodos para lograrlo pueden ser: basados en integración numérica de las ecuaciones diferenciales que describan al diseño dado; mediante comparación de los dominios s y z ; y mediante extrapolación de las muestras de la señal de entrada para formar una aproximada de la señal para después pasarla por la función de transferencia dada, llamado “*hold equivalence*”.

- **Diseño del equivalente discreto mediante integración numérica**

Los métodos por integración numérica son complejos y amplios, aquí se presentan las técnicas más elementales. El concepto fundamental es representar la función de transferencia del filtro $H(s)$ como ecuación diferencial y derivar una ecuación de diferencia cuya solución es una aproximación de la ecuación diferencial. Por ejemplo, el sistema

$$\frac{U(s)}{E(s)} = H(s) = \frac{a}{s + a} \quad \text{Ec. 2.21}$$

Que equivale a la ecuación diferencial

$$\dot{u} + au = ae \quad \text{Ec. 2.22}$$

Reescribiendo la ecuación en la forma integral, se tiene:

$$u(t) = \int_0^t [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau \quad \text{Ec. 2.23}$$

$$u(t) = \int_0^{kT-T} [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau + \int_{kT-T}^T [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau$$

$$u(t) = u(kT - T) + \begin{cases} \text{area de: } -au + ae \\ \text{sobre } kT - T \leq \tau < kT \end{cases} \quad \text{Ec. 2.24}$$

Varias reglas se han desarrollado basadas en cómo el área incremental es aproximada. Tres posibilidades son mostradas en la Figura. 2.5. La primera aproximación pertenece a la *regla rectangular hacia adelante* en donde se aproxima el área por un rectángulo que mira hacia adelante desde de $kT-T$ y tiene una amplitud del rectángulo a ser evaluado el integrando en $kT-T$. El ancho del rectángulo será T . El resultado es una ecuación en la primera aproximación, u_1

$$\begin{aligned} u_1(kT) &= u_1(kT - T) + T[-au_1(kT - T) + ae(kT - T)] \\ &= (1 - aT)u_1(kT - T) + aTe(kT - T) \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.25}$$

La función de transferencia correspondiente a la *regla rectangular hacia adelante* es en este caso

$$\begin{aligned} H_F(z) &= \frac{aTz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}} \\ &= \frac{a}{(z - 1)/T + a} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.26}$$

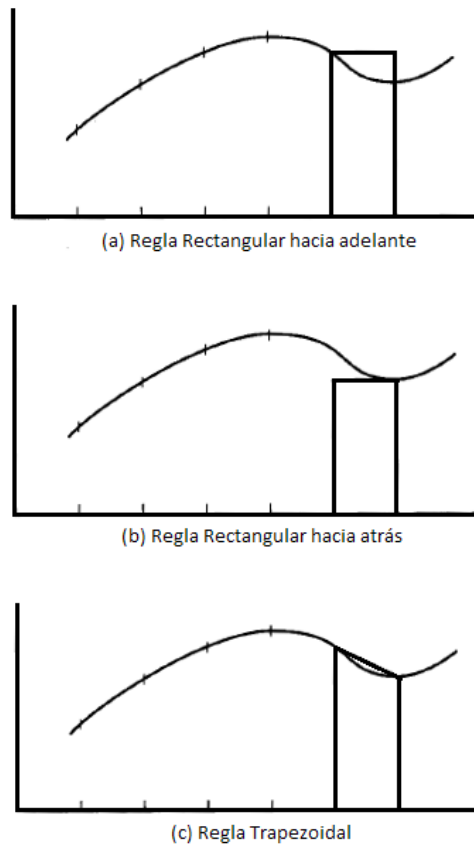


Figura. 2.5. Esquema de las tres formas de área bajo la curva desde kT hasta $kT-T$

La segunda regla contempla la amplitud del rectángulo aproximado, ser el valor mirado hacia atrás desde kT hacia $kT-T$, es decir, $-au(kT) + ae(kT)$. La ecuación para u_2 , la segunda aproximación, es

$$\begin{aligned}
 u_2(kT) &= u_2(kT - T) + T[-au_2(kT) + ae(kT)] \\
 &= \frac{u_2(kT - T)}{1 + aT} + \frac{aT}{a + aT}e(kT)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 2.27}$$

Nuevamente se toma la transformada z y se calcula la función de transferencia de la regla rectangular hacia atrás

$$\begin{aligned}
 H_B(z) &= \frac{aT}{1+aT} \frac{1}{1-z^{-1}/(1+aT)} \\
 &= \frac{aTz}{z(1+aT)-1} \\
 &= \frac{a}{(z-1)/Tz+a}
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 2.28}$$

Finalmente la última regla de integración es la regla trapezoidal, en la cual se toma el área aproximada en la Figura. 2.5 (c), como un trapezoide formado por el promedio de los rectángulos previos seleccionados. La ecuación de diferencia aproximada es:

$$\begin{aligned}
 u_3(kT) &= u_3(kT-T) + \dots \\
 &+ \frac{T}{2} [-au_3(kT-T) + ae(kT-T) - au_3(kT) + ae(kT)] \\
 &= \frac{1-(aT/2)}{1+(aT/2)} u_3(kT-T) + \frac{aT/2}{1+(aT/2)} [e_3(kT-T) + e_3(kT)]
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 2.29}$$

La función de transferencia correspondiente a la regla trapezoidal es:

$$\begin{aligned}
 H_T(z) &= \frac{aT(z+1)}{(2+aT)z+aT-2} \\
 &= \frac{a}{(2/T)[(z-1)/(z+1)]+a}
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 2.30}$$

Se tabula los resultados de esta forma:

$H(s)$	Método	Función de transferencia	
$\frac{a}{s+a}$	Regla hacia adelante	$H_F = \frac{a}{(z-1)/T + a}$	Ec. 2.31
$\frac{a}{s+a}$	Regla hacia atrás	$H_S = \frac{a}{(z-1)/Tz + a}$	
$\frac{a}{s+a}$	Regla trapezoidal	$H_T = \frac{a}{(2/T)\{(z-1)/(z+1)\} + a}$	

De la comparación de $H(s)$ con las tres aproximaciones de la ecuación anterior, vemos que el objetivo de cada uno de los métodos es presentar una función de transferencia discreta que puede ser obtenida de la función de transferencia de Laplace dada por sustitución de una aproximación para la variable de frecuencia s , así:

Método	Aproximación	
Regla hacia adelante	$s \leftarrow \frac{z-1}{T}$	Ec. 2.32
Regla hacia atrás	$s \leftarrow \frac{z-1}{Tz}$	
Regla trapezoidal	$s \leftarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$	

La regla trapezoidal es también conocida como el *método de Tustin*. La transformación es también llamada la *transformación bilinear* por la consideración de su forma matemática. El método de diseño puede ser resumido por la regla: dada una función de transferencia continua (filtro), $H(s)$, el equivalente discreto puede ser encontrado por la sustitución:

$$H_T(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad \text{Ec. 2.33}$$

Las aproximaciones anteriormente mostradas pueden ser vistas como un mapa desde el plano- s hacia el plano- z , como se muestra en la siguiente figura:

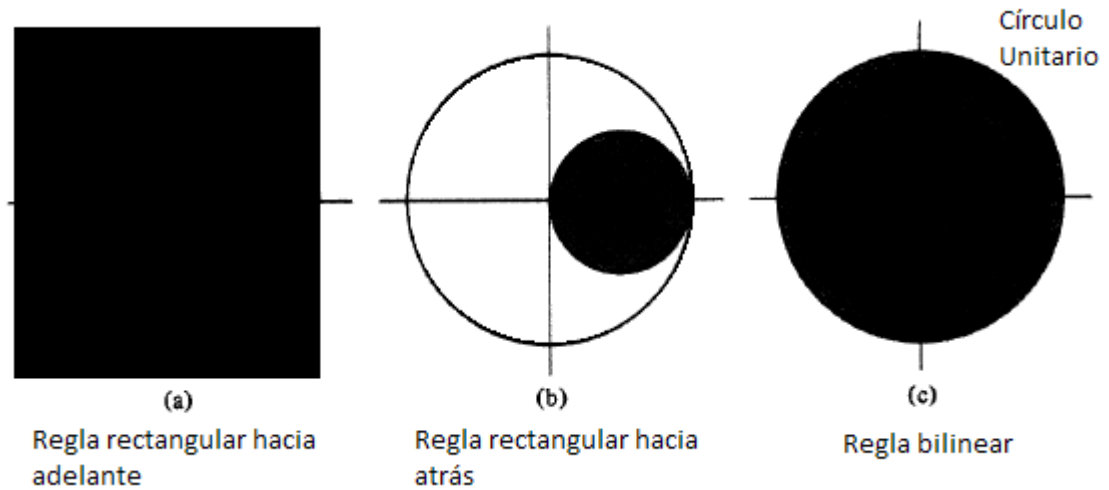


Figura. 2.6. Mapeo del plano-s estable hacia el plano-z.

- **Equivalente PID mediante regla de integración trapezoidal o Tustin**

$$C_{PID}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

$$C_{PID}(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}$$

$$s \leftarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{k_d \left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right)^2 + k_p \left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right) + k_i}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{\frac{k_d(2(z-1))^2 + k_p(2(z-1))(T(z+1)) + k_i(T(z+1))^2}{(T(z+1))^2}}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{k_d(2(z-1))^2 + k_p(2(z-1))(T(z+1)) + k_i(T(z+1))^2}{2(z-1)T(z+1)}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{4k_d(z^2 - 2z + 1) + 2Tk_p(z^2 - 1) + T^2k_i(z^2 + 2z + 1)}{2T(z - 1)(z + 1)}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{4k_dz^2 - 8k_dz + 4k_d + 2Tk_pz^2 - 2Tk_p + T^2k_iz^2 + 2T^2k_iz + T^2k_i}{2T(z - 1)(z + 1)}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{(4k_d + 2Tk_p + T^2k_i)z^2 + (-8k_d + 2T^2k_i)z + (4k_d - 2Tk_p + T^2k_i)}{2T(z - 1)(z + 1)}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{\left(\frac{2k_d}{T} + k_p + \frac{k_iT}{2}\right)z^2 + \left(k_iT - \frac{4k_d}{T}\right)z + \left(\frac{2k_d}{T} - k_p + \frac{k_iT}{2}\right)}{(z - 1)(z + 1)}$$

Por tanto:

$$C_{PID}(z) = \frac{az^2 + bz + c}{(z - 1)(z + 1)}$$

$$a = \frac{2k_d}{T} + k_p + \frac{k_iT}{2}$$

$$b = k_iT - \frac{4k_d}{T}$$

$$c = \frac{2k_d}{T} - k_p + \frac{k_iT}{2}$$

Ec. 2.34

- **Equivalente PID mediante regla de integración hacia atrás**

$$C_{PID}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

$$C_{PID}(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}$$

$$s \leftarrow \frac{z - 1}{Tz}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{k_d \left(\frac{z-1}{Tz}\right)^2 + k_p \left(\frac{z-1}{Tz}\right) + k_i}{\frac{z-1}{Tz}}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{\frac{k_d(z-1)^2 + k_p(z-1)Tz + k_i(Tz)^2}{(Tz)^2}}{\frac{z-1}{Tz}}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{k_d(z^2 - 2z + 1) + k_p Tz(z-1) + k_i T^2 z^2}{Tz(z-1)}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{k_d(z^2 - 2z + 1) + k_p Tz(z-1) + k_i T^2 z^2}{Tz(z-1)}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{k_d z^2 - 2k_d z + k_d + k_p Tz^2 - k_p Tz + k_i T^2 z^2}{Tz(z-1)}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{(k_d + k_p T + k_i T^2)z^2 + (-2k_d - k_p T)z + k_d}{Tz(z-1)}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{\left(\frac{k_d}{T} + k_p + k_i T\right)z^2 - \left(\frac{2k_d}{T} + k_p\right)z + \frac{k_d}{T}}{z(z-1)}$$

Por tanto:

$$C_{PID}(z) = \frac{az^2 - bz + c}{z(z-1)}$$

$$a = \frac{k_d}{T} + k_p + k_i T$$

$$b = \frac{2k_d}{T} + k_p$$

$$c = \frac{k_d}{T}$$

Ec. 2.35

2.1.6. Selección de la frecuencia de muestreo⁴

La selección de la velocidad de muestreo de un sistema de control digital es importante. Generalmente el rendimiento del controlador se mejora al incrementar la tasa de muestreo, pero el costo puede verse también incrementado debido a las características que debe poseer el computador que realiza las conversiones y cálculos de las señales.

Se determina la frecuencia de muestreo mediante:

$$\omega_s / \omega_b > 20 \quad \text{Ec. 2.36}$$

Donde:

$$\omega_s = \text{frecuencia de muestreo [rad/seg]}$$

$$\omega_b = \text{ancho de banda [rad/seg]}$$

Con esta definición el sistema adquiere ciertas características de las que se menciona que: se logra una “suavidad razonable”; además existe potencialmente un retraso de un periodo de muestreo entre el comando de entrada y la respuesta del sistema y que, mediante la Ec. 2.36, este posible retraso se reduce a un 10% del tiempo de subida (rise time); adicionalmente dado que los sistemas de control a lazo cerrado procuran limitar la respuesta a perturbaciones, comparado con un sistema continuo, el control digital se degrada a medida que la frecuencia de muestreo baja, de lo cual la Ec. 2.36 logra una degradación dentro del 20% respecto del controlador continuo.

Cabe decir que la Ec. 2.36 es una cuestión subjetiva y depende mucho de la aplicación para la cual se use, ya que menores tasas de muestreo pueden ser requeridas.

⁴ FRANKLIN G., POWELL D., WORKMAN M. Digital Control of Dynamic Systems 3rd Ed.; Chapter 11.

Si se realiza un análisis discreto exacto o una simulación de un sistema y determinamos la digitalización para un amplio rango de frecuencias de muestreo, el sistema se torna a menudo inestable para frecuencias menores aproximadas de $5\omega_n$ y el amortiguamiento sería degradado significativamente a frecuencias menores que $10\omega_n$. A frecuencias de muestreo $\gtrsim 20\omega_n$ (o $\gtrsim 20$ veces el ancho de banda para sistemas más complejos), el diseño por emulación muestra resultados razonables, y a frecuencias de muestreo de 30 veces el ancho de banda o mayor, la emulación puede ser usado con confianza.

Por ejemplo se puede utilizar un tiempo de muestreo dado por:

$$T_s < \frac{1}{30 \cdot BW} \quad \text{Ec. 2.37}$$

Donde

$$T_s \rightarrow (\text{seg/muestra})$$

$$BW \rightarrow \text{ancho de banda a lazo cerrado}$$

“El ancho de banda se define como la frecuencia a la cual la respuesta en magnitud a *lazo cerrado* es igual a -3 dB. Sin embargo, cuando se diseña vía respuesta en frecuencia, nos interesa predecir el comportamiento a lazo cerrado a partir de la respuesta a lazo abierto. Por lo tanto, usaremos una aproximación a un sistema de segundo orden y diremos que el ancho de banda es igual a la frecuencia a la cual la respuesta en magnitud a *lazo abierto* está entre -6 y -7.5dB, considerando que la respuesta en fase a lazo abierto está entre -135 grados y -225 grados”.⁵

Además si se trabaja con sistemas de orden superior cuyos polos puedan expresarse como en un sistema de primer orden, es decir:

⁵ http://ib.cnea.gov.ar/~instyctl/Tutorial_Matlab_esp/freq.html

$$G = \frac{as^n + bs^{n-1} + cs^{n-2} \dots}{\alpha s^m + \beta s^{m-1} + \gamma s^{m-2} \dots} \quad \text{Ec. 2.38}$$

Que puede expresarse como:

$$G = \frac{a_1 s^n + b_1 s^{n-1} + c_1 s^{n-2} \dots}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) \dots}$$

Entonces el tiempo de muestreo mínimo se lo puede obtener dividiendo entre 5 u 8 veces a la menor constante de tiempo de los polos expresados como polinomios de primer orden.

2.2. MÉTODO POR EL LUGAR DE LAS RAICES EN EL PLANO Z

El lugar de las raíces que se utiliza para el diseño de controladores en el plano s, es igualmente útil para el diseño en el plano z.

La Figura. 2.7 muestra la forma general de un sistema de control digital:

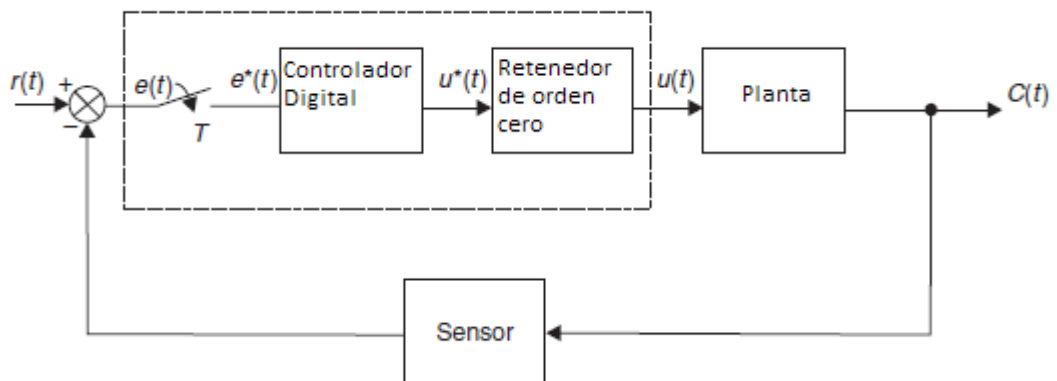


Figura. 2.7. Forma general de un sistema de control digital.

La función de transferencia del controlador/compensador digital es

$$\frac{U}{E}(z) = D(z) \quad \text{Ec. 2.39}$$

Entonces la función de transferencia de lazo cerrado sería

$$\frac{C}{R}(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)GH(z)} \quad \text{Ec. 2.40}$$

Y por tanto la ecuación característica es:

$$1 + D(z)GH(z) = 0 \quad \text{Ec. 2.41}$$

La importancia de la ecuación Ec. 2.41, es que tiene la misma forma que la ecuación característica que la usada cuando se trabaja con el lugar de las raíces en el plano s , con lo cual las reglas para graficar el mismo (lugar de raíces) permanece invariante. A partir de esto se debe tomar en consideración las características que muestra el plano z referente a las respuestas a conseguir de acuerdo al lugar específico en que se coloque las raíces de lazo cerrado.

La principal diferencia cuando se trabaja en el plano z es que el límite de estabilidad corresponde ahora al círculo unitario en vez del eje imaginario del plano s .

El siguiente gráfico muestra las diferentes respuestas de acuerdo a la ubicación de polos en el plano Z :

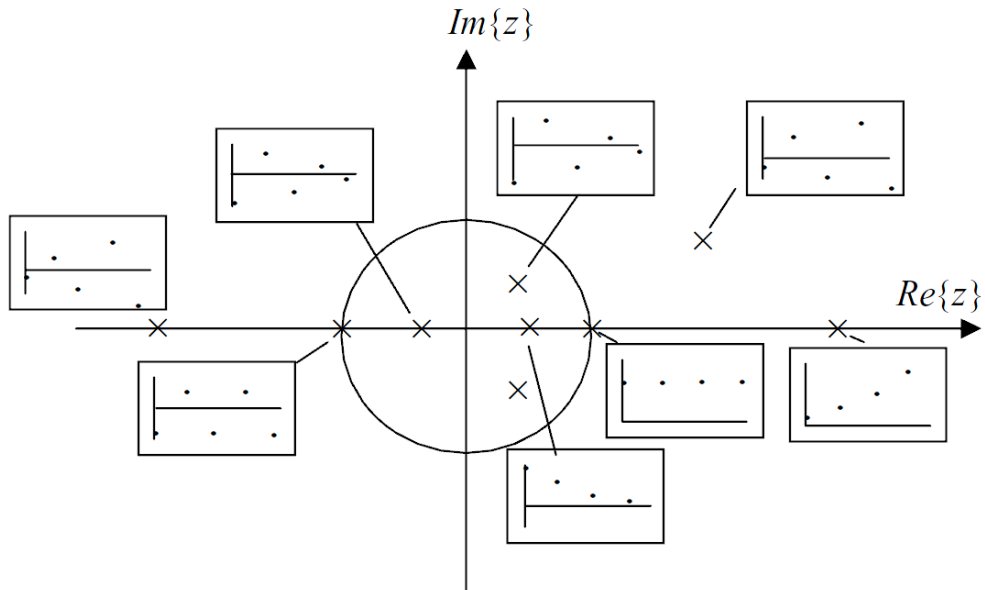


Figura. 2.8. Respuesta de acuerdo a la ubicación de polos en el plano z

El diseño por ubicación de polos mediante el lugar de las raíces dentro del plano z , requiere conocer además del comportamiento como se muestra en la Figura. 2.8, los contornos de ζ (coeficiente de amortiguamiento) y ω_n (frecuencia natural) mostrados en la Figura. 2.9 a fin de tener una idea clara acerca de cuál es el efecto de mover el lugar geométrico.

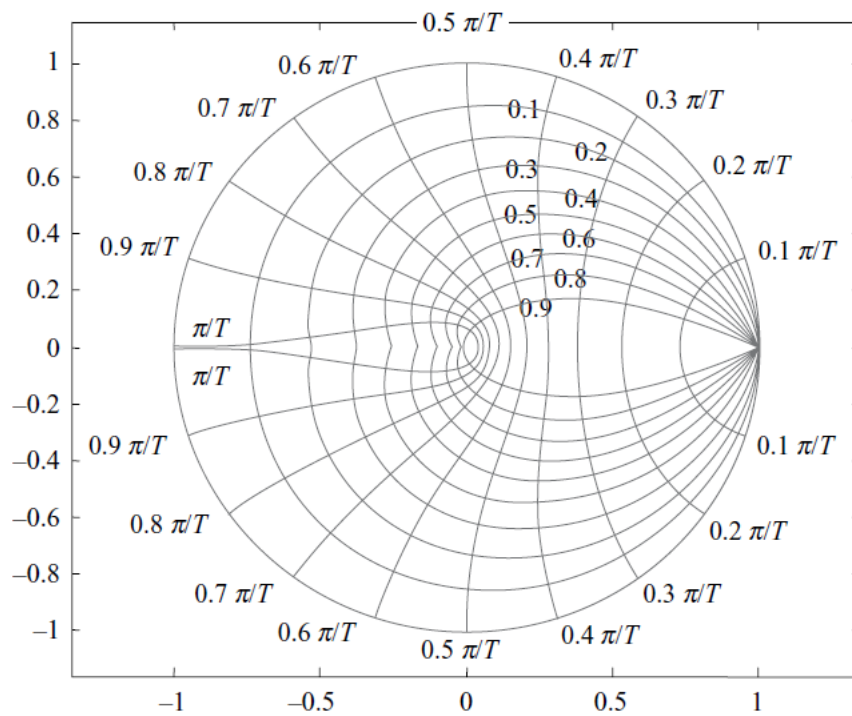


Figura. 2.9. Contornos constantes de ζ y ω_n en el plano z

2.3. ESPACIO DE ESTADO

Una vez analizado y estudiado previamente las técnicas de diseño para el control clásico, se puede avanzar a un método más avanzado en cuanto al diseño. Las técnicas de diseño basadas en la formulación en espacio de estado, son consideradas como *técnicas modernas*.

La aproximación en espacio de estado es un método generalizado para modelamiento análisis y diseño de sistemas de control que provee características superiores a las de control clásico y además permite tratar con:

- Sistemas entrada única, salida única (SISO, por sus siglas en ingles).
- Sistemas múltiple entrada, múltiple salida (MIMO, por sus siglas en ingles) o sistemas multivariables.
- Sistemas no-lineales y variantes en el tiempo.

- Aproximación al diseño alternativo de controladores.

El uso del espacio de estado, involucra el diseño por separado del control asumiendo que los estados estén disponibles, si no lo están entonces diseñar un estimador a fin de reconstruir el estado partiendo de una medida parcial del mismo. Integrando las dos partes se logra lo que se conoce como regulador.

Se parte de la descripción en espacio de estado para un sistema continuo, que está dada por:

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad \text{Ec. 2.42}$$

$$y = Hx + Ju \quad \text{Ec. 2.43}$$

Para tratar a un sistema discreto en el espacio de estado se asume que el control se aplica desde un computador a través de un ZOH (retenedor de orden cero) como en la figura siguiente, dando lugar a una representación discreta exacta

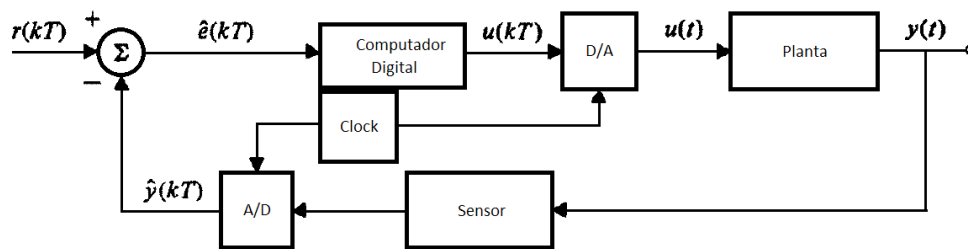


Figura. 2.10. Modelo de discretización en espacio de estado

Con:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad \text{Ec. 2.44}$$

$$y(k) = Hx(k) + Ju(k) \quad \text{Ec. 2.45}$$

Donde

$$\Phi = e^{FT} \quad \text{Ec. 2.46}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{F\eta} d\eta \mathbf{G} \quad \text{Ec. 2.47}$$

Entonces se puede observar que el modelo conocido para el sistema continuo es igual al modelo que se obtiene para el sistema discreto, cambiando F, G, H, J , mediante un ZOH, por $\Phi, \Gamma, \mathbf{H}, J$, con un período de muestreo (T) dado.

El diseño del control mediante espacio de estado, consiste de dos pasos independientes.

- Diseño de la Ley de control.
- Diseño del Estimador.

Con el diseño por separado de cada una de las partes se procede a su integración, con lo cual se completa el diseño del controlador en el espacio de estado.

El primer paso, que es la Ley de Control asume, que todos los estados están disponibles para propósitos de realimentación. Como en la parte continua, el diseño de la ley de control es solo la realimentación de una combinación lineal de todos los elementos de estado, así:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -[K_1 \quad K_2 \quad \dots] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 2.48}$$

Para realizar la consideración anterior no se toma en cuenta la entrada de referencia $r(kT) = 0$, por tanto sustituyendo la Ec. 2.48 en la Ec. 2.44, se tiene:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \Phi\mathbf{x}(k) - \Gamma\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad \text{Ec. 2.49}$$

Entonces, tomando la transformada z de la Ec. 2.49, queda:

$$(z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K})\mathbf{X}(z) = \mathbf{0} \quad \text{Ec. 2.50}$$

La ecuación característica con la ley de control hipotética es:

$$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = 0 \quad \text{Ec. 2.51}$$

2.3.1. Ubicación de polos⁶

Una vez desarrollada la ley de control, se selecciona los polos del sistema a lazo cerrado, teniendo cuidado de escoger la ubicación de estos, es decir que el sistema funcione correctamente y cumpla con los parámetros de respuesta requeridos.

La ubicación de polos, consiste encontrar los elementos de \mathbf{K} , para que los polos a lazo cerrado, de la ecuación característica (Ec. 2.51), se ubiquen en los lugares deseados. A diferencia del diseño clásico en donde se diseña el compensador esperando que los polos se ubiquen en los lugares deseados, este método realizado con espacio de estado y tomando una realimentación completa del estado, garantiza que la ubicación de los polos se establezcan en los lugares elegidos.

Si se desean polos para un sistema de orden n , de la siguiente manera:

$$z_i = p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \quad \text{Ec. 2.52}$$

⁶ FRANKLIN, Gene, POWELL, David, WORKMAN, Michael, *Digital Control of Dynamic Systems*, Chapter 8.

La ecuación característica de control es:

$$\alpha_c(z) = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) = 0 \quad \text{Ec. 2.53}$$

Las ecuaciones Ec. 2.51 y Ec. 2.53, son las ecuaciones características del sistema controlado, por tanto son idénticas, término a término. Así para determinar los valores de K se relaciona los coeficientes de cada potencia de z de las ecuaciones en mención, y habrá n ecuaciones para un sistema de orden n .

2.3.2. Seguimiento a la entrada de referencia

El desarrollo de la ley de control en la cual se busca encontrar la ganancia necesaria para ubicar los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, buscando una respuesta natural satisfactoria, se efectúa a fin de llevar todos los estados del sistema a cero.

La idea del control en la mayoría de casos implica realizar el seguimiento a una entrada o punto de operación a fin de lograr como respuesta el alcance a dicha entrada introducida. A continuación se desarrolla el método utilizado para lograr este seguimiento.

Se toma en consideración la entrada de referencia para realizar la realimentación completa de estados como muestra la Ec. 2.48. La Figura. 2.11, muestra la forma de introducir la entrada y consiste de una matriz N_x , que define el valor deseado del estado x_r . Así se desea encontrar N_x de manera que la salida $y_r = H_r x$ esté en el valor de referencia deseado. La idea básica al determinar N_x es que ésta deberá transformar la entrada de referencia, r , al estado de referencia que está en equilibrio para dicho r .

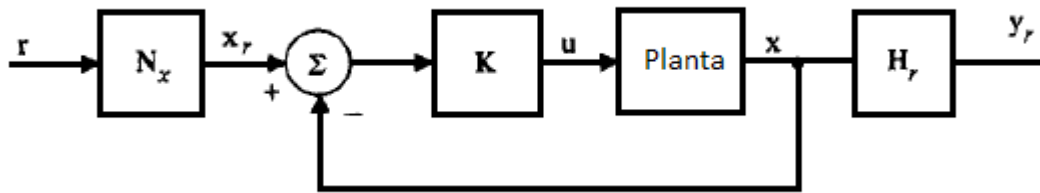


Figura. 2.11. Estructura para introducir una referencia

De esta manera, se define N_x de tal manera que

$$N_x r = x_r \quad \text{y} \quad u = -K(x - x_r) \quad \text{Ec. 2.54}$$

Si el sistema es “Tipo 1” o superior y r es una entrada paso, no habrá error en estado estable, y el valor final será:

$$x(\infty) = x_{ss} = x_r$$

Para sistema de Tipo 0, habrá un error porque algún control es requerido para mantener el sistema en el x_r deseado.

A menudo el diseñador posee conocimiento suficiente de la planta para conocer cuál es el estado de equilibrio para determinada salida, donde la determinación de N_x está completa. Pero para plantas más complejas, esto se torna más complicado. En estos casos, es útil resolver para la condición de equilibrio $y_r = r$.

A fin de obtener una solución válida para todos los tipos de sistema, si requieren una entrada de control de estado estable o no, se incluye un término de control de estado

estable que es proporcional a la entrada de referencia paso, como muestra la Figura. 2.12, y es:

$$u_{ss} = N_u r \quad \text{Ec. 2.55}$$

La constante de proporcionalidad N_u , será resuelta en la formulación.

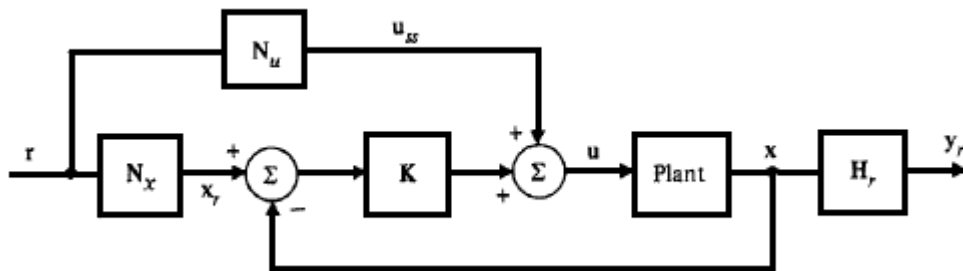


Figura. 2.12. Esquema de bloques para introducir una entrada de referencia

Entonces, los requerimientos de estado estable para el sistema serían

$$\begin{aligned} N_x r &= x_r = x_{ss} \\ H_r x_{ss} &= y_r = r \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.56}$$

que se reduce a

$$\begin{aligned} H_r N_x r &= r \\ H_r N_x &= I \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.57}$$

Además, asumiendo que el sistema está en estado estable, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \mathbf{x}(k) - \Gamma \mathbf{K} \mathbf{x}(k) \Rightarrow \mathbf{x}_{ss} = \Phi \mathbf{x}_{ss} + \Gamma \mathbf{u}_{ss} \\ \text{o} \\ (\Phi - \mathbf{I}) \mathbf{x}_{ss} + \Gamma \mathbf{u}_{ss} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

De las ecuaciones Ec. 2.55 y Ec. 2.56

$$(\Phi - \mathbf{I}) N_x \mathbf{r} + \Gamma N_u \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$(\Phi - \mathbf{I}) N_x + \Gamma N_u = \mathbf{0} \quad \text{Ec. 2.58}$$

Reubicando las ecuaciones Ec. 2.57 y Ec. 2.58 en forma de matriz

$$\begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{I} & \Gamma \\ H_r & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Permite obtener el resultado deseado

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{I} & \Gamma \\ H_r & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 2.59}$$

Pero también es posible introducir la entrada de referencia después de la multiplicación de ganancia acorde a la Figura. 2.13,

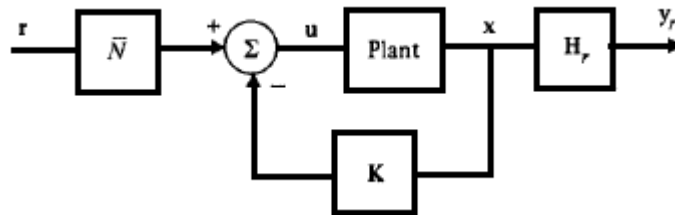


Figura. 2.13. Esquema para introducir una referencia

por combinación de N_x y N_u de acuerdo a

$$\bar{N} = N_u + KN_x \quad \text{Ec. 2.60}$$

CAPÍTULO 3

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADORES

3.1. PROBLEMA DE REALIMENTACIÓN

En primer lugar se debe considerar la función de la planta previamente encontrada y descrita en el Capítulo 1 mediante la Ec. 1.14.

$$G(s) = \frac{-5235}{s^3 + 31.07s^2 - 1459s - 45320}$$

Como se puede observar la función de transferencia de la planta se compone de tres polos, un cero y una ganancia negativa.

El estudio de control desarrollado en el Capítulo 2, toma en consideración la realimentación negativa por lo cual este signo de la ganancia resultaría un problema. Considerando la realimentación como muestra la Figura. 3.1, la función de transferencia total a lazo abierto de acuerdo al algebra de bloques sería

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \quad \text{Ec. 3.1}$$

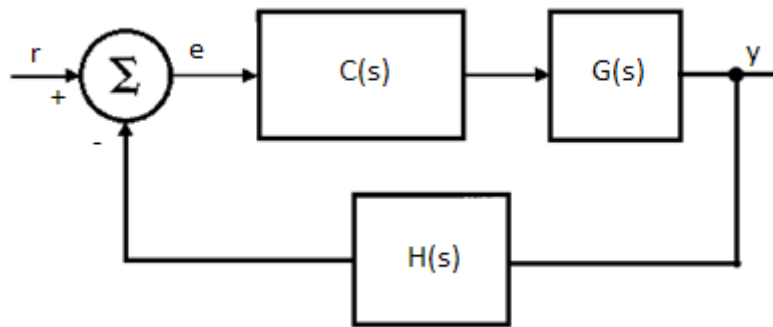


Figura. 3.1. Diagrama de realimentación negativa

Se tiene que $C(s)G(s) = G_t(s)$ y $H(s) = 1$, entonces:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_t(s)}{1 + G_t(s)}$$

Considerando la ganancia negativa de la planta la función de transferencia quedaría:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{-G_t(s)}{1 - G_t(s)}$$

Lo cual implica una dificultad al momento de tratar al sistema en lazo cerrado. Para resolver este inconveniente se plantea la realimentación positiva como en la Figura. 3.2, donde la función de transferencia de $y(s)/r(s)$ sería:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{-G_t(s)}{1 - G_t(s)}$$

Si se considera nuevamente el signo negativo de la planta, la función de transferencia total quedaría

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_t(s)}{1 + G_t(s)}$$

De lo cual se puede observar que tiene la forma de la función de transferencia cuando se trata con realimentación negativa, por lo cual se consigue, basados en esta simplificación, tratar al sistema cambiando el signo y desarrollar el diseño como si se tratase de un sistema de realimentación negativa como se ha estudiado, tomando en cuenta que para probar el sistema se lo hará con realimentación positiva de su salida.

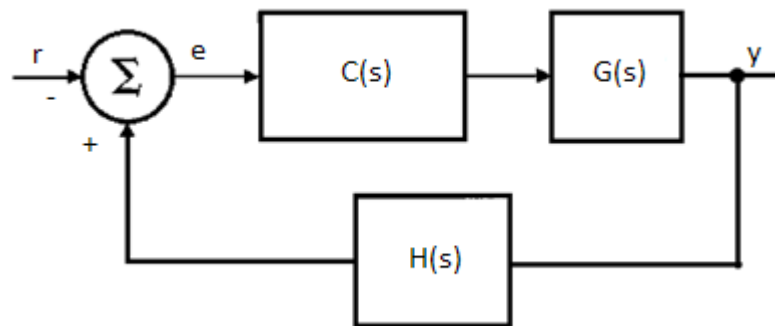


Figura. 3.2. Diagrama de realimentación positiva

3.2. CONTROLADOR PID DIGITAL POR EMULACIÓN DEL SISTEMA CONTINUO

El diseño de controladores tanto en la parte continua como en la discreta se basará en el método de lugar de las raíces.

En primer lugar se realiza la selección de las características deseadas que tendrá el sistema en lazo cerrado, por lo cual se plantean la selección de polos mediante las ecuaciones para un sistema de segundo orden. Estas ecuaciones nos permiten establecer parámetros como máximo sobre pico, tiempo de establecimiento y tiempo de subida.

Las ecuaciones que definen estos parámetros son:

$$\xi \omega_n = \frac{4.6}{T_s} \quad \text{Ec. 3.2}$$

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{T_r} \quad \text{Ec. 3.3}$$

$$\xi \geq \frac{\left(\ln \frac{MP}{100}\right)^2}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{MP}{100}\right)^2}} \quad \text{Ec. 3.4}$$

Donde

ξ = Coeficiente de amortiguamiento

ω_n = Frecuencia natural (*rad/seg*)

T_s = Tiempo de establecimiento (s)

T_r = Tiempo de subida (s)

MP = Máximo sobre pico (%).

La frecuencia natural ω_n en el plano Z posee las unidades de *rad/muestra*, pero cuando se utiliza las ecuaciones anteriores, ω_n debe estar en unidades de *rad/seg*

3.2.1. Controlador P y PI

Una vez analizado el signo de la ganancia de la planta y la forma de realizar la realimentación para lograr el diseño del controlador, se considera en primer lugar la

realización de controladores P o PI para lograr su estabilización. Se plantea la utilización inicial de estos dos tipos de controladores debido a que el primero presenta bastante sencillez y en el caso de no ser suficiente (para lograr las características deseadas), el segundo provee el logro de un error nulo en estado estable (características estudiadas previamente).

La función de transferencia de la planta de la cual se realizará el diseño es:

$$G(s) = \frac{5235}{s^3 + 31.07s^2 - 1459s - 45320}$$

o

Ec. 3.5

$$G(s) = \frac{5235}{(s - 38.19)(s + 38.19)(s + 31.07)}$$

Los polos son:

$$p_1 = 38.19$$

$$p_2 = -38.19$$

$$p_3 = -31.07$$

Se traza el lugar geométrico de las raíces

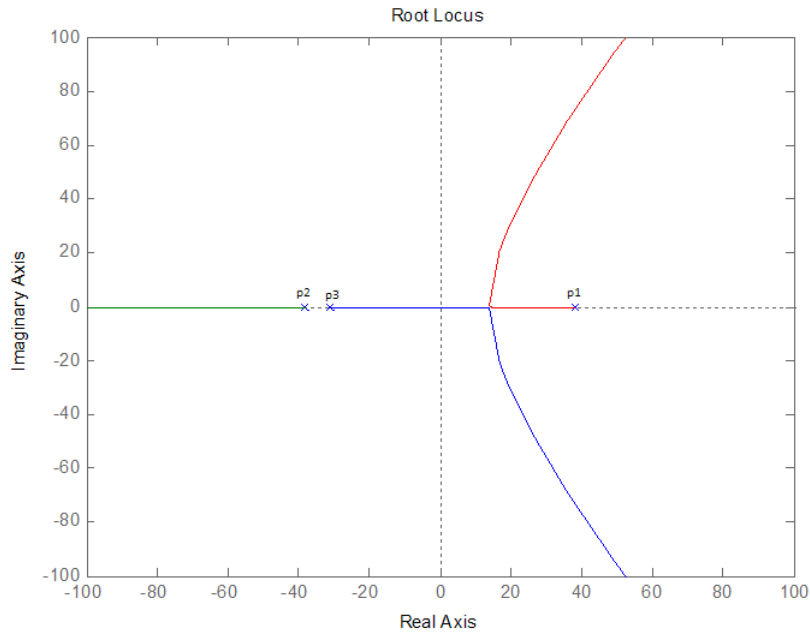


Figura. 3.3. Lugar de las raíces para el MLS

De la Figura. 3.3, se puede observar que el sistema es inestable debido a que presenta un polo a la derecha del eje imaginario.

Tomando en consideración las reglas para trazar del LGR y la forma como una ganancia proporcional, por si sola, cambia los polos de lazo cerrado que se ubican sobre el trazo, se puede observar en la Figura. 3.3, que el controlador P no es suficiente siquiera para estabilizar la planta ya que siempre existirán polos a lazo cerrado a la derecha del eje imaginario, lo cual hará inestable al sistema.

Ahora se intenta realizar el control de la planta con un controlador tipo PI, del cual la función de transferencia de acuerdo a la Ec. 2.16, es

$$C_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

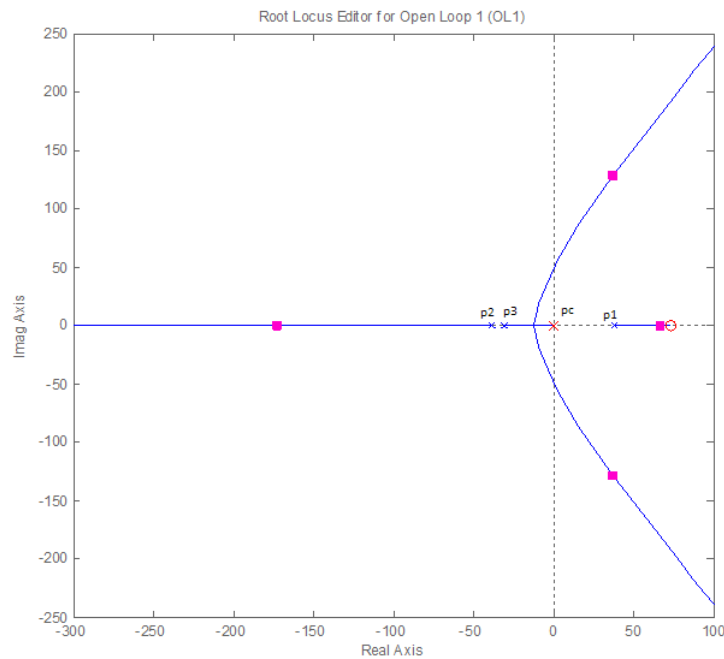
o

$$C_{PI}(s) = K \left(\frac{s + a}{s} \right)$$

Conforme las reglas (Reglas 1 -3) de esquematización para trazar el LGR (positivo), y tomando en cuenta que se ha añadido un polo en el origen y un cero que puede variar su posición, el lugar geométrico se trazaría así:

Para a mayor que $p_1 = 38.19$, el lugar geométrico se traza sobre el eje real a la izquierda de a hasta $p_1 = 38.19$, entre el polo en el origen p_c y $p_3 = -31.07$, y entre $p_2 = -38.19$ y el cero en el infinito con asíntotas con ángulos $\phi_1 = 60^\circ$, $\phi_2 = 180^\circ$, $\phi_3 = 300^\circ$ o -60° , que parten del punto $\alpha = (-31.07 - |a|)/3$.

$$a > p_1$$



El polo (p_c) y cero (z_c) del controlador se muestran en color rojo con una cruz y un círculo respectivamente, además los cuadrados en color rojo muestran los polos de lazo cerrado para un valor arbitrario positivo de K .

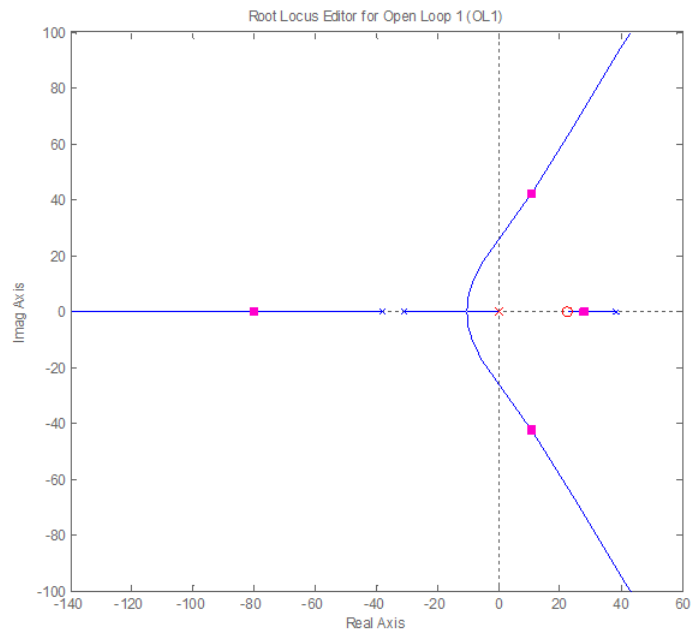
Se realiza el análisis para los diferentes intervalos donde puede estar ubicado “ a ” teniendo:

Tabla 3.1. Análisis del lugar geométrico de las raíces para un controlador PI

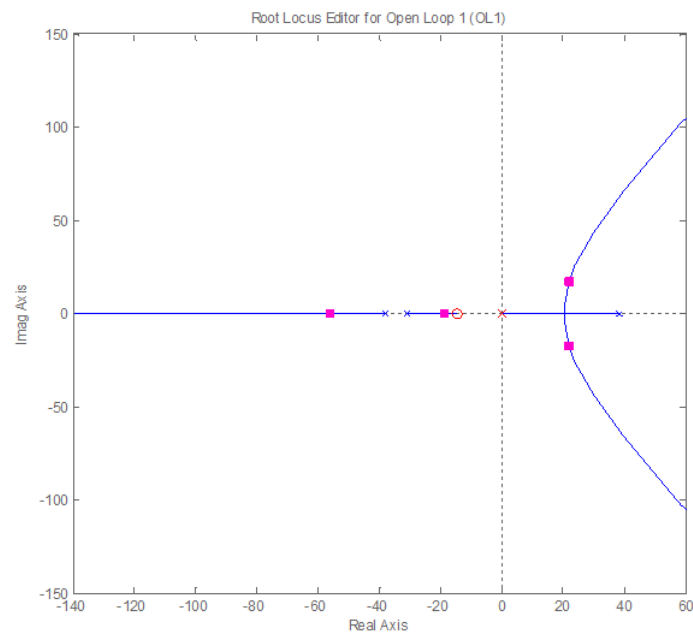
Intervalo de a	LGR sobre el eje real	Ángulos de las asíntotas	Punto de intersección de las asíntotas
$a > p_1 = 38.19$	$[a, p_1]; [p_c, p_3]; [-\infty, p_2]$	$\phi_1 = 60^\circ; \phi_2 = 180^\circ; \phi_3 = 300^\circ$ o -60°	$\alpha = \frac{-31.07 - a}{3}$
$p_c < a < p_1 = 38.19$	$[a, p_1]; [p_c, p_3]; [-\infty, p_2]$	$\phi_1 = 60^\circ; \phi_2 = 180^\circ; \phi_3 = 300^\circ$ o -60°	$\alpha = \frac{-31.07 - a}{3}$
$p_3 < a < p_c$	$[-\infty, p_2]; [p_3, a]; [p_c, p_1]$	$\phi_1 = 60^\circ; \phi_2 = 180^\circ; \phi_3 = 300^\circ$ o -60°	$\alpha = \frac{-31.07 + a }{3}$
$p_2 < a < p_3$	$[-\infty, p_2]; [a, p_3]; [p_c, p_1]$	$\phi_1 = 60^\circ; \phi_2 = 180^\circ; \phi_3 = 300^\circ$ o -60°	$\alpha = \frac{-31.07 + a }{3}$
$a < p_2$	$[-\infty, a]; [p_2, p_3]; [p_c, p_1]$	$\phi_1 = 60^\circ; \phi_2 = 180^\circ; \phi_3 = 300^\circ$ o -60°	$\alpha = \frac{-31.07 + a }{3}$

Los resultados para los diferentes valores de “ a ”, se muestran en los siguientes gráficos:

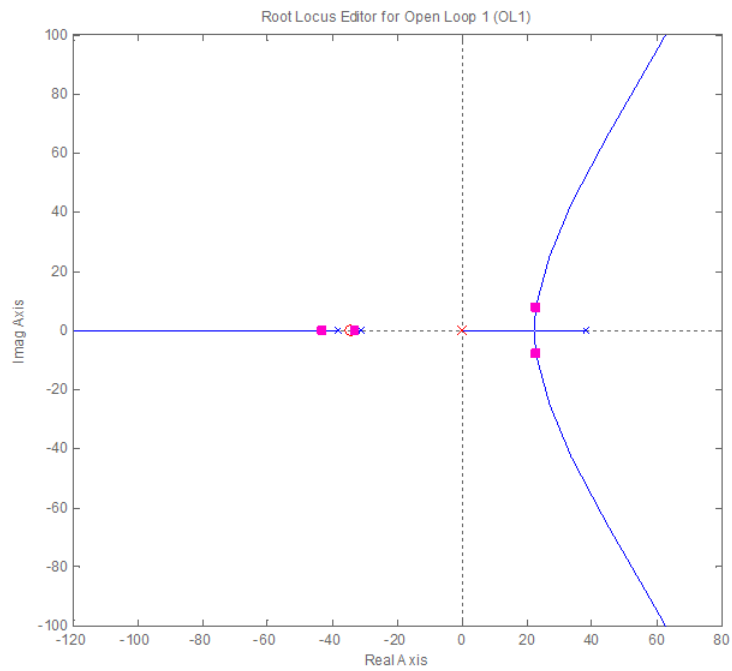
$$p_c < a < p_1$$



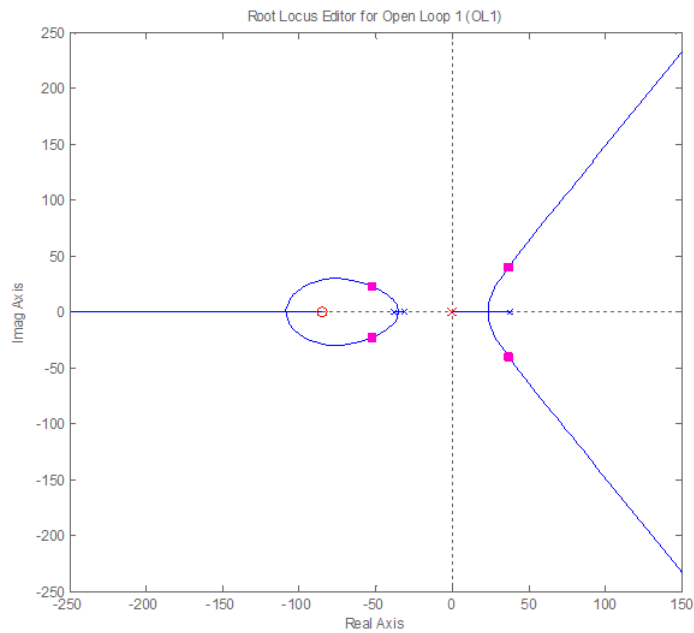
$$p_3 < a < p_c$$



$$p_2 < a < p_3$$



$$a < p_2$$



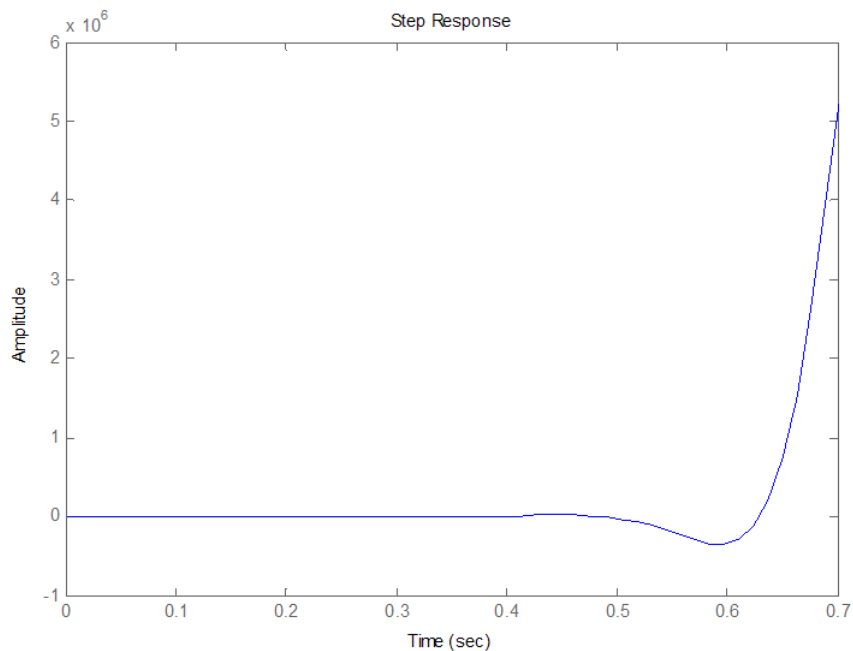
Del análisis y gráficos anteriores se puede ver que no existe ningún punto sobre el eje real donde, al ubicar el cero del controlador, se logre estabilidad debido a que siempre

existirían polos de lazo cerrado a la derecha del eje imaginario del plano s para cualquier valor positivo de K , y en consecuencia permanecerá inestable.

Considerando un compensador arbitrario PI cuya función de transferencia sea:

$$C_{PI}(s) = 15 \left(\frac{s + 10}{s} \right)$$

La respuesta a una entrada paso del sistema compensado sería por tanto:



3.2.2. Controlador PD

Como se vio anteriormente, no es posible controlar la planta mediante el diseño de un controlador PI, por lo cual ahora se trata de realizar el control utilizando un controlador del tipo PD que también deriva de la familia de controladores PID.

La función de transferencia para un controlador de este tipo es:

$$C_{PD}(s) = K_p + sK_p T_d$$

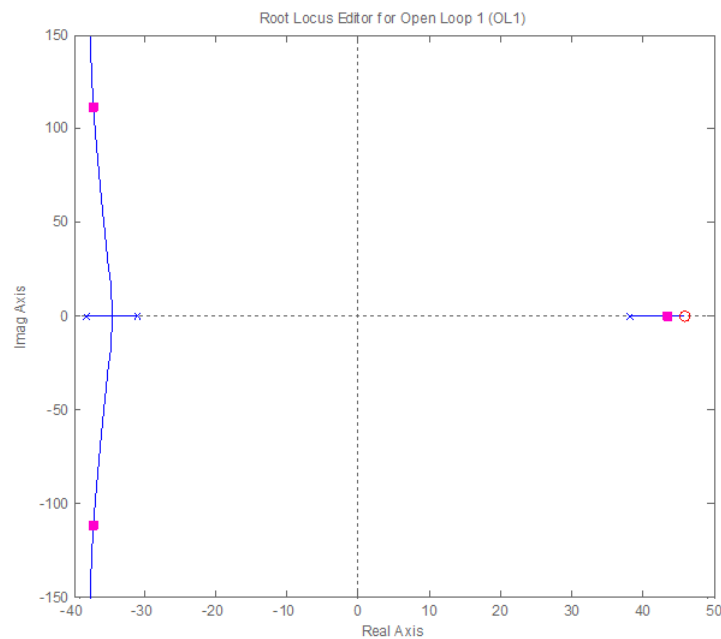
o

$$C_{PI}(s) = K(s + a)$$

De igual manera que para el caso anterior, se utiliza las reglas de esquematización del LGR para comprobar la validez del controlador a fin de que éste logre el control del sistema en cuestión. Para ello se realiza el siguiente análisis:

Para a mayor que $p_1 = 38.19$, el LGR se traza sobre el eje real a la izquierda de a hasta p_1 , y desde $p_3 = -31.07$ hasta $p_2 = -38.19$; además existen n ramas de las cuales $n - m$ de ellas son asíntotas (de acuerdo a la regla 3) a líneas con ángulos $\phi_1 = 90^\circ$, $\phi_2 = 270^\circ$ o -90° , partiendo del punto $\alpha = (-31.07 - a)/2$

$$a > p_1$$



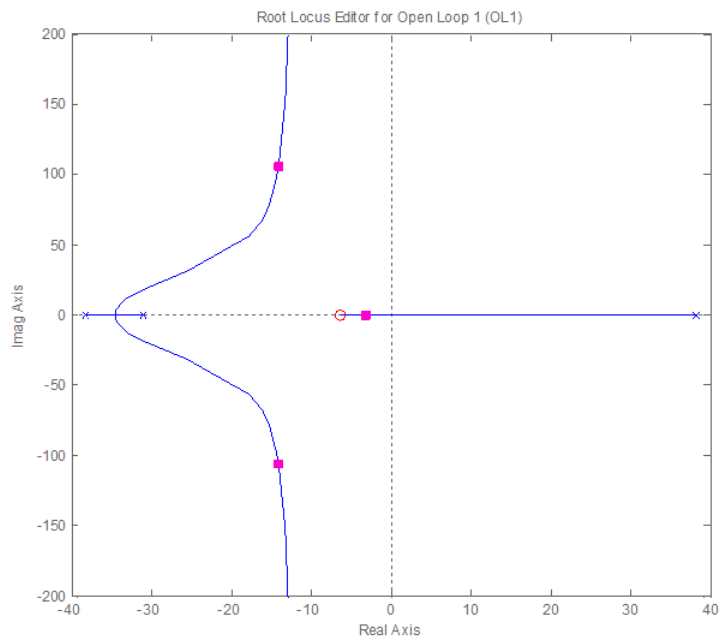
A continuación se tabula el análisis del LGR para diferentes valores de a :

Tabla 3.2. Análisis del lugar geométrico de las raíces para un controlador PD

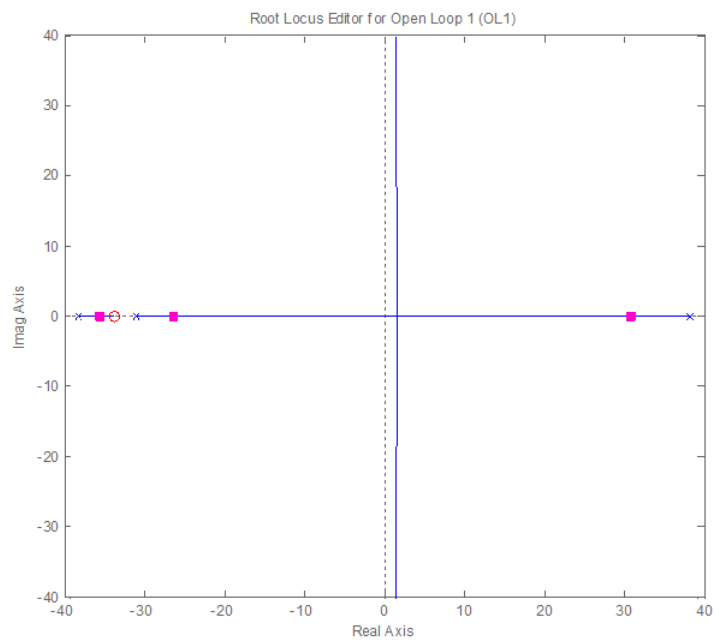
Intervalo de a	LGR sobre el eje real	Ángulos de las asíntotas	Punto de intersección de las asíntotas
$a > p_1 = 38.19$	$[a, p_1]; [p_2, p_3]$	$\phi_1 = 90^\circ; \phi_2 = 270^\circ$ o -90°	$\alpha = \frac{-31.07 - a}{2}$
$p_3 < a < p_1$	$[a, p_1]; [p_2, p_3]$	$\phi_1 = 90^\circ; \phi_2 = 270^\circ$ o -90°	$\alpha = \frac{-31.07 - a}{3}$
$p_3 < a < p_2$	$[p_3, p_1]; [p_2, a]$	$\phi_1 = 90^\circ; \phi_2 = 270^\circ$ o -90°	$\alpha = \frac{-31.07 - a}{3}$
$a < p_2$	$[a, p_2]; [p_3, p_1]$	$\phi_1 = 90^\circ; \phi_2 = 270^\circ$ o -90°	$\alpha = \frac{-31.07 + a }{3}$

El trazo del LGR para diferentes de “ a ”, se muestran en los siguientes gráficos:

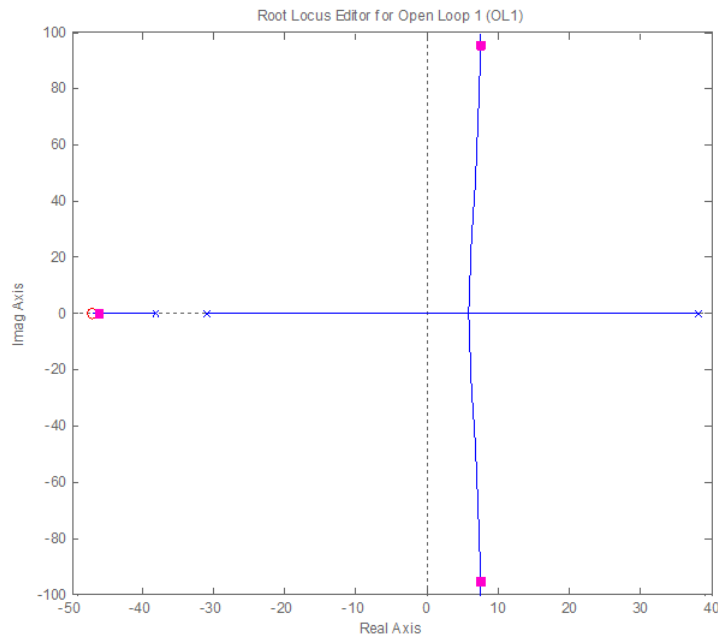
$$p_3 < a < p_1$$



$$p_3 < a < p_2$$



$$a < p_2$$



Del análisis anterior se ve que a medida que el cero en “ a ” se desplaza hacia la izquierda, el punto donde las asíntotas se intersecan se mueve hacia la derecha, por lo cual será conveniente ubicar el cero entre el origen y p_3 , procurando que los polos a lazo cerrado de los cuales se obtenga las características del sistema se ubiquen lo más cercano posible al eje real imaginario para así establecer su dominio.

Partiendo de las ecuaciones Ec. 3.2 y Ec. 3.4, para instaurar las características del sistema y tomando en consideración que la planta es inestable se plantean un $MP < 80\%$ y un tiempo de establecimiento $T_s < 0.7 \text{ seg}$, se tiene:

$$\xi \geq \frac{\left(\ln \frac{80}{100}\right)^2}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{80}{100}\right)^2}}$$

$$\xi = 0.0709$$

y

$$\omega_n = \frac{4.6}{\xi T_s}$$

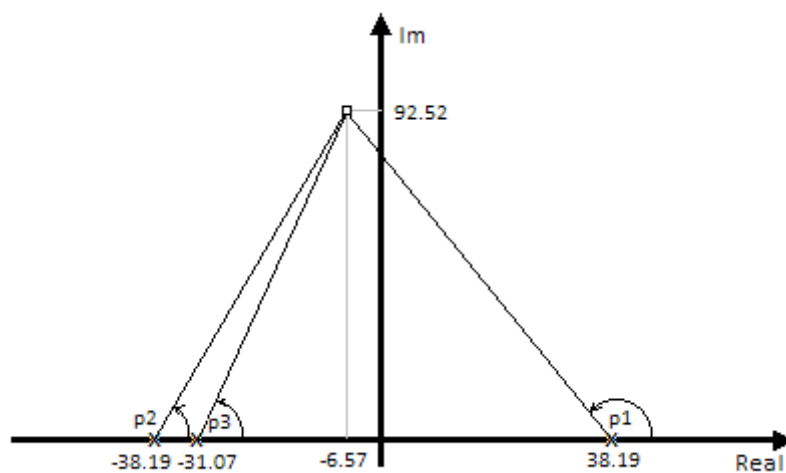
$$\omega_n = 92.7 \text{ rad/seg}$$

Por tanto los polos dominantes de lazo cerrado buscados añadiendo el controlador PD serían:

$$p = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$p = -6.57 \pm 92.52i$$

De acuerdo al lugar de las raíces, para conseguir que el polo se encuentre en el trazo debe cumplirse el criterio del ángulo dado por la Ec. 2.6, por tanto se calculará el valor del ángulo aportado por los ceros y polos que tiene la planta para determinar cuál sería el ángulo a compensar por el cero del controlador PD. Así los ángulos aportados por los polos de la planta hacia el polo deseado y en ausencia de ceros en la misma, se tiene:



Polos de la planta: $p_1 = 38.19$; $p_2 = -38.19$; $p_3 = -31.07$,

$$\angle p_1 = -\left(180 - \operatorname{atan}\left(\frac{92.52}{38.19 - 6.57}\right)\right) = -115.81^\circ$$

$$\angle p_2 = -\operatorname{atan}\left(\frac{92.52}{38.19 - 6.57}\right) = -71.13^\circ$$

$$\angle p_3 = -\operatorname{atan}\left(\frac{92.52}{31.07 - 6.57}\right) = -75.1694^\circ$$

Entonces el ángulo a compensar por el cero del controlador PD sería:

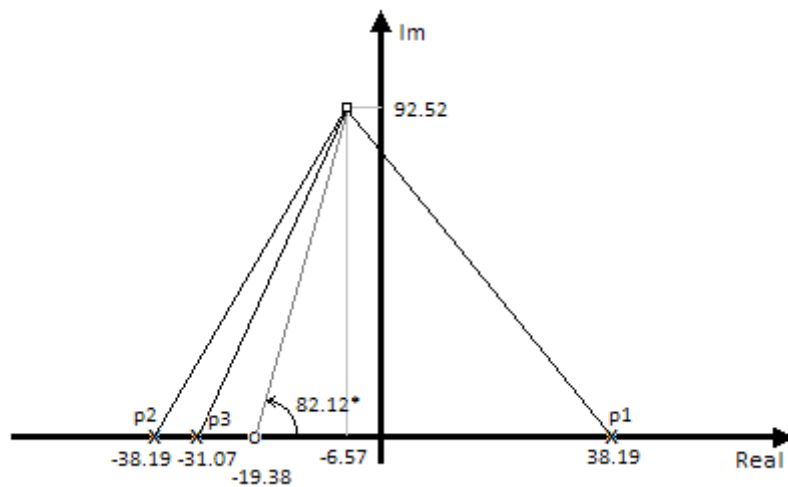
$$\angle p_t = \pm 180 + \angle p_1 + \angle p_2 + \angle p_3$$

$$\angle p_1 + \angle p_2 + \angle p_3 = -262.1195^\circ$$

$$\angle p_t = 82.1195^\circ$$

Así la ubicación del cero estará entonces en:

$$z_c = -19.38$$



Ahora resta encontrar la ganancia específica que ubique el LGR sobre el punto en cuestión ($p = -6.57 + 92.52i$), para lo cual, partiendo de la función del controlador y la planta, de acuerdo a la Ec. 2.2:

$$K(s + 19.38) * \frac{5235}{(s - 38.19)(s + 38.19)(s + 31.07)} = -1$$

$$K = - \left. \frac{(s - 38.19)(s + 38.19)(s + 31.07)}{5235(s + 19.38)} \right|_{s=-6.57+92.52i}$$

$$K = 1.9668$$

La función de transferencia para el controlador PD diseñado sería:

$$G_{PD} = 1.9668(s + 19.38)$$

$$k_d = 1.9668$$

$$k_p = 38.1102$$

El error de estado estable para el controlador diseñado estará dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + k_{pp}}$$

$$k_{pp} = \lim_{s \rightarrow 0} G_p G_c$$

Entonces:

$$k_{pp} = -4.4029$$

El signo negativo de la ganancia resulta de la ubicación del polo de la planta en el semiplano derecho del plano s , que dentro de la fórmula para el cálculo del error no tiene relevancia ya que el error se lo toma como valor absoluto siendo que este no puede adoptar valores negativos. El error sería:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 - 4.4029} = 29.4\%$$

Se obtiene un error demasiado alto, por lo cual se plantea que el error teórico para el controlador sea alrededor de 5%.

Considerando entonces el nuevo error, se tendría:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + k_{pp}}$$

$$\frac{1}{1 + k_{pp}} = 0.05$$

$$k_{pp} = -19$$

Se requiere modificar la ganancia del controlador para conseguir el error deseado. Para calcular la nueva ganancia se divide la nueva ganancia encontrada ($k_{pp} = -19$) entre la ganancia original del controlador ($k_{pp} = -4.4029$), obteniendo el factor que permita modificar la ganancia inicial:

$$k = \frac{-19}{-4.4029} = 4.31$$

La nueva ganancia del controlador sería:

$$K = 1.9668 * 4.31$$

$$K = 8.48$$

Y la función de transferencia del controlador quedaría así:

$$G_{PD} = 8.48(s + 19.38)$$

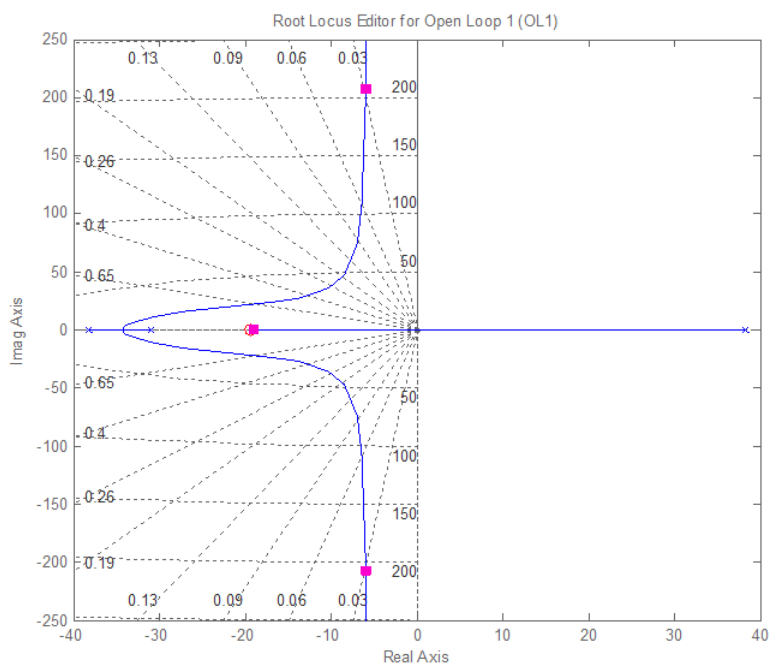
$$k_d = 8.48$$

$$k_p = 164.34$$

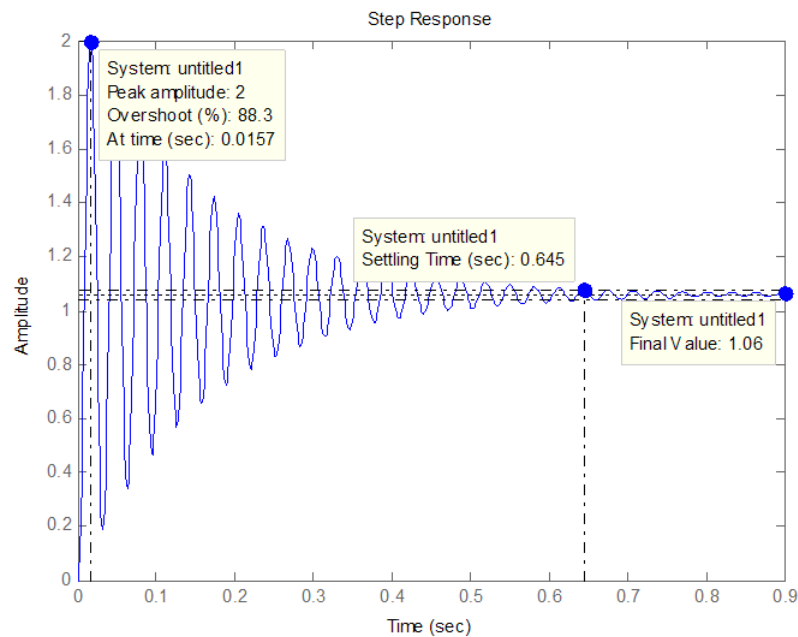
Y los polos encontrados como muestra el lugar geométrico serían:

$$p_{1,2} = -5.99 \pm 206.67i$$

$$p_3 = -19.08$$



La respuesta del sistema compensado sería entonces:



El incremento en el máximo pico, que llega hasta un 88%, se debe a que a medida que los polos dominantes de lazo cerrado se alejan del eje real en el plano s , el máximo pico se incrementa, como se puede ver en la Figura. 2.1.

Una vez realizado el diseño del controlador continuo es necesario transformarlo a un sistema discreto para lo cual se puede aplicar las reglas de integración numérica.

Partiendo del controlador PID, cuya función de transferencia de acuerdo a la Ec. 2.20, puede encontrarse su equivalente discreto basados en la Ec. 2.35.

Como se conoce de los sistemas en tiempo discreto, y de lo visto en los procedimientos de conversión de un sistema continuo a un sistema discreto, estos dependen y requieren de un tiempo de muestreo para su funcionamiento. Es importante determinar cuál sería la frecuencia de muestreo para evitar problemas en cuanto al diseño del sistema, por lo cual, tomando en consideración lo expuesto en la sección 2.1.6 y teniendo en cuenta que los polos dominantes del sistema, se componen de la siguiente manera:

$$p = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$p = -5.99 \pm 206.67i$$

Para:

$$\xi = 0.029; \omega_n = 207 \text{ rad/seg}$$

Para realizar el cálculo de la frecuencia de muestreo se considera esta como:

$$\omega_s \gtrsim 20\omega_n$$

Se selecciona:

$$\omega_s > 25\omega_n$$

Entonces el período de muestreo sería:

$$T < \frac{1}{\omega_s}$$

$$T < \frac{1}{25\omega_n}$$

$$T < \frac{2\pi}{25 \cdot 207}$$

$$T < 0.00121 \text{ [seg]}$$

Se elige entonces:

$$T = 0.001 \text{ [seg]}$$

Para el controlador PD ya diseñado se aplica la regla de integración numérica hacia atrás. En este caso al no existir la acción integral del controlador, esta regla se reduce a:

$$C_{PID}(z) = \frac{az + b}{z}$$

$$a = k_p + \frac{k_d}{T} \quad \text{Ec. 3.6}$$

$$b = -\frac{k_d}{T}$$

De acuerdo a la Ec. 3.6, los valores de a y b que definen la función de transferencia discreta es:

$$a = 164.34 + \frac{8.48}{0.001} = 8644.34$$

$$b = -\frac{8.48}{0.001} = 8480$$

Reemplazando los valores, la función de transferencia queda:

$$C_{PD}(z) = \frac{8644.34z + 8480}{z}$$

3.2.3. Controlador PID

Una vez diseñado el controlador PD, cuyo objetivo fue principalmente de estabilizar al sistema, se propone incrementar el desempeño del controlador en ciertas características. Así de los conocimientos de los sistemas de control se conoce que un controlador de la familia PID, que posee los parámetros de ganancia proporcional, derivativa e integral, logran además de estabilizar al sistema, reducir el error de estado estable a cero, que sería

el objetivo a alcanzar con el diseño de este controlador. La función de transferencia para un controlador de este tipo es:

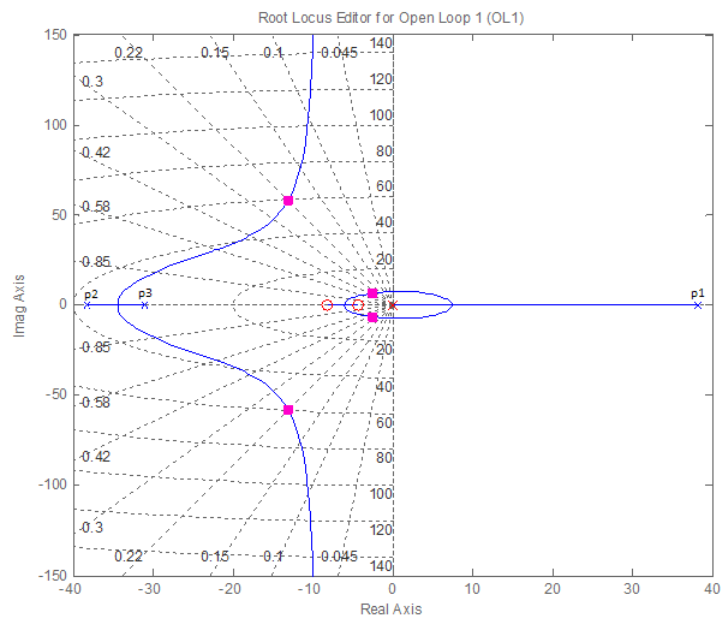
$$C_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

o

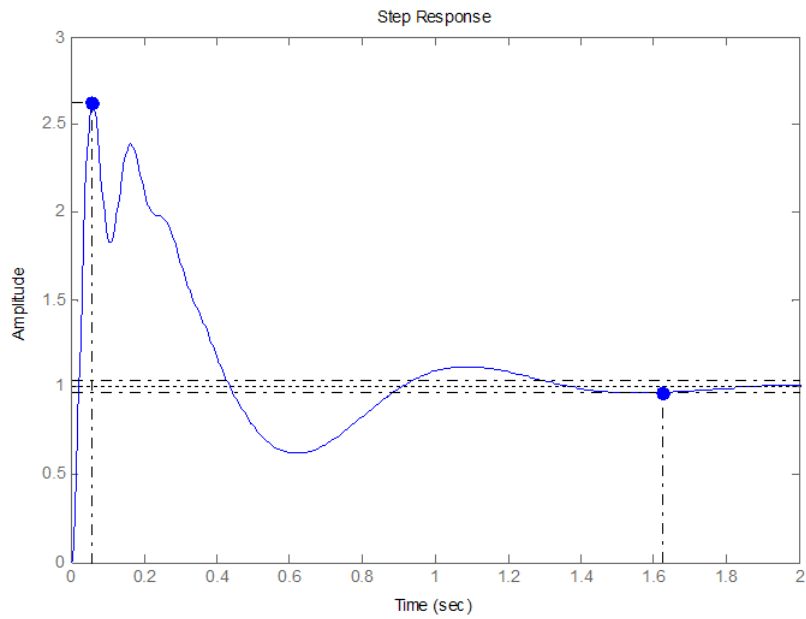
$$C_{PI}(s) = K \frac{(s + a)(s + b)}{s}$$

Como la función de transferencia añade dos ceros y un polo el lugar geométrico se traza como sigue, cuando los ceros se ubican entre el origen y $p_3 = -31.07$.

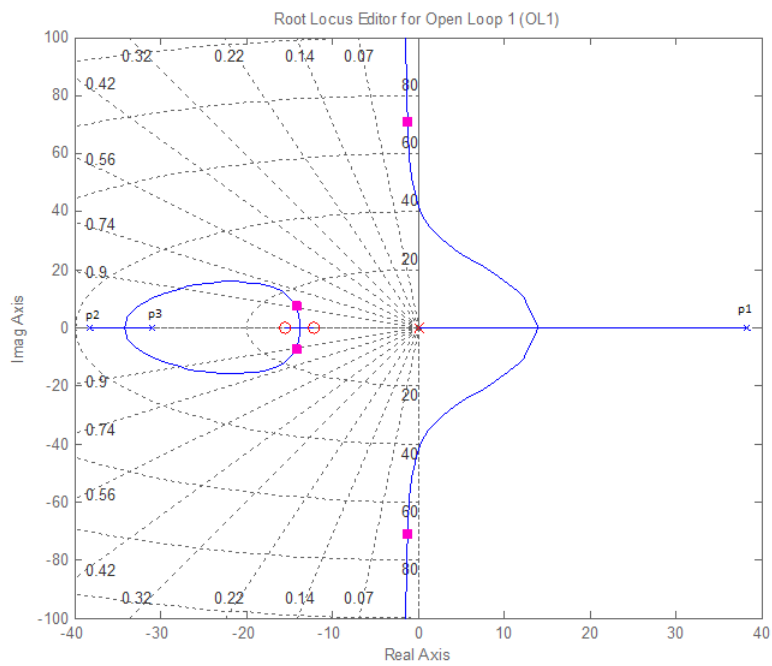
Para polos ubicados cerca del origen:



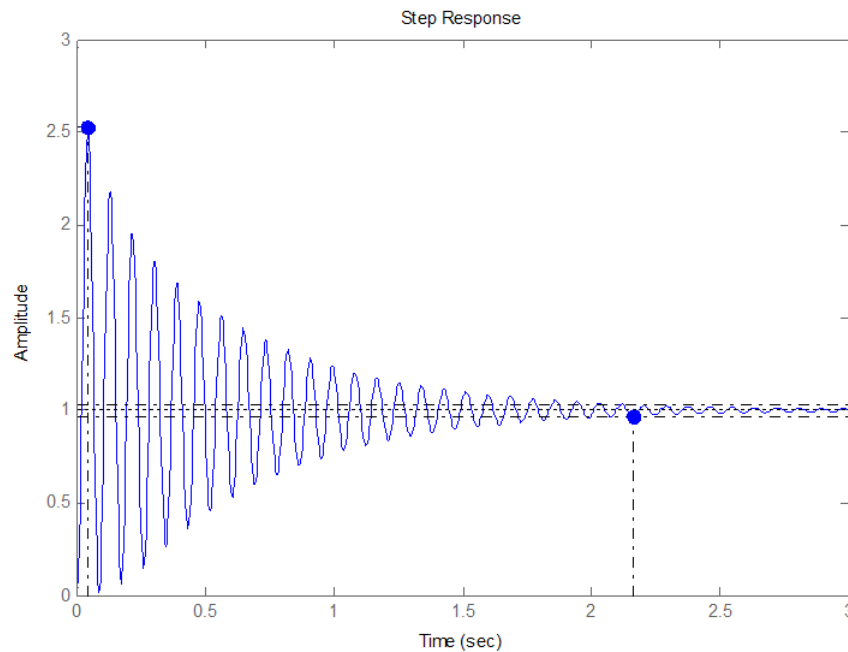
Cuya respuesta sería:



Para ceros alejados del origen:



Cuya respuesta al escalón sería:



A medida que los ceros se alejan del origen se puede ver que la asíntota hacia donde tienden las ramas del LGR se aproxima al eje imaginario del plano s . Ésta asíntota estará sobre el eje imaginario si la suma de los ceros de la función de transferencia del controlador sea igual a 31.07 de acuerdo a las reglas de esquematización del LGR:

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

$$\alpha = \frac{38.19 - 38.19 - 31.07 - (-a - b)}{4 - 2}$$

$$\alpha = \frac{31.07 + (a + b)}{2}$$

Debido a las características del controlador PID en el que el polo ubicado en el origen, en combinación con los ceros, incrementan el sobre pico máximo y aumentan el tiempo de establecimiento, se eligen los siguientes parámetros aproximados para la función de segundo orden: $MP < 96.3\%$ (un 5% más que para el controlador PD, dado que

$\xi=0.029$ de los polos en lazo cerrado del controlador PD arroja un $MP=91.3\%$) de y un tiempo de establecimiento $T_s < 3 \text{ seg}$, tomado de la referencia del LGR:

$$\xi \geq \frac{\left(\ln \frac{96.3}{100}\right)^2}{\pi^2 + \left(\ln \frac{96.3}{100}\right)^2}$$

$$\xi = 0.012$$

y

$$\omega_n = \frac{4.6}{\xi T_s}$$

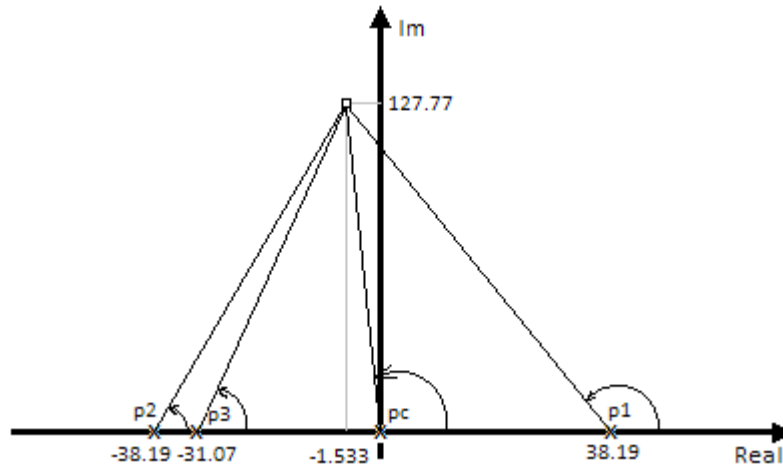
$$\omega_n = 127.78 \text{ rad/seg}$$

Por tanto los polos a lazo cerrado buscados añadiendo el controlador PID serían:

$$p = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$p = -1.533 \pm 127.77i$$

De acuerdo al lugar de las raíces para conseguir que el polo se encuentre en el trazo debe cumplirse el criterio del ángulo dado por la Ec. 2.6, por tanto se calculará el valor del ángulo aportado por los ceros y polos que tiene la planta junto al controlador para determinar cuál sería el ángulo a compensar por los ceros del controlador PID. Así los ángulos aportados por los polos de la planta más el polo en el origen del controlador, hacia el polo deseado, se tiene:



Polos de la planta: $p_1 = 38.19$; $p_2 = -38.19$; $p_3 = -31.07$,

Polos del controlador: $p_c = 0$,

$$\angle p_1 = -\left(180 - \operatorname{atan}\left(\frac{127.778}{38.19 - 1.533}\right)\right) = -107.2713^\circ$$

$$\angle p_2 = -\operatorname{atan}\left(\frac{127.778}{38.19 - 1.533}\right) = -73.9911^\circ$$

$$\angle p_3 = -\operatorname{atan}\left(\frac{127.778}{31.07 - 1.533}\right) = -76.9840^\circ$$

$$\angle p_c = -180 + \operatorname{atan}\left(\frac{127.78}{1.533}\right) = -90.6876^\circ$$

Entonces el ángulo a compensar por los ceros del controlador PID sería:

$$\angle p_t = \pm 180 + \angle p_1 + \angle p_2 + \angle p_3 + \angle p_c$$

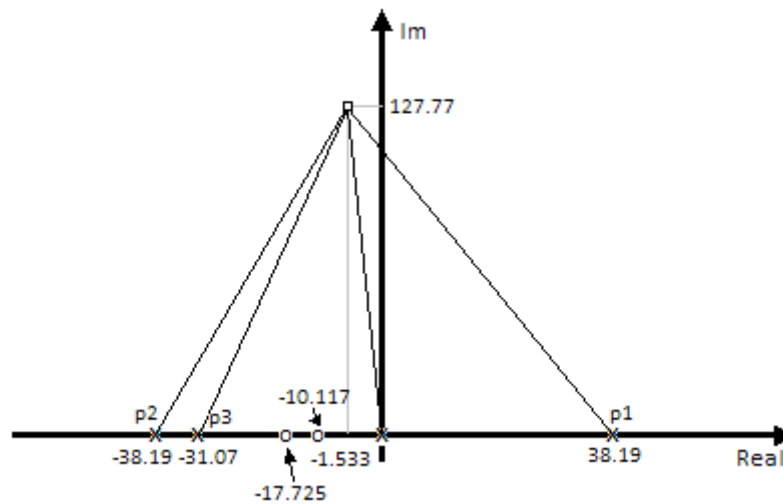
$$\angle p_1 + \angle p_2 + \angle p_3 + \angle p_c = -348.9340^\circ$$

$$\angle p_t = 168.9340^\circ$$

Se plantea que cada cero del controlador provea con el 49% y 51% del ángulo deseado respectivamente, con lo cual los ceros serían:

$$z_{c1} = -17.725$$

$$z_{c2} = -10.117$$



La ganancia que ubican los polos deseados se encuentra mediante:

$$K \frac{(s + 17.72)(s + 10.12)}{s} * \frac{5235}{(s - 38.19)(s + 38.19)(s + 31.07)} = -1$$

$$K = - \frac{s(s - 38.19)(s + 38.19)(s + 31.07)}{5235(s + 16.98)(s + 11.37)} \Big|_{s=-1.53+127.77i}$$

$$K = 3.4515$$

La función de transferencia del controlador resulta:

$$G_{PD} = 3.4515 \frac{(s + 17.72)(s + 10.12)}{s}$$

$$k_p = 96.097$$

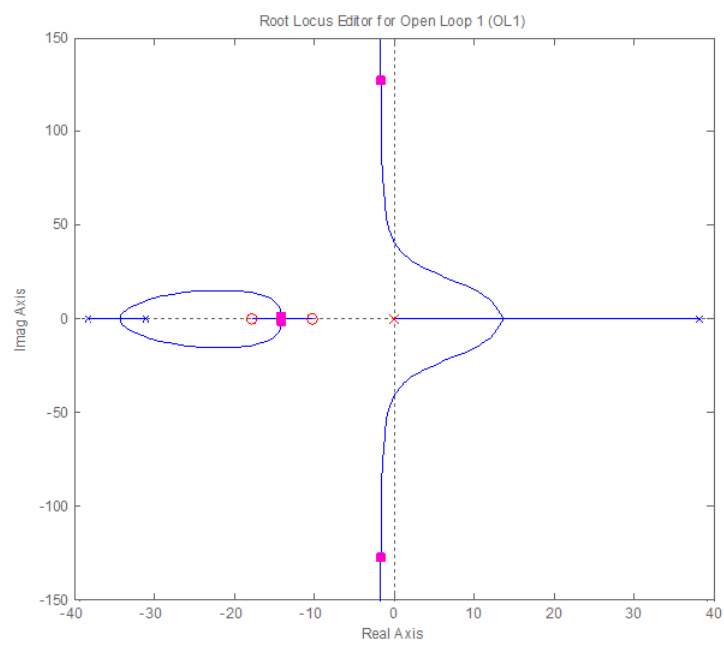
$$k_i = 618.956$$

$$k_d = 3.452$$

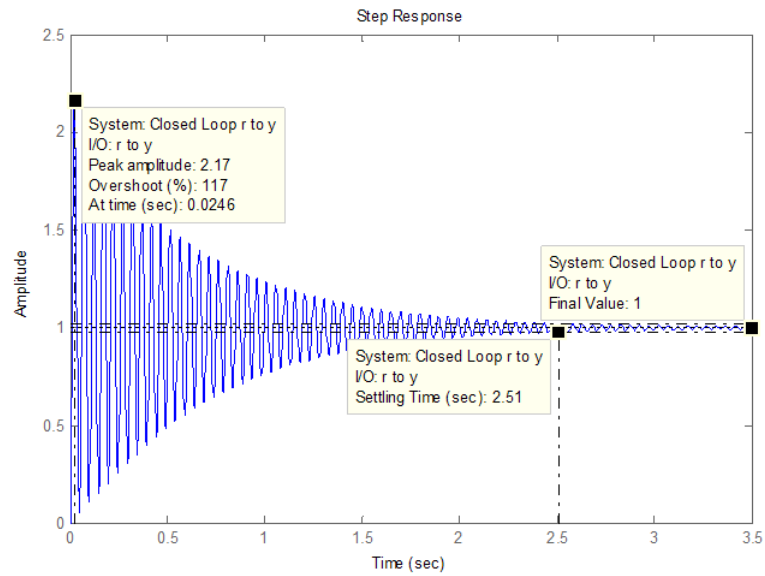
Y con ello, los polos resultantes, como muestra el LGR, serían:

$$p_{1,2} = -1.53 \pm 127.77i$$

$$p_{3,4} = -14 \pm 1.57i$$



Cuya respuesta sería:



El sobrepaso máximo de 90% a 117%, se debe a que se añade un polo en el origen en la función de transferencia de la trayectoria directa.

El período de muestreo se toma igual que para el controlador PD:

$$T < \frac{1}{\omega_s}$$

$$T < \frac{1}{25\omega_n}$$

$$T < \frac{2\pi}{25 \cdot 127.778}$$

$$T < 0.00196 \text{ [seg]}$$

Se selecciona entonces:

$$T = 0.001 \text{ [seg]}$$

La discretización se la realiza aplicando la regla de integración numérica hacia atrás, por tanto los coeficientes y la ecuación del controlador en el plano z , se calcula como:

$$C_{PID}(z) = \frac{az^2 - bz + c}{z(z - 1)}$$

$$a = \frac{k_d}{T} + k_p + k_i T$$

$$b = \frac{2k_d}{T} + k_p$$

$$c = \frac{k_d}{T}$$

Siendo estos coeficientes:

$$a = \frac{3.4515}{0.001} + 96.0968 + 618.955 * 0.001 = 3548.2$$

$$b = \frac{2 * 3.4515}{0.001} + 96.0968 = 6999$$

$$c = \frac{3.4515}{0.001} = 3451.5$$

Se reemplaza los valores y la función de transferencia quedaría:

$$C_{PID}(z) = \frac{3548z^2 - 6999z + 3451}{z(z - 1)}$$

3.3. CONTROLADOR PID DIGITAL UTILIZANDO EL MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES EN EL PLANO Z

Al igual que en el plano s , el método del lugar geométrico de las raíces, también es aplicable si se trabaja directamente en el plano z .

3.3.1. Controlador PID

Como se vio en el diseño del controlador PID de la sección previa, se puede diseñar un controlador PID discreto sobre el plano z , sin realizar una conversión por algún método de transformación entre el plano s y el plano z .

Los parámetros que definen los polos de lazo cerrado se toman iguales a los tomados para el controlador PID continuo, es decir como $MP < 96.3\%$ y tiempo de establecimiento $T_s < 3 \text{ seg}$.

$$\xi \geq \frac{\left(\ln \frac{96.3}{100}\right)^2}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{96.3}{100}\right)^2}}$$

$$\xi = 0.012$$

y

$$\omega_n = \frac{4.6}{\xi T_s}$$

$$\omega_n = 127.78 \text{ rad/seg}$$

Por tanto los polos de lazo cerrado buscados añadiendo el controlador PID serían:

$$p = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$p = -1.533 \pm 127.77i$$

Para obtener los polos en el plano z se realiza el mapeo de los polos en el plano s hacia el plano z mediante la siguiente expresión:

$$z = e^{sT}$$

Por tanto los polos en el plano z quedarían:

$$z_{1,2} = 0.9903 \pm 0.1272i$$

Para realizar el diseño del controlador, se parte de la función de transferencia en tiempo discreto para el controlador PID que tiene la forma:

$$C_{PID}(z) = \frac{az^2 - bz + c}{z(z - 1)}$$

con

$$pc_1 = 0; pc_2 = 1$$

Además de la función para el controlador es necesario discretizar el sistema, el cual queda como:

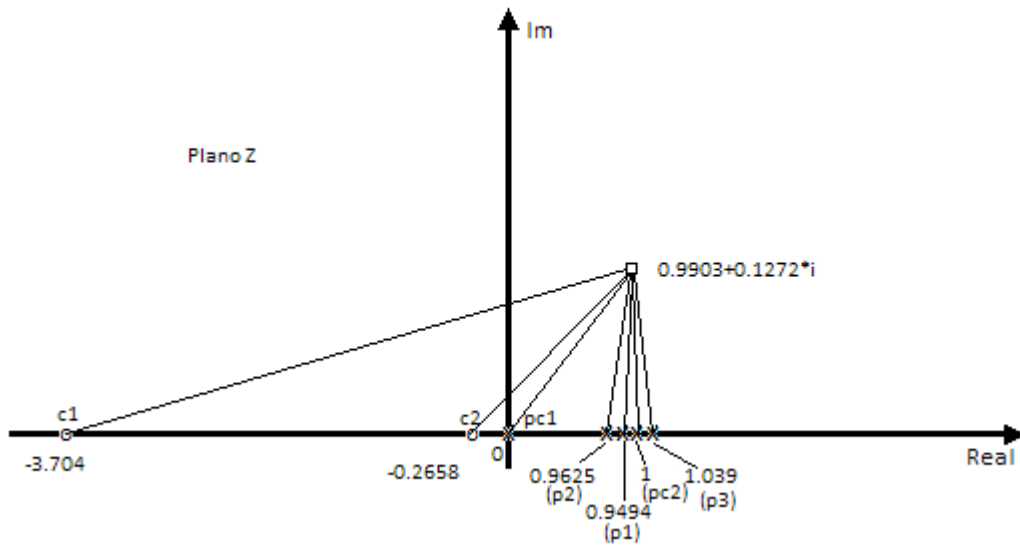
$$Planta(z) = \frac{8.6591 \cdot 10^{-7}(z + 3.704)(z + 0.2658)}{(z - 0.9694)(z - 0.9625)(z - 1.039)}$$

con

$$p_1 = 0.9694; p_2 = 0.9625; p_3 = 1.039;$$

$$c_1 = -3.704; c_2 = -0.2658;$$

Al aplicar el criterio del ángulo para el LGR, tanto para la planta como al controlador se obtiene:



$$\angle p_1 = -\operatorname{atan}\left(\frac{0.1272}{0.9903 - 0.9694}\right) = -80.6624^\circ$$

$$\angle p_2 = -\operatorname{atan}\left(\frac{0.1272}{0.9903 - 0.9625}\right) = -77.6738^\circ$$

$$\angle p_3 = -180 + \operatorname{atan}\left(\frac{0.1272}{1.0389 - 0.9903}\right) = -110.9073^\circ$$

$$\angle c_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{0.1272}{0.9903 + 3.704}\right) = 1.5521^\circ$$

$$\angle c_2 = \operatorname{atan}\left(\frac{0.1272}{0.9903 + 0.2658}\right) = 5.7824^\circ$$

$$\angle pc_1 = -\operatorname{atan}\left(\frac{0.1272}{0.9903}\right) = -7.3193^\circ$$

$$\angle pc_2 = \operatorname{atan}\left(\frac{0.1272}{1 - 0.9903}\right) = -94.36^\circ$$

Se plantea que cada cero del controlador proporcione con el 49% y 51% del ángulo deseado respectivamente, con lo cual los ceros serían:

$$z_{c1} = 0.9902$$

$$z_{c2} = 0.9984$$

Y la ganancia del controlador sería:

$$K \frac{(z - 0.9984)(z - 0.9902)}{z(z - 1)} * \frac{8.6591 \cdot 10^{-7}(z + 3.704)(z + 0.2658)}{(z - 0.9694)(z - 0.9625)(z - 1.039)} = -1$$

$$K = - \frac{z(z - 1)(z - 0.9694)(z - 0.9625)(z - 1.039)}{8.659 \cdot 10^{-7} * (z - 0.9984)(z - 0.9902)(z + 3.704)(z + 0.2658)} \Bigg|_{s=-0.9903+0.1272i}$$

$$K = 3498.9$$

Así la función de transferencia del controlador resulta:

$$C_{PID}(z) = \frac{3498.9(z - 0.9984)(z - 0.9902)}{z(z - 1)}$$

Cabe resaltar que la función obtenida mediante éste método es semejante a la conseguida cuando se realizó la discretización del controlador PID continuo, debido a que el modelo para el diseño del controlador en el plano z , tiene la misma forma que del controlador discreto PID obtenido mediante la regla de integración numérica hacia atrás.

3.4. CONTROLADOR DIGITAL EN EL ESPACIO DE ESTADO

El diseño de controladores en el espacio de estado se encuentra dentro de las “*técnicas modernas*” de control por lo que su utilidad y eficacia son superiores al control clásico.

3.4.1. Controlador por realimentación completa de estados

Los parámetros que definen los polos dominantes para el controlador se toman como: $MP < 80\%$ y tiempo de establecimiento $T_s < 0.3 \text{ seg}$. Aplicando las fórmulas utilizadas para el diseño de los controladores PD y PID, se tiene:

$$\xi \geq \frac{\left(\ln \frac{80}{100}\right)^2}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{80}{100}\right)^2}}$$

$$\xi = 0.0709$$

y

$$\omega_n = \frac{4.6}{\xi T_s}$$

$$\omega_n = 216.4187 \text{ rad/seg}$$

Por tanto los polos a lazo cerrado buscados añadiendo el controlador PD serían:

$$p = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$p = -1.533 \pm 215.87i$$

Y mapeando los polos del plano s hacia el plano z se tendría:

$$z_{1,2} = 0.9619 \pm 0.2109i$$

Tomando en consideración lo expuesto en la sección 2.3, primero se necesita discretizar las matrices que definen a la planta en el tiempo continuo, a fin de tener forma mostrada en las Ec. 2.44 y Ec. 2.45, de la siguiente manera.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$$

Por tanto se requiere, de acuerdo a las Ec. 2.46 y Ec. 2.47, encontrar las matrices que definen al sistema discreto. *Matlab* facilita la discretización del modelo mediante el comando “*c2d*”.

La ubicación de los polos mediante la ley de control de igual manera se ve facilitada por el comando “*acker*”, el cual devuelve como resultado el vector de ganancias K , que ubica las raíces de la ecuación característica Ec. 2.53, en los lugares deseados.

Ahora para tener un seguimiento adecuado de la entrada se calcula el factor \bar{N} , que requiere la determinación de N_u y N_x , de acuerdo a las ecuaciones Ec. 2.59 y Ec. 2.60.

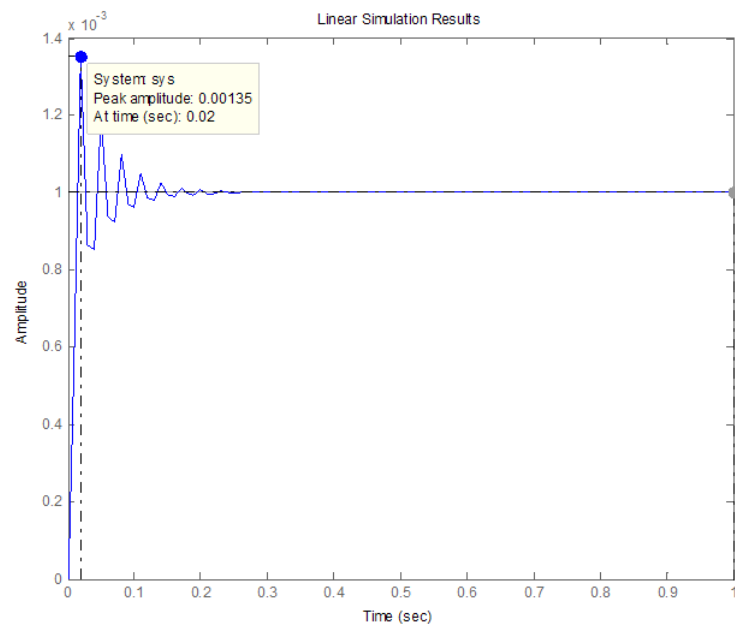
Lo anteriormente expuesto se resume en el Capítulo 2, y su desarrollo puede verse en el anexo del controlador en espacio de estado al final de este trabajo.

Los resultados para la el vector de ganancias y \bar{N} , para $T=0.001$ [seg] son:

$$Kz = [-1321.4 \quad -10 \quad 2.2]$$

$$\bar{N} = -1266.9$$

La respuesta del controlador sería:



CAPÍTULO 4

IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

Los resultados conseguidos en el laboratorio de los controladores expuestos en el capítulo anterior se muestran a continuación. En los gráficos se muestra en azul la entrada de referencia y en verde la salida obtenida del sistema.

4.1. CONTROLADOR PD

El modelo que permite probar el funcionamiento de este controlador es el siguiente:

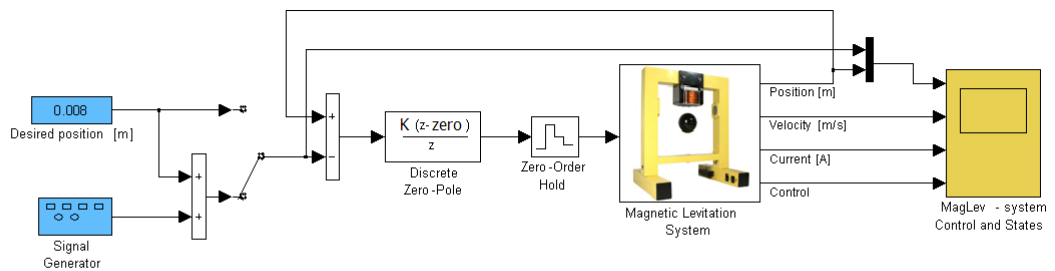


Figura. 4.1. Modelo real del controlador PD

Se ingresan los valores encontrados del controlador:

$$C_{PD}(z) = \frac{8644.34(z + 0.9809)}{z}; T = 0.001 [seg]$$

4.1.1. Gráficas de implementación

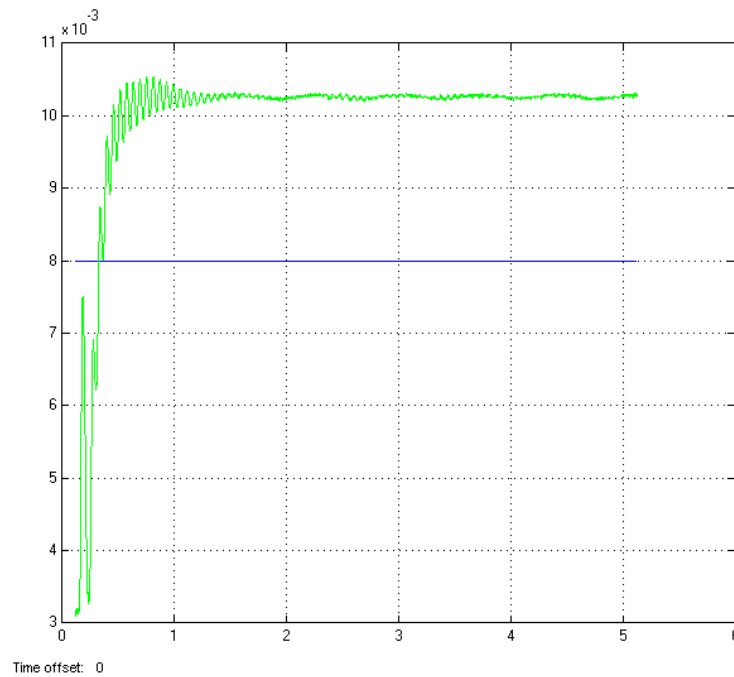


Figura. 4.2. Controlador PD. $r=0.008[m]$

De la gráfica anterior se aprecia un error aproximado de 29%, es decir un aumento del 24% aproximadamente respecto al valor obtenido en el diseño; un sobrepico del 33%, es decir un 55% menos que el valor obtenido en el diseño debido a que la esfera no inicia en cero; y un “*settling time*” de 1.5 [seg], siendo más lento en 1 seg, aproximadamente que puede deberse también a que la esfera no inicia en la posición cero, y por tanto se demora menor tiempo en estabilizar la oscilación producida cuando se establece la posición inicial de la esfera en cero.

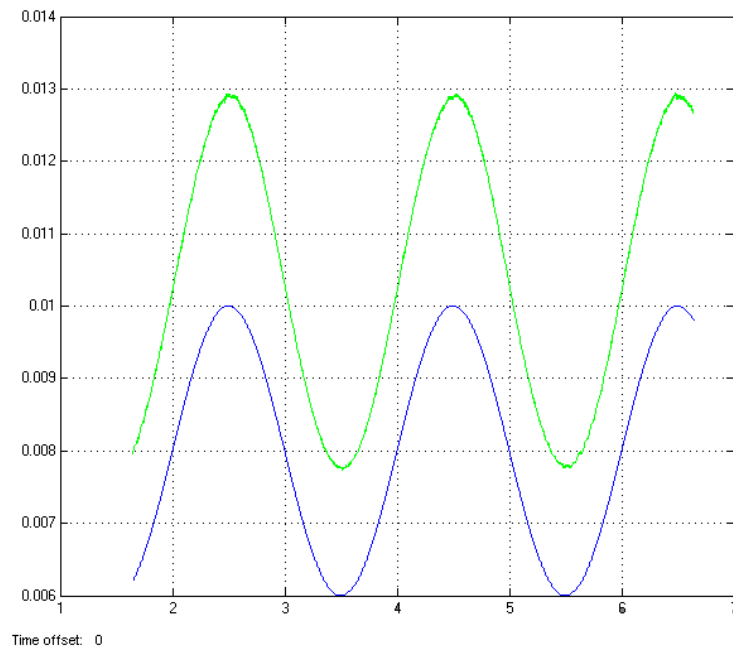


Figura. 4.3. Controlador PD. $r=0.008+0.002 \cdot \sin(\pi \cdot t)$

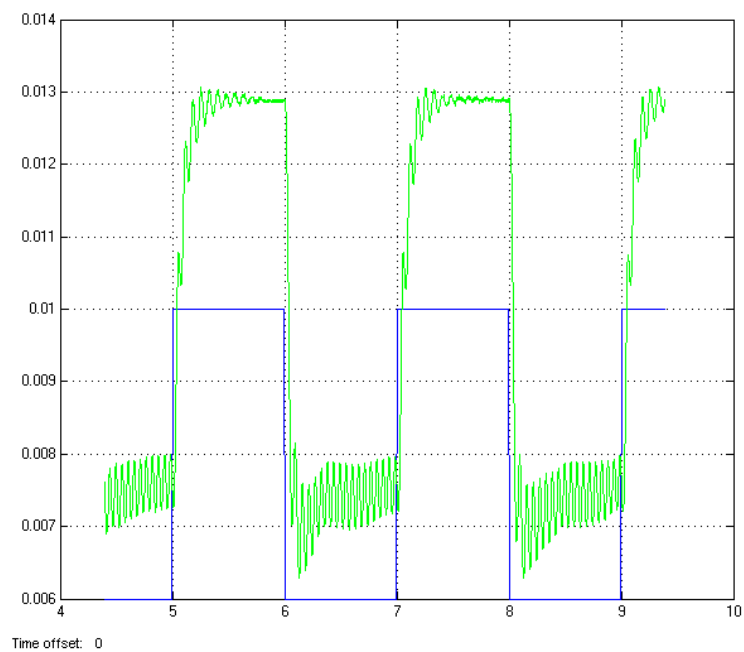


Figura. 4.4. Controlador PD. $r=0.008[m] +$ señal cuadrada de $A=0.002[m]$, $f=0.5$ [Hz]

4.2. CONTROLADOR PID DISCRETO POR INTEGRACIÓN NUMÉRICA

El modelo del controlador en cuestión es:

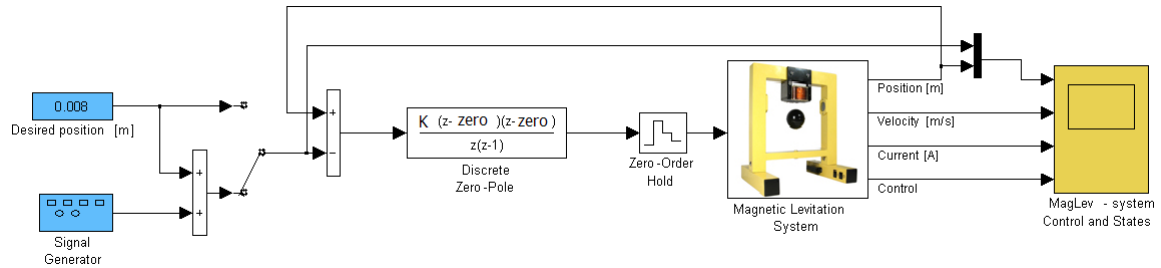


Figura. 4.5. Modelo real del controlador PID

Para realizar la prueba de este controlador se ingresan los valores diseñados en el capítulo anterior, siendo estos:

$$C_{PID}(z) = \frac{3548.17(z - 0.99)(z - 0.9826)}{z(z - 1)}; T = 0.001 [seg]$$

4.2.1. Gráficas de implementación

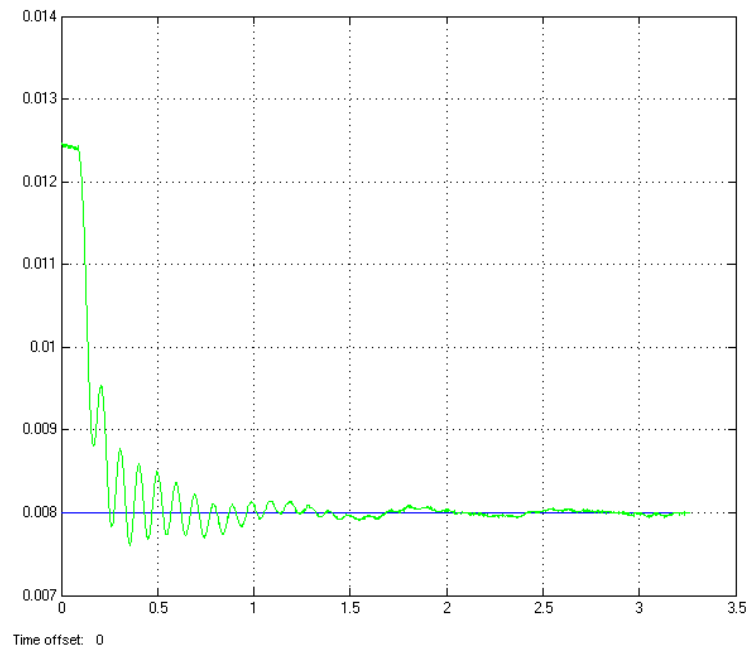


Figura. 4.6. Controlador PID. $r=0.008[m]$

Como se puede observar de la respuesta del controlador PID, el error en este caso disminuye a cero y el tiempo de establecimiento cumple con el valor establecido en el diseño $t_s < 3 [seg]$. El máximo pico se ve disminuido debido a que la esfera metálica inicia muy próxima al valor de referencia.

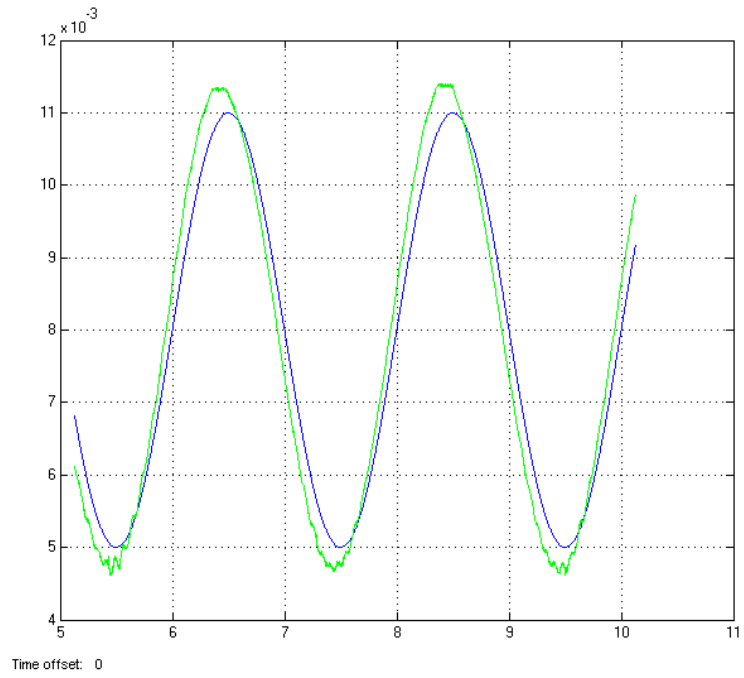


Figura. 4.7. Controlador PID. $r=0.008+0.003*\text{sen}(\pi*t)$

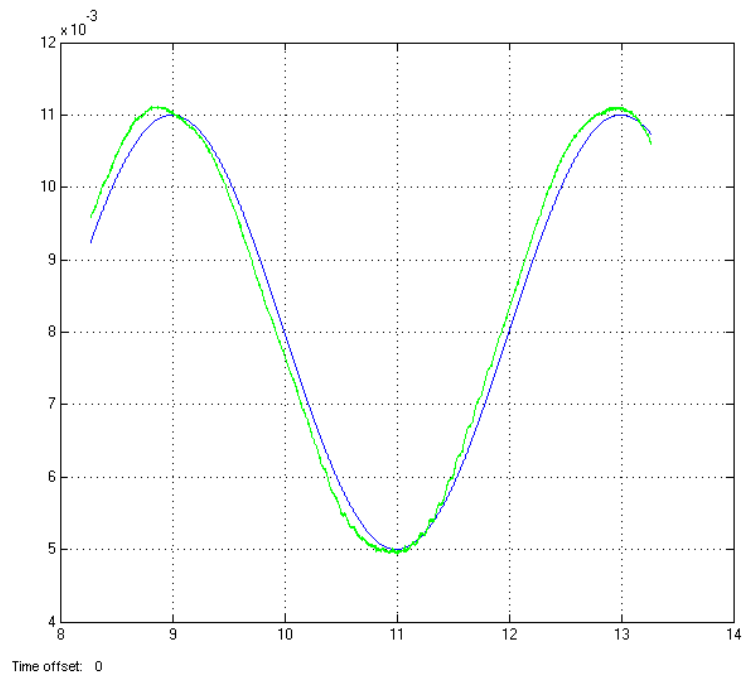


Figura. 4.8. Controlador PID. $r=0.008+0.003*\text{sen}(\pi/2*t)$

4.3. CONTROLADOR PID DISCRETO EN EL PLANO Z

El modelo de funcionamiento para este controlador es igual que para el controlador PID obtenido por el método de emulación, así:

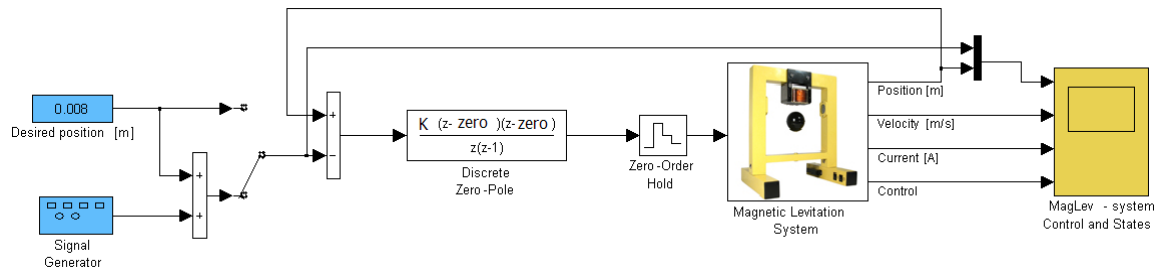


Figura. 4.9. Modelo real del controlador PID discreto

La función de transferencia del controlador PID discreto, según el diseño mostrado en el capítulo anterior es:

$$C_{PID}(z) = \frac{3498.9(z - 0.9984)(z - 0.9902)}{z(z - 1)}$$

4.3.1. Gráficas de implementación

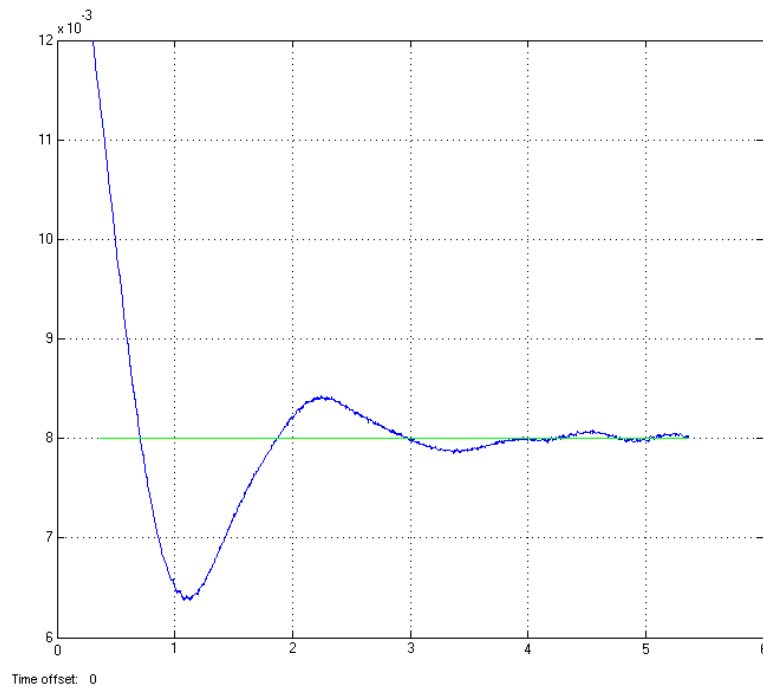


Figura. 4.10. Controlador PID discreto. $r=0.008[m]$

Se puede observar que a diferencia del controlador PID anterior, y a medida que el punto de inicio de la esfera se aleja del valor de referencia establecido, el máximo pico se incrementa obteniendo en este caso un 20% aproximadamente, y el tiempo de establecimiento se degrada un poco, obteniendo un 30% más del establecido en el diseño.

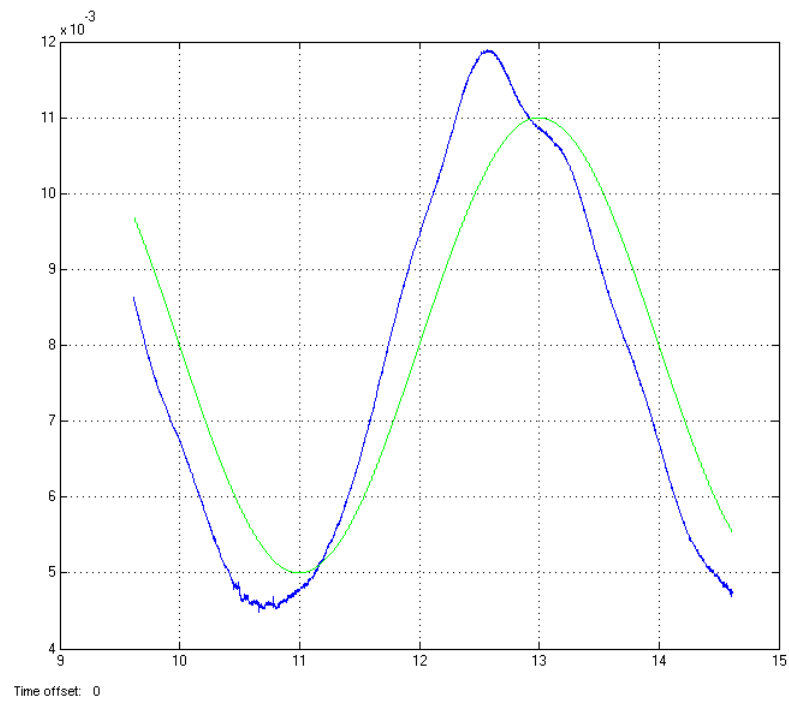


Figura. 4.11. Controlador PID. $r=0.008+0.003*\text{sen}(\pi/2*t)$

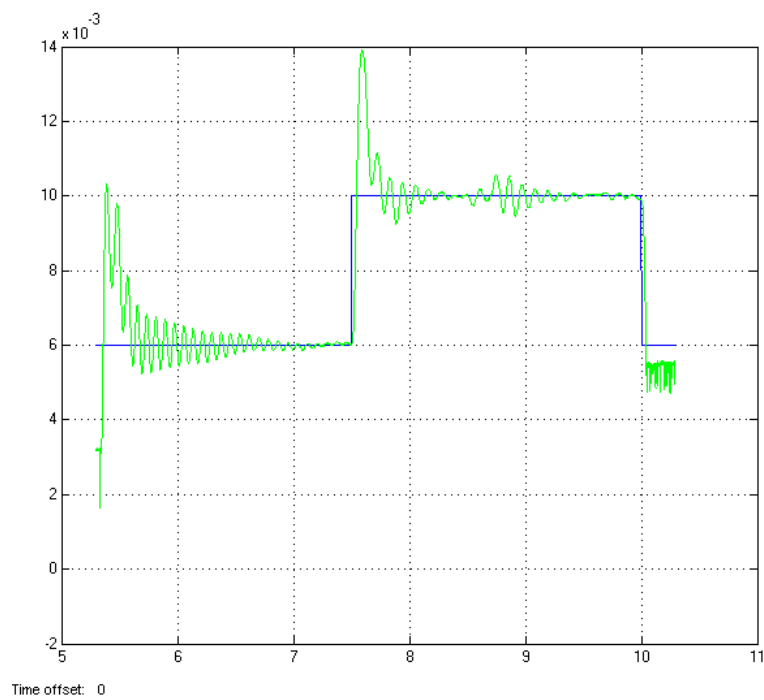


Figura. 4.12. Controlador discreto PID. $r=0.008[m]+$ señal cuadrada de $A=0.002$, $f=0.4$ [Hz]

4.4. CONTROLADOR POR REALIMENTACIÓN COMPLETA DE ESTADOS

El modelo que permite realizar el control por realimentación completa de estados sería:

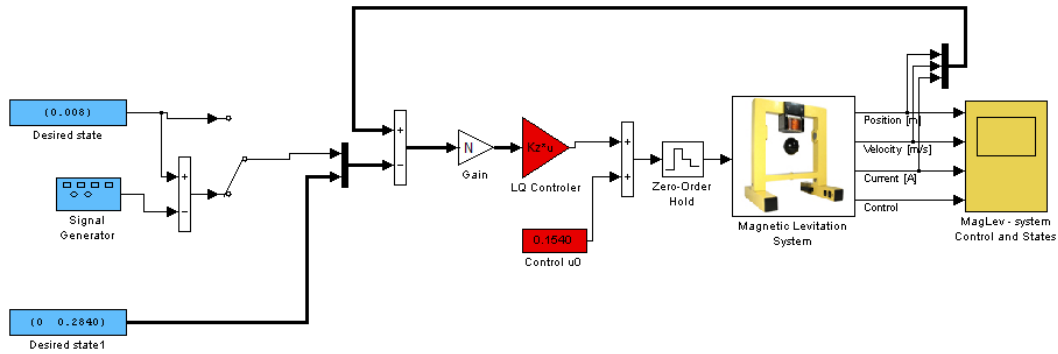


Figura. 4.13. Modelo real del controlador por realimentación completa de estados

Se realizan las pruebas para diferentes tiempos de muestreo, de lo que se tiene:

4.4.1. Gráficas de implementación

Para $T=0.001$ [seg]

$$Kz = [-1321.4 \quad -10 \quad 2.2]; \bar{N} = -1266.9$$

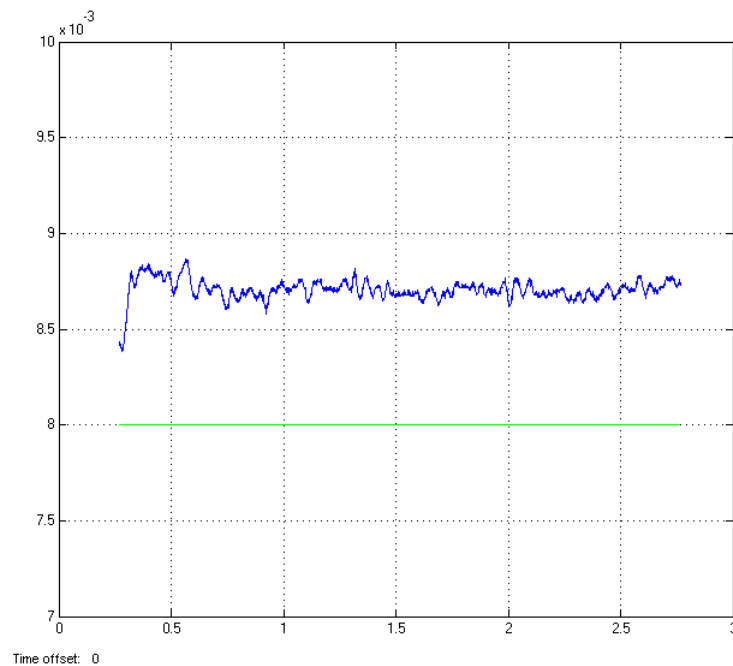


Figura. 4.14. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008$ [m]

El resultado obtenido concuerda con los parámetros de diseño del controlador establecidos en el capítulo anterior, donde el máximo pico era de un 35%, es decir un 13% más del obtenido en la prueba realizado sobre el modelo real. El tiempo de establecimiento cumple satisfactoriamente con el parámetro de diseño, es decir $T_s < 0.3 \text{ seg}$.

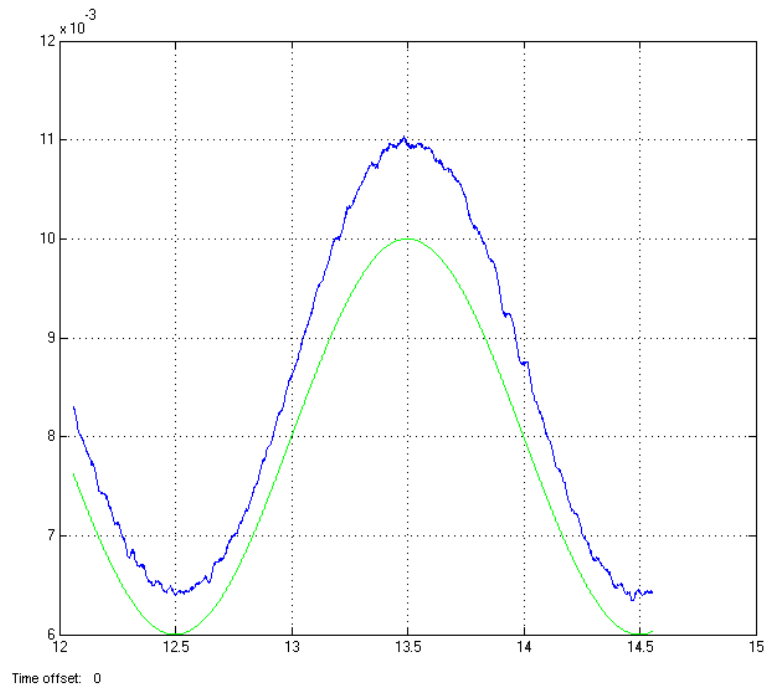


Figura. 4.15. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008 + 0.002*\text{sen}(\pi*t)$

Para comprobar la eficacia del controlador en espacio de estado se realizan pruebas con diferentes tiempos de muestreo, de los cuales obviamente se obtienen diferentes valores para la ganancia de realimentación, de lo cual se tiene:

Para $T=0.002[\text{seg}]$

$$Kz = [-1220.2 \quad -9.9 \quad 2.3]; \bar{N} = -1162.9$$

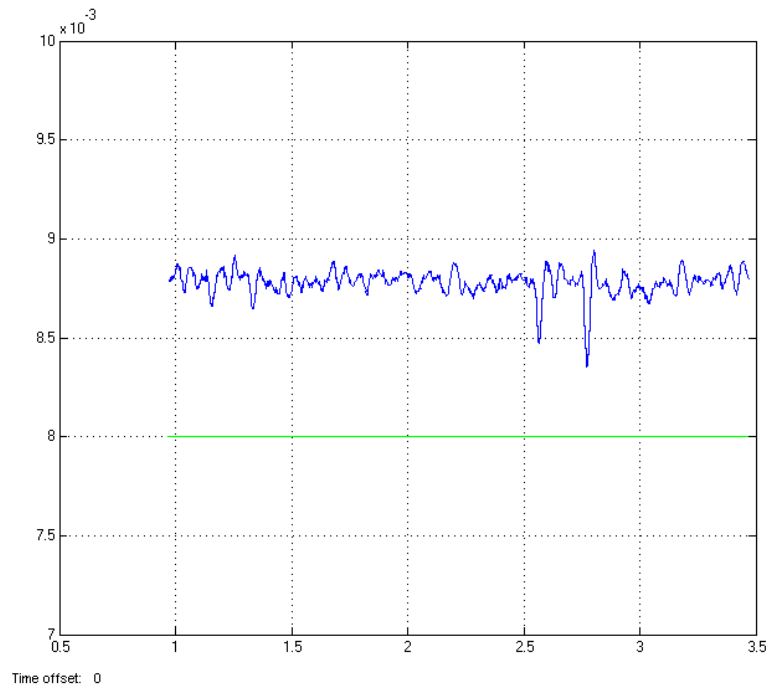


Figura. 4.16. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008[\text{m}]$

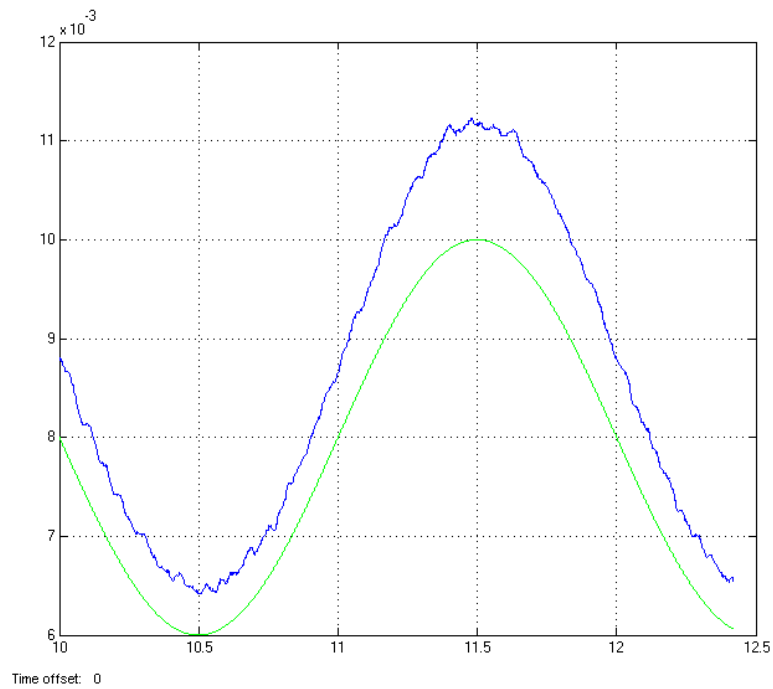


Figura. 4.17. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008 + 0.002*\text{sen}(\pi*t)$

Para $T=0.005[\text{seg}]$

$$Kz = [-929.017 \quad -8.957 \quad 2.55]; \bar{N} = -866.35$$

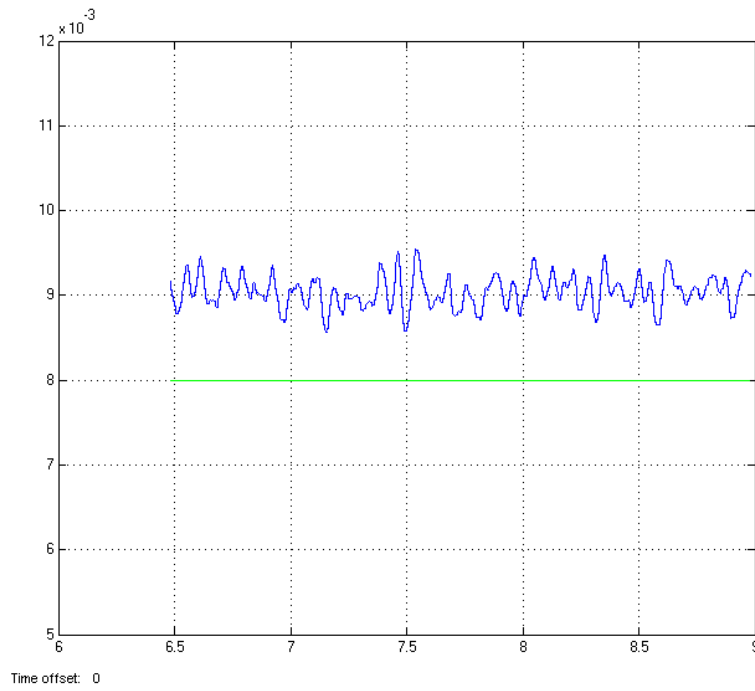


Figura. 4.18. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008[\text{m}]$

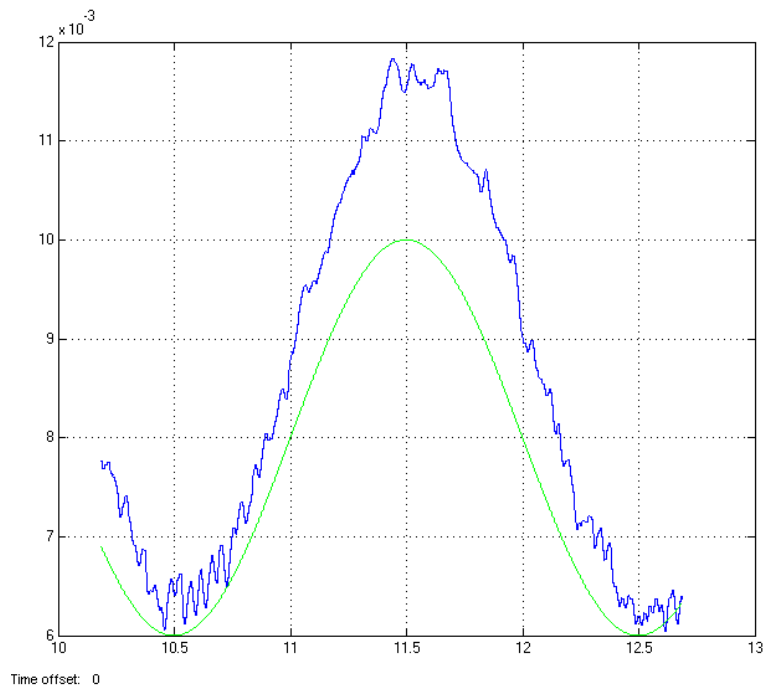


Figura. 4.19. Controlador por realimentación completa estados. $r=0.008 + 0.002*\text{sen}(\pi*t)$

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES

- El diseño de controladores clásicos utilizando el método del lugar geométrico de las raíces, es de mucha utilidad y eficiencia ya que permite visualizar la ubicación que tendrán los polos conforme se modifica la ganancia del controlador. El software utilizado en el diseño de los controladores permite el diseño interactivo, ya que muestra el lugar geométrico y la ubicación de polos en lazo cerrado, además que permite observar la respuesta conforme se varía el diseño del controlador.
- La obtención de los parámetros que definen al modelo matemático lineal de la planta resultó de gran importancia puesto que un correcto análisis y modelamiento permiten aproximarse de mejor manera al comportamiento real que tendría el sistema una vez realizada la implementación del correspondiente controlador.
- Se logró realizar el diseño de un controlador PD, cuyo objetivo principal fue estabilizar al sistema, puesto que este es inestable como muestra la Figura. 3.3, logrando mediante un diseño adecuado, la estabilidad sacrificando el error en estado estable que resultó en un 29%, siendo este un 24% más de lo planteado en el diseño mostrado del Capítulo 3, que son unos 1.9 mm en la distancia real.
- El error resultante adicional del controlador PD, pudo darse debido a que la obtención de los datos de la planta, si bien se los realizó con cuidado, no definen exactamente al modelo real sobre el cual se realizan las pruebas, además que la linealización realizada para la obtención de un punto de trabajo, en si resulta en

degradación de la precisión del sistema puesto que se descartan algunos datos de la planta que en naturaleza es inestable.

- Debido al error obtenido con el controlador PD, se realizó el diseño del controlador PID, cuya principal función es reducir el error de estado estable a cero, objetivo que fue alcanzado como muestra la Figura. 4.6, sacrificando un tanto el sobre pico y tiempo de establecimiento ya que el cero en el origen (del plano s), arroja estas características.
- El método de diseño de controladores en el plano s , mediante el lugar geométrico de las raíces también es posible realizarlo en el plano z , aplicándose las mismas reglas de esquematización y diseño gracias a la forma de la ecuación característica (Ec. 2.41) mostrada en el capítulo segundo.
- El diseño del controlador PID en el plano z , mediante el lugar geométrico de las raíces, tomando en consideración los mismos parámetros del controlador PID continuo, si bien se realiza con diferentes modelos para las funciones de transferencia de la planta y el controlador, arroja resultados muy similares, diferentes debido a las aproximaciones realizadas en los cálculos.
- La respuesta del controlador PID discreto de diseño en el plano z , de igual manera reduce el error de estado estable a cero, que es lo esperado, aunque con un máximo pico y tiempo de establecimiento incrementados, como muestra la Figura. 4.10, debido principalmente a que se cambio el punto de reposo o estado inicial de la esfera metálica.
- La utilización del método de transformación mediante integración numérica hacia atrás se ve justificado debido a que éste ubica los polos del controlador en $z=0$ y $z=1$ (Ec. 2.35), y dada la inestabilidad del sistema, resulta más adecuado este método, puesto que la regla de integración numérica Tustin, ubica los polos del controlador en $z=1$ y $z=-1$, es decir sobre el círculo unitario que corresponde al límite de estabilidad en el plano z .

- El diseño del controlador en espacio de estados, mediante la ubicación de polos de la realimentación completa de estados, resulto en un sistema más robusto, ya que al poseer más información de la planta (estados: posición, velocidad, corriente), se puede establecer un mejor control sobre la misma.
- Si bien en el diseño por realimentación completa de estados, se calcula al factor \bar{N} , para dar seguimiento a la entrada de referencia, no garantiza la reducción del error de estado estable como se muestra por ejemplo en la Figura. 4.14 donde el error es de un 21% aproximadamente. La reducción del error a cero implicaría la introducción de una parte integral como equivalente de un controlador PID, para lograr dicho objetivo.
- La selección del tiempo de muestreo para los controladores de diseño clásico es más crítica que en el espacio de estado como se evidencia en los resultados de implementación de este segundo controlador a mayores tiempos de muestreo, ya que posee mayor información del estado de la planta, a diferencia de los controladores clásicos de la familia PID, que solo posee datos de la salida y entrada del sistema.
- El sistema de levitación magnética (MLS), constituye una herramienta provechosa para el estudio de sistemas de control ya que por sus características de funcionamiento, y constitución, arroja problemas serios a ser abordados y superados al momento de diseñar controladores por el método que fuere.

5.2. RECOMENDACIONES

- Realizar la adquisición de datos del modelo real con cuidado a fin de aproximarse de mejor manera al sistema real sobre el cual se probarán los diseños realizados.
- Cuando se trabaja en laboratorio, es importante verificar que los datos del sensor sean los correctos, es por eso que es recomendable tener un respaldo del archivo que define al mismo, una vez se ha realizado la correcta adquisición de datos.
- Hay que considerar que los modelos de *Simulink* que permiten el ingreso de funciones de transferencia discreta, específicamente del “*Discrete Zero-Pole*” y del “*Discrete Transfer Fcn*”, no funcionan de igual manera al momento de realizar la prueba en la planta real.
- Definir al tiempo de muestreo como una variable del entorno de Matlab, e introducir la misma como variable en todos los componentes que requieren de un tiempo de muestreo, a fin de evitar errores al momento de poner en funcionamiento al sistema.

ANEXOS

A. CONTROLADOR PD

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%      CONTROLADOR      PD      %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Definición parámetros planta %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc

x10=0.008;

m=0.0448;
g=9.78;
Femp1=0.120133;
Femp2=6.705e-3;
fip1=1.21e-3;
fip2=2.835e-2;
ci=-0.09276;
ki=2.44643;
x3min=-0.03460;
umin=0.04697;

fix10=(fip1/fip2)*exp(-x10/fip2);
x30=((Femp2*m*g)/(Femp1*exp(-x10/Femp2)))^(1/2);
u=(x30-ci)/ki;

a21=((x30)^2/m)*(Femp1/(Femp2^2))*exp(-x10/Femp2);
a23=(-2*x30/m)*(Femp1/Femp2)*exp(-x10/Femp2);
a31=-(ki*u+ci-x30)*((-fip1/(fip2^2))*(exp(-x10/fip2)))^2;
a33=-fix10^-1;
b3=ki*(fix10^-1);

%% Las matrices serían

A=[ 0 1 0;
    a21 0 a23;
    a31 0 a33];

B= [0;
    0;
    b3];

C=[1 0 0];

%% Modelo lineal de la planta
planta=tf(ss(A,B,C,0))
planta=zpk(tf(ss(A,B,C,0)));
planta=-1*planta

%% DEFINICION PARÁMETROS
disp('Máximo pico (%)')
MP=80

disp('Tiempo de establecimiento (seg)')

```

```

Ts=0.7

%% CALCULO DE POLOS DESEADOS
disp('Coeficiente de amortiguamiento')
E=(abs(log(MP/100)))/sqrt(pi^2+(log(MP/100))^2)

disp('Frecuencia natural no amortiguada')
Wn=(4.6)/(E*Ts)

disp('Polos deseados:')
p1=-E*Wn+(Wn*sqrt(1-E^2))*sqrt(-1);
p2=-E*Wn-(Wn*sqrt(1-E^2))*sqrt(-1);
p3=-10*E*Wn;

%% CALCULO DEL ANGULO PARA PD
ang=0;
p_planta=eig(planta);
cant=size(p_planta);

for i=1:cant(1)
    teta=atand((imag(p1)-imag(p_planta(i)))/(real(p1)-
real(p_planta(i))));

    if teta<0
        teta=-1*(teta+180);
    else
        teta=-1*teta;
    end
    ang=ang+teta;
end

disp('Angulo de polos')
ang
disp('Angulo a compensar con ceros')
comp=-1*ang-180

disp('Posición del cero del controlador')
pos=real(p1)-((imag(p1))/tand(comp))

Gc=zpk(tf([1 -pos],[1]))

[K,polos]=rlocfind(planta*Gc,p1);

figure(1)
step(feedback(planta*K*Gc,1))
title('Respuesta preliminar del sistema compensado')

%% CORRECCION ERROR
val_err=5;
vd=abs(1-(1/0.05));
err=abs((evalfr(K*Gc*planta,0)));
disp('Factor de incremento para K del controlador')
Kf=vd/err
disp('Ganancia del controlador')
K=K*Kf
%% RESULTADOS PLANTA
polos=rlocus(planta*Gc,K);
disp('Polos de lazo cerrado son:')

```

```
polos

disp('Controlador análogo')
K*Gc

disp('Coeficientes del controlador PD')
kp=-K*pos
kd=K
ki=0

figure(2)
step(feedback(planta*K*Gc,1))
title('Respuesta final del sistema compensado')

%% CALCULO DEL PERIODO DE MUESTREO MINIMO

[w,e]=damp(polos);
w=sort(w);
T=1/(25*w(3)/(2*pi()));

i=0;
while T<1
    T=10*T;
    i=i+1;
end

disp('Tiempo de muestreo')
T=(fix(T))/(10^i)

%% DISCRETIZACION POR METODO DE INTEGRACIÓN NUMERICA REGLA DE INTEGRACIÓN
HACIA ATRÁS

disp('Función de transferencia discreta del controlador')

a=kp+kd/T;
b=-kd/T;
Gz=zpk(tf([a b],[1 0],T))

disp('Función de transferencia discreta de la planta precedida por ZOH')
plantaz=c2d(planta,T)
```

B. CONTROLADOR PID POR EMULACIÓN

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%      CONTROLADOR      PID      %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Definición parámetros planta %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc

x10=0.008;

m=0.0448;
g=9.78;
Femp1=0.120133;
Femp2=6.705e-3;
fip1=1.21e-3;
fip2=2.835e-2;
ci=-0.09276;
ki=2.44643;
x3min=-0.03460;
umin=0.04697;

fix10=(fip1/fip2)*exp(-x10/fip2);
x30=((Femp2*m*g)/(Femp1*exp(-x10/Femp2)))^(1/2);
u=(x30-ci)/ki;

a21=((x30)^2/m)*(Femp1/(Femp2^2))*exp(-x10/Femp2);
a23=(-2*x30/m)*(Femp1/Femp2)*exp(-x10/Femp2);
a31=-(ki*u+ci-x30)*((-fip1/(fip2^2))*(exp(-x10/fip2)))^2;
a33=-fix10^-1;
b3=ki*(fix10^-1);

%% Las matrices serían

A=[ 0 1 0;
    a21 0 a23;
    a31 0 a33];

B= [0;
    0;
    b3];

C=[1 0 0];

%% Modelo lineal de la planta
planta=tf(ss(A,B,C,0));
planta=zpk(tf(ss(A,B,C,0)));
planta=-1*planta

%% DEFINICIÓN PARÁMETROS
disp('Máximo pico (%)')
MP=96.3

disp('Tiempo de establecimiento (seg)')

```

```

Ts=3

%% CÁLCULO DE POLOS DESEADOS
disp('Coeficiente de amortiguamiento')
E=(abs(log(MP/100)))/sqrt(pi^2+(log(MP/100))^2)

disp('Frecuencia natural no amortiguada')
Wn=4.6/(E*Ts)

disp('Polos deseados:')
p1=-E*Wn+(Wn*sqrt(1-E^2))*sqrt(-1)
p2=-E*Wn-(Wn*sqrt(1-E^2))*sqrt(-1)

%% CÁLCULO DEL ANGULO PARA PID
ang=0;
p_planta=eig(planta);
cant=size(p_planta);

for i=1:cant(1)
    teta=atand((imag(p1)-imag(p_planta(i)))/(real(p1)-
real(p_planta(i))));

    if teta<0
        teta=-1*(teta+180);
    else
        teta=-1*teta;
    end
    ang=ang+teta;
end

teta=-1*(atand(imag(p1)/real(p1))+180);
ang=ang+teta;

disp('Angulo de polos:')
ang
disp('Angulo a compensar con ceros:')
comp=-1*ang-180

disp('Ángulo del 1er cero:')
a1=comp*0.49

disp('Ubicación del 1er cero:')
if a1>90
    pos1=real(p1)+((imag(p1))/tand(180-a1))
else
    pos1=real(p1)-((imag(p1))/tand(a1))
end

if pos1>0
    error('error ubicacion cero')
end

if pos1<real(p1)
    disp('cero < pto prueba');
    teta=(atand(imag(p1)/(real(p1)-pos1)));
else
    disp('cero > pto prueba');
    teta=180+(atand(imag(p1)/(real(p1)-pos1)));

```



```

end
disp('Angulo a compensar del 2do cero:')
comp=comp-teta

disp('Ubicación del 2do cero:')
if comp>90
    teta=180-comp;
    pos2=real(p1)+(imag(p1)/tand(teta))
else
    pos2=real(p1)-(imag(p1)/tand(comp))
end

if pos2>0
    error('error ubicacion cero')
end

Gc=zpk(tf([1 -1*(pos1+pos2) pos1*pos2],[1 0]))
[K,polos]=rlocfind(planta*Gc,p1)

kp=-K*(pos1+pos2)
ki=K*pos1*pos2
kd=K

disp('Los polos encontrados son:')
polos

figure(1)
step(feedback(planta*K*Gc,1))
title('Respuesta final del sistema compensado')

disp('Función del controlador=')
Gc*K

%% CÁLCULO DEL PERÍODO DE MUESTREO MÍNIMO
[w,e]=damp(polos);
w=sort(w);
T=1/(25*w(4)/(2*pi()));

i=0;
while T<1
    T=10*T;
    i=i+1;
end

disp('Tiempo de muestreo')
T=(fix(T))/(10^i)

%% DISCRETIZACIÓN POR MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA REGLA DE INTEGRACIÓN
HACIA ATRÁS

a=kd/T+kp+ki*T;
b=-(2*kd/T+kp);
c=kd/T;
disp('Función de transferencia discreta del controlador')
Gz=(tf([a b c],[1 -1 0],T))

disp('Función de transferencia discreta de la planta precedida por ZOH')
plantaz=c2d(planta,T)

```

C. CONTROLADOR PID EN EL PLANO Z

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%      CONTROLADOR      PID      %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Definición parámetros planta %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc

x10=0.008;

m=0.0448;
g=9.78;
Femp1=0.120133;
Femp2=6.705e-3;
fip1=1.21e-3;
fip2=2.835e-2;
ci=-0.09276;
ki=2.44643;
x3min=-0.03460;
umin=0.04697;

fix10=(fip1/fip2)*exp(-x10/fip2);
x30=((Femp2*m*g)/(Femp1*exp(-x10/Femp2)))^(1/2);
u=(x30-ci)/ki;

a21=((x30)^2/m)*(Femp1/(Femp2^2))*exp(-x10/Femp2);
a23=(-2*x30/m)*(Femp1/Femp2)*exp(-x10/Femp2);
a31=-(ki*u+ci-x30)*((-fip1/(fip2^2))*(exp(-x10/fip2)))^2;
a33=-fix10^-1;
b3=ki*(fix10^-1);

%% Las matrices serían

A=[ 0 1 0;
    a21 0 a23;
    a31 0 a33];

B= [0;
    0;
    b3];

C=[1 0 0];

%% Modelo lineal de la planta
planta=tf(ss(A,B,C,0))
planta=zpk(tf(ss(A,B,C,0)));
planta=-1*planta

%% DEFINICIÓN PARÁMETROS
disp('Máximo pico (%)')
MP=96.3

disp('Tiempo de establecimiento (seg)')

```

```

Ts=3

%% CÁLCULO DE POLOS DESEADOS
disp('Coeficiente de amortiguamiento')
E=(abs(log(MP/100)))/sqrt(pi^2+(log(MP/100))^2)

disp('Frecuencia natural no amortiguada')
Wn=4.6/(E*Ts)

disp('Polos deseados:')
p1=-E*Wn+(Wn*sqrt(1-E^2))*sqrt(-1);
p2=-E*Wn-(Wn*sqrt(1-E^2))*sqrt(-1);

z1=exp(p1*T)
z2=exp(p2*T)

%% CÁLCULO DEL PERÍODO DE MUESTREO MÍNIMO
[w,e]=damp(p1);
w=sort(w);
T=1/(25*w/(2*pi()));

i=0;
while T<1
    T=10*T;
    i=i+1;
end

disp('Tiempo de muestreo')
T=(fix(T))/(10^i)

%% CÁLCULO DEL ÁNGULO
% T=0.002
ang=0;
planta_d=c2d(planta,T)
p_planta=eig(planta_d);

cant=size(p_planta);

for i=1:cant(1)
    teta=atand((imag(z1)-imag(p_planta(i)))/(real(z1)-
real(p_planta(i))));

    if teta<0
        teta=-1*(teta+180);
    else
        teta=-1*teta;
    end
    ang=ang+teta;

end

%angulo aportado por los ceros planta
[num,den]=tfdata(planta_d,'v');
ceros=roots(num);

for i=1:2
    teta=atand((imag(z1))/(abs(real(z1)-ceros(i))));
    ceros(i);

```

```

    if real(z1)>ceros(i)
        rp=teta;
        ang=ang+teta;
    else
        rp=180-teta;
        ang=ang+180-teta;
    end

end

% disp('Ángulos de polos del controlador');
teta=-1*((atand(imag(z1)/real(z1))));
ang=ang+teta;

teta=-1*(180-atand((imag(z1))/(1-real(z1))));
ang=ang+teta;

disp('Angulo de polos')
ang
disp('Angulo a compensar con ceros')
comp=-1*ang-180

disp('Ángulo del 1er cero:')
a1=comp*.49
disp('Posición del 1er cero:')
if a1>90
    pos1=real(z1)+((imag(z1))/tand(180-a1))
else
    pos1=real(z1)-((imag(z1))/tand(a1))
end

if pos1<real(z1)
    teta=(atand(imag(z1)/(real(z1)-pos1)));
else
    teta=180+(atand(imag(z1)/(real(z1)-pos1)));
end

disp('Ángulo del 2do cero:')
comp=comp-teta
disp('Posición del 2do cero:')
if comp>90
    teta=180-comp;
    pos2=real(z1)+(imag(z1)/tand(teta))
else
    pos2=real(z1)-(imag(z1)/tand(comp))
end

Gz=zpk(tf([1 -1*(pos1+pos2) pos1*pos2],[1 -1 0],T))
[K,polos]=rlocfind(planta_d*K*Gz,z1)

figure(1)
step(feedback(planta_d*K*Gz,1))

disp('Función del controlador=')
Gz=Gz*K

[num,den]=tfdata(zpk(Gz),'v');

```

D. CONTROLADOR CON REALIMENTACION COMPLETA DE ESTADOS

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% MODELO LINEAL DE LA PLANTA %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Definición parámetros planta %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc

x10=0.008;

m=0.0448;
g=9.78;
Femp1=0.120133;
Femp2=6.705e-3;
fip1=1.21e-3;
fip2=2.835e-2;
ci=-0.09276;
ki=2.44643;
x3min=-0.03460;
umin=0.04697;

fix10=(fip1/fip2)*exp(-x10/fip2);
x30=((Femp2*m*g)/(Femp1*exp(-x10/Femp2)))^(1/2);
u=(x30-ci)/ki;

a21= ((x30)^2/m)*(Femp1/(Femp2^2))*exp(-x10/Femp2);
a23= (-2*x30/m)*(Femp1/Femp2)*exp(-x10/Femp2);
a31= -(ki*u+ci-x30)*((-fip1/(fip2^2))*(exp(-x10/fip2)))^2;
a33= -fix10^-1;
b3= ki*(fix10^-1);

disp('Corriente con posicion 0.008')
x30=((Femp2*m*g)/(Femp1*exp(-(0.008)/Femp2)))^(1/2)
disp('Señal de control para la corriente anterior')
u=(x30-ci)/ki

%% Las matrices serían

A=[ 0 1 0;
    a21 0 a23;
    a31 0 a33];

B= [0;
    0;
    b3];

C=[1 0 0];

%% Modelo lineal de la planta
planta=tf(ss(A,B,C,0));
planta=zpk(tf(ss(A,B,C,0)));
planta=-1*planta;

```

```

planta=zpk(planta)

%% DEFINICIÓN PARÁMETROS
disp('Máximo pico %')
MP=80
disp('Tiempo de establecimiento')
Ts=0.3

%% CÁLCULO PARÁMETROS
disp('Coeficiente de amortiguamiento')
E=(abs(log(MP/100)))/sqrt(pi^2+(log(MP/100))^2)
disp('Frecuencia natural no amortiguada')
Wn=4.6/(E*Ts)

%% CÁLCULO DE TIEMPO DE MUESTREO
T=1/(20*Wn/(2*pi()));
i=0;
while T<1
    T=10*T;
    i=i+1;
end

disp('Tiempo de muestreo')
T=(fix(T))/(10^i)
%% Tiempo muestreo
% T=0.002

%% ESPACIO DE ESTADO

p1=-E*Wn+(Wn*sqrt(1-E^2))*sqrt(-1);
p2=-E*Wn-(Wn*sqrt(1-E^2))*sqrt(-1);
p3=-10*E*Wn;

z1=exp(p1*T);
z2=exp(p2*T);
z3=exp(p3*T);

disp('Polos deseados:')
pz=[z1;z2;z3]

planta=ss(A,B,C,0);
planta_d=c2d(planta,T);
[A1,B1,C1,D1]=ssdata(planta_d);
Kz=acker(A1,B1,pz);

dim=size(A1);
f1=cat(2,A1-eye(dim(1)),B1);
C1=[1 0 0];
f2=cat(2,C1,D1);
ft=cat(1,f1,f2);
tam=size(inv(ft));

mt(tam(1))=1;
mt=[0;0;0;1];
m1=inv(ft)*mt;
tm=size(m1);
nx=m1(1:tm(1)-1,1);

```

```
nu=m1(tm(1),1);  
  
disp('Ganancia de seguimiento de entrada:')  
nbar=nu+Kz*nx  
  
disp('Vector para ubicar los polos:')  
Kz  
  
disp('Tiempo de muestreo:')  
T
```

BIBLIOGRAFÍA

FRANKLIN, Gene, POWELL, David, WORKMAN, Michael, *Digital Control of Dynamic Systems*, Third Edition, Addison-Wesley, California 1998.

FRANKLIN, Gene, POWELL, David, EMAMI-NAEINI, Abbas, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Fourth Edition, Prentice Hall Inc, New Jersey 2002.

PHILLIPS, Charles, HARBOR, Royce, *Feedback Control Systems*, Fourth Edition, Prentice Hall Inc, California 2000.

DISTEFANO, Joseph, STUBBERUD, Allen, WILLIAMS, Ivan, *Theory and Problems of Feedback and Control Systems*, Second Edition, McGraw-Hill Inc, California 1995.

BURNS, Roland, *Advanced Control Engineering*, First edition, Butterworth-Heinemann, London 2001.

KUO, Benjamin, *Sistemas de Control Automático*, Séptima Edición, Prentice Hall Hispanoamericana, México 1996.

MAZZONE, Virginia, *Controladores PID*, <http://www.eng.newcastle.edu.au/~jhb519/teaching/caut1/Apuntes/PID.pdf>, Marzo 2002, Noviembre 2010.

MELLON, Carnegie, *Tutoriales de control Digital*, http://www.ib.cnea.gov.ar/~instyctl/Tutorial_Matlab_esp/digital.html, 26/08/1997, Noviembre 2010.

INTECO, Kraków, *"Magnetic Levitation System"*, User's Manual version 1.6 for Matlab 6.5, March 2005.

Sangolquí, 27 de Enero de 2011

ELABORADO POR:

Santiago Fabricio Villagómez Cholota

Ing. Victor Proaño

Director

Ing. Edwin Aguilar

Codirector

EL DIRECTOR DE LA CARRERA DE
INGENIERÍA ELECTRÓNICA EN
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

Ing. Victor Proaño Rosero, M.Sc