



**ESPE**  
**UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS**  
**INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA**

**Análisis del módulo de elasticidad de vigas de acero estructural ASTM A 36 utilizando  
vibraciones**

Ganchala Salazar, Joan Andrés

Departamento de Ciencias De La Energía Y Mecánica

Carrera de Ingeniería Mecánica

Trabajo de titulación, previo a la obtención del título de Ingeniero Mecánico

Ing. Pérez Rosales, José Emilio MSC.

Sangolquí 31 de enero del 2022



TESIS Ganchala 2022 02 01 M.docx

Scanned on: 14:0 February 1, 2022 UTC



Overall Similarity Score :



Results Found



Total Words in Text

Identical Words	476
Words with Minor Changes	60
Paraphrased Words	693
Omitted Words	1073

JOSE EMILIO  
PEREZ  
ROSALES

Firmado digitalmente  
por JOSE EMILIO  
PEREZ ROSALES  
Fecha: 2022.02.01  
09:12:00 -05'00'

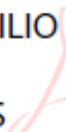


**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y LA  
MECÁNICA  
CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**CERTIFICACIÓN**

Certifico que el trabajo de titulación, “Análisis del módulo de elasticidad de vigas de acero estructural ASTM A 36 utilizando vibraciones” fue realizado por el señor **Ganchala Salazar, Joan Andrés** el cual ha sido revisado y analizado en su totalidad por la herramienta de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 31 de enero de 2022

**JOSE EMILIO  
PEREZ  
ROSALES**  Firmado digitalmente  
por JOSE EMILIO  
PEREZ ROSALES  
Fecha: 2022.02.11  
16:37:06 -05'00'

**Ing. Pérez Rosales José Emilio, Msc.**

C.C.: 1706481957



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y LA MECÁNICA  
CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA

Yo, **Ganchala Salazar, Joan Andrés**, con cédula de ciudadanía n° 1724940596, declaro que el contenido, ideas y criterios de trabajo de titulación **“Análisis del módulo de elasticidad de vigas de acero estructural ASTM A 36 utilizando vibraciones”** es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 31 de enero de 2022

A handwritten signature in blue ink, which appears to be 'Joan Andrés Ganchala Salazar', is written over a horizontal line.

**Ganchala Salazar, Joan Andrés**

C.C.: 1724940596



**ESPE**  
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y LA MECÁNICA

CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

**AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN**

Yo, **Ganchala Salazar, Joan Andrés**, con cédula de ciudadanía n° 1724940596, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: **“Análisis del módulo de elasticidad de vigas de acero estructural ASTM A 36 utilizando vibraciones”** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 31 de enero de 2022

---

**Ganchala Salazar, Joan Andrés**

C.C.: 1724940596

### **Dedicatoria**

Este documento va dedicado de manera muy especial a mi madre Fátima Lorena por su amoroso, perseverante e incondicional apoyo, quien ha sido el motor para redoblar mis esfuerzos, ser disciplinado, poner a plenitud todas mis capacidades en todas las cosas que me propongo. Es la persona que siempre ha estado a mi lado en mis noches de desvelo y días de cansancio para cuidarme, para darme aliento y para ayudarme.

De forma muy especial también dedico este documento a mi padre Édgar Rubén por su entrega, sus valores y su ejemplo de superación, que me han ayudado a no desfallecer, ni a sentirme derrotado, incluso en los peores momentos. Gracias a su ejemplo he logrado muchos objetivos y no he dejado de luchar, y es por eso que, este proyecto es realizado con entusiasmo, pasión y amor, con el fin de transmitir mis conocimientos.

***Joan Ganchala, 2022***

## **Agradecimiento**

Agradezco principalmente a mi familia, Fátima Lorena, mi madre, Édgar Rubén, mi padre, Stalin Omar, mi hermano, y Valeria Roxana, mi hermana; porque juntos me han apoyado, motivado y ayudado en todo lo que he hecho. Además, porque gracias a su compañía nunca me ha faltado la felicidad.

Agradezco a mis amigos, familiares, mi enamorada Jennyfer, mis perritas Sisi y Sasi, y a mis profesores de la ESPE, por sus ánimos, enseñanzas, apoyo, palabras y por compartir a mi lado tantos momentos.

Finalmente quiero agradecer a todas las personas que han pasado por mi vida, incluso de quienes no recuerdo sus nombres, o quienes pasaron de una forma muy fugaz, porque todos aportaron en mi vida, quiero que sepan que los recuerdo y tienen un lugar en mi corazón.

***Joan Ganchala, 2022***

## Índice de contenidos

CERTIFICACIÓN .....	3
RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA .....	4
AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN.....	5
Dedicatoria .....	6
Agradecimiento .....	7
Índice de contenidos.....	8
Índice de tablas .....	10
Índice de figuras .....	11
Listado de símbolos.....	14
Resumen.....	16
Abstract .....	17
Capítulo 1: Generalidades .....	18
Antecedentes.....	18
Justificación e importancia .....	18
Área de influencia .....	19
Objetivos.....	20
Objetivo general .....	20
Objetivos específicos.....	20
Hipótesis.....	21
Alcance del proyecto.....	21
Capítulo 2: Teoría de vibraciones aplicado a vigas.....	22
Vibraciones libres.....	22
Vibraciones forzadas .....	26



Vibraciones amortiguadas.....	27
Sistemas de varios grados de libertad .....	31
Sistemas continuos de vibraciones .....	32
Módulo de Young en aceros .....	33
Deflexiones de vigas.....	36
Vibración en vigas empotradas .....	48
Análisis de los modos de vibración de una viga.....	48
Sensor de vibraciones .....	57
Capítulo 3: Pruebas de vibración en vigas.....	59
Cálculos, dimensiones y fabricación de las probetas .....	59
Utilización del equipo Rigidímetro TMI modelo 7920.....	61
Utilización del Equipo Módulo de Elasticidad Dinámico .....	64
Obtención de resultados .....	66
Equipo Rigidímetro TMI modelo 7920 .....	66
Equipo Módulo Dinámico de Elasticidad.....	69
Simulación numérica.....	72
Simulación Equipo Rigidímetro.....	76
Simulación Equipo Módulo Dinámico de Elasticidad.....	77
Capítulo 4: Pruebas estáticas.....	79
Cálculo, dimensiones y fabricación de la probeta .....	79
Ensayo estático de tracción .....	80
Ensayo estático de flexión .....	82
Obtención de resultados .....	85
Ensayo estático de tracción.....	85
Ensayo estático de flexión .....	87

Capítulo 5: Análisis de resultados.....	87
Capítulo 6: Conclusiones y recomendaciones .....	91
Conclusiones .....	91
Recomendaciones .....	93
Bibliografía .....	94

### Índice de tablas

<b>Tabla 1</b> Valores de los seis primeros modos de vibración de viga en voladizo.....	55
<b>Tabla 2</b> Especificaciones técnicas del acelerómetro ADXL 335. ....	58
<b>Tabla 3</b> Propiedades del Acero ASTM A 36 .....	59
<b>Tabla 4</b> Dimensiones del Rigidímetro TMI 7920.....	61
<b>Tabla 5</b> Dimensiones de las probetas para Rigidímetro .....	63
<b>Tabla 6</b> Dimensiones de las probetas para MOE .....	65
<b>Tabla 7</b> Resultados en Rigidímetro para el primer modo vibratorio .....	68
<b>Tabla 8</b> Resultados en Rigidímetro para el segundo modo vibratorio.....	68
<b>Tabla 9</b> Resultados en el equipo Módulo Dinámico de Elasticidad.....	72
<b>Tabla 10</b> Frecuencias obtenidas por simulación para el primer y segundo modo de vibración.....	77
<b>Tabla 11</b> Frecuencias de la simulación del equipo Módulo Dinámico de Elasticidad .....	78
<b>Tabla 12</b> Datos obtenidos del ensayo de tracción para la primera probeta .....	80
<b>Tabla 13</b> Datos obtenidos del ensayo de tracción para la segunda probeta.....	81
<b>Tabla 14</b> Carga máxima aplicada en vigas simplemente apoyadas .....	83
<b>Tabla 15</b> Módulo de elasticidad para la probeta 7 mediante ensayo de flexión .....	84
<b>Tabla 16</b> Módulo de elasticidad para la probeta 8 mediante ensayo de flexión .....	84

<b>Tabla 17</b> Módulo de elasticidad para la probeta 9 mediante ensayo de flexión .....	84
<b>Tabla 18</b> Módulo de elasticidad para la probeta 1 mediante ensayo de flexión .....	85
<b>Tabla 19</b> Módulo de elasticidad para la probeta 3 mediante ensayo de flexión .....	85
<b>Tabla 20</b> Errores de las frecuencias obtenidas mediante simulación y la frecuencia del Rigidímetro .....	88
<b>Tabla 21</b> Esbeltez y error porcentual entre frecuencia obtenida por ensayo y por simulación .....	90

### Índice de figuras

<b>Figura 1</b> Deformación de un resorte. ....	23
<b>Figura 2</b> Mecanismo yugo escocés.....	24
<b>Figura 3</b> Gráfica amplitud vs tiempo de vibración en resonancia cuando $r = 1$ .....	27
<b>Figura 4</b> Bucle de histéresis para materiales elásticos.....	29
<b>Figura 5</b> Comparación del movimiento con diferentes tipos de amortiguamiento .....	31
<b>Figura 6</b> Formas de modo de vibración de un sistema de tres grados de libertad.....	32
<b>Figura 7</b> Diagrama de tensión - deformación unitaria del ensayo de tracción. ....	34
<b>Figura 8</b> Curva de deflexión de una viga en voladizo .....	37
<b>Figura 9</b> Fuerzas y momentos actuantes de una viga.....	38
<b>Figura 10</b> Viga en voladizo cargada en el extremo libre.....	40
<b>Figura 11</b> Elástica una viga en voladizo cargada en el extremo libre .....	40
<b>Figura 12</b> Geometría de la curva de deflexión de una viga .....	41
<b>Figura 13</b> (a) Viga sometida a momentos de flexión; (b) Sección transversal .....	42
<b>Figura 14</b> Geometría de la viga sometida a momentos de flexión.....	43
<b>Figura 15</b> Distribución de esfuerzos normales de una viga de material linealmente elástico.....	44

<b>Figura 16</b> Vista de la sección transversal de una viga. ....	45
<b>Figura 17</b> Viga simplemente apoyada con una fuerza en la mitad de la viga .....	46
<b>Figura 18</b> Diagrama de cuerpo libre para determinar los momentos flexionantes. ....	47
<b>Figura 19</b> Dimensiones de una viga.....	48
<b>Figura 20</b> Cargas y momentos que actúan sobre una viga sometida a vibración.....	48
<b>Figura 21</b> Viga en voladizo de longitud L .....	52
<b>Figura 22</b> Sensor acelerómetro ADXL 335 .....	57
<b>Figura 23</b> Proceso de rectificado en probetas a ensayar en el Rigidímetro.....	60
<b>Figura 24</b> Probeta quemada en sus bordes .....	60
<b>Figura 25</b> Probetas de ensayo en el Rigidímetro .....	62
<b>Figura 26</b> Dimensiones tomadas con calibrador pie de rey digital.....	62
<b>Figura 27</b> Dimensiones tomadas con micrómetro digital .....	63
<b>Figura 28</b> Probetas de ensayo del equipo Módulo Dinámico de Elasticidad .....	65
<b>Figura 29</b> Rigidímetro TMI modelo 7920.....	66
<b>Figura 30</b> Viga en el primer modo de vibración.....	67
<b>Figura 31</b> Viga en el segundo modo de vibración .....	67
<b>Figura 32</b> Sujeción del acelerómetro a la viga empotrada.....	70
<b>Figura 33</b> Programa de adquisición de datos.....	70
<b>Figura 34</b> Datos adquiridos (izquierda); Espectro de frecuencias (derecha) .....	71
<b>Figura 35</b> Viga bajo simulación numérica con malla gruesa.....	73
<b>Figura 36</b> Viga bajo simulación numérica con malla fina.....	74
<b>Figura 37</b> Propiedades mecánicas del acero ASTM A 36. ....	75
<b>Figura 38</b> Características para la simulación de vibraciones.....	75
<b>Figura 39</b> Simulación en el primer modo de vibración.....	76
<b>Figura 40</b> <i>Simulación en el segundo modo de vibración</i> .....	76

<b>Figura 41</b> Simulación de probetas del Equipo Módulo Dinámico de Elasticidad.....	78
<b>Figura 42</b> Colocación de strain gage en probeta para ensayo de tracción. ....	79
<b>Figura 43</b> Sujeción de la probeta para el ensayo de tracción.....	82
<b>Figura 44</b> Sujeción para ensayo de flexión .....	83
<b>Figura 45</b> Gráfica esfuerzo vs deformación unitaria, primera probeta. ....	86
<b>Figura 46</b> Gráfica esfuerzo vs deformación unitaria, segunda probeta.....	86
<b>Figura 47</b> Gráfica de esbeltez vs error porcentual de la simulación del ensayo Rigidímetro .....	89
<b>Figura 48</b> Gráfica de esbeltez vs error porcentual de la simulación del ensayo Módulo Dinámico de Elasticidad .....	91

**Listado de símbolos**

$F$	Fuerza
$k$	Constante de rigidez
$x$	Deformación / desplazamiento
$U$	Trabajo
$\omega$	Frecuencia forzada
$\omega_n$	Frecuencia natural
$\dot{x}$	Velocidad
$\ddot{x}$	Aceleración
$m$	Masa
$r$	Relación entre frecuencias
$\tau$	Periodo
$\zeta$	Relación de amortiguamiento
$c_{eq}$	Coefficiente de amortiguamiento equivalente
$c_c$	Coefficiente de amortiguamiento crítico
$m_{eq}$	Masa equivalente
$\sigma$	Esfuerzo / Tensión
$E$	Módulo de elasticidad / Young
$\delta$	Deflexión de una viga en un punto determinado
$\epsilon$	Deformación unitaria
$M$	Momento
$V$	Fuerza cortante
$q$	Carga distribuida
$P$	Carga puntual

$\kappa$	Curvatura de una viga
$\rho$	Densidad de un material
$I$	Momento de inercia
$w$	Ancho de una viga
$t$	Espesor de una viga
$S$	Rigidez específica a la flexión
$S_y$	Resistencia a la fluencia del material (Para el acero 250 MPa)
$\gamma$	Masa por unidad de área lateral
$f$	Frecuencia
$L$	Longitud libre de la viga
$L_T$	Longitud total de la viga
$\theta$	Ángulo que forma la elástica de la viga con la horizontal
$r_G$	Radio de giro

## Resumen

El presente proyecto de investigación plantea determinar el módulo de elasticidad del acero estructural ASTM A 36 mediante varios ensayos mecánicos estáticos y dinámicos, consta de cuatro ensayos y las simulaciones de vibraciones. El ensayo estático de tracción se realiza en la máquina de ensayos universales con ayuda de strain gages para obtener la gráfica tensión vs deformación unitaria. El ensayo estático de flexión se realiza en la máquina para prueba de tensión de la viga simplemente apoyada. El primer ensayo de vibraciones se realiza en el equipo Rigidímetro y el segundo ensayo de vibraciones se realiza en el equipo Módulo Dinámico de Elasticidad que cuenta con un acelerómetro, en los ensayos de vibraciones la viga se encuentra en cantiléver y para determinar el módulo de elasticidad se realiza un análisis matemático basado en un modelo físico de una viga bajo vibración transversal. La simulación de numérica de vibraciones es realizada con el software adecuado que permite obtener las frecuencias naturales de las vigas, lo que ayuda a tener una estimación sobre el rango adecuado de esbeltez y frecuencia para aplicar la teoría Euler – Bernoulli de vibraciones en el acero ASTM A 36. Finalmente, se comparan y analizan los valores obtenidos de módulo de elasticidad de los ensayos estáticos y dinámicos para comprobar la hipótesis planteada inicialmente.

### **PALABRAS CLAVE**

- **MÓDULO DE ELASTICIDAD**
- **VIGA**
- **FRECUENCIA NATURAL**
- **ENSAYOS MECÁNICOS**



### **Abstract**

This research project aims to determine the modulus of elasticity of structural steel ASTM A 36 through various static and dynamic mechanical tests, consisting of four tests and vibration simulations. The static tensile test is performed in the universal testing machine with the help of strain gauges to obtain the stress vs. unit strain graph. The static bending test is performed on the simply supported beam tensile testing machine. The first vibration test is carried out in the Rigidometer equipment and the second vibration test is carried out in the Dynamic Modulus of Elasticity equipment that has an accelerometer, in the vibration tests the beam is cantilevered and to determine the modulus of elasticity A mathematical analysis based on a physical model of a beam under transverse vibration is performed. The numerical simulation of vibrations is carried out with the appropriate software that allows obtaining the natural frequencies of the beams, which helps to have an estimate of the appropriate range of slenderness and frequency to apply the Euler - Bernoulli theory of vibrations in steel ASTM A 36. Finally, the values obtained from the modulus of elasticity of the static and dynamic tests are compared and analyzed to verify the hypotheses initially raised.

### **KEYWORDS**

- **MODULUS OF ELASTICITY**
- **BEAM**
- **NATURAL FREQUENCY**
- **MECHANICAL TESTS**

## **Capítulo 1: Generalidades**

### **Antecedentes**

En la tesis realizada en el año 2020, por los señores Balseca V., Ernesto y Caguana C., Carlos, cuyo tema es “Caracterización de las propiedades de absorción y disipación de energía, conductividad térmica y comportamiento al fuego de tableros estructurales compuestos tipo sándwich con núcleo de balsa” se concluyó que “la frecuencia está ligada directamente al módulo de elasticidad” (pág. 87) sin dar explicaciones, ni demostraciones de esta conclusión, sin embargo, en este proyecto de investigación se pretende desarrollar un análisis matemático para relacionar el módulo de elasticidad de los materiales con la frecuencia natural de los mismos.

En la asignatura de vibraciones de la malla antigua de la Carrera de Ingeniería Mecánica (malla curricular 201310), se impartían dos horas de clases a la semana, por lo que se llegaba a conocer sistemas vibratorios de hasta dos grados de libertad sin tomar en cuenta los sistemas continuos de vibraciones, que es un tema muy empleado en problemas ingenieriles. Tampoco se contaba con el tiempo suficiente para realizar prácticas en esta asignatura, por lo que sería de mucha ayuda para los estudiantes implementar equipos que permitan contrastar los cálculos realizados en clases con los datos tomados en los experimentos.

### **Justificación e importancia**

La principal forma de aprender para los estudiantes de ingeniería es a base de experimentos y análisis de los mismos, es decir, contrastando la práctica con la teoría y verificando que los valores, fórmulas y/o datos que aparecen en libros e investigaciones tuvieron un proceso adecuado. Es por eso que, por medio de ensayos y del respectivo

desarrollo matemático se pueden comparar valores del módulo de elasticidad, variables cinemáticas, geometría y propiedades del material.

Además, es importante que los estudiantes de las Carreras de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Mecatrónica puedan evidenciar la relevancia en el estudio de vibraciones y su aplicación y que este proyecto de tesis sirva como fuente de información para estudiantes y docentes al impartir el tema.

Para analizar fenómenos en los materiales (tracción, compresión, impacto, vibraciones, flexión, torsión, entre otros), el principal parámetro es el módulo de elasticidad, pero no se distingue entre un módulo de elasticidad cuando el ensayo es estático y cuando el ensayo es dinámico, por tal motivo es necesario comparar el módulo de elasticidad que se obtiene por ensayo dinámico de vibraciones y por ensayo estático de tracción y de flexión.

### **Área de influencia**

En la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, el Departamento de Ciencias de la Energía y la Mecánica se beneficia directamente con el proyecto de titulación: “Análisis del módulo de elasticidad de vigas de acero estructural ASTM A 36 utilizando vibraciones” ya que, en la nueva de la malla (202010) mecanismos y vibraciones forman parte de una misma asignatura se puede implementar laboratorios que por medio de distintos equipos evalúen parámetros del material y parámetros de vibración, donde el estudiante pueda observar el comportamiento de vigas en voladizo sometidas a vibración. Y, además, en esta asignatura, se puedan agregar más temas para el conocimiento del estudiante, como son sistemas de varios grados de libertad y sistemas continuos de vibración que tienen bastante aplicación en la mayoría de problemas de ingeniería.

En la tesis, realizada en el 2020 por los señores Balseca V., Ernesto y Caguana C., Carlos, en su tema “Caracterización de las propiedades de absorción y disipación de energía, conductividad térmica y comportamiento al fuego de tableros estructurales compuestos tipo sándwich con núcleo de balsa”, como complemento a toda la investigación que realizaron, se puede obtener un método para el cálculo de rigidez de vigas de diferentes materiales (madera de balsa y bambú, en este caso) utilizando el mismo procedimiento que se sigue en este trabajo de titulación.

## **Objetivos**

### ***Objetivo general***

Calcular y comparar el módulo de elasticidad mediante ensayo de vibraciones, ensayo de estático de flexión y de tracción en el acero estructural ASTM A 36.

### ***Objetivos específicos***

- Aplicar la teoría de vibraciones a vigas empotradas para desarrollar los cálculos y fórmulas necesarias para hallar distintos parámetros de vibración y del material.
- Realizar pruebas de vibración en vigas para analizar los datos obtenidos y con ayuda de las fórmulas deducidas encontrar los parámetros necesarios en el equipo Módulo Dinámico de Elasticidad (MOE) y en el Rigidímetro.
- Realizar simulaciones de vigas en vibración transversal para analizar la frecuencia natural de la misma y comparar con los datos obtenidos con los equipos de Rigidímetro y equipo MOE.
- Realizar el ensayo estático de tracción para obtener los datos y con esto encontrar varios parámetros que ayuden a calcular el módulo de elasticidad del material.
- Realizar el ensayo estático de flexión de una viga simplemente apoyada con el fin de determinar el módulo de elasticidad.

- Analizar los resultados y comparar los valores de módulos de elasticidad que se encontraron con los cuatro ensayos.

### **Hipótesis**

Si al realizar ensayos estáticos de tracción, de flexión y ensayos dinámicos de vibraciones el módulo de elasticidad que se calcula mediante dichos ensayos es el mismo.

### **Alcance del proyecto**

Todos los ensayos que se realicen para este proyecto de titulación son con el material acero estructural ASTM A 36, y se utilizan equipos y máquinas propias del laboratorio de mecánica de materiales. Además, para la fabricación de las probetas se utiliza el laboratorio de procesos de manufactura, las herramientas y las máquinas que se encuentran allí. Y para tomar las medidas de las probetas se utiliza el laboratorio de metrología y también de mecánica de materiales.

El laboratorio de mecánica de materiales cuenta con el equipo TMI modelo 7920, es un Rigidímetro, el equipo posee dos empotramientos, uno es fijo, y el otro actúa como empotramiento deslizable, la viga debe tener un espesor muy pequeño para que pueda ingresar al segundo modo de vibración, y el ancho de la viga debe ajustarse al tamaño de las mordazas; sin embargo, por la configuración del equipo la longitud de la viga no debe ser muy larga. Se realizan ensayos vibratorios con sus dos primeros modos, ya que el tercer modo de vibración utiliza una longitud mayor y/o espesor pequeño que por cuestiones de manufactura es difícil lograrlo.

## Capítulo 2: Teoría de vibraciones aplicado a vigas

### Vibraciones libres

El movimiento vibratorio son oscilaciones que se repiten con regularidad, como en el caso del péndulo simple; o irregularidad, como en el caso del movimiento de la tierra ante un sismo. Si el movimiento se repite después de intervalos de tiempo iguales, se llama movimiento periódico y el caso más simple de este movimiento es el movimiento armónico.

Al movimiento que resulta de la perturbación inicial de un sistema y se deja que vibre se le conoce como vibración libre. No actúa una fuerza externa después de la inicial en el sistema. Un ejemplo de vibración libre es la oscilación de un péndulo.

El elemento resorte, Figura 1, es parte fundamental de las vibraciones libres, es un elemento deformable cuando se aplica una fuerza, y regresa a su posición original cuando se deja de aplicar dicha fuerza. La fuerza que actúa sobre el resorte es directamente proporcional a la deformación que este experimenta, como se indica en la Ecuación 1.

$$F = kx$$

*Ecuación 1*

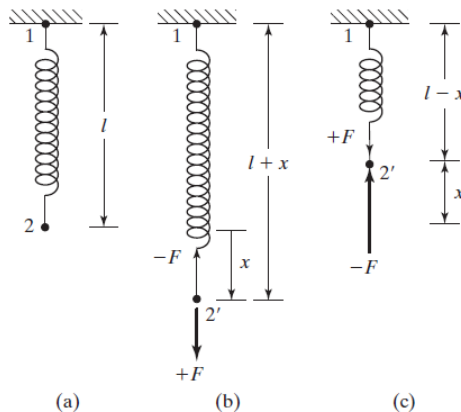
La fuerza de restauración intenta regresar el resorte alargado o comprimido a su longitud original. Si se realiza un diagrama de fuerza vs deformación, el resultado es una línea recta inclinada con una pendiente positiva, el trabajo realizado al deformar el resorte se representa como el área bajo la curva del diagrama fuerza vs deformación y está dado por la Ecuación 2.

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

*Ecuación 2*

**Figura 1**

*Deformación de un resorte.*



*Nota. Tomado de Vibraciones Mecánicas (p. 21), por Singiresu S. Rao, 2012, México: Pearson Educación. Derechos de autor [2012].*

Si existen varios elementos resortes o elementos de rigidez en un sistema vibratorio, se puede reducir todo a un elemento de rigidez equivalente, y puede ser torsional o longitudinal. En la ecuación que gobierna el sistema vibratorio este elemento va acompañado del desplazamiento.

El elemento de masa o inercia puede ganar o perder energía cinética con el cambio de velocidad. El producto de la masa y la aceleración, da como resultado la fuerza, según la segunda Ley de Newton. El trabajo es el producto de la fuerza y el desplazamiento en la dirección de la fuerza, y el trabajo en la masa se almacena como energía cinética. Pueden existir varios cuerpos con masa o inercia en un sistema vibratorio, pero al igual que con el elemento de rigidez, se puede reducir todo a un elemento de masa equivalente o inercia equivalente, esto depende del modelado matemático que desee proponer.

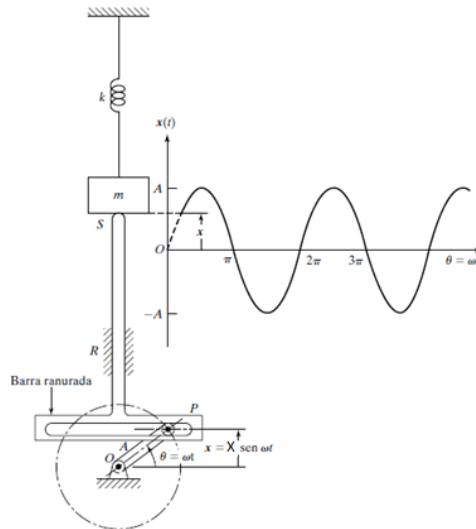
En la ecuación que gobierna el sistema vibratorio la masa o inercia equivalente va acompañada de la aceleración.

Elemento de amortiguamiento es utilizado cuando la energía vibratoria se convierte gradualmente en calor o sonido, ya que se encarga de disipar esta energía de vibración. Es importante considerar el amortiguamiento para predecir con exactitud la respuesta a la vibración del sistema, aun cuando la cantidad de calor o sonido que fue convertida es pequeña. Un amortiguador, para el modelo matemático, no tiene masa ni elasticidad y la fuerza que tiene el amortiguador existe solo si hay velocidad relativa entre los extremos del amortiguador.

En el mecanismo de yugo escocés, Figura 2, se puede apreciar el movimiento armónico simple de la masa  $m$ :

**Figura 2**

*Mecanismo yugo escocés*



*Nota. Tomado de Vibraciones Mecánicas (p. 52), por Singiresu S. Rao, 2012, México: Pearson Educación. Derechos de autor [2012].*



Posición:

$$x = X \sin(\theta) = X \sin(\omega t) \quad \text{Ecuación 3}$$

Velocidad:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X\omega \cos(\omega t) \quad \text{Ecuación 4}$$

Aceleración:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -X\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x \quad \text{Ecuación 5}$$

Algunos de los ejemplos de vibración libre son: las oscilaciones del péndulo de los relojes antiguos, el movimiento del niño en un columpio después de un empujón inicial; ya que en estos casos solo reciben una perturbación inicial y no actúan otras fuerzas externas.

Estudiar a las vibraciones libres de un solo grado de libertad es fundamental para entender casos más complicados de vibraciones como son las vibraciones forzadas y los sistemas continuos de vibraciones, para el caso de este proyecto de titulación.

Muchos sistemas de vibraciones mecánicas se pueden simplificar a un solo grado de libertad. En la mayoría de casos la masa está distribuida, pero se puede asumir que es una masa puntual para que el análisis sea más simple, y lo mismo sucede con la elasticidad o amortiguamiento de un sistema.

Para realizar el análisis adecuado para el sistema de vibración, se debe determinar la posición de equilibrio de la masa, ya que este punto es de referencia para la vibración de la masa.

### Vibraciones forzadas

Cuando un sistema se somete a una fuerza externa (normalmente es una fuerza repetitiva) a la vibración resultante, se le conoce como vibración forzada. Un ejemplo de vibración forzada se refiere a los motores de combustión.

Si coincide la frecuencia de la fuerza externa y una de las frecuencias naturales del sistema ocurre una condición conocida como resonancia, y el sistema sufre oscilaciones peligrosamente grandes que pueden destruirlo. Un ejemplo de fallas estructurales por resonancia ha ocurrido en edificios, alas de aviones, puentes, y turbinas.

La ecuación de movimiento en donde el sistema resorte-masa está amortiguado queda de la siguiente manera, de acuerdo a la segunda Ley de Newton.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad \text{Ecuación 6}$$

Cuando se trata de una fuerza armónica se la puede escribir en función de:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{Ecuación 7}$$

Para encontrar la solución general de la ecuación de movimiento sometido a una fuerza, se debe encontrar la solución homogénea y la solución particular, para que al ser sumadas proporcione la solución general. La solución homogénea representa la solución del sistema cuando está libre y la solución particular representa la vibración en estado estable.

La relación de frecuencias entre la frecuencia de la fuerza externa y la frecuencia natural del sistema ayuda a la identificación de la respuesta del sistema de acuerdo a uno de los siguientes tipos:

$$r = \frac{\omega_n}{\omega}$$

Ecuación 8

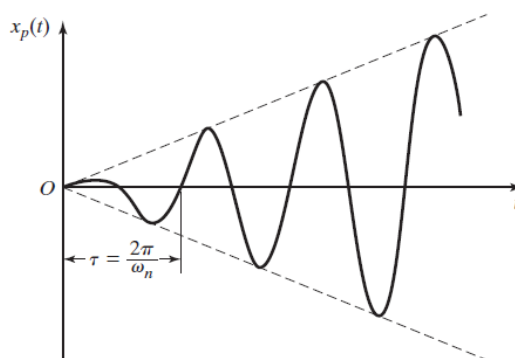
Si  $0 < r < 1$  la respuesta armónica del sistema  $x_p(t)$  está en fase con fuerza externa.

Si  $r > 1$  la respuesta armónica del sistema  $x_p(t)$  está desfasada  $180^\circ$  con fuerza externa  $F(t)$  ya que tienen signos opuestos.

Si  $r = 1$  la amplitud del sistema  $X$  se vuelve infinita y ocurre un fenómeno conocido como resonancia como se observa en la Figura 3.

### Figura 3

Gráfica amplitud vs tiempo de vibración en resonancia cuando  $r = 1$



*Nota. Tomado de Vibraciones Mecánicas (p. 247), por Singiresu S. Rao, 2012, México: Pearson Educación. Derechos de autor [2012].*

### Vibraciones amortiguadas

Cuando existe una pérdida de energía durante la oscilación o vibración significa que es una vibración amortiguada. La cantidad de amortiguamiento en ciertos sistemas físicos es tan pequeña que es ignorada, principalmente en aplicaciones de ingeniería. Pero, para sistemas vibratorios próximos a la resonancia el amortiguamiento se vuelve muy importante.

Para realizar un análisis de vibración es necesario crear un modelado matemático del problema. La mayoría de sistemas vibratorios prácticos presentan una complejidad muy alta y es imposible considerar todos los detalles que intervienen en el mismo para el análisis matemático. Es por eso que, se consideran solo los detalles más importantes para predecir el comportamiento del sistema en condiciones de entrada específicas.

El modelado matemático puede ser lineal o no lineal, esto depende del comportamiento del sistema vibratorio. Los modelos lineales son más fáciles de resolver y permiten soluciones rápidas, por el contrario, los modelos no lineales presentan ciertas características del sistema que no pueden ser pronosticadas siguiendo modelos lineales.

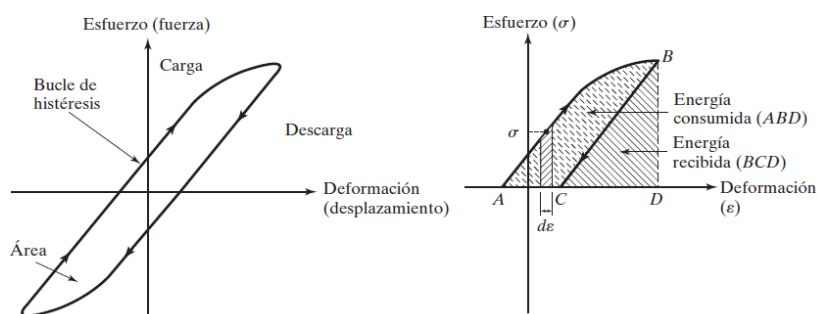
Utilizando el principio de la dinámica se obtienen las ecuaciones que describen el movimiento vibratorio del sistema. Para ello, se realizan los diagramas de cuerpo libre de las masas que intervienen en el sistema. Para un sistema discreto las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio suelen ser un conjunto de ecuaciones diferenciales comunes y para un sistema continuo suelen ser un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales. Se utilizan varios métodos para derivar las ecuaciones rectoras, por ejemplo: la segunda Ley de Newton, el principio de D'Alembert y el principio de conversión de la energía.

La solución de las ecuaciones rectoras sirve para dar la respuesta del sistema vibratorio. Se refiere a solucionar la ecuación diferencial, se pueden utilizar distintas técnicas como: métodos estándar de solución de ecuaciones diferenciales, métodos de transformada de Laplace, métodos matriciales y métodos numéricos. Hay que considerar que en muchos casos no se pueden resolver de forma cerrada a las ecuaciones no lineales. Las respuestas de las ecuaciones rectoras, dan información sobre desplazamientos, velocidades y aceleraciones de las distintas masas del sistema.

Al amortiguamiento se lo puede modelar de distintos tipos ya que es difícil determinar las causas del amortiguamiento en sistemas prácticos. El amortiguamiento viscoso es el mecanismo más utilizado en el análisis de vibraciones. La energía se disipa cuando un sistema mecánico vibra en un fluido como: aire, gas, agua o aceite, gracias a la resistencia que ofrece el fluido sobre el cuerpo. Los factores que influyen para la cantidad de energía disipada son: la viscosidad del fluido, el tamaño, forma, frecuencia o la velocidad del cuerpo vibratorio. La fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad del cuerpo vibratorio. El amortiguamiento de Coulomb o de fricción en seco es el resultado de la fricción entre superficies que están secas, en este caso la magnitud es constante, pero tiene una dirección opuesta al movimiento del cuerpo vibratorio. El amortiguamiento debido a un material sólido o histerético se refiere a la deformación que sufre un material, ya que absorbe o disipa energía, por la fricción entre los planos internos, los cuales se deslizan. El bucle de histéresis se produce en el diagrama tensión – deformación, Figura 4, cuando el cuerpo que se somete a vibración experimenta amortiguamiento. El área en este bucle indica la pérdida de energía por unidad de volumen del cuerpo por ciclo debido al amortiguamiento.

**Figura 4**

*Bucle de histéresis para materiales elásticos*



*Nota. Tomado de Vibraciones Mecánicas (p. 43), por Singiresu S. Rao, 2012, México: Pearson Educación. Derechos de autor [2012].*

La relación del amortiguamiento se define como:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c} \quad \text{Ecuación 9}$$

donde:

$$c_c = 2m_{eq}\omega_n \quad \text{Ecuación 10}$$

Existen cuatro casos de amortiguamiento de un sistema en vibración o en movimiento: sistema no amortiguado, subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado.

El caso no amortiguado, vibración libre, es una vibración únicamente con un elemento de rigidez, en la que su gráfica de posición vs tiempo se representa como una senoide en la que su amplitud permanece constante en el tiempo, Figura 5.

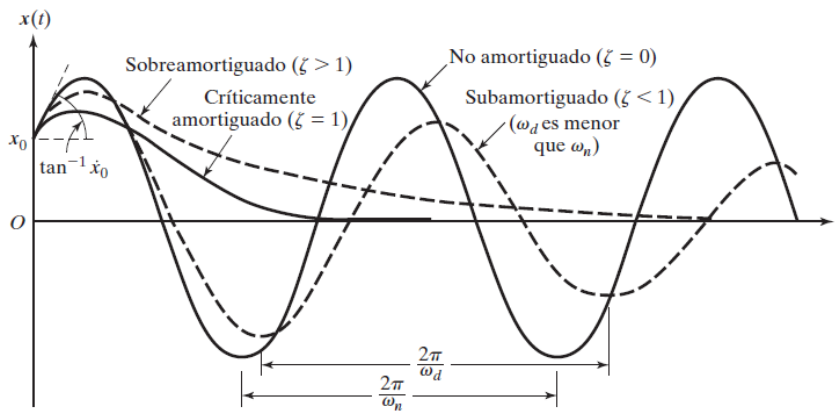
El caso de un sistema subamortiguado  $0 < \zeta < 1$ , es muy importante para el estudio de vibraciones mecánicas, ya que es el único caso que lleva a un movimiento oscilatorio, Figura 5.

Cuando se trata de un caso sobreamortiguado  $\zeta > 1$  el movimiento es aperiódico, sin importar las condiciones iniciales del sistema, el movimiento se reduce exponencialmente con el tiempo, Figura 5.

Finalmente, en el caso del sistema críticamente amortiguado  $\zeta = 1$ , este movimiento es aperiódico, y se puede apreciar en la Figura 5 que el movimiento tiene un decrecimiento exponencial, cuando  $t \rightarrow \infty$  el valor de  $x(t)$  llega a 0.

**Figura 5**

Comparación del movimiento con diferentes tipos de amortiguamiento



Nota: Tomado de *Vibraciones Mecánicas* (p. 151), por Singiresu S. Rao, 2012, México: Pearson Educación. Derechos de autor [2012].

### Sistemas de varios grados de libertad

La mayoría de problemas de ingeniería son sistemas continuos de vibraciones ya que tienen grados de libertad infinitos. Los sistemas continuos de vibraciones son de difícil resolución ya que requiere utilizar ecuaciones diferenciales parciales, y de estas no existen soluciones analíticas. Sin embargo, a un sistema de continuo se lo puede aproximar a un sistema de varios grados de libertad, lo que hace una resolución relativamente más fácil ya que se requiere de ecuaciones diferenciales ordinarias.

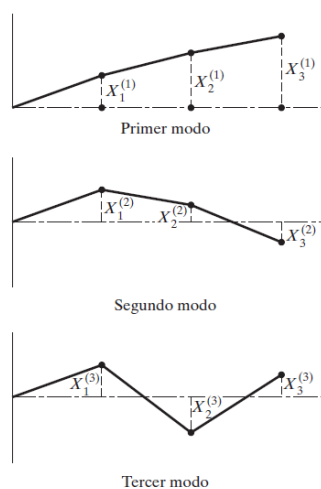
Existen varios métodos que se pueden utilizar, uno de ellos consiste en reemplazar la masa distribuida del sistema o su inercia por un número finito de masas concentradas; este modelo es conocido como parámetro concentrado, de masa concentrada o de masa discreta. Entre mayor sea el número de grados de libertad menor será el error entre resolver dicho sistema como un sistema continuo y un sistema de varios grados de libertad.

Otro método se conoce como el método del elemento finito que consiste en reemplazar la geometría del sistema por varios elementos pequeños. Y en la solución simple de cada elemento se utilizan los principios de compatibilidad y equilibrio para determinar una solución aproximada para el sistema original.

Existe una ecuación de movimiento, una frecuencia natural y coordenadas generalizadas, por cada grado de libertad del sistema. Cada frecuencia natural está asociada a su propia forma de modo tal y como se puede observar en la Figura 6. La solución de la ecuación característica se hace más compleja a medida que crece el número de grados de libertad del sistema.

**Figura 6**

*Formas de modo de vibración de un sistema de tres grados de libertad*



*Nota. Tomado de Vibraciones Mecánicas (p. 542), por Singiresu S. Rao, 2012, México: Pearson Educación. Derechos de autor [2012].*

### **Sistemas continuos de vibraciones**

En varios casos no se puede identificar los elementos de masa, resorte o amortiguadores, es decir, no se puede discretizar de un sistema todos estos elementos.



Un sistema continuo también es conocido como un sistema de infinitos grados de libertad, aquí se considera que una cantidad infinita de puntos del sistema pueden vibrar.

Si el sistema es modelado como uno continuo las ecuaciones gobernantes del movimiento son diferenciales parciales, y son más complicadas de resolver que las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Hay muchas variables que influyen en el método a elegir para modelar dicho sistema como: el propósito del análisis, la influencia del análisis en el diseño, la capacidad y tiempo computacional disponible.

En un sistema continuo la cantidad de frecuencias naturales y modos de vibración son infinitos. Es por esto que, se incluye a un fenómeno conocido como frecuencia fundamental de resonancia, que corresponde a la frecuencia de resonancia más baja de dicho modo vibratorio.

### **Módulo de Young en aceros**

Los resultados de los ensayos mecánicos dependen del material y las dimensiones que tiene la probeta, sin embargo, como es poco probable que se diseñe una pieza con las dimensiones iguales a la probeta, es necesario expresar los resultados en una forma en que se pueda aplicar a cualquier tipo de geometría y que únicamente dependa del material. Es por eso que, se convierten los resultados en tensiones y deformaciones unitarias.

La mayoría de materiales de ingeniería, en este caso el acero, presentan un comportamiento lineal en la gráfica tensión – deformación unitaria en cierto rango conocido como región elástica de los materiales. Por lo que, un aumento en la tensión

provoca un aumento en la deformación unitaria. Este hecho fue descubierto por Robert Hooke en 1676 en los resortes. Se puede expresar matemáticamente así:

$$\sigma = E\epsilon$$

*Ecuación 11*

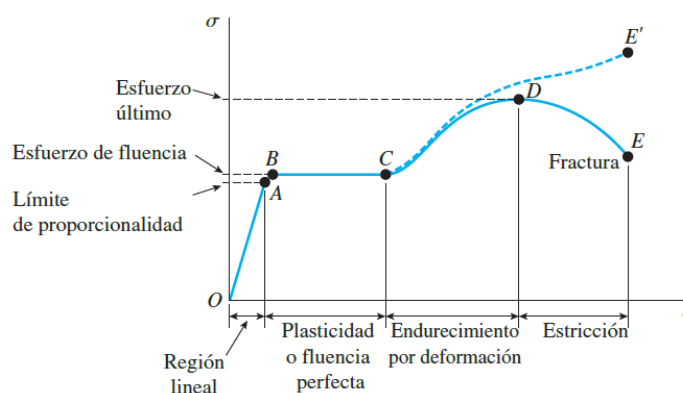
Donde  $E$  representa la constante de proporcionalidad entre la tensión y la deformación unitaria y es conocida como módulo de elasticidad o módulo de Young, en honor a Thomas Young, quien publicó en 1807 un trabajo sobre este tema.

El diagrama tensión – deformación unitaria es una característica particular de cada material ensayado y en el diagrama se puede observar varios aspectos como sus propiedades mecánicas y el tipo de comportamiento.

El acero estructural también conocido como acero dulce o acero al carbono, es un material que se encuentra en puentes, edificios, grúas, barcos, torres y muchas más estructuras. El diagrama de tensión – deformación unitaria del acero estructural se indica en la Figura 7.

**Figura 7**

*Diagrama de tensión - deformación unitaria del ensayo de tracción.*



*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 19), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009,*

*7ma edición, Cengage Learning*

En el diagrama se puede observar varios rangos de los que se puede distinguir varias regiones en el eje de la deformación unitaria como la región lineal, la región de plasticidad o fluencia perfecta, la región de endurecimiento por deformación y la región de estricción que finaliza con la fractura del material. Y en el eje de la tensión se pueden distinguir varios puntos que son el límite de proporcionalidad, la tensión de fluencia y la tensión última. El diagrama no está realizado a escala real, sin embargo, es más didáctico verlo de esta manera.

Para aceros de bajo carbono el límite de proporcionalidad se encuentra entre 30 a 50 ksi (210 a 350 MPa), sin embargo, hay aceros que poseen mayor contenido de carbono y, por lo tanto, les da mayor resistencia y su límite de proporcionalidad puede ser mayor a 80 ksi (550 MPa). El módulo de Young tiene unidades iguales a las de la tensión, es decir, ksi en el sistema americano o MPa en el sistema internacional.

En la región de plasticidad o fluencia perfecta, la tensión que se aplica al material no aumenta y sin embargo el material se deforma y esta región ocurre cuando se aplica la tensión de fluencia, y desde que llega a este punto el material se vuelve completamente plástico. El alargamiento que ocurre en esta región es de 10 a 15 veces el alargamiento que ocurre en la región lineal, para los aceros de bajo carbono.

Posteriormente, el acero comienza a endurecerse por deformación, el material experimenta cambios en la estructura cristalina, por lo que, se vuelve más resistente y para continuarlo deformando se debe aplicar una fuerza mayor. Finalmente, la carga llega a su punto máximo, conocido como tensión última; una deformación extra en el material es llevado por una carga menor hasta que se fractura, esta región es conocida como estricción.

Es necesario aclarar que la tensión a la fluencia y la tensión última, se las conoce mejor como resistencia a la fluencia y resistencia última, respectivamente. La resistencia a la fluencia es la capacidad de un material para deformarse dentro del rango lineal, sin ocasionar fluencia; mientras que la resistencia última es la capacidad del material para resistir la carga máxima, o la carga de falla.

El diagrama tensión – deformación unitaria varía si se emplea el área real de la sección transversal, ya que esta área va disminuyendo conforme se va alargando la muestra, entonces se presenta una curva verdadera tensión – deformación unitaria, tal como se ve en la Figura 7 en línea punteada.

El acero estructural contiene 0.2 por ciento de carbono, este material es una aleación del hierro, si se aumenta el contenido de carbono se vuelve menos dúctil pero más resistente.

Las propiedades de los materiales y sus respectivas curvas de tensión – deformación unitaria varían, aunque sean los mismos materiales, esto se debe al tipo de proceso de manufactura, la composición química, defectos internos, condiciones ambientales, entre otros factores.

### **Deflexiones de vigas**

Las vigas son elementos estructurales que están sometidos a cargas laterales, es decir, que hay fuerzas o momentos que tienen sus vectores dirigidos perpendicularmente al eje de la barra.

Cuando se trata de modelar la estructura real, se deben simplificar algunos aspectos físicos para facilitar el análisis matemático, pero que sean lo suficientemente complejos para que se pueda representar el comportamiento real de la estructura y así

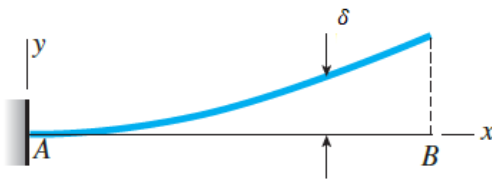
tener una precisión razonable. Es por ello que, se pueden despreciar ciertos aspectos físicos en el momento de modelar, por ejemplo, en los apoyos de una viga no son perfectamente rígidos, por lo que existe una pequeña traslación, o en los apoyos articulados existe fricción y por lo tanto existe una pequeña restricción en el movimiento que permita este apoyo.

La curva de deflexión es la forma que adopta una viga cuando se deforma bajo fuerzas laterales que se cargan sobre un eje longitudinal recto. La importancia de calcular las deflexiones sirve para analizar estructuras estáticamente indeterminadas y también en el análisis dinámico, como cuando se investigan las vibraciones de aeronaves o las respuestas de los edificios a los sismos, que por lo general sus deflexiones son pequeñas.

Las ecuaciones diferenciales ayudan a determinar las deflexiones de la elástica de la viga. Para esto, es necesario fijar un sistema de coordenadas que permita asociar estos parámetros a la deflexión de la misma. Se considera una viga en voladizo, en donde el origen de coordenadas se encuentra en el empotramiento, y de acuerdo a la Figura 8, el eje positivo "x" está a lo largo de la viga a la derecha, el eje positivo "y" va hacia arriba, mientras que el eje positivo "z" se encuentra perpendicular al plano xy, es decir, va hacia el observador.

### **Figura 8**

*Curva de deflexión de una viga en voladizo*



*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 679), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning*

La deflexión es una función de  $x$ , ya que depende de la distancia desde el empotramiento, en este caso, para que la deflexión cambie. La deflexión en el caso de la Figura 8 es positiva, sin embargo, si estuviese hacia abajo la deflexión sería negativa.

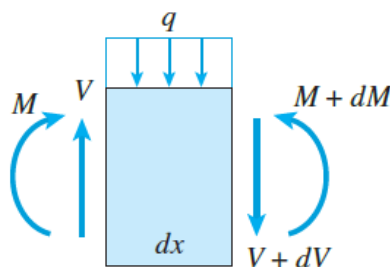
Cuando la viga se flexiona, además de la deflexión que se presenta, también existe una rotación, y este ángulo es el que se forma entre la tangente a la curva de deflexión y el eje " $x$ ", a este ángulo es conocido como ángulo de rotación o ángulo de inclinación.

Se considera un diferencial de la longitud de una viga con la finalidad de saber las relaciones que existen entre cargas distribuidas, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

Las fuerzas cortantes y momentos flexionantes que se indican en la Figura 9 actúan sobre los lados del elemento, y para el caso de carga distribuida el momento flexionante y la fuerza cortante tienen un incremento infinitesimal.

### Figura 9

*Fuerzas y momentos actuantes de una viga.*



*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 679), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning*

Al realizar la sumatoria de fuerzas para que se mantenga el equilibrio en el elemento de viga en dirección vertical (eje  $y$ ) se obtiene:

$$\sum Fy = 0$$

$$V - q * dx - (V + dV) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

*Ecuación 12*

Se puede deducir de esta ecuación que la razón de cambio de la fuerza cortante en cualquier punto sobre el eje de la viga es la carga distribuida en ese punto. El signo negativo surge por la dirección de la carga distribuida, si la carga distribuida estuviese hacia arriba (eje positivo de y), entonces se omite el signo.

Ahora, al realizar la sumatoria de momentos en la parte izquierda del elemento de viga, tomando en cuenta que los momentos en sentido antihorario son positivos, se tiene lo siguiente.

$$\sum M = 0$$

$$-M - q * dx * \left(\frac{dx}{2}\right) - (V + dV) * dx + M + dM = 0$$

Los productos diferenciales son despreciables en comparación con otros términos, por lo que se igualan a 0 y el resultado de toda la ecuación es:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

*Ecuación 13*

Gracias a esta ecuación se puede afirmar que la razón de cambio del momento en cualquier punto sobre el eje de la viga es igual a la fuerza cortante en ese punto. Esta ecuación solo aplica cuando existe una carga distribuida sobre la viga o cuando no existe carga, pero cuando hay una carga concentrada no se puede ocupar esta ecuación porque ocurre un cambio repentino o discontinuidad en la fuerza cortante.

La viga en voladizo AB con una carga P que actúa en el extremo libre, como se indica en la Figura 10, presenta una deflexión y, por ende, una curvatura asociada de acuerdo a la Figura 11.

### Figura 10

*Viga en voladizo cargada en el extremo libre*



*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 355), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning*

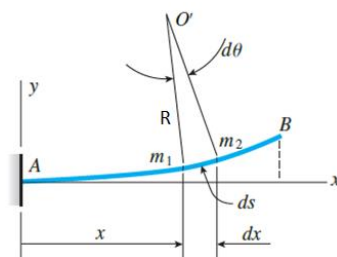
Para fines prácticos y como se puede observar en la Figura 11, se ubican los puntos  $m_1$  y  $m_2$  a una distancia  $dx$  del eje  $x$ ; y desde cada punto se traza una línea perpendicular a la tangente de la curva que forma la viga y ambas rectas se cruzan en el punto  $O'$ , llamado centro de curvatura. La distancia desde el centro  $O'$  hasta  $m_1$  o hasta  $m_2$  se denomina radio de curvatura  $R$  y la curvatura se denota  $\kappa$ .

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

*Ecuación 14*

### Figura 11

*Elástica una viga en voladizo cargada en el extremo libre*



*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 355), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning*



De la geometría entre los puntos  $m_1$ ,  $m_2$  y  $O'$  se puede deducir.

$$dS = R d\theta$$

*Ecuación 15*

Y al combinar la Ecuación 14 y la Ecuación 15 se tiene:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dS}$$

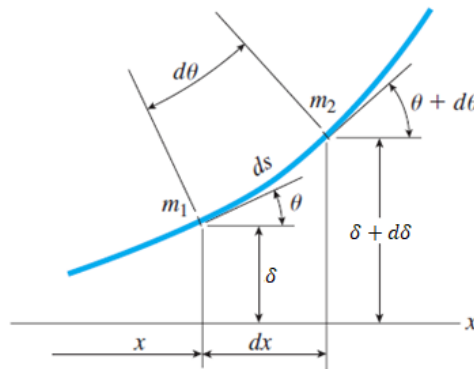
En la vida real la deflexión que se produce en la estructura de los edificios, aviones, puentes, y otras construcciones son muy pequeñas por lo que se puede considerar  $dS \approx dx$ , y además ayuda a simplificar los cálculos.

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$$

*Ecuación 16*

### Figura 12

*Geometría de la curva de deflexión de una viga*



*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 680), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning*

De la geometría de la Figura 12 se puede deducir que:

$$\tan(\theta) = \frac{\delta + d\delta - \delta}{dx} = \frac{d\delta}{dx}$$

Y al tener ángulos muy pequeños las consideraciones para las funciones de seno y coseno se pueden expresar como:  $\sin(\theta) \approx \theta$  y  $\cos(\theta) \approx 1$

Por lo que la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\theta \approx \tan(\theta) = \frac{d\delta}{dx}$$

Y al derivar con respecto de  $x$  se tiene la siguiente expresión.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\delta}{dx^2} \quad \text{Ecuación 17}$$

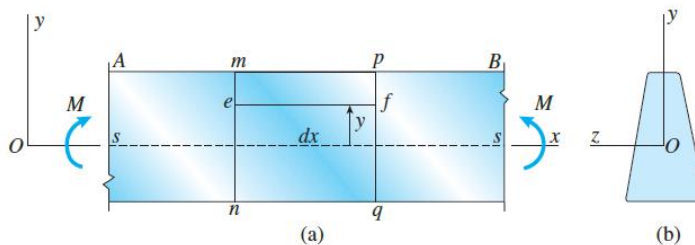
Lo que al igualar la Ecuación 16 y la Ecuación 17 se tiene la siguiente expresión:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d^2\delta}{dx^2} \quad \text{Ecuación 18}$$

Para determinar el alargamiento que se produce en una viga al soportar una carga de flexión se considera la Figura 13, que indica una viga sometida a flexión y con varios puntos que indican las partes de análisis de la viga, la recta  $ss$  indica la línea neutra de la viga. Mientras que en el lado derecho se indica la sección transversal de la viga.

**Figura 13**

(a) Viga sometida a momentos de flexión; (b) Sección transversal

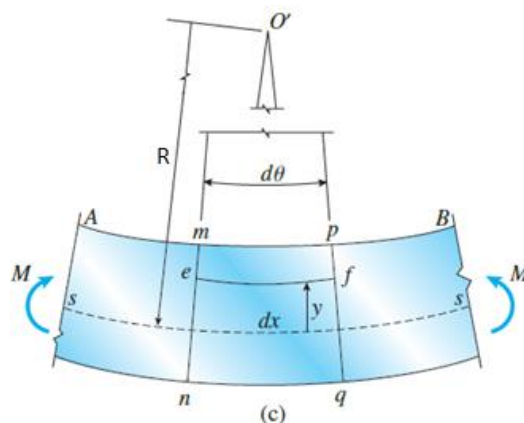


Nota. Tomado de *Mecánica de Materiales* (p. 357), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning

Ahora se considera la misma viga de la Figura 14, pero con la deformación producto de la aplicación de los momentos de flexión. Como se puede observar se produce una curvatura en la viga y la distancia entre los puntos  $mp$  se acorta, mientras que la distancia entre los puntos  $nq$  se alarga, lo que indica que existe compresión en la parte superior de la línea neutra y existe tracción en la parte inferior de la línea neutra.

**Figura 14**

*Geometría de la viga sometida a momentos de flexión*



*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 357), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning*

La recta  $L1$  es la distancia entre los puntos  $e$  y  $f$ , cuando la viga no se deformaba esta distancia es igual a  $dx$ , pero una vez que la viga se deformó la distancia disminuyó y para determinar el valor únicamente se hará un análisis de la geometría.

$$L1 - dx = (R - y)d\theta - dx$$

$$L1 - dx = Rd\theta - yd\theta - Rd\theta$$

$$L1 - dx = -y \frac{dx}{R}$$

Para el cálculo de la deformación unitaria longitudinal se divide el alargamiento para la longitud inicial.

$$\epsilon = -\frac{y}{R} = -\kappa y$$

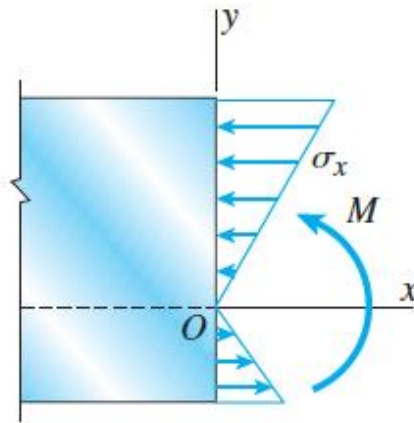
Y para la fórmula del esfuerzo se tiene:

$$\sigma = \frac{-Ey}{R} = -E\kappa y \quad \text{Ecuación 19}$$

La Ecuación 19 indica que el esfuerzo es directamente proporcional a la distancia desde la línea neutra al punto en donde se realiza el análisis. Como se puede ver en la Figura 15 este esfuerzo aumenta linealmente a medida que se aleja de la línea neutra.

### Figura 15

*Distribución de esfuerzos normales de una viga de material linealmente elástico.*

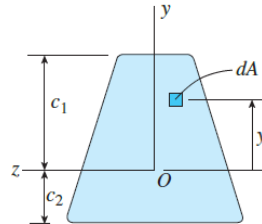


*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 361), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning*

En la Figura 16 se visualiza la sección transversal de la viga, es claro que cada diferencial de área recibe cierta fuerza provocada por el momento, es decir, que la fuerza que se aplica sobre un diferencial de área es  $\sigma dA$ . Y el momento que se aplica en ese punto es  $\sigma y dA$ .

**Figura 16**

Vista de la sección transversal de una viga.



Nota. Tomado de *Mecánica de Materiales* (p. 357), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning

$$dM = -\sigma y dA$$

$$M = - \int_A \sigma y dA$$

Al juntar con la Ecuación 19 y sacar de la integral a los factores constantes como son el módulo de Young E y la curvatura  $\kappa$ , se tiene:

$$M = -E\kappa \int_A y^2 dA$$

$I = \int_A y^2 dA$  Es el momento de inercia por lo que la ecuación para el momento resulta:

$$M = -E\kappa I$$

Y la Ecuación 20 relaciona momento – curvatura.

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad \text{Ecuación 20}$$

Entonces para el esfuerzo se tiene la siguiente fórmula:

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad \text{Ecuación 21}$$

Si el momento de flexión en la viga es positivo, el esfuerzo de la sección superior de la viga por encima del eje neutro estará en compresión, es decir, será negativo; mientras que la sección inferior por debajo del eje neutro el esfuerzo estará en tracción, es decir, será positivo.

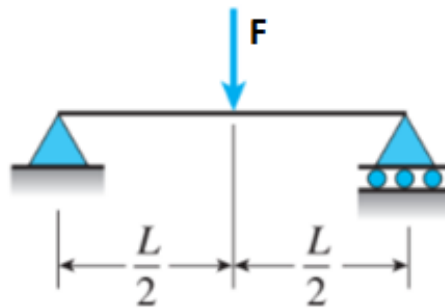
Al igualar la Ecuación 18 y la Ecuación 20 se tiene una ecuación que relaciona el momento, la deflexión, la inercia y el módulo de Young.

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{Ecuación 22}$$

Un caso especial en que la viga está simplemente apoyada y con una fuerza  $F$  en la mitad de la viga se utiliza la Ecuación 22 para encontrar su deflexión en la mitad de la viga, que es justamente donde la deflexión es máxima.

### Figura 17

*Viga simplemente apoyada con una fuerza en la mitad de la viga*

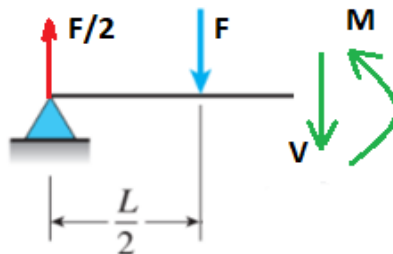


*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 988), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009, 7ma edición, Cengage Learning*

Las reacciones en cada apoyo es  $F/2$ . Se puede calcular esta reacción utilizando sumatoria de momentos y después sumatoria de fuerzas en el eje vertical.

Figura 18

Diagrama de cuerpo libre para determinar los momentos flexionantes.



$$M = \frac{Fx}{2} - F\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$EI \frac{d^2\delta}{dx^2} = M = \frac{Fx}{2} - F\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$EI\theta = \frac{Fx^2}{4} - \frac{F}{2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + C_1$$

$$EI\delta = \frac{Fx^3}{12} - \frac{F}{6}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 + C_1x + C_2$$

Condiciones de frontera

$$\delta(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\delta(L) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{-FL^2}{16}$$

$$EI\delta = \frac{Fx^3}{12} - \frac{F}{6}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 + \frac{-FL^2}{16}x$$

Se calcula la deflexión cuando  $x = \frac{L}{2}$

$$EI\delta = \frac{FL^3}{96} - \frac{FL^3}{32}$$

$$\delta = \frac{-FL^3}{48EI}$$

Ecuación 23

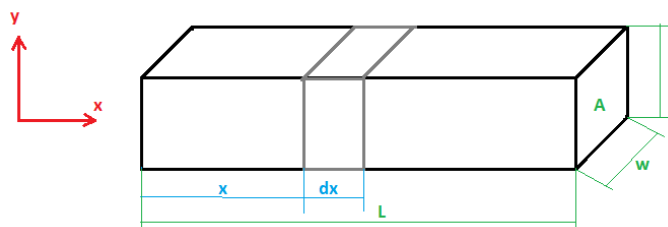
## Vibración en vigas empotradas

### *Análisis de los modos de vibración de una viga*

Para el análisis de vibración en vigas se deben tomar en cuenta otros parámetros como cuando se considera una carga estática. En la Figura 19 se puede visualizar una viga en donde se indica el área transversal de la misma, la altura, ancho y largo. Además, se indica un elemento diferencial a lo largo del eje  $x$ .

**Figura 19**

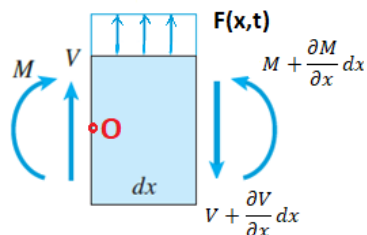
*Dimensiones de una viga*



Únicamente se considera el elemento de viga, y se muestra su vista frontal en la Figura 20, donde se puede apreciar los momentos, fuerzas cortantes y una carga que está en función de  $x$  y del tiempo.

**Figura 20**

*Cargas y momentos que actúan sobre una viga sometida a vibración.*



*Nota. Tomado de Mecánica de Materiales (p. 679), por Jame M. Gere Y Barry Y. Goodno, 2009,*

*7ma edición, Cengage Learning*



Al realizar la sumatoria de momentos con respecto al punto O se tiene lo siguiente:

$$\sum M = 0$$

$$-M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx + F(x, t) dx \frac{dx}{2} = 0$$

El producto de dos diferenciales de x da un valor sumamente pequeño por lo que no es considerado dentro del cálculo.

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx - V dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V$$

*Ecuación 24*

Se realiza un análisis de sumatoria de fuerzas en el eje y, considerando que todos los momentos, fuerzas cortantes y carga se encuentran en función de x y del tiempo.

$$\sum Fy = m\ddot{\delta}$$

$$V - V - \frac{\partial V}{\partial x} dx + F(x, t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + F(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$$

Se reemplaza la Ecuación 24 y se tiene:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + F(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$$

Y reemplazando con la Ecuación 22 se tiene:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{d^2 \delta}{dx^2} \right) + F(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$$

Para vigas de sección constante y de material homogéneo los valores de E y de I son constantes y se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$-EI \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} + F(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} \quad \text{Ecuación 25}$$

Cuando se tratan de vibraciones libres, el valor de la fuerza que está en función de  $x$  y del tiempo es igual a 0,  $F(x, t) = 0$ , y por lo tanto la Ecuación 25 queda de la siguiente manera.

$$-EI \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$$

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = 0$$

Para facilitar los cálculos a toda la parte constante de la ecuación se le va a denotar como  $c^2$ .

$$c^2 = \frac{EI}{\rho A}$$

Entonces la ecuación queda de la siguiente manera:

$$c^2 \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Ecuación 26}$$

Se tiene una ecuación diferencial parcial de cuarto grado con coeficientes constantes, donde se puede observar que la deflexión se encuentra en función de  $x$  y de  $t$ , por lo que la función de deflexión se puede representar como el producto de dos funciones, una en función de  $x$  y una función de  $t$ .

$$\delta(x, t) = u(x)v(t)$$

$$c^2 \frac{\partial^4 (u(x)v(t))}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 (u(x)v(t))}{\partial t^2} = 0$$

$$v(t)c^2 \frac{d^4 u(x)}{dx^4} + u(x) \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = 0$$

$$\frac{c^2}{u(x)} \frac{d^4 u(x)}{dx^4} + \frac{d^2 v(t)}{v(t)dt^2} = 0$$

$$\frac{c^2}{u(x)} \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = -\frac{d^2 v(t)}{v(t) dt^2} = \omega^2$$

Siendo  $\omega^2$  una constante de separación para resolver por separado cada ecuación diferencial parcial.

$$\frac{c^2}{u(x)} \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = \omega^2$$

$$\frac{d^4 u(x)}{dx^4} - \frac{\omega^2}{c^2} u(x) = 0$$

$$u^{IV} - \frac{\omega^2}{c^2} u = 0$$

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$u^{IV} - \beta^4 u = 0$$

Suponer:  $u = e^{rt}$

Derivar:  $u^I = r e^{rt}$

$$u^{II} = r^2 e^{rt}$$

$$u^{III} = r^3 e^{rt}$$

$$u^{IV} = r^4 e^{rt}$$

Reemplazar:  $r^4 e^{rt} - \beta^4 e^{rt} = 0$

$$e^{rt}(r^4 - \beta^4) = 0$$

$$r^4 - \beta^4 = 0$$

$$(r + \beta)(r - \beta)(r^2 + \beta^2) = 0$$

$$r_1 = \beta \quad r_2 = -\beta \quad r_3 = i\beta \quad r_4 = -i\beta$$

$$u(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}$$

$$u(x) = C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x)$$

$$+ C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)$$

$$-\frac{d^2 v(t)}{v(t) dt^2} = \omega^2$$

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \omega^2 v(t) = 0$$

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0$$

Suponer:  $v = e^{rt}$

Derivar:  $\dot{v} = r e^{rt}$

$$\ddot{v} = r^2 e^{rt}$$

Reemplazar:  $r^2 e^{rt} + \omega^2 e^{rt} = 0$

$$e^{rt}(r^2 + \omega^2) = 0$$

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

$$r^2 = -\omega^2$$

$$r = \pm \sqrt{-\omega^2}$$

$$r = \pm i\omega$$

$$r_1 = i\omega$$

$$r_2 = -i\omega$$

$$v(t) = A_0 e^{i\omega t} + B_0 e^{-i\omega t}$$

$$v(t) = A_0 \cos(\omega t) + B_0 \sin(\omega t)$$

Finalmente, la ecuación de la deflexión que está en función del tiempo y de  $x$ , es decir, la función de la deflexión es el producto de dos funciones; queda determinada de la siguiente manera:

$$\delta(x, t) = u(x)v(t)$$

$$\delta(x, t) = [C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)][A_0 \cos(\omega t) + B_0 \sin(\omega t)]$$

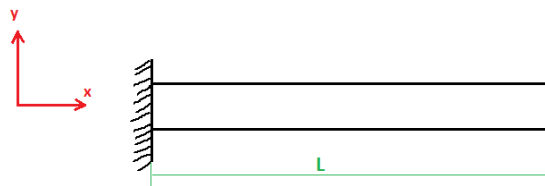
*Ecuación 27*

La teoría que se aplica para el desarrollo de la Ecuación 27 es de Euler - Bernoulli y es conocida como la teoría clásica de vigas y por sus buenas aproximaciones es muy utilizada para aplicaciones de ingeniería, aunque en vigas que se ensayan a altas frecuencias no se aplica, ya que no considera deformaciones por cortante. La teoría de Timoshenko es más precisa para vigas no esbeltas y para altas frecuencias. (Avellán Martín, 2017)

Los modos de vibración dependen únicamente de la función  $u(x)$ , es decir, que los modos de vibración son independientes del tiempo. Inclusive para el ensayo de vibración, porque la frecuencia de la máquina permanece constante. Para una viga empotrada se debe tomar en cuenta las condiciones de frontera de la misma y utilizar la Ecuación 27 para encontrar una ecuación específica del caso de una viga en voladizo.

### Figura 21

*Viga en voladizo de longitud  $L$*



Para las condiciones de frontera se van a tomar en cuenta las siguientes consideraciones, para la viga de la Figura 21:

La deflexión en el empotramiento es cero, es decir, cuando  $x=0$  la deflexión es 0:

$$\delta(0, t) = 0 \rightarrow u(0)v(t) = 0 \rightarrow u(0) = 0$$

El ángulo de deflexión en el empotramiento es cero, es decir, cuando  $x=0$  el ángulo

$$\text{es } 0: \theta(0, t) = \frac{\partial \delta(0, t)}{\partial x} = 0 \rightarrow u'(0)v(t) = 0 \rightarrow u'(0) = 0$$

El momento en el extremo libre es cero, es decir, cuando  $x=L$  el momento es 0:

$$M(L, t) = EI \frac{\partial^2 \delta(L, t)}{\partial x^2} = 0 \rightarrow u''(L)v(t) = 0 \rightarrow u''(L) = 0$$

La fuerza cortante en el extremo libre es cero, es decir, cuando  $x=L$  la fuerza

$$\text{cortante es } 0: V(L, t) = EI \frac{\partial^3 \delta(L, t)}{\partial x^3} = 0 \rightarrow u'''(L)v(t) = 0 \rightarrow u'''(L) = 0$$

Para aplicar las condiciones de borde se debe derivar a la ecuación las veces que indiquen las condiciones, en este caso tres veces.

$$u(x) = C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)$$

$$u'(x) = \beta [C_1 \sinh(\beta x) + C_2 \cosh(\beta x) - C_3 \sin(\beta x) + C_4 \cos(\beta x)]$$

$$u''(x) = \beta^2 [C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) - C_3 \cos(\beta x) - C_4 \sin(\beta x)]$$

$$u'''(x) = \beta^3 [C_1 \sinh(\beta x) + C_2 \cosh(\beta x) + C_3 \sin(\beta x) - C_4 \cos(\beta x)]$$

Se procede a aplicar las condiciones de borde:

$$u(0) = C_1 + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = -C_1$$

$$u'(0) = \beta [C_2 + C_4] = 0 \rightarrow C_4 = -C_2$$

$$u''(L) = \beta^2 [C_1 \cosh(\beta L) + C_2 \sinh(\beta L) - C_3 \cos(\beta L) - C_4 \sin(\beta L)] = 0$$

$$\rightarrow C_1 \cosh(\beta L) + C_2 \sinh(\beta L) - C_3 \cos(\beta L) - C_4 \sin(\beta L) = 0$$

$$u'''(L) = \beta^3 [C_1 \sinh(\beta L) + C_2 \cosh(\beta L) + C_3 \sin(\beta L) - C_4 \cos(\beta L)]$$

$$\rightarrow C_1 \sinh(\beta L) + C_2 \cosh(\beta L) + C_3 \sin(\beta L) - C_4 \cos(\beta L) = 0$$

Al reemplazar las dos primeras condiciones en las dos últimas condiciones se tiene como resultado dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$C_1 \cosh(\beta L) + C_2 \sinh(\beta L) + C_1 \cos(\beta L) + C_2 \sin(\beta L) = 0$$

$$C_1 \sinh(\beta L) + C_2 \cosh(\beta L) - C_1 \sin(\beta L) + C_2 \cos(\beta L) = 0$$

Se reescriben estas ecuaciones de tal forma que los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$  se los pueda observar para después despejarlos:

$$C_1 [\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)] + C_2 [\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)] = 0$$

$$C_1 [\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)] + C_2 [\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)] = 0$$

De la segunda ecuación se despeja  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{-C_1 [\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)]}{\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)}$$

Y se reemplaza en la primera ecuación:

$$C_1 [\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)] + \frac{-C_1 [\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)]}{\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)} [\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)] = 0$$

Se sacar factor común a  $C_1$  y se resuelve:

$$C_1 [[\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)]^2 - [\sinh^2(\beta L) - \sin^2(\beta L)]] = 0$$

Como  $C_1 \neq 0$  por lo que todos los coeficientes serían cero, entonces lo que se encuentra dentro del corchete se iguala a 0 y se resuelve:

$$[\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)]^2 - [\sinh^2(\beta L) - \sin^2(\beta L)] = 0$$

$$\cosh^2(\beta L) + 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) + \cos^2(\beta L) - \sinh^2(\beta L) + \sin^2(\beta L) = 0$$

$$(\cosh^2(\beta L) - \sinh^2(\beta L)) + (\cos^2(\beta L) + \sin^2(\beta L)) + 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 0$$

$$(1) + (1) + 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 0$$

$$\cosh(\beta L) \cos(\beta L) = -1$$

Se calculan todos los valores de  $\beta L$  para que se cumpla la ecuación y los valores son los siguientes:

1.875104068712; 4.6940911329742; 7.854757438276; 10.995540734876; 14.137168391046; 17.278759532088; la función inversa del coseno hiperbólico tiene una asíntota en  $y = 0$ , los valores de  $\beta L$  son similares a:  $\frac{(2n-1)\pi}{2}$  si  $n \in \mathbb{Z}$ . De hecho, para  $n \geq 21$  los valores presentan una diferencia de  $9.442 * 10^{-15}$  que se considera un valor muy bajo.

La cantidad de valores es infinita ya que se trata de una función periódica; sin embargo, se han presentado los primeros seis valores que representan los 6 primeros modos de vibración.

**Tabla 1**

*Valores de los seis primeros modos de vibración de viga en voladizo*

Modo vibratorio		Valor
Primer modo de vibración	$\beta_1 L =$	1.875104068712
Segundo modo de vibración	$\beta_2 L =$	4.6940911329742
Tercer modo de vibración	$\beta_3 L =$	7.854757438276
Cuarto modo de vibración	$\beta_4 L =$	10.995540734876
Quinto modo de vibración	$\beta_5 L =$	14.137168391046
Sexto modo de vibración	$\beta_6 L =$	17.278759532088

*Nota. Realizado en la calculadora Ti nspire cx cas*

Se procede a calcular la rigidez específica a la flexión para cualquier modo de vibración.

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega}{c}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}}$$

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI}$$

$$\frac{EI}{\rho A} = \frac{\omega^2}{\beta^4}$$

$$\frac{EI}{\rho A} = \frac{(2\pi f)^2}{\beta^4} \quad \text{Ecuación 28}$$

Al tratarse de un material con geometría homogénea y de sección transversal rectangular su inercia se calcula con base en la geometría descrita en la Figura 19:

$$I = \frac{wt^3}{12} \quad \text{Ecuación 29}$$

Y por definición se sabe que la densidad de un material es la razón de cambio entre la masa y el volumen.

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{Adx} \quad \text{Ecuación 30}$$

Al reemplazar la Ecuación 29 y la Ecuación 30 en la Ecuación 28, se tiene lo siguiente:

$$\frac{Ewt^3}{12A} = \frac{(2\pi f)^2}{\beta^4} \frac{dm}{Adx}$$

Al reacomodar la ecuación se tiene la siguiente expresión.

$$\frac{Et^3}{12} = \frac{(2\pi f)^2}{\beta^4} \frac{dm}{wdx}$$

La expresión de la Ecuación 31 es la rigidez específica a la flexión.



$$S = \frac{Et^3}{12} \quad \text{Ecuación 31}$$

La Ecuación 32 es la masa por unidad de área lateral.

$$\gamma = \frac{dm}{wdx} \quad \text{Ecuación 32}$$

Por lo tanto, la ecuación que relaciona; la rigidez específica a la flexión, la masa por unidad de área lateral, el modo de vibración y la frecuencia de vibración es la siguiente:

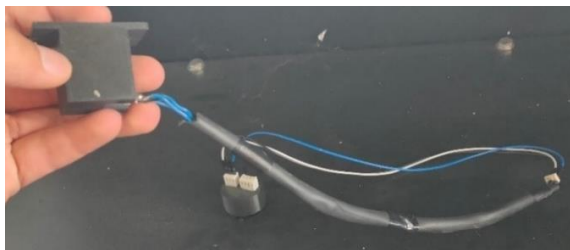
$$S = \frac{(2\pi f)^2}{\beta^4} \gamma \quad \text{Ecuación 33}$$

### Sensor de vibraciones

La obtención de datos de frecuencia tiene como fuente un acelerómetro ADXL 335, que se trata de un sensor de vibraciones de tres grados de libertad. Este sensor puede medir la aceleración dinámica de un sistema que es producida por un choque, movimiento o vibración. (Almeida & Martínez, 2017)

### Figura 22

Sensor acelerómetro ADXL 335



Se utiliza el acelerómetro conjuntamente con un software para analizar las vibraciones. El acelerómetro y su interfaz proporcionan una señal analógica, por lo que es necesario hacer uso de un software que permita el cambio a una señal digital, para ello se usa el software LabVIEW.

El acelerómetro ADXL 335, envía una señal de la aceleración proporcional al voltaje que se indica. Además, con ayuda de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), que es una función propia de GNU Octave, permite el cambio matemático de una señal en función del tiempo al dominio de la frecuencia sin obviar los datos que son parte del fenómeno de vibración transversal en la viga. (Pérez, 1995)

La frecuencia máxima que puede indicar en la salida de datos es de 550 Hz, sin embargo, se puede ampliar hasta los 1600 Hz si se incorporan capacitores al circuito, únicamente en los ejes x e y. (Vitale, 2018)

Para el caso de este trabajo de titulación no se ampliará la señal ya que las dimensiones de la viga permiten obtener señales de frecuencia menores que 550 Hz.

Las características técnicas del acelerómetro ADXL 335 son las que se indican en la Tabla 2.

**Tabla 2**

*Especificaciones técnicas del acelerómetro ADXL 335.*

Detección	3 ejes
Dimensiones (LFCSP)	4mm x 4mm x 1.45mm
Baja potencia	350 $\mu$ A
Funcionamiento de alimentación simple	1.8 a 3.6 V
Supervivencia de choque	10 000 g
Rango de temperatura operable	-55 a 125 °C

*Nota. Esta tabla indica las condiciones a las que el acelerómetro puede operar adecuadamente.*

*(López & Ortuño, 2019)*

### Capítulo 3: Pruebas de vibración en vigas

#### Cálculos, dimensiones y fabricación de las probetas

Con base en la Ecuación 33 se pueden determinar las dimensiones iniciales de la viga para el primer y segundo modo de vibración, tomando en cuenta el módulo de elasticidad del acero ASTM A 36 y la densidad del acero que se encuentran en la Tabla 3.

**Tabla 3**

*Propiedades del Acero ASTM A 36*

Propiedad	Valor
Densidad	7850 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidad	200 GPa

*Nota. Propiedades del acero (Material Mundial, 2021)*

Para el primer o el segundo modo de vibración, según sea el caso, se utilizan los valores de Tabla 1 y se reemplaza en la Ecuación 33.

Se realizan ocho probetas para ensayar en el Rigidímetro, el espesor es un importante indicador sobre la esbeltez y el modo de vibración que al que puede alcanzar una viga únicamente variando su longitud, sin embargo, el espesor mínimo que se puede alcanzar gracias a un proceso de rectificado es de 0.2 mm, y por tal motivo solo se puede llegar hasta su segundo modo de vibración.

**Figura 23**

*Proceso de rectificado en probetas a ensayar en el Rigidímetro*



En la Figura 24 se observan los bordes quemados de las probetas, producto del proceso de rectificado. La rectificadora tiene un electroimán que permite sujetar la probeta a la plataforma magnética, sin embargo, cuando se quemaron los bordes, estos dejaron de tener adherencia magnética, por ello se puede afirmar que la temperatura a la que llegó el material hizo que su comportamiento cambiara.

**Figura 24**

*Probeta quemada en sus bordes*



Para las dimensiones de las probetas a ensayar en el Equipo Módulo Dinámico de Elasticidad se realizan tres probetas de una misma platina con distintas longitudes, se utilizan tres platinas, las probetas 1, 4 y 7 son parte de la misma platina, las probetas 2, 5 y 8 son parte de otra platina, y las probetas 3, 6 y 9 forman parte de otra platina.

Posteriormente, se utilizaron dos platinas más (platina 10 y 11) para tener más resultados y poder comparar con los demás.

### **Utilización del equipo Rigidímetro TMI modelo 7920**

El Rigidímetro TMI modelo 7920 permite la determinación de la rigidez, mediante la observación de una viga en voladizo al encontrarse en resonancia. El equipo hace vibrar el empotramiento, y conjuntamente con éste la probeta, a una frecuencia constante de 25 Hz. El equipo tiene una regla y un nonio en la parte derecha que permite medir la longitud de la viga cuando se encuentra en resonancia; tiene una apreciación de décima de milímetro.

Cuando la viga alcanza su máxima amplitud, según el modo vibratorio calculado, con ayuda de la Ecuación 33 se determina el módulo de elasticidad del material.

**Tabla 4**

*Dimensiones del Rigidímetro TMI 7920*

<b>Descripción</b>	<b>Valor</b>
<b>Longitud libre máxima</b>	305 mm
<b>Longitud máxima de la probeta</b>	360 mm
<b>Longitud del empotramiento</b>	55 mm
<b>Ancho de la apertura máxima de las mordazas</b>	4.5 mm

Se realizan ocho probetas cortadas de una plancha de acero ASTM A 36 considerando el sentido en el que han sido cortadas las vigas, es decir, se hicieron cuatro probetas cortadas longitudinalmente (L1, L2, L3, L7) y cuatro probetas cortadas en el sentido transversal (T4, T5, T6, T8), las dimensiones de las probetas y su peso se presentan en la Tabla 5.

**Figura 25**

*Probetas de ensayo en el Rigidímetro*



Las dimensiones que se tomaron a cada probeta son: unan medida de longitud, siete medidas de ancho y siete medidas de espesor, para garantizar su uniformidad y tener los valores adecuados de los mismos en el laboratorio de metrología. Los espesores se tomaron con micrómetro, el ancho con calibrador pie de rey y la longitud con regla metálica, como se puede ver en la Figura 26 y Figura 27.

**Figura 26**

*Dimensiones tomadas con calibrador pie de rey digital*



**Figura 27**

*Dimensiones tomadas con micrómetro digital*



Las probetas realizadas para el ensayo en el Rigidímetro se hicieron en una rectificadora, y al ser un proceso abrasivo hizo que algunos de los bordes de las probetas se quemaran, por tal motivo se cortó la parte quemada mientras fue posible.

**Tabla 5**

*Dimensiones de las probetas para Rigidímetro*

<b>Viga</b>	<b>Espesor [mm]</b>	<b>Longitud [mm]</b>	<b>Ancho [mm]</b>	<b>Masa [g]</b>
L1	0.302	336	20.14	16.11
L2	0.321	348	20.17	17.68
L3	0.338	347	20.00	18.58
T4	0.315	340	20.11	17.12
T5	0.295	334	20.12	15.49
T6	0.312	340	20.09	17.02
L7	0.210	317	20.12	10.87
T8	0.208	290	19.95	10.03

### Utilización del Equipo Módulo de Elasticidad Dinámico

El equipo que se utiliza fue diseñado por los señores López Fabián y Ortuño Fernando, en su proyecto de titulación realizado en el año 2009, que tiene como título “Diseño de un equipo para la caracterización del módulo de elasticidad en diversos materiales ortotrópicos”. (López & Ortuño, 2019)

Se debe asegurar que la viga vibre en su primer modo, ya que su máxima aceleración se produce en el primer modo vibratorio, y esta ayuda a analizar la frecuencia natural. La Ecuación 33 se usa para la determinación del módulo de elasticidad y surge de la teoría de Euler - Bernoulli que descuida los efectos de la inercia rotatoria y la deformación por cizallamiento, por lo que es aplicable al análisis de vigas delgadas.

Un parámetro importante para considerar a una viga como delgada es la esbeltez y se muestra en la Ecuación 34:

$$\text{Esbeltez} = \frac{L}{r_G} \quad \text{Ecuación 34}$$

Donde el radio de giro se calcula de acuerdo a la Ecuación 35

$$r_G = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{Ecuación 35}$$

La medición de la vibración es independiente de la fuerza con que se excita al sistema, sin embargo, se debe considerar que el impacto inicial no sea muy fuerte ya que puede ocasionar que el material se fracture o que dicha fuerza comprometa al material a superar la resistencia a la fluencia o de tracción; también podría causar un daño al sistema de sujeción de la viga (empotramiento) y podría zafarse. (ASTM E 1876-01, 2005)



Se realizaron once probetas de distintas dimensiones, para ensayar en el equipo, las cuales se presentan en la Tabla 6, además se consideró la masa del acelerómetro de 12.37 g.

**Figura 28**

*Probetas de ensayo del equipo Módulo Dinámico de Elasticidad*



De cada probeta se toma una medida de su longitud, siete de su espesor y siete de su ancho, para verificar la uniformidad de sus dimensiones y con ello proceder a calcular el módulo de elasticidad. Los espesores fueron tomados con micrómetro digital, la longitud son regla metálica y el ancho con calibrador pie de rey digital.

**Tabla 6**

*Dimensiones de las probetas para MOE*

Viga	Espesor [mm]	Longitud [mm]	Ancho [mm]	Masa [g]
1	2.785	248	19.41	99.89
2	3.898	250	29.96	224.15
3	1.895	250	44.60	165.28
4	2.782	444	19.57	179.08
5	3.864	448	29.98	399.31
6	1.890	443	44.84	293.94
7	2.776	801	19.36	321.44

8	3.889	801	29.92	716.79
9	1.907	803	44.77	533.50
10	3.817	743	49.98	1097
11	3.796	742	49.94	1093

---

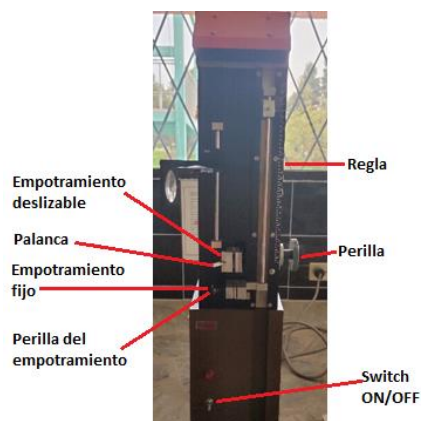
## Obtención de resultados

### *Equipo Rigidímetro TMI modelo 7920*

Cada viga es colocada en el Rigidímetro para realizar el ensayo, se debe abrir las mordazas del empotramiento deslizante con ayuda de la palanca que se encuentra en el empotramiento y abrir las mordazas del empotramiento fijo con ayuda de la perilla, la viga se sujeta adecuadamente, se enciende el equipo para que el empotramiento deslizante empiece a vibrar a una frecuencia de 25 Hz y las medidas se toman dos minutos después de haber encendido el equipo. Además, el empotramiento fijo puede mover toda la viga en sentido vertical gracias a una perilla en la parte derecha, de esta forma se varía la longitud de la viga hasta que entre en resonancia. En la Figura 29 se indica el Rigidímetro y sus partes.

### Figura 29

*Rigidímetro TMI modelo 7920*



En el Rigidímetro se debe colocar la viga con una longitud libre de cero, y tomar la medida que se indica en la regla, de esta forma cuando la viga se encuentre en resonancia, se debe tomar la medida y restar de la medida anterior. La longitud libre de la viga es desde su extremo libre hasta el empotramiento deslizable.

Para cada modo de vibración y para cada viga se toma tres veces las medidas, al final se saca un promedio y con esa longitud se realizan los cálculos.

### **Figura 30**

*Viga en el primer modo de vibración*



### **Figura 31**

*Viga en el segundo modo de vibración*



Un parámetro importante en el cálculo del módulo de elasticidad es la esbeltez, ya que la Teoría Euler - Bernoulli desprecia la inercia rotatoria y la deformación por cortante, la esbeltez es un indicador para considerar a una viga como delgada. En la Tabla 7 y la Tabla 8 se muestran los módulos de elasticidad para cada viga para el primer y segundo modo, respectivamente.

**Tabla 7**

*Resultados en Rigidímetro para el primer modo vibratorio*

Viga	Esbeltez	Longitud libre [mm]			Longitud Promedio	Módulo de elasticidad [GPa]
					[mm]	
L1	1188	103.4	103.4	103.5	103.4	237.58
L2	1085	100.6	100.9	100.5	100.7	186.76
L3	1157	112.8	113.0	112.9	112.9	269.75
T4	1000	90.7	90.6	91.3	90.9	131.15
T5	1200	102.0	102.2	105.5	102.2	234.60
T6	1150	103.5	103.5	103.4	103.5	225.81
L7	1256	76.2	75.7	76.9	76.3	148.21
T8	1427	85.1	85.6	85.9	85.53	248.48

En la Tabla 7 se pueden notar valores de módulo de elasticidad alejados del valor teórico (200 [GPa]), las probetas L4 y L7 son las probetas que presentan esta gran diferencia.

**Tabla 8**

*Resultados en Rigidímetro para el segundo modo vibratorio*

Viga	Esbeltez	Longitud libre [mm]			Longitud Promedio	Módulo de elasticidad [GPa]
					[mm]	

L1	2932	256.0	255.1	255.0	255.4	224.76
L2	2782	257.8	257.8	258.6	258.1	205.39
L3	2713	264.6	265.1	264.3	264.7	207.44
T4	2752	249.9	250.0	250.1	250.0	191.34
T5	2973	253.4	253.2	253.3	253.3	225.11
T6	2877	258.3	259.3	259.1	258.9	225.41
L7	3079	187.0	186.5	187.6	187.0	136.50
T8	3525	211.3	211.6	210.8	211.2	235.34

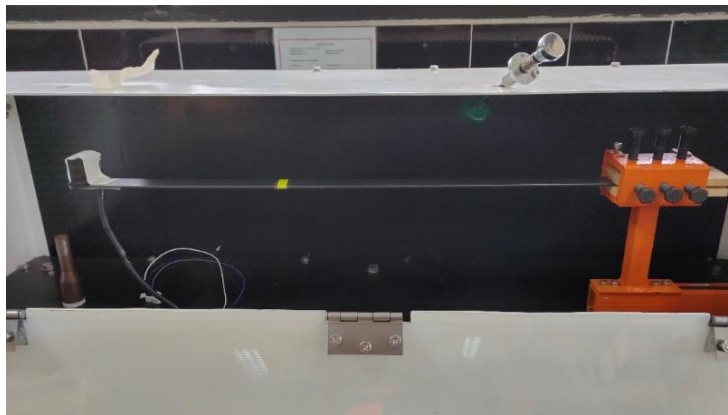
En la Tabla 8 se indican los resultados obtenidos del módulo de elasticidad productor del ensayo en el rigidímetro, sin embargo, se muestran valores alejados del valor referencial del módulo de elasticidad (200 [GPa]) en la probeta L7 que es la misma probeta que tiene un valor alejado del módulo de elasticidad en el primer modo vibratorio.

### ***Equipo Módulo Dinámico de Elasticidad***

Las consideraciones que se hacen antes de realizar los ensayos son sujetar adecuadamente a la probeta en el empotramiento, ya que, el modelamiento físico y matemático considera al empotramiento perfectamente rígido. El acelerómetro es colocado en el extremo libre de la viga y debe estar bien sujeto a la viga, en este caso con cinta masking.

**Figura 32**

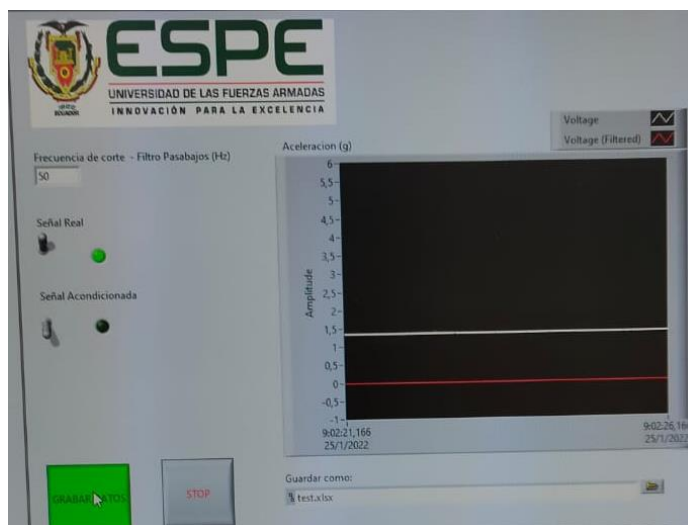
*Sujeción del acelerómetro a la viga empotrada*



La excitación que recibe la viga es una fuerza puntual, realizada con la mano de la persona que realiza el ensayo, se debe golpear y retirar rápidamente la mano, y no tocar la probeta una vez que inicie la vibración, poco a poco la vibración va siendo nula. Los datos son tomados desde que se inicia la vibración hasta que finaliza.

**Figura 33**

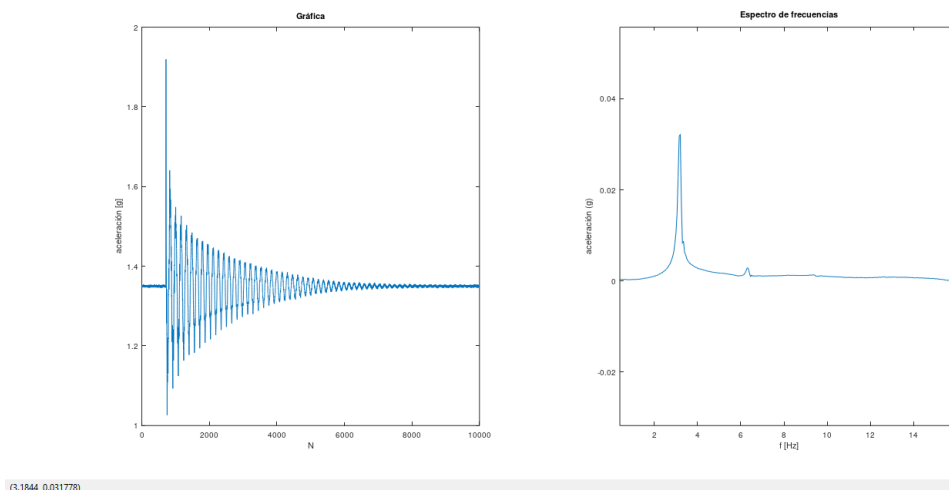
*Programa de adquisición de datos*



*Nota. En la ilustración se indica la interfaz del programa LabView para la adquisición de datos.*

**Figura 34**

*Datos adquiridos (izquierda); Espectro de frecuencias (derecha)*



*Nota. Software GNU Octave. En el gráfico de la izquierda se indica la gráfica de aceleración en función de la gravedad [g] vs número de muestra (N), el acelerómetro es capaz de tomar 500 muestras por segundo.*

El espectro de frecuencias fue calculado en el software GNU Octave con ayuda de la función `fft` (transformada rápida de Fourier), la frecuencia que se utiliza para realizar los cálculos es la que se presenta cuando la aceleración es máxima, es decir, en el punto máximo de la curva que se indica en la Figura 34 (derecha). Los resultados gráficos muestran un poco de inexactitud, por lo que fue necesario utilizar Microsoft Excel para tener las frecuencias reales, para mayor seguridad se tomaron 5 frecuencias por cada ensayo, se tomó en cuenta la longitud libre de la viga, y que estén en su primer modo.

**Tabla 9***Resultados en el equipo Módulo Dinámico de Elasticidad*

Viga	Longitud libre [mm]	Esbeltez	Frecuencia [Hz]					Frecuencia promedio [Hz]	Módulo de elasticidad [GPa]
1	142	177	72.364	72.500	72.455	72.250	72.364	72.387	95.35
2	144	128	60.000	60.000	60.000	60.000	60.000	60.000	32.83
3	147	269	59.545	59.417	59.455	59.500	59.500	59.483	155.44
4	337	420	15.143	15.333	15.333	15.250	15.273	15.266	120.28
5	341	306	20.455	20.462	20.500	20.238	20.667	20.524	117.04
6	338	620	11.786	11.929	11.867	11.917	11.857	11.871	163.10
7	696	869	4.643	4.533	4.600	4.714	4.615	4.621	194.36
8	696	620	5.829	5.846	5.821	5.818	5.821	5.827	158.37
9	699	1270	3.083	3.177	3.143	3.200	3.143	3.149	199.27
10	640	581	6.806	6.800	6.800	6.818	6.808	6.806	160.22
11	638	582	6.813	6.813	6.794	6.807	6.788	6.803	160.47

En la Tabla 9 existen valores muy distantes del valor teórico (200 [GPa]), y se puede observar que, con longitudes libres mayores, se tienen valores más cercanos al valor teórico. Lo que es respaldado por la Teoría Euler-Bernoulli, que hace especial énfasis en vigas delgadas.

### **Simulación numérica**

La simulación numérica permite predecir el comportamiento de procesos de ingeniería y otras ciencias, con el uso de herramientas matemáticas. Es por eso que, los ensayos de vibraciones que se realizan en los equipos Rigidímetro y Módulo Dinámico

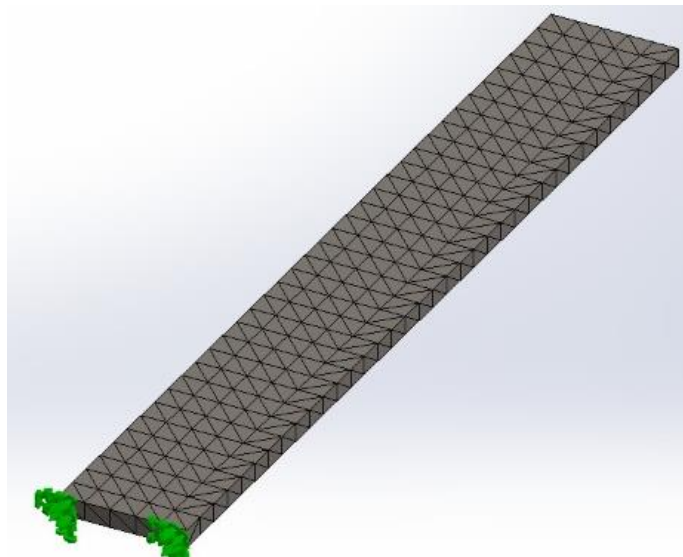


de Elasticidad se comparan y analizan con los resultados obtenidos mediante la simulación.

La simulación utiliza el método de elementos finitos que consiste en dividir un material en elementos más pequeños para analizarlos uno a uno y al final tener un resultado de todo el sistema. La diferencia entre una malla fina y malla gruesa radica en el número de elementos en que se divide a una misma viga, en este caso, cuantas más divisiones se hacen la malla es fina y con menos divisiones la malla es gruesa; en la Figura 35 y la Figura 36 se puede observar gráficamente la diferencia que existen entre estos dos tipos de mallas. Una gran diferencia entre estas dos mallas es el coste computacional que requieren, para una malla fina se requiere mayor coste computacional ya que se tienen más elementos que en una malla gruesa.

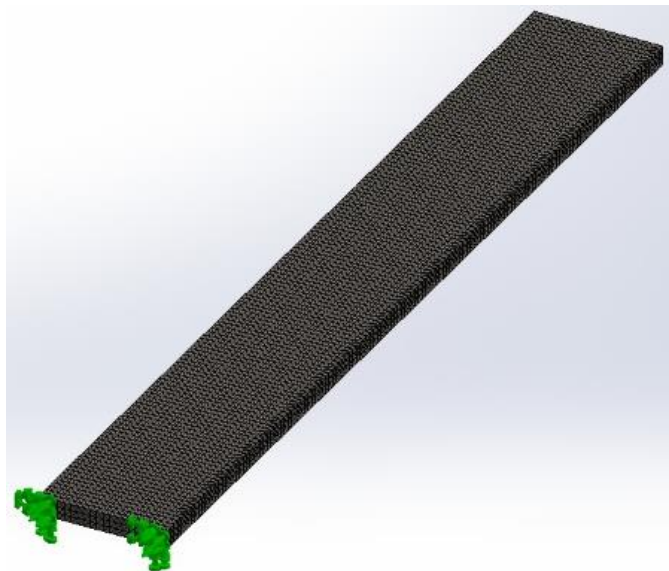
### **Figura 35**

*Viga bajo simulación numérica con malla gruesa*



**Figura 36**

*Viga bajo simulación numérica con malla fina*

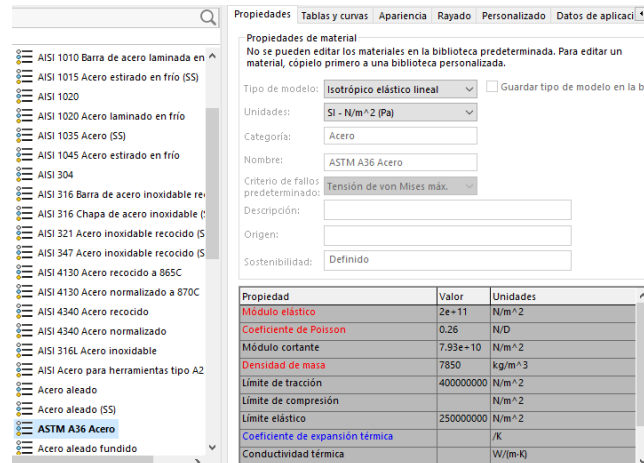


La simulación numérica debe tener un análisis de convergencia, porque los valores que arroja el programa pueden no ser confiables, cuanto más fina es la malla más confiable es el valor; para este trabajo de titulación se hizo un mallado fino y luego un mallado grueso en cada viga, los valores de frecuencia que se obtienen no presentan una diferencia grande, por lo que, los valores que se registran de frecuencias son realizados con un mallado recomendado por el programa, tal y como se puede observar en la Figura 38.

Para la simulación numérica se utiliza el software SolidWorks Premium 2021 SP0, en el ordenador TOSHIBA, Satellite con procesador INTEL(R) Core (TM) i3-3110M CPU @ 2.40 GHz y una memoria instalada (RAM) de 4.00 GB (3.90 GB utilizable) y un sistema operativo de 64 bits, procesador x64.

Figura 37

Propiedades mecánicas del acero ASTM A 36.

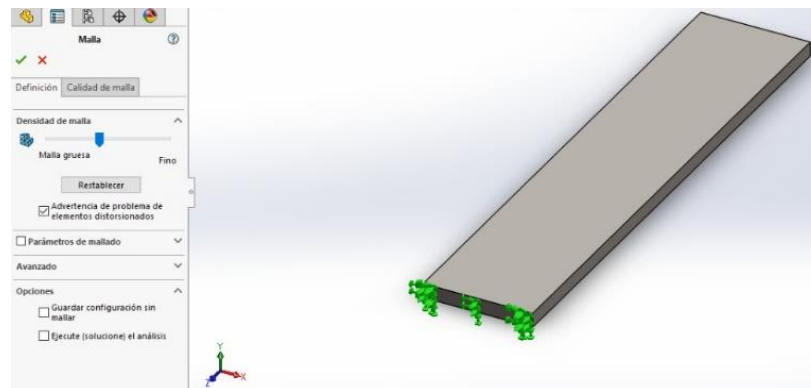


Nota. obtenido de SolidWorks Premium 2021 SP0.

El material utilizado en la simulación es un acero estructural ASTM A 36 cuyas propiedades mecánicas son las que se indican en la Figura 37.

Figura 38

Características para la simulación de vibraciones



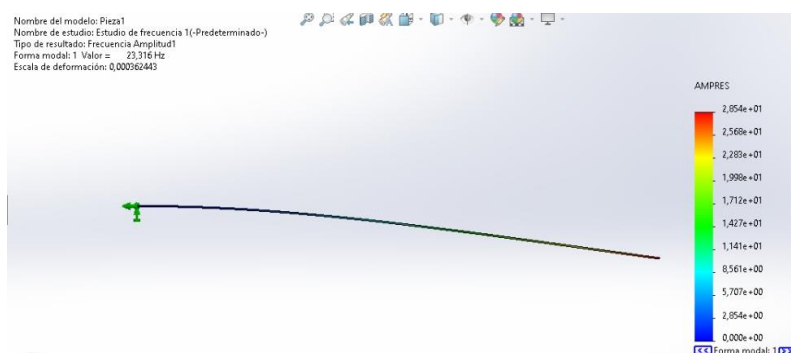
Nota. En la imagen se indican las condiciones de empotramiento en la cara lateral, y el tipo de mallado para la simulación.

### Simulación Equipo Rigidímetro

La simulación se realiza con las longitudes libres que se indican en la Tabla 7 y la Tabla 8 para cada modo de vibración, el espesor y ancho de cada probeta se indica en la Tabla 5.

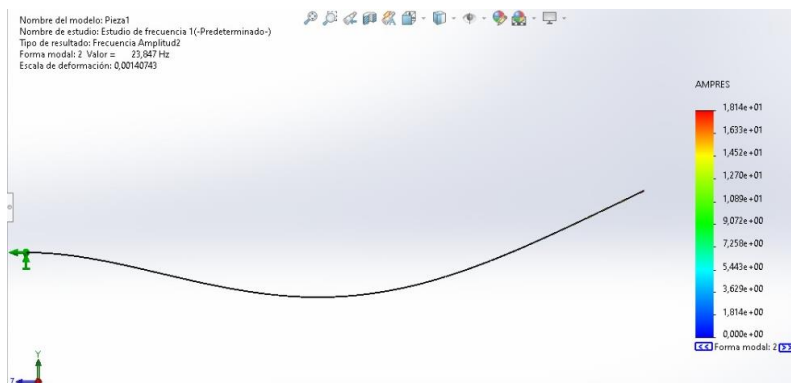
#### Figura 39

Simulación en el primer modo de vibración



#### Figura 40

Simulación en el segundo modo de vibración



Los resultados de frecuencia de cada simulación se indican en la parte superior izquierda de la Figura 39 y la Figura 40.

**Tabla 10**

*Frecuencias obtenidas por simulación para el primer y segundo modo de vibración*

<b>Viga</b>	<b>Frecuencia primer modo [Hz]</b>	<b>Frecuencia segundo modo [Hz]</b>
<b>L1</b>	23.316	23.847
<b>L2</b>	26.145	24.784
<b>L3</b>	21.852	24.85
<b>T4</b>	31.482	25.989
<b>T5</b>	23.339	23.705
<b>T6</b>	24.059	24.016
<b>L7</b>	29.984	30.962
<b>T8</b>	23.512	24.082

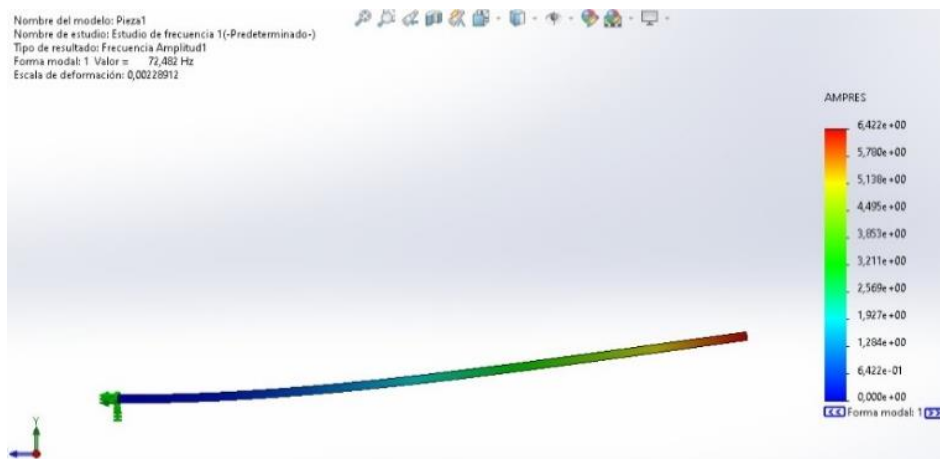
En la Tabla 10 las frecuencias que se obtuvieron en la simulación, deberían ser muy cercanas al valor de 25 [Hz] que es el valor de frecuencia con el que trabaja el Rigidímetro. Sin embargo, se pueden observar probetas como T4 en su primer modo y L7 en su primer y segundo modo que tienen valores muy alejados de 25 [Hz] que son las mismas probetas que tenían valores alejados del módulo de elasticidad para el ensayo en el Rigidímetro.

#### ***Simulación Equipo Módulo Dinámico de Elasticidad***

La simulación numérica en este caso se realiza con las dimensiones de las once probetas y con su respectiva longitud libre, que se indican en la Tabla 6 y la Tabla 9 respectivamente. Y sin considerar la masa del acelerómetro.

**Figura 41**

*Simulación de probetas del Equipo Módulo Dinámico de Elasticidad*



Los resultados de la frecuencia se indican en la parte superior izquierda de cada simulación, se puede observar en la Figura 41.

**Tabla 11**

*Frecuencias de la simulación del equipo Módulo Dinámico de Elasticidad*

Viga	Frecuencia [Hz]
1	113.31
2	154.65
3	72.482
4	20.034
5	27.217
6	13.591
7	4.6824
8	6.5616
9	3.1974
10	7.6329
11	7.6379

## Capítulo 4: Pruebas estáticas

### Cálculo, dimensiones y fabricación de la probeta

Para el diseño dimensional de la probeta que se someten al ensayo de tracción se debe considerar la amplitud máxima de las mordazas, y la fuerza máxima que se puede aplicar ya que el strain gage no debe romperse ni el material debe entrar a la zona de fluencia.

Se realizan dos probetas para el ensayo de tracción la primera probeta se utiliza de la misma platina que las probetas 1, 4 y 7, y la segunda probeta se corta de la misma plancha de la que se sacaron las probetas para los ensayos en el Rigidímetro.

La primera probeta tiene de espesor 2.72 mm y de ancho 19.42 mm, lo que da un área de la sección transversal 52.82 mm<sup>2</sup>.

La segunda probeta tiene 0.48 mm de espesor y 26.68 mm de ancho lo que da un área de la sección transversal de 12.81 mm<sup>2</sup>.

El strain gage que se coloca en cada probeta para el ensayo de tracción, es colocada un día antes del ensayo, ya que se debe poner brujita y se debe esperar un día para que se seque.

### Figura 42

*Colocación de strain gage en probeta para ensayo de tracción.*



Los ensayos estáticos de flexión se realizan con las mismas probetas que se utilizan para el equipo Módulo Dinámico de Elasticidad, para una distancia entre apoyos

de 360 mm se utilizan las probetas 7, 8 y 9; mientras que para una distancia entre apoyos de 240 mm se utilizan las probetas 1 y 3. Las dimensiones de estas probetas se indican en la Tabla 6.

### Ensayo estático de tracción

El ensayo estático de tracción se realiza en la máquina de ensayos universales, con ayuda de un equipo que se conecta a los strain gages para adquirir los datos de deformación unitaria.

Se toman tres valores de deformación unitaria para la primera probeta y se saca un promedio de cada una, la fuerza va aumentando de 100 en 100 kgf hasta llegar a 1000 kgf. La fuerza máxima que se puede aplicar en la probeta sin que entre en la zona de fluencia es calculado con una resistencia a la fluencia de 250 MPa y un factor de seguridad de 1.35.

**Tabla 12**

*Datos obtenidos del ensayo de tracción para la primera probeta*

Fuerza [kgf]	Fuerza [N]	Esfuerzo [MPa]	Deformación unitaria [*10-6]			
			1	2	3	Promedio
<b>100</b>	980,66	18,57	223	224	220	222,33
<b>200</b>	1961,32	37,13	362	370	365	365,67
<b>300</b>	2941,98	55,70	491	492	493	492,00
<b>400</b>	3922,64	74,26	609	608	611	609,33
<b>500</b>	4903,3	92,83	716	716	718	716,67
<b>600</b>	5883,96	111,39	819	821	822	820,67
<b>700</b>	6864,62	129,96	922	920	924	922,00
<b>800</b>	7845,28	148,52	1018	1022	1024	1021,33



<b>900</b>	8825,94	167,09	1117	1117	1121	1118,33
<b>1000</b>	9806,6	185,65	1214	1212	1217	1214,33

---

La segunda probeta al tener una sección transversal menor se le aplican varias fuerzas que van aumentando de 25 en 25 kgf hasta llegar a 250 kgf, para evitar que llegue a la zona de fluencia, la fuerza máxima que se aplica bajo un factor de seguridad es de 1.3 y se toma en cuenta a la resistencia a la fluencia como 250 MPa. Se toman dos deformaciones unitarias por cada fuerza y se saca un promedio.

**Tabla 13**

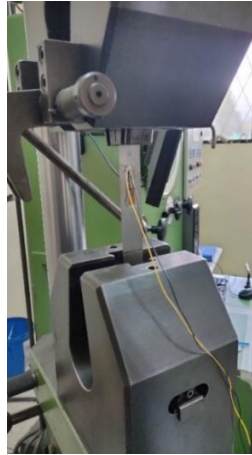
*Datos obtenidos del ensayo de tracción para la segunda probeta*

Fuerza [kgf]	Fuerza [N]	Esfuerzo [MPa]	Deformación unitaria [*10-6]		
			1	2	Promedio
<b>25</b>	245,17	19,14	147	144	145,50
<b>50</b>	490,33	38,29	264	264	264,00
<b>75</b>	735,50	57,43	370	369	369,50
<b>100</b>	980,66	76,58	481	480	480,50
<b>125</b>	1225,83	95,72	588	586	587,00
<b>150</b>	1470,99	114,86	692	692	692,00
<b>175</b>	1716,16	134,01	802	801	801,50
<b>200</b>	1961,32	153,15	909	909	909,00
<b>225</b>	2206,49	172,30	1028	1018	1023,00
<b>250</b>	2451,65	191,44	1136	1133	1134,50

---

**Figura 43**

*Sujeción de la probeta para el ensayo de tracción*



*Nota. En la figura se puede observar la sujeción de la probeta para el ensayo de tracción y además la conexión eléctrica de los strain gages.*

**Ensayo estático de flexión**

Para calcular la fuerza máxima que soporta cada viga se utiliza la Ecuación 21, la Ecuación 23, la Ecuación 29 y considerando que el momento máximo para una viga simplemente apoyada se genera en la mitad de la viga y es igual a

$M_{max} = \frac{FL}{4}$ , la ecuación que se obtiene es:

$$F_{max} = \frac{2S_y * wt^2}{3F.S.* L}$$

Donde L representa la longitud entre apoyos.

**Figura 44**

*Sujeción para ensayo de flexión*



*Nota. En la figura se puede observar la colocación de la viga simplemente apoyada, además del comparador de reloj para medir la deflexión y un medido de la fuerza.*

Si se considera un F.S. de 3 para cada una de las probetas la fuerza máxima que se puede aplicar se indica en la Tabla 14.

**Tabla 14**

*Carga máxima aplicada en vigas simplemente apoyadas*

<b>Viga</b>	<b>Fuerza máxima [N]</b>
<b>7</b>	25
<b>8</b>	75
<b>9</b>	28
<b>1</b>	38
<b>3</b>	40

En el ensayo de flexión el comparador de reloj se encera cuando se aplica el 25% de la fuerza y a partir de aquí, para el 50, 75 y 100% se toman los valores de deflexión y

fuerza. Finalmente, la fuerza que marca para cada deflexión se resta de la fuerza que se aplicó cuando se encera el comparador de reloj.

Para calcular el módulo de elasticidad se despeja de la Ecuación 23 y al reemplazar la inercia en función del ancho y el espesor se tiene la siguiente fórmula:

$$E = \frac{-FL^3}{4wt^3\delta}$$

**Tabla 15**

*Módulo de elasticidad para la probeta 7 mediante ensayo de flexión*

<b>F [N]</b>	<b>Deflexión [mm]</b>
4	0.58
10	1.56
17	2.53
<b>E1 [GPa]</b>	194.277
<b>E2 [GPa]</b>	180.578
<b>E3 [GPa]</b>	189.285

**Tabla 16**

*Módulo de elasticidad para la probeta 8 mediante ensayo de flexión*

<b>F [N]</b>	<b>Deflexión [mm]</b>
19	0.69
37	1.25
58	1.97
<b>E1 [GPa]</b>	182.529
<b>E2 [GPa]</b>	196.209
<b>E3 [GPa]</b>	195.159

**Tabla 17**

*Módulo de elasticidad para la probeta 9 mediante ensayo de flexión*

<b>F [N]</b>	<b>Deflexión [mm]</b>
6	1.09
14	2.41
20	3.65
<b>E1 [GPa]</b>	206.752
<b>E2 [GPa]</b>	163.644
<b>E3 [GPa]</b>	154.357

**Tabla 18**

*Módulo de elasticidad para la probeta 1 mediante ensayo de flexión*

<b>F [N]</b>	<b>Deflexión [mm]</b>
11	0.51
20	0.99
30	1.43
<b>E1 [GPa]</b>	177.703
<b>E2 [GPa]</b>	166.444
<b>E3 [GPa]</b>	172.845

**Tabla 19**

*Módulo de elasticidad para la probeta 3 mediante ensayo de flexión*

<b>F [N]</b>	<b>Deflexión [mm]</b>
11	0.64
21	1.28
32	1.90
<b>E1 [GPa]</b>	195.671
<b>E2 [GPa]</b>	186.777
<b>E3 [GPa]</b>	191.739

Los valores del módulo de elasticidad calculados por ensayos de flexión, tuvieron bastante aproximación al valor teórico, por lo que es válido para comparar con los otros ensayos. Sin embargo, en la probeta 9 se tiene un valor del módulo de elasticidad muy bajo, que puede deberse a que en el punto de apoyo para las dos primeras fuerzas que se indican en la Tabla 17 la viga no se encontraba bien apoyada ya que presentaba una deformación angular con respecto a su eje axial (torcedura) de 7°. Esta deformación se produjo cuando se cortó la probeta de la plancha.

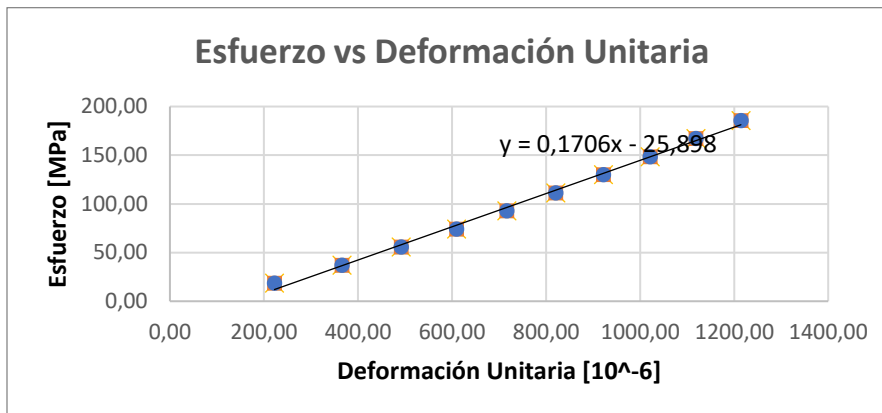
### **Obtención de resultados**

#### ***Ensayo estático de tracción***

Al graficar el esfuerzo vs la deformación unitaria y generar una línea de tendencia, la pendiente de esa línea representa el módulo de elasticidad, en la Figura 45 y la Figura 46 se indican los valores obtenidos.

**Figura 45**

Gráfica esfuerzo vs deformación unitaria, primera probeta.

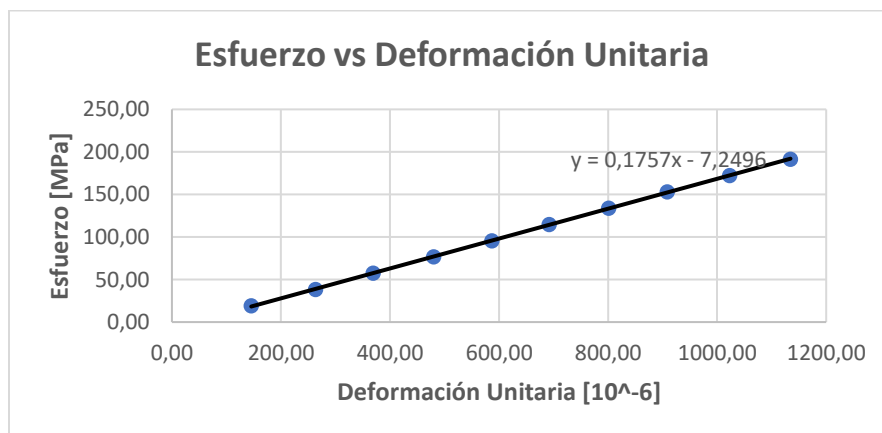


Nota. Gráfica realizada en Excel.

El módulo de elasticidad obtenido para la primera probeta es de 170.62 GPa.

**Figura 46**

Gráfica esfuerzo vs deformación unitaria, segunda probeta



Nota. Gráfica realizada en Excel.

El módulo de elasticidad obtenido para la segunda probeta es de 175.67 GPa.

### ***Ensayo estático de flexión***

Del ensayo se obtienen tres valores de deflexión y de fuerza y, por ende, se tienen tres valores de módulo de elasticidad, se saca un promedio de estos valores y se tienen los siguientes resultados para cada probeta.

El módulo de elasticidad para la probeta 1 es 172.33 GPa.

El módulo de elasticidad para la probeta 3 es 191.40 GPa.

El módulo de elasticidad para la probeta 7 es 188.05 GPa.

El módulo de elasticidad para la probeta 8 es 191.30 GPa.

El módulo de elasticidad para la probeta 9 es 174.92 GPa.

La diferencia que existe entre el primer valor del módulo de elasticidad de la probeta 9 y el resto de valores se debe a que esta probeta se encontraba un poco torcida con respecto a su eje axial.

### **Capítulo 5: Análisis de resultados**

Los resultados de los ensayos estáticos realizados en varias probetas poseen valores que van desde 170.6 hasta 191.4 GPa teniendo una media de 181 GPa. La mayoría de fabricantes de este acero indican que el valor nominal del módulo de elasticidad es de 200 GPa. Así que valores que oscilen entre 171 y 200 GPa se consideran como referencia del módulo de elasticidad para este acero. El rango que se considera como un valor referencial del módulo de elasticidad en realidad se lo hace por la geometría de la sección transversal que tiene la probeta, en algunos casos no es exactamente rectangular, tenía biseles en los bordes, por tal motivo el área o inercia que se determina no es un valor totalmente real.

En el ensayo de vibraciones en el Rigidímetro, el módulo de elasticidad varía desde 131.15 hasta 269.75 GPa con una media de 200.45 GPa, sin embargo, aquí se debe considerar la esbeltez, se puede afirmar que entre mayor sea la esbeltez de una viga, la Teoría de Euler - Bernoulli es aplicable, ya que se considera como viga delgada. Para el caso de estos ensayos la esbeltez de las probetas va desde 1000 hasta 3525.

**Tabla 20**

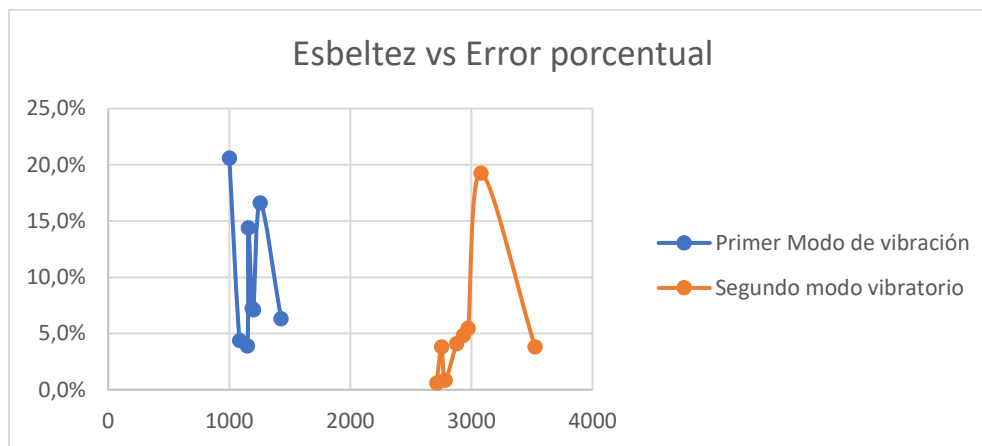
*Errores de las frecuencias obtenidas mediante simulación y la frecuencia del Rigidímetro*

<b>Viga</b>	<b>Esbeltez</b>	<b>Error porcentual [%]</b>	<b>Esbeltez</b>	<b>Error porcentual [%]</b>
<b>L1</b>	1188	7.22	2932	4.83
<b>L2</b>	1085	4.38	2782	0.87
<b>L3</b>	1157	14.41	2713	0.6
<b>T4</b>	1000	20.59	2752	3.81
<b>T5</b>	1200	7.12	2973	5.46
<b>T6</b>	1150	3.91	2877	4.10
<b>L7</b>	1256	16.62	3079	19.26
<b>T8</b>	1427	6.31	3525	3.81



**Figura 47**

*Gráfica de esbeltez vs error porcentual de la simulación del ensayo Rigidímetro*



*Nota. Gráfica realizada en Excel.*

Mediante la simulación numérica se obtuvieron distintos valores de frecuencias, que oscilan alrededor de 25 Hz, lo que indica una concatenación con los ensayos. En la Tabla 20 se indican los errores porcentuales entre la frecuencia de 25 Hz que es la frecuencia del Rigidímetro y las frecuencias encontradas mediante la simulación, y además la esbeltez para cada viga. En este caso se observa un comportamiento un poco errático entre esbeltez y error porcentual, sin embargo, el error no supera el 20,59%. Existen muchas causas para que se presenten estos errores y una de las principales es que el acero ASTM A 36 con el que se hizo la simulación tiene un módulo de elasticidad de 200 GPa, mientras que mediante el ensayo de tracción y de flexión, el módulo de elasticidad para este acero es de 162,9 GPa, otra causa que puede provocar errores en este ensayo es el proceso de rectificado que hizo que los bordes de algunas probetas se quemaran y esto hace que varíe un su estructura cristalina; y finalmente, la causa que también puede provocar este tipo de error es una falla en la toma de las medidas de espesor, ancho y/o longitud.

En el ensayo de vibraciones realizado en el equipo Módulo Dinámico de Elasticidad se tienen esbelteces que van desde 128 hasta 1270, y los valores de módulos de elasticidad poseen valores que van desde 32.83 hasta 199.27 GPa.

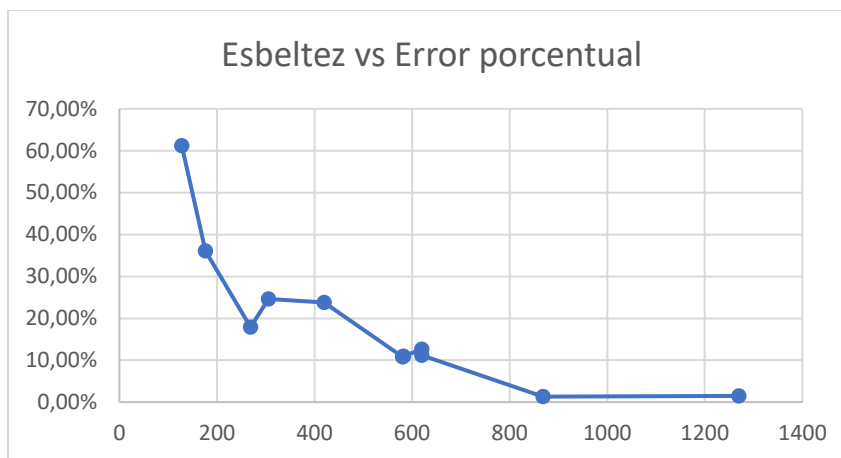
**Tabla 21**

*Esbeltez y error porcentual entre frecuencia obtenida por ensayo y por simulación*

<b>Viga</b>	<b>Esbeltez</b>	<b>Error porcentual [%]</b>
<b>1</b>	177	36.12
<b>2</b>	128	61.20
<b>3</b>	269	17.93
<b>4</b>	420	23.80
<b>5</b>	306	24.59
<b>6</b>	620	12.65
<b>7</b>	869	1.31
<b>8</b>	620	11.19
<b>9</b>	1270	1.51
<b>10</b>	581	10.83
<b>11</b>	582	10.93

**Figura 48**

*Gráfica de esbeltez vs error porcentual de la simulación del ensayo Módulo Dinámico de Elasticidad*



*Nota. Gráfica realizada en Excel.*

En la Tabla 21 se indica el error porcentual entre la frecuencia obtenida mediante el ensayo en el Equipo Módulo Dinámico de Elasticidad y la frecuencia obtenida mediante simulación numérica, tiene una relación inversamente proporcional con la esbeltez, ya que se puede observar en la Figura 48 que cuando esta aumenta el error porcentual disminuye, lo que confirma que la Teoría de Euler-Bernoulli es aplicable cuando se tiene una esbeltez mayor que 869 en este ensayo y para este material.

## **Capítulo 6: Conclusiones y recomendaciones**

### **Conclusiones**

Mediante varios ensayos estáticos, dinámicos y por simulación se concluye que la hipótesis planteada inicialmente, fue verdadera, el módulo de elasticidad calculado mediante ensayos estáticos y dinámicos es el mismo, su rango se encuentra entre 170 y 220 GPa; esta variación se produce por condiciones propias del ensayo, las dimensiones y geometría de la probeta.

La teoría de Euler - Bernoulli es aplicable únicamente cuando la viga es delgada o cuando la frecuencia es baja, para considerar este parámetro es útil calcular la esbeltez, para el caso del acero ASTM A 36 se considera una esbeltez mayor o igual que 869 como la adecuada para aplicar esta teoría. Ya que en la Figura 48 se puede observar que a partir de este valor el error porcentual se mantiene constante.

El ensayo estático de tracción es la forma más adecuada de calcular el módulo de elasticidad ya que permite obtener valores más reales de fuerza y deformación unitaria, gracias al strain gage y los datos digitales que indica. Mientras que los otros ensayos dependen de muchos factores como la sujeción adecuada en el empotramiento, la sujeción del acelerómetro, observación adecuada de la viga en resonancia, medición de la longitud entre apoyos, entre otros.

Al realizar el ensayo de vibraciones en el Rigidímetro se concluye que el acero que se utilizó es isotrópico ya que posee las mismas propiedades mecánicas en todos los sentidos; esto se comprobó gracias a los cortes que se hicieron en la plancha y al analizar los valores de módulo de elasticidad tanto las probetas que fueron cortadas transversalmente como las probetas que fueron cortadas longitudinalmente presentan valores cercanos.

El ensayo dinámico de vibraciones en el equipo Rigidímetro y en el equipo Módulo Dinámico de Elasticidad se consideran ensayos no destructivos, siempre y cuando se sigan los parámetros indicados anteriormente; y los ensayos estáticos de tracción y de flexión también se consideran ensayos no destructivos porque se realizan con fuerzas, velocidades bajas y sin sobrepasar la resistencia a la fluencia del material.

## Recomendaciones

En el equipo Módulo Dinámico de Elasticidad (MOE) se recomienda sujetar de la forma más segura la viga en el empotramiento y de igual manera, el acelerómetro a la viga, ya que se podrían tomar datos erróneos.

En el equipo Rigidímetro se debe encender durante dos minutos para que la frecuencia se estabilice y después realizar los ensayos, también se debe observar adecuadamente cuando la viga entra en resonancia, ya que es un parámetro difícil de especificar con exactitud.

En el Rigidímetro se debe tomar en cuenta que el empotramiento deslizable se encuentre con un poco de aceite, esto evitará el desgaste prematuro del empotramiento y facilitará el deslizamiento de la viga.

Se recomienda realizar ensayos de vibraciones en otros materiales, calcular la frecuencia y analizar bajo qué esbelteces es aplicable la Teoría de Euler - Bernoulli para ese material.

La sujeción en el empotramiento consta de nueve pernos y dos trozos de madera que sirven para sujetar la viga, se recomienda utilizar una plancha de acero delgada para colocarla en la punta de los pernos, de esta forma los pernos no harán contacto directo con la madera y se evitará el daño, perforación o desgaste de la misma.

Se recomienda realizar un análisis experimental sobre el segundo modo de vibración para encontrar el rango de esbelteces que en el que la teoría de Euler - Bernoulli es aplicable.

Para los ensayos dinámicos de vibraciones se recomienda realizar probetas con buen acabado superficial, ya que al estar en vibraciones transversales estas vigas se

encuentran en fatiga y si tiene alguna grieta y fisura, ésta podría crecer y dañar el material. Además, se recomienda realizar estos ensayos durante poco tiempo, y no realizar muchos ensayos en la misma probeta, ya que igualmente por fatiga, se sabe que tienen limitados ciclos de vida.

Siempre que se realice cualquier tipo de ensayos se recomienda analizar la teoría matemática y física que la respalda, ya que es importante saber todas las consideraciones que se realizan en el modelo físico y matemático para que en el ensayo se pueda tomar en cuenta o despreciar lo mismo que en la teoría.

Cuando se realicen vigas o probetas muy delgadas en la rectificadora, se recomienda hacer pases con profundidades muy bajas para evitar que la probeta se quemee.

Las medidas de las dimensiones que se tomen en las probetas dependen mucho del acabado superficial de las mismas, es por eso que, se debe limar los bordes cuando quedan rebabas provocadas por el corte de las platinas, de esta forma al tomar las medidas se tienen valores más exactos.

### **Bibliografía**

Almeida , F., & Martínez, M. (2017). Caracterización dinámica de la Madera de Balsa de Ecuador. *Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE*, 157.

Arosemena, A. (s.f.). *Vibración de sistemas continuos*. Obtenido de [https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjS\\_sfA-rzuAhUx2FkKHQcxCpwQFjABegQIAhAC&url=https%3A%2F%2Fwww.academia](https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjS_sfA-rzuAhUx2FkKHQcxCpwQFjABegQIAhAC&url=https%3A%2F%2Fwww.academia)

.utp.ac.pa%2Fsites%2Fdefault%2Ffiles%2Fdocente%2F72%2Fclase\_9\_vibracion\_de\_sistemas\_continuos.pdf

ASTM E 1876-01. (2005). Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Impulse Excitation of Vibration. En ASTM, *ASTM*.

ASTM E 370. (2019). Standar Test Methods and Definitions for Mechanical Testing of Steel Products. En ASTM, *ASMT A370* (pág. 50).

Avellán Martín, A. M. (Junio de 2017). *Frecuencias Propias de Vibración de Vigas Mediante Cuatro Modelos Unidimensionales*. Obtenido de Universidad Carlos III de Madrid: <https://e-archivo.uc3m.es/handle/10016/31362>

Gere, J. M. (2009). *Mecánica de Materiales* (Séptima ed.). México, México: Cengage Learning.

Hibeler, R. C. (2006). *Mecánica de Materiales* (Sexta ed.). México, México: PEARSON Prentice Hall.

López, C., & Ortuño, F. (2019). Diseño de un equipo para la caracterización del módulo de elasticidad en diversos materiales ortotrópicos. *Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE*, 78. Obtenido de Repositorios ESPE.

Material Mundial. (22 de Noviembre de 2021). *Grados Material Mundial*. Obtenido de Acero ASTM A 36, Acero A 36 Propiedades, Ficha Técnica, Dureza, Densidad Estructural PDF: <https://www.materialmundial.com/acero-astm-a36-propiedades-ficha-tecnica-estructural/>

Pérez, N. (3 de Abril de 1995). *UNIOVI*. Obtenido de La Transformada Fourier: <https://www6.uniovi.es/vision/intro/node19.html>

Rao, S. S. (2012). *Vibraciones Mecánicas* (Quinta ed.). (L. M. Castillo, Ed.) México, México: PEARSON EDUCACIÓN.

Vitale, G. C. (2018). Análisis dinámico experimental y numérico de pórticos metálicos a escala reducida. *Universidad Politécnica de Catalunya - Ingeniería Civil y Ambiental*, 116.