

**ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO**

**DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y  
ELECTRÓNICA**

**CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**PROYECTO DE GRADO PARA LA OBTENCIÓN  
DEL TÍTULO EN INGENIERÍA**

**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN  
CONTROLADOR ROBUSTO PARA EL MÓDULO  
EXPERIMENTAL DE CONTROL DE  
TEMPERATURA DE UN FLUJO DE AIRE PCT-2.**

**HENRY SANTIAGO MINIGUANO MINIGUANO**

**SANGOLQUÍ – ECUADOR**

**2008**

## CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente proyecto de grado: **“Diseño e implementación de un controlador robusto para el módulo experimental de control de temperatura de un flujo de aire PCT- 2”**, fue desarrollado en su totalidad por el señor Henry Santiago Miniguano Miniguano, bajo nuestra dirección.

Atentamente,

---

Ing. Víctor Proaño

**DIRECTOR**

---

Ing. Rodolfo Gordillo

**CODIRECTOR**

## **AGRADECIMIENTO**

A Dios por ser esa fuerza desconocida y misteriosa.

A mis padres, Polivio y Eloisa, por haberme mostrado como has sido unos verdaderos guerreros de la vida, con sus tan necesarios consejos de amor, honradez y perseverancia en la vida.

A mis hermanos por ayudarme en los momentos difíciles en los que caemos y necesitamos de alguien que nos de aliento durante mi carrera.

A todos los amigos que han sido inspiración que podemos llegar lejos venciendo temores y mostrarme lo bueno y lo malo de la vida; siendo necesario experimentar para entender.

Al Director y Codirector de este proyecto de grado que, con apertura y disposición, brindaron sus conocimientos y guía para concretar mis ideas.

## **DEDICATORIA**

*A mis padres, Polivio y Eloisa.*

## PRÓLOGO

El presente proyecto “DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR ROBUSTO PARA EL MODULO EXPERIMENTAL DE CONTROL DE TEMPERATURA DE UN FLUJO DE AIRE PCT-2”, es un aporte más a la teoría de diseño de sistemas de control dentro del campo de la automatización y robótica.

Un sistema de control robusto exhibe un comportamiento deseado a pesar de la presencia de incertidumbres significativas en la planta (proceso). La teoría de control robusto incorpora explícitamente la incertidumbre al modelado, el análisis y la síntesis de sistemas de control, esto es; intenta analizar y diseñar el controlador sin tener un modelo matemático preciso de la planta, obteniendo resultados que no solo sean válidos para el modelo aproximado, sino que lo sea para un rango de modelos de la planta dados y en consecuencia para el proceso real.

El diseño de sistemas de control de gran precisión en presencia de incertidumbres significativas requiere que se busque un sistema robusto, ya que muchas de las metodologías recientes de diseño de control consideran el hecho de que los sistemas físicos y el entorno externo en el cual operan no se puedan modelar de manera precisa, pueden cambiar de manera no predecible, y pueden estar sujetos a perturbaciones significativas. Por lo general, mientras más exactitud se desea de un modelo, más complejidad matemática tendrá este.

En el presente proyecto se sintetiza por un lado el diseño de controladores robustos y por otro el procesamiento real de señales. Pienso que el enfoque más importante y productivo para aprender es que cada uno redescubra y recree de nuevo las respuestas y métodos del pasado. Así pues, el ideal es llevar a cabo lo

diseñado, mostrándose en una aplicación real para llegar a conclusiones de lo simulado y lo real.

## **ESTRUCTURA DEL PROYECTO**

En el **Capítulo 2** se desarrolla brevemente los conceptos de norma de una señal y sistema, así como los diferentes tipos de incertidumbres considerando al retardo de tiempo como una incertidumbre multiplicativa; finalizando con la introducción de problemas de optimización convexa utilizando desigualdades lineales matriciales LMIs considerando el criterio de estabilidad de Lyapunov.

El **Capítulo 3** está dedicado al modelado matemático de la planta física del módulo PCT-2 para diferentes condiciones de ingreso de aire y se expone el método de identificación mediante filtros digitales auto regresivos (ARX) con la herramienta *ident* de Matlab.

El **Capítulo 4** expone todos los conceptos de diseño de controladores robustos mediante la técnica de loop-shaping y las funciones necesarias como *hinflmi* para la síntesis del mismo.

En el **Capítulo 5** se desarrolla la implementación del controlador, con una descripción del emulador HIL con las funcionalidades e interfaz con Matlab. Adicionalmente se indica los aspectos relevantes a la adquisición de datos: especificaciones y determinación de la frecuencia de muestreo, filtros antialiasing y otros parámetros.

El **Capítulo 6** explica las pruebas al sistema y expone los resultados obtenidos.

El **Capítulo 7** contiene las conclusiones y recomendaciones referentes al presente proyecto.

En **Anexos** se incluye el código de desarrollo del controlador robusto con Matlab y las instrucciones en el PLC Modicon para el controlador PID.

# ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1 .....	1
INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 ANTECEDENTES .....	1
1.2 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA .....	2
1.3 ALCANCE DEL PROYECTO .....	3
1.4 OBJETIVOS .....	3
1.4.1. <i>Objetivo General</i> .....	3
1.4.2. <i>Objetivos Específicos</i> .....	3
CAPÍTULO 2 .....	4
TEORÍA DE CONTROL ROBUSTO Y HERRAMIENTAS DE DISEÑO .....	4
2.1 NORMAS DE SEÑALES .....	4
2.1.1 <i>Norma <math>H_2</math> de una señal</i> .....	5
2.1.2 <i>Norma <math>H_\infty</math> de una señal</i> .....	5
2.2 NORMAS DE SISTEMAS .....	6
2.2.1 <i>Norma <math>H_2</math> de un sistema</i> .....	7
2.2.2 <i>Norma <math>H_\infty</math> de un sistema</i> .....	8
2.3 MODELAMIENTO DE INCERTIDUMBRES .....	10
2.3.1 <i>Introducción</i> .....	10
2.3.2 <i>Incertidumbres paramétricas</i> .....	10
2.3.3 <i>Incertidumbres dinámicas</i> .....	12
2.4 RETARDO DE TIEMPO .....	17
2.4.1 <i>Generalidades</i> .....	17
2.4.2 <i>Aproximación de funciones con retardo mediante funciones racionales</i> .....	19
2.4.3 <i>Retardo del tiempo como incertidumbre aditiva y multiplicativa</i> .....	20
2.5 OPTIMIZACIÓN CONVEXA .....	23
2.5.1 <i>Generalidades</i> .....	23
2.5.2 <i>Conjuntos convexos</i> .....	24
2.5.3 <i>Función convexa</i> .....	25
2.5.4 <i>Propiedades de los conjuntos convexos</i> .....	25
2.5.5 <i>Formulación de problemas de optimización convexa</i> .....	26
2.6 DESIGUALDADES LINEALES MATRICIALES .....	27
2.6.1 <i>Introducción</i> .....	27
2.6.2 <i>Definición de LMIs</i> .....	28
2.6.3 <i>Sistemas de LMIs</i> .....	29
2.6.4 <i>Formulación de problemas con LMIs</i> .....	32
2.7 ESTABILIDAD DE LYAPUNOV .....	34
2.7.1 <i>Funciones de Lyapunov</i> .....	37
2.7.2 <i>Ecuación de Lyapunov</i> .....	41
2.7.3 <i>Estabilidad Cuadrática</i> .....	42
2.8 BOUNDED REAL LEMMA .....	42
2.8.1 <i>Generalidades</i> .....	42
2.8.2 <i>Modelado del Bounded Real Lemma</i> .....	43
2.8.3 <i>Aplicaciones del Bounded Real Lemma</i> .....	45
CAPÍTULO 3 .....	47
MODELO DEL MÓDULO PCT-2 (MÓDULO DE CONTROL DE TEMPERATURA DE FLUJO DE AIRE) .....	47
3.1 MEDICIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LA PLANTA .....	47
3.1.1 <i>Introducción</i> .....	47
3.1.2 <i>Conexiones básicas</i> .....	48
3.2 MEDICIÓN DE RETARDO DE TIEMPO PARA DIFERENTES CONDICIONES DE INGRESO DE AIRE .....	51

3.2.1 Obtención de la función de transferencia de la planta con Matlab.....	51
3.2.2 Selección de condiciones.....	56
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>58</b>
<b>DISEÑO Y SIMULACIÓN DEL CONTROLADOR USANDO LA TÉCNICA DE LOOP-SHAPING 58</b>	
4.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....	58
4.1.1 Descripción General y especificaciones.....	58
4.2 HERRAMIENTAS DE DESARROLLO.....	67
4.2.1 Función <i>ltisys</i> .....	68
4.2.2 Función <i>ltidf</i> .....	69
4.2.3 Función <i>sconnect</i> .....	70
4.2.4 Función <i>smult</i> .....	72
4.2.5 Función <i>sdiag</i> .....	73
4.2.6 Función <i>hinflmi</i> .....	74
4.2.7 Función <i>slft</i> .....	75
4.2.8 Función <i>sinfo</i> .....	77
4.2.9 Función <i>ssub</i> .....	78
4.2.10 Función <i>pade</i> .....	79
4.2.11 Función <i>sloop</i> .....	79
4.2.12 Función <i>splot</i> .....	80
4.3 TRADUCCIÓN DE ESPECIFICACIONES DE DESEMPEÑO AL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.....	82
4.3.1 Especificaciones para la Formación de Filtros.....	84
4.3.2 Especificación de la Estructura de Control.....	85
4.3.3 Síntesis y Validación del Controlador.....	86
4.4 SIMPLIFICACIÓN DEL CONTROLADOR ROBUSTO A PID.....	92
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>98</b>
<b>IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROLADOR.....</b>	<b>98</b>
5.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SISTEMA A IMPLEMENTARSE.....	98
5.2 DESCRIPCIÓN DEL EMULADOR DE PLANTAS ANALÓGICAS SISO.....	99
5.2.1 Introducción.....	99
5.2.2 Componentes del hardware y software del emulador SISO.....	101
5.3 ACONDICIONAMIENTO DE SEÑALES.....	105
5.4 PRUEBAS AL SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS.....	107
5.4.1 Ruido.....	107
5.4.2 Linealidad.....	107
5.4.3 Filtros antialiasing.....	108
<b>CAPÍTULO 6.....</b>	<b>109</b>
<b>PRUEBAS Y RESULTADOS.....</b>	<b>109</b>
6.1 DESCRIPCIÓN DEL CAPÍTULO.....	109
6.2 PRUEBAS DE CONTROL DE TEMPERATURA.....	109
6.2.1 Controlador mediante técnica de <i>loopshaping</i> .....	109
6.2.2 Controlador clásico mediante PID.....	114
6.3 RESULTADOS.....	117
6.3.1 Control Robusto.....	117
6.3.2 Control PID.....	117
<b>CAPÍTULO 7.....</b>	<b>118</b>
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>118</b>
7.1 CONCLUSIONES.....	118
7.1.1 Conclusiones sobre simulación.....	118
7.1.2 Conclusiones sobre el hardware.....	119
7.1.3 Conclusiones sobre el software.....	119
7.2 RECOMENDACIONES.....	120
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>121</b>

<b>ANEXOS .....</b>	<b>123</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS.....</b>	<b>135</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS .....</b>	<b>138</b>

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN**

### **1.1 ANTECEDENTES**

En la actualidad, al hablar de controladores para procesos automáticos y de control; encontramos que existe una necesidad de disponer de técnicas fiables que permitan la operación del proceso con gran eficiencia y alto grado de flexibilidad.

En la carrera de Automatización y Control, en el desarrollo del currículo académico, se experimenta con controladores típicos como las redes de adelanto, atraso y los controladores PID. Esto permite que los estudiantes relacionen los conceptos teóricos del control clásico. Sin embargo, en estos experimentos no se alcanza a analizar métodos que permiten resolver problemas más complejos de la teoría de control como son aquellos que incorporan las no linealidades, ruido y la incertidumbre del modelamiento de los procesos. Estos elementos que complican el análisis y diseño de los sistemas de control son el objeto de la teoría del control robusto.

El diseño de controladores robustos representa un cambio de filosofía respecto al control clásico en el cual se busca obtener soluciones analíticas que son aplicables únicamente cuando el modelo de los procesos se simplifica. En el control robusto se considera el efecto que produce en las señales de salida la presencia de ruido, perturbaciones externas y adicionalmente el efecto de la incertidumbre que es inherente a todo modelo de un proceso.

En los últimos años, en la Escuela Politécnica del Ejército se han realizado algunos proyectos de grado referentes al diseño de controladores robustos. Sin embargo, todos los proyectos elaborados en este campo han consistido de simulaciones matemáticas de los controladores que actúan sobre el modelo matemático de la planta. En el presente proyecto se implementará el controlador mediante un dispositivo físico actuando sobre una planta real.

Este proyecto será una continuación del proyecto realizado por el señor José David Santana quien realizó un prototipo de “Diseño e implementación de un emulador de plantas SISO analógicas” que permite emular funciones de transferencia. En este proyecto, el emulador de plantas incorporará la función de transferencia del Controlador robusto. La planta sobre la que se realizará el diseño será un sistema de flujo de aire. La variable de salida del proceso es la temperatura.

## **1.2 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA**

La principal motivación para el desarrollo de este proyecto es verificar en una aplicación práctica la mejora de desempeño que se puede obtener al utilizar un controlador robusto en comparación al desempeño que se obtiene mediante un controlador clásico.

El desarrollo de una aplicación práctica permitirá demostrar en forma tangible los resultados del diseño. Específicamente se determinará la mejora en la robustez del lazo de control y la mejora en desempeño de seguimiento de una señal de referencia. La implantación del controlador robusto permitirá relacionar los conceptos involucrados en la teoría de control robusto con los parámetros físicos presentes en el modelo matemático de los procesos.

Se demostrará la factibilidad que existe actualmente de implantar controladores complejos gracias a la presencia en el mercado de elementos electrónicos integrados de grandes prestaciones como son los procesadores digitales de señales.

### **1.3 ALCANCE DEL PROYECTO**

Se modelará la planta considerando el retardo de transporte presente como la incertidumbre del proceso.

Se realizará el diseño del controlador robusto utilizando las herramientas de diseño de controladores robustos. Se aplicará la técnica de Loopshaping para el diseño de tal manera de incorporar especificaciones de robustez y rechazo a perturbaciones en el dominio de la frecuencia.

Se implementará el controlador y se construirá los interfaces de acondicionamiento que permitan la funcionalidad del lazo de control. Se realizará comparaciones con resultados de proyectos anteriores respecto a la planta de control de temperatura.

### **1.4 OBJETIVOS**

#### **1.4.1. Objetivo General**

Diseñar e implementar un controlador robusto para el control de temperatura del flujo de aire.

#### **1.4.2. Objetivos Específicos**

- Elaborar dispositivos tangibles de aplicación de técnicas del control robusto.
- Modelar incertidumbres dinámicas
- Verificar la relación teoría-práctica y cuantificar las diferencias de resultados de la simulación con la implementación práctica del sistema.
- Efectuar las respectivas pruebas del Sistema.

## CAPÍTULO 2

# TEORÍA DE CONTROL ROBUSTO Y HERRAMIENTAS DE DISEÑO

### 2.1 NORMAS DE SEÑALES

Para el análisis y diseño de sistemas de control necesitamos introducir algunos conceptos importantes del álgebra lineal que nos ayudará en su momento a tener un lenguaje adecuado. Advertimos, sin embargo, que los tópicos que aquí trataremos no serán tratados en forma exhaustiva, pues el objetivo es solamente dejar asentado un material de repaso y/o referencia, pues muchos de estos temas se tratan de modo más profundo en algunos textos de algebra lineal.

Una forma de describir el desempeño de un sistema de control es en términos del tamaño de ciertas señales de interés, donde algunas magnitudes físicas (voltaje, corriente, temperatura, presión) dependen del tiempo y pueden ser interpretadas como funciones de tiempo, entonces introducimos un espacio vectorial  $U$  de señales continuas en el tiempo  $[0, +\infty)$  en  $\mathfrak{R}$ ; con las propiedades de suma y producto por un escalar como sigue:

No nulidad  $\|u\| \geq 0$ , donde  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0, \forall t$

Homogeneidad  $\|au\| = |a| \|u\|, \forall a \in \mathfrak{R}$

Desigualdad triangular  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in U$ .

De donde se define las dos normas o espacios normados  $\|\cdot\|$  sobre un espacio vectorial  $U$  para el vector  $u$  más utilizadas son la norma 2 e  $\infty$ .

### 2.1.1 Norma $H_2$ de una señal

La raíz cuadrada de la energía total o norma  $\|u\|_2$  de una señal  $u$  es definida por

$$\text{Norma } 2 \quad \|u\|_2 := \left( \int_0^\infty u^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \|u\|_2^2 \text{ es la energía total de la señal}$$

Por ejemplo suponga que  $u(t)$  es la corriente a través de una resistencia de  $1\Omega$ , entonces la potencia instantánea es igual a  $u(t)^2$  y energía total es igual a la integral de esta denotada por  $\|u\|_2^2$ . [1]

### 2.1.2 Norma $H_\infty$ de una señal

Una interpretación simple pero estricta de “la señal  $u$  es pequeña” es que es pequeña en todo el tiempo, o equivalentemente, su valor absoluto del máximo o pico es pequeño, definiendo la norma infinita como

$$\text{Norma } \infty \quad \|u\|_\infty := \sup_{t \geq 0} |u(t)| \quad ; \text{ pico o máxima amplitud de la señal}$$

La norma infinita de una señal es útil especificando un límite estricto en el valor absoluto de una señal (*Figura 2.1*), por ejemplo, la corriente de salida de un amplificador de potencia, o el error de seguimiento en una unidad de disco del sistema de posicionamiento del cabezal. La norma máxima es útil en una señal sobre la cual muy poco se conoce y determina el límite de su valor pico en el peor de los casos.

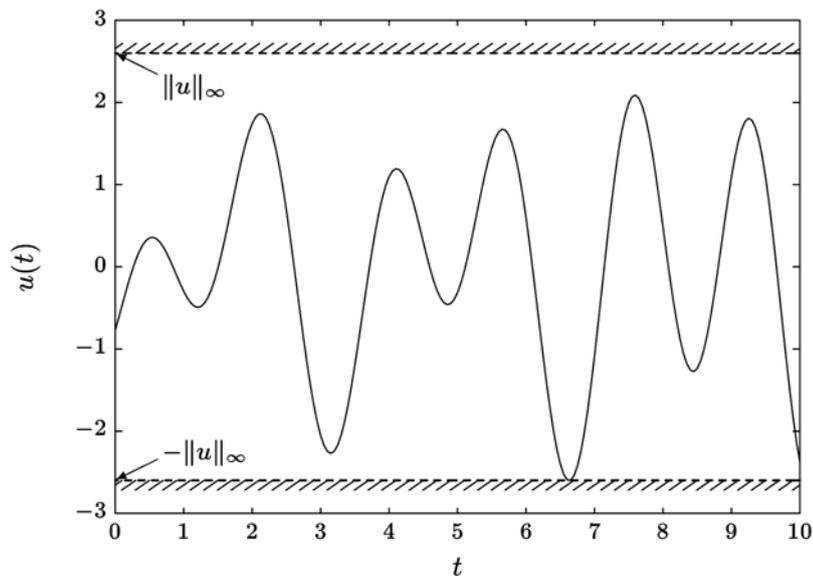


Figura. 2.1. Norma  $\|u\|_\infty$  de la señal  $u(t)$

## 2.2 NORMAS DE SISTEMAS

Un sistema es un conjunto de señales, donde es descompuesto en dos grupos independientes que son las señales de entrada y salida; donde una función de transferencia representa la relación entre estas señales de un sistema físico considerando que el sistema que es lineal, invariante en el tiempo, causal y dimensionalmente finito. La magnitud del sistema (*Figura 2.2*); puede ser calculada a través de su norma.

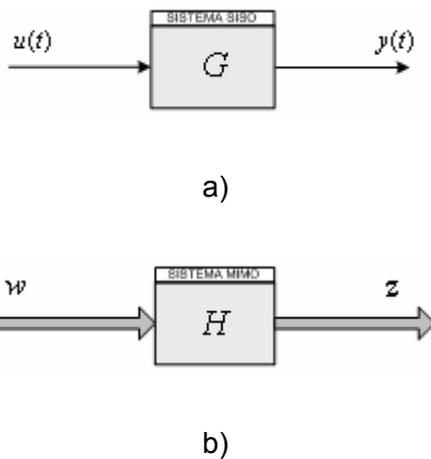


Figura. 2.2. Sistema a) SISO y b) MIMO

### 2.2.1 Norma $H_2$ de un sistema

La norma  $H_2$  de un sistema SISO mide el valor efectivo rms (root-mean-square) de la respuesta de la salida del sistema cuando a la entrada se aplica ruido blanco, en la componente de la señal de entrada; es definida como

$$\|G(s)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

que también se aplica para un sistema MIMO; matemáticamente es

$$\|H(s)\|_2 = \left( \text{Tr} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)H(j\omega)^* d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

que puede ser expresada en términos de sus valores singulares,

$$\|H\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n \sigma_i(H(j\omega))^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = \min\{n_z, n_w\}$$

siendo el cuadrado de la norma  $H_2$  el área total bajo los cuadrados de los valores singulares, como se muestra en la *Figura 2.3*; donde el objetivo es minimizar el valor eficaz de las perturbaciones aleatorias, por lo que se utiliza esta norma.

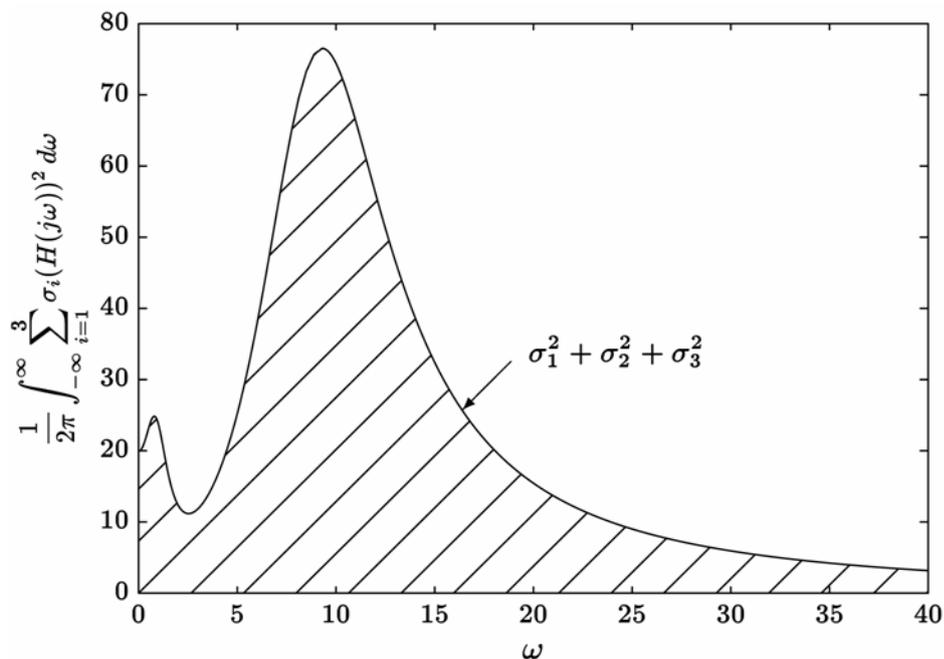


Figura. 2.3.  $\|H\|_2^2$  de un sistema MIMO para  $\min\{n_z, n_w\} = 3$

### 2.2.2 Norma $H_\infty$ de un sistema

La norma  $H_\infty$  de un sistema estable de una entrada y una salida (SISO), es la ganancia RMS más grande de su entrada /salida para el peor de los casos, definiendo:

$$\|G\|_\infty := \sup_{\substack{u \in L_2 \\ u \neq 0}} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$$

donde  $L_2$  es el espacio de señales con energía finita y  $y(t)$  es la salida del sistema  $G$  para un  $u(t)$  como entrada. Esta norma también corresponde a la ganancia máxima de la respuesta en frecuencia  $G(j\omega)$ , es decir

$$\max_{\omega} |G(s)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por otro lado, la ganancia máxima de la respuesta en frecuencia para un sistema  $H(j\omega)$  de múltiples entradas, múltiples salidas (MIMO) expresada en

términos de los valores singulares de la matriz de transferencia  $H \in C^{n_z \times n_w}$ , denotada  $\sigma_i(H)$ , es igual las raíces cuadradas no negativas de los valores propios de  $H^*H$  ( $H^*$  matriz transpuesta conjugada), es decir:

$$\sigma_i(H) = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \min\{n_z, n_w\}$$

Si los valores singulares se ordenan de forma que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_{\min\{n_z, n_w\}}$ , los valores singulares extremos serán:

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \quad ; \text{máximo valor singular}$$

$$\underline{\sigma} = \sigma_{\min\{n_z, n_w\}} \quad ; \text{mínimo valor singular}$$

Finalmente la norma  $H_\infty$  de una matriz de transferencia  $H(s)$  o sistema MIMO es definida por (Figura 2.4).

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \bar{\sigma}(H(j\omega))$$

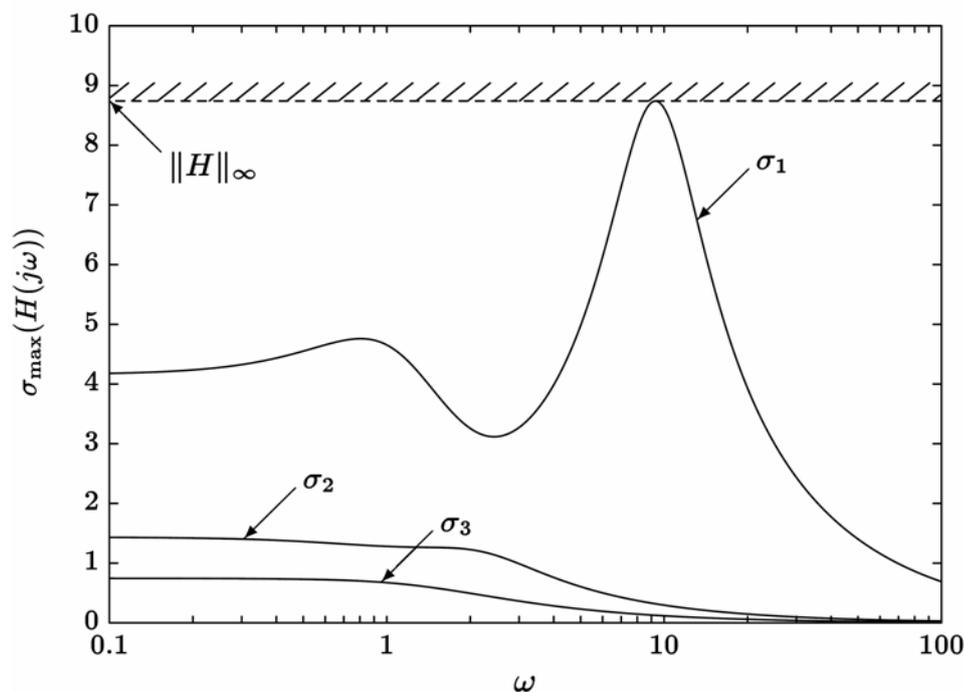


Figura. 2.4. Máximo valor singular de  $H(s)$

La más útil resulta ser la norma infinita puesto que no solo es fácil de calcular, sino que también constituye una de las mejores estimaciones de la ganancia de un sistema para el peor de los casos cuando se presenta alguna perturbación a la entrada. [2]

## **2.3 MODELAMIENTO DE INCERTIDUMBRES**

### **2.3.1 Introducción**

El término incertidumbre se refiere a las diferencias o errores entre modelos y la realidad del proceso. Los orígenes de la teoría de control para sistemas realimentados presuponen que se dispone de un modelo suficientemente exacto del proceso a controlar o del sistema realimentado, aunque algunos de los métodos y análisis hacen algunas consideraciones sobre el efecto de las posibles perturbaciones, el tratamiento y atenuación de las perturbaciones no son su principal razón de ser. Esa incertidumbre es inherente a cualquier sistema físico o resulta de nuestra limitación en comprender o modelar la conducta del sistema.

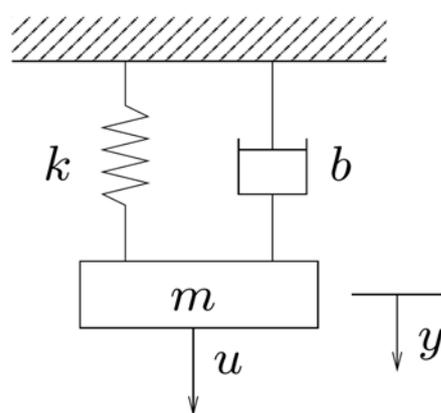
La necesidad de cumplir las especificaciones de diseño cada vez más exigentes, ha llevado a tener en consideración aspectos de importancia práctica en el desarrollo de los sistemas de control; de forma que el comportamiento del sistema se mantenga aceptable en un ambiente realista, en el que las incertidumbres van a estar siempre presentes. La incertidumbre denota cualquier elemento oscuro en la dinámica del sistema real. Las posibles incertidumbres incluyen los parámetros desconocidos, las funciones desconocidas, perturbaciones, y dinámicas no modeladas. Con respecto al conocimiento disponible sobre las causas de las incertidumbres se pueden agrupar en dos clases principales:

### **2.3.2 Incertidumbres paramétricas**

Es la variación de los valores de los parámetros físicos debido al conocimiento imperfecto de las variaciones de estos durante el funcionamiento. Los ejemplos de parámetros físicos incluyen rigidez y amortiguamiento de los

coeficientes en los sistemas mecánicos, coeficientes aerodinámicos de dispositivos de vuelo, condensadores e inductores en los circuitos eléctricos, etc., que provienen de las imprecisiones en los parámetros físicos, debidas al método de identificación y/o modelado empleado, en los polos o ceros y modificaciones en el punto de trabajo de la planta o con respecto al modelo nominal.

Por ejemplo consideremos el modelo de un sistema resorte-masa-amortiguador en la *Figura 2.5*. la cual tiene la siguiente función de transferencia que relaciona matemáticamente la fuerza aplicada  $u$  a la posición amortiguada  $y$ .



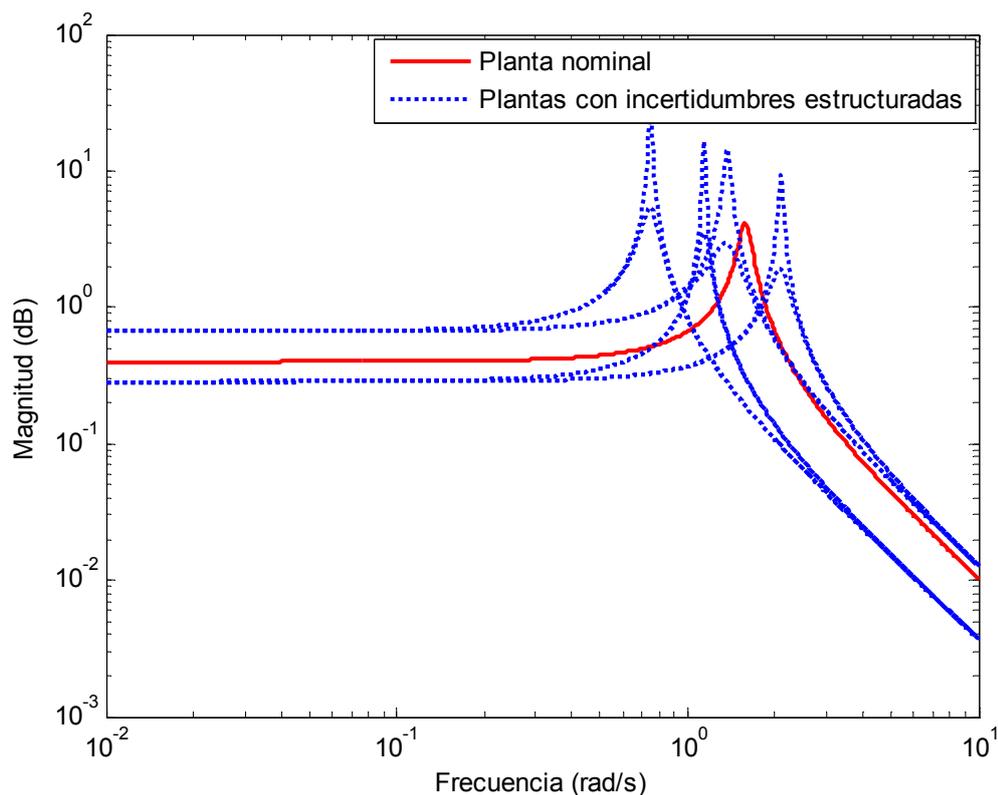
**Figura. 2.5. Sistema resorte-masa-amortiguador**

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Típicamente, la masa  $m$ , el coeficiente de fricción  $b$ , y la constante del resorte  $k$  podría ser medida experimentalmente o tomadas de especificaciones de hojas técnicas del fabricante, llevando a intervalos seguros para estos parámetros y no justo un único valor:

$$m \in [m_0 - \delta_1, m_0 + \delta_1], \quad b \in [b_0 - \delta_2, b_0 + \delta_2], \quad k \in [k_0 - \delta_3, k_0 + \delta_3].$$

Estos valores con subíndice 0 son llamados los valores nominales para los parámetros y  $\delta_i$  son llamados la máxima desviación del valor nominal. Lo que en la práctica significa que hay algunas funciones de transferencia admisibles para el modelo para cada combinación posible de  $m$ ,  $b$  y  $k$  en los intervalos dados, como se muestra en la *Figura 2.6*.



**Figura. 2.6.** Grafica de Bode de  $G(s)$ , para diferentes valores de  $m \in [0.9, 1.1]$ ,  $b \in [0.1, 0.2]$ , y  $k \in [2, 3]$

### 2.3.3 Incertidumbres dinámicas

Es la dinámica no lineal y de alta frecuencia no modelada de la planta, así como las variaciones en el comportamiento dinámico durante el funcionamiento del sistema. Por ejemplo los modos flexibles de alta frecuencia, retardos de tiempo no contemplados, etc. Este tipo de incertidumbre es motivo de análisis en el presente proyecto.

El diagrama de bloques general de un sistema de control realimentado de una planta con incertidumbres queda representado en la *Figura 2.7*, donde  $\Delta(s)$  (función de transferencia estable y variable) representa el modelo de incertidumbre dinámica,  $G_0(s)$  es el modelo nominal o lineal y  $G(s)$  el modelo verdadero.

Nótese que de las posibles formas de representar el conocimiento impreciso que se tiene en el caso de un proceso escalar (incertidumbre tipo aditivo, multiplicativo, etc.); cuando se trata de un proceso multivariable hay que considerar algunos otros casos; pues habrá que tener en cuenta su situación en el lazo de control.

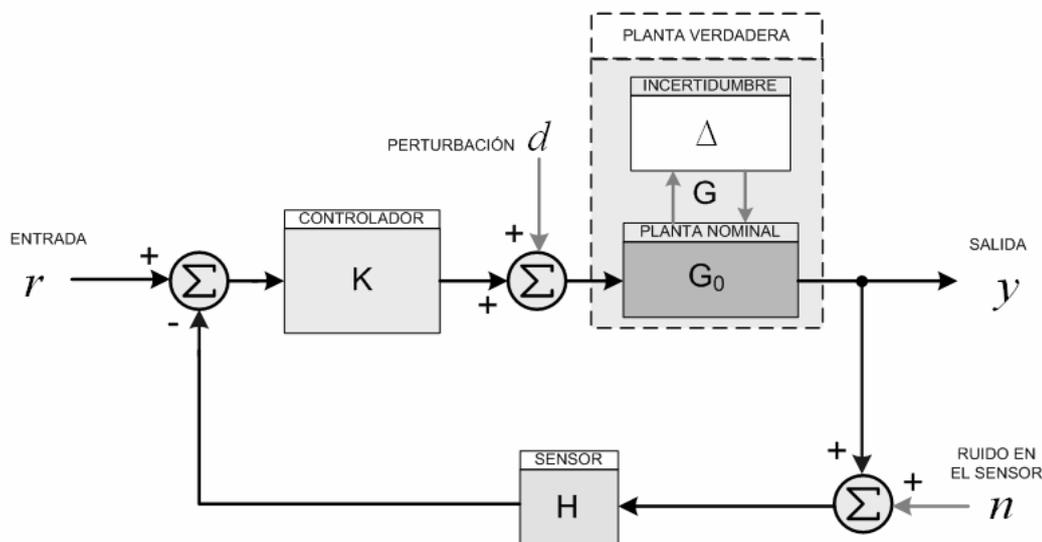
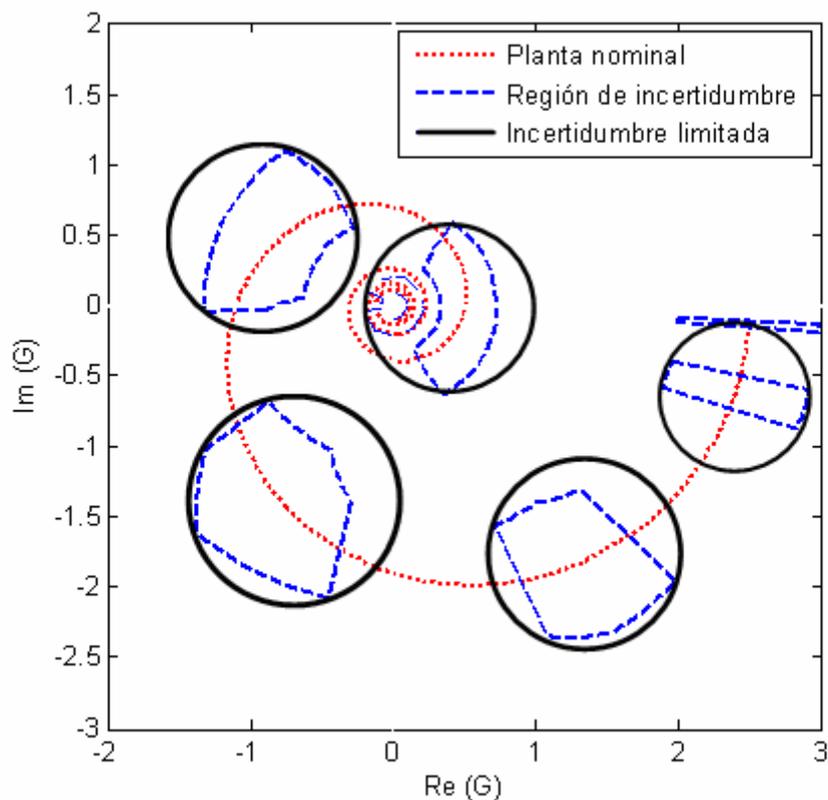


Figura. 2.7. Diagrama estructural de un sistema de control con incertidumbre en la planta

El tratamiento que se hace es considerar que el conjunto de incertidumbres que afectan al sistema puede ser representado por una incertidumbre equivalente, que se manifiesta de alguna forma específica en un lugar localizado.

En el caso de una incertidumbre dinámica podemos desarrollar simples métodos de análisis; para un rango de frecuencias a través de las gráficas de Nyquist como en la *Figura 2.8*.



**Figura. 2.8. Gráfica de Nyquist con regiones de incertidumbre**

Usamos un disco de incertidumbre en lugar de una más complicada descripción para simplificar la complejidad del problema. Puesto que se hace así, la región de la incertidumbre resultante es una especie de cuña en el plano polar para diferentes frecuencias; donde la respuesta en frecuencia real cae en algún lugar de esta región. El centro de este disco es utilizado como la respuesta en frecuencia del modelo de la planta nominal y el radio del disco es la magnitud máxima de la incertidumbre.

Los modelos de incertidumbres más empleados son: aditiva ( $iA$ ), multiplicativa a la entrada/salida de la planta ( $iM_i$  e  $iM_o$ ) que son usadas en dinámicas de alta frecuencia de la planta y de realimentación a la planta ( $iR_p$ ), como bucle realimentado a la entrada/salida de la planta ( $iR_i$  e  $iR_o$ ) que son usadas para errores de parámetros a bajas frecuencias como se aprecia en la *Tabla 2.1*. [3].

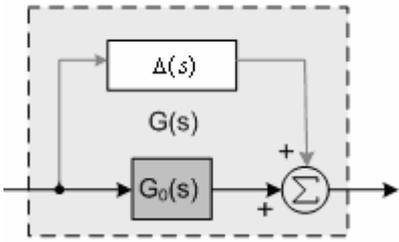
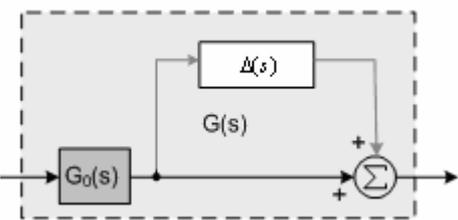
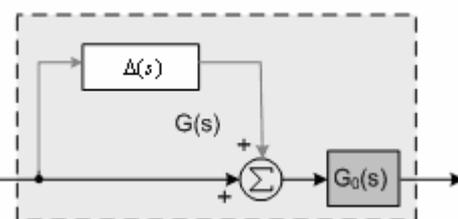
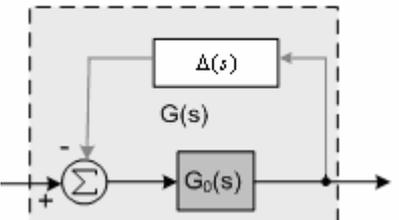
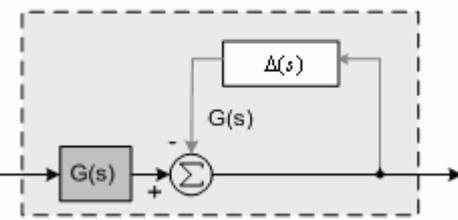
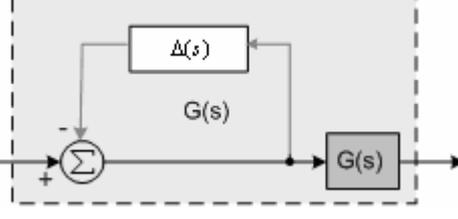
Incertidumbre	Representación	Ecuación
iA		$G(s) = G_0(s) + \Delta(s)$
iMo		$G(s) = (I + \Delta(s))G_0(s)$
iMi		$G(s) = G_0(s)(I + \Delta(s))$
iRp		$G(s) = G_0(s)(I - \Delta(s)G_0(s))^{-1}$
iRo		$G(s) = (I - \Delta(s))^{-1}G_0(s)$
iRi		$G(s) = G_0(s)(I - \Delta(s))^{-1}$

Tabla. 2.1. Modelos de incertidumbre en el modelado de la planta

### 2.3.3.1 Incertidumbre multiplicativa

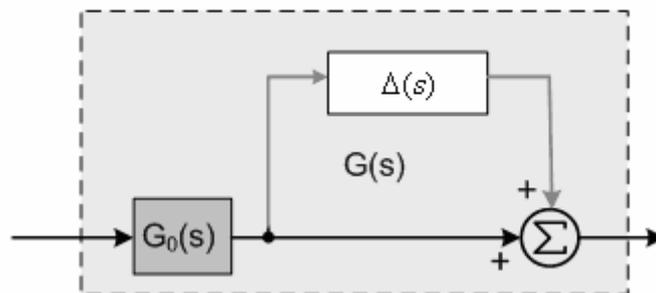
La incertidumbre aditiva es la medida de la diferencia entre el modelo verdadero y el nominal de la planta (*Tabla 2.1*), pero puede no ser verdad cuando  $G(s)$  y  $G_0(s)$  son grandes, esto asegura la estabilidad pero no el comportamiento dinámico. Para superar esta dificultad definimos la incertidumbre como:

$$\Delta(s) := \frac{G(s) - G_0(s)}{G_0(s)}$$

Con lo cual obtenemos la medida de cuanto  $G(s)$  se desvía de  $G_0(s)$ , con respecto al tamaño de  $G_0(s)$ . Ahora nosotros podemos expresar cualquier función admisible

$$G(s) = (I + \Delta(s))G_0(s)$$

La incertidumbre multiplicativa a la entrada representa las inexactitudes del actuador; análogamente, la incertidumbre multiplicativa a la salida (*Figura 2.9.*) representa el efecto del ruido sensor.



**Figura. 2.9. Incertidumbre multiplicativa a la salida del modelo nominal**

Para obtener una caracterización de la incertidumbre puramente en el dominio de la frecuencia, necesitamos especificar cuán grande es debe ser  $\Delta(j\omega)$  en cada frecuencia  $\omega$ , satisfaciendo  $\|\Delta(s)\|_{\infty} \leq 1$ , para el peor caso. Esto es hecho considerando una cota o filtro (algunos autores la llaman función peso)  $W(s)$  suficientemente grande y estable para cada proceso admisible de  $G(s)$ , La idea

detrás del modelo de incertidumbre es que  $\Delta(s)W(s)$  es la planta verdadera normalizada, teniendo así

$$\frac{G(s)}{G_0(s)} - 1 = \Delta(s)W(s)$$

si  $\|\Delta(s)\|_{\infty} \leq 1$

entonces

$$\left| \frac{G(s)}{G_0(s)} - 1 \right| \leq |W(j\omega)|, \quad \forall \omega$$

Así  $|W(j\omega)|$  proporciona el contorno de incertidumbre, además la incertidumbre se incrementa al aumentar la frecuencia donde el principal propósito de  $\Delta(j\omega)$  es calcular la incertidumbre de fase y ser un factor de escalamiento en la magnitud de la perturbación de realimentación por ejemplo  $|\Delta(j\omega)|$  varía entre 0 y 1.

En general, el diseño de sistemas de control se lleva a cabo sobre el modelo nominal de la planta, pero se dispone de técnicas para asegurar que el diseño del controlador para la planta nominal sea aceptable para cualquiera de las posibles plantas con incertidumbre multiplicativa.

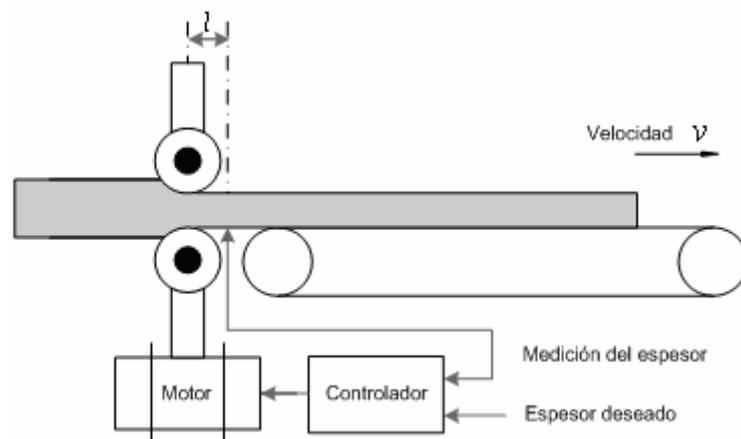
## 2.4 RETARDO DE TIEMPO

### 2.4.1 Generalidades

Un tiempo de retardo, tiempo muerto o retardo de transporte es el intervalo de tiempo entre el comienzo de un suceso en un punto del sistema y la acción que resulta en otro punto del sistema. Este tipo de retardo temporal se presenta en aquellos sistemas en que se mueve un material que necesita un tiempo finito para pasar de un punto de entrada o control a uno de salida o medición. En la práctica, se pueden encontrar retrasos puros en varios tipos de sistemas, especialmente en sistemas con transmisiones hidráulicas, neumáticas o mecánicas. Los sistemas con control por computadora también tienen retardos, ya que la computadora toma cierto tiempo en ejecutar operaciones numéricas. La *Figura 2.10* ilustra un

sistema de control de una laminadora. El motor ajusta la separación de los rodillos de forma que se minimiza el error de espesor. Si el acero se desplaza a una velocidad  $v$ , entonces el retardo temporal entre el ajuste de la laminadora y la medición es

$$\tau_d = \frac{l}{v}$$



**Figura. 2.10. Sistema de control de una laminadora**

Por tanto, para tener un retardo temporal despreciable, se debe disminuir la distancia a la medición y aumentar la velocidad del flujo de acero. Por lo general, no se puede eliminar el efecto del retardo temporal. En cada caso, hay una situación en que el material dentro del proceso debe fluir a través del equipo, y hay un retraso de velocidad de distancia inherente o el tiempo muerto dentro del equipo del proceso. Un tiempo muerto se crea que cuando toma estos dispositivos para operar y medir el valor de la variable que ellos está intentando determinar. Estos tiempos de la muestra son, claro los tiempos muertos, pero en una situación del mando ellos se localizan en la parte de la regeneración de la vuelta.

Algunos de los problemas que puede ocasionar la existencia de retardo de transporte en un sistema son:

- Limita el máximo el ancho de banda alcanzable por un sistema en lazo cerrado.

- Para valores altos de ganancia el retardo de transporte puede producir inestabilidad incluso en sistemas de primer orden.
- Un controlador puede saturar los actuadores a falta de una respuesta inmediata ante la acción.

Así, un sistema con tiempo de retardo  $\tau_d$  se puede representar en términos de un sistema equivalente sin tiempo de retardo como sigue:

$$G_{real}(s) = G(s)e^{-\tau_d s}$$

Por tanto, el retardo de tiempo se excluye del modelo nominal de la planta y de este modo se convierten en parte de las posibles perturbaciones al modelo de la planta. El efecto de introducir tiempo de retardo en un sistema también se puede ver desde la perspectiva de la respuesta en frecuencia al sustituir  $s = j\omega$ , obteniendo,

$$G_{real}(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega\tau_d} = |G(j\omega)|\angle\{-\omega\tau_d + \angle G(j\omega)\}$$

En otras palabras, el tiempo de retardo no afecta la curva de la respuesta en frecuencia de magnitud de  $G(j\omega)$ , pero sustrae un desfaseamiento linealmente creciente,  $\omega\tau_d$ , de la traza de respuesta en frecuencia de fase de  $G(j\omega)$ .

#### 2.4.2 Aproximación de funciones con retardo mediante funciones racionales

El margen de fase del tiempo de retardo puede verse en la *Figura 2.11*, con la ayuda de una computadora. Si embargo, para las técnicas de análisis y diseño que requieren una función racional, la aproximación de Padé dada por una aproximación de dos términos, que es la mejor,

$$e^{-\tau_d s} \cong \frac{1 - \frac{\tau_d s}{2}}{1 + \frac{\tau_d s}{2}}$$

o

$$e^{-\tau_d s} \cong \frac{1 - \frac{\tau_d s}{2} + \frac{(\tau_d s)^2}{12}}{1 + \frac{\tau_d s}{2} + \frac{(\tau_d s)^2}{12}}$$

se pueden aplicar sin embargo, aproximar la función exponencial mediante una serie de MacLauren; esto es,

$$e^{-\tau_d s} \cong 1 - \tau_d s + \frac{(\tau_d s)^2}{2}$$

o

$$e^{-\tau_d s} \cong \frac{1}{1 + \tau_d s + \frac{(\tau_d s)^2}{2}}$$

En donde solo se utilizan tres términos de la serie. Aparentemente, las aproximaciones no son válidas cuando la magnitud de  $t_0 s$  es grande. [4]

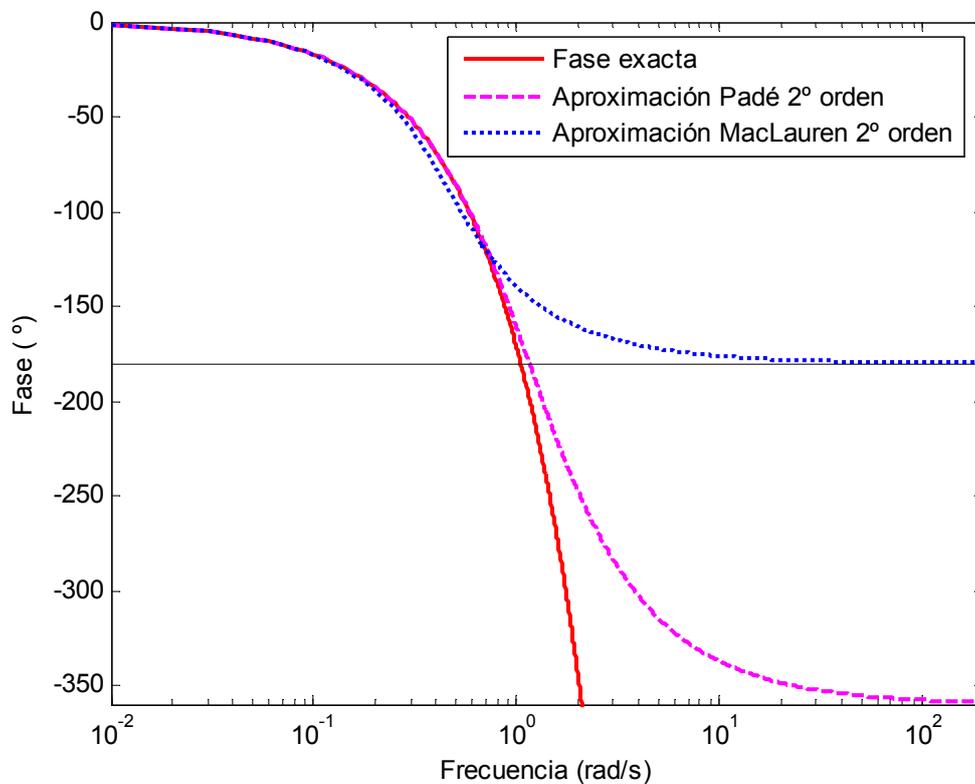


Figura. 2.11. Comparación de las aproximaciones de fase de retardo para  $\tau_d = 3(\text{seg.})$

### 2.4.3 Retardo del tiempo como incertidumbre aditiva y multiplicativa

La incertidumbre nominal de la planta  $e^{-\tau_d s}$  se puede interpretar a su vez como una incertidumbre de tipo multiplicativo, aditivo, u otros. En el primer caso se tendrá:

$$G(s) = G_0(s)e^{-\tau_d s} = G_0(s)(1 + \Delta(s))$$

$$\Delta(s) = e^{-\tau_d s} - 1$$

Supongamos que el tiempo de retardo es conocido solo en el intervalo  $0 \leq \tau_d \leq 3$  seg., donde el tiempo de retardo puede ser tratado como una incertidumbre multiplicativa a la salida de la planta nominal en la familia de  $G(s)$

$$\{ (1 + \Delta(s)W(s))G_0(s) : \|\Delta(s)\|_\infty \leq 1 \}$$

donde el filtro  $W$  debería ser seleccionado para satisfacer la incertidumbre normalizada

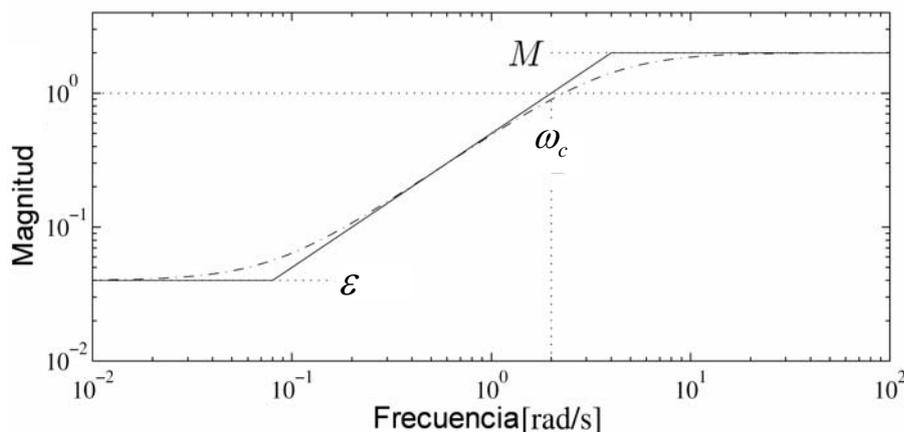
$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W(j\omega)|, \quad \forall \omega, t_0.$$

obteniendo

$$|e^{-\tau_d j\omega} - 1| \leq |W(j\omega)|$$

La selección cota superior para la magnitud de las perturbaciones multiplicativas asociadas con los retardos de tiempo es de acuerdo a una aproximación grafica asintótica es mostrada en la *Figura 2.12* de donde se obtiene  $W(s)$ , donde  $\varepsilon \approx 0$  a bajas frecuencias,  $M \geq 1$  a altas frecuencias, y la asíntota del grafico se interseca en 1 (0 dB) en la frecuencia de cruce  $\omega_c$  que es aproximadamente el ancho de banda requerido y aproximadamente igual a  $1/\tau_d$ .

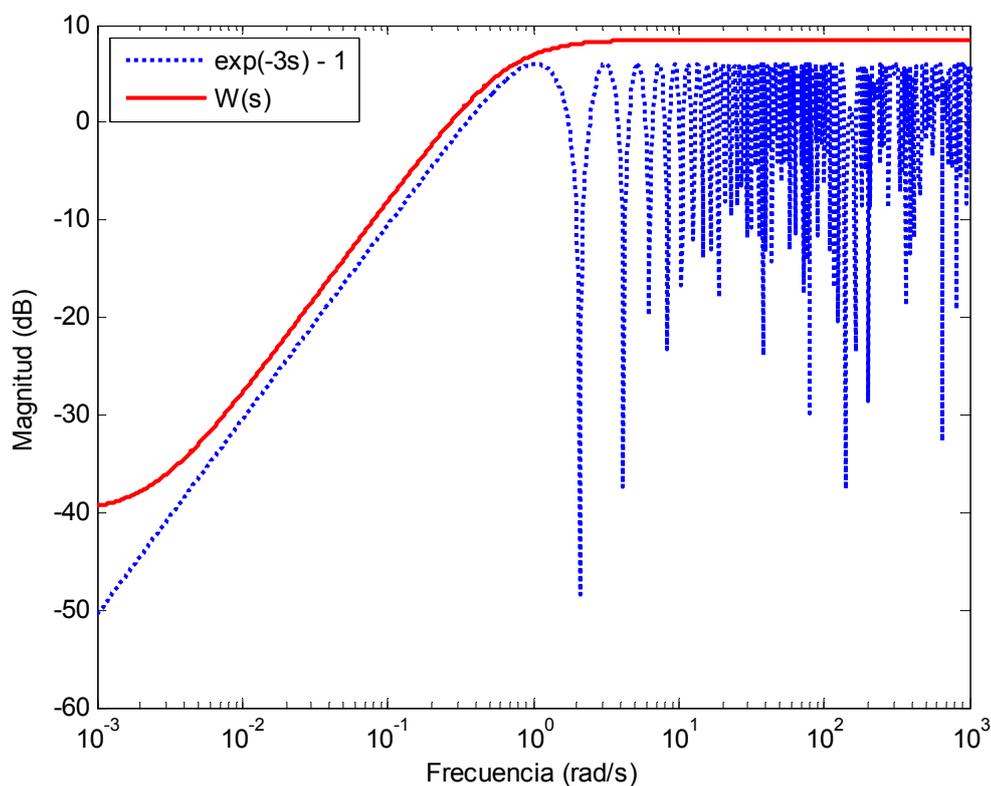
$$W(s) = \frac{s + \omega_c \varepsilon}{s/M + \omega_c}$$



**Figura. 2.12. Filtro  $W(s)$ : grafica exacta y asintótica**

En la *Figura 2.13* se aprecia la magnitud de  $\Delta(s)$  para  $\tau_d = 3$ ; además la cota aproximada para esta incertidumbre multiplicativa con  $\omega_c = 0.25$ ,  $\varepsilon = 0.01$  y  $M = 2.67$  es:

$$W(s) = \frac{s + 0.0025}{0.375s + 0.25}$$



**Figura. 2.13.** Grafica de Bode del filtro  $W(s)$  e incertidumbre multiplicativa  $e^{-3s} - 1$

Nótese que se las incertidumbres multiplicativas son las más frecuentemente empleadas, debido a que son pequeñas a baja frecuencia (donde el modelo de la planta nominal es generalmente bien conocido), y por otro lado son elevadas para alta frecuencia (donde el modelo es siempre más impreciso), como en la *Figura 2.14*. [4]

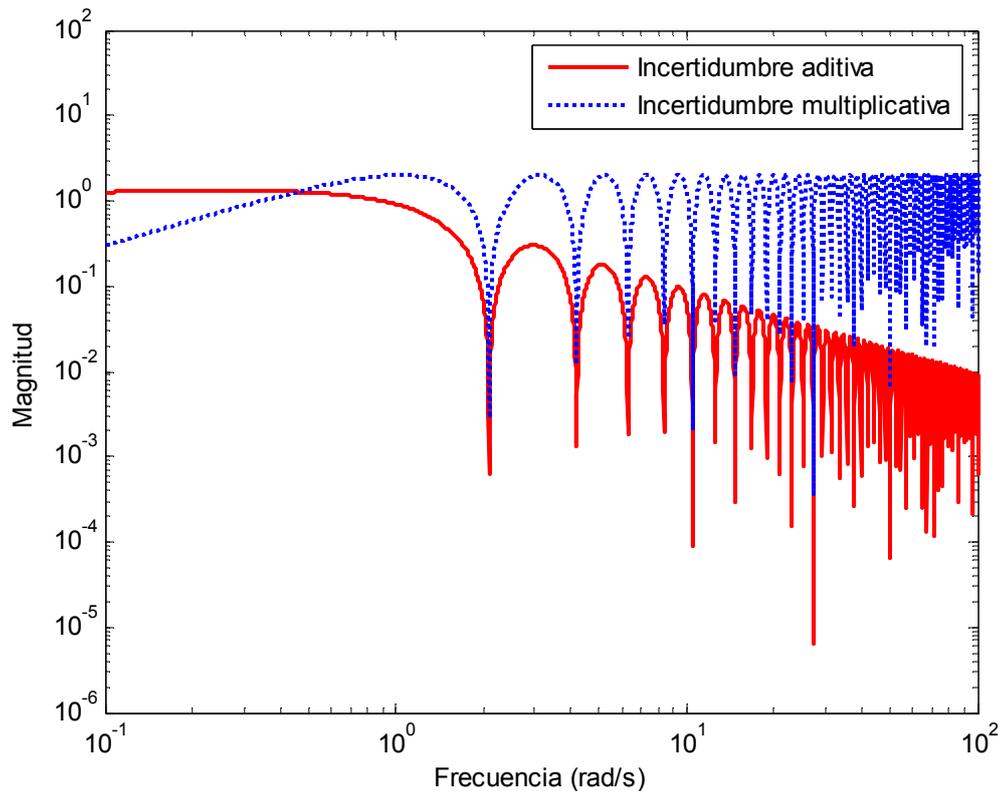


Figura. 2.14. Gráfica de Bode incertidumbre aditiva y multiplicativa para  $\tau_d = 3(\text{seg.})$

## 2.5 OPTIMIZACIÓN CONVEXA

### 2.5.1 Generalidades

Optimización convexa es una clase de problemas de optimización matemáticos especial, el cual incluye los problemas de análisis y diseño en ingeniería de control con incertidumbre son de optimización. En este contexto, los problemas de optimización están basados en dos objetos: un conjunto de variables de decisión que reflejan la selección de ingeniería (ganancia de controladores, ubicación del actuador, etc.) y un conjunto de limitantes en todas estas variables de decisión que reflejan las especificaciones impuestas por el problema (comportamiento del lazo cerrado, etc. Tales problemas pueden ser algunas veces traducidos en términos de desigualdades matriciales lineales (LMIs).

## 2.5.2 Conjuntos convexos

Un objeto es convexo si para cada par de puntos dentro del objeto, cada punto en el segmento de la línea recta que los une está también dentro del objeto. Sea el conjunto  $C$  en un espacio vectorial lineal, se dice que  $C$  es convexo si:

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C, \forall x, y \in C \text{ y } \alpha \in [0,1]$$

Esto implica que un conjunto convexo en un espacio de vectorial real o complejo se conecta en la dirección correcta. En otras palabras, en un conjunto convexo se puede ir de cualquier punto a cualquier otro en vía recta, sin salir del mismo (Figura 2.15).

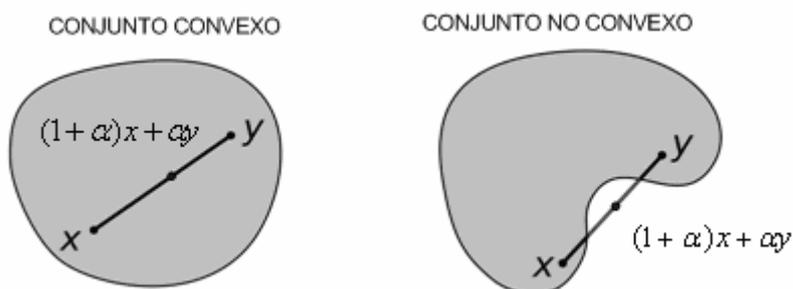


Figura. 2.15. Conjuntos convexo y no convexo

Nótese que la suma de los coeficientes  $(1 - \alpha)$  y  $\alpha$  es 1, (Figura 2.16).

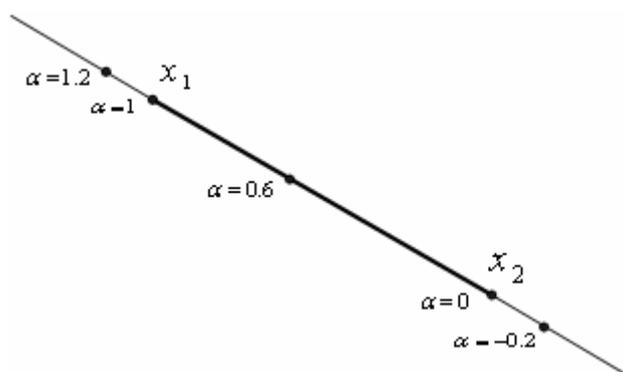


Figura. 2.16. Puntos  $x_1$  y  $x_2$  en  $\mathfrak{R}^n$  describen una línea paramétrica dada por  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ , donde  $\alpha$  varía sobre  $\mathfrak{R}$

### 2.5.3 Función convexa

La función  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  es convexa si el dominio de  $f$  es un conjunto convexo y si:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \quad \forall x, y \in \text{dom } f \text{ y } \alpha \in [0,1].$$

Geoméricamente, esta desigualdad significa que la línea del segmento entre  $(x, f(x))$  y  $(y, f(y))$  esta arriba del grafico de  $f$  (Figura 2.17).



Figura. 2.17. Función convexa

Una función  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  es afín si esta es una suma de una función lineal y una constante, por ejemplo si esta tiene la forma  $f(x) = Ax + b$ , donde  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  y  $b \in \mathfrak{R}^m$ . Suponga  $S \subseteq \mathfrak{R}^n$  es convexo y  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  es una función afín. Entonces la imagen de  $S$  bajo  $f$ ,

$$f(S) = \{f(x) / x \in S\},$$

es convexa.

### 2.5.4 Propiedades de los conjuntos convexos

Los conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  son conjuntos convexos en un espacio vectorial normado  $X$  que cumplen las siguientes propiedades:

- El conjunto  $\alpha C_1 := \{x / x = \alpha c_1, c_1 \in C_1\}$  es convexo para algún escalar  $\alpha$ .

- La suma  $C_1 + C_2 := \{x / x = c_1 + c_2, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$  es convexa.
- El borde e interior de  $C_1$  y  $C_2$  son convexos.
- Para cualquier transformación lineal  $T : X \rightarrow X$ , la imagen

$T(C_1) := \{x / x = T(c_1), c_1 \in C_1\}$  y el inverso de la imagen  $T^{-1}(C_1) := \{x / T(x) \in C_1\}$  son convexas.

- La intersección  $C_1 \cap C_2 := \{x / x \in C_1 \text{ y } x \in C_2\}$  es convexa.

### 2.5.5 Formulación de problemas de optimización convexa

Usamos la notación

minimizar  $f_0(x)$

sujeto a  $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$

$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$

para la formulación de optimización convexa donde las funciones  $f_0, \dots, f_m : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  son convexas,  $x \in \mathfrak{R}^n$  la variable de optimización y la función  $f_0 : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  la función objetivo o función costo, las desigualdades  $f_i(x) \leq 0$  son llamadas funciones de desigualdades limitantes y las ecuaciones  $h_i(x) = 0$  son llamadas ecuaciones limitantes; para describir el problema de encontrar un  $x$  que optimice  $f_0(x)$  entre todas las  $x$  que satisface las condiciones  $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$ , y  $h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$ .

Decimos que  $x^*$  es un punto óptimo, o solución del problema, si  $f_0(x^*) = p^*$ . El conjunto de todos los puntos óptimos es el conjunto óptimo, denotado

$$X_{opt.} = \{x / f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p, f_0(x) = p^*\}$$

Si existe ahí un punto óptimo para el problema, nosotros decimos que el valor óptimo es alcanzado, y el problema es resoluble. Si  $X_{opt.}$  es vacío, nosotros decimos que el valor óptimo no es alcanzado. [5]

## 2.6 DESIGUALDADES LINEALES MATRICIALES

### 2.6.1 Introducción

Las desigualdades lineales matriciales (LMIs) y técnicas LMI han surgido como una poderosa herramienta de diseño en áreas de ingeniería de control para sistemas de identificación y diseño estructural. En los últimos años la utilización de las desigualdades lineales matriciales se ha empezado a tomar en cuenta para el diseño de sistemas de control de procesos.

El elevado poder computacional que se ha alcanzado recientemente y la aparición de poderosos algoritmos de optimización convexa han contribuido fuertemente a la popularidad de las desigualdades lineales matriciales LMIs, optimizando parámetros de diseño y operación de la planta y tomando en cuenta condiciones tipo LMI para el desempeño del sistema en lazo cerrado, en las que se incorpora incertidumbre en el modelo, logrando robustez en el diseño del controlador; en la *Figura 2.18* se muestra desigualdades matriciales fundamentales como una idea intuitiva.

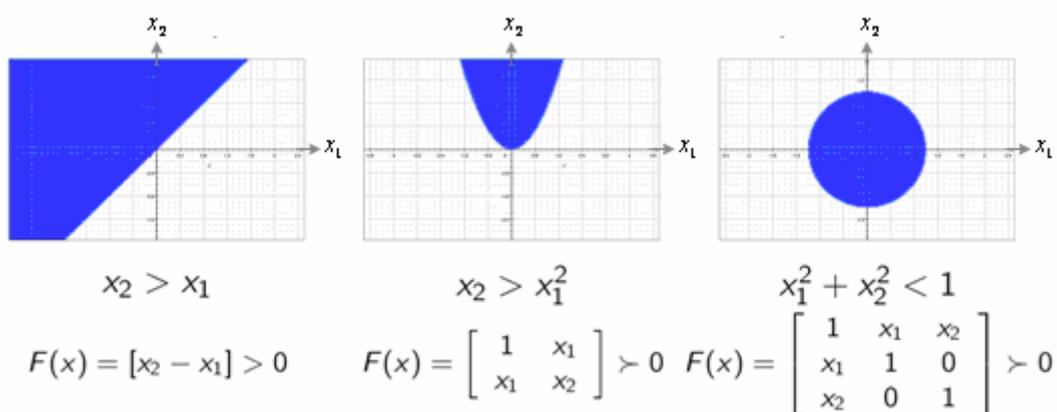


Figura. 2.18. Simple LMIs en el plano

### 2.6.2 Definición de LMIs

Una Desigualdad Matricial Lineal o LMI, es una condición de la forma:

$$F(x) := F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_N F_N = F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i > 0$$

Donde

- $x = (x_1, \dots, x_N)$ , es un vector de números reales (variables de decisión u optimización).
- $F_0, \dots, F_N$  son matrices simétricas reales conocidas.  
 $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, N$  para algún  $n \in \mathbb{Z}_+$
- la desigualdad  $> 0$ , significa que todos los valores propios de  $F(x)$  son positivos; es decir  $\lambda_{\max}(F(x)) > 0$ .

Si  $x$  no satisface la LMI, entonces existe un  $u$  diferente de cero tal que

$$u^T F(x) u = u^T \left( F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \right) u \leq 0, \quad \forall \quad u \in \mathfrak{R}^n, \quad u \neq 0$$

Generalizando una LMI es una desigualdad:

$$F(x) > 0$$

donde  $F$  es una función que traza un vector en el espacio dimensionalmente finito  $\mathfrak{R}^n$  para encontrar un  $S^n = \{M / M = M^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}\}, n > 0$ , de matrices simétricas reales.

Una LMI define una coacción convexa en  $x$ . Esto es, si se pone  $F = \{x \mid F(x) > 0\}$  es convexa. De hecho si  $x_1, x_2 \in F$  y  $\alpha \in (0,1)$  entonces:

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) = \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) > 0$$

Donde, en la primera parte de la igualdad  $F$  es afín, y en la última parte la desigualdad que sigue dice que  $\alpha \geq 0$  y  $(1-\alpha) \geq 0$ . Aunque la coacción convexa  $F(x) > 0$  en  $x$  parece bastante especial, pueden representarse algunos convexos

que cumplan con esta condición.

Con frecuencia en las aplicaciones de control las LMI no aparecen en la forma estándar  $F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i > 0$ , sino en la forma equivalente en que encontramos problemas en los cuales las variables son matrices, por ejemplo la desigualdad de Lyapunov  $A^T X + XA < 0$ . Aquí  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  y  $X = X^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  que es la variable desconocida es por lo tanto una matriz que  $X = \sum_{i=1}^M x_i F_i$  donde son los vectores de una base para las matrices simétricas de dimensión  $M = \frac{n(n+1)}{2}$ . Es decir, por ejemplo si  $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$  y

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = X^T = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{x_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{x_2} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{x_3}$$

de donde

$$A^T X + XA = x_1(A^T X_1 + X_1 A) + x_2(A^T X_2 + X_2 A) + x_3(A^T X_3 + X_3 A)$$

Comparando con la LMI estándar se demuestra que la desigualdad de Lyapunov (que se analizará más adelante) es una LMI puesto que

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i > 0; F_0 = 0; F_i = (A^T X_i + X_i A); M = N$$

### 2.6.3 Sistemas de LMIs

Un Sistema de Desigualdades Matriciales Lineales, es un conjunto finito de LMIs.

$$F_1(x) > 0, \dots, F_K(x) > 0$$

Una simple pero esencial propiedad que tienen todos los sistemas de LMIs, es que pueden ser representados como una sola LMI (Figura 2.19). Precisamente,  $F_1(x) > 0, \dots, F_K(x) > 0$  si y solo si:

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_K(x) \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{diag}(F_1(x), F_2(x), \dots, F_K(x)) > 0$$

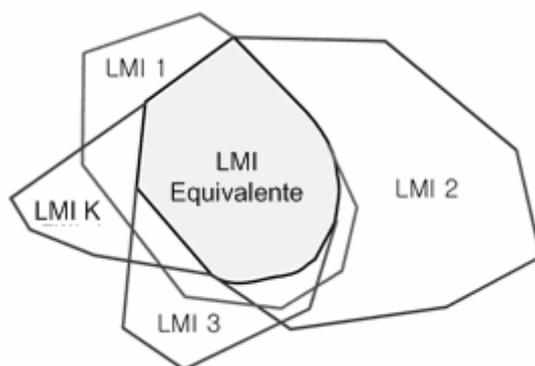


Figura. 2.19. Conjunto de LMIs y LMI equivalente

De hecho la última desigualdad, tiene sentido cuando  $F(x)$  es simétrica. Por otro lado, la colocación de los valores propios de  $F(x)$  es simplemente la unión de los valores propios de  $F_1(x), \dots, F_K(x)$ . Cualquier  $x$  que satisface  $F(x) > 0$ , también satisface el sistema de LMIs y viceversa.

La forma canónica se obtiene haciendo:

$$F_1(x) = F_{01} + x_1 F_{11} + x_2 F_{12} > 0$$

$$F_2(x) = F_{02} + x_1 F_{21} + x_2 F_{22} > 0$$

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 \\ 0 & F_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{01} + x_1 F_{11} + x_2 F_{12} & 0 \\ 0 & F_{02} + x_1 F_{21} + x_2 F_{22} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 \\ 0 & F_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{01} & 0 \\ 0 & F_{02} \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} F_{12} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} > 0$$

que es útil para resolver problemas con múltiples objetivos.

Cuando las desigualdades son no-lineales son convertidas a la forma de LMIs usando el teorema de Schur, separando la matriz  $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , de la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

donde  $M_{11}$  tiene dimensión  $r \times r$ . Se asume que  $M_{11}$  es no singular. La matriz  $S = M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$  es llamada el complemento de Schur de  $M_{11}$  en  $M$ . Si  $M$  es simétrica, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} M > 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M_{11} > 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Los resultados se pueden obtener observando que  $M > 0$  si y solo si  $u^T M u > 0$  para todo  $u \in \mathfrak{R}^n$  diferente de cero. Teniendo  $F \in \mathfrak{R}^{r \times (n-r)}$ , entonces  $M > 0$  si y solo si para todo  $u_1 \in \mathfrak{R}^r$  y  $u_2 \in \mathfrak{R}^{n-r}$

$$\begin{aligned} 0 &< \begin{bmatrix} u_1 + F u_2 \\ u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + F u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{11}F + M_{12} \\ M_{21} + F^T M_{11} & M_{22} + F^T M_{11}F + F^T M_{12} + M_{21}F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces el resultado queda  $F = -M_{11}^{-1}M_{12}$ . Una consecuencia inmediata de esta observación es la siguiente proposición:

Teniendo  $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  como una función de acuerdo a lo siguiente:

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix}$$

donde  $F_{11}(x)$  es cuadrada. Entonces  $F(x) > 0$  si y solo si:

$$\begin{cases} F_{11}(x) > 0 \\ F_{22}(x) - F_{12}(x)F_{11}^{-1}(x)F_{21}(x) > 0 \end{cases}$$

Se debe notar que la segunda desigualdad es una desigualdad matricial no-lineal en  $x$ . Usando estos resultados se puede convertir esta desigualdad de no-lineal a lineal. Particularmente esta desigualdad no-lineal define una coacción convexa en la variable  $x$ , tal que todas las  $x$  satisfagan un conjunto convexo. [6]

#### 2.6.4 Formulación de problemas con LMIs

Como se ha visto muchos problemas de optimización, en el diseño de controladores, identificación y procesamiento de señales, pueden ser formuladas usando LMIs. Esto solo toma sentido si los problemas de LMIs pueden resolverse eficazmente y de una manera fiable. Si se tiene la Desigualdad matricial lineal  $F(x) > 0$ , que define una restricción convexa en la variable  $x$ . La optimización del problema involucra la minimización (o maximización) de desempeño de  $\{x / F(x) > 0\}$  para que pertenezca al tipo de problemas de optimización convexa de donde se pueden tomar tres problemas genéricos para entender mejor las Desigualdades Matriciales Lineales.

**1. Problema de factibilidad:** Prueba si existen o no  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{R}^n$  tal que:

$$F(x) > 0$$

La LMI se llama no-factible en caso de no existir solución alguna. Consideremos por ejemplo el conjunto de factibilidad robusta definido como

$$X(\Delta) = \{ x \in \mathfrak{R}^n / f_i(x, \delta) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p; \text{ para cada } \delta \in \Delta \}$$

**2. Problema de optimización convexa:** Consistente en la minimización de una función objeto lineal sujeta a restricciones de tipo LMI, como por ejemplo el problema de optimización con una función lineal objetivo y una desigualdad

matricial lineal como restricción de la forma

$$\text{minimizar } c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeto a } F_0 + F_1x_1 + \dots + F_nx_n > 0$$

con la variable de decisión  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ , con números reales  $c_1, \dots, c_n$  y matrices simétricas  $A_0, A_1, \dots, A_n$  que definen las funciones costo y funciones limitantes. Si la estricta LMI  $F(x) > 0$  es factible, entonces tenemos  $\{x \in \mathfrak{R}^n / F(x) \geq 0\} = \overline{\{x \in \mathfrak{R}^n / F(x) > 0\}}$

Análogo a este problema tenemos el problema de optimización robusta, definido como

$$\text{minimizar } \max_{\delta \in \Delta} f_0(x, \delta)$$

$$\text{sujeto a } x \in X(\Delta)$$

**3. Problema de valores propios generalizados:** Este problema equivale a minimizar un escalar o los valores propios de una matriz que dependen de una variable sujeta a una LMI. , como por ejemplo consideremos el problema:

$$\text{maximizar } \alpha$$

$$\text{sujeta a } -A^T P - PA - 2\alpha P > 0, P > 0$$

donde las matrice  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  y las variables de optimización son matrices simétricas y el escalar  $\alpha$ . Otro ejemplo es minimizar el máximo valor propio generalizado de un par de matrices que dependen de una variable, sujeta a una LMI como restricción; siendo expresada como

$$\text{minimizar } \lambda$$

$$\text{sujeto a } \lambda B(x) - A(x) > 0, B(x) > 0, C(x) > 0$$

donde  $A, B$  y  $C$  son matrices simétricas que son funciones afines de  $x$ . [7]

### 2.6.5 Aplicaciones de las LMI's en Control

Algunos problemas de control y especificaciones de diseño tienen formulaciones de tipo LMI obtenidas a partir de la teoría de Lyapunov que se usa tanto en el análisis como en el diseño y control mediante utilización de normas  $H_2$  y  $H_\infty$ , estimaciones, identificación, diseño óptimo, diseño estructural, problemas matriciales. Una de las principales ventajas de la formulación de las LMI's es la habilidad de combinar varias expresiones de diseño de una manera numéricamente tratable.

Se puede hacer una gran lista de problemas de control que pueden resolverse mediante técnicas de LMI, entre las principales se puede nombrar las siguientes:

- Estabilidad Robusta de sistemas con incertidumbre lineal invariante en el tiempo (LTI).
- Estabilidad de Lyapunov.
- Estabilidad cuadrática.
- Diseño de retroalimentación de estado multi-modelo, multi-objetivo.
- Ubicación de polos.
- Sistemas dinámicos con introducción de incertidumbres.
- Control con normas  $H_\infty$  (rechazo a perturbaciones).
- Diseño de controladores robustos con ganancia fija. [8]

### 2.7 ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

En un sistema de control dado, generalmente el elemento más importante a determinar es su estabilidad; si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, se dispone de muchos criterios de estabilidad. Entre ellos están el criterio de

estabilidad de Routh, Nyquist, etc. Sin embargo, si el sistema es no lineal o lineal con incertidumbres, no son aplicables estos criterios de estabilidad. Utilizando el método de Lyapunov, se puede determinar la estabilidad de un sistema, resolviendo las ecuaciones de estado.

Lyapunov considera un sistema descrito por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t)$$

donde  $x$  es el vector de estados  $n$  dimensional y  $f(x, t)$  es un vector  $n$  dimensional; cuyos elementos son funciones de  $t$  y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de donde  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  y  $t \in \mathfrak{R}_+$ . Se supone que el sistema dinámico autónomo no lineal tiene una única solución que comienza en la condición inicial dada, indicando la solución como  $\Phi(t; x_0, t_0)$ , donde  $x = x_0$  en  $t = t_0$  y  $t$  es el tiempo observado. Así

$$\phi(t_0; x_0, t_0) = x_0$$

A un estado  $x_e$  se le denomina estado de equilibrio si del sistema si  $f(x_e, t) = 0$ ,  $\forall t$ . Si el sistema es lineal, invariante en el tiempo, es decir, si  $f(x, t) = Ax$ , hay sólo un estado de equilibrio si  $A$  es no singular y hay infinitos estados de equilibrio si  $A$  es singular. Para sistemas no lineales, puede haber uno o más estados de equilibrio; esos estados corresponden a las soluciones constantes del sistema  $x = x_e$ ,  $\forall t$ .

Se puede desplazar al origen de coordenadas es decir  $f(0, t) = 0$ , cualquier estado de equilibrio aislado de cualquier otro por una traslación de coordenadas. Al investigar el problema de estabilidad, se está determinando el comportamiento de la solución  $\Phi(t; x_0, t_0)$  con  $t \geq t_0$  en los alrededores del punto de equilibrio  $x_e$ . En lo que sigue, se indica una región esférica de radio  $k$  alrededor de un estado de equilibrio  $x_e$  como  $\|x - x_e\| \leq k$ , donde  $\|x - x_e\|$  es la norma euclidiana y se define por

$$\|x - x_e\| = \|x - x_e\|_2 = \left[ (x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2 \right]^{1/2}$$

1. El estado de equilibrio  $x_e$  se lo llama estable en el sentido de Lyapunov, si para cualquier  $t_0$  y  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  (Figura 2.20), tal que:  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|\Phi(t; t_0, x_0) - x_e\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$ . Si  $\delta$  no depende de  $t_0$ , se dice que el estado de equilibrio es uniformemente estable.

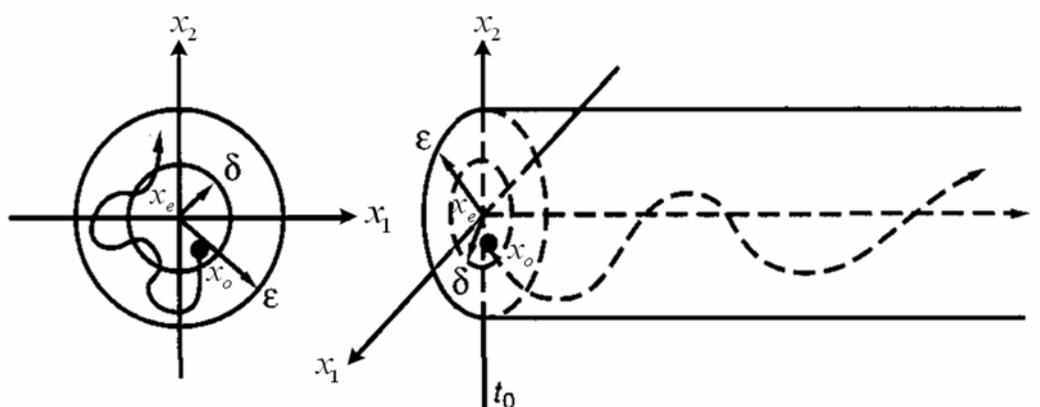


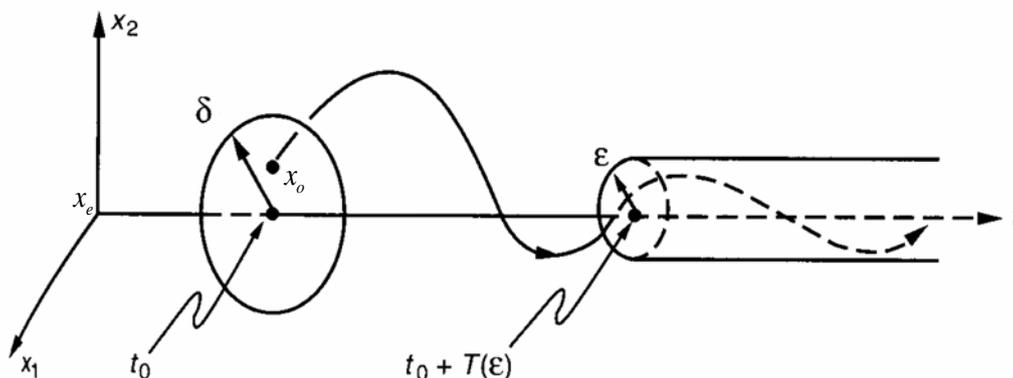
Figura. 2.20. Estado de equilibrio estable y trayectoria representativa

2. El estado de equilibrio  $x_e$  se dice que es estable asintóticamente, si es estable en el sentido de Lyapunov y si toda la solución que comienza dentro de  $\delta(t_0)$  converge sin abandonar  $\varepsilon > 0$ , hacia  $x_e$  al incrementar indefinidamente  $t$ . La región de estabilidad asintótica se denomina dominio de atracción; donde se origina toda trayectoria estable asintóticamente, definida como:

$$\|x_e - x_0\| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t; t_0, x_0) = x_e$$

3. El estado de equilibrio  $x_e$  es uniformemente estable asintóticamente si es uniformemente estable, para cada  $\varepsilon > 0$  y cualquier  $t_0 \in \mathfrak{R}_+$ ; existe un  $\delta > 0$  y  $T(\varepsilon) > 0$  independiente de  $t_0$ , tal que  $\|\Phi(t; t_0, x_0) - x_e\| < \varepsilon$  para todo

$t \geq t_0 + T(\varepsilon)$  siempre que  $\|x_0 - x_e\| < \delta$  (Figura 2.21).



**Figura. 2.21. Trayectoria representativa de estabilidad uniformemente estable asintóticamente**

4. El estado de equilibrio  $x_e$  tiene estabilidad asintótica global, si es estable y toda su solución converge hacia  $x_e$  al incrementar indefinidamente  $t$ ; siendo la condición necesaria que exista un solo estado de equilibrio en todo el espacio de estado. Si el estado de equilibrio no es global y asintóticamente estable, el problema es el de determinar la mayor región de estabilidad asintótica. Generalmente esto es muy difícil; sin embargo, a todos los fines prácticos, es suficiente determinar una región de estabilidad asintótica suficientemente grande, para que ninguna perturbación la exceda.
5. El estado de equilibrio  $x_e$  es inestable si no cumple con la estabilidad, es decir siempre que exista un estado  $x_0$  en  $\delta > 0$  (por pequeño que sea), tal que la trayectoria que comienza en este estado abandona  $\varepsilon > 0$ .

Hay muchas variaciones para estos conceptos, sin embargo para los fines prácticos se ha tomado los fundamentales.

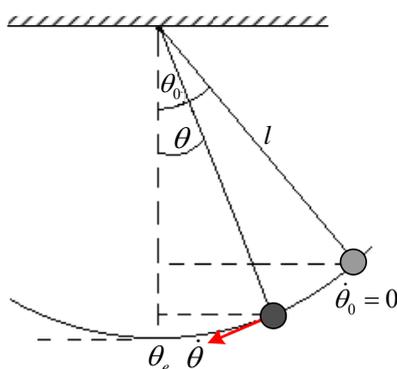
### 2.7.1 Funciones de Lyapunov

El criterio de estabilidad es difícil de extender a sistemas de orden mayor que

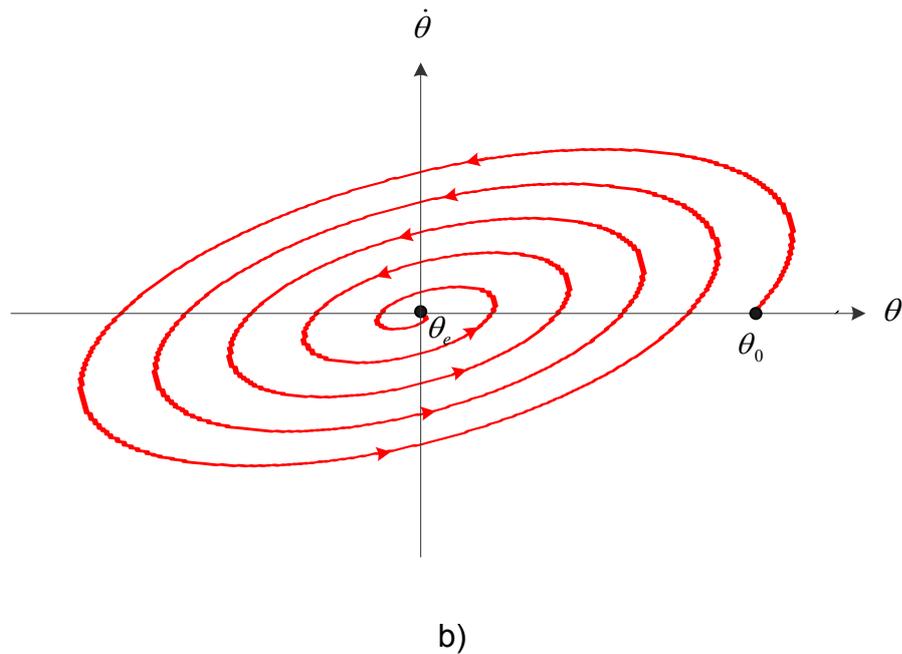
dos, siendo necesario condiciones adicionales; pues se sabe de la teoría clásica de la mecánica un sistema vibratorio es estable si su energía total es continuamente decreciente hasta alcanzar un estado de equilibrio.

Consideremos, por ejemplo, el péndulo simple con su plano de estado de la *Figura 2.22*, el cual tiene dos estados de equilibrio donde uno es en  $\theta_e = \dot{\theta}_e = 0$  y el otro con  $\theta_e = \pi$ ,  $\dot{\theta}_e = 0$  puesto que ningún estado está variando con tiempo. Definamos la energía del péndulo  $E(\theta, \dot{\theta}) = (1/2)m\dot{\theta}^2 + mg(l - l \cdot \text{Cos}\theta)$  como la suma de sus energías cinética y potencial. Cuando no hay fricción ( $k = 0$ ), el sistema es conservativo, es decir, no hay disipación de energía. [9]

Por tanto,  $dE/dt = 0$ , sobre las trayectorias del sistema. Como el estado debe ser confinado a un volumen limitado por una superficie de energía constante formando contornos cerrados alrededor de  $\theta_e$ , para un volumen pequeño, concluimos que  $\theta_e = 0$  es un estado estable con relación a la energía. Por otra parte si consideramos la fricción ( $k > 0$ ), se disipa energía durante la evolución del sistema, es decir,  $dE/dt < 0$  sobre las trayectorias del sistema. Es decir que la energía decrece hasta que llega a cero, mostrando que la trayectoria tiende a  $\theta_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .



a)



**Figura. 2.22. Péndulo simple: a) representación y b) plano de estados del movimiento con fricción**

El segundo método de Liapunov está basado en una generalización de este hecho: si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía acumulada del sistema desplazado dentro del dominio de atracción, cae al crecer el tiempo hasta tomar finalmente su valor mínimo en el estado de equilibrio. Lyapunov mostró que algunas otras funciones, no sólo energía, pueden usarse para determinar la estabilidad de un estado de equilibrio; sin necesidad de resolver las ecuaciones de estado, siendo muy ventajoso porque generalmente la solución de las ecuaciones de estado no lineales y/o variables en el tiempo, es muy difícil. Sin embargo, para sistemas puramente matemáticos no hay manera simple de definir una función energía; para eliminar esta dificultad, Lyapunov introdujo la denominada función de Lyapunov (función de energía ficticia) que matemáticamente es como sigue:

La función escalar  $V : D \rightarrow \mathfrak{R}$ , continuamente diferenciable en un dominio  $D \subset \mathfrak{R}^n$  que contiene el origen, donde la derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de  $\dot{x} = f(x, t)$  está dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

y que satisfacen las siguientes condiciones

1.  $V(x_e) = 0$
2.  $V(x) > 0$ , para  $x \neq x_e$  (positiva definida)
3.  $\dot{V}(x) < 0$ , para  $x \neq x_e$  (negativa semidefinida)

Entonces el estado de equilibrio  $x_e$  es estable asintóticamente.

Si una función escalar cumple con las condiciones anteriores los estados  $x$  satisfacen la superficie  $V(x) = C$ , donde  $C$  es una constante positiva, están en una hipersuperficie cerrada en el espacio de estado  $n$  dimensional al menos en el entorno del origen; denominada como superficie de Lyapunov o superficie de nivel. Si  $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ , esas superficies cerradas se extienden a todo el espacio de estado. La hipersuperficie  $V(x) = c_1$ , queda totalmente dentro de la hipersuperficie  $V(x) = c_2$  y  $V(x) = c_3$  si  $c_1 < c_2 < c_3 \in C$  (Figura 2.23); donde que a medida que  $c$  decrece, la superficie de Lyapunov  $V(x) = C$  se achica hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ .

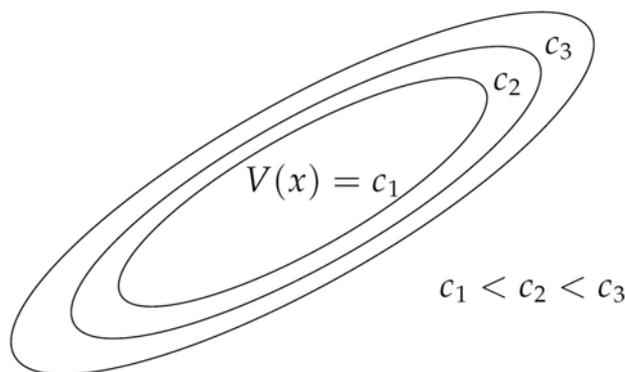


Figura. 2.23. Curvas de nivel de una función de Lyapunov

### 2.7.2 Ecuación de Lyapunov

El método de Lyapunov es algebraico y no requiere la determinación de los autovalores con la condición que tengan partes reales negativas o que los ceros del polinomio característico con la condición que tengan partes reales negativas, de un sistema lineal e invariante en el tiempo para el análisis de estabilidad. Si se considera la ecuación diferencial de este sistema como:

$$\dot{x} = Ax$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  es un vector de estado y  $A$  es una matriz constante de  $n \times n$ . Se supone que  $A$  es no singular. Entonces el único estado de equilibrio es el origen  $x = 0$ , donde para el sistema se elige una posible función de Lyapunov como

$$V(x) = x^T P x$$

Donde  $P$  es una matriz hermítica positiva, es decir una matriz cuadrada de elementos complejos que tiene la característica de ser igual a su propia transpuesta conjugada y  $P > 0$ . La derivada temporal de  $V(x)$  a lo largo de cualquier trayectoria es

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax)^T P x + x^T P Ax \\ &= x^T A^T P x + x^T P Ax \\ &= x^T (A^T P + PA)x \end{aligned}$$

Como se eligió  $V(x)$  positiva definida, para lograr estabilidad asintótica se requiere que  $\dot{V}(x)$  sea definida negativa. Por tanto se requiere que

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x$$

donde  $Q = -(A^T P + PA) =$  positiva definida

Por tanto para asegurar la estabilidad asintótica del sistema lineal e invariante en el tiempo, es suficiente que  $Q$  sea positiva definida o que los determinantes de todos los menores principales sucesivos de la matriz sean positivos.

En lugar de especificar previamente una matriz  $P$  positiva definida y examinar si  $Q$  es o no positiva definida, es mas conveniente especificar primero una matriz

$Q$  positiva definida y luego examinar si  $P$  determinada por

$$A^T P + PA = -Q$$

es o no positiva definida. Esto produce  $n(n+1)/2$  ecuaciones lineales para la determinación de los elementos  $p_{ij} = p_{ji}$  de  $P$ , donde es conveniente elegir  $Q = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad. [10]

### 2.7.3 Estabilidad Cuadrática

El sistema lineal e invariante en el tiempo con incertidumbre  $\dot{x} = A(\delta)x$  con  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Delta$  donde,  $A(\cdot)$  es una función continua de la incertidumbre paramétrica  $\delta$ . Se dice que el sistema es cuadráticamente estable a las perturbaciones  $\Delta$ , si existe una matriz  $X = X^T > 0$ , tal que:

$$A(\delta)^T X + XA(\delta) < 0, \quad \forall \delta \in \Delta.$$

El problema equivalente de factibilidad de la LMI es:

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -(A(\delta)^T X + XA(\delta)) \end{bmatrix} > 0$$

Se debe notar que en general una estabilidad cuadrática de un sistema para una clase de incertidumbre  $\Delta$ , contiene un infinito número de coacciones en la matriz simétrica  $X$ . El propósito de este análisis es dar condiciones adicionales para tratar con las incertidumbres que se pueden producir en las entradas del sistema, entonces se puede convertir un problema de estabilidad robusta en un problema numéricamente tratable.

## 2.8 BOUNDED REAL LEMMA

### 2.8.1 Generalidades

La formulación de un problema de control robusto implica un rechazo a las

perturbaciones e incertidumbres en la planta. Específicamente, esto consiste en la minimización de la ganancia de un sistema LTI (Lineal Invariante en el Tiempo) para el peor caso, donde el teorema llamado bounded real lemma es desarrollado como un algoritmo de cálculo de la norma  $H_\infty$ .

### 2.8.2 Modelado del Bounded Real Lemma

Consideremos el Sistema LTI, en la forma de ecuaciones de espacio de estados del sistema  $H$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \end{cases}$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados,  $z \in \mathfrak{R}^p$  es el vector de medidas y  $w \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de control. Siendo  $A, B, C, D$  matrices constantes de dimensiones compatibles; el sistema representado de forma equivalente es  $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , o algunas veces expresada como

$$H(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

que significa que la función de transferencia  $H(s)$  tiene un espacio de estados cuádruples  $(A, B, C, D)$ ; donde todos los sistemas prácticos tienen una ganancia cero a una frecuencia suficientemente alta, es decir,  $H(j\omega) \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$  y siendo esto a menudo conveniente, sin embargo, para modelar los efectos de alta frecuencia donde el término  $D \neq 0$  tenemos que  $H(j\omega) \rightarrow D \neq 0$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$  que frecuentemente usan los modelos generales.

El Bounded Real Lemma considera que el sistema  $H$ , con las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- i.  $A$  es estable y  $\|H\|_\infty < \gamma$ .
- ii. Existe un  $X = X^T > 0$  y  $\gamma > 0$  donde se debe minimizar  $\gamma$  sobre

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Usando el complemento de Schur, la anterior LMI puede ser reemplazada por

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0$$

aplicando nuevamente el complemento

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T C & XB + C^T D \\ B^T X + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

o en forma equivalente

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & X & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} < 0$$

obteniendo la inecuación de Riccati

$$A^T X + XA + C^T C + (XB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(B^T X + D^T C) < 0$$

donde si  $X$ , satisface esta LMI, entonces aplicando la ecuación cuadrática de Lyapunov,  $V(z) = z^T X z \Rightarrow \dot{V}(z, w) < \gamma^2 w^T w - z^T z$

$$V(z, w) = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T C & XB + C^T D \\ B^T X + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0$$

$$\dot{V}(z, w) = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

$$y^T z = (Cx + Dw)^T (Cx + Dw) = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

ahora  $\dot{V}(z, w) + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0 \Leftrightarrow \|H\|_\infty < \gamma$ .

Nótese que la estabilidad esta implícitamente garantizada, si  $w = 0$ , tenemos

que  $\dot{V}(z, w) < -z^T z < 0$ , donde se eligió  $V(z)$  positiva definida, para lograr estabilidad asintótica es necesario que  $\dot{V}(z, w)$  sea definida negativa como queda demostrado que la ganancia del sistema no es mas que  $\gamma$ .

### 2.8.3 Aplicaciones del Bounded Real Lemma

Las aplicaciones más importantes son la formulación del control del estado de realimentación usando la norma  $H_\infty$ , para reducir las perturbaciones del sistema  $H$ . Por ejemplo consideremos el control para un sistema MIMO con un gado de libertad, descrito por las ecuaciones de estado y salida definido por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

con  $D = 0$ , se selecciona una ley de control de la forma

$$u = (r - Kx)$$

con  $r(t)$  como el vector de las variables de estado deseadas y  $K$  como matriz de ganancia de realimentación de estado, que es representado en el diagrama de bloques de estados de la *Figura 2.24* [11], que puede ser expresado como

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$

$$y = Cx$$

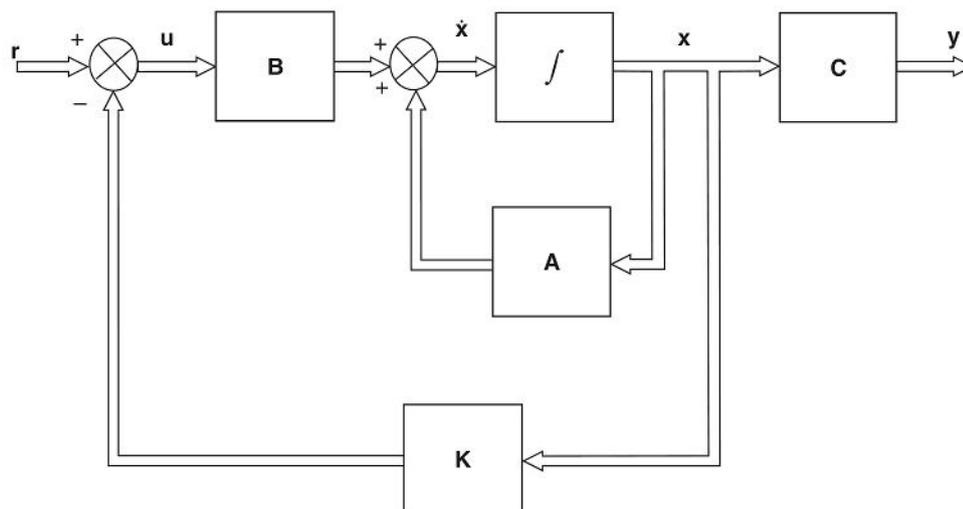


Figura. 2.24. Diagrama de bloques de estados de un sistema MIMO

se busca un controlador de realimentado  $K$ , mediante control  $H_\infty$ :

Usando el bounded real lemma tenemos:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + \gamma^{-2} P B B^T P + C^T C < 0$$

ahora, multiplicando por  $X = P^{-1}$ :

$$X(A - BK)^T + (A - BK)X + \gamma^{-2} B B^T + X C^T C X < 0$$

notando que  $Y = KX$ , obtenemos

$$X A^T + A X - Y^T B^T - B Y + \gamma^{-2} B B^T + X C^T C X < 0$$

Esta desigualdad matricial puede ser convertida a una LMI usando el teorema de Schur. Primero multiplicando la inecuación por  $\gamma$  y entonces asumiendo  $X = \gamma X$  y  $Y = \gamma Y$ :

$$X A^T + A X - Y^T B^T - B Y + \gamma^{-1} B B^T + \gamma^{-1} X C^T C X < 0$$

aplicando nuevamente el teorema de Schur, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} X A^T + A X - Y^T B^T - B Y & X C^T & C^T \\ & -\mathcal{A} & 0 \\ & B^T & 0 & -\mathcal{A} \end{bmatrix} < 0, X > 0$$

Es decir, minimizar  $\gamma$ , sujeto a la LMI anterior, obteniendo el controlador que es  $K = YX^{-1}$ . [12]

## **CAPÍTULO 3**

### **MODELO DEL MÓDULO PCT-2 (MÓDULO DE CONTROL DE TEMPERATURA DE FLUJO DE AIRE)**

#### **3.1 MEDICIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LA PLANTA**

##### **3.1.1 Introducción**

En el siguiente capítulo se expone las ideas generales sobre el modelado aproximado del módulo de control de temperatura, donde para llegar a la implementación del controlador robusto, es necesario conocer como responde el proceso; dependiendo en gran medida, del grado de aproximación con el que se recojan, de forma matemática, la respuesta del mismo frente a una entrada en el sistema bajo ciertas condiciones. Es decir, mediante una serie de experimentos y obtención de datos para llegar a un modelo matemático que represente en forma real el proceso en estudio.

En la *Figura 3.1* se muestra el modelo físico del módulo de temperatura, que consta de un sensor tipo IC de estado sólido, el cual por su tipo, es lineal. Además de esto, se tiene un conducto de flujo de aire, el cual mediante un ventilador, que renova el aire que dentro de él se encuentra. Una resistencia o niquelina, que se encuentra en la entrada del conducto, es la encargada de calentar el aire que ingresa. De esta forma y gracias al ventilador, se tienen diferentes temperaturas a lo largo del conducto de aire.

Nótese que para asegurar que se mida una solución homogénea, el punto de supervisión se localiza a cierta distancia del punto de mezcla. Por tanto, se tiene interés en conocer la forma en que responde la temperatura de salida,  $T_o(t)$ , a los cambios en el voltaje de la niquelina en la entrada,  $V(t)$ .

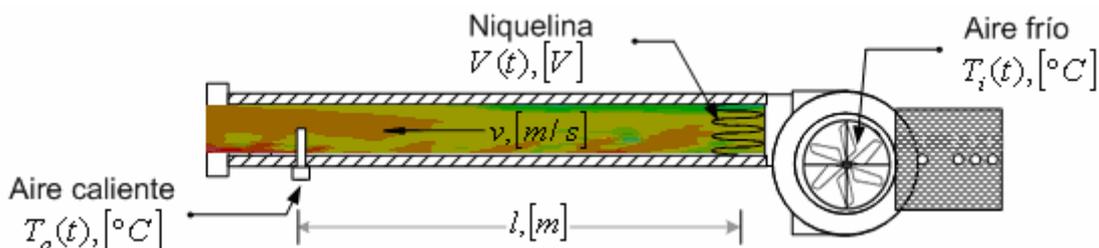


Figura. 3.1. Proceso térmico del módulo PCT-2

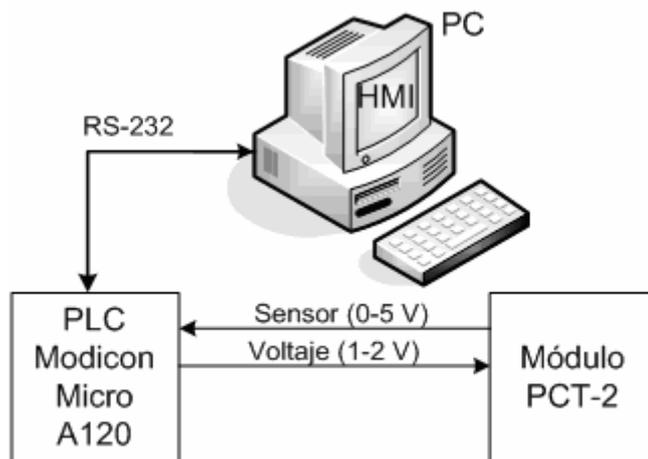
### 3.1.2 Conexiones básicas

#### 3.1.2.1 Componentes del sistema

Los componentes principales del sistema de adquisición de datos se muestran en la Figura 3.2 que se detallan a continuación:

- **Elemento primario y de medición:** sensor-transmisor de temperatura IC (variación lineal). Toma la temperatura a la salida del calentador (20 – 70 [°C]), y envía una señal analógica de voltaje (0 – 5 [V]) hacia el controlador.
- **Controlador:** Controlador lógico programable (PLC) Modicon Micro 612/0, el cual incorpora un rack de entradas analógicas para recibir la señal del transmisor de temperatura y otro de salidas analógicas para enviar la señal hacia el actuador del proceso.
- **Actuador:** módulo Degem PCT-2 que simula a calentador eléctrico de temperatura, para simulación de procesos de control de temperatura disponible en el laboratorio.
- **Interfaz HMI:** consiste en el software de control y monitoreo del proceso una interfase de visualización (HMI), con la cual podremos realizar el

control y monitoreo del sistema desde cualquier PC mediante comunicación serial RS232; para la obtención de datos, realizado en InTouch® 9.5.



**Figura. 3.2. Diagrama general de componentes del sistema**

### 3.1.2.2 Interfaz HMI

Para la adquisición de datos ante una entrada escalón a la planta se proporciona una interfase: con un interruptor principal de conmutación para la entrada escalón, en este caso de 1V, un indicador de la temperatura actual del sistema en °C, una pantalla de visualización de los datos históricos y un directorio para el almacenamiento de datos en Excel, como se muestra en la *Figura 3.3*.

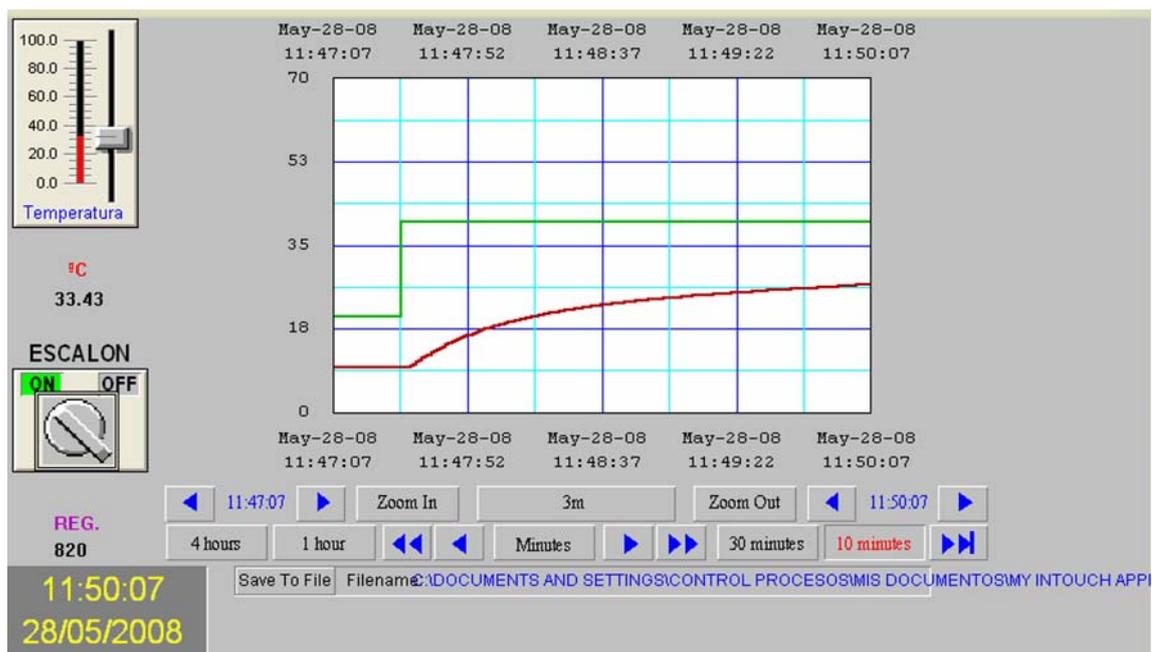


Figura. 3.3. Interfaz gráfica en InTouch® 9.5

### 3.1.2.3 Diagrama de Conexiones

El diagrama de conexiones en forma detallada se muestra en la *Figura 3.4*, donde el conector RJ45 debe ser colocado en la entrada Comm 1 del PLC, y éste, mediante el conector DB9 se comunica por el puerto serial hacia el computador. EL PLC debe encontrarse correctamente polarizado, con una fuente de 24 VDC en las terminales correspondientes. El transductor de temperatura, debe estar conectada en una de las entradas analógicas del PLC; para este caso, el terminal 10 corresponde al positivo (+) y el 12 para el negativo (-). La salida a relé OUT 1B es aquella que se va a complementar con la entrada escalón, es decir, cuando se envié una señal de 5V la temperatura empezara a elevarse hasta un punto de estabilización obteniendo para una misma señal de entrada, diferentes señales de salida en diferentes tiempos.

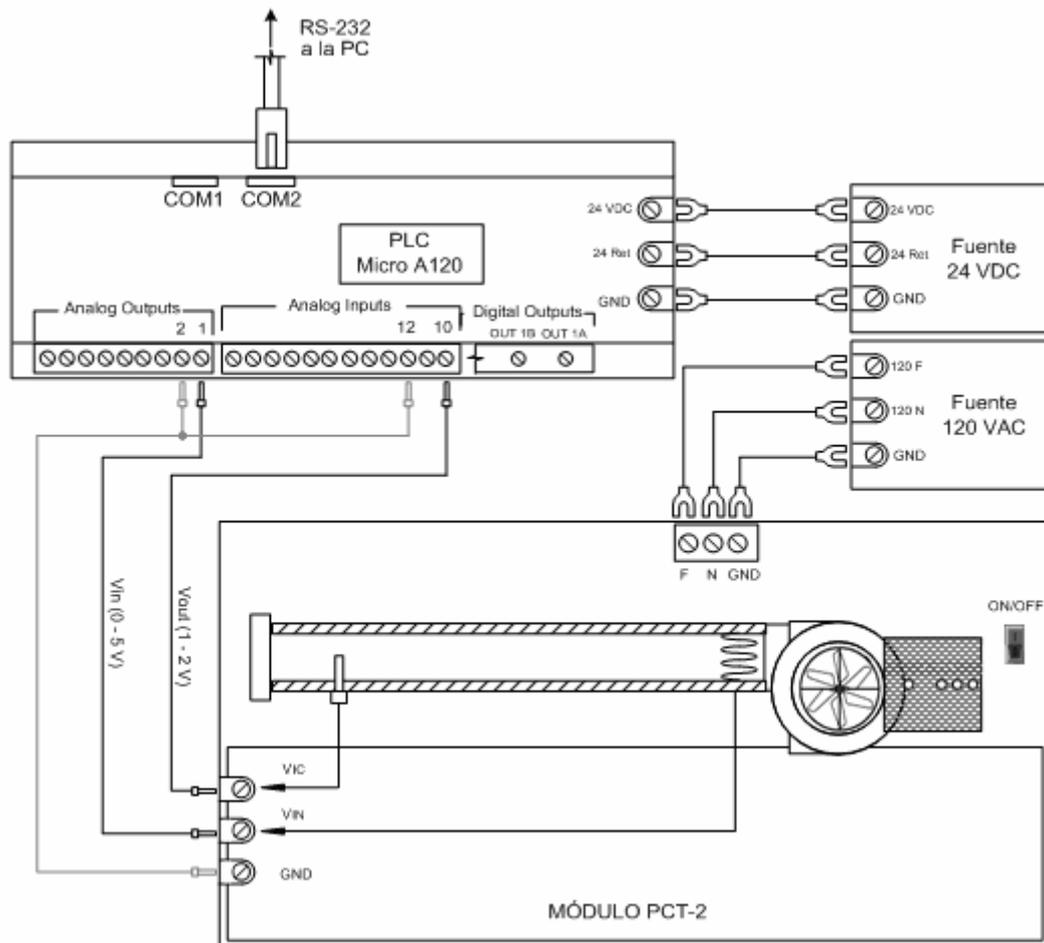


Figura. 3.4. Diagrama específico para adquisición de datos del módulo PCT-2

## 3.2 MEDICIÓN DE RETARDO DE TIEMPO PARA DIFERENTES CONDICIONES DE INGRESO DE AIRE

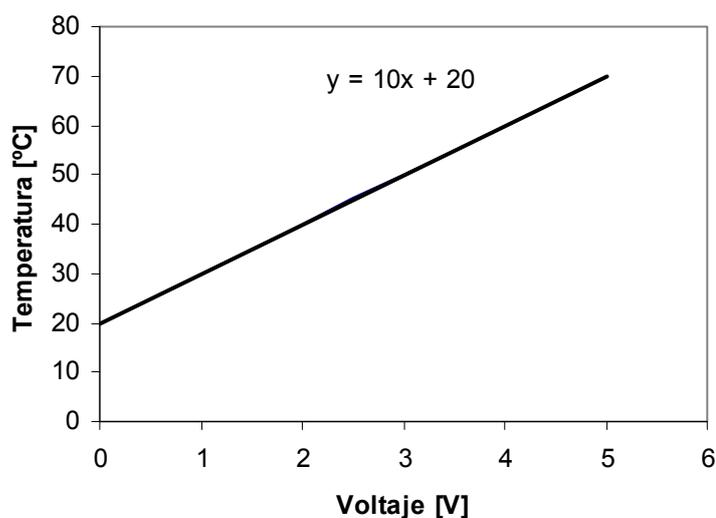
### 3.2.1 Obtención de la función de transferencia de la planta con Matlab

La identificación de un sistema es la ciencia de construir los modelos matemáticos de un proceso a partir de los datos de entrada-salida medidos, estimando modelos dentro de ciertas clases de estructuras, escogiendo el modelo de mejor rendimiento de ajuste para los datos medidos. Antes de encontrar el modelo matemático de la planta, es importante conocer la ecuación del sensor transductor. Para el caso, se trata del sensor tipo IC, como ya se indicó, y proporciona los siguientes datos como se muestra en la *Tabla 3.2*:

<b>Temperatura (°C)</b>	20	30	40	50	60	70
<b>Voltaje (V)</b>	0	1	2	3	4	5

**Tabla. 3.1. Datos de Voltaje vs. Temperatura para el sensor tipo IC del módulo PCT-2**

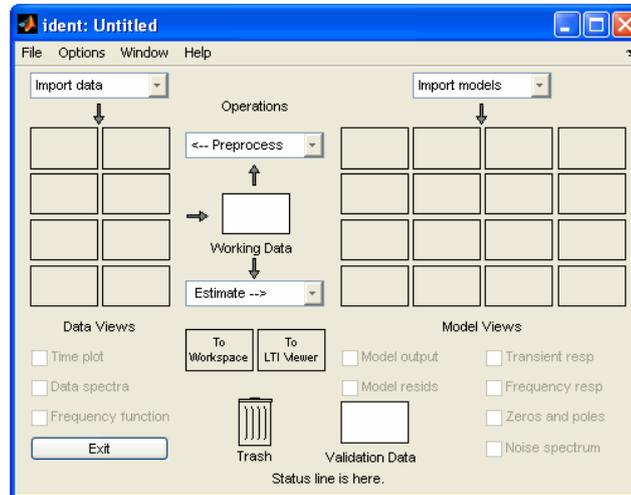
Realizando un análisis de interpolación de los datos anteriores, obtenemos la ecuación característica del sensor como en la *Figura 3.5*; lo cual nos indica que el sistema posee realimentación no unitaria, de donde las unidades de la salida, son diferentes de la salida del sensor; de donde la ganancia del sensor tipo IC es de 30. En el caso de relacionar el voltaje equivalente en temperatura resultante con el voltaje aplicado a la niquelina, esta ganancia es el factor de conversión.



**Figura. 3.5. Gráfica y ecuación del sensor tipo IC del módulo PCT-2**

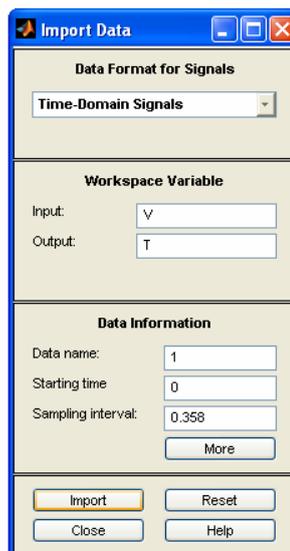
Normalmente se estiman varios modelos, y sus propiedades analizan mediante una interfaz del usuario gráfica del Identification Toolbox de Matlab® 7.0. El conjunto de datos generados por la planta, en reacción a la señal de cambio o escalón que son almacenados en una hoja de Excel, los mismos que son pasados al Workspace de Matlab, con la única y específica finalidad de poder manipularlos

a un nivel de cálculo más sofisticado. Una vez que los datos se encuentran en Matlab, es necesario abrir la interfaz gráfica del System Ident Toolbox, mediante el uso del comando **>>ident**, apareciendo la herramienta de la *Figura 3.6*.



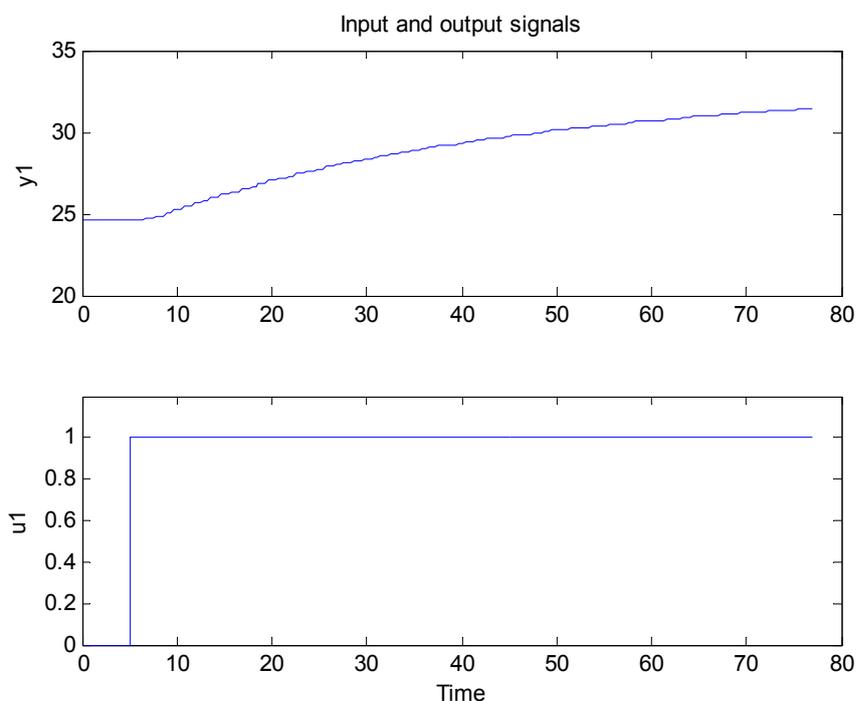
**Figura. 3.6. Identification Toolbox de Matlab® 7.0**

Ya dentro de la herramienta, se debe ingresar las variables, que representan a las matrices de datos, tanto de entrada como de salida, a una nueva interfaz gráfica de importación de datos (*Figura 3.7*).



**Figura. 3.7. Cuadro de dialogo de importación de datos del Ident Toolbox**

Después de haber importado los datos, la pantalla de interfaz gráfica principal contendrá el nuevo proceso a identificar y con ello algunas utilidades quedan disponibles, como la representación grafica en el tiempo de los datos entrada-salida (*Figura 3.8*).



**Figura. 3.8. Cuadro de dialogo de datos importados y representación grafica**

Para estimar el orden del posible modelo SISO, utilizamos el modelo paramétrico lineal polinomial (ARX) con ecuaciones diferenciales lineales en tiempo discreto (*Figura 3.9*). Seleccionando el orden y retardos que correspondan al mejor ajuste del modelo para una iteración inicial; donde en la estructura  $na$  es el numero de polos,  $nb$  es el número de ceros mas 1 y  $nk$  es el retardo de tiempo dado por el número de muestras antes que la salida responda a la entrada del sistema; con la condición que  $nb + nk$  debe exceder a  $na + 1$ . [13]

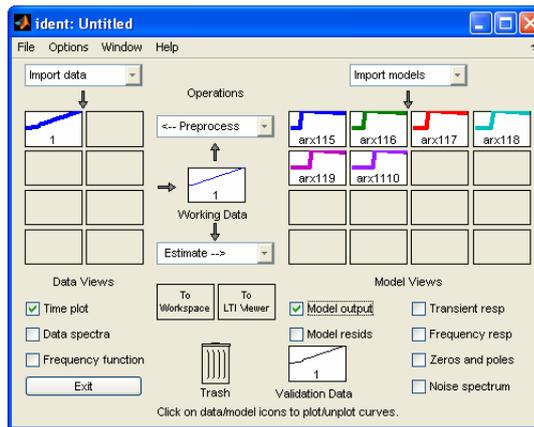


Figura. 3.9. Cuadro de dialogo de modelo ARX

Como se puede apreciar, para los valores de  $na = 1$ ,  $nb = 1$  y  $nk = 9$  se logra un coeficiente de regresión mayor al 98%, por lo cual se puede considerar, en teoría, este modelo como aceptable para el proceso como se muestra en la Figura 3.10.

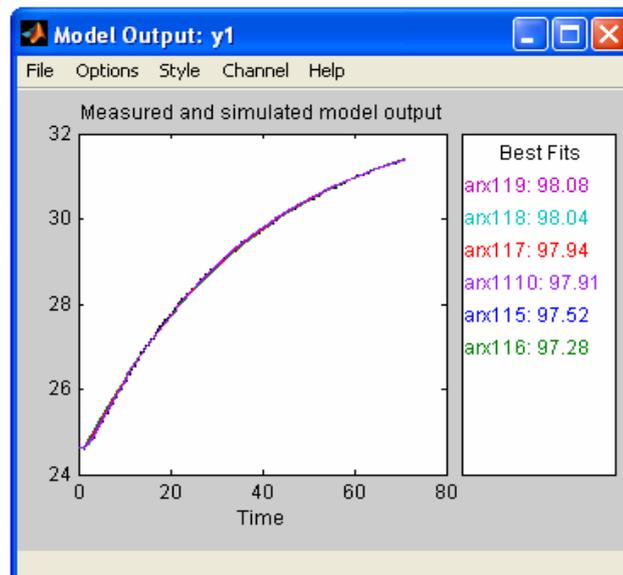


Figura. 3.10. Curvas de ajuste del con el modelo ARX

Finalmente convertimos el modelo de tiempo discreto a tiempo continuo y a un sistema LTI, obteniendo:

```
>> sys=d2c(arx119);
>> sys=zpk(sys);
>> sys=sys(1,1)
```

$$\frac{T_o(s)[^{\circ}C]}{V(s)[V]} = \frac{1.2172}{s + 0.04045} \cdot e^{-3.1s}$$

donde en esta función,  $T(s)[^{\circ}C]$  representa la salida en grados de temperatura y  $X(s)[V]$  representa el voltaje aplicado hacia la niquelina que calienta el flujo de aire. La función de transferencia con incertidumbre del proceso de control de temperatura de flujo de aire puede ser expresada de la forma general como

$$\frac{T_o(s)[^{\circ}C]}{V(s)[V]} = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot e^{-\tau_d s} = \frac{30.0915}{24.7219s + 1} \cdot e^{-3.1s}, \text{ donde:}$$

$K$	; ganancia de estado estacionario
$\tau$	; constante de tiempo
$\tau_d$	; tiempo de retardo

### 3.2.2 Selección de condiciones

Los parámetros característicos del proceso dependen de las propiedades físicas y de operación del mismo, como el ingreso del flujo volumétrico de aire. La selección de las condiciones de adquisición de datos es muy importante, puesto que interesa conocer la variación del modelo matemático a los cambios en la entrada de aire. Para ello se realizó las medidas para tres condiciones de entradas de aire, como se indica en la *Tabla 3.1.*, de donde una aproximación del cálculo del tiempo muerto definido como:

$$\tau_d = \frac{l}{q_i / A_t} = \frac{A_t \cdot l}{q_i}, \text{ donde:}$$

$l$	; longitud del conducto
$q_i$	; caudal de entrada
$A_t$	; área transversal del conducto

nos dice que el tiempo de retardo es inversamente proporcional a la entrada del caudal de aire, incrementándose a medida que variamos para las diferentes posiciones hasta llegar a un valor de  $5[s]$ . [14]

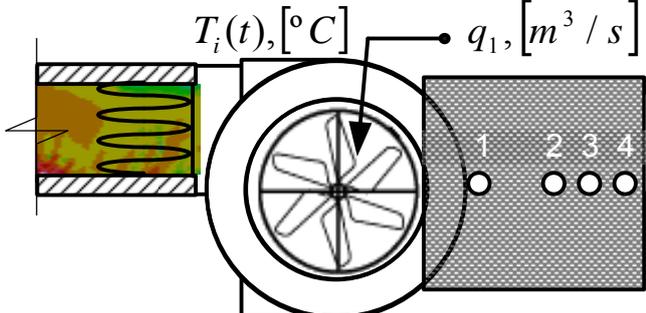
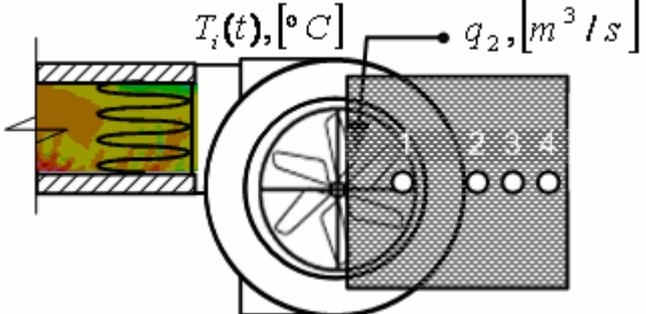
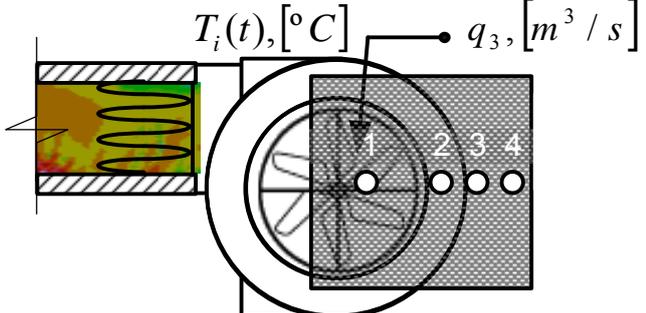
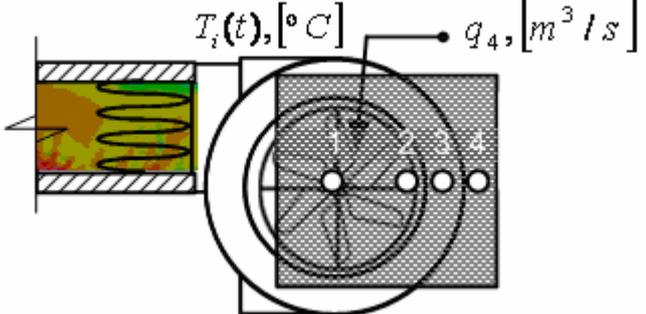
Ingreso de aire	Representación	Modelo
1		$G_1(s) = \frac{1.2172}{s + 0.04045} \cdot e^{-3.1s}$
2		$G_2(s) = \frac{1.2043}{s + 0.04182} \cdot e^{-4s}$
3		$G_3(s) = \frac{1.2130}{s + 0.04075} \cdot e^{-4.5s}$
4		$G_4(s) = \frac{1.2253}{s + 0.04129} \cdot e^{-5s}$

Tabla. 3.2. Condiciones de entrada de aire del módulo PCT-2

## CAPÍTULO 4

### DISEÑO Y SIMULACIÓN DEL CONTROLADOR USANDO LA TÉCNICA DE LOOP-SHAPING

#### 4.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

##### 4.1.1 Descripción General y especificaciones

El control robusto abarca todos aquellos problemas que se caractericen por considerar incertidumbres y perturbaciones en el modelo que sean tolerables por un controlador fijo lineal e invariante en el tiempo; donde para explicar el procedimiento de diseño consideramos el sistema de control realimentado más elemental puede verse representado en la *Figura 4.1*, donde el objetivo de un sistema de control es hacer que la salida  $y$  se comporte de una manera deseada manipulando la entrada de la planta  $u$ . El problema del controlador es manipular  $u$  para neutralizar el efecto de una perturbación externa  $d$  y mantener la salida cerca del punto de referencia. Así, en ambos casos nosotros queremos que el error del control  $e = y - r$  sea pequeño, con el algoritmo para ajustar  $u$  basado en la información disponible es el controlador  $K$ . Para llegar a un buen diseño de  $K$  necesitamos la información previa sobre el ruido en el sensor, las entradas de referencia, el modelo de la planta verdadera  $G$  y la perturbación  $d$  a la entrada de  $G$ ; donde estos dos últimos son la mayor fuente de dificultad porque son inexactas o pueden cambiar con el tiempo.

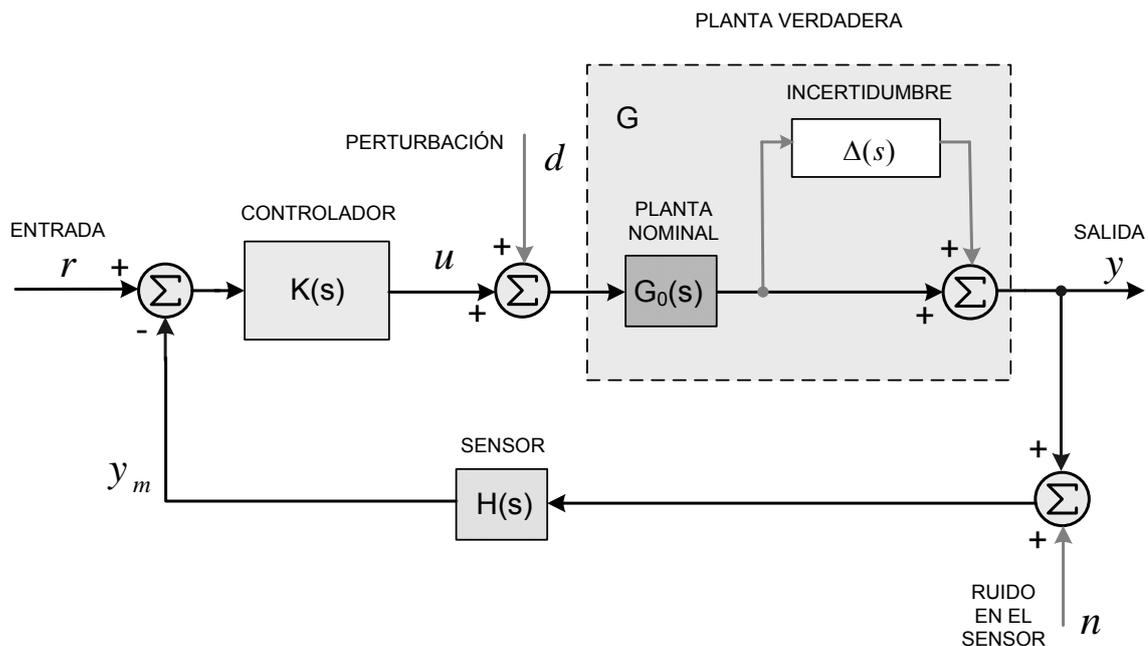


Figura. 4.1. Diagrama estructural de un sistema de control en lazo cerrado

Representando los modelos lineales, la entrada para el controlador  $K(s)$  es  $r - y_m$  donde  $y_m = y + n$  es la salida medida de la salida  $y$  y  $n$  es la medida del ruido. Entonces, la entrada de la planta es  $u = K(s)(r - y - n)$ . El objetivo del control es manipular  $u$  (diseñar  $K$ ) tal que el error  $e$  permanezca pequeño a pesar de perturbaciones  $d$ . El error del control es definido como  $e = y - r$ . El modelo de la planta es escrito como  $y = G(s)(u + d)$  o

$$y = GK(r - y - n) + Gd$$

$$(I + GK)y = GKr + Gd - GKn,$$

Para caracterizar el comportamiento de un sistema de control resulta útil definir una serie de operadores, o matrices de transferencia:

- Función de Lazo Abierto o Razón de Retorno:

$$L = KG$$

- Función Sensibilidad:

$$S = (I + GK)^{-1} = (I + L)^{-1}$$

- Función Sensibilidad Complementaria:

$$T = (I + GK)^{-1} GK = (I + L)^{-1} L$$

de donde se obtiene la respuesta de lazo cerrado como:

$$y = \underbrace{(I + GK)^{-1} GK r}_T + \underbrace{(I + GK)^{-1} Gd}_S - \underbrace{(I + GK)^{-1} GK n}_T$$

entonces el error es

$$e = y - r = -Sr + SGd - Tn$$

donde hemos usado el hecho de que  $S + T = I$ . La correspondiente señal de entrada de la planta es  $u = KSr - KSGd - KSn$ .

Loop-shaping es un procedimiento de diseño que envuelve explícitamente el moldeo de la magnitud de la función de transferencia en lazo abierto  $L = GK$ . Esencialmente, para conseguir los beneficios de control de realimentación queremos la ganancia del lazo,  $|L(j\omega)|$ , para ser tan grande como posible dentro de la región del ancho de banda.

$$\text{retomando } e = -\underbrace{(I + L)^{-1} r}_S + \underbrace{(I + L)^{-1} Gd}_S - \underbrace{(I + L)^{-1} Ln}_T$$

para un “control perfecto”, queremos

$$e = y - r = 0, \text{ esto es; que nos gustaría}$$

$$e \approx 0 \cdot r + 0 \cdot d + 0 \cdot n$$

Los primeros dos requisitos en la ecuación anterior, es decir el rechazo de perturbaciones y seguimiento de entrada, son obtenidas con  $|S| \approx 0$ , o de forma equivalente,  $|T| \approx I$ ; donde desde que  $S = (I + L)^{-1}$ , implica que  $L$  debe ser grande en magnitud. Por otro lado, los requerimientos para cero transmisión del ruido implica que  $|T| \approx 0$ , o equivalentemente,  $|S| \approx I$ , lo cual es obtenido con  $|L| \approx 0$ .

Esto muestra la naturaleza fundamental del diseño de realimentación que siempre involucra un intercambio entre objetivos contradictorios; debiéndose

llegar en cada problema de diseño a una solución de compromiso, procurando que cada uno se cumpla en un rango de frecuencias de interés. Afortunadamente, estos son generalmente en diferentes rangos de frecuencia, esto es que  $d$  y  $n$  son típicamente significantes en rangos de frecuencia diferentes; a la hora de plantearse el diseño, surgen una serie de objetivos:

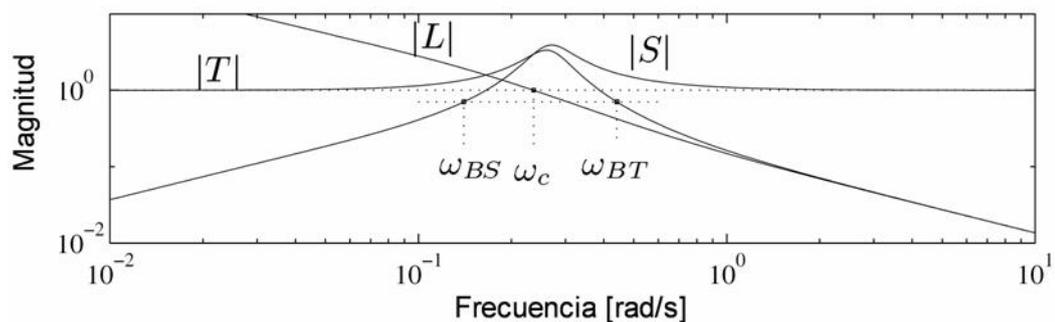
- **Estabilidad.-** Las salidas retornen a su estado de equilibrio cuando el sistema presente ruido.
- **Desempeño.-** Señales de error pequeñas, en presencia de perturbaciones y señal de referencia.
- **Robustez.-** El sistema sea estable en presencia de incertidumbres en el modelo nominal.

Nosotros debemos considerar también la velocidad de respuesta y esto lleva a considerar el ancho de banda del sistema. En general, un ancho de banda grande corresponde a un tiempo del levantamiento más rápido, donde las señales de alta frecuencia pasan fácilmente hacia las salidas. Un ancho de banda alto también indica un sistema que es sensible al ruido y a las variaciones de parámetros. Recíprocamente, si el ancho de banda es pequeño, la respuesta en tiempo generalmente será lenta, y el sistema normalmente será más robusto. Además, debemos considerar las seguridades directas como el margen de ganancia  $GM$  contra la ganancia de error y el de fase  $PM$  contra la incertidumbre de ganancia de tiempo; donde típicamente, nosotros requerimos,  $GM > 2 \approx 6$  dB y  $PM > 30^\circ$ .

El sistema se vuelve inestable si nosotros agregamos un retardo de tiempo de  $\tau_{d_{\max}} = PM / \omega_c$ , con  $\omega_c$  como la frecuencia de cruce de ganancia  $|L(j\omega_c)| = 1$ . Nótese que decreciendo el valor de  $\omega_c$  (reduciendo el ancho de banda del lazo cerrado, resultando en una respuesta lenta) el sistema puede tolerar errores de retardos de tiempos grandes. Así, considerando un retardo de tiempo  $\tau_d$ , el cual produce una fase adicional de  $-\tau_d \omega$ , el cual a una frecuencia de  $\omega = 1/\tau_d$  es

$-1 \text{ rad} = -57^\circ$ ; entonces para un aceptable desempeño de control necesitamos  $\omega_c < 1/\tau_d$ , aproximadamente.

El máximo pico de las funciones sensibilidad y sensibilidad complementaria son definidas como,  $M_S = \max_{\omega} |S(j\omega)|$ ;  $M_T = \max_{\omega} |T(j\omega)|$ , donde típicamente, es requerido que  $M_S$  sea menos que 2 (6 dB) y  $M_T$  menos que 1.25 (2 dB). Específicamente, para los sistemas con  $PM < 90^\circ$  (la mayoría de los sistemas prácticos) tenemos que  $\omega_{BS} < \omega_c < \omega_{BT}$ , donde el ancho de banda de lazo cerrado,  $\omega_B$ , es la primera frecuencia de cruce de forma ascendente a  $1/\sqrt{2} \approx -3$  dB de  $|S(j\omega)|$  y por otro lado  $\omega_{BT}$  es la primera frecuencia de cruce de forma descendente a  $1/\sqrt{2} \approx -3$  dB de  $|T(j\omega)|$ , como se muestra en la *Figura 4.2*.



**Figura. 4.2. Magnitud de Bode para las funciones  $L$ ,  $S$  y  $T$**

Además la estabilidad del sistema ante una incertidumbre multiplicativa no cambiará si

$$|\Delta(j\omega)| < \left| 1 + \frac{1}{G(j\omega)K(j\omega)} \right|, \forall \omega.$$

La ecuación anterior se llama criterio de estabilidad robusta, que es un test de robustez.

### 4.1.2 Loop-shaping con norma $H_\infty$

En esta sección, para especificaciones de diseño más complejas conociendo características de señales externas tales como referencia, perturbaciones e incertidumbres en el dominio de la frecuencia es la de formación de filtros apropiados. Estos son un filtro pasa-bajo  $W_1$  para desempeño robusto y un filtro pasa-alto  $W_2$  para estabilidad robusta, en cuyo trazado de su magnitud, refleja los límites  $H_\infty$  uniformes deseados; estableciendo tres zonas de frecuencias considerando que estas señales externas pueden ser representadas como una suma de sinusoidales en un rango específico de frecuencias, de forma que dentro de cada una se trata de conseguir unos objetivos primordiales (*Figura 4.3*):

- **Zona de baja frecuencia:** Alta ganancia en lazo abierto lleva a buenas propiedades de rechazo a perturbaciones y seguimiento de referencia.
- **Zona de frecuencia de cruce:** A frecuencias cercanas a la frecuencia de cruce de ganancia, en la que se requiere propiedades tales como márgenes de estabilidad y velocidad de respuesta.
- **Zona de alta frecuencia:** Una pequeña ganancia en lazo abierto es adecuada para que la respuesta debida al ruido en sensores sea considerablemente baja, y para mantener la estabilidad del sistema frente a incertidumbres en la planta.

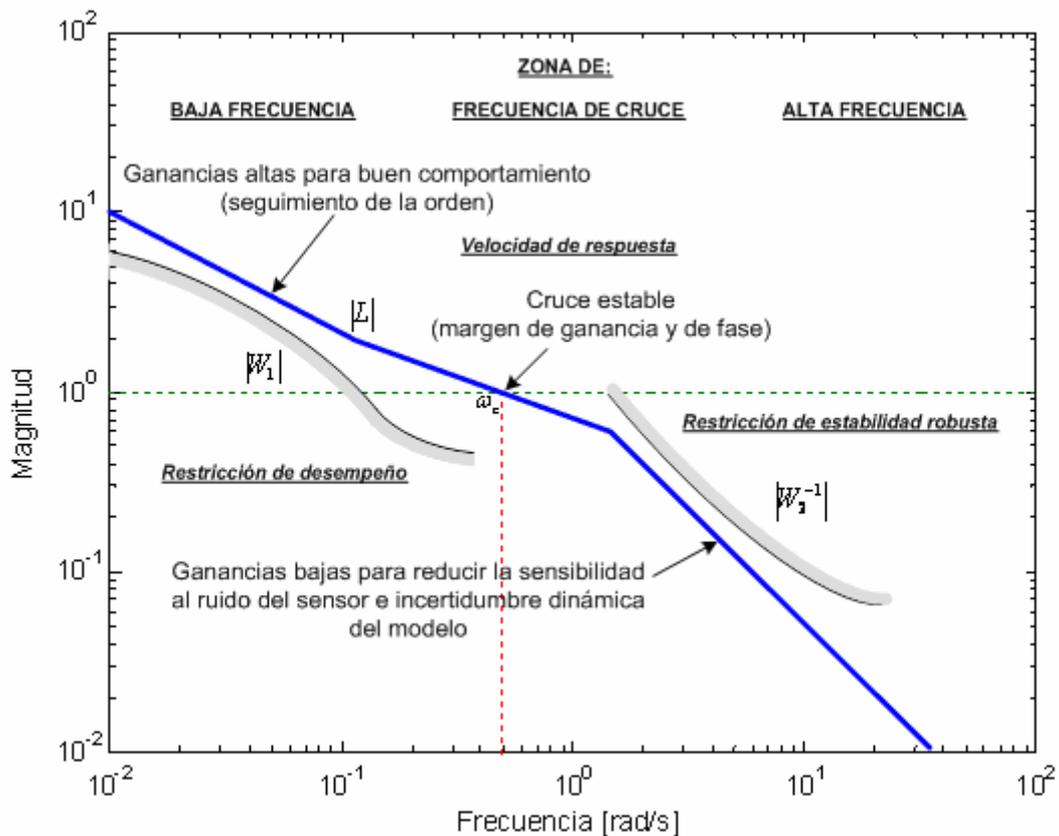


Figura. 4.3. Zona de frecuencias de la función en lazo abierto  $GK$

La selección de los filtros es un paso muy importante en cualquier diseño de control. En control robusto, estos son los portadores de información sobre el desempeño robusto y estabilidad robusta deseados en el diseño. La selección de filtros para un problema de diseño específico no es un ejercicio muy sencillo. Involucra a menudo muchas iteraciones y una sintonización fina. Es muy difícil dar una fórmula general para los filtros que trabajarían en cada caso y nosotros daremos sólo una fórmula general para una aproximación, donde en algunos casos, para mejorar el desempeño, nosotros podemos requerir de un filtro de orden superior siendo necesario que estos sean estables y cuyos polos estén lo suficientemente lejos del eje imaginario. [15]

Un gráfico asintótico de un  $W_1$ , se muestra en la *Figura 4.4*, donde el filtro de orden  $n$  ilustrado puede representarse por

$$W_1(s) = \left( \frac{\varepsilon_1^{1/n} s + \omega_{c1}}{s + \omega_{c1} / M_1^{1/n}} \right)^n, \quad \forall n \geq 1$$

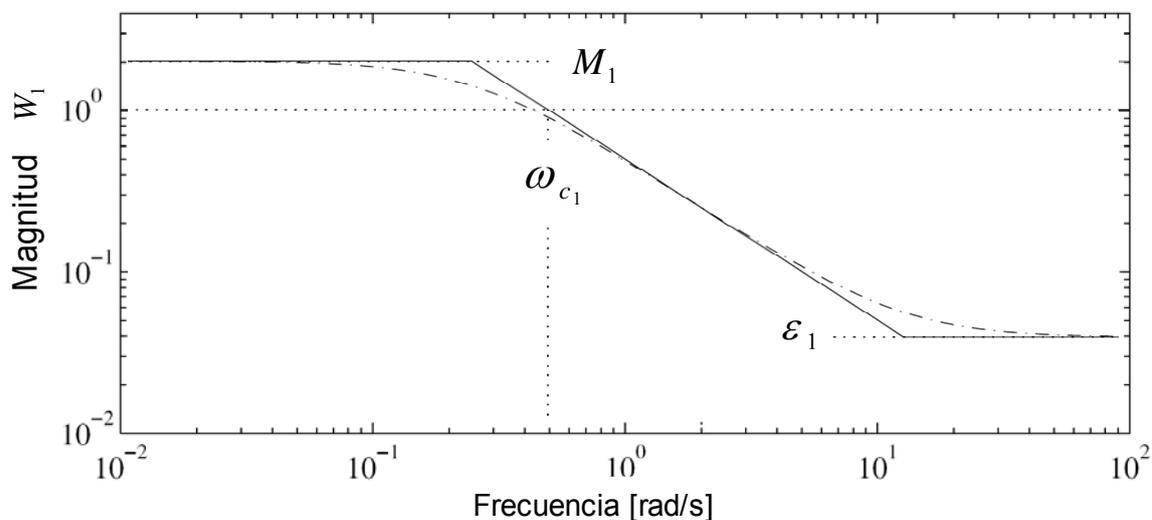


Figura. 4.4. Filtro  $W_1$ : exacto y asintótico

Similarmente la aproximación asintótica del filtro  $W_2$  se muestra en la Figura 4.5, con  $\omega_{c1} < \omega_{c2}$ , un filtro apropiado es

$$W_2(s) = \left( \frac{s + \omega_{c2} \varepsilon_2^{1/n}}{s / M_2^{1/n} + \omega_{c2}} \right)^n, \quad \forall n \geq 1$$

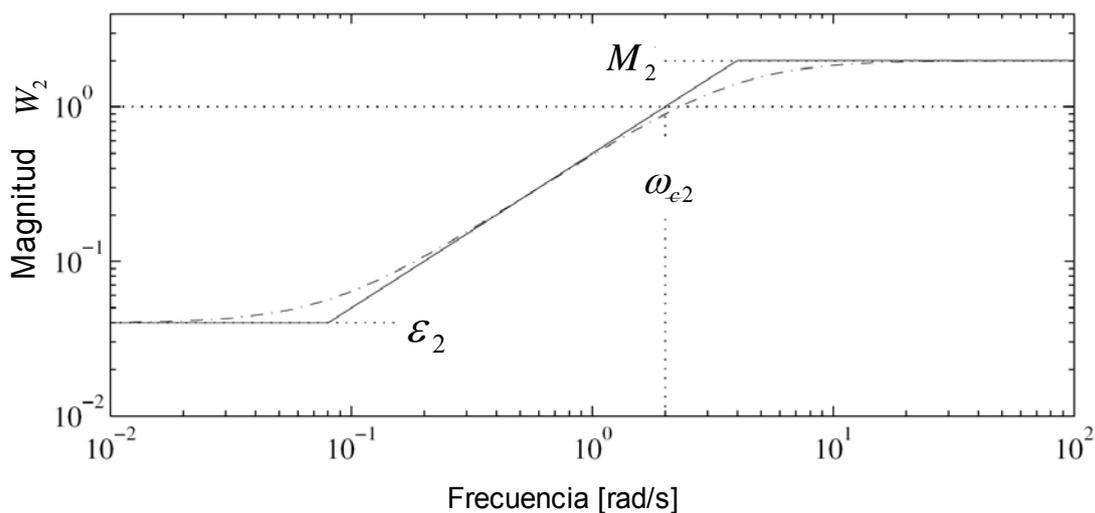
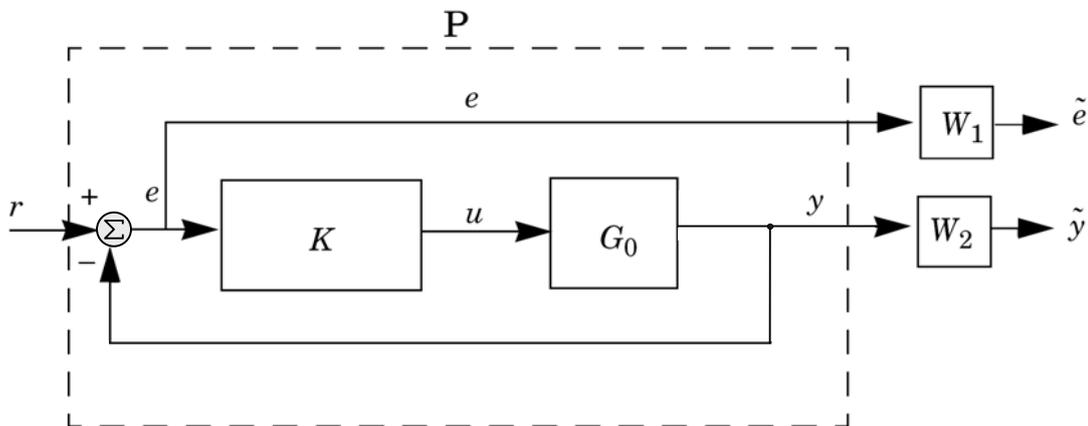


Figura. 4.5. Filtro  $W_2$ : exacto y asintótico

### 4.1.3 Loop-shaping multivariable con norma $H_\infty$

La configuración del problema general de control se expresa de forma equivalente como se muestra en la *Figura 4.6.*, donde los filtros normalizan las señales como el error, perturbaciones, ruido e incertidumbres y  $P$  la función de transferencia de interconexión del sistema. El problema de síntesis de  $H_\infty$  es encontrar un controlador estabilizante  $K(s)$  que haga la ganancia RMS en lazo cerrado de  $r$  a  $\begin{pmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$  menos de  $\gamma$ ; donde su matriz función de transferencia en lazo cerrado es  $\begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix}$ . Obteniendo la restricción de ganancia se puede expresar como  $\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma$ , que se conoce como condición de desempeño robusto donde el sistema satisface las especificaciones de desempeño en presencia de incertidumbres en el modelo nominal.



**Figura. 4.6.** Estructura para problema de control robusto con  $H_\infty$ .

Las rutinas en Matlab para la síntesis del controlador óptimo  $H_\infty$ , asume el problema en la forma general de la *Figura 4.7*; donde  $P_{aum}(s)$  es la planta aumentada obtenida añadiendo los filtros  $W_1(s)$  y  $W_2(s)$  que no son parte del sistema físico. El diseño loop-shaping es encontrar un controlador  $K(s)$  el cual minimize la norma  $H_\infty$  del sistema en lazo cerrado para  $\gamma > 0$ , es decir,  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$  con el valor normalizado de  $\gamma = 1$  [16]

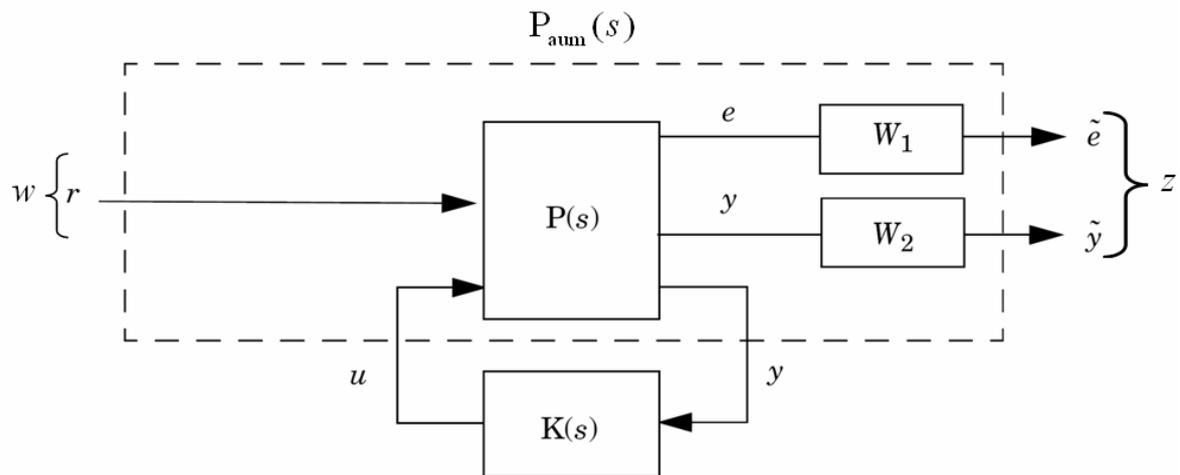


Figura. 4.7. Equivalente del problema de control robusto con  $H_\infty$ .

## 4.2 HERRAMIENTAS DE DESARROLLO

Las funciones de LMI Control Toolbox de Matlab usadas en Loop-shaping ofrecen una variedad de herramientas para facilitar la descripción y manipulación de especificaciones de diseño y cálculo del controlador. La herramienta LMI Control Toolbox de MATLAB, ayuda de gran manera para poder realizar la síntesis de la norma  $H_\infty$  usando tanto las aproximaciones basadas en Riccati o en LMI, donde se sigue el siguiente procedimiento:

1. Expresar las funciones de transferencia lineales e invariantes en el tiempo como una matriz del sistema o viceversa.
2. Especificar gráficamente las especificaciones de diseño como la determinación en la ganancia de respuesta y frecuencia de las funciones de transferencia de los filtros.
3. Especificar la estructura de control, es decir como se organiza la realimentación de lazo y cual de las funciones de transferencia de entrada/salida son relevantes para conseguir los objetivos de Loop-shaping.

4. Síntesis del desempeño de la norma  $H_\infty$  en el resultado de la estructura de control para de esta manera, encontrar el controlador más adecuado.
5. Graficas de respuesta en frecuencia y tiempo con modelo de incertidumbre y perturbación.

A continuación se hace una descripción de las funciones utilizadas para alcanzar los objetivos anteriormente mencionados:

#### 4.2.1 Función `ltisys`

**Propósito.-** Empaqueta la determinación de espacio de estado  $(A, B, C, D, E)$  en una simple matriz del sistema.

**Sintaxis.-**

```

sys = ltisys(a)
sys = ltisys(a,e)
sys = ltisys(a,b,c)
sys = ltisys(a,b,c,d)
sys = ltisys(a,b,c,d,e)
sys = ltisys('tf',num,den)

```

**Descripción.-** Para sistema de tiempo continuo:

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

La función **ltisys** guarda  $A, B, C, D, E$  en una matriz simple **sys** con la siguiente estructura:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} A + j(E - I) & B & n \\ & & 0 \\ & & \vdots \\ C & D & 0 \\ \hline 0 & & -\text{inf} \end{array} \right]$$

con  $j = \sqrt{-1}$ ; donde la entrada superior derecha  $n$ , da el número de estados, es decir  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  mientras que la entrada –inf es usada para diferenciar matrices del sistema de matrices singulares. Esta estructura de datos es llamada una matriz del sistema. Cuando se omiten  $D$  y  $E$  estos son puestos con los valores predefinidos  $D = 0$  y  $E = I$ .

La sintaxis **sys = Itisys(a)** especifica el sistema autónomo  $\dot{x} = Ax$ , mientras que **sys = Itisys(a,e)** especifica  $E\dot{x} = Ax$ . Finalmente se puede especificar sistemas por su función de transferencia:

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

Donde la sintaxis sería:

```
sys = Itisys('tf',num,den)
```

Donde “num” y “den” son los vectores de coeficientes del polinomio  $n(s)$  y  $d(s)$  en orden descendente.

#### 4.2.2 Función Ititf

**Propósito.-** Calcula la función de transferencia de un sistema SISO.

**Sintaxis.-** [num,den] = Ititf(sys)

**Descripción.-** Dada un sistema con simple entrada y simple salida definido en la matriz del sistema **sys**, la función **Ititf** retorna el numerador y el denominador de su función de transferencia.

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

Los argumentos de salida “num” y “den” son vectores que muestran los coeficientes de los polinomios  $n(s)$  y  $d(s)$  en orden descendente.

### 4.2.3 Función **sconnect**

**Propósito.-** Especifica estructuras de control generales o sistemas interconectados.

**Sintaxis.-**  $[P,r] = \text{sconnect}(\text{inputs},\text{outputs},K_{in},G1_{in},g1,G2_{in},g2,\dots)$

**Descripción.-** La función **sconnect** es útil en problemas de Loopshaping, para convertir estructuras de control generales en interconexiones Standard lineal-fraccionarias, usadas en la síntesis de  $H_{\infty}$ . Según esto la función **sconnect** retorna lo siguiente:

- La matriz del sistema  $P$  según la norma  $H_{\infty}$  de la planta  $P(s)$ .
- El vector  $r = [p2 \ m2]$  donde  $p2$  y  $m2$  son el número de entradas y salidas del controlador, respectivamente.

De forma general la función **sconnect** es útil para especificar interconexiones complejas de sistemas LTI. Los lazos de control generales o sistemas interconectados son descritos en términos del flujo de sus señales. Específicamente se puede decir que son:

- Las entradas exógenas, es decir qué señales entran en el lazo o interconexión.
- Las señales de entrada, es decir las señales generadas por el lazo o interconexión.
- Como se relacionan las entradas de cada sistema dinámico con respecto a las entradas exógenas y a las salidas de otros sistemas.

Las salidas de un sistema de nombre  $G$  son colectivamente denotadas por  $G$ . Para referirse a salidas particulares, por ejemplo la segunda y la tercera, se usa la sintaxis:  $G(2:3)$ .

Los argumentos de la función **sconnect** son los siguientes:

- El primer argumento “inputs” designa las entradas exógenas. Por ejemplo `inputs = 'r(2), d'` especifica dos entradas, un vector  $r$  de tamaño 2 y una entrada escalar  $d$ .
- El segundo argumento “outputs” designa las salidas generadas por el lazo de control. Las salidas son definidas como la combinación de las entradas exógenas y las salidas de los sistemas dinámicos. Por ejemplo `outputs = 'e=r-S;S+d'` especifica dos salidas  $e=r-y$  y también  $y+d$  donde  $y$  es la salida del sistema de nombre  $S$ .
- El tercer argumento “Kin” nombra el controlador  $u$  especifica sus entradas. Por ejemplo `Kin = 'K:e'` inserta un controlador de nombre  $K$  y salida  $e$ . Si no se especifica un nombre como `Kin = 'e'`, el nombre por defecto  $K$  se da al controlador.
- Los argumentos restantes vienen en pares y especifican para cada sistema LTI conocido en el lazo, una lista de su salida  $G_{kin}$  y una matriz del sistema  $g_k$ . La lista de entrada es de la forma:

`system name : input1 ; input2 ; ... ; input n`

Por ejemplo si la matriz del sistema de  $G$  y los filtros  $W_1, W_2, W_3, W_d, W_n$  (Figura 4.8) son guardados en las variables  $g, w1, w2, w3, wd, wn$ , respectivamente, la planta estándar correspondiente  $P(s)$  se forma con:

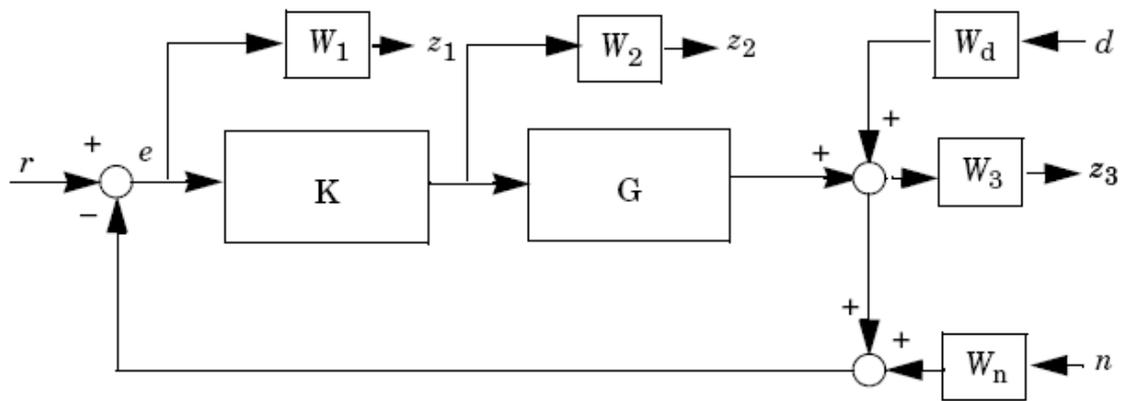


Figura. 4.8. Sistema  $G$  y los filtros  $W_1, W_2, W_3, W_d, W_n$

```

inputs = 'r;n;d'
outputs = 'W1;W2;W3'
Kin = 'K: e=r-y-Wn'
W3in = 'W3: y=G+Wd'
[P,r] = sconnect(inputs,outputs,Kin,'G:K',g,'W1:e',w1,...
'W2:K',w2,W3in,w3,'Wd:d',wd,'Wn:n',wn)

```

#### 4.2.4 Función smult

**Propósito.-** Interconexión en serie de sistemas lineales.

**Sintaxis.-** Se puede usar esta función de la siguiente manera:

```
sys = smult(g1, g2, ...)
```

**Descripción.-** La función **smult** forma la interconexión en serie (Figura 4.9).

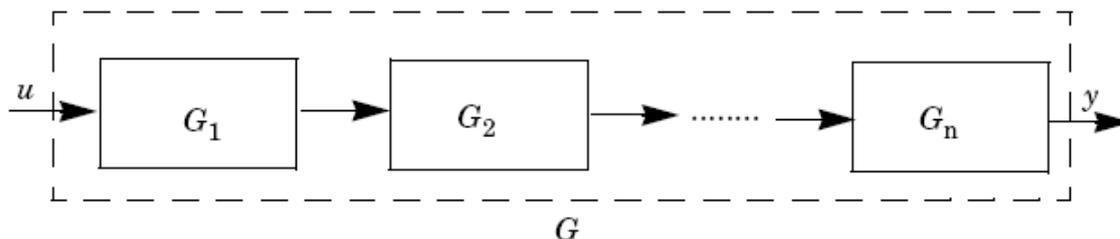


Figura. 4.9. Sistema de interconexión en serie

Los argumentos  $g_1, g_2, \dots$  son matrices de sistemas que contienen los datos de los sistemas de espacio de estado  $G_1, \dots, G_n$ . Las matrices constantes también se permiten como una representación de ganancias estáticas. Además, una o más de una de las entradas puede ser politépica o de modelo de parámetros dependientes afines, en cuyo caso la salida  $sys$  es de la misma naturaleza.

En términos de la función de transferencia, esta interconexión corresponde al producto de:

$$G(s) = G_n(s) \times \dots \times G_1(s)$$

Se debe notar el orden inverso de los términos.

#### 4.2.5 Función **sdiag**

**Propósito.-** Encadena sistemas lineales.

**Sintaxis.-** Se puede usar esta función de la siguiente manera:

$$g = \text{sdiag}(g_1, g_2, \dots)$$

**Descripción.-** La función **sdiag** retorna el sistema obtenido apilando las entradas y salidas del sistema  $g_1, g_2, \dots$  como en la *Figura 4.10*.

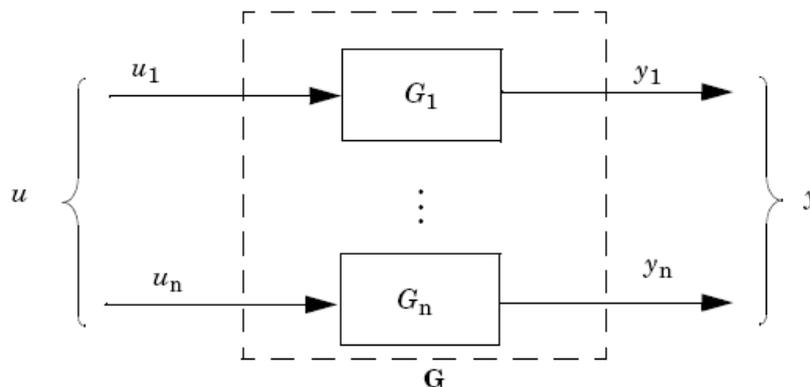


Figura. 4.10. Sistema lineal en cadena

Si  $G_1(s), G_2(s), \dots$  son las funciones de transferencia de  $g_1, g_2, \dots$ , la función de transferencia de  $g$  es:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & G_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

La función **sdiag** toma más de 10 argumentos de entrada. Uno o más de uno de los sistemas  $g_1, g_2, \dots$ , puede ser politópico o de parámetros dependientes, en cuyo caso  $g$  es de la misma naturaleza.

#### 4.2.6 Función hinflmi

**Propósito.-** Realiza la síntesis de  $H_\infty$  basada en LMI para plantas en tiempo continuo.

**Sintaxis.-** Se puede usar esta función de la siguiente manera:

`gopt = hinflmi(P,r)`

`[gopt,K] = hinflmi(P,r)`

`[gopt,K,x1,x2,y1,y2] = hinflmi(P,r,g,tol,options)`

**Descripción.-** La función **hinflmi** calcula un controlador  $K(s)$  internamente estable que minimiza el desempeño de la norma  $H_\infty$  el lazo de control (Figura 4.11).

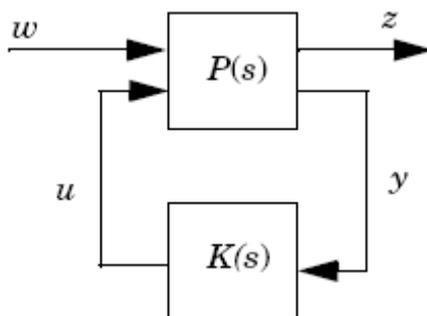


Figura. 4.11. Estructura general del sistema en lazo cerrado en control robusto

El desempeño de  $H_\infty$  es la ganancia RMS en lazo cerrado de la función de transferencia  $F(P,K)$  de  $w$  a  $z$ . Esta función implementa una aproximación basada en LMI para realizar la síntesis de  $H_\infty$ . La matriz del sistema  $P$  contiene la determinación en espacio de estado de la planta  $P(s)$  y la fila del vector  $r$  especificada por el número de sensores o medidores y controladores, poniendo  $r = [p2 \ m2]$  cuando  $y \in \mathcal{R}^{p2}$  y  $u \in \mathcal{R}^{m2}$ .

El desempeño  $H_\infty$  óptimo “gopt” y el controlador  $H_\infty$  óptimo  $K$  son retornados por el siguiente comando.

$$[\text{gopt}, K] = \text{hinflmi}(P, r)$$

Alternativamente, un controlador  $K$  que garantiza  $\|F(P, K)\|_\infty < g$ , lo cual se obtiene mediante:

$$[\text{gopt}, K] = \text{hinflmi}(P, r, g)$$

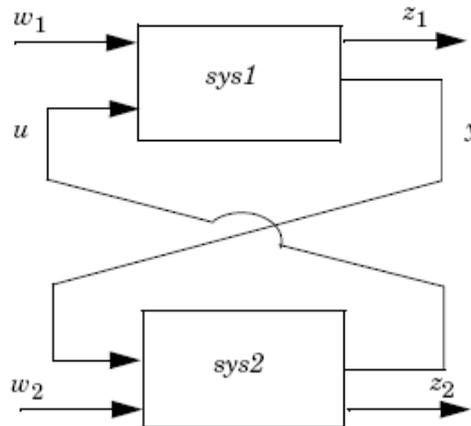
#### 4.2.7 Función slft

**Propósito.-** Forma la interconexión lineal-fraccionaria de dos sistemas invariantes en el tiempo.

**Sintaxis.-** Se puede usar esta función de la siguiente manera:

```
sys = slft(sys1,sys2,udim,ydim)
```

**Descripción.-** La función **slft** forma la interconexión realimentada lineal-fraccionaria (*Figura 4.12*).



**Figura. 4.12. Sistema con interconexión realimentada lineal-fraccionaria**

De los dos sistemas “sys1” y “sys2” y retorna una determinación “sys” de la función de transferencia de lazo cerrado de  $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ .

Los argumentos opcionales “udim” y “ydim” especifica la longitud de los vectores  $u$  y  $y$ . Cuando udim y ydim son omitidos, la función **slft** forma una de las dos interconexiones que siguen (*Figura 4.13*):

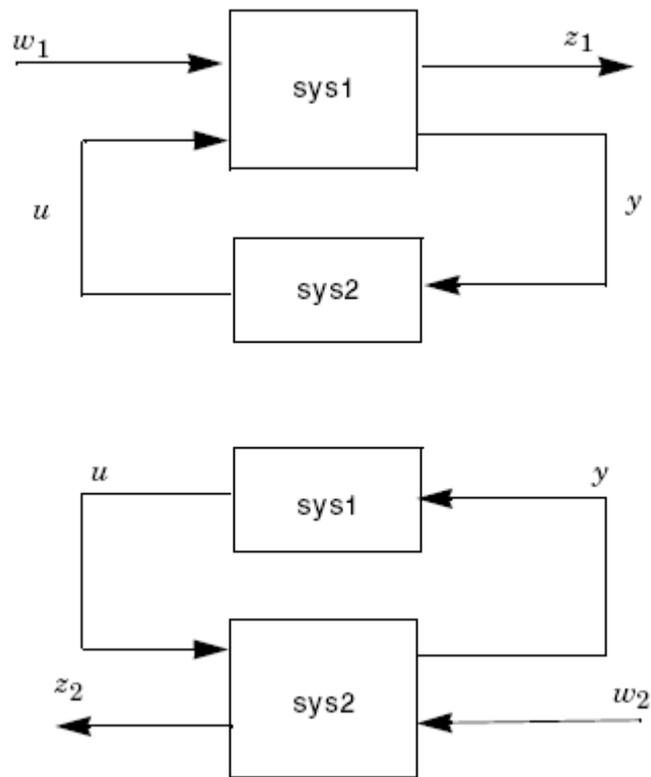


Figura. 4.13. Sistemas de interconexión

Dependiendo de cual sistema tiene el mayor número de entradas/salidas. Un error se muestra si ninguna de estas interconexiones se puede realizar.

#### 4.2.8 Función sinfo

**Propósito.-** Retorna el número de estados, entradas y salidas de un sistema LTI.

**Sintaxis.-** Se puede usar esta función de la siguiente manera:

`sinfo(sys)`

`[ns,ni,no] = sinfo(sys)`

**Descripción.-** Para un sistema lineal

$$\begin{aligned}E\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Especificado en la matriz del sistema `sys`, la función **sinfo** retorna el orden `ns` del sistema (numero de estados) y los números `ni` y `no` son las longitudes de los vectores  $x, u, y$  respectivamente.

Sin argumentos de salida, la función **sinfo** muestra la información en la pantalla y también indica si el sistema describe la forma  $(E|I)$  o no.

#### 4.2.9 Función `ssub`

**Propósito.-** Selecciona entradas y salidas particulares en un sistema.

**Sintaxis.-** Se puede usar esta función de la siguiente manera:

```
subsys = ssub(sys,inputs,outputs)
```

**Descripción.-** Dado un sistema LTI o politópico de parámetros dependientes “`sys`”, la función **ssub**, extrae el subsistema “`subsys`” trazando las entradas seleccionadas por “`inputs`” a las entradas seleccionadas por “`outputs`”.

El subsistema resultante tiene el mismo número de estados como `sys`, aunque algunos de estos estados puedan no ser controlables ni observables. Por ejemplo si  $P$  es un sistema con 3 entradas y 6 salidas (*Figura 4.14*), la determinación de la función de transferencia de los canales de entrada 1, 3 a los canales de salida 4, 5, 6 se obtiene con el comando:

```
ssub (p[1, 3], 4: 6)
```

El segundo y tercer argumentos son vectores que indican las entradas/salidas seleccionadas. Las entradas y salidas son etiquetadas 1, 2, 3, ... comenzando desde la parte superior del siguiente diagrama de bloques:

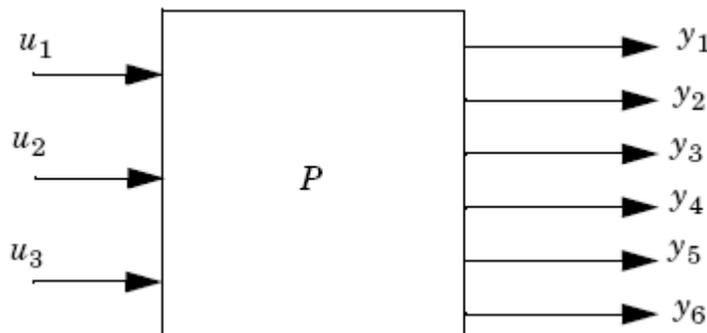


Figura. 4.14. Sistema con tres entradas y seis salida

#### 4.2.10 Función pade

**Propósito.-** Calcula la aproximación de Padé de modelos con retardo de tiempo de un sistema LTI.

**Sintaxis.-** `[num,den] = pade(T,N)`  
`pade(T,N)`

**Descripción.-** La función pade aproxima los retrasos de tiempo para los modelos de LTI racionales. Tales aproximaciones son útiles para modelar los efectos de retraso de tiempo como el transporte y retardos de cómputo dentro del contexto de sistemas de tiempo continuos. La transformada de Laplace del retardo de tiempo de  $T$  segundos es  $\exp(-sT)$ . Esta función de transferencia exponencial se aproxima por una función de transferencia racional que usa las aproximaciones de Padé; `[num,den] = pade(T,N)`, que retorna la aproximación de Padé de orden  $N$  en tiempo continuo, donde los coeficientes del numerador y denominador están en orden descendente.

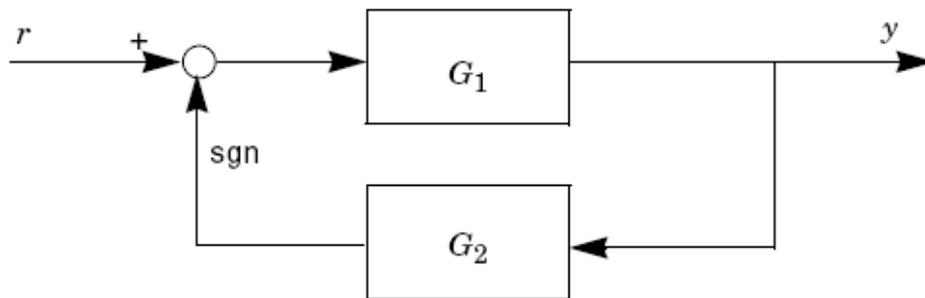
#### 4.2.11 Función sloop

**Propósito.-** Forma la interconexión realimentada de dos sistemas.

**Sintaxis.-** Se puede usar esta función de la siguiente manera:

```
sys = sloop(g1, g2, sgn)
```

**Descripción.-** La función **sloop** forma la interconexión (Figura 4.15):



**Figura. 4.15. Sistema con realimentación**

La salida “sys” es una determinación de la función de transferencia de lazo cerrado de  $r$  a  $y$ . El tercer argumento “sgn” especifica cualquier realimentación negativa (sgn=-1) o realimentación positiva (sgn=+1). El valor por defecto es -1. En términos de la función de transferencia  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$ , sys corresponde a la función de transferencia  $(I - \varepsilon G_1 G_2)^{-1} G_1$  donde  $\varepsilon = \text{sgn}$ .

#### 4.2.12 Función splot

**Propósito.-** Grafica varias de las respuestas en tiempo y frecuencia de un sistema LTI..

**Sintaxis.-** Se puede usar esta función de la siguiente manera:

```
splot(sys,type,xrange)
splot(sys,T,type,xrange)
```

**Descripción.-** La primera sintaxis es para sistemas de tiempo continuo:

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

El primer argumento “sys” es la representación de la matriz del sistema. El argumento opcional “xrange” es un vector de frecuencia o tiempo usado para controlar el eje x y el número de puntos del gráfico. Finalmente el argumento “type” consiste de los dos primeros caracteres del diagrama a ser dibujado. Las opciones disponibles se muestran en la siguiente tabla:

Respuesta en Frecuencia	
Tipo	Gráfica
'bo'	Diagrama de Bode
'sv'	Diagrama de valor singular
'ny'	Diagrama de Nyquist
'li'	Diagrama de Nyquist lineal-logarítmico

Tabla. 4.1. Función plot para graficas en frecuencia

Respuesta en Tiempo	
Tipo	Gráfica
'st'	Respuesta al escalón
'im'	Respuesta al impulso

Tabla. 4.2. Función plot para graficas en el tiempo

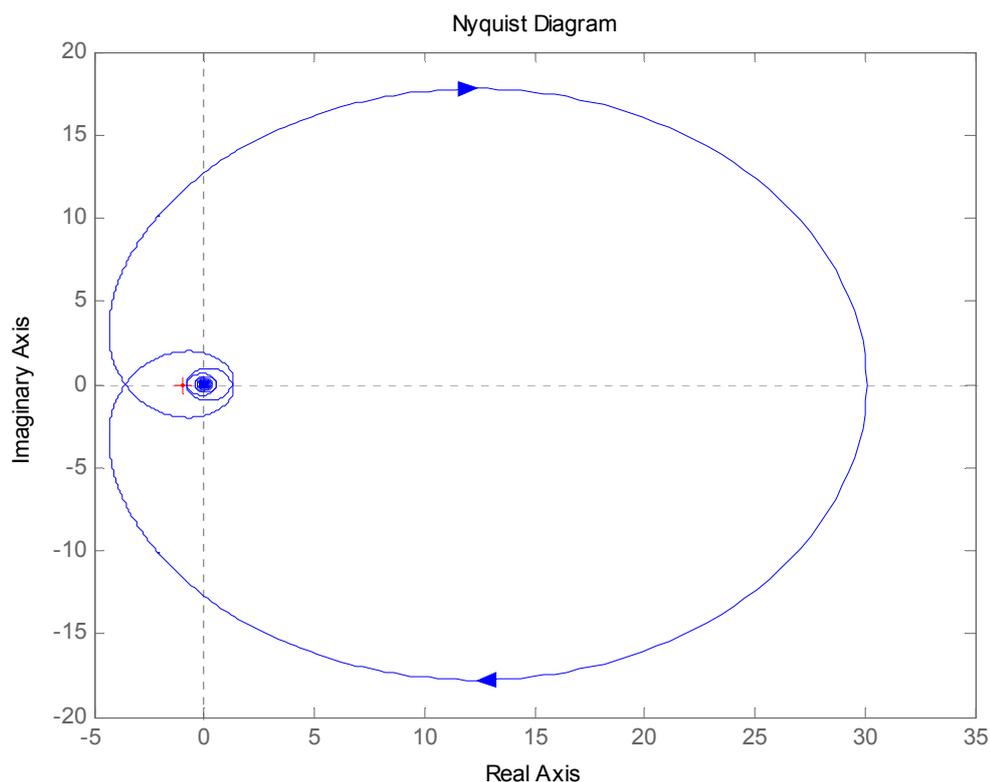
La sintaxis **plot(sys,T,type,xrange)** se usa para sistemas de tiempo discreto, en cuyo caso “T” es el periodo de muestreo en segundos. [17]

### 4.3 TRADUCCIÓN DE ESPECIFICACIONES DE DESEMPEÑO AL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

El modelo nominal de la función de transferencia del módulo PCT-2, para la entrada de aire en la posición 1 con el retardo máximo en la posición 4 es

$$G(s) = \frac{30.0915}{24.7219s + 1} \cdot e^{-5s}$$

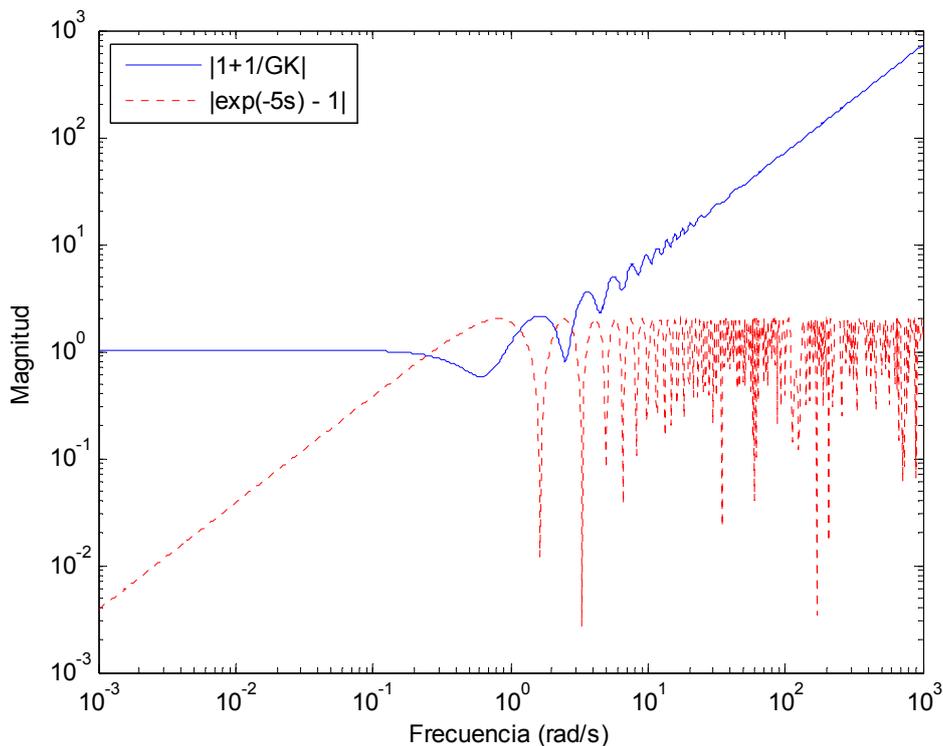
Donde el retardo de transporte hace una contribución negativa al ángulo que es lineal con la frecuencia a la curva de Nyquist de  $G(j\omega)$  como se muestra en la *Figura 4.18*. Esto demuestra que existe una circunvolucion alrededor de  $(-1, j0)$ , siendo inestable el sistema.



**Figura. 4.16. Sistema inestable con criterio de Nyquist**

Además, otra forma de verificar la estabilidad es considerar el sistema para

$K = 1$  (Figura 4.17), donde se observa que no satisface el criterio estabilidad robusta.



**Figura. 4.17. Criterio de estabilidad robusta con  $K = 1$**

El diseño de un controlador robusto para el control de temperatura de flujo de aire del modulo PCT-2 con Loop-shaping mediante la ayuda del LMI Control Toolbox de MATLAB, involucra los siguientes pasos, que son:

1. Mediante la formación de filtros encontrar  $W_1(s)$  y  $W_2(s)$ , cuyas magnitudes de respuesta cumplan con las especificaciones de diseño.
2. Especificar una estructura de control como la mostrada en la Figura 4.7 y determinar la planta aumentada correspondiente.
3. Utilizar una de las funciones de optimización para  $H_\infty$ , para calcular un controlador adecuado  $K(s)$ , para dicha planta.

A continuación se describe estos tres pasos.

### 4.3.1 Especificaciones para la Formación de Filtros

En la determinación de las características de magnitud de los filtros de desempeño y estabilidad robusta, nótese que existe una limitación en el grado de estos filtros puesto que el emulador HIL solo soporta has grado cuatro donde el grado del controlador robusto será igual a la suma de los grados de los filtros y el grado de la planta nominal; limitando ciertas características más detalladas en la formación de los mismos.

El objetivo ahora es controlar el proceso inestable, donde la estructura de control robusto necesita las siguientes especificaciones en frecuencia para la formación de los filtros:

- i. Rechazo a las perturbaciones  $d$  con densidad espectral  $[0, 0.1]rad/s$ .
- ii. Robustez contra la dinámica de alta frecuencia omitida, representada por el modelo multiplicativo de incertidumbre  $\Delta(s)$ ; con una magnitud aproximada de  $6.021 [dB]$  y con una frecuencia de corte aproximada de  $0.2[rad/s] \approx \frac{1}{\tau_d}$ .

La función de transferencia de estos filtros como se muestra en la *Figura 4.18*, obteniendo lo siguiente:

$$W_1(s) = \frac{0.01s + 0.10}{s + 0.01} \quad \text{y} \quad W_2(s) = \frac{s + 0.0015}{0.35s + 0.15}$$

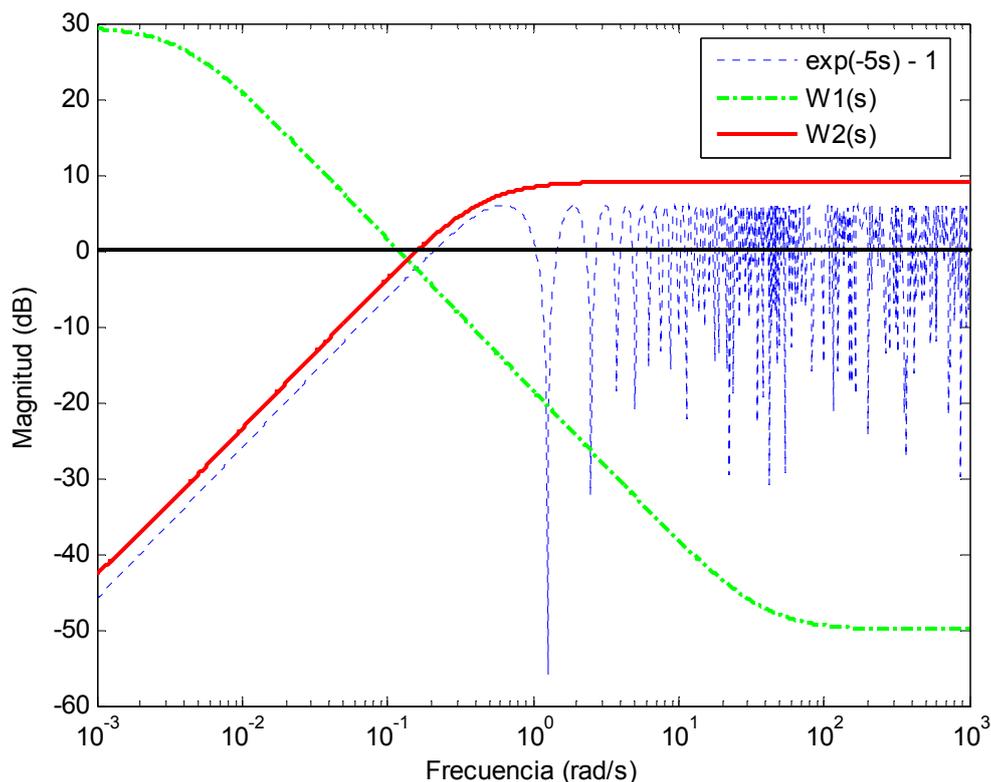


Figura. 4.18. Formación de filtros de desempeño y estabilidad robusta  $W_1(s)$  y  $W_2(s)$

### 4.3.2 Especificación de la Estructura de Control

La función **sconnect** calcula las matrices del sistema de  $P(s)$  de la estructura de control de la *Figura 4.7*.

Con esta función, las estructuras generales de control son descritas enumerando la entrada y la salida, y especificando la entrada de cada sistema dinámico; especificado por:

```
entradas='r';
salidas='e=r-G0 ; G0';
```

```
[P,r]=sconnect(entradas,salidas,'K:e','G0:K',G0);
```

Se puede dar nombres arbitrarios para  $G_0$  y  $K$ , con tal que se usen esos nombres a lo largo de todo el proceso.

de igual manera, la planta aumentada correspondiente al lazo de la *Figura 4.8*, la cual es especificada por:

$$P_{aum} = sconnect('r','W1;W2','K:e = r-G0','G0:K',G0,'W1:e',w1,'W2:G0',w2)$$

donde  $w1$  y  $w2$  son las matrices del sistema de los filtros formados que se determinó anteriormente. Sin embargo, el mismo resultado se obtiene directamente añadiendo los filtros formados a  $P(s)$  con las funciones **smult** y **sdiag**:

$$P_{aum} = smult(P,sdiag(w1,w2,1))$$

### 4.3.3 Síntesis y Validación del Controlador

El diseño de loop-shaping con un controlador  $K$  es factible si y solo si en el desempeño de  $H_{\infty}$ ,  $\gamma = 1$  se puede lograr para  $P_{aum}(s)$  mediante la función **hinflmi** del diagrama de lazo cerrado representado por la *Figura 4.13* que es formado por la función **slft** obteniendo:

$$[gopt,K] = hinflmi(P_{aum},r,1);$$

Minimization of gamma:

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

1	
2	
3	5.713565
4	4.548521
5	1.493282

6	1.127456
7	1.127456
8	1.058813
9	1.058813
10	0.867588

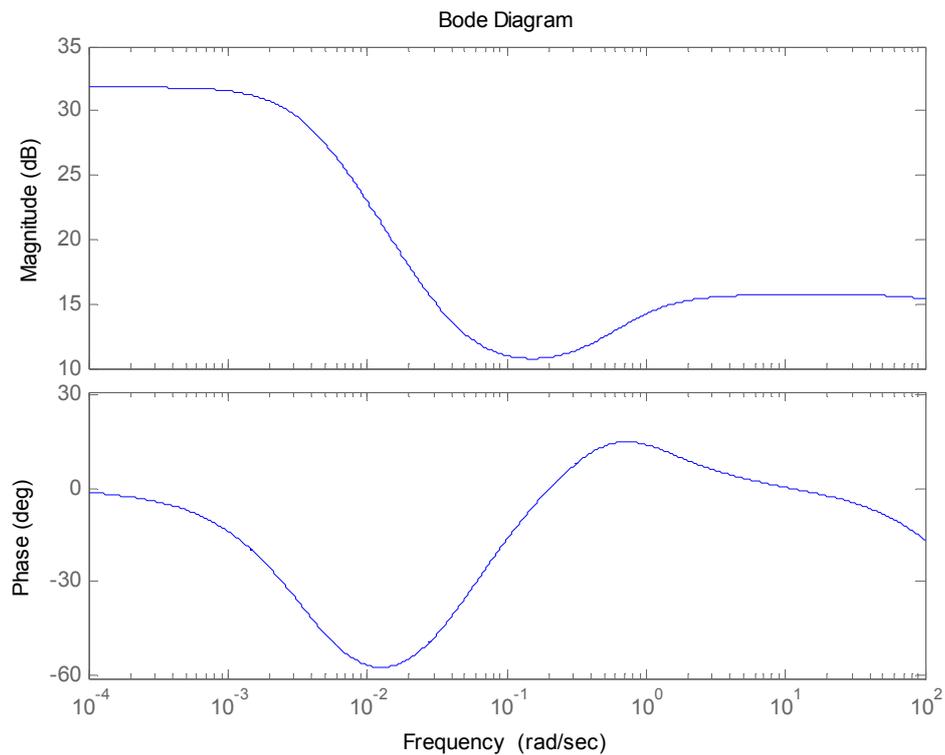
Result: reached the target for the objective value

best objective value: 0.867588

Optimal Hinf performance: 8.676e-001

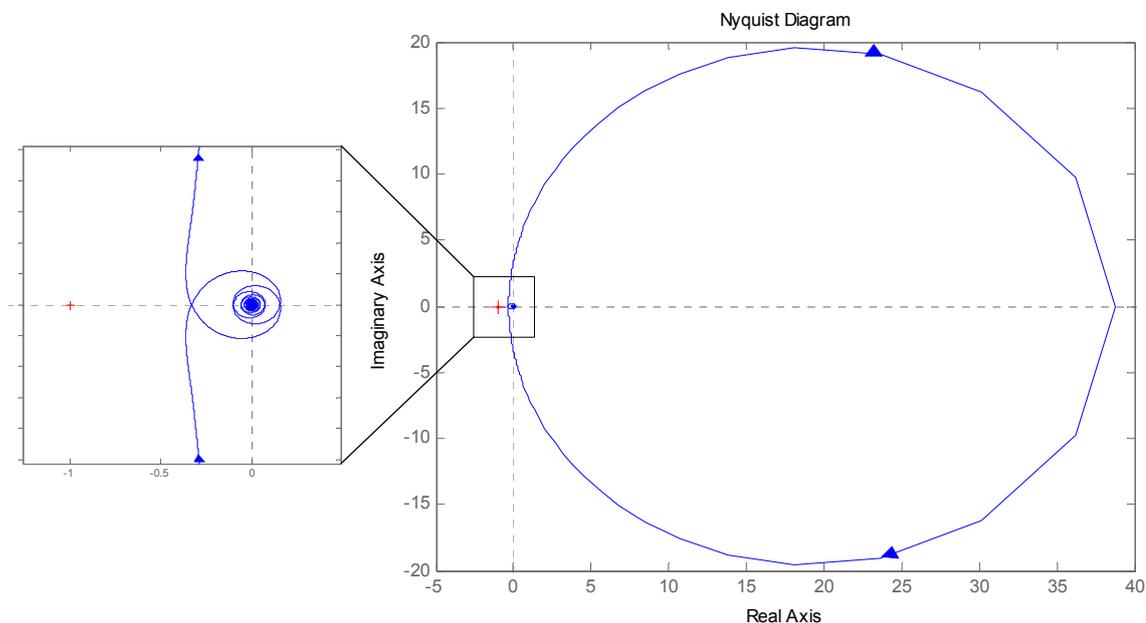
$$K(s) = \frac{2012 \cdot s^2 + 959.4 \cdot s + 39.99}{s^3 + 327.7 \cdot s^2 + 274 \cdot s + 1.023}$$

La respuesta en frecuencia del controlador robusto se puede ver en la *Figura 4.19* que es similar a un controlador de atraso-adelanto de fase.



**Figura. 4.19. Diagrama de Bode del controlador robusto**

La estabilidad del sistema con el nuevo controlador se muestra en la *Figura 4.20* donde la curva tiene no circunvala el punto  $(-1, j0)$ , demostrándose la estabilidad del controlador robusto.

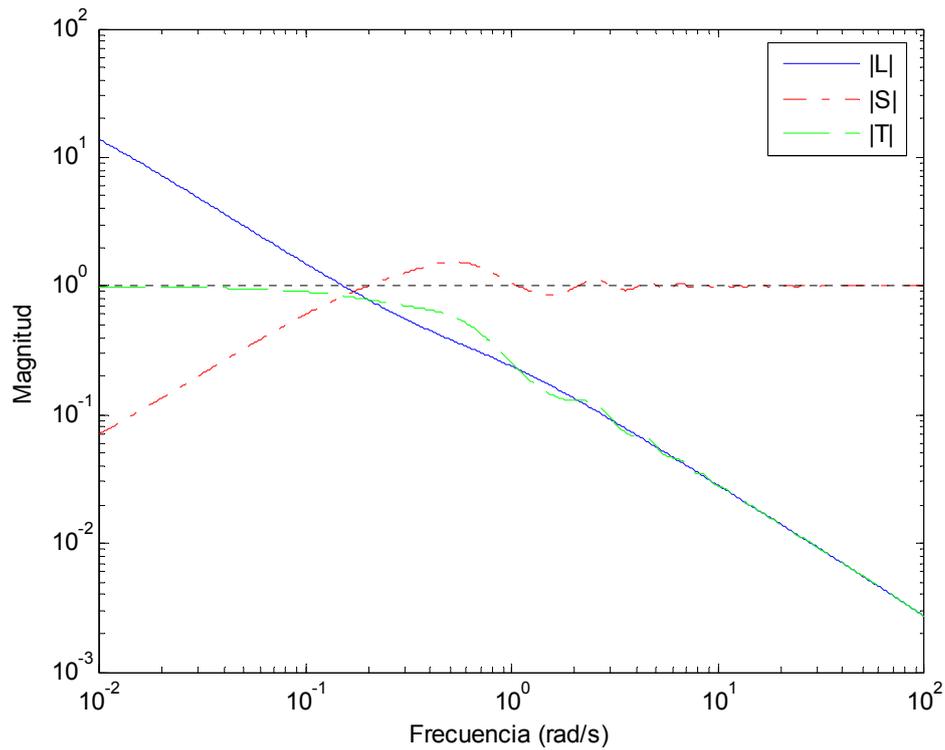


**Figura. 4.20. Estabilidad del sistema según criterio de Nyquist con controlador robusto**

Así mismo las funciones sensibilidad y sensibilidad complementaria cumplen con las características de estabilidad como se muestra en la *Figura 4.21*, donde obtenemos un valor subóptimo de gamma de 0.87 en lugar de 1 (*Tabla 4.3*), es debido a las restricciones de estabilidad en el algoritmo de síntesis del controlador.

	$\gamma_{opt}$	$\ S\ _{\infty}$	$\ T\ _{\infty}$
<b>hinflmi</b>	0.87	1.54	0.98

**Tabla. 4.3. Características del controlador robusto**



**Figura. 4.21. Valores singulares S y L con controlador robusto**

En la *Figura 4.22* si se utiliza el controlador robusto se satisface la desigualdad de robustez y el sistema permanece estable para la máxima incertidumbre multiplicativa.

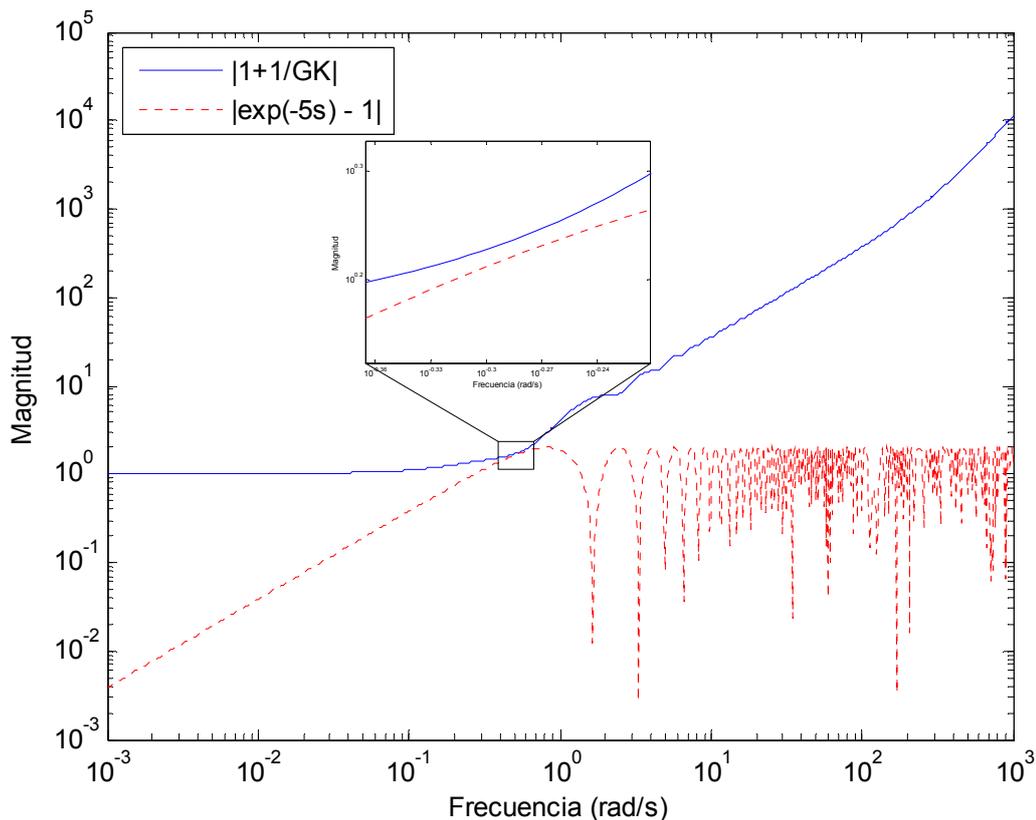


Figura. 4.22. Criterio de estabilidad robusta con síntesis de  $K$  con hinflmi

El sistema y para la respuesta al escalón y rechazo a perturbación en la entrada de la planta en el tiempo (*Figura 4.23*), donde el sobre impulso es menor al 1%. Es interesante ver la salida del controlador robusto en la *Figura 4.24* que requiere una energía inicial muy alta y se reduce a medida que el error disminuye.

Nótese que el valor inicial de energía se lo puede reducir con un valor de gamma mayor a 1 pero la robustez del sistema no será la misma, llegando así a una saturación a la salida del controlador.

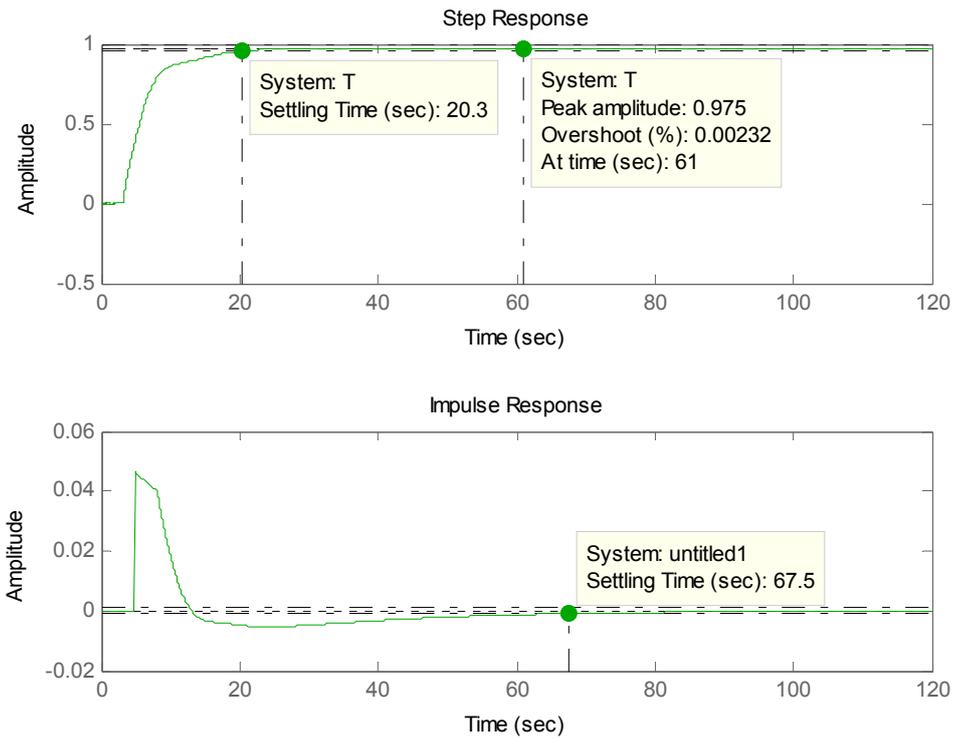


Figura. 4.23. Respuesta escalón y rechazo a perturbación con síntesis hinflmi

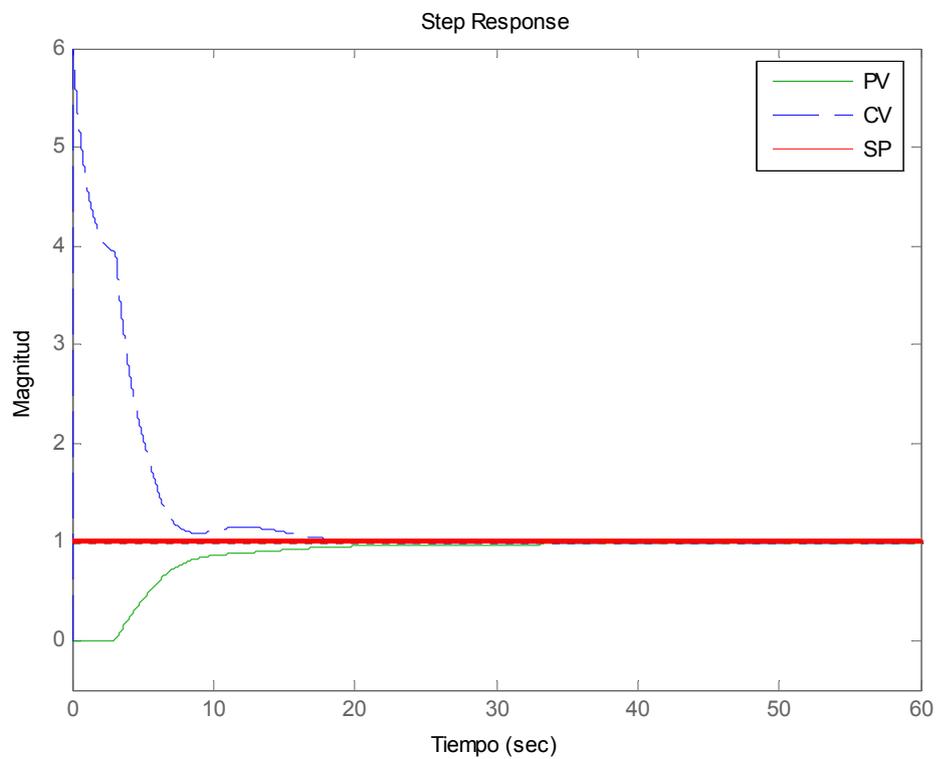


Figura. 4.24. Variable controlada y del proceso para un punto de referencia con síntesis hinflmi

#### 4.4 SIMPLIFICACIÓN DEL CONTROLADOR ROBUSTO A PID

Los controladores robustos son sistemas complejos con funciones de transferencia de alto orden siendo necesario estudiar los mismos usando modelos de aproximación de orden reducido. Actualmente se dispone de varios métodos para reducir el orden de una función de transferencia. Una manera relativamente sencilla de eliminar cierto polo insignificante de una función de transferencia es ver un polo que tenga parte real negativa que es mucho mayor que la del resto de los polos, sin embargo, se debe conservar la respuesta en estado estacionario del sistema por lo tanto la ganancia de la misma se debe dividir para el valor absoluto del mismo.

Adicionalmente a esto, un método mas sofisticado intenta hacer coincidir lo máximo posible la respuesta en frecuencia de la función de transferencia de orden reducido con la respuesta en frecuencia de la función de transferencia original. El método de aproximación asociado se basa estrictamente en manipulaciones algebraicas. Para esto se supone que el sistema de alto orden está descrito por la función de transferencia

$$H(s) = K \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + 1}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1}$$

en el cual los polos están a la izquierda del plano  $s$ , y  $m \leq n$ . La función de transferencia aproximada de orden reducido es

$$L(s) = K \frac{c_p s^p + \dots + c_1 s + 1}{d_g s^g + \dots + d_1 s + 1}$$

donde  $p \leq g \leq n$ . Obsérvese que, con el objetivo de asegurar la misma respuesta de estado estacionario, la constante de ganancia  $K$  es la misma para el sistema original y el aproximado. El método expuesto se basa en la selección de  $c_i$  y  $d_i$  de forma que  $L(s)$  tenga respuesta de frecuencia casi igual a la de  $H(s)$ . Esto equivale a establecer que  $H(j\omega)/L(j\omega)$  se debe desviar la mínima cantidad respecto de la unidad para varias frecuencias. Los coeficientes  $c$  y  $d$  se obtienen utilizando la siguiente ecuación:

$$M^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} M(s)$$

y

$$\Delta^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} \Delta(s),$$

donde  $M(s)$  y  $\Delta(s)$  son los polinomios del numerador y denominador de  $H(s)/L(s)$ , respectivamente. También se define

$$M_{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \frac{(-1)^{k+q} M^{(k)}(0) M^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}, \quad q = 1, 2, \dots$$

y una ecuación completamente idéntica para  $\Delta_{2q}$ . Las soluciones para los coeficientes  $c$  y  $d$  se obtienen igualando

$$M_{2q} = \Delta_{2q}$$

para  $q = 1, 2, \dots$  hasta el número requerido para resolver los coeficientes desconocidos. [18]

Para nuestro caso particular el método antes mencionado será útil para obtener del controlador PID con una aproximación de la combinación de un controlador de adelanto y retraso de fase, puesto que muchos controladores comerciales funcionan con este algoritmo, al cual se le conoce como regulador PID en serie definido como:

$$PID(s) = \frac{K_P}{s} \left( s + \frac{1}{T_I} \right) (T_D s + 1)$$

Para esto expresamos la función del controlador robusto en la forma de ganancia, ceros y polos como:

$$K(s) = 2011.5861 \frac{(s + 0.4308)(s + 0.04615)}{(s + 326.8)(s + 0.8347)(s + 0.00375)}$$

de donde podemos desprestigiar el impacto del polo  $s = -326.8$ , sin embargo, se debe conservar la respuesta en estado estacionario del controlador; por lo tanto el controlador se reduce a

$$K(s) = (2011.5861/326.8) \frac{(s + 0.4308)(s + 0.04615)}{(s + 0.8347)(s + 0.00375)}$$

tomando la relación de  $K(s)/PID(s) = M(s)/D(s)$ , con  $M(s)$  y  $D(s)$  como el numerador y denominador de la razón, se determina que

$$M(s) = 6.15540(s + 0.4308)(s + 0.04615)(T_I s)$$

y

$$D(s) = K_p (T_I s + 1)(T_D s + 1)(s + 0.8347)(s + 0.00375)$$

para luego mediante Matlab obtener las derivadas de orden  $n$  y simplificar para  $M(s)$  y  $D(s)$  mediante los comandos:

$$\begin{array}{ll} M1 = \text{simplify}(\text{diff}(M, s, 1)), & D1 = \text{simplify}(\text{diff}(D, s, 1)), \\ \vdots & \vdots \\ M6 = \text{simplify}(\text{diff}(M, s, 6)), & D6 = \text{simplify}(\text{diff}(D, s, 6)), \end{array}$$

y evaluando para  $s = 0$

$$\begin{array}{ll} m0 = \text{subs}(M) & d0 = \text{subs}(D) \\ \vdots & \vdots \\ m6 = \text{subs}(M6) & d6 = \text{subs}(D6) \end{array}$$

Ahora igualando  $M_{2q} = D_{2q}$

$$\sum_{k=0}^{2q} \frac{(-1)^{k+q} M^{(k)}(0) M^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!} = \sum_{k=0}^{2q} \frac{(-1)^{k+q} D^{(k)}(0) D^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}, \text{ para } q = 1, 2 \text{ y } 3;$$

donde  $M^{(k)}$  y  $M^{(2q-k)}$  es la derivada de orden  $k$  y  $2q-k$  respectivamente,

$$\begin{aligned} 0.0150(T_I)^2 = & -0.0031K_p(0.0063K_p T_I T_D + 1.6769K_p T_I + 1.6769K_p T_D + 2K_p) + \\ & + (0.0031K_p T_D + 0.8385K_p + 0.0031K_p T_I)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

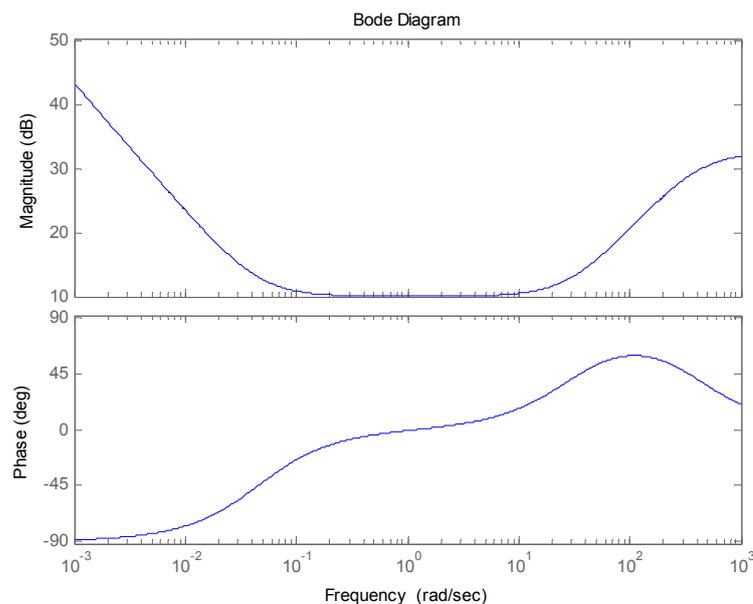
$$\begin{aligned}
7.1125(T_I)^2 &= 0.0031(K_p)^2 T_I T_D - \\
&- \frac{1}{3}(0.0031K_p T_D + 0.8385K_p + 0.0031K_p T_I)(5.0307K_p T_I T_D + 6K_p T_I + 6K_p T_D) + \\
&+ (0.0031K_p T_D + 0.8385K_p + 0.0031K_p T_I)^2 + \\
&+ \frac{1}{4}(0.0063K_p T_I T_D + 1.6769K_p T_I + 1.6769K_p T_D + 2K_p)^2 \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
37.8890(T_I)^2 &= -(0.0063K_p T_I T_D + 1.6769K_p T_I + 1.6769K_p T_D + 2K_p)K_p T_I T_D + \\
&+ \frac{1}{36}(5.0307K_p T_I T_D + 6K_p T_I + 6K_p T_D)^2. \quad (3)
\end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se obtiene que  $K_p = 3.1763$ ,  $T_I = 21.7360$  [sec] y  $T_D = 1.9846$  [sec], concluyendo en la función de transferencia del controlador PID:

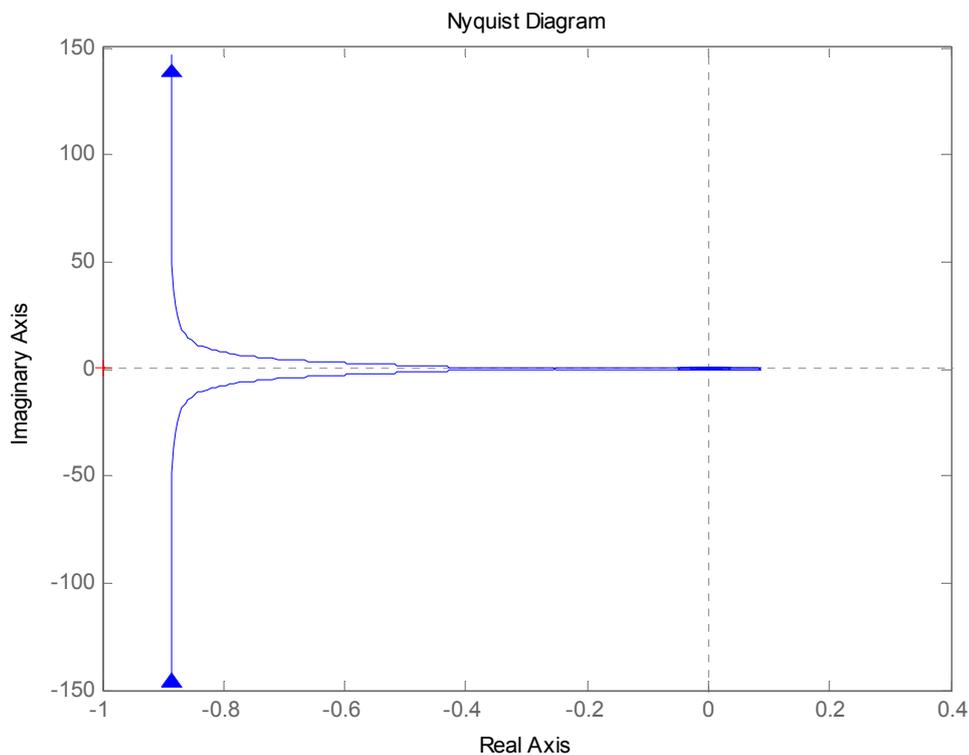
$$PID(s) = \frac{3.1763}{s} \left( s + \frac{1}{21.7360} \right) (1.9846s + 1)$$

La respuesta en frecuencia del controlador PID se puede ver en la *Figura 4.25* que es igual a un controlador PI y PD.



**Figura. 4.25. Diagrama de Bode del controlador PID**

Es interesante ver la respuesta de la planta con un controlador equivalente, siendo esta técnica otra opción a la sintonización por el método de Ziegler-Nichols en lazo abierto para controladores PID, como se muestra en la *Figura 4.26*, donde la curva de Nyquist se aleja asintóticamente del punto  $(-1, j0)$ , existiendo nuevamente estabilidad en el sistema.



**Figura. 4.26. Estabilidad según criterio de Nyquist con PID**

El tiempo de establecimiento del PID es más lento en 10.1 segundos, pero con un overshoot superior al 1% y una inestabilidad a una perturbación impulsiva a la entrada de la planta como se muestra en la *Figura 4.27*.

Finalmente la energía requerida por el controlador PID es también grande, esto es debido a que en el estado inicial se requiere toda esta energía para calentar la planta de temperatura (*Figura 4.28*).

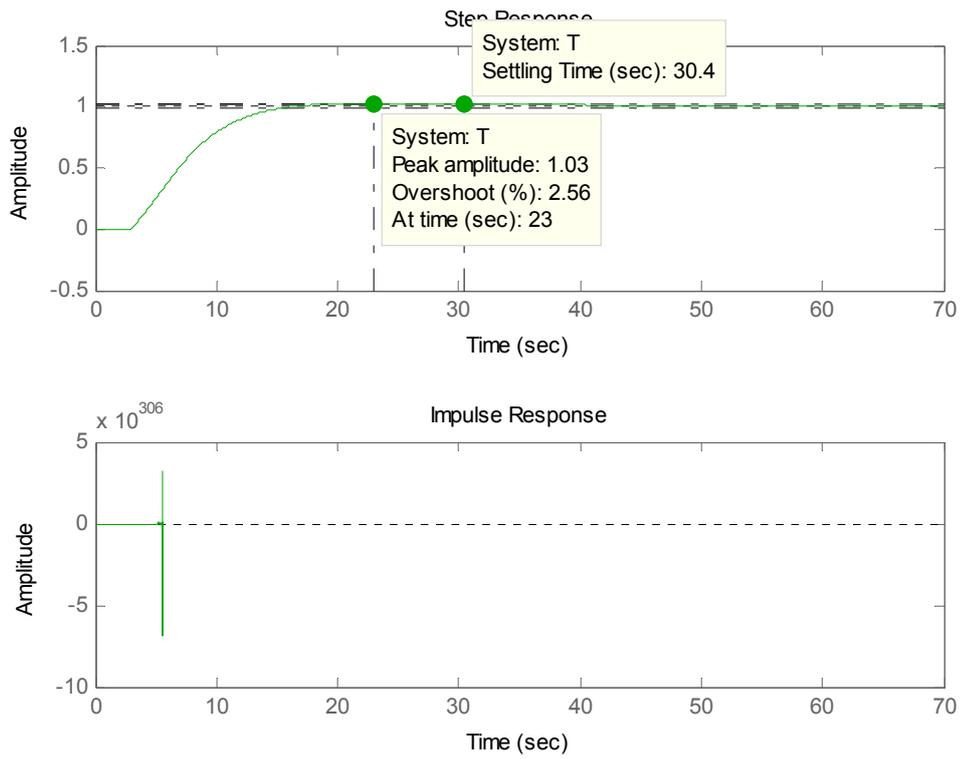


Figura. 4.27. Respuesta escalón y rechazo a perturbación con PID

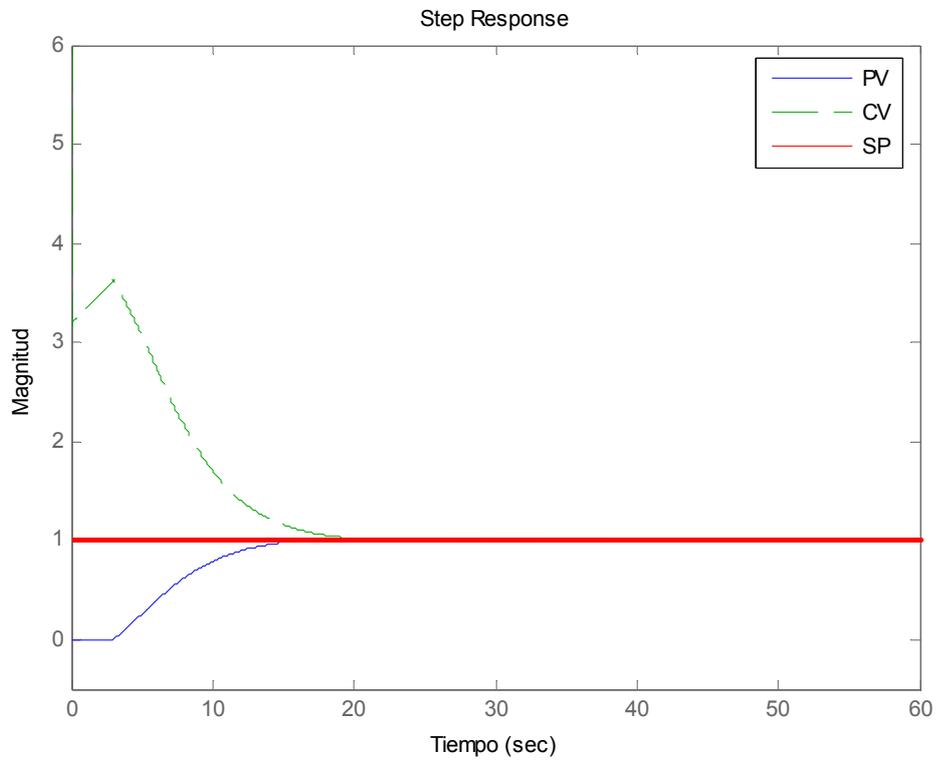


Figura. 4.28. Variable controlada y del proceso para un punto de referencia con PID

## CAPÍTULO 5

### IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROLADOR

#### 5.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SISTEMA A IMPLEMENTARSE

En los últimos años se han desarrollado técnicas de control más sofisticadas que el controlador PID como los controladores robustos, donde se ha visto una mayor tendencia a desarrollar modelos virtuales debido a su potencia computacional dada la complejidad del controlador que se ejecutan en tiempo real ya sea en un computador personal (PC) o en módulos especializados basados en DSPs ó incluso microcontroladores.

La idea de reemplazar los modelos a escala de modelos de procesos (o incluso el controlador) con un equipo basado en software se denomina Hardware en el Lazo ó HIL, por sus siglas en inglés. Un simulador HIL consiste en un hardware que simule en tiempo real el modelo del controlador (*Figura 5.1*). Una simulación en tiempo real involucra que la simulación sea efectuada de tal manera que las señales de entrada y de salida muestren los mismos valores dependientes en el tiempo de la misma manera que lo hace el componente real.

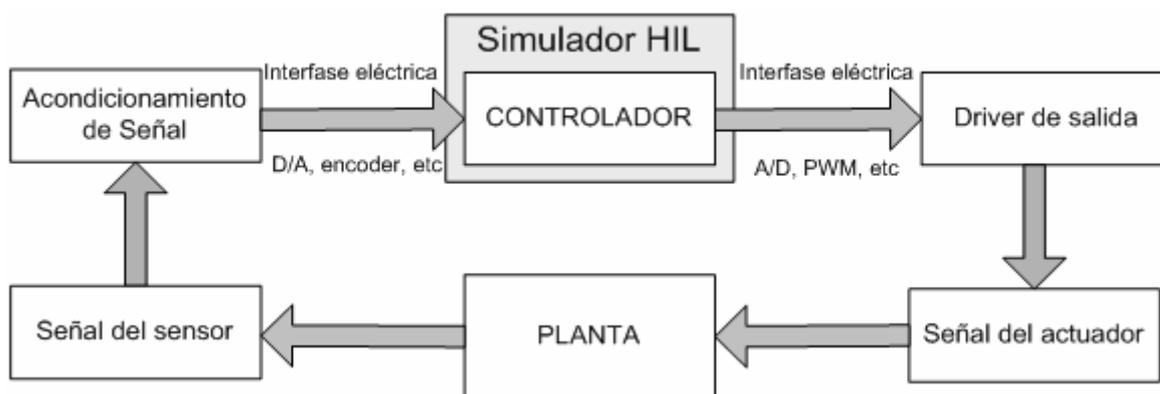


Figura. 5.1. Elementos de un sistema HIL y de control

## 5.2 DESCRIPCIÓN DEL EMULADOR DE PLANTAS ANALÓGICAS SISO

### 5.2.1 Introducción

El emulador SISO como un proyecto anterior de tesis es una solución de Hardware y Software que permite el reemplazo de plantas didácticas a escala para realizar prácticas de control. El emulador está basado en un Controlador Digital de Señales de la Familia Microchip dsPIC30F que permite la programación y simulación en tiempo real de sistemas SISO analógicos (una sola entrada y una sola salida), el cual admite y entrega señales de control analógicas unipolares y PWM.

Por medio de la interfase de usuario (GUI) es posible configurar el rango de las señales de entrada/salida, fijar el período de simulación, definir la función de transferencia, el retardo de transporte, la no-linealidad y las perturbaciones al sistema los cuales son descargados por medio del puerto serial a la memoria del hardware, el cual una vez activado, se comporta como el sistema previamente definido. Al hardware se le pueden realizar actualizaciones de firmware con el fin de mejorar el programa de la aplicación o darle otro uso.

El emulador es modificado para el presente proyecto como un controlador robusto que contendrá en su forma básica la capacidad de simular funciones de transferencia hasta de 4to orden, siendo innecesario el retardo de transporte, zona muerta, saturación, curvas no lineales y perturbación externa que posee el mismo. Una interfaz gráfica (GUI) desarrollada en MATLAB permitirá la el ingreso de los coeficientes del controlador, configuración de los distintos componentes del sistema y la descarga de parámetros al hardware por medio del puerto serial del computador (Figura 5.2). [19]

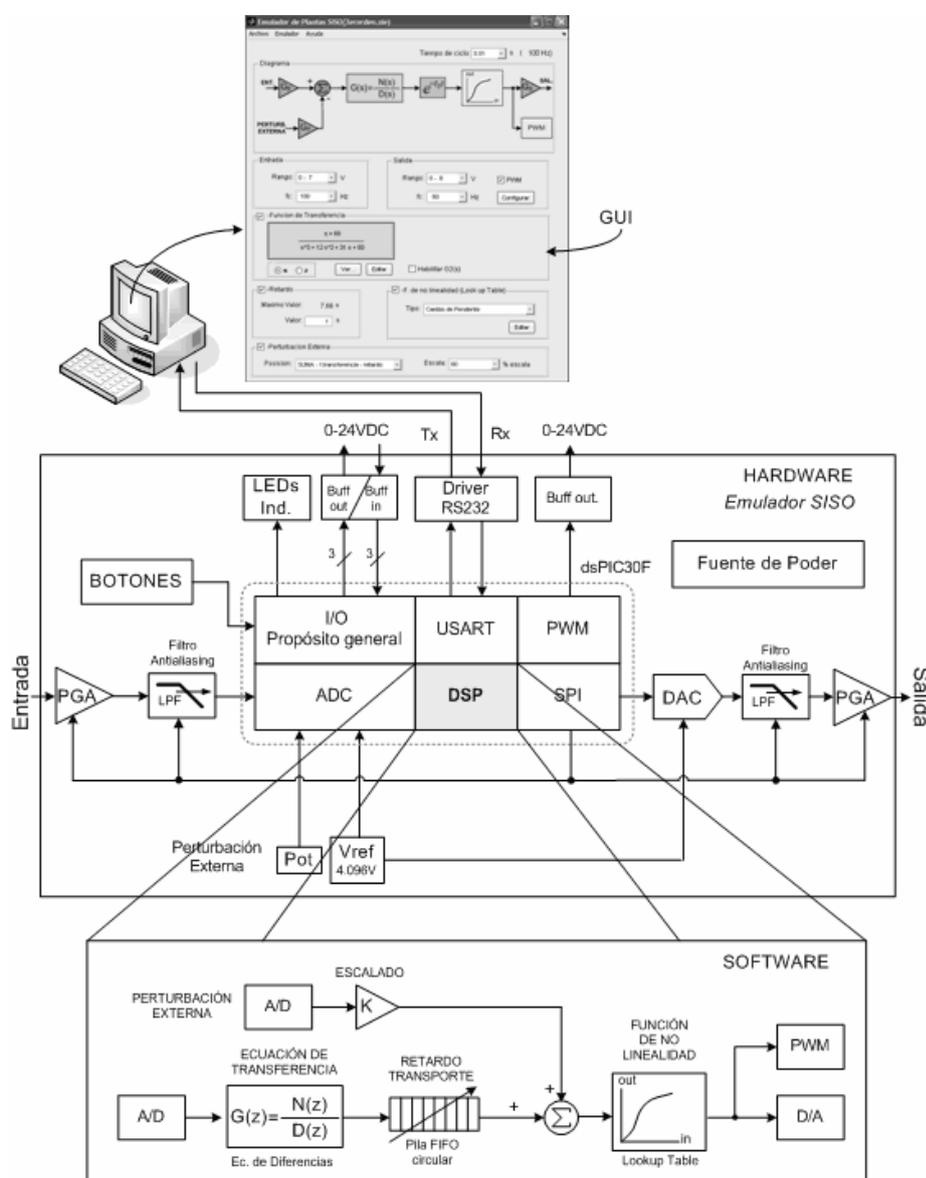
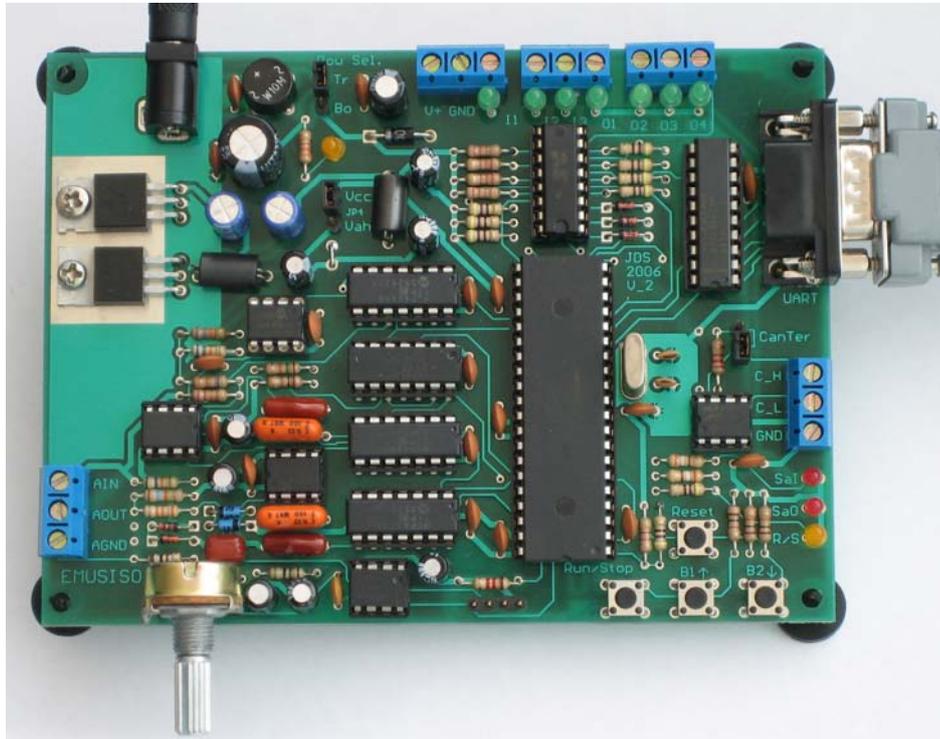


Figura. 5.2. Componentes del Emulador SISO

El dispositivo cuenta con ciertas características que lo hace realizable en nuestro país, así como elementos comunes y relativamente fáciles de conseguir como se muestra en la *Figura 5.3*, para mayor información sobre el emulador SISO ver [19].



**Figura. 5.3. Hardware del Emulador SISO con sus componentes**

### 5.2.2 Componentes del hardware y software del emulador SISO

El emulador SISO viene con los siguientes componentes:

- Hardware del emulador SISO (*Figura 5.4* y *Tabla 5.1*).
- Adaptador de 16VDC.
- Cable de interfase RS-232.
- Firmware del emulador SISO precargado.
- Firmware de carga al arranque (bootloader) precargado.
- Programa de interfase de usuario (GUI) para MATLAB 7 (*Figura 5.5* y *Tabla 5.2*).
- Programa de carga al arranque Ingenia dsPicbootloader.

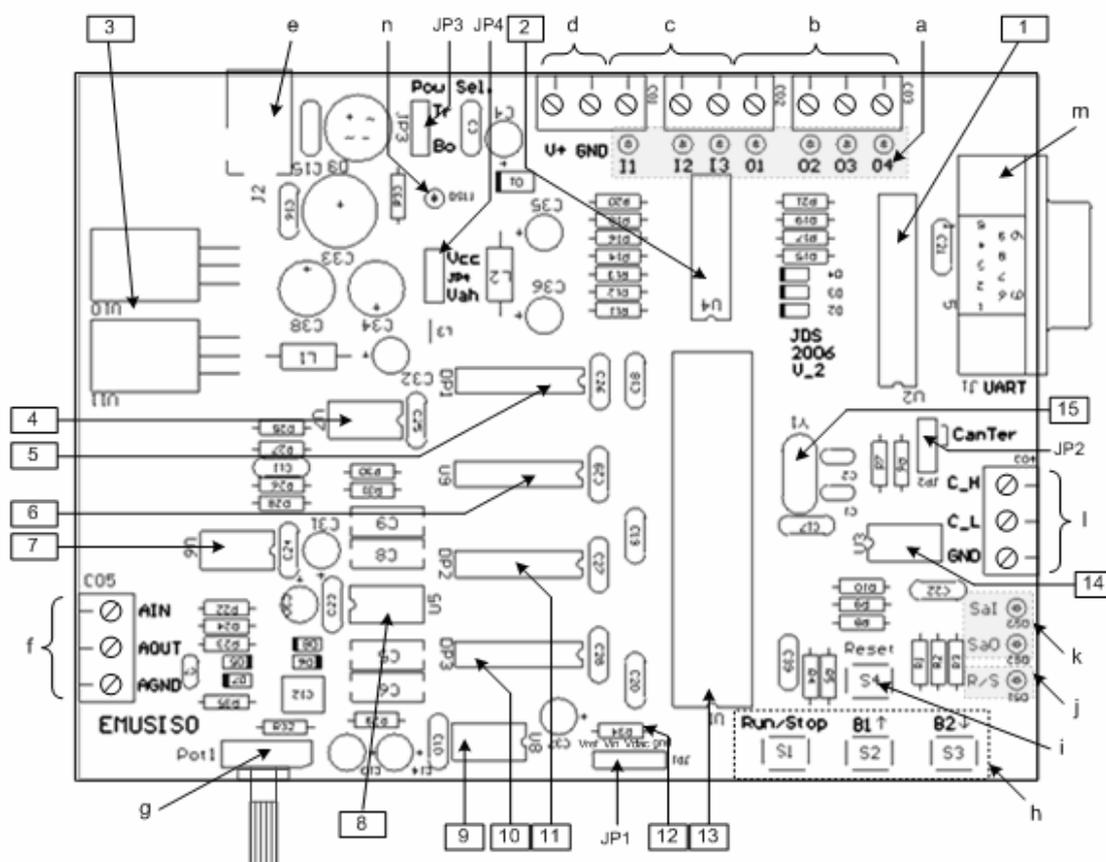


Figura. 5.4. Elementos del hardware del emulador SISO

Conectores e Interfase	
a	Indicadores de las entradas y salidas digitales.
b	Salidas digitales
c	Entradas digitales
d	Polarización de las entradas/salidas digitales ( $V^+ = 5 - 24$ Vdc). También se usa como terminales de alimentación si JP3 está en Bo y $V^+ = 17 - 24$ Vdc.
e	Conector para el adaptador de $17 - 30$ Vdc / $16 - 20$ Vac
f	Entrada (AIN)/Salida (AOUT) analógica y tierra analógica (AGND)
g	Potenciómetro para el ingreso de perturbaciones al sistema
h	Botones de interfase. RUN/STOP se usa en el emulador SISO. B1 y B2 se dejan de reserva.
i	Botón para resetear el procesador.
j	Indicador del estado del emulador SISO.
k	Indicadores de la entrada/salida analógica.
l	Terminales para la conexión de una red CAN.
m	Conector DB9 – Macho para conexión con el PC u otros periféricos. El emulador SISO es un equipo CTU (se necesita un cable cruzado para comunicarse con una PC).
n	Indicador de que la placa está energizada.

1	Transceiver del puerto RS-232.
2	Driver de las entradas y salidas digitales.
3	Reguladores lineales de 5 y 15 V.
4	Amplificador operacional. Buffer del potenciómetro analógico y calibración offset.
5	Potenciómetro digital 100k $\Omega$ . Calibra la ganancia de entrada y la corrección de offset a la salida.
6	Convertor digital-analógico.
7	Amplificador operacional. Buffer de la entrada y salida analógica.
8	Amplificador operacional. Filtro pasa bajos de entrada y salida.
9	Generador de voltaje de referencia de 4.096V.
10	Potenciómetro digital 50 k $\Omega$ . Junto con [11] fijan la frecuencia de corte de los filtros de entrada y salida.
11	Potenciómetro digital 100 k $\Omega$ . Junto con [10] fijan la frecuencia de corte de los filtros de entrada y salida.
12	Toma para medir la salida de frecuencia del controlador con fines de calibración.
13	Controlador digital de señales (Procesador del sistema).
14	Transceiver del puerto de comunicación CAN.
15	Cristal oscilador para el procesador de 7.3728 MHz.
JP1	Conector para acceso a las señales de Vref, Vin(filtrada), Vout (no filtrada) y AGND
JP2	Permite conectar la resistencia de terminación de 120 $\Omega$ entre CanH y CanL.
JP3	Permite seleccionar entre energizar el circuito con adaptador externo (Tr) o con la fuente conectada en la bornera [d] (Bo).
JP4	Selecciona el voltaje de polarización de los amplificadores operacionales en [4] y [8] según las características de los mismos. Vcc (5V) ó Vah (15V).

**Tabla. 5.1. Descripción de componentes de la placa**

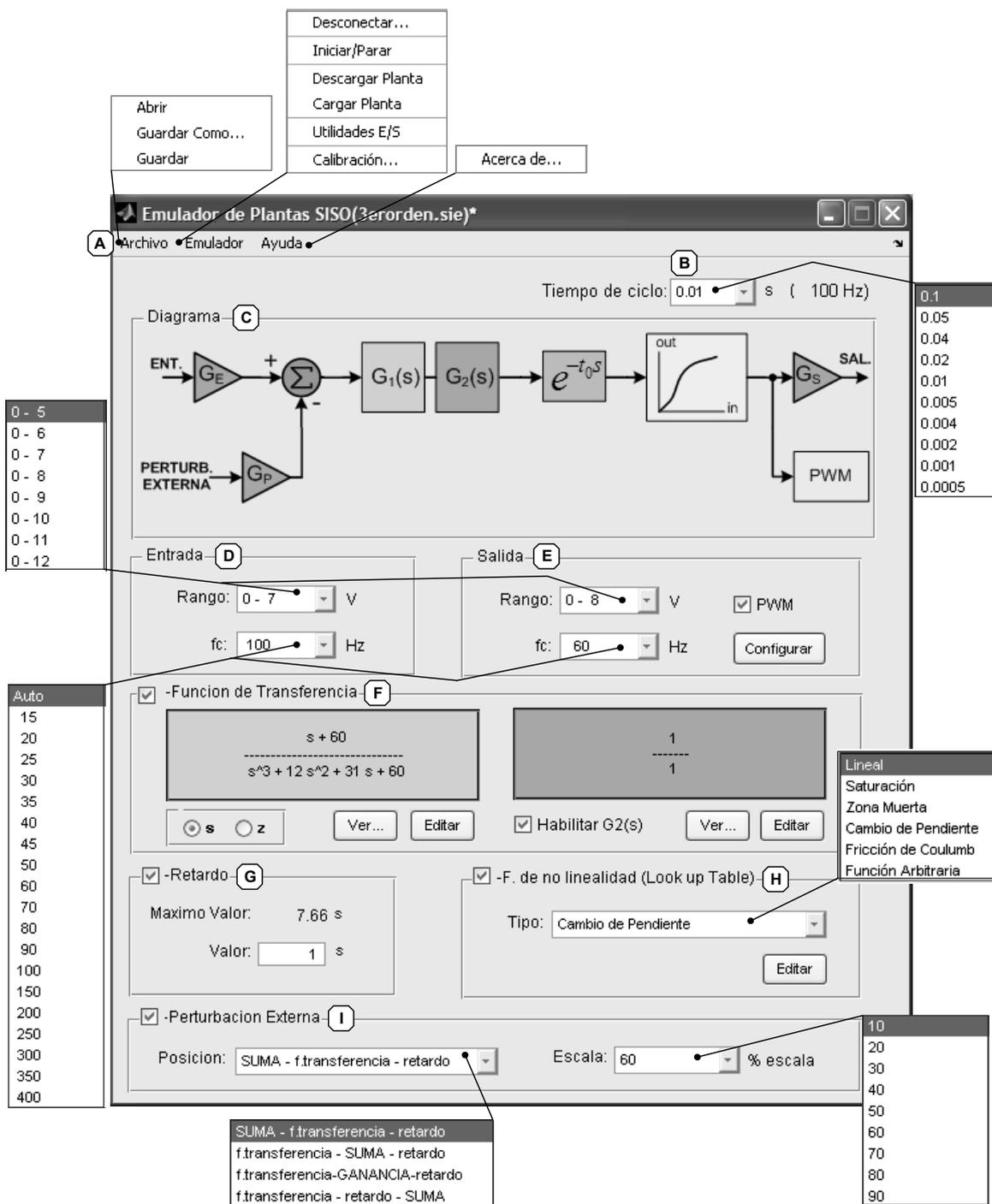


Figura. 5.5. Pantalla principal de la GUI del emulador SISO

A	Menú de opciones del emulador SISO
B	Menú para configurar el período de simulación.
C	Diagrama del flujo que se tiene para la emulación.
D	Controles para configurar la entrada
E	Controles para configurar la salida

F	Controles para configurar la(s) función(es) de transferencia
G	Controles para configurar el retardo de transporte
H	Controles para configurar la función de no linealidad
I	Controles para fijar la perturbación externa

Tabla. 5.2. Descripción de componentes de la interfase de usuario

### 5.3 ACONDICIONAMIENTO DE SEÑALES

El acondicionamiento de señales puede ser necesario si la señal desde el transductor no es adecuada para ser aplicada al conversor A/D y generar la información necesaria para el procesamiento de los datos. Este procesamiento de la señal incluye funciones como amplificación, filtrado, aislamiento eléctrico y adaptación de los niveles de impedancia entre el transductor y el circuito que le sigue, para que se produzca la mejor transferencia de energía de una etapa a la siguiente; como lo muestra la *Figura 5.5*. Es así que en el presente proyecto se utilizara el PLC Modicon 612/0 para la visualización de las variables del proceso mediante Intouch, el mismo que incluye las siguientes características:

#### Entrada analógica:

- Canales: 4
- Rangos de entrada:  $\pm 10$  V, 0 – 10 V, 4 – 20 mA.
- Filtro de entrada: polo simple, pasa bajos, -3 dB, frecuencia de 10 Hz ( $\pm 20\%$ ).
- Resistencia de entrada: 250  $\Omega$  (corriente de entrada), >20 M $\Omega$  (voltaje de entrada).
- Resolución: 16 bits para rango de  $\pm 10$  V, 15 bits para rango de 0 – 10 V, 13 a 14 bits para 4 – 20 mA.
- Actualización: 55 ms/canal.

#### Salida analógica:

- Canales: 2
- Corriente de salida: 4 – 20 mA, 12 – 30 V voltaje de suministro del lazo,  $(V_{loop} - 7V)/0,02$  resistencia máxima del lazo.
- Voltaje de salida: 0 – 10 V; 10 mA máx.
- Resolución: 12 bits.
- Actualización: 10 ms/canal.

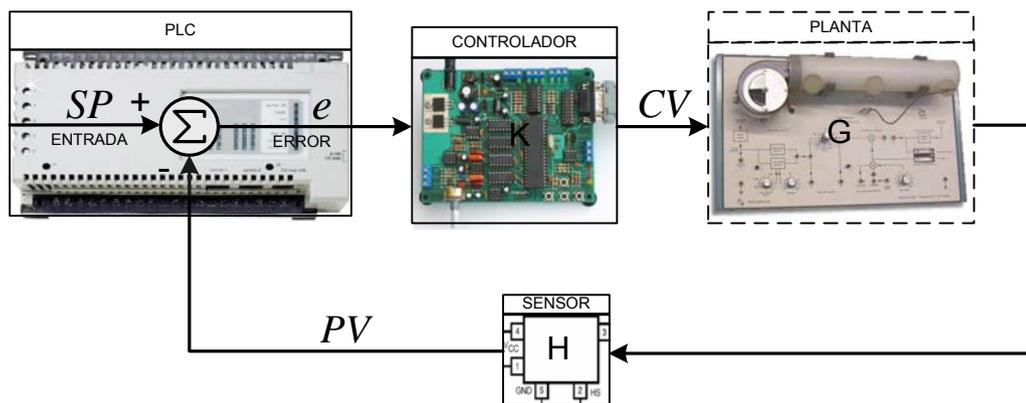


Figura. 5.6. Sistema de adquisición de datos y control del proceso

La conversión Analógica-Digital y Digital-Analógica es el proceso que permite a las computadoras digitales interactuar con las señales físicas, en la mayoría de casos voltajes y corrientes (que a su vez representan otras variables). La información digital es diferente de su contraparte analógica en dos aspectos importantes: se encuentra muestreada y cuantizada. [20] Esto restringe cuánta información puede contener una señal digital. En este punto hay que definir  $f_m$  la cual es la frecuencia máxima que se desea simular con fidelidad. Por tanto la selección de la frecuencia de muestro que no representa un método exacto para obtenerlos para determinar los valores de las frecuencias de muestreo ( $f_s$ ), máxima de simulación ( $f_m$ ) y la del filtro antialias ( $f_c$ ) es como sigue:

1. Una vez conocida la función de transferencia, encontrar la expresión de la misma en lazo cerrado y obtener el diagrama de Bode del cual se obtiene la frecuencia  $f_{BW}$  de mayor frecuencia.
2. Buscar la pendiente con que decae la amplitud midiendo en una década la variación que se tiene en la amplitud.
3. Si el valor encontrado de la variación es pequeño (-15dB a -30dB), seleccionar una frecuencia  $f_m$  de 25 a 20 veces  $f_{BW}$ , respectivamente.
4. Si el valor encontrado de la variación es grande (-30dB a -80dB), seleccionar una frecuencia  $f_m$  de 20 a 10 veces  $f_{BW}$ .

5. De la *Tabla 2.2* se escoge el error tolerable para  $f_m$  y se multiplica por la relación  $f_s/f_m$ , cuyo resultado es la frecuencia de muestreo.
6. Posteriormente se debe fijar la frecuencia del filtro antialias entre los valores  $f_m < f_c < 1.7f_m$ . Si se desea que el filtro antialias modifique lo menos posible a  $f_m$ , se seleccionará un valor de  $f_c = 1.7f_m$ , pero si se permite un error adicional de -3dB en  $f_m$  se escogerá  $f_c = f_m$ . Hay que tomar en cuenta que mientras más cercana sea  $f_c$  a  $f_m$ , mejor trabajará el filtro antialias suprimiendo las frecuencias mayores a  $f_s/2$ . [19]

## 5.4 PRUEBAS AL SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS

En esta sección se presenta un resumen de las pruebas realizadas al emulador SISO y los resultados obtenidos<sup>1</sup>. Se describen el comportamiento del sistema como equipo de adquisición de datos y las características del mismo.

### 5.4.1 Ruido

Para conocer el contenido de ruido del sistema se realizó un número grande de mediciones del resultado de la conversión análoga-digital ante la presencia de un valor constante en la entrada. Mientras mayor el número de distintos valores, peor el desempeño del sistema. Para implementar este experimento se conectó la salida analógica del emulador SISO a la entrada analógica; posteriormente se fijó un valor constante a la salida y se realizaron 1024 lecturas consecutivas de la conversión del ADC. Por tanto el peor caso de ruido es  $\pm 1$  bit en la adquisición ( $\pm 1$ mV), sin embargo las concentraciones puntuales demuestran que la adquisición es bastante precisa

### 5.4.2 Linealidad

La linealidad indica la fidelidad con la que un sistema de adquisición adquiere/reproduce los datos. Para el caso del *emulador SISO* se sigue un procedimiento similar a la prueba de ruido (conectando la salida con la entrada)

---

<sup>1</sup> Se usaron los datos experimentales de la referencia [19]

pero esta vez se varía el valor de la salida analógica desde su mínimo (0 digital) hasta su máximo (4095 digital). Esta prueba demuestra de una manera sencilla la linealidad de todo el sistema que incluye el DAC y el ADC, los filtros antialiasing de entrada y salida, el amplificador de ganancia programable en la entrada y el amplificador a la salida. Todos estos elementos añaden cierto grado de no linealidad.

Las pruebas de linealidad muestran que en todo el rango del sistema (0 - 4.096 V) la linealidad se altera aproximadamente  $\pm 5\text{mV}$  (corresponde a  $\pm 5$  bits) en el peor caso. Esto indica que el error a full escala es de +0.121% y -0.106%. Este error incluye todo el sistema analógico de entrada y salida por lo que se considera un buen desempeño de linealidad.

### 5.4.3 Filtros antialiasing

Para comprobar el desempeño de los filtros antialiasing se realizaron tres pruebas: la primera consiste en obtener la atenuación que produce el filtro ante la presencia de una señal senoidal correspondiente a la frecuencia de corte deseada con el fin de conocer el error del filtro. La segunda prueba realiza un barrido de frecuencias para conocer el desempeño general del filtro y la tercera es la obtención de la respuesta ante un escalón que describe el comportamiento en el dominio del tiempo. Se tomaron tres frecuencias de corte para las pruebas: 15Hz, 100Hz y 400Hz.

Para todas las pruebas se usó una escala de entrada de 0-5 [V]. Un punto extremadamente positivo de este filtro es la excelente respuesta al escalón. En sistemas de control es importante el comportamiento en el dominio del tiempo de los sistemas por lo que desde un principio se buscó una respuesta sin oscilaciones en el filtro antialiasing. Para los tres casos se obtuvo un escalón sin sobreimpulso.

## CAPÍTULO 6

### PRUEBAS Y RESULTADOS

#### 6.1 DESCRIPCIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presentan las pruebas realizadas y los resultados obtenidos del control de temperatura experimentalmente en laboratorio con una interfase en Intouch. Las simulaciones de MATLAB solo se limitan a un caso en particular de cambio de escalón en el módulo PCT-2. Se describen dos tipos de pruebas: las primeras obtienen el comportamiento del sistema como controlador robusto en el *Emulador* SISO mediante técnica de loopshaping y las características del mismo. Las segundas pruebas consisten en comparar con el equivalente controlador como PID digital configurado en el PLC.

#### 6.2 PRUEBAS DE CONTROL DE TEMPERATURA

##### 6.2.1 Controlador mediante técnica de loopshaping

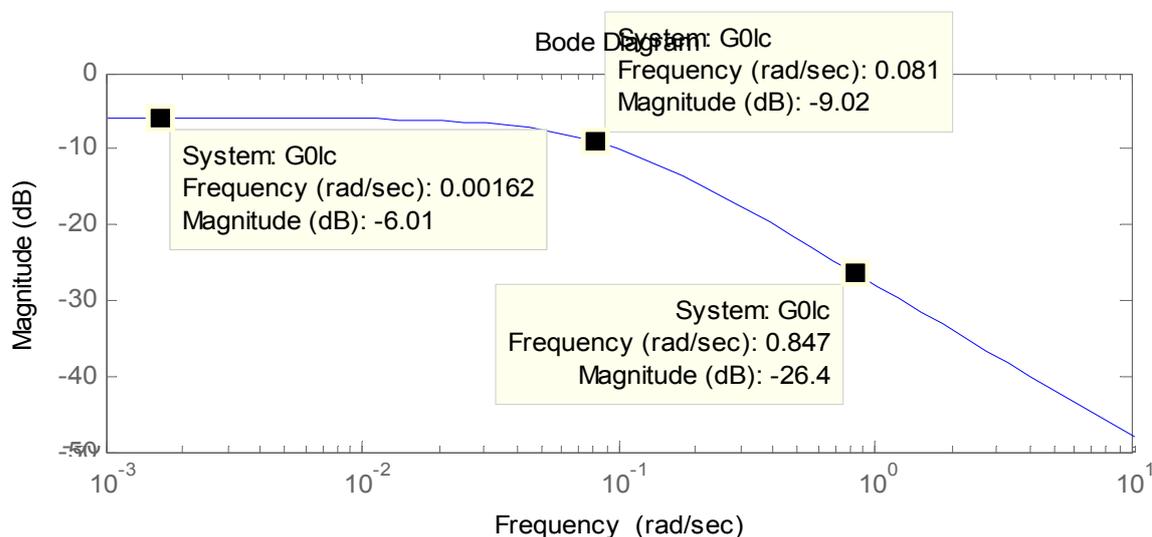
La función de transferencia del controlador robusto se configura en el *Emulador* SISO obteniendo el ancho de banda útil del módulo de temperatura. Para lo cual se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado.

```
G0 = tf(1.0030,[24.7219 1]);  
G0lc = feedback(G0,1);  
bode(G0lc)
```

de la *Figura 6.1* se obtienen los valores de:

- $G_{DC} = -6.01$  dB;
- $G_{BW} = G_{DC} - 3\text{dB} \approx -9.02$  dB;  $f_{BW} \approx 0.081$  rad/s;
- $G_{10xf_{BW}} \approx -26.4$  dB.

- $G_{f_{BW \times 10}} - G_{f_{BW}} = -26.4 + 9.02 = -17.38$  dB.
- Debido a que la variación en una década está comprendida entre -15dB y -30dB, se escoge una frecuencia máxima de simulación ( $f_m$ ) de 22 veces  $f_{BW} \rightarrow f_m = 1.782$  rad/s.



**Figura. 6.1. Diagrama de Bode en lazo cerrado de la función de transferencia del proceso**

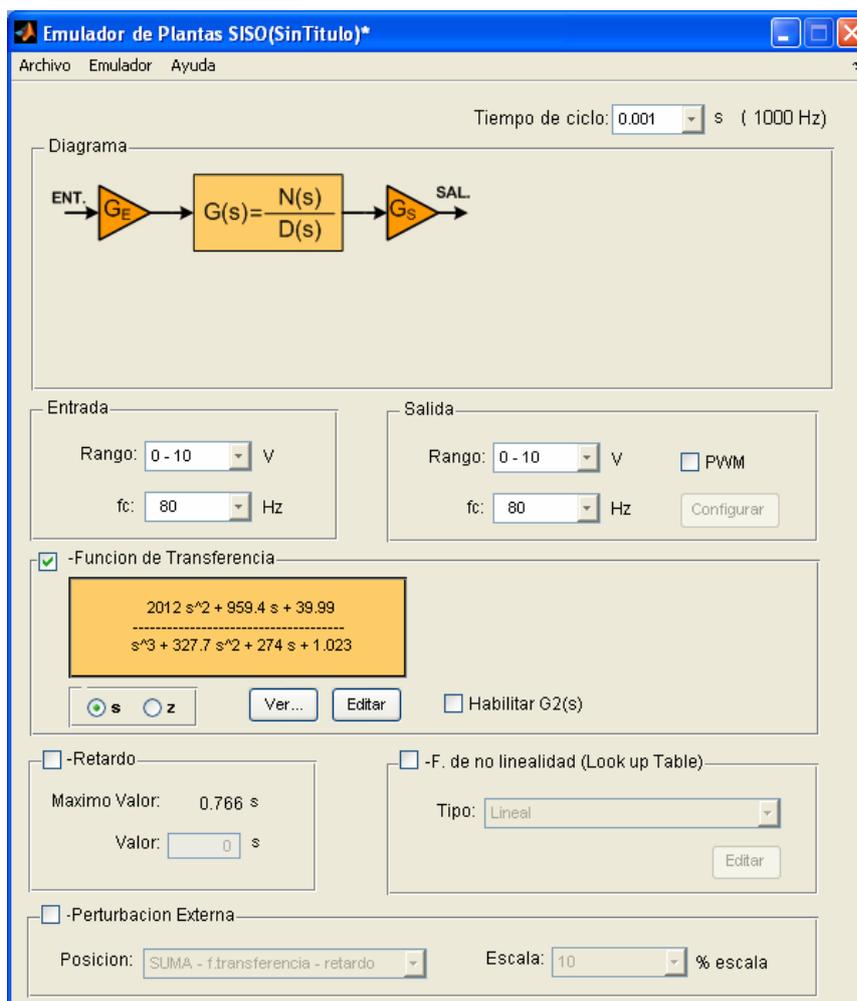
La frecuencia de muestro tiene que ser mayor para compensar los efectos del ADC y el DAC. Para el caso de 1% de admisibilidad en el error es necesario que un factor de 12.8 veces la frecuencia de simulación, de donde la frecuencia de muestro será 22.8096 rad/s. Esta es la frecuencia que se debe fijar en tiempo de ciclo que es calculado como:

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{22.8096} = 0.2755 \approx 0.28[s].$$

La frecuencia de muestreo es pequeña ( $f_s = 1/0.28 = 3.63$  Hz), para tener buenos resultados, sin embargo es posible aumentar considerablemente esta frecuencia ya que la restricción que tiene el emulador SISO en cuanto a la frecuencia de simulación viene dada por el retardo de transporte por lo cual se deja que el usuario escoja la frecuencia de simulación. La GUI indica el valor máximo de retardo que se puede tener para una función de transferencia y un tiempo de ciclo dado. Para el caso de ejemplo es posible simular hasta 200Hz pudiendo ingresar el retardo de 3.2s. La frecuencia de los filtros antialias deberá

ser siempre menor a la mitad de la frecuencia de simulación. En este caso se fija la frecuencia en 80Hz. [19]

En la casilla de tiempo de ciclo configura para que trabaje a 1kHz (puede hacerse hasta 2kHz pero no es muy confiable), a esa velocidad el controlador se comportará como que fuese continuo. De los resultados anteriores los filtros antialias se configuran a 80Hz, que cubren toda la banda útil de la planta de temperatura como se muestra en la *Figura 6.2*.



**Figura. 6.2. Configuración del emulador SISO como controlador robusto**

Para implementar este experimento se conectó la salida y entrada analógica del emulador SISO a las correspondientes del PLC; posteriormente se desarrollo una interfase como se muestra en la *Figura 6.3* realizando lecturas para 30°C, 40°C y 50°C. Los resultados se muestran el la *Tabla 6.1*.

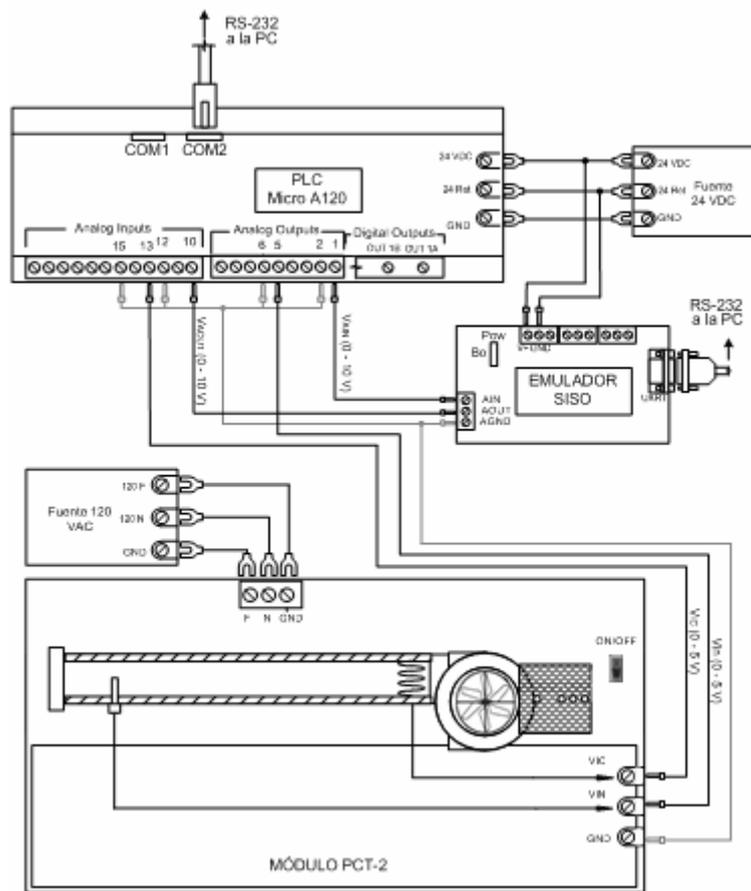
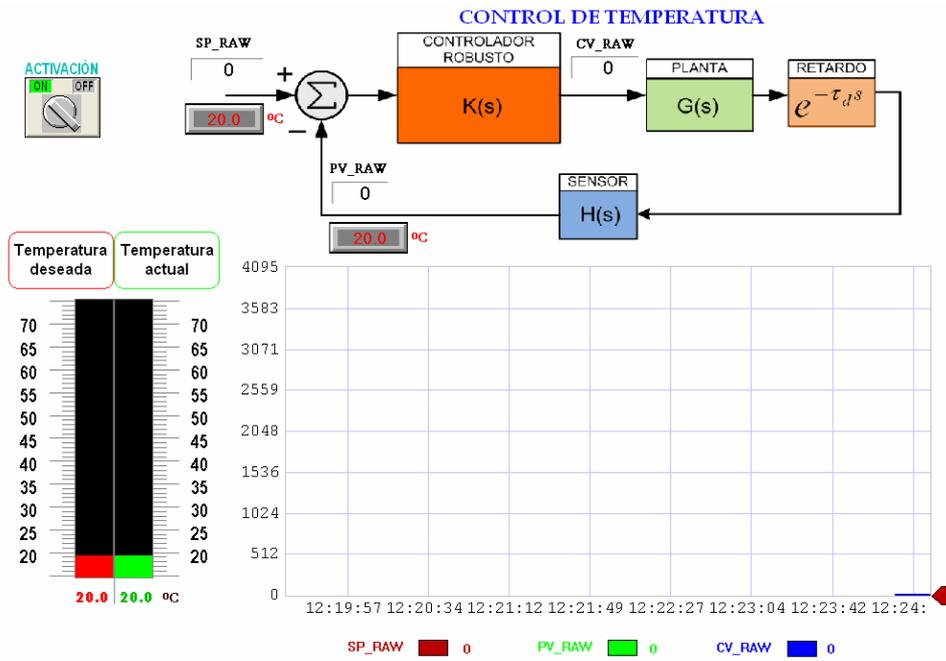


Figura. 6.3. Interfase y conexiones para el control de temperatura con el controlador robusto

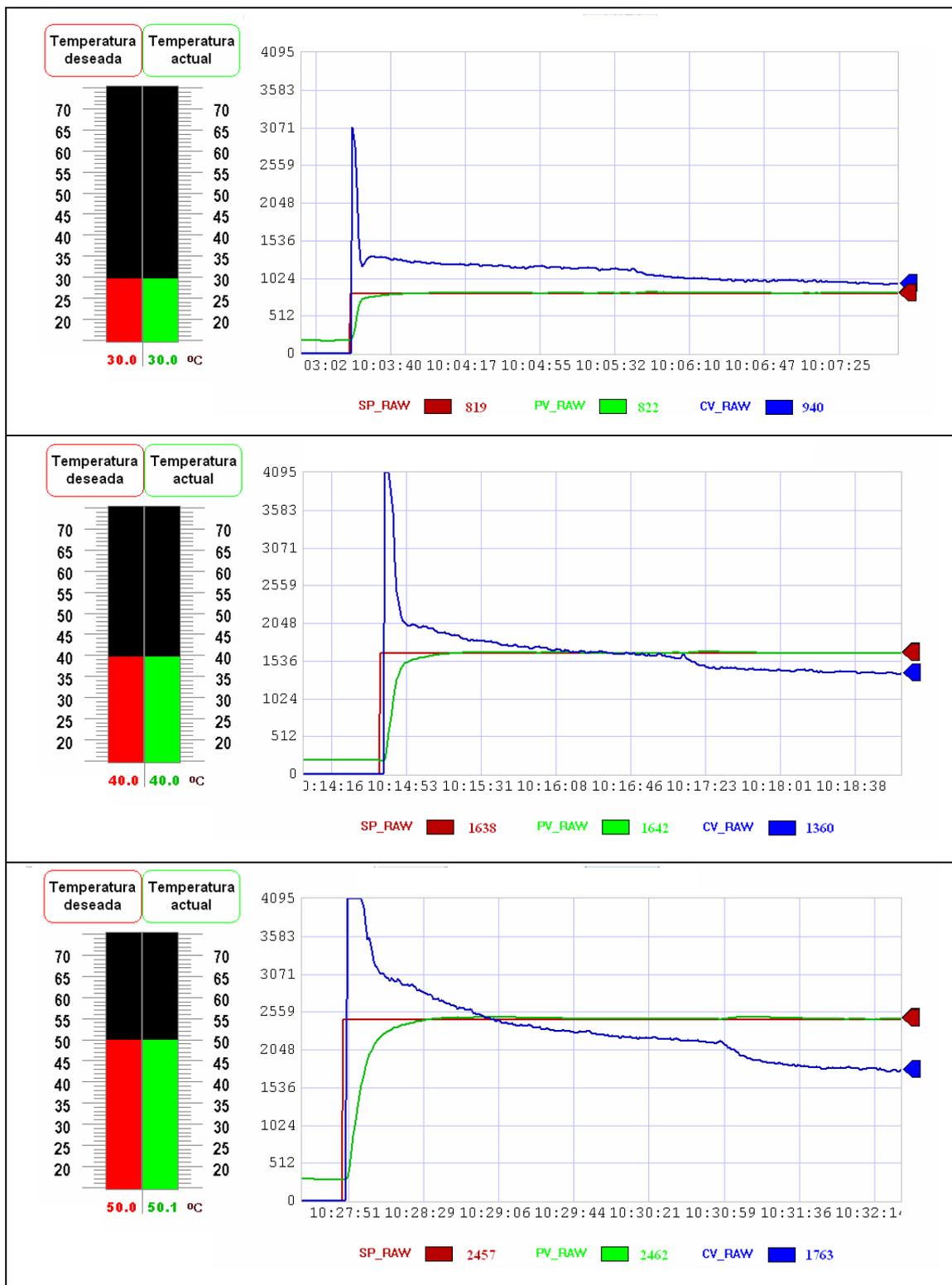


Tabla. 6.1. Respuesta del proceso para diferentes temperaturas con controlador robusto

## 6.2.2 Controlador clásico mediante PID

El controlador PID tiene tres parámetros,  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$ , para nuestro caso específico, el PLC Modicon usa la instrucción PID2, estos parámetros a ingresar se detallan a continuación:

### PB – Banda Proporcional

Representa el valor de la banda proporcional del Controlador que comprende un rango numérico desde 5 hasta 500 (adimensional). Reemplazando la constante proporcional obtenida con Matlab obtenemos

$$PB = \frac{100}{K_p}$$

$$PB = \frac{100}{3.1763} = 31.4832$$

### Tir – Reset Time

Representa la velocidad de reajuste del controlador. Se puede ingresar un valor desde 0000 hasta 9999 (entero). Este número en realidad se utiliza como 00.00 ó 99.99 repeticiones/minuto. En nuestro diseño se tiene que

$$T_{IR} = \frac{1}{T_i}$$

$$T_{IR} = \frac{1}{21.7460[\text{sec}] \cdot \frac{1[\text{min}]}{60[\text{sec}]}} = 2.7591[\text{rep} / \text{min}]$$

### Td – Rate Time

Representa la contribución derivativa para un controlador. El valor esta en el rango de 0000 hasta 9999 (entero) y se utiliza como 00.00 hasta 99.99 minutos.

$$T_d = 1.9846[\text{sec}] \cdot \frac{1[\text{min}]}{60[\text{sec}]} = 0.0331[\text{min}].$$

Los valores finales ingresados en el PLC fueron  $PB = 32$ ,  $T_{ir} = 2.76$  y  $T_d = 0.03$  a través de la interfase de la *Figura 6.4* y sus resultados en la *Tabla 6.2*.

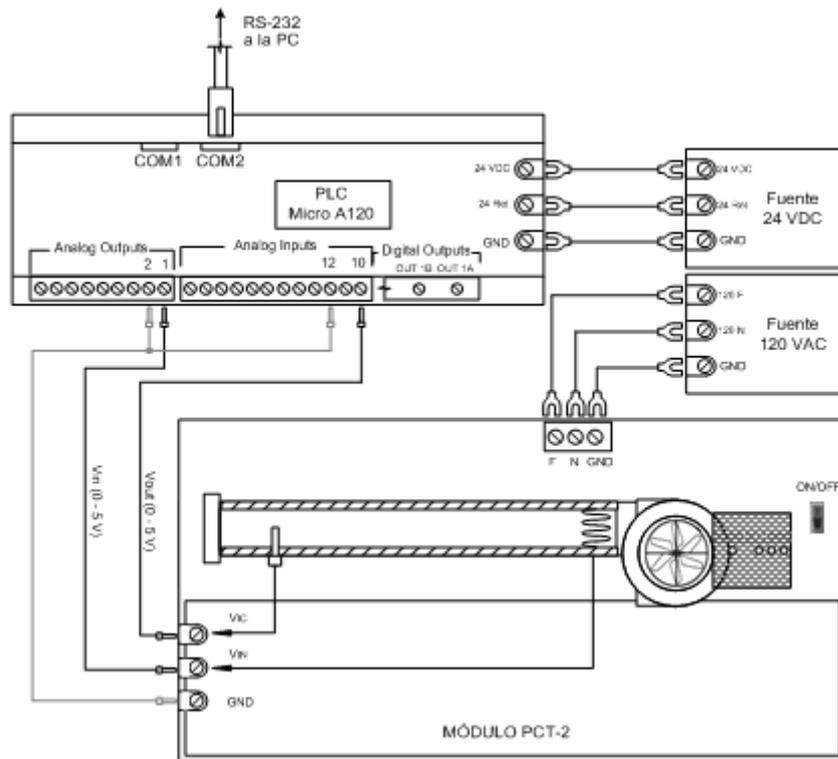
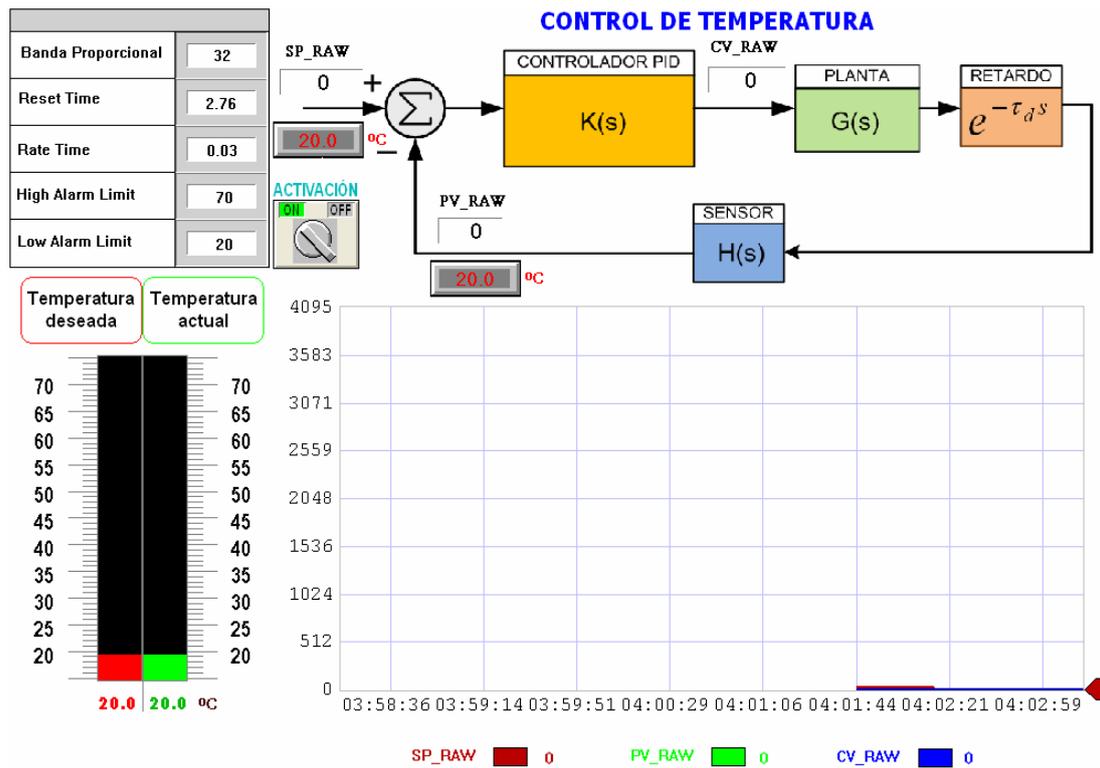


Figura. 6.4. Interfase conexiones para el control de temperatura con el controlador PID

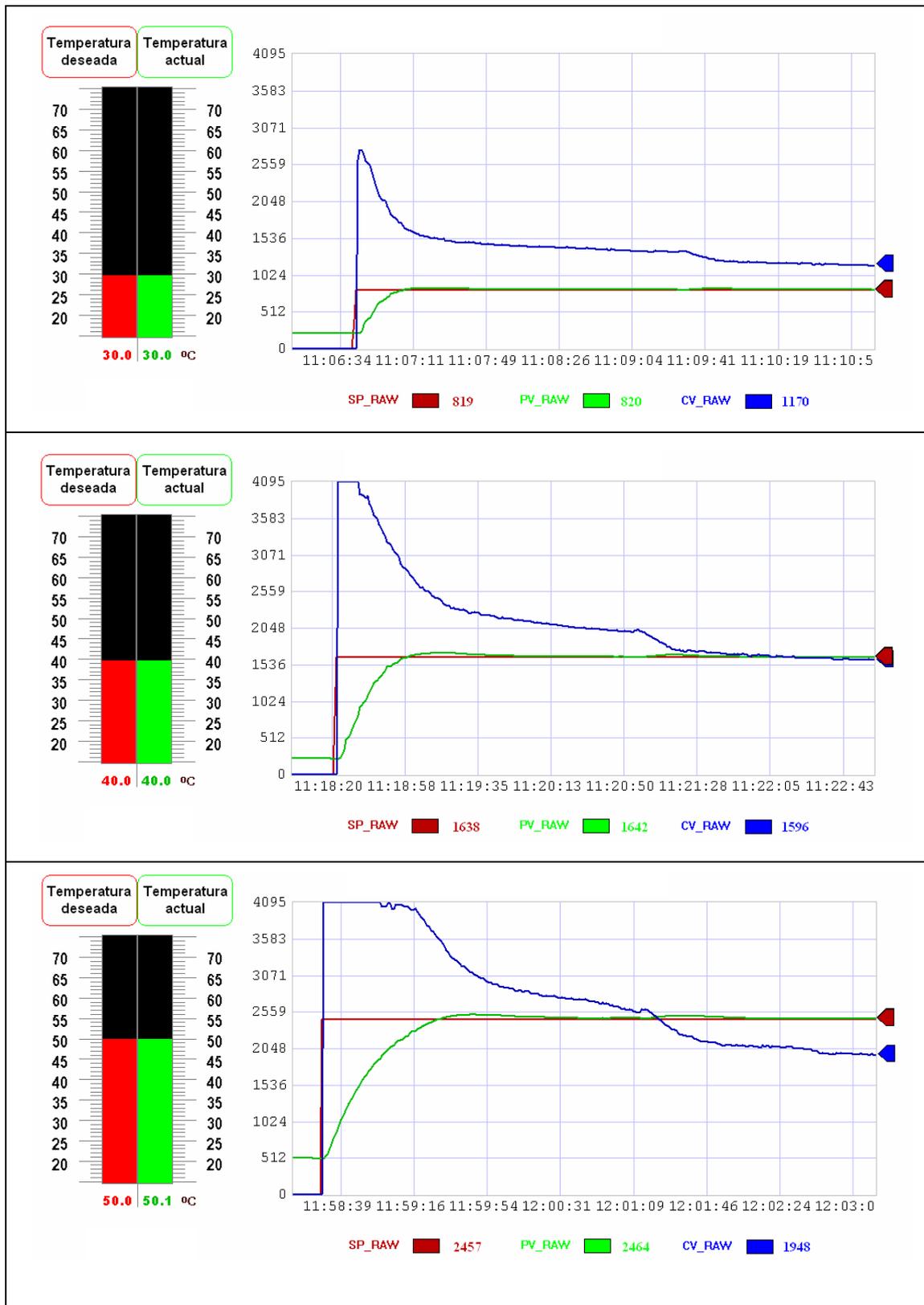


Tabla. 6.2. Respuesta del proceso para diferentes temperaturas con PID

## 6.3 RESULTADOS

El diseño de controladores precisos, hace necesario que se considere en el proceso de formulación del problema las posibles incertidumbres paramétricas y dinámicas así como las posibles perturbaciones que afectarán al sistema de control. La reducción del orden del controlador permite la obtención de un controlador robusto PID puede ser implementado con mayor facilidad con los dispositivos que se dispone en laboratorio.

### 6.3.1 Control Robusto

Las graficas resultantes de la recolección de datos del proceso muestran una respuesta rápida y sin overshoot en el control del proceso bajo la incertidumbre del modelo a la entrada de flujo de aire que se traduce en el incremento del retardo de tiempo. Además se muestra que el error es de  $0.1^{\circ}\text{C}$  como máximo en el proceso pese a la incertidumbre. Nótese además que a medida que la incertidumbre en el modelo cambia al alcanzar el punto de estabilización la salida del controlador disminuye, reduciendo la energía para evitar la inestabilidad. Por tanto el peor caso para este controlador se dio cuando el punto de referencia cambia a uno inferior, siendo difícil para el controlador robusto controlar debido a la entrada de error negativo, para lo cual el emulador SISO no estaba diseñado; pero sin embargo se implemento este controlador obteniendo buenos resultados.

### 6.3.2 Control PID

Las respuestas del proceso con un PID digital muestran que existe un overshoot relativamente pequeño y un tiempo de establecimiento mayor al del controlador robusto, pero al final el error es menor al  $0.1^{\circ}\text{C}$ . Esto indica con la reducción del controlador robusto se obtiene un buen desempeño con el controlador PID aún con el incremento en el retardo de tiempo.

## **CAPÍTULO 7**

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

#### **7.1 CONCLUSIONES**

El presente proyecto llegó a cumplir con el objetivo principal del diseño e implementación de un controlador robusto para el modulo de temperatura PCT-2 y su equivalente controlador PID. La técnica loop-shaping para el diseño de los controladores permite especificar mediante filtros el desempeño deseado usando conceptos matemáticos avanzados como es la optimización convexa.

##### **7.1.1 Conclusiones sobre simulación**

El diseño es la tarea central de un ingeniero, siendo este un proceso complejo en el que la creatividad y el análisis desempeñan un papel fundamental. La complejidad del diseño es el resultado del amplio rango de herramientas, entre las cuales esta la simulación. El desarrollo de modelos virtuales debido a su potencia computacional dada la complejidad del controlador, han ayudado a diseñar sistemas mas complejos, como en este caso el controlador robusto. Sin embargo, las simulaciones solo se limitan a modelos estrictamente matemáticos, sin considerar todas las dinámicas del proceso real, las cuales son difíciles y algunas imposibles traducirlas matemáticamente.

La idea de utilizar una herramienta matemática como Matlab, es la utilización de los algoritmos de optimización aplicados a controladores, que sin estos seria casi imposible diseñar controladores tan complejos. Además de esto, se pudo obtener resultados interesantes antes de la implementación en la planta real,

siendo de vital importancia la simulación previa al control del proceso que podría involucrar un sistema costoso.

### **7.1.2 Conclusiones sobre el hardware**

Para implementar este controlador se utilizó el emulador de plantas SISO, que fue un proyecto de grado anterior, se lo utilizó por el procesamiento de señales en tiempo real y la facilidad de configuración de la función de transferencia a simular. Sin embargo, la limitante se presentó cuando la entrada era unipolar, necesiéndose una entrada bipolar para la entrada del error, limitando el control de la planta a puntos de referencia ascendentes; pero logrando demostrarse la robustez del mismo.

### **7.1.3 Conclusiones sobre el software**

El diseño de controladores y la interfase de control, con Intouch; facilitó enormemente el desarrollo del nuevo controlador; siendo necesario software de alto desempeño matemático y así mismo uno de comunicación de alta fidelidad. Por tanto para la lectura de las diferentes señales del proceso fue necesario la conexión con el PLC, por ende, existe la necesidad de un software con la tarjeta del emulador SISO para interactuar con el control.

El principal inconveniente en el proceso de diseño del controlador robusto fue el compromiso eficiente entre criterios deseables pero que compiten entre sí. Al hacer un dispositivo técnico, en este caso un controlador, generalmente no sale igual que el que había sido originalmente visualizado. Los buenos ingenieros aprenden a simplificar adecuadamente los sistemas complejos con el objetivo del diseño y del análisis, siendo inevitable que exista desconocimiento entre el sistema físico complejo y el modelo del diseño. Es por esto la necesidad en el país de la tecnología para desarrollar nuestras propias tarjetas con su propio software y su respectiva certificación internacional. Pero se ha tratado de hacerlo a través de Matlab que es bastante para la configuración del dispositivo.

## 7.2 RECOMENDACIONES

- Queda por explorar la implementación del controlador robusto para el modulo de velocidad PCT-1 disponibles en laboratorios. De esta manera sería posible aplicar esta técnica a casos reales.
- El hardware implementado para el controlador robusto con el emulador SISO puede ser usado como su concepción original de modelo de planta y diseñar controladores con tarjetas de adquisición de datos. La incorporación de una tarjeta de adquisición es necesaria para señales negativas como es el error de la variable medida y el punto de referencia.
- Sería importante incorporar distintas técnicas de diseño de controladores en los nuevos laboratorios de la carrera de Ingeniería Mecatrónica, el cual posee diversos modelos de plantas.
- Los nuevos diseños de controladores, hace necesario que se estudie los mismos para controles más eficientes. Ampliando así las opciones de control para los diversos modelos de plantas considerando las incertidumbres paramétricas y dinámicas como los sistemas de control de ganancia programada (Gain-scheduling control systems).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### CAPÍTULO 2

[1] DOYLE John, FRANCIS Bruce, TANNENBAUM Allen. **Feedback Control Theory**, Macmillan Publishing Co, USA 1990, 196p.

[2] BOYD Stephen, BARRATT Craig. **Linear Controller Design: Limits of Performance**, Prentice-Hall, USA 1991, 390p.

[3] RODRÍGUEZ Francisco, LÓPEZ Manuel. **Control Adaptativo y Robusto**, Universidad de Sevilla, España 1996, 365p.

[4] DORSEY John. **Sistemas de control continuos y discretos**, 1da edición, McGraw-Hill, USA 2004, 678p

[5] BOYD Stephen, VANDENBERGHE Lieven. **Convex Optimization**, 1ra edición, Cambridge University Press, England 2004, 701p

[6] HYUN Wook. **Control System Design with Matriz Inequalities**, 1ra edición, Cambridge University Press, USA 1998, 456p

[7] BOYD Stephen. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**, 2da edición, SIAM, USA 1994, 187p.

[8] GAHINET Pascal, LAUB Alan, **LMI Control Toolbox**, The Math Works Inc., 1995.

[9] PHILLIPS Charles, HARBOR Royce, **Feedback Control Systems**, Tomo 1, Tercera Edición, Editorial Prentice-Hall, USA 1995, 620p.

[10] OGATA, Katsuhiko, **Ingeniería de Control Moderna**, Tomo 2, 1ra edición, Prentice-Hall, México 1994, 924p.

[11] BURNS Roland. **Advanced Control Engineering**, 1ra edición, Butterworth Heinemann, British 2001, 433p

[12] KARIMI Alireza. **Robust Controller Design by Convex Optimization**, Tomo 1, 2da edición, EPL, USA 2001, 863p.

### CAPÍTULO 3

[13] LENNART Ljung, **System Identification Toolbox**, The Math Works Inc., 1988-2008.

[14] SMITH Carlos, CORRIPIO Armando. **Control Automático de Procesos**, Tomo 1, Primera Edición, Editorial Limusa, México 1997, 717p.

#### **CAPÍTULO 4**

[15] SKOGESTAD Sigurd, POSTLETHWAITE Ian. **Multivariable Feedback Control**, 2da edición, John Wiley & Sons, Ltd, England 2005, 563p

[16] MATHWORKS, **LMI Control Toolbox**, Matlab 7.

[17] BURBANO Fernando, **APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DE LOOPSHAPING AL DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS**, Tesis para la obtención del título de Ingeniero en Automatización y Control, Escuela Politécnica del Ejército, Sangolquí-Ecuador 2007, Capítulo 4.

[18] DORF Richard, BISHOP Robert. **Modern Control Systems**, Prentice-Hall Inc., USA 2001.

#### **CAPÍTULO 5**

[19] SANTANA José, **DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN EMULADOR DE PLANTAS SISO**, Tesis para la obtención del título de Ingeniero en Automatización y Control, Escuela Politécnica del Ejército, Sangolquí-Ecuador 2006, Anexos.

[20] Johnson Curtis D., **Process Control Instrumentation Technology**, Tomo 1, Sexta Edición, Editorial, USA 2000, 678p.

## **ANEXOS**

## **ANEXO A**

### **CODIGO EN MATLAB**

### A.1 Diseño del Controlador con Técnica de Loopshaping.

```
clc
clear all
disp(' ');
disp(' ');
disp('CONTROLADOR DEL MODULO PCT-2 MEDIANTE LOOP-SHAPING CON
SÍNTESIS LMI');
disp(' ');
disp(' ');
%FUNCIONE DE TRANSFERENCIA DE PLANTA NOMINAL
%Constantes de ganancia y tiempo
n=[1.0030];
d=[24.7219 1];
%Retardo de tiempo con aproximación de Pade de 30°
[nd,dd]=pade(3.1,30);
GdTF=tf(nd,dd);
%Planta Nominal con Incertidumbre Multiplicativa
nim=conv(n,nd);
dim=conv(d,dd);
ni=[30.0915];
nimi=conv(ni,nd);
GimTF=tf(nim,dim);
%Planta Nominal con Incertidumbre Multiplicativa
delay=5;
disp('Planta Nominal con Incertidumbre Multiplicativa: G= G0.exp(-td.s)')
G=tf(ni,d,'OutputDelay',delay)
%Funcion de Transferencia de la Planta Nominal
G0TF=tf(n,d);
%Funcion Matriz de Sistema de Planta Nominal
G0=ltisys('tf',n,d);
%RESPUESTA NATURAL EN FRECUENCIA Y TIEMPO DE PLANTA E
INCERTIDUMBRE
%Criterio de Estabilidad de Nyquist
figure(1);clf;
```

```
wn=0:0.001:100;
nyquist(G,wn)
echo on
pause % Presione Tecla para continuar
echo off
%FORMACION DE FILTROS w1 y w2
%Filtros con aproximación asintótica
n1=[0.003162 0.12];
d1=[1 0.004];
n2 = [1 0.00047];
d2 = [0.35 0.15];
%Bode del Retardo de Tiempo
figure(2);clf;
w=logspace(-3,3,1000);
D=exp(-5*j*w)-1;
[mag1,phase1,w]=bode(n1,d1,w);
[mag2,phase2,w]=bode(n2,d2,w);
semilogx(w,20*log10(abs(D)),'b',w,20*log10(mag1),'-
.g',w,20*log10(mag2),'r',w,0,'k'),grid off;
legend('exp(-5s) - 1','W1(s)','W2(s)')
title('Filtros de Desempeño y Estabilidad Robusta');
xlabel('Frecuencia (rad/s)');
ylabel('Magnitud (dB)');
%Filtros como Matriz de Sistema
w1=ltisys('tf',n1,d1);
w2=ltisys('tf',n2,d2);
disp('Función de Transferencia de Filtros W1 y W2')
%Funcion de Transferencia de Filtro w1 Pasa Bajo (Desempeño)
w1TF=tf(n1,d1)
%Funcion de Transferencia de Filtro w2 Pasa Alto (Robustez)
w2TF=tf(n2,d2)
w1;
w2;
%ESPECIFICACION DE LA ESTRUCTURA DE CONTROL
```

```

entradas='r';
salidas='e=r-G0;G0';
[P,r]=sconnect(entradas,salidas,'K:e','G0:K',G0);
Paum=smult(P,sdiag(w1,w2,1));
echo on
pause % Presione Tecla para continuar
echo off
%SINTESIS CONTROLADOR H-INFINITO
disp('Sintesis de Controlador K con Riccati o LMI')
[gopt,K]=hinflmi(Paum,r,1);%gopt
%VALIDACION DEL CONTROLADOR K(s):
Plc=slft(P,K);
sinfo(Plc)
%FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL CONTROLADOR
disp('Función de Transferencia del Controlador Robusto')
[nk,dk]=ltitf(K);
KTF=tf(nk,dk)
figure(3);clf;
Bk=ltisys('tf',nk,dk);
splot(Bk,'bo',logspace(-4,2,1000));
title('Diagrama de Bode del Controlador Robusto')
zpk(KTF)
%FUNCIONES SENSIBILIDAD Y SENSIBILIDAD COMPLEMENTARIA
L=KTF*GimTF;
S=1/(1+L);
T=1-S;
[Gm,Pm,W180,Wc]=margin(L);
%CARACTERISTICAS DE L:gamma,S_inf,T_inf,GM,PM,Wc
NS=norm(S,inf,1e-4);
NT=norm(T,inf,1e-4);
disp('Caracteristicas Función en Lazo Abierto G.K')
disp(sprintf('%6s%6s%6s%6s%6s%6s','gamma','S_inf','T_inf','GM','PM','Wc'));
disp(sprintf('%6.2f%6.2f%6.2f%6.2f%6.1f%6.2f',gopt,NS,NT,Gm,Pm,Wc));

```

## %GRAFICAS DE SENSIBILIDAD Y SENSIBILIDAD COMPLEMENTARIA EN FRECUENCIA

```

omega=logspace(-2,2,1001);
w1r=w1TF; [magw1,phaw1]=bode(w1r,omega);
w2r=1/w2TF; [magw2,phaw2]=bode(w2r,omega);
[magL,phal]=bode(L,omega);
[magS,phas]=bode(S,omega);
[magT,phas]=bode(T,omega);
figure(4);clf;
loglog(omega,magL(:),'b',omega,magS(:),...
    '-.r',omega,magT(:),'-g',omega,omega./omega,':k')
axis([.01,100,.001,100]);
xlabel('Frecuencia (rad/s)');ylabel('Magnitud')
title('Respuesta Singular de L, S y T');
legend('|L|','|S|','|T|')

```

## %GRAFICAS DE PLANTA CONTROLADA EN EL TIEMPO

%Respuesta Escalón e Impulso

```

figure(5);clf;
subplot(211);
t=0:0.001:120;
step(T,'g',t);
title('Respuesta al Escalón de la Planta con Controlador Robusto');
subplot(212);
impulse(series(S,G),'g',t);
title('Rechazo a una perturbación impulsiva en la Entrada de la Planta con Controlador Robusto');
figure(6);clf;
time=0:0.005:60;
step(T,'g',KTF*S,'b--',time)
hold on
plot(time,1,'r')
axis([0 60 -0.5 6]);
legend('PV','CV','SP')
title('Respuesta con Controlador Robusto al Escalón de Planta');

```

```

xlabel('Tiempo');
ylabel('Magnitud');
%GRAFICAS DE ESTABILIDAD EN LA FRECUENCIA
%Criterio de estabilidad robusta
%Inestable
figure(7);clf;
w=logspace(-3,3,1000);
Gfini=tf(nimi,dim);
    gdelay=tf(1,1,'OutputDelay',5);
    frsp_gdelay=freqresp(gdelay,w);
    frsp_gi=freqresp(Gfini,w);
    lli=abs((frsp_gi(:)./frsp_gi(:))+ ((frsp_gi(:)./frsp_gi(:))./(frsp_gi(:))));
    lDi=abs(frsp_gdelay(:)-(1));
    loglog(w,lli(:),'b',w,lDi(:),'r');
    hold on
    legend('|1+1/GK|','|exp(-5s) - 1|')
title('Criterio de Estabilidad Robusta sin Controlador');
xlabel('Frecuencia (rad/s)');
ylabel('Magnitud');
%Estable
figure(8);clf;
w=logspace(-3,3,1000);
nfin=conv(nk,nim);
dfin=conv(dk,dim);
Gfin=tf(nfin,dfin);
    gdelay=tf(1,1,'OutputDelay',5);
    frsp_gdelay=freqresp(gdelay,w);
    frsp_g=freqresp(Gfin,w);
    lli=abs((frsp_g(:)./frsp_g(:))+ ((frsp_g(:)./frsp_g(:))./(frsp_g(:))));
    lDi=abs(frsp_gdelay(:)-(1));
    loglog(w,lli(:),'b',w,lDi(:),'r');
    hold on
    legend('|1+1/GK|','|exp(-5s) - 1|')
title('Criterio de Estabilidad Robusta con Controlador');

```

```
xlabel('Frecuencia (rad/s)');
ylabel('Magnitud');
%Criterio de Estabilidad de Nyquist con controlador robusto
figure(9);clf;
nyquist(L,wn)
echo off
```

## A.2 Diseño de Controlador PID

```
%PID
clear
clc
disp(' ');
disp('CONTROLADOR DEL MODULO PCT-2 MEDIANTE PID');
disp(' ');
%Función de transferencia de la Planta Nominal
n=[1.0030];
d=[24.7219 1];
[nd,dd]=pade(3.1,30);
nim=conv(n,nd);
dim=conv(d,dd);
G=tf(nim,dim);
s=tf('s');
ni=[30.0915];
%Planta Nominal con Incertidumbre Multiplicativa
delay=5;
disp('Planta Nominal con Incertidumbre Multiplicativa: G= G0.exp(-td.s)')
Gi=tf(ni,d,'OutputDelay',delay)
%RESPUESTA NATURAL EN FRECUENCIA Y TIEMPO DE PLANTA E
INCERTIDUMBRE
%Criterio de Estabilidad de Nyquist
figure(1);clf;
wn=0:0.001:100;
nyquist(Gi,wn)
```

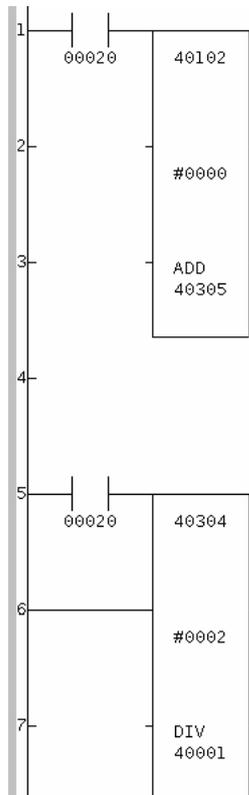
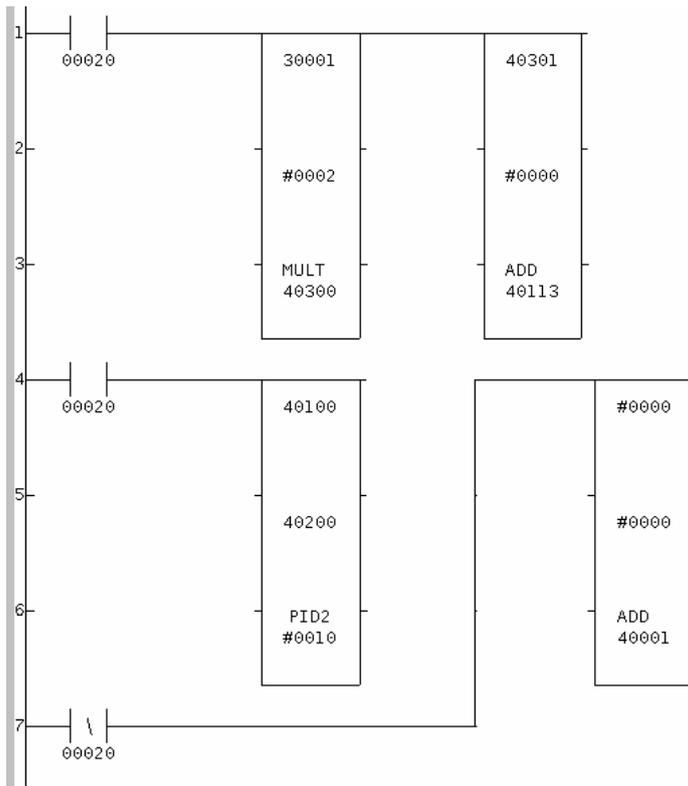
```
echo on
pause % Presione Tecla para continuar
echo off
Kc=3.1763;ti=21.7369;td=0.03308;
%Controlador PID
alfa=0.075;
disp('CONTROLADOR PID')
K=Kc*(1+(1/(ti*s)))*((td*s+1)/(alfa*td*s+1))
nk=[Kc*ti*td Kc*(ti+td) Kc];
dk=[alfa*ti*td ti 0];
figure(2);clf;
Bk=ltisys('tf',nk,dk);
splot(Bk,'bo',logspace(-3,3,1000));
title('Diagrama de Bode del Controlador PID')
L = G*K;
S = inv(1+L);
T = 1-S;
figure(2);clf;
time=0:0.005:70;
step(T,'b',K*S,'g--',time)
hold on
plot(time,1,'r')
axis([0 60 -0.5 6]);
legend('PV','CV','SP')
title('Respuesta con Controlador PID al Escalón en la Planta');
xlabel('Tiempo');
ylabel('Magnitud');
%Respuesta Escalon e Impulso
figure(3);clf;
subplot(211);
step(T,'g',time);
title('Respuesta al Escalón de la Planta con PID');
subplot(212);
impulse(series(S,G),'g',time);
```

```
title('Rechazo a una Perturbación Impulsiva en la Entrada de la Planta con PID');  
%Criterio de Estabilidad de Nyquist con PID  
figure(4);clf;  
nyquist(L,wn)
```

## **ANEXO B**

### **INSTRUCCIONES EN PLC MODICON**

## Diseño del Controlador PID en el PLC



## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA. 2.1. NORMA $\ u\ _{\infty}$ DE LA SEÑAL $u(t)$ .....	6
FIGURA. 2.2. SISTEMA A) SISO Y B) MIMO.....	6
FIGURA. 2.3. $\ H\ _2^2$ DE UN SISTEMA MIMO PARA $\min\{n_z, n_w\} = 3$ .....	8
FIGURA. 2.4. MÁXIMO VALOR SINGULAR DE $H(s)$ .....	9
FIGURA. 2.5. SISTEMA RESORTE-MASA-AMORTIGUADOR.....	11
FIGURA. 2.6. GRAFICA DE BODE DE $G(s)$ , PARA DIFERENTES VALORES DE $m \in [0.9, 1.1]$ , $b \in [0.1, 0.2]$ , Y $k \in [2, 3]$ .....	12
FIGURA. 2.7. DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE UN SISTEMA DE CONTROL CON INCERTIDUMBRE EN LA PLANTA.....	13
FIGURA. 2.8. GRÁFICA DE NYQUIST CON REGIONES DE INCERTIDUMBRE .....	14
FIGURA. 2.9. INCERTIDUMBRE MULTIPLICATIVA A LA SALIDA DEL MODELO NOMINAL .....	16
FIGURA. 2.10. SISTEMA DE CONTROL DE UNA LAMINADORA.....	18
FIGURA. 2.11. COMPARACIÓN DE LAS APROXIMACIONES DE FASE DE RETARDO PARA $\tau_d = 3(\text{seg.})$ .....	20
FIGURA. 2.12. FILTRO $W(s)$ : GRAFICA EXACTA Y ASINTÓTICA .....	21
FIGURA. 2.13. GRAFICA DE BODE DEL FILTRO $W(s)$ E INCERTIDUMBRE MULTIPLICATIVA $e^{-3s} - 1$ .....	22
FIGURA. 2.14. GRÁFICA DE BODE INCERTIDUMBRE ADITIVA Y MULTIPLICATIVA PARA $\tau_d = 3(\text{seg.})$ .....	23
FIGURA. 2.15. CONJUNTOS CONVEXO Y NO CONVEXO .....	24
FIGURA. 2.16. PUNTOS $x_1$ Y $x_2$ EN $\Re^n$ DESCRIBEN UNA LÍNEA PARAMÉTRICA DADA POR $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ , DONDE $\alpha$ VARIA SOBRE $\Re$ .....	24
FIGURA. 2.17. FUNCIÓN CONVEXA.....	25
FIGURA. 2.18. SIMPLES LMIS EN EL PLANO.....	27
FIGURA. 2.19. CONJUNTO DE LMIS Y LMI EQUIVALENTE .....	30
FIGURA. 2.20. ESTADO DE EQUILIBRIO ESTABLE Y TRAYECTORIA REPRESENTATIVA .....	36
FIGURA. 2.21. TRAYECTORIA REPRESENTATIVA DE ESTABILIDAD UNIFORMEMENTE ESTABLE ASINTÓTICAMENTE .....	37
FIGURA. 2.22. PÉNDULO SIMPLE: A) REPRESENTACIÓN Y B) PLANO DE ESTADOS DEL MOVIMIENTO CON FRICCIÓN.....	39
FIGURA. 2.23. CURVAS DE NIVEL DE UNA FUNCIÓN DE LYAPUNOV .....	40
FIGURA. 2.24. DIAGRAMA DE BLOQUES DE ESTADOS DE UN SISTEMA MIMO.....	45
FIGURA. 3.1. PROCESO TÉRMICO DEL MÓDULO PCT-2.....	48
FIGURA. 3.2. DIAGRAMA GENERAL DE COMPONENTES DEL SISTEMA.....	49
FIGURA. 3.3. INTERFAZ GRÁFICA EN INTOUCH® 9.5.....	50

FIGURA. 3.4. DIAGRAMA ESPECÍFICO PARA ADQUISICIÓN DE DATOS DEL MÓDULO PCT-2 ..... 51

FIGURA. 3.5. GRÁFICA Y ECUACIÓN DEL SENSOR TIPO IC DEL MÓDULO PCT-2 ..... 52

FIGURA. 3.6. IDENTIFICATION TOOLBOX DE MATLAB® 7.0..... 53

FIGURA. 3.7. CUADRO DE DIALOGO DE IMPORTACIÓN DE DATOS DEL IDENT TOOLBOX . 53

FIGURA. 3.8. CUADRO DE DIALOGO DE DATOS IMPORTADOS Y REPRESENTACIÓN GRAFICA..... 54

FIGURA. 3.9. CUADRO DE DIALOGO DE MODELO ARX ..... 55

FIGURA. 3.10. CURVAS DE AJUSTE DEL CON EL MODELO ARX ..... 55

FIGURA. 4.1. DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE UN SISTEMA DE CONTROL EN LAZO CERRADO..... 59

FIGURA. 4.2. MAGNITUD DE BODE PARA LAS FUNCIONES  $L$ ,  $S$  Y  $T$  ..... 62

FIGURA. 4.3. ZONA DE FRECUENCIAS DE LA FUNCIÓN EN LAZO ABIERTO  $GK$  ..... 64

FIGURA. 4.4. FILTRO  $W_1$ : EXACTO Y ASINTÓTICO ..... 65

FIGURA. 4.5. FILTRO  $W_2$ : EXACTO Y ASINTÓTICO ..... 65

FIGURA. 4.6. ESTRUCTURA PARA PROBLEMA DE CONTROL ROBUSTO CON  $H^\infty$  ..... 66

FIGURA. 4.7. EQUIVALENTE DEL PROBLEMA DE CONTROL ROBUSTO CON  $H^\infty$  ..... 67

FIGURA. 4.8. SISTEMA  $G$  Y LOS FILTROS  $W_1, W_2, W_3, W_d, W_n$  ..... 72

FIGURA. 4.9. SISTEMA DE INTERCONEXIÓN EN SERIE ..... 73

FIGURA. 4.10. SISTEMA LINEAL EN CADENA ..... 74

FIGURA. 4.11. ESTRUCTURA GENERAL DEL SISTEMA EN LAZO CERRADO EN CONTROL ROBUSTO..... 75

FIGURA. 4.12. SISTEMA CON INTERCONEXIÓN REALIMENTADA LINEAL-FRACCIONARIA . 76

FIGURA. 4.13. SISTEMAS DE INTERCONEXIÓN ..... 77

FIGURA. 4.14. SISTEMA CON TRES ENTRADAS Y SEIS SALIDA ..... 79

FIGURA. 4.15. SISTEMA CON REALIMENTACIÓN..... 80

FIGURA. 4.16. SISTEMA INESTABLE CON CRITERIO DE NYQUIST..... 82

FIGURA. 4.17. CRITERIO DE ESTABILIDAD ROBUSTA CON  $K = 1$  ..... 83

FIGURA. 4.18. FORMACIÓN DE FILTROS DE DESEMPEÑO Y ESTABILIDAD ROBUSTA  $W_1(s)$  Y  $W_2(s)$  ..... 85

FIGURA. 4.19. DIAGRAMA DE BODE DEL CONTROLADOR ROBUSTO ..... 87

FIGURA. 4.20. ESTABILIDAD DEL SISTEMA SEGÚN CRITERIO DE NYQUIST CON CONTROLADOR ROBUSTO..... 88

FIGURA. 4.21. VALORES SINGULARES S Y L CON CONTROLADOR ROBUSTO ..... 89

FIGURA. 4.22. CRITERIO DE ESTABILIDAD ROBUSTA CON SÍNTESIS DE  $K$  CON HINFLMI 90

FIGURA. 4.23. RESPUESTA ESCALÓN Y RECHAZO A PERTURBACIÓN CON SÍNTESIS HINFLMI ..... 91

FIGURA. 4.24. VARIABLE CONTROLADA Y DEL PROCESO PARA UN PUNTO DE REFERENCIA CON SÍNTESIS HINFLMI ..... 91

FIGURA. 4.25. DIAGRAMA DE BODE DEL CONTROLADOR PID ..... 95

FIGURA. 4.26. ESTABILIDAD SEGÚN CRITERIO DE NYQUIST CON PID..... 96

---

FIGURA. 4.27. RESPUESTA ESCALÓN Y RECHAZO A PERTURBACIÓN CON PID .....	97
FIGURA. 4.28. VARIABLE CONTROLADA Y DEL PROCESO PARA UN PUNTO DE REFERENCIA CON PID .....	97
FIGURA. 5.1. ELEMENTOS DE UN SISTEMA HIL Y DE CONTROL.....	99
FIGURA. 5.2. COMPONENTES DEL EMULADOR SISO .....	100
FIGURA. 5.3. HARDWARE DEL EMULADOR SISO CON SUS COMPONENTES.....	101
FIGURA. 5.4. ELEMENTOS DEL HARDWARE DEL EMULADOR SISO .....	102
FIGURA. 5.5. PANTALLA PRINCIPAL DE LA GUI DEL EMULADOR SISO .....	104
FIGURA. 5.6. SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS Y CONTROL DEL PROCESO .....	106
FIGURA. 6.1. DIAGRAMA DE BODE EN LAZO CERRADO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL PROCESO .....	110
FIGURA. 6.2. CONFIGURACIÓN DEL EMULADOR SISO COMO CONTROLADOR ROBUSTO .....	111
FIGURA. 6.3. INTERFASE Y CONEXIONES PARA EL CONTROL DE TEMPERATURA CON EL CONTROLADOR ROBUSTO.....	112
FIGURA. 6.4. INTERFASE CONEXIONES PARA EL CONTROL DE TEMPERATURA CON EL CONTROLADOR PID .....	115

## ÍNDICE DE TABLAS

TABLA. 2.1. MODELOS DE INCERTIDUMBRE EN EL MODELADO DE LA PLANTA.....	15
TABLA. 3.1. DATOS DE VOLTAJE VS. TEMPERATURA PARA EL SENSOR TIPO IC DEL MÓDULO PCT-2 .....	52
TABLA. 3.2. CONDICIONES DE ENTRADA DE AIRE DEL MÓDULO PCT-2 .....	57
TABLA. 4.1. FUNCIÓN SPLOT PARA GRAFICAS EN FRECUENCIA.....	81
TABLA. 4.2. FUNCIÓN SPLOT PARA GRAFICAS EN EL TIEMPO .....	81
TABLA. 4.3. CARACTERÍSTICAS DEL CONTROLADOR ROBUSTO .....	88
TABLA. 5.1. DESCRIPCIÓN DE COMPONENTES DE LA PLACA .....	103
TABLA. 5.2. DESCRIPCIÓN DE COMPONENTES DE LA INTERFASE DE USUARIO .....	105
TABLA. 6.1. RESPUESTA DEL PROCESO PARA DIFERENTES TEMPERATURAS CON CONTROLADOR ROBUSTO.....	113
TABLA. 6.2. RESPUESTA DEL PROCESO PARA DIFERENTES TEMPERATURAS CON PID	116

**Fecha de Entrega:**

---

Sr. Henry Santiago Miniguano Miniguano

**AUTOR**

---

Ing. Víctor Proaño

**DIRECTOR DE LA CARRERA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**