

**ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

**PROYECTO DE GRADO PARA LA OBTENCIÓN DEL  
TÍTULO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

**DISEÑO Y MODELACIÓN DE UN CONTROLADOR LMI  
(LINEAR MATRIX INEQUALITIES) PARA EL SISTEMA  
DE SUSPENSIÓN DE UN AUTOBÚS**

**GABRIEL HERNÁN TRUJILLO PONGUILLO**

**QUITO-ECUADOR**

**2005**

## **CERTIFICACIÓN**

Certificamos que el presente Proyecto de Grado “Diseño y modelación de un controlador LMI (Linear Matrix Inequalities) para el sistema de suspensión de un autobús” fue desarrollado en su totalidad por el Sr. Gabriel Hernán Trujillo Ponguillo, bajo nuestra dirección, como requerimiento parcial a la obtención del título de INGENIERO ELECTRÓNICO.

Sangolquí, 10 de Agosto del 2005

---

Ing. Víctor Proaño  
DIRECTOR DEL PROYECTO

---

Ing. Rodolfo Gordillo  
CODIRECTOR DEL PROYECTO

## AGRADECIMIENTOS

La vida me ha dado la oportunidad de disfrutar de muchas cosas maravillosas y deleitarme al máximo cada segundo que transcurre, gracias a ti Dios por permitirme despertar cada mañana con buena salud y con las energías necesarias para vivir en un mejoramiento continuo de mí mismo.

Agradezco a mis padres por su apoyo incondicional, paciencia y comprensión durante mi vida; no existe nada que pueda compensar todo lo que ellos han hecho por mí.

Agradezco a mis hermanas, Elvita María y Diani, y a mis sobrinos, Alexander, Daniel y Paúl, por darme su cariño, apoyo que es un aliciente para cumplir mis metas.

Le agradezco a la ESPE por permitirme conocer sentimientos sinceros, como la amistad. Gracias Pelín por ser un amigo sincero durante el tiempo universitario que compartimos. Gracias Sr. Jaime y Sra. Guillermina por haberme tratado como un hijo más.

Muchas gracias Ing. Víctor Proaño e Ing. Rodolfo Gordillo por su colaboración y paciencia para la elaboración de este proyecto.

Agradezco a todos mis amigos y compañeros de trabajo por su apoyo y comprensión. Gracias Ing. Iván Álvarez por darme la oportunidad de desempeñarme en esta nueva etapa de mi vida.

*Gabriel*

# ÍNDICE DE CONTENIDOS

## PRÓLOGO

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN, OBJETIVOS Y CONTENIDOS DE LA TESIS

1.1 INTRODUCCIÓN .....	1
1.2 OBJETIVOS Y REQUISITOS .....	2
1.3 CONTENIDOS .....	3

## CAPÍTULO 2

### NOCIONES PRELIMINARES

2.1 INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE SUSPENSIÓN .....	5
2.2 DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSIÓN .....	5
2.2.1 SUSPENSIÓN PASIVA .....	6
2.3 SUSPENSIÓN ACTIVA .....	12
2.3.1 NOCIONES BÁSICAS .....	12
2.3.2 VENTAJAS DE LAS SUSPENSIONES ACTIVAS .....	13
2.4 NEUMÁTICOS .....	14
2.4.1 INFLADO DE LOS NEUMÁTICOS .....	14
2.5 DESARROLLO DEL MODELO MATEMÁTICO .....	17
2.5.1 PRINCIPIOS FÍSICOS .....	17
2.5.2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LA SUSPENSIÓN ACTIVA .....	19
2.5.2.1 ANÁLISIS ESTÁTICO DE LA SUSPENSIÓN PASIVA .....	19
2.5.2.2. ANÁLISIS DINÁMICO DE LA SUSPENSIÓN ACTIVA .....	20
2.5.3 REPRESENTACIÓN EN ECUACIONES DEL ESPACIO DE ESTADOS .....	25
2.5.3.1 ECUACIONES DE ESTADO PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN ACTIVA .....	26
2.5.4 REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMA DE BLOQUES .....	31

2.5.5 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL MODELO MATEMÁTICO OBTENIDO PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN .....	32
2.5.6 ANÁLISIS DE CONTROLABILIDAD DEL MODELO MATEMÁTICO OBTENIDO PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN .....	35
<b>2.6 NOCIONES DEL CONTROL DE PROCESOS MEDIANTE TÉCNICAS LMI .....</b>	<b>36</b>
2.6.1 RESEÑA HISTÓRICA .....	36
2.6.2 INTRODUCCIÓN.....	39
2.6.2.1 CARACTERÍSTICAS DEL TOOLBOX.....	40
2.6.2.2 LMIs .....	40
2.6.2.2.1 Problemas relacionados con LMIs .....	44
2.6.2.3 LMIs EN CONTROL .....	46
2.6.3 SISTEMAS DINÁMICOS INCIERTOS .....	48
2.6.3.1 SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO.....	48
2.6.3.1.1 Matriz SYSTEM.....	49
2.6.3.1.2 Gráficas de las respuestas de tiempo y frecuencia .....	52
2.6.3.2 INTERCONEXIONES DE SISTEMAS LINEALES .....	54
2.6.3.3 MODELOS DE INCERTIDUMBRE.....	56
2.6.3.4 MODELOS DE INCERTIDUMBRE EN EL ESPACIO DE ESTADOS .....	58
2.6.3.4.1 Modelos politópicos .....	58
2.6.3.4.2 Modelo afín dependiente de parámetros.....	60
2.6.3.4.3 Cuantificación de la incertidumbre de parámetros .....	62
2.6.3.4.4 Simulación de sistemas dependientes de parámetros .....	64
2.6.3.4.5 Ejemplo ilustrativo de un PDS .....	65
2.6.3.5 MODELO FRACCIONARIO-LINEAL DE INCERTIDUMBRE .....	67
2.6.3.5.1 Especificación de la incertidumbre.....	68
2.6.4 ANÁLISIS DE ROBUSTEZ.....	69
2.6.4.1 FUNCIONES CUADRÁTICAS DE LYAPUNOV .....	70
2.6.4.1.1 Formulación LMI .....	71
2.6.4.1.2 Estabilidad cuadrática.....	72
2.6.4.1.3 Maximización de la región de estabilidad cuadrática.....	74
2.6.4.1.4 Desempeño cuadrático $H^\infty$ .....	75

2.6.4.2 FUNCIONES DE LYAPUNOV DEPENDIENTES DE PARÁMETROS .....	77
2.6.4.3 ANÁLISIS $\mu$ .....	81
2.6.4.4 CRITERIO DE POPOV .....	83
2.6.5 SÍNTESIS DE REALIMENTACIÓN DE ESTADOS.....	87
2.6.5.1 SÍNTESIS DE REALIMENTACIÓN DE ESTADOS MULTI- OBJETIVO .....	88
2.6.5.2 UBICACIÓN DE POLOS EN REGIONES LMI .....	90
2.6.5.3 FORMULACIÓN LMI .....	92
2.6.5.4 LA FUNCIÓN $msf_{syn}$ .....	95
2.6.5.5 EJEMPLO DE DISEÑO.....	96

### **CAPÍTULO 3**

#### **DISEÑO DEL CONTROLADOR DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN MEDIANTE LMIs**

<b>3.1 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN A SER ANALIZADO</b> .....	102
<b>3.2 SELECCIÓN DEL MODELO DE LA INCERTIDUMBRE</b> .....	104
<b>3.3 CONSIDERACIONES DE LA SÍNTESIS DE REALIMENTACIÓN DEL ESPACIO DE ESTADOS</b> .....	108
<b>3.4 FORMULACIÓN DE LAS MATRICES <b>SYSTEM</b></b> .....	110
<b>3.5 CUANTIFICACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE PARÁMETROS</b> ....	112
<b>3.6 ESPECIFICACIÓN DEL MODELO AFÍN DEPENDIENTE DE PARÁMETROS</b> .....	114
<b>3.7 ESTABILIDAD CUADRÁTICA</b> .....	114
<b>3.8 MAXIMIZACIÓN DE LA REGIÓN DE ESTABILIDAD CUADRÁTICA</b> .....	119
<b>3.9 DESEMPEÑO CUADRÁTICO <math>H_{\infty}</math></b> .....	120
<b>3.10 SELECCIÓN DE LAS REGIONES LMI</b> .....	121
<b>3.11 FUNCIÓN <math>msf_{syn}</math></b> .....	122
<b>3.12 ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DEL CONTROLADOR</b> .....	123
3.12.1 SEGUIMIENTO ROBUSTO .....	129

### **CAPÍTULO 4**

## **COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES ANALIZADOS**

<b>4.1 ANÁLISIS DEL CONTROLADOR DE REALIMENTACIÓN DEL ESPACIO DE ESTADOS CON GANANCIA DE PRECOMPENSACIÓN <math>N</math></b>	<b>134</b>
<b>4.2 ANÁLISIS DEL CONTROLADOR PD DIFUSO.....</b>	<b>139</b>
<b>4.3 COMPARACIÓN DE LOS TRES CONTROLADORES ANALIZADOS .</b>	<b>144</b>

## **CAPÍTULO 5**

### **CONCLUSIONES FINALES Y RECOMENDACIONES**

### **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

### **ANEXOS**

## **DEDICATORIA**

*A Mi Negrita y Mi Reycito por su amor incondicional, por ser un ejemplo de padres y amigos a seguir, siempre tengan presente que los amo. A mi abuelita Rosita por estar siempre a mi lado y vigilar mis pasos desde el cielo.*

*Gabriel*

## PRÓLOGO

El presente proyecto denominado “**Diseño y modelación de un controlador LMI (Linear Matrix Inequalities) para el sistema de suspensión de un autobús**”, consiste básicamente en el diseño, análisis y comparación de controladores para el sistema de suspensión activa de un autobús. Los controladores están desarrollados mediante la aplicación de técnicas de Control Automático lineales y no lineales, utilizando como herramienta fundamental el software MATLAB.

Con las bases fundamentadas en el proyecto “Diseño y modelación de los controladores difusos para el sistemas de suspensión de un autobús”, como son: el estudio de la dinámica del sistema de suspensión y el modelo matemático simplificado, se ha conseguido una plataforma sólida para desarrollar el análisis de otro tipo de controladores que podrían obtener mejores respuestas, ya que el campo de los sistemas de suspensión se encuentra en una constante evolución tecnológica, en vías de mejoras para lograr la optimización.

El propósito del presente proyecto es controlar la dinámica de un sistema de suspensión mediante LMI's, específicamente controlar las oscilaciones y los golpes bruscos en el autobús producidos por las irregularidades del camino. El objetivo es lograr que el sistema de suspensión cuando se sujete a una perturbación retorne rápidamente a su posición original y sin grandes oscilaciones, es decir, las aceleraciones del cuerpo de autobús serán mínimas y las desviaciones del cuerpo del autobús con respecto a su punto de equilibrio serán lo más pequeñas.

Las perturbaciones externas al sistema como son las irregularidades del camino para el estudio del modelo serán simuladas en el programa de cálculo por un valor constante que representará una de las condiciones iniciales del sistema en análisis. El signo de dicho valor constante representará la presencia de un bache o una protuberancia.

Unas vez que se tenga el controlador LMI diseñado, el cual satisfaga los requerimientos planteados, se procederá a realizar una comparación objetiva con los diferentes

controladores diseñados en el proyecto relacionado, se presentarán las conclusiones de este proyecto analizando si se logró o no el cumplimiento de los objetivos planteados.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN, OBJETIVOS Y CONTENIDOS DE LA TESIS

En el presente capítulo se presenta una breve introducción al proyecto, analizando los objetivos planteados de una forma general y detallando los contenidos de cada capítulo.

### 1.1 INTRODUCCIÓN

La vital importancia del control automático en sistemas de desarrollo tecnológico como naves espaciales, direccionamiento de armamento bélico, robótica, medios de transporte y comunicación en general, ha llevado al desarrollo de distintas técnicas para enfrentar el diseño de los sistemas de control, partiendo desde los métodos clásicos lugar de las raíces, diagrama de Bode, diagrama de Nyquist, el control moderno que usa realimentación del espacio de estados caracterizado por la dificultad en la medición de todos los estados pertenecientes al sistema a ser controlado, los controladores difusos los cuales pueden ser manipulados sin tener mucho conocimiento de la modelación matemática de los sistemas dinámicos.

En la actualidad existe una técnica de diseño de controladores basada en desigualdades matriciales lineales (LMI) que puede ser utilizada para sistemas lineales invariantes en el tiempo, sistemas MIMO; mediante esta técnica es posible considerar perturbaciones externas ajenas al sistema e incertidumbres propias del sistema que normalmente no son consideradas por las otras técnicas de control.

Cabe reconocer que todas las técnicas de control están orientadas a alcanzar un funcionamiento óptimo del sistema, en cuanto a desempeño (respuesta dinámica) e inmunidad frente a perturbaciones externas e incertidumbre de parámetros internos (robustez).

El presente proyecto denominado **“Diseño y modelación de un controlador LMI (Linear Matrix Inequalities) para el sistema de suspensión de un autobús”**, consiste básicamente en el diseño, análisis y comparación de controladores para el sistema de suspensión activa de un autobús. Los controladores serán desarrollados mediante la aplicación de técnicas LMI, utilizando como herramienta fundamental el software de cálculo MATLAB.

## 1.2 OBJETIVOS Y REQUISITOS

El propósito del presente proyecto es controlar la dinámica de un sistema de suspensión mediante LMIs, específicamente controlar las oscilaciones y los golpes bruscos en un autobús producidos por las irregularidades del camino.

El objetivo en sí, es lograr que el sistema de suspensión cuando se sujete a una perturbación retorne rápidamente a su posición original y sin grandes oscilaciones, es decir, las aceleraciones del cuerpo de autobús deben ser mínimas y las desviaciones del cuerpo del autobús con respecto a su punto de equilibrio deben ser lo más pequeñas que sea posible.

Se pueden citar adicionalmente algunos objetivos específicos como son:

- Diseñar el controlador mediante la localización de polos en regiones de estabilidad mediante técnicas LMI.
- Analizar el desempeño de los controladores LMI obtenidos.
- Introducir la incertidumbre en el modelo matemático y analizar el desempeño del sistema realimentado mediante simulaciones en MATLAB basados en la técnica de Desigualdades Matriciales Lineales, LMI.
- Comparar objetivamente los resultados obtenidos entre los controladores de realimentación de estados, controlador difuso y LMI.

Como requisitos de diseño, se desea elaborar un sistema con realimentación de modo que la salida tenga un sobrepaso, overshoot, máximo menor del 3% y un tiempo de establecimiento menor a 3 segundos. Es decir, si el autobús avanza sobre una

protuberancia de 10 centímetros de alto, el cuerpo del autobús oscilará dentro de un radio de acción de  $\pm 3$  milímetros y volverá a un paseo liso dentro de un lapso de 3 segundos.

### 1.3 CONTENIDOS

A continuación se presenta una breve descripción de los tópicos principales de cada capítulo, con la finalidad de concebir un panorama que conserve la esencia del proyecto en análisis.

El capítulo dos contiene una introducción sobre los sistemas de suspensión en general, abarcando los conocimientos básicos acerca de la estructura y funcionamiento de los mismos, además analizando componentes, elementos y tecnología. En este capítulo se presenta el desarrollo del modelo matemático simplificado de la dinámica de  $\frac{1}{4}$  del sistema de suspensión activa y pasiva de un autobús, es importante indicar que los temas antes mencionados son un compendio de los ítems principales de los capítulos uno y dos de la tesis relacionada. Además se da una introducción sobre el control de procesos mediante LMIs, indicando premisas ilustrativas para tener claro la resolución de desigualdades matriciales lineales. Este capítulo da al lector los conocimientos necesarios para comprender el resto de la tesis.

El capítulo tres presenta el diseño del controlador LMI basado en algoritmos implementados mediante el software MATLAB, preliminar a esto se expone un resumen de los principales comandos a utilizarse para el desarrollo del programa, así como de otros que pueden ser utilizados en el futuro. Además se incluyen las simulaciones del sistema de suspensión activa en respuesta a condiciones iniciales no nulas y se comparan los parámetros de dichas simulaciones con los requisitos del diseño.

El capítulo cuatro visualiza una comparación de desempeño de los diferentes controladores analizados tanto en el presente proyecto como en el proyecto relacionado. Las estrategias de control a ser comparadas son: la realimentación de estados, el control difuso y el control mediante LMIs, presentando las ventajas y desventajas de cada tipo de controlador y finalmente se concluye identificando cual es el más conveniente,

argumentando acerca de la calidad del control logrado y las posibles mejoras que pueden realizarse.

El capítulo cinco, capítulo final, reúne las conclusiones generales del proyecto. Se analiza el desempeño de los controladores desarrollados y la calidad de las respuestas obtenidas, poniendo de manifiesto si se ha logrado o no cumplir con los objetivos planteados para la elaboración del presente proyecto.

En los anexos se adjuntan los valores de los parámetros utilizados en el modelo matemático, además los códigos de programación y simulaciones realizados en el software MATLAB, los cuales permiten el funcionamiento de los sistemas de control desarrollados.

## **CAPÍTULO 2**

### **NOCIONES PRELIMINARES**

#### **2.1 INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE SUSPENSIÓN**

El sistema de suspensión se caracteriza por ser el proceso con mayor importancia de cualquier vehículo. Este sistema actúa directamente en el confort de los pasajeros y en el control del vehículo, además afecta al fácil manejo, a la maniobrabilidad y a la capacidad de carga, con la finalidad de ofrecer la seguridad necesaria.

La suspensión tiene seis objetivos básicos:

- Reducir las fuerzas provocadas por la irregularidad del terreno.
- Controlar la dirección del vehículo.
- Mantener la adherencia de los neumáticos a la carretera.
- Mantener una correcta alineación de las ruedas.
- Soportar la carga del vehículo.
- Mantener la altura óptima del vehículo.

El peso de un vehículo se divide en dos partes denominadas: masa suspendida, la cual es el cuerpo del vehículo, el mismo que está integrado por todos los elementos cuyo peso es soportado por el bastidor o chasis (estructura del vehículo), y masa no suspendida, constituida por los ejes, ruedas, y el resto de los componentes asociados. El enlace entre ambas masas lo realiza la suspensión.

#### **2.2 DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSIÓN**

Los sistemas de suspensión a describirse son: suspensiones pasivas y suspensiones activas.

### 2.2.1 SUSPENSIÓN PASIVA

Consiste en un sistema de muelle amortiguador que trata de absorber las irregularidades del terreno. Está compuesto por elementos flexibles, estos son: muelle de ballestas o helicoidal, barra de torsión, estabilizador, muelle de goma, gas o aire, y un elemento de amortiguación, el amortiguador, cuya misión es neutralizar las oscilaciones de la masa suspendida originadas por el elemento flexible al adaptarse a las irregularidades del terreno. Como elementos auxiliares del sistema de suspensión se pueden citar a los asientos y a los neumáticos.

La suspensión pasiva no entrega resultados suficientemente satisfactorios, esto se debe a que, por un lado para el nivel de confort de los pasajeros una suspensión blanda es idónea, por otro no lo es para el nivel de seguridad, ya que se produce un balanceo excesivo en curvas y se favorece al cabeceo durante la frenada, resultando peligroso para los pasajeros.

Una suspensión más rígida controlaría mucho mejor el balanceo en curva y el cabeceo, pero disminuiría de gran manera el confort de los pasajeros. Este problema se resuelve parcialmente por un sistema de suspensión que permita conseguir una solución de compromiso aceptable entre la seguridad y el confort en la conducción.

**Ballestas.** Las ballestas están formadas por una serie de láminas semielípticas de acero resistente y elástico. La descripción que se indica a continuación puede aclararse visualizando la Figura. 2.1. La lámina primera, la más larga, es la hoja principal o maestra, la cual termina en dos curvaturas formando un ojo, ésta es la parte de la ballesta que se denomina de igual forma y permite sujetar al bastidor o chasis, la segunda hoja suele ser de la misma longitud que la maestra, las demás son más pequeñas y curvadas.

Las hojas se aprietan unas con otras por medio de un perno central conocido como perno capuchino, y se mantienen juntas y alineadas sin que puedan abrirse en abanico por medio de grapas o abrazaderas. La ballesta se fija sobre el eje por medio de las bridas.

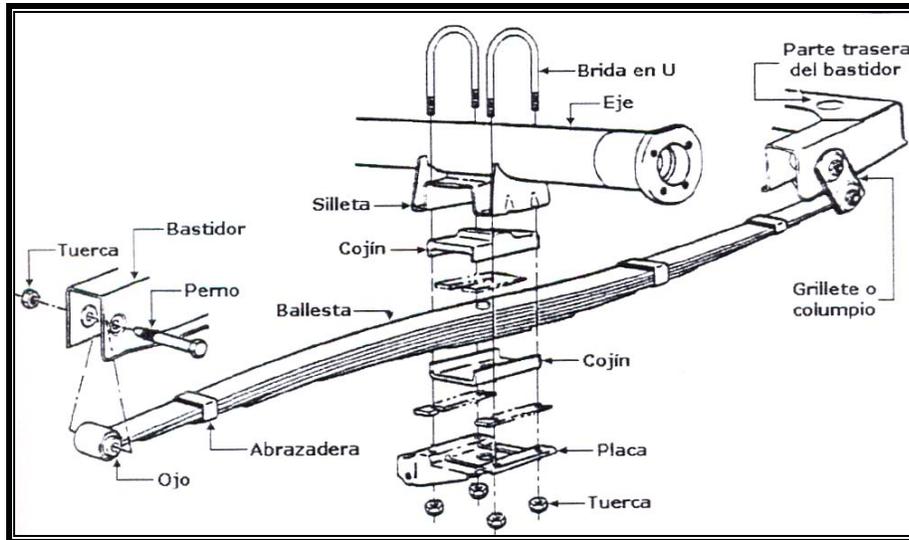


Figura. 2.1. Sujeción y partes de una ballesta de láminas semielípticas

Al flexionarse la ballesta varía su longitud, uno de sus extremos se articula al bastidor mediante un grillete o columpio, el cual tiene libertad de girar y permite el alargamiento de la ballesta.

Existen ballestas muy flexibles denominadas blandas y para el caso contrario las denominadas duras. En general las ballestas delanteras son más duras que las traseras para evitar mayor flexión durante la marcha, mientras menos flexibles estas sean, de manera más brusca se absorberá los esfuerzos de la marcha y más fácilmente se podrán romper las hojas de la ballesta.

**Muelles helicoidales.** Los muelles helicoidales son conocidos también como resortes de compresión, actualmente sustituyen a las ballestas semielípticas en la mayoría de los vehículos, y se caracterizan por su gran efectividad y reducido tamaño.

En la Figura. 2.2 se puede apreciar un resorte helicoidal de compresión hecho de alambre redondo que soporta una carga axial  $F$ . Además se designará con  $D$  el diámetro medio del resorte y con  $d$  el diámetro del alambre. Los muelles helicoidales consisten en un enrollamiento en hélice de un cable de acero elástico de diámetro  $D$  que varía en función del esfuerzo a soportar; las dos espiras externas son planas para facilitar su montaje.

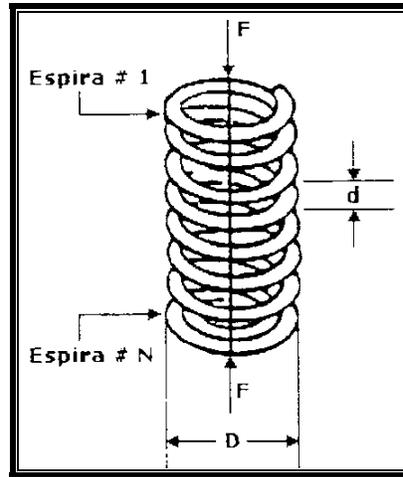


Figura. 2.2. Muelle helicoidal

La constante o módulo de rigidez del resorte es:

$$K = \frac{F}{Y} \quad (2.1)$$

donde

$F$  fuerza o carga transversal en newton  $[N]$

$Y$  desplazamiento en metros  $[m]$ .

A continuación se indica la ecuación del módulo de rigidez obtenida a partir del reemplazo de las ecuaciones de la fuerza o carga transversal y el desplazamiento en (2.1):

$$K = \frac{d^4 G}{8D^3 N} \Rightarrow \left[ \frac{N}{m} \right] \quad (2.2)$$

donde

$d$  Diámetro del alambre en metros  $[m]$ .

$D$  Diámetro medio del resorte en metros  $[m]$ .

$G$  Módulo de rigidez o resistencia a la deformación de los materiales  $\left[ \frac{N}{m^2} \right]$ .

$N$  Número de espiras activas.

Se puede concluir que la constante o módulo de rigidez del resorte depende del número de espiras, de su diámetro, del diámetro del cable y de las características del material del que está elaborado.

**Barras de torsión.** Las barras de torsión son utilizadas en algunos vehículos reemplazando a los resortes en la suspensión. Una barra de torsión es una barra de acero que se parece a un muelle de resorte que se ha desenrollado, de tal forma que anclada por un extremo, se retuerce por el otro libre, y gira elásticamente sobre su eje como se muestra en la Figura. 2.3, recuperando su estado primitivo en cuanto cesa la torsión aplicada en el extremo libre.

Es importante indicar que el esfuerzo aplicado no sobrepase el límite de elasticidad del material, ya que de sobrepasarse daría lugar a una deformación de carácter permanente.

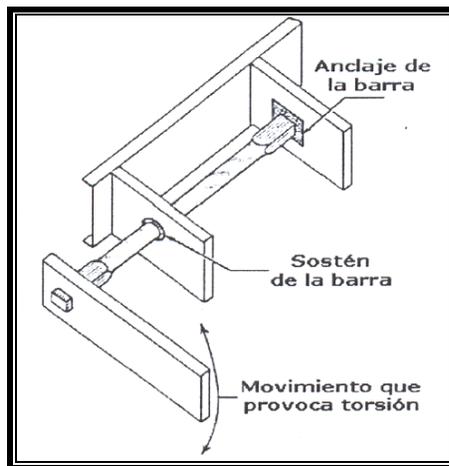


Figura. 2.3. Acción de una barra de torsión

**Bielas.** La biela se encarga de convertir el movimiento rectilíneo del pistón en movimiento rotatorio al centro del cigüeñal por medio de los muñones de biela del mismo cigüeñal. Las bielas están fabricadas en aleaciones muy resistentes debido a que reciben gran presión por el empuje del pistón.

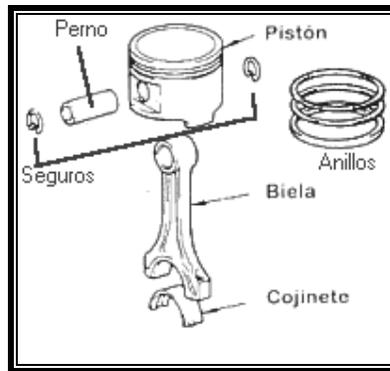


Figura. 2.4. Bielas

**Barras estabilizadoras.** El momento en que un vehículo toma una curva, la acción de la fuerza centrífuga inclina a la carrocería hacia el lado de la fuerza y para contener esta tendencia se usan las barras estabilizadoras, montadas en el eje trasero o delantero, o en ambos.

La barra estabilizadora consiste en una barra de acero elástico apoyada por sus extremos en los dos largueros del bastidor, en sus extremos se fijan rígidamente dos bielas o ejes que van a articularse sobre el eje de las ruedas, de tal manera que si la fuerza centrífuga tiende en una curva a subir la carrocería por la izquierda, bajándola por la derecha, la barra resulta retorcida por las bielas que giran en sentidos contrarios y su esfuerzo de torsión contiene la inclinación causante, estabilizando la carrocería como se muestra en la Figura. 2.5.

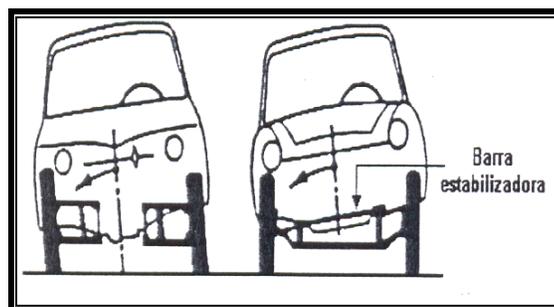


Figura. 2.5. Acción de la barra estabilizadora

Se pueden suprimir las bielas dando a la barra forma de U. Cuando un vehículo circula en línea recta la barra estabilizadora también actúa evitando las oscilaciones laterales, balanceo, por lo que también se las conoce como barras antibalanceo.

**Muelles de goma.** Los muelles de goma son dispositivos de amortiguación auxiliares, estos muelles pueden ser anulares de goma, de gas o de aire de acción progresiva, vulcanizados entre piezas de metal. Se caracterizan por ser sensibles a la temperatura, condiciones atmosféricas, a los productos químicos y al aceite.

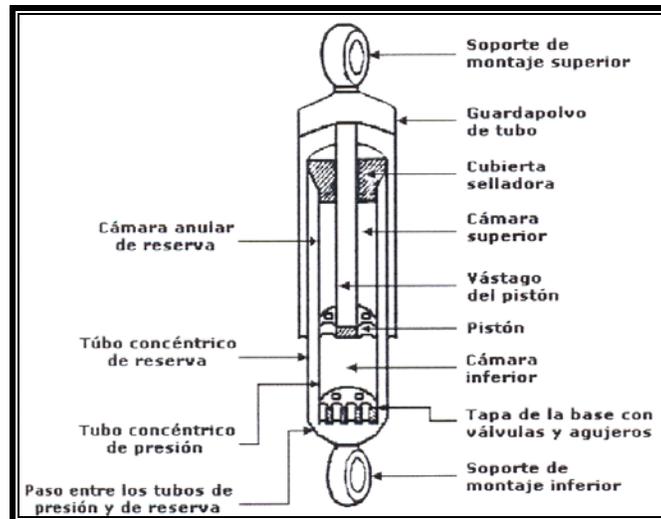
**Elemento de amortiguación.** El frenado de la amplitud y el número de oscilaciones de las ballestas o resortes se confían a los amortiguadores, que forman parte sustancial de la suspensión.

Los amortiguadores proporcionan una marcha estable y firme, resisten al impacto del camino y a la inclinación del vehículo, aumentan la vida de los neumáticos, y reducen los saltos de las ruedas y el desgaste de: la suspensión, el muelle y el sistema mecánico de dirección. Se puede citar por ejemplo cuando una rueda pasa por un obstáculo, el resorte o la ballesta se comprimen, con la finalidad de evitar en gran parte que el bastidor se levante, enseguida recobra su posición original por su elasticidad a causa de la energía almacenada durante la flexión. Este rebote y la serie de oscilaciones que siguen hasta restablecer al muelle a su posición de equilibrio son los que sacuden al vehículo y molestan a sus ocupantes, por ello los amortiguadores tienden a frenar principalmente el movimiento de separación de la ballesta o resorte del bastidor, proceso conocido como de simple efecto.

Existen muchos modelos que actúan como freno en ambos sentidos, conocidos como de doble efecto, ya que si la rueda se ha desequilibrado por caer en un bache, cuando lo pasa se encuentra con que la carrocería esta cayendo encima y aplasta demasiado el muelle, con peligro de rotura.

Un amortiguador es un aditamento hidráulico el cual esta formado por un pistón y un cilindro lleno de fluido hidráulico, aceite, conectado al sistema de suspensión y el pistón al chasis o estructura del vehículo. Cuando el sistema de suspensión se moviliza de arriba hacia abajo el pistón es impulsado también hacia arriba y abajo en el cilindro, el pistón para poder moverse debe desplazar el aceite en el cilindro, lo cual se hace mediante válvulas. El fabricante puede controlar la velocidad de movimiento del pistón al variar las

medidas de las válvulas y la tensión de los resortes de las válvulas; la velocidad del pistón controla a su vez la velocidad a la cual se mueve el sistema de suspensión.



**Figura. 2.6. Amortiguador telescópico o de doble acción**

Los amortiguadores más comunes son los de tipo telescópico, también conocidos como de doble acción, cuya estructura se puede apreciar en la Figura. 2.6.

Un amortiguador con gran capacidad de reserva tiene mayor capacidad de enfriamiento, por lo tanto conserva una temperatura de funcionamiento inferior y da una mayor eficiencia y una vida útil mas larga.

## 2.3 SUSPENSIÓN ACTIVA

### 2.3.1 NOCIONES BÁSICAS

La suspensión activa fue desarrollada para aportar con una solución tecnológica muy avanzada para lograr resolver el conflicto entre el soporte de carga efectivo y el confort del vehículo, además al mismo tiempo mantener un contacto suficiente entre neumáticos y eliminar el balanceo en curvas y el cabeceo en frenadas.

Las suspensiones activas constan de un sistema con un actuador hidráulico que puede generar fuerzas para compensar el balanceo y cabeceo del vehículo. Un computador

electrónico se encarga de monitorear constantemente mediante sensores el perfil de la carretera y envía señales eléctricas a las suspensiones delantera y trasera para que los componentes hidráulicos como bombas, actuadores y servoválvulas actúen manteniendo un nivel máximo de estabilidad.

Las ventajas que proporcionan son: baja posición del centro de gravedad, baja resistencia del aire, menor fuerza ascendente del eje delantero, acomodamiento de la amortiguación a las condiciones de la vía y al modo de manejo obteniendo mayor seguridad y estabilidad.

Las suspensiones actuales están diseñadas para trabajar en forma progresiva, permitiendo así una mejor adaptación al nivel de carga del vehículo. Por lo general los amortiguadores tienen una característica de amortiguación específica, por lo que sus posibilidades de ajuste están limitadas a las diferentes cargas y condiciones de la carretera.

Uno de los parámetros que indica la calidad de una suspensión activa o semiactiva es el tiempo de respuesta. Cuanto menor sea éste, más rápidamente será capaz de reaccionar la suspensión ante una irregularidad del terreno, un frenazo o un giro brusco. Es así que el tiempo de regulación es extremadamente corto, y en 0.05 segundos, puede tener el nivel óptimo de fuerza de amortiguación en el caso de cambios repentinos de condiciones de conducción.

### **2.3.2 VENTAJAS DE LAS SUSPENSIONES ACTIVAS**

Las suspensiones activas permiten la no inclinación del coche durante el giro en una curva, consiguiendo así que el conductor no pierda visibilidad y un mejor control del vehículo.

La capacidad de controlar el reparto de carga entre el eje delantero y trasero permite un mejor manejo del coche. Esto es posible debido a que el control de cada rueda es independiente, distribuyendo las fuerzas de compensación necesarias a cada una de las ruedas y manteniendo el mismo nivel entre el eje delantero y trasero. Este efecto es especialmente necesario en situaciones críticas en la conducción, en las que se necesita una

seguridad en el control de la dirección. Así mismo, gracias a que la carga está distribuida en las cuatro ruedas del coche, la tendencia a sobrevirar y a subvirar disminuye.

En los sistemas de suspensión pasiva es necesaria la colocación de unas barras estabilizadoras. Estas se encuentran montadas sobre el eje trasero y/o el delantero para evitar la tendencia del vehículo a inclinarse al tomar de prisa las curvas cerradas. Cuando se emplean los sistemas de suspensión activa, estas barras son innecesarias, ya que cada rueda es controlada individualmente. Esto permite una mejora en la conducción cuando el vehículo se encuentra sujeto a excitaciones asimétricas.

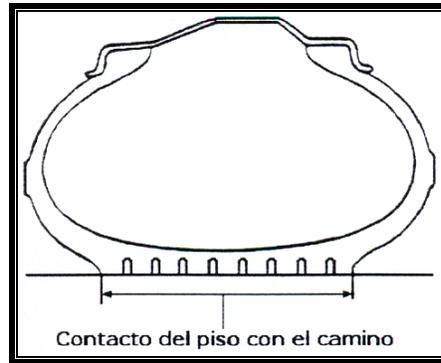
La ausencia de inclinación del coche proporciona al conductor más información sobre el estado del vehículo. Otra ventaja es que el sistema activo permite una mejor adherencia de los neumáticos a la carretera, mejorando así la maniobrabilidad y la seguridad, logrando reducir el deslizamiento.

## **2.4 NEUMÁTICOS**

Los elementos complementarios o auxiliares de un sistema de suspensión son los neumáticos, por tal razón hay que tener en cuenta algunas características como son las presiones correctas de inflado y su vibración.

### **2.4.1 INFLADO DE LOS NEUMÁTICOS**

El inflado incorrecto de los neumáticos puede ocasionar muchos problemas en el sistema de suspensión. Las presiones correctas de los neumáticos de cualquier vehículo dependen del tipo y tamaño de los mismos, además también varía por las cargas que debe soportar el vehículo. El correcto inflado de un neumático proporciona un contacto pleno entre la superficie del neumático y el camino tal como se muestra en la Figura. 2.7.



**Figura. 2.7. Neumático inflado correctamente**

Los fabricantes de cada neumático recomiendan las presiones correctas, las cuales se pueden encontrar en los manuales del propietario para evitar problemas en los sistemas de suspensión y dirección por no mantener la presión correcta.

**Subinflado.** El subinflado de los neumáticos se produce debido a la pérdida normal de aire combinada con otros descuidos, se pueden ocasionar los siguientes problemas:

- La dirección requiere mayor esfuerzo y su respuesta es deficiente.
- Existe una tendencia a patinar y a tener un control deficiente en las curvas, por la deformación del piso del neumático.
- Desgaste anormal en las orillas exteriores del piso del neumático.
- Aumento de la posibilidad de dañarse el neumático y la rueda por impacto cuando se está en una superficie irregular.
- Acción deficiente de los frenos.
- Aumento del consumo de combustible por el aumento de la fricción.

Un neumático subinflado no solo se abulta hacia afuera en las paredes laterales, sino que da un contacto deficiente entre el piso y la superficie del camino, esta condición se puede observar en la Figura. 2.8.



Figura. 2.8. Neumático inflado en defecto o subinflado

**Inflado en exceso.** Los neumáticos sobreinflados o en exceso se encuentran con menor frecuencia que los neumáticos subinflados ocasionando también problemas, algunos de estos son:

- Disminución del contacto del piso del neumático con la superficie del camino.
- Transmisión de choques excesivos del camino a los componentes de la dirección y la suspensión.
- Transporte personal menos confortable.
- Desgaste anormal en el centro del piso del neumático.

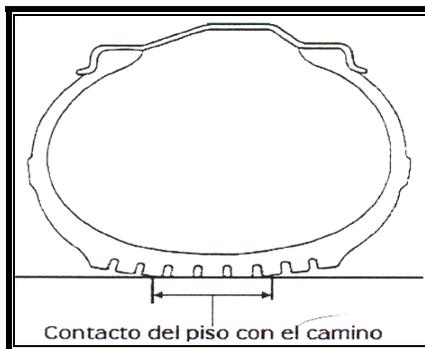


Figura. 2.9. Neumático sobreinflado

En la Figura. 2.9 se nota como los bordes del piso no hacen contacto con la superficie del camino.

## **2.5 DESARROLLO DEL MODELO MATEMÁTICO**

En este apartado se presenta un compendio del capítulo 3 de la tesis relacionada, la cual tiene por título: “Diseño y modelación de los controladores difusos para el sistema de suspensión de un autobús”.

### **2.5.1 PRINCIPIOS FÍSICOS**

La deducción del modelo matemático es el primer paso del análisis que se realizará en el sistema de suspensión activa de un autobús. El modelo matemático a determinarse se define como un conjunto o juego de ecuaciones que representan la dinámica del sistema de suspensión, procurando que éste sea exacto o que por lo menos se asemeje a la realidad, teniendo siempre presente que un modelo matemático coherente es la parte más importante del análisis y diseño.

El problema de control a resolverse resulta interesante debido a que un vehículo representa un sistema de oscilación complejo, y al ser complejo necesita más de una coordenada para describir su movimiento, esta cantidad de coordenadas independientes para describir un movimiento se denomina grados de libertad.

En un sistema mecánico los grados de libertad son la cantidad mínima de coordenadas independientes requeridas para especificar las posiciones de todos sus elementos.

El objetivo de un modelo matemático es lograr un equilibrio entre la simplicidad del modelo y la exactitud de los resultados del análisis. En el caso de que la precisión no sea estrictamente necesaria es preferible determinar un modelo razonable y simplificado, por tal razón a pesar de que el sistema de oscilación en análisis es complejo y con muchos grados de libertad para simplificarlo se puede considerar sólo algunos de los movimientos principales del vehículo.

La suspensión pasiva de un vehículo puede ser analizada a partir de los efectos de la masa suspendida y no suspendida en la oscilación, con la finalidad de obtener una visión cualitativa del funcionamiento del sistema puede ser usado un modelo lineal con dos

grados de libertad. El desarrollo del modelo del sistema de suspensión pasiva utilizará un modelo para  $\frac{1}{4}$  del autobús.

En los siguientes párrafos se indican los parámetros que formarán parte del diseño del modelo matemático a desarrollarse.

El peso de un vehículo en un modelo de suspensión se divide en dos partes, conocidas como: masa suspendida  $M_1$ , constituida por  $\frac{1}{4}$  del cuerpo del vehículo (estructura del vehículo), e integrada por todos los elementos cuyo peso es soportado por el bastidor o chasis, y masa no suspendida  $M_2$  constituida por la rueda con su propio eje y el resto de los componentes asociados a dicho ensamblaje móvil. Entre las dos masas se encuentra un resorte con una constante de rigidez  $K_1$  y un amortiguador con coeficiente de amortiguación  $B_1$ .

Entre la masa no suspendida  $M_2$  y el piso existe un resorte con una constante de rigidez  $K_2$  y un amortiguador con un coeficiente de amortiguación  $B_2$ , los cuales representan el efecto producido por el neumático.

El sistema de coordenadas que se utilizará para describir el movimiento de la suspensión en el sistema mecánico en análisis será el sistema de coordenadas cartesianas debido a la naturaleza del movimiento el cual es vertical en el eje  $z$ , y está representado con la siguiente nomenclatura:  $z_1$  que indica la distancia entre el piso y la masa  $M_1$ , y  $z_2$  que indica la distancia entre el piso y la masa  $M_2$ .

Un diagrama del sistema descrito se puede visualizar en la Figura. 2.10 con los respectivos parámetros detallados.

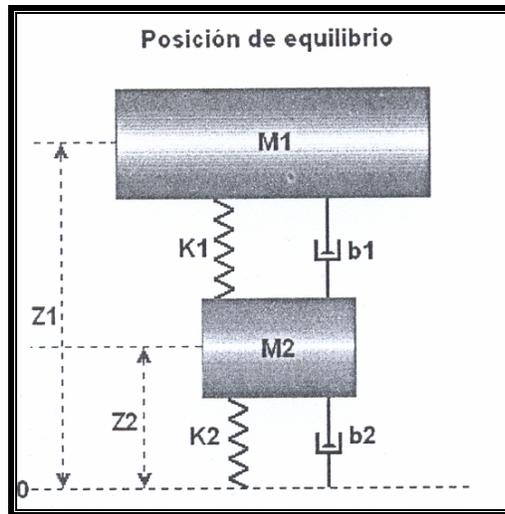


Figura. 2.10. Modelo de  $\frac{1}{4}$  del sistema de suspensión pasiva de un autobús

## 2.5.2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LA SUSPENSIÓN ACTIVA

Con la finalidad de obtener las ecuaciones del movimiento de la suspensión activa, es necesario realizar un análisis estático previo de la suspensión pasiva, y determinar algunos parámetros que se utilizarán en el desarrollo de las ecuaciones, para luego poder realizar un análisis dinámico de la suspensión activa utilizando los parámetros determinados en la suspensión pasiva. Es importante indicar que para el análisis del modelo matemático a desarrollarse se ha tomado como referencia estudios realizados de la Universidad de Michigan.

### 2.5.2.1 ANÁLISIS ESTÁTICO DE LA SUSPENSIÓN PASIVA

El análisis estático del sistema de suspensión pasiva se basa en la Figura. 2.11, en la cual se puede apreciar diferentes posiciones de las masas con respecto al piso, debido a las fuerzas ejercidas entre éstas, por medio de los resortes y la fuerza de gravedad.

Analizando la Figura. 2.11 podemos obtener los siguientes casos:

La primera posición sería cuando los resortes están relajados, es decir, sin que se les aplique ninguna fuerza por el eje  $z$ . Esto ocurre antes de que las masas se unan a los resortes, en esta posición se definen las coordenadas  $z_1'$  y  $z_2'$  para las masa  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente.

El equilibrio se lo logra considerando una posición intermedia, es decir, cuando el resorte de constante de rigidez  $K_1$  se comprime una distancia  $I_1$ , por acción del peso de la masa  $M_1$  y el resorte de constante de rigidez  $K_2$  se comprime una distancia  $I_2$ , por acción del peso de las masas  $M_1$  y  $M_2$ . Se debe tener presente que al hacer el desplazamiento  $I_2$ , también afecta al desplazamiento de la masa  $M_1$  incrementándose también en esta distancia, obteniéndose el desplazamiento ( $I_1' = I_1 + I_2$ ) para la masa  $M_1$ .

Por último, la posición de equilibrio en estado estacionario, se obtiene luego de que las masas se unen a los resortes y estos se estabilicen en un punto de equilibrio entre las fuerzas ejercidas por los resortes y los pesos de las masas, definiéndose unas nuevas coordenadas  $z_1$  y  $z_2$  para las masas  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente.

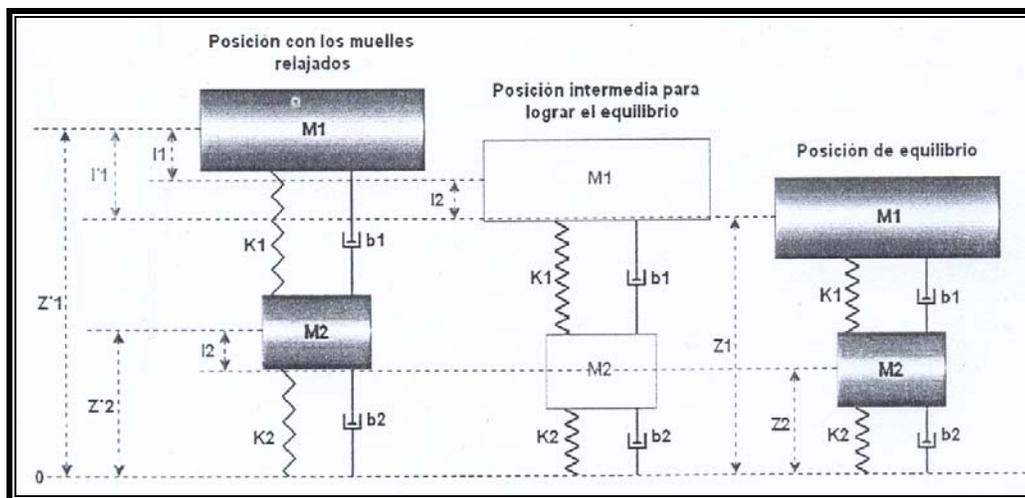


Figura. 2.11. Diseño de un sistema de suspensión pasiva

### 2.5.2.2. ANÁLISIS DINÁMICO DE LA SUSPENSIÓN ACTIVA

El análisis dinámico de la suspensión activa se lo ha realizado con la ayuda de la Figura. 2.12, en la cual se puede apreciar que existe una variable de entrada  $u$ , que corresponde a la fuerza de control ejercida entre ambas masas, es decir la fuerza ejercida por el controlador que se va a diseñar.

Además cabe indicarse, que en el sistema de suspensión influye una perturbación externa representada por la función  $w(t)$ , que corresponde al relieve o camino por el cual va siguiendo el neumático y será considerada como una entrada más del sistema.

En la Figura. 2.12 se presenta también las desviaciones  $\pm\Delta z_1$  de la masa  $M_1$  y las desviaciones  $\pm\Delta z_2$  de la masa  $M_2$ . Estas desviaciones representan las variaciones del movimiento vertical de las masas, ya sea positivo o negativo, con relación a las coordenadas en posición de equilibrio  $z_1$  y  $z_2$ , por acción de la suspensión en respuesta al relieve del camino por el cual avanza el neumático.

La modelación en desviaciones del sistema de la suspensión activa, es una representación linealizada obtenida de las ecuaciones físicas del sistema.

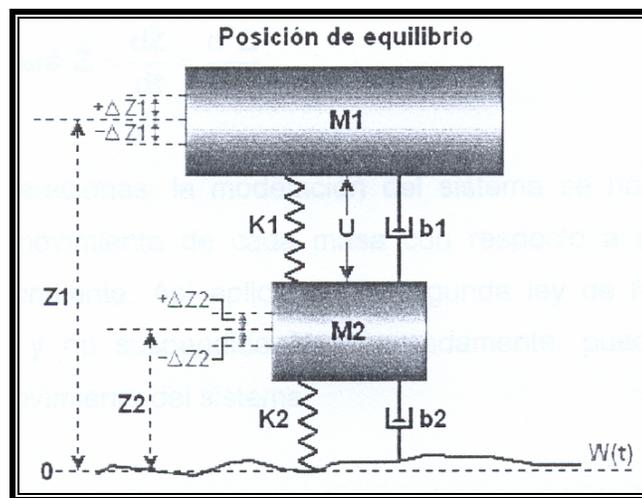


Figura. 2.12. Modelo de  $\frac{1}{4}$  del sistema de suspensión activa de un autobús

De la Figura. 2.12, en el modelo matemático las masas  $M_1$  y  $M_2$  tienen coordenadas correspondientes  $\tilde{z}_1(t)$  y  $\tilde{z}_2(t)$ , expresadas en la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1(t) &= z_1 \pm \Delta z_1 \pm w(t) \\ \tilde{z}_2(t) &= z_2 \pm \Delta z_2 \pm w(t)\end{aligned}$$

Se acepta el sentido del movimiento hacia arriba como positivo y hacia abajo negativo, por lo que se adopta sólo tomar el signo positivo tanto para las desviaciones como para la perturbación, quedando:

$$\tilde{z}_1(t) = z_1 + \Delta z_1 + w(t) \quad (2.3)$$

$$\tilde{z}_2(t) = z_2 + \Delta z_2 + w(t) \quad (2.4)$$

Es importante indicar que la desviación  $\Delta z_1$  será la salida del sistema, ya que representa la variación de distancia con relación a la coordenada  $z_1$ , es decir, la distancia entre el piso y la masa  $M_1$  en la posición de equilibrio.

Se debe tener presente que para expresar el desplazamiento se utilizará la variable  $z$ , mientras que para la velocidad y la aceleración se utilizarán las variables  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$  y

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \text{ respectivamente.}$$

Para obtener la modelación del sistema se lo hace planteando las ecuaciones del movimiento de cada masa con respecto a su coordenada de posición correspondiente, esto se logra aplicando la Segunda Ley de Newton tanto a la masa suspendida  $M_1$  como a la masa no suspendida  $M_2$  de manera separada, es decir mediante dos diagramas de cuerpo libre, uno para cada masa.

La Segunda Ley de Newton dice que la sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre una masa es igual a la masa por la aceleración.

$$\sum F_z = M \times \ddot{z}$$

Para el caso del sistema de suspensión, las fuerzas que actúan sobre la masa  $M_1$  son: la fuerza de gravedad (peso), la fuerza del resorte  $K_1$ , la fuerza del amortiguador  $B_1$  y la de control  $u$ . Las fuerzas que actúan sobre la masa  $M_2$  son: la fuerza de gravedad (peso), las

de los resortes  $K_1$  y  $K_2$ , las de los amortiguadores  $B_1$  y  $B_2$ , y finalmente la fuerza de control  $u$ .

$$F_{GRAVEDAD} = M \times g$$

$$F_{RESORTE} = K \times z$$

$$F_{AMORTIGUADOR} = B \times \dot{z}$$

Donde,

$$M = \text{masa [kg]}$$

$$g = \text{aceleración de la gravedad } \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$K = \text{constante de rigidez del resorte } \left[ \frac{kg}{s^2} \right]$$

$$B = \text{coeficiente de amortiguación } \left[ \frac{kg}{s} \right]$$

La ecuación del movimiento de la masa  $M_1$ , obtenida mediante la segunda ley de Newton es:

$$\sum F_z = M_1 \ddot{z}_1$$

$$M_1(\Delta \ddot{z}_1 + \ddot{w}) = K_1(I_1 - \Delta z_1 + \Delta z_2) - B_1[(\Delta \dot{z}_1 + \dot{w}) - (\Delta \dot{z}_2 + \dot{w})] - M_1 g + u$$

$$M_1 \Delta \ddot{z}_1 = K_1 I_1 - K_1 \Delta z_1 + K_1 \Delta z_2 - B_1 \Delta \dot{z}_1 - B_1 \dot{w} + B_1 \Delta \dot{z}_2 + B_1 \dot{w} - M_1 g + u - M_1 \ddot{w}$$

$$M_1 \Delta \ddot{z}_1 = K_1 I_1 - K_1 \Delta z_1 + K_1 \Delta z_2 - B_1 \Delta \dot{z}_1 + B_1 \Delta \dot{z}_2 - M_1 g + u - M_1 \ddot{w} \quad (2.5)$$

La ecuación del movimiento de la masa  $M_2$  es la siguiente:

$$\sum F_z = M_2 \ddot{z}_2$$

$$M_2(\Delta \ddot{z}_2 + \ddot{w}) = -K_1(I_1 - \Delta z_1 + \Delta z_2) + B_1[(\Delta \dot{z}_1 + \dot{w}) - (\Delta \dot{z}_2 + \dot{w})] - M_2 g - u + \\ + K_2(I_2 - \Delta z_2 + w) - B_2(\Delta \dot{z}_2 + \dot{w})$$

$$M_2 \Delta \ddot{z}_2 = -K_1 I_1 + K_1 \Delta z_1 - K_1 \Delta z_2 + B_1 \Delta \dot{z}_1 + B_1 \dot{w} - B_1 \Delta \dot{z}_2 - B_1 \dot{w} - M_2 g - u + K_2 I_2 - K_2 \Delta z_2 + \\ + K_2 w - B_2 \Delta \dot{z}_2 - B_2 \dot{w} - M_2 \ddot{w}$$

$$M_2 \Delta \ddot{z}_2 = -K_1 I_1 + K_1 \Delta z_1 - K_1 \Delta z_2 + B_1 \Delta \dot{z}_1 - B_1 \Delta \dot{z}_2 - M_2 g - U + K_2 I_2 - \\ - K_2 \Delta z_2 + K_2 w - B_2 \Delta \dot{z}_2 - B_2 \dot{w} - M_2 \ddot{w} \quad (2.6)$$

La representación del espacio de estados de un sistema es usualmente mucho más fácil obtenerlo a partir de ecuaciones diferenciales que por el método de la transformada de Laplace.

Es importante realizar un análisis previo a la obtención de las ecuaciones del espacio de estados basado en el análisis estático de la suspensión pasiva. Las fuerzas de la gravedad deben compensarse con las fuerzas de los resortes con la finalidad de mantener el equilibrio del sistema, de esta forma para  $M_1$  se tiene se tiene:

$$K_1 I_1 - M_1 g = 0$$

$$K_1 I_1 = M_1 g \Rightarrow \text{Compensación de fuerzas} \quad (2.7a)$$

$$I_1 = \frac{M_1}{K_1} g = 0.306 [m]$$

Mientras que para la  $M_2$  se tiene:

$$-K_1 I_1 + K_2 I_2 - M_2 g = 0$$

$$K_2 I_2 - K_1 I_1 = M_2 g \quad \Rightarrow \quad \text{Compensación de fuerzas} \quad (2.7b)$$

$$I_2 = \frac{M_2 g + K_1 I_1}{K_2} = 0.055 [\text{m}]$$

Con los resultados obtenidos se procede a realizar los siguientes reemplazos: (2.7a) en (2.5), y (2.7b) en (2.6), de esta manera finalmente se logra obtener las ecuaciones representativas de la dinámica de la suspensión activa tanto para  $M_1$  como para  $M_2$ , (2.8) y (2.9) respectivamente.

$$\boxed{M_1 \Delta \ddot{z}_1 = -K_1 \Delta z_1 + K_1 \Delta z_2 - B_1 \Delta \dot{z}_1 + B_1 \Delta \dot{z}_2 + u - M_1 \ddot{w}} \quad (2.8)$$

$$\boxed{M_2 \Delta \ddot{z}_2 = K_1 \Delta z_1 - K_1 \Delta z_2 + B_1 \Delta \dot{z}_1 - B_1 \Delta \dot{z}_2 - u - K_2 \Delta z_2 + K_2 w - B_2 \Delta \dot{z}_2 - B_2 \dot{w} - M_2 \ddot{w}} \quad (2.9)$$

### 2.5.3 REPRESENTACIÓN EN ECUACIONES DEL ESPACIO DE ESTADOS

Una vez establecidas las ecuaciones diferenciales que representan la dinámica de un sistema de suspensión de un bus se puede continuar con la obtención de la representación del espacio de estados.

Un sistema dinámico para que pueda describirse mediante ecuaciones de estados debe cumplir con las características de que sea lineal de dimensión finita. En el análisis del espacio de estados se manejan tres tipos de variables, y éstas son: las variables de entrada, de salida y de estados.

Para cualquier sistema dado la representación del espacio de estados no es única, pero tienen una característica en común, ésta es, que la cantidad de variables de estados es la misma.

Un sistema al ser invariante en el tiempo posee una representación del espacio de estados en la cual las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  son constantes. Las ecuaciones del espacio de estados se define como:

$$\begin{aligned} E(t)\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde:

$x(t)$  = Vector de estados,

$\dot{x}(t)$  = Vector de derivadas de los estados,

$A(t)$  = Matriz de evolución,

$B(t)$  = Matriz de entrada,

$C(t)$  = Matriz de salida,

$D(t)$  = Matriz de ganancia o transmisión directa,

$E(t)$  = Matriz invertible, por lo general es una matriz identidad,

$u(t)$  = Función del tiempo que representa la entrada,

$y(t)$  = Función del tiempo que representa la salida.

### 2.5.3.1 ECUACIONES DE ESTADO PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN ACTIVA

La ecuación dinámica que describe el comportamiento de la masa  $M_1$  en el modelo del sistema de suspensión activa, esta representado por (2.8).

$$M_1\Delta\ddot{z}_1 = -K_1\Delta z_1 + K_1\Delta z_2 - B_1\Delta\dot{z}_1 + B_1\Delta\dot{z}_2 + u - M_1\ddot{w}$$

La ecuación dinámica que representa el comportamiento de la masa  $M_2$  es (2.9).

$$\begin{aligned} M_2\Delta\ddot{z}_2 &= K_1\Delta z_1 - K_1\Delta z_2 + B_1\Delta\dot{z}_1 - B_1\Delta\dot{z}_2 - u - K_2\Delta z_2 + K_2w - \\ &\quad - B_2\Delta\dot{z}_2 - B_2\dot{w} - M_2\ddot{w} \end{aligned}$$

La salida del sistema en análisis es la desviación  $\Delta z_1$ , y representa la variación de distancia con relación a la coordenada  $z_1$ , quedando:

$$y(t) = \Delta z_1 \quad (2.10)$$

El procedimiento general que se debe seguir para expresar las ecuaciones diferenciales planteadas para la dinámica del sistema en forma de ecuaciones de estado se indica en los párrafos siguientes.

**Paso 1.** Se definen las variables de estado. El orden del sistema diferencial para la suspensión activa asigna el número de variables de estado. Dado que las dos ecuaciones diferenciales del sistema obtenidas, (2.8) y (2.9), son de orden 2, por consiguiente se definen dos variables de estado para cada ecuación.

La primera variable de estado  $x_1$  se la obtiene igualando a la salida del sistema, es decir:

$$x_1 = \Delta z_1 \quad (2.11a)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \Delta \dot{z}_1 \quad (2.11b)$$

La variable de estado  $x_2$  es igual a la primera derivada de la salida del sistema:

$$x_2 = \Delta \dot{z}_1 \quad (2.12a)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = \Delta \ddot{z}_1 \quad (2.12b)$$

Igualando las ecuaciones (2.11b) y (2.12a) se obtiene la primera ecuación de estados y queda de la siguiente manera:

$$\boxed{\dot{x}_1 = x_2} \quad (2.13)$$

Para las dos variables restantes se hace un proceso similar. La variable de estado  $x_3$  se iguala a la variación de distancia con relación a la coordenada  $z_2$ , se tiene:

$$x_3 = \Delta z_2 \quad (2.14a)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3 = \Delta \dot{z}_2 \quad (2.14b)$$

La variable  $x_4$  es igual a la primera derivada de la desviación de la distancia con respecto a la coordenada  $z_2$  como se puede observar en la ecuación (2.15a).

$$x_4 = \Delta \dot{z}_2 \quad (2.15a)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_4 = \Delta \ddot{z}_2 \quad (2.15b)$$

Por lo tanto la segunda ecuación de estado se obtiene igualando las ecuaciones 2.14b y 2.15a.

$$\boxed{\dot{x}_3 = x_4} \quad (2.16)$$

Por último, dentro de la modelación del sistema se debe considerar la perturbación externa  $w$  que influye en el sistema con su respectiva primera y segunda derivada, es decir, velocidad y aceleración respectivamente, para ello se proceden a igualar dichas perturbaciones a variables auxiliares que no forman parte de las variables de estado.

$$w = w_1 \quad (2.17)$$

$$\dot{w} = w_2$$

$$\ddot{w} = w_3$$

Las variables  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  son consideradas como parte de la entrada del sistema.

**Paso 2:** Se procede a reemplazar tanto las variables de estado obtenidas como las variables  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  en las ecuaciones diferenciales representativas de la dinámica del sistema.

Reemplazando (2.11a), (2.12a), (2.12b), (2.14a), (2.15a) y (2.17) en la ecuación diferencial (2.8), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\boxed{M_1 \dot{x}_2 = -K_1 x_1 - B_1 x_2 + K_1 x_3 + B_1 x_4 - M_1 w_3 + u} \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) representa la tercera ecuación de estados.

Reemplazando (2.11a), (2.12a), (2.14a), (2.15a), (2.15b) y (2.17) en la ecuación diferencial (2.9), se obtiene

$$\boxed{M_2 \dot{x}_4 = K_1 x_1 + b_1 x_2 - (K_1 + K_2) x_3 - (B_1 + B_2) x_4 + K_2 w_1 - B_2 w_2 - M_2 w_3 - u} \quad (2.19)$$

Siendo la ecuación (2.19) la cuarta ecuación de estados.

**Paso 3.** Se obtiene la representación de la ecuación de salida reemplazando (2.11a) en (2.10), y se tiene:

$$y(t) = x_1 \quad (2.20)$$

**Paso 4.** En base a las cuatro ecuaciones de estado obtenidas (2.13), (2.16), (2.18) y (2.19), se forma la matriz de las ecuaciones de estado, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ M_1 \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ M_2 \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_1 & -B_1 & K_1 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1 & B_1 & -(K_1 + K_2) & -(B_1 + B_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_2 & -B_2 & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + [0][u]$$

Finalmente las ecuaciones de estado para la suspensión activa quedan:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) \\ Y(t) &= CX(t)\end{aligned}\tag{2.21}$$

También es importante reiterar que la perturbación externa ocasionada por el relieve del camino, representada por (2.17) forma parte del vector de entrada del sistema.

Con todas las consideraciones antes indicadas la forma de la matriz de las ecuaciones de estado queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ M_1 \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ M_2 \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_1 & -B_1 & K_1 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1 & B_1 & -(K_1 + K_2) & -(B_1 + B_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & -B_2 & -M_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix}\tag{2.22}$$

En la representación matricial del sistema (2.22) se puede observar que la matriz de ganancia o transmisión directa  $D(t)$  es cero, confirmando la representación (2.21).

Es necesario realizar un acondicionamiento de las ecuaciones de estado de la suspensión activa desarrolladas, con la finalidad de facilitar el desarrollo de las técnicas LMIs para el control de la planta en estudio.

Finalmente se genera la matriz  $E$ , la cual es una matriz diagonal formada por los coeficientes de  $\dot{x}_2$  y  $\dot{x}_4$ ; realizando lo mencionado se obtiene la siguiente representación matricial de las ecuaciones del espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_1 & -B_1 & K_1 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1 & B_1 & -(K_1+K_2) & -(B_1+B_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & -B_2 & -M_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

### 2.5.4 REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMA DE BLOQUES

Con la finalidad de obtener una mayor comprensión de las ecuaciones del espacio de estados y poder visualizar fácilmente la diferencia entre la suspensión pasiva y la suspensión activa, en la Figura. 2.13 se encuentra representado el diagrama de bloques del sistema de suspensión en análisis.

En el diagrama de bloques del sistema de suspensión activa se puede observar como entradas a la fuerza de control  $u$ , a la función  $w(t)$  que corresponde al relieve o camino por el cual avanza el neumático, además también son entradas la primera y segunda derivada de la función  $w(t)$ , es decir, la velocidad y aceleración respectivamente; y se tiene como salida del sistema a la función  $y$ .

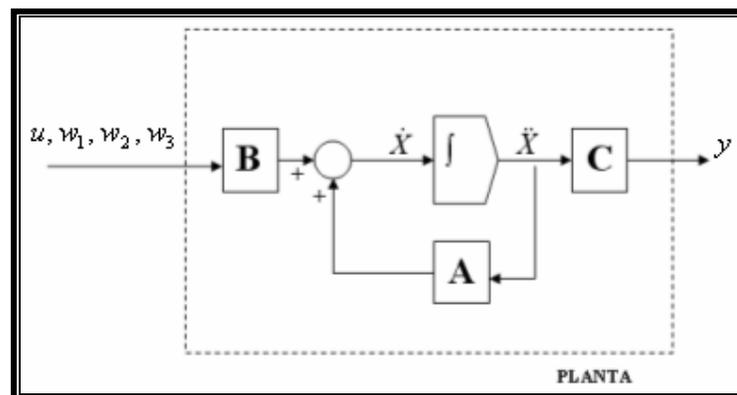


Figura. 2.13. Diagrama de bloques para el sistema de suspensión activa

La diferencia existente entre el sistema de suspensión activa y suspensión pasiva es la presencia de la fuerza de control  $u$ .

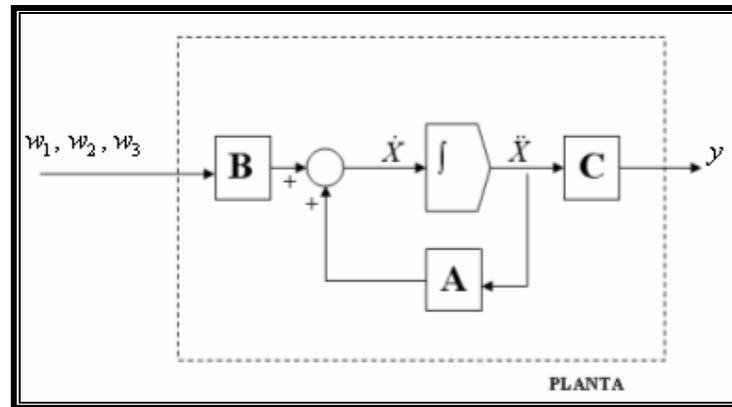


Figura. 2.14. Diagrama de bloques para el sistema de suspensión pasiva

### 2.5.5 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL MODELO MATEMÁTICO OBTENIDO PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN

Lo primero que se debe garantizar en el diseño de un sistema de control es la estabilidad del sistema. El criterio de estabilidad más sencillo tiene relación con la ubicación de polos, y dice que un sistema es estable si todos sus polos están localizados en el semiplano izquierdo del plano de frecuencia  $s$ ; considerar la analogía existente entre polos y valores propios de la matriz evolución  $A(t)$ .

Para el análisis de estabilidad se ha considerado como base el Teorema de Estabilidad Interna, el cual se refiere a la estabilidad del sistema autónomo sin entradas aprovechando el criterio de Estabilidad Asintótica, en la que la estabilidad dependerá de los valores propios o autovalores de la matriz de evolución,  $A(t)$ . Este criterio se basa en la condición necesaria y suficiente de que todos los valores propios de dicha matriz  $A$  posean parte real negativa.

Con las facilidades del programa de cálculo matemático MATLAB rápidamente se pueden obtener los valores propios de una matriz cuadrada, para determinar los autovalores de la matriz  $A$  se usa la función `eig`, la sintaxis que se debe ingresar es la siguiente:

$$g = \text{eig}(A), \text{ donde } g = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$$

En el vector  $g$  se almacenan los valores propios de la matriz  $A$  y se indica a continuación:

Valores Propios de la matriz evolución  $A$ :

$$g = \begin{array}{r} -23.9758 + 35.1869i \\ -23.9758 - 35.1869i \\ -0.1098 + 5.2504i \\ -0.1098 - 5.2504i \end{array}$$

Se puede observar que todos los valores propios obtenidos tienen su parte real negativa, se puede concluir que el sistema es estable, pero para corroborar a esta premisa se realizará un análisis basado en la representación de polos y ceros a partir de la transformación de la representación de espacio de estados. En (2.24) se aprecia la representación general en polos y ceros de un sistema, la cual no es más que una función de transferencia factorizada indicada a continuación:

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (2.24)$$

Para obtener esta representación en polos y ceros se recurrirá al programa MATLAB utilizando la función `ss2zp`, la cual hace una transformación del espacio de estados a polos y ceros, es decir, se calcula la función de transferencia factorizada de la entrada especificada `iu`, la sintaxis de la función es la siguiente

$$[z, p, k] = \text{ss2zp}(A, B, C, D, iu)$$

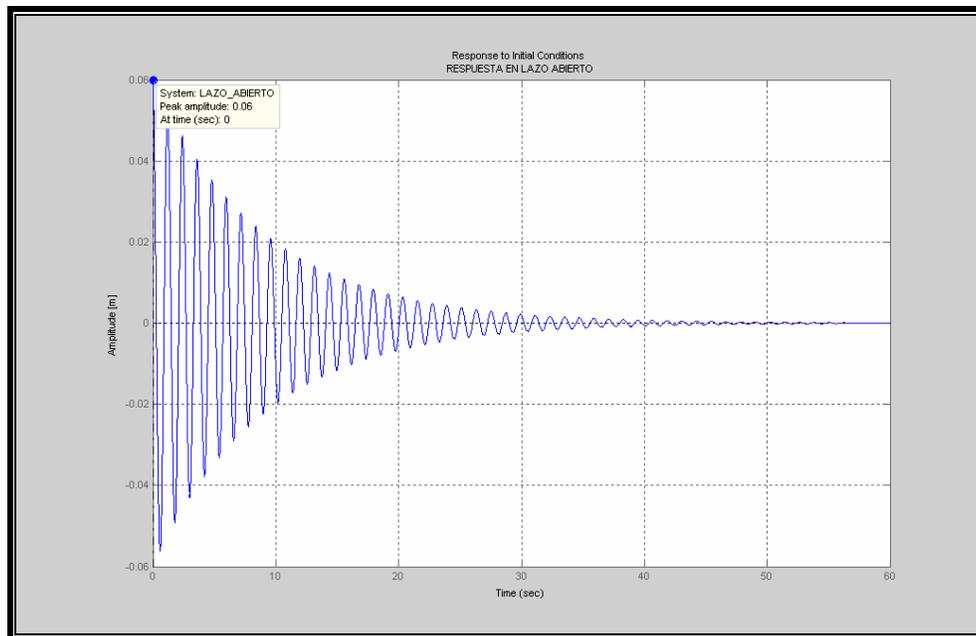
donde la variable  $p$  es el vector donde se almacena la localización de polos del denominador de la función de transferencia, los ceros del numerador son almacenados en las columnas de la matriz  $z$  con tantas columnas como salidas existan, por último la ganancia para cada numerador de la función de transferencia es almacenado en la columna del vector  $k$ ; existe una función `spoles` en MATLAB que es precisamente para sistemas

multi-variable, encajando al sistema de suspensión en análisis, su sintaxis se la puede consultar en el Anexo 1, los datos obtenidos son los siguientes:

$$p = \begin{array}{l} -23.9758 + 35.1869i \\ -23.9758 - 35.1869i \\ -0.1098 + 5.2504i \\ -0.1098 - 5.2504i \end{array}$$

Se puede observar que en un modelo del espacio de estados los polos son los valores propios de la matriz A, para las cuatro entradas los polos obtenidos son iguales y poseen parte real negativa con lo cual se confirma que el sistema es asintóticamente estable.

Se ha considerado relevante presentar la respuesta de lazo abierto del sistema en análisis, es decir, indicar el comportamiento natural del sistema sin ningún tipo de controlador con la finalidad de tener claro cuales son los requisitos que se tienen como objetivo con el controlador a implementarse.



**Figura. 2.15. Desviación de la posición de la masa  $M_1$  con respecto al punto de equilibrio del sistema de suspensión pasiva en lazo abierto**

En la Figura. 2.15 se puede observar la respuesta de sistema en lazo abierto a las siguientes condiciones iniciales para cada una de las variables de estado  $x_1 = 0.06$  [m] que representa la desviación de la posición con respecto a  $M_1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0.01$  [m] que representa la desviación de la posición con respecto a  $M_2$  y  $x_4 = 0$ , se aprecia la desviación de la posición de la masa  $M_1$  con respecto a la coordenada  $Z_1$  que es su posición de equilibrio, las oscilaciones tienen una amplitud máxima de 0.06 [m] y se estabilizan en el tiempo aproximado de 50 [s] con lo que se puede apreciar que no cumple con los requerimientos del diseño, se recuerda nuevamente los requisitos del diseño: un sobre-impulso máximo menor del 3% de la amplitud del bache o de la protuberancia del relieve del camino y un tiempo de establecimiento máximo de 3 segundos; tanto el diagrama implementado en el SIMULINK como las respectivas condiciones iniciales se pueden consultar en el Anexo 2.

### 2.5.6 ANÁLISIS DE CONTROLABILIDAD DEL MODELO MATEMÁTICO OBTENIDO PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN

La controlabilidad está relacionado con el criterio de que partiendo de una posición inicial se puede llevar a los estados a la posición requerida dentro de rangos o límites establecidos, por esta razón la controlabilidad relaciona las entradas y los estados del sistema sin considerar la ecuación de salida. Para saber si el sistema es controlable se lo hace basado en la comparación del rango de la matriz de controlabilidad y el número de filas de esta matriz, si ambos valores son iguales el sistema es controlable, considerar que el rango de una matriz es el número de columnas linealmente independientes.

Con la función `ctrb` del programa de cálculo MATLAB se puede calcular la matriz de controlabilidad, la sintaxis de esta función es:

$$M_{\text{controlabilidad}} = \text{ctrb}(A, B),$$

para determinar el rango de la matriz de controlabilidad se utiliza la función `rank` cuya sintaxis es `rango = rank(Mcontrolabilidad)`. La matriz de controlabilidad obtenida es la siguiente:

Mcontrolabilidad =

1.0e+007 \*

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0	0	0	0	0.0002	-0.0000
0.0002	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0075	0.0002

Columns 7 through 12

-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0	-0.0000
0	-0.0000	0.0039	-0.0001	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0075	0.0002	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0773	-0.0023	-0.0001	-0.0000

Columns 13 through 16

0.0039	-0.0001	0.0000	-0.0000
-0.2306	0.0069	0.0001	0.0000
0.0773	-0.0023	-0.0001	-0.0000
9.9001	-0.2974	-0.0052	-0.0000

rango =

4

El sistema en estudio es controlable ya que el rango de la matriz de controlabilidad es 4 y coincide con el número de filas de la matriz  $M_{\text{controlabilidad}}$  que también es 4.

Los códigos de programación implementados para realizar los análisis de estabilidad y controlabilidad se encuentran adjuntos en el Anexo 1.

## 2.6 NOCIONES DEL CONTROL DE PROCESOS MEDIANTE TÉCNICAS LMI

### 2.6.1 RESEÑA HISTÓRICA

La historia de las técnicas LMI en el análisis de sistemas dinámicos se remonta más de 100 años. La historia comienza cerca de 1890, cuando Lyapunov publicó su trabajo más importante introduciendo lo que en la actualidad se conoce como Teoría de Lyapunov. El demostró que la ecuación diferencial  $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$  es estable, es decir todas sus trayectorias convergen a cero, sí y solo sí existe una matriz positiva  $P$  tal que  $A^T P + PA < 0$ .

El requerimiento  $P > 0$ ,  $A^T P + PA < 0$  es lo que ahora se llama una Desigualdad de Lyapunov en P, la cual es una forma especial de una LMI. Lyapunov también demostró que esta primera LMI podía ser explícitamente resuelta. Realmente, se puede elegir cualquier  $Q = Q^T > 0$  y luego resolver la ecuación lineal  $A^T P + PA = -Q$  para la matriz P, la cual es garantizada ser positiva si el sistema  $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$  es estable.

En síntesis la primera LMI utilizada para analizar la estabilidad de un sistema dinámico fue la desigualdad de Lyapunov  $A^T P + PA < 0$ , la cual puede ser resuelta analíticamente por medio de la resolución de un conjunto de ecuaciones lineales.

El siguiente gran hito ocurrió en los años de 1940. Lur'e, Postnikov, y otros investigadores en la Unión Soviética aplicaron los métodos de Lyapunov para algunos problemas prácticos específicos en la ingeniería de control, especialmente el problema de la estabilidad de un sistema de control con una no-linealidad en el actuador. Ellos estaban emocionados por la idea de que la teoría de Lyapunov podía ser aplicada a importantes y difíciles problemas prácticos en la ingeniería de control.

En resumen, Lur'e y los demás fueron los primeros en aplicar los métodos de Lyapunov para el control práctico de problemas de ingeniería. Las LMIs que resultaron fueron resueltas analíticamente, a mano. Por supuesto esto limitó su aplicación solo para pequeños sistemas, es decir, sistemas de segundo y tercer orden.

Cerca de los años 60 del siglo pasado Yakubovich, Popov, Kalman y otros investigadores lograron exitosamente reducir la solución de LMIs que surgieron en el problema de Lur'e por un simple criterio gráfico, esto dio como resultado el celebrado criterio de Popov, el criterio circular y muchos otros más. Estos criterios pudieron ser aplicados a sistemas de orden más alto pero su utilidad no se extendía a sistemas que contenían más de una no-linealidad. Desde el punto de vista de este relato sobre las LMIs en la teoría de control, la contribución fue para demostrar como resolver cierta familia de LMIs por métodos gráficos.

Por el año de 1971, los investigadores desarrollaron algunos métodos para resolver varios tipos especiales de LMIs: directamente para sistemas pequeños, métodos gráficos, y por resolución de las ecuaciones de Lyapunov o Riccati; cabe indicar que estos métodos son todos de soluciones analíticas que pueden ser utilizados para resolver especiales formas de LMIs. Willems en su documento de 1971 sugería que las LMIs podrían tener alguna ventaja en algoritmos computacionales, anunciando lo que se vendría en el futuro.

La siguiente gran ventaja fue la simple observación de que las LMIs que surgen en sistemas y la teoría de control pueden ser formuladas como problemas de optimización convexa que son receptivos a soluciones por computadora. Aunque ésta fue una simple observación tuvo importantes consecuencias, la más importante de todas es que se puede resolver confiablemente muchas LMIs para las cuales no se había encontrado solución analítica, es decir se redujo el problema original de Lur'e a un problema de optimización convexa involucrando LMIs, el problema original de Lur'e era el caso de múltiples no-linealidades.

En un documento de 1976, Horisberger y Belanger habían observado que la existencia de una función cuadrática de Lyapunov que simultáneamente provee estabilidad a una colección de sistemas lineales es un problema convexo involucrando LMIs.

El evento final de este relato sobre la historia de LMIs es de gran importancia práctica, éste es el desarrollo del poderoso y eficiente método puntos-interiores para resolver las LMIs que surgen de los sistemas y teoría de control. En 1984, N. Karmarkar introdujo un algoritmo lineal de programación para resolver programas lineales en tiempo polinomial. Especialmente todas estas actividades de investigación se concentraron para programas lineales y cuadráticos. Luego en 1988, Nesterov y Nemirovskii desarrollaron métodos puntos-interiores que se aplican directamente a problemas convexos involucrando LMIs. Aunque hay mucho por realizarse en esta área, bastantes algoritmos de puntos-interiores para Problemas LMI han sido implementados y probados en familias específicas de LMIs que surgen de la teoría de control, con tendencia a ser extremadamente eficientes. Es justo mencionar que Yakubovich es el padre de este campo, y Lyapunov el abuelo de este campo. El nuevo desarrollo es la habilidad para resolver directamente LMIs.

### 2.6.2 INTRODUCCIÓN

Las técnicas LMI (Linear Matrix Inequalities) han surgido como poderosas herramientas de diseño en áreas que van desde la ingeniería de control hasta sistemas de identificación y diseño estructural. Tres factores hacen que las técnicas LMI sean atractivas:

- Una variedad de especificaciones y limitaciones de diseño pueden ser expresadas como LMIs.
- Una vez formulado un problema en términos de LMIs puede ser resuelto exactamente por algoritmos eficientes de optimización convexa (LMI solvers).
- Existen muchos problemas con múltiples limitaciones o con carencia de soluciones analíticas objetivas en términos de ecuaciones matriciales; sin embargo, estos problemas frecuentemente son manejables dentro de la estructura LMI. Esto hace a los diseños basados en LMIs una alternativa valiosa en relación a los métodos analíticos clásicos.

El LMI Control Toolbox (caja de herramientas de control LMI), fue diseñado como una compuerta progresiva y fácil a un nuevo y rápido crecimiento de las técnicas LMIs.

Para usuarios principalmente interesados en aplicar técnicas LMI para el diseño de control, el LMI Control Toolbox presenta una variedad de herramientas de alto nivel para el análisis y diseño de sistemas de lazo cerrado multi-variable. Para usuarios quienes ocasionalmente necesitan resolver problemas LMI, el LMI Editor y el tutorial de introducción a los conceptos de LMIs y LMI solvers proporcionan una fácil y rápida herramienta para resolver estos problemas. Para usuarios con mayor experiencia en LMIs, el LMI Lab ofrece un ambiente rico, flexible y completamente programable para desarrollar herramientas personalizadas basadas en LMIs.

El LMI Control Toolbox implementa soluciones LMI punto-interior. Gracias a su representación eficientemente estructurada de LMIs, el LMI Control Toolbox está equipado para ser el mejor de los logros que se ha desarrollado en los últimos tiempos.

### 2.6.2.1 CARACTERÍSTICAS DEL TOOLBOX

El LMI Control Toolbox es útil en dos propósitos:

- Proveer herramientas de análisis del espacio de estados para el análisis y diseño de sistemas de control robusto basados en LMIs.
- Ofrecer al usuario un ambiente flexible y amigable para especificar y resolver problemas generales con LMIs.

Las herramientas de diseño de control que facilita MATLAB pueden ser usadas sin un conocimiento previo sobre LMIs o LMI solvers. Éstas son herramientas dedicadas a cubrir aplicaciones de técnicas LMI, entre ellas se pueden citar:

- Especificación y manipulación de sistemas dinámicos inciertos o impredecibles, por ejemplo los siguientes sistemas: lineales invariantes en el tiempo, politópicos, parámetros dependientes, etc.
- Análisis de robustez; varias mediciones de estabilidad y rendimiento son implementados, incluyendo la estabilidad cuadrática, técnicas basadas en funciones dependientes de parámetros de Lyapunov, análisis  $\mu$ , y análisis de Popov.
- Realimentación de estados multi-modelo.
- Síntesis de controladores con ganancia robusta para sistemas dependientes de parámetros variantes en el tiempo.

### 2.6.2.2 LMIs

Una desigualdad matricial lineal (LMI) es cualquier limitación o restricción de la forma:

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_N A_N > 0 \quad (2.25)$$

Una LMI se puede representar también mediante sumatorias:

$$A(x) := A_0 + \sum_{N=1}^m x_N A_N > 0 \quad (2.26)$$

donde

- $x = (x_1, \dots, x_N)$  es un vector escalar desconocido, es decir, un vector de números reales, se lo conoce como variable de decisión u optimización.
- $A_0, \dots, A_N$  son matrices reales simétricas dadas,  $A_N = A_N^T \in R^{n \times n}$ ,  $N = 0, \dots, m$  para todo  $n \in Z_+$ .
- La desigualdad " $>0$ " es la validación para obtener una definición positiva, equivalentemente, los valores propios de  $A(x)$  son positivos.

Es necesario definir algunos conceptos:

**Definición de Conjuntos Convexos:** Un conjunto  $S$  en un espacio vectorial lineal se dice que es convexo si

$$\{x_1, x_2 \in S\} \Rightarrow \{x := \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in S \text{ para todo } \alpha \in (0,1)\}$$

En términos geométricos este expone que para cualesquiera dos puntos de un conjunto convexo el segmento de recta que conecta a estos dos puntos pertenece al conjunto. En general, el conjunto vacío es considerado a ser convexo. El punto  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  con  $\alpha \in (0,1)$  es denominado una combinación convexa de los dos puntos  $x_1$  y  $x_2$ . Generalmente, las combinaciones convexas son definidas por cualquier conjunto finito de puntos.

**Definición de Funciones Convexas:** Una función  $f : S \rightarrow R$  es denominada convexa si

1.  $S$  es convexo y
2. para todo  $x_1, x_2 \in S$  y  $\alpha \in (0,1)$  se mantiene que

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

$f$  es denominada estrictamente convexa si la desigualdad del punto dos se cumple para  $x_1 \neq x_2$ .

**Definición de Función Afín:** Una función  $f: S \rightarrow T$  es afín si  $f(x) = T(x) + f_0$  donde  $f_0 \in T$  y  $T: S \rightarrow T$  es un plano lineal.

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)$$

Para todo  $x_1, x_2 \in S$  y  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ .

**Definición de Punto-Interior (Interior-Point):** Sea  $S$  un subconjunto del espacio  $X$ . El punto  $x \in S$  es denominado un punto interior de  $S$  si existe un  $\epsilon > 0$  tal que todos los puntos  $y \in S$  con  $\|x - y\| < \epsilon$  también pertenece a  $S$ . El interior de  $S$  es la colección de todos los puntos interiores de  $S$ .

**Definición de LMI:** Una desigualdad matricial lineal (LMI) es una desigualdad

$$A(x) > 0 \tag{2.27}$$

Donde  $A$  es una función afín que define un vector en un espacio de dimensión finita en el conjunto  $S^n = \{M \mid M = M^T \in R^{n \times n}\}$ ,  $n > 0$ , de las matrices reales simétricas.

El término desigualdad matricial lineal es ahora de uso común en la literatura sobre sistemas y control, pero la terminología no es consistente con la expresión  $A(x) > 0$  ya que  $F$  no necesita ser una función lineal. Desigualdad matricial afín podría ser definitivamente un mejor nombre.

La LMI (2.25) es una limitación o restricción convexa en  $x$ , ya que el conjunto  $P := \{x \mid A(x) > 0\}$  es convexo. En efecto, si  $x_1, x_2 \in P$  y  $\alpha \in (0,1)$  luego

$$A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha A(x_1) + (1 - \alpha)A(x_2) > 0$$

Donde en la primera igualdad se indica que  $A$  es afín y la última desigualdad es consecuencia del hecho que  $\alpha \geq 0$  y  $(1 - \alpha) \geq 0$

Considerando  $A(y) > 0$  y  $A(z) > 0$  implica que  $A\left(\frac{y+z}{2}\right) > 0$ , como resultado tenemos:

- Su conjunto solución, llamado el conjunto factible, es un subconjunto convexo de  $R^N$ .
- Encontrar una solución  $x$  para (2.25), si existe una, es un problema de optimización convexa.

Aunque la LMI (2.25) puede parecer que tiene una forma especializada, esta puede representar una amplia variedad de restricciones convexas en  $x$ . En particular desigualdades lineales, desigualdades cuadráticas, norma de desigualdades matriciales, y restricciones que surgen en la teoría de control, tales como Lyapunov y desigualdades matriciales cuadráticas convexas, pueden todas ser moldeadas en la forma de una LMI. Se puede notar que las restricciones  $A(x) < 0$  y  $A(x) > B(x)$  son casos especiales de (2.25) ya que se los puede describir como  $-A(x) > 0$  y  $A(x) - B(x) > 0$ , respectivamente.

La convexidad tiene una importante consecuencia; aunque (2.25) no tiene una solución analítica en general, esta puede ser resuelta numéricamente con la garantía de encontrar una cuando exista. Note que un sistema de restricciones LMI pueden ser consideradas como una LMI individual a partir de:

$$\begin{cases} A_1(x) < 0 \\ \vdots \\ A_k(x) < 0 \end{cases} \quad \text{es equivalente a} \quad A(x) := \text{diag}(A_1(x), \dots, A_k(x)) > 0$$

$$A(x) := \begin{pmatrix} A_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_N(x) \end{pmatrix} > 0$$

Donde  $\text{diag}(A_1(x), \dots, A_K(x))$  indica a la matriz diagonal con  $A_1(x), \dots, A_K(x)$  sobre su diagonal. Así, múltiples restricciones LMI pueden ser ubicados en el vector de variables de decisión  $x$  sin afectar la convexidad.

En muchas aplicaciones de control, las LMIs no surgen naturalmente de la forma canónica, (2.25), sino más bien de la forma

$$L(X_1, \dots, X_n) < R(X_1, \dots, X_n)$$

Donde  $L(\cdot)$  y  $R(\cdot)$  son funciones afines de algunas variables matriciales estructuradas  $X_1, \dots, X_n$ . Un simple ejemplo es la desigualdad de Lyapunov:

$$A^T X + XA > 0 \tag{2.28}$$

Donde el parámetro desconocido  $X$  es una matriz simétrica. Definiendo  $x_1, \dots, x_N$  como una entrada escalar independiente de  $X$ , esta LMI puede ser rescrita en la forma (2.25), así que es más conveniente y eficiente describirla en su forma natural, (2.28), la cual es la aproximación tomada en el LMI Lab.

Tanto (2.25) como (2.27) son LMIs estrictas o absolutas, pero una LMI no-absoluta es una desigualdad matricial lineal donde  $>$  en (2.25) y (2.26) es reemplazado por  $\geq$ .

### 2.6.2.2.1 Problemas relacionados con LMIs

Hay tres problemas genéricos relacionados al estudio de las desigualdades matriciales lineales:

1. **Factibilidad:** La prueba para conocer si existen o no soluciones  $x$  de  $F(x) > 0$  es denominada la factibilidad del problema. La LMI es denominada no-factible si no existen soluciones.
2. **Optimización:** Sea  $f : S \rightarrow R$  y se supone que  $S = \{x | F(x) > 0\}$ . El problema para determinar

$$V_{opt} = \inf_{x \in S} f(x)$$

es denominado un problema de optimización con una restricción LMI. Este problema involucra la determinación del ínfimo  $V_{opt}$  y para un valor arbitrario  $\varepsilon > 0$  los cálculos de una solución casi óptima  $x$  la cual satisface  $x \in S$  y  $V_{opt} \leq f(x) \leq V_{opt} + \varepsilon$ .

3. **Problema de Valores Propios Generalizados:** Este problema viene a ser la minimización de un escalar  $\lambda \in R$  sujeto a

$$\begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases}$$

Donde  $A, B$  y  $C$  son matrices simétricas.

El problema de minimización de los valores propios generalizados es cuasi-convexo y puede ser resuelto por técnica similares. Posee su nombre al hecho que  $\lambda$  esta relacionado al máximo valor propio de un par de matrices  $(A(x), B(x))$  que dependen de manera afín de una variable.

Estos problemas estándar son tratables desde el punto de vista práctico y teórico. Resolver el problema significa determinar si el problema es o no factible, y si éste es,

calcular un punto factible con un valor objetivo que sobrepase el mínimo global por menos de la exactitud pre-especificada.

Los métodos que se utiliza para resolver los tres problemas antes planteados son numéricamente eficientes, y son: el método del elipsoide, el cual está basado en algoritmos elipsoidales es garantizado para resolver problemas estándar. Es muy simple y desde el punto de vista teórico eficiente. En la práctica; sin embargo, el método de puntos interiores es mucho más eficiente.

### 2.6.2.3 LMIs EN CONTROL

Muchos problemas y especificaciones de diseño de control tienen formulaciones LMI. Esto es específicamente cierto para análisis y diseños basados en la Teoría de Lyapunov. La principal fuerza de la formulación de LMIs es la habilidad de combinar varias limitaciones de diseño u objetivos en un modo numéricamente manejable.

Una lista no exhaustiva de problemas dirigidos por técnicas LMI incluye:

- Sistemas de estabilidad robusta con incertidumbre LTI. (análisis  $\mu$ )
- Estabilidad cuadrática de inclusión diferencial.
- Estabilidad de Lyapunov de sistemas dependientes de parámetros.
- Propiedades de entradas, estados, salidas de sistemas LTI.
- Diseño de controladores de ganancia robusta.
- Ubicación de polos robustos
- Control LQG óptimo.
- Control robusto  $H_\infty$ .
- Control de sistemas estocásticos.
- Problemas de interpolación.

La misión fundamental del diseño LMI, está en lograr los siguientes objetivos:

**Estabilidad:** la estabilidad del sistema dinámico

$$\dot{x} = Ax$$

es equivalente a la factibilidad de encontrar  $P = P^T$  tal que  $A^T P + PA < 0$ ,  $P > I$  esto puede ser generalizado a las inclusiones lineales diferenciales (LDI)

$$\dot{x} = A(t)x$$

donde  $A(t)$  varia en la cobertura convexa de un conjunto de modelos LTI:

$$A(t) \in Co\{A_1, \dots, A_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \quad : \quad \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Una condición suficiente para la estabilidad asintótica de esta LDI es la factibilidad de encontrar  $P = P^T$  tal que  $A_i^T P + PA_i < 0$ ,  $P > I$ .

**Ganancia RMS:** La ganancia RMS (Random-mean-squares) de un sistema LTI (linear time invariant) estable

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

es la más grande ganancia entrada/salida a través de todas las entradas  $u(t)$ .

**Desempeño LQG (Linear Quadratic Gaussian):** para un sistema LTI estable

$$G \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ y = Cx \end{cases}$$

donde  $w$  es ruido blanco, el LQG o desempeño  $H_2$ ,  $\|G\|_2$  es definido por:

$$\begin{aligned} \|G\|_2^2 &:= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T y^T(t) y(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^H(j\omega) G(j\omega) d\omega \end{aligned}$$

Puede ser demostrado que

$$\|G\|_2^2 = \inf \{ \text{Trace}(CPC^T) : AP + PA^T + BB^T < 0 \}$$

### 2.6.3 SISTEMAS DINÁMICOS INCIERTOS

El LMI Control Toolbox ofrece una variedad de herramientas para facilitar la descripción y manipulación de sistemas dinámicos inciertos, las funciones incluidas sirven para:

- Manipular la formulación del espacio de estados de sistemas invariantes en el tiempo (LTI) como una matriz `SYSTEM` individual.
- Formar interconexiones de sistemas lineales.
- Especificar sistemas lineales con matrices del espacio de estados inciertos (inclusión diferencial politópica, sistemas con incertidumbre o parámetros físicos variantes en el tiempo).
- Describir modelos fraccionarios-lineales de incertidumbre.

Una breve introducción sobre los sistemas dinámicos inciertos y una revisión de estas facilidades se citan en los siguientes párrafos.

#### 2.6.3.1 SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

El LMI Control Toolbox provee herramientas modernas para manipular la representación del espacio de estados de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI). Estas herramientas manejan modelos generales LTI de la forma:

$$E \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  son matrices reales y  $E$  es invertible, lo mismo sucede para su contraparte en el tiempo-discreto

$$\begin{aligned}Ex_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}$$

Recordar que los vectores  $x(t), u(t), y(t)$  representan las trayectorias de estado, de la entrada y de la salida. Similarmente  $x_k, u_k, y_k$  representan los valores de los vectores de estado, entrada, y salida al tiempo de muestreo  $k$ .

La formulación “descriptor” ( $E \neq I$ ) resulta útil cuando se especifican sistemas dependientes de parámetros y también para evitar modificar  $E$  cuando esta transmutación está mal acondicionada. Además, muchos sistemas dinámicos son escritos naturalmente en la forma descriptor. Por ejemplo el siguiente sistema de segundo orden:

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = u, \quad y = x$$

admite la representación del espacio de estados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -f \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = (1, 0)X$$

donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

### 2.6.3.1.1 Matriz SYSTEM

Por comodidad, la realización del espacio de estados de sistemas LTI es representada como una matriz individual de MATLAB llamada Matriz SYSTEM. Específicamente, un sistema LTI continuo o discreto en el tiempo con matrices de espacio de estados  $A, B, C, D, E$  es representada por la matriz estructurada

$$\left[ \begin{array}{cc|c} A + j(E - I) & B & n \\ & & 0 \\ & & 0 \\ C & D & \vdots \\ \hline & & 0 \\ & 0 & -Inf \end{array} \right]$$

donde  $j = \sqrt{-1}$ . La entrada superior derecha  $n$  corresponde al número de estados, mientras que la entrada  $-Inf$  es usada para diferenciar matrices `SYSTEM` de matrices regulares.

Las funciones `ltisys` y `ltiss` crean matrices `SYSTEM` y extraen información del espacio de estados de estas matrices. Por ejemplo:

```
sys = ltisys(-1,1,1,0)
```

especifica el sistema LTI

$$\dot{x} = -x + u, \quad y = x.$$

La matriz `SYSTEM` que entrega MATLAB es la siguiente:

```
sys =
   -1     1     1
     1     0     0
     0     0  -Inf
```

Para recuperar los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  desde la matriz `SYSTEM` `sys`, se utiliza la función

```
[a,b,c,d]=ltiss(sys)
```

Para un sistema SISO (single-input/single-output), es decir, un sistema de una entrada y de una salida, la función `ltitf` retorna en forma de numerador y denominador la representación de la función de transferencia

$$G(s) = D + C(sE - A)^{-1}B = \frac{n(s)}{d(s)}$$

A la inversa, el comando

```
sys = ltisys('tf', n, d)
```

retorna la realización del espacio de estados de la función de transferencia SISO  $n(s)/d(s)$  en formato `SYSTEM`. Donde `n` y `d` son el vector representación de  $n(s)$  y  $d(s)$ .

El número de estados, entradas y salidas de un sistema lineal son recuperados de la matriz `SYSTEM` con `sinfo`:

```
sinfo(sys)
System with 1 state(s), 1 input(s), and 1 output(s)
```

Similarmente, los polos de un sistema están dados por `spol`:

```
spol(sys)
ans =
    -1
```

La función `ssub` selecciona entradas y salidas en particular de un sistema y retorna el correspondiente subsistema. Por ejemplo, si  $G$  tiene dos entradas y tres salidas, el análisis del subsistema de la primera entrada a la segunda y tercera salidas esta dado por

```
ssub(g,1,2:3)
```

La función `sinv` calcula la inversa  $H(s) = G(s)^{-1}$  de un sistema  $G(s)$

```
h = sinv(g)
```

Finalmente, la realización del espacio de estados de un sistema LTI puede ser balanceado con `sbalanc`. Esta función busca una representación similar de forma escalonada diagonal, que reduce las normas de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

### 2.6.3.1.2 Gráficas de las respuestas de tiempo y frecuencia

Las respuestas de tiempo y frecuencia de sistemas lineales son graficadas directamente de la matriz `SYSTEM` con la función `splot`. De manera ilustrativa se considera un sistema de segundo orden

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = u, \quad y = x$$

con  $m = 2$ ,  $f = 0.01$ , y  $k = 0.5$ . Este sistema es especificado de la siguiente forma:

```
sys = ltisys([0 1;-0.5 -0.01], [0; 1], [1 0], 0, [1 0; 0 2])
```

el último argumento de entrada es la matriz  $E$ . Para graficar el diagrama de Bode se utiliza

```
splot(sys, 'bo')
```

El segundo argumento son los caracteres de las dos primeras letras de 'bode'. Este comando genera la gráfica de la Figura. 2.16. Un tercer argumento puede ser utilizado para ajustar el rango de frecuencia. Por ejemplo:

```
splot(sys, 'bo', logspace(-1, 1, 50))
```

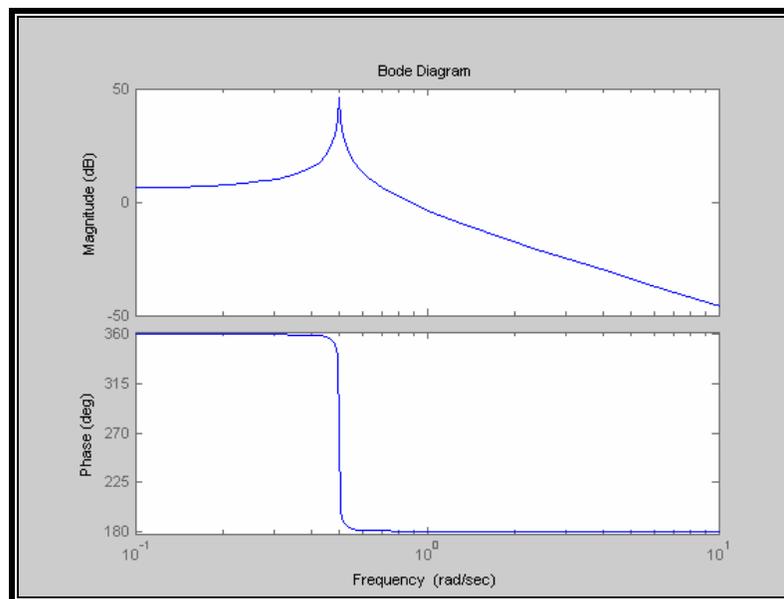


Figura. 2.16. Función de MATLAB `splot(sys, 'bo')`

Para graficar el valor propio singular de este sistema de segundo orden, se digita el comando:

```
plot(sys, 'sv')
```

Similarmente, las respuestas al escalón y al impulso de este sistema son dibujadas por `plot(sys, 'st')` y `plot(sys, 'im')`, respectivamente. En la Figura. 2.17 se puede observar la gráfica del sistema en respuesta a la señal escalón.

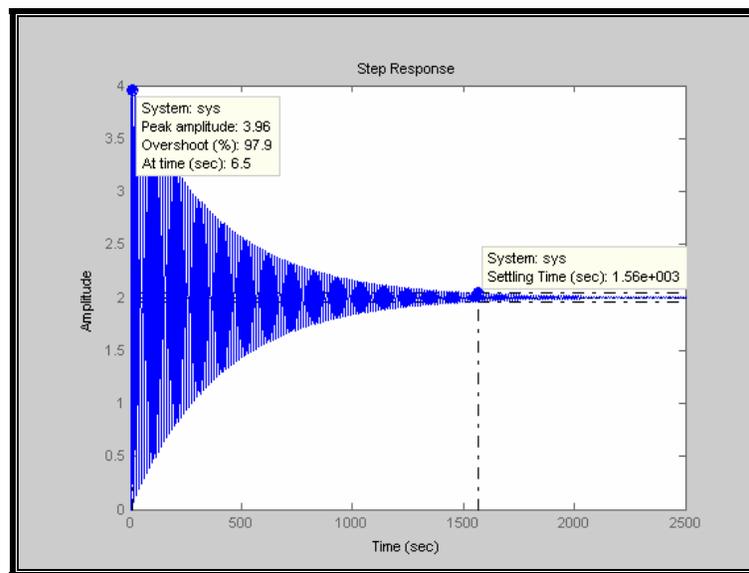


Figura. 2.17. Función de MATLAB `plot(sys, 'st')`

La función `plot` es también aplicable a sistemas discretos en el tiempo. Para tales sistemas, el periodo de muestreo  $T$  debe ser especificado para graficar las respuestas de frecuencia.

Por ejemplo el gráfico de Bode del sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.1x_k + 0.2u_k \\ y_k = -x_k \end{cases}$$

con periodo de muestreo  $T = 0.01$  s es dibujado por

```
splot(ltisys(0.1, 0.2, -1), 0.01, 'bo')
```

### 2.6.3.2 INTERCONEXIONES DE SISTEMAS LINEALES

Existen herramientas provistas para formar interconexiones serie, paralelo, y realimentación simple de sistemas LTI. Interconexiones más complejas pueden ser construidas con las facilidades básicas existentes o directamente con `sconnect`. Estas funciones de interconexión trabajan sobre la representación de la matriz `SYSTEM` de sistemas dinámicos y sus nombres comienzan con la letra `s`.

Note que algunas de estas funciones son también aplicables a modelos politópicos o dependientes de parámetros.

Las interconexiones serie y paralelo son desarrolladas por `sadd` y `smult`. En términos de las funciones de transferencia,

```
sadd(g1, g2)
```

retorna el sistema con la función de transferencia  $G_1(s) + G_2(s)$  mientras

```
smult(g1, g2)
```

retorna el sistema con la función de transferencia  $G_2(s)G_1(s)$ . Cada función puede soportar máximo 10 argumentos de entrada, al menos uno de los cuales puede ser un sistema dependiente de parámetros. Similarmente el comando

```
sdiag(g1, g2)
```

concatena el sistema  $G_1$  y  $G_2$  y retorna el sistema con la función de transferencia

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & G_2(s) \end{pmatrix}.$$

Esto corresponde a la combinación de relaciones entrada/salida

$$y_1 = G_1(s)u_1, \quad y_2 = G_2(s)u_2,$$

dentro de la relación individual

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, las funciones `sloop` y `slft` forman interconexiones de retroalimentación básica. La función `sloop` determina la realimentación entre  $r$  y  $y$  en el lazo de la Figura. 2.18. El resultado es una realización del espacio de estados de la función de transferencia

$$(I - \varepsilon G_1 G_2)^{-1} G_1$$

donde  $\varepsilon = \pm 1$

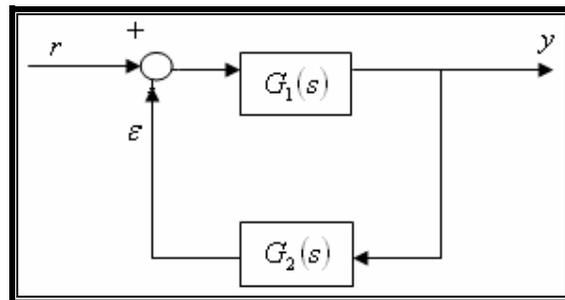


Figura. 2.18 Esquema de la función `sloop`

Esta función es útil para especificar un lazo de realimentación simple.

La función `slft` forma la interconexión más general de realimentación, como la que se puede apreciar en la Figura. 2.19. y retorna el mapeo de realimentación de  $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ .

Para formar esta interconexión cuando  $u \in R^2$  y  $y \in R^3$ , el comando es

```
slft(P1, P2, 2, 3)
```

Los dos últimos argumentos dimensionan  $u$  y  $y$ . Esta función es útil para calcular interconexiones fraccionarias-lineales tales como aquellas que surgen en la teoría  $H_\infty$ .

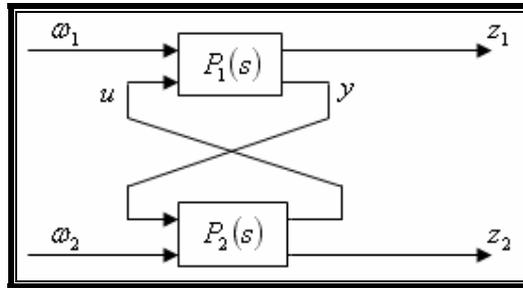


Figura. 2.19. Representación esquemática de la función de MATLAB `s1ft`

### 2.6.3.3 MODELOS DE INCERTIDUMBRE

La noción de sistemas dinámicos inciertos es central para la teoría del control robusto. Para propósitos de diseño, el posible comportamiento complejo de sistemas dinámicos debe ser encajado dentro de modelos relativamente menos complejos. El espacio entre tales modelos y el verdadero sistema físico es denominado el **modelo de la incertidumbre**. Otra causa de incertidumbre es el conocimiento imperfecto de algunos componentes del sistema, o de la alteración de su comportamiento debido a cambios en las condiciones de operación. Finalmente, la incertidumbre también resulta de parámetros físicos cuyo valor es solo aproximadamente conocido o varía en el tiempo. Se debe considerar que el modelo de la incertidumbre debería ser distinguido de acciones exógenas tales como perturbaciones o ruido de las mediciones.

El LMI control toolbox se enfoca sobre las clases de sistemas dinámicos que pueden ser aproximados por modelos lineales hasta modelos con incertidumbre no lineal y/o variante en el tiempo. Una vez que se obtiene el modelo nominal y se estima la incertidumbre, dos principios fundamentales deben ser recordados.

- La incertidumbre debería ser pequeña donde el alto rendimiento es deseado (relación final o arreglo entre desempeño y robustez). En otras palabras, el modelo lineal debería ser lo suficientemente preciso en el ancho de banda de control.
- Mientras más información se tenga sobre la incertidumbre, más elevado será el desempeño alcanzable.

Hay dos clases importantes de incertidumbre:

- **Incertidumbre dinámica**, la cual consiste de componentes dinámicos descuidados o desvalorados en el modelo lineal así también como de las variaciones del comportamiento dinámico durante la operación. Por ejemplo, modos flexibles de alta frecuencia, grandes entradas no lineales, variación lenta en el tiempo, etc.
- **Incertidumbre de parámetros**, la cual resulta del conocimiento imperfecto de los valores de los parámetros físicos, o de las variaciones de estos parámetros durante la operación. Ejemplos de parámetros físicos incluyen coeficientes de rigidez y amortiguación de sistemas mecánicos, coeficientes aerodinámicos en dispositivos de vuelo, capacitores e inductores en circuitos eléctricos, etc.

Otras características importantes de incertidumbre incluyen si ésta es lineal o no lineal, y si ésta es variante o invariante en el tiempo. El modelo incertidumbre es generalmente una combinación de incertidumbre dinámica y paramétrica, y pueden presentarse como puntos diferentes en el lazo de control. Por ejemplo, puede haber incertidumbre dinámica para los sistemas de actuadores, e incertidumbre de parámetros sobre los coeficientes de algún sensor determinado.

Dos representaciones del modelo incertidumbre son usados en LMI Control Toolbox:

- **Modelos de la incertidumbre en el espacio de estados**, Esta representación es relevante para sistemas descritos por ecuaciones dinámicas con coeficientes inciertos y/o variantes en el tiempo.
- **Representación fraccionaria-lineal de incertidumbre**, aquí el sistema incierto es descrito como una interconexión del sistema LTI conocido con componentes inciertos llamados “bloques de incertidumbre”. Cada bloque de incertidumbre  $\Delta_i(\cdot)$  representa una familia de sistemas de las cuales solamente unas pocas características son conocidas. Por ejemplo, la única información disponible sobre  $\Delta_i(\cdot)$  puede ser que ésta es no lineal e invariante en el tiempo con una ganancia menor que 0.01.

Factores determinantes que influyen en la decisión de la representación a escoger incluyen la disponibilidad del modelo, (ecuaciones del espacio de estados, modelos del dominio de la frecuencia) y la herramienta de análisis o síntesis a ser utilizada.

### 2.6.3.4 MODELOS DE INCERTIDUMBRE EN EL ESPACIO DE ESTADOS

Los modelos físicos de un sistema frecuentemente conducen a una descripción en el espacio de estados de su comportamiento dinámico. El resultado de las ecuaciones en el espacio de estados típicamente involucra parámetros físicos cuyo valor es aproximadamente conocido, así como aproximaciones de un fenómeno complejo y posiblemente no lineal. En otras palabras el sistema es descrito por un **modelo de incertidumbre en el espacio de estados**

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

donde las matrices del espacio de estados  $A, B, C, D, E$ , dependen de parámetros inciertos y/o variantes en el tiempo o varían en algún conjunto limitado del espacio de matrices.

Una particular relevancia de esta caja de herramientas, toolbox, son las clases de modelos politópicos o dependientes de parámetros que se describen luego, tales modelos son referidos como **P-systems** “P-” representa la inicial de politópico o dependiente de parámetros. P-systems son especificados con la función `psys` y son manipulados como un sistema LTI ordinario excepto por unas pocas restricciones que se especifican.

#### 2.6.3.4.1 Modelos politópicos

Se denomina sistema politópico a un sistema lineal variante en el tiempo

$$\begin{aligned} E(t)\dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

cuya matriz SYSTEM  $S(t) = \begin{bmatrix} A(t) + jE(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{bmatrix}$  varía dentro de un conjunto politópico de matrices.

$$S(t) \in Co\{S_1, \dots, S_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i S_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}$$

donde  $S_1, \dots, S_k$  son sistemas vértice dados:

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_1 + jE_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \dots, S_k = \begin{bmatrix} A_k + jE_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

En otras palabras,  $S(t)$  es una combinación convexa de matrices SYSTEM  $S_1, \dots, S_k$ . Los números positivos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  son denominados coordenadas politópicas de  $S$ .

Tales modelos son también llamados inclusiones diferenciales lineales politópicas, (LDI, Linear Differential Inclusions) y surgen en muchas situaciones prácticas, incluyendo:

- Representación multi-modelo de un sistema, cada modelo siendo derivado dentro de condiciones particulares de operación.
- Sistemas no lineales de la forma:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad y = C(x)x + D(x)u$$

- Modelos del espacio de estados dependiente de parámetro variantes en el tiempo.

Un simple ejemplo es el sistema

$$\dot{x} = (\sin x)x$$

cuya matriz de estado  $A = \sin x$  tiene un rango en el politopo

$$A \in \text{Co}\{-1,1\} = [-1,1]$$

Los sistemas politópicos son especificados por la lista de sus sistemas vértice, por las matrices SYSTEM  $S_1, \dots, S_k$  en (2.29). Por ejemplo, un modelo politópico que toma valores en un entorno convexo de tres sistemas LTI  $s_1, s_2, s_3$  es declarado por

```
polsys=psys([s1, s2, s3])
```

#### 2.6.3.4.2 Modelo afín dependiente de parámetros

Las ecuaciones de la dinámica de un sistema determinado a menudo involucran incertidumbre o coeficientes variantes en el tiempo. Cuando el sistema es lineal, este naturalmente da lugar a modelos dependientes de parámetros (PDS) de la forma

$$\begin{aligned} E(p)\dot{x} &= A(p)x + B(p)u \\ y &= C(p)x + D(p)u \end{aligned}$$

donde  $A(\cdot), \dots, E(\cdot)$  son funciones conocidas de un determinado vector de parámetros  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Tales modelos surgen comúnmente de las ecuaciones de movimiento, aerodinámicas, circuitos, etc.

El LMI Control Toolbox ofrece varias herramientas para analizar la estabilidad y desempeño de sistemas dependientes de parámetros con una dependencia afín sobre el vector de parámetros  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Éste es un PDS donde

$$A(p) = A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_n A_n, \quad B(p) = B + p_1 B_1 + \dots + p_n B_n$$

y así sucesivamente para  $C, D, E$ . Los modelos afines dependientes de parámetros hacen una buena pareja con el análisis y síntesis basados en la Teoría de Lyapunov y son fácilmente convertidos a modelos de incertidumbre fraccionaria-lineal para diseños basados en ganancias mínimas.

Con la notación

$$S(p) = \begin{pmatrix} A(p) + jE(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{pmatrix}, \quad S_i = \begin{pmatrix} A_i + jE_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$$

La dependencia afín sobre  $p$  está escrita más compactamente en términos de la matriz SYSTEM, como

$$S(p) = S_0 + p_1 S_1 + \dots + p_n S_n$$

El sistema de “coeficientes  $S_0, \dots, S_n$ ” se caracteriza completamente por la dependencia sobre los parámetros inciertos  $p_1, \dots, p_n$ , Note que  $S_0, \dots, S_n$  no necesita representar significativamente sistemas dinámicos. Solamente la combinación  $S(p)$  es una descripción relevante del problema.

Los sistemas afines dependientes de parámetros son especificados con **psys** para proveer:

- Una descripción del vector de parámetros  $p$  en términos de los límites de los valores de los parámetros y de la tasa de variación.
- La lista de los coeficientes  $S_0, \dots, S_n$  de la matriz SYSTEM.

Por ejemplo, el sistema

$$S(p) = S_0 + p_1 S_1 + p_2 S_2$$

está definido por

```
s0 = ltisys(a0, b0, c0, d0, e0)
s1 = ltisys(a1, b1, c1, d1, e1)
s2 = ltisys(a2, b2, c2, d2, e2)
affsys = psys(pv, [s0 s1 s2])
```

donde  $p_v$  es la descripción de parámetros retornada por la función **pvec**, más adelante se indica la obtención de  $p_v$ . La salida `affsys` es una matriz estructurada que almacena toda la información relevante.

Considerar que por defecto `ltisys` establece a la matriz  $E$  como matriz identidad. Para especificar un PDS afín con una matriz  $E$  independiente de parámetros ( $E(p) = I$ ), se debe colocar  $E_1 = E_2 = 0$  como se indica a continuación

```
s0=ltisys(a0, b0, c0, d0)
s1=ltisys(a1, b1, c1, d1, 0)
s2=ltisys(a2, b2, c2, d2, 0).
```

#### 2.6.3.4.3 Cuantificación de la incertidumbre de parámetros

La incertidumbre de parámetros es cuantificada por el rango de los valores de los parámetros y las posibles tasas de variación de parámetros. Esto es realizado con la función **pvec**. Las características del vector de parámetros definido con **pvec** son extraídos con **pvinfos**.

El rango de la incertidumbre de parámetros puede ser descrito como una caja en el espacio de parámetros. Esto corresponde a los casos donde cada parámetro incierto o variante en el tiempo  $p_i$  posee un rango que se encuentra entre dos valores extremos determinados empíricamente  $\underline{p}_i$  y  $\bar{p}_i$ ;

$$p_i \in [\underline{p}_i, \bar{p}_i] \quad (2.30)$$

Si  $p = (p_1, \dots, p_n)$  es el vector de todos los parámetros inciertos, (2.30) delimita un hiper-rectángulo del espacio de parámetros  $\mathfrak{R}^n$  denominado la **caja de parámetros**. Considerar el ejemplo de un circuito eléctrico con resistencia incierta  $\rho$  y capacitor incierto  $c$  en un rango de

$$\rho \in [600, 1000] \quad c \in [1, 5].$$

El correspondiente vector de parámetros  $p = (\rho, c)$  toma valores de la caja dibujada en la Figura. 2.20. Este rango de incertidumbre es especificado por los comandos:

```
range = [600 1000; 1 5]
p = pvec('box', range)
```

Los límites de la tasa de variación  $\dot{p}_i(t)$  de  $p_i$  son especificados adicionando un tercer argumento `rate`. Por ejemplo, las limitaciones

$$0.1 \leq \dot{\rho}(t) \leq 1 \qquad | \dot{c}(t) | \leq 0.001$$

son incorporadas por

```
rate = [0.1 1; -0.001 0.001]
p = pvec('box', range , rate)
```

Todos los parámetros son asumidos como invariantes en el tiempo cuando `rate` es omitido. Paulatinamente los parámetros variantes pueden ser especificados de esta manera. En general, la robustez sobre las variaciones rápidas de parámetros es más rigurosa que la robustez sobre constantes pero como parámetros inciertos.

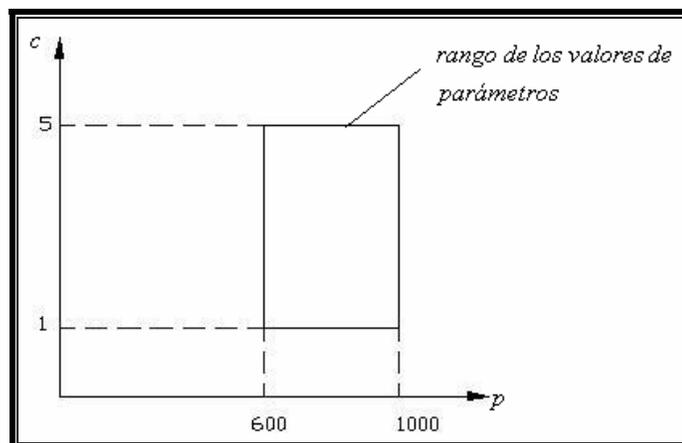


Figura. 2.20. Caja de parámetros

Alternativamente, los vectores de parámetros inciertos pueden ser especificados como una variación en un polígono del espacio de parámetros  $\mathcal{R}^n$  como se presenta en la Figura. 2.21 para  $n = 2$ . Este polígono es especificado por los tres vértices:

$$\Pi_1 = (1, 4) \quad \Pi_2 = (3, 8) \quad \Pi_3 = (10, 1)$$

Un vector de parámetros inciertos  $p$  con este rango de valores esta definido por

```
pi1 = [1,4],      pi2 = [3,8]  pi3 = [10, 1]
p = pvec('pol', [pi1,pi2,pi3])
```

Los caracteres 'pol' indican que el rango de parámetros esta definido como un polígono.

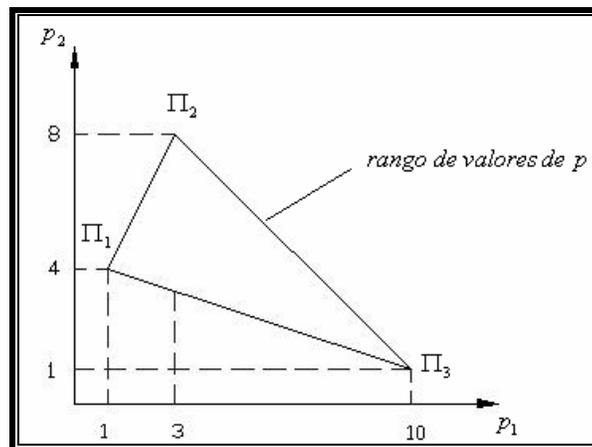


Figura. 2.21. Rango de parámetros politópicos

#### 2.6.3.4.4 Simulación de sistemas dependientes de parámetros

La función `pdsimul` simula la respuesta en el tiempo de sistemas afines dependientes de parámetros a lo largo de trayectorias de parámetros dadas. Por ejemplo,

```
pdsimul(pds, 'traj')
```

dibuja la respuesta al escalón de un sistema PDS dependiente de parámetros de una sola entrada a lo largo de los parámetros de trayectoria definidos en `traj.m`. Para obtener otra respuesta del tiempo, se especifica una señal de entrada como se indica:

```
pdsimul(pds, 'traj', 1, 'sin').
```

Este comando dibuja la respuesta a una onda seno entre  $t = 0$  y  $t = 1$ .

Sistemas de múltiples-entradas/múltiples-salidas (MIMO) son simulados similarmente especificando la función de entrada apropiada.

#### 2.6.3.4.5 Ejemplo ilustrativo de un PDS

Se concluye con un ejemplo ilustrativo la manipulación de modelos politópicos y dependientes de parámetros utilizando las facilidades prestadas por el LMI Control Toolbox.

**Ejemplo:** Considerar un simple circuito eléctrico que tiene por ecuación

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + Ci = V$$

donde la inductancia  $L$ , la resistencia  $R$ , y el capacitor  $C$  son parámetros inciertos que están en el siguiente rango

$$L \in [10, 20], \quad R \in [1, 2], \quad C \in [100, 150].$$

Primero se definirá las variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= i & \dot{x}_1 &= \frac{di}{dt} \\ x_2 &= \frac{di}{dt} & \dot{x}_2 &= \frac{d^2 i}{dt^2} \end{aligned}$$

La primera ecuación de estados queda:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Reemplazando las variables de estado definidas en la ecuación diferencial del circuito eléctrico en análisis se tiene:

$$L\dot{x}_2 = -Cx_1 - Rx_2$$

Una representación del espacio de estados de la respuesta del sistema es

$$E(L, R, C)\dot{x} = A(L, C, R)x$$

donde  $x^T = (i, \frac{di}{dt})$  y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -R & -C \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A(L, R, C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -R & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + L \times 0 + R \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E(L, R, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R \times 0 + C \times 0$$

Este sistema afín es especificado con **psys** como sigue:

```
a0=[0 1; 0 0];    e0=[1 0; 0 0];    s0=ltisys(a0, e0)
aL=zeros(2);     eL=[0 0; 0 1];    sL=ltisys(aL, eL)
aR=[0 0;-1 0];  sR=ltisys(aR, 0)
aC=[0 0; 0 -1]; sC=ltisys(aC, 0)
```

```
pv=pvec('box', [10 20; 1 2; 100 150])
pds=psys(pv, [s0 sL sR sC])
```

La primera matriz **SYSTEM** **s0** contiene la información del espacio de estados para  $L = R = C = 0$ , mientras **sL**, **sR**, **sC** definen los coeficientes de las matrices de  $L$ ,  $R$ ,  $C$ . El rango de los valores de parámetros es especificado por el comando **pvec**.

Los resultados pueden ser chequeados con `psinfo` y `pvinfos`:

```
psinfo(pds)

Affine parameter-dependent model with 3 parameters (4 systems)
  Each system has 2 state(s), 0 input(s), and 0 output(s)

pvinfos(pv)

Vector of 3 parameters ranging in a box
```

El sistema puede también ser evaluado por valores dados de  $L$ ,  $R$ ,  $C$ :

```
sys=psinfo(pds, 'eval', [15 1.2 150])
[a, b, c, d, e]=ltiss(sys),
```

Las matrices  $a$  y  $e$  contienen los valores de  $A(L, R, C)$  y  $E(L, R, C)$  para  $L = 15$ ,  $R = 1.2$ , y  $C = 150$

Finalmente, la contraparte politópica de este modelo afín es dado por

```
pols=aff2pol(pds)

psinfos(pols)

Polytopic model with 8 vertex systems
  Each system has 2 state(s), 0 input(s), and 0 output(s)
```

### 2.6.3.5 MODELO FRACCIONARIO-LINEAL DE INCERTIDUMBRE

Para sistemas con ambas incertidumbres tanto dinámica como paramétrica, existe una representación de incertidumbre más general y es el modelo fraccionario-lineal de la Figura. 2.22. En este modelo genérico:

- El sistema LTI  $P(s)$  congrega todos los componentes LTI conocidos (controlador, modelos nominales del sistema, sensores y actuadores, etc).
- El vector de entrada  $u$  incluye todas las acciones externas sobre el sistema (disturbaciones, ruido, señal de referencia, etc), y el vector  $y$  consiste de todas las señales de salida generadas por el sistema

- $\Delta$  es una descripción estructurada de la incertidumbre. Específicamente

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

donde cada bloque de incertidumbre  $\Delta_i$  da razón de cada fuente particular de incertidumbre, (descuidos dinámicos, no linealidad, parámetros inciertos, etc). La estructura diagonal de  $\Delta$  refleja como cada componente de incertidumbre  $\Delta_i$  ingresa al lazo de control y afecta el comportamiento del sistema verdadero.

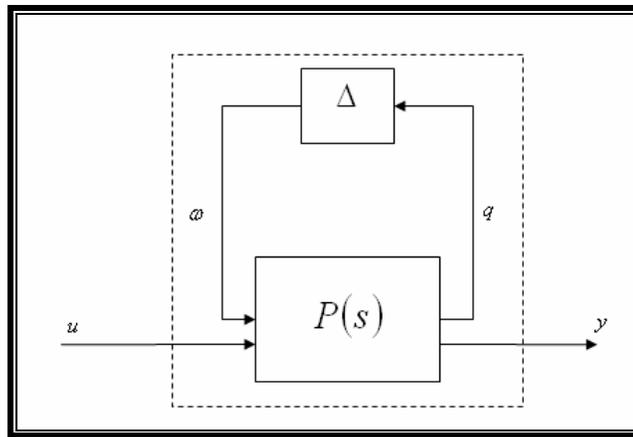


Figura. 2.22. Incertidumbre lineal-fraccionaria

### 2.6.3.5.1 Especificación de la incertidumbre

En modelos lineales-fraccionarios de incertidumbre, cada bloque  $\Delta_i$  de incertidumbre es un sistema dinámico caracterizado por:

- Su dinámica natural: lineal invariante en el tiempo o variante en el tiempo, no lineales sin memoria, no lineal arbitrario.
- Sus dimensiones y estructura. Bloques escalares son usados para representar parámetros inciertos.
- Sí  $\delta_i$  es real o complejo en el caso de incertidumbre escalar  $\Delta_i = \delta_i \times I$ .
- Información cuantitativa, tales como límites de la norma, etc.

Las propiedades de cada bloque de incertidumbre individual  $\Delta_i$  son especificadas con la función `ublock`. Estas descripciones individuales son luego adjuntadas con `udiag` para formar una descripción completa de la incertidumbre estructurada

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_r).$$

La cuantificación de la incertidumbre es importante ya que esta determina los niveles alcanzables de estabilidad y desempeño robusto.

#### 2.6.4 ANÁLISIS DE ROBUSTEZ

Los sistemas de control son frecuentemente diseñados por un modelo simplificado de la planta física que no toma en cuenta todas las fuentes de incertidumbre. Un análisis posterior de robustez es necesario luego para validar el diseño y obtener garantías de estabilidad y desempeño de la parte de la planta con incertidumbre. El LMI Control Toolbox ofrece una variedad de herramientas para evaluar la estabilidad y el desempeño robusto. Estas herramientas cubren técnicas basadas en Lyapunov y en el dominio de la frecuencia:

- Estabilidad y desempeño cuadrático.
- Pruebas incluyendo funciones de Lyapunov dependientes de parámetros.
- Análisis mezclado  $\mu$ .
- El criterio de Popov.

Cada prueba es ajustada a una clase particular de incertidumbre, por ejemplo, incertidumbre real de parámetros para funciones dependientes de parámetros de Lyapunov, o no-linealidades sin memoria para el criterio de Popov. Por lo tanto los usuarios deberán seleccionar la herramienta más apropiada para su problema, ya que todas estas pruebas son basadas en condiciones suficientes, éstas son solamente productivas cuando tienen éxito en el aseguramiento de la estabilidad o desempeño robusto.

### 2.6.4.1 FUNCIONES CUADRÁTICAS DE LYAPUNOV

Las nociones de estabilidad cuadrática y desempeño cuadrático son útiles para analizar sistemas lineales variantes en el tiempo

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad x(0) = x_0.$$

Dados tales sistemas, una condición suficiente para una estabilidad asintótica es la existencia de una función cuadrática de Lyapunov definida como positiva

$$V(x) = x^T P x$$

tal que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$$

a lo largo de todas las trayectorias de estado. En términos de  $Q := P^{-1}$ , esto es equivalente a:

$$A(t)QE(t)^T + E(t)QA(t)^T < 0 \quad (2.31)$$

en todo el tiempo  $t$ .

Evaluando la estabilidad cuadrática, ésta no es manejable en general ya que posee un número infinito de limitaciones en  $Q$ ; sin embargo, puede ser reducido a un número finito de conjuntos de limitaciones LMI en los siguientes casos:

1.  $A(t)$  y  $E(t)$  son funciones afines ajustadas a algunos parámetros variantes en el tiempo  $p_1(t), \dots, p_n(t)$ :

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 + p_1(t)A_1 + \dots + p_n(t)A_n \\ E(t) &= E_0 + p_1(t)E_1 + \dots + p_n(t)E_n \end{aligned}$$

Esto está referido como un modelo afin dependiente de parámetros.

2.  $A(t) + jE(t)$  se encuentra dentro de un rango de un polítopo ajustado de matrices, este es,

$$\begin{aligned} A(t) &= \alpha_1(t)A_1 + \dots + \alpha_n(t)A_n \\ E(t) &= \alpha_1(t)E_1 + \dots + \alpha_n(t)E_n \end{aligned}$$

con  $\alpha_i(t) \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) = 1$ . Esto es referido como un modelo polotópico.

El primer caso corresponde a sistema cuyas ecuaciones del espacio de estados dependen en forma afín de parámetros físicos variantes en el tiempo, y el segundo caso para sistemas variantes en el tiempo modelados por un entorno de sistemas de LTI. Se debe considerar que las funciones cuadráticas de Lyapunov garantizan estabilidad para variaciones rápidas arbitrarias en el tiempo.

Las funciones cuadráticas de Lyapunov son también útiles para evaluar el desempeño RMS robusto.

#### 2.6.4.1.1 Formulación LMI

Las condiciones LMI suficientes para la estabilidad cuadrática son las siguientes:

**Modelos afines:** considerar el modelo dependiente de parámetros

$$E(p)\dot{x} = A(p)x, \quad A(p) = A_0 + p_1A_1 + \dots + p_nA_n, \quad E(p) = E_0 + p_1E_1 + \dots + p_nE_n$$

donde  $p_i(t) \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$ , y

$$v = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i] \right\}$$

denota el conjunto de esquinas de la correspondiente caja de parámetros. El sistema dinámico (2.27) es cuadráticamente estable si existen matrices simétricas  $Q$  y  $\{M_i\}_{i=1}^n$  tal que

$$A(\omega)QE(\omega)^T + E(\omega)QA(\omega)^T + \sum_i \omega_i^2 < 0 \quad \text{para todo } \omega \in \nu \quad (2.32)$$

$$A_i PE_i^T + E_i PA_i^T + M_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

$$M_i \geq 0 \quad (2.34)$$

$$Q > I \quad (2.35)$$

**Modelos politópicos:** el sistema politópico

$$E(t)\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) + jE(t) \in \text{Co}\{A_1 + jE_1, \dots, A_n + jE_n\}$$

es cuadráticamente estable si existe una matriz simétrica  $Q$  y escalares  $t_{ij} = t_{ji}$  tales que

$$A_i QE_j^T + E_j QA_i^T + A_j QE_i^T + E_i QA_j^T < 2t_{ij}I \text{ for } i, j \in (1, \dots, n) \quad (2.36)$$

$$Q > I \quad (2.37)$$

$$\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.38)$$

Considerar que estas condiciones LMI en realidad son suficientes y necesarias para una estabilidad cuadrática siempre que:

- En el caso afín, el parámetro  $p_i$  no ingrese a  $A(t)$  como a  $E(t)$ , esto es,  $A_i = 0$  o  $E_i = 0$  para todo  $i$ . Las condiciones (2.33)-(2.34) pueden ser eliminadas y esto basta para verificar (2.31) para las esquinas  $\omega$  de la caja de parámetros.
- En el caso politópico, tanto  $A(t)$  o  $E(t)$  es constante. Esto basta para resolver (2.36)-(2.37) para  $t_{ij} = 0$ .

#### 2.6.4.1.2 Estabilidad cuadrática

La función `quadstab` prueba la estabilidad cuadrática de un sistema afín o politópico dependiente de parámetros. La correspondiente factibilidad del problema LMI es resuelta con `feasp`.

**Ejemplo:** Considerar el sistema variante en el tiempo

$$\dot{x} = A(t)x$$

donde  $A(t) \in Co\{A_1, A_2, A_3\}$  con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2.2 & -0.3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1.9 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Este sistema politópico es especificado por

```
s1=ltisys(a1)
s2=ltisys(a2)
s3=ltisys(a3)
polsys=psys([s1 s2 s3])
```

Para probar su estabilidad cuadrática se escribe el siguiente código

```
[tmin, P] = quadstab(polsys)

Solver for LMI feasibility problems L(x) < R(x)
  This solver minimizes t subject to L(x) < R(x) + t*I
  The best value of t should be negative for feasibility

Iteration   :   Best value of t so far
      1           -2.530866e-003

Result: best value of t: -2.530866e-003
      f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+008

This system is quadratically stable

tmin =
      -0.0025
```

Colectivamente mostrando el sistema LMI (2.36)-(2.38) por  $A(x) < 0$ , **quadstab** evalúa su factibilidad por la minimización de  $r$  sujeto a  $A(x) < rI$  y retorna el mínimo global  $t_{\min}$  de este problema. De ahí el sistema es cuadráticamente estable sí y solo sí  $t_{\min} < 0$ . En este caso la segunda salida  $P$  es la matriz de Lyapunov que prueba la estabilidad que corresponde a la matriz  $Q$  en las condiciones (2.36)-(2.38).

### 2.6.4.1.3 Maximización de la región de estabilidad cuadrática

La opción de `quadstab` es solamente disponible para sistemas afines dependientes de parámetros, donde la matriz  $E$  es constante y cada parámetro  $p_i(t)$  tiene un rango dentro del intervalo

$$p_i(t) \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$$

denotando el centro y el radio de cada intervalo por  $\mu_i = \frac{1}{2}(\underline{p}_i + \overline{p}_i)$  y  $\delta_i = \frac{1}{2}(\overline{p}_i - \underline{p}_i)$ . La región de máxima estabilidad cuadrática esta definida como la más grande dilatación de la caja de parámetros donde la estabilidad cuadrática puede ser comprobada. En otras palabras, la más grande dilatación del factor  $\theta$  tal que el sistema es cuadráticamente estable siempre que:

$$p_i(t) \in [\mu_i - \theta\delta_i, \mu_i + \theta\delta_i].$$

Calcular este gran factor es un problema de minimización de valores propios generalizados. Esta optimización es desarrollada por `quadstab` cuando la primera entrada del vector `options` es seteado a 1.

**Ejemplo:** Considere el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = A(k, f)x$$

donde

$$A(k, f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -f \end{pmatrix}, \quad k(t) \in [10, 12], \quad f(t) \in [0.5, 0.7].$$

El sistema es ingresado por

```
s0=ltisys([0 1; 0 0])
s1=ltisys([0 0;-1 0], 0) %k
s2=ltisys([0 0; 0 -1], 0) %f
```

```
pv = pvec ('box', [10 12; 0.5 0.7]) % parameter box
affsys=psys(pv, [s0 s1 s2])
```

Para calcular la dilatación más grande de la caja de parámetros donde se mantiene la estabilidad cuadrática, se debe ingresar

```
[marg, P]=quadstab(affsys, [1 0 0])
```

El resultado es

```
Quadratic stability established on 149.0376% of the
prescribed parameter box
marg =
    1.4904
```

Lo cual significa que tiene una dilatación del 149% de la caja especificada, que es,

$$k(t) \in [9.51, 12.49], \quad f(t) \in [0.451, 0.749].$$

Note que si la función  $\text{marg} \geq 1$  implica que existe estabilidad cuadrática en la caja de parámetros prescrita.

#### 2.6.4.1.4 Desempeño cuadrático $H_\infty$

La función `quadperf` calcula el desempeño cuadrático  $H_\infty$  de un sistema afín dependiente de parámetros

$$\begin{aligned} E(p)\dot{x} &= A(p)x + B(p)u \\ y &= C(p)x + D(p)u \end{aligned}$$

o de un sistema politópico

$$\begin{aligned} E(t)\dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

donde

$$S(t) = \begin{pmatrix} A(t) + jE(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} \in \text{Co}\{S_1, \dots, S_n\}.$$

Recuerde que el desempeño cuadrático  $H_\infty$  es el límite superior del peor caso de ganancia RMS del sistema. La función `quadperf` puede también ser usada para probar si el peor caso de ganancia RMS no excede de un valor dado  $\gamma > 0$ , o para maximizar la porción de la caja de parámetros, donde este nivel  $\gamma$  no este excedido.

**Ejemplo:** Considere el sistema de segundo orden con variables de masa y amortiguación variantes en el tiempo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -f(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = x, \quad m(t) \in [0.8, 1.2], \quad f(t) \in [0.4, 0.6].$$

El modelo afin dependiente de parámetros es especificado como

```
s0=ltisys([0 1; -2 0], [0; 1], [1 0], 0, [1 0; 0 0])
s1=ltisys(zeros(2), [0; 0], [0 0], 0, [0 0; 0 1]) % m
s2=ltisys([0 0; 0 -1], [0; 0], [0 0], 0, 0) % f

pv = pvec ('box', [0.8 1.2; 0.4 0.6])
affsys = psys(pv, [s0 s1 s2])
```

y su desempeño cuadrático  $H_\infty$  desde  $u$  a  $y$  es calculado por

```
qperf= quadperf(affsys)

Quadratic RMS gain: 6.083e+000
qperf =

6.0835
```

Este valor es más grande que el del desempeño nominal LTI para  $m = 1$  y  $f = 0.5$  y se confirma con

```
nomsys=psinfo(affsys, 'eval', [1 0.5])
norminf(nomsys)

1.4311
```

### 2.6.4.2 FUNCIONES DE LYAPUNOV DEPENDIENTES DE PARÁMETROS

La prueba de robustez que se trata a continuación es aplicable a sistemas afines dependientes de parámetros o sistemas inciertos invariantes con el tiempo descritos por un polítopo de modelos. Para demostrar la estabilidad robusta de cada sistema, se busca una función cuadrática de Lyapunov que dependa de parámetros inciertos o de coordenadas politópicas en el caso de un modelo politópico. Los resultados de las pruebas son menos conservativos que la estabilidad cuadrática cuando los parámetros son constantes o varían lentamente. Además, los límites disponibles en las tasas de variación de parámetros pueden ser claramente tomados en cuenta.

**Modelos Afines:** para un sistema afín dependiente de parámetros

$$E(p)\dot{x} = A(p)x$$

con el vector de parámetros  $p = (p_1, \dots, p_n) \in R^n$ , se busca una definición positiva de la función de Lyapunov de la forma

$$V(x, p) = x^T (Q(p))^{-1} x$$

donde

$$Q(p) = Q_0 + p_1 Q_1 + \dots + p_n Q_n.$$

Para tales funciones de Lyapunov, la condición de estabilidad  $\frac{dV(x, p)}{dt} < 0$  es equivalente a

$$E(p)Q(p)A^T(p) + A(p)Q(p)E(p)^T - E(p)\frac{dQ}{dt}E(p)^T < 0$$

con los límites de los intervalos conocidos

$$p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i] \quad \frac{dp_i}{dt} \in [\underline{v}_i, \overline{v}_i]$$

en cada  $p_i$  y su respectiva derivada en el tiempo  $\frac{dp_i}{dt}$ ; los vectores  $p$  y  $\frac{dp}{dt}$  varían en unas “cajas” de dimensión  $n$ .

**Modelos politópicos:** una extensión similar de la prueba de la estabilidad cuadrática esta disponible para los sistemas politópicos invariantes en el tiempo.

$$E\dot{x} = Ax$$

donde una de las matrices  $A, E$  es constante y la otra incierta. Asumiendo que  $E$  es constante y  $A$  varía en el polítopo

$$A \in \{\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n : \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1\}$$

se busca una función de Lyapunov de la forma  $V(x, \alpha) = x^T (Q(\alpha))^{-1} x$  donde

$$Q(\alpha) = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n.$$

Usando tales funciones de Lyapunov, las condiciones necesarias para la estabilidad del polítopo entero son las siguientes:

Dadas las matrices simétricas  $Q_1, \dots, Q_n$ , y los escalares  $t_{ij} = t_{ji}$ , tales que

$$A_i Q_j E^T + E Q_j A_j^T + A_j Q_i E^T + E Q_i A_j^T < 2t_{ij}$$

$$Q_j > I$$

$$\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} < 0$$

**Análisis de estabilidad.** Dado un sistema afín o politópico, la función `pd1stab` busca una función de Lyapunov dependiente de parámetros estableciendo estabilidad robusta cubriendo un rango de parámetros dado o polítopo de modelos. La sintaxis es similar a la de la función `quadstab`. Para un sistema afín dependiente de parámetros con dos parámetros inciertos  $p_1$  y  $p_2$ , por ejemplo, `pd1stab` es invocado por

```
[tmin, Q0, Q1, Q2]=pd1stab(ps)
```

Aquí `ps` es la descripción del sistema e incluye la información disponible del rango de valores y de las tasas de variación de cada parámetro. Si las tasas de variación no están especificadas, los parámetros son considerados como **invariantes en el tiempo**. La función `pd1stab` determina si las condiciones suficientes listadas sobre LMIs en los párrafos anteriores son factibles. La factibilidad es establecida cuando  $t_{\min} < 0$ . En tales casos, una función de Lyapunov dependiente de parámetros que demuestra estabilidad es  $V(x, p) = x^T (Q(p))^{-1} x$  con

$$Q(p) = Q_0 + p_1 Q_1 + p_2 Q_2.$$

Se debe tener presente que en el caso de parámetros inciertos invariantes en el tiempo, `pd1stab` puede ampliar la región de estabilidad calculada. Específicamente si `pd1stab` fracasa para demostrar estabilidad dentro de todo el rango de parámetros, se puede dividir el rango dentro de regiones más pequeñas y tratar de establecer estabilidad en cada sub-región independientemente.

**Ejemplo:** Considerar el sistema de segundo orden.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k(t) & -f(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

donde la rigidez  $k(t)$  y la amortiguación  $f(t)$  están dentro del rango

$$k(t) \in [5, 10] \quad f(t) \in [0.01, 0.1]$$

y su tasa de variación esta limitada por

$$\left| \frac{dk}{dt} \right| < 0.01, \quad \left| \frac{df}{dt} \right| < 1$$

La información del sistema y de los parámetros son especificados por

```
s0=ltisys([0 1; 0 0])
s1=ltisys([0 0;-1 0], 0)
s2=ltisys([0 0; 0 -1], 0)
pv=pvec('box', [5 10; 0.01 0.1], [-0.01 0.01; -1 1])
ps=psys(pv, [s0 s1 s2])
```

El segundo argumento de **pvec** define el rango de valores de los parámetros, mientras el tercer argumento especifica los límites de su tasa de variación.

Este sistema no es cuadráticamente estable dentro de su caja de parámetros especificada y esto se confirma con:

```
tmin = quadstab(ps)

This system is not quadratically stable
tmin =
    8.5014e-004
```

Sin embargo, este sistema resultó ser robustamente estable cuando las variaciones de parámetros no exceden de las tasas máximas de variación especificadas, demostrado por:

```
[tmin, Q0, Q1, Q2]=pdlstab(ps)

Solver for LMI feasibility problems L(x) < R(x)
  This solver minimizes t subject to L(x) < R(x) + t*I
  The best value of t should be negative for feasibility

Iteration   :   Best value of t so far

1              0.084922
2              0.011835
3              0.011835
4             1.885474e-003
5             1.885474e-003
6             4.863968e-004
7             1.538590e-004
8             -7.828823e-004
```

```
Result: best value of t: -7.828823e-004
        f-radius saturation: 0.003% of R = 1.00e+007
```

This system is stable for the specified parameter trajectories

```
tmin =
      -7.8288e-004
```

Esto hace que `pd1stab` sea una herramienta útil para el análisis de sistemas con constantes o con parámetros que varían lentamente.

### 2.6.4.3 ANÁLISIS $\mu$

El análisis  $\mu$  investiga la estabilidad robusta o desempeño de sistemas con incertidumbre lineal invariante en el tiempo y fraccionaria-lineal. Este análisis es también aplicable a sistemas dependientes de parámetros invariantes en el tiempo. Incertidumbres no lineales y/o variantes en el tiempo son direccionadas por el criterio de Popov discutido más adelante.

**Valor singular estructurado.** El análisis  $\mu$  esta basado en el concepto de valor singular estructurado. Considere el lazo de la Figura. 2.23 donde  $M \in C^{n \times m}$  y  $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$  es una perturbación estructurada caracterizada por:

- Las dimensiones de cada bloque  $\Delta_i$ .
- Si  $\Delta_i$  es una matriz compleja o real.
- Si  $\Delta_i$  es una matriz completa o una matriz escalar de la forma  $\Delta_i = \delta_i \times I$ .

Se denota por  $\Delta$  al conjunto de perturbaciones con esta estructura particular. El lazo de la Figura. 2.23 está bien formulado sí y solo sí  $I - M\Delta$  es invertible. Medir la más pequeña cantidad de perturbación  $\Delta$  que se requiere para arruinar a la correcta formulación es el propósito del valor singular estructurado.

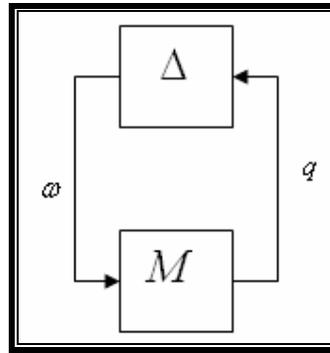


Figura. 2.23. Problema estático  $\mu$

**Análisis de estabilidad robusta.** El valor singular estructurado  $\mu$  es útil para evaluar la estabilidad robusta de interconexiones fraccionarias-lineales invariantes en el tiempo (Figura 2.24). Aquí  $P(s)$  es un sistema LTI dado y  $\Delta(s) = \text{diag}(\Delta_1(s), \dots, \Delta_n(s))$  es una norma o una incertidumbre lineal invariante en el tiempo con alguna estructura prescrita.

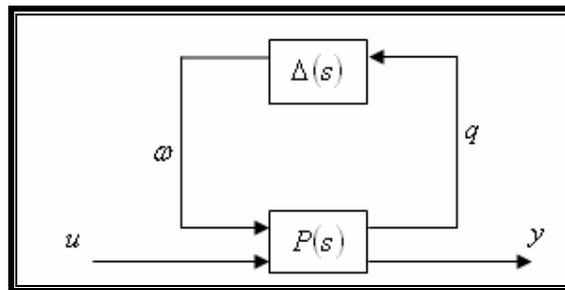


Figura. 2.24. Análisis de estabilidad robusta

**Desempeño Robusto.** En control robusto, se acostumbra formular las especificaciones de diseño como objetivos de rechazo a perturbaciones abstractas. El desempeño de un sistema de control es luego medido en términos de la ganancia RMS de lazo cerrado. La presencia de incertidumbre típicamente deteriora el desempeño. Para un sistema LTI con incertidumbre fraccionaria-lineal, el desempeño robusto  $\gamma_{\text{rob}}$  es definido como el peor caso de la ganancia RMS de  $u$  a  $y$  en la incertidumbre  $\Delta(s)$ . Este desempeño robusto es generalmente peor (más grande) que el desempeño nominal, la ganancia RMS de  $u$  a  $y$  para  $\Delta(s) \equiv 0$ .

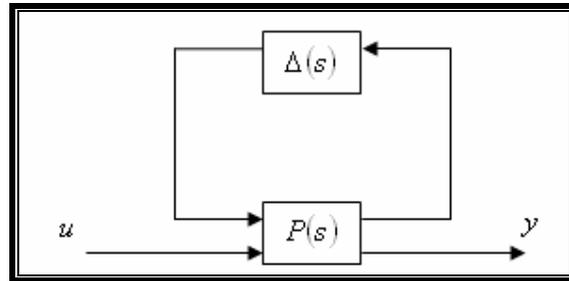


Figura. 2.25. Problema de desempeño robusto

#### 2.6.4.4 CRITERIO DE POPOV

El criterio de Popov da una condición suficiente para la estabilidad robusta de la interconexión de la Figura. 2.26, donde  $G(s)$  es un sistema LTI dado y  $\phi = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_n)$  es una incertidumbre BIBO-estable que satisface  $\phi(0) = 0$ . El operador  $\phi$  puede ser no lineal y/o variante en el tiempo el cual hace al criterio de Popov más general que la prueba de estabilidad  $\mu$ . Para incertidumbres puramente lineales invariantes en el tiempo la prueba  $\mu$  es generalmente menos conservativa.

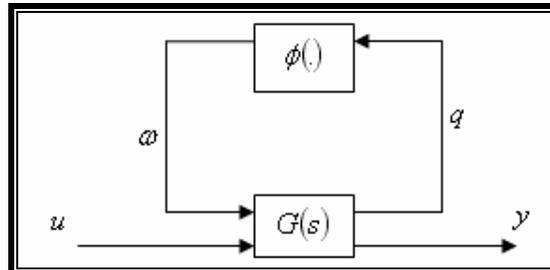


Figura. 2.26. Criterio de Popov

Una representación del espacio de estados de esta interconexión es

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\omega \\ q = Cx + D\omega \\ \omega = \phi(q) \end{cases}$$

o equivalentemente en la forma bloque particionado

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \sum_j B_j \omega_j \\ q_j = C_j x + D_j \omega \\ \omega_j = \phi_j(q_j) \end{cases}$$

**Ejemplo:** El uso de varias pruebas de robustez es ilustrado en el siguiente problema. El sistema físico está esquematizado en la Figura. 2.27.

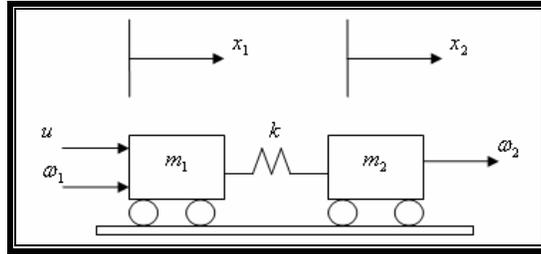


Figura. 2.27. Sistema físico a ser analizado

La meta es diseñar una salida realimentada,  $u = K(s)x_2$  que adecuadamente rechace las perturbaciones  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y garantice estabilidad para valores del parámetro de rigidez  $k$  dentro del rango  $[0.5, 2.0]$ . Para  $m_1 = m_2 = 1$ , una descripción del espacio de estados de este sistema es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & 0 & 0 \\ k & -k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \omega_1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_2$$

Una solución de este problema propuesto es un controlador de cuarto orden  $u = C_K (sI - A_K)^{-1} B_K x_2$  donde

$$A_K = \begin{bmatrix} 0 & -0.7195 & 1 & 0 \\ 0 & -2.9732 & 0 & 1 \\ -2.5133 & 4.8548 & -1.7287 & -0.9616 \\ 1.0063 & -5.4097 & -0.0081 & 0.0304 \end{bmatrix} \quad B_K = \begin{bmatrix} 0.720 \\ 2.973 \\ -3.37 \\ 4.419 \end{bmatrix}$$

$$C_K = [-1.506 \quad 0.494 \quad -1.738 \quad -0.932]$$

Lo que concierne aquí es como evaluar, para este controlador en particular, el margen de estabilidad con respecto al parámetro real incierto  $k$ ; como se puede ver en la descripción del espacio de estados, la planta depende en forma afín de  $k$ , se puede definir al sistema físico incierto como un sistema afín  $G$  dependiente de parámetros con `psys`:

```
A0 = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0; 0 0 0 0];
B0 = [0; 0; 1; 0];      C0=[0 1 0 0];      D0=0;
S0 = ltisys(A0, B0, C0, D0)      % sistema para k=0

A1 = [0 0 0 0; 0 0 0 0; -1 1 0 0; 1 -1 0 0]
B1 = zeros(4,1);  C1=zeros(1,4);      D1=0;
S1 = ltisys(A1, B1, C1, D1, 0);      % componente k

pv = pvec('box', [0.5 2])           % rango de valores de k
G = psys(pv, [s0 s1])
```

Luego de haber sido ingresada la información del controlador como una matriz `SYSTEM K`, se cierra el lazo con `slft`:

```
C1=slft(G,K)
```

El resultado `C1` es una descripción dependiente de parámetros del sistema de lazo cerrado.

Para estimar el margen de estabilidad robusta con respecto a  $k$ , se puede aplicar a `C1` varias pruebas descritas previamente:

**Estabilidad cuadrática:** para determinar la porción del intervalo `[0.5 2]` donde la estabilidad cuadrática se mantiene, se debe tipear:

```
marg = quadstab(C1, [1 0 0])

marg =
    4.1919e-01
```

El valor `marg = 0.419` significa el 41% del intervalo `[0.5 2]` (con respecto al centro 1.25), es decir es cuadráticamente estable en el intervalo `[0.943, 1.557]`. Dado que la

estabilidad cuadrática asume arbitrariamente variaciones de tiempo rápidas del parámetro  $k$ , se puede esperar que esta respuesta sea conservativa cuando  $k$  es invariante en el tiempo.

**Funciones de Lyapunov dependientes de parámetros:** cuando  $k$  no varía en el tiempo un estimado menos conservativo es dado por `pdlstab`. Para probar estabilidad para  $k \in [0.5, 2]$ , se debe tipear:

```
t = pdlstab(C1)
t =
    -2.1721e-01
```

Dado que  $t < 0$ , el lazo cerrado es robustamente estable para el rango de valores de  $k$ .

Se asume ahora que  $k$  varía lentamente con una tasa de variación limitada por 0.1. Para probar si el lazo cerrado permanece estable dentro de esas variaciones lentas, se redefine el vector de parámetros y se actualiza la descripción del sistema de lazo cerrado por

```
pv1 = pvec('box', [0.5 2], [-0.1 0.1])
G1 = psys(pv1, [s0, s1])
C11 = slft(G1, k)
```

Luego se llama a la función `pdlstab`

```
t = pdlstab(C11)
t =
    -2.0089e-02
```

Como se puede apreciar  $t$  es nuevamente negativo, se puede concluir que este nivel de variaciones de tiempo no destruye la estabilidad robusta.

**Análisis  $\mu$ :** para desarrollar el análisis  $\mu$ , primero se convierte el modelo afín dependiente de parámetros  $C1$  a un modelo de incertidumbre fraccionario-lineal.

```
[P0, deltak]=aff2lft(C1)
uinfo(dltak)
```

block	dims	type	real/cplx	full/scal	bounds
1	1x1	LTI	r	s	norm <= 0.75

Aquí  $P_0$  es el sistema en lazo cerrado para un valor nominal  $k_0 = 1.25$  de  $k$  y la incertidumbre de  $k$  es representada como un bloque escalar real `deltak`. Note que  $k$  debe ser asumido invariante en el tiempo en el sistema  $\mu$ .

Para conseguir el margen relativo de parámetros se debe escribir:

```
[pmarg, peakf] = mustab[P0, deltak]
pmarg =
    1.0670e+00
peakf =
    6.3959e-01
```

El valor  $pmarg = 1.067$  significa estabilidad siempre y cuando la desviación  $|\delta k|$  de  $k_0 = 1.25$  no exceda  $0.75 \times 1.067 \approx 0.80$ . Esto es, mientras  $k$  permanezca en el intervalo  $[0.45, 2.05]$ . Este cálculo es importante ya que el lazo cerrado llega a ser inestable para  $\delta k = -0.81$ , esto es, para  $k = k_0 - 0.81 = 0.44$ .

**Criterio de Popov:** finalmente, se puede aplicar el criterio de Popov al modelo fraccionario-lineal retornado por la función `aff2lft`.

```
[t, P, D, N]=popov[P0, deltak]
t =
    -1.3767e-2
```

Esta prueba también es exitosa ya que  $t < 0$ .

## 2.6.5 SÍNTESIS DE REALIMENTACIÓN DE ESTADOS

En muchos problemas de control, las condiciones de diseño son una mezcla de desempeños y objetivos de robustez expresados ambos en dominios de la frecuencia y del tiempo.

Varios de estos objetivos son raramente abarcados por un criterio de simple síntesis.

Mientras el seguimiento y robustez son capturados mejor por un criterio  $H_\infty$ , el ruido es más naturalmente expresado en términos LQG, y los comportamientos transitorios son más fácilmente expresados en términos de la norma  $\ell_1$  o amortiguación de lazo cerrado.

La estructura LMI es particularmente muy conveniente para síntesis de realimentación de estados multi-objetivos. Como una ilustración, se indica que el LMI Control Toolbox ofrece herramientas para el diseño de realimentación de estados con una combinación de los siguientes objetivos:

- El desempeño  $H_\infty$ , para seguimiento, rechazo a perturbaciones, o aspectos de robustez.
- El desempeño  $H_2$ , para aspectos LQG.
- Las especificaciones de la ubicación de polos, para asegurar la rápida y buena respuesta transitoria, ganancia de realimentación razonable, etc)

Estas herramientas se aplican a problemas multi-modelo, cuando los objetivos planteados están yendo a ser alcanzados robustamente sobre un conjunto politópico de algunos modelos de plantas.

### 2.6.5.1 SÍNTESIS DE REALIMENTACIÓN DE ESTADOS MULTI-OBJETIVO

Se debe considerar básicamente dos tipos de problemas:

**Problemas de análisis.** Dado un controlador, se determina si la señal controlada (incluyendo seguimiento de errores, señales de control, etc) satisface las propiedades deseadas para todos los ruidos admisibles, perturbaciones y modelos inciertos.

**Problemas de síntesis.** Se diseña un controlador tal que las señales controladas satisfagan las propiedades deseadas para todos los ruidos admisibles, perturbaciones y modelos inciertos.

La función `msfsyn` desarrolla la síntesis de realimentación de estados multi-modelo  $H_2$  /  $H_\infty$  con restricciones de ubicación de polos. Por simplicidad, se describe el problema

indicado como el caso de un simple modelo LTI. La estructura de control es representada por la Figura. 2.28. La planta  $P(s)$  es un sistema LTI dado y se asume una medición completa de su vector de estados  $x$ .

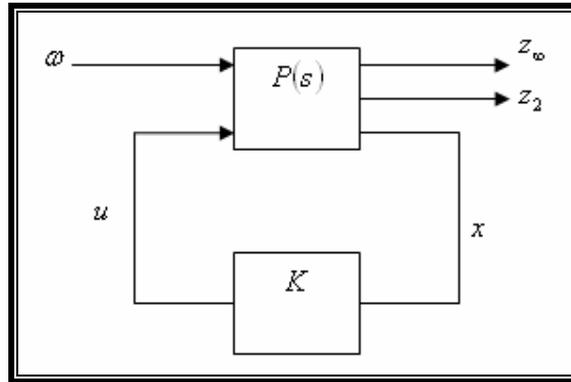


Figura. 2.28. Control de realimentación de estados

La función de transferencia de lazo cerrado de  $w$  a  $z_\infty$  y  $z_2$ , esta denotada por  $T_\infty(s)$  y  $T_2(s)$  respectivamente, La meta planteada es diseñar una ley de realimentación de estados  $u = Kx$  que:

- Mantenga la ganancia RMS (norma  $H_\infty$ ) de  $T_\infty$  bajo algún valor prescrito  $\gamma_0 > 0$ .
- Mantenga la norma  $H_2$  de  $T_2$  (costo LQG) bajo algún valor prescrito  $\nu_0 > 0$ .
- Minimice un criterio renovado  $H_2 / H_\infty$  de la forma

$$\alpha \|T_\infty\|_\infty^2 + \beta \|T_2\|_2^2 .$$

- Ubique los polos de lazo cerrado en una región  $D$  prescrita en el semiplano izquierdo.

Esta formulación abstracta abarca muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, considerar un problema regular con perturbación  $d$ , medición de ruido blanco  $n$ , además se denota con  $e$  la regulación de error.

$$\omega = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}, \quad z_\infty = e, \quad z_2 = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

El criterio mezclado  $H_2 / H_\infty$  toma en cuenta los aspectos de rechazo a perturbaciones (ganancia RMS de  $d$  a  $e$ ) y los aspectos LGQ (norma  $H_2$  de  $n$  a  $z_2$ ). Además, los polos del lazo cerrado pueden ser forzados a algún sector del semiplano estable para obtener una buena respuesta transitoria.

### 2.6.5.2 UBICACIÓN DE POLOS EN REGIONES LMI

El concepto de región LMI es útil para formular los objetivos de la ubicación de polos en términos de LMI. Las regiones LMI son subconjuntos convexos  $D$  del plano complejo caracterizado por

$$D = \{z \in \mathbb{C} : L + Mz + M^T \bar{z} < 0\}$$

donde  $M$  y  $L = L^T$  son matrices reales. La función

$$f_D(z) = L + Mz + M^T \bar{z}$$

es llamada función característica de la región  $D$ . La clase de regiones LMI es bastante general ya que su fin es el conjunto de regiones simétricas convexas con respecto al eje real. Prácticamente, las regiones LMI incluyen regiones relevantes tales como sectores, discos, cónicas, franjas, etc, así como también cualquier intersección de estas.

Otra fortaleza de las regiones LMI es la disponibilidad del teorema de Lyapunov para tales regiones. Específicamente, si  $\{\lambda_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq m}$  y  $\{\mu_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq m}$  muestran las entradas de las matrices  $L$  y  $M$ , una matriz  $A$  tiene todos sus valores propios en  $D$  si y solo si existe una matriz  $P$  definida positiva tal que

$$[\lambda_{ij}P + \mu_{ij}AP + \mu_{ji}PA^T]_{1 \leq i, j \leq m} < 0$$

con la notación

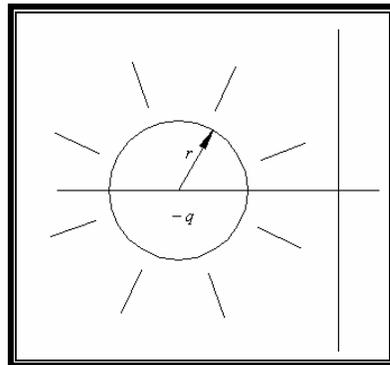
$$[S_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1} & \cdots & S_{mm} \end{pmatrix}$$

Se debe notar que esta condición es una LMI en  $P$  y que el teorema clásico de Lyapunov corresponde al caso especial

$$f_D(z) = z + \bar{z}$$

A continuación se indica algunos ejemplos de regiones LMI útiles con su respectiva función característica  $f_D$ :

- Disco con centro en  $(-q, 0)$  y radio  $r$ :



**Figura. 2.29. Región LMI disco**

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -r & \bar{z} + q \\ z + q & -r \end{pmatrix}$$

- Sección cónica centrada en el origen y con un ángulo interno  $\theta$ :

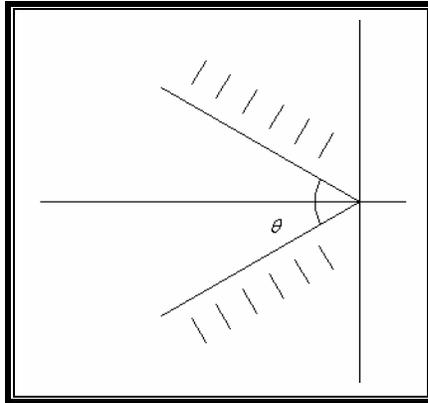


Figura. 2.30. Región LMI sección cónica

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2}(z + \bar{z}) & -\cos \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) \\ \cos \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) & \sin \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) \end{pmatrix}$$

La tasa de amortiguación de polos en este sector es de al menos  $\cos \frac{\theta}{2}$

- Franja vertical  $h_1 < x < h_2$ :

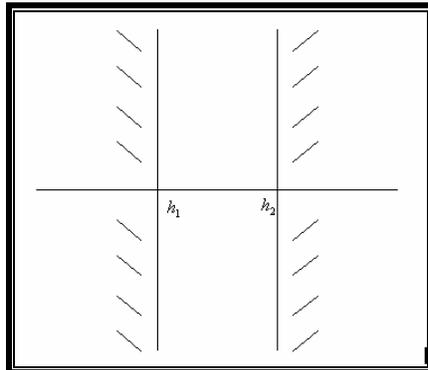


Figura. 2.31. Región LMI franja vertical

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} 2h_1 - (z + \bar{z}) & 0 \\ 0 & (z + \bar{z}) - 2h_2 \end{pmatrix}$$

### 2.6.5.3 FORMULACIÓN LMI

Dado una realización del espacio de estados

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1\omega + B_2u \\ z_\infty = C_1 + D_{11}\omega + D_{12}u \\ z_2 = C_2x + D_{22}u \end{cases}$$

de la planta  $P$ , el sistema de lazo cerrado es dado en la forma del espacio de estados por

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_2K)x + B_1w \\ z_\infty = (C_1 + D_{12}K)x + D_{11}w \\ z_2 = (C_2 + D_{22}K)x \end{cases}$$

Tomados separadamente, los tres objetivos de diseño son:

**Desempeño  $H_2$ .** Asumir, por ejemplo, que la perturbación  $\tilde{d}$  puede ser aproximadamente modelada como un impulso con dirección de entrada randómica, esto es:

$$\tilde{d}(t) = \eta\delta(t)$$

y

$$E(\eta\eta^*) = I$$

Donde  $E$  es el valor esperado. Se puede escoger para minimizar la energía esperada del error  $e$  debido a la perturbación  $\tilde{d}$ :

$$E\{\|e\|_2^2\} = E\left\{\int_0^\infty \|e\|^2 dt\right\} = \|W_e S_o W_d\|_2^2$$

En general, un controlador que minimiza solamente el criterio antedicho puede conducir a una señal de control muy grande  $u$  que podría causar saturación a los actuadores como también muchos otros problemas indeseables. De ahí que para un diseño de control realista, es necesario incluir la señal de control  $u$  en la función costo.

Este tipo de problema fue el paradigma dominante en los años 1960 y 1970 y es usualmente referido como el control lineal cuadrático Gaussiano o simplemente como LQG.

**Desempeño  $H_\infty$ .** La norma  $H_2$  puede ser una medida de desempeño significativa y aunque la teoría LQG puede dar arreglos eficientes de diseño bajo cierta perturbación y planta supuesta, la norma  $H_2$  sufre una gran deficiencia. Esta deficiencia es debido al hecho de que el intercambio entre la reducción del error de perturbación y la reducción del error de ruido del sensor no son la única restricción en el diseño de realimentación. El problema es que estos desempeños son frecuentemente ensombrecidos por una segunda limitación en el lazo de altas ganancias, esta es el requerimiento para tolerancia de incertidumbres. Aunque un controlador puede ser diseñado usando modelos de dimensiones finitas lineales invariantes con el tiempo, el diseño debe ser implementado y operado con una planta física real. Una solución a este problema es la norma  $H_\infty$ .

Para un sistema escalar, un problema de minimización de la norma  $H_\infty$  puede también ser visto como minimización de la magnitud máxima de la respuesta del sistema estable del espacio de estados con respecto al peor caso de entradas sinusoidales.

**Ubicación de polos.** En este proyecto se pretende establecer como objetivo de diseño la ubicación de polos, el cual tiene la siguiente formulación LMI:

Los polos de lazo cerrado se encuentran en la región LMI

$$D = \{z \in \mathbb{C} : L + Mz + M^T \bar{z} < 0\}$$

donde

$$L = L^T = [\lambda_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} \quad M = [\mu_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$$

sí y sólo sí existe una matriz simétrica  $X_{pol}$  que satisfaga

$$\begin{aligned} & [\lambda_{ij} X_{pol} + \mu_{ij} (A + B_2 K) X_{pol} + \mu_{ji} X_{pol} (A + B_2 K)^T]_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \\ & X_{pol} > 0 \end{aligned}$$

### 2.6.5.4 LA FUNCIÓN `msfsyn`

La función `msfsyn` implementa el enfoque LMI a la síntesis de un sistema multi-modelo  $H_2/H_\infty$ . Los objetivos de ubicación de polos son expresados en términos de regiones LMI.

$$D = \{z \in \mathbb{C} : L + Mz + M\bar{z} < 0\}$$

caracterizado por dos matrices  $L$  y  $M$ . Las regiones LMI son especificadas interactivamente con la función `lmiereg`.

Indicando la función de transferencia de lazo cerrado desde  $\omega$  a  $z_\infty$  y  $z_2$  por  $T_\infty$  y  $T_2$ , `msfsyn` calcula una solución sub-óptima para el problema:

Minimiza  $\alpha \|T_\infty\|_\infty^2 + \beta \|T_2\|_2^2$  sujeto a

- $\|T_\infty\|_\infty < \gamma_0$
- $\|T_2\|_2 < \nu_0$
- Los polos de lazo cerrado en  $D$

La sintaxis es

```
[gopt, h2opt, K, Pcl] = msfsyn(P, r, obj, region)
```

donde

- $P$  es la planta matriz `SYSTEM` (ver `psys` para más detalles. Las dimensiones de la matriz  $D_{22}$  son especificadas por  $r$ ).
- $\text{obj} = [\gamma_0; \nu_0; \alpha; \beta]$  es un vector de cuatro argumentos que especifica el criterio  $H_2/H_\infty$ .
- $\text{region}$  especifica la región LMI a ser usada para la ubicación de polos, y por defecto utiliza el semiplano izquierdo. El uso de `lmiereg` genera la matriz  $\text{region}$ , o lo configura a  $[L, M]$  si las matrices características  $L$  y  $M$  están fácilmente disponibles.

En la salida,  $g_{opt}$  y  $h_{2opt}$  son los desempeños  $H_\infty$  y  $H_2$  garantizados,  $\kappa$  es la ganancia de realimentación de estados, y  $P_{cl}$  es el sistema de lazo cerrado en formato matriz `SYSTEM` o en formato del modelo politópico.

Diseños que mezclan y no mezclan los criterios de desempeño pueden ser desarrollados con `msfsyn`. Las diferentes posibilidades son resumidas en la Tabla. 2.1.

obj	Diseño correspondiente
[0 0 0 0]	Ubicación de polos solamente
[0 0 1 0]	Diseño optimo $H_\infty$
[0 0 0 1]	Diseño optimo $H_2$
[g 0 0 1]	Minimizar $\ T_2\ _2$ sujeto a $\ T_\infty\ _\infty < g$
[0 h 1 0]	Minimizar $\ T_\infty\ _\infty$ sujeto a $\ T_2\ _2 < h$
[0 0 a b]	Minimizar $a\ T_\infty\ _\infty^2 + b\ T_2\ _2^2$

Tabla. 2.1. Diseños desarrollados con `msfsyn`

### 2.6.5.5 EJEMPLO DE DISEÑO

Este ejemplo esta adoptado del demo `sateldem`. El sistema consiste en un satélite con dos cuerpos rígidos (el cuerpo principal y el módulo de instrumentación), unidos por un enlace flexible (el “boom”). El boom es modelado como un resorte con torque constante  $k$  y amortiguación viscosa  $f$ , y un número finito de elementos de análisis con los siguientes rangos de incertidumbre para  $k$  y  $f$ .

$$0.09 \leq k \leq 0.4$$

$$0.0038 \leq f \leq 0.04$$

Las ecuaciones dinámicas son

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T + \omega \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + f(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

Donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos de yaw para el cuerpo principal y el módulo del sensor,  $T$  es el control de torque, y  $\omega$  es una perturbación de torque en el cuerpo principal.

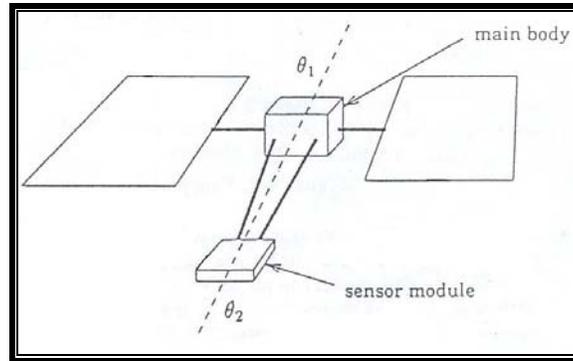


Figura. 2.32. Satélite

El propósito de control es minimizar la influencia de la perturbación  $\omega$  en la posición angular  $\theta_2$ . Esta meta es expresada a través de los siguientes objetivos:

- Obtener un buen intercambio entre la ganancia RMS de  $\omega$  a  $\theta_2$  y la norma  $H_2$  de

la función de transferencia de  $\omega$  a  $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ T \end{pmatrix}$  (Costo de control LQG).

- Ubicar los polos de lazo cerrado en la región indicada en la Figura 2.33 para garantizar la mínima tasa de deterioro y amortiguación de lazo cerrado.
- Alcanzar estos objetivos para todos los valores posibles de la variación de los parámetros  $k$  y  $f$ . Desde que estos parámetros ingresan a la matriz de estados de la planta en una manera afín, se puede modelar la incertidumbre de parámetros por un sistema politópico de cuatro vértices correspondientes a las cuatro combinaciones de los valores extremos de los parámetros.

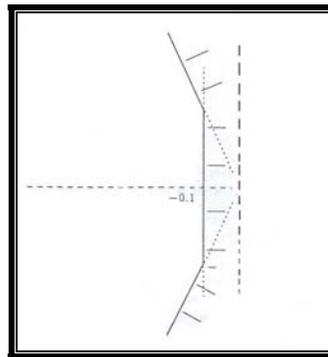


Figura. 2.33. Región de ubicación de polos

Para resolver este problema de diseño con el LMI Control Toolbox, primero se especifica la planta como un sistema dependiente de parámetros con dependencia afín sobre  $k$  y  $f$ . Una descripción del espacio de estados es fácilmente derivada de las ecuaciones dinámicas, y se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & -f & f \\ k & -k & f & -f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\omega + T)$$

$$z_\infty = \theta_2, \quad z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} T$$

Este modelo dependiente de parámetros es ingresado por los comandos

```
a0 = [zeros(2) eye(2); zeros(2,4)]
ak = [zeros(2,4); [-1 1; 1 -1] zeros(2)]
af = [zeros(2,4); zeros(2) [-1 1; 1 -1]]
e0 = [diag([1 1 J1 J2])]

b = [0 0; 0 0; 1 1; 0 0] % b = [b1 b2]
c = [0 1 0 0; 1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 0 0] % c = [c1;c2]
d = [0 0; 0 0; 0 0; 0 1]

% rango de los valores de parámetros
pv = pvec('box', [0.09 0.4; 0.0038 0.04])

% planta parámetro-dependiente
P = psys (pv , [ ltisys(a0, b, c, d, e0)
                 ltisys(ak, 0*b, 0*c, 0*d, 0)
                 ltisys(af, 0*b, 0*c, 0*d, 0)])
```

Luego, se especifica la región LMI para la ubicación de polos como la intersección del semiplano  $x < -0.1$  y del sector centrado al origen con ángulo interno de  $3\pi/4$ . Esto se lo realiza interactivamente con la función `lmireg`:

```
region = lmireg
```

Para evaluar la interacción entre el desempeño  $H_\infty$  y  $H_2$ , primero se calcula el desempeño cuadrático óptimo  $H_\infty$  sujeto a la restricción de la ubicación de polos por

```
gopt = msfsyn(P, [1 1], [0 0 1 0], region)
```

```
Guaranteed Hinf performance: 6.85e-004
```

```
gopt =
```

```
6.8456e-004
```

Este rendimiento  $g_{opt} \approx 0$ . Para un desempeño  $H_\infty$  prescrito  $g > 0$ , el mejor desempeño  $H_2$   $h_{2opt}$  es calculado por

```
[gopt, h2opt, K, Pcl] = msfsyn (P, [1 1], [g 0 0 1], region)
```

```
Guaranteed Hinf performance: 1.00e-001
```

```
Guaranteed H2 performance: 2.84e+000
```

```
gopt =
```

```
0.1000
```

```
h2opt =
```

```
2.8422
```

```
K =
```

```
-34.1632   -0.9891  -10.1847  -152.2510
```

En la Figura. 2.34 se indica la respuesta al impulso de  $\omega$  a  $\theta_2$  para el diseño nominal, es decir, para los valores nominales de  $k$  y  $f$ .

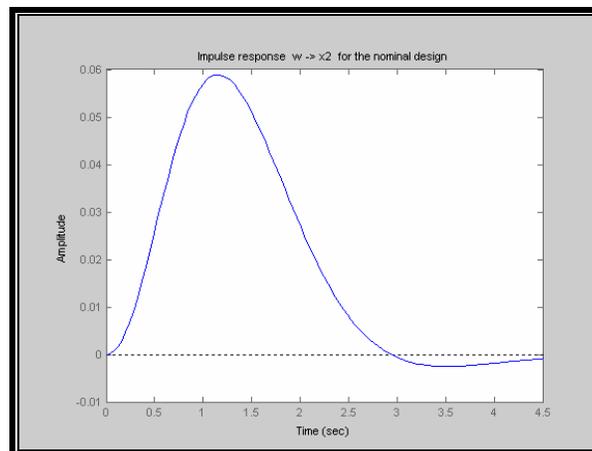


Figura. 2.34. Respuesta al impulso para el diseño nominal de  $k$  y  $f$

Mientras en la Figura. 2.35 se indican las respuestas al impulso de  $\omega$  a  $\theta_2$  para las cuatro combinaciones de los valores extremos de  $k$  y  $f$ .

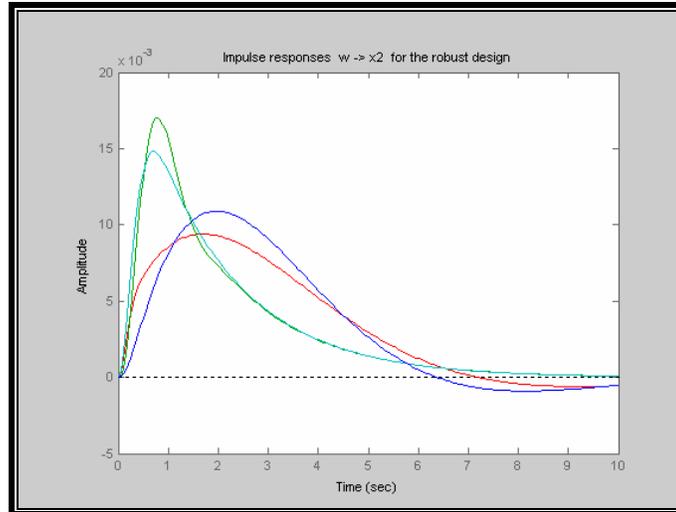


Figura. 2.35. Respuestas al impulso para los valores extremos de  $k$  y  $f$

Finalmente, los polos de lazo cerrado para estas cuatro combinaciones de los extremos están indicados en la Figura. 2.36, se puede apreciar que estos polos están robustamente ubicados en la región LMI prescrita.

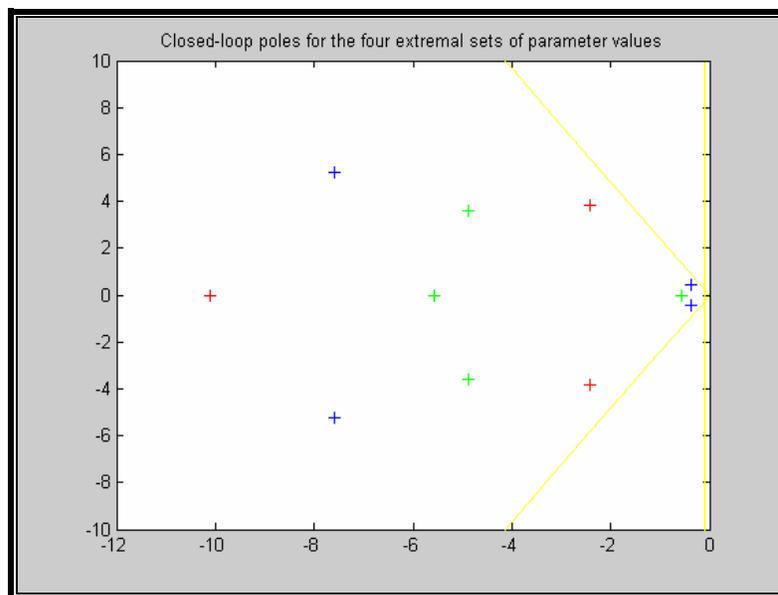


Figura. 2.36. Polos correspondientes al lazo cerrado

## **CAPÍTULO 3**

### **DISEÑO DEL CONTROLADOR DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN MEDIANTE LMIs**

Las facilidades que ofrece el programa de cálculo MATLAB se ven aplicados en el desarrollo de la síntesis del controlador.

MATLAB ofrece una herramienta importante que es la base para el desarrollo del diseño del controlador para el sistema de suspensión mediante técnicas LMI, y éste es el LMI Control Toolbox. El análisis que se plantea a continuación para realizar el control de un sistema mediante LMIs está guiado en base a las funciones y criterios que se utilizan en el LMI Control Toolbox.

Una vez fundamentados de manera clara y ejemplificada los principios y funciones que se deben considerar para realizar el diseño de un controlador por medio del LMI Control Toolbox, se indica el procedimiento seguido para desarrollar el controlador del sistema de suspensión de un autobús mediante LMIs.

El diseño del controlador se basa en la localización de polos en las regiones LMI, para el sistema de suspensión de un autobús se lo ha desarrollado teniendo como meta alcanzar los siguientes objetivos:

- Controlar las oscilaciones y los golpes bruscos en el autobús, considerando que el sistema de suspensión retorne rápidamente a su posición original y sin grandes oscilaciones.
- Analizar el desempeño del controlador LMI obtenido.

- Introducir la incertidumbre en el modelo matemático y analizar el desempeño del sistema realimentado mediante simulaciones en MATLAB basadas en la técnica de LMIs.

Es importante tener claro varios conceptos que se presentan a lo largo del desarrollo de este diseño, los cuales se irán definiendo en el momento oportuno para facilitar la aclaración respectiva de cada ítem en análisis.

### 3.1 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN A SER ANALIZADO

La primera consideración a tener presente es si el sistema en análisis es lineal o no lineal, para ello se hará un recordatorio de estos términos para identificar claramente a cual de estos corresponde el sistema de suspensión en vías de análisis.

**Sistemas lineales**, un sistema se denomina lineal si se aplica el principio de superposición. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de entradas diferentes es la suma de las dos respuestas individuales. Por lo tanto, para el sistema lineal la respuesta a varias entradas se calcula tratando una entrada a la vez y sumando los resultados.

**Sistemas no lineales**, un sistema es no lineal si no se aplica el principio de superposición, por lo tanto para un sistema no lineal la respuesta a dos entradas no puede calcularse tratando cada una a la vez y sumando los resultados.

Específicamente para la síntesis del controlador del sistema de suspensión se requiere que las funciones que deben cumplir con el teorema de superposición,  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , son las dos ecuaciones diferenciales correspondientes a  $M_1$  y  $M_2$  del sistema de suspensión obtenidas en el capítulo 2, (2.8) y (2.9) respectivamente.

Las dos ecuaciones diferenciales cumplen con el teorema de superposición, por consiguiente se puede aseverar que el sistema de suspensión en análisis es lineal.

Una vez constatado que el sistema de suspensión es lineal se procede a identificar si este es invariante o variante con el tiempo, para lo cual se citan estos conceptos para concebir una premisa fidedigna.

**Sistemas lineales invariantes y variantes con el tiempo**, una ecuación diferencial es lineal si sus coeficientes son constantes o son funciones sólo de la variable independiente. Los sistemas dinámicos formados por componentes de parámetros concentrados lineales invariantes con el tiempo se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo (de coeficientes constantes). Tales sistemas se denominan sistemas lineales invariantes con el tiempo o lineales de coeficientes constantes. Los sistemas que se presentan mediante ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones del tiempo se denominan sistemas lineales variantes en el tiempo.

Las ecuaciones diferenciales (2.8) y (2.9) son

$$M_1 \Delta \ddot{z}_1 = -K_1 \Delta z_1 + K_1 \Delta z_2 - B_1 \Delta \dot{z}_1 + B_1 \Delta \dot{z}_2 + u - M_1 \ddot{w}$$

$$M_2 \Delta \ddot{z}_2 = K_1 \Delta z_1 - K_1 \Delta z_2 + B_1 \Delta \dot{z}_1 - B_1 \Delta \dot{z}_2 - u - K_2 \Delta z_2 + K_2 w - B_2 \Delta \dot{z}_2 - B_2 \dot{w} - M_2 \ddot{w}$$

Se puede observar que ambas ecuaciones diferenciales poseen coeficientes constantes, es decir, tanto la masa suspendida como para la no suspendida, los coeficientes de ambos resortes y los coeficientes de amortiguación de ambos amortiguadores no son funciones que dependen del tiempo, estas consideraciones permiten obtener un diseño para un desempeño nominal y por consiguiente para este análisis se puede afirmar que el sistema de suspensión del autobús es un sistema lineal invariante con el tiempo.

Ahora, realizando un análisis exhaustivo de los coeficientes de las ecuaciones alcanzadas, se puede obtener una afirmación contraria a la planteada en líneas anteriores, es decir, que el sistema en análisis sea catalogado lineal variante con el tiempo, y para reiterar ello se puede citar un caso simple que afirme que alguno de los coeficientes de las ecuaciones obtenidas sea una función dependiente del tiempo, por citar un ejemplo, el consumo de combustible va a afectar a la masa suspendida ya que con el transcurso del tiempo se ira consumiendo combustible y por ende irá disminuyendo la masa suspendida,

$M_2$ , en conclusión el sistema en análisis en la realidad es un sistema lineal variante con el tiempo. Esta situación no influye en el diseño debido a que las funciones que ofrece el LMI Toolbox son aplicables tanto para sistemas lineales invariantes con el tiempo como también para los sistemas variantes.

Ambas observaciones planteadas son tomadas a consideración en el diseño a desarrollarse con la finalidad de realizar una comparación de desempeño.

### 3.2 SELECCIÓN DEL MODELO DE LA INCERTIDUMBRE

El LMI Control Toolbox utiliza dos tipos de representaciones del modelo de la incertidumbre, estos son:

**El modelo de la incertidumbre del espacio de estados** se caracteriza por ser apropiado para sistemas descritos por las ecuaciones dinámicas con coeficientes inciertos y/o variantes con el tiempo; y **la representación fraccionaria-lineal de la incertidumbre** de los sistemas inciertos que están descritos como una interconexión de sistemas LTI conocidos con componentes inciertos denominados bloques de incertidumbre.

Una vez detalladas las opciones por las cuales se puede optar se procede a definir que modelo es el más adecuado para el análisis. El sistema de suspensión en estudio está descrito por sus respectivas ecuaciones dinámicas con sus coeficientes inciertos variantes con el tiempo por lo que se puede confirmar que el modelo en cuestión es el modelo de la incertidumbre del espacio de estados.

La representación del espacio de estados del sistema de suspensión de un autobús se la desarrolló en el capítulo dos, y se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_1 & -B_1 & K_1 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1 & B_1 & -(K_1+K_2) & -(B_1+B_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & -B_2 & -M_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix}$$

A su vez el modelo de la incertidumbre de estados se divide en dos grupos de modelos: modelos politópico y modelos afines dependientes de parámetros, ambos modelos han sido descritos y analizados en la sección 2.6.3.4.

Cuando un sistema es lineal, como en este caso lo es el sistema de suspensión, éste naturalmente da lugar a modelos dependientes de parámetros. Se puede apreciar en la representación del espacio de estados obtenida la presencia de parámetros inciertos o variantes con el tiempo, como por ejemplo la masa suspendida  $M_2$ . Además, la formulación descriptor de la representación del espacio de estados,  $E \neq I$ , es una ayuda útil para especificar sistemas dependientes de parámetros.

En resumen, para diseñar el controlador del sistema de suspensión de un autobús mediante LMIs se utiliza el modelo de la incertidumbre del espacio de estados afín dependiente de parámetros.

A continuación se presenta la descomposición de cada una de las matrices del espacio de estados  $A, B, C, D$  y  $E$  en función de todos los parámetros de los cuales dependen las matrices de estados con el propósito de obtener la descripción afín dependiente de parámetros que corresponde al sistema.

Para la matriz  $A$

$$\begin{aligned}
A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_1 & -B_1 & K_1 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1 & B_1 & -(K_1 + K_2) & -(B_1 + B_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&+ K_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para la matriz  $B$

$$\begin{aligned}
B(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & -B_2 & -M_2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + K_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&+ K_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para la matriz  $C$

$$\begin{aligned}
C(p) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] + M_1 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + M_2 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + K_1 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + K_2 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + \\
&+ B_1 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + B_2 [0 \ 0 \ 0 \ 0]
\end{aligned}$$

Para la matriz  $D$

$$\begin{aligned}
D(p) = [0 \ 0 \ 0 \ 0] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0] + M_1 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + M_2 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + K_1 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + K_2 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + \\
&+ B_1 [0 \ 0 \ 0 \ 0] + B_2 [0 \ 0 \ 0 \ 0]
\end{aligned}$$

Las matrices de estado  $C$  y  $D$  necesitan ser modificadas por los requerimientos de la síntesis de la realimentación de estados mediante LMIs, dichos cambios se citan en las especificaciones del diseño del controlador del sistema.

Finalmente, para la matriz  $E$

$$E(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + K_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ B_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada matriz de estados se la ha descompuesto en función de seis parámetros, estos son  $M_1, M_2, K_1, K_2, B_1, B_2$ ; donde el vector de parámetros del cual el sistema tiene una dependencia afín, es:

$$p = (M_1, M_2, K_1, K_2, B_1, B_2)$$

Análogamente se puede expresar de la siguiente manera:

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$$

Indicado el vector de parámetros se procede a presentar la estructura del modelo afín dependiente de parámetros a utilizarse para el sistema de suspensión:

$$A(p) = A_0 + M_1 A_1 + M_2 A_2 + K_1 A_3 + K_2 A_4 + B_1 A_5 + B_2 A_6$$

$$B(p) = B_0 + M_1 B_1 + M_2 B_2 + K_1 B_3 + K_2 B_4 + B_1 B_5 + B_2 B_6$$

$$C(p) = C_0 + M_1 C_1 + M_2 C_2 + K_1 C_3 + K_2 C_4 + B_1 C_5 + B_2 C_6$$

$$D(p) = D_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2 + K_1 D_3 + K_2 D_4 + B_1 D_5 + B_2 D_6$$

$$E(p) = E_0 + M_1 E_1 + M_2 E_2 + K_1 E_3 + K_2 E_4 + B_1 E_5 + B_2 E_6$$

### 3.3 CONSIDERACIONES DE LA SÍNTESIS DE REALIMENTACIÓN DEL ESPACIO DE ESTADOS

El control realimentado se refiere a una operación que en presencia de perturbaciones tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y lo continúa haciendo con base en esta diferencia. Aquí sólo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, dado que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema. Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de salida de un sistema, si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, en tanto que una perturbación externa se produce fuera del sistema y es una entrada, en el sistema de suspensión una perturbación externa es el relieve del camino.

La realimentación reduce el efecto de las perturbaciones y modera los errores de modelado o los valores de parámetros en el desempeño de un sistema de control; sin embargo, ante la presencia de perturbaciones y ruido en el sensor, si se pretende diseñar sistemas de control de alto desempeño, se debe incluir las siguientes condiciones en los pasos del diseño:

- Desempeño del seguimiento (reducir el error de seguimiento).
- Rechazo a perturbaciones (reducir la salida para una entrada de perturbación).
- Baja sensibilidad ante los errores en el modelo. Al diseñar sistemas de control, el diseño se basa en el modelo de una planta específica. Tal modelo no es de ninguna manera precisa, sino solo una aproximación real de la planta. La diferencia entre la dinámica de la planta real y la dinámica de un modelo se denomina error de modelado. Los errores de modelado ocurren por alguna de las razones siguientes:
  - Características no lineales de la planta no consideradas.
  - Características de alta frecuencia de la planta no consideradas (por ejemplo, los sistemas mecánicos tienen un fenómeno dinámico de alta frecuencia, incluyendo las resonancias, el efecto de una masa de resorte no considerada, etc.).
  - La precisión de los parámetros no es suficientemente buena.
  - Las características de la planta cambian con el tiempo.
- Alto margen de estabilidad (establecer una estabilidad robusta).
- Baja sensibilidad al ruido en el sensor (reducir la sensibilidad).

En resumen, un objetivo de diseño será minimizar los efectos de las perturbaciones externas, que corresponde al relieve del camino  $w$ , sobre la desviación  $\Delta z_1$  de la masa suspendida  $M_1$ .

Para el uso de la función `msfsyn` es necesario definir algunos términos que corresponden a las funciones de transferencia para minimización  $H_2$  y  $H_\infty$ .

- Minimización de la norma  $H_\infty$  de la función de transferencia  $w$  a  $\Delta z_1$ .
- Minimización de la norma  $H_2$  de la función de transferencia  $w$  a  $\begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ u \end{pmatrix}$ .

Por lo tanto

$z_\infty = \Delta z_1$  y con variables de estado queda  $z_\infty = x_1$

$$z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ u \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En base a este análisis se pueden obtener las nuevas matrices  $C$  y  $D$ , simplemente se agregan las matrices obtenidas  $C_1$  y  $D_1$  como tres filas adicionales tanto a la matriz nominal  $C$  como a la  $D$  respectivamente, quedando:

$$C(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ K_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ K_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.4 FORMULACIÓN DE LAS MATRICES SYSTEM

Por conveniencia para el programa MATLAB, la realización del espacio de estados se almacena como una matriz SYSTEM, la cual se caracteriza por:

$$\text{SYS} = \begin{array}{c|ccc} & A+j(E-I) & B & n_a \\ & C & D & 0 \\ & 0 & 0 & -\text{Inf} \end{array}$$

donde  $n_a$  es el número de estados y  $-\text{Inf}$  es utilizado para diferenciar las matrices SYSTEM de la matrices regulares.

El sistema de suspensión en estudio debe ser formulado en primera instancia por siete matrices SYSTEM, una para cada parámetro respectivamente. Las siete matrices a ser representadas como SYSTEM se forman a partir de las descritas en la descomposición de cada matriz de estado en función de sus parámetros.

$$S0 = \begin{array}{c|ccc} & A0+j(E0-I) & B0 & n_a \\ & C0 & D0 & 0 \\ & 0 & 0 & -\text{Inf} \end{array}$$

Para  $M_1 (p_1)$ :

$$s1 = \begin{array}{c|ccc} & A1+j(E1-I) & B1 & na \\ & C1 & D1 & 0 \\ & 0 & 0 & -Inf \end{array}$$

Para  $M_2 (p_2)$ :

$$s2 = \begin{array}{c|ccc} & A2+j(E2-I) & B2 & na \\ & C2 & D2 & 0 \\ & 0 & 0 & -Inf \end{array}$$

Para  $K_1 (p_3)$ :

$$s3 = \begin{array}{c|ccc} & A3+j(E3-I) & B3 & na \\ & C3 & D3 & 0 \\ & 0 & 0 & -Inf \end{array}$$

Para  $K_2 (p_4)$ :

$$s4 = \begin{array}{c|ccc} & A4+j(E4-I) & B4 & na \\ & C4 & D4 & 0 \\ & 0 & 0 & -Inf \end{array}$$

Para  $B_1 (p_5)$ :

$$s4 = \begin{array}{c|ccc} & A5+j(E5-I) & B5 & na \\ & C5 & D5 & 0 \\ & 0 & 0 & -Inf \end{array}$$

Para  $B_2 (p_6)$ :

$$s4 = \begin{array}{c|ccc} & A6+j(E6-I) & B6 & na \\ & C6 & D6 & 0 \\ & 0 & 0 & -Inf \end{array}$$

La función `ltisys` permite crear matrices `SYSTEM`, la sintaxis que se utiliza en el programa MATLAB es la siguiente:

```
s0=ltisys(A0, B0, C0, D0, E0);
s1=ltisys(A1, B1, 0*C0, 0*D0, E1);
s2=ltisys(A2, B2, 0*C0, 0*D0, E2);
s3=ltisys(A3, B3, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
s4=ltisys(A4, B4, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
s5=ltisys(A5, B5, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
s6=ltisys(A6, B6, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
```

El acondicionamiento de las matrices de estado en términos de matrices `SYSTEM` permite escribir más compactamente la dependencia afín en  $p$ .

$$S(p) = \begin{array}{c|cc|c} & A(p) + j(E(p) - I) & B(p) & na \\ & C(p) & D(p) & 0 \\ & 0 & 0 & -Inf \end{array}$$

### 3.5 CUANTIFICACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE PARÁMETROS

La incertidumbre de parámetros es cuantificada por el rango de los valores de los parámetros y por las posibles tasas de variación de los parámetros, esto se lo realiza con la función `pvec`; además para obtener las características de los vectores de parámetros se utiliza la función `pvinfos`.

El rango de la incertidumbre de parámetros se lo ha descrito como una caja en el espacio de parámetros, esto corresponde al caso donde cada parámetro incierto o variante con el tiempo  $p_i$  varía entre valores extremos  $\underline{p}_i$  y  $\overline{p}_i$  determinados mediante probabilidades estadísticas, aplicando las siguientes relaciones:

$$\underline{p}_i = p_i \times (1 - 3 * \delta) \quad \text{y} \quad \overline{p}_i = p_i \times (1 + 3 * \delta)$$

Donde  $\delta$  es la desviación estándar, para este diseño se ha considerado pertinente una desviación estándar del 9%, es importante señalar que con estos datos estadísticos se esta cubriendo un campo de probabilidad del 99% de que cualquier parámetro incierto perteneciente a la planta en estudio varié dentro de los valores extremos asignados para el diseño.

El vector  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$  es el vector de todos los parámetros inciertos,  $p_i \in [p_i \times (1 - 3\delta), p_i \times (1 + 3\delta)]$  delimita un hiper-rectángulo del espacio de parámetros  $\mathfrak{R}^6$ , denominado caja de parámetros. Los parámetros del modelo matemático del sistema de suspensión varían en

$$\begin{aligned} p_1 &= M_1 = 2500 \in [1825, 3175] \\ p_2 &= M_2 = 320 \in [233.6, 406.4] \\ p_3 &= K_1 = 80000 \in [58400, 101600] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_4 &= K_2 = 50000 \in [36500, 63500] \\
 p_5 &= B_1 = 350 \in [255.5, 444.5] \\
 p_6 &= B_2 = 15020 \in [10964.6, 19075.4]
 \end{aligned}$$

Con la finalidad de evitar que la ganancia del controlador de realimentación de estados sea extremadamente elevada se procede a normalizar los parámetros, es decir que los parámetros estén bordeando a la unidad.

La normalización de los parámetros de los cuales depende el sistema se la realiza con respecto al parámetro  $B_2$ . Los parámetros normalizados se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= M_1 / B_2 = 0.1664 \\
 p_2 &= M_2 / B_2 = 0.0213 \\
 p_3 &= K_1 / B_2 = 5.326 \\
 p_4 &= K_2 / B_2 = 3.3288 \\
 p_5 &= B_1 / B_2 = 0.02330 \\
 p_6 &= B_2 / B_2 = 1
 \end{aligned}$$

El rango de incertidumbre es especificado por el comando

```
range = [m1*(1-3*d) m1*(1+3*d); m2*(1-3*d) m2*(1+3*d); k1*(1-3*d)
k1*(1+3*d); k2*(1-3*d) k2*(1+3*d); b1*(1-3*d) b1*(1+3*d); b2*(1-3*d)
b2*(1+3*d)];
```

A partir de este rango de incertidumbre se realiza un análisis para determinar la desviación estándar máxima admisible para mantener la estabilidad del sistema.

Finalmente, se determina el vector de parámetros con la siguiente sintaxis:

```
pv = pvec('box', range)
pvinfo(pv)
```

```
Vector of 6 parameters ranging in a box
```

Todos los parámetros son asumidos como invariantes con el tiempo. También se puede modelar la incertidumbre de parámetros por un sistema politópico con 64 vértices correspondientes a las 64 combinaciones de los valores extremos de los parámetros.

### 3.6 ESPECIFICACIÓN DEL MODELO AFÍN DEPENDIENTE DE PARÁMETROS

Los sistemas afines dependientes de parámetros son especificados con `psys`, esta función recibe los siguientes argumentos:

- Una descripción del vector de parámetros  $p$  en términos de los límites de los valores de los parámetros y las tasas de variación, `pv`.
- La lista de los coeficientes de las matrices `SYSTEM`, `[s0, s1, s2, s3, s4, s5, s6]`.

La sintaxis de la función `psys` es la siguiente:

```
sistema = psys(pv, [s0, s1, s2, s3, s4, s5, s6]);
psinfo(sistema)
```

```
Warning: the E matrix of this affine system depends on p.
Affine parameter-dependent model with 6 parameters (7 systems)
      Each system has 4 state(s), 4 input(s), and 4 output(s)
```

`sistema` es el modelo afín dependiente de parámetros del sistema de suspensión en estudio.

### 3.7 ESTABILIDAD CUADRÁTICA

La estabilidad cuadrática de un sistema dependiente de parámetros se prueba con la función `quadstab`. El correspondiente problema de factibilidad LMI es resuelto con la función `feasp` y se lo realiza en el entorno del `lmiedit`.

```
[tmin, P]=quadstab(sistema)
```

```
Solver for LMI feasibility problems  $L(x) < R(x)$ 
```

```
This solver minimizes  $t$  subject to  $L(x) < R(x) + t*I$ 
The best value of  $t$  should be negative for feasibility
```

```
Iteration   :   Best value of  $t$  so far
```

```

1          0.047031
2          2.291445e-003
3          2.190570e-003
4          2.092470e-003
5          2.092470e-003
6          9.827234e-004
7          9.827234e-004
8          9.827234e-004
9          9.698799e-004
10         8.765845e-004
11         8.765845e-004
12         8.257875e-004
13         8.257875e-004
14         7.957360e-004
15         7.826169e-004
16         7.826169e-004
17         7.678976e-004
18         7.678976e-004
19         7.521097e-004
20         7.521097e-004
21         7.408433e-004
22         7.408433e-004
***          new lower bound: 5.860206e-004

Result: best value of t: 7.408433e-004
       f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+008

Marginal infeasibility: these LMI constraints may be
                       feasible but are not strictly feasible

This system is not quadratically stable

```

Como se puede observar el sistema no cumple la condición de estabilidad cuadrática  $t_{\min} < 0$ ; por lo tanto, el modelo afín dependiente de parámetros del sistema de suspensión no es cuadráticamente estable. Las restricciones LMI de este sistema pueden ser factibles pero no estrictamente factibles;  $P$  es la matriz de Lyapunov que provee estabilidad.

La función `quadstab` realiza un análisis general de estabilidad cuadrática, mientras que la función `pdlstab` realiza el análisis de estabilidad en la trayectoria de parámetros especificada.

```
[tmin]=pdlstab(sistema)
```

```
Solver for LMI feasibility problems  $L(x) < R(x)$ 
This solver minimizes  $t$  subject to  $L(x) < R(x) + t \cdot I$ 
The best value of  $t$  should be negative for feasibility
```

```
Iteration      :      Best value of t so far
```

1	0.066087
2	0.010084
3	0.010084
4	0.010084
5	0.010084
6	0.010022
7	9.665512e-003
8	9.035735e-003
9	9.035735e-003
10	9.035735e-003
11	8.539923e-003
12	8.539923e-003
13	8.539923e-003
14	8.209952e-003
15	6.886166e-003
16	3.681279e-003
17	3.681279e-003
18	2.636474e-003
19	1.584917e-003
20	5.367721e-004
21	5.367721e-004
22	2.833164e-004
23	2.833164e-004
24	9.756281e-005
25	9.756281e-005
26	4.653651e-005
27	2.567313e-005
28	2.567313e-005
29	2.567313e-005
30	8.467790e-006
31	8.467790e-006
32	5.113118e-006
33	5.113118e-006
34	2.591646e-006
35	2.591646e-006
36	2.591646e-006
37	1.304345e-006
38	1.304345e-006
39	-4.795284e-007

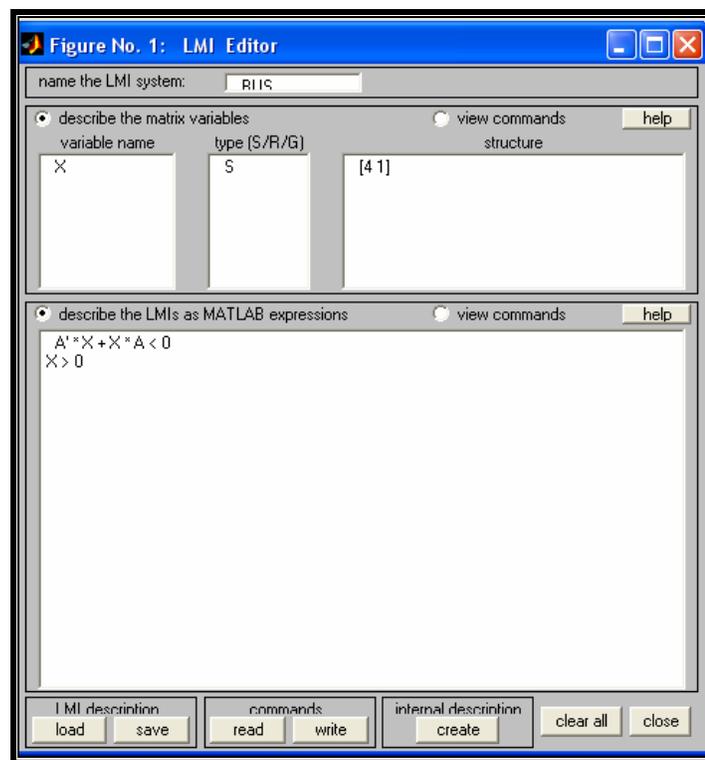
```
Result: best value of t: -4.795284e-007
        f-radius saturation: 0.217% of R = 1.00e+007
```

```
This system is stable for the specified parameter trajectories
```

El sistema en análisis es estable para el rango especificado de la variación de los parámetros dependientes.

El análisis de factibilidad se lo realiza mediante el `lmiedit`, para este análisis se considera la matriz  $A$  en condiciones nominales lo que significa que los parámetros para el cálculo corresponden a sus valores nominales, y se indica a continuación:

`lmiedit`



**Figura. 3.1. LMI Editor**

En el casillero `variable name` se designa el nombre de la matriz de Lyapunov que se desea obtener, en el casillero `type` se escoge que tipo de matriz se requiere para este caso `s` significa simétrica y en `structure` se indica la dimensión de la solución de la matriz de estados.

Una vez ingresados todos los parámetros que requiere el `lmiedit`, se selecciona `view commands` para generar los códigos que permiten determinar la factibilidad del problema LMI planteado.

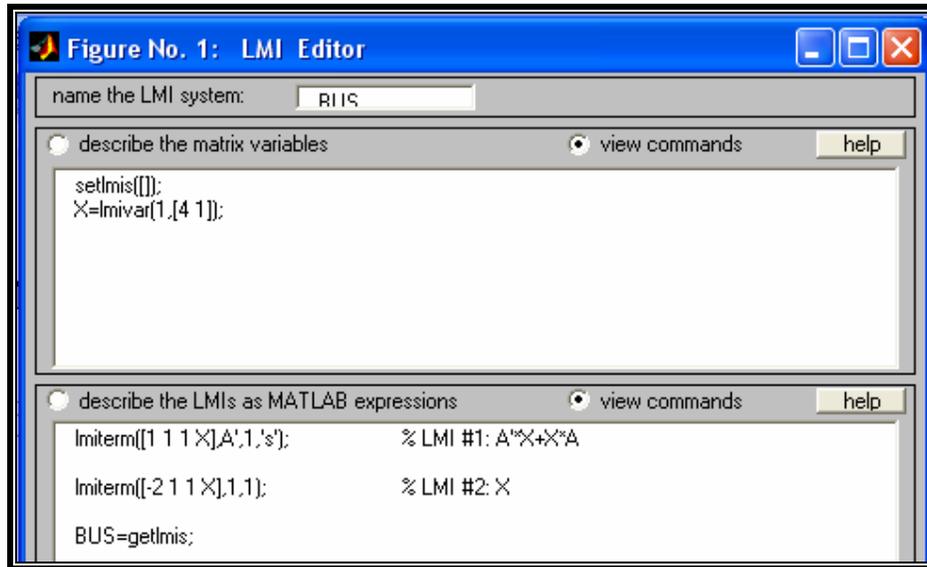


Figura. 3.2 Códigos de programa generados en el `lmiedit`

Con los códigos generados en el `lmiedit` y la función `feasp`, el programa para determinar la factibilidad queda:

```
setlmis([]);
X=lmivar(1,[4 1]);
lmiterm([1 1 1 X],A',1,'s');           % LMI #1: A'*X+X*A
lmiterm([-2 1 1 X],1,1);               % LMI #2: X
BUS=getlmis;
[tmin,xfeas]=feasp(BUS);               % Si TMIN <= 0, XFEAS es un vector
                                        % factible del conjunto de
                                        % restricciones LMI.

P=dec2mat(BUS,xfeas,1);
VP=eig(P)
```

```
Solver for LMI feasibility problems  $L(x) < R(x)$ 
This solver minimizes  $t$  subject to  $L(x) < R(x) + t*I$ 
The best value of  $t$  should be negative for feasibility
```

```
Iteration   :   Best value of t so far
```

```
1           0.118937
2           0.015825
3          -0.262831
```

```
Result: best value of t:   -0.262831
```

f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+009

VP =

5.6570  
40.6596  
183.9321  
222.6548

Los valores propios obtenidos son positivos por lo tanto el problema LMI planteado es factible.

En el capítulo 2 se realizó un análisis previo de la estabilidad de modelo matemático obtenido con consideraciones nominales; además se probó la controlabilidad del sistema, característica clave que permite la ubicación de los polos. En este apartado también se realizó un análisis de estabilidad pero con consideraciones de robustez del sistema

### 3.8 MAXIMIZACIÓN DE LA REGIÓN DE ESTABILIDAD CUADRÁTICA

Se puede determinar la porción más grande de la caja de parámetros donde la estabilidad cuadrática se mantiene.

```
[marg, P] = quadstab(sistema, [1 0 0])
```

`marg` es el factor de dilatación  $\theta$  más grande para el cual se cumple que el sistema es cuadráticamente estable siempre que

$$p_i(t) \in [\mu_i - \theta\delta_i, \mu_i + \theta\delta_i]$$

donde

$\theta$  es el factor de dilatación, y

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\underline{p}_i + \overline{p}_i) \text{ y } \delta_i = \frac{1}{2}(\overline{p}_i - \underline{p}_i)$$

El segundo argumento de la función `quadstab` es un vector que permite seleccionar entre la prueba de estabilidad y la maximización de la región de estabilidad por dilatación de la caja de parámetros alrededor de su centro.

El resultado de MATLAB a esta función es:

```
Not tractable when the E matrix depends on p
```

La maximización de la región de estabilidad solamente es aplicable a sistemas afines dependientes de parámetros que tengan la matriz  $E$  constante. Para el sistema de suspensión no es aplicable la maximización de la región de estabilidad ya que la matriz  $E$  depende de parámetros.

### 3.9 DESEMPEÑO CUADRÁTICO $H_\infty$

La función `quadperf` calcula el desempeño cuadrático  $H_\infty$  o la ganancia RMS cuadrática de un sistema afín o politópico dependiente de parámetros.

```
[perf,P] = quadperf(sistema,0,[0 0 0])
The LMI constraints were found INFEASIBLE
This system is not quadratically stable

perf =

Inf
```

Las restricciones LMI fueron encontradas infactibles debido a que el sistema no es cuadráticamente estable.

El desempeño nominal LTI para  $M_1 = 2500$ ,  $M_2 = 320$ ,  $K_1 = 80000$ ,  $K_2 = 500000$ ,  $B_1 = 350$ ,  $B_2 = 15020$  se determina con

```
nomsys = psinfo(sistema, 'eval', [2500 320 80000 500000 350 15020])
norminf(nomsys)
```

```
34.2124
```

### 3.10 SELECCIÓN DE LAS REGIONES LMI

Las regiones LMI son útiles para formular objetivos de ubicación de polos en términos LMI. Las regiones que se utilizan en el diseño del controlador del sistema de suspensión en estudio se las seleccionó en base a los siguientes criterios:

- Estabilidad robusta, la región que asegura estabilidad robusta es la del semiplano izquierdo.
- Amortiguación robusta de lazo cerrado, la región que satisface esta premisa es el sector cónico centrado al origen y con un ángulo interno menor a  $\pi$  radianes.

La función `lmireg` permite escoger las regiones de manera interactiva, como se indica a continuación:

```
Select a region among the following:
```

```
h) Half-plane
d) Disk
c) Conic sector
e) Ellipsoid
p) Parabola
s) Horizontal strip
m) Matrix description of the LMI region
q) Quit
```

```
choice: h
Orientation (x < x0 -> l , x > x0 -> r): 1
Specify x0: -0.1
```

```
choice: c
Absciss x0 of the tip of the sector: 0
Inner angle (angle < pi -> sectors contains x = -Inf): 3*pi/4
```

```
choice: q
```

Una representación gráfica de la región LMI seleccionada para la ubicación de polos se puede observar en la Figura. 3.3.

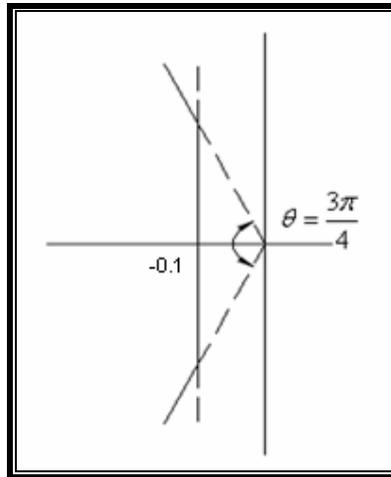


Figura. 3.3. Región LMI para ubicación de polos

### 3.11 FUNCIÓN `msfsyn`

El propósito de la función `msfsyn` es implementar el enfoque LMI a la síntesis de los sistemas multi-modelo  $H_2/H_\infty$ , con ubicación de polos

La sintaxis es

```
[gopt, h2opt, K, Pcl] = msfsyn(P, r, obj, region)
```

donde

- `P` es la planta matriz `SYSTEM`, para este caso la planta es `systema`. Las dimensiones de la matriz  $D_{22}$  son especificadas por `r`.
- `obj` =  $[\gamma_0; \nu_0; \alpha; \beta]$  es un vector de cuatro argumentos que especifica el criterio  $H_2/H_\infty$ , y para el requerimiento del sistema en estudio queda `obj` =  $[0; 0; 0; 0]$ , en la Tabla 2.1 se puede observar que esta configuración del vector `obj` es solamente aplicable para ubicación de polos.
- `region` especifica la región LMI ya seleccionada para la ubicación de polos. El uso de `lmireg` genera la matriz `region`, o configura a  $[L, M]$  que son las matrices características que definen las regiones LMI.

En la salida,  $g_{opt}$  y  $h_{2opt}$  son los desempeños  $H_{\infty}$  y  $H_2$  garantizados,  $\kappa$  es la ganancia de realimentación de estados, y  $P_{cl}$  es el sistema de lazo cerrado en formato matriz SYSTEM.

Finalmente,

```
[gopt, h2opt, K, Pcl] = msfsyn(sistema, [1 1], [0 0 0 0], region)
```

La ganancia  $\kappa$  del controlador de realimentación de estados es

$\kappa =$

```
-130.2693  -38.4450  541.4605  16.3845
```

### 3.12 ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DEL CONTROLADOR

La función `msfsyn` genera  $P_{cl}$  que es el sistema de control de lazo cerrado en el formato matriz SYSTEM.

En la Figura. 3.4 se indica el diagrama de bloques del sistema de control realimentado,

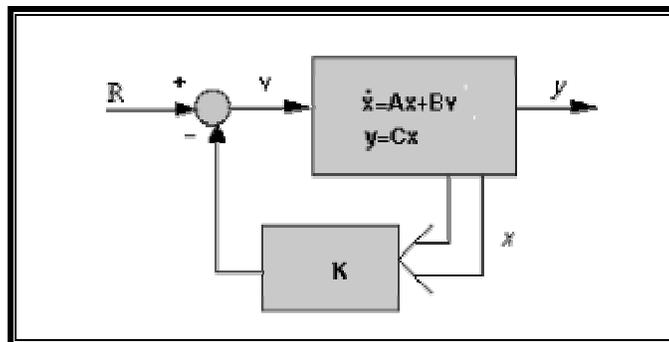


Figura. 3.4. Diagrama de bloques del controlador de realimentación del espacio de estados

donde  $\kappa$  es la ganancia generada por la función `msfsyn`.

Se posee las herramientas necesarias para analizar mediante gráficas la respuesta del sistema, es importante reiterar que ya no es necesario realizar ningún acondicionamiento a  $P_{cl}$  ya que esta matriz representa el sistema de control realimentado.

Con la siguiente sintaxis se puede obtener la respuesta al escalón del sistema de suspensión:

```
For j = 1: 64
Pvert = psinfo(Pcl,'sys',j);
subplot(ssub(Pvert, 1, 1), 'st',[0:0.05:10])
end
```

donde  $j$  puede ser un entero positivo entre 1 y 64,  $j$  permite seleccionar una de las 64 combinaciones generadas por los valores extremos de los parámetros. Cada combinación cumple con las características de robustez planteadas para el diseño.

En la Figura. 3.5 se indica la respuesta al escalón de  $\omega$  a  $\theta_2$  para el sistema realimentado con el controlador obtenido.

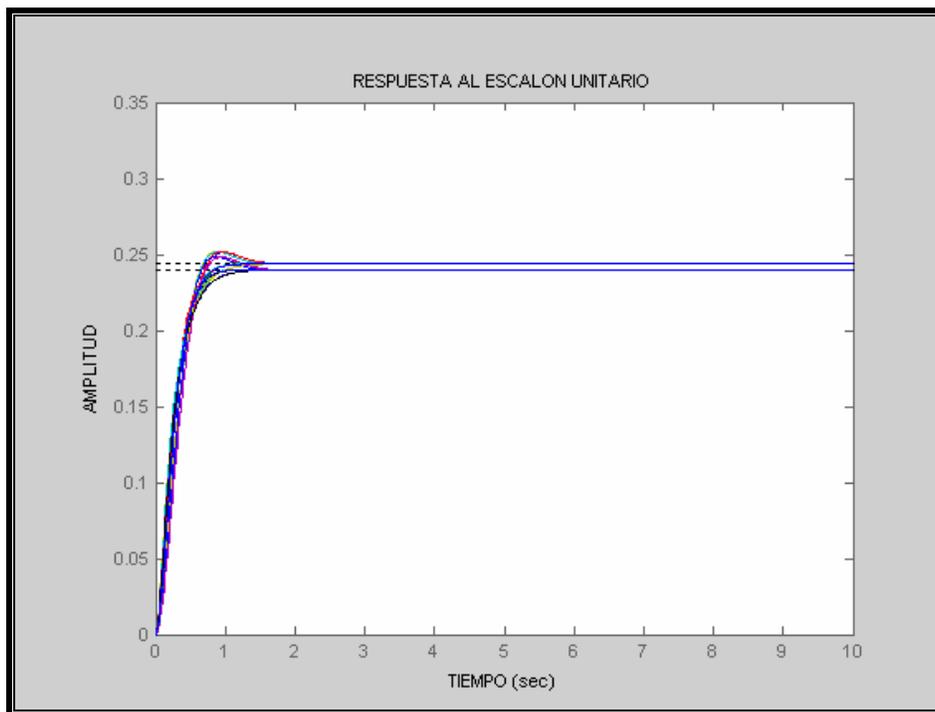


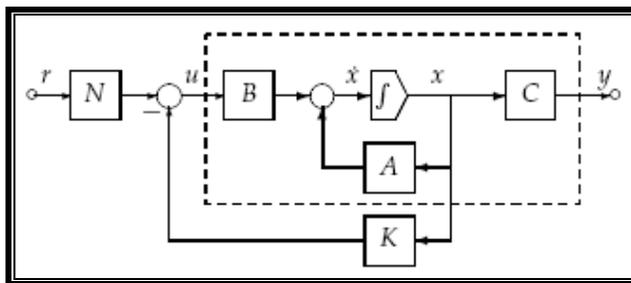
Figura. 3.5. Respuesta al escalón del controlador de realimentación de estados

En la Figura. 3.5 se puede observar que el sistema tiene un tiempo de establecimiento promedio de un segundo y un sobre-impulso incluso mayor al 3%. Los requisitos de diseño son elaborar un sistema con realimentación de modo que la salida tenga un overshoot menor del 3% y un tiempo de establecimiento menor a 3 segundos; además la respuesta no tiene un seguimiento de la señal de referencia. En conclusión el sistema de control no cumple con todos los requisitos de diseño.

Para el análisis anterior se consideró como señal de referencia a un escalón de magnitud la unidad; en el siguiente análisis se utiliza una señal de referencia más pequeña, de tal forma que represente un valor de desviación posible, además las condiciones iniciales se consideran nulas, pero para llevar a cabo estas condiciones y mejorar el seguimiento a la señal de referencia se necesita implementar un sistema de realimentación completo de estados, por lo que es necesario añadir la ganancia de precompensación  $N$  determinada a partir de los parámetros nominales, en el diagrama de bloques de la Figura. 3.6 se puede apreciar el esquema de control a diseñarse.

La planta o ecuación del espacio de estados en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + BNr(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$



**Figura. 3.6.** Esquema de control por realimentación de estados con ganancia de precompensación

La fórmula para calcular la ganancia de precompensación  $N$  es la siguiente:

$$N = \frac{-1}{C(A - BK)^{-1}B}$$

La matriz `Pcl` contiene toda la información necesaria para calcular la ganancia de precompensación  $N$ , esta información se la obtiene de la siguiente manera:

```
Pvert = psinfo(Pcl, 'sys', j);
```

Ahora en `Pvert` se tiene la información de la planta, es decir todas las matrices de estado del sistema realimentado.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Br(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Las matrices de estados que se encuentran en `Pvert` están en formato `SYSTEM`, por lo cual es necesario recuperar las matrices de estado en formato normal y esto se lo logra con la función `ltiss`.

```
[a,b,c,d,e]=ltiss(ssub(Pvert,1,1))
```

Considerar que la matriz `a` generada por la función `ltiss` es igual a

$$a = (A - BK)$$

ya que proviene del sistema realimentado.

Con las consideraciones realizadas, la fórmula de la ganancia de precompensación nominal  $N$  queda:

$$N = -1 ./ (c * ((a) ^ (-1)) * b)$$

donde  $N$  va a variar en el rango

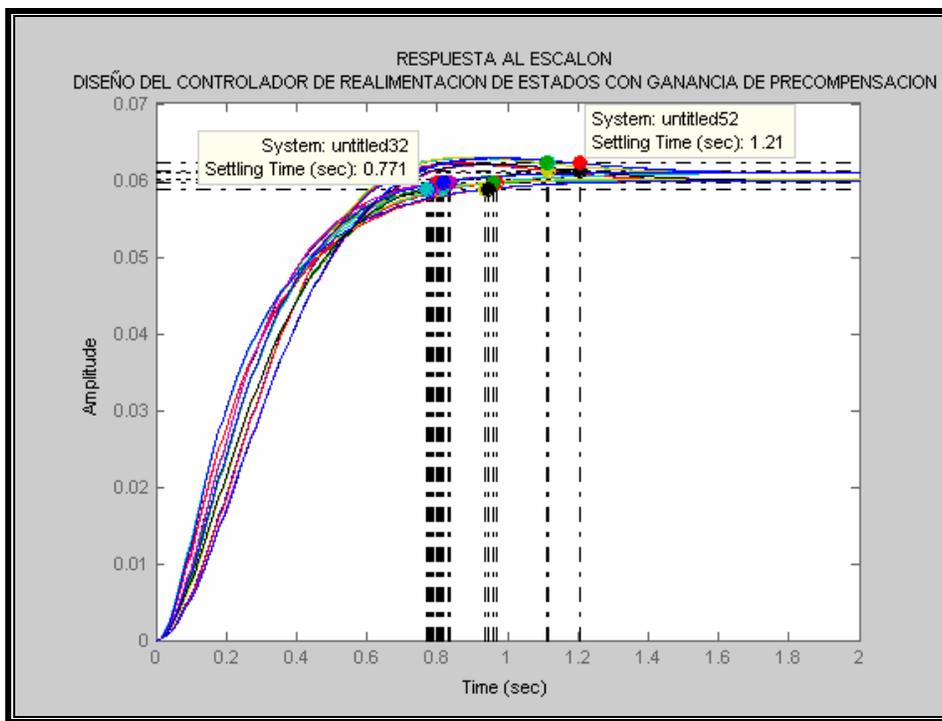
$$0.2460 \quad a \quad 0.25$$

Se asume una ganancia de precompensación promedio:  $N = 0.248$ .

El último paso para obtener el diseño del controlador con ganancia de precompensación es multiplicar  $N$  por la función de transferencia.

```
[num,den] = ss2tf(a,b,c,d,1);
fnt = tf(num,den);
step(0.06*N*fnt,T);
```

En la Figura. 3.7 se presenta la respuesta al escalón de 0.06 [m] de magnitud del controlador del sistema de suspensión incluyendo la ganancia de precompensación.



**Figura. 3.7. Respuesta al escalón del diseño con ganancia de precompensación**

El controlador obtenido cumple con las condiciones de diseño especificadas, se puede apreciar en la Figura. 3.7 que el controlador establece un tiempo de establecimiento mínimo de 0.771 segundos y un tiempo de establecimiento máximo de 1.21 segundos.

En relación al seguimiento de la señal de referencia, el error en estado estacionario se encuentra dentro de una banda del 2%, pero aun se puede mejorar el seguimiento y disminuir el sobre-impulso. En la Figura. 3.8 se puede apreciar el seguimiento alcanzado:

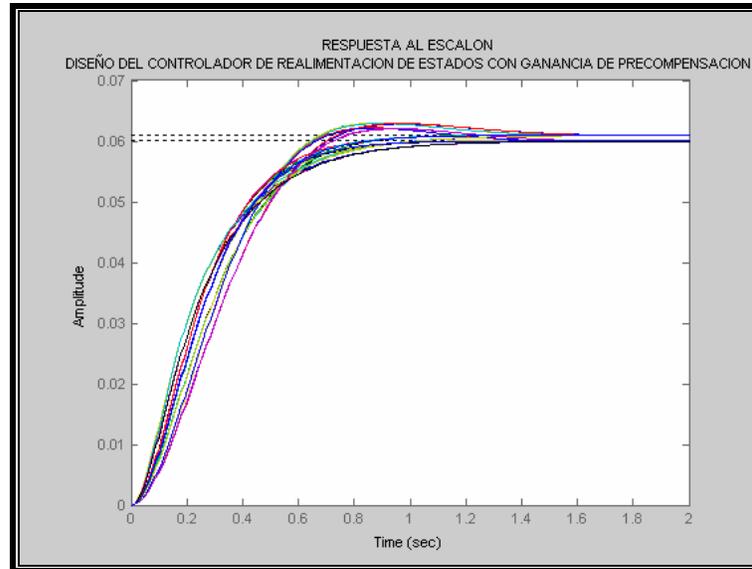


Figura. 3.8. Enfoque de la banda de error en estado estacionario

Finalmente, los polos de lazo cerrado para estas 64 combinaciones de los extremos están indicados en la Figura. 3.9, se puede apreciar que estos polos están robustamente ubicados en la región LMI prescrita.

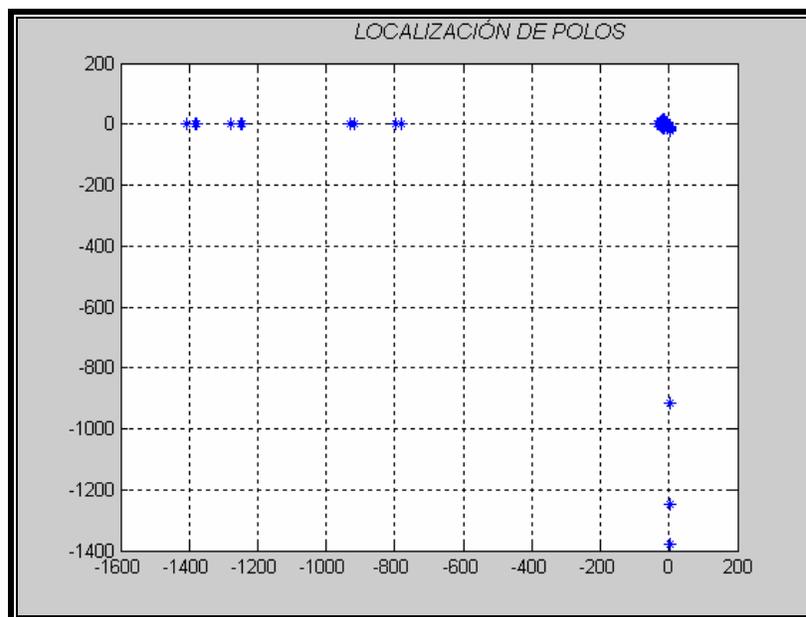


Figura. 3.9. Polos correspondientes al lazo cerrado

### 3.12.1 SEGUIMIENTO ROBUSTO

Con la finalidad de un mejor seguimiento de la señal de referencia se introduce un esquema robusto de seguimiento con propiedades de rechazo de perturbaciones de entrada constantes. El esquema se basa en aumentar la planta agregando un nuevo estado  $x_i$  que integra el error de seguimiento,

$$\dot{x}_i = r - y = r - Cx$$

como se puede ver en la Figura. 3.10

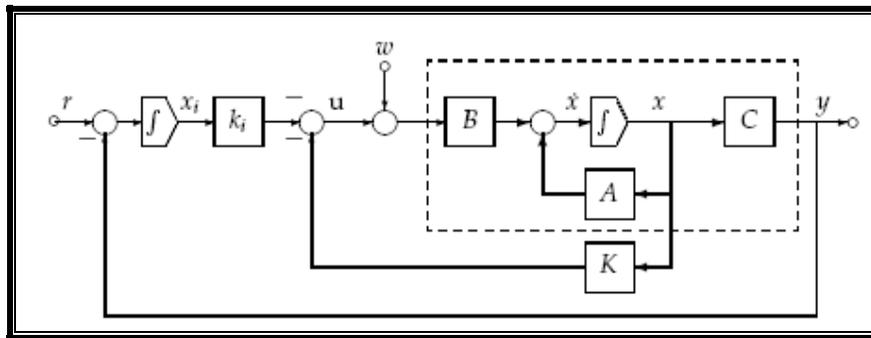


Figura. 3.10. Esquema de seguimiento robusto

El sistema aumentado de lazo abierto queda

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} (u + w) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

El vector  $\kappa$  que se obtiene de este análisis tiene cinco elementos, de los cuales los cuatro primeros son las ganancias de realimentación de cada estado, y el último es la ganancia del integrador.

Las matrices del espacio de estados del sistema de suspensión se acondicionan de la forma que se indica a continuación con la finalidad de obtener el sistema aumentado de lazo abierto para utilizarlo en el diseño del controlador con seguimiento robusto.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & -B_1 & K_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ K_1 & B_1 & -(K_1+K_2) & -(B_1+B_2) & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_i \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & -B_2 & -M_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix} \\
 y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_i \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix}$$

El diseño del controlador con seguimiento robusto se lo realiza siguiendo el mismo procedimiento utilizado en el diseño con ganancia de precompensación, considerar las modificaciones adicionales a realizarse en las matrices  $C$  y  $D$  que son requeridas por la función `msfsyn`, además se utiliza el mismo vector de parámetros `pvec`.

Las matrices  $C$  y  $D$  quedan de la siguiente forma:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La región LMI seleccionada es:

```

Select a region among the following:
h) Half-plane
d) Disk
c) Conic sector
e) Ellipsoid
p) Parabola
s) Horizontal strip
m) Matrix description of the LMI region
q) Quit

```

```

choice: h
Orientation (x < x0 -> l , x > x0 -> r): 1
Specify x0: -0.8

```

```

choice: c
Absciss x0 of the tip of the sector: 0
Inner angle (angle < pi -> sectors contains x = -Inf): 3.2*pi/4

```

Una vez que se tiene todos los argumentos de la función `msfsyn` se obtiene la respuesta del controlador de seguimientos robusto mediante LMIs, Figura. 3.11.

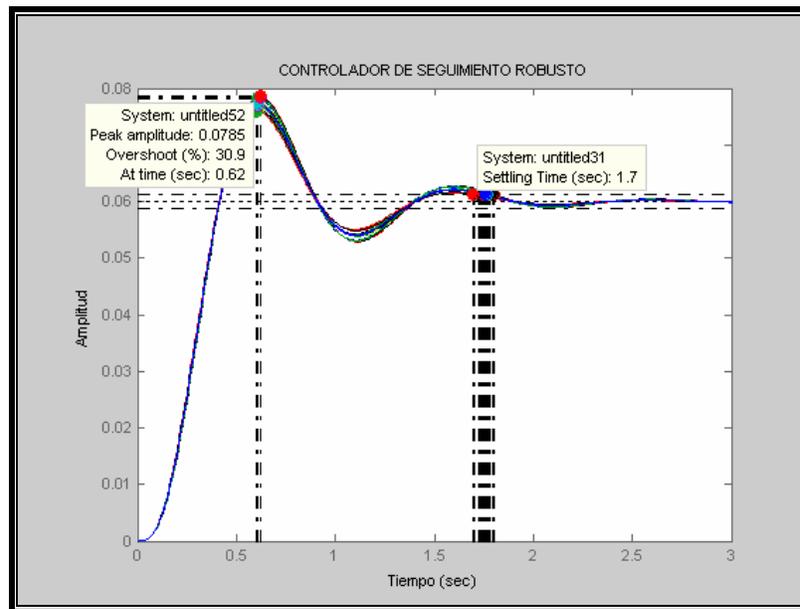


Figura. 3.11. Respuesta al escalón del controlador de seguimiento robusto mediante LMIs

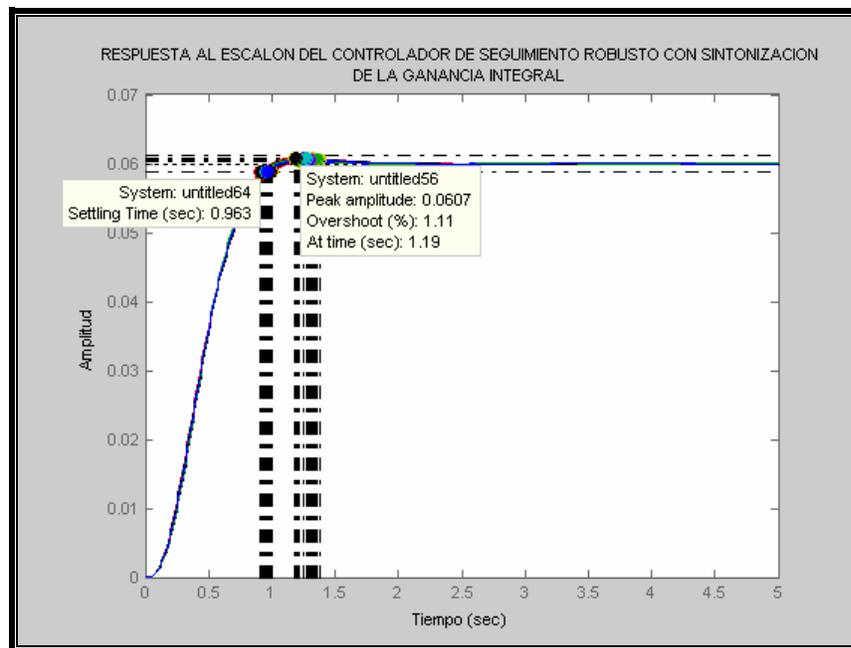
A pesar de que se logra un seguimiento robusto, la respuesta alcanzada no cumple con todas las especificaciones de diseño, el overshoot tiene un porcentaje elevado.

En relación a la respuesta obtenida se puede optar por sintonizar la ganancia integral con el propósito de disminuir el sobre-impulso, esto se puede realizar debido a que la ganancia integral es directamente proporcional al overshoot.

El código de MATLAB utilizado para la sintonización básicamente se diferencia del código utilizado en el diseño del controlador con seguimiento robusto por la siguiente sintaxis:

```
fnt1=tf([0.3*K(1.5)], [1 0])
```

En la Figura. 3.12 se presenta la respuesta del controlador de seguimiento robusto con sintonización de la ganancia integral, se puede observar que se cumple con la condiciones de diseño.

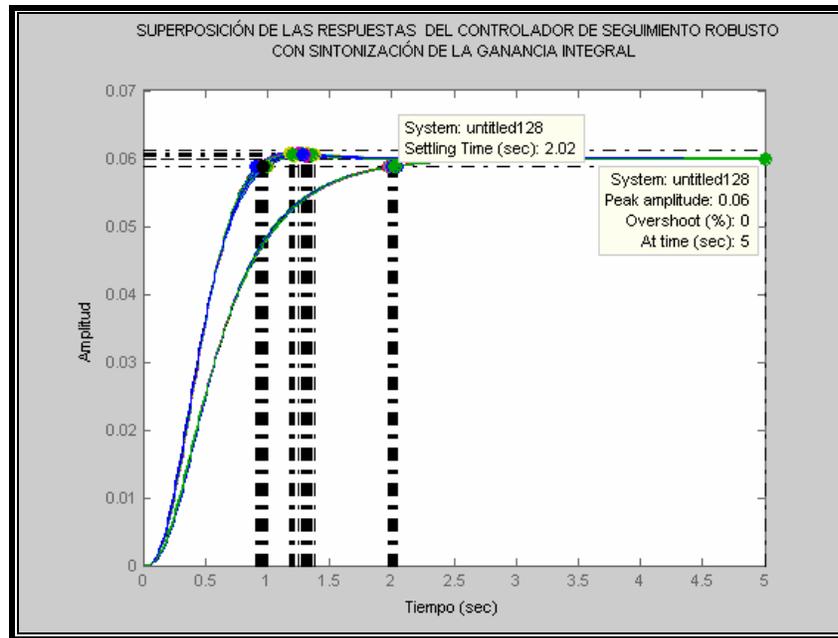


**Figura. 3.12.** Respuesta al escalón del controlador de seguimiento robusto con sintonización

La región LMI seleccionada es la misma que se utilizó para el controlador anterior y se considera una desviación estándar del 2%. En el anexo 3 se pueden observar los códigos de MATLAB utilizados para el diseño de los controladores analizados mediante LMIs.

En la Figura. 3.13 se presenta la superposición de la respuesta anterior y de la respuesta para la siguiente sintonización de la ganancia integral:

```
fnt1=tf([0.2*K(1,5)], [1 0])
```



**Figura. 3.13.** Superposición de las respuestas del controlador de seguimiento robusto con sintonización

Esta respuesta cumple con las condiciones de diseño especificadas, el sobre-impulso alcanzado es cero y el tiempo de establecimiento es de aproximadamente 2 segundos; el vector de ganancia  $\kappa$  obtenido está dentro de valores aceptables.

$\kappa =$

-72.8915   -15.7696   196.8023   8.9912   2.8030.

## CAPÍTULO 4

### COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES ANALIZADOS

En este capítulo se visualiza la comparación de desempeño de los controladores diseñados tanto en el presente proyecto como en el proyecto relacionado.

Las estrategias de control a ser comparadas son: la realimentación del espacio de estados, el control difuso y el control mediante LMIs.

El punto clave a ser comparado es la robustez al rechazo a perturbaciones y la respuesta ante la incertidumbre de parámetros. Los diseños de los controladores de realimentación de estados y de los controladores difusos realizados en el proyecto relacionado, se los desarrolló basados en condiciones nominales de los parámetros de los cuales depende el modelo matemático alcanzado.

En los siguientes párrafos se describe el diseño de cada uno de los controladores realizados en el proyecto de referencia, considerando puntualmente los valores allí recomendados para el diseño.

#### 4.1 ANÁLISIS DEL CONTROLADOR DE REALIMENTACIÓN DEL ESPACIO DE ESTADOS CON GANANCIA DE PRECOMPENSACIÓN $N$

Este diseño está basado en la localización de polos, la ganancia de realimentación de estados  $K$  para el sistema depende de la ubicación que se les dé a los polos de lazo cerrado.

$$\begin{aligned} \text{polos lazo abierto} = \\ -23.9758 + 35.1869i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -23.9758 - 35.1869i \\ & -0.1098 + 5.2504i \\ & -0.1098 - 5.2504i \end{aligned}$$

El sistema tiene a todos sus polos complejos conjugados en el semiplano izquierdo del eje imaginario, el sistema es estable pero es necesario reubicar los polos para mejorar su respuesta transitoria con la finalidad de lograr las condiciones deseadas. Los polos al ser movidos excesivamente a la izquierda implicarán una ganancia  $K$  elevada lo que representa mayor esfuerzo al controlador.

Se tomará a consideración varios aspectos con la finalidad de acertar con una elección razonable de la ubicación de polos:

- Elegir un ancho de banda amplio, sin excederse; mientras más a la izquierda se ubiquen los polos, mayor será el ancho de banda.
- Ubicar los polos a distancias uniformes del origen para proveer un uso eficiente del esfuerzo de control.

Luego de algunas pruebas se ha logrado reubicar de manera conveniente a los polos en las siguientes posiciones:

$$\begin{aligned} p1 &= -28; \\ p2 &= -29; \\ p3 &= -30; \\ p4 &= -31; \end{aligned}$$

La ganancia de realimentación  $K$  se calcula con los valores de los polos seleccionados utilizando la función `place` de MATLAB.

La sintaxis de la función `place` es

$$K = \text{place} (A, B, [p1 \ p2 \ p3 \ p4])$$

Obteniéndose la siguiente matriz:

K =

38.7070	2.6201	2.7360	0.0232
-11.6276	-0.7871	-0.8219	-0.0070
-24.8629	-1.7360	-0.1864	0.0229
136.2602	9.5423	0.1926	-0.1456

El esquema de control a utilizarse es el mismo que se empleo en el diseño del controlador de realimentación mediante LMIs, por consiguiente se debe calcular la ganancia de precompensación  $N$ , la cual ayuda en la tarea de seguimiento de la referencia de entrada es decir ayuda a que la salida tienda a la señal de referencia.

Para calcular la ganancia de precompensación  $N$  hay dos alternativas. La primera es usando la función `rscale` de MATLAB y la segunda es aplicando la fórmula:

$$N = \frac{-1}{C(A-BK)^{-1}B}$$

Aplicando la fórmula se tiene

```
N = -1 ./ (C * (A-B*K) ^ (-1) * B)
```

El vector  $N$  obtenido es el siguiente

N =

```
157.6501 -524.8006 -844.5666 201.4374
```

Para visualizar la gráfica de la respuesta a la señal de referencia escalón de 0.06 [m] de magnitud se ingresa el siguiente código:

```
T=0:0.01:10;
[num,den]=ss2tf(A-B*K,B,C,D,4);
fnt=tf(num,den);
step(0.06*N*fnt,T);
```

En la Figura. 4.1 se puede apreciar el tiempo de establecimiento del sistema de suspensión controlado mediante la utilización de la ubicación de polos, éste es de 0.149 segundos con un overshoot de 0.148 %. El diseño cumple con las condiciones

especificadas para el mismo, pero aun falta conocer cual es la respuesta ante la incertidumbre de parámetros.

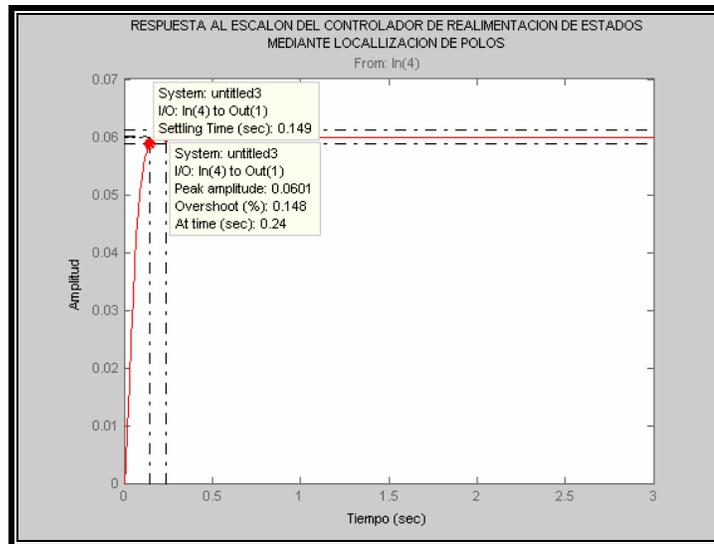


Figura. 4.1. Respuesta al escalón de 0.06 [m] de magnitud del controlador de realimentación de estados mediante la localización de polos

La respuesta del diseño presentado es para valores nominales de los parámetros, es decir, no se ha considerado la intervención de la incertidumbre de los parámetros. En las figuras que se presentan a continuación se visualiza una simulación del controlador con incertidumbre de parámetros.

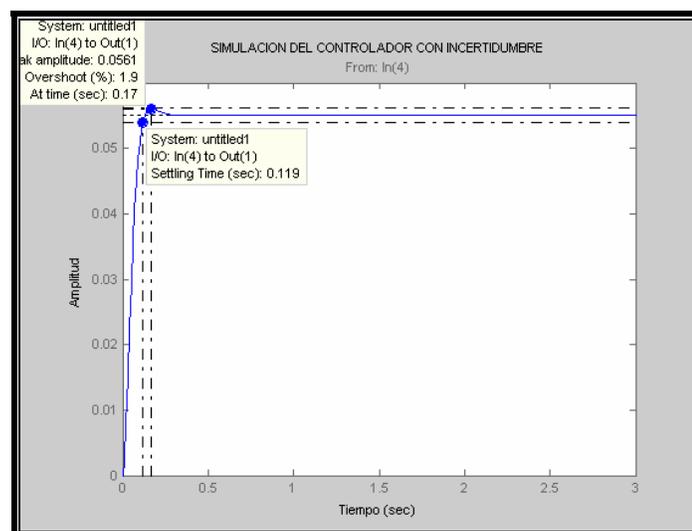
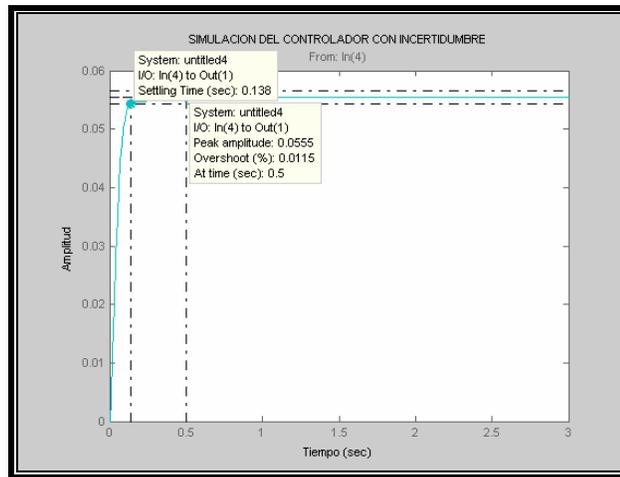


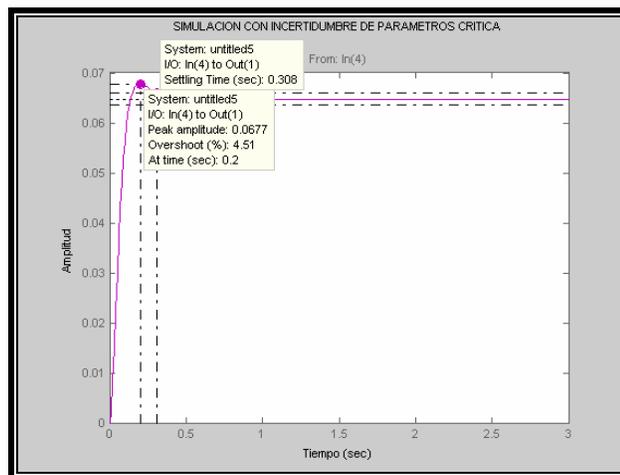
Figura. 4.2. Primera simulación del controlador de realimentación de estados con incertidumbre de parámetros

En las Figuras 4.2 y 4.3 se presentan las simulaciones del controlador de realimentación de estados con incertidumbre de parámetros; para generar la incertidumbre se utilizó una función randómica la cual genera variaciones aleatorias de los parámetros de los cuales depende el modelo matemático. Esta variación esta dentro del rango establecido en el diseño del controlador del sistema de suspensión mediante LMIs.



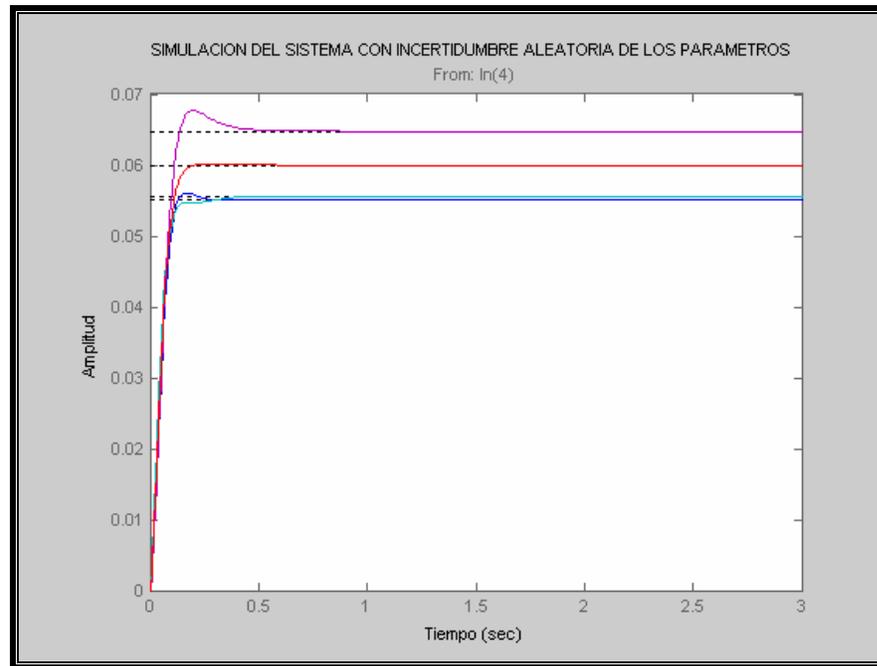
**Figura. 4.3. Segunda simulación del controlador de realimentación de estados con incertidumbre de parámetros**

En la Figura. 4.4 se presenta una simulación del caso que podría resultar el más crítico, una combinación de los valores extremos de los parámetros genera este caso.



**Figura. 4.4. Simulación del controlador de realimentación de estados con valores extremos de parámetros de los cuales depende el sistema**

En la Figura. 4.5 se indica una superposición de todas las simulaciones realizadas, se puede observar que el seguimiento de las respuestas es pésimo, lo más importante ha destacarse es la inmunidad del controlador ante la presencia de incertidumbre en relación al tiempo de establecimiento; el overshoot en algunas simulaciones ha sobrepasado el límite especificado de diseño.



**Figura. 4.5. Superposición de simulaciones realizadas al controlador de realimentación de estados con incertidumbre de parámetros**

En el anexo 4 se indica el código de MATLAB empleado para realizar las simulaciones.

## 4.2 ANÁLISIS DEL CONTROLADOR PD DIFUSO

La ventaja del control difuso es su simplicidad para ser desarrollado, la calidad de respuesta y la baja sensibilidad a entradas ruidosas e imprecisas.

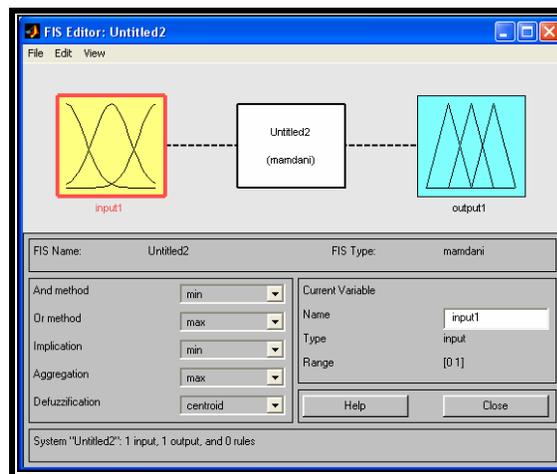
Los sistemas de control difuso operan en base a un conjunto de reglas simples con variables lingüísticas. Las reglas difusas se evalúan y se fijan las entradas de cada regla de acuerdo al nivel de pertenencia de las entradas, este proceso de toma de decisiones en base al conocimiento se conoce como inferencia borrosa.

La transformación de un valor real a un grado de pertenencia en un cierto conjunto difuso se realiza mediante la fuzzificación. La operación de transformar las salidas de las reglas en un valor real se denomina defuzzificación.

Para el diseño del controlador se utilizó la interfaz gráfica (GUI) de la herramienta FUZZY LOGIC TOOLBOX provista por el programa MATLAB, los resultados obtenidos son simulados con la ayuda del SIMULINK de MATLAB.

En los siguientes párrafos se describe de manera concisa los pasos seguidos para obtener el diseño del controlador PD difuso basados en el desarrollo del controlador desarrollado en el proyecto relacionado.

La función `fuzzy` llama a la herramienta gráfica `FIS Editor`

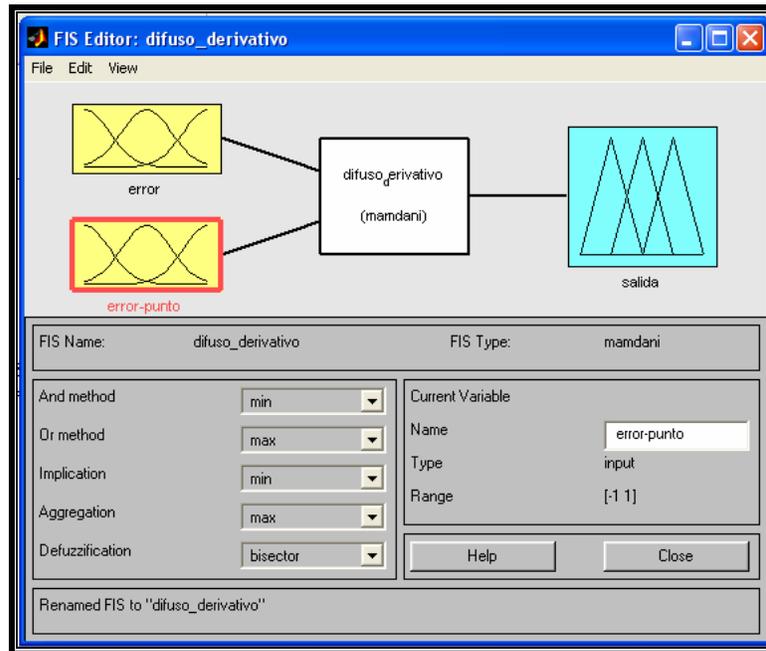


**Figura. 4.6. FIS Editor inicial**

En este entorno se definen los siguientes aspectos:

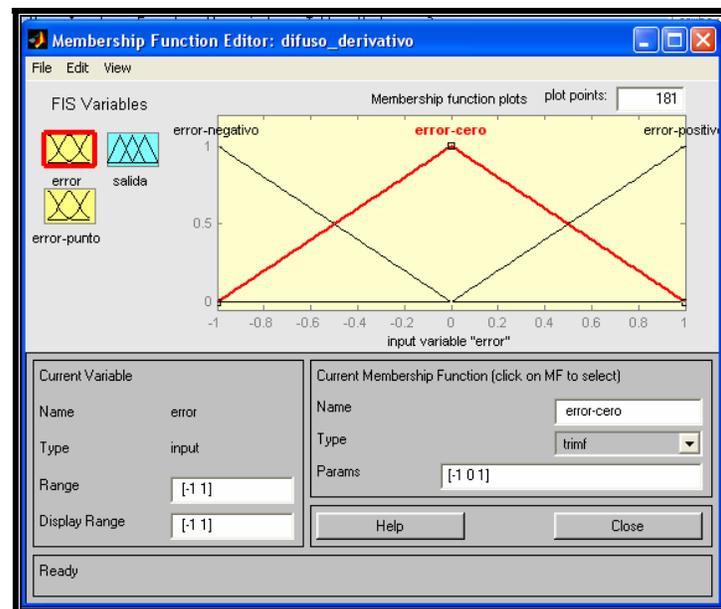
- El modelo a utilizarse es el Mamdani, éste permite considerar funciones de membresía tanto para la entrada como para la salida en forma de conjuntos borrosos.
- El sistema tiene dos entradas, la componente proporcional llamada Error y la componente derivativa, que corresponde a la entrada llamada Error-punto.

Estos son los aspectos principales, el **FIS Editor** queda



**Figura. 4.7.** FIS Editor del controlador PD difuso

Luego se editan las funciones de membresía para la entrada `Error` y `Error-punto`, las funciones de membresía son las mismas para ambas entradas como se indica en la Figura. 4.8.



**Figura. 4.8.** Editor de las funciones de membresía para la entrada `Error` y `Error-punto`

Finalmente se procede a la formación de la base de reglas y esto se logra con la ayuda de la herramienta gráfica `RULE EDITOR`, quedando las reglas como se puede apreciar en la Figura. 4.9.

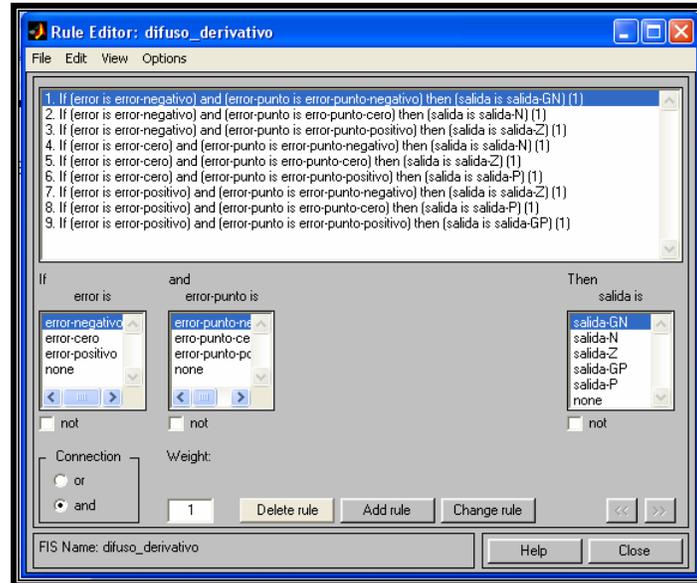


Figura. 4.9. Editor de reglas para el controlador PD difuso de nueve reglas

Para evaluar los resultados es necesario simular el sistema completo, el modelo utilizado en la herramienta `SIMULINK` se puede apreciar en la Figura 4.10

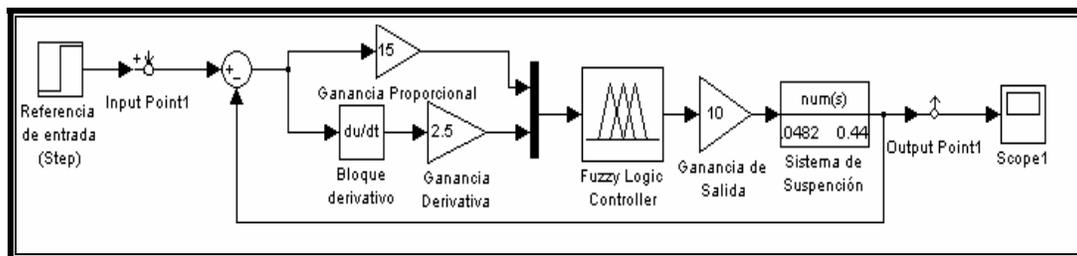


Figura. 4.10. Sistema de control PD difuso mediante `SIMULINK`

Las ganancias utilizadas en `SIMULINK` están basadas en las ganancias del proyecto de referencia, y son:

$$G \text{ proporcional} = 15$$

$$G \text{ derivativa} = 2.5$$

$$G \text{ de salida} = 10$$

La respuesta del sistema es:

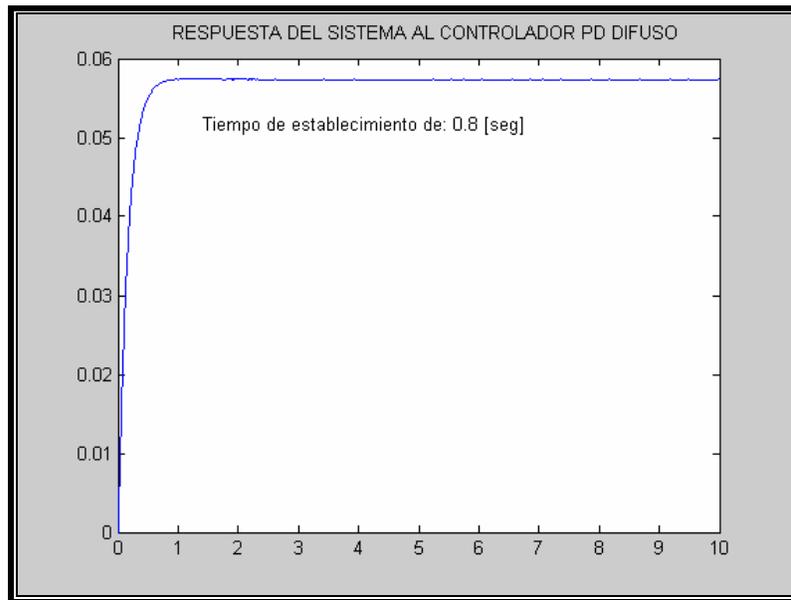


Figura. 4.11. Respuesta al escalón del controlador PD difuso de nueve reglas

Al igual que en la realimentación de estados se insertará incertidumbre para analizar el desempeño de la planta. En la Figura. 4.12 se puede visualizar la respuesta del controlador ante la presencia de incertidumbre.



Figura. 4.12. Respuesta al escalón del controlador PD difuso de nueve reglas con incertidumbre de parámetros

### 4.3 COMPARACIÓN DE LOS TRES CONTROLADORES ANALIZADOS

Para comparar el desempeño del sistema ante cada uno de los controladores analizados, siendo estos: el controlador de realimentación de estados mediante LMIs, el controlador de realimentación de estados mediante localización de polos y el controlador PD difuso, se diseña un modelo en la herramienta SIMULINK como se indica en la Figura. 4.13.

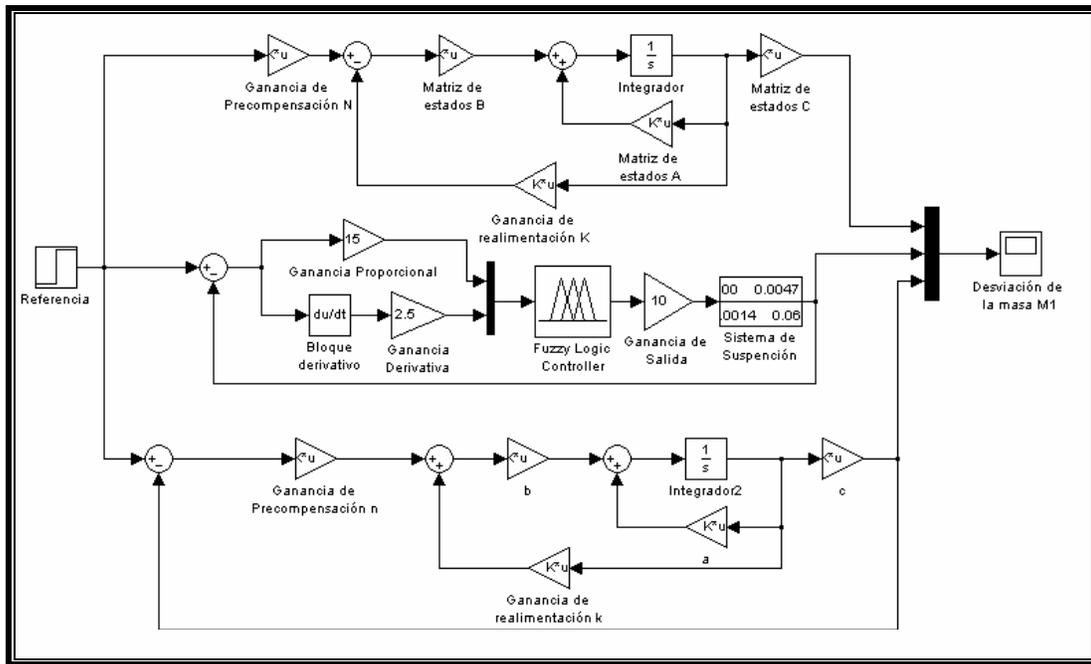


Figura. 4.13. Modelo comparativo en SIMULINK

Los argumentos de cada bloque son los que genera el workspace el momento de ejecutar los programas de MATLAB respectivos para cada diseño. Considerar que estos argumentos de los bloques utilizados en el SIMULINK son matrices y vectores.

En la Figura. 4.14 se presenta la respuesta del modelo comparativo realizado en SIMULINK, donde se pueden observar las respuestas del controlador de realimentación de estados para condiciones nominales, la respuesta del control difuso con incertidumbre de parámetros y por último la respuesta del controlador de realimentación de estados con seguimiento robusto y sintonización de la ganancia de integración mediante LMIs; se puede observar principalmente que la diferencia entre los controladores esta enmarcada en la calidad de seguimiento de la señal de referencia y los sobre-impulsos.

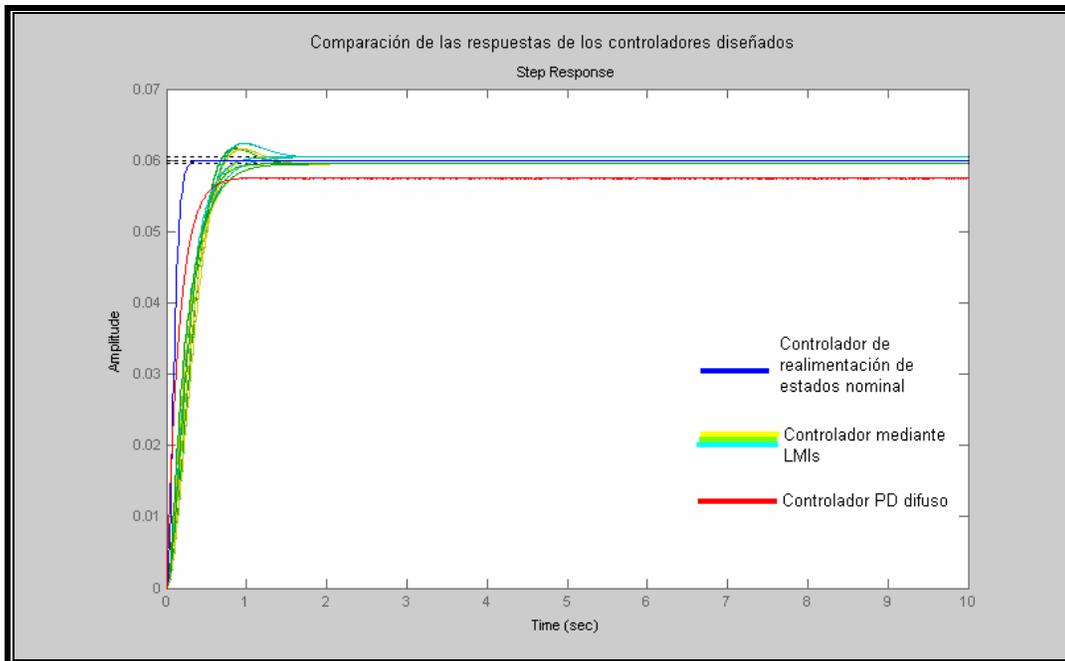


Figura. 4.14. Respuestas de los controladores mediante el SIMULINK

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES FINALES Y RECOMENDACIONES

A continuación se cita un compendio de conclusiones que han surgido durante el transcurso del desarrollo del presente proyecto de grado.

El modelo matemático del sistema en análisis se lo ha desarrollado basado en las ecuaciones físicas de la tesis de referencia denominada “Diseño y Modelación de los controladores Difusos para el Sistema de Suspensión de un Autobús”, el modelo desarrollado se diferencia del planteado en la tesis de referencia por considerar tanto a la función  $w(t)$  que representa el relieve del camino, como a su primera y segunda derivada que físicamente representan a la velocidad y a la aceleración respectivamente, como entradas del sistema; es decir, el modelo matemático diseñado consta de tres entradas adicionales a la entrada de control  $u$ . Los valores de los parámetros utilizados en el desarrollo de los distintos diseños se los ha tomado de información real obtenida en experimentos de laboratorio realizados en la Universidad de Michigan en autobuses comerciales.

En base a los análisis realizados en referencia a la estabilidad y a la controlabilidad se concluyó que el modelo matemático obtenido para el sistema de suspensión es asintóticamente estable y controlable. Es importante tener presente que en un modelo del espacio de estados los polos son los valores propios de la matriz de evolución  $A$ . Considerar que todo sistema controlable es estabilizable, pero no se puede afirmar la misma aseveración en el caso contrario, es decir que todo sistema estabilizable sea controlable; la propiedad de la controlabilidad es muy importante ya que es la que permite la localización de polos.

Una vez asentadas las bases sobre LMIs, se obtuvo el punto de partida para el desarrollo de este proyecto de grado y se comprobó que las técnicas con LMIs son técnicas de control involucradas en problemas de optimización convexa aplicados a un algoritmo garantizado para resolver el problema de optimización, estas técnicas se caracterizan por ser aplicables a importantes y difíciles problemas prácticos en la ingeniería de control, sobresaliendo los problemas que se presentan por múltiple no-linealidad.

Con la finalidad de encontrar el controlador que genere el mejor desempeño del sistema ante la presencia de la incertidumbre de parámetros, se diseñaron tres controladores basados en técnicas LMIs, entre ellos se pueden citar: el controlador de realimentación de estados, el controlador de realimentación de estados con ganancia de precompensación y el controlador con seguimiento robusto con sintonización de la ganancia integral. Para el análisis mediante LMIs el sistema resulta que no es cuadráticamente estable, pero sí lo es solo para la caja de parámetros prescrita además el valor máximo de la desviación estándar no debe sobrepasar el 8%, ya que si se considera un valor mayor a éste, el sistema incluso deja de ser cuadráticamente estable para el rango de variación de los parámetros que depende el sistema.

El primer controlador diseñado es el de realimentación de estados, éste obtuvo una respuesta con un tiempo de establecimiento entre 0.71 y 1.21 segundos y su overshoot no superó el 3%; considerando estos resultados, el controlador cumple con las especificaciones de diseño pero la respuesta de este controlador tiene un serio problema en relación al seguimiento de la señal de referencia, por tal razón se optó en diseñar otro controlador mediante LMIs que solucione el problema de seguimiento presentado.

El segundo controlador diseñado mediante técnicas LMI también fue de realimentación de estados pero a diferencia del anterior éste posee una ganancia de precompensación que multiplica a la señal de referencia, la compensa; es importante reiterar que en estos diseños está considerada la acción de la incertidumbre de parámetros. La respuesta de este controlador se encuentra dentro de las condiciones de diseño, ya que lo que hace el precompensador es ayudar a la señal de salida en el seguimiento de la señal de entrada. Con este diseño no se obtuvo un seguimiento perfecto de la señal de referencia, aun se

mantiene un error de estado estacionario del 2% pero está dentro de las consideraciones estimadas para el desarrollo del diseño del controlador del sistema de suspensión.

Existe un controlador que ayuda a obtener un seguimiento perfecto de la señal de referencia, éste es el tercer diseño realizado mediante técnicas LMI y es el controlador de realimentación de estados con seguimiento robustos. Este controlador consiste en adicionar un estado más al modelo matemático desarrollado, esto permite obtener la ganancia que multiplica al bloque integrador con la finalidad de eliminar el error en estado estacionario. Se alcanzó el objetivo de eliminar el error en estado estacionario, es decir, se puede ver en la respuesta de este controlador un seguimiento perfecto de la salida con respecto a la señal de referencia, pero el sobre-impulso obtenido alcanza el 30% y sale de los límites de diseño.

El controlador que realmente garantiza un desempeño robusto del sistema con incertidumbre de parámetros, es el controlador de realimentación de estados con seguimiento robusto y sintonización de la ganancia integral, ya que su respuesta esta dentro de las condiciones de diseño y admite una desviación estándar máxima del 5%, esta limitación esta relacionada con las regiones LMI seleccionadas.

El programa de cálculo MATLAB mediante el LMI Toolbox ofrece una variedad de herramienta de gran utilidad. Una de estas herramientas permite maximizar el rango de variación de la incertidumbre de los parámetros, pero esta función es únicamente aplicable a sistemas que no tengan una formulación descriptor, es decir esta función es únicamente aplicable a sistemas con matriz invertible  $E = I$ . Para el sistema de suspensión en análisis no se pudo utilizar esta herramienta de gran utilidad ya que la matriz invertible  $E \neq I$ .

Se puede reducir el tiempo de establecimiento de todos los diseños desarrollados, pero a cuenta de ello se obtiene una ganancia proporcional de cada estado demasiado alta, por lo que fue necesario normalizar los valores de los parámetros con respecto al coeficiente de amortiguación  $B_2$  para que el rango de las ganancias de cada estado este dentro de límites normales de diseño.

La respuesta del controlador de realimentación de estados con seguimiento robusto mediante técnicas LMI se lo comparó con los diseños de controladores realizados en la tesis de referencia, estos son el controlador de realimentación de estados con ganancia de precompensación y el controlador derivativo difuso, ambos controladores tienen muy buenas respuestas para condiciones nominales de los parámetros los cuales depende el sistema, pero ante la presencia de la incertidumbre de parámetros estos controladores no tienen un desempeño robusto ya que no pueden seguir a la señal de referencia, es decir tienen un error en estado estacionario muy elevado. Se puede concluir que el controlador de realimentación de estados con seguimiento robusto y sintonización de  $K_f$  es el único que garantiza un desempeño robusto del sistema de suspensión en análisis ante la presencia de incertidumbre de parámetros.

Es resumen, este proyecto cumple satisfactoriamente con los objetivos planteados para desarrollar el diseño de un controlador del sistema de suspensión de un autobús mediante técnicas LMIs.

Se recomienda que el modelo matemático que se obtenga para cualquier sistema en análisis sea lo más parecido a la realidad, identificando la mayor cantidad de perturbaciones internas y externas del caso para disminuir los efectos de dichas perturbaciones en el desempeño del sistema, es decir, para realizar el diseño se debe realizar un análisis exhaustivo que involucre en su totalidad a todas las incertidumbres identificadas ya que el objetivo del controlador diseñado se encamina a garantizar un desempeño robusto del sistema. Tener siempre presente que un modelo matemático coherente es la parte más importante del análisis y diseño.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) ZHOU, Kevin, **Essentials of Robust Control**, Prentice-Hall, New Jersey, 1998, 411 páginas.
- 2) NICULESCU, Silviu-lulian, **Advances en Linear Matrix Inequality Methods in Control**, SIAM, Philadelphia, 2000, 372 páginas.
- 3) NEMIROVSKI, Arkadi, **LMI Control Toolbox For Use With MATLAB**, The Math Works, Inc, May 1995, 160 páginas.
- 4) BOYD, Stephen, **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**, SIAM, Philadelphia, 1994, 187 páginas.
- 5) OGATA, Katsuhiko, **Ingeniería de Control Moderna**, Tercera Edición, Prentice-Hall, México, 1998, 997 página.
- 6) [http://www1.ceit.es/Asignaturas/transportes/Trabajos\\_pdf\\_00\\_01/Suspensiones-Activas.pdf](http://www1.ceit.es/Asignaturas/transportes/Trabajos_pdf_00_01/Suspensiones-Activas.pdf), **Suspensiones Inteligentes**.
- 7) <http://wolfman.eos.uoguelph.ca/jzelek/matlab/ctms/examples/susp/susp.html>, **Modelación del Sistema de Suspensión de un Autobús usando la Función de Transferencia**.
- 8) [http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/susp/susp\\_ss.html](http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/susp/susp_ss.html), **Modelación del Sistema de Suspensión de un Autobús usando Espacio de Estados**.
- 9) <http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/susp/ssp1.html>, **Controlador del Espacio de Estados para el Sistema de Suspensión de un Autobús**.
- 10) [http://www.csc.fi/math\\_topics/Mail/NANET94/msg00650.html](http://www.csc.fi/math_topics/Mail/NANET94/msg00650.html), **Linear Matrix Inequalities in Control Theory and Applications**.

**Sangolquí, 03 de octubre del 2005**

**Elaborado por:**

-----  
Sr. Gabriel Hernán Trujillo Ponguillo

**El Decano**

**El Secretario Académico**

-----  
Ing. Xavier Martínez C.  
TCNR. DE EM.

-----  
Dr. Jorge Carvajal

## **ANEXOS**

**ANEXO 1**  
**ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Y CONTROLABILIDAD DEL MODELO**  
**MATEMÁTICO DESARROLLADO**

```

%*****
%Programa de análisis de estabilidad y controlabilidad del modelo
%matemático del sistema de suspensión (acs.m).

m1 = 2500;
m2 = 320;
k1 = 80000;
k2 = 500000;
b1 = 350;
b2 = 15020;
g = 9.8;

A = [ 0          1          0          0;
      -k1/m1     -b1/m1     k1/m1     b1/m1;
      0          0          0          1;
      k1/m2     b1/m2     -(k1+k2)/m2  -(b1+b2)/m2];

B = [ 0          0          0          0;
      0          0          -1         1/m1;
      0          0          0          0;
      k2/m2     -b2/m2     -1         -1/m2];

C = [ 1  0  0  0];

D = [ 0  0  0  0];

%Código para analizar la estabilidad por función ss2zp
g = eig(A);
[z1, p1, k1] = ss2zp(A, B, C, D, 1);%Polos y ceros para la entrada 1
[z2, p2, k2] = ss2zp(A, B, C, D, 2);%Polos y ceros para la entrada 2
[z3, p3, k3] = ss2zp(A, B, C, D, 3);%Polos y ceros para la entrada 3
[z4, p4, k4] = ss2zp(A, B, C, D, 4);%Polos y ceros para la entrada 4

%Código para obtener la grafica de los polos del sistema
G=pck(A,B,C,D);
Z0=spoles(G);

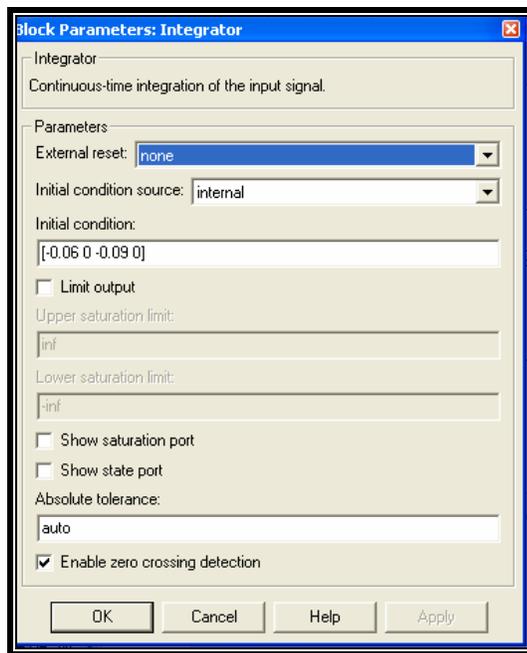
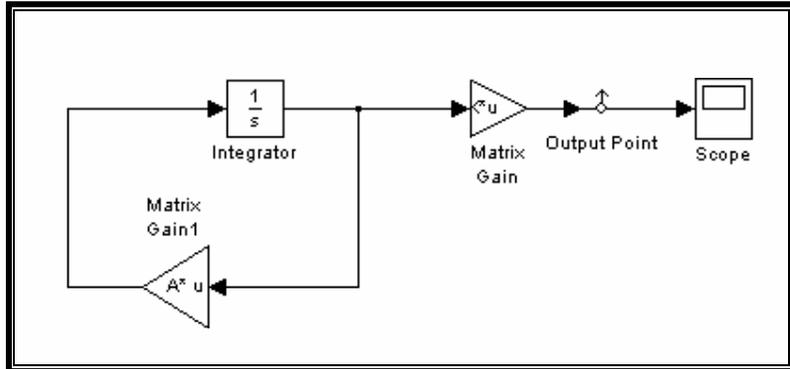
%Código para obtener la respuesta a condiciones iniciales no nula
(x1=0.06 [m]
%y x2=0.01 [m])
H=ss(A,B,C,D);
x0=[0.06 0 0.01 0];
initial(H,x0)
[Y,T,X] = initial(H,x0);

%Código para analizar la controlabilidad del sistema
Mcontrolabilidad = ctrb(A,B)
rango=rank(Mcontrolabilidad)

%*****

```

**ANEXO 2**  
**SIMULACIÓN DE LA RESPUESTA EN LAZO ABIERTO A CONDICIONES**  
**INICIALES NO NULAS**



**ANEXO 3**  
**DISEÑO DE LOS CONTROLADORES MEDIANTE TÉCNICAS LMI**

```

%*****

%DISEÑO DEL CONTROLADOR DE REALIMENTACION DE ESTADOS CON GANANCIA
%DE PRECOMPENSACION MEDIANTE LMIs.

%Normalización de parámetros con respecto a b1.
b=15020
m1=2500./b;
m2=320./b;
k1=80000./b;
k2=500000./b;
b1=350./b;
b2=15020./b;
g=9.8;
d=0.09; %DESVIACION ESTANDAR

%Definición del sistema
A=[ 0      1      0      0;
   -k1    -b      k1     b1;
     0     0      0      1;
     k1    b1    -(k1+k2) -(b1+b2)];

B=[ 0      0      0      0;
     0     0    -m1     1;
     0     0      0     0;
     k2    -b2   -m2    -1];

C=[1  0  0  0];

D=[0];

E=[1  0  0  0;
   0  m1 0  0;
   0  0  1  0;
   0  0  0  m2];

%Vector de variación de los parámetros
range = [m1*(1-3*d) m1*(1+3*d); m2*(1-3*d) m2*(1+3*d);
         k1*(1-3*d) k1*(1+3*d); k2*(1-3*d) k2*(1+3*d);
         b1*(1-3*d) b1*(1+3*d); b2*(1-3*d) b2*(1+3*d)];

pv=pvec('box',range);
pvinfo(pv);

%definición del modelo afín dependiente de parámetros a utilizarse
A0=[0      1      0      0;
     0     0      0      0;
     0     0      0      1;
     0     0      0      0];

A1=[0      0      0      0;
     0     0      0      0;
     0     0      0      0;
     0     0      0      0];

```

```
A2=[0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0];
```

```
A3=[0      0      0      0;
     -1     0      1      0;
     0      0      0      0;
     1      0     -1     0];
```

```
A4=[0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0     -1     0];
```

```
A5=[0      0      0      0;
     0     -1     0      1;
     0      0      0      0;
     0      1      0     -1];
```

```
A6=[0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0     -1];
```

```
B0=[0      0      0      0;
     0      0      0      1;
     0      0      0      0;
     0      0      0     -1];
```

```
B1=[0      0      0      0;
     0      0     -1     0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0];
```

```
B2=[0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0     -1     0];
```

```
B3=[0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0];
```

```
B4=[0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     1      0      0      0];
```

```
B5=[0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0];
```

```
B6=[0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0      0      0      0;
     0     -1     0      0];
```

```

C0=[1    0    0    0;
    1    0    0    0;
    0    0    1    0;
    0    0    0    0];

D0=[0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 1];

E0=[1    0    0    0;
    0    0    0    0;
    0    0    1    0;
    0    0    0    0];

E1=[0    0    0    0;
    0    1    0    0;
    0    0    0    0;
    0    0    0    0];

E2=[0    0    0    0;
    0    0    0    0;
    0    0    0    0;
    0    0    0    1];

%Formulación de las matrices SYSTEM
s0=ltisys(A0, B0, C0, D0, E0);
s1=ltisys(A1, B1, 0*C0, 0*D0, E1);
s2=ltisys(A2, B2, 0*C0, 0*D0, E2);
s3=ltisys(A3, B3, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
s4=ltisys(A4, B4, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
s5=ltisys(A5, B5, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
s6=ltisys(A6, B6, 0*C0, 0*D0, 0*E2);

sistema=psys(pv, [s0,s1,s2,s3,s4,s5,s6]);
psinfo(sistema);

%Análisis de estabilidad cuadrática
[tmin,P]=quadstab(sistema);
[tmin]=pdlstab(sistema);

%Selección de regiones LMI
region=lmireg;

%Síntesis de realimentación de estados
[gopt,h2opt,K,Pcl]=msfsyn(sistema,[1 1],[0 0 0 0],region);

T=0:0.01:10;

figure(1)

T=0:0.01:10;

for j=1:64
    Pvert=psinfo(Pcl,'sys',j);
    [a,b,c,d,e]=ltiss(ssub(Pvert,1,1));% a esta dado como (a-b*K)
    [num,den]=ss2tf(a,b,c,d,1);

```

```

    fnt=tf(num,den);
    %N=-1./(c*((a)^(-1))*b)
    n=0.248
    step(0.06*n*fnt,T); %respuesta del controlador
                        %con ganancia de precompensación
    hold on
end

%Grafica de la ubicación de polos
colors='wrbg';
figure(2),clf

for j=1:64
    plot(spol(psinfo(Pcl,'sys',j)), '*');
    hold on
    axis auto;
    grid on;
end

%*****
%DISEÑO DEL CONTROLADOR CON SEGUIMIENTO ROBUSTO

%Normalización de los parámetros.
b=15020;
m1=2500./b;
m2=320./b;
k1=80000./b;
k2=500000./b;
b1=350./b;
b2=15020./b;
g=9.8;
d=0.01;

%Matrices de estado aumentadas según condiciones del diseño
%del controlador con seguimiento robusto.
A=[ 0      1      0      0      0;
   -k1    -b1      k1      b1      0;
     0      0      0      1      0;
     k1     b1    -(k1+k2)  -(b1+b2)  0;
    -1      0      0      0      0];

B=[ 0      0      0      0;
     0      0    -m1      1;
     0      0      0      0;
     k2    -b2    -m2     -1;
     0      0      0      0];

C=[1  0  0  0];

D=[0  0  0  0];

E=[1  0  0  0;
   0  m1 0  0;
   0  0  1  0;
   0  0  0  m2];

%Vector de límites extremos de los parámetros

```

```

range = [m1*(1-3*d) m1*(1+3*d); m2*(1-3*d) m2*(1+3*d);
         k1*(1-3*d) k1*(1+3*d); k2*(1-3*d) k2*(1+3*d);
         b1*(1-3*d) b1*(1+3*d);b2*(1-3*d) b2*(1+3*d)];

```

```

pv=pvec('box',range);
pvinfo(pv);

```

```

%Definición del modelo afín dependiente de parámetros

```

```

A0=[0      1      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
     0      0      0      1      0;
     0      0      0      0      0;
    -1     0      0      0      0];

```

```

A1=[0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
    -1     0      0      0      0];

```

```

A2=[0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
    -1     0      0      0      0];

```

```

A3=[0      0      0      0      0;
    -1     0      1      0      0;
     0      0      0      0      0;
     1      0     -1     0      0;
    -1     0      0      0      0];

```

```

A4=[0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
     0      0     -1     0      0;
    -1     0      0      0      0];

```

```

A5=[0      0      0      0      0;
     0     -1     0      1      0;
     0      0      0      0      0;
     0      1      0     -1     0;
    -1     0      0      0      0];

```

```

A6=[0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
     0      0      0      0      0;
     0      0      0     -1     0;
    -1     0      0      0      0];

```

```

B0=[0  0  0  0;
     0  0  0  1;
     0  0  0  0;
     0  0  0 -1;
     0  0  0  0];

```

```

B1=[0  0  0  0;
     0  0 -1  0];

```

```

0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0];

B2=[0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 -1 0;
0 0 0 0];

B3=[0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0];

B4=[0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0;
1 0 0 0;
0 0 0 0];

B5=[0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0];

B6=[0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 0;
0 -1 0 0;
0 0 0 0];

C0=[1 0 0 0 0;
1 0 0 0 0;
0 0 1 0 0;
0 0 0 0 0];

D0=[0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 1];

E0=[1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0;
0 0 1 0 0;
0 0 0 0 0;
0 0 0 0 1];

E1=[0 0 0 0 0;
0 1 0 0 0;
0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0];

E2=[0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0;
0 0 0 1 0;
0 0 0 0 0];

```

```

%Definición de las matrices SYSTEM

s0=ltisys(A0, B0, C0, D0, E0);
s1=ltisys(A1, B1, 0*C0, 0*D0, E1);
s2=ltisys(A2, B2, 0*C0, 0*D0, E2);
s3=ltisys(A3, B3, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
s4=ltisys(A4, B4, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
s5=ltisys(A5, B5, 0*C0, 0*D0, 0*E2);
s6=ltisys(A6, B6, 0*C0, 0*D0, 0*E2);

sistema=psys(pv, [s0,s1,s2,s3,s4,s5,s6]);
psinfo(sistema);

%Selección de las regiones LMI

region=lmireg;

%Síntesis de realimentación de estados

[gopt,h2opt,K,Pcl]=msfsyn(sistema,[1 1],[0 0 0 0],region);

T=0:0.01:10;

figure(1)

T=0:0.01:10;
for j=1:64

    Pvert=psinfo(Pcl,'sys',j);
    [a,b,c,d,e]=ltiss(ssub(Pvert,1,1));
    [num,den]=ss2tf(a(1:4,1:4),b(1:4),c(1:4),d,1);
    fnt=tf(num,den);% La matriz A es igual a A=A+B*K
    fnt1=tf([K(1,5)],[1 0]);%integrador
    %fnt1=tf([0.3*K(1,5)],[1 0]);%sintonización de la ganancia integral
    tt=fnt*fnt1;
    GL=feedback(tt,1);

%Simulación
    figure(1)
    T=0:0.01:5;
    step(0.06*GL,T);
    hold on;
end

%*****

```

## **ANEXO 4**

### **DISEÑO DEL CONTROLADOR DE REALIMENTACIÓN DE ESTADOS CON GANANCIA DE PRECOMPENSACIÓN N**

```

%*****
%Diseño del controlador de realimentación de estados
%con ganancia de precompensación.

%Normalizacion de parametros
b=15020;
m1 = 2500./b;
m2 = 320./b;
k1 = 80000./b;
k2 = 50000./b;
b1 = 350./b;
b2 = 15020./b;
g = 9.8;

%Posibles combinaciones
% m1=m1*(1.27)
% %m1=m1*(0.73)
% %
% % m2=m2*(1.27)
% m2=m2*(0.73)
% %
% %k1=k1*(1.27)
% k1=k1*(0.73)
% %
% %k2=k2*(1.27)
% k2=k2*(0.73)
% %
% b1=b1*(1.27)
% % b1=b1*(0.73)
% %
% b2=b2*(1.27)
% % b2=b2*(0.73)
% %
% % l1 = (m1./k1)*g;
% % % l2 = (m2*g+k1*l1)/k2;

A = [ 0          1          0          0;
      -k1/m1     -b1/m1     k1/m1     b1/m1;
      0          0          0          1;
      k1/m2      b1/m2      -(k1+k2)/m2  -(b1+b2)/m2];

B = [ 0          0          0          0;
      0          0          -1         1/m1;
      0          0          0          0;
      k2/m2     -b2/m2      -1         -1/m2];

C = [ 1          0          0          0];

D = [ 0          0          0          0];

p1 = -28;
p2 = -29;
p3 = -30;
p4 = -31;

```

```

% K = place (A, B, [p1 p2 p3 p4])
K =

    38.7070    2.6201    2.7360    0.0232;
   -11.6276   -0.7871   -0.8219   -0.0070;
   -24.8629   -1.7360   -0.1864    0.0229;
   136.2602    9.5423    0.1926   -0.1456]

% N = -1./(C*(A-B*K)^(-1)*B)

N =

    157.6501  -524.8006  -844.5666   201.4374];

figure(1)
T=0:0.01:10;

[num,den]=ss2tf(A-B*K,B,C,D,1);
fnt=tf(num,den);
step(0.06*N*fnt,T);

hold on

```

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura. 2.1. Sujeción y partes de una ballesta de láminas semielípticas</b> .....	7
<b>Figura. 2.2. Muelle helicoidal</b> .....	8
<b>Figura. 2.3. Acción de una barra de torsión</b> .....	9
<b>Figura. 2.4. Bielas</b> .....	10
<b>Figura. 2.5. Acción de la barra estabilizadora</b> .....	10
<b>Figura. 2.6. Amortiguador telescópico o de doble acción</b> .....	12
<b>Figura. 2.7. Neumático inflado correctamente</b> .....	15
<b>Figura. 2.8. Neumático inflado en defecto o subinflado</b> .....	16
<b>Figura. 2.9. Neumático sobreinflado</b> .....	16
<b>Figura. 2.10. Modelo de <math>\frac{1}{4}</math> del sistema de suspensión pasiva de un autobús</b> .....	19
<b>Figura. 2.11. Desempeño de un sistema de suspensión pasiva</b> .....	20
<b>Figura. 2.12. Modelo de <math>\frac{1}{4}</math> del sistema de suspensión activa de un autobús</b> .....	21
<b>Figura. 2.13. Diagrama de bloques para el sistema de suspensión activa</b> .....	31
<b>Figura. 2.14. Diagrama de bloques para el sistema de suspensión pasiva</b> .....	32
<b>Figura. 2.15. Desviación de la posición de la masa <math>M_1</math> con respecto al punto de equilibrio del sistema de suspensión pasiva en lazo abierto</b> .....	34
<b>Figura. 2.16. Función de MATLAB <code>splot(sys, 'bo')</code></b> .....	52
<b>Figura. 2.17. Función de MATLAB <code>splot(sys, 'st')</code></b> .....	53
<b>Figura. 2.18 Esquema de la función <code>sloop</code></b> .....	55
<b>Figura. 2.19. Representación esquemática de la función de MATLAB <code>s1ft</code></b> .....	56
<b>Figura. 2.20. Caja de parámetros</b> .....	63
<b>Figura. 2.21. Rango de parámetros politópicos</b> .....	64
<b>Figura. 2.22. Incertidumbre lineal-fraccionaria</b> .....	68
<b>Figura. 2.23. Problema estático <math>\mu</math></b> .....	82
<b>Figura. 2.24. Análisis de estabilidad robusta</b> .....	82
<b>Figura. 2.25. Problema de desempeño robusto</b> .....	83

<b>Figura. 2.26. Criterio de Popov</b> .....	83
<b>Figura. 2.27. Sistema físico a ser analizado</b> .....	84
<b>Figura. 2.28. Control de realimentación de estados</b> .....	89
<b>Figura. 2.29. Región LMI disco</b> .....	91
<b>Figura. 2.30. Región LMI sección cónica</b> .....	92
<b>Figura. 2.31. Región LMI franja vertical</b> .....	92
<b>Figura. 2.32. Satélite</b> .....	97
<b>Figura. 2.33. Región de ubicación de polos</b> .....	97
<b>Figura. 2.34. Respuesta al impulso para el diseño nominal de <math>k</math> y <math>f</math></b> .....	99
<b>Figura. 2.35. Respuestas al impulso para los valores extremos de <math>k</math> y <math>f</math></b> .....	100
<b>Figura. 2.36. Polos correspondientes al lazo cerrado</b> .....	100
<b>Figura. 3.1. LMI Editor</b> .....	117
<b>Figura. 3.2 Códigos de programa generados en el Imiedit</b> .....	118
<b>Figura. 3.3. Región LMI para ubicación de polos</b> .....	122
<b>Figura. 3.4. Diagrama de bloques del controlador de realimentación del espacio de estados</b> .....	123
<b>Figura. 3.5. Respuesta al escalón del controlador de realimentación de estados</b> .....	124
<b>Figura. 3.6. Esquema de control por realimentación de estados con ganancia de precompensación</b> .....	125
<b>Figura. 3.7. Respuesta al escalón del diseño con ganancia de precompensación</b> .....	127
<b>Figura. 3.8. Enfoque de la banda de error en estado estacionario</b> .....	128
<b>Figura. 3.9. Polos correspondientes al lazo cerrado</b> .....	128
<b>Figura. 3.10. Esquema de seguimiento robusto</b> .....	129
<b>Figura. 3.11. Respuesta al escalón del controlador de seguimiento robusto mediante LMIs</b> .....	131
<b>Figura. 3.12. Respuesta al escalón del controlador de seguimiento robusto con sintonización</b> .....	132
<b>Figura. 3.13. Superposición de las respuestas del controlador de seguimiento robusto con sintonización</b> .....	133
<b>Figura. 4.1. Respuesta al escalón de 0.06 [m] de magnitud del controlador de realimentación de estados mediante la localización de polos</b> .....	137

<b>Figura. 4.2. Primera simulación del controlador de realimentación de estados con incertidumbre de parámetros .....</b>	<b>137</b>
<b>Figura. 4.3. Segunda simulación del controlador de realimentación de estados con incertidumbre de parámetros .....</b>	<b>138</b>
<b>Figura. 4.4. Simulación del controlador de realimentación de estados con valores extremos de parámetros de los cuales depende el sistema .....</b>	<b>138</b>
<b>Figura. 4.5. Superposición de simulaciones realizadas al controlador de realimentación de estados con incertidumbre de parámetros .....</b>	<b>139</b>
<b>Figura. 4.6. FIS Editor inicial .....</b>	<b>140</b>
<b>Figura. 4.7. FIS Editor del controlador PD difuso.....</b>	<b>141</b>
<b>Figura. 4.8. Editor de las funciones de membresía para la entrada Error y Error-punto.....</b>	<b>141</b>
<b>Figura. 4.9. Editor de reglas para el controlador PD difuso de nueve reglas.....</b>	<b>142</b>
<b>Figura. 4.10. Sistema de control PD difuso mediante SIMULINK .....</b>	<b>142</b>
<b>Figura. 4.11. Respuesta al escalón del controlador PD difuso de nueve reglas.....</b>	<b>143</b>
<b>Figura. 4.12. Respuesta al escalón del controlador PD difuso de nueve reglas con incertidumbre de parámetros .....</b>	<b>143</b>
<b>Figura. 4.13. Modelo comparativo en SIMULINK.....</b>	<b>144</b>
<b>Figura. 4.14. Respuestas de los controladores mediante el SIMULINK.....</b>	<b>145</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla. 2.1. Diseños desarrollados con <code>msfsyn</code> .....</b>	<b>96</b>
--	-----------