

Aplicación de la dinámica de los fluidos computacionales a fluidos Newtonianos de viscosidad constante, incompresibles, isotrópicos en régimen laminar

Narváez Alejandro

Carreras de Ingeniería Mecánica, Departamento de Ciencias de la Energía y Mecánica
Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE
Av. Gral. Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador
BasicCFD@gmail.com

Resumen: Este artículo presenta un software diseñado para obtener las soluciones numéricas mediante el Método de los Elementos Finitos de las Ecuaciones Diferenciales que gobiernan el flujo de un fluido viscoso de densidad constante en un régimen laminar, llamadas las Ecuaciones de Navier-Stokes. Esta propuesta, denominada BasicCFD_LINEAR 0.1, ha sido validada con problemas del tipo Benchmark, para verificar su correcto funcionamiento, generando excelentes resultados y constituyéndose en una herramienta práctica para la enseñanza.

Palabras claves: Elementos Finitos, Navier-Stokes, Ecuaciones Diferenciales Parciales.

I. INTRODUCCIÓN

El ser humano está rodeado de fenómenos físicos, como por ejemplo; la lluvia, el flujo de un río, la caída de una manzana. Estos fenómenos responden a un modelo matemático, es decir, los fenómenos están descritos por unos conjuntos de ecuaciones diferenciales, quizá, de orden superior, parciales, fáciles, difíciles e incluso imposibles de resolver analíticamente [5].

Dentro de la Mecánica de Fluidos, Al tratar las relaciones diferenciales para una partícula fluida se llega a un conjunto de ecuaciones diferenciales denominadas: **Las Ecuaciones de Navier-Stokes**, llamadas en honor a C. L. M. H. Navier (1785 – 1836) y Sir George G. Stokes (1819 - 1903), quienes fueron los primeros en deducirlas [6][7][8]. Son ecuaciones en derivadas parciales, no lineales, de segundo orden que resultan imposibles de resolver de manera analítica, convirtiéndolas en uno de los seis Problemas del Milenio cuya resolución analítica será premiada por el **Clay Mathematics Institute** [9][10].

Debido a este gran reto la tecnología y la ciencia avanza hasta nuestros días para desarrollar técnicas numéricas y de esta manera lograr una respuesta aproximada de las ecuaciones de Navier – Stokes. La técnica utilizada se denomina los Métodos de los Elementos Finitos, que con ayuda de los procesadores de última tecnología se convierten en una gran herramienta para el estudio de los fluidos [1][2][11].

Este artículo está dividido en cinco partes: La primera de ellas constituye la introducción, en la segunda se presenta un

breve estado del arte en la construcción de software para resolver problema de Ecuaciones Diferenciales. En la tercera parte se describe la metodología utilizada, donde se presenta todo el desarrollo matemático necesario para la elaboración del software. En la cuarta parte se presentan varios experimentos desarrollados con problemas del tipo Benchmark. Finalmente, las conclusiones son presentadas en el capítulo seis.

II. ESTADO DEL ARTE

El estudio de la dinámica de fluidos es importante porque en la actualidad se presentan un sinnúmero de programas comerciales e independientes. Los primeros son desarrollados por un gran equipo de expertos en métodos computacionales y poseen una gran experiencia en la programación, estos básicamente están enfocados en aplicaciones industriales debido a su fiabilidad de sus resultados alcanzan un estándar de muy alto nivel, su elevado costo, en la adquisición de las licencias, limita a un poco grupo de profesionales, principalmente a grupos de alto investigación en industrias de prestigio. Por otro lado, tenemos al software independiente, su desarrollo se lo lleva a cabo en cualquier ambiente de programación y se enfoca principalmente en las universidades e investigadores independientes, su criterio es desarrollar el criterio del programador para más tarde comenzar el manejo del software comercial. El contar con el código abierto estimula al ingeniero a conocer la estructura informática del programa y acoplarlo según la necesidad del usuario. Entre

los programas comerciales tenemos: ANSYS, Cosmos FLOW y por parte de los softwares independientes contamos con el más destacado el OpenFLOW [11].

III. METODOLOGÍA

Un fluido puede estar en movimiento o en reposo. Cuando el fluido no está en movimiento, el estudio se reduce a la distribución de presiones y se considera al fluido en condición hidrostática. Por otro lado, para un problema fluido-dinámico existen tres opciones para su estudio y son: Estudio experimental o análisis dimensional, Volumen de control o análisis integral y Partícula fluida o análisis diferencial. Este último será el foco de estudio de este artículo [6][7][8].

Las Ecuaciones de Navier–Stokes se derivan de dos principios: Conservación de la Masa y Conservación de la Cantidad de Movimiento en un Volumen de Control Infinitesimal V.C.I. Las ecuaciones de Navier – Stokes [3][6][7][8], para tres dimensiones son:

Ecuacion de continuidad de la masa

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad [1]$$

Ecuaciones de momentum

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \vec{F} - \mu \nabla^2 \vec{V} \quad [2]$$

Siendo:

ρ : densidad

μ : viscosidad

P : Campo escalar de presión

Vector nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{e}_3$$

Campo vectorial de la velocidad:

$$\vec{V} = U \hat{e}_{x_1} + V \hat{e}_{x_2} + W \hat{e}_{x_3}$$

Vector de fuerzas de cuerpo:

$$\vec{F} = F_{x_1} \hat{e}_{x_1} + F_{x_2} \hat{e}_{x_2} + F_{x_3} \hat{e}_{x_3}$$

El Método de los Elementos Finitos (FEM) es una técnica numérica aplicada a una Ecuación Diferencial o a un Sistema de Ecuaciones Diferenciales, dando como resultado una solución aproximada a la solución analítica [1].

En el proceso de FEM se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas, independientemente de que sean lineales o no lineales y de cualquier fenómeno físico que se trate, todos tendrán el mismo formato [1][2][4][5].

$$C_{ij} \frac{\partial T_j}{\partial t} + K_{ij} T_j = f_j \quad [3]$$

Donde:

C_{ij} : Matriz de amortiguamiento del término temporal

K_{ij} : Matriz de rigidez

f_j : Vector de carga

Las propiedades de la matriz de Rigidez son:

- K_{ij} es una matriz singular, posee infinitas o finitas soluciones. Necesita condiciones de frontera para eliminar la singularidad y dar una solución.
- K_{ij} es una matriz simétrica y en banda.
- K_{ij} es un espacio de Euclides de \mathbb{R}^n . Las dimensiones están en funciones de los grados de libertad. Es decir, tenemos dimensiones tanto como nodos tengamos en nuestra discretización del dominio.

La discretización de las Ecuaciones Diferenciales con el Método de los Elementos Finitos es [1][3][9][10]:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \mu \nabla^2 \vec{V} + \nabla p = \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \end{cases} \quad [4]$$

Las ecuaciones de momentum en la dirección x_1 , la dirección x_2 y la ecuación de conservación toman la forma:

$$K T = f \quad [5]$$

donde:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 0 & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad [6]$$

$$T = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ p_j \end{bmatrix} \quad [7]$$

$$f = \begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [8]$$

Describiendo cada uno de las matrices se obtiene:

$$\mathbf{K}_{11} = \mu \int_{r,s} \left[\frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial s} & -\frac{\partial x_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{bmatrix} \right]^T \left[\frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial s} & -\frac{\partial x_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{bmatrix} \right] |\det J| dr ds \quad [9]$$

$$\mathbf{K}_{13} = - \int_{r,s} \left[\frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial s} & -\frac{\partial x_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{bmatrix} \right]^T W_j |\det J| dr ds + \int_{\Gamma} [H_i]^T [W_j] \cdot \hat{n}_{x_1} |\det J| d\Gamma \quad [10]$$

$$\mathbf{f}_{x_1} = f_{x_1} \int_{r,s} [H_i]^T |\det J| dr ds + u \int_{\Gamma} [H_i]^T |\det J| d\Gamma \quad [11]$$

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{22} \quad [12]$$

$$\mathbf{K}_{23} = - \int_{r,s} \left[\frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} -\frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial r} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & -\frac{\partial x_2}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{bmatrix} \right]^T W_j |\det J| dr ds + \int_{\Gamma} [H_i]^T [W_j] \cdot \hat{n}_{x_2} |\det J| d\Gamma \quad [13]$$

$$\mathbf{f}_{x_2} = f_{x_2} \int_{r,s} [H_i]^T |\det J| dr ds + v \int_{\Gamma} [H_i]^T |\det J| d\Gamma \quad [14]$$

La resolución de las ecuaciones [6] – [14] permitirá tener la simulación de un fluido. La solución de este problema es el motivo de estudio de esta investigación.

IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para verificar la fiabilidad del software propuesto, se van a realizar varios experimentos utilizando los denominados problemas de Benchmark, que son ejemplos donde se conoce su solución y por lo tanto, es factible verificar la calidad del software desarrollado.

Ejemplo 1: En este caso se va a trabajar con un problema propuesto en [11]. Este problema modela una cavidad cuyas condiciones de frontera son del tipo Neuman y Dirichlet,

además de contar con un vector de carga $\vec{f}(x, y) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que aplica una fuerza en la dirección x

En el dominio Ω , sea $\forall \Omega \in [0, 1] \times [0, 1]$, y $\mu = 1$. En la Fig. 1 se presenta el dominio y su discretización.

Las soluciones analíticas de este problema son:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x^2 \\ -2xy \end{bmatrix} \quad \forall y \wedge x \in [0, 1]$$

$$p = x - 0.5 \quad \forall y \wedge x \in [0, 1]$$

Condiciones de frontera y dominio:

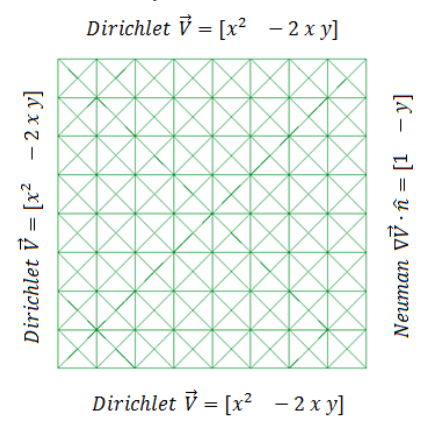


Fig. 1: Discretización del Dominio y Condiciones de Frontera del Problema 1 de Benchmark.

La simulación con BasicCFD_LINEAR 0.1 del campo de velocidades, es presentada en la Fig. 2.

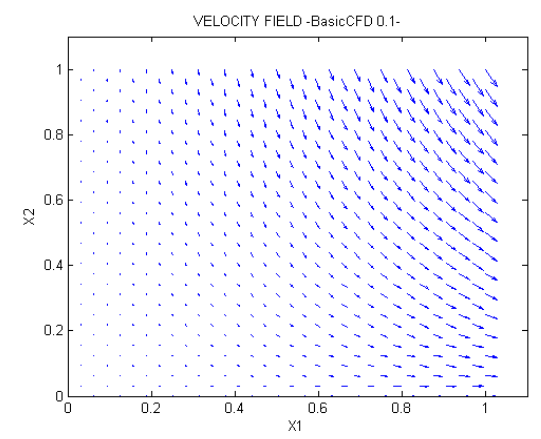


Fig. 2: Representación del campo de velocidades

La simulación con BasicCFD_LINEAR 0.1 del campo de presiones es presentada en la Fig. 3:

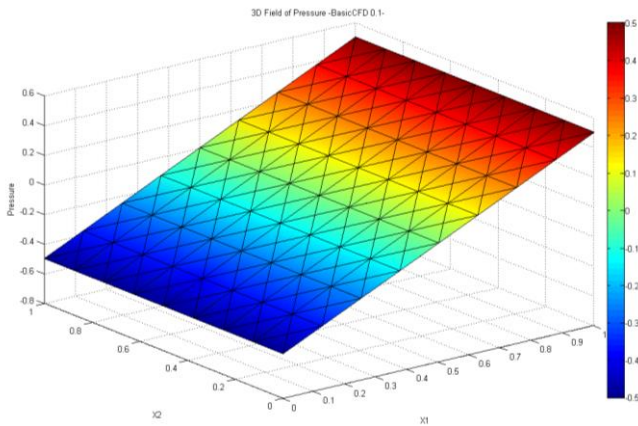


Fig. 3: Representación del campo de presiones.

En la Fig. 4 se observa la comparación del campo de velocidad entre la solución analítica y la solución generada con BasicCFD 0.1. Analíticamente el error es del 0.1%.

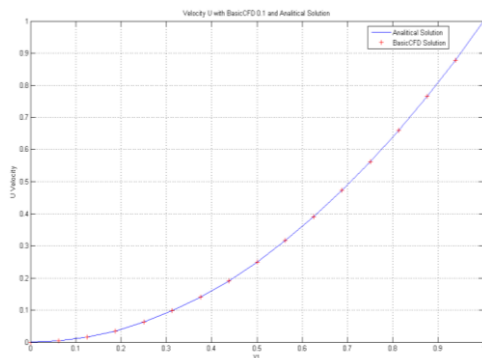


Fig. 4: Comparación de la solución real y la aproximada

Una vez comprobado la fiabilidad del software se propone un problema cuya solución analítica no existe.

Ejemplo 2: White [8], mecánica de fluidos. Este ejemplo modela el flujo alrededor de un cilindro en rotación en un fluido dinámico, donde se considera el campo gravitacional. Este tipo de fenómenos se lo conoce como el efecto Magnus. El cual indica que la rotación del cilindro genera las fuerzas de sustentación las mismas que permiten que un avión se eleve.

El análisis de la solución será a través del tiempo, desde $t=0$ hasta $t=5$ segundos, en la Fig. 5, al tiempo $t = 0$ (seg.) se observa el campo de velocidades del problema propuesto con BasicCFD_LINEAR 0.1.

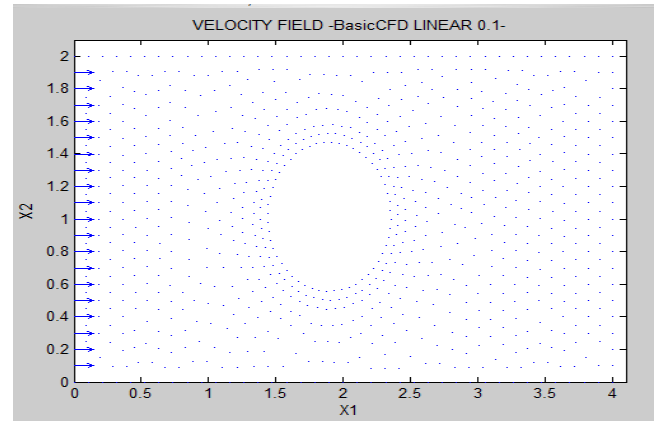


Fig. 5: Campo de velocidades del problema del flujo alrededor de un cilindro

En la Fig. 6, al tiempo $t = 2$ (seg.)

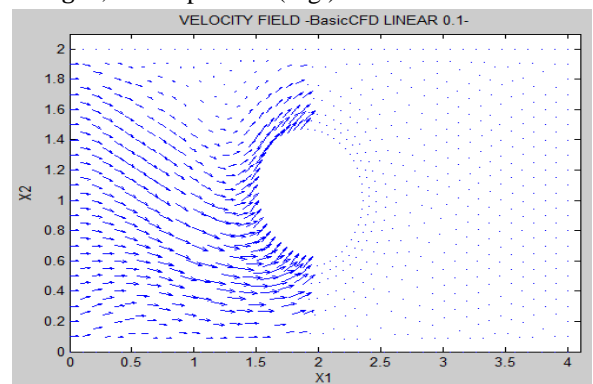


Fig. 6

$t = 5$ sec.

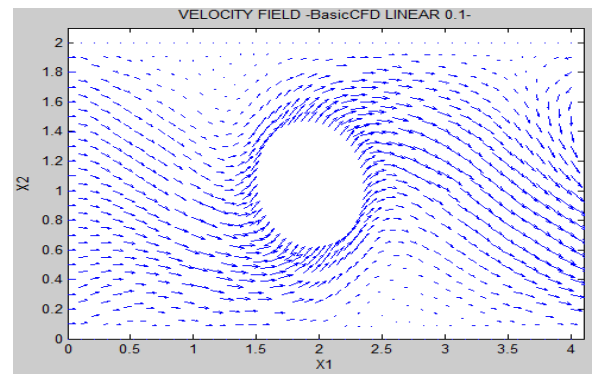


Fig. 7:

En la Fig. 8, al tiempo $t = 0.5$ (seg.) se observa el campo de presiones generado con BasicCFD_LINEAR 0.1. En la parte izquierda se observa como el campo de velocidades genera un cambio en la presión de todo el sistema.

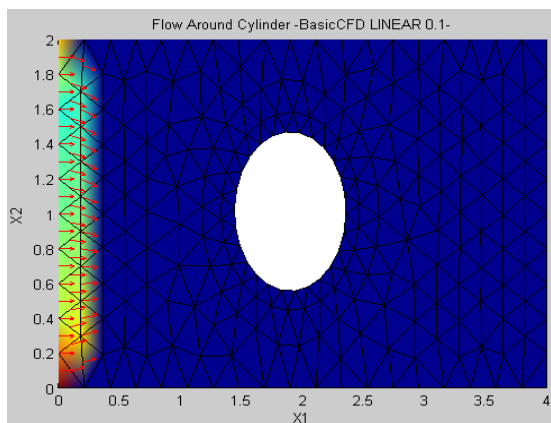


Fig. 8

En la Fig. 9, al tiempo $t = 2$ (seg.) se observa la distribución de presiones no es uniforme alrededor del cilindro, esta variación de presiones da origen a las fuerzas de sustentación.

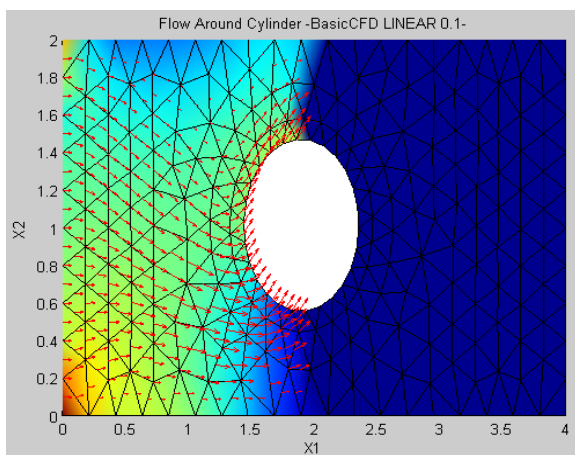


Fig. 9

En la Fig. 10, al tiempo $t = 5$ (seg.)

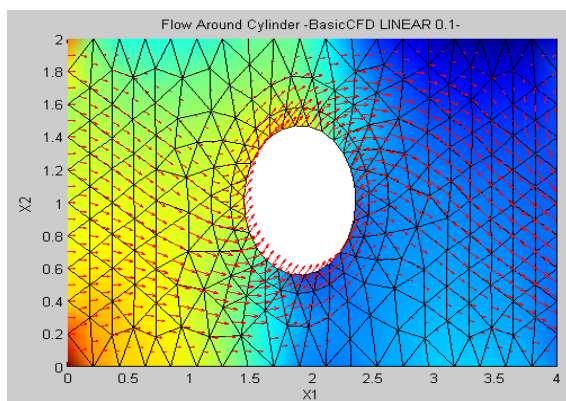


Fig. 10

V. CONCLUSIONES

En esta investigación se ha desarrollado un software denominado Basic_CFD_LINEAR 0.1, que es un programa de código abierto, desarrollado en la plataforma de MATLAB®, para obtener soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, mediante el método de los Elementos Finitos. El programa se especializa en resolver los problemas de fluidos incompresibles, viscosos, en régimen laminar.

De los experimentos y los análisis desarrollados al resolver los problemas de tipo Benchmark se desprende su versatilidad para encontrar la solución y presentar los resultados de manera gráfica, siendo amigable con el usuario. Además, es una propuesta de código abierto que puede ser encontrada en el sitio web:

BasicCFD.blogspot.com

En el futuro, se espera seguir añadiendo más módulos para ir mejorando las capacidades y enfrentar nuevos problemas de ingeniería.

REFERENCIAS

- [1] BATHE, Klaus J., Finite Element Procedures. Prentice Hall, Pearson Education, Inc. United Stated. 2006.
- [2] CHANDRUPATLA, Tirupathi R., BELEGUNDU, Ashok D., INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DEL ELEMENTO FINITO EN INGENIERÍA. 2ed. Editorial Prentice Hall, México. 1999.
- [3] DONEA Jean, HUERTA Antonio, Finite Element Methods for Flow Problems. Editorial WILEY, England. 2003.
- [4] ZIENKIEWICZ, O., MORGAN K., FINITE ELEMENTS AND APPROXIMATION. Editorial WILEY, London, 1980.
- [5] ZIENKIEWICZ, O., TAYLOR R., FINITE ELEMENTS METHODS, VOL. 1. 4ed. Mac Graw Hill. CIMNE, Barcelona.
- [6] MATAIX, C., MECÁNICA DE FLUIDOS Y MÁQUINAS HIDRÁULICAS. 2ed. Editorial Alfaomega. OXFORD. 1982.
- [7] STREETER, V., WYLE, B., BEDFORD, F., MECÁNICA DE FLUIDOS. 9ed. Editorial Mac Graw Hill. Colombia. 2000.
- [8] WHITE, F., MECÁNICA DE FLUIDOS. 6ed. Editorial Mac Graw Hill. España. 2008.
- [9] SANDOVAL S., María Luisa. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE FLUIDOS VISCOSOS CON ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS. Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. 1998.
- [10] GUTIÉRREZ M., Liana Iveth. MÉTODO DE ELEMENTO FINITO PARA SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE STOKES CON CONDICIÓN DE FRONTERA MIXTA EN DOMINIOS RECTANGULARES. Universidad de Puerto Rico. 2008.
- [11] DVORKIN, Eduardo N., GOLSCHMIT Marcela B, STORTI, Mario A., MECÁNICA COMPUTACIONAL, Vol. XXIX. Compilado de los trabajos presentados en el IX Congreso Argentino de Mecánica Computacional MECOM 2010.