

ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO



FACULTAD DE INGENIERIA GEOGRÁFICA Y DEL MEDIO AMBIENTE

PROYECTO DE TESIS DE GRADO

“DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA OBTENER
LAS ONDULACIONES GEOIDALES EN UNA AREA DEL DISTRITO
METROPOLITANO DE QUITO”

PAULA JADIDJA LIMA YACELGA

SANGOLQUÍ, DICIEMBRE 2005

CERTIFICADO

Por medio de la presente se certifica que bajo nuestra dirección, la señorita PAULA JADIDJA LIMA YACELGA ha realizado y concluido el proyecto de grado denominado “DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA OBTENER LAS ONDULACIONES GEOIDALES EN UNA AREA DEL DISTRITO METROPOLITANO DE QUITO ”de acuerdo con el plan previamente aprobado por el Consejo de la Facultad de Ingeniería Geográfica y del Medio Ambiente.

DR. ALFONSO TIERRA
DIRECTOR

ING. ALEXANDER ROBAYO
CODIRECTOR

Diciembre, 2005

DEDICATORIA

Dedico esta tesis primeramente a Dios por ser la luz que guía mi vida y a mis dos grandes tesoros, mis padres Fausto y Gloria, quienes con su infinito amor y entrega incondicional han sabido guiarme por el camino correcto. A ellos se los debo todo lo que soy y todo lo que seré. Muchas Gracias.

Paula

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Alfonso Tierra e Ing. Alexander Robayo, por su orientación oportuna y ayuda incondicional, que sin duda fue la base para que este proyecto salga adelante.

Al Ing. César Leiva, por el planteamiento de este tema, y por sus consejos, ayuda y asesoramiento desinteresado que me permitieron encontrar solución en los momentos difíciles.

A mi ñaño Marco, quien a pesar de encontrarse lejos siempre está presente en mi corazón, y ha constituido siempre un ejemplo de rectitud y amor.

A José Luis, mi mejor amigo y quién ocupa un lugar muy especial en mi corazón. Gracias por estar siempre a mi lado apoyándome, aconsejándome y dándome fuerzas para seguir adelante.

A mi mejor amiga Sandrita, quién siempre ha estado a mi lado en los malos y buenos momentos, quién con su alegría y buenos consejos han sabido darme la suficiente fuerza y confianza cuando más lo he necesitado.

A Karlita, por que en esta ultima etapa de carrera universitaria he encontrado en ella una amistad sincera y generosa que sin duda ha constituido un apoyo en todas las fases de la tesis.

A Fernando, gracias por la ayuda oportuna y desinteresada brindada en el transcurso de esta tesis.

A todo el personal que conforma el Instituto Geográfico Militar, en especial al Departamento de Geodesia, por toda la cooperación brindada en el desarrollo de este proyecto, y por que nunca faltó un gesto amable y generoso que me permitió desarrollar el trabajo con agrado.

A mis amigos, por que juntos hemos compartido momentos felices y tristes, que nos ha permitido crear un fuerte lazo de amistad que nada ni nadie lo podrá separar. Gracias por la ayuda incondicional.

A todos mis profesores, quienes con su paciencia y entrega han sabido formar no solamente buenos profesionales, sino también personas con principios morales y éticos.

Paula

INDICE

	TÍTULO	PÁG.
	TITULO.....	I
	DEDICATORIA.....	III
	AGRADECIMIENTOS.....	IV
	INDICE.....	VI
	LISTA DE FIGURAS.....	XI
	LISTA DE TABLAS.....	XIII
	GLOSARIO.....	XVII
	RESUMEN.....	XVIII
	ABSTRACT.....	XIX
	 CAPITULO I : INTRODUCCIÓN.....	 1
1.1	Antecedentes.....	1
1.2	Justificación.....	2
1.3	Objetivo General.....	2
1.4	Objetivos específicos.....	3
1.5	Localización del área del proyecto.....	3
	 CAPITULO II : FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	 5
2.1	Sistema NAVSTAR/GPS.....	5
2.1.1	Generalidades.....	5
2.1.2	Tipos de posicionamiento.....	9
2.1.3	Fuentes de errores en la determinación GPS	13
2.2	Superficies de referencia.....	18
2.2.1	Superficie física de la Tierra.....	18
2.2.2	El Elipsoide.....	18
2.2.3	El Cuasigeoide.....	20
2.2.4	El Geoide.....	20
2.2.4.1	EGM 96.....	21
2.3	Tipos de altura.....	22
2.3.1	Altura de tipo geométrico.....	23
2.3.1.1	Alturas niveladas.....	23
2.3.1.2	Alturas elipsoidales.....	24

2.3.2	Altura de tipo físico.....	25
2.3.2.1	Alturas dinámicas.....	26
2.3.2.2	Alturas ortométricas.....	27
2.3.2.3	Alturas normales.....	29
2.4	Nivelación diferencial_referencial GPS.....	30
2.4.1	Generalidades.....	30
2.4.2	Metodología.....	31
2.4.3	Precisiones.....	32
	CAPITULO III : COMPENSACIÓN POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADO.....	33
3.1	Introducción: Método de Mínimos Cuadrados.....	33
3.1.1	Matriz varianza covarianza.....	35
3.1.2	Matriz de pesos.....	36
3.2	Método paramétrico.....	37
3.2.1	Varianza a posteriori σ_0^2	39
3.2.2	Matriz varianza covarianza de los parámetros.....	41
3.2.3	Cálculo de la matriz de coeficientes “A”.....	42
3.2.4	Cálculo del vector “L”.....	43
3.2.5	Cálculo de la matriz de pesos.....	44
3.2.6	Iteraciones del método paramétrico.....	44
3.2.7	Condicionamiento del sistema.....	47
3.2.8	Resumen de la metodología utilizado en el ajuste de mínimos cuadrados con el método paramétrico.....	51
3.3	Prueba X^2.....	52
3.4	Prueba de Tendencia.....	53
3.5	Prueba de Exactitud.....	54
	CAPITULO IV : METODOLOGIA PARA DETERMINAR LAS ONDULACIONES GEOIDALES Y RESULTADOS.....	56
4.1	Marco lógico.....	56
4.1.1	Determinación de la Ondulación Geoidal a partir de GPS/Nivelación.....	56
4.1.2	Determinación de la Ondulación Geoidal a partir de GPS/Nivelación y del Modelo Geopotencial EGM 96	58

4.2	Validación de datos.....	60
4.3	Análisis de la Prueba X^2.....	61
4.3.1	Análisis del test varianza global para los modelos matemáticos que determinan las ondulaciones geoidales de un sector de Quito.....	60
4.3.1.1	Primera prueba (todas las observaciones).....	61
4.3.1.2	Segunda prueba (eliminación de residuales mayores a 3σ).....	63
4.3.1.3	Tercera prueba (Variación matriz de pesos).....	64
4.3.1.3.1	Matriz identidad.....	65
4.3.1.3.2	Cambio de las unidades de las varianzas a milímetros.....	67
4.3.1.3.3	Cambio de las unidades de las varianzas a centímetros.....	69
4.3.1.3.4	Cambio de las unidades de las varianzas a kilómetros.....	70
4.3.1.3.5	Inversa de la distancia en kilómetros entre puntos nivelados.....	71
4.3.1.4	Cuarta prueba (eliminación de posibles errores groseros).....	73
4.3.2	Prueba X^2 unilateral.....	78
4.3.3	Análisis del test varianza global para los modelos matemáticos que determinan la separación entre el geoide local y el geoide del EGM 96.....	79
4.4	Cálculo de las ondulaciones geoidales por GPS asociado a Nivelación.....	81
4.5	Cálculo de las Ondulaciones geoidales a partir de la utilización del EGM 96.....	85
4.5.1	Ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Nivelación y por el modelo EGM 96.....	87
4.6	Elaboración de las cartas de ondulación geoidal generadas por GPS/Nivelación.....	88
4.6.1	Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 235 observaciones.....	89
4.6.2	Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 100 observaciones.....	91
4.6.3	Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 50 observaciones.....	92
4.6.4	Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 25 observaciones.....	95
4.6.5	Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 8 observaciones.....	96

4.7	Elaboración de la carta de ondulación geoidal utilizando el modelo Geopotencial EGM 96.....	98
4.8	Análisis de las Cartas de Ondulaciones Geoidales.....	99
4.8.1	Análisis de los residuales 235.....	101
4.8.2	Análisis de las discrepancias 100.....	103
4.8.3	Análisis de las discrepancias 50.....	104
4.8.4	Análisis de las discrepancias 25.....	105
4.8.5	Análisis de las discrepancias 8.....	107
4.8.6	Análisis de las discrepancias EGM 96.....	108
4.9	Ondulaciones geoidales obtenidas por el modelo matemático.....	109
4.9.1	Carta de ondulación geoidal generada a partir del modelo matemático ajustado con 234 observaciones.....	111
4.9.2	Carta de discrepancias GPS/Nivelación – modelo matemático.....	113
4.9.3	Parámetros del modelo matemático ajustado con 100, 50, 25 y 8 observaciones.....	114
4.10	Cálculo de las Ondulaciones Geoidales generadas a partir de GPS/Nivelación asociado al EGM 96.....	117
4.10.1	Carta geoidal generada a partir de GPS/Nivelación asociado al EGM 96 con 234 observaciones.....	121
4.10.2	Carta de residuales entre el método GPS/Nivelación asociado al EGM 96 y el GPS/Nivelación.....	122
	CAPITULO V: ANALISIS Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS....	124
5.1	Análisis de Tendencia de las cartas de ondulaciones geoidales generados por GPS/Nivelación.....	124
5.2	Análisis de Exactitud de las cartas de ondulaciones geoidales generadas por GPS/ Nivelación.....	125
5.3	Análisis de Tendencia de los modelos matemáticos.....	125
5.4	Análisis de Exactitud de los modelos matemáticos.....	126
5.5	Validación de resultados.....	126
5.5.1	Validación de los resultados del modelo matemático.....	127
5.5.1.1	Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 234 observaciones.....	128
5.5.1.2	Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 100 observaciones.....	129

5.5.1.3	Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 50 observaciones.....	130
5.5.1.4	Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 25 observaciones.....	132
5.5.1.5	Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 8 observaciones.....	133
5.5.2	Validación del cálculo de ondulaciones geoidales a partir de la integración de GPS/Nivelación con el EGM 96.....	139
5.5.3	Validación de las Cartas de Ondulaciones Geoidales.....	141
	CAPITULO VI: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	148
6.1	Conclusiones.....	148
6.2	Recomendaciones.....	150
	BIBLIOGRAFÍA.....	151
	ANEXOS	

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Croquis de ubicación del proyecto.....	4
Figura 2.1	Principio básico del posicionamiento con el Sistema Navstar/GPS.....	6
Figura 2.2	Posicionamiento estático con dos receptores.....	10
Figura 2.3	Multitrayectoria.....	16
Figura 2.4	Excentricidad del centro de fase de la antena.....	17
Figura 2.5	Geometría de la elipse.....	19
Figura 2.6	Superficies de Referencia y Ondulación Geoidal.....	21
Figura 2.7	Geoide del EGM 96.....	22
Figura 2.8	Nivelación geométrica.....	23
Figura 2.9	Alturas Niveladas.....	24
Figura 2.10	Altitud elipsoidal.....	25
Figura 2.11	Alturas ortométricas.....	28
Figura 2.12	Alturas normales.....	30
Figura 2.13	Nivelación diferencial GPS.....	31
Figura 3.1	Distribución Chi-cuadrado con distintos grados de libertad....	52
Figura 4.1	Determinación de la ondulación geoidal a partir del EGM 96 y GPS/Nivelación.....	59
Figura 4.2	Gráfico tridimensional de las 284 ondulaciones geoidales “reales”.....	74
Figura 4.3	Separación del geoide con respecto al elipsoide.....	74
Figura 4.4	Gráfico tridimensional de las ondulaciones geoidales “reales” sin posibles errores groseros.....	75
Figura 4.5	Gráfico tridimensional de las ondulaciones geoidales “reales”.....	84
Figura 4.5.1	Gráfico tridimensional de las Alturas Niveladas.....	84
Figura 4.6	Ventana del EGM 96.....	85
Figura 4.7	Carta de Ondulación Geoidal 235.....	90
Figura 4.8	Carta de Ondulación Geoidal 100.....	92
Figura 4.9	Carta de Ondulación Geoidal 50.....	94
Figura 4.10	Carta de Ondulación Geoidal 25.....	96
Figura 4.11	Carta de Ondulación Geoidal 8.....	97
Figura 4.12	Carta de Ondulación Geoidal EGM96	99
Figura 4.13	Residuales 235.....	102
Figura 4.14	Discrepancias 100.....	103

Figura 4.15	Discrepancias 50.....	105
Figura 4.16	Discrepancias 25.....	106
Figura 4.17	Discrepancias 8.....	107
Figura 4.18	Discrepancias EGM 96.....	108
Figura 4.19	Carta Geoidal Modelo Matemático 234.....	113
Figura 4.20	Carta de residuales entre GPS/N – Modelo Matemático 234..	114
Figura 4.21	Carta de Ondulación Geoidal $N_{GPS+EGM 96}$	121
Figura 4.22	Carta de Discrepancias $N_{GPS+EGM} - N_{GPS/Niv}$	123
Figura 5.1	Croquis de ubicación de los puntos de validación.....	127

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1	Características de las señales transmitidas por el Sistema Navstar/GPS.....	9
Tabla 2.2	Tiempos de observación en el método estático.....	11
Tabla 2.3	Tiempos de observación en el método estático rápido.....	11
Tabla 2.4	Precisiones en posicionamiento GPS.....	13
Tabla 2.5	Fuente de error en el posicionamiento GPS.....	14
Tabla 2.6	Diferencia de precisiones entre GPS y DGPS.....	32
Tabla 3.1	Números de condición.....	50
Tabla 4.1	Primera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con 284 observaciones.....	62
Tabla 4.2	Segunda prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos sin residuales mayores a 3σ	63
Tabla 4.3	Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con la matriz identidad.....	65
Tabla 4.4	Tercera prueba: Eliminación de residuales superiores a 3σ del modelo 1.....	66
Tabla 4.5	Tercera prueba: Eliminación de residuales superiores a 3σ del modelo 3.....	67
Tabla 4.6	Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con una matriz de pesos conformada con varianzas en milímetros.....	68
Tabla 4.7	Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con una matriz de pesos conformada con varianzas en centímetros.....	69
Tabla 4.8	Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con una matriz de pesos conformada con varianzas en kilómetros.....	70
Tabla 4.9	Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con una matriz de pesos conformada con la inversa de la distancia entre puntos nivelados en kilómetros....	72
Tabla 4.10	Cuarta prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos sin posibles errores groseros.....	76

Tabla 4.11	Cuarta prueba: Eliminación de residuales superiores a 3σ del modelo 3.....	76
Tabla 4.11.R	Tabla resumen de las pruebas Chi-Cuadrado.....	77
Tabla 4.12	Tabla resumen de la prueba X^2 unilateral del tercer modelo matemático.....	78
Tabla 4.13	Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos que determinan la diferencia que existe entre el geoide local y el geoide del EGM 96.....	80
Tabla 4.14	Eliminación de residuales superiores a 3σ del modelo 3.....	80
Tabla 4.15	Altura elipsoidal, nivelada y ondulación geoidal obtenida a través del método GPS/Niv.....	82
Tabla 4.16	Datos estadísticos de las 235 observaciones obtenidas por GPS/Nivelación.....	83
Tabla 4.17	Ondulación geoidal EGM 96.....	86
Tabla 4.18	Datos estadísticos de las 235 observaciones obtenidas por el EGM 96	86
Tabla 4.19	Ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Niv y EGM96.....	87
Tabla 4.20	Datos estadísticos de 235 observaciones $N_{GPS}-N_{EGM 96}$	88
Tabla 4.21	Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar las Carta de Ondulación Geoidal 235.....	89
Tabla 4.22	Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar las Carta de Ondulación Geoidal 100.....	91
Tabla 4.23	Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar las Carta de Ondulación Geoidal 50.....	93
Tabla 4.24	Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar las Carta de Ondulación Geoidal 25.....	95
Tabla 4.25	Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar las Carta de Ondulación Geoidal 8.....	97
Tabla 4.26	Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar las Carta de Ondulación Geoidal EGM 96.....	98
Tabla 4.27	Ondulaciones interpoladas y sus respectivas diferencias con GPS/Nivelación.....	100
Tabla 4.28	Datos estadísticos de las discrepancias y residuales de la tabla 4.27.....	101

Tabla 4.29	Parámetros del modelo $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 234 observaciones.....	110
Tabla 4.30	Ondulaciones geoidales determinadas por el modelo $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 234 observaciones.....	110
Tabla 4.31	Datos estadísticos de 234 residuales obtenidos por $N_{GPS/N} - N_{Modelo\ 234}$	111
Tabla 4.32	Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático para elaborar la Carta Geoidal Modelo Matemático 234.....	112
Tabla 4.33	Parámetros del modelo $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ obtenidos a partir del ajuste de mínimos cuadrados con 100, 50, 25 y 8 observaciones.....	115
Tabla 4.34	Residuales y/o discrepancias generadas a partir de los modelos matemáticos ajustados con 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones.....	116
Tabla 4.35	Datos estadísticos de los residuales y/o discrepancias generadas a partir de los modelos matemáticos ajustados con 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones.....	117
Tabla 4.36	Parámetros finales para la determinación de la separación entre el geode local y el geode gravitacional del EGM96.....	119
Tabla 4.37	Asociación de GPS/Nivelación con el modelo geopotencial EGM 96.....	120
Tabla 4.38	Datos estadísticos de las discrepancias entre $N_{GPS+EGM} - N_{GPS/Niv}$	120
Tabla 5.1	Test de tendencia de las cartas geoidales.....	124
Tabla 5.2	Test χ^2 para las cartas geoidales.....	125
Tabla 5.3	Test de tendencia de los modelos matemáticos.....	125
Tabla 5.4	Test de exactitud para los modelos matemáticos.....	126
Tabla 5.5	Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 234 observaciones.....	128

Tabla 5.6	Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 100 observaciones.....	130
Tabla 5.7	Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 50 observaciones.....	131
Tabla 5.8	Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 25 observaciones.....	132
Tabla 5.9	Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 8 observaciones.....	134
Tabla 5.10	Resumen de diferencias entre GPS/Niv y modelos ajustados con 234, 100, 50, 25 y 8.....	135
Tabla 5.11	Comparación entre la tolerancia máxima obtenida en el cierre de la nivelación geométrica con la discrepancias obtenidas con los modelos.....	137
Tabla 5.12	Comparación entre la tolerancia máxima obtenida en el cierre de la nivelación trigonométrica con la discrepancias obtenidas con los modelos.....	138
Tabla 5.13	Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a partir de la integración de GPS/Niv con EGM 96.....	140
Tabla 5.14	Ondulaciones geoidales y discrepancias generadas en las Cartas de Ondulación Geoidal 235, 100, 50, 25, y 8.....	142
Tabla 5.15	Comparación entre la tolerancia máxima en el cierre de la nivelación geométrica con la discrepancias obtenidas en las cartas geoidales.....	144
Tabla 5.16	Comparación entre la tolerancia máxima en el cierre de la nivelación trigonométrica con la discrepancias obtenidas en las cartas geoidales.....	146

GLOSARIO DE TÉRMINOS

AS	Anti-Spoofing
C/A	Coarse Acquisition
DGPS	Diferencial Global Positioning System
DoD	Department of Defense
EGM 96	Earth Gravitational Model 1996
GSFC	Goddard Space Flight Center
MMC	Método de Mínimos Cuadrado
MVC	Matriz Varianza Covarianza
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NAVSTAR/GPS	NAVigation System With Time and Ranging/ Global Positioning System
NIMA	National Imagery and Mapping Agency
NNSS	Navy Navigation Satellite System
PPS	Precise Positioning Service
RF	Radio Frecuencia
SA	Selective Availability
SPS	Standard Positioning Service
UTM	Universal Transverse Mercator
WGS 84	World Geodetic System 1984
TDRSS	Tracking and Data Relay Satellite System
SLR	Satellite Laser Range

RESUMEN

A través del GPS se obtienen coordenadas geodésicas y altura elipsoidal en el sistema WGS 84, esta altura elipsoidal en la práctica no tiene validez por estar referida al elipsoide, más no al nivel medio del mar (geoide), razón por la cual la presente tesis tiene como objetivo principal realizar un modelo matemático que permita calcular las ondulaciones geoidales, que son la diferencia que existe entre el geoide y el elipsoide de cualquier punto.

Esta investigación se centra básicamente en la creación de dos modelos matemáticos que trabajan en función de las coordenadas UTM que facilita el GPS; el primer modelo calcula la ondulación geoidal del lugar requerido, mientras que el segundo modelo da como resultado la separación que existe entre el geoide local y el geoide del modelo geopotencial EGM 96.

Con los datos obtenidos a partir de los modelos matemáticos y con la metodología que se explica en el transcurso de este proyecto se determinará las alturas sobre el nivel medio del mar de cualquier punto. La presente investigación está referida exclusivamente a un sector del Distrito Metropolitano de Quito para que pueda ser utilizado por los usuarios GPS.

ABSTRACT

Through the GPS, geodetic coordinates and ellipsoidal height are obtained in the WGS 84 system, this ellipsoidal height actually does not have validity because it refers to the ellipsoid, not at the mid sea level (geoid), for this reason this thesis must have as a primary target to make a mathematical model that allows the calculation of geoidal undulations, they are the difference between the geoid and the ellipsoid of any point.

This investigation is basically centered in the creation of two mathematical models that work based on the coordinates UTM that the GPS gives; the first model calculates the geoidal undulation of the required place, whereas the second model gives like a result the separation between the local geoid and the geoid of geopotential model EGM 96.

Using the data collected from these mathematical models and with the methodology that is explained in the course of this project it will determine the heights over the mid sea level of any point. The present investigation is exclusively dedicated to a sector of the Metropolitan District of Quito so that it can be used by GPS users.

CAPÍTULO I

INTRODUCCION

1.1 Antecedentes

El GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) proporciona a los usuarios coordenadas geodésicas (latitud, longitud y altura elipsoidal) de cualquier lugar sobre la superficie terrestre en el Sistema WGS 84. En la práctica la altura elipsoidal no es útil para trabajos de ingeniería por estar referida a un sistema geométrico y no al nivel medio de los mares. Para dar utilidad a los datos que brinda el GPS es necesario conocer la ondulación geoidal del punto observado, ya que asociando la altura elipsoidal y la ondulación geoidal se puede conocer la altura sobre el nivel medio del mar de cualquier punto.

Una de las alternativas que actualmente existe para determinar las ondulaciones geoidales son los modelos geopotenciales globales, los cuales a través de largas longitudes de onda representan el campo de gravedad de toda la Tierra. Entre los modelos más difundidos se encuentra el EGM 96 (**E**arth **G**eopotencial **M**odel) que permite calcular las ondulaciones geoidales de todo el planeta disponiendo solamente de las coordenadas geodésicas del lugar, y brindando una precisión media de $\pm 1\text{m}$. Existen casos prácticos en donde se necesita una mejor precisión, por lo que aparece la necesidad de desarrollar modelos geoidales locales que se acoplen de mejor manera a las condiciones propias del lugar.

Actualmente el Ecuador y específicamente el Instituto Geográfico Militar no cuentan con modelos geoidales locales que permitan optimizar el uso del GPS y obtener con mayor facilidad las alturas ortométricas de cualquier lugar dentro del Ecuador. El Departamento de Geodesia del IGM ha realizado varias mediciones de control geodésico a través de nivelación diferencial y GPS de precisión dentro del Distrito Metropolitano de Quito, datos necesarios para desarrollar el modelo matemático que permitirá determinar las ondulaciones geoidales de un sector de Quito.

1.2 Justificación

En la mayoría de trabajos de posicionamiento como obras de ingeniería, levantamientos geodésicos y topográficos es necesaria la determinación de la altura ortométrica (altura referida al geoide), por lo que surge la necesidad de transformar la altura geométrica obtenida por el GPS a una altura ortométrica.

La exigencia de obtener coordenadas con alta precisión en altimetría obliga a desarrollar un mayor conocimiento de las ondulaciones geoidales (N), ya que a través de estas se puede relacionar la altura geométrica y la altura ortométrica de cualquier lugar sobre el globo terrestre. Por tal motivo el modelamiento de un geoide local cobra vital importancia en el posicionamiento vertical.

El IGM preocupado por mejorar sus servicios y los resultados de sus procesos relacionados con la obtención de alturas ortométricas a partir del posicionamiento satelital, propone el proyecto “DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA OBTENER LAS ONDULACIONES GEOIDALES DE UN SECTOR DEL DISTRITO METROPOLITANO DE QUITO”, lo cual permitirá a los usuarios GPS realizar posicionamientos verticales con mayor precisión.

1.3 Objetivo General

Determinar el modelo matemático para la obtención de ondulaciones geoidales que mejor se adapte a un área del Distrito Metropolitano de Quito.

1.4 Objetivos Específicos

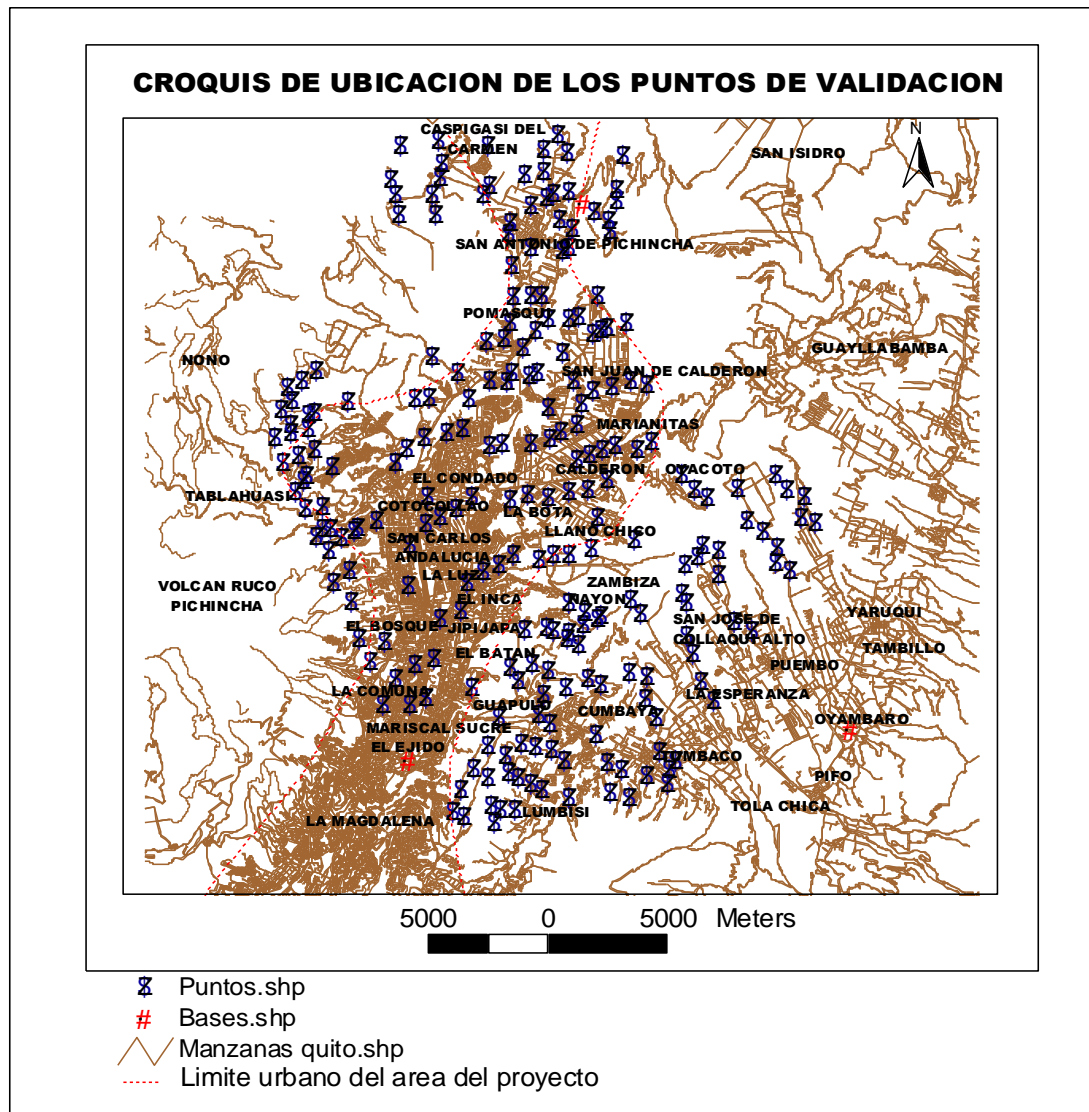
1. Recopilar y validar los datos del control geodésico del Distrito Metropolitano de Quito obtenidos a través de nivelación diferencial y GPS de precisión.
2. Analizar varios modelos matemáticos para la obtención de ondulaciones geoidales que se adapten mejor a los datos del proyecto.
3. Evaluar el modelo matemático escogido.

1.5 Localización del área del proyecto

El proyecto se realizó en el Distrito Metropolitano de Quito, de norte a sur desde San Antonio de Pichincha hasta la Mariscal Sucre y de este a oeste desde Puembo hasta las faldas del Volcán Rucu Pichincha, abarcando un área aproximada de 490 km² (25x20 km). La zona de estudio presenta una altitud media de 2650 m, una altitud máxima de 3429.08 m y una altitud mínima 2096.49 m sobre el nivel medio del mar.

En la figura 1.1 se determina la distribución de las observaciones representadas con un triángulo de color azul, utilizadas para la determinación de los parámetros de los modelos matemáticos; y con un círculo rojo se distinguen las bases empleadas para el posicionamiento GPS. El croquis de ubicación está a una escala aproximada de 1:250000, en donde se reconocen los principales sectores de la ciudad de Quito.

Figura 1.1 Croquis de ubicación del proyecto



CAPITULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Sistema NAVSTAR/GPS

2.1.1 Generalidades

El primer sistema de posicionamiento a través de satélites denominado TRANSIT fue desarrollado por los Estados Unidos de Norteamérica a principios de los años 60's, exclusivamente para uso militar, pero por su éxito se pone a disposición del personal civil a partir de 1967 recibiendo el nombre de **Navy Navigation Satellite System (NNSS)**.

Las principales deficiencias del sistema TRANSIT fueron, en primer lugar el tiempo que necesitaba para obtener la posición de un determinado punto, y en segundo lugar la baja precisión de sus resultados, el cual oscilaba alrededor de 250 m, por tal motivo el Departamento de Defensa (**Department of Defense - DoD**) desarrolló un nuevo sistema de navegación para reemplazarlo y lo denominaron NAVSTAR/GPS que en inglés significa **NAVigation System With Time and Ranging/ Global Positioning System**, el cual es un sistema de radio navegación satelital que brinda a usuarios de todo el planeta la posición tridimensional de cualquier punto de la superficie terrestre.

Los objetivos iniciales del Sistema NAVSTAR/GPS fueron los siguientes:

1. Precisión de posicionamiento al centímetro.
2. Determinación exacta de velocidades y tiempo.
3. Disponibilidad de datos en cualquier momento y lugar del mundo.
4. Disponibilidad de por lo menos 4 satélites sobre el horizonte en cualquier parte del mundo.
5. Independiente a los cambios climáticos.

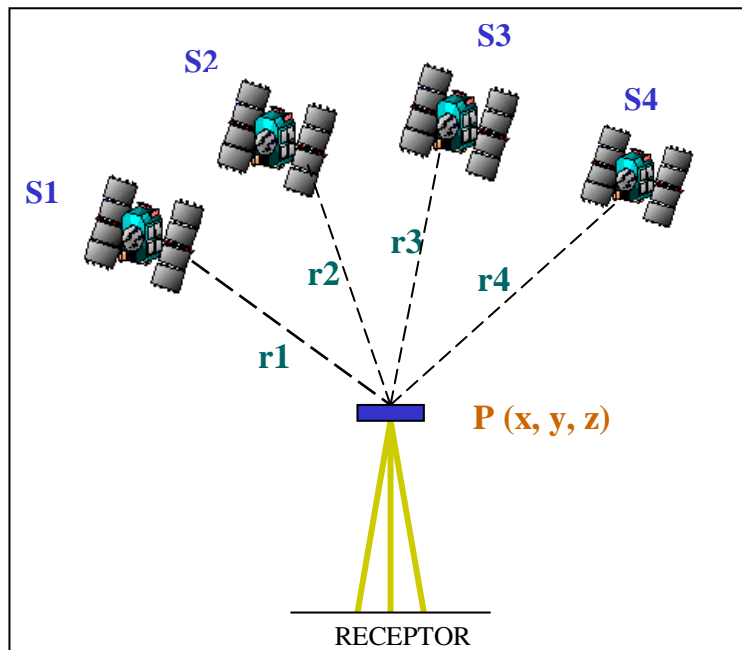
Para el cumplimiento de los objetivos antes señalados el sistema NAVSTAR/GPS cuenta desde 1994 con una constelación de 24 satélites (21 en operación y 3 en reserva) ubicados a aproximadamente 20200 Km de altura, los cuales se desplazan a una velocidad de 14500 Km/h, repartidos en 6 planos orbitales casi circulares, con una inclinación aproximada de 55°. Esta disposición permite que en cualquier parte del mundo sean visibles siempre entre 5 a 8 satélites. El período orbital es de 12 horas siderales, repitiéndose todos los días la geometría de los satélites con 4 minutos de retraso al día anterior referido al Tiempo Universal.

El principio fundamental del GPS consiste en calcular la pseudo-distancia¹ que existe entre el receptor y el satélite a través de la medición del tiempo (Ver figura 2.1). Las coordenadas de los satélites respecto al geocentro son determinadas anteriormente con ayuda de las efemérides.

$$\text{Distancia} = \text{Tiempo empleado} \times \text{velocidad de la luz} \quad (2.1)$$

Para obtener las coordenadas de cualquier punto se necesitan por lo menos de 4 satélites para resolver las 4 incógnitas X, Y, Z y t (tiempo), esta última es necesaria ya que los receptores no disponen de relojes estables como los satélites, ocasionando un error en la sincronización de tiempos entre receptor y satélite.

Figura 2.1 Principio básico del posicionamiento con el Sistema NAVSTAR/GPS.



El sistema NAVSTAR/GPS está conformado por tres segmentos conocidos como *Segmento Espacial* (satélites), *Segmento de Control* (estaciones terrestres) y *Segmento de los Usuarios* (receptores).

El segmento espacial está conformado por los satélites GPS, que mandan señales de radio desde su ubicación en el espacio. Normalmente existe un número mayor de satélites, pues se mandan nuevos para remplazar los antiguos, cada satélite tiene una

¹ Denominada también falsa distancia debido a que existe un error de sincronización entre los relojes del receptor y satélite lo que no permite calcular la distancia verdadera. (TIERRA, 1995)

vida promedio de siete años y medio. Estos cuentan con relojes atómicos de Rubidio y Cesio de alta precisión. Hasta el momento se cuentan con tres generaciones de satélites: 1) Block I, fueron los primeros satélites lanzados al espacio desde 1978 a 1985, actualmente están inoperantes; 2) Block II, estos satélites fueron puestos en órbita con ayuda de transbordadores espaciales, 9 entre 1989 y 1990 y 19 adicionales hasta 1997; 3) Block IIR, el primer satélite será lanzado en el 2009 y el resto hasta el 2030, su función es reemplazar a los satélites del Bloque II.

El segmento de control está conformado por 5 estaciones de seguimiento localizadas en todo mundo. La estación maestra de control está ubicada en Colorado Springs (USA) y las otras cuatro estaciones se encuentran en Kwajalein, Ascensión, Diego García, Hawái y Colorado Springs. Los objetivos principales del monitoreo continuo son: 1) calcular los datos de ajuste de las efemérides; 2) calibrar los relojes; 3) controlar el funcionamiento de los satélites y actualizar los mensajes de navegación.

El segmento del usuario está conformado por todos los receptores y sus respectivos programas de procesamiento de datos. Los receptores transforman las señales emitidas por los satélites en posición, velocidad y tiempo, y tienen diversos campos de aplicación como en topografía, geodesia, navegación y transferencia de hora.

Actualmente en el mercado existen más de 100 receptores, lo que hace difícil una descripción generalizada del mismo, pero los componentes esenciales de todo receptor son: la antena, sección de RF (**R**adio **F**recuencia), microprocesador, oscilador, fuente de alimentación, dispositivo de control y dispositivo de almacenamiento. Entre los accesorios se encuentran la interfaz de usuario, memoria, dispositivos de puesta en estación, puertos, entre otros.

Los satélites NAVSTAR/GPS transmiten 3 tipos de señales: código, portadora y mensajes de navegación.

Las señales de los códigos se dividen en dos tipos: código P y código C/A. El primero es conocido también como PPS (**P**recise **P**ositioning **S**ervice) y es el mismo para todos los satélites. El código C/A es de fácil adquisición, es conocido como SPS (**S**tandard **P**ositioning **S**ervice) y es único para cada satélite.

Las señales de la portadora sirven para determinar los efectos producidos por la refracción ionosférica en la transmisión de ondas. La señal GPS consta de dos portadoras en la banda L y cada una se obtiene a partir de la multiplicación de la frecuencia fundamental ($f_0 = 10.23 \text{ MHz}$) por un valor ya determinado.

$$L1 = 154 \times f_0 = 1575.42 \text{ MHz} \quad (2.2)$$

$$L2 = 120 \times f_0 = 1227.60 \text{ MHz} \quad (2.3)$$

Las dos portadoras solas no aportan con ninguna clase de información por lo que el sistema GPS realiza una modulación sobre las portadoras con ayuda de los códigos. La portadora L1 es modulada por los códigos P y C/A y la portadora L2 es modulada solo por el código P.

Los mensajes de navegación contienen los datos que el usuario necesita para realizar cálculos y operaciones necesarias para la navegación como por ejemplo el estado de los satélites, sincronización de los relojes, efemérides, correcciones por retardos atmosféricos, almanaque de toda la constelación, parámetros para corregir errores por tiempo. Esta información es generada a razón de 50 bits por segundo (bps).

La tabla 2.1 indica alguna de las características generales, como frecuencia, longitud de onda y período de repetición de las distintas señales transmitidas por el sistema NAVSTAR/GPS (TIERRA, 1995).

Tabla 2.1 Características de las señales transmitidas por el Sistema NAVSTAR

Tipo de señal	Frecuencia	Longitud de onda	Período de repetición
Portadora L1	1575.42 MHz	19.05 cm	
Portadora L2	1227.60 MHz	24.45 cm	
Código P	10.23 Mbps	29.31 cm	267 días
Código C/A	1.023 Mbps	293.1 m	1 ms
Mensajes de Navegación	50 bps		

2.1.2 Tipos de posicionamiento

Los tipos de posicionamiento se pueden determinar en función de algunas variables, las cuales pueden ser las siguientes: (IGN, Bolivia, 2004)

- Observable² utilizada
 - Código (precisión del orden de metros)
 - Portadora (precisión del orden de centímetros y milímetros)

- Receptor
 - Estático: el receptor no se mueve durante la observación
 - Cinemática: el receptor se mueve durante la observación
 - Híbridos: combinación de los dos métodos anteriores

- Tipo de solución
 - Posicionamiento absoluto: coordenadas X, Y, Z de un punto aislado.
 - Posicionamiento relativo o diferencial: se obtiene coordenadas de un punto con respecto a otro (base) Dx, Dy, Dz.

- Disponibilidad de la solución
 - Tiempo real: los resultados se obtienen en campo.
 - Post-proceso: la solución se la obtiene en gabinete.

La clasificación de los tipos de posicionamiento se realizará en función de la fase de la portadora.

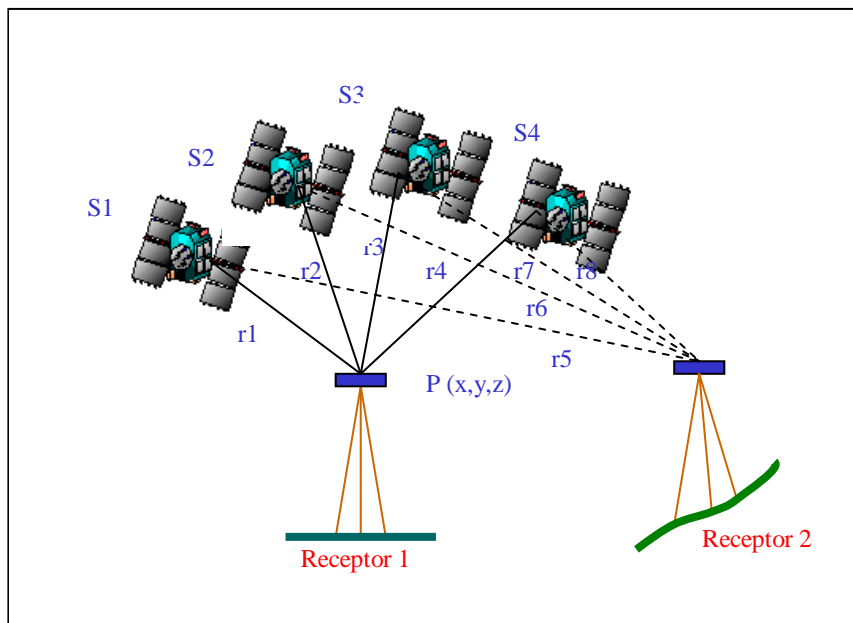
Método Estático: Este tipo de posicionamiento se realiza mediante la observación de receptores fijos (Ver figura 2.2). La precisión está en función del tiempo de posicionamiento, del equipo utilizado y de la geometría de los satélites.

² Es la medida de la distancia que existe entre el receptor y el satélite, que se obtiene de las medidas del tiempo o de las diferencias de fase, las cuales se basan en la comparación entre la señal enviada por el satélite al receptor y la señal que genera el receptor.

El tiempo es proporcional a la distancia entre puntos, por lo general el posicionamiento varía desde decenas de minutos hasta algunas horas. Además influyen el número de satélites, ambigüedades, frecuencias utilizadas, intervalos en la toma de datos y la precisión deseada.

Este método es utilizado para distancias grandes y ofrece una mejor precisión: 5mm + 1ppm en la base³.

Figura 2.2 Posicionamiento estático con dos receptores



Fuente: Instituto Geográfico Nacional, Bolivia, 2004

En la tabla 2.2 se indica el tiempo de observación que se debe realizar con el posicionamiento estático en diferentes longitudes de línea (IGN, Bolivia, 2004).

Tabla 2.2 Tiempos de observación en el método estático

Longitud línea	Número de satélites	Tiempo de observación	Precisión
20-50 Km	>4	2-3 horas	5mm + 1ppm
50-100 Km	>4	Min. 3 horas	5mm + 1ppm
> 100 Km	>4	Min. 4 horas	5mm + 1ppm

Método Estático Rápido: Para este tipo de posicionamiento se necesitan receptores

³ 1 ppm corresponde a 1mm de error en una base³ de 1 Km y a 1 cm de error en distancias mayores a 10 km

de doble frecuencia, para que el cálculo de las ambigüedades se lo realice en minutos, o sino se debe observar por lo menos 6 satélites en un lapso de 8 minutos.

Es aconsejable que la línea base no mida más de 20 Km, y que se disminuyan los intervalos de medida a 1 o 3 segundos (en el estático normal los intervalos de medida son de 15, 20 o 30 segundos).

Las ventajas de este método son: la rapidez, la facilidad y la precisión, la cual está alrededor de 10mm + 1ppm. Es ideal para levantamientos pequeños y redes.

La tabla 2.3 indica el tiempo de observación que se debe realizar con el posicionamiento estático rápido en diferentes longitudes de línea (IGN, Bolivia, 2004).

Tabla 2.3 Tiempos de observación en el método estático rápido

Longitud línea	Número de satélites	Tiempo de observación	Precisión
0 - 5 Km	>4	5 – 10 min	5 – 10 mm + 1ppm
5 - 10 Km	>4	10 – 15 min	5 – 10 mm + 1ppm
10 - 20 Km	>4	10 – 30 min	5 – 10 mm + 1ppm

Métodos Cinemáticos: Son también posicionamientos relativos, es decir que un punto cuyas coordenadas son conocidas se lo toma como referencia para obtener las coordenadas de otros puntos. El receptor se mueve durante la observación.

- *Método Interrumpido (stop and go):* Para realizar este método es necesario calcular inicialmente las ambigüedades desde un punto de coordenadas conocidas y de ahí si continuar con los siguientes puntos del levantamiento.

Existen dos procedimientos para determinar las ambigüedades: 1) Intercambio de antenas y 2) línea base conocida. En el primero se necesitan dos puntos próximos entre 5 a 10 m, en donde uno es de referencia. Una vez que el rastreo está estable con por lo menos 5 satélites se procede a intercambiar las antenas, luego se realiza una observación de aproximadamente un minuto y se vuelve a intercambiar las antenas retornando a su posición inicial. En el

segundo se debe tener dos puntos conocidos de precisión $\pm 5\text{cm}$.

Este método de posicionamiento es útil para levantamientos de distancias cortas y en áreas abiertas donde no existan obstáculos como árboles, construcciones, puentes, etc. ya que si se pierde la señal se debe calcular otra vez las ambigüedades del último punto conocido. La precisión depende mucho del equipo utilizado pero de forma general se obtienen precisiones de 1 a 5 cm.

- *Método cinemático puro:* Para este tipo de posicionamiento se requiere conocer inicialmente los valores enteros de las ambigüedades, una vez obtenidos estos datos, la antena puede moverse durante todo el proceso de observación. Para obtener buenos resultados es recomendable rastrear por lo menos 6 satélites y si hubiera pérdida de señal entonces hay que reiniciar el proceso. Con post-procesamiento se puede obtener precisiones en centímetros.
- *Método falso cinemático:* En esta técnica el receptor móvil debe hacer varias observaciones breves al punto desconocido. Para obtener las ambigüedades de los satélites se realiza rastreos de pocos minutos (5 minutos) y en períodos espaciados de aproximadamente 55 minutos (TIERRA apud TSENG y LIOU). Si la señal se pierde no es necesario reiniciar el proceso, esto lo hace útil para zonas donde existen muchos obstáculos.
- *Navegación con GPS:* El sistema NAVSTAR/GPS es un sistema de navegación creado para obtener posición, velocidad y tiempo de cualquier punto del mundo. Dependiendo de la precisión deseada se pueden usar distintas formas de posicionamientos tanto absolutos como relativos. Empleando un receptor simple se puede obtener una precisión de 4-10 m sin SA.

Para concluir, la tabla 2.4 contiene la precisión aproximada del GPS en los distintos tipos de posicionamientos, utilizando los códigos C/A y las portadoras (ARANA apud FEATHERSTONE).

Tabla 2.4 Precisiones en posicionamiento GPS

Método de	Observable	Precisión	Precisión
-----------	------------	-----------	-----------

posicionamiento		Horizontal (m)	Vertical (m)
Posicionamiento absoluto	C/A	100	140
Estático diferencial	C/A	0.5 – 2.0	1.0 – 3.0
Estático relativo	L1	0.02	0.03
Estático relativo	L1&L2	0.005	0.02
Estático rápido	L1&L2	0.02	0.03
Cinemático	C/A	2.0 – 5.0	3.0 – 8.0
Cinemático	L1	0.03	0.05
Cinemático	L1&L2	0.01	0.02
Real time diferencial	C/A	3.5 – 5.0	4.8 – 8.0
Real time diferencial	L1	0.1	0.2
Real time diferencial	L1&L2	0.05	0.1

2.1.3 Fuentes de errores en la determinación GPS

Toda observación que se realice con GPS está sometida a varias fuentes de errores sistemáticos y ruidos aleatorios. Estos errores se agrupan en tres categorías: satélite, propagación de señal y receptor. Algunos de estos errores pueden ser eliminados o minimizados utilizando combinaciones apropiadas de observables o con el método diferencial.

La tabla 2.5 indica las fuentes de error en el posicionamiento GPS, divididas en tres diferentes categorías principales (IGN, Bolivia, 2004).

Tabla 2.5 Fuente de error en el posicionamiento GPS

Elemento	Fuente de error
Satélite	Errores en el reloj
	Errores o variaciones en los parámetros orbitales (efemérides)
	Disponibilidad Selectiva (SA)

	Anti-spoofing (AS)
Propagación de la señal	Refracción ionosférica
	Refracción troposférica
	Multitrayectorias
Receptor	Errores en el reloj
	Errores en las coordenadas del punto de referencia
	Errores en el estacionamiento y manipulación
	Ruido e incertidumbre de medida
	Retardos instrumentales
	Variación y desfase del centro de antena

➤ *Errores relacionados con el satélite*

- **Reloj:** A pesar de que los satélites cuentan con relojes de Cesio y Rubidio estos no son perfectos y pueden tener desfases respecto al tiempo GPS, generalmente se adelantan ya que se encuentran en un campo gravitatorio más débil. Este error se puede corregir a través de los mensajes de navegación enviados a cada receptor, ya que el tiempo es controlado en tierra con aproximadamente 10 relojes atómicos. En el caso de que no se hiciera ningún tipo de corrección se estima que existiría un error de 1 m en un posicionamiento simple con receptor de código. Por cada nanosegundo de error en el reloj del satélite se produce una imprecisión de 30 cm en la pseudo-distancia.
- **Parámetros orbitales:** Las coordenadas de los satélites calculadas a través de las efemérides pueden tener errores debido a que la posición de los satélites no son constantes y pueden variar por aspectos como: la variación gravitacional o la fricción de los satélites con moléculas libres. Este error se puede eliminar casi en su totalidad con posicionamiento relativo.
- **Disponibilidad selectiva (SA):** El DoD de los Estados Unidos al ver amenazados sus intereses, degradan intencionalmente la información de los mensajes de navegación para uso civil, específicamente la información de los relojes y de los

parámetros orbitales, lo que da como resultado posicionamientos con precisiones menores a 100 m en el horizontal y de 140 m en el vertical. El primero de mayo del 2000 se elimina el SA, lo cual mejora la precisión del GPS (aproximadamente 5m). El error se podía eliminar usando un posicionamiento diferencial.

- Anti-spoofing (AS): Es la degradación del código P a través de la incorporación de una señal desconocida denominada W, este código resultante se denomina Y, solamente usuarios autorizados tienen acceso a él. A este proceso se lo conoce como encriptación (Encrypting).

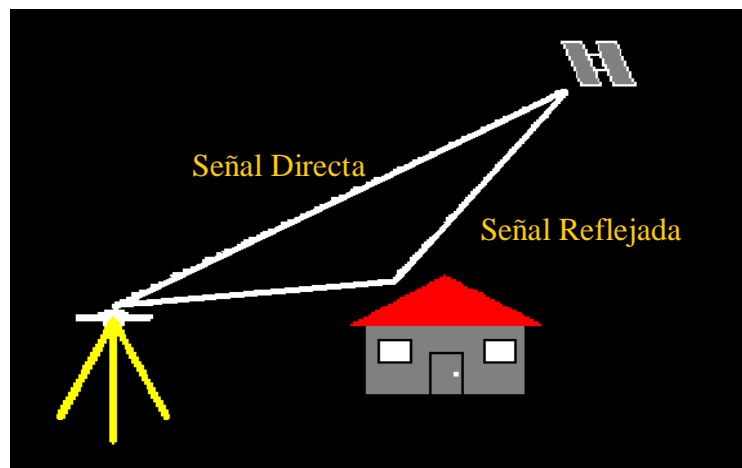
➤ *Errores relacionados con el medio de propagación*

- Refracción ionosférica: La ionosfera se encuentra entre 50 y 1000 Km de altitud, donde la propagación de la señal GPS se ve influenciada por la presencia de electrones, la frecuencia de la señal, la actividad solar, la intensidad del campo magnético de la tierra, localización geográfica. Las mayores irregularidades ionosféricas ocurren especialmente a $\pm 30^\circ$ del Ecuador Geomagnético y en los polos. El peor horario para realizar levantamientos geodésicos es después de la puesta del sol hasta media noche puesto que a esta hora se producen fuertes perturbaciones y cintilaciones (períodos cortos) (TIERRA apud KLOBUCHAR y SEEBER). Estas cintilaciones dificultan la obtención de las ambigüedades enteras. Los errores de propagación de la señal en la ionosfera pueden ser eliminados con la utilización de un receptor de doble frecuencia.
- Refracción troposférica: La presencia de átomos y moléculas neutras en la troposfera (desde la superficie hasta aproximadamente 50 Km de altura) afectan la propagación de la señal. La propagación de la señal GPS no está relacionada con la frecuencia (por lo que no puede ser eliminado con receptores de doble frecuencia), sino con la densidad atmosférica y con el vapor de agua presente en esta capa atmosférica, por lo cual el índice de refracción está en función de la temperatura, presión y humedad. Para distancias pequeñas el posicionamiento relativo elimina prácticamente este

error, ya que las condiciones atmosféricas son consideradas similares, mientras que para distancias grandes (>30Km) y en zonas montañosas el uso de modelos troposféricos puede reducir este error (aproximadamente a 0,25m).

- **Multitrayectorias:** Las señales enviadas por los satélites sufren variaciones en su dirección ocasionados por obstáculos cercanos a las antenas de los receptores como por ejemplo: calles, vehículos, edificios, árboles, etc. (Ver figura 2.3). El efecto multipath está relacionado con la portadora; las medidas con código tendrán errores de hasta un metro, mientras que las medidas de fase se verán menos afectadas. Este error puede ser eliminado o minimizado escogiendo un lugar de posicionamiento libre de obstáculos, empleando ángulos de elevación mayores para evitar señales procedentes de satélites de baja altura, o utilizando antenas tipo “choke ring”, las cuales reducen las interferencias de las señales procedentes de multipath.

Figura 2.3 Multitrayectoria



Fuente: Instituto Geográfico Nacional, Bolivia, 2004

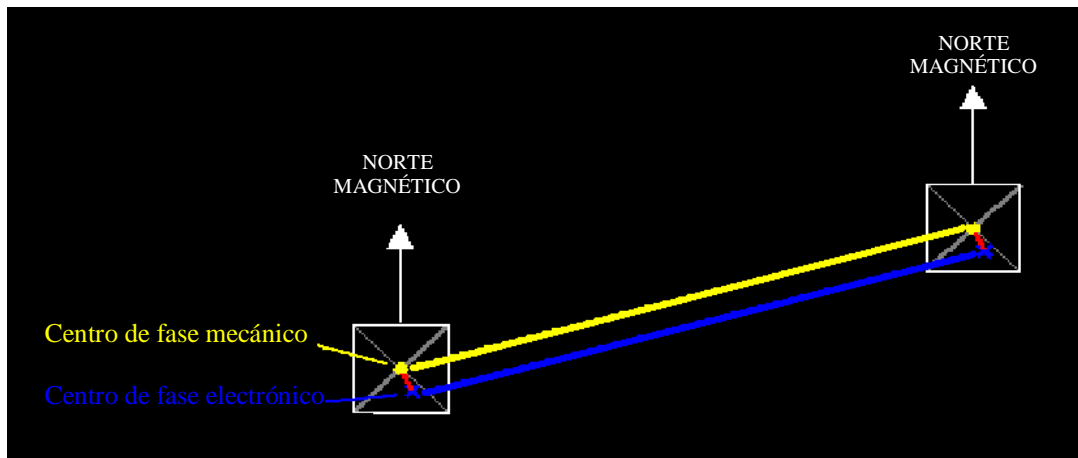
➤ *Errores relacionados con el receptor*

- **Reloj:** El reloj del receptor no es tan estable como el del satélite, por lo que se necesita siempre de un cuarto satélite en el posicionamiento para eliminar el error del reloj del receptor. Los equipos GPS corrigen cada segundo su reloj

respecto a un satélite. Este error puede ocasionar de 10m a 100m de desplazamiento y se eliminará utilizando posicionamiento relativo.

- Variación del centro de fase de la antena: Es cuando no coincide el centro de fase electrónico de la antena con en el centro de fase mecánico (Ver figura 2.4). La señal llega al centro de fase electrónico, la cual varía con la intensidad, con el ángulo de incidencia de la señal y por las diferentes portadoras L1 y L2. Para minimizar el error es recomendable utilizar antenas de la misma marca y orientadas hacia la misma dirección (generalmente norte magnético).

Figura 2.4 Excentricidad del centro de fase de la antena



Fuente: Instituto Geográfico Nacional, Bolivia, 2004

- Incertidumbre de medida: Toda medida electrónica esta expuesta a errores aleatorios. Para la mayoría de receptores de precisión la incertidumbre de medida de fase es hasta 2 mm y en código puede llegar hasta algunos centímetros.
- Retardos instrumentales: Son ocasionados por problemas en antenas, cables y receptores. Los receptores eliminan estos errores mediante un método de compensación dentro del sistema de su reloj, mientras que los satélites transmiten las fallas en los mensajes de navegación.
- Coordenadas del punto de referencia: Desconocimiento o falla de las

coordenadas de la estación o punto de partida.

- Estacionamiento y manipulación del equipo: Muchas veces los operadores no saben con exactitud desde donde se debe medir la altura de la antena, esto hay que tener muy claro para evitar confusiones en el post-proceso. Además hay que conocer muy bien el funcionamiento de los equipos para evitar errores como por ejemplo, empezar una observación sin la debida sincronización de los relojes.

2.2 Superficies de referencia

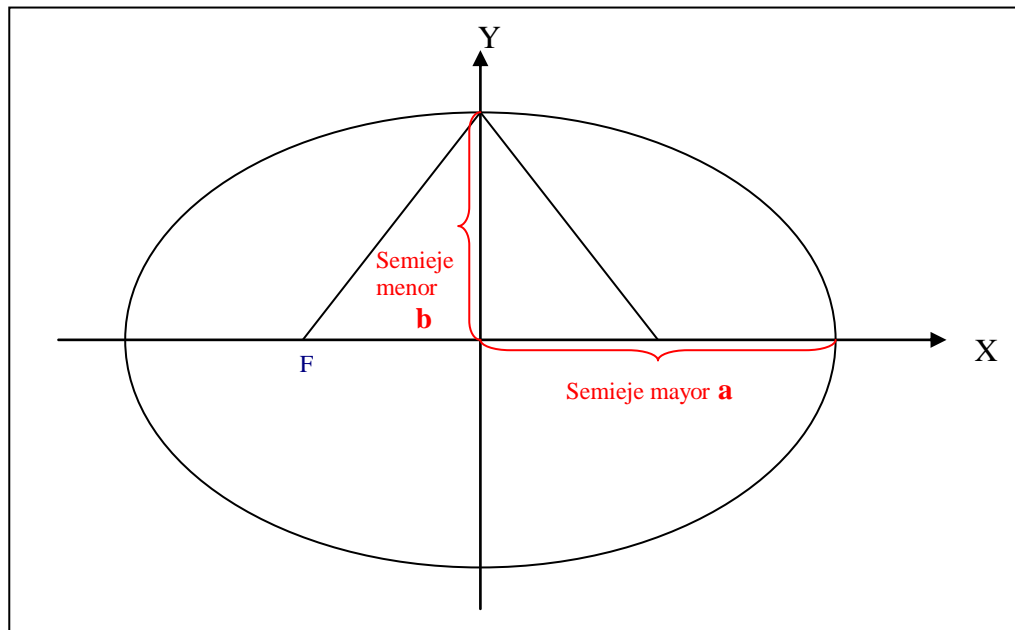
2.2.1 Superficie física de la Tierra

La superficie física de la Tierra está constituida por la topografía del terreno y el fondo oceánico. Esta superficie es donde se realizan las observaciones geodésicas.

2.2.2 El Elipsoide

El elipsoide es la superficie geométrica que más se asemeja a la forma de la Tierra, y que facilita la proyección de cualquier punto sobre la misma, lo que no pasa con el geoide. El elipsoide biaxial o de revolución es definido por el semieje mayor (a) y el achatamiento (f) y se obtiene girando una elipse sobre su eje menor (Ver figura 2.5)

Figura 2.5 Geometría de la elipse



Fuente: Drewes, H.; Sánchez L.

A partir de las dimensiones de los semiejes a y b se definen los siguientes parámetros:

Achatamiento $f = \frac{a-b}{a}$ (2.4)

Primera excentricidad $e = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ (2.5)

Segunda excentricidad $e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ (2.6)

A lo largo de la historia varios elipsoides han sido creados como sistemas de referencia de varios países, sin lograr una unificación mundial, pero en 1910 aparece el primer elipsoide internacional denominada Hayford ($a = 6378388$, $1/f = 297$). A partir de esta fecha se han creado varias superficies matemáticas similares a la Tierra. El elipsoide utilizado por el GPS es el WGS 84 o Sistema Geodésico Mundial 1984, el cual puede definir longitud, latitud y altura elipsoidal de cualquier punto sobre la superficie de la Tierra.

2.2.3 El Cuasigeoide

El cuasigeoide es una superficie no equipotencial, muy cercana al geoide. Su determinación no requiere de hipótesis geofísicas, se basa en el modelamiento matemático del campo de gravedad normal (BLITZKOW).

El cuasigeoide no es una superficie con significado físico, lo cual no es útil para otras ciencias como la geología, edafología, etc.

Las diferencias entre el geoide y el cuasigeoide pueden variar de unos pocos milímetros en el mar y en terreno plano, y hasta algunos metros en regiones montañosas.

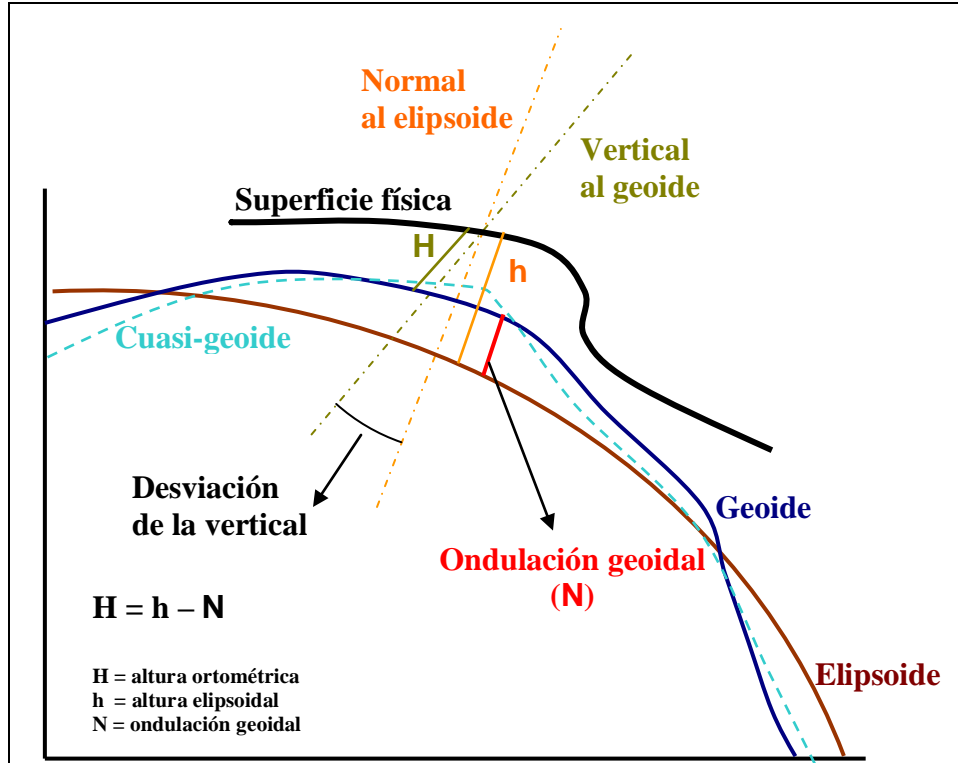
2.2.4 El Geoide

La palabra Geoide significa “forma de la tierra” y fue introducida por Listing en 1873. El geoide es un modelo físico que busca representar la verdadera forma de la Tierra y se la define como la superficie equipotencial⁴ del campo gravitatorio terrestre. Al geoide se lo considera como la superficie de referencia para la obtención de la altura ya que representa al nivel medio de los mares en reposo, prolongados por debajo de los continentes. Teóricamente el geoide coincide con el nivel medio de los mares.

La diferencia en un determinado punto entre el elipsoide y el geoide se conoce como ondulación geoidal, fundamental en la evaluación de las alturas en GPS; y el ángulo que se forma en un determinado punto entre la normal del elipsoide y del geoide se lo denomina desviación de la vertical, siendo esta nula en el datum (Ver Figura 2.6).

⁴ Se denomina superficie equipotencial cuando el potencial de la gravedad (W) es constante para un determinado número de puntos. $W = V + C$, siendo V el potencial gravitatorio y C el potencial centrífugo. La superficie equipotencial es perpendicular a la línea del campo de gravedad

Figura 2.6 Superficies de referencia y Ondulación Geoidal



Fuente: Drewes, H.; Sánchez L.

La dirección de la gravedad de cualquier punto sobre el terreno es perpendicular al geoide. Debido a las variaciones en la distribución de las masas de la Tierra el geoide tiene una forma irregular.

2.2.4.1 EGM 96

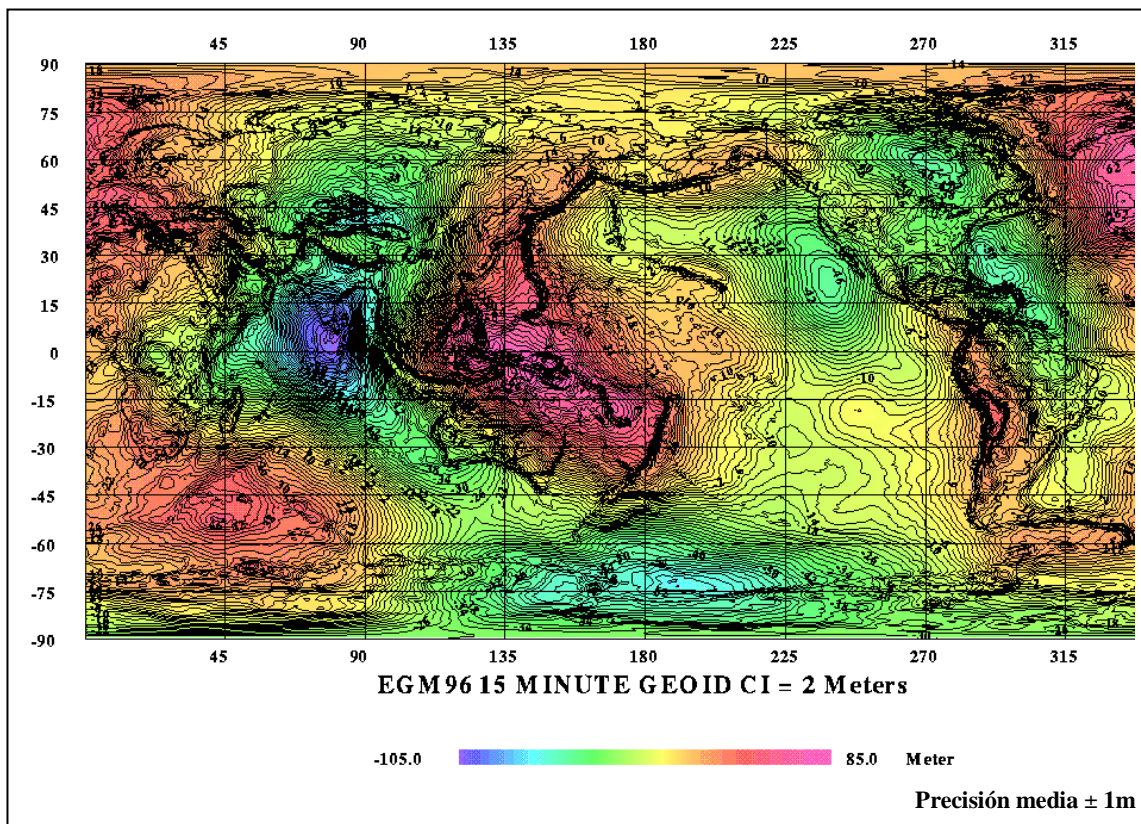
EARTH GRAVITATIONAL MODEL 1996 – EGM96 es un modelo armónico esférico del potencial gravitacional de la Tierra completo de grado y orden de 360, y 130767 coeficientes. Este modelo geopotencial fue desarrollado gracias a la colaboración científica del **National Geospatial – Intelligence Agency - NGA**, **Goddard Space Flight Center- GSFC**, y de la Universidad Estatal de Ohio.

La NGA calculó y proporcionó los datos de las anomalías de la gravedad de toda la superficie terrestre de 30'X30', derivada de la información proporcionada por el *GEOSAT Geodetic Mission*; la NASA determinó la órbita de los satélites con rastreo

continuo de aproximadamente 30 satélites, incluyendo los nuevos llamados SLR, TDRSS, y GPS.

Con el programa EGM96 se puede obtener las ondulaciones geoidales de cualquier punto sobre la superficie terrestre (Ver figura 2.7), así como también las anomalías de gravedad, ingresando solamente las coordenadas geodésicas del lugar. En el presente proyecto se calcularon las ondulaciones geoidales de 284 puntos dentro del Distrito Metropolitano de Quito.

Figura 2.7 Geoide del EGM 96



Fuente: <http://cddis.gsfc.nasa.gov/926/egm96/egm96.html>

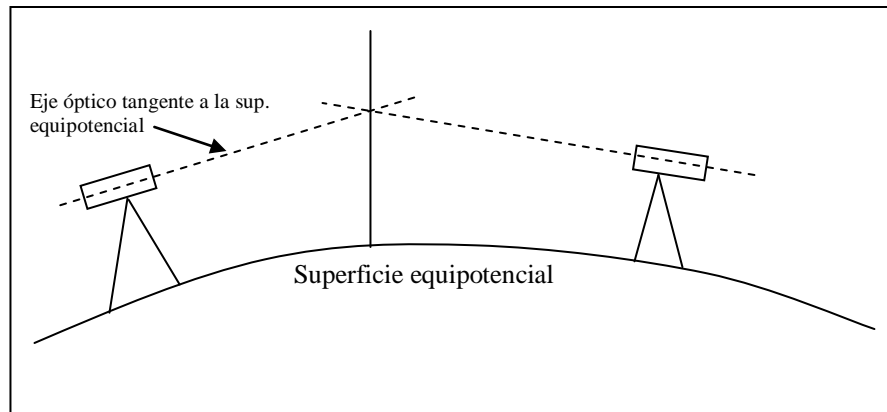
2.3 Tipos de altura

La manera más sencilla para determinar una altura es partiendo la nivelación desde un sistema de referencia vertical conocido, que por lo general es el nivel medio de los mares. El problema de este sistema se presenta cuando el nivel debe prolongarse por

debajo de los continentes, ya que el campo de gravedad no va ser el mismo para todos los puntos y su determinación exacta resulta complicada.

En la nivelación geométrica, el nivel se equilibra con el eje óptico tangente a la superficie equipotencial. Si se realizase la medición de dos puntos localizados en la misma superficie equipotencial la diferencia de altitud sería nula (Ver figura 2.8).

Figura 2.8 Nivelación geométrica



Por lo tanto, la medición de altura de un punto depende del camino recorrido, ya que como se dijo anteriormente, las líneas equipotenciales no son equidistantes. Por esta razón para determinar las alturas en geodesia es necesario tomar en cuenta al parámetro de la gravedad.

Básicamente existen dos clasificaciones para las alturas: alturas de tipo geométrico y alturas de tipo físico, cada una de ellas se subdividen en categorías que a continuación se describe.

2.3.1 Altura de tipo geométrico

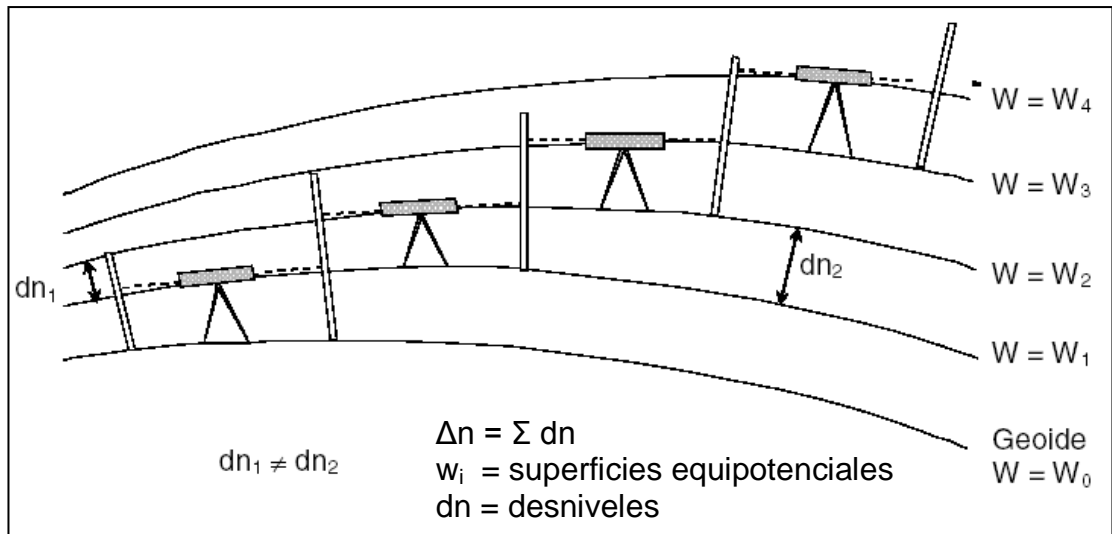
2.3.1.1 Alturas niveladas

Las alturas niveladas se obtienen sumando los desniveles entre los puntos de medición (Ver figura 2.9). La línea de la visual de cada equipo es tangente a la

superficie equipotencial y la línea de la plomada es perpendicular a la misma. Los desniveles varían de acuerdo con el campo de gravedad local, es decir con la distancia que existe entre las superficies equipotenciales del trayecto. Esta es la razón por la cual la altura de un punto depende del camino recorrido.

Según BLITZKOW, la determinación de este tipo de alturas es útil para distancias cortas (< 10 Km) en donde la variación del campo de gravedad no es significativa.

Figura 2.9 Alturas Niveladas



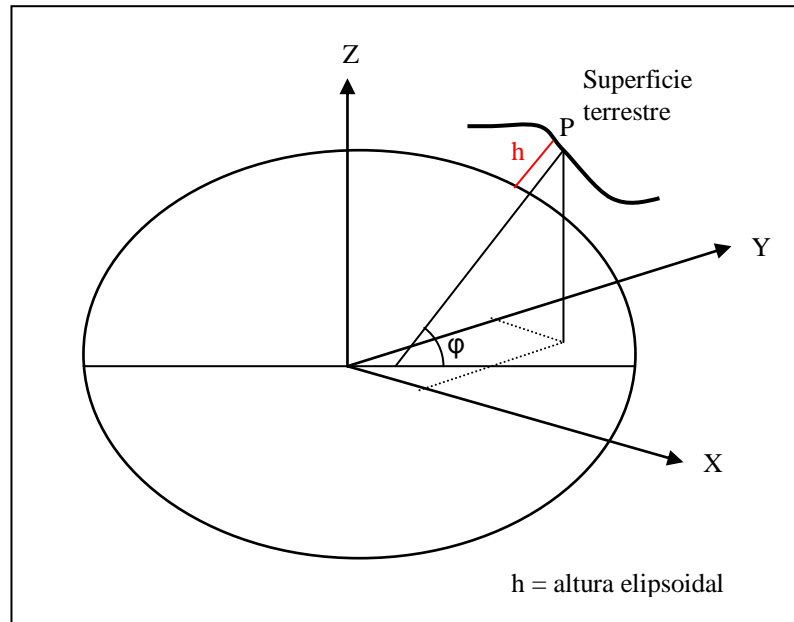
Fuente: Drewes, H.; Sánchez L.

2.3.1.2 Alturas elipsoidales

Las alturas elipsoidales se miden desde un punto de la superficie terrestre hasta el elipsoide de referencia (por ejemplo WGS 84), siempre en línea recta y perpendicular a mencionado elipsoide de referencia. (Ver figura 2.10)

Las altitudes elipsoidales están determinadas por el sistema GPS, al igual que las coordenadas geodésicas. Estas alturas al pertenecer a un modelo geométrico y no a un modelo real de la forma de la Tierra no son útiles en la práctica, lo que vendría a convertirse en el principal problema de la navegación satelital.

Figura 2.10 Altura elipsoidal



Fuente: Drewes, H.; Sánchez L.

2.3.2 Altura de tipo físico

Antes de continuar con los siguientes tipos de alturas físicas, es conveniente explicar lo que es el número o cota geopotencial. Si consideramos a un punto 0 sobre el geoide y a otro punto A sobre la superficie terrestre, y 0 está enlazado a A mediante nivelación, el número geopotencial vendría a ser la diferencia de potencial entre ambos puntos, y su fórmula sería la siguiente: (Moritz & Heiskanen, 1963)

$$\int_0^A g dn = W_0 - W_A = C \quad (2.7)$$

g gravedad observada en el punto de interés

dn desnivel

W_0 potencial sobre el geoide

W_A potencial sobre el punto de interés.

C número o cota geopotencial

El resultado del número geopotencial es independiente del camino recorrido, por consiguiente un punto tendrá siempre la misma altitud.

La unidad del número geopotencial es de $[m^2 / s^2]$, la cual puede convertirse en unidades de distancia al dividirlo para algún valor de la gravedad.

$$H = \frac{W_o - W_A}{g} \quad (2.8)$$

H altura
 g valor de gravedad

Las alturas de tipo físico son conocidas también como alturas geopotenciales y están en función del potencial y del tipo de gravedad utilizado, entre las alturas más conocidas se encuentran: alturas dinámicas, ortométricas y normales.

2.3.2.1 Alturas dinámicas

Las alturas dinámicas no tienen significado geométrico, además no se requiere de una formulación de hipótesis para su determinación. Se calcula a partir de la gravedad normal, la cual es referida al elipsoide para una latitud específica.

Las alturas dinámicas se encuentran dividiendo el número geopotencial para una gravedad normal constante.

$$H_{din} = \frac{W_0 - W_A}{\gamma_\varphi} = \frac{C}{\gamma_\varphi} \quad (2.9)$$

γ_φ gravedad normal

La ventaja de las alturas dinámicas radica en que, valores iguales representan una superficie equipotencial del campo de gravedad, es decir, una superficie de agua en

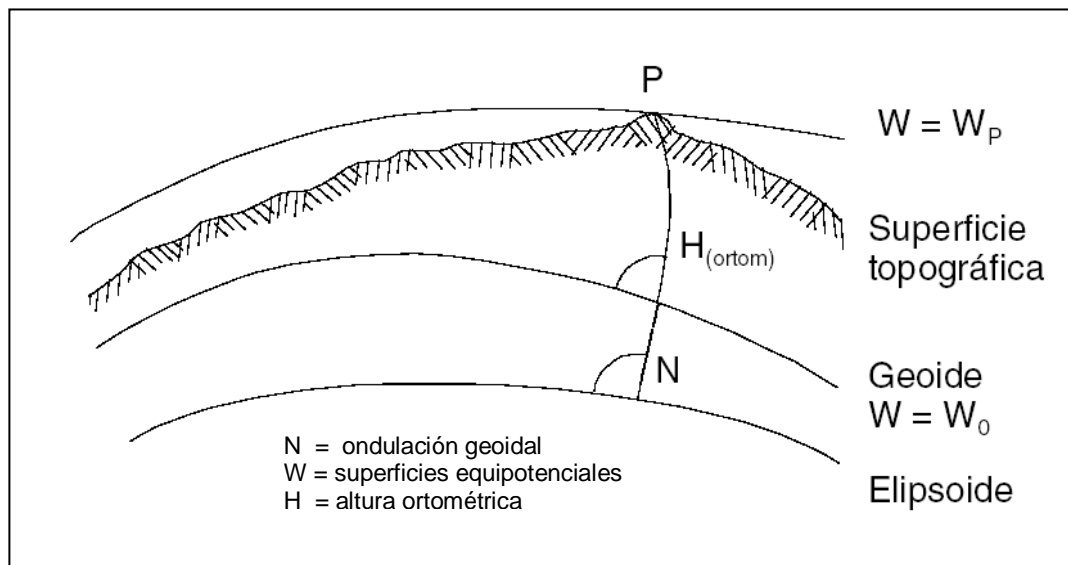
calma en cualquier elevación sobre el geoide tiene siempre la misma altura dinámica. Estas alturas se obtienen a partir de las niveladas, mediante la aplicación de correcciones que expresan los incrementos o decrementos, en altura, generados por involucrar un valor constante de gravedad.

La principal desventaja de este tipo de alturas está en que, por causa de la convergencia de las superficies equipotenciales (especialmente en dirección norte-sur, figura 2.9) la distancia geométrica entre ellas varía ostensiblemente, sin alterarse su altura dinámica.

2.3.2.2 Alturas ortométricas

La altura ortométrica se define como la distancia vertical entre la superficie terrestre y la superficie del geoide. Esta distancia es medida a lo largo de la línea de la plomada, la cual no es una línea recta, sino una curva, debido a que la gravedad entre el geoide y la superficie física varían. (Ver figura 2.11). Para determinar la altura ortométrica es necesario conocer el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada, pero en vista de que esto no es posible, la gravedad media es una estimación de la gravedad observada en el terreno a partir de hipótesis sobre densidad y la distribución de las masas terrestres. Las hipótesis más conocidas son las de Helmert (1980), Niethammer (1932), Mader (1954), Allister y Featherstone (2001) y más recientemente Hwang y Hsiao (2003).

Figura 2.11 Alturas ortométricas



Fuente: Drewes, H.; Sánchez L.

Las alturas ortométricas se obtiene dividiendo los números geopotenciales para el valor medio de la gravedad.

$$H = \frac{W_0 - W_P}{g_m} \quad (2.10)$$

g_m valor medio de la gravedad

Las alturas ortométricas y elipsoidales se relacionan entre si por la ondulación geoidal a través de la siguiente fórmula:

$$h \cong H + N \quad (2.11)$$

h altura elipsoidal
 H altura ortométrica
 N ondulación geoidal

Para concluir, los puntos que se encuentran sobre la misma superficie equipotencial fuera del geoide no tienen la misma altura ortométrica y los puntos con altura

ortométrica igual (diferente de cero) no forman una superficie equipotencial (DREWES/SANCHEZ, 2002).

2.3.2.3 Alturas normales

Las alturas normales fueron propuestas por Molodensky como una alternativa para reemplazar las alturas ortométricas, en donde la superficie de referencia ya no es el geoide, sino el cuasi-geoide. Para la determinación de las alturas normales ya no es necesario conocer la densidad topográfica⁵. Se utiliza la gravedad normal, la cual está en función del elipsoide de referencia y no toma en consideración al tiempo (la gravedad no varía en el tiempo)

Las alturas normales se las obtiene dividiendo los números geopotenciales para el valor medio de la gravedad normal entre el cuasi-geoide (superficie de referencia) y la superficie terrestre.

$$H_N = \frac{W_O - W_P}{\gamma'} \quad (2.12)$$

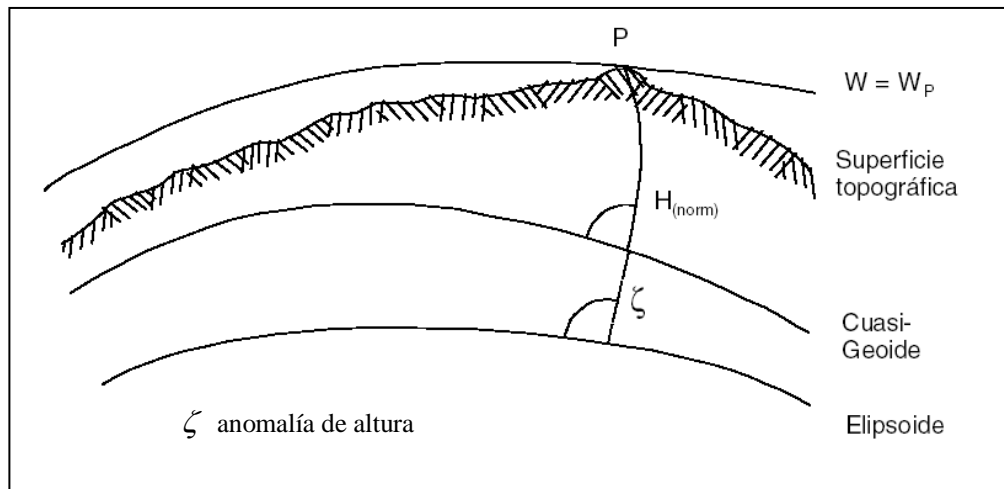
γ' gravedad normal terrestre⁶

Para determinar la altura normal en función del elipsoide se toma en cuenta a la anomalía de la altura, que es la distancia que existe a lo largo de la normal del elipsoide y el cuasi-geoide (Ver figura 2.12). Es importante señalar que alturas normales iguales no forman superficies equipotenciales (DREWES/SANCHEZ, 2002)).

⁵ Distribución interna de masas de la Tierra.

⁶ Esta en función de la latitud geográfica del punto y es generada por el elipsoide de referencia utilizado

Figura 2.12 Alturas Normales



2.4 Nivelación diferencial _ referencial GPS

2.4.1 Generalidades

El sistema de posicionamiento global GPS puede ser empleado en la realización del control vertical sobre aquellas zonas en donde no se cuenta con puntos de nivelación. La posibilidad de operabilidad en cualquier momento, condiciones climáticas y del relieve permiten que el sistema GPS, unido a un modelo geoidal de alta resolución sea una herramienta poderosa y económica en la determinación de nuevos puntos de referencia para propósitos geodésicos y topográficos.

La forma de evitar la mayoría de errores en el posicionamiento GPS es utilizando el modo diferencial. Este método permite eliminar los errores del reloj del satélite, orbitales, refracción ionosférica, refracción troposférica y SA. Se considera que los datos de los receptores serán afectados de la misma forma y magnitud ya que se estima que la distancia entre ambos puntos no es significativa.

Para este tipo de proceso es necesario tener siempre un punto con coordenadas conocidas, ya que en esa posición se calcularán las diferencias que existen entre las coordenadas conocidas con las coordenadas obtenidas en ese momento a través de los satélites. Estas diferencias serán transmitidas hacia el receptor móvil, el cual las

utilizará para corregir sus propias coordenadas, este posicionamiento es conocido como Diferencial GPS.

2.4.2 Metodología

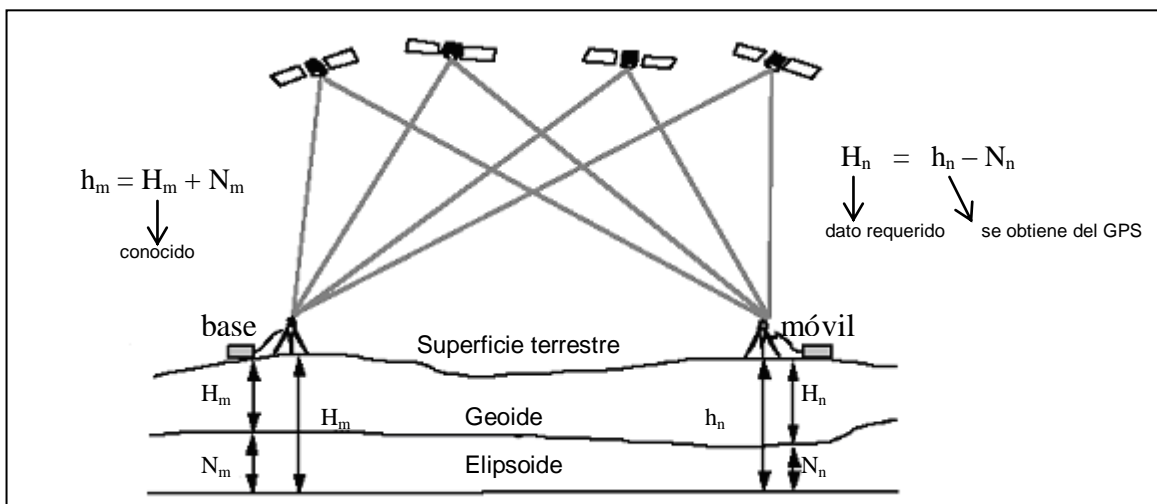
Para la nivelación diferencial, el receptor fijo (base) es usualmente estacionado en un punto de control, donde se conoce latitud, longitud y altura (Ver figura 2.13). Con el posicionamiento que se realiza en ese momento la base obtiene la ondulación geoidal, mediante la diferencia entre la altura anteriormente calculada y la elipsoidal dada por el GPS.

El GPS proporciona una buena precisión, así mismo las ondulaciones relativas son cantidades importantes, conforme a la ecuación:

$$H_m - H_n = h_m - h_n - (N_m - N_n) \quad (2.13)$$

- H altura ortométrica
- h altura elipsoidal
- N ondulación geoidal

Figura 2.13 Nivelación Diferencial GPS



Fuente: GPS Positioning Guide, Geomatics Canada, 1993

2.4.3 Precisiones

El error del posicionamiento crece a medida que la distancia de la línea base aumenta, ya que la correlación entre ambos puntos disminuye. Generalmente el error que se presenta en el posicionamiento diferencial en relación con la línea base es de 1 mm por Km (1 ppm) trabajando con doble frecuencia y 2 ppm con una sola frecuencia.

El método diferencial anula la mayoría de los errores, exceptuando los ocasionados por el receptor y por la multitrayectoria. A continuación se presenta en la tabla 2.6 una comparación de los errores estándar con GPS y DGPS con código C/A (IGN, Bolivia, 2004).

Tabla 2.6 Diferencia de precisiones entre GPS y DGPS

Error	GPS (m)	DGPS (m)
Efemérides	1-1.25	0.0
Reloj Satélite	1-1.15	0.0
Ionosfera	5-10	0.4
Troposfera	0.5-1	0.2
Multitrayectoria	0.6-1	0.6
Ruido del Receptor	0.3-1	0.3-1.0
SA	10-30	0.0

El error que ocasiona el receptor es de aproximadamente 10 cm para receptores de código y de 1 mm para fase. Mientras que la multitrayectoria produce un error de metro para código y de centímetros para fase (IGN, Bolivia, 2004). En el posicionamiento GPS la precisión de la altura elipsoidal es 1,5 a 2 veces menos precisa que la horizontal (ARANA apud FEATHERSTONE).

CAPÍTULO III

COMPENSACIÓN POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Introducción: Método de Mínimos Cuadrados

El Método de Mínimos Cuadrados (MMC) fue desarrollado antes del siglo XIX por Gauss y Legendre para el ajuste de observaciones físicas y astronómicas. Este método proporciona una estimativa única para cada una de las incógnitas existentes en un conjunto de observaciones redundantes.

En geodesia existen tres modelos básicos de ajuste:

- Modelo Paramétrico
- Modelo de Correlatos
- Modelo Combinado

El modelo paramétrico, como su nombre lo dice, las observaciones están en función de los parámetros; en el modelo de correlatos las observaciones están ligadas a través de ecuaciones de condición y por último, el método combinado reúne parámetros y observaciones ajustadas unidos por una función no explícita. Para la determinación de los parámetros del modelo matemático que calculará las ondulaciones geoidales de Quito se utilizará el método paramétrico.

Adicionalmente el ajuste de mínimos cuadrados tiene por objetivos:

1. Estimar, a través de la utilización de modelos matemáticos adecuados y el MMC, el valor más probable de cada una de las incógnitas del problema.
2. Estimar la precisión de las incógnitas y la eventual correlación entre ellas, mediante el cálculo de la matriz variancia covarianza.

Por lo general en los proyectos geodésicos el número de observaciones es mayor al número de incógnitas, asociadas todas al mismo modelo matemático.

Caso general:

$$\begin{aligned} {}_n A_u X_1 &= L_{b(n \times 1)} & (3.1) \\ n &> u \end{aligned}$$

A Coeficientes del modelo
 X Parámetros
 L_b Observaciones
 n Número de observaciones
 u Número de incógnitas

Las observaciones siempre van a presentar errores en sus medidas, lo que ocasiona que estas no sean compatibles con el modelo definido.

$$AX = L_b + V = L_a \quad (3.2)$$

V Residuos
 L_a Observaciones ajustadas

El método de mínimos cuadrados es un criterio matemático, que escoge como mejor estimativa de las incógnitas, al valor mínimo de la suma de los cuadrados de sus residuos.

$$V^T P V = \min \quad (3.3)$$

P Matriz de pesos

3.1.1 Matriz Varianza Covarianza

La Matriz Varianza Covarianza es una matriz simétrica por ser $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, está formada por las Varianzas σ_i^2 , colocadas en forma diagonal, y por las Covarianzas σ_{ij} ($i \neq j$) colocadas fuera de la diagonal, y la MVC es simbolizada por \sum_x .

$$\sum_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A través de la Matriz Varianza Covarianza (MVC) se obtiene la precisión de las incógnitas del modelo luego de realizar el ajuste. Mientras más precisas son las observaciones menor será su varianza, por otro lado si las covarianzas son nulas significará que las observaciones son independientes entre sí.

A partir de la MVC se obtiene la Matriz de Coeficientes de Correlación cuyos términos adimensionales se los calcula con la siguiente fórmula:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (3.5)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Cada coeficiente de correlación representa la dependencia linear que existe entre dos componentes de una variable bidimensional, a través de la siguiente condición:

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \quad (3.7)$$

Si $|\rho_{xy}| = 1$ significa que entre X y Y existe una perfecta relación lineal, es decir Y está en función de X, pero si $\rho_{xy} = 0$ significa que las variables no son correlacionadas.

3.1.2 Matriz de Pesos

En el caso de que las observaciones no ofrezcan el mismo grado de confianza, como sucede en este proyecto, es necesario homogenizarlas multiplicándolas por pesos.

La matriz de coeficientes de peso Q difiere de la MVC solamente por la multiplicación de un escalar σ_0^2 denominado varianza de observación de peso unitario o varianza a priori, se lo utiliza antes de realizar el ajuste y es igual a la unidad, este valor es tomado arbitrariamente y no afecta a los resultados del ajuste (GEMAEL, 1994).

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{Lb} \quad (3.8)$$

$$Q^{-1} = \sigma_0^2 \sum_{Lb}^{-1} = P \quad (3.9)$$

La matriz de pesos es también simétrica y cuando los datos son no correlacionados entre sí, se adopta una matriz de pesos diagonal, cuyos valores son la inversa de las varianzas σ_i^2 de las observaciones. Por lo tanto cada peso es definido como:

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (3.10)$$

$$P = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & P_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Mientras mayor es el peso mayor es la confianza que brinda la observación.

3.2 Método Paramétrico

El método paramétrico, conocido también como método de ecuaciones de observación debido a que cada observación representa una ecuación, permite ajustar observaciones no correlacionadas.

Se utiliza el método paramétrico cuando los valores observados ajustados están expresados en función de los parámetros ajustados.

$$L_a = F(X_a) \quad (3.12)$$

Las ecuaciones de observación van a incluir las siguientes variables:

L_b vector de los valores observados (nx1)

V vector de los residuos (nx1)

L_a vector de los valores ajustados (nx1)

$$L_a = L_b + V \quad (3.13)$$

X_0 vector de los parámetros aproximados (ux1)

X vector de las correcciones (ux1)

X_a vector de los parámetros ajustados

$$X_a = X_0 + X \quad (3.14)$$

En el caso de que la función F sea no lineal, se procede con la linealización a través de las series de Taylor, para esto se sustituye las ecuaciones (3.13 y 3.14) en (3.12)

$$L_b + V = F(X_0 + X) = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} X \quad (3.15)$$

El índice ubicado en la parte inferior derecha de la matriz de derivadas parciales indica que las derivadas parciales son calculadas con los valores aproximados⁷ de las incógnitas.

Reemplazando,

$$L_0 = F(X_0) \quad (3.16)$$

y,

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} \quad (3.17)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial_{xa1}} & \frac{\partial f_1}{\partial_{xa2}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial_{xan}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial_{xa1}} & \frac{\partial f_2}{\partial_{xa2}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial_{xan}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial_{xa1}} & \frac{\partial f_n}{\partial_{xa2}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial_{xan}} \end{bmatrix}_{X_0}$$

se obtiene el modelo matemático linealizado del método paramétrico.

$$L_b + V = L_0 + AX$$

$$L = L_0 - L_b \quad (3.18)$$

$${}_n V_1 = {}_n A_{uu} X_1 + {}_n L_1 \quad (3.19)$$

⁷ El cálculo de los valores aproximados será explicado posteriormente en Iteraciones del Método Paramétrico

En el presente proyecto se trabajó inicialmente con 284 observaciones, representadas por el valor de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del método GPS/Nivelación, lo que implica $n = 284$ y $u = 3, 4,5$ o 6 dependiendo del modelo utilizado, definidos en las ecuaciones (4.2 a 4.5)⁸.

Minimizando la forma cuadrática fundamental se tiene:

$$\phi = V^T P V = (A X + L)^T P (A X + L) = \min \quad (3.20)$$

Igualando a cero la primera derivada parcial respecto a X resulta:

$$A^T P A X + A^T P L = 0 \quad (3.21)$$

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (3.22)$$

Simplificando

$$N = A^T P A \quad (3.23)$$

$$U = A^T P L \quad (3.24)$$

Finalmente se obtiene

$$X = -N^{-1} U \quad (3.25)$$

Con el resultado de X obtenemos el vector de los parámetros ajustados a través de la ecuación (3.14) y el vector de las observaciones ajustadas de la ecuación (3.13).

3.2.1 Varianza a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$

Después de realizar el ajuste con el MMC se estima un valor $\hat{\sigma}_0^2$ en función de los residuos, llamada varianza de unidad de peso posteriori. Se la obtiene de la siguiente ecuación:

⁸ Los modelos matemáticos se determinan en la sección 4.1.1

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{S} \quad (3.26)$$

En donde S representa el número de ecuaciones redundantes, lo que en lenguaje estadístico significa “grados de libertad”.

En el método paramétrico,

$$S = n - u \quad (3.27)$$

Comparar la varianza a priori con la posteriori es un indicador de la calidad del ajuste.

Al inicio del ajuste $\sigma_0^2 = 1$, después del ajuste por lo general $\hat{\sigma}_0^2$ es distinto, por tal razón se aplica un test de hipótesis basado en la distribución X^2 para constatar si la discrepancia es significativa bajo un cierto nivel de confianza, que generalmente es del 95%. Si la respuesta es afirmativa significa que existe algún problema en el ajuste, que se puede atribuir a varias causas, como por ejemplo:

- Errores groseros
- Sistema mal condicionado
- Modelo matemático inadecuado
- Errores en el cálculo
- Ponderación errónea de las observaciones y
- Problema en la linearización

Los test de hipótesis que se aplican basados en la distribución X^2 son los siguientes:

Hipótesis básica:

$$H_o : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \quad (3.28)$$

Hipótesis alternativa:

$$H_1 : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2 \quad (3.29)$$

Se compara el valor calculado:

$$X^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} S = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} \quad (3.30)$$

Con los valores teóricos

$$X^2_{v, \frac{\alpha}{2}} \text{ y } X^2_{v, 1 - \frac{\alpha}{2}} \quad (3.31)$$

α Nivel de significancia

La hipótesis básica no es rechazada, al nivel de significancia α si:

$$X^2 < X^2_{v, 1 - \frac{\alpha}{2}} \text{ y } X^2 > X^2_{v, \frac{\alpha}{2}} \quad (3.32)$$

3.2.2 Matriz Varianza Covarianza de los parámetros

Introduciendo las ecuaciones (3.24) y (3.18) en (3.25) tenemos:

$$X = N^{-1}U = -N^{-1}A^T PL = -N^{-1}A^T P(L_0 - L_b) \quad (3.33)$$

$$X = -N^{-1}A^T PL_0 + N^{-1}A^T PL_b \quad (3.34)$$

Luego aplicando la ley de propagación de covarianzas: (GEMAEL,1994)

$$\sum_x = G \sum_{L_b} G^T \quad (3.35)$$

con

$$G = N^{-1}A^T P \quad (3.36)$$

y siendo P y N^{-1} matrices simétricas:

$$G^T = P^T A(N^{-1})^T = PAN^{-1} \quad (3.37)$$

se sustituye en la ecuación (3.35):

$$\sum_x = N^{-1}A^T P \sum_{Lb} PAN^{-1} \quad (3.38)$$

considerando que:

$$\sum_{Lb} = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (3.39)$$

se tiene:

$$\sum_x = \sigma_0^2 N^{-1}A^T P P^{-1} PAN^{-1} \quad (3.40)$$

$$\sum_x = \sigma_0^2 N^{-1}A^T PAN^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1}NN^{-1} \quad (3.41)$$

$$\sum_x = \sigma_0^2 N^{-1} \quad (3.42)$$

3.2.3 Cálculo de la Matriz de Coeficientes “A”

Tomando como ejemplo el primer modelo perteneciente a la ecuación (4.2), la matriz A se la obtiene de la siguiente manera:

A partir de las ecuaciones (3.17) y (3.2) se obtiene la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} E_1 & N_1 & 1 \\ E_2 & N_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{284} & N_{284} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

E Coordenadas UTM Este

N Coordenadas UTM Norte

Para determinar la matriz A de los dos modelos restantes se debe seguir este mismo procedimiento.

3.2.4 Cálculo del Vector “L”

La matriz *L* se obtiene de la ecuación (3.18), en donde el vector L_b está representado por los valores de las ondulaciones geoidales calculadas a partir de la diferencia entre altura elipsoidal y altura ortométrica, obtenidas mediante GPS y nivelación geométrica respectivamente.

Para un mejor entendimiento de cómo se obtiene L_o se toma como ejemplo al primer modelo representando por la ecuación (4.2), en donde a_o, b_o y c_o son los parámetros aproximados, los cuales son calculados mediante un proceso de iteración que será explicado en la sección 3.2.6.

$$L_o = a_o E_i + b_o N_i + c_o \quad (3.44)$$

En el segundo modelo, determinado por la ecuación (4.3), a_o, b_o, c_o y d_o son los parámetros aproximados, calculados también a través de un proceso de iteración.

$$L_o = a_o E_i + b_o N_i + c_o E_i N_i + d_o \quad (3.45)$$

Estos dos resultados se aplican en la ecuación (3.18) y se obtiene el vector L . Para calcular el vector L de los dos modelos restantes se debe seguir el mismo procedimiento.

3.2.5 Cálculo de la Matriz de Pesos

La matriz de pesos de este proyecto, es una matriz diagonal conformada inicialmente por la inversa de las varianzas de las observaciones. Las varianzas se las obtuvo elevando al cuadrado las precisiones de las ondulaciones geoidales obtenidas a través de propagación de errores. Estos valores son expuestos en el anexo 1 correspondiente a la Base de Datos Geoespacial.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \frac{1}{\sigma_{286}^2} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Los valores que conforman inicialmente esta matriz de pesos no son fijos ya que en el desarrollo de este estudio se realizarán varias pruebas que determinarán cuales son los pesos que mejor se ajustan a este proyecto.

3.2.6 Iteraciones del Método Paramétrico

Los parámetros ajustados y los valores observados ajustados están calculados en función de valores iniciales atribuidos a los parámetros (X_0). La idea de iterar surge a partir de mejorar los valores aproximados en cada iteración hasta obtener el mejor resultado llamado “punto de convergencia”. En términos generales en este proceso de iteración suele ocurrir: a) convergencia rápida o lenta; b) oscilación en torno a un

punto; y c) divergencia, de ahí la importancia de dar valores iniciales coherentes (GEMAEL, 1994).

Primera etapa

- Cálculo de la matriz A

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{x_0} \quad (3.47)$$

- Cálculo de L_0

$$L_0 = F(X_0) \quad (3.48)$$

X_0 iniciales fueron obtenidos mediante la resolución de un sistema de 3, 4, 5 y 6 ecuaciones lineales con 3, 4, 5 y 6 incógnitas respectivamente, dependiendo del modelo matemático utilizado. Los coeficientes utilizados en las ecuaciones fueron los pertenecientes a los valores máximo, mínimo y medio del total de las ondulaciones geoidales observadas.

- Cálculo de L

$$L = L_0 - L_b \quad (3.49)$$

- Cálculo de X

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (3.50)$$

$$X^a = X_0 + X \quad (3.51)$$

X^a es el primer valor aproximado ajustado

- Cálculo de V

$$V = AX + L \quad (3.52)$$

- Cálculo de la varianza de observación de peso unitario (a posteriori) y de la matriz varianza covarianza de X_a .

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n - u} \quad (3.53)$$

$$\sum_{X_a} \hat{\sigma}_0^2 (A^T PA)^{-1} \quad (3.54)$$

Segunda etapa (primera iteración)

$$X^a = X_1^0 \quad (3.55)$$

$$A_1 = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_1^0} \quad (3.56)$$

$$L_1 = F(X_1^0) - L_b \quad (3.57)$$

$$X_1 = -(A_1^T PA_1)^{-1} A_1^T PL_1 \quad (3.58)$$

$$X_1^a = X_1^0 + X_1 \quad (3.59)$$

$$V_1 = A_1 X_1 + L_1 \quad (3.60)$$

$$\hat{\sigma}_{01}^2 = \frac{V_1^T PV_1}{n - u} \quad (3.61)$$

$$\sum_{X_1^a} \hat{\sigma}_{01}^2 (A_1^T PA_1)^{-1} \quad (3.62)$$

Se realizará i veces el procedimiento antes explicado hasta que cumpla con la siguiente condición:

$$|V_i - V_{i-1}| < \xi \quad (3.63)$$

Durante la iteración

- a) Los componentes del vector X se irán aproximando a cero.
- b) La forma cuadrática $V^T P V$ y $\sum x_a$ tienden a estabilizarse.
- c) Como los valores aproximados se alteran en cada iteración, es necesario calcular la matriz A y el vector L en cada fase de iteración.

3.2.7 Condicionamiento del sistema

El mal condicionamiento de los sistemas se da por pequeñas variaciones en los decimales de los valores involucrados en las matrices. A continuación se citan algunos ejemplos: (GEMAEL, 1994)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales $A X = L$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

La solución

$$X^T = [5 \quad 5]$$

Se introduce una pequeña variación en uno de los términos independientes: por ejemplo sustituir el 10 de la primera ecuación por 10.01. Esta alteración, de apenas un centésimo, implicará una variación en las incógnitas de milésimos.

$$X^T = [5.007 \quad 5.003] \quad (3.65)$$

Este es un ejemplo de un sistema bien condicionado.

Se considera ahora el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.001 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10.005 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

que a primera vista no presenta ninguna singularidad y cuya solución está dada por:

$$X^T = [5 \quad 5]$$

Efectuando una pequeña alteración en el término independiente de la segunda ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.001 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10.1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

una de las incógnitas es multiplicada por 18 y la otra por 20:

$$X^T = [100 \quad -90]$$

Por lo tanto este sistema es un ejemplo de mal condicionamiento.

No como un criterio conclusivo, si no como una ayuda, un determinante pequeño y una inversa grande de la matriz pueden significar síntomas de mal condicionamiento.

Una manera más certera de definir, si una matriz está mal condicionada o no, es utilizando los números de condición:

1. *Número de TURING de la matriz W:*

$$T_1 = \frac{t^* t'}{n} \begin{cases} t^2 = tr(W^T W) \\ t'^2 = tr\left[(W^{-1})^T W^{-1}\right] \end{cases} \quad (3.68)$$

$$T_2 = n \max |w_{ij}| \max |w'_{ij}| \quad (3.69)$$

Para el número T_1 , "tr" significa "trazo" de la matriz producto, T_2 es el resultado del producto de los máximos elementos de W y W^{-1} por el orden de la matriz.

2. Número de TODD

$$P = \left| \frac{\max \lambda}{\min \lambda} \right| \quad (3.70)$$

λ_i representa los valores propios de la matriz W .

Un escalar λ_i es un valor propio si existe un vector no nulo v tal que $A^* v = \lambda_i v$.

Cualquier vector no nulo v que satisfaga:

$$A^* v = \lambda_i v \quad (3.71)$$

es un vector propio asociado al valor propio

Esta definición implica que para un vector propio v el efecto de aplicarle la transformación lineal A es igual que amplificarlo por el escalar λ_i . Esto significa que un vector y el vector transformado son colineales o paralelos y por lo tanto linealmente dependientes.

Para calcular los valores propios de A se construye un polinomio característico $\Delta = \text{Det}(A - \lambda I) = 0$ en donde I representa la matriz identidad de iguales dimensiones que A . Cada raíz del polinomio representará un valor propio de A .

3. Número de condición H

$$H = \sqrt{\frac{\max u}{\min u}} \quad (3.72)$$

u_i representa los valores propios de la matriz $W^T W$.

En el presente estudio, para determinar el buen condicionamiento de la matriz de coeficientes A se utilizó el número de condición H, y el número TODD ,y los resultados fueron los siguientes:

Tabla 3.1 Números de condición

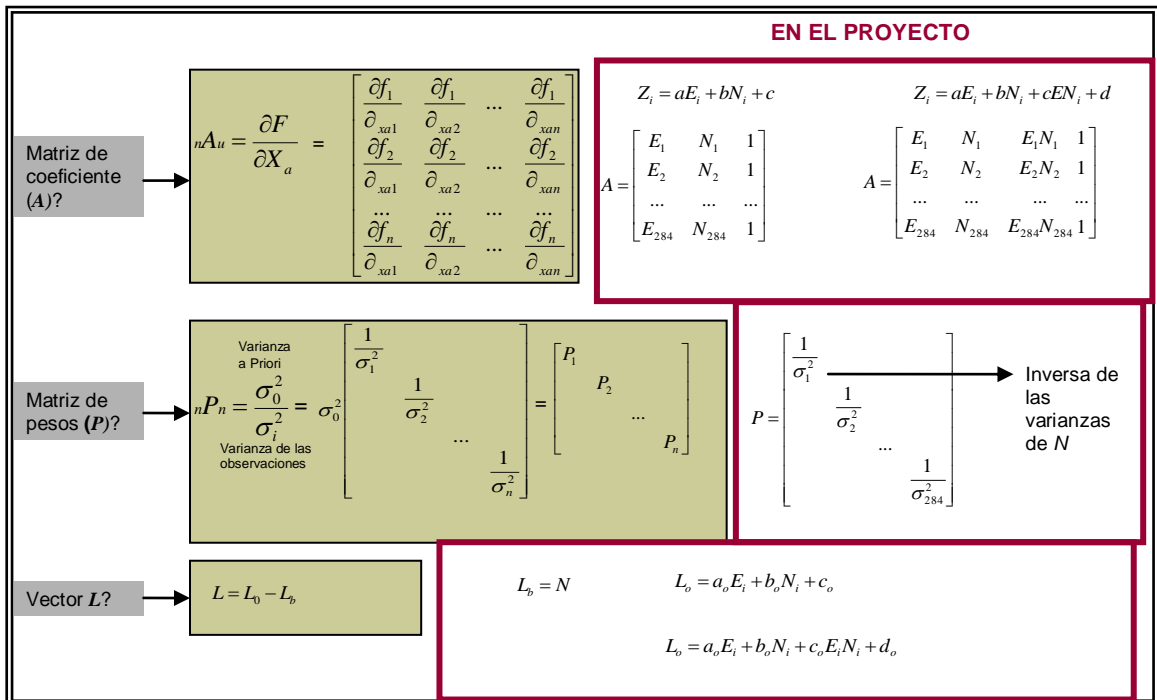
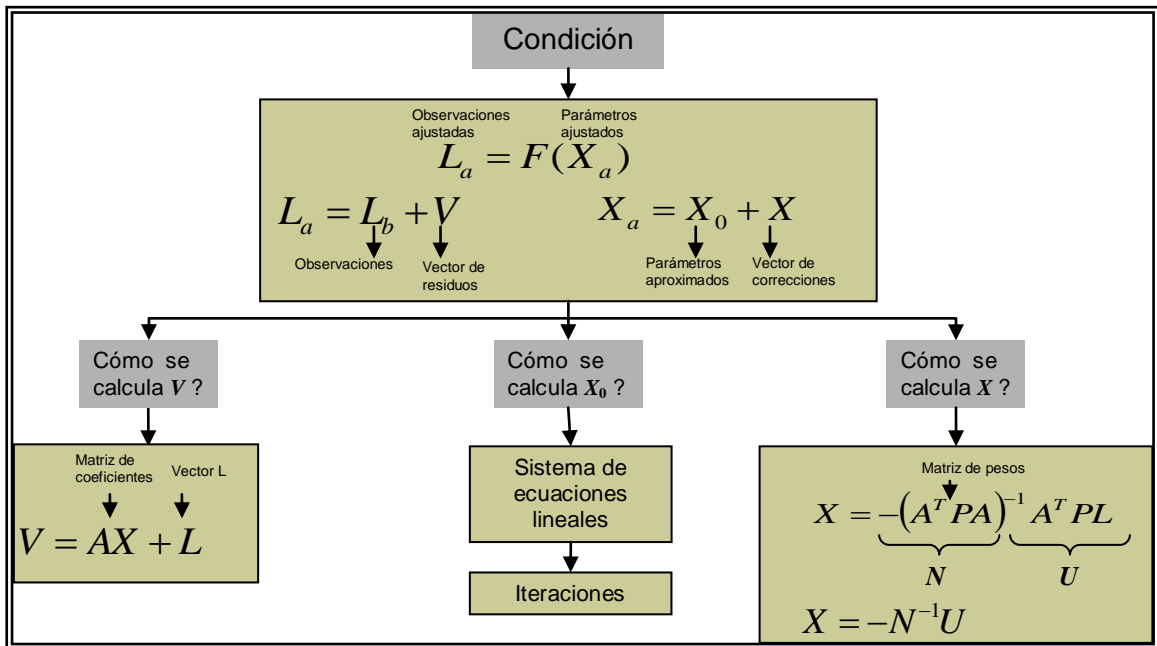
	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3	MODELO 4
Número de condición H	1.5066	1.9463	5.5447	3.104E2
Número TODD	2.2698	3.7881	30.7412	9.635E4

Con estos resultados se puede concluir que el primer, segundo y tercer modelo están bien condicionados, mientras que el modelo 4 presenta números de condición muy altos y distantes entre sí, lo que indica un mal condicionamiento del sistema. Por tal razón no se tomará en cuenta al cuarto modelo para los siguientes cálculos.

El programa que ayudó a calcular los números de condición TODD y H fue realizado en el Software Matlab 6.5, y cuya programación se presenta en el anexo 9.

3.2.8 Resumen de la metodología utilizado en el ajuste de mínimos cuadrados con el método paramétrico.

A manera de resumen se presenta a continuación un organigrama que facilita el entendimiento del ajuste por mínimos cuadrados realizado en este proyecto.



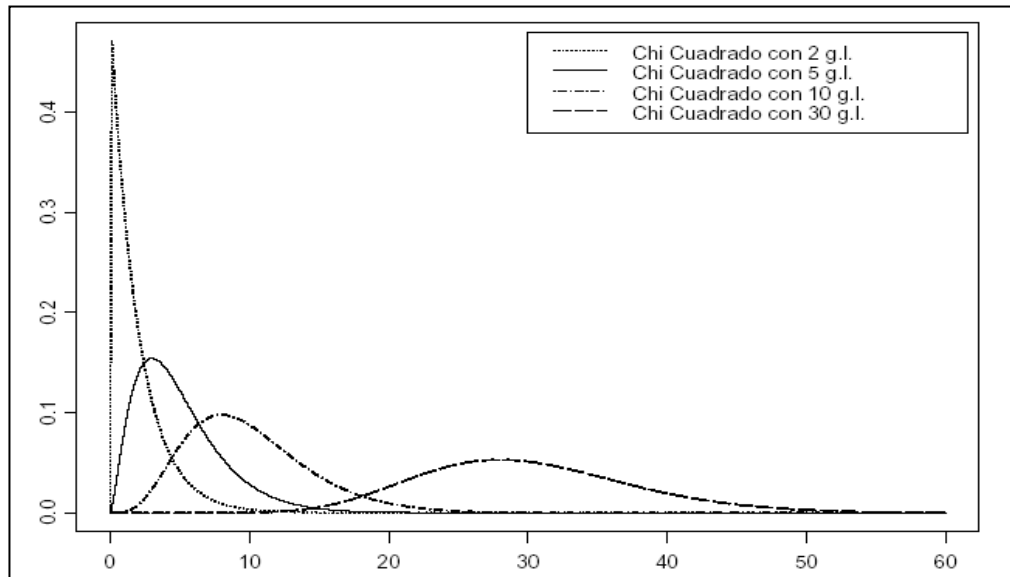
3.3 Prueba X^2

En estadística, la Distribución Chi-cuadrada es una distribución de probabilidad continua con un parámetro S , que representa los grados de libertad de la variable aleatoria y de la cual la distribución Chi-cuadrado depende.

La figura 3.1 muestra la representación gráfica de la distribución X^2 para varios grados de libertad, donde son visibles las siguientes propiedades: (GEMAEL, 1994)

- Las abscisas son siempre positivas.
- Las curvas son asintóticas al semieje positivo de las abscisas.
- Las curvas tienen dos puntos de inflexión, una a cada lado de la ordenada máxima.
- La asimetría disminuye cuando aumenta el número de grados de libertad.

Figura 3.1 Distribución del Chi-cuadrado con distintos grados de libertad



Fuente: Pontificia Universidad Católica de Chile

En la Distribución X^2 se definen límites e intervalos de confianza del 95%, 99%, u otros distintos, mediante una tabla de Distribución X^2 . De esta forma se pueden estimar dentro de unos determinados límites de confianza la desviación típica de la población a partir de las desviación típica muestral (SCHAUM, 1980).

Por ejemplo, si $X_{0.025}^2$ y $X_{0.975}^2$ son los valores de X^2 (llamados valores críticos) para los que el 2.5% del área se encuentra en cada “cola” de la distribución, entonces el intervalo de confianza es del 95%.

La prueba Chi-cuadrado o test de varianza global tiene el propósito de comprobar la compatibilidad de las observaciones con el modelo matemático utilizado e indicar la calidad del ajuste. En este proyecto el ajuste se realizó al 95% de confianza.

La prueba del Chi-cuadrado verifica la compatibilidad del ajuste comparando la varianza posteriori ($\hat{\sigma}^2$) con la varianza a priori (σ_0^2), que para este estudio fue considerada como la unidad. El test de hipótesis inicial utilizado para esta prueba fue la bilateral, explicada anteriormente en la sección 3.2.1 referente a la varianza posteriori.

3.4 Prueba de Tendencia

Para este proyecto el análisis de tendencia se realiza a partir de las cartas de ondulaciones geoidales generadas por GPS/Nivelación, y a partir de la variación del número de observaciones para calcular los parámetros de los modelos matemáticos. El análisis de tendencia se basa en la estadística de las discrepancias entre las ondulaciones geoidales reales y las ondulaciones obtenidas a través de las cartas y de los modelos matemáticos.

Para realizar el test de tendencia se analizan las siguientes hipótesis: (ARANA, 2000)

$$H_0: \Delta \bar{X} = 0, \quad (3.73)$$

contra

$$H_1: \Delta \bar{X} \neq 0 \quad (3.74)$$

Para el test de tendencia se calcula la prueba estadística “t” de la muestra, y se verifica si el valor de “t” está en el intervalo de aceptación de la hipótesis nula. El valor “t” de la muestra se calcula de la siguiente manera:

$$t_x = \frac{\Delta \bar{X}}{S_{\Delta X}} n^{1/2} \quad (3.75)$$

Donde

$\Delta \bar{X}$ Media de las discrepancias entre ondulaciones “reales” y ondulaciones obtenidas a través de las cartas geoidales o de los modelos matemáticos.

$S_{\Delta X}$ Desviación estándar de las discrepancias entre ondulaciones “reales” y ondulaciones obtenidas a través de las cartas geoidales o de los modelos matemáticos.

El intervalo de confianza está dado por:

$$|t_x| < t_{n-1, \alpha/2} \quad (3.76)$$

Si la prueba estadística “t” de la muestra no satisface la condición (3.76), se rechaza la hipótesis nula. En tal situación, la carta no puede ser considerada libre de tendencia para el nivel de confianza del 95% adoptada para este trabajo.

3.5 Prueba de Exactitud

El análisis de exactitud de las cartas de ondulaciones geoidales y del modelo matemático ajustado con diferente número de observaciones se realiza a partir de la comparación entre la varianza de los residuos obtenidos en la carta de ondulación geoidal de 235 observaciones y del modelo matemático ajustado con 234 observaciones con la varianza de las discrepancias generadas en las cartas de ondulación geoidal de 100, 50, 25 y 8 observaciones y del modelo matemático ajustado con 100, 50, 25 y 8 observaciones.

El test de hipótesis es el siguiente: (ARANA, 2000)

$$H_0 : S_x^2 = \sigma_x^2, \quad (3.77)$$

contra

$$H_1 : S_x^2 > \sigma_x^2 \quad (3.78)$$

En donde

σ_x^2 Varianza de las discrepancias de las cartas de ondulación geoidal de 100, 50, 25 y 8 observaciones, y del modelo matemático ajustado con 100, 50, 25 y 8 observaciones.

S_x^2 Varianza de los residuos generados a partir de la carta de ondulación geoidal de 235 observaciones y del modelo matemático ajustado con 234 observaciones.

Una vez determinadas las varianzas se realiza el siguiente cálculo:

$$X_x^2 = (n-1) \frac{S_x^2}{\sigma_x^2} \quad (3.79)$$

Después de realizar el cálculo anterior se comprueba si el valor del Chi-cuadrado está dentro del intervalo de aceptación:

$$X_x^2 \leq X_{(n-1, \alpha)}^2 \quad (3.80)$$

Si no se acepta la expresión de la ecuación (3.80) significa que la hipótesis nula es rechazada, por tanto hay que tener cuidado con la precisión pre-establecida de la carta geoidal o del modelo matemático.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA PARA DETERMINAR LAS ONDULACIONES GEOIDALES Y RESULTADOS

El capítulo IV tiene como objetivo principal exponer la metodología⁹ utilizada en este proyecto para la determinación de las ondulaciones geoidales de un área del Distrito Metropolitano de Quito y presentar los resultados alcanzados en los distintos experimentos. Los métodos utilizados fueron: GPS/Nivelación, EGM 96, GPS/Nivelación asociado al modelo geopotencial EGM 96, y finalmente los modelos matemáticos. Para facilitar el análisis de los métodos antes mencionados fueron elaboradas tablas, gráficos y cartas de ondulaciones geoidales.

4.1 Marco lógico

4.1.1 Determinación de la Ondulación Geoidal a partir de GPS/Nivelación

El sistema NAVSTAR/GPS proporciona coordenadas geodésicas de un punto, referidas al sistema WGS 84, entre las cuales se encuentra la altura elipsoidal. Para este proyecto, por la dificultad que involucra obtener alturas ortométricas, estas serán reemplazadas por las alturas niveladas. Los datos que intervinieron en este proyecto se los obtuvo a partir del método de nivelación geométrica de segundo orden, en donde la tolerancia es de $8.4 \text{ mm } \sqrt{K}$ (K distancia entre puntos nivelados geoméricamente en Km). A través de estos dos valores (altura elipsoidal y nivelada) y utilizando la ecuación (2.11) se puede calcular el valor “real” de la ondulación geoidal para cada punto que interviene en este proyecto.

Otra alternativa para determinar la ondulación geoidal a partir del conocimiento de la altura elipsoidal y ortométrica, es a través de la interpolación de la ondulación de un lugar localizado en una línea formada por ambos puntos o cercanos a ellos.

⁹ En el anexo 11 se presenta un organigrama de la metodología utilizada en este proyecto

FEATHERSTONE, 1998 (tomado de Arana, 2000) presenta el siguiente modelo:

$$H_X = H_A + \Delta h_{AX} - \frac{l_{AX}}{l_{AB}} \Delta N_{AB} \quad (4.1)$$

Donde:

- H_X Altura ortométrica del punto interpolado
- H_A Altura ortométrica de punto ya conocido A
- Δh_{AX} Diferencia de altitudes geométricas entre el punto a ser interpolado y el punto A
- l_{AX} Distancia entre el punto a ser interpolado y el punto A
- l_{AB} Distancias entre los puntos conocidos A y B
- ΔN_{AB} Diferencia de ondulaciones geoidales entre los puntos conocidos A y B

En el caso de que se desee conocer el valor de la ondulación geoidal de varios puntos dentro de un área, se puede determinar un plano, con la ecuación (4.2) o una poli superficie con las ecuaciones (4.3 a 4.5), que representa la forma aproximada del geoide local. Para esto se requiere conocer por lo menos las coordenadas UTM de tres puntos no colineales.

FIEDLER y COLLIER & CROFT, (tomado de Arana, 2000) proponen modelos matemáticos que representan al geoide de una región. Para este estudio se tomó en cuenta las siguientes ecuaciones:

$$\text{Modelo 1} \quad Z_i = aE_i + bN_i + c \quad (4.2)$$

$$\text{Modelo 2} \quad Z_i = aE_i + bN_i + cEN_i + d \quad (4.3)$$

$$\text{Modelo 3} \quad Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e \quad (4.4)$$

$$\text{Modelo 4} \quad Z_i = aE_i + bN_i + cN_iE_i + dE_i^2 + eN_i^2 + f \quad (4.5)$$

- Z_i Ondulación geoidal en el punto i
- E_i, N_i Coordenadas UTM del punto i
- a, b, c, d Parámetros del modelo matemático

Los parámetros de los modelos matemáticos antes mencionados se los calculará con el Método Paramétrico de Mínimos Cuadrados. Para la realización de estos cálculos se contará con un total de 284 datos facilitados por el Departamento de Geodesia del Instituto Geográfico Militar.

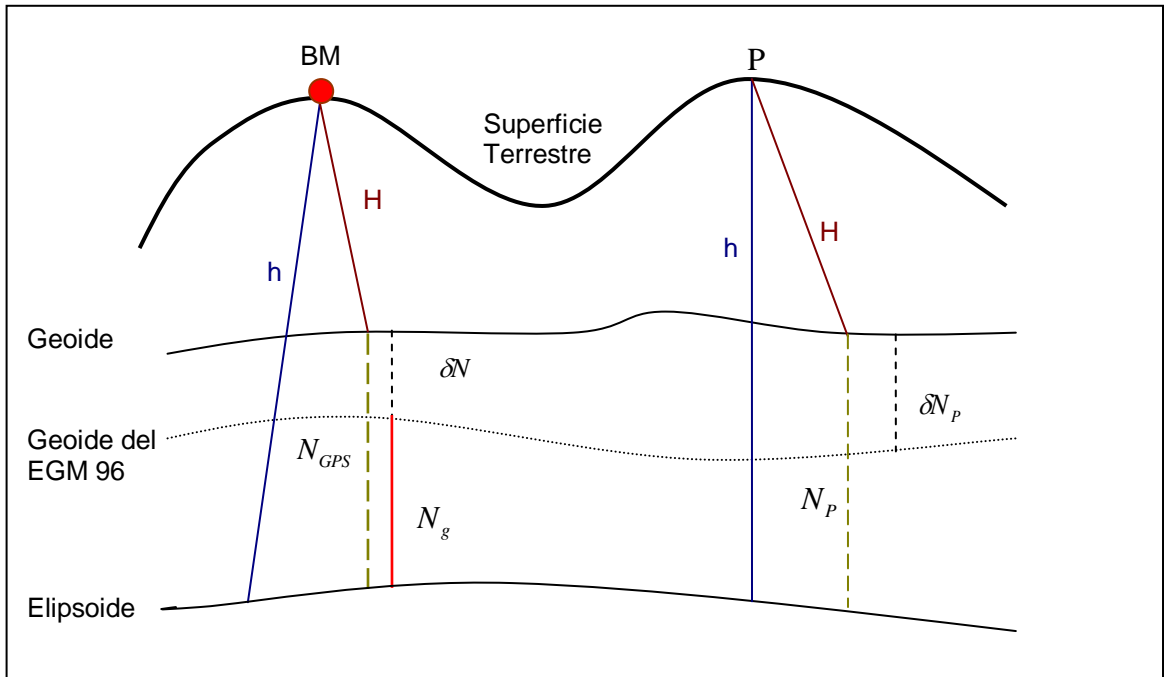
4.1.2 Determinación de la Ondulación Geoidal a partir de GPS/Nivelación y del Modelo Geopotencial EGM 96

Los modelos geopotenciales representan la distribución interna de las masas terrestres de manera muy próxima a la realidad, lo que permite obtener resultados de ondulaciones aceptables en distancias relativamente cortas, como es el caso del presente estudio.

La ondulación geoidal que se obtiene del Modelo Geopotencial EGM 96 permite comparar resultados con la ondulación geoidal que se obtuvo a partir del GPS/Nivelación, representando esta última, el “valor verdadero” de las ondulaciones geoidales de todas las observaciones involucradas en este proyecto. Esta comparación permitirá establecer la separación que existe entre el geoide local y el geoide del modelo (Ver figura 4.1); con este concepto de ondulaciones geoidales (GPS/Nivelación- modelo) se puede establecer nuevos parámetros para las ecuaciones (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), que finalmente representarán un “modelo matemático” para la separación que existe entre el geoide de la región en estudio, y el modelo geopotencial.

Para determinar la ondulación geoidal a partir de GPS/Nivelación asociado al Modelo Geopotencial, primeramente se debe calcular la ondulación geoidal de cada punto con el EGM 96, para luego con ayuda del modelo matemático determinado con el MMC obtener la separación entre el modelo geopotencial y el geoide, a esta diferencia se le suma la ondulación calculada por el modelo geopotencial, y así se determina la ondulación del geoide a través del GPS/Nivelación y el Modelo Geopotencial EGM 96.

Figura 4.1 Determinación de la ondulación geoidal a partir del EGM 96 y GPS/Nivelación



Fuente: ARANA, 2000

H altura ortométrica

h altura elipsoidal

δN Separación entre el Modelo Geopotencial EGM 96 y el geoide local

N_{GPS} Ondulación Geoidal a partir del GPS/Nivelación

N_g Ondulación Geoidal obtenida por el Modelo Geopotencial

Del gráfico se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\delta N = N_{GPS} - N_g \quad (4.6)$$

$$N_{GPS} = N_g + \delta N \quad (4.7)$$

El propósito es determinar la altura sobre el nivel medio del mar del punto P con los datos entregados por GPS/Nivelación y por el EGM 96.

En una situación ideal se tiene la siguiente fórmula:

$$N_P = N_g + \delta N_P \quad (4.8)$$

En las ecuaciones (4.2 a 4.5) se sustituye Z_i por δN_p (diferencia de ondulaciones entre geoide local y modelo geopotencial) y se resuelve los parámetros con el método de mínimos cuadrados. Seleccionado el modelo matemático que representará la separación existente entre el modelo geopotencial y el geoide de la región en estudio, se procede a calcular N_p a partir de la ecuación (4.8) y de esta manera se obtiene finalmente la ondulación geoidal a partir de GPS/nivelación y el Modelo Geopotencial EGM 96.

4.2 Validación de datos

Antes de iniciar con los cálculos matemáticos fue necesario revisar la calidad de los datos con los que se va a trabajar, ya que de estos dependen los resultados. El proceso de validación empezó con 380 puntos localizados en las zonas Norte y Centro de la ciudad de Quito, desde San Antonio de Pichincha hasta la Mariscal Sucre, incluyendo Nayón, Cumbayá, Tumbaco y Puembo.

El primer parámetro que se tomó en cuenta para descartar algunos puntos de la lista fue la tolerancia de cierre en el proceso nivelación geométrica. La tolerancia para este proyecto usada por el IGM para nivelación geométrica de segundo orden fue de $\pm 8.4\text{mm} \cdot \sqrt{K}$ mientras que en la trigonometría fue de $\pm 3.4\text{ cm} \cdot \sqrt{K}$.

Para comprobar si las coordenadas Este y Norte de cada punto eran las correctas se procedió a revisar cada una de las monografías y la ubicación respectiva en el mapa de Quito.

Para eliminar la existencia de posibles errores groseros dentro de los valores de las ondulaciones geoidales se procedió primeramente a revisar las alturas elipsoidales en las hojas de procesamiento GPS y el valor de las alturas niveladas en las carpetas de campo. Luego se estimó las variaciones de las ondulaciones entre los puntos adyacentes, como preámbulo se estableció que la variación no puede ser mayor a 5cm dentro de un radio de 1 Km. Esta condición no se cumplió con total rigidez ya que

también se tomó en cuenta la tendencia creciente o decreciente que tenía la ondulación en una determinada zona.

Luego de eliminar los posibles errores groseros se obtuvo una lista final de 284 puntos, de los cuales 23 no fueron tomados en cuenta para la generación del modelo matemático ya que estos últimos van a ser utilizados para la validación del mismo.

4.3 Análisis de la Prueba X^2

A continuación se presenta el análisis de la prueba Chi-cuadrado para los modelos matemáticos representados por los modelos (4.2 a 4.4)¹⁰, utilizados para la determinación de la ondulación geoidal dentro de la ciudad de Quito. También se presenta el análisis del test global para los modelos matemáticos que determinan la separación entre el geoide local y el geoide del Modelo Geopotencial EGM 96.

4.3.1 Análisis del test de varianza global para los modelos matemáticos que determinan las ondulaciones geoidales de un sector de Quito.

4.3.1.1 Primera prueba (todas las observaciones)

El cálculo de los parámetros de los modelos 1, 2, y 3 fueron realizados a través del método paramétrico, en donde inicialmente intervinieron 284 observaciones. En la primera prueba la matriz de pesos fue conformada por la inversa de las varianzas de las ondulaciones geoidales obtenidas a través de GPS/Nivelación (Ver anexo 1).

Los resultados que se indican a continuación fueron obtenidos a partir de 3 programas elaborados para cada uno de los modelos en Matlab 6.5.

¹⁰ Solo se toma en cuenta los 3 primeros modelos ya que el cuarto modelo presento mal condicionamiento de la matriz A (Ver sección 3.2.7)

Tabla 4.1 Primera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con 284 observaciones

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
$S(n-u)$	281 (284-3)	280 (284-4)	279 (284-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	184.1049	116.1257	29.3723
Máximo Residual	0.3741	0.3083	0.2523
Mínimo Residual	-0.9575	-0.6295	-0.3832
Media Residual	0.0250	-0.0034	-0.0122
σ	0.2003	0.1547	0.0946
3σ	0.6009	0.4642	0.2837
X_c^2	51733.4870	32515.1956	8106.7649
$X_{v;0.025}^2$	236.5	235.6	234.7
$X_{v;0.975}^2$	329.4	328.3	327.2

Primer modelo: El X_c^2 es alto, lo que no le permite estar dentro del rango de aceptación para el test de varianza global. El mínimo residual sobrepasa el valor de 3σ , lo que significa que los residuales en valor absoluto superiores a este valor tienen que ser eliminados de la lista de observaciones, por ser considerados errores groseros.

Segundo modelo: La $\hat{\sigma}_o^2$ y X_c^2 siguen manteniéndose altos, lo que significa que se rechaza nuevamente la prueba del X^2 bilateral, pero en comparación con los resultados anteriores los residuales, la media y la desviación estándar son menores. Se observa que el mínimo residual sobrepasa al 3σ , lo que significa que existen errores groseros que deben ser eliminados.

Tercer modelo: En comparación con los otros dos modelos la $\hat{\sigma}_o^2$ se redujo significativamente, al igual que el valor correspondiente al X_c^2 . A pesar de esta reducción el modelo matemático tampoco pasa la prueba estadística del X^2 . Los residuales siguen la misma tendencia de descenso pero todavía existen algunos valores negativos que sobrepasan al 3σ .

Conclusión: Los residuales de las observaciones mejoraron en el tercer modelo al igual que la desviación estándar, pero el valor del χ^2_c es elevado como para pasar la prueba χ^2 bilateral. Las posibles razones para tener valores tan elevados puede ser, primero la presencia de errores groseros, y segundo la matriz de los pesos.

4.3.1.2 Segunda prueba (eliminación de residuales mayores a 3σ)

Los valores absolutos de los residuales que sobrepasaron al valor de 3σ en la prueba anterior fueron eliminados para esta segunda prueba, ya que son considerados errores groseros. Para el primer modelo en total fueron descartadas 6 observaciones¹¹, las cuales se citan a continuación: 95Q, 97Q, 98Q, 99Q, 103Q, 104Q. Para el segundo y tercer modelo se eliminaron 3 observaciones, las cuales son: 95Q, 98Q, 99Q. Estas últimas observaciones sobrepasaron al valor de 3σ en todos los modelos, por lo que se considera que posiblemente en estas observaciones existen fallas en el posicionamiento satelital o en la nivelación geométrica. Con la eliminación de estas observaciones se obtuvieron los siguientes resultados indicados en la tabla 4.2:

Tabla 4.2 Segunda prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos sin residuales mayores a 3σ

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
$S(n-u)$	275(278-3)	277(281-4)	276(281-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	144.8604	105.2446	23.9634
<i>Máximo Residual</i>	0.3564	0.2874	0.2454
<i>Mínimo Residual</i>	-0.4891	-0.3793	-0.2001
<i>Media Residual</i>	0.026	0.00029	-0.0091
σ	0.1690	0.1446	0.0852
3σ	0.5071	0.4337	0.2555
χ^2_c	39836.6024	29152.7608	6613.897
$\chi^2_{v;0.025}$	231.0	232.8	231.9
$\chi^2_{v;0.975}$	322.9	325.0	323.9

¹¹ Las características de estas observaciones están disponibles en el Anexo 1, en negrilla.

Primer modelo: Se puede constatar que con la eliminación de los errores groseros se redujo el valor del X_c^2 , pero todavía representa un valor muy elevado. Los residuales disminuyeron, siendo estos menores a 3σ .

Segundo modelo: Al eliminar los errores groseros, los residuales bajaron y la media se aproxima a cero. La $\hat{\sigma}_o^2$ y el X_c^2 siguen manteniéndose altos impidiendo de esta manera aceptar la prueba estadística del X^2 bilateral.

Tercer modelo: Al igual que en la primera prueba los valores de la $\hat{\sigma}_o^2$ y del X_c^2 disminuyeron notablemente, pero se continúa rechazando la hipótesis nula ya que el X_c^2 no está dentro del rango de aceptación de doble cola. Ya no existen residuales que sobrepasen al valor de 3σ .

Conclusión: En esta segunda prueba todos los modelos mejoraron sus resultados, pero a pesar de esto ninguno pasa el test de varianza global bilateral, ya que el X_c^2 es elevado. Se descarta la posibilidad de que la prueba X^2 no es aceptada por la presencia de errores groseros superiores a 3σ .

4.3.1.3 Tercera prueba (Variación matriz de pesos)

Al comprobar que la presencia de posibles errores groseros no es la razón por la cual la prueba X^2 es rechazada, se prosigue a analizar la matriz de los pesos. Para ello se realizó 5 pruebas, en la primera se utilizó a la matriz identidad como matriz de pesos; en la segunda se cambió la unidades de las varianzas en milímetros; en la tercera se cambió las unidades de las varianzas en centímetros; en la cuarta se utilizó las varianzas en kilómetros y en la última prueba se utilizó a la inversa de la distancia en kilómetros que existe entre los puntos nivelados geoméricamente.

4.3.1.3.1 Matriz Identidad

La primera prueba que se realizó con la matriz de los pesos fue transformarla a una matriz identidad, lo que en teoría significa que las observaciones presentan el mismo grado de confianza y el peso de cada observación corresponde a la unidad.

Tabla 4.3 Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con la matriz identidad como matriz de pesos.

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
$S (n-u)$	275 (278-3)	277 (281-4)	276 (281-5)
σ_o^2	0.0282	0.02078	0.00689
<i>Máximo Residual</i>	0.3025	0.3334	0.2522
<i>Mínimo Residual</i>	-0.5330	-0.3903	-0.2267
<i>Media Residual</i>	6.4896E-18	-5.4934E-13	2.7549E-9
σ	0.1673	0.1434	0.0824
3σ	0.5021	0.4301	0.2472
X_c^2	7.7596	5.7565	1.9013
$X_{v;0.025}^2$	231.0	232.8	231.9
$X_{v;0.975}^2$	322.9	325.0	323.9

Primer modelo: Al conformar la matriz de pesos con la matriz identidad se observa que el valor del X_c^2 se reduce significativamente. Este nuevo valor resulta pequeño, por tal razón no pasa el test global bilateral. La desviación estándar se mantiene muy similar a las anteriores pruebas. El valor absoluto del mínimo residual sobrepasa al valor de 3σ , lo que significa que todavía existe un error grosero superior a 3σ que se debe eliminar. La observación correspondiente a este residual, denominada 109 Q, es excluida de la lista de observaciones. Con esta eliminación se obtuvo los siguientes resultados:

Tabla 4.4 Tercera prueba: Eliminación de residuales superiores a 3σ del modelo 1

	MODELO 1
$S(n-u)$	274(277-3)
$\hat{\sigma}_o^2$	0.0273
Máximo Residual	0.3010
Mínimo Residual	-0.4733
Media Residual	1.4529E-17
σ	0.1645
3σ	0.4935
X_c^2	7.4696
$X_{v;0.025}^2$	230.1
$X_{v;0.975}^2$	321.8

Los valores de la tabla 4.4 no varían significativamente en relación con la anterior, solo que ya no existen residuales superiores al 3σ . A partir de estas pruebas se concluye que para obtener buenos resultados para el primer modelo fue necesario eliminar 7 observaciones, lo que quiere decir que en las próximas pruebas el modelo 1 contará solamente con 277 observaciones.

Segundo modelo: Al utilizar la matriz identidad como matriz de pesos el valor del X_c^2 disminuye significativamente, impidiendo que esté dentro del rango de aceptación de la prueba X^2 bilateral. El residual máximo y mínimo aumentaron en comparación con los valores de la segunda prueba para el mismo modelo. La media residual es muy cercana a cero.

Tercer modelo: Utilizando la matriz identidad como matriz de pesos los valores de $\hat{\sigma}_o^2$, X_c^2 y media residual disminuyeron, mientras que el máximo y mínimo residual aumentaron en comparación con los resultados de la segunda prueba. El máximo residual sobrepasa al valor de 3σ , por tal razón se efectúa un nuevo cálculo eliminando las observaciones que tengan un residual superior al 3σ .

Tabla 4.5 Tercera prueba: Eliminación de residuales superiores a 3σ del modelo 3

	MODELO 3
$S (n-u)$	274 (279-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	0.0065
<i>Máximo Residual</i>	0.2304
<i>Mínimo Residual</i>	-0.2258
<i>Media Residual</i>	-1.1406E-8
σ	0.0798
3σ	0.2394
X_c^2	1.77041
$X_{v;0.025}^2$	230.1
$X_{v;0.975}^2$	321.8

Se eliminaron dos observaciones 150Q y 151Q, quedando en total 279 observaciones para las próximas pruebas del tercer modelo.

Conclusión: Con la matriz identidad como matriz de pesos, se puede concluir que el tercer modelo tiene los residuales mas bajos, al igual que la media y la desviación estándar, en relación con los otros dos modelos. Aunque la $\hat{\sigma}_o^2$ y el X_c^2 del tercer modelo disminuyeron significativamente, no es aceptada la hipótesis nula ya que el valor es inferior al límite izquierdo.

4.3.1.3.2 Cambio de las unidades de las varianzas a milímetros

En la primera y segunda prueba se trabajó con las varianzas en unidades métricas y como se pudo observar no se obtuvieron buenos resultados. Para este nuevo análisis se procede a variar las unidades de las varianzas de las ondulaciones geoidales en milímetros.

Tabla 4.6 Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con una matriz de pesos conformada con las varianzas en milímetros.

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
$S(n-u)$	274(277-3)	277(281-4)	274 (279-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	0.000138	0.000105	2.3456E-5
Máximo Residual	0.3543	0.2874	0.2128
Mínimo Residual	-0.4274	-0.3793	-0.2005
Media Residual	0.0247	0.00029	-0.0101
σ	0.1662	0.1446	0.0826
3σ	0.4985	0.4337	0.2478
X_c^2	0.0378	0.0291	0.0064
$X_{v;0.025}^2$	230.1	232.8	230.1
$X_{v;0.975}^2$	321.8	325.0	321.8

Primer modelo: La $\hat{\sigma}_o^2$ se redujo significativamente, por consiguiente el valor del X_c^2 es un valor pequeño, que no ingresa en el rango de aceptación de la hipótesis nula. Por otro lado los residuales son altos, pero están bajo el valor de 3σ . El valor de la media residual aumentó en comparación con el análisis anterior, lo que demuestra que en general los residuales son más altos.

Segundo modelo: En comparación con el primer modelo los residuales disminuyeron, al igual que el X_c^2 , lo que impide que pase la prueba X^2 bilateral.

Tercer modelo: Con 279 observaciones se puede apreciar que los residuales continúan disminuyendo, pero el valor del X_c^2 todavía se mantiene bajo como para estar dentro del rango establecido para aceptar la prueba X^2 de doble cola.

Conclusión: Se continua afirmando que con el tercer modelo se obtienen los residuales más pequeños, pero el valor del X_c^2 de todos los modelos se mantiene fuera del rango de aceptación de la prueba X^2 .

4.3.1.3.3 Cambio de las unidades de las varianzas a centímetros

Tabla 4.7 Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con una matriz de pesos conformada con las varianzas en centímetros

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
$S(n-u)$	274(277-3)	277(281-4)	274 (279-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	0.0138	0.0105	0.0023456
<i>Máximo Residual</i>	0.3543	0.2874	0.2128
<i>Mínimo Residual</i>	-0.4274	-0.3793	-0.2005
<i>Media Residual</i>	0.0247	0.00029	-0.0101
σ	0.1662	0.1446	0.0826
3σ	0.4985	0.4337	0.2478
X_c^2	3.7789	2.9153	0.6427
$X_{v;0.025}^2$	230.1	232.8	230.1
$X_{v;0.975}^2$	321.8	325.0	321.8

Primer modelo: La $\hat{\sigma}_o^2$ aumentó al igual que el valor del X_c^2 pero tampoco pasa la prueba X^2 de doble cola, por ser valores pequeños. Los valores máximo, mínimo, media y desviación estándar de los residuales son iguales a los datos de la tabla 4.6, lo que significa que una variación proporcional de la matriz de pesos no afecta a los residuales, pero si afecta proporcionalmente a la $\hat{\sigma}_o^2$ y al X_c^2 , ya que en comparación con la tabla anterior estos valores son 100 veces mayores.

Segundo modelo: La $\hat{\sigma}_o^2$ y el X_c^2 aumentaron 100 veces su valor en comparación con los datos de la tabla 4.6. Los valores mínimos, máximo, media y desviación estándar de los residuales son iguales a los de la varianza en milímetros.

Tercer modelo: Se observa que ocurre el mismo comportamiento explicado en los anteriores modelos. Este tercer modelo sigue manteniendo los residuales más bajos en relación con los dos modelos anteriores.

Conclusión: Utilizando las varianzas de la matriz de pesos en centímetros se observa que el tercer modelo obtuvo los residuales más bajos. La $\hat{\sigma}_o^2$ y el X_c^2 aumentaron en relación con el análisis anterior (varianza en milímetros), pero a pesar de esto tampoco pasa el test global de doble cola.

4.3.1.3.4 Cambio de las unidades de las varianzas a kilómetros

Tabla 4.8 Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos con una matriz de pesos conformada con las varianzas en kilómetros

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
$S(n-u)$	274(277-3)	277(281-4)	274 (279-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	137917184.01	105244623.69	23455734.13
<i>Máximo Residual</i>	0.3543	0.2874	0.2128
<i>Mínimo Residual</i>	-0.4274	-0.3793	-0.2005
<i>Media Residual</i>	0.0247	0.00029	-0.0101
σ	0.1662	0.1446	0.0826
3σ	0.4985	0.4337	0.2478
X_c^2	37789308421.4	29152760762.7	6426871150.87
$X_{v;0.025}^2$	230.1	232.8	230.1
$X_{v;0.975}^2$	321.8	325.0	321.8

Primer modelo: Al igual que en los dos análisis anteriores los valores máximo, mínimo, media y desviación estándar de los residuales se mantienen constantes, la σ_o^2 y X_c^2 aumentó 1E10 veces, convirtiéndolas en valores excesivamente altos, como para estar dentro del rango de aceptación bilateral del test global.

Segundo modelo: Sucede el mismo fenómeno que en el primer modelo. Pero en este los residuales son menores.

Tercer modelo: El máximo, mínimo, media residual, desviación estándar y el 3σ se mantienen constantes en comparación con las dos pruebas anteriores. La σ_o^2 y X_c^2 aumentaron 1E10 veces su valor en comparación con la prueba anterior del tercer modelo. En relación con los dos modelos anteriores se obtuvo residuales más pequeños.

Conclusión: A pesar que los residuales del modelo 3 son bajos, ninguno de los análisis realizados con una matriz de pesos conformado con varianzas en kilómetros son aceptadas ya que los valores del X_c^2 son bastante elevados y no se encuentran dentro del rango de aceptación para aceptar la hipótesis nula.

4.3.1.3.5 Inversa de la distancia en kilómetros entre puntos nivelados

Tomando como base que dentro de la nivelación geométrica la matriz de los pesos es inversamente proporcional a la distancia entre dos puntos nivelados en kilómetros, y como en este proyecto solo se escogieron las observaciones realizadas con nivelación geométrica, se toma en cuenta este concepto para formar la matriz de pesos. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Tabla 4.9 Tercera prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos con una matriz de pesos conformada con la inversa de la distancia entre puntos nivelados en kilómetros.

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
$S (n-u)$	274(277-3)	277 (281-4)	274 (279-5)
σ_o^2	0.04096	0.03085	0.00807
<i>Máximo Residual</i>	0.3206	0.2634	0.2229
<i>Mínimo Residual</i>	-0.4252	-0.3937	-0.2235
<i>Media Residual</i>	9.4231E-5	-0.01462	-0.00974
σ	0.1664	0.1470	0.07998
3σ	0.4993	0.4409	0.2399
X_c^2	11.2232	8.5458	2.2110
$X_{v;0.025}^2$	230.1	232.8	230.1
$X_{v;0.975}^2$	321.8	325.0	321.8

Primer modelo: El valor máximo y mínimo de los residuales bajaron, y se puede concluir que estos residuales son los más bajos de todos los análisis antes realizados para este modelo. El X_c^2 no está dentro del rango de aceptación del test global bilateral ya que representa un valor inferior al límite izquierdo.

Segundo modelo: En comparación con el primer modelo el valor del X_c^2 disminuyó, al igual que los residuales y la desviación estándar. La prueba X^2 no es aceptada.

Tercer modelo: Los residuales máximo y mínimo son muy similares entre ellos, lo que indica una mayor estabilidad en sus valores. La desviación estándar se redujo más o menos a la mitad en relación con el modelo 2. El valor del X_c^2 disminuyó en comparación con los dos modelos anteriores, esto hace que tampoco sea aceptada la prueba X^2 de doble cola.

Conclusión: Para este último análisis el modelo escogido es el tercero, ya que los residuales son los menores y su desviación estándar es la más baja.

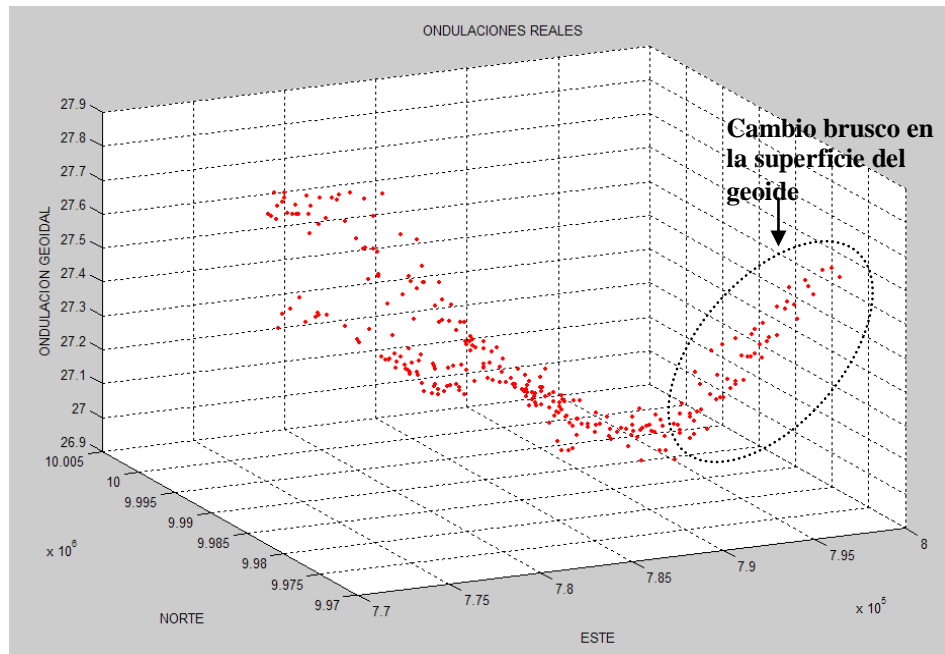
Después de haber realizado esta serie de pruebas con los tres modelos matemáticos y con distintas matrices de pesos, se obtienen dos conclusiones básicas:

1. El modelo matemático que mejor se adapta a nuestro caso de estudio es el tercer modelo representado por la ecuación (4.4), ya que en todos los análisis obtuvo los residuales más bajos.
2. La mejor alternativa para conformar la matriz de pesos es utilizar la inversa de la distancia en kilómetros que existe entre los puntos nivelados geoméricamente, ya que con esta opción se obtuvo los residuales, media y desviación estándar más bajos dentro del análisis de la prueba X^2 .

4.3.1.4 Cuarta prueba (Eliminación de posibles errores groseros)

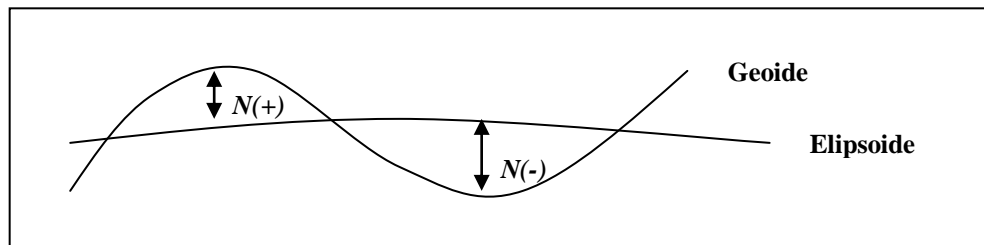
Esta prueba surgió al elaborar un gráfico en tres dimensiones de las ondulaciones geoidales “reales”, en donde se observó que los valores de estas sufren un cambio brusco en un rango aproximado de 5 Km (ver Figura 4.2), lo que significaría también un cambio brusco en la superficie del geoide. Esto no es considerado normal ya que se estima que el campo de gravedad de la Tierra no sufre variaciones significativas en una distancia aproximada de 10 Km (BLITZKOW). Es decir que la superficie del geoide en cortas distancias, como es el caso de este estudio, debería ser representada aproximadamente por una superficie casi plana. En la Figura 4.2 se puede observar que la variación de la ondulación geoidal es cerca de 80 cm en una distancia aproximada de 5 Km.

Figura 4.2 Gráfico tridimensional de las 284 ondulaciones geoidales “reales”



En el Ecuador las ondulaciones geoidales son positivas (ver figura 4.3) y varían desde 4m a 32 m (DREWES). Las observaciones ubicadas en la zona señalada de la Figura 4.2 son posibles errores groseros, cuyo origen puede ser en el posicionamiento satelital o en la nivelación geométrica.

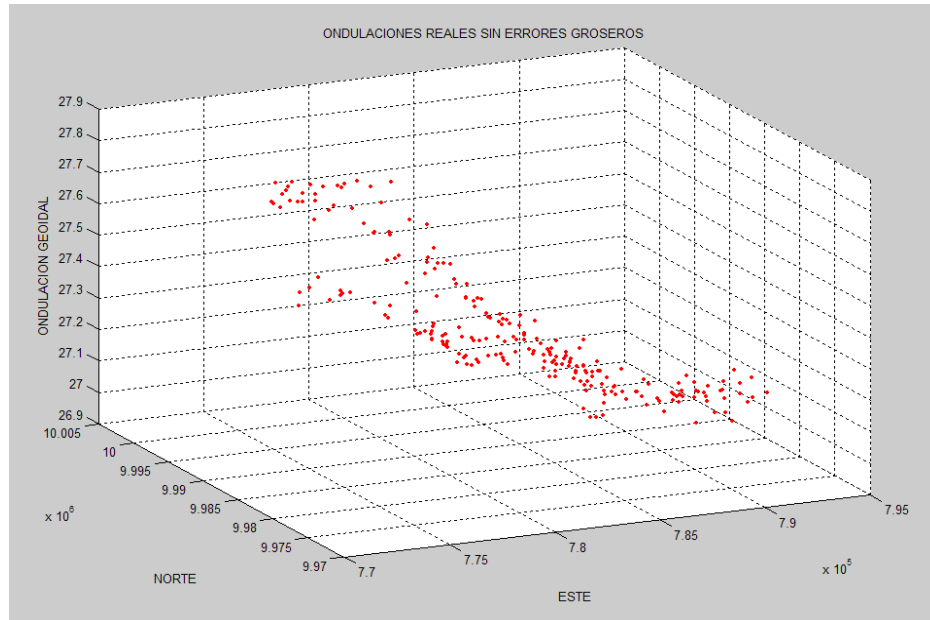
Figura 4.3 Separación del geoidé con respecto al elipsoide



Para esta última prueba fueron excluidas 46 observaciones¹² (aprox. 17% del total de observaciones), todas pertenecientes al Foto índice 8 realizadas en Febrero del 2004 y cuyas bases para el posicionamiento GPS fueron Oyambaro e IGM VIGA. Con la eliminación de estas observaciones se obtiene un geoidé local de la siguiente forma:

¹² Estas observaciones están disponibles en el anexo 1, en negrilla

Figura 4.4 Gráfico tridimensional de las ondulaciones geoidales “reales” sin posibles errores groseros



Los 46 posibles errores groseros antes mencionados abarcan un área aproximada de 8 Km², que incluyen los sectores de Yaruquí, Tambillo, Pifo, Tola Chica, y Sigsipamba. El área del proyecto se reduce a aproximadamente 490 Km², lo que en su inicio el proyecto abarcaba un área de 498 Km².

La matriz de pesos utilizada para esta prueba es la conformada por la inversa de la distancia en kilómetros entre puntos nivelados geoméricamente, debido a que en los análisis anteriores esta matriz fue la que presentó los mejores resultados. A continuación se presenta la tabla de datos de la prueba X^2 de los 3 modelos.

Tabla 4.10 Cuarta prueba: Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos sin posibles errores groseros (235 observaciones)

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
$S (n-u)$	232 (235-3)	231 (235-4)	230 (235-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	0.0131	0.0131	0.0047
<i>Máximo Residual</i>	0.2236	0.2229	0.1401
<i>Mínimo Residual</i>	-0.2370	-0.2444	-0.1982
<i>Media Residual</i>	-0.0176	-0.0181	-0.0067
σ	0.0930	0.0929	0.0581
3σ	0.2791	0.2787	0.1744
X_c^2	3.0330	3.0227	1.0794
$X_{v;0.025}^2$	191.8	190.8	189.9
$X_{v;0.975}^2$	276.0	274.9	273.9

En relación con las anteriores pruebas los residuales de los tres modelos se redujeron, pero los valores del X_c^2 son todavía bajos como para pasar la prueba X^2 bilateral. El mínimo residual del modelo 3 sobrepasa al valor de 3σ , por tal razón se elimina esta observación, finalmente quedando 234 datos.

Tabla 4.11 Cuarta prueba: Eliminación de residuales superiores a 3σ del modelo 3

	MODELO 3
$S (n-u)$	229 (234-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	0.0044
<i>Máximo Residual</i>	0.1402
<i>Mínimo Residual</i>	-0.1432
<i>Media Residual</i>	-0.0070
σ	0.0570
3σ	0.1710
X_c^2	1.0136
$X_{v;0.025}^2$	189.0
$X_{v;0.975}^2$	272.8

Los residuales del modelo 3 disminuyeron significativamente, la media y la desviación estándar son también bastante aceptables, convirtiéndose esta opción como la mejor alternativa para determinar los parámetros del modelo que permitirá calcular las ondulaciones geoidales del sector de estudio.

Al finalizar este último análisis de la prueba X^2 se concluye lo siguiente:

1. Después de haber comprobado que los sistemas están bien condicionados, que no existen errores en los cálculos ni problemas en la linearización, que los modelos matemáticos utilizados son los adecuados y que no existen posibles errores groseros dentro de las observaciones, se concluye que los problemas antes expuestos no son los causantes para que la prueba X^2 bilateral no sea aceptada. Se deduce que posiblemente la causa de que no se aceptada la hipótesis nula es la utilización de una matriz de pesos con valores inadecuados para este tipo de proyecto.

Tabla 4.11- R Tabla resumen de las pruebas Chi-Cuadrado

ANÁLISIS DE LA PRUEBA CHI-CUADRADO BILATERAL			
	# obs	Características	Resultados en los tres modelos matemáticos
1^{era}	284	Matriz de pesos conformada por la inversa de las varianzas de las N en metros .	No pasa la prueba X^2 (Xc^2 sobrepasa limite)
2^{da}	278	Eliminación de observaciones con residuales $> a 3\sigma$	No pasa la prueba X^2 (Xc^2 sobrepasa limite)
3^{era}	3.1	Matriz de pesos = Matriz identidad	No pasa la prueba X^2 (Xc^2 inferior limite izquierdo)
	3.2	Matriz de pesos = Varianza en milímetros	No pasa la prueba X^2 (Xc^2 inferior limite izquierdo)
	3.3	Matriz de pesos = Varianza en centímetros	No pasa la prueba X^2 (Xc^2 inferior limite izquierdo)
	3.4	Matriz de pesos = Varianza en kilómetros	No pasa la prueba X^2 (Xc^2 sobrepasa limite)
	3.5	Matriz de pesos = inversa de la distancia entre puntos nivelados (Km)	No pasa la prueba X^2 (Xc^2 inferior limite izquierdo)
4^{ta}	234	Eliminación de posibles errores groseros Matriz de pesos = inversa de la distancia entre puntos nivelados (Km)	No pasa la prueba X^2 (Xc^2 inferior limite izquierdo)

4.3.2 Prueba X^2 unilateral

En las pruebas anteriores, ninguno de los modelos pasó la prueba X^2 bilateral, en algunos casos se obtuvieron valores muy altos, mientras que en otros muy bajos, por tal motivo se toma en consideración el planteamiento de algunos científicos que aceptan que el test de varianza global basada en la distribución X^2 sea de una sola cola, esto significa que la hipótesis alternativa quedaría de la siguiente forma:

$$H_1 = \sigma_0^2 > \sigma_0^2 \quad (4.9)$$

Con esta consideración se toma en cuenta a un solo límite con una probabilidad del 95%. De esta manera quedan excluidos los modelos que obtuvieron valores del X_c^2 superiores al límite derecho, por lo tanto quedan eliminados los modelos de la primera, y segunda prueba, y los modelos cuya matriz de pesos esta conformado por la varianza en kilómetros.

A continuación se presenta una tabla resumen de las pruebas X^2 antes realizadas para el tercer modelo matemático, que pasaron el test de varianza global unilateral.

Tabla 4.12 Tabla resumen de la prueba X^2 unilateral del tercer modelo matemático

Pruebas realizadas	S	Máximo Residual	Mínimo Residual	\bar{X}	σ	X_c^2	$X_{v;0.95}^2$
3 ^{ra} Prueba: Matriz de pesos = matriz identidad	274	0.2304	-0.2258	-1.1E-8	0.0798	1.7704	313.6
3 ^{ra} Prueba: Matriz de pesos = varianzas en milímetros	274	0.2128	-0.2005	0.0003	0.1446	0.0064	313.6
3 ^{ra} Prueba: Matriz de pesos = varianzas en centímetros	274	0.2128	-0.2005	0.0003	0.1446	0.6427	313.6
3 ^{ra} Prueba: Matriz de pesos = inversa de la distancia entre puntos nivelados en kilómetros	274	0.2229	-0.2235	-0.0097	0.0799	2.2110	313.6
4 ^{ta} Prueba: Matriz de pesos = inversa de la distancia entre puntos nivelados en kilómetros y sin posibles errores groseros	229	0.1402	-0.1432	-0.0070	0.0570	1.0136	265.3

Para concluir todo el análisis de la prueba X^2 , se escoge como mejor modelo para la determinación de las ondulaciones geoidales de Quito al tercer modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$, conformado con una matriz de pesos diagonal y cuyos valores son la inversa de la distancia en kilómetros entre puntos nivelados geoméricamente y con un total de 234 observaciones. Se elige este modelo por que presentó los residuales, media y desviación estándar más bajos y el valor del X_c^2 si está dentro del rango de aceptación unilateral. El tercer modelo obtuvo $X_c^2 = 1.014$ y el límite de la zona de aceptación con 229 (234-5) grados de libertad es de $X_{t(229,0.95)}^2 = 265.3$, lo que indica que está dentro del área de aceptación.

4.3.3 Análisis del test de varianza global para los modelos matemáticos que determinan la separación entre el geoide local y el geoide del EGM 96

Para el análisis de la prueba X^2 de los modelos matemáticos que determinan la separación que existe entre el geoide local y el geoide del EGM 96 se utiliza como base las conclusiones obtenidas en las pruebas anteriores. Esto significa que se utilizará para el ajuste de mínimos cuadrados un total de 235 observaciones, la matriz de pesos estará conformada por la inversa de la distancia entre puntos nivelados en kilómetros, no se tomará en cuenta al cuarto modelo y se realizará una test de varianza global unilateral. Los modelos matemáticos utilizados para esta prueba no varían en relación con la anterior sección, lo único que cambia son los valores correspondientes a las observaciones (L_b), ya en los anteriores modelos las observaciones estaban representadas por la ondulación geoidal, mientras que ahora son representadas por la diferencia que existe entre el geoide local y el geoide del EGM 96.

A continuación, en la tabla 4.13 se presentan los datos estadísticos para los tres modelos matemáticos que determinan la diferencia que existe entre el geoide local y el geoide del EGM 96.

Tabla 4.13 Datos estadísticos que generan los modelos matemáticos que determinan la diferencia que existe entre el geoide local y el geoide del EGM 96.

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
$S (n-u)$	232 (235-3)	231 (235-4)	230 (235-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	0.0231	0.0228	0.0048
<i>Máximo Residual</i>	0.2707	0.2685	0.1438
<i>Mínimo Residual</i>	-0.3527	-0.3443	-0.2031
<i>Media Residual</i>	-0.0218	-0.0235	-0.0056
σ	0.1243	0.1236	-0.0589
3σ	0.3730	0.3709	0.1770
X_c^2	5.3671	5.2599	1.0938
$X_{v;0.95}^2$	268.5	267.4	266.3

Los tres modelos pasan la prueba X^2 unilateral, pero se observa que el tercer modelo tiene los residuales, media y desviación estándar más bajos. El mínimo residual del tercer modelo sobrepasa al valor del 3σ , por tal motivo se procede a realizar otra prueba eliminando este valor, perteneciente a la observación 86 Q.

Tabla 4.14 Eliminación de residuales superiores a 3σ del modelo 3

	MODELO 3
$S (n-u)$	229 (234-5)
$\hat{\sigma}_o^2$	0.0045
<i>Máximo Residual</i>	0.1445
<i>Mínimo Residual</i>	-0.1506
<i>Media Residual</i>	-0.0060
σ	0.0578
3σ	0.1734
X_c^2	1.0248
$X_{v;0.95}^2$	265.3

Se escoge como mejor modelo para determinar la separación que existe entre el geoide local y el geoide del EGM 96 al tercer modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$, conformado con una matriz de pesos diagonal y cuyos valores son la inversa de la distancia en kilómetros entre puntos nivelados geoméricamente y con un total de 234 observaciones. Se elige este modelo por que presentó los residuales, media y desviación estándar más bajos y el valor del X_c^2 si está dentro del rango de aceptación unilateral. El tercer modelo obtuvo $X_c^2 = 1.025$ y el límite de la zona de aceptación con 229 (234-5) grados de libertad es de $X_{t(229,0.95)}^2 = 265.3$, lo que indica que está dentro del área de aceptación de la prueba Chi-cuadrado unilateral.

4.4 Cálculo de las ondulaciones geoidales por GPS asociado a Nivelación

Una de las formas de calcular la ondulación geoidal con mayor precisión de un determinado lugar es a través de la ecuación (2.11). En vista que la altura ortométrica (H) es una altura teórica y no puede por el momento ser calculada, entonces esta puede ser reemplazada por la altura nivelada (Hn) (obtenida a partir de la nivelación geométrica) que es referida al nivel medio de los mares de nuestro país. Con el conocimiento de Hn y de la altura elipsoidal obtenida a través del posicionamiento satelital se desarrolla un método denominado GPS/Nivelación que permite determinar las ondulaciones geoidales.

$$N \cong h - Hn \quad (4.10)$$

Con un determinado número de observaciones (se entiende por observaciones a los puntos rastreados con GPS y nivelados geoméricamente) y una adecuada distribución de los mismos, es posible determinar un geoide local para el área de estudio.

En la tabla 4.15 se expone una pequeña muestra¹³ de los resultados obtenidos en este primer método denominado GPS/Nivelación. En la primera columna se encuentra el nombre de cada una de las observaciones, en la segunda columna la altura elipsoidal en el sistema WGS 84, en la tercera columna la altura nivelada y en la última columna la ondulación geoidal “real” de cada punto. El resto de observaciones se puede observar en el anexo 1.

Tabla 4.15 Altura elipsoidal, nivelada y ondulación geoidal obtenida a través del método GPS/Niv.

Nombre	Altura elipsoidal (h)m	Altura nivelada (Hn)m	Ondulación geoidal GPS/Niv m
1 Q	2813	2785	27.541
2 Q	2891	2864	27.598
3 Q	3155	3127	27.721
4 Q	3164	3136	27.786
5 Q	2800	2772	27.492
6 Q	2833	2805	27.572
7 Q	2806	2778	27.512
8 Q	2852	2824	27.598
9 Q	3060	3032	27.683
10 Q	2926	2898	27.665
11 Q	3094	3066	27.746
12 Q	3147	3119	27.739
13 Q	2936	2908	27.407
14 Q	2812	2784	27.465
15 Q	2831	2804	27.421
16 Q	2839	2812	27.580
17 Q	2853	2825	27.544
18 Q	2744	2716	27.637

¹³ No se presentan todos los resultados por que el número de observaciones es elevada (en total 235 observaciones)

Tabla 4.15 Altura elipsoidal, nivelada y ondulación geoidal obtenida a través del método GPS/Niv.

Nombre	Altura elipsoidal (h)m	Altura nivelada (Hn)m	Ondulación geoidal GPS/Niv m
19 Q	3007	2979	27.691
20 Q	2776	2749	27.338
21 Q	2657	2630	27.510
22 Q	2702	2675	27.544
23 Q	2664	2637	27.454
24 Q	2804	2776	27.564
25 Q	2889	2861	27.552
26 Q	2979	2951	27.476
27 Q	2865	2838	27.406
28 Q	2917	2890	27.379
29 Q	3025	2997	27.336
30 Q	2634	2607	27.518
31 Q	2766	2739	27.473
32 Q	2765	2738	27.395
33 Q	2947	2920	27.422

Los datos que se exponen a continuación en la tabla 4.16 son los que proporcionan las 235 observaciones que intervinieron en el proyecto.

Tabla 4.16 Datos estadísticos de las 235 observaciones obtenidas por GPS/Nivelación

	Ondulaciones Geoidales GPS/Nivelación	Alturas Niveladas
Media	27.306 m	2646.899 m
Desviación	0.236 m	290.114 m
Máximo	27.883 m	3429.077 m
Mínimo	26.933 m	2096.486 m

Es importante recalcar que la ondulación de mayor valor no corresponde a la máxima altura nivelada, sino corresponde a la observación 86 Q, la cual posee una altura de 3184.019 m. Por otro lado tampoco la mínima ondulación corresponde a la mínima altura nivelada, está ondulación corresponde a la observación 187 Q, cuyo valor altimétrico es 2361.785 m. A continuación se presentan dos gráficos tridimensionales realizados en Surfer Versión7, que indican la forma de las superficies que se obtienen de las ondulaciones geoidales “reales” y de las alturas niveladas.

Figura 4.5 Gráfico tridimensional de las Ondulaciones Geoidales “reales”

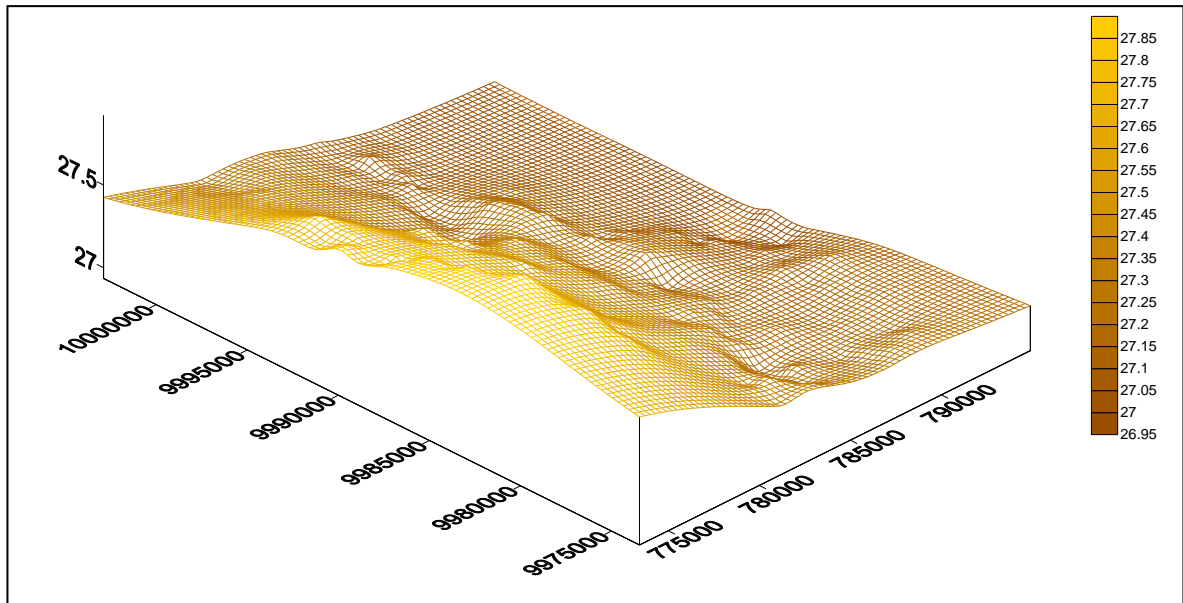
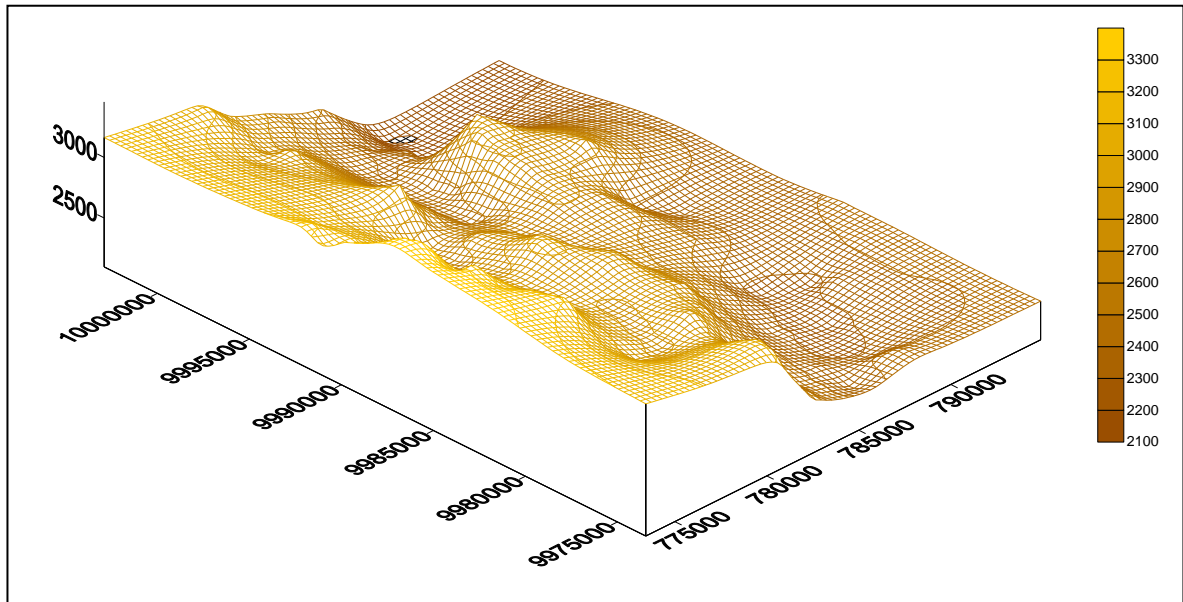


Figura 4.5.1 Gráfico tridimensional de las Alturas Niveladas



Comparando las dos figuras anteriores se puede apreciar que entre ondulación y altura nivelada no existe una relación muy marcada, solamente que en la zona de mayor altura también se presenta la zona de mayor ondulación.

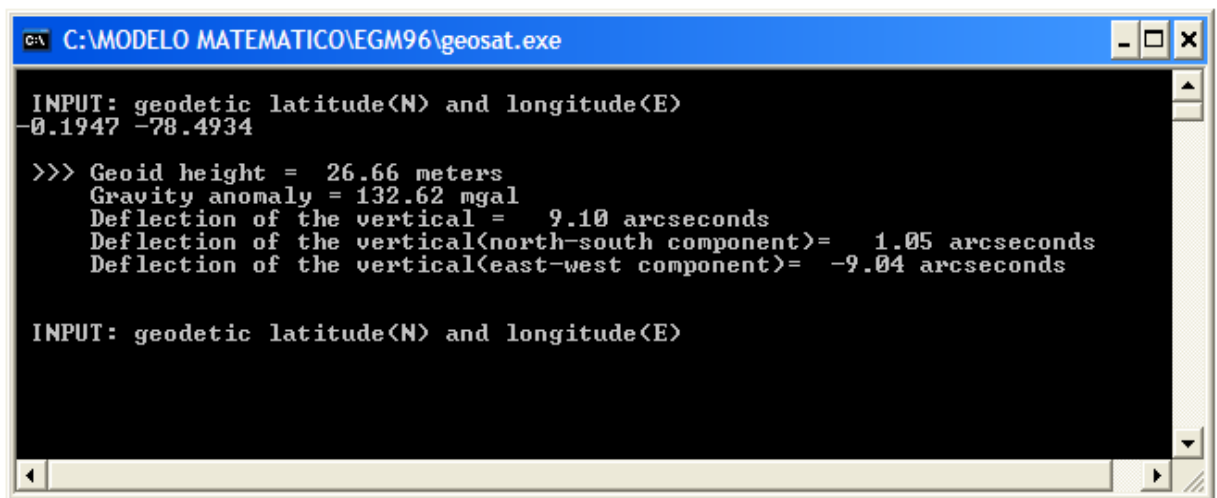
Otro aspecto para tomar en cuenta es que las ondulaciones geoidales presentan un descenso de sus valores de manera continua, puesto que no se observan picos que indiquen un cambio brusco de valores.

4.5 Cálculo de Ondulaciones Geoidales a partir de la utilización del EGM96.

Con el Modelo Geopotencial EGM 96 es posible calcular las ondulaciones geoidales de cualquier parte del mundo, solamente ingresando las coordenadas geodésicas en el sistema WGS 84.

En la siguiente figura se observa la ventana que se despliega al ingresar al programa EGM 96 y los resultados que brinda.

Figura 4.6 Ventana del EGM 96



```
C:\MODELO MATEMATICO\EGM96\geosat.exe
INPUT: geodetic latitude(N) and longitude(E)
-0.1947 -78.4934

>>> Geoid height = 26.66 meters
      Gravity anomaly = 132.62 mgal
      Deflection of the vertical = 9.10 arcseconds
      Deflection of the vertical(north-south component)= 1.05 arcseconds
      Deflection of the vertical(east-west component)= -9.04 arcseconds

INPUT: geodetic latitude(N) and longitude(E)
```

Con este programa se obtuvo las ondulaciones geoidales pertenecientes al modelo geopotencial EGM 96 de las 235 observaciones. Los resultados de los 33 primeros puntos se observa a continuación, el resto de datos se presentan en el anexo 2.

Tabla 4.17 Ondulación geoidal EGM 96

Nombre	Latitud	Longitud	Ondulación Geoidal EGM96 (m)
1 Q	-0.1947	-78.4934	26.66
2 Q	-0.1842	-78.4982	26.60
3 Q	-0.1297	-78.5188	26.30
4 Q	-0.0864	-78.5376	26.06
5 Q	-0.1916	-78.4872	26.68
6 Q	-0.1790	-78.4913	26.61
7 Q	-0.1764	-78.4839	26.64
8 Q	-0.1487	-78.4935	26.49
9 Q	-0.1256	-78.5128	26.32
10 Q	-0.1235	-78.5056	26.35
11 Q	-0.1021	-78.5224	26.19
12 Q	-0.0819	-78.5312	26.08
13 Q	-0.1882	-78.4699	26.74
14 Q	-0.1609	-78.4819	26.59
15 Q	-0.1579	-78.4742	26.61
16 Q	-0.1321	-78.4928	26.44
17 Q	-0.1247	-78.4870	26.44
18 Q	-0.1003	-78.4985	26.31
19 Q	-0.0769	-78.5163	26.14
20 Q	-0.1802	-78.4555	26.77
21 Q	-0.0763	-78.4913	26.27
22 Q	-0.0953	-78.4942	26.31
23 Q	-0.0907	-78.4875	26.33
24 Q	-0.1136	-78.4863	26.41
25 Q	-0.1212	-78.4821	26.45
26 Q	-0.1188	-78.4756	26.48
27 Q	-0.1470	-78.4716	26.59
28 Q	-0.1433	-78.4656	26.60
29 Q	-0.0599	-78.4847	26.25
30 Q	-0.0755	-78.4860	26.29
31 Q	-0.0891	-78.4794	26.36
32 Q	-0.0874	-78.4737	26.38

Los datos que se indican en la tabla 4.18 son generados a partir de las 235 observaciones:

Tabla 4.18 Datos estadísticos de las 235 observaciones obtenidas por el EGM 96

	Ondulaciones Geoidales EGM 96
Media	26.549 m
Desviación	0.308 m
Máximo	27.120 m
Mínimo	25.950 m

El valor máximo de la ondulación geoidal obtenida con el EGM 96 se encuentra ubicado al extremo sureste del área de estudio mientras que el valor mínimo se encuentra ubicado al noroeste. Se observa que con el modelo geopotencial EGM 96 se obtiene una tendencia contraria a los resultados obtenidos con GPS/Nivelación, ya que en este último las ondulaciones van ascendiendo de este a oeste, mientras que con el EGM 96 se presenta un ascenso de oeste a este.

4.5.1 Ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Nivelación y por el modelo EGM 96

La siguiente tabla contiene las ondulaciones geoidales de las 33 primeras observaciones obtenidas por GPS/Niv y también por el Modelo Geopotencial EGM 96. La primera columna contiene el nombre de las observaciones; la segunda columna la ondulación geoidal obtenida por GPS/Nivelación; la tercera columna contiene la ondulación geoidal obtenida con el EGM 96; la cuarta columna contiene las diferencias entre ondulaciones geoidales generadas por GPS/Nivelación y por el EGM 96 (ARANA, 2000). Los datos de las 235 observaciones están expuestos en el anexo 6.

Tabla 4.19 Ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Niv y EGM 96

Nombre	$N_{GPS/Niv}$ (m)	N_{EGM96} (m)	$N_{GPS-N_{EGM96}}$ (m)
1 Q	27.541	26.66	0.88090
2 Q	27.598	26.60	0.99830
3 Q	27.720	26.30	1.42050
4 Q	27.786	26.06	1.72600
5 Q	27.492	26.68	0.81250
6 Q	27.572	26.61	0.96240
7 Q	27.512	26.64	0.87210
8 Q	27.598	26.49	1.10760
9 Q	27.683	26.32	1.36330
10 Q	27.665	26.35	1.31480
11 Q	27.746	26.19	1.55600
12 Q	27.739	26.08	1.65890
13 Q	27.407	26.74	0.66680
14 Q	27.466	26.59	0.87550
15 Q	27.421	26.61	0.81110
16 Q	27.580	26.44	1.14020
17 Q	27.544	26.44	1.10370

Tabla 4.19 Ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Niv y EGM 96

Nombre	$N_{GPS/Niv}$ (m)	N_{EGM96} (m)	$N_{GPS-N_{EGM96}}$ (m)
18 Q	27.637	26.31	1.32680
19 Q	27.691	26.14	1.55080
20 Q	27.338	26.77	0.56760
21 Q	27.511	26.27	1.24050
22 Q	27.544	26.31	1.23370
23 Q	27.453	26.33	1.12370
24 Q	27.564	26.41	1.15370
25 Q	27.552	26.45	1.10180
26 Q	27.476	26.48	0.99560
27 Q	27.406	26.59	0.81610
28 Q	27.379	26.60	0.77910
29 Q	27.336	26.25	1.08600
30 Q	27.518	26.29	1.22830
31 Q	27.473	26.36	1.11330
32 Q	27.395	26.38	1.01460
33 Q	27.422	26.48	0.94230

Tabla 4.20 Datos estadísticos de 235 observaciones $N_{GPS-N_{EGM96}}$

	$N_{GPS-N_{EGM96}}$ (m)
Media	0.756 m
Desviación	0.464 m
Máxima	1.782 m
Mínima	0.080 m

A partir de estos datos se puede concluir que la diferencia de las ondulaciones geoidales obtenidas entre GPS/Niv y el modelo geopotencial EGM 96 tienen una desviación estándar de 46 cm, una media de 76 cm y un residual máximo de 1,8 m dentro del Distrito Metropolitano de Quito.

4.6 Elaboración de las cartas de ondulación geoidal generadas por GPS/Nivelación

Para la elaboración de las cartas de ondulaciones geoidales se utilizó el software Surfer Versión 7, y el método de interpolación “Kriging”. Con los datos obtenidos a través de GPS/Nivelación se elaboraron 5 cartas, la primera con 235 observaciones; la segunda con 100; la tercera con 50; la cuarta con 25 y la quinta con 8 observaciones, todas distribuidas uniformemente en el área de estudio.

4.6.1 Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 235 observaciones

Esta carta de ondulación geoidal fue elaborada con todos las observaciones generadas a través del método GPS/Niv. En la tabla 4.21 consta una pequeña muestra de los datos que fueron utilizados para la creación de la carta de ondulación geoidal denominada “Carta de Ondulación Geoidal 235”. La primera columna contiene el nombre de las observaciones, la segunda columna contiene las abscisas Este en el Sistema Universal Transverse Mercator (UTM), la tercera columna contiene la ordenada Norte y la cuarta columna contiene el valor de las ondulaciones geoidales determinadas en la sección 4.4.

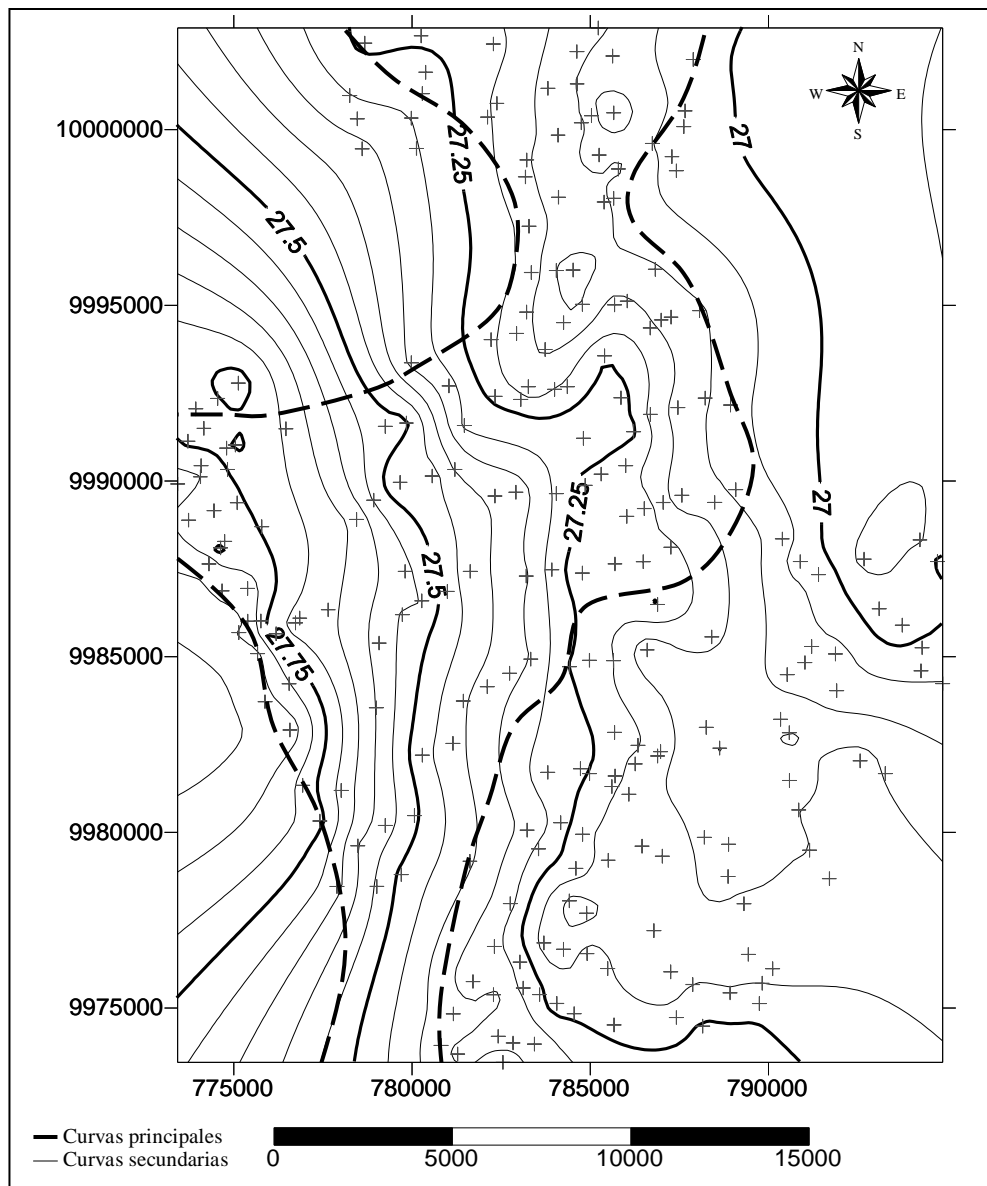
Tabla 4.21 Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar la Carta de Ondulación Geoidal 235

Nombre	Este (UTM)	Norte (UTM)	Ondulación GPS/Niv (m)
1 Q	77901	9978463	27.541
2 Q	778480	9979620	27.598
3 Q	776187	9985653	27.721
4 Q	774083	9990438	27.786
5 Q	779696	9978798	27.492
6 Q	779248	9980198	27.572
7 Q	780067	9980479	27.512
8 Q	778996	9983548	27.598
9 Q	776850	9986098	27.683
10 Q	777647	9986338	27.665
11 Q	775783	9988699	27.746
12 Q	774800	9990939	27.739
13 Q	781623	9979179	27.407
14 Q	780288	9982199	27.465
15 Q	781145	9982532	27.421
16 Q	779074	9985389	27.580
17 Q	779727	9986199	27.544
18 Q	778444	9988907	27.637
19 Q	776461	9991489	27.691
20 Q	783226	9980065	27.338
21 Q	779249	9991558	27.510
22 Q	778926	9989455	27.544
23 Q	779665	9989963	27.454
24 Q	779805	9987428	27.564
25 Q	780272	9986591	27.552
26 Q	780988	9986858	27.476
27 Q	781439	9983740	27.406

Tabla 4.21 Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar la Carta de Ondulación Geoidal 235

Nombre	Este (UTM)	Norte (UTM)	Ondulación GPS/Niv (m)
28 Q	782110	9984147	27.379
29 Q	779977	9993368	27.336
30 Q	779840	9991652	27.518
31 Q	780565	9990145	27.473
32 Q	781201	9990328	27.395
33 Q	781631	9987431	27.422

Figura 4.7 Carta de Ondulación Geoidal 235



- Nota: La línea entrecortada representa al límite que urbano de Quito dentro del área del proyecto.

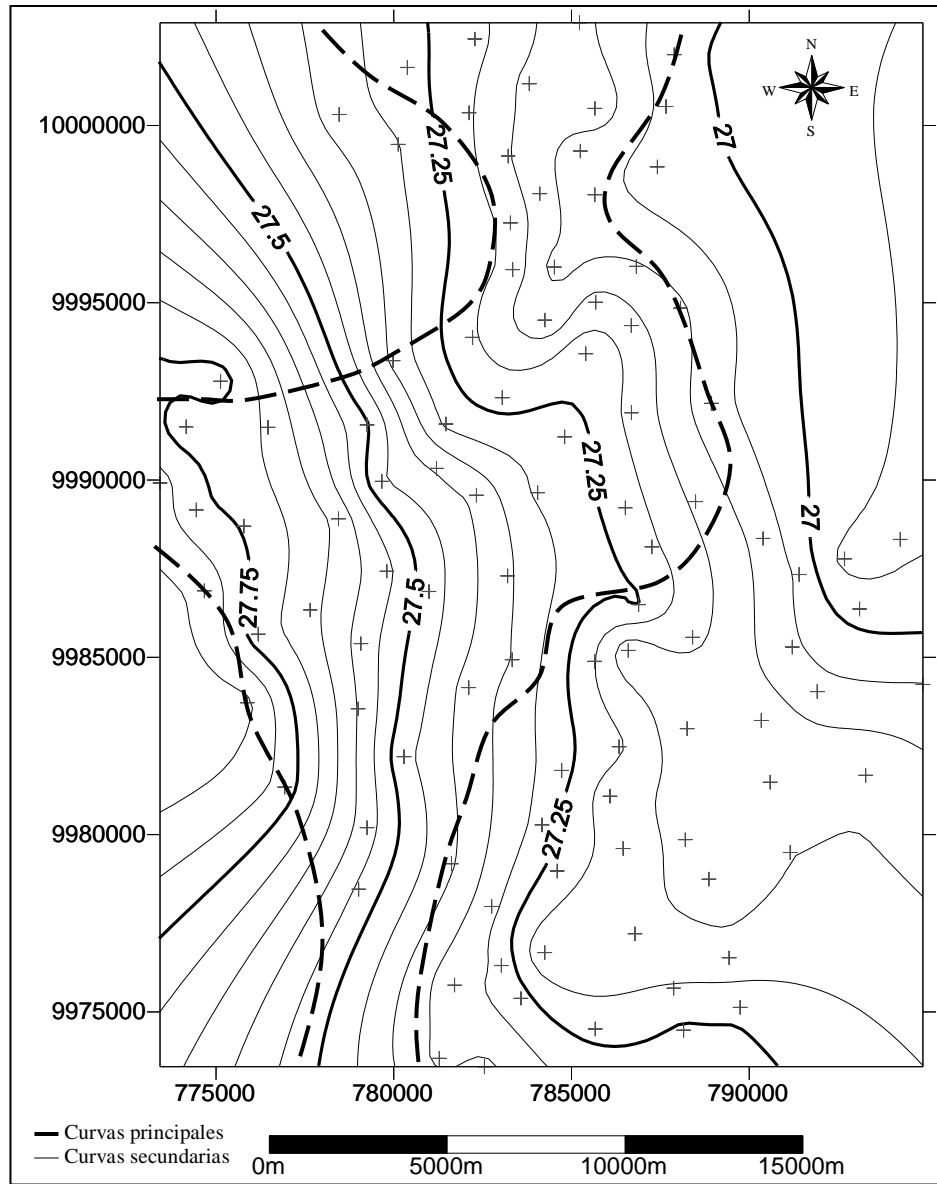
4.6.2 Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 100 observaciones

En la figura 4.8 se presenta la Carta de Ondulación Geoidal 100, la cual fue generada a partir de la asociación de GPS y nivelación geométrica. Para la elaboración de esta carta fueron utilizadas 100 observaciones las cuales están distribuidas uniformemente en el área de estudio de la ciudad de Quito. Una parte de los datos utilizados en esta carta se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 4.22 Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar la Carta de Ondulación Geoidal 100

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación GPS/Niv (m)
1 Q	779013	9978463	27.541
3 Q	776187	9985653	27.721
6 Q	779248	9980198	27.572
8 Q	778996	9983548	27.598
10 Q	777647	9986338	27.665
11 Q	775783	9988699	27.746
13 Q	781623	9979179	27.407
14 Q	780288	9982199	27.465
16 Q	779074	9985389	27.580
18 Q	778444	9988907	27.637
19 Q	776461	9991489	27.691
21 Q	779249	9991558	27.510
23 Q	779665	9989963	27.454
24 Q	779805	9987428	27.564
26 Q	780988	9986858	27.476
28 Q	782110	9984147	27.379
29 Q	779977	9993368	27.336
32 Q	781201	9990328	27.395
35 Q	783330	9984933	27.349
37 Q	784725	9981811	27.271
39 Q	781464	9991582	27.290
40 Q	782324	9989575	27.388
42 Q	783203	9987297	27.358
49 Q	785652	9984890	27.203
50 Q	786596	9985194	27.114
53 Q	784047	9989641	27.291
55 Q	783051	9992323	27.226
57 Q	790388	9988354	27.080
58 Q	788933	9992163	27.068
59 Q	788064	9994850	27.108
60 Q	786681	9994357	27.164

Figura 4.8 Carta de Ondulación Geoidal 100



4.6.3 Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 50 observaciones

En la figura 4.9 se presenta la Carta de Ondulación Geoidal 50, la cual fue generada a partir de la asociación de GPS y nivelación geométrica. Para la elaboración de esta carta fueron utilizadas 50 observaciones las cuales están distribuidas uniformemente en el área de estudio de la ciudad de Quito. La carta fue generada a partir de los datos que constan en la tabla 4.23.

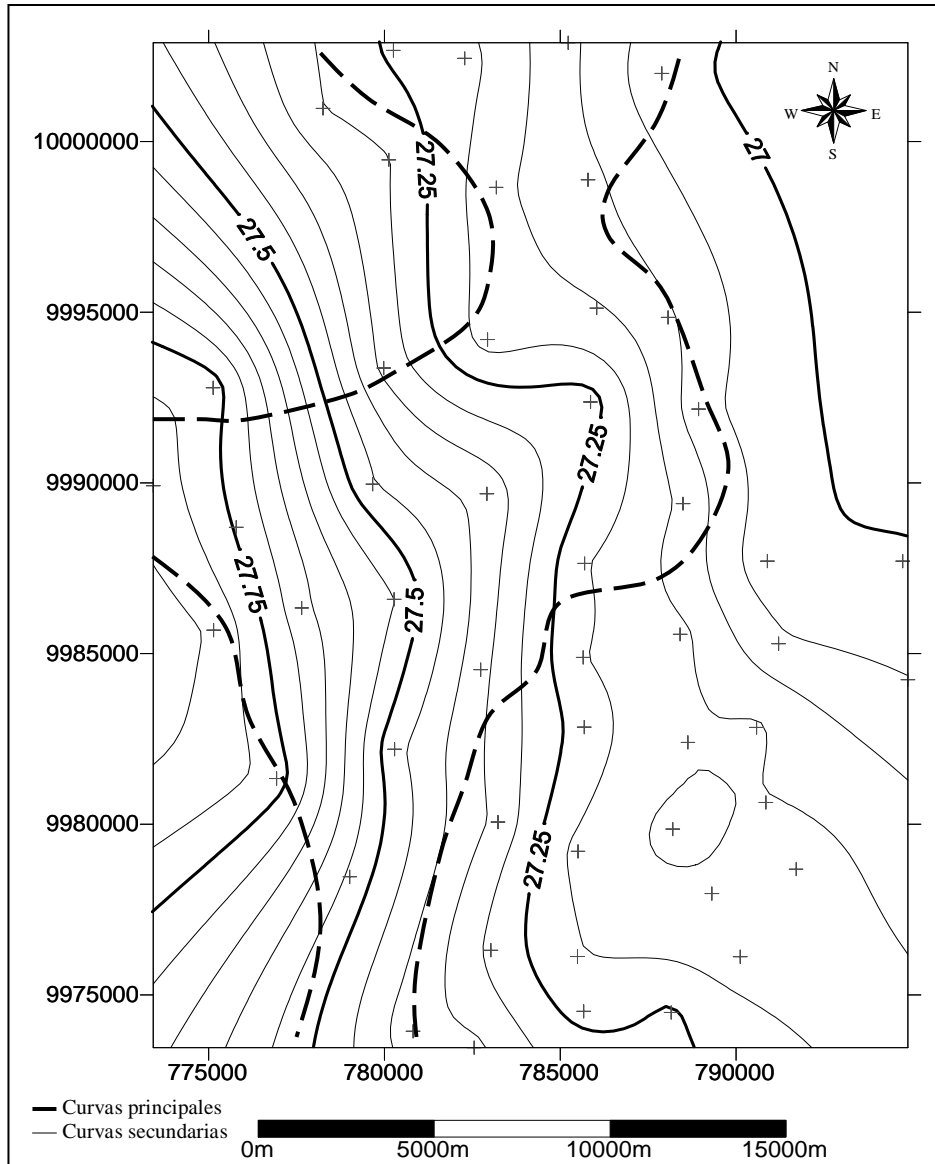
Tabla 4.23 Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar la Carta de Ondulación Geoidal 50

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación GPS/Niv (m)
1 Q	779014	9978464	27.541
10 Q	777647	9986338	27.665
11 Q	775783	9988700	27.746
14 Q	780288	9982200	27.465
20 Q	783227	9980066	27.338
23 Q	779666	9989964	27.454
25 Q	780273	9986591	27.552
29 Q	779978	9993368	27.336
34 Q	782738	9984530	27.366
41 Q	782913	9989682	27.383
49 Q	785653	9984890	27.203
52 Q	785693	9987643	27.204
58 Q	788933	9992164	27.068
59 Q	788064	9994851	27.108
64 Q	788490	9989393	27.141
70 Q	788407	9985565	27.164
82 Q	775126	9992788	27.777
83 Q	785859	9992370	27.273
144 Q	789312	9977969	27.158
146 Q	790847	9980641	27.151
152 Q	794739	9987711	27.009
156 Q	794886	9984236	27.052
160 Q	791708	9978685	27.176
162 Q	790115	9976120	27.170
166 Q	785666	9974521	27.232
168 Q	788200	9979860	27.140
171 Q	790583	9982839	27.157
172 Q	791212	9985290	27.059
176 Q	788153	9974487	27.257
180 Q	785490	9976125	27.204
183 Q	788630	9982399	27.151
185 Q	790889	9987708	27.015
189 Q	785505	9979209	27.183
194 Q	785682	9982846	27.231
201 Q	780813	9973937	27.367
203 Q	782550	9973457	27.364
212 Q	783027	9976310	27.289
220 Q	782934	9994200	27.180
225 Q	783181	9998659	27.161
235 Q	787889	10001997	27.014
240 Q	786036	9995122	27.155
247 Q	785788	9998882	27.114
251 Q	778252	10000973	27.300

Tabla 4.23 Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar la Carta de Ondulación Geoidal 50

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación GPS/Niv (m)
259 Q	782283	10002440	27.219
260 Q	785225	10002895	27.113
261 Q	780253	10002672	27.242
266 Q	780124	9999465	27.303
271 Q	776933	9981342	27.781
272 Q	775143	9985690	27.842
276 Q	773424	9989917	27.822

Figura 4.9 Carta de Ondulación Geoidal 50



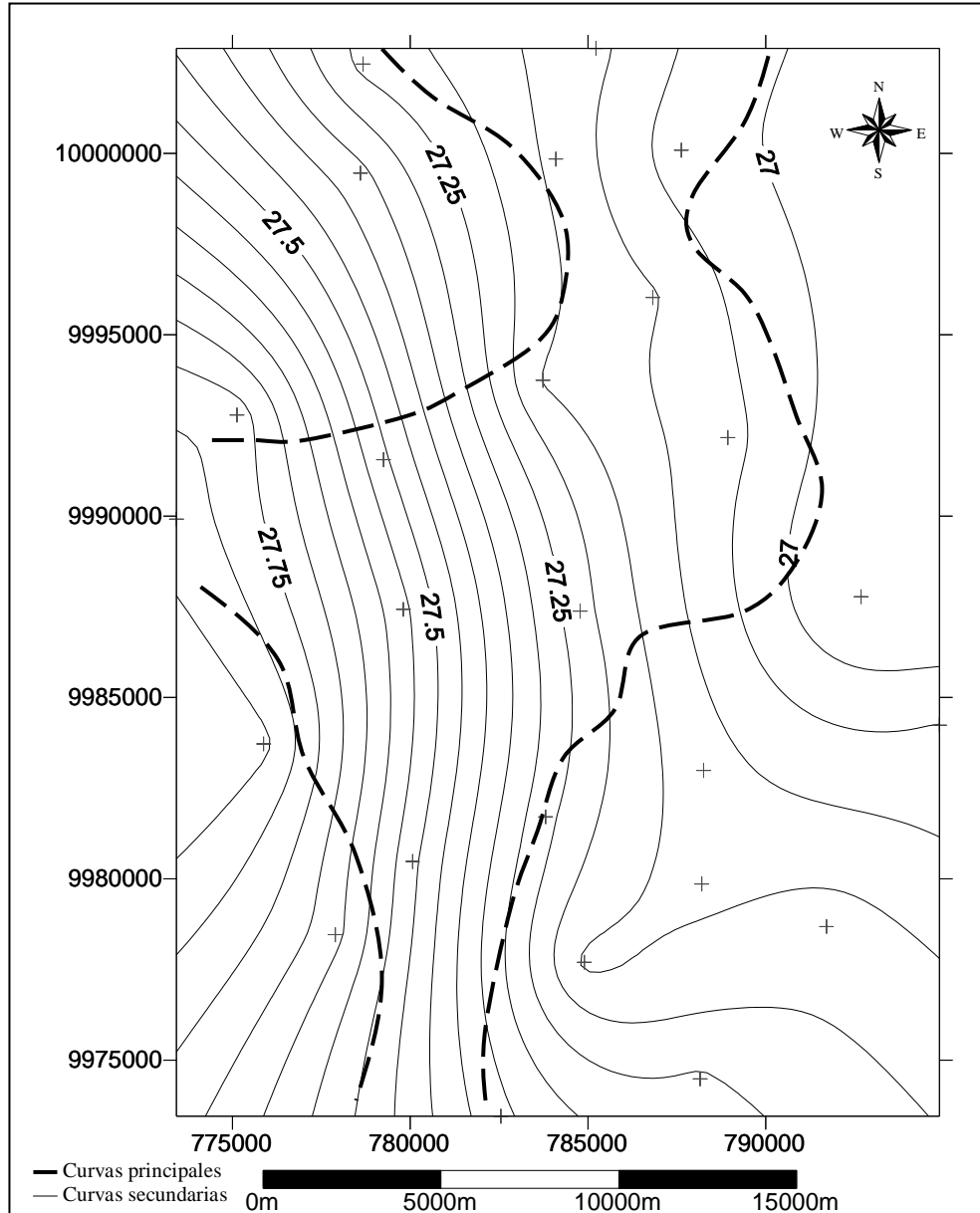
4.6.4 Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 25 observaciones

En la figura 4.10 se presenta la Carta de Ondulación Geoidal 25, la cual fue generada a partir de la asociación de GPS y nivelación geométrica. Para la elaboración de esta carta fueron utilizadas 25 observaciones que se muestran en la tabla 4.24

Tabla 4.24 Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar la Carta de Ondulación Geoidal 25

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación GPS/Niv (m)
7 Q	780067	9980479	27.512
21 Q	779249	9991558	27.511
24 Q	779805	9987428	27.564
36 Q	783808	9981707	27.266
51 Q	784779	9987380	27.219
58 Q	788933	9992163	27.068
76 Q	777894	9978460	27.666
82 Q	775126	9992788	27.777
156 Q	794886	9984235	27.052
160 Q	791708	9978684	27.176
168 Q	788199	9979860	27.140
176 Q	788152	9974487	27.257
184 Q	788252	9982989	27.124
187 Q	792679	9987777	26.933
203 Q	782550	9973456	27.364
208 Q	784898	9977699	27.139
236 Q	787623	10000090	27.022
244 Q	784095	9999845	27.136
246 Q	783732	9993744	27.145
249 Q	786824	9996028	27.105
257 Q	778599	9999455	27.364
258 Q	778672	10002464	27.236
260 Q	785224	10002895	27.113
276 Q	773423	9989916	27.822
282 Q	775875	9983721	27.864

Figura 4.10 Carta de Ondulación Geoidal 25



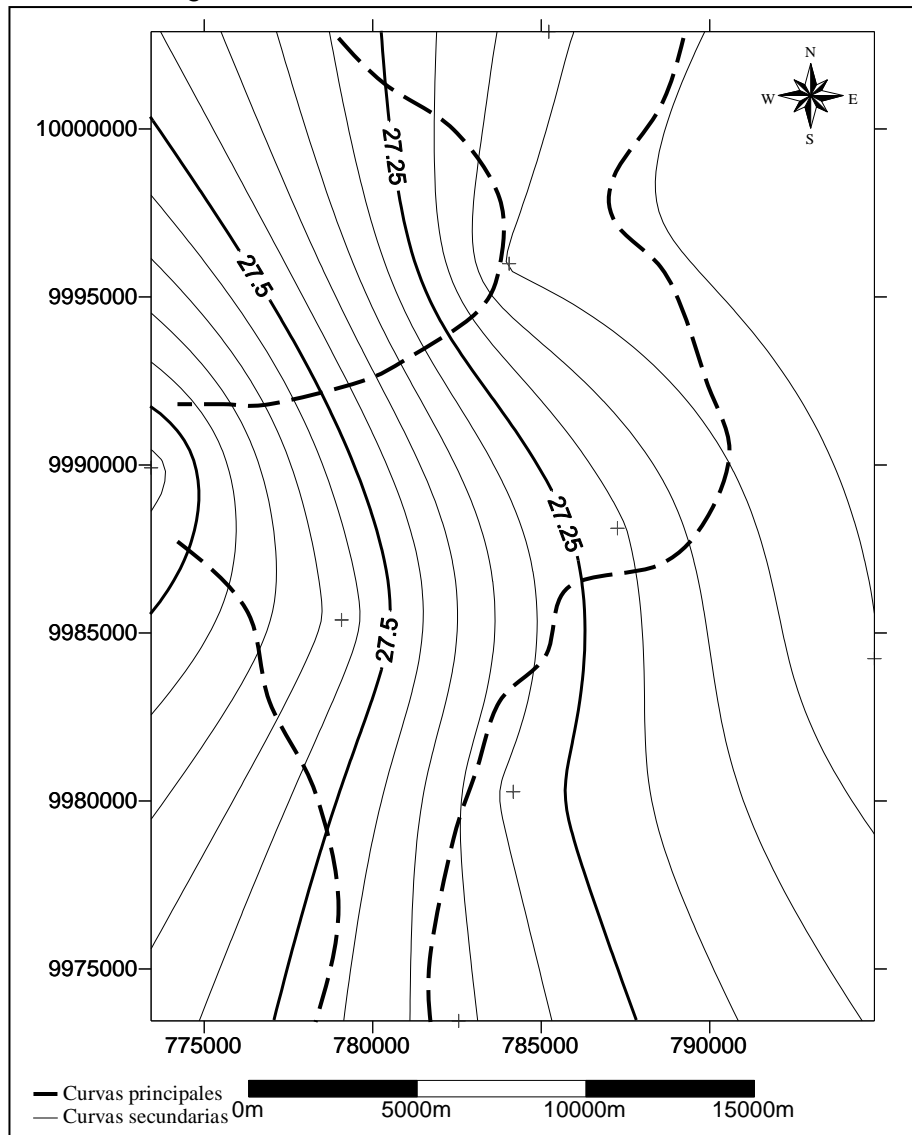
4.6.5 Carta de ondulación geoidal GPS/Nivelación con 8 observaciones

En la figura 4.11 se presenta la Carta de Ondulación Geoidal 8, la cual fue generada a partir de la asociación de GPS y nivelación geométrica. Para la elaboración de esta carta fueron utilizadas 8 observaciones las cuales están distribuidas uniformemente en el área de estudio de la ciudad de Quito. La carta fue generada a partir de los datos que constan en la tabla 4.25.

Tabla 4.25 Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar la Carta de Ondulación Geoidal 8

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación GPS/Niv (m)
16 Q	779074	9985390	27.580
72 Q	787261	9988119	27.208
156 Q	794886	9984236	27.052
196 Q	784169	9980278	27.282
203 Q	782550	9973457	27.364
228 Q	784047	9995993	27.094
260 Q	785225	10002895	27.113
276 Q	773424	9989917	27.822

Figura 4.11 Carta de Ondulación Geoidal 8



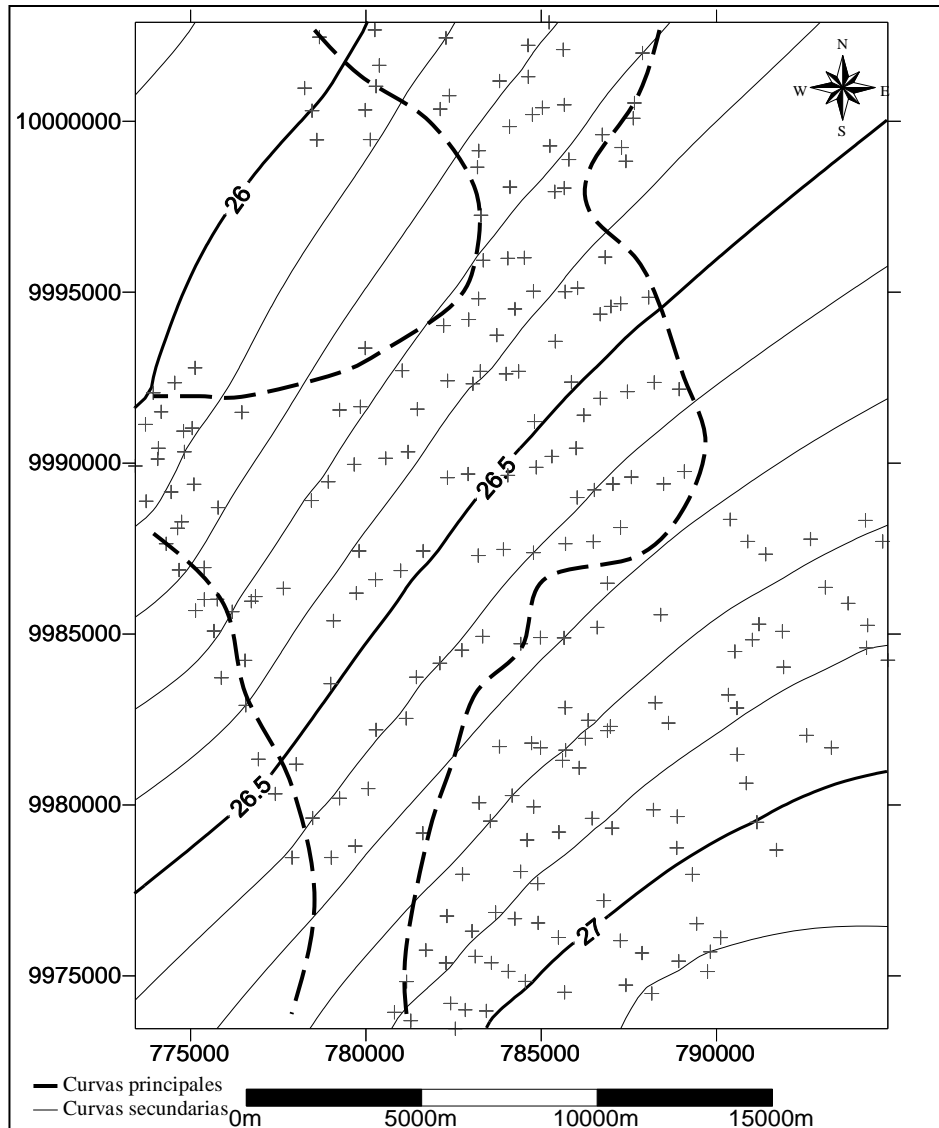
4.7 Elaboración de la carta de ondulación geoidal utilizando el modelo geopotencial EGM 96

La carta de ondulación geoidal de la figura 4.12, denominada Carta de Ondulación Geoidal EGM96, fue generada a partir de las 235 ondulaciones geoidales obtenidas con el EGM 96. La tabla 4.26 contiene una pequeña muestra de los datos que intervinieron en la elaboración de esta carta.

Tabla 4.26 Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales para elaborar la Carta de Ondulación Geoidal EGM 96

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación EGM 96 (m)
1 Q	779014	9978464	26.66
2 Q	778480	9979620	26.60
3 Q	776187	9985653	26.30
4 Q	774083	9990439	26.06
5 Q	779697	9978799	26.68
6 Q	779249	9980199	26.61
7 Q	780068	9980480	26.64
8 Q	778996	9983548	26.49
9 Q	776851	9986099	26.32
10 Q	777647	9986338	26.35
11 Q	775783	9988700	26.19
12 Q	774800	9990939	26.08
13 Q	781624	9979180	26.74
14 Q	780288	9982200	26.59
15 Q	781146	9982533	26.61
16 Q	779074	9985390	26.44
17 Q	779727	9986199	26.44
18 Q	778444	9988907	26.31
19 Q	776462	9991489	26.14
20 Q	783227	9980066	26.77
21 Q	779250	9991558	26.27
22 Q	778927	9989456	26.31
23 Q	779666	9989964	26.33
24 Q	779805	9987428	26.41
25 Q	780273	9986591	26.45
26 Q	780989	9986858	26.48
27 Q	781439	9983741	26.59
28 Q	782111	9984147	26.60
29 Q	779978	9993368	26.25
30 Q	779840	9991652	26.29
31 Q	780565	9990145	26.36
32 Q	781201	9990329	26.38

Figura 4.12 Carta de Ondulación Geoidal EGM 96



4.8 Análisis de las Cartas de Ondulaciones Geoidales

El análisis de las cartas de ondulaciones geoidales se realizó a través de la tabla 4.27, la primera columna contiene el nombre de las 30 primeras observaciones, la segunda columna contiene las ondulaciones geoidales obtenidas por interpolación lineal de la Carta de Ondulación Geoidal 235, la tercera columna contiene la ondulación geoidal obtenida a través de la interpolación lineal de la Carta de Ondulación Geoidal 100, la cuarta, quinta y sexta columnas contienen los valores de ondulación geoidal de las observaciones obtenidas mediante la interpolación de las Cartas de Ondulación

Geoidal 50, 25 y 8 respectivamente; la séptima, octava, novena, décima y décima primera columnas contienen las diferencias de ondulaciones geoidales entre GPS/Nivelación y las generadas a través de la interpolación de las Cartas de Ondulación Geoidal 235, 100, 50, 25, 8 y por el modelo geopotencial EGM 96. Las observaciones que intervinieron en la elaboración de las cartas van a generar residuos, mientras que las que no intervinieron generarán discrepancias. Este análisis permite determinar la calidad de la interpolación de las cartas al compararlas con los datos originales. En el anexo 8 se indican los datos de todas las observaciones.

Tabla 4.27 Ondulaciones interpoladas y sus respectivas diferencias con GPS/Nivelación

Nombre	N interp 235	N interp 100	N interp 50	N interp 25	N interp 8	Residual 235	Discrep 100	Discrep 50	Discrep 25	Discrep 8	Discrep EGM 96
1 Q	27.542	27.554	27.541	27.581	27.482	-0.001	0.000	0.000	-0.040	0.059	0.881
2 Q	27.603	27.603	27.604	27.630	27.512	-0.005	-0.014	-0.006	-0.032	0.086	0.999
3 Q	27.728	27.701	27.776	27.805	27.678	-0.008	-0.005	-0.056	-0.084	0.043	1.420
4 Q	27.784	27.802	27.802	27.806	27.775	0.002	0.020	-0.016	-0.020	0.011	1.727
5 Q	27.493	27.491	27.504	27.531	27.461	0.000	-0.016	-0.012	-0.039	0.032	0.813
6 Q	27.569	27.569	27.557	27.576	27.492	0.003	0.001	0.015	-0.004	0.081	0.962
7 Q	27.511	27.512	27.498	27.513	27.463	0.001	0.004	0.014	-0.001	0.049	0.873
8 Q	27.598	27.614	27.598	27.631	27.552	0.000	0.000	-0.001	-0.034	0.045	1.108
9 Q	27.685	27.684	27.725	27.762	27.659	-0.001	-0.016	-0.041	-0.079	0.024	1.363
10 Q	27.664	27.664	27.667	27.713	27.631	0.001	0.000	-0.002	-0.048	0.034	1.315
11 Q	27.746	27.741	27.746	27.768	27.707	0.000	0.001	0.000	-0.022	0.039	1.556
12 Q	27.746	27.737	27.777	27.786	27.725	-0.007	0.005	-0.038	-0.047	0.014	1.659
13 Q	27.405	27.411	27.397	27.385	27.389	0.002	0.001	0.010	0.022	0.018	0.667
14 Q	27.469	27.469	27.469	27.518	27.476	-0.004	-0.004	-0.004	-0.053	-0.010	0.876
15 Q	27.421	27.422	27.431	27.457	27.442	0.000	-0.003	-0.010	-0.036	-0.021	0.810
16 Q	27.580	27.588	27.602	27.627	27.579	0.000	-0.001	-0.022	-0.046	0.001	1.140
17 Q	27.547	27.541	27.572	27.576	27.541	-0.003	-0.007	-0.028	-0.032	0.002	1.103
18 Q	27.633	27.636	27.575	27.623	27.573	0.004	0.003	0.062	0.014	0.064	1.327
19 Q	27.691	27.676	27.675	27.705	27.625	0.000	0.001	0.016	-0.014	0.066	1.551
20 Q	27.334	27.332	27.335	27.280	27.324	0.004	0.015	0.002	0.057	0.014	0.567
21 Q	27.514	27.529	27.450	27.511	27.474	-0.004	0.006	0.061	0.000	0.036	1.241
22 Q	27.547	27.552	27.525	27.580	27.539	-0.004	-0.019	0.019	-0.036	0.005	1.233
23 Q	27.465	27.451	27.457	27.518	27.490	-0.011	-0.008	-0.003	-0.065	-0.036	1.124
24 Q	27.562	27.534	27.549	27.563	27.525	0.002	0.002	0.015	0.001	0.038	1.154
25 Q	27.548	27.552	27.550	27.534	27.510	0.004	0.030	0.002	0.017	0.042	1.101
26 Q	27.478	27.486	27.497	27.479	27.471	-0.002	-0.001	-0.021	-0.003	0.005	0.997
27 Q	27.408	27.407	27.434	27.446	27.442	-0.002	-0.010	-0.028	-0.040	-0.036	0.817
28 Q	27.380	27.380	27.400	27.400	27.414	-0.001	-0.001	-0.021	-0.021	-0.035	0.779
29 Q	27.337	27.255	27.336	27.419	27.386	-0.001	-0.001	0.000	-0.083	-0.050	1.086
30 Q	27.502	27.466	27.410	27.467	27.440	0.016	0.081	0.109	0.052	0.078	1.228

Las 235 observaciones generaron los siguientes datos:

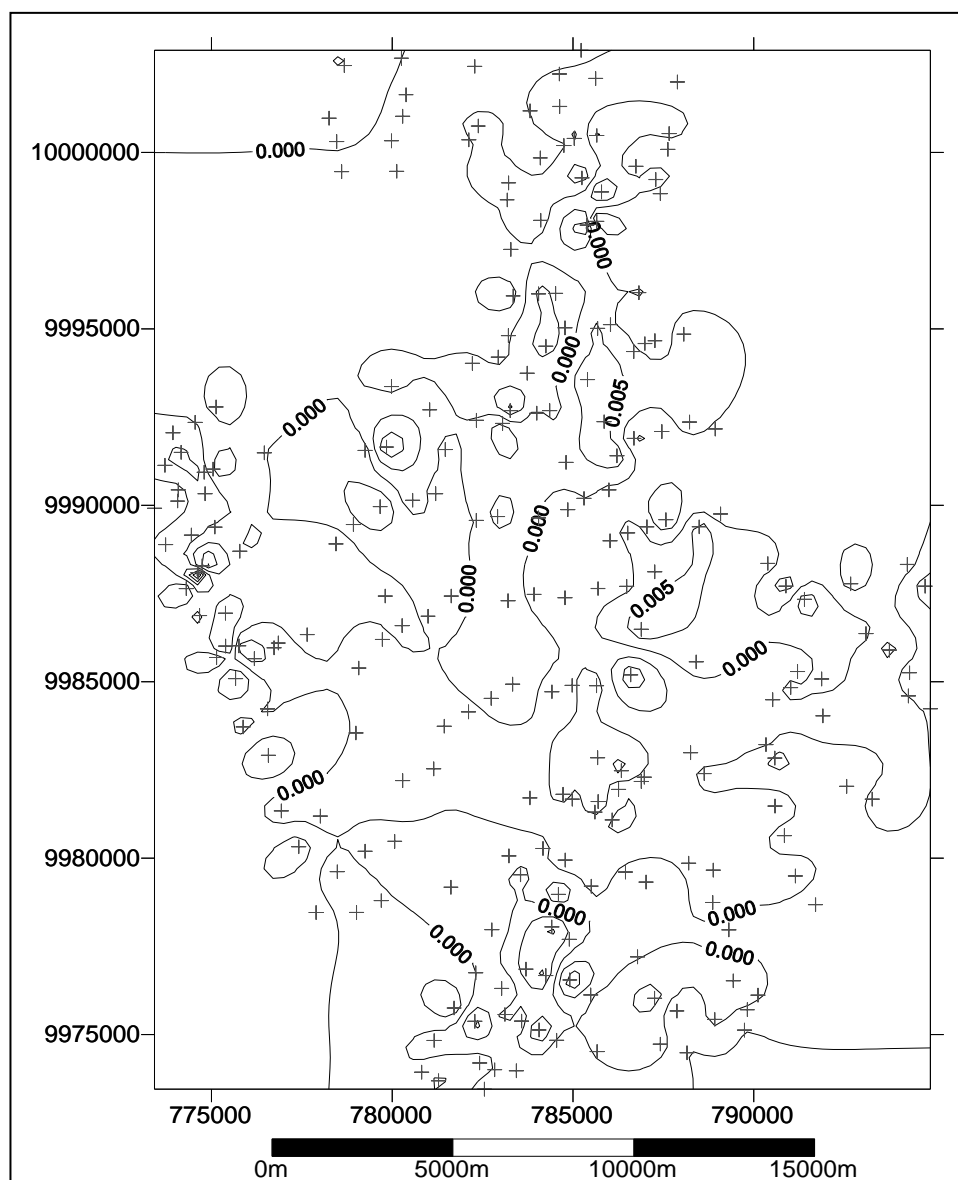
Tabla 4.28 Datos estadísticos de las discrepancias y residuales de la tabla 4.27

	Residual 235	Discrep 100	Discrep 50	Discrep 25	Discrep 8	Discrep EGM 96
Media	0.00005	-0.00127	-0.01053	0.00326	-0.00473	0.75615
Desviación	0.00592	0.02508	0.03304	0.04225	0.06296	0.46416
Máximo	0.02115	0.08127	0.10858	0.14687	0.25641	1.78113
Mínimo	-0.02625	-0.07985	-0.10421	-0.10120	-0.16035	0.07990

4.8.1 Análisis de los residuales 235

Los residuales entre las ondulaciones geoidales obtenidas a través de GPS/Nivelación y las obtenidas mediante la interpolación lineal de la Carta de Ondulación Geoidal 235 presentan un desvío máximo de 0.021 m, un desvío mínimo de -0.026 m, un desvío medio de 0.00005 m y una desviación estándar de 0.0059 m.

Figura 4.13 Residuales 235



En la Figura 4.13 se observa que los residuales determinados entre las ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Nivelación y las ondulaciones obtenidas por la interpolación de Carta de Ondulación Geoidal 235 son próximas a cero, esto se debe a que todas las observaciones del proyecto fueron utilizadas en la generación de la carta, disminuyendo de esta manera sus diferencias. El área de mayor diferencia se encuentra en el centro y norte de la zona de estudio. Este análisis es útil para verificar la coherencia del interpolador utilizado en la generación de la carta. Las curvas de

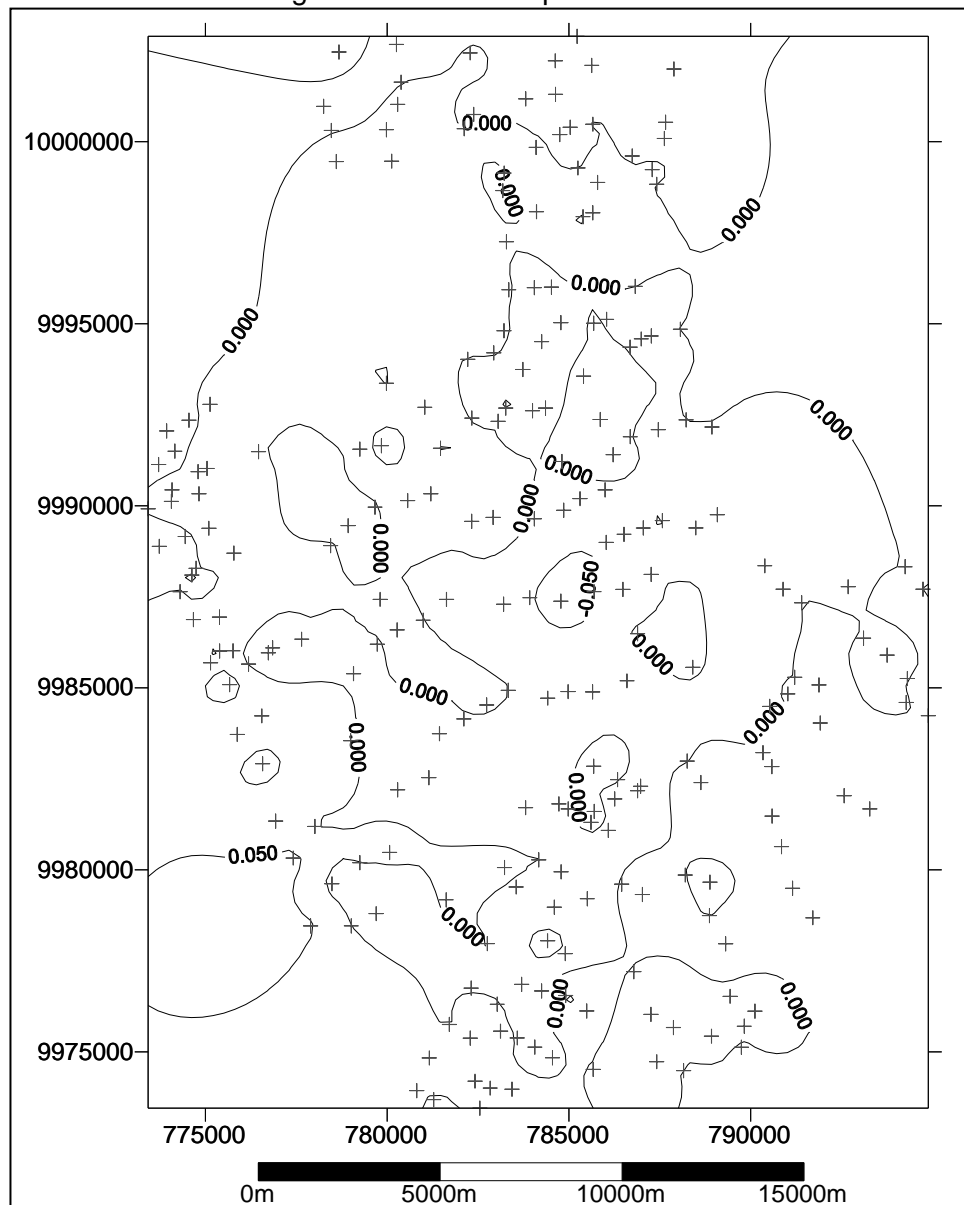
iso-residuos se encuentran distanciadas de 5 en 5 mm.

4.8.2 Análisis de las discrepancias 100

Las diferencias entre ondulaciones geoidales obtenidas a través de GPS/Nivelación y las ondulaciones geoidales obtenidas a través de la interpolación lineal de la Carta de Ondulación Geoidal 100 presentan un desvío máximo de 0.081 m, un desvío mínimo de

-0.080 m, un desvío medio de -0.0013 m y una desviación estándar de 0.033 m.

Figura 4.14 Discrepancias 100

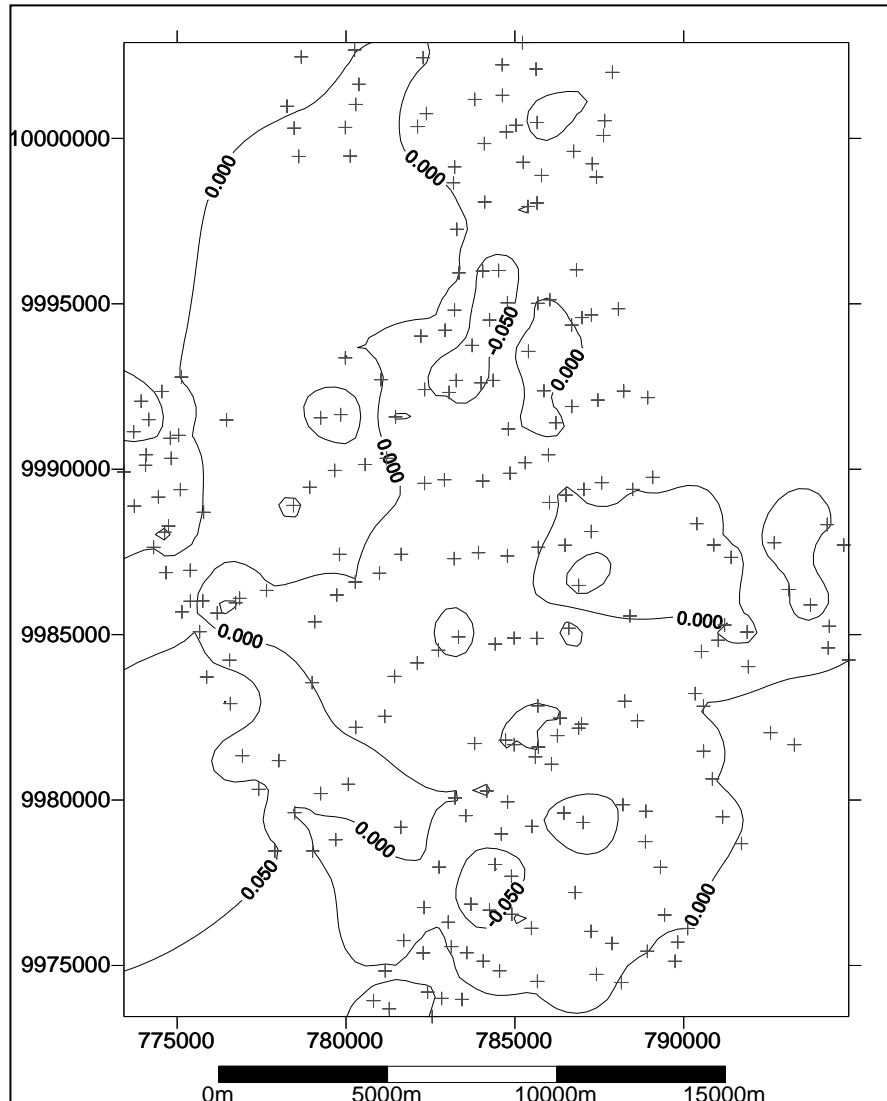


La figura 4.14 fue elaborada con los datos pertenecientes a la columna Discrep 100 de la tabla 4.27. Las curvas de iso-discrepancias están separadas de 5 en 5 cm ya que el valor de las discrepancias incrementó. Se observa que en el centro y suroeste de la región existe una mayor diferencia entre las ondulaciones “reales” y las ondulaciones determinadas por interpolación de la Carta de Ondulación Geoidal 100.

4.8.3 Análisis de las discrepancias 50

Las diferencias entre ondulaciones geoidales generadas por GPS/Nivelación y las interpoladas por la Carta de Ondulación Geoidal 50 presentan un desvío máximo de 0.109m, un desvío mínimo de -0.104 m, un desvío medio de -0.010 m y una desviación estándar de 0.063 m.

Figura 4.15 Discrepancias 50

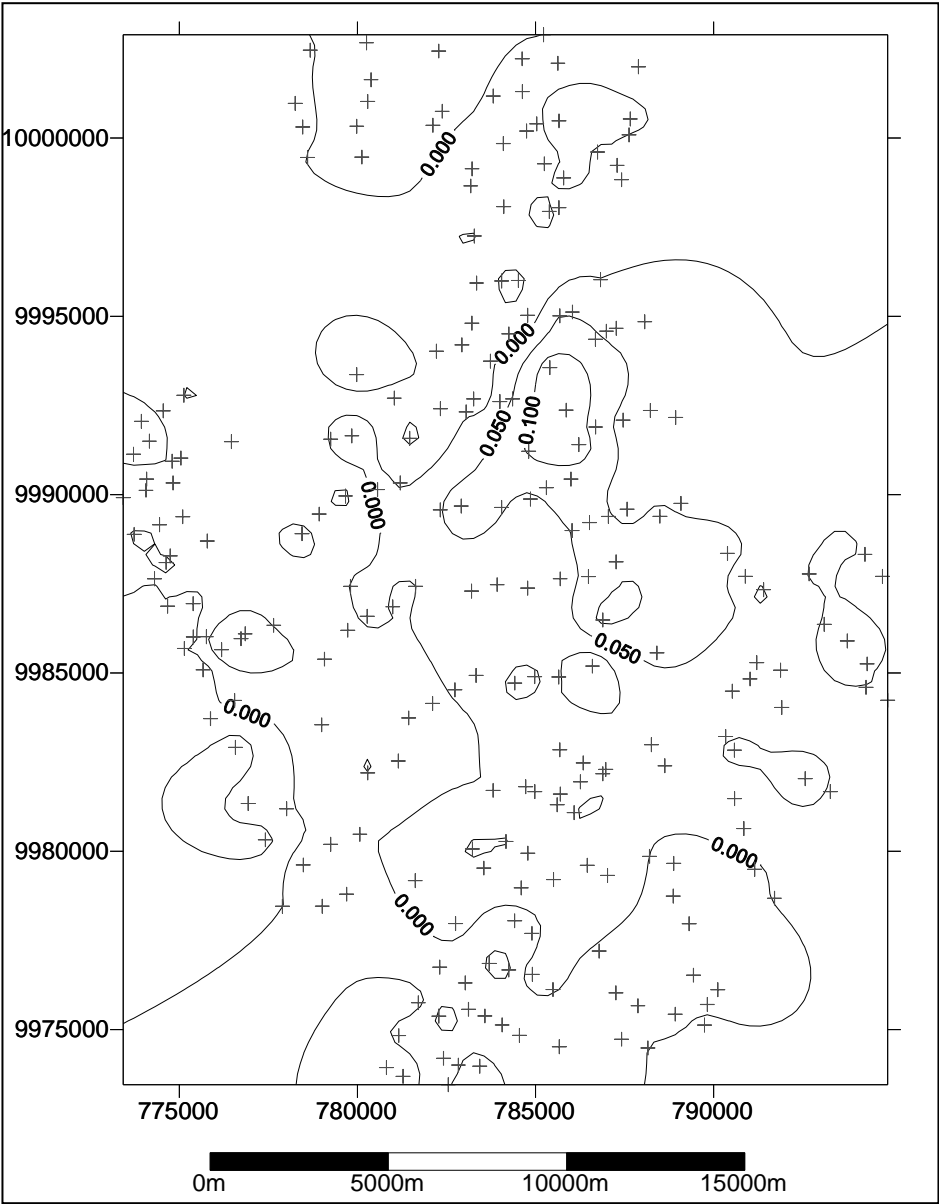


La figura 4.15 fue elaborada con los datos pertenecientes a la columna Discrep 50 de la tabla 4.27. Se observa que en el centro norte y suroeste de la región existe una mayor diferencia entre las ondulaciones obtenidas por GPS/Nivelación y las ondulaciones determinadas por interpolación de la Carta de Ondulación Geoidal 50.

4.8.4 Análisis de las discrepancias 25

Las discrepancias entre las ondulaciones geoidales generadas por GPS/Nivelación y las interpoladas por la Carta de Ondulación Geoidal 25 presentan un desvío máximo de 0.147 m, un desvío mínimo de -0.101 m, un desvío medio de -0.003 m y una desviación estándar de 0.042 m.

Figura 4.16 Discrepancias 25



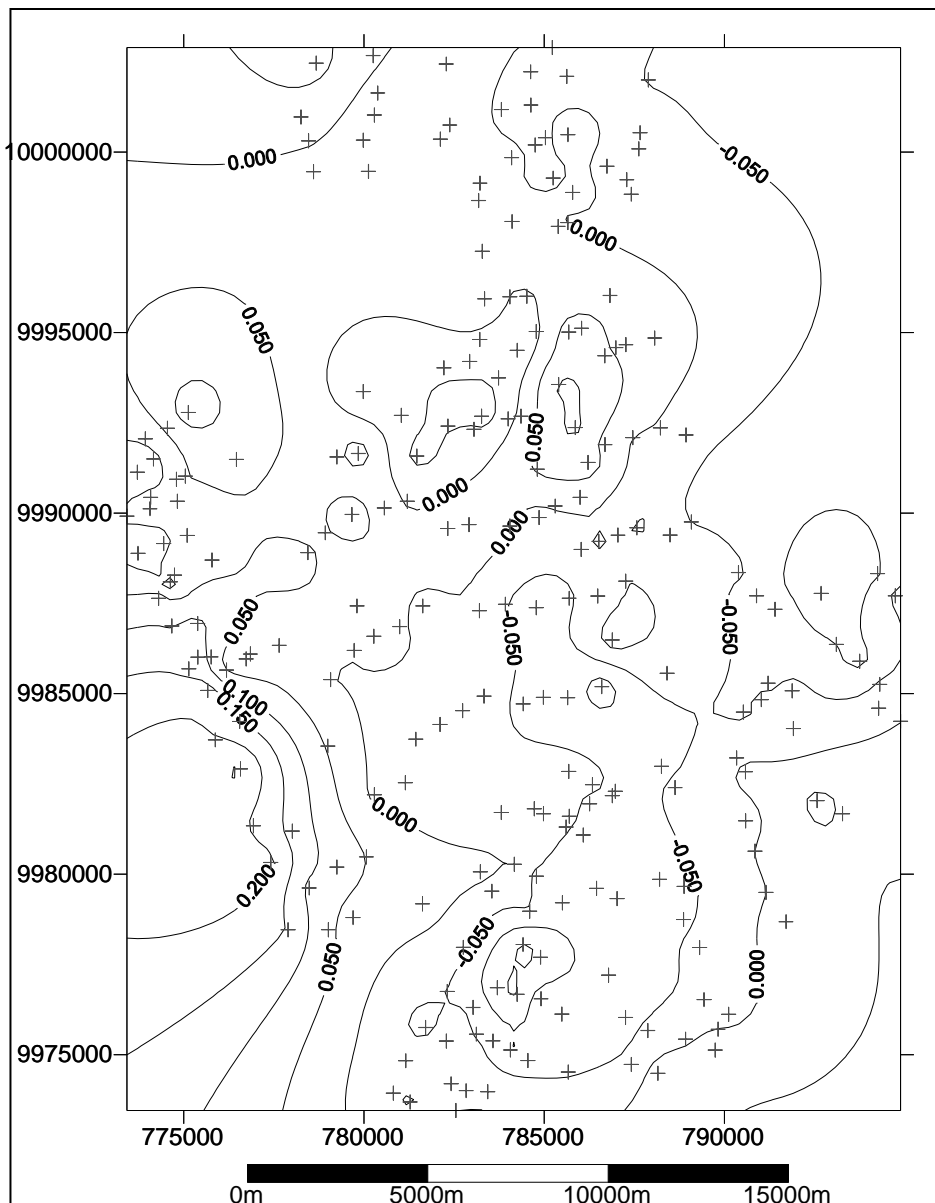
La figura 4.16 fue generada a partir de los datos de la columna Discrep 25 de la tabla 4.27. Las curvas de iso-discrepancias están separadas de 5 en 5 cm. La mayor

discrepancia se observa en el centro de la carta.

4.8.5 Análisis de las discrepancias 8

Las discrepancias entre ondulaciones geoidales generadas por GPS/Nivelación y las interpoladas por la Carta de Ondulación Geoidal 8 presentan un desvío máximo de 0.256m, un desvío mínimo de -0.160 m, un desvío medio de -0.005 m y una desviación estándar de 0.063 m.

Figura 4.17 Discrepancias 8



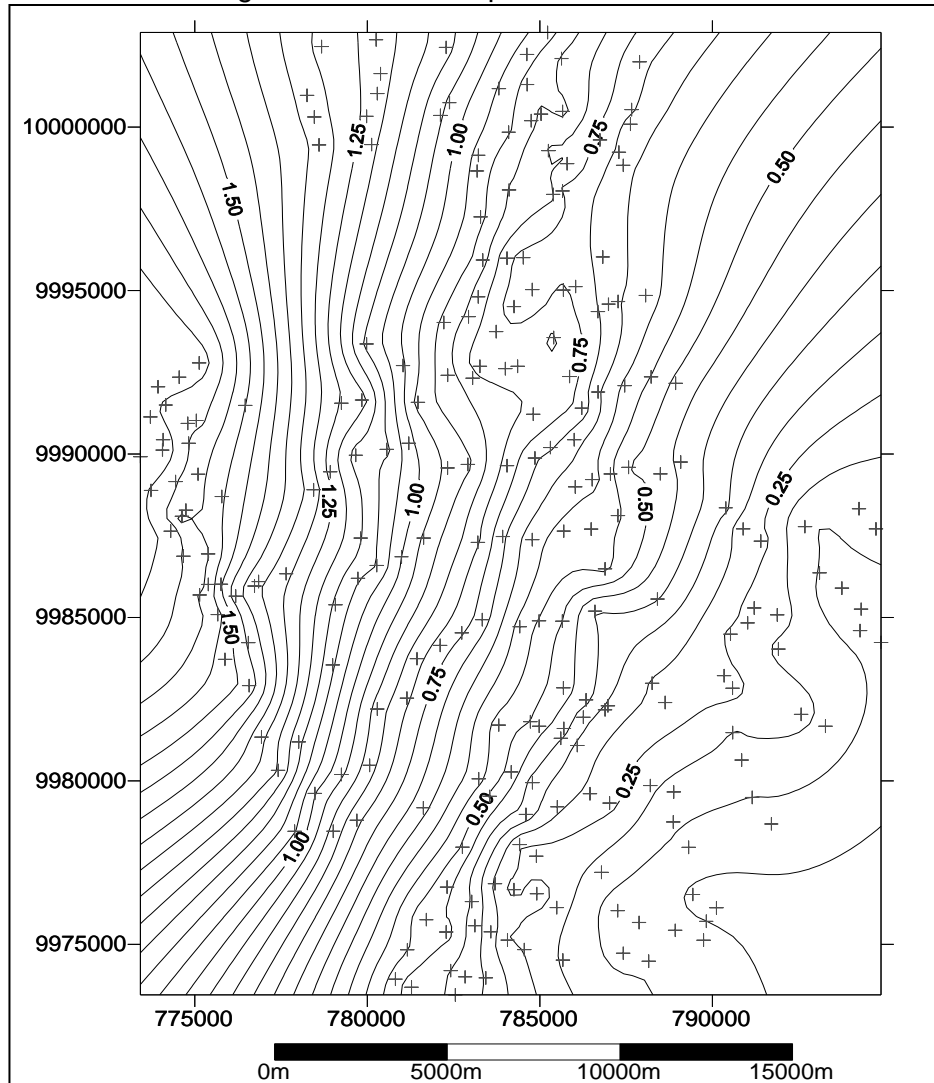
La figura 4.17 fue generada a partir de los datos pertenecientes a la columna Discrep 8 de la tabla 4.27. Las curvas de iso-discrepancias están separadas de 5 en 5 cm. Se observa que el valor de las discrepancias aumentó especialmente en las zonas suroeste y centro del área de estudio.

4.8.6 Análisis de las discrepancias EGM 96

Las discrepancias entre ondulaciones geoidales generadas por GPS/Nivelación y las interpoladas por la Carta de Ondulación Geoidal EGM 96 presentan un desvío máximo

de 1.781 m, un desvío mínimo de 0.080 m, un desvío medio de 0.756 m y una desviación estándar de 0.464 m.

Figura 4.18 Discrepancias EGM 96



La figura 4.18 fue elaborada con los datos pertenecientes a la columna Discrep EGM96 de la tabla 4.27. Las curvas de iso-discrepancias están separadas de 5 en 5 cm. Se observa que el valor de las discrepancias va aumentando paulatinamente de este a oeste.

En resumen la tabla 4.27 indica las discrepancias que existen entre las ondulaciones geoidales interpoladas en las Cartas de Ondulación Geoidal 235, 100, 50, 25 y 8 con las ondulaciones obtenidas con el método GPS/Nivelación. La tabla 4.28 brinda datos

estadísticos importantes que demuestran que para la región en estudio se obtiene mejores resultados utilizando la totalidad de los datos (235 observaciones), ya que con la Carta de Ondulación Geoidal 235 se obtuvieron los residuales, media y desviación estándar más bajos en relación con las otras cartas. En los que se refiere al EGM 96 las discrepancias son altas (siempre positivas) especialmente al este de la región de estudio.

4.9 Ondulaciones geoidales obtenidas por el modelo matemático

A partir de los modelos matemáticos analizados en la sección 4.3 se escogió a la poli superficie del modelo (4.4) como la mejor opción para representar al geoide de la región ya que este modelo fue el que obtuvo los menores residuales en el ajuste por mínimos cuadrados. En esta sección, para el cálculo de los parámetros del modelo escogido se utiliza un total de 234 observaciones. El programa para la determinación de los parámetros fue realizado en Matlab 6.5 y se encuentra disponible en el anexo 3.

A continuación se presenta el valor de los 5 parámetros obtenidos para el modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 234 observaciones:

Tabla 4.29 Parámetros del modelo $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 234 observaciones (Ver Anexo 3 - Programa)

Parámetros	Valor
a	-0.003238
b	0.007451
c	2.040272E- 9
d	-3.733382E-10
e	-35862.22150

En la tabla 4.30 se observan las ondulaciones geoidales calculadas con el modelo matemático escogido. En la primera columna están los nombres de las observaciones; en la segunda columna las ondulaciones obtenidas a través del modelo (4.4) y en la tercera columna se encuentran los residuales determinados a partir de la diferencia entre las ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Nivelación y las determinadas por el modelo escogido. Al igual que en las tablas anteriores por la cantidad de datos existentes solo se exponen las 33 primeras observaciones. El resto de información respecto a esta sección se encuentra en el anexo 5.

Tabla 4.30 Ondulaciones geoidales determinadas por el modelo

$$Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e \text{ ajustado con 234 observaciones}$$

Nombre	Ondulación Geoidal modelo (m)	Residuales (m)
1 Q	27.531	-0.010
2 Q	27.563	-0.035
3 Q	27.696	-0.025
4 Q	27.820	0.034
5 Q	27.492	0.000
6 Q	27.517	-0.055
7 Q	27.470	-0.042
8 Q	27.523	-0.075
9 Q	27.647	-0.036
10 Q	27.593	-0.072
11 Q	27.705	-0.041
12 Q	27.759	0.020
13 Q	27.391	-0.016
14 Q	27.454	-0.011
15 Q	27.409	-0.012

Tabla 4.30 Ondulaciones geoidales determinadas por el modelo

$$Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e \text{ ajustado con 234 observaciones}$$

Nombre	Ondulación Geoidal modelo (m)	Residuales (m)
16 Q	27.510	-0.070
17 Q	27.468	-0.076
18 Q	27.526	-0.111
19 Q	27.633	-0.058
20 Q	27.318	-0.020
21 Q	27.454	-0.056
22 Q	27.492	-0.052

23 Q	27.445	-0.009
24 Q	27.456	-0.108
25 Q	27.436	-0.116
26 Q	27.397	-0.079
27 Q	27.390	-0.016
28 Q	27.356	-0.023
29 Q	27.394	0.058
30 Q	27.420	-0.098
31 Q	27.394	-0.079
32 Q	27.360	-0.035
33 Q	27.361	-0.061

Los datos estadísticos que a continuación se exponen son el resultado de la intervención de las 234 observaciones.

Tabla 4.31 Datos estadísticos de 234 residuales obtenidos por $N_{GPS/N} - N_{Modelo\ 234}$

	$N_{GPS/N} - N_{Modelo\ 234}$ (m)
Media	-0.007 m
Dispersión	0.057 m
Máximo	0.140 m
Mínimo	-0.143 m

4.9.1 Carta de ondulación geoidal generada a partir del modelo matemático ajustado con 234 observaciones

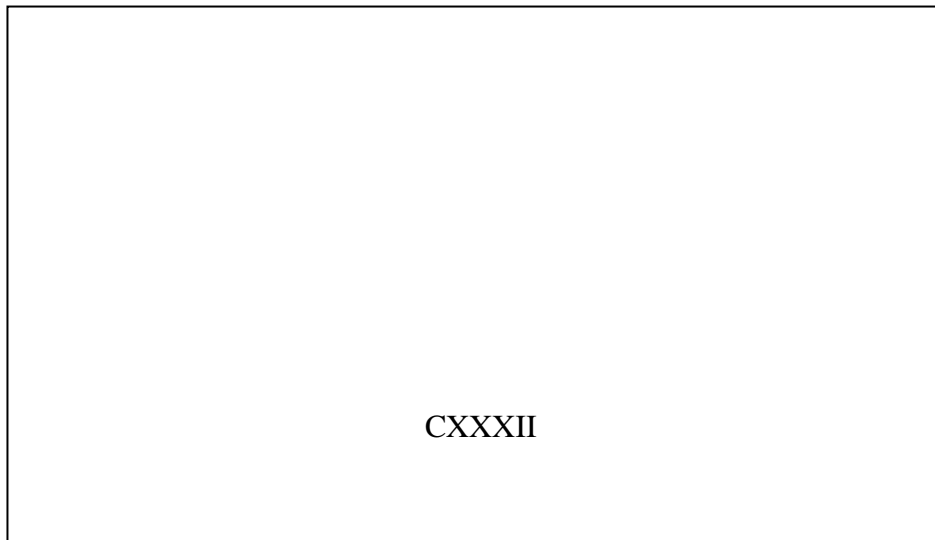
La carta de ondulación geoidal denominada “Carta Geoidal Modelo Matemático 234” fue elaborada con 234 observaciones, las cuales se obtuvieron utilizando el modelo matemático escogido (ver anexo 5). Al igual que en las anteriores cartas el método de interpolación seleccionado fue el de Kriging y el Software utilizado fue Surfer Versión 7.

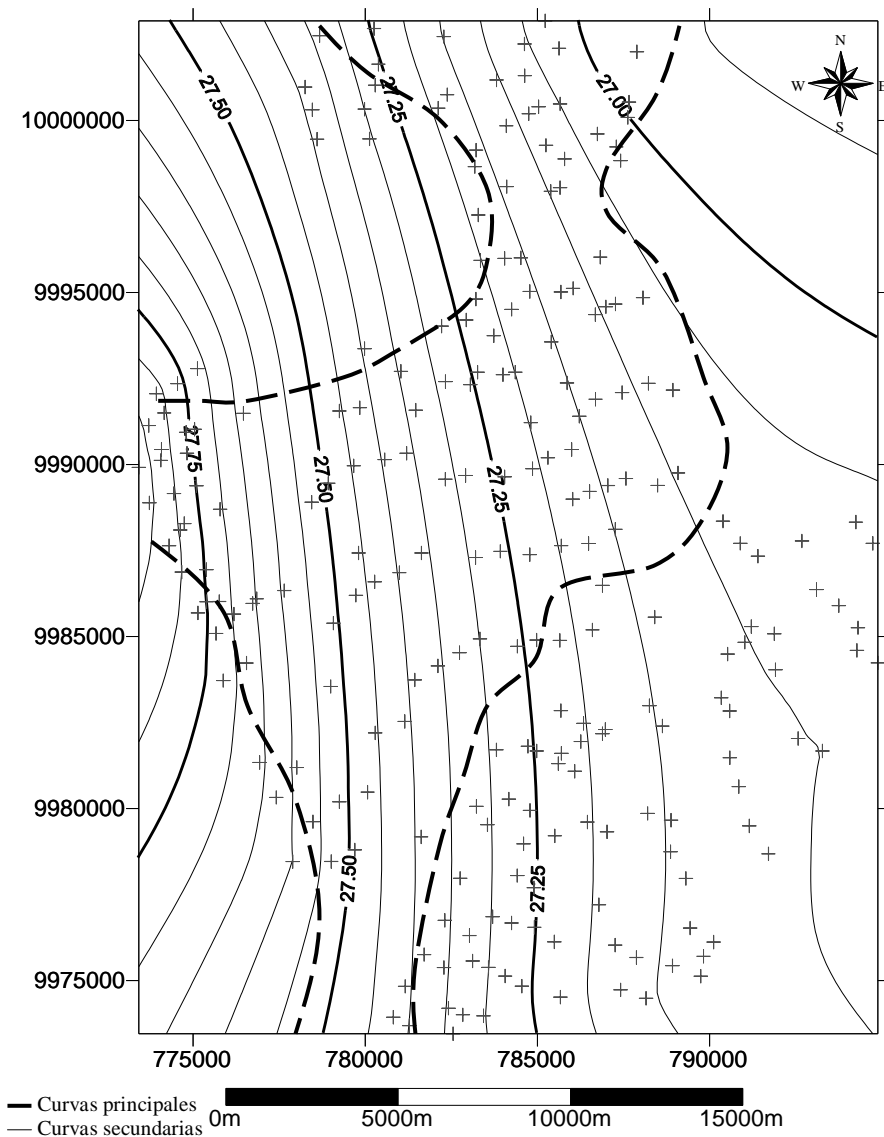
A continuación se presenta una muestra de los datos que intervinieron para elaborar esta carta.

Tabla 4.32 Coordenadas UTM y ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático para elaborar la Carta Geoidal Modelo Matemático 234

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación geoidal modelo (m)
1 Q	779014	9978464	27.531
2 Q	778480	9979620	27.563
3 Q	776187	9985653	27.696
4 Q	774083	9990439	27.820
5 Q	779697	9978799	27.492
6 Q	779249	9980199	27.517
7 Q	780068	9980480	27.470
8 Q	778996	9983548	27.523
9 Q	776851	9986099	27.647
10 Q	777647	9986338	27.593
11 Q	775783	9988700	27.705
12 Q	774800	9990939	27.759
13 Q	781624	9979180	27.391
14 Q	780288	9982200	27.454
15 Q	781146	9982533	27.409
16 Q	779074	9985390	27.510
17 Q	779727	9986199	27.468
18 Q	778444	9988907	27.526
19 Q	776462	9991489	27.633
20 Q	783227	9980066	27.318
21 Q	779250	9991558	27.454
22 Q	778927	9989456	27.492
23 Q	779666	9989964	27.445
24 Q	779805	9987428	27.456
25 Q	780273	9986591	27.436
26 Q	780989	9986858	27.397
27 Q	781439	9983741	27.390
28 Q	782111	9984147	27.356
29 Q	779978	9993368	27.394
30 Q	779840	9991652	27.420
31 Q	780565	9990145	27.394
32 Q	781201	9990329	27.360
33 Q	781631	9987431	27.361

Figura 4.19 Carta Geoidal Modelo Matemático 234

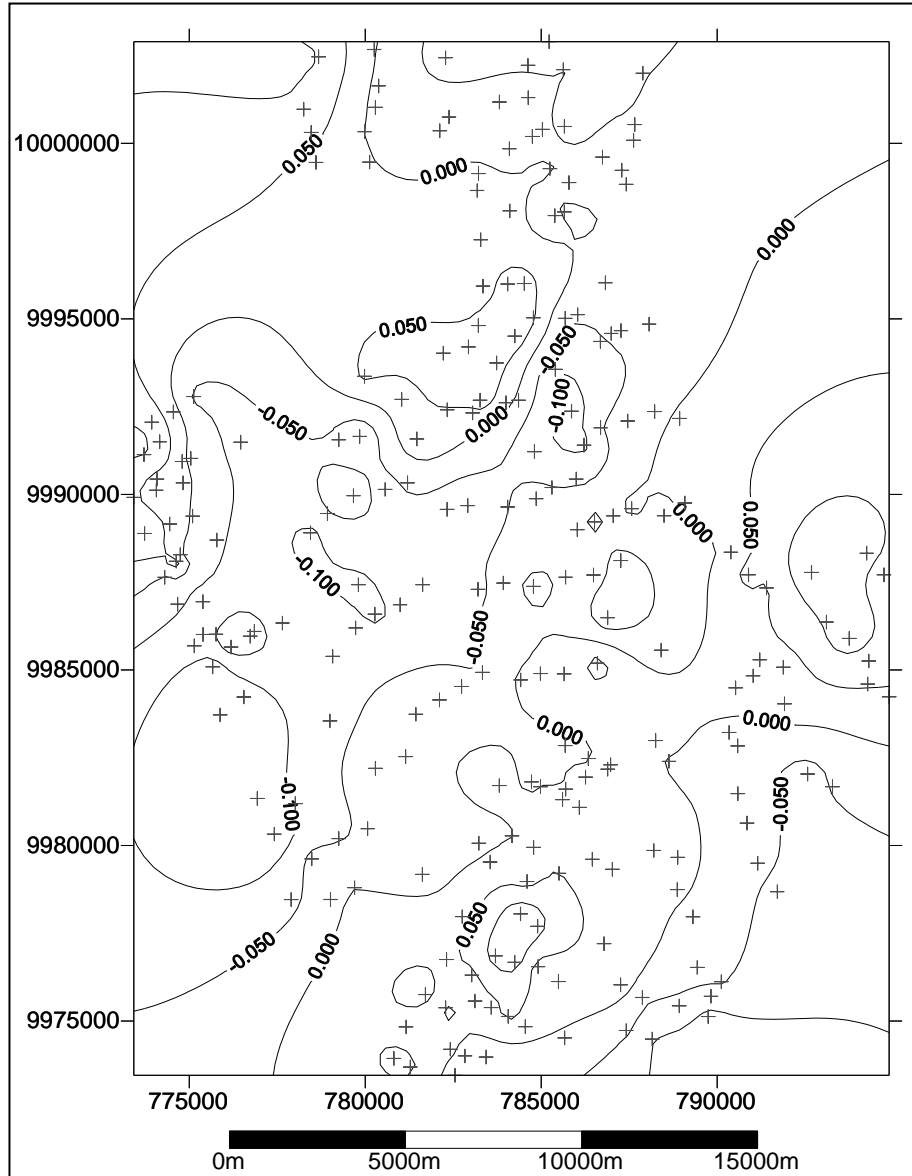




4.9.2 Carta de discrepancias GPS/Nivelación – modelo matemático

La figura 4.20 representa las discrepancias que existen entre las ondulaciones geoidales obtenidas a partir del tercer modelo matemático ajustado con 234 observaciones y las ondulaciones geoidales obtenidas con el método GPS/Nivelación. Las curvas representan los iso-residuos separadas de 5 en 5 cm. La carta de discrepancias fue elaborada con datos de la tabla 30.

Figura 4.20 Carta de residuales entre GPS/N - Modelo Matemático 234



4.9.3 Parámetros del modelo matemático ajustado con 100, 50, 25 y 8 observaciones

Inicialmente, para determinar los parámetros del modelo matemático representado por la ecuación $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ se utilizaron 234 observaciones; en esta sección vamos a calcular los parámetros del mismo modelo con 100, 50, 25 y 8 observaciones para definir sus diferencias. A continuación se presenta una tabla con

los valores de los parámetros en los diferentes ajustes.

Tabla 4.33 Parámetros del modelo $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ obtenidos a partir del ajuste de mínimos cuadrados con 100, 50, 25 y 8 observaciones

Parámetros	100 observaciones	50 observaciones	25 observaciones	8 observaciones
a	-0.003311	-0.002490	-0.003737	-0.002716
b	0.008473	0.010399	-0.003515	0.004210
c	2.085824E-9	1.564996E-9	2.356656E-9	1.706431E-9
d	-4.245103E-10	-5.209847E-10	1.755342E-10	-2.111144E-10
e	-40942.73890	-50869.83644	19109.18049	-19881.70563

En la tabla 4.34 se presentan los resultados de las 33 primeras observaciones, los resultados del resto de observaciones se puede ver en el anexo 10. En la primera columna de la tabla 4.34 están los nombres de las observaciones; en la segunda columna están los residuales determinados a partir del modelo matemático utilizando 234 observaciones; la tercera columna contiene las discrepancias y/o residuales generadas a partir del modelo matemático con 100 observaciones; en la cuarta columna se encuentra las discrepancias y/o residuales determinadas a partir del modelo matemático ajustado con 50 observaciones; la quinta columna contiene las discrepancias y/o residuales obtenidos a través del modelo matemático ajustado con 25 observaciones; y en la sexta se tiene las discrepancias y/o residuales del modelo matemático ajustado con 8 observaciones.

Tabla 4.34 Residuales y/o discrepancias generadas a partir de los modelos

matemáticos ajustados con 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones

Nombre	$\frac{N_{GPS/N}}{N_{modelo}}$ 234 (m)	$\frac{N_{GPS/N}}{N_{modelo}}$ 100 (m)	$\frac{N_{GPS/N}}{N_{modelo}}$ 50 (m)	$\frac{N_{GPS/N}}{N_{modelo}}$ 25 (m)	$\frac{N_{GPS/N}}{N_{modelo}}$ 8 (m)
1 Q	-0.010	0.0035	0.0145	-0.045	-0.017
2 Q	-0.035	0.0257	0.0426	-0.009	0.013
3 Q	-0.025	0.0031	0.0526	0.010	0.020
4 Q	0.034	-0.0642	0.0242	-0.060	-0.029
5 Q	0.000	-0.0049	-0.0001	-0.046	-0.026
6 Q	-0.055	0.0474	0.0570	0.023	0.034
7 Q	-0.042	0.0357	0.0380	0.017	0.020
8 Q	-0.075	0.0623	0.0774	0.069	0.061
9 Q	-0.036	0.0151	0.0571	0.027	0.029
10 Q	-0.072	0.0532	0.0865	0.071	0.063
11 Q	-0.041	0.0159	0.0764	0.030	0.039
12 Q	0.020	-0.0490	0.0304	-0.040	-0.020
13 Q	-0.016	0.0153	0.0048	-0.014	-0.010
14 Q	-0.011	0.0027	0.0045	0.003	-0.008
15 Q	-0.012	0.0060	0.0014	0.012	-0.006
16 Q	-0.070	0.0556	0.0725	0.075	0.057
17 Q	-0.076	0.0626	0.0747	0.088	0.063
18 Q	-0.111	0.0935	0.1234	0.122	0.101
19 Q	-0.058	0.0340	0.0929	0.052	0.052
20 Q	-0.020	0.0218	0.0019	0.007	-0.002
21 Q	-0.056	0.0390	0.0677	0.070	0.043
22 Q	-0.052	0.0350	0.0614	0.066	0.041
23 Q	-0.009	-0.0062	0.0144	0.028	-0.003
24 Q	-0.108	0.0940	0.1077	0.125	0.096
25 Q	-0.116	0.1040	0.1121	0.134	0.103
26 Q	-0.079	0.0688	0.0716	0.102	0.066
27 Q	-0.016	0.0092	0.0039	0.026	0.000
28 Q	-0.023	0.0171	0.0077	0.039	0.007
29 Q	0.058	-0.0732	-0.0459	-0.045	-0.075
30 Q	-0.098	0.0831	0.1065	0.116	0.084
31 Q	-0.079	0.0656	0.0790	0.103	0.065
32 Q	-0.035	0.0234	0.0323	0.063	0.021
33 Q	-0.061	0.0515	0.0508	0.088	0.048

Los datos estadísticos que a continuación se exponen son el resultado de la intervención de las 234 observaciones:

Tabla 4.35 Datos estadísticos de los residuales y/o discrepancias generadas a

partir de los modelos matemáticos ajustados con 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones

	$N_{GPS/N} - N_{modelo}$ 234 (m)	$N_{GPS/N} - N_{modelo}$ 100 (m)	$N_{GPS/N} - N_{modelo}$ 50 (m)	$N_{GPS/N} - N_{modelo}$ 25 (m)	$N_{GPS/N} - N_{modelo}$ 8 (m)
Media	-0.007	0.0046	0.0102	0.0019	-0.0059
Desviación	0.057	0.0568	0.0617	0.0705	0.0582
Máximo	0.140	0.1348	0.1665	0.1638	0.1313
Mínimo	-0.143	-0.1377	-0.1579	-0.1792	-0.1654

Para el área de estudio del presente proyecto (490 km² aproximadamente) se verifica, a partir de la tabla 4.35, que la variación del número de observaciones en la determinación de los parámetros del modelo matemático no representa un cambio significativo en sus resultados, ya que los residuales y/o discrepancias obtenidos varían de 1 cm hasta 4 cm. Utilizando 234 observaciones se obtuvo un error medio cuadrático de 5.7 cm, una media de -0.7 cm, una desviación máxima de 14 cm y una desviación mínima de -14.3 cm, mientras que con 8 observaciones se obtuvo una desviación estándar de 5.8 cm, una media de -0.06 cm, una desviación máxima de 13,1 cm y una desviación mínima de -16,6 cm. Al parecer con 100 observaciones se obtuvieron los mejores resultados ya que presenta los residuales más bajos (desviación máxima = 13.5 cm, desviación mínima = -13.8 cm). La desviación estándar y la media se mantienen también entre los valores más bajos (media = 5.7 cm, desviación estándar = 0.5 cm).

4.10 Cálculo de Ondulaciones Geoidales generadas a partir de GPS/Nivelación asociado al EGM 96.

Otra forma de obtener las ondulaciones geoidales de una determinada zona es combinando datos físicos con un modelo geométrico local, lo cual se lo puede realizar integrando los modelos geopotenciales y gravimétricos con el GPS en cualquiera de las funciones representados por las ecuaciones (4.2 a 4.5), donde Z_i es reemplazado por l .

A continuación se explica el procedimiento que se debe seguir para calcular las ondulaciones geoidales a través de GPS/Nivelación asociado al EGM 96, a partir del

modelo representado por la ecuación (4.4), ya que este fue el que ofreció mejores resultados en el ajuste de mínimos cuadrados.

En el modelo (4.4) se sustituye Z por l quedando de la siguiente manera:

$$l = aE + bN + cE^2 + dN^2 + e \quad (4.11)$$

Con la finalidad de incorporar, en la ecuación de arriba, los datos obtenidos en los modelos físicos se realiza lo siguiente:

$$l = N - (\bar{N}_0 + E_s) \quad ; \quad l = N - N_0 \quad (4.12)$$

Donde:

- N Ondulación del geoide obtenida por GPS/Nivelación
- \bar{N}_0 Ondulación del geoide calculado con el EGM 96
- N_0 Ondulación del geoide compensado con el desvío sistemático observado
- E_s Desvío sistemático observado

Finalmente, considerando las ecuaciones (4.11) y (4.12) se tiene:

$$N - N_0 = aE + bN + cE^2 + dN^2 + e \quad (4.13)$$

Calcular los parámetros de la ecuación (4.4) posee un significado físico, ya que esta función representa la separación que hay entre el geoide local obtenido por el método GPS/Nivelación y el geoide del EGM 96.

Combinar ambos procedimientos permite hacer uso de los coeficientes que determinan el potencial gravitacional, donde el modelo geopotencial contribuye con largas longitudes de onda del campo de gravedad de la Tierra. La diferencia entre la ondulación geoidal determinada por el GPS/Niv sobre las obtenidas con el modelo geopotencial, es que la primera puede ser interpretada como la representación de cortas longitudes de onda del campo de gravedad de la Tierra, limitadas a la zona de

trabajo (Quito). La utilización de los modelos geopotenciales implica utilizar la información del campo de gravedad de todo el globo terrestre.

Es importante aclarar que el modelo matemático da como resultado la separación entre geoide local y geoide del modelo geopotencial que existe en cada punto de observación. Para obtener la ondulación geoidal hay que sumarle esta diferencia a la ondulación geoidal del EGM 96 (Ver ecuación 4.8), ya corregida con su correspondiente desvío sistemático.

El valor de los parámetros ajustados del tercer modelo útiles para determinar la separación entre el geoide local y el geoide gravitacional son los siguientes:

Tabla 4.36 Parámetros finales para la determinación de la separación entre el geoide local y el geoide gravitacional del EGM 96

Parámetros	Valor
a	-0.004822
b	0.011007
c	3.029302E-9
d	-5.4989242E-10
e	-53164.091720

En la tabla 4.37 se presenta una muestra de las 234 ondulaciones geoidales resultantes de la combinación de GPS/Nivelación con el Modelo Geopotencial EGM 96 a partir del modelo representado por la ecuación (4.4). En esta asociación se utilizó una desviación sistemática¹⁴ de 0.756 m. En la primera columna están los nombres de las observaciones; en la segunda columna está la separación entre geoide local y geoide del EGM 96 para cada observación; en la tercera columna se encuentran las ondulaciones geoidales determinadas por la asociación de GPS/Nivelación con el modelo EGM 96; y en la cuarta columna están las discrepancias entre el método GPS/Nivelación asociado al EGM 96 y el GPS/Nivelación (ARANA, 2000). El resto de información está disponible en el anexo 7.

¹⁴ Dentro de este proyecto la desviación sistemática se la obtuvo calculando la media de las diferencias entre las ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Niv y las ondulaciones del EGM 96 correspondientes a las 235 observaciones.

Tabla 4.37 Asociación de GPS/Nivelación con el modelo geopotencial EGM 96

Nombre	Geoide local - Geoide EGM96	$N_{GPS+EGM\ 96}$	$N_{GPS+EGM}$ $N_{GPS/N}$
1 Q	0.115	27.532	-0.010
2 Q	0.208	27.564	-0.034
3 Q	0.638	27.694	-0.026
4 Q	1.011	27.827	0.041
5 Q	0.058	27.494	0.002
6 Q	0.147	27.513	-0.059
7 Q	0.075	27.471	-0.041
8 Q	0.271	27.517	-0.080
9 Q	0.571	27.647	-0.036
10 Q	0.487	27.593	-0.072
11 Q	0.758	27.705	-0.042
12 Q	0.927	27.763	0.024
13 Q	-0.108	27.388	-0.019
14 Q	0.106	27.452	-0.013
15 Q	0.036	27.402	-0.019
16 Q	0.312	27.508	-0.072
17 Q	0.267	27.463	-0.081
18 Q	0.460	27.526	-0.111
19 Q	0.734	27.630	-0.061
20 Q	-0.211	27.315	-0.022
21 Q	0.430	27.456	-0.054
22 Q	0.421	27.487	-0.057
23 Q	0.357	27.443	-0.011
24 Q	0.288	27.454	-0.110
25 Q	0.223	27.430	-0.123
26 Q	0.164	27.400	-0.075
27 Q	0.044	27.390	-0.016
28 Q	-0.003	27.353	-0.026
29 Q	0.390	27.396	0.060
30 Q	0.373	27.419	-0.099
31 Q	0.275	27.391	-0.082
32 Q	0.220	27.357	-0.038
33 Q	0.120	27.356	-0.066

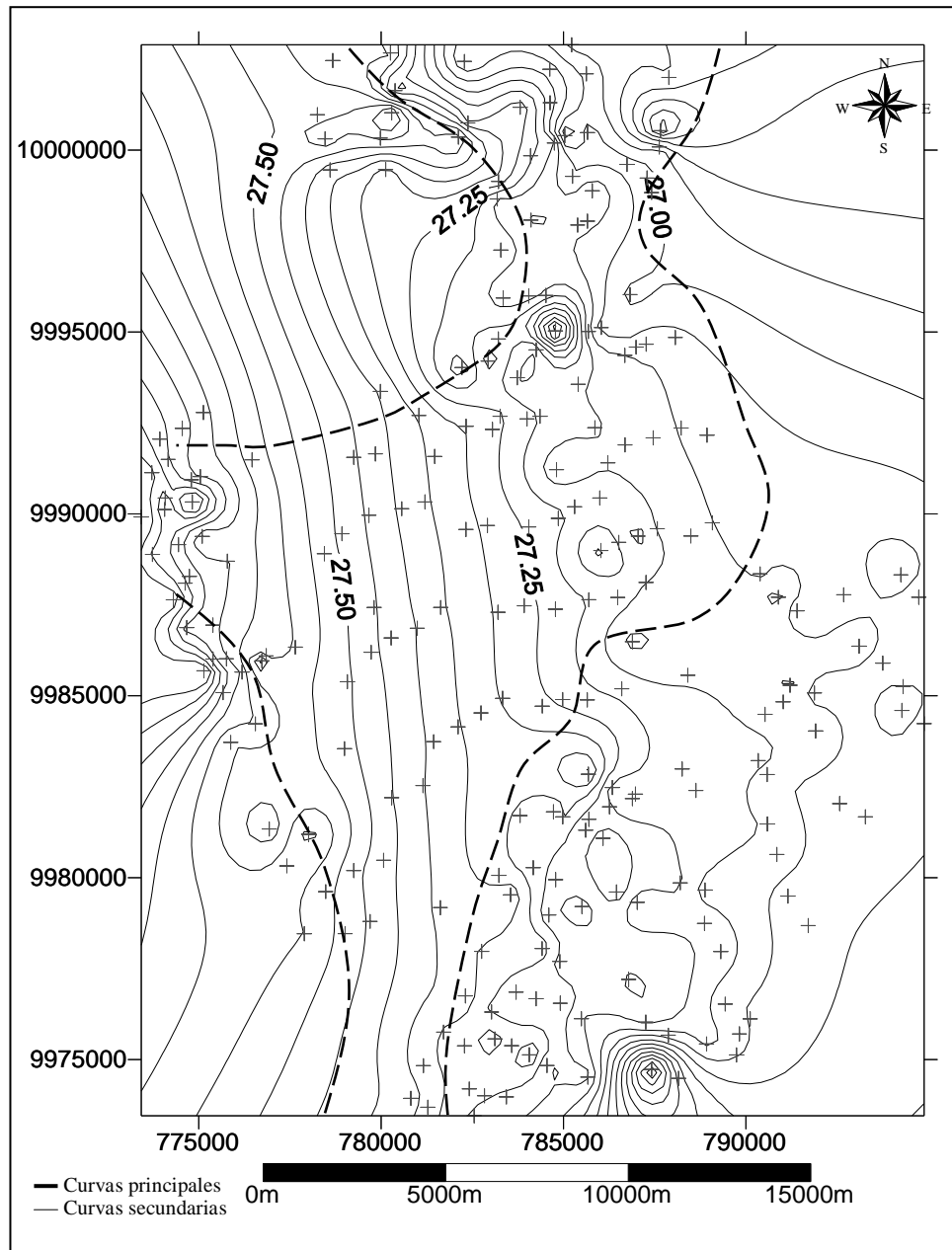
Tabla 4.38 Datos estadísticos de las discrepancias entre $N_{GPS+EGM} - N_{GPS/Niv}$

	$N_{GPS+EGM} - N_{GPS/N}$
Media	-0.006
Desviación	0.058
Máximo	0.144
Mínimo	-0.151

4.10.1 Carta geoidal generada a partir de GPS/Nivelación asociado al EGM96 con 234 observaciones

La carta geoidal de la figura 4.21 denominada “Carta de Ondulación Geoidal $N_{GPS+EGM96}$ ” fue generada a partir de la tabla 4.37 con un total 234 observaciones.

Figura 4.21 Carta de Ondulación Geoidal $N_{GPS+EGM96}$

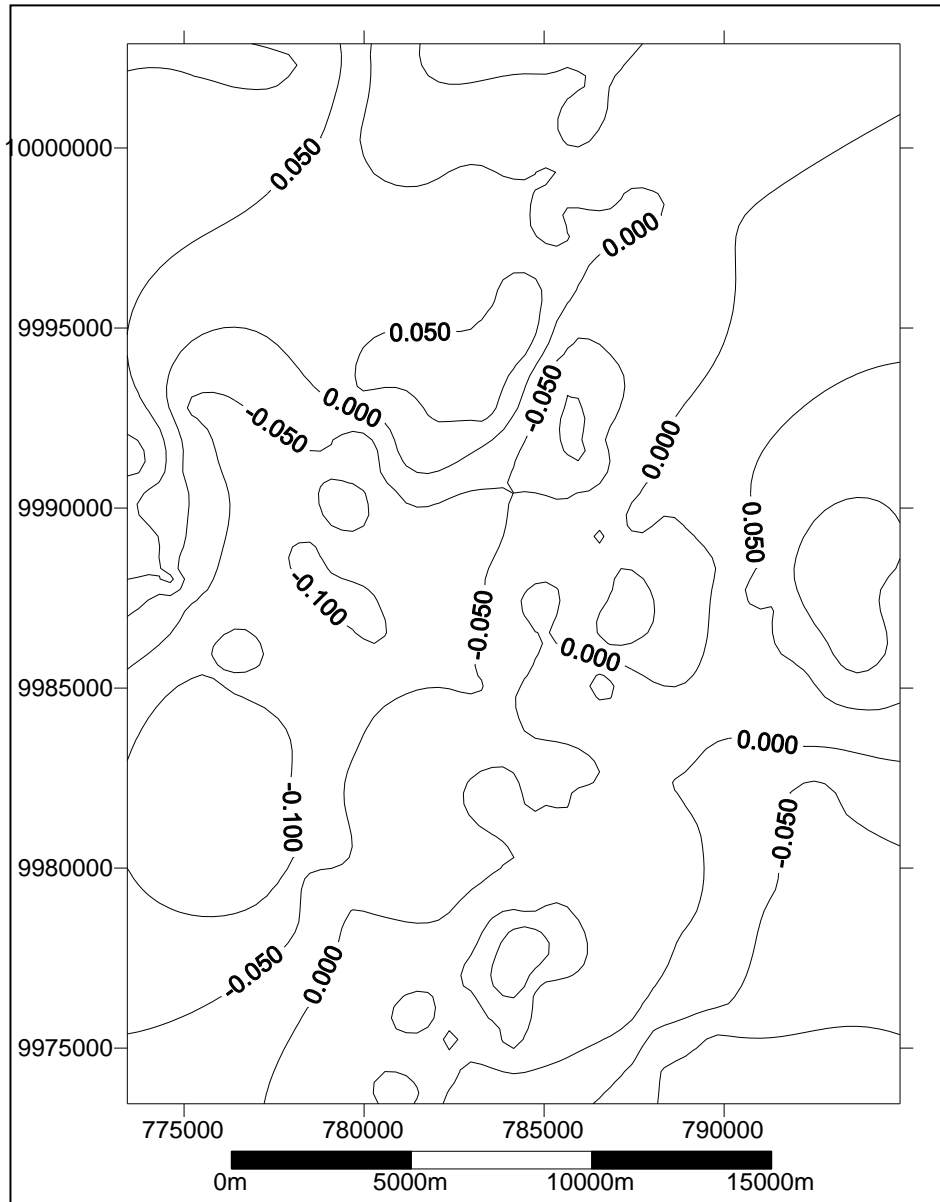


Analizando la figura 4.21, se verifica que el geoide de la región, generado a partir de la integración de GPS/Nivelación con el modelo geopotencial EGM 96, presenta una disminución de la ondulación en sentido oeste – este. La carta geoidal indica ciertas zonas donde la variación de la ondulación geoidal no es paulatina.

4.10.2 Carta de residuales entre el método GPS/Nivelación asociado al EGM96 y el GPS/Nivelación

La carta de la figura 4.22, denominada “Carta de Discrepancias $N_{GPS+EGM}-N_{GPS/Niv}$ ”, fue elaborada con los datos pertenecientes a la tabla 4.37 de las 234 observaciones que intervienen en este proyecto.

Figura 4.22 Carta de Discrepancias $N_{GPS+EGM}-N_{GPS/Niv}$



Las curvas de iso-residuales están separadas de 5 en 5 cm. Las mayores discrepancias se encuentran al oeste de carta.60

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS

5.1 Análisis de Tendencia de las cartas de ondulaciones geoidales generados por GPS/Nivelación.

A partir de las discrepancias de las ondulaciones geoidales obtenidas en la interpolación de las Cartas de Ondulación Geoidal 235, 100, 50, 25 y 8 se generó la tabla 5.1. La primera columna contiene el test estadístico de tendencia; la segunda columna los valores determinados para la carta geoidal con 235 observaciones; la tercera los valores obtenidos para la carta geoidal con 100 observaciones; la cuarta los valores para la carta geoidal con 50 observaciones; la quinta los valores para 25 observaciones y la sexta columna los valores para la carta geoidal elaborada con 8 observaciones.

Tabla 5.1 Test de tendencia de las cartas geoidales.

n	235	100	50	25	8
t_x	0.129	0.506	2.254	0.386	0.212
$t_{(n-1, \alpha/2)}$	1.97	1.989	2.011	2.06	2.36

Con los resultados obtenidos en la tabla 5.1 estadísticamente se puede concluir que:

- Para las cartas generadas con 235, 100, 25 y 8 observaciones la hipótesis nula no es rechazada (H_0), lo que significa que mencionadas cartas pueden ser consideradas, estadísticamente, no tendenciosas.
- Para la carta geoidal elaborada con 50 observaciones no se acepta la hipótesis nula (H_0), lo que significa que esta carta es considerada estadísticamente tendenciosa.

5.2 Análisis de Exactitud de las cartas de ondulaciones geoidales generadas por GPS/ Nivelación.

A partir de las discrepancias determinadas en las cartas geoidales elaboradas con 100, 50, 25 y 8 observaciones se generó la tabla 5.2. La primera columna contiene el test estadístico de exactitud; la segunda columna contiene los valores para la carta generada con 100 observaciones; la tercera para la carta generada con 50 observaciones; la cuarta para la carta generada con 25 observaciones y la quinta para la carta generada con 8 observaciones. La S_x^2 utilizada en este test estadístico fue de 0.000035 m².

Tabla 5.2 Test χ^2 para las cartas geoidales

n	100	50	25	8
χ_x^2	5.516	1.573	0.471	6.189E-2
χ_{n-1}^2	123.2	66.34	36.42	14.07

Analizando la tabla 5.2 se concluye que, estadísticamente no se rechaza la hipótesis nula de ninguna de las cartas. Lo que significa que las cuatro cartas pueden ser consideradas con la misma exactitud.

5.3 Análisis de Tendencia de los modelos matemáticos.

Con el fin de verificar si el modelo matemático, ajustado con diferente número de observaciones presenta tendencias estadísticas, se elaboró la tabla 5.3. La primera fila contiene el número de observaciones utilizadas para determinar los parámetros del modelo; la segunda fila contiene el valor de la prueba "t" calculado con la ecuación (3.75), y la tercera fila contiene el intervalo de confianza al 95%.

Tabla 5.3 Test de tendencia de los modelos matemáticos

n	234	100	50	25	8
t_x	1.879	0.810	1.169	0.135	0.287

$t_{(n-1, \alpha/2)}$	1.97	1.989	2.011	2.06	2.36
-----------------------	------	-------	-------	------	------

A partir de la tabla 5.3 se concluye que la hipótesis nula (H_0) no es rechazada para ninguno de los modelos, lo que significa que estadísticamente, son considerados no tendenciosos.

5.4 Análisis de Exactitud de los modelos matemáticos.

Para el análisis de exactitud de los modelos, se elaboró la tabla 5.4, en donde la primera fila contiene el número de observaciones utilizadas en el ajuste de los parámetros, la segunda fila contiene el test de exactitud calculado por la ecuación (3.79), y la tercera fila contiene el valor del Chi-cuadrado de la muestra. La S_x^2 utilizada en este test estadístico fue de 0.00325 m^2 .

Tabla 5.4 Test de exactitud para los modelos matemáticos

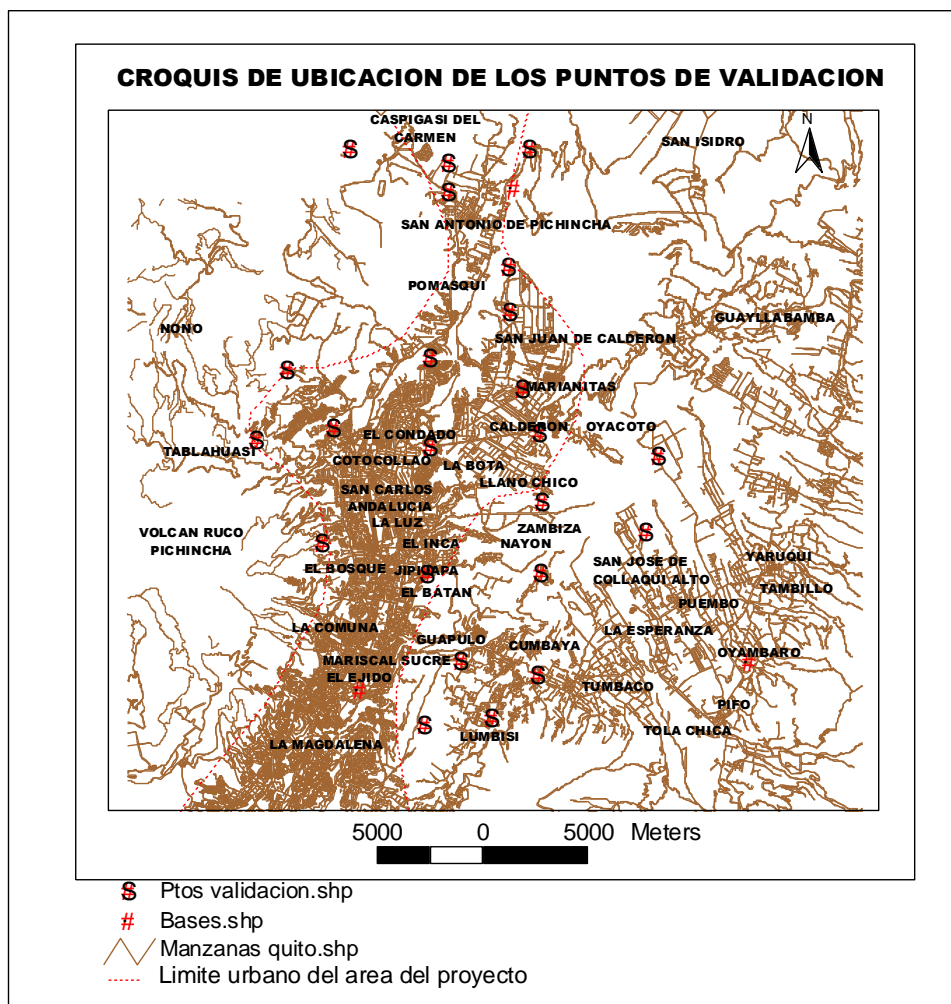
n	100	50	25	8
X_x^2	99.698	41.819	15.688	6.714
X_{n-1}^2	123.2	66.34	36.42	14.07

Con los valores presentados en la tabla 5.4, se concluye que las exactitudes determinadas por los modelos, estadísticamente pueden ser consideradas con la misma exactitud, ya que en todas las pruebas se acepta la hipótesis nula.

5.5 Validación de los resultados.

Al inicio del presente proyecto no se tomaron en cuenta 23 observaciones para el ajuste de los parámetros de los modelos matemáticos, con el fin de comprobar a través de estos datos, el real funcionamiento de los modelos para observaciones que no intervinieron en el desarrollo de los mismos. Las 23 observaciones están uniformemente distribuidas a lo largo de toda el área de estudio como se grafica en la figura 5.1.

Figura 5.1 Croquis de ubicación de los puntos de validación



5.5.1 Validación de los resultados del modelo matemático

Para validar el modelo matemático escogido, se reemplaza los parámetros finales obtenidos a través del ajuste con mínimos cuadrados y las coordenadas UTM de cada una de las 23 observaciones en siguiente modelo (4.4):

$$Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$$

De esta manera se obtiene las ondulaciones geoidales de las 23 observaciones que no

intervinieron en el ajuste. Luego se las compara con las ondulaciones obtenidas por el método GPS/Nivelación, y se determina las diferencias que existen entre las ondulaciones geoidales del modelo matemático y las ondulaciones “reales”.

5.5.1.1 Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 234 observaciones

En esta sección la validación de las 23 observaciones será realizada con los parámetros indicados en la tabla 4.29, en donde intervinieron 234 observaciones para su ajuste.

En la primera columna de la tabla 5.5 está el nombre de las observaciones de validación; en la segunda columna las ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático ajustado con 234 observaciones y en la tercera columna las diferencias que existen entre las ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Nivelación y modelo matemático.

Tabla 5.5 Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 234 observaciones.

Nombre	N validación (m)	Diferencias (m)
1 QV	27.699	-0.005
2 QV	27.573	0.126
3 QV	27.361	0.024
4 QV	27.330	0.062
5 QV	27.294	-0.029
6 QV	27.126	0.051
7 QV	27.159	-0.010
8 QV	27.142	0.074
9 QV	27.146	0.061
10 QV	27.636	0.195
19 QV	27.096	0.005
20 QV	27.239	-0.009
21 QV	27.179	-0.012
22 QV	27.076	-0.116
23 QV	27.172	-0.032

24 QV	27.298	-0.036
-------	--------	--------

Tabla 5.5 Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 234 observaciones.

Nombre	N validación (m)	Diferencias (m)
25 QV	27.365	-0.023
26 QV	27.131	0.034
27 QV	26.987	0.087
28 QV	27.153	0.015
29 QV	27.102	0.050
30 QV	27.360	-0.096
31 QV	27.840	0.009
	Media	0.018
	Desv.	0.068
	Máx.	0.195
	Min.	-0.116

A través de la tabla 5.5 se concluye que a partir del modelo matemático ajustado con 234 observaciones se pueden tener ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio con una desviación estándar de 7 cm y una media de 2 cm.

5.5.1.2 Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 100 observaciones

La validación de las 23 observaciones será realizada con los parámetros indicados en la segunda columna de la tabla 4.33, en donde intervinieron 100 observaciones para el ajuste de los parámetros a través del MMC.

En la primera columna de la tabla 5.6 está el nombre de las observaciones de validación; en la segunda columna las ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático ajustado con 100 observaciones y en la tercera columna las diferencias que existen entre las ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Nivelación y modelo matemático.

Tabla 5.6 Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 100 observaciones

Nombre	N validación (m)	Diferencias (m)
1 QV	27.726	-0.032
2 QV	27.593	0.106
3 QV	27.364	0.021
4 QV	27.337	0.055
5 QV	27.303	-0.038
6 QV	27.127	0.050
7 QV	27.154	-0.005
8 QV	27.139	0.077
9 QV	27.145	0.062
10 QV	27.653	0.178
19 QV	27.082	0.019
20 QV	27.225	0.005
21 QV	27.165	0.002
22 QV	27.064	-0.104
23 QV	27.164	-0.024
24 QV	27.291	-0.029
25 QV	27.357	-0.015
26 QV	27.136	0.029
27 QV	26.983	0.091
28 QV	27.158	0.010
29 QV	27.103	0.049
30 QV	27.375	-0.111
31 QV	27.870	-0.021
	Media	0.016
	Desv.	0.065
	Máx.	0.178
	Min.	-0.111

A través de la tabla 5.6 se concluye que a partir del modelo matemático ajustado con 100 observaciones se pueden tener ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio con una media de 2 cm y una desviación estándar de 7 cm.

5.5.1.3 Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 50 observaciones

La validación de las 23 observaciones será realizada con los parámetros indicados en

la tercera columna de la tabla 4.33, donde intervinieron 50 observaciones en el ajuste. En la primera columna de la tabla 5.7 está el nombre de las observaciones de validación; en la segunda columna las ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático ajustado con 50 observaciones, y en la tercera columna las diferencias que existen entre las ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Nivelación y el modelo matemático.

Tabla 5.7 Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 50 observaciones

Nombre	N Validación (m)	Diferencias (m)
1 QV	27.656	0.038
2 QV	27.556	0.143
3 QV	27.377	0.008
4 QV	27.342	0.050
5 QV	27.298	-0.033
6 QV	27.131	0.046
7 QV	27.182	-0.033
8 QV	27.161	0.055
9 QV	27.161	0.046
10 QV	27.620	0.211
19 QV	27.103	-0.002
20 QV	27.254	-0.024
21 QV	27.198	-0.031
22 QV	27.077	-0.117
23 QV	27.196	-0.056
24 QV	27.314	-0.052
25 QV	27.370	-0.028
26 QV	27.100	0.065
27 QV	26.958	0.116
28 QV	27.129	0.039
29 QV	27.100	0.052
30 QV	27.300	-0.036
31 QV	27.787	0.062
	Media	0.023
	Desv.	0.073
	Máx.	0.211
	Min.	-0.117

A través de la tabla 5.7 se concluye que a partir del modelo matemático ajustado con 50 observaciones se pueden tener ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro

del área de estudio con una media de 2 cm y una desviación estándar de 7 cm.

5.5.1.4 Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 25 observaciones

La validación de las 23 observaciones será realizada con los parámetros indicados en la cuarta columna de la tabla 4.33, en donde intervinieron 25 observaciones en el ajuste de mínimos cuadrados.

En la primera columna de la tabla 5.8 está el nombre de las observaciones de validación; en la segunda columna las ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático ajustado con 25 observaciones, y en la tercera columna las diferencias que existen entre las ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Nivelación y modelo matemático.

Tabla 5.8 Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 25 observaciones.

Nombre	N Validación (m)	Diferencias (m)
1 QV	27.713	-0.019
2 QV	27.568	0.131
3 QV	27.363	0.022
4 QV	27.298	0.094
5 QV	27.263	0.002
6 QV	27.090	0.087
7 QV	27.121	0.028
8 QV	27.094	0.122
9 QV	27.098	0.109
10 QV	27.658	0.173
19 QV	27.068	0.033
20 QV	27.316	-0.086
21 QV	27.220	-0.053
22 QV	27.032	-0.072
23 QV	27.158	-0.018
24 QV	27.339	-0.077
25 QV	27.459	-0.117
26 QV	27.167	-0.002
27 QV	27.020	0.054

28 QV	27.172	-0.004
-------	--------	--------

Tabla 5.8 Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 25 observaciones.

Nombre	N Validación (m)	Diferencias (m)
29 QV	27.079	0.073
30 QV	27.429	-0.165
31 QV	27.867	-0.018
	Media	0.013
	Desv.	0.085
	Máx.	0.173
	Min.	-0.165

A través de la tabla 5.8 se concluye que a partir del modelo matemático ajustado con 25 observaciones se pueden tener ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio con una media de 1 cm y una desviación estándar de 9 cm.

5.5.1.5 Validación de los resultados del modelo matemático ajustado con 8 observaciones

La validación de las 23 observaciones será realizada con los parámetros indicados en la quinta columna de la tabla 4.33, en donde intervinieron 8 observaciones en el ajuste de mínimos cuadrados.

En la primera columna de la tabla 5.9 está el nombre de las observaciones de validación, en la segunda columna las ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático ajustado con 8 observaciones, y en la tercera columna las diferencias que existen entre las ondulaciones geoidales obtenidas por GPS/Nivelación y modelo matemático.

Tabla 5.9 Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a través del modelo matemático $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ajustado con 8 observaciones

Nombre	N Validación (m)	Diferencias (m)
1 QV	27.702	-0.008
2 QV	27.581	0.118
3 QV	27.381	0.004
4 QV	27.342	0.050
5 QV	27.309	-0.044
6 QV	27.137	0.040
7 QV	27.161	-0.012
8 QV	27.142	0.074
9 QV	27.150	0.057
10 QV	27.648	0.183
19 QV	27.071	0.030
20 QV	27.277	-0.047
21 QV	27.201	-0.034
22 QV	27.043	-0.083
23 QV	27.180	-0.040
24 QV	27.327	-0.065
25 QV	27.408	-0.066
26 QV	27.170	-0.005
27 QV	27.020	0.054
28 QV	27.187	-0.019
29 QV	27.118	0.034
30 QV	27.400	-0.136
31 QV	27.835	0.014
	Media	0.004
	Desv.	0.070
	Máx.	0.183
	Min.	-0.136

A través de la tabla 5.9 se concluye que a partir del modelo matemático ajustado con 8 observaciones se pueden tener ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio con una media de 4 mm y una desviación estándar de 7 cm.

En la tabla 5.10 se presenta un resumen de las diferencias que existen entre las ondulaciones geoidales obtenidas a través de GPS/Niv en los puntos de validación con las ondulaciones obtenidas con los modelos matemáticos ajustados con 234, 100,

50, 25 y 8 observaciones.

Tabla 5.10 Resumen de diferencias entre GPS/Niv y modelos ajustados con 234, 100, 50, 25 y 8

Nombre	Diferencias 234 (m)	Diferencias 100 (m)	Diferencias 50 (m)	Diferencias 25 (m)	Diferencias 8 (m)
1 QV	-0.005	-0.032	0.038	-0.019	-0.008
2 QV	0.126	0.106	0.143	0.131	0.118
3 QV	0.024	0.021	0.008	0.022	0.004
4 QV	0.062	0.055	0.050	0.094	0.050
5 QV	-0.029	-0.038	-0.033	0.002	-0.044
6 QV	0.051	0.050	0.046	0.087	0.040
7 QV	-0.010	-0.005	-0.033	0.028	-0.012
8 QV	0.074	0.077	0.055	0.122	0.074
9 QV	0.061	0.062	0.046	0.109	0.057
10 QV	0.195	0.178	0.211	0.173	0.183
19 QV	0.005	0.019	-0.002	0.033	0.030
20 QV	-0.009	0.005	-0.024	-0.086	-0.047
21 QV	-0.012	0.002	-0.031	-0.053	-0.034
22 QV	-0.116	-0.104	-0.117	-0.072	-0.083
23 QV	-0.032	-0.024	-0.056	-0.018	-0.040
24 QV	-0.036	-0.029	-0.052	-0.077	-0.065
25 QV	-0.023	-0.015	-0.028	-0.117	-0.066
26 QV	0.034	0.029	0.065	-0.002	-0.005
27 QV	0.087	0.091	0.116	0.054	0.054
28 QV	0.015	0.010	0.039	-0.004	-0.019
29 QV	0.050	0.049	0.052	0.073	0.034
30 QV	-0.096	-0.111	-0.036	-0.165	-0.136
31 QV	0.009	-0.021	0.062	-0.018	0.014
Media	0.018	0.016	0.023	0.013	0.004
Desv.	0.068	0.065	0.073	0.085	0.070
Máx.	0.195	0.178	0.211	0.173	0.183
Min.	-0.116	-0.111	-0.117	-0.165	-0.136

A partir de la tabla 5.10 se puede concluir que el modelo matemático ajustado con 234 observaciones no tiene los residuales más bajos y que su media y desviación estándar no difiere significativamente de los modelos ajustados con menor número de observaciones. El modelo matemático ajustado con 8 observaciones tiene una media de 4 mm y una desviación estándar de 7 cm, mientras que el modelo matemático ajustado con 234 observaciones tiene una media de 2 cm y una desviación estándar de 7 cm.

Para determinar si los resultados obtenidos por los modelos matemáticos pueden reemplazar a la nivelación geométrica y/o trigonométrica se procedió a comparar la tolerancia que obtuvo cada observación en el cierre durante la nivelación geométrica/trigonométrica con las discrepancias obtenidas en los modelos matemáticos.

En la primera columna de la tabla 5.11 se tiene los nombres de las observaciones de validación; en la segunda columna se encuentra la tolerancia de cierre de cada punto en nivelación geométrica. Esta se obtuvo multiplicando $8.4 \text{ mm} * \sqrt{K}$; la tercera, quinta, séptima, novena, y décimo primera columnas tienen las discrepancias obtenidas entre las ondulaciones de validación obtenidas a través de los modelos matemáticos y las ondulaciones “reales”; la cuarta, sexta, octava, décima y décima primera columnas indican con un SI que la discrepancia es menor a la tolerancia, por ende en tal observación el modelo matemático si puede reemplazar a la nivelación geométrica, mientras que con el NO significa que las discrepancias superaron a la tolerancia esperada y no es recomendable sustituir a la nivelación geométrica por los modelos matemáticos.

El análisis de la nivelación trigonométrica se realiza en la tabla 5.12. En la primera columna se tiene los nombres de las observaciones de validación; en la segunda columna se encuentra la tolerancia de cierre de cada punto en nivelación trigonométrica, esta se obtuvo multiplicando $3.4 \text{ cm} * \sqrt{K}$; la tercera, quinta, séptima, novena, y décimo primera columnas tienen las discrepancias de cada modelo matemático; la cuarta, sexta, octava, décima y décima primera columnas indican si la discrepancia de los modelos es menor o no a la tolerancia obtenida en la nivelación trigonométrica.

Tabla 5.11 Comparación entre la tolerancia máxima obtenida en el cierre de la nivelación geométrica con la discrepancias obtenidas con los modelos

Nombre	Tolerancia geométrica (m)	Discrep Modelo 234		Discrep Modelo 100		Discrep Modelo 50		Discrep Modelo 25		Discrep Modelo 8	
1 QV	0.0060	-0.005	Si	-0.032	No	0.038	No	-0.019	No	-0.008	No
2 QV	0.0140	0.126	No	0.106	No	0.143	No	0.131	No	0.118	No
3 QV	0.0212	0.024	No	0.021	Si	0.008	Si	0.022	No	0.004	Si
4 QV	0.0084	0.062	No	0.055	No	0.050	No	0.094	No	0.050	No
5 QV	0.0204	-0.029	No	-0.038	No	-0.033	No	0.002	Si	-0.044	No
6 QV	0.0212	0.051	No	0.050	No	0.046	No	0.087	No	0.040	No
7 QV	0.0187	-0.010	Si	-0.005	Si	-0.033	No	0.028	No	-0.012	Si
8 QV	0.0168	0.074	No	0.077	No	0.055	No	0.122	No	0.074	No
9 QV	0.0079	0.061	No	0.062	No	0.046	No	0.109	No	0.057	No
10 QV	0.0038	0.195	No	0.178	No	0.211	No	0.173	No	0.183	No
19 QV	0.0078	0.005	Si	0.019	No	-0.002	Si	0.033	No	0.030	No
20 QV	0.0107	-0.009	Si	0.005	Si	-0.024	No	-0.086	No	-0.047	No
21 QV	0.0078	-0.012	No	0.002	Si	-0.031	No	-0.053	No	-0.034	No
22 QV	0.0234	-0.116	No	-0.104	No	-0.117	No	-0.072	No	-0.083	No
23 QV	0.0064	-0.032	No	-0.024	No	-0.056	No	-0.018	No	-0.040	No
24 QV	0.0073	-0.036	No	-0.029	No	-0.052	No	-0.077	No	-0.065	No
25 QV	0.0070	-0.023	No	-0.015	No	-0.028	No	-0.117	No	-0.066	No
26 QV	0.0036	0.034	No	0.029	No	0.065	No	-0.002	Si	-0.005	No
27 QV	0.0080	0.087	No	0.091	No	0.116	No	0.054	No	0.054	No
28 QV	0.0082	0.015	No	0.010	No	0.039	No	-0.004	Si	-0.019	No
29 QV	0.0103	0.050	No	0.049	No	0.052	No	0.073	No	0.034	No
30 QV	0.0084	-0.096	No	-0.111	No	-0.036	No	-0.165	No	-0.136	No
31 QV	0.0077	0.009	No	-0.021	No	0.062	No	-0.018	No	0.014	No
Media		0.018		0.016		0.023		0.013		0.004	
Desv		0.068		0.065		0.073		0.085		0.070	
Max		0.195		0.178		0.211		0.173		0.183	
Min		-0.116		-0.111		-0.117		-0.165		-0.136	
Si		17.40%		17.40%		8.70%		13.00%		8.70%	
No		82.60%		82.60%		91.30%		87.00%		91.30%	

Tabla 5.12 Comparación entre la tolerancia máxima obtenida en el cierre de la nivelación trigonométrica con la discrepancias obtenidas con los modelos

Nombre	Tolerancia trigonométrica (m)	Discrep Modelo 234		Discrep Modelo 100		Discrep Modelo 50		Discrep Modelo 25		Discrep Modelo 8	
1 QV	0.024	-0.005	Si	-0.032	No	0.038	No	-0.019	Si	-0.008	Si
2 QV	0.056	0.126	No	0.106	No	0.143	No	0.131	No	0.118	No
3 QV	0.086	0.024	Si	0.021	Si	0.008	Si	0.022	Si	0.004	Si
4 QV	0.034	0.062	No	0.055	No	0.050	No	0.094	No	0.050	No
5 QV	0.083	-0.029	Si	-0.038	Si	-0.033	Si	0.002	Si	-0.044	Si
6 QV	0.086	0.051	Si	0.050	Si	0.046	Si	0.087	No	0.040	Si
7 QV	0.075	-0.010	Si	-0.005	Si	-0.033	Si	0.028	Si	-0.012	Si
8 QV	0.068	0.074	No	0.077	No	0.055	Si	0.122	No	0.074	No
9 QV	0.032	0.061	No	0.062	No	0.046	No	0.109	No	0.057	No
10 QV	0.016	0.195	No	0.178	No	0.211	No	0.173	No	0.183	No
19 QV	0.032	0.005	Si	0.019	Si	-0.002	Si	0.033	No	0.030	Si
20 QV	0.043	-0.009	Si	0.005	Si	-0.024	Si	-0.086	No	-0.047	No
21 QV	0.032	-0.012	Si	0.002	Si	-0.031	Si	-0.053	No	-0.034	No
22 QV	0.095	-0.116	No	-0.104	No	-0.117	No	-0.072	Si	-0.083	Si
23 QV	0.026	-0.032	No	-0.024	Si	-0.056	No	-0.018	Si	-0.040	No
24 QV	0.030	-0.036	No	-0.029	Si	-0.052	No	-0.077	No	-0.065	No
25 QV	0.028	-0.023	Si	-0.015	Si	-0.028	Si	-0.117	No	-0.066	No
26 QV	0.014	0.034	No	0.029	No	0.065	No	-0.002	Si	-0.005	Si
27 QV	0.032	0.087	No	0.091	No	0.116	No	0.054	No	0.054	No
28 QV	0.033	0.015	Si	0.010	Si	0.039	No	-0.004	Si	-0.019	Si
29 QV	0.042	0.050	No	0.049	No	0.052	No	0.073	No	0.034	Si
30 QV	0.034	-0.096	No	-0.111	No	-0.036	No	-0.165	No	-0.136	No
31 QV	0.031	0.009	Si	-0.021	Si	0.062	No	-0.018	Si	0.014	Si
	Media	0.018		0.016		0.023		0.013		0.004	
	Desv	0.068		0.065		0.073		0.085		0.070	
	Max	0.195		0.178		0.211		0.173		0.183	
	Min	-0.116		-0.111		-0.117		-0.165		-0.136	
	Si	47.80%		52.20%		39.10%		39.10%		47.80%	
	No	52.20%		47.80%		60.90%		60.90%		52.20%	

Con la tabla 5.11 se concluye que no es recomendable sustituir los modelos matemáticos por nivelación geométrica, ya que se observa que alrededor del 80% - 90% de las discrepancias de los puntos de validación no fueron menores a la tolerancia de cierre.

Con la tabla 5.12 se concluye que no es recomendable sustituir los modelos matemáticos por nivelación trigonométrica, ya que se observa que alrededor del 45% - 60% de las discrepancias de los puntos de validación no fueron menores a la tolerancia en la nivelación trigonométrica.

5.5.2 Validación del cálculo de ondulaciones geoidales a partir de la integración de GPS/Nivelación con el EGM 96

Para validar el método que determina las ondulaciones geoidales de Quito a través de la integración de GPS/Nivelación con el EGM 96 se utilizaron 23 observaciones uniformemente distribuidas en el área de estudio, omitidas intencionalmente en los cálculos de ajuste. Como se explicó anteriormente el modelo matemático escogido da como resultado la separación entre el geoide local y el geoide del EGM 96 de cada punto y luego con la ondulación geoidal obtenida a partir del EGM 96 se determina la ondulación geoidal local. Es importante recordar que antes de utilizar la ecuación (4.4), cada una de las 23 observaciones de validación fueron corregidas con el valor de la desviación sistemática, que dentro de este proyecto es de 0.756 m.

En la primera columna de la tabla 5.13 se observan los nombres de las observaciones de validación; en la segunda columna se observa la separación que existe en cada punto entre el geoide local y el geoide del EGM 96, en la tercera columna se encuentran las ondulaciones geoidales que se determinaron a través de la ecuación (4.4), la cuarta columna tiene las ondulaciones "reales" y la quinta columna tiene las diferencias de las ondulaciones geoidales entre GPS/Niv y GPS/Niv asociado al EGM 96.

Tabla 5.13 Validación de las ondulaciones geoidales obtenidas a partir de la integración de GPS/Niv con EGM 96

Nombre	Geoide local - geoide EGM 96 (m)	N EGM+GPS/Niv	N _{GPS/Niv}	N _{GPS/N} - N _{EGM+GPS/N}
1 QV	0.841	27.71	27.694	-0.014
2 QV	0.530	27.57	27.699	0.133
3 QV	-0.078	27.36	27.385	0.028
4 QV	0.072	27.33	27.392	0.064
5 QV	0.158	27.29	27.265	-0.029
6 QV	-0.075	27.13	27.177	0.046
7 QV	-0.344	27.16	27.149	-0.013
8 QV	-0.262	27.14	27.216	0.072
9 QV	-0.174	27.14	27.207	0.065
10 QV	0.451	27.63	27.831	0.204
19 QV	-0.558	27.10	27.101	0.003
20 QV	-0.529	27.24	27.230	-0.007
21 QV	-0.582	27.18	27.167	-0.017
22 QV	-0.477	27.08	26.960	-0.119
23 QV	-0.436	27.17	27.140	-0.030
24 QV	-0.332	27.29	27.262	-0.033
25 QV	-0.307	27.37	27.342	-0.028
26 QV	0.213	27.13	27.165	0.037
27 QV	-0.037	26.99	27.074	0.085
28 QV	0.198	27.15	27.168	0.014
29 QV	-0.039	27.11	27.152	0.044
30 QV	0.641	27.36	27.264	-0.093
31 QV	0.961	27.84	27.849	0.012
			Media	0.019
			Desv.	0.069
			Máx.	0.204
			Mín.	-0.119

A partir de la tabla 5.13 se concluye que a través de la integración de GPS/Nivelación con el modelo geopotencial EGM 96 se pueden determinar ondulaciones geoidales con una media de 2 cm y una desviación estándar de 7 cm, siempre y cuando el punto se encuentre dentro del área de estudio del presente trabajo.

5.5.3 Validación de las Cartas de Ondulaciones Geoidales

Después de elaborar las cartas de ondulación geoidal con distinto número de observaciones se procede a validar este método con las 23 observaciones de validación. La tabla 5.14 consta de: la primera columna contiene los nombre de las observaciones, la segunda columna las ondulaciones “reales” de cada observación, de la tercera a la séptima columna se encuentran las ondulaciones geoidales obtenidas mediante la interpolación de las cartas geoidales, de la octava a la décimo segunda columna se encuentran las discrepancias que existe entre las ondulaciones obtenidas a través de GPS/Niv y las ondulaciones obtenidas a partir de las cartas geoidales.

Tabla 5.14 Ondulaciones geoidales y discrepancias generadas en las Cartas de Ondulación Geoidal 235, 100, 50, 25, y 8

Nombre	N GPS/Niv (m)	N Carta Geoidal 235	N Carta Geoidal 100	N Carta Geoidal 50	N Carta Geoidal 25	N Carta Geoidal 8	NGPS/Niv-Ncarta 235	NGPS/Niv-Ncarta 100	NGPS/Niv-Ncarta 50	NGPS/Niv-Ncarta 25	NGPS/Niv-Ncarta 8
1 QV	27.694	27.740	27.724	27.740	27.756	27.676	-0.047	-0.030	-0.046	-0.062	0.018
2 QV	27.699	27.670	27.670	27.629	27.672	27.613	0.029	0.029	0.070	0.027	0.086
3 QV	27.385	27.368	27.377	27.380	27.372	27.384	0.018	0.008	0.005	0.014	0.001
4 QV	27.392	27.397	27.405	27.411	27.377	27.399	-0.005	-0.013	-0.019	0.016	-0.007
5 QV	27.265	27.263	27.260	27.311	27.290	27.309	0.002	0.005	-0.045	-0.025	-0.044
6 QV	27.177	27.198	27.197	27.184	27.110	27.114	-0.021	-0.019	-0.007	0.067	0.064
7 QV	27.149	27.147	27.145	27.173	27.125	27.212	0.003	0.005	-0.024	0.024	-0.063
8 QV	27.216	27.193	27.198	27.165	27.105	27.199	0.023	0.018	0.051	0.111	0.017
9 QV	27.207	27.190	27.203	27.213	27.121	27.185	0.018	0.004	-0.005	0.086	0.023
10 QV	27.831	27.796	27.755	27.734	27.762	27.610	0.035	0.076	0.097	0.069	0.221
19 QV	27.101	27.086	27.077	27.092	27.062	27.100	0.015	0.024	0.009	0.039	0.001
20 QV	27.230	27.231	27.229	27.238	27.253	27.295	-0.001	0.001	-0.008	-0.023	-0.065
21 QV	27.167	27.157	27.167	27.182	27.179	27.235	0.010	0.000	-0.015	-0.012	-0.068
22 QV	26.960	26.952	26.949	27.012	26.950	27.073	0.008	0.011	-0.052	0.010	-0.113
23 QV	27.140	27.146	27.150	27.166	27.142	27.212	-0.007	-0.010	-0.026	-0.002	-0.073
24 QV	27.262	27.190	27.229	27.266	27.225	27.317	0.072	0.032	-0.004	0.037	-0.055
25 QV	27.342	27.347	27.328	27.346	27.373	27.375	-0.006	0.014	-0.005	-0.031	-0.033
26 QV	27.165	27.165	27.166	27.183	27.158	27.159	0.000	0.000	-0.018	0.007	0.006
27 QV	27.074	27.047	27.056	27.048	27.055	27.078	0.028	0.018	0.026	0.019	-0.004
28 QV	27.168	27.161	27.158	27.174	27.167	27.153	0.008	0.010	-0.005	0.001	0.016
29 QV	27.152	27.109	27.104	27.134	27.113	27.077	0.043	0.048	0.018	0.038	0.075
30 QV	27.264	27.265	27.319	27.290	27.268	27.314	-0.001	-0.055	-0.026	-0.004	-0.050
31 QV	27.849	27.795	27.818	27.827	27.833	27.773	0.054	0.031	0.022	0.016	0.076
Media							0.012	0.009	0.000	0.018	0.001
Desv.							0.025	0.026	0.036	0.040	0.072
Máx.							0.072	0.076	0.097	0.111	0.221
Min.							-0.047	-0.055	-0.052	-0.062	-0.113

Al determinar las ondulaciones geoidales de las observaciones de validación a través de la interpolación de las distintas cartas geoidales anteriormente generadas se observa que las discrepancias, la media y la desviación estándar de todas las observaciones son menores que las obtenidas con los modelos matemáticos anteriormente expuestos. Con la Carta Geoidal 235 se obtuvieron los mejores resultados, ya que se obtuvo una desviación máxima de 7 cm, una desviación mínima de -4 cm, una media de 1 cm y una desviación estándar de 2.5 cm.

Al constatar que las cartas geoidales brindan mejores resultados que los modelos matemáticos arriba citados, se procede a determinar si estos resultados pueden reemplazar a la nivelación geométrica. Esto se realizó comparando la tolerancia máxima de cada observación en el cierre durante la nivelación geométrica con las discrepancias obtenidas. En la primera columna de la tabla 5.15 se tiene los nombres de las observaciones de validación, en la segunda columna se encuentra la tolerancia de cada punto, la cual se la obtuvo multiplicando $8.4 \text{ mm} * \sqrt{K}$; la tercera, quinta, séptima, novena, y décimo primera columnas tienen las diferencias obtenidas entre las ondulaciones geoidales interpoladas a través de las cartas y las ondulaciones “reales”; la cuarta, sexta, octava, décima y décima primera columnas indican con un SI que la diferencia es menor a la tolerancia, por ende en tal observación el método de interpolación de ondulaciones a partir de la carta geoidal si puede reemplazar a la nivelación geométrica, mientras que con el NO significa que las discrepancias superaron a la tolerancia esperada y no es recomendable sustituir a la nivelación geométrica por la interpolación de cartas geoidales.

Tabla 5.15 Comparación entre la tolerancia máxima en el cierre de la nivelación geométrica con la discrepancias obtenidas en las cartas geoidales.

Nombre	Tolerancia geométrica (m)	NGPS/Niv-Ncarta 235 (m)		NGPS/Niv-Ncarta 100 (m)		NGPS/Niv-Ncarta 50 (m)		NGPS/Niv-Ncarta 25 (m)		NGPS/Niv-Ncarta 8 (m)	
1 QV	0.0060	-0.047	No	-0.030	No	-0.046	No	-0.062	No	0.018	No
2 QV	0.0140	0.029	No	0.029	No	0.070	No	0.027	No	0.086	No
3 QV	0.0212	0.018	Si	0.008	Si	0.005	Si	0.014	Si	0.001	Si
4 QV	0.0084	-0.005	Si	-0.013	No	-0.019	No	0.016	No	-0.007	Si
5 QV	0.0204	0.002	Si	0.005	Si	-0.045	No	-0.025	No	-0.044	No
6 QV	0.0212	-0.021	Si	-0.019	Si	-0.007	Si	0.067	No	0.064	No
7 QV	0.0187	0.003	Si	0.005	Si	-0.024	No	0.024	No	-0.063	No
8 QV	0.0168	0.023	No	0.018	No	0.051	No	0.111	No	0.017	No
9 QV	0.0079	0.018	No	0.004	Si	-0.005	Si	0.086	No	0.023	No
10 QV	0.0038	0.035	No	0.076	No	0.097	No	0.069	No	0.221	No
19 QV	0.0078	0.015	No	0.024	No	0.009	No	0.039	No	0.001	Si
20 QV	0.0107	-0.001	Si	0.001	Si	-0.008	Si	-0.023	No	-0.065	No
21 QV	0.0078	0.010	No	0.000	Si	-0.015	No	-0.012	No	-0.068	No
22 QV	0.0234	0.008	Si	0.011	Si	-0.052	No	0.010	Si	-0.113	No
23 QV	0.0064	-0.007	No	-0.010	No	-0.026	No	-0.002	Si	-0.073	No
24 QV	0.0073	0.072	No	0.032	No	-0.004	Si	0.037	No	-0.055	No
25 QV	0.0070	-0.006	Si	0.014	No	-0.005	Si	-0.031	No	-0.033	No
26 QV	0.0036	0.000	Si	0.000	Si	-0.018	No	0.007	No	0.006	No
27 QV	0.0080	0.028	No	0.018	No	0.026	No	0.019	No	-0.004	Si
28 QV	0.0082	0.008	Si	0.010	No	-0.005	Si	0.001	Si	0.016	No
29 QV	0.0103	0.043	No	0.048	No	0.018	No	0.038	No	0.075	No
30 QV	0.0084	-0.001	Si	-0.055	No	-0.026	No	-0.004	Si	-0.050	No
31 QV	0.0077	0.054	No	0.031	No	0.022	No	0.016	No	0.076	No
Media	0.012			0.009		0.000		0.018		0.001	
Desv	0.025			0.026		0.036		0.040		0.072	
Max	0.072			0.076		0.097		0.111		0.221	
Min	-0.047			-0.055		-0.052		-0.062		-0.113	
Si		47.8%		39.1%		30.4%		21.7%		17.4%	
No		52.5%		60.9%		69.6%		78.3%		82.6%	

En la tabla 5.15 se observa que la carta geoidal con 235 observaciones obtuvo el mayor porcentaje de SI, pero este ni siquiera es superior al 50%, por tal motivo no es recomendable reemplazar el método de interpolación de las cartas geoidales por nivelación geométrica.

Al constatar que la interpolación de las ondulaciones en las cartas no reemplaza a la nivelación geométrica se procede a determinar si la interpolación lineal de las cartas reemplaza a la nivelación trigonométrica. Esto se realizó comparando la tolerancia máxima que puede tener cada observación en el cierre durante la nivelación trigonométrica con las discrepancias obtenidas. En la primera columna de la tabla 5.16 se tiene los nombres de las observaciones de validación, en la segunda columna se encuentra la tolerancia de cada punto, la cual se la obtuvo multiplicando $3.4 \text{ cm} * \sqrt{K}$; la tercera, quinta, séptima, novena, y décimo primera columnas tienen las diferencias obtenidas entre las ondulaciones geoidales interpoladas a través de las cartas y las ondulaciones “reales”; la cuarta, sexta, octava, décima y décima primera columnas indican con un SI que la diferencia es menor a la tolerancia, por ende en tal observación el método de interpolación de ondulaciones a partir de la carta geoidal si puede reemplazar a la nivelación trigonométrica, mientras que con el NO significa que las diferencias superaron a la tolerancia esperada y no es recomendable sustituir a la nivelación trigonométrica por la interpolación de cartas geoidales.

Tabla 5.16 Comparación entre la tolerancia máxima en el cierre de la nivelación trigonométrica con la discrepancias obtenidas en las cartas geoidales.

Nombre	Tolerancia trigonométrica (m)	NGPS/Niv-Ncarta 235		NGPS/Niv-Ncarta 100		NGPS/Niv-Ncarta 50		NGPS/Niv-Ncarta 25		NGPS/Niv-Ncarta 8	
1 QV	0.024	-0.047	No	-0.030	No	-0.046	No	-0.062	No	0.018	Si
2 QV	0.056	0.029	Si	0.029	Si	0.070	No	0.027	Si	0.086	No
3 QV	0.086	0.018	Si	0.008	Si	0.005	Si	0.014	Si	0.001	Si
4 QV	0.034	-0.005	Si	-0.013	Si	-0.019	Si	0.016	Si	-0.007	Si
5 QV	0.083	0.002	Si	0.005	Si	-0.045	Si	-0.025	Si	-0.044	Si
6 QV	0.086	-0.021	Si	-0.019	Si	-0.007	Si	0.067	Si	0.064	Si
7 QV	0.075	0.003	Si	0.005	Si	-0.024	Si	0.024	Si	-0.063	Si
8 QV	0.068	0.023	Si	0.018	Si	0.051	Si	0.111	No	0.017	Si
9 QV	0.032	0.018	Si	0.004	Si	-0.005	Si	0.086	No	0.023	Si
10 QV	0.016	0.035	No	0.076	No	0.097	No	0.069	No	0.221	No
19 QV	0.032	0.015	Si	0.024	Si	0.009	Si	0.039	No	0.001	Si
20 QV	0.043	-0.001	Si	0.001	Si	-0.008	Si	-0.023	Si	-0.065	No
21 QV	0.032	0.010	Si	0.000	Si	-0.015	Si	-0.012	Si	-0.068	No
22 QV	0.095	0.008	Si	0.011	Si	-0.052	Si	0.010	Si	-0.113	No
23 QV	0.026	-0.007	Si	-0.010	Si	-0.026	No	-0.002	Si	-0.073	No
24 QV	0.030	0.072	No	0.032	No	-0.004	Si	0.037	No	-0.055	No
25 QV	0.028	-0.006	Si	0.014	Si	-0.005	Si	-0.031	No	-0.033	No
26 QV	0.014	0.000	Si	0.000	Si	-0.018	No	0.007	Si	0.006	Si
27 QV	0.032	0.028	Si	0.018	Si	0.026	Si	0.019	Si	-0.004	Si
28 QV	0.033	0.008	Si	0.010	Si	-0.005	Si	0.001	Si	0.016	Si
29 QV	0.042	0.043	No	0.048	No	0.018	Si	0.038	Si	0.075	No
30 QV	0.034	-0.001	Si	-0.055	No	-0.026	Si	-0.004	Si	-0.050	No
31 QV	0.031	0.054	No	0.031	Si	0.022	Si	0.016	Si	0.076	No
Media		0.012		0.009		0.000		0.018		0.001	
Desv		0.025		0.026		0.036		0.040		0.072	
Max		0.072		0.076		0.097		0.111		0.221	
Min		-0.047		-0.055		-0.052		-0.062		-0.113	
Si		78.26%		78.26%		78.26%		69.57%		52.17%	
No		21.74%		21.74%		21.74%		30.43%		47.83%	

A partir de la tabla 5.16 se observa que las cartas geoidales con 235, 100, y 50 observaciones obtuvieron igual porcentajes de SI, el cual es igual al 78%; mientras que las cartas de ondulaciones geoidales elaboradas con 25 y 8 observaciones tuvieron un menor porcentaje de SI, 70% y 52% respectivamente.

5.6 Análisis de costos.

A continuación se indica la inversión que realiza el Instituto Geográfico Militar en el posicionamiento satelital y nivelación geométrica de un solo punto, datos necesarios para determinar la ondulación "real" de un determinado lugar, sin ayuda de los modelos matemáticos

Concepto	Unidad de medida	Cantidad	Costo unitario	Costo anual	Costo total
Remuneración C.H.					66.13
1 Topógrafo	Día	2	38.18	38.18	
1 Auxiliar de Topografía	Día	1	22.43	11.22	
1 Chofer	Día	1	33.47	16.74	
Subsistencias					76.72
1 Topógrafo	Día	1	26.23	26.23	
1 Auxiliar de Topografía	Día	1	24.92	24.92	
1 Chofer	Día	1	25.57	25.57	
Remuneración C.V.					47.04
1 Topógrafo	Día	1	38.18	19.09	
1 Auxiliar de Topografía	Día	1	22.43	11.22	
1 Chofer	Día	1	33.47	16.74	
Subsistencias					76.72
1 Topógrafo	Día	1	26.23	26.23	
1 Auxiliar de Topografía	Día	1	24.92	24.92	
1 Chofer	Día	1	25.57	25.57	
Fondo a rendir cuentas					40.00
Gasolina	Galones	5	2.00	10.00	
Varios	Día	1	10.00	10.00	
2 contratados C.V.	Día	1	10.00	20.00	
Depreciación de equipos					35.40
2 GPS	Día	1	3.20	4.40	
1 Nivel	Día	1	1.00	1.00	
1 Vehículo	Día	1	30.00	30.00	
Suministros y materiales de oficina					3.00
Papel bond tamaño INEN	Unidad	20	0.05	1.00	
Impresiones	Unidad	20	0.10	2.00	
Servicios					3.56
Luz, agua, teléfono	Unidad	1	3.56	3.56	
Total					348.57

C.H. control horizontal (posicionamiento satelital)

C.V. control vertical (nivelación geométrica)

La implementación de los modelos en el cálculo de las ondulaciones geoidales de Quito reduce costos ya que sólo se necesitaría realizar el control vertical para obtener las coordenadas Este y Norte necesarias para reemplazar en los modelos matemáticos ya establecidos.

A continuación se indica el costo que representaría determinar la ondulación geoidal de un punto en el Distrito Metropolitano de con ayuda de los modelos matemáticos determinados en esta tesis.

Concepto	Unidad de medida	Cantidad	Costo unitario	Costo anual	Costo total
Remuneración C.V.					47.04
1 Topógrafo	Día	1	38.18	19.09	
1 Auxiliar de Topografía	Día	1	22.43	11.22	
1 Chofer	Día	1	33.47	16.74	
Subsistencias					76.72
1 Topógrafo	Día	1	26.23	26.23	
1 Auxiliar de Topografía	Día	1	24.92	24.92	
1 Chofer	Día	1	25.57	25.57	
Fondo a rendir cuentas					40.00
Gasolina	Galones	5	2.00	10.00	
Varios	Día	1	10.00	10.00	
2 contratados C.V.	Día	1	10.00	20.00	
Depreciación de equipos					34.40
2 GPS	Día	1	3.20	4.40	
1 Vehículo	Día	1	30.00	30.00	
Suministros y materiales de oficina					3.00
Papel bond tamaño INEN	Unidad	20	0.05	1.00	
Impresiones	Unidad	20	0.10	2.00	
Servicios					3.56
Luz, agua, teléfono	Unidad	1	3.56	3.56	
Total					204.72

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones

3. El presente trabajo expone una metodología de integración entre datos referidos al elipsoide, al geoide local y al modelo geopotencial EGM96, en donde el resultado final fue la determinación de la ondulación geoidal que permite dar un significado físico a las alturas geométricas. Esta metodología puede ser realizada por los usuarios siguiendo básicamente los capítulos IV y V.
4. Dentro del ajuste por mínimos cuadrados la matriz de pesos que mejor se ajustó al proyecto fue la conformada por la inversa de la distancia entre puntos nivelados geométricamente en kilómetros. Con esta opción se obtuvo los residuales, media y desviación estándar más bajos dentro del análisis de la prueba X^2 .
5. Después de haber comprobado que los sistemas están bien condicionados, que no existen errores en los cálculos, ni problemas en la linearización, que los modelos matemáticos utilizados son los adecuados y que no existen posibles errores groseros dentro de las observaciones, se concluye que los problemas antes expuestos no son los causantes para que la prueba X^2 bilateral no sea aceptada. Se deduce que posiblemente la causa de que no se acepte la hipótesis nula es la utilización de una matriz de pesos con valores inadecuados para este proyecto.
6. El modelo matemático que mejor se adapta para el cálculo de las ondulaciones geoidales de un sector Quito es el modelo representado por la ecuación $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$, ya que en todos los análisis de la Prueba X^2 obtuvo los residuales más bajos, al igual que la media y la desviación estándar.

Además en el momento de validar sus resultados con valores que no intervinieron en el ajuste se obtuvo las diferencias más bajas en comparación con los otros dos modelos.

7. La validación del modelo permitió concluir que para este proyecto bastaba realizar el ajuste del modelo matemático con solo 8 observaciones bien distribuidas en el área de estudio, ya que la media, desviación estándar y diferencias no varían significativamente en relación con los ajustes realizados con mayor número de observaciones. Con el modelo ajustado con 8 observaciones se obtuvo una desviación estándar de 7 cm y una media de 0.4 cm.
8. El modelo matemático seleccionado para calcular la separación entre el geoide local y el geoide del EGM 96 es el representado por la ecuación $l_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$, ya que obtuvo los residuales, media y desviación estándar más bajos en el ajuste por mínimos cuadrados.
9. La validación del método que determina las ondulaciones geoidales de Quito a través de la integración del GPS/Niv con el modelo geopotencial EGM 96 permite concluir que con este procedimiento se pueden obtener ondulaciones geoidales con una desviación estándar de alrededor 7 cm y una media de 2 cm, siempre y cuando el punto se encuentre dentro del área de estudio del presente proyecto.
10. El análisis de las discrepancias entre las ondulaciones obtenidas a través de la interpolación lineal de las cartas geoidales elaboradas con distinto número de observaciones y las ondulaciones geoidales obtenidas a partir de GPS/Niv nos permite concluir que la cantidad de observaciones utilizadas en la elaboración de las cartas geoidales depende de la precisión requerida por el usuario. Si se desea una precisión de 3 cm se puede utilizar la carta geoidal de 235 o de 100 observaciones, si se desea una precisión de 4 cm se puede utilizar las cartas geoidales de 25 observaciones y por último si se desea una precisión de 7 cm se utilizaría la carta geoidal elaborada con 8 observaciones.

6.2 Recomendaciones

1. Se recomienda investigar el comportamiento de la matriz de pesos dentro del ajuste de mínimos cuadrados, para poder normalizar la conformación de la misma en los distintos proyectos y obtener resultados óptimos.
2. Se recomienda revisar los datos de posicionamiento GPS y de nivelación geométrica de las observaciones pertenecientes al Foto índice 8, ya que en el desarrollo de este estudio se observó que las ondulaciones geoidales de estos puntos varían drásticamente en una distancia corta.
3. Para determinar las ondulaciones geoidales de Quito se recomienda al usuario GPS utilizar el modelo $Z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e$ ya que en relación con el método que integra GPS/Niv y EGM 96, el primero brinda mejores resultados y solo se necesita como datos las coordenadas UTM del lugar.
4. Para determinar modelos geoidales de zonas similares a Quito y con una desviación estándar de 7 cm se podría usar un mínimo de 8 observaciones para el ajuste de mínimos cuadrados.
5. Se recomienda investigar otros métodos de interpolación para la elaboración de las cartas de ondulación geoidales.

BIBLIOGRAFIA

- Tierra Criollo, A. R. **Sistema de Posicionamiento Global por Satélites-GPS**. Primera ed. Sangolquí. s.e. 1995. 32 p.
- García, J. et al. **Aprenda Matlab 5.3 Como si estuviera en Primero**. 105 p.
- Gemael, C. **Introducción al Ajuste de Observaciones - Aplicaciones Geodésicas**. s.e. Brasil. 1994. 314 p.
- Arana, J. **O Uso do GPS na Elaboração de Carta Geoidal**. Curitiba. Universidad Federal de Paraná. 2000. 138 p.
- Drewes, H. Sánchez, L. **Sistemas de Referencia en Geodesia**. Quito - Ecuador. 2002.
- Blitzkow, D. **Sistema Vertical de Referencia para América del Sur, SIRGAS**.
- Teixeira, Niel. **Detecção e Análise de Deslocamiento Vertical utilizando o Sistema NAVSTAR/GPS**. Universidad Federal de Panamá. 2001. 134 p.
- Leick, A. **GPS Satellite Surveying**. John Wiley & Sons. 1990.
- Blachut, T.J., Cahrzanowski, A., Saastamoinen J.H., **Cartografía y Levantamientos Urbanos**. Springer. México. 1979
- Teunissen, P., Kleusberg, A. **GPS for Geodesy**. Springer. New York. 1998. 650 p.

- Sánchez, L; Martínez, W. y Flórez,, J. Modelo Geoidal para Colombia: Geocol98. Instituto Geográfico Agustín Codazzi: Unidad de Geofísica. Santafe de Bogotá, D.C.:IGAC, 1998. 143 p.
- Instituto Geográfico Nacional. **V Curso GPS en Geodesia y Cartografía**. Santa Cruz de la Sierra (Bolivia). 2004. 424 p
- Murray, L. **Estadística**. McGraw-Hill. Andes. Colombia. 1980. 357 p.
- Geomatics Canada. **GPS Positioning Guide**. Ottawa Ontario. 1995

PAGINAS WEB

- www.ibge.gov.br Instituto Brasileiro de Geografía y Estadística
- www.igac.gov.co Instituto Geográfico Agustín Codazzi – Colombia.

