UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

# ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

**Roberto Aguiar Falconí**

CIENCIAS DE LA TIERRA

# ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

**Primera Edición Electrónica**

**Roberto Aguiar Falconí**

**Análisis matricial de estructuras**
Dr. Roberto Aguiar Falconí, Ph.D.
Primera edición electrónica. Diciembre de 2014
**ISBN:** 978-9978-301-27-2
**Par revisor:** Dr. Juan Carlos Vielma

**Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE**
Grab. Roque Moreira Cedeño
Rector
Crnl. Francisco Armendáriz Saénz
Vicerrector Académico General
Crnl. Ricardo Urbina
Vicerrector de Investigación

**Publicación autorizada por:**
**Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE**

**Edición y producción**
David Andrade Aguirre

**Diseño**
Pablo Zavala A.

Derechos reservados. Se prohibe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico.
El contenido, uso de fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias es de **exclusiva responsabilidad** del autor.

Los derechos de esta edición electrónica son de la **Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE,** para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en: htpp//www.repositorio.espe.edu.ec.

**Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE**
Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador.
htpp//www.espe.edu.ec

# Presentación

La primera edición del libro: "Análisis Matricial de Estructuras" fue publicado en 1982, tenía 12 capítulos y 274 páginas; la segunda se publicó en 1995, con 15 capítulos en 612 páginas; la tercera 17 capítulos y 550 páginas; ahora se presenta la cuarta edición con 18 capítulos en 676 páginas. Como se aprecia cada vez se ha incrementado el número de capítulos y el número de ejemplos resueltos.

En esta edición se presenta el sistema de computación CEINCI-LAB que lo he venido desarrollando desde el 2009, con una gran cantidad de campos de aplicación; en este libro únicamente se indican la librería de programas para resolver: armaduras en dos dimensiones, pórticos planos, mallas espaciales y para calcular la matriz de rigidez en coordenadas de piso, orientado al análisis sísmico de edificios.

Resolver estructuras con CEINCI-LAB es muy fácil y práctico ya que se puede calcular un edificio haciendo uso de los diferentes programas del sistema. Pero el objetivo principal de CEINCI-LAB es que el lector resuelva las estructuras paso a paso, de esta forma afianzará sus conocimientos.

En realidad el libro es de Análisis Estático de Estructuras en que se estudian los diferentes temas con bastante profundidad, de tal manera que puede servir como un libro de consulta para los estudiantes de pregrado y postgrado.

En esta edición se incrementó el capítulo 18, para tratar mallas espaciales, de una manera similar a la realizada en pórticos planos; es decir trabajando con elementos totalmente flexibles, con elementos transversalmente rígidos o elementos torsionalmente rígidos, claro está que esto se estudió en el sistema 1. Posteriormente y orientado al uso del computador se determinó las matrices de rigidez en coordenadas locales y globales de un elemento de una malla y finalmente se resolvieron ejemplos en forma manual y con CEINCI-LAB.

Pero a más de ello se incorporó nuevos temas como el desarrollo de funciones de forma para un elemento lineal considerando tres nudos o la determinación de funciones de forma para un elemento lineal de un pórtico de sección variable, en el sistema 1, con tres grados de libertad. En términos generales se puede indicar que la cuarta edición del libro, cambia en un 60% con relación al contenido de la tercera edición.

Resolver ecuaciones lineales con MATLAB es muy elemental de tal manera que parecería no tener importancia estudiar la solución de ecuaciones

simétricas bandeadas o la técnica del skyline que son tratadas en este libro. Pero sí que tiene importancia ya que cuando se resuelven estructuras que tienen más de 1000 grados de libertad, simplemente no se puede resolver el sistema de ecuaciones en la forma elemental que presenta MATLAB peor aún pensar en sacar la inversa de una matriz para hallar la matriz de rigidez condensada. Para grandes sistemas de ecuaciones lineales tiene mucha importancia resolver ecuaciones en forma lineal, tratando de almacenar en lo posible la menor cantidad de ceros. Por este motivo estos temas se han desarrollado en el capítulo 11 pero a más de ello se debe encontrar la matriz de rigidez de una estructura en forma vectorial para poder utilizar el algoritmo de solución del sistema de ecuaciones lineales.

Si bien la matriz de rigidez condensada se obtiene invirtiendo una matriz pero es mejor no hacerlo de esta manera por lo que se recomienda numerar primero las coordenadas en forma adecuada y después triangularizar la matriz de rigidez para hallar directamente la matriz condensada. Este tema se lo presenta en esta edición con programas incorporados a la librería de CEINCI-LAB.

Aproximadamente dos años me llevó escribir esta cuarta edición, basado en la experiencia que tengo como profesor de análisis matricial de estructuras, de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. Hay temas que son bastante complejos para los estudiantes, como el cálculo del vector de cargas generalizadas en pórticos planos mediante trabajos virtuales. Con esta experiencia se han desarrollado más problemas a sabiendas de que esto es necesario para hacer un buen curso de dinámica de estructuras y finalmente para el análisis sísmico de estructuras.

Terminé la escritura de la cuarta edición, siendo rector el Gral. Roque Moreira y vicerrector el Crnl. Francisco Armendáriz, dos distinguidos ex alumnos a quienes dejo constancia de mi agradecimiento por las facilidades que me dan en mi labor académica, investigativa y administrativa en mi querida ESPE.

Como en todos mis libros no puedo dejar de agradecer a mi querida esposa Alice Noury, a mis hijos: Roberto, Alice, María José, Nicolás, Gabriel, Felipe, a mi hija política Ilenia y a mi primer nieto Ian Aguiar, por la gran felicidad que me dan día a día y finalmente pero en primer lugar a Dios que sin su ayuda no puedo nada.

Roberto Aguiar Falconí
Director del Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción
Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

*CAPITULO 1*

# COORDENADAS GENERALIZADAS Y GRADOS DE LIBERTAD


## RESUMEN

Se presentan algunas definiciones, las más elementales, para estructuras que trabajan en el rango elástico, que es lo que abarca este libro. El objetivo principal es que el lector, que ya ha tomado por lo menos un curso básico de estructuras, se familiarice con la nomenclatura que se va a seguir.

Se definen: los grados de libertad de una estructura desde el punto de vista estático y dinámico. Posteriormente se empieza a trabajar con elementos: totalmente flexibles, axialmente rígidos, transversalmente rígidos y totalmente rígidos; se dibujan deformadas generales y elementales.


## 1.1 DEFINICIONES ESTRUCTURALES

### 1.1.1 Vínculos

Se define por vínculo a toda condición geométrica que limita o restringe la movilidad de un cuerpo; es el Proyectista Estructural de acuerdo al sistema constructivo que va a utilizar el que define el tipo de vínculo. De acuerdo a su ubicación en la estructura, los vínculos pueden ser externos e internos. Son externos aquellos que vinculan el cuerpo con la tierra, e internos aquellos que vinculan a los cuerpos entre sí.

De acuerdo al tipo de limitación a la movilidad del cuerpo a que están unidos, los vínculos pueden ser de primera clase (rodillo o articulación móvil), de segunda clase (articulación fija y empotramiento móvil), o de tercera clase (empotramiento fijo).

El rodillo o articulación móvil permite la rotación del cuerpo al que está unido y el desplazamiento de ese mismo punto, en la dirección del movimiento del rodillo, la representación de este tipo de vínculo, es la indicada a la izquierda de la figura 1.1. En este tipo de vínculo existe una reacción vertical.

La articulación fija, llamada simplemente articulación, posibilita únicamente la rotación del cuerpo al que se halla unido, alrededor del punto de unión. La representación gráfica de este tipo de

vínculo es la que se muestra a la derecha de la figura 1.1. El momento en la articulación es cero y solo existen dos reacciones en sentido horizontal y vertical.

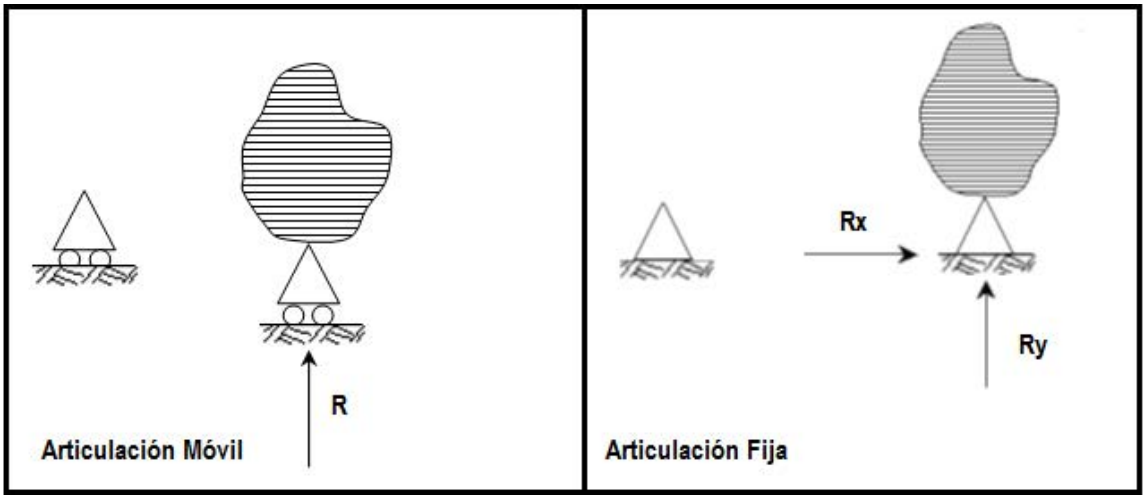



**Figura 1.1** Articulación Móvil y Fija

En la figura 1.2, se presenta un tramo del Puente Llacolén, ubicado en Concepción, Chile. Se aprecia a la izquierda una junta de construcción; la viga que aparece puede modelarse con una articulación móvil al lado izquierdo y con una articulación fija al lado derecho, debido a que el tablero del puente es continuo en ese tramo.

**Figura 1.2** Tramo del Puente Llacolén, ubicado en Concepción, Chile.

Las vigas en sentido longitudinal se apoyan simplemente sobre una capa de neopreno y estos a su vez sobre los cabezales de las Pilas. El rodillo de la izquierda indica que se va a desplazar lateralmente la viga. Por lo tanto deberá tener un bues espacio para moverse en un sismo sin que salga de su apoyo y se caiga. La foto de la figura 1.2 fue tomada dos meses después del Mega Sismo de Chile de 2010 y causo en unos tramos más adelante la caída del tablero. Aguiar (2010).

El empotramiento móvil permite solamente el deslizamiento lineal de su punto de unión con el cuerpo en la dirección de su movimiento. La representación de este tipo de vínculo es la que se presenta en la figura 1.3

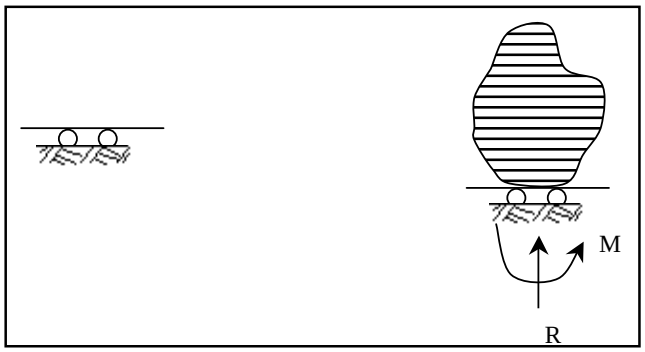



**Figura 1.3 Empotramiento** móvil.

El empotramiento fijo o simplemente empotramiento, no permite ningún tipo de desplazamiento ni rotación. La representación de este tipo de vínculo, que es lo más común en las estructuras planas, se representa en la figura 1.4.

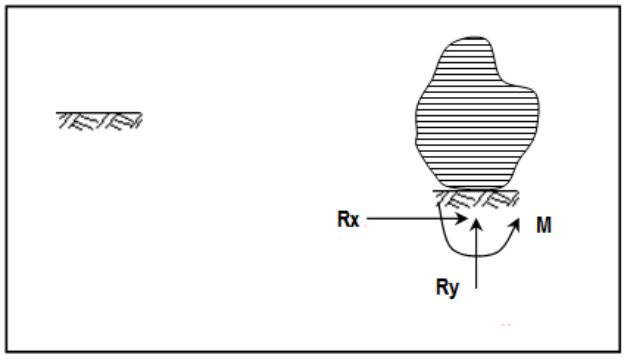



**Figura 1.4 Empotramiento** fijo.

A los vínculos interiores se denominan articulaciones y se los representa con un círculo de la siguiente manera.

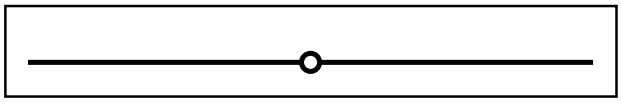


**Figura 1.5** Articulación interior.

El momento es nulo en la articulación, la barra a la izquierda de la articulación tendrá un giro el mismo que es diferente de la barra que se encuentra a la derecha de la articulación. Este tipo de vínculo se lo utiliza en el análisis sísmico de estructuras para representar las rótulas plásticas que no es más que un modelo matemático que indica que una sección ya no puede resistir más momento y empieza a rotar, empieza a disipar energía.

### 1.1.2 Elementos

En Estructuras se estudia solamente elementos lineales, aquí se recordará que son elementos o miembros lineales y posteriormente se hablará de otros elementos que dependerán para determinado análisis estructural.

Un elemento lineal es generado por un área plana, cuyo centro de gravedad describe una curva, en general alabeada, llamada directriz o eje, manteniendo su plano perpendicular a la curva. El área móvil puede cambiar de magnitud y forma, siempre que ello se realice de modo continuo.

Las dimensiones del área transversal deben ser pequeñas en comparación con la longitud de la directriz. En general, los elementos se representan por su eje o directriz. En la figura 1.6 se presentan varios de los mencionados elementos, así en la parte superior se tiene un elemento lineal de sección constante y variable; en la parte inferior un elemento curvo de sección constante y variable.

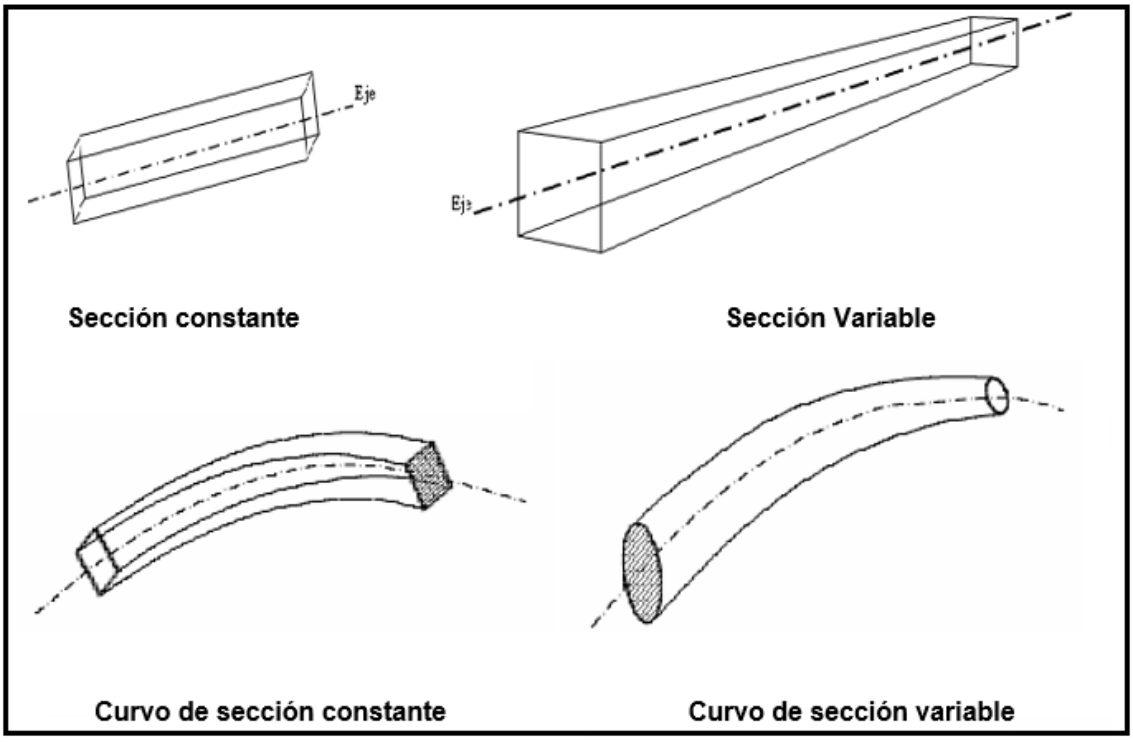



**Figura 1.6 Diferentes** tipos de elementos

### 1.1.3 Juntas o Nudos

Se denominan juntas o nudos a los puntos de concurso de varios elementos. Es decir al medio de conexión de dos o más elementos. Normalmente se representa un nudo con un punto el mismo que corresponde a la intersección de los elementos que concurren a él.

En este libro se dibujará una pequeña longitud de los elementos que llegan al nudo como lo muestra la estructura de la figura izquierda de 1.7, en que se ha negreado un poco más la parte de la viga y columna que llegan al nudo; la representación más común de un nudo es un punto como se observa a la derecha de la figura 1.7

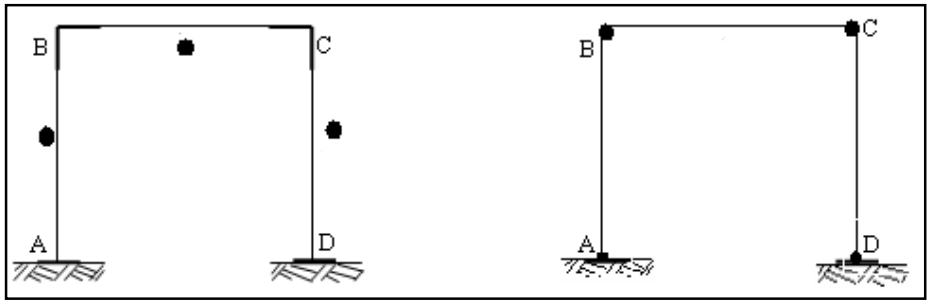


**Figura 1.7 Representación** de los nudos de un pórtico plano.

La estructura de la figura 1.7 tiene 4 nudos y tres elementos lineales (que se han representado con un punto a la izquierda de la figura 1.7).

Es importante notar, que si bien a un nudo se representa como un punto, en la realidad esto no es así, ya que es un elemento físico que tiene dimensiones como lo señala la figura 1.8, que se desplaza y gira. Por lo tanto habrá que tener presente este hecho para el diseño en hormigón. Los últimos códigos del A.C.I. 318, cada vez dan mayor importancia al diseño del nudo, es más en estructuras aporticadas construidas en zonas sísmicas se diseña de tal forma que el nudo sea fuerte y la viga débil.

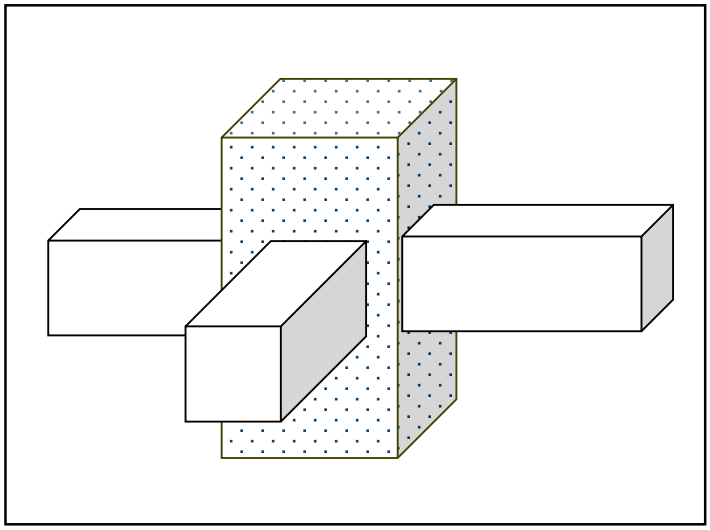


**Figura 1.8** Nudo típico

Una de las fallas más frecuentes durante los sismos es la falla de nudo, especialmente los exteriores por falta de anclaje del hierro longitudinal. También han fallado debido a que han tenido una baja capacidad al cortante horizontal. Todo esto se indica con el objeto de que deben ser diseñados.

Retomando el tema se puede manifestar que hasta ahora se ha considerado únicamente elementos rectos pero podemos tener otra clase de elementos; todo dependerá de cómo se ha definido los nudos.

**En consecuencia el número de elementos de una estructura es un número arbitrario, dependiente de la elección considerada.**

Por lo tanto, un elemento puede tener más de dos nudos. La ventaja de elegir estos elementos de geometría diferente a la que estamos acostumbrados se tiene cuando se estudia el tema de las subestructuras. En la figura 1.9, se muestran varios elementos especiales; la estructura de la izquierda y derecha tienen 2 elementos y 3 juntas; la estructura que está en el centro de la figura 1.9 también tiene3 elementos especiales.

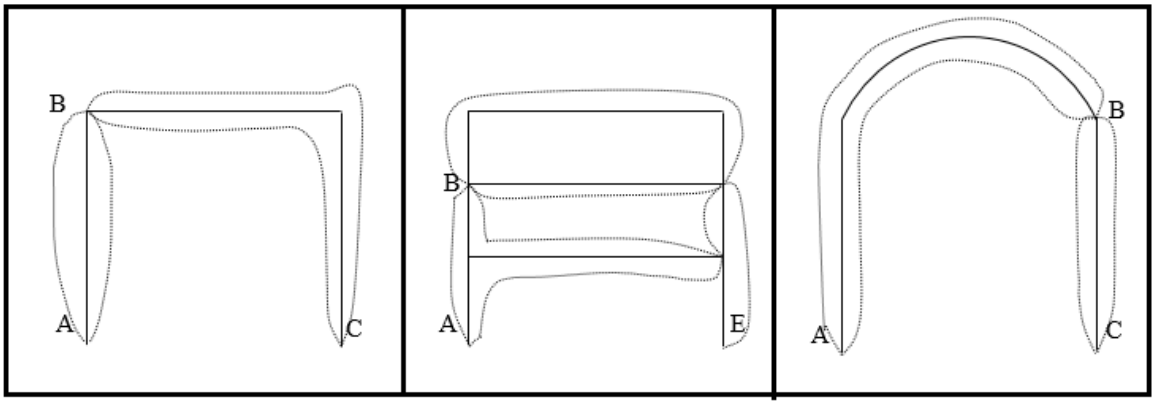



**Figura 1.9** Elementos especiales de una estructura.

Cuando se realiza el análisis sísmico espacial, en coordenadas de piso; se considera que los pórticos planos son un elemento. Ahí se tiene una aplicación de los elementos especiales.

### 1.1.4 Estructura

Una estructura es una cadena elástica estable, compuesta por un número finito de elementos unidos entre sí mediante un número finito de juntas, uno de cuyos números es arbitrario.

Nótese que se han utilizado en la definición las palabras: "**cadena**" por la unión que tienen los diferentes elementos; "**elástica**" porque se consideran pequeñas deformaciones del orden de infinitésimos y "**estable**" en tal virtud no tiene sentido hablar de estructuras inestables. Es fundamental destacar que al decir "elástica" el comportamiento es de tipo lineal, todo el texto está marcado en este análisis.

## 1.2 DEFINICIONES DE MECÁNICA

### 1.2.1 Coordenadas generalizadas

Para determinar la configuración de un sistema se emplean coordenadas, las cuales pueden ser dependientes o independientes. Cuando las coordenadas son independientes, reciben el nombre de coordenadas generalizadas.

Por ejemplo, si el sistema masa-resorte mostrado a la izquierda de la figura 1.10, a partir de la **P**osición de **E**quilibrio **E**stático (P.E.E) se le suministra un desplazamiento $\delta_o$, como se indica en la figura central (condición inicial) y se permite que el sistema oscile, figura derecha de 1.10, se observa que para definir la posición de la masa, en cualquier instante, de tiempo, se requiere una coordenada vertical Y (t); la cual se mide a partir de la P.E.E. En la Posición de Equilibrio Estático la sumatoria de fuerzas en sentido vertical es igual a cero en cambio en la posición genérica del movimiento indicada a la derecha la sumatoria de fuerzas es igual a masa por la aceleración.

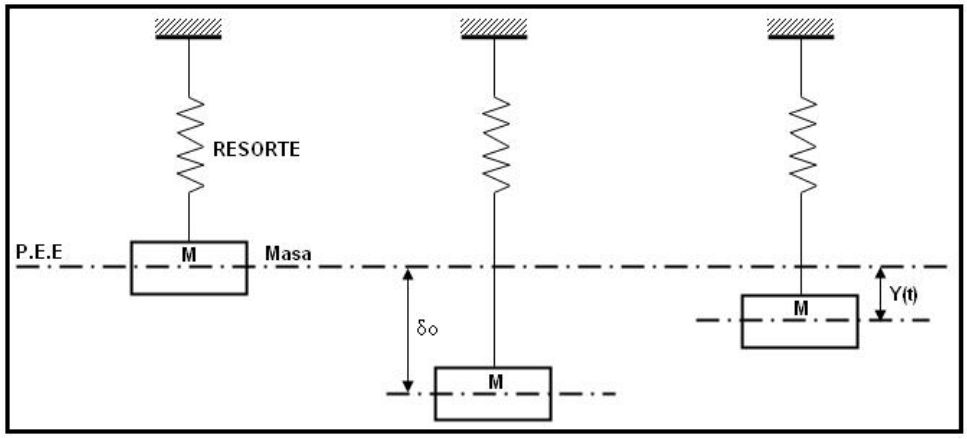



**Figura 1.10** Sistema de un grado de libertad.

Lo importante es destacar que en dinámica (respuesta en el tiempo) el sistema de la figura 1.10 tiene un grado de libertad.

Por otra parte, el sistema masa-resorte-polea de la figura 1.11 tiene una sola coordenada generalizada, puesto que tanto $X(t)$ como $\theta(t)$ son dependientes, pueden usarse cualquiera de ellas para determinar la posición relativa de la masa, pero no las dos. En los ejemplos que se están indicando la variable t corresponde al tiempo. Por lo tanto, se está definiendo la posición de la masa en un tiempo genérico t del movimiento.

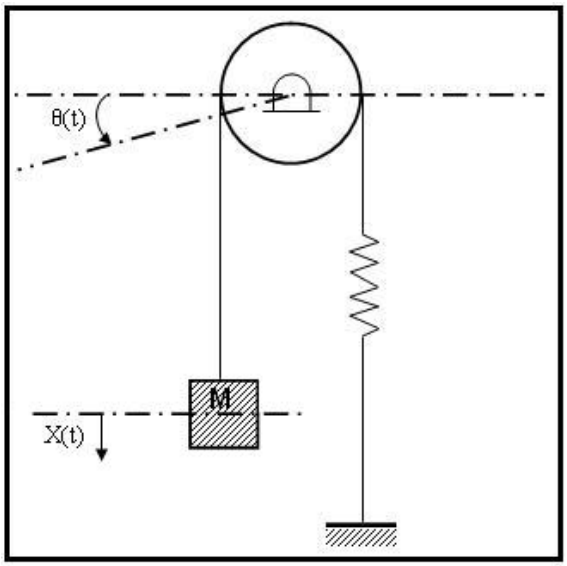



**Figura 1.11** Sistema masa-resorte-polea

En la figura 1.12 se presenta un péndulo doble de longitudes $L_1$ y $L_2$ y masas $M_1$ y $M_2$. En este caso para definir la configuración del sistema se requieren dos coordenadas que pueden ser: los ángulos de rotación, denominados $\theta_1(t), \theta_2(t)$, o los desplazamientos horizontales $X_1(t), X_2(t)$ ya sean estos absolutos (figura central) o relativos como (figura derecha).

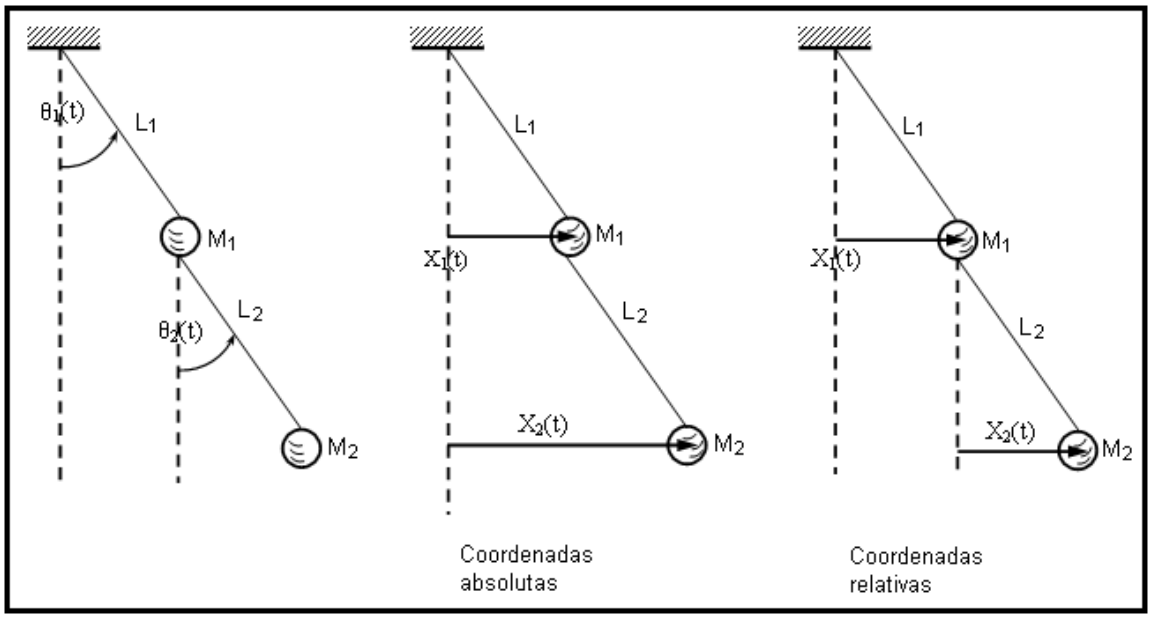



**Figura 1.12** Sistema de dos grados de libertad. Coordenadas absolutas y relativas.

No se puede seleccionar las coordenadas presentadas a la derecha de la figura 1.13 puesto que las dos son dependientes ya que $X_1(t) = L_1 * \theta_1(t)$, y no se tiene una coordenada para definir la posición de la masa $M_2$. Se puede trabajar con los sistema de coordenadas indicadas a la derecha de la figura 1.13. Lo importante es notar que el sistema tiene solo dos grados de libertad, ni más ni menos; además las coordenadas que se seleccionen deben ser independientes y que no existe un solo sistema de coordenadas.

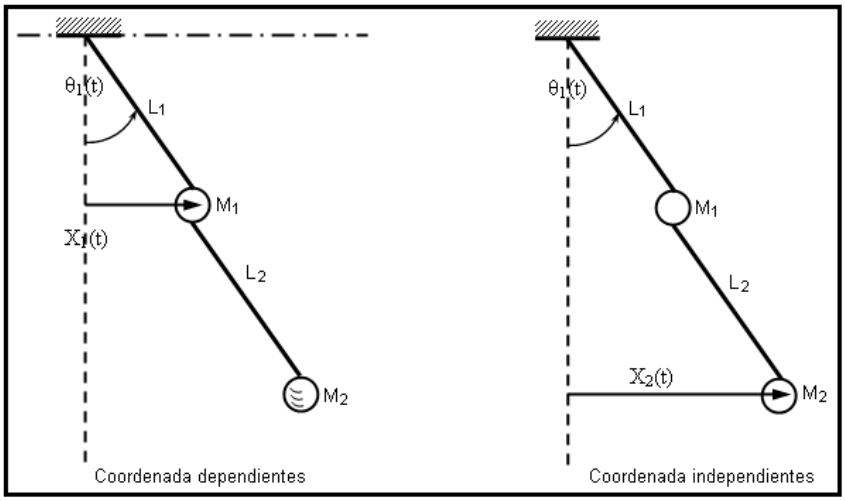



**Figura 1.13**Coordenadas dependientes e independientes.

### 1.2.2 Números de grados de libertad

Se denomina número de grados de libertad al *número de coordenadas generalizadas que hay que emplear para definir la configuración del sistema*… En este libro se entiende como sistema a una estructura.

Cuando el número de grados de libertad de un sistema es igual al número de coordenadas generalizadas se dice que este sistema es HOLONOMO.

### 1.2.3 Sistemas deformables

En los sistemas analizados anteriormente se ha considerado que la masa es puntual, que la polea es rígida, las cuerdas inextensibles y el resorte indeformable. Hipótesis que se acostumbra realizar para simplificar la solución de los problemas.

Ahora, se va a considerar un sistema continuo deformable. La figura 1.14 presenta una viga en voladizo cuya masa se encuentra uniformemente distribuida; en ella observamos que para cada punto P, dentro del intervalo $0 \leq X \leq L$ es necesario definir tres parámetros que son: $u$ que es la componente de desplazamiento horizontal del punto P; $v$ que es la componente de desplazamiento vertical del punto P y $\theta$ que es la rotación del punto P.

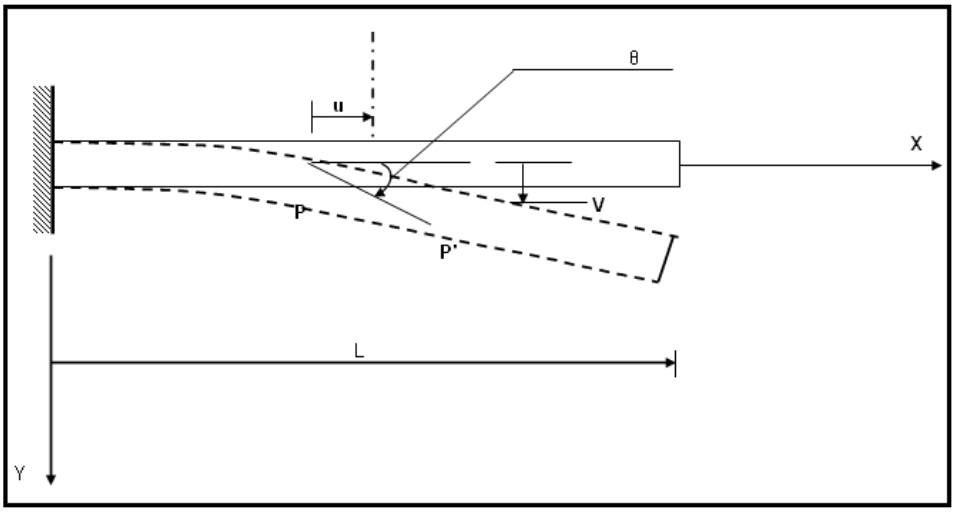



**Figura 1.14** Sistema continuo con infinito número de grados de libertad.

Los valores de $u$ , $v$, θ irán cambiando punto a punto a lo largo de toda la longitud de la viga, es decir que al considerar únicamente la directriz o eje de la viga, para cada punto P se tiene: dos desplazamientos y una rotación para determinar la configuración del sistema deformado. Por lo tanto de acuerdo a la definición del número de grados de libertad, podemos indicar que este sistema posee infinito número de grados de libertad, ya que se tiene infinito número de puntos en la viga.

Los únicos que tienen un número finito de grados de libertad son los compuestos por partículas rígidas. Los sistemas deformables o sistemas contínuos poseen infinito número de grados de libertad y para resolverlos se tiene que plantear la ecuación diferencial que gobierna el problema y resolver ésta ecuación en todo el dominio.

Un edificio puede modelarse como un sistema continuo como el presentado en la figura 1.14, claro está en forma aproximada, cuando se quiere encontrar su probable comportamiento sísmico en forma rápida.

## 1.3 GRADOS DE LIBERTAD EN UNA ESTRUCTURA

### 1.3.1 Clases de estructuras

Con fines didácticos se clasifican a las estructuras en este libro en: pórticos planos, armaduras planas, estructuras espaciales, armaduras espaciales y parrillas o mallas espaciales. Se puede extender la clasificación considerando por ejemplo vigas de cimentación u otro tipo de estructuras. Lo importante es indicar que éste libro está dedicado al estudio de Pórticos Planos y Armaduras Planas pero los conceptos que se van a dar son generales y se aplican a cualquier tipo de estructura. Por ejemplo la forma como se realiza el ensamblaje directo para encontrar la matriz de rigidez en Pórticos Planos es la misma que para Estructuras Espaciales. Claro está que para cada caso se deben definir la respectiva matriz de rigidez del elemento y los correspondientes grados de libertad.

### 1.3.2 Pórticos planos con elementos flexibles

Se inicia el estudio calculando el número de grados de libertad de un pórtico plano compuesto por elementos lineales que son totalmente flexibles, que no tienen restricción para deformarse a los cuales se les ha identificado con las letras $A_o, I_o$. La primera letra hace relación al área de la sección transversal y la segunda al momento de inercia.

La configuración del sistema vendrá dada por la posición de los nudos. Por consiguiente, la definición del número de grados de libertad no es la general enunciada en mecánica, sino una particular limitada a describir la posición de las juntas. **En consecuencia, el número de grados de libertad, en estática, es el mínimo número de coordenadas que es preciso determinar para definir la posición de las juntas o nudos.**

Para obtener el número de grados de libertad de una estructura se debe dibujar una deformada lo más general posible. Por ejemplo, para el pórtico plano de la figura 1.15, primero se identifica la posición inicial de los nudos con letras. Ahora por efecto de **cualquier sistema de cargas** presentará una deformada como la que se indica a la derecha de la figura 1.15, en la cual a la posición final del nudo se los ha identificado con la misma letra pero con un índice. Nótese en esta deformada que el ángulo del nudo B se mantiene de la misma dimensión, es decir la rotación $q_3$ en el nudo B de la columna AB es igual a la rotación $q_3$ de la viga BC; lo propio sucede en el nudo C. Se considera que la junta o nudo se desplaza y gira en el plano, con respecto a un eje perpendicular al plano.

En resumen para definir la posición de las juntas A, B, C y D del pórtico plano de la figura 1.15 se requieren seis coordenadas generalizadas que están indicadas, a la derecha de la figura 1.15 las mismas que han sido identificadas con la letra $q$. El significado de cada variable se indica a continuación.

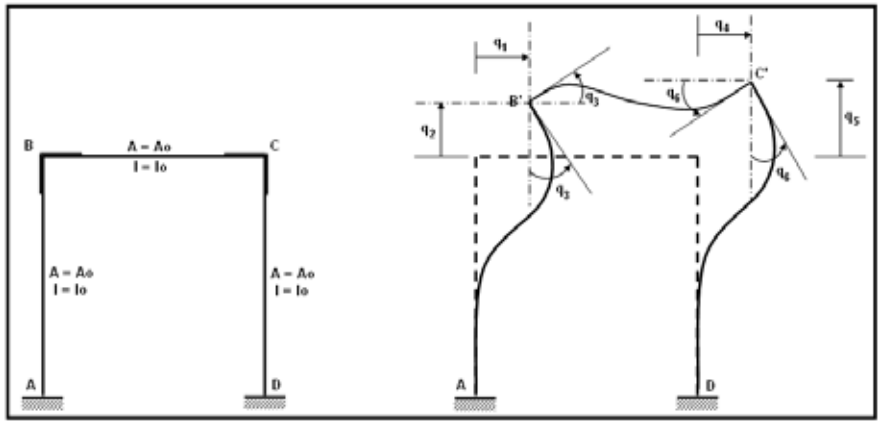



**Figura 1.15** Pórtico plano con elementos totalmente flexibles y deformada general.

$q_1$ Componente de desplazamiento horizontal de la junta B.
$q_2$ Componente de desplazamiento vertical de la junta B.
$q_3$ Rotación de la junta B.
$q_4$ Componente de desplazamiento horizontal de la junta C.
$q_5$ Componente de desplazamiento vertical de la junta C.
$q_6$ Rotación de la junta C.

Por lo tanto la descripción estructural está limitada en el presente capítulo, a definir la posición de los nudos.

Para calcular el número de grados de libertad de un pórtico plano **cuyos elementos son totalmente flexibles,** se puede utilizar la siguiente fórmula.

$$NGL = 3\,(NDJ) - (NDJ)_E * V \qquad (1.1)$$

Donde $NGL$ es el número de grados de libertad de la estructura, $NDJ$ es el número de juntas totales, $(NDJ)_E$ es el número de juntas externas, $V$ es igual a 1 si el vínculo es un rodillo, $V$ es igual a 2 si es una articulación y $V$ es igual a 3 si se trata de un empotramiento. Para el pórtico plano de la figura 1.15, se tiene:

$$NGL = 3\,(4) - (2)\,3 = 12 - 6 = 6$$

La deformada general sirve únicamente para identificar los grados de libertad de una estructura, se puede dibujar con cualquier signo. Una vez que ya se conocen los grados de libertad se determina el sistema $\bar{q}$, con la convención de signos que se emplea. Para el pórtico plano de la figura 1.15, este sistema es el presentado en la figura 1.16.

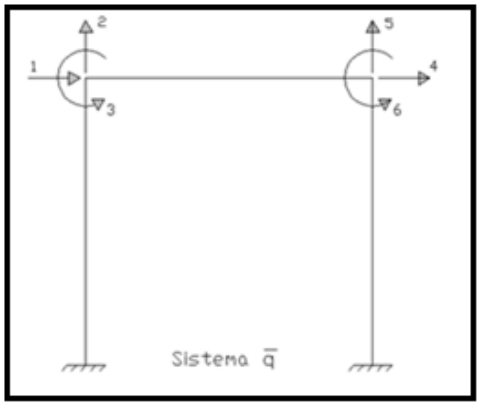



**Figura 1.16** Sistema de coordenadas ***q***

Nótese que el desplazamiento horizontal es positivo si se desplaza hacia la derecha; el vertical positivo si se desplaza hacia arriba y la rotación o giro es positiva si rota en sentido horario.

### 1.3.3 Deformadas Elementales

Son aquellos gráficos en los cuales una de las coordenadas vale la unidad y las restantes son cero. Tanto en estática como en dinámica es necesario construir deformadas elementales por ello en el presente capítulo se empieza a construir estas deformadas y se continuará a lo largo de la mayor parte del libro.

- **EJEMPLO 1**

Presentar las tres primeras deformadas elementales del pórtico plano, cuyos elementos son totalmente flexibles, que se ha presentado en la figura 1.15. Trabajar con el sistema ***q*** de la figura 1.16.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.17 se presentan las tres primeras deformadas elementales del pórtico plano cuyos elementos son totalmente flexibles. Nótese que en cada uno de ellos solo una de las coordenadas se ha deformado la unidad.

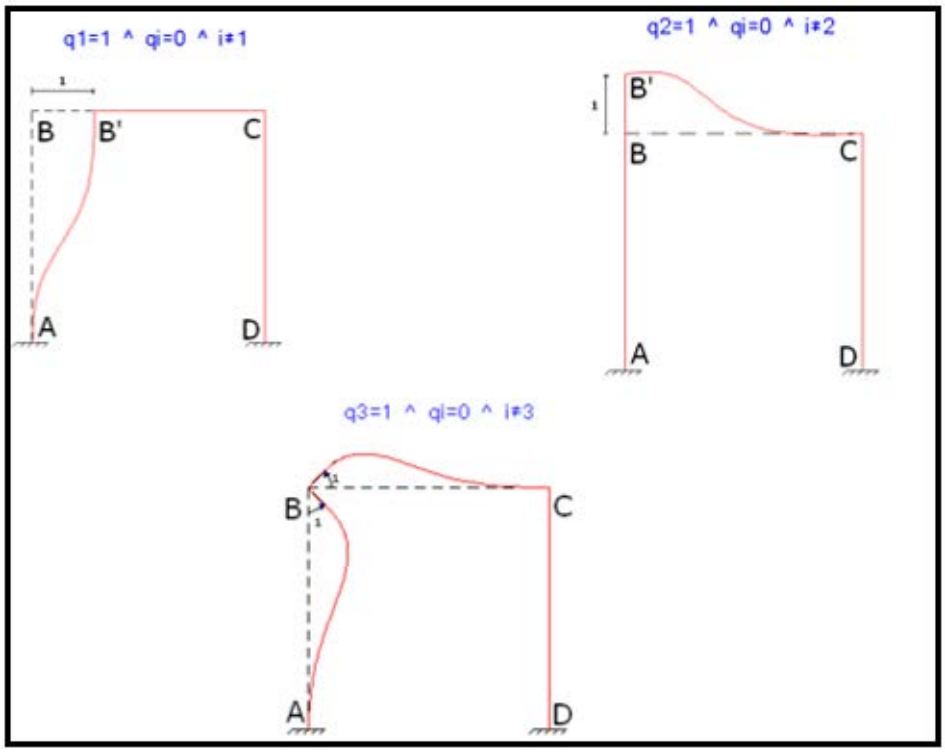



**Figura 1.17** Tres primeras deformadas elementales de un pórtico con elementos totalmente flexibles.

En la deformada elemental $q3$ se aprecia que la columna en el nudo B rota la unidad y que la viga en ese mismo nudo también rota la unidad. Esto se conoce con el nombre de Principio de Williot y así es como se calculan las estructuras con nudo rígido pero para que esto se dé, se debe diseñar y construir el nudo eficiente. Si no se construye bien un nudo no se va a cumplir Williot y la estructura va a tener menor rigidez que la calculada por que no se tiene nudo rígido.

### 1.3.4 Pórtico plano con elementos axialmente rígidos

Se define como un miembro axialmente rígido o longitudinalmente rígido a aquel que no cambia de longitud luego de que se ha aplicado un sistema de cargas. Se representa a los miembros axialmente rígidos de la siguiente manera: $A = \infty$.

Como ejemplo, se analiza el pórtico de la figura 1.18, cuyas columnas son totalmente flexibles y cuya viga es axialmente rígida. Por efecto de un sistema cualquiera de cargas, este pórtico se va a deformar como se indica, a la derecha de la figura 1.18.

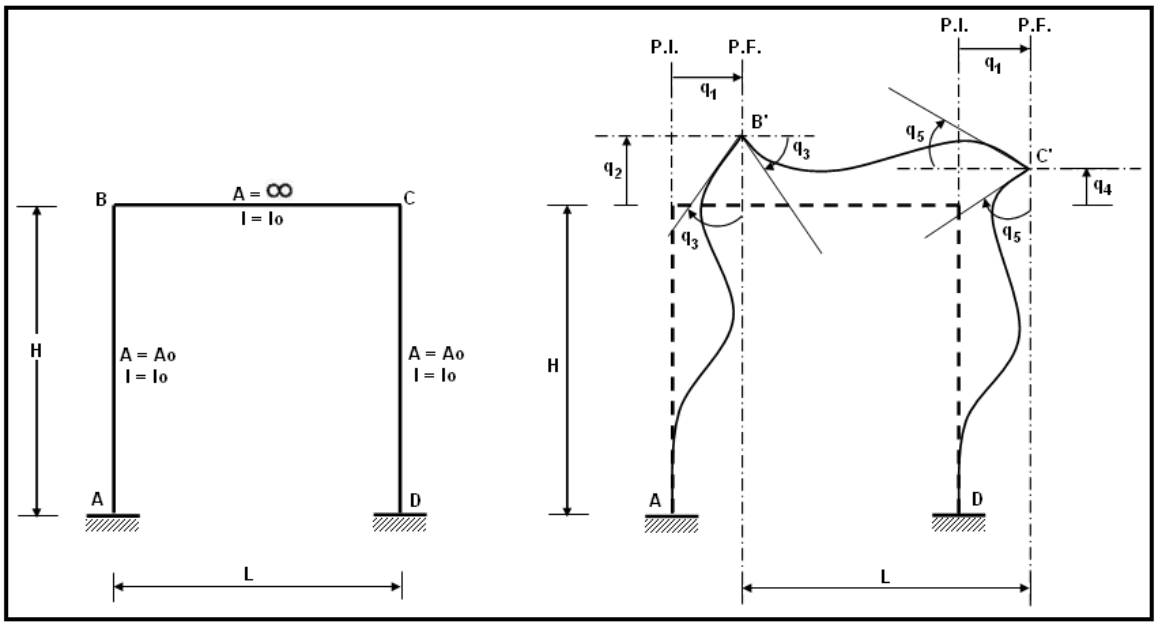



**Figura 1.18** Pórtico plano con una viga axialmente rígida y deformada general.

Nótese que si el nudo B se desplaza horizontalmente $q_1$, el nudo C también tiene que desplazarse horizontalmente $q_1$, puesto que la viga BC no va a cambiar su longitud por ser axialmente rígida. En consecuencia el pórtico de la figura 1.18, tiene 5 grados de libertad.

- **EJEMPLO 2**

Dibujar las tres primeras deformadas elementales del pórtico de un vano y un piso presentado en la figura 1.18, cuyas coordenadas generalizadas son las indicadas en la figura 1.19.

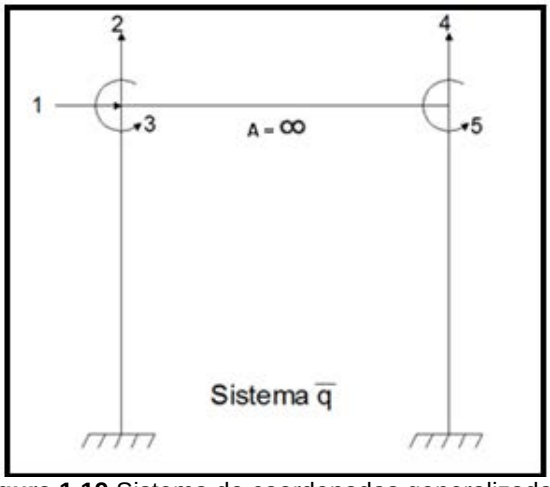



**Figura 1.19** Sistema de coordenadas generalizadas.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.20 se presentan las tres primeras deformadas elementales, la primera de ellas es diferente, con relación al Ejemplo 1. Nótese que para dibujar la primera deformada elemental, primero se han trazado perpendiculares al eje del elemento axialmente rígido, las mimas que se han identificado por P.I. (Posición Inicial), posteriormente cuando se da el desplazamiento horizontal unitario el nudo $B$ pasa a la posición $B'$; esta posición determina una nueva perpendicular P.F. (Posición Final). La posición final del nudo C se encontrará a lo largo de la recta P.F., para que la viga mantenga su longitud y para cumplir con las otras condiciones de que el desplazamiento vertical y

giro en C sean nulos, el nudo C para a C', como se indica en la parte superior izquierda de la figura 1.20.

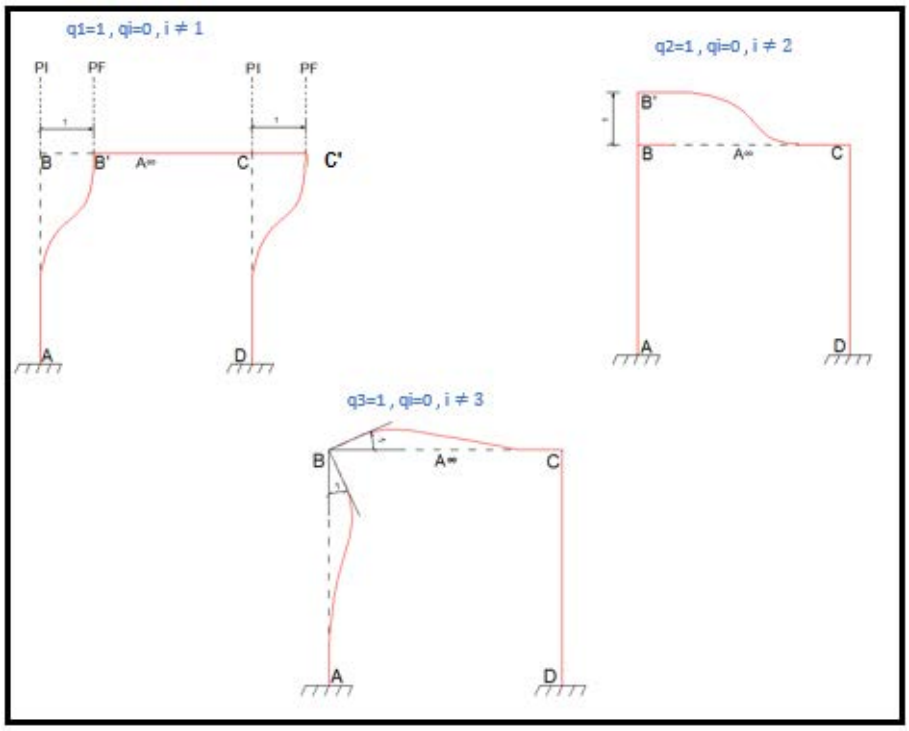



**Figura 1.20** Tres primeras deformadas elementales de estructura con viga axialmente rígida.

En este caso, la ecuación que define el número de grados de libertad es:

$$NGL = 3\,(NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A \qquad (1.2)$$

Siendo $A$ el número de elementos que son axialmente rígidos. Para el pórtico de la figura 1.18, al aplicar la ecuación 2 se tiene:

$$NGL = 3\,(4) - 2\,(3) - 1\,(1) = 12 - 6 - 1 = 5$$

$$NGL = 5$$

La ecuación (1.2), al igual que todas las ecuaciones que se indican en este capítulo para definir los grados de libertad de marcos planos compuesta por elementos axial o transversalmente rígidos son referenciales. Lo mejor es dibujar una deformada general y en ella observar los grados de libertad teniendo presente lo enunciado anteriormente. Para ilustrar lo expuesto, fijamos la atención en la estructura de la figura 1.21, al aplicar la ecuación (1.2) se tiene que el marco plano tiene un grado de libertad y esto es falso ya que el sistema tiene dos grados de libertad como se observa a la derecha de la figura 1.21.

De tal manera que las ecuaciones deben considerarse como referenciales. Para encontrar los grados de libertad se debe dibujar una deformada general y se recomienda que se lo haga con una regla, para no equivocarse.

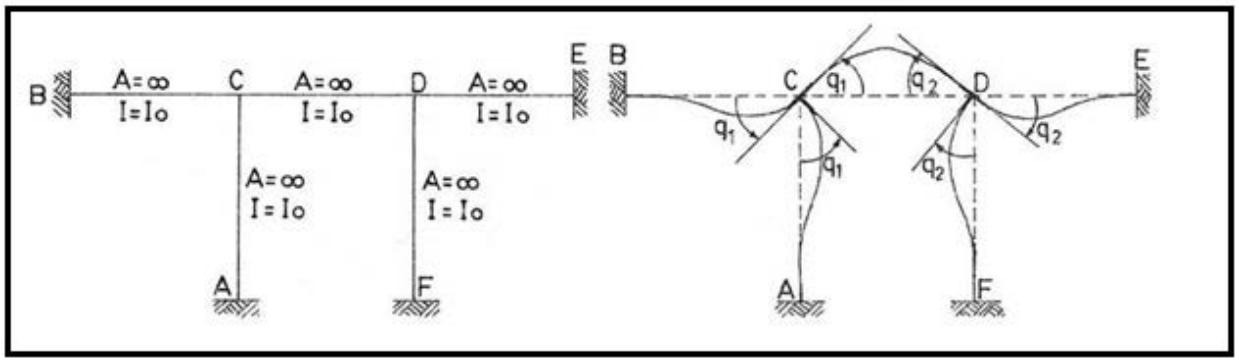



**Figura 1.21** Estructura en la que no se cumple la ecuación para hallar los grados de libertad.

### 1.3.5 Pórtico plano con elementos transversalmente rígidos

Se define como un elemento transversalmente rígido a aquel que no trabaja a flexión pero puede alargarse o acortarse, es decir que un elemento transversalmente rígido se deforma axialmente pero no transversalmente. Se representa a este tipo de elemento de la siguiente manera: $I = \infty$.

El pórtico de la figura 1.22, tiene las columnas totalmente flexibles pero la viga es transversalmente rígida y axialmente flexible. A la derecha de la figura 1.22 se presenta una deformada general de este pórtico.

Por ser transversalmente rígido el elemento BC, se tiene que la rotación $q_3$ en el nudo B es igual a la rotación en el nudo C. (Ángulos alternos internos) Nótese que no se ha colocado como coordenada generalizada el desplazamiento vertical del nudo C, debido a que este desplazamiento es dependiente de $q_1$, $q_2$, $q_3$, y $q_4$. Es decir no es una coordenada generalizada. Se puede demostrar que este desplazamiento vertical del nudo C es igual a:

$$q_2 + q_3(L + q_4 - q_1)$$

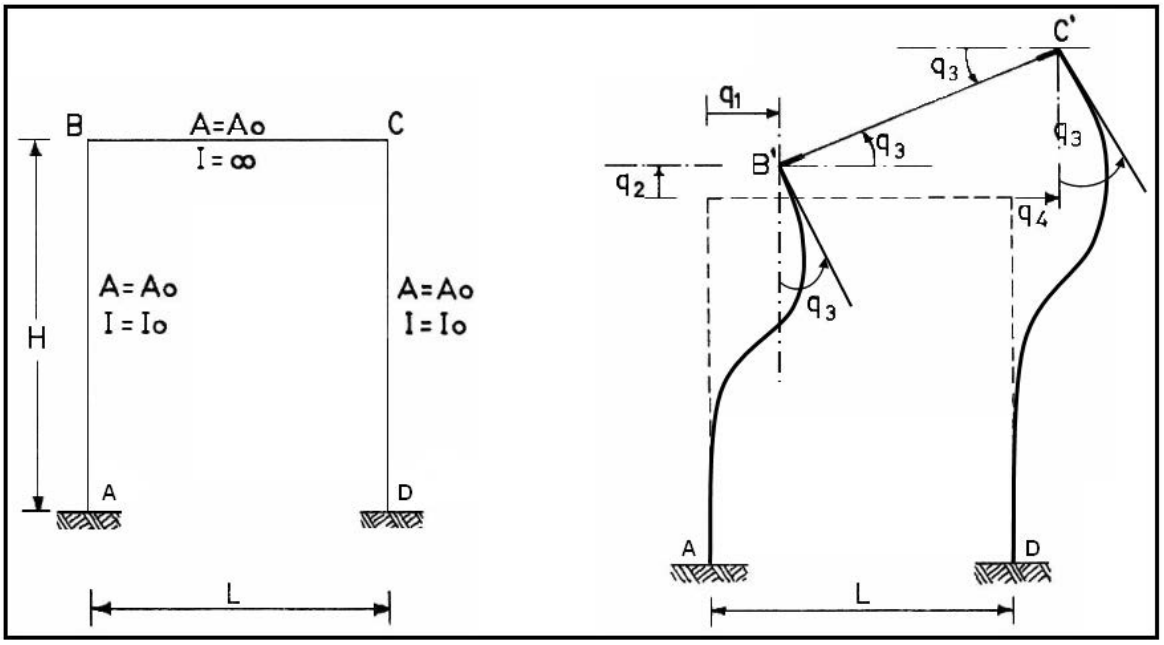



**Figura 1.22** Pórtico plano con viga transversalmente rígida y deformada general.

Por lo tanto el pórtico de la figura 1.18.1, tiene 4 grados de libertad. En este caso, la ecuación que define el número de grados de libertad es:

$$NGL = 3\,(NDJ) - (NDJ)_E * V - 2 * T \qquad (1.3)$$

Donde T es el número de elementos que son transversalmente rígidos. Para el pórtico de la figura 1.22, al aplicar la ecuación (1.3) se tiene:

$$NGL = 3\,(4) - 2\,(3) - 2\,(1) = 12 - 6 - 2 = 4$$

Para un pórtico plano con elementos axialmente rígidos y transversalmente rígidos, el número de grados de libertad, viene definido por la ecuación (1.4) la misma que se constituye en una fórmula general para marcos planos.

$$NGL = 3\,(NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A - 2 * T \qquad (1.4)$$

- **EJEMPLO 3**

El pórtico de un vano y un piso de la figura 1.22, cuya viga es transversalmente rígida, tiene el sistema de coordenadas generalizadas, indicado en la figura 1.23. Se pide dibujar las tres primeras deformadas elementales.

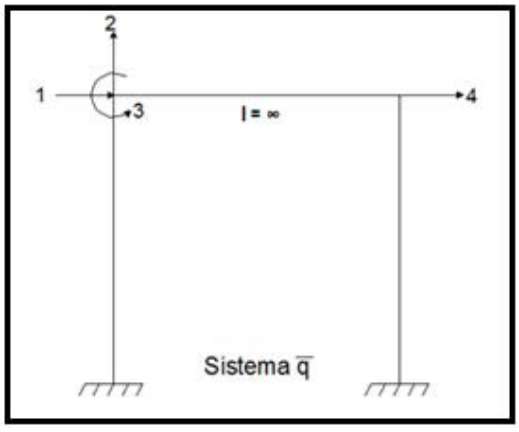



**Figura 1.23** Coordenadas generalizadas de estructura de Ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.24 se presentan las tres primeras deformadas elementales, de la estructura cuyos grados de libertad son los indicados en la figura 1.23. Del análisis de estos diagramas se puede indicar lo siguiente:

i) En el primer diagrama elemental la viga se acorta axialmente la unidad, esto es debido a que el elemento no es axialmente rígido. Puede deformarse axialmente.

ii) En el segundo diagrama al subir verticalmente, el nudo B la unidad, también tiene que subir el nudo C, la unidad. De no hacerlo estaría girando el nudo B y la condición es que solo se desplace verticalmente y que no rote. El nudo C puede subir la unidad debido a que no existe ese grado de libertad.

iii) Al rotar el nudo B la unidad; el nudo C también rota la unidad porque el elemento es transversalmente rígido y el nudo C se desplaza verticalmente una longitud igual a L. En elementos transversalmente rígidos se cumple que arco para radio igual al ángulo, al ser el ángulo unitario el desplazamiento vertical es igual a la luz.

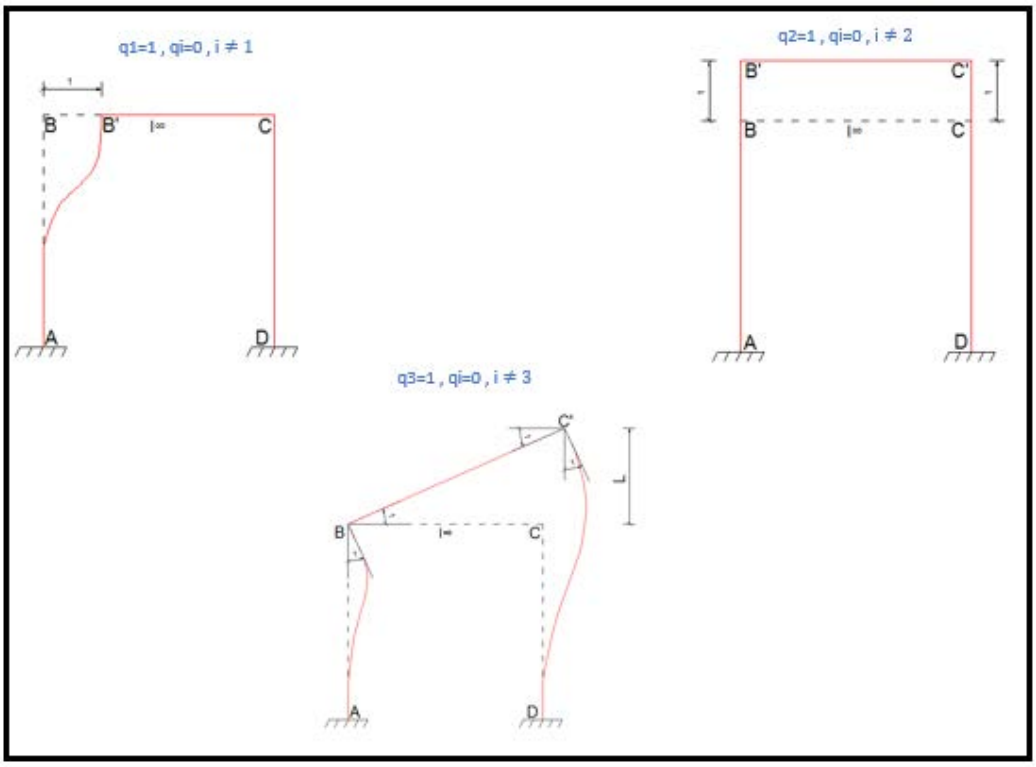



**Figura 1.24** Diagramas elementales de estructura con viga transversalmente rígida.

### 1.3. 6 Pórtico plano con elementos totalmente rígidos

Se define como un elemento totalmente rígido a aquel que es longitudinal y transversalmente rígido. Es decir su representación es: $A = \infty$ e $I = \infty$. No trabaja axialmente ni a flexión por lo que se desplaza como cuerpo rígido.

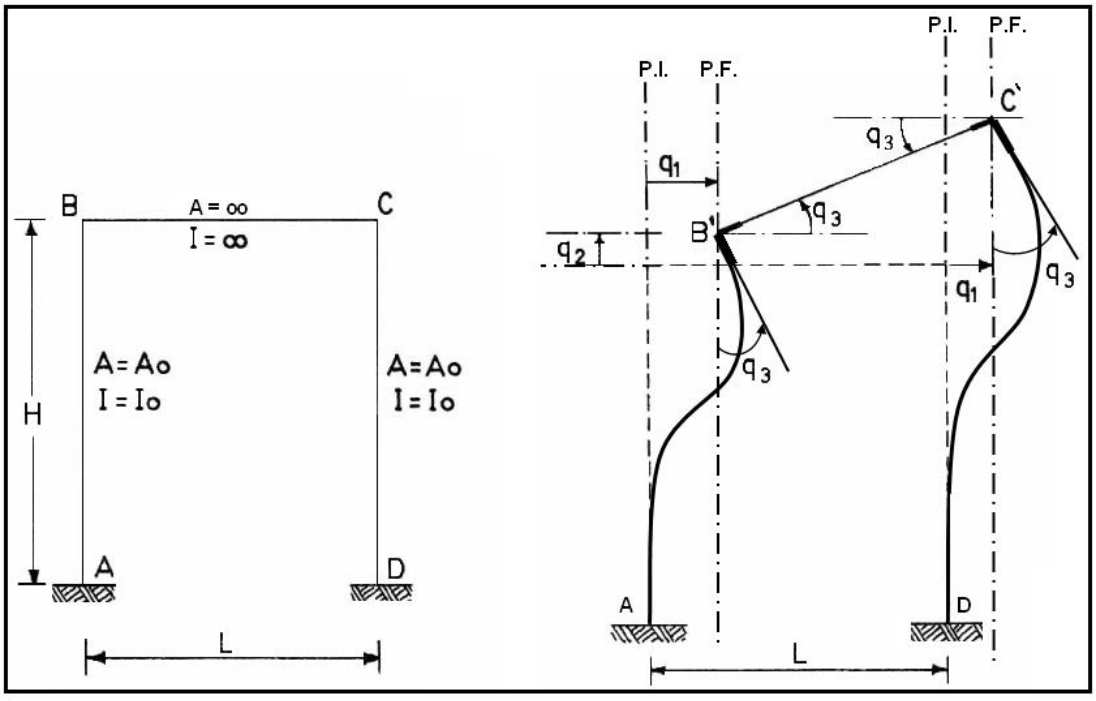



**Figura 1.25** Pórtico con viga totalmente rígida y deformada general.

El pórtico presentado a la izquierda de la figura 1.25, tiene las columnas totalmente flexibles, pero su viga es completamente rígida. A la derecha de esta figura, se dibuja la deformada lo más general posible. El sistema tiene tres grados de libertad.

En el análisis sísmico de pórticos planos se considera que todas las vigas de un piso son axialmente rígidas de tal manera que todos los nudos, de piso, se desplazan horizontalmente la misma cantidad. También se considera que la losa de entrepiso es totalmente rígida, en el Análisis Sísmico en tres dimensiones.

Por otra parte; en el análisis de armaduras planas en cambio se considera que sus elementos son transversalmente rígidos.

Por todo lo expuesto es importante que el estudiante sepa trabajar con elementos $A = \infty$ y/o $I = \infty$.

## 1.4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

- **EJEMPLO 4**

En el sistema mostrado en la figura 1.26, se pide:

a) Calcular el número de grados de libertad.
b) Dibujar una deformada lo más general posible.

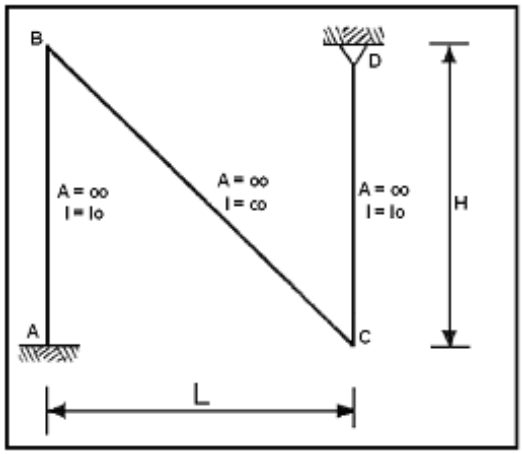



**Figura 1.26** Estructura de análisis del Ejemplo 1

- **SOLUCION**

$$NGL = 3(NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A - 2 * T$$

$$NGL = 3(4) - (1)\,3 - (1)\,2 - 1 * 3 - 2 * 1 = 2$$

Al utilizar la ecuación general se ha encontrado que la estructura tiene 2 grados de libertad; ya se tiene una idea antes de dibujar la deformada general que debe hacerse con mucho detenimiento, con regla. Primero se dibuja la estructura con líneas entrecortadas; se identifican los nudos; colocando las condiciones de los elementos que son $A = \infty$ e $I = \infty$.

Se traza perpendiculares a los elementos que son axialmente rígidos $A = \infty$ y se indica su posición inicial, en la parte izquierda de la figura 1.27. Por ser las columnas AB y CD axialmente rígidas, la posición final de sus juntas B y C estarán en cualquier punto de la recta $X\text{-}X_1$ y $X_2 - X_3$, respectivamente.

En la parte derecha de la figura 1.27 se indica una deformada lo más general posible de la estructura. Nótese que la junta B no gira ya que si rotara la posición final de C' no caería dentro de la recta $Y_2$ '–$Y_3$' que es la posición final del miembro BC por ser axialmente rígido.

En consecuencia, los grados de libertad son la componente de desplazamiento horizontal del nudo B que se ha denominado $q_1$ y la rotación del nudo D que se ha llamado $q_2$.

En la medida que se van resolviendo más ejercicios la explicación teórica va disminuyendo. Es importante que el estudiante aprenda a encontrar los grados de libertad ya que si se seleccionan mal las coordenadas todo lo que se haga a posterior estará mal realizado.

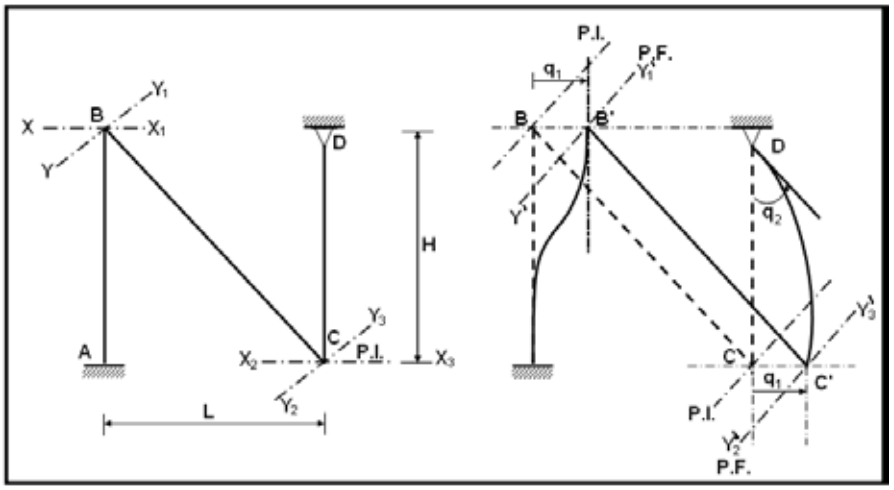



**Figura 1.27** Condiciones de los elementos $A = \infty$ . Deformada General.

- **EJEMPLO 5**

Para el sistema mostrado en la figura 1.28, en que las columnas son $A = \infty$ y la viga central totalmente rígida, se pide:

a) Calcular el número de grados de libertad
b) Dibujar una deformada lo más general posible.

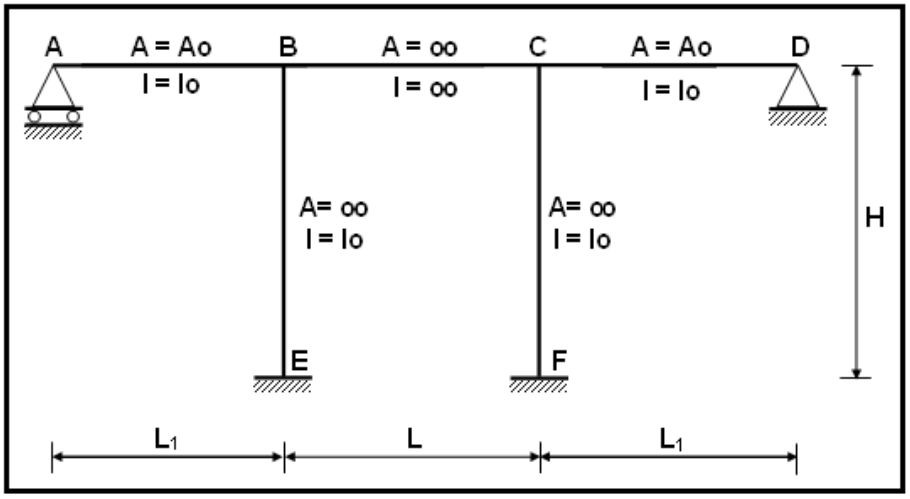



**Figura 1.28** Estructura del Ejemplo 5.

- **SOLUCION**

$$NGL = 3(NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A - 2 * T$$

$$NGL = 3(6) - 1(1) - 1(2) - 2(3) - 1(3) - 2(1) = 4$$

Por la condición de ser axialmente rígida las columnas y la viga BC, se tiene que la posición final de las juntas B y C son B' y C', como se indica en la figura 1.29. Se encuentran sobre la recta inicial de la viga, para que cumplan con la condición de $A = \infty$ los tres elementos.

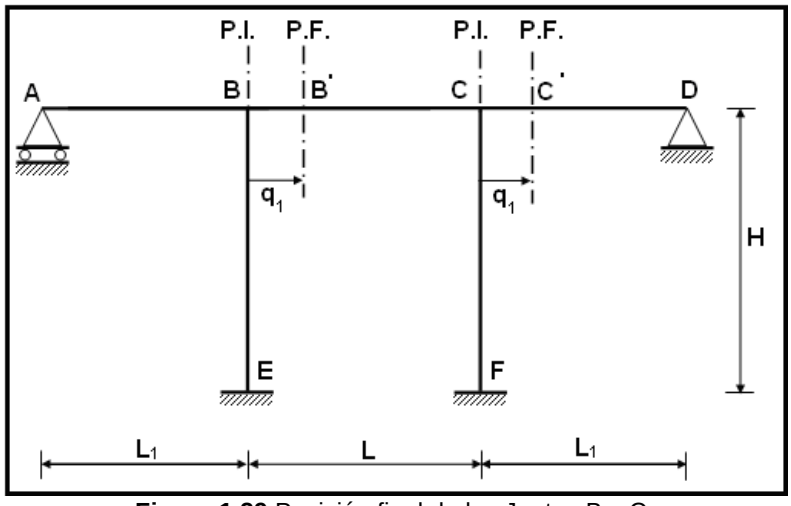



**Figura 1.29** Posición final de las Juntas B y C.

En la figura 1.30 se representa una deformada lo más general posible de la estructura. Se pregunta al lector ¿Porque la junta B no tiene rotación?.

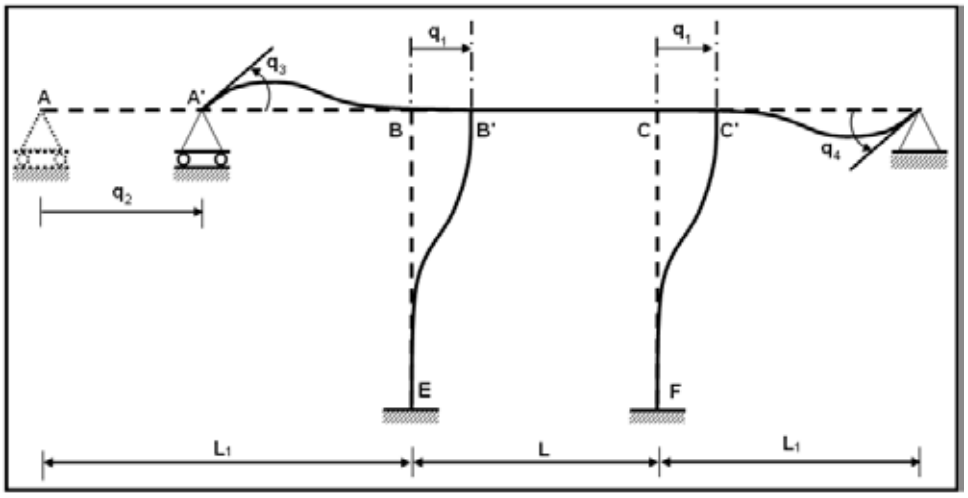



**Figura 1.30** Deformada general del Pórtico de Ejemplo 5.

Si la junta B rota, la viga BC debe rotar por qué es $I = \infty$ y al hacerlo la columna CF va a cambiar de longitud, se alarga o se acorta y deja de cumplir la condición de $A = \infty$. Por lo tanto no hay rotación en dicha junta.

- **EJEMPLO 6**

En el pórtico plano de la figura 1.31, sus elementos son totalmente flexibles, se le pide: Dibujar una deformada lo más general posible, identificar los grados de libertad y presentar las tres primeras deformadas elementales.

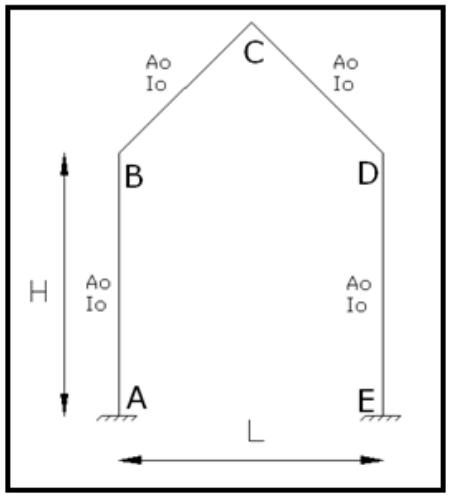



**Figura 1.31** Pórtico plano de Ejemplo 6

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.32 se presenta la deformada general y el sistema de coordenadas generalizadas y en la figura 1.33 se indican las tres primeras deformadas elementales.

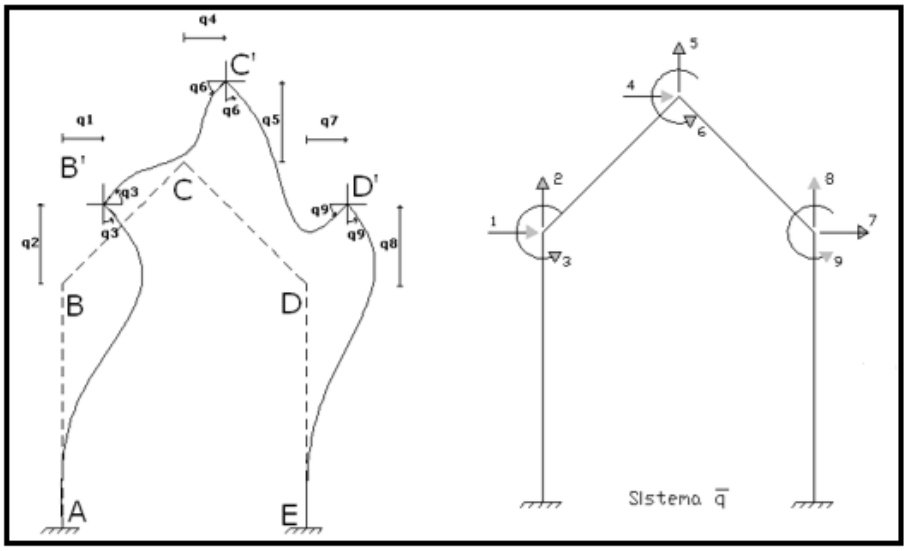



**Figura 1.32** Deformada general y sistema de Coordenadas Generalizadas.

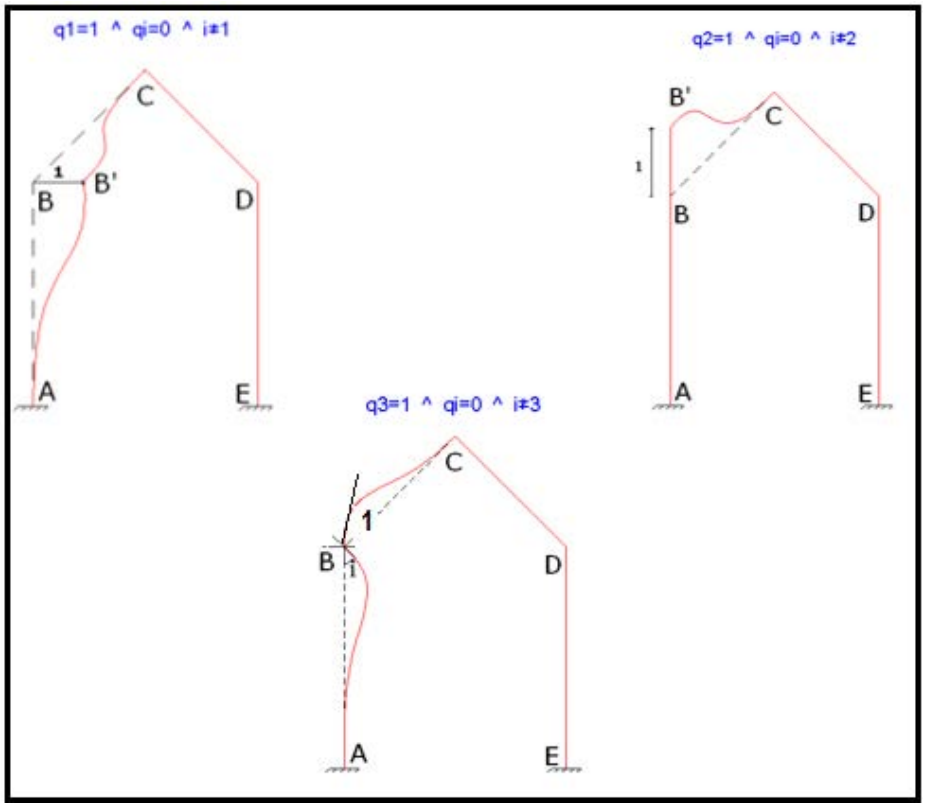



**Figura 1.33** Deformadas elementales

- **EJEMPLO 7**

Los elementos del pórtico de 2 pisos, presentado en la figura 1.34, son todos totalmente flexibles. Se pide: Dibujar una deformada general; encontrar el sistema de coordenadas generalizadas y dibujar las tres primeras deformadas elementales.

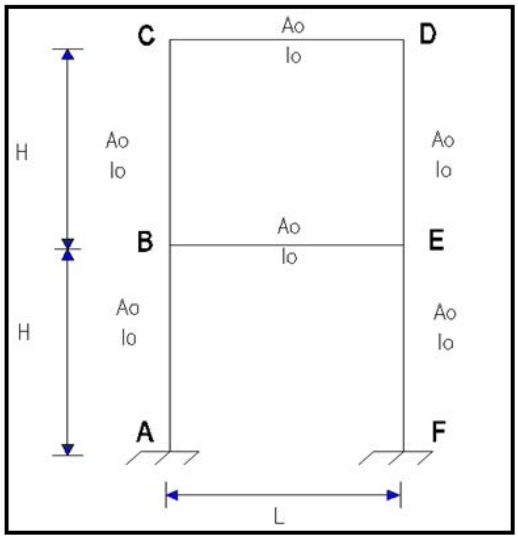



**Figura 1.34** Pórtico con elementos totalmente flexibles.

- **SOLUCIÓN**

En las figuras 1.35 y 1.36 se presentan la solución del Ejemplo.

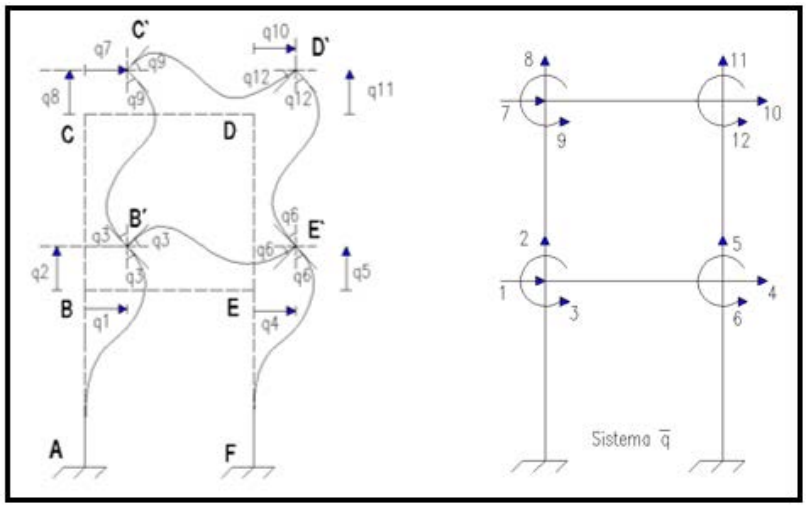



**Figura 1.35** Deformada general y sistema de coordenadas generalizadas

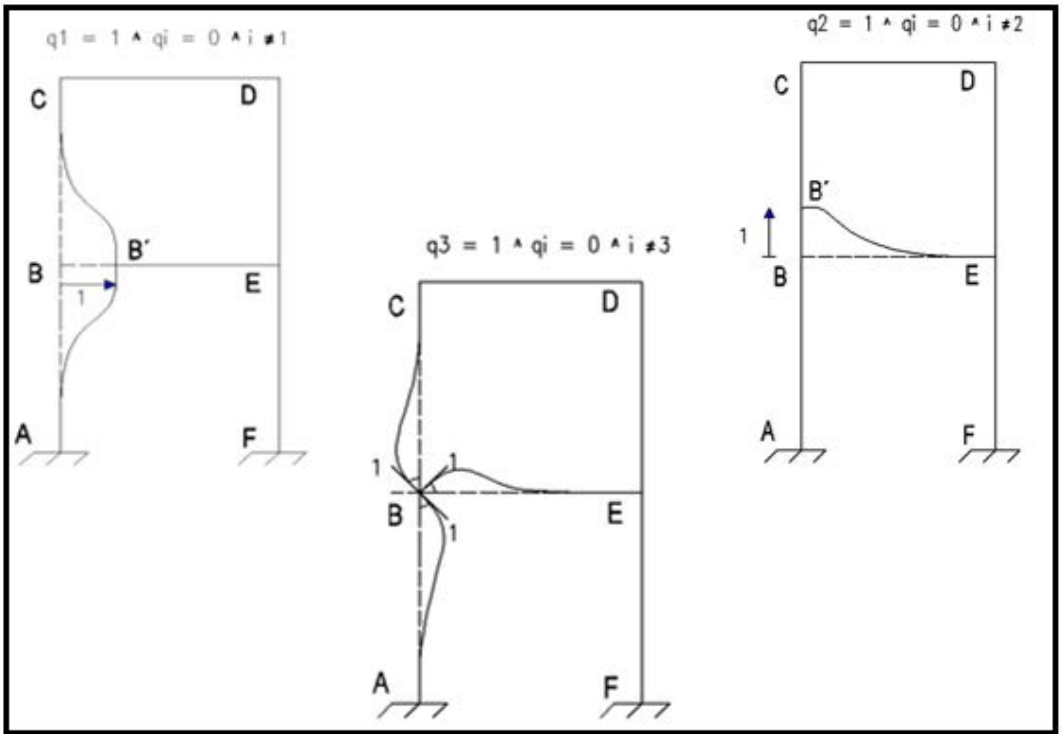



**Figura 1.36** Deformadas elementales.

La geometría de la estructura del Ejemplo 7, se utiliza para resolver otros ejercicios, similares en el capítulo 2, pero las condiciones de los elementos son diferentes. En este Ejemplo se consideró que todos los elementos son totalmente flexibles.

- **EJEMPLO 8**

La estructura presentada en la figura 1.37 tiene una articulación interior, en el nudo C. Se pide indicar el sistema de coordenadas generalizadas, si todos sus elementos son totalmente flexibles.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.38 se indican los 7 grados de libertad que tiene el pórtico con articulación interior. Nótese que en el nudo C, se tienen dos rotaciones.

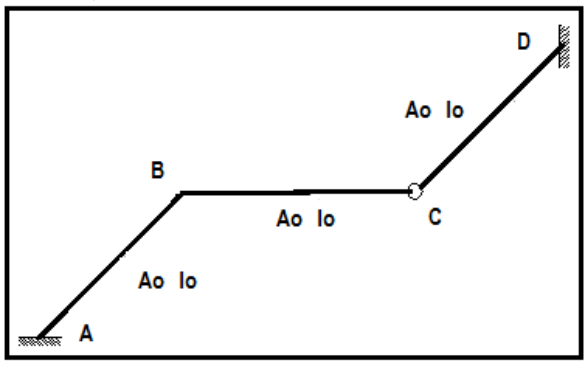



**Figura 1.37** Estructura de Ejemplo 8**.**

El objetivo de este Ejemplo era que el estudiante vea que en la articulación interior se tienen dos rotaciones. Por lo tanto un cumple el Principio de Williot. En la figura 1.39 se presenta una deformada general.

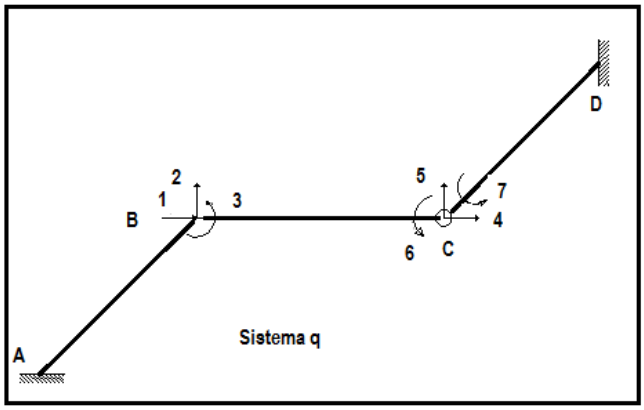



**Figura 1.38** Sistema de coordenadas generalizadas de estructura de Ejemplo 8.

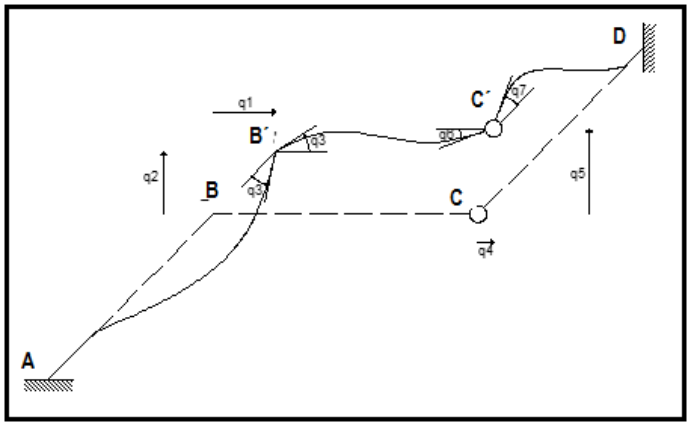



**Figura 1.39** Deformada General del Ejemplo 8.

- **EJEMPLO 9**

La estructura de la figura 1.40 tiene una articulación móvil o rodillo. Se pide dibujar una deformada general.

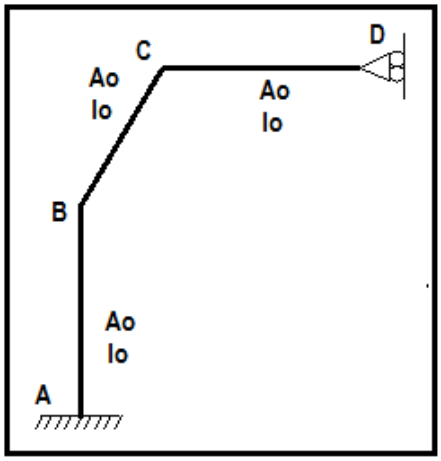



**Figura 1.40** Estructura del Ejemplo 9.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.41 se presenta la deformada general d la estructura con elementos totalmente flexibles, con un rodillo móvil.

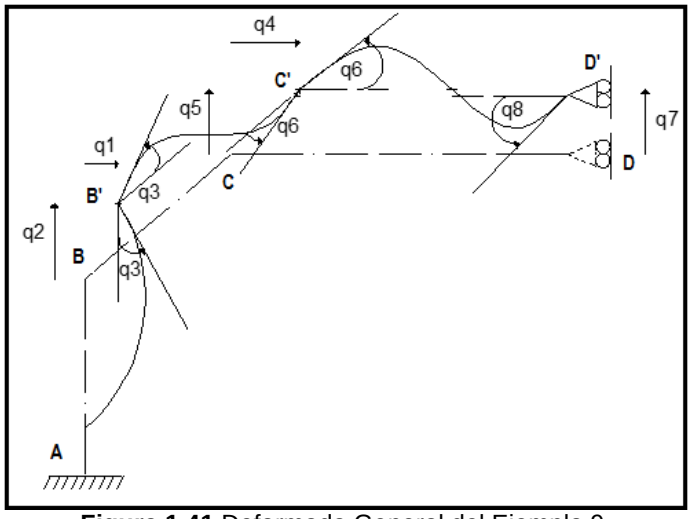



**Figura 1.41** Deformada General del Ejemplo 9.

- **EJEMPLO 10**

La columna izquierda del pórtico de la figura 1.42 es transversalmente rígida y la viga es axialmente rígida. Se pide dibujar una deformada general e indicar el sistema de coordenadas generalizadas. Dibujar también las deformadas elementales.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.43 se tiene a la izquierda la deformada general y a la derecha el sistema de coordenadas generalizadas.

Por otra parte, en la figura 1.44 se ha dibujado las deformadas elementales.

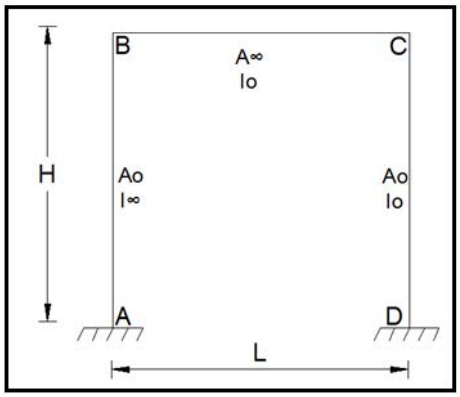



**Figura 1.42** Pórtico de Ejemplo 10, con columna transversalmente rígida y viga axialmente rígida.

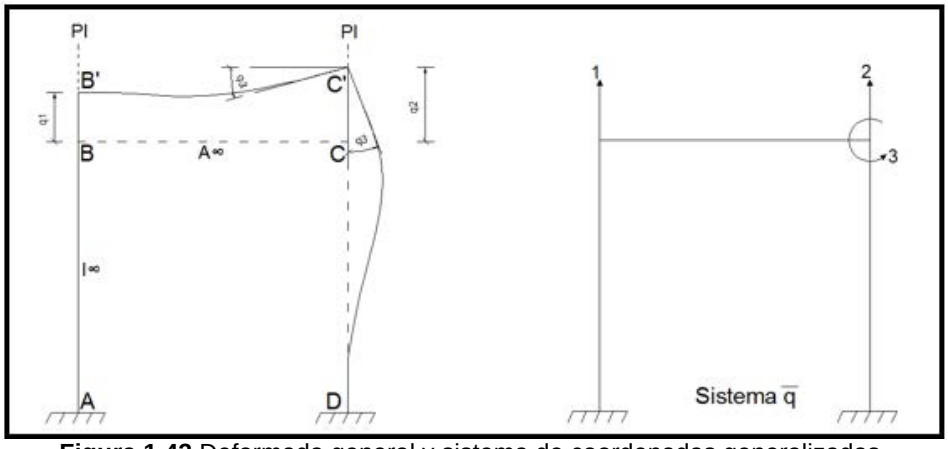



**Figura 1.43** Deformada general y sistema de coordenadas generalizadas.

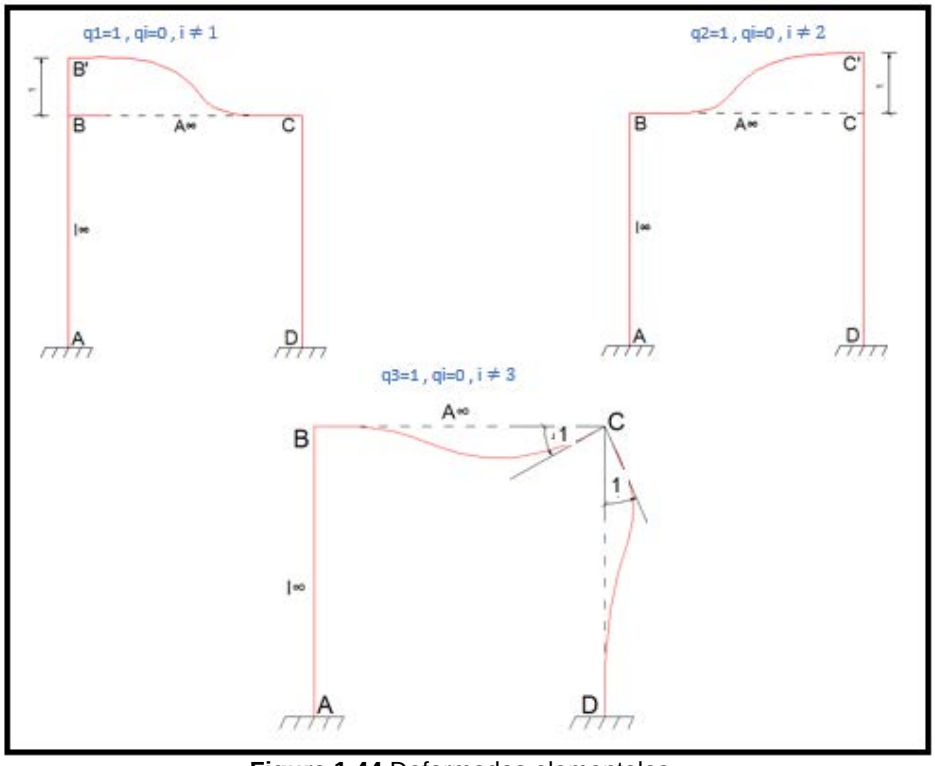



**Figura 1.44** Deformadas elementales.

- **EJEMPLO 11**

La estructura indicada a la izquierda de la figura 1.45, es parecida a la del Ejemplo 4. El nudo D en este caso está empotrado y además solo el elemento inclinado es totalmente rígido. El sistema tiene los 3 grados de libertad indicados a la derecha de la figura 1.45. Se pide dibujar las deformadas elementales.

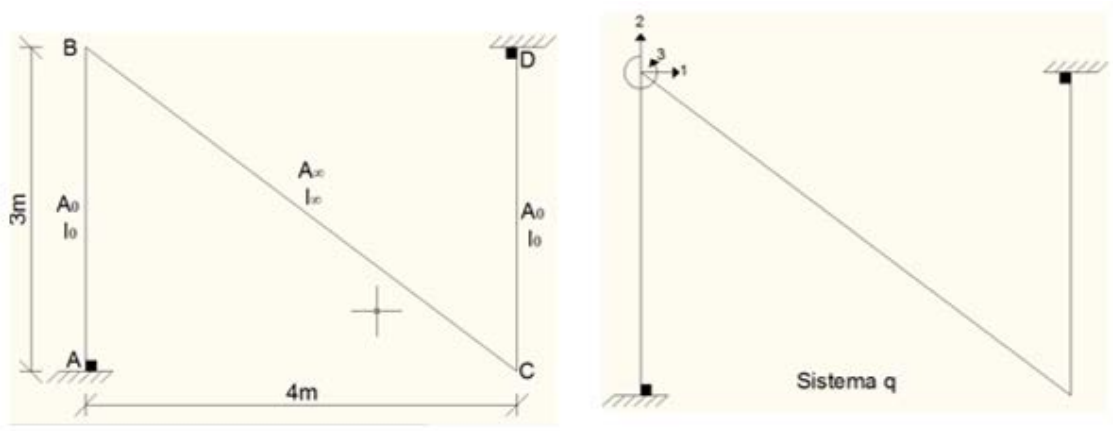



**Figura 1.45** Estructura de Ejemplo 11 y grados de libertad

- **SOLUCIÓN**

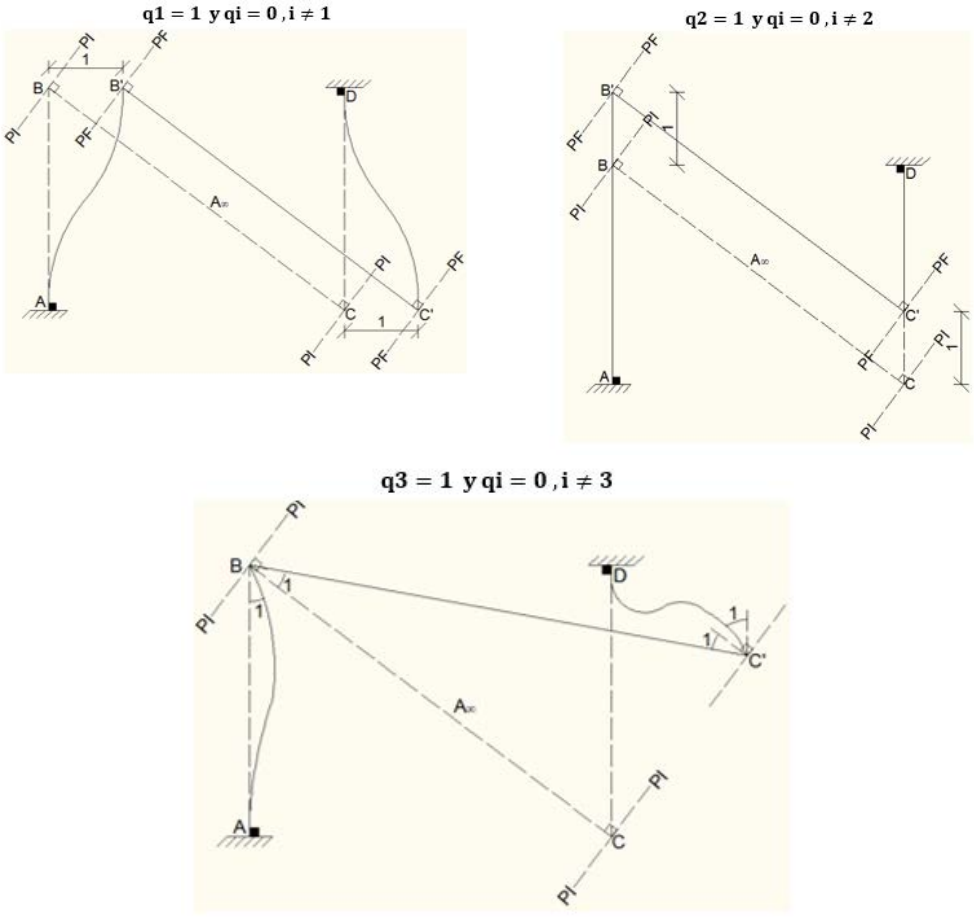
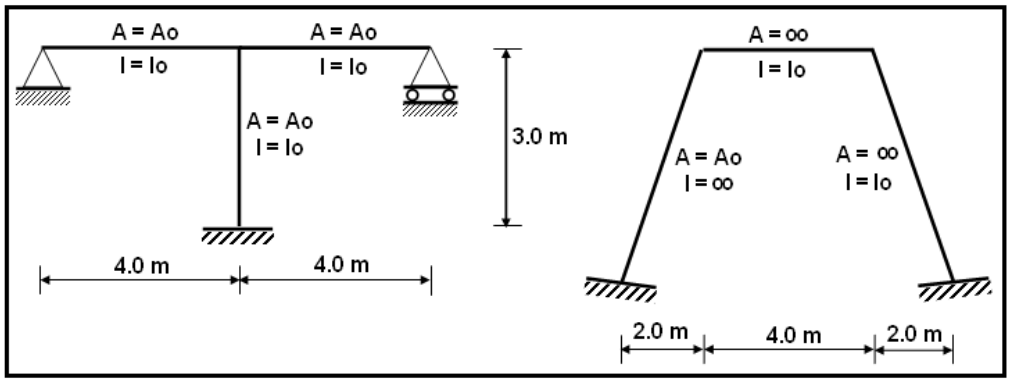



**Figura 1.46** Deformadas elementales de Ejemplo 11.

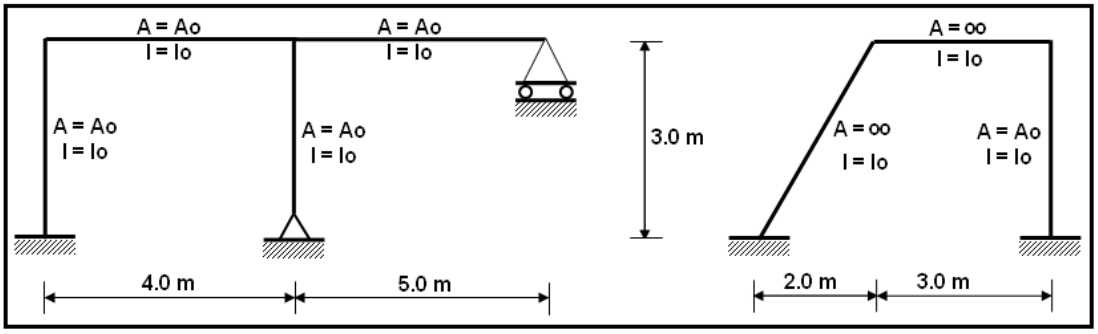
## 1.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

Para cada uno de los sistemas mostrados se pide:

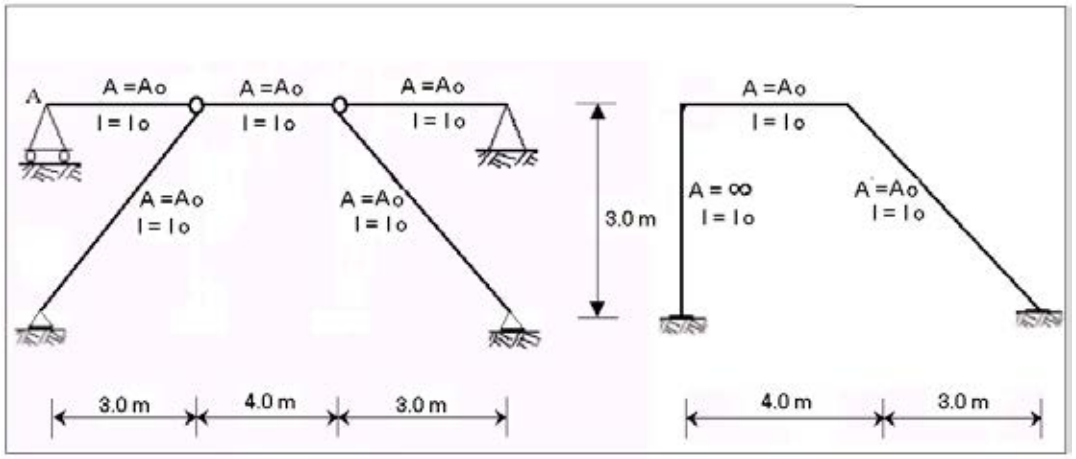
a) Calcular el número de grados de libertad.
b) Dibujar una deformada lo más general posible.
c) Dibujar las tres primeras deformadas elementales.



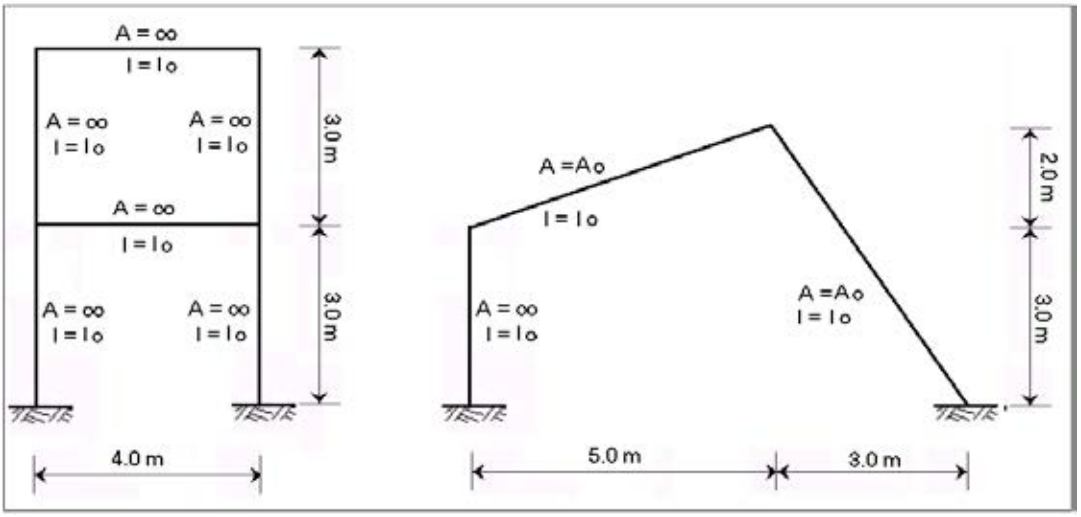

**Ejercicio 1** **Ejercicio 2**



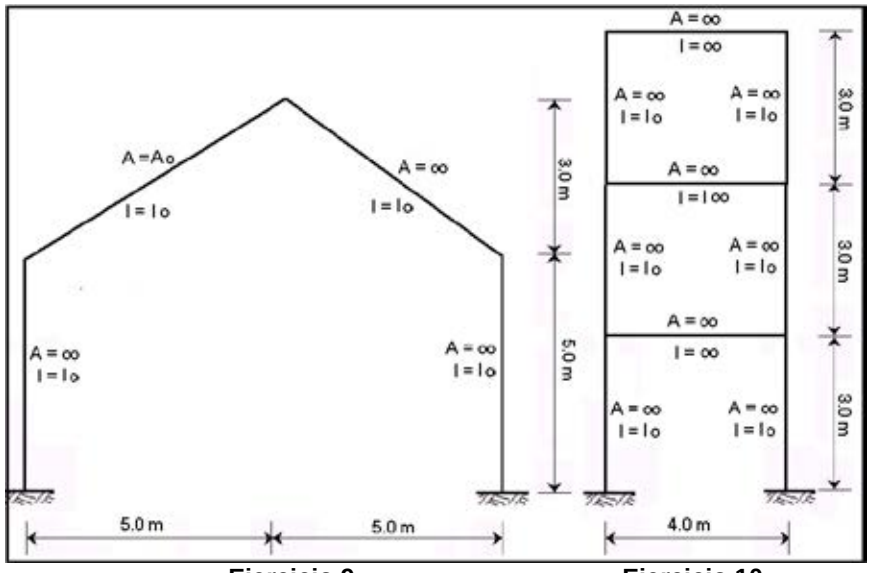

**Ejercicio 3** **Ejercicio 4**



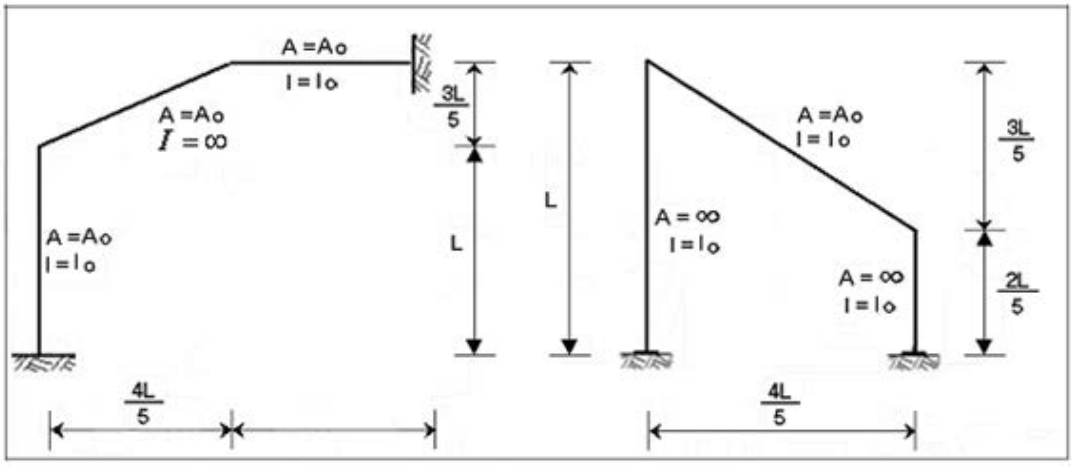

**Ejercicio 5** **Ejercicio 6**




**Ejercicio 7** **Ejercicio 8**




**Ejercicio 9** **Ejercicio 10**




**Ejercicio 11** **Ejercicio 12**

*CAPITULO 2*

# SISTEMA DE CARGAS Y COORDENADAS GENERALIZADAS

## RESUMEN

Se presentan los primeros vectores con que se trabajara en el Análisis Matricial de Estructuras; estos son el vector de coordenadas generalizadas **q** y el vector de cargas generalizadas **Q**, lo que interesa es que el lector se empiece a familiarizar con esta nomenclatura, en capítulos posteriores se indicara en detalle cómo se obtienen.

Por otra parte se introducen las definiciones de coordenadas de la estructura, coordenadas de elemento, coordenadas de nudo, coordenadas absolutas y coordenadas relativas.

Aspecto fundamental en el Análisis Matricial constituye la construcción de diagramas elementales por lo que se continúa realizando ejercicios de este tipo, ya que en base a estos diagramas también se obtienen los desplazamientos y giros en el Centro de Masa y posteriormente la matriz de Masas, que se estudia en análisis dinámico de estructuras.

## 2.1 COORDENADAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA

### 2.1.1 Vector de coordenadas generalizadas

Antes de empezar el estudio se destaca que a una matriz o un vector se les identifica con una letra negreada o con una letra con una raya encima. Cualquiera de las dos formas es válida en éste libro.

El pórtico plano, indicado a la izquierda de la figura 2.1; está compuesto por elementos totalmente flexibles en consecuencia tendrá cinco grados de libertad, siendo una de sus deformadas la indicada en la parte central de la figura 2.1. Estos desplazamientos $q_i$ se los considera elementos de un vector columna **q** compuesto por las n coordenadas generalizadas de toda la estructura. Para el pórtico de la figura 2.1, se tiene que n = 5. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

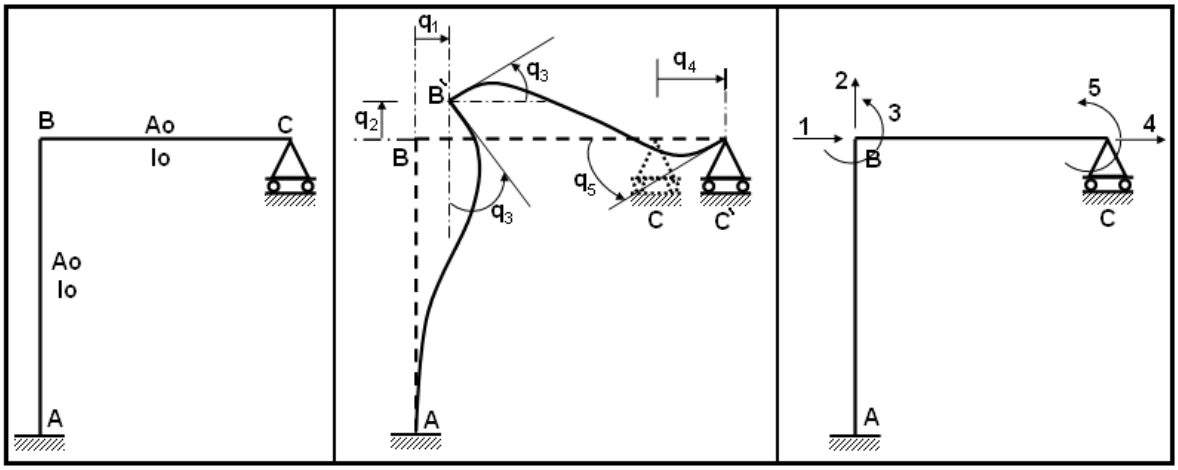



**Figura 2.1** Estructura; Deformada General y Coordenadas Generalizadas

En general, para cualquier estructura la forma del vector **q** es la indicada en la ecuación (2.2). Con la letra **q** se identifica al vector de coordenadas generalizadas.

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Donde n es el número de grados de libertad de la estructura. **Es importante notar que los desplazamientos $q_i$ son infinitésimos, pero para visualizar los conceptos, siempre las coordenadas generales se dibujaran grandes.**

Para simplificar, en lugar de dibujar la deformada, basta colocar sobre las juntas las componentes de desplazamiento y rotación como se ilustra, a la derecha de la figura 2.1

Antes de 1980 en que el desarrollo informático no lo era como se tiene a inicios del siglo XXI, existían una serie de algoritmos para encontrar el vector $\boldsymbol{q}$, que ahora tienen poco sentido estudiarlos. Lo mejor es aprender el Método de los Desplazamientos orientado al uso del computador mediante Análisis Matricial de Estructuras.

### 2.1.2 Coordenadas generalizadas ortogonales

Para el pórtico plano de la figura 2.1. Se ha utilizado un sistema de coordenadas ortogonales para definir las componentes de desplazamiento de las juntas. Pero este sistema no es único ya que se puede utilizar otro sistema de coordenadas en el cual cada $q_i$ esté asociado a una dirección determinada. Con relación al gráfico de la derecha de la figura 2.1, se puede indicar lo siguiente:

$q_1$ Componente de desplazamiento del nudo B en la dirección horizontal, siendo positivo si es hacia la derecha.

$q_2$ Componente de desplazamiento del nudo B en la dirección vertical, siendo positivo si es hacia arriba.

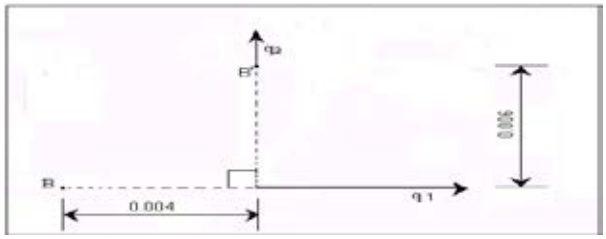
$q_3$ Rotación del nudo B, siendo positivo si es anti horario.

Algo similar se tiene para las coordenadas $q_4$ y $q_5$ pero referidas al nudo C. Lo importante es destacar que entre las direcciones de medición de $q_1$ y $q_2$ hay noventa grados por eso el nombre de ortogonales.

- **EJEMPLO 1**

Se supone que las coordenadas generalizadas $q_1$ y $q_2$ de la junta B del pórtico 2.1, para un estado de cargas arbitrario, son: $q_1$ = 0.004 m y $q_2$ = 0.006 m. Encontrar gráficamente la posición de B'.

- **SOLUCIÓN**




Para la posición final del nudo B se dibuja primero la componente de desplazamiento $q_1$ ahí se coloca $q_1 = 0.004$, luego por ser coordenada ortogonal en la posición final anterior se coloca la orientación de la coordenada $q_2$ y en ella $q_2 = 0.006$ con lo que se obtiene $B'$.

### 2.1.3 Coordenadas generalizadas no ortogonales

Para definir la posición final de las juntas del pórtico de la figura 2.1 se puede utilizar las coordenadas indicadas en la figura 2.2

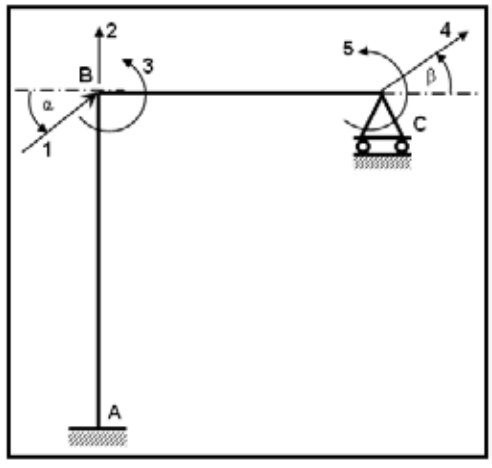



**Figura 2.2** Coordenadas no ortogonales

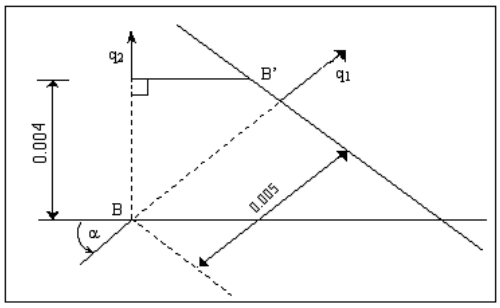
En este caso se han empleado coordenadas generalizadas que no son ortogonales. Aquí $q_1$ será la componente del nudo B que forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Nótese que ahora el ángulo comprendido entre las direcciones de $q_1$ y $q_2$ no es noventa grados.

- **EJEMPLO 2**

Con los datos de carga del Ejemplo 1, pero al trabajar con el sistema de coordenadas de la figura 2.2.1, se supone que se obtuvo $q_1 = 0.005$ y $q_2 = 0.004$. ¿Encontrar el punto B'?.

- **SOLUCIÓN**

Para obtener el punto $B'$ se trazarán primero los sentidos de las direcciones $q_1$ y $q_2$ en ellas se colocan los datos del problema. Finalmente para encontrar la posición de $B'$ se trazan perpendiculares en la posición final de los desplazamientos colocados.




Nótese que al ser proyecciones, el desplazamiento de B, B' no se obtiene sumando vectorialmente. Este tipo de coordenadas no ortogonales, generalmente no se utilizan para la resolución de problemas estructurales debido a que es más complicado. Se lo presenta únicamente para entender mejor las estructuras.

- **EJEMPLO 3**

Encontrar los diagramas de deformación elemental $q_1$ y $q_2$ de la estructura de la figura 2.2, cuyos elementos son totalmente flexibles. Se trabaja con coordenadas no ortogonales

- **SOLUCION**

Primero se dibuja la estructura con líneas entrecortadas, se colocan las letras que definen a cada nudo, luego se coloca el sentido en el cual se mide la componente de desplazamiento $q_1$.

Al hacer $q_1 = 1$ el nudo B inicialmente se traslada a B', pero esta no puede ser la posición final del nudo ya que existiría un desplazamiento vertical es decir $q_2 \neq 0$ y como se quiere que sea cero necesariamente la posición final del nudo B será B'', la misma que se obtiene trazando una perpendicular a la dirección de $q_1$.

♣ $q_1 = 1$ y $q_2 = 0$ para $i \neq 1$

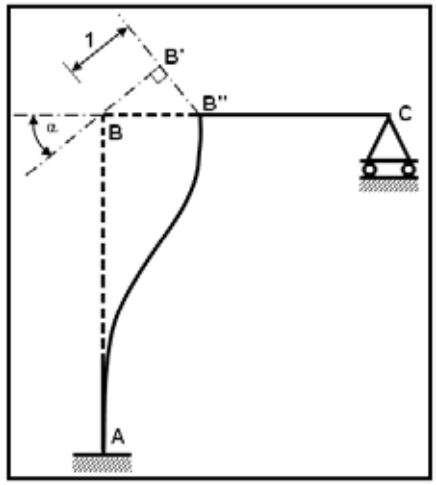
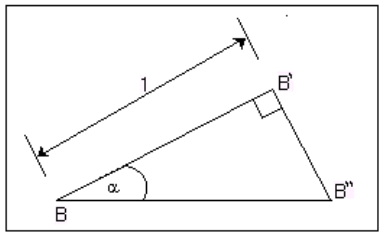



**Figura 2.3** Deformada elemental $q_1$ para el sistema de coordenadas de la figura 2.2

Para conocer el desplaza horizontalmente $BB''$ se recurre a la trigonometría, para ello en el triángulo rectángulo B B' B'', se tiene:




$B' B'' = 1.\text{tg}\,\alpha$
$BB'' = 1.\sec\alpha$

♣ $q_2 = 1$ y $q_i = 0$ para $i \neq 2$

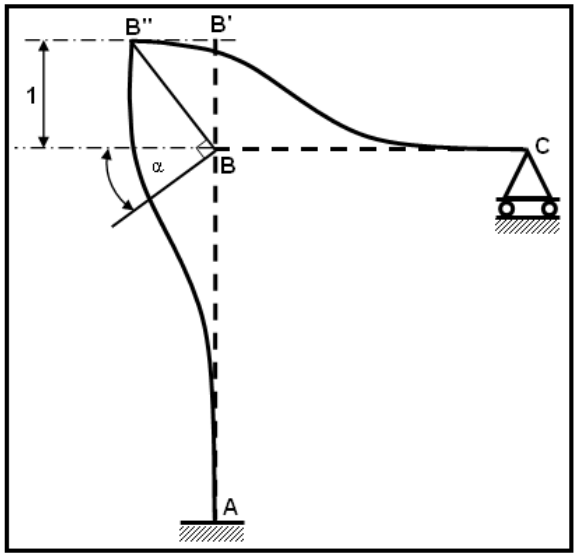
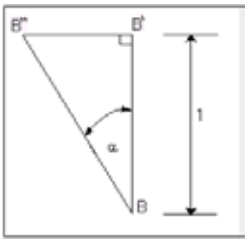



**Figura 2.4** Deformada elemental $q_2$ para el sistema de coordenadas de la figura 2.2

En este caso, al hacer $q_2 = 1$, inicialmente el nudo B se traslada verticalmente a B', pero esa no es la posición final ya que en B' se tiene $q_1 \neq 0$. Por lo tanto, para obtener la posición final del nudo B a partir de B' se traza una perpendicular a B B', y, por B se traza una perpendicular a la dirección de la coordenada $q_1$. El punto de intersección determina la posición final del nudo B, que es B''.

Para encontrar cuanto se desplaza horizontalmente, en el triángulo rectángulo B B' B'' se tiene:




$$B' B'' = 1.\text{tg}\,\alpha$$
$$BB'' = 1.\sec\alpha$$

Mediante un proceso similar obtendríamos los demás diagramas de desplazamientos elementales para el pórtico plano cuyas coordenadas se indican en la figura 2.2.

### 2.1.4 Coordenadas absolutas y relativas

En estructuras con aisladores sísmicos se puede trabajar con coordenadas absolutas o con coordenadas relativas; en el primer caso la matriz de rigidez no es diagonal pero la matriz de masas si lo es, en el segundo caso la matriz de rigidez si es diagonal y la matriz de masas no lo es. Aguiar (2008, 2012); Almazán (2001).

Generalizando se puede indicar que en una estructura se puede trabajar con coordenadas absolutas o con coordenadas relativas. A la izquierda de la figura 2.5, se presenta una estructura en la cual las vigas son totalmente rígidas y las columnas axialmente rígidas de tal manera que el sistema tiene dos grados de libertad. Estos dos grados de libertad son los desplazamientos laterales de piso, que se indican en la figura 2.5; al centro se tienen coordenadas absolutas y a la derecha coordenadas relativas.

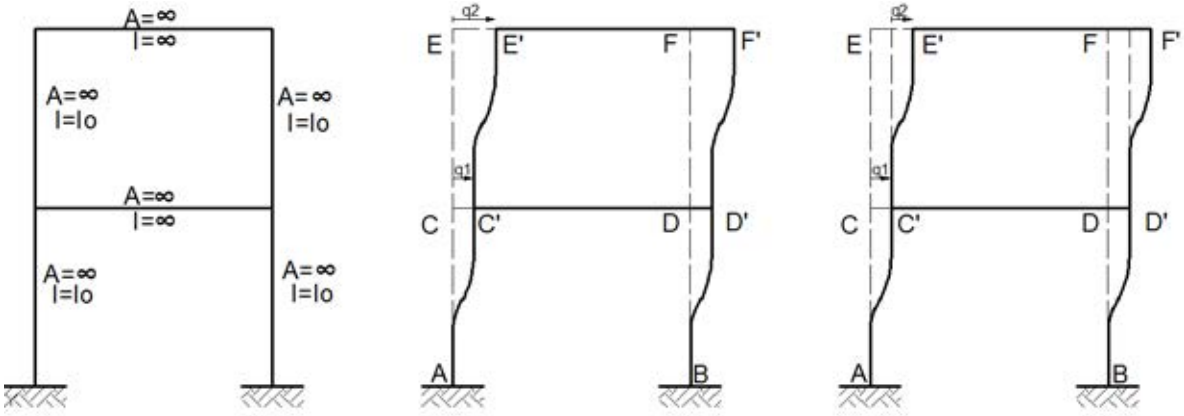



**Figura 2.5** Coordenadas Absolutas y relativas.

En este libro se ha venido trabajando con coordenadas absolutas y se continuará haciéndolo pero las coordenadas relativas no, por lo que se explica que el desplazamiento horizontal $q_1$ se mide con respecto al suelo y el desplazamiento horizontal $q_2$ se mide con respecto al desplazamiento horizontal $q_1$.

- **EJEMPLO 4**

Dibujar las deformadas elementales de la estructura de la figura 2.5 pero trabajando con las coordenadas relativas indicadas a la derecha de la mencionada figura.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 2.6 se presenta a la izquierda la deformada elemental $q_1$. Nótese que el segundo piso también se desplaza la unidad para que la componente de deslazamiento relativo $q_2$ sea cero; a la derecha de la figura 2.6, se presenta la deformada elemental $q_2$.

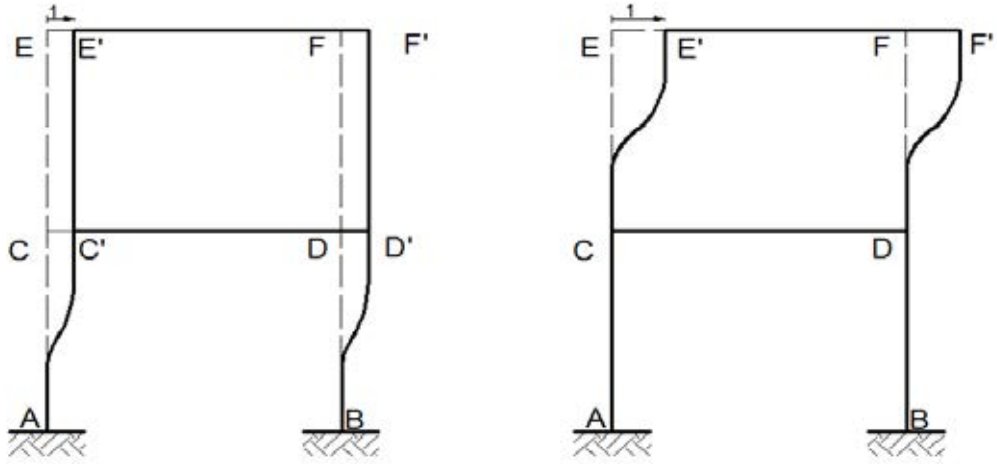



**Figura 2.6** Deformadas elementales en coordenadas relativas

- **EJEMPLO 5**

Con relación a la estructura de la figura 2.7, en que las vigas son totalmente rígidas y dos de sus columnas son axialmente rígidas, se pide: i) dibujar una deformada general y seleccionar los grados de libertad; ii) dibujar las deformadas elementales.

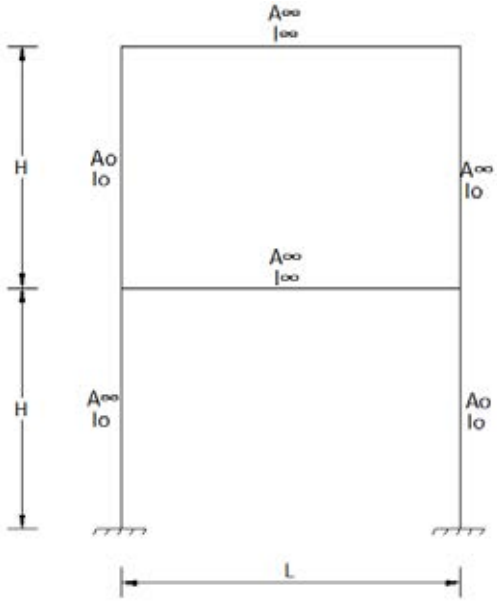



**Figura 2.7** Estructura con vigas totalmente rígidas y con dos columnas axialmente rígidas.

## ♣ SOLUCIÓN

Se deja al lector la explicación de la deformada general y grados de libertad, que se presenta en la figura 2.8, al igual que las deformadas elementales.

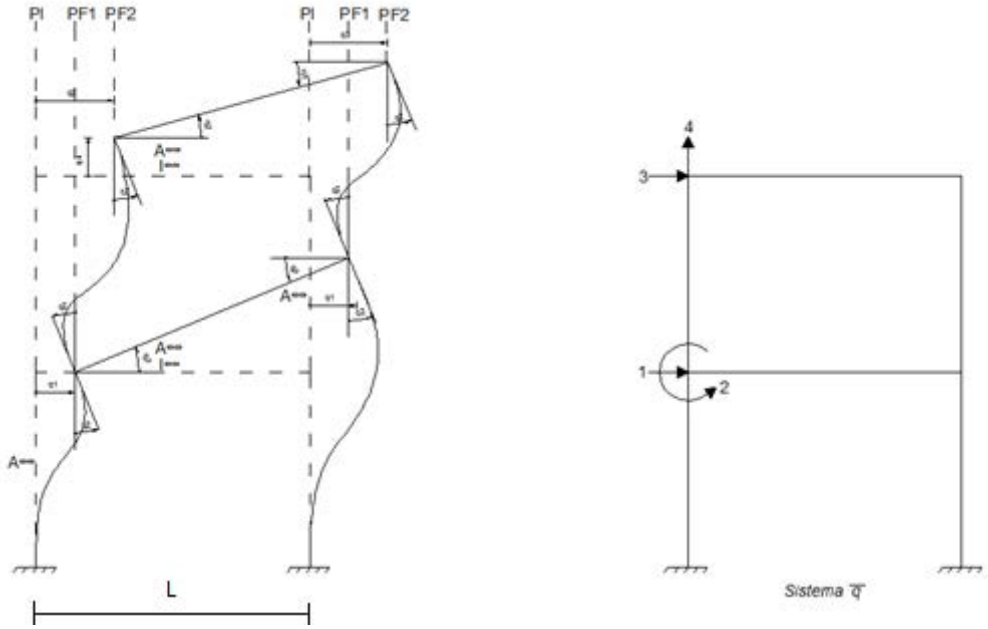



**Figura 2.8** Deformada general y grados de libertad.

Si no se puede construir una deformada elemental, significa que las coordenadas generalizadas no son las adecuadas.

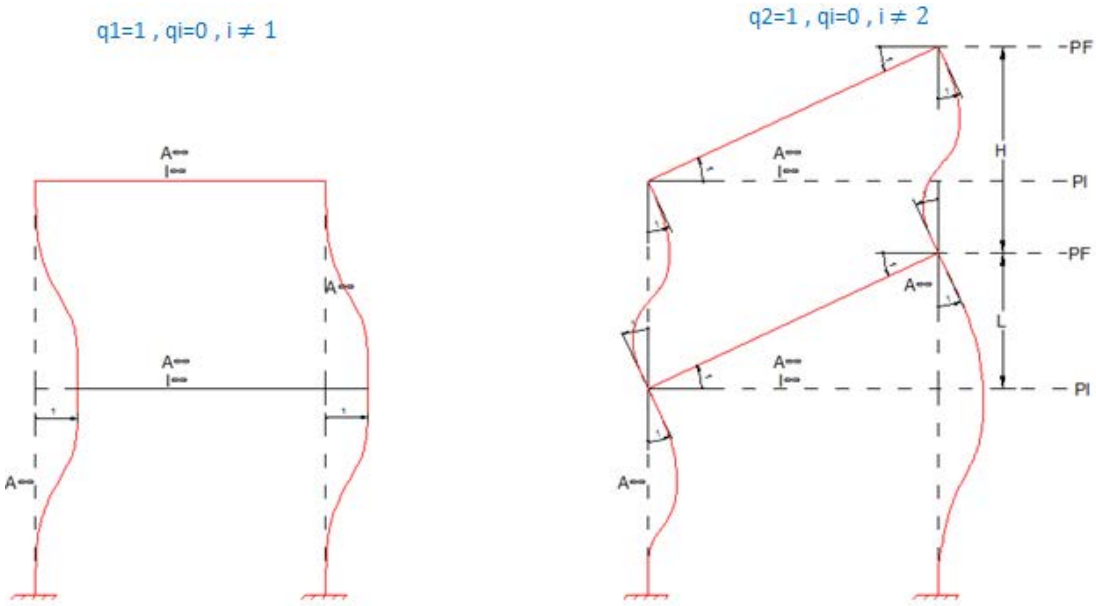



**Figura 2.9** Deformadas elementales $q_1$ y $q_2$

A la izquierda de la figura 2.9, se presenta la deformada elemental $q_1$, que es muy sencilla. A la derecha se tiene la deformada elemental $q_2$, en la que se tiene rotación del primer piso, pero como la columna superior derecha es axialmente rígida está se desplaza y para que $q_3$ y $q_4$ sean

cero, existe giro en la viga superior y esto es factible debido a que no existe coordenada en el segundo piso. Nótese que la viga inferior se desplaza verticalmente una distancia $L$, esto es debido a que la viga es transversalmente rígida.

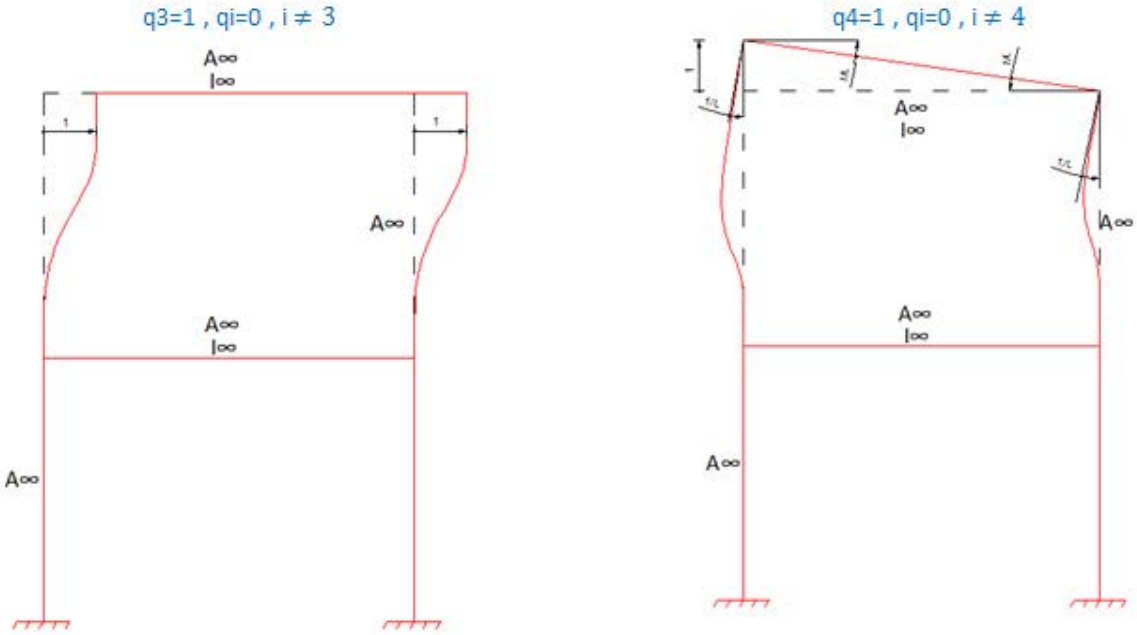



**Figura 2.10** Deformada elemental $q_3$ y $q_4$.

En la figura 2.10, a la izquierda se presenta la deformada elemental $q_3$, que no amerita explicación y a la derecha la deformada elemental $q_4$, en la que se observa que la viga rota para cumplir con la condición de que las otras coordenadas sean nulas; nuevamente esta rotación es posible debido a que el giro en el segundo piso no se ha considerado como coordenada generalizada.

## 2.2 CARGAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA

### 2.2.1 Hipótesis considerada

Para empezar el estudio, **se considera que las cargas actúan únicamente sobre las juntas y en la dirección que se han definido las coordenadas generalizadas.**

Se entiende por cargas a las fuerzas o momentos externos que actúan sobre la estructura y se les conoce también con el nombre de acción o fuerza generalizada. **El sentido positivo de las cargas será el que coincida con los sentidos definidos de las coordenadas generalizadas.**

En el pórtico, indicado a la izquierda de la figura 2.11 se puede trabajar con el sistema de coordenadas generalizadas presentadas en la parte central, que son coordenadas ortogonales o las coordenadas de la derecha, que no son ortogonales. A las cargas generalizadas se las denomina con la letra Q, y para los sistemas de coordenadas de la figura 2.11, pueden actuar en la forma indicada en la figura 2.12, a la izquierda cuando se trabaja con coordenadas ortogonales y a la derecha cuando no son ortogonales.

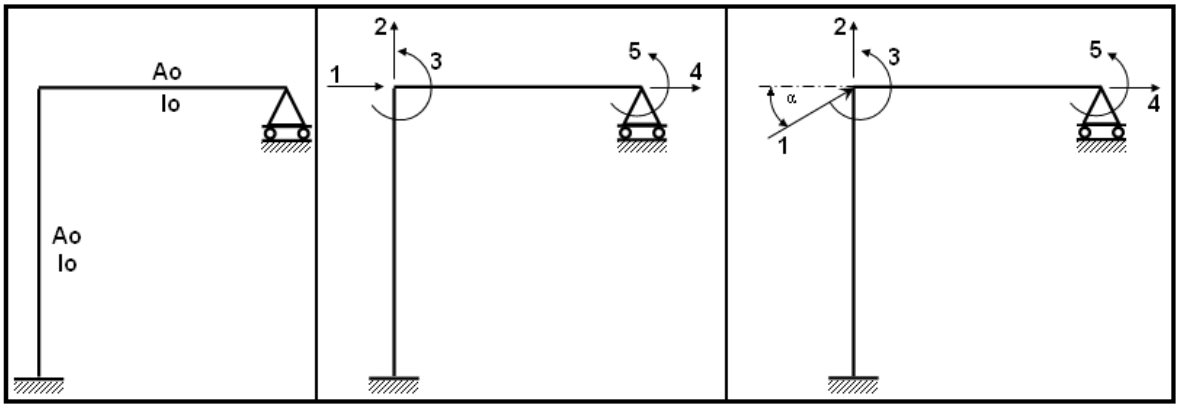



**Figura 2.11** Estructura con dos sistemas de coordenadas: ortogonales y no ortogonales.

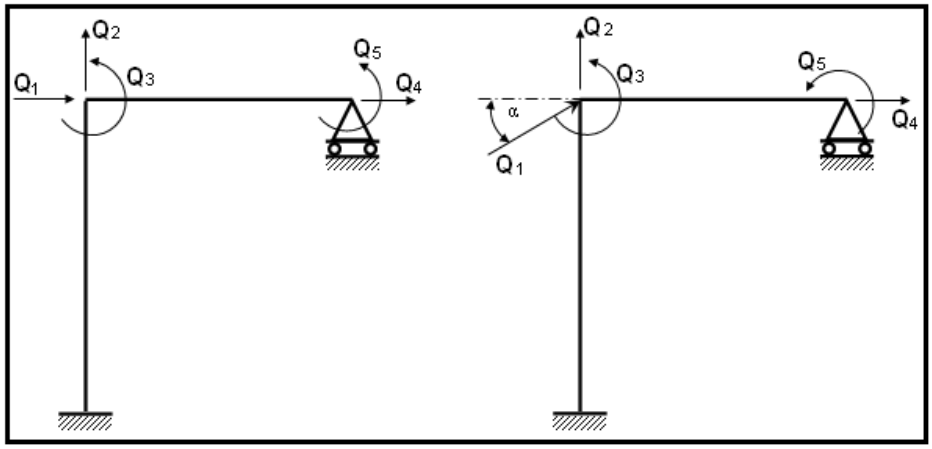



**Figura 2.12** Cargas que pueden actuar en los dos sistemas de coordenadas: ortogonales y no ortogonales

De igual manera a las cargas generalizadas se les agrupará en un vector **Q**; para este ejemplo sería:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Y la forma general es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Donde n es el número de grados de libertad de la estructura. Al vector **Q** se denomina vector de cargas generalizadas.

**Teóricamente por la hipótesis considerada se podría resolver únicamente estructuras que tengan cargas o momentos concentrados en las juntas, y en la dirección del sistema de coordenadas generalizadas.**

Si las acciones se encuentran en los elementos, para resolver el problema se tiene que utilizar el siguiente artificio: se tomará como nudo el sitio en el cual actúa la carga o momento concentrado. Por ejemplo, para el pórtico con el sistema de cargas presentado en la figura 2.13, en lugar de considerar que tiene tres nudos y dos miembros, se puede trabajar con cinco nudos: A, B, C, D y E y 4 elementos, porque en el nudo B y D actúan la carga P y el momento M, respectivamente.

Lógicamente el problema se complica si se tiene algunas cargas concentradas o momentos concentrados actuando en los elementos por la hipótesis considerada, ya que este artificio conduce a que se tenga que trabajar con demasiadas coordenadas generalizadas. En consecuencia este artificio no es el más adecuado.

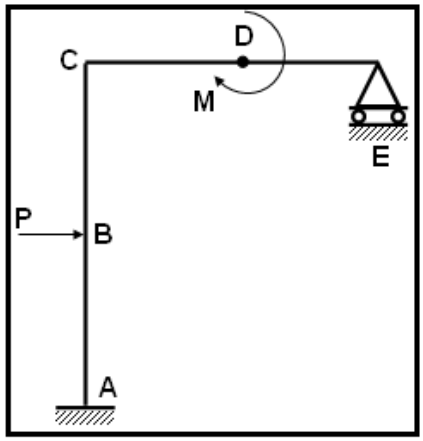



**Figura 2.13** Estructura con carga lateral y momento concentrado.

Por último, bajo la hipótesis de que las cargas actúan, solamente sobre las juntas y en la dirección que se ha definido las coordenadas generalizadas **no se puede resolver, por ahora,** problemas relacionados con incrementos de temperatura, asentamientos de apoyos ni otras solicitaciones que sean diferentes a cargas o momentos concentrados actuando sobre los elementos.

### 2.2.2 Sistema Q-q

Debido a que tanto $\boldsymbol{Q}$ como $\boldsymbol{q}$ se miden en el mismo sistema de coordenadas se puede dibujar simbólicamente cargas generalizadas y coordenadas generalizadas en un solo sistema al que se denomina "sistema $\boldsymbol{Q-q}$" o simplemente $\boldsymbol{Q-q}$. Para el sistema de coordenadas de los pórticos de las figuras 2.11 y 2.12 se tiene que los sistemas $\boldsymbol{Q-q}$ respectivos son los indicados en la figura 2.14.

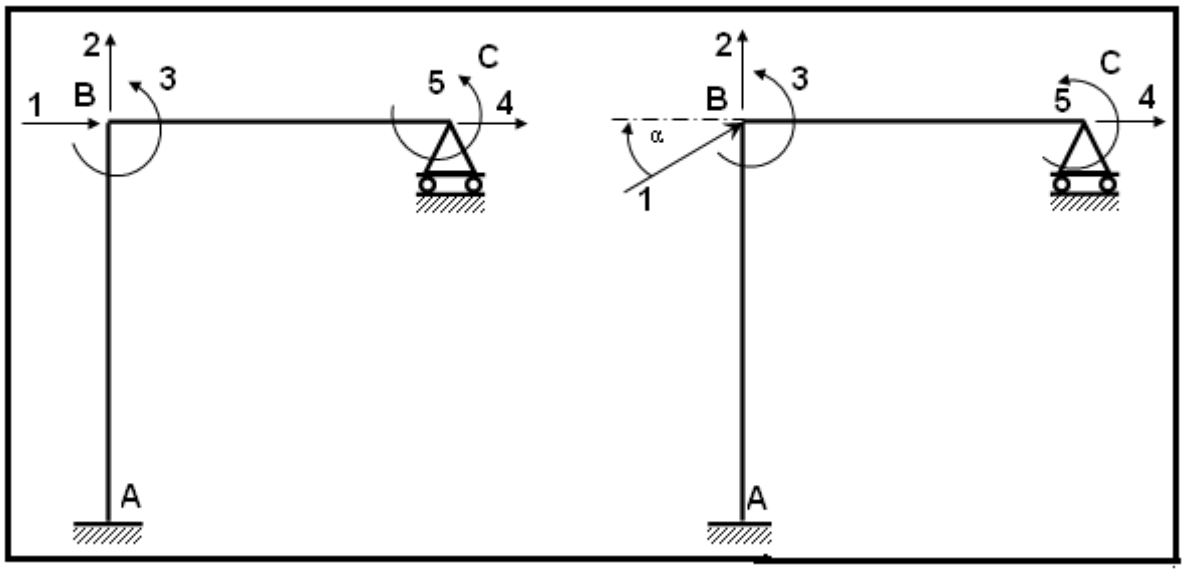



**Figura 2.14** Sistema $Q - q$ en coordenadas ortogonales y no ortogonales.

En los capítulos posteriores se trabajará generalmente con sistemas de coordenadas ortogonales y la convención de signos, adoptada es la siguiente:

La fuerza es positiva si va de izquierda a derecha ( → ) o de abajo hacia arriba (↑), y el momento es positivo si es anti horario ( ↺ ).

Finalmente, es necesario hacer hincapié que entre carga y desplazamiento existe una importante diferencia: la carga sobre un nudo es la suma vectorial de las cargas actuantes sobre ella, pero no sucede lo propio con los desplazamientos **q** como se vio en el numeral 2.1.3.

### 2.2.3 Solución general del problema

Para ilustrar el procedimiento de cálculo de estructuras en las cuales actúan: cargas distribuidas sobre los elementos, incrementos de temperatura, asentamientos de los apoyos, etc. Se fijará la atención en el pórtico plano de la figura 2.15, sobre el mismo gravitan las cargas indicadas a la derecha, en este gráfico $\Delta t$ corresponde a un incremento de temperatura sobre los elementos y $\Delta_1$, $\Delta_2$ y $\Delta_3$, son asentamientos de los apoyos A y C. En la parte central se presenta el modelo del pórtico y a la derecha de la figura 2.15 se indican los grados de libertad considerados.

Al no tener cargas en los nudos y en la dirección del sistema $\boldsymbol{q}$, para encontrar el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ se recurre al artificio denominado: Problema Primario y Problema Complementario, que se presenta a continuación.

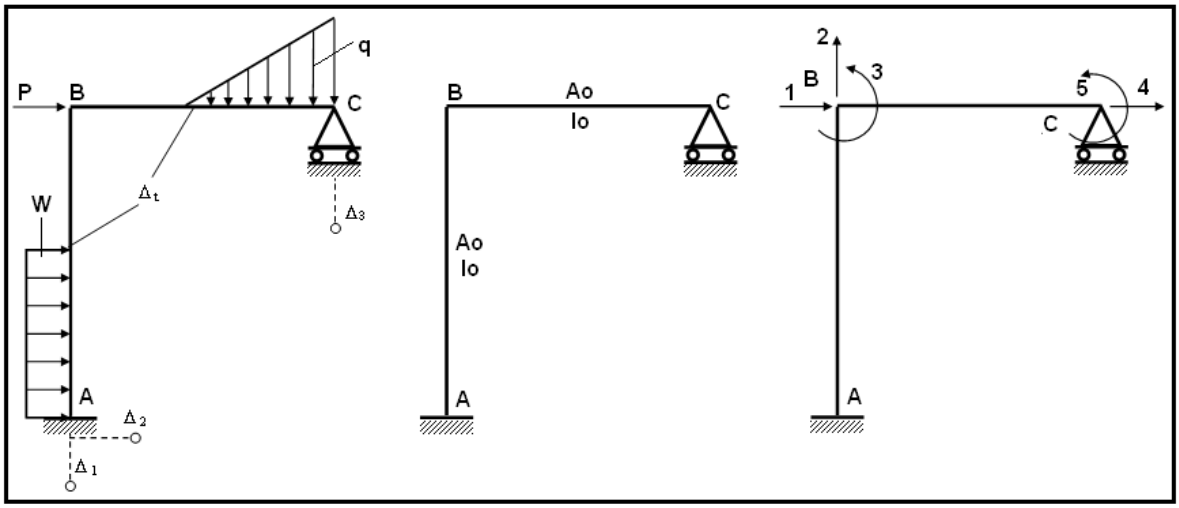



**Figura 2.15** Estructura con diferentes condiciones de carga y sistema $Q - q$

### 2.2.4 Problema primario

**Es aquel en el que actúan todas las cargas, asentamientos de apoyo, incrementos de temperatura, etc., todo lo que produce deformaciones. Pero el vector de coordenadas generalizadas q es nulo.** Para que esto suceda es necesario colocar vínculos externos que estén de acuerdo con el sistema $Q - q$ de tal forma que los nudos no se desplacen ni giren.

Para el nudo B, por ejemplo, en la figura 2.16, se ha colocado un vínculo ( ⌐) el cual impide el desplazamiento horizontal ($q_1$), desplazamiento vertical ($q_2$) y la rotación ($q_3$) del nudo B. Lo propio se ha realizado con el nudo C.

Estos vínculos adicionales originan reacciones que son de sentido contrario a los desplazamientos y rotaciones, a los cuales se les ha definido con la letra $R_i$ **y se denominan cargas de fijación o cargas primarias.** En consecuencia, las cargas de fijación R, son las cargas que hay que aplicar para que los nudos de la estructura queden fijas y cumplan con la definición del problema primario.

Por lo tanto, en el problema primario los elementos están empotrado-empotrado. Y sobre cada uno de ellos actúan las solicitaciones respectivas.

El Problema Primario tiene dos etapas, a saber: i) equilibrio de elementos; ii) equilibrio de juntas. Al término de estas dos etapas se determinan las cargas de fijación $R_i$, con el verdadero signo, por esto no importa que se coloquen inicialmente con sentido contrario al sistema $Q - q$.

### 2.2.5 El problema complementario

En este capítulo no interesa todavía que el lector sepa resolver el problema primario, esto se verá con detenimiento en el Capítulo IV, lo que importa es que comprenda como se resuelve una estructura. Conozca el por qué se tiene elementos empotrados en la solución, esto se debe a la condición de que $q = 0$.

En la estructura original, se aplican únicamente las fuerzas de fijación $\boldsymbol{R_i}$ que actuaron en el problema primario, pero aquí actúan con sentido contrario, es decir se tiene ya la hipótesis considerada, de tener cargas y momentos concentrados en las juntas o nudos.

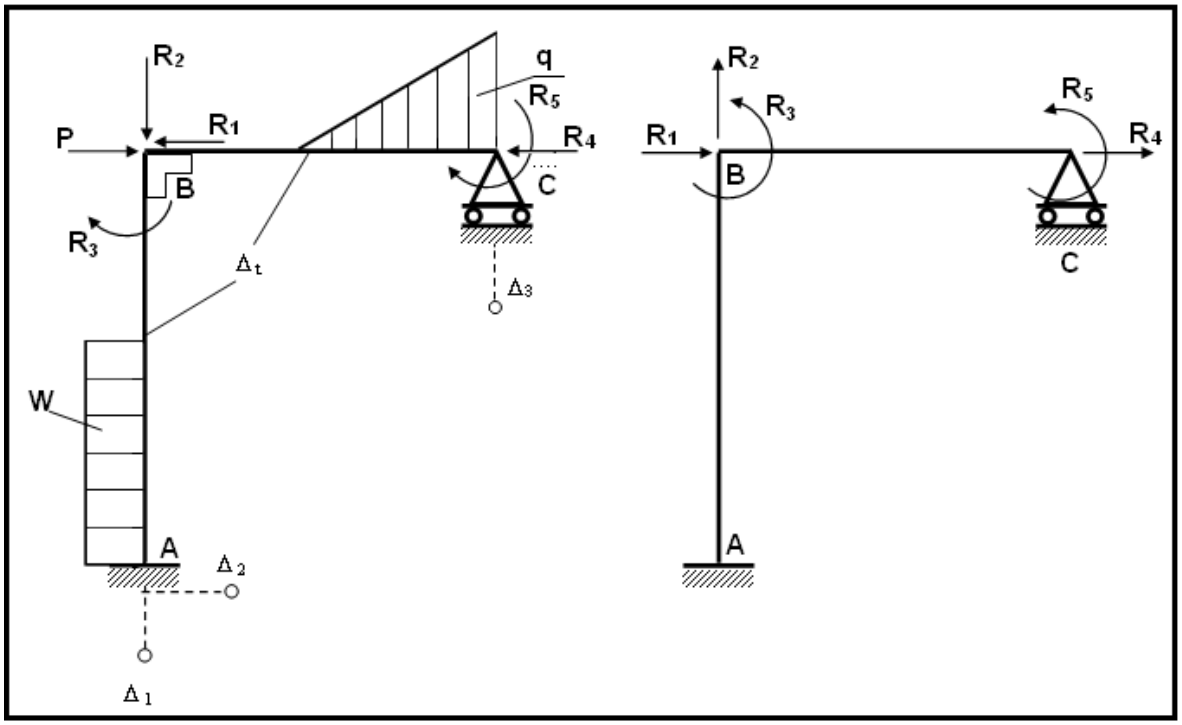



**Figura 2.16** Cargas de fijación y Problema complementario.

Con relación al pórtico plano de la figura 2.15, cuyos elementos son totalmente flexibles, no tienen la misma sección transversal, es únicamente por notación que todos tienen la misma letra. Con respecto a ésta estructura, a la derecha de la figura 2.16 se presenta el Problema Complementario. Nótese que ahora las acciones $R_i$ generan los corrimientos o giros $q_i$ que realmente tiene la estructura y que en el problema primario se anuló.

Al observar las figuras que están a la derecha de 2.15 y 2.16 se encuentra que: $Q_1$ es la fuerza horizontal que actúa en la junta B, que en este caso vale $R_1$; $Q_2$ es la fuerza vertical que actúa en la junta B, que vale $R_2$, etc. En resumen se tiene:

$$Q_1 = R_1 \qquad Q_2 = R_2 \qquad Q_3 = R_3 \qquad Q_4 = R_4 \qquad Q_5 = R_5$$

Luego el vector de cargas generalizadas ***Q*** para la estructura analizada, es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, este vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ es el que genera el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ y estos a su vez las fuerzas y momentos internos en cada uno de los miembros de la estructura.

Este es el problema general de cálculo en el cual se centra la teoría de "Análisis Matricial de Estructuras". Prácticamente se puede decir que con matrices se resuelve el problema complementario ya que el problema primario se resuelve por estática como se verá en el siguiente ejemplo y en el capítulo 4.

**La solución total de una estructura es la suma del problema primario más el problema complementario.** Por ejemplo, el momento en el nudo inicial del elemento BC es igual al momento de empotramiento perfecto del problema primario más el momento que reporte la solución del problema complementario. Para este mismo nudo B, las ordenadas de la elástica son nulas en la junta B, por la definición del problema primario **q = 0** existiendo únicamente desplazamientos y giro del problema complementario.

**Para un punto intermedio de la barra BC los corrimientos y giros de un punto cualquiera, será igual a lo que reporte el problema primario más lo que reporte el problema complementario.**

**Se hace hincapié en anotar que la solución total del problema es la superposición del problema primario y complementario.**

- **EJEMPLO 6**

Encontrar la ecuación de la elástica $v(x)$ para la viga de sección constante de la figura 2.17, si se desprecia la deformación por corte.

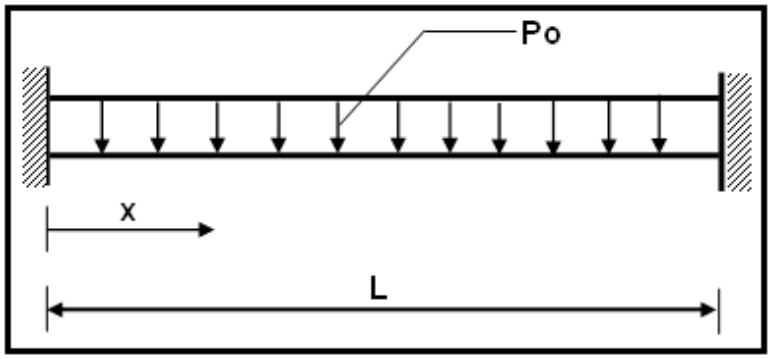



**Figura 2.17** Viga de sección constante con carga uniforme $P_o$

- **SOLUCIÓN**

La ecuación diferencial que gobierna el problema en estudio, es:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{P_o}{EI}$$

La solución de la ecuación diferencial de cuarto orden, es:

$$v(x) = A\,X^3 + B\,X^2 + C\,X + D + \frac{P_o}{24EI}X^4$$

Las constantes de integración: A, B, C y D se obtienen de las siguientes condiciones de borde:

1. En X = 0 v(x) = 0
2. En X = 0 v´(x) =0
3. En X = L v(x) = 0
4. En X = L v´(x) = 0

Donde $v'(x)$ corresponde al giro $\theta(x)$. La solución del sistema de ecuaciones que se obtienen al reemplazar las condiciones de borde, reporta:

$$A = -\frac{P_0 L}{12EI} \qquad B = \frac{P_0 L^2}{24EI} \qquad C = 0 \qquad D = 0$$

Luego, la ecuación de elástica $v(x)$ es:

$$v(x) = -\frac{P_o L}{12EI}X^3 + \frac{P_o L^2}{24EI}X^2 + \frac{P_o}{24EI}X^4$$

$$v(x) = \frac{P_o}{24EI}\left(X^4 + X^2L^2 - 2X^3L\right)$$

$$\theta(x) = \frac{P_o}{24EI}\left(4X^3 + 2XL^2 - 6X^2L\right)$$

Es importante destacar que la ecuación diferencial, fue obtenida con la siguiente convención de signos:

i. Desplazamiento vertical positivo, si es hacia abajo.

ii. Rotación positiva, si es horaria.

Convención contraria a la que se considera en este texto, por lo que se debe cambiar de signo. Esto se ilustra en el siguiente capítulo cuando se encuentra el desplazamiento vertical en una viga que tiene carga en el elemento.

## 2.3 DESPLAZAMIENTO DE LOS ELEMENTOS

Para describir los desplazamientos y rotaciones de un elemento de un pórtico plano, se observa por ejemplo el marco de la figura 2.18, cuyos elementos se consideran totalmente flexibles, $A_o, I_o$. Se recuerda que la letra $A$ hace relación al área de la sección transversal y la letra $I$ a la inercia a flexión de la sección transversal.

La estructura tiene seis grados de libertad, tres en cada nudo, dos desplazamientos y un giro, los mismos que se indican a la derecha de la figura 2.18, en donde se presenta una deformada lo más general posible.

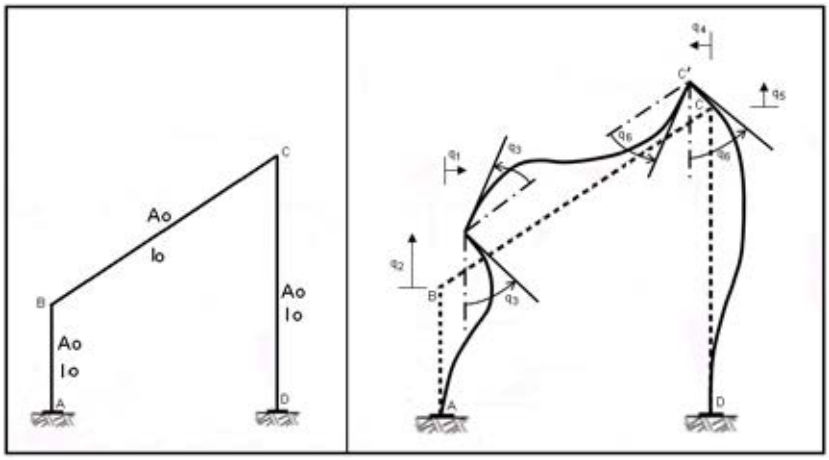



**Figura 2.18** Deformada general y coordenadas de la estructura.

En la figura 2.19 se ha aislado el elemento BC, de la figura 2.18 y en ella se define un sistema de coordenadas X-Y. El eje X coincide con el eje del elemento y el eje Y es perpendicular a este. A la derecha de la figura 2.19 se presenta el elemento BC con su deformada, en esta figura se va a estudiar sus componentes de desplazamiento y rotación de los nudos. Se ha colocado con líneas entrecortadas para indicar que es su posición inicial, antes de deformarse y con línea continua la posición final de BC.

Al definir el origen de coordenadas X-Y se está definiendo cual es el nudo inicial y final del elemento. Se utilizará el subíndice 1 para definir las componentes de desplazamiento y giro del nudo inicial y el subíndice 2 para el nudo final.

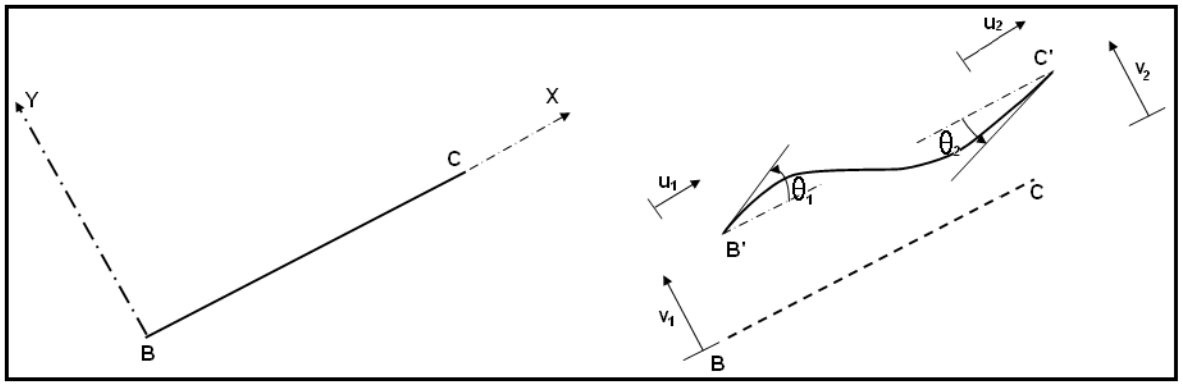



**Figura 2.19** Coordenadas de un elemento.

En la figura 2.19 se indican los componentes de desplazamiento y giros del elemento BC. En este ejemplo, se tiene.

- $u_1$ Componente de desplazamiento en el sentido longitudinal, del elemento BC del nudo inicial.
- $v_1$ Componente de desplazamiento en el sentido transversal, del elemento BC del nudo inicial.
- $\Theta_1$ Rotación del nudo inicial, B.
- $u_2$ Componente de desplazamiento en el sentido longitudinal del elemento BC del nudo final.

- $v_2$ Componente de desplazamiento en el sentido transversal del elemento BC del nudo final.
- $\Theta_2$ Rotación del nudo final, C.

Nótese, que el sentido positivo de las componentes de desplazamiento, coinciden con la dirección positiva de los ejes de coordenadas. Si los ejes de referencia, hubiesen sido los indicados en la figura 2.20. Las componentes de desplazamiento, giro y su nomenclatura serían las presentadas a la derecha de la figura 2.20.

Por lo tanto, la elección del nudo inicial y nudo final de un elemento es arbitraria. En el futuro se usarán los ejes de coordenadas de la figura 2.19, para definir el nudo inicial y el nudo final, en un elemento inclinado. **Si el pórtico es ortogonal el nudo inicial se considera en el nudo inferior del elemento y en los elementos horizontales el nudo inicial se considerará a la izquierda del elemento.** Así se trabajará en este texto pero se destaca una vez más que esto es arbitrario.

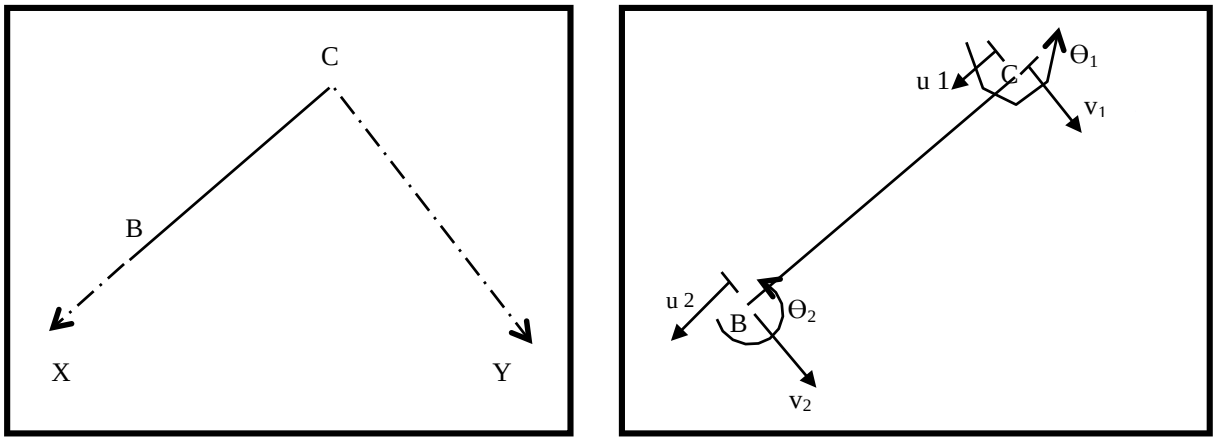



**Figura 2.20** Otro sistema de coordenadas de un elemento

Finalmente, es necesario que se diferencie entre las coordenadas $\boldsymbol{q}$ y las coordenadas $u_1$, $v_1$, $\Theta_1$, $u_2$, etc. Las primeras definen las componentes de desplazamiento de las juntas o nudos de la estructura. Generalmente las componentes de desplazamiento de los nudos son **horizontal** y **vertical,** en cambio que las segundas indican las componentes de desplazamiento de los nudos de cada elemento, estas componentes de desplazamiento son **longitudinal** y **transversal** al eje del elemento y se conoce con el nombre de "Coordenadas Locales". En cambio las coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ son **"Coordenadas Globales"** de la estructura.

Para cierto tipo de problemas, como por ejemplo calcular marcos planos con apoyos inclinados, es conveniente definir **coordenadas especiales de nudos** que sigan la dirección paralela al apoyo de esta forma se facilita el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura.

En la figura 2.21 se presenta un elemento de una estructura que tiene un apoyo inclinado; por el tipo de vínculo en el apoyo se tiene dos grados de libertad, un corrimiento en la dirección paralela al apoyo y una rotación. En este caso las coordenadas del nudo inicial se puede considerar las mostradas a la derecha de la figura 2.21.

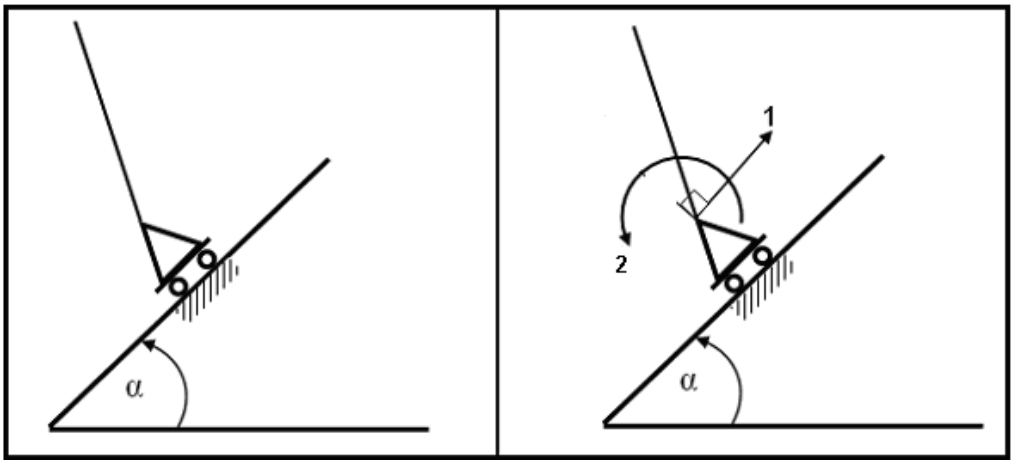



**Figura 2.21** Coordenadas especiales de un nudo.

## 2.4 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO 7**

El modelo de cálculo del pórtico de la figura 2.22, es muy utilizado en la Ingeniería Sísmica; las vigas son totalmente rígidas y las columnas axialmente rígidas. Este pórtico tiene 2 grados de libertad los mismos que se indican a la derecha de la figura 2.22. Se pide dibujar las deformadas elementales.

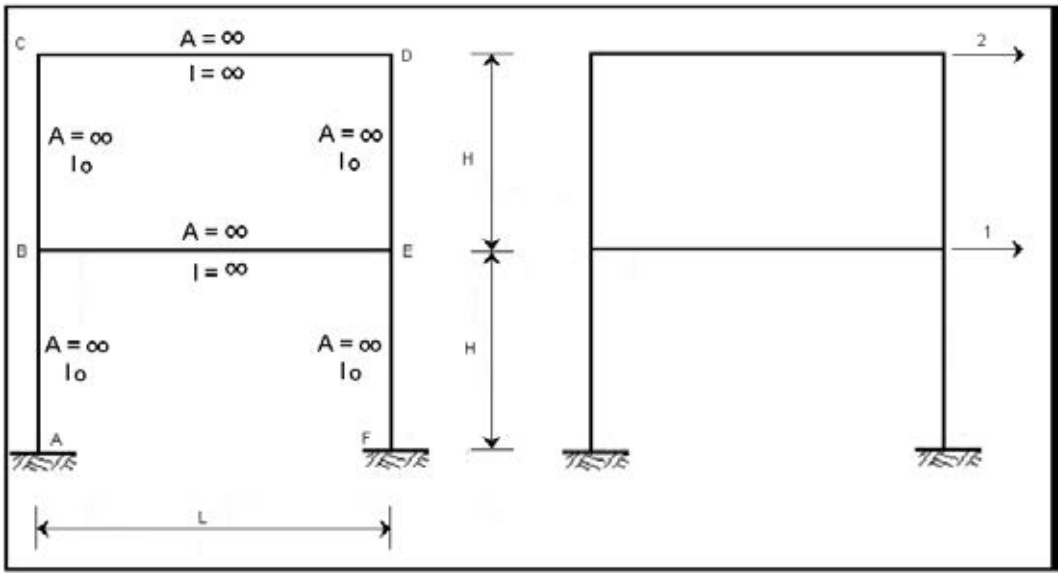



**Figura 2.22** Estructura de Ejemplo 7 y Sistema de coordenadas $Q - q$

- **SOLUCIÓN**

Se deja al estudiante que explique el porqué de los diagramas presentados en las figuras siguientes.

- $v_1$ Componente de desplazamiento en el sentido transversal, del elemento BC del nudo inicial.

- $\Theta_1$ Rotación del nudo inicial, B.

- $u_2$ Componente de desplazamiento en el sentido longitudinal del elemento BC del nudo final.

- $v_2$ Componente de desplazamiento en el sentido transversal del elemento BC del nudo final.

- $\Theta_2$ Rotación del nudo final, C.

Nótese, que el sentido positivo de las componentes de desplazamiento, coinciden con la dirección positiva de los ejes de coordenadas. Si los ejes de referencia, hubiesen sido los indicados en la figura 2.20. Las componentes de desplazamiento, giro y su nomenclatura serían las presentadas a la derecha de la figura 2.20.

Por lo tanto, la elección del nudo inicial y nudo final de un elemento es arbitraria. En el futuro se usarán los ejes de coordenadas de la figura 2.19, para definir el nudo inicial y el nudo final, en un elemento inclinado. **Si el pórtico es ortogonal el nudo inicial se considera en el nudo inferior del elemento y en los elementos horizontales el nudo inicial se considerará a la izquierda del elemento.** Así se trabajará en este texto pero se destaca una vez más que esto es arbitrario.

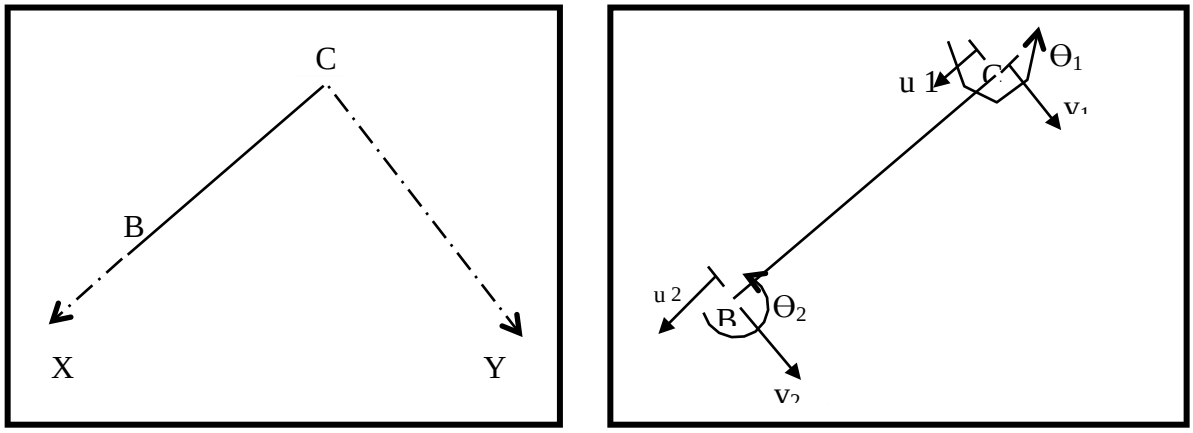



**Figura 2.20** Otro sistema de coordenadas de un elemento

Finalmente, es necesario que se diferencie entre las coordenadas $\boldsymbol{q}$ y las coordenadas $u_1$, $v_1$, $\Theta_1$, $u_2$, etc. Las primeras definen las componentes de desplazamiento de las juntas o nudos de la estructura. Generalmente las componentes de desplazamiento de los nudos son **horizontal** y **vertical,** en cambio que las segundas indican las componentes de desplazamiento de los

♣ Deformada elemental $q_1$

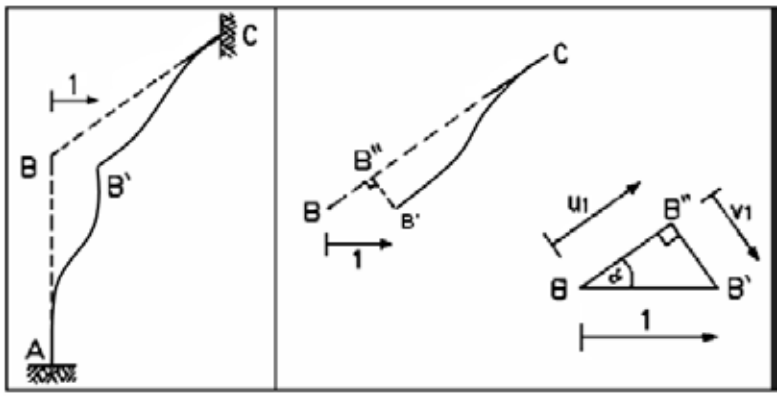



**Figura 2.25** Deformada $q_1$. Coordenadas del elemento BC.

De la figura derecha de 2.25, se tiene que:

$u_1 = \cos \alpha = 4/5$ $u_2 = 0$
$v_1 = -\text{sen } \alpha = -3/5$ $v_2 = 0$
$\Theta_1 = 0$ $\Theta_2 = 0$

♣ Deformada elemental $q_2$

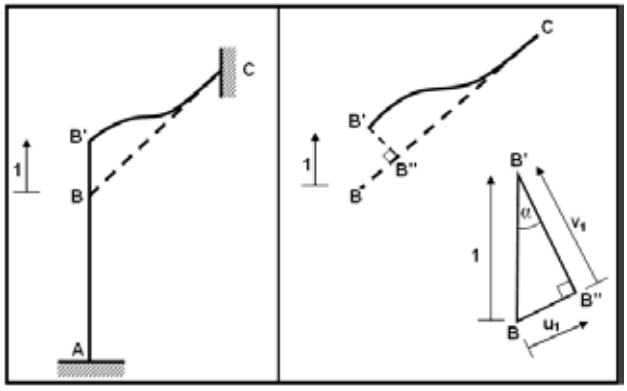



**Figura 2.26** Deformada elemental $q_2$ Coordenadas del elemento BC

Tanto en la coordenada elemental $q_1$ como en esta deformada para definir las coordenadas del miembro BC se procede como sigue:

i) Se determina B" para esto el nudo B primero se deforma axialmente $u_1$ y luego transversalmente $v_1$ hasta llegar a B'.
ii) Aparte se dibuja el triángulo rectángulo BB' B" y en él se ubica el ángulo $\alpha$.

Para la deformada elemental $q_2$ se tiene:

$u_1 = \text{sen } \alpha = 3/5$ $u_2 = 0$
$v_1 = \cos \alpha = 4/5$ $v_2 = 0$
$\Theta_1 = 0$ $\Theta_2 = 0$

♣ En la deformada elemental $q_3$ se tiene:

$u_1 = 0$ $u_2 = 0$
$v_1 = 0$ $v_2 = 0$
$\Theta_1 = 1$ $\Theta_2 = 0$

Se deja al lector dibujar la deformada elemental $q_3$

## ♣ EJEMPLO 9

En la siguiente armadura seleccione sistema Q-q apropiado, dibuje las deformadas elementales e indique las deformadas de cada elemento.

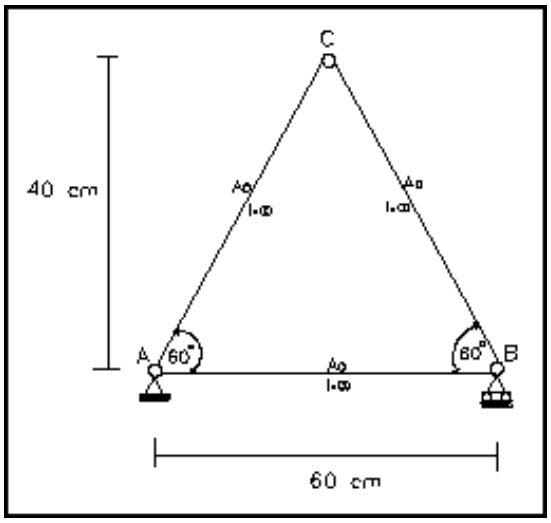



**Figura 2.27** Armadura del ejemplo 9

## ♣ SOLUCIÓN

Se considera que los elementos de una armadura plana son transversalmente rígidos de tal manera que sus elementos trabajan a compresión o tracción. En una armadura plana se tienen dos grados de libertad por nudo, que son las componentes de desplazamiento horizontal y vertical; si existe rotación pero es coordenada dependiente. Los grados de libertad, de la armadura de la figura 2.27 se indican en la figura 2.28 y son un desplazamiento horizontal en el rodillo y dos grados de libertad en el nudo B.

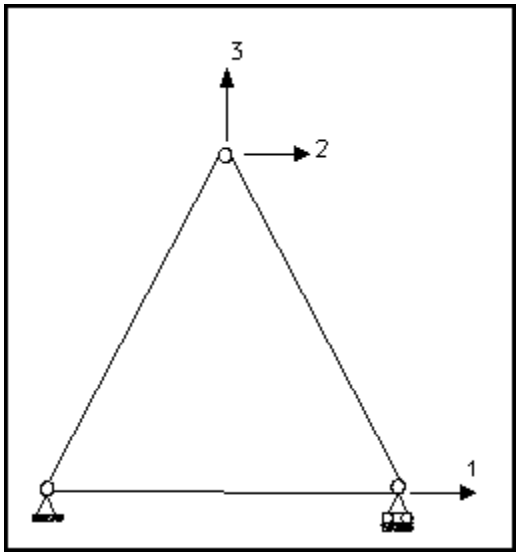



**Figura 2.28** Sistema de Coordenadas Generalizadas ***Q-q***

♣ $q_1 = 1$ y $q_i = 0$ $i \neq 1$

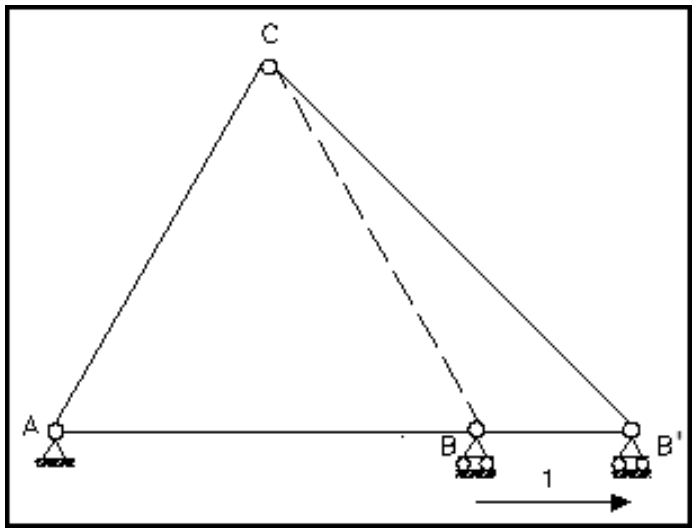



**Figura 2.30** Deformada elemental $q_1$

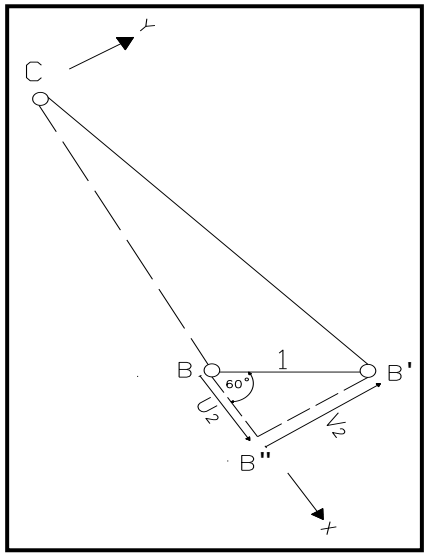
**ELEMENTO AB**

$$u_1 = 0;\ v_1 = 0;\ u_2 = 1;\ v_2 = 0$$

**ELEMENTO AC**

$$u_1 = 0;\ v_1 = 0;\ u_2 = 0;\ v_2 = 0$$

**ELEMENTO BC**




U2 = cos 60º =0,5
V2 = sen 60º =0,860

U1 = 0 U2 = 0

♣ $q_2 = 1$ y $q_i = 0 \quad i \neq 2$

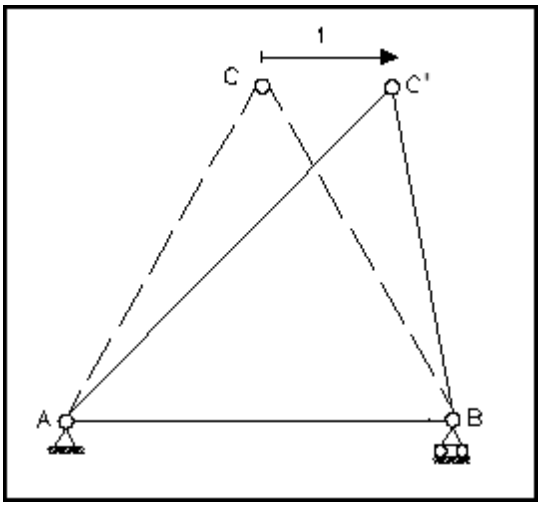
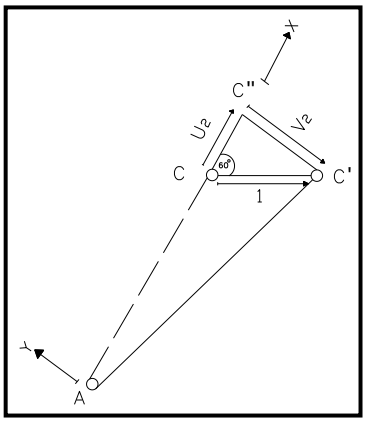



**Figura 2.31** Deformada elemental $q_2$

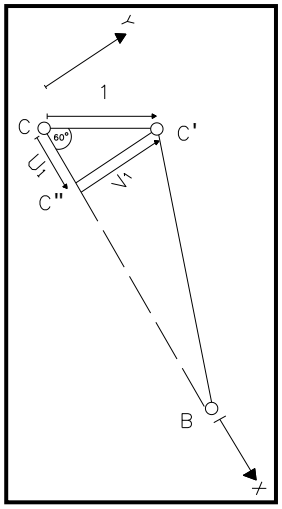
**ELEMENTO AC**




U2 = cos 60º = 0,5
V2 = -sen 60º =-0,860

U1 = 0 U2 = 0

**ELEMENTO BC**




U1 = cos 60º = 0,5
V1 = sen 60º = 0,860

U1 = 0 U2 = 0

♣ $q_3 = 1$ y $q_i = 0$ $i \neq 3$

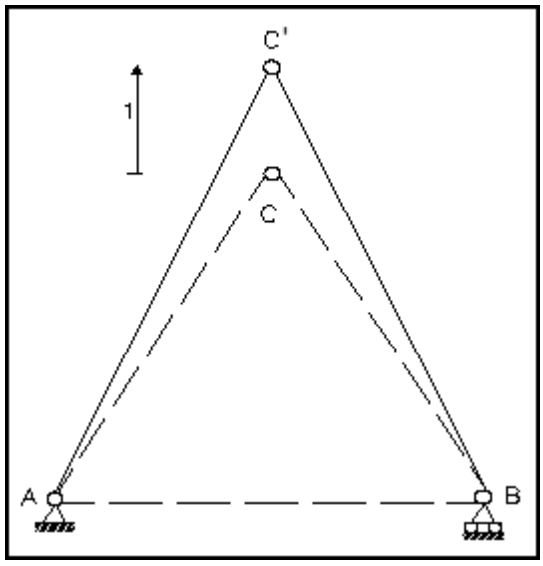
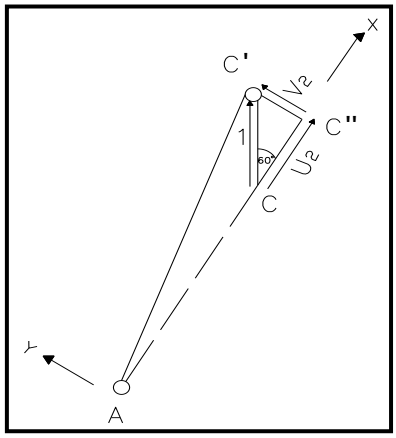



**Figura 2.32** Deformada elemental $q_3$

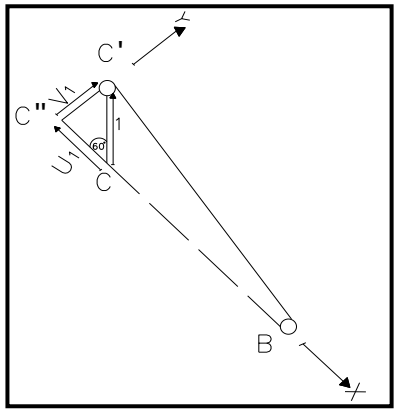
**ELEMENTO AC**




U2 = cos 60º = 0,5
V2 = sen 60º = 0,860

U1 = 0 V1 = 0

**ELEMENTO BC**




U1 = -cos 60º = -0,5
V1 = sen 60º = 0,860

U2 = 0 V2 = 0

En la figura 2.33 se presenta una articulación fija de una armadura. Este tipo de articulación es la que se ha trabajado en el ejemplo desarrollado. No se puede pensar que todas las estructuras de acero tienen este comportamiento de articulación fija, depende de la forma como se construye. Si es una conexión con capacidad de momento se modelará igual que un pórtico plano.

**Figura 2.33** Articulación fija de una estructura de acero.

- **EJEMPLO 10**

En la siguiente estructura seleccione sistema Q-q y determine el Vector de Cargas generalizadas aplicando el Problema Primario y Complementario.

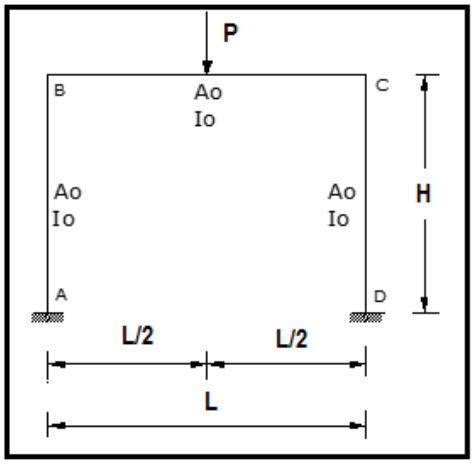



**Figura 2.34** Estructura con carga en un elemento

- **SOLUCIÓN**

Se deja al lector la explicación de los pasos dados en la solución del Ejemplo.

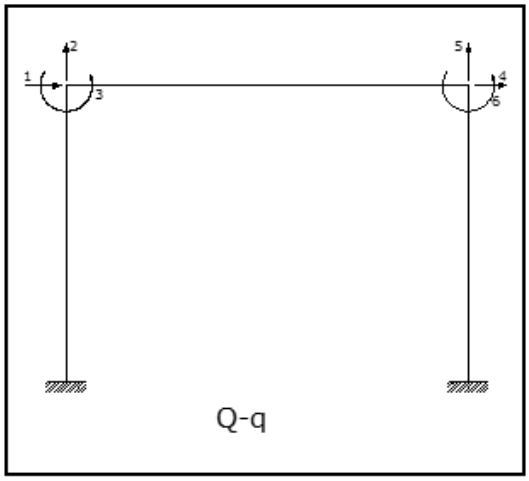



**Figura 2.35** Grados de libertad

- **Problema Primario**

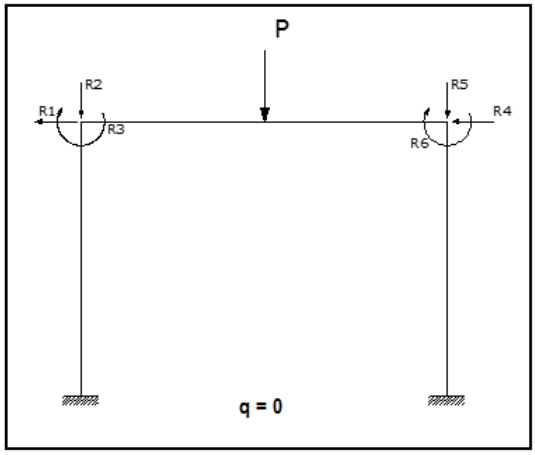



**Figura 2.36** Problema Primario

**Equilibrio de Elementos**

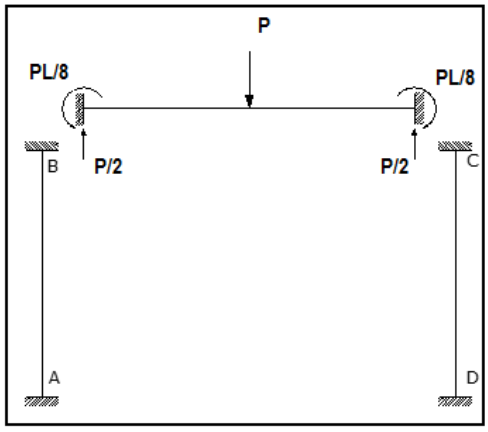



**Figura 2.37** Equilibrio de elementos

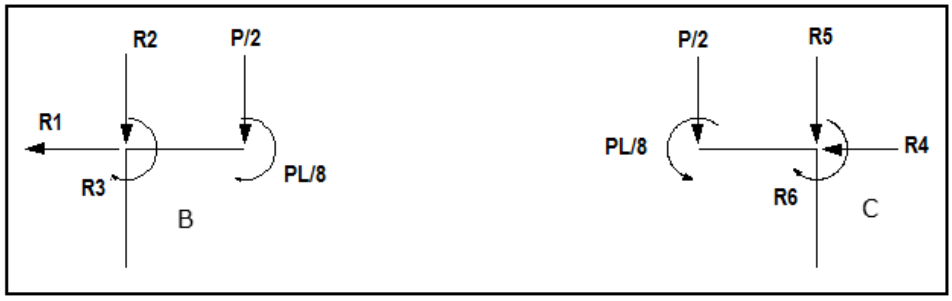



**Figura 2.38** Equilibrio de Nudos

**Equilibrio del Nudo B**

$$\sum Fx = 0 \quad \rightarrow \quad R1 = 0$$

$$\sum FY = 0 \quad \rightarrow \quad R2 + \frac{P}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad R2 = -P/2$$

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow \quad R3 + \frac{PL}{8} = 0 \quad \rightarrow \quad R3 = -PL/8$$

**Equilibrio del Nudo C**

$$\sum Fx = 0 \quad \rightarrow \quad R4 = 0$$

$$\sum FY = 0 \quad \rightarrow \quad R5 + \frac{P}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad R5 = -P/2$$

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow \quad R6 - \frac{PL}{8} = 0 \quad \rightarrow \quad R6 = PL/8$$

- **Problema Complementario**

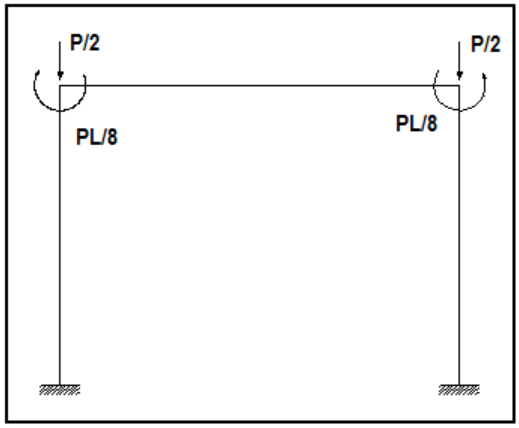
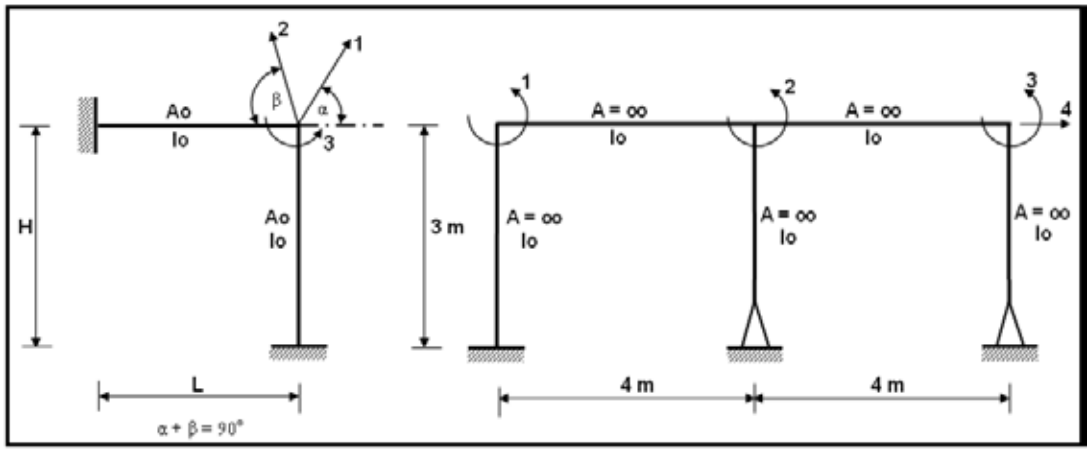



**Figura 2.39** Problema Complementario

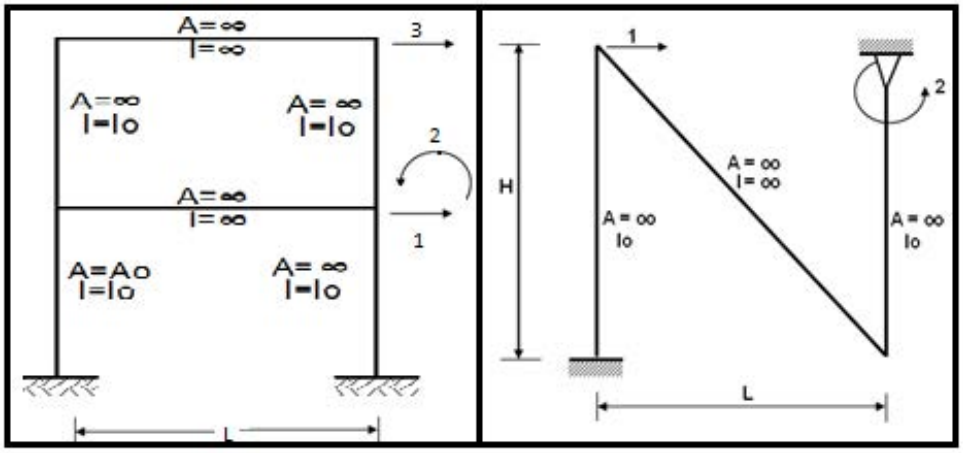
$$\boldsymbol{Q^t} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{P}{2} & -\frac{PL}{8} & 0 & -\frac{P}{2} & \frac{PL}{8} \end{bmatrix}$$

## 2.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

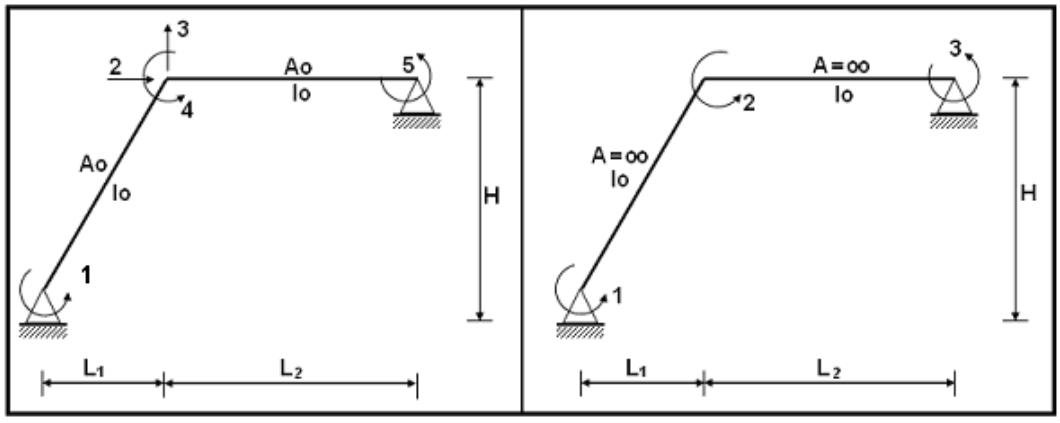
En las siguientes estructuras se ha seleccionado un sistema $Q - q$ para cada ejercicio. Se pide dibujar todos los diagramas de desplazamientos elementales.



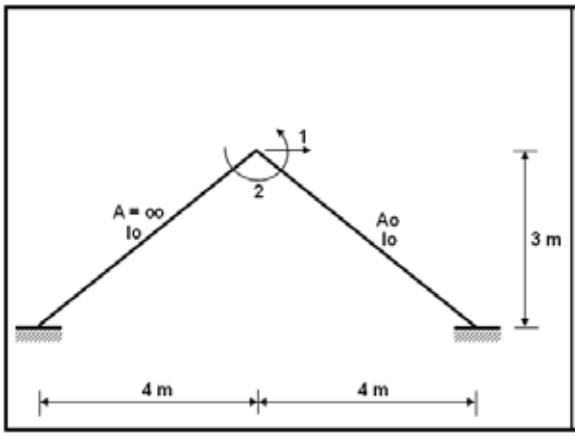

**Ejercicio 1** **Ejercicio 2**



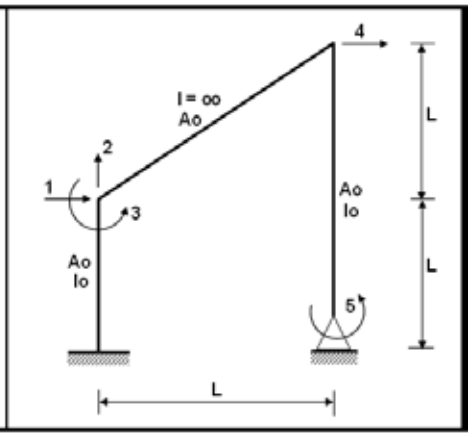

**Ejercicio 3** **Ejercicio 4**



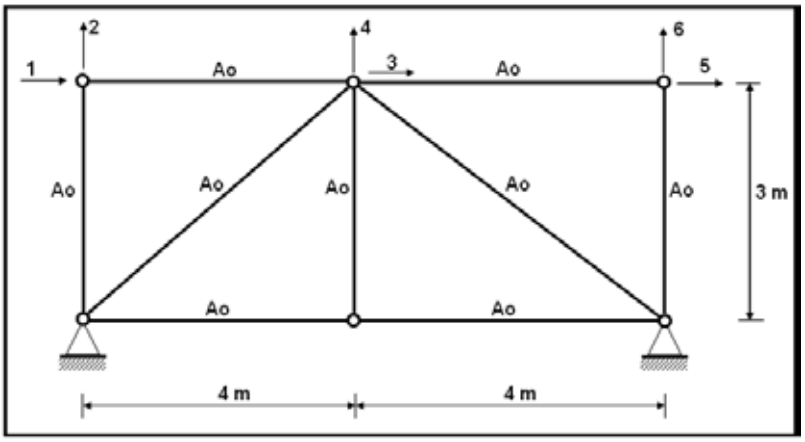

**Ejercicio 5** **Ejercicio 6**




Ejercicio 7




Ejercicio 8




Ejercicio 9

*CAPITULO 3*

# FUNCIONES DE FORMA O DE INTERPOLACIÓN

## RESUMEN

Las funciones de forma tienen una aplicación muy amplia en el análisis estático y dinámico de estructuras razón por la cual en este capítulo se le da la importancia respectiva y se presentan algunas aplicaciones de las mismas. Se inicia el estudio deduciendo las funciones de forma desde el punto de vista estructural y luego con el objeto de que el lector vea que son funciones de interpolación se calculan las mismas considerando que pasan por dos puntos en los que se conoce el desplazamiento y giro, que corresponde a la forma tradicional de cálculo pero también se añaden funciones de forma para flexión de una viga considerando un punto intermedio, con lo que se encuentran funciones de forma más exactas.

Las aplicaciones que se dan están orientadas al cálculo de ordenadas de la elástica y obtención de momentos de empotramiento perfecto para cualquier tipo de carga, todo esto en miembros lineales de sección constante.

Se presenta además la manera como se obtiene los estados de carga **D** y **L** correspondientes a carga permanente y transitoria respectivamente, para el diseño sismo resistente de un edificio de hormigón armado y luego se obtiene las acciones de empotramiento perfecto con funciones de forma. Finalmente se indica una forma práctica para convertir una carga triangular o trapezoidal en uniforme.

## 3.1 ORDENADAS DE LA ELASTICA

Dado un pórtico plano cualquiera, como el mostrado, en la parte superior izquierda de la figura 3.1. En el elemento inclinado BC se tiene un punto interior P. Ahora al actuar cualquier tipo de cargas este se deforma como se observa en la parte superior derecha de 3.1; el punto P pasa a P´. Se desea encontrar las ordenadas de la elástica u(x), v(x) y $\theta(x)$ para el punto P. Siendo:

- u(x) Componente de desplazamiento axial del punto P.
- v(x) Componente de desplazamiento transversal del punto P.
- $\theta(x)$ Rotación del punto P.

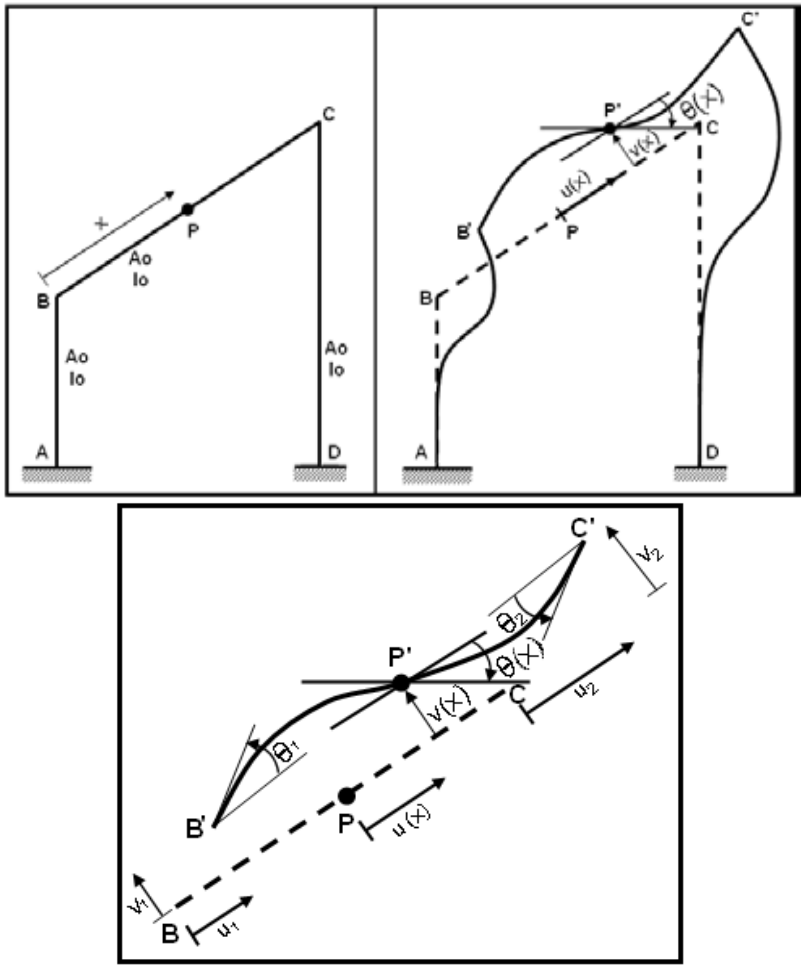



**Figura 3.1** Ordenadas de la Elástica y coordenadas de un elemento

Para comprender el cálculo de las ordenadas de la elástica se aísla al elemento BC y se dibujan las coordenadas del elemento, en la parte inferior de la figura 3.1. Se destaca que para el marco teórico se pudo considerar un punto de cualquiera de las columnas, antes y después de deformarse y encontrar las ordenadas de la elástica pero la explicación es general en la viga inclinada.

Para encontrar las ordenadas de la elástica **se verá la contribución de cada una de las coordenadas del elemento y luego se aplicará el principio de superposición lineal.**

## 3.2 PRIMERA FORMA DE CÁLCULO: RESISTENCIA DE MATERIALES

En este apartado la obtención de las ordenadas de la elástica se realiza aplicando Resistencia de Materiales, es decir desde el punto de vista estructural.

### 3.2.1 Efecto de $u_1$ en la ordenada de la elástica

En el elemento lineal, que se encuentra a la izquierda de la figura 3.2 se le aplica un desplazamiento axial en el nudo inicial como se observa en la parte central de 3.2. Se desea encontrar la ordenada de la elástica axial para encontrar el desplazamiento en un punto P, de la viga. Se destaca que **solo existe un desplazamiento axial del nudo inicial $u_1$ y las demás coordenadas locales son nulas.**

Por facilidad a este elemento se lo considera horizontal, pero su aplicación es general. Para que el miembro de la figura 3.2 experimente un desplazamiento $u_1$ es necesario aplicar una fuerza axial N, la misma que se observa en la parte derecha de la figura 3.2.

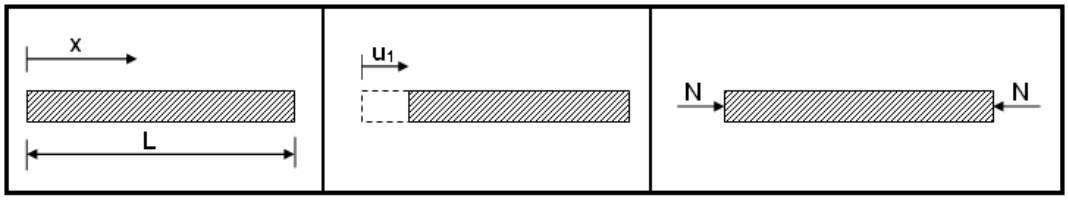



**Figura 3.2** Viga con desplazamiento axial $u_1$ debido a una fuerza axial $N$.

De la resistencia de materiales se conoce:

$$u_1 = \int_o^L \frac{N dx}{A(x) E} \tag{3.1}$$

Donde $A(x)$ es el área de la sección transversal, para el caso de sección variable es función de X, $E$ es el módulo de elasticidad del material y $N$ es la fuerza axial, la misma que es constante, razón por la cual sale de la integral. Luego:

$$u_1 = N \int_0^L \frac{dx}{A(x)\, E}$$

:

En consecuencia la fuerza axial que produce un corrimiento axial de magnitud $u_1$ es:

$$N = \frac{u_1}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)\, E}}$$

Ahora interesa calcular el desplazamiento longitudinal que experimenta un punto cualquiera P del elemento que se encuentra a una distancia X del nudo inicial, cuando existe la carga axial N, si el nudo final permanece fijo. En la figura 3.3 se ilustra el problema en la parte superior de dicha figura se indica la posición inicial del punto P, que se encuentra a una distancia $X$ y en la inferior se aprecia que el punto paso a P', se deformó axialmente $u\,(x)$. No existe deformación transversal por que el problema es de tipo axial.

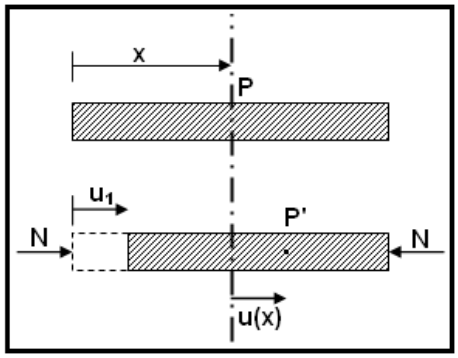



**Figura 3.3** Descripción del problema que conduce al cálculo de $\emptyset_1(x)$

La deformación u(x) será igual a la deformación del nudo inicial $u_1$ menos la deformación producida por la fuerza axial N en el intervalo de longitud X.

$$u(x) = u_1 - \int_0^X \frac{N\,dx}{A(x)\,E}$$

Por ser N constante se tiene:

$$u(x) = u_1 - N\int_0^X \frac{dx}{A(x)\,E}$$

Al reemplazar la ecuación de la carga axial, en la última ecuación y al factorar $u_1$, se tiene:

$$u(x) = u_1\left(1 - \frac{\int_0^X \frac{dx}{A(x)\,E}}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)\,E}}\right) \tag{3.2}$$

A la expresión encerrada entre paréntesis se le conoce con el nombre de **función de forma o función de interpolación** $\phi_1(x)$

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{\int_0^X \frac{dx}{A(x)\,E}}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)\,E}} \tag{3.3}$$

Luego:

$$u(x) = u_1\,\phi_1(x)$$

Como se observa $\varnothing_1$(x), al igual que las demás funciones de forma que se van a calcular, depende de las propiedades geométricas del elemento.

Para elementos de sección constante se tiene que: EA (x) = EA, al reemplazar este valor y resolver la integral definida en la ecuación (3.3), se encuentra:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L} \tag{3.4}$$

### 3.2.2 Efecto de $v_1$ en la ordenada de la elástica

Es complicado, por las integrales que resultan, encontrar las ordenadas de la elástica en un elemento de sección variable cuando solo existe $v_1$, desplazamiento transversal al eje del elemento en el nudo inicial, razón por la cual se presenta el cálculo para un elemento de sección constante. En la figura 3.4, se presenta un elemento en el cual al nudo inicial se da un desplazamiento vertical $v_1$; un punto P que se halla a una distancia X, pasa a P'. El desplazamiento vertical en este punto es $v\,(x)$. Se destaca que $u(x) = 0$. Interesa calcular $v\,(x)$ para cuando solo existe $v_1$ y los demás desplazamientos y giros de los extremos son cero.

Antes de resolver el problema, en la viga de sección constante, se debe indicar que si se tiene una viga de sección variable, se procede en forma similar pero la solución de la ecuación diferencial, que se verá más adelante se realiza con Métodos Numéricos.

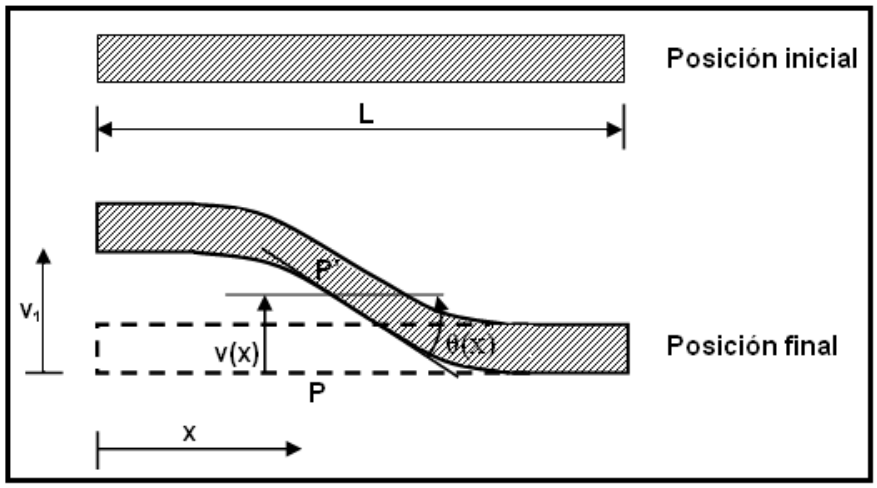



**Figura 3.4** Solo existe deformación transversal en el nudo inicial y las demás son nulas.

Se va a resolver, un problema de flexión, sin carga en el tramo, $P_0 = 0$. Únicamente se tiene condiciones de borde.

La ecuación diferencial que gobierna la flexión, en un elemento de sección constante, en el que se desprecia el efecto del corte, es:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{P_o}{EI}$$

Las variables, no definidas todavía, son $P_o$ que es la carga transversal que actúa en el elemento, $I$ es el momento de inercia a flexión del elemento y $v$ es la ordenada transversal de la elástica. Al ser $P_0 = 0$, la ecuación diferencial se transforma, en:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0 \qquad (3.5)$$

Las condiciones de contorno, del problema, son:

| | | |
|---|---|---|
| 1.- | En X = 0 | v (x) = $v_1$ |
| 2.- | En X = 0 | v´(x) = 0 |
| 3.- | En X = L | v (x) = 0 |
| 4.- | En X = L | v´(x) = 0 |

Las integrales de la ecuación (3.5), al ser la inercia constante, son:

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = A$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = AX + B$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{AX^2}{2} + BX + C \qquad (3.6)$$

$$EIv(x) = \frac{AX^3}{6} + \frac{BX^2}{2} + CX + D \qquad (3.7)$$

Donde A, B, C y D son constantes de integración las mismas que se obtienen al aplicar las condiciones de borde, en las ecuaciones (3.6) y (3.7)

Al reemplazar las dos primeras condiciones de borde, en las ecuaciones (3.6) y (3.7), se encuentran los valores de las constantes de integración D y C. Estas son:

$$D = EI\ v_1$$
$$C = 0$$

Ahora al reemplazar las otras dos condiciones en (3.6) y (3.7), se halla:

$$0 = \frac{A\,L^3}{6} + \frac{B\,L^2}{2} + C\,L + D$$
$$0 = \frac{A\,L^2}{2} + B\,L + C$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta luego de reemplazar C y D.

$$A = \frac{12EI}{L^3} v_1 \qquad\qquad B = -\frac{6EI}{L^2} v_1$$

Al reemplazar A, B, C y D en la expresión (3.6) se tiene:

$$EI\ v(x) = \frac{12\ EI}{L^3}\ v_1\ \frac{X^3}{6} - \frac{6\ EI}{L^2}\ v_1 \frac{X^2}{2} + EI\ v_1$$

De donde, luego de simplificar $EI$, se halla

$$v(x) = v_1\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right) \tag{3.8}$$

Se denomina función de forma $\phi_2(x)$ a la expresión encerrada en el paréntesis.

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \tag{3.9}$$

Luego:

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x)$$

El giro $\theta(x)$ se encuentra derivando la ecuación (3.8) con respecto a X. Por otra parte nótese que u(x) = 0 en este problema.

### 3.2.3 Efecto de $\theta_1$ en la ordenada de la elástica

Con las mismas consideraciones indicadas en el numeral anterior, se tiene que en el elemento existe únicamente $\theta_1$, las demás coordenadas son nulas. En la figura 3.5 se describe el problema, en la parte superior se indica la posición inicial y en la inferior el problema de flexión a resolver.

No se ha colocado el punto P que pasa a P' pero es obvio que solo existe $v(x)$ y que $u(x) = 0$.

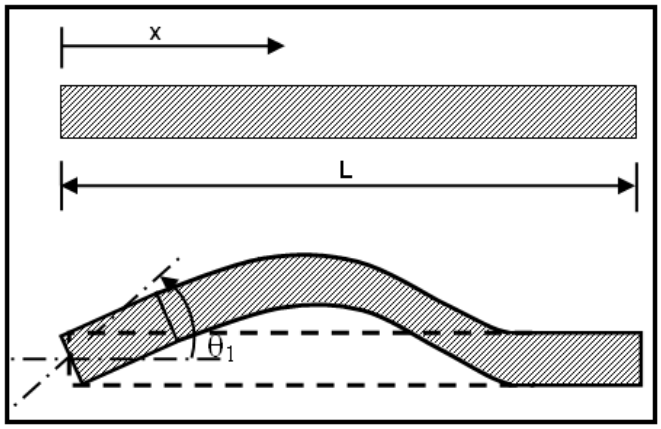



**Figura 3.5** Solo existe $\Theta_1$, las demás componentes de desplazamiento son nulas.

El problema es similar al cálculo de $\phi_2(x)$. Únicamente cambian las condiciones de borde, en este caso son:

1. En X = 0 v(x) = 0
2. En X = 0 v´(x) = $\theta_1$
3. En X = L v(x) = 0
4. En X = L v´(x) = 0

Reemplazando las condiciones de borde en las ecuaciones que definen $v(x), \theta(x)$ se encuentra el sistema de ecuaciones lineales que conduce al cálculo de las constantes de integración. La solución de este sistema reporta:

$$A = \frac{6EI}{L^2}\theta_1 \qquad B = -\frac{4EI}{L}\theta_1 \qquad C = EI\theta_1 \qquad D = 0$$

Finalmente al sustituir los valores de A, B, C y D en $v(x)$, se encuentra luego de alguna simplificación:

$$v(x) = \theta_1\left(\frac{X^3}{L^2} - 2\frac{X^2}{L} + X\right) = \theta_1\,\phi_3(x) \tag{3.11}$$

Por tanto:

$$\phi_3(x) = \frac{X^3}{L^2} - 2\frac{X^2}{L} + X = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 \tag{3.12}$$

Si en el elemento existe $v_1$ y $\theta_1$; la ordenada de la elástica $v(x) = v_1\,\emptyset_2(x) + \theta_1\,\emptyset_3(x)$. Esto ya nos da una idea de la forma de obtener la ordenada de la elástica $v(x)$ cuando existan todos los desplazamientos y giros en los extremos del elemento. Para el efecto axial se tiene algo similar.

El cálculo de $\emptyset_4(x)$ es similar al cálculo de $\emptyset_1(x)$. De igual manera la obtención de $\emptyset_5(x)$ y $\emptyset_6(x)$ es parecido a la forma como se halló $\emptyset_2(x)$ y $\emptyset_3(x)$.

### 3.2.5 Resumen de funciones de forma para sección constante

En base a los cálculos realizados, por inducción, se puede observar que las ecuaciones que definen las ordenadas de la elástica, cuando no existe carga en los elementos, son:

$$u(x) = u_1\ \phi_1(x) + u_2\ \phi_4(x) \tag{3.13}$$

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1\ \phi_3(x) + v_2\ \phi_5(x) + \theta_2\ \phi_6(x) \tag{3.14}$$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v\ '(x) \tag{3.15}$$

Donde $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x), \phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ son las funciones de forma o de interpolación asociadas a: $u_1$, $v_1$, $\theta_1$, $u_2$, $v_2$, y $\theta_2$. Las funciones de forma para un elemento de sección constante, son:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L}$$

$$\phi_2(x) = 1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3}$$

$$\phi_3(x) = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$

$$\phi_4(x) = \frac{X}{L}$$

$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - 2\frac{X}{L}\right)$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

Relaciones fundamentales:

$$\phi_1(x) + \phi_4(x) = 1$$

$$\phi_2(x) + \phi_5(x) = 1$$

$$\phi_3(x) + L\phi_5(x) + \phi_6(x) = X$$

Se destaca que las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.15) son debidas a corrimientos y rotación de los nudos extremos de un elemento; en consecuencia, constituye la solución del problema complementario. **Por lo tanto, en las ecuaciones indicadas se debe añadir el problema primario para obtener la solución total**, como se indicó en el capítulo anterior.

## 3.3 SEGUNDA FORMA DE CÁLCULO: INTERPOLACIÓN

En Métodos Numéricos se denomina Interpolación a la forma de obtener una ecuación que pasa por un número de puntos o condiciones. Por ejemplo si se tienen dos puntos se obtiene un interpolador lineal, que es la ecuación de una recta y es así como se va a obtener $\emptyset_1(x), \emptyset_4(x)$.

En el problema de flexión se tienen 4 condiciones de borde, en consecuencia a partir de un polinomio cúbico se obtendrán las restantes funciones de forma: $\emptyset_2(x), \emptyset_3(x), \emptyset_5(x), \emptyset_6(x)$

### 3.3.1 Problema axial: Cálculo de $\emptyset_1(x)$

En este apartado se obtiene $\emptyset_1(x)$, para ello se recuerda que solo existe un desplazamiento axial en el nudo inicial $u_1$ y todo lo demás es cero. Entonces para encontrar $u(x)$ se debe encontrar una ecuación que pasa por dos puntos dados, con las condiciones de contorno presentadas en la tabla 3.1.

**Tabla 3.1** Condiciones de borde

| Punto | X | $u(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $u_1$ |
| 2 | L | 0 |

La pendiente m de la recta, es:

$$m = \frac{0 - u_1}{L - 0} = -\frac{u_1}{L}$$

Luego de la ecuación de la recta, que pasa por un punto dado y se conoce su pendiente es:

$$u(x) - u_1 = -\frac{u_1}{L}(X - 0)$$

$$u(x) = u_1 - \frac{u_1}{L} X$$

$$u(x) = u_1\left(1 - \frac{X}{L}\right) = u_1\, \phi_1(x)$$

Se deja al lector que obtenga $\emptyset_4(x)$ en forma similar.

### 3.3.2 Problema de flexión: Forma clásica

Ahora se desea encontrar la ordenada de la elástica $v(x)$ para las condiciones de borde indicadas en la tabla 3.2. Se denomina forma clásica cuando para el problema de flexión se tienen las cuatro condiciones indicadas en la Tabla 3.2 y que se indican en la figura 3.6

**Tabla 3.2** Condiciones de borde para encontrar funciones de forma de flexión

| Punto i | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $X_i$ | 0 | L |
| v(x) | $v_1$ | $v_2$ |
| $\theta(x)$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ |

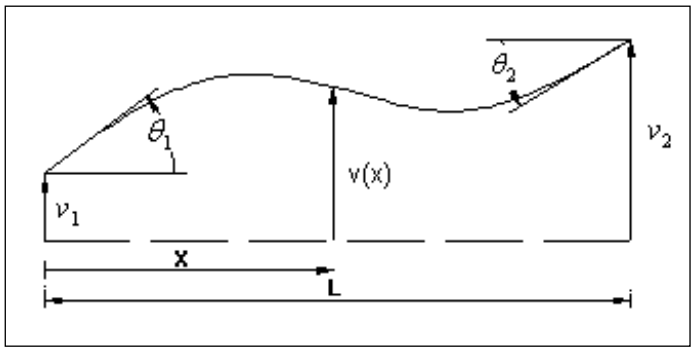



**Figura 3.6** Condiciones de borde del problema de flexión en forma clásica.

Al tener cuatro condiciones se debe trabajar con un polinomio cúbico y más que eso cuando se obtuvo las funciones de forma desde el punto de vista estructural, se encontró que la solución de la ecuación diferencial, para un elemento de sección constante es de tercer orden. Se indica a continuación este polinomio pero las constantes de integración son ahora las siguientes:

$$v(x) = A\,x^3 + B\,x^2 + C\;\;x + D \tag{3.16}$$

$$\theta(X) = 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x + C \tag{3.17}$$

Al aplicar las condiciones de contorno para el punto inicial, X=0, se obtienen las constantes de integración D y C.

$$D = v_1$$

$$C = \theta_1$$

Al reemplazar las condiciones de borde del punto final, X=L se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$A\,L^3 + B\,L^2 = \; v_2 - v_1 - \theta_1 L$$

$$3\,A\,L^2 + 2\,B\,L = \; \theta_2 - \theta_1$$

La solución del sistema de ecuaciones lineales reporta.

$$A = \; -\frac{2}{L^3}\,(v_2 - v_1 - \theta_1\,L) + \frac{1}{L^2}\,(\theta_2 - \theta_1)$$

$$B = \; -\frac{1}{L}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{3}{L^2}\,(v_2 - v_1 - \theta_1\,L)$$

Al reemplazar el valor de las constantes que definen el polinomio cúbico, en (3.16) se encuentra, luego de agrupar términos.

$$v(x) = \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)v_1 + \left(\frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3}\right)v_2 + X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2\theta_1 - \frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)\theta_2$$

De donde:

$$\phi_2(x) = 1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3}$$

$$\phi_3(x) = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$

$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - 2\frac{X}{L}\right)$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

$$v(x) = v_1\emptyset_2(x) + \theta_1\emptyset_3(x) + v_2\emptyset_5(x) + \theta_2\emptyset_6(x)$$

Las funciones de forma presentadas corresponden a la forma clásica de cálculo en que las mismas se obtienen a partir de un polinomio cúbico, que pasa por dos puntos y se tiene cuatro condiciones de borde.

### 3.3.3 Matriz de rigidez en coordenadas locales

A partir de las funciones de forma se puede obtener la matriz de rigidez de un elemento, en coordenadas locales; se destaca que existen otras formas de hacerlo; pero lo importante es que el lector vea una posible aplicación de las funciones de forma.

De la Resistencia de Materiales se conoce que el Momento, $M$ se obtiene a partir de la segunda derivada de la elástica y que el Corte, $V$ derivando tres veces $v(x)$, con las siguientes ecuaciones.

$$M = EI\,\frac{d^2v}{dx^2} \tag{3.18}$$

$$V = EI\,\frac{d^3v}{dx^3} \tag{3.19}$$

Las ecuaciones anotadas fueron deducidas con la condición de que el momento es positivo si produce tracción en la fibra inferior, es decir que el momento en el nudo inicial es horario y en el nudo final anti horario; el cortante es positivo si en el nudo inicial es hacia arriba y en el nudo final hacia abajo.

Por otra parte, la convención de signos que se utiliza en este libro es la siguiente: el momento es positivo si es anti horario y el cortante es positivo si es hacia arriba. Por lo tanto cuando se evalúe el momento con la ecuación (3.18), en el nudo inicial se debe cambiar de signo para el nudo final no; en cambio para el corte (3.19) es al revés, en el nudo inicial es positivo y en el final es negativo.

Al derivar la ecuación que define la ordenada de la elástica $v(x)$ dos y tres veces se obtiene:

$$M = EI\left[v_1\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12\,X}{L^3}\right) + \theta_1\left(-\frac{4}{L} + \frac{6\,X}{L^2}\right) + v_2\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12\,X}{L^3}\right) + \theta_2\left(-\frac{2}{L} + \frac{6\,X}{L^2}\right)\right]$$

$$V = EI\left(\frac{12}{L^3}\,v_1 + \frac{6}{L^2}\,\theta_1 - \frac{12}{L^3}\,v_2 + \frac{6}{L^2}\,\theta_2\right)$$

Sea $M, M'$, el momento en el nudo inicial y final respectivamente y $V, V'$, el corte en el nudo inicial y final. Al encontrar estos momentos y cortantes con las ecuaciones obtenidas y al escribir en forma matricial se tiene.

$$\begin{bmatrix} V \\ M \\ V' \\ M' \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

De donde, la matriz de rigidez de un elemento de sección constante $\boldsymbol{K}$, es:

$$\boldsymbol{k} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

La matriz de rigidez obtenida es para la flexión, es muy fácil incorporar el efecto axial y obtener la matriz de rigidez en coordenadas globales para un elemento de sección constante. Esto se ve con más detalle en capítulos posteriores, donde se incorpora el efecto de corte a la ecuación (3.20).

El objetivo de este apartado era mostrar que a partir de las funciones de forma se halla la matriz de rigidez de un elemento.

## 3.4 TERCERA FORMA DE CÁLCULO

Otra forma de encontrar las funciones de forma es considerando el comportamiento de un elemento totalmente rígido, como el presentado en la figura 3.7. La deformada ante cualquier tipo de carga será como de cuerpo rígido y es la indicada a la izquierda de la figura 3.7. Las ordenadas de la elástica para este elemento se observan a la derecha de 3.7.

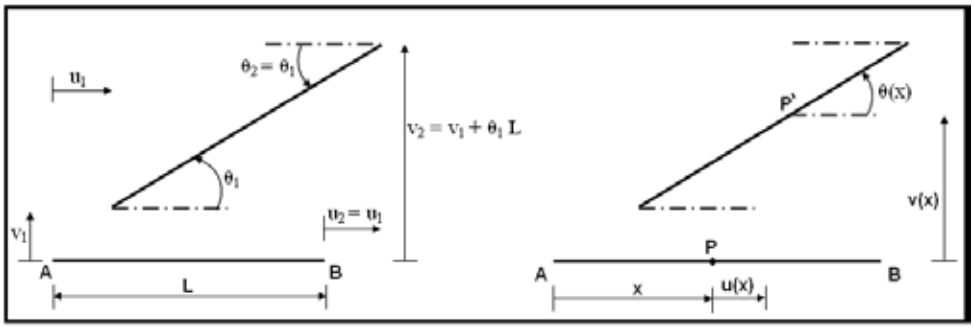



**Figura 3.7** Deformada de un elemento totalmente rígido y ordenadas de la elástica

Por ser axialmente rígido, se tiene que:

$$u(x) = u_1$$

De la figura derecha de 3.7, se encuentra por geometría, lo siguiente:

$$v(x) = v_1 + \theta_1 \; X$$
$$\theta(x) = \theta_1$$

En base a las ecuaciones, se calcularán las funciones de forma $\phi_4(x), \phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ en el presente apartado.

### 3.4.1 Cálculo de $\phi_4(x)$

Al reemplazar la ecuación de la elástica $u(x)$ en la primera ecuación, se obtiene:

$$u_1\ \phi_1(x) + u_2\ \phi_4(x) = u_1$$

Pero por ser el miembro, axialmente rígido $u_2 = u_1$. Luego, la ecuación, queda:

$$u_1\phi_1(x) + u_1\phi_4(x) = u_1$$

De donde:

$$\phi_1(x) + \phi_4(x) = 1 \qquad (3.21)$$

La ecuación (3.21) es fundamental y se aplica para elementos de sección constante o variable. Para un elemento de sección constante, se tiene:

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 1 - \left(1 - \frac{X}{L}\right) = \frac{X}{L}$$

$$\phi_4(x) = \frac{X}{L}$$

### 3.4.2 Cálculo de $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$

De igual manera, si se remplaza la ecuación $v(x)$ en la segunda de las ecuaciones, se halla:

$$v(x) = v_1\phi_2(x) + \theta_1\phi_3(x) + v_2\phi_5(x) + \theta_2\phi_6(x) = v_1 + \theta_1(x)$$

Pero por ser miembro transversalmente rígido, se tiene:

$$v_2(x) = v_1 + \theta_1 L$$

$$\theta_2 = \theta_1$$

Al reemplazar se encuentra:

$$v_1\,\phi_2(x) + \theta_1\,\phi_3(x) + v_1\,\phi_5(x) + \theta_1\,L\,\phi_5(x) + \theta_1\,\phi_6(x) = v_1 + \theta_1\,X$$

$$v_1\left[\phi_2(x) + \phi_5(x)\right] + \theta_1\left[\phi_3(x) + L\phi_5(x) + \phi_6(x)\right] = v_1 + \theta_1\,X$$

Para que esta expresión se cumpla, deberá cumplirse que:

$$\phi_2(x) + \phi_5(x) = 1$$
$$\phi_3(x) + L\,\phi_5(x) + \phi_6(x) = X \qquad (3.22)$$

Relaciones que permitirán calcular fácilmente $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ a partir de $\phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$. Para un elemento lineal de sección constante se tiene:

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - \left(1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3}\right) = 3\frac{X^2}{L^2} - 2\frac{X^3}{L^3} = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - \frac{2X}{L}\right)$$

$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - \frac{2X}{L}\right)$$

Usando, la relación $\phi_3(x) + L\,\phi_5(x) + \phi_6(x) = X$, y por un procedimiento análogo se tiene:

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

### 3.4.3 Resumen de las ordenadas de la elástica

- **Elemento totalmente flexible**

$$u(x) = u_1\,\phi_1(x) + u_2\,\phi_4(x)$$
$$v(x) = v_1\,\phi_2(x) + \theta_1\,\phi_3(x) + v_2\,\phi_5(x) + \theta_2\,\phi_6(x)$$
$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v\,'(x)$$

- **Elemento axialmente rígido**

Si un elemento es axialmente rígido A =∞, significa que, $u_1 = u_2$, en consecuencia no existe $\phi_1(x)$ y $\phi_4(x)$, quedando de la siguiente manera las expresiones de la elástica:

$$u(x) = u_1 = u_2$$
$$v(x) = v_1\,\phi_2(x) + \theta_1\,\phi_3(x) + v_2\,\phi_5(x) + \theta_2\,\phi_6(x) \qquad (3.23)$$
$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v\,'(x)$$

- **Elemento transversalmente rígidos**

El elemento no trabaja a flexión, I =∞, solo se deforma axialmente. Por consiguiente, las expresiones de la elástica son:

$$u(x) = u_1\,\phi_1(x) + u_2\,\phi_4(x)$$
$$v(x) = v_1 + \theta_1\,X \qquad (3.24)$$
$$\theta(x) = \theta_1 = \theta_2$$

Por lo tanto, cuando el miembro es transversalmente rígido, no es necesario calcular $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$.

## 3.5 INTRODUCCIÓN A LOS ELEMENTOS FINITOS

En este apartado se van a obtener las funciones de forma y la matriz de rigidez para un elemento lineal, en forma similar, por no decir igual, a la presentada en los apartados 3.3.2 y 3.3.3. Pero en una forma similar a la que se hace con los elementos finitos. Se destaca que un elemento lineal es un elemento finito de dos nudos; para el caso de flexión se consideran 2 grados de libertad en cada nudo.

### 3.5.1 Funciones de forma en un elemento finito lineal de dos nudos

Otra manera de interpolar, para el caso de flexión en que se desprecia el efecto de corte, consiste en imponerse un determinado polinomio, cuyas constantes se calculan en base a las condiciones de borde. Para imponerse el polinomio es necesario tener en cuenta que la deformación transversal de un elemento viene definida por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon = y\,\frac{d^2 v(x)}{dx^2}$$

Donde $\varepsilon$ es la deformación transversal, $y$ es la ordenada vertical que define un punto de la viga, medida a partir del eje. En el apartado 3.3.2, se indicó que la ordenada de la elástica $v(x)$ tiene que ser de la siguiente forma.

$$v(x) = A + B\,X + C\,X^2 + D\,X^3 \tag{3.25}$$

Al derivar (3.25) se encuentra el giro:

$$\theta(x) = B + 2C\,X + 3D\,X^2 \tag{3.26}$$

Las condiciones de contorno que sirven para el cálculo de las constantes A, B, C Y D son:

1. En X = 0 $\quad v(x) = v_1$
2. En X = 0 $\quad \theta(x) = \theta_1$
3. En X = L $\quad v(x) = v_2$
4. En X = L $\quad \theta(x) = \theta_2$

Al reemplazar las cuatro condiciones, en las ecuaciones (3.25) y (3.26), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

Algunos libros de elementos finitos, al sistema de ecuaciones lo escriben en forma compacta de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{C}\,\beta$$

Donde $\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{n}}$ es el vector que contiene el término independiente del sistema, $\boldsymbol{C}$ es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales y $\beta$ es el vector de incógnitas.

$$\beta = \boldsymbol{C}^{-1}\,\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{n}}$$

La inversa de la matriz $\boldsymbol{C}$ es:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\beta = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ -\frac{3}{L^2}v_1 - \frac{2}{L}\theta_1 + \frac{3}{L^2}v_2 - \frac{1}{L}\theta_2 \\ \frac{2}{L^3}v_1 + \frac{1}{L^2}\theta_1 - \frac{2}{L^3}v_2 + \frac{1}{L^2}\theta_2 \end{bmatrix}$$

Al sustituir las constantes A, B, C Y D en la ecuación que define la ordenada de la elástica vertical (3.25), se encuentra luego de factorar, lo siguiente:

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1\ \phi_3(x) + v_2\ \phi_5(x) + \theta_2\ \phi_6(x)$$

En forma matricial:

$$v(x) = \Phi\ U^n$$

Siendo:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_5(x) & \phi_6(x) \end{bmatrix}$$

### 3.5.2 Cálculo de la matriz de rigidez de miembro

Al calcular la deformación $\varepsilon$ , se tiene:

$$\varepsilon = y\frac{d^2v}{dx^2} = y\frac{d^2}{dx^2}\Phi U^n = BU^n$$

Siendo:

$$B = Y\frac{d^2}{dx^2}\Phi = y\left[\frac{d^2}{dx^2}\phi_2(x) \quad \frac{d^2}{dx^2}\phi_3(x) \quad \frac{d^2}{dx^2}\phi_5(x) \quad \frac{d^2}{dx^2}\phi_6(x)\right]$$

Las segundas derivadas de las funciones de forma indicadas, reportan:

$$B = y\left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12X}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6X}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12X}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6X}{L^2}\right]$$

Para encontrar la matriz de rigidez de un elemento, para el caso de flexión, se tiene:

$$k = \iiint \overline{B}^t E \overline{B}\, d_V \tag{3.27}$$

Donde $d_V$ es un diferencial de volumen. En el apartado 3.3.3 se obtuvo directamente la matriz de rigidez del elemento finito lineal de dos nudos. La forma más general en que se trabaja con los elementos finitos es la indicada en la ecuación (3.27) en la cual la matriz de rigidez se halla integrando; la integración se realiza empleando la cuadratura de Gauss.

### 3.5.3 Elemento finito lineal de 3 nudos

Se desea encontrar las funciones de forma y matriz de rigidez, de un elemento finito lineal considerando tres nudos, los dos extremos y uno en el centro. A las funciones de forma de este elemento se denomina funciones "refinadas". Se realiza todo esto para que el lector vea que es algo similar a lo realizado en el apartado 3.3.3, cuando se trabajó el elemento lineal con dos nudos, pero no se presentará aplicaciones en este libro con las funciones de forma refinadas es más se las identificará con otra letra. Evidentemente que es mejor trabajar un elemento finito de lineal con 3 nudos en relación a un elemento finito lineal de 2 nudos, especialmente cuando se tiene carga en el elemento.

En la figura 3.8 se presenta la nomenclatura considerada en los tres nudos y en la tabla 3.3, se indican las condiciones de "borde".

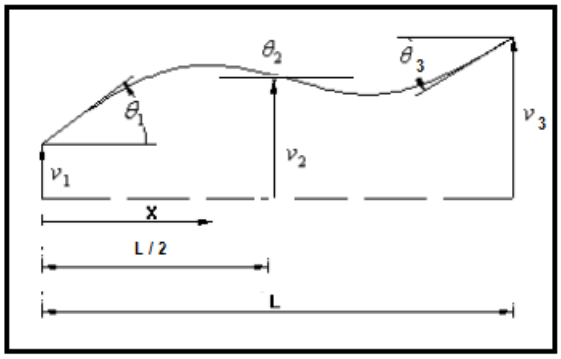



**Figura 3.8** Elemento con tres puntos de interés

**Tabla 3.3** Condiciones y nomenclatura para hallar funciones de forma refinadas

| Punto i | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $X_i$ | 0 | L / 2 | L |
| v(x) | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
| $\theta(x)$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ |

Al tener 6 puntos la ordenada de la elástica $v(x)$ será un polinomio de quinto grado, de la forma:

$$v(x) = A\,x^5 + B\,x^4 + C\;x^3 + D\,x^2 + E\,x + F$$

$$\theta(x) = 5\,A\,x^4 + 4\,B\,x^3 + 3\,C\,x^2 + 2\,D\,x + E$$

Al reemplazar las condiciones indicadas en la tabla 3.3, en las ecuaciones que definen el giro y el momento se obtiene, el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{L}{2}\right)^5 & \left(\frac{L}{2}\right)^4 & \left(\frac{L}{2}\right)^3 & \left(\frac{L}{2}\right)^2 & \left(\frac{L}{2}\right) & 1 \\ 5\left(\frac{L}{2}\right)^4 & 4\left(\frac{L}{2}\right)^3 & 3\left(\frac{L}{2}\right)^2 & 2\left(\frac{L}{2}\right) & 1 & 0 \\ L^5 & L^4 & L^3 & L^2 & L & 1 \\ 5L^4 & 4L^3 & 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta.

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24\,v_1}{L^5} - \frac{24v_3}{L^5} - \frac{4\theta_1}{L^4} - \frac{16\theta_2}{L^4} - \frac{4\theta_3}{L^4} \\ \frac{16v_2}{L^4} - \frac{68\,v_1}{L^4} + \frac{52v_3}{L^4} + \frac{12\theta_1}{L^3} + \frac{40\theta_2}{L^3} + \frac{8\,\theta_3}{L^3} \\ \frac{66v_1}{L^3} - \frac{32\,v_2}{L^3} - \frac{34v_3}{L^3} - \frac{13\theta_1}{L^2} - \frac{32\theta_2}{L^2} - \frac{5\,\theta_3}{L^2} \\ \frac{16v_2}{L^2} - \frac{23\,v_1}{L^2} + \frac{7v_3}{L^2} + \frac{6\theta_1}{L} + \frac{8\theta_2}{L} + \frac{\theta_3}{L} \\ \theta_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Al reemplazar las constantes de integración en la ecuación que define la ordenada de la elastica y luego de agrupar términos se halla.

$$v(\mathrm{x}) = \mathrm{N}_1(\mathrm{x})\,v_1 + \mathrm{N}_2(\mathrm{x})\,\theta_1 + \mathrm{N}_3(\mathrm{x})\,v_2 + \mathrm{N}_4(\mathrm{x})\,\theta_2 + \mathrm{N}_5(\mathrm{x})\,v_3 + \mathrm{N}_6(\mathrm{x})\,\theta_3 \qquad (3.28)$$

Donde $N_i(x)$ son las funciones de forma para el elemento lineal de 3 nudos

$$\mathrm{N1(x)} = 24\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^5 - 68\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^4 + 66\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^3 - 23\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^2 + 1$$

$$\mathrm{N3(x)} = 16\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^4 - 32\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^3 + 16\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^2$$

$$\mathrm{N5(x)} = -24\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^5 + 52\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^4 - 34\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^3 + 7\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^2$$

$$\mathrm{N2(x)} = -4\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^4 + 12\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^3 - 13\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^2 + 6\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right) - \mathrm{x}$$

$$\mathrm{N4(x)} = -16\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^4 + 40\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^3 - 32\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^2 + 8\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)$$

$$\mathrm{N6(x)} = -4\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^4 + 8\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^3 - 5\,\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)^2 + \mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)$$

Para encontrar la matriz de rigidez, se procede en forma similar a la descrita en el apartado 3.3.3 y se obtiene lo siguiente.

$$k = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{5092}{35 \cdot L^3} & \frac{1138}{35 \cdot L^2} & \frac{512}{5 \cdot L^3} & \frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{1508}{35 \cdot L^3} & \frac{242}{35 \cdot L^2} \\ \frac{1138}{35 \cdot L^2} & \frac{332}{35 \cdot L} & \frac{128}{5 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} & \frac{242}{35 \cdot L^2} & \frac{38}{35 \cdot L} \\ \frac{512}{5 \cdot L^3} & \frac{128}{5 \cdot L^2} & \frac{1024}{5 \cdot L^3} & 0 & \frac{512}{5 \cdot L^3} & \frac{128}{5 \cdot L^2} \\ \frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} & 0 & \frac{256}{7 \cdot L} & \frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} \\ \frac{1508}{35 \cdot L^3} & \frac{242}{35 \cdot L^2} & \frac{512}{5 \cdot L^3} & \frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{5092}{35 \cdot L^3} & \frac{1138}{35 \cdot L^2} \\ \frac{242}{35 \cdot L^2} & \frac{38}{35 \cdot L} & \frac{128}{5 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} & \frac{1138}{35 \cdot L^2} & \frac{332}{35 \cdot L} \end{pmatrix}$$

## 3.6 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE FORMA

### 3.6.1 Cálculo de momentos de Empotramiento

Del estudio anterior se deduce que: $\phi_1(x)$, es la elástica longitudinal, cuando existe un desplazamiento unitario en el nudo inicial, $u_1 = 1$ y los demás desplazamientos nulos. $\phi_2(x)$ es la elástica transversal cuando existe $v_2 = 1$ y los demás desplazamientos y rotaciones nulas, etc.

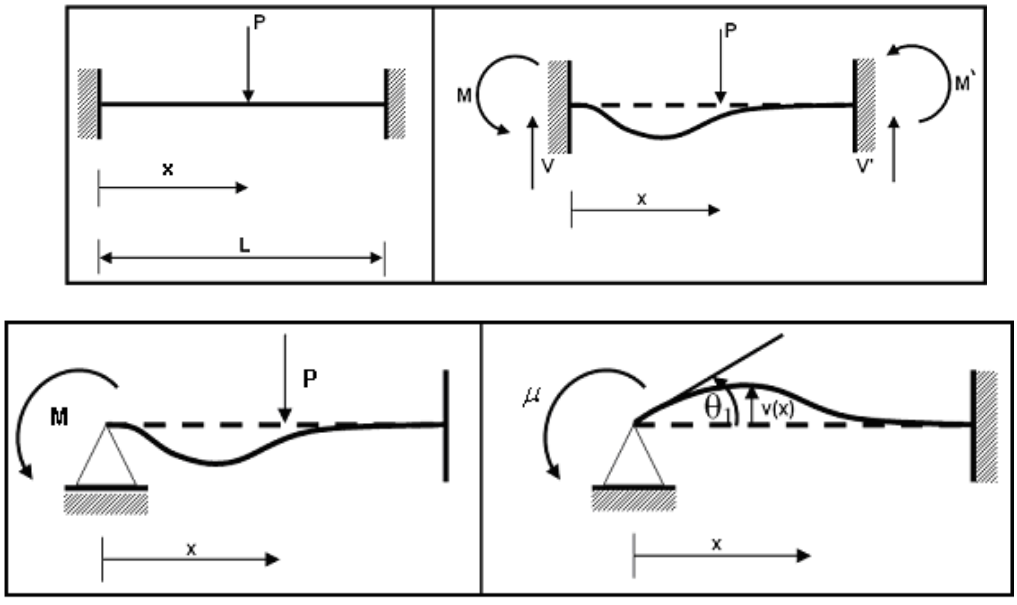



**Figura 3.9** Cálculo del Momento de empotramiento perfecto en nudo inicial

En la parte superior izquierda, de la figura 3.9 se presenta una viga empotrada-empotrada que también se conoce con el nombre de biempotrada, con una carga vertical P, actuando a una distancia X del nudo inicial; a la derecha se observa la elástica de deformación vertical y las acciones de empotramiento perfecto, que garantizan el equilibrio del elemento.

Ahora si se elimina el empotramiento pero se coloca su momento M, se tendrá lo ilustrado en la parte inferior izquierda de la figura 3.9, nótese que el giro es nulo tanto en el nudo inicial como final a esto se denominará sistema I.

Por otra parte, al aplicar un momento cualquiera μ de tal forma que produzca un ángulo $\theta_1$ en el nudo inicial y los demás corrimientos de nudo cero, como se indica en la parte inferior derecha de la figura 3.9, se tiene el sistema II.

El trabajo virtual del sistema I en el sistema II que se llamará $TV_{I-II}$ es:

$$TV_{I-II} = M\,\theta_1 - P\,v(x)$$

De otro lado el trabajo virtual del sistema II en I, $TV_{I-II}$ vale:

$$TV_{II-I} = \mu\,0 = 0$$

Como $TV_{I-II} = TV_{I-II}$ se tiene que:

$$M\theta_1 - P\,v(x) = 0$$

De donde:

$$M = \frac{P\,v(x)}{\theta_1}$$

Al existir únicamente el giro $\theta_1$ en el gráfico del sistema II, el valor de $v(x) = \theta_1\,\phi_3(x)$. Al reemplazar este valor se encuentra.

$$M = P\,\phi_3(x) \qquad (3.29)$$

Por un procedimiento similar se obtiene:

$$M' = P\,\phi_6(x) \qquad (3.30)$$

### 3.6.2 Cálculo de cortantes de empotramiento

En el sistema de cargas, indicado en la parte superior de la figura 3.9, se procede al cálculo del cortante en el nudo inicial para esto se elimina el empotramiento perfecto y se coloca un empotramiento móvil como lo ilustra la figura 3.10 pero actúa el cortante $V$. Este será el nuevo sistema I, nótese que el nudo inicial no se desplaza verticalmente; para que se mueva verticalmente se aplica una fuerza F de tal forma que produzca un corrimiento $v_1$ y todos los demás corrimientos de nudo nulos, teniéndose de esta manera el sistema II.

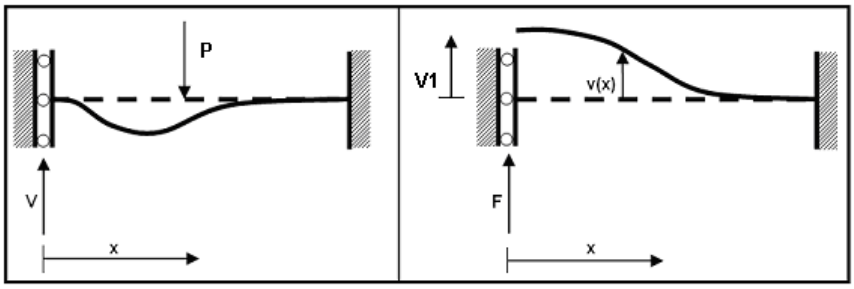


**Figura 3.10** Sistemas I y II para el cálculo del cortante de empotramiento en el nudo inicial

Al aplicar trabajos virtuales y proceder de forma similar al numeral anterior se tiene:

$$TV_{I-II} = V\ v_1 - P\ v(x) \qquad TV_{II-I} = F\ 0 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad V\ v_1(x) - P\ v(x) = 0 \ \Rightarrow \qquad V = \frac{P\ v(x)}{v_1}$$

Pero $v(x) = v_1\ \phi_2(x)$ Luego:

$$V = P\ \phi_2(x) \tag{3.31}$$

Al trabajar con $V'$ se obtiene:

$$V' = P\ \phi_5(x) \tag{3.32}$$

### 3.6.3 Cálculo de la fuerza axial de empotramiento

En este caso la carga P actúa axial al eje del elemento y se encuentra a una distancia X. Se deja al lector la explicación de la forma como se obtiene la fuerza axial de empotramiento $N$ en el nudo inicial y $N'$ en el nudo final, en forma resumida se tiene:

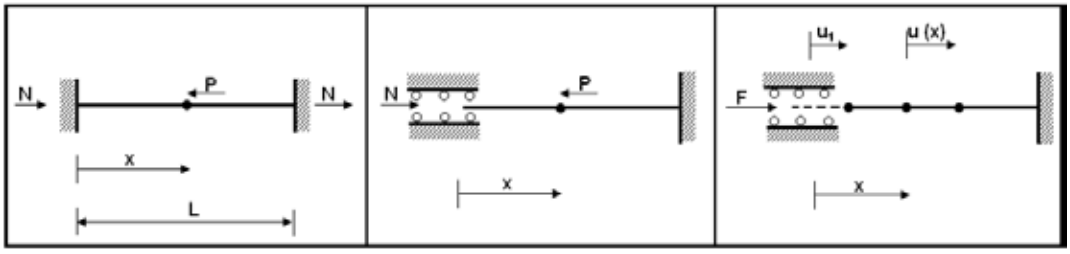



**Figura 3.11**Fuerza axial en un elemento y sistemas I y II para el cálculo de la fuerza axial.

$$TV_{I-II} = N\ u_1 - P\ u(x) \qquad TV_{II-I} = F\ 0 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad N\ u_1 - P\ u(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{P \quad u(x)}{u_1}$$

Pero u(x) = $u_1$ (x) $\phi_1$ (x).

Luego:

$$N = P\ \phi_1(x) \tag{3.33}$$

De una manera similar se demuestra que:

$$N' = P \quad \phi_4(x) \tag{3.34}$$

Es decir, que una interpretación estática de las funciones de formas es la siguiente:

- $\phi_1(x)$ es la línea de influencia de la fuerza axial N.
- $\phi_2(x)$ es la línea de influencia de la fuerza de corte V.
- $\phi_3(x)$ es la línea de influencia del momento M.
- $\phi_4(x)$ es la línea de influencia de la fuerza axial $N'$.

- $\phi_5(x)$ es la línea de influencia de la fuerza de corte $V'$.
- $\phi_6(x)$ es la línea de influencia del momento $M'$.

Antes de proceder a realizar ejemplos, sobre el cálculo de momentos y fuerzas de empotramiento perfecto, es necesario tener presente:

i. La abscisa X se mide a lo largo del eje del elemento, no en la proyección horizontal como puede pensarse en elementos inclinados.

ii. En las ecuaciones (3.29) a (3.32), la carga P actúa perpendicular al eje del miembro, **no es vertical en un elemento inclinado sino perpendicular al eje del elemento.**

iii. En las ecuaciones (3.33) y (3.34), la carga P es axial al eje del miembro, **no es horizontal en un elemento inclinado, sino que se mide en la dirección axial**.

### 3.6.4 Forma directa de encontrar las acciones de empotramiento perfecto

Otra forma de demostrar las ecuaciones (3.29) a (3.34) es la siguiente. Para el caso de flexión se tiene que el trabajo de la fuerza vertical P, en la deformada $v(x)$ es:

$$TV = P\ v(x) = P\ [v_1\ \emptyset_2(x) + \theta_1\ \emptyset_3(x) + v_2\ \emptyset_5(x)\ +\ \theta_2\ \emptyset_6(x)]$$

Por otro lado al liberar los nudos se tienen fuerzas discretas $V, M, V', M'$, para el caso de flexión, cuyo trabajo virtual vale:

$$TV = V\ v_1 + M\ \theta_1 + V'\ v_2\ +\ M'\ \theta_2$$

Pero estos dos trabajos virtuales deben ser iguales, luego:

$$P[v_1\ \emptyset_2(x) + \theta_1\ \emptyset_3(x) + v_2\ \emptyset_5(x)\ +\ \theta_2\ \emptyset_6(x)] = V\ v_1 + M\ \theta_1 + V'\ v_2\ +\ M'\ \theta_2 \qquad (3.35)$$

Para calcular el cortante $V$ solo existe $v_1$ y los demás nulos $\theta_1 = 0;\ v_2 = 0;\ \theta_2 = 0$. Al reemplazar esto en la ecuación (3.35) se obtiene:

$$P\ \emptyset_2(x) = V$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (3.35) se demuestra el cálculo de las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para flexión; se deja al lector la generalización para el caso de las fuerzas axiales.

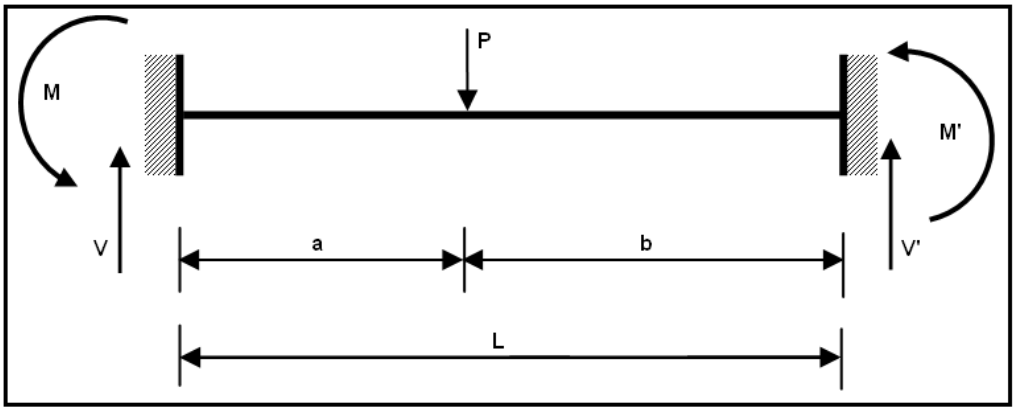



**Figura 3.12** Viga con carga puntual

- **EJEMPLO 1**

Para el elemento lineal de sección constante, de la figura 3.12, determinar las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto, si la carga $P = 10\ T; a = 2\ m; L = 6\ m.$

- **SOLUCION**

Para calcular las fuerzas y momentos de empotramiento primero se evalúan las funciones de forma en los puntos de aplicación de las cargas.

Para el ejemplo se tiene, para X = a:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{a}{L} = \frac{b}{L}$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3}$$

$$\phi_3(x) = a\left(1 - \frac{a}{L}\right)^2 = \frac{ab^2}{L^2}$$

$$\phi_4(x) = \frac{a}{L}$$

$$\phi_5(x) = \frac{a^2}{L^2}\left(3 - \frac{2a}{L}\right)$$

$$\phi_6(x) = -\frac{a^2}{L}\left(1 - \frac{a}{L}\right) = -\frac{a^2 b}{L^2}$$

Solamente, para ilustrar la forma de cálculo se obtuvieron las seis funciones de forma, $\phi_1$ (x) y $\phi_4$ (x) no se requiere ya que la carga es perpendicular al elemento y no existe fuerza axial en consecuencia las fuerzas axiales de empotramiento perfecto son nulas.

$$V = P.\phi_2(x) = P\left(1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3}\right)$$

Se deja como ejercicio a que el estudiante demuestre que:

$$V = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b)$$

Para lo cual debe tener en cuenta que $a + b = L$

$$M = P\,\phi_3(x) = \frac{P\,a\,b^2}{L^2}$$

$$V' = P.\phi_5(x) = \frac{Pa^2}{L^2}\left(3 - \frac{2a}{L}\right) = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)$$

$$M' = P\,\phi_6(x) = -\frac{P\,a^2\,b}{L^2}$$

Al reemplazar los datos del problema: $P = 10\ T; a = 2\ m; L = 6\ m.$ Se obtiene.

$$V = \frac{P\,b^2}{L^3}(3a+b) = \frac{10*4^2}{6^3}(3*2+4) = 7.4074\,T.$$

$$M = \frac{P\,a\,b^2}{L^2} = \frac{10*2*4^2}{6^2} = 8.8889\,Tm.$$

$$V' = \frac{P\,a^2}{L^3}(a+3b) = \frac{10*2^2}{6^3}(2+3*4) = 2.5926\,T.$$

$$M' = -\frac{P\,a^2\,b}{L^2} = -\frac{10*2^2*4}{6^2} = -4.4444\,Tm.$$

En la figura 3.13 se presentan los resultados obtenidos.

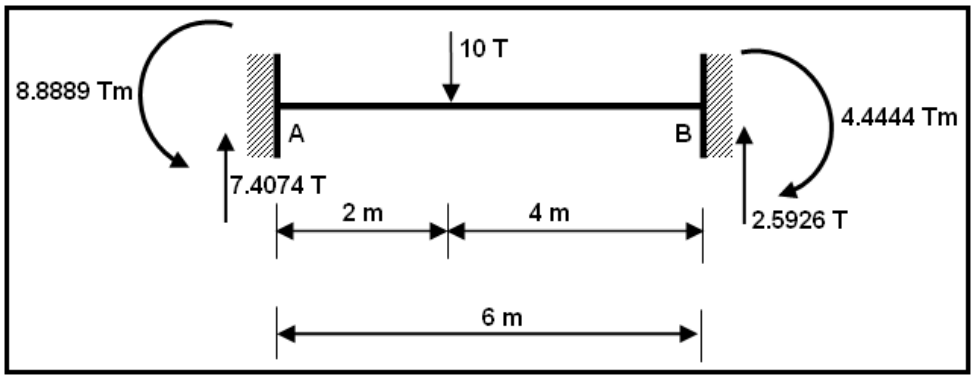



**Figura 3.13** Resultados del Ejemplo 1.

Para comprobar que el ejercicio está bien realizado, se debe verificar que exista equilibrio en el elemento.

$$\uparrow \sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 7.4074 + 2.5926 - 10 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.5926*6 + 8.8889 - 4.4444 - 10*2 = 0$$

- **EJEMPLO 2**

Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para la viga de sección constante que se indica en la figura 3.14

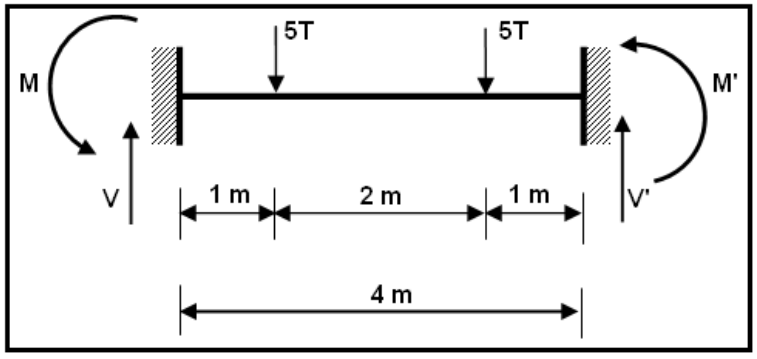
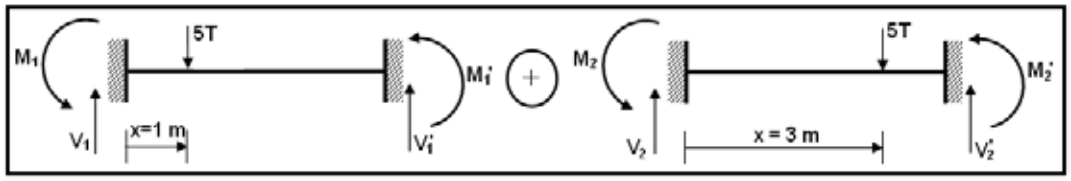



**Figura 3.14** Datos del Ejemplo 2

- **SOLUCION**

Se aplica el principio de superposición lineal en la solución del ejemplo 2. En consecuencia la solución total será igual a la solución de cuando se aplica la carga de 5 T. de la izquierda más la solución de cuando se aplica la otra carga de 5 T. de la derecha, como se indica a continuación.




- **Para** $X = 1\,m.$

$$\phi_2(x) = 0.84375 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 5 * 0.84375 = 4.21875\,T.$$
$$\phi_3(x) = 0.56250 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 5 * 0.56250 = 2.8125\,Tm.$$
$$\phi_5(x) = 0.15625 \quad \Rightarrow \quad V_1' = 5 * 0.15625 = 0.78125\,T.$$
$$\phi_6(x) = -0.18750 \quad \Rightarrow \quad M_1' = 5 * (-0.1875) = -0.9375\,Tm.$$

- **Para** $X = 3\,m.$

$$\phi_2(x) = 0.15625 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 5 * 0.15625 = 0.78125\,T.$$
$$\phi_3(x) = 0.18750 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 5 * 0.1875 = 0.93750\,Tm.$$
$$\phi_5(x) = 0.84375 \quad \Rightarrow \quad V_2' = 5 * 0.84375 = 4.21875\,T.$$
$$\phi_6(x) = -0.56250 \quad \Rightarrow \quad M_2' = 5 * (-0.5625) = -2.8125\,Tm.$$

Luego:

$$V = V_1 + V_2 = 5.00\,T. \qquad V' = V_1' + V_2' = 5.00\,T.$$
$$M = M_1 + M_2 = 3.75\,Tm. \qquad M' = M_1' + M_2' = -3.75\,Tm.$$

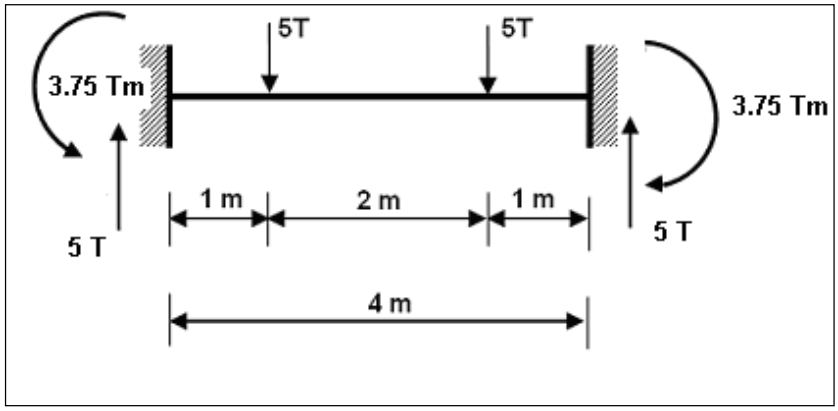



**Figura 3.15** Solución del Ejemplo 2

- **EJEMPLO 3**

Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para la viga de sección constante de la figura 3.16 si sobre ella actúa una carga uniforme distribuida de magnitud $P_0$.

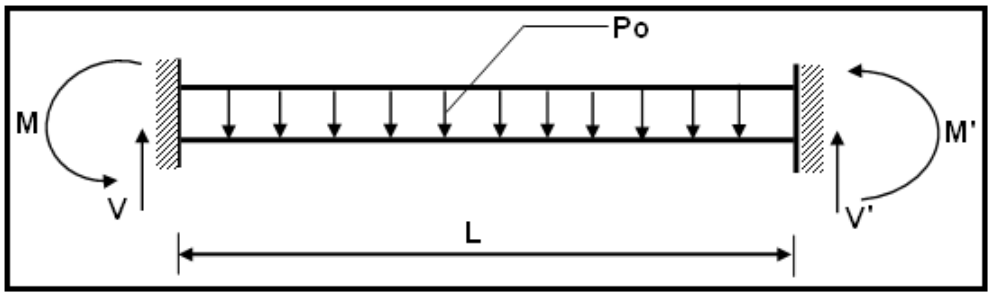



**Figura 3.16** Viga con carga uniforme distribuida

- **SOLUCION**

En el Ejemplo 2 cuando se tienen dos cargas puntuales al aplicar el principio de la superposición lineal los momentos y fuerzas de empotramiento son iguales a la contribución de cada una de las cargas. Este mismo principio se aplica el presente ejemplo teniendo en cuenta que la sumatoria no es nada más que la integral. Entonces para carga uniforme distribuida se tiene:

$$V = \int_0^L P_o\ \phi_2(x)\ dx$$

$$M = \int_0^L P_o\ \phi_3(x)\ dx$$

$$V' = \int_0^L P_o\ \phi_5(x)\ dx$$

$$M' = \int_0^L P_o\ \phi_6(x)\ dx$$

Los límites de las integrales corresponden a donde actúan la carga para el presente caso de “0” a “L”. Para el corte *V*, y momento *M*

$$V = \int_0^L P_0\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)dx = P_o\left|X - \frac{X^3}{L^2} + \frac{X^4}{2L^3}\right|_0^L \qquad \Rightarrow V = \frac{P_o L}{2}$$

$$M = \int_0^L P_o\left[X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2\right]dx = \int_0^L P_o\left[X\left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right)\right]dx = \int_0^L P_o\left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}\right)$$

$$M = P_0\left|\frac{X^2}{2} - 2\frac{X^3}{3L} + \frac{X^4}{4L^2}\right|_o^L = P_o\left(\frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{3} + \frac{L^2}{4}\right) = P_o L^2\left(\frac{6-8+3}{12}\right) \quad \Rightarrow M = \frac{P_o L^2}{12}$$

Al efectuar las integrales indicadas para $V'$ y $M'$ se obtienen:

$$V' = \frac{P_o L}{2} \qquad M' = -\frac{P_o L^2}{12}$$

El signo menos del momento $M'$ significa que el sentido es horario.

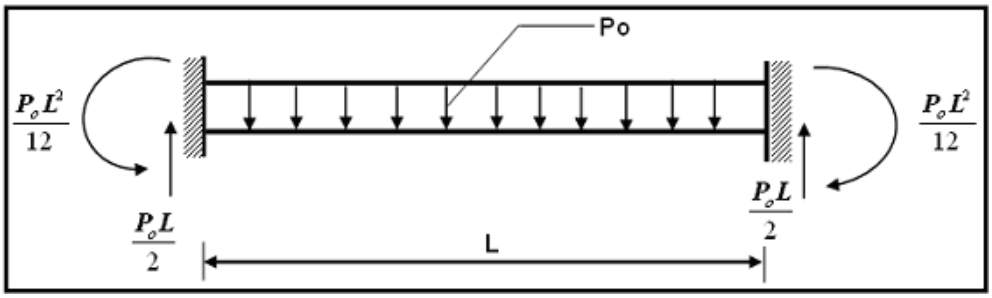



**Figura 3.17** Acciones de empotramiento para carga uniforme.

- **EJEMPLO 4**

Encontrar las fuerzas y momentos de empotramiento, para el elemento de sección constante de la figura 3.18 si actúa un momento concentrado de magnitud M en el centro de la luz.

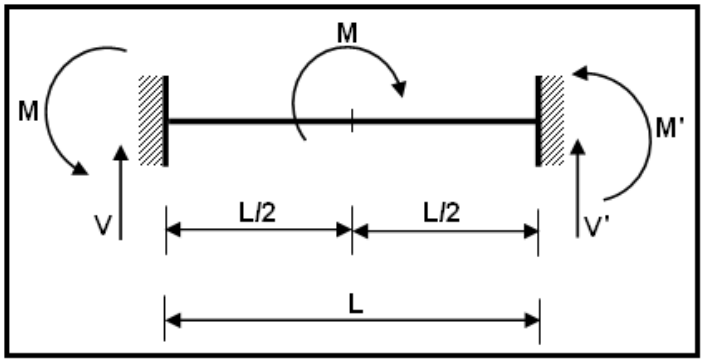



**Figura 3.18** Estado de carga del ejemplo 4.

- **SOLUCION**

Al tener un momento, se tienen que derivar las funciones de forma previamente:

$$\phi_2'(x) = -\frac{6X}{L^2} + \frac{6X^2}{L^3}$$

$$\phi_3'(x) = \left(1 - \frac{X}{L}\right)\left(\frac{L - 3X}{L}\right)$$

$$\phi_5'(x) = \frac{6X}{L^2} - \frac{6X^2}{L^3}$$

$$\phi_6'(x) = \frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X}{L}$$

Luego se debe evaluar $\phi_2^{'}(x), \phi_3^{'}(x)$; etc., en el punto de aplicación del momento, el resultado que se obtiene para $X = L/2$

$$\phi_2^{'}(x = L/2) = -\frac{3}{2L} \qquad \phi_3^{'}(x = L/2) = -\frac{1}{4}$$

$$\phi_5^{'}(x = L/2) = \frac{3}{2L} \qquad \phi_6^{'}(x = L/2) = -\frac{1}{4}$$

En consecuencia:

$$V = M\ \phi_2^{'}(x) = -\frac{3M}{2L}$$

$$M = M\phi_3^{'}(x) = -\frac{M}{4}$$

$$V^{'} = M\phi_5^{'}(x) = \frac{3M}{2L}$$

$$M^{'} = M\phi_6^{'}(x) = -\frac{M}{4}$$

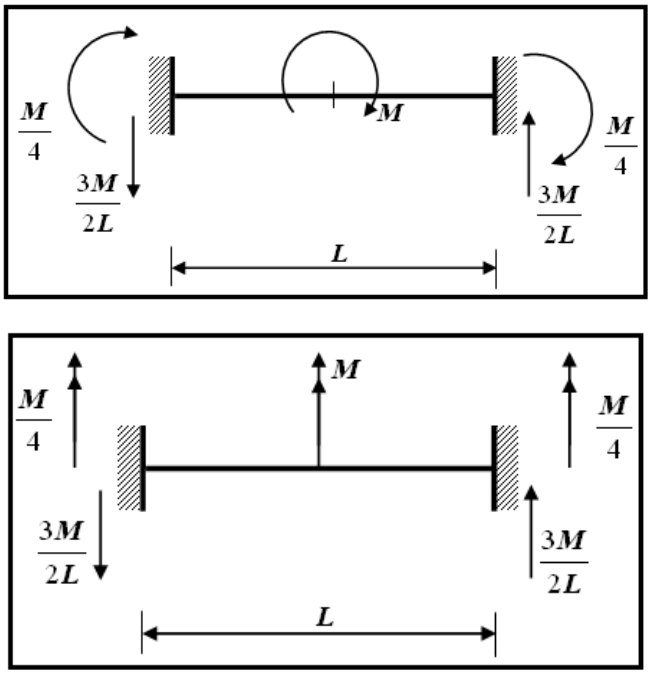



**Figura 3.19** Resultados del Ejemplo 4

En la figura 3.19, se presenta dos maneras de escribir el problema realizado, la notación que se indica en la parte superior es la que se utiliza en este libro.

### 3.6.5 Cálculo de las deflexiones

Dentro del hormigón armado, uno de los problemas que todavía tiene que ser estudiado y analizado es el cálculo de las deflexiones diferidas. Este fenómeno producido por dos causas, conceptualmente distintas pero muy difíciles de separar con precisión en la práctica: la retracción y la fluencia del concreto, llamada también deformación lenta y escurrimiento plástico, depende de una gran cantidad de variables, entre ellas se han de enumerar las siguientes: la relación del agregado al cemento, la mineralogía del agregado y

su tamaño, la temperatura, velocidad del viento, humedad relativa del ambiente, el curado y la edad del concreto, el tamaño de la muestra y el nivel de esfuerzos.

Por todo esto es tan complejo el cálculo de deflexiones diferidas, pero no así el cálculo de las **deflexiones instantáneas las mismas que pueden calcularse por medio de las funciones de forma.**

Por lo tanto, la deformación total es igual a la deformación instantánea más la deformación diferida. En este capítulo se estudia el cálculo de la deformación instantánea exclusivamente.

En el capítulo anterior se indicó que la solución total de una estructura es igual al problema primario más el problema complementario. El problema primario se resuelve considerando al elemento biempotrado y se resolvió un ejemplo en el cual se determinó la ordenada de la elástica $v(x)$ de una viga empotrada-empotrada sometida a una cara uniforme distribuida. La solución se obtuvo a partir de la ecuación diferencial de flexión de cuarto orden la misma que es obtenida con la convención de signos de resistencia de materiales, en la que el desplazamiento vertical es positivo si va hacia abajo; en este libro la convención de signos es lo contrario por este motivo es que se cambia de signo, para tener desplazamiento positivo si va hacia arriba.

Para una viga de sección constante, en la que gravita una carga uniforme distribuida de magnitud $P_0$, la ecuación con la que se obtiene el desplazamiento vertical, en un punto interior de la viga es:

$$v(x) = v_1\phi_2(x) + \theta_1\phi_3(x) + v_2\phi_5(x) + \theta_2\phi_6(x) - \frac{P_o}{24EI}\left(X^4 + X^2L^2 - 2X^3L\right) \qquad (3.36)$$

- **EJEMPLO 5**

El pórtico plano de la figura 3.20 está conformado por columnas de 35 cm x 35 cm y vigas de 30 cm x 30 cm, (columna fuerte viga débil). Ttiene un módulo de elasticidad igual a 1800000 T/m2. Sobre éste pórtico gravita una carga uniforme distribuida de 2T/m. Se desea encontrar v(x) en el punto medio, de la viga, del vano derecho

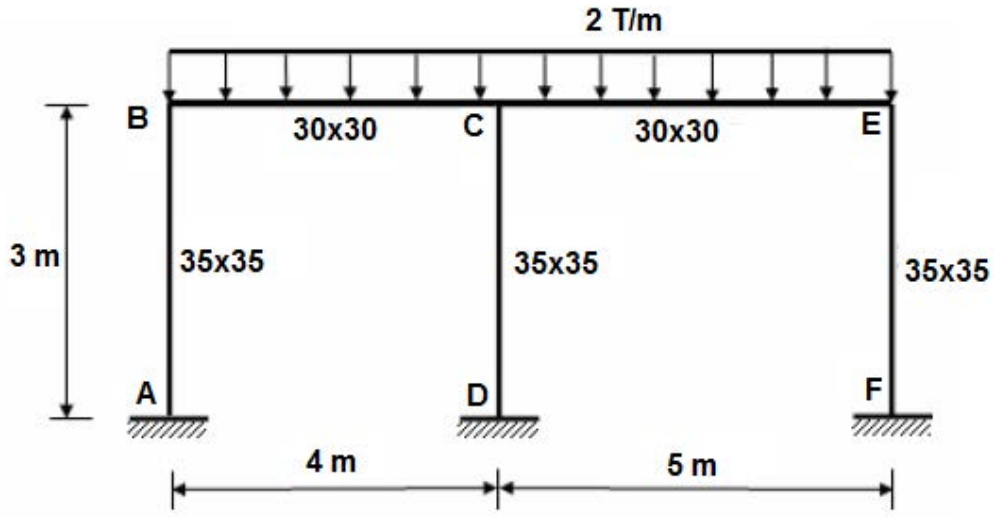



**Figura 3.20** Estructura de Ejemplo 5.

- **SOLUCIÓN**

Se consideran que los elementos son totalmente flexibles, en consecuencia existen tres grados de libertad por nudo. Los grados de libertad con las cuales se resuelve la estructura se presenta en la figura 3.21.

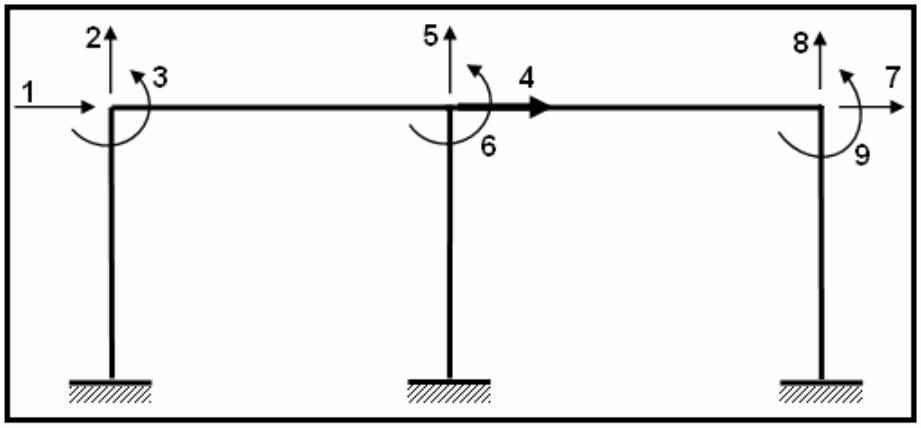



**Figura 3.21** Sistema de coordenadas ***Q – q***

El cálculo del vector de coordenadas generalizadas q, se verá en los capítulos posteriores de este libro. Por ahora, se presentan los resultados que se obtuvieron al utilizar un programa de computación.

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} -0.000129 \\ -0.000049 \\ -0.000569 \\ -0.000153 \\ -0.000131 \\ -0.000301 \\ -0.000200 \\ -0.000065 \\ 0.001191 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos están en metros y los giros en radianes. Nótese que son muy bajos en consecuencia la estructura trabaja en el rango elástico, para las cargas del problema.

Para el cálculo de v(x), es necesario encontrar las coordenadas locales del elemento CE, las mismas que se obtienen del vector $\bar{q}$ .

$$v_1 = q_5 = -0.000131\ m.$$
$$\theta_1 = q_6 = -0{,}000301\ rad.$$
$$v_2 = q_8 = -0{,}000065\ m.$$
$$\theta_2 = q_9 = 0{,}001191\ rad.$$

Al evaluar las funciones de forma en x = 2.5 m, se tiene:

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} = 1 - \frac{3 * 2.5^2}{5^2} + \frac{2 * 2.5^3}{5^3} = 0.5$$

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$\phi_3(x) = X\left[1 - \frac{X}{L}\right]^2 = 2.5\left[1 - \frac{2.5}{5}\right]^2 = 0.625\ m.$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left[1 - \frac{X}{L}\right] = -\frac{2.5^2}{5}\left[1 - \frac{2.5}{5}\right] = -0.6255\ m$$

Por otra parte el factor Po/24EI, y la solución particular, valen:

$$\frac{P_O}{24EI} = \frac{2}{24 * 1800000\left(\frac{0.30 * 0.30^3}{12}\right)} = 6{,}858710 * 10^{-5}\frac{1}{m^3}$$

$$v_p = \frac{P_o}{24EI}\left(X^4 + X^2L^2 - 2X^3L\right) = 0.00267919$$

$$v(x) = -0.5 * 0.000131 - 0.000301 * 0.625 - 0.000065 * 0.5 - 0.001191 * 0.625 - 0.002679$$

$$v(x) = -0.003709\ m.$$

Ésta es la deformación instantánea en el centro del segundo vano, el signo menos indica que en éste punto el eje de la viga se desplaza hacia abajo.

- **EJEMPLO 6**

Los elementos de la estructura presentada a la izquierda de la figura 3.22, son totalmente flexibles; a la derecha se indican los grados de libertad. Se pide encontrar la ordenada de la elástica $v(x)$ en el punto P, punto medio de la viga, en función de las coordenadas ***q***

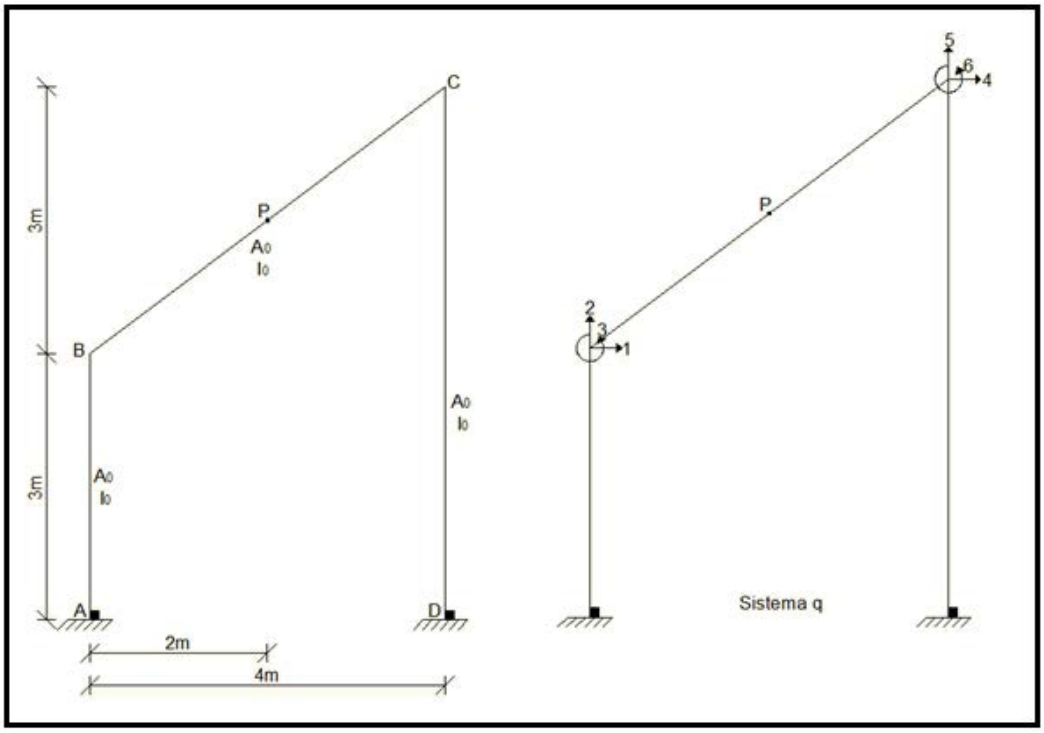



**Figura 3.22** Estructura de Ejemplo 6.

- **SOLUCIÓN**

Para determinar las coordenadas del elemento: $u_1, v_1, u_2, v_2$ se debe descomponer las coordenadas $q_1, q_2, q_4, q_5$ en sus componentes axial y transversal; esto se presenta en la figura 3.23 para $q_1, q_4$, y en la figura 3.24 para $q_2, q_5$.

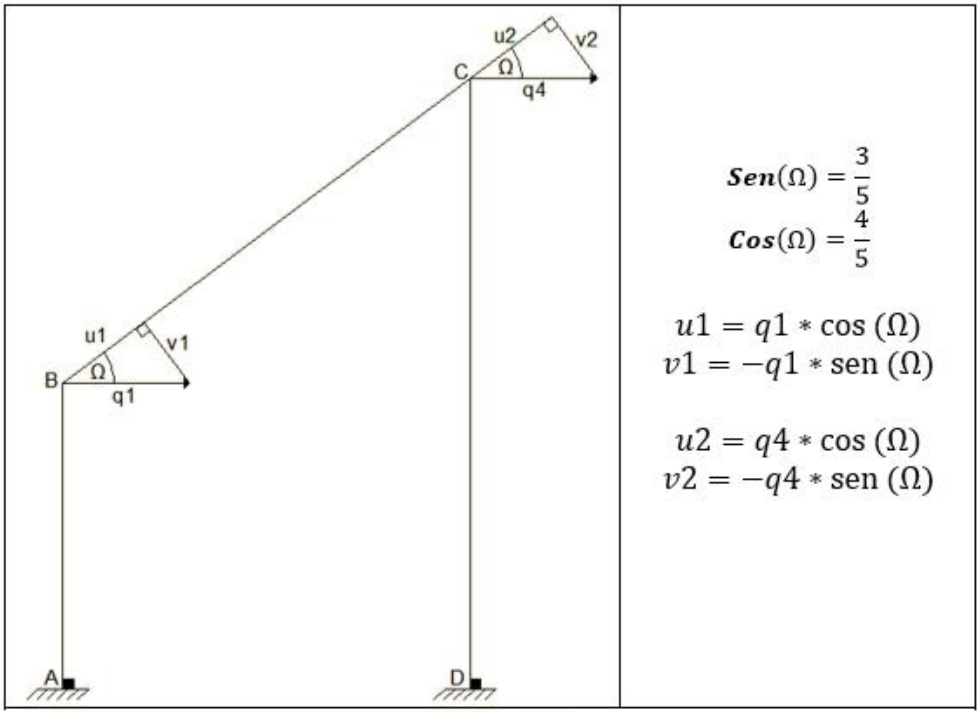



**Figura 3.23** Descomposición de las coordenadas $q_1, q_4$

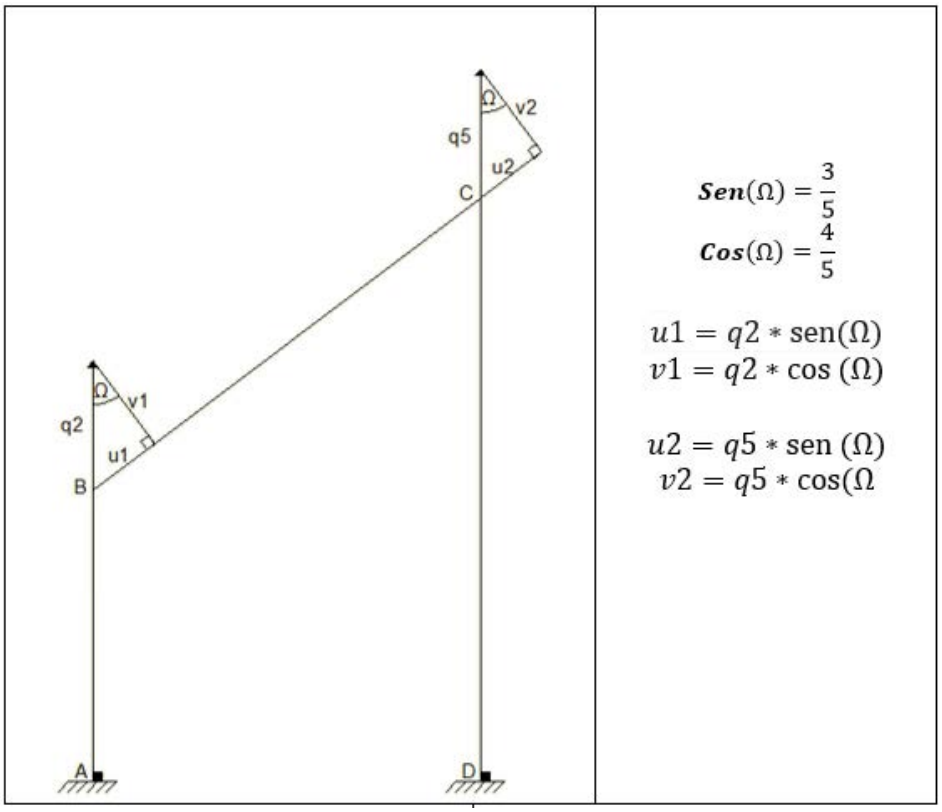



**Figura 3.24** Descomposición de las coordenadas $q_2, q_5$

Al aplicar el principio de superposición, se halla las coordenadas del elemento.

$$u1 = q1 * \cos(\Omega) + q2 * \text{sen}(\Omega)$$
$$v1 = -q1 * \text{sen}(\Omega) + q2 * \cos(\Omega)$$
$$u2 = q4 * \cos(\Omega) + q5 * \text{sen}(\Omega)$$
$$v2 = -q4 * \text{sen}(\Omega) + q5 * \cos(\Omega$$

$$u1 = q1 * \frac{4}{5} + q2 * \frac{3}{5}$$
$$v1 = -q1 * \frac{3}{5} + q2 * \frac{4}{5}$$
$$u2 = q4 * \frac{4}{5} + q5 * \frac{3}{5}$$
$$v2 = -q4 * \frac{3}{5} + q5 * \frac{4}{5}$$

Ahora al evaluar las funciones de forma en $x = 2.5$, se encuentra.

$$\emptyset 1(x) = 1 - \frac{x}{L} = 0.5$$
$$\emptyset 2(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} = 0.5$$
$$\emptyset 3(x) = x(1 - \frac{x}{L})^2 = 0.625$$
$$\emptyset 4(x) = \frac{x}{L} = 0.5$$
$$\emptyset 5(x) = \frac{x^2}{L^2}\left(3 - 2\frac{x}{L}\right) = 0.5$$
$$\emptyset 6(x) = -\frac{x^2}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right) = -0.625$$

Luego las ordenadas de la elástica, son:

$$u(x) = u1 * \emptyset 1(x) + u2 * \emptyset 4(x)$$

$$v(x) = v1 * \emptyset 2(x) + \theta 1 * \emptyset 3(x) + v2 * \emptyset 5(x) + \theta 2 * \emptyset 6(x)$$

$$u(x) = (q1 * \frac{4}{5} + q2 * \frac{3}{5}) * 0.5 + (q4 * \frac{4}{5} + q5 * \frac{3}{5}) * 0.5$$

$$v(x) = \left(-q1 * \frac{3}{5} + q2 * \frac{4}{5}\right) * 0.5 + q3 * 0.625 + \left(-q4 * \frac{3}{5} + q5 * \frac{4}{5}\right) * 0.5 - q6 * 0.625$$

## 3.7 APLICACIÓN A LA INGENIERÍA SISMORRESISTENTE

Para el diseño de vigas, columnas y cimentación de un edificio, se considera que la carga que gravita sobre la losa se reparte a los pórticos a 45°, como lo ilustra la figura 3.25.

Prácticamente existen dos tipos de cargas que actúan sobre las vigas de un pórtico plano. Estas son:

i. Carga triangular para la luz corta, y

ii. Carga trapezoidal para la luz larga.

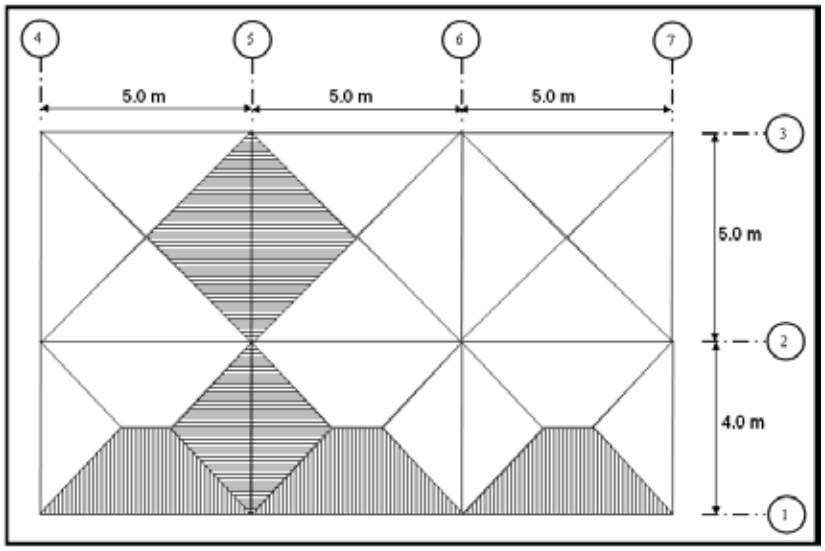



**Figura 3.25** Vista en planta de un edificio que tiene 7 pórticos ortogonales

En este capítulo, se estudiará únicamente el cálculo de las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para estos dos tipos de carga.

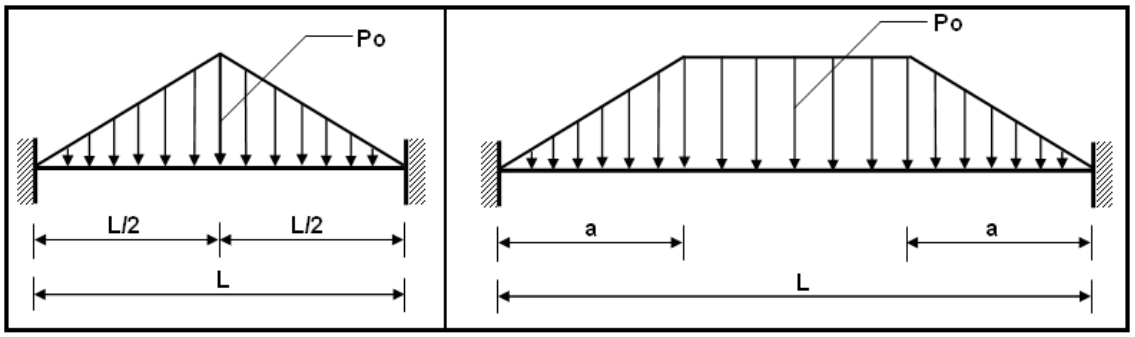



**Figura 3.26** Carga Triangular y Trapezoidal

- **EJEMPLO 7**

Calcular el cortante y el momento de empotramiento, en el nudo inicial, de la viga, indicada a la izquierda de la figura 3.26, que tiene una cara triangular.

- **SOLUCIÓN**

**Cálculo del cortante V**:

$$V = \int P(y)\phi_2(x)\,dx$$

$P(y)$ es la ecuación de variación de la carga que en este caso es lineal. Luego hay que encontrar la ecuación de dos rectas de la forma:

$$Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

Teniendo presente que la variable $Y$ corresponde a la variación de carga $P(y)$ y que existen dos pendientes m.

- Para 0 < x < L/2

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{P_0 - 0}{\frac{L}{2} - 0} \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{2P_0}{L} \quad \Rightarrow \quad P(y) = \frac{2P_0 X}{L}$$

- Para L/2 ≤ x < L

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{P_0 - 0}{\frac{L}{2} - L} \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{2P_0}{L}$$

$$P(Y) - 0 = -\frac{2P_o}{L}(X - L) \quad \Rightarrow \quad P(Y) = 2P_o - \frac{2P_o}{L}X$$

Por lo tanto, el cortante V en el nudo inicial se evalúa como sigue:

$$V = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 x}{L}\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(2P_0 - \frac{2P_0 x}{L}\right)\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)dx$$

$$V = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 x}{L}dx - \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{6P_0 X^3}{L^3}dx + \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{4P_0 X^4}{L^4}dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2P_0 dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{4P_0 X^3}{L^3}dx -$$

$$- \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{6P_0 X^2}{L^2}dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_0 X}{L}dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{6P_0 X^3}{L^3}dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{4P_0 X^4}{L^4}dx$$

$$V = \left|\frac{2P_0 X^2}{2L} - \frac{6P_0 X^4}{4L^3} + \frac{4P_0 X^5}{5L^4}\right|_0^{L/2} + \left|2P_0 X + \frac{4P_0 X^4}{4L^3} - \frac{6P_0 X^3}{3L^2} - \frac{2P_0 X^2}{2L} + \frac{6P_0 X^4}{4L^3} - \frac{4P_0 X^5}{5L^4}\right|_{L/2}^{L}$$

Al reemplazar los límites de integración se tiene:

$$V = \frac{P_0 L}{4} - \frac{3}{32}P_0 L + \frac{P_0 L}{40} + 2P_0 L + P_0 L - 2P_0 L - P_0 L + \frac{3}{2}P_0 L - \frac{4}{5}P_0 L - P_0 L - \frac{P_0 L}{16} + \frac{P_0 L}{4} + \frac{P_0 L}{4} - \frac{3}{32}P_0 L + \frac{P_0 L}{40}$$

$$V = P_0 L\left(\frac{40 - 15 + 4 + 320 - 320 + 160 - 160 + 240 - 128 - 160 + 40 - 10 + 40 - 15 + 4}{160}\right)$$

$$V = \frac{40}{160} P_0 L = \frac{1}{4} P_0 L$$

**Cálculo del Momento M**

$$M = \int_0^L P(y)\phi_3(x) \quad dx$$

$$M = \int_O^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \left(2P_o - \frac{2P_0 X}{L}\right)\left[X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2\right] dx$$

$$M = \int_O^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 X^2}{L}\left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right) dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2P_0 X\left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right) dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_o X^2}{L}\left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right) dx$$

$$M = \int_O^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 X^2}{L} dx - \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{4P_0 X^3}{L^2} dx + \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 X^4}{L^3} dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2P_0 X \quad dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{4P_0 X^2}{L} dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_0 X^3}{L^2} dx -$$

$$- \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_0 X^2}{L} dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{4P_0 X^3}{L^2} dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_0 X^4}{L^3} dx$$

$$M = \left| \frac{2P_o X^3}{3L} - \frac{4P_o X^4}{4L^2} + \frac{2P_o X^5}{5L^3} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{2P_o X^2}{2} - \frac{4P_o X^3}{3L} + \frac{2P_o X^4}{4L^2} - \frac{2P_o X^3}{3L} + \frac{4P_o X^4}{4L^2} - \frac{2P_o X^5}{5L^3} \right|_{L/2}^{L}$$

Al sustituir los límites de integración se obtiene:

$$M = \left(\frac{2P_o}{3L}\frac{L^3}{8} - \frac{P_o}{L^2}\frac{L^4}{16} + \frac{2P_o}{5L^3}\frac{L^5}{32}\right) + \left(P_o L^2 - \frac{4P_o}{3L}L^3 + \frac{P_o L^4}{2L^2} - \frac{2P_o L^3}{3L} + \frac{P_o L^4}{L^2} - \frac{2P_o L^5}{5L^3}\right)$$
$$- \left(\frac{P_o L^2}{4} - \frac{4P_o}{3L}\frac{L^3}{8} + \frac{P_o}{2L^2}\frac{L^4}{16} - \frac{2P_o}{3L}\frac{L^3}{8} + \frac{P_o}{L^2}\frac{L^4}{16} - \frac{2P_o}{5L^3}\frac{L^5}{32}\right)$$

$$M = P_0 L^2\left(\frac{200 - 150 + 30 + 2400 - 3200 + 1200 - 1600 + 2400 - 960 - 600 + 400 - 75 + 200 - 150 + 30}{2400}\right)$$

$$M = \frac{125}{2400} P_0 L^2 = \frac{5P_0 L^2}{96}$$

Por un procedimiento similar se obtendrá la fuerza y el momento de empotramiento para el nudo final, trabajando con $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$, respectivamente. Los resultados a que se llega, son:

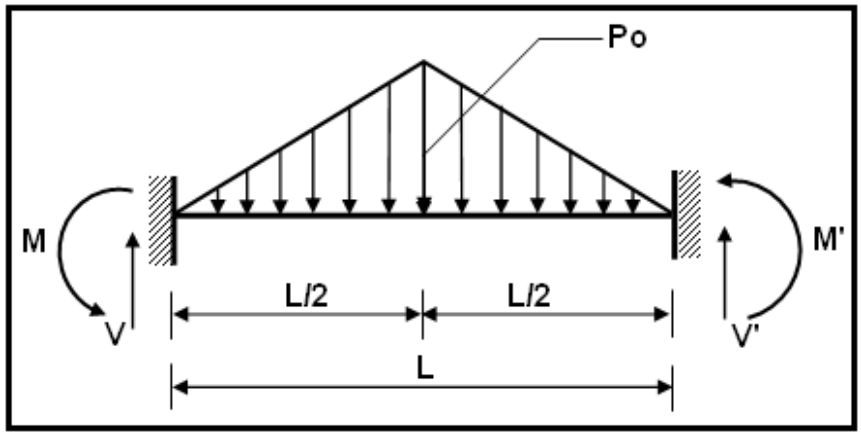



**Figura 3.27** Acciones de empotramiento perfecto para una viga con carga triangular.

$$M = \frac{5\,P_o\,L^2}{96} = -M' \tag{3.37}$$

$$V = \frac{P_o\,L}{4} = V' \tag{3.38}$$

Para carga trapezoidal, se tiene:

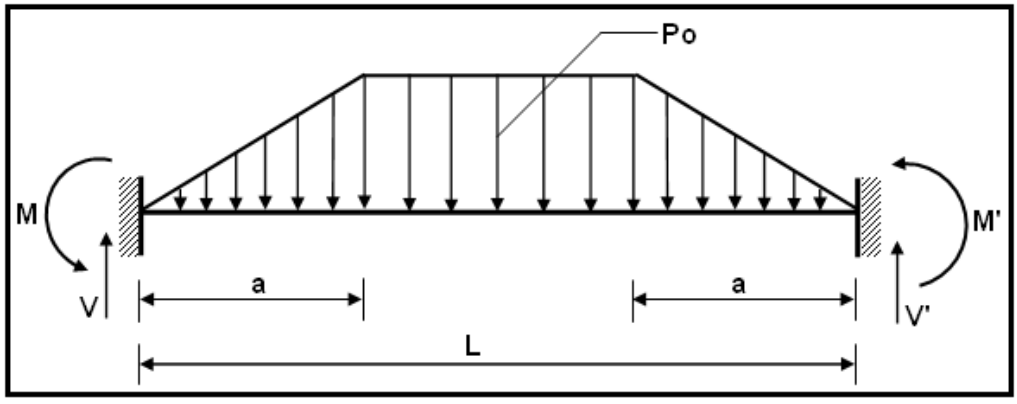



**Figura 3.28** Acciones de empotramiento perfecto para una viga con carga trapezoidal.

$$M = \frac{P_o L^2}{12}\left[1 - 2\left(\frac{a}{L}\right)^2 + \left(\frac{a}{L}\right)^3\right] = -M' \tag{3.39}$$

$$V = \frac{P_o L}{2}\left(1 - \frac{a}{L}\right) = V' \tag{3.40}$$

### 3.7.1 Carga rectangular equivalente

Con el gran desarrollo informático que se tiene, lo deseable es que se analicen los pórticos con cargas triangulares o trapezoidales, pero si no se dispone de un programa para este tipo de carga se puede transformar estas cargas a rectangulares equivalentes, como se muestra en la figura 3.29. Donde $W$ es la carga por unidad de superficie (Ej. T/m$^2$); $P_0$ es la carga equivalente por metro lineal.

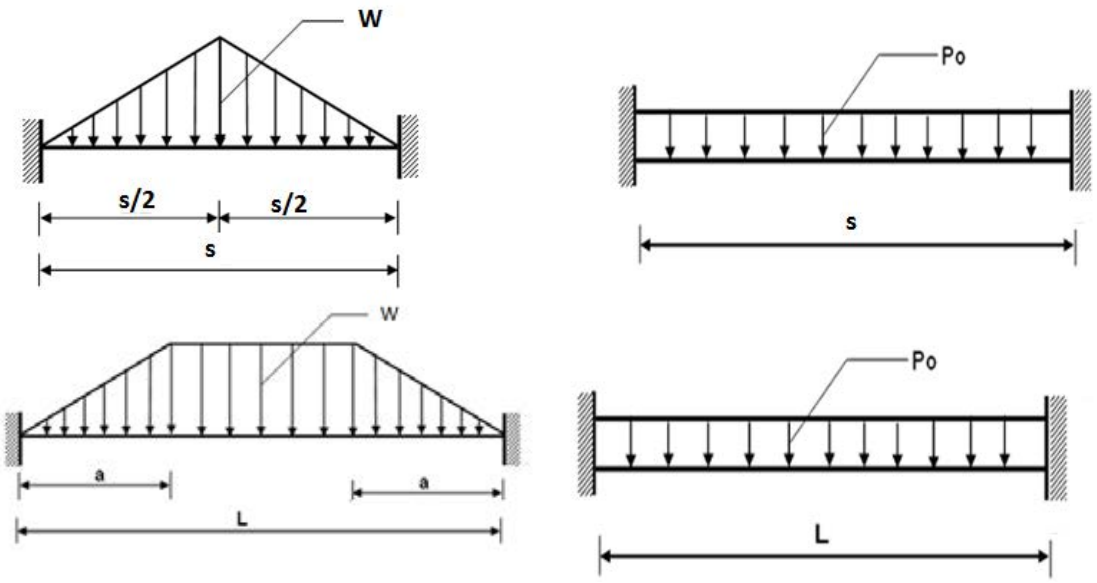



**Figura 3.29** Carga rectangular equivalente para carga triangular y trapezoidal.

- **Carga Triangular**

$$P_0 = \frac{W\ s}{3} \tag{3.41}$$

- **Carga Trapezoidal**

$$P_0 = \frac{W\ s}{3}\left(\frac{3 - m^2}{2}\right) \tag{3.42}$$

$$m = \frac{s}{L}$$

Para un vano de una losa se tiene que: $s$ es la menor dimensión y $L$ es la mayor dimensión.

## 3.8 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO 8**

Sobre el elemento lineal de sección constante de la figura 3.30, que tiene 5.0 m. de longitud actúa una carga concentrada P. Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto.

- **SOLUCIÓN**

i) Se evalúa las funciones de forma en el punto de aplicación de la carga.

$$tg\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36.87°$$

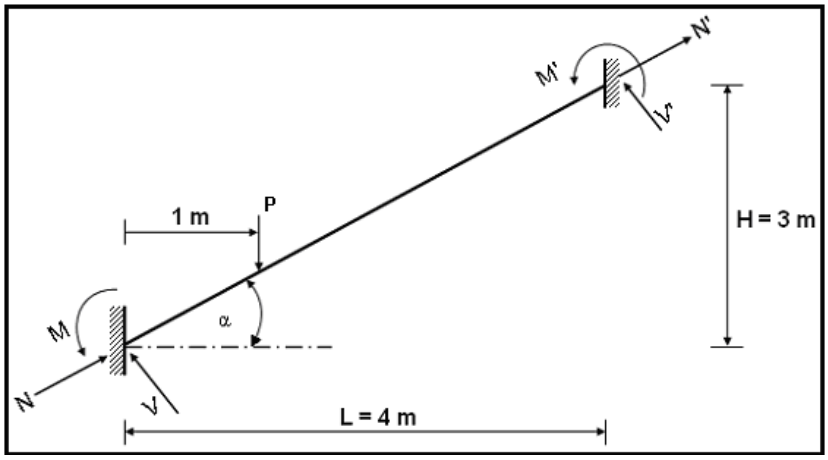



**Figura 3.30** Carga Puntual en un elemento inclinado.

Se destaca que X se mide a lo largo del eje del miembro.

$$\cos\alpha = \frac{1.0}{X} \Rightarrow X = 1.25$$

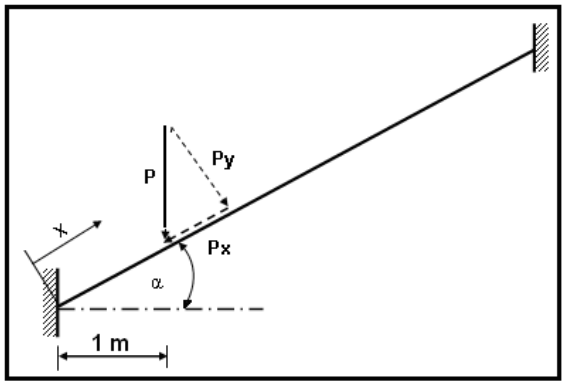



**Figura 3.31** Descomposición de la carga puntual en transversal y axial.

i) Se evalúa las funciones de forma en el punto de aplicación de la carga.

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L} = 1 - \frac{1.25}{5.0} = 0.75$$

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 1 - 0.75 = 0.25$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} = 1 - \frac{3(1.25)^2}{5^2} + \frac{2(1.25)^3}{5^3} = 0.844$$

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - 0.844 = 0.156$$

$$\phi_3(x) = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 = 1.25\left(1 - \frac{1.25}{5.00}\right)^2 = 0.703$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right) = -\frac{1.25^2}{5.00}\left(1 - \frac{1.25}{5.00}\right) = -0.234$$

ii) Se descompone la carga P, en una perpendicular al miembro $P_y$ y en una longitudinal $P_x$, como muestra la figura 3.31.

$$P_y = P \cos\alpha = \frac{4}{5}P$$

$$P_x = P \; sen\alpha = \frac{3}{5}P$$

iii) Las Fuerzas y momentos de empotramiento, son:

$$N = P_x\ \phi_1(x) = 0.75P\ Sen\alpha = 0.45P$$
$$V = P_y\ \phi_2(x) = 0.844P\ Cos\alpha = 0.675P$$
$$M = P_y\ \phi_3(x) = 0.703P\ Cos\alpha = 0.562P$$
$$N' = P_x\ \phi_4(x) = 0.25P\ Sen\alpha = 0.15P$$
$$V' = P_y\ \phi_5(x) = 0.156P\ Cos\alpha = 0.125P$$
$$M' = P_y\ \phi_6(x) = -0.234P\ Cos\alpha = -0.187P$$

- **EJEMPLO 9**

Para el pórtico plano de la figura 3.32, seleccionar un sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y hallar en función de las mismas, las componentes horizontal y vertical del desplazamiento y la rotación de la elástica, en la sección media del elemento AB.

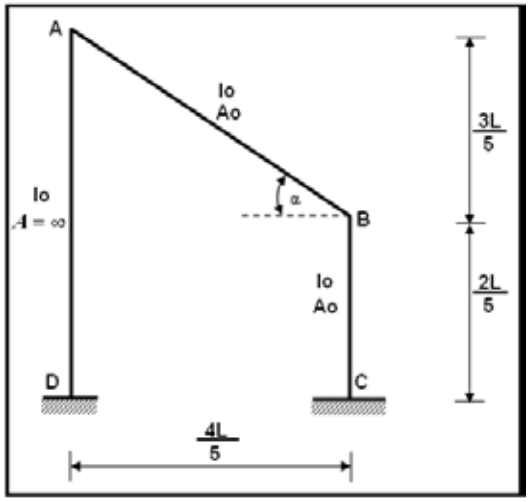



**Figura 3.32** Geometría del Ejemplo 9.

- **SOLUCIÓN**

El sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$, para la estructura en estudio se presenta en la figura 3.33.

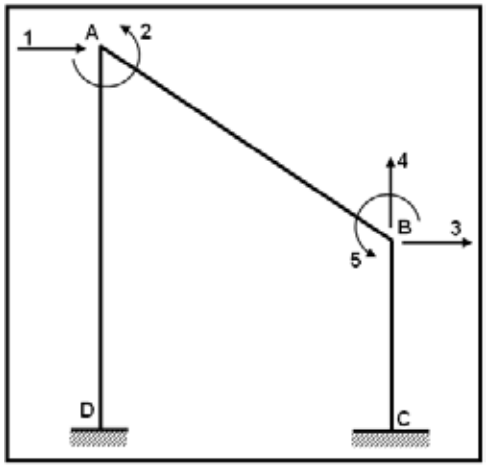



**Figura 3.33** Sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q - q}$

Al no haber carga sobre el elemento AB, las ordenadas de la elástica son:

$$u(x) = u_1\ \phi_1(x) + u_2\ \phi_4(x)$$
$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1\ \phi_3(x) + v_2\ \phi_5(x) + \theta_2\ \phi_6(x)$$
$$\theta(x) = v'(x)$$

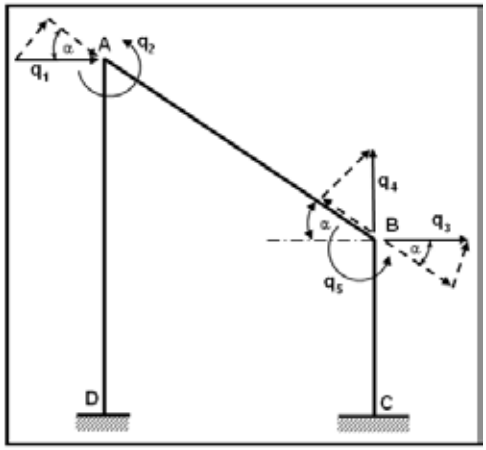



**Figura 3.34** Descomposición de las coordenadas $q_1$, $q_3$ y $q_4$.

Ahora, hay que expresar $u_1$, $u_2$, $v_1$, etc. En función de $q_1$, $q_2$, $q_3$, etc. Para esto a las coordenadas **q** se descomponen en una perpendicular y una longitudinal al eje del elemento AB, como lo ilustra la figura 3.17.3.

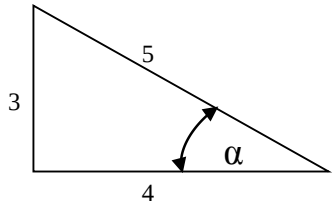
Para el elemento AB se tiene:

$u_1 = q_1 \cos \alpha$ $\qquad$ $u_2 = q_3 \cos \alpha - q_4 \operatorname{sen} \alpha$

$v_1 = q_1 \operatorname{sen} \alpha$ $\qquad$ $v_2 = q_3 \operatorname{sen} \alpha + q_4 \cos \alpha$

$\Theta_1 = q_2$ $\qquad$ $\Theta_2 = q_5$

En la figura 3.32, se observa:




$$sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Sustituyendo:

$u_1 = \frac{4}{5}\ q_1$

$v_1 = \frac{3}{5}\ q_1$

$\Theta_1 = q_2$

$u_2 = \frac{4}{5}\ q_3 - \frac{3}{5}\ q_4$

$v_2 = \frac{3}{5} q_3 - \frac{4}{5}\ q_4$

$\Theta_2 = q_5$

El siguiente paso es evaluar las funciones de forma, en el punto medio del elemento AB. Al analizar la figura 3.32 se ve que la longitud de este elemento es L=5 m., por lo que habrá que calcular en X= L/2=2.5 m.

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L} = 1 - \frac{L}{2L} = 0.5$$

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 0.5$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} = 1 - \frac{3L^2}{4L^2} + \frac{2L^3}{8L^3} = 0.5$$

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 0.5$$

$$\phi_3(x) = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{L}{2L}\right)^2 = \frac{L}{8}$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right) = -\frac{L^2}{4L}\left(1 - \frac{L}{2L}\right) = -\frac{L}{8}$$

Al reemplazar las funciones de forma y las componentes de desplazamiento del elemento AB, en las expresiones de la elástica se halla:

$$u(x) = \frac{4}{5}q_1\ \frac{1}{2} + \left(\frac{4}{5}q_3 - \frac{3}{5}q_4\right)\frac{1}{2}$$

$$u(x) = \frac{1}{5}\left(2\ q_1 + 2\ q_3 - \frac{3}{2}\ q_4\right)$$

$$v(x) = \frac{3}{5}q_1\ \frac{1}{2} + q_2\ \frac{L}{8} + \left(\frac{3}{5}q_3 + \frac{4}{5}q_4\right)\frac{1}{2} - q_5\ \frac{L}{8}$$

$$v(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}q_1 + \frac{L}{4}q_2 + \frac{3}{5}q_3 + \frac{4}{5}q_4 - \frac{L}{4}q_5\right)$$

Para calcular $\theta(x)$ se debe escribir la forma general de $v(x)$ para posteriormente derivar.

$$\theta(x) = \frac{d}{dx} v(x)$$

$$\theta(x) = \frac{d}{dx}\left[ v_1\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right) + \theta_1\left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}\right) + v_2\left(\frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3}\right) + \theta_2\left(-\frac{X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}\right)\right]$$

$$\theta(x) = v_1\left(-\frac{6X}{L^2} + \frac{6X^2}{L^3}\right) + \theta_1\left(1 - \frac{4X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right) + v_2\left(\frac{6X}{L^2} - \frac{6X^2}{L^3}\right) + \theta_2\left(-\frac{2X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right)$$

- Para X = L/2

$$\theta(x) = v_1\left(-\frac{6}{2L} + \frac{6}{4L}\right) + \theta_1\left(1 - \frac{4}{2} + \frac{3}{4}\right) + v_2\left(\frac{6}{2L} - \frac{6}{4L}\right) + \theta_2\left(-\frac{2}{2} + \frac{3}{4}\right)$$

$$\theta(x) = -\frac{3}{2L} v_1 - \frac{1}{4}\theta_1 + \frac{3}{2L} v_2 - \frac{1}{4}\theta_2$$

De donde

$$\theta(x) = -\frac{3}{2L}\frac{3}{5} q_1 - \frac{1}{4} q_2 + \frac{3}{2L}\left(\frac{3}{5} q_3 + \frac{4}{5} q_4\right) - \frac{1}{4} q_5$$

$$\theta(x) = -\frac{3}{10L}\left(3q_1 - 3q_3 - 4q_4\right) - \frac{1}{4}\left(q_2 + q_5\right)$$

- **EJEMPLO 10**

Encontrar los momentos y fuerzas de empotramiento perfecto para un vano del pórtico 2 de la figura 3.35, si la carga permanente D es 0.8 T/m$^2$ y la carga transitoria L es 0.25 T/m$^2$.

**Repartición de las cargas**

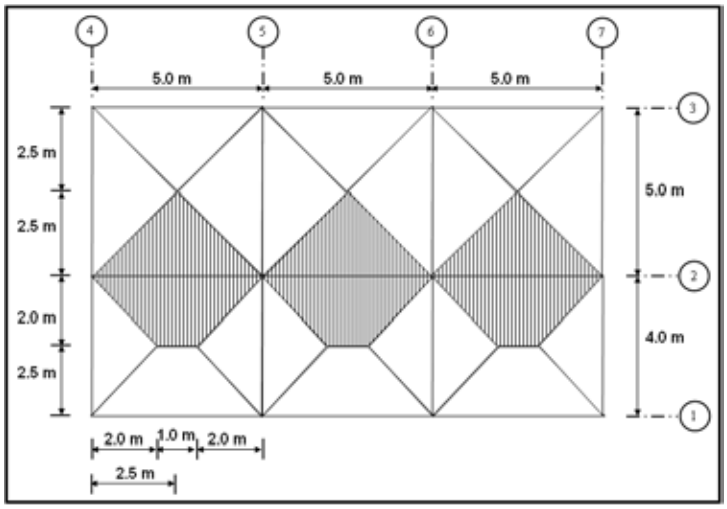



**Figura 3.35** Mosaico de cargas en los pórticos.

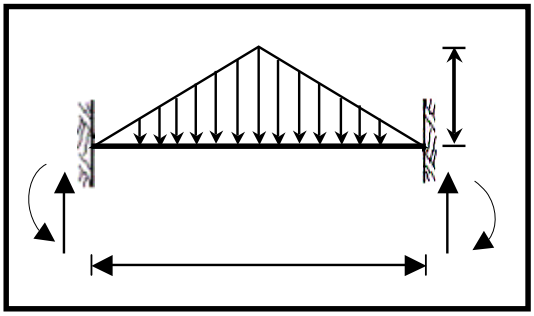
- **SOLUCIÓN**

Sobre el pórtico 2 gravitan dos tipos de carga, una triangular y una trapezoidal.

M V L = 5.0 m V’, M’

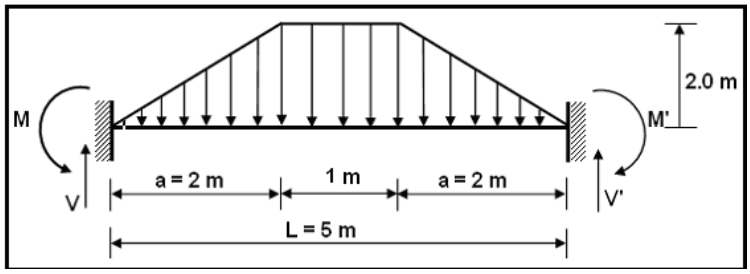
- **D=0.8 T/m²**

$P_o = 0.8 \frac{T}{m^2} * 2.5m = 2.0 \frac{T}{m}$



$V = V' = \frac{P_o L}{4} = \frac{2 * 5.0}{4} = 2.5T$

$M = M' = \frac{5 P_o L^2}{96} = \frac{5 * 2 * 25}{96} = 2.604 \frac{T}{m}$

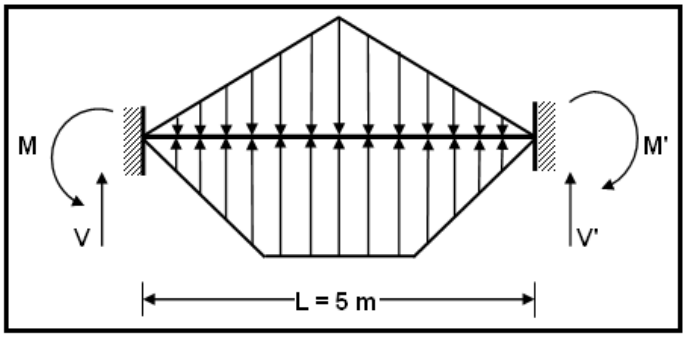



$P_o = 0.8 \frac{T}{m^2} * 2.0m = 1.6 \frac{T}{m}$

$V = V' = \frac{P_o L}{2}\left(1 - \frac{a}{L}\right) = \frac{1.6 * 5.0}{4}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = 2.4T$

$M = M' = \frac{P_o L^2}{12}\left[1 - 2\left(\frac{a}{L}\right)^2 + \left(\frac{a}{L}\right)^3\right] = \frac{1.6 * 25}{12}\left[1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3\right] = 2.48 \quad T.m$

**Superposición de efectos.**




V = V’ = 2.5 T + 2.4 T = 4.9 T

M = M' = 2.604 + 2.48 = 5.084 T.m

- **Pórtico 2 L=0.25 T/ m$^2$**

Para la segunda parte del problema se puede volver a repetir el cálculo pero con el objeto de ilustrar una nueva forma se realiza aplicando la definición de que en el rango elástico la teoría es lineal. En consecuencia con dos simples reglas de tres se obtiene la solución, una para calcular el cortante y otra para encontrar el momento.

Con 0.8 T/m$^2$ ----------4.9 T

0.5 T/m$^2$ ----------V =?

V' = V = 1.531 T

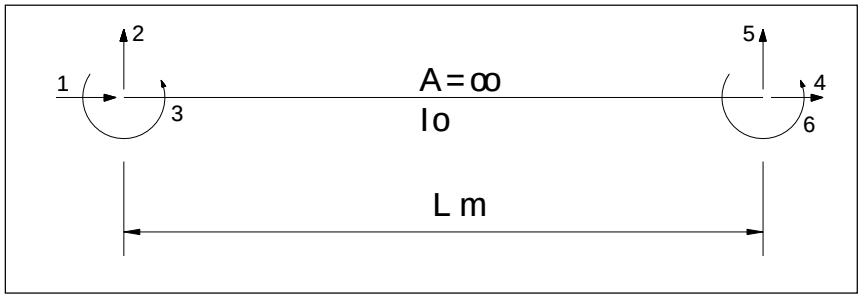
Con 0.8 T/m$^2$ ----------5.084 T.m

0.25 T/m$^2$ ----------M =?

M = M' = 1.589 T.m

**EJEMPLO 11**

Calcular los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez de una barra de sección constante de longitud L, para las coordenadas indicadas en la figura, empleando la formulación de elementos finitos.




$$k(i,j) = \int_0^L EI\ \emptyset_i''(x)\ \emptyset_j''(x)\,dx$$

- **Calculo de k(1,2)**

$$k(1,2) = \int_0^L EIo\emptyset 1''(x)\emptyset 2''(x)dx$$

$$\emptyset 1(x) = 1 - \frac{X}{L} \quad \Rightarrow \quad \emptyset 1'(x) = -\frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad \emptyset 1''(x) = 0$$

$$k(1,2) = 0$$

- **Calculo de k(2,2)**

$$k(2,2) = \int_0^L EIo\emptyset 2''(x)\emptyset 2''(x)dx$$

$$\emptyset 2(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad \Rightarrow \quad \emptyset 2'(x) = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \quad \Rightarrow \quad \emptyset 2''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12\,x}{L^3}$$

$$k(2,2) = \int_0^L EIo\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12\,x}{L^3}\right)^2 dx$$

$$k(2,2) = EIo\int_0^L \left(\frac{36}{L^4} - \frac{144\,X}{L^5} + \frac{144\,X^2}{L^6}\right) dx$$

$$k(2,2) = EIo\int_0^L \frac{36dx}{L^4} - EIo\int_0^L \frac{144\,X}{L^5}dx + EIo\int_0^L \frac{144\,X^2}{L^6}\,dx$$

$$k(2,2) = EIo\frac{36\,x}{L^4}\Big\{_0^L - EIo\,\frac{144\,x^2}{L^5{*}2}\Big\{_0^L + EIo\frac{144\,X^3}{L^6 * 3}\Big\{_0^L$$

$$k(2,2) = EIo\left(\frac{36}{L^3} - \frac{72}{L^3} + \frac{48}{L^3}\right)$$

$$k(2,2) = E\,Io\left(\frac{1}{L^3}\right) * 12 = 12\,\frac{E\,I_0}{L^3}$$

- **Calculo de k(3,2)**

$$k(3,2) = \int_0^L EIo\emptyset 3''(x)\emptyset 2''(x)dx$$

$$\emptyset 2''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12\,x}{L^3}$$

$$\emptyset 3 = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

$$\emptyset 3' = 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \qquad \Rightarrow \qquad \emptyset 3'' = -\frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$k(3,2) = \int_0^L EIo\left(-\frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12\,x}{L^3}\right)dx$$

$$k(3,2) = EIo\int_0^L \left(\frac{24}{L^3} - \frac{84x}{L^4} + \frac{24x^2}{L^5}\right) dx$$

$$k(3,2) = EIo\int_0^L \frac{24}{L^3}dx - EIo\int_0^L \frac{84\,x}{L^4}dx + EIo\int_0^L \frac{24\,x^2}{L^6}\,dx$$

$$k(3,2) = EIo\frac{24x}{L^3}\Big\{_0^L - EIo\,\frac{84\,x^2}{L^{4*}2}\Big\{_0^L + EIo\frac{72\,x^3}{L^5 * 3}\Big\{_0^L$$

$$k(3,2) = EIo\left(\frac{24}{L^2} - \frac{42}{L^2} + \frac{24}{L^2}\right)$$

$$k(3,2) = \frac{6\,E\,I_0}{L^2}$$

- **Calculo de k(4,2)**

$$k(4,2) = \int_0^L EIo\emptyset 4''(x)\emptyset 2''(x)dx$$

$$\emptyset 2''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12\,x}{L^3}$$

$$\emptyset 4 = \frac{x}{L}$$

$$\emptyset 4' = \frac{1}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \emptyset 4'' = 0$$

$$k(4,2) = 0$$

- **Calculo de k(5,2)**

$$k(5,2) = \int_0^L EIo\emptyset 5''(x)\emptyset 2''(x)dx$$

$$\emptyset 2''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12\,x}{L^3}$$

$$\emptyset 5 = \frac{x^2}{L^2}\left(3 - \frac{2x}{L}\right)$$

$$\emptyset 5' = \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \qquad \Rightarrow \qquad \emptyset 5'' = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}$$

$$k(5,2) = \int_0^L EIo\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12\,x}{L^3}\right)dx$$

$$k(5,2) = EIo\int_0^L \left(-\frac{144x^2}{L^6} + \frac{144x}{L^5} - \frac{36}{L^4}\right)\,dx$$

$$k(5,2) = -EIo\int_0^L \frac{144x^2}{L^6}dx + EIo\int_0^L \frac{144x}{L^5}dx - EIo\int_0^L \frac{36}{L^4}\,dx$$

$$k(5,2) = -EIo\frac{48x^3}{L^6}\Big\{_0^L + EIo\,\frac{72\,x^2}{L^5}\Big\{_0^L - EIo\frac{36\,x}{L^3}\Big\{_0^L$$

$$k(5,2) = EIo\left(-\frac{48}{L^3} + \frac{72}{L^3} - \frac{36}{L^3}\right)$$

$$K(5,2) = -\frac{12\,E\,Io}{L^3}$$

- **Calculo de k(6,2)**

$$K(6,2) = \int_0^L EIo\emptyset 6''(x)\emptyset 2''(x)dx$$

$$\emptyset 2''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12\,x}{L^3}$$

$$\emptyset 6 = -\frac{x^2}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\emptyset 6' = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \emptyset 6'' = \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}$$

$$k(6,2) = \int_0^L EIo\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12\,x}{L^3}\right)dx$$

$$k(6,2) = EIo\int_0^L \left(-\frac{60x}{L^4} + \frac{12}{L^3} + \frac{72x^3}{L^5}\right)\,dx$$

$$k(6,2) = -EIo\int_0^L \frac{60x}{L^4}dx + EIo\int_0^L \frac{12}{L^3}dx + EIo\int_0^L \frac{72x^3}{L^5}\,dx$$

$$k(6,2) = -EIo\frac{30x^2}{L^4}\Big\{_0^L + EIo\,\frac{12x}{L^3}\Big\{_0^L + EIo\frac{72x^3}{L^5}\Big\{_0^L$$

$$k(6,2) = EIo\left(-\frac{30}{L^2} + \frac{12}{L^2} + \frac{24}{L^2}\right)$$

$$k(6,2) = \frac{6\,E\,Io}{L^3}$$

- **RESUMEN**

$$k(1,2) = 0$$

$$k(2,2) = \frac{12\,E\,Io}{L^3}$$

$$k(3,2) = \frac{6E\,Io}{L^2}$$

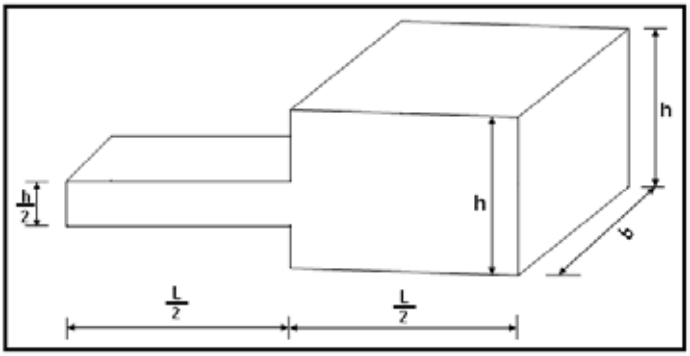
$$k(4,2) = 0$$

$$k(5,2) = -\frac{12E\,Io}{L^3}$$

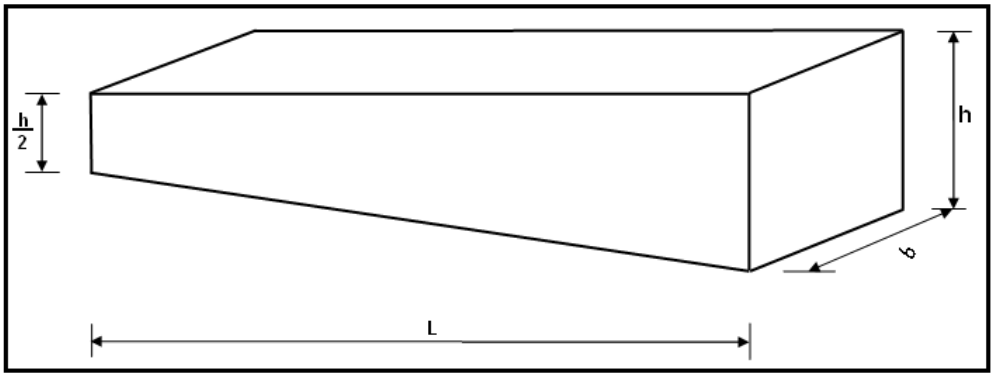
$$k(6,2) = \frac{6E\ Io}{L^3}$$

## 3.9 EJERCICIOS PROPUESTOS

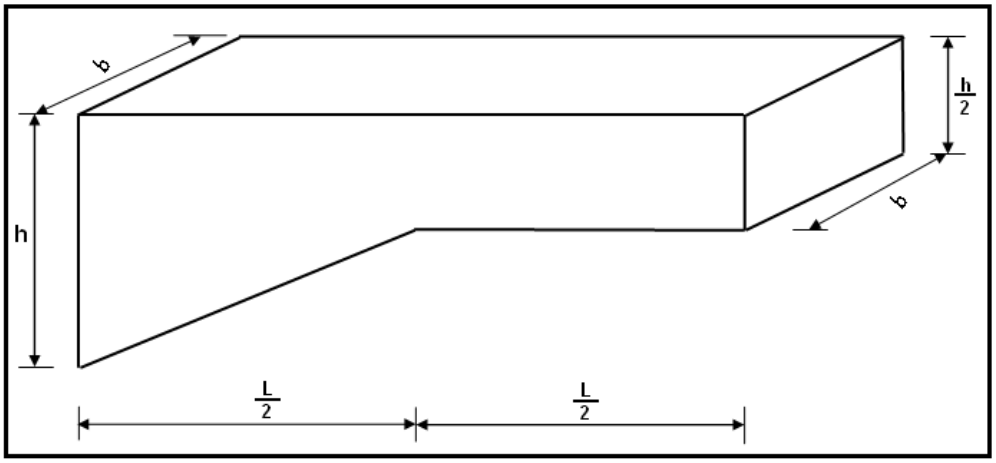
Encontrar las funciones de forma, para los siguientes elementos lineales de sección variable. Todos tienen un ancho b constante y altura variable.




**Ejercicio 1**

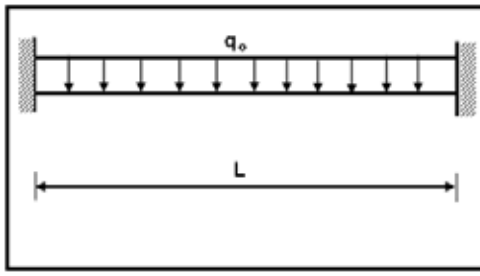



**Ejercicio 2**

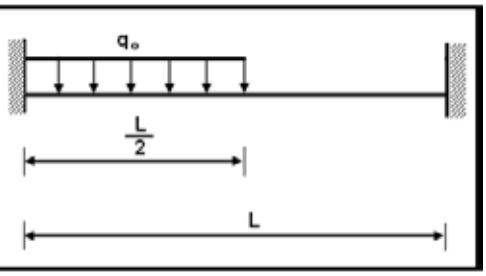



**Ejercicio 3**

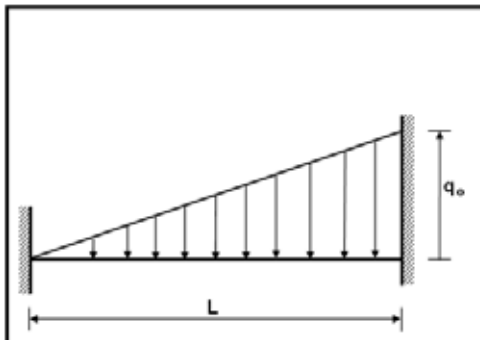
Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento de los siguientes elementos lineales por medio de las funciones de forma.



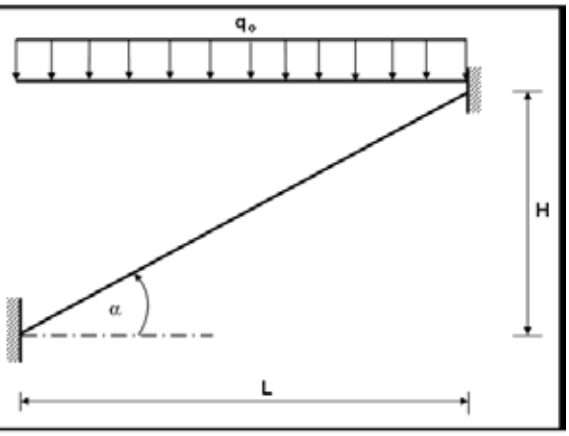

**Ejercicio 4**




**Ejercicio 5**

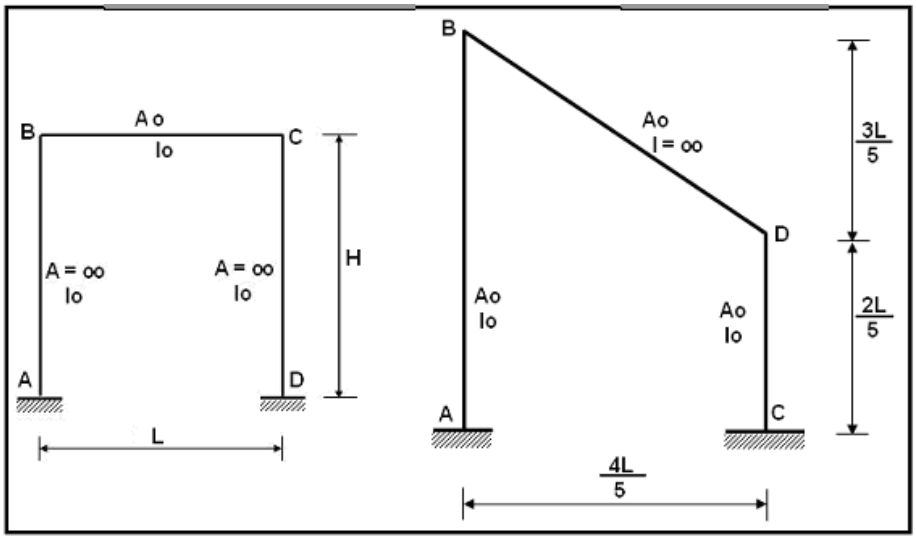



**Ejercicio 6**

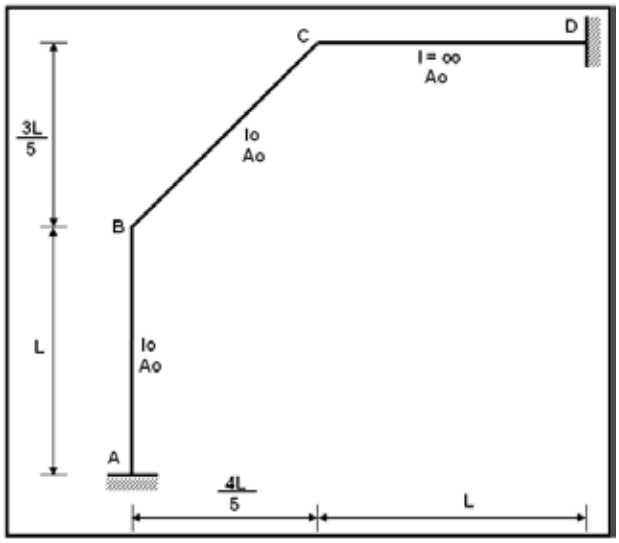



**Ejercicio 7**

Para los siguientes ejercicios, seleccione un sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y encuentre la expresión de las elásticas horizontal y vertical del elemento BC en términos de las coordenadas $\boldsymbol{q_i}$ y las funciones $\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots$, características del elemento.




**Ejercicio 8** **Ejercicio 9**




**Ejercicio 10**

**Ejercicio 11**

Deducir las ecuaciones correspondientes al momento y cortantes en el nudo inicial de una viga de sección constante con carga trapezoidal.

*CAPITULO 4*

# VECTOR DE CARGAS GENERALIZADAS Q


## RESUMEN

Se presenta el cálculo del vector de cargas generalizadas $Q$ en marcos y armaduras planas cuyos elementos pueden ser: totalmente flexibles $A_o, I_o$; axialmente rígidos $A = \infty, I_o$; y transversalmente rígidos $A_o, I = \infty$. El cálculo se lo realiza de dos formas:

i) Mediante la aplicación del problema primario complementario que fue presentado en el capítulo 2, y

ii) Mediante trabajos virtuales.

El algoritmo que se utiliza para programar el cálculo del vector de cargas generalizadas se lo indica en el capítulo 5 una vez que se haya estudiado la matriz de transformación de coordenadas T. Sin embargo es importante que en este capítulo se diferencie entre cargas en elemento y cargas en los nudos, y como las cargas de los elementos en los nudos actúan cambiadas de signo.


## 4. 1 PROBLEMA PRIMARIO Y COMPLEMENTARIO

### 4.1.1. Introducción

Como se indicó en el capítulo 2, la solución de estructuras en las cuales la carga no está únicamente concentrada en los nudos se realiza mediante el problema primario y complementario. Teniéndose que:

| | |
|---|---|
| **SOLUCIÓN ESTRUCTURAL =** | **SOLUCIÓN DEL PROBLEMA PRIMARIO**<br>+<br>**SOLUCIÓN DEL PROBLEMA COMPLEMENTARIO** |

En efecto en el problema primario se considera que actúan:

- Cargas en los nudos,
- Cargas en los elementos,
- Cambios de temperaturas en los elementos,
- Asentamientos en los apoyos, y
- Acciones dinámicas.

En este capítulo solo se consideran los dos primeros tipos de carga.

### 4.1.2 Problema primario

Es aquel en el cual actúa todas las cargas con la condición de que el vector $\boldsymbol{q}$ sea nulo. Esto se consigue colocando vínculos adicionales en las direcciones de los desplazamientos definidos por las coordenadas generalizadas, como consecuencia de estos vínculos se van a generar cargas de fijación que se los designa con la letra **R**.

Por la condición de que el vector $\boldsymbol{q}$ es nulo, cada uno de los elementos de la estructura se encuentra empotrado-empotrado, independiente de la forma de los vínculos.

Por ejemplo, al considerar el pórtico plano, indicado en la parte superior izquierda de la figura 4.1, compuesto por elementos totalmente flexibles sobre la cual actúan las cargas indicadas. En la figura adyacente se indica el sistema de coordenadas generalizadas denominado sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$.

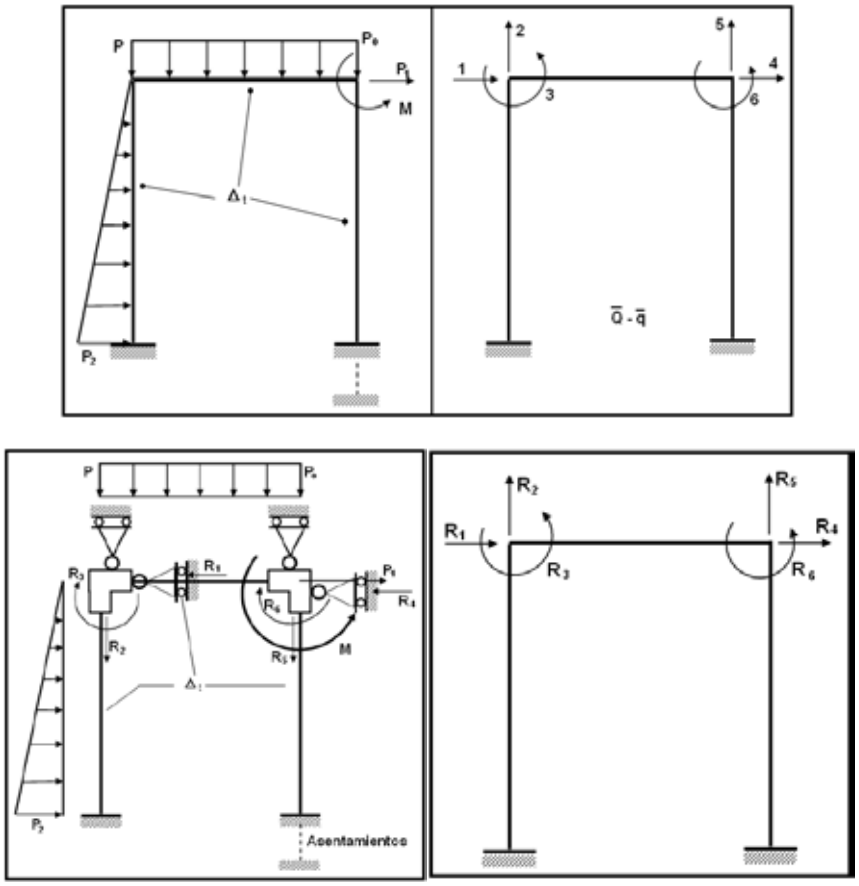



**Figura 4.1** Grados de libertad, Problema Primario y Complementario.

El problema primario para la estructura analizada es el presentado en la parte inferior izquierda de la figura 4.1. Nótese que mediante la colocación de vínculos se han restringido los desplazamientos en la dirección del sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$, de tal manera que cada elemento se encuentra empotrado-empotrado. Es conveniente colocar las fuerzas de fijación con sentido contrario al sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$, luego cuando estas se calculen se obtendrá el verdadero signo.

El Problema Primario tiene dos partes, que son: Equilibrio de Elementos y Equilibrio de Nudos y finaliza con el cálculo de las fuerzas de fijación $R_i$.

### 4.1.3 Problema complementario

Ahora en la estructura solamente actúan las fuerzas de fijación $R_i$ pero con sentido contrario al que tuvieron en el Problema Primario. Al actuar de esta manera se generan los desplazamientos y giros que tiene la estructura, los mismos que se consideran nulos en el Problema Primario.

Es el Problema Complementario lo que se resolverá en los capítulos posteriores ya que el Problema Primario se resuelve por estática. Para el ejemplo que se está analizando el Problema Complementario se presenta en la parte inferior derecha de la figura 4.1

Al observar las dos figuras de la derecha de 4.1, se determina el vector de cargas generalizadas que es el siguiente.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 1**

Determinar el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$, por medio del problema Primario y Complementario para el marco plano de la figura 4.2 cuyos elementos son totalmente flexibles.

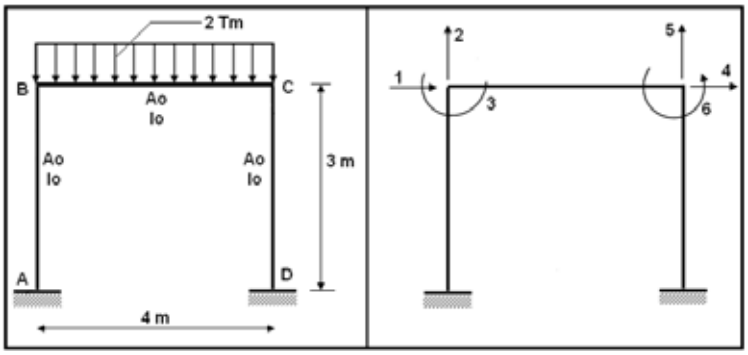



**Figura 4.2** Pórtico con elementos totalmente flexibles y sistema $\boldsymbol{Q-q}$

- **SOLUCIÓN**

A la derecha de la figura 4.2, se presenta el sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q-q}$. En la presentación del problema primario por facilidad se suprime el dibujo de los vínculos con lo que se logra que los desplazamientos sean nulos, solo se colocan las fuerzas de fijación $R_i$ en la figura de la izquierda de 4.3

Como se indicó, la solución del Problema Primario comprende dos puntos, a saber:

i) Equilibrio de elementos, y

ii) Equilibrio de nudos.

Para el equilibrio de los elementos, se deben calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto utilizando las funciones de forma, estudiadas en el Capítulo 3. Para el ejemplo analizado estas se indican a la derecha de la figura 4.3

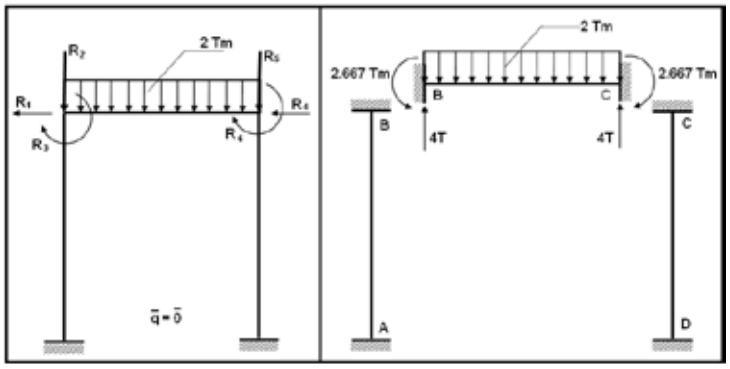



**Figura 4.3** Problema Primario y Equilibrio de Elementos

Cada junta del marco plano debe estar en equilibrio. En consecuencia, debe cumplir que la suma de fuerzas en el sentido "X" e "Y" sea igual a cero y que la suma de momentos sea igual a cero.

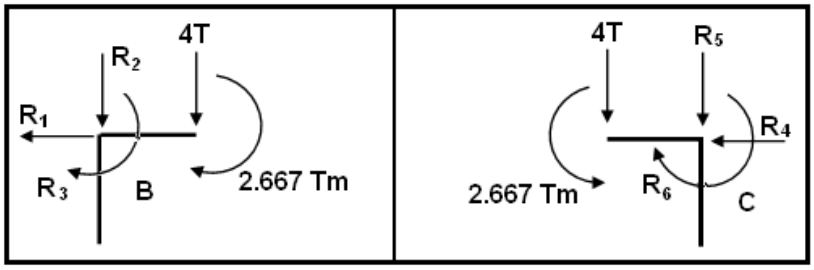



**Figura 4.4** Equilibrio de las Juntas B y C.

En la figura 4.4 se presentan las fuerzas y momentos que actúan en las juntas B y C respectivamente. Nótese, por ejemplo, en la junta B que el cortante de empotramiento perfecto de 4T que en el elemento BC, de la figura derecha de 4.3, está hacia arriba, en la junta actúa hacia abajo como lo muestra la figura izquierda de 4.4. Esto se debe a que, en un caso son cargas en el elemento y en el otro en los nudos; lo propio sucede con los momentos de empotramiento perfecto. Por otra parte las cargas (fuerzas y momentos) de fijación $R_i$ gravitan directamente en las juntas o nudos.

- **Equilibrio de la junta B**

$$\sum \overrightarrow{+} Fx = 0 \quad \rightarrow \quad R_1 = 0$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0 \quad \rightarrow \quad R_2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad R_2 = -4$$

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow \quad R_3 + 2.667 = 0 \quad \rightarrow R_3 = -2.667$$

- **Equilibrio de la junta C**

$$\sum \overrightarrow{+} Fx = 0 \quad \rightarrow \quad R_4 = 0$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0 \quad \rightarrow \quad R_5 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad R_5 = -4$$

$$\sum M = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_6 - 2.667 = 0 \qquad \rightarrow R_6 = 2.667$$

En el problema complementario solo se tienen las fuerzas de fijación actuando sobre las juntas.

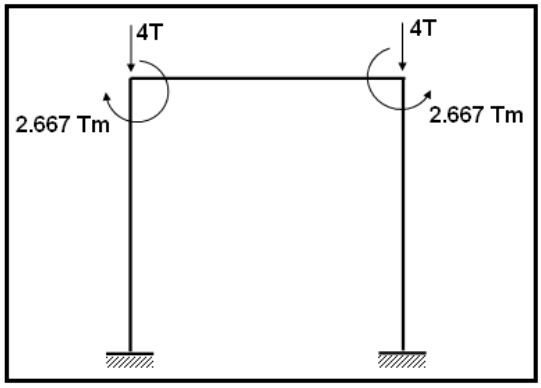



**Figura 4.5** Problema Complementario

Al observar las figuras 4.2 y 4.5 se determinan los elementos del vector de cargas generalizadas, que resultan:

$Q_1 = 0$ $Q_2 = -4$ T. $Q_3 = -2.667$ Tm.

$Q_4 = 0$ $Q_5 = -4$ T. $Q_6 = 2.667$ Tm.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -4.000 \\ -2.667 \\ 0.0000 \\ -4.000 \\ 2.6670 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 2**

Para la estructura de la figura 4.6 que está conformada por elementos totalmente flexibles, cuyas dimensiones son: $a = 5.5\ m.$ y $b = 3.0\ m.$ Se pide:

a) Seleccionar un sistema de coordinas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ apropiado.
b) Resolver el Problema Primario.
c) Señalar cual es el Problema Complementario.
d) Determinar el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$

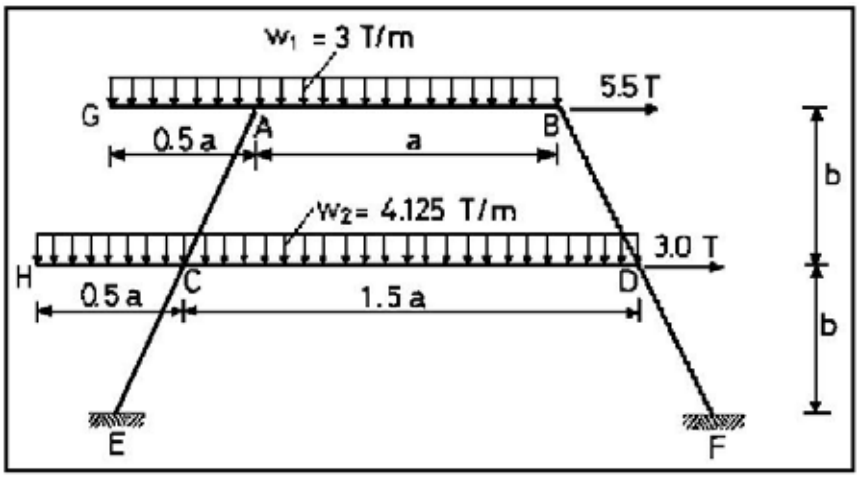



**Figura 4.6** Estructura de ejemplo 6.

- **SOLUCIÓN**

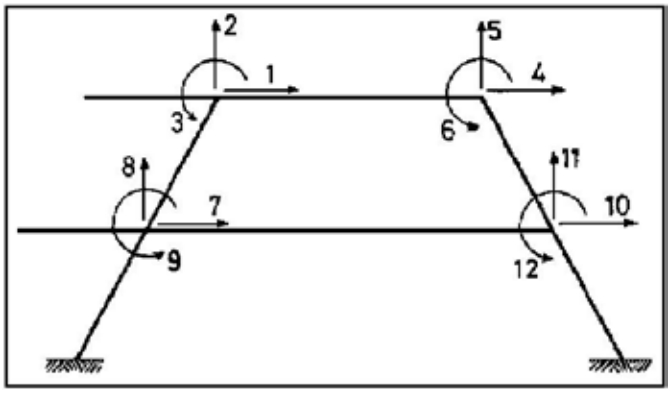



**Figura 4.7** Sistema $Q - q$

**b) Problema Primario**

Se puede considerar a los volados como un elemento, en este caso se aumentaría el número de grados de libertad. La otra opción con la cual se trabaja el presente ejemplo es colocar cargas concentradas en los nudos provenientes de la acción de los voladizos ahí se disminuye el número de grados de libertad.

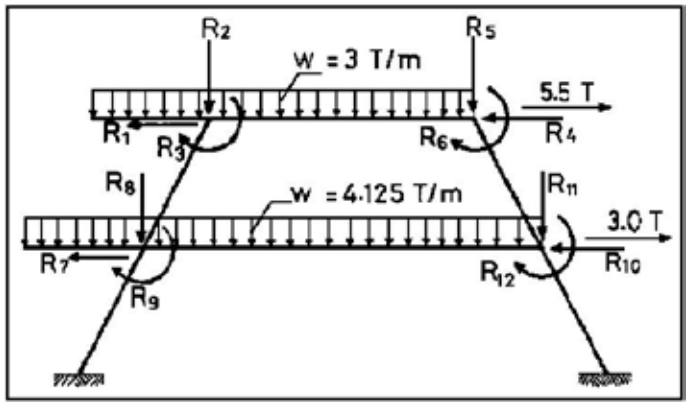



**Figura 4.8** Problema Primario $q = 0$

- **Equilibrio de elementos**

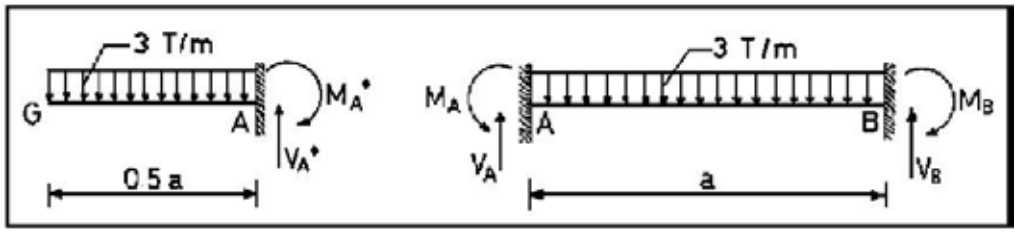



**Figura 4.9** Voladizo y acciones de empotramiento en viga

$$M_A^* = 3\frac{(2.75)^2}{2} = 11.344\,Tm. \qquad M_A = M_B = 3\frac{(5.5)^2}{12} = 7.563\,Tm.$$

$$V_A^* = 3 * 2.75 = 8.25\,T. \qquad V_A = V_B = \frac{3 * 5.5}{2} = 8.25\,T.$$

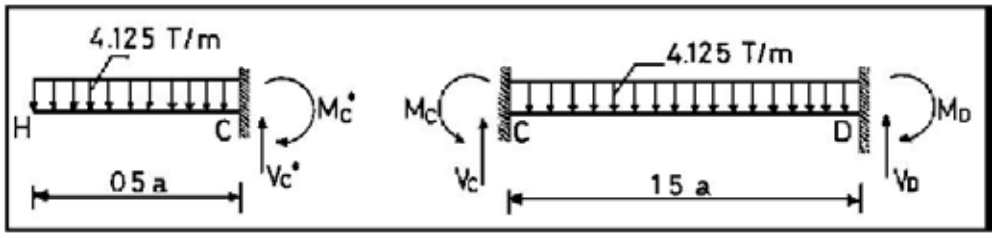



**Figura 4.10** Voladizo y acciones de empotramiento en viga

$$M_C^* = 4.125\frac{(2.75)^2}{2} = 15.598\,Tm. \qquad M_D = M_C = 4.125 * \frac{(8.25)^2}{12} = 23.396\,Tm.$$

$$V_C^* = 4.125 * 2.75 = 11.344\,T. \qquad V_D = V_C = 4.125 * \frac{8.25}{2} = 17.016\,T.$$

- **Equilibrio de Juntas**

**Nudo A**

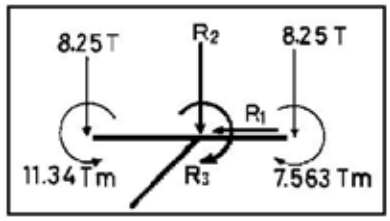



**Figura 4.11**Equilibrio de Nudo A.

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 8.25 + R_2 + 8.25 = 0 \quad \Rightarrow R_2 = -16.50\,T.$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad -11.344 + 7.563 + R_3 = 0 \quad \Rightarrow R_3 = 3.781\,Tm.$$

**Nudo B**

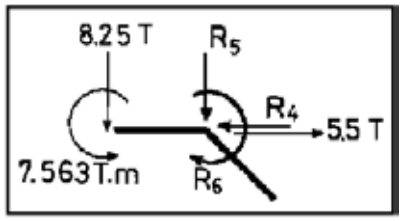



**Figura 4.12** Equilibrio de Nudo B.

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 5.5 - R_4 = 0 \quad \Rightarrow R_4 = 5.5\,T.$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 8.25 + R_5 = 0 \quad \Rightarrow R_5 = -8.25\,T.$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_6 - 7.563 = 0 \quad \Rightarrow R_6 = 7.563\,Tm.$$

**Nudo C**

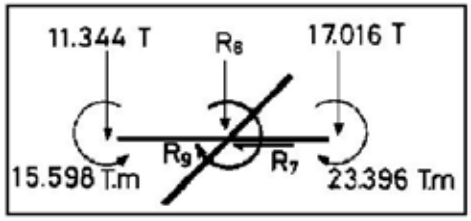



**Figura 4.13** Equilibrio de Nudo C.

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad R_7 = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -11.34 - R_8 - 17.016 = 0 \quad \Rightarrow R_8 = -28.360\,T.$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_9 + 23.396 - 15.598 = 0 \quad \Rightarrow R_9 = -7.798\,Tm.$$

**Nudo D**

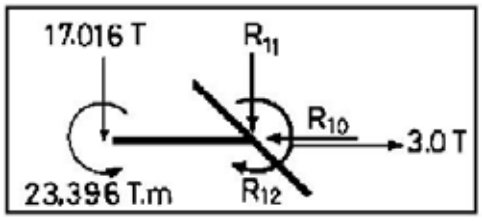



**Figura 4.14** Equilibrio de Nudo D

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_{10} + 3.0 = 0 \quad \Rightarrow R_{10} = 3.0\,T.$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 17.016 + R_{11} = 0 \quad \Rightarrow R_{11} = -17.016\,T.$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad 23.396 - R_{12} = 0 \quad \Rightarrow R_{12} = 23.396\,Tm.$$

**c) Problema Complementario**

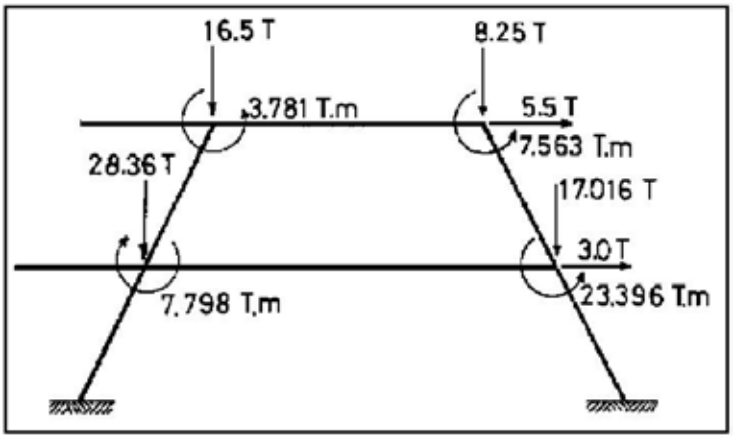



**Figura 4.15** Cargas que actúan en Problema Complementario.

**d) Vector de Cargas Generalizadas** $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -16.500 \\ 3.781 \\ 5.500 \\ -8.250 \\ 7.563 \\ 0.000 \\ -28.360 \\ -7.798 \\ 3.000 \\ -17.016 \\ 23.396 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 3**

Para la estructura de la figura 4.16, resolver el problema primario; indicar el problema complementario y obtener el vector de cargas generalizadas.

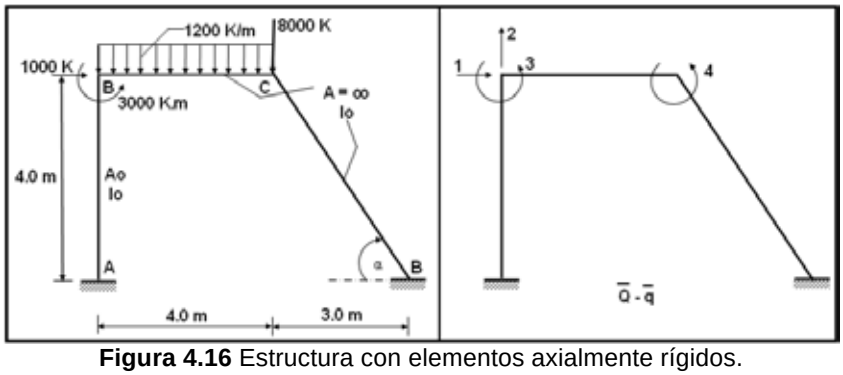



**Figura 4.16** Estructura con elementos axialmente rígidos.

- **SOLUCIÒN**

Para el pórtico analizado, se tiene que el sistema de coordenadas generalizadas es el presentado a la derecha de la figura 4.16.

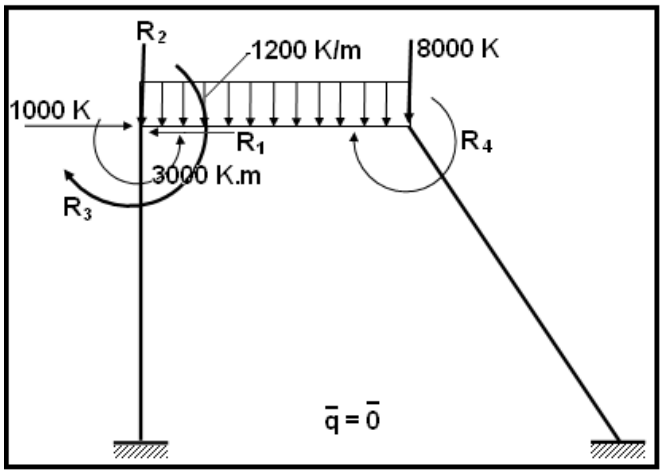



**Figura 4.17** Problema Primario

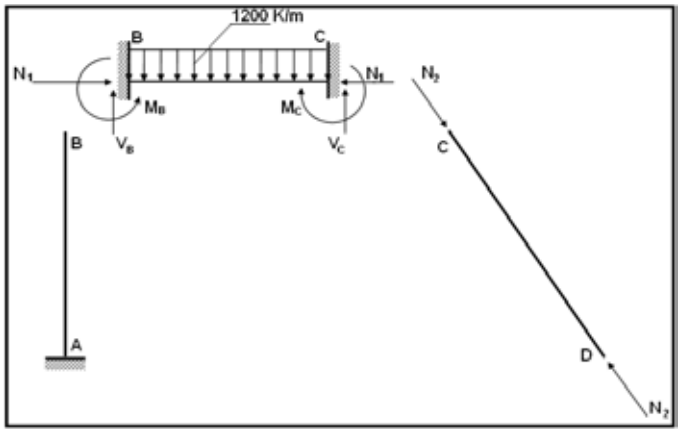



**Figura 4.18** Equilibrio de elementos

$$V_B = V_C = \frac{1200 \ * \ 4}{2} = 2400 \ \ Kg$$

$$M_B = M_C = \frac{1200 \ * \ 4^2}{12} = 1600 \ \ Kg.m$$

Nótese que en los elementos BC y CD existen fuerzas axiales $N_1$ y $N_2$ que se deben calcular, esto es debido a que estos miembros son axialmente rígidos. Otra forma de ver esto sería que, debido al sistema de cargas que actúan en la estructura estos elementos se deberían deformar axialmente pero como no pueden hacerlo porque se consideran axialmente rígidos se originan estas fuerzas $N_1$ y $N_2$.

Una vez que se ha terminado el equilibrio en cada uno de los elementos, se procede al equilibrio de los nudos. Las fuerzas que actúan en los elementos, en los nudos, lo hacen con sentido contrario. En cada nudo se debe cumplir que:

ΣFx = 0 , ΣFy = 0 y ΣM = 0

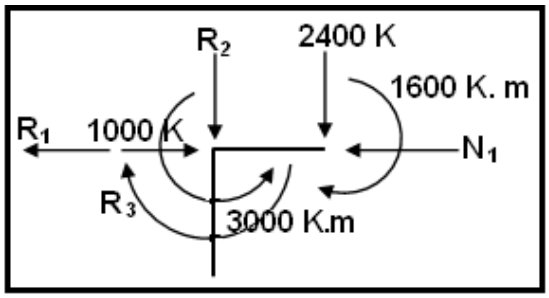



**Figura 4.19** Equilibrio de Nudo B

$$\sum \vec{F}^{+} x = 0$$
$$1000 - R_1 - N_1 = 0$$

$$+\downarrow \sum F y = 0$$
$$2400 + R_2 = 0$$

$$\sum M = 0$$
$$R_3 + 1600 - 3000 = 0$$

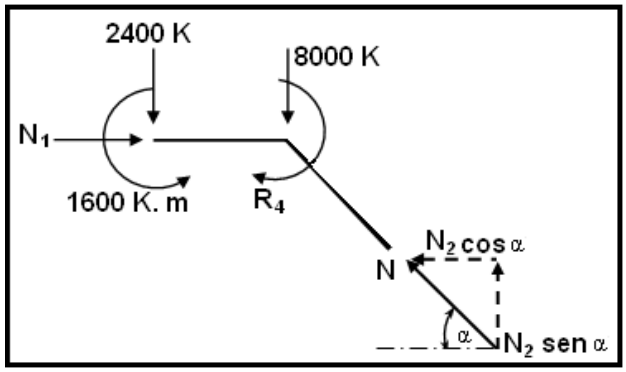



**Figura 4.20** Equilibrio de Nudo C

$$\sum \vec{F}^{+} x = 0$$
$$N_1 - N_2 \cos\alpha = 0$$

$$+\downarrow \sum F y = 0$$
$$-N_2 \, sen\alpha + 2400 + 8000 = 0$$

$$\sum M = 0$$
$$R_4 - 1600 = 0$$

Únicamente por didáctica, a los nudos se los ha dibujado más grandes. Al resolver el sistema de ecuaciones y considerando que: sen α = 4/5 y cos α = 3/5 se obtiene:

$N_1$ = 7800 Kg $N_2$ = 13000 Kg

$R_1$ = -6800 Kg $R_2$ = -2400 Kg

$R_3$ = 1400 Kg.m. $R_4$ = 1600 Kg.m.

Ahora en el problema complementario actúan solamente las fuerzas de fijación R, con sentido contrario al del problema primario.

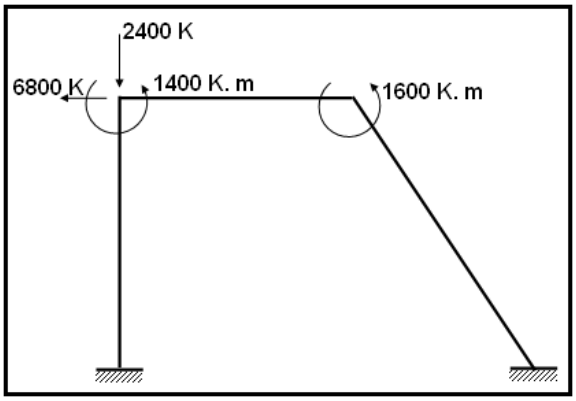



**Figura 4.21** Problema complementario

El vector de cargas generalizadas $Q$ se obtiene del problema complementario.

$$Q = \begin{bmatrix} -6800 \\ -2400 \\ 1400 \\ 1600 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 4**

Con el objeto de ilustrar el procedimiento de cálculo cuando se tienen elementos transversalmente rígidos se resuelve el ejercicio anterior cambiando la condición de A = ∞ por I = ∞, para el miembro BC. Por lo tanto se resolverá la estructura indicada en la figura 4.22.

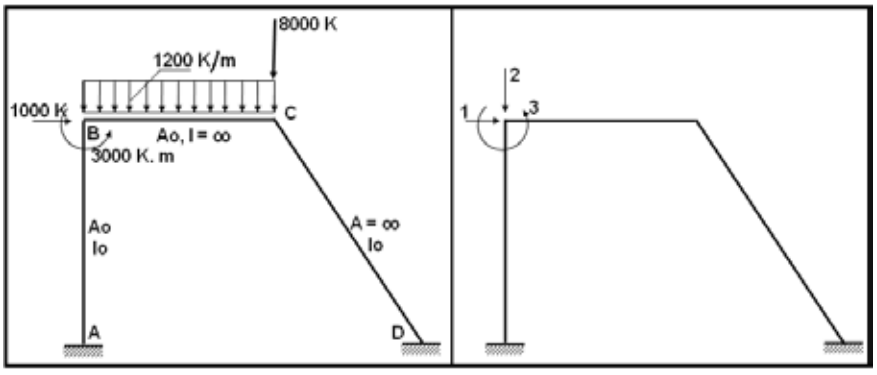



**Figura 4.22** Estructura de ejemplo 4 y sistema $Q - q$

Al hacer equilibrio de elementos hay que tener presente que el miembro BC no trabaja a flexión, en consecuencia en sus extremos actuarán dos momentos $\mu$ y $\mu'$ que deben ser calculados. Esta es una forma de resolver el ejercicio, calculando los momentos finales que en este caso se han llamado $\mu$ y $\mu'$. Otra forma de resolver es encontrar los momentos de empotramiento

debido a la carga vertical y a esos momentos añadir un momento por la condición de $I = \infty$. Se resolverá el ejercicio de las dos formas en los ejemplos 4 y 5.

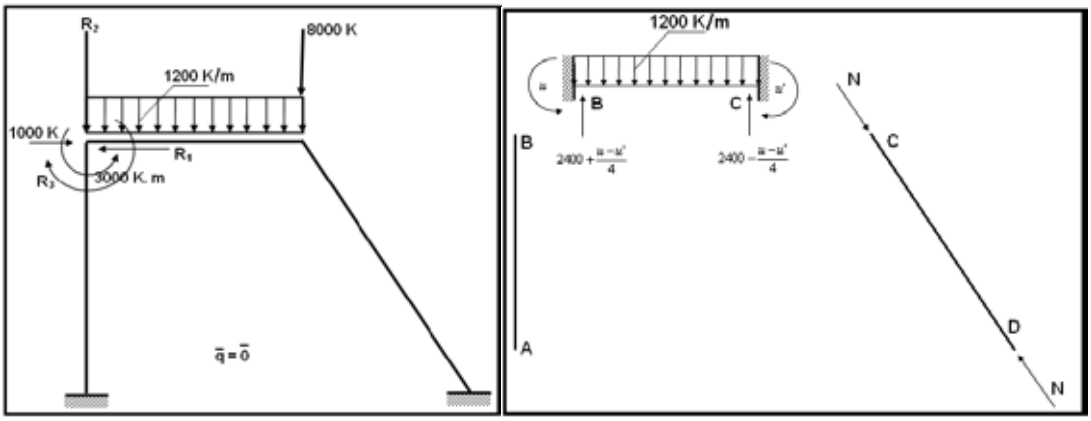
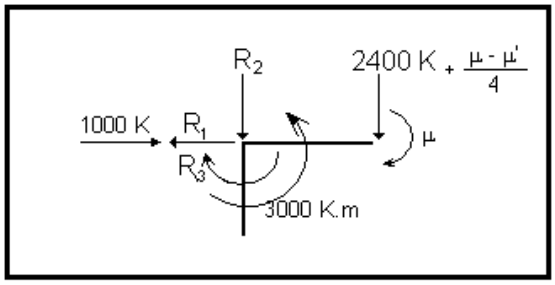



**Figura 4.23** Problema Primario **y** equilibrio de elementos

El cortante en el miembro BC es igual al producido por la carga distribuida más en el que se produce por la acción de los momentos $\mu$ y $\mu'$. El sentido positivo de estos momentos es arbitrario. En este caso se ha colocado $\mu$ horario y $\mu'$ anti horario. Se pudo haber colocado al revés pero lo importante es que los cortantes se encuentren en concordancia con los momentos para que exista equilibrio.

- **Equilibrio de las juntas**

**Junta B**

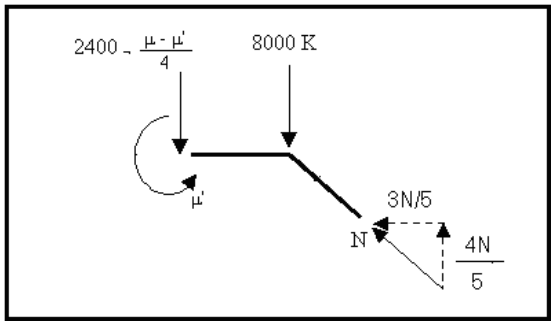



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum Fx = 0 \Rightarrow 1000 - R_1 = 0$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \Rightarrow R_2 + 2400 + \frac{\mu - \mu'}{4} = 0$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M = 0 \Rightarrow R_3 + \mu - 3000 = 0$$

**Junta C**




$$\overset{+}{\rightarrow}\sum Fx = 0 = -\frac{3}{5}N = \dot{0}$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0$$

$$2400 - \frac{\mu - \mu'}{4} + 8000 - \frac{4}{5}N = 0$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M = 0 \Rightarrow \mu' = 0$$

De la solución del sistema de ecuaciones se tiene:

N = 0 u = 41600 Kg.m

u' = 0 $R_1$ = 1000 Kg.

$R_2$ = -12800 Kg $R_3$ = -38600 Kg.m.

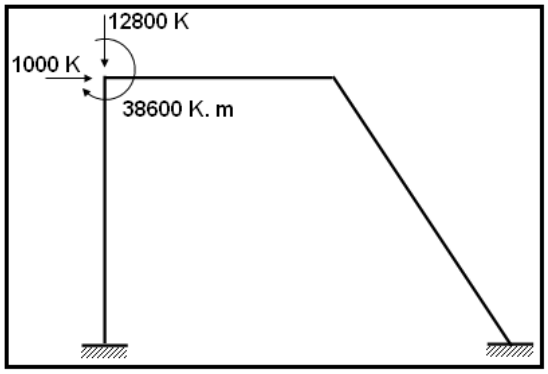



**Figura 4.24** Problema complementario

El vector de cargas generalizadas se obtiene directamente del Problema Complementario.

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 \\ -12800 \\ -38600 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 5**

Resolver de otra forma el ejemplo 4, considerando los momentos de empotramiento que produce la carga vertical, para el elemento transversalmente rígido.

- **SOLUCIÓN**

Al hacer el equilibrio de elementos, en la figura 4.23 no se colocó las acciones de empotramiento perfecto que produce la carga uniforme repartida, esto se lo va a realizar en este ejercicio y luego se añadirán los momentos $\mu$ y $\mu'$ que son necesarios que actúen en los extremos del elemento transversalmente rígido para que no trabaje a flexión.

En la parte superior de la figura 4.25 se presentan las cargas de empotramiento perfecto como que el elemento fuera totalmente flexible. En la parte central en cambio se tiene la viga con los momentos $\mu, \mu'$, que se han considerado con sentido anti horario, con sus respectivos cortantes para que exista equilibrio. Nótese que el cortante del nudo final es hacia abajo.

Finalmente, en la parte inferior de la figura 4.25 se aplica el principio de superposición, por este motivo es que se suman las cargas anteriores.

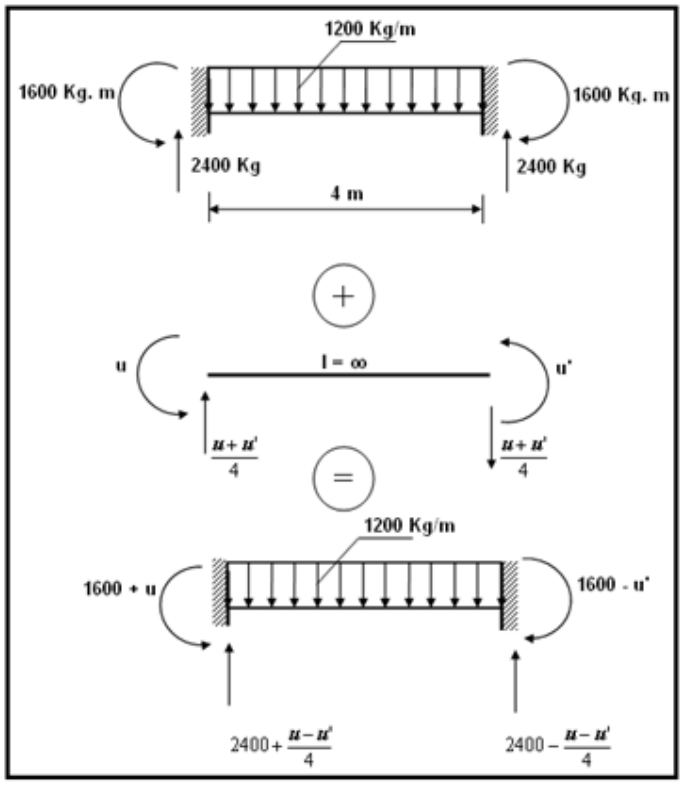
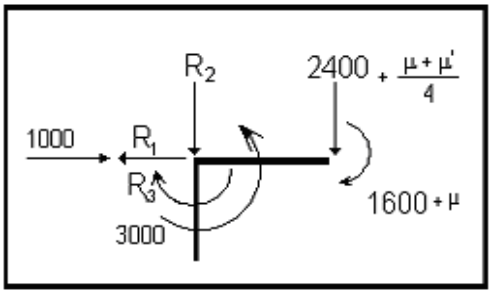



**Figura 4.25** Equilibrio del elemento BC

- **Nudo B**

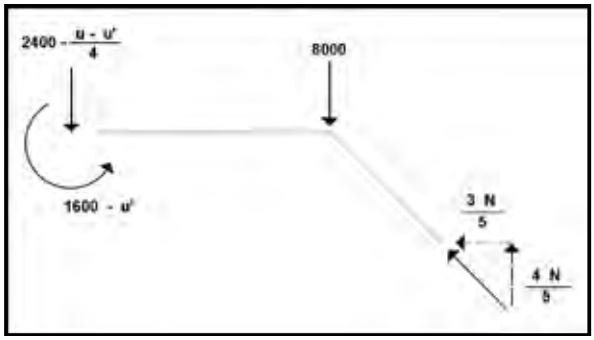



$$\sum \overset{+}{\rightarrow} Fx = 0 \Rightarrow R_1 = 1000$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0 \Rightarrow R_2 + \frac{\mu + \mu'}{4} + 2400 = 0$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M = 0 \Rightarrow 1600 + \mu - 3000 + R_3 = 0$$

- **Junta C**




$$\sum \overset{+}{\rightarrow} Fx = 0 \Rightarrow -\frac{3}{5}N = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0$$

$$8000 + 2400 - \frac{\mu - \mu'}{4} - \frac{4}{5}N = 0$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M = 0 \Rightarrow 1600 - \mu' = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta:

u = 40000 Kg.m  u' = 1600 Kg m

N = 0  $R_1$ = 1000 Kg

$R_2$ = -12800 Kg  $R_3$ = -38600 Kg.m

Por lo tanto, se obtiene el mismo vector de cargas generalizadas, ya que los valores de las fuerzas $R_i$ son los mismos del ejercicio anterior. Se deja al lector la justificación del porqué los momentos $\mu$ y $\mu'$ son diferentes, con relación a los del Ejemplo 4.

## 4.2 TRABAJOS VIRTUALES

Otra forma de obtener el vector de cargas generalizadas en una estructura es mediante la aplicación del principio de los Trabajos Virtuales.

Por ejemplo, si sobre la estructura con el sistema de cargas, mostrada a la derecha de la figura 4.26; siendo el sistema $\boldsymbol{Q-q}$ el que se indica a continuación. Mediante la aplicación del problema primario y complementario, se puede tener solamente cargas concentradas $\boldsymbol{Q}$ en las juntas, como lo ilustra la figura central de 4.26.

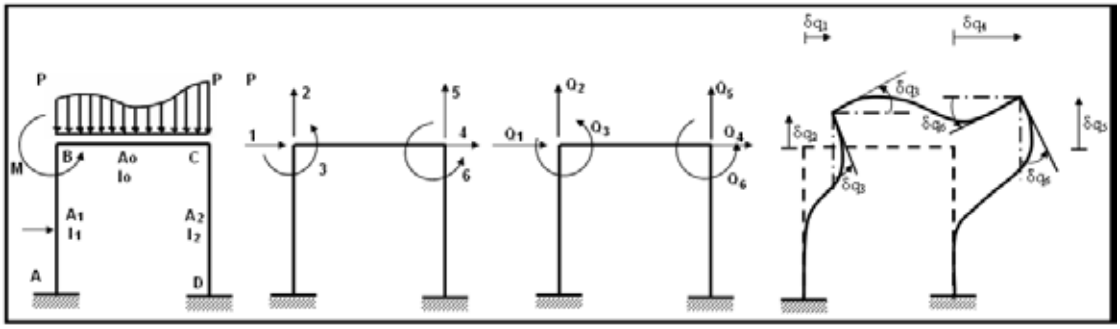



**Figura 4.26** Estructura; Sistema $\boldsymbol{Q-q}$; Cargas en los nudos y coordenadas virtuales.

El objetivo es calcular $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, $Q_5$, $Q_6$ por Trabajos Virtuales. Para esto en parte derecha de la figura 4.26, se han dibujado unos posibles desplazamientos y giros, que podría tener la estructura, desplazamientos virtuales. Por ser virtuales se les antepone la letra δ a la variable q.

El Trabajo Virtual (TV) del sistema de cargas concentradas en los nudos en los desplazamientos virtuales, vale:

$$TV = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + Q_3\,\delta q_3 + Q_4\,\delta q_4 + Q_5\,\delta q_5 + Q_6\,\delta q_6 \qquad (4.1)$$

Este trabajo virtual también es igual al producido por el sistema de cargas indicado a la izquierda de la figura 4.26 en los desplazamientos virtuales.

Entonces, para calcular $Q_1$, se construirá la deformada elemental siguiente:

$$\delta q_1 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

Para esta deformada elemental la ecuación (4.1) queda:

$$TV = Q_1 * 1$$

Pero este trabajo virtual es igual al que produce el sistema de cargas, presentado a la derecha de 4.26, en la deformada elemental indicada.

En resumen, **$Q_1$ es el trabajo virtual del sistema de cargas, presentado a la derecha de 4.26 en la deformada elemental correspondiente a** $\delta q_1$. Para calcular **$Q_2$ se debe evaluar el trabajo virtual del sistema de cargas en la deformada elemental** $\delta q_2$, etc. En consecuencia se evalúa una por una las componentes del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$

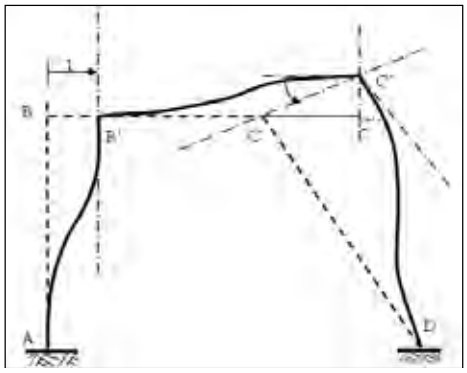
- **EJEMPLO 6**

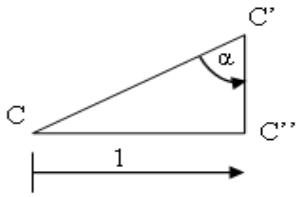
Calcular el vector $\boldsymbol{Q}$ , empleando trabajos virtuales, para la estructura de la figura 4.16, que tiene dos elementos axialmente rígidos. Considerar el sistema de coordenadas generalizadas indicado en la mencionada figura.

- **SOLUCIÓN**

  - **Cálculo de $Q_1$**

**$\delta q_1 = 1$ y $\delta q_i = 0$ $i \neq 1$**




En el triángulo CC'C'' se tiene: C'C'' = Cotg α = 3/4

El trabajo virtual del sistema de cargas de la figura 4.26 en la deformada elemental dibujada, vale:

$$Q_1 = TV = 1000(kg) * 1 + 3000(kg\ m) * 0 - 8000(kg) * \frac{3}{4} + Y$$

La carga horizontal de 1000 Kg que actúa en la junta B produce un TV positivo, toda vez que el nudo B se desplaza a B' en la misma dirección de la aplicación de la carga. En cambio la carga vertical de 8000 Kg que gravita en el nudo C hacia abajo genera un trabajo vertical negativo ya que la junta C se desplaza hacia arriba hasta C'. El momento de 3000 Kg.m no produce TV ya que la junta B no rota.

Sea Y el trabajo virtual producido por la carga uniformemente distribuida, ver figura 4.27, en la deformada del elemento horizontal. Para un elemento diferencial $dx$, la carga concentrada vale $P\ dx$, hacia abajo y el desplazamiento para ese punto es $v(x)$ hacia arriba. Por lo tanto, el trabajo virtual es negativo.

$$Y = \int_0^L -P\ v(x)\ dx$$

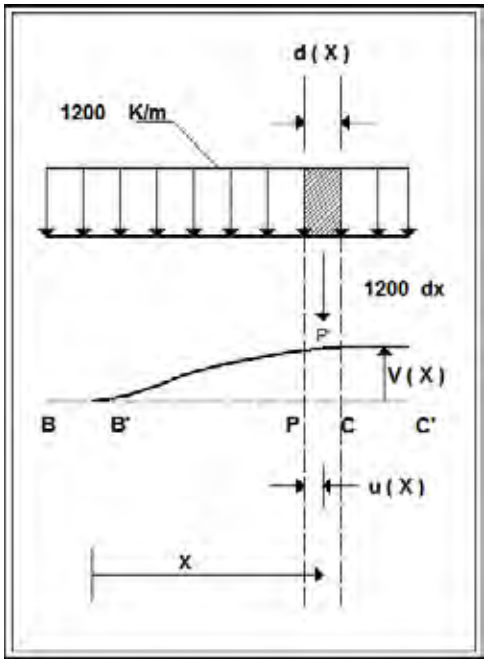



**Figura 4.27** Trabajo virtual para una carga distribuida.

Al remplazar valores se tiene:

$$Y = \int_0^4 -1200 * v(x)\, dx$$

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1\phi_3(x) + v_2\phi_5(x) + \theta_2\phi_6(x)$$

En la deformada elemental se tiene que $v_1 = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ y $v_2 = \frac{3}{4}$. Luego:

$$v(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3}\right)$$

Reemplazando en la integral el valor de v(x):

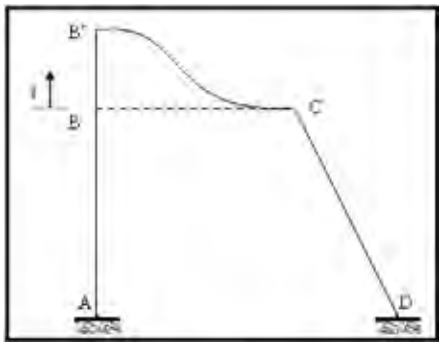
$$Y = -1200\int_0^4 \frac{3}{4}\left(\frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3}\right)dx = -900\left|\frac{X^3}{L^2} - \frac{X^4}{2L^3}\right|_0^4 = -1800\ Kg$$

Por lo tanto, la carga generalizada correspondiente a la coordenada $q_1$ vale:

$Q_1$ = 1000 Kg. -6000 Kg. -1800 Kg. = - 6800 Kg.

- **Cálculo de $Q_2$**

**$\delta q_2 = 0$** y **$\delta q_i = 0$** **$i \neq 2$**




En este caso solamente la carga distribuida produce trabajo virtual.

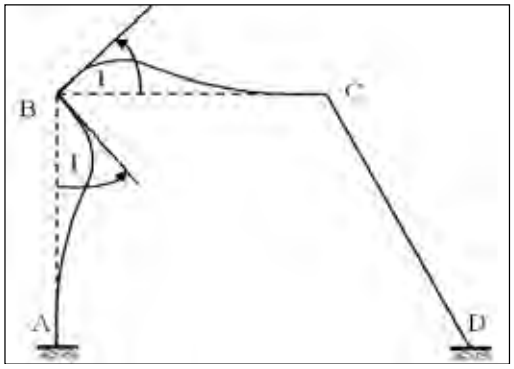
$$Q_2 = \int_0^4 -1200.\, v(x)\, .dx$$

$$v(x) = v_1\, \phi_2(x) = 1\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)$$

$$Q_2 = -1200\int_0^4 \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)dx = -2400Kg$$

- **Cálculo de $Q_3$**

**$\delta q_3 = 1$** y **$\delta q_i = 0$** **$i \neq 3$**



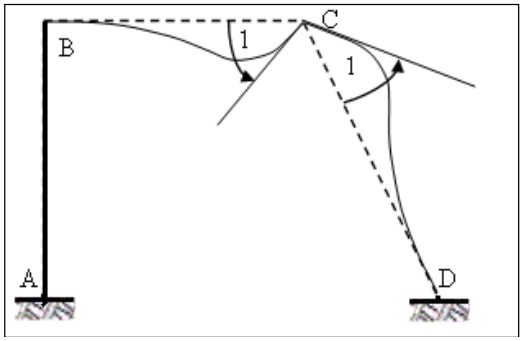

$$Q_3 = 3000\ Kg\ m. * 1 + \int_0^4 -1200\ v(x)\ dx$$

$$v(x) = \theta_1\, \phi_3(x) = 1 * X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$

$$Q_3 = 3000 - 1200\int_0^4 X\left(1-\frac{X}{L}\right)^2 dx = 1400\ (Kg.m)$$

- **Cálculo de $Q_4$**

**$\delta q_4 = 1$** y **$\delta q_i = 0$** **$i \neq 4$**




$$Q_4 = \int_0^4 -1200.v(x).dx$$

$$v(x) = \theta_2\ \phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1-\frac{X}{L}\right)$$

$$Q_4 = -1200\int_0^4 -\frac{X^2}{L}\left(1-\frac{X}{L}\right)dx = 1600\ kg.m.$$

Por lo tanto, el vector de cargas generalizadas, es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -6800 \\ -2400 \\ 1400 \\ 1600 \end{bmatrix}$$

Es más laborioso el cálculo del vector $\boldsymbol{Q}$ empleando trabajos virtuales pero para ciertos problemas puede ser de gran utilidad.

## 4.3 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO 7**

Todos los elementos del pórtico de la figura 4.28 se consideran axialmente rígidos. Se pide:

i) Seleccionar un sistema de coordinas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ apropiado.
ii) Resolver el Problema Primario.
iii) Señalar cual es el Problema Complementario.
iv) Determinar el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$

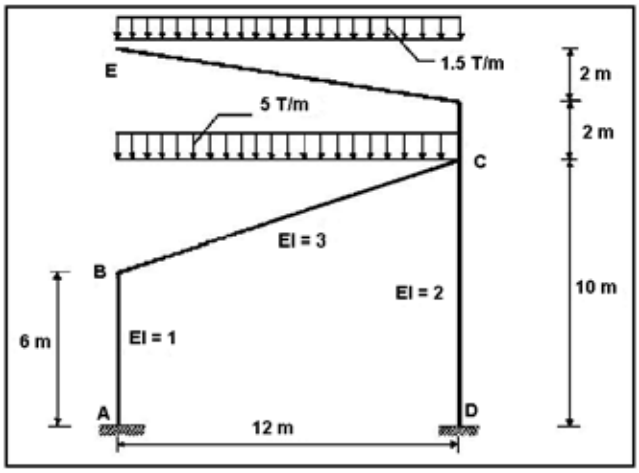



**Figura 4.28** Estructura de Ejemplo 7

- **SOLUCIÓN**

**i) Sistema de Coordenadas $Q - q$**

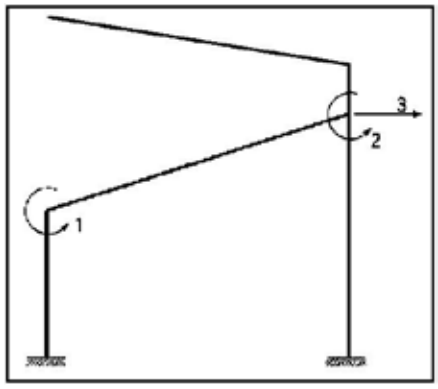
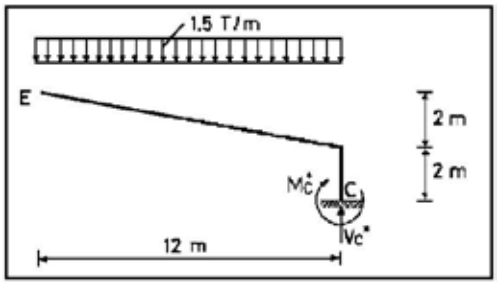



**Figura 4.29** Sistema $Q - q$

Al elemento EC se lo va a considerar como un voladizo. Por lo tanto hay que calcular las fuerzas exteriores que actúan en el nudo C por efecto de la carga de 1.5 T/m.




$$M_C^* = 1.5 * \frac{(12.0)^2}{2} = 108\,Tm.$$

$$V_C^* = 1.5 * 12 = 18\,T$$

Estas fuerzas $V_C^*$ y $M_C^*$ actúan en el nudo C, con sentido contrario en el resto de la estructura como se indica a continuación, sin el voladizo.

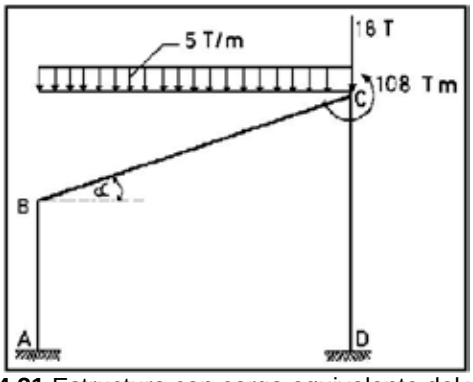



**Figura 4.31** Estructura con carga equivalente del voladizo

$$Sen\ \alpha = \frac{4}{\sqrt{160}} \qquad Cos\ \alpha = \frac{12}{\sqrt{160}} \qquad Longitud\ BC = \sqrt{160}\ m.$$

**iii) Problema Primario**

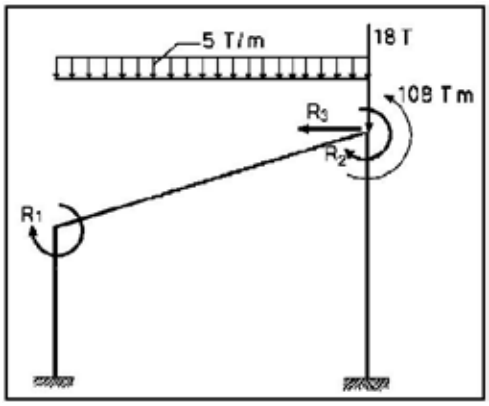
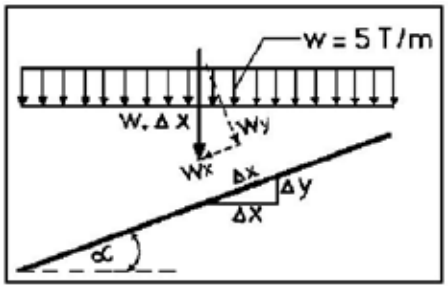
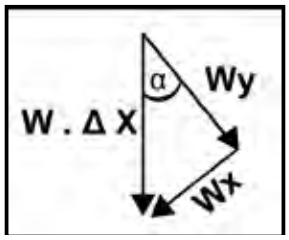



**Figura 4.32** Problema Primario, $\boldsymbol{q = 0}$

- **Descomposición de la carga distribuida**




$$W_Y = W\frac{\Delta X}{\Delta x}Cos\ \alpha \qquad W_X = W\frac{\Delta X}{\Delta x}Sen\alpha$$



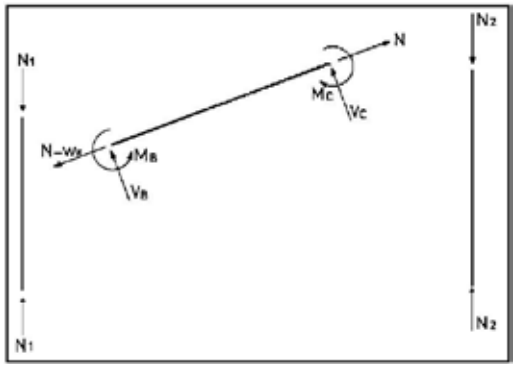

Pero $\frac{\Delta X}{\Delta x} = Cos\ \alpha$. Luego las cargas uniformes distribuidas perpendicular y axial al eje del elemento son:

$$w_y = W\ Cos^2\alpha = W\ \frac{144}{160} = 4.5\ \frac{T}{m}$$

$$w_x = W\ Sen\alpha\ Cos\alpha = W\ \frac{48}{160} = 1.5\ \frac{T}{m}$$

Donde $w_y$ es la carga uniforme distribuida que actúa perpendicular al eje del elemento y $w_x$ es la carga uniforme distribuida que actúa axialmente al eje del elemento.

- **Equilibrio de Elementos**




La resultante de la fuerza axial $W_X$ es igual a la carga uniforme distribuida axial por la longitud.

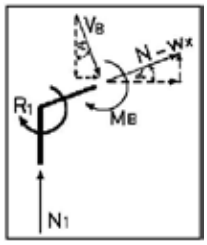
$$W_X = w_x\sqrt{160} = 1.5 * \sqrt{160} = 18.974\ T.$$

$$V_B = V_C = \frac{w_y\ \sqrt{160}}{2} = \frac{4.5\ \sqrt{160}}{2} = 28.460\ T.$$

$$M_B = M_C = \frac{w_y * 160}{12} = \frac{4.5 * 160}{12} = 60.00\ Tm.$$

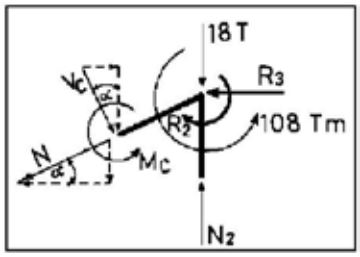
- **Equilibrio de Nudos**

**Nudo B**



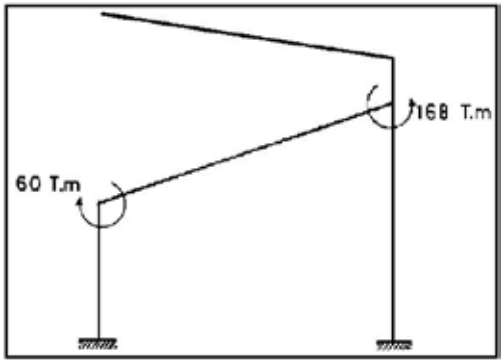

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad (N - W_X)Cos\,\alpha + V_B\,Sen\alpha \quad \Rightarrow N = 9.487\ T.$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + (N - W_X)Sen\alpha - V_B\,Cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow N_1 = 30.00\ T.$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B + R_1 = 0 \quad \Rightarrow R_1 = -60.00\ Tm.$$

**Nudo C**




$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C\,sen\alpha - N\,Cos\alpha - R_3 \quad \Rightarrow R_3 = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_c\,Cos\alpha - N\,sen\alpha - 18 + N_2 = 0 \quad \Rightarrow N_2 = 48.00\ T.$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 - 108 - M_C = 0 \quad \Rightarrow R_2 = 168.00\ Tm.$$

**iv) Problema Complementario**



**v) Vector $Q$**

$$Q = \begin{bmatrix} -60.00 \\ 168.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 8**

Obtener el vector de cargas generalizadas $Q$ para el pórtico plano de la figura 4.8, empleando trabajos virtuales.

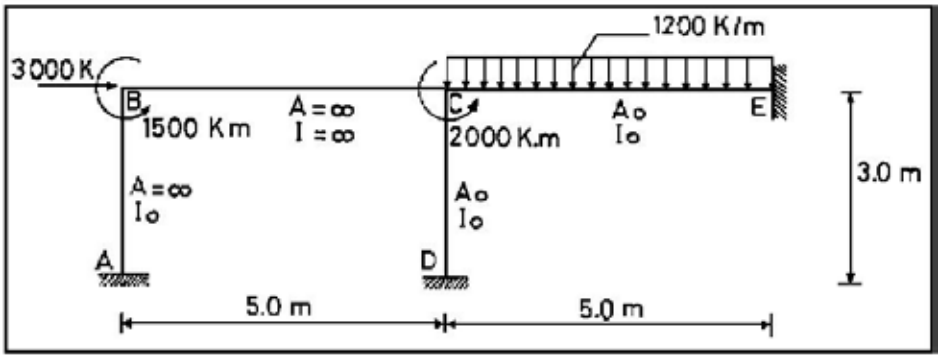



**Figura 4.33** Estructura del Ejemplo 8.

- **SOLUCIÓN**

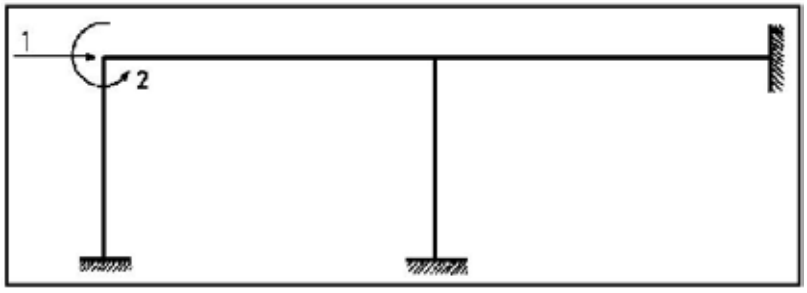
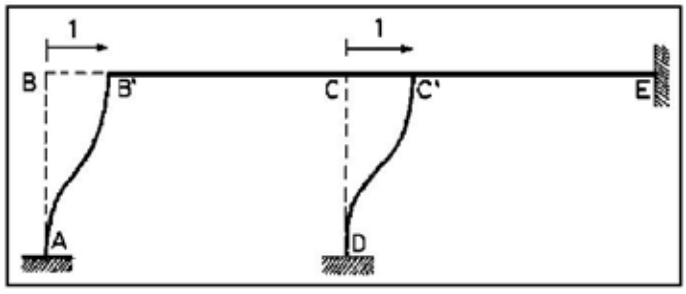



**Figura 4.34** Sistema $Q - q$

a. **Cálculo de $Q_1$**

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

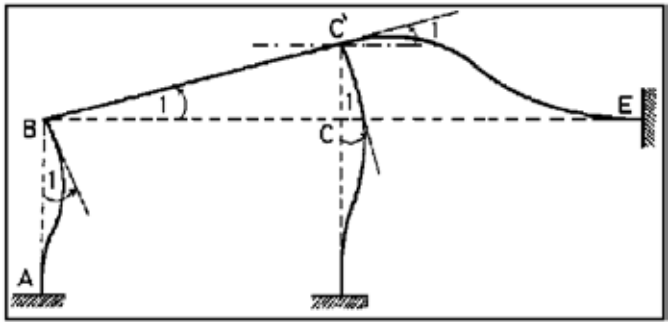


$$Q_1 = 3000 * 1 + 1500 * 0 + 2000 * 0 = 3000\ Kg.$$

La carga uniforme distribuida en este caso no produce trabajo virtual por la forma de la deformada elemental.

b. **Cálculo de $Q_2$**

$$\delta q_2 = 2 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$




$$Q_2 = 1500 * 1 + 2000 * 1 - \int_0^5 1200\, v(x)\, dx$$

Para el elemento CE se tiene:

$$v_1 = 5 \qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 1 \qquad \theta_2 = 0$$

El valor de $v_1$ se obtiene aplicando el siguiente artificio en el elemento BC. Cuerda CC' dividido para el radio que viene a ser BC es igual al ángulo unitario. De donde CC'=BC. Este artificio únicamente se aplica en los elementos $I = \infty$. El valor de $v(x)$ resulta:

$$v(x) = v_1\, \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) = 5\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right) + X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$

Sustituyendo el valor de $v(x)$ en $Q_2$ se tiene:

$$Q_2 = 3500 - 1200 \int_0^5 \left[5\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right) + X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2\right] dx$$

Luego de realizar la integral y reemplazar los límites respectivos, se halla:

$$Q_2 = -14000\ Kg.m.$$

c. **Vector $Q$**

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 3000 \\ -14000 \end{bmatrix}$$

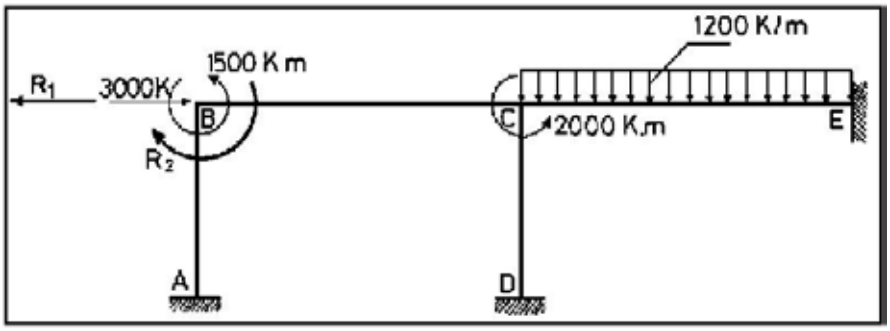
- **EJEMPLO 9**

Con relación al Ejemplo 8, ahora se pide:

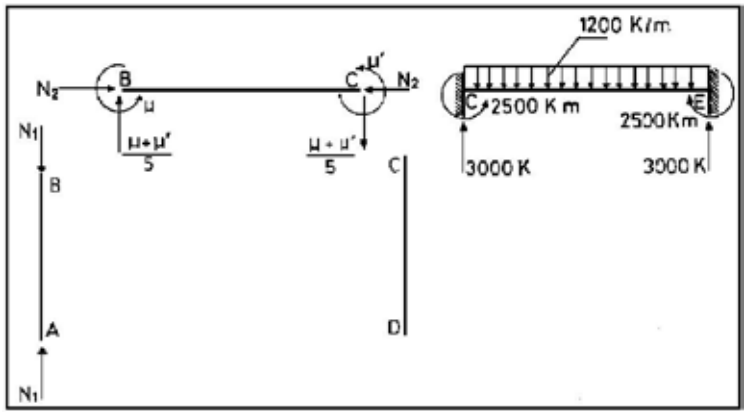
a) Resolver el Problema Primario.
b) Cuál es el problema Complementario.
c) Obtener el vector $\boldsymbol{Q}$ .

- **SOLUCIÓN**

**a) Problema Primario**

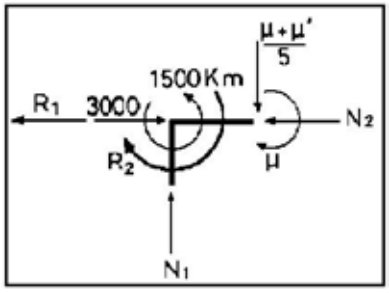



- **Equilibrio de Elementos**




- **Equilibrio de Nudos**

**Nudo B**



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 3000 - R_1 - N_2 = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - \frac{(\mu + \mu')}{5} = 0$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 + \mu - 1500 = 0$$

**Nudo C**

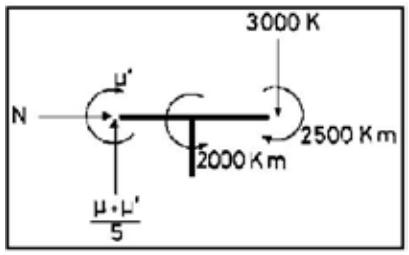


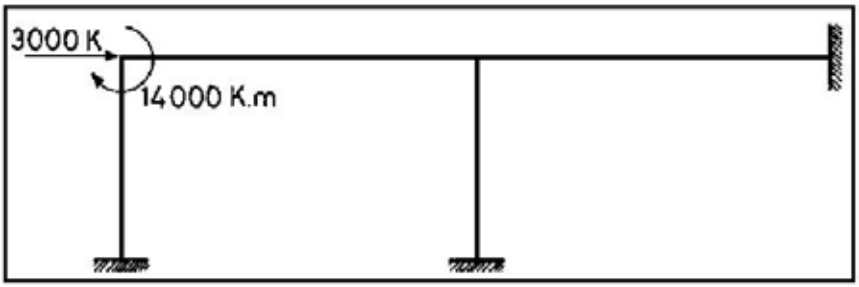

**Figura 4.9.3**

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\mu + \mu')}{5} - 3000 = 0$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad 2500 + \mu' - 2000 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$$N_1 = 3000\ Kg. \qquad N_2 = 0 \qquad \mu = 15500\ Kg.m.$$
$$\mu' = -500\ Kg.m. \qquad R_1 = 3000\ Kg. \qquad R_2 = -14000\ Kg.m.$$

**b) Problema Complementario**




**c) Vector de Cargas Generalizadas $Q$**

$$Q = \begin{bmatrix} 3000 \\ -14000 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 10**

Para la estructura de la figura 4.35, encontrar el vector de Cargas Generalizadas $Q$ a través del Problema Primario y Complementario.

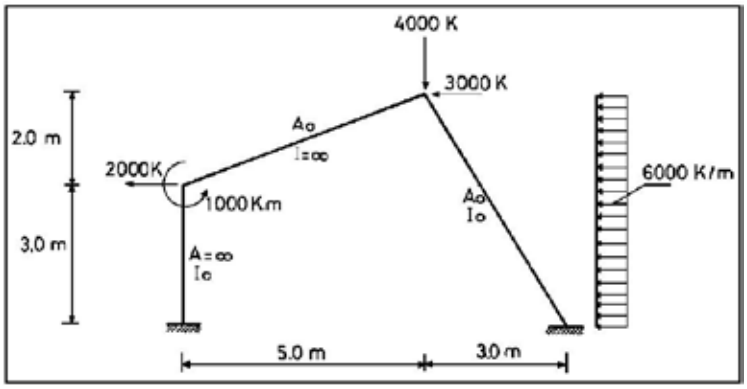



**Figura 4.35** Estructura del Ejemplo 10.

Se va a calcular para los siguientes sistemas de coordenadas $Q - q$.

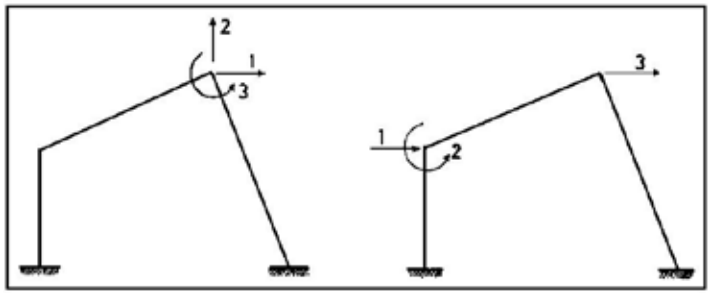
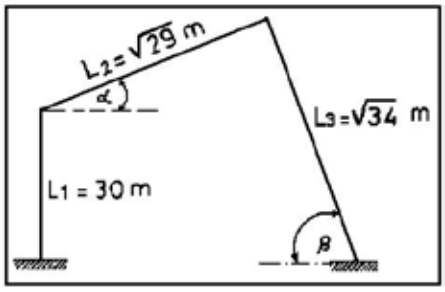



**Figura 4.36** Sistemas de Coordenadas Seleccionadas

Sistema de coordenadas **A** Sistema de Coordenadas **B**

- **SOLUCIÓN**

- **Parámetros Geométricos**



$$Sen\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \qquad Sen\beta = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$Cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \qquad Cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$Tg\alpha = \frac{2}{5} \qquad Tg\beta = \frac{5}{3}$$

Por didáctica se transforma la carga repartida en fuerzas y momentos actuando en los nudos, para ello se debe determinar las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto que actúan en el elemento CD.

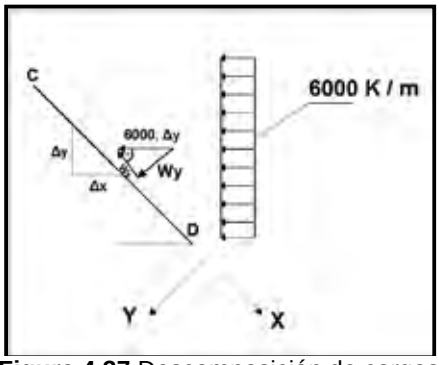



**Figura 4.37** Descomposición de cargas

$$W_Y = 6000 Sen\beta \frac{\Delta Y}{\Delta x} = 6000 Sen^2\beta = 4411.765\ Kg/m.$$

$$W_X = 6000 Cos\beta \frac{\Delta Y}{\Delta x} = 6000 Cos\beta\ Sen\beta = 2647.059\ Kg/m.$$

En consecuencia las acciones de empotramiento perfecto, son:

$$N_C = \int_0^{L_3} W_X\ \phi_1(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{34}} 2647.059\left(1 - \frac{X}{L_3}\right)dx = 7717.437\ Kg.$$

$$V_C = \int_0^{L_3} W_Y\ \phi_2(x)dx = \int_0^{\sqrt{34}} 4411.765\left(1 - \frac{3X^2}{L_3^2} + \frac{2X^3}{L_3^3}\right)dx = 12862.395\ Kg.$$

$$M_c = \int_0^{L_3} W_Y \phi_3(x)dx = \int_0^{\sqrt{34}} 4411.765\left(X - \frac{2X^2}{L_3} + \frac{X^3}{L_3^2}\right)dx = 12500.001\ Kg.m$$

$$N_D = \int_0^{L_3} W_X\ \phi_4(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{34}} 2647.059\left(\frac{X}{L_3}\right)dx = 7717.437\ Kg.$$

$$V_C = \int_0^{L_3} W_Y\ \phi_5(x)dx = \int_0^{\sqrt{34}} 4411.765\left(\frac{3X^2}{L_3^2} - \frac{2X^3}{L_3^3}\right)dx = 12862.395\ Kg.$$

$$M_c = \int_0^{L_3} W_Y \phi_6(x)dx = \int_0^{\sqrt{34}} 4411.765\left(-\frac{X^2}{L_3} + \frac{X^3}{L_3^2}\right)dx = -12500.001\ Kg.m$$

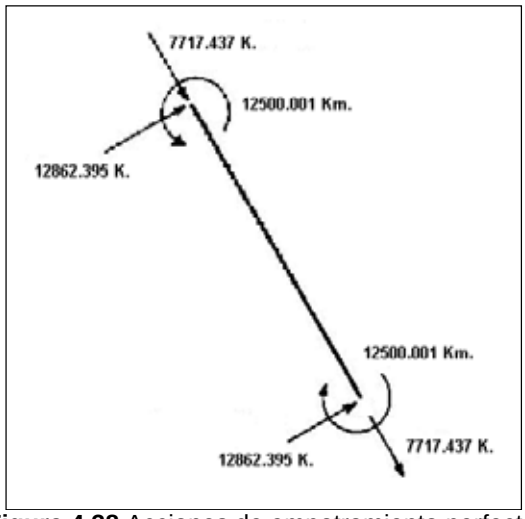



**Figura 4.38** Acciones de empotramiento perfecto

En la estructura estas fuerzas actúan con sentido contrario. Por lo tanto el nuevo estado de cargas es el siguiente:

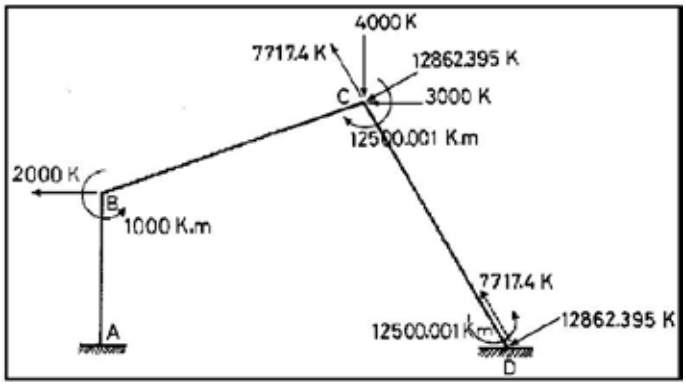
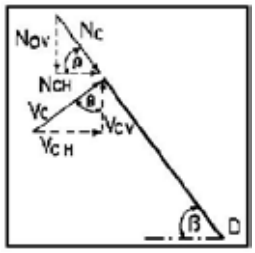



**Figura 4.39** Estructura con cargas equivalentes.

Es conveniente tener solo fuerzas horizontales y verticales en el nudo C para esto se deben descomponer $N_C$ y $V_C$.



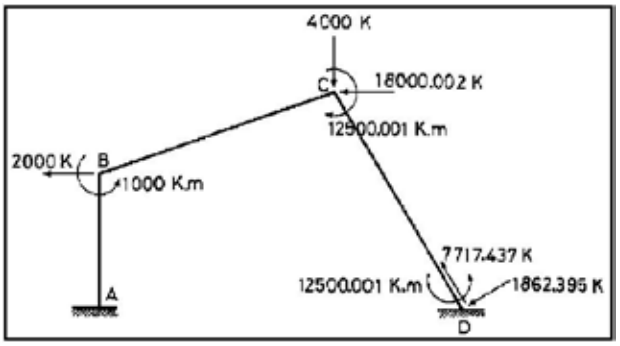

$$N_{CV} = N_C \; Sen\beta = 6617.648 \; (\downarrow)$$
$$N_{CH} = N_C \; Cos\beta = 3970.589 \; (\rightarrow)$$
$$V_{CH} = V_C \; Sen\beta = 11029.413 \; (\rightarrow)$$
$$V_{CV} = V_C \; Cos\beta = 6617.648 \; (\uparrow)$$

Por lo tanto, la fuerza horizontal que actúa en la Junta C, vale:

$$18000.002\ Kg = 3000 + 3970.589 + 11029.413 \quad (\leftarrow)$$

Y la fuerza vertical, vale:

$$4000\ Kg = 4000 + 6617.648 - 6617.648 \quad (\downarrow)$$




Al tener únicamente fuerzas y momentos en las juntas, la solución del problema se simplifica notablemente.

- **SISTEMA DE COORDENADAS A**

- **Problema Primario**

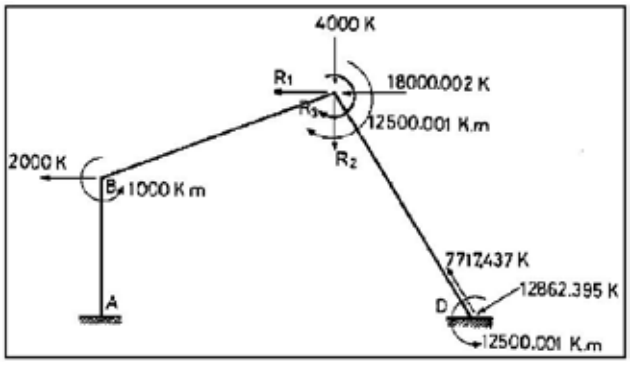
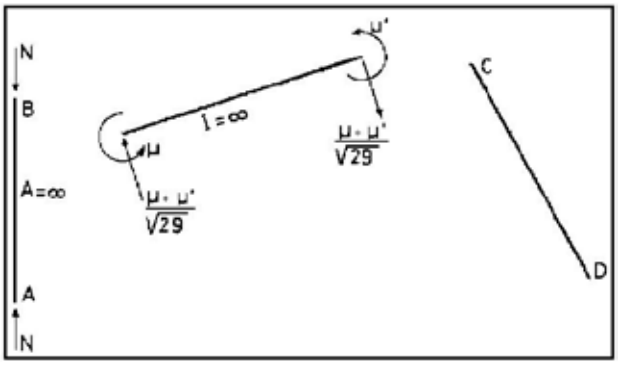


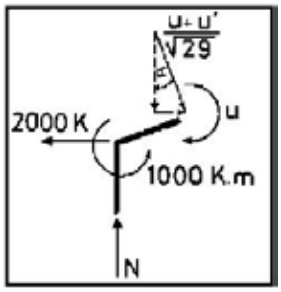

**Figura 4.40 Problema Primario para sistema de coordenadas A.** $q = 0$

- **Equilibrio de Elementos**



❖ **Equilibrio de Nudos**

**Nudo B**

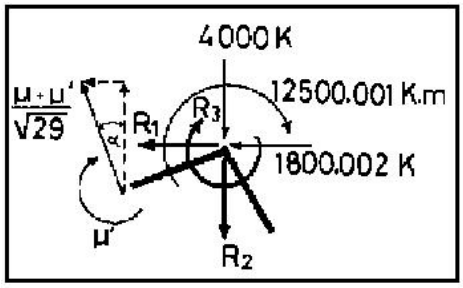



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\mu+\mu')}{\sqrt{29}}\frac{2}{\sqrt{29}} - 2000 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - \frac{(\mu+\mu')}{\sqrt{29}}\frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu - 1000 = 0$$

**Nudo C**




$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 18000.002 + R_1 + \frac{(\mu+\mu')}{\sqrt{29}}\frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\mu+\mu')}{\sqrt{29}}\frac{5}{\sqrt{29}} - 4000 - R_2 = 0$$

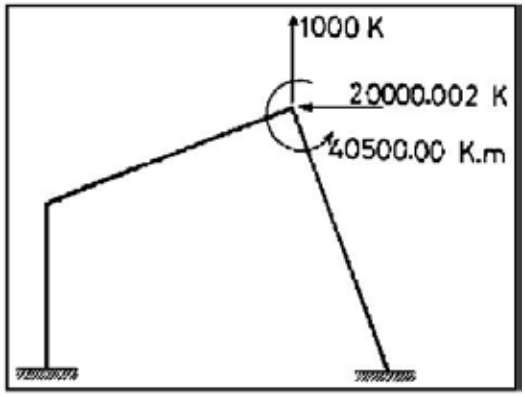
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad 12500.001 + R_3 + \mu' = 0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$\mu = 1000\ Kg.m.$ $\quad \mu' = 28000\ Kg.m.$ $\quad N = 5000\ Kg.$

$R_1 = -20000.002\ Kg.$ $\quad R_2 = 1000\ Kg.$ $\quad R_3 = -40500.01$

- **Problema Complementario**




- **Vector de Cargas Generalizadas** $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} -20000.002 \\ 1000.000 \\ -40500.001 \end{bmatrix}$$

- **SISTEMA DE COORDENADAS B**

- **Problema Primario**

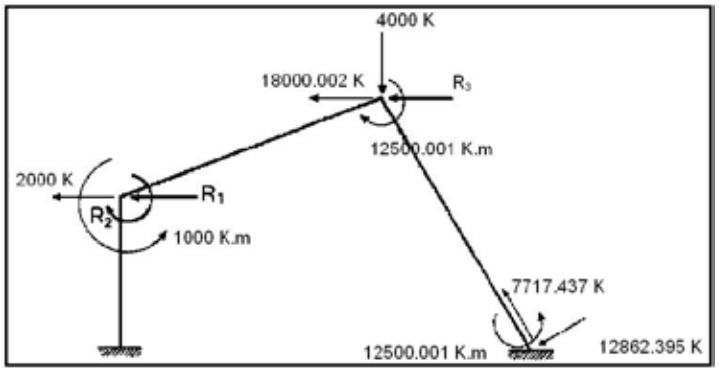
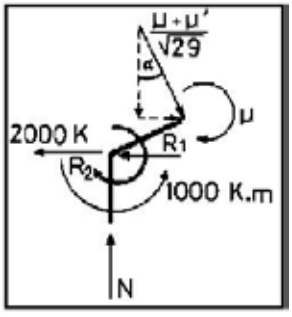



**Figura 4.41** Problema Primario para el Sistema de Coordenadas B.

El equilibrio de los elementos es igual al anterior por lo que se omite su presentación.

- **Equilibrio de Nudos**

**Nudo B**

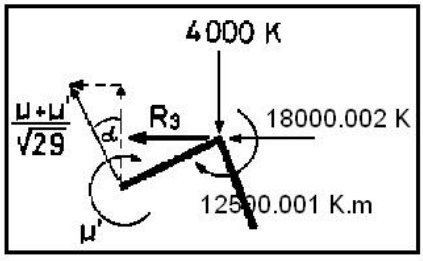


$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\mu+\mu')}{\sqrt{29}}\frac{2}{\sqrt{29}} - 2000 - R_1 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - \frac{(\mu+\mu')}{\sqrt{29}}\frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 + \mu - 1000 = 0$$

**Nudo C**




$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\mu+\mu')}{\sqrt{29}}\frac{2}{\sqrt{29}} + R_3 + 18000.002 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\mu+\mu')}{\sqrt{29}}\frac{5}{\sqrt{29}} - 4000 = 0$$

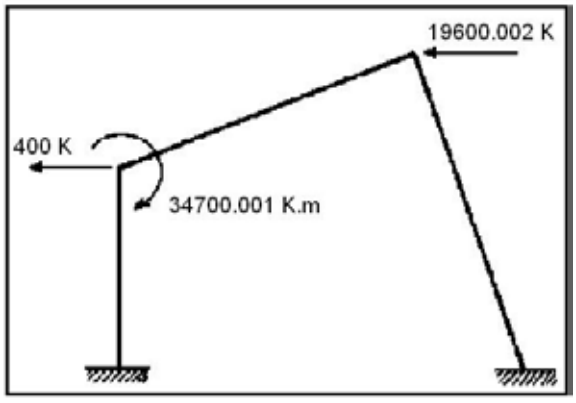
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad 12500.001 + \mu' = 0$$

La solución de las ecuaciones reporta:

$\mu = 35700.001\ Kg.m.$ $\quad \mu' = -12500.001\ Kg.m.$ $\quad N = 4000.000\ Kg.$

$R_1 = -400.000\ Kg$ $\quad R_2 = -34700.001\ Kg.m.$ $\quad R_3 = -19600.002\ Kg.$

- **Problema Complementario**



- **Vector de Cargas Generalizadas $Q$**

$$Q = \begin{bmatrix} -400.000 \\ -34700.001 \\ -19600.002 \end{bmatrix}$$

Nótese que se han obtenido dos vectores de cargas generalizados diferentes. Esto se debe a que se trabaja con dos sistemas de coordenadas generalizadas diferentes. Pero la solución final total del ejercicio es la misma.

- **EJEMPLO 11**

Resolver el Ejemplo 10 para los dos sistemas de coordenadas $Q - q$ pero mediante trabajos virtuales.

- **SOLUCIÓN**

Las cargas que actúan en la estructura son:

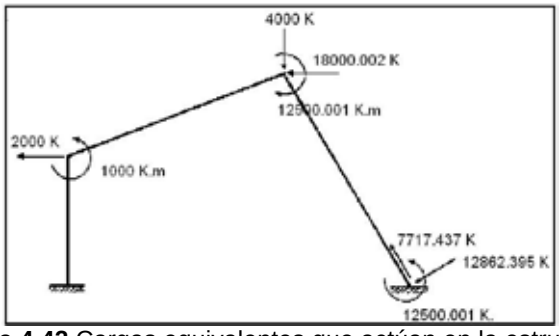
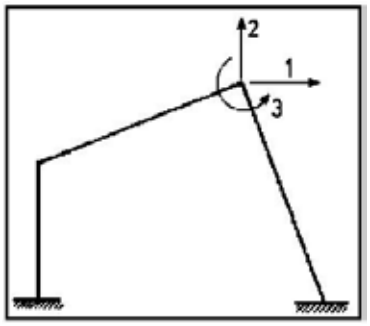


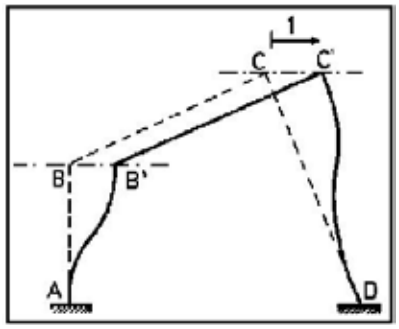

**Figura 4.42** Cargas equivalentes que actúan en la estructura.

- **SISTEMA DE COORDENADAS A**



- **Cálculo de** $Q_1$

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

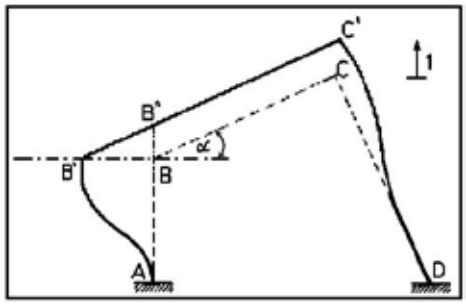



Debido a que el elemento BD es transversalmente rígido se cumple: BB' = C' = 1

$$Q_1 = -2000 * 1 - 18000.002 * 1 = -20000.002\ Kg.$$

- **Cálculo de** $Q_2$

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$




Del gráfico se observa que CC' = BB" = 1. En consecuencia en el triángulo BB'B" se tiene:

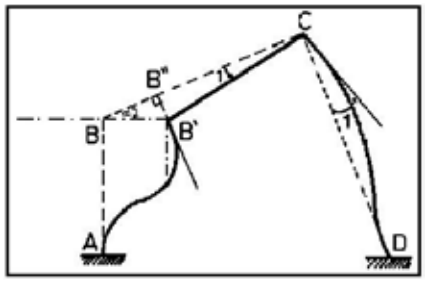
$$BB' = Cotg\ \alpha = \frac{5}{2}$$

Luego:

$$Q_2 = 2000 * \frac{5}{2} - 4000 * 1 = 1000\ Kg$$

- **Cálculo de** $Q_3$

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$



Por construcción se tiene B'B'' = $L_2 = \sqrt{29}$ . Por lo tanto en el triángulo BB'B'' se tiene:

$$Sen\alpha = \frac{B'B''}{BB'} \qquad \Rightarrow \qquad BB' = Cosc\alpha\ B'B'' = \frac{\sqrt{29}}{2}\sqrt{29} = \frac{29}{2}$$

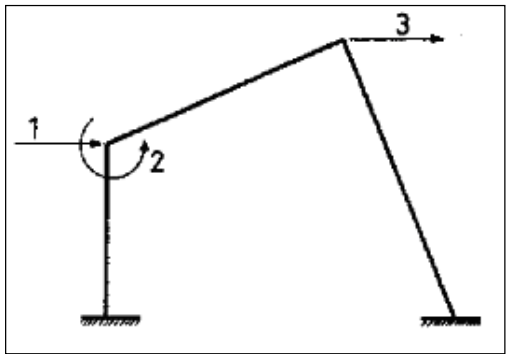
Luego:

$$Q_3 = -2000 * \frac{29}{2} + 1000 * 1 - 12500.001 * 1 = -40500.001\ Kg.m.$$

- **Vector de Cargas Generalizadas $Q$**

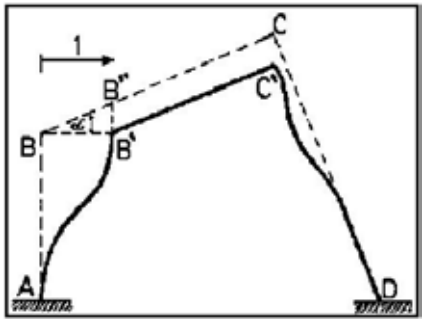
$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -20000.002 \\ 1000.000 \\ -40500.001 \end{bmatrix}$$

- **SISTEMA DE COORDENADAS B**




- **Cálculo de $Q_1$**

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

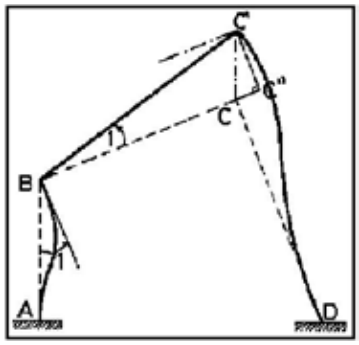



En el triángulo BB'B'' se tiene: B'B'' = $tg\alpha$ = 2/5. Pero B'B'' = CC' debido a que BC es paralelo a B'C'. Por consiguiente.

$$Q_1 = -2000 * 1 + 4000 * \frac{2}{5} = -400\ kg.$$

- **Cálculo de** $Q_2$

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$




En el diagrama elemental se tiene C'C'' = $L_2 = \sqrt{29}$. Por otra parte en el triángulo CC'C'' se tiene:

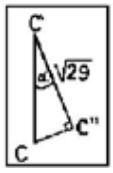



**Figura 4.11.9**

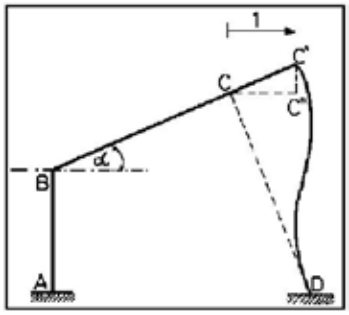
$$Cos\alpha = \frac{\sqrt{29}}{CC'} \qquad \Rightarrow CC' = \frac{\sqrt{29}}{5}\sqrt{29} = \frac{29}{5}$$

De donde:

$$Q_2 = 1000 * 1 - 12500.001 * 1 - 4000 * \frac{29}{5} = 34700.001\ Kg.m.$$

- **Cálculo de** $Q_3$

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$




En el triángulo CC'C'' se observa que C'C'' = $tg\alpha$ = 2/5. Luego el valor de $Q_3$ resulta.

$$Q_3 = -4000\frac{2}{5} - 18000.002 * 1 = -19600.002\ Kg.$$

- **Vector de Cargas Generalizadas $Q$**

$$Q = \begin{bmatrix} -400.000 \\ -34700.001 \\ -19600.002 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 12**

Determinar el vector de cargas generalizadas $Q$ para la armadura plana de la figura 4.43, por medio de trabajos virtuales. Todos los elementos son transversalmente rígidos.

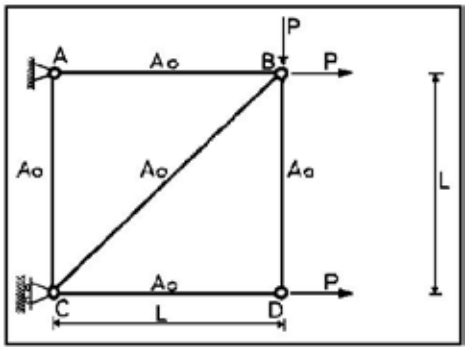



**Figura 4.43** Armadura Plana del Ejemplo 12.

- **SOLUCIÓN**

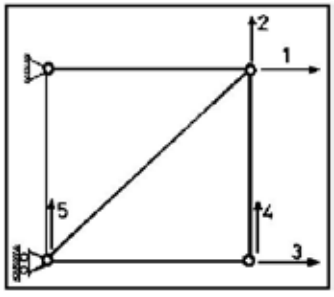
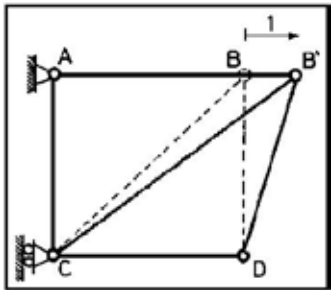



**Figura 4.44** Sistema $Q - q$

- **Cálculo de $Q_1$**

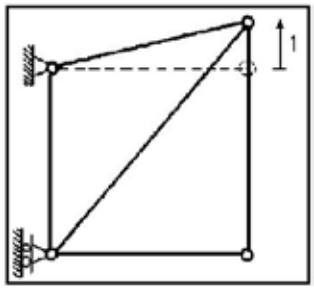
$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$




$$Q_1 = P * 1 = P$$

- **Cálculo de** $Q_2$

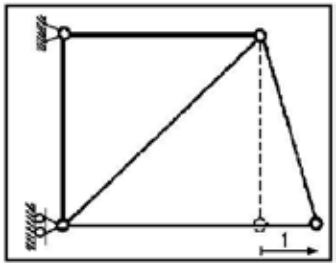
$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$




$$Q_2 = -P * 1 = -P$$

- **Cálculo de** $Q_3$

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$




$$Q_3 = P * 1 = P$$

Se deja al lector el cálculo de $Q_4$ y $Q_5$.

- **EJEMPLO 13**

En la siguiente estructura, la viga CD y la columna DE son axialmente rígidos, se pide:

a) Seleccionar un sistema Q-q.
b) Resolver el Problema Primario.
c) Indicar el Problema Complementario.

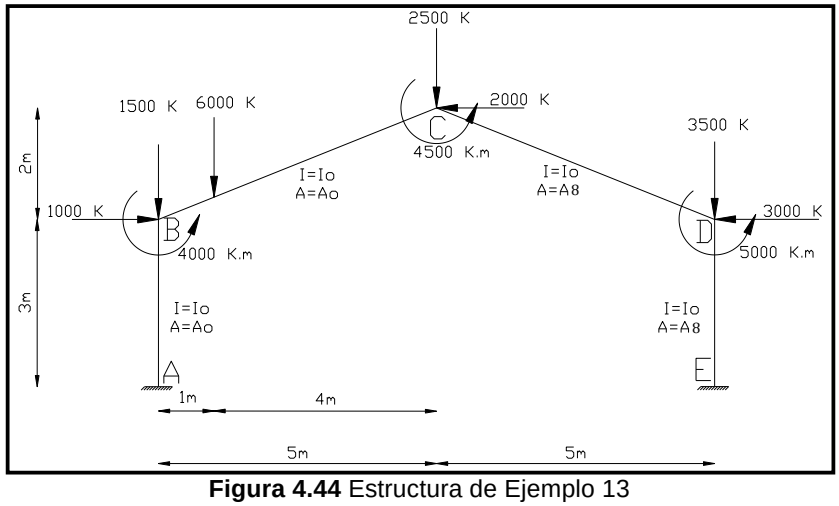



**Figura 4.44** Estructura de Ejemplo 13

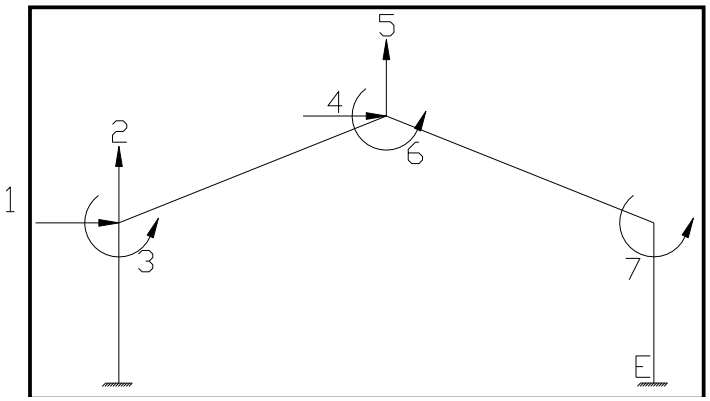



**Figura 4.45** Sistema de coordenadas Q-q

Para calcular las acciones de empotramiento perfecto del elemento inclinado con una carga de 6000 K., se debe encontrar las funciones de forma en el punto de aplicación de la carga.

$$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$L = \sqrt{29}$$

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L} = 1 - \frac{\sqrt{29}}{5 * \sqrt{29}} = 0.8$$

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = \ 1 - 0{,}8 = 0.2$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3 * x^2}{L^2} + \frac{2 * x^3}{L^3} = 1 - \frac{3 * 29}{25 * 29} + \frac{2 * 29 * \sqrt{29}}{25 * 5 * 29 * \sqrt{29}} = 0.896$$

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - 0.896 = 0.104$$

$$\phi_3(x) = x - \frac{2 * x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} = \frac{\sqrt{29}}{5} - \frac{2 * 29}{25 * \sqrt{29}} + \frac{25 * \sqrt{29}}{125 * 29} = 0.68$$

$$\phi_6(x) = x - \phi_3(x) - L * \phi_5(x) = \frac{\sqrt{29}}{5} - 0{,}689 - \sqrt{29} * 0{,}104 = -0.172$$

Por otra parte, para el elemento inclinado se tiene que:

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

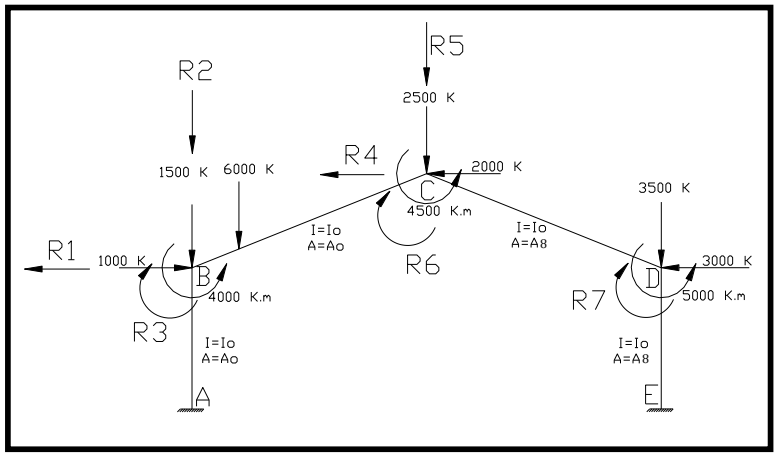
$$\tan\alpha = \frac{2}{5}$$

La carga vertical se descompone en una transversal y una axial al eje del elemento.

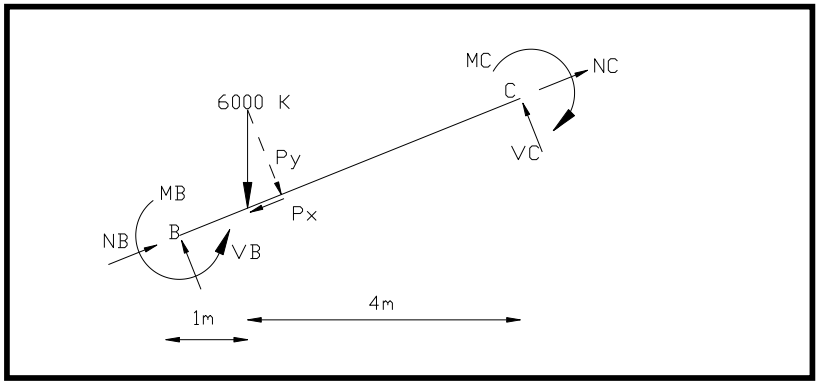
$$P_y = P * \cos\alpha = 6000 * \frac{5}{\sqrt{29}} = 5570.86$$

$$P_x = P * \sin\alpha = 6000 * \frac{2}{\sqrt{29}} = 2228.34$$

PROBLEMA PRIMARIO




Solución del Problema Primario




$$P_y = 5570.86$$
$$P_x = 2228.34$$

$$N_B = P_x * \phi_1(x) = 2228.34 * 0.8 = 1782.67$$

$$N_C = P_x * \phi_4(x) = 2228.34 * 0.2 = 445.67$$

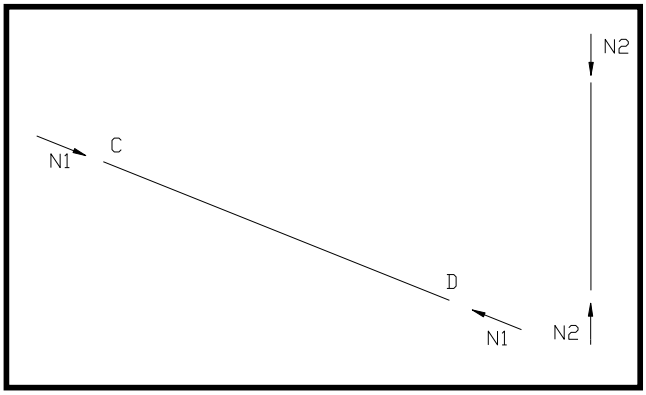
$$V_B = P_y * \phi_2(x) = 5570.86 * 0.896 = 4491.49$$

$$V_C = P_y * \phi_5(x) = 5570.86 * 0.104 = 579.37$$

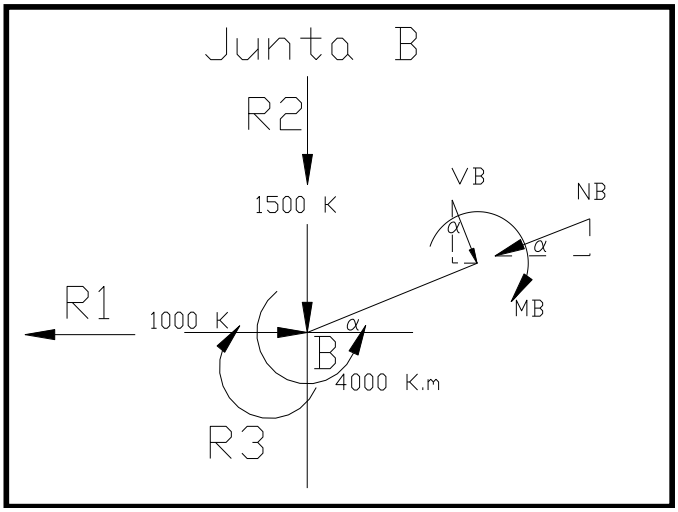
$$M_B = P_y * \phi_3(x) = 5570.86 * 0.689 = 3838.32$$

$$M_C = P_y * \phi_6(x) = 5570.86 * (-0.172) = 958.19$$

Los elementos CD y DE son axialmente rígidos luego existen fuerzas axiales $N_1, N_2$ que se deben determinar, cuando se realiza el equilibrio de los nudos; en el elemento debe haber equilibrio de fuerzas axiales.




Equilibrio de juntas




$$\overset{\rightarrow(+)}{\sum} Fx = 0$$

$$1000 - R_1 - N_B * \cos\alpha + V_B * \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$R_1 = 1000 - 1782.67 * \frac{5}{\sqrt{29}} + 4991.49 * \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$R_1 = 1198.63$$

$$\uparrow (+) \sum Fy = 0$$

$$R_2 + 1500 + V_B * \cos\alpha + N_B * \sin\alpha = 0$$

$$-R_2 = 1500 + 1991.49 * \frac{5}{\sqrt{29}} + 1782.67 * \frac{2}{\sqrt{29}}$$

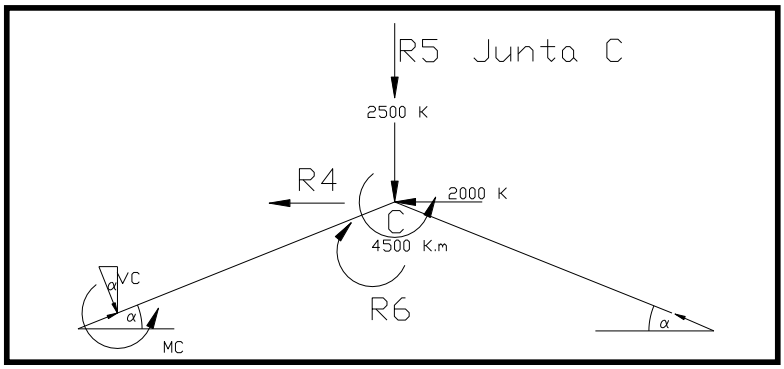
$$R_2 = -6796.71$$

$$\circlearrowleft (+) \sum M = 0$$

$$M_B + R_3 = 4000$$

$$R_3 = 4000 - 3838.32$$

$$R_3 = 161.68$$

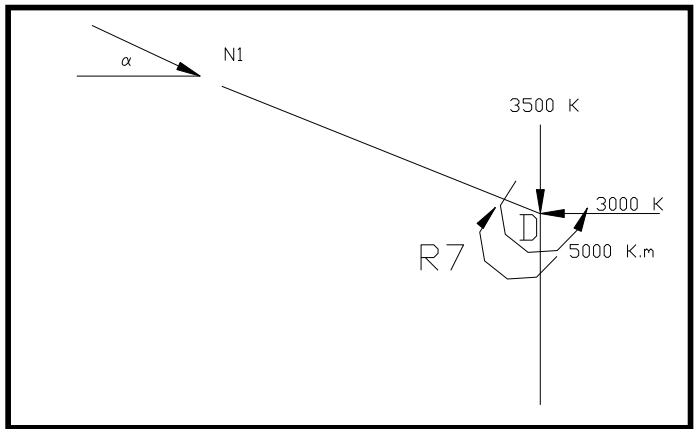



$$\overset{\rightarrow(+)}{\sum} Fx = 0$$

$$V_C * \sin\alpha = \boldsymbol{N}_C * \cos\alpha - R_4 = 2000 - \cos\alpha = 0$$

$$\downarrow (+) \sum Fy = 0$$
$$V_C * \cos\alpha + \boldsymbol{N}_C * \sin\alpha + R_5 + 2500 - N_1 * \sin\alpha = 0$$

$$\circlearrowright (+) \sum M = 0$$
$$R_6 - 4500 - M_C = 0$$
$$R_6 = 4500 - M_C$$
$$R_6 = 4500 + 958.19 = 5458.19$$




$$\overset{\rightarrow(+)}{\sum} Fx = 0$$

$$N_1 * \cos\alpha = 3000$$
$$N_1 = 3231$$

$$\uparrow (+) \sum Fy = 0$$

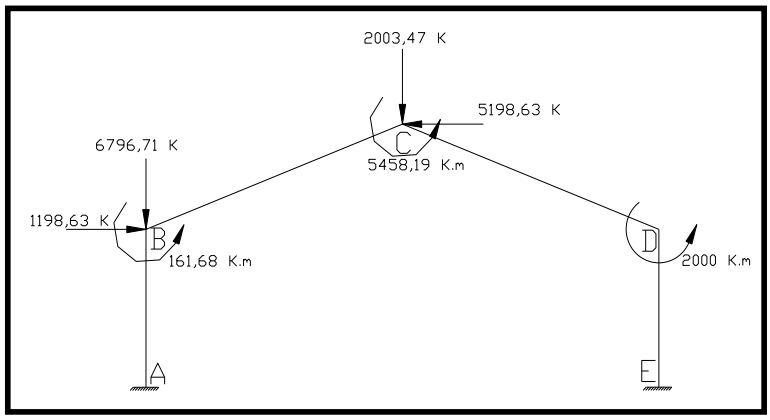
$$N_2 - 3500 - N_1 * \sin\alpha = 0$$
$$N_2 = 3500 + 1199{,}998$$
$$N_2 = 4670$$
$$\circlearrowright (+) \sum M = 0$$
$$R_7 = 5000$$

Se deja al lector que justifique los siguientes pasos.

$$R_4 = V_C * \sin\alpha - N_C * \cos\alpha - 2000 - N_1 * \cos\alpha$$
$$R_4 = 579.37 * \frac{2}{\sqrt{29}} - 445.67 * \frac{5}{\sqrt{29}} - 2000 - 3231 * \frac{5}{\sqrt{29}}$$
$$R_4 = -5198.63$$

$$-R_5 = V_C * \cos\alpha + N_C * \sin\alpha + 2500 - N_1 * \sin\alpha$$
$$-R_5 = 579.37 * \frac{5}{\sqrt{29}} + 445.67 * \frac{2}{\sqrt{29}} + 2500 - 3231 * \frac{2}{\sqrt{29}}$$
$$R_5 = -2003.47$$

Problema Complementario




De igual manera, a partir del Problema Complementario, el lector debe escribir el vector de cargas $Q$. Se recomienda que se obtenga este mismo vector empleando trabajos virtuales.

- **EJEMPLO 14**

Determinar el vector de cargas generalizadas, del marco plano indicado en la figura 4.46, empleando trabajos virtuales si los elementos inclinados son axialmente rígidos y el elemento horizontal es transversalmente rígido. (Examen tomado a los alumnos de Pregrado del período: Marzo-Julio de 2014.

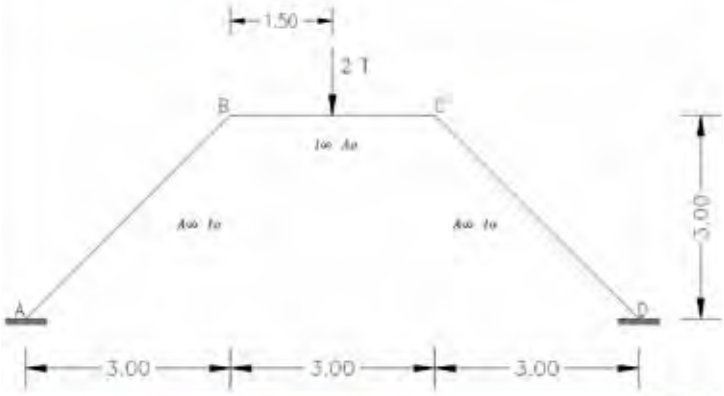


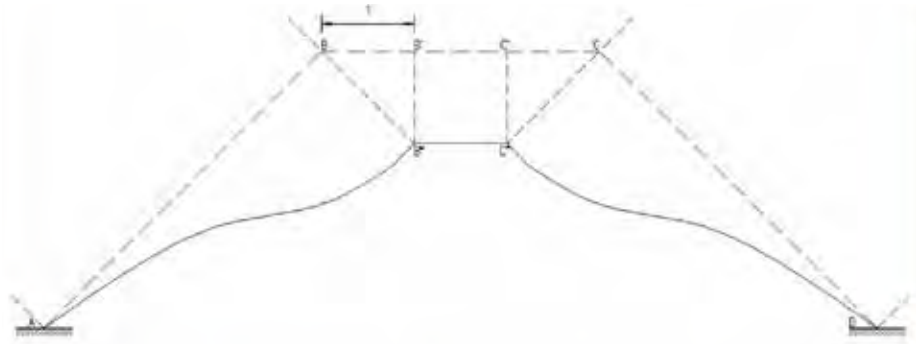

**Figura 4.46** Estructura de Ejemplo 14.

- **SOLUCIÓN**

**Figura 4.47** Sistema de coordenadas generalizadas.

- **Cálculo de $Q_1$**

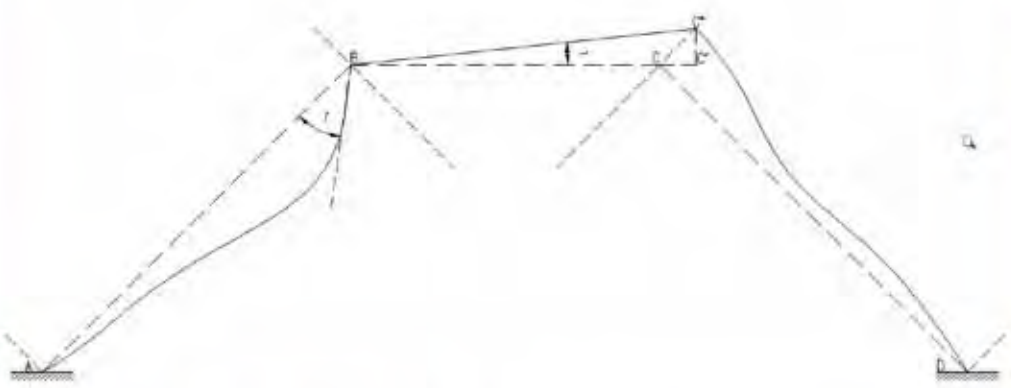
$$q_1 = 1 \; y \; q_i = 0; i \neq 1$$



$$Q_1 = 2 * 1 = 2T.$$

- **Cálculo de $Q_2$**

- $q_2 = 1 \; y \; q_i = 0; i \neq 2$



Por ser $I = \infty$, en la deformada elemental se tiene que $C'C'' = 3$ y al ser lineal la deformación, en el punto medio de aplicación de la carga el desplazamiento vertical es la mitad. Luego.

$$Q_2 = -2 * \frac{3}{2} = -3 \; T.$$

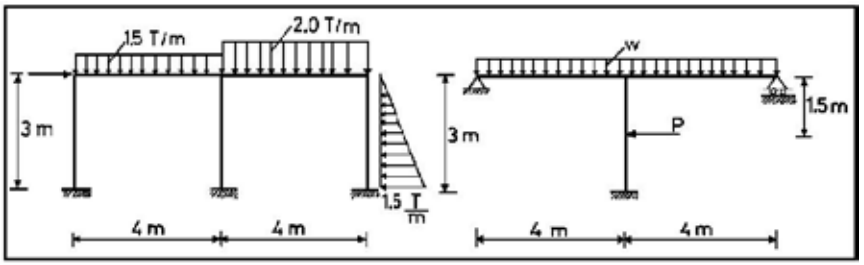
Se deja al lector que encuentre los mismos resultados de $v(x)$ empleando las funciones de forma.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

## 4.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las siguientes estructuras, se pide:

a) Seleccionar el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$.
b) Obtener el vector de cargas generalizadas mediante trabajos virtuales.
c) Resolver el Problema Primario.
d) Indicar el Problema Complementario.

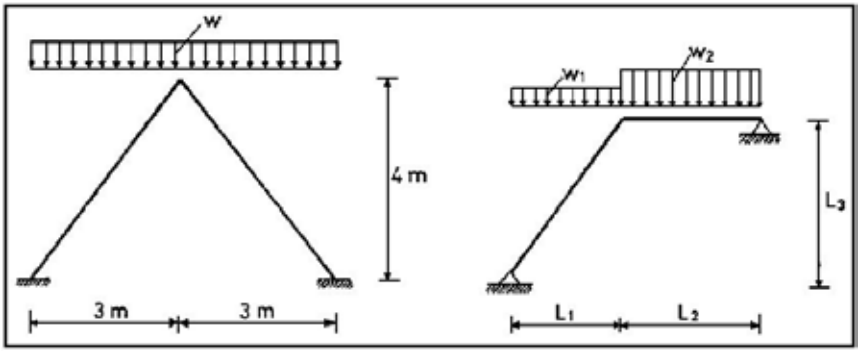



**Ejercicio N.- 1**




**Ejercicio N.- 2**

En los ejercicios 1 y 2, todos los elementos son completamente flexibles.

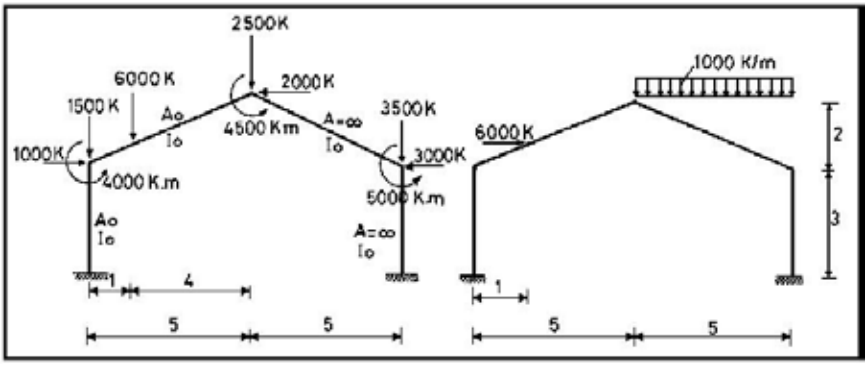



**Ejercicio N.- 3**

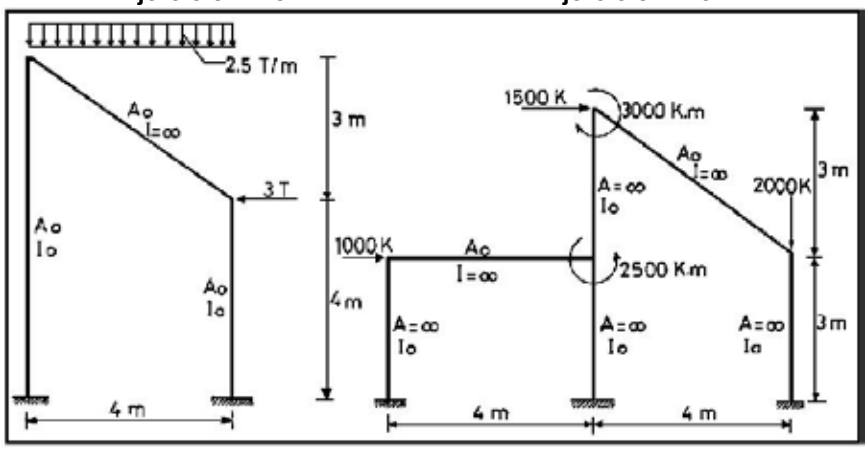



**Ejercicio N.- 4**

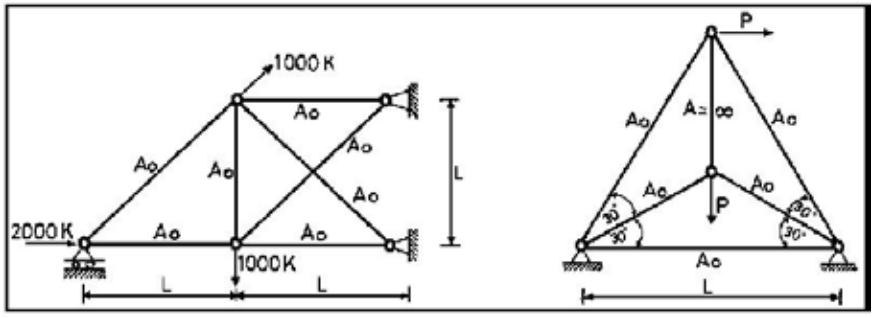
Para los ejercicios 3 y 4 considerar que todos los elementos son axialmente rígidos y transversalmente flexibles.



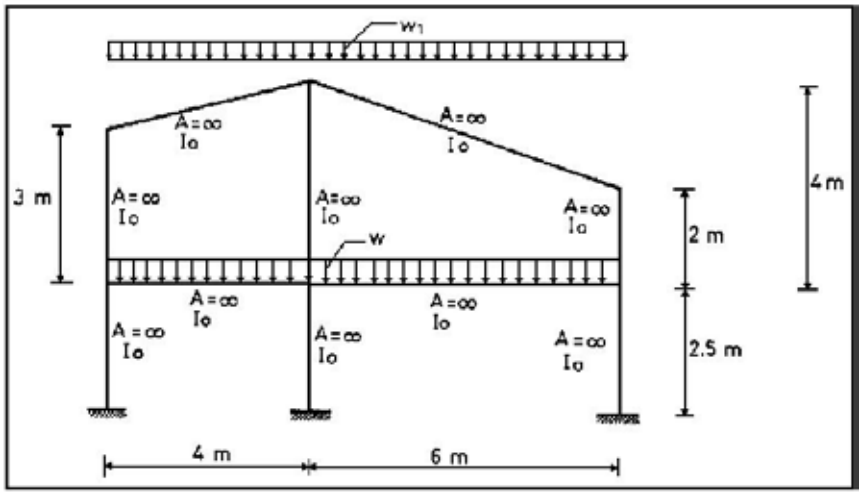
**Ejercicio N.- 5** **Ejercicio N.- 6**




**Ejercicio N.- 7** **Ejercicio N.- 8**




**Ejercicio N.- 9** **Ejercicio N.- 10**



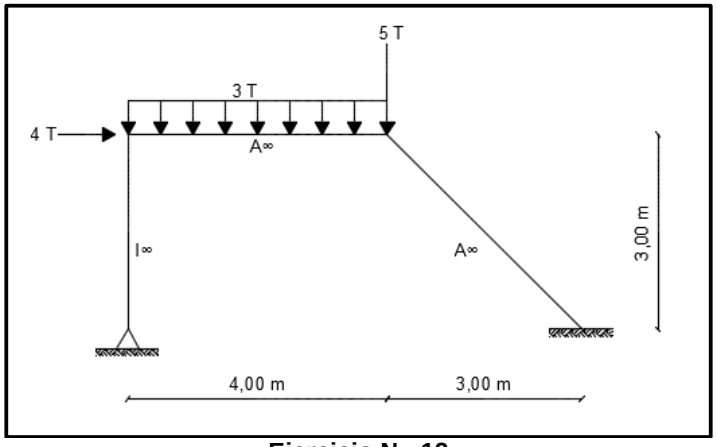

**Ejercicio N.- 11**

**Ejercicio N.- 12**

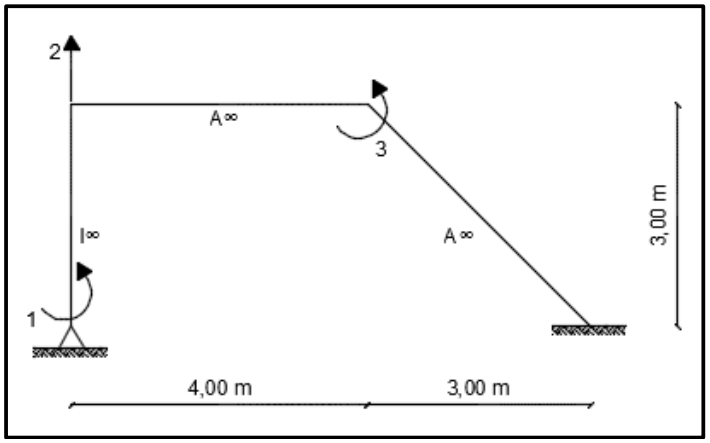
Determinar el vector de Cargas Generalizadas, por medio de trabajos virtuales, si la columna izquierda está apoyada y es $A_0, I = \infty$; la viga es $A = \infty, I_0$; la columna inclinada es viga es $A = \infty, I_0$. Trabajar con los grados de libertad y deformadas elementales que se indican a continuación.

**Respuesta**

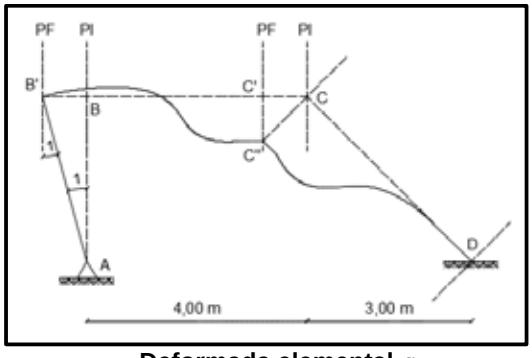
$$\boldsymbol{Q^t} = [17 \quad -6 \quad 4]$$



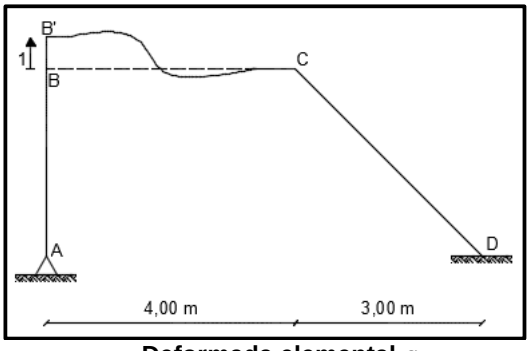

**Ejercicio N.- 12**



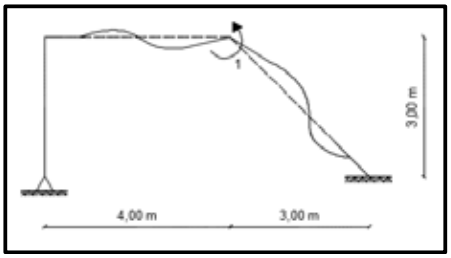

**Grados de libertad de Ejercicio N.- 12**




**Deformada elemental $q_1$**




**Deformada elemental $q_2$**




**Deformada elemental $q_3$**

*CAPITULO 5*

# RELACIÓN ENTRE DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

## RESUMEN

Se presenta la transformación de coordenadas desde el punto de vista estructural, no matemático, para relacionar dos sistemas de coordenadas generalizadas o no generalizadas. Por otra parte se indican aplicaciones únicamente para el análisis estático de estructuras no para el análisis dinámico.

En el apartado 5.2 se calcula la matriz $\boldsymbol{T}$ que relaciona la geometría entre dos sistemas de coordenadas; en el apartado 5.3 se determina la matriz $\boldsymbol{T}_1$ que relaciona la estática entre dos sistemas y en el apartado 5.4 se presentan conceptos generales para relacionar coordenadas no generalizadas. Posteriormente, en el apartado 5.5 se presenta una aplicación muy importante orientada a la programación del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ en pórticos planos con cargas en los nudos y en los elementos.

En el transcurso del capítulo se resuelven 11 ejemplos los mismos que sirven para aclarar la teoría que se ha presentado tanto en éste capítulo como en los anteriores, se recomienda el estudio con detenimiento de los ejemplos 8 a 10.

## 5. 1 CAMBIO DE COORDENADAS

Uno de los principales Capítulos del Análisis Matricial de Estructuras y porque no decirlo de la Dinámica de Estructuras es el estudio de la *Matriz de Transformación de Coordenadas* o también llamada *Matriz de Paso*, que permite pasar de un determinado sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ a otro $\boldsymbol{Q}^*-\boldsymbol{q}^*$, cuando se lo requiere. En efecto en estática se puede empezar a resolver un problema con un determinado sistema de coordenadas, se puede calcular la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$, el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ de una determinada estructura pero por alguna razón se decide cambiar el sistema de coordenadas generalizadas. En este caso quedan dos alternativas a saber: la primera desechar el trabajo realizado y empezar de nuevo y la segunda alternativa que es la más óptima, por medio de la matriz de paso $\boldsymbol{T}$ continuar con la solución del problema aprovechando el trabajo realizado y calcular $\boldsymbol{K}^*$ y $Q^*$ mediante simples operaciones matriciales.

Por otra parte la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$ sirve para determinar la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales a partir de la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales, dichas coordenadas se indican en la figura 5.1. En general se puede determinar la matriz de rigidez en un elemento en un sistema de coordenadas a partir de otro conocido.

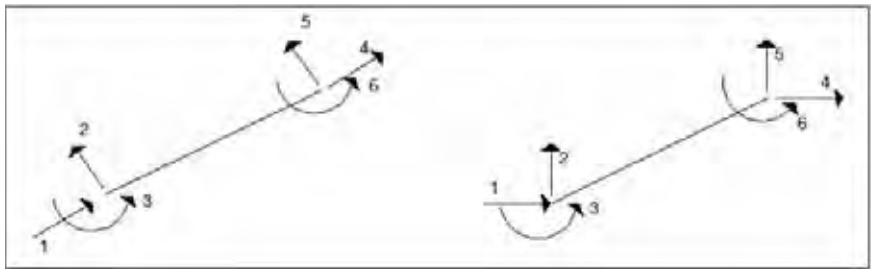



**Figura 5.1** Coordenadas Locales y Globales de un elemento.

En Dinámica de Estructuras se puede ver a la matriz de transformación de coordenadas como aquella matriz que permite pasar de un determinado sistema de coordenadas en el cual el sistema de ecuaciones diferenciales está acoplado a otro sistema de coordenadas en que el sistema de ecuaciones diferenciales está desacoplado, siendo fácil la solución matemática en este último sistema de coordenadas. Todo esto siempre y cuando las matrices puedan convertirse en una matriz diagonal.

En fin es extenso el campo de aplicación de la matriz de transformación de coordenadas y tan fácil su cálculo como se lo verá posteriormente. Como se indicó el cambio de coordenadas se lo va a estudiar desde dos puntos de vista: Geométrico y Estático.

## 5.2 PUNTO DE VISTA GEOMÉTRICO

### 5.2.1 Relación entre dos sistemas de coordenadas generalizadas

Al sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q-q}$ se va a denominar “sistema original” o “sistema viejo” y al sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q^*-q^*}$ se denomina “sistema nuevo”. En éste apartado se estudia la relación que existe entre $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{q^*}$. Nótese que ambas son coordenadas generalizadas.

El pórtico plano de la figura 5.2 tiene tres grados de libertad, pudiendo ser el sistema $\boldsymbol{Q-q}$ el indicado en la parte central de la figura 5.2 y el sistema $\boldsymbol{Q^*-q^*}$ el presentado a la derecha de la figura 5.2.

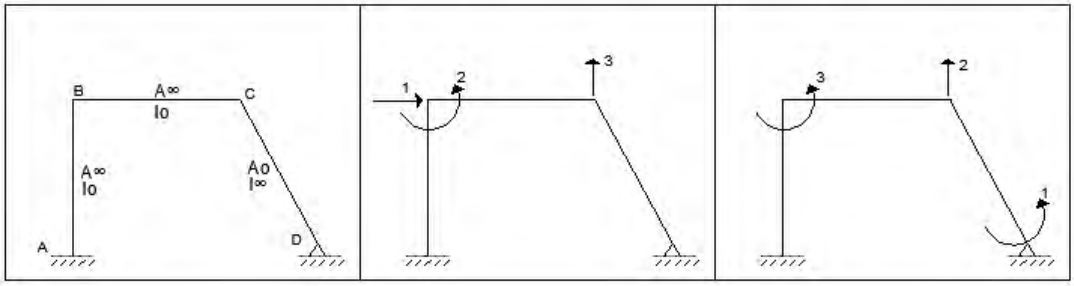



**Figura 5.2** Estructura con dos sistemas de coordenadas: $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{Q^*-q^*}$

Siempre cualquier transformación se realiza de la siguiente manera: expresar el sistema de coordenadas viejo en función del sistema de coordenadas nuevo. En este caso, se define una relación entre los sistemas de coordenadas generalizadas, de la siguiente forma:

$$\overline{q} = \overline{T} \cdot \overline{q}^* \qquad (5.1)$$

Donde $\boldsymbol{T}$ es la matriz de transformación de coordenadas. En consecuencia, se establece una relación geométrica entre dos sistemas de coordenadas. En este caso la matriz $\overline{\boldsymbol{T}}$ es cuadrada porque los dos sistemas, indicados en la figura 5.2, son coordenadas generalizadas. En forma general se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ .. \\ .. \\ q_i \\ .. \\ .. \\ .. \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \dots & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \dots & \dots & T_{2n} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & \dots & \dots & T_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{i1} & T_{i2} & T_{i3} & \dots & \dots & T_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & \dots & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ \dots \\ \dots \\ q_i^* \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ q_n^* \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, para un término cualquiera $q_i$, se tiene:

$$\boldsymbol{q_i = T_{i1} q_1^* + T_{i2} q_2^* + T_{i3} q_3^* + \dots + T_{in} q_n^*} \qquad (5.2)$$

¿Cómo calcular $T_{i1}$? De la ecuación (5.2), se observa que para calcular $T_{i1}$, se construye la deformada elemental: $q_1^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 1$. Entonces se tiene: $q_i = T_{i1}$, resultando que el valor de $T_{i1}$ es el correspondiente valor de $q_i$.

**En general un término cualquiera $T_{ij}$ es el valor de $q_i$ correspondiente a la deformación elemental $q_j^* = 1$ y las demás nulas.**

- **EJEMPLO 1**

Calcular la matriz $\overline{\boldsymbol{T}}$, que relaciona el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$ de la figura 5.2, con el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}^*$ de la misma figura.

- **SOLUCIÓN**

Para obtener los elementos de la primera columna de la matriz de transformación, se dibuja la deformada elemental $\boldsymbol{q_1^* = 1}$ y $\boldsymbol{q_i^* = 0}$ para $\boldsymbol{i \neq 1}$. Esto se presenta en la figura 5.3, se deja al estudiante la explicación de la deformada respectiva.

$q_1^* = 1$ y $q_i^* = 0$ **para** $i \neq 1$

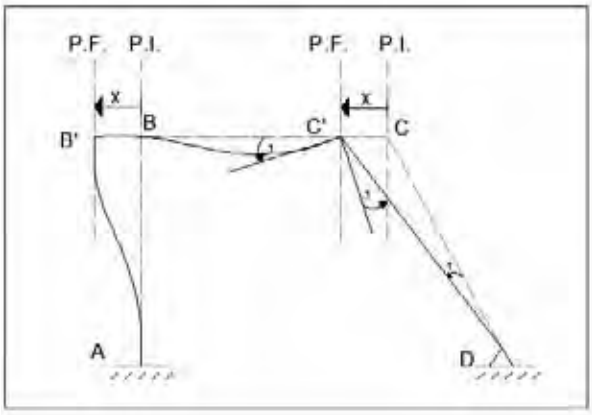



**Figura 5.3** Diagrama elemental $q_1^*$

Al medir los desplazamientos en el sistema de coordenadas $\boldsymbol{q}$, se encuentra:

$$\begin{aligned} T_{11} &= -x = q_1 \\ T_{21} &= 0 = q_2 \\ T_{31} &= 0 = q_3 \end{aligned}$$

Para obtener los términos de la segunda columna de $\overline{T}$ se construye la deformada elemental $q_2^*$.

$q_2^* = 1$ y $q_i^* = 0$ **para** $i \neq 2$

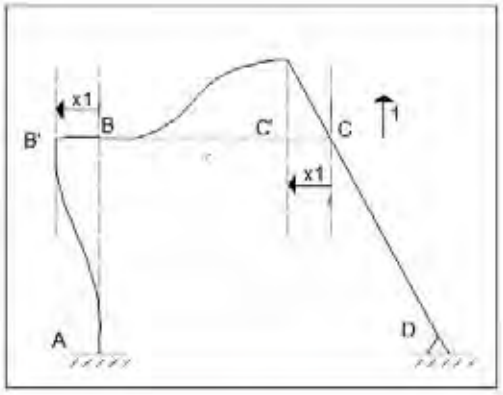



**Figura 5.4** Diagrama elemental $q_2^*$

El nudo B se desplaza horizontalmente hacia la izquierda $x_1$, por lo tanto: $T_{12} = -x_1 = q_1$. No rota el nudo B, esto implica que $T_{22} = 0 = q_2$. Finalmente el nudo C se desplaza verticalmente la unidad, de donde $T_{32} = 1 = q_3$.

La última columna de la matriz $\overline{T}$, se obtendrá del diagrama elemental $q_3^*$

$q_3^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 3$

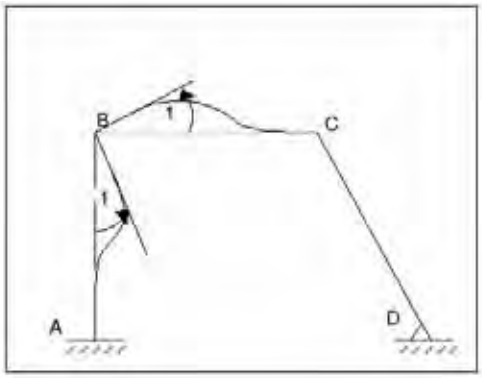



**Figura 5.5** Diagrama elemental $q_3^*$

De donde:

$$T_{13} = 0 = q_1$$
$$T_{23} = 1 = q_2$$
$$T_{33} = 0 = q_3$$

Por lo tanto, la matriz de transformación $\overline{T}$ es:

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} -x & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El cálculo de $x$ y $x_1$ se realiza empleando Geometría.

### 5.2.2 Relación entre dos sistemas de Cargas Generalizadas

Se desea saber qué relación existe entre $\overline{Q}^*$ y $\overline{Q}$. Dado que $\overline{q} = \overline{T} \cdot \overline{q}^*$. Para encontrar esta relación se da un desplazamiento virtual cualquiera a la estructura; por ejemplo, con relación al pórtico de la figura 5.2, en la parte izquierda de la figura 5.6, se presenta el diagrama virtual. Este es producido por un sistema de cargas que actúa sobre el pórtico.

Los desplazamientos virtuales se pueden medir en cualquiera de los dos sistemas de coordenadas. El "sistema viejo", presentado en la parte central de la figura 5.6 o el "sistema nuevo", mostrado a la derecha de la figura 5.6. La relación que existe entre estos dos sistemas de coordenadas es la siguiente:

$$\delta\overline{q} = \overline{T} \cdot \delta\overline{q}^*$$

El trabajo virtual ($TV_1$) de las cargas que actúan sobre el pórtico de la figura 5.2, en los desplazamientos virtuales de la estructura indicada en la parte central de la figura 5.6, es:

$$TV_1 = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + Q_3 \cdot \delta q_3$$

En forma matricial, se tiene:

$$TV_1 = \begin{bmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 & \delta q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\boldsymbol{TV_1 = \delta \overline{q}^t \overline{Q}}$$

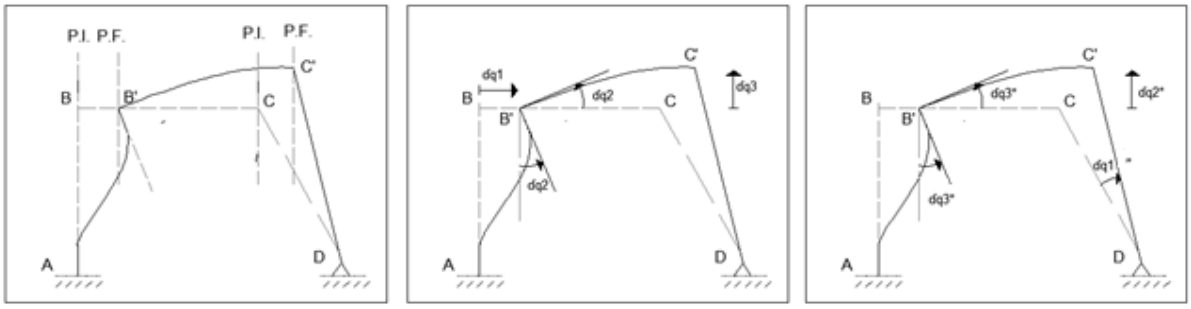



**Figura 5.6** Diagrama virtual y sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q - q}$ y $\boldsymbol{Q^* - q^*}$

El trabajo virtual calculado $\boldsymbol{TV_1}$, debe ser exactamente igual al trabajo virtual $\boldsymbol{TV_2}$ producido por el sistema de cargas que gravitan en el pórtico de la figura 5.2 en los desplazamientos del marco presentado a la derecha de la figura 5.6. En virtud de que el trabajo virtual no depende del sistema de coordenadas, puesto que la solución es única.

$$TV_2 = \begin{bmatrix} \delta q_1^* & \delta q_2^* & \delta q_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \\ Q_3^* \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{TV_2 = \delta \overline{q}^{*t} \overline{Q}^*}$$

Como:

$$\boldsymbol{TV_1 = TV_2}$$

$$\boldsymbol{\delta \overline{q}^t \overline{Q} = \delta \overline{q}^{*t} \overline{Q}^*}$$

Al sustituir $\delta q$ en esta última ecuación, se tiene:

$$\boldsymbol{\left(\overline{T} \cdot \delta \overline{q}^*\right)^t \overline{Q} = \delta \overline{q}^{*t} \overline{Q}^*}$$

$$\boldsymbol{\delta \overline{q}^{*t} \overline{T}^t \overline{Q} = \delta \overline{q}^{*t} \overline{Q}^*}$$

Se recuerda que en Álgebra Matricial, de la igualdad:

$$\boldsymbol{\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A} \cdot \overline{C}}$$

No siempre se puede concluir que: $\boldsymbol{\overline{B} = \overline{C}}$

En el problema, el vector $\boldsymbol{\delta q^*}$ no es una constante fija, sino que puede adoptar cualquier valor por el mismo hecho de ser virtual. Por lo tanto, se concluye que:

$$\boldsymbol{\overline{T}^t \overline{Q} = \overline{Q}^*} \qquad (5.3)$$

Lo demostrado, a partir de la figura 5.2, puede generalizarse. En resumen, se tiene:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si | $\bar{q} = \bar{T}\bar{q}^*$ | entonces | $\bar{Q}^* = \bar{T}^t\bar{Q}$ |

Una vez que se conoce el vector de cargas generalizadas $Q$, para un determinado sistema de coordenadas de una estructura, el mismo que ha sido obtenido aplicando el problema primario y complementario, o mediante trabajos virtuales, como se presentó en el Capítulo 4, se puede encontrar el vector de cargas generalizadas para un nuevo sistema de coordenadas mediante la ecuación (5.3), debiendo calcular únicamente la matriz $T$.

## 5.3 PUNTO DE VISTA ESTÁTICO

### 5.3.1 Relación entre dos sistemas de cargas

El pórtico presentado a la izquierda de la figura 5.7 tiene tres grados de libertad y su sistema de coordenadas $Q - q$ es el mostrado en la parte central de la figura 5.7, y en la parte derecha de 5.7 se presenta el sistema $Q^* - q^*$.

Se define, ahora, una relación entre los dos sistemas de cargas, de la siguiente manera:

$$\bar{Q} = \bar{T}_1 \cdot \bar{Q}^* \qquad (5.4)$$

$\bar{T}_1$ Matriz de transformación, de orden $(n \times n)$.

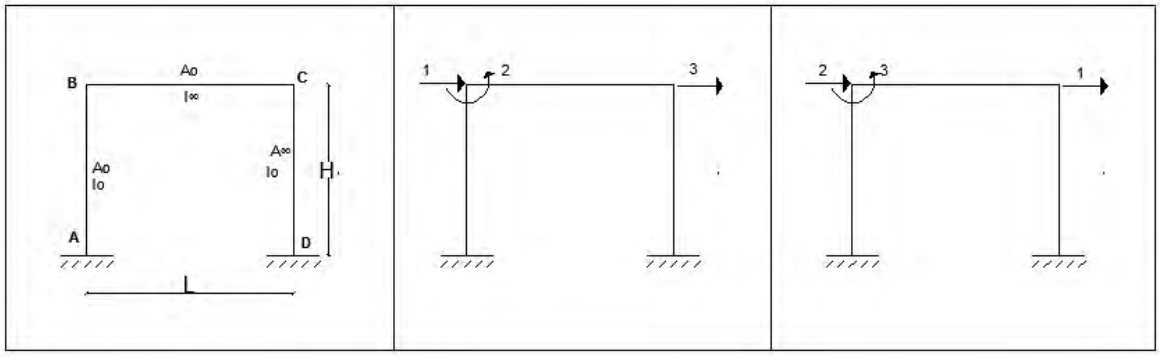



**Figura 5.7** Estructura con dos sistemas de coordenadas $Q - q$, y $Q^* - q^*$

Al desarrollar la ecuación matricial (5.4), para un sistema de $n$ grados de libertad, se tiene:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ .. \\ .. \\ Q_i \\ .. \\ .. \\ .. \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{111} & T_{112} & T_{113} & \cdots & \cdots & T_{11n} \\ T_{121} & T_{122} & T_{123} & \cdots & \cdots & T_{12n} \\ T_{131} & T_{132} & T_{133} & \cdots & \cdots & T_{13n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{1i1} & T_{1i2} & T_{1i3} & \cdots & \cdots & T_{1in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{1n1} & T_{1n2} & T_{1n3} & \cdots & \cdots & T_{1nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \\ Q_3^* \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_i^* \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_n^* \end{bmatrix}$$

Para un término cualquiera $Q_i$, se tiene:

$$Q_i = T_{1i1}Q_1^* + T_{1i2}Q_2^* + T_{1i3}Q_3^* + \ldots + T_{1in}Q_n^* \qquad (5.5)$$

Para calcular $T_{1i1}$, se hará $Q_1^* = 1$ y $Q_i^* = 0$ para $i \neq 0$, en consecuencia es el valor de $Q_i$, correspondiente al estado de cargas indicado. Un término $T_{1ij}$, será el valor de $Q_i$ correspondiente al estado de cargas $Q_j^* = 1$ y $Q_i^* = 0$, $i \neq j$.

- **EJEMPLO 2**

Calcular la matriz $\overline{T}_1$, de la estructura de la figura 5.7, si el sistema $Q - q$ es el indicado en la parte central de 5.7 y el sistema $Q^* - q^*$, el presentado a la derecha de la figura 5.7.

- **SOLUCIÓN**

La primera columna de la matriz $\overline{T}_1$ se obtiene del estado de carga $Q_1^*$ igual a uno y las demás cargas nulas; esto significa aplicar una fuerza horizontal unitaria en el nudo C, como se indica en la figura 5.8. Para éste estado de carga, se debe hallar el vector de cargas generalizadas $\overline{Q}$. El mismo, se puede calcular de dos maneras, a saber. Por trabajos virtuales o mediante el problema primario y complementario.

$$Q_1^* = 1 \text{ y } Q_j^* = 0 \text{ para } i \neq 1$$

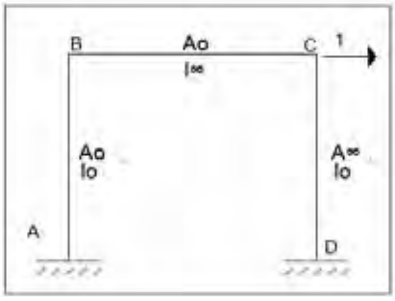



**Figura 5.8** Estado de carga elemental $Q_1^*$

Se procede a calcular los elementos de la primera columna de la matriz $\overline{T}_1$, por Trabajos Virtuales. Para ello en la figura 5.9 se presentan las deformadas elementales en el sistema $Q - q$.

$\delta q_1 = 1$ y $\delta q_i = 0$ para $i \neq 1$ $\delta q_2 = 1$ y $\delta q_i = 0$ para $i \neq 2$ $\delta q_3 = 1$ y $\delta q_i = 0$ para $i \neq 3$

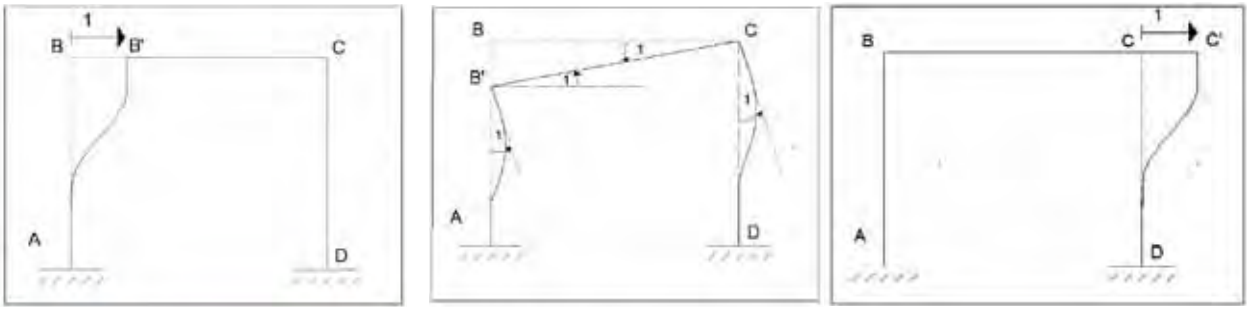



**Figura 5.9** Deformadas elementales.

El trabajo virtual del sistema de cargas de la figura 5.8, en cada una de las deformadas elementales de la figura 5.9, reporta:

$$Q_1 = T_{111} = 0$$

$$Q_2 = T_{121} = 0$$

$$Q_3 = T_{131} = 1$$

Los elementos de la segunda columna de la matriz $T_1$, se pueden hallar de la misma manera, con Trabajos Virtuales pero se lo va a realizar a través del Problema Primario y Complementario, esto se hace por didáctica únicamente. El estado de cargas, ahora es $Q_2^* = 1$ y las restantes nulas que corresponde a una fuerza horizontal en el nudo B, como se muestra en la figura 5.10.

El Problema Primario se indica en la figura 5.11. Por definición se tiene que actúa la fuerza horizontal y la condición es que el vector de coordenadas $q = 0$. Esto conduce a tener fuerzas de fijación $R_i$, que se colocan con sentido contrario al sistema de coordenadas; el signo de estas fuerzas se halla en la solución del Problema Primario.

$Q_2^* = 1$ y $Q_j^* = 0$ para $i \neq 2$

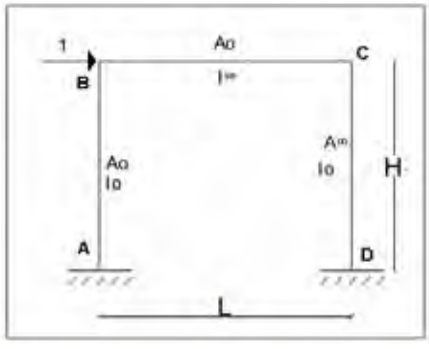



**Figura 5.10** Estado de carga elemental $Q_2^*$

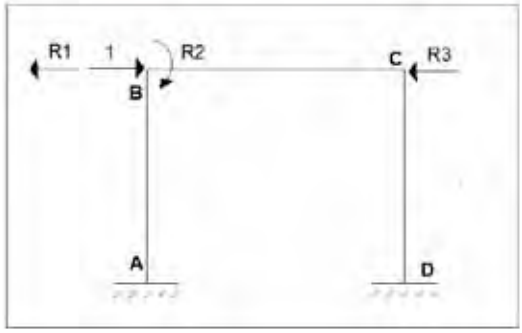
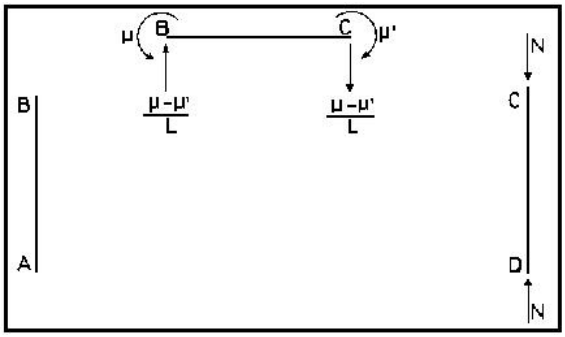



**Figura 5.11** Problema Primario.

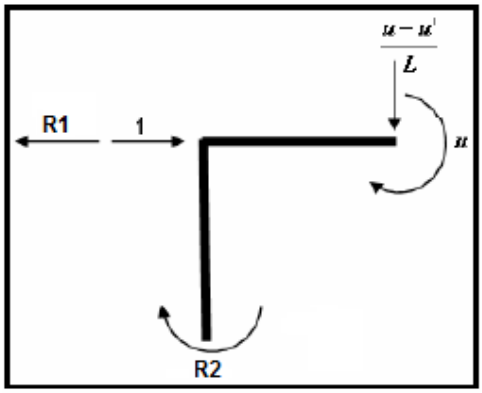
El Problema Primario tiene dos partes que son: Equilibrio de Elementos y Equilibrio de Nudos. Se recuerda que en los elemento $I = \infty$ se tiene en sus extremos dos momentos $\mu$ y $\mu'$ que son necesarios para que el elemento no trabaje a flexión y estos a su vez generan cortantes. En el elemento axialmente rígido en cambio se debe encontrar una fuerza axial $N$ que hacen que el elemento no trabaje axialmente.

- **Equilibrio de miembros**




- **Equilibrio de nudos**

**Nudo B**



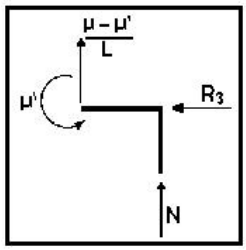

$$\rightarrow +$$

$$\sum Fx = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 1$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 + \mu = 0$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu'$$

**Nudo C**




$$\rightarrow +$$

$$\sum Fx = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 = 0$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \quad \Rightarrow \quad N + \frac{\mu + \mu'}{L} = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu' = 0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se tiene que todo vale cero a excepción de $R_1$ que es igual a uno. El problema complementario es muy sencillo, razón por la cual se escribe directamente la respuesta.

$$Q_1 = 1 = T_{112}$$
$$Q_2 = 0 = T_{122}$$
$$Q_3 = 0 = T_{132}$$

La última columna de la matriz $\boldsymbol{T}_1$ se deja a que el estudiante calcule, su resultado es:

$$T_{113} = 0$$
$$T_{123} = 1$$
$$T_{133} = 0$$

Por consiguiente, la matriz $\overline{\boldsymbol{T}}_1$ es:

$$\overline{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 5.3.2 Relación entre dos sistemas de desplazamientos

Dada la relación: $\overline{\boldsymbol{Q}} = \overline{\boldsymbol{T}}_1 \, \overline{\boldsymbol{Q}}^*$, se desea saber qué relación existe entre $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{q}^*$.

En este caso, sobre la estructura actúa un sistema de fuerzas virtuales arbitrarias y se calculan los trabajos virtuales en los desplazamientos reales. Para la estructura de la figura 5.7, por ejemplo, se tendrá las fuerzas virtuales mostradas en la figura 5.12

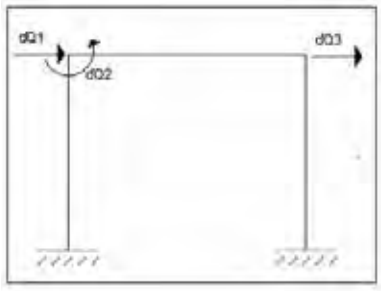



**Figura 5.12** Fuerzas virtuales

Al calcular el trabajo virtual $TV_1$ de las fuerzas virtuales indicadas en la figura 5.12, en el sistema de coordenadas $Q - q$ indicados en la parte central de la figura 5.7, se tiene:

$$TV_1 = \delta Q_1\ q_1 + \delta Q_2\ q_2 + \delta Q_3\ q_3 \tag{5.6.1}$$

De donde:

$$TV_1 = \begin{bmatrix} \delta Q_1 & \delta Q_2 & \delta Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$TV_1 = \delta \bar{Q}^t \bar{q} \tag{5.6.2}$$

De igual forma, al calcular el trabajo virtual $TV_2$ de las fuerzas virtuales de la figura 5.12, en el sistema $Q^* - q^*$ se tiene:

$$TV_2 = \delta Q^{*t} q^* \tag{5.6.3}$$

Pero el trabajo virtual es independiente del sistema de coordenadas. Luego

$$TV_1 = TV_2$$

$$\delta \bar{Q}^t \bar{q} = \delta \bar{Q}^{*t} \bar{q}^* \tag{5.6.4}$$

Se sabe:

$$\delta \bar{Q} = \bar{T}_1 \delta \bar{Q}^* \tag{5.6.5}$$

Al reemplazar (5.6.5) en (5.6.4) se encuentra:

$$\left(\bar{T}_1 \delta \bar{Q}^*\right)^t \bar{q} = \bar{Q}^{*t} \bar{q} *$$

$$\delta \bar{Q}^{*t} \bar{T}_1^t \bar{q} = \delta \bar{Q}^{*t} \bar{q}^*$$

Como $\delta Q^*$ es un sistema de cargas virtuales arbitrario y la igualdad anterior se verifica siempre, entonces se tiene:

$$\bar{T}_1^t \bar{q} = \bar{q}^* \tag{5.6.6}$$

Resumen general:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si | $\bar{Q} = \bar{\bar{T}}_1 \bar{Q}^*$ | entonces | $\bar{q}^* = \bar{T}_1^t \bar{q}$ |

### 5.3.3 Relación entre $\bar{T}$ y $\bar{T}_1$

En el numeral 5.2.1 de este capítulo se estudió la matriz $\bar{T}$ que relaciona: $\bar{q} = \bar{T}\bar{q}^*$, y en el numeral 5.3.1 se estudió la matriz $\bar{T}_1$, teniéndose: $\bar{Q} = \bar{T}_1\bar{Q}^*$. Se desea encontrar ahora qué relación existe entre las matrices $\bar{T}$ y $\bar{T}_1$.

Si: $\bar{Q} = \bar{T}_1\bar{Q}^*$ se tiene que $\bar{q}^* = \bar{T}_1^t\bar{q}$, sustituyendo este valor en la relación: $\bar{q} = \bar{T}\bar{q}^*$, se tiene:

$$\bar{q} = \bar{T}\left(\bar{T}_1^t\bar{q}\right)$$

Por ser $\bar{q}$ un vector general, se cumple:

$$\bar{T} = \left(\bar{T}_1^t\right)^{-1} \tag{5.7}$$

Se deja al estudiante que demuestre la siguiente relación que también existe entre $\bar{T}$ y $\bar{T}_1$.

$$T^t = T_1^{-1} \tag{5.8}$$

La transpuesta de la matriz $\bar{T}$ es igual a la matriz inversa de $\bar{T}_1$.

## 5.4 RELACIÓN ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS NO GENERALIZADAS

### 5.4.1 Relación $\bar{q}_{ng} = \bar{T}\bar{q}$

Para la estructura de la figura 5.13, cuyos elementos son totalmente flexibles, se han elegido dos sistemas de coordenadas, los mismos que se indican en la parte central y a la derecha de la menciona figura. El primer sistema de coordenadas $Q - q$ es generalizado ya que éste tiene coordenadas que son independientes. En cambio el segundo sistema $Q_{ng} - q_{ng}$ **no es generalizado** ya que éste tiene coordenadas que son dependientes.

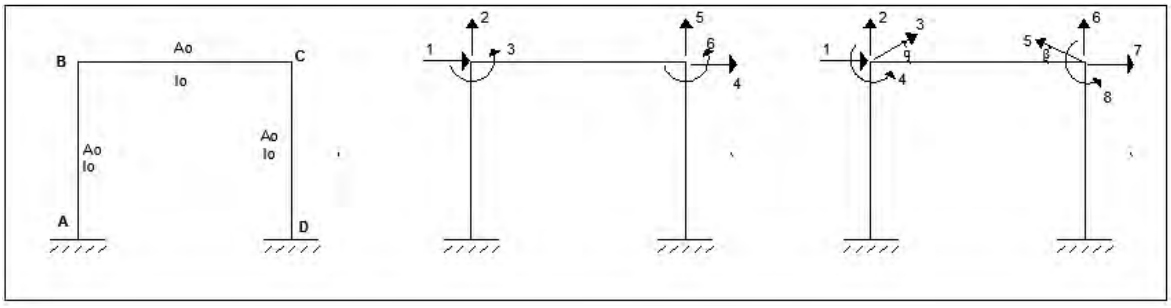



**Figura 5.13** Estructura con dos sistemas de coordenadas: generalizado $Q - q$
No generalizado $Q_{ng} - q_{ng}$

La relación entre los dos sistemas de coordenadas se define de la siguiente manera:

$$q_{ng} = T\,q \tag{5.9}$$

Donde $T$ es la matriz de transformación de coordenadas, es este caso no es cuadrada es de orden (n x m) siendo n el número de coordenadas del sistema no generalizado $q_{ng}$ y m es el número de coordenadas del sistema generalizado $q$. Para el ejemplo que se está analizando en la figura 5.13, la matriz $T$ tendrá 8 filas y 6 columnas.

Por un procedimiento similar a los realizados anteriormente se puede demostrar fácilmente que un término cualquiera $T_{ij}$ **será el valor de la componente** $q_{ing}$ **medido en el sistema de coordenadas no generalizado, correspondiente al diagrama elemental** $q_j = 1$ **y demás coordenadas nulas**, diagrama realizado en el sistema de coordenadas generalizadas.

Para el sistema de coordenadas presentado en la figura 5.13, no se puede escribir: $q = T\, q_{ng}$, puesto que no existen condiciones de restricción entre las coordenadas $q$. Por lo tanto la relación inversa será válida si los dos sistemas de coordenadas son generalizados.

### 5.4.2 Relación $Q = T^t\, Q_{ng}$

Dada la relación: $q_{ng} = T\, q$, se demuestra por medio de trabajos virtuales que $Q = T^t\, Q_{ng}$**.** Esta ecuación indica que si se conoce los valores de $Q_{ng}$ se podrá determinar $Q$ por medio de la matriz $T$ pero en general no se podrá determinar los valores de $Q_{ng}$ conocido los valores de $Q$.

En resumen para calcular $Q_{ng}$ a partir de $Q$ se procederá de la siguiente manera:

1) Calcular la matriz $T$ por geometría, utilizando la ecuación (5.9).

2) Obtener $T^t$.

3) Calcular $\left(T^t\right)^{-1}$. Esto será posible si $T^t$ es una matriz singular, caso contrario no se puede resolver el problema.

4) Calcular $Q_{ng} = \left(T^t\right)^{-1} Q$

## 5.5 CALCULO DEL VECTOR $Q$ POR MEDIO DE LA MATRIZ $T$

### 5.5.1 Matriz $T_{2-3}$

Como se verá en un Capítulo posterior de éste libro, se denomina matriz $T_{2-3}$ a la matriz que relaciona los sistemas de coordenadas del elemento de la figura 5.14. Esta matriz permite pasar de Coordenadas Locales a Coordenadas Globales de un elemento. Por didáctica se presenta nuevamente estos dos sistemas de coordenadas, al centro y a la derecha de la figura 5.14. La diferencia fundamental entre estos dos sistemas es que en Coordenadas Locales se tienen componentes de desplazamiento axial y transversal al eje del elemento; en cambio en coordenadas globales las componentes de desplazamiento son horizontal y vertical.

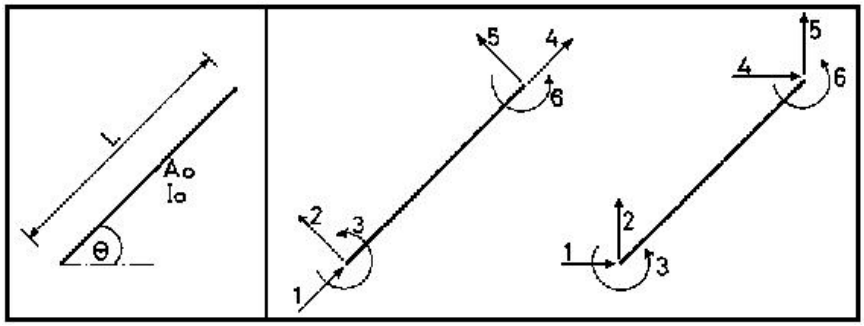


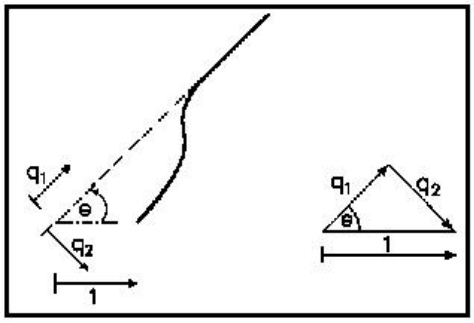

**Figura 5.14** Elemento inclinado y sistemas de Coordenadas Locales y Globales

A la izquierda de la figura 5.14 se presenta un elemento inclinado que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal y que tiene una longitud L. Nótese que el ángulo $\theta$ se mide a partir del eje horizontal X. Para una viga horizontal el valor de $\theta = 0$, para una columna vertical se tiene $\theta = 90$. Para calcular la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ se construirá las deformadas elementales en el sistema de coordenadas globales y se medirá en el sistema de coordenadas locales.

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}_{2-3}\, \boldsymbol{q}^*$$

- **Primera columna de** $\boldsymbol{T}_{2-3}$

$$q_1^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 1$$



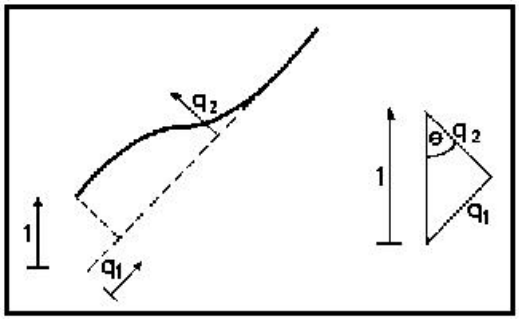

Deformada elemental $q_1^*$

$$q_1 = \cos\theta \qquad q_2 = -sen\theta \qquad q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

Para entender el signo de $q_2$ se debe recordar que en el nudo inicial se tiene el origen de coordenadas $X - Y$, donde la coordenada $X$ va a lo largo del eje del elemento y la Y es perpendicular con sentido contrario al desplazamiento $q_2$ de la deformada elemental $q_1^*$

- **Segunda columna de** $\boldsymbol{T}_{2-3}$

$$q_2^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 2$$




Deformada elemental $q_2^*$

$$q_1 = sen\theta \qquad q_2 = \cos\theta \qquad q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

❖ **Tercera columna de $T_{2-3}$**

$$q_3^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 3$$

Deformada elemental $q_3^*$

$$q_1 = 1 \qquad q_1 = q_2 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

Se deja al lector el cálculo de las restantes columnas de la matriz $T_{2-3}$. El resultado final se indica a continuación.

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Es muy importante la matriz $T_{2-3}$ en la programación de pórticos planos. A ésta matriz también se la conoce como Matriz de Rotación. Un Teorema de esta matriz es el siguiente.

$$\text{Si } \boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}_{2-3}\, \boldsymbol{q}^* \text{ Entonces } \boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{T}_{2-3}^t\, \boldsymbol{Q} \tag{5.11}$$

Ahora bien, sea $\boldsymbol{Q}_2$ el vector de Cargas de Empotramiento de un elemento en Coordenadas Locales y $\boldsymbol{Q}_3$ el vector de Cargas de Empotramiento de un elemento en Coordenadas Globales. Con esta nomenclatura la ecuación (5.11) se transforma en:

$$\boldsymbol{Q}_3 = \boldsymbol{T}_{2-3}^t\, \boldsymbol{Q}_2 \tag{5.12}$$

### 5.5.2 Cálculo de $Q$ orientado al ordenador

En base a la teoría expuesta en el capítulo 4 y en éste capítulo. El algoritmo para calcular el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$, orientado al uso del ordenador es el siguiente.

#### 5.5.2.1 Caso de cargas en las juntas

Cuando las cargas actúan únicamente en las juntas, el cálculo de $\boldsymbol{Q}$ es directo, solamente se identifican los grados de libertad en los cuales actúan las cargas.

El usuario de un programa de computación deberá indicar la junta cargada y después la fuerza horizontal, la fuerza vertical y el momento que en ella actúan, considerando positivos si la fuerza horizontal es hacia la derecha, la vertical hacia arriba y el momento anti horario.

En base a la identificación de la junta cargada se obtienen los respectivos grados de libertad.

- **EJEMPLO 3**

Calcular el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ para el marco plano de la figura 5.15 cuyos elementos se consideran totalmente flexibles. A la derecha de la figura 5.15 se presenta el respectivo sistema de coordenadas generalizadas. Únicamente actúan una fuerza horizontal hacia la derecha de 4 T, y un momento en sentido horario de 6 T m. A la izquierda de la figura 5.15 se han identificado los elementos y más adelante se numeran los nudos de la estructura.

- **SOLUCIÓN**

La fuerza horizontal de 4 T está aplicada en el grado de libertad 1 y el momento de 6 T.m. en el grado de libertad 6. Por lo tanto únicamente estos grados de libertad del vector $\boldsymbol{Q}$ tendrán valores diferentes de cero el primer valor será positivo porque está en el mismo sentido del sistema $\boldsymbol{Q-q}$ y el segundo negativo porque es horario.

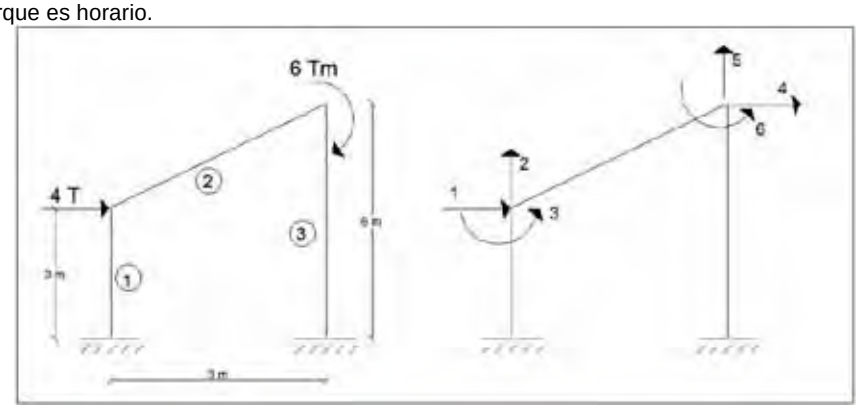
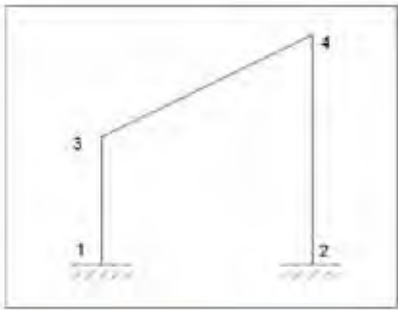



**Figura 5.15** Cargas para Ejemplo 3 y sistema $\boldsymbol{Q-q}$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\\0\\-6\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow \textit{Posición } 1\\ \leftarrow \textit{Posición } 2\\ \leftarrow \textit{Posición } 3\\ \leftarrow \textit{Posición } 4\\ \leftarrow \textit{Posición } 5\\ \leftarrow \textit{Posición } 6\end{matrix}$$

De tal manera que cuando se tiene solo cargas en las Juntas o Nudos, el cálculo del vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ es directo.

Uno de los primeros datos de un programa de computación que resuelve estructuras es el número de nudos. En el ejemplo que se ha desarrollado son 4. Ahora bien se deben numerar los nudos, en principio se puede hacerlo de cualquier forma pero para utilizar el Sistema de Computación ***CEINCI-LAB*** desarrollado por el autor de este libro se deben numerar primero los nudos restringidos como se indica a continuación.




Numeración de los nudos.

Como es pórtico plano cada nudo tendrá tres grados de libertad. Con relación a la figura 5.15 se aprecia que los nudos 1 y 2 son empotramientos, en consecuencia no existe grados de libertad en esos nudos. Con esta información el programa genera un arreglo que se denomina **CG** (Coordenadas Generalizadas) que tendrá n filas y 3 columnas. Siendo n el número de nudos. Para el ejemplo este arreglo es:

- **Arreglo CG**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} \textbf{\textit{Nudo}}\ 1 \\ \textbf{\textit{Nudo}}\ 2 \\ \textbf{\textit{Nudo}}\ 3 \\ \textbf{\textit{Nudo}}\ 4 \end{matrix}$$

La primera columna de **CG** corresponde al grado de libertad en sentido horizontal; la segunda columna al grado de libertad en sentido vertical y la tercera la rotación.

En un programa el usuario identifica la junta cargada, en este caso la número 3. El programa va al arreglo **CG** a la tercera fila y encuentra la identificación de los grados de libertad, la primera será para la fuerza horizontal, la segunda para la vertical y la tercera para el momento. En el ejemplo la única carga, que tiene valor es la fuerza horizontal que vale 4 T. El programa toma este valor y lo ubica en la posición 1 del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ .

Luego el usuario del programa indica la otra junta cargada que en este caso es la 4, con esta información se va a la cuarta fila del arreglo **CG** y como solo actúa un momento de - 6 Tm. Este dato lo ubica en la posición 6.

Por otra parte el usuario del programa debe identificar a cada uno de los elementos y para cada uno de ellos debe indicar el nudo inicial y final del elemento. Para el ejemplo esta información se indica en la Tabla 5.1

**Tabla 5.1** Nudo Inicial y Final de cada elemento

| Elemento | Nudo Inicial | Nudo Final |
|---|---|---|
| **1** | 1 | 3 |
| **2** | 3 | 4 |
| **3** | 2 | 4 |

En base a la información de la tabla 5.1, que el usuario da como dato y en base al arreglo **CG**, se obtiene el arreglo **VC** (Vector de Colocación). Para pórticos planos este arreglo tiene m filas y 6 columnas, siendo m el número de elementos del pórtico. En las tres primeras columnas van los grados de libertad del nudo inicial y en las tres siguientes columnas van los grados de libertad del nudo final.

A manera de ejemplo la primera fila del arreglo VC corresponde al elemento 1, con el dato del nudo inicial igual a 1 se obtiene del arreglo **CG** los valores 0 0 0 y con la identificación del nudo final 3 del arreglo **CG** se encuentra 1 2 3. Lo propio se hace para los restantes elementos.

- **Arreglo VC**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \textit{Elemento } 1 \\ \leftarrow \textit{Elemento } 2 \\ \leftarrow \textit{Elemento } 3 \end{matrix}$$

El arreglo **VC** sirve para encontrar el vector de cargas generalizadas cuando se tienen cargas en los elementos. Posteriormente se verá que también sirve para hallar la matriz de rigidez de la estructura y para encontrar las fuerzas y momentos finales en cada uno de sus elementos.

Nótese que se está resolviendo un pórtico no ortogonal. La única condición que se ha puesto es que todos los elementos sean totalmente flexibles. Se puede programar para pórticos con todos los elementos axialmente rígidos pero para empezar se hace el caso más fácil que es todos los elementos son completamente flexibles.

#### 5.5.2.2 Caso de cargas en los elementos

Se define el vector de colocación de un elemento i como $\boldsymbol{VC}^{(i)}$, a un vector de 6 elementos que contiene los grados de libertad del nudo inicial y del nudo final de un elemento, en coordenadas globales. Para los elementos de la figura 5.15 los vectores de colocación son las filas del arreglo **VC** indicado que se repite a continuación.

$$\boldsymbol{VC}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{VC}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{VC}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

El procedimiento de cálculo del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$, cuando existen cargas en los elementos, es el siguiente:

1) Encontrar el vector de empotramiento perfecto de cargas, en coordenadas locales $\boldsymbol{Q}_2$ de cada uno de los elementos cargados.

2) Obtener la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ de cada uno de los elementos cargados.

3) Calcular el vector de empotramiento perfecto en coordenadas globales $\boldsymbol{Q}_3$ y cambiarle de signo para tener cargas en las juntas.

$$\boldsymbol{Q}_3 = -\boldsymbol{T}_{2-3}^{t} \quad \boldsymbol{Q}_2$$

4) Mediante el vector de colocación correspondiente al elemento cargado se realiza el ensamblaje del vector $\boldsymbol{Q}$. Si a una determinada posición del vector $\boldsymbol{Q}$ llegan varios aportes, estos se van sumando.

- **EJEMPLO 4**

Calcular el vector $\boldsymbol{Q}$ de la estructura de la figura 5.16, cuyos elementos son totalmente flexibles. Calcular por medio de la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es decir aplicando un procedimiento orientado al uso del ordenador.

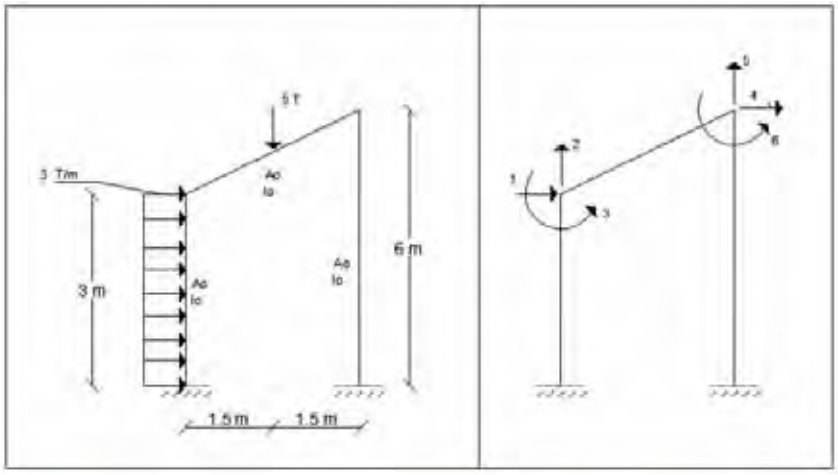


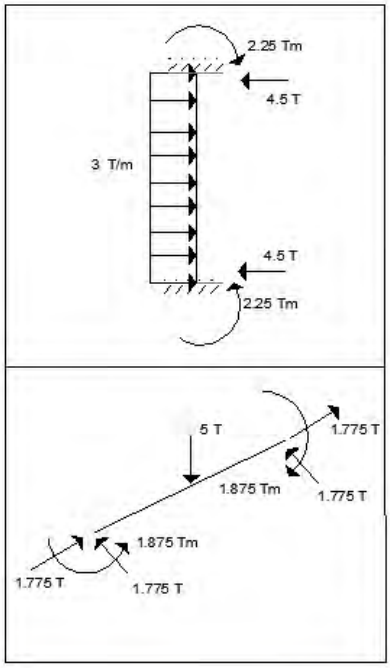

**Figura 5.16** Datos de cargas de Ejemplo 4 y grados de libertad

- **SOLUCIÓN**

i) Vector de empotramiento perfecto en coordenadas locales $\boldsymbol{Q}_2$. Se indica el vector transpuesto para ahorrar espacio en la escritura.

$$\boldsymbol{Q}_2^{t(1)} = \begin{bmatrix} 0.00 & 4.50 & 2.25 & 0.00 & 4.50 & -2.25 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_2^{t(2)} = \begin{bmatrix} 1.775 & 1.775 & 1.875 & 1.775 & 1.775 & -1.875 \end{bmatrix}$$




ii) Matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ de elementos cargados

- **Elemento 1** $\theta = 90^o$

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 2** $\theta = 45^o$

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Vector $\boldsymbol{Q}_3$

$$\boldsymbol{Q}_3 = -\boldsymbol{T}_{2-3}^{t} \quad \boldsymbol{Q}_2$$

$$\boldsymbol{Q}_3^{(1)} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00 \\ 4.50 \\ 2.25 \\ 0.00 \\ 4.50 \\ -2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.00 \\ -2.25 \\ 4.50 \\ 0.00 \\ 2.25 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3^{(2)} = -\begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.775 \\ 1.775 \\ 1.875 \\ 1.775 \\ 1.775 \\ -1.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -2.500 \\ -1.875 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix}$$

iv) Ensamblaje de $\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{VC}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{VC}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.00 \\ -2.25 \\ 4.50 \\ 0.00 \\ 2.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textbf{Posición } 0 \\ \textbf{Posición } 0 \\ \textbf{Posición } 0 \\ \textbf{Posición } 1 \\ \textbf{Posición } 2 \\ \textbf{Posición } 3 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -2.500 \\ -1.875 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textbf{Posición } 1 \\ \textbf{Posición } 2 \\ \textbf{Posición } 3 \\ \textbf{Posición } 4 \\ \textbf{Posición } 5 \\ \textbf{Posición } 6 \end{matrix}$$

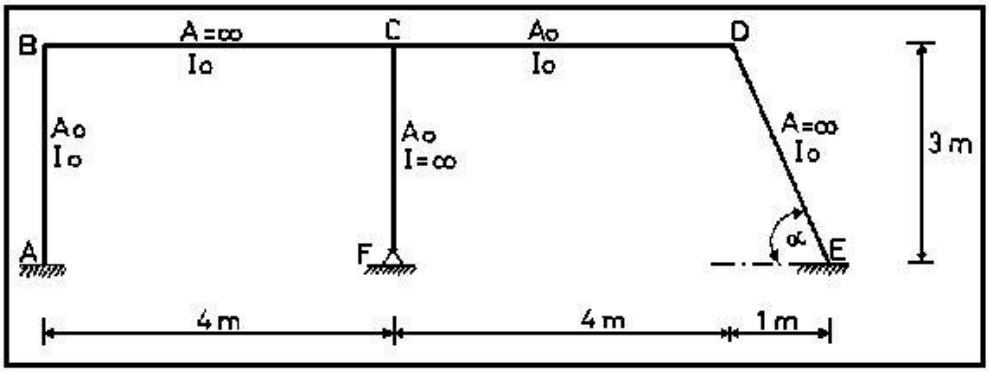
El $\boldsymbol{VC}$ indica la posición a la cual va el término de $\boldsymbol{Q}_3$ dentro del vector $\boldsymbol{Q}$. Si la posición es 0 simplemente no contribuye y se pasa al siguiente. El vector resultante es:

$$Q = \begin{bmatrix} 4.5 + 0.0 \\ 0.0 - 2.5 \\ 2.25 - 1.875 \\ 0.0 \\ -2.5 \\ 1.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.500 \\ -2.500 \\ 0.375 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix}$$

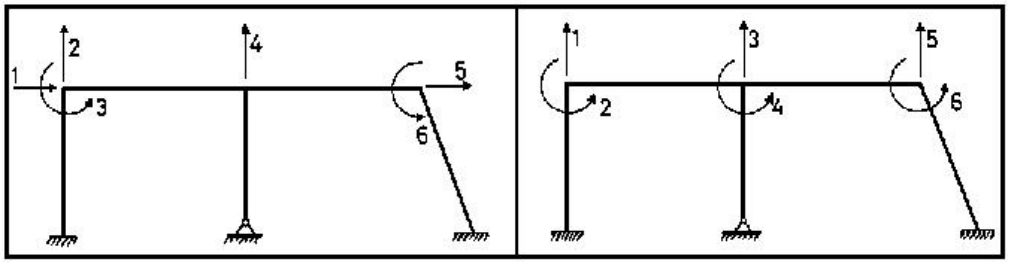
## 5.6 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO 5**

Para la estructura indicada en la parte superior de la figura 5.17 se presentan dos sistemas de coordenadas generalizadas en la parte inferior. Se pide calcular la matriz $T$ de transformación de coordenadas tal que $q = T\, q^*$




**Estructura de Ejemplo 5**



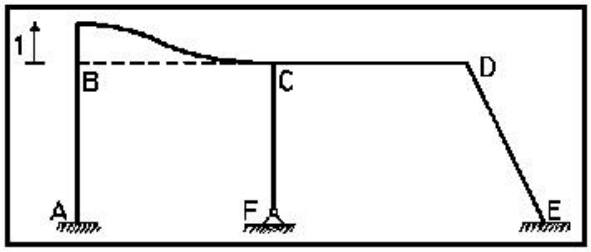

**Sistema $Q - q$** **Sistema $Q^* - q^*$**

**Figura 5.17** Estructura de Ejemplo 5 y dos sistemas de coordenadas.

- **SOLUCIÓN**

  - Primera columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_1^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 1$$

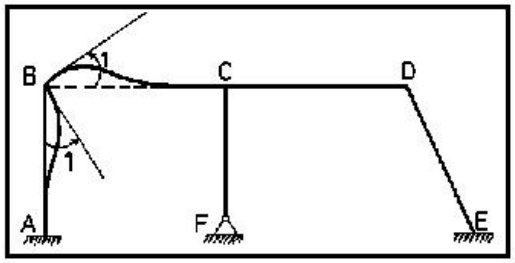



Deformada elemental $q_1^*$

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = 1 \qquad q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

  - Segunda columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_2^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 2$$

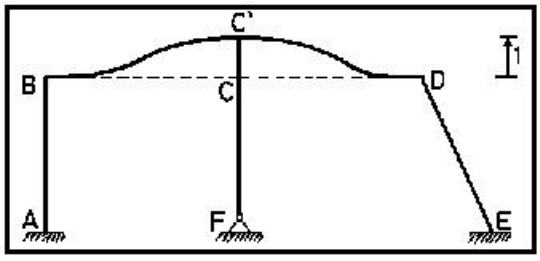



Deformada elemental $q_2^*$

$$q_1 = q_2 = 0 \qquad q_3 = 1 \qquad q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

  - Tercera columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_3^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 3$$

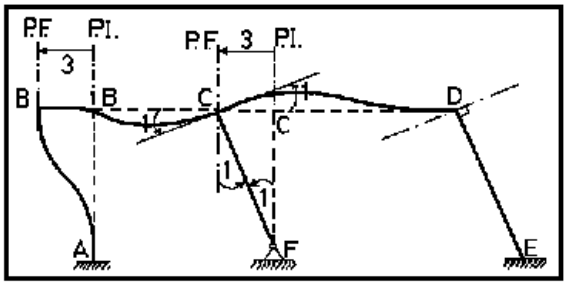



Deformada elemental $q_3^*$

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0 \qquad q_4 = 1 \qquad q_5 = q_6 = 0$$

- Cuarta columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_4^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 4$$

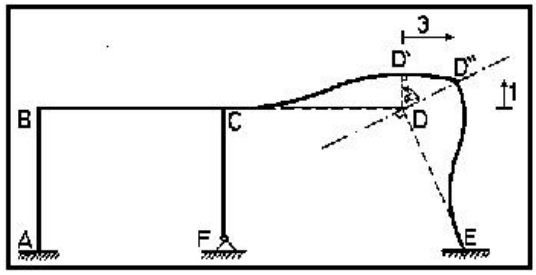



Deformada elemental $q_4^*$

$$q_1 = -3 \qquad q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

- Quinta columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_5^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 5$$

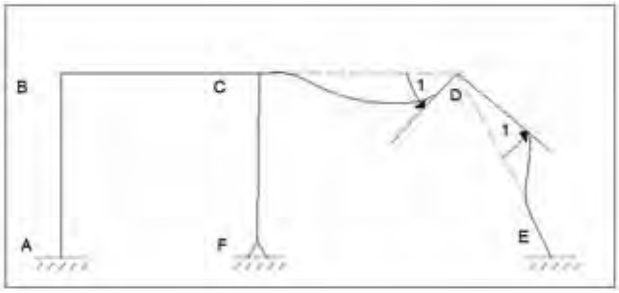



Deformada elemental $q_5^*$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0 \qquad q_5 = 3 \qquad q_6 = 0$$

- Sexta columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_6^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 6$$




Deformada elemental $q_6^*$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0 \qquad q_6 = 1$$

- Matriz $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 6**

En el pórtico plano que se presenta en la figura 5.18 se han seleccionado los sistemas de coordenadas generalizadas, indicados en la parte central $(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q})$ y al lado derecha $(\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*)$ de la figura 5.18. Encontrar la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$, tal que: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$.

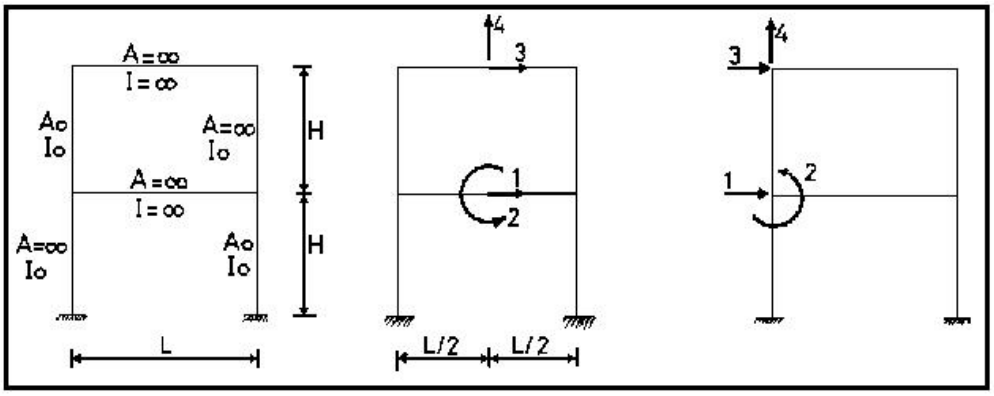
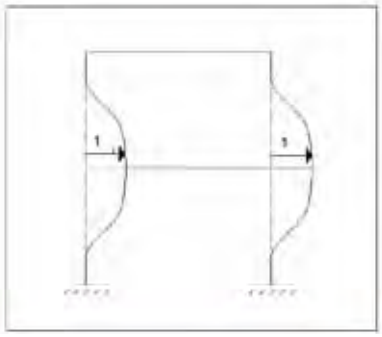



**Figura 5.18** Estructura de Ejemplo 6 y sistemas de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$

- **SOLUCIÓN**

  - Primera columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_1^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 1$$

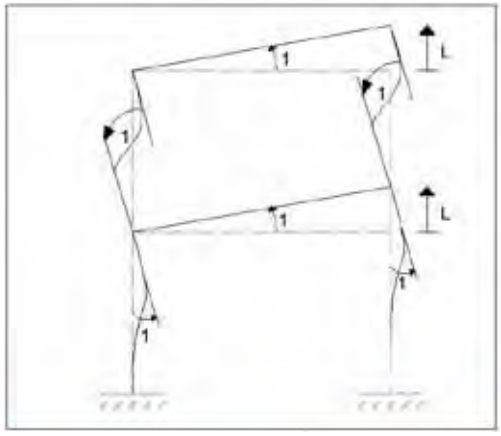


Deformada elemental $q_1^*$

$$q_1 = 1 \qquad\qquad q_2 = q_3 = q_4 = 0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_2^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 2$$

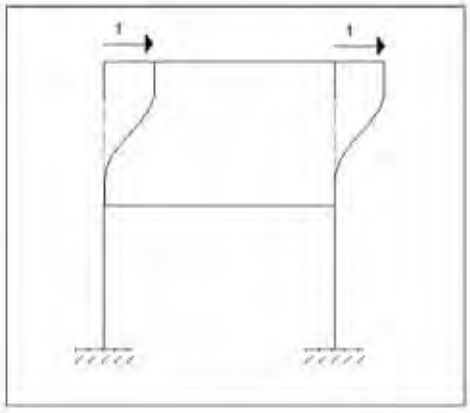



Deformada elemental $q_2^*$

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = 1 \qquad q_3 = 0 \qquad q_4 = \frac{L}{2}$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_3^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 3$$

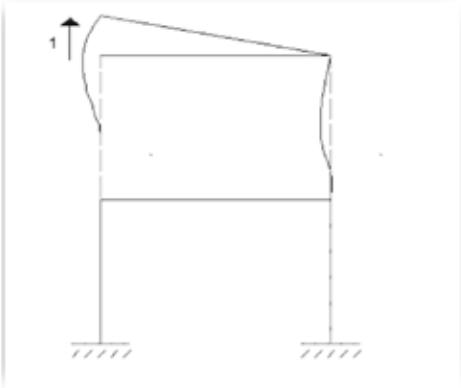



Deformada elemental $q_3^*$

$$q_1 = q_2 = 0 \qquad q_3 = 1 \qquad q_4 = 0$$

- Cuarta columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_4^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 4$$




Deformada elemental $q_4^*$

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0 \qquad\qquad q_4 = \frac{1}{2}$$

- Matriz $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{L}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

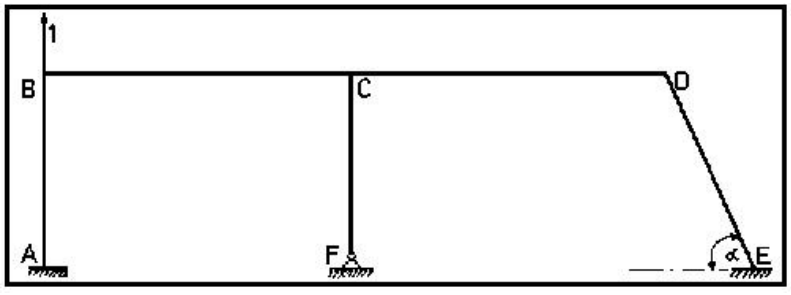
- **EJEMPLO 7**

En relación con la estructura y sistemas de coordenadas del ejemplo 5, calcular la matriz $\boldsymbol{T}_1$, tal que: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}_1 \, \boldsymbol{Q}^*$.

- **SOLUCIÓN**

- Primera columna de $\boldsymbol{T}_1$

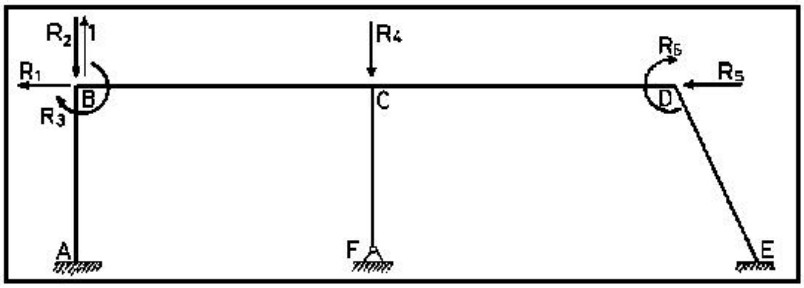
$$Q_1 = 1 \qquad y \qquad Q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 1$$




Estado de carga para la primera columna de $\boldsymbol{T}_1$.

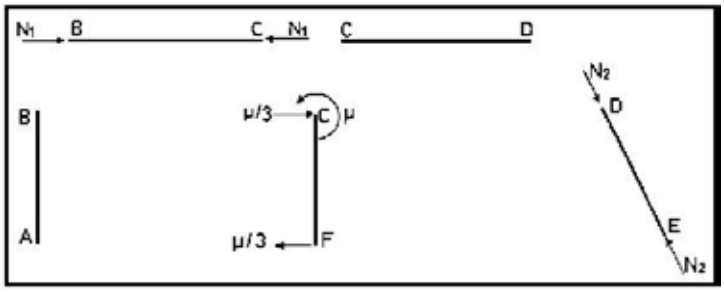
Se va a calcular la primera columna de la matriz $T_1$ por empleando el Problema Primario y Complementario.

- **Problema Primario**



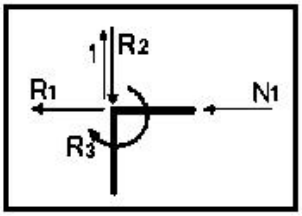

Problema Primario para la primera columna de $T_1$.

- **Equilibrio de Elementos**



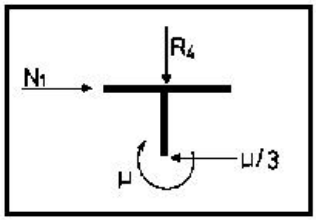

- **Equilibrio de Juntas**

**Junta B**



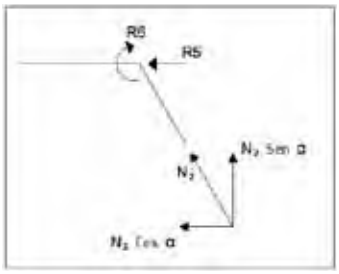

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_1 - R_1 = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - R_2 = 0$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 = 0$$

**Junta C**



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - \frac{\mu}{3} = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_4 = 0$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0$$

**Junta D**

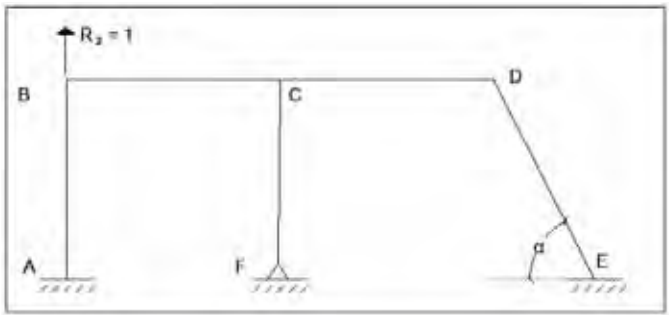



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad R_5 + N_2 \cos\alpha = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2\, sen\alpha = 0$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_6 = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta:

$$R_1 = 0 \qquad R_2 = 1 \qquad R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 0 \qquad N_1 = N_2 = \mu = 0$$

- **Problema Complementario**




$$Q_1 = 0 \qquad Q_2 = 1 \qquad Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0$$

Por un procedimiento parecido se obtendrán las diferentes columnas de la matriz $\boldsymbol{T}_1$. Como se conoce el vector $\boldsymbol{Q}$ también se puede obtener por medio de trabajos virtuales. Se deja al estudiante que obtenga las demás columnas de la matriz $\boldsymbol{T}_1$, en especial la cuarta y quinta columna.

- Matriz $\boldsymbol{T}_1$

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 8**

Con relación a la estructura de la figura 5.19, en que la viga es transversalmente rígida, se pide:

1. Seleccionar un sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ apropiado.
2. Encontrar el valor de $\boldsymbol{Q}$ que corresponde a la carga mostrada por trabajos virtuales y por medio del problema primario y complementario.
3. Encontrar la expresión de la elástica horizontal y vertical del elemento BC en términos de las coordenadas $q_i$ y de las funciones de forma.
4. Se efectúa una transformación de coordenadas $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$. Donde $\boldsymbol{T}$ es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Dibujar la deformada elemental $q_2^* = 1$ y las demás coordenadas nulas.

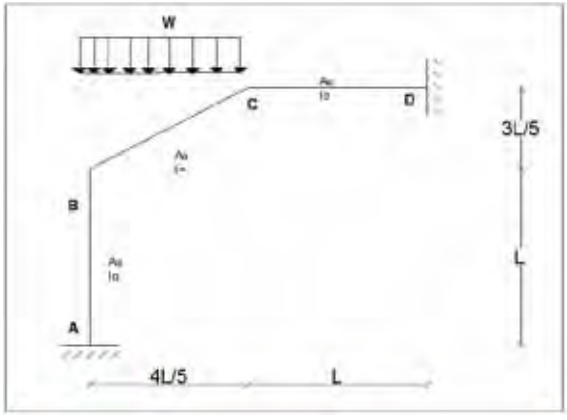
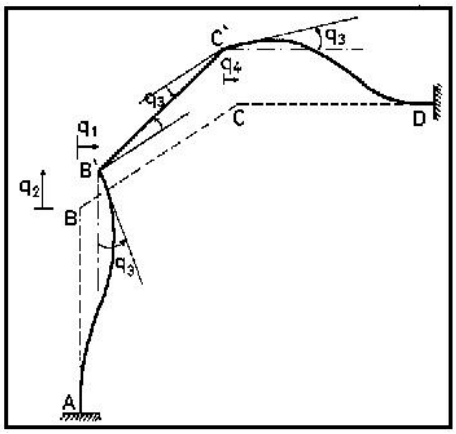



**Figura 5.19** Estructura de los ejemplos 8, 9 y 10.

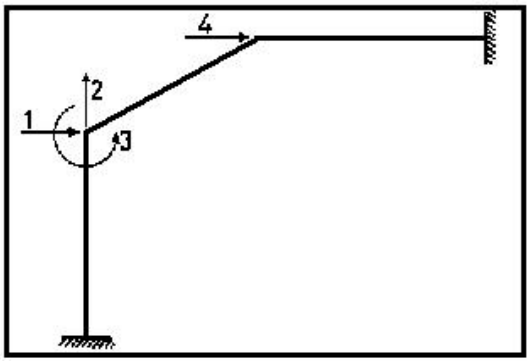
- **SOLUCIÓN**

Para seleccionar el sistema de coordenadas $Q-q$ apropiado se debe dibujar una deformada general. Conviene aplicar las fórmulas indicadas en el Capítulo 1 para tener idea de los grados de libertad, se recuerda que el elemento $I=\infty$ disminuye en 2 grados de libertad.



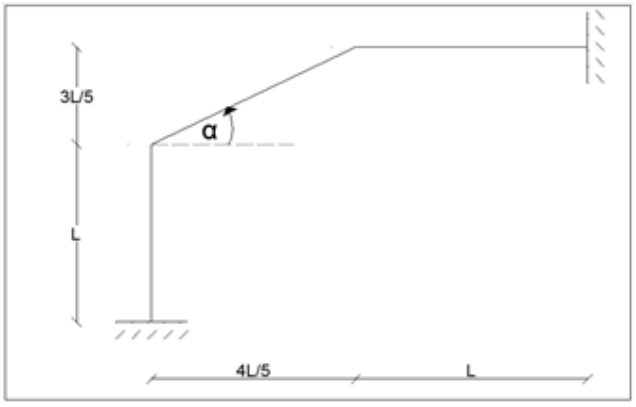

Deformada general

En base a la deformada general se encuentra el siguiente sistema de coordenadas $Q-q$



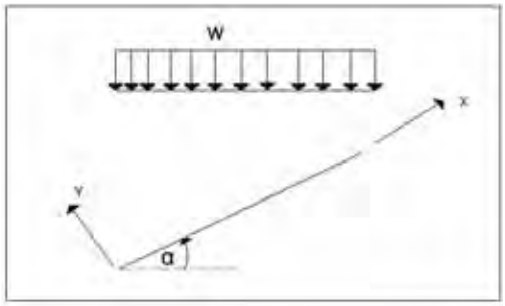

Sistema de coordenadas $Q-q$

Antes de encontrar el vector de cargas $Q$ conviene encontrar algunos parámetros geométricos que se necesitan en la solución del problema.



$$tg\ \alpha = \frac{3}{4} \qquad sen\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad Longitud\ BC = L$$

La carga vertical debe ser descompuesta en una vertical y una horizontal distribuidas.




$$W_Y = -W\cos^2\alpha = -\frac{16}{25}W \qquad W_X = -W\ sen\alpha\cos\alpha = -\frac{12}{25}W$$

Se va a calcular el vector $\boldsymbol{Q}$ aplicando trabajos virtuales. Para ello es necesario tener en cuenta que el elemento BC es transversalmente rígido. En consecuencia las ordenadas de la elástica de éste elemento, son:

$$u(x) = u_1\ \phi_1(x) + u_2\ \phi_4(x)$$
$$v(x) = v_1 + \theta_1\ X$$

- **Cálculo de** $Q_1$

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

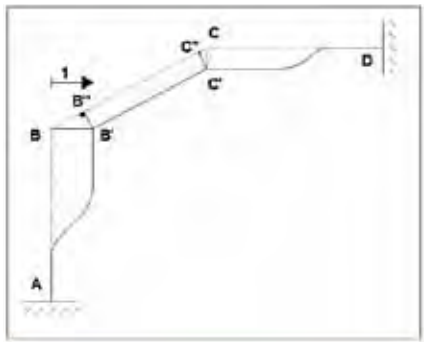
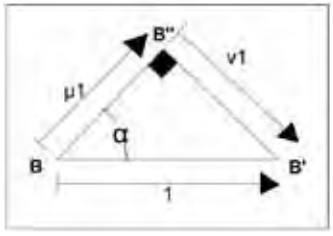
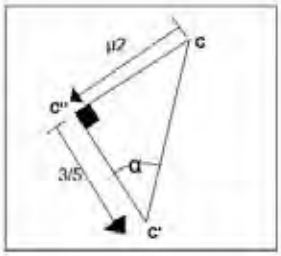



**Figura 5.19.1** Deformada elemental $\delta q_1 = 1$




En el triángulo BB'B'' se tiene: $u_1 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\qquad v_1 = -sen\alpha = -\frac{3}{5}$

En la deformada elemental se observa que B'B'' es igual a C'C'' y es igual a 3/5.




En el triángulo CC'C'' se tiene: $u_2 = -\frac{3}{5} tg\ \alpha = -\frac{9}{20}$.

En resumen para el elemento BC se tiene:

$$u_1 = \frac{4}{5} \qquad u_2 = -\frac{9}{20}$$
$$v_1 = -\frac{3}{5} \qquad v_2 = -\frac{3}{5}$$
$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$Q_1 = \int_0^L W_X\ u(x)\,dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\,dx$$

$$Q_1 = \int_0^L -\frac{12}{25} W\left[u_1(x)\,\phi_1(x) + u_2(x)\phi_4(x)\right] dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W\left[v_1 + \theta_1\ X\right]$$

$$Q_1 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[\frac{4}{5}\left(1 - \frac{X}{L}\right) - \frac{9}{20}\frac{X}{L}\right] dx - \frac{16}{25} W \int_0^L \left[-\frac{3}{5}\right] dx = \frac{3}{10} WL$$

- **Cálculo de** $Q_2$

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$

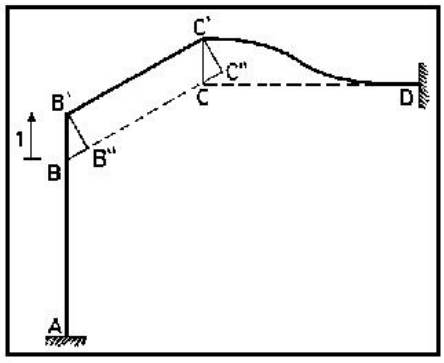
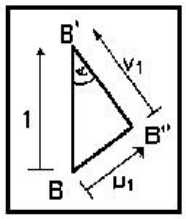



**Figura 5.19.2** Deformada elemental $\delta q_2 = 1$

En la figura se aprecia que el triángulo rectángulo BB'B'' es igual al triángulo CC'C''.




$$u_1 = sen\,\alpha = \frac{3}{5} \qquad v_1 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Por lo tanto para el elemento inclinado BC se tiene:

$$u_1 = \frac{3}{5} \qquad u_2 = \frac{3}{5}$$
$$v_1 = \frac{4}{5} \qquad v_2 = \frac{4}{5}$$
$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$Q_2 = \int_0^L W_X\ u(x)\,dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\,dx$$

$$Q_2 = \int_0^L -\frac{12}{25} W\left[u_1(x)\,\phi_1(x) + u_2(x)\phi_4(x)\right] dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W\left[v_1 + \theta_1\ X\right]$$

$$Q_2 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[\frac{3}{5}\left(1 - \frac{X}{L}\right) + \frac{3}{5}\frac{X}{L}\right] dx - \frac{16}{25} W \int_0^L \left[\frac{4}{5}\right] dx = -\frac{4}{5} WL$$

- **Cálculo de** $Q_3$

En la deformada elemental $\delta q_3$ que se indica a continuación, se debe aplicar el artificio para elementos $I = \infty$ con el cual se obtiene que C'C'' es igual a longitud del elemento L.

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$

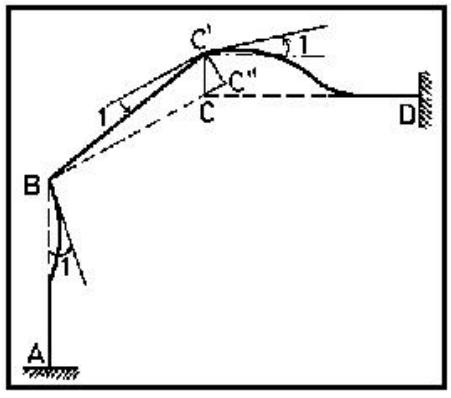
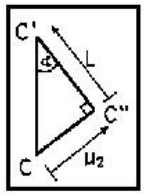



**Figura 5.19.3** Deformada elemental $\delta q_3 = 1$




En el triángulo CC'C'' se tiene que: $u_2 = L\,tg\alpha = \frac{3}{4}L$. Para el elemento BC se tiene:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = \frac{3}{4}L$$
$$v_1 = 0 \qquad v_2 = L$$
$$\theta_1 = 1 \qquad \theta_2 = 1$$

$$Q_3 = \int_0^L W_X\ u(x)\,dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\,dx = \int_0^L -\frac{12}{25}W\left[u_1(x)\,\phi_1(x) + u_2(x)\phi_4(x)\right]dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W\left[v_1 + \theta_1\ X\right]$$

$$Q_3 = -\frac{12}{25}W\int_0^L\left[\frac{3}{4}L\frac{X}{L}\right]dx - \frac{16}{25}W\int_0^L[X]\,dx = -\frac{9}{25}W\left|\frac{X^2}{2}\right|_0^L - \frac{16}{25}W\left|\frac{X^2}{2}\right|_0^L$$

$$Q_3 = -\frac{9}{50}WL^2 - \frac{16}{50}WL^2 = -\frac{WL^2}{2}$$

- **Cálculo de** $Q_4$

$$\delta q_4 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 4$$

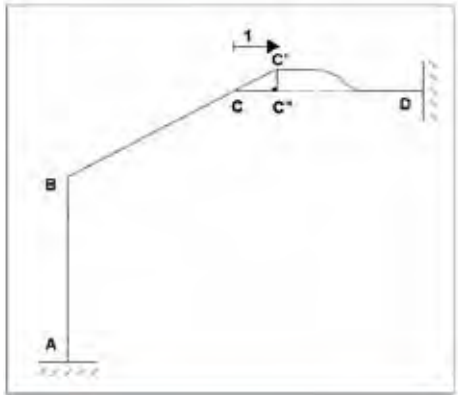
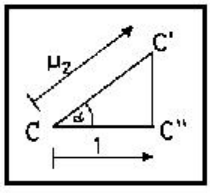



**Figura 5.19.4** Deformada elemental $\delta q_4$

En el triángulo CC'C'' de la figura 5.11.7 se tiene que: $u_2 = \sec\alpha = \frac{5}{4}$




En consecuencia las coordenadas del elemento BC, son:

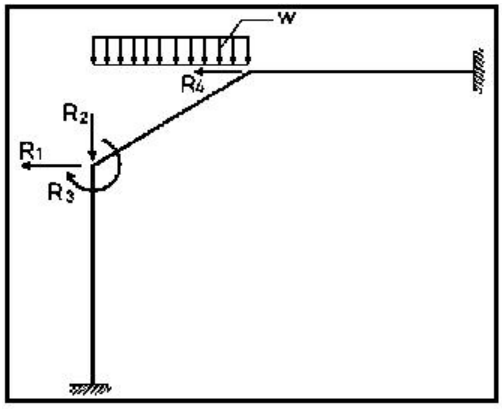
$$u_1 = v_1 = \theta_1 = 0 \qquad u_2 = \frac{5}{4} \qquad v_2 = \theta_2 = 0$$

$$Q_4 = \int_0^L W_X\ u(x)\,dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\,dx = \int_0^L -\frac{12}{25} W\left[u_1(x)\,\phi_1(x) + u_2(x)\phi_4(x)\right] dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W\left[v_1 + \theta_1\ X\right]$$

$$Q_4 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[\frac{5}{4}\frac{X}{L}\right] dx = -\frac{3}{5} W \left|\frac{X^2}{2L}\right|_0^L = -\frac{3}{10} WL$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix}$$

Una vez que se ha terminado el cálculo del vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ por trabajos virtuales se procede a su cálculo por medio del Problema Primario y Complementario.

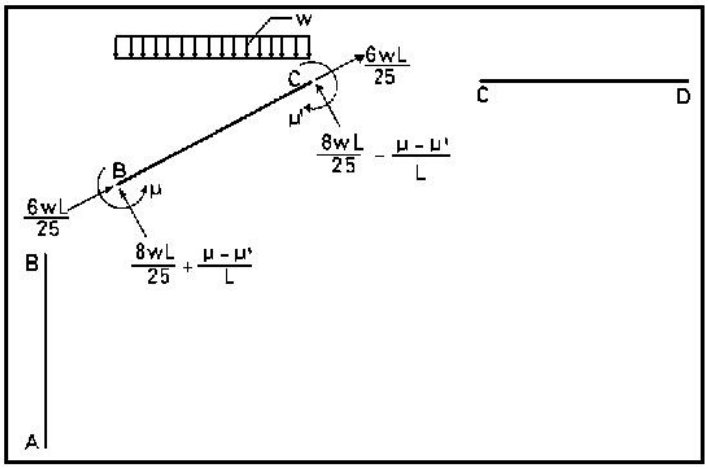



Problema Primario $\boldsymbol{q = 0}$

- **Equilibrio de elementos**

$$N_B = \int_0^L W_X\ \phi_1(x)\,dx = \int_0^L \frac{12}{25} W\left(1 - \frac{X}{L}\right) dx = \frac{12}{25} W \left|X - \frac{X^2}{2L}\right|_0^L = \frac{6}{25} WL$$

$$N_C = \int_0^L W_X\ \phi_4(x)\,dx = \int_0^L \frac{12}{25} W \frac{X}{L}\,dx = \frac{12}{25} W \left|\frac{X^2}{2L}\right|_0^L = \frac{6}{25} WL$$

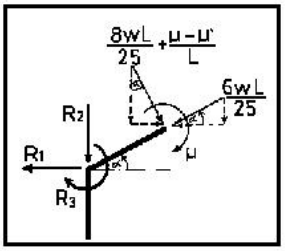



El cortante $V_B$ se puede encontrar integrando entre 0 y L la carga $W_Y$ multiplicando por la función de forma $\phi_2(x)$ y para el cortante $V_C$ multiplicando dicha carga por $\phi_5(x)$ e integrando. Otra forma de hacerlo es la siguiente:

$$V_B = V_c = \frac{W_Y * L}{2} = \frac{16}{25} W \frac{L}{2} = \frac{8}{25} WL$$

- **Equilibrio de Juntas**

**Junta B**

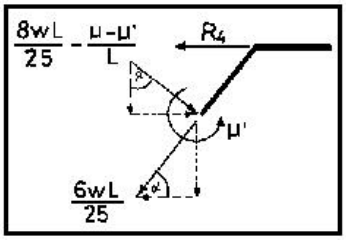



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL + \frac{\mu - \mu'}{L}\right) sen\alpha - \frac{6}{25} WL \cos\alpha - R_1 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL + \frac{\mu - \mu'}{L}\right) \cos\alpha + \frac{6}{25} WL \, sen\alpha + R_2 = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 + \mu = 0$$

**Junta C**



$$\sum F_X = 0 \Rightarrow \left(\frac{8}{25}WL - \frac{\mu - \mu'}{L}\right) sen\alpha - \frac{6}{25}WL\cos\alpha - R_4 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow \left(\frac{8}{25}WL - \frac{\mu - \mu'}{L}\right) \cos\alpha + \frac{6}{25}WL\, sen\alpha = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -\mu' = 0$$

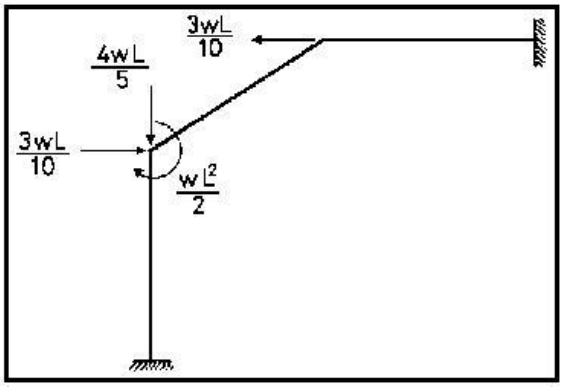
Al reemplazar $sen\,\alpha = 3/5,\ \cos\alpha = 4/5$ y resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$R_1 = \frac{3}{10}WL \qquad R_2 = -\frac{4}{5}WL$$

$$R_3 = -\frac{WL^2}{2} \qquad R_4 = -\frac{3}{10}WL$$

$$\mu = \frac{WL^2}{2} \qquad \mu' = 0$$

El problema complementario se indica a continuación




Problema complementario.

$$\boldsymbol{Q} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de las ordenadas de la elástica del elemento BC en términos de las coordenadas $q_i$ y de las funciones de forma $\phi$ es necesario encontrar el desplazamiento vertical del nudo C, que se ha denominado $q_5$. El valor de $q_5$ se halla en cada uno de los diagramas de deformación elementales que se han dibujado (figuras 5.19.1 a 5.19.4) pero en estos diagramas en lugar de considerar deformación unitaria considerar la deformación de la coordenada para la cual se obtiene el diagrama elemental. Con esta consideración en la figura 5.19.1 se tendría que:

$$B'B'' = q_1\, sen\alpha = \frac{3}{5}q_1$$

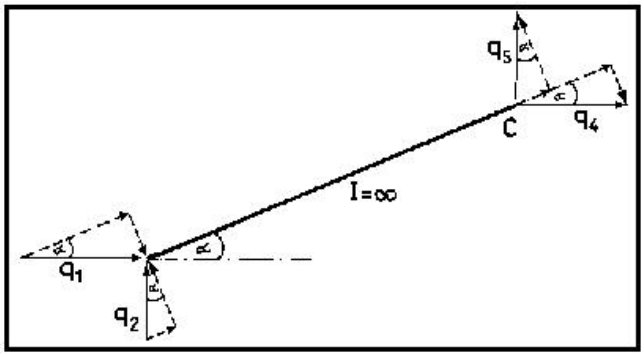
En la figura 5.19.1 se aprecia que B'B'' es igual a C'C''. Luego en el triángulo CC'C'' de la figura 5.19.1 se tiene que la componente de desplazamiento vertical CC' es negativo porque va hacia abajo y vale.

$$CC' = -\frac{\frac{3}{5}q_1}{\cos\alpha} = -\frac{\frac{3}{5}q_1}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}q_1$$

Por lo tanto la contribución de $q_1$ en el desplazamiento vertical del nudo C que se ha denominado $q_5$ es $-\frac{3}{4}q_1$ que se lo ha obtenido de la figura 5.19.1. Al proceder de igual manera en la figura 5.19.2 la contribución de $q_2$ en el desplazamiento vertical de C es igual a $q_2$. De la figura 5.19.3 se obtiene que el desplazamiento vertical de C sea $\frac{5}{4}L\,q_3$. Finalmente de la figura 5.19.4 se obtiene que el desplazamiento vertical de C sea $\frac{3}{4}q_4$. Al sumar estas contribuciones elementales se halla la componente de desplazamiento vertical del nudo C denominada $q_5$.

$$q_5 = -\frac{3}{4}q_1 + q_2 + \frac{5}{4}L\,q_3 + \frac{3}{4}q_4$$

Ahora se debe calcular las coordenadas del elemento $u_1, u_2, v_1$ y $\theta_1$ para encontrar las ordenadas de la elástica de BC.




$$u_1 = q_1\cos\alpha + q_2\ sen\,\alpha = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_2$$

$$v_1 = q_2\cos\alpha - q_1\ sen\,\alpha = \frac{4}{5}q_2 - \frac{3}{5}q_1$$

$$u_2 = q_4\cos\alpha + q_5\ sen\alpha = \frac{4}{5}q_4 + \frac{3}{5}\left(-\frac{3}{4}q_1 + q_2 + \frac{5}{4}L\,q_3 + \frac{3}{4}q_4\right)$$

$$u_2 = -\frac{9}{20}q_1 + \frac{3}{5}q_2 + \frac{3}{4}L\,q_3 + \frac{5}{4}q_4$$

Por ser el elemento transversalmente rígido las ordenadas axial y transversal de la elástica son:

$$u(x) = u_1\,\phi_1(x) + u_2\phi_2(x)$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1\,X$$

Reemplazando valores:

$$u(x) = \left(\frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_2\right)\left(1 - \frac{X}{L}\right) + \left(-\frac{9}{20}q_1 + \frac{3}{5}q_2 + \frac{3}{4}L\,q_3 + \frac{5}{4}q_4\right)\frac{X}{L}$$

$$u(x) = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_2 - \frac{5}{4}q_1\frac{X}{L} + \frac{3}{L}X\,q_3 + \frac{5}{4}\frac{X}{L}q_4$$

$$v(x) = \left(\frac{4}{5}q_2 - \frac{3}{5}q_1\right) + q_3\,X$$

Finalmente para dibujar el estado de desplazamiento $q_2^* = 1$ y las demás coordenadas nulas se debe reemplazar la matriz $\boldsymbol{T}$ en:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix}$$

Al desarrollar el producto matricial $\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$ e igualar al vector $\boldsymbol{q}$ se tiene.

$$q_1 = q_1^*$$
$$q_2 = q_1^* + q_2^*$$
$$q_3 = q_2^* + 2\,q_3^*$$
$$q_4 = q_2^* + q_4^*$$

Si remplazamos $q_2^* = 1$ y las demás coordenadas nulas se encuentra:

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = 1 \qquad q_3 = 1 \qquad q_4 = 1$$

Por consiguiente el diagrama elemental buscado es:

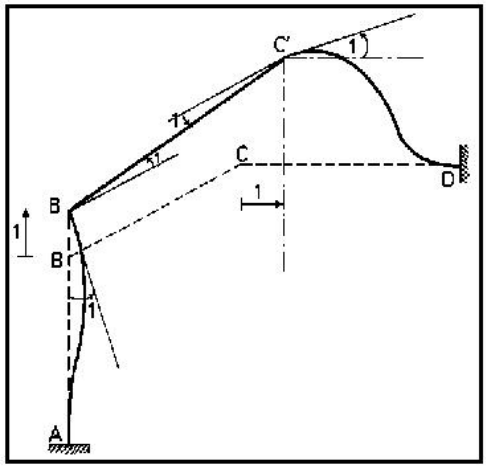



**Figura 5.19.5** Deformada elemental $q_2^*$

- **EJEMPLO 9**

Resolver el ejemplo 8 considerando el sistema de coordenadas indicado en la figura 5.20.

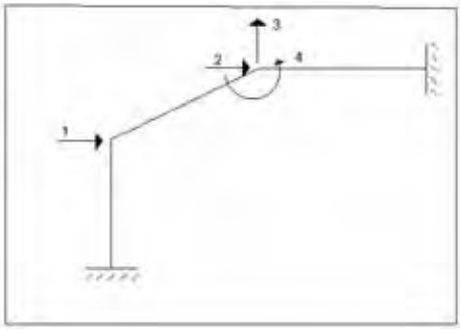



**Figura 5.20** Nuevo sistema de coordenadas $Q - q$

❖ **Cálculo de $Q$ por trabajos virtuales.**

▪ **Cálculo de $Q_1$**

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

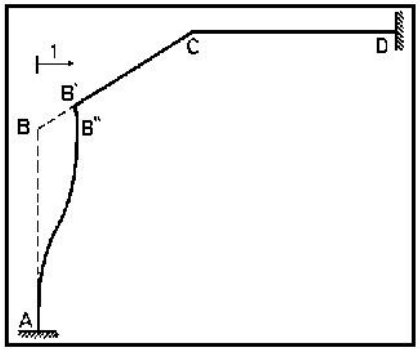
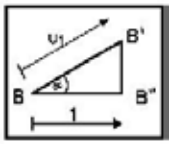



**Figura 5.20.1** Deformada elemental $\delta q_1$




En triángulo BB'B'' se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{1}{u_1} \qquad u_1 = \frac{5}{4}$$

$$Q_1 = \int_0^L W_X \; u(x)\, dx + \int_0^L W_Y \; v(x)\, dx$$

$$u(x) = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{X}{L}\right) \qquad v(x) = 0$$

$$Q_1 = \int_0^L -\frac{12}{25} W * \frac{5}{4}\left(1 - \frac{X}{L}\right) dx = -\frac{3}{5} W \left| X - \frac{X^2}{2L} \right|_0^L = -\frac{3}{5} W * \frac{L}{2} = -\frac{3}{10} WL$$

- **Cálculo de** $Q_2$

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$

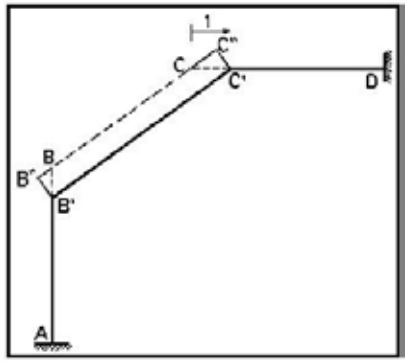
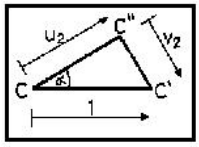


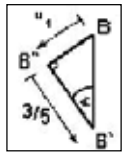

**Figura 5.20.2** Deformada elemental $\delta q_2$




Triángulo CC'C''

$$u_2 = \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad v_2 = -sen\alpha = -\frac{3}{5}$$

C''C' es igual a B''B' porque el elemento BC es $I = \infty$




Triángulo BB'B''

$$tg\,\alpha = \frac{u_1}{\frac{3}{5}} \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = \frac{9}{20}$$

Pero $u_1$ es negativo, luego:

$$u_1 = -\frac{9}{20} \qquad v_1 = -\frac{3}{5}$$

$$u(x) = -\frac{9}{20}\left(1 - \frac{X}{L}\right) + \frac{4}{5}\frac{X}{L} = \frac{5}{4}\frac{X}{L} - \frac{9}{20}$$

$$v(x) = -\frac{3}{5}$$

$$Q_2 = \int_0^L W_X\ u(x)\ dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\ dx = \int_0^L -\frac{12}{25} W \left( \frac{5X}{4L} - \frac{9}{20} \right) dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W \left( -\frac{3}{5} \right) dx$$

$$Q_2 = -\frac{12}{25} W \left| \frac{5X^2}{8L} - \frac{9X}{20} \right|_0^L + \frac{48}{125} W |X|_0^L = -\frac{12WL}{25} \left( \frac{25-18}{40} \right) + \frac{48WL}{125}$$

$$Q_2 = -\frac{21WL}{250} + \frac{48WL}{125} = WL \left( \frac{-21+96}{250} \right) = \frac{75}{250} WL = \frac{3}{10} WL$$

- **Cálculo de** $Q_3$

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$

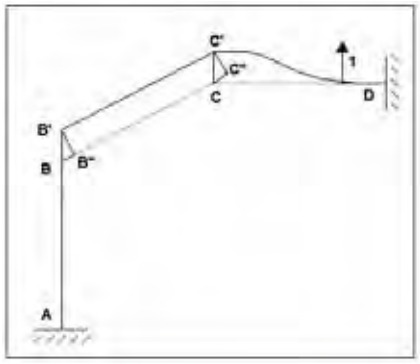
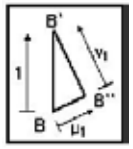



**Figura 5.20.3** Deformada elemental $\delta q_3$

En la figura 5.20.3 se observa que el triángulo BB'B'' es igual al triángulo CC'C''. En consecuencia $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$. Nótese que $\theta_1 = \theta_2 = 0$




$$u_1 = sen\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad u_2 = \frac{3}{5}$$

$$v_1 = \cos \alpha = \frac{4}{5} \qquad v_2 = \frac{4}{5}$$

$$u(x) = \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{X}{L} \right) + \frac{3}{5} \frac{X}{L} = \frac{3}{5}$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1\ X = \frac{4}{5}$$

$$Q_3 = \int_0^L W_X\ u(x)\ dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\ dx = \int_0^L -\frac{12}{25} W \frac{3}{5}\ dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W \left( \frac{4}{5} \right) dx$$

$$Q_3 = -\frac{12}{25} W \frac{3}{5} |X|_0^L - \frac{16}{25} W \frac{4}{5} |X|_0^L = -\frac{36}{125} WL - \frac{64}{125} WL = -\frac{4}{5} WL$$

- **Cálculo de** $Q_4$

$$\delta q_4 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 4$$

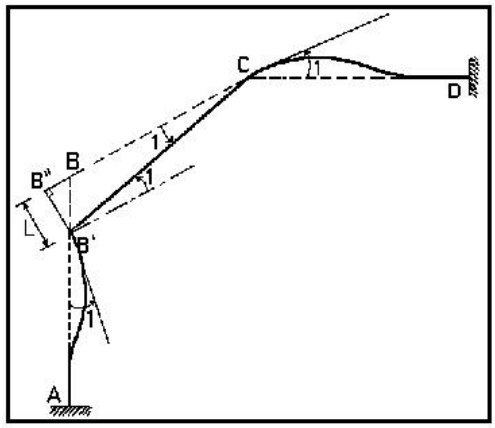
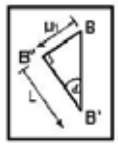



**Figura 5.20.4** Deformada elemental $\delta q_4$




$$u_1 = -tg\alpha\, L = -\frac{3}{4}L \qquad v_1 = -L \qquad \theta_1 = 1$$

$$u(x) = -\frac{3}{4}L\left(1-\frac{X}{L}\right) \qquad v(x) = -L + X$$

$$Q_4 = \int_0^L W_X\, u(x)\, dx + \int_0^L W_Y\, v(x)\, dx = \int_0^L -\frac{12}{25}W\left[-\frac{3}{4}L\left(1-\frac{X}{L}\right)\right] dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W\left(-L+X\right) dx$$

$$Q_4 = \frac{36}{100}WL\left|X - \frac{X^2}{2L}\right|_0^L - \frac{16}{25}W\left|-LX + \frac{X^2}{2}\right|_0^L = \frac{36}{200}WL^2 + \frac{16}{50}WL^2 = \frac{WL^2}{2}$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \\ 5L \end{bmatrix}$$

❖ **Cálculo de** $\boldsymbol{Q}$ **por problema primario y complementario**

- **Problema Primario**

En la figura 5.20.5 se presenta el Problema Primario que debe cumplir la condición de que el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$. Para ello se necesitan fuerzas de fijación $R$ que son de sentido contrario al de las coordenadas que se quiere que sean nulas.

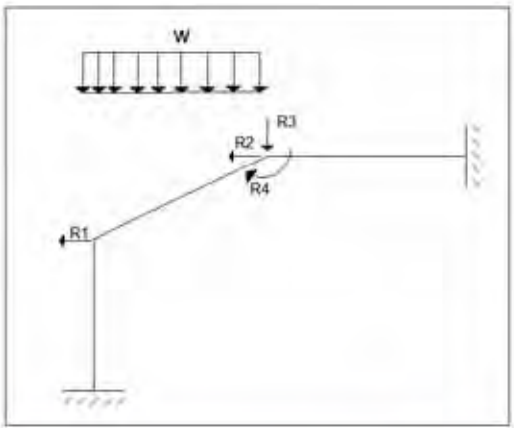
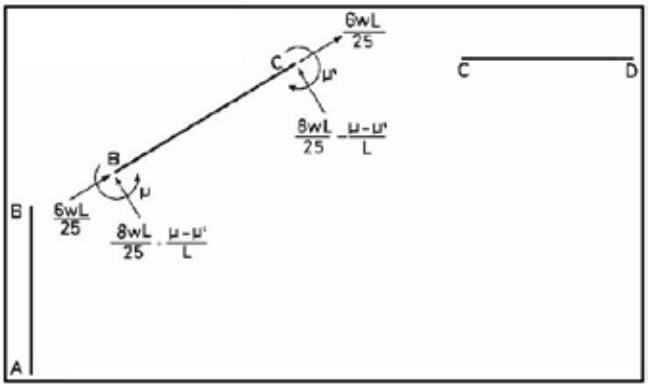


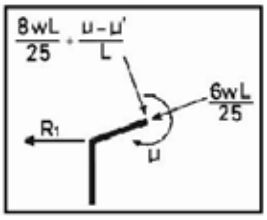

**Figura 5.20.5** Problema Primario **q=0**

- **Equilibrio de elementos**




- **Equilibrio de juntas**

**Junta B**

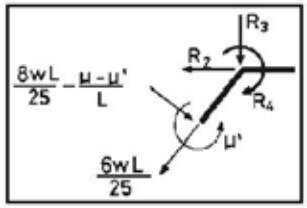



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25}WL + \frac{\mu - \mu'}{L}\right) sen\alpha - \frac{6}{25}WL\cos\alpha - R_1 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25}WL + \frac{\mu - \mu'}{L}\right) \cos\alpha + \frac{6}{25}WL\, sen\alpha = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0$$

**Junta C**




$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25}WL - \frac{\mu - \mu'}{L}\right) sen\alpha - \frac{6}{25}WL\cos\alpha - R_2 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25}WL - \frac{\mu - \mu'}{L}\right)\cos\alpha + \frac{6}{25}WL\, sen\alpha + R_3 = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_4 - \mu' = 0$$

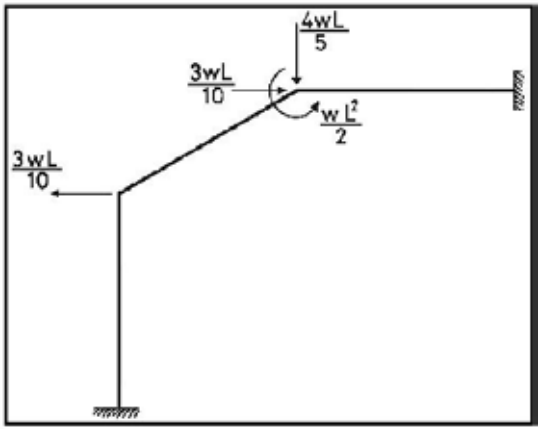
De la solución de las ecuaciones se obtiene:

$$R_1 = -\frac{3}{10}WL \qquad R_2 = \frac{3}{10}WL$$

$$R_3 = -\frac{4}{5}WL \qquad R_4 = \frac{WL^2}{2}$$

$$\mu = 0 \qquad \mu' = \frac{WL^2}{2}$$

- **Problema Complementario**



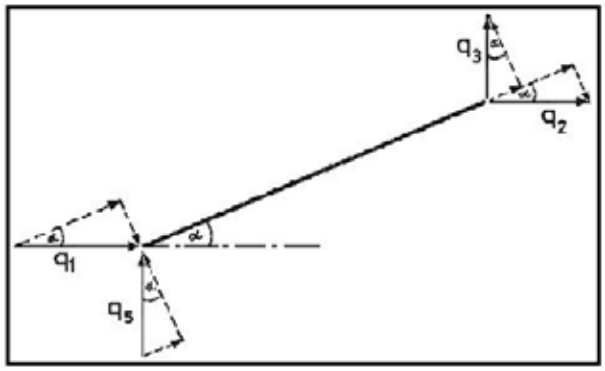

Problema Complementario

$$\boldsymbol{Q} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \\ 5L \end{bmatrix}$$

Para encontrar las expresiones de la elástica $u(x)$ y $v(x)$ del elemento BC. En este caso se necesita conocer el desplazamiento vertical del nudo B. A este desplazamiento se va a denominar $q_5$ El

cálculo se realiza aplicando el principio de superposición en cada una de las deformadas elementales, es así como de la figura 5.20.1 se obtiene que el corrimiento vertical de B vale $\frac{3}{4}q_1$ . De la figura 5.20.2 se tiene que el desplazamiento vertical de B es negativo y vale $-\frac{3}{4}q_2$. En la figura 5.20.3 se aprecia que este desplazamiento es igual a $q_3$ . Finalmente en la figura 5.20.4 se halla que el desplazamiento vale $-\frac{5}{4}L\,q_4$. Por lo tanto:

$$q_5 = \frac{3}{4}q_1 - \frac{3}{4}q_2 + q_3 - \frac{5}{4}L\,q_4$$




$$u_1 = q_1\cos\alpha + q_5 sen\alpha = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_5$$

$$u_1 = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}\left[\frac{3}{4}q_1 - \frac{3}{4}q_2 + q_3 - \frac{5}{4}L\,q_4\right] = \frac{4}{5}q_1 + \frac{9}{20}q_1 - \frac{9}{20}q_2 + \frac{3}{5}q_3 - \frac{3}{4}L\,q_4$$

$$u_1 = \frac{5}{4}q_1 - \frac{9}{20}q_2 + \frac{3}{5}q_3 - \frac{3}{4}L\,q_4$$

$$v_1 = q_5\cos\alpha - q_1 sen\alpha = \frac{4}{5}q_5 - \frac{3}{5}q_1 = \frac{4}{5}\left[\frac{3}{4}q_1 - \frac{3}{4}q_2 + q_3 - \frac{5}{4}L\,q_4\right] - \frac{3}{5}q_1$$

$$v_1 = -\frac{3}{5}q_2 + \frac{4}{5}q_3 - L\,q_4$$

$$u_2 = q_2\cos\alpha + q_3 sen\alpha = \frac{4}{5}q_2 + \frac{3}{5}q_3$$

Las expresiones de la elástica resultan:

$$u(x) = u_1\phi_1(x) + u_2\phi_4(x) = u_1\left(1 - \frac{X}{L}\right) + u_2\,\frac{X}{L}$$

$$u(x) = \left(\frac{5}{4}q_1 - \frac{9}{20}q_2 + \frac{3}{5}q_3 - \frac{3}{4}L\,q_4\right)\left(1 - \frac{X}{L}\right) + \left(\frac{4}{5}q_2 + \frac{3}{5}q_3\right)\frac{X}{L}$$

$$u(x) = \frac{5}{4}q_1 - \frac{9}{20}q_2 + \frac{3}{5}q_3 - \frac{3}{4}L\,q_4 - \frac{5X}{4L}q_1 + \frac{9X}{20L}q_2 - \frac{3X}{5L}q_3 + \frac{3X}{4}\,q_4 + \frac{4X}{5L}q_2 + \frac{3X}{5L}q_3$$

$$u(x) = \frac{5}{4}q_1 - \frac{9}{20}q_2 + \frac{3}{5}q_3 - \frac{3}{4}L\,q_4 - \frac{5X}{4L}q_1 + \frac{5X}{4L}q_2 + \frac{3X}{4}\,q_4$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1\,X = -\frac{3}{5}q_2 + \frac{4}{5}q_3 - L\,q_4 + q_4 X$$

Ahora se tiene:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix}$$

Al desarrollar el producto matricial $\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$ e igualar al vector $\boldsymbol{q}$ se tiene.

$$q_1 = q_1^*$$
$$q_2 = q_1^* + q_2^*$$
$$q_3 = q_2^* + 2\,q_3^*$$
$$q_4 = q_2^* + q_4^*$$

Si remplazamos $q_2^* = 1$ y las demás coordenadas nulas se encuentra:

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = 1 \qquad q_3 = 1 \qquad q_4 = 1$$

Son los mismos valores del ejercicio anterior pero la deformada elemental buscada es diferente ya que las coordenadas son diferentes. Esta deformada se presenta en la figura 5.20.6

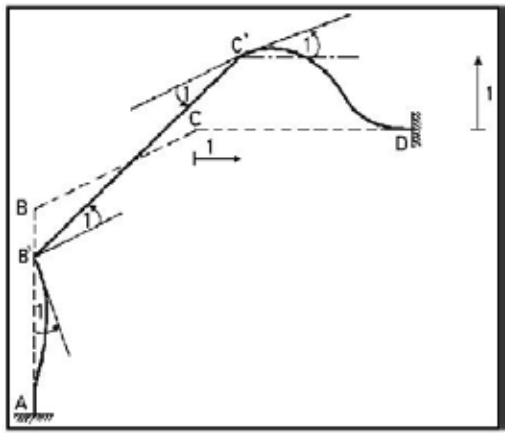



**Figura 5.20.6** Deformada elemental $q_1^*$

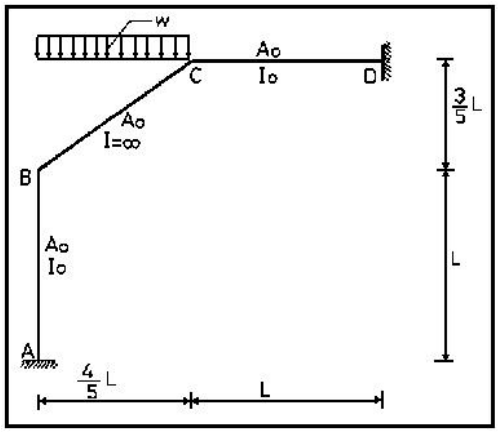
- **EJEMPLO 10**

En los Ejemplos 8 y 9 se resolvió la misma estructura con diferentes sistemas de coordenadas, los mismos que se indican en la parte inferior de la figura 5.21; al de la izquierda se denomina $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ corresponde al Ejemplo 8, cuyo vector $\boldsymbol{Q}$ se indica a continuación. En el ejemplo 9 fue resuelto con el sistema de coordenadas de la derecha, a este sistema se denomina $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$

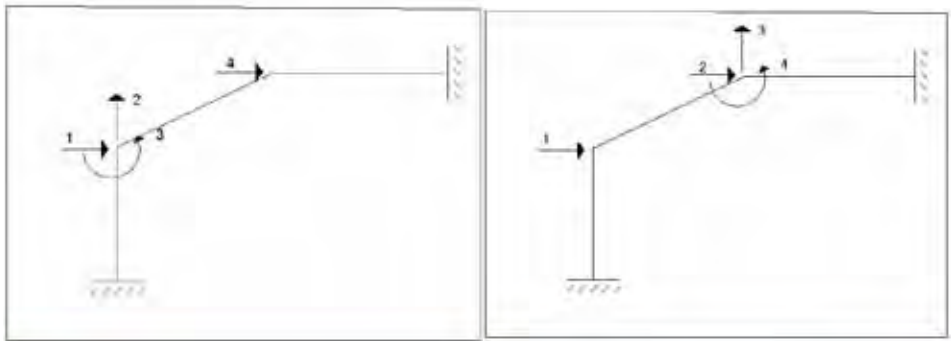
$$\boldsymbol{Q} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix}$$

Con esta nueva notación para los sistemas de coordenadas generalizadas se desea encontrar:

1. La matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$ tal que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$.
2. Encontrar el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}^*$. Empleando la siguiente ecuación $\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{T}^t\,\boldsymbol{Q}$.




**Estructura de Ejemplos 8 a 10**



Sistema $Q-q$. Sistema $Q^*-q^*$

**Figura 5.21** Estructura con dos sistemas de coordenadas generalizadas.

- **SOLUCIÓN**

En base a las deformadas elementales indicadas en las figuras 5.20.1 a 5.20.4 se obtienen los elementos de la matriz $T$. Con la figura 5.20.1 se obtienen los elementos de la primera columna de $T$ con la figura 5.20.2 la segunda columna de $T$, etc. La matriz que se obtiene es:

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{5}{4}L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas generalizadas $Q^*$ resulta:

$$Q^*=\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4}L & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \\ 5L \end{bmatrix}$$

El vector $Q^*$ como tenía que ser, es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 9.

- **EJEMPLO 11**

En la figura 5.22 se presenta, a la izquierda un pórtico cuya viga es infinitamente rígida, al centro se indica un posible sistema de coordenadas $Q-q$ y a la derecha otro sistema $Q^*-q^*$. Se desea hallar la matriz de transformación de coordenadas $T$, tal que $q=T\,q^*$.

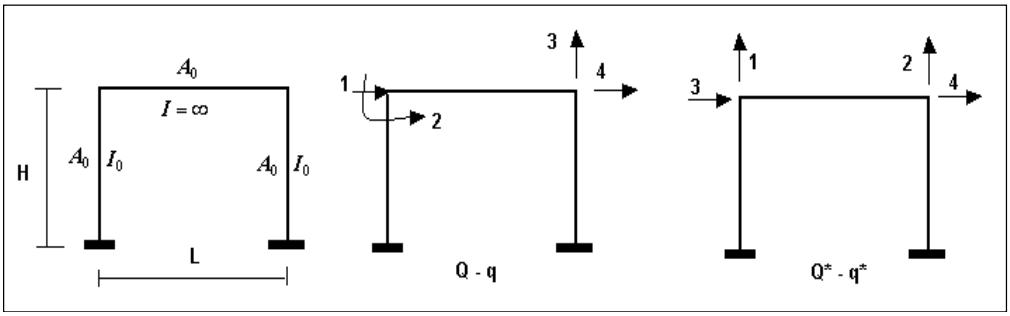
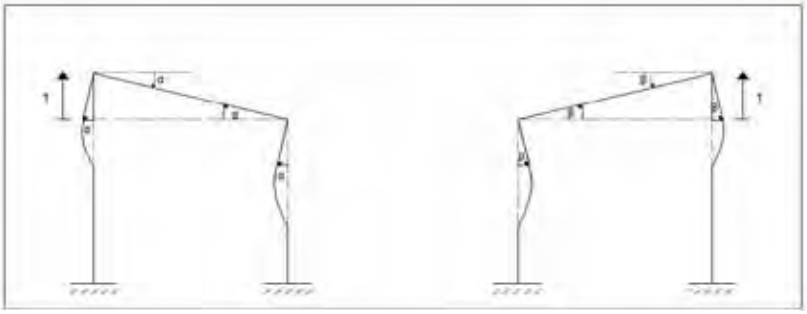
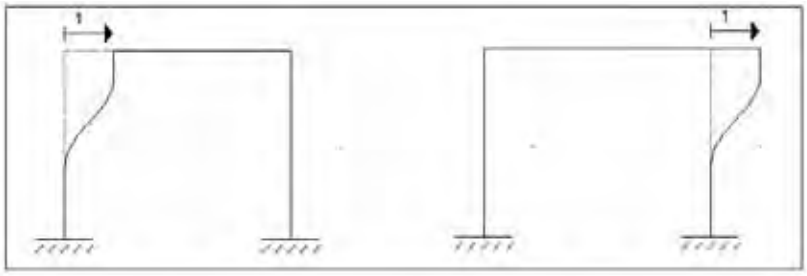



**Figura 5.22** Estructura de ejemplo 11 y dos sistemas de coordenadas generalizadas.

- **SOLUCIÓN**



Deformada elemental $q_1^* = 1$ Deformada elemental $q_2^* = 1$



Deformada elemental $q_3^* = 1$ Deformada elemental $q_4^* = 1$

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/L & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

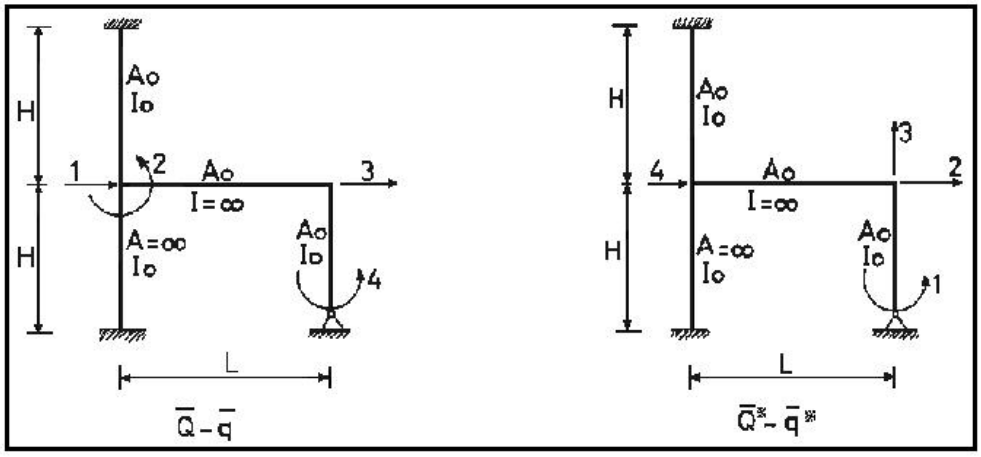
## 5.7 EJERCICIOS PROPUESTO

Dados los sistemas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$ en los ejercicios 1, 2 y 3. Se pide calcular:

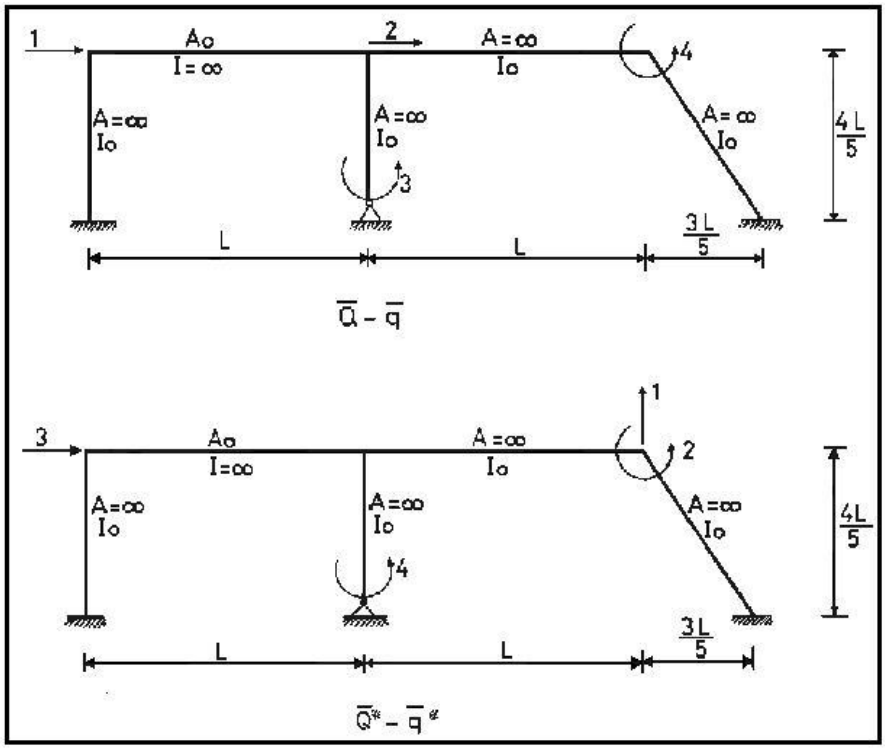
i) La matriz $\boldsymbol{T}$, tal que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$.

ii) La matriz $\boldsymbol{T}_1$, tal que $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}_1\,\boldsymbol{Q}^*$.

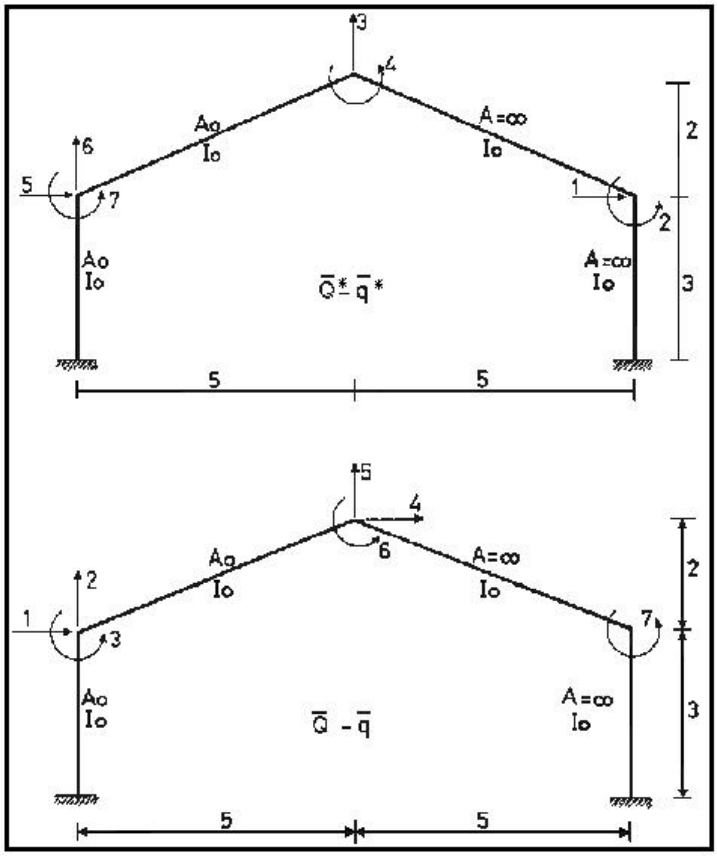
iii) Comprobar que $\boldsymbol{T}^t = \boldsymbol{T}_1^{-1}$




**Ejercicio N.- 1**



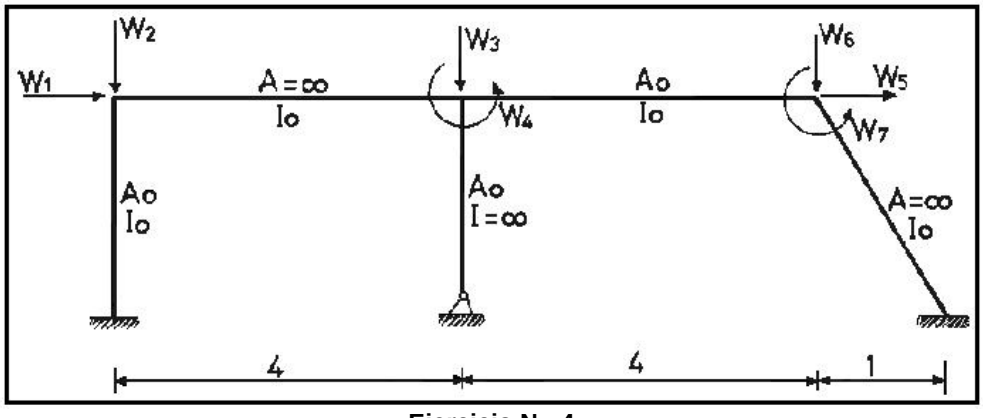

**Ejercicio N.- 2**




**Ejercicio N.- 3**

**Ejercicio N.- 4**

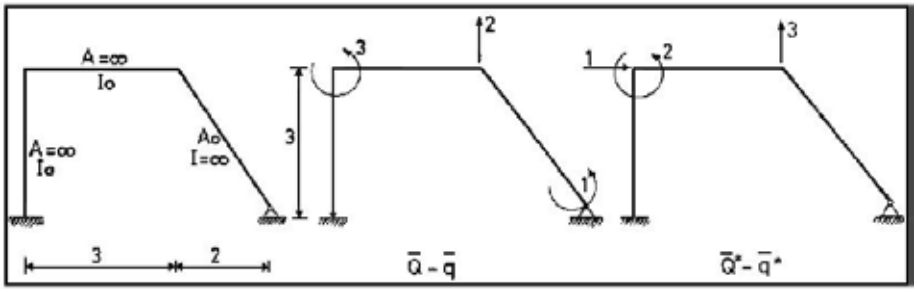
Si sobre la estructura de la figura 5.17 actúa el sistema de cargas presentado a continuación. Se pide calcular los vectores de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{Q}^*$ para los sistemas de coordenadas presentados en las figura 5.17. Comprobar el resultado obtenido utilizando la matriz $\boldsymbol{T}$ del ejemplo 5, sí $\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{T}^t \boldsymbol{Q}$.




**Ejercicio N.- 4**

**Ejercicio N.- 5**

Para el pórtico plano de la figura 5.2 se desea calcular la relación inversa que existe entre las coordenadas generalizadas. Por consiguiente ahora se tienen los siguientes sistemas de coordenadas.

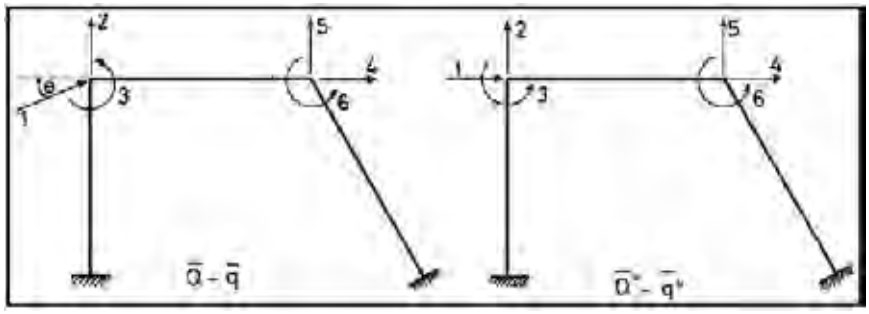



**Ejercicio N.- 5**

Calcular la matriz $\boldsymbol{T}$ tal que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^{*}$.

**Ejercicio N.- 6**

Para la siguiente estructura compuesta por elementos totalmente flexibles se dan dos sistemas de coordenadas generalizados, el primero difiere del segundo en la coordenada uno, está inclinado un ángulo $\theta$ con respecto a la horizontal. Se pide calcular la matriz $\boldsymbol{T}$ tal que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^{*}$.

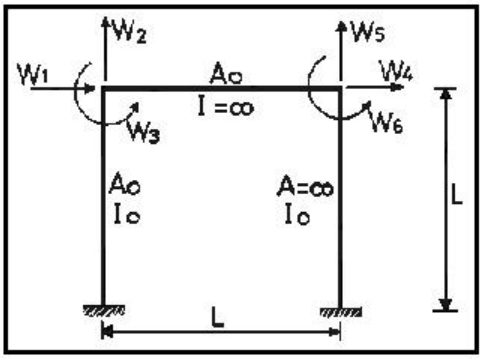



**Ejercicio N.- 6**

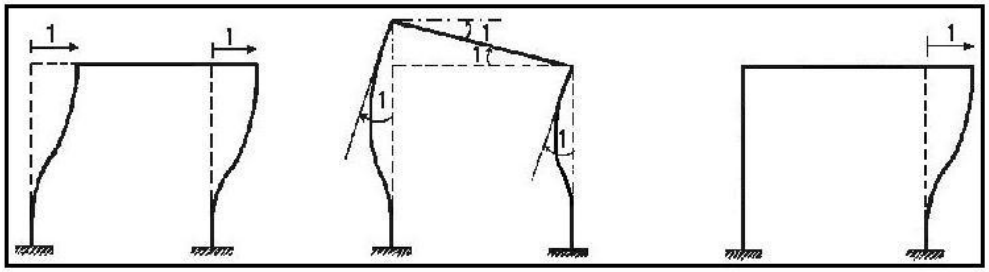
**Ejercicio N.- 7**

Las siguientes figuras muestran una estructura y las fuerzas externas que actúan, así como los diagramas de deformación elementales, para un determinado sistema de coordenadas. Calcular:

i) El vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$.
ii) Dibujar los diagramas de cargas elementales.
iii) Interpretar geométricamente cada una de las componentes de $\boldsymbol{q}$.




Estado de carga




Deformada elemental $q_1$ Deformada elemental $q_2$ Deformada elemental $q_3$

**Ejercicio N.- 8**

Elaborar un programa de computación para obtener el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ en el que se da como dato el vector de empotramiento perfecto en coordenadas locales para los elementos cargados.

**Ejercicio N.- 9**

Elaborar un programa de computación para encontrar el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ para un pórtico plano con elementos ortogonales, si sobre los elementos horizontales actúan cargas triangulares y trapezoidales. El programa deberá calcular las acciones de empotramiento perfecto.

*CAPITULO 6*

# RELACIÓN ENTRE CARGAS Y DESPLAZAMIENTOS GENERALIZADOS. ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES

## RESUMEN

Los objetivos que se persiguen en el presente capítulo son los siguientes:

1) Presentar conceptos básicos sobre la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ y de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ de una estructura. No interesa por ahora saber cómo se calcula sino más bien el significado físico de sus elementos.

2) Presentar algunos modelos numéricos para el estudio de las deformaciones de los elementos lineales de un marco plano.

3) Realizar ejercicios que refuercen lo estudiado en éste capítulo, como en los capítulos anteriores, en lo referente a:

   - Definir las coordenadas generalizadas en marcos planos con elementos axial y transversalmente rígidos.
   - Presentar el cálculo de matrices de transformación de coordenadas en elementos que se usarán en los capítulos posteriores.

   Todo esto en función de la teoría que se indica en éste capítulo.

## 6. 1 MATRIZ DE RIGIDEZ

### 6.1.1 Relación entre $Q - q$

Dado un pórtico cualquiera como por ejemplo el de la figura 6.1 en el cual se ha definido un sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q - q}$. Se va a establecer una relación entre el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ y el vector de desplazamientos generalizados $\boldsymbol{q}$.

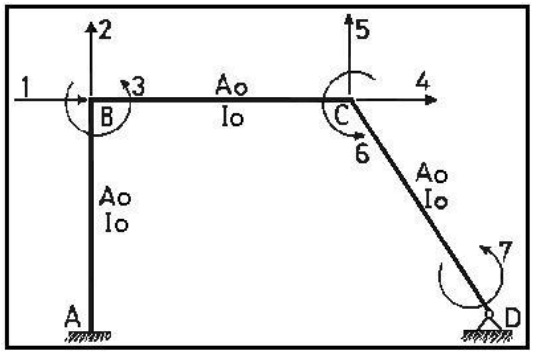



**Figura 6.1** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$

La relación entre $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{q}$ se consigue por medio de la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q} \tag{6.1}$$

Se ha establecido una relación lineal entre $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{q}$. Esto implica lo siguiente:

- Que el material cumple con la ley de Hooke en sus tres dimensiones.
- Que las deformaciones son pequeñas, entonces se podrá aplicar la teoría de los desplazamientos infinitésimos.
- No existe interacción entre los efectos axiales y de flexión en los elementos. Es decir se estudia la teoría de primer orden.

Cuando se cumple con los tres requisitos indicados se dice también que la estructura es linealmente elástica o que trabaja en el rango elástico y se puede aplicar el principio de superposición.

En la ecuación (6.1) se tiene que la matriz de rigidez es de orden (n x n), donde n es el número de grados de libertad de la estructura. Si $\boldsymbol{Q}$ es un Vector de Cargas, de n filas y $\boldsymbol{q}$ es otro Vector de Coordenadas, de n elementos la ecuación (6.1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_i \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdots & \cdots & K_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

De donde un término cualquiera $Q_i$ es igual a:

$$Q_i = K_{i1}\,q_1 + K_{i2}\,q_2 + \cdots \qquad \cdots + K_{in}\,q_n$$

Al examinar esta última ecuación se observa que $K_{i1}$, por ejemplo, es el valor de la carga $Q_i$ correspondiente al estado de desplazamiento $q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$. Es decir $K_{i1}$ es el valor de $Q_i$ en la deformada elemental $q_1$. La expresión anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\ q_j$$

En general se tendrá que un elemento cualquiera $K_{ij}$ es el valor de la carga generalizada $Q_i$ correspondiente a la deformada elemental $q_j$.

Para el pórtico plano de la figura 6.1 se tiene que la matriz de rigidez $K$ es de (7 x 7). La notación de los grados de libertad de la figura 6.1 es la que se ha venido utilizando en el libro y se seguirá utilizando sin embargo es necesario que el lector conozca que se puede numerar los grados de libertad considerando como grado de libertad a los apoyos aunque sea este empotramiento y en este caso se tendrá la notación indicada en la figura 6.2. Vale la pena indicar que con éstos grados de libertad se obtiene en forma directa las reacciones y momentos del empotramiento.

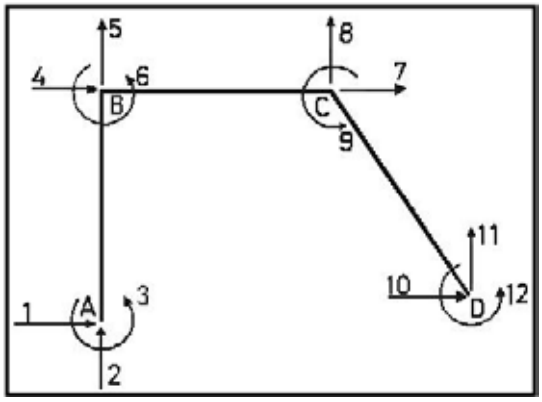



**Figura 6.2** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ orientado al cálculo de reacciones en apoyos.

En estas condiciones la matriz de rigidez es de (12 x 12) y es singular, por consiguiente su determinante es igual a cero. El rango de la matriz $K$ es 9. Esto significa que en la relación (6.1) no se consiguen 12 ecuaciones independientes sino únicamente nueve ya que tres son dependientes y estas son:

$$1^{ra}\ Ec + 4^{ta}\ Ec + 7^{ma}\ Ec + 10^{ma}\ Ec = 0$$
$$2^{da}\ Ec + 5^{ta}\ Ec + 8^{va}\ Ec + 11^{va}\ Ec = 0$$

Se deja al lector que indique cual es la tercera ecuación (Ec) dependiente. Estas se han obtenido haciendo equilibrio es decir:

$$\sum F_X = 0 \qquad \sum F_Y = 0 \qquad \sum M = 0$$

En resumen, el pórtico de la figura 6.2 si tiene matriz de rigidez ya que es posible construir las respectivas deformadas elementales y encontrar el sistema de cargas generalizadas correspondiente. Lo que no es posible obtener es que su determinante sea diferente de cero. Su determinante es cero.

Conviene utilizar el sistema de coordenadas de la figura 6.2 cuando se tienen desplazamientos en los apoyos adicionalmente del cálculo de las reacciones de los apoyos.

Por otra parte al estudiar la estructura indicada en la figura 6.3 constituida por elementos totalmente flexibles, con dos rodillos en los apoyos tiene los 10 grados de libertad presentados. En este caso la matriz de rigidez es de (10 x 10) pero el rango de la misma es 9. Esto se debe a que hay una ecuación dependiente.

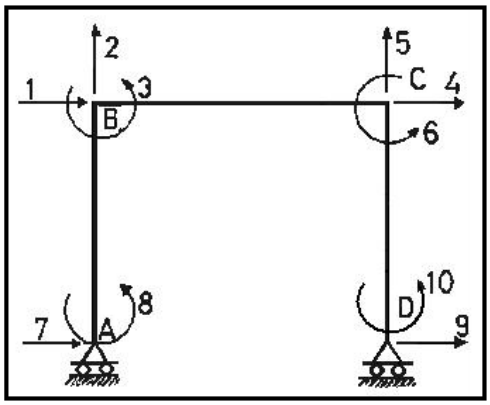



**Figura 6.3** Estructura Inestable y grados de libertad.

$$1^{ra}\ Ec + 4^{ta}\ Ec + 7^{ma}\ Ec + 9^{na}\ Ec = 0$$

Las estructuras de las figuras 6.2 y 6.3 son inestables.

### 6.1.2 Características de la matriz de rigidez

Las principales características de la matriz de rigidez en **estructuras estables**, son las siguientes:

1. El valor del determinante es diferente de cero y positivo por consiguiente $\boldsymbol{K}$ es regular.
2. Los términos de la diagonal son todos positivos.
3. La matriz es cuadrada.
4. $\boldsymbol{K}$ es simétrica con respecto a la diagonal.

Para demostrar esta última característica, se va a calcular la matriz de rigidez en la estructura de la figura 6.4.1, compuesta por elementos totalmente flexibles.

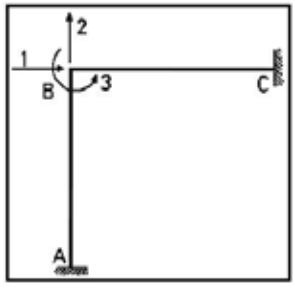



**Figura 6.4.1** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$

Para el presente ejemplo la matriz de rigidez tendrá la siguiente configuración:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

- Primera columna de la matriz de rigidez

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

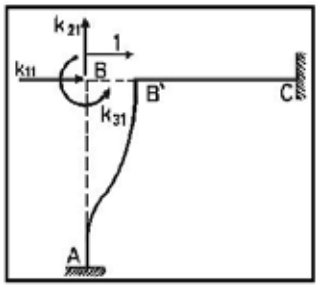



**Figura 6.4.2** Elementos de la primera columna de $\boldsymbol{K}$ . Sistema A.

Las fuerzas necesarias para producir la deformada de la figura 6.4.2 son $K_{11}$ fuerza horizontal en el nudo B, $K_{21}$ fuerza vertical en el nudo B y $K_{31}$ momento en el nudo B. Estas cargas se determinan utilizando la teoría de estructuras que se verá posteriormente.

- Segunda columna de la matriz de rigidez

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

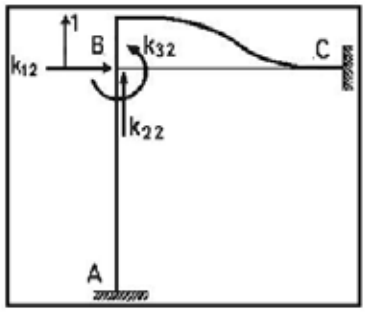



**Figura 6.4.3** Elementos de la segunda columna de $\boldsymbol{K}$ . Sistema B.

De igual forma $K_{12}, K_{22}\ y\ K_{32}$ son las cargas necesarias aplicadas en el nudo B para tener la deformada elemental $q_2$. Para obtener los elementos de la tercera columna de $\boldsymbol{K}$ se procede en forma similar en la deformada elemental $q_3$.

El problema que se tiene es demostrar que la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ es simétrica, para lo cual basta con demostrar que la fuerza $K_{12}$ es igual a la fuerza $K_{21}$.

Aplicando el teorema de E. Betti se tiene que el trabajo virtual de las fuerzas que actúan en el sistema A de la figura 6.4.2 sobre los desplazamientos del sistema B mostrado en la figura 6.4.3, $TV_{A-B}$. Es igual al trabajo virtual de las fuerzas que actúan en el sistema B sobre los desplazamientos virtuales del sistema A, a este trabajo virtual se denomina $TV_{B-A}$

$$TV_{A-B} = K_{11} * 0 + K_{21} * 1 + K_{31} * 0 = K_{21} * 1 = K_{21}$$
$$TV_{B-A} = K_{12} * 1 + K_{22} * 0 + K_{32} * 0 = K_{12} * 1 = K_{12}$$

Como se tiene que $TV_{A-B} = TV_{B-A}$ se concluye que $K_{12} = K_{21}$ que era lo que se quería demostrar.

Finalmente debe indicarse que la matriz de rigidez transforma los desplazamientos en cargas y para que esto exista los desplazamientos deben ser independientes.

## 6.2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD

### 6.2.1 Relación entre $q - Q$

Ahora se desea establecer una expresión lineal para las coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ que contiene desplazamientos y giros en función de las cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ que contiene momentos y fuerzas, mediante la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$, la misma que será de orden ( n x n ) siendo n el número de grados de libertad de la estructura. Dicha relación es:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{Q} \tag{6.2}$$

Nótese nuevamente que se está considerando que el modelo es lineal es decir es válido para el rango elástico. Al desarrollar la ecuación (6.2) se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & \cdots & f_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_i \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

De donde un término cualquiera $q_i$ es igual a:

$$q_i = f_{i1}\ Q_1 + f_{i2}\ Q_2 + \cdots \quad \cdots + f_{in}\ Q_n$$

Expresando en forma de sumatoria se tiene:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\ Q_j$$

Por consiguiente $f_{ij}$ es el valor de la coordenada $q_i$ que corresponde al estado de cargas $\boldsymbol{Q_j = 1}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{Q_i = 0}$ $\boldsymbol{i \neq j}$. La primera columna de la matriz de flexibilidad será el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$ para el estado de cargas $Q_1 = 1$ y las demás nulas. Para la segunda columna de $\boldsymbol{F}$ habrá que encontrar el vector $\boldsymbol{q}$ para el estado de cargas $Q_2 = 1$ y las restantes nulas, etc. De tal manera que los elementos de la matriz de flexibilidad tienen unidades de desplazamientos y giros.

La matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ existe únicamente en estructuras estables. Por lo tanto no existe matriz de flexibilidad para las estructuras indicadas en las figuras 6.2 y 6.3.

Al aplicar el teorema de los efectos recíprocos de Maxwel que dice: *En una estructura linealmente elástica, el desplazamiento i debido a una fuerza unitaria j es igual al desplazamiento correspondiente j debido a una fuerza unitaria i,* o, $q_{ij} = q_{ji}$. Al desplazamiento i se le llama grado de libertad i. Mediante este teorema se puede demostrar que la matriz de flexibilidad es simétrica.

Por otra parte todos los términos de la diagonal son positivos. Finalmente se indica que si $\boldsymbol{q = F\ Q}$ es indispensable que el vector $\boldsymbol{Q}$ sea independiente.

### 6.2.2 Relación entre F y K

En este apartado se estudia la relación que existe entre la matriz de flexibilidad y la matriz de rigidez de una estructura. Para el efecto se conoce que:

$$\boldsymbol{Q = K\ q}$$
$$\boldsymbol{q = F\ Q}$$

Al reemplazar ésta última ecuación se tiene:

$$\boldsymbol{Q = K\ F\ Q}$$

Al utilizar la matriz unitaria $\boldsymbol{I}$ se tiene que:

$$\boldsymbol{Q = I\ Q}$$

De donde:

$$\boldsymbol{I\ Q = K\ F\ Q}$$

Como ésta igualdad se cumple para cualquier valor de $\boldsymbol{Q}$. Se concluye que:

$$\boldsymbol{K\ F = I} \qquad \boldsymbol{F\ K = I}$$

En consecuencia:

$$\boldsymbol{K = F^{-1}} \qquad \boldsymbol{F = K^{-1}}$$

**La matriz de rigidez es la inversa de la matriz de flexibilidad o viceversa**. Se hace hincapié en que la matriz de rigidez siempre existe en cambio la matriz de flexibilidad existe únicamente en estructuras estables. Por lo tanto habrá ocasiones en que $\boldsymbol{K^{-1}}$ no existe.

- **EJEMPLO 1**

A la izquierda de la figura 6.5 se tiene un pórtico plano compuesto por elementos flexibles y a la derecha de la mencionada figura se presenta el correspondiente sistema de coordenadas generalizadas. Se pide presentar el significado físico de los elementos de la primera columna de las matrices de rigidez y de flexibilidad.

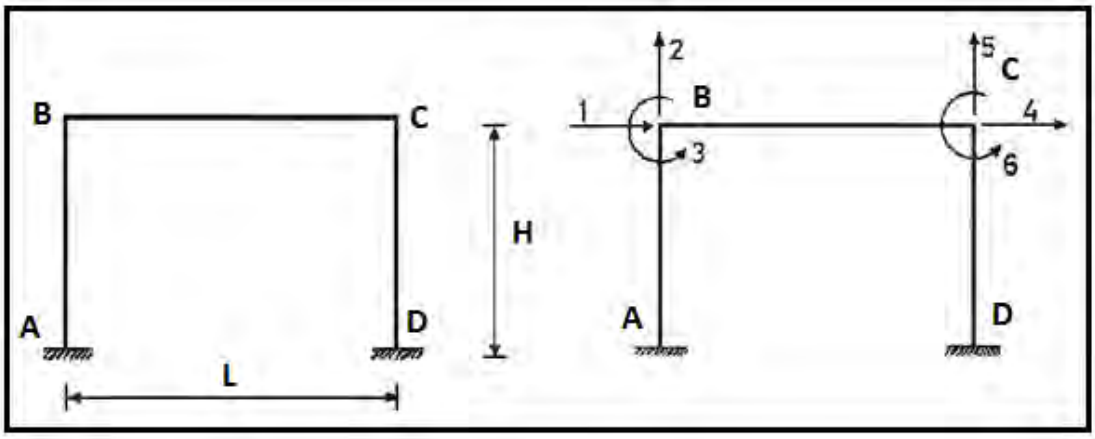



**Figura 6.5** Pórtico plano con elementos totalmente flexibles y sistema de coordenadas.

- **SOLUCIÓN**

Los elementos de las matrices de rigidez y flexibilidad son:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la primera columna de $\boldsymbol{K}$ son las fuerzas y momentos que hay que aplicar a la estructura para que únicamente el nudo B se desplace horizontalmente la unidad, como se indica en la figura 6.6

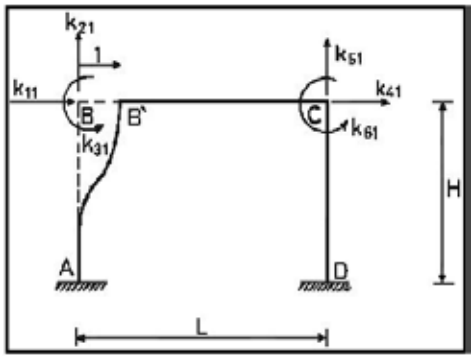



**Figura 6.6** Elementos de la primera columna de $\boldsymbol{K}$ .

Por otro lado al aplicar una fuerza horizontal en el nudo B, como se muestra en la figura 6.7 los desplazamientos y giros que se generan son los elementos de la primera columna de $\boldsymbol{F}$ .

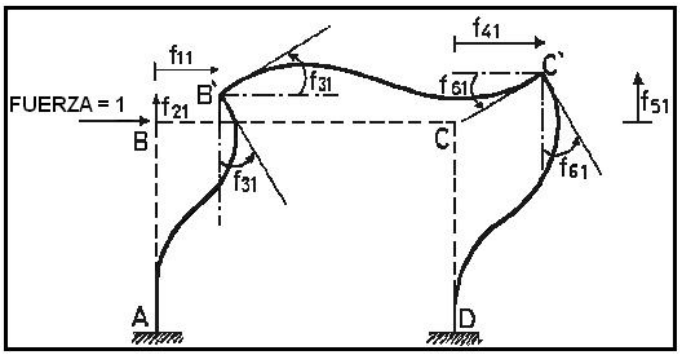



**Figura 6.7** Elementos de la primera columna de $\boldsymbol{F}$ .

En las figuras 6.6 y 6.7 las cargas y corrimientos se han dibujado con sentido positivo, puede ser que en el cálculo alguno de ellos sea negativo o nulo.

Es importante destacar que los elementos de la matriz de rigidez tienen unidades de fuerza o momento y los elementos de la matriz de flexibilidad de desplazamiento o giro.

## 6.3 DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS

En capítulos anteriores se había indicado que un elemento lineal de un pórtico plano tiene tres desplazamientos como cuerpo rígido y tres deformaciones del elemento. Se procede a estudiar y recordar estas definiciones para lo cual se analiza una deformada general del pórtico de la figura 6.8

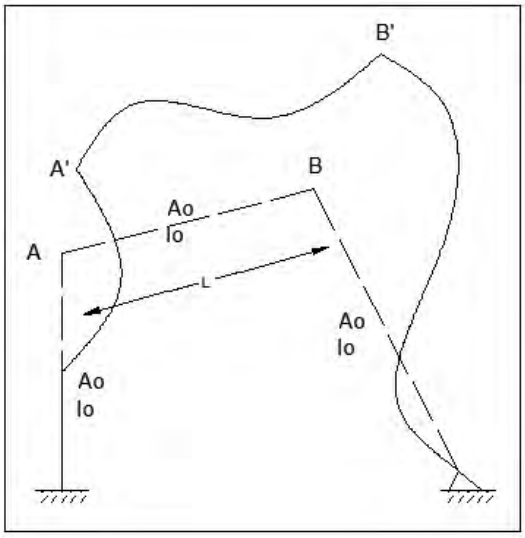



**Figura 6.8** Deformación general de un pórtico plano.

A continuación se presenta un modelo numérico para ver como un elemento cualquiera de la estructura se ha deformado. Por ejemplo se desea saber cómo el elemento AB pasa de su posición inicial indicada en la figura 6.8 en líneas entrecortadas a su posición final A'B' indicada con líneas continuas. Para ello en la figura 6.9 se ha dibujado el elemento AB antes y después de deformarse; en la mencionada figura se ha identificado las coordenadas del elemento.

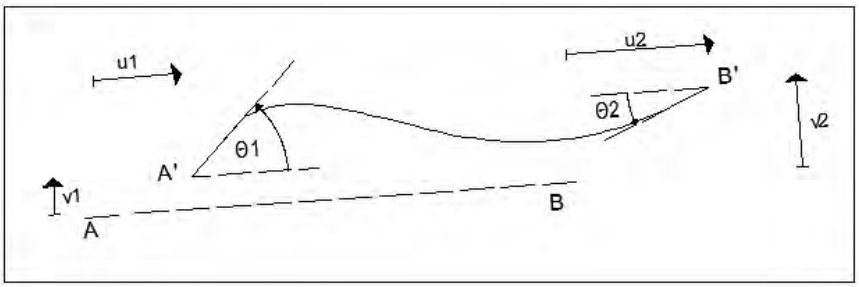



**Figura 6.9** Coordenadas del elemento AB.

El paso de la posición inicial del elemento AB a A'B' se lo analiza en cinco etapas. En líneas entrecortadas se indicará cual es la posición del elemento al inicio de cada etapa y en todas se va a indicar la deformada final A'B'. Estas etapas son las siguientes:

1) Se produce únicamente la traslación $u_1$ como cuerpo rígido. Esto se ilustra en la figura 6.10 en que el nudo A pasa a A'' y el nudo B pasa a B''. El elemento A''B'' tiene una longitud L.

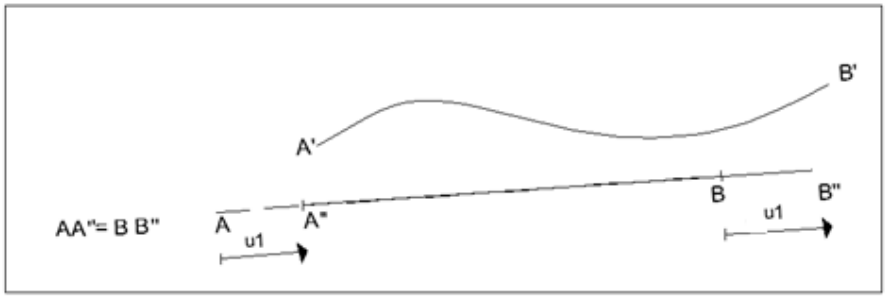



**Figura 6.10** Primera etapa del modelo. Solo existe $u_1$.

2) Sube el elemento de la posición A''B'' a la posición A'''B''' una distancia igual a $v_1$ como cuerpo rígido de tal manera que A'''B''' es paralela a A''B''. Además al haberse desplazado el nudo A, axialmente $u_1$ y transversalmente $v_1$ la posición de A''' coincide con la posición final del nudo A' como lo ilustra la figura 6.11

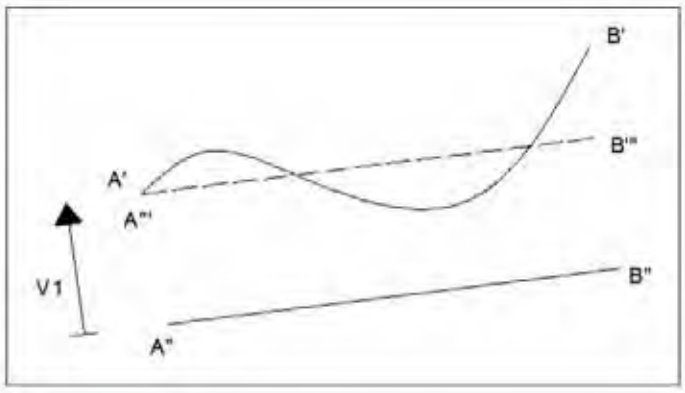



**Figura 6.11** Segunda etapa del modelo. Solo existe $v_1$.

3) Se rota el nudo A un ángulo $\psi$ en la posición A''' como cuerpo rígido de manera que el elemento A'''B''' se encuentre en la alineación de A'''B'. El punto B''' pasa a la posición B'$^{v}$ como se aprecia en la figura 6.12. Nótese que B'$^{v}$ no coincide con B'.

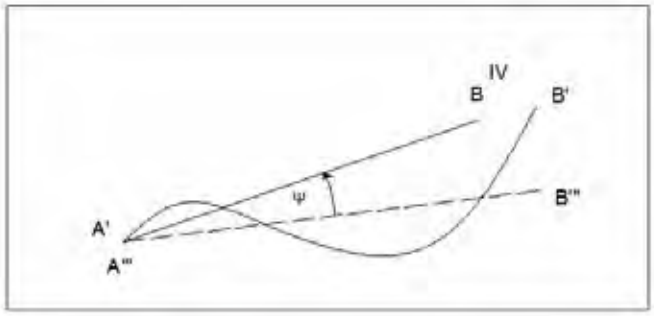



**Figura 6.12** Tercera etapa del modelo. Solo existe $\psi$.

Al mirar las figuras 6.9 y 6.12 se puede ver que el ángulo $\psi$ se calcula con la siguiente ecuación:

$$\psi = \frac{v_2 - v_1}{L} \tag{6.5}$$

Hasta aquí se han realizado tres desplazamientos como cuerpo rígido.

4) Se deforma al elemento axialmente, alargándolo para pasar de la posición B'$^{IV}$ a la posición final B'. Esta deformación axial se denomina $\Delta L$ en la figura 6.13 y se evalúa de la siguiente manera:

$$\Delta L = u_2 - u_1 \tag{6.6}$$

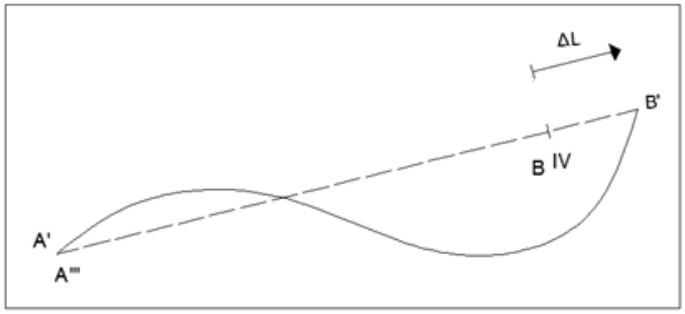



**Figura 6.13** Cuarta etapa del modelo. Deformación axial $\Delta L$.

5) Por último para tener al elemento en la posición final lo que falta es deformarle a flexión para lo cual se rotan los nudos A''' y B'. En el nudo inicial se deforma $\theta_1 - \psi$ y en el nudo final un valor $\theta_2 - \psi$, como se muestra en la figura 6.14

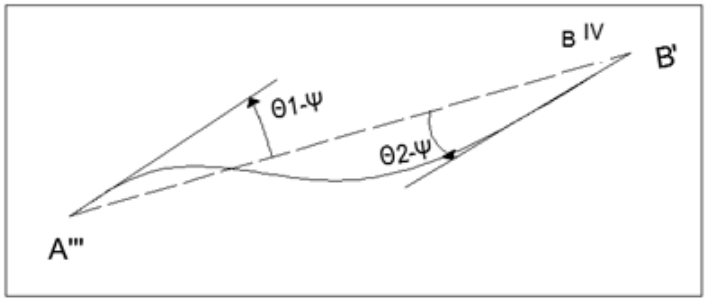



**Figura 6.14** Quinta etapa del modelo. Deformación a flexión.

6) Para comprender bien el modelo presentado, en la figura 6.15 se resumen las cinco etapas.

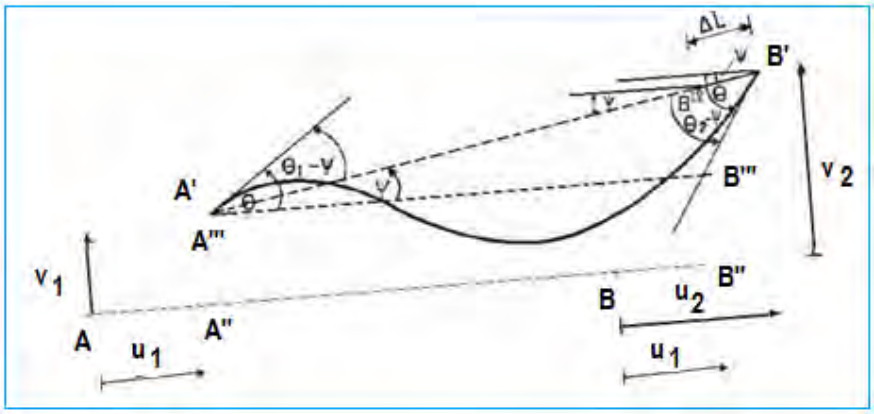



**Figura 6.15** Resumen del modelo numérico presentado.

### 6.3.1 Deformaciones de un elemento

Para el elemento AB que se acaba de estudiar, si se desea eliminar los desplazamientos como cuerpo rígido, se debe colocar en el nudo A un vínculo que impida el desplazamiento axial y transversal y en el nudo B un rodillo que impida que el elemento rote, que impida la rotación $\psi$ .

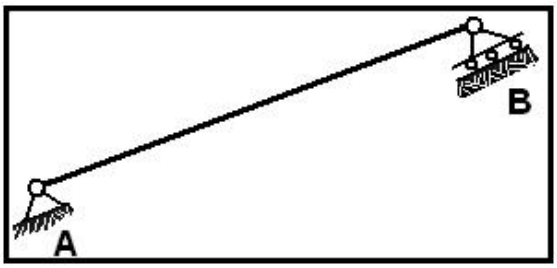



**Figura 6.16** Modelo para el estudio de las deformaciones de un elemento.

En consecuencia al eliminar los desplazamientos como cuerpo rígido del elemento AB con la colocación del vínculo y del rodillo se tiene en el elemento de la figura 6.16 únicamente las deformaciones.

Ahora, al analizar al elemento AB de la figura 6.16 como si se tratará de una estructura, no un elemento se observa que la estructura tiene 3 grados de libertad los mismos que pueden obtenerse con la fórmula estudiada en el Capítulo 1.

$$NGL = 2\,(3) - 1 - 2 = 3$$

En la figura 6.17 al elemento que se lo ha venido estudiando se lo ha dibujado horizontal y en él se han identificado los 3 grados de libertad que corresponden a las deformaciones del elemento que en resumen son: una deformación a flexión del nudo inicial; una deformación a flexión del nudo final y una deformación axial del elemento. Las deformaciones a flexión se dieron en la etapa 5 del modelo y la deformación axial en la etapa 4.

A las deformaciones del elemento se les identifica con la letra $\boldsymbol{p}$ minúscula y a las cargas internas (momentos y fuerza) con la letra $\boldsymbol{P}$ mayúscula. Se destaca que tanto $\boldsymbol{p}$ como $\boldsymbol{P}$ son vectores.

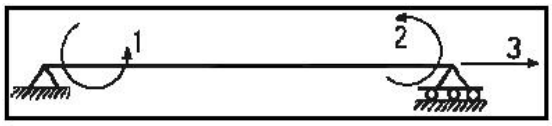



**Figura 6.17** Sistema de coordenadas de un elemento.

La forma del vector $\boldsymbol{p}$ para el elemento de la figura 6.17 es como sigue:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Donde $p_1$ es la deformación a flexión del nudo inicial; $p_2$ es la deformación a flexión del nudo final y $p_3$ es la deformación axial, las mismas que se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$p_1 = \theta_1 - \psi = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \tag{6.7.1}$$

$$p_2 = \theta_2 - \psi = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \tag{6.7.2}$$

$$p_3 = \Delta L = u_2 - u_1 \tag{6.7.3}$$

Por otra parte, el vector $\boldsymbol{P}$ está formado por:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Donde $P_1$ es el momento que actúa en el nudo inicial; $P_2$ es el momento que actúa en el nudo final y $P_3$ es la fuerza axial en el nudo final.

- **EJEMPLO 2**

El pórtico plano que se indica a la izquierda de la figura 6.18 tiene 5 grados de libertad, los mismos que se indican en la figura de la derecha. Se desea encontrar el valor de la coordenada dependiente que es el desplazamiento vertical del nudo C.

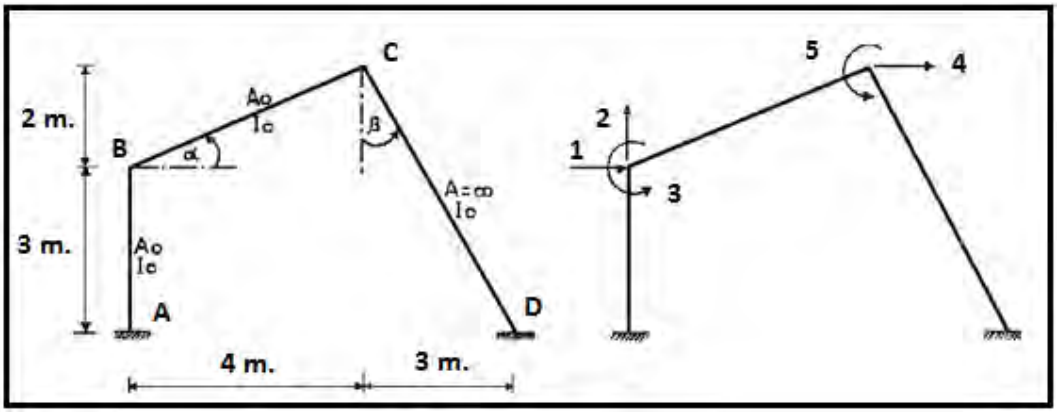
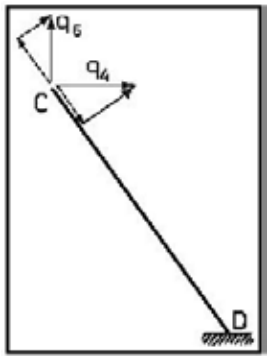



**Figura 6.18** Estructura de Ejemplo 2 y sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$

- **SOLUCIÓN**

Existen varias formas para encontrar el valor de la coordenada dependiente que se va a denominar $q_6$ en función de las coordenadas independientes. Una forma de hacerlo es como se realizó en algunos ejemplos del capítulo 5 en que a partir de cada uno de los diagramas elementales se obtiene la o las coordenadas dependientes. Ahora en este ejemplo se ilustra otra forma de hacerlo, que es una aplicación inmediata del estudio de las deformaciones. Para el elemento CD de la estructura de la figura 6.18, se tiene.




Sea C el nudo inicial y D, el nudo final, con esta notación se tiene:

$$u_1 = q_4\ sen\beta - q_6 \cos\beta \qquad\qquad u_2 = 0$$

Al ser el elemento CD axialmente rígido no existe la deformación axial $\Delta L$. En consecuencia se tiene:

$$\Delta L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_2 - u_1 = 0$$

Al reemplazar los valores de $u_2$ y $u_1$ para el elemento CD se encuentra:

$$0 - \left(q_4\ sen\beta - q_6 \cos\beta\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_6 = q_4\ tg\beta$$

- **EJEMPLO 3**

En el marco plano presentado a la izquierda de la figura 6.19 el elemento BC es transversalmente rígido y el elemento CD es axialmente rígido. Para este pórtico se ha seleccionado el sistema de coordenadas generalizadas indicado a la derecha de la figura 6.19. Se desea encontrar el valor de las coordenadas dependientes.

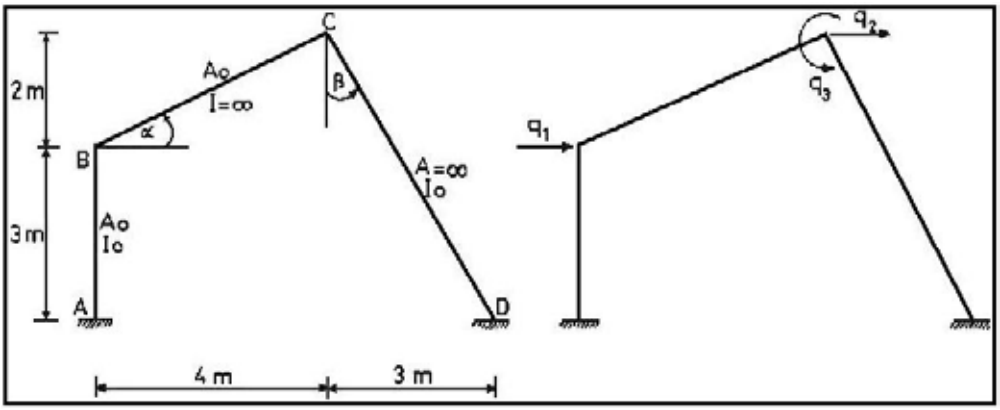



**Figura 6.19** Estructura de Ejemplo 3 y sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q - q}$

- **SOLUCIÓN**

Sean $q_4$, $q_5$ y $q_6$ las coordenadas dependientes, las mismas que deben expresarse en función de $q_1$, $q_2$ y $q_3$. En la figura 6.20 se indican estas coordenadas.

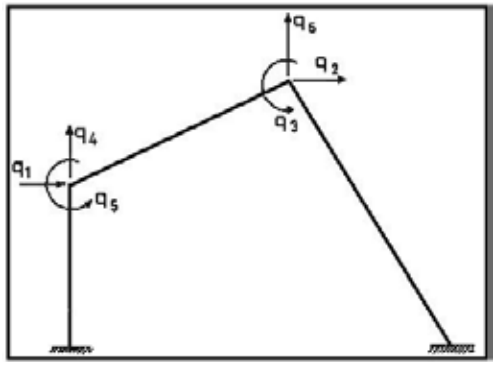
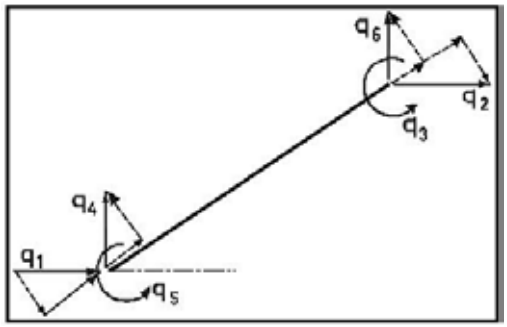



**Figura 6.20** Coordenadas dependientes e independientes de Ejemplo3.

Para el elemento BC, al considerar el nudo inicial en B y el nudo final en C, se tiene que las coordenadas del elemento valen:




$$v_1 = q_4 \cos\alpha - q_1\, sen\alpha \qquad \theta_1 = q_5$$

$$v_2 = -q_2\, sen\alpha + q_6 \cos\alpha \qquad \theta_2 = q_3$$

Por ser transversalmente rígido, la deformación a flexión en el nudo inicial y final son cero. En consecuencia se tiene:

$$\theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_5 - \frac{-q_2\, sen\alpha + q_6 \cos\alpha - q_4 \cos\alpha + q_1 sen\alpha}{L} = 0$$

$$\theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 - \frac{-q_2\, sen\alpha + q_6 \cos\alpha - q_4 \cos\alpha + q_1 sen\alpha}{L} = 0$$

Donde L es la longitud del elemento BC. De las dos ecuaciones indicadas se obtiene:

$$-q_4 \cos\alpha + q_6 \cos\alpha = -q_1\, sen\alpha + q_2\, sen\alpha + q_3\, L$$

Al proceder en forma similar al ejemplo 2; para el elemento CD que es axialmente rígido se tiene:

$$u_1 = q_2\ sen\beta - q_6 \cos\beta \qquad u_2 = 0$$
$$u_2 - u_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -q_2\ sen\beta + q_6 \cos\beta = 0$$
$$q_6 = q_2\ tg\beta$$

Al reemplazar el valor de $q_6$ en la expresión que se obtuvo de la condición de que el elemento BC es transversalmente rígido se obtiene:

$$q_4 = q_1\ tg\beta + q_2\ (tg\beta - tg\alpha) - q_3\ \frac{L}{\cos\alpha}$$

Finalmente al sustituir $q_4$ y $q_6$, y al despejar $q_5$ de la primera ecuación se halla.

$$q_5 = q_3$$

- **EJEMPLO 4**

Con relación a la estructura de la figura 6.19 se desea saber si pueden ser coordenadas generalizadas las mostradas en la figura 6.21 usando las ecuaciones de deformación de un elemento.

- **SOLUCIÓN**

Sean $q_4, q_5$ y $q_6$ las coordenadas dependientes, ver figura 6.22, y, $q_1, q_2$ y $q_3$ las coordenadas independientes. Para el elemento BC que es transversalmente rígido se tiene:

$$v_1 = q_5 \cos\alpha - q_4\ sen\alpha \qquad \theta_1 = q_1$$
$$v_2 = q_6 \cos\alpha - q_3 sen\alpha \qquad \theta_2 = q_2$$

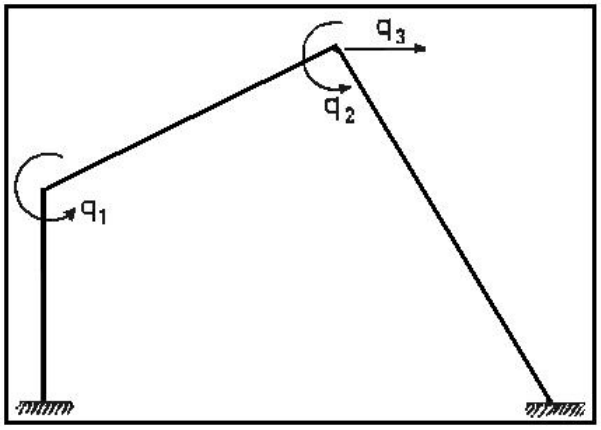



**Figura 6.21** ¿Posibles coordenadas generalizadas?.

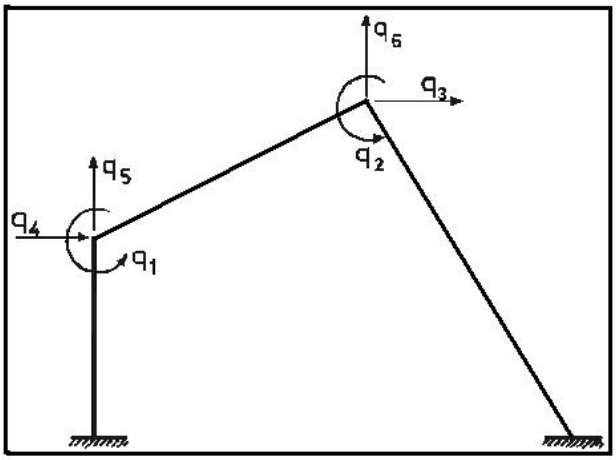



**Figura 6.22** Posibles coordenadas dependientes e independientes.

$$\theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 - \frac{q_6 \cos\alpha - q_3 sen\alpha - q_5 \cos\alpha + q_4 sen\alpha}{L} = 0$$

$$\theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 - \frac{q_6 \cos\alpha - q_3 sen\alpha - q_5 \cos\alpha + q_4 sen\alpha}{L} = 0$$

El sistema de ecuaciones lineales que se obtiene son:

$$q_4 sen\alpha - q_5 \cos\alpha = L\, q_1 - q_6 \cos\alpha + q_3 sen\alpha$$
$$q_4 sen\alpha - q_5 \cos\alpha = L\, q_2 - q_6 \cos\alpha + q_3 sen\alpha$$

De la condición de que el elemento CD es transversalmente rígido se encuentra:

$$q_6 = q_3\, tg\beta$$

De esta manera se ha expresado la coordenada dependiente $q_6$ en función de la coordenada independiente $q_3$. Al sustituir $q_6$ en el sistema de ecuaciones lineales que conducen al cálculo de $q_4$ y $q_5$ se obtiene en forma matricial:

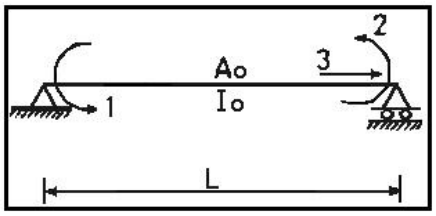
$$\begin{bmatrix} sen\alpha & -\cos\alpha \\ sen\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\, q_1 - q_6 \cos\alpha + q_3 sen\alpha \\ L\, q_2 - q_6 \cos\alpha + q_3 sen\alpha \end{bmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución debido a que el determinante de las incógnitas vale cero. Luego al despejar $q_4$ o $q_5$ se tendrían divisiones para cero. Al no poder despejar las coordenadas dependientes en función de las coordenadas independientes el sistema de coordenadas generalizado de la figura 6.9.4 está mal planteado.

- **RESUMEN DEL APARTADO**

El resumen de lo estudiado en el presente apartado y de acuerdo al modelo numérico de cálculo, para el estudio de las deformaciones se tiene:

♣ **Elementos Totalmente Flexibles**



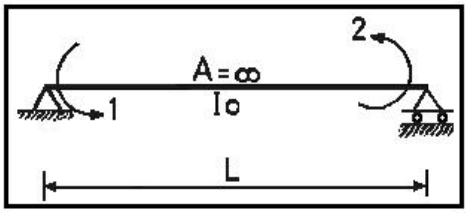

Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

♣ **Elementos Axialmente Rígidos**

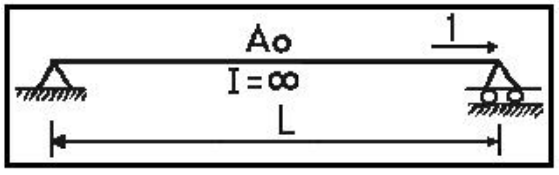



Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

♣ **Elementos Transversalmente Rígidos**




Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

$$p_1 = u_2 - u_1$$

Se pudo haber trabajado con otro modelo para el estudio de las deformaciones, como por ejemplo con cualquiera de los presentados en la figura 6.23.

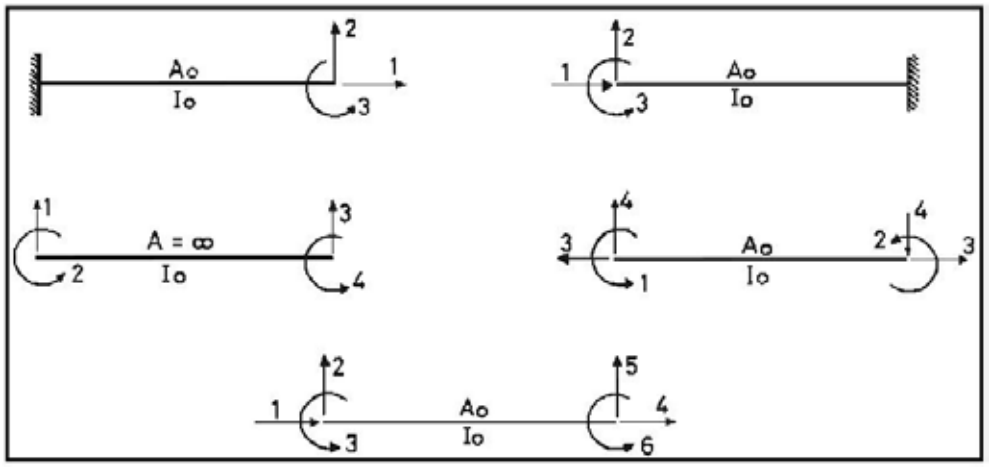



**Figura 6.23** Algunos modelos para el estudio de las deformaciones.

En los capítulos posteriores del libro se trabajará con el modelo numérico estudiado y que está indicado en la figura 6.17 ya que éste es apropiado para resolver marcos planos. Cuando se piensa en la solución mediante el computador los tres últimos modelos indicados en la figura 6.23 son los más apropiados.

El primero de éstos tres últimos modelos es para cuando el elemento es axialmente rígido, el segundo es el que utiliza el programa CAL desarrollado por el Profesor Wilson que fue muy utilizado en las dos últimas décadas del siglo pasado y el tercero es el que utilizan la mayor parte de programas.

### 6.3.2 Cálculo mediante Trabajos Virtuales

Las ecuaciones (6.7.1) a (6.7.3) que corresponden al modelo numérico de la figura 6.17 se pueden obtener mediante trabajos virtuales como se indica a continuación, en lugar de presentar las cinco etapas con las que se pasó de BC a B'C'. Para encontrar las mencionadas ecuaciones por Trabajos Virtuales, a la izquierda de la figura 6.24 se ha colocado las cargas P que actúan en el elemento, las mismas que han generado las reacciones de los apoyos. A la derecha de la figura 6.24 se indican las deformaciones con la letra p minúscula.

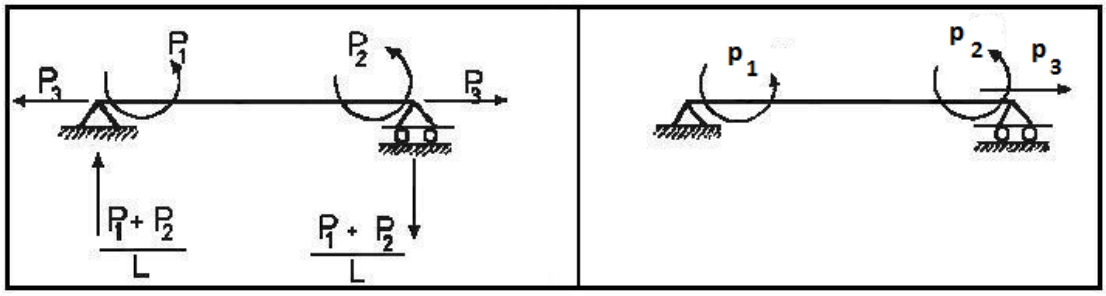



**Figura 6.24** Cargas y deformaciones actuantes en modelo de análisis.

El trabajo virtual del sistema de cargas que actúan a la izquierda de la figura 6.24 en las deformaciones de la gráfica de la derecha de la figura 6.24, vale:

$$TV = P_1\ p_1 + P_2\ p_2 + P_3\ p_3$$

Por lo tanto para calcular $p_1$ se debe aplicar un momento virtual unitario en el nudo inicial y todas las demás cargas nulas como se indica a la izquierda de la figura 6.25. A la derecha de esta figura se indican las reacciones en los apoyos, correspondiente a este estado de carga.

**$P_1$ = 1 y demás nulas.**

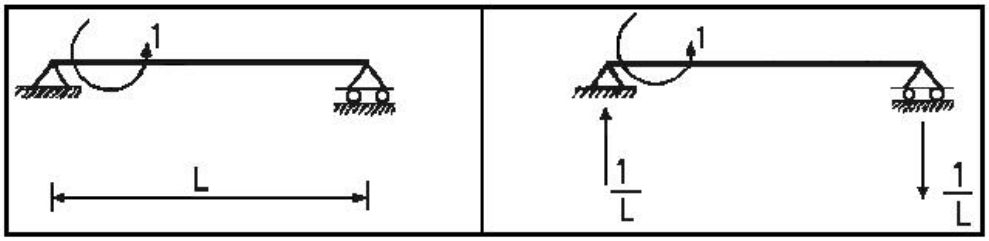



**Figura 6.25** Carga Virtual Unitaria y Reacciones para la carga virtual.

En la figura 6.26 se presentan las coordenadas para un elemento de un pórtico plano, se recuerda que $u_1, v_1, \theta_1$ son las coordenadas para el nudo inicial y $u_2, v_2, \theta_2$ para el nudo final.

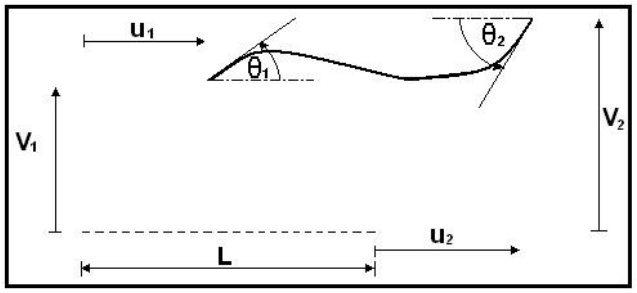



**Figura 6.26** Coordenadas de un elemento.

Para el estado de carga virtual estudiado se tiene que el trabajo virtual es igual a $1 * p_1$, y este a su vez es igual al trabajo virtual que producen las fuerzas y momentos virtuales de la gráfica derecha de la figura 6.25 en la figura 6.26. Por lo tanto se tiene:

$$1 * p_1 = 1 * \theta_1 + \frac{1}{L} * v_1 - \frac{1}{L} * v_2 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

Al aplicar un momento virtual unitario en el nudo final y todos los restantes nulos y por un procedimiento similar se halla $p_2$. En forma similar se hará para hallar $p_3$.

### 6.3.3 Otro sistema de coordenadas del elemento

Para el sistema de coordenadas del elemento de la figura 6.27 se va a calcular las deformaciones $p_1^*, p_2^*, p_3^*$. El asterisco únicamente se emplea por didáctica.

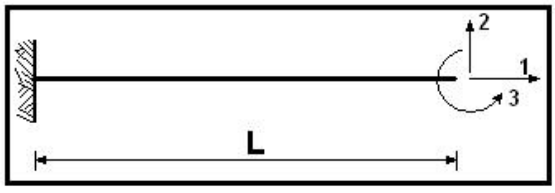



**Figura 6.27** Sistema $\boldsymbol{P^* - p^*}$

Para el modelo de la figura 6.27, los desplazamientos como cuerpo rígido están asociados a las componentes $u_1, v_1, \theta_1$ las mismas que se eliminan con el empotramiento en el nudo inicial. En la figura 6.28 se presenta en forma gráfica el estudio de las deformaciones.

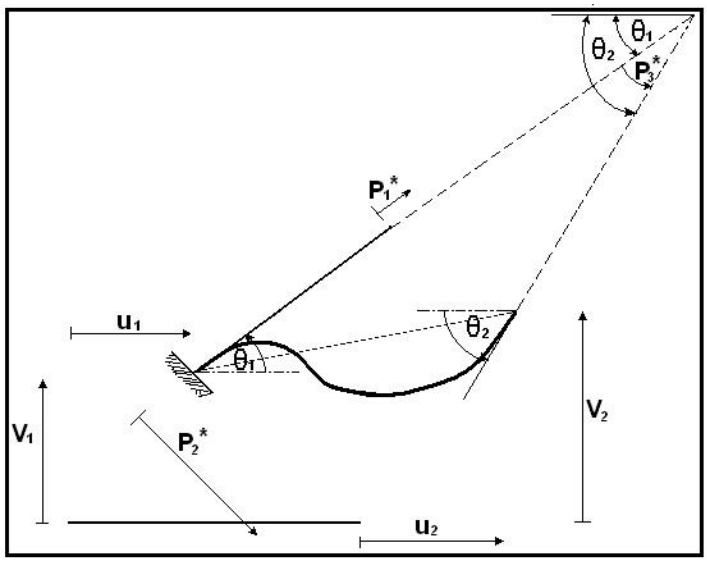



**Figura 6.28** Estudio de las deformaciones para el sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$.

En forma similar al presentado en el anterior modelo indicado en 6.3.1 se puede demostrar que:

$$p_1^* = u_2 - u_1 \tag{6.8.1}$$

$$p_2^* = v_2 - v_1 - \theta_1 L \tag{6.8.2}$$

$$p_3^* = \theta_2 - \theta_1 \tag{6.8.3}$$

Ahora $p_1^*$ es el cambio de longitud del elemento medido en la dirección de la tangente a la deformada en A (nudo inicial); $p_2^*$ es la deformación de B (nudo final) en la dirección perpendicular al elemento como si A se encontrara empotrado y finalmente $p_3^*$ es el ángulo de rotación del nudo final B, suponiendo que el nudo inicial A no gira por encontrarse empotrado.

- **EJEMPLO 5**

Demostrar la ecuación (6.8.2) mediante trabajos virtuales para el modelo numérico indicado en la figura 6.27

- **SOLUCIÓN**

En el nudo final se aplica una fuerza virtual vertical como lo señala la figura 6.29 y se obtienen las reacciones correspondientes.

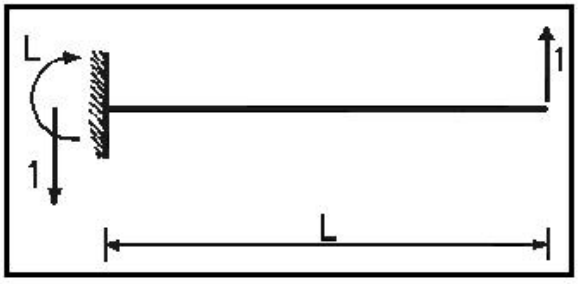



**Figura 6.29** Carga virtual unitaria y reacciones.

El trabajo virtual del sistema de cargas de la figura 6.29 en las coordenadas del elemento de la figura 6.26 determinan el valor de $p_2^*$

$$p_2^* = -1 * v_1 + 1 * v_2 - L\,\theta_1 \qquad \Rightarrow \qquad p_2^* = v_2 - v_1 - L\,\theta_1$$

- **EJEMPLO 6**

En la figura 6.30 se presenta el sistema de coordenadas del elemento que considera el programa CAL (**C**omputer **A**ssisted **L**earning of Structural Analysis). Se desea encontrar la fórmula que define la deformación $p_3$.

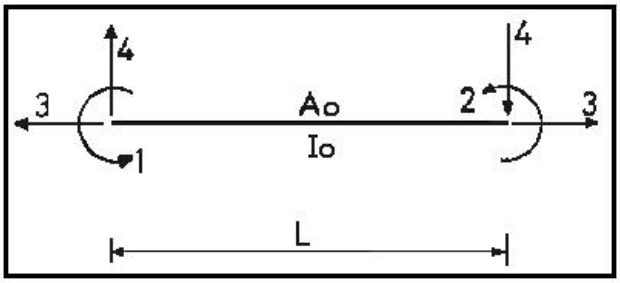



**Figura 6.30** Sistema de coordenadas $\boldsymbol{P - p}$ que considera programa CAL.

- **SOLUCIÓN**

Para calcular $p_3$ se aplica una carga axial unitaria y las demás nulas como lo muestra la figura 6.31. Ahora el trabajo virtual de las cargas de la figura 6.31 en las deformaciones del sistema 6.30 vale:

$$TV = 1 * p_3 + 1 * p_3 = 2\,p_3$$

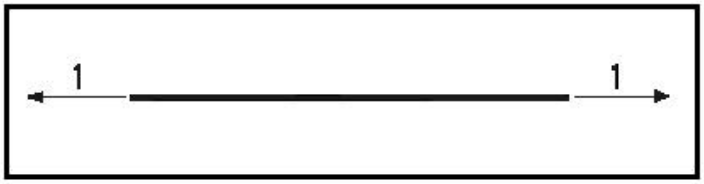



**Figura 6.31** Carga axial virtual unitaria.

Este trabajo virtual es igual al producido por las cargas que gravitan en la figura 6.31 en las coordenadas del elemento de la figura 6.26. Luego:

$$2\,p_3 = 1 * u_2 - 1 * u_1 \qquad \Rightarrow \qquad p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2}$$

Se deja al estudiante la deducción de las restantes deformaciones del elemento para el modelo numérico utilizado por el programa CAL. Estas son:

$$p_1 = \theta_1 \qquad p_2 = \theta_2$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} \qquad p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

## 6.4 EJERCICIOS RESUELTOS

Se presentan dos ejercicios que complementan lo estudiado en este capítulo y en el anterior cuando se estudió la matriz de transformación de coordenadas. En capítulos posteriores se verá su aplicación.

- **EJEMPLO 7**

Con relación a las coordenadas del elemento utilizadas por el programa CAL y que se ha indicado en la figura 6.30. Se desea encontrar las tres primeras columnas de la matriz de transformación de coordenadas locales a globales. En la figura 6.32 se indican estos sistemas de coordenadas.

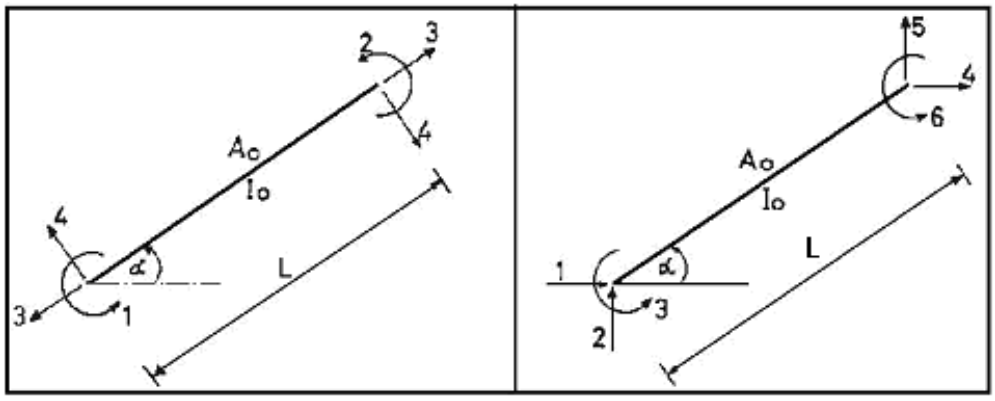



**Figura 6.32** Coordenadas Locales de CAL y Coordenadas Globales.

- **SOLUCIÓN**

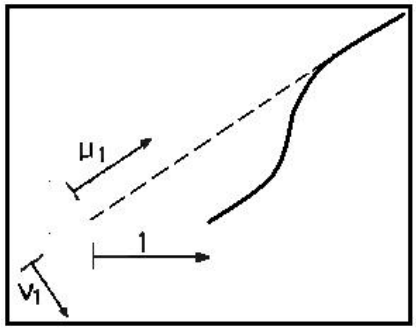
Se define la matriz de transformación de coordenadas $T$ de la siguiente manera:

$$p = T\ p^*$$

Donde $p$ es el sistema de coordenadas indicado a la izquierda de la figura 6.32 y $p^*$ el sistema de coordenadas de la derecha de la misma figura.

- **Primera columna de T**

$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$



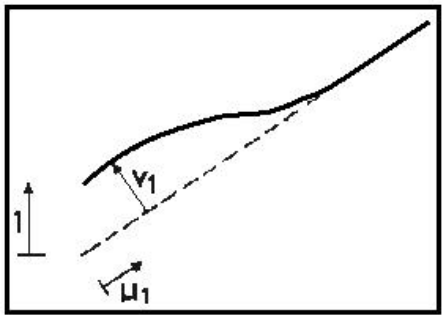

$$u_1 = \cos\alpha \qquad u_2 = 0$$
$$v_1 = -sen\alpha \qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 = 0 \qquad p_2 = \theta_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} = -\frac{\cos\alpha}{2} \qquad p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2} = -\frac{sen\alpha}{2}$$

- **Segunda columna de T**

$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$




$$u_1 = sen\alpha \qquad u_2 = 0$$

$$v_1 = \cos\alpha \qquad v_2 = 0$$

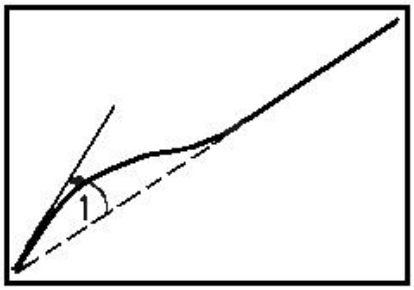
$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 = 0 \qquad p_2 = \theta_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} = -\frac{sen\alpha}{2} \qquad p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{\cos\alpha}{2}$$

- **Tercera columna de T**

$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$




$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0$$

$$v_1 = 0 \qquad v_2 = 0$$

$$\theta_1 = 1 \qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 = 1 \qquad p_2 = \theta_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} = 0 \qquad p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2} = 0$$

Al proceder en forma similar con la cuarta, quinta y sexta columna de $T$ se tiene:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\cos\alpha}{2} & -\frac{sen\alpha}{2} & 0 & \frac{\cos\alpha}{2} & \frac{sen\alpha}{2} & 0 \\ -\frac{sen\alpha}{2} & \frac{\cos\alpha}{2} & 0 & \frac{sen\alpha}{2} & -\frac{\cos\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 8**

A la izquierda de la figura 6.33, se presenta el sistema de coordenadas que se ha denominado $\boldsymbol{P-p}$, para un elemento axialmente rígido y a la derecha el sistema $\boldsymbol{P^*-p^*}$ en coordenadas locales. Con la mayúscula se refiera a las cargas y la minúscula las deformaciones. Se pide encontrar la matriz de paso $\boldsymbol{T}$, tal que $\boldsymbol{p = T\,p^*}$

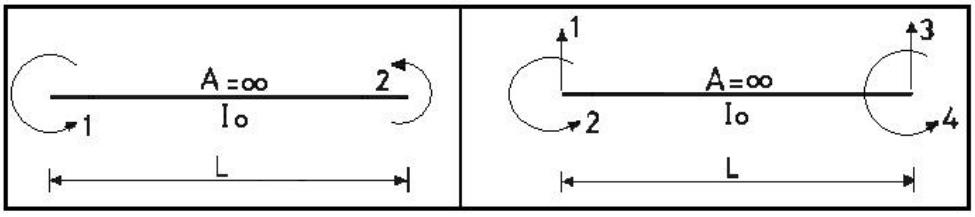
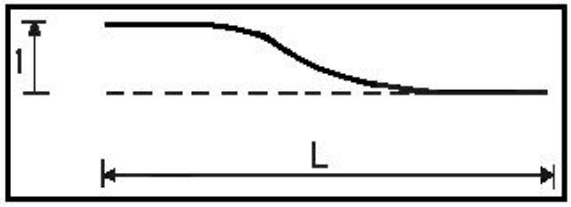



**Figura 6.33** Sistema $\boldsymbol{P-p}$, y Sistema $\boldsymbol{P^*-p^*}$

- **SOLUCIÓN**

  - **Primera columna de T**

$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$

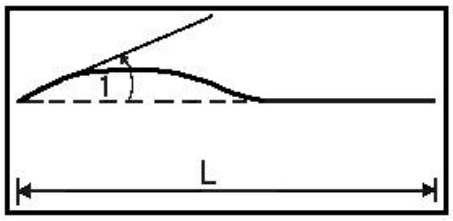



$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0$$
$$v_1 = 1 \qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = \frac{1}{L}$$
$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = \frac{1}{L}$$

- **Segunda columna de T**

$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$




$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0$$
$$v_1 = 0 \qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 1 \qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0$$

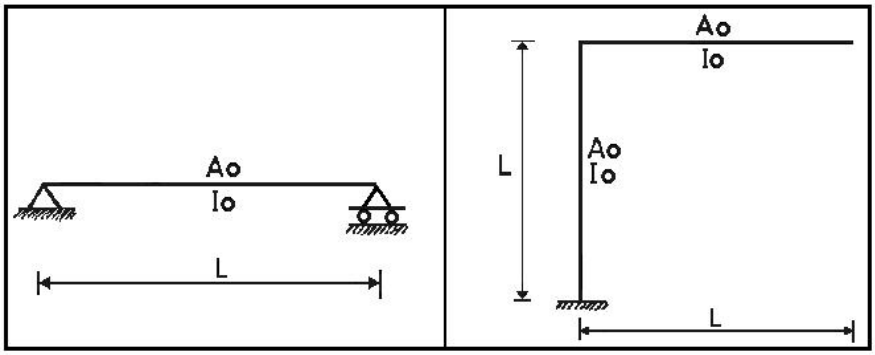
Se deja al estudiante el cálculo de la tercera y cuarta columna de la matriz **T** que resulta:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix}$$

## 6.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las estructuras presentadas a continuación, se desea:

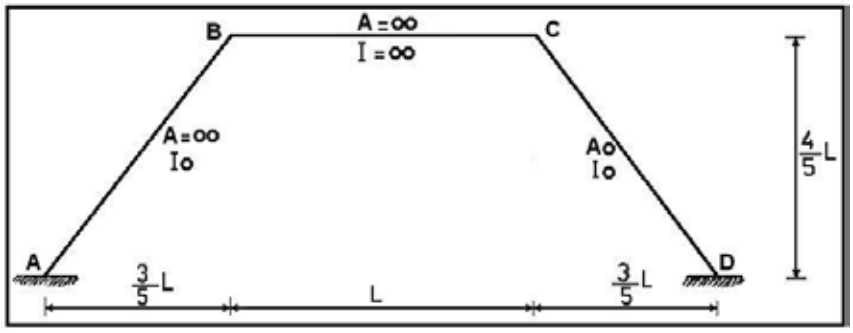
1. Seleccionar un sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$.
2. Indicar la forma de la matriz de rigidez y de flexibilidad.
3. El significado físico de los elementos de la matriz de rigidez y de flexibilidad.




**Ejercicio N.- 1** **Ejercicio N.- 2**

**Ejercicio N.- 3**

Para la siguiente estructura, definir un sistema de coordenadas y expresar las coordenadas dependientes en función de las coordenadas independientes.




**Ejercicio N.- 4**

Demostrar que no pueden ser coordenadas generalizadas de la estructura del ejercicio N.-3 las componentes de desplazamiento horizontal del nudo B y del nudo C.

**Ejercicio N.- 5**

Resolver el Ejemplo 3 desarrollado en el numeral 6.3 de otra manera. Mediante la construcción de diagramas elementales de cada una de las coordenadas generalizadas seleccionadas.

**Ejercicio N.- 6**

Demostrar las ecuaciones (6.8.1) y (6.8.3) de éste capítulo, mediante trabajos virtuales.

**Ejercicio N.- 7**

Con relación al sistema de coordenadas del elemento que utiliza el programa CAL, demostrar la ecuación $p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2}$.

**Ejercicio N.- 8**

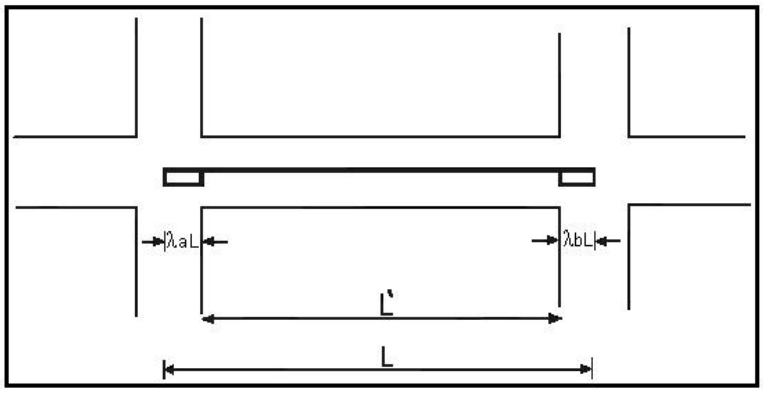
Encontrar las tres últimas columnas de la matriz **T** del Ejemplo 7.

**Ejercicio N.- 9**

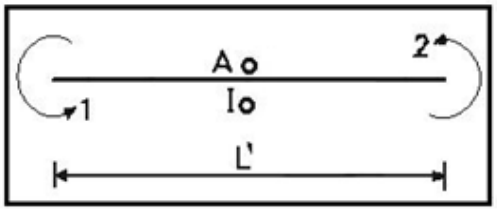
Encontrar las dos últimas columnas de la matriz **T** del Ejemplo 8.

**Ejercicio N.- 10**

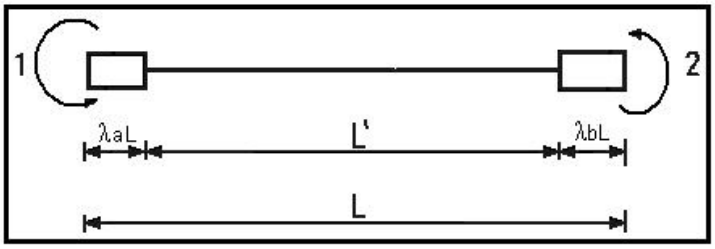
Sea $\lambda_a L$ y $\lambda_b L$ las longitudes del nudo rígido inicial y final del elemento que se presenta a continuación.




En el elemento en estudio se tiene que $L'$ es la luz libre y $L$ la luz entre ejes. Se definen dos sistemas de coordenadas uno para el elemento de longitud $L'$ que se denominará sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ y otro para el de longitud $L$ que se llamará sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$.




Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$




Sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$

Demostrar que la matriz de transformación de coordenadas para pasar del sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ al sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$ es:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1-\lambda_b & \lambda_b \\ \lambda_a & 1-\lambda_a \end{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda_a-\lambda_b}$$

El modelo presentado en este Ejercicio se utiliza para calcular la matriz de rigidez de un elemento viga que se encuentra entre dos muros de corte.

*CAPITULO 7*

# MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UN ELEMENTO LINEAL


## RESUMEN

Se presenta con bastante detenimiento el cálculo de las matrices de flexibilidad y de rigidez de un elemento de sección constante o variable, para los sistemas de coordenadas del elemento que se indican en las figuras respectivas. El cálculo se lo realiza empleando conceptos de estructuras, por medio de la matriz de transformación de coordenadas y con funciones de forma.

Por considerarlo de interés se dedican algunas páginas al estudio del efecto de corte en los términos de la matriz de rigidez de un elemento, para el efecto se deduce el coeficiente de forma $\beta$ para una sección rectangular y se presentan ejemplos de aplicación en los que se observa cuando es importante considerar el efecto de corte y cuando no. De igual forma se resuelven ejercicios con elementos de sección variable.


## 7. 1 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE UN ELEMENTO $f$

### 7.1.1 Forma general

Se denomina $F$ a la matriz de flexibilidad de una estructura y $f$ a la matriz de flexibilidad de un elemento. La forma general de $f$ para el elemento totalmente flexible indicado en la figura 7.1, es la siguiente:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

En el elemento de la figura 7.1 se consideran dos deformaciones a flexión, en el nudo inicial y final y una deformación axial en el nudo final.

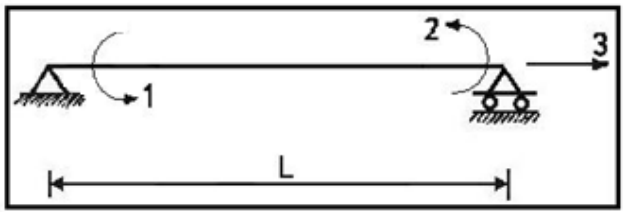



**Figura 7.1** Sistema de coordenadas de un elemento.

Los elementos de la primera columna de $f$ son las deformaciones que corresponden al estado de carga elemental $P_1 = 1$ y demás nulas como se indica a la izquierda de la figura 7.2. Nótese que $P_1 = 1$ significa aplicar un momento unitario en el nudo inicial, las deformaciones que se generan por este momento unitario son los elementos de la primera columna de la matriz de flexibilidad $f$ .

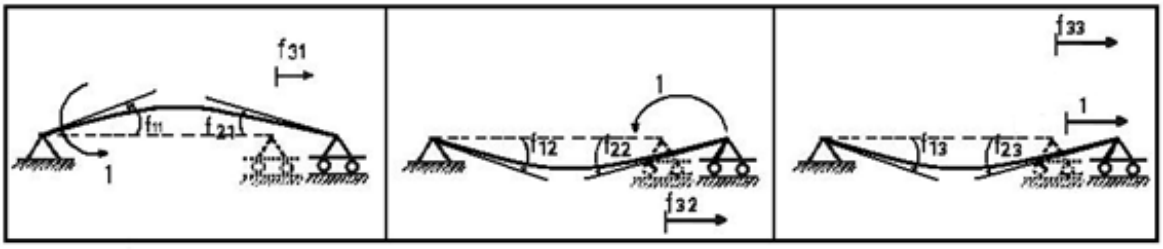



**Figura 7.2** Cargas Elementales para determinar matriz de flexibilidad $f$

En la parte central de la figura 7.2 se aplica un momento unitario, anti horario, en el nudo final y las deformaciones que se producen son los elementos de la segunda columna de $f$ . Finalmente a la derecha de la figura 7.2 se aplica una fuerza axial unitaria en el nudo final y las deformaciones son los elementos de la tercera columna de $f$ . Evidentemente que algunos de los elementos de $f$ se los ha dibujado con el objeto de tener todos los elementos de la ecuación matricial (7.1) a sabiendas que algunos de ellos son cero.

Para encontrar las deformaciones es necesario encontrar los diagramas de momento, corte y carga axial, asociados a cada estado elemental de carga. En la figura 7.3.1 se repite las cargas elementales y se presentan las reacciones de apoyo. Para cuando actúa el momento unitario en el nudo inicial las reacciones verticales valen $\frac{1}{L}$. Lo propio sucede cuando se tiene el momento unitario en el nudo final (gráfica central) y para cuando solo existe la fuerza axial unitaria, la reacción horizontal en el nudo inicial vale la unidad (gráfica derecha). En las figuras 7.3.2 a 7.3.4 se presentan los respectivos diagramas de momento, corte y carga axial, con la convención de signos de resistencia de materiales.

- ***Estados* de Carga**

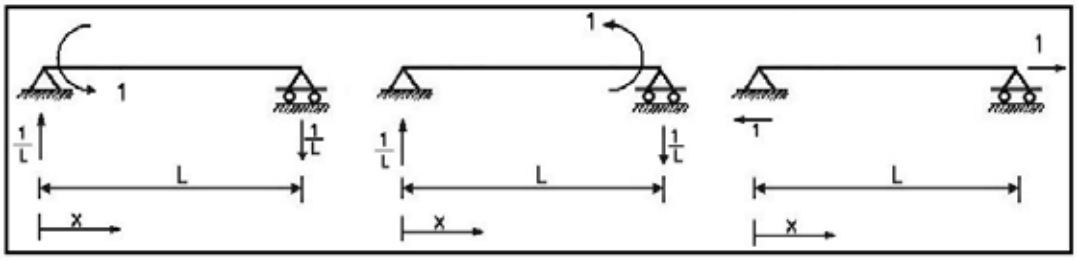



**Figura 7.3.1** Cargas elementales aplicadas para obtener las diferentes columnas de $f$ .

❖ **Diagramas de Momento**

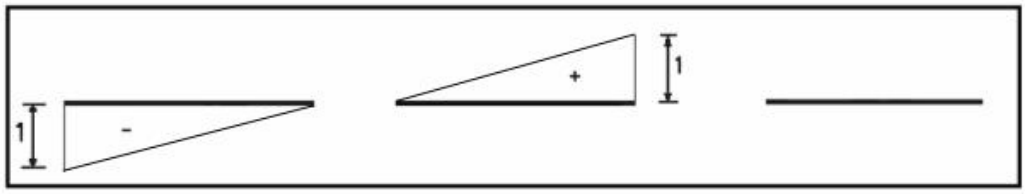



**Figura 7.3.2** Diagramas de Momento correspondientes a las cargas elementales.

$$M_1 = -\left(\frac{L - X}{L}\right) \qquad M_2 = \frac{X}{L} \qquad M_3 = 0$$

❖ **Diagramas de Corte**

**Figura 7.3.3** Diagramas de Corte correspondientes a las cargas elementales.

$$V_1 = \frac{1}{L} \qquad V_2 = \frac{1}{L} \qquad V_3 = 0$$

❖ **Diagramas de Carga Axial**

**Figura 7.3.4** Diagramas de Carga Axial correspondientes a las cargas elementales.

$$N_1 = 0 \qquad N_2 = 0 \qquad N_3 = 1$$

Para el cálculo de las deformaciones $f_{ij}$, de la teoría de estructuras se tiene:

$$f_{ij} = \int_0^L \frac{M_i\, M_j}{EI(x)}\, dx + \int_0^L \frac{\beta\, V_i\, V_j}{GA(x)}\, dx + \int_0^L \frac{N_i\, N_j}{EA(x)}\, dx \qquad (7.2)$$

Donde, $M_i, M_j$ son los momentos a flexión; $V_i, V_j$ son los cortantes; $N_i, N_j$ son la carga axial; $E$ es el módulo de elasticidad del material; $G$ el módulo de corte estático; $I(x)$ es el momento de Inercia de una sección constante o variable; $A(x)$ es el área de una sección transversal y $\beta$ es el coeficiente de forma. La ecuación (7.2) corresponde al caso de Teoría de Primer Orden, en que cada uno de los efectos están desacoplados, de tal manera que la deformación es igual a la deformación debida a flexión más la deformación debida a corte más la deformación debida a carga axial. Esta teoría es válida para elementos con longitudes pequeñas, alturas de columnas del orden de los 3 o 4 m. Si se tiene columnas de mayor longitud se debe trabajar con Teoría de Segundo Orden en que se considera acoplamiento entre las diferentes deformaciones.

Para el caso específico del elemento de la figura 7.1, se tiene:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI(x)}\,dx + \int_0^L \frac{\beta\, V_1^2}{GA(x)}\,dx \tag{7.3.1}$$

$$f_{12} = f_{21} = \int_0^L \frac{M_1\, M_2}{EI(x)}\,dx + \int_0^L \frac{\beta\, V_1\, V_2}{GA(x)}\,dx \tag{7.3.2}$$

$$f_{13} = f_{31} = 0 \tag{7.3.3}$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{EI(x)}\,dx + \int_0^L \frac{\beta\, V_2^2}{GA(x)}\,dx \tag{7.3.4}$$

$$f_{23} = f_{32} = 0 \tag{7.3.5}$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{N_3^2}{EA(x)}\,dx \tag{7.3.6}$$

Por lo tanto, la forma de la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{f}$ de un elemento de sección constante o variable es la siguiente:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & -f_{12} & 0 \\ -f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

Al reemplazar las ecuaciones de: $M_1, M_2, V_1, V_2$ y $N_3$ en las integrales se obtienen los elementos de la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{f}$, que son:

$$f_{11} = \int_0^L \left(\frac{L-X}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)} \tag{7.4.1}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)} \tag{7.4.2}$$

$$f_{22} = \int_0^L \left(\frac{X}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)} \tag{7.4.3}$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{EA(x)} \tag{7.4.4}$$

Las ecuaciones (7.4.1) a (7.4.4) sirven para encontrar la matriz de flexibilidad de un elemento de sección variable. Pero no se recomienda resolver en forma analítica las integrales ya que se obtienen expresiones muy complejas, lo más fácil es resolver las integrales con métodos numéricos y utilizando la librería de programas de ***MATLAB***.

### 7.1.2 Coeficiente de forma $\beta$

El coeficiente $\beta$ es adimensional que caracteriza la distribución de las tensiones tangenciales en la sección transversal y depende de la forma de la misma.

- **EJEMPLO 1**

Determinar el valor de $\beta$ para un elemento de sección rectangular constante, de dimensiones b x h.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 7.4 se indica la nomenclatura que se va a utilizar en la solución del ejemplo.

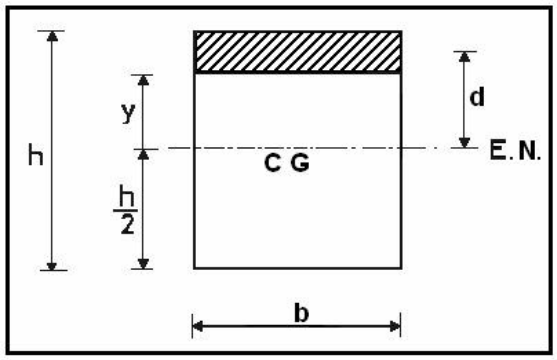



**Figura 7.4** Sección transversal constante

En la figura 7.4 se tiene que C.G. es el centro de gravedad; E.N. es el eje neutro, la parte rayada es el área de tensiones tangenciales. Se conoce que:

$$\beta = \int \frac{A(x)\, S^2}{b^2\, I(x)^2}\, dA \tag{7.5}$$

Donde $S$ es el momento estático del área rayada respecto al eje neutro; $dA$ es el diferencial de área. Las restantes variables han sido ya definidas. Al ser el elemento de sección constante, se tiene:

$$\beta = \frac{A}{I^2 b^2} \int S^2\, dA \tag{7.6.1}$$

De la figura 7.4 se observa que:

$$S = b\left(\frac{h}{2} - Y\right) * \left[Y + \left(\frac{h}{2} - Y\right)\frac{1}{2}\right]$$

Áreas * Distancia

$$S = b\left(\frac{h}{2} - Y\right)\left(\frac{Y}{2} + \frac{h}{4}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} - Y\right)\left(\frac{h}{2} + Y\right)$$

$$S = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - Y^2\right) \tag{7.6.2}$$

Por otro lado, se conoce que:

$$dA = b\,dY \tag{7.6.3}$$

$$A = b\,h \tag{7.6.4}$$

$$I = \frac{b\,h^3}{12} \tag{7.6.5}$$

Nótese que se ha obtenido la Inercia con respecto al centro de gravedad el mismo que es colineal con el eje neutro. Al reemplazar las ecuaciones (7.6.2) a (7.6.5) en (7.6.1) se obtiene:

$$\beta = \frac{b\,h}{\left(\frac{b\,h^3}{12}\right)^2 b^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-Y^2\right)\right]^2 b\,dY$$

$$\beta = \frac{36}{h^5}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{h^2}{4}-Y^2\right)^2 dY$$

Al integrar solo en la parte superior, se tiene:

$$\beta = \frac{72}{h^5}\int_0^{\frac{h}{2}}\left(\frac{h^2}{4}-Y^2\right)^2 dY = \frac{72}{h^5}\int_0^{\frac{h}{2}}\left(\frac{h^4}{16}-\frac{h^2Y^2}{2}+Y^4\right)dY$$

$$\beta = \frac{72}{h^5}\left|\frac{h^4\,Y}{16}-\frac{h^2\,Y^3}{6}+\frac{Y^5}{5}\right|_0^{\frac{h}{2}} = \frac{72}{h^5}\left(\frac{h^5}{32}-\frac{h^5}{48}+\frac{h^5}{160}\right) = 72\left(\frac{15-10+3}{480}\right) = \frac{576}{480}$$

De donde:

$$\beta = \frac{6}{5} = 1.2$$

Se destaca que el factor de forma $\beta = 1.2$ es exclusivamente para secciones rectangulares.

- **EJEMPLO 2**

Elaborar un programa en ***MATLAB*** para determinar el término $f_{11}$ para la viga de sección variable de la figura 7.5. Si $b = 0.30\,m; h = 0.60\,m; L = 6.00\,m$. El módulo de elasticidad del material $E = 2400000\frac{T}{m^2}$. El módulo de corte $G = 0.4 * E$.

- **SOLUCIÓN**

El término $f_{11}$ se puede escribir de la siguiente manera.

$$f_{11} = \frac{1}{L^2\,E}\int_0^L (L-x)^2\,\frac{dx}{I(x)} + \frac{\beta}{G\,L^2}\int_0^L \frac{dx}{A(x)}$$

$$A(x) = b * h(x)$$

$$I(x) = \frac{b * h_{(x)}^3}{12}$$

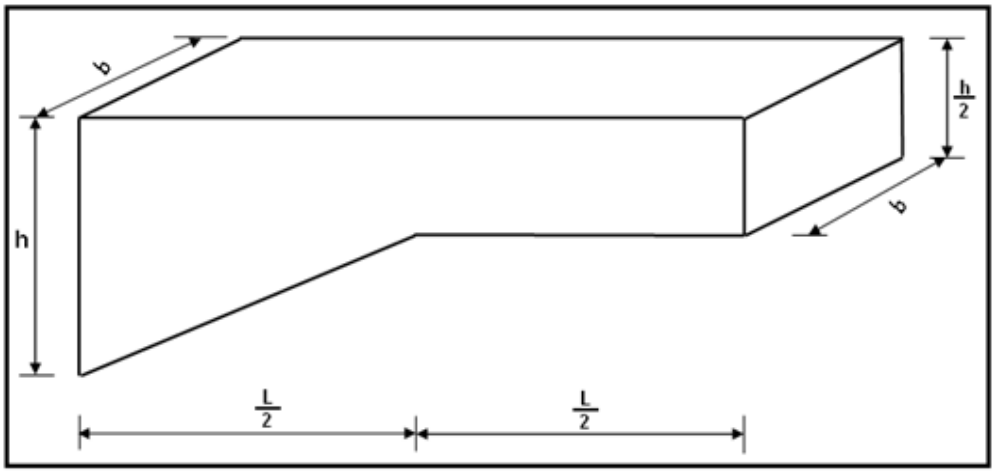



**Figura 7.5** Viga de sección variable.

```
% Programa para calcular el termino f11 de la matriz de flexibilidad
% para una viga de sección variable. Ejemplo 2
%
%         Dr. Roberto Aguiar
%         28 de mayo de 2014
%.............................................................
% Ej_2
%.............................................................
b=0.30;h1=0.60;h2=0.30;L1=3.0;L2=3.0;E=2400000;G=0.4*E;L=L1+L2;
m=(h2-h1)/L1;dx=L1/1000;
for i=1:2000
    x(i)=(i-1)*dx;
    if i <=1001
        h(i)=0.60+m*x(i);
    else
        h(i)=h2;
    end
end
for i=1:2000
    A(i)=b*h(i);iner(i)=b*h(i)^3/12;
    fun1(i)=(L-x(i))^2/iner(i);fun2(i)=1/A(i);
end
f11=1/(L^2*E)*trapz(x,fun1)+1.2/(G*L^2)*trapz(x,fun2)
```

El término $f_{11} = 0.00047718\ rad.$

### 7.1.3 Elementos de sección constante considerando el efecto de corte

En este caso tanto la inercia como el área de la sección transversal son constantes. Por consiguiente salen de las integrales definidas de (7.4.1) a (7.4.4).

$$f_{11} = \frac{1}{L^2\ EI}\int_0^L (L - X)^2\, dX + \frac{\beta}{L^2\ GA}\int_0^L dX \tag{7.7.1}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{1}{L^2\ EI}\int_0^L X(L - X)dX + \frac{\beta}{L^2\ GA}\int_0^L dX \tag{7.7.2}$$

$$f_{22} = \frac{1}{L^2 EI}\int_0^L X^2\ dX + \frac{\beta}{L^2\ GA}\int_0^L dX \tag{7.7.3}$$

$$f_{33} = \frac{1}{EA}\int_0^L dX \tag{7.7.4}$$

- **Cálculo de** $f_{11}$

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI}\int_0^L (L^2 - 2LX + X^2)dX + \frac{\beta}{GAL^2}\int_0^L dX$$

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI}\left| L^2 X - LX^2 + \frac{X^3}{3}\right|_0^L + \frac{\beta}{GAL^2}|X|_0^L$$

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI}\left(L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3}\right) + \frac{\beta}{GAL} = \frac{L}{3EI} + \frac{\beta}{GAL}$$

$$f_{11} = \frac{L}{3EI}\left(1 + \frac{3\beta EI}{GAL^2}\right)$$

Se denomina:

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} \tag{7.7.5}$$

Luego:

$$f_{11} = \frac{L}{3EI}(1 + \phi)$$

- **Cálculo de** $f_{22}$

$$f_{22} = \frac{1}{L^2 EI}\left|\frac{X^3}{3}\right|_0^L + \frac{\beta}{L^2 GA}|X|_0^L = \frac{L}{3EI} + \frac{\beta}{LGA} = \frac{L}{3EI}(1 + \phi)$$

Al proceder en forma similar se encuentran los demás elementos de la matriz de flexibilidad que resulta:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI}(1+\phi) & -\frac{L}{6EI}(1-2\phi) & 0 \\ -\frac{L}{6EI}(1-2\phi) & \frac{L}{3EI}(1+\phi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Donde $\phi$ es un factor adimensional que mide el efecto de corte.

### 7.1.4 Elementos de sección constante sin considerar el efecto de corte

El efecto de corte se evalúa a través del parámetro $\phi$. En caso de no considerarlo se debe reemplazar $\phi = 0$ en la ecuación matricial (7.8), resultando:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Se debe notar que la matriz de flexibilidad calculada en éste apartado corresponde al sistema de coordenadas del elemento indicado en la figura 7.1.

### 7.1.5 Elementos axialmente rígidos de sección constante

Como se estudió en el capítulo anterior, el sistema de coordenadas $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ de un elemento axialmente rígido es el presentado en la figura 7.6, se aprecia que no existe la deformación axial $p_3$.

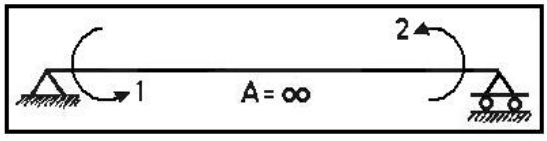



**Figura 7.6** Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ para un elemento axialmente rígido.

La matriz de flexibilidad $f$ para el sistema de coordenadas de la figura 7.6 y al no considerar el efecto de corte, es:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Nótese que se ha eliminado la tercera fila y columna de la ecuación (7.9) para llegar a la ecuación (7.10). Esta es la forma más común de la matriz de flexibilidad para elementos axialmente rígidos. Se puede también utilizar el sistema de coordenadas de la figura 7.1 pero en este caso la matriz de flexibilidad del elemento será:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (7.11)$$

La matriz definida en (7.11) es singular. En consecuencia no existe inversa. Por lo tanto la matriz de rigidez no existe cuando se trabaja con el sistema de coordenadas de la figura 7.1. Para evitar éste tipo de problemas mejor es considerar el sistema de la figura 7.6 y la matriz de flexibilidad es la indicada en la ecuación (7.10).

### 7.1.6 Elementos transversalmente rígidos

Por definición estos elementos solo pueden deformarse axialmente siendo el sistema de coordenadas el presentado en la figura 7.7. Por lo tanto la matriz de flexibilidad para un elemento que tiene inercia infinita es:

$$f = \left[\frac{L}{EA}\right] \qquad (7.12)$$

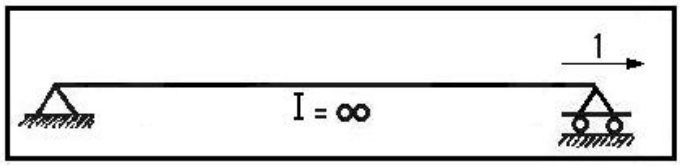



**Figura 7.7** Sistema de coordenadas $P - p$ para un elemento transversalmente rígido.

Al igual que en el apartado anterior, se puede considerar como sistema de coordenadas de un elemento el mostrado en la figura 7.1. En éste caso se tiene:

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \qquad (7.13)$$

Nuevamente no existe inversa de la matriz (7.13) en consecuencia para las coordenadas de la figura 7.1 si el elemento es transversalmente rígido no existe matriz de rigidez del elemento, si se trabaja con la matriz de flexibilidad definida en la ecuación (7.13).

### 7.1.7 Relación fuerza deformación

En éste capítulo a los elementos se los ha analizado como si fueran estructuras mediante la colocación de vínculos que eliminan los desplazamientos como cuerpo rígido se puede indicar que existe una relación entre las cargas $P$ ( mayúscula) y las deformaciones $p$ (minúscula) al igual que en una estructura. Esta relación se obtiene a través de la matriz de flexibilidad de la siguiente manera:

$$p = f\ P \qquad (7.14)$$

Por lo tanto las cargas internas de un elemento se transforman en deformaciones mediante la matriz de flexibilidad de un elemento. A la matriz $\boldsymbol{f}$ también se la conoce con el nombre de matriz fuerza deformación.

### 7.1.8 Modelo de Giberson

Antes de terminar con el apartado 7.1, dedicado al estudio de la matriz de flexibilidad en el modelo que tiene dos giros en los nudos, para el caso de un elemento axialmente rígido, conviene presentar el modelo de Giberson que se utiliza en análisis no lineal pero cuya formulación está en concordancia con lo indicado en el apartado 7.1.5.

En la figura 7.8 se presenta una viga en la que se han definido tres rigideces a flexión, en el nudo inicial, $(EI)_a$ en el centro de luz, $(EI)_0$ y en el nudo final $(EI)_b$. Cuando el elemento es de sección constante las tres rigideces a flexión son iguales.

**Figura 7.8** Modelo de Plasticidad Concentrada de Giberson

La matriz de flexibilidad $\boldsymbol{f}$ para el modelo de Giberson, es la siguiente:

$$\boldsymbol{f} = \frac{L}{6\,(EI)_0}\begin{bmatrix}(1+S_a) & -1\\ -1 & (1+S_b)\end{bmatrix} \qquad (7.15)$$

$$S_a = \frac{(EI)_0}{(EI)_a} \qquad S_b = \frac{(EI)_0}{(EI)_b}$$

Para un elemento de sección contante $S_a = S_b = 1$. Al reemplazar estos valores se encuentra la misma matriz de flexibilidad que se indicó en el apartado 7.1.5. Lo importante del Modelo de Giberson es que se utiliza cuando las rigideces a flexión no son iguales y esto se presenta cuando hay daño en los elementos.

Al comienzo de un sismo, en una viga de sección constante, las rigideces en el nudo inicial, centro de luz y nudo final son iguales pero cuando el terremoto es intenso se dañan los extremos con lo que la rigidez en dichos puntos es diferente a la del centro de luz y ahí es muy apropiado el modelo de Giberson para definir la matriz de flexibilidad.

## 7.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO $\boldsymbol{k}$

### 7.2.1 Forma general

La matriz de rigidez $\boldsymbol{k}$ (minúscula) de un elemento lineal se va a obtener invirtiendo la matriz de flexibilidad.

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{f}^{-1}$$

Para un elemento de sección constante o variable, la forma general de la matriz de rigidez asociada al sistema de coordenadas del elemento de la figura 7.1 es la siguiente:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

Donde:

$$k_{11} = \frac{f_{22}}{\Delta} \qquad k_{22} = \frac{f_{11}}{\Delta} \qquad k_{33} = \frac{1}{f_{33}}$$

$$k_{12} = k_{21} = -\frac{f_{21}}{\Delta} \qquad \Delta = f_{11} * f_{22} - (f_{21})^2$$

En el apartado 7.1.1 se indican las integrales mediante las cuales se evalúan los términos de la matriz de flexibilidad para un elemento de sección constante o variable.

### 7.2.2 Elementos de sección constante considerando el efecto de corte

La matriz de rigidez de un elemento lineal de sección constante, considerando el efecto de corte, se obtiene invirtiendo la matriz (7.8). El resultado que se obtiene es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

### 7.2.3 Elementos de sección constante sin considerar el efecto de corte

Al sustituir $\phi = 0$ en la matriz (7.17), se encuentra la matriz de rigidez de un miembro lineal de sección constante, sin considerar el efecto de corte. Esta es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \tag{7.18}$$

### 7.2.4 Elementos axialmente rígidos

Por lo expresado en el apartado 7.1.5 de éste capítulo, el sistema de coordenadas de un elemento axialmente rígido es el presentado en la figura 7.6. Al eliminar la tercera fila y columna de la matriz (7.18), se encuentra la matriz de rigidez para un elemento de sección constante en el que se ignora el efecto de corte. Esta es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

Si se desea considerar el efecto de corte, en la matriz (7.17) se debe eliminar la tercera fila y columna.

Es necesario indicar que si bien $p_3 = 0$ (minúscula) esto no implica que la fuerza axial sea nula. En efecto se tiene que $P_3 \neq 0$ (mayúscula).

### 7.2.5 Elementos transversalmente rígidos

Este es el caso de las armaduras planas o celosías en las que se solo existe deformación axial en los elementos. El sistema de coordenadas del elemento se presenta en la figura 7.7. La matriz de rigidez es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

En pórticos planos con elementos transversalmente rígidos existen momentos en los nudos inicial y final que son necesarios para cumplir con la condición de $I = \infty$.

### 7.2.6 Relación deformación fuerza

Así como para una estructura se tiene que $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$ para un elemento lineal se tiene que:

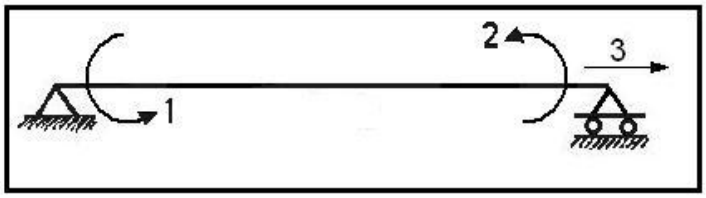
$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{p} \tag{7.21}$$

Por lo tanto las deformaciones de un elemento se transforman en fuerzas internas por medio de la matriz de rigidez de miembro $\boldsymbol{k}$, también conocida como matriz deformación fuerza.

Con el objeto de aclarar algunos conceptos se desarrolla la ecuación (7.21) para un elemento lineal de sección constante, en el que no se considera el efecto de corte. Se tiene:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Se está considerando el sistema de coordenadas de la figura 7.1, para recordar el significado del vector $\boldsymbol{P}$ (mayúscula) y del vector $\boldsymbol{p}$ (minúscula) se presenta nuevamente este gráfico.




Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

Al sustituir los vectores $\boldsymbol{P}$ , $\boldsymbol{p}$ y la matriz de rigidez $\boldsymbol{k}$ en la ecuación (7.21) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Desarrollando se tiene:

$$P_1 = \frac{4EI}{L} p_1 + \frac{2EI}{L} p_2 \qquad (7.22.1)$$

$$P_2 = \frac{2EI}{L} p_1 + \frac{4EI}{L} p_2 \qquad (7.22.2)$$

$$P_3 = \frac{EA}{L} p_3 \qquad (7.22.3)$$

Estas expresiones se las estudia en Estructuras con otra nomenclatura. Se hace hincapié en un concepto que se indicó en el capítulo 2 referente a que se está resolviendo únicamente el problema primario. Por lo tanto se debe añadir las acciones de empotramiento perfecto, a las ecuaciones (7.22.1) a (7.22.3).

## 7.3 OBTENCIÓN DE $f$ Y $k$ UTILIZANDO LA MATRIZ $T$

### 7.3.1 Planteamiento del Problema

Se desea calcular la matriz de flexibilidad y de rigidez para el elemento lineal de la figura 7.9, en el cual los desplazamientos como cuerpo rígido se los ha omitido mediante la colocación de un empotramiento en el nudo inicial. A este sistema de coordenadas se lo diferencia del anterior con la utilización de un asterisco como subíndice.

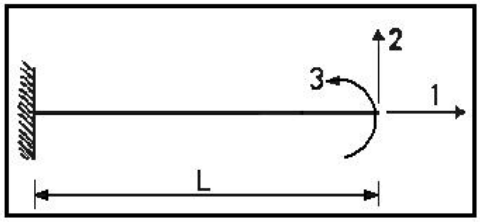



**Figura 7.9** Nuevo sistema de coordenadas del elemento $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$

Por lo tanto $\boldsymbol{k}^*$ y $\boldsymbol{f}^*$ serán las matrices de rigidez y de flexibilidad del elemento para el sistema de coordenadas de la figura 7.9. Están relacionados de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^*\ \boldsymbol{p}^* \qquad \boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{f}^*\ \boldsymbol{P}^* \qquad \boldsymbol{k}^*\ \boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{I} \tag{7.23}$$

Para encontrar $\boldsymbol{k}^*$ y $\boldsymbol{f}^*$ se puede proceder de una manera similar a la desarrollada en los apartados 7.1 y 7.2 de éste capítulo. Se deja al estudiante el cálculo de ésta manera: Otra forma de hacerlo es por medio de la matriz de transformación de coordenadas. En éste caso el sistema viejo de coordenadas es el mostrado en la figura 7.1 y el sistema nuevo de coordenadas el de la figura 7.9. Por lo tanto de acuerdo a lo estudiado en el capítulo 5 el cálculo se lo puede realizar de dos formas:

i) Por medio de la matriz $\boldsymbol{T}$ que relaciona deformaciones: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{p}^*$.

ii) Por medio de la matriz $\boldsymbol{T}_1$ que relaciona cargas internas: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}_1\ \boldsymbol{P}^*$

### 7.3.2 Solución del Problema

Si se considera unos desplazamientos virtuales en un elemento cualquiera que forma parte de un pórtico plano, por ejemplo el de la figura 7.10.1 se observa que la inmovilización como cuerpo rígido puede hacerse considerando los vínculos de la figura 7.10.2 o el empotramiento de la figura 7.10.3.

Entre los sistemas de coordenadas virtuales, figuras 7.10.2 y 7.10.3, se establece la siguiente relación geométrica.

$$\delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T}\ \delta\boldsymbol{p}^* \tag{7.24.1}$$

Ahora bien, el trabajo virtual T.V. producido por las cargas que actúan en la figura 7.1 en los desplazamientos virtuales de la figura 7.10.2 tiene que ser igual al trabajo virtual producido por las cargas que actúan en la figura 7.9 sobre los desplazamientos virtuales de la figura 7.8.3 Esto se debe a que el trabajo virtual es independiente del sistema de coordenadas en que se mida.

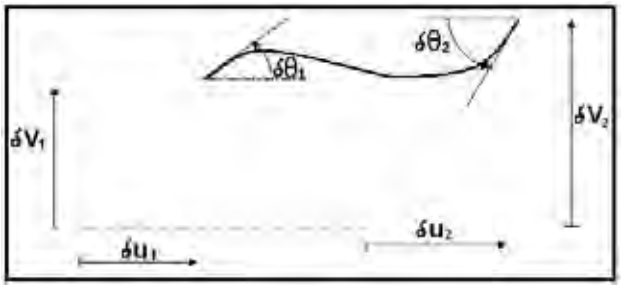



**Figura 7.10.1** Desplazamientos Virtuales.

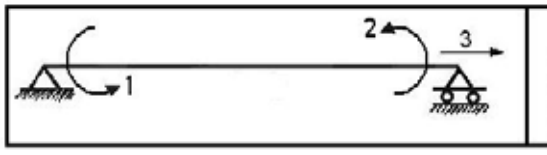



**Figura 7.10.2** Sistema $\delta\boldsymbol{p}$

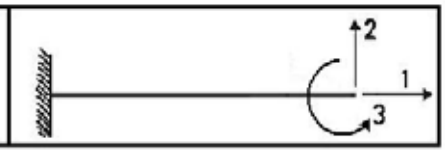



**Figura 7.10.3** Sistema $\delta\boldsymbol{p}^*$

En consecuencia, se tiene:

$$TV = \delta\boldsymbol{p}^t\ \boldsymbol{P} = \delta\boldsymbol{p}^{*t}\boldsymbol{P}^* \tag{7.24.2}$$

Al reemplazar (7.24.1) en (7.24.2)

$$\left(T\ \delta p^*\right)^t\ P = \delta p^{*t} P^* \qquad \Rightarrow \qquad \delta p^{*t}\ T^t\ P = \delta p^{*t}\ P^*$$

Por ser $\delta p^*$ arbitrario, se tiene:

$$P^* = T^t\ P$$

Pero $P = k\ p$. Luego:

$$P^* = T^t\ k\ p$$

Pero $p = T\ p^*$. En consecuencia se tiene que:

$$P^* = \left(T^t\ k\ T\right) p^* \qquad (7.25)$$

Al comparar las ecuaciones (7.25) y (7.23), se concluye que:

$$k^* = T^t\ k\ T \qquad (7.26)$$

Por lo tanto la nueva matriz de rigidez $k^*$ se puede obtener a partir de la matriz $T$, que relaciona las deformaciones de los sistemas de coordenadas de las figuras 7.1 y 7.9

**La ecuación (7.26) es muy utilizada en el Análisis Matricial de Estructuras y en Dinámica de Estructuras ya que conocida la matriz de rigidez $k$ en un sistema determinado de coordenadas se puede hallar por medio de la matriz $T$ la nueva matriz de rigidez en otro sistema de coordenadas.**

Por otra parte, una forma de hallar la matriz de flexibilidad de un elemento $f^*$ sería calculando la matriz inversa de $k^*$ y otra por medio de la matriz $T_1$ (Punto de vista estático). Al examinar el procedimiento para hallar $k^*$ se observa que se ha ejecutado una repetición de conceptos indicados en el Capítulo 5, razón por la cual se deja al lector la demostración de:

$$f^* = T_1^t\ f\ T_1$$

**Resumen**

La matriz de rigidez $k^*$ se obtiene utilizando la geometría:

$$p = T\ p^* \qquad \Rightarrow \qquad k^* = T^t\ k\ T$$

La matriz de flexibilidad $f^*$ se encuentra por medio de la estática.

$$P = T_1\ P^* \qquad \Rightarrow \qquad f^* = T_1^t\ f\ T_1$$

Finalmente se deja al lector la demostración de los siguientes teoremas:

1. Si $p = T\ p^*$. Entonces $P^* = T^t\ P$.
2. Si $P = T_1\ P^*$. Entonces $P^* = T_1^t\ P$

### 7.3.3 Cálculo de la matriz de rigidez usando la geometría

En el apartado 7.2 de éste capítulo, se obtuvo la matriz de rigidez de un elemento $\boldsymbol{k}$ para el sistema de coordenadas de la figura 7.11.1. Ahora se desea calcular $\boldsymbol{k}^*$ para el sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$ de la figura 7.11.2, esto se lo realiza por medio de la matriz $\boldsymbol{T}$ definida por la expresión $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{p}^*$.

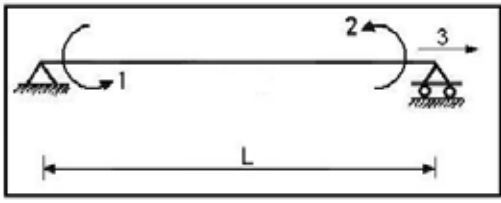



**Figura 7.11.1** Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

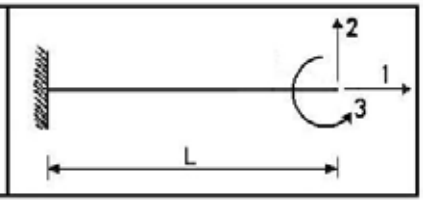



**Figura 7.11.2** Sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$

❖ **Cálculo de la matriz T**

La matriz $\boldsymbol{T}$ se obtiene construyendo las deformadas elementales en el sistema $\boldsymbol{p}^*$ y se mide en el sistema $\boldsymbol{p}$

- Primera columna de $\boldsymbol{T}$

$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$

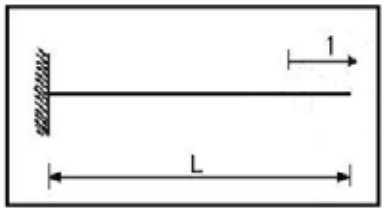



**Figura 7.11.3** Deformada elemental $p_1^*$

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = 1$$

En la primera deformada no existe deformación a flexión, solo hay deformación axial.

- Segunda columna de $\boldsymbol{T}$

$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$

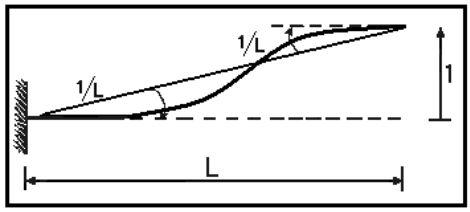



**Figura 7.11.4** Deformada elemental $p_2^*$

$$p_1 = -\frac{1}{L} \qquad p_2 = -\frac{1}{L} \qquad p_3 = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{T}$

$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$

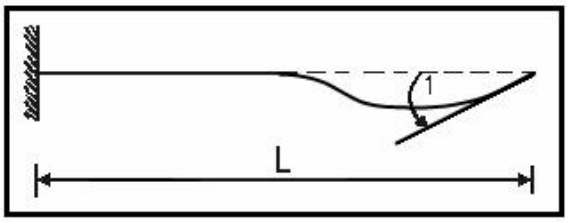



**Figura 7.11.5** Deformada elemental $p_3^*$

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = 1 \qquad p_3 = 0$$

Por lo tanto la matriz $\boldsymbol{T}$ es:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El lector deberá justificar las deformadas presentadas en las figuras 7.11.3 a 7.11.5, así como los elementos de la matriz $\boldsymbol{T}$ . Se recuerdan las fórmulas con las que se obtienen $p_1$, $p_2$ y $p_3$.

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad p_3 = u_2 - u_1$$

La matriz de rigidez para el sistema de coordenadas de la figura 7.11.2 y para el caso de un elemento de sección constante se obtiene mediante la ecuación (7.26).

$$\boldsymbol{k}^* = \boldsymbol{T}^t \, \boldsymbol{k} \, \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{k}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Se ha encontrado la matriz de rigidez del elemento para el sistema de coordenadas indicado en la figura 7.11.2, para el caso en que no se considera el efecto de corte. Cuando se considera dicho efecto la matriz de rigidez resulta.

$$k^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} & \frac{4EI(1+\phi)}{L(1+4\phi)} \end{bmatrix}$$

### 7.3.4 Cálculo de la matriz de flexibilidad usando la estática

Para el efecto es necesario calcular la matriz $\boldsymbol{T}_1$, matriz que relaciona las cargas internas $\boldsymbol{P}$ de la figura 7.11.1 con las cargas internas $\boldsymbol{P}^*$ de la figura 7.11.2. La relación es:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}_1 \ \boldsymbol{P}^*$$

❖ **Cálculo de la matriz $\boldsymbol{T}_1$**

- Primera columna de $\boldsymbol{T}_1$

$$\boldsymbol{P}_1^* = 1 \ \ y \ \ \boldsymbol{P}_i^* = 0 \quad \boldsymbol{i} \neq 1$$

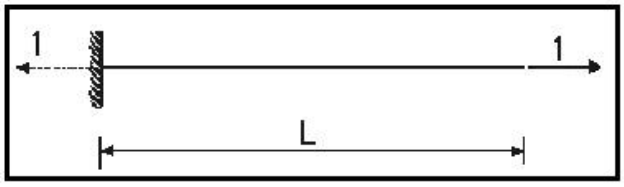



**Figura 7.11.6** Fuerza axial en el voladizo igual a 1.

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = 1$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{T}_1$

$$P_2^* = 1 \ \ y \ \ P_i^* = 0 \quad i \neq 2$$

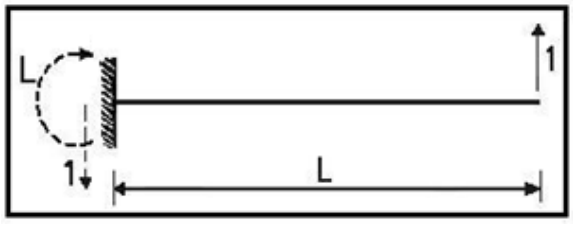



**Figura 7.11.7** Fuerza de corte en el voladizo igual a 1.

$$P_1 = -L \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{T}_1$

$$P_3^* = 1 \;\; y \;\; P_i^* = 0 \quad i \neq 3$$

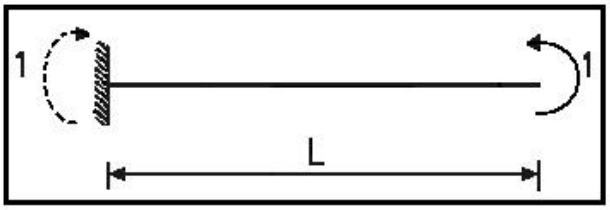



**Figura 7.11.8** Momento en el voladizo igual a 1.

$$P_1 = -1 \qquad P_2 = 1 \qquad P_3 = 0$$

El valor de $P_1 = -1$ debido a que el momento es horario y la convención de signos positiva es anti horario positivo.

Por lo tanto la matriz $\boldsymbol{T}_1$ es la siguiente:

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -L & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad resulta:

$$\boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{T}_1^t \; \boldsymbol{f} \; \boldsymbol{T}_1$$

$$\boldsymbol{f}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -L & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -L & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}^* = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Cuando se considera el efecto de corte se tiene:

$$f^* = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI}(1+\phi) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

### 7.3.5 Obtención de $k$ y $f$ cuando se cambia la numeración del sistema de coordenadas

Si el sistema de coordenadas del elemento lineal de la figura 7.9 se numera en forma diferente, por ejemplo según lo expresado en la figura 7.12, y si se desea obtener la matriz de rigidez o la matriz de flexibilidad en éste nuevo sistema de coordenadas, evidentemente que la forma más fácil de lograr éste objetivo es a través de la matriz de transformación de coordenadas.

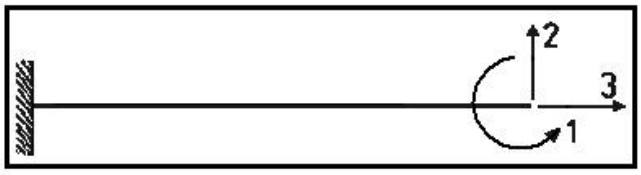



**Figura 7.12** Nuevo sistema $P^* - p^*$

En el sistema mostrado en la figura 7.12, $p_3^*$ es la deformación axial mientras que en el sistema de la figura 7.9 ésta corresponde a $p_1$. Es decir se cambió la numeración de la deformación **uno por tres y viceversa**. Ahora el sistema *viejo* de coordenadas corresponde al de la figura 7.9

Para presentar el método directo de cálculo de la matriz de rigidez y de la matriz de flexibilidad cuando se cambia el sistema de numeración se va a explicar a continuación el procedimiento de cálculo pero orientado a la matriz de rigidez únicamente pero el procedimiento es similar para la matriz de flexibilidad.

Por didáctica se indican nuevamente estos dos sistemas de coordenadas en las figuras 7.13.1 y 7.13.2 con el objeto de tener una mejor comprensión.

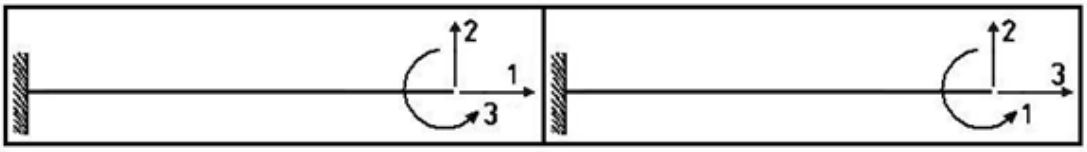



**Figura 7.13.1** Sistema viejo de coordenadas **Figura 7.13.2** Sistema nuevo de coordenadas.

La nueva matriz de rigidez $k^*$ es igual a $T^t\, k\, T$ siendo $k$ la matriz de rigidez para el sistema de coordenadas de la figura 7.13.1 y la matriz $T$ es la matriz de paso desde las coordenadas de la figura 7.13.1 a las coordenadas de la figura 7.13.2. La matriz $T$ que se obtiene es:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al efectuar la operación $\boldsymbol{k}^* = \boldsymbol{T}^t\ \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{T}$, se obtiene:

$$\boldsymbol{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Se llega al mismo resultado con la siguiente regla: se cambian los elementos de la primera fila a la tercera fila y posteriormente los elementos de la primera columna a la tercera columna en el sistema *viejo* de coordenadas. A continuación se indica el cambio de los elementos de la primera fila a la tercera fila.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se cambia la primera columna a la tercera y viceversa, con lo que se halla $\boldsymbol{k}^*$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

En consecuencia **para obtener la matriz de rigidez de un elemento en el cual se ha cambiado el sistema de numeración de sus coordenadas, se deberá intercambiar las filas y columnas de acuerdo al cambio de numeración que se haya efectuado**. Lo propio se hace para obtener la matriz de flexibilidad. La regla indicada no solo se aplica a un elemento sino también a una estructura.

## 7.4 FUNCIONES DE FORMA

Se denomina $\emptyset_1(x)$, $\emptyset_2(x)$, $\emptyset_3(x)$ a las funciones de forma, asociadas con el modelo de cálculo de la figura 7.1, éste modelo se repite a continuación.

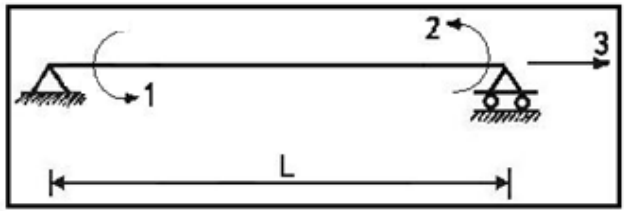



**Figura 7.14** Modelo de cálculo para un elemento totalmente flexible.

Se recuerda que las funciones de forma reportan las ordenadas de la elástica, así la función de forma $\emptyset_1(x)$ da el valor de $v(x)$ cuando existe un giro en el nudo inicial y las demás nulas en el modelo de cálculo de la figura 7.14; lo propio sucede con $\emptyset_2(x)$. La función de forma $\emptyset_3(x)$ reporta el valor de $u(x)$, en cualquier punto de la viga cuando existe el desplazamiento axial en el nudo final.

### 7.4.1 Cálculo de $\emptyset_1(x)$ para un elemento de sección constante

Para calcular $\emptyset_1(x)$ se aplica un momento unitario en el nudo inicial. En el apartado 7.1 se encontró que la ecuación de momentos para este caso es.

$$M = \frac{x}{L} - 1 = -\frac{L - x}{L}$$

De la Resistencia de Materiales se conoce que.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Al reemplazar la ecuación de momentos se tiene.

$$EI\ \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{x}{L} - 1$$

Al integrar una vez se halla el giro $\theta(x)$ y la segunda integral es $v(x)$.

$$EI\ \theta(x) = \frac{x^2}{2\,L} - x + A$$

$$EI\ v(x) = \frac{x^3}{6\,L} - \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

Las condiciones de contorno para la viga de la figura 7.14, son en $x = 0$ y en $x = L$ el desplazamiento vertical es cero.

$$i)\ x = 0 \rightarrow v(x) = 0$$

$$ii)\ x = L \rightarrow v(x) = 0$$

Con la primera condición se obtiene.

$$B = 0$$

Con la segunda condición se encuentra.

$$A = \frac{L^2}{3}$$

Por lo tanto, al remplazar las dos constantes de integración, se obtiene $v(x)$ que es la función de forma $\emptyset_1(x)$

$$\emptyset_1(x) = \frac{x^3 - 3\,L\,x^2 + 2\,L^2\,x}{6\,E\,I\,L} \tag{7.27}$$

### 7.4.2 Cálculo de $\emptyset_2(x)$ para un elemento de sección constante

En este caso el momento unitario se aplica en el nudo final; la ecuación de momentos es:

$$M = \frac{x}{L}$$

Luego.

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{x}{L}$$

$$EI\,\theta(x) = \frac{x^2}{2\,L} + A$$

$$EI\,v(x) = \frac{x^3}{6\,L} + Ax + B$$

Las condiciones de contorno son las mismas que para $\emptyset_1(x)$

$$i)\ x = 0 \rightarrow v(x) = 0$$

$$ii)\ x = L \rightarrow v(x) = 0$$

Con la primera condición se tiene.

$$B = 0$$

Con la segunda condición se halla.

$$A = -\frac{L}{6}$$

Al remplazar las constantes de integración se tiene

$$EI\,v(x) = \frac{x^3}{6\,L} - \frac{L}{6}x \qquad \rightarrow v(x) = -\frac{x(L^2 - x^2)}{6\,E\,I\,L}$$

$$\emptyset_2(x) = -\frac{x(L^2 - x^2)}{6\,E\,I\,L} \tag{7.28}$$

### 7.4.3 Cálculo de $\emptyset_3(x)$ para un elemento de sección constante

Al aplicar la fuerza axial, unitaria en el nudo final, se tiene.

$$E\,A\,\emptyset_3'(x) = 1$$

De donde.

$$E\,A\,\emptyset_3(x) = x + A \qquad \rightarrow E\,A\,u(x) = x + A$$

En $x = 0$ se tiene que $u(x) = 0$. Luego la constante de integración $A = 0$. Finalmente se tiene:

$$\emptyset_3(x) = \frac{x}{EA} \tag{7.29}$$

- **EJEMPLO 3**

Utilizando las funciones de forma determinar los elementos de la matriz de flexibilidad para el sistema de la figura 7.14.

- **SOLUCIÓN**

El valor de $f_{11}$ es el giro en $x = 0$. Por lo que se debe derivar la ecuación $\emptyset_1(x)$

$$\emptyset_1'(x) = \frac{3x^2 - 6\,L\,x + 2\,L^2}{6\,E\,I\,L} \tag{7.30}$$

Al sustituir $x = 0$ en la ecuación (7.30) se tiene:

$$f_{11} = \frac{L}{3\,E\,I}$$

Para encontrar $f_{12}$ se reemplaza en la ecuación (7.30) $x = L$

$$f_{12} = \frac{3\,L^2 - 6\,L^2 + 2\,L^2}{6\,E\,I\,L} = -\frac{L}{6EI}$$

La derivada de la ecuación (7.28) permite calcular el valor de $f_{22}$

$$\emptyset_2(x) = -\frac{x\,L^2 - x^3}{6\,E\,I\,L} \qquad \rightarrow \emptyset_2'(x) = -\frac{L^2 - 3\,x^2}{6\,E\,I\,L} \tag{7.31}$$

Al remplazar $x = L$, en (7.31) se tiene:

$$f_{22} = \frac{L}{3\,EI}$$

El cálculo de $f_{33}$ es directo, se remplaza $x = L$ en la ecuación (7.29). Con lo que se halla.

$$f_{33} = \frac{L}{EA}$$

La matriz de flexibilidad que se ha obtenido es la siguiente.

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix}$$

Nótese que en la matriz de flexibilidad encontrada, a partir de las funciones de forma, no aparece el efecto del corte. Todo esto debido a que se ha trabajado con la Teoría de Vigas de Euler-Bernouilli. Con la Teoría de Vigas de Timoshenko si se obtiene la matriz de flexibilidad considerando el efecto de corte. Lamar y Fortoul 2007.

- **EJEMPLO 4**

Determinar las funciones de forma y la matriz de flexibilidad de la viga indicada en la figura 7.15. Si para el intervalo $0 < x \leq L/2$, el área y la inercia valen: $A, I$. Para el intervalo $\frac{L}{2} < x \leq L$, el área y la inercia son: $2A, 2I$. Se desprecia el efecto del corte.

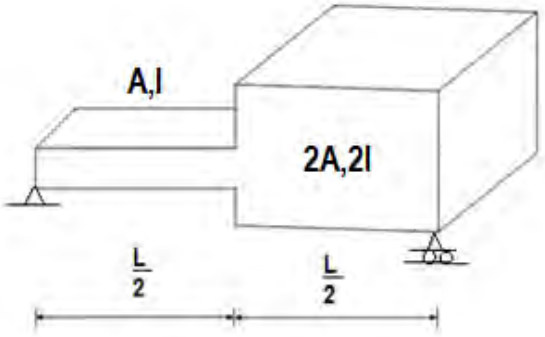



**Figura 7.15** Viga de sección variable

- **SOLUCIÓN**

- **Cálculo de $\emptyset_1(x)$**

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{L/2}$$

$$EI\ \emptyset_1''(x) = \frac{x}{L} - 1$$

$$EI\ \emptyset_1'(x) = \frac{x^2}{2\,L} - x + A$$

$$EI\ \emptyset_1(x) = \frac{x^3}{6\,L} - \frac{x^2}{2} + A\,x + B$$

$$\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{L}$$

$$2\ EI\ \emptyset_1''(x) = \frac{x}{L} - 1 \qquad \rightarrow EI\ \emptyset_1''(x) = \frac{x}{2\,L} - \frac{1}{2}$$

$$EI\ \emptyset_1'(x) = \frac{x^2}{4\,L} - \frac{x}{2} + C$$

$$EI\ \emptyset_1(x) = \frac{x^3}{12\,L} - \frac{x^2}{4} + C\,x + D$$

Las condiciones de contorno para hallar las constantes de integración son:

$$i) \quad \emptyset_1(x = 0) = 0$$

$$ii) \quad \emptyset_1(x = L) = 0$$

$$iii) \quad \emptyset_1\left(x = \frac{L}{2}\right) - = \emptyset_1\left(x = \frac{L}{2}\right) +$$

$$iv)\ \emptyset_1'\left(x=\frac{L}{2}\right)-=\emptyset_1'\left(x=\frac{L}{2}\right)+$$

Las dos primeras condiciones se relacionan a que en los apoyos el desplazamiento vertical es nulo y las dos últimas condiciones a la continuidad en $x = L/2$. En el centro de luz el desplazamiento y giro es el mismo al aplicar la ecuación para el primer intervalo y al aplicar la ecuación para el segundo intervalo. Con las cuatro condiciones se hallan las siguientes ecuaciones, en este orden.

$$B = 0$$

$$C\,L\, + D = \frac{L^2}{6}$$

$$\frac{C\,L}{2} + D - \frac{A\,L}{2} = -\frac{5\,L^2}{96}$$

$$C - A = -\frac{3\,L}{16}$$

La solución de las ecuaciones es:

$$A = \frac{5L}{16} \qquad B = 0 \qquad C = \frac{L}{8} \qquad D = \frac{L^2}{24}$$

Finalmente la función de forma $\emptyset_1(x)$ resulta:

$$\mathbf{0}\ \leq \boldsymbol{x} \leq \frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{2}} \qquad \emptyset_1(x) = \frac{8\,x^3 - 24\,x^2L + 15\,L^2x}{48\,E\,I\,L}$$

$$\frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{x}\ \leq \boldsymbol{L} \qquad \boldsymbol{\emptyset_1(x)} = \frac{2\,x^3 - 6\,x^2L + 3\,L^2\,x + L^3}{24\,EI\,L}$$

- **Cálculo de $\emptyset_2(x)$**

$$\mathbf{0}\ \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{L/2}$$

$$EI\,\emptyset_2''(x) = \frac{x}{L}$$

$$EI\,\emptyset_2'(x) = \frac{x^2}{2\,L} + A$$

$$EI\,\emptyset_2(x) = \frac{x^3}{6\,L} + A\,x + B$$

$$\frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{x}\ \leq \boldsymbol{L}$$

$$2\,EI\,\emptyset_2''(x) = \frac{x}{L} \qquad \rightarrow EI\ \emptyset_2''(x) = \frac{x}{2\,L}$$

$$EI\,\emptyset_2'(x) = \frac{x^2}{4\,L} + C$$

$$EI\,\emptyset_2(x) = \frac{x^3}{12\,L} + C\,x + D$$

Las condiciones de contorno son las mismas y se indican a continuación pero con $\emptyset_2(x)$

$$i) \quad \emptyset_2(x=0)=0$$

$$ii) \quad \emptyset_2(x=L)=0$$

$$iii) \quad \emptyset_2\left(x=\frac{L}{2}\right)-=\ \emptyset_2\left(x=\frac{L}{2}\right)+$$

$$iv) \quad \emptyset_2'\left(x=\frac{L}{2}\right)-=\emptyset_2'\left(x=\frac{L}{2}\right)+$$

Al sustituir las condiciones se halla:

$$B=0$$

$$C\,L+D=\ -\frac{L^2}{12}$$

$$\frac{C\,L}{2}+D-\frac{A\,L}{2}=\frac{L^2}{96}$$

$$C-A=\frac{L}{16}$$

La solución de las ecuaciones reporta.

$$A=\ -\frac{L}{8} \qquad B=0 \qquad C=-\frac{L}{16} \qquad D=-\frac{L^2}{48}$$

Luego la función de forma $\emptyset_2(x)$ es:

$$\mathbf{0}\ \leq \boldsymbol{x} \leq \frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{2}} \qquad \emptyset_2(x)=\frac{8\,x^3-6\,L^2x}{48\,E\,I\,L}$$

$$\frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{2}}\ \leq \boldsymbol{x}\ \leq \boldsymbol{L} \qquad \emptyset_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x})=\frac{4\,x^3-3\,L^2\,x-\ L^3}{48\,EI\,L}$$

- **Cálculo de $\emptyset_3(x)$**

$$\mathbf{0}\ \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{L/2}$$

$$E\,A\,\emptyset_3'(x)=1$$

$$E\,A\,\emptyset_3(x)=x+A$$

$$\boldsymbol{L/2}\ \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{L}$$

$$2\,E\,A\,\emptyset_3'(x)=1 \qquad \rightarrow E\,A\,\emptyset_3'(x)=\frac{1}{2}$$

$$E\,A\,\emptyset_3(x)=\frac{x}{2}+B$$

Las condiciones de contorno son:

$$i) \quad \emptyset_3(x=0)=0$$

$$ii) \quad \emptyset_3\left(x=\frac{L}{2}\right)-=\ \emptyset_3\ \left(x=\frac{L}{2}\right)+$$

Se recuerda que $\emptyset_3(x)$ es el desplazamiento horizontal $u(x)$. Las condiciones de contorno reportan.

$$A=0 \qquad B=-\frac{L}{4}$$

Con lo que se encuentra que la función de forma $\emptyset_3(x)$ es:

$$\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}} \qquad \emptyset_3(x)=\frac{x}{E\,A}$$

$$\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{L} \qquad \emptyset_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{x})=\frac{2x-L}{4\,EA}$$

- **EJEMPLO 5**

Calcular la función de forma $\emptyset_1(x)$ de la viga de altura variable, indicada en la figura 7.16; la altura en el nudo inicial es $h_0$ y la altura en el nudo final es $2\,h_0$. El ancho de la viga es constante $b$.

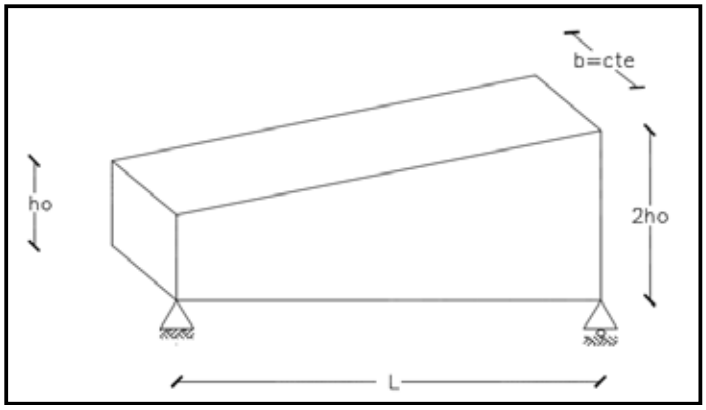



**Figura 7.16** Viga se altura variable de Ejemplos 5 y 6.

- **SOLUCIÓN**

- **Variación de altura**

$$m=\frac{2\,h_0-\,h_0}{L}=\frac{h_0}{L}$$

$$h(x)-h_0=m\,x \qquad \rightarrow h(x)=\frac{h_0}{L}\,(x+L)$$

- **Variación de la Inercia**

$$I=\frac{b\,h_{(x)}^3}{12}=\frac{bh_0^3}{12}\left(\frac{x+L}{L}\right)^3=I_0\left(\frac{x+L}{L}\right)^3$$

$$I_0=\frac{b\,h_0^3}{12}$$

- **Cálculo del giro**

$$EI\ \emptyset_1''(x) = \left(\frac{x}{L} - 1\right) \qquad \rightarrow EI_0\ \left(\frac{x+L}{L}\right)^3\ \emptyset_1''(x) = \frac{x-L}{L}$$

$$\frac{E\ I_0}{L^2}\ \emptyset_1''(x) = \frac{x-L}{(x+L)^3}$$

Para integrar se hace el siguiente cambio de variable:

$$x + L = y \qquad \rightarrow x = y - L \qquad \rightarrow dx = dy$$

$$\frac{E\ I_0}{L^2}\ \emptyset_1'(x) = \int \frac{y - 2L}{y^3}\ dy = \int y^{-2}\ dy - 2L \int y^{-3}\ dy$$

$$\frac{E\ I_0}{L^2}\ \emptyset_1'(x) = \frac{y^{-1}}{-1} - 2\ L\ \frac{y^{-2}}{-2} + A = -\frac{1}{y} + \frac{L}{y^2} + A$$

$$\frac{E\ I_0}{L^2}\ \emptyset_1'(x) = -\frac{1}{x+L} + \frac{L}{(x+L)^2} + A$$

- **Cálculo del desplazamiento vertical**

$$\frac{E\ I_0}{L^2}\ \emptyset_1(x) = \int -\frac{1}{y}\ dy + \int L\ y^{-2}\ dy + Ax + B$$

$$\frac{E\ I_0}{L^2}\ \emptyset_1(x) = -ln(x+L) - \frac{L}{x+L} + Ax + B$$

- **Cálculo de constantes de integración**

**i)** $\emptyset_1(\boldsymbol{x = 0}) = \mathbf{0}$
**ii)** $\emptyset_1(\boldsymbol{x = L}) = \mathbf{0}$

Con la primera condición se obtiene: $0 = -\ln L - 1 + B$

$$B = 1 + \ln L$$

Con la segunda condición se halla: $0 = -\ln(2L) - \frac{1}{2} + A\ L + B$

$$0 = -\ln(2L) - \frac{1}{2} + A\ L + 1 + \ln L \qquad \rightarrow AL = ln(2L) - lnL - \frac{1}{2}$$

$$A\ L = ln\frac{2L}{L} - \frac{1}{2} \qquad \rightarrow AL = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{2\ln 2 - 1}{2L}$$

- **Función de forma $\emptyset_1(x)$**

$$\frac{E\ I_0}{L^2}\ \emptyset_1(x) = -ln\ (x+L) - \frac{L}{(x+L)} + \frac{2\ ln\ 2 - 1}{2L}\ x + 1 + ln\ L$$

$$\frac{E\,I_0}{L^2}\,\emptyset_1(x) = -\ln\left(\frac{x+L}{L}\right) + \frac{x}{x+L} + \frac{2\ln 2 - 1}{2L}\,x$$

$$\emptyset_1(x) = \frac{L^2}{E\,I_0}\left[-\ln\left(\frac{x+L}{L}\right) + \frac{x}{x+L} + \frac{2\ln 2 - 1}{2L}\,x\right]$$

- **Funciones de forma restantes**

  Las restantes funciones de forma son las siguientes.

$$\emptyset_2(x) = \frac{L^2}{E\,I_0}\left[\frac{x}{2\,(x+L)} - \ln\left(\frac{x+L}{L}\right) + \frac{4\ln 2 - 1}{4L}\,x\right]$$

$$\emptyset_3(x) = \frac{L}{EA_0}\ln\frac{x+L}{L}$$

Este ejercicio fue tomado del libro “Análisis Estático de Estructuras. Formulación Matricial” de los Profesores: Simón Lamar y Celso Fortoul, publicado en Caracas, en el 2007. Simón Lamar Ph.D., fue uno de los mejores profesores que el autor de este libro ha tenido en su vida. Los editores del libro fueron mis compañeros del IMME (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales de la U. C. de Venezuela) Marianela Lafuente y Carlos Genatios, excelentes estudiantes y amigos.

- **EJEMPLO 6**

  Determinar la matriz de flexibilidad de la viga de altura variable presentada en la figura 7.16.

- **SOLUCIÓN**

  Los giros se hallan con las siguientes ecuaciones.

$$\emptyset_1'(x) = \frac{L^2}{EI_0}\left[-\frac{1}{x+L} + \frac{L}{(x+L)^2} + \frac{2\ln 2 - 1}{2L}\right]$$

$$\emptyset_2'(x) = \frac{L^2}{EI_0}\left[\frac{L}{2\,(x+L)^2} - \frac{1}{(x+L)} + \frac{4\,ln2 - 1}{4L}\right]$$

La primera fila de la matriz de flexibilidad se encuentra sustituyendo $x = 0$ con lo que se determina $f_{11}$ y $x = L$ con lo que se halla $f_{12}$ en $\emptyset_1'(x)$. El $f_{21} = f_{12}$; para encontrar $f_{22}$ se evalúa $\emptyset_2'$ en $x = L$. Finalmente $f_{33}$ se encuentra sustituyendo $x = L$ en $\emptyset_3(x)$.

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2EI_0}\,(2\,ln2 - 1) & -\frac{L}{EI_0}\left(\frac{3}{4} + ln2\right) & 0 \\ -\frac{L}{EI_0}\left(\frac{3}{4} + ln2\right) & \frac{L\,ln2}{E\,I_0} - \frac{5\,L}{8\,E\,I_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L\,ln2}{E\,A_0} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 7**

Encontrar la función de forma $\emptyset_1(x)$ para la viga de sección variable de la figura 7.17; la altura en el nudo inicial es $h_o$ y crece en forma lineal hasta $2h_o$ en el centro de luz y desde este punto se mantiene constante hasta el nudo final. Por otro lado el ancho de la viga es constante y vale $b$.

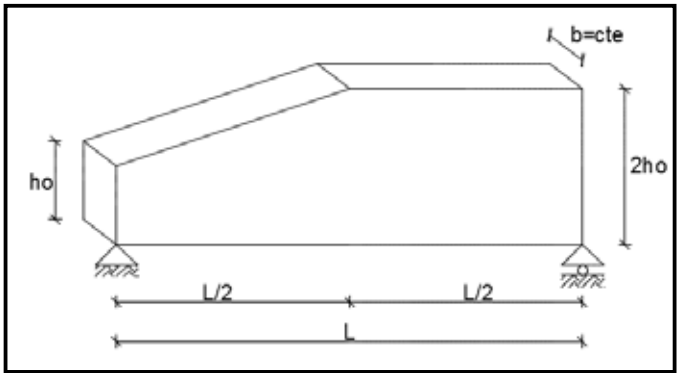



**Figura 7.17** Viga de sección variable de Ejemplo 7

- **SOLUCIÓN**

**Calculo de $\emptyset_1(x)$ para el dominio $0 < x < L/2$**

- **Variación de la altura**

$$(h(x) - ho) = \frac{ho}{\frac{L}{2}}(x - 0)$$

$$h(x) = ho\left(\frac{2x + L}{L}\right)$$

- **Variación de la Inercia**

$$I(x) = \frac{b * \left(ho\left(\frac{2x + L}{L}\right)\right)^3}{12}$$

$$I(x) = Io * \left(\frac{2x + L}{L}\right)^3$$

- **Ecuación diferencial inicial**

$$E.I(x).\emptyset_1''(x) = \left(\frac{x - L}{L}\right)$$

$$E.Io * \left(\frac{2x + L}{L}\right)^3.\emptyset_1''(x) = \left(\frac{x - L}{L}\right)$$

$$\frac{E.Io}{L^2} * \emptyset_1''(x) = \left(\frac{x - L}{(2x + L)^3}\right)$$

- **Cálculo de $\emptyset_1'(x)$**

$$\frac{E.Io}{L^2} * \emptyset_1''(x) = \int \left(\frac{x - L}{(2x + L)^3}\right) dx$$

$$si\ 2x + L = y$$
$$\frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow dx = \frac{dy}{2}$$

$$E\frac{I_o}{L^2}\emptyset''_{1(x)} = \frac{y - 3L}{2y^2} * \frac{dy}{2}$$

$$E\frac{I_o}{L^2}\emptyset_1'(x) = \int \frac{y-3L}{2y^2} * \frac{dy}{2}$$

$$E\frac{I_o}{L^2}\emptyset_1'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3L}{2(2x+L)^2} - \frac{1}{2x+L}\right) + A$$

- **Cálculo de $\emptyset_1(x)$**

$$\frac{E.Io}{L^2} * \emptyset_1(x) = \int \frac{1}{4}\left(\frac{3L}{2(2x+L)^2} - \frac{1}{2x+L}\right) + A \quad dx$$

$$\frac{E.Io}{L^2} * \emptyset_1(x) = \frac{1}{4}\left(-\frac{\ln(2x+L)}{2} - \frac{3L}{4(2x+L)}\right) + Ax + B$$

$$\emptyset_1(x) = \left(\frac{1}{4}\left(-\frac{\ln(2x+L)}{2} - \frac{3L}{4(2x+L)}\right) + Ax + B\right) * \frac{L^2}{E * Io}$$

**Calculo de $\emptyset_1(x)$ para el dominio $L/2 < x < L$**

- **Variación de la Inercia**

$$I = b * \frac{(2 * ho)^3}{12}$$
$$I = 8 * Io$$

- **Ecuación diferencia Inicial**

$$E * 8 * Io * \emptyset_1''(x) = \frac{x-L}{L}$$

- Integración de $\emptyset_1''(x)$

$$8EI_o\ \emptyset_1'(x) = \frac{x(x-2L)}{2L} + C$$
$$8EI_o\ \emptyset_1(x) = \frac{x^2(x-3L)}{6L} + Cx + D$$

- **Condiciones de Borde.**

$$\boldsymbol{i)} \quad \emptyset_2(x=0) = 0$$

$$ii) \quad \emptyset_2(x=L) = 0$$

$$iii) \quad \emptyset_2\left(x=\frac{L}{2}\right) - = \emptyset_2\left(x=\frac{L}{2}\right) +$$
$$iv) \quad \emptyset_2'\left(x=\frac{L}{2}\right) - = \emptyset_2'\left(x=\frac{L}{2}\right) +$$

- **Constantes de Integración**

$$A = \frac{12\ln(2) - 7}{96L}$$
$$B = \frac{\ln(L)}{8} + \frac{3}{16}$$

$$C = \frac{L}{24}\,(24\ln(2) - 11)$$

$$D = -\frac{L^2}{24}(24\ln(2) - 19)$$

- **Función de forma $\emptyset_1(x)$**

  - Para el intervalo $0 \leq x \leq L/2$

$$\emptyset_1(x) = \left(-\frac{\ln(2x+L)}{8} - \frac{3L}{16(2x+L)} + \left(\frac{12\ln(2) - 7}{96L}\right)x + \frac{\ln(L)}{8} + \frac{3}{16}\right) * \frac{L^2}{E * Io}$$

  - Para el intervalo $L/2 \leq x \leq L$

$$\emptyset_1(x) = \left(\frac{x^2(x-3L)}{6L} + \left(\frac{L}{24}\,(24\ln(2) - 11)\right)x - \frac{L^2}{24}(24\ln(2) - 19)\right)\left(\frac{1}{8EIo}\right)$$

## 7.5 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- **EJEMPLO 8**

Encontrar el coeficiente de forma $\beta$ de la sección rectangular de la figura 7.4 si el momento estático $S$ y el momento de inercia a flexión $I$ se calculan con respecto al eje X que se indica en la figura 7.18.

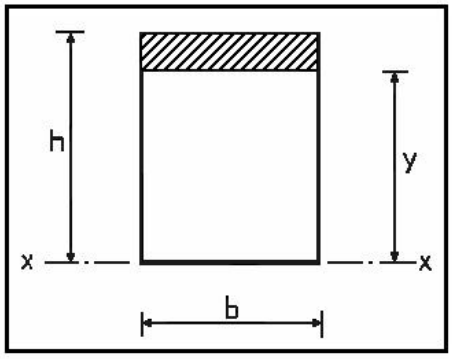



**Figura 7.18** Ubicación del X para ejemplo 8

- **SOLUCIÓN**

Por ser de sección constante:

$$\beta = \frac{A}{I_X^2\ b^2}\int S_X^2\ dA$$

$$dA = b\ dY \qquad A = b\ h \qquad I = \frac{b\ h^3}{3}$$

$$S_X = b(h-Y)\left(Y + \frac{h-Y}{2}\right) = \frac{b}{2}(h-y)(h+y)$$

$$S_X = \frac{b}{2}\left(h^2 - Y^2\right)$$

$$\beta = \frac{b\ h}{\left(\frac{b\ h^3}{3}\right)^2 b^2}\int_0^h \left(\frac{b}{2}\left(h^2 - Y^2\right)\right)^2 b\ dY$$

$$\beta = \frac{9b^4h}{4b^4h^6}\int_0^h \left(h^4 - 2h^2Y^2 + Y^4\right)dY = \frac{9}{4h^5}\left|h^4Y - 2h^2\frac{Y^3}{3} + \frac{Y^5}{5}\right|_0^h$$

$$\beta = \frac{9}{4h^5}\left(h^5 - 2\frac{h^5}{3} + \frac{h^5}{5}\right) = \frac{9}{4}\left(\frac{15-10+3}{15}\right) = \frac{9}{4} * \frac{8}{15} = \frac{6}{5} = 1.2$$

- **EJEMPLO 9**

Encontrar el valor de $\phi$ para una columna cuadrada de 30 cm. por 30 cm. (b x h ) y para una columna rectangular de 30 cm. por 150 cm. Si $E = 2173706.5\ T/m^2$ y $G = 869482.6\ T/m^2$. En los dos casos la longitud es de 3.0 m.

- **SOLUCIÓN**

  - **Columna de b=30 cm. y h=30 cm.**

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3 * 0.3^3}{12} = 0.000675\ m^4$$

$$A = b\ h = 0.3 * 0.3 = 0.09\ m^2$$

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} = \frac{3 * 1.2 * 2173706.5 * 0.000675}{869482.6 * 0.09 * 3.0^2} = 0.0075$$

  - **Columna de b=30 cm. y h=150 cm.**

$$I = \frac{b\ h^3}{12} = \frac{0.3 * 1.5^3}{12} = 0.084375\ m^4$$

$$A = b\ h = 0.3 * 1.5 = 0.45\ m^2$$

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} = \frac{3 * 1.2 * 2173706.5 * 0.084375}{869482.6 * 0.45 * 3^2} = 0.1875$$

En columnas de pequeñas dimensiones el valor de $\phi$ es muy pequeño y se lo puede despreciar, en el ejemplo desarrollado se ha visto que para la columna cuadrada de 30 cm. de lado el

valor de $\phi$ es 0.0075 prácticamente cero. En cambio en columnas de grandes dimensiones o en muros de corte el valor de $\phi$ tiene importancia, su omisión puede conducir a errores apreciables, lo propio sucede en vigas esbeltas. En la columna de 30/150 el valor de $\phi$ es 0.1875 cantidad distante de cero.

- **EJEMPLO 10**

Para la columna rectangular de 30 cm. por 150 cm. (b x h) del ejemplo anterior, determinar la matriz de rigidez del elemento para el sistema de coordenadas del elemento de la figura 7.1. Calcular de dos formas: i) Sin considerar el efecto de corte, y, ii) Considerando el efecto de corte.

- **SOLUCIÓN**

  - **Sin considerar el efecto de corte**

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4 * 2173706.5 * 0.084375}{3} = 244541.97\ Tm.$$
$$\frac{2EI}{L} = \frac{2173706.5 * 0.084375}{3} = 122270.98\ Tm.$$
$$\frac{EA}{L} = \frac{2173706.5 * 0.45}{3} = 326055.97\ \frac{T}{m}$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 244541.97 & 122270.98 & 0.00 \\ 122270.98 & 244541.97 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 326055.97 \end{bmatrix}$$

  - **Considerar el efecto de corte**

$$\frac{1+\phi}{1+4\phi} = \frac{1+0.1875}{1+4*0.1875} = 0.67857 \quad \Rightarrow \quad \frac{4EI}{L}\frac{1+\phi}{1+4\phi} = 244541.97 * 0.67857 = 165938.84$$
$$\frac{1-2\phi}{1+4\phi} = \frac{1-2*0.1875}{1+4*0.1875} = 0.35714 \quad \Rightarrow \quad \frac{2EI}{L}\frac{1-2\phi}{1+4\phi} = 122270.98 * 0.35714 = 43667.857$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165938.84 & 43667.857 & 0.00 \\ 43667.857 & 165938.84 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 326055.97 \end{bmatrix}$$

Al comparar las dos matrices de rigidez del elemento se observa que existe una diferencia notable en los valores. Por lo tanto es importante considerar el efecto de corte. Actualmente se disponen ordenadores con mucha capacidad de memoria de tal manera que es mejor considerar el

efecto de corte para cualquier tipo de elemento su programación es muy sencilla. En el libro únicamente por efecto de escritura no se considerará el efecto de corte.

- **EJEMPLO 11**

Encontrar el giro en el nudo inicial de la viga de la figura 7.19 si se aplica un Momento de 5Tm. La viga es de 30/30 cm., y tiene un módulo de elasticidad de 2173706.5 T/m2.

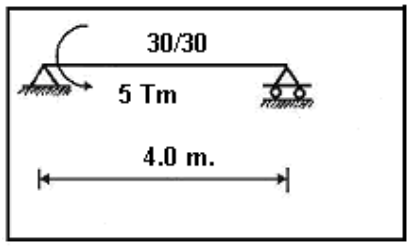



**Figura 7.19** Viga de sección constante de ejemplo 11.

- **SOLUCIÓN**

Sea $\alpha$ el giro en el nudo inicial debido al Momento de 5 Tm. Por otro lado se conoce que al aplicar un momento unitario el giro en el nudo inicial es de $\frac{L}{3EI}$. Como se está trabajando en el rango elástico al aplicar un momento de 5 Tm. el giro será $\alpha = \frac{5L}{3EI}$

$$EI = 2173706.5 * 0.000675 = 1467.2518\ Tm^2$$

$$\alpha = \frac{5L}{3EI} = \frac{5\ Tm * 4m}{3 * 1467.2518\ Tm^2} = 0.0045436\ rad.$$

- **EJEMPLO 12**

Determinar el momento de inercia de la viga “T” indicada en la figura 7.20, de dos formas y posteriormente encontrar las dimensiones de una sección rectangular equivalente que tenga la misma área y momento de inercia.

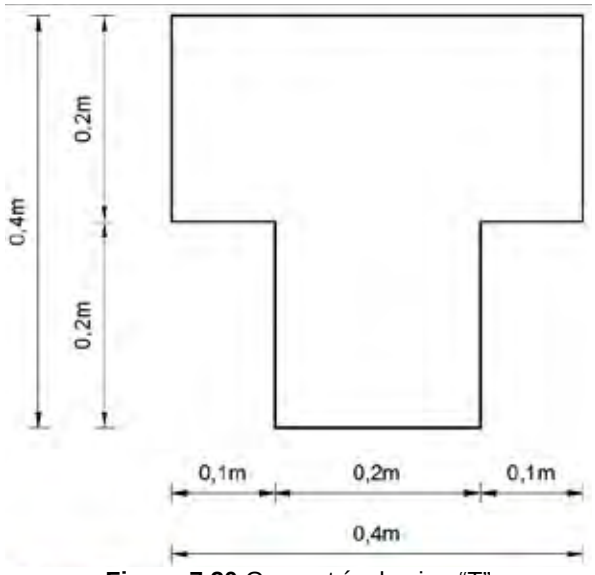



**Figura 7.20** Geometría de viga “T”

- **SOLUCIÓN**

**Primera Forma de Cálculo**

La viga "T" se ha dividido en las dos figuras indicadas en la figura 7.21; en la tabla 7.1, se presenta el cálculo del centro de gravedad de la viga "T". Se ha denominado $CG$ al centro de gravedad de la viga "T" y $cg1, cg2$ a los centros de gravedad década una de las figuras, la distancia entre el $CG$ y el $cg1$ es 6.667 cm, que se ha redondeado a 0.07 m.

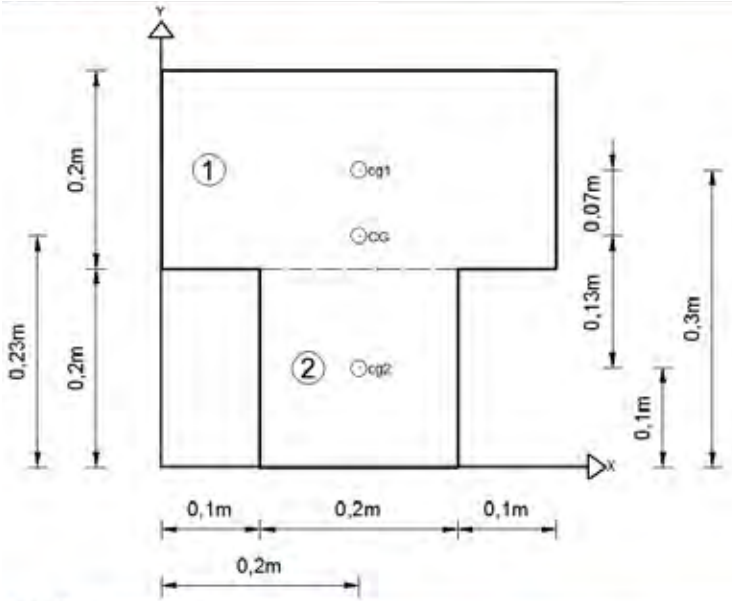



**Figura 7.21** Figuras consideradas en la primera forma de cálculo

**Tabla 7.1** Cálculo del centro de gravedad

| Figura | $\bar{X}$ (cm) | $\bar{Y}$ (cm) | $A$ $(cm^2)$ | $\bar{X}\,A$ $(cm^3)$ | $\bar{Y}\,A$ $(cm^3)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 30 | 800 | 16000 | 24000 |
| 2 | 20 | 10 | 400 | 8000 | 4000 |
| $\sum =$ | | | 1200 | 24000 | 28000 |

$$\bar{X}_{CG} = \frac{\sum \bar{X}\,A}{\sum A} = \frac{24000}{1200} = 20\ cm$$

$$\bar{Y}_{CG} = \frac{\sum \bar{Y}\,A}{\sum A} = \frac{28000}{1200} = 23.333\ cm$$

**Tabla 7.2** Cálculo del momento de inercia con respecto al centro de gravedad de la sección

| Figura | $b$ (cm) | $h$ (cm) | $I_{CG} = \frac{bh^3}{12}$ $(cm^4)$ | $Y$ $(cm)$ | $Y^2A$ $(cm^4)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 40 | 20 | 26667 | 6.667 | 35559 |
| 2 | 20 | 20 | 13333 | 13.333 | 71108 |
| $\sum =$ | | | 40000 | | 106667 |

$$I_{CG} = \sum I_{CGi} + Y_i^2\, A = 40000 + 106667 = 146667\ cm^4$$

**Segunda Forma de Cálculo**

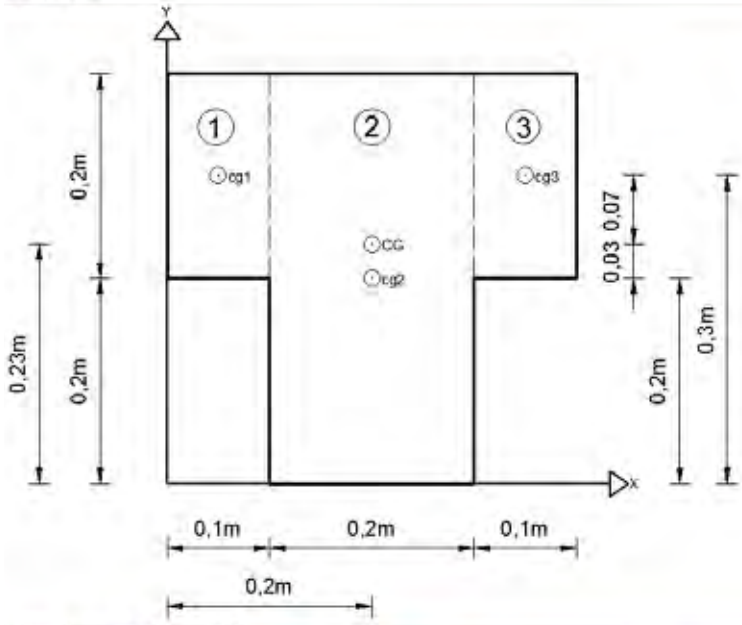



**Figura 7.22** Figuras consideradas en la segunda forma de cálculo

**Tabla 7.2** Cálculo del momento de inercia con respecto al centro de gravedad de la sección

| Figura | $b$ (cm) | $h$ (cm) | $A$ $(cm^2)$ | $I_{CG} = \frac{bh^3}{12}$ $(cm^4)$ | $Y$ $(cm)$ | $Y^2A$ $(cm^4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 20 | 200 | 6666.7 | 6.667 | 8889 |
| 2 | 20 | 40 | 800 | 106670 | 3.333 | 8887.1 |
| 3 | 10 | 20 | 200 | 6666.7 | 6.667 | 8889 |
| $\sum$ = | | | | 120000 | | 26665 |

$$I_{CG} = \sum (I_{CGi} + Y_i^2\, A_i) = 120000 + 26665 = 146665\ cm^4$$

**Sección rectangular equivalente**

$$h_{eq} = \sqrt{\frac{12\, I_{CG}}{A}} = \sqrt{\frac{12 * 146667}{1200}} = 38.29\ cm.$$

$$b_{eq} = \frac{A}{h_{eq}} = \frac{1200}{38.29} = 31.33\ cm.$$

- **EJEMPLO 13**

Encontrar la rigidez $\frac{4EI}{L}$ para una viga de sección constante a partir de la solución del problema de flexión y empleando la definición de rigidez.

- **SOLUCIÓN**

Por definición el valor de $\frac{4EI}{L}$ es el momento que hay que aplicar en el nudo inicial para que ese nudo rote la unidad y la rotación en el nudo final sea cero.

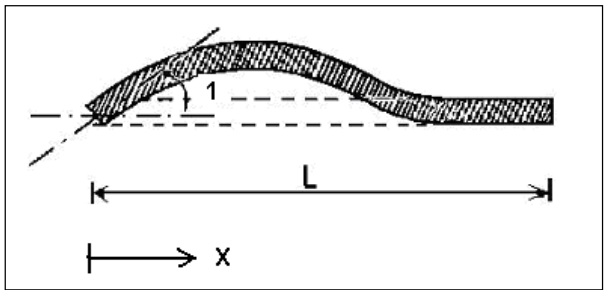



**Figura 7.23** Planteamiento del problema para encontrar la rigidez $\frac{4EI}{L}$

En el capítulo 3 se estudió que la deformación $v(x)$ cuando solo existe un giro $\theta_1$ vale:

$$v(x) = \theta_1 \, \phi_3(x) = \theta_1 \, X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 = \theta_1 X\left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right) = \theta_1\left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}\right)$$

Para el presente caso $\theta_1 = 1$. Luego la ordenada de la elástica para el caso que nos interesa vale:

$$v(x) = X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}$$

La derivada de $v(x)$ es el giro $\theta(x)$ y la derivada del giro es la curvatura $\phi(x)$ y a su vez la curvatura es igual a $\frac{M}{EI}$, donde $M$ es el momento a flexión y $EI$ es la rigidez a flexión.

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = 1 - \frac{4X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}$$

$$\phi(x) = \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{4}{L} + \frac{6X}{L^2}$$

Por la convención de signos con la que se está trabando se tiene que:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

De tal forma que el momento que se aplica en el nudo inicial se obtiene al reemplazar $X = 0$ en la ecuación de la curvatura y al despejar el momento de ésta última ecuación se tiene:

$$M = \frac{4EI}{L}$$

De tal manera que el momento que produce el giro unitario en el nudo inicial vale $\frac{4EI}{L}$ que es el término de rigidez que se está buscando.

## 7.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

**Ejercicio N.- 1**

Determinar el coeficiente de forma $\beta$ de una columna de sección constante en forma de "L".

**Ejercicio N.- 2**

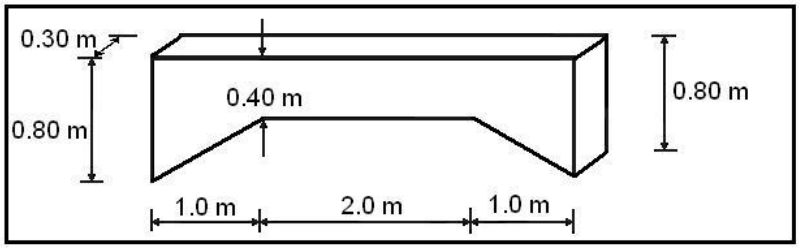
Encontrar el elemento de rigidez $\frac{2EI}{L}$ a partir de los resultados presentados en el ejemplo 5.

**Ejercicio N.- 3**

Encontrar la matriz de rigidez asociado al sistema de coordenadas de la figura 7.1 para un muro de corte de 20 por 400 cm. ( b x h). La altura del elemento es de 3.0 m. El módulo de elasticidad es de 2173706.5 T/m2. Calcular sin considerar el efecto de corte y considerando el efecto de corte.

**Ejercicio N.- 4**

Con la ayuda de las tablas de Guldan determinar la matriz de rigidez del elemento para el sistema de coordenadas de la figura 7.5. Para la viga de sección variable que se indica a continuación. Considerar el módulo de elasticidad igual al del ejercicio anterior.




Viga de Sección Variable para los ejercicios 4 y 5.

**Ejercicio N.- 5**

Determinar los términos $f_{11}$ y $f_{21}$ utilizando las ecuaciones (7.4.1) y (7.4.2) de la viga amartelada. Se recomienda resolver las integrales empleando métodos numéricos. Concretamente utilizar 5 puntos de la cuadratura de Gauss.

*CAPITULO 8*

# MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UN ESTRUCTURA A PARTIR DEL CONCEPTO


## RESUMEN

Se presenta el cálculo de las matrices de rigidez $\boldsymbol{K}$ y de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ de una estructura usando el concepto. En los capítulos posteriores a partir del concepto se obtendrá en forma práctica la matriz de rigidez.

Posteriormente se trabaja con la matriz de transformación de coordenadas para encontrar las matrices $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{F}$. Finalmente se presenta un algoritmo orientado al uso del computador para estructuras con elementos flexibles para encontrar las matrices indicadas en otro sistema de coordenadas.


## 8. 1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA $\boldsymbol{K}$

### 8.1.1 Definición

En el capítulo 6 se indicó que un término cualquiera de la matriz de rigidez de una estructura $k_{ij}$, es el valor de la carga generalizada $Q_i$ correspondiente a la deformada elemental, $q_j = 1$ y demás nulas. Por consiguiente si se desea calcular, por ejemplo, los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de una estructura se deberá calcular el vector de cargas generalizadas que corresponde al estado de desplazamiento elemental $q_1 = 1$ y $q_i = 0, i \neq 1$. De igual forma se procederá con las demás columnas de $\boldsymbol{K}$.

### 8.1.2 Procedimiento de cálculo

El procedimiento de cálculo para hallar la matriz de rigidez de una estructura $\boldsymbol{K}$ a partir del concepto es el siguiente:

1) Construir la deformada elemental cuya columna se desea calcular.

2) Encontrar las deformaciones $\boldsymbol{p}$ en cada uno de los elementos asociados a la deformada elemental. Es un problema de geometría.

3) Transformar las deformaciones $\boldsymbol{p}$ de cada elemento en cargas internas $\boldsymbol{P}$ por medio de la matriz de rigidez del elemento $\boldsymbol{k}$. La ecuación matricial que se utiliza es: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{p}$

4) Usando la estática se realiza el equilibrio de cada uno de los elementos que conforman la estructura.

5) Encontrar el equilibrio de cada uno de los nudos de la estructura.

6) En el paso anterior se obtienen las cargas que actúan sobre la estructura y el vector de cargas generalizadas que son los elementos de la matriz de rigidez de la estructura.

### 8.1.3 Primera forma de cálculo numérico

Por didáctica únicamente se denomina primera forma de cálculo de la matriz de rigidez de una estructura, a aquella en que se utiliza como sistema de coordenadas del elemento el indicado en la figura 8.1

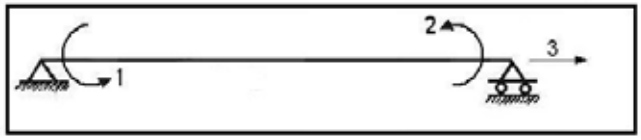



**Figura 8.1** Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ para la primera forma de cálculo.

Se recuerda que las deformaciones $\boldsymbol{p}$ se obtienen con las siguientes ecuaciones:

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad p_3 = u_2 - u_1$$

La matriz de rigidez de un elemento para el sistema de coordenadas indicado es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 1**

Encontrar la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura indicada en la figura 8.2 si todos los elementos tienen la misma sección transversal y la misma longitud. Encontrar aplicando el concepto y no considerar el efecto de corte.

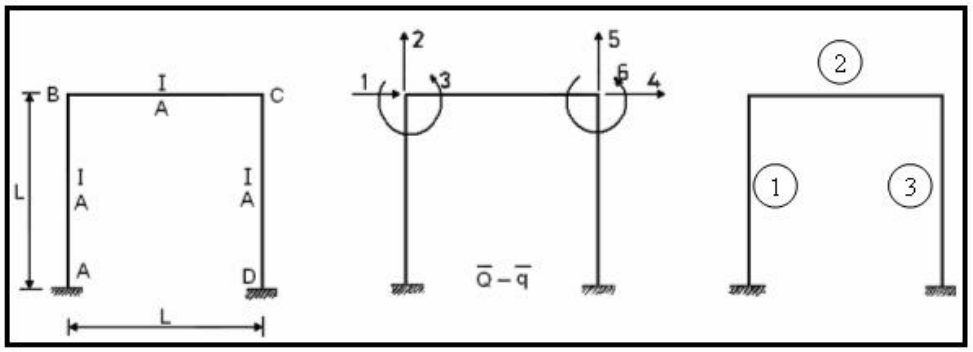



**Figura 8.2** Estructura de Ejemplo 1; grados de libertad y numeración de elementos.

- **SOLUCIÓN**

Por ser todos sus elementos flexibles se tiene seis grados de libertad. En consecuencia el sistema de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q-q}$ es el indicado en la parte central de la figura 8.2. Para una mejor comprensión a la derecha se indica la numeración de los elementos.

En la figura 8.3 se indica el sistema de coordenadas de los elementos $\boldsymbol{P-p}$, para las columnas el nudo inicial se ha considerado en la parte inferior y para la viga a la izquierda.

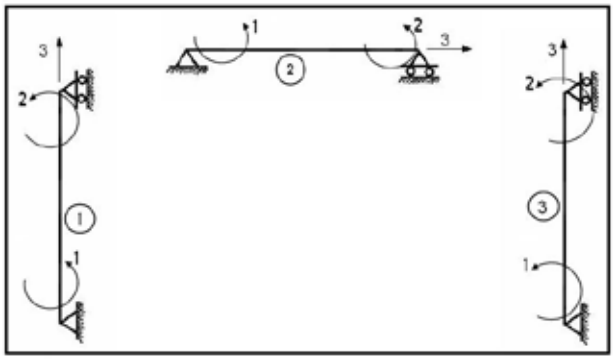



**Figura 8.3** Sistema $\boldsymbol{P-p}$ de la estructura.

Para diferenciar las deformaciones y cargas internas se escribe entre paréntesis y como subíndice el número del elemento al cual corresponde.

De acuerdo al procedimiento indicado en el apartado anterior para encontrar los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura se procede de la siguiente manera:

1) Deformada elemental $q_1 = 1$ y $q_i = 0, i \neq 1.$

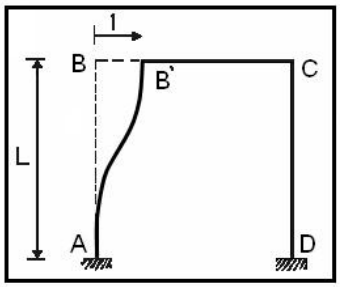



Diagrama elemental $q_1$

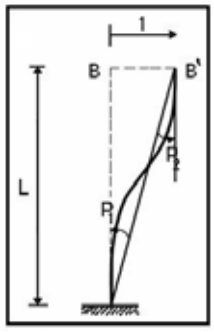
2) Cálculo de las deformaciones $\boldsymbol{p}$ .

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{L} \qquad p_1^{(2)} = 0 \qquad p_1^{(3)} = 0$$
$$p_2^{(1)} = \frac{1}{L} \qquad p_2^{(2)} = 0 \qquad p_2^{(3)} = 0$$
$$p_3^{(1)} = 0 \qquad p_3^{(2)} = -1 \qquad p_3^{(3)} = 0$$

Para encontrar las deformaciones del elemento 1, se procedió de la siguiente manera:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0$$
$$v_1 = 0 \qquad v_2 = -1$$
$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$
$$p_1^{(1)} = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{-1-0}{L} = \frac{1}{L}$$
$$p_2^{(1)} = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{-1-0}{L} = \frac{1}{L}$$
$$p_3^{(1)} = u_2 - u_1 = 0 - 0 = 0$$

Se puede obtener éstos mismos valores directamente sin necesidad de aplicar las ecuaciones si se recuerda que las deformaciones $p_1$ y $p_2$ son los ángulos comprendidos entre la cuerda y la tangente de los nudos inicial y final respectivamente como se indicó en el Capítulo 6. Para el elemento 1 se ha separado la deformada elemental correspondiente a la columna izquierda, en ella se ha unido la cuerda entre B y B', luego se han trazado las tangentes en el nudo inicial y final se observa que el ángulo entre la cuerda y la tangente es anti horario luego las deformaciones $p_1$ y $p_2$ son positivas.




Regla para encontrar las deformaciones del elemento 1.

En la gráfica se aprecia que el ángulo $p_1$ es igual al ángulo $p_2$ por ser alternos e internos y que $p_1$ es igual al cateto opuesto sobre el cateto adyacente. Por lo tanto se tiene:

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{L} \qquad p_2^{(1)} = \frac{1}{L}$$

3) Se obtienen las cargas internas $\boldsymbol{P}$ en cada uno de los elementos del pórtico plano. Como todos los elementos tienen la misma sección transversal y la misma longitud, la matriz de rigidez de cada uno de ellos es la misma y es:

$$k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Las cargas internas del elemento 1 se obtienen del producto matricial $\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{p}^{(1)}$. Donde $\boldsymbol{P}^{(1)}$ es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$P_1^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} \qquad P_2^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} \qquad P_3^{(1)} = 0$$

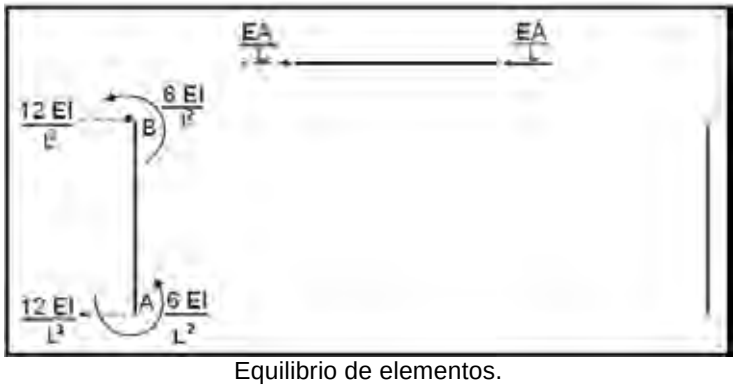
Lo propio se realiza con los elementos 2 y 3 es decir se multiplica la matriz de rigidez del respectivo elemento por su vector de deformaciones, los resultados que se obtienen, son:

$$P_1^{(2)} = 0 \qquad P_2^{(2)} = 0 \qquad P_3^{(2)} = -\frac{EA}{L}$$

$$P_1^{(3)} = 0 \qquad P_2^{(3)} = 0 \qquad P_3^{(3)} = 0$$

4) Se realiza el equilibrio de cada elemento.

En la siguiente figura se indica con línea continua las cargas internas $\boldsymbol{P}$ obtenidas en el paso anterior y con línea entrecortada las diferentes fuerzas que equilibran cada uno de los elementos.




Equilibrio de elementos.

El cortante en la columna se obtiene sumando los momentos y dividiendo para la longitud.

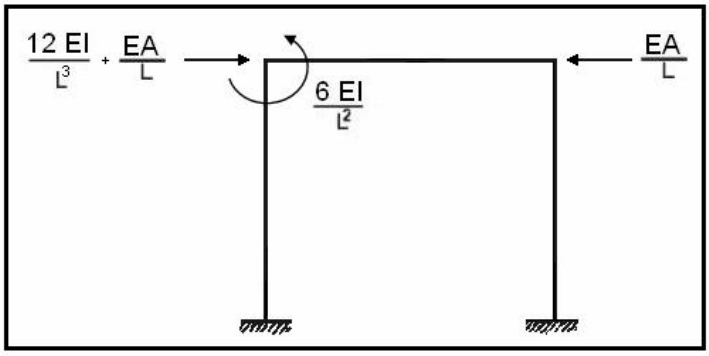
5) Se halla el equilibrio de nudos.

En los nudos de la estructura, las fuerzas y momentos internos de cada elemento actúan con sentido contrario, éstas se han representado con línea continua y las cargas exteriores que equilibran cada uno de los nudos se presentan con línea entrecortada.

Equilibrio de nudos.

Nótese que para equilibrar la fuerza horizontal del nudo B se ha sumado el cortante proveniente de la columna y la fuerza axial que viene de la viga.

6) Finalmente se determinan las cargas exteriores y el vector de cargas generalizadas, que producen la deformada elemental inicial, $q_1 = 1$ y todas las demás nulas.




Valores de la primera columna de $\boldsymbol{K}$

Por consiguiente el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ resulta:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} \\ 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \\ K_{51} \\ K_{61} \end{bmatrix}$$

Por definición los elementos de $\boldsymbol{Q}$ son los términos de la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura. Se deja al estudiante el obtener las demás columnas de $\boldsymbol{K}$ aplicando el concepto. El resultado total es el siguiente:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3}+\frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{EA}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{EA}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix}$$

### 8.1.4 Segunda forma de cálculo numérico

Se puede considerar otro sistema de coordenadas del elemento para encontrar la matriz de rigidez de la estructura, por ejemplo el presentado en la figura 8.3

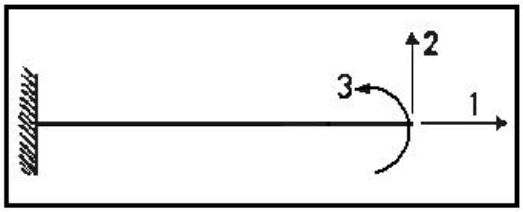


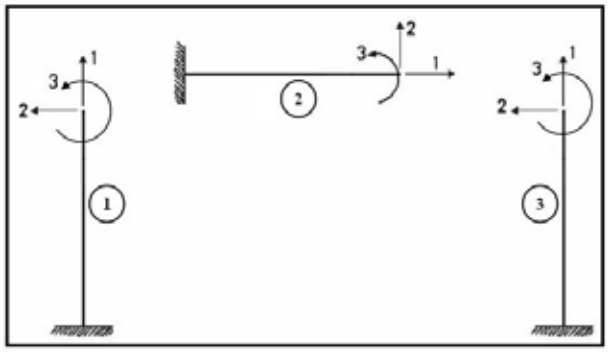

**Figura 8.4** Otro sistema de coordenadas del elemento $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

- **EJEMPLO 2**

Calcular la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura mostrada en la figura 8.2 considerando el sistema de coordenadas del elemento el indicado en la figura 8.4.

- **SOLUCIÓN**

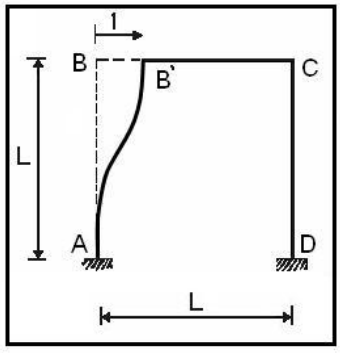
En la siguiente figura se presenta las coordenadas de cada uno de los elementos que forman la estructura.




Sistema de coordenadas de los elementos del ejemplo 2.

Se resume a continuación el procedimiento de cálculo.

1) Deformada elemental $q_1$




Deformada elemental $q_1$

Las fórmulas con las cuales se obtienen las deformaciones de un elemento se obtuvieron en el capítulo 6. Estas son:

$$p_1 = u_2 - u_1$$
$$p_2 = v_2 - v_1 - L\,\theta_1$$
$$p_3 = \theta_2 - \theta_1$$

2) Deformaciones de los elementos

Las deformaciones en cada uno de los elementos son las siguientes:

$$p_1^{(1)} = 0 \qquad p_1^{(2)} = -1 \qquad p_1^{(3)} = 0$$
$$p_2^{(1)} = -1 \qquad p_2^{(2)} = 0 \qquad p_2^{(3)} = 0$$
$$p_3^{(1)} = 0 \qquad p_3^{(2)} = -1 \qquad p_3^{(3)} = 0$$

3) Cargas Internas

La matriz de rigidez de elemento para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ de la figura 8.4 fue deducida en el capítulo anterior y es la siguiente:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Por los datos del ejemplo la matriz de rigidez es igual para todos los elementos. Al realizar el producto matricial $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{p}$ en cada uno de los elementos de la estructura se obtiene:

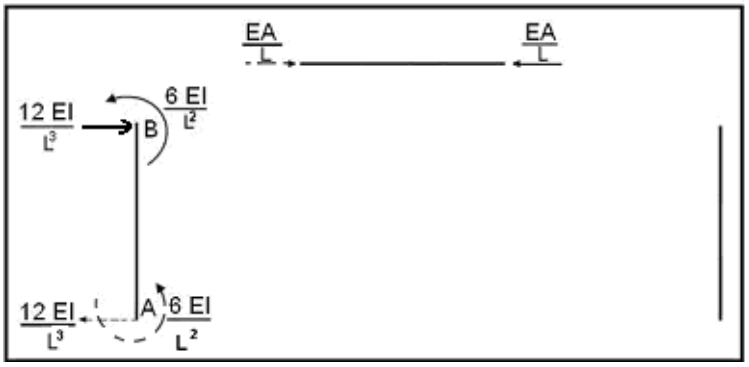
$$P_1^{(1)} = 0 \qquad P_1^{(2)} = -\frac{EA}{L} \qquad P_1^{(3)} = 0$$

$$P_2^{(1)} = -\frac{12EI}{L^3} \qquad P_2^{(2)} = 0 \qquad P_2^{(3)} = 0$$

$$P_3^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} \qquad P_3^{(2)} = 0 \qquad P_3^{(3)} = 0$$

4) Equilibrio de elementos

En la siguiente figura se presenta con línea continua las cargas $\boldsymbol{P}$ obtenidas en cada uno de los elementos y con línea entrecortada las diferentes fuerzas que equilibran los elementos.




Equilibrio de elementos

Las fuerzas y momentos encontrados en cada elemento son iguales a las halladas en el Ejemplo anterior, como debe ser. En consecuencia los siguientes pasos que faltan para hallar los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura son los dados en el Ejemplo 1. De idéntica forma se obtendrán las demás columnas de la matriz de rigidez.

El haber obtenido la misma matriz de rigidez de la estructura, utilizando diferentes sistemas de coordenadas de elemento, no es un hecho casual. Esto es debido a que la inmovilización de los desplazamientos como cuerpo rígido, que se estudió en el Capítulo 6, utilizando diferentes tipos de vínculos es un artificio. Si se utiliza otro sistema de coordenadas de miembro se obtendrá la misma matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ .

Finalmente, se puede resolver la estructura utilizando sistemas de coordenadas de elemento $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$, diferentes para cada uno de los elementos, por ejemplo el que se indica en la figura 8.5.

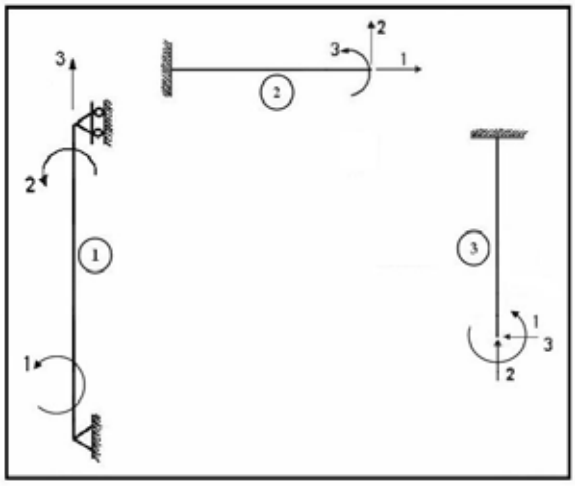



**Figura 8.5** Nuevo sistema de coordenadas de los elementos para la estructura de los ejemplos 1 y 2.

## 8. 2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE UNA ESTRUCTURA $\boldsymbol{F}$

### 8.2.1 Definición

Se conoce que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{Q}$. Por lo tanto un elemento cualquiera de la matriz de flexibilidad de una estructura $F_{ij}$ será el valor del desplazamiento o giro $q_i$ correspondiente al estado de cargas $Q_j = 1$ y las demás nulas.

La matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ transforma las cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ en coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$.

### 8.2.2 Procedimiento de cálculo

Para encontrar la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ a partir de su definición, se realizan los siguientes pasos:

1) Para el estado de carga elemental $Q_i = 1$ y las demás nulas, se debe hallar las cargas internas $\boldsymbol{P}$ que actúan en cada uno de los elementos. Esto es un procedimiento de estática.

2) Conocido el vector $\boldsymbol{P}$ se encuentran las deformaciones $\boldsymbol{p}$, por medio de la siguiente ecuación: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{P}$.

3) A partir de las deformaciones internas en cada uno de los elementos de la estructura se determina el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$. Este es un problema de geometría. Al encontrar $\boldsymbol{q}$ se tienen ya los elementos de la columna de $\boldsymbol{F}$ que se está calculando.

- **EJEMPLO 3**

En la figura 8.6 se presenta un pórtico plano con todos sus elementos completamente flexibles, se pide calcular la primera columna de la matriz de flexibilidad.

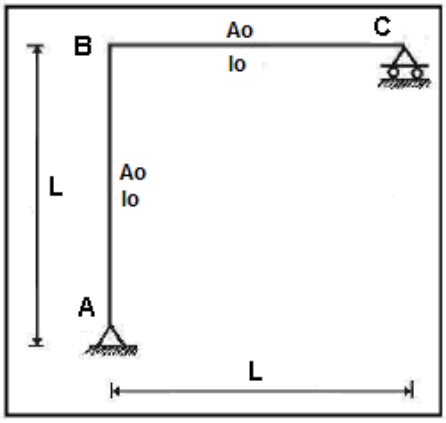



**Figura 8.6** Estructura de ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**

Por facilidad se ha considerado que la columna y la viga del pórtico tienen igual sección transversal y la misma longitud. En consecuencia la matriz de flexibilidad de sus elementos es la misma.

A la izquierda de la figura 8.7, se presenta el sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$, y a la derecha la numeración de los elementos.

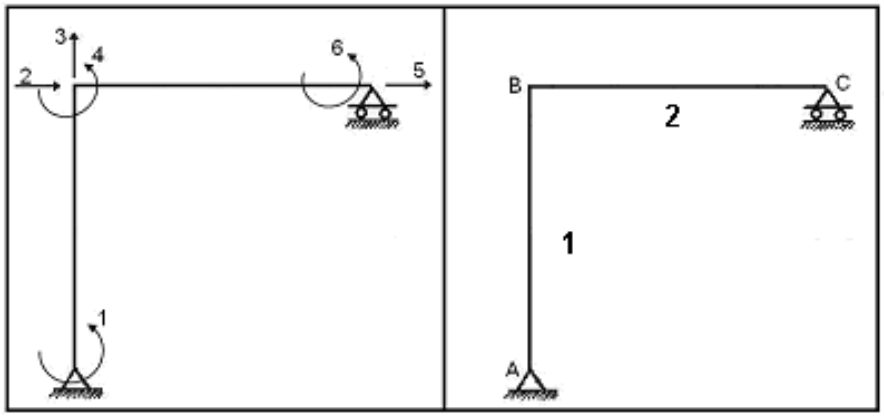
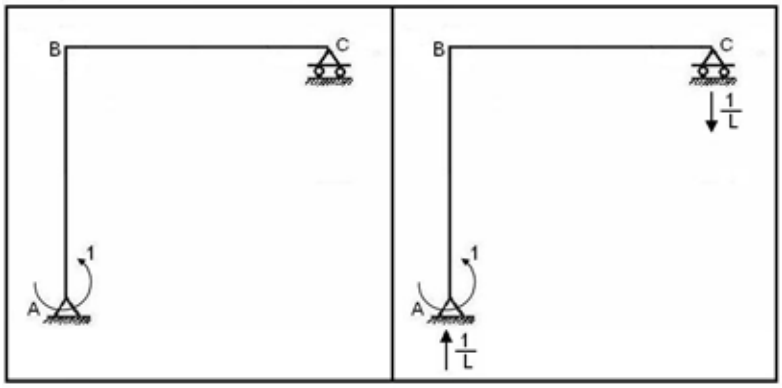



**Figura 8.7** Grados de libertad y numeración de los elementos.

De acuerdo al procedimiento de cálculo indicado en el apartado 8.2.2 se tiene:

1) $Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 1$

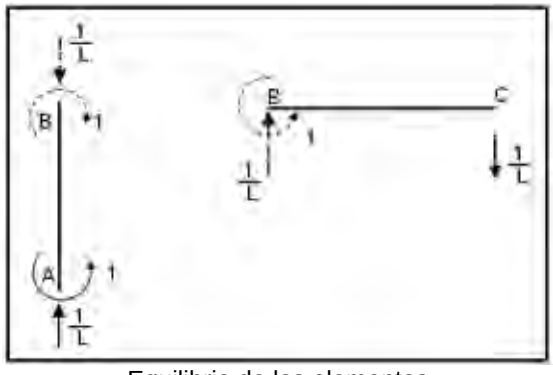



Momento unitario en A. Equilibrio de fuerzas externas

Debido al momento unitario que actúa en el nudo A de la estructura, se generan reacciones en los vínculos A y C que valen $\frac{1}{L}$ con lo cual la estructura está en equilibrio. En la figura del estado de carga unitaria, se muestran éstas reacciones.

Por efecto del sistema de cargas en cada uno de los elementos se tienen fuerzas y momentos internos los mismos que se indican en la siguiente figura. Con línea continua se indican las acciones que vienen de las reacciones de los nudos y con línea entrecortada las acciones que conducen al equilibrio en los elementos.

Para el equilibrio de las juntas se colocan en primer lugar las fuerzas externas que actúan en la junta. Luego se equilibra el nudo con fuerzas y momentos. Estas fuerzas son las que pasan a los elementos con sentido contrario y son las que se han indicado en la figura.




Equilibrio de los elementos.

Se deja al lector la verificación del equilibrio de juntas y de elementos. Por otra parte se trabaja con el sistema de coordenadas de miembro de la figura 8.1, en la cual se tiene que $P_1$ es el momento en el nudo inicial y es positivo si es anti horario, $P_2$ es el momento en el nudo final y es positivo si es anti horario y $P_3$ es la fuerza axial en el nudo final y es positiva si produce tracción en el elemento. Con estas indicaciones y al observar las fuerzas y momentos en los elementos se tiene.

$$P_1^{(1)} = 1 \qquad P_1^{(2)} = 1$$
$$P_2^{(1)} = -1 \qquad P_2^{(2)} = 0 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \qquad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$P_3^{(1)} = -\frac{1}{L} \qquad P_3^{(2)} = 0$$

2) Cálculo de las deformaciones de los elementos.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{f}^{(1)} = \boldsymbol{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \boldsymbol{f}^{(1)}\ \boldsymbol{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2EI} \\ -\frac{L}{2EI} \\ -\frac{1}{EA} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}^{(2)} = \boldsymbol{f}^{(2)}\ \boldsymbol{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} \\ -\frac{L}{6EI} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En consecuencia se tiene:

$$p_1^{(1)} = \frac{L}{2EI} \qquad p_1^{(2)} = \frac{L}{3EI}$$
$$p_2^{(1)} = -\frac{L}{2EI} \qquad p_2^{(2)} = -\frac{L}{6EI}$$
$$p_3^{(1)} = -\frac{1}{EA} \qquad p_3^{(2)} = 0$$

3) Cálculo de los desplazamientos y giros $\boldsymbol{q}$

Esta es la parte más difícil del cálculo de la matriz de flexibilidad de una estructura. Se quiere hallar los desplazamientos y giros que experimentan las juntas de tal forma que los elementos tengan las deformaciones $\boldsymbol{p}$ indicadas. Para facilitar la explicación, se denomina:

$$\alpha = \frac{L}{2EI} \qquad \delta = \frac{1}{EA}$$

Con ésta nomenclatura las deformaciones en los elementos valen:

$$p_1^{(1)} = \alpha \qquad p_1^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha$$

$$p_2^{(1)} = -\alpha \qquad p_2^{(2)} = -\frac{\alpha}{3}$$

$$p_3^{(1)} = -\delta \qquad p_3^{(2)} = 0$$

En la figura 8.8.1 se indican éstas deformaciones y en la misma se aprecia que se está violando dos reglas básicas en el nudo B que son:

i) El nudo B es discontinuo; se aprecia que el nudo B por parte de la columna ha bajado.

ii) El nudo B antes de deformarse medía 90 grado, ahora no.

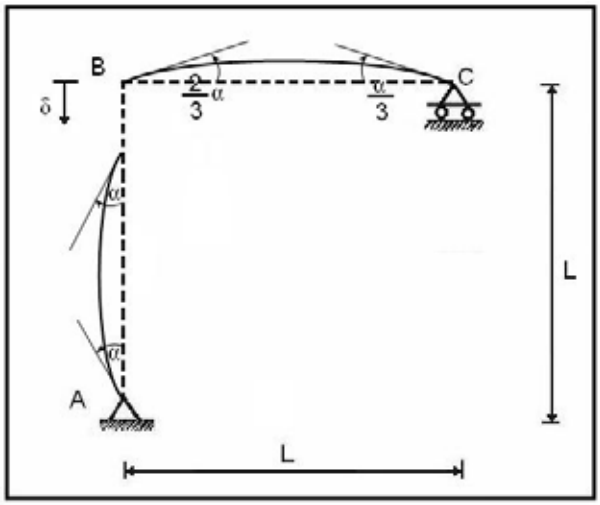



**Figura 8.8.1** Deformaciones de los elementos obtenidos.

Para solucionar éstos dos problemas se deben dar ciertos desplazamientos y giros a la estructura. En primer lugar para corregir la anomalía de la discontinuidad en el nudo B, al elemento BC se desplaza verticalmente una magnitud igual a $\delta$ como se indica en la figura 8.8.2.

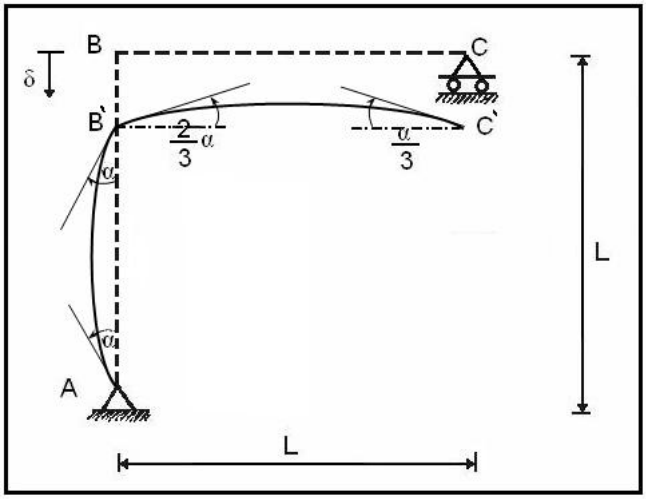



**Figura 8.8.2** Solución de la discontinuidad en el nudo B pero no en el ángulo.

Si bien se ha solucionado un problema, ahora se ha creado otro que es la posición del nudo C' ya que debido al tipo de vínculo existente en esa junta el nudo C no debe bajar. Esto se va a resolver posteriormente, se concentra la atención en resolver el problema de que la junta B antes de deformarse medía 90 grados y después de deformarse debe medir 90 grados.

En la figura 8.8.2 se aprecia que el ángulo B' vale $\alpha + 90 + \frac{2}{3}\alpha = 90 + \frac{5}{3}\alpha$. Pero el ángulo B' debe valer 90 grados luego el elemento B'C' se rota $\frac{5}{3}\alpha$ haciendo centro en B' esto se presenta en la figura 8.8.3.

Luego de la rotación, el punto C' se ha desplazado verticalmente $\frac{5}{3}\alpha\, L$ hasta llegar a C''.

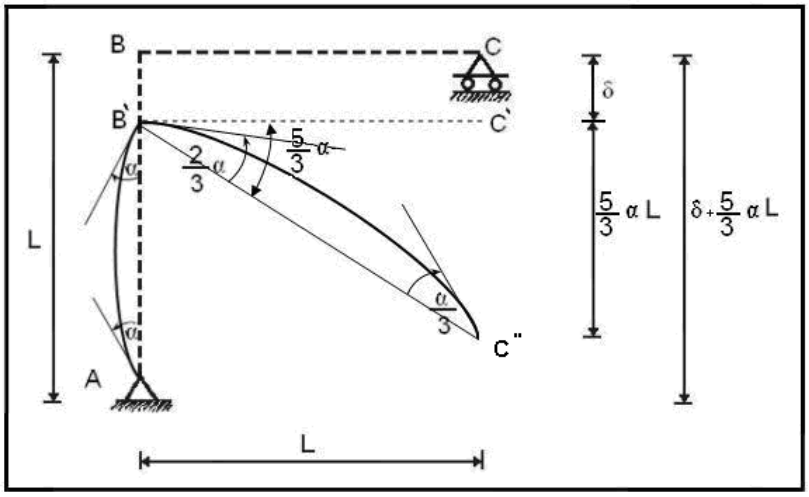



**Figura 8.8.3** Solución de la rotación del nudo B.

La posición final del nudo C no puede ser C'' como está indicado en la figura 8.8.3 debe estar en cualquier parte de la recta BC, para lograr éste objetivo se debe rotar el nudo A un ángulo $\Phi$.

$$\Phi = \frac{\delta + \frac{5}{3}\alpha L}{L} = \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha$$

Esta rotación $\Phi$ se indica en la figura 8.8.4, se observa que la posición final del nudo C es C'''. El nudo C se ha desplazado horizontalmente $\Phi L$ igual corrimiento experimenta el nudo B como se aprecia en la figura mencionada.

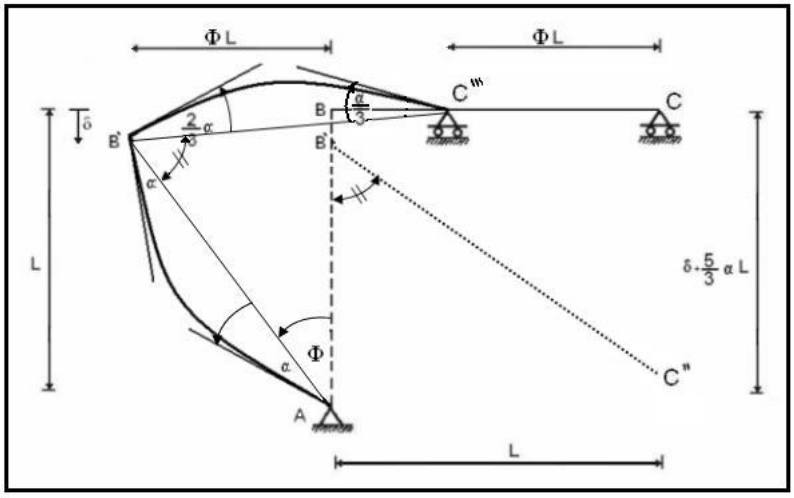



**Figura 8.8.4** Posición final de la estructura.

En resumen, los desplazamientos y giros de los nudos son los siguientes:

| | |
|---|---|
| $q_1 = \alpha + \Phi$ | Rotación del nudo A. |
| $q_2 = -\Phi L$ | Desplazamiento horizontal del nudo B. |
| $q_3 = -\delta$ | Desplazamiento vertical del nudo B. |
| $q_4 = -\alpha + \Phi$ | Rotación del nudo B. |
| $q_5 = -\Phi L$ | Desplazamiento horizontal del nudo C. |
| $q_6 = -\frac{\alpha}{3} - \frac{5}{3}\alpha + \Phi$ | Rotación del nudo C. |

Al reemplazar $\Phi, \alpha, \delta$, se encuentra:

$$q_1 = \alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha + \frac{\delta}{L} = \frac{4L}{3EI} + \frac{1}{EAL}$$

$$q_2 = -\left(\frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha\right)L = -\delta - \frac{5}{3}\alpha L = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_3 = -\delta = -\frac{1}{EA}$$

$$q_4 = -\alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha = \frac{\delta}{L} + \frac{2}{3}\alpha = \frac{1}{EAL} + \frac{L}{3EI}$$

$$q_5 = -\Phi L = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_6 = -2\alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha = \frac{\delta}{L} - \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{EAL} - \frac{L}{6EI}$$

Por definición se tiene:

$$q_1 = F_{11} = \frac{4L}{3EI} + \frac{1}{EAL}$$

$$q_2 = F_{21} = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_3 = F_{31} = -\frac{1}{EA}$$

$$q_4 = F_{41} = \frac{1}{EAL} + \frac{L}{3EI}$$

$$q_5 = F_{51} = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_6 = F_{61} = \frac{1}{EAL} - \frac{L}{6EI}$$

Las restantes columnas de la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ se obtienen en forma similar. Con el propósito de que el estudiante calcule cualquiera de las columnas de la matriz de flexibilidad a partir de su definición, se indica el resultado completo pero únicamente se presenta la matriz triangular superior debido a que la matriz es simétrica.

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{4L}{3EI}+\frac{1}{EAL} & -\frac{1}{EA}-\frac{5L^2}{EI} & -\frac{1}{EA} & \frac{1}{EAL}+\frac{L}{3EI} & -\frac{1}{EA}-\frac{5L^2}{6EI} & \frac{1}{EAL}-\frac{L}{6EI} \\ & \frac{2L^3}{3EI}+\frac{L}{EA} & \frac{L}{EA} & -\frac{L^2}{3EI}-\frac{1}{EA} & \frac{2L^3}{3EI}-\frac{L}{EA} & \frac{L^2}{6EI}-\frac{1}{EA} \\ & & \frac{L}{EA} & -\frac{1}{EA} & \frac{L}{EA} & -\frac{1}{EA} \\ & & & \frac{L}{3EI}+\frac{1}{LEA} & -\frac{L^2}{3EI}-\frac{1}{EA} & -\frac{L}{6EI}+\frac{1}{LEA} \\ & & & & \frac{2L^3}{3EI}+\frac{2L}{EA} & \frac{L^2}{6EI}-\frac{1}{EA} \\ & & & & & \frac{L}{3EI}+\frac{1}{LEA} \end{bmatrix}$$

### 8.2.3 Principio de superposición

Como se indicó la parte más difícil del cálculo de la matriz de flexibilidad de una estructura a partir de su definición es calcular los desplazamientos y giros $\boldsymbol{q}$ luego que se han obtenido las deformaciones $\boldsymbol{p}$. Si se emplea el principio de superposición se puede hacer esto de una forma sencilla como se ilustra con el ejemplo 4.

- **EJEMPLO 4**

Encontrar la primera columna de la matriz de flexibilidad del ejemplo 3, aplicando el principio de superposición para calcular el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$.

- **SOLUCIÓN**

Para el ejemplo que se está analizando se tiene:

$$p_1^{(1)} = \alpha \qquad p_1^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha$$

$$p_2^{(1)} = -\alpha \qquad p_2^{(2)} = -\frac{\alpha}{3}$$

$$p_3^{(1)} = -\delta \qquad p_3^{(2)} = 0$$

En el cálculo del vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ se consideran dos etapas, a saber:

**Etapa 1**.- Actúan sólo las deformaciones del elemento uno, por lo tanto se considera al elemento dos como totalmente rígido.

**Etapa 2**.- El elemento uno es totalmente rígido y sólo hay deformaciones en el miembro dos.

A los desplazamientos y giros de la etapa uno se los denomina $\boldsymbol{q}^{(1)}$ y a los desplazamientos y giros de la etapa dos $\boldsymbol{q}^{(2)}$. En consecuencia:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^{(1)} + \boldsymbol{q}^{(2)}$$

- **Etapa 1.-** En la figura 8.9.1 se presenta ésta fase del cálculo que consiste en tener deformaciones únicamente en el elemento vertical.

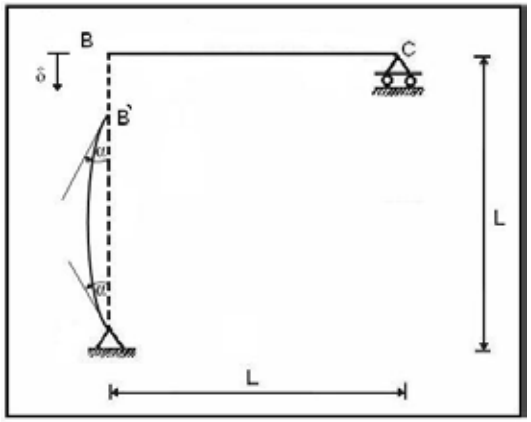



**Figura 8.9.1** Únicamente se deforma elemento AB

Al igual que en el ejemplo anterior, en la figura 8.9.1 hay que rectificar dos errores que se tienen y son los siguientes:

i) El nudo B es discontinuo.

ii) El ángulo del nudo B antes de la deformación es diferente al obtenido después de la deformación.

Para corregir el primer error se desplaza el elemento BC una cantidad $\delta$ como lo indica la figura 8.9.2 y para solucionar el segundo error haciendo centro en B se rota el elemento BC una magnitud igual a $\alpha$ como lo ilustra la figura 8.9.3. Nótese que el punto C' se ha desplazado hasta C'' una cantidad $\alpha L$.

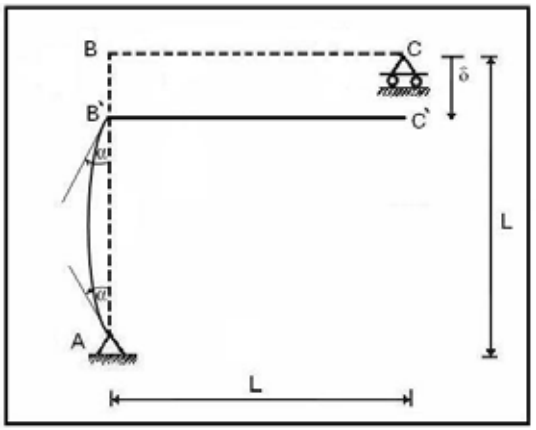



**Figura 8.9.2**

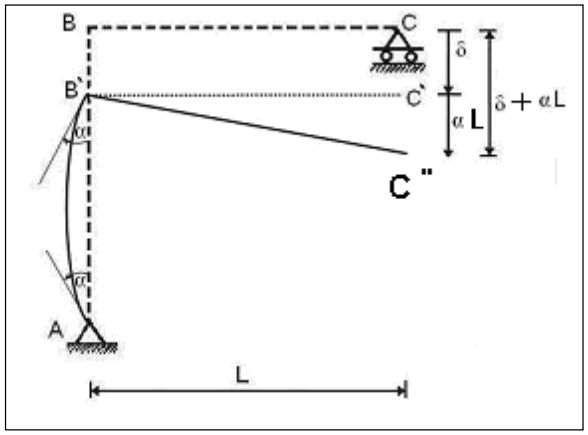



**Figura 8.9.3**

Pero la posición final del nudo C tiene que estar a lo largo de BC ya que no puede desplazarse verticalmente para lograr esto haciendo centro en el nudo A se rota la estructura un ángulo $\Phi_1$.

$$\Phi_1 = \frac{\delta + \alpha L}{L} = \frac{\delta}{L} + \alpha$$

Por lo tanto la ubicación final del nudo C al terminar ésta etapa es C''' como se indica en la figura 8.9.4.

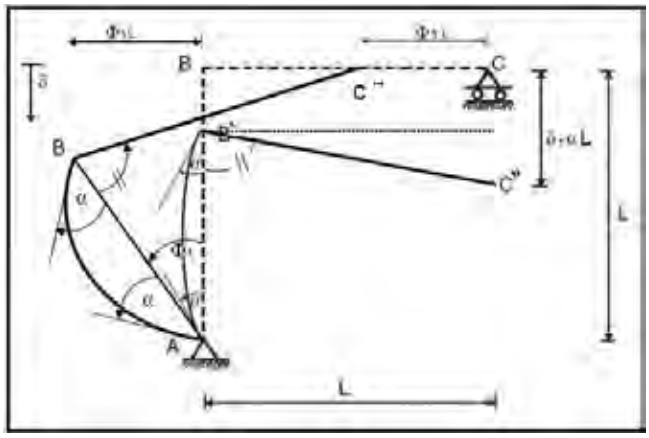



**Figura 8.9.4** Fin de etapa uno

Por lo tanto los desplazamientos y giros encontrados en la etapa uno son:

$$q_1^{(1)} = \alpha + \Phi_1 = 2\alpha + \frac{\delta}{L}$$
$$q_2^{(1)} = -\Phi_1 L = -\delta - \alpha L$$
$$q_3^{(1)} = -\delta$$
$$q_4^{(1)} = -\alpha + \Phi_1 = \frac{\delta}{L}$$
$$q_5^{(1)} = -\Phi_1 L = -\delta - \alpha L$$
$$q_6^{(1)} = -\alpha + \Phi_1 = \frac{\delta}{L}$$

- **Etapa 2.-** En ésta etapa actúan las deformaciones en el elemento 2 ya que el miembro 1 se considera como elemento rígido, estas deformaciones iniciales se indican en la figura 8.10.1

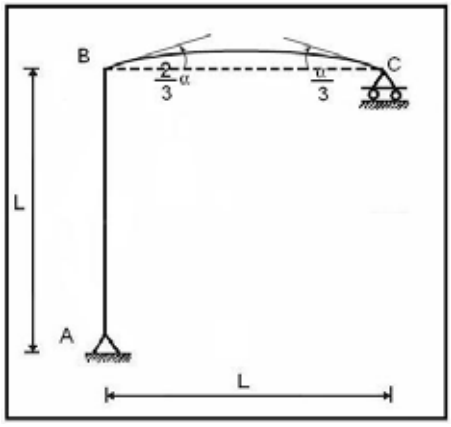



**Figura 8.10.1** Sólo se deforma elemento BC.

El ángulo final del nudo B en la figura 8.9.1 se aprecia que es $90^o + \frac{2}{3}\alpha$. Esto no puede ser.

Se deja al estudiante que justifique las figuras 8.10.2 y 8.10.3 con las cuales se corrige ésta anomalía.

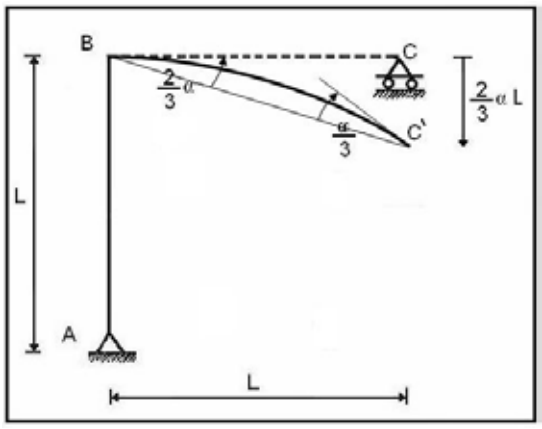



**Figura 8.10.2**

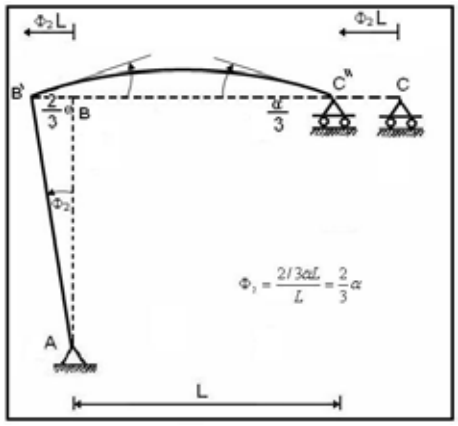



**Figura 8.10.3**

Luego de la geometría realizada se tiene:

$$q_1^{(2)} = \Phi_2 = \frac{2}{3}\alpha$$

$$q_2^{(2)} = -\Phi_2 L = -\frac{2}{3}\alpha L$$

$$q_3^{(2)} = 0$$

$$q_4^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha - \frac{2}{3}\alpha + \Phi_2 = \frac{2}{3}\alpha$$

$$q_5^{(2)} = -\Phi_2 L = -\frac{2}{3}\alpha\, L$$

$$q_6^{(2)} = -\frac{\alpha}{3} - \frac{2}{3}\alpha + \Phi_2 = -\frac{\alpha}{3}$$

Al sumar los desplazamientos y giros obtenidos en las dos etapas se tiene:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^{(1)} + \boldsymbol{q}^{(2)}$$

$$q_1 = 2\alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{2}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha + \frac{\delta}{L}$$

$$q_2 = -\delta - \alpha L - \frac{2}{3}\alpha L = -\delta - \frac{5}{3}\alpha L$$

$$q_3 = -\delta + 0 = -\delta$$

$$q_4 = \frac{\delta}{L} + \frac{2}{3}\alpha$$

$$q_5 = -\delta - \alpha L - \frac{2}{3}\alpha L = -\delta - \frac{5}{3}\alpha L$$

$$q_6 = -\frac{\delta}{L} - \frac{\alpha}{3}$$

Al sustituir $\alpha = \frac{L}{2EI}$ y $\delta = \frac{1}{EA}$ se obtienen los valores de la primera columna de la matriz de flexibilidad anotados en el Ejemplo 3.

## 8. 3 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE UNA ESTRUCTURA

### 8.3.1 Cálculo de la matriz de rigidez y de flexibilidad

Conocida la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ para un determinado sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ de una estructura, se desea ahora calcular la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}^*$ en otro sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}^*-\boldsymbol{q}^*$. Este cálculo se lo va a realizar utilizando la matriz de transformación de coordenadas.

- **EJEMPLO 5**

El pórtico plano de la figura 8.11.1 está compuesto por una columna de altura H y una viga de longitud L, los dos elementos se consideran axialmente rígidos y el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ es el indicado en la figura 8.11.2. La matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ asociado a éste sistema de coordenadas es la siguiente:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{H^3} & \frac{6EI_o}{H^2} & 0 \\ \frac{6EI_o}{H^2} & \frac{4EI_o}{H} + \frac{4EI_1}{L} & \frac{2EI_1}{L} \\ 0 & \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_1}{L} \end{bmatrix}$$

Se desea encontrar la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}^*$ para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}^*-\boldsymbol{q}^*$ de la figura 8.10.3 por medio de la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$.

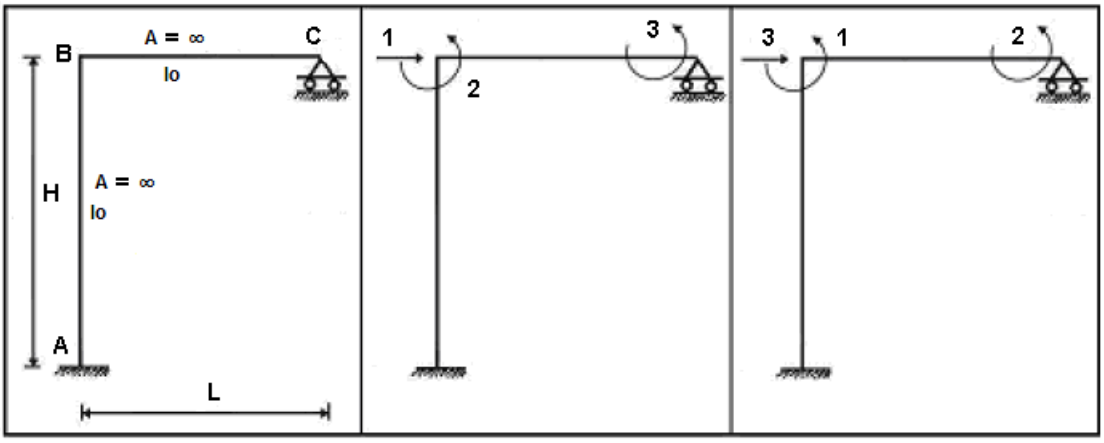



**Figura 8.11.1** **Figura 8.11.2** Sistema $Q - q$ **Figura 8.11.3** Sistema $Q^* - q^*$

- **SOLUCIÓN**

Se establece una relación entre los dos sistemas de coordenadas de la siguiente manera:

$$q = T\, q^*$$

La relación así definida fue estudiada en el capítulo 5 por consiguiente el estudiante deberá dibujar cada una de las deformadas elementales y encontrar la siguiente matriz $T$ .

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En el Capítulo anterior se demostró que la matriz de rigidez de un elemento en otro sistema de coordenadas se obtiene con la siguiente ecuación:

$$k^* = T^t\, k\, T \tag{8.1}$$

La ecuación (8.1) que fue deducida para un elemento es aplicable a una estructura. Por lo tanto para hallar la matriz de rigidez de la estructura $K^*$ (mayúscula) se utilizará la siguiente ecuación.

$$K^* = T^t\, K\, T$$

Para el ejemplo se tiene:

$$K^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{H^3} & \frac{6EI_o}{H^2} & 0 \\ \frac{6EI_o}{H^2} & \frac{4EI_o}{H} + \frac{4EI_1}{L} & \frac{2EI_1}{L} \\ 0 & \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez $K^*$ para el sistema de coordenadas de la figura 8.11.3 es:

$$\boldsymbol{K}^{*} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{H} + \frac{4EI_1}{L} & \frac{2EI_1}{L} & \frac{6EI_o}{H^2} \\ \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_1}{L} & 0 \\ \frac{6EI_o}{H^2} & 0 & \frac{12EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

Si se desea calcular la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}^{*}$ para el sistema de coordenadas de la figura 8.11.3, conocida la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ para el sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ de la figura 8.11.2, hay que hacerlo por medio de la matriz $\boldsymbol{T}_1$ estudiada en el Capítulo 5.

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}_1 \, \boldsymbol{Q}^{*}$$

La matriz de flexibilidad buscada se obtiene del siguiente triple producto matricial.

$$\boldsymbol{F}^{*} = \boldsymbol{T}_1^{t} \, \boldsymbol{F} \, \boldsymbol{T}_1$$

Se deja al lector la demostración de las formulas con las cuales se obtiene $\boldsymbol{K}^{*}$ y $\boldsymbol{F}^{*}$ en base a la teoría presentada en el Capítulo 5.

### 8.3.2 Regla práctica

Se puede obtener directamente la matriz de rigidez y de flexibilidad de una estructura cuyos elementos son totalmente flexibles, cuando se cambia el sistema de coordenadas generalizadas, por consiguiente no es necesario calcular las matrices $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{T}_1$ respectivamente.

En efecto, para hallar $\boldsymbol{K}^{*}$ para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}^{*} - \boldsymbol{q}^{*}$ de la figura 8.11.3 a partir de la matriz $\boldsymbol{K}$ calculado para las coordenadas de la figura 8.11.2 se han de intercambiar las filas y columnas de ésta matriz de acuerdo al cambio de numeración del nuevo sistema de coordenadas.

La forma de pasar las coordenadas de la figura 8.11.2 a la 8.11.3 se presenta en dos fases a saber:

1) Se cambian la numeración de los dígitos uno y tres en el sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ esto se presenta en la figura 8.11.4. Por lo tanto ahora $q_1$ es la rotación en el rodillo C y $q_3$ es el desplazamiento horizontal de la junta B.

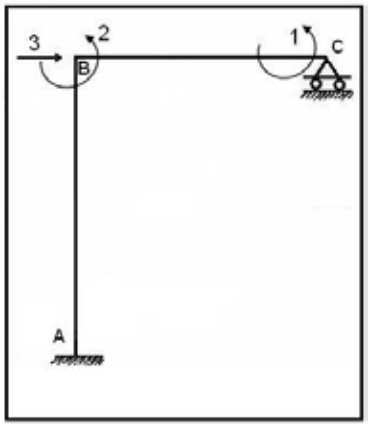



**Figura 8.11.4** Sistema de coordenadas generalizadas de fase uno.

La matriz de rigidez para este nuevo sistema de coordenadas se obtiene intercambiando las columnas y las filas uno y tres de la matriz de rigidez, con lo que se halla:

$$\boldsymbol{K} \text{ de la fase uno} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{L} & \frac{2EI_1}{L} & 0 \\ \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_o}{H} + \frac{4EI_1}{L} & \frac{6EI_o}{H^2} \\ 0 & \frac{6EI_o}{H^2} & \frac{12EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

2) Por último para pasar de las coordenadas de la figura 8.11.4 a las coordenadas de la figura 8.11.3 se intercambian los dígitos uno y dos. Por lo tanto en la matriz de rigidez de la fase uno se intercambian los elementos de la fila uno a la fila dos y luego los elementos de la columna uno a la columna dos, obteniendo de ésta manera la matriz $\boldsymbol{K}^*$ que ya fue presentada en el ejemplo anterior.

Un procedimiento similar se sigue para calcular la matriz de flexibilidad de una estructura en un nuevo sistema de coordenadas. El procedimiento de cálculo presentado es muy fácil programarlo.

## 8. 4 EJERCICIOS RESUELTOS

En los ejercicios que se van a resolver en éste capítulo al igual que en el próximo, el lector deberá justificar cada uno de los pasos dados, toda vez que ya se han indicado la teoría respectiva.

- **EJEMPLO 6**

Obtener directamente a partir de su definición los elementos de la **segunda columna** de la matriz de rigidez de la estructura mostrada en la figura 8.12.1, las vigas son totalmente rígidas y las columnas son axialmente rígidas. Todas las columnas tienen la misma sección transversal y longitud.

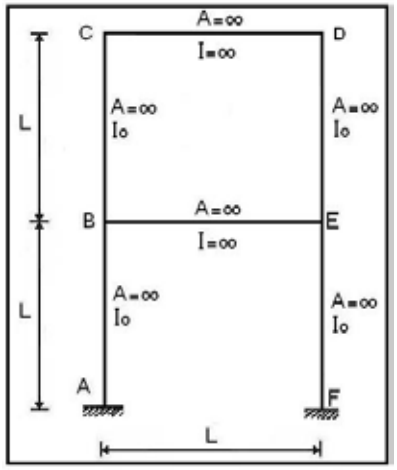



**Figura 8.12.1** Estructura de Ejemplos 6 y 7.

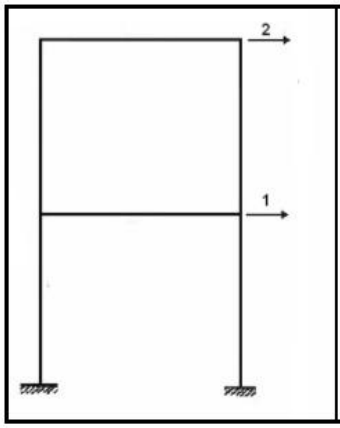



**Figura 8.12.2** Sistema $\boldsymbol{Q-q}$

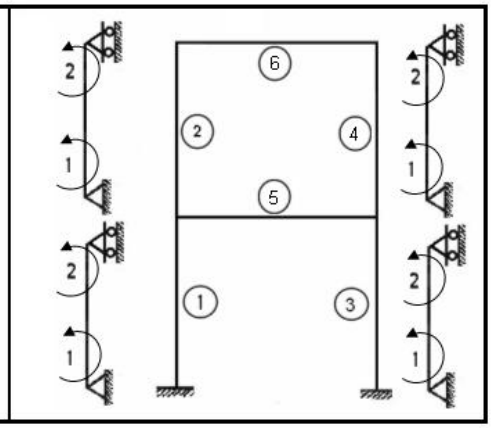


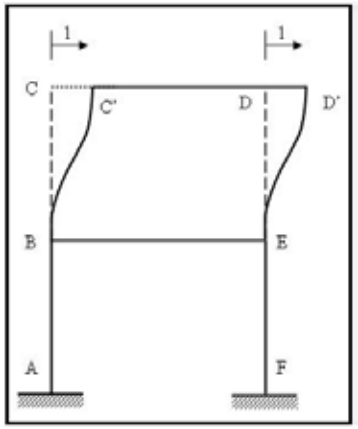

**Figura 8.12.3** Sistema $\boldsymbol{P-p}$

- **SOLUCIÓN**

La estructura tiene dos grados de libertad que son los desplazamientos horizontales de cada uno de los pisos. Estos grados de libertad se indican en la figura 8.12.2. Por ser los elementos verticales axialmente rígidos no existe deformación axial luego hay dos coordenadas en el sistema $\boldsymbol{P-p}$ de cada columna. En la figura 8.12.3 se muestra el sistema de coordenadas de los elementos de la estructura analizada y la numeración de los elementos. Nótese que no existe sistema $\boldsymbol{P-p}$ en los elementos horizontales esto se debe a que son elementos completamente rígidos.

De acuerdo al procedimiento de cálculo indicado en el apartado 8.1.2 se construye la deformada elemental $q_2$ ya que se va a encontrar los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez.

- $q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$




Deformada elemental $q_2$

$$p_1^{(1)} = 0 \qquad p_1^{(2)} = \frac{1}{L} \qquad p_1^{(3)} = 0 \qquad p_1^{(4)} = \frac{1}{L}$$

$$p_2^{(1)} = 0 \qquad p_2^{(2)} = \frac{1}{L} \qquad p_2^{(3)} = 0 \qquad p_2^{(4)} = \frac{1}{L}$$

- Cargas Internas $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{p}$. Únicamente los elementos dos y cuatro tienen deformaciones.

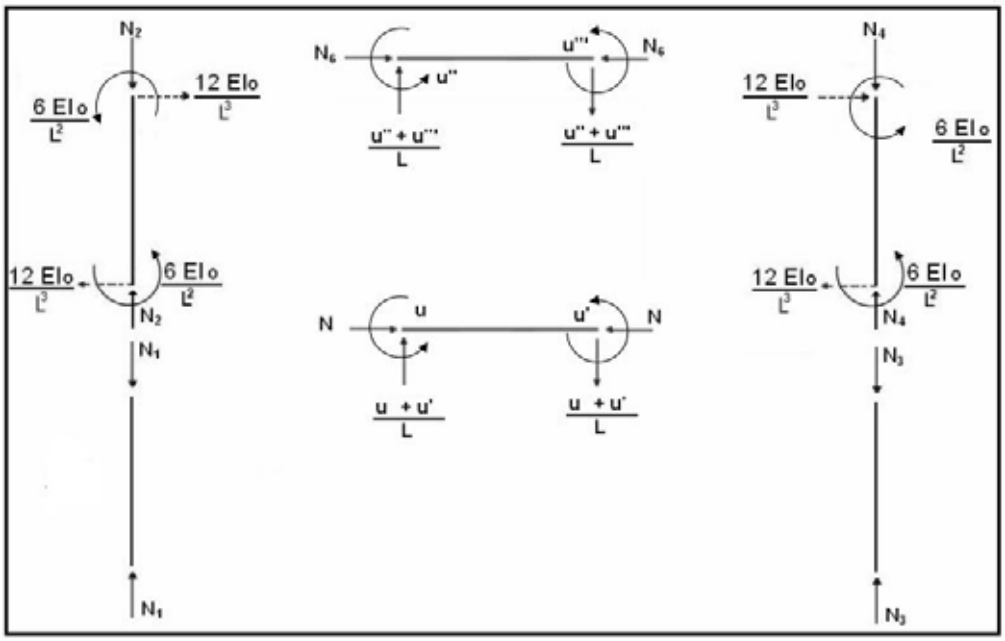
$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} & \frac{2EI_o}{L} \\ \frac{2EI_o}{L} & \frac{4EI_o}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6EI_0}{L^2} \\ \frac{6EI_0}{L^2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P_1^{(1)} = 0 \qquad P_1^{(2)} = \frac{6EI_o}{L^2} \qquad P_1^{(3)} = 0 \qquad P_1^{(4)} = \frac{6EI_o}{L^2}$$

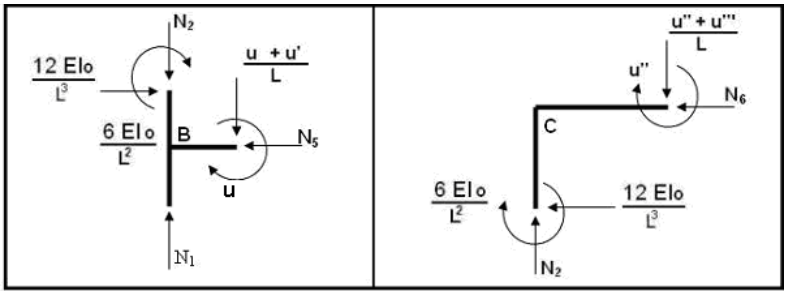
$$P_2^{(1)} = 0 \qquad P_2^{(2)} = \frac{6EI_o}{L^2} \qquad P_2^{(3)} = 0 \qquad P_2^{(4)} = \frac{6EI_o}{L^2}$$

- Equilibrio de elementos




Equilibrio de los elementos

- Equilibrio de Juntas




Junta B Junta C

o **Junta B**

$$\sum F_X = 0 = \frac{12EI_o}{L^3} - N_5$$

$$\sum F_Y = 0 = N_1 - N_2 - \frac{u + u'}{L}$$

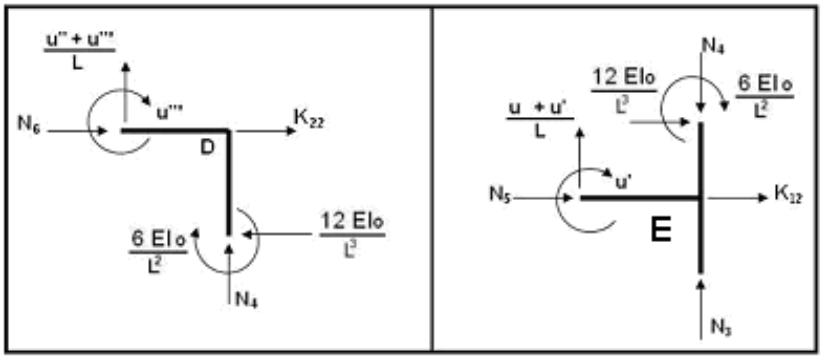
$$\sum M = 0 = \frac{6EI_o}{L^2} + u$$

o **Junta C**

$$\sum F_X = 0 = N_6 + \frac{12EI_o}{L^3}$$

$$\sum F_Y = 0 = N_2 - \frac{u'' + u'''}{L}$$

$$\sum M = 0 = u'' + \frac{6EI_o}{L^2}$$




Junta D Junta E

- **Junta D**

$$\sum F_X = 0 = K_{22} + N_6 - \frac{12EI_o}{L^3}$$

$$\sum F_Y = 0 = N_4 + \frac{u'' + u'''}{L}$$

$$\sum M = 0 = \frac{6EI_o}{L^2} + u'''$$

- **Junta E**

$$\sum F_X = 0 = \frac{12EI_o}{L^3} + N_5 + K_{12}$$

$$\sum F_Y = 0 = N_3 - N_4 + \frac{u + u'}{L}$$

$$\sum M = 0 = \frac{6EI_o}{L^2} + u'$$

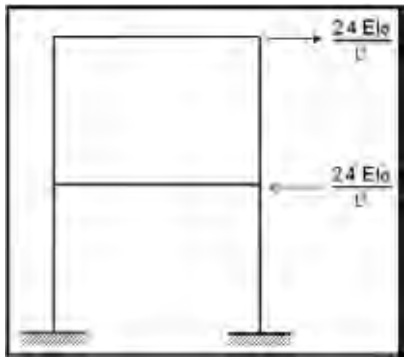
Al resolver las 12 ecuaciones con 12 incógnitas que se han presentado, se encuentra:

$$N_1 = -\frac{24EI_o}{L^3} \qquad N_2 = -\frac{12EI_o}{L^3} \qquad N_3 = \frac{24EI_o}{L^3} \qquad N_4 = \frac{12EI_o}{L^3}$$

$$N_5 = \frac{12EI_o}{L^3} \qquad N_6 = -\frac{12EI_o}{L^3} \qquad u = -\frac{6EI_o}{L^2} \qquad u' = -\frac{6EI_o}{L^2}$$

$$u'' = -\frac{6EI_o}{L^2} \qquad u''' = -\frac{6EI_o}{L^2} \qquad K_{12} = -\frac{24EI_o}{L^3} \qquad K_{22} = \frac{24EI_o}{L^3}$$

- Fuerzas exteriores




Elementos de la segunda columna de $\boldsymbol{K}$

De ésta manera se ha obtenido los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez a partir de su definición, se deja al estudiante el obtener los elementos de la primera columna de $\boldsymbol{K}$. El resultado completo es:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{48EI_o}{L^3} & -\frac{24EI_o}{L^3} \\ -\frac{24EI_o}{L^3} & \frac{24EI_o}{L^3} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 7**

Encontrar a partir de su definición los elementos de la segunda columna de la matriz de flexibilidad de la estructura presentada en la figura 8.12.1

- **SOLUCIÓN**

De acuerdo al procedimiento de cálculo indicado en el apartado 8.2.2 se tiene:

- $Q_2 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 2$

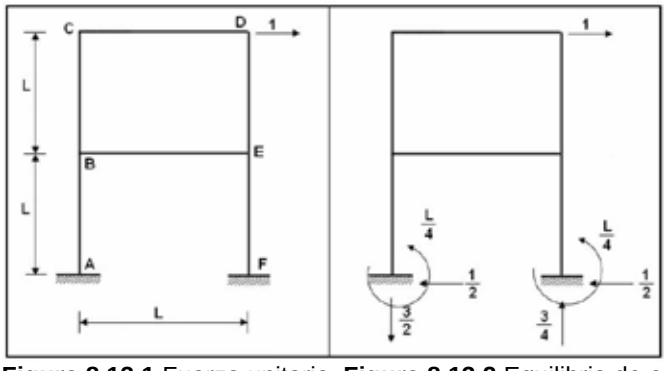



**Figura 8.13.1** Fuerza unitaria. **Figura 8.13.2** Equilibrio de estructura.

- Equilibrio de elementos

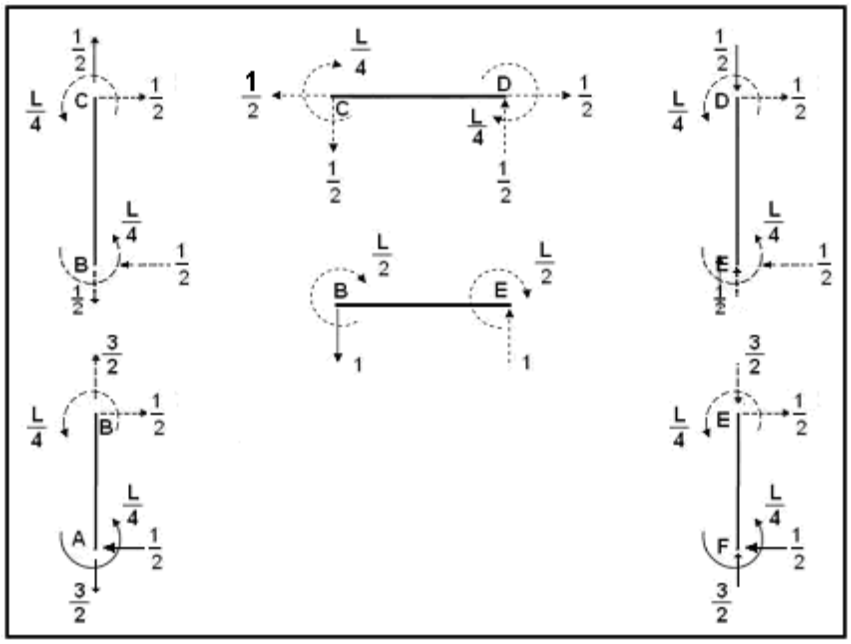


**Figura 8.13.3** Fuerzas internas

Por consiguiente:

$$P_1^{(1)} = \frac{L}{4} \qquad P_1^{(2)} = \frac{L}{4} \qquad P_1^{(3)} = \frac{L}{4} \qquad P_1^{(4)} = \frac{L}{4}$$

$$P_2^{(1)} = \frac{L}{4} \qquad P_2^{(2)} = \frac{L}{4} \qquad P_2^{(3)} = \frac{L}{4} \qquad P_2^{(4)} = \frac{L}{4}$$

- Cálculo de las deformaciones

$$\boldsymbol{f}^{(1)} = \boldsymbol{f}^{(2)} = \boldsymbol{f}^{(3)} = \boldsymbol{f}^{(4)} = \frac{L}{6EI_o}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{P}$$

$$p_1^{(1)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_1^{(2)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_1^{(3)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_1^{(4)} = \frac{L^2}{24EI_o}$$

$$p_2^{(1)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_2^{(2)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_2^{(3)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_2^{(4)} = \frac{L^2}{24EI_o}$$

- Cálculo del vector $\boldsymbol{q}$

Se denomina $\alpha = \frac{L^2}{24EI_o}$. Por lo tanto las deformaciones a flexión en cada uno de los elementos valen $\alpha$ toda vez que tienen ese valor.

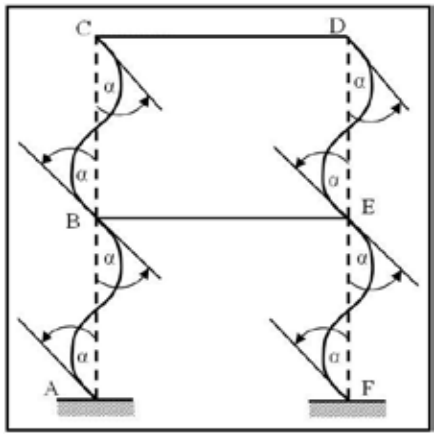



**Figura 8.13.4** Deformaciones obtenidas

La estructura de la figura 8.13.4 no cumple con la geometría de deformación, para esto se procede de la siguiente forma:

i) El nudo D se desplaza verticalmente una magnitud igual a $\alpha L$ como lo indica la figura 8.13.5 de esa manera las vigas giran un ángulo $\alpha$ y ya cumplen con el principio de Williot. Pero el nudo F se ha desplazado a F'. En consecuencia se solucionó un problema pero se creó otro y para solucionarlo se da el siguiente paso.

ii) Con centro en el nudo A, se rota a la estructura en sentido horario un ángulo $\alpha$ como lo ilustra la figura 8.13.6.

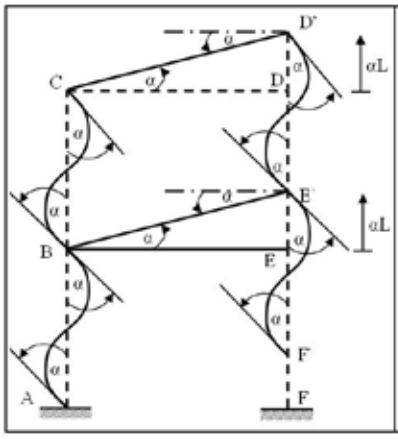



**Figura 8.13.5**

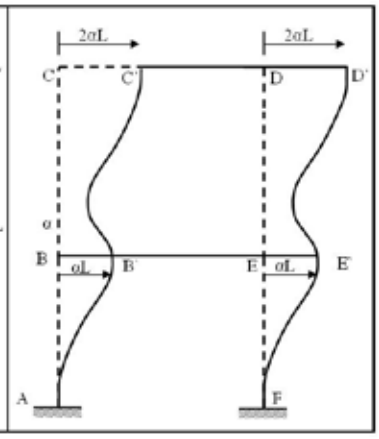



**Figura 8.13.6**

De la figura 8.13.6 se tiene:

$$q_1 = \alpha L = \frac{L^3}{24EI_o} \qquad q_2 = 2\alpha L = \frac{L^3}{12EI_o}$$

Pero

$$q_1 = F_{12} = \frac{L^3}{24EI_o} \qquad q_2 = F_{22} = \frac{L^3}{12EI_o}$$

- **EJEMPLO 8**

Si en conexión con el Ejemplo 6, la matriz $\boldsymbol{T}$ define una transformación de coordenadas de la forma $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$. Interpretar las nuevas coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y encontrar la matriz de rigidez usando la ley de transformación de coordenadas de éste nuevo sistema.

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix}$$

$$q_1 = 1 * q_1^* + 0 * q_2^* = q_1^*$$
$$q_2 = 1 * q_1^* + 1 * q_2^* = q_1^* + q_2^*$$

De donde:

$$q_1^* = q_1$$
$$q_2^* = q_2 - q_1$$

Por lo tanto las coordenadas $\boldsymbol{q}^*$ miden desplazamientos relativos.

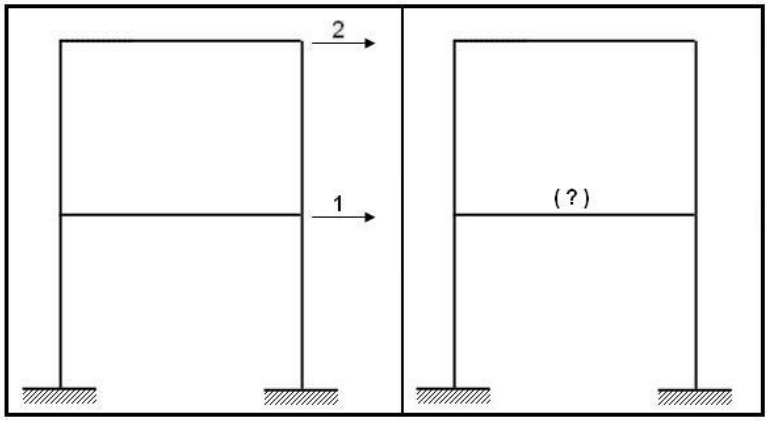



**Figura 8.14.1** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ **Figura 8.14.2** Sistema $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$

- Cálculo de $\boldsymbol{K}^*$

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{T}^t\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{K}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48EI_o}{L^3} & -\frac{24EI_o}{L^3} \\ -\frac{24EI_o}{L^3} & \frac{24EI_o}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^{*} = \begin{bmatrix} \dfrac{24EI_o}{L^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{24EI_o}{L^3} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 9**

La matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ para la estructura del Ejemplo 7 es:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{L^3}{24EI_o} & \dfrac{L^3}{24EI_o} \\ \dfrac{L^3}{24EI_o} & \dfrac{L^3}{12EI_o} \end{bmatrix}$$

En este caso el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ es el presentado en la figura 8.14.1. Se pide calcular la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}^{*}$ para el sistema de coordenadas de la figura 8.15, utilizando la regla práctica.

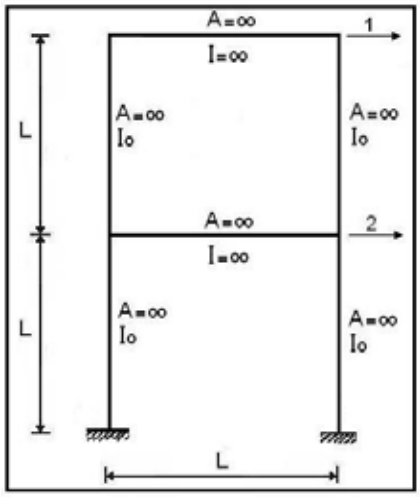



**Figura 8.15** Coordenadas generalizadas del Ejemplo 9

- **SOLUCIÓN**

Se cambia la fila uno a la fila dos.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{L^3}{24EI_o} & \dfrac{L^3}{12EI_o} \\ \dfrac{L^3}{24EI_o} & \dfrac{L^3}{24EI_o} \end{bmatrix}$$

Finalmente se cambia la columna uno por la columna dos.

$$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{12EI_o} & \frac{L^3}{24EI_o} \\ \frac{L^3}{24EI_o} & \frac{L^3}{24EI_o} \end{bmatrix}$$

## 8. 5 EJERCICIOS PROPUESTOS

**Ejercicio N.- 1**

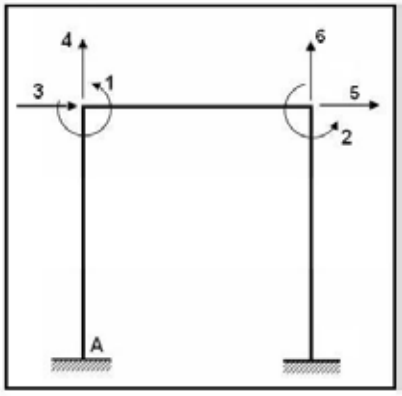
Encontrar la matriz de rigidez utilizando el concepto, de la estructura del Ejemplo 8, empleando las coordenadas $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$.

**Ejercicio N.- 2**

Generar directamente de su definición los términos de la primera columna de la matriz de flexibilidad de la estructura mostrada en la figura 8.12.1

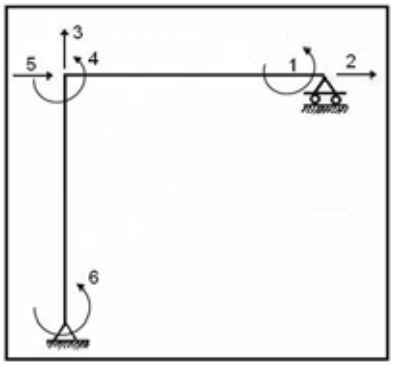
**Ejercicio N.- 3**

Calcular la matriz de rigidez para el pórtico de la figura 8.2 empleando la transformación de coordenadas. Si el nuevo sistema de coordenadas es:



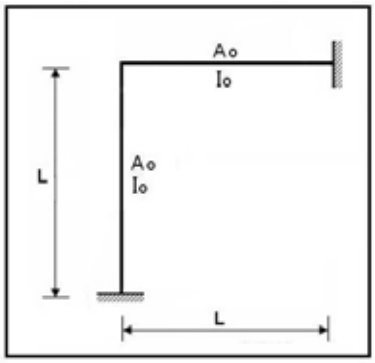

**Ejercicio N.- 4**

Para la estructura de la figura 8.6 obtener la matriz de flexibilidad si el sistema de coordenadas generalizadas es el mostrado a continuación. Utilice la regla práctica.



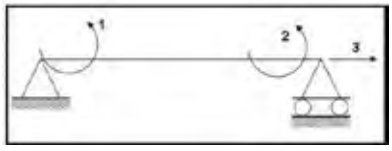
**Ejercicio N.- 5**

Hallar la matriz de rigidez usando el concepto del siguiente pórtico plano.

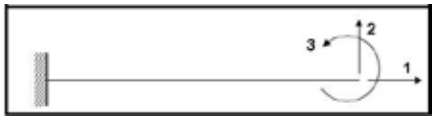



Emplear como sistemas de coordenadas del elemento:

a.



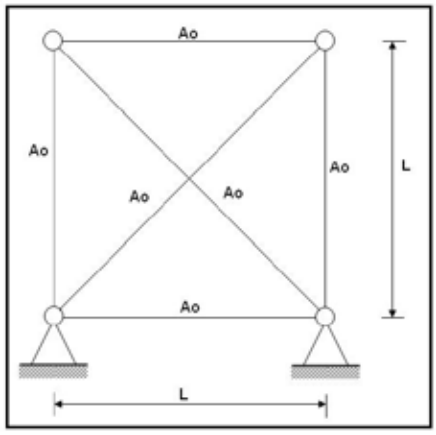

b.



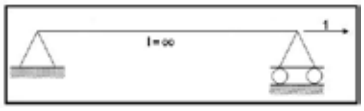

c. Sistema a. para elemento vertical y sistema b. para elemento horizontal.

**Ejercicio N.- 6**

Obtener la matriz de rigidez para la armadura presentada.



Usar como sistema de coordenadas del elemento el siguiente:




Sistema **P-p**

*CAPITULO 9*

# MATRICES A y B


## RESUMEN

Se presenta el cálculo de las matrices $A$ y $B$ las mismas que sirven para obtener las matrices de rigidez $K$ y de flexibilidad $F$ de estructuras. En éste capítulo se trabaja con pórticos planos y armaduras planas.

La matriz $B$ se obtiene únicamente en estructuras isostáticas. Por ser muy importante su estudio se resuelven 11 ejemplos del cálculo de las matrices $A$ y $B$.


## 9. 1 RELACIÓN ENTRE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

### 9.1.1 Introducción

En el capítulo anterior la numeración de las deformaciones que experimentan los elementos de una estructura se realizó utilizando un subíndice para indicar el número del elemento. Ahora se va a omitir éste subíndice y se tendrá por ejemplo que el sistema de coordenadas $P - p$ para la estructura presentada a la izquierda de la figura 9.1, es el que aparece en la parte central.

Es decir que la numeración del sistema $P - p$ se lo hará de corrido, se entiende que las tres primeras deformaciones corresponden al elemento AB, las tres subsiguientes (4,5 y 6) al elemento BC y las tres últimas (7,8 y 9) al elemento CD. En éste caso por ser los elementos totalmente flexibles se tienen tres coordenadas por elemento. Es necesario recordar que el sistema $P - p$ con el cual se trabaja es arbitrario, el que más se utiliza es el indicado en la parte central de la figura 9.1

A la derecha de la figura 9.1, se indica el sistema de coordenadas $Q - q$ para el pórtico analizado. Se quiere establecer una relación entre los desplazamientos $q$ y las deformaciones $p$. Esto se lo consigue por medio de la matriz $A$, definida de la siguiente manera:

$$p = A\,q \qquad (10.1)$$

Donde $\boldsymbol{A}$ es la matriz de compatibilidad que transforma los desplazamientos de una estructura en deformaciones, en general será de orden $m\,x\,n$. Siendo $m$ el número de filas que es igual a las coordenadas $\boldsymbol{p}$ y $n$ el número de columnas que es igual a las coordenadas $\boldsymbol{q}$.

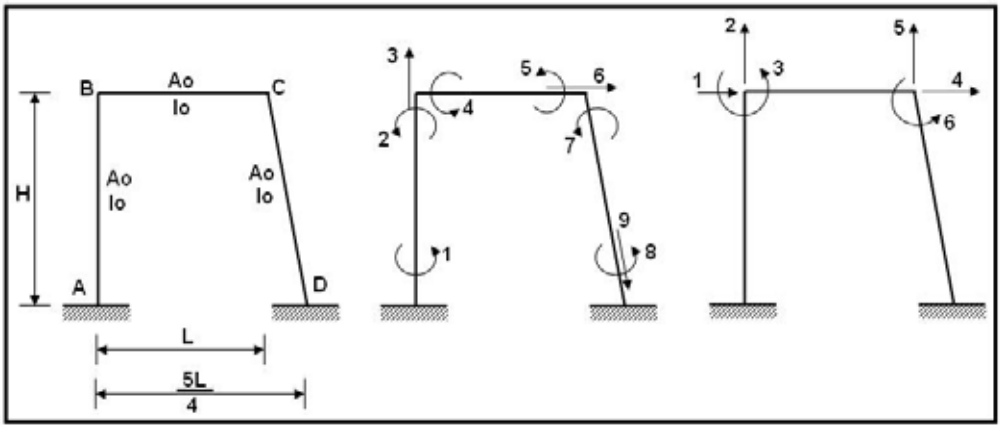



**Figura 9.1** Estructura, sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$; y sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$

De la definición de la matriz $\boldsymbol{A}$ se puede ver que un término $A_{ij}$ no es más que el valor de la deformación $p_i$ correspondiente a la deformada elemental $q_j = 1$ y las demás nulas. En consecuencia se obtiene utilizando exclusivamente la geometría de deformación. Finalmente cada elemento $A_{ij}$ representa el coeficiente de influencia de las deformaciones para los desplazamientos.

### 9.1.2 Definición

Cuando la matriz $\boldsymbol{A}$ se determina usando solo la geometría se dice que el sistema es *cinemáticamente determinado.*

### 9.1.3 Matriz fuerza carga $\boldsymbol{A^t}$

Si $\boldsymbol{p = A\,q}$ se puede demostrar utilizando el principio de los trabajos virtuales que $\boldsymbol{Q = A^t\,P}$. Donde $\boldsymbol{A^t}$ es la matriz transpuesta de $\boldsymbol{A}$ que relaciona las cargas internas $\boldsymbol{P}$ con el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$.

Otra forma de demostrar es igualando la energía de deformación externa con la energía de deformación interna. En efecto se tiene:

- Energía de deformación externa $= \dfrac{1}{2}\boldsymbol{q^t\,Q}$
- Energía de deformación interna $= \dfrac{1}{2}\boldsymbol{p^t P}$

Por lo tanto: $\boldsymbol{q^t Q = p^t P}$

Pero $\boldsymbol{p = A\,q}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{q^t Q = (A\,q)^t\,P}$

De donde: $\boldsymbol{q^t\,Q = q^t\,A^t\,P}$ $\Rightarrow \boldsymbol{Q = A^t\,P}$

## 9. 2 CÁLCULO DE LA MATRIZ $A$

### 9.2.1 Pórticos Planos

La matriz $\boldsymbol{A}$ sirve para encontrar la matriz de rigidez de una estructura, con este objetivo el sistema de coordenadas de elemento que más se emplea es el presentado a la izquierda de la figura 9.2 para un elemento totalmente flexible.

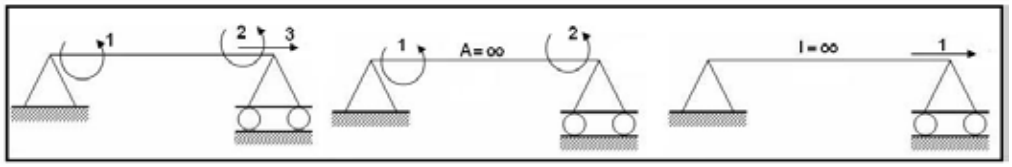



**Figura 9.2** Sistema de coordenadas para un elemento totalmente flexible, axialmente rígido y transversalmente rígido

Si el elemento es axialmente rígido se tiene las coordenadas, indicadas en la gráfica central de la figura 9.2 y si el elemento es transversalmente rígido las coordenadas indicadas a la derecha de la figura 9.2. Las ecuaciones con las cuales se calcula las deformaciones para un elemento totalmente flexible son:

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

En éste apartado se desarrollan tres ejercicios en los cuales se usa las coordenadas indicadas pero se puede calcular la matriz $\boldsymbol{A}$ empleando cualquier sistema de coordenadas $\boldsymbol{P - p}$ como se ilustra en el apartado 9.2.3.

- **EJEMPLO 1**

Hallar la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$ de la estructura de la figura 9.3 compuesta por elementos totalmente flexibles.

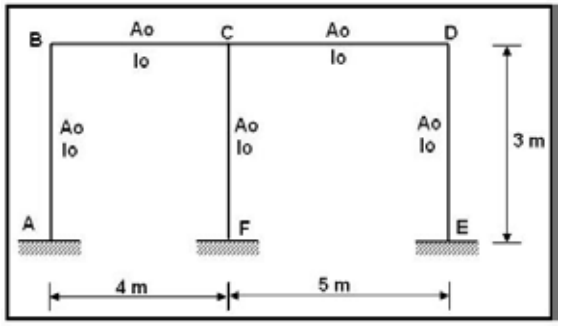



**Figura 9.3** Estructura con elementos totalmente flexibles.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 9.4 se indica el sistema de coordenadas de la estructura, existen 3 grados de libertad por nudo, que son las componentes de desplazamiento horizontal, vertical y la rotación.

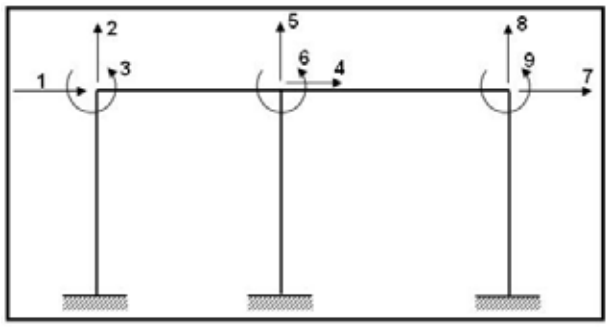



**Figura 9.4** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$

En la figura 9.5 se presenta el sistema de coordenadas de los elementos, se ha considerado que el nudo inicial para las columnas se encuentra en la parte inferior y para la vigas a la izquierda del elemento.

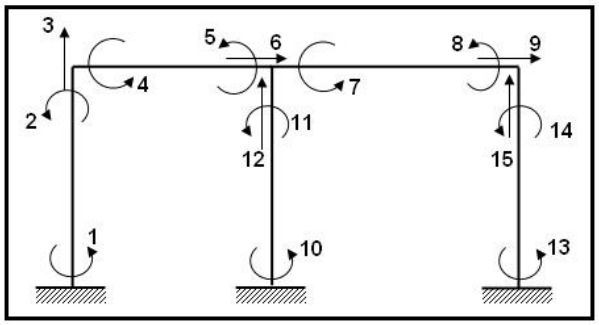
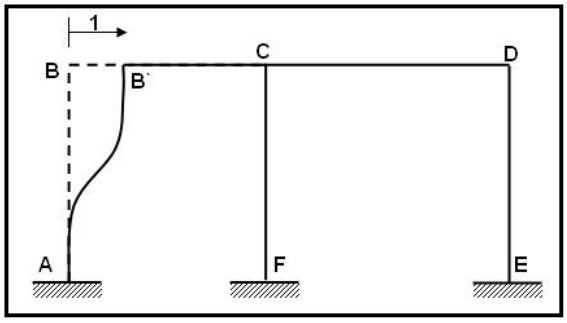



**Figura 9.5** Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

- Primera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$




Deformada elemental $q_1$

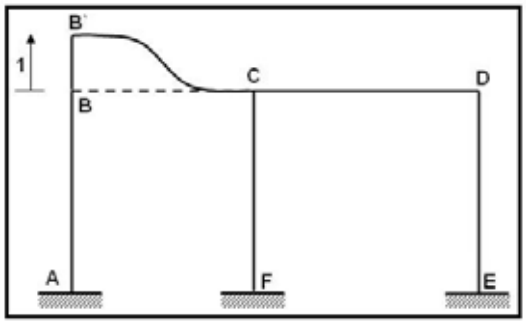
$$p_1 = \frac{1}{3} \qquad p_4 = 0 \qquad p_7 = 0 \qquad p_{10} = 0 \qquad p_{13} = 0$$

$$p_2 = \frac{1}{3} \qquad p_5 = 0 \qquad p_8 = 0 \qquad p_{11} = 0 \qquad p_{14} = 0$$

$$p_3 = 0 \qquad p_6 = -1 \qquad p_9 = 0 \qquad p_{12} = 0 \qquad p_{15} = 0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

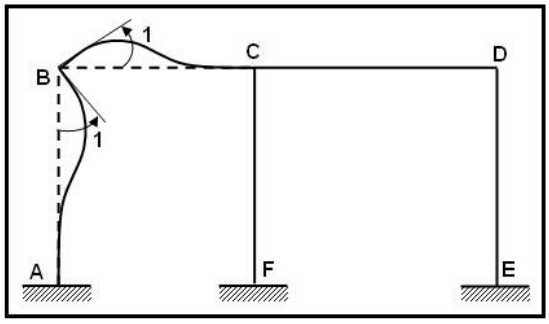



Deformada elemental $q_2$

$$p_1 = 0 \quad p_4 = \frac{1}{4} \quad p_7 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = \frac{1}{4} \quad p_8 = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 1 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{15} = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$

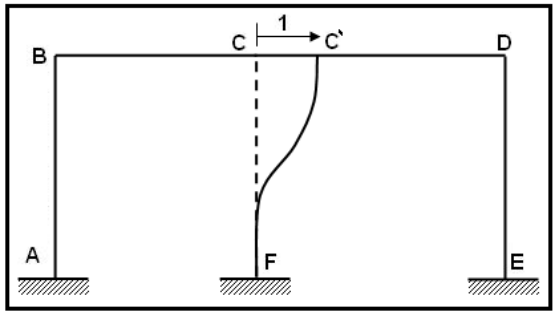



Deformada elemental $q_3$

$$p_1 = 0 \quad p_4 = 1 \quad p_7 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 1 \quad p_5 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{15} = 0$$

- Cuarta columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_4 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 4$$

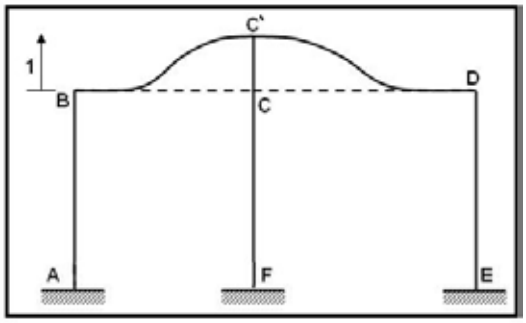



Deformada elemental $q_4$

$$p_1 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_7 = 0 \quad p_{10} = \frac{1}{3} \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_{11} = \frac{1}{3} \quad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 1 \quad p_9 = -1 \quad p_{12} = 0 \quad p_{15} = 0$$

- Quinta columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_5 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 5$$

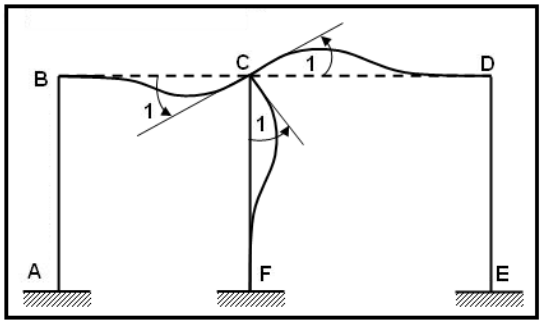



Deformada elemental $q_5$

$$p_1 = 0 \quad p_4 = -\frac{1}{4} \quad p_7 = \frac{1}{5} \quad p_{10} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = -\frac{1}{4} \quad p_8 = \frac{1}{5} \quad p_{11} = 0 \quad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{12} = 1 \quad p_{15} = 0$$

- Sexta columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_6 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 6$$

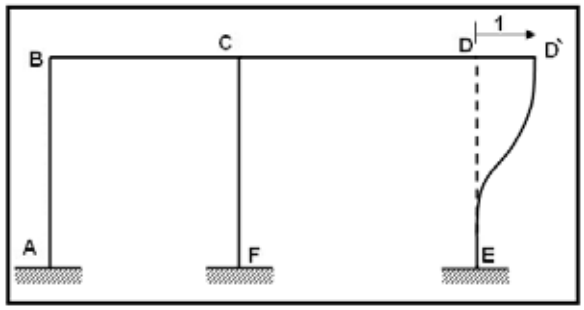



Deformada elemental $q_6$

$$p_1 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_7 = 1 \quad p_{10} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = 1 \quad p_8 = 0 \quad p_{11} = 1 \quad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{15} = 0$$

- Séptima columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_7 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 7$$

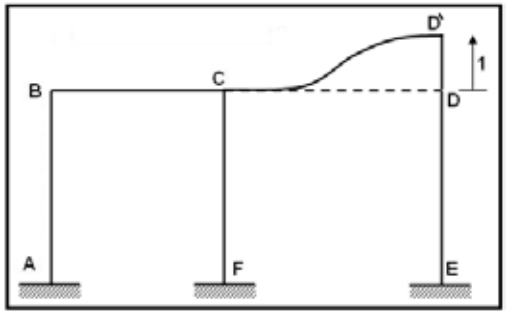



Deformada elemental $q_7$

$$p_1 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_7 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{13} = \frac{1}{3}$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{14} = \frac{1}{3}$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 1 \quad p_{12} = 0 \quad p_{15} = 0$$

- Octava columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_8 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 8$$

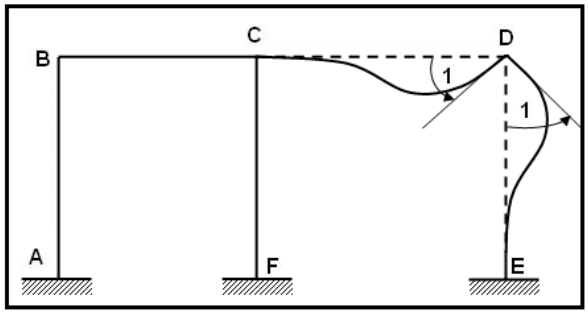



Deformada elemental $q_8$

$$p_1 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_7 = -\frac{1}{5} \quad p_{10} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_8 = -\frac{1}{5} \quad p_{11} = 0 \quad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{15} = 1$$

- Novena columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_9 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 9$$




Deformada elemental $q_9$

$$p_1 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_7 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_8 = 1 \quad p_{11} = 0 \quad p_{14} = 1$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{15} = 0$$

Por lo tanto la matriz $\boldsymbol{A}$ resulta:

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ es particionada. En efecto para la estructura que se está analizando las tres primeras columnas corresponden a las deformaciones del elemento 1, que viene a ser la columna izquierda, las tres restantes al elemento 2 que corresponde a la viga izquierda, etc.

Para encontrar la matriz de rigidez usando el concepto, se encontraba en primer lugar el diagrama elemental $q_i$, luego se hallaban las deformaciones del elemento. Estos dos pasos se

realizan por medio de la matriz $\boldsymbol{A}$, de tal forma que la indicada matriz sirve para encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

- **EJEMPLO 2**

Para la estructura de la figura 9.6 Se pide:

i) Seleccionar un sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ apropiado.
ii) Seleccionar un sistema de coordenadas $\boldsymbol{P-p}$ apropiado.
iii) Calcular la matriz $\boldsymbol{A}$.

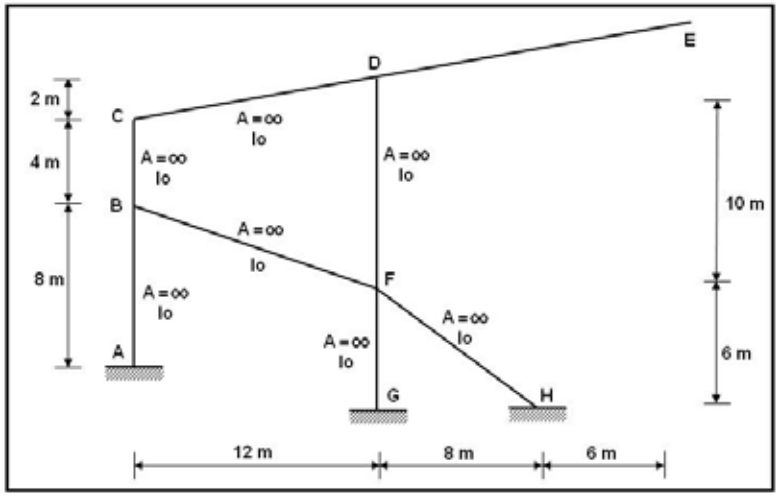



**Figura 9.6** Estructura de ejemplo 2.

- **SOLUCIÓN**

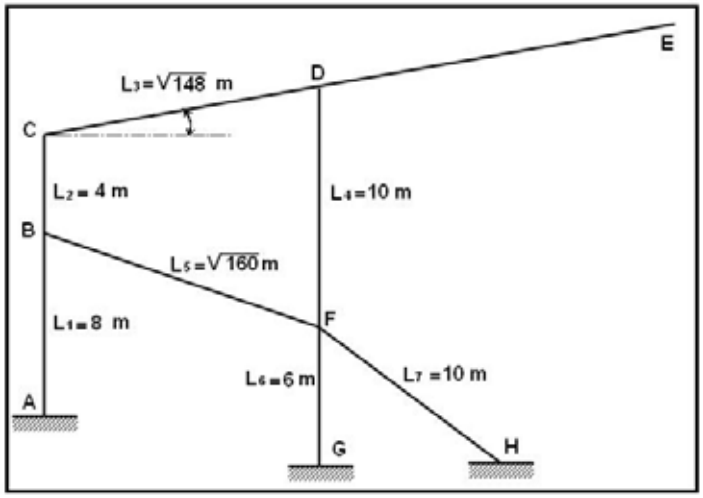



**Figura 9.7** Parámetros geométricos

$$sen\alpha = \frac{2}{\sqrt{148}} \qquad \cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{148}} \qquad tg\alpha = \frac{1}{6}$$

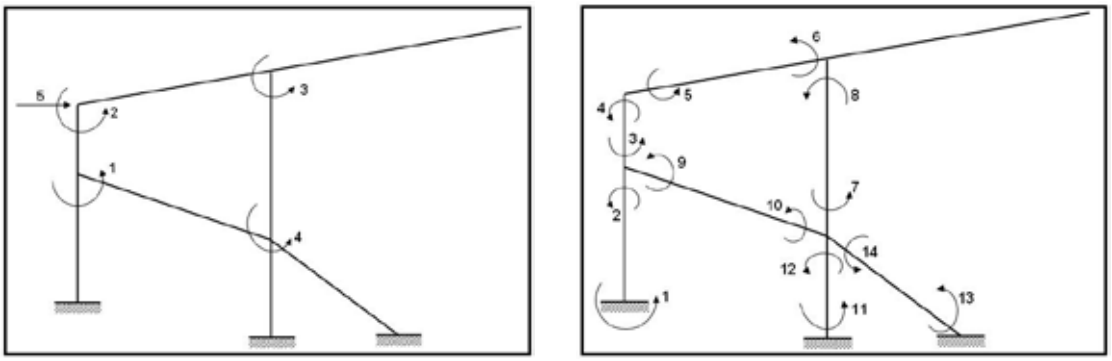
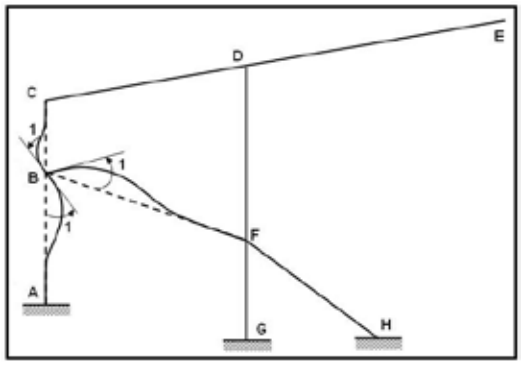



**Figura 9.8** Sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

Nótese que no se consideran grados de libertad en el voladizo. Esta es una forma de resolver el problema. Las cargas que gravitan en los voladizos se los calculan aparte como que están empotrados y las reacciones de empotramiento se colocan con sentido contrario en la junta y se elimina el voladizo.

- Primera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

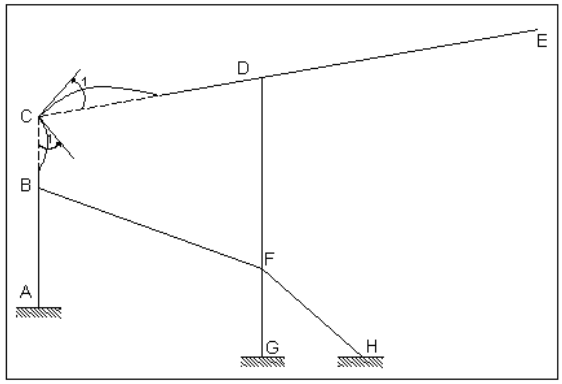



Deformada elemental $q_1$

$$p_1 = 0 \quad p_3 = 1 \quad p_5 = 0 \quad p_7 = 0 \quad p_9 = 1 \quad p_{11} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 1 \quad p_4 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{14} = 0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

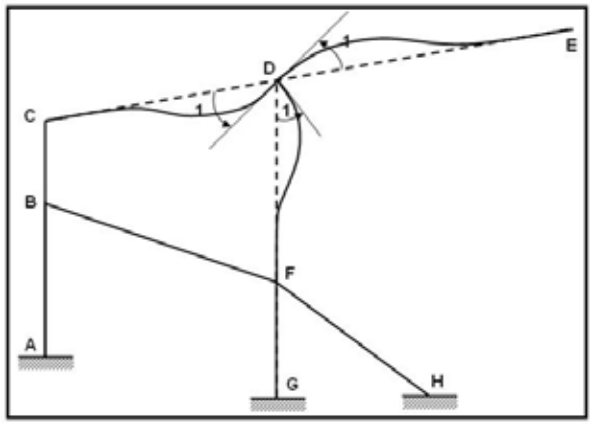



Deformada elemental $q_2$

$$p_1=0 \quad p_3=0 \quad p_5=1 \quad p_7=0 \quad p_9=0 \quad p_{11}=0 \quad p_{13}=0$$
$$p_2=0 \quad p_4=1 \quad p_6=0 \quad p_8=0 \quad p_{10}=0 \quad p_{12}=0 \quad p_{14}=0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3=1 \quad y \quad q_i=0 \quad i\neq 3$$

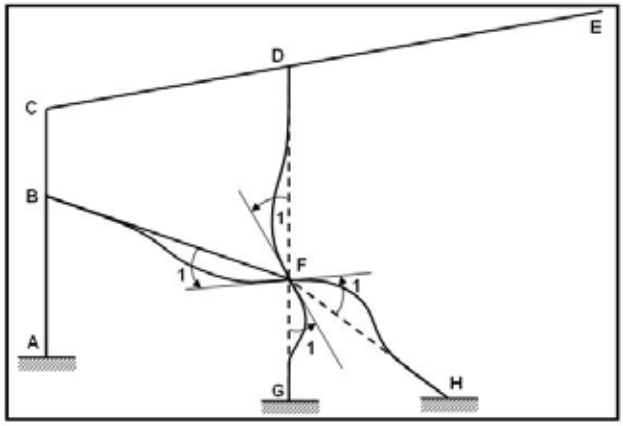



Deformada elemental $q_3$

$$p_1=0 \quad p_3=0 \quad p_5=0 \quad p_7=0 \quad p_9=0 \quad p_{11}=0 \quad p_{13}=0$$
$$p_2=0 \quad p_4=0 \quad p_6=1 \quad p_8=1 \quad p_{10}=0 \quad p_{12}=0 \quad p_{14}=0$$

- Cuarta columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_4=1 \quad y \quad q_i=0 \quad i\neq 4$$

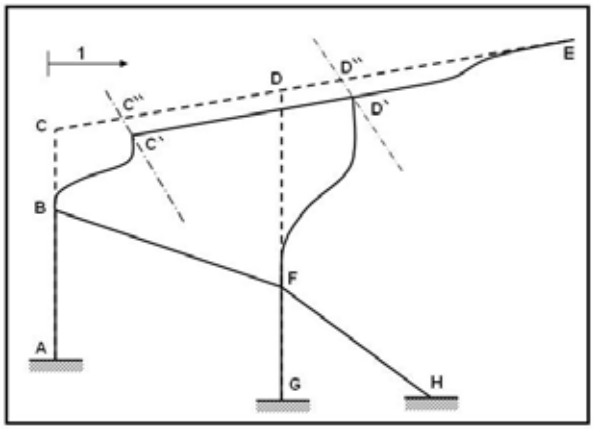



Deformada elemental $q_4$

$$p_1=0 \quad p_3=0 \quad p_5=0 \quad p_7=1 \quad p_9=0 \quad p_{11}=0 \quad p_{13}=0$$
$$p_2=0 \quad p_4=0 \quad p_6=0 \quad p_8=0 \quad p_{10}=1 \quad p_{12}=1 \quad p_{14}=1$$

- Quinta columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_5 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 5$$




Deformada elemental $q_5$

Para las deformaciones del elemento CD, se observa en el triángulo CC'C''

$$u_1 = \cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{148}} \qquad v_1 = -sen\alpha = -\frac{2}{\sqrt{148}}$$

Triángulo CC'C'' es igual al triángulo DD'D''. Luego:

$$u_2 = \cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{148}} \qquad v_2 = -sen\alpha = -\frac{2}{\sqrt{148}}$$

El elemento CD no se deforma a flexión luego $p_5 = p_6 = 0$. Las deformaciones del elemento DF es igual al desplazamiento horizontal DD' que vale la unidad sobre la longitud que es de 10 m.

$$p_1 = 0 \quad p_3 = \frac{1}{4} \quad p_5 = 0 \quad p_7 = \frac{1}{10} \quad p_9 = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{13} = 0$$

$$p_2 = 1 \quad p_4 = \frac{1}{4} \quad p_6 = 0 \quad p_8 = \frac{1}{10} \quad p_{10} = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{14} = 0$$

En éste ejemplo la matriz $\boldsymbol{A}$ se particiona cada dos filas ya que cada elemento tiene dos coordenadas en su sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ por ser axialmente rígido. La matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$ del ejemplo desarrollado resulta:

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- **EJEMPLO 3**

Encontrar la matriz $A$ para el pórtico plano de la figura 9.9. Previamente seleccionar sistemas $Q - q$ y $P - p$ que sean apropiados.

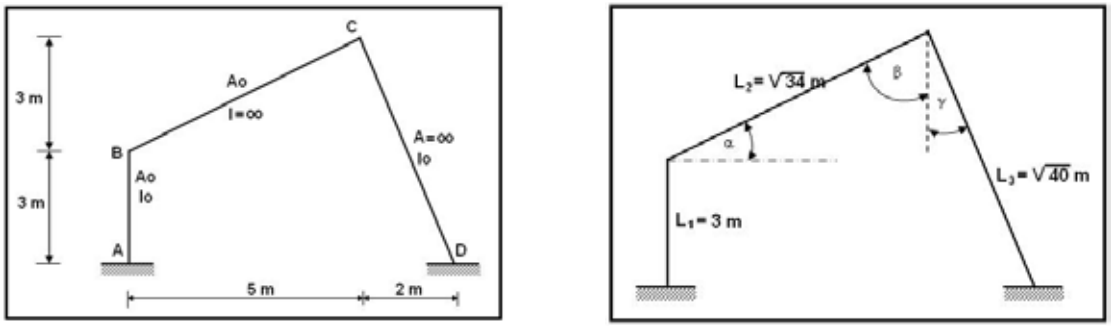



**Figura 9.9** Estructura de Ejemplo 3 y dimensiones de sus elementos.

- **SOLUCIÓN**

En base a los ángulos presentados en la figura 9.9 se tiene:

$$sen\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad tg\alpha = \frac{3}{5}$$

$$sen\beta = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad tg\beta = \frac{5}{3}$$

$$sen\gamma = \frac{2}{\sqrt{40}} \qquad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{40}} \qquad tg\gamma = \frac{1}{3}$$

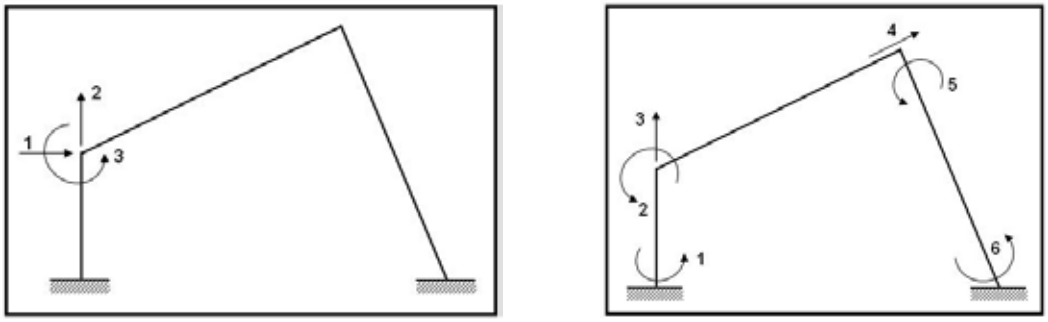
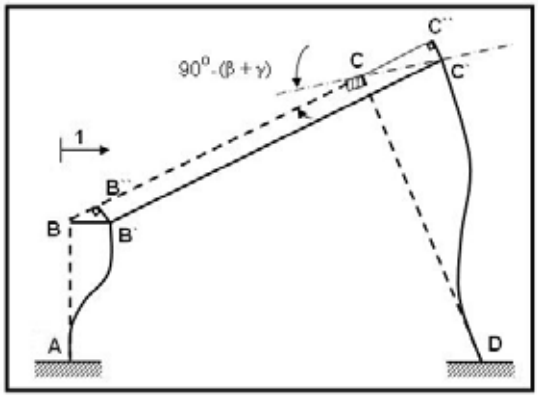



**Figura 9.10** Sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y sistema $\boldsymbol{P-p}$

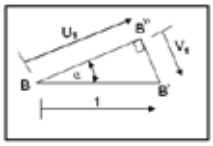
- Primera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$



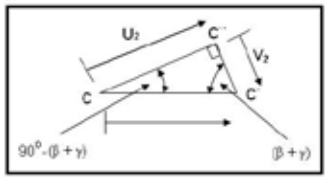

Deformada elemental $q_1$

Para analizar las deformaciones del elemento BC se examina el triángulo BB'B''



$$u_1 = \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad v_1 = -sen\alpha = -\frac{3}{\sqrt{34}}$$

En la deformada elemental se observa que $v_2 = v_1 = -\frac{3}{\sqrt{34}}$




En el triángulo rectángulo CC'C'' se tiene:

$$tg(\beta+\gamma)=\frac{u_2}{v_2} \qquad u_2 = v_2\ tg(\beta+\gamma)$$

El signo de $u_2$ es positivo (tracción en el nudo final)

$$tg(\beta+\gamma)=\frac{tg\beta+tg\gamma}{1-tg\beta\ tg\gamma}=\frac{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{5}{3}\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{2}$$

Luego: $u_2=\frac{3}{\sqrt{34}}\frac{9}{2}=\frac{27}{2\sqrt{34}}$ (positivo)

$$CC'=\sqrt{(CC'')^2+(C'C'')^2}=\sqrt{\frac{27^2}{2^2*34}+\frac{3^2}{34}}=\sqrt{\frac{729}{4*34}+\frac{9}{34}}=\sqrt{\frac{765}{136}}=2.37$$

Nótese que CC' es el valor de $v_1$ para el elemento CD, por consiguiente:

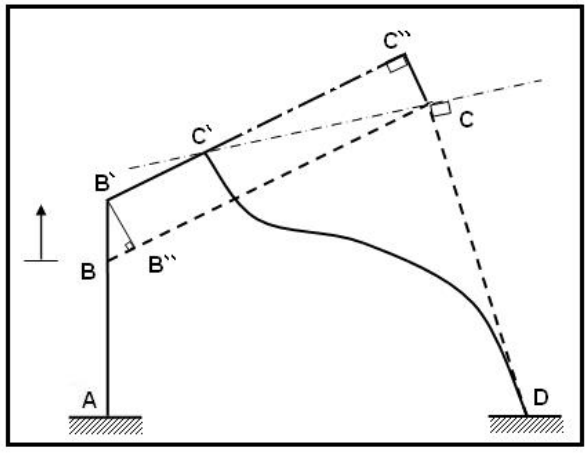
$$p_1=\frac{1}{3} \qquad p_4=u_2-u_1=\frac{27}{2\sqrt{34}}-\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{17}{2\sqrt{34}} \qquad p_5=\frac{v_1}{L_3}=\frac{CC'}{L_3}=\frac{2.37}{\sqrt{40}}$$

$$p_2=\frac{1}{3} \qquad p_6=\frac{2.37}{\sqrt{40}}$$

$$p_3=0$$

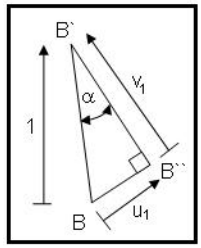
- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2=1 \quad y \quad q_i=0 \quad i\neq 2$$



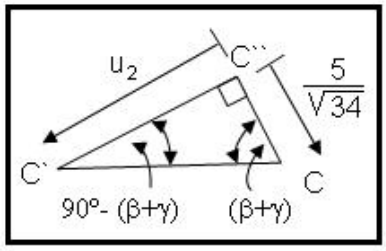

Deformada elemental $q_2$

Para encontrar las deformaciones del elemento BC se analiza el triángulo BB'B''




$$u_1 = sen\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad v_1 = \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$B''B' = CC'' = v_1 = \frac{5}{\sqrt{34}}$$




$$tg(\beta+\gamma) = \frac{u_2}{\frac{5}{\sqrt{34}}} \qquad (u_2 \text{ es negativo por su deformada})$$

$$u_2 = -\frac{5}{\sqrt{34}} tg(\beta+\gamma) = -\frac{5}{\sqrt{34}}\frac{9}{2} = -\frac{45}{2\sqrt{34}}$$

$$CC' = \sqrt{(C'C'')^2 + (C''C)^2} = \sqrt{\left(\frac{45}{2\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2125}{136}} = 3.96$$

De igual manera CC'= $v_1$ para el elemento CD y en éste caso es negativo. Por lo tanto:

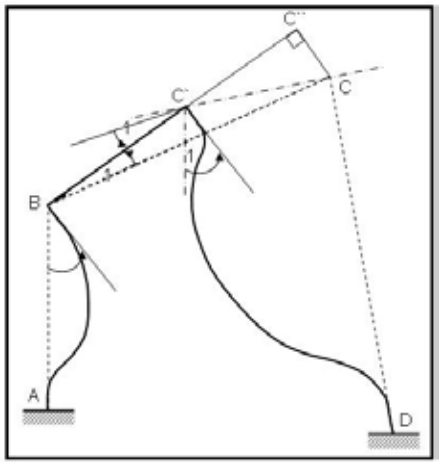
$$p_1 = 0 \qquad p_4 = u_2 - u_1 = -\frac{45}{2\sqrt{34}} - \frac{3}{\sqrt{34}} = -\frac{51}{2\sqrt{34}} \qquad p_5 = -\frac{v_1}{L_3} = -\frac{CC'}{L_3} = -\frac{3.96}{\sqrt{40}}$$

$$p_2 = 0 \qquad p_6 = -\frac{3.96}{\sqrt{40}}$$

$$p_3 = 1$$

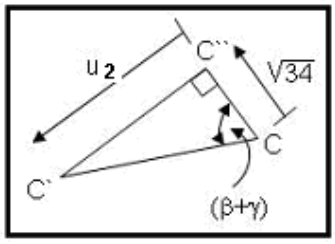
- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$




Deformada elemental $q_3$

CC''= $L_2 = \sqrt{34}$ (Arco= radio por ángulo). Por otra parte el ángulo $C'CC'' = (\beta + \gamma)$




$$tg(\beta + \gamma) = \frac{u_2}{\sqrt{34}} \qquad \Rightarrow \qquad u_2 = -\sqrt{34}\,\frac{9}{2}$$

$u_2$ es negativo ya que está a compresión en el nudo final.

$$CC' = \sqrt{(C'C'')^2 + (C''C)^2} = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{34}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{34}\right)^2} = 26.88$$

$p_1 = 0$ $\qquad$ $p_4 = u_2 - u_1 = -\frac{9}{2}\sqrt{34}$ $\qquad$ $p_5 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1 - \frac{0 + 26.88}{\sqrt{40}} = -3.25$

$p_2 = 1$ $\qquad$ $p_6 = -\frac{v_1}{L_3} = -\frac{26.88}{\sqrt{40}} = -4.25$

$p_3 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \frac{17}{2\sqrt{34}} & -\frac{51}{2\sqrt{34}} & -\frac{9\sqrt{34}}{2} \\ \hline \frac{2.37}{\sqrt{40}} & -\frac{3.96}{\sqrt{40}} & -3.25 \\ \frac{2.37}{\sqrt{40}} & -\frac{3.96}{\sqrt{40}} & -4.25 \end{bmatrix}$$

### 9.2.2 Armadura Plana

Ahora el sistema de coordenadas de un elemento es el presentado a la derecha de la figura 9.2. En consecuencia cada elemento de una armadura plana tiene una sola deformación que es la axial, la ubicación de ésta coordenada es arbitraria en el sentido de que puede colocarse a la izquierda o a la derecha de un elemento horizontal. Por ejemplo para la celosía de la figura 9.11.1 se puede considerar como sistema $\boldsymbol{P-p}$ el presentado en la figura 9.11.2 o el indicado en la figura 9.11.3.

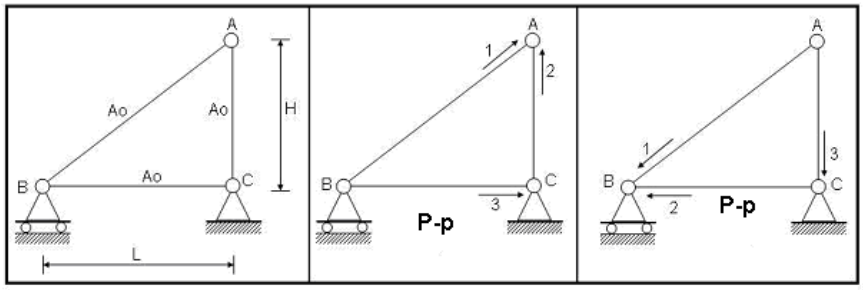



**Figura 9.11.1** **Figura 9.11.2** **Figura 9.11.3**

Se debe tener presente que la dirección de la coordenada $\boldsymbol{p}$ guarda relación con la determinación de las coordenadas $u_1$ y $u_2$. Por ejemplo para el elemento BA, cuando se trabaja con el sistema $\boldsymbol{P-p}$ mostrado en la figura 9.11.2 se tiene que $u_1$ es el corrimiento axial en el nudo B y que $u_2$ es el corrimiento axial en el nudo A. En cambio cuando se trabaja con las coordenadas de la figura 9.11.3 es lo contrario.

Para calcular las deformaciones $\boldsymbol{p}$ se debe tener presente que ésta es positiva si el elemento se alarga axialmente, caso contrario es negativa.

Finalmente para la obtención del sistema $\boldsymbol{Q-q}$ se recuerda que cada nudo de una armadura plana tiene dos grados de libertad. Por consiguiente la estructura de la figura 9.11.1 tiene 3 grados de libertad, dos en el nudo A y uno en el nudo B por el tipo de vínculo.

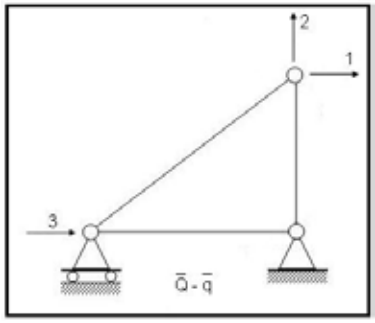
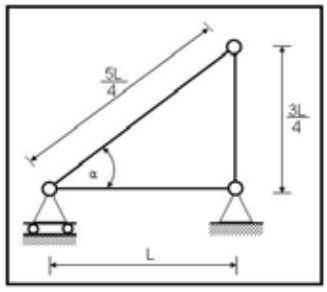



**Figura 9.11.4** Coordenadas generalizadas

- **EJEMPLO 4**

Para la armadura plana de la figura 9.11.1 utilizando el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$ mostrados en las figuras 9.11.4 y 9.11.2 respectivamente. Se pide obtener la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$, tal que: $\boldsymbol{p = A\,q}$. Además se conoce que H=3L/4.

- **SOLUCIÓN**

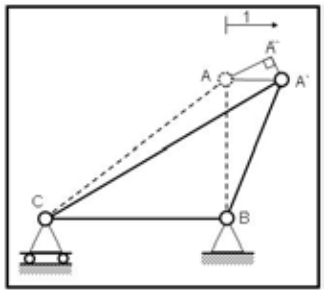



Parámetros Geométricos

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad tg\alpha = \frac{3}{4}$$

- Primera columna de $\boldsymbol{A}$

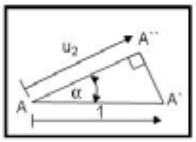
$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$




Deformada elemental $q_1$

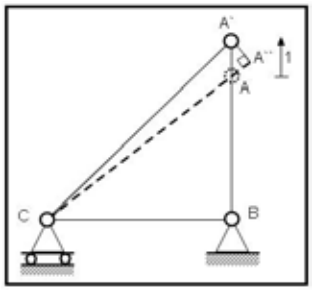
En el triángulo AA'A'' se tiene $u_2 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$. Luego las deformaciones $\boldsymbol{p}$ son:

$$p_1 = \frac{4}{5} \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = 0$$

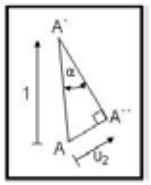



- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$




Deformada elemental $q_2$

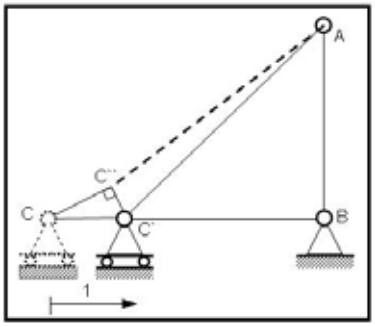



$$u_2 = sen\alpha = \frac{3}{5}$$

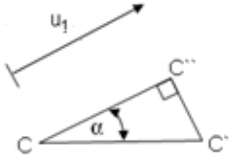
$$p_1 = \frac{3}{5} \qquad p_2 = 1 \qquad p_3 = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$




Deformada elemental $q_3$



$$u_1 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$p_1 = -\frac{4}{5} \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = -1$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para formar los triángulos con las deformaciones, en los elementos inclinados, lo mejor es primero colocar la deformación axial y luego la transversal. Por ejemplo en la última deformada elemental $q_3$, para pasar de $C$ a $C'$ primero se tiene la deformación axial $CC''$ y luego la deformación transversal $C''C'$.

- **EJEMPLO 5**

Calcular la matriz $\boldsymbol{A}$ de la siguiente armadura plana.

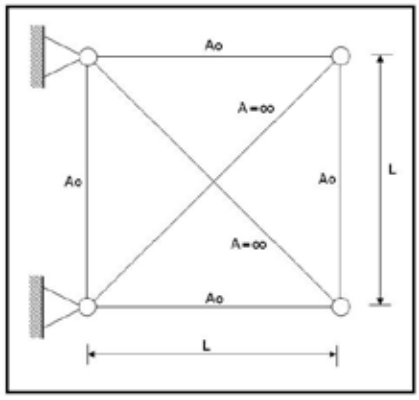



**Figura 9.12** Armadura plana de ejemplo 5.

- **SOLUCIÓN**

Al igual que en los pórticos planos cuando se tiene elementos axialmente rígidos, el número de grados de libertad de la estructura disminuye una coordenada por cada elemento $A = \infty$. Por lo tanto en éste ejercicio se tienen 2 grados de libertad. En la figura 9.13, a la izquierda, se presenta una deformada general de la armadura en la cual se aprecia que los elementos trabajan únicamente axialmente.

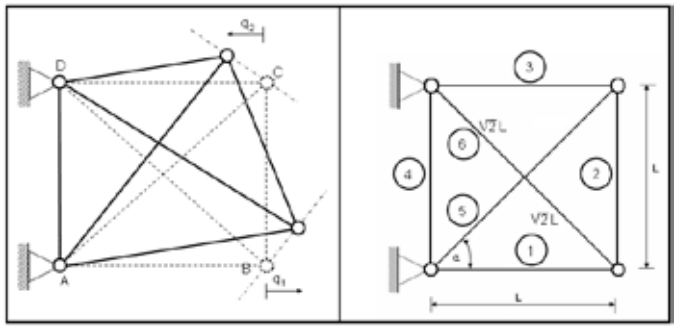



**Figura 9.13** Deformada general y longitud de elementos

A la derecha de la figura 9.13, se presenta la geometría de la armadura plana, de ésta grafica se obtiene:

$$sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\alpha = 1$$

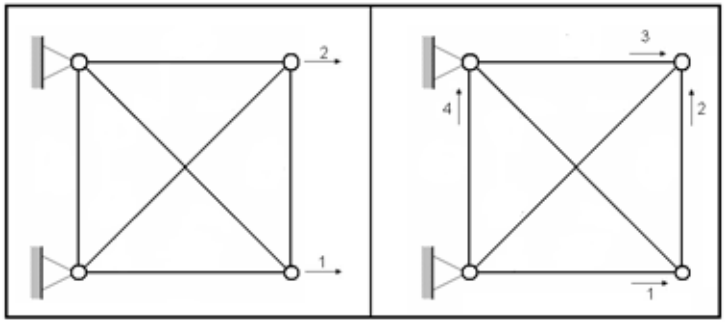
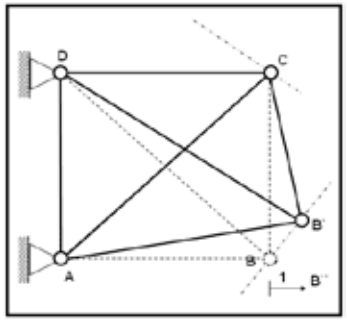


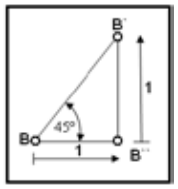

**Figura 9.14** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

- Primera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$



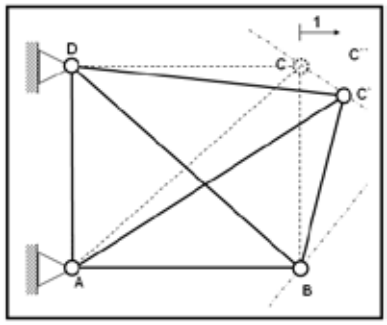

Deformada elemental $q_1$



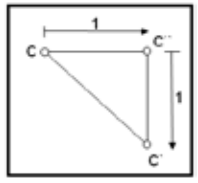

$$p_1 = 1 \qquad p_2 = -1 \qquad p_3 = 0 \qquad p_4 = 0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$




Deformada elemental $q_2$




$$p_1 = 0 \qquad p_2 = -1 \qquad p_3 = 1 \qquad p_4 = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 6**

Para la armadura plana de la figura 9.15 que tiene dos elementos axialmente rígidos se pide:

a. Dibujar una deformada lo más general posible.
b. Seleccionar un sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ apropiado.
c. Determinar la matriz $\boldsymbol{A}$

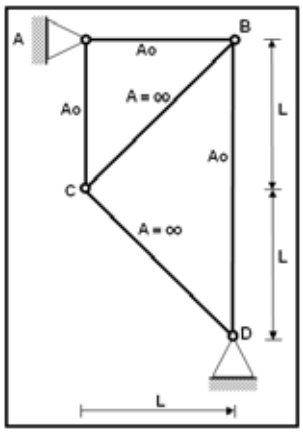



**Figura 9.15** Armadura de ejemplo 6

- **SOLUCIÓN**

Como se ha indicado cada nudo de la armadura plana tiene dos grados de libertad, luego se tendrían 4 grados de libertad pero como existen dos elementos que son axialmente rígidos se eliminan dos grados de libertad, uno por cada elemento $A = \infty$. En consecuencia el sistema tiene 2 grados de libertad. En la figura 9.16 se presenta una deformada lo más general en la cual se ha colocado P.I. para indicar la posición inicial del nudo, ésta recta es perpendicular al elemento axialmente rígido y P.F. la recta en la cual se halla la posición final del nudo. A la izquierda de la figura 9.17 se indica el sistema $\boldsymbol{Q - q}$ con el cual se resuelve el ejercicio y a la derecha el sistema $\boldsymbol{P - p}$.

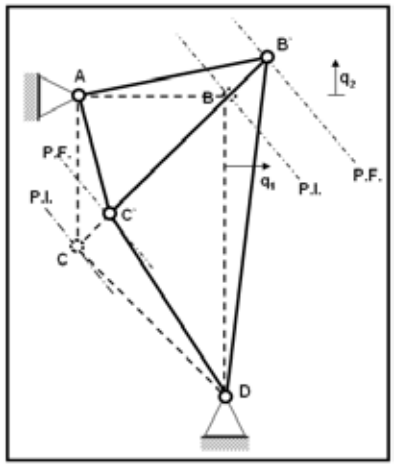



**Figura 9.16** Deformada general.

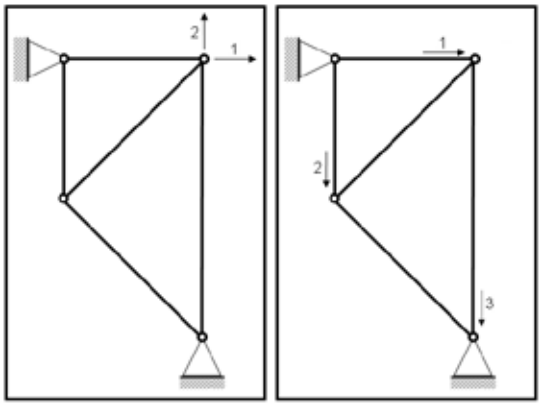
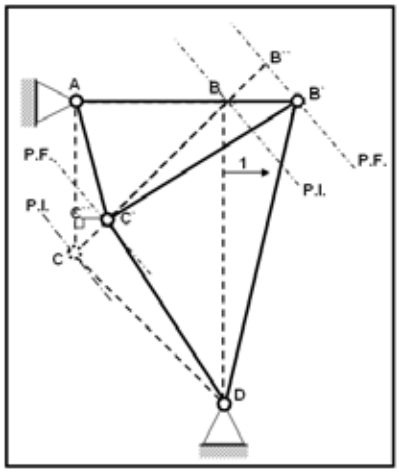


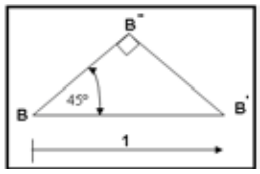
**Figura 9.17** Sistema $Q - q$ y sistema $P - p$

- Primera columna de $A$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

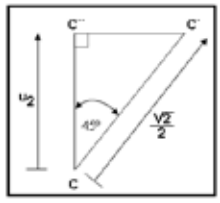



Deformada elemental $q_1$




$$BB'' = \cos 45 = \sqrt{2}/2$$

En la deformada elemental se observa que BB'' = CC' debido a que el elemento BC es axialmente rígido. Luego en el triángulo CC'C'' se tiene:



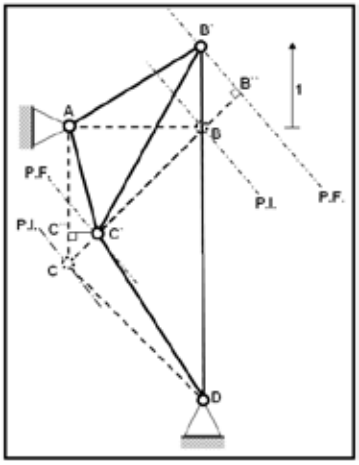

$$\cos 45 = \frac{u_2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Pero $u_2$ es negativo para el elemento BC. Luego las deformaciones valen:

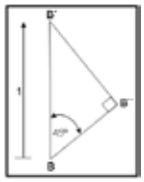
$$p_1 = 1 \qquad p_2 = -\frac{1}{2} \qquad p_3 = 0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

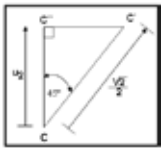



Deformada elemental $q_2$




$$BB'' = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BB'' = CC' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$




$$u_2 = \cos 45 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Pero $u_2$ es negativo para el elemento AC. Con ésta consideración las deformaciones son:

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = -\frac{1}{2} \qquad p_3 = 1$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ - & - \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ - & - \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 9.2.3 Coordenadas $P - p$ arbitrarias

En los ejercicios anteriores se utilizó como sistema $P - p$ el presentado en las gráficas de la figuras 9.2. Para éstas coordenadas de los elementos en el capítulo 7 se encontró la respectiva matriz de rigidez, algo similar se hizo con el sistema de coordenadas de la figura 9.18 con el cual se van a resolver algunos ejercicios, para lo cual se recuerda las deformaciones de miembro.

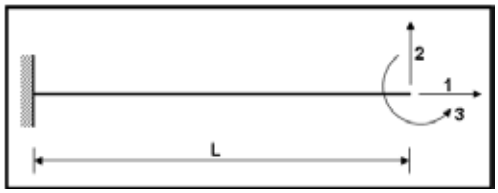



**Figura 9.18** Otro sistema de coordenadas de elemento.

$$p_1 = u_2 - u_1$$
$$p_2 = v_2 - v_1 - \theta_1 L$$
$$p_3 = \theta_2 - \theta_1$$

En consecuencia se podía haber calculado la matriz $A$ para los ejercicios resueltos en éste capítulo empleando estas coordenadas. Si éste es el caso, para la estructura de la figura 9.3, el sistema $P - p$ sería el siguiente.

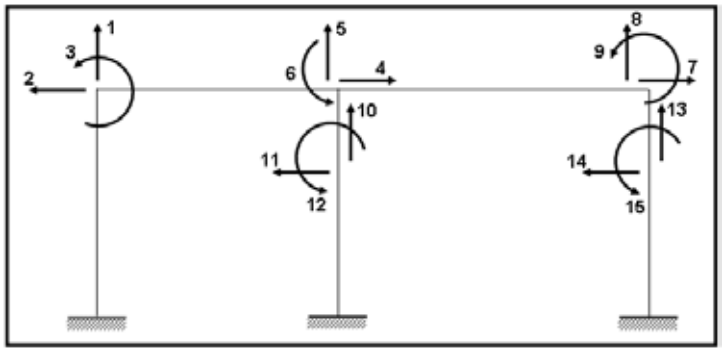



**Figura 9.19** Otro sistema $P - p$ para Ejemplo 1.

Es evidente que ahora se obtendrá una matriz $A$ diferente, lo cual se debe a la diferencia como se obtienen las deformaciones $p$.

Por último se debe indicar que se puede calcular la matriz $A$ empleando cualquier sistema de coordenadas $P - p$ lo que se ilustra con el desarrollo del siguiente problema.

- **EJEMPLO 7**

Para el pórtico de la figura 9.20.1 se pide calcular la matriz $A$ empleando como sistemas $Q - q$ y $P - p$ los presentados en las figuras 9.20.2 y 9.20.3, respectivamente. Si la longitud de todos los elementos es la misma. Para los elementos inclinados se considera como sistema de coordenadas el indicado en la figura 9.18 y para el elemento horizontal se tiene dos giros a flexión considerado positivo si el nudo inicial rota en forma horario y el nudo final rota anti horario y dos cortantes considerados positivos si van hacia arriba.

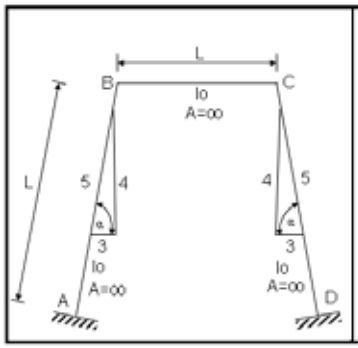



**Figura 9.20.1**

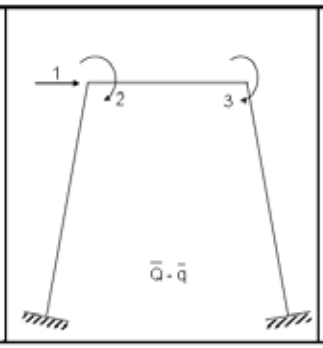



**Figura 9.20.2**

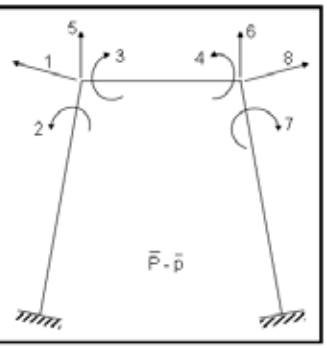


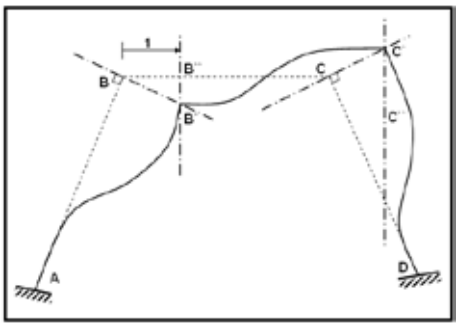

**Figura 9.20.3**

Nótese en éste ejercicio que las rotaciones se consideran horario positivo.

- **SOLUCIÓN**

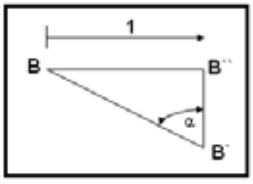
  - Primera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$




Deformada elemental $q_1$

En la deformada elemental se observa que el triángulo BB'B'' es igual al triángulo CC'C''.




$$BB' = CC' = \cos c\alpha = \frac{5}{4}$$

$$B'B'' = C'C'' = \cot g\alpha = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto:

$$p_1 = -BB' = -\frac{5}{4} \qquad p_3 = 0 \qquad p_7 = 0$$

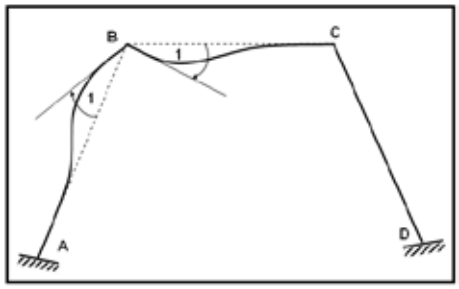
$$p_2 = 0 \qquad p_4 = 0 \qquad p_8 = CC' = \frac{5}{4}$$

$$p_5 = B''B' = -\frac{3}{4}$$

$$p_6 = CC' = \frac{5}{4}$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$



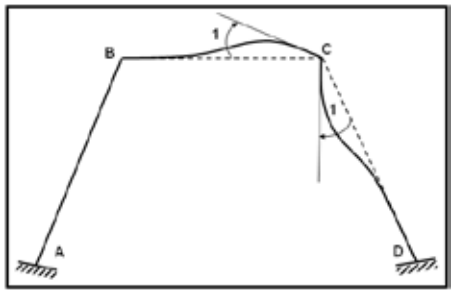

Deformada elemental $q_2$

En el ejemplo la rotación se considera horario positivo (figura 9.20.2) de ahí la forma de ésta deformada elemental y la siguiente.

$$p_1 = -1 \qquad p_3 = 1 \qquad p_7 = 0$$
$$p_2 = 0 \qquad p_4 = 0 \qquad p_8 = 0$$
$$p_5 = 0$$
$$p_6 = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$




Deformada elemental $q_3$

$$p_1 = 0 \qquad p_3 = 0 \qquad p_7 = 1$$
$$p_2 = 0 \qquad p_4 = -1 \qquad p_8 = 0$$
$$p_5 = 0$$
$$p_6 = 0$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

## 9.3 RELACIÓN ENTRE CARGAS GENERALIZADAS Y FUERZAS INTERNAS

### 9.3.1 Introducción

Las cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ de una estructura pueden transformarse en cargas internas $\boldsymbol{P}$ por medio de la matriz $\boldsymbol{B}$. En efecto se tiene por definición que:

$$\boldsymbol{P = B\,Q} \tag{9.3}$$

Donde $\boldsymbol{B}$ es una matriz de equilibrio de orden $mxn$, siendo $m$ el número de filas que será igual al número de coordenadas $\boldsymbol{P}$ y $n$ el número de columnas que es igual al número de grados de libertad de la estructura. Un término cualquiera $B_i$ es el valor de la carga interna del elemento $P_i$ correspondiente al estado de cargas generalizado $Q_j = 1$ y las demás nulas.

Si $\boldsymbol{P = B\,Q}$ se puede demostrar fácilmente, aplicando el principio de los trabajos virtuales que: $\boldsymbol{q = B^t\ p}$ con lo que se obtiene otra ecuación de compatibilidad, ahora se obtendrá $\boldsymbol{B^t}$ por geometría de deformación siendo más difícil su cálculo.

Finalmente se destaca que mediante la matriz $\boldsymbol{B}$ se obtiene la matriz de flexibilidad de la estructura $\boldsymbol{F}$.

### 9.3.2 Definición

Cuando la matriz $\boldsymbol{B}$ se puede determinar usando solo la estática el sistema se llama: “Estáticamente Determinado”.

### 9.3.3 Relación entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{A}$

Se puede establecer una relación entre las dos matrices de la siguiente manera. Se sabe que:

$$P = k\ p \tag{9.4}$$

Pero $p = A\ q$. Al reemplazar en (9.4) se tiene:

$$P = k\ A\ q$$

A su vez $q = F\ Q$, sustituyendo se tiene:

$$P = (k\ A\ F)\ Q$$

Comparando ésta última expresión con la ecuación (9.3) se tiene:

$$B = k\ A\ F \tag{9.5}$$

En la ecuación (9.5) la matriz $k$ es diagonal y está compuesta por la matriz de rigidez de cada uno de los elementos de la estructura. Un ejemplo de aplicación de ésta relación se presenta en el ejemplo 10 del apartado 9.4.1.

## 9.4 CÁLCULO DE LA MATRIZ B

### 9.4.1 Coordenadas $P - p$ usuales

Para diferenciar del sistema de coordenadas $P - p$ arbitrario, se denominan coordenadas usuales de los elementos a las presentadas en la figura 9.2.

- **EJEMPLO 8**

Obtener la matriz $B$ del pórtico plano indicado en la figura 9.21, cuyos elementos se consideran totalmente flexibles.

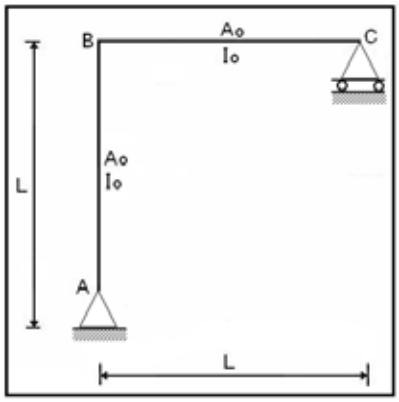



**Figura 9.21** Estructura de Ejemplo 8

- **SOLUCIÓN**

La estructura tiene una rotación en el nudo A, por ser apoyo fijo; tres grados de libertad en el nudo B y dos grados de libertad en el C, por ser rodillo. En la figura 9.22.1 se presenta el sistema de coordenadas generalizadas y en la 9.22.2 el sistema de coordenadas de los elementos.

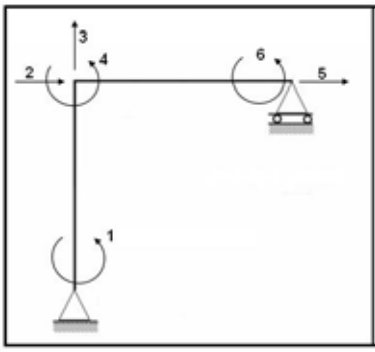



**Figura 9.22.1** Sistema $Q - q$

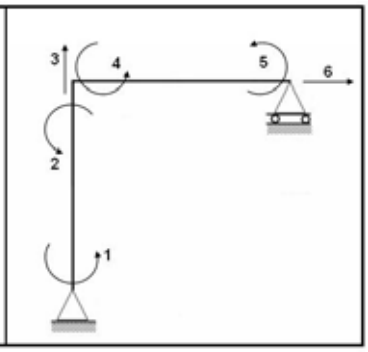
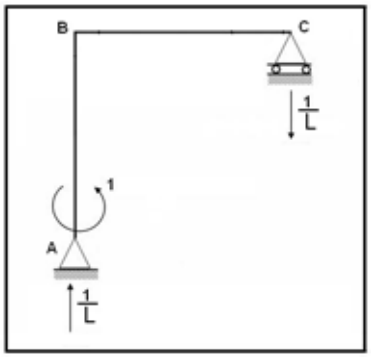



**Figura 9.22.2** Sistema $P - p$

- Primera columna de la matriz $B$

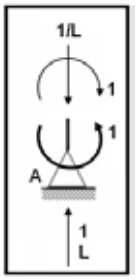
$$Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 1$$




Carga unitaria $Q_1$

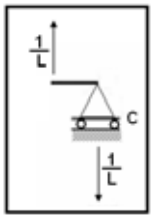
Al aplicar un momento unitario en el nudo A se producen dos reacciones que valen $\frac{1}{L}$ .

o Equilibrio del nudo A



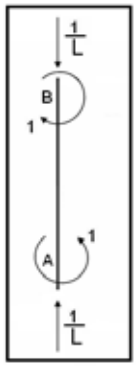

Del equilibrio de la junta A se obtiene que en el elemento AB actúa una fuerza axial de compresión que vale $\frac{1}{L}$ y un momento unitario. Nótese que estas acciones luego pasan al elemento cambiadas de signo, como se verá más adelante.

- Equilibrio del nudo C



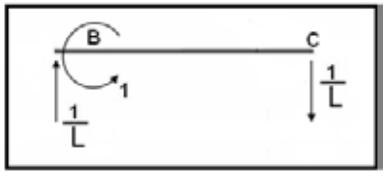

Para equilibrar el nudo C en el elemento BC existe una fuerza vertical de magnitud $\frac{1}{L}$.

- Equilibrio del elemento AB




Para equilibrar el elemento AB se requiere que en el extremo superior actúe un momento horario unitario y una fuerza de compresión igual a $\frac{1}{L}$.

- Equilibrio del elemento BC




Para tener equilibrio de las fuerzas verticales es necesario que en el extremo izquierdo del elemento BC actúe una fuerza vertical $\frac{1}{L}$ hacia arriba y para obtener el equilibrio de momentos se necesita que en ese punto exista un momento unitario. Se deja al lector que verifique el equilibrio de la junta B. Una vez encontradas las fuerzas y momentos en cada uno de los elementos, por medio de equilibrio, se observa el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ de la figura 9.22.2 y se encuentran las cargas $\boldsymbol{P}$, que son las siguientes.

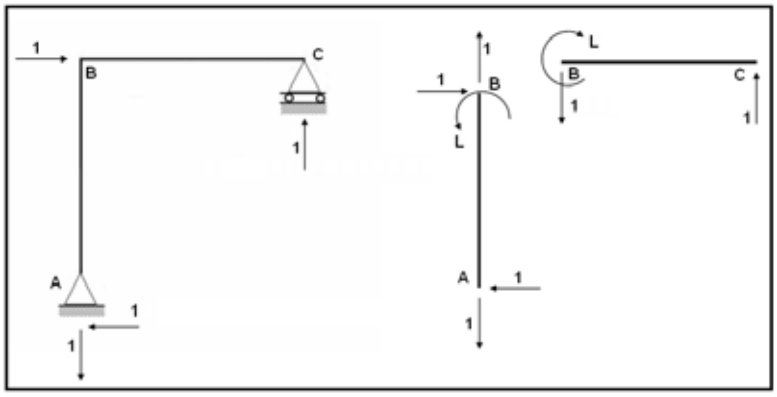
$$P_1 = 1 \qquad P_4 = 1$$
$$P_2 = -1 \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = -\frac{1}{L} \qquad P_6 = 0$$

Los elementos encontrados corresponden a los términos de la primera columna de $\boldsymbol{B}$.

Para hallar las demás columnas de la matriz $\boldsymbol{B}$ se procede en forma similar. En lo posterior se presenta el estado de carga elemental con las reacciones que actúan en la estructura y el equilibrio de elementos, dejando al lector la justificación de los pasos intermedios.

- Segunda columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_2 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 2$$

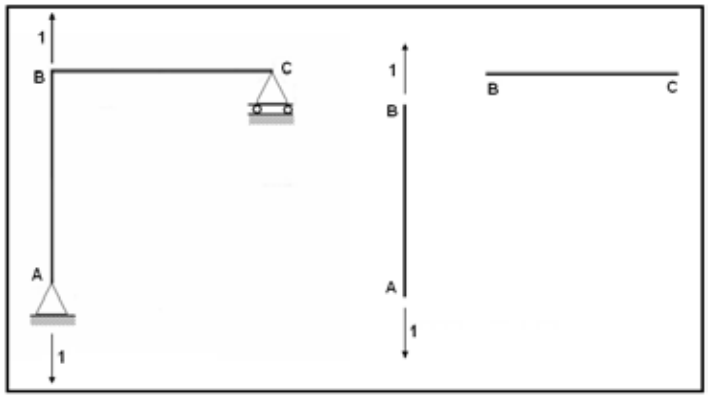



Carga unitaria $Q_2$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = -L$$
$$P_2 = L \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = 1 \qquad P_6 = 0$$

- Tercera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_3 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 3$$

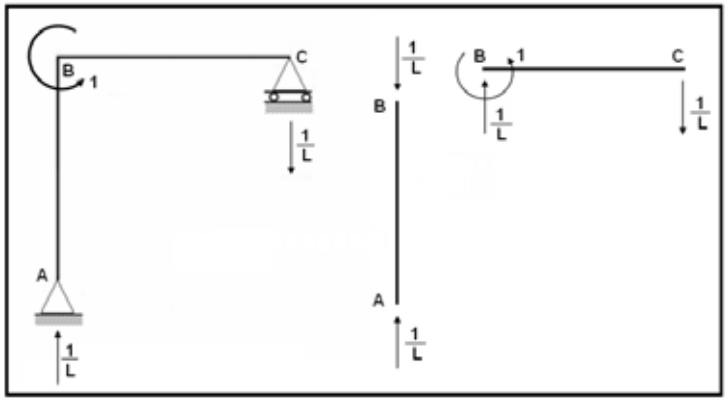



Carga unitaria $Q_3$y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = 1 \qquad P_6 = 0$$

- Cuarta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_4 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 4$$

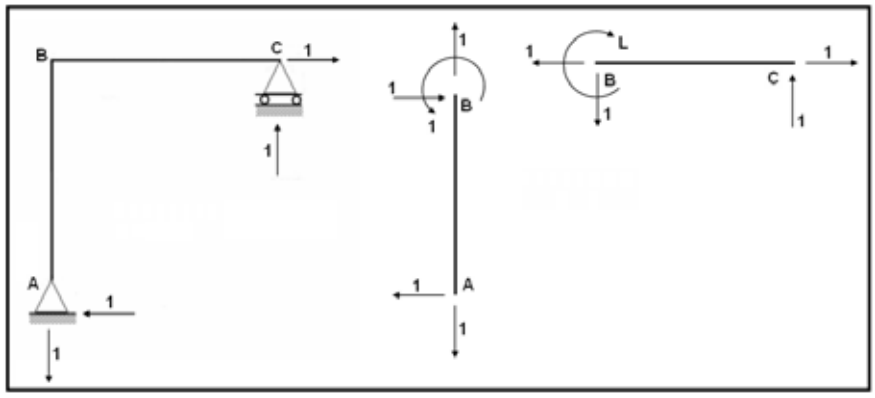



Carga unitaria $Q_4$ y equilibrio de elementos.

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = 1$$
$$P_2 = 0 \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = -\frac{1}{L} \qquad P_6 = 0$$

- Quinta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_5 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 5$$

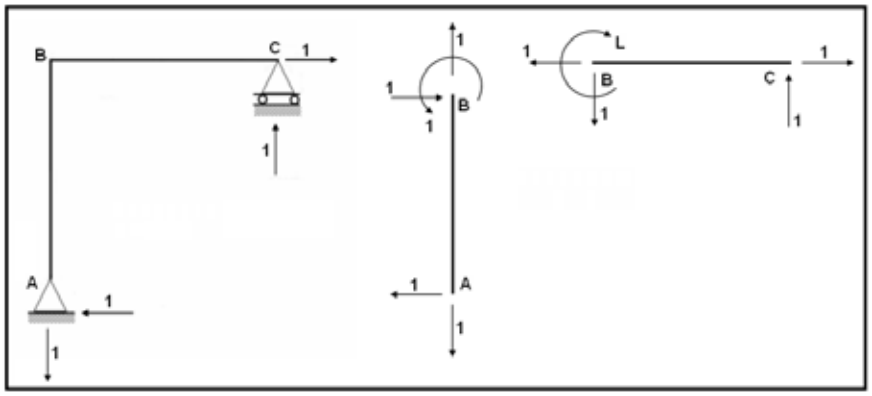



Carga unitaria $Q_5$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = -L$$
$$P_2 = L \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = 1 \qquad P_6 = 1$$

- Sexta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_6 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 6$$




Carga unitaria $Q_6$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = -L$$
$$P_2 = L \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = 1 \qquad P_6 = 1$$

$$\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & L & 0 & 0 & L & 0 \\ -\frac{1}{L} & 1 & 1 & -\frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} \\ \hline 1 & -L & 0 & 1 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- **EJEMPLO 9**

Hallar la matriz $\boldsymbol{B}$ para la estructura de la figura 9.23 en la cual sus elementos son axialmente rígidos. Si los sistemas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ son los indicados en la figura 9.24.

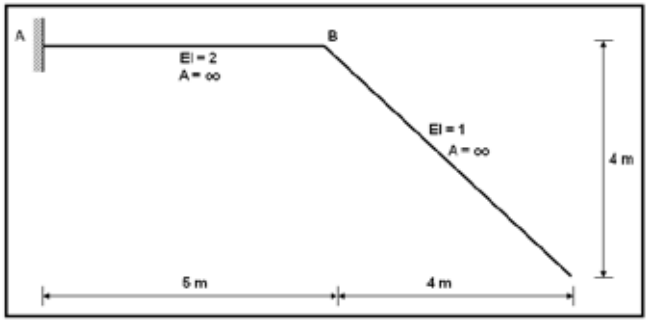



**Figura 9.23** Estructura de ejemplo 9

- **SOLUCIÓN**

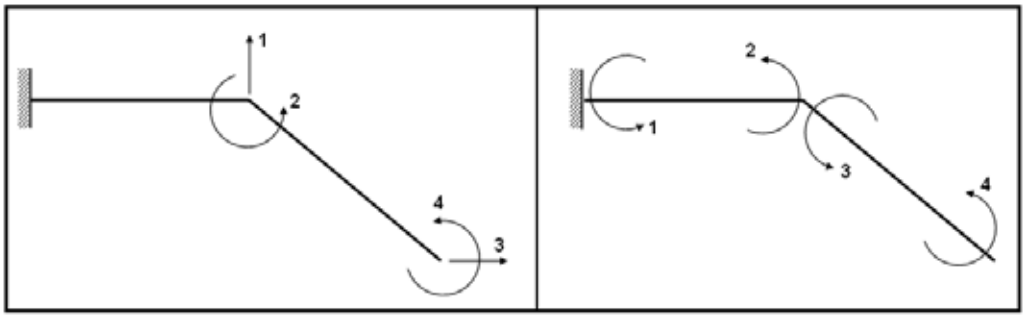
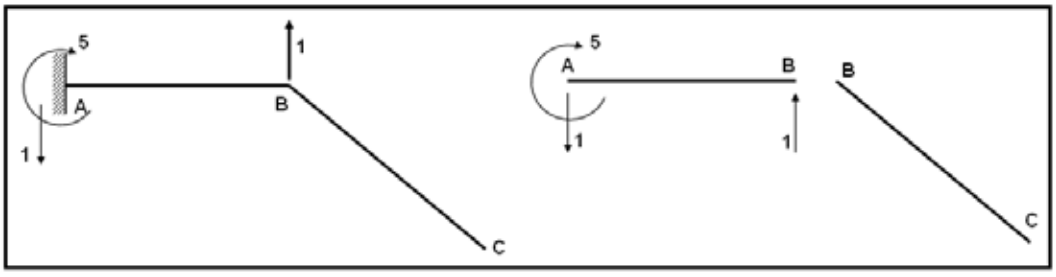



**Figura 9.24** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

- Primera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 1$$

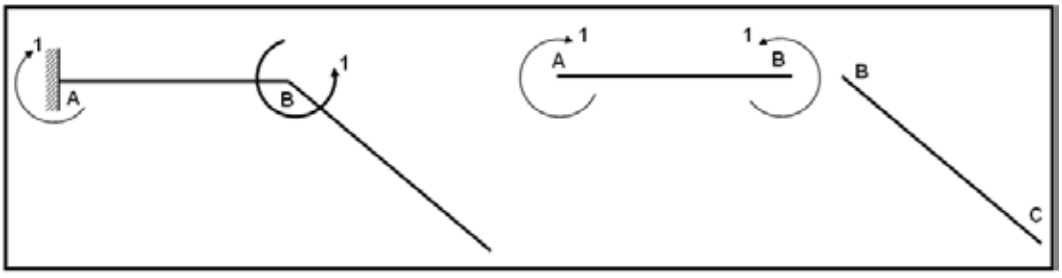



Carga unitaria $Q_1$ y equilibrio de elementos

$$p_1 = -5 \qquad p_3 = 0$$
$$p_2 = 0 \qquad p_4 = 0$$

- Segunda columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{Q_2 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 2}$$

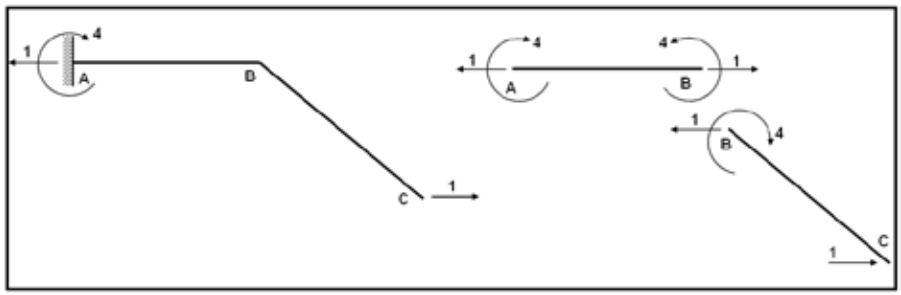



Carga unitaria $Q_2$ y equilibrio de elementos

$$p_1 = -1 \qquad p_3 = 0$$
$$p_2 = 1 \qquad p_4 = 0$$

- Tercera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_3 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 3$$

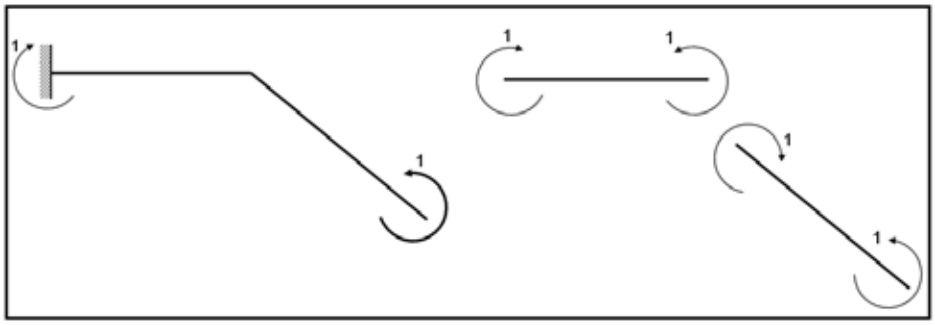



Carga unitaria $Q_3$ y equilibrio de elementos

$$p_1 = -4 \qquad p_3 = -4$$
$$p_2 = 4 \qquad p_4 = 0$$

- Cuarta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_4 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 4$$




Carga unitaria $Q_4$ y equilibrio de elementos

$$p_1 = -1 \qquad p_3 = -1$$
$$p_2 = 1 \qquad p_4 = 1$$

$$\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cccc} -5 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- **EJEMPLO 10**

Para la estructura estáticamente indeterminada de la figura 9.25.1. Hallar la matriz $\boldsymbol{B}$ si se conocen las matrices de flexibilidad de la estructura $\boldsymbol{F}$ y de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$ para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ de la figura 9.25.2 y $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ de la figura 9.25.3.

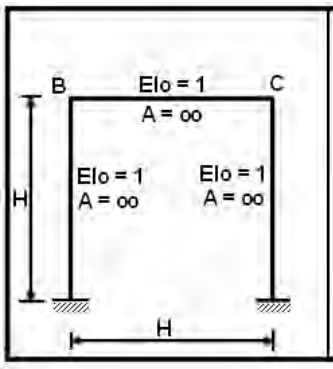



Figura 9.25.1

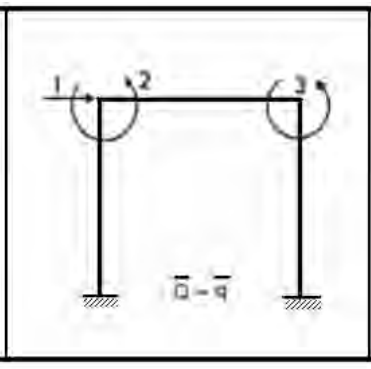



Figura 9.25.2

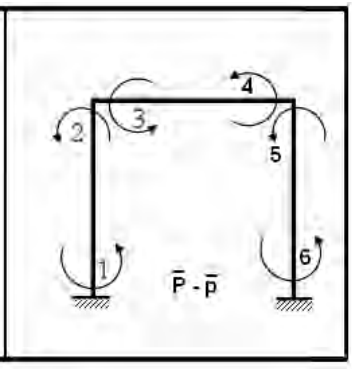
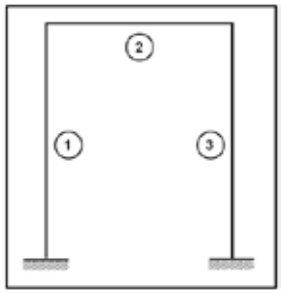



Figura 9.25.3

$$\boldsymbol{F} = \frac{H}{84}\begin{bmatrix} 5H^2 & -3H & -3H \\ -3H & 13 & -1 \\ -3H & -1 & 13 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \frac{1}{H}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & H & 0 \\ - & - & - \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \\ - & - & - \\ 1 & 0 & H \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

Las matrices de rigidez de los elementos, para el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ indicado en la figura 9.25.3, son.




$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(2)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \frac{2}{H}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{(1)} & & \\ & \boldsymbol{k}^{(2)} & \\ & & \boldsymbol{k}^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{2}{H}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{2}{H}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{H} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & H & 0 \\ - & - & - \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \\ - & - & - \\ 1 & 0 & H \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{H}{84} \begin{bmatrix} 5H^2 & -3H & -3H \\ -3H & 13 & -1 \\ -3H & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{42H} \begin{bmatrix} 12H^2 & 4H & -10H \\ 9H^2 & 17H & -11H \\ - & - & - \\ -9H^2 & 25H & 11H \\ -9H^2 & 11H & 25H \\ - & - & - \\ 9H^2 & -11H & 17H \\ 12H^2 & -10H & 4H \end{bmatrix}$$

La matriz $\boldsymbol{B}$ también se la puede obtener transformado la estructura indeterminada en determinada para lo cual se necesita una estructura auxiliar.

### 9.4.2 Coordenadas $P - p$ arbitrarias

El Ejemplo 11 ilustra el uso de éstas coordenadas.

- **EJEMPLO N.- 11**

Calcular la matriz $\boldsymbol{B}$ de la estructura de la figura 9.26.1, si el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q - q}$ es el presentado en la figura 9.26.2 y el sistema de coordenadas de miembro el indicado en la figura 9.26.3 en que se utilizan varios sistemas de coordenadas para los elementos.

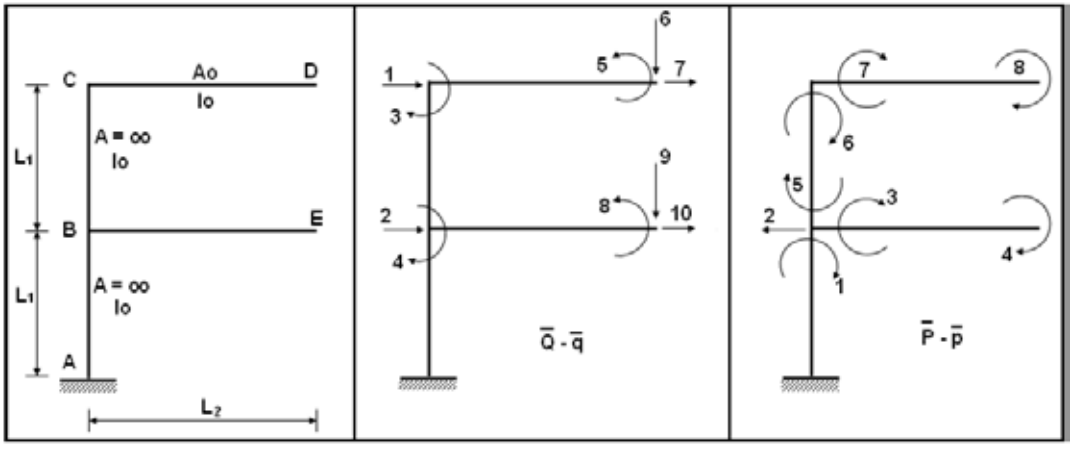



Figura 9.26.1




Figura 9.26.2

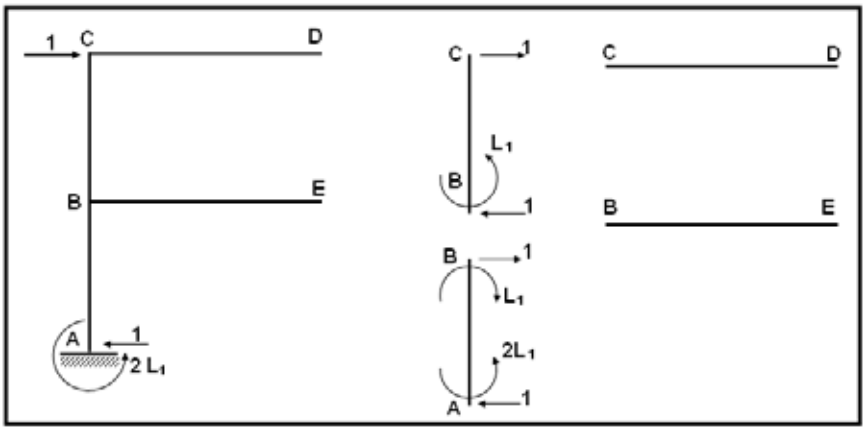



Figura 9.26.3

- **SOLUCIÓN**

- Primera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 1$$

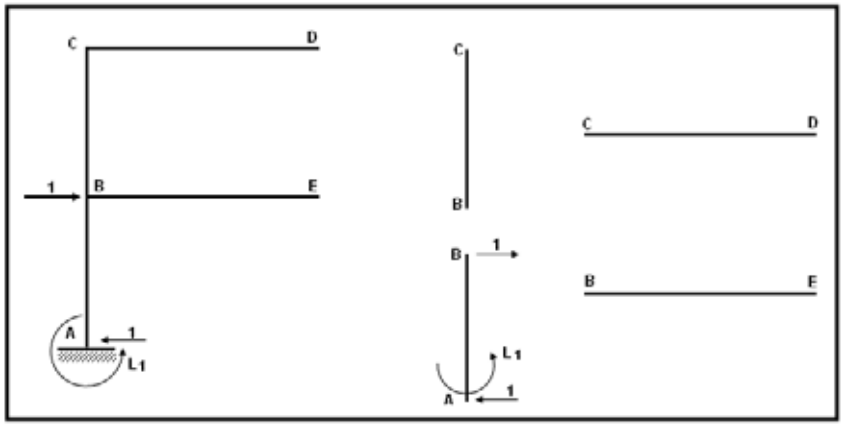



Carga unitaria $Q_1$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = L_1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = -L_1 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = -1 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Segunda columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_2 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 2$$

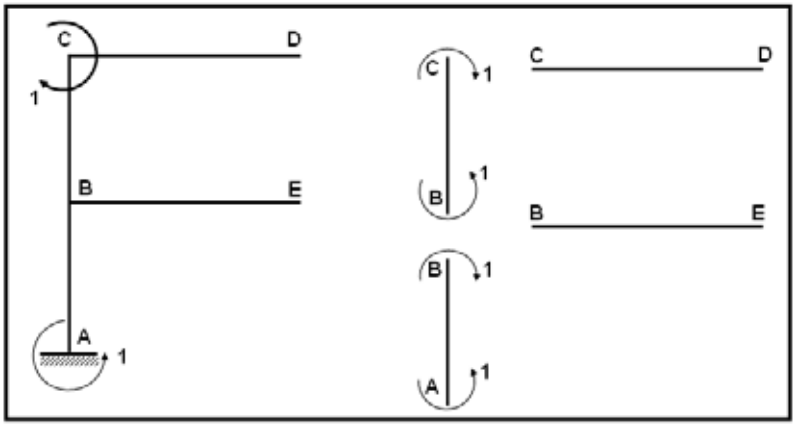



Carga unitaria $Q_2$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = -1 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Tercera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_3 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 3$$

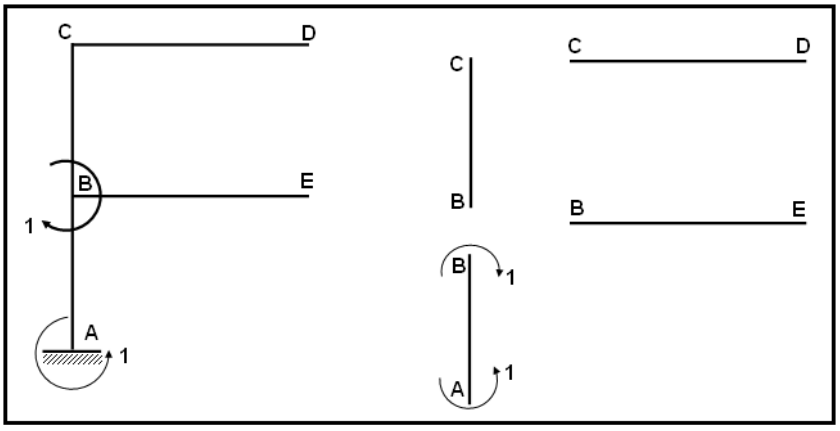



Carga unitaria $Q_3$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = 1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = -1 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 1 \qquad P_8 = 0$$

- Cuarta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_4 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 4$$

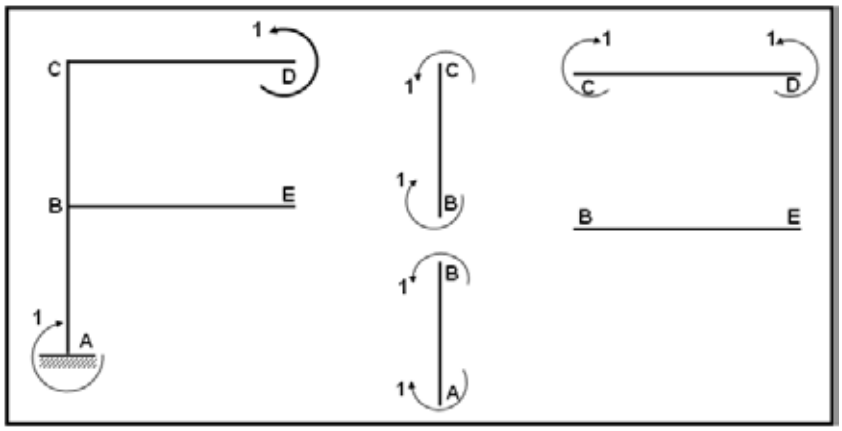



Carga unitaria $Q_4$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = 1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Quinta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_5 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 5$$

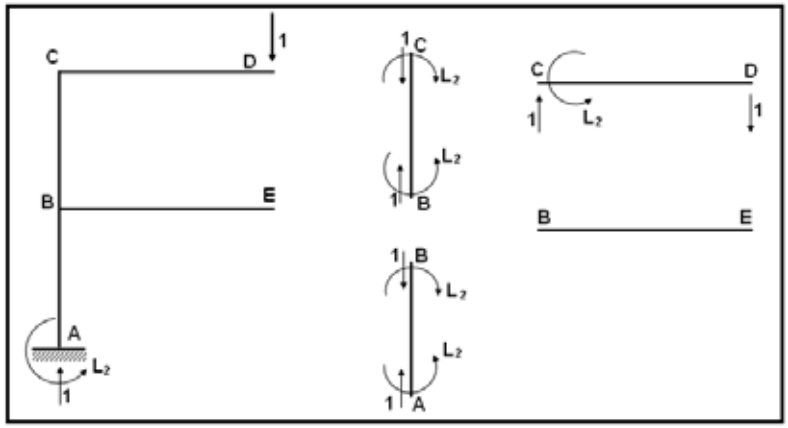



Carga unitaria $Q_5$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = -1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = 1 \qquad P_7 = 1$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = -1 \qquad P_8 = -1$$

- Sexta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_6 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 6$$

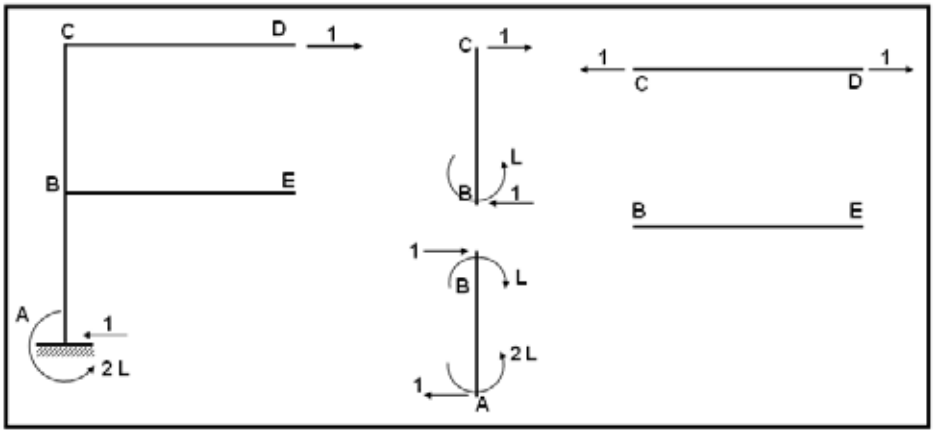



Carga unitaria $Q_6$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = L_2 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = -L_2 \qquad P_7 = -L_2$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = L_2 \qquad P_8 = 0$$

- Séptima columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_7 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 7$$

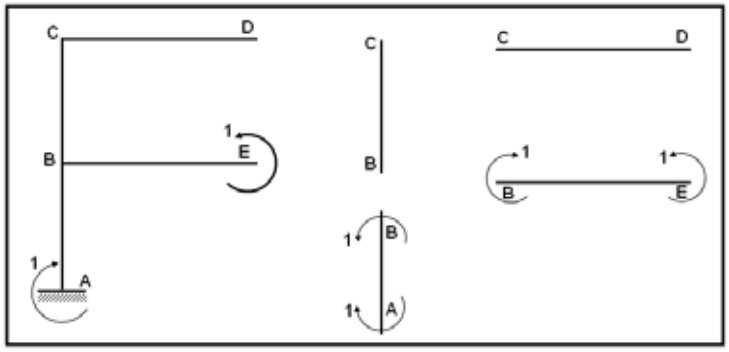



Carga unitaria $Q_7$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = L_1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = -L_1 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = -1 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Octava columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_8 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 8$$

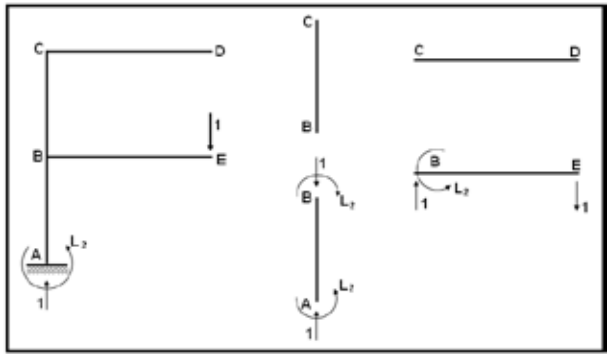



Carga unitaria $Q_8$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = -1 \qquad P_3 = 1 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = -1 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Novena columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_9 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 9$$

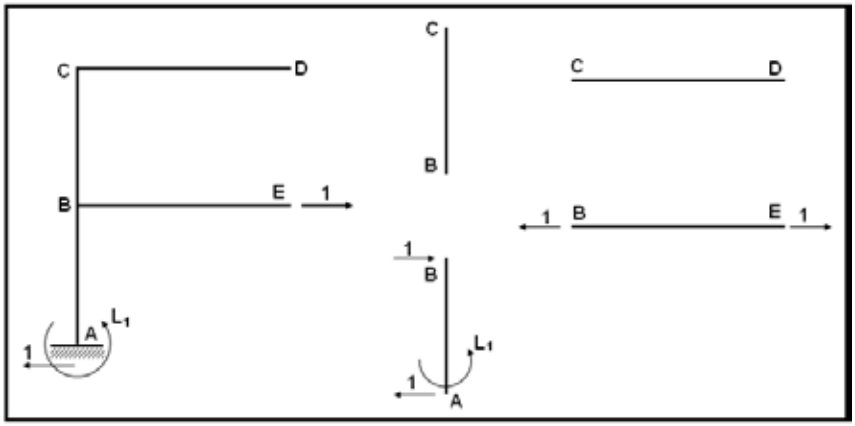



Carga unitaria $Q_9$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = L_2 \qquad P_3 = -L_2 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Décima columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_{10} = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 10$$




Carga unitaria $Q_{10}$ y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = -1 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

Luego, la matriz $\boldsymbol{B}$, es la siguiente.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 1 & 1 & -1 & L_2 & L_1 & -1 & L_2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -L_1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -L_2 & -L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

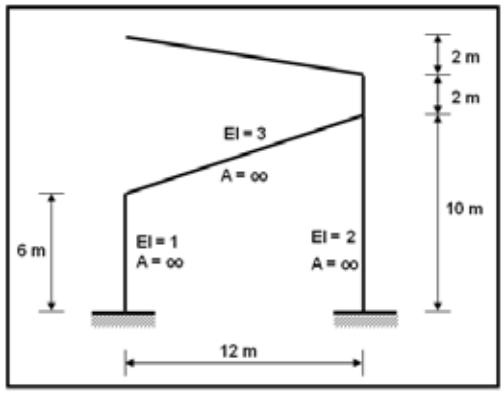
## 9. 5 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las siguientes estructuras. Se pide:

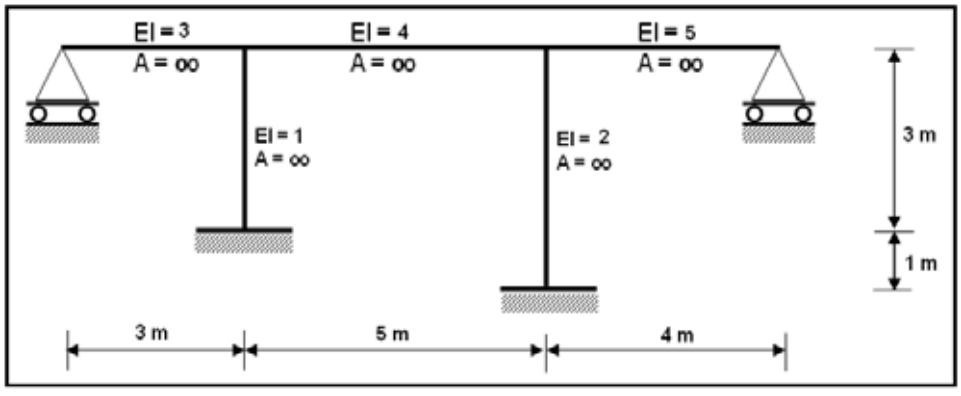
i) Seleccionar un sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ apropiados.

ii) Determinar la matriz $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q}$

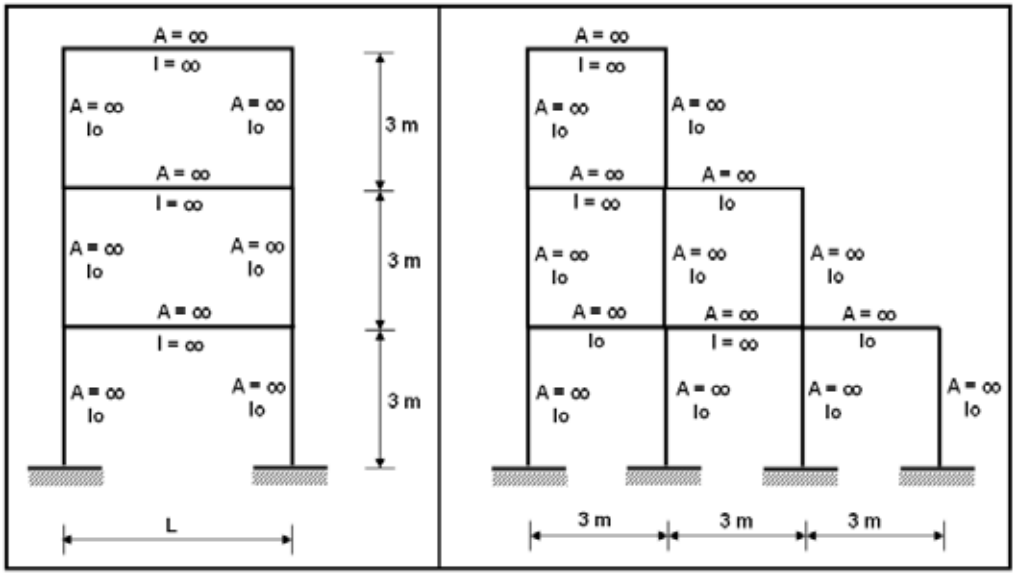
**Ejercicio N.- 1**



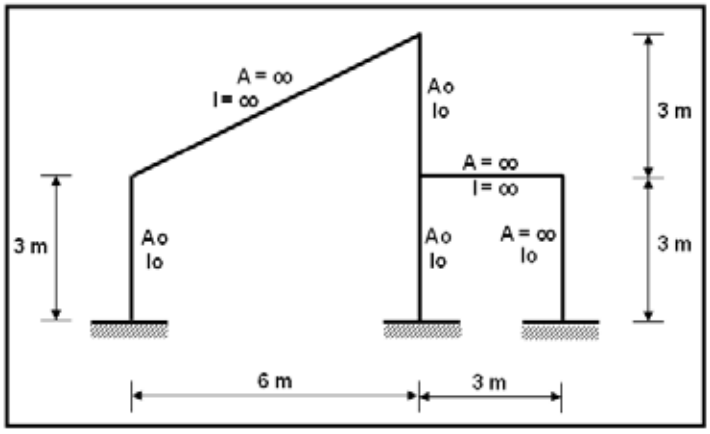

**Ejercicio N.- 2**



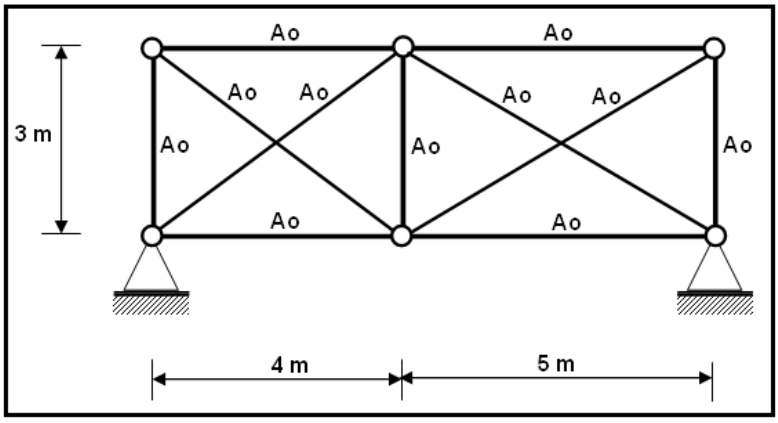
**Ejercicio N.- 3** **Ejercicio N.- 4**



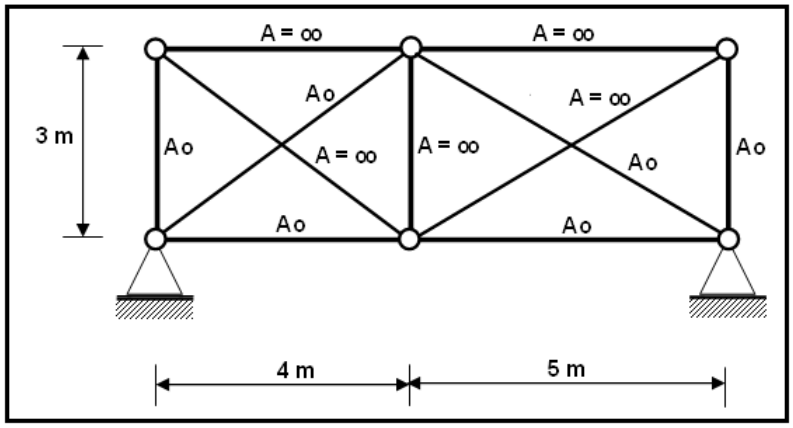

**Ejercicio N.- 5**



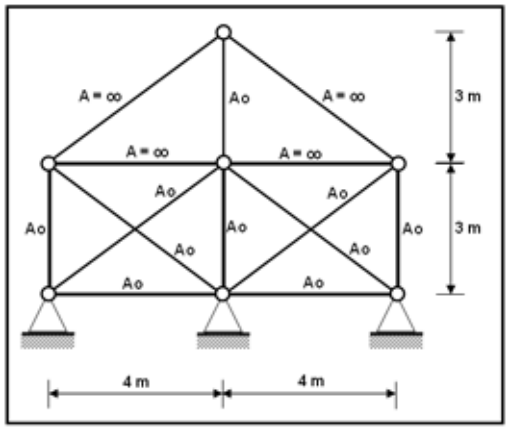

**Ejercicio N.- 6**



**Ejercicio N.- 7**

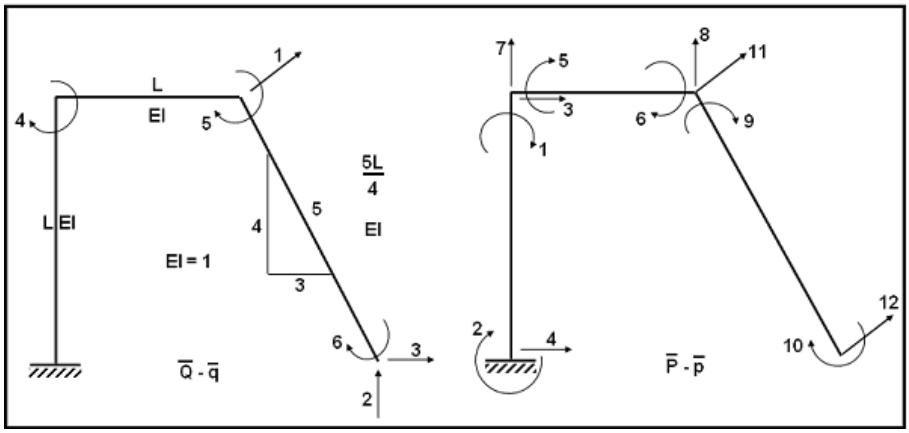



**Ejercicio N.- 8**



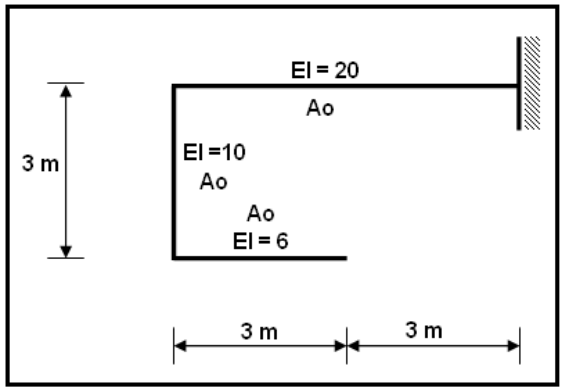

**Ejercicio N.- 9**

Encontrar la matriz $A$ para la siguiente estructura, empleando los sistemas de coordenadas $Q-q$ y $P-p$ que se indican, si todos los elementos son axialmente rígidos. Existen 4 coordenadas $P-p$ en cada elemento.




En las siguientes estructuras seleccionar sistemas $Q - q$ y $P - p$ apropiados y determinar la matriz $B$ tal que $P = B\,Q$

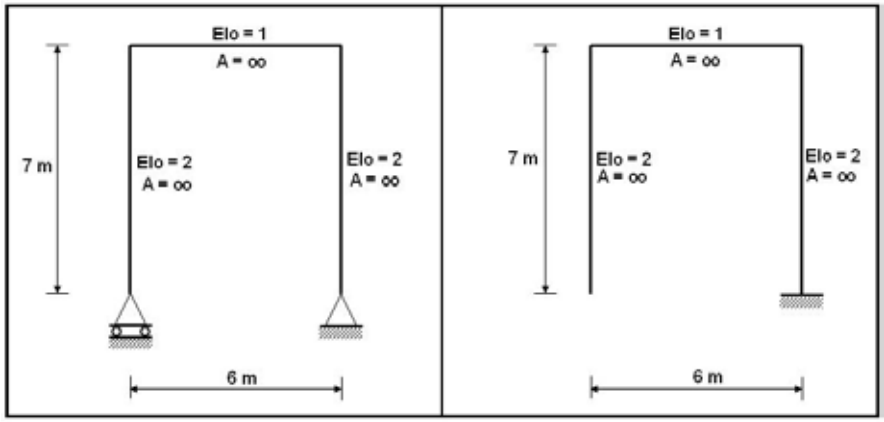
**Ejercicio N.- 10**




**Ejercicio N.- 11**

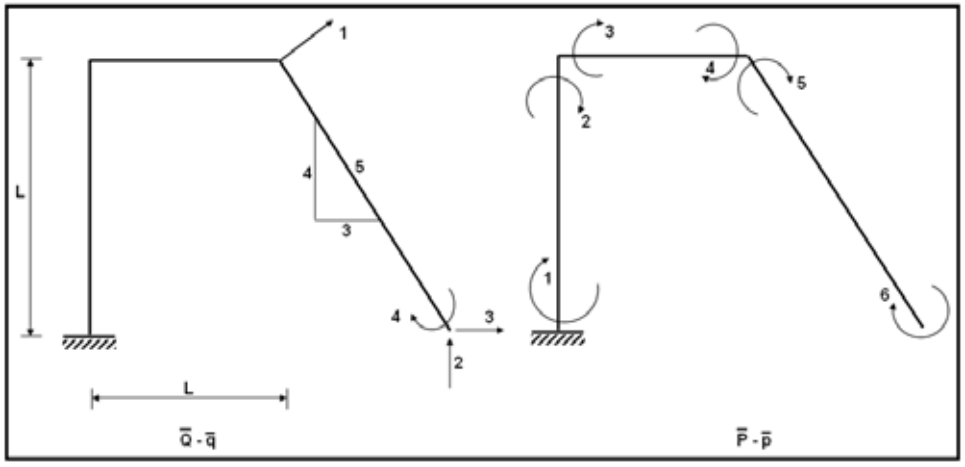
Resolver el ejercicio anterior considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.

**Ejercicio N.- 12** **Ejercicio N.- 13**



**Ejercicio N.- 14**

Calcular la matriz $\boldsymbol{B}$ para la siguiente estructura empleando los sistemas de coordenadas de la estructura y de los elementos que se indica a continuación.



*CAPITULO 10*

# CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA POR MEDIO DE LA MATRIZ A


## RESUMEN

Se presenta el cálculo de la matriz de rigidez de una estructura de dos formas a saber: la primera trabajando con toda la matriz de compatibilidad de deformaciones y la segunda, que es la que más se utiliza, calculando con las sub matrices de la matriz $\boldsymbol{A}$. Se realizan una serie de ejemplos considerando diferentes sistemas de coordenadas en los elementos y estructuras mixtas con elementos de hormigón y de acero.

Un pórtico de acero puede resolverse como que fuera de hormigón armado, considerando tres grados de libertad en cada uno de los nudos, siempre y cuando los nudos sean pre calificados por el AISC de tal forma que sus elementos tengan capacidad a flexión, para esto se presenta un nudo calificado para que el lector vea cuando puede modelar una estructura de acero, en el plano con tres grados de libertad; esto en contraste con las estructuras de acero con uniones simples.

Para que el lector pueda desarrollar los triples productos matriciales que se requieren para calcular la matriz de rigidez, se recomienda el uso de ***MATLAB***.


## 10. 1 FORMULACIÓN MATRICIAL

En los capítulos anteriores se estudió con detenimiento las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q} \tag{10.1}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\;\boldsymbol{p} \tag{10.2}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}^{t}\;\boldsymbol{P} \tag{10.3}$$

Al sustituir la ecuación (10.2) en la ecuación (10.3) se tiene:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}^{t}\;\boldsymbol{k}\;\boldsymbol{p}$$

Si en ésta última relación matricial se reemplaza la ecuación (10.1) se obtiene:

$$Q = \left(A^t\ k\ A\right) q \tag{10.4}$$

Por otra parte se conoce que:

$$Q = K\ q \tag{10.5}$$

De las ecuaciones (10.4) y (10.5) se deduce que la matriz de rigidez de una estructura se obtiene realizando el siguiente triple producto matricial:

$$K = A^t\ k\ A \tag{10.6}$$

Donde $K$ es la matriz de rigidez de la estructura; $A$ es la matriz de compatibilidad de deformaciones; $k$ es la matriz que está conformada por las matrices de rigidez de cada uno de los elementos de la estructura colocados en la diagonal.

Desde el punto de vista matemático, la deducción de la ecuación (10.6) no es rigurosa, concretamente no se ha justificado el porqué de los paréntesis que se presenta en la ecuación (10.4). Esta omisión por parte del autor se lo ha realizado con el propósito de no desviar la atención del estudiante y lo más importante presentar el problema de una manera sencilla. Una demostración más rigurosa implicaría el estudiar primero aplicaciones lineales:

$$f : R^n \rightarrow R^n$$

Y posteriormente espacios vectoriales. Con ésta aclaración se pasa a realizar ejercicios que ayuden a comprender el uso de la ecuación (10.6).

- **EJEMPLO 1**

Para la estructura, presentada a la izquierda de la figura 10.1, cuyos elementos son axialmente rígidos, se pide calcular la matriz de rigidez, utilizando el sistema de coordenadas $Q - q$ indicadas a la derecha de 10.1. En las figuras 10.2 se presenta el sistema de coordenadas de los elementos $P - p$ y la numeración de los elementos con los cuales se halló la matriz $A$.

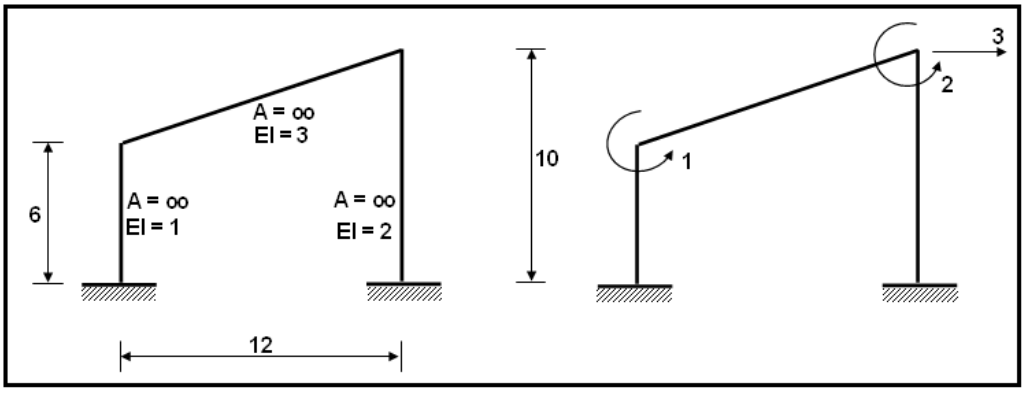



**Figura 10.1** Estructura de Ejemplo 1 y sistema de coordenadas $Q - q$

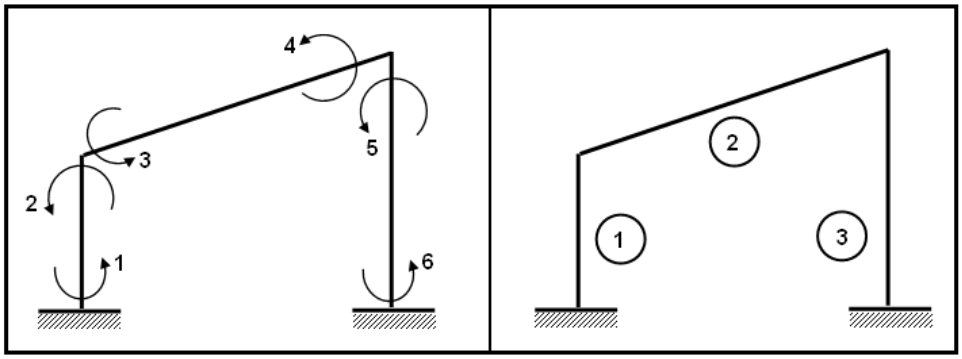



**Figura 10.3** Sistema de coordenadas $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ y numeración de los elementos.

La matriz $\boldsymbol{A}$ que se obtiene es:

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{array}\right]$$

- **SOLUCIÓN**

En éste capítulo no se calculará la matriz $\boldsymbol{A}$ que fue estudiada en el capítulo anterior. Es responsabilidad del lector realizar su comprobación.

Por ser los elementos axialmente rígidos, hipótesis del Ejemplo, la matriz de rigidez para elementos de sección constante y al despreciar el efecto de corte es:

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}=\frac{2EI}{L}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para los datos numéricos del Ejemplo, se tiene:

$$\boldsymbol{k}^{(1)}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(2)}=\frac{3}{2\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(3)}=\frac{2}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La forma de la matriz $\boldsymbol{k}$ que consta en la ecuación (10.6) para el ejercicio es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Al sustituir los valores obtenidos se encuentra:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{3}{2\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Al efectuar el producto matricial $\boldsymbol{A}^{t}\ \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{A}$ se obtiene la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ .

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1.616 & 0.474 & 0.167 \\ 0.474 & 1.749 & 0.120 \\ 0.167 & 0.120 & 0.080 \end{bmatrix}$$

## 10. 2 CÁLCULO DE $K$ TRABAJANDO CON SUBMATRICES

El calcular la matriz de rigidez de una estructura por la forma propuesta en el apartado anterior implica trabajar con matrices cuyo orden es demasiado alto. Por éste motivo se busca un algoritmo de cálculo que conduzca a los mismos resultados pero trabajando con matrices de menor orden. Para lograr este objetivo se recuerda que la matriz $\boldsymbol{A}$ es particionada. En efecto ésta matriz está compuesta por sub matrices, tantas como elementos tenga la estructura.

En el ejemplo anterior se tiene que las dos primeras filas de la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$ corresponden al elemento 1, las dos siguientes al elemento 2 y las dos últimas al elemento 3.

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

En función de las sub matrices, la matriz $A$ para el ejemplo 1 es la siguiente.

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ - - - \\ A^{(2)} \\ - - - \\ A^{(3)} \end{bmatrix}$$

Para el caso general la forma de la matriz de compatibilidad de deformaciones es:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ A^{(i)} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz $A^t$ resulta:

$$A^t = \begin{bmatrix} A^{(1)t} & A^{(2)t} & \ldots. & \ldots.. & A^{(i)t} & \ldots.. & \ldots.. & A^{(n)t} \end{bmatrix}$$

Al realizar el triple producto matricial $A^t\ k\ A$ con las sub matrices y considerando que la matriz $k$ está compuesta por las matrices de rigidez de los elementos colocados en la diagonal se obtiene:

$$K = \sum_{i=1}^{n} A^{(i)t}\ k^{(i)}\ A^{(i)} \qquad (10.7)$$

Donde n es el número de elementos que tiene la estructura. La sumatoria se realiza hasta n cuando la estructura analizada no tiene elementos totalmente flexibles. Para el caso de que la estructura tenga elementos totalmente rígidos, primero la matriz $A$ ya no tendrá n sub matrices si no menos, tantas como elementos totalmente rígidos se tengan. Luego la sumatoria ya no será hasta n.

- **EJEMPLO 2**

Por el procedimiento descrito en el apartado 10.2 calcular la matriz de rigidez de la estructura presentada en la figura 10.5. Cuyo elemento vertical es transversalmente rígido.

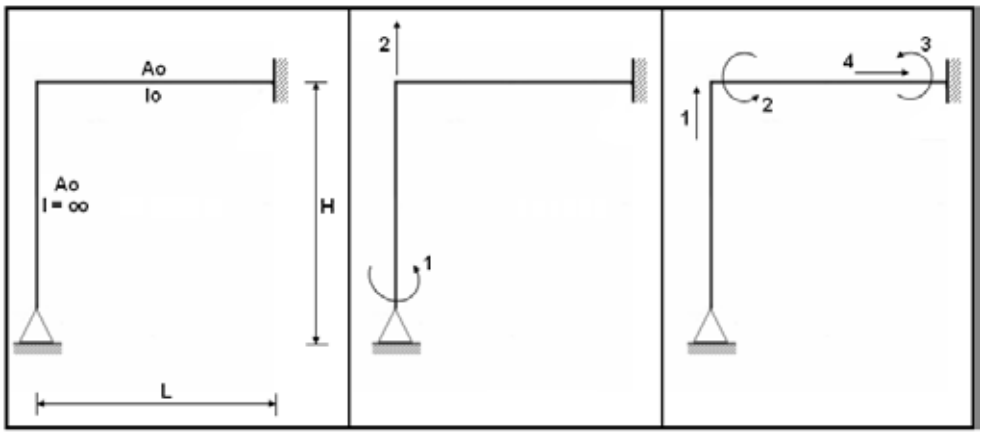



**Figura 10.3** Sistema de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q-q}$ y de elementos $\boldsymbol{P-p}$

- **SOLUCIÓN**

Al centro y a la derecha de la figura 10.3, se presentan los sistemas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$ respectivamente, para los cuales se obtuvo la siguiente matriz $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} \\ H & 0 \end{bmatrix}$$

Para el ejemplo se tiene:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \left[\frac{EA_o}{H}\right] \qquad \boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} & \frac{2EI_o}{L} & 0 \\ \frac{2EI_o}{L} & \frac{4EI_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} \end{bmatrix}$$

El resultado de los productos matriciales reporta:

$$\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_o}{H} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{4\boldsymbol{EI}_o}{\boldsymbol{L}} + \dfrac{\boldsymbol{EA}_o\boldsymbol{H}^2}{\boldsymbol{L}} & \dfrac{6\boldsymbol{EI}_o}{\boldsymbol{L}^2} \\ \dfrac{6\boldsymbol{EI}_o}{\boldsymbol{L}^2} & \dfrac{12\boldsymbol{EI}_o}{\boldsymbol{L}^3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{EA_o}{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{4EI_o}{L} + \dfrac{EA_oH^2}{L} & \dfrac{6EI_o}{L^2} \\ \dfrac{6EI_o}{L^2} & \dfrac{12EI_o}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI_o}{L} + \dfrac{EA_oH^2}{L} & \dfrac{6EI_o}{L^2} \\ \dfrac{6EI_o}{L^2} & \dfrac{12EI_o}{L^3} + \dfrac{EA_o}{H} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 3**

Las columnas y viga de la estructura de la figura 10.4 son de hormigón de armado y fue reforzada con una diagonal de acero, la misma que ha sido modelada como una unión simple. Se considera que la viga es axialmente rígida; las columnas tienen un área $2A_0$ y un momento de inercia a flexión $2I_0$; la viga tiene una inercia $I_0$ y la diagonal de acero $A_0$.

En la figura 10.5, a la izquierda se indica el sistema de coordenadas generalizadas y a la derecha el sistema de coordenadas de los elementos. El módulo de elasticidad del hormigón es $E_c$ y el módulo de elasticidad del acero $E_s$. Se pide:

i) Obtener la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$
ii) Presentar los triples productos matriciales que conducen al cálculo de la matriz de rigidez por la segunda forma de cálculo.
iii) Encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

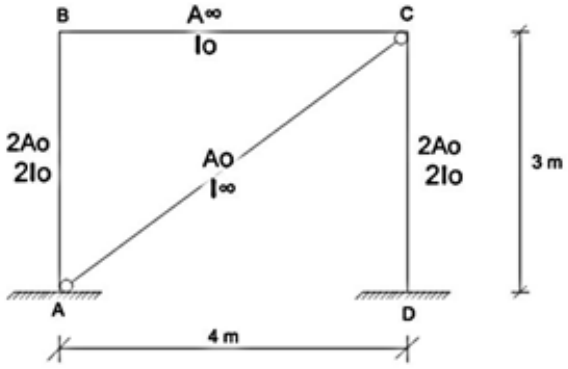



**Figura 10.4** Estructura mixta de hormigón y acero.

- **SOLUCIÓN**

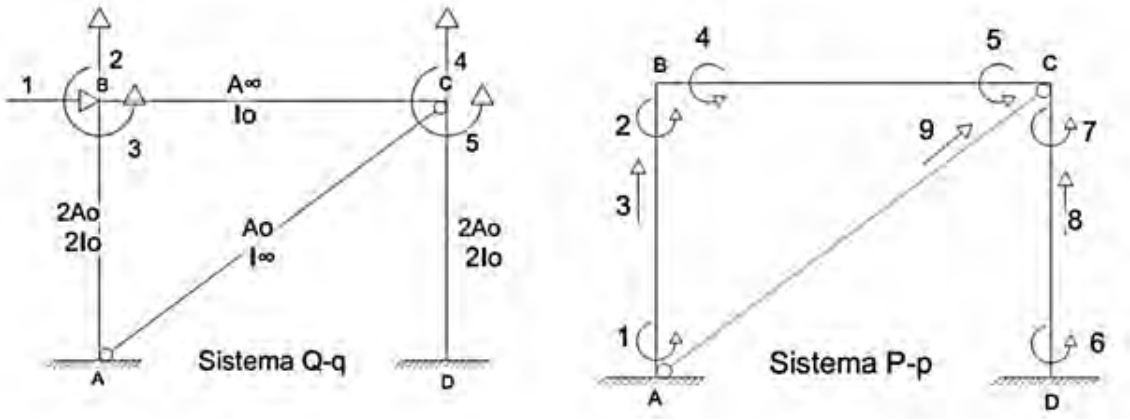
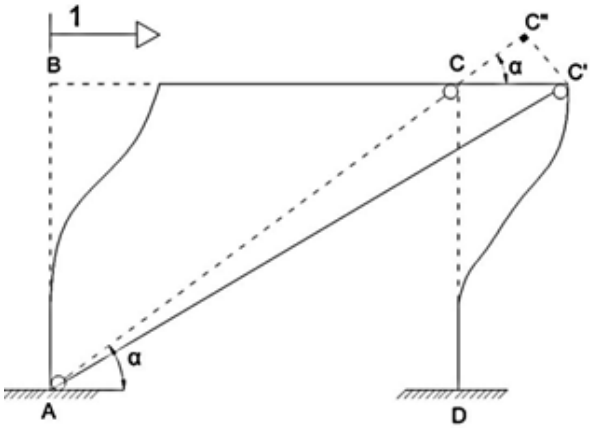
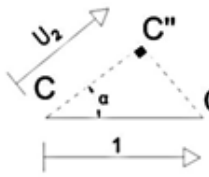



**Figura 10.5** Sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$

- **Primera columna de matriz $\boldsymbol{A}$**

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$




$$Cos\ \alpha = \frac{U_2}{1}$$

$$U_2 = Cos\ \alpha = \frac{4}{5}$$

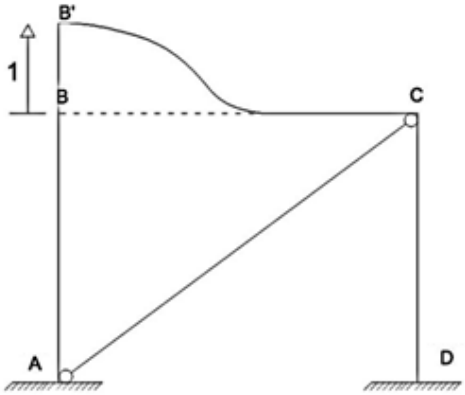
$$p_1 = \frac{1}{3} \quad p_4 = 0 \quad p_7 = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = \frac{1}{3} \quad p_5 = 0 \quad p_8 = 0$$

$$p_3 = 0 \quad p_6 = \frac{1}{3} \quad p_9 = \frac{4}{5}$$

- **Segunda columna de matriz $\boldsymbol{A}$**

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$



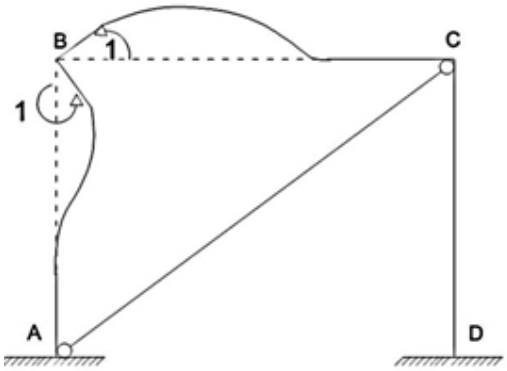

$$p_1 = 0 \quad p_4 = \frac{1}{4} \quad p_7 = 0$$

$$p_2 = 0 \quad p_5 = \frac{1}{4} \quad p_8 = 0$$

$$p_3 = 1 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0$$

- **Tercera columna de matriz *A***

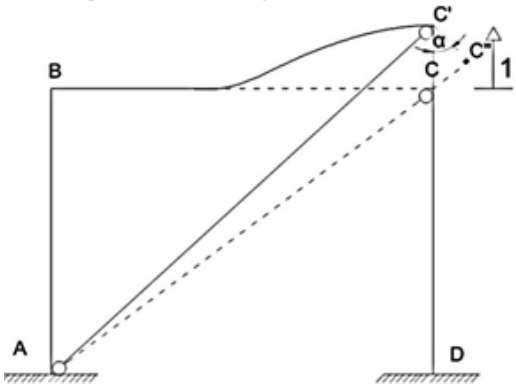
$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$

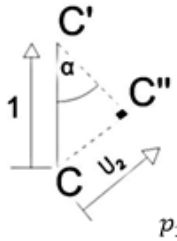



$p_1 = 0 \quad p_4 = 1 \quad p_7 = 0$
$p_2 = 1 \quad p_5 = 0 \quad p_8 = 0$
$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0$

- **Cuarta columna de matriz *A***

$q_4 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 4$



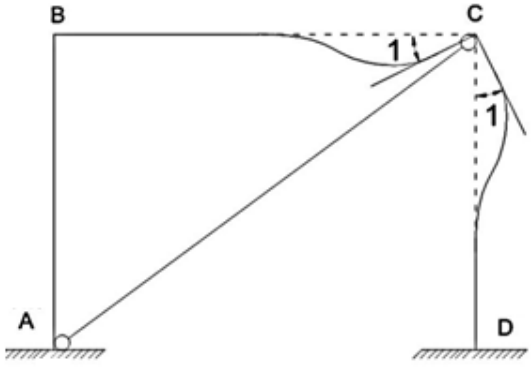

$Sen\ \alpha = \frac{U_2}{1}$

$U_2 = Sen\ \alpha = \frac{3}{5}$

$p_1 = 0 \quad p_4 = -\frac{1}{4} \quad p_7 = 0$
$p_2 = 0 \quad p_5 = -\frac{1}{4} \quad p_8 = 1$
$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = \frac{3}{5}$

- **Quinta columna de matriz *A***

$q_5 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 5$




$p_1 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_7 = 1$
$p_2 = 0 \quad p_5 = 1 \quad p_8 = 0$
$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de las columnas de hormigón**

$$\bar{k}^{(1)} = \bar{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{8E_cI_o}{3} & \frac{4E_cI_o}{3} & 0 \\ \frac{4E_cI_o}{3} & \frac{8E_cI_o}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_cA_o}{3} \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de la viga de hormigón**

$$\bar{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} E_cI_o & \frac{E_cI_o}{2} \\ \frac{E_cI_o}{2} & E_cI_o \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de la diagonal de acero**

$$\bar{k}^{(4)} = \left[\frac{E_sA_o}{5}\right]$$

- **Matriz de rigidez de la estructura**

$$K = \sum_{i=1}^{n} A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)}$$

$$\boldsymbol{K = A^{(1)t}k^{(1)}A^{(1)} + A^{(2)t}k^{(2)}A^{(2)} + A^{(3)t}k^{(3)}A^{(3)} + A^{(4)t}k^{(4)}A^{(4)}}$$

$$A^{(1)t}k^{(1)}A^{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{8E_cI_o}{3} & \frac{4E_cI_o}{3} & 0 \\ \frac{4E_cI_o}{3} & \frac{8E_cI_o}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_cA_o}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4E_cI_o}{3} & 0 & \frac{4E_cI_o}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4E_cI_o}{3} & 0 & \frac{8E_cI_o}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E_cA_o}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8E_cI_o}{9} & 0 & \frac{4E_cI_o}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E_cA_o}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3}E_cI_o & 0 & \frac{8E_cI_o}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)t}k^{(2)}A^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_cI_o & \frac{E_cI_o}{2} \\ \frac{E_cI_o}{2} & E_cI_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3E_cI_o}{8} & E_cI_o & -\frac{3E_cI_o}{8} & \frac{E_cI_o}{2} \\ 0 & \frac{3E_cI_o}{8} & \frac{E_cI_o}{2} & -\frac{3E_cI_o}{8} & E_cI_o \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3E_cI_o}{16} & \frac{3E_cI_o}{8} & -\frac{3E_cI_o}{16} & \frac{3E_cI_o}{8} \\ 0 & \frac{3E_cI_o}{8} & E_cI_o & -\frac{3E_cI_o}{8} & \frac{E_cI_o}{2} \\ 0 & -\frac{3E_cI_o}{16} & -\frac{3E_cI_o}{8} & \frac{3E_cI_o}{16} & -\frac{3E_cI_o}{8} \\ 0 & \frac{3E_cI_o}{8} & \frac{E_cI_o}{2} & -\frac{3E_cI_o}{8} & E_cI_o \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{(3)t}k^{(3)}A^{(3)}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{8E_cI_o}{3} & \frac{4E_cI_o}{3} & 0 \\ \frac{4E_cI_o}{3} & \frac{8E_cI_o}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_cA_o}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4E_cI_o}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_cI_o}{3} \\ \frac{4E_cI_o}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{8E_cI_o}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2E_cA_o}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8E_cI_o}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_cI_o}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2E_cA_o}{3} & 0 \\ \frac{4E_cI_o}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{8E_cI_o}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{(4)t}k^{(4)}A^{(4)}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{E_sA_o}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4E_sA_o}{25} & 0 & 0 & \frac{3E_sA_o}{25} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{16E_sA_o}{125} & 0 & 0 & \frac{12E_sA_o}{125} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12E_sA_o}{125} & 0 & 0 & \frac{9E_sA_o}{125} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al sumar los triples productos matriciales indicados se encuentra, la siguiente matriz de rigidez.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{16E_cI_o}{9} + \frac{16E_sI_o}{125} & 0 & \frac{4E_cI_o}{3} & \frac{12E_sA_o}{125} & \frac{4E_cI_o}{3} \\ 0 & \frac{2E_cA_o}{3} + \frac{3E_cI_o}{16} & \frac{3E_cI_o}{8} & -\frac{3E_cI_o}{16} & \frac{3E_cI_o}{8} \\ \frac{4E_cI_o}{3} & \frac{3E_cI_o}{8} & \frac{11E_cI_o}{3} & -\frac{3E_cI_o}{8} & \frac{E_cI_o}{2} \\ \frac{12E_sA_o}{125} & -\frac{3E_cI_o}{16} & -\frac{3E_cI_o}{8} & \frac{9E_sA_o}{125} + \frac{2E_cA_o}{3} + \frac{3E_cI_o}{16} & -\frac{3E_cI_o}{8} \\ \frac{4E_cI_o}{3} & \frac{3E_cI_o}{8} & \frac{E_cI_o}{2} & -\frac{3E_cI_o}{8} & \frac{11}{3}E_cI_o \end{bmatrix}$$

## 10. 3 CÁLCULO DE $K$ CON CUALQUIER SISTEMA $P - p$

En los ejercicios que se han resuelto en éste capítulo, se ha venido trabajando con el siguiente sistema de coordenadas de elemento.

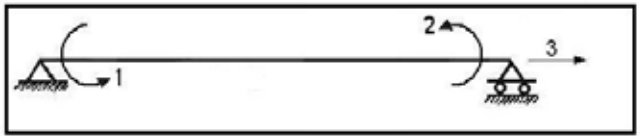



**Figura 10.8** Sistema de coordenadas $P - p$.

Lo más común es trabajar con el sistema $P - p$ indicado en la figura 10.8. En general, se puede calcular la matriz de rigidez de una estructura con cualquier sistema de coordenadas de miembro como se ha indicado en los capítulos anteriores. Con el propósito de ilustrar lo anotado en este apartado se repasa lo estudiado para el sistema de coordenadas del elemento indicado en la figura 10.9 para posteriormente realizar ejercicios con éste sistema.

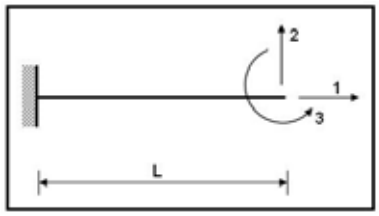



**Figura 10.9** Sistema de coordenadas $P - p$

Para éstas coordenadas, las deformaciones de un elemento, son:

$$p_1 = u_2 - u_1$$
$$p_2 = v_2 - v_1 - L\,\theta_1$$
$$p_3 = \theta_2 - \theta_1$$

La matriz de rigidez para el sistema indicado en la figura 10.9 al no considerar el efecto de corte es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

A manera de repaso se presenta a continuación los valores con los cuales se obtienen las deformaciones de un elemento y la respectiva matriz de rigidez para el caso de un elemento axialmente rígido que se indica en la figura 10.10 y para el caso de un elemento transversalmente rígido que se indica en la figura 10.11.

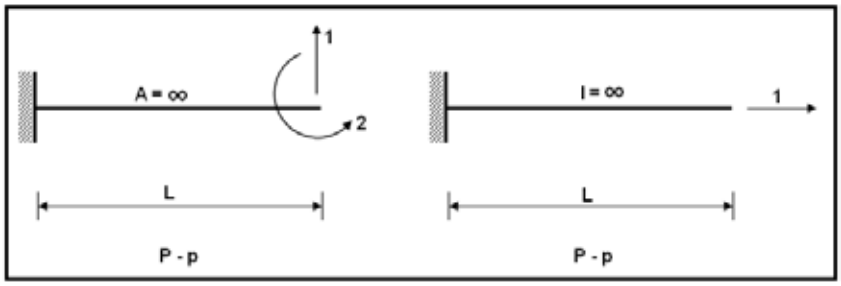



**Figura 10.10** Elemento $A = \infty$ **Figura 10.11** Elemento $I = \infty$ .

$$p_1 = v_2 - v_1 - L\,\theta_1 \qquad p_1 = u_2 - u_1$$
$$p_2 = \theta_2 - \theta_1$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k} = \left[\frac{EA}{L}\right]$$

- **EJEMPLO N.- 3**

Calcular la matriz de rigidez para la estructura indicada en la figura 10.1, para el sistema de coordenadas $Q - q$ indicado en la figura 10.2, si ahora el sistema de coordenadas de los elementos es el indicado en la figura 10.12.

- **SOLUCIÓN**

Por ser el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ muy poco usual se procede a calcular los términos de la primera columna de la matriz $\boldsymbol{A}$ para el efecto en la figura 10.13 se presenta la deformada elemental $q_1$. Es conveniente que el lector analice elemento por elemento para el cálculo de las deformaciones.

Para el elemento AB , las condiciones de borde que únicamente $\theta_2 = 1$, las restantes coordenadas del elemento son nulas. Las deformaciones del elemento AB son:

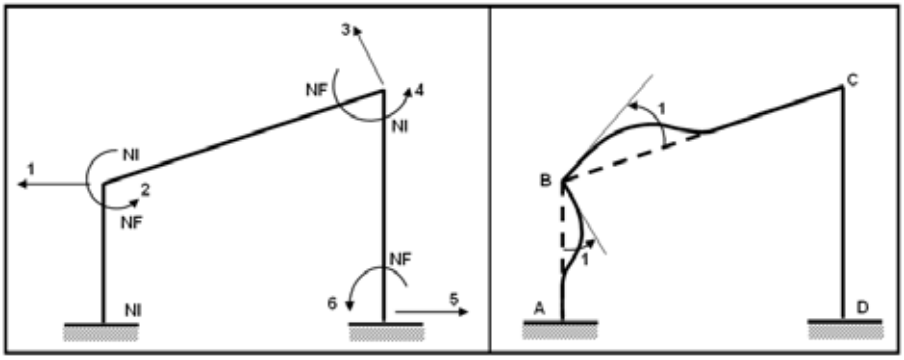



**Figura 10.12** Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ **Figura 10.13** Deformada elemental $q_1$

$$p_1 = v_2 - v_1 - \theta_1 L = 0 - 0 - 0 * 6 = 0$$
$$p_2 = \theta_2 - \theta_1 = 1 - 0 = 1$$

De la figura 10.13 se observa que para el elemento BC solamente $\theta_1 = 1$ y las demás coordenadas son nulas. Luego las deformaciones valen:

$$p_3 = 0 - 0 - 1 * 4\sqrt{10} = -4\sqrt{10}$$
$$p_4 = 0 - 1 = -1$$

Para el elemento CD las deformaciones son nulas, lo que se aprecia en la figura 10.13. Por lo tanto $p_5 = p_6 = 0$.

Se han utilizado las fórmulas indicadas para elementos axialmente rígidos. Se deja al lector el cálculo de la segunda y tercera columna de la matriz de compatibilidad de deformaciones que resulta.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -4\sqrt{10} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se evalúa la matriz de rigidez de cada elemento con la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar valores se tiene:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{160\sqrt{10}} & -\frac{9}{80} \\ -\frac{9}{80} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{125} & -\frac{3}{25} \\ -\frac{3}{25} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Los resultados del triple producto matricial son:

$$\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.000 & 0.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.167 & 0.000 & 0.056 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.949 & 0.474 & 0.000 \\ 0.474 & 0.949 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.800 & 0.120 \\ 0.000 & 0.120 & 0.024 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)} = \boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} + \boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1.616 & 0.474 & 0.167 \\ 0.474 & 1.749 & 0.120 \\ 0.167 & 0.120 & 0.080 \end{bmatrix}$$

Nótese que se obtuvo el mismo resultado en el ejemplo 1 esto no es una casualidad. La matriz de rigidez es la misma por que el sistema de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ es el mismo. Para terminar con éste sub apartado se menciona el hecho de que se puede calcular $\boldsymbol{K}$ empleando diferentes sistemas de coordenadas de elemento como se verá en el siguiente ejemplo.

- **EJEMPLO N.- 4**

Para la estructura del ejemplo 3, calcular la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ usando el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ que se indica en la figura 10.14

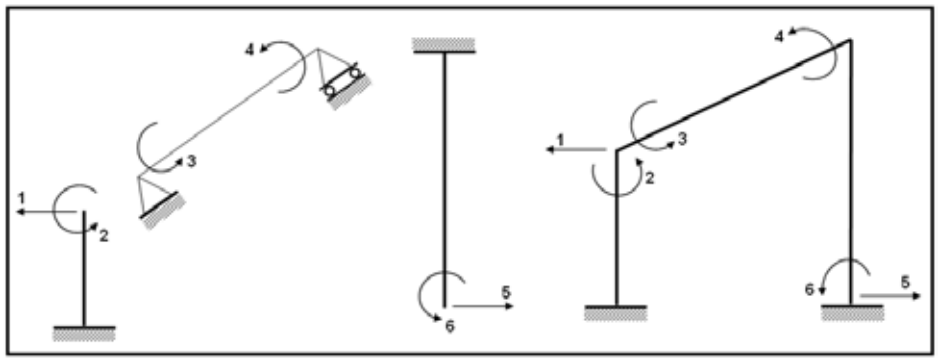



**Figura 10.14** Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ para cada elemento.

- **SOLUCIÓN**

Con el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ de la figura 10.14 la matriz de compatibilidad de deformaciones resulta

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Las diferentes matrices de rigidez de los elementos son:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

$$k^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{125} & -\frac{3}{25} \\ -\frac{3}{25} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Si se observa con detenimiento los ejemplos 1 y 3, se ve que $\boldsymbol{A}^{(1)t}\,\boldsymbol{k}^{(1)}\,\boldsymbol{A}^{(1)}$ y $\boldsymbol{A}^{(3)t}\,\boldsymbol{k}^{(3)}\,\boldsymbol{A}^{(3)}$ se realizó en el ejemplo 3 y que el producto $\boldsymbol{A}^{(2)t}\,\boldsymbol{k}^{(2)}\,\boldsymbol{A}^{(2)}$ se lo ejecutó en el ejemplo 1. Por lo tanto la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ tiene que ser la misma.

## 10. 4 EDIFICIO DE CORTE

Por ser importante dentro del Análisis Sísmico de Estructuras y por considerar que es oportuno tratarlo en este punto se procede a calcular la matriz de rigidez para el modelo numérico de cálculo que se conoce con el nombre de Edificio de Corte, previamente se describe el modelo. El edificio de corte está constituido por vigas infinitamente rígidas y columnas axialmente rígidas, en los cuales la masa está concentrada a nivel de entrepiso. Su denominación proviene de la analogía de éste con la viga en voladizo de masa y rigidez uniforme distribuida cuyas deformaciones se deben exclusivamente al esfuerzo de corte.

- **EJEMPLO N.- 5**

Para la estructura de la figura 10.15, edificio de corte de dos pisos, se presenta en las figuras 10.16 y 10.17 los sistemas de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q-q}$ y de elemento $\boldsymbol{P-p}$. Se desea encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

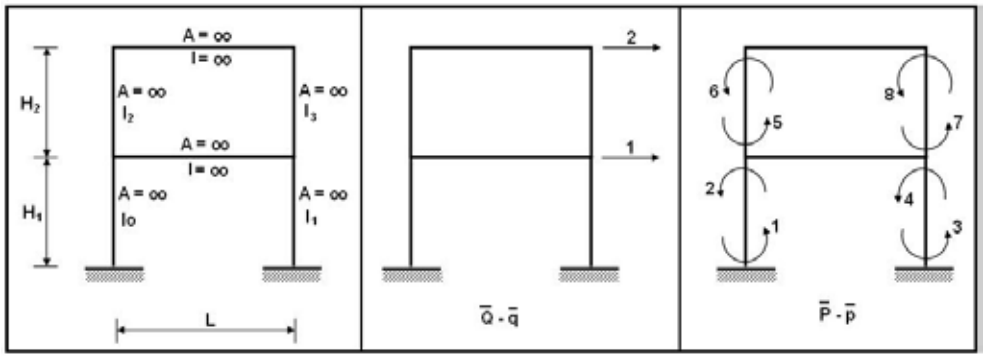



**Figura 10.15** **Figura 10.16** **Figura 10.17**

$$A = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{H_1} & 0 \\ \frac{1}{H_1} & 0 \\ \hline \frac{1}{H_1} & 0 \\ \frac{1}{H_1} & 0 \\ \hline -\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\ -\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\ \hline -\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\ -\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \end{array}\right]$$

- **SOLUCIÓN**

Nótese que los elementos horizontales no contribuyen a la formación de la matriz de rigidez de la estructura. De acuerdo a la matriz $\boldsymbol{A}$ se tiene que los elementos 1 y 2 corresponden a las columnas de la planta baja y los elementos 3 y 4 a las columnas de la primera planta alta.

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \frac{2EI_o}{H_1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(2)} = \frac{2EI_1}{H_1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(3)} = \frac{2EI_2}{H_2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(4)} = \frac{2EI_3}{H_2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego de efectuar $\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)}$ se obtiene:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \left(\frac{12EI_o}{H_1^3} + \frac{12EI_1}{H_1^3}\right) + \left(\frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_2}{H_2^3}\right) & -\left(\frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_2}{H_2^3}\right) \\ -\left(\frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_2}{H_2^3}\right) & \left(\frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_2}{H_2^3}\right) \end{bmatrix}$$

Por otra parte se define a $\boldsymbol{k_n}$ como la rigidez del piso n, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{k_n} = \sum_{i}^{j} \frac{12EI_i}{H_n^3}$$

Donde $H_n$ es la altura del entrepiso n; $I_i$ es el momento de inercia de la columna i en el piso n; $E$ es el módulo de elasticidad del material; $j$ es el número de columnas en el piso n. Para la estructura que se analiza se tiene que la rigidez del piso 1 es:

$$\boldsymbol{k}_1 = \frac{12EI_o}{H_1^3} + \frac{12EI_1}{H_1^3}$$

Para el piso 2, la rigidez de piso vale:

$$\boldsymbol{k}_2 = \frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_3}{H_2^3}$$

Con ésta notación la matriz de rigidez de la estructura para el pórtico de la figura 10.15, es:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 & -\boldsymbol{k}_2 \\ -\boldsymbol{k}_2 & \boldsymbol{k}_2 \end{bmatrix}$$

Al generalizar los resultados obtenidos en el ejemplo 5, para un edificio de corte de n pisos como el mostrado en la figura 10.18, para el sistema de coordenadas de la figura 10.19, la matriz de rigidez es la siguiente:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

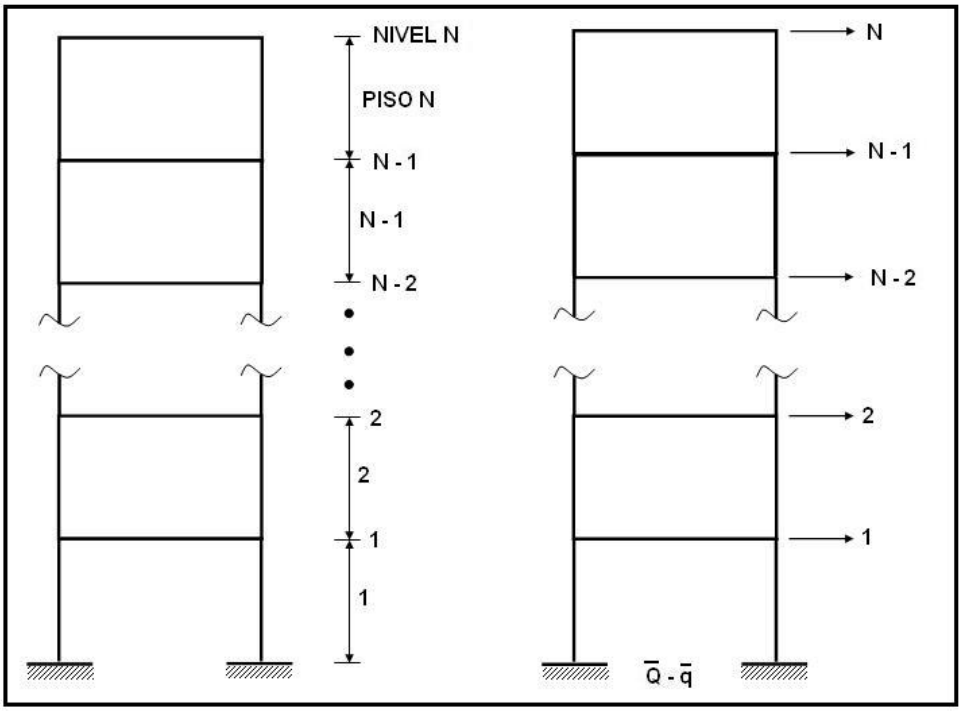



**Figura 10.18** Edificio de Corte




**Figura 10.19** Sistema de coordenadas.

La matriz de rigidez es simétrica, en la cual los términos de la diagonal son $k_1 + k_2$; $k_2 + k_3$; $k_3 + k_4$; $k_4 + k_5$; …. hasta $k_n$ y los elementos de las diagonales adyacentes son $-k_2$; $-k_3$; $-k_4$; ……hasta $-k_n$.

## 10.5 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 7**

La estructura de la figura 10.20 está compuesta por elementos totalmente flexibles de igual longitud y sección transversal. En las figuras 10.21 y 10.22 se presentan los sistemas $Q - q$ y $P - p$ respectivamente. Se pide obtener la matriz de rigidez de la estructura.

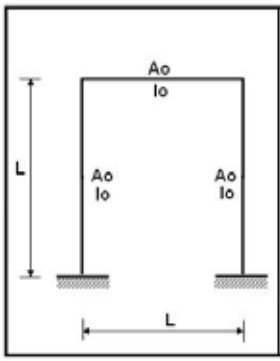



Figura 10.20

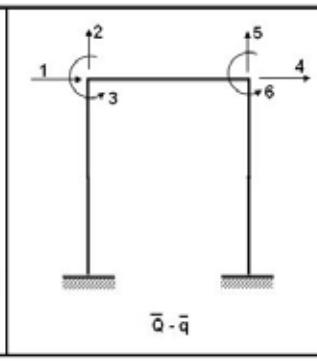



Figura 10.21

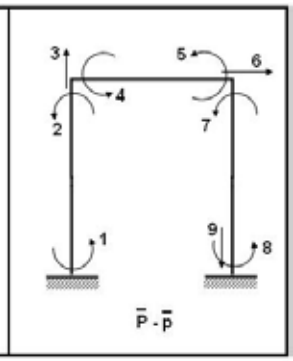



Figura 10.22

- **SOLUCIÓN**

Para el sistema $\boldsymbol{P - p}$ indicado en la figura 10.22, la matriz $\boldsymbol{A}$ resulta.

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Las tres primeras filas corresponden a la matriz $\boldsymbol{A}^{(1)}$, las tres siguientes son $\boldsymbol{A}^{(2)}$ y las tres últimas son $\boldsymbol{A}^{(3)}$.

Por otra parte como los elementos son de igual longitud y de igual sección transversal, la matriz de rigidez de cada uno de ellos es la misma. Luego se tiene:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(2)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} & \frac{2EI_o}{L} & 0 \\ \frac{2EI_o}{L} & \frac{4EI_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} \end{bmatrix}$$

La contribución de cada uno de los elementos en la matriz de rigidez de la estructura se presenta a continuación.

$$\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12\boldsymbol{EI}_o}{\boldsymbol{L}^3} & 0 & \frac{6\boldsymbol{EI}_o}{\boldsymbol{L}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{EA}_o}{\boldsymbol{L}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6\boldsymbol{EI}_o}{\boldsymbol{L}^2} & 0 & \frac{4\boldsymbol{EI}_o}{\boldsymbol{L}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_o}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_o}{L^3} & \frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{4EI_o}{L} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{2EI_o}{L} \\ -\frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_o}{L^3} & -\frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & -\frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{2EI_o}{L} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{4EI_o}{L} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_o}{L^3} & 0 & \frac{12EI_o}{L^2} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene sumando la contribución de cada uno de los elementos.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} + \boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & & \textit{SIMETRICA} & & \\ -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{8EI_o}{L} & & & \\ -\frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & & \\ 0 & -\frac{12EI_o}{L^3} & -\frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & \\ 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{2EI_o}{L} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{8EI_o}{L} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 8**

Calcular la matriz de rigidez para el pórtico plano de la figura 10.23, si los sistemas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ son los presentados en las figuras 10.24 y 10.25.

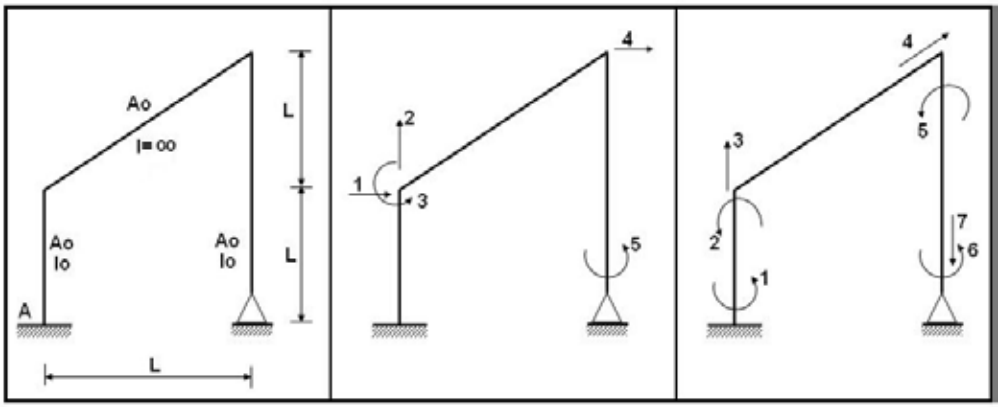



**Figura 10.23** **Figura 10.24** Sistema $Q - q$ **Figura 10.25** Sistema $P - p$.

- **SOLUCIÓN**

Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos son:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} & \frac{2EI_o}{L} & 0 \\ \frac{2EI_o}{L} & \frac{4EI_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{EA_o}{\sqrt{2}L} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{2L} & \frac{2EI_o}{2L} & 0 \\ \frac{2EI_o}{2L} & \frac{4EI_o}{2L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_o}{2L} \end{bmatrix}$$

La matriz de compatibilidad de deformaciones es:

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \sqrt{2}L & \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2L} & 1 \\ -1 & 1 & 2L & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$A^{(1)t}\ k^{(1)}\ A^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{L^3} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{4EI_o}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & L^2 & L & 0 \\ -1 & 0 & L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}EA_o}{L}$$

$$\boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{EA_o}{2L} & -\frac{EA_o}{2L} & -EA_o & -\frac{EA_o}{2L} & 0 \\ -\frac{EA_o}{2L} & \frac{EA_o}{2L} & EA_o & \frac{EA_o}{2L} & 0 \\ -EA_o & EA_o & \frac{2EI_o}{L} + 2LEA_o & \frac{3EI_o}{2L^2} + EA_o & \frac{EI_o}{L} \\ -\frac{EA_o}{2L} & \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2} + EA_o & \frac{3EI_o}{2L^3} + \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EI_o}{L} & \frac{3EI_o}{2L^2} & \frac{2EI_o}{L} \end{bmatrix}$$

Al sumar las tres matrices correspondientes a los triples productos matriciales se obtiene $\boldsymbol{K}$ .

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA_o}{L}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{12EI_o}{L^3} & & & & \\ -\frac{EA_o}{2L} & \frac{3EA_o}{2L} & & \textit{SIMETRICA} & \\ -EA_o\left(\sqrt{2}+1\right)+\frac{6EI_o}{L^2} & EA_o & \frac{6EI_o}{L}+LEA_o\left(\sqrt{2}+2\right) & & \\ -\frac{EA_o\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)}{L} & \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2}+EA_o\left(\sqrt{2}+1\right) & \frac{3EI_o}{2L^3}+\frac{EA_o\left(\sqrt{2}+1\right)}{L} & \\ 0 & 0 & \frac{EI_o}{L} & \frac{3EI_o}{2L^2} & \frac{2EI_o}{L} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 9**

Para la armadura plana indicada en la figura 10.26, calcular la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ si todos los elementos tienen la misma rigidez axial $EA$.

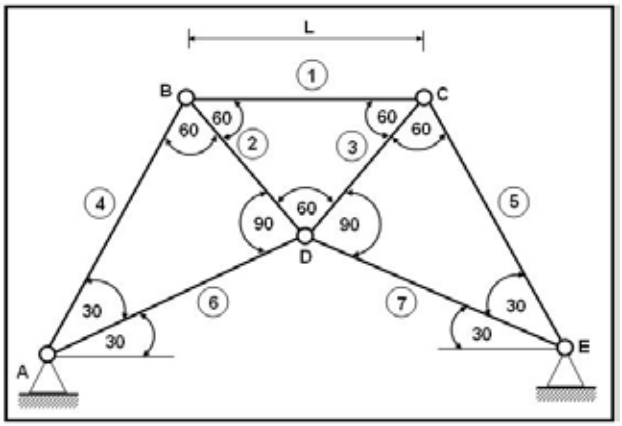



**Figura 10.26**

- **SOLUCIÓN**

En primer lugar se procede a calcular la longitud de cada uno de los elementos el resultado se indica en la tabla 1.

**Tabla 1** Longitudes de las barras de Ejemplo 9

| Elemento | Longitud |
|---|---|
| 1=2=3 | L |
| 4=5 | 2L |
| 6=7 | $\sqrt{3}$ L |

En segundo lugar se determina un sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q-q}$ y un sistema de coordenadas de los elementos $\boldsymbol{P-p}$, los mismos que se indican en las figuras 10.27 y 10.28, respectivamente.

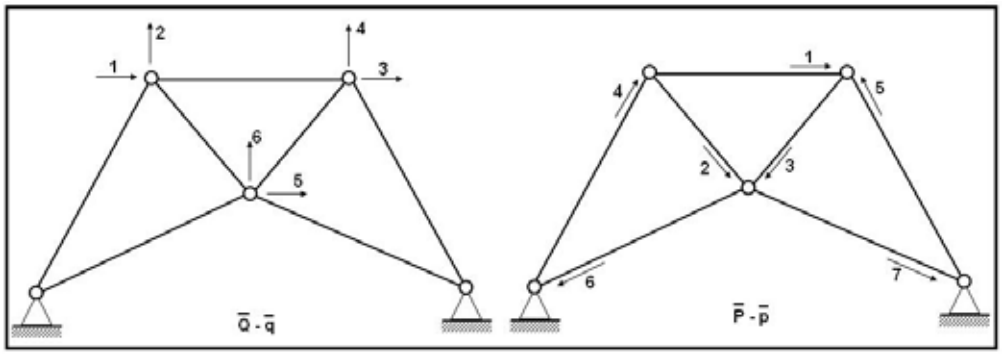



**Figura 10.27**




**Figura 10.28**

En tercer lugar se determina la matriz $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q}$. Nótese que la matriz $\boldsymbol{A}$ que se ha escrito está multiplicada por $\frac{1}{2}$.

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

. En cuarto lugar se obtiene la matriz de rigidez de cada uno de los elementos de la armadura

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(2)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \left[\frac{EA}{L}\right]$$

$$\boldsymbol{k}^{(4)} = \boldsymbol{k}^{(5)} = \left[\frac{EA}{2L}\right]$$

$$\boldsymbol{k}^{(6)} = \boldsymbol{k}^{(7)} = \left[\frac{EA}{\sqrt{3}L}\right]$$

Finalmente se efectúa el triple producto matricial con cada uno de los elementos y se determina la matriz de rigidez de la estructura. El resultado que se obtiene es:

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 7 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 9 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 7 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 9 & -3 & -3 \\ -\sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 & 6+2\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 6+2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

A pesar de que en éste capítulo no se ha hecho referencia a las armaduras planas, se ha obtenido la matriz de rigidez para una de ellas siguiendo los mismos lineamientos que se han formulado para los pórticos planos. Esto se debe a que los conceptos son generales, se aplican a cualquier tipo de estructura. Únicamente por facilidad se ha trabajado con pórticos planos y ahora se empieza con armaduras planas.

- **EJEMPLO N.- 10**

Una estructura articulada consta de tres elementos conectados en la unión A como se indica en la figura 10.29. El elemento AC es vertical. Las secciones rectas $A_1$ y $A_3$ son de 50 mm$^2$ y $A_2$ es de 100 mm$^2$. El valor de $E = 200 * 10^3 \ N/mm^2$. Calcular la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ de acuerdo a lo formulado en el apartado 10.1, para el sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ que se indica en la figura 10.30.

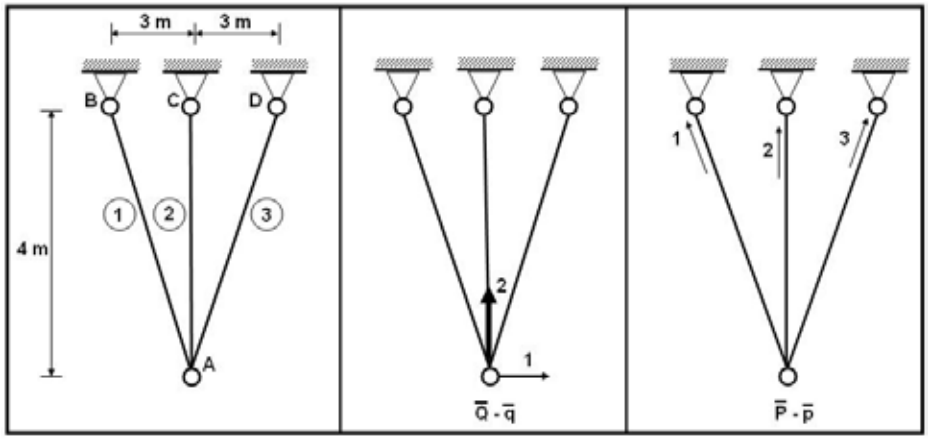



**Figura 10.29** **Figura 10.30** **Figura 10.31**

- **SOLUCIÓN**

Considerando el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ mostrado en la figura 10.31, la matriz $\boldsymbol{A}$ es la siguiente:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.0 & -1.0 \\ -0.6 & -0.8 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez de los elementos son:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \left[\frac{A_1 \ E}{L_1}\right] = \left[\frac{50 * 200}{5000}\right] = \left[2 \ \frac{KN}{mm}\right]$$

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \left[\frac{A_2 \ E}{L_2}\right] = \left[\frac{100 * 200}{4000}\right] = \left[5 \ \frac{KN}{mm}\right]$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{(1)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}^{(2)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se realiza el triple producto matricial con la matriz $\boldsymbol{A}$ completa.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^t \ \boldsymbol{k} \ \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.0 & -0.6 \\ -0.8 & -1.0 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.0 & -1.0 \\ -0.6 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1.44 & 0.00 \\ 0.00 & 7.56 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 11**

Calcular la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ para el pórtico plano indicado en la figura 10.32, trabajando con los sistemas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ indicados en las figuras 10.33 y 10.34.

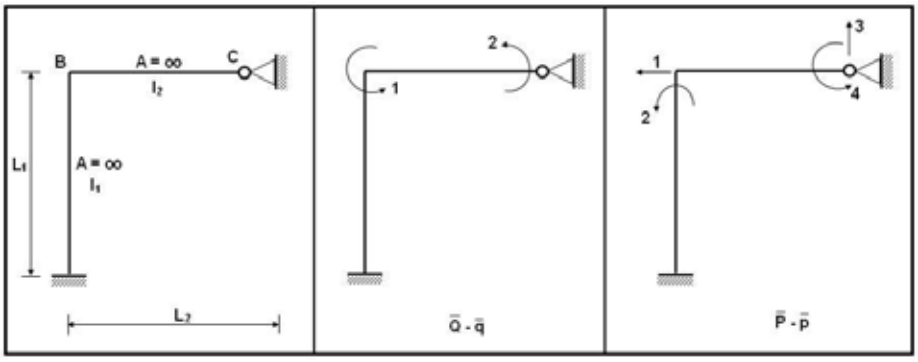



**Figura 10.32** **Figura 10.33** **Figura 10.34**

- **SOLUCIÓN**

Por trabajar con un sistema de coordenadas de elemento no tan común se procede a detallar el cálculo de la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$.

- Primera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

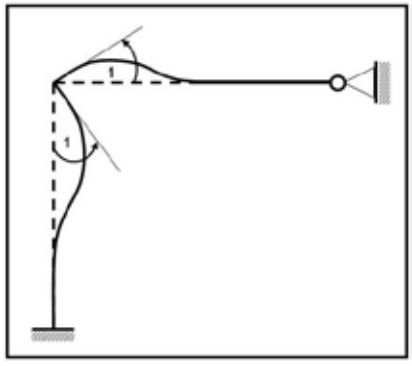



**Figura 10.35** Deformada elemental $q_1$

$$p_1 = v_2 - v_1 - \theta_1 L = 0$$
$$p_2 = \theta_2 - \theta_1 = 1$$
$$p_3 = v_2 - v_1 - \theta_1 L = -L_2$$
$$p_4 = \theta_2 - \theta_1 = -1$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

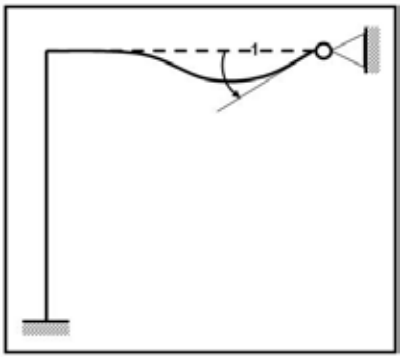


**Figura 10.36** Deformada elemental $q_2$

$$p_1 = v_2 - v_1 - \theta_1 L = 0$$
$$p_2 = \theta_2 - \theta_1 = 0$$
$$p_3 = v_2 - v_1 - \theta_1 L = 0$$
$$p_4 = \theta_2 - \theta_1 = 1$$

Por consiguiente:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ - & - \\ -L_2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma de la matriz de rigidez de miembro para el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ con el que se está trabajando es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Al sustituir valores se tiene:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{L_1^3} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} \\ -\frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{4EI_1}{L_1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} \\ -\frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

El resultado de los triples productos matriciales es:

$$\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{L_2} & \frac{2EI_2}{L_2} \\ \frac{2EI_2}{L_2} & \frac{4EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2} & \frac{2EI_2}{L_2} \\ \frac{2EI_2}{L_2} & \frac{4EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 12**

Si en la estructura del problema anterior se trabaja con el sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ presentado en la figura 10.37. Calcular la matriz de rigidez utilizando los resultados obtenidos en el ejemplo 11.

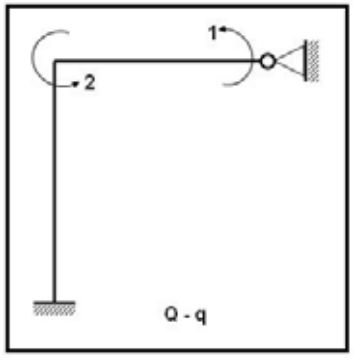



**Figura 10.37**

- **SOLUCIÓN**

Al comparar las figuras 10.33 y 10.37 se encuentra que únicamente se ha cambiado la numeración del sistema de coordenadas generalizadas, concretamente se cambió el 2 por el 1. Esto significa por ejemplo que en este ejercicio $q_1$ es la rotación del nudo C, mientras que en el problema anterior $q_1$ es la rotación del nudo B. Para encontrar la nueva matriz de rigidez se procede de la siguiente manera:

- En la matriz encontrada en el ejemplo anterior se cambia la fila 1 por la fila 2, quedando:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2EI_2}{L_2} & \dfrac{4EI_2}{L_2} \\ \dfrac{4EI_2}{L_2}+\dfrac{4EI_1}{L_1} & \dfrac{2EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

♣ Finalmente se cambia la columna 1 por la columna 2, encontrando de ésta manera la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ para el sistema de coordenadas de la figura 10.37.

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI_2}{L_2} & \dfrac{2EI_2}{L_2} \\ \dfrac{2EI_2}{L_2} & \dfrac{4EI_2}{L_2}+\dfrac{4EI_1}{L_1} \end{bmatrix}$$

El fundamento de lo expuesto se debe a la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$ .

- **EJEMPLO N.- 13**

Escribir directamente la matriz de rigidez para el pórtico de la figura 10.38 si el sistema de coordenadas generalizadas es el mostrado en la figura 10.39.

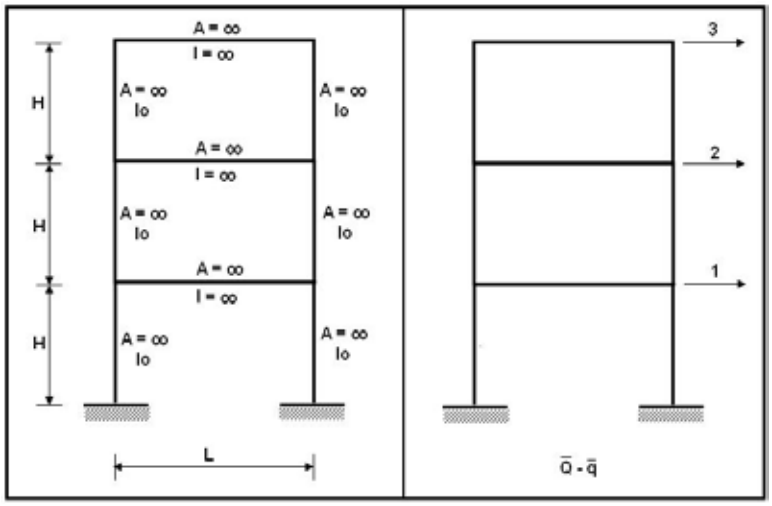



**Figura 10.38** **Figura 10.39**

- **SOLUCIÓN**

La forma de la matriz de rigidez para el edificio de corte presentado es:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Donde $k_i$ es la rigidez del piso i. De acuerdo a lo indicado en el apartado 10.4 se tiene:

$$k_1 = \frac{12EI_o}{H^3} + \frac{12EI_o}{H^3} = \frac{24EI_o}{H^3}$$

En el ejercicio se considera que todas las columnas tienen la misma sección transversal y altura de piso. Por lo tanto:

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{24EI_o}{H^3}$$

Luego

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{48EI_o}{H^3} & -\frac{24EI_o}{H^3} & 0 \\ -\frac{24EI_o}{H^3} & \frac{48EI_o}{H^3} & -\frac{24EI_o}{H^3} \\ 0 & -\frac{24EI_o}{H^3} & \frac{24EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 14**

Si en el problema anterior la matriz $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ define una matriz de transformación de coordenadas de la forma $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$. Se pide calcular $\boldsymbol{K}^*$.

- **SOLUCIÓN**

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{T}^t \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48EI_o}{H^3} & -\frac{24EI_o}{H^3} & 0 \\ -\frac{24EI_o}{H^3} & \frac{48EI_o}{H^3} & -\frac{24EI_o}{H^3} \\ 0 & -\frac{24EI_o}{H^3} & \frac{24EI_o}{H^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{24EI_o}{H^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24EI_o}{H^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

Como se verá en los próximos capítulos es conveniente que la matriz de rigidez sea diagonal debido a que es más fácil obtener su inversa. Por lo que se recomienda resolver el edificio de corte en las coordenadas asterisco.

- **EJEMPLO N.- 15**

Demostrar que si una matriz cuadrada $k$ de orden m es simétrica y que si $A$ es de orden mxn. Entonces el producto $A^t\ k\ A$ es simétrico.

- **SOLUCIÓN**

Sea $B = A^t\ k\ A$ para demostrar que la matriz resultante del triple producto es simétrica bastará probar que $B^t = B$. Al obtener la matriz transpuesta de $B$ se tiene:

$$B^t = \left(A^t\ k\ A\right)^t = A^t\ k^t\ \left(A^t\right)^t$$

Pero $\left(A^t\right)^t = A$ (Propiedad de las matrices) y $k^t = k$ (Por ser simétrica la matriz de rigidez). Luego se tiene que:

$$B^t = A^t\ k\ A$$

Con lo que se ha probado que $B = B^t$ que era lo que se quería demostrar.

Esta propiedad que se ha demostrado, ayudará al lector a comprobar los resultados cuando calcule la matriz de rigidez de una estructura que debe salir simétrica.

- **EJEMPLO N.- 16**

Demostrar que en estructuras isostáticas se cumple la siguiente propiedad:

$$K^{-1} = \left(A^t\ k\ A\right)^{-1} = A^{-1}\ k^{-1}\ \left(A^t\right)^{-1}$$

- **SOLUCIÓN**

Si la estructura es isostática se tiene que la matriz $A$ es cuadrada y regular. En consecuencia existe $A^{-1}$. En estructuras hiperestáticas no se puede encontrar la inversa de la matriz $A$. Con ésta introducción todo lo que se indica a continuación es válido para estructuras isostáticas.

Se sabe que:

$$p = A\ q \quad \Rightarrow \quad q = A^{-1}\ p$$
$$P = k\ p \quad \Rightarrow \quad p = k^{-1}\ P$$
$$Q = A^t\ P \quad \Rightarrow \quad P = \left(A^t\right)^{-1}\ Q$$

Al reemplazar la última ecuación en la anterior y el resultado en la primera se tiene:

$$q = A^{-1}\, k^{-1} \left(A^t\right)^{-1} Q$$

Por otra parte se conoce que:

Al igualar éstas dos últimas ecuaciones y simplificar $Q$ se tiene:

$$K^{-1} = A^{-1}\, k^{-1} \left(A^t\right)^{-1}$$

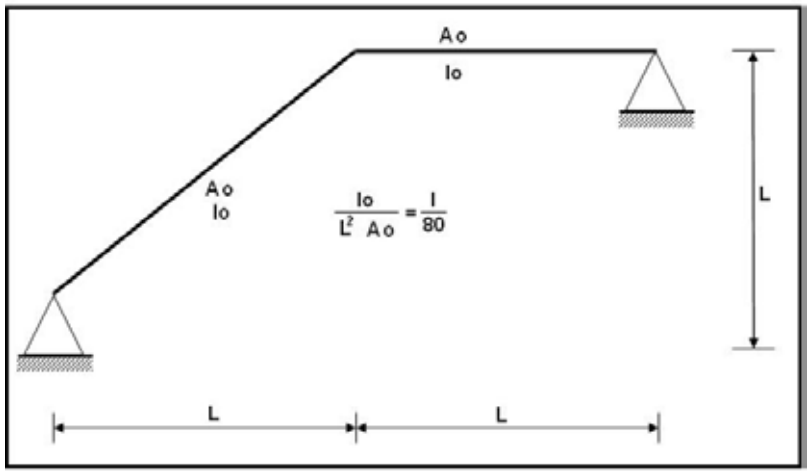
Pero

$$K = A^t\, k\, A \qquad \Rightarrow K^{-1} = \left(A^t\, k\, A\right)^{-1} = A^{-1}\, k^{-1} \left(A^t\right)^{-1}$$

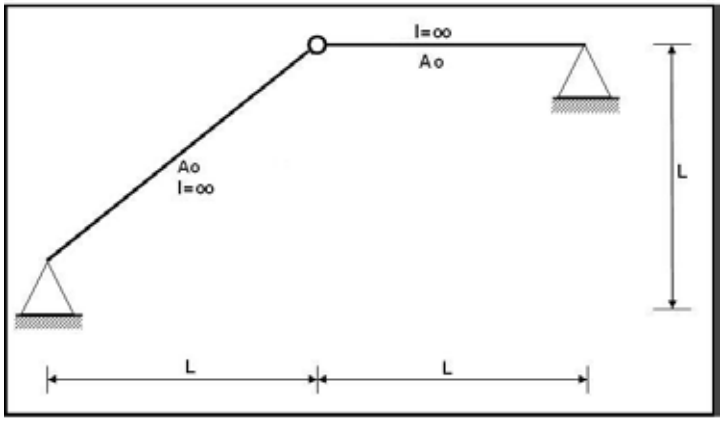
## 10.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

Trabajando con la matriz de compatibilidad completa en los ejercicios 1 y 2 encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

**Ejercicio N.- 1**

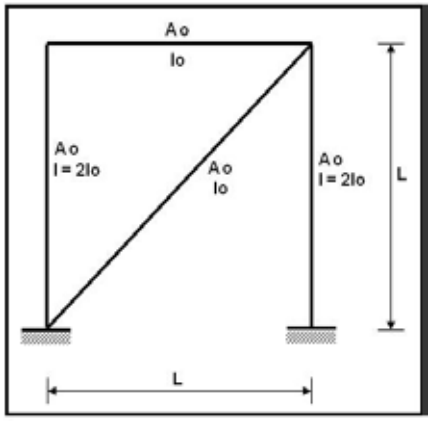


**Ejercicio N.- 2**



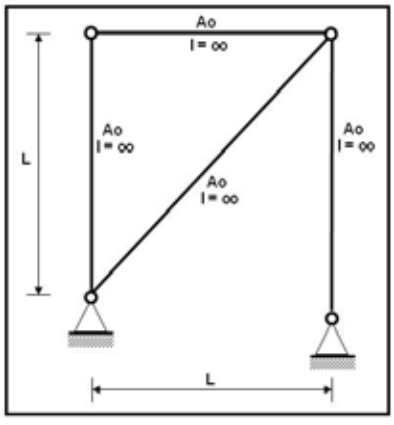

En los ejercicios 3 y 4 calcular la matriz de rigidez de la estructura trabajando con sub matrices.

**Ejercicio N.- 3**



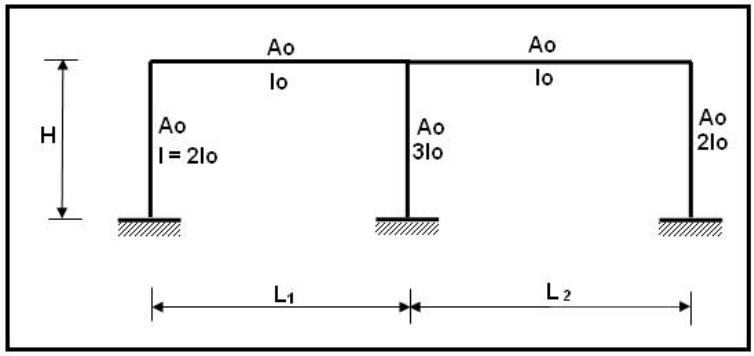

$$\frac{I_o}{A_o\ L^2} = \frac{1}{100}$$

**Ejercicio N.- 4**



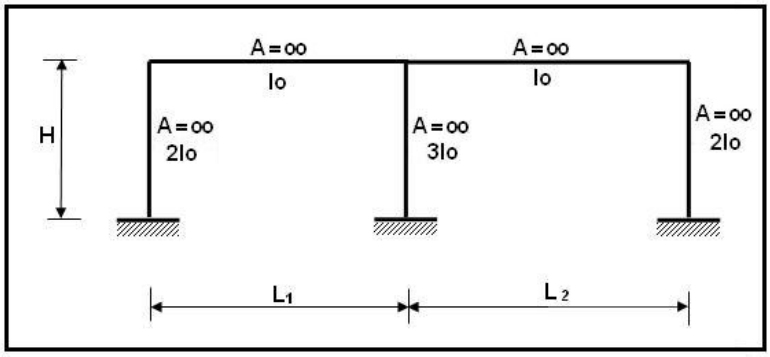
Calcular la matriz de rigidez de las estructuras de los ejercicios 5 y 6 empleando dos sistemas de coordenadas de elemento y comprobar que sale la misma matriz de rigidez.

**Ejercicio N.- 5**



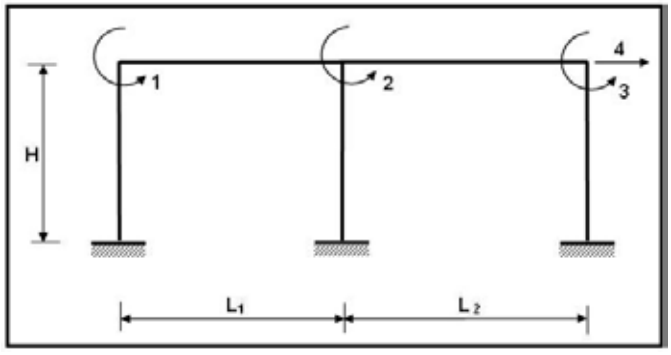

$$\frac{I_o}{A_o H^2} = \frac{1}{90}$$

**Ejercicio N.- 6**

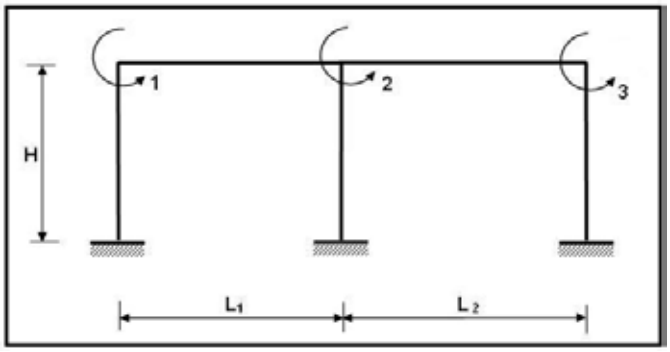



**Ejercicio N.- 7**

Calcular la matriz de rigidez de la estructura del ejercicio 6 considerando los siguientes sistemas de coordenadas generalizadas.




**Caso a**




**Caso b**

En el caso b no se ha considerado el desplazamiento lateral del pórtico. El objetivo del ejercicio es que el lector reconozca la forma de las matrices que resultan.

**Ejercicio N.- 8**

Utilizando cualquier algoritmo o método encontrar la matriz de rigidez del ejercicio anterior. Se recomienda el Método de las Rigideces sucesivas si desea impóngase alguna carga y encuentre el desplazamiento y giros.

**Ejercicio N.- 9**

Para el ejercicio resuelto N.-8 interpretar cual es el sistema $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$ y obtener la matriz triangular inferior unitaria.

**Ejercicio N.- 10**

Demostrar que $\left(\boldsymbol{A}^t\right)^t = \boldsymbol{A}$ y demostrar que $\left(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\right)^t = \boldsymbol{C}^t\,\boldsymbol{B}^t\,\boldsymbol{A}^t$. En el ejemplo resuelto N.- 16 se consideró ya demostradas estas propiedades.

**Ejercicio N.- 11**

Demostrar que la matriz de rigidez de una estructura es simétrica de dos formas. La primera por medio de la teoría de estructuras y la segunda con álgebra lineal, probando que $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^t$.

**Ejercicio N.- 12**

Elaborar un diagrama de flujo que permita obtener la matriz de rigidez de un pórtico plano cuyos elementos se consideran totalmente flexibles, siendo dato la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$

*CAPITULO 11*

# EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS


## RESUMEN

Se presenta la solución manual de pórticos planos y armaduras planas por el Método de los Desplazamientos, en forma matricial. Por otra parte con el propósito de que el lector siga paso a paso los cálculos efectuados se presentan programas desarrollados en ***MATLAB***.

La solución del sistema de ecuaciones lineales es un aspecto muy importante a considerar en el Método de los Desplazamientos razón por la cual en éste capítulo se presenta en forma detenida su teoría, diagramas de flujo y tres programas de computación uno para ecuaciones asimétricas, otro para simétricas trabajando únicamente con arreglos de una dimensión y otro para ecuaciones simétricas con ancho de banda constante, todos ellos en ***MATLAB.*** Se destaca que la librería de ***MATLAB*** tiene un programa para resolver ecuaciones pero trabaja con toda la matriz de coeficientes lo cual limita el número de ecuaciones a resolver; en este caso para grandes sistemas de ecuaciones es muy eficiente el uso de los dos últimos programas que se presentan en este capítulo.


## 11. 1 CONSIDERACIONES GENERALES

### 11.1.1 Reseña Histórica

En 1954, Turner, Clough, Martin y Topp presentaron el Método de los Desplazamientos, también conocido como Método de las Rigideces pero no fue utilizado por cuanto en esa época el desarrollo informático era incipiente. La teoría general por ellos formulada dio origen a una serie de algoritmos para resolver estructuras con una simple regla de cálculo que era lo que se disponía por aquella época.

En el Ecuador en los años 1970 y 1980 se contaba con computadoras que ocupaban un gran espacio pero con muy poca capacidad de memoria en los cuales cada línea de instrucción se perforaba en una tarjeta de 80 caracteres, de tal manera que un simple programa era escrito en un paquete de unas 50 o 100 tarjetas las mismas que debían ser entregadas al operador del sistema para su procesamiento. Con ésta limitación no quedaba otra alternativa que usar algoritmos aproximados para resolver las estructuras en lugar de aplicar el Método de los Desplazamientos que estaba orientado al uso del ordenador.

Uno de esos algoritmos fue el Método de las Rigideces Sucesivas desarrollado por el Ing. Alejandro Segovia Gallegos con el cual se podía resolver pórticos planos con una regla de cálculo y los resultados obtenidos eran muy satisfactorios. Este Método fue muy utilizado no solo en el Ecuador sino en otros Países como Venezuela.

Entre 1980 y 1985 empieza el gran desarrollo informático, se suprime la entrada de datos por tarjetas, ahora los programas se graban en casetes y los computadores se conectan a un televisor. Realmente fue un gran avance en comparación con la forma con que se trabajaba antes, ahora es posible tener un ordenador en casa aunque sea muy primitivo con relación a los que se cuentan en el siglo XXI. Este avance informático obligó a incluir en las materias de Ingeniería Civil la cátedra de "Análisis Matricial de Estructuras" puesto que ya se vislumbraba que la Informática tendría gran desarrollo.

En la Escuela Politécnica del Ejército en 1982 se incluye la materia de "Análisis Matricial de Estructuras" en la carrera de Ingeniería Civil. En otras Universidades Ecuatorianas fue incluida años antes o años después lo cierto es que ya era factible pensar en programar una estructura en el computador.

Entre 1985 y 1995 hay un gran avance tecnológico en los computadores personales los famosos PC. Se cuenta con computadores con gran capacidad de memoria en los cuales uno ya no tiene que estar pensando en resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales por bloques debido a que no se tenía suficiente memoria en el ordenador. Se cuenta con computadores muy rápidos en los que ya no importa mucho el número de operaciones que se realicen porque las máquinas son muy rápidas.

A partir de 1995 continúa en forma vertiginosa el desarrollo informático de las PC cada vez son más poderosas. A fines del siglo XX las Pentium III son toda una sensación y dos años después pasan a ser obsoletas porque ya se tienen las Pentium IV. A partir de 1995 también se da el gran desarrollo de los computadores personales, cada año aparecen nuevas máquinas más pequeñas y por ende más livianas pero con mayor capacidad de memoria y rapidez de ejecución.

Todo éste desarrollo informático llevó a que la materia de Análisis Matricial de Estructuras sea una de las más importantes, a que el Método de los Desplazamientos sea estudiado con más detenimiento toda vez que permite programar la solución de estructuras en forma sencilla, empleando matrices.

El gran desarrollo informático no solo se tiene en los ordenadores también se tiene en los programas de computación. Por ejemplo antes de 1980 no se conocía el ***MATLAB***, ahora es muy utilizado ya que permite programar con bastante facilidad. Pero aparte de que ***MATLAB*** es muy sencillo, el autor de este libro ha desarrollado el sistema de computación denominado ***CEINCILAB*** utilizando la librería de programas de ***MATLAB*** simplificando notablemente el cálculo de estructuras, en un capítulo posterior se indicará el uso de ***CEINCILAB.***

### 11.1.2 Ideas generales del Método de los Desplazamientos

Para elaborar los diagramas de corte, momento y carga axial de un pórtico plano, por ejemplo, es necesario conocer el vector de coordenadas y para ello se debe resolver la ecuación básica de estructuras, definida de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Q = K\ q} \qquad (11.1)$$

Donde $\boldsymbol{Q}$ es el vector de cargas generalizadas, estudiado en el capítulo IV; $\boldsymbol{K}$ es la matriz de rigidez de la estructura que se ha venido estudiando en los últimos capítulos.

La ecuación (11.1) representa la solución de un sistema de ecuaciones lineales donde el vector $\boldsymbol{Q}$ es el término independiente, la matriz $\boldsymbol{K}$ es la matriz de coeficientes y el vector $\boldsymbol{q}$ es el vector de las incógnitas.

Al resolver una estructura en el computador la solución del sistema de ecuaciones es lo que más tiempo de máquina demanda, aproximadamente del 50% al 80% del tiempo total. Por lo tanto es indispensable que el lector al programar el método utilice el algoritmo más adecuado para resolver ecuaciones tomado en consideración que la ecuación (11.1) es un conjunto de ecuaciones simétricas y bandeadas. La verdad es que con las computadoras tan rápidas con que se cuenta actualmente ya no es tan importante buscar el algoritmo más idóneo cuando se tienen pórticos de pocos pisos, con ***MATLAB*** la solución se halla de la siguiente manera.

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{Q}$$

De tal manera que es muy elemental resolver ecuaciones lineales con ***MATLAB*** pero el número de ecuaciones que se puede resolver es limitado. Cuando uno resuelve una estructura cuya matriz de rigidez tiene más de 1000 grados de libertad, no va a poder resolver en la forma indicada con ***MATLAB*** por lo que se debe conocer y programar otros algoritmos de solución, que se presentan más adelante.

Con el Método de los Desplazamientos se analizan estructuras formadas por barras que pueden ser lineales o especiales (subestructuras). Por otra parte, se puede resolver medios continuos por elementos finitos usando éste método. En éste último caso la solución del sistema de ecuaciones tiene más importancia toda vez que el número de ecuaciones a resolver estará de acuerdo con el grado de exactitud deseado en la solución. En efecto para un tipo de elemento dado la convergencia a la respuesta exacta se garantiza refinando la malla usada en el modelo y esto implica un mayor número de ecuaciones.

### 11.1.3 Comentarios del Método de los Desplazamientos

En base a lo anotado en los párrafos anteriores se debe manifestar lo siguiente:

i) El Método de los Desplazamientos no es un método nuevo de cálculo fue desarrollado hace más de medio siglo pero que gracias al gran desarrollo informático de los últimos 30 años ha tenido gran actualidad.

ii) Es un Método orientado a resolver estructuras usando el computador. Sin embargo en el presente capítulo y en algunos restantes los cálculos se harán a mano, esto con el propósito de que el lector tenga un conocimiento profundo del mismo para que posteriormente elabore sus propios programas o use en forma eficiente programas ya elaborados.

iii) En éste libro se resuelven por éste método estructuras que tienen elementos lineales únicamente. Sin embargo el lector debe conocer que se pueden resolver estructuras compuestas por elementos que son subestructuras usando el método de los desplazamientos.

iv) Problemas continuos, por ejemplo una Presa, pueden ser resueltos empleando el Método de los Desplazamientos, para esto se debe discretizar el dominio en un número finito de elementos. A ésta técnica se la conoce con el nombre de Elementos Finitos.

v) El lector debe escoger el método más apropiado para la solución del sistema de ecuaciones que permite calcular el vector $\boldsymbol{q}$ . Es recomendable que en ciertos problemas se vea la forma de disminuir el ancho de banda de la matriz de rigidez de la estructura numerando en forma adecuada los nudos y por ende los grados de libertad.

vi) Si el problema amerita se puede emplear la Técnica del Skyline para la solución del sistema de ecuaciones. Esta técnica se presentará en el capítulo.

vii) En general para resolver una estructura existen dos métodos que son: el Método de las Fuerzas y el Método de los Desplazamientos. Siendo éste último el que se analiza en éste capítulo.

viii) En el Análisis No Lineal Estático y Dinámico se presenta la solución de la ecuación (11.1) de tal manera que es importante su estudio.

## 11.2 SISTEMAS CINEMATICAMENTE DETERMINADOS

### 11.2.1 Indeterminación estática y cinemática

Para una estructura hay dos tipos de indeterminación que deben ser considerados en el análisis estructural, dependiendo de lo que se ha fijado como incógnita. Cuando las acciones o cargas son las incógnitas como sucede en el Método de las Fuerzas se debe tener en cuenta la Indeterminación Estática. Ahora cuando los desplazamientos y giros son las incógnitas como sucede en el Método de los Desplazamientos se habla de Sistemas Cinemáticamente Determinados o Indeterminados.

Por estar estudiando el Método de los Desplazamientos, se debe explicar en primer lugar que es un Sistema Cinemáticamente Determinado y que es un Sistema Cinemáticamente Indeterminado. De ésta manera se deja la Indeterminación Estática para cuando se analice el Método de las Fuerzas.

### 11.2.2 Definición de la matriz $A$

En el capítulo IX se indicó que cuando la matriz $A$ se puede determinar utilizando únicamente la geometría se dice que el sistema es “Cinemáticamente Determinado”. Esto sirve de base para determinar si un sistema es cinemáticamente determinado o no.

Con el objeto de entender lo expuesto, se analiza la estructura indicada a la izquierda de la figura 11.1, es un pórtico formado por elementos totalmente flexibles. En la parte central y a la derecha se presentan los posibles sistemas de coordenadas $Q-q$ con los cuales se puede resolver la estructura.

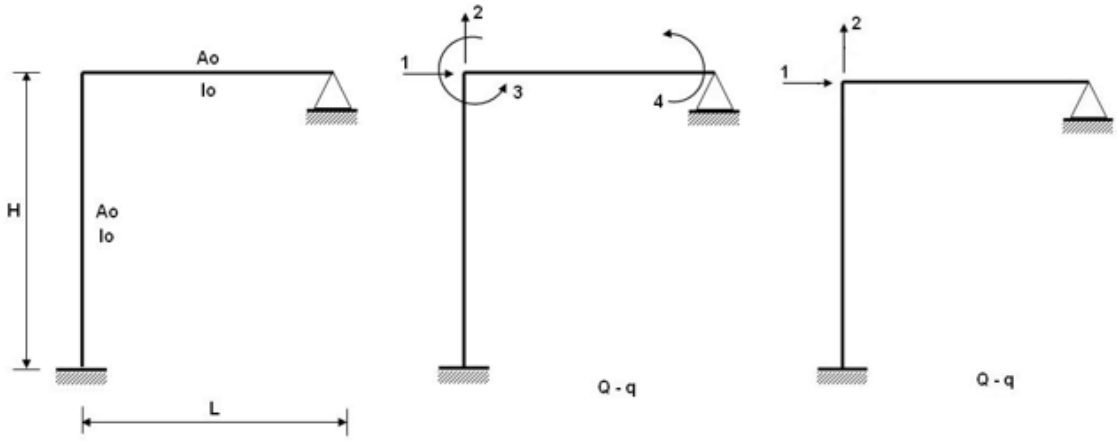



**Figura 11.1** Pórtico con dos posibles sistemas de coordenadas.

La estructura en estudio tiene cuatro grados de libertad, en consecuencia aparentemente se dice que el sistema $Q-q$ indicado en la parte central de la figura 11.1es correcto y que el sistema $Q-q$ indicado a la derecha de 11.1, es incorrecto. Ahora bien cuando se trabaja con el sistema presentado en la parte central de la figura 11.1 se dice que el sistema es estáticamente determinado ya que la matriz $A$ se puede determinar usando solo la geometría.

En la gráfica de la derecha de la figura 11.1 se ha considerado dos coordenadas generalizadas menos. En éste caso se dice que el sistema es cinemáticamente indeterminado con dos grados de indeterminación. Aquí la matriz $A$ no se la puede determinar directamente usando solo la geometría de la estructura. Evidentemente que para trabajar con éste sistema de coordenadas deben existir ciertas condiciones por ejemplo que las cargas que actúan en la estructura se

encuentren únicamente en la dirección del sistema $\boldsymbol{Q-q}$ de la gráfica de la derecha de la figura 11.1. Nótese que los elementos son totalmente flexibles y sin embargo se puede trabajar con el sistema $\boldsymbol{Q-q}$ de la derecha de la figura 11.1 pero la solución es más complicada y con restricciones por lo que no se recomienda este sistema, se ha presentado únicamente para explicar que es un sistema cinemáticamente indeterminado. En éste libro solo se resuelven estructuras cinemáticamente determinadas.

### 11.2.3 Procedimiento de solución

La forma como se resuelve una estructura cinemáticamente determinada por el Método de los Desplazamientos ya se lo ha estudiado en los capítulos anteriores, faltando únicamente indicar el procedimiento para resolver un problema completamente. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Seleccionar un sistema $\boldsymbol{Q-q}$ completo, sin considerar menos grados de libertad y un sistema $\boldsymbol{P-p}$ que sean apropiados.

2. Determinar la matriz $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{p = A\,q}$.

3. Calcular la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K = \sum A^{(i)t}\; k^{(i)}\; A^{(i)}}$.

4. Obtener el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$.

5. Resolver el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Q = K\,q}$ y encontrar el vector que contiene a los desplazamientos y giros $\boldsymbol{q}$.

6. Utilizando la matriz $\boldsymbol{A}$ determinada en el paso 2. y el vector $\boldsymbol{q}$ encontrado en el paso anterior calcular las deformaciones para cada uno de los elementos $\boldsymbol{p}$ para lo cual se multiplica la matriz de compatibilidad de deformaciones por el vector de coordenadas generalizadas: $\boldsymbol{A\,q}$.

7. Calcular las cargas internas en los elementos $\boldsymbol{P}$ utilizando la relación: $\boldsymbol{P = k\;p}$. Donde $\boldsymbol{k}$ es la matriz de rigidez del elemento. Hasta aquí se ha resuelto el problema complementario.

8. Para obtener las fuerzas y momentos finales de la estructura, a los valores obtenidos en el paso anterior se debe sumar los correspondientes al problema primario. Por lo tanto la solución total es igual a la solución del Problema Primario más la solución del Problema Complementario.

Se puede apreciar que nada nuevo se ha definido en el presente apartado, hasta el numeral 4 se ha estudiado con bastante detenimiento en los capítulos anteriores. Por consiguiente en los ejercicios que se realicen se colocará cual es el resultado que se obtiene y cuando se crea conveniente se detallará un poco más su cálculo. Sobre la solución del sistema de ecuaciones el lector puede hacerlo utilizando cualquier método que se conozca o utilizando el programa ***MATLAB***. Finalmente del paso 6 al 8, son únicamente operaciones matriciales las que se deben realizar. Por ahora se terminar el cálculo con la obtención de los momentos y fuerzas en el nudo inicial y final de un elemento, igualmente solo se calculan los desplazamientos y giros en los nudos, para obtener las ordenadas de la elástica en cualquier punto de un elemento se aplican las funciones de forma estudiadas en el capítulo III.

## 11.3 SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

### 11.3.1 Método de Gauss

Existen algunos métodos para resolver ecuaciones siendo el más empleado el de Gauss el mismo que se explica en dos etapas mediante la solución de un ejemplo. Previamente se advierte que en cualquier libro de Álgebra Lineal o de Métodos Numéricos el lector puede encontrar un desarrollo de la teoría de éste método. El autor lo que pretende es dar todas las facilidades para que el lector pueda elaborar su propio programa de computación para resolver un sistema de ecuaciones lineales, de ésta forma podrá seguir con la solución completa de una estructura cuando se desarrolla manualmente como en el presente capítulo.

- **EJEMPLO 1**

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, paso a paso, por el Método de Gauss.

$$8\,X_1 + 2\,X_2 + 3\,X_3 = 42 \qquad \text{Ec (1)}$$
$$2\,X_1 + 10\,X_2 + X_3 = 50 \qquad \text{Ec (2)}$$
$$3\,X_1 + X_2 + 5\,X_3 = 40 \qquad \text{Ec (3)}$$

- **SOLUCIÓN**

Se denomina $\boldsymbol{A}$, a la matriz de los coeficientes de las incógnitas; $\boldsymbol{B}$ el vector que contiene al término independiente y $\boldsymbol{X}$ al vector de las incógnitas. De tal manera que el sistema de ecuaciones se representa de la forma

$$\boldsymbol{A\,X = B}$$

Al escribir en forma matricial el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Al emplear el Método de Gauss en una primera etapa se debe triangularizar el sistema es decir formar una matriz triangular superior de los coeficientes de las incógnitas, esto se logra de la siguiente manera:

i) Obtener ceros en la primera columna. Para el efecto la primera ecuación se copia tal como ésta y luego se hace la Ec (2) - $\frac{2}{8}$ de Ec (1).

$$\begin{aligned} 2\,X_1 + 10\,X_2 + X_3 &= 50 \\ -2\,X_1 - 0.5X_2 - 0.75X_3 &= -10.5 \\ \hline 0\,X_1 + 9.5X_2 + 0.25X_3 &= 39.5 \end{aligned}$$

Siendo ésta última la nueva ecuación (2). Ahora se realiza: Ec (3) - $\frac{3}{8}$ Ec (1).

$$\begin{array}{rcl} 3X_1 + X_2 + 5X_3 & = & 40.0 \\ -3X_1 - 0.75X_2 - 1.125X_3 & = & -15.75 \\ \hline 0X_1 + 0.25X_2 + 3.875X_3 & = & 24.25 \end{array}$$

ii) En una segunda sub etapa se obtienen ceros en la segunda columna del nuevo sistema de ecuaciones que después de la primera sub etapa ha quedado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 3.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 24.25 \end{bmatrix}$$

A partir del término $A(2,2) = 9.5$ se obtendrá un cero en la segunda columna para lo cual se realiza Ec (3) - $\frac{0.25}{9.5}$ Ec (2).

$$\begin{array}{rcl} 0.25X_2 + 3.875X_3 & = & 24.25 \\ -0.25X_2 - 0.007X_3 & = & -1.039 \\ \hline 0X_2 + 3.868X_3 & = & 23.211 \end{array}$$

Para el ejemplo se ha terminado la etapa de triangularización, el resultado obtenido es:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

A continuación se presenta un diagrama de flujo de la primera etapa de triangularización del sistema pero para el caso de que se tengan N ecuaciones lineales.

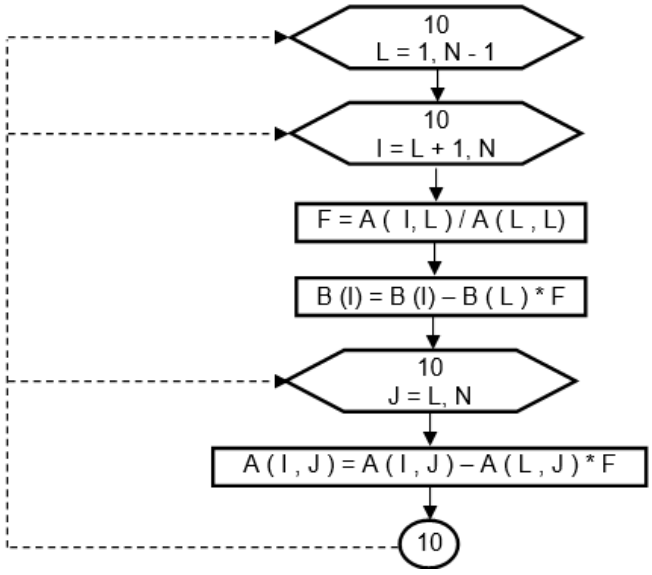


**Diagrama de flujo para triangularizar el sistema**

La segunda etapa corresponde a la solución del sistema para lo cual se calculan las incógnitas desde abajo hacia arriba, es decir usando la última ecuación se halla $X_3$

$$X_3 = \frac{23.211}{3.868} = 6$$

El valor de $X_3$ se sustituye en la ecuación (2) y se obtiene $X_2$

$$X_2 = \frac{-0.25 * 6 + 39.5}{9.5} = 4.0$$

Finalmente se reemplaza $X_2$ y $X_3$ en la ecuación (1) para calcular $X_1$

$$X_1 = \frac{-2 * 4 - 3 * 6 + 42}{8} = 2.0$$

Por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones reporta:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 4.00 \\ 6.00 \end{bmatrix}$$

El diagrama de flujo para la solución propiamente dicha se indica a continuación para el caso general de un sistema de N ecuaciones.

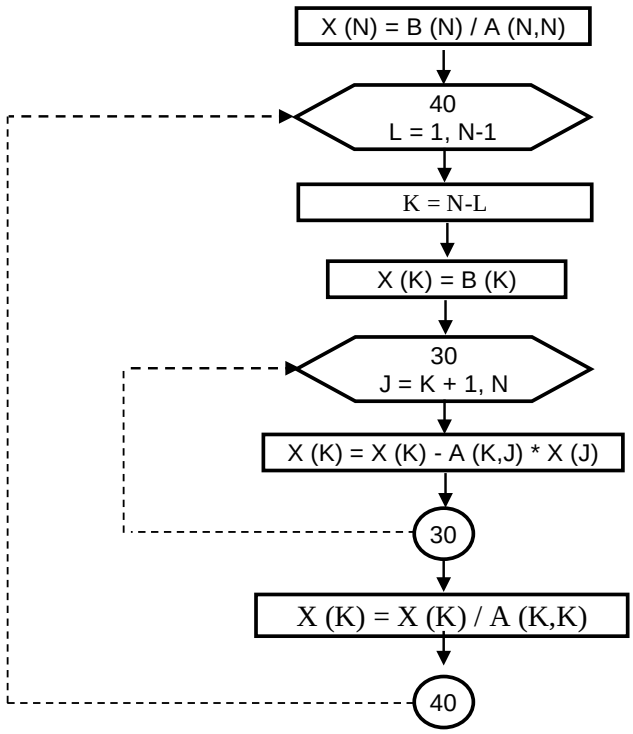



**Diagrama de flujo para resolver el sistema triangularizado.**

El diagrama de flujo presentado sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales simétricas o asimétricas. Por otra parte si el lector en base a lo expuesto quiere implementar un

programa de computación en cualquier lenguaje debe tener en cuenta es que se va a trabajar con los siguientes arreglos: $A(N,N), B(N), X(N)$ donde N corresponde al número de ecuaciones a resolver. Nótese que la matriz de coeficientes es de N por N eso implica la utilización de bastante memoria, para resolver grandes sistemas de ecuaciones se va a tener problemas ya que ocupan mucho espacio de memoria.

A continuación se presenta un programa en ***MATLAB*** para resolver un sistema de ecuaciones lineales asimétrico.

```
function [X]=gaus(A,B)
% Programa para resolver ecuaciones lineales asimétricas
% de la forma: A X =B
% La matriz A es una arreglo de (n,n). Se resuelve con Método de Gauss
%
%          Dr. Roberto Aguiar
%          12 de junio de 2014
%.............................................
% A   Es la matriz de coeficientes del sistema, arreglo de (n,n)
% B   Es el termino independiente,un vector de n elementos
% X   Vector solución
N=length(B); %Numero de ecuaciones
% Triangularizacion del sistema
for L=1:N-1
    for I=L+1:N
        F=A(I,L)/A(L,L);
        B(I)=B(I)-B(L)*F;
        for J=L:N
            A(I,J)=A(I,J)-A(L,J)*F;
        end
    end
end
% Solución del sistema
X(N)=B(N)/A(N,N);
for L=1:N-1
    K=N-L;
    X(K)=B(K);
    for J=K+1:N
        X(K)=X(K)-A(K,J)*X(J);
    end
    X(K)=X(K)/A(K,K);
end
```

La forma de uso del programa ***gaus*** con los datos del Ejemplo 1, es la siguiente:

- [X]=gaus (A,B)

```
>> A=[8  2  3; 2  10  1;  3  1  5]; B=[42  50  40];
>>[X]=gaus(A,B)
```

El programa reporta: $X^t = [2 \quad 4 \quad 6]$

### 11.3.2 Matriz Simétrica

Cuando se tienen ecuaciones simétricas no es necesario introducir toda la matriz de coeficientes únicamente se da como datos la matriz triangular superior o la matriz triangular inferior de los coeficientes. Además se deberán crear los elementos que no se han leído.

Para el caso de sistemas de ecuaciones lineales simétricas a más de trabajar con la matriz triangular superior no es necesario trabajar con un arreglo de dos dimensiones para la matriz $A$ sino con un arreglo de una dimensión, para ello se debe renumerar la posición de los elementos. Para explicar lo indicado se analiza a continuación la nomenclatura de una matriz $A$ de 4 x 4 en los dos casos, trabajando con un arreglo de dos dimensiones y trabajando con un arreglo de una dimensión.

$$\begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) & A(1,4) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) & A(2,4) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) & A(3,4) \\ A(4,1) & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4) \end{bmatrix}$$

**Matriz $A$ como un arreglo de dos dimensiones**

$$\begin{bmatrix} A(1) & A(2) & A(3) & A(4) \\ & A(5) & A(6) & A(7) \\ & & A(8) & A(9) \\ & & & A(10) \end{bmatrix}$$

**Matriz $A$ como un arreglo de una dimensión**

Para el ejemplo analizado al trabajar con un arreglo de dos dimensiones se necesitan 16 posiciones de memoria para la matriz $A$ en el segundo caso con un arreglo de una dimensión solo se necesitan 10 posiciones de memoria. En general se concluye que para un sistema de N ecuaciones se necesitan N x N posiciones de memoria cuando se trabaja con un arreglo de dos dimensiones y N x (N+1) / 2 para un arreglo de una dimensión.

Sea **N** el orden de la matriz de coeficientes de las incógnitas, **I** el número de fila de un término A(I,J), **J** el número de columna de un término A(I,J). **IJ** es la numeración de la matriz de coeficientes de las incógnitas tratado como un arreglo de una dimensión.

Se define una fórmula que permite identificar la posición de los elementos de la matriz $A$ en un arreglo de una dimensión a partir de la posición que tiene en el arreglo de dos dimensiones de la siguiente manera:

$$IJ = \frac{(I-1)*(2N-I)}{2} + J \qquad (11.2)$$

En el Ejemplo 1 se terminó la triangularización del sistema de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

La variable $X_3$ se obtiene directamente como $X_3 = 23.211/3.868 = 6.00$ Pero para la variable $X_2$ habría que proceder de la siguiente forma:

$$9.5\,X_2 + 0.25\,X_3 = 39.5 \qquad \Rightarrow X_2 = \frac{39.5}{9.5} - \frac{0.25}{9.5}$$

En consecuencia todos los términos de la derecha están divididos para 9.5 que es el término de la diagonal. Para el cálculo de $X_1$ todos los términos de la derecha están divididos para 8.

$$X_1 = \frac{42}{8} - \frac{2}{8}X_2 - \frac{3}{8}X_3$$

Por éste motivo es mejor que la etapa de triangularización no termine en la forma indicada sino que termine así:

$$\begin{bmatrix} 8 & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 9.5 & \frac{0.25}{9.5} \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

En el programa ***gaussim*** que se presenta a continuación, la matriz $A$ termina en la forma indicada en la etapa de triangularización esto se lo consigue con **A (LI)=F**, esto permite calcular directamente las incógnitas, pero el vector $B$ de la etapa de triangularización no está dividido para el término de la diagonal en este programa**.** Por éste motivo en la etapa denominada *solución propiamente dicha* se tiene la instrucción **X(K)=X(K)/A(KK).**

En ***gaussim*** se trabaja todo con arreglos de una dimensión de ésta forma se optimiza la cantidad de memoria. Se ha modificado un poco el programa **gaus** en lo referente a lo indicado en los párrafos anteriores para optimizar la solución. Nótese que básicamente es el mismo programa que ***gaus*** con dos salvedades la primera es que se trabaja únicamente con la matriz triangular superior y la segunda es que antes de usar una instrucción en que interviene la matriz $A$ como un arreglo de una dimensión se debe colocar la fórmula de paso de 2 dimensiones a 1 dimensión.

```
function [X]=gaussim(A,B)
% Programa para resolver Ecuaciones Lineales Simétricas
% de la forma: A X =B
% La matriz A es un vector que contiene a los elementos de la matriz
% triangular superior. Se resuelve con Método de Gauss
%
%          Dr. Roberto Aguiar
%          13 de junio de 2014
%.............................................
% A   Es la matriz de coeficientes del sistema, arreglo de orden (n)
% B   Es el termino independiente, un vector de n elementos
% X   Vector solución
N=length(B); % Número de ecuaciones
NTOT=N*(N+1)/2;% Número total de elementos de la matriz A.
% Triangularización del sistema
for L=1:N-1
    for I=L+1:N
        LI=((L-1)*(2*N-L)/2)+I;
        LL=((L-1)*(2*N-L)/2)+L;
        F=A(LI)/A(LL);
        B(I)=B(I)-B(L)*F;
        for J=I:N
            IJ=((I-1)*(2*N-I)/2)+J;
            LJ=((L-1)*(2*N-L)/2)+J;
            A(IJ)=A(IJ)-A(LJ)*F;
            A(LI)=F;
        end
    end
```

i) La matriz de coeficientes de las incógnitas $A$ es simétrica con respecto a la diagonal principal.

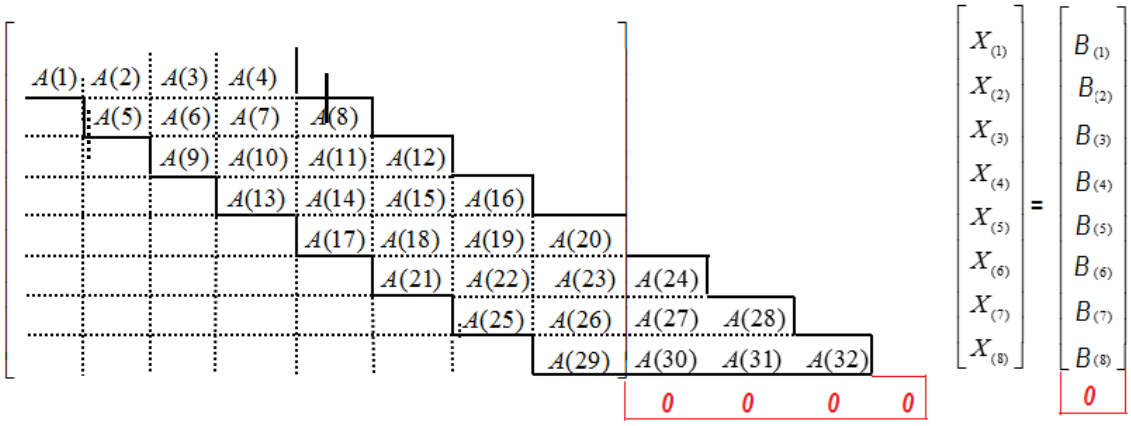
ii) En la primera fila de la matriz $A$ el último término diferente de cero, en éste caso el 1 se encuentra a tres posiciones de la diagonal principal, incluye en el conteo al término de la diagonal principal.

iii) En la segunda y tercera fila de la matriz $A$ el último término diferente de 0 también se encuentra a tres posiciones de la diagonal principal. En la cuarta y quinta fila el último término diferente de cero se halla a 2 y 1 posición de la diagonal principal respectivamente.

iv) El número de posiciones mayor de cada una de las diferentes filas, al que se encuentra un número diferente de 0 con respecto a la diagonal principal, define el ancho de banda de la matriz $A$. Para el presente caso éste valor es de 3.

v) El ancho de banda de una matriz se lo representa con la letra **KB**.

En éste apartado se presentan ideas generales para resolver ecuaciones lineales con ancho de banda constante y un programa de computación. A continuación se analiza cómo se numeran los elementos para el caso de tener un sistema de 8 ecuaciones con ancho de banda de 4.




**Identificación de la posición de los elementos.**

En este punto es importante realizar las siguientes acotaciones:

i) Los términos $A(24), A(27), A(28), A(30), A(31), A(32)$ son nulos, se los crearon para tener un ancho de banda constante. Adicionalmente se crea una fila con ceros del mismo ancho de banda tanto en la matriz $A$ y en el término independiente se coloca al final un cero.

ii) Para identificar la posición (subíndice) de los elementos de la matriz $A$ se utiliza la siguiente fórmula.

$$IJ = (KB - 1)(I - 1) + J \qquad (11.3)$$

Donde $I$ representa el número de la fila y $J$ el número de la columna de la matriz $A$ tratada como un arreglo de dos dimensiones. Por ejemplo en el sistema de 8 ecuaciones el último término se encuentra en la posición $I = 8, J = 8$ al trabajar con

un arreglo de una dimensión corresponde al elemento de la posición $IJ = 29$ que se obtiene con la ecuación presentada. $IJ = (4-1)(8-1)+8 = 29$.

iii) Si se calcula un pórtico plano de 10 pisos, por ejemplo, se estará pensando en resolver un sistema de 150 ecuaciones aproximadamente. Aquí se verá con mayor claridad la ventaja de utilizar un programa para armar la matriz de rigidez de la estructura con ancho de banda constante con un solo vector en el que añaden ceros en la última fila.

```
function [X]=gausbanda(A,B,KB,N)
% Programa para resolver ecuaciones lineales Simétricas con ancho de
% banda constante, de la forma: A X =B
% La matriz A es un vector que contiene a los elementos de la matriz
% triangular superior pero con ancho de banda constante que implica la
% creación de elementos ficticios, se debe indicar los elementos ficticios
% con ceros, a la derecha y una fila extra en la parte inferior.
% Se resuelve con Método de Gauss
%
%          Dr. Roberto Aguiar
%          13 de junio de 2014
%.................................................
% A   Es la matriz de coeficientes del sistema, se da como un vector con
%     los elementos ficticios de la derecha y parte inferior.
% B   Es el término independiente, un vector de n+1 elementos. El último
%     elemento del vector B es cero (elemento ficticio)
% KB  Es el ancho de banda de la matriz de coeficientes
% N   Número de ecuaciones
% X   Vector solución cuyo último valor es cero(elemento ficticio)
% Triangularización del sistema
for L=1:N-1
    for I=L+1:L+KB-1;
         LL=(KB-1)*(L-1)+L;
         LI=(KB-1)*(L-1)+I;
         F=A(LI)/A(LL);
        for J=I:L+KB-1
            IJ=(KB-1)*(I-1)+J;
            LJ=(KB-1)*(L-1)+J;
            A(IJ)=A(IJ)-A(LJ)*F;
        end
        A(LI)=F;
    end
end
for L=1:N-1
    for I=L+1:L+KB-1
         LI=(KB-1)*(L-1)+I;
         B(I)=B(I)-B(L)*A(LI);
    end
end
% Solución del sistema
for K=1:N
    L=N+1-K
    LL=(KB-1)*(L-1)+L
    B(L)=B(L)/A(LL)
    if(N-L>=KB)
        NN=KB+L-1;
    else
        NN=N;
    end
    for I=L+1:NN
         LI=(KB-1)*(L-1)+I
```

```
            B(L)=B(L)-A(LI)*B(I)
        end
    end
    X=B;
```

El programa ***gausbanda*** que se ha presentado sirve para resolver un sistema de ecuaciones lineales simétrico con ancho de banda constante y trabajando con arreglos de una dimensión. Se han hecho ligeras modificaciones al programa ***gaussim*** una de ellas es que la modificación del vector $\boldsymbol{B}$ en la etapa de triangularización se lo realiza aparte, esto es conveniente hacerlo para cuando se tiene que resolver varios sistemas de ecuaciones en las cuales cambian únicamente los términos independientes.

Lo importante es darse cuenta en el programa ***gausbanda*** que la ecuación reductora, reduce las siguientes $\boldsymbol{KB-1}$ ecuaciones.

Para el Ejemplo 1, los datos y uso del Programa ***gausbanda*** son:

- **[X] = gausbanda (A,B,KB,N)**

```
>> A=[8;2;3;10;1;0;5;0;0;0;0;0]; B=[42;50;40;0]; KB=3; N=3;
>> [X] = gausbanda (A,B,KB,N)
```

El programa reporta: $X^t = [2 \quad 4 \quad 6 \quad 0]$

El último cero corresponde a la fila ficticia que se dio como dato.

- **EJEMPLO 2**

En el siguiente sistema de ecuaciones, presente dos arreglos de la matriz de coeficientes $A$, numerados con dos índices y con un índice, y un arreglo del vector $\boldsymbol{B}$ de acuerdo a la forma que considera ***gausbanda***. Indique además los vectores $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ que se hallan al final de la etapa de triangularización y finalmente presente la entrada de datos y resultados del programa ***gausbanda.***

$$\begin{bmatrix} 20 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 25 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 30 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 29 \\ 32 \\ 32 \\ 21 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCION**

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \square & \square \\ \square & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \square \\ \square & \square & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ \square & \square & \square & A_{44} & A_{45} \\ \square & \square & \square & \square & A_{55} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{matrix}$$

**Arreglo con 2 Índices**

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \square & \square \\ \square & A_4 & A_5 & A_6 & \square \\ \square & \square & A_7 & A_8 & A_9 \\ \square & \square & \square & A_{10} & A_{11} \\ \square & \square & \square & \square & A_{13} \end{bmatrix} \begin{matrix} A12 \\ A14 \quad A15 \\ A16 \quad A17 \quad A18 \end{matrix}$$

**Arreglo con 1 Índice**

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Vector B**

Se aprecia que el ancho de banda $KB = 3$ y que se debe dar como datos una fila adicional de ceros a más de los ceros que se encuentran a la derecha de la matriz $\boldsymbol{A}$**.** En la parte central se indica el vector $A$ y la numeración de los elementos del 1 al 18. Al observar estos dos arreglos y con la siguiente tabla se aspira a explicar la triangularización.

**Descripción de la Triangularización**

| Ecuación reductora | Ecuaciones Reducidas | Próxima ecuación reductora |
|---|---|---|
| 1 | 2 y 3 | 2 |
| 2 | 3 y 4 | 3 |
| 3 | 4 y 5 | 4 |
| 4 | 5 | |

Cuando se está con la ecuación reductora 4 interviene la fila de elementos ficticios 0, ya que las filas reducidas deberían ser la 5 y 6 pero la sexta fila es la que tiene ceros.

Los vectores $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ que se hallan, luego de la etapa de triangularización, son:

$$A^t = [20 \quad 0.1 \quad 0.05 \quad 24.8 \quad -0.004 \quad 0.08 \quad 29.94 \quad -0.03 \quad 0.06 \quad 29.8 \quad 0.03 \quad 0 \quad 17.8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$B^t = [23 \quad 26.70 \quad 30.9577 \quad 30.8721 \quad 17.8283 \quad 0]$$

En el vector $\boldsymbol{A}$ no se escribió todos los decimales por falta de espacio. Finalmente a continuación se indica la entrada de datos y resultados, del programa.

```
>> A=[20; 2; 1; 25; 0; 2; 30; -1; 2; 30; 1; 0; 18; 0; 0; 0; 0; 0];
>> B=[23; 29; 32; 32; 21; 0];
>>KB=3;N=5
>> [X]=gausbanda(A,B,KB,N)
```

$$X^t = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

### 11.3.4 Otros métodos

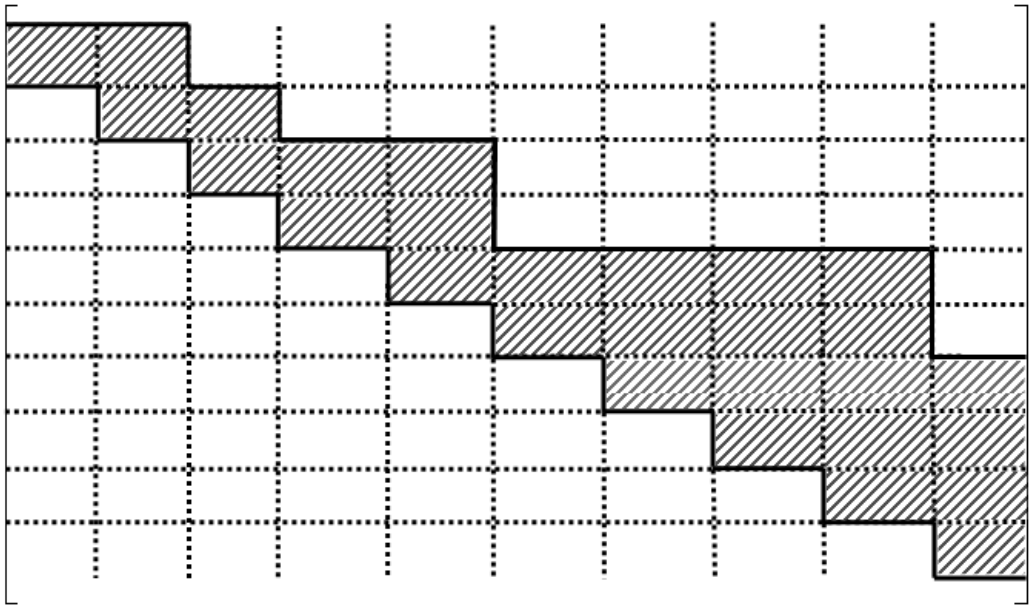
Es importante conocer la forma del sistema de ecuaciones que se va a resolver para así seleccionar el algoritmo más adecuado, optimizando de ésta manera: capacidad de memoria y tiempo de ejecución. Por ejemplo si la matriz de coeficientes de un sistema de 10 ecuaciones tiene la forma que se indica a continuación y además es:

i) Simétrica con respecto a la diagonal principal.

ii) Ancho de banda variable que es el caso más común de solución.

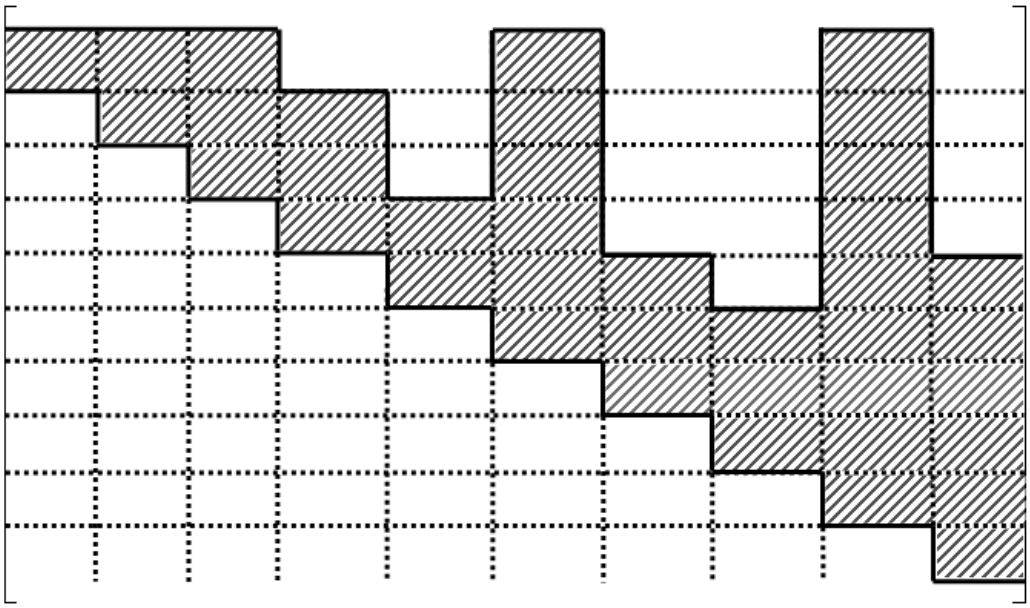
iii) Si el sistema se resuelve empleando el programa **gaus** que es para trabajar con toda la matriz se requiere 100 posiciones de memoria para la matriz $\boldsymbol{A}$ de un sistema de 10 ecuaciones. Si se utiliza el programa ***gaussim*** que es para matrices simétricas se necesitan 55 registros para la matriz $\boldsymbol{A}$. Con el programa ***gausbanda*** se necesitan 50 posiciones de memoria toda vez que el ancho de banda es 5 y con el algoritmo de ancho de banda variable en el cual se han indicado las cantidades diferentes de cero se requieren 28 posiciones de memoria.

iv) Al resolver con ancho de banda variable el usuario debe dar como dato el ancho de banda de cada una de las filas de la matriz $\boldsymbol{A}$. Por lo tanto el usar este algoritmo supone conocer exactamente la forma del sistema de ecuaciones a resolver.



**Matriz de coeficientes, con ancho de banda variable, por filas**

Se considera otro ejemplo en el cual se tiene también 10 ecuaciones lineales pero la matriz $A$ tiene la siguiente forma



**Matriz de coeficientes con ancho de banda variable por columnas**

i) Simétrica con respecto a la diagonal.

ii) En los métodos presentados tanto la triangularización como la solución se realizó por filas. Para sistemas de ecuaciones que tienen la forma presentada conviene resolver por columna.

iii) Al resolver el sistema de ecuaciones por columnas los cambios que se deben hacer son mínimos con respecto a los programas presentados.

Es intención del autor dejar planteadas en el lector inquietudes sobre otras formas de solución de un sistema de ecuación por el Método de Gauss para que ampliara sus conocimientos consultando libros especializados de Métodos Numéricos.

Adicionalmente se desea que cuando se resuelve una estructura la elección del sistema de coordenadas generalizadas $Q - q$ se la realice de la forma más óptima, que sepa que al usar un determinado sistema de coordenadas se tendrá una matriz de rigidez con determinado ancho de banda y de determinada forma para que utilice el programa de solución de ecuaciones más adecuado.

Como aclaración debe manifestarse que en el apartado 11.3 se ha utilizado la letra $A$ para representar la matriz de coeficientes de las incógnitas, en lo posterior de éste capítulo la letra $A$ será la matriz de compatibilidad de deformaciones definida de la siguiente manera: $p = A\,q$

## 11.4 PÓRTICOS PLANOS

### 11.4.1 Cargas solo en los nudos

Cuando en la estructura solo actúan cargas en los nudos no existe el problema primario. Por lo tanto la solución del problema se reduce a la solución del problema complementario.

- **EJEMPLO 3**

Resolver el pórtico plano mostrado en la figura 11.2, que tiene solo cargas en las juntas; si las columnas son de 30 x 30 cm. y la viga de 20 x 30 cm. Se considera un módulo de elasticidad E=2173706.513 T/m2. Todos los elementos se consideran totalmente flexibles.

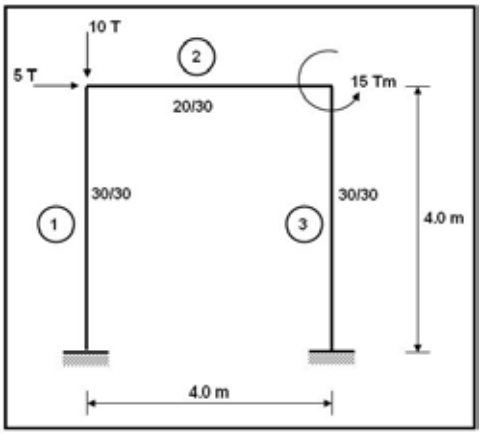



**Figura 11.2** Estructura de ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**

El dígito que se encuentra dentro del círculo de la figura 11.3 corresponde a la numeración de los elementos. En la figura 11.3 se presenta a la izquierda el sistema $Q - q$ y a la derecha el sistema $P - p$. En el elemento 1 el nudo inicial se ha considerado en la parte inferior y en el elemento 3 en la parte superior; en la viga el nudo inicial a la izquierda.

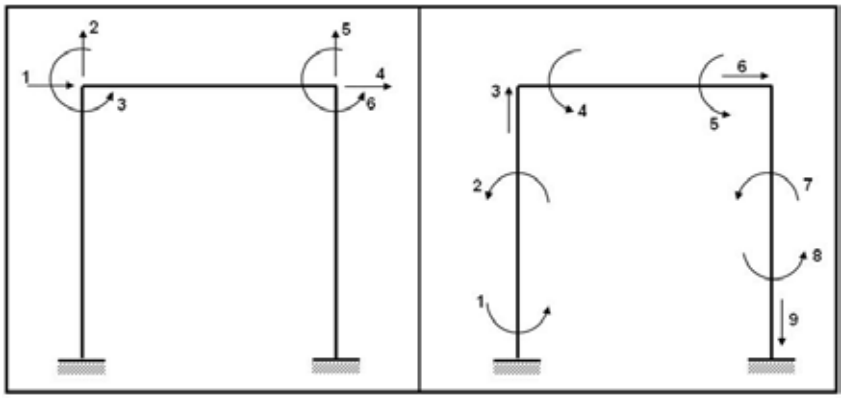



**Figura 11.3** Coordenadas de la estructura $Q - q$ y de los elementos $P - p$

Las propiedades geométricas del pórtico se indican en la tabla 11.1

**Tabla 11.1** Descripción de los elementos de ejemplo 4.

| Elemento | b | h | $A = b\,h$ | $I = \frac{b\,h^3}{12}$ |
|---|---|---|---|---|
| | (m) | (m) | (m2) | (m4) |
| 1 | 0.30 | 0.30 | 0.090 | 0.00068 |
| 2 | 0.20 | 0.30 | 0.060 | 0.00045 |
| 3 | 0.30 | 0.30 | 0.090 | 0.00068 |

La matriz $A$ definida por la relación $p = A\,q$ resulta:

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Para el sistema $P - p$ de la figura 11.3, la matriz de rigidez de un elemento en el cual se desprecia el efecto del corte es la siguiente:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar valores se tiene:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{A}^{(i)t}\, \boldsymbol{k}^{(i)}\, \boldsymbol{A}^{(i)}$ resulta:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 32882.785 & & & & & \\ 0.000 & 49091.852 & & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & & \\ 554.296 & 366.813 & 2456.289 & & & \\ -32605.648 & 0.000 & 0.000 & 32882.785 & & \\ 0.000 & -183.407 & -366.814 & 0.000 & 49091.852 & \\ 0.000 & 366.813 & 489.084 & 554.296 & -366.814 & 2456.289 \end{bmatrix}$$

Para las cargas mostradas en la figura 11.2 el vector de cargas generalizadas resulta:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 5.00 \\ -10.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 15.00 \end{bmatrix}$$

No se ha detallado el cálculo de las matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{Q}$ debido a que en los capítulos anteriores se ha tratado cada uno de ellos en forma extensa. Sin embargo en futuros Ejemplos de este Capítulo si se lo realizará, no de todos pero de algunos para que el estudiante repase.

Para obtener el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{q}$$

De la solución del sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

Para ahorrar espacio a futuro se escribirán la transpuesta de los vectores de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ y de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$

Ahora se va a calcular las deformaciones $\boldsymbol{p}$ que se producen en los elementos debido a las cargas exteriores para lo cual se multiplica la matriz $\boldsymbol{A}$ por el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0.001568 \\ -0.000854 \\ -0.000225 \\ \hline -0.002483 \\ 0.005181 \\ -0.000141 \\ \hline 0.006775 \\ 0.001533 \\ 0.000020 \end{bmatrix}$$

Nótese que el vector resultante $\boldsymbol{p}$ está compuesto por sub vectores. En efecto las tres primeras cantidades corresponden a las deformaciones del elemento 1, las tres siguientes al elemento 2 y las tres últimas al elemento 3.

Una vez encontradas las deformaciones $\boldsymbol{p}$ se pasa al cálculo de las cargas internas $\boldsymbol{P}$ de cada uno de los elementos multiplicando la matriz de rigidez del miembro $\boldsymbol{k}$ por el vector $\boldsymbol{p}$.

- **Elemento 1**

$$\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001568 \\ -0.000854 \\ -0.000225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6865 \\ -0.1035 \\ -11.0044 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 2**

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.002483 \\ 0.005181 \\ -0.000141 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1052 \\ 3.8535 \\ -4.5974 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 3**

$$\boldsymbol{P}^{(3)} = \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{p}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.006775 \\ 0.001533 \\ 0.000020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.1472 \\ 7.2731 \\ 0.9782 \end{bmatrix}$$

El significado y convención de signos de las cargas internas de los elementos $\boldsymbol{P}$ se indica en la figura 11.4. Con ésta indicación a continuación se indican en líneas continuas los valores encontrados y con líneas entrecortadas los valores de los cortantes y carga axial que se requiere para que exista equilibrio en los elementos.

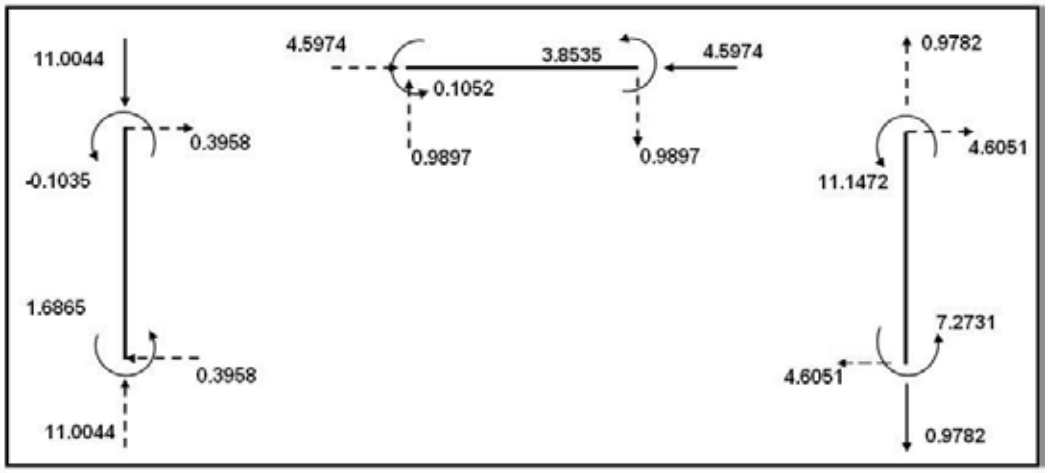



**Figura 11.4** Solución de la estructura del Ejemplo 3.

Las fuerzas indicadas están en Toneladas y los momentos en Toneladas por metro. Como una comprobación del ejercicio realizado se debe verificar que en cada nudo exista equilibrio, como se ve en la figura 11.5

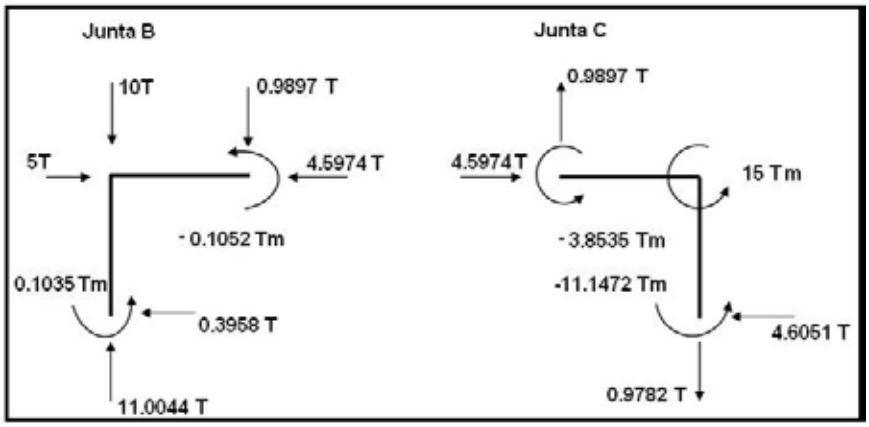



**Figura 11.5** Equilibrio de los nudos.

Como se puede apreciar en cada junta o nudo existe equilibrio. Estrictamente no se tiene que $\sum F_X = 0$, $\sum F_Y = 0$ y $\sum M = 0$ por los decimales con que se ha trabajado al resolver con un computador el pequeño error desaparece. Se deja al lector obtener las reacciones exteriores del pórtico.

### 11.4.2 Cargas en los elementos

- **EJEMPLO 5**

Resolver completamente la siguiente estructura, indicada en la figura 11.6, por el Método de los Desplazamientos, si las columnas son de 30/30 cm., y las vigas de 25/25 cm. El valor del módulo de elasticidad es $E = 2400000\ T/m^2$.

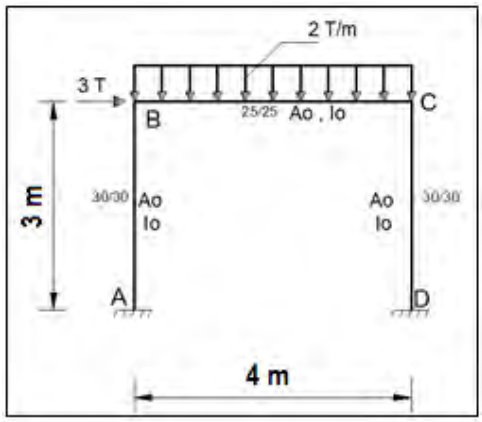



**Figura 11.6** Estructura con carga en elemento y nudo.

- **SOLUCIÓN**

A la izquierda de la figura 11.7 se indica el sistema de coordenadas generalizadas de la estructura $\boldsymbol{Q-q}$; a la derecha se indica el sistema de coordenadas de los elementos, $\boldsymbol{P-p}$.

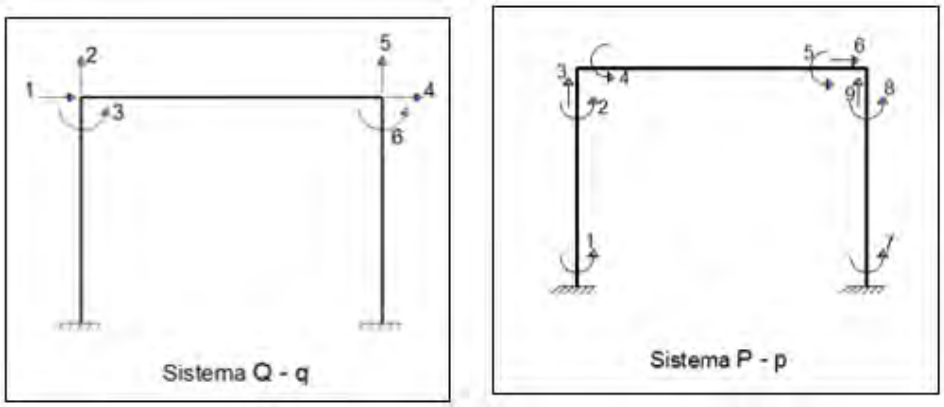



**Figura 11.7** Sistemas de coordenadas de la estructura y de los elementos.

La matriz de compatibilidad de deformaciones es la siguiente.

$$A=\left[\begin{array}{cccccc} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/4 & 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ A^{(1)} \\ \\ \\ A^{(2)} \\ \\ \\ A^{(3)} \end{array}$$

En la tabla 11.2 se indica el área y el momento de inercia de los elementos de la estructura.

**Tabla 11.2** Área y Momento de Inercia de los elementos

| Elemento | b | h | A=b*h | $I = \frac{b * h^3}{12}$ |
|---|---|---|---|---|
| | (m) | (m) | ($m^2$) | ($m^4$) |
| 1 | 0.3 | 0.3 | 0.09 | 0.000675 |
| 2 | 0.25 | 0.25 | 0.0625 | 0.000325 |
| 3 | 0.3 | 0.3 | 0.09 | 0.000675 |

Con los datos de la tabla 11.2 se obtuvo las matrices de rigidez de los elementos, que se han denominado $K_c$ para las columnas y $K_v$ para la viga.

$$k_c = \begin{bmatrix} 4EIc/L & 2EIc/L & 0 \\ 2EIc/L & 4EIc/L & 0 \\ 0 & 0 & EAc/Lc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2160 & 1080 & 0 \\ 1080 & 2160 & 0 \\ 0 & 0 & 72000 \end{bmatrix}$$

$$k_v = \begin{bmatrix} 4EIv/L & 2EIv/L & 0 \\ 2EIv/L & 4EIv/L & 0 \\ 0 & 0 & EAv/Lv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 781 & 391 & 0 \\ 391 & 781 & 0 \\ 0 & 0 & 37500 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura $K$ se halla con la siguiente expresión.

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{A}^{(i)t}\, \boldsymbol{k}^{(i)}\, \boldsymbol{A}^{(i)}$$

$$K = A^{(1)t}\, kc\; A^{(1)} + A^{(2)t}\, kv\; A^{(2)} + A^{(3)t}\, kc\; A^{(3)}$$

$$K = \begin{bmatrix} 38220 & 0 & 1080 & -37500 & 0 & 0 \\ 0 & 72146 & 293 & 0 & -146 & 293 \\ 1080 & 293 & 2941 & 0 & -293 & 391 \\ -37500 & 0 & 0 & 38220 & 0 & 1080 \\ 0 & -146 & -293 & 0 & 72146 & -293 \\ 0 & 293 & 391 & 1080 & -293 & 2941 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ se halla por medio del Problema Primario y Complementario.

$$\boldsymbol{Q^t} = [3 \quad -4 \quad 2.667 \quad 0 \quad -4 \quad 2.667]$$

De la solución del sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{K\, q} = \boldsymbol{Q}$$

Se encuentra.

$$\boldsymbol{q^t} = [0.0041 \quad 0 \quad -0.0024 \quad 0.0040 \quad -0.0001 \quad -0.0003]$$

Las deformaciones en cada uno de los elementos $\boldsymbol{p}$, se halla de la siguiente manera

$$\boldsymbol{p^{(1)} = A^{(1)}\, q}$$

$$p^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0041 \\ 0 \\ -0.0024 \\ 0.0040 \\ -0.0001 \\ -0.0003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0014 \\ -0.0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p^{(2)} = A^{(2)}\, q}$$

$$p^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0041 \\ 0 \\ -0.0024 \\ 0.0040 \\ -0.0001 \\ -0.0003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0024 \\ -0.0003 \\ -0.0001 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p^{(3)} = A^{(3)}\, q}$$

$$p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0041 \\ 0 \\ -0.0024 \\ 0.0040 \\ -0.0001 \\ -0.0003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0011 \\ -0.0001 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas y momentos $\boldsymbol{P}$ en cada uno de los elementos se obtiene multiplicando la matriz de rigidez del elemento por las deformaciones; de esta forma finaliza el problema complementario.

$$\boldsymbol{P^{(1)} = k^{(1)}\, p^{(1)}}$$

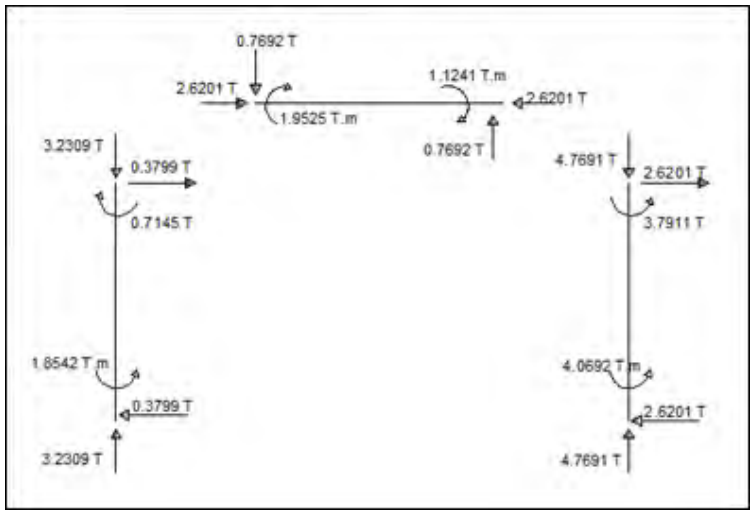
$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 2160 & 1080 & 0 \\ 1080 & 2160 & 0 \\ 0 & 0 & 72000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0014 \\ -0.0010 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8542 \\ -0.7145 \\ -3.2309 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^{(2)} = k^{(2)}\, p^{(2)}}$$

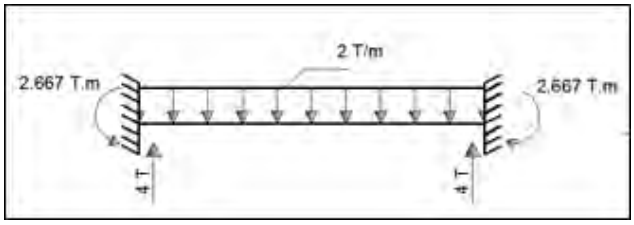
$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 781 & 391 & 0 \\ 391 & 781 & 0 \\ 0 & 0 & 37500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0024 \\ -0.0003 \\ -0.0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.9525 \\ -1.1241 \\ -2.6201 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^{(3)} = k^{(3)}\, p^{(3)}}$$

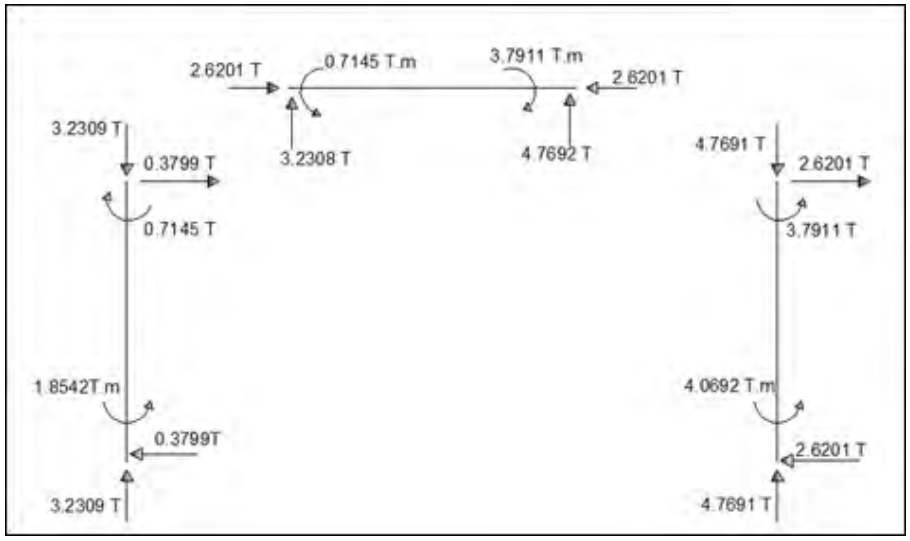
$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 2160 & 1080 & 0 \\ 1080 & 2160 & 0 \\ 0 & 0 & 72000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0011 \\ -0.0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0692 \\ 3.7911 \\ -4.7691 \end{bmatrix}$$




**Problema Primario**




**Problema Complementario**




**Problema Primario más Problema Complementario.**
**Figura 11.8** Fuerzas y Momentos en los elementos

En la parte superior de la figura 11.8 se ha colocado la solución del Problema Complementario, que se ha resuelto, destacando que el vector ***P*** reporta el momento en el nudo

inicial, final y la fuerza axial en el nudo final, el cortante y la fuerza axial en el nudo inicial se obtienen por equilibrio.

En la parte central de la figura 11.8 se tiene el Problema Primario, como el único elemento que tiene carga es la viga solo se indican sus valores en dicho elemento.

Finalmente en la parte inferior de la figura 11.8 se tiene la solución total, la misma que se halla sumando algebraicamente el Problema Primario más el Problema Complementario.

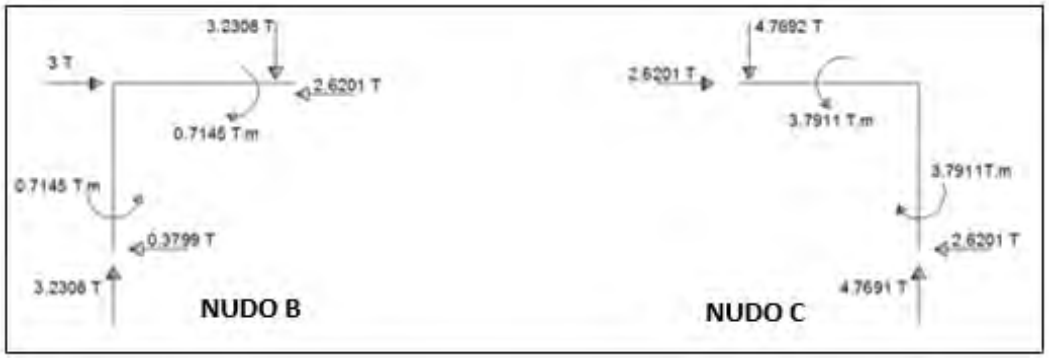
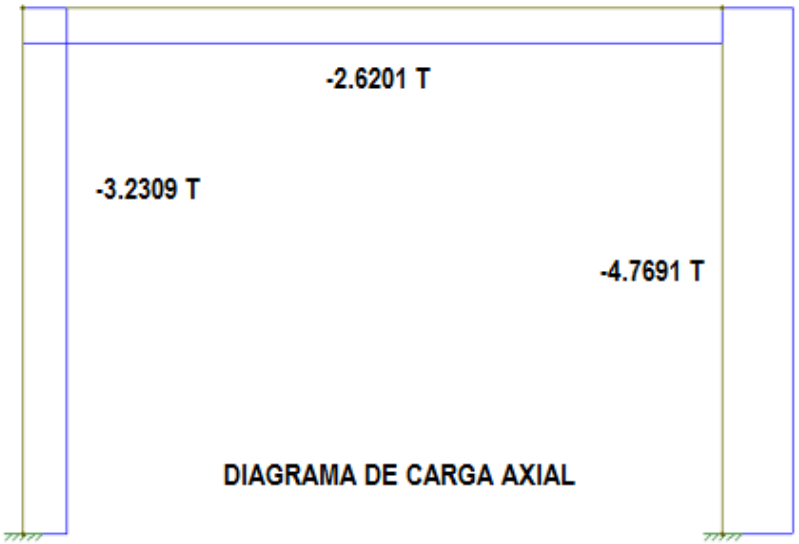



**Figura 11.9** Equilibrio de nudos.

Para comprobar que está bien realizado el Ejemplo se debe verificar el equilibrio de los nudos, esto se presenta en la figura 11.9, a la izquierda del nudo B, donde actúa una fuerza horizontal de 3 T., y a la derecha del nudo C.

En la figura 11.10 se presentan los respectivos diagramas de carga axial, corte y momento, para la viga se debe considerar la carga uniforme distribuida. Finalmente se indica el programa que se realizó en ***MATLAB*** para resolver el Ejemplo.



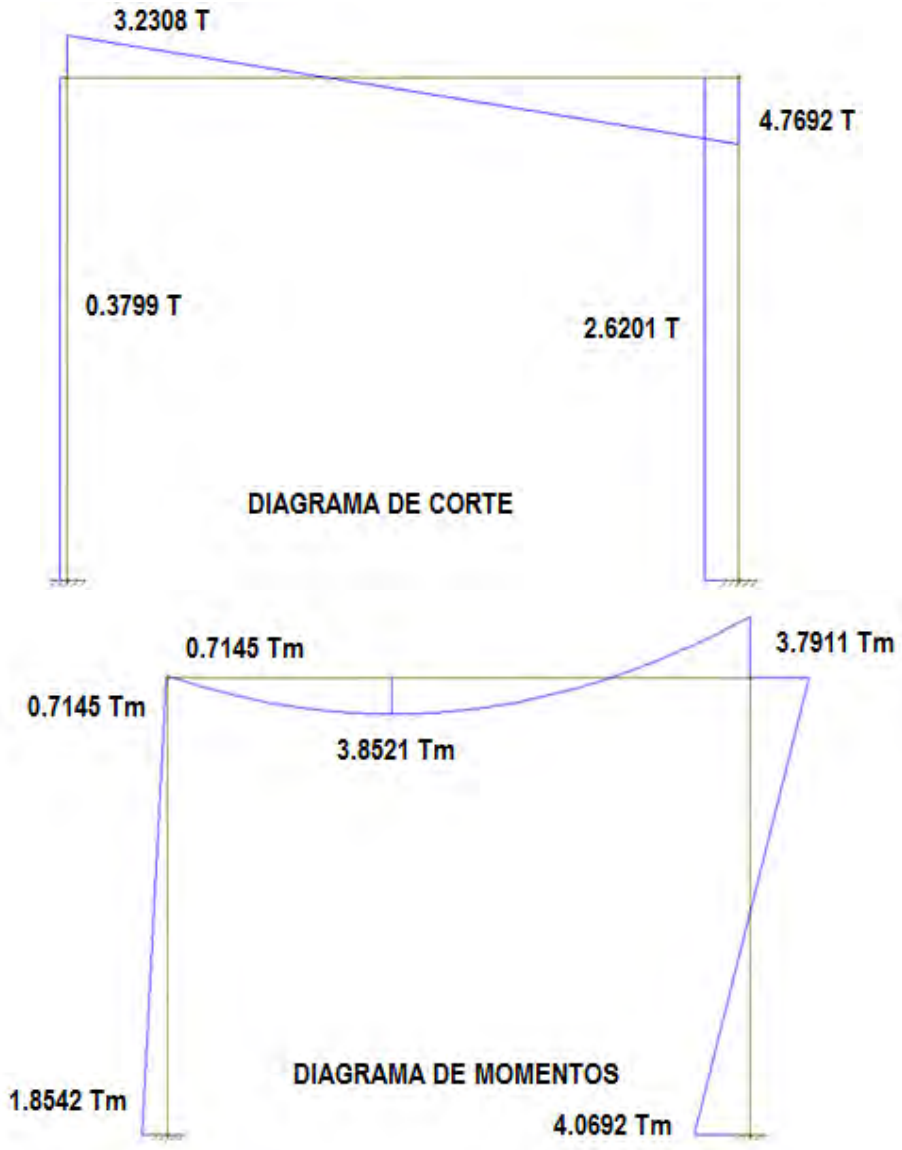



**Figura 11.10** Diagrama de carga axial, corte y momento.

```
% Solución de pórtico por el Método de los Desplazamientos
%         Dr. Roberto Aguiar
%          5 de Junio de 2014
%......Matriz A.........................
A1=[1/3 0 0 0 0 0; 1/3 0 1 0 0 0; 0 1 0 0 0 0];
A2=[0 1/4 1 0 -1/4 0;0 1/4 0 0 -1/4 1;-1 0 0 1 0 0];
A3=[0 0 0 1/3 0 0;0 0 0 1/3 0 1; 0 0 0 0 1 0];
%......Matriz de rigidez de miembro.............
bc=0.3;hc=0.3;bv=0.25;hv=0.25;E=2400000;Lc=;Lv=4;
Ac=bc*hc;Ic=bc*hc^3/12; Av=bv*hv;Iv=bv*hv^3/12;
KC=[4*E*Ic/Lc   2*E*Ic/Lc  0;
    2*E*Ic/Lc   4*E*Ic/Lc  0;
       0          0       E*Ac/Lc];
KV=[4*E*Iv/Lv   2*E*Iv/Lv  0;
    2*E*Iv/Lv   4*E*Iv/Lv  0;
       0          0       E*Av/Lv];
%....Matriz de rigidez de la estructura...
```

```
K=A1'*KC*A1+A2'*KV*A2+A3'*KC*A3;
%...Vector de cargas generalizadas.......
Q=[3;-4;-2.667;0;-4;2.667];
%..Solucion de ecuaciones..............
q=K\Q;
%...Calculo de deformaciones p.........
p1=A1*q;p2=A2*q;p3=A3*q;
%...Problema Complementario. Fuerzas P...
P1=KC*p1;P2=KV*p2;P3=KC*p3;
```

- **EJEMPLO 6**

En la figura 11.11 se tiene un pórtico con voladizos y varias cargas sobre la viga. Las columnas son de 30/40 cm., y las vigas de 30/30 cm. El módulo de elasticidad $E = 2400000 \frac{T}{m^2}$. Resolver el pórtico por el Método de los Desplazamientos considerando que los elementos son totalmente flexibles.

- **SOLUCIÓN**

Hay dos formas de resolver este ejemplo, la primera es encontrando los momentos y fuerzas de empotramiento de la carga que gravita en los volados, cambiarles de sentido para que actúen como cargas puntuales en el pórtico de esta manera no se considera el volado en el análisis estructural; la segunda forma es considerar los voladizos y para ello se tiene que definir grados de libertad en los extremos de los volados. Se va a resolver de la primera forma.

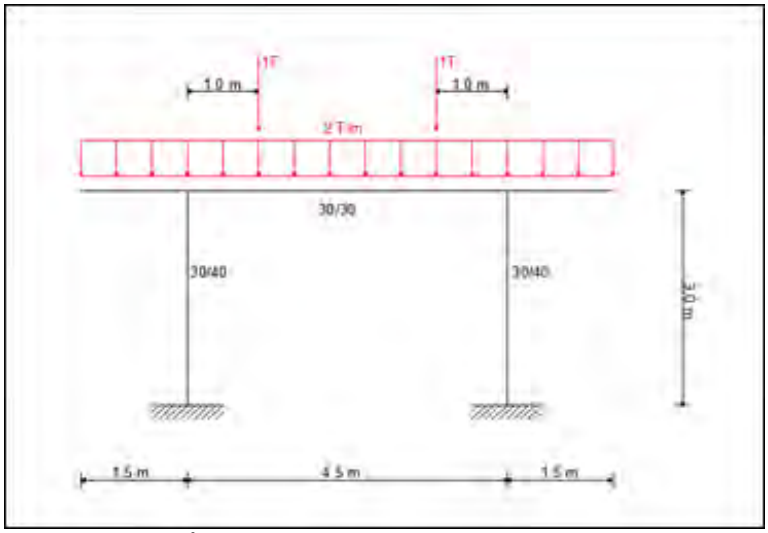



**Figura 11.11** Pórtico con voladizo y varias cargas sobre elemento.

**Figura 11.12** Acciones de empotramiento perfecto en los voladizos.

En la figura 11.12 se presentan las acciones de empotramiento perfecto del voladizo las mismas que pasan al pórtico como cargas puntuales, cambiando el signo como se indica en la figura 11.13.

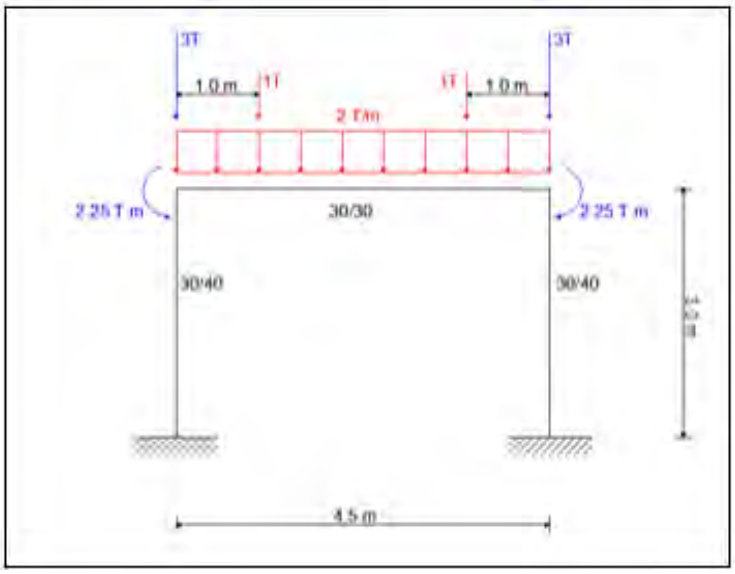



**Figura 11.13** Estructura sin voladizos pero con cargas equivalentes.

A la izquierda de la figura 11.14 se presenta el sistema de coordenadas generalizadas de la estructura y a la derecha las coordenadas de los elementos.

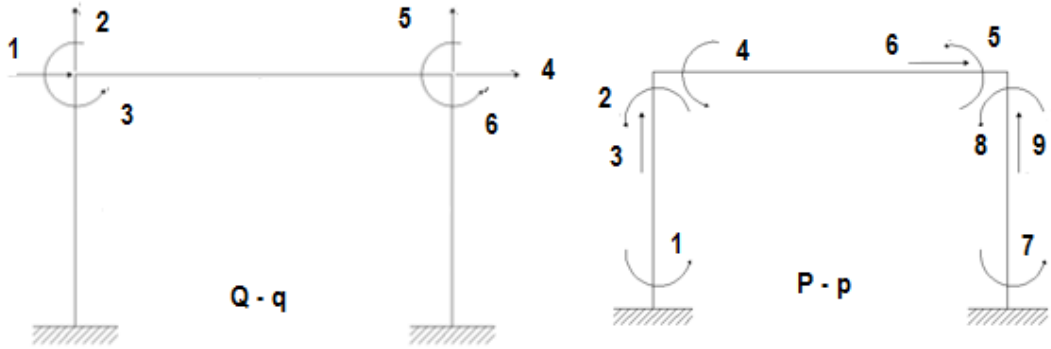



**Figura 11.14** Coordenadas de la estructura y de los elementos.

Al mirar el sistema de coordenadas $\boldsymbol{P-p}$ se puede inferir que la columna izquierda es el elemento 1, la viga el elemento 2 y la columna derecha el elemento 3. Con esta acotación en la tabla 11.3 se indica el cálculo del área y el momento de inercia a flexión.

**Tabla 11.3** Propiedades de los elementos de estructura de Ejemplo 6

| Elemento | b | H | A=b.h | $I=b.h^3/12$ |
|---|---|---|---|---|
| | [m] | [m] | [$m^2$] | [$m^4$] |
| **1** | 0.30 | 0.40 | 0.12 | 0.0016 |
| **2** | 0.30 | 0.30 | 0.09 | 0.00068 |
| **3** | 0.30 | 0.40 | 0.12 | 0.0016 |

La matriz de compatibilidad de deformaciones, $\boldsymbol{A}$ es la siguiente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4.5} & 1 & 0 & -\frac{1}{4.5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4.5} & 0 & 0 & -\frac{1}{4.5} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{A^{(1)}} \\ \\ \\ \\ \mathbf{A^{(2)}} \\ \\ \\ \\ \mathbf{A^{(3)}} \\ \\ \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de los elementos al no considerar el efecto de corte ∅, son las siguientes.

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar los datos de la tabla 11.3, se tiene:

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} 5120 & 2560 & 0 \\ 2560 & 5120 & 0 \\ 0 & 0 & 96000 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 1440 & 720 & 0 \\ 720 & 1440 & 0 \\ 0 & 0 & 48000 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura $K = \sum_{i=1}^{3} A^{(i)t}\, k^{(i)} A^{(i)}$ resulta:

$$K = \begin{bmatrix} 49907 & 0 & 2560 & -48000 & 0 & 0 \\ 0 & 96213 & 480 & 0 & -213 & 480 \\ 2560 & 480 & 6560 & 0 & -480 & 720 \\ -48000 & 0 & 0 & 49707 & 0 & 2560 \\ 0 & -213 & -480 & 0 & 96213 & -480 \\ 0 & 480 & 720 & 2560 & -480 & 6560 \end{bmatrix}$$

Con el propósito de tener el ejercicio completo, se indica a continuación el cálculo del vector de cargas generalizadas, estudiado en el Capítulo 4. Se lo va a determinar empleando el algoritmo denominado Problema Primario y Complementario, para lo cual en la figura 11.15 se indica el Problema Primario donde se aprecian las fuerzas de fijación $R_i$ que hacen $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$.

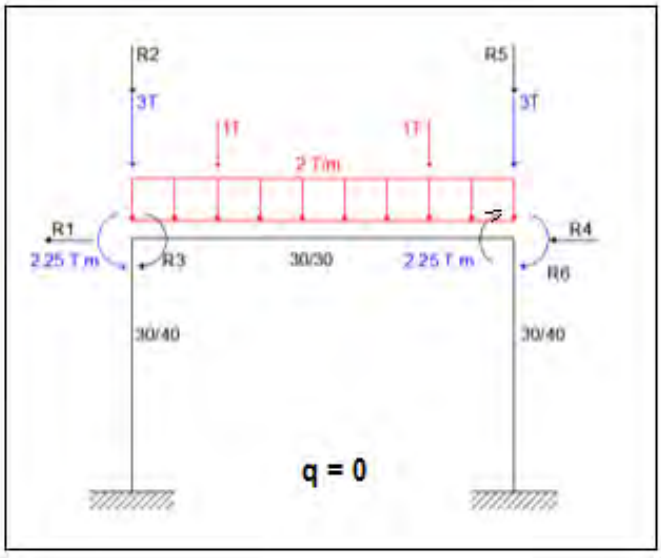



**Figura 11.15** Problema Primario.

Sobre la viga gravita una carga uniforme distribuida de 2 T/m, y dos cargas puntuales de 1 T., a un metro del nudo inicial y final respectivamente. Para encontrar las acciones de empotramiento perfecto se aplica el principio de superposición, trabajando con cada una de las cargas por separado como se indica en la figura 11.16. Para las cargas puntuales lo mejor es utilizar las funciones de forma para hallar las fuerzas y momentos de empotramiento.

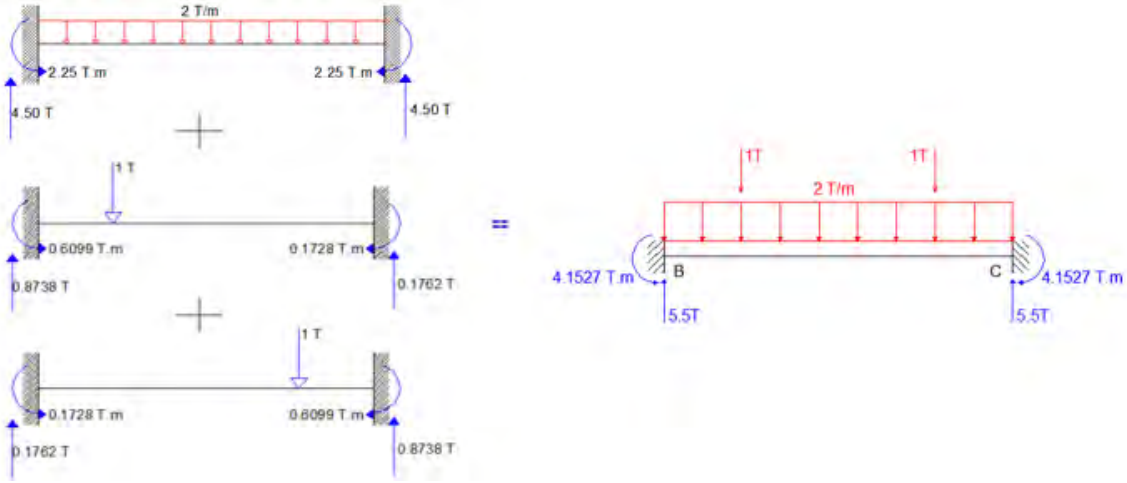



**Figura 11.16** Cálculo de las acciones de empotramiento perfecto.

Para determinar las cargas de fijación $R_i$ se debe efectuar el equilibrio de los nudos, los mismos que se indican en la figura 11.17.

**Equilibrio de nudo B**

$$\sum Fx = 0 \rightarrow R1 = 0$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \rightarrow R2 = -8.5\ T$$

$$\sum M = 0 \rightarrow R3 = -1.9027\ T.m$$

**Equilibrio de nudo C**

$$\sum Fx = 0 \rightarrow R4 = 0$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \rightarrow R5 = -8.5\ T$$

$$\sum M = 0 \rightarrow R6 = 1.9027\ T.m$$

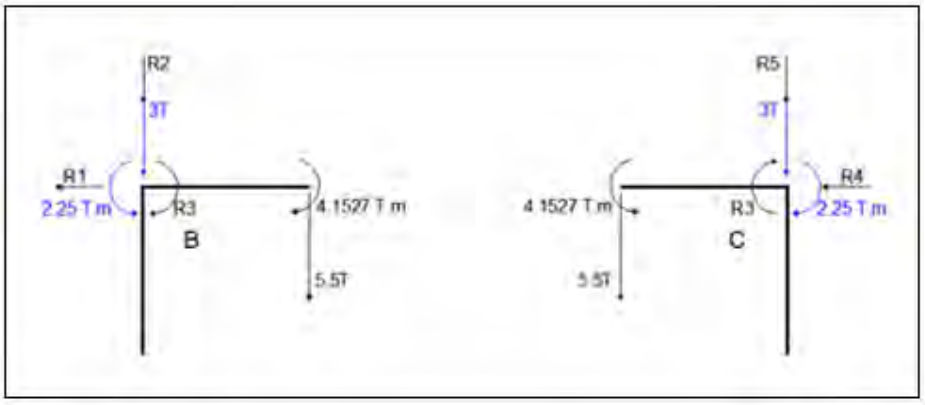



**Figura 11.17** Fuerzas y momentos que gravitan en los nudos.

El vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ resulta.

$$\boldsymbol{Q}^t = [0 \quad -8.5 \quad -1.9027 \quad 0 \quad -8.5 \quad 1.9027]$$

La solución del sistema de ecuaciones: $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}$, reporta.

$$\boldsymbol{q}^t = 10^{-3}[0.0086\,m \quad -0.0885\,m \quad -0.3296\,rad \quad -0.0086\,m \quad -0.0885\,m \quad 0.3296\,rad]$$

El cálculo de las deformaciones $\boldsymbol{p}$ y cargas en los elementos $\boldsymbol{P}$ se indica a continuación

$$p^{(1)} = A^{(1)}.q = \begin{bmatrix} 0.0029 \\ -0.3267 \\ -0.0885 \end{bmatrix}.10^{-3}$$

$$p^{(2)} = A^{(2)}.q = \begin{bmatrix} -0.3296 \\ 0.3296 \\ -0.0173 \end{bmatrix}.10^{-3}$$

$$p^{(3)} = A^{(3)}.q = \begin{bmatrix} -0.0029 \\ 0.3267 \\ -0.0885 \end{bmatrix}.10^{-3}$$

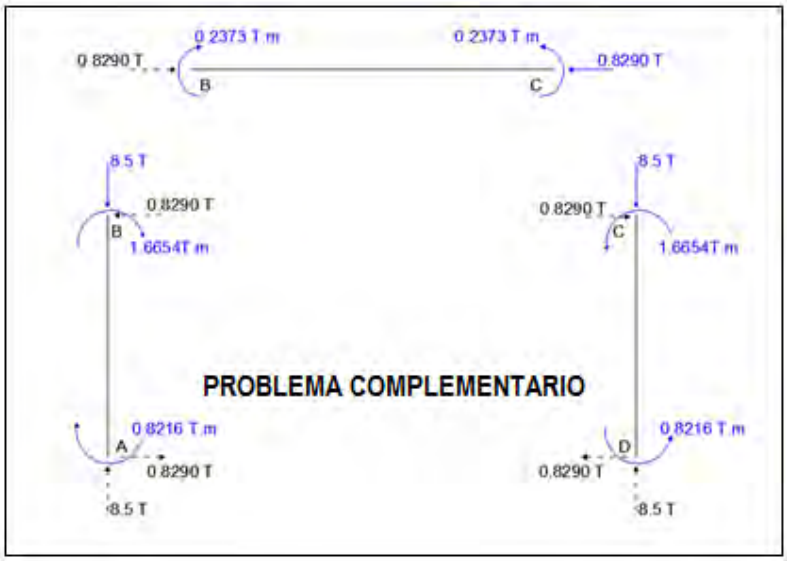
Para obtener las cargas $\boldsymbol{P}$ se trabaja con la matriz de rigidez de los elementos.

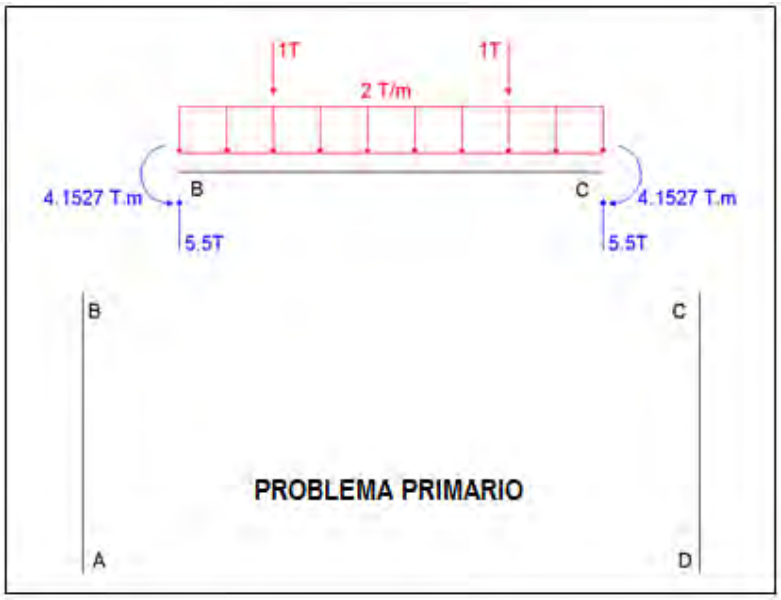
$$P^{(1)} = k^{(1)}.p^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.8216\,T.m \\ -1.6654\,T.m \\ -8.5\,T \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = k^{(2)}.p^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.2373\,T.m \\ 0.2373\,T.m \\ -0.8290\,T \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = k^{(3)}.p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.8216\,T.m \\ 1.6654\,T.m \\ -8.5\,T \end{bmatrix}$$

En la parte superior de la figura 11.18 se indican las cargas $\boldsymbol{P}$ encontradas, las mismas que se han presentado con línea continua; con entrecortada se indica el equilibrio de elementos. Posteriormente, se indican las cargas del Problema Primario y finalmente la solución final que es igual a la suma del Problema Primario más complementario.


0.2373 T.m
0.2373 T.m
0.8290 T
0.8290 T
B
C
8.5 T
8.5 T
0.8290 T
0.8290 T
B
C
1.6654T.m
1.6654T.m
PROBLEMA COMPLEMENTARIO
0.8216 T.m
0.8216 T.m
A
D
0.8290 T
0.8290 T
8.5 T
8.5 T


1T
1T
2 T/m
4.1527 T.m
4.1527 T.m
B
C
5.5T
5.5T
B
C
PROBLEMA PRIMARIO
A
D

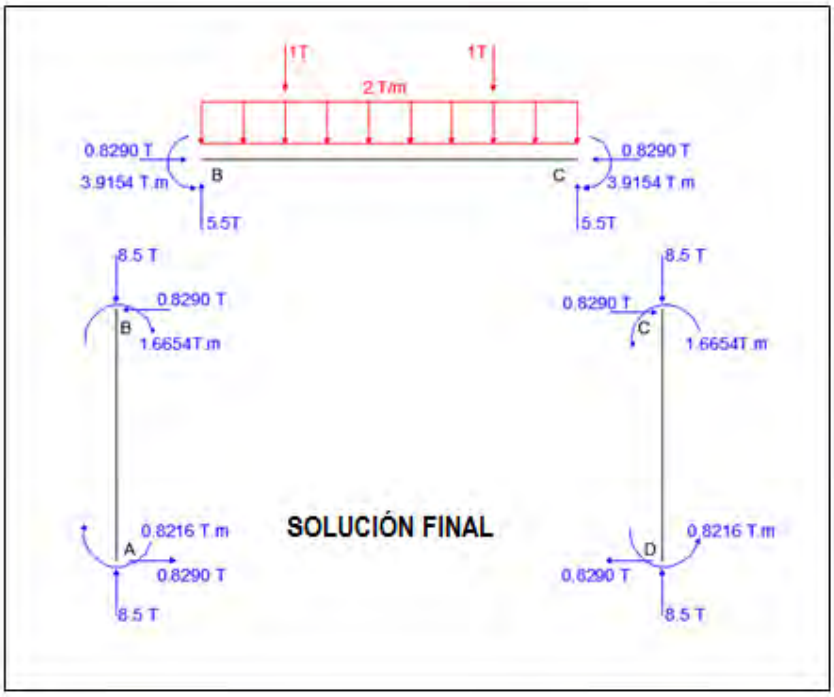



**Figura 11.18** Solución de Problema Complementario, Primario y Solución Final.

### 11.4.3 Pórticos con elementos axialmente rígidos

Una hipótesis muy común dentro del cálculo estructural es considerar a los elementos de un pórtico plano como si fueran axialmente rígidos $A = \infty$. Esta hipótesis da buenos resultados con edificios de pequeña altura, al trabajar con ésta hipótesis se reduce notablemente el número de grados de libertad.

- **EJEMPLO 7**

Resolver la estructura de la figura 11.19 pero considerando que todos sus elementos son axialmente rígidos. En la figura 11.20 se dibujan los sistemas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$ respectivamente. El módulo de elasticidad del material es $E = 2173706.513\ T/m$

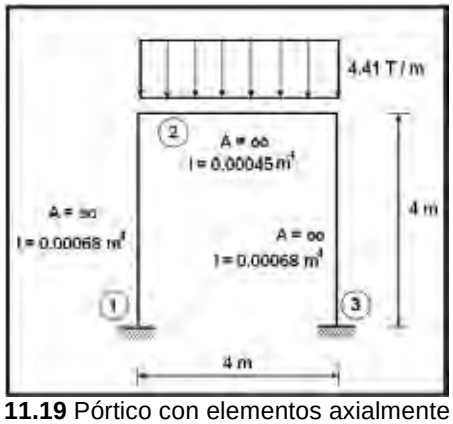



**Figura 11.19** Pórtico con elementos axialmente rígidos

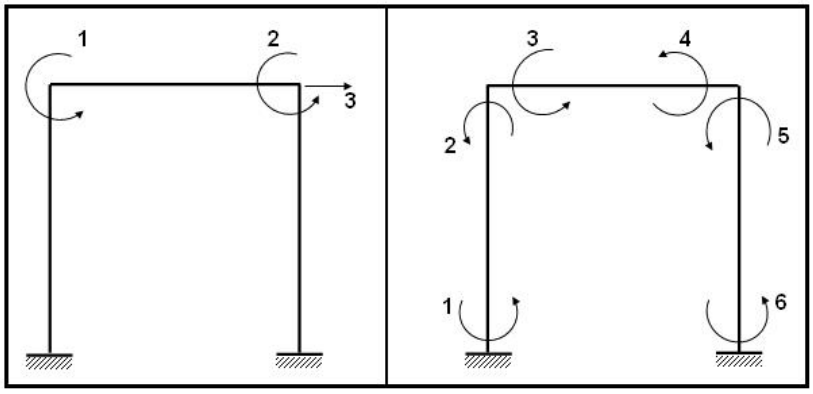



**Figura 11.20** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

- **SOLUCIÓN**

Se deja al lector la determinación de la matriz de rigidez y del vector de cargas.

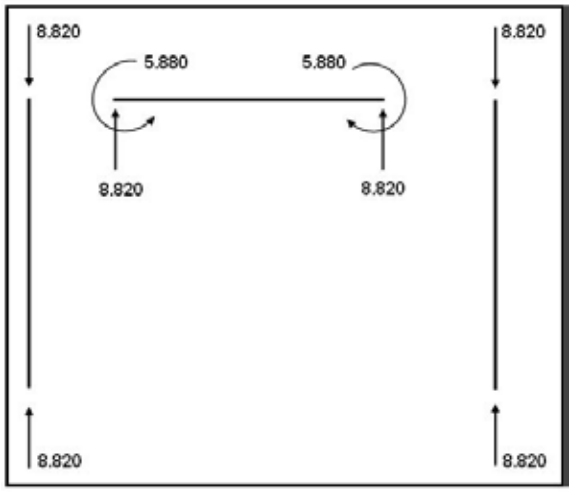
- **Matriz de rigidez de la estructura**

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} 2456.28830 & 489.08400 & 554.29515 \\ 489.08400 & 2456.28830 & 554.29515 \\ 554.29515 & 554.29515 & 554.29515 \end{bmatrix}$$

- **Vector de cargas generalizadas**

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -5.880 \\ 5.880 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Es importante que el lector preste atención al Problema Primario de éste ejemplo. Nótese que existen fuerzas axiales en los elementos debido a la condición de que son axialmente rígidos.




**Problema Primario**

- **Matriz de compatibilidad de deformaciones $A$ tal que $p = A\,q$**

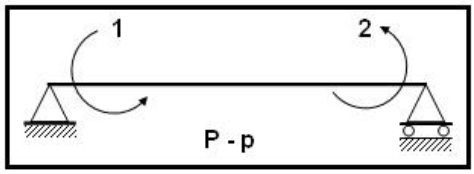
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0.25 \\ ========== & & \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ========== & & \\ 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de los elementos**

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 \\ 739.0602 & 1478.1204 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 \\ 489.0840 & 978.1679 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de un elemento axialmente rígido de sección constante, $k$ en la cual no se considera el efecto de corte es la siguiente asociada al sistema $P - p$ que se indica.




**Deformaciones para un elemento axialmente rígido**

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

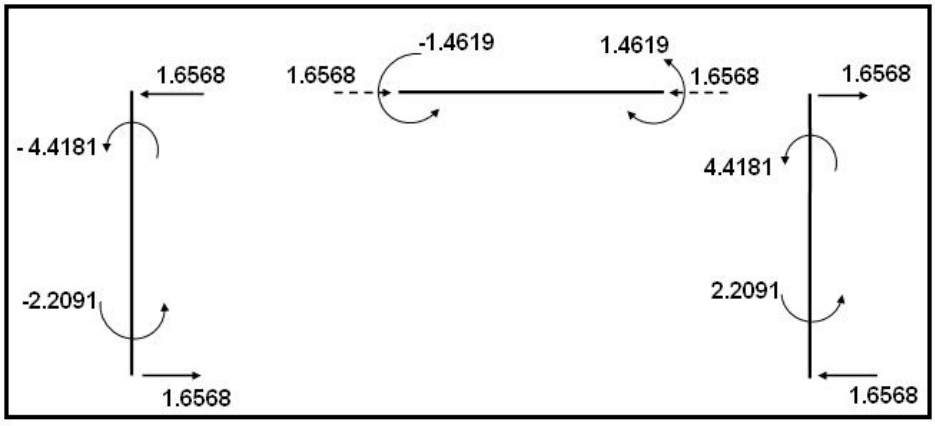
- **Vector $q$ que se obtiene de la solución de ecuaciones $Q = K\,q$**

$$q = \begin{bmatrix} -0.0029890 \\ 0.0029890 \\ -2.892 * 10^{-12} \end{bmatrix}$$

- **Deformaciones $p$ y cargas internas $P$**

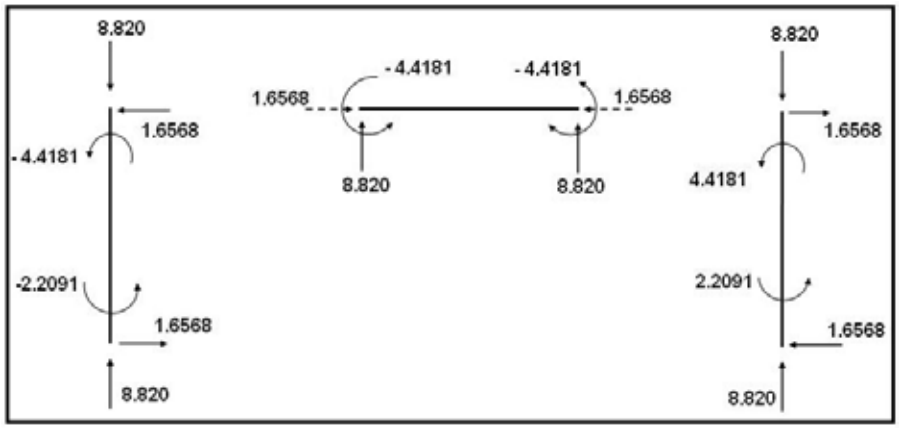
$$p = \begin{bmatrix} -7.232*10^{-13} \\ -0.002989 \\ -0.002989 \\ 0.002989 \\ 0.002989 \\ 7.232*10^{-13} \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -2.2091 \\ -4.4181 \\ -1.4619 \\ 1.4619 \\ 4.4181 \\ 2.2091 \end{bmatrix}$$

- **Solución del Problema Complementario**

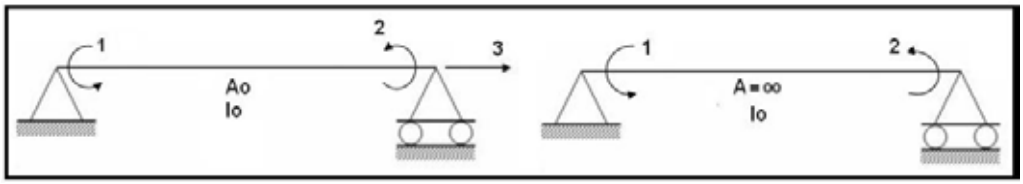



Al sumar el Problema Primario al Complementario se tiene la solución Final.

- **Solución Final**




En todos los ejemplos realizados en éste numeral se trabajó con el siguiente sistema de coordenadas para los elementos.




**Modelos de deformaciones utilizados en este Capítulo.**

## 11.5 ARMADURAS PLANAS

La figura 11.21 corresponde a una parte de la estructura del Aeropuerto "Adolfo Suárez - Barajas" de Madrid y tiene por objeto ilustrar que los nudos son conexiones simples; se aprecia que los apoyos permiten la rotación de las columnas. El marco teórico que se va a presentar a continuación es para uniones simples.

**Figura 11.21** Aeropuerto Barajas de Madrid.

### 11.5.1 Cargas en los nudos

La forma más común de calcular una armadura plana es considerar que las cargas gravitan únicamente en los nudos. Es más cuando actúan cargas en los elementos se acostumbra encontrar cargas equivalentes en los nudos.

- **EJEMPLO 8**

La armadura presentada en la figura 11.22 está compuesta por varillas de acero de 16 mm., de diámetro y sobre ella se tienen dos cargas de 80 kg., y una carga de 120 kg. El módulo de elasticidad del acero $E = 2100000\ \frac{kg}{cm^2}$. Se pide resolver la armadura por el Método de los Desplazamiento y presentar un programa en ***MATLAB***

- **SOLUCIÓN**

A la derecha de la figura 1.23 se indica el sistema de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q-q}$ por ser uniones simples se tienen 2 grados de libertad por nudo. A la derecha se presenta el sistema $\boldsymbol{P-p}$.

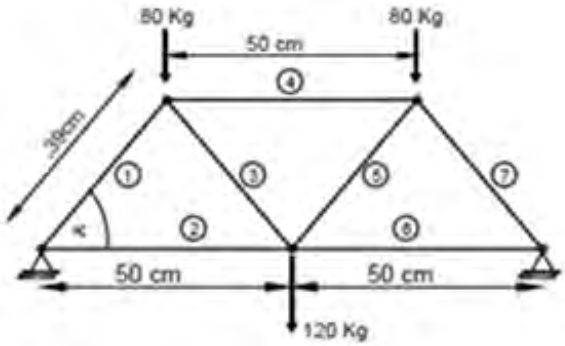



**Figura 11.22** Armadura Plana con cargas en las juntas y uniones simples.

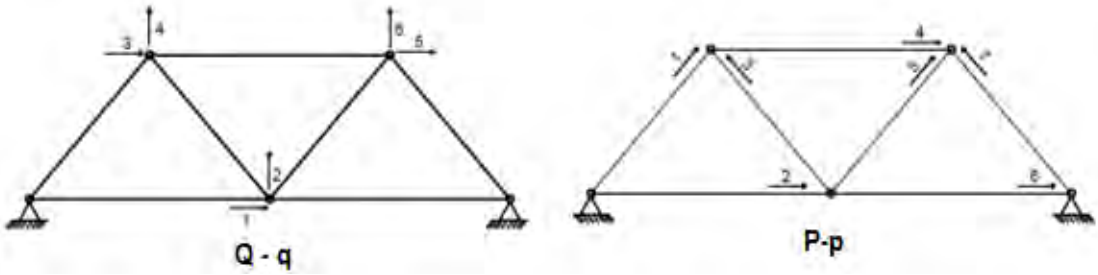
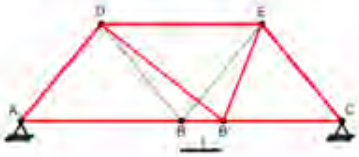



**Figura 11.23** Sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y sistema $\boldsymbol{P-p}$

- **Matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$**

$$\boldsymbol{p = A\,q}$$

**Deformada elemental q1**



$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 1$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = \cos(\alpha) = \frac{25}{39{,}05}$$

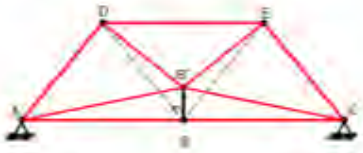
$$p_4 = 0$$

$$p_5 = u_2 - u_1 = -\cos(\alpha) = -\frac{25}{39{,}05}$$

$$p_6 = -1$$

$$p_7 = 0$$

**Deformada elemental q2**



$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = -\text{sen}\ (\alpha) = -\frac{20}{39.05}$$

$$p_4 = 0$$

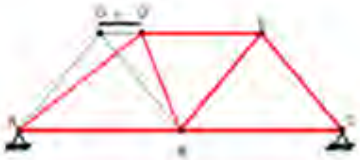
$$p_5 = u_2 - u_1 = -\text{sen}\ (\alpha) = -\frac{20}{39.05}$$

$$p_6 = 0$$

$$p_7 = 0$$

---

**Deformada elemental q3**



$$p_1 = u_2 - u_1 = \cos\ (\alpha) = \frac{25}{39.05}$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = -\cos\ (\alpha) = -\frac{25}{39.05}$$

$$p_4 = -1$$

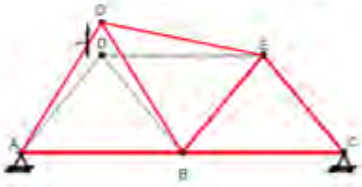
$$p_5 = 0$$

$$p_6 = 0$$

$$p_7 = 0$$

---

**Deformada elemental q4**



$$p_1 = u_2 - u_1 = \text{sen}\ (\alpha) = \frac{20}{39.05}$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = \text{sen}\ (\alpha) = \frac{20}{39.05}$$

$$p_4 = 0$$

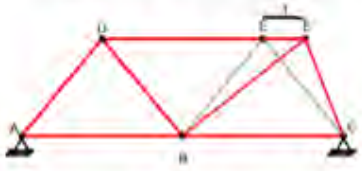
$$p_5 = 0$$

$$p_6 = 0$$

$$p_7 = 0$$

---

**Deformada elemental q5**



$p_1 = 0$

$p_2 = 0$

$p_3 = 0$

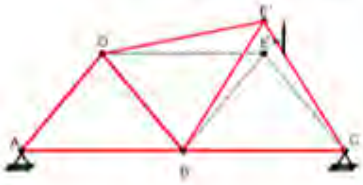
$p_4 = 1$

$p_5 = u_2 - u_1 = \cos(\alpha) = \frac{25}{39.05}$

$p_6 = 0$

$p_7 = u_2 - u_1 = -\cos(\alpha) = -\frac{25}{39.05}$

**Deformada elemental q6**



$p_1 = 0$

$p_2 = 0$

$p_3 = 0$

$p_4 = 1$

$p_5 = u_2 - u_1 = \text{sen}(\alpha) = \frac{30}{39.05}$

$p_6 = 0$

$p_7 = u_2 - u_1 = -\text{sen}(\alpha) = -\frac{30}{39.05}$

Luego la matriz de compatibilidad de deformaciones es:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25/39.05 & 30/39.05 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25/39.05 & -30/39.05 & -25/39.05 & 30/39.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -25/39.05 & -30/39.05 & 0 & 0 & 25/39.05 & 30/39.05 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -25/39.05 & 30/39.05 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \\ \bar{A}^4 \\ \bar{A}^5 \\ \bar{A}^6 \\ \bar{A}^7 \end{matrix}$$

- **Matriz de rigidez de los elementos**

Se identifica por $L_1$ a los elementos cuya longitud es 39.05 cm, y $L_2$ a los elementos cuya longitud es 50 cm. Con esta acotación las matrices de rigidez de los elementos, son:

$$k^{(1)} = k^{(3)} = k^{(5)} = k^{(7)} = \left[\frac{EA}{L_1}\right] = [108125.49\ Kg/cm]$$

$$k^{(2)} = k^{(4)} = k^{(6)} = \left[\frac{EA}{L_0}\right] = [84446.010\ Kg/cm]$$

- **Matriz de rigidez de la estructura**

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}^{(i)t}\, \boldsymbol{k}^{(i)}\, \boldsymbol{A}^{(i)}$$

$$\bar{K} = 10^5 \begin{pmatrix} 2.5753 & 0 & -0.4432 & 0.5318 & -0.4432 & -0.5318 \\ 0 & 1.2763 & 0.5318 & -0.6382 & -0.5318 & -0.6382 \\ -0.4432 & 0.5318 & 1.7308 & 0 & -0.8445 & 0 \\ 0.5318 & -0.6382 & 0 & 1.2763 & 0 & 0 \\ -0.4432 & -0.5318 & -0.8445 & 0 & 1.7308 & 0 \\ -0.5318 & -0.6382 & 0 & 0 & 0 & 1.2763 \end{pmatrix}$$

- **Vector de cargas $Q$**

$$\boldsymbol{Q^t} = [0 \quad -120 \quad 0 \quad -80 \quad 0 \quad -80]$$

- **Vector de coordenadas generalizadas $q$**

$$\boldsymbol{q^t} = [0 \quad -0.0048 \quad 0.0010 \quad -0.0030 \quad -0.0010 \quad -0.0030]$$

- **Deformaciones en los elementos $p$**

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(1)} &= \bar{A}^{(1)} * q; & \bar{p}^{(1)} &= -0.0017 \\ \bar{p}^{(2)} &= \bar{A}^{(2)} * q; & \bar{p}^{(2)} &= 1.3674 * 10^{-19} \approx 0 \\ \bar{p}^{(3)} &= \bar{A}^{(3)} * q; & \bar{p}^{(3)} &= 7.2231 * 10^{-4} \\ \bar{p}^{(4)} &= \bar{A}^{(4)} * q; & \bar{p}^{(4)} &= -0.0020 \\ \bar{p}^{(5)} &= \bar{A}^{(5)} * q; & \bar{p}^{(5)} &= 7.2231 * 10^{-4} \\ \bar{p}^{(6)} &= \bar{A}^{(6)} * q; & \bar{p}^{(6)} &= 1.3674 * 10^{-19} \approx 0 \\ \bar{p}^{(7)} &= \bar{A}^{(7)} * q; & \bar{p}^{(7)} &= -0.0017 \end{aligned}$$

- **Fuerzas en los elementos**

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(1)} &= \bar{k}^{(1)} * \bar{p}^{(1)}; & \bar{P}^{(1)} &= -182.2333\ Kg \\ \bar{P}^{(2)} &= \bar{k}^{(2)} * \bar{p}^{(2)}; & \bar{P}^{(2)} &= 1.1547 * 10^{-14} \approx 0\ Kg \\ \bar{P}^{(3)} &= \bar{k}^{(3)} * \bar{p}^{(3)}; & \bar{P}^{(3)} &= 78.1000\ Kg \\ \bar{P}^{(4)} &= \bar{k}^{(4)} * \bar{p}^{(4)}; & \bar{P}^{(4)} &= -1.6667\ Kg \\ \bar{P}^{(5)} &= \bar{k}^{(5)} * \bar{p}^{(5)}; & \bar{P}^{(5)} &= 78.1000\ Kg \\ \bar{P}^{(6)} &= \bar{k}^{(6)} * \bar{p}^{(6)}; & \bar{P}^{(6)} &= -1.1547 * 10^{-14} \approx 0\ Kg \\ \bar{P}^{(7)} &= \bar{k}^{(7)} * \bar{p}^{(7)}; & \bar{P}^{(7)} &= -182.2333\ Kg \end{aligned}$$

En la figura 11.24 se indican las fuerzas finales en los elementos, al no existir cargas en los elementos ha finaliza el Ejemplo.

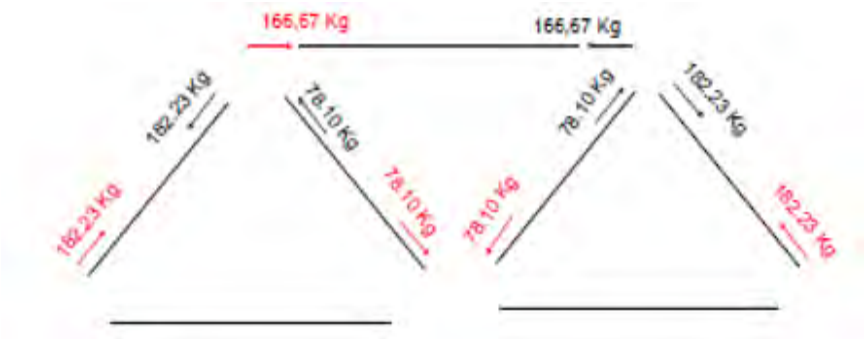



**Figura 11.24** Fuerzas finales en los elementos.

```
% Solución de armadura por el Método de los Desplazamientos
%         Dr. Roberto Aguiar
%          5 de Junio de 2014
%......Longitudes y Areas.........................
L1=39.05;L2=50;L3=39.05;L4=50;L5=39.05;L6=50;L7=39.05;A=2;
%.....Matriz A.........
A1=[0 0 25/L1 30/L1 0 0];
A2=[1 0 0 0 0 0];
A3=[25/L1 -30/L1 -25/L1 30/L1 0 0];
A4=[0 0 -1 0 1 0];
A5=[-25/L1  -30/L1 0 0 25/L1  30/L1];
A6=[-1 0 0 0 0 0];
A7=[0 0 0 0 -25/L1  30/L1];
%......Matriz de rigidez de miembro...............
Es=2100000;r1=Es*A/L1;r1=Es*A/L1;r2=Es*A/L2;r3=Es*A/L3;
r4=Es*A/L4;r5=Es*A/L5;r6=Es*A/L6;r7=Es*A/L7;
%....Matriz de rigidez de la estructura...
K=A1'*r1*A1+A2'*r2*A2+A3'*r3*A3+A4'*r4*A4+A5'*r5*A5+A6'*r6*A6+A7'*r7*A7
%...Vector de cargas generalizadas.......
Q=[0;-120;0;-80;0;-80];
%..Solución de ecuaciones..............
q=K\Q;
%...Calculo de deformaciones p.........
p1=A1*q;p2=A2*q;p3=A3*q;p4=A4*q;p5=A5*q;p6=A6*q;p7=A7*q;
%...Problema Complementario. Fuerzas P...
P1=r1*p1;P2=r2*p2;P3=r3*p3;P4=r4*p4;P5=r5*p5;P6=r6*p6;P7=r7*p7;
```

### 11.5.2 Cargas en nudos y miembros

Finalmente se desea ilustrar la forma de solución de una armadura plana que tiene cargas en los elementos y en los nudos.

- **EJEMPLO 9**

Resolver la estructura de la figura 11.25 en la cual se considera que todos los elementos tienen la misma rigidez axial $EA$.

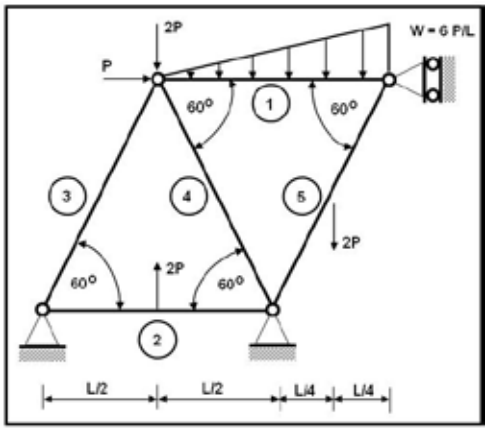



**Figura 11.25** Armadura con cargas en elemento y nudos

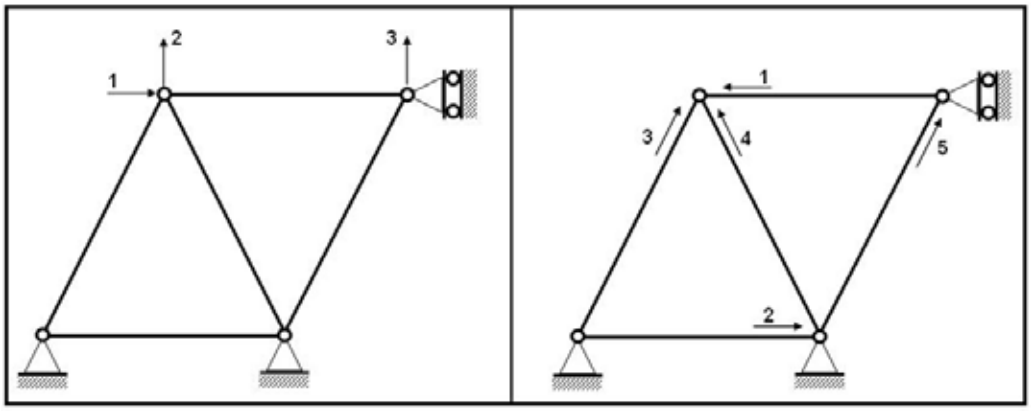



**Figura 11.26** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

- **SOLUCIÓN**

Para los sistemas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ seleccionados en la figura 11.26, se tiene que la matriz $\boldsymbol{A}$ es:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ -0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.866 \end{bmatrix}$$

Todos los elementos de la estructura tienen la misma longitud $L$ y rigidez axial $EA$. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(2)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \boldsymbol{k}^{(4)} = \boldsymbol{k}^{(5)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ se encuentra de $\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)}$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1.50 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.50 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.75 \end{bmatrix} \frac{EA}{L}$$

Ahora se procede a calcular el vector de cargas $\boldsymbol{Q}$. Por definición el problema primario es aquel en el cual actúan todas las cargas y la condición es que el vector de coordenadas sea nulo, ver figura 11.27.

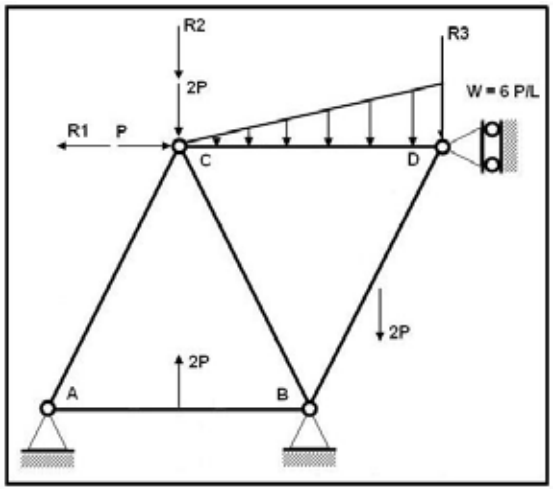



**Figura 11.27** Problema Primario $\boldsymbol{q = 0}$

Se recuerda que las fuerzas de fijación $\boldsymbol{R}$ son consecuencia de la condición $\boldsymbol{q = 0}$ y esto a su vez significa que **cada elemento se encuentra apoyado-apoyado**, hay que poner atención en esto. Ya no está empotrado-empotrado como sucedía en los pórticos planos por lo tanto para el equilibrio de los elementos se tiene lo presentado en la figura 11.28

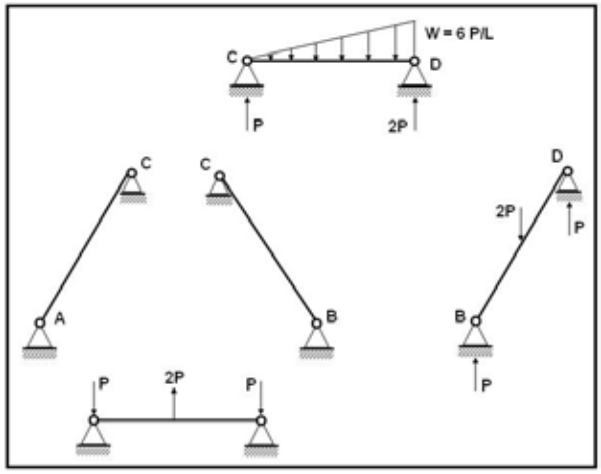



**Figura 11.28** Problema Primario: Equilibrio de elementos

Al realizar el equilibrio en cada nudo se obtienen las fuerzas de fijación $\boldsymbol{R}$ y con esto se encuentra el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} P \\ -3P \\ -3P \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q}$ se encuentra:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.667 \\ -2.000 \\ -4.000 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA}$$

El resto de cálculo ya es conocido, los resultados que se obtienen son:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.000 \\ -1.399 \\ -2.066 \\ -3.464 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA} \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.000 \\ -1.399 \\ -2.066 \\ -3.464 \end{bmatrix} P$$

Finalmente la solución final se encuentra sumando el problema primario al complementario. Nótese que en el elemento 5, la reacción del problema primario se ha descompuesto en una fuerza axial y una fuerza transversal cuyos valores son $0.866\,P$ y $0.5\,P$ respectivamente, con esta aclaración será muy fácil para el lector obtener los valores finales que se indican a continuación.

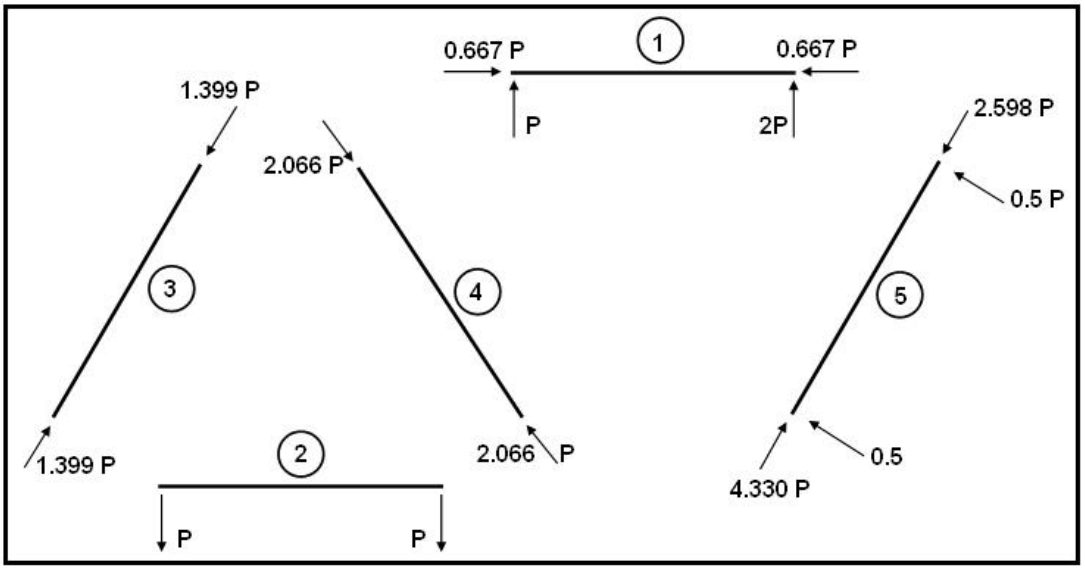
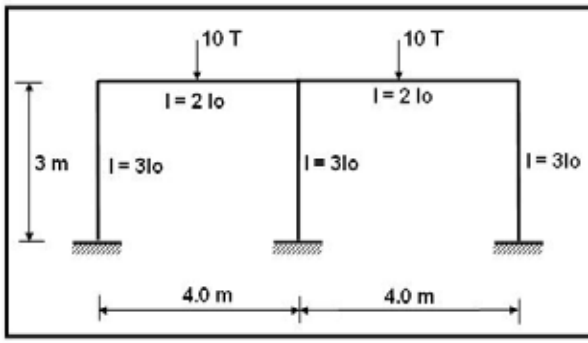



**Figura 11.29** Solución Final

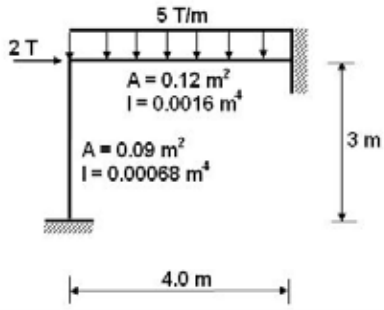
## 11.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver completamente las siguientes estructuras por el Método de los Desplazamientos.

**Ejercicio N.- 1**

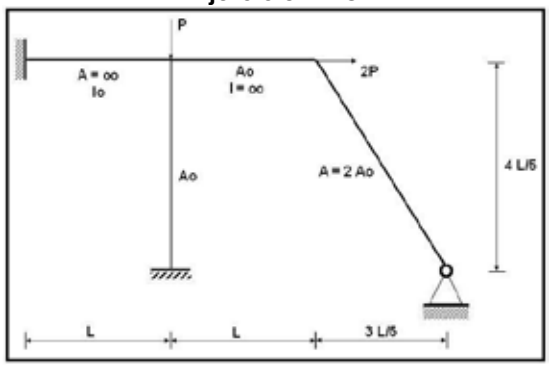



**Ejercicio N.- 2**



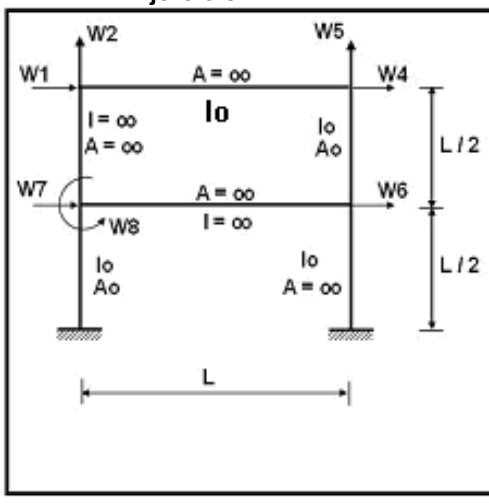

Para todos los elementos $\frac{I}{A_o} = \frac{16}{100}$ $E = 1.$ $E = 2173706.51 \frac{T}{m^2}$

**Ejercicio N.- 3**

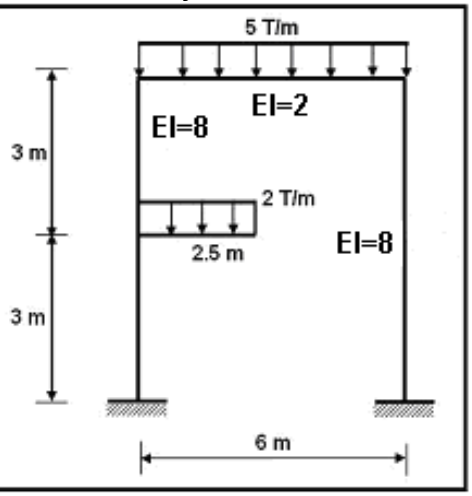



$$\frac{I_o}{A_o L^2} = \frac{1}{100} \qquad E = 1$$

**Ejercicio N.- 4**

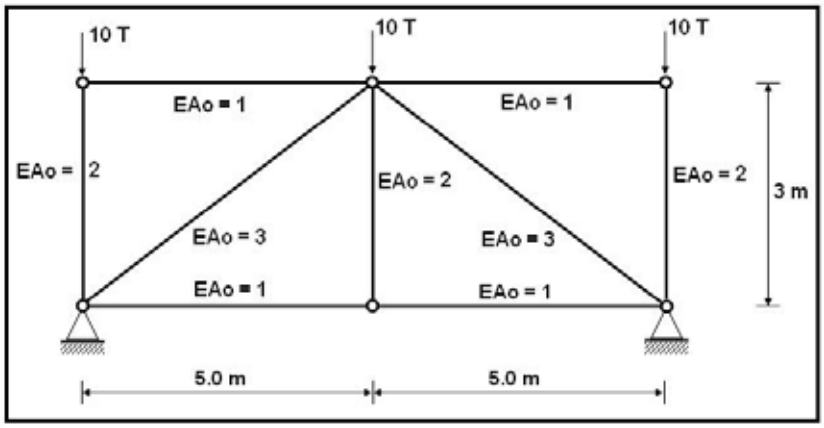



**Ejercicio N.- 5**

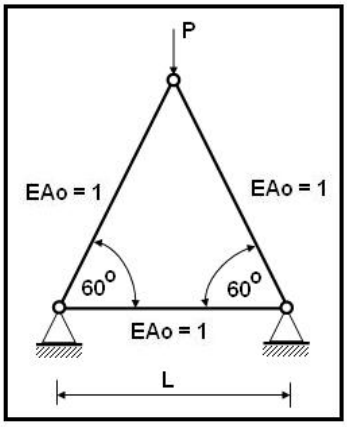



$$\frac{I_o}{A_o L^2} = \frac{1}{100} \qquad E = 1$$

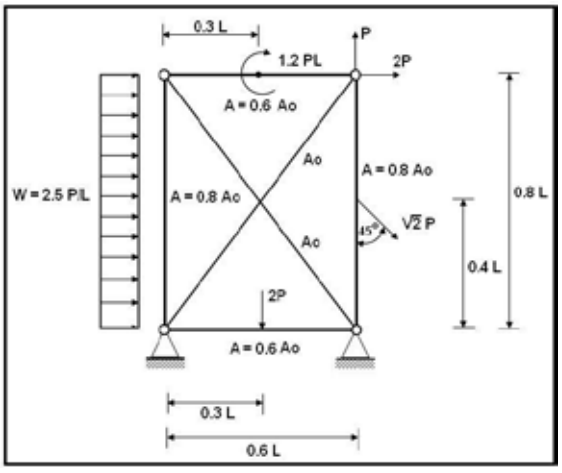
**Ejercicio N.- 6**



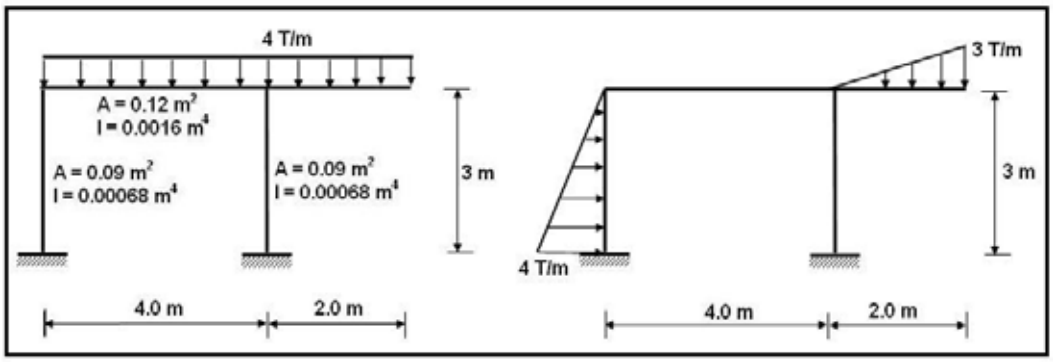

**Ejercicio N.- 7**




**Ejercicio N.- 8**



**Ejercicio N.- 9** **Ejercicio N.- 10**




El módulo de elasticidad en estos dos ejercicios es $E = 2173706.51\,T/m^2$. Por otra parte para el ejercicio N.- 10 los datos de la estructura son los mismos del ejercicio N.- 9.

*CAPITULO 12*

# MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO AL USO DEL COMPUTADOR

## RESUMEN

Se presenta el cálculo de las matrices de rigidez de un elemento en coordenadas locales y globales para los siguientes modelos numéricos de cálculo:

i) Elemento lineal de un pórtico plano de sección constante sin considerar el efecto de corte y considerando dicho efecto.

ii) Elemento lineal de una armadura plana de sección constante.

iii) Elemento de sección constante o variable de un pórtico plano.

iv) Elemento lineal de un pórtico plano considerando dos sectores de rigidez infinita.

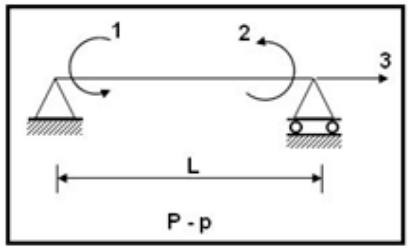
v) Elementos de un pórtico plano con inercia escalonada.

Todo esto orientado al uso del ordenador. Por hacerlo didáctico se presenta el cálculo mediante la transformación de coordenadas. La aplicación de los resultados obtenidos se realiza en el capítulo 13.

## 12. 1 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE DE UN PÓRTICO PLANO

### 12.1.1 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales

Al considerar como sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ de un elemento el presentado en la figura 12.1, en donde no se incluyen los desplazamientos como cuerpo rígido. A éste sistema se denomina por didáctica sistema 1, el vector $\boldsymbol{p}$ mide las deformaciones con el siguiente formulario:




$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

**Figura 12.1** Sistema de coordenadas en el sistema 1.

Por otro lado la matriz de rigidez para elementos de sección constante en los cuales no se considera el efecto de corte es:

$$\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Como la matriz de rigidez está asociada al sistema 1 se ha colocado el subíndice 1 en dicha matriz. Ahora se quiere calcular la matriz de rigidez para un elemento lineal en el cual se incluyan las deformaciones como cuerpo rígido. Por lo tanto el nuevo sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$ será el indicado en la figura 12.2. Por didáctica se ha colocado el asterisco debido a que se va a calcular la nueva matriz de rigidez por medio de la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$ .

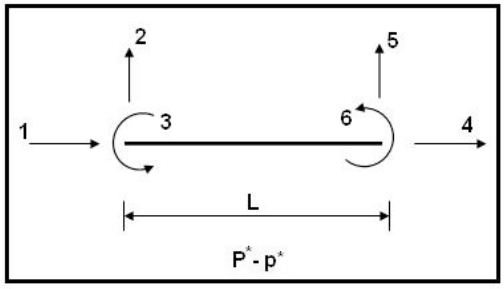



**Figura 12.2** Coordenadas locales de un elemento.

Al sistema de coordenadas del elemento de la figura 12.2 se denomina sistema 2 y el significado de cada una de las deformaciones es el siguiente:

- $p_1^*$ es la componente de desplazamiento axial del nudo inicial del elemento.
- $p_2^*$ es la componente de desplazamiento transversal del nudo inicial del elemento.
- $p_3^*$ es la rotación de la elástica en el nudo inicial del elemento.
- $p_4^*$ es la componente de desplazamiento axial del nudo final del elemento.
- $p_5^*$ es la componente de desplazamiento transversal del nudo final del elemento.
- $p_6^*$ es la rotación de la elástica en el nudo final del elemento.

La convención de signos positiva de las deformaciones en el sistema de coordenadas 2 es la que se indica en la figura 12.2. A este sistema se denomina **Coordenadas Locales.**

Para los elementos del vector de cargas internas $\boldsymbol{P}^*$ se tiene lo siguiente:

- $P_1^*$ es la fuerza longitudinal axial en el nudo inicial del elemento.
- $P_2^*$ es la fuerza transversal en el nudo inicial del elemento.
- $P_3^*$ es el momento a flexión en el nudo inicial del elemento.
- $P_4^*$ es la fuerza longitudinal axial en el nudo final del elemento.
- $P_5^*$ es la fuerza transversal en el nudo final del elemento.
- $P_6^*$ es el momento a flexión en el nudo final del elemento.

Evidentemente la matriz que relaciona las cargas $\boldsymbol{P}^*$ con los desplazamientos $\boldsymbol{p}^*$ es la matriz de rigidez de un elemento $\boldsymbol{k}^*$. En efecto se tiene que:

$$\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$$

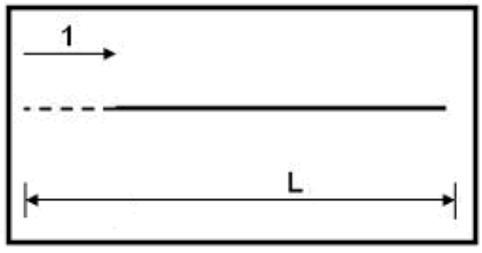
El objetivo de éste sub apartado es calcular $\boldsymbol{k}^*$ pero el cálculo se lo va a realizar utilizando lo ya conocido para no empezar de nuevo todo. Para el efecto se determina una matriz de paso de las coordenadas del sistema 1 al sistema 2, a ésta matriz se denomina $\boldsymbol{T}$, definida de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T} \ \boldsymbol{p}^*$$

El sistema viejo de coordenadas es el sistema 1 y el sistema nuevo de coordenadas el sistema 2. Se habla de sistemas viejo y nuevo para recordar lo estudiado en el capítulo 5. Para el cálculo de la matriz $\boldsymbol{T}$ se construyen deformadas elementales en el sistema nuevo y se mide en el viejo. El cálculo se describe a continuación.

♣ **Primera columna de $\boldsymbol{T}$**

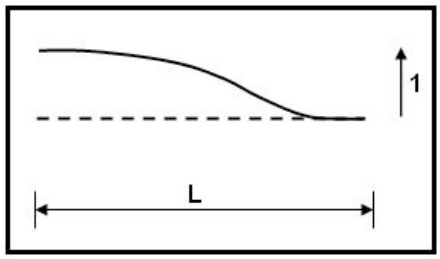
$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$




$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0 - 1 = -1$$

♣ **Segunda columna de $T$**

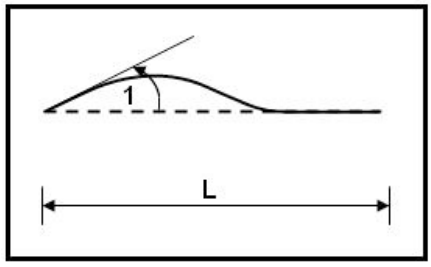
$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$




$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{0-1}{L} = \frac{1}{L} \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{0-1}{L} = \frac{1}{L} \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ **Tercera columna de $T$**

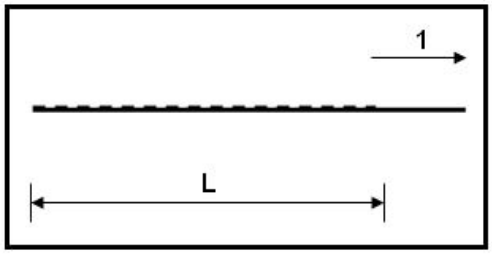
$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$




$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1 - \frac{0-0}{L} = 1 \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ **Cuarta columna de $T$**

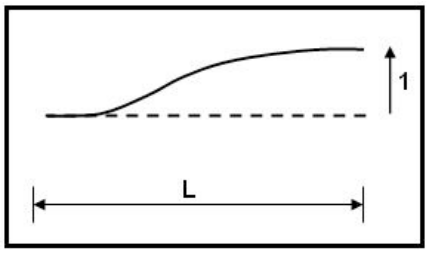
$$p_4^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 4$$




$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 1 - 0 = 1$$

♣ **Quinta columna de $T$**

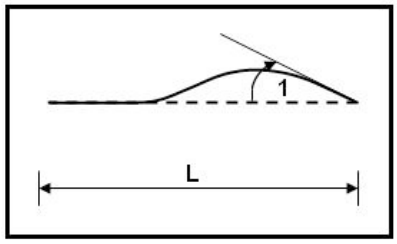
$$p_5^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 5$$




$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = -\frac{1}{L} \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = -\frac{1}{L} \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ **Sexta columna de $T$**

$$p_6^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 6$$




$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1 \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

A la matriz $\boldsymbol{T}$ que se ha obtenido y que permite pasar de los resultados del sistema 1 al sistema 2 se le denomina $\boldsymbol{T}_{1-2}$ y es:

$$\boldsymbol{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz de rigidez en el nuevo sistema de coordenadas $\boldsymbol{k}^*$ se debe realizar el siguiente triple producto matricial $\boldsymbol{T}_{1-2}^t \; \boldsymbol{k}_1 \; \boldsymbol{T}_{1-2}$. A la matriz de rigidez en coordenadas locales se ha denominado $\boldsymbol{k}_2$, luego:

$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{T}_{1-2}^t \; \boldsymbol{k}_1 \; \boldsymbol{T}_{1-2}$$

Los resultados que se obtienen son:

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & & \textit{SIMÉTRICA} & & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & & & \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Preguntas para el lector:

i) Por qué la primera fila (o columna) más la cuarta fila (o columna) de la matriz $\boldsymbol{k}_2$ suman cero.

ii) Por qué la segunda fila (o columna) más la quinta fila (o columna) de la matriz $\boldsymbol{k}_2$ suman cero.

iii) Por qué la tercera fila(o columna) más la sexta fila (o columna) más la quinta fila (o columna) multiplicada por la longitud $L$ suma cero.

iv) Que otra combinación lineal suma cero.

v) Por qué el rango de la matriz $\boldsymbol{k}_2$ es tres.

vi) Por qué no existe matriz de flexibilidad para el sistema de coordenadas locales.

### 12.1.2 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales

En forma general se puede indicar que las coordenadas locales se miden axial y transversal al eje del elemento, en cambio las coordenadas globales miden en forma horizontal y vertical en consecuencia éstas últimas tienen la misma orientación que las coordenadas de la estructura.

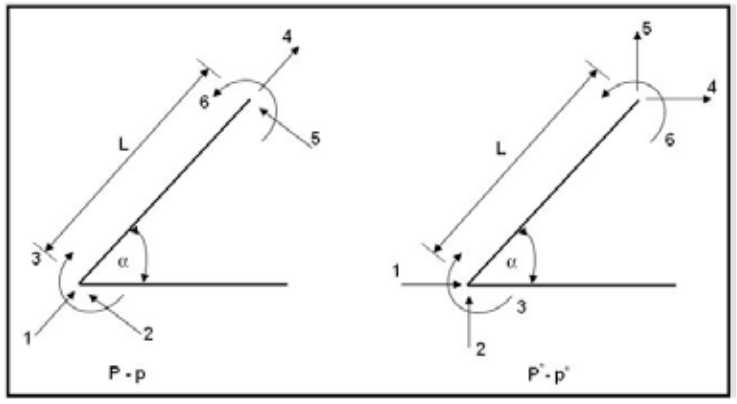



**Figura 12.3** Coordenadas locales y globales de un elemento.

En la figura 12.3 se tiene un elemento inclinado que forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal, a la izquierda se indica el sistema de coordenadas locales y a la derecha el sistema de coordenadas globales.

En la figura 12.3 se ha utilizado el asterisco para definir las coordenadas globales del elemento. Esto se lo hace por que se va a emplear la transformación de coordenadas para calcular $\boldsymbol{k}^*$ que posteriormente se va a denominar $\boldsymbol{k}_3$ ya que al sistema de coordenadas globales se denomina sistema 3.

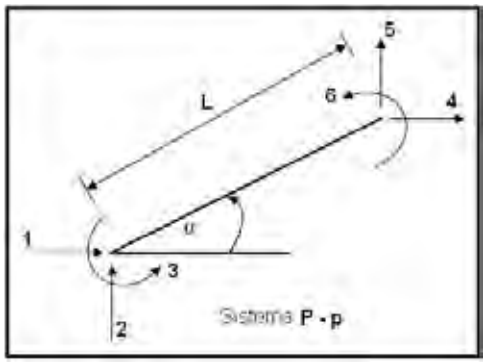
La matriz de paso del sistema 2 al sistema 3 fue estudiada con detenimiento en el capítulo 5 y ya se la había denominado $\boldsymbol{T}_{2-3}$ resultando que ésta matriz es:

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para simplificar la escritura se denomina $C = \cos\alpha, \quad S = sen\alpha$. Con ésta notación se realiza el siguiente producto matricial que conduce al cálculo de $\boldsymbol{k}_3$

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{T}_{2-3}^t \; \boldsymbol{k}_2 \; \boldsymbol{T}_{2-3}$$

$$\boldsymbol{k}_3 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2 & & & & & \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)SC & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & & \textit{SIMÉTRICA} & & \\ -\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & \frac{4EI}{L} & & & \\ -\frac{EA}{L}C^2 - \frac{12EI}{L^3}S^2 & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)SC & \frac{6EI}{L^2}S & \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2 & & \\ -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)SC & -\frac{EA}{L}S^2 - \frac{12EI}{L^3}C^2 & -\frac{6EI}{L^2}C & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)SC & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & \\ -\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}S & -\frac{6EI}{L^2}C & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$



¿Se puede formular las preguntas realizadas al fin del subapartado anterior?

### 12.1.3 Matriz de rotación $T_{2-3}$

Sea $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. De tal manera que $\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}$, se desea demostrar que la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es ortogonal.

A la primera fila de la matriz $\boldsymbol{R}$ se le denomina vector $\boldsymbol{X}$, a la segunda $\boldsymbol{Y}$ y a la tercera $\boldsymbol{Z}$. En consecuencia se tiene que:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{Y} &= \begin{bmatrix} -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{Z} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En los vectores $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. Son vectores unitarios, es decir su módulo es igual a 1. En efecto se tiene que:

$$|\boldsymbol{X}| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2} = 1$$
$$|\boldsymbol{Y}| = \sqrt{(-sen\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} = 1$$
$$|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{(1)^2} = 1$$

2. El producto punto de dos vectores es igual a 0.

$$\boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{Y} = \cos\alpha * (-sen\alpha) + sen\alpha * \cos\alpha = 0$$
$$\boldsymbol{Y} \bullet \boldsymbol{Z} = -sen\alpha * 0 + \cos\alpha * 0 + 0 * 1 = 0$$
$$\boldsymbol{Z} \bullet \boldsymbol{X} = 0 * \cos\alpha + 0 * sen\alpha + 1 * 0 = 0$$

3. El producto cruz de dos vectores da como resultado el otro vector. Por ejemplo:

$$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}$$

$$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix} = i\begin{vmatrix} sen\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -sen\alpha & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = i*(0) - j*(0) + k\left((\cos\alpha)^2 - (-sen\alpha)(sen\alpha)\right) = i*0 + j*0 + k*1$$
$$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}$$

En forma similar se puede demostrar que $\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}$ y que $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$

Se ha demostrado que el módulo de cada vector es igual a la unidad; que el producto punto es nulo y que el producto cruz da el otro vector. Por lo tanto los vectores $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ son ortogonales. Por otra parte el determinante de la matriz $\boldsymbol{R}$ es igual a uno. Por consiguiente $\boldsymbol{R}$ es una **matriz propia ortogonal,** en consecuencia se cumple que:

$$\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{R}^{t} = \boldsymbol{R}^{t}\,\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{t}$$

Se tiene que la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ que sirve para pasar de las coordenadas locales a coordenadas globales está compuesta por submatrices que son ortogonales. Por lo tanto $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es una matriz ortogonal y se cumple que:

$$\boldsymbol{T}_{2-3}{}^{-1} = \boldsymbol{T}_{2-3}{}^{t} \tag{12.1}$$

Esta es una propiedad muy importante de la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ que permite calcular la inversa obteniendo su transpuesta. Esta propiedad se utiliza una vez que se tiene el vector de cargas en coordenadas globales y se desea encontrar éste vector en coordenadas locales.

## 12. 2 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE DE UNA ARMADURA PLANA

### 12.2.1 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales

Básicamente se siguen los mismos pasos del numeral anterior para obtener la matriz de rigidez de un elemento. Por este motivo se presenta el cálculo de $\boldsymbol{k}$ en forma directa dejando al lector la justificación de los pasos dados.

En la figura 12.4 se plantea en forma general la forma de cálculo, lo conocido expuesto en capítulos anteriores está a la izquierda y lo que se va a calcular se encuentra a la derecha.

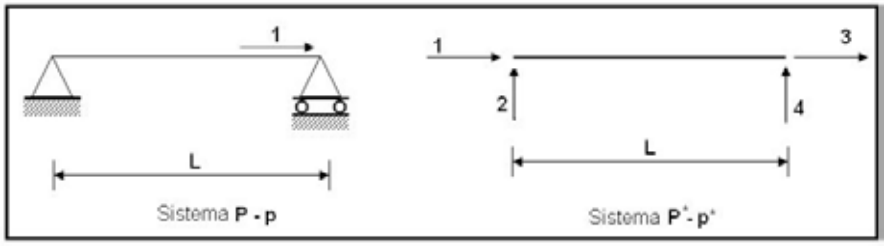



**Figura 12.4** Planteamiento del problema.

En el sistema de la izquierda se tiene:

$$p_1 = u_2 - u_1 \qquad\qquad \boldsymbol{k}_1 = \left[\frac{EA}{L}\right]$$

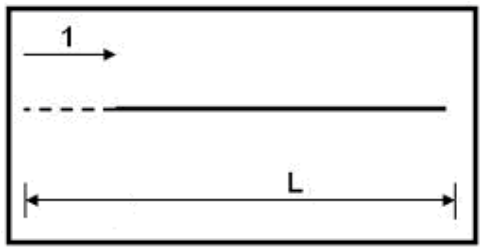
Se desea calcular $\boldsymbol{k}^{*}$ que se ha denominado $\boldsymbol{k}_2$ para ello se tiene:

$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{T}_{1-2}{}^{t}\,\boldsymbol{k}_1\,\boldsymbol{T}_{1-2}$$

Para calcular $\boldsymbol{T}_{1-2}$ se tiene que $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T}_{1-2}\,\boldsymbol{p}^{*}$

♣ **Primera columna de** $T_{1-2}$

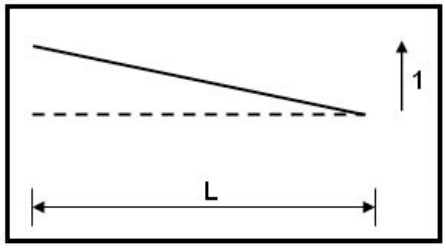
$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$




$$p_1 = u_2 - u_1 = 0 - 1 = -1$$

♣ **Segunda columna de** $T_{1-2}$

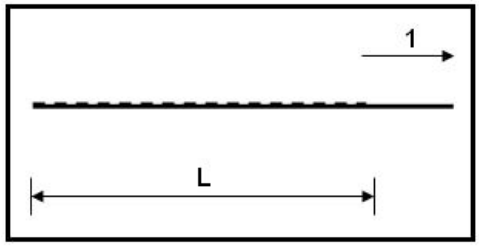
$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$




$$p_1 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ **Tercera columna de** $T_{1-2}$

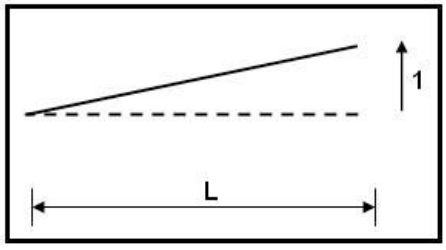
$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$




$$p_1 = u_2 - u_1 = 1 - 0 = 1$$

♣ **Cuarta columna de** $T_{1-2}$

$$p_4^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 4$$




$$p_1 = u_2 - u_1 = 0$$

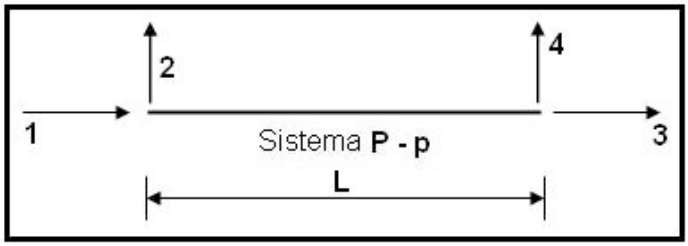
La deformada elemental que conduce al cálculo de la segunda columna de la matriz $\boldsymbol{T}_{1-2}$ se diferencia de la deformada anterior, para el caso de pórtico plano, por el hecho de que ahora el elemento es $I = \infty$. En consecuencia no trabaja a flexión; algo similar se indica con relación a la última deformada. Luego la matriz $\boldsymbol{T}_{1-2}$ tiene los siguientes valores.

$$\boldsymbol{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{T}_{1-2}^{\,t}\ \boldsymbol{k}_1\ \boldsymbol{T}_{1-2}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}}\right] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$




Preguntas para el lector:

i) Cual es el rango y orden de la matriz $\boldsymbol{k}_2$.

ii) Existe matriz inversa de $\boldsymbol{k}_2$.

### 12.2.2 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales

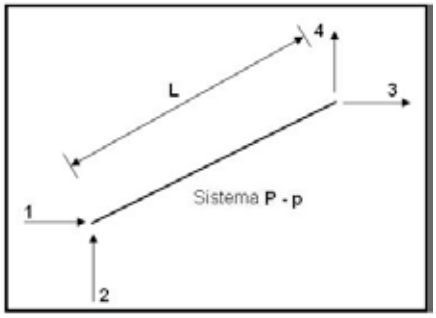
La matriz de paso de coordenadas locales a coordenadas globales en armaduras planas es:

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha \\ 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Para hallar la matriz de rigidez en coordenadas globales $\boldsymbol{k}_3$ se realiza la siguiente operación:

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{T}_{2-3}{}^{t}\, \boldsymbol{k}_2\, \boldsymbol{T}_{2-3}$$

$$\boldsymbol{k}_3 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \cos\alpha^2 & sen\alpha\cos\alpha & -\cos\alpha^2 & -sen\alpha\cos\alpha \\ sen\alpha\cos\alpha & sen\alpha^2 & -sen\alpha\cos\alpha & -sen\alpha^2 \\ -\cos\alpha^2 & -sen\alpha\cos\alpha & \cos\alpha^2 & sen\alpha\cos\alpha \\ -sen\alpha\cos\alpha & -sen\alpha^2 & sen\alpha\cos\alpha & sen\alpha^2 \end{bmatrix}$$




Preguntas para el lector:

i) La matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ definida en el presente numeral es ortogonal.

ii) Si se desea expresar la matriz de rigidez de un elemento de una armadura plana como si fuera de orden 6 x 6. Como quedaría $\boldsymbol{k}_3$ y cuál sería el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$.

## 12.3 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE O VARIABLE DE UN PÓRTICO

### 12.3.1 Sistema 1

En el capítulo 7 se calculó la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{f}$ para el elemento lineal que se presenta en la figura 12.1. En esa ocasión se empleó la notación que consta en la figura 12.5 para explicar el significado físico de los elementos de la matriz $\boldsymbol{f}$ para un elemento que puede ser de sección constante o variable.

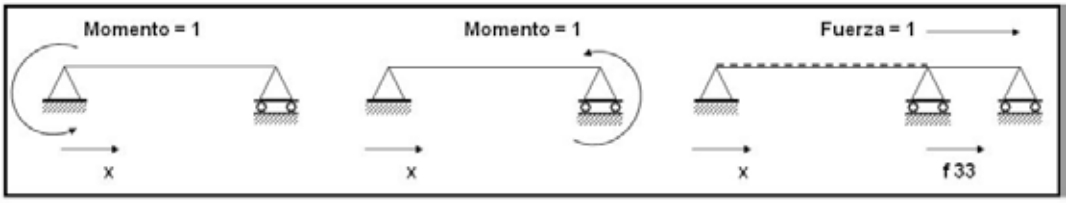



**Figura 12.5** Cargas aplicadas para encontrar la matriz de flexibilidad de un elemento.

La forma de $\boldsymbol{f}$ es la siguiente:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & -f_{12} & 0 \\ -f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix}$$

En éste apartado se va a utilizar la nomenclatura del Ing. Alejandro Segovia Gallegos quien denomino $\alpha$ al término $f_{11}$; $\varepsilon$ al término $f_{12} = f_{21}$; $\alpha'$ al elemento $f_{22}$.

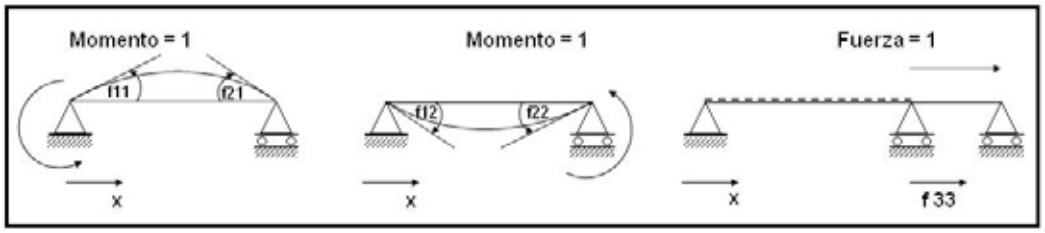



**Figura 12.6** Elementos de la matriz de flexibilidad de un elemento.

Por lo tanto la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{f}$ con la nueva nomenclatura es la siguiente:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \alpha & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\alpha = f_{11} = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2}\frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta\left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$\varepsilon = f_{21} = f_{12} = \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2}\frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta\left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$\alpha' = f_{22} = \int_0^L \frac{X^2}{L^2}\frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta\left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{EA(x)}$$

Para hallar la matriz de rigidez del elemento presentado se obtiene la inversa de $\boldsymbol{f}$ el resultado que se obtiene es:

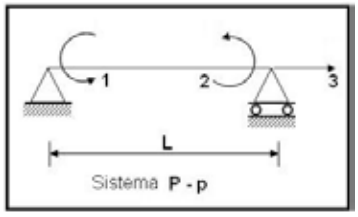
$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{f}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha'}{\alpha\alpha' - \varepsilon^2} & \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha' - \varepsilon^2} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha' - \varepsilon^2} & \frac{\alpha}{\alpha\alpha' - \varepsilon^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix}$$

El Ing. Alejandro Segovia Gallegos denominó:

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} \qquad a = \frac{\varepsilon}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} \qquad k' = \frac{\alpha}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2}$$

Es importante que se diferencia entre $k$ y $\boldsymbol{k}$ el primero es un elemento de la matriz de rigidez $\boldsymbol{k}$ en cambio el segundo es la matriz de rigidez, $k$ es el término que se encuentra en la fila 1 y columna 1 de la matriz de rigidez del elemento $\boldsymbol{k}$ que es de 3 x 3.

Resumiendo todo lo expuesto en el presente apartado, se tiene que las matrices de flexibilidad y de rigidez para un elemento de sección constante o variable asociado al siguiente sistema de coordenadas, son las siguientes:




$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} \alpha & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} k & a & 0 \\ a & k' & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

Siendo $r = \dfrac{1}{f_{33}}$. Se ha colocado el subíndice 1 ya que corresponden al sistema 1.

### 12.3.2 Forma general de $\boldsymbol{k}_2$ en coordenadas locales

Lo que interesa en el presente apartado es ilustrar la forma de cálculo de la matriz de rigidez de un elemento de sección variable en coordenadas locales suponiendo que se conocen los elementos de rigidez $k, a, k', r$. Si se conoce como se resuelve para sección variable también se conocerá como se resuelve para sección constante ya que éste último es un caso particular.

La matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales $\boldsymbol{k}_2$ se obtiene del siguiente triple producto matricial.

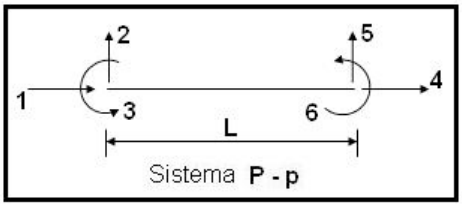
$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{T}_{1-2}{}^{t}\ \boldsymbol{k}_1\ \boldsymbol{T}_{1-2}$$

$$\boldsymbol{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} r & & & & & \\ 0 & t & & \textit{SIMÉTRICA} & & \\ 0 & b & k & & & \\ -r & 0 & 0 & r & & \\ 0 & -t & -b & 0 & t & \\ 0 & b' & a & 0 & -b' & k' \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$b = \frac{k+a}{L} \qquad b' = \frac{k'+a}{L} \qquad t = \frac{b+b'}{L}$$




Preguntas al lector:

i) Se pueden realizar las preguntas indicadas en el apartado 12.1.1, en caso afirmativo conteste cada una de ellas.

ii) Como obtendría la matriz de rigidez para un elemento lineal de sección constante o variable en coordenadas globales.

iii) Cual es el valor de $k, a, k', b, b', t$ para un elemento lineal de sección constante sin considerar el efecto de corte y considerando dicho efecto. Escribir en función de la rigidez a flexión $EI$ .

### 12.3.3 Consideraciones del efecto de corte en un elemento de sección constante

Al no considerar el efecto de corte $\phi$ en el cálculo de un pórtico plano cuyos elementos son de sección constante se está cometiendo un error el mismo que puede ser despreciable si la relación $h/L$ tiende a cero. Donde $h$ es la altura de la sección transversal y $L$ la longitud del elemento. Ahora en el caso contrario el error que se comete al no considerar $\phi$ aumenta conforme la relación $h/L$ se incrementa. Concretamente en el caso de una viga esbelta o de un muro de corte (diafragma) es necesario evaluar la matriz de rigidez de un elemento considerando el efecto de corte.

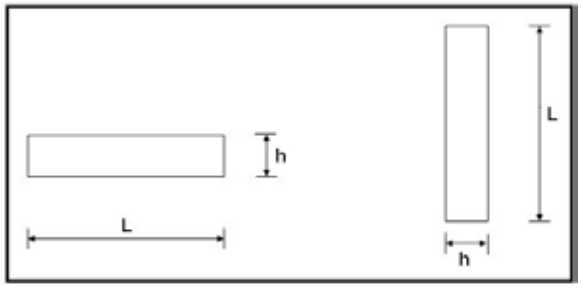



**Figura 12.7** Viga esbelta y un muro de corte.

Por otra parte si los cálculos se van a realizar en un ordenador es conveniente que en el análisis se incluya el efecto de corte, al margen de que si es despreciable o no el error. De ésta manera se optimiza el cálculo. A continuación se va a presentar los valores de los elementos de la matriz de flexibilidad y de rigidez al incluir el efecto de corte y finalmente se indicará la matriz $\boldsymbol{k}_2$ incluyendo dicho efecto.

i) Los valores de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ para sección constante fueron obtenidos en el capítulo 7. Por lo tanto se parten de esos valores.

$$\alpha = \frac{L}{3EI_o}(1+\phi) \qquad \varepsilon = \frac{L}{6EI_o}(1-2\phi) \qquad \alpha = \alpha' \qquad \phi = \frac{3\beta\, EI_o}{GAL^2}$$

ii) Al sustituir los valores de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ en las siguientes expresiones:

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} \qquad a = \frac{\varepsilon}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} \qquad k' = \frac{\alpha}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2}$$

se encuentra luego de realizar las simplificaciones del caso, que:

$$k = \frac{4EI_o}{L}\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) \qquad a = \frac{2EI_o}{L}\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) \qquad k = k'$$

iii) Ahora al reemplazar los valores de $k, a, k'$ en las expresiones de $b, b', t$ se obtiene:

$$b = \frac{k+a}{L} \qquad b' = \frac{k'+a}{L} \qquad t = \frac{b+b'}{L}$$

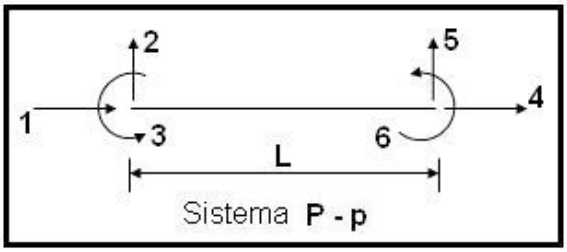
$$b = \frac{6EI_o}{L^2}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) \qquad b = b' \qquad t = \frac{12EI_o}{L^3}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right)$$

iv) Finalmente por ser elementos de sección constante, el valor de $r = EA_o / L$

En resumen la matriz de rigidez $\boldsymbol{k}_2$ para un elemento de sección constante considerando el efecto de corte en coordenadas locales es el siguiente:

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} r & & & & & \\ 0 & t\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & \textit{SIMÉTRICA} & & & \\ 0 & b\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & k\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) & & & \\ -r & 0 & 0 & r & & \\ 0 & -t\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & -b\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & 0 & t\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & \\ 0 & b'\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & a\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) & 0 & -b'\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & k'\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) \end{bmatrix}$$

$$\phi = \frac{3\beta EI_o}{GA_o L^2} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$




Es importante que el lector observe que los términos de la matriz de rigidez en coordenadas locales se obtienen a partir de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$, a excepción del valor $r$. Por lo tanto cuando se analice un elemento de sección variable el problema se considera resuelto una vez que se calculan dichos valores o cuando se encuentra los términos $k, a, k'$.

## 12.4 DIAGRAMA DE MASAS ELASTICA

### 12.4.1 Definiciones y nomenclatura

Sea un elemento de sección variable como el presentado en la figura 12.8.a. en el cual se han definido por una parte los ejes verticales Y e Y' en el nudo inicial y final respectivamente. Adicionalmente se consideran dos coordenadas para definir la posición de un punto del elemento que son X y Z, cumpliéndose que $X + Z = L$

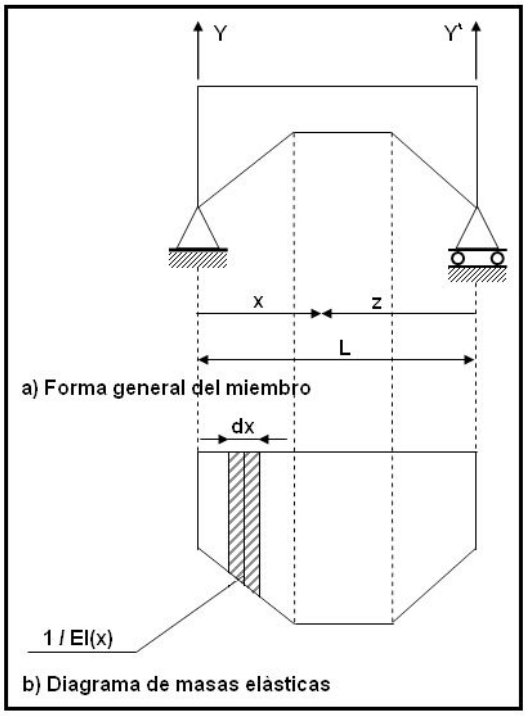



**Figura 12.8** Diagrama de Masas Elásticas.

Por otra parte, el gráfico que resulta al unir los puntos cuyo valor es igual a $\frac{1}{EI(x)}$ se conoce con el nombre de **Diagrama de masas elásticas.** Para el elemento que se está considerando este diagrama es el presentado en la parte inferior de la figura 12.8. Por lo tanto para construir el diagrama de masas elásticas se debe conocer primero el valor de $EI(x)$ en cada punto del elemento y segundo obtener el valor de su inversa con estos valores se dibuja el diagrama.

Al considerar el elemento diferencial $dx$ de la figura 12.8.b se nota que el diferencial de área vale $\frac{dx}{EI(x)}$. En consecuencia el área total del diagrama de masas elásticas, $W$ vendrá dado por:

$$W = \int \frac{dx}{EI(x)} \tag{12.2}$$

Se define el momento estático del diagrama de cargas elásticas con respecto al eje Y de la siguiente manera:

$$S_Y = \int_0^L X \frac{dx}{EI(x)} \tag{12.3}$$

De igual manera el momento estático del diagrama de masas con respecto al eje Y' vale:

$$S_Y{}' = \int_0^L Z \frac{dx}{EI(x)} \tag{12.4}$$

Por otra parte los momentos de inercia del diagrama de masas elásticas con respecto a los ejes Y e Y' se evalúan con las siguientes ecuaciones:

$$I_Y = \int_0^L X^2 \frac{dx}{EI(x)} \tag{12.5}$$

$$I_Y' = \int_0^L Z^2 \frac{dx}{EI(x)} \tag{12.6}$$

Finalmente el momento de inercia compuesto del diagrama de masas elásticas respecto a los ejes YY' vale:

$$I_{YY'} = \int_0^L XZ \frac{dx}{EI(x)} \tag{12.7}$$

### 12.4.2 Cálculo de $\alpha$

En el apartado 12.3.1 de este capítulo se llegó a la siguiente expresión para calcular $\alpha$ en un elemento de sección constante o variable.

$$\alpha = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \frac{1}{L^2} \frac{dx}{GA(x)}$$

Al despreciar el efecto de corte, es decir no se considera la segunda integral y al reemplazar $X = L - Z$, se encuentra.

$$\alpha = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} = \int_0^L \frac{(L-L+Z)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} = \int_0^L \frac{Z^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)}$$

Por ser $L$ constante puede salir de la integral, luego:

$$\alpha = \left(\frac{1}{L}\right)^2 \int_0^L \frac{Z^2}{EI(x)} dx$$

Pero la cantidad que está en la integral es $I_Y'$. Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{I_y'}{L^2} \tag{12.8}$$

### 12.4.3 Cálculo de $\varepsilon$

De igual manera al no considerar el efecto de corte la expresión de $\varepsilon$ dada por el numeral 12.3.1 queda:

$$\varepsilon = \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2} \frac{dx}{EI(x)}$$

Se conoce que $Z = L - X$, por consiguiente al sustituir este valor en la integral y al sacar $L^2$ fuera de la integral por ser constante se tiene:

$$\varepsilon = \frac{1}{L^2}\int_0^L X\ Z\ \frac{dx}{EI(x)}$$

Pero la integral vale $I_{YY'}$. Luego se tiene:

$$\varepsilon = \frac{I_{YY'}}{L^2} \tag{12.9}$$

### 12.4.4 Cálculo de $\alpha'$

Finalmente al considerar el primer término de la expresión que define a $\alpha'$, en el numeral 12.3.1, se tiene:

$$\alpha' = \int_0^L \left(\frac{X}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI(x)}$$

La misma que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\alpha' = \frac{1}{L^2}\int_0^L X^2\ \frac{dx}{EI(x)}$$

En el numeral anterior se vio que la integral vale $I_Y$. Por lo tanto se tiene:

$$\alpha' = \frac{I_Y}{L^2} \tag{12.10}$$

En conclusión los elementos de la matriz de rigidez de un elemento de sección constante o variable en coordenadas locales pueden ser calculados a partir del diagrama de masas elásticas, toda vez que todos los términos se obtienen de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$. Debe anotarse que los términos indicados están relacionados de la siguiente manera:

$$W = \alpha + \alpha' + 2\ \varepsilon \tag{12.11}$$

En resumen para calcular los valores de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ se tienen las siguientes alternativas:

- Uso de Integrales

$$\alpha = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2}\frac{dx}{EI(x)}$$

$$\varepsilon = \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2}\frac{dx}{EI(x)}$$

$$\alpha' = \int_0^L \left(\frac{X}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI(x)}$$

❖ Uso del diagrama de masas elásticas

$$\alpha = \frac{I_y'}{L^2} \qquad \varepsilon = \frac{I_{YY'}}{L^2}$$

$$\alpha' = \frac{I_Y}{L^2} \qquad W = \alpha + \alpha' + 2\,\varepsilon$$

## 12.5 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 1**

Utilizando el diagrama de masas elásticas, obtener la matriz de flexibilidad del elemento presentado en la figura 12.9, que se considera axialmente rígido en toda su longitud.

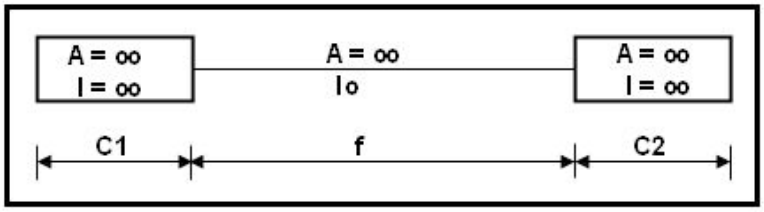



**Figura 12.9** Elemento lineal con dos sectores de rigidez infinita en sus extremos.

En los edificios los nudos se consideran completamente rígidos en consecuencia el elemento de la figura 12.9 puede ser un elemento horizontal que ingresa a dos columnas, la cantidad que ingresa es C1 en el nudo inicial y C2 en el nudo final.

- **SOLUCIÓN**

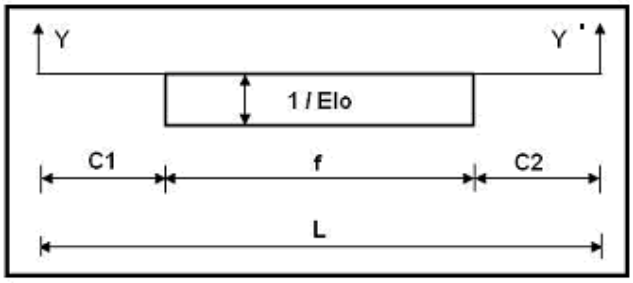



**Diagrama de Masas Elásticas.**

▪ **Cálculo de** $I_Y$

$$I_Y = \frac{f^3}{12EI_o} + \frac{\left(C_1 + \frac{f}{2}\right)^2 f}{EI_o} = \frac{1}{EI_o}\left(C_1^2\, f + C_1\, f^2 + \frac{f^3}{3}\right)$$

Se ha obtenido el momento de inercia con respecto al centro de gravedad más la distancia al cuadrado por el área. Distancia con respecto al eje Y. En forma similar se calcula con respecto a $I_Y'$.

- **Cálculo de** $I_Y'$

$$I_Y' = \frac{f^3}{12EI_o} + \frac{\left(C_2 + \frac{f}{2}\right)^2 f}{EI_o} = \frac{1}{EI_o}\left(C_2^2\, f + C_2\, f^2 + \frac{f^3}{3}\right)$$

- **Cálculo de** $\alpha$ **y** $\alpha'$

$$\alpha = \frac{I_Y'}{L^2} = \frac{1}{EI_oL^2}\left(C_2^2\, f + C_2 f + \frac{f^3}{3}\right) = \frac{1}{3EI_oL^2}\left(3C_2^2\, f + 3C_2 f^2 + f^3\right)$$

$$\alpha' = \frac{I_Y}{L^2} = \frac{1}{EI_oL^2}\left(C_1^2\, f + C_1 f + \frac{f^3}{3}\right) = \frac{1}{3EI_oL^2}\left(3C_1^2\, f + 3C_1 f^2 + f^3\right)$$

- **Cálculo de** $W$

$$W = \frac{f}{EI_o}$$

- **Cálculo de** $\varepsilon$

$$W = \alpha + \alpha' + 2\,\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(W - \alpha - \alpha')$$

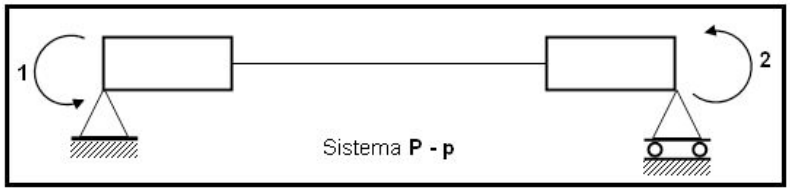
$$\varepsilon = \frac{1}{2EI_o}\left(f - \frac{C_2^2\, f}{L^2} - \frac{C_2 f^2}{L^2} - \frac{f^3}{3L^2} - \frac{C_1^2\, f}{L^2} - \frac{C_1 f^2}{L^2} - \frac{f^3}{3L^2}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2EI_oL^2}\left(f\, L^2 - \left(C_1^2 + C_2^2\right)f - \left(C_1 + C_2\right)f^2 - \frac{2f^3}{3}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{6EI_oL^2}\left(3\, f\, L^2 - 3\left(C_1^2 + C_2^2\right)f - 3\left(C_1 + C_2\right)f^2 - 2f^3\right)$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(3C_2^2\, f + 3C_2 f^2 + f^3\right)}{3EI_oL^2} & \textbf{\textit{SIMÉTRICO}} \\ \dfrac{1}{6EI_oL^2}\left(3\, f\, L^2 - 3\left(C_1^2 + C_2^2\right)f - 3\left(C_1 + C_2\right)f^2 - 2f^3\right) & \dfrac{\left(3C_1^2\, f + 3C_1 f^2 + f^3\right)}{3EI_oL^2} \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad encontrada es para el siguiente sistema de coordenadas $\boldsymbol{P - p}$.



- **EJEMPLO N.- 2**

Calcular la matriz de rigidez del elemento mostrado en la figura 12.10 que es axialmente rígido, con un sector de rigidez infinita en el nudo inicial de longitud $C_1 = \frac{f}{5}$ que es totalmente rígido. Resolver el problema a partir de los resultados del problema anterior.

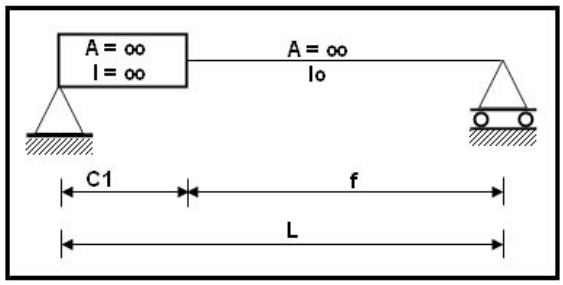



**Figura 12.10** Elemento lineal con un sector de rigidez infinita.

- **SOLUCIÓN**

Al sustituir $C_1 = \frac{f}{5}$ y $C_2 = 0$ en la matriz $\boldsymbol{f}$ del problema anterior y $L = C_1 + f = \frac{6f}{5}$ se encuentra:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \frac{25f}{108EI_o} & \frac{5f}{27EI_o} \\ \frac{5f}{27EI_o} & \frac{43f}{108EI_o} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tiene:

$$\alpha = \frac{25f}{108EI_o} \qquad \varepsilon = \frac{5f}{27EI_o} \qquad \alpha' = \frac{43f}{108EI_o}$$

- **Cálculo de** $\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2$

$$\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2 = \frac{f^2}{(EI_o)^2}\left[\frac{25*43}{108*108} - \frac{25}{27*27}\right] = \frac{25f^2}{432(EI_o)^2}$$

- **Cálculo de** $k, a, k'$

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{\frac{43f}{108EI_o}}{\frac{25f^2}{432(EI_o)^2}} = \frac{172EI_o}{25f}$$

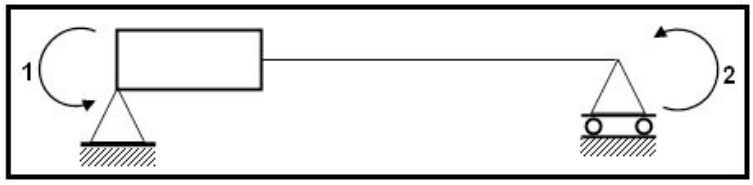
$$a = \frac{\varepsilon}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{\frac{5f}{27EI_o}}{\frac{25f^2}{432(EI_o)^2}} = \frac{16EI_o}{5f}$$

$$k' = \frac{\alpha}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{\frac{25f}{108EI_o}}{\frac{25f^2}{432(EI_o)^2}} = \frac{4EI_o}{f}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez para el elemento de la figura 12.10 es:

$$\boldsymbol{k} = \frac{EI_o}{f}\begin{bmatrix} \frac{172}{25} & \frac{16}{5} \\ \frac{16}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

Siendo el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ del elemento el siguiente:




**Sistema** $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

- **EJEMPLO N.- 3**

Para el ejemplo de la figura 12.11 probar que:

$$\alpha = \alpha' = \frac{L}{EI_o}\left(\frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L}{EI_a}\left(\lambda - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

$$\varepsilon = \frac{L}{EI_o}\left(\frac{1}{6} - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L}{EI_a}\left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

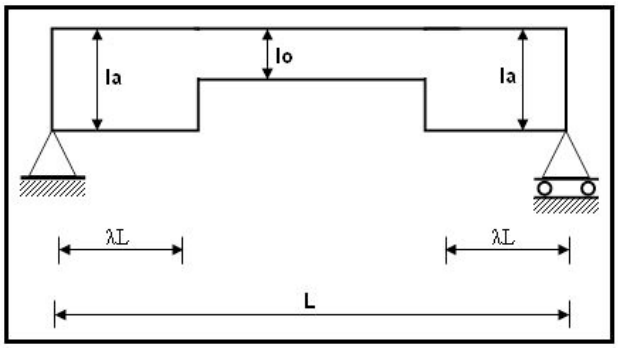
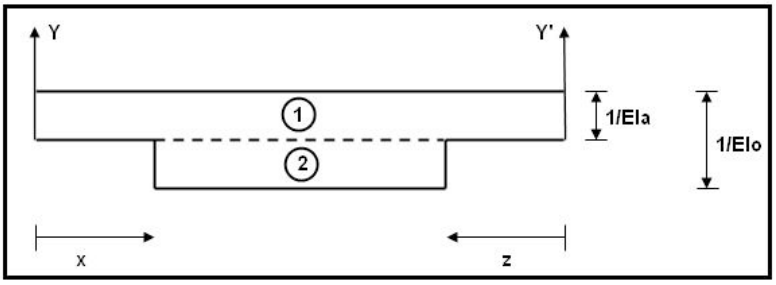



**Figura 12.11** Elemento de Ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**
  - **Diagrama de masas elásticas**




  - **Cálculo de** $I_Y$

$$I_Y = \frac{W_1 L^2}{3} + \frac{W_2 (L - 2\lambda L)^2}{12} + W_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Donde:

$$W_1 = \frac{L}{EI_o} \qquad W_2 = (L - 2\lambda L)\left(\frac{1}{EI_o} - \frac{1}{EI_a}\right)$$

Sustituyendo $W_1$ y $W_2$ en $I_Y$. Luego de simplificar se obtiene:

$$I_Y = \frac{L^3}{EI_o}\left(\frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L^3}{EI_a}\left(\lambda - \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

Por ser elemento simétrico se tiene que $I_Y = I_Y'$. En consecuencia $\alpha = \alpha'$

  - **Cálculo de** $I_{YY'}$

$$I_{YY'} = \frac{L^3}{EI_o}\left(\frac{1}{6} - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L^3}{EI_a}\left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

Nótese que $I_{YY'}$ se ha evaluado sumando la contribución de la figura 1 más la contribución de la figura 2, de la siguiente forma:

$$I_{YY'} = -\frac{W_1 L^2}{12}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)W_1 - \frac{W_2(L-2\lambda L)^2}{12} + \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)W_2$$

$$I_{YY'} = L^2\frac{W_1+W_2}{4} - \left[W_1 L^2 + W_2(L-2\lambda L)^2\right]$$

$$I_{YY'} = -I_{YC.G.} + X_o Z_o W$$

En la cual C.G.= Centro de Gravedad y $X_o, Z_o$ son las coordenadas al C.G. de cada figura. Es necesario observar que se pudo considerar $I_{YY'}$ considerando al elemento como una sola figura. En éste caso se tiene:

$$I_{YC.G.} = \frac{L^3}{12EI_o}\left(1-6\lambda+12\lambda^2-8\lambda^3\right) + \frac{L^3}{12EI_a}\left(6\lambda-12\lambda^2+8\lambda^3\right)$$

$$X_o Z_o W = \frac{L^2}{4}\left(\frac{2\lambda L}{EI_a} + \frac{L}{EI_o}(1-2\lambda)\right)$$

Entonces al efectuar $I_{YY'} = -I_{YC.G} + X_o Z_o W$ se obtiene el resultado antes anotado.

- **Cálculo de** $\alpha, \alpha', \varepsilon$

$$\alpha = \frac{I_Y}{L^2} = \frac{I_Y'}{L^2}$$

$$\alpha = \alpha' = \frac{L}{EI_o}\left(\frac{1}{3}-\lambda+\lambda^2-\frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L}{EI_a}\left(\lambda-\lambda^2+\frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

$$\varepsilon = \frac{I_{YY'}}{L^2} = \frac{L}{EI_o}\left(\frac{1}{6}-\lambda^2+\frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L}{EI_a}\left(\lambda^2-\frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

Que era lo que se quería demostrar. En el ejemplo realizado se ha ilustrado el cálculo de los términos de la matriz de flexibilidad en una forma un tanto diferente al del ejemplo 1. En conclusión se puede calcular $\varepsilon$ de algunas maneras. Finalmente se destaca que en los ejemplos realizados se ha despreciado el efecto de corte $\phi$.

## 12.6 ELEMENTO LINEAL CON DOS SECTORES DE RIGIDEZ INFINITA

En el análisis de pórticos planos con muros de corte o en el cálculo de pórticos con nudos rígidos se debe modelar a los elementos con dos sectores de rigidez infinita como lo muestra la figura 12.12.1. Para éste modelo numérico se desea encontrar la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales que se indica en la figura 12.2.

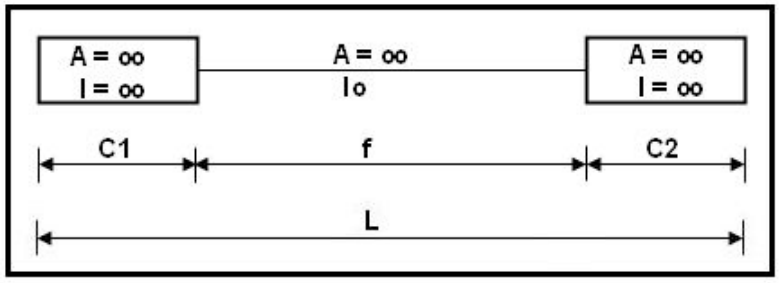



**Figura 12.12.1** Elemento lineal con dos sectores de rigidez infinita.

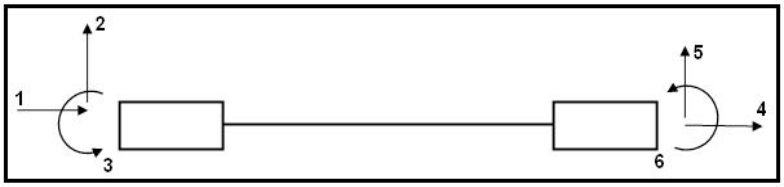



**Figura 12.12.** Sistema $\boldsymbol{P - p}$

El elemento en estudio se puede analizar como si estaría compuesto por tres elementos, uno de longitud $C_1$ que es totalmente rígido, otro de longitud $f$ que es completamente flexible y el último de longitud $C_2$ que es totalmente rígido. En la figura 12.12.3 se indica el artificio de solución.

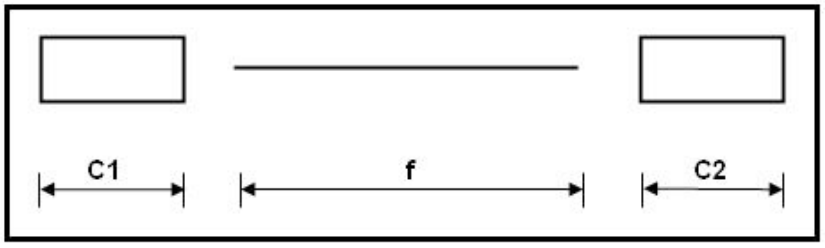



**Figura 12.12.3** Artificio de solución

Sea $\boldsymbol{k}^*$ la matriz de rigidez del elemento de longitud $f$ en coordenadas locales.

$$\boldsymbol{k}^* = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & \textit{SIMÉTRICA} & & \\ 0 & b^* & k^* & & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -b^* & 0 & t^* & \\ 0 & b'^* & a^* & 0 & -b'^* & k'^* \end{bmatrix}$$

Donde:

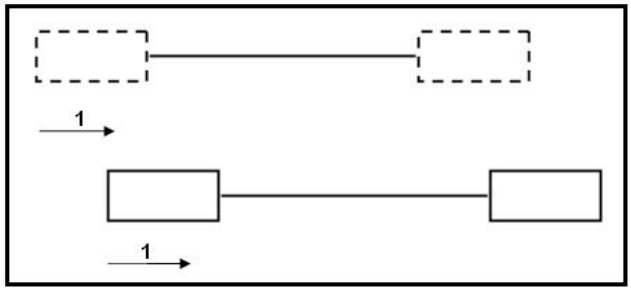
$$r^* = \frac{EA_o}{f} \qquad k^* = \frac{4EI_o}{f}\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) \qquad a^* = \frac{2EI_o}{f}\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) \qquad k^* = k'^*$$

$$b^* = \frac{6EI_o}{f^2}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) \qquad t^* = \frac{12EI_o}{f^3}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) \qquad b'^* = b^*$$

El asterisco se lo ha colocado para indicar que corresponde al elemento de longitud $f$. Para calcular la matriz de rigidez se utiliza el concepto es decir se buscan las fuerzas que producen un determinado corrimiento unitario.

- **Primera columna de $k$**

$$p_1 = 1 \quad y \quad p_i = 0 \quad i \neq 1$$

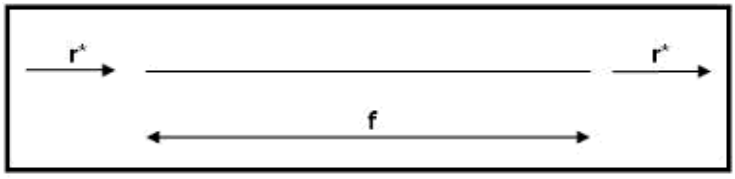



Nótese que el elemento de longitud $f$ se ha deformado la unidad como consecuencia de esto en el elemento se generan las cargas internas que se calculan a continuación.

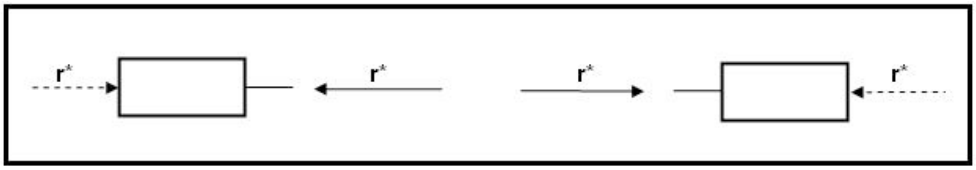
$$\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$$

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ P_3^* \\ P_4^* \\ P_5^* \\ P_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & \textit{SIMÉTRICA} & & \\ 0 & b^* & k^* & & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -b^* & 0 & t^* & \\ 0 & b'^* & a^* & 0 & -b'^* & k'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^* \\ 0 \\ 0 \\ -r^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En lo restante del desarrollo del problema solo se indicará el resultado del producto matricial $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$. Como resultado de la deformación $p_1 = 1$ y las demás nulas en el elemento de longitud $f$ se generan fuerzas axiales de magnitud $r^*$. Por consiguiente se tiene:

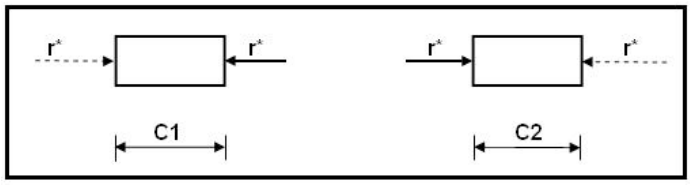



Ahora bien en la unión de los elementos de longitud $f$ y $C_1$ debe existir equilibrio, lo propio sucede en la unión del elemento $f$ con el elemento de longitud $C_2$.



Las fuerzas representadas con líneas entrecortadas actúan en los elementos de longitud $C_1$ y $C_2$ cambiadas de dirección.

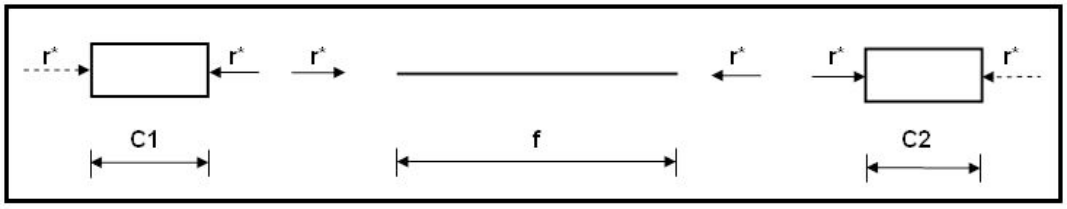
Para que estén en equilibrio los elementos $C_1$ y $C_2$ es necesario la presencia de fuerzas que se lo presenta en la siguiente figura con línea discontinua. Estas fuerzas corresponden a los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez del elemento.




Luego:

$$k_{11} = r^* \qquad k_{41} = -r^*$$
$$k_{21} = k_{31} = k_{51} = k_{61} = 0$$

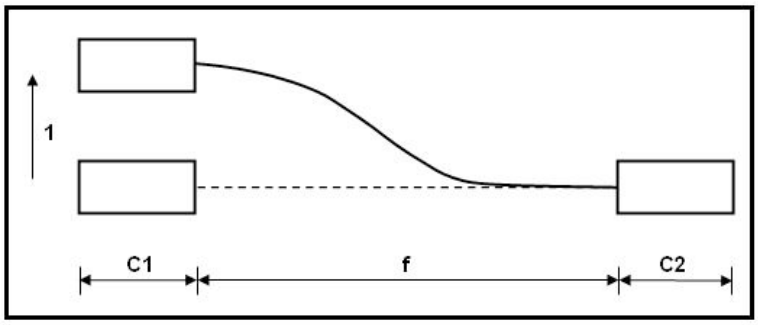
En resumen se tiene:




- **Segunda columna de $k$**

Se procede en forma similar, en éste caso se construye la deformada elemental $p_2$, como el elemento de longitud $C_1$ es totalmente rígido todo sube la unidad y por lo tanto el elemento de longitud $f$ se deforma $p^*$. Por facilidad de escritura se escribe la transpuesta de éste vector.

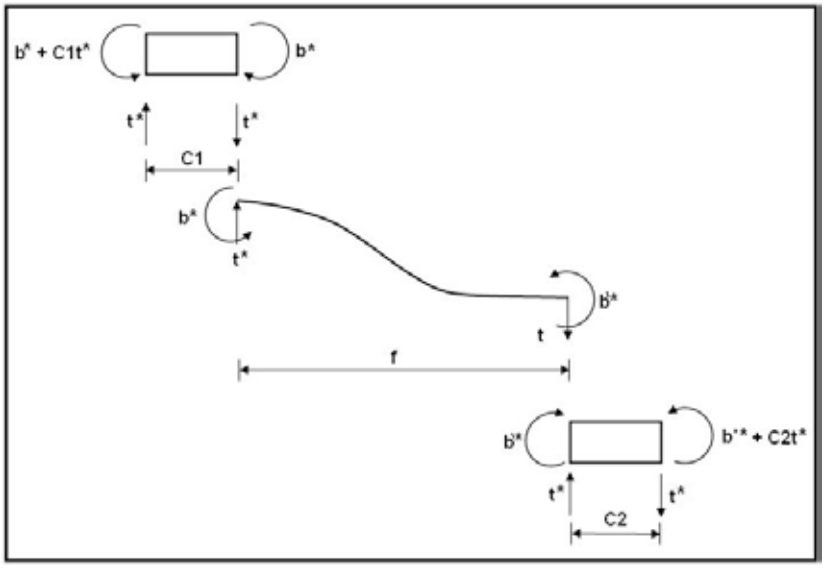
$$p^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$p_2 = 1 \quad y \quad p_i = 0 \quad i \neq 2$$




Al efectuar el producto $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$ se encuentra:

$$P_1^* = 0 \qquad P_2^* = t^* \qquad P_3^* = b^*$$
$$P_4^* = 0 \qquad P_5^* = -t^* \qquad P_6^* = -b'^*$$

En el gráfico que se presenta a continuación se resume el equilibrio de los elementos y de las juntas.

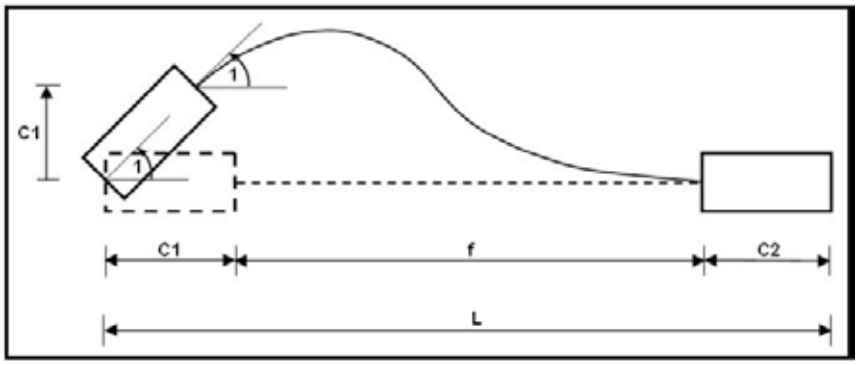



Para hallar los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez hay que observar las fuerzas y momentos que actúan en los extremos izquierdo y derecho de los elementos $C_1$ y $C_2$.

$$k_{12} = P_1 = 0$$
$$k_{22} = P_2 = t^*$$
$$k_{32} = P_3 = b^* + C_1\, t^*$$
$$k_{42} = P_4 = 0$$
$$k_{52} = P_5 = -t^*$$
$$k_{62} = P_6 = b'^* + C_2\, t^*$$

o **Tercera columna de $k$**

$$p_3 = 1 \quad y \quad p_i = 0 \quad i \neq 3$$



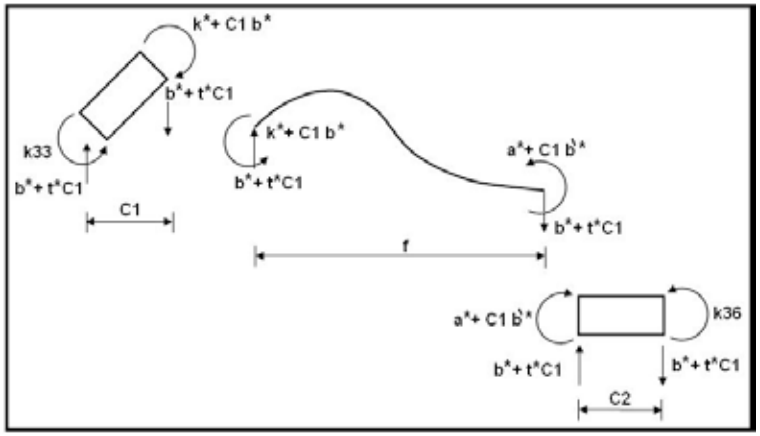

Nótese que al rotar la unidad el elemento de longitud $C_1$ se produce en el elemento de longitud $f$ una rotación unitaria y un corrimiento vertical de magnitud $C_1$, esto es debido a que el elemento de longitud $C_1$ es totalmente rígido. Luego:

$$\boldsymbol{p}^{*t} = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Del producto matricial $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$ se obtiene:

$$P_1^* = 0 \qquad P_2^* = b^* + C_1 t^* \qquad P_3^* = k^* + C_1 b^*$$
$$P_4^* = 0 \qquad P_5^* = -\left(b^* + C_1 t^*\right) \qquad P_6^* = a^* + C_1 b'^*$$

Por lo tanto se tendrá:

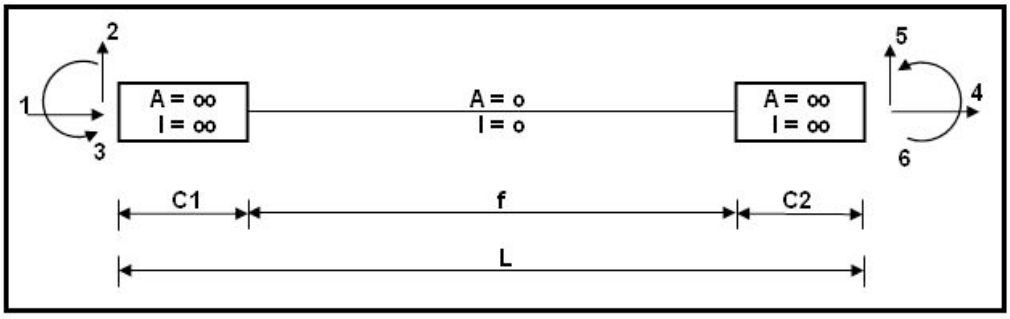



De donde:

$$k_{31} = 0 \qquad k_{32} = b^* + C_1 t^* \qquad k_{33} = k^* + 2C_1 b^* + C_1^2 t^*$$
$$k_{34} = 0 \qquad k_{35} = -\left(b^* + C_1 t^*\right) \qquad k_{36} = a^* + C_1 b'^* + C_2 b^* + C_1 C_2 t^*$$

Procediendo de forma similar se obtienen los elementos de la cuarta, quinta y sexta columna. La matriz de rigidez para el elemento con dos sectores de rigidez infinita indicado en la figura 12.12.1 es la siguiente:

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & & & \\ 0 & b^* + C_1 t^* & k^* + 2C_1 b^* + C_1^2 t^* & \textit{SIMÉTRICA} & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -\left(b^* + C_1 t^*\right) & 0 & t^* & \\ 0 & b'^* + C_2 t^* & a^* + C_1 b'^* + C_2 b^* + C_1 C_2 t^* & 0 & -\left(b'^* + C_2 t^*\right) & k'^* + 2C_2 b'^* + C_2^2 t^* \end{bmatrix}$$




**Sistema** $\boldsymbol{P - p}$

## 12.7 ELEMENTO LINEAL CON INERCIA ESCALONADA

Cuando se diseña una estructura ante cargas verticales por el Método del Pórtico Equivalente el conjunto losa viga se modela como una viga de inercia escalonada como lo muestra la figura 12.13.1

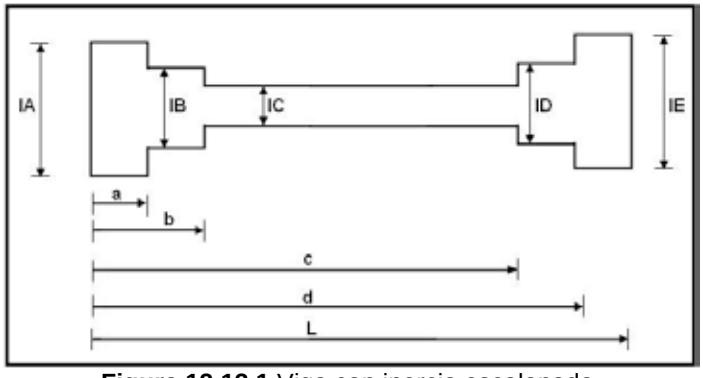



**Figura 12.13.1** Viga con inercia escalonada.

En este caso se han dibujado cinco tipos de inercia, se puede tener más o menos de acuerdo al macizado de la losa. Pero no necesariamente la variación de inercia va a ser $I_A > I_B > I_C$, esto se cumple en las losas. Pero se puede tener el caso contrario $I_A < I_B < I_C$ este caso es para cuando se modela daño por sismo.

Efectivamente el diagrama de momentos por sismo es de tipo triangular con valores altos de momentos en los extremos en consecuencia son éstos puntos los que más se dañan de ahí que la inercia va a ser menor en los extremos y a medida que se aproxima al centro de luz el daño es menor y consecuentemente la inercia a flexión mayor. Se puede considerar más escalones en el modelo pero la forma de cálculo que se indica a continuación es la misma.

En la figura 12.13.1 la longitud de cada escalón de inercia se le acota a partir del nudo inicial para poder sistematizar el cálculo como se verá posteriormente. El diagrama de masas elásticas para el elemento analizado se lo presenta en la figura 12.13.2

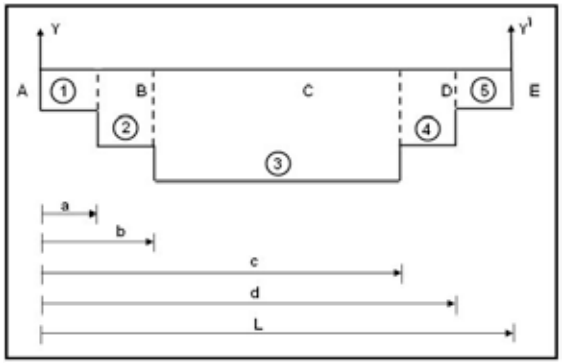



**Figura 12.13.2** Diagrama de masas elásticas y numeración de figuras.

La nomenclatura utilizada en el diagrama de la figura 12.13.2 es la siguiente:

$$A = \frac{1}{EI_A} \qquad B = \frac{1}{EI_B} \qquad C = \frac{1}{EI_C} \qquad D = \frac{1}{EI_D} \qquad E = \frac{1}{EI_E}$$

Con la forma acotada para definir las inercias y longitudes de los escalones, el cálculo de los momentos de inercia y áreas se sintetiza en la tabla 12.1

**Tabla 12.1** Cálculo de momentos de inercia del diagrama de masas elásticas.

| Figura | $X_o$ | $W$ | $I_Y$ | $I_Y'$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{a}{2}$ | $A\,a$ | $\frac{A\,a^3}{3}$ | $\frac{A\left[L^3-(L-a)^3\right]}{3}$ |
| 2 | $\frac{a+b}{2}$ | $B(b-a)$ | $\frac{B(b^3-a^3)}{3}$ | $\frac{B\left[(L-a)^3-(L-b)^3\right]}{3}$ |
| 3 | $\frac{b+c}{2}$ | $C(c-b)$ | $\frac{C(c^3-b^3)}{3}$ | $\frac{C\left[(L-b)^3-(L-c)^3\right]}{3}$ |
| 4 | $\frac{c+d}{2}$ | $D(d-c)$ | $\frac{D(d^3-c^3)}{3}$ | $\frac{D\left[(L-c)^3-(L-d)^3\right]}{3}$ |
| 5 | $\frac{d+L}{2}$ | $E(L-d)$ | $\frac{E(L^3-d^3)}{3}$ | $\frac{E(L-d)^3}{3}$ |
| | | $\sum W$ | $\sum I_Y$ | $\sum I_Y'$ |

Una vez calculado $W, I_Y, I_Y'$ se procede de acuerdo a lo indicado en el apartado 12.4.

**En el Capítulo 13 se realizan ejemplos numéricos de lo estudiado en el presente capítulo.**

## 12.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

**EJERCICIO N.- 1**

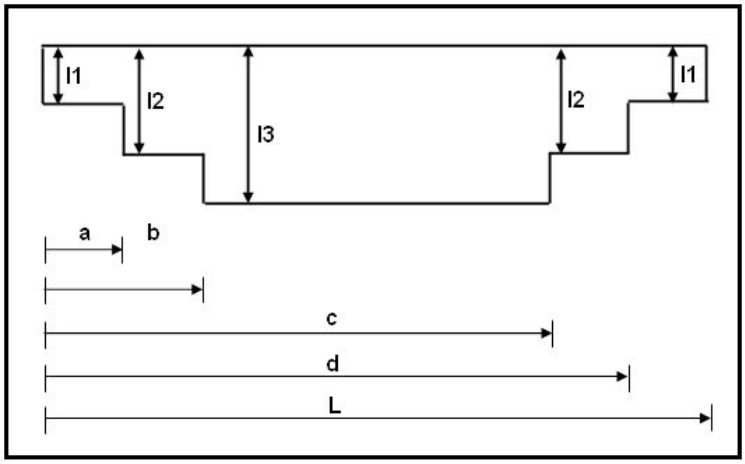
Para el elemento lineal presentado en la figura 12.2 obtener la matriz de rigidez usando el concepto. Por lo tanto encontrar las fuerzas y momentos que producen un determinado corrimiento unitario.

**EJERCICIO N.- 2**

Obtener los elementos de la quinta columna de la matriz de rigidez de un elemento con dos sectores de rigidez infinita.

**EJERCICIO N.- 3**

Usando el diagrama de masas elásticas elaborar un programa para calcular $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ para el siguiente elemento:




**EJERCICIO N.- 4**

Presentar un caso práctico en donde se puede emplear los resultados obtenidos en el ejercicio anterior. Ilustre lo mismo para el caso de un elemento con dos sectores de rigidez infinita.

**EJERCICIO N.- 5**

Generalice el Ejercicio N.- 3 y elabore un diagrama de flujo para obtener $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ para una viga escalonada con inercias diferentes. El número de escalones es arbitrario.

*CAPITULO 13*

# ENSAMBLAJE DIRECTO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA


## RESUMEN

Se presenta el fundamento matemático que conduce al algoritmo denominado ensamblaje directo para encontrar la matriz de rigidez de una estructura por medio del ordenador. Se obtiene esta matriz para estructuras planas cuyos elementos se estudiaron en el Capítulo 12.

Se presentan dos formas de realizar el ensamblaje directo de la matriz de rigidez, en la primera se trabaja con un arreglo de dos dimensiones y en la segunda con un arreglo de una dimensión y solo con la matriz triangular superior de $\boldsymbol{K}$, de esta manera se pueden resolver estructuras con un mayor número de grados de libertad, para ello se debe utilizar los programas de solución de ecuaciones indicados en el Capítulo 11. Para lograr este objetivo se presentan dos diagramas de flujo que permiten al lector programar el cálculo de la matriz de rigidez en forma total, en dos dimensiones o solo la matriz triangular superior en una sola dimensión.


## 13. 1 MATRIZ DE COMPATIBILIDAD $A$

Se va a obtener la matriz de compatibilidad $\boldsymbol{A}$ orientada al uso del ordenador, para el pórtico presentado a la izquierda de la figura 13.1 Para no escribir demasiados números el marco que se analiza solo tiene dos elementos. En la gráfica de la parte central se indica el sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q-q}$ y a la derecha el sistema de coordenadas globales de los elementos $\boldsymbol{P-p}$ . La estructura que tiene 4 grados de libertad.

Antes de calcular la matriz de compatibilidad es necesario realizar las siguientes acotaciones:

i) Los elementos del pórtico plano son totalmente flexibles, ésta hipótesis facilita la elaboración de un programa de computación para obtener la matriz de rigidez de la estructura.

ii) El sistema de coordenadas $\boldsymbol{P-p}$ se considera en coordenadas globales.

Para el ejemplo analizado las seis primeras coordenadas del elemento corresponden a la columna y las siguientes seis a la viga.

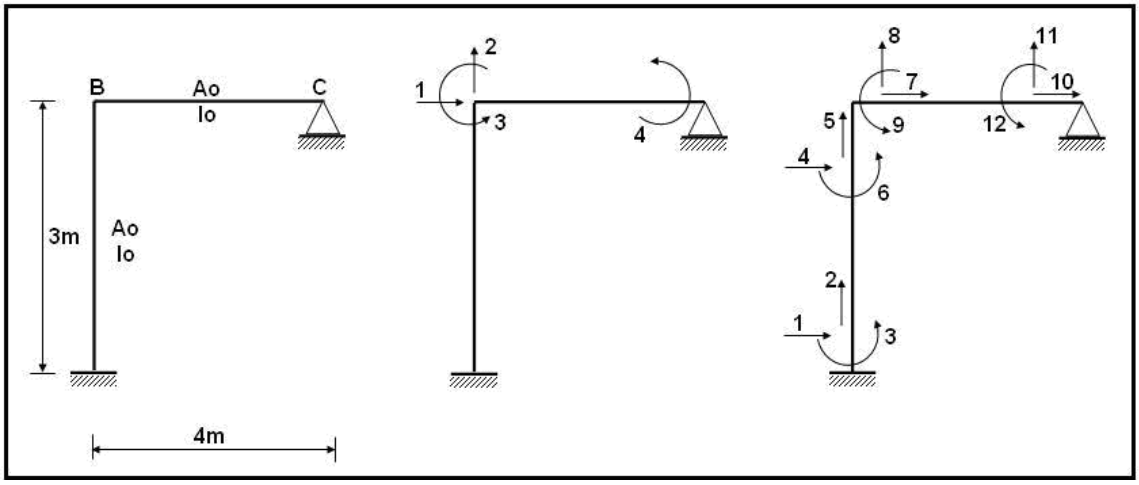



**Figura 13.1** Pórtico son elementos totalmente flexibles, sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$, y sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

Si bien es cierto en el Capítulo 5 ya se presentó las coordenadas globales de un elemento y en el Capítulo 12 se obtuvo la matriz de rigidez en coordenadas globales no está demás repasar el significado de las deformaciones $\boldsymbol{p}$ y las cargas $\boldsymbol{P}$ lo que se realiza a continuación pero previamente en la figura 13.2 se presentan las coordenadas globales de un elemento inclinado que es el caso más general.

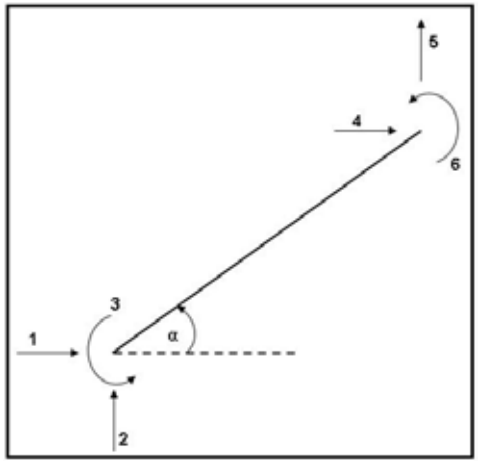



**Figura 13.2** Coordenadas globales de un elemento.

El vector transpuesto de las deformaciones $\boldsymbol{p}$ tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{p}^t = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{bmatrix}$$

La convención de signos positiva de las deformaciones $\boldsymbol{p}$ se indica en la figura 13.2 y su significado es el siguiente:

$p_1$ Es la componente de desplazamiento horizontal del nudo inicial.

$p_2$ Es la componente de desplazamiento vertical del nudo inicial.

$p_3$ Es la rotación del nudo inicial.

$p_4$ Es la componente de desplazamiento horizontal del nudo final.

$p_5$ Es la componente de desplazamiento vertical del nudo final.

$p_6$ Es la rotación del nudo final.

Por otra parte el vector de cargas $P$ es:

$$\boldsymbol{P}^t = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{bmatrix}$$

$P_1$ Es la fuerza horizontal en el nudo inicial.

$P_2$ Es la fuerza vertical en el nudo inicial.

$P_3$ Es el momento del nudo inicial.

$P_4$ Es la fuerza horizontal del nudo final.

$P_5$ Es la fuerza vertical del nudo final.

$P_6$ Es el momento del nudo final.

**Se destaca que en los programas de computación las estructuras se resuelven en coordenadas globales** y al final las cargas se pasan a coordenadas locales que son más fáciles de interpretar. Retornando al objetivo inicial del presente apartado, que es demostrar el fundamento del ensamblaje directo a continuación se procede a calcular la matriz $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q}$$

- **Primera columna de $\boldsymbol{A}$**

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

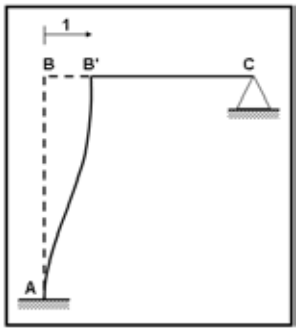



**Figura 13.3.1** Deformada elemental $q_1$

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_4 = 1 \quad p_5 = 0 \quad p_6 = 0$$
$$p_7 = 1 \quad p_8 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{12} = 0$$

- **Segunda columna de $\boldsymbol{A}$**

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

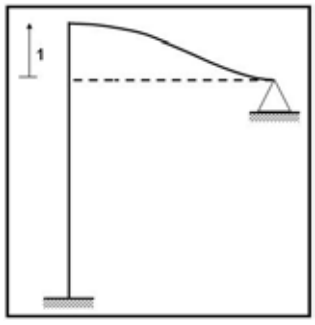



**Figura 13.3.2** Deformada elemental $q_2$

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_5 = 1 \quad p_6 = 0$$
$$p_7 = 0 \quad p_8 = 1 \quad p_9 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{12} = 0$$

- **Tercera columna de** $A$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$

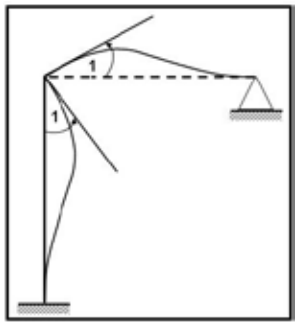



**Figura 13.3.3** Deformada elemental $q_3$

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_6 = 1$$
$$p_7 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_9 = 1 \quad p_{10} = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{12} = 0$$

- **Cuarta columna de** $A$

$$q_4 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 4$$

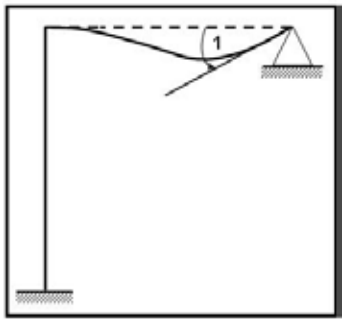



**Figura 13.3.4** Deformada elemental $q_4$

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_6 = 0$$
$$p_7 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{12} = 1$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(1)} \\ === \\ \boldsymbol{A}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**La matriz $A$ orientada al uso del computador está compuesta únicamente por ceros y unos, como se acaba de apreciar.** Su cálculo es muy sencillo pero implica demasiados números.

## 13.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

La matriz de rigidez de un elemento está en concordancia con el sistema de coordenadas del elemento. Por lo tanto si el sistema de coordenadas de elemento está en coordenadas globales la matriz de rigidez del elemento se evaluará en coordenadas globales.

Por ahora no interesan los valores de la matriz de rigidez de un elemento razón por la cual se resuelve en forma literal el pórtico plano de la figura 13.1. Se va a utilizar el índice 1 para indicar que corresponde a la columna y el índice 2 para la viga. Al emplear los formularios indicados en el capítulo 12 y considerando que se resuelve literalmente se tiene para el ejemplo, lo siguiente:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Como se estudió en el Capítulo 10, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene con la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}^{(i)\,t} \boldsymbol{k}^{(i)} \boldsymbol{A}^{(i)}$$

Para el presente ejemplo los triples productos matriciales indicados en la ecuación, son:

- **Producto** $A^{(1)t}\, k^{(1)}\, A^{(1)}$

$$\boldsymbol{A^{(1)t}k^{(1)}\,A^{(1)}} = \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} & 0 \\ k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} & 0 \\ k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Producto** $A^{(2)t}\, k^{(2)}\, A^{(2)}$

$$\boldsymbol{A^{(2)t}k^{(2)}\,A^{(2)}} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de rigidez del marco plano resulta:

$$\boldsymbol{K} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} k_{44}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{45}^{(1)} + k_{12}^{(2)} & k_{46}^{(1)} + k_{13}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ \hdashline k_{54}^{(1)} + k_{21}^{(2)} & k_{55}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{56}^{(1)} + k_{23}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ \hdashline k_{64}^{(1)} + k_{31}^{(2)} & k_{65}^{(1)} + k_{32}^{(2)} & k_{66}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ \hdashline k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{array}\right]$$

## 13.3 ENSAMBLAJE DIRECTO

En el Capítulo 5 se definió lo que es el vector de colocación, VC, de un elemento; para el marco plano de la figura 13.1 los vectores de colocación, son:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$VC(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Los tres primeros dígitos de VC corresponden a los grados de libertad del nudo inicial y los tres últimos a los grados de libertad del nudo final.

Se llega a obtener el mismo resultado de la matriz de rigidez de la estructura analizada en los numerales anteriores, si sobre la matriz de rigidez de cada elemento se coloca el vector de colocación respectivo, en la parte superior y a la derecha, como se explica a continuación.

Los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez del elemento 1 van a la posición cero en la matriz de rigidez de la estructura pero como no existe la posición toda la primera columna no contribuye, razón por la cual se traza una línea vertical, lo propio sucede con la segunda y tercera columnas. Los elementos de la cuarta columna si contribuyen a la formación de **K**. Ahora bien, a nivel de filas, la primera fila tiene un cero por lo que no contribuye trazándose por tanto una línea horizontal, de igual manera la segunda y tercera filas no contribuyen.

- **Elemento 1**

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Los elementos no rayados son la contribución del elemento 1 a la matriz de rigidez de la estructura. El vector de colocación indica la posición en la cual deben ubicarse estos términos así el elemento $k_{44}^{(1)}$ va a la columna 1 fila 1, el término $k_{54}^{(1)}$ va a la columna 1 fila 2, etc.

Por lo tanto la matriz de rigidez de miembro se ensambla en la matriz de rigidez de la estructura mediante su vector de colocación.

- **Elemento 2**

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

El elemento $k_{11}^{(2)}$ va a la posición (1,1) y se sumará al término $k_{44}^{(1)}$ que ya estaba en esa posición, el término $k_{21}^{(2)}$ va a la posición (1,2) y se suma a $k_{54}^{(1)}$, etc. De esta forma se obtiene la matriz de rigidez para la estructura de la figura 13.1 y cuyo resultado se indica al final del apartado 13.2.

El fundamento del ensamblaje directo viene dado por el concepto de la matriz de rigidez de una estructura asociado a la circunstancia de que la matriz **A** está compuesta únicamente por ceros y unos.

## 13.4 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO 1**

Determinar la matriz de rigidez, por ensamblaje directo de la estructura mostrada, a la izquierda de la figura 13.4. El sistema de coordenadas y la numeración de los elementos se indican a la derecha de la figura 13.4. Considerar que: $\frac{I_0}{A_0 L^2} = \frac{1}{80}$

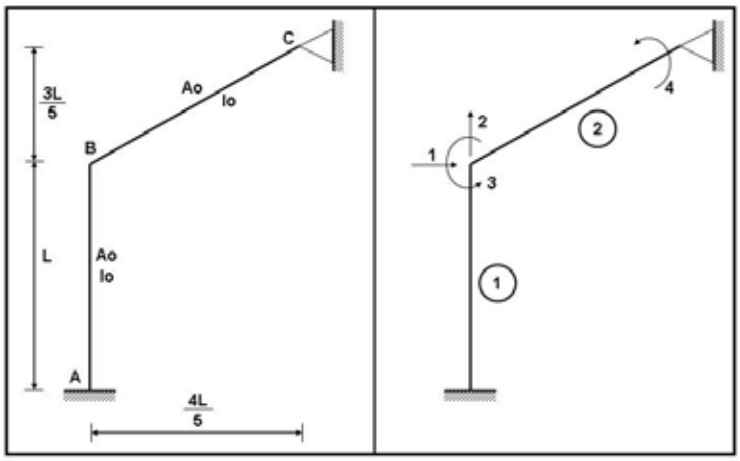



**Figura 13.4** Estructura de Ejemplo 1 y sistema de coordenadas generalizadas **Q – q**

- **SOLUCIÓN**

Para el elemento uno, se considera que el nudo inicial corresponde al nudo A y el final al nudo B. Luego el ángulo que forma el eje del elemento con el eje X es 90 grados. La matriz de rigidez en coordenadas globales resulta.

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{EI_0}{L^3}$$

No se considera el efecto de corte y se ha reemplazado la condición de que $A_0 = 80\ I_o / L^2$ dato del problema. Para el elemento 1 el vector de colocación es:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego al colocar el VC sobre y a la derecha de la matriz de rigidez del elemento, se tiene:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{EI_0}{L^3} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura analizada es de 4 x 4 y la contribución del miembro 1, es:

$$\boldsymbol{K} = \left[\begin{array}{c:c:c} 12 & & 6L \\ \hdashline & 80 & \\ \hdashline 6L & & 4L^2 \\ \hdashline & & \end{array}\right] \frac{EI_o}{L^3}$$

Para el elemento 2 se tiene que:

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Al reemplazar estos valores en la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales y al proceder en forma similar al elemento 1 teniendo presente que:

$$VC^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Se tiene:

$$k^{(2)} = \frac{EI_o}{L^3} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1388}{25} & \frac{816}{25} & \frac{-18L}{5} & \frac{-1388}{25} & \frac{-816}{25} & \frac{-18L}{5} \\ \frac{816}{25} & \frac{912}{25} & \frac{24L}{5} & \frac{-816}{25} & \frac{-912}{25} & \frac{24L}{5} \\ \frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 4L^2 & \frac{18L}{5} & \frac{-24L}{5} & 2L^2 \\ \frac{-1388}{25} & \frac{-816}{25} & \frac{18L}{5} & \frac{1388}{25} & \frac{816}{25} & \frac{18L}{5} \\ \frac{-816}{25} & \frac{-912}{25} & \frac{-24L}{5} & \frac{816}{25} & \frac{912}{25} & \frac{-24L}{5} \\ \frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 2L^2 & \frac{18L}{5} & \frac{-24L}{5} & 4L^2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{array}$$

La contribución del elemento 2 a la matriz de rigidez del pórtico analizado, es:

$$K = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \frac{1388}{25} & \frac{816}{25} & \frac{-18L}{5} & \frac{-18L}{5} \\ \hdashline \frac{816}{25} & \frac{912}{25} & \frac{24L}{5} & \frac{24L}{5} \\ \hdashline \frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 4L^2 & 2L^2 \\ \hdashline \frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 2L^2 & 4L^2 \end{array}\right] \frac{EI_o}{L^3}$$

Al sumar la contribución de los elementos 1 y 2 se obtiene:

$$K = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \frac{1688}{25} & \frac{816}{25} & \frac{12L}{5} & \frac{-18L}{5} \\ \hdashline \frac{816}{25} & \frac{2912}{25} & \frac{24L}{5} & \frac{24L}{5} \\ \hdashline \frac{12L}{5} & \frac{24L}{5} & 8L^2 & 2L^2 \\ \hdashline \frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 2L^2 & 4L^2 \end{array}\right] \frac{EI_o}{L^3}$$

- **EJEMPLO 2**

Determinar la matriz de rigidez del pórtico plano presentado a la izquierda de la figura 13.5 si sus elementos son totalmente flexibles. Las columnas son de 40 x 40 cm., y la viga de 30 x 30 cm., Considerar un módulo $E = 2100000 \quad T/m^2$.

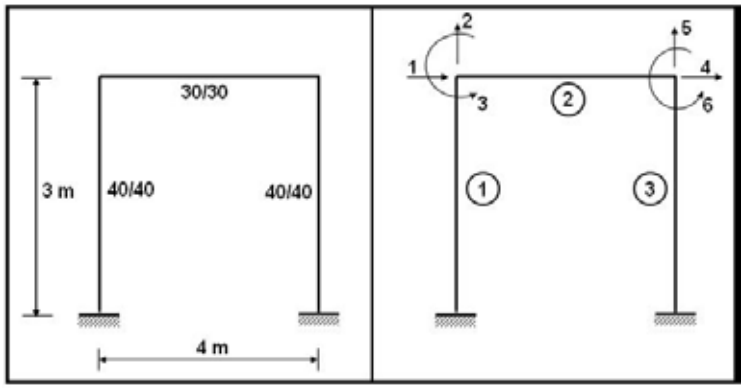



**Figura 13.5** Pórtico de Ejemplo 2 y sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$

- **SOLUCIÓN**

Se indican las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas globales y los respectivos vectores de colocación.

- **Elemento 1**

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1988.00 & 0.00 & -2982.00 & -1988.00 & 0.00 & -2982.00 \\ 0.00 & 112000.00 & 0.00 & 0.00 & -112000.00 & 0.00 \\ -2982.00 & 0.00 & 5964.00 & 2982.00 & 0.00 & 2982.00 \\ -1988.00 & 0.00 & 2982.00 & 1988.00 & 0.00 & 2982.00 \\ 0.00 & -112000.00 & 0.00 & 0.00 & 112000.00 & 0.00 \\ -2982.00 & 0.00 & 2982.00 & 2982.00 & 0.00 & 5964.00 \end{bmatrix}$$

$$VC^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 2**

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 47250.00 & 0.00 & 0.00 & -47250.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 267.75 & 535.50 & 0.00 & -267.75 & 535.50 \\ 0.00 & 535.50 & 1428.00 & 0.00 & -535.50 & 714.00 \\ -47250.00 & 0.00 & 0.00 & 47250.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -267.75 & -535.50 & 0.00 & 267.75 & -535.50 \\ 0.00 & 535.50 & 714.00 & 0.00 & -535.50 & 1428.00 \end{bmatrix}$$

$$VC^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 3**

$$k^{(3)} = k^{(1)}$$

$$VC^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Al realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura se obtiene:

$$K = \begin{bmatrix} 49238.00 & 0.00 & 2982.00 & -47250.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 112270.00 & 535.50 & 0.00 & -267.75 & 535.50 \\ 2982.00 & 535.50 & 7392.00 & 0.00 & -535.50 & 714.00 \\ -47250.00 & 0.00 & 0.00 & 49238.00 & 0.00 & 2982.00 \\ 0.00 & -267.75 & -535.50 & 0.00 & 112270.00 & -535.50 \\ 0.00 & 535.50 & 714.00 & 2982.00 & -535.50 & 7392.00 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 3**

El pórtico plano presentando en la parte superior de la figura 13.6 tiene dos muros de corte de 20/200 cm y vigas de 60/60 cm. Las fuerzas sísmicas que actúan sobre el pórtico son de 8 T., y 14 T. Se considera que las vigas son axialmente rígidas y todo lo demás completamente flexible. El módulo de elasticidad del material $E = 2400000\ \frac{T}{m^2}$. Se pide resolver el pórtico por el Método de los Desplazamientos, en verdad se debería calcular solo la matriz de rigidez de la estructura, que es lo que abarca el Capítulo pero por considerarlo de interés se resuelve completamente como lo hace el computador.

En la parte inferior izquierda, se indica la numeración de los nudos, elementos y se destaca que la luz es de 6.0 m., a la derecha se presentan los 10 grados de libertad que tiene la estructura.

- **SOLUCIÓN**

El Ejemplo ha sido resuelto utilizando el sistema de computación ***CEINCI-LAB*** pero con modificaciones ya que la librería de programas de ***CEINCI-LAB*** son para pórticos con elementos totalmente flexibles y aquí solo las vigas son axialmente rígidas, son ligeras las modificaciones que se realizan pero conceptuales.

Cuando se tiene muros de corte, es fundamental calcular la matriz de rigidez de las vigas, considerando nudos rígidos, tema que fue abordado en el Capítulo 12. En este ejercicio solo se considera nudos rígidos en las vigas, en las columnas no para que el usuario determine la matriz de rigidez de los muros sin nudos rígidos y la matriz de rigidez de las vigas con nudos rígidos.

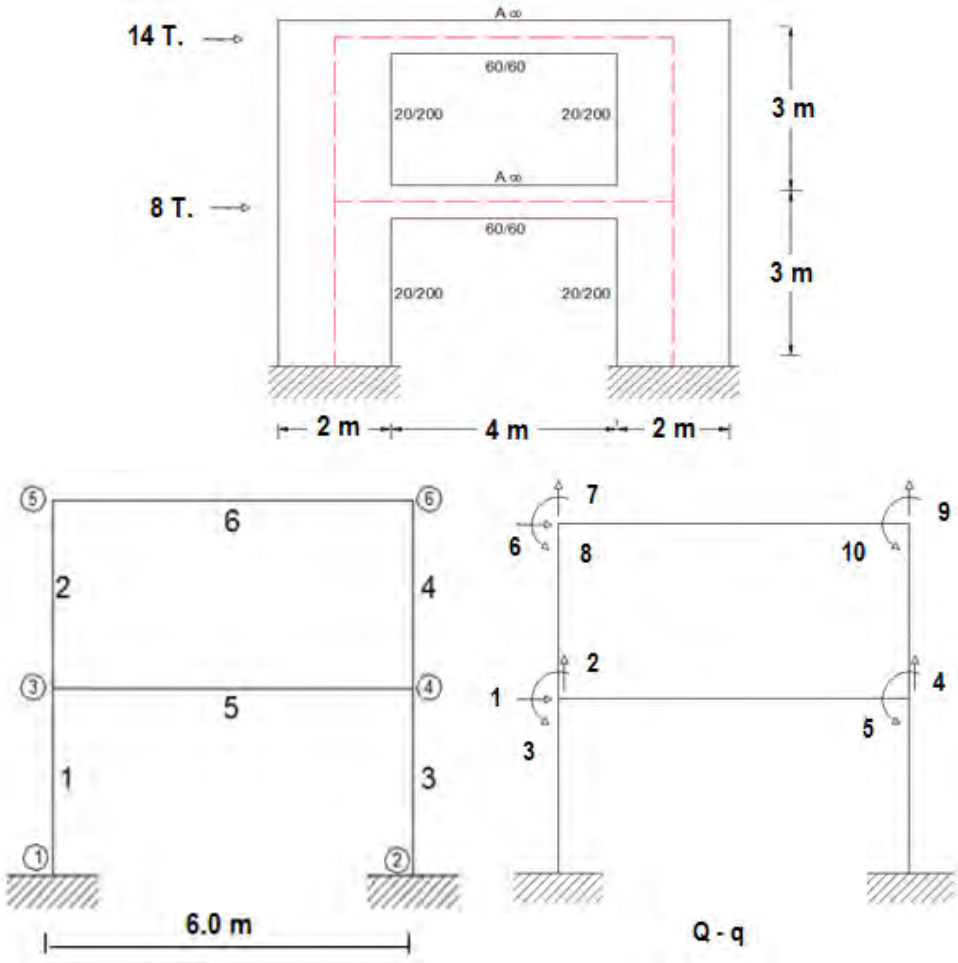
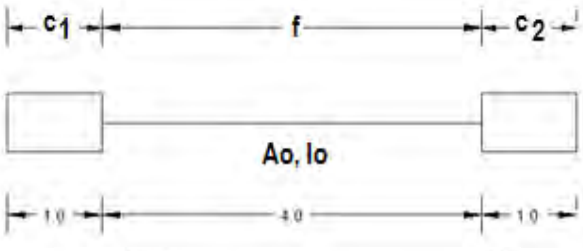



**Figura 13.6** Pórtico con muros de corte sometida a cargas laterales.

- **Matriz de rigidez de una viga con nudo rígido**

No considerar nudos rígidos en las vigas es un verdadero error, no así en los muros que se puede omitir el nudo rígido. La nomenclatura utilizada en el capítulo 12 y la respectiva matriz de rigidez del elemento se presentan a continuación, destacando que los términos que tienen asterisco se calculan su rigidez con la luz libre $f$.




$$k^* = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & \text{SIMÉTRICA} & & \\ 0 & b^* & k^* & & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -b^* & 0 & t^* & \\ 0 & b'' & a^* & 0 & -b'' & k'' \end{bmatrix}$$

Donde:

$$r^* = \frac{EA_o}{f} \qquad k^* = \frac{4EI_o}{f}\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) \qquad a^* = \frac{2EI_o}{f}\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) \qquad k^* = k''$$

$$b^* = \frac{6EI_o}{f^2}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) \qquad t^* = \frac{12EI_o}{f^3}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) \qquad b'' = b^*$$

$C_1$=1m, $C_2$=1m, f= 4 m, L= 6m

$$K_3 = 10\text{^}5\begin{pmatrix} 2.16 & & & & & \\ 0 & 0.045 & & \text{SIMÉTRICA} & & \\ 0 & 0.135 & 0.471 & & & \\ -2.16 & 0 & 0 & 2.16 & & \\ 0 & -0.045 & -0.135 & 0 & 0.045 & \\ 0 & 0.135 & 0.341 & 0 & -0.135 & 0.471 \end{pmatrix}$$

El programa ***kmiembro_nudo_rigido*** determina la matriz de rigidez presentada.

- **Matriz de rigidez en un muro sin nudo rígido**

$$KH = 10\text{^}5\begin{pmatrix} 2.438 & & & & & & & & & \\ 0 & 6.40 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 4.876 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 6.40 & & \text{SIMÉTRIC} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.876 & & & & & \\ -1.219 & 0 & 0.914 & 0 & 0.914 & 1.219 & & & & \\ 0 & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2 & & & \\ -0.914 & 0 & 0.305 & 0 & 0 & 0.914 & 0 & 2.439 & & \\ 0 & 0 & 0 & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2 & \\ -0.914 & 0 & 0 & 0 & 0.305 & 0.914 & 0 & 0 & 0 & 2.438 \end{pmatrix}$$

Los vectores de colocación con los que se halla la matriz de rigidez de la estructura y posteriormente las deformaciones de los elementos en coordenadas globales, son:

$$VC^{(1)} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3]$$
$$VC^{(2)} = [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 8]$$
$$VC^{(3)} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 5]$$
$$VC^{(4)} = [1 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 9 \;\; 10]$$
$$VC^{(5)} = [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 5]$$
$$VC^{(6)} = [6 \;\; 7 \;\; 8 \;\; 6 \;\; 9 \;\; 10]$$

Nótese los vectores de colocación de las vigas, por ser axialmente rígidos se repiten los grados de libertad para la componente horizontal del nudo inicial y final.

$$KT = 10\text{^}5 \begin{pmatrix} 2.438 & & & & & & & & & \\ 0 & 6.445 & & & & & & & & \\ 0 & 0.135 & 5.347 & & & \text{SIMÉTRIC} & & & & \\ 0 & -0.045 & -0.135 & 6.445 & & & & & & \\ 0 & 0.135 & 0.341 & -0.135 & 5.347 & & & & & \\ -1.219 & 0 & 0.914 & 0 & 0.914 & 1.219 & & & & \\ 0 & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2 & & & \\ -0.914 & 0 & 0.305 & 0 & 0 & 0.914 & 0 & 2.439 & & \\ 0 & 0 & 0 & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2 & \\ -0.914 & 0 & 0 & 0 & 0.3052 & 0.914 & 0 & 0 & 0 & 2.438 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ se debe tener en cuenta que las vigas son axialmente rígidas en consecuencia se tiene que determinar una fuerza axial $N$, como se vio en el capítulo IV. El vector transpuesta de $\boldsymbol{Q}$ es:

$$\boldsymbol{Q^t} = [8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 14 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales se encuentra el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$.

$$\boldsymbol{q} = 10^{-3} * \begin{pmatrix} 0.3991\ m \\ 0.0229\ m \\ -0.1457\ rad \\ -0.0229\ m \\ -0.1457\ rad \\ 0.9479\ m \\ 0.0341\ m \\ -0.1435\ rad \\ -0.0341\ m \\ -0.1435\ rad \end{pmatrix}$$

Con el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$, y con los vectores de colocación se encuentra primero las deformaciones en los elementos en coordenadas globales, así por ejemplo para el elemento 1, se tiene:

$$p^{t(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Primero se encera el vector $\boldsymbol{p}$ en coordenadas globales que tiene 6 elementos, se ha escrito la transpuesta para ahorrar espacio. El VC del elemento 1 es: $VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$

Cuando el vector de colocación es cero, queda el cero del vector $\boldsymbol{p}$, para el ejemplo quedan los tres primeros ceros en la cuarta posición se tiene que el vector de colocación es 1, luego del vector $\boldsymbol{q}$ se toma la primera cantidad, para la posición cinco se toma la segunda cantidad porque el VC es 2 y para la sexta posición la tercera cantidad del vector $\boldsymbol{q}$. Quedando.

$$\boldsymbol{p^{t(1)}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.3991 \quad 0.0229 \quad -0.1457] * 10^{-3}$$

Posteriormente se encuentran las cargas $\boldsymbol{P}$ en coordenadas globales que se denomina $\boldsymbol{P_G}$, para diferenciar de las cargas $\boldsymbol{P}$ en coordenadas locales $\boldsymbol{P_L}$

$$\boldsymbol{P_G} = \boldsymbol{k_3}\, \boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{P_L} = \boldsymbol{T_{2-3}}\, \boldsymbol{P_G}$$

Al no existir cargas en los elementos no se tiene Problema Primario.

Donde $\boldsymbol{k}_3$ es la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales, que en este ejercicio se ha denominado $KH$; por otra parte, $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es la matriz de paso de coordenadas locales a globales, estudiada en el capítulo 5.

Lo indicado se verá con más detenimiento en el siguiente capítulo. Los resultados que se hallan para todos los elementos son:

$$F = \begin{pmatrix} -7.318 & 11 & 32.047 & 7.318 & -11 & 0.954 \\ -3.579 & 7 & 10.264 & 3.579 & -7 & 10.736 \\ 7.318 & 11 & 32.047 & -7.318 & -11 & 0.954 \\ 3.579 & 7 & 10.264 & -3.579 & -7 & 10.736 \\ 0 & -3.739 & -11.218 & 0 & 3.739 & -11.218 \\ 0 & -3.579 & -10.736 & 0 & 3.579 & -10.736 \end{pmatrix}$$

Las fuerzas y momentos en cada uno de los elementos se indican en la figura 13.7.

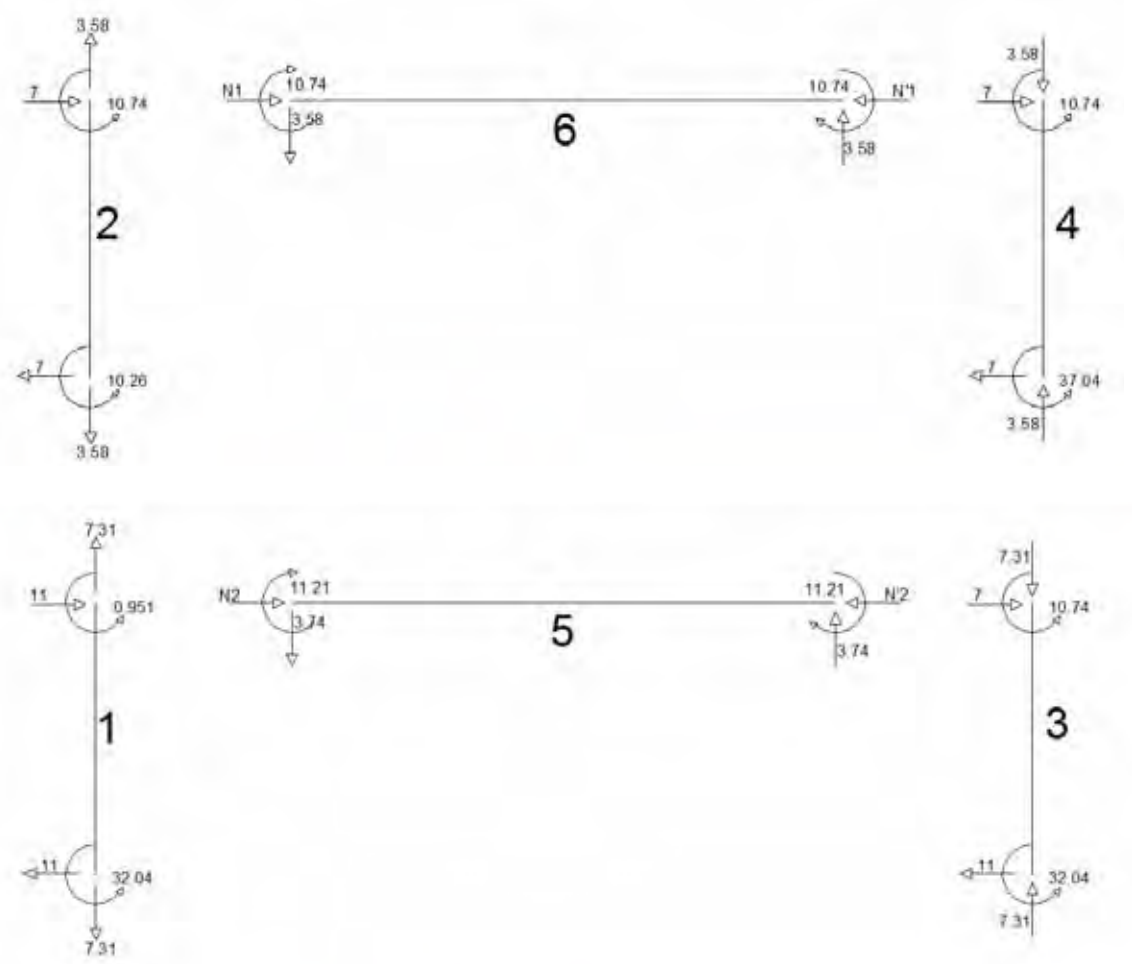



**Figura 13.7** Fuerzas y momentos finales en los elementos.

Al calcular el vector $\boldsymbol{Q}$ se halló $N_2 = 4\,T.$, y el valor de $N_1 = 7\,T$. Finalmente se deja al lector la verificación del equilibrio de los nudos.

- **EJEMPLO 4**

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la armadura plana indicada a la izquierda de la figura 13.8; a la derecha se tiene el sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q-q}$ . En la tabla 13.1 se indica el área de cada uno de los elementos.

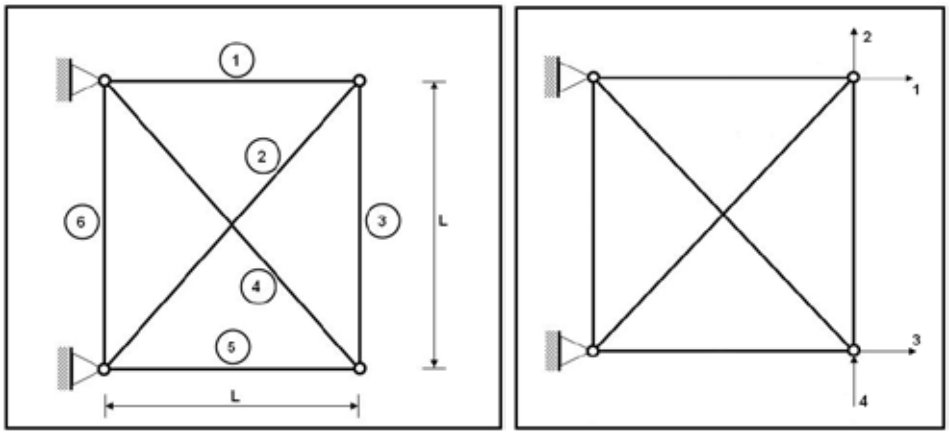



**Figura 13.8** Armadura plana y coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q-q}$

**Tabla 13.1** Área transversal de los elementos.

| Elemento | Área Transversal |
|---|---|
| 1 | $A_o$ |
| 2 | $\frac{A_o}{\sqrt{2}}$ |
| 3 | $A_o$ |
| 4 | $\frac{A_o}{\sqrt{2}}$ |
| 5 | $A_o$ |
| 6 | $A_o$ |

- **SOLUCIÓN**

De acuerdo al sistema de coordenadas generalizadas presentado a la derecha de la figura 13.8, los vectores de colocación de cada elemento son los siguientes:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$VC(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$VC(3) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$VC(4) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$VC(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$VC(6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A continuación se escribe la matriz de rigidez de cada uno de los elementos en coordenadas globales con su respectivo vector de colocación escrito sobre la matriz y a la derecha.

- **Elemento 1**

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \frac{EA_0}{L}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **Elemento 2**

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \frac{EA_0}{2L}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **Elemento 3**

$$\boldsymbol{k}^{(3)} = \frac{EA_0}{L}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **Elemento 4**

$$\boldsymbol{k}^{(4)} = \frac{EA_0}{2L}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **Elemento 5**

$$\boldsymbol{k}^{(5)} = \frac{\boldsymbol{EA_0}}{\boldsymbol{L}}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

El elemento 6 no contribuye a la matriz de rigidez de la estructura ya que su vector de colocación solo tiene ceros.

- **Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura**

$$\boldsymbol{K} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1+0.25 & 0.25 & & \\ \hdashline 0.25 & 0.25+1 & & -1 \\ \hdashline & & 0.25+1 & -0.25 \\ \hdashline & -1 & -0.25 & 1+0.25 \end{array}\right] \frac{EA_0}{L}$$

Luego, la matriz de la estructura, resulta:

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA_0}{L}\begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 1.25 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.25 & -0.25 \\ 0.0 & -1.0 & -0.25 & 1.25 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 5**

Encontrar la matriz de rigidez de la estructura, que está a la izquierda de la figura 13.9, en el cual el miembro vertical es un elemento (hormigón armado) de un pórtico plano y el horizontal de una armadura plana (acero) con unión simple. Considerar los grados de libertad indicados a la derecha de 13.9. Estrictamente la articulación debió haberse colocado en la unión de la columna con la viga.

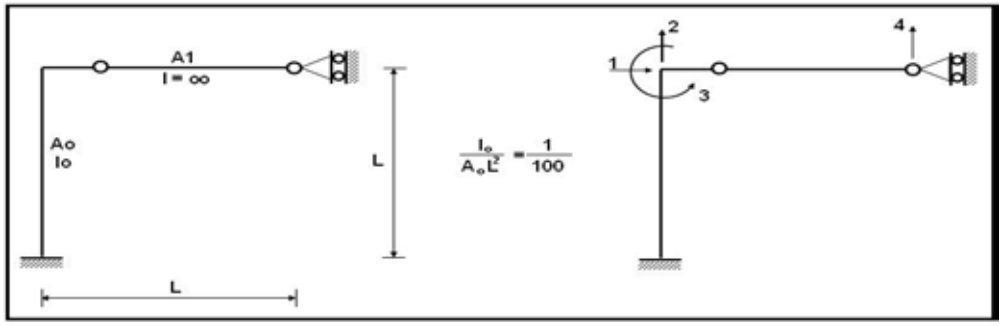



**Figura N.- 13.9** Pórtico del ejemplo 5 y sistema $\boldsymbol{Q-q}$.

- **SOLUCIÓN**

- **Elemento Vertical**

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 100 & 0 & 0 & -100 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -100 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{EI_o}{L^3}$$

$$VC^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Elemento Horizontal**

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{EA_1}{L}$$

$$VC^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Ensamblaje Directo**

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_1}{L} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{100EI_o}{L^3} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{4EI_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 6**

Encontrar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la estructura, que se encuentra a la izquierda de la figura 13.10, con los grados de libertad indicados a la derecha de 13.10. La variación de inercia del elemento horizontal se presenta en la parte inferior de la figura 13.10 y se desprecia la deformación axial en dicho elemento. Considerar $E = 2100000\ T/m^2$ .

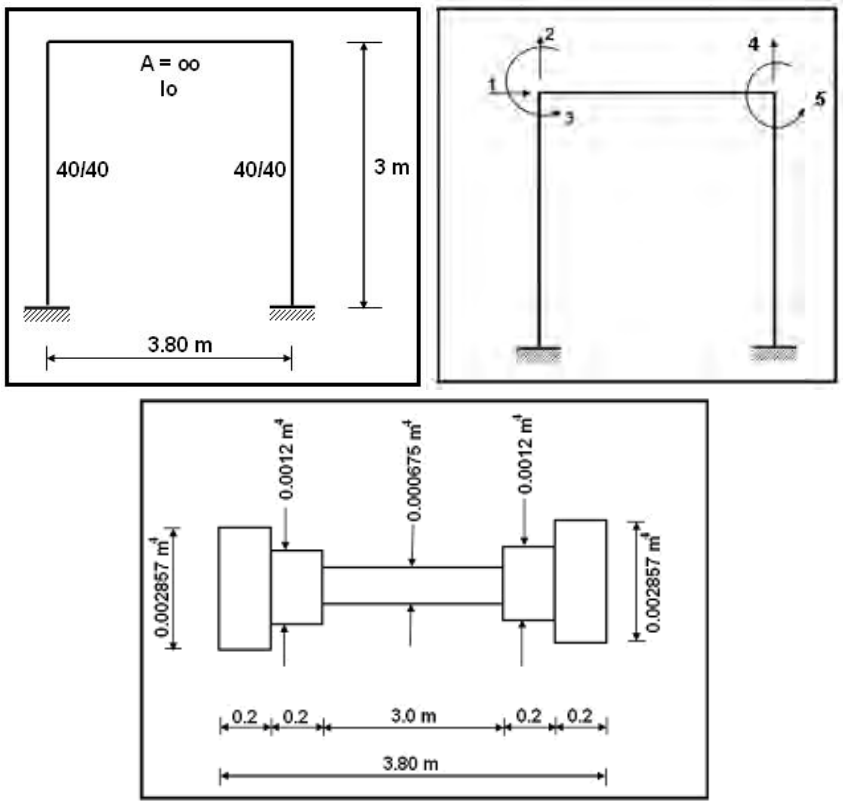



**Figura 13.10** Estructura de Ejemplo 6, grados de libertad y variación de inercia en viga.

- **SOLUCIÓN**

El Ejemplo 6 es una estructura de hormigón armado con losa plana; las diferentes inercias corresponden al macizado de la losa.

En la figura 13.11 se presenta el diagrama de masas elásticas $\frac{1}{EI}$ para el elemento con inercia escalonada que se analiza.

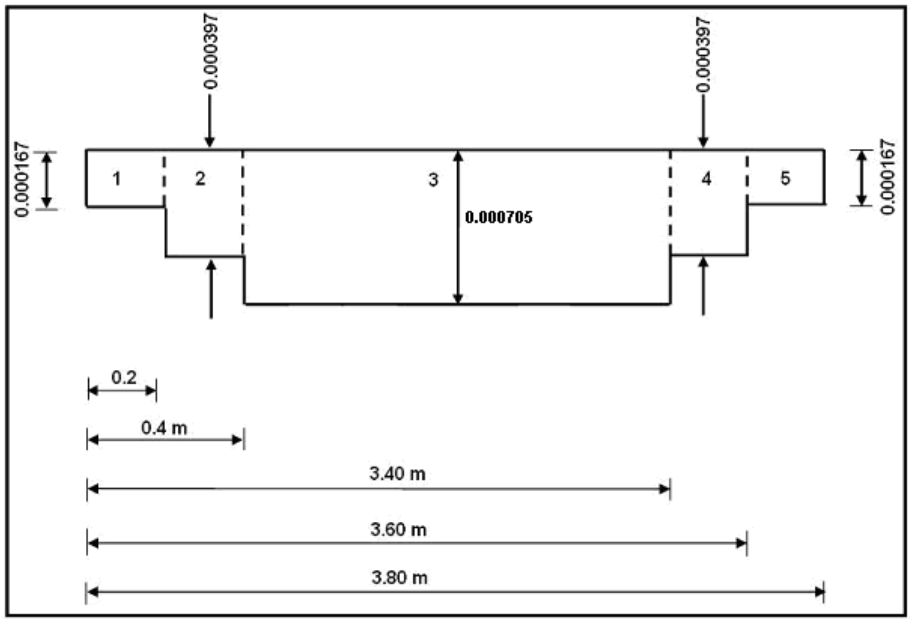



**Figura 13.11** Diagrama de masas elásticas y figuras elementales.

En base a la nomenclatura y teoría expuesta en el capítulo anterior, en la tabla 13.2 se indica el cálculo de los momentos de inercia del diagrama de masas elásticas.

**Tabla 13.2** Cálculo de momentos de inercia

| Figura | $X_0$ | $W$ | $I_Y$ | $I_Y'$ |
|---|---|---|---|---|
| | (m) | ($m^2$) | ($m^4$) | ($m^4$) |
| 1 | 0.10 | 0.000033 | $4.45333x10^{-7}$ | 0.000457 |
| 2 | 0.30 | 0.000079 | 0.000007 | 0.000973 |
| 3 | 1.90 | 0.002115 | 0.009221 | 0.009221 |
| 4 | 3.50 | 0.000079 | 0.000973 | 0.000007 |
| 5 | 3.70 | 0.000033 | 0.000457 | $4.45333x10^{-7}$ |
| | SUMATORIA | 0.002339 | 0.010658 | 0.010658 |

$$\alpha = \frac{I_Y'}{L^2} = \frac{0.010658}{3.8^2} = 0.000738$$

$$\alpha' = \frac{I_Y}{L^2} = \frac{0.010658}{3.8^2} = 0.000738$$

$$\varepsilon = \frac{W - \alpha - \alpha'}{2} = \frac{0.002339 - 2\,(0.000738)}{2} = 0.000432$$

$$\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2 = (0.000738)^2 - (0.000432)^2 = 3.580942x10^{-7}$$

$$k = k' = \frac{\alpha}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{0.000738}{3.580942x10^{-7}} = 2060.9104$$

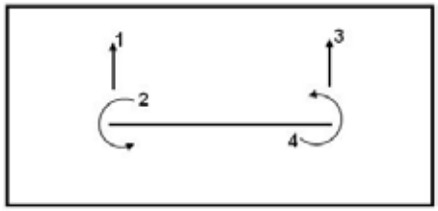
$$a = \frac{\varepsilon}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{0.000432}{3.580942x10^{-7}} = 1260.3865$$

$$b = b' = \frac{k + a}{L} = \frac{2060.9104 + 1260.3865}{3.80} = 874.0255$$

$$t = \frac{b + b'}{L} = \frac{2\,(874.0255)}{3.80} = 460.0134$$

Para el elemento horizontal, la matriz de rigidez en coordenadas locales es igual a la matriz de rigidez en coordenadas globales y es la siguiente.

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} t & b & -t & b' \\ b & k & -b & a \\ -t & -b & t & -b' \\ b' & a & -b' & k' \end{bmatrix}$$




Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ para un elemento axialmente rígido.

Al reemplazar los valores encontrados se tiene que la matriz de rigidez del elemento horizontal es:

$$k = \begin{bmatrix} 460.0134 & 874.0255 & -460.0134 & 874.0255 \\ 874.0255 & 2060.9104 & -874.0255 & 1260.3865 \\ -460.0134 & -874.0255 & 460.0134 & -874.0255 \\ 874.0255 & 1260.3865 & -874.0255 & 2060.9104 \end{bmatrix}$$

El vector de colocación para el elemento horizontal es:

$$VC = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez, en coordenadas globales, de los elementos verticales es la misma y corresponde a la mostrada en el Ejemplo 2. Esta es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 1988.00 & 0.00 & -2982.00 & -1988.00 & 0.00 & -2982.00 \\ 0.00 & 112000.00 & 0.00 & 0.00 & -112000.00 & 0.00 \\ -2982.00 & 0.00 & 5964.00 & 2982.00 & 0.00 & 2982.00 \\ -1988.00 & 0.00 & 2982.00 & 1988.00 & 0.00 & 2982.00 \\ 0.00 & -112000.00 & 0.00 & 0.00 & 112000.00 & 0.00 \\ -2982.00 & 0.00 & 2982.00 & 2982.00 & 0.00 & 5964.00 \end{bmatrix}$$

Los vectores de colocación para los elementos verticales izquierdo y derecho, respectivamente, son:

$$VC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$VC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Al ser el elemento horizontal axialmente rígido el desplazamiento del nudo final es igual al desplazamiento del nudo inicial $q_1$.

Al efectuar el ensamblaje directo se obtiene la matriz de rigidez buscada.

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 3976.00 & 0.00 & 2982.00 & 0.00 & 2982.00 \\ 0.00 & 112460.00 & 874.00 & -460.00 & 874.00 \\ 2982.00 & 874.00 & 8024.90 & -874.00 & 1260.40 \\ 0.00 & -460.00 & -874.00 & 112460.00 & -874.00 \\ 2982.00 & 874.00 & 1260.40 & -874.00 & 8024.90 \end{bmatrix}$$

## 13.5 DIAGRAMA DE FLUJO

En la figura 13.12 se presenta el diagrama de flujo para encontrar la matriz de rigidez de un pórtico plano, para cuando se obtiene completamente toda la matriz y se está trabajando con un arreglo de dos dimensiones.

En el diagrama de flujo, $mbr$ es el número de elementos que tiene la estructura, en este caso el pórtico; lo primero que se hace es encontrar la matriz de rigidez de un elemento $\boldsymbol{k}$ en coordenadas globales, estrictamente vendría a ser $\boldsymbol{k_3}$ pero se ha dejado como $\boldsymbol{k}$**.** Posteriormente en el lazo $j = 1{:}6$ se coloca el vector de colocación en la parte superior del elemento y se obtienen sus elementos que se ha denominado $jj$. En caso de tener una armadura plana el lazo $j = 1{:}4$, de tal manera que el diagrama de flujo se puede adaptar muy fácilmente a cualquier estructura cambiando los lazos de acuerdo al número de elementos del vector de colocación y desde luego encontrando la matriz de rigidez del elemento respectivo sea éste: pórtico plano, armadura plana, etc.

Retomando la explicación se pregunta a continuación si $jj = 0$, en caso de que lo sea, esa columna de la matriz de rigidez del elemento no contribuye a la matriz de rigidez de la estructura que en el diagrama de flujo se ha identificado como $SS$. Si $jj$ no es cero se pasa a colocar el vector de colocación a la derecha de la matriz de rigidez del elemento para eso se abre otro lazo $m = 1{:}6$ y se empieza a obtener los vectores de colocación $mm$; se pregunta si $mm = 0$, si es cero esa fila de la matriz de rigidez del elemento no contribuye y cuando no lo es, se pasa a realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura y de ahí se cierran los lazos.

En la figura 13.13 se presenta el diagrama de flujo cuando solo se obtiene la matriz triangular superior de $\boldsymbol{K}$ por esta razón hay una pregunta antes de realizar el ensamblaje. Posteriormente antes de realizar el ensamblaje, se coloca la fórmula con la que se pasa de un arreglo de dos dimensiones a una dimensión y se procede al ensamblaje trabajando como vector.

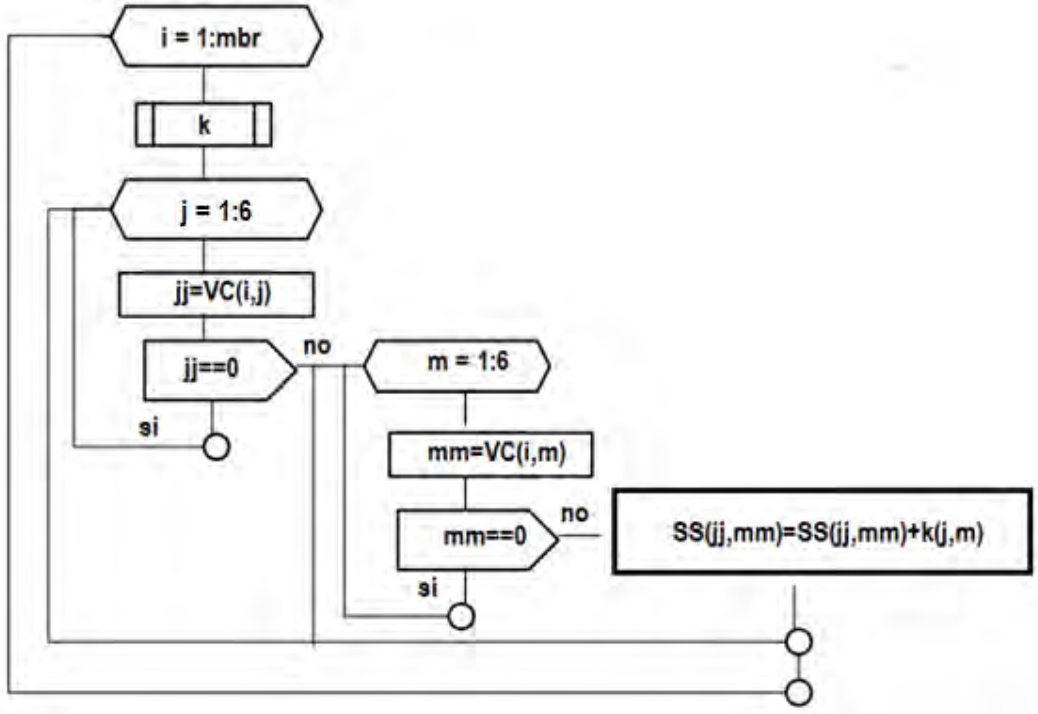



**Figura 13.12** Diagrama de flujo de matriz de rigidez completa, de dos dimensiones.

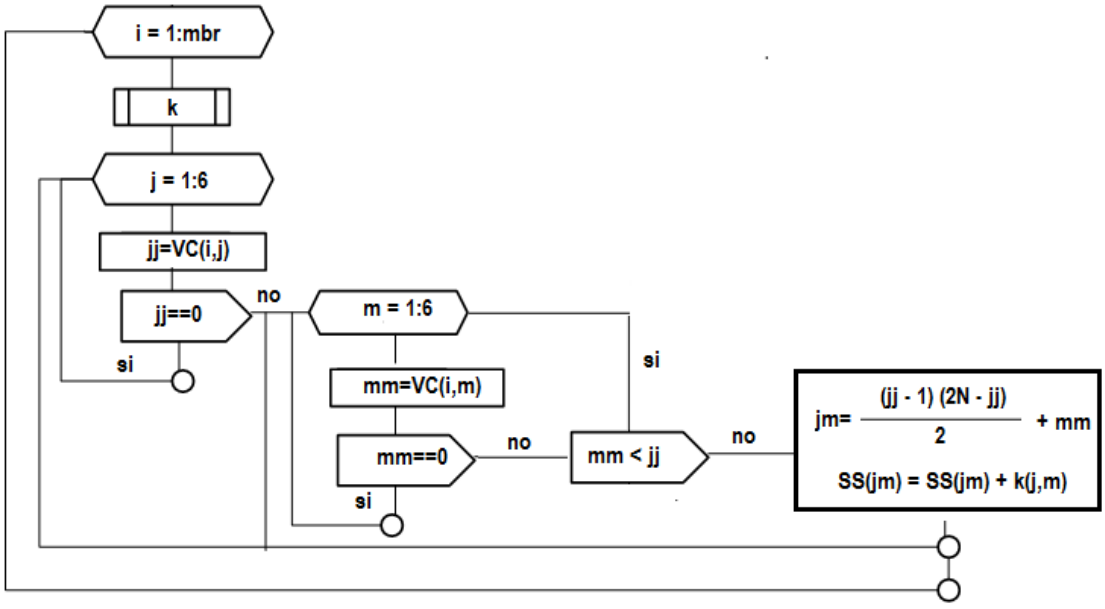



**Figura 13.13** Matriz de rigidez en forma de vector, solo triangular superior

Como se podrá apreciar es muy sencillo el cálculo de la matriz de rigidez de una estructura, trabajando con un solo índice. Se deja al lector, lo siguiente:

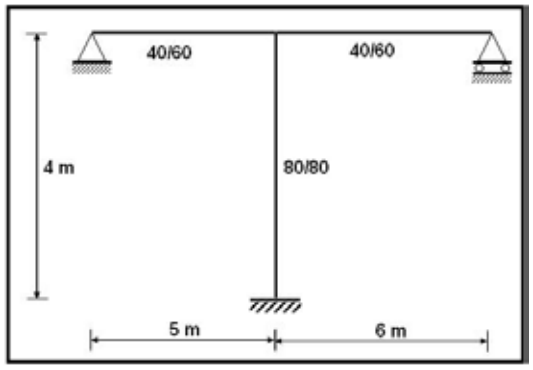
i) Realizar un diagrama de flujo para hallar la matriz de rigidez de pórticos planos y de armaduras planas.
ii) Encontrar un diagrama de flujo para hallar la matriz de rigidez en forma de vector y con ancho de banda constante.

**Se recuerda que la matriz de rigidez de la estructura se obtiene pensando en la forma como se va a resolver el sistema de ecuaciones lineales.**

## 13.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

**EJERCICIO N.- 1**

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura, sin considerar nudos rígidos pero considerando el efecto de corte. Datos: $E = 2100000\, T/m^2$, $G = 0.4\, E$, $I_V = 0.072\ m^4$, $I_c = 0.03413\ m^4$.




**EJERCICIO N.- 2**

Preparar el archivo de datos para un programa en ***MATLAB***, para determinar la matriz de rigidez del ejercicio anterior.

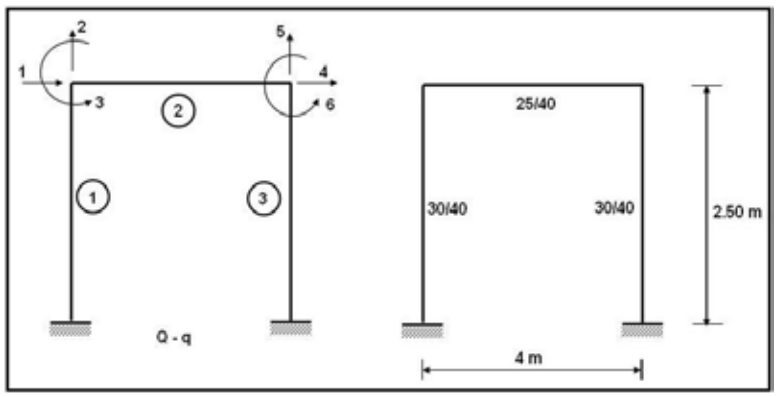
**EJERCICIO N.- 3**

Obtener la matriz de rigidez del ejercicio número 1 considerando nudos rígidos.

**EJERCICIO N.- 4**

Encontrar la matriz de rigidez de la siguiente estructura si los vectores de colocación son los siguientes:

$$VC(1) = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$VC(2) = [4 \quad 5 \quad 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$
$$VC(3) = [4 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

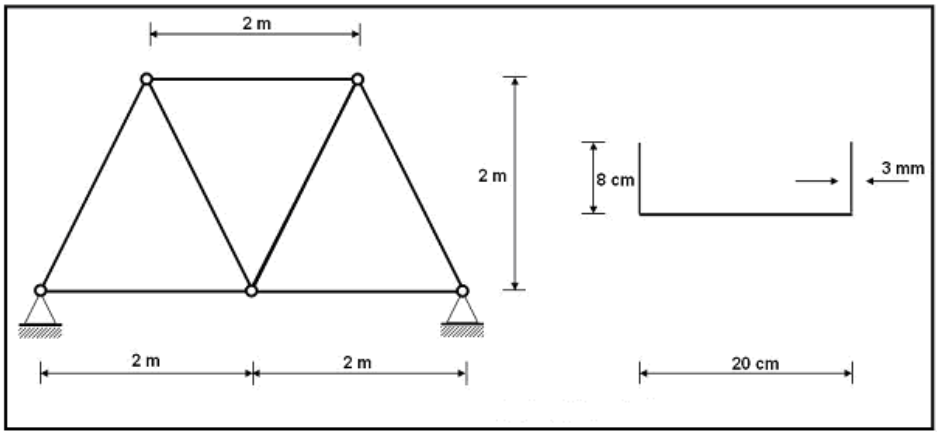


**EJERCICIO N.- 5**

Preparar el archivo de datos para un programa en ***MATLAB*** del ejercicio 4.

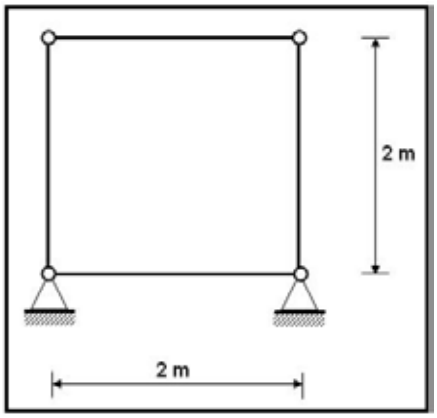
**EJERCICIO N.- 6**

Obtener la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente armadura plana compuesta por perfiles C de 3 mm de espesor. Considerar $E = 2000000\ kg/cm^2$



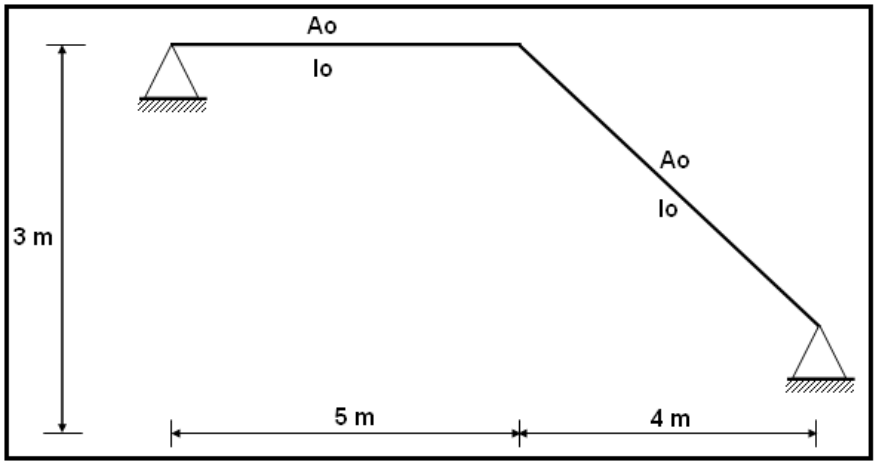

**EJERCICIO N.- 7**

Indicar si la siguiente armadura es estable o inestable usando la matriz de rigidez de la estructura. Considerar que cada elemento es un perfil C igual al del ejemplo anterior.



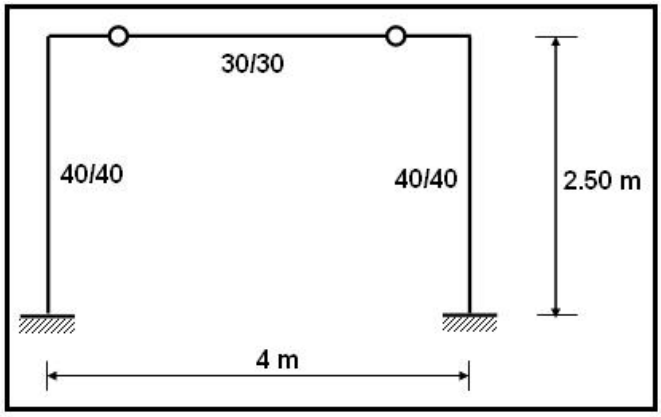

**EJERCICIO N.- 8**

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo del siguiente marco plano. Los dos elementos tienen la misma sección transversal y en ellos se cumple que: $\frac{A_o}{I_o\ L^2} = 80$

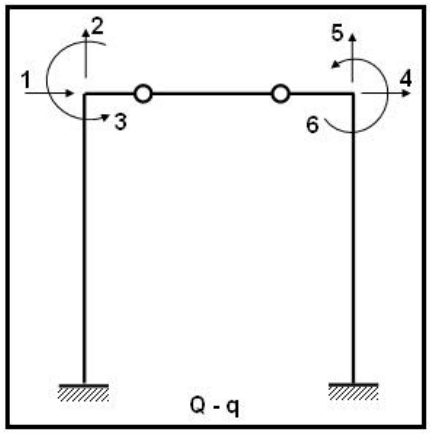



**EJERCICIO N.- 9**

Encontrar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura.

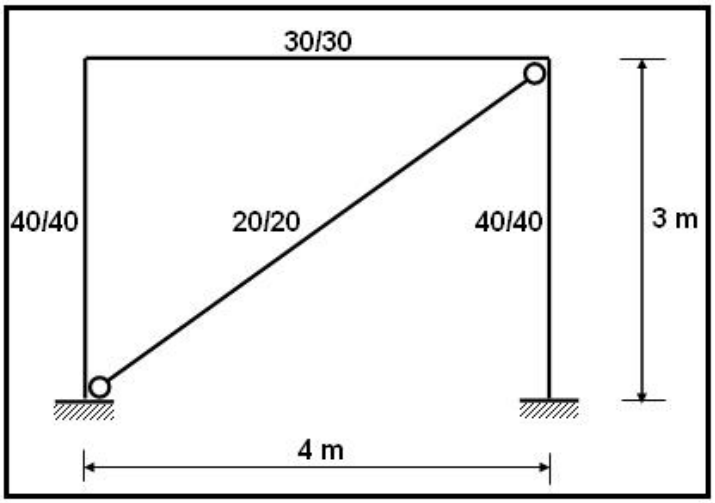



Considerar $E = 2100000\, T/m^2$ y el siguiente sistema de coordenadas de la estructura.




**EJERCICIO N.- 10**

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura. Considerar $E = 2100000\, T/m^2$.


30/30
40/40
20/20
40/40
3 m
4 m

*CAPITULO 14*

# SOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA PLANA ORIENTADA AL USO DEL COMPUTADOR

## RESUMEN

Se presenta con detalle la solución de una armadura plana y de un pórtico plano a partir del vector de coordenadas generalizado $\boldsymbol{q}$, orientado al uso del ordenador. El cálculo anterior que corresponde a la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ y al vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ ha sido explicado con bastante detenimiento en capítulos anteriores. Por lo tanto en éste capítulo se explica el cálculo de:

a. Deformaciones de los elementos $\boldsymbol{p}$ en coordenadas globales.

b. Acciones de los elementos $\boldsymbol{P}$ en coordenadas globales y locales.

c. Acciones finales de los elementos que es la suma del problema primario más el problema complementario.

## 14. 1 ANTECEDENTES

En el Capítulo 5 se estudió el cálculo del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ orientado al uso del computador, un resumen del mismo se presenta a continuación para el caso de estructuras con cargas en los elementos.

i) Se determina el vector de cargas de empotramiento perfecto en coordenadas locales $\boldsymbol{Q_2}$.

ii) Se encuentra la matriz de paso de coordenadas locales a globales $\boldsymbol{T}_{2-3}$.

iii) Se calcula el vector de empotramiento perfecto en coordenadas globales $\boldsymbol{Q}_3$ y se le cambia de signo para tener acciones en las juntas, con la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{Q}_3 = -\boldsymbol{T}_{2-3}{}^{t}\, \boldsymbol{Q}_2$$

iv) Se realiza el ensamblaje de $\boldsymbol{Q}_3$ en el vector de cargas generalizado $\boldsymbol{Q}$ mediante el vector de colocación del elemento respectivo.

Por otra parte en el capítulo 13 se estudió el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura por ensamblaje directo. El procedimiento de cálculo para cada uno de los elementos de una estructura es el siguiente:

i) Se determina la matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas globales $\boldsymbol{k}_3$.

ii) Se realiza el ensamblaje directo de $\boldsymbol{k}_3$ en la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ con el vector de colocación del elemento analizado.

Una vez que se ha determinado $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{Q}$ se procede a resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$ como se ilustró en el capítulo 11.

A partir del vector $\boldsymbol{q}$ se continúa en éste capítulo con el cálculo matricial de una estructura plana, dejando indicado que el mismo procedimiento se realiza para estructuras espaciales, con las modificaciones del caso en cuanto se refiere al vector de colocación, matriz de rigidez del elemento y la determinación de las acciones de empotramiento perfecto.

## 14.2 DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS

Los elementos de la estructura presentada a la izquierda de la figura 14.1, se consideran totalmente flexibles, en consecuencia se tienen los 7 grados de libertad, que son los indicados en la parte central de 14.1, este es el sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$; a la derecha se muestra el sistema de coordenadas globales de los elementos, $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$**, destacando una vez más que en el computador se trabaja en coordenadas globales.**

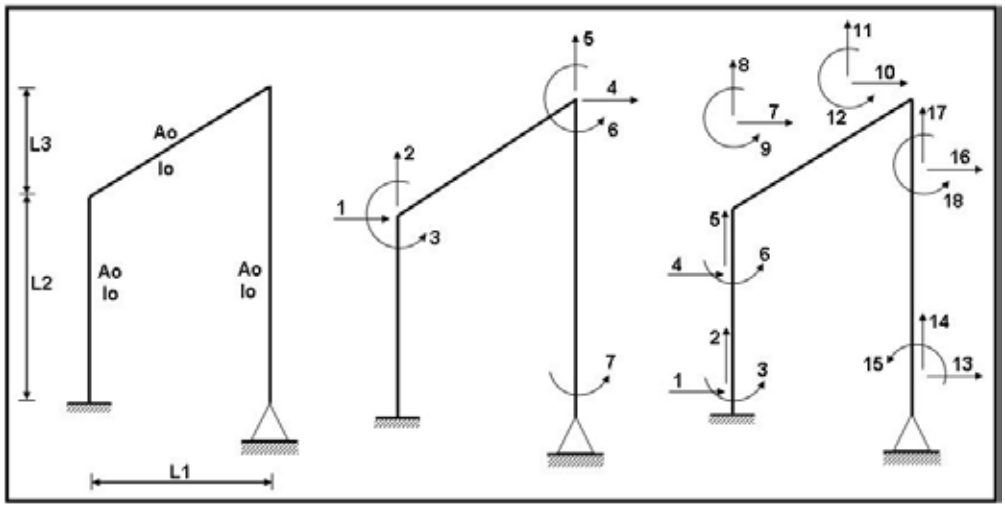



**Figura 14.1** Estructura, coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y de elementos $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$

De acuerdo a la numeración del sistema de coordenadas de los elementos, se tiene que la columna izquierda corresponde al elemento 1, la viga inclinada al elemento 2 y la columna derecha al elemento 3. En los Capítulos 9 y 10 se estudió la forma de cálculo de la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$. Para el presente ejemplo se tiene.

- **Elemento 1**

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 2**

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 3**

$$\boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Únicamente por facilidad se ha escrito las sub matrices de la matriz de compatibilidad de deformación $\boldsymbol{A}$ se pudo haber escrito directamente ésta matriz pero es más cómodo escribir las sub matrices.

El vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ para la estructura analizada tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{q}^t = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 \end{bmatrix}$$

Para encontrar las deformaciones de los elementos $\boldsymbol{p}$ en coordenadas globales se realiza el producto matricial de la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$ por el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q}$$

El producto matricial indicado se puede realizar con la matriz $\boldsymbol{A}$ completa o sino con las sub matrices de $\boldsymbol{A}$ teniendo en cuenta en éste último caso que se va a obtener las deformaciones de un elemento determinado, de ésta manera se resuelve en el ordenador.

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \boldsymbol{A}^{(1)}\,\boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto las deformaciones del elemento 1 en coordenadas globales son:

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Para el elemento analizado el vector de colocación es:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

El algoritmo con el cual se obtiene el vector de deformaciones $\boldsymbol{p}$ sin necesidad de realizar el producto matricial se presenta a continuación:

i) Encerar el vector $\boldsymbol{p}$, para el caso plano éste vector tiene 6 elementos.

ii) Determinar el vector de colocación del elemento, que tiene 6 elementos para el caso plano.

iii) Ensamblar $\boldsymbol{q}$ en $\boldsymbol{p}$ por medio del vector de colocación. Cuando el vector de colocación es cero, queda cero en el vector de deformaciones, cuando es diferente de cero el vector de colocación, se obtiene del vector $\boldsymbol{q}$ la cantidad respectiva y se ensambla: el vector de colocación indica la posición del vector $\boldsymbol{q}$ que tomarse para el vector $\boldsymbol{p}$.

Para los elementos 2 y 3 de la estructura analizada los vectores de colocación son:

$$VC(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$VC(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el algoritmo indicado los vectores de deformación de los elementos 2 y 3 resultan.

$$\boldsymbol{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_7 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

## 14.3 ACCIONES DE LOS ELEMENTOS

Una vez que se tienen las deformaciones de los elementos en coordenadas globales $\boldsymbol{p}$ se obtienen las acciones de los elementos en coordenadas globales $\boldsymbol{P}$ multiplicando la matriz de rigidez de miembro $\boldsymbol{k}_3$ por las deformaciones $\boldsymbol{p}$. En el Capítulo 12 se indicó que la designación de $\boldsymbol{k}_3$ era para indicar que se refiere al sistema 3, que es **coordenadas globales**, se va a obviar el número y se designará simplemente $\boldsymbol{k}$ como se lo realizó en el Capítulo 13. Por lo tanto se tiene:

$$\boldsymbol{P}^{(i)} = \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{p}^{(i)}$$

Se destaca una vez más que $\boldsymbol{P}^{(i)}$ son las acciones en coordenadas globales del elemento i. A éste vector por didáctica en el presente Capítulo se lo designa como $\boldsymbol{PG}$ donde la letra G indica que se trata de coordenadas globales. Por otro lado $\boldsymbol{k}^{(i)}$ es la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales y $\boldsymbol{p}^{(i)}$ es el vector de deformaciones en coordenadas globales.

En el computador se resuelve la estructura en coordenadas globales. Pero no es fácil la interpretación de $\boldsymbol{PG}$ cuando se tienen elementos inclinados razón por la cual se acostumbra pasar las acciones de los elementos de coordenadas globales a coordenadas locales.

Se denomina $\boldsymbol{PL}$ las acciones de los elementos en coordenadas locales y el paso de coordenadas globales a locales se realiza con la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ para ello se recuerda a continuación lo estudiado en los Capítulos 5 y 12.

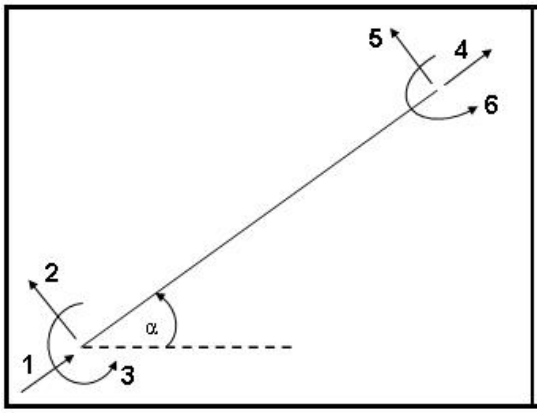



**Figura 14.2.1** Sistema $\boldsymbol{PL} - \boldsymbol{pL}$

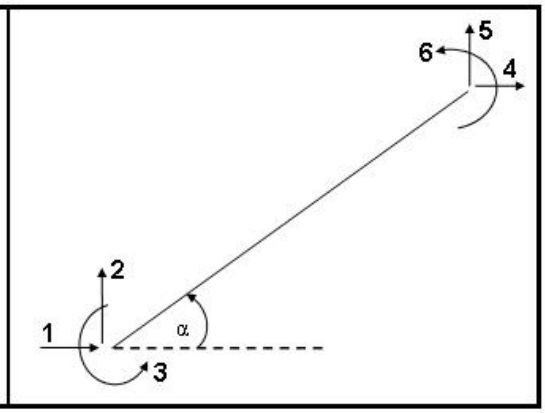



**Figura 14.2.2** Sistema $\boldsymbol{PG} - \boldsymbol{pG}$

De acuerdo a la notación indicada en las figuras 14.2.1 y 14.2.2 se tiene:

$$\boldsymbol{pL} = \boldsymbol{T}_{2-3}\ \boldsymbol{pG} \qquad (14.1)$$

$$\boldsymbol{PG} = \boldsymbol{T}_{2-3}{}^{t}\ \boldsymbol{PL} \qquad (14.2)$$

$$\boldsymbol{T}_{2-3}{}^{t} = \boldsymbol{T}_{2-3}{}^{-1}$$

(14.3)

La ecuación (14.1) es por definición de la Matriz de Transformación de Coordenadas. La ecuación (14.2) es un teorema de la matriz $\boldsymbol{T}$ estudiado en el Capítulo 5 y la ecuación (14.3) es debida a que la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es ortogonal. Lo que interesa es encontrar $\boldsymbol{PL}$ para el efecto de la ecuación (14.2) se tiene:

$$\boldsymbol{PL} = \left(\boldsymbol{T}_{2-3}{}^{t}\right)^{-1} \boldsymbol{PG}$$

Pero la transpuesta de la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es la inversa, luego se tendría que la inversa de la inversa es la misma matriz en consecuencia la última ecuación queda:

$$\boldsymbol{PL} = \boldsymbol{T}_{2-3}\ \boldsymbol{PG} \qquad (14.4)$$

Por lo tanto para encontrar las acciones de los elementos en coordenadas locales $\boldsymbol{PL}$ se debe multiplicar la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ por el vector de cargas en coordenadas globales $\boldsymbol{PG}$. Si la estructura solo tiene cargas en las juntas en éste paso se termina de resolver el problema. **Se destaca que se ha resuelto el Problema Complementario.** Cuando la estructura tiene cargas en los elementos a las acciones $\boldsymbol{PL}$ obtenidas se debe sumar el problema primario para encontrar la solución total.

## 14.4 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO 1**

Resolver el Ejemplo 4 desarrollado en el Capítulo 11 pero en forma similar a la que se realiza en el ordenador. En la figura 14.3.1 se describe el problema que es una estructura que tiene solo cargas en los nudos luego no existe problema primario y en las figuras 14.3.2 y 14.3.3 se indican los sistemas de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q-q}$ y el sistema de coordenadas globales de los elementos $\boldsymbol{P-p}$. Considerar $E = 2173706.513\, T/m^2$.

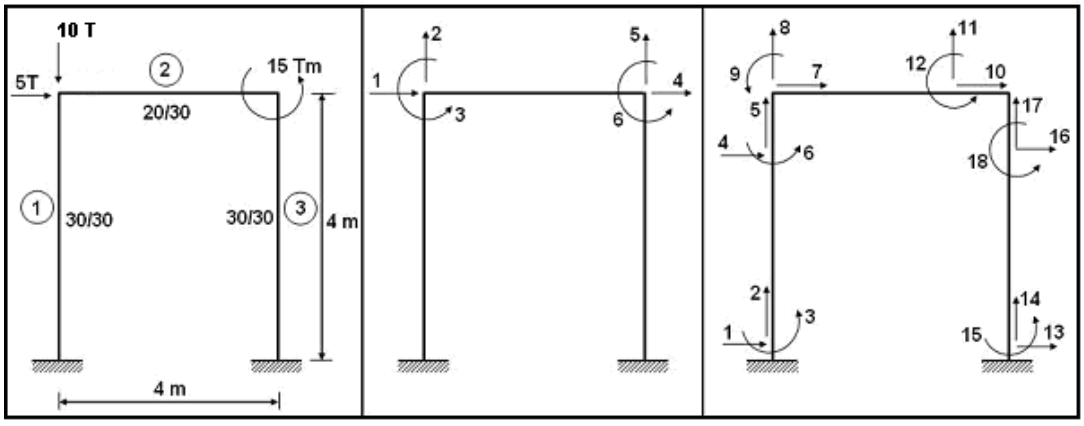



**Figura 14.3.1**




**Figura 14.3.2** $\boldsymbol{Q-q}$




**Figura 14.3.3** $\boldsymbol{P-p}$

- **SOLUCIÓN**

La matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ y el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ se indican en el Capítulo 11, en el Ejemplo 4. La solución del sistema de ecuaciones lineales: $\boldsymbol{Q = K\ q}$ reporta:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

Los vectores de colocación son:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$VC(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$VC(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Los vectores de deformación en coordenadas globales que resultan al aplicar el algoritmo indicado son:

$$p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \end{bmatrix} \qquad p^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix} \qquad p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas globales son:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 277.15 & & & & & \\ 0.00 & 48908.40 & & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & & \\ -554.30 & 0.00 & 1478.12 & & & \\ -277.15 & 0.00 & 554.30 & 277.15 & & \\ 0.00 & -48908.40 & 0.00 & 0.00 & 48908.40 & \\ -554.30 & 0.00 & 739.06 & 554.30 & 0.00 & 1478.12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 32605.60 & & & & & \\ 0.00 & 183.41 & & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & & \\ 0.00 & 366.81 & 978.17 & & & \\ -32605.60 & 0.00 & 0.00 & 32605.60 & & \\ 0.00 & -183.41 & -366.81 & 0.00 & 183.41 & \\ 0.00 & 366.81 & 489.08 & 0.00 & -366.81 & 978.17 \end{bmatrix}$$

Las acciones de los elementos en coordenadas globales $\boldsymbol{PG}$ son:

$$\boldsymbol{PG}^{(i)} = \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{p}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{PG}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.395 \\ 11.004 \\ 1.686 \\ 0.395 \\ -11.004 \\ -0.104 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4.597 \\ 0.989 \\ 0.105 \\ -4.597 \\ -0.989 \\ 3.853 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(3)} = \begin{bmatrix} -4.605 \\ -0.978 \\ 7.272 \\ 4.605 \\ 0.978 \\ -11.146 \end{bmatrix}$$

La matriz de paso de coordenadas locales a globales para el elemento 1 es la siguiente:

$$\boldsymbol{T}_{2-3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2 la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es la identidad y para el elemento 3 la mencionada matriz es igual a la del elemento 1. Las acciones de los elementos en coordenadas locales $\boldsymbol{PL}$ se obtienen con la siguiente ecuación matricial:

$$\boldsymbol{PL}^{(i)} = \boldsymbol{T}_{2-3}^{(i)}\ \boldsymbol{PG}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{PL}^{(1)} = \begin{bmatrix} 11.004 \\ 0.395 \\ 1.686 \\ -11.004 \\ -0.395 \\ -0.104 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PL}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4.597 \\ 0.989 \\ 0.105 \\ -4.597 \\ -0.989 \\ 3.853 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PL}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.978 \\ 4.605 \\ 7.272 \\ 0.978 \\ -4.605 \\ 11.146 \end{bmatrix}$$

Al no existir cargas en los elementos aquí termina el problema. El significado físico de los vectores obtenidos se puede ver al final del Ejemplo 4 resuelto en el Capítulo 11.

- **EJEMPLO 2**

Resolver el Ejemplo anterior si en la viga actúa una carga uniforme distribuida de 4.41 T/m. A la izquierda de la figura 14.4 se presenta el problema y a la derecha se indican las acciones de empotramiento perfecto.

- **SOLUCIÓN**

En base a las acciones de empotramiento perfecto se determina el vector de cargas generalizado $\boldsymbol{Q}$.

Por otra parte, la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ es la misma del ejemplo anterior. Al resolver el sistema de ecuaciones lineales $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$, se encuentra el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$.

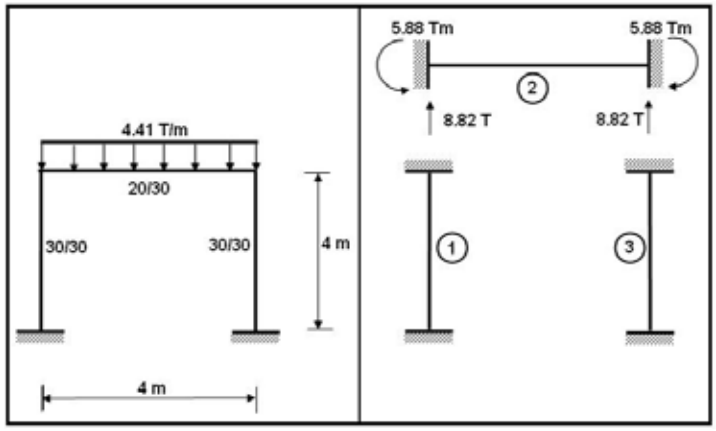



**Figura 14.4** Pórtico de Ejemplo 2 y Problema Primario

Los vectores $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{q}$ que se encuentran son:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -8.820 \\ -5.880 \\ 0.000 \\ -8.820 \\ 5.880 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix}$$

Como se está resolviendo con el mismo sistema de coordenadas generalizadas del ejercicio anterior los vectores de colocación de cada uno de los elementos son los del Ejemplo 1. Con esta indicación las deformaciones de los elementos en coordenadas globales, son:

$$p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \end{bmatrix} \qquad p^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix} \qquad p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez en coordenadas globales son las del ejemplo anterior. Luego al efectuar el producto $\boldsymbol{PG}^{(i)} = \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{p}^{(i)}$ se tiene:

$$\boldsymbol{PG}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.654 \\ 8.818 \\ -2.200 \\ -1.654 \\ -8.818 \\ -4.415 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.656 \\ 0.000 \\ -1.465 \\ -1.656 \\ 0.000 \\ 1.465 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1.654 \\ 8.818 \\ 2.200 \\ 1.654 \\ -8.818 \\ 4.415 \end{bmatrix}$$

Al pasar las acciones de coordenadas globales a coordenadas locales empleando la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}_{2-3}$ se obtiene:

$$\boldsymbol{PL}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8.818 \\ -1.654 \\ -2.200 \\ -8.818 \\ 1.654 \\ -4.415 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PL}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.656 \\ 0.000 \\ -1.465 \\ -1.656 \\ 0.000 \\ 1.465 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PL}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8.818 \\ 1.654 \\ 2.200 \\ -8.818 \\ -1.654 \\ 4.415 \end{bmatrix}$$

Se ha resuelto el problema complementario. Por lo tanto a las acciones de los elementos obtenidas se deben sumar las acciones del problema primario. A la derecha de la figura 14.4 se indica el Problema Primario, si se agrupa estas acciones en un vector denominado $\boldsymbol{Q}_2$ se tiene:

$$\boldsymbol{Q}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 8.82 \\ 5.88 \\ 0.00 \\ 8.82 \\ -5.88 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

La solución total es igual al Problema Primario más el Problema Complementario. Sea $\boldsymbol{PT}$ el vector de acciones finales de los elementos el mismo que se obtiene de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{PT}^{(i)} = \boldsymbol{PL}^{(i)} + \boldsymbol{Q}_2^{(i)}$$

Al realizar la suma matricial indicada en cada uno de los elementos del marco plano se halla:

$$\boldsymbol{PT}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8.818 \\ -1.654 \\ -2.200 \\ -8.818 \\ 1.654 \\ -4.415 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PT}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.656 \\ 8.820 \\ 4.415 \\ -1.656 \\ 8.820 \\ -4.415 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PT}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8.818 \\ 1.654 \\ 2.200 \\ -8.818 \\ -1.654 \\ 4.415 \end{bmatrix}$$

El significado físico de las acciones $\boldsymbol{PT}$ se indica al final del Ejemplo 5 del Capítulo 11.

- **EJEMPLO 3**

Resolver la armadura plana, indicada a la izquierda de la figura 14.5 cuyo sistema de coordenadas generalizadas se indica a la derecha. El módulo de elasticidad del material es $E = 2000000\ kg/cm^2$. Todos los elementos tienen la misma sección transversal y el área es igual a 2 $cm^2$.

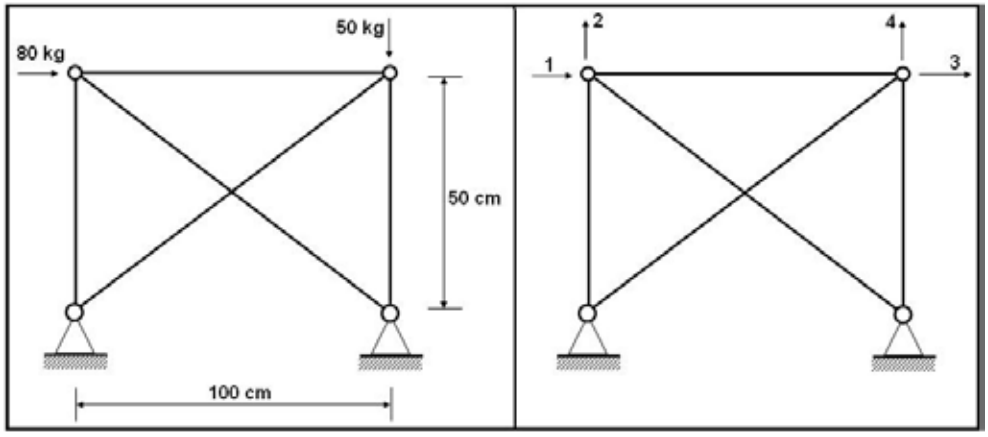



**Figura 14.5** Armadura Plana de Ejemplo 3 y sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$

- **SOLUCIÓN**

La matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ resulta:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 68621.67 & & & \\ -14310.84 & 87155.42 & \textit{SIMÉTRICA} & \\ -40000.00 & 0.00 & 68621.67 & \\ 0.00 & 0.00 & 14310.84 & 87155.42 \end{bmatrix}$$

Los vectores de cargas y coordenadas generalizadas son:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.002017 \\ 0.000331 \\ 0.001341 \\ -0.000793 \end{bmatrix}$$

Lo expuesto hasta aquí de la solución de éste ejemplo ha sido tratado con detenimiento en capítulos anteriores. En la figura 14.6 se presenta la numeración de los elementos y el sistema de coordenadas globales de cada uno de los elementos. Como se identifica al elemento la numeración del sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ no se la realiza en forma continua como en los otros ejemplos, se pudo haber numerado de corrido.

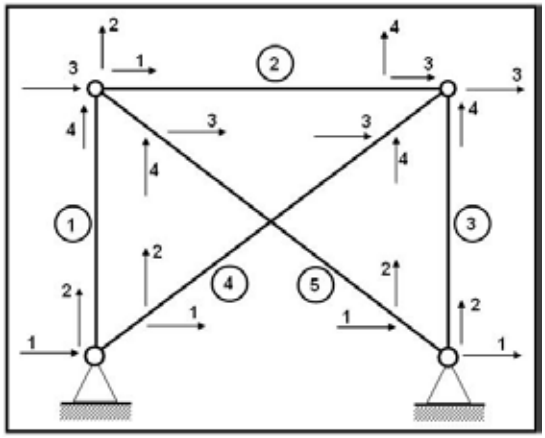



**Figura 14.6** Coordenadas globales de los elementos.

Por otra parte los vectores de colocación de la armadura plana analizada son los siguientes:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$VC(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$VC(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$VC(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$VC(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En base al vector de colocación y al vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ se obtienen los vectores de deformación $\boldsymbol{p}$ en coordenadas globales; estos son:

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \boldsymbol{p}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.002017 \\ 0.000331 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.002017 \\ 0.000331 \\ 0.001341 \\ -0.000793 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}^{(3)} = \boldsymbol{p}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.001341 \\ -0.000793 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos en coordenadas globales son:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.00 & & & \\ 0.00 & 80000.00 & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \\ 0.00 & -80000.00 & 0.00 & 80000 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 40000.00 & & & \\ 0.00 & 0.00 & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & \\ -40000.00 & 0.00 & 40000.00 & \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(4)} = \begin{bmatrix} 28621.67 & & & \\ 14310.84 & 7155.42 & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & \\ -28621.67 & -14310.84 & 28621.67 & \\ -14310.84 & -7155.42 & 14310.84 & 7155.42 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(5)} = \begin{bmatrix} 28621.67 & & & \\ -14310.84 & 7155.42 & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & \\ -28621.67 & 14310.84 & 28621.67 & \\ 14310.84 & -7155.42 & -14310.84 & 7155.42 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas internas de elemento $PG$ en coordenadas globales se obtienen del producto matricial de la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales por el vector de deformación también en coordenadas globales. El resultado de éste producto es el siguiente:

$$PG^{(i)} = k^{(i)}\ p^{(i)}$$

$$PG^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -26.4 \\ 0.0 \\ 26.4 \end{bmatrix} \quad PG^{(2)} = \begin{bmatrix} 27.04 \\ 0.00 \\ -27.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} \quad PG^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 63.5 \\ 0.0 \\ -63.5 \end{bmatrix} \quad PG^{(4)} = \begin{bmatrix} -27.04 \\ -13.50 \\ 27.04 \\ 13.50 \end{bmatrix} \quad PG^{(5)} = \begin{bmatrix} -52.9 \\ 26.5 \\ 52.9 \\ -26.5 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas de los elementos encontradas se presentan en la figura 14.7, teóricamente ahí se podría dar por finalizado el problema pero es bastante difícil utilizarlas para el diseño lo mejor es tener en coordenadas locales. Por ese motivo los resultados se pasan a dichas coordenadas por medio de la matriz $T_{2-3}$

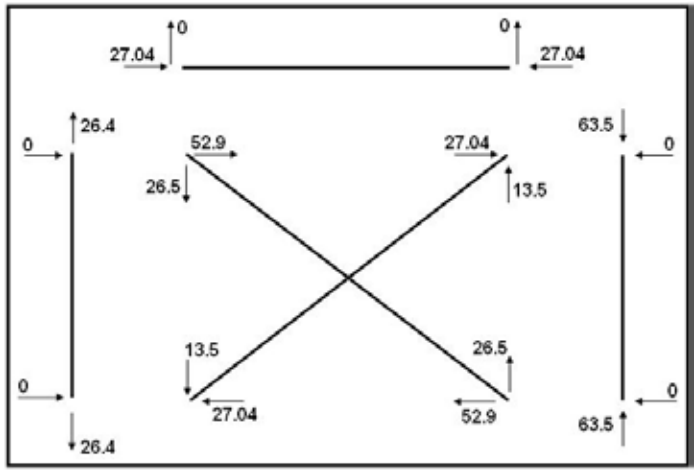



**Figura 14.7** Acciones de los elementos en coordenadas globales

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0.0 & 0.0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \cos\alpha & sen\alpha \\ 0.0 & 0.0 & -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

El valor del ángulo $\alpha$ para los diferentes elementos, son:

$$\alpha(1) = 90^0, \quad \alpha(2) = 0^0, \alpha(3) = 90^0, \quad \alpha(4) = 26.565^0, \quad \alpha(5) = 153.435^0$$

Luego las matrices $T_{2-3}$ son:

$$T_{2-3}{}^{(1)} = T_{2-3}{}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_{2-3}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.89443 & 0.44721 & 0.00 & 0.00 \\ -0.44721 & 0.89443 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.89443 & 0.44721 \\ 0.00 & 0.00 & -0.44721 & 0.89443 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_{2-3}^{(5)} = \begin{bmatrix} -0.89443 & 0.44721 & 0.00 & 0.00 \\ -0.44721 & -0.89443 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.89443 & 0.44721 \\ 0.00 & 0.00 & -0.44721 & -0.89443 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2 la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es la identidad. Finalmente para encontrar las acciones de los elementos en coordenadas locales se multiplica la matriz de transformación de coordenadas por el vector de fuerzas en coordenadas globales como se ha realizado en los ejemplos anteriores.

$$\boldsymbol{PL}^{(1)} = \begin{bmatrix} -26.4 \\ 0.0 \\ 26.4 \\ 0.0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PL}^{(2)} = \begin{bmatrix} 27.04 \\ 0.00 \\ 27.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PL}^{(3)} = \begin{bmatrix} 63.5 \\ 0.0 \\ -63.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{PL}^{(4)} = \begin{bmatrix} -30.2 \\ 0.0 \\ 30.2 \\ 0.0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PL}^{(5)} = \begin{bmatrix} 52.9 \\ 0.0 \\ -52.9 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Los resultados alcanzados se muestran en la figura 14.8. Finalmente se deja al lector comprobar el equilibrio de las juntas.

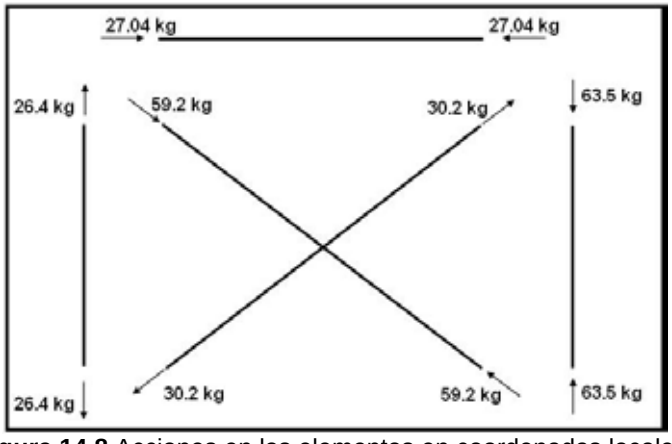
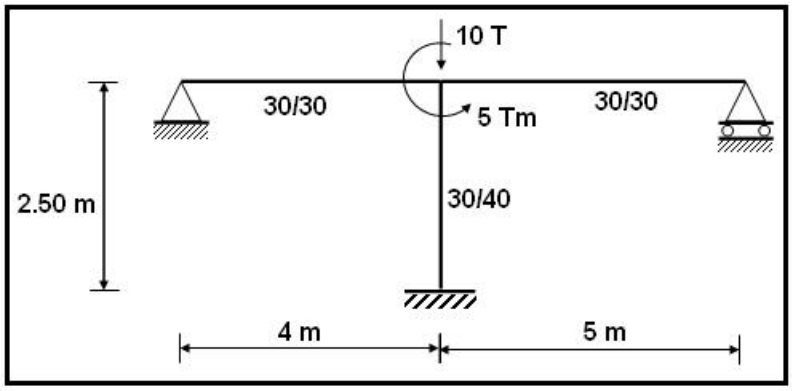



**Figura 14.8** Acciones en los elementos en coordenadas locales.

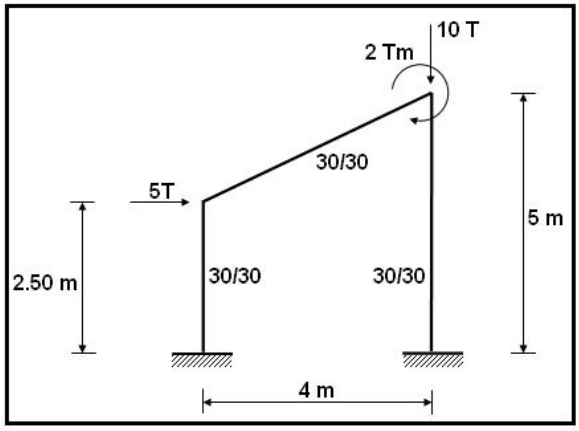
## 14.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

Encontrar las acciones finales en los elementos utilizando ***MATLAB***, no utilizar el sistema de computación ***CEINCI-LAB***. Considerar $E = 2100000\ T/m^2$ para los pórticos planos y $E = 2000000\ Kg/cm^2$ para las armaduras planas.

**EJERCICIO N.- 1**

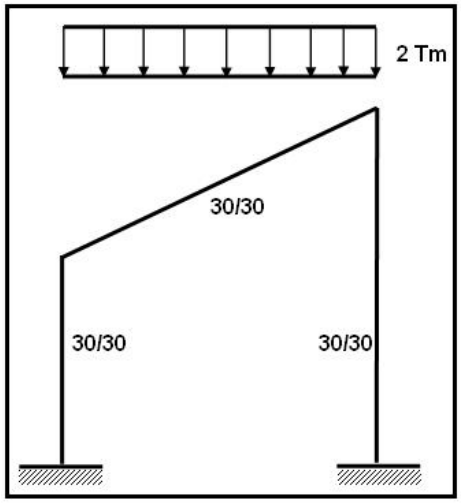



**EJERCICIO N.- 2**



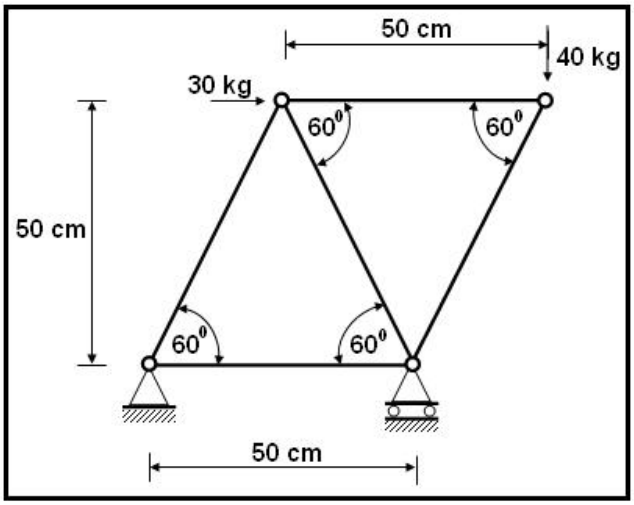

**EJERCICIO N.- 3**

La estructura del Ejercicio N.- 3, es la misma del Ejemplo anterior en consecuencia la longitud de sus elementos es la misma, solo lo que cambia es la carga, que ahora es uniforme distribuida.



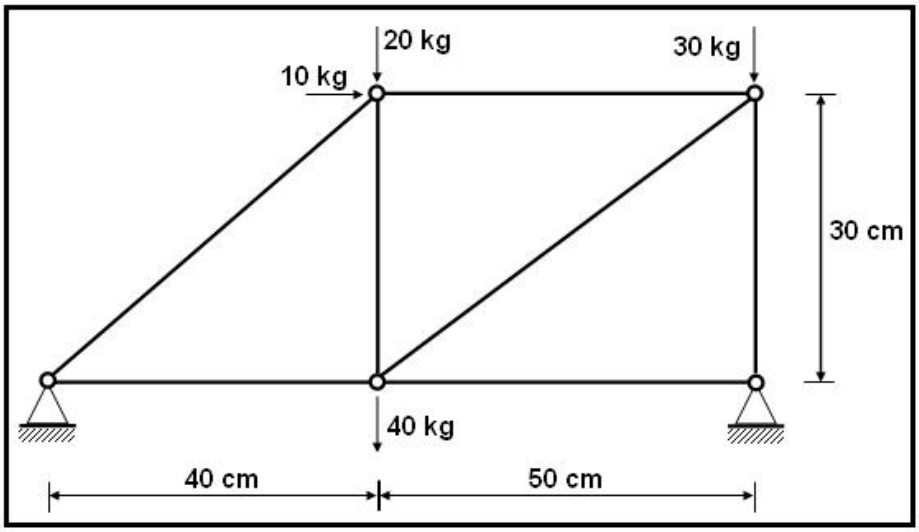

**EJERCICIO N.- 4**

El área de la sección transversal es igual en todos los elementos y vale $A = 1.12\ cm^2$




**EJERCICIO N.- 5**

Todos los elementos de la armadura plana, que se indica a continuación, tienen la misma sección transversal y es igual a 2 $cm^2$. Se pide al igual que en los Ejercicios anteriores encontrar las acciones finales en coordenadas locales en los extremos de los elementos.


20 kg
30 kg
10 kg
30 cm
40 kg
40 cm
50 cm

*CAPITULO 15*

# ANALISIS ESTATICO CON *CEINCI-LAB*

## RESUMEN

Se presenta la teoría y el uso del sistema de computación ***CEINCI-LAB*** para resolver: armaduras planas y pórticos planos. Una buena parte de los programas que se utilizan para resolver Armaduras Planas sirven para Pórticos Planos y Mallas Espaciales, por esta razón cuando se estudie los pórticos planos se indicará con detalle el uso de estos programas, lo propio se realizará en el Capítulo 18 dedicado a las Mallas.

Se presentan dos ejemplos para el caso de Armaduras Planas, el segundo ejemplo es bastante práctico y tiene que ver con el reforzamiento de una estructura de acero de una Piscina; estas estructuras son bastante rígidas en el sentido transversal porque se debe cubrir una gran luz, pero en el sentido longitudinal son bastante flexibles por lo que se recomienda reforzar con una celosía Tipo San Andrés. Se resuelve un ejemplo de ésta celosía pero considerando únicamente tres elementos horizontales para no alargar la exposición y poder resolver completamente en pocas páginas.

En el primer ejercicio que se resuelve con Pórticos Planos, se explica con mucho detenimiento el uso de los diferentes programas que se requieren en su solución pero a más de ello se presenta el marco teórico respectivos, para repasar lo estudiado en capítulos anteriores.

Luego se resuelven dos pórticos de un piso y un vano, en el primer caso se ve que no se obtienen directamente las reacciones de los apoyos, en cambio en el segundo caso se encuentra directamente las reacciones en los apoyos. Nótese que para el primer caso se tienen 6 grados de libertad mientras que para el segundo caso se tienen 12 grados de libertad ya que se consideró tres grados de libertad en cada uno de los apoyos. En el primer caso la matriz de rigidez admite inversa en cambio en el segundo caso la matriz de rigidez no admite inversa por lo que se trabaja con la matriz de rigidez condensada.

Posteriormente se presenta la solución de un pórtico con cargas puntuales sobre los elementos, esto con el objeto de ilustrar cómo se resuelve un pórtico con cualquier tipo de carga. En este caso el usuario debe encontrar las acciones de empotramiento perfecto en coordenadas locales y dar como dato al programa.

Una forma de reforzar una estructura de hormigón armado es mediante la colocación de diagonales de acero, con lo que se convierte en una estructura mixta de hormigón y acero. La solución de este tipo de estructuras se ilustra mediante la solución de un pórtico con vigas y columnas de hormigón y diagonales de acero.

## 15.1 ARMADURAS PLANAS

Son estructuras que tienen dos grados de libertad por nudo, un desplazamiento horizontal y un desplazamiento vertical; existen giros en una armadura plana pero estas son coordenadas dependientes. Sus elementos solo trabajan axialmente, no trabajan a flexión por este motivo es que se los modela como $A_0, I = \infty$.

### 15.1.1 Matriz de rigidez de un elemento

En la parte superior izquierda de la figura 15.1 se presenta el sistema de coordenadas del elemento cuando no se consideran los desplazamientos como cuerpo rígido, de ahí la presencia de los apoyos, a este sistema se denomina 1. En la parte superior izquierda se tiene el sistema de coordenadas locales que se identifica con el 2, aquí ya se consideran los desplazamientos como cuerpo rígido. Finalmente en la parte inferior se muestra el sistema 3 que corresponde al sistema de coordenadas globales de un elemento de una armadura plana.

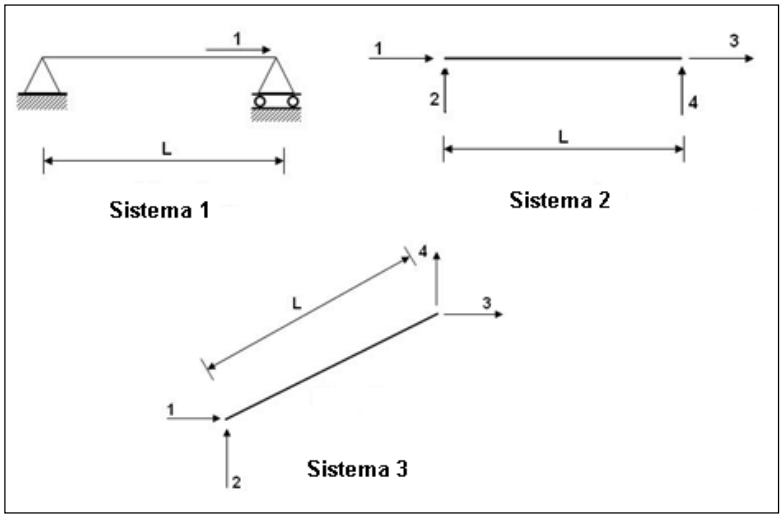



**Figura 15.1** Sistema de coordenadas de un elemento de una armadura plana.

La matriz de rigidez para el sistema uno se denomina $\boldsymbol{k}_1$ y es:

$$\boldsymbol{k}_1 = \left[\frac{EA}{L}\right] \tag{15.1}$$

Donde $E$ es el módulo de elasticidad del material; $A$ es el área de la sección transversal y $L$ la longitud del elemento. La matriz de paso del sistema de coordenadas 1 al sistema de coordenadas 2 es:

$$\boldsymbol{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{15.2}$$

La matriz de rigidez en el sistema 2, que se llama $\boldsymbol{k}_2$, se halla del triple producto matricial, siguiente.

$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{T}_{1-2}{}^{t}\, \boldsymbol{k}_1\, \boldsymbol{T}_{1-2} \tag{15.3}$$

$\boldsymbol{k}_2$ Es la matriz de rigidez en coordenadas locales (axial y transversal). Finalmente la matriz de paso del sistema 2 al sistema 3, es:

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha \\ 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (15.4)$$

Siendo $\alpha$ el ángulo que forma el eje del elemento con el eje de las X; así para una barra horizontal $\alpha = 0$. Finalmente la matriz de rigidez en coordenadas globales (horizontal y vertical) se halla con la siguiente expresión.

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{T}_{2-3}{}^{t}\ \boldsymbol{k}_2\ \boldsymbol{T}_{2-3} \quad (15.5)$$

La subrutina que obtiene la matriz de rigidez de una armadura plana en la forma indicada, en el programa ***CEINCI-LAB*** se denomina ***kdiagonal*** Los datos de entrada y forma de uso de este programa, son:

- **[k3]=kdiagonal (A,L,E,seno,coseno)**

Donde **A** es el área de la sección transversal; **L** es la longitud del elemento; **E** es el módulo de elasticidad del material; **seno** es el valor de $sen\ \alpha$; **coseno** es el valor de $\cos\alpha$.

### 15.1.2 Solución total de una armadura plana

Se presenta un resumen de los pasos a seguir para su solución.

i. Se seleccionan los grados de libertad de la estructura. Esto se lo hace con la subrutina ***cg.*** Se destaca, una vez más, que hay dos grados de libertad por nudo.

ii. Se obtienen los vectores de colocación de cada uno de los elementos. El vector ce colocación de un elemento está compuesto por los grados de libertad del nudo inicial y del nudo final. La subrutina que obtiene los vectores de colocación de todos los elementos se llama **vc.**

iii. Se halla la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ por ensamblaje directo, con la subrutina ***krigidez***. Esta subrutina a su vez llama a la subrutina ***kdiagonal*** para calcular la matriz de rigidez de cada elemento.

iv. Se encuentra el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ con la subrutina ***cargas_armadura***. Una armadura plana solo tiene cargas en las juntas de tal manera que el usuario puede indicar directamente el vector de cargas $\boldsymbol{Q}$.

v. Se obtienen los desplazamientos de los nudos $\boldsymbol{q}$, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q} \quad (15.6)$$

vi. Se encuentran las fuerzas finales en cada uno de los elementos, para ello se determina

en primer lugar las deformaciones $\boldsymbol{p}$ en coordenadas globales, con la ayuda del vector de colocación; luego las fuerzas $\boldsymbol{P_G}$ en coordenadas globales y finalmente con la matriz de paso $\boldsymbol{T}_{2-3}$ las fuerzas $\boldsymbol{P_L}$ en coordenadas locales. Todo esto se hace con la subrutina ***fuerzas_armadura***

$$\boldsymbol{P_G} = \boldsymbol{k_3}\, \boldsymbol{p} \tag{15.7}$$

$$\boldsymbol{P_L} = \boldsymbol{T_{2-3}}\, \boldsymbol{P_G} \tag{15.8}$$

vii. Es fundamental que se halle el momento de volcamiento debido a que en algunas estructuras de acero se han volteado durante un sismo o un fuerte viento, como se aprecia en la figura 15.2

**Figura 15.2** Volcamiento de una torre de transmisión. (Cortesía de Theofilos Toulkeridis)

- **EJEMPLO 1**

Resolver la armadura plana, con nudos simples, indicada en la figura 15.3, la longitud $L = 50\ cm.$ el área de la sección transversal de los elementos es igual y vale 1.13 cm$^2$. La fuerza $F$ aplicada en la parte superior vale 50 kg., y el módulo de elasticidad del acero $E = 2100000\ \ kg/cm^2$.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 15.4 se presenta, a la izquierda, la numeración de los nudos y elementos de la armadura y a la derecha los grados de libertad de acuerdo a la numeración de los nudos. Antes de resolver el problema, el lector debe leer la entrada de datos y salida de resultados de algunos de los programas de ***CEINCI-LAB***, que se indican más adelante, en el desarrollo del Ejemplo 3. Con esta acotación el programa que se ha elaborado para resolver el ejercicio es el siguiente:

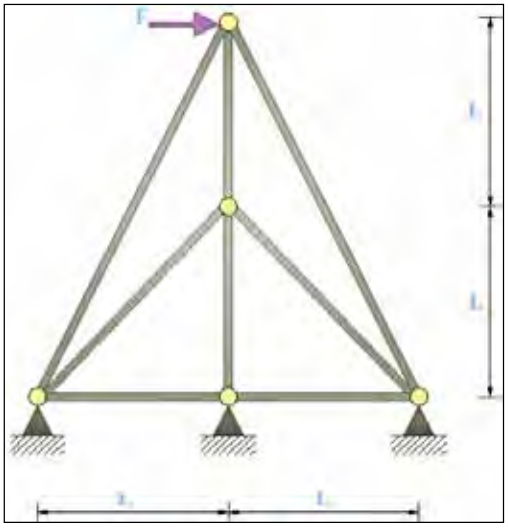


**Figura 15.3** Armadura plana a resolver con ***CEINCI-LAB***

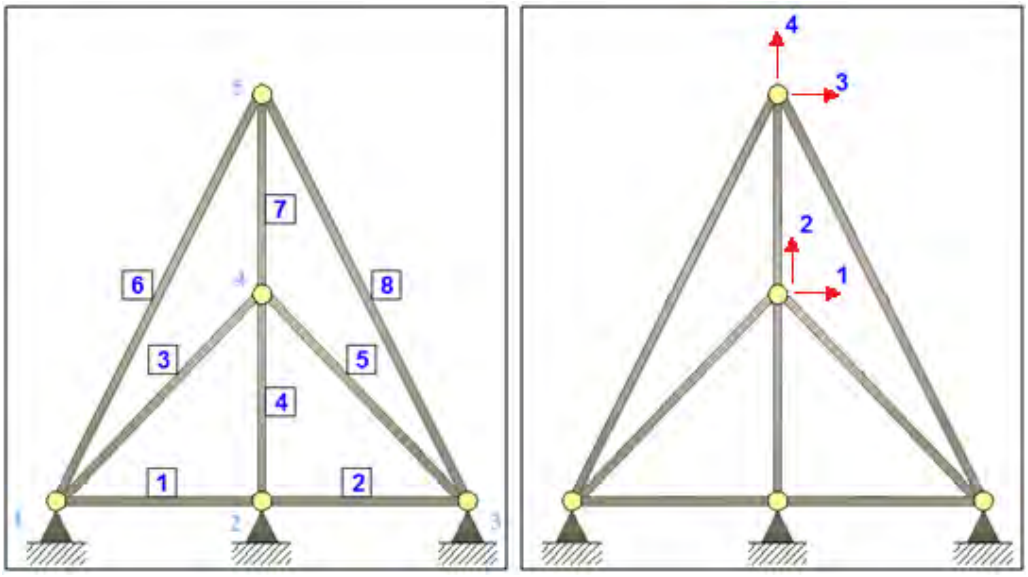



**Figura 15.4** Numeración de nudos, elementos y grados de libertad

```
function armadura_ej1
%
% Programa para resolver Armaduras Planas
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%          CEINCI-ESPE
%         Noviembre de 2009
%-------------------------------------------------------------
% armadura_ej1
%-------------------------------------------------------------
nod=5;  % Número de nudos de armadura plana
nr=3;   % Número de nudos restringidos
L=50; %Dimensión
```

```
%
% MATRIZ DE RESTRICCIONES DE LOS NUDOS
RES=[ 1   1    1; % Nudo restringido Des X, Des Y
      2   1    1;
      3   1    1];
%
% Calculo de Coordenadas Generalizadas y grados de libertad
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES); % CG  Matriz de coord generalizadas
% MATRIZ DE GENERACION DE NUDOS DE LOS ELEMENTOS
GEN=[1 1 2 1 1 1 1; %elem, ni, nf, elem a gene, inc en elem, inc en ni, inc en nf
     3 1 4 0 0 0 0;
     4 2 4 1 3 2 1;% Se genera elemento 7
     5 3 4 0 0 0 0;
     6 1 5 1 2 2 0];% Se genera elemento 8
 % Generación de vector NI (Nudo Inicial) y NJ (Nudo Final) de elementos
 [NI,NJ]=gn_portico(GEN);
% MATRIZ DE GENERACION DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
NUDOS=[1 -L 0.0 0 0 0.0 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
       2 0.0 0.0 0 0 0.0 0.0;
       3 L 0.0 0 0 0.0 0.0;
       4 0  L 0 0 0.0 0.0;
       5 0 2*L 0 0 0 0];
% Generación de las coordenadas de los nudos
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
% Dibuja la armadura plana
dibujo (X,Y,NI,NJ);
% Vector de colocación
 [VC]=vc(NI,NJ,CG);
%Longitud, Seno y Coseno de elementos
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
% Vector de cargas generalizadas
njc=1; % Número de juntas Cargadas
F=[5  50.0  0.0]; %Junta Cargada, FH, FV
[Q]=cargas_armadura(njc,ngl,CG,F)
% Areas de los elementos
[ELEM]=[1.12; %Area del elemento 1 en cm2
        1.12; 1.12;1.12;1.12;1.12;1.12;1.12];
% Matriz de rigidez de la estructura
E=2100000; % Modulo de elasticidad del acero en kg/cm2
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E)
% Desplazamientos y Giros
q=K\Q
% Fuerzas y momentos finales en los elementos
[FF]=fuerzas_armadura(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q)
% Cálculo de Momento de Volcamiento
punto=1; % Es el número de nudo con respecto al cual se calcula momento
[Momento]=mom_vol(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,X,Y,NI,NJ,njc,F,punto)
% ---end---
```

El vector de colocación de un elemento está compuesto por los grados de libertad del nudo inicial y final. La matriz que contiene a estos vectores se ha denominado VC, que se indica a continuación.

$$VC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

La primera fila de VC corresponde al vector de colocación del elemento 1, ver figura izquierda de 15.4; la segunda fila al elemento 2, etc. Los elementos 1 y 2 no aportan a la matriz de rigidez de la estructura ya que sus vectores de colocación son cero; los restantes elementos si aportan a la matriz $\boldsymbol{K}$

El programa que determina la matriz de rigidez de la armadura se denomina ***krigidez***, este programa llama al programa ***kdiagonal.*** A continuación se indica, a la izquierda, la matriz de rigidez del elemento 3 en coordenadas globales; a la derecha se presenta la misma matriz pero en la parte superior se ha anotado el vector de colocación, que indica la posición a la cual van cada uno de los elementos, así por ejemplo el término de la primera fila y primera columna de la matriz de rigidez va a la fila 0 y columna 0 pero como no existe esa fila simplemente no contribuye a la matriz de rigidez, por este motivo se ha tachado las filas y columnas cuyo vector de colocación es cero.

$$k3 = 10^4 \begin{bmatrix} 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 \\ 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 \\ -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \\ -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \end{bmatrix}$$

$$k3 = 10^4 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \\ 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 \\ -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \\ -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

El tercer elemento si contribuye y va a la posición (1,1) de la matriz de rigidez de la estructura que también es de 4 por 4, ya que se tienen 4 grados de libertad. A continuación se presenta la matriz de rigidez del elemento 4 y su respectiva contribución a la matriz de rigidez de la estructura, todo esto con el objeto de que el lector comprenda el ensamblaje directo.

$$k3 = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 47040 & 0 & -47040 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -47040 & 0 & 47040 \end{bmatrix}$$

$$k3 = 10^4 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 47040 & 0 & 47040 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -47040 & 0 & 47040 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

La matriz de rigidez el elemento 5, tiene los mismos valores que la del elemento 3 pero difieren en algunos signos por el ángulo $\alpha$. La contribución del elemento 5 a la matriz de rigidez se indica a continuación.

$$k3 = 10^4 \begin{bmatrix} 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 \\ -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 \\ -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 \\ 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 \end{bmatrix}$$

$$k3 = 10^4 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \\ 1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \\ -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 \\ 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

En forma similar se procede con los elementos 6, 7 y 8. La matriz de rigidez de la estructura que se encuentra es la siguiente.

$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 0.3326 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2734 & 0 & -0.4704 \\ 0 & 0 & 0.0841 & 0 \\ 0 & -0.4704 & 0 & 0.8070 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ se pudo escribir directamente en el programa sin necesidad de utilizar ningún programa ya que las carga solo actúa en el nudo 5. Este vector es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la solución del sistema de ecuaciones lineales, se halla el vector $\boldsymbol{q}$ que contiene los desplazamientos de los nudos 4 y 5.

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0.0059} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

El desplazamiento horizontal del grado de libertad 3, es 5.9 mm. Las deformaciones de los elementos $\boldsymbol{p}$, se halla en base al vector $\boldsymbol{q}$ y al vector de colocación; para los elementos 1 al 5 estas deformaciones son cero; para los elementos 6, 7 y 8 el vector $\boldsymbol{p}$ es el mismo y es el siguiente.

$$p^{(6)} = p^{(7)} = p^{(8)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0059 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez del elemento 7 es la misma que la del elemento 4, que fue ya se indicó anteriormente, al multiplicar esta matriz por $\boldsymbol{p}^{(7)}$ se halla que $\boldsymbol{P}_G = \mathbf{0}$. Es cero vector; es decir todos sus elementos son cero.

Las fuerzas en coordenadas globales para el elemento 6, se halla de la siguiente manera:

$$P_G^{(6)} = k_3^{(6)}\, p^{(6)}$$

$$PG^{(6)} = 10^4 \begin{bmatrix} 0.4207 & 0.8415 & -0.4207 & -0.8415 \\ 0.8415 & 1.6830 & -0.8415 & -1.6830 \\ -0.4207 & -0.8415 & 0.4207 & 0.8415 \\ -0.8415 & -1.6830 & 0.8415 & 1.6830 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0059 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.0000 \\ 50.0000 \\ 25.0000 \\ -50.0000 \end{bmatrix}$$

De igual manera se procede con el elemento 8. En la figura 15.5 se indican las fuerzas en coordenadas globales. Nótese que existe equilibrio en cada uno de los elementos y que también existe equilibrio de juntas.

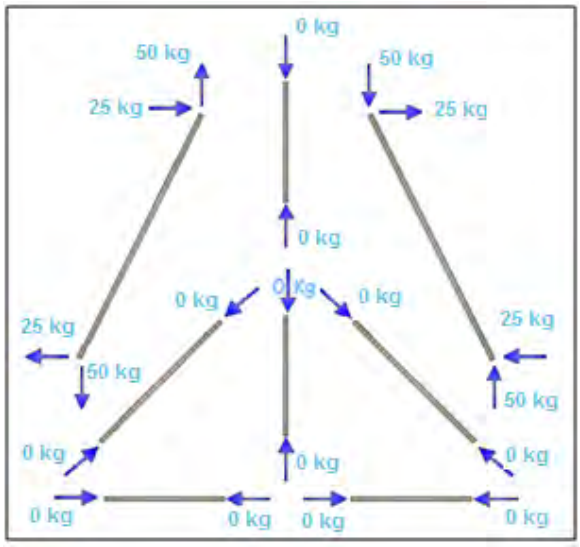



**Figura 15.5** Fuerzas en Coordenadas Globales en los elementos de armadura plana.

Aquí podría finalizar la solución de la armadura plana, para luego manualmente encontrar la resultante de las dos fuerzas que actúan en cada nudo, descomponiendo las fuerzas horizontales y verticales. En forma matricial esto se realiza por medio de la matriz de paso de coordenadas locales a globales (Ecuación 15.4 ). Para el elemento (6) se indica la forma de obtener el vector de cargas en coordenadas locales $P_L$

$$\boldsymbol{P}_L^{(6)} = \boldsymbol{T}_{2-3}^{(6)}\ \boldsymbol{P}_G^{(6)}$$

$$PL^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.8944 & 0 & 0 \\ -0.8944 & 0.4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4472 & 0.8944 \\ 0 & 0 & -0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25.0000 \\ 50.0000 \\ 25.0000 \\ -50.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55.9017 \\ 0 \\ 55.9017 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los resultados que reporta el programa, a nivel de fuerzas en los elementos se indica en la figura 15.6. El elemento 6 trabaja a tracción y el elemento 8 a compresión.

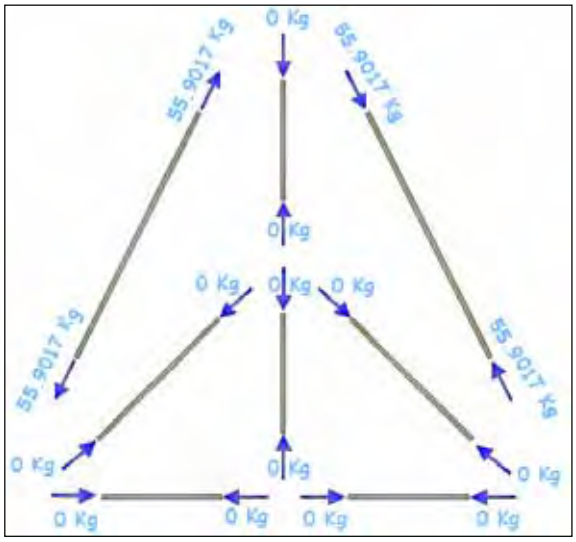



**Figura 15.6** Fuerzas en Coordenadas Locales de la Armadura.

Al multiplicar las fuerzas horizontales y verticales que aparecen en la figura 15.5, por su distancia con respecto a la base, se obtiene el momento de volcamiento, con respecto al nudo 1, que vale $M = 5000\ kg * cm$.

### 15.1.3 Reforzamiento de estructuras de acero

Las estructuras de acero que son utilizadas para cubrir Piscinas, Naves Industriales o Coliseos, por lo regular se las construye pensando solo en la carga vertical, no en la sísmica, es así que son muy rígidas en el sentido transversal, que tienen que cubrir grandes luces, debido a que las columnas se las orienta de tal manera que tengan un gran momento de inercia en ese sentido y las vigas son de dimensiones considerables. A más de ello hay una gran cantidad de pórticos, todo esto hace que la estructura sea muy rígida en el sentido transversal.

El problema se presenta en el sentido longitudinal, debido en primer lugar al hecho de que solo se tienen dos pórticos en dicha dirección, que son los exteriores; luego a que no existe una verdadera viga entre las columnas de éstos pórticos, lo que existe es una correa que está pensada para soportar el recubrimiento de la Piscina pero en el caso de un sismo debe trabajar como viga. Finalmente en muy pocos proyectos se observa la presencia de tensores que son muy adecuados para soportar las fuerzas sísmicas en sentido longitudinal.

En la figura 15.7 se presenta, parte de la cubierta de la Piscina del Colegio Fernández Madrid, ubicada en el Centro Colonial de Quito, al fondo se observa el pórtico transversal exterior con mampostería confinada en la parte interior y ventanas en la parte superior. Nótese las dimensiones considerables que tienen las vigas transversales en contraste con las correas que existen en sentido longitudinal.

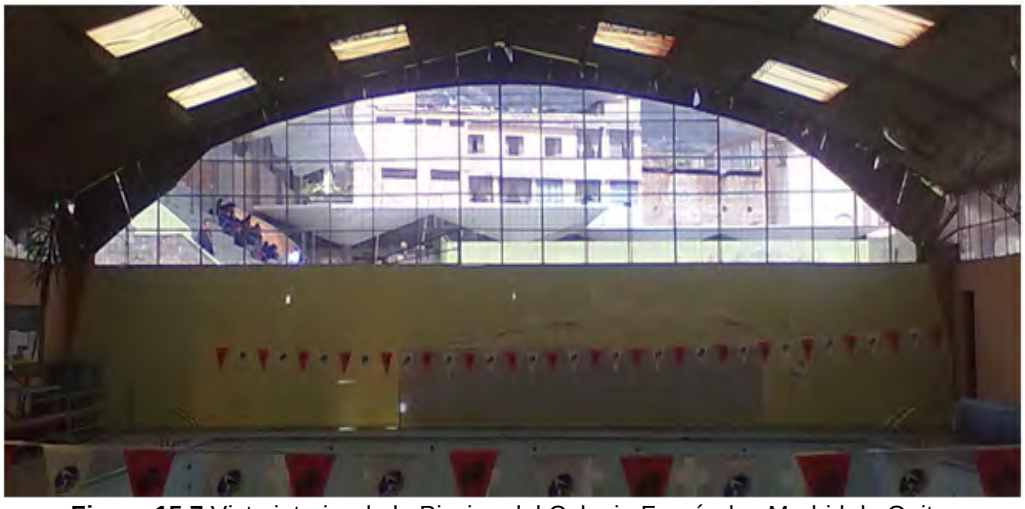


**Figura 15.7** Vista interior de la Piscina del Colegio Fernández Madrid de Quito. Sin reforzamiento.

En la figura 15.8 se presenta el reforzamiento sísmico para la estructura de la Piscina del Colegio Fernández Madrid, que consiste en encamisar con hormigón las columnas existentes que confinan la mampostería en los pórticos exteriores transversales y prolongarles hasta la cercha de la cubierta, a más de ello se colocarán tensores en los vanos exteriores como se indica en la figura 15.8. Todo esto con el propósito de que la estructura resista un sismo en sentido longitudinal.

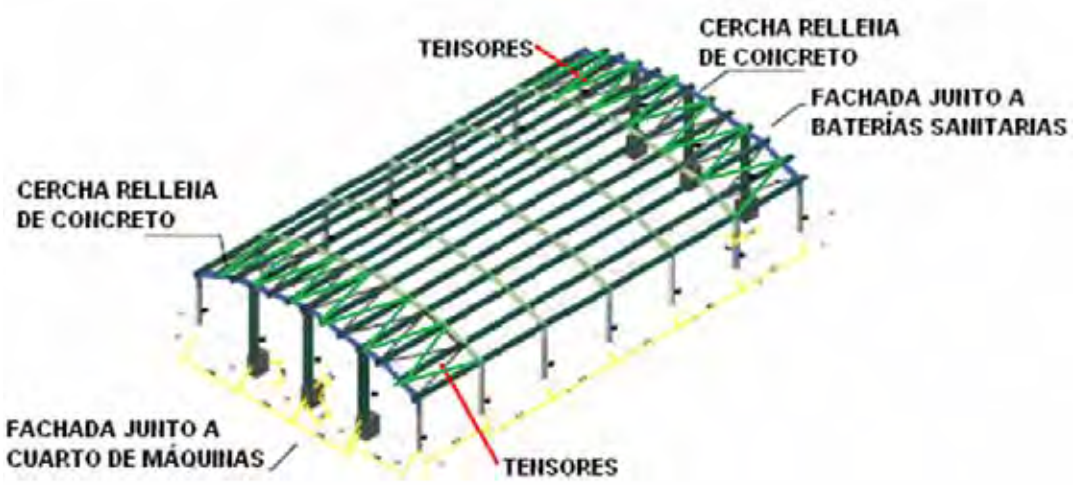



**Figura 15.8** Reforzamiento sísmico de la estructura de la Cubierta del Colegio Fernández Madrid. Aguiar (2012)

Los tensores, en los vanos exteriores, ante la acción sísmica en sentido longitudinal o ante fuerzas de viento, trabajan como vigas de gran peralte sujetas a fuerzas horizontales. Con este antecedente se presenta el siguiente ejemplo, que por motivos didácticos a la viga de borde se la ha hecho muy pequeña para poder presentar los resultados, en forma fácil

- **EJEMPLO 2**

Resolver la estructura de acero, presentada a la izquierda de la figura 15.9, si está compuesta por dos perfiles “G” de 100/50/15/3 mm. Las cargas verticales son las debidas a la acción sísmica en sentido longitudinal. La altura de 3.74 m., de la cercha vendría a ser la distancia entre los pórticos transversales. En realidad solo se coloca como correa un perfil “G” de 100/50/15/3 mm., pero se refuerza con otro perfil de las mismas características. El módulo de elasticidad del acero, es $E_s = 2100000\ kg/cm^2$.

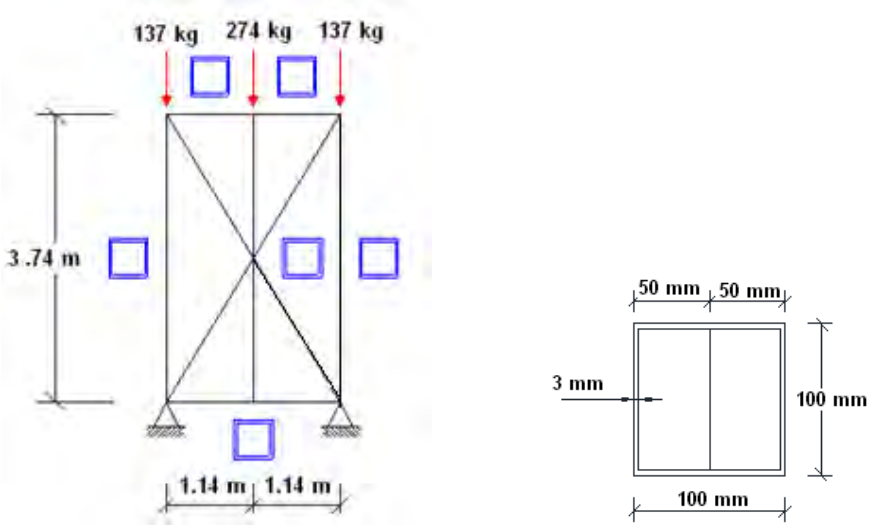



**Figura 15.9** Geometría de Cercha de Ejemplo 2.

- **SOLUCIÓN**

Todos los elementos estructurales de la armadura tienen el mismo perfil, luego tienen la misma sección transversal y es de 11.41 $cm^2$. En realidad no se dibujo toda la viga de borde en sentido transversal solo se dibujaron tres correas que están separadas 1.14 m.

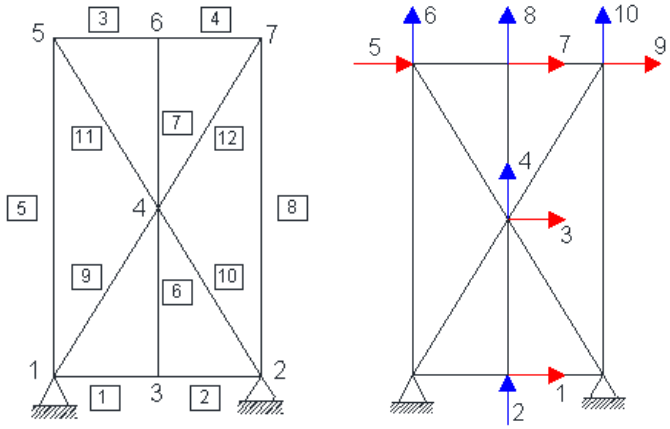



**Figura 15.10** Numeración de nudos, elementos y grados de libertad.

A la izquierda de la figura 15.10 se presenta la numeración de los nudos y elementos de la armadura plana; a la derecha los grados de libertad considerados. Cada nudo de la armadura tiene dos grados de libertad, la componente de desplazamiento horizontal y la de desplazamiento vertical. Nótese que en el nudo 4, existen grados de libertad, ya que se soldarán los perfiles que llegan a ese nudo.

```
function armadura_ej2
% Programa para resolver Armaduras Planas tipo San Andres
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%          CEINCI-ESPE
%         Diciembre de 2009
%-------------------------------------------------------------
% armadura_ej2
%-------------------------------------------------------------
nod=7;  % Número de nudos de armadura plana
nr=2;   % Número de nudos restringidos
F1=137; F2=274;% Se trabaja en kg y cm
%
% MATRIZ DE RESTRICCIONES DE LOS NUDOS
RES=[ 1   1    1; % Nudo restringido Des X, Des Y
      2   1    1];
%
% Calculo de Coordenadas Generalizadas y grados de libertad
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES) % CG  Matriz de coord generalizadas
% MATRIZ DE GENERACION DE NUDOS DE LOS ELEMENTOS
GEN=[1 1 3 0 0 0 0; %elem, ni, nf, elem a gene, inc en elem, inc en ni, inc en nf
    2 3 2 0 0 0 0;
    3 5 6 1 1 1 1;
    5 1 5 1 3 1 2;
    6 3 4 1 1 1 2;
    9 1 4 1 3 3 3;
    10 2 4 1 1 2 1];
 % Generación de vector NI (Nudo Inicial) y NJ (Nudo Final) de elementos
 [NI,NJ]=gn_portico(GEN);
```

```
% MATRIZ DE GENERACION DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
NUDOS=[1 0.0 0.0 1 4 0.0 374;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
       3 114 0.0 1 1 0.0 374/2;
       2 114*2 0 1 5 0.0 374;
       6 114 374 0 0 0.0 0.0];
% Generación de las coordenadas de los nudos
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
% Dibuja la armadura plana
dibujo (X,Y,NI,NJ);
% Vector de colocación
 [VC]=vc(NI,NJ,CG);
%Lngitud, Seno y Coseno de elementos
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
% Vector de cargas generalizadas
njc=3; % Número de juntas Cargadas
F=[5  0  -F1;
   6  0  -F2;
   7  0  -F1]; %Junta Cargada, FH, FV
[Q]=cargas_armadura(njc,ngl,CG,F);
% Areas de los elementos
area=11.41; %area de un elemento
SECCION=[1 area,11 1];
[ELEM]=gelem_armadura(SECCION);
% Matriz de rigidez de la estructura
E=2100000; % Modulo de elasticidad del acero en kg/cm2
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E)
% Desplazamientos y Giros
q=K\Q
% Fuerzas y momentos finales en los elementos
[FF]=fuerzas_armadura(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q)
% Cálculo de Momento de Volcamiento
punto=1; % Es el número de nudo con respecto al cual se calcula momento
[Momento]=mom_vol(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,X,Y,NI,NJ,njc,F,punto)
% ---end---
```

En la figura 15.11 se presenta la solución de la armadura. Los tensores en las cubiertas de las estructuras de acero, son una excelente alternativa para soportar las fuerzas sísmicas o de viento en sentido longitudinal.

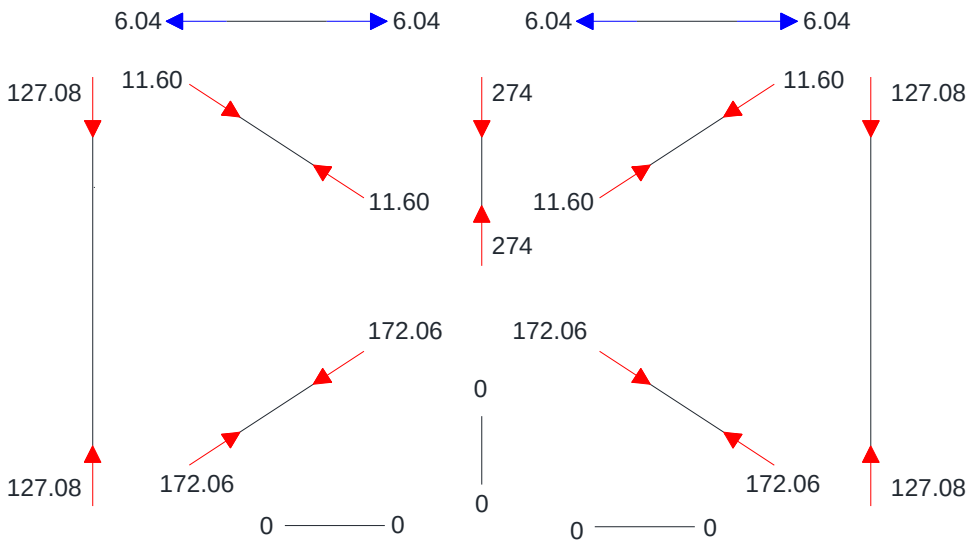



**Figura 15.11** Fuerzas que actúan en la Armadura del Ejemplo 2.

## 15.2 PORTICOS PLANOS

Los pórticos planos tienen tres grados de libertad por nudo, un desplazamiento horizontal, un desplazamiento vertical y una rotación. En este apartado se considera que todos los elementos de un pórtico, son totalmente flexibles.

### 15.2.1 Matriz de rigidez de un elemento

En forma similar al caso de una armadura plana, en la figura 15.12 se muestran los tres sistemas de un elemento de un pórtico plano. El sistema 1 corresponde al caso en que no se consideran los desplazamientos como cuerpo rígido; el sistema 2 son las coordenadas locales (axial y transversal) y el sistema 3 son las coordenadas globales (horizontal y vertical).

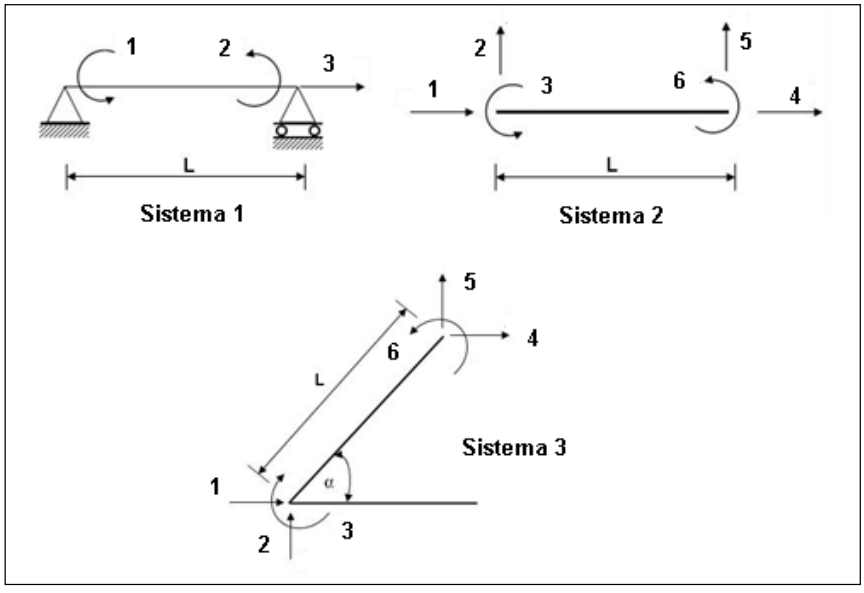



**Figura 15.12** Sistema de coordenadas de un elemento de un pórtico plano.

La matriz de rigidez en el sistema 1, es la siguiente:

$$\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \tag{15.9}$$

Donde $E$ es el módulo de elasticidad del material; $I$ es el momento de inercia de la sección transversal; $A$ es el área de la sección transversal; $L$ es la longitud del elemento; $\phi$ es el factor que mide el efecto del corte.

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} \tag{15.10}$$

Siendo $\beta$ el factor de forma que vale 1.2 para elementos rectangulares; $G$ es el módulo de corte.

La matriz de paso de los sistemas 1 al 2 y del 2 al 3, son:

$$\boldsymbol{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15.11}$$

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15.12}$$

Las matrices de rigidez en coordenadas locales $\boldsymbol{k}_2$ y en coordenadas globales $\boldsymbol{k}_3$ se hallan con las ecuaciones (15.3) y (15.5) ya indicadas. Pero realizando los productos matriciales con las matrices (15.9), (15.11) y (15.11). En ***CEINCI-LAB*** la matriz que determina la matriz de rigidez de un elemento de un pórtico plano se denomina: ***kmiembro***. Los datos de entrada y forma de uso es la siguiente:

- **[k3]=kmiembro (b,h,L,E,seno,coseno)**

Donde $\boldsymbol{k_3}$ es la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales; $b, h$ son la base y la altura de la sección transversal del elemento; $L$ es la longitud; $E$ es el módulo de elasticidad; $seno$ es el valor de $sen\,\alpha$; $coseno$es el valor del $\cos\alpha$.

### 15.2.2 Solución de un Pórtico Plano

El Análisis Matricial de Estructuras, está orientado a resolver una estructura en el computador, sin embargo de ello y con el propósito de conocer exactamente cómo se resuelve una estructura por el Método de los Desplazamientos, se desarrolla el siguiente ejercicio,

- **EJEMPLO 3**

Se considera que todos los elementos de la estructura de la figura 15.13, son totalmente flexibles, se pide:

i. Encontrar el Vector de Cargas Generalizadas $\boldsymbol{Q}$**,** empleando el Algoritmo denominado: Problema Primario y Problema Complementario.
ii. Indicar como se obtiene el Vector de Cargas Generalizadas $\boldsymbol{Q}$ utilizando la librería de programas de ***CEINCI-LAB***.
iii. Describir la forma como se halla la matriz de rigidez de la estructura con ***CEINCI-LAB.***
iv. Presentar la solución total con ***CEINCI-LAB***

No se desea elaborar un Programa que resuelva la estructura en forma completa como se hizo con el Ejemplo 1, lo que se quiere es ilustrar como se utilizan las diferentes subrutinas de ***CEINCI-LAB.***

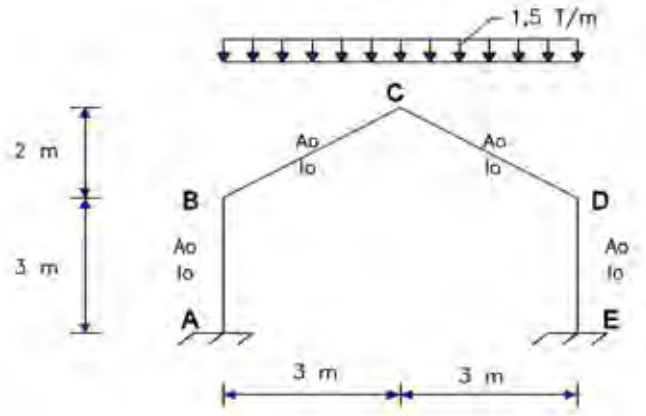



**Figura 15.13** Pórtico Plano correspondiente al Ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**

A la izquierda de la figura 15.14 se presenta la numeración de los nudos, que se ha considerado en la solución, en concordancia con esta numeración de los nudos, a la derecha se indican los grados de libertad. Por ser los elementos totalmente flexibles existente tres grados de libertad en cada nudo.

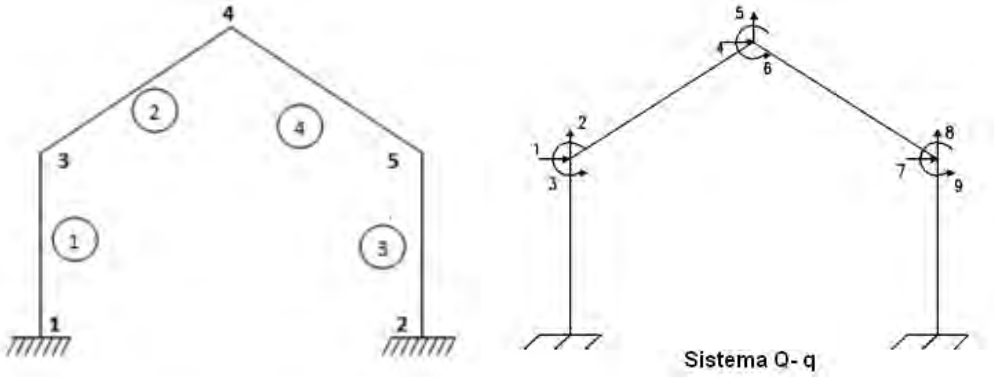



**Figura 15.14** Numeración de nudos, elementos y sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$

- **Problema Primario**

Por definición el Problema Primario, es aquel en el cual actúan todas las cargas y la condición es que el vector $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$. Es decir que actúan todas las cargas y los nudos interiores no se desplazan ni rotan, para lograr esto es necesario que existan cargas (fuerza o momento) de fijación $R_i$ que impiden ese grado de libertad.

Estas cargas de fijación se colocan con sentido contrario al sistema de cargas $\boldsymbol{Q}$ indicado en la figura 15.14. El Problema Primario finaliza con la determinación de estas cargas de fijación y ahí se obtendrá la verdadera dirección que tienen. En la figura 15.15 se presenta el problema primario de la estructura analizada.

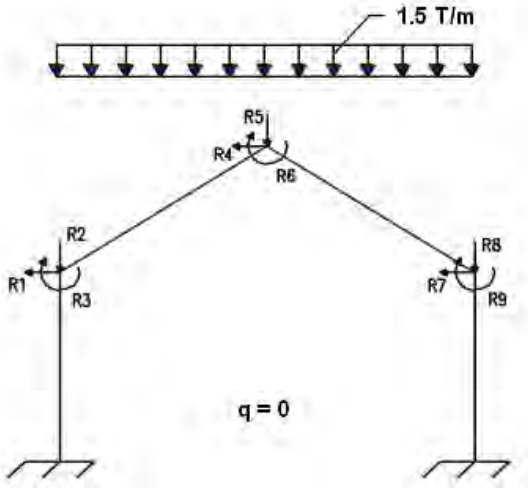



**Figura 15.15** Problema Primario

El Problema Primario tiene 2 etapas, que son equilibrio de elementos y equilibrio de juntas.

- **Equilibrio de elementos**

Para el equilibrio de elementos se considera que cada elemento está empotrado-empotrado debido a la condición de $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$. En la figura 15.16 se presentan los elementos empotrados-empotrados y las acciones de empotramiento perfecto, se ha utilizado un subíndice el mismo que corresponde a la identificación de los nudos que se ha dado en la figura 15.13. Nótese que los momentos de empotramiento perfecto se han colocado con el signo que salen.

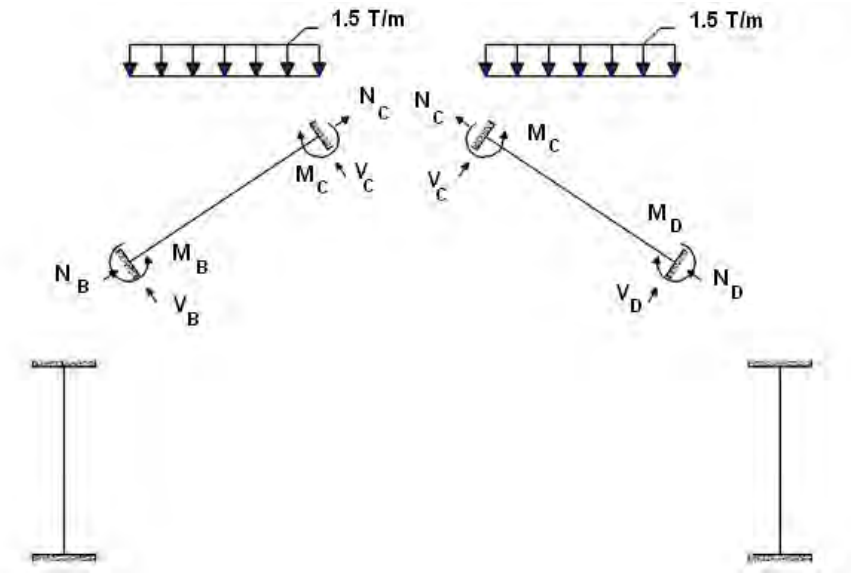



**Figura 15.16** Equilibrio de Elementos

Para encontrar las acciones de empotramiento perfecto, la carga vertical $W$ debe descomponerse en sus dos componentes $W_x$ que es una carga uniforme axial al eje del elemento y en la componente $W_y$ que es una carga transversal uniforme; en la figura 15.17 se presentan estas cargas pero en un elemento diferencial. Las ecuaciones con las que se hallan estas cargas uniformes distribuidas son:

$$W_Y = W * \cos^2 \propto = 1{,}5 * \frac{3}{\sqrt{13}} * \frac{3}{\sqrt{13}} = 1{,}03\ T/m$$

$$W_x = W * \text{sen} \propto * \cos \propto = 1{,}5 * \frac{2}{\sqrt{13}} * \frac{3}{\sqrt{13}} = 0{,}69\ T/m$$

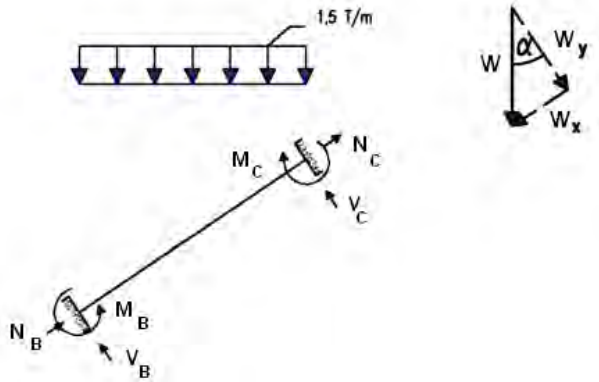


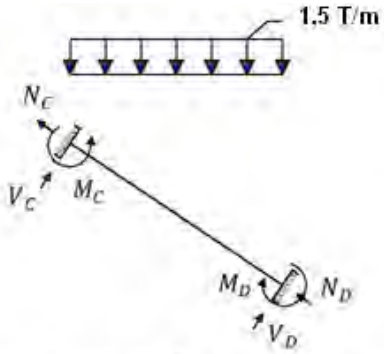

**Figura 15.17** Acciones de empotramiento perfecto de elemento BC.

$$N_C = N_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_x * \emptyset_1(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{13}} 0{,}69 * \left(1 - \frac{x}{\sqrt{13}}\right) dx = 1{,}24\ T$$

$$V_C = V_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_Y * \emptyset_2(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{13}} 1{,}03 * \left(1 - \frac{3x^2}{13} + \frac{2x^3}{(\sqrt{13})^3}\right) dx = 1{,}85\ T$$

$$M_C = M_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_Y * \emptyset_3(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{13}} 1{,}03 * \left(x - \frac{2x^2}{\sqrt{13}} + \frac{x^3}{13}\right) dx = 1{,}11\ T$$

Para el elemento CD se tiene algo similar y se presenta a continuación



$$W_Y = W * \cos^2 \propto = 1{,}5 * \frac{3}{\sqrt{13}} * \frac{3}{\sqrt{13}} = 1{,}03\ T/m$$

$$W_x = W * \text{sen} \propto * \cos \propto = 1{,}5 * \frac{2}{\sqrt{13}} * \frac{3}{\sqrt{13}} = 0{,}69\ T/m$$

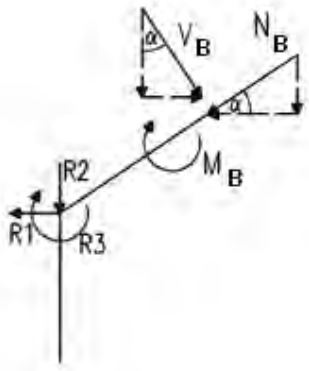
$$N_C = N_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_x * \emptyset_1(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{13}} 0{,}69 * \left(1 - \frac{x}{\sqrt{13}}\right) dx = 1{,}24\ T$$

$$V_C = V_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_Y * \emptyset_2(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{13}} 1{,}03 * \left(1 - \frac{3x^2}{13} + \frac{2x^3}{(\sqrt{13})^3}\right) dx = 1{,}85\ T$$

$$M_C = \quad = \int_0^{\sqrt{13}} W_Y * \emptyset_3(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{13}} 1{,}03 * \left(x - \frac{2x^2}{\sqrt{13}} + \frac{x^3}{13}\right) dx = 1{,}11\ T$$

- **Equilibrio de Junta B**

Las acciones de empotramiento perfecto actúan con sentido contrario en la Junta por este motivo se han cambiado de sentido. Para el equilibrio de la Junta la fuerza axial y de corte se descomponen en sus componentes horizontal y vertical.




$$\sum F_X = 0$$

$$V_B * \text{sen} \propto - N_B * \cos \propto - R_1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{R_1 = 0}$$

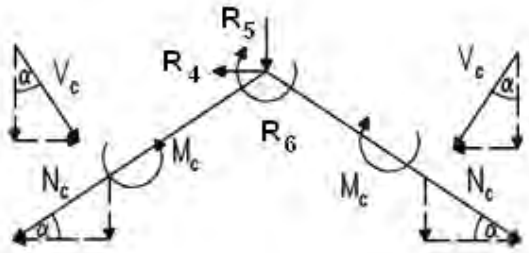
$$\sum F_Y = 0$$

$$-V_B * \cos \propto - N_B * \text{sen} \propto - R_2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{R_2 = -2{,}22\ T}$$

$$\sum M = 0$$

$$R_2 + M_B = 0 \Rightarrow \boldsymbol{R_3 = -1{,}11\ T.m}$$

- **Equilibrio de Junta C**




$$\sum F_X = 0$$

$$V_C * \text{sen} \propto -N_C * \cos \propto -R_4 - V_C * \text{sen} \propto + N_C * \cos \propto = 0 \Rightarrow R_4 = \mathbf{0}$$

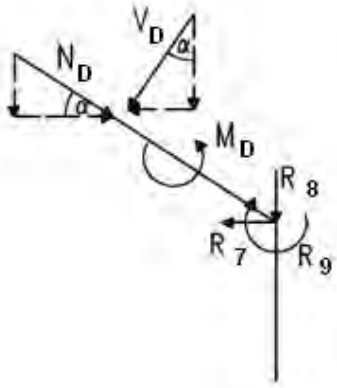
$$\sum F_Y = 0$$

$$-V_C * \cos \propto -N_C * \text{sen} \propto -R_5 - V_C * \cos \propto - N_C * \sin \propto = 0 \Rightarrow R_5 = -4{,}11\ T$$

$$\sum M = 0$$

$$R_6 + M_C - M_C = 0 \Rightarrow R_6 = \mathbf{0}$$

- **Equilibrio de Junta D**




$$\sum F_X = 0$$

$$-V_D * \text{sen} \propto + N_D * \cos \propto - R_7 = 0 \Rightarrow R_7 = 0$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-V_D * \cos \propto - N_D * \text{sen} \propto - R_8 = 0 \Rightarrow R_8 = -2{,}22\ T$$

$$\sum M = 0$$

$$R_9 - M_D = 0 \Rightarrow R_9 = 1{,}11\ T.m$$

- **Problema Complementario**

Solo actúan las cargas de fijación con sentido contrario al del Problema Primario para que generen el vector de coordenadas generalizadas ***q***. En la figura 15.18 se presenta el Problema Complementario, que es el que se resuelve con Análisis Matricial de Estructuras.

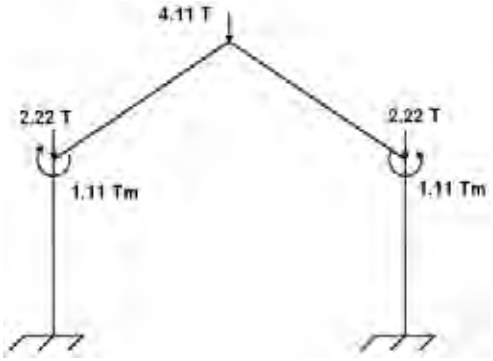



**Figura 15.18** Problema Complementario

En el Problema Complementario se tienen las cargas solo en las juntas y en la dirección del sistema $\boldsymbol{q}$. Por lo que se cumple con la segunda hipótesis de estructuras. La primera hipótesis se refiere al hecho de que solo interesa la posición de las juntas y para ello utilizamos coordenadas para definir la posición de las juntas o nudos.

De la figura 15.18 se desprende que el vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.22 \\ -1.11 \\ 0 \\ -4.11 \\ 0 \\ 0 \\ -2.22 \\ 1.11 \end{bmatrix}$$

La segunda pregunta del Ejemplo 3, se refiere a como se determina este vector de cargas utilizando el sistema de computación ***CEINCI-LAB***. Para ello se van a ir indicando cada una de las subrutinas que se requieren, con la entrada de datos y resultados esperados.

- **Descripción de algunos programas**

- ***[CG,ngl]=cg (nod,nr,RES)***

  El programa ***cg*** sirve para encontrar el ***CG*** y ***ngl*** de estructuras que tienen tres grados de libertad por nudo o dos grados de libertad por nudo. Sirve entonces por ahora, para pórticos planos o armaduras planas. Si es armadura plana el usuario solo indicará en la matriz ***RES*** tres datos por fila y son el número de nudo, código en X, y código en Y. Se destaca que código vale 1 o 0; el número 1 es para cuando no existe ese grado de libertad; el código 0 es para cuando existe ese grado de libertad; para pórticos planos se tienen 4 datos por cada nudo restringido: el número del nudo restringido y los códigos para los desplazamientos en X, Y, y la rotación.

  Los datos de entrada, son: ***nod*** que es el número de nudos de la estructura; ***nr*** que es el número de nudos restringidos; ***RES*** la matriz que contiene las restricciones de los nudos restringidos y que ha sido descrito en el párrafo anterior.

  El programa reporta una matriz que contiene las Coordenadas Generalizadas de la estructura ***CG***, y el número de grados de libertad ***ngl.***

  Para la estructura del Ejemplo 3, los datos son:

  >> *nod* = 5; *nr* = 2; *RES*=[1 1 1 1; 2 1 1 1];

*>> **[CG,ngl]=cg (nod,nr,RES)***

$$CG = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad ngl=9$$

Es conveniente numerar primero los nudos restringidos y después todos los demás como se lo ha realizado en la figura 15.14. La primera fila de ***CG*** son los grados de libertad del nudo 1; la segunda del nudo 2; la tercera del nudo 3; etc.

- ***[NI,NJ]=gn_portico (GEN)***

  El programa ***gn_portico*** sirve para obtener dos vectores que contienen al nudo inicial ***NI*** y al nudo final ***NJ*** de cada uno de los elementos del pórtico plano. La forma de uso del programa es: ***[NI,NJ]=gn_portico (GEN).*** Donde ***GEN*** es una matriz con la siguiente información para cada uno de los elementos: número del elemento; nudo inicial del elemento; nudo final del elemento; número de elementos a generar; incremento en la numeración de los elementos; incremento en la numeración del nudo inicial; incremento en la numeración del nudo final.

  Para el Ejemplo 3 se indica el arreglo ***GEN*** sin generar los nudos para que sea más fácil la explicación; a la derecha de la figura 15.14 se indica la numeración de los elementos

```
>> GEN = [1    1   3   0   0   0   0;
          2    3   4   0   0   0   0;
          3    2   5   0   0   0   0;
          4    4   5   0   0   0   0];
```

  *>> **[NI,NJ]=gn_portico (GEN)***

  El programa reporta:

$$NI = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad NJ = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

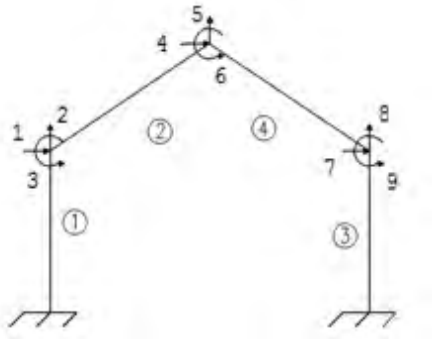
- ***[VC] = vc (NI,NJ,CG)***

  El programa ***vc*** determina los vectores de colocación de estructuras que tienen dos o tres grados de libertad por nudo. La forma de uso es: ***[VC] = vc (NI,NJ,CG)***. Donde ***NI*** es el vector que contiene a los nudos iniciales; ***NJ*** el vector con los nudos finales; ***CG*** es una matriz con las coordenadas generalizadas. El programa reporta la matriz que contiene a los vectores de colocación de cada uno de los elementos. El vector de colocación está compuesto por los grados de libertad del nudo inicial y del nudo final.

  A continuación se indica a la izquierda lo que reporta el programa, para el Ejemplo 3 y a la derecha se recuerda la numeración de los elementos (número dentro de un círculo) y los grados de liberad, para entender la matriz que contiene a los vectores de colocación de cada uno de los elementos.

```
VC =

     0     0     0     1     2     3
     1     2     3     4     5     6
     0     0     0     7     8     9
     4     5     6     7     8
```

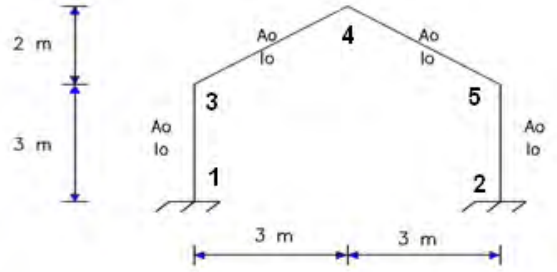



- ***[X,Y] = glinea_portico (Nudos)***

  El programa ***glinea_portico*** genera las coordenadas de los nudos, tanto en sentido X, como en sentido Y. La forma de uso es: ***[X,Y] = glinea_portico (Nudos)*** Donde ***Nudos*** es una matriz que contiene: Número de nudo; coordenada en X del nudo; coordenada en Y del nudo; número de nudos a generar; incremento en la numeración del nudo; incremento de longitud en sentido X; incremento de longitud en sentido Y. Reporta dos vectores ***X,Y*** con las coordenadas en X y de cada nudo.

  La entrada de datos, del Ejemplo 3, sin generar ningún nudo, es la siguiente.

```
NUDOS=[1 0.0 0.0 0 0 0.0 0.0;
       2 6.0 0.0 0 0 0.0 0.0;
       3 0.0 3.0 0 0 0.0 0.0;
       4 3.0 5.0 0 0 0.0 0.0;
       5 6.0 3.0 0 0 0.0 0.0];
```




El Programa reporta los vectores ***X, Y*** que tienen esta información.

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Con las coordenadas de los nudos se obtiene la longitud de los elementos; el seno y coseno del ángulo $\alpha$. Esto se lo realiza con el programa ***longitud*** que se indica más adelante.

- ***dibujo (X,Y,NI,NJ)***

  El programa ***dibujo***, presenta la estructura, es importante utilizar este programa para verificar si se han ingresado bien los datos. La forma de uso es: ***dibujo (X,Y,NI,NJ)*** Las variables de entrada de este programa ya fueron indicadas.

- ***[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ)***

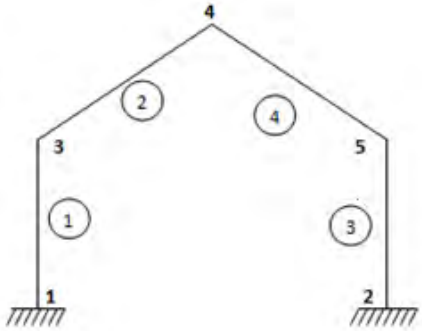
  El programa ***longitud*** determina la longitud; $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$ de cada uno de los elementos de una estructura plana. Como se indicó $\alpha$ es el ángulo que forma el eje del elemento con el eje de las X. El programa reporta tres vectores, denominados ***L***, que contiene la longitud de cada uno de los elementos; ***seno*** con el valor de la función seno de cada elemento y ***coseno*** con el valor del coseno de cada elemento.

Para el Ejemplo 3, la ejecución del programa, reporta.

```
L =
    3.0000    3.6056    3.0000    3.6056

seno =
    1.0000    0.5547    1.0000   -0.5547

coseno =
         0    0.8321         0    0.8321
```




- ***[Q, Q2] = cargas (njc, nmc, ngl, L, seno, coseno, CG, VC, F, Fm, datos)***

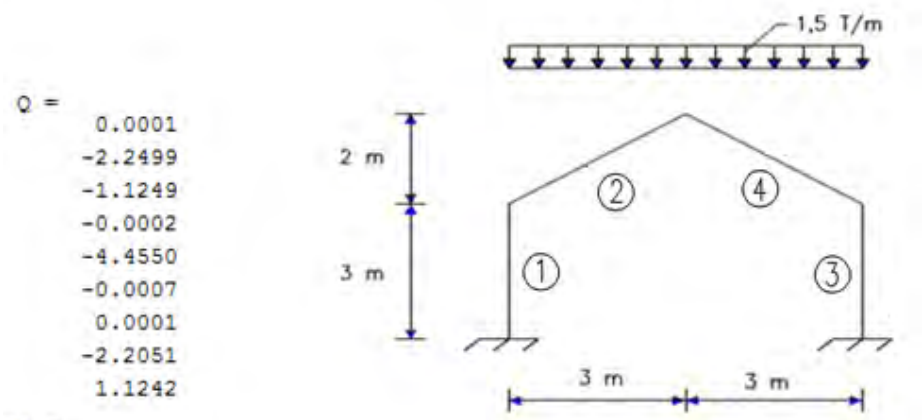
  El programa ***cargas*** determina el vector de cargas generalizadas $Q$ en pórticos con cargas en las juntas y cargas en los elementos; la forma de uso de este programa es la siguiente: ***[ Q, Q2]= cargas (njc, nmc, ngl, L,seno, coseno, CG, VC, F, Fm).*** Donde ***njc*** es el número de juntas cargadas, ***nmc*** es el número de elementos cargados; ***ngl*** es el número de grados de libertad; ***L*** vector con la longitud de cada uno de los elementos; ***seno*** vector con el $sen\,\alpha$ de los elementos; **coseno** vector con el $\cos\alpha$ de los elementos; ***CG***, matriz que contiene las coordenadas generalizadas de la estructura; ***VC***, matriz con los vectores de colocación de los elementos; ***F*** matriz con la siguiente información: número del elemento cargado, fuerza horizontal (positiva hacia la derecha), fuerza vertical (positiva hacia arriba) y el momento (anti horario positivo) de cada una de las juntas cargadas; ***Fm*** matriz que contiene el número del elemento cargado; la carga que actúa en el elemento; Código de Carga, actualmente solo trabaja con carga uniforme distribuida, el código es 1; número de elementos a generar; incremento en la numeración de los elementos; ***datos*** esta opción se utiliza cuando se tiene cualquier tipo de carga en los elementos, en este caso, el usuario, determina aparte las acciones de empotramiento perfecto y da como datos en la variable ***datos***, que tiene la siguiente información: número del elemento cargado; fuerzas axial y de corte y momento en el nudo inicial; fuerza axial, de corte y momento en el nudo final, son 7 datos por cada elemento cargado.

  Si no hay cargas en las juntas se debe especificar $njc = 0$ y se debe indicar $F = 0$. Lo propio si no hay cargas en los elementos se debe indicar $nmc = 0$ y $Fm = 0$. Finalmente si no se desea ingresar las acciones de empotramiento perfecto, se colocará ***datos = 0***

  Para el Ejemplo 3, los datos que todavía no se han indicado para usar el programa ***cargas*** son:

```
>> njc=0; nmc=2; F=0; datos=0;
>> FM=[2  1.5  1   0   0   0;
       4  1.5  1   0   0   0];
```

  Los otros datos que se necesitan para ejecutar el programa *cargas* han sido ya indicados. El programa reporta.




```
Q =
    0.0001
   -2.2499
   -1.1249
   -0.0002
   -4.4550
   -0.0007
    0.0001
   -2.2051
    1.1242

Q2 =
         0         0         0         0         0         0
    1.2480    1.8721    1.1249    1.2232    1.8347   -1.1242
         0         0         0         0         0         0
   -1.2480    1.8721    1.1249   -1.2232    1.8347   -1.1242
```

- ***[K] = krigidez (ngl, ELEM, L, seno, coseno, VC, E)***

  Programa que determina la matriz de rigidez de Pórticos Planos o de Armaduras Planas. Las variables que han sido ya definidas son: ***ngl*** es el número de grados de libertad de la estructura; ***L***, es un vector con la longitud de cada uno de los elementos; ***seno, coseno,*** vectores con los senos y cosenos de cada elemento; ***VC*** es la matriz con los vectores de colocación de cada elemento. Las variables no definidas todavía, son: ***E*** es el módulo de elasticidad del material; ***ELEM*** define la geometría de las secciones transversales de los elementos.

  Para ***armaduras planas***, ***ELEM***, está compuesto el área de la sección transversal de cada uno de los elementos. Para ***pórticos planos,*** en ***ELEM*** se indica la base y la altura de cada elemento.

- ***[FF]=fuerzas (ngl, ELEM, L, seno, coseno, VC, E, q, Q2)***

  De los datos de entrada, la variable no definida todavía es ***q*** que es el vector de coordenadas generalizadas. Este vector se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales: ***Q = K q***. En ***MATLAB*** la solución del sistema de ecuaciones se realiza de la siguiente manera: ***q = K \ Q***

  Este programa determina las cargas finales en los elementos en coordenadas locales, en una matriz que se ha denominado ***FF.*** Para ***armaduras planas*** la matriz ***FF*** tiene cuatro cantidades que son las fuerzas axiales y de corte, del nudo inicial y final, respectivamente; la fuerza de corte será cero en armaduras planas. Para ***pórticos planos, FF*** contiene la fuerza axial, fuerza de corte, momento, del nudo inicial y del nudo final. La primera fila de ***FF*** corresponde al primer elemento, la segunda fila al segundo elemento, etc.

  Se destaca que la matriz ***Q2*** contiene las cargas de empotramiento perfecto de los elementos en coordenadas locales y se encontró cuando se ejecutó el programa ***cargas***. Para una armadura plana la matriz ***Q2*** es nula, debido a que en armaduras no hay cargas en los elementos.

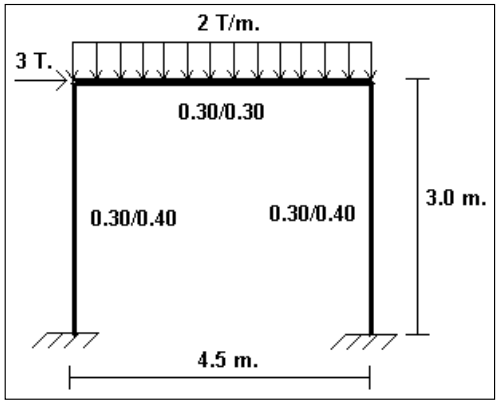



**Figura 15.19** Pórtico plano a resolver con ***CEINCI-LAB***

- **SOLUCIÓN**

A la izquierda de la figura 15.20 se muestra la numeración de los nudos y elementos; a la derecha se indican los grados de libertad. Las matrices **CG** (Coordenadas Generalizadas) y **VC** (Vectores de colocación) son:

$$CG = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad VC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

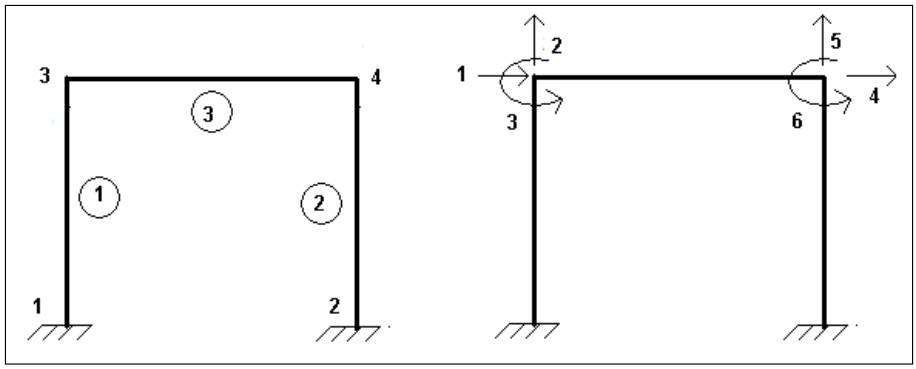



**Figura 15.20** Numeración de nudos y elementos. Grados de libertad de la estructura.

El vector de cargas es:

$$\mathbf{Q}^t = [\ 3.00 \quad -4.50 \quad -3.375 \quad 0.00 \quad -4.50 \quad 3.375].$$

De la solución del sistema de ecuaciones **K Q =q** , se encuentra:

$$\mathbf{q}^t = [0.0026 \quad -0.0001 \quad -0.0017 \quad 0.0025 \quad -0.0001 \quad -0.0001].$$

**Tabla 15.1** Fuerzas y momentos finales en extremos de elementos

| Elemento | Nudo Inicial | | | Nudo Final | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Fuerza Axial ( T. ) | Fuerza de Corte ( T.) | Momento ( T.m.) | Fuerza Axial ( T. ) | Fuerza de Corte ( T.) | Momento ( T.m.) |
| **1** | 3.8762 | 0.0646 | 1.7255 | -3.8762 | -0.0646 | -1.5316 |
| **2** | 5.1238 | 2.9354 | 4.4765 | -5.1238 | -2.9354 | 4.3386 |
| **3** | 2.9354 | 3.8762 | 1.5316 | -2.9354 | 5.1238 | -4.3386 |

En la tabla 15.1, se muestran las fuerzas y momentos en cada uno de los elementos, en coordenadas locales. El archivo de datos del programa que resuelve el pórtico indicado es el siguiente.

```
% Programa para resolver un Pórtico de 1 piso y 1 vano
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%          CEINCI-ESPE
%        30 de agosto de 2012
%.....................................................................
%   portico_ej1
%.....................................................................
nod=4;  % Número de nudos del pórtico plano
nr=2;   % Número de nudos restringidos
% MATRIZ DE RESTRICCIONES DE LOS NUDOS
RES=[ 1   1  1  1; % Nudo restringido Des X, Des Y, Rot
      2   1  1  1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES) % CG  Matriz de coord generalizadas
% MATRIZ DE GENERACION DE NUDOS DE LOS ELEMENTOS
GEN=[1 1 3 1 1 1 1; %elem, ni, nf, elem a gene, inc en elem, inc en ni, inc en nf
     3 3 4 0 0 0 0];
 [NI,NJ]=gn_portico(GEN);%Generacion de vectores NI (Nudo Inicial) y NJ (Nudo Final)
% MATRIZ DE GENERACION DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
NUDOS=[1 0.0 0.0 1 1 4.5 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
       3 0.0 3.0 1 1 4.5 0.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Generación de las coordenadas de los nudos
dibujo (X,Y,NI,NJ)% Dibuja el portico plano
[VC]=vc(NI,NJ,CG);% Vector de colocación
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);% Longitud, Seno y Coseno de elementos
% Vector de cargas generalizadas
njc=1;F=[3 3 0 0];datos=0; % Cargas en las Juntas
nmc=1;Fm=[3  2.0  1  0  0]; %Elem carg, carga, código, elem a gener, incr numero elemento
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos)
% Secciones de los elementos
SECCION=[1  0.30  0.40  1   1; % Eleme, base, altura, elem a gener, increm en elem
         3  0.30  0.30  0   0];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION)
E=1800000; % Modulo de elasticidad del material
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);% Matriz de rigidez de la estructura
q=K\Q % Desplazamientos y Giros
[FF]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)% Fuerzas y momentos finales en los
elementos
% ---end---
```

### 15.2.4 Cálculo de las Reacciones

En la forma como se resolvió el pórtico plano, del Ejemplo 4, no es posible calcular directamente las reacciones de los apoyos, se debe hacer equilibrio en los apoyos y colocar las fuerzas en los extremos de los elementos que se han obtenido. Si se desea encontrar directamente, las reacciones se debe considerar como que no existe apoyo en la base y numerar esos grados de libertad.

- **EJEMPLO 5**

En la figura 15.21, se presenta a la izquierda el pórtico resuelto en el apartado anterior con los grados de libertad (gdl) indicados en la gráfica central. Ahora se va a resolver este pórtico con los gdl., indicados a la derecha, con 12 gdl, considerando grados de libertad en los empotramientos para hallar directamente las reacciones. Como se verá más adelante loa grados de liberad del 1 al 6 que están relacionados con apoyos valen cero ya que es empotramiento perfecto.

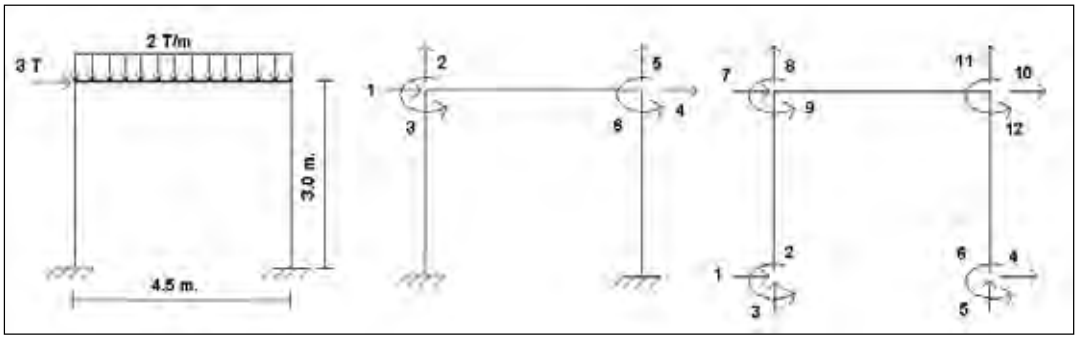



**Figura 15.21** Modelo para calcular las reacciones de los apoyos directamente.

La ecuación básica de análisis matricial de estructuras, es la siguiente.

$$\boldsymbol{Q = K\,q}$$

Donde $\boldsymbol{Q}$ es el vector de cargas generalizadas; $\boldsymbol{K}$ es la matriz de rigidez de la estructura y $\boldsymbol{q}$ es el vector de coordenadas generalizadas. Para encontrar directamente las reacciones se debe reconocer dos tipos de coordenadas, las que están directamente relacionadas con las reacciones, en el ejemplo sería de la 1 a la 6, a estas se denominan ***coordenadas a,*** y los restantes grados de libertad que en este caso van del 7 al 12, a estas se llaman ***coordenadas b***. Luego la ecuación básica de análisis matricial, queda:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q_A + R} \\ \boldsymbol{Q_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{AA}} & \boldsymbol{K_{AB}} \\ \boldsymbol{K_{BA}} & \boldsymbol{K_{BB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_A} \\ \boldsymbol{q_B} \end{bmatrix} \qquad (15.15)$$

Siendo $\boldsymbol{Q_A}$ el vector de cargas generalizadas asociadas a las coordenadas 1 a 6 pero como no existen cargas en las columnas este vector vale cero. $\boldsymbol{R}$ es el vector que contiene las reacciones de los apoyos; $\boldsymbol{Q_B}$ es el vector de cargas generalizadas asociado a las coordenadas 7 a 12.

Con los grados de libertad considerados, la matriz de rigidez de la estructura es de 12 por 12 y la partición se realiza de acuerdo al número de coordenadas $a$ y $b$ ; se denominan $na$ al número de coordenadas $a$ que en este caso es 6; $nb$ al número de coordenadas $b$

que también es 6. Luego las sub matrices $\boldsymbol{K_{AA}}$ es de $(na, na)$; $\boldsymbol{K_{AB}}$ de $(na, nb)$; $\boldsymbol{K_{BB}}$de $(nb, nb)$ y $\boldsymbol{K_{BA}} = \boldsymbol{K_{AB}^t}$. **El vector $\boldsymbol{q_A}$ contiene a los desplazamientos y giros de las coordenadas $a$ que vale cero ya que la estructura es empotrada** y $\boldsymbol{q_B}$ son los desplazamientos y giros de las coordenadas $b$. Al desarrollar la ecuación (15.15) se tiene:

$$\boldsymbol{Q_A} + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{K_{AB}} * \boldsymbol{q_B}$$
$$\boldsymbol{Q_B} = \boldsymbol{K_{BB}}\, \boldsymbol{q_B}$$

De la segunda ecuación se obtiene $\boldsymbol{q_B}$ resolviendo el sistema de ecuaciones indicado. Al reemplazar $\boldsymbol{q_B}$ en la primera ecuación se halla $\boldsymbol{R}$.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K_{AB}} * \boldsymbol{q_B} - \boldsymbol{Q_A} \qquad (15.16)$$

- **SOLUCIÓN**

El programa con el cual se obtiene directamente las reacciones de los apoyos de la estructura indicada en la figura 15.20 se lista a continuación.

```
% Calculo Directo de las Reacciones de un Pórtico
%
%        Dr. Roberto Aguiar
%        15 de diciembre de 2012
%-----------------------------------------------
% portico_ej2
%-----------------------------------------------
nod=4;nr=1;RES=[1 0 0 0];% Obligado colocar nr=1
[CG,ngl]=cg (nod,nr,RES);% CG con todos los grados de libertad
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;3 3 4 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
NUDOS=[1 0.0 0.0 1 1 4.5 0.0; 3 0.0 3.0 1 1 4.5 0.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
dibujo (X,Y,NI,NJ);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
SECCION=[1 0.30 0.40 1 1; 3 0.30 0.30 0 0];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
E=1800000;
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
Kaa=K(1:6,1:6);Kab=K(1:6,7:ngl);Kbb=K(7:ngl,7:ngl);
njc=1;F=[3 3 0 0];nmc=1;Fm=[3 2 1 0 0]; datos=0;
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos);
na=6;Qa=Q(1:na);
Qb=Q(na+1:ngl);
qb=Kbb\Qb;
qa=[0;0;0;0;0;0];
q=[qa;qb];
R=Kab*qb
[FF]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)
```

El vector que contiene las reacciones $\boldsymbol{R}$ que reporta el programa es:

$$\boldsymbol{R}^t = [-0.0646 \quad 3.8762 \quad 1.7255 \quad -2.9354 \quad 5.1238 \quad 4.4675]$$

Los restantes resultados son los ya indicados en el problema anterior.

### 15.2.5 Estructuras con cargas puntuales

Actualmente algunas estructuras se están reforzando o al menos están comprobando si sus elementos estructurales están en capacidad de resistir la coloción de un Data Center, que tienen un considerable número de equipos que son bastante pesados, ver figura 15.22

Los fabricantes de estos equipos proporcionan los pesos de cada uno de ellos y conjuntamente con el Arquitecto se procede a ubicarlos. Estos equipos pueden ser modelados como cargas puntuales o como carga repartida en un determinado sitio.

Sea como sea el Proyectista estructural deberá hacer su modelo de cálculo con cargas puntuales o con cargas uniformes o una mezcla de las dos y encontrar las acciones de empotramiento perfecto que deberá dar como dato al programa ***cargas*** del sistema de computación ***CEINCI-LAB.***

En el Ejemplo que se presenta a continuación se ha considerado solo dos cargas puntuales en la viga, para ilustrar el cálculo con cualquier tipo de carga.

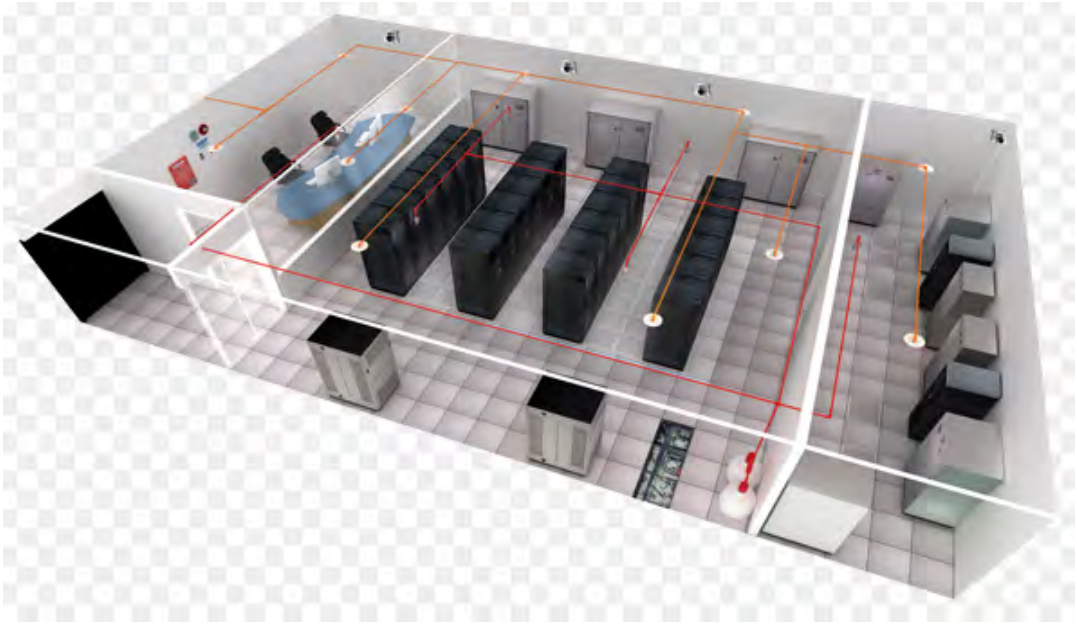


**Figura 15.22** Equipos de un Data Center que se pueden modelar como masas puntuales.

- **EJEMPLO 6**

Resolver el pórtico plano de la figura 15.23, que tiene cargas puntuales sobre la viga. Las dimensiones están en metros y la sección transversal de sus elementos en cm. EL módulo de elasticidad $E = 1800000\ T/m^2$

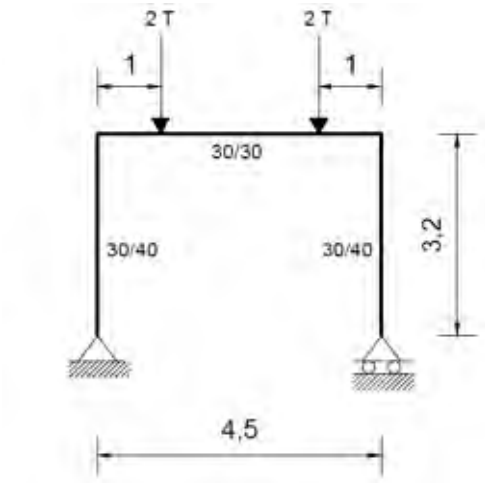



**Figura 15.23** Pórtico con cargas puntuales.

- **SOLUCION**

Se debe encontrar el vector de empotramiento perfecto de la viga con dos cargas puntuales, esto se lo hace con funciones de forma o simplemente viendo en una tabla donde se encuentren las fórmulas para esas cargas. Se denomina $\boldsymbol{Q_2}$ al vector de empotramiento perfecto en coordenadas locales, para la viga este vecor es el siguiente.

$$\boldsymbol{Q_2 = [0.0 \quad 2.00 \quad 1.556 \quad 0.0 \quad 2.00 \quad -1.556]}$$

La numeración de los grados de libertad se indica a la izquierda de la figura 15.24; a la derecha se presenta la numeración de nudos y elementos. Se ha colocado un apoyo fijo y un rodillo para ilustrar la entrada de datos en los nudos restringuidos.

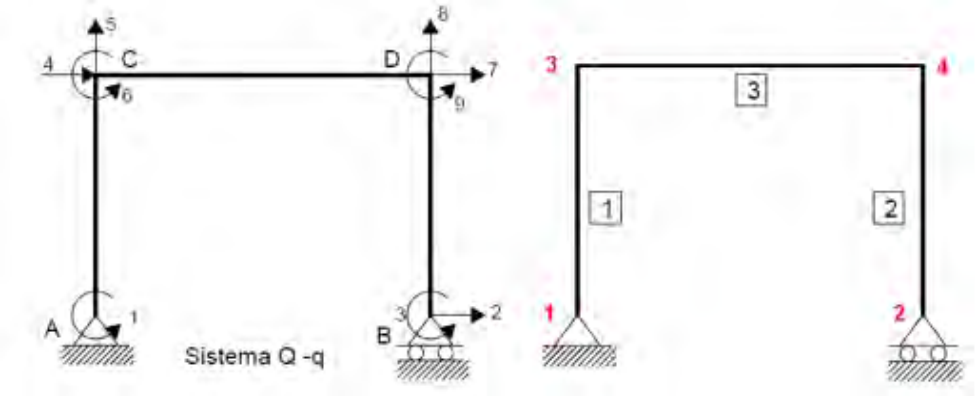



**Figura 15.24** Coordenadas generalizadas, numeración de nudos y elementos.

El programa con que se resuelve el Ejemplo 6 se lista a continuación.

```
% Solución de pórtico con cargas puntuales en un elemento
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%          CEINCI-ESPE
%        27 de septiembre de 2013
%.....................................
% portico_ej3
%.....................................
```

```
nod=4;  % Número de nudos del pórtico plano
nr=2;   % Número de nudos restringidos
RES=[ 1   1  1  0; % Nudo restringido Des X, Des Y, Rot
      2   0  1  0];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES) % CG  Matriz de coord generalizadas
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;
     3 3 4 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN) % Nudo Inicial NI y Nudo Final NJ
NUDOS=[1 0.0 0.0 1 1 4.5 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
       3 0.0 3.2 1 1 4.5 0.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS) % Generación de las coordenadas de los nudos
dibujo (X,Y,NI,NJ)% Dibuja el Pórtico
 [VC]=vc(NI,NJ,CG) % Vector de colocación
 [L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ) %Longitud, seno y coseno de los elementos
njc=0;F=0; % Número de juntas Cargadas
datos=[0 2 1.5556 0 2 -1.556]; % N  V M  N'  V' M' de empotramiento perfecto
nmc=1; % Número de miembros cargados
Fm=[3  0  4  0  0]; %Elem carg, carga, código, elem a gener, incr numero elemento
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos)
SECCION=[1  0.30  0.40  1   1; % Eleme, base, altura, elem a gener, increm en elem
         3  0.30  0.30  0   0];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION)
E=1800000; % Modulo de elasticidad del material
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E) % Matriz de rigidez de la estructura
q=K\Q % Desplazamientos y Giros
[FF]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2) % Fuerzas y momentos finales en los
elementos
% ---end---
```

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.0000 \\ -1.5556 \\ 0 \\ -2.0000 \\ 1.5560 \end{bmatrix} \qquad Q2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0000 & 1.5556 & 0 & 2.0000 & -1.5560 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.3479 & 0 & 0 & 0.1612 & 0 & 0.1679 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1007 & -0.1612 & 0 & 0 & 0 & -0.1007 & 0 & -0.1612 \\ 0 & -0.1612 & 0.3479 & 0 & 0 & 0 & 0.1612 & 0 & 0.1679 \\ 0.1612 & 0 & 0 & 3.7007 & 0 & 0.1612 & -3.6000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7658 & 0.0355 & 0 & -0.0158 & 0.0355 \\ 0.1679 & 0 & 0 & 0.1612 & 0.0355 & 0.4548 & 0 & -0.0355 & 0.0529 \\ 0 & -0.1007 & 0.1612 & -3.6000 & 0 & 0 & 3.7007 & 0 & 0.1612 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0158 & 0.0355 & 0 & 6.7658 & -0.0355 \\ 0 & -0.1612 & 0.1679 & 0 & 0.0355 & 0.0529 & 0.1612 & -0.0355 & 0.4548 \end{bmatrix} 1.0e+004$$

$$q = \begin{bmatrix} -0.0039 \\ 0.0184 \\ 0.0029 \\ 0.0092 \\ 0.0000 \\ -0.0029 \\ 0.0092 \\ -0.0000 \\ 0.0039 \end{bmatrix} \qquad FF = \begin{bmatrix} 2.0001 & -0.0000 & -0.0000 & -2.0001 & 0.0000 & -0.0000 \\ 1.9999 & 0.0000 & 0.0000 & -1.9999 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 2.0001 & 0.0000 & 0 & 1.9999 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

Se ha presentado el vector de cargas generalizadas $Q$ y la matriz que contiene las acciones de empotramiento perfecto $\boldsymbol{Q}_2$; luego se indica la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$; finalmente se

muestra el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ que contiene los desplazamientos y giros y las fuerzas finales en coordenadas locales, en los elementos $\boldsymbol{FF}$.

### 15.2.6 Reforzamiento sísmico de estructuras

Una forma de reforzar sísmicamente una estructura es colocar diagonales de acero entre las columnas, de esta manera se rigidiza notablemente el pórtico. Lo que se desea ilustrar en este apartado es como se resuelve un pórtico de hormigón armado con diagonales de acero, sometido a cargas verticales (carga muerta más carga viva) y cargas horizontales (sismo).

Ese es el objetivo, razón por la cual no se profundiza en el reforzamiento pero vale la pena mencionar que el Proyectista Estructural deberá tener en cuenta los problemas de torsión en planta ya que cuando se colocan diagonales se tienen pórticos muy rígidos y el otro aspecto que se debe chequear es el problema de pandeo cuando las diagonales trabajan a compresión, debido a que la fuerza axial que resisten es muy alta.

En la figura 15.25 se presenta una estructura de hormigón armado reforzada con diagonales de acero en forma de “V” invertida, ubicada en la ciudad de Viña del Mar, en Chile. El ejemplo que se resuelve a continuación está inspirado en la estructura de la figura 15.25.

**Figura 15.25** Estructura reforzada en Viña del Mar, con diagonales de acero.

- **EJEMPLO 7**

Resolver la estructura de la figura 15.26, considerando un módulo de elasticidad del hormigón de 1600000 T/m$^2$ y del acero 20000000 T/m$^2$. Las columnas y vigas de hormig[on son de 20/20 cm, y las diagonales de acero un perfil tubular de 100/100/4 mm.

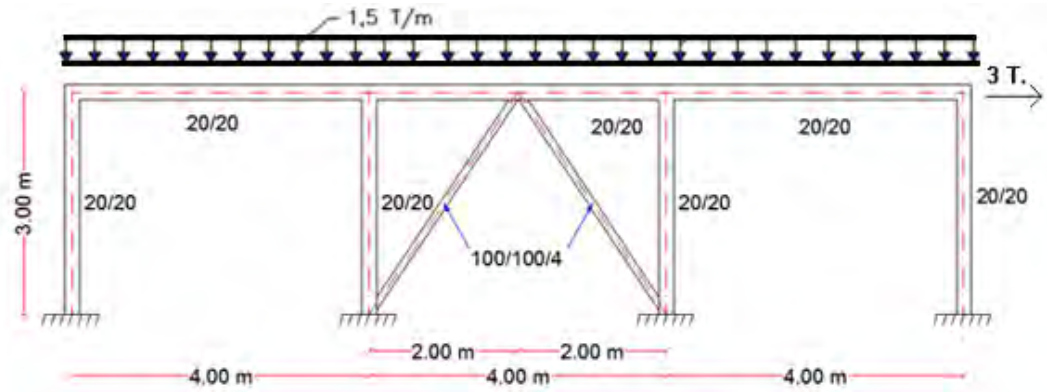



**Figura 15.26** Estructura mixta de hormigón armado y diagonales de acero

- **SOLUCIÓN**

En la figura 15.27 se presentan los grados de libertad de la estructura analizada y en la figura 15.28 la numeración de los nudos y elementos. Nótese que se ha considerado un nudo en el punto medio de la viga central donde llegan las dos diagonales de hormigón.

Por otra parte, se ha numerado en primer lugar todos los elementos de hormigón y después los elementos de acero; de esa manera se encontrará en primer lugar la contribución de los elementos de hormigón a la matriz de rigidez y posteriormente la contribución de los elementos de acero.

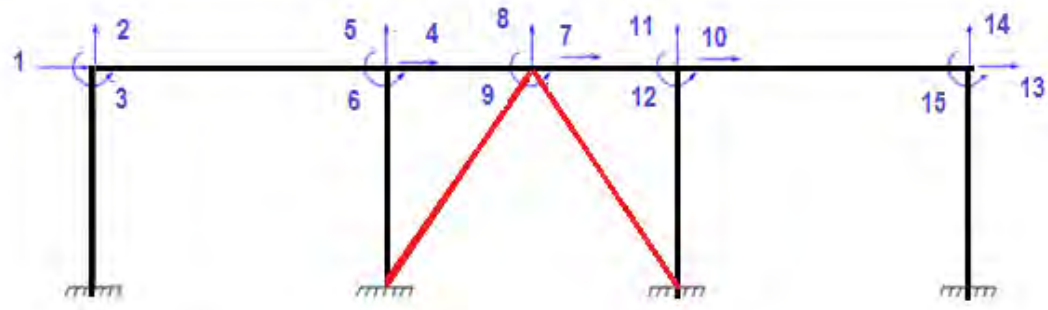



**Figura 15.27** Grados de libertad

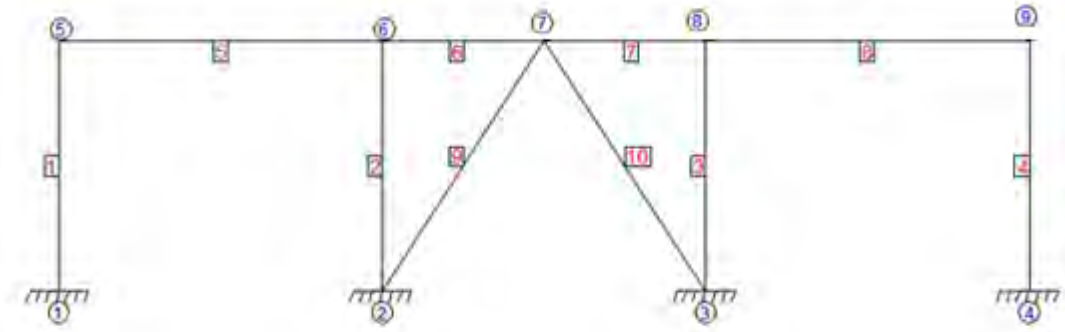


**Figura 15.28** Numeración de nudos y elementos

Las diagonales de acero tienen conexiones simples, por lo tanto lo más fácil es que se

sumistre al programa los vectores de colocación. A continuación se presenta el programa desarrollado en ***MATLAB*** utilizando el sistema de computación ***CEINCI-LAB***

```
% Solución de pórtico con vigas y columnas de hormigón y diagonales
% de acero.
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%          CEINCI-ESPE
%       16 de mayo de 2014
%.....................................................
% portico_ej4
%.....................................................
nod=9; nr=4;
RES=[ 1  1  1  1; % Nudo restringido Des X, Des Y, Rot
     2  1  1  1; 3 1 1 1; 4 1 1 1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES); % CG  Matriz de coord generalizadas
GEN=[1 1 5 1 1 1 1;3 3 8 1 1 1 1;
    5 5 6 3 1 1 1;9 2 7 1 1 1 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Nudo Inicial NI y Nudo Final NJ
NUDOS=[1 0.0 0.0 3 1 4.0 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
      5 0.0 3.0 1 1 4.0 0.0; 7 6.0 3.0 1 1 2.0 0.0;
      9 12 3.0 0 0 0 0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS); % Generación de las coordenadas de los nudos
dibujo (X,Y,NI,NJ)% Dibuja el Pórtico
[VC]=vc(NI,NJ,CG); % Vector de colocación
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ); %Longitud, seno y coseno de los elementos
njc=1;F=[9 0 0 0]; % Número de juntas Cargadas
datos=0;
nmc=4; % Número de miembros cargados
Fm=[5 1.5  1  1  3; %Elem carg, carga, código, elem a gener, incr num elemen
6 1.5 1 1 1];
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos);
SECCION=[1  0.20  0.20  7   1; % Eleme, base, altura, elem a gener, increm en elem
        9  0.0001  0.0001  1   1];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
E=1600000; % Modulo de elasticidad del material
[KH]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); % Matriz de rigidez solo de elementos de acero
% Contribucion de diagonales de acero a la matriz de rigidez
LA=L(9:10);senA=seno(9:10);cosA=coseno(9:10);area=0.001536;
VCA=[0 0 7 8;0 0 7 8]; Es=20000000; ELEMA=[area;area];
[KA]=krigidez(ngl,ELEMA,LA,senA,cosA,VCA,Es);
KT=KH+KA;
q=KT\Q; % Desplazamientos y Giros
[FH]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2) % Fuerzas y mom en Hormigon
Q2A=zeros(2,4)
[FA]=fuerzas(ngl,ELEMA,LA,senA,cosA,VCA,Es,q,Q2) % Fuerzas y mom en Acero
% ---end---
```

En la parte final del progama ***portico_ej4*** se observa que se ha ejecutado dos veces el programa ***fuerzas***, en la primera se obtienen fuerzas y momentos en coordenadas locales de los elementos de hormigón y en la segunda solo lasfuerzas en coordenadas locales de los elementos de acero. Nótese que en este último caso se debe dar como dato Q2A una matriz de 2 por 4 con ceros, ya que no existen cargas de empotramiento perfecto en los elementos de acero pero es necesario para que pueda ejecutarse el programa ***fuerzas.*** Los resultados se indican a continuación.

$$FH = \begin{bmatrix} 2.8008 & -0.6033 & -0.5715 & -2.8008 & 0.6033 & -1.2384 \\ 5.3374 & 0.3491 & 0.3728 & -5.3374 & -0.3491 & 0.6746 \\ 5.3221 & -0.2617 & -0.2305 & -5.3221 & 0.2617 & -0.5546 \\ 2.8411 & 0.6806 & 0.7123 & -2.8411 & -0.6806 & 1.3293 \\ 0.6033 & 2.8008 & 1.2384 & -0.6033 & 3.1992 & -2.0350 \\ 0.2542 & 2.1382 & 1.3604 & -0.2542 & 0.8618 & -0.0840 \\ -2.5811 & 0.8368 & 0.0840 & 2.5811 & 2.1632 & -1.4104 \\ -2.3194 & 3.1589 & 1.9649 & 2.3194 & 2.8411 & -1.3293 \end{bmatrix}$$

$$FA = \begin{bmatrix} -1.5349 & -0.0000 & 1.5349 & 0.0000 \\ 3.5764 & -0.0000 & -3.5764 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

*CAPITULO 16*

# CONDENSACIÓN ESTÁTICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

## RESUMEN

La condensación estática de la matriz de rigidez, es la base fundamental para el análisis sísmico de estructuras. Por este motivo en éste capítulo se presenta esta temática orientada al uso del sistema de computación ***CEINCI-LAB.***

Se presentan tres formas de encontrar la matriz de rigidez condensada, a saber: la primera involucra la inversión de una matriz, la segunda implica la solución de un conjunto de ecuaciones lineales y la tercera mediante la triangularización de Gauss.

El análisis sísmico de una estructura puede realizarse considerando pisos rígidos o considerando pisos flexibles, temas que también son analizados en el presente capítulo.

Para el modelo de piso flexible, se considera que todos los elementos son totalmente flexibles. Este modelo permite realizar el análisis sísmico con la componente horizontal o vertical de un sismo. En cambio, con el modelo de piso rígido se puede considerar únicamente la componente horizontal de movimiento del suelo.

Posteriormente, se comenta sobre tres variables que intervienen en la modelación de los elementos y de la estructura, De la selección de ellos depende la matriz de rigidez, que se obtenga para el análisis sísmico. Las variables que se consideran son: i) Modelación de las condiciones de apoyo; ii) Modelación de las inercias a considerar en el análisis; y, iii) Modelación de los nudos.

Finalmente se determina la matriz de rigidez lateral de tres ejemplos. El primero trata de una estructura irregular en elevación en que se deben incorporar elementos ficticios de sección transversal muy baja para poder resolver con ***CEINCI-LAB.*** El segundo es un pórtico en el cual se ha acoplado la mampostería a la estructura y el tercero es una estructura de hormigón que ha sido reforzada con diagonales de acero.

## 16.1 INTRODUCCIÓN

El sistema de coordenadas generalizadas, $\mathbf{Q} - \boldsymbol{q}$ se puede numerar de cualquier forma. Ahora bien para poder condensar la matriz de rigidez, se deben numerar las coordenadas de tal forma que las cantidades diferentes de cero se encuentren al principio o al final del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ ; esto es factible hacerlo numerando adecuadamente las coordenadas. Para cualquiera de los dos casos se va a tener que particionar los vectores de cargas $\boldsymbol{Q}$ y de coordenadas $\mathbf{q}$, de la siguiente manera.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q_a} \\ \boldsymbol{Q_b} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_a} \\ \boldsymbol{q_b} \end{bmatrix}$$

Si las cantidades diferentes de cero se encuentran al comienzo, se tiene que $\boldsymbol{Q_b} = \mathbf{0}$. El otro caso corresponde cuando las cantidades diferentes de cero del vector de cargas generalizadas se hallan al final en este caso $\boldsymbol{Q_a} = \mathbf{0}$. De tal manera que en la condensación estática de la matriz de rigidez se tienen dos casos a saber el primero cuando $\boldsymbol{Q_b} = \mathbf{0}$ y el segundo cuando $\boldsymbol{Q_a} = \mathbf{0}$. Para los dos casos los vectores $\boldsymbol{q}_a$ y $\boldsymbol{q}_b$ son diferentes de cero.

En el análisis sísmico de estructuras se considera que ante la componente horizontal de movimiento del suelo, el piso se desplaza lateralmente lo mismo, de tal manera que se tiene un grado de libertad horizontal por piso. Por lo tanto se considera que las vigas son axialmente rígidas $A = \infty$.

Por otra parte, en el caso de un pórtico plano la acción sísmica se representa mediante fuerzas estáticas equivalentes, actuando en la dirección horizontal en cada uno de los pisos, nuevamente ante la componente horizontal de movimiento del suelo. Al tener un pórtico sometido a fuerzas horizontales en sus pisos y considerando que solo se tiene un grado de libertad por piso, es muy sencillo numerar las coordenadas de tal manera que se pueda condensar la matriz de rigidez lateral.

A la izquierda de la figura 16.1 se presenta un pórtico de un piso y un vano, en el cual la viga es axialmente rígida y todos los demás elementos completamente flexibles, de tal manera que el sistema tiene 5 grados de libertad. Por otra parte, en el grado de libertad horizontal $(1)$ actúa una fuerza horizontal $F$, de tal manera que el vector de cargas para el sistema de coordenadas $\mathbf{Q} - \boldsymbol{q}$, es.

$$\boldsymbol{Q^t} = [F \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

En este caso $\boldsymbol{Q}_a = [F]$ y $[\boldsymbol{Q_b} = \mathbf{0}]$ se tiene una sola coordenada para $\boldsymbol{Q}_a$ y cuatro coordenadas para $\boldsymbol{Q}_b$.

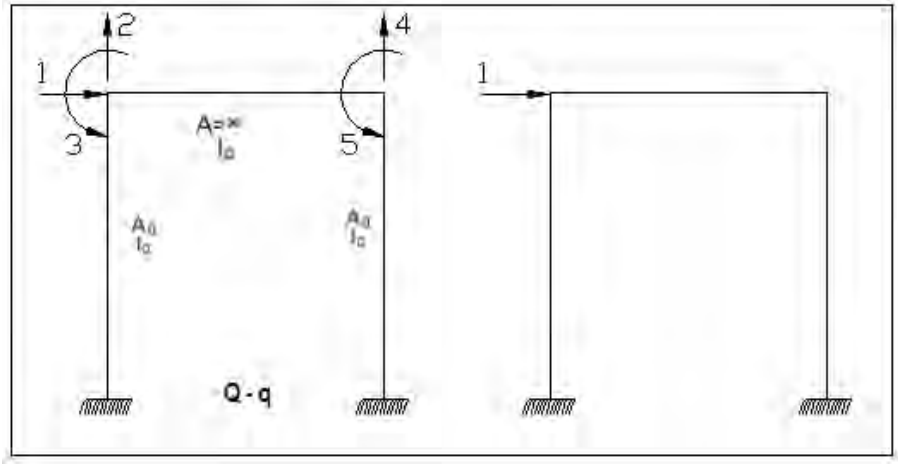



**Figura 16.1** Coordenadas "a" y "b", de un pórtico plano.

En el sistema de coordenadas de una estructura, se puede diferenciar un grupo de coordenadas a las que se denomina “coordenadas a", que en el ejemplo de la figura 16.1 es la uno y las restantes, a las que se denomina "coordenadas b". Al hacer esto, tanto el vector de cargas

generalizadas $\boldsymbol{Q}$, como el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$, están particionados de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_a \\ \boldsymbol{Q}_b \end{pmatrix} \tag{16.1}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_a \\ \boldsymbol{q}_b \end{pmatrix} \tag{16.2}$$

Por otra parte, la ecuación básica de análisis estático, que relaciona el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$, con el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$, por medio de la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$, es:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q} \tag{16.3}$$

Al reemplazar (16.1) y (16.2) en (16.3) y al trabajar con submatrices; la matriz de rigidez de la estructura, también estará particionada, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_a \\ \boldsymbol{Q}_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ab} \\ \boldsymbol{k}_{ba} & \boldsymbol{k}_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_a \\ \boldsymbol{q}_b \end{pmatrix} \tag{16.4}$$

Como se indicó la condensación estática de la matriz de rigidez se da cuando $\boldsymbol{Q}_a$ o $\boldsymbol{Q}_b$ son ceros, los dos casos se desarrollan a continuación:

### 16.2.1 Condensación a las coordenadas "a"

Este caso se presenta cuando el vector $\mathbf{Q_b=0}$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_a \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ab} \\ \boldsymbol{k}_{ba} & \boldsymbol{k}_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_a \\ \boldsymbol{q}_b \end{pmatrix}$$

De donde:

$$\boldsymbol{Q}_a = \boldsymbol{k}_{aa}\boldsymbol{q}_a + \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{q}_b$$
$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{K}_{ba}\boldsymbol{q}_a + \boldsymbol{K}_{bb}\boldsymbol{q}_b$$

Luego:

$$\boldsymbol{q}_b = -\boldsymbol{k}_{bb}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{ba}\,\boldsymbol{q}_a \tag{16.5}$$

Al sustituir $\boldsymbol{q}_b$ en la primera ecuación y luego de factorar se obtiene.

$$\boldsymbol{Q}_a = (\boldsymbol{K}_{aa} - \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{K}_{bb}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{ba})\,\boldsymbol{q}_a \tag{16.6}$$

Sea $\boldsymbol{K}^*$ la matriz de rigidez condensada a las coordenadas "a".

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{K}_{aa} - \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{K}_{bb}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{ba} \tag{16.7}$$

### 16.2.2 Condensación a las coordenadas "b"

Se presenta cuando el vector de cargas $\boldsymbol{Q_a = 0}$. Procediendo en forma similar se obtiene:

$$\boldsymbol{q_a = -k_{aa}^{-1}\, K_{ab} q_b} \tag{16.8}$$

$$\boldsymbol{Q_b = (K_{bb} - K_{ba} K_{aa}^{-1}\, K_{ab}) q_b} \tag{16.9}$$

Sea $\boldsymbol{K^+}$ la matriz de rigidez condensada a las coordenadas "b".

$$\boldsymbol{K^+ = K_{bb} - K_{ba} K_{aa}^{-1}\, K_{ab}} \tag{16.10}$$

### 16.2.3 Programa *cg_sismo*

Para encontrar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas “a” o a las coordenadas “b”, se debe determinar primero la matriz de rigidez de la estructura con todos los grados de libertad, por ensamblaje directo y luego aplicar la ecuación (16.7) si se condensa a las coordenadas “a” o la ecuación (16.10) si se condensa a las coordenadas “b”.

Lo único nuevo que se tiene para encontrar la matiz de rigidez de la estructura es definir la matriz que contiene a las Coordenadas Generalizadas, CG, teniendo en cuenta que las vigas son axialmente rígidas.

El programa de ***CEINCI-LAB*** que determina la matriz CG para pórticos regulares en elevación y considerando que las vigas son axialmente rígidas es el denominado ***cg_sismo***. Los datos de entrada de este programa son:

- ***[CG,ngl]=cg_sismo(nod,np,nr)***

Los datos del programa son:

***nod*** Es el número de nudos del pórtico.
***np*** Es el número de pisos.
***nr*** Es el número de nudos restringidos.

El programa reporta:

***CG*** Matriz que contiene las coordenadas generalizadas.
***ngl*** Número de grados de libertad del pórtico

Para el pórtico que se indica a la derecha de la figura 16.2, la matriz CG es:

$$CG = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 1**

El pórtico plano de dos pisos mostrado a la izquierda de la figura 16.2, tiene columnas de 30/30 cm., y vigas de 25/25 cm. El módulo de elasticidad del hormigón $E = 2400000\ T/m^2$. Se pide:

*i)* Presentar un programa de computación utilizando la librería de programas de ***CEINCI-LAB***

para determinar la matriz de rigidez total y la matriz de rigidez lateral.

*ii)* Indicar las sub matrices $\boldsymbol{k}_{aa}$ y $\boldsymbol{k}_{ab}$, con las que se halla la matriz de rigidez en coordenadas de piso.

iii) Presentar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas laterales.

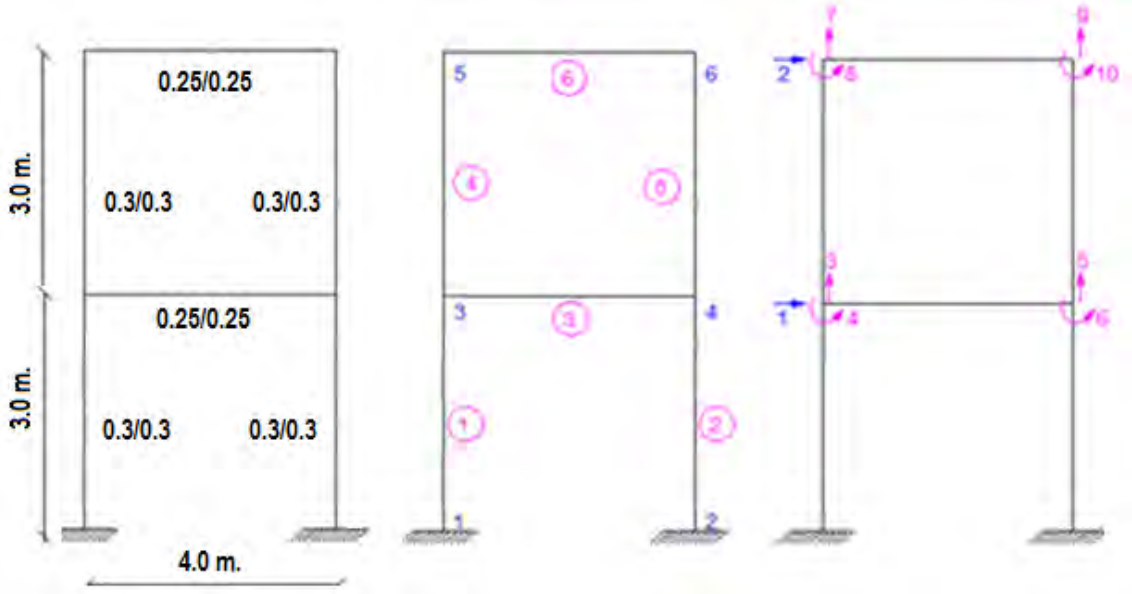



**Figura 16.2** Estructura de Ejemplo 1.

- **SOLUCIÓN**

En la parte central de la figura 16.2, se presenta la numeración de nudos y elementos y a la derecha los grados de libertad considerando que las vigas son axialmente rígidas. Nótese que primero se ha numerado a las coordenadas laterales (1 y 2) que en este caso son las coordenadas "a" y luego a las demás coordenadas que son las coordenadas "b".

Se va a encontrar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas "a". Ante la componente horizontal del movimiento del suelo, las coordenadas laterales tendrán valores altos en relación a las coordenadas "b", por este motivo a las coordenadas laterales "a" en el análisis sísmico se denominan coordenadas principales y a las coordenadas "b" secundarias.

**i) Programa de computación**

```
%Programa Ej1_libro Capítulo 16
nod=6;np=2;nr=2;[CG,ngl]=cg_sismo(nod,np,nr);% Coordenadas Generalizadas
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;3 3 4 1 3 2 2;4 3 5 1 1 1 1];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Vector de Nudo Inicial y nudo final
NUDOS=[1 0.0 0.0 2 2 0.0 3.0;2 4.0 0.0 2 2 0.0 3.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Coordenadas de los nudos
dibujo(X,Y,NI,NJ)
[VC]=vc(NI,NJ,CG); %Matriz con los vectores de colocación
ELEM=[0.30 0.30;0.30 0.30;0.25 0.25;0.30 0.30;0.30 0.30;0.25 0.25];
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
E=2400000;[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E) %Matriz de rigidez
na=2;kaa=K(1:na,1:na);kab=K(1:na,na+1:ngl);kba=kab';
kbb=K(na+1:ngl,na+1:ngl);KL=kaa-kab*inv(kbb)*kba
```

La matriz de rigidez total de 10 por 10 es la siguiente, las líneas intermedias es donde se particiona.

$$K = 10^5 \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 0.0280 & -0.0140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0105 & 0 & -0.0105 \\ -0.0140 & 0.0140 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 \\ \hline 0 & 0 & 1.4414 & 0.0029 & -0.0014 & 0.0029 & -0.7200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0105 & 0.0029 & 0.0500 & -0.0029 & 0.0038 & 0 & 0.0103 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0014 & -0.0029 & 1.4414 & -0.0029 & 0 & 0 & -0.7200 & 0 \\ 0 & 0.0105 & 0.0029 & 0.0038 & -0.0029 & 0.0500 & 0 & 0 & 0 & 0.0103 \\ 0 & 0 & -0.7200 & 0 & 0 & 0 & 0.7214 & 0.0029 & -0.0014 & 0.0029 \\ -0.0105 & 0.0105 & 0 & 0.0103 & 0 & 0 & 0.0029 & 0.0289 & -0.0029 & 0.0038 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7200 & 0 & -0.0014 & -0.0029 & 0.7214 & -0.0029 \\ -0.0105 & 0.0105 & 0 & 0 & 0 & 0.0103 & 0.0029 & 0.0038 & -0.0029 & 0.0289 \end{array}\right]$$

**ii) Sub matrices**

$$\boldsymbol{k}_{aa} = \begin{bmatrix} 0.0280 & -0.0140 \\ -0.0140 & 0.0140 \end{bmatrix} 10^5$$

$$\boldsymbol{k}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0105 & 0 & -0.0105 \\ 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 \end{bmatrix} 10^5$$

Se deja al lector observar en la matriz de rigidez de la estructura las sub matrices $\boldsymbol{k}_{ba}$ y $\boldsymbol{k}_{bb}$.

iii) **Matriz de rigidez condensada**

Se denomina $\boldsymbol{K}_L$ a la matriz de rigidez condensada a las coordenadas laterales.

$$\boldsymbol{K}_L = \boldsymbol{k}_{aa} - \boldsymbol{k}_{ab}\, \boldsymbol{k}_{bb}^{-1}\, \boldsymbol{k}_{ba}$$

$$\boldsymbol{K}_L = \begin{bmatrix} 2078.8 & -817.8 \\ -817.8 & 520.0 \end{bmatrix}$$

## 16.3 CONDENSACIÓN MEDIANTE SOLUCIÓN DE ECUACIONES

El trabajar con la ecuación (16.7) o con la ecuación (16.10) implica calcular una matriz inversa, lo cual demanda bastante tiempo de cálculo, razón por la cual lo que se hace en la práctica, es transformar el cálculo de la matriz inversa por un sistema de ecuaciones lineales, como se ve a continuación.

### 16.3.1 Caso en que $Q_b = 0$

En la ecuación (16.5), se define la matriz ***T*** de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{K}_{bb}^{-1}\, \boldsymbol{K}_{ba} \qquad (16.11)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (16.11) por $\boldsymbol{K}_{bb}$ se obtiene:

$$\boldsymbol{K}_{bb}\, \boldsymbol{T} = -\boldsymbol{K}_{ba} \qquad (16.12)$$

Para encontrar la matriz $\boldsymbol{T}$ , se debe resolver un conjunto de ecuaciones lineales, cuya matriz de coeficientes es la sub matriz $\mathbf{K_{bb}}$ y los términos independientes son las diferentes columnas de la sub matriz $\mathbf{K_{ba}}$

.

Con el cambio de variable realizado, la ecuación (16.7) se transforma en:

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{K}_{aa} + \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{T} \qquad (16.13)$$

- **EJEMPLO 2**

Encontrar la matriz de rigidez condensada del ejercicio anterior, por intermedio de la matriz **T**. Las sub matrices $\boldsymbol{K_{bb}}$ y $\boldsymbol{K_{ba}}$, son:

$$Kbb = 10^5 \begin{bmatrix} 1.4414 & 0.0029 & -0.0014 & 0.0029 & -0.7200 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0029 & 0.0500 & -0.0029 & 0.0038 & 0 & 0.0103 & 0 & 0 \\ -0.0014 & -0.0029 & 1.4414 & -0.0029 & 0 & 0 & -0.7200 & 0 \\ 0.0029 & 0.0038 & -0.0029 & 0.0500 & 0 & 0 & 0 & 0.0103 \\ -0.7200 & 0 & 0 & 0 & 0.7214 & 0.0029 & -0.0014 & 0.0029 \\ 0 & 0.0103 & 0 & 0 & 0.0029 & 0.0289 & -0.0029 & 0.0038 \\ 0 & 0 & -0.7200 & 0 & -0.0014 & -0.0029 & 0.7214 & -0.0029 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0103 & 0.0029 & 0.0038 & -0.0029 & 0.0289 \end{bmatrix}$$

$$K_{ba} = 10^5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.0105 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0105 \\ 0 & 0 \\ -0.0105 & 0.0105 \\ 0 & 0 \\ -0.0105 & 0.0105 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

Para hallar la matriz $\boldsymbol{T}$ se deben resolver dos sistemas de ecuaciones lineales. Con el primer sistema se obtiene los elementos de la primera columna de la matriz $\boldsymbol{T}$, en este caso el término independiente es la primera columna de la sub matriz $\boldsymbol{K_{ba}}$. El término independiente para el segundo sistema de ecuaciones lineales es la segunda columna de $\boldsymbol{K_{ba}}$ y de esta forma se halla los elementos de la segunda columna de la matriz $\boldsymbol{T}$.

Al programa presentado en el Ejemplo 1, se deben añadir las siguientes sentencias para obtener la matriz $\boldsymbol{T}$ y la matriz de rigidez condensada.

```
14      % Cálculo mediante solución de ecuaciones lineales
15 -    T=-kbb\kba
16 -    KL=kaa+kab*T
```

La matriz $\boldsymbol{T}$ que se obtiene de la solución de los dos sistemas de ecuaciones lineales, es.

$$T = \begin{bmatrix} -0.0022 & 0.0033 \\ -0.0654 & -0.1420 \\ 0.0022 & -0.0033 \\ -0.0654 & -0.1420 \\ -0.0049 & 0.0055 \\ 0.3421 & -0.2767 \\ 0.0049 & -0.0055 \\ 0.3421 & -0.2767 \end{bmatrix}$$

Finalmente al plicar la ecuación (16.13) se obtiene la misma matriz de rigidez condensada, indicada en el Ejemplo 1.

### 16.3.2 Caso en que $Q_a = 0$

Se procede en forma similar al indicado en el apartado (16.3.1), con lo que se obtiene:

$$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{K}_{aa}^{-1}\ \boldsymbol{K}_{ab} \tag{16.14.1}$$

$$\boldsymbol{K}^{+} = \boldsymbol{K}_{bb} + \boldsymbol{K}_{ba}\boldsymbol{T} \tag{16.14.2}$$

$$\boldsymbol{K}_{aa}\ \boldsymbol{T} = -\boldsymbol{K}_{ab} \tag{16.14.3}$$

Ahora, la matriz **T** se obtiene resolviendo un conjunto de ecuaciones lineales que tienen una sola matriz de coeficientes que es $\mathbf{K_{aa}}$ pero diferentes términos independientes que son las diferentes columnas de la matriz $\mathbf{k_{ab}}$.

### 16.3.1 Coordenadas secundarias

**Es importante destacar que la matriz $\boldsymbol{T}$ no solo sirve para hallar la matriz de rigidez condensada sino también para hallar el vector que contiene a las coordenadas secundarias.**

Para el caso en que $\boldsymbol{Q_b} = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{q_b} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{q_a}$$

Para el caso en que $\boldsymbol{Q_a} = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{q_a} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{q_b}$$

Al examinar estas dos últimas ecuaciones se concluye que $\boldsymbol{T}$ es una Matriz de Paso que permite obtener las coordenadas secundarias una vez hallada las coordenadas principales. La matriz $\boldsymbol{T}$ también se le conoce con el nombre de Matriz de Incidencia.

## 16.4 CONDENSACIÓN MEDIANTE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Si bien es cierto, mediante la solución de un conjunto de ecuaciones lineales, se optimiza la obtención de la matriz de rigidez condensada. No es menos cierto, que todavía se puede optimizar el proceso de cálculo únicamente triangularizando la matriz de rigidez, tema que se trata a continuación y es válido únicamente para el caso de que $\mathbf{Q_a = 0}$.

### 16.4.1 Triangularización de la matriz de rigidez

La ecuación básica de análisis estático de estructuras, considerando que $\boldsymbol{Q_a} = 0$, es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{Q_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{aa}} & \boldsymbol{K_{ab}} \\ \boldsymbol{k_{ba}} & \boldsymbol{k_{bb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_a} \\ \boldsymbol{q_b} \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{k_{aa}}\ \boldsymbol{q_a} + \boldsymbol{K_{ab}}\ \boldsymbol{q_b} \tag{16.15.1}$$

$$\boldsymbol{Q_b} = \boldsymbol{K_{ba}}\ \boldsymbol{q_a} + \boldsymbol{K_{bb}}\ \boldsymbol{q_b} \tag{16.15.2}$$

Si a la ecuación (16.15.1) se multiplica por $\mathbf{K_{aa}^{-1}}$, y en ésta se reemplaza la ecuación (16.14.1), se obtiene:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{I}\ \boldsymbol{q_a} + \boldsymbol{K_{aa}^{-1}}\ \boldsymbol{K_{ab}}\ \boldsymbol{q_b}$$

$$0 = I\, q_a - T\, q_b \qquad (16.15.3)$$

Ahora, si a la ecuación (16.15.3) se multiplica por $-K_{ba}$ y se suma a la ecuación (16.15.2), se encuentra:

$$Q_b = 0\, q_a + \left(K_{bb} + K_{ba} T\right) \qquad (16.15.4)$$

De acuerdo a (16.14.2), la ecuación entre paréntesis es la matriz de rigidez condensada $K^+$.

$$Q_b = 0\, q_a + (K^+ T) \qquad (16.15.5)$$

Al rescribir en forma matricial las ecuaciones (16.15.3) y (16.15.5) se halla.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ Q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -T \\ 0 & k^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix} \qquad (16.15.5)$$

Por consiguiente, dada la matriz de rigidez total, se aplica la eliminación de Gauss Jordan hasta eliminar los elementos correspondientes a las coordenadas "a" y lo que se obtienen son las matrices **T** y $K^+$.

### 16.4.2 Programas para Condensación en *CEINCI-LAB*

Dos programas adicionales, a los ya presentados, se requieren para encontrar la matriz de rigidez condensada. El primero ***cg_sismo_gaus*** que determina el sistema de Coordenadas Generalizadas para análisis sísmico numerando las coordenadas principales al final. Se recuerda que ***cg_sismo*** numera al comienzo las coordenadas principales.

El segundo programa que se requiere es ***kcondensada*** que determina la matriz de rigidez lateral triangularizando la matriz de rigidez. La entrada de datos de estos programas se indica a continuación.

- **[CG,ngl] = *cg_sismo_gaus* (nod,np,nr)**

**nod** Es el número de nudos del pórtico regular.
**np** Es el número de pisos.
**nr** Es el número de nudos restringidos.

**CG** Es la matriz que contiene los grados de libertad de los nudos, numerando las coordenadas principales al final.
**ngl** Es el número de grados de libertad.

- **[KL]=kcondensada(K,nb)**

**K** Es la matriz de rigidez
**nb** Es el número de coordenadas principales.

**KL** Es la matriz de rigidez condensada.

- **EJEMPLO 3**

Presentar un programa, utilizando los programas de ***CEINCI-LAB*** para encontrar la matriz de rigidez del marco plano del Ejemplo 1, que se indica nuevamente en la figura 16.3 pero con la nueva numeración de los grados de libertad, las coordenadas principales se han numerado al último para poder aplicar la triangularización de Gauss.

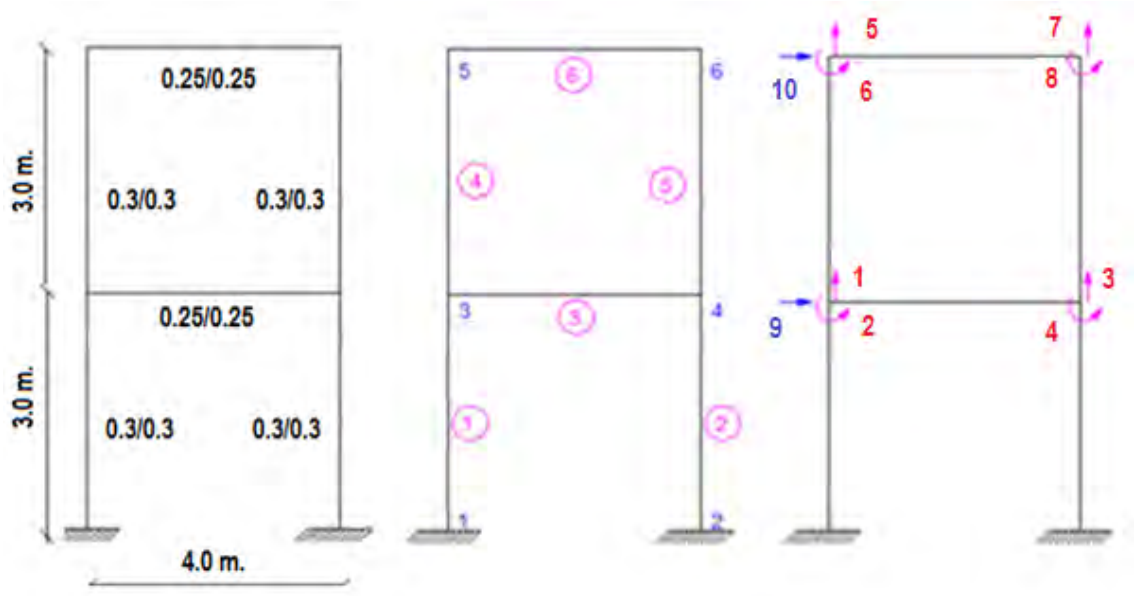



**Figura 16.3** Ejemplo 3, numerando las Coordenadas Principales al final.

- **SOLUCIÓN**

```
%Programa Ej2_libro Capitulo 16
nod=6;np=2;nr=2;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);% Coordenadas Generalizadas
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;3 3 4 1 3 2 2;4 3 5 1 1 1 1];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Vector de Nudo Inicial y nudo final
NUDOS=[1 0.0 0.0 2 2 0.0 3.0;2 4.0 0.0 2 2 0.0 3.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Coordenadas de los nudos
% dibujo(X,Y,NI,NJ)
[VC]=vc(NI,NJ,CG); %Matriz con los vectores de colocación
ELEM=[0.30 0.30;0.30 0.30;0.25 0.25;0.30 0.30;0.30 0.30;0.25 0.25];
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
E=2400000;[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); %Matriz de rigidez
nb=2;[KL]=kcondensada(K,nb)
```

La matriz de rigidez que se encuentra es la indicada en el Ejemplo 1.

## 16.5 MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL

Se define...*matriz de rigidez lateral*, $\mathbf{K_L}$... a la matriz de rigidez asociada a las coordenadas laterales de piso. De hecho la matriz de rigidez condensada de los Ejemplos 1 a 3 es la matriz de rigidez lateral.

Existen dos formas de modelar los elementos de un pórtico plano, ante la acción sísmica horizontal. En la primera forma se considera que únicamente las vigas son axialmente rígidas y las columnas totalmente flexibles. En cambio, en la segunda forma se considera que todos los elementos son axialmente rígidos. El pórtico analizado en los numerales anteriores corresponde a la primera forma de cálculo.

En la figura 16.4, se indican los dos modelos anotados, para un pórtico plano de dos pisos y dos vanos. El modelo de la izquierda, corresponde a la primera forma de cálculo y el de la derecha a la segunda forma de cálculo. En el pórtico de la izquierda se nota que solo las vigas son axialmente rígidas; en cambio, en el de la derecha todos los elementos son axialmente rígidos.

Con el gran desarrollo informático que se tiene actualmente, no tiene sentido calcular la matriz de rigidez lateral con el modelo de cálculo presentado a la derecha de la figura 16.4 se lo

indicó para recordar que era el modelo que se utilizaba en los años 80 y 90 del siglo pasado, cuando todavía no se tenía el gran desarrollo informático que se tiene actualmente.

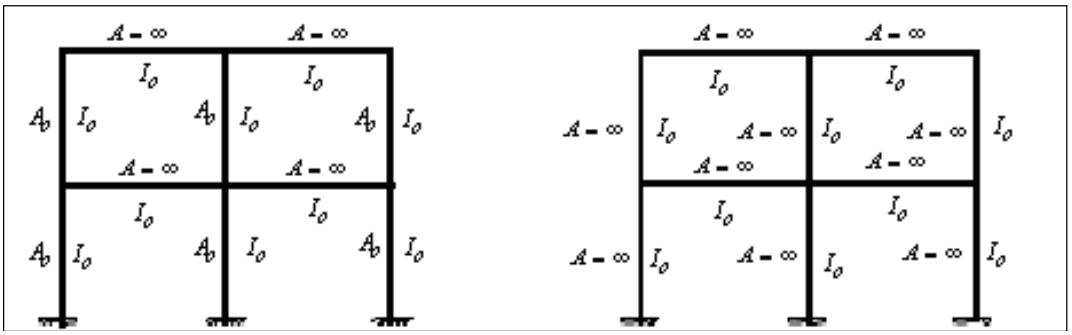



**Figura 16.4** Modelos de cálculo para determinar $K_L$.

- **EJEMPLO 4**

Para el pórtico plano indicado en la figura 16.4, cuyas vigas son de 30/30 y las columnas de 30/40. Se desea encontrar la matriz de rigidez lateral, considerando que solo las vigas son axialmente rígidas. A la derecha de la figura 16.4, se indica la numeración de los nudos y elementos. Por otra parte, el módulo de elasticidad *E* = 2400000 *T/m2*.

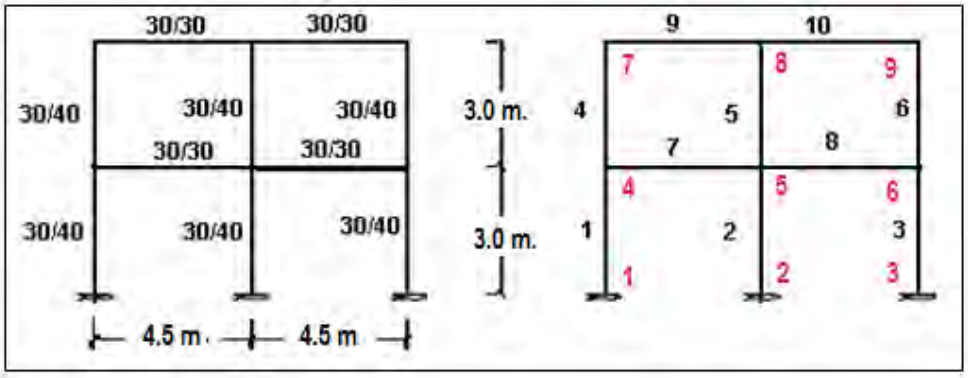



**Figura 16.4** Geometría del pórtico de Ejemplo 4 y numeración de nudos y elementos

- **SOLUCIÓN**

A continuación se indica el programa con el cual se obtiene la matriz de rigidez lateral, se deja al lector que indique la forma como se numeró los grados de libertad.

```
%Programa Ej4_libro Capítulo 16
nod=9;np=2;nr=3;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);% Coordenadas Generalizadas
GEN=[1 1 4 2 1 1 1; 4 4 7 2 1 1 1; 7 4 5 1 2 3 3; 8 5 6 1 2 3 3];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Vector de Nudo Inicial y nudo final
NUDOS=[1 0.0 0.0 2 1 4.5 0.0;4 0.0 3.0 2 1 4.5 0.0;7 0 6 2 1 4.5 0.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Coordenadas de los nudos
dibujo(X,Y,NI,NJ)
[VC]=vc(NI,NJ,CG); %Matriz con los vectores de colocación
SECCION=[1 0.3 0.4 5 1;7 0.3 0.3 3 1];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
E=2400000;[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); %Matriz de rigidez
nb=2;[KL]=kcondensada(K,nb)
```

La matriz de rigidez lateral del pórtico del Ejemplo 4 es.

$$\boldsymbol{K}_L = \begin{bmatrix} 7235.7 & -2848.0 \\ -2848.0 & 1823.5 \end{bmatrix}$$

## 16.6 SIGNIFICADO FÍSICO

Los elementos de la matriz de rigidez lateral, son las fuerzas horizontales que deben aplicarse a nivel de piso, con el objeto de obtener un determinado desplazamiento lateral unitario y los demás desplazamientos laterales nulos.

Con los datos de la matriz de rigidez lateral encontrados en el Ejemplo 4, se presenta el significado físico de los elementos de $\mathbf{K_L}$. En la figura 16.5, a la izquierda se aplican los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez lateral y a la derecha se observa la deformada que se obtiene, el primer piso se desplaza la unidad y el segundo no se desplaza; se destaca que existen desplazamientos verticales y rotaciones en los nudos.

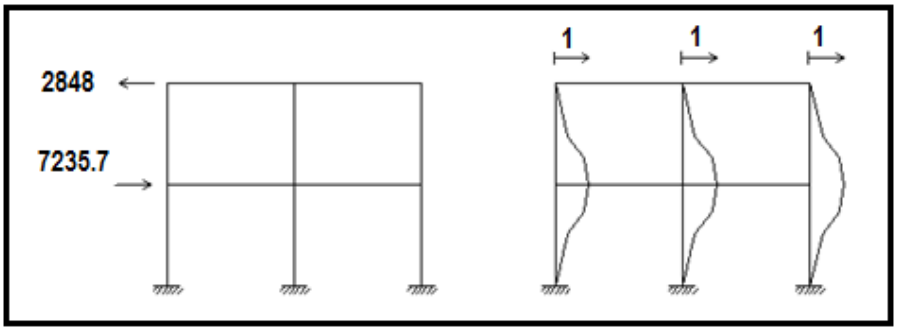



**Figura 16.5** Significado físico de los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez lateral

La figura 16.6, corresponde a los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez lateral, el piso inferior no se desplaza, en cambio el piso superior se desplaza la unidad.

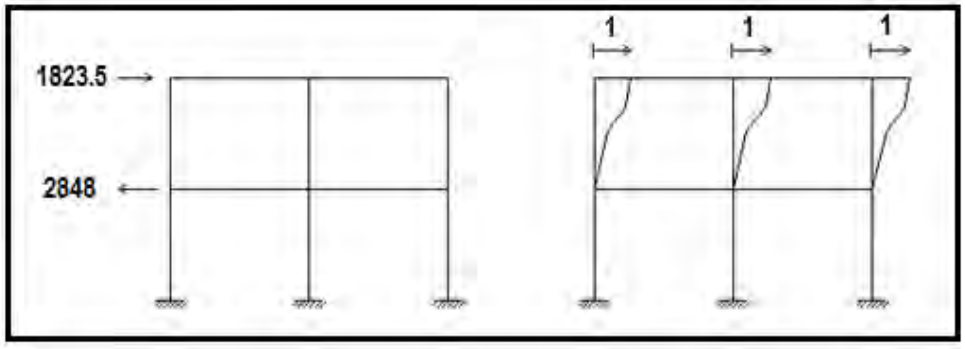



**Figura 16.6** Significado físico de los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez lateral.

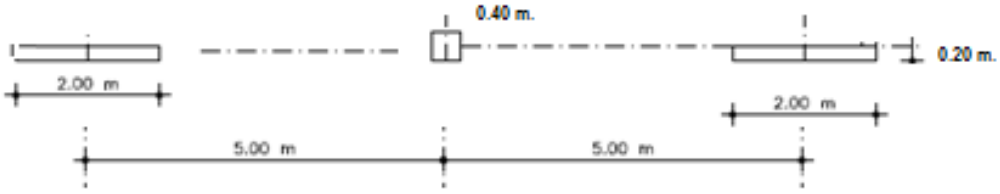
## 16.7 ANÁLISIS CON NUDO RÍGIDO

En Chile y en Perú se construyen apartamentos habitacionales de 4 o 5 pisos con ***muros de ductilidad limitada*** que tienen un espesor de por lo general 20 cm. Está practica ha sido extendida a edificios de más de 10 pisos y en el sismo de Concepción de 2010, tuvieron un mal comportamiento sísmico. Aguiar (2010).

Para pocos pisos funcionan los ***muros de ductilidad limitada*** con este pequeño antecedente se obtiene en el próximo ejemplo la matriz de rigidez lateral de un pórtico con muros. Como se indicó en Capítulos anteriores, se debe calcular con nudos rígidos.

- **EJEMPLO 5**

En la parte superior de la figura 16.7, se tiene la planta de un pórtico de un edificio de 2 pisos. Este pórtico tiene dos muros en los extremos de 0.2 m., por 2.0 m. En la parte central una columna de 0.4 m., por 0.4 m. En la parte inferior se presenta la geometría del pórtico en planta. Se pide encontrar la matriz de rigidez lateral, considerando nudos rígidos. Considerar $E¿\,2400000\,T/m^2$.




**Vista en Planta**

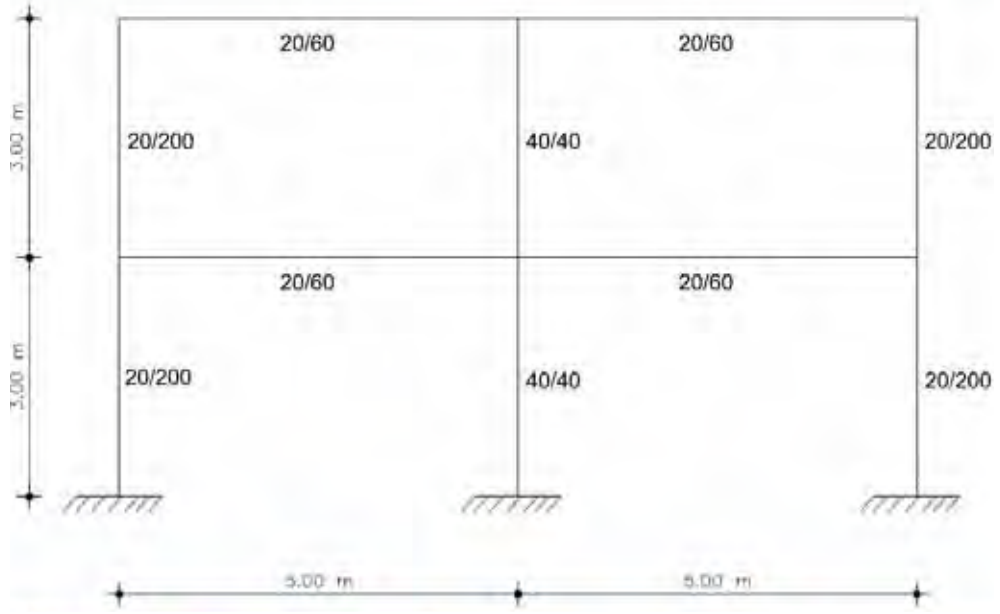



**Figura 16.7** Pórtico con muros

- **SOLUCIÓN**

Los muros son de 20/200 cm., luego para la viga que está a la izquierda, las longitudes del nudo rígido que intervienen en el cálculo de la matriz de rigidez lateral, son: $c_1 = 100\,cm;\ c_2 = 20\,cm; f = 500 - c_1 - c_2$. Para la viga que se encuentra a la derecha en cambio $c_1 = 20\,cm;\ c_2 = 100\,cm$. Para la determinación del nudo rígido en los elementos verticales de la planta baja se considera que existe una viga de igual dimensión que la del primer piso.

En la figura 16.8, se presenta la numeración de los grados de libertad considerando que las vigas son axialmente rígidas, es decir se tiene un grado de libertad por piso y la numeración de los elementos se halla en un cuadrado. Los nudos se han numerado de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba.

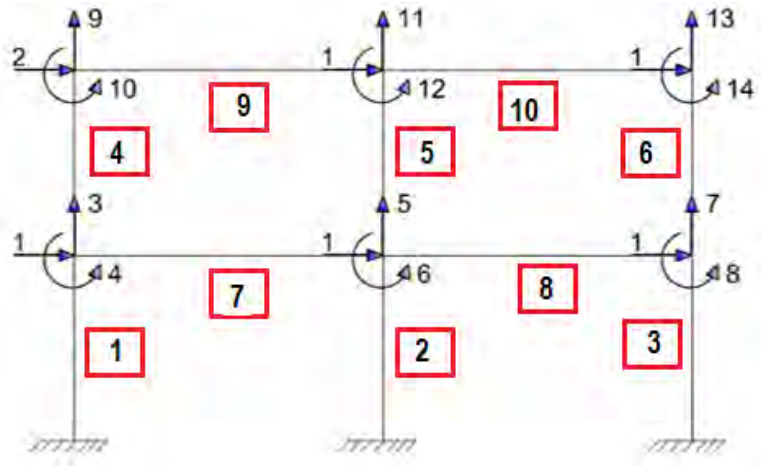



**Figura 16.8** Grados de libertad y numeración de elementos.

El programa que obtiene la matriz de rigidez lateral se lista a continuación.

```
% Programa Ej5_libro. de Capítulo 16 de libro de Matricial
nod=9;np=2;nr=3;[CG,ngl]=cg_sismo(nod,np,nr);
GEN=[1 1 4 2 1 1 1;4 4 7 2 1 1 1;7 4 5 1 2 3 3;8 5 6 1 2 3 3];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
NUDOS=[1 0 0 2 1 5 0;4 0 3 2 1 5 0;7 0 6 2 1 5 0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
dibujo(X,Y,NI,NJ)
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
ELEM=[0.2 2.0;0.4 0.4;0.2 2.0;0.2 2.0;0.4 0.4;0.2 2.0;
    0.2 0.6;0.2 0.6;0.2 0.6;0.2 0.6];
cc1=[0.3; 0.3; 0.3;0.3; 0.3; 0.3;1.0;0.2;1.0;0.2];
cc2=[0.3; 0.3; 0.3;0.3; 0.3; 0.3;0.2;1.0;0.2;1.0];
E=2400000;
[K]=krigidez_nudo_rigido(ngl,ELEM,cc1,cc2,L,seno,coseno,VC,E);
na=2;kaa=K(1:na,1:na);kab=K(1:na,na+1:ngl);kba=kab';
kbb=K(na+1:ngl,na+1:ngl);KL=kaa-kab*inv(kbb)*kba
```

La matriz de rigidez lateral, es la siguiente.

$$\boldsymbol{KL} = \begin{bmatrix} 244956.47 & -83774.75 \\ -83774.75 & 43697.30 \end{bmatrix}$$

## 16.8 ANÁLISIS CON PISO FLEXIBLE

*El modelaje de una estructura con piso flexible, permite realizar el análisis sísmico para la componente vertical de movimiento del suelo o para la componente horizontal*. En este caso se considera que todos los elementos son totalmente flexibles. Para el análisis sísmico de un pórtico plano considerando piso flexible, se procede de la siguiente manera:

i) Se numeran todos los grados de libertad horizontal de la estructura.

ii) Luego se numeran todos los grados de libertad vertical.

iii) Finalmente se numeran las rotaciones de los nudos.

iv) Se encuentra la matriz de rigidez por ensamblaje directo.

v) Se particiona la matriz de rigidez, en base al número de grados de libertad horizontales y verticales.

vi) Se determina la matriz de rigidez condensada a las coordenadas horizontales y verticales.

- **EJEMPLO 6**

Determinar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas laterales y verticales de la estructura cuya geometría se indica en la figura 16.9, todos los elementos son de 30/30, la luz es de 4.0 m, y la altura es de 2.5 m. Se considera *E*=2100000 *T/m2*., además todos los elementos completamente flexibles.

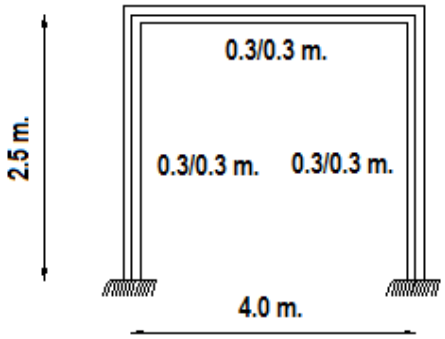



**Figura 16.9** Pórtico de Ejemplo 6.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 16.10, a la izquierda se presentan los grados de libertad de la estructura, cuyos elementos son totalmente flexibles, se ha notado primero los grados de libertad horizontal, luego los verticales y finalmente la rotación. A la derecha se indican los grados de libertad, para los cuales se va a encontrar la matriz de rigidez condensada.

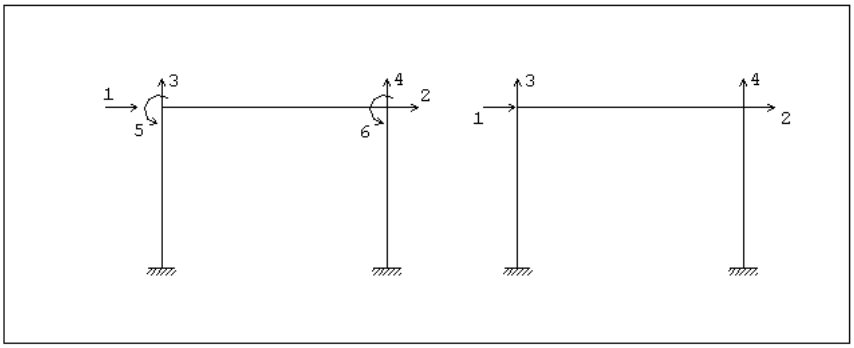



**Figura 16.10** Numeración de grados de libertad para análisis con piso flexible y grados de libertad para el análisis sísmico ante componente horizontal o vertical.

Sea, la columna izquierda el elemento uno, la viga el dos y la columna derecha el elemento tres. Los vectores de colocación para el ensamblaje, son:

$$VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 5]$$
$$VC^{(2)} = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \quad 6]$$
$$VC^{(3)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6]$$

- **Matriz de rigidez completa**

$$KT = \left[\begin{array}{cccc|cc} 48338.64 & -4720.00 & 0.00 & 0.00 & 1360.80 & 0.00 \\ -47250.00 & 48338.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1360.80 \\ 0.00 & 0.00 & 75865.78 & -265.78 & 531.56 & 531.56 \\ 0.00 & 0.00 & -265.78 & 75865.78 & -531.56 & -531.56 \\ \hline 1360.80 & 0.00 & 531.56 & -531.56 & 3685.50 & 708.75 \\ 0.00 & 1360.80 & 531.56 & -531.56 & 708.75 & 3685.50 \end{array}\right]$$

- **Matriz de rigidez condensada**

$$K = \begin{bmatrix} 47816.896 & -47149.665 & -164.613 & 164.613 \\ -47149.665 & 47816.896 & -164.613 & 164.613 \\ -164.613 & -164.613 & 75737.177 & -137.177 \\ 164.613 & 164.613 & -137.177 & 75737.177 \end{bmatrix}$$

Se deja al lector el desarrollo del presente ejercicio considerando nudos rígidos.

## 16.9 VARIABLES EN LA MODELACIÓN

Lo fundamental del presente Capítulo es ilustrar el cálculo de la matriz de rigidez condensada para el análisis sísmico de estructuras. Sin embargo, es importante destacar que existen tres variables que son básicas para la modelación de los pórticos, a saber:

- Modelación de las condiciones de apoyo.
- Modelación de las inercias a considerar en el análisis.
- Modelación de los nudos.

### 16.9.1 Modelación de las condiciones de apoyo

*Normalmente, se considera que las columnas están empotradas en su base*, esto significa que la cimentación es completamente rígida y no permite que la columna gire.

Pero si en la base de la columna actúan grandes momentos es probable que exista rotación en la unión columna con la cimentación, y se tengan fuerzas y momentos totalmente diferentes en la columna, en relación a los que se obtienen con base empotrada. Por este motivo se recomienda que la columna sea modelada en su base mediante resortes con rigidez rotacional, para cuando existan grandes momentos actuando en la base de la columna.

La modelación de la base de la columna, con resortes rotacionales, tiene su grado de complejidad en el sentido de definir los parámetros de la rigidez del resorte. *Como alternativa se puede considerar que las columnas están sobre apoyos articulados en una viga de fundación de*

*iguales dimensiones que la de los niveles superiores.*

- **EJEMPLO 7**

Determinar la matriz de rigidez lateral, considerando nudos rígidos, de la estructura indicada en la figura 16.6 pero considerando que las columnas están sobre apoyos articulados sobre una viga de iguales dimensiones de la viga superior. El módulo de elasticidad es $E = 2100000\ T/m^2$.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 16.11, a la izquierda se muestra la geometría de la estructura cuya matriz de rigidez lateral **$K_L$** se va a calcular y la numeración de los elementos; al centro se indican los grados de libertad considerados y a la derecha el grado de libertad horizontal, para el cual se va a encontrar **$K_L$**.

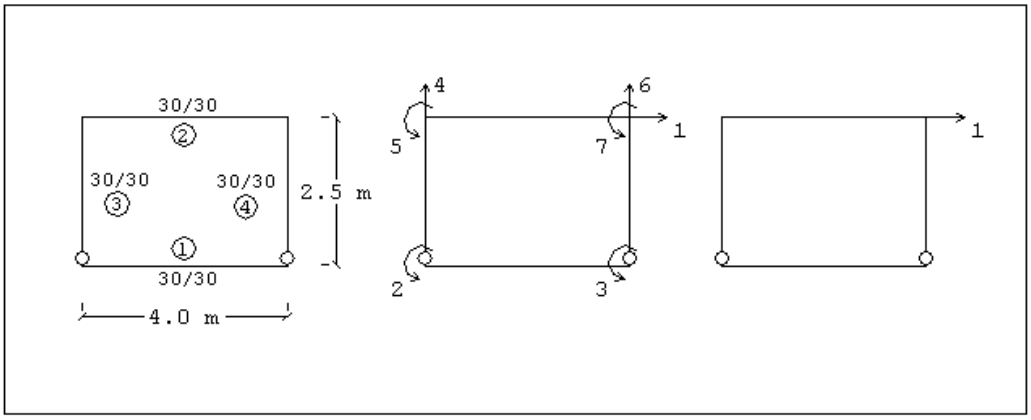



**Figura 16.11** Descripción de la estructura, grados de libertad y coordenada lateral del ejemplo, considerando que las columnas se encuentran sobre apoyos articulados en una viga de cimentación.

- **Matriz de rigidez de las vigas 1 y 2**

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 329.32 & 658.64 & -329.32 & 658.64 \\ & 1700.39 & -658.64 & 934.17 \\ & & 329.32 & -658.64 \\ & & & 1700.39 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de las columnas 3 y 4**

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 1249.60 & 0 & -1468.28 & -1249.60 & 0 & -1655.72 \\ & 80425.53 & 0 & 0 & -80425.53 & 0 \\ & & 2328.42 & 1468.28 & 0 & 1342.28 \\ & & & 1249.60 & 0 & 1655.72 \\ & & & & 80425.53 & 0 \\ & & & & & 2797.02 \end{bmatrix}$$

- **Vectores de colocación de las vigas**

$$VC^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$VC^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

- **Vector de colocación de las columnas**

$$VC^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$
$$VC^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

- **Submatrices $K_{aa}$, $K_{ab}$ y $K_{bb}$**

$$K_{aa} = \begin{bmatrix} 2499.20 \end{bmatrix}$$
$$K_{ab} = \begin{bmatrix} 1468.28 & 1468.28 & 0 & 1655.72 & 0 & 1655.72 \end{bmatrix}$$

$$K_{bb} = \begin{bmatrix} 4028.81 & 934.17 & 0 & 1342.28 & 0 & 0 \\ 934.17 & 4028.81 & 0 & 0 & 0 & 1342.28 \\ 0 & 0 & 80754.85 & 658.64 & -329.32 & 658.64 \\ 1342.28 & 0 & 658.64 & 4497.41 & -658.64 & 934.17 \\ 0 & 0 & -329.32 & -658.64 & 80754.85 & -658.64 \\ 0 & 1342.28 & 658.64 & 934.17 & -658.64 & 4497.41 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez lateral que se obtiene es.

$$\boldsymbol{K}_L = \left[ 1003.3 \ \frac{T}{m} \right]$$

Al considerar base empotrada se obtiene $K_L = \left[ 1485.7 \ \frac{T}{m} \right]$. Por lo tanto, al calcular con columnas articuladas sobre una viga de dimensiones iguales a la viga del primer piso, la matriz de rigidez disminuye.

### 16.9.2 Modelación de las inercias

En la filosofía de diseño sísmico se considera que una estructura, ante un *sismo frecuente* de baja magnitud no va a sufrir ningún daño, en ese caso es muy correcto todo lo que se ha realizado en el presente capítulo de calcular con inercias gruesas $I_o$. Pero también se considera el caso de que va a registrarse un *sismo muy fuerte* que va a producir daño en la estructura en éste caso el análisis sísmico debe realizarse con inercias agrietadas $I_{cr}$ tema que se aborda en el presente sub apartado.

Un aspecto que no se ha tomado en cuenta, en este texto, es la incorporación de la losa en la resistencia y rigidez de las vigas, *para el caso de que estos dos elementos estructurales se construyan en forma monolítica*. Este tema es tratado de acuerdo a lo prescrito por la Norma Ecuatoriana de la Construcción NEC-11.

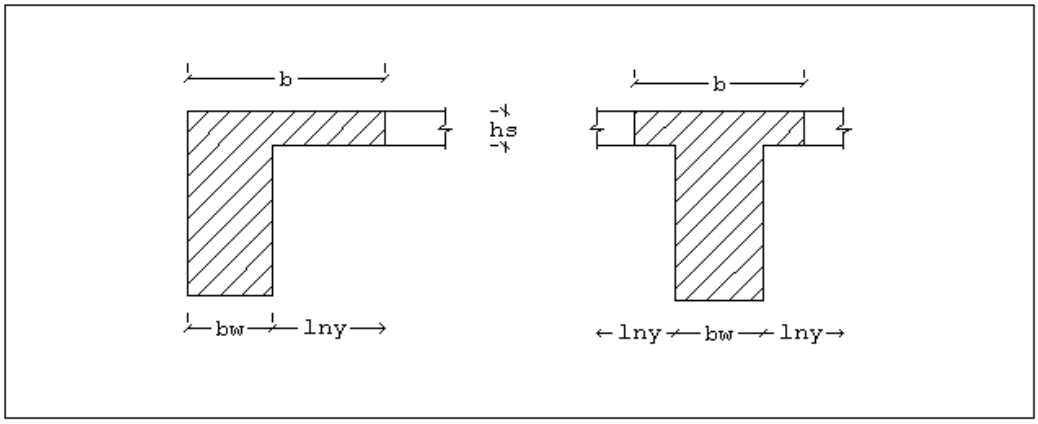



**Figura 16.12** Nomenclatura para vigas L y T.

En la figura 16.12, se indica la nomenclatura utilizada para determinar la resistencia a flexión y rigidez, de una viga "T" o "L", de acuerdo al ACI-05 y NZS-3101-82.

El valor del ancho efectivo *b*, para cuando el ala se encuentra en compresión, es el menor valor de:

- **Viga "L" de acuerdo al ACI 318-05**

Valores para determinar resistencia a flexión y rigidez.

$$b \le b_w + 6h_s \qquad (16.16.1)$$

$$\le b_w + \frac{l_{ny}}{2} \qquad (16.16.2)$$

$$\le b_w + \frac{l_x}{12} \qquad (16.16.3)$$

- **Viga "T" de acuerdo al ACI 318-02**

Valores para determinar resistencia a flexión y rigidez.

$$b \le b_w + 16h_s \qquad (16.17.1)$$

$$\le b_w + l_{ny} \qquad (16.17.2)$$

$$\le b_w + \frac{l_x}{4} \qquad (16.17.3)$$

Siendo $l_x$, la luz de la viga en la dirección de análisis, $l_{ny}$, la distancia libre al próximo nervio.

Una vez determinada la contribución de la losa para el cálculo de las inercias, se procede a determinar las inercias agrietadas de acuerdo al ACI-05 se tiene:

$$I_v = 0.35\, I_g \qquad (16.18.1)$$

$$I_c = 0.70\, I_g \qquad (16.18.2)$$

La norma de Nueva Zelanda NZS-3101-82, determina el ancho equivalente con las ecuaciones (16.16.1) a (16.17.3) únicamente para determinar la resistencia a flexión cuando el ala está sujeta a compresión. Para el cálculo de la rigidez, los valores son los siguientes:

- **Viga "L" de acuerdo a NZS-3101-82**

Valores para determinar rigidez.

$$b \le b_w + 3h_s \quad (16.19.1)$$

$$\le b_w + \frac{l_{ny}}{4} \quad (16.19.2)$$

$$\le b_w + \frac{l_x}{24} \quad (16.19.3)$$

- **Viga "T" de acuerdo a NZS-3101-82**

Valores para determinar rigidez.

$$b \le b_w + 8h_s \quad (16.20.1)$$

$$\le b_w + \frac{l_{ny}}{2} \quad (16.20.2)$$

$$\le b_w + \frac{l_x}{8} \quad (16.20.3)$$

Los valores han sido prácticamente reducidos en un 50% con relación a los del ACI 318-05.

Por otra parte, Paulay y Priestley recomiendan utilizar las inercias agrietadas $I_{cr}$ indicadas en la tabla 16.1, se indica además el rango de variación.

**Tabla 16.1** Valores recomendados por Paulay y Priestley para la inercia agrietada $I_{cr}$.

| ELEMENTO Y FORMA | RANGO $I_{cr}$ | RECOMENDADO $I_{cr}$ |
|---|---|---|
| Viga Rectangular | 0.30 a 0.50 de $I_g$ | 0.40 de $I_g$ |
| Viga T o L | 0.25 a 0.45 de $I_g$ | 0.35 de $I_g$ |
| Columna P>0.5 $f'c\ A_g$ | 0.70 a 0.90 de $I_g$ | 0.80 de $I_g$ |
| Columna P=0.2 $f'c\ A_g$ | 0.50 a 0.70 de $I_g$ | 0.60 de $I_g$ |
| Columna P=-0.05 $f'c\ A_g$ | 0.30 a 0.50 de $I_g$ | 0.40 de $I_g$ |

En la tabla 16.1, $f'c$ es la resistencia a la compresión del hormigón; $A_g$, es el área total de la sección; $I_g$, es el momento de inercia grueso y $P$ la fuerza axial.

Al iniciar el análisis no se conoce la carga axial que gravita sobre la columna $P$, por lo que el cálculo debe realizarse en forma iterativa.

Finalmente el NEC-11 considera la inercia agrietada en vigas el 50% de la inercia gruesa y la inercia agrietada en columnas el 80% de la inercia gruesa. De esta forma ante un sismo severo se tiene previsto un mayor daño en las vigas que en las columnas.

De otra manera, se puede manifestar que la mayor reducción de inercia de las vigas conduce a tener columna fuerte viga débil.

$$I_v = 0.5 * I_o \quad (16.21.1)$$

$$I_c = 0.8 * I_o \quad (16.21.2)$$

Una forma más exacta de encontrar la inercia agrietada es mediante el diagrama momento curvatura, pero por ser este un libro de Estructuras, se deja al lector que incursione en esta temática y vea cómo puede hallar en este diagrama la inercia agrietada.

### 16.9.3 Modelación de los nudos

Se diseña con el principio de *nudo fuerte - viga débil*. Esto significa que teóricamente el nudo no va a dañarse durante un sismo severo. En estas condiciones, el modelaje de los elementos debe considerar dos sectores de rigidez infinita en los extremos, de esta manera la rigidez de los elementos será mayor.

Ahora bien, durante un sismo el nudo está sujeto a fuerzas de corte de considerable magnitud lo cual provoca una considerable fisuración diagonal, especialmente en nudos en los cuales no se ha realizado el control del cortante horizontal y vertical transmitido al nudo. Existe la posibilidad de un deterioro de la adherencia en el nudo como consecuencia de las fuerzas reversibles que se producen debido al sismo, el ACI-05 con las recomendaciones estipuladas para el control de adherencia no está resolviendo el problema, únicamente está minimizando los efectos de adherencia. **En fin, *ante la acción de un sismo severo es conveniente modelar los elementos sin nudos rígidos en los pórticos dúctiles compuestos por vigas y columnas*.**

Por lo tanto, el modelaje del elemento con y sin nudo rígido depende del nivel de desempeño esperado en la edificación. Para el nivel de desempeño denominado *operacional* en que no se espera daño en la estructura se debe modelar a los elementos con dos sectores de rigidez infinita, de igual manera se debe proceder para el desempeño *inmediatamente ocupacional*. Para los niveles de desempeño denominados *seguridad de vida* y *prevención del colapso*, lo más adecuado es modelar los elementos sin nudos rígidos. La nomenclatura utilizada de los niveles de desempeño es la recomendada por VISION 2000 en la nueva filosofía de diseño sísmico de las estructuras.

En estructuras con muros de corte, es importante modelar los elementos con nudos rígidos debido a que las deformaciones en la unión muro de corte con las vigas, las deformaciones del nudo serán probablemente muy pequeñas.

## 16.10 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- **EJEMPLO 8**

Elaborar un programa de computación, utilizando los programas de ***CEINCI-LAB*** para encontrar la matriz de rigidez lateral, mediante la triangularización de la matriz de rigidez, de la estructura irregular indicada en la figura 16.13; las columnas son de 30/30 cm., y las vigas de 25/25 cm. Considerar un módulo $E = 2400000\ T/m^2$.

- **SOLUCIÓN**

Tanto el programa ***cg_sismo*** como ***cg_sismo_gaus***, generan la matriz de coordenadas generalizadas de estructuras regulares en elevación. Como la estructura de Ejemplo 8 es irregular se la debe hacer regular colocando elementos ficticios, en este caso una viga y una columna de dimensiones pequeñas, que tiendan a cero.

En la parte superior izquierda de la figura 6.14 se presenta el pórtico con los elementos ficticios; a la derecha se indican los grados de libertad en que se ha numerado al final las coordenadas principales para poder hacer la triangularización.

En la parte inferior de la figura 6.14 se indica la numeración de nudos y elementos en base a la cual se realiza el programa que se presenta a continuación.

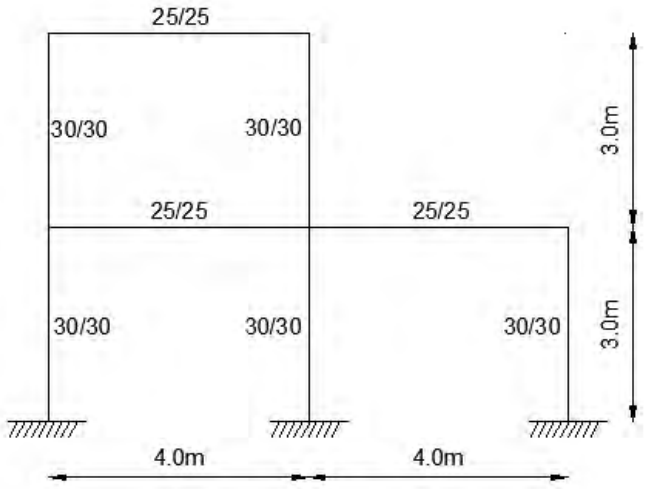



**Figura 16.13** Estructura Irregular

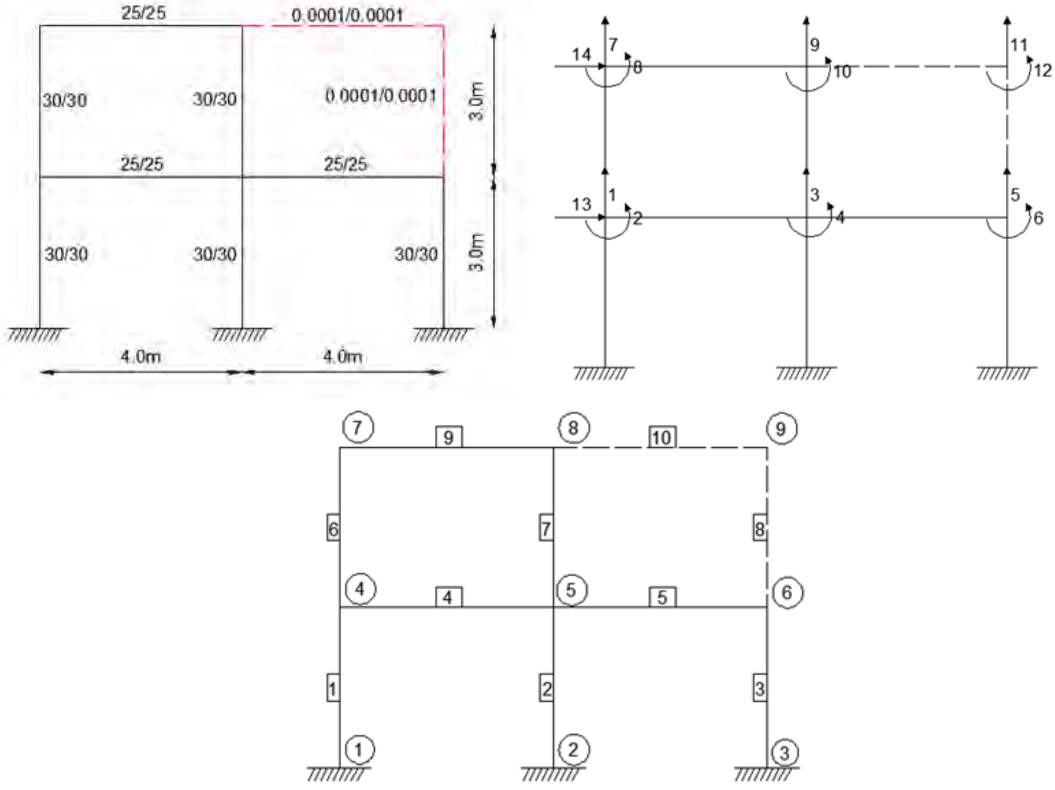



**Figura 16.14** Estructura con elementos ficticios; grados de libertad; numeración de nudos y elementos.

$$\boldsymbol{K}_L = \begin{bmatrix} 2410.9 & -794.7 \\ -794.7 & 532.8 \end{bmatrix}$$

```
% Programa Ej8_libro. de Capítulo 16 de libro de Matricial
nod=9;np=2;nr=3;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);
GEN=[1 1 4 2 1 1 1;4 4 5 1 5 3 3;6 4 7 2 1 1 1;5 5 6 1 5 3 3];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
NUDOS=[1 0 0 2 1 4 0;4 0 3 2 1 4 0;7 0 6 2 1 4 0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
dibujo(X,Y,NI,NJ)
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
ELEM=[0.3 0.3;0.3 0.3;0.3 0.3;0.25 0.25;0.25 0.25;0.3 0.3;
    0.3 0.3; 0.0001 0.0001;0.25 0.25;0.0001 0.0001]
E=2400000;[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); %Matriz de rigidez
nb=2;[KL]=kcondensada(K,nb)
```

- **EJEMPLO 9**

Encontrar la matriz de rigidez lateral, aplicando la triangularización de Gauss, del pórtico de dos pisos, mostrado a la izquierda de la figura 16.15; las columnas son de 30/30 cm., las vigas de 25/25 cm. El módulo de elasticidad del hormigón es$E = 2400000\,\frac{T}{m^2}$. Considerar la mampostería del piso superior ya que está acoplada a la estructura y tiene un espesor de 15 cm., el módulo de la mampostería es $E_m = 100000\,T/m^2$. Modelar la mampostería como se indica a la derecha de 16.15, el ancho "a" calcular con el Modelo de Priestley (1992).

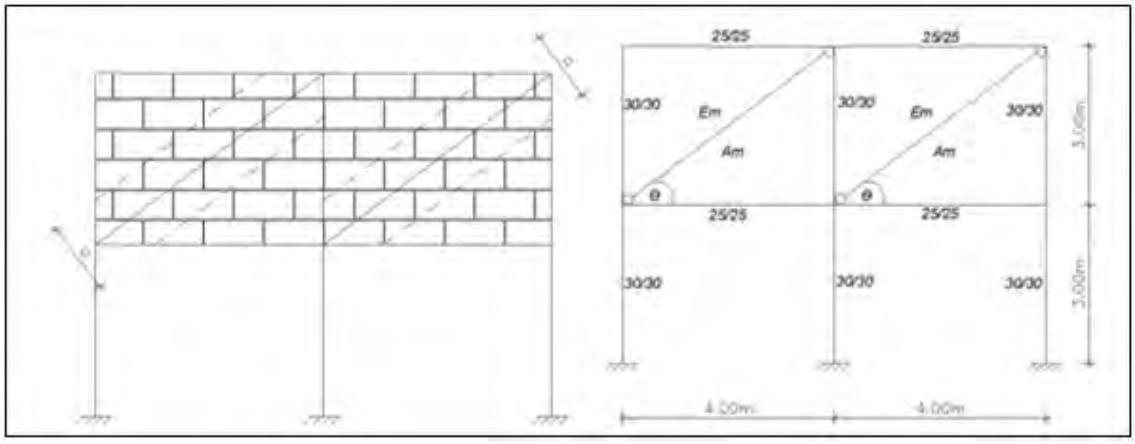



**Figura 16.15** Estructura con piso blando.

- **SOLUCIÓN**

La diagonal de mampostería trabaja solo a compresión, de tal manera que solo tiene rigidez axial $r = \frac{E_m\,A_m}{L_m}$. Donde $E_m$ es el módulo de elasticidad de la mampostería; $A_m$ es el área de la diagonal equivalente; $L_m$ es la longitud de la diagonal equivalente de mampostería.

$$A_m = a * t \qquad\qquad a = \frac{L_m}{4}$$

Donde $t$ es el espesor de la mampostería. El vector de colocación, de las diagonales equivalentes tiene cuatro cantidades y son los grados de libertad horizontal y vertical del nudo inicial y final de la diagonal equivalente.

En la parte superior izquierda de la figura 16.16 se indica la numeración de nudos y elementos. Nótese que las diagonales equivalentes se numeran al final.

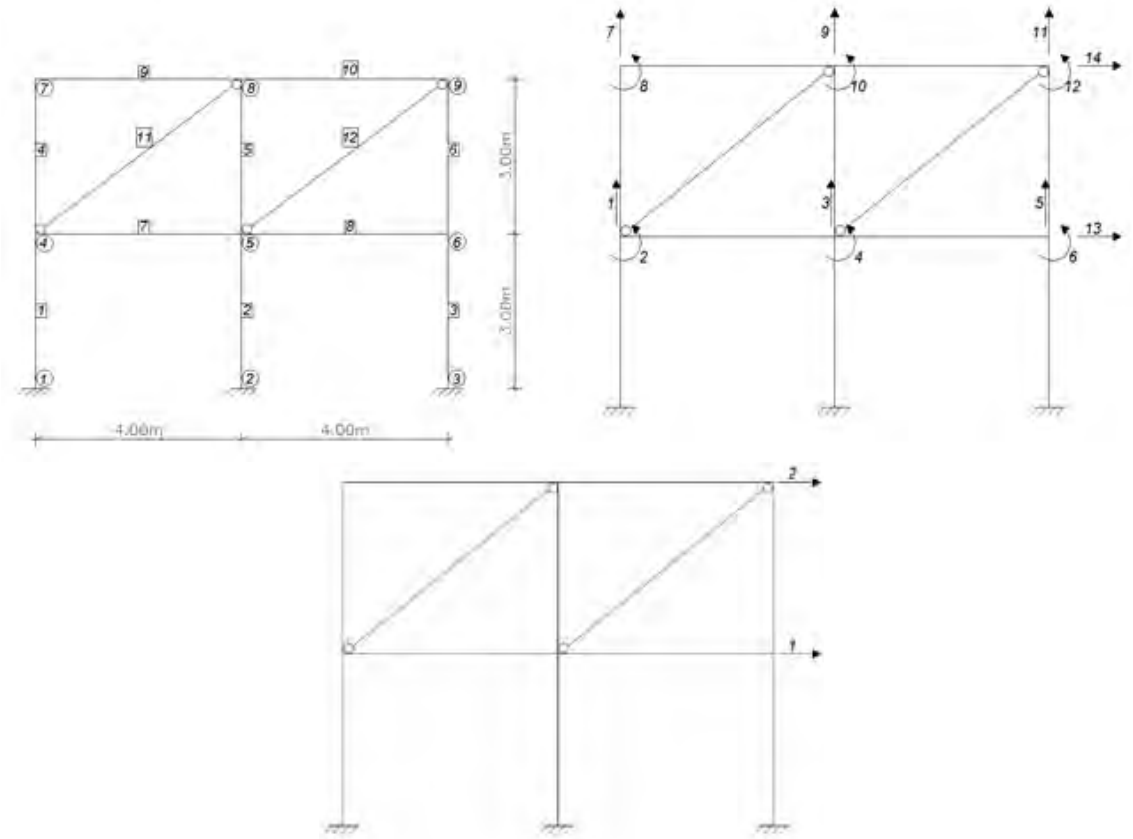



**Figura 16.16** Numeración de nudos y elementos; grados de libertad y coordenadas principales.

A la derecha de la figura 16.16 se indican los grados de libertad, considerando que las vigas son axialmente rígidas. Al final se numeró las coordenadas principales. A continuación se indica el programa con el cual se encuentra la matriz de rigidez lateral.

```
% Programa Ej9_libro. de Capítulo 16 de libro de Matricial
clear all
nod=9;np=2;nr=3;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr)
GEN=[1 1 4 2 1 1 1;4 4 7 2 1 1 1;7 4 5 1 2 3 3;8 5 6 1 2 3 3;
    11 4 8 1 1 1 1];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
NUDOS=[1 0 0 2 1 4 0;4 0 3 2 1 4 0;7 0 6 2 1 4 0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
dibujo(X,Y,NI,NJ)
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
SECCION=[1 0.3 0.3 5 1;7 0.25 0.25 3 1;11 0.0001 0.0001 1 1];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
E=2400000;[KH]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); %Matriz de rigidez
% Contribución de Mampostería a matriz de rigidez
ELEMM=[0.15 2.75;0.15 2.75];VCM=[13 1 14 9;13 3 14 11];Em=100000;
Ld=sqrt(3.7^2+2.75^2);Lm=[Ld;Ld];
[KM]=krigidez_mamposteria(ngl,ELEMM,Lm,VCM,Em);
KT=KH+KM;
nb=2;[KL]=kcondensada(KT,nb)
```

$$\boldsymbol{K}_L = \begin{bmatrix} 7846.1 & -5928 \\ -5928 & 5495 \end{bmatrix}$$

Al observar la matriz de rigidez lateral, se puede decir en forma aproximada que la rigidez del segundo piso $K_2 = 5495\ T/m$ y que la rigidez del primer piso es $K_1 = 7846.1 - 5495 = 2351.1\ T/m$.

Para que una estructura sea sismo resistente la rigidez del primer piso tiene que ser mayor que la rigidez del segundo piso. En el ejemplo no se cumple esto por éste motivo la estructura analizada es muy vulnerable sísmicamente y en la literatura se la conoce con el nombre de ***Piso Blando.***

- **EJEMPLO 10**

La estructura indicada en la figura 16.17 fue construida inicialmente con columnas y vigas de hormigón armado de 20/20 cm. Posteriormente fue reforzada con diagonales de acero de sección cuadrada de 200/200/5 mm. El módulo de elasticidad del hormigón es $E = 2400000\ T/m^2$. Del acero $E_S = 20000000\ T/m^2$. Se pide calcular la matriz de rigidez lateral; considerar apoyo simple para los elementos de acero.

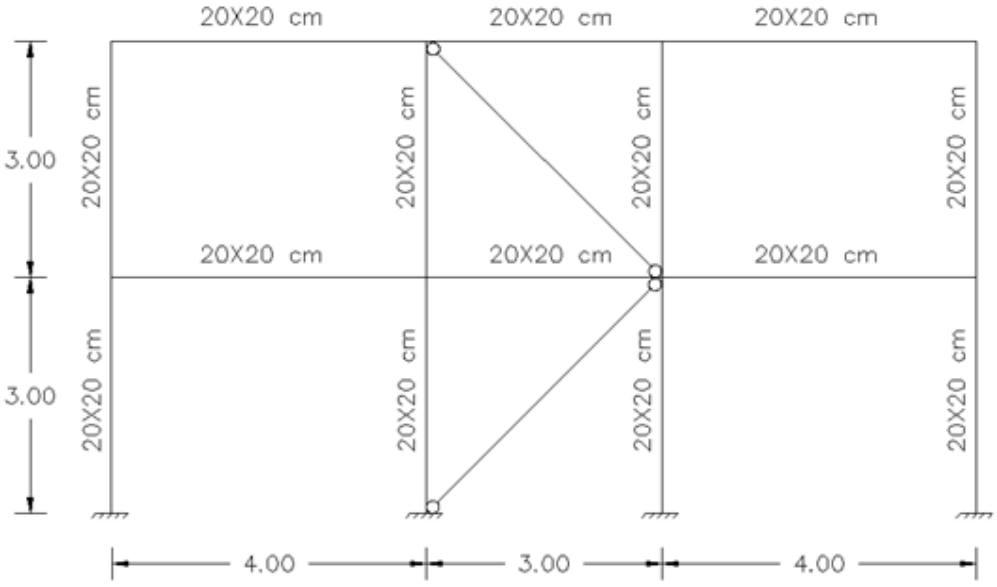



**Figura 16.17** Pórtico de Hormigón con diagonales de acero

- **SOLUCIÓN**

Las diagonales de acero se calculan como apoyos simples, de tal manera que solo trabajan axialmente a tracción o compresión. En consecuencia el vector de colocación tiene cuatro cantidades, desplazamiento horizontal y vertical del nudo inicial y del nudo final.

En la parte superior de la figura 16.18 se tiene la numeración de los nudos y elementos en base a la cual se realiza el programa. Nótese que los elementos de acero se han numerado al final, hacerlo de esta manera facilita encontrar la matriz de rigidez de los elementos de hormigón, por una parte y encontrar la contribución de los elementos de acero por otra. La matriz de rigidez total es la suma de las dos contribuciones de los elementos de hormigón y de los elementos de acero.

En la parte inferior, de la figura 16.18, se presenta el sistema de coordenadas generalizadas, numerando al final las coordenadas principales.

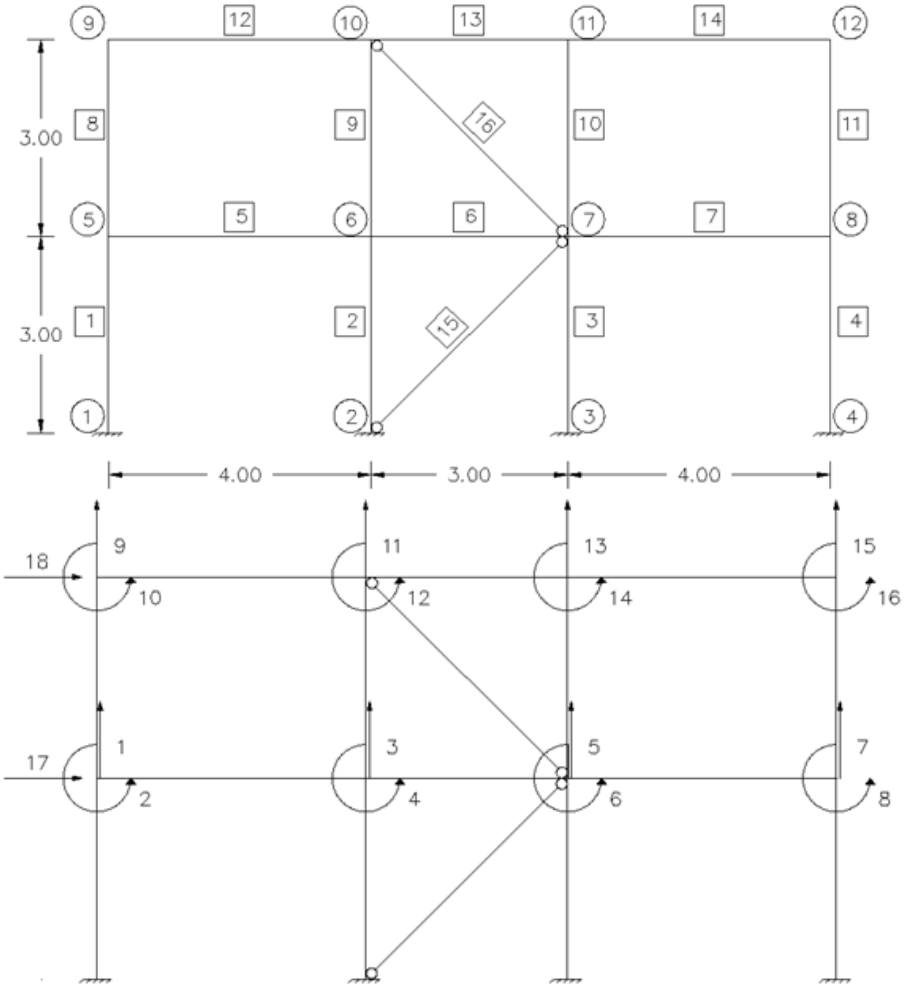



**Figura 16.18** Numeración de nudos, elementos y grados de libertad

```
% Programa Ej10_libro. de Capítulo 16 de libro de Matricial
nod=12;np=2;nr=4;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);
GEN=[1 1 5 3 1 1 1;5 5 6 2 1 1 1;8 5 9 3 1 1 1;12 9 10 2 1 1 1;
    15 2 7 1 1 5 3];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
NUDOS=[1 0 0 2 4 0 3.0;2 4 0 2 4 0 3.0;3 7 0 2 4 0 3.0; 4 11 0 2 4 0 3];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
dibujo(X,Y,NI,NJ)
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
SECCION=[1 0.2 0.2 13 1;15 0.0001 0.0001 1 1];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
E=2400000;[KH]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); %Hormigón
% Contribución de Acero con nudos simples
area=0.20*0.20-0.19*0.19;ELEMA=[area;area];Es=20000000;
LA=L(15:16);senA=seno(15:16);cosA=coseno(15:16);
VCA=[0 0 17 5;17 5 18 11];
[KA]=krigidez(ngl,ELEMA,LA,senA,cosA,VCA,Es);
KT=KH+KA;nb=2;[KL]=kcondensada(KT,nb)
```

La matriz de rigidez que se obtiene es la siguiente.

$$\boldsymbol{K}_L = \begin{bmatrix} 15763 & -6691 \\ -6691 & 5462 \end{bmatrix}$$

## 16.11 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las siguientes estructuras determinar la matriz de rigidez lateral de la siguiente manera:

i) Mediante un modelo numérico de cálculo sin nudo rígido y considerando que solo las vigas son axialmente rígidas.

ii) Mediante un modelo numérico de cálculo sin nudo rígido y considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.

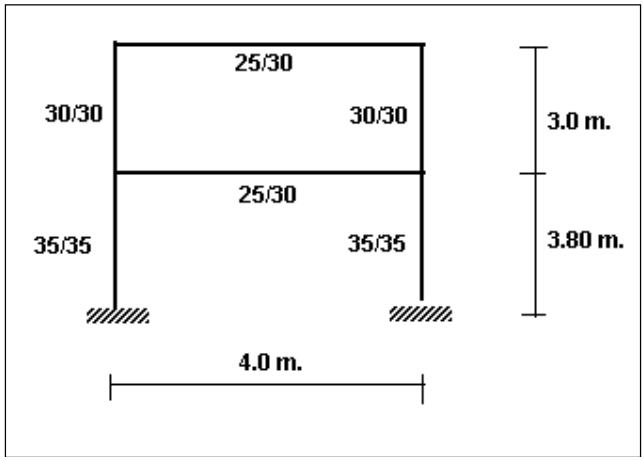
iii) Mediante un modelo de cálculo con nudo rígido y considerando que solo las vigas son axialmente rígidas.

iv) Mediante un modelo de cálculo con nudo rígido y considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.

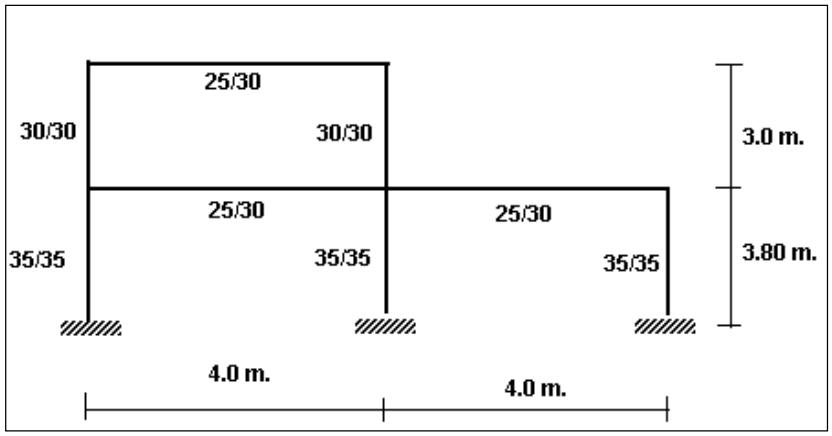
v) Mediante la rigidez de piso calculada como la sumatoria de las rigideces $t = \dfrac{12EI}{H^3}$

Considerar $E = 12000\sqrt{f'c}$ $f'c = 210\ kg/cm^2$ Despreciar el efecto del corte.

**EJERCICIO N.- 1**



**EJERCICIO N.- 2**




**EJERCICIO N.- 3**

Resolver el ejercicio 1 considerando inercias agrietadas de acuerdo al NEC-11

**EJERCICIO N.- 4**

Resolver el ejercicio 2 considerando inercias agrietadas de acuerdo al ACI-05.

**EJERCICIO N.- 5**

Resuelva los ejercicios 3 y 4 considerando rotaciones en los apoyos.

*CAPITULO 17*

# MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS DE PISO

## RESUMEN

Se presenta el cálculo de la matriz de rigidez de una estructura en la cual se consideran tres grados de libertad por planta, orientado al análisis sísmico espacial de edificios considerando que los pisos son completamente rígidos. En el modelo numérico de cálculo se considera que los pórticos son elementos de una estructura que se unen por medio de una losa o diafragma horizontal en cada uno de los pisos. Se analiza las sub matrices que conforman la matriz de rigidez en coordenadas de piso con el propósito de que el lector aprenda a decidir una buena estructuración sísmica de un edificio de acuerdo a un determinado objetivo que puede ser, por ejemplo que la estructura tenga una gran rigidez torsional.

Por otra parte se presenta el cálculo del Centro de Rigidez de tres maneras, la primera en forma matricial; la segunda en base a la matriz de rigidez lateral, procedimiento valido para un piso y la tercera en forma muy aproximada en base a la rigidez "t".

Se complementa el estudio con el cálculo de la matriz de rigidez en coordenadas de piso de estructuras irregulares en elevación, sin y con aisladores sísmicos.

## 17.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

En la figura 17.1, a la izquierda, se presenta un edificio de cuatro pisos compuesto por cuatro pórticos, el modelo es aplicable a un edificio con cualquier número de pisos y pórticos. En cada planta de la estructura se ha definido el **C**entro de **M**asas y en ese punto se han ubicado los tres grados de libertad por planta que son dos componentes de desplazamiento horizontal y una rotación de piso.

La numeración de los tres grados de libertad por planta es arbitrario sin embargo es conveniente numerar primero todas las componentes de desplazamiento horizontal según el eje X empezando desde la primera planta hasta la última planta; luego todas las componentes de desplazamiento horizontal según el eje Y así mismo empezando desde la primera planta hasta la última y finalmente las rotaciones de piso como lo muestra la figura 17.1. A éstos tres grados de libertad por planta se denomina sistema $\boldsymbol{Q-q}$ ya que son coordenadas de la estructura. Donde $\boldsymbol{Q}$

es el vector de cargas aplicadas en el centro de masa de la estructura y $\boldsymbol{q}$ el vector de coordenadas de piso.

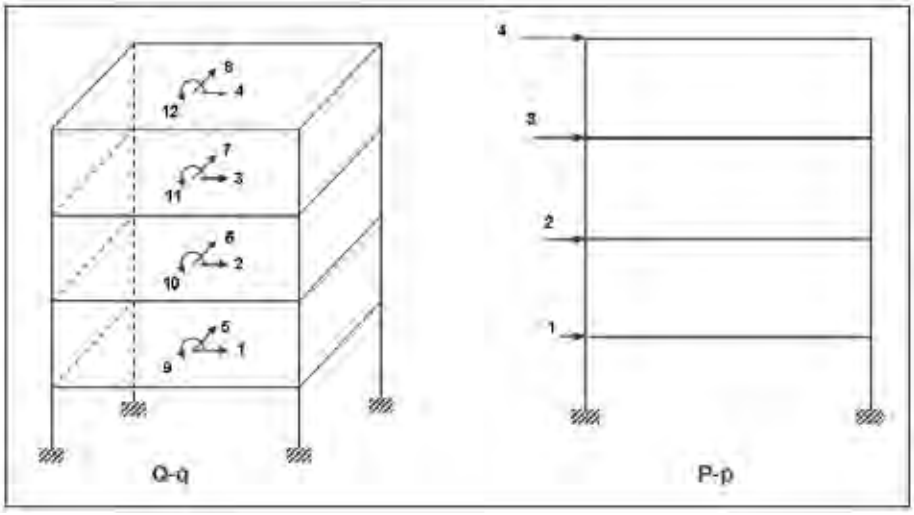



**Figura 17.1** Coordenadas de la Estructura y Coordenadas de un Elemento

Para la estructura de la figura 17.1 se tiene que los vectores de cargas y coordenadas generalizadas tienen la siguiente forma y significado.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q_X} \\ \boldsymbol{Q_Y} \\ \boldsymbol{Q_\theta} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_X} \\ \boldsymbol{q_Y} \\ \boldsymbol{q_\theta} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q_X} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q_Y} = \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q_\theta} = \begin{bmatrix} Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q_X} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q_Y} = \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} \qquad q_\theta = \begin{bmatrix} q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix}$$

Donde $Q_1$ es la fuerza horizontal aplicada en el primer piso en sentido X positiva si va hacia la derecha, $Q_2$ similar a $Q_1$ pero en el segundo piso,….., $Q_5$ es la fuerza horizontal aplicada en el primer piso en sentido Y positivo si está en la dirección del sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$, $Q_6$ similar a $Q_5$ pero en el piso 2,…., $Q_9$ es el momento de torsión aplicado en el primer piso positivo si es anti horario, $Q_{10}$ momento de torsión aplicado en el segundo piso, etc.

Por otro lado se tiene que $q_1$ es la componente de desplazamiento horizontal en sentido X del primer piso, $q_2$ es similar a $q_1$ pero en el piso 2,…., $q_5$ es la componente de desplazamiento

horizontal en sentido Y del primer piso, $q_6$ similar a $q_5$ pero en piso 2,…., $q_9$ es la rotación por torsión en el primer piso, $q_{10}$ es la rotación por torsión en el segundo piso, etc. Serán positivas si están en el sentido del sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$.

## 17.2 HIPÓTESIS DEL MODELO

Como se indicó se considera que cada pórtico plano es un elemento de la estructura cuyo sistema de coordenadas de miembro está conformado por las coordenadas laterales de cada uno de los pisos. En la figura 17.1 a la derecha se indica el sistema de coordenadas $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ de los elementos que tienen la siguiente forma y significado.

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Donde $P_1$ es la fuerza horizontal que actúa en el piso 1, $P_2$ es la fuerza horizontal en el piso 2, etc. Por otra parte $p_1$ es el desplazamiento horizontal del piso 1, $p_2$ es el desplazamiento horizontal en el piso 2, etc.

La relación entre el vector de cargas $\boldsymbol{P}$ y el vector de desplazamientos $\boldsymbol{p}$ viene dado por la matriz de rigidez lateral $\boldsymbol{K_L}$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K_L} * \boldsymbol{p} \tag{17.1}$$

## 17.3 MATRIZ $K_E$

Se recuerda que la matriz de rigidez lateral $\boldsymbol{K_L}$ es aquella matriz que está asociada a las coordenadas laterales de piso, con esta matriz se obtiene la matriz de rigidez en coordenadas de piso $\boldsymbol{K_E}$ aplicando la ecuación (17.2) que fue estudiada en capítulos anteriores.

$$\boldsymbol{K_E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A^{(i)t}}\ \boldsymbol{K_L^{(i)}}\ \boldsymbol{A^{(i)}} \tag{17.2}$$

Donde n es el número de pórticos de la estructura (elementos), $\boldsymbol{A^{(i)}}$ es la matriz de compatibilidad del pórtico i, que relaciona las coordenadas laterales de un pórtico con las coordenadas de piso de la estructura. La forma de la matriz $\boldsymbol{A^{(i)}}$ es la siguiente:

$$\boldsymbol{A^{(i)}} = \begin{bmatrix} Cos\alpha & Sen\alpha & r_1 \\ Cos\alpha & Sen\alpha & r_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ Cos\alpha & Sen\alpha & r_n \end{bmatrix} \tag{17.3}$$

Siendo $\alpha$ es el ángulo que forma la orientación positiva del pórtico con el eje de las X. Para pórticos paralelos al eje X este ángulo vale $0^0$ y para pórticos perpendiculares al eje X vale $90^0$. Por otra parte $r_j$ es la distancia desde el Centro de Masa al pórtico en el piso j, será positiva si la

orientación del pórtico rota con respecto al centro de masa en sentido horario. La orientación positiva de los pórticos es paralela y en el sentido de los ejes X, Y. La matriz $\boldsymbol{A}$ tiene $NP$ filas y $3*NP$ columnas, donde $NP$ es el número de pisos del pórtico para el caso más general.

Se deja al lector la deducción de la matriz $\boldsymbol{A}$. Lo deseable es que se calcule la matriz de rigidez lateral aplicando la condensación estática de la matriz de rigidez que se estudió en el capítulo anterior pero se puede encontrar en forma aproximada la matriz de rigidez lateral $\boldsymbol{K}_L$ en función de la rigidez de piso $k_j$, con la ecuación (17.4). Donde $k_1, k_2, k_3,...k_n$ son la rigidez del piso uno, dos, tres,…. y del último piso.

$$\boldsymbol{K}_L^{(i)} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \\ & & ..... & ..... & ..... \\ & & & -k_n & k_n \end{bmatrix} \qquad (17.4)$$

- **EJEMPLO 1**

Encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de piso para la estructura de cinco pisos indicada en la figura 17.2, por facilidad se considera que todos los pórticos son iguales y se va a obtener la matriz de rigidez lateral aplicando la ecuación (17.4). En la tabla 17.1 se indica la rigidez de cada uno de los pisos de un pórtico tipo.

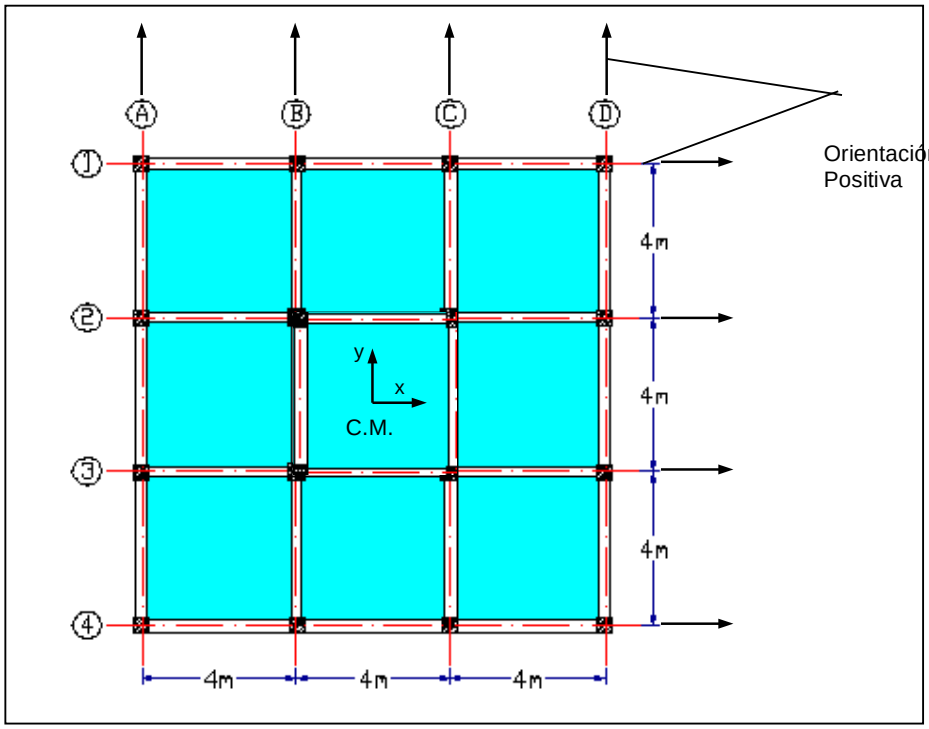



**Figura 17.2** Descripción en planta de la estructura de 5 pisos.

**Tabla 17.1** Rigidez de Piso para el Ejemplo 1

| | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Elástica | 4435.05 | 2428.38 | 2202.36 | 2326.37 | 2359.46 |

- **SOLUCIÓN**

En la figura 17.2, se muestra la orientación positiva de los pórticos en base a la cual se obtienen la matriz de compatibilidad de cada uno de ellos. Nótese que es paralela a los ejes X,Y. Para encontrar las matrices de compatibilidad de cada uno de los pórticos con la ecuación (17.3) es conveniente tabular los datos en una tabla como la 17.2.

**Tabla 17.2** Parámetros que definen los pórticos para calcular matriz $\boldsymbol{A}$

| Pórtico | $\alpha$ | $r$ |
|---|---|---|
| **1** | 0 | -6 |
| **2** | 0 | -2 |
| **3** | 0 | 2 |
| **4** | 0 | 6 |
| **A** | 90 | -6 |
| **B** | 90 | -2 |
| **C** | 90 | 2 |
| **D** | 90 | 6 |

Se considera que las plantas son iguales en todos los pisos razón por la cual la distancia del Centro de Masas al pórtico es un solo valor y no cambia de piso a piso. En la tabla 17.2 se aprecia que el valor de $r$ para el Pórtico 1 es negativo debido a que la orientación de dicho pórtico con respecto al Centro de Masa es horario, lo propio se tiene con los pórtico 2, A y B. Al reemplazar los datos de la tabla 17.2 en la ecuación (17.3) se obtienen las matrices de compatibilidad de cada uno de los pórticos. Para el pórtico 1, se tiene:

$$\overline{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Para los pórticos 2, 3 y 4 lo único que cambia es el valor de r de -6 que se tiene para el pórtico 1 a -2, 2 y 6, respectivamente. A continuación se indica la matriz de compatibilidad para el pórtico A.

$$\overline{A}^{(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

De igual manera para los pórticos B, C, y D la matriz $A$ se mantiene igual a la del pórtico A con la acotación de que cambian los valores de $r$ por –2, 2 y 6 respectivamente.

La matriz $\boldsymbol{K}_L$ es la misma para todos los pórticos y es la que se muestra a continuación empleando la ecuación (17.4).

$$\overline{\boldsymbol{KL}}^{(i)} = \begin{bmatrix} 6863.43 & -2428.38 & 0 & 0 & 0 \\ -2428.38 & 4630.74 & -2202.36 & 0 & 0 \\ 0 & -2202.36 & 4528.73 & -2326.37 & 0 \\ 0 & 0 & -2326.37 & 4685.83 & -2359.46 \\ 0 & 0 & 0 & -2359.46 & 2359.46 \end{bmatrix}$$

Al realizar el triple producto matricial y la sumatoria respectiva indicada en la ecuación (17.2) se obtiene la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}_E$ que resulta de 15X15. Por falta de espacio se escribe a continuación algunos elementos de esta matriz de rigidez.

$$\overline{\boldsymbol{KE}} = \begin{bmatrix} 27453.72 & -9713.52 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -913.52 & 18522.96 & -8809.44 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -8809.44 & 18114.92 & -9305.48 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -9305.48 & 18743.32 & -9437.84 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & -9437.84 & 9437.84 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -377513.60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 377513.60 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 2**

Encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura irregular indicada en la figura 17.3. En la parte superior se indica una perspectiva de la estructura y en la parte inferior se indica la distribución en planta con la nomenclatura utilizada para identificar cada uno de los pórticos. Calcular con inercias agrietadas de acuerdo a la Norma Ecuatoriana de la Construcción NEC-11. Considerar $E = 2173706.513\, T/m^2$. En la figura 17.4 se indica la geometría de cada uno de los pórticos de la estructura.

- **SOLUCIÓN**

La Norma Ecuatoriana de la Construcción, NEC-11, estipula que las Inercias agrietadas con las cuales se debe realizar el análisis sísmico de vigas y columnas son:

$$I_v = 0.5\, I_o \qquad I_c = 0.8\, I_o \qquad I_o = \frac{b\, h^3}{12}$$

Las matrices de rigidez lateral de cada uno de los pórticos son las siguientes:

$$\boldsymbol{K}_L^{(A)} = [772.87]$$

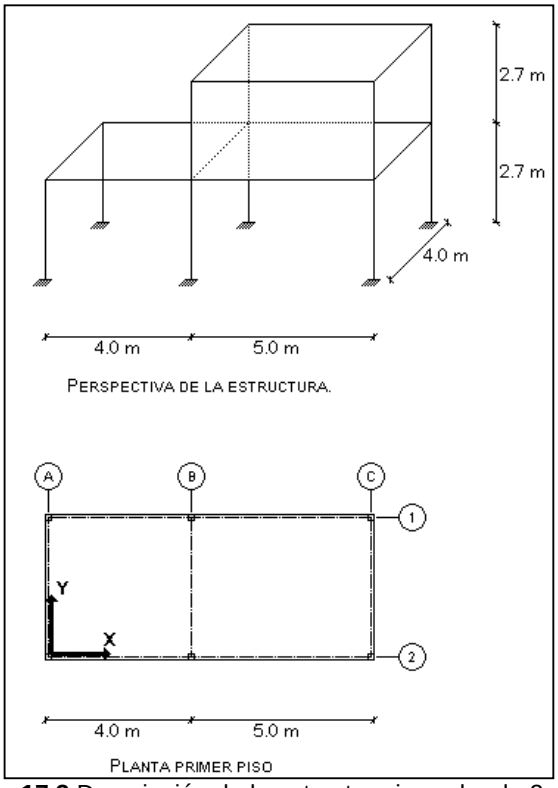



**Figura 17.3** Descripción de la estructura irregular de 2 pisos.

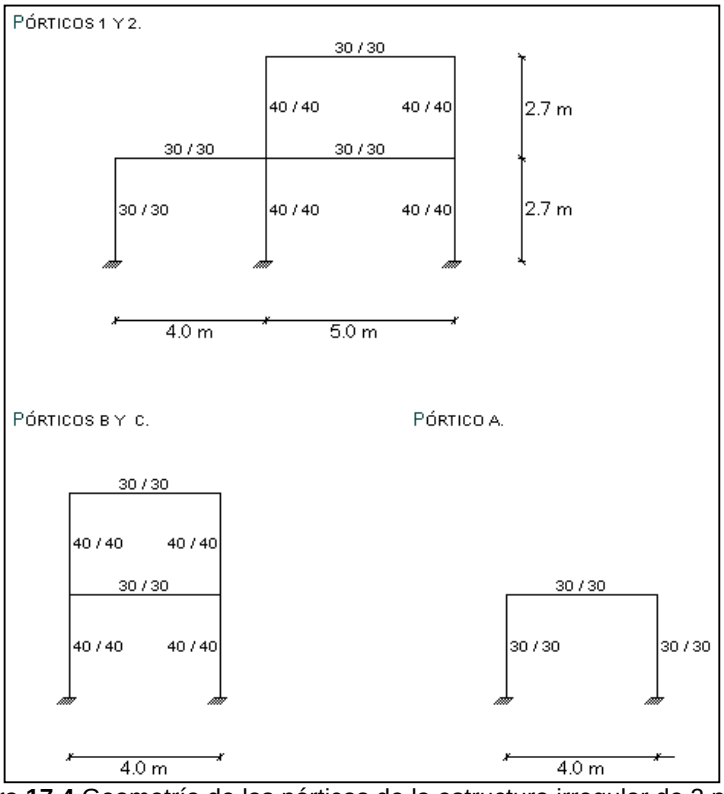



**Figura 17.4** Geometría de los pórticos de la estructura irregular de 2 pisos.

$$K_L^{(B)} = K_L^{(C)} = \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix}$$

$$K_L^{(1)} = K_L^{(2)} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix}$$

En la figura 17.5 se indica el sistema de coordenadas laterales de cada uno de los pórticos.

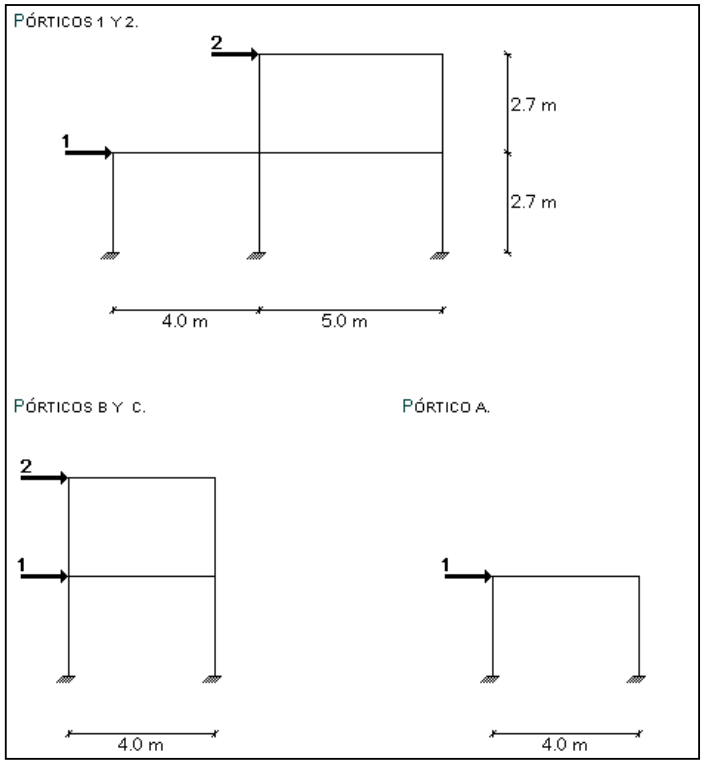



**Figura 17.5** Sistema de coordenadas $P - p$ de los pórticos.

El pórtico A es de un piso en consecuencia la matriz de rigidez lateral es de 1 x 1 pero los restantes pórticos son de dos pisos y sus matrices de rigidez lateral son de 2 x 2. Con el objeto de que todas las matrices de rigidez lateral sean de 2 x 2 se utiliza el siguiente artificio que consiste en escribir la matriz de rigidez lateral del pórtico A como una matriz de 2 x 2, de la siguiente manera:

$$K_L^{(A)} = \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Ahora se debe determinar el Centro de Masas de cada uno de las plantas. En plantas regulares con carga repartida en forma simétrica éste centro coincide con el centro geométrico de la misma pero cuando se trabaja con plantas irregulares o plantas con aberturas para determinar el centro de masas se debe aplicar el siguiente formulario.

$$X_{CM} = \frac{\sum X_i \, m_i}{\sum m_i} \qquad Y_{CM} = \frac{\sum Y_i \, m_i}{\sum m_i}$$

Donde $X_{CM}$ es la distancia en X del Centro de Masas con respecto a un punto tomado como origen; $Y_{CM}$ es la distancia en Y del CM con respecto a un punto tomado como origen; $X_i$ es la distancia en sentido X desde el CM de cada figura hasta el punto de referencia; $Y_i$ es la distancia en sentido Y desde el CM de cada figura hasta el punto de referencia; $m_i$ es la masa de la figura i.

En la estructura que se está analizando se considera que el Centro de Masas se halla ubicado en el centro geométrico de cada planta como se indica en la figura 17.6 es ahí donde se ubica el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$. Nótese que primero se han numerado todos los desplazamientos en sentido X, luego los desplazamientos en sentido Y, finalmente las rotaciones.

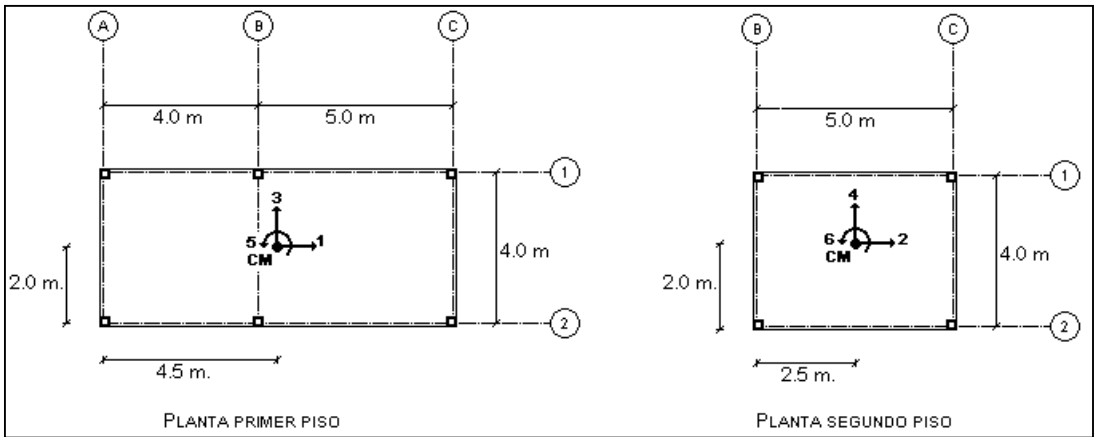



**Figura 17.6** Sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ de la estructura irregular de 2 pisos.

Las matrices de compatibilidad que se obtienen para los pórticos 1 y 2 al reemplazar $\alpha = 0$ en la ecuación (17.3) y considerando que la distancia del centro de masas a dichos pórticos son -2 y 2 m. respectivamente.

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para los pórticos: A, B y C el valor del ángulo $\alpha = 90$ y la distancia del CM al pórtico A es de -4.5 m. es negativo debido a que la orientación positiva de éste pórtico rota con respecto al CM en forma horaria. Para el pórtico B la distancia es-0.5 m. en el primer piso y -2.5 m. en el segundo piso. Finalmente para el pórtico C estas distancias son 4.5 m. en el primer piso y 2.5 m. en el segundo piso. Las matrices de compatibilidad de los mencionados pórticos son:

$$\boldsymbol{A}^{(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(B)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(C)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Estrictamente la matriz de compatibilidad del pórtico A debe tener una fila ya que ese pórtico tiene un piso sin embargo es de dos filas por el artificio realizado en la escritura de la matriz de rigidez lateral. Nótese que todos los elementos de la segunda fila son ceros al igual que la segunda, cuarta y sexta columna.

Finalmente al realizar el triple producto matricial indicado en la ecuación 17.2 se obtiene la matriz de rigidez en coordenadas de piso $\boldsymbol{KE}$ que resulta:

$$\boldsymbol{KE} = \begin{bmatrix} 12352.4 & -3983.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3983.0 & 2100.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 12618.3 & -4217.6 & 20213.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4217.6 & 2229.8 & -8435.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 20213.0 & -8435.2 & 186480.0 & -42292.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -42292.0 & 22339.0 \end{bmatrix}$$

## 17.4 SUBMATRICES DE $KE$

La matriz de rigidez $\boldsymbol{KE}$ es particionada de acuerdo al número de pisos. Para el Ejemplo 2 en que se trata de una edificación de 2 pisos la partición será de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{KE} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 12352.4 & -3983.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3983.0 & 2100.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ \hdashline 0.0 & 0.0 & 12618.3 & -4217.6 & 20213.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4217.6 & 2229.8 & -8435.2 & 0.0 \\ \hdashline 0.0 & 0.0 & 20213.0 & -8435.2 & 186480.0 & -42292.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -42292.0 & 22339.0 \end{array}\right]$$

Al efectuar el triple producto matricial definido en la ecuación 17.2 se obtiene que las sub matrices son:

$$\boldsymbol{KE} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{XX} & \boldsymbol{K}_{XY} & \boldsymbol{K}_{X\theta} \\ \boldsymbol{K}_{YX} & \boldsymbol{K}_{YY} & \boldsymbol{K}_{Y\theta} \\ \boldsymbol{K}_{\theta X} & \boldsymbol{K}_{\theta Y} & \boldsymbol{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{XX} = \sum \cos^2\alpha \ \ \boldsymbol{K}_L$$

$$\boldsymbol{K}_{YY} = \sum sen^2\alpha \ \ \boldsymbol{K}_L$$

$$\boldsymbol{K}_{XY} = \sum sen\alpha \cos\alpha \ \ \boldsymbol{K}_L$$

$$\boldsymbol{K}_{X\theta} = \sum \cos\alpha \ \ \boldsymbol{K}_L \ \ \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{K}_{Y\theta} = \sum sen\alpha \ \ \boldsymbol{K}_L \ \ \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{K}_{\theta\theta} = \sum \boldsymbol{K}_L \ \boldsymbol{r}^2$$

$$\boldsymbol{K}_{YX} = \boldsymbol{K}_{XY}^{\ t} \qquad \boldsymbol{K}_{\theta X} = \boldsymbol{K}_{X\theta}^{\ t} \qquad \boldsymbol{K}_{\theta Y} = \boldsymbol{K}_{Y\theta}^{\ t}$$

**Cuando los Centros de Masa no son colineales la rigidez $K_{\theta\theta}$ se calcula con la siguiente ecuación.**

$$K_{\theta\theta} = \sum r' K_L r$$

- **EJEMPLO 3**

Determinar las sub matrices de la matriz de rigidez $KE$ aplicando el formulario correspondiente para el Ejemplo 2.

- **SOLUCIÓN**

En estructuras con pórticos ortogonales como en el presente caso se tiene que $K_{XX}$ es igual a la sumatoria de las matrices de rigidez lateral en sentido X, y $K_{YY}$ es igual a la sumatoria de las matrices de rigidez lateral en sentido Y.

$$K_{XX} = K_L^{(1)} + K_L^{(2)} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix}$$

$$K_{XX} = \begin{bmatrix} 12352.4 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{bmatrix}$$

$$K_{YY} = K_L^{(A)} + K_L^{(B)} + K_L^{(C)} = 2 * \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$K_{YY} = \begin{bmatrix} 12618.3 & -4217.6 \\ -4217.6 & 2229.8 \end{bmatrix}$$

En pórticos ortogonales $K_{XY} = 0$. Por otra parte se tiene que $K_{X\theta} = \sum K_L r$ pero únicamente de los pórticos en sentido X. El vector $r$ está conformado por las distancias del centro de masas al pórtico desde el piso 1 al piso n.

$$r^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad r^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_{XY} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_{XY} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para pórticos ortogonales se tiene que $K_{Y\theta} = \sum K_L r$ pero con los pórticos en sentido Y.

$$\boldsymbol{r}^{(A)} = \begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r}^{(B)} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r}^{(C)} = \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{Y\theta} = \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{y\theta} = \begin{bmatrix} 20213.0 & 0.0 \\ -8435.2 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\boldsymbol{K}_{\theta\theta} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{L}}{}^{(1)} \left(\boldsymbol{r}^{(1)}\right)^2 + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{L}}{}^{(2)} \left(\boldsymbol{r}^{(2)}\right)^2 + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{L}}{}^{(A)} \left(\boldsymbol{r}^{(A)}\right)^2 + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{L}}{}^{(B)} \left(\boldsymbol{r}^{(B)}\right)^2 + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{L}}{}^{(C)} \left(\boldsymbol{r}^{(C)}\right)^2$$

$$\boldsymbol{K}_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 186480 & -42292 \\ -42292 & 22339 \end{bmatrix}$$

## 17.5 CENTRO DE RIGIDEZ

Se define el **C**entro de **R**igidez, CR, de un piso como el punto donde al aplicar una fuerza cortante horizontal el piso se traslada sin rotar respecto al nivel inferior. Se destaca que las fuerzas sísmicas se aplican en el **C**entro de **M**asa, CM, y que lo ideal es que CM coincida o se encuentre lo más cerca posible del CR para evitar problemas de torsión en planta.

Sean $e_x, e_y$ la distancia en sentido X y en sentido Y del CM con relación al CR. Para su evaluación en forma matricial se parte de la ecuación básica de estructuras para el análisis estático siguiente pero orientada al análisis sísmico con tres grados de libertad por planta.

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{KE} \quad \boldsymbol{q}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_X \\ \boldsymbol{Q}_Y \\ \boldsymbol{Q}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{XX} & \boldsymbol{K}_{XY} & \boldsymbol{K}_{X\theta} \\ \boldsymbol{K}_{YX} & \boldsymbol{K}_{YY} & \boldsymbol{K}_{Y\theta} \\ \boldsymbol{K}_{\theta X} & \boldsymbol{K}_{\theta Y} & \boldsymbol{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_X \\ \boldsymbol{q}_Y \\ \boldsymbol{q}_\theta \end{bmatrix} \qquad (17.5)$$

### 17.5.1 Análisis en Sentido X

Para el análisis sísmico en sentido X, solo existe las fuerzas sísmicas en dicho sentido es decir solo existe $\boldsymbol{Q}_X$ el vector $\boldsymbol{Q}_Y$ es nulo y el vector $\boldsymbol{Q}_\theta$ se debe calcular ya que son los momentos que van a ser que se cumpla con la condición de que exista traslación únicamente en sentido X, es decir $\boldsymbol{q}_Y$ es igual a cero y $\boldsymbol{q}_\theta$ es cero. Luego la ecuación ( 17.5 ) queda:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_X \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{XX} & \boldsymbol{K}_{XY} & \boldsymbol{K}_{X\theta} \\ \boldsymbol{K}_{YX} & \boldsymbol{K}_{YY} & \boldsymbol{K}_{Y\theta} \\ \boldsymbol{K}_{\theta X} & \boldsymbol{K}_{\theta Y} & \boldsymbol{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_X \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Al multiplicar la matriz de rigidez $\boldsymbol{KE}$ por el vector $\boldsymbol{q}$ e igualar al vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ pero trabajando con las sub matrices indicadas se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_X &= \boldsymbol{K}_{XX}\ \boldsymbol{q}_X & \Rightarrow \boldsymbol{q}_X &= \boldsymbol{K}_{XX}^{-1}\ \boldsymbol{Q}_X \\ \boldsymbol{Q}_\theta &= \boldsymbol{K}_{\theta X}\ \boldsymbol{q}_X & \boldsymbol{Q}_\theta &= \boldsymbol{K}_{\theta X}\ \boldsymbol{K}_{XX}^{-1}\ \boldsymbol{Q}_X \end{aligned} \qquad (17.6)$$

Para calcular $\boldsymbol{Q}_\theta$ con la ecuación (17.6) se supone conocido el vector $\boldsymbol{Q}_X$ que son las fuerzas sísmicas en sentido X.

Al analizar en sentido X, se halla la excentricidad en sentido Y que se ha denominado $\boldsymbol{e}_y$, en cada piso se debe dividir el momento de torsión del piso $M_t$ para la fuerza de corte $V$, las mismas que se obtienen por estática a continuación se escribe lo indicado sin negrillas porque es a nivel de piso.

$$e_Y = \frac{M_t}{V_X} \qquad (17.7)$$

### 17.5.2 Análisis en Sentido Y

Para el sentido Y se tiene que $\boldsymbol{Q}_X = \boldsymbol{0}$ en este caso solo existe $\boldsymbol{Q}_Y$ y los momentos $\boldsymbol{Q}_\theta$ que permiten la traslación únicamente en sentido Y, que hacen que solo exista $\boldsymbol{q}_Y$. Con todo lo indicado el sistema de ecuaciones queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q}_Y \\ \boldsymbol{Q}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{XX} & \boldsymbol{K}_{XY} & \boldsymbol{K}_{X\theta} \\ \boldsymbol{K}_{YX} & \boldsymbol{K}_{YY} & \boldsymbol{K}_{Y\theta} \\ \boldsymbol{K}_{\theta X} & \boldsymbol{K}_{\theta Y} & \boldsymbol{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{q}_Y \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_Y &= \boldsymbol{K}_{YY}\ \boldsymbol{q}_Y & \Rightarrow \boldsymbol{q}_Y &= \boldsymbol{K}_{YY}^{-1}\ \boldsymbol{Q}_Y \\ \boldsymbol{Q}_\theta &= \boldsymbol{K}_{\theta Y}\ \boldsymbol{q}_Y & \Rightarrow \boldsymbol{Q}_\theta &= \boldsymbol{K}_{\theta Y}\ \boldsymbol{K}_{YY}^{-1}\ \boldsymbol{Q}_Y \end{aligned} \qquad (17.8)$$

Finalmente:

$$e_X = \frac{M_t}{V_Y} \tag{17.9}$$

- **EJEMPLO 4**

Encontrar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejemplo 2. Si las fuerzas que se obtienen del análisis sísmico en sentido X y en sentido Y, son:

$$\boldsymbol{Q_X} = \begin{bmatrix} 1.68 \\ 1.68 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q_Y} = \begin{bmatrix} 1.68 \\ 1.68 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

  - Análisis en sentido X

En el ejemplo anterior se aprecia que $\boldsymbol{K_{\theta X}} = \boldsymbol{0}$ en consecuencia el vector $\boldsymbol{Q_\theta} = \boldsymbol{0}$. Luego los cortantes en sentido X valen:

$$V_{2X} = 1.68\,T. \qquad V_{1X} = 3.36\,T.$$

En la figura 17.6 se indica el centro de masas de cada uno de los pisos y en ella se aprecia que los momentos de torsión son nulos de tal manera que no existe excentricidad $e_Y$ en ninguno de los dos pisos.

  - Análisis en sentido Y

Para el sentido Y se tiene que: $\boldsymbol{K_{\theta Y}} = \begin{bmatrix} 20213.0 & -8435.2 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$. Nótese que $\boldsymbol{K_{\theta Y}}$ es la matriz transpuesta de $\boldsymbol{K_{Y\theta}}$. Por otra parte $\boldsymbol{K_{YY}} = \begin{bmatrix} 12618.3 & -4217.6 \\ -4217.6 & 2229.8 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{Q_Y} = \begin{bmatrix} 1.68 \\ 1.68 \end{bmatrix}$. Al reemplazar estos valores en la ecuación (17.8) se obtiene:

$$\boldsymbol{Q_\theta} = \begin{bmatrix} -1.90 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

En la figura 17.7 se indican los vectores $\boldsymbol{Q_Y}$ y $\boldsymbol{Q_\theta}$ con los cuales se procede al cálculo de los cortantes de piso y momentos de torsión en cada piso con respecto al centro de masas.

Como es negativo el momento de 1.90 Tm. se lo ha colocado con sentido horario en la primera planta. Nótese que la distancia del centro de masas entre los pisos 2 y 1 es de (2.50 – 0.50) que da 2.0 m. En base a las fuerzas y momentos que actúan en la figura 17.7 se tiene que los cortantes y momentos de torsión valen:

$$V_{2Y} = 1.68 \qquad V_{1Y} = 3.36$$
$$M_{2T} = Q_2 + V_{2Y} * 0 = 0 \qquad M_{1T} = M_{2T} + Q_1 + V_{1Y} * 2$$

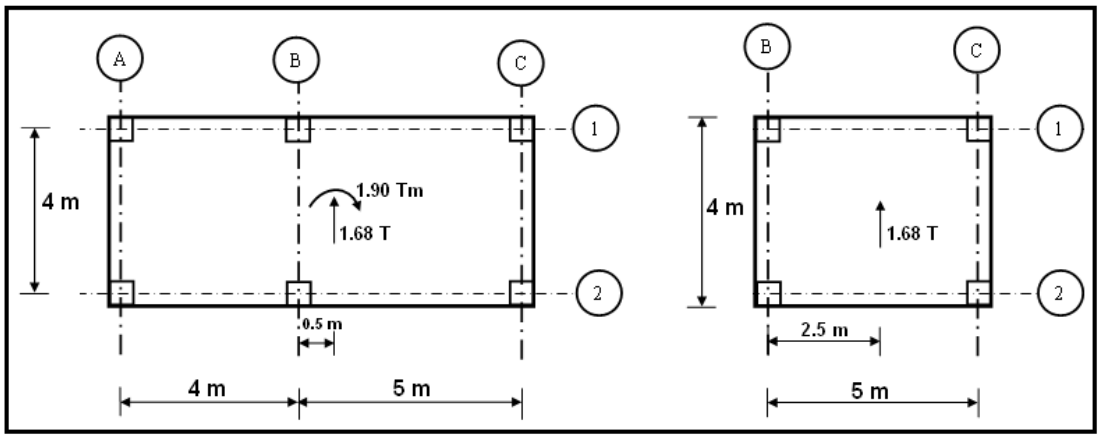



**Figura 17.7** Fuerzas y momentos en el centro de masas para el caso de traslación pura en Y.

$$M_{1T} = -1.90 + 1.68 * 2 = 1.46\, Tm.$$

$$e_{2X} = \frac{M_{2T}}{V_{2Y}} = 0 \qquad e_{1X} = \frac{M_{1T}}{V_{1Y}} = \frac{1.46}{3.36} = 0.435\, m.$$

En la figura 17.8 se indica la ubicación del Centro de Rigidez de cada uno de los pisos.

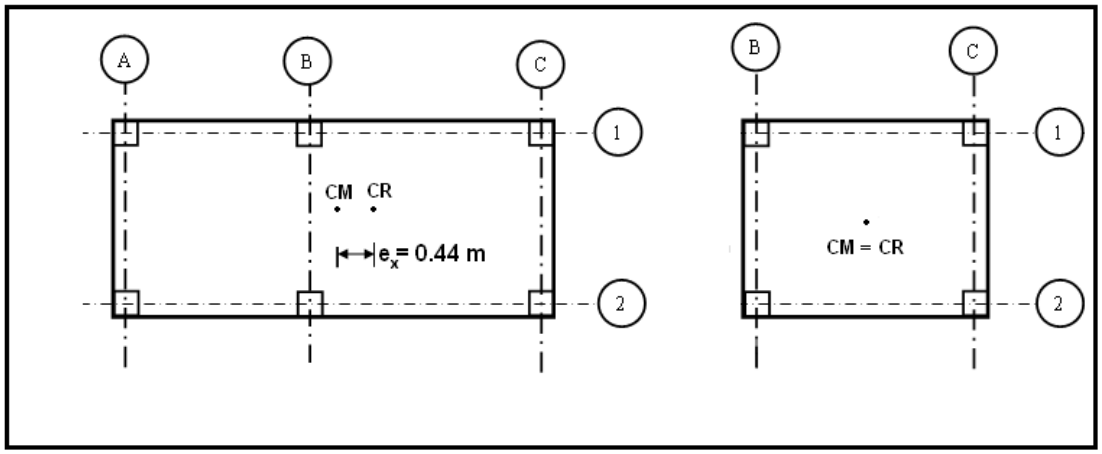



**Figura 17.8** Centro de masa y de rigidez de cada uno de los pisos en estructura analizada.

## 17.6 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCIÓN RIGIDEZ LATERAL

En el planteamiento teórico desarrollado en el apartado 17.5 se observa que el cálculo del centro de rigidez depende de la acción sísmica ya que es función de los vectores $\boldsymbol{Q_X}$ y $\boldsymbol{Q_Y}$. Esto ya es una limitante al cálculo pero la mayor controversia que existe es que al ingresar la estructura en el rango no lineal la rigidez de los elementos cambia. En el apartado 17.5 se ha calculado con inercias agrietadas de acuerdo al NEC-11, es decir se trabajó con $I_V = 0.5 * I_o$ y con $I_C = 0.8 * I_o$. Al trabajar con inercias agrietadas se tiene una mejor aproximación en el cálculo del centro de rigidez en cada uno de los pisos.

Lo importante es reconocer que ante un sismo muy severo es filosofía de diseño que la estructura ingrese en el rango no lineal, que sufra daño y consecuentemente la rigidez de cada uno de los elementos de la estructura va a ir cambiando de acuerdo al grado de daño que se va presentando. Este cambio de rigidez no se lo toma en cuenta en la forma presentada por este motivo

es que **actualmente en lugar de calcular el Centro de Rigidez se está calculando el Centro de Resistencia**, tema que no viene al caso presentarlo ya que el centro de resistencia depende de la cantidad de armadura que tiene la estructura es el punto en el cual se considera concentrada toda la resistencia de una estructura.

De tal manera que si es aproximado el cálculo del Centro de Rigidez conviene ver un procedimiento más fácil del cálculo de dicho centro, un procedimiento que sea más conceptual que se visualice mejor lo que se está realizando en lugar de presentar un procedimiento matricial como el realizado en el apartado anterior.

En este apartado se presenta el cálculo del Centro de Rigidez, en función de la matriz de rigidez lateral, para una estructura de un piso.

- **EJEMPLO 5**

En la figura 17.9, se tiene una estructura de un piso, con dos pórticos débiles que son el "1" y el "A", conformado por columnas y vigas de 20/20. A pesar de que la estructura es simétrica tiene problemas de torsión ya que los restantes pórticos tienen mayor rigidez. El módulo de elasticidad del material $E = 2400000\ T/m^2$; la altura del piso es de 3.0m. Se pide:

1.- Elabore un programa de computación utilizando la librería de programas de ***CEINCI-LAB*** para hallar la matriz de rigidez lateral de cada uno de los pórticos.

2.- Mediante equilibrio de fuerzas y momentos determinar las coordenadas del Centro de Rigidez.

3.- Determinar las excentricidades estáticas.

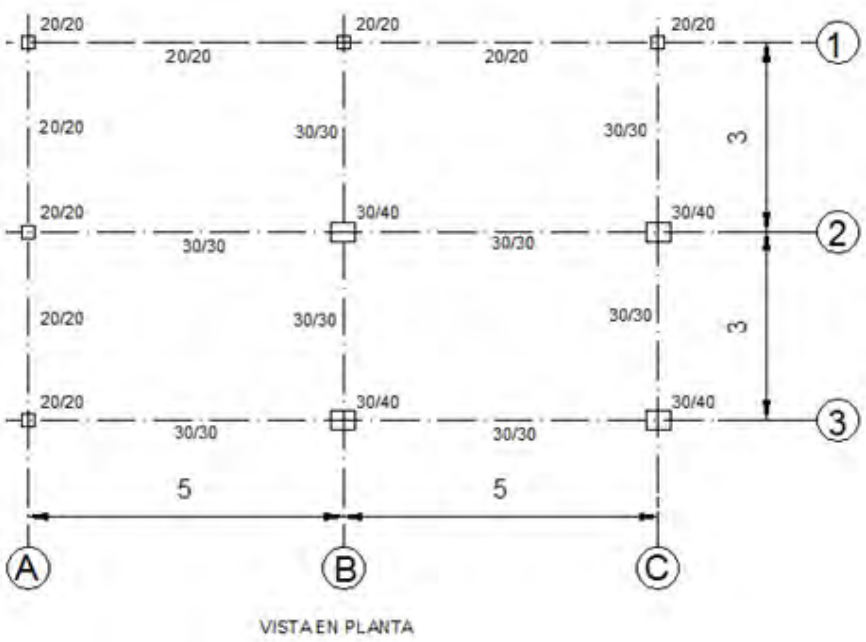



**Figura 17.9** Vista en Planta de una estructura de 1 piso con altura de piso de 3 m.

- **SOLUCIÓN**

A continuación se indica el Programa de computación desarrollado y en la Tabla 17.3 se presentan las rigideces laterales de los pórticos calculando con inercias gruesas.

1.- Programa de computación

```
%Programa Eje5_libro Capítulo 17
nod=6;np=1;nr=3;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);% Coordenadas Generalizadas
GEN=[1 1 4 2 1 1 1;4 4 5 1 1 1 1];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Vector de Nudo Inicial y nudo final
[VC]=vc(NI,NJ,CG); %Matriz con los vectores de colocación
NUDOS=[1 0.0 0.0 2 1 5.0 0.0;4 0.0 3.0 2 1 5.0 0.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Coordenadas de los nudos
%dibujo(X,Y,NI,NJ)
ELEM=[0.20 0.20;0.20 0.20;0.20 0.20;0.20 0.20;0.20 0.20];
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);nb=1;
E=2400000;[K1]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
[KL1]=kcondensada(K1,nb)
%Pórtico 2
ELEM2=[0.20 0.20;0.30 0.40;0.30 0.40;0.30 0.30;0.30 0.30];
[K2]=krigidez(ngl,ELEM2,L,seno,coseno,VC,E);
[KL2]=kcondensada(K2,nb)
%Portico A
NUDOSA=[1 0.0 0.0 2 1 3.0 0.0;4 0.0 3.0 2 1 3.0 0.0];
[XA,YA]=glinea_portico(NUDOSA);% Coordenadas de los nudos
[LA,senoA,cosenoA]=longitud (XA,YA,NI,NJ);
[KA]=krigidez(ngl,ELEM,LA,senoA,cosenoA,VC,E);
[KLA]=kcondensada(KA,nb)
%Portico B
ELEMB=[0.40 0.30;0.40 0.30;0.20 0.20;0.30 0.30;0.30 0.30];
[KB]=krigidez(ngl,ELEMB,LA,senoA,cosenoA,VC,E);
[KLB]=kcondensada(KB,nb)
```

**Tabla 17.3** Rigidez lateral de los pórticos

| **Pórtico** | 1 | 2 | 3 | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_L\ (\frac{T}{m})$ | 270.60 | 1788.20 | 1788.20 | 306.14 | 1424.6 | 1424.6 |

2.- Coordenadas del Centro de Rigidez

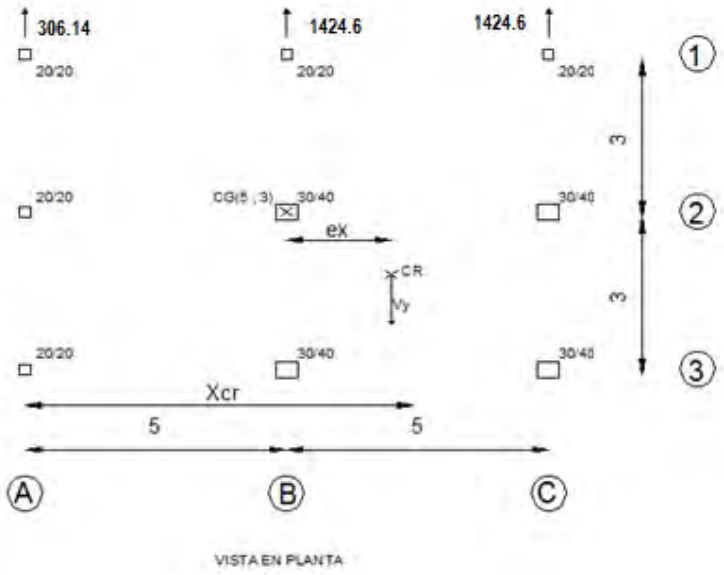



**Figura 17.10** Calculo de $X_{cr}$

- Equilibrio de fuerzas

$$V_y = 306.14 + 1424.6 + 1424.6 = 3155.3\ T/m$$

- Equilibrio de Momentos

$$1424.6 * 5 + 1424.6 * 10 = V_y * X_{cr} \qquad \rightarrow X_{cr} = 6.77\ m$$

A continuación se repite el mismo procedimiento de cálculo pero en el sentido X.

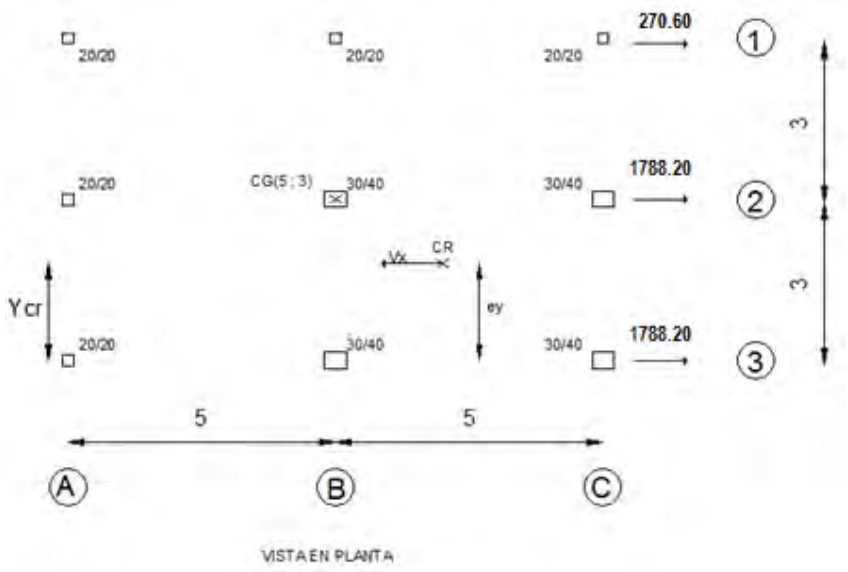



**Figura 17.11** Cálculo de $Y_{cr}$

- **Equilibrio de Fuerzas**

$$V_x = 270.6 + 2 * 1788.20 = 3847\ T/m$$

- **Equilibrio de momentos**

$$270.6 * 6 + 1788.2 * 3 = V_x * Y_{cr} \qquad \rightarrow Y_{cr} = 1.83\ m.$$

Los momentos se obtuvieron con respecto a la intersección de los ejes A-3. Por lo tanto, con respecto a este punto se obtuvieron las coordenadas del Centro de Rigidez.

$$\boldsymbol{X_{cr} = 6.77\ m} \qquad \boldsymbol{Y_{cr} = 1.83\ m}$$

En la figura 17.12 se indica el Centro de Masa CM, que coincide con el Centro de Gravedad cuando las masas están distribuidas en forma simétrica. Además se muestra la ubicación del Centro de Rigidez CR.

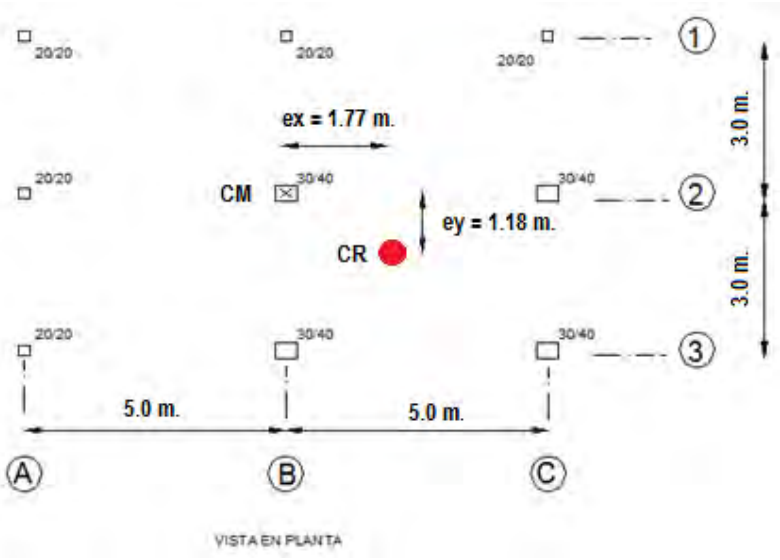



**Figura 17.12** Ubicación del Centro de Masas y Centro de Rigidez.

**3.- Excentricidades estáticas**

$$e_x = 6.77 - 5 = 1.77\ m.$$

$$e_y = 3 - 1.82 = 1.18\ m.$$

Es fundamental determinar el Centro de Rigidez en cada planta de una estructura, utilizando para el efecto la rigidez de piso; es un procedimiento aproximado para varios pisos pero exacto para 1 piso.

La estructura que se ha analizado tiene problemas de torsión y en caso de estar construida se debe pesar en encamisar las columnas de los pórticos “1” y “A” para aumentar su rigidez y de esa forma el CR se va a aproximar al Centro de Masas, CM.

- **EJEMPLO 6**

Presentar un programa de computación para determinar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura del Ejemplo 5, en base a los resultados obtenidos determinar las excentricidades estáticas.

- **SOLUCIÓN**

```
%Programa Eje6_libro Capítulo 17
KL1=270.6;KL2=1788.20;KL3=KL2;KLA=306.14;KLB=1424.6;KLC=KLB;
r1=-3;r2=0;r3=3;rA=-5;rB=0;rC=5;
Kxx=KL1+KL2+KL3;Kyy=KLA+KLB+KLC;Kxt=KL1*r1+KL2*r2+KL3*r3;
Kyt=KLA*rA+KLB*rB+KLC*rC;
Ktt=KL1*r1^2+KL2*r2^2+KL3*r3^2+KLA*rA^2+KLB*rB^2+KLC*rC^2;
KE=[Kxx 0 Kxt;0 Kyy Kyt; Kxt  Kyt   Ktt]
ey=Kxt/Kxx
ex=Kyt/Kyy
```

$$\boldsymbol{K}_E = \begin{bmatrix} 3847 & 0 & 4553 \\ 0 & 3155 & 5592 \\ 4553 & 5592 & 61798 \end{bmatrix}$$

Las excentricidades que reporta el programa, son las ya anotadas en el Ejemplo anterior.

## 17.7 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCIÓN DE RIGIDEZ "t"

En capítulos anteriores se vio que la rigidez t es la fuerza necesaria para que un elemento se desplace horizontalmente la unidad y todas las demás coordenadas nulas. Está rigidez al no considerar el efecto de corte es:

$$t = \frac{12EI}{H^3} \tag{17.10}$$

Se calcula el Centro de Rigidez, en función de la rigidez "t" en forma similar al desarrollado en el apartado anterior. Pero ahora se calcula la rigidez solo en las columnas, de tal forma que es aproximado.

- **EJEMPLO 7**

Encontrar el centro de rigidez en función de la rigidez "t" de la estructura irregular en elevación de 2 pisos del Ejemplo 2 y se presenta en la figura 17.13. El valor de $E = 2173706.513 \frac{T}{m^2}$.

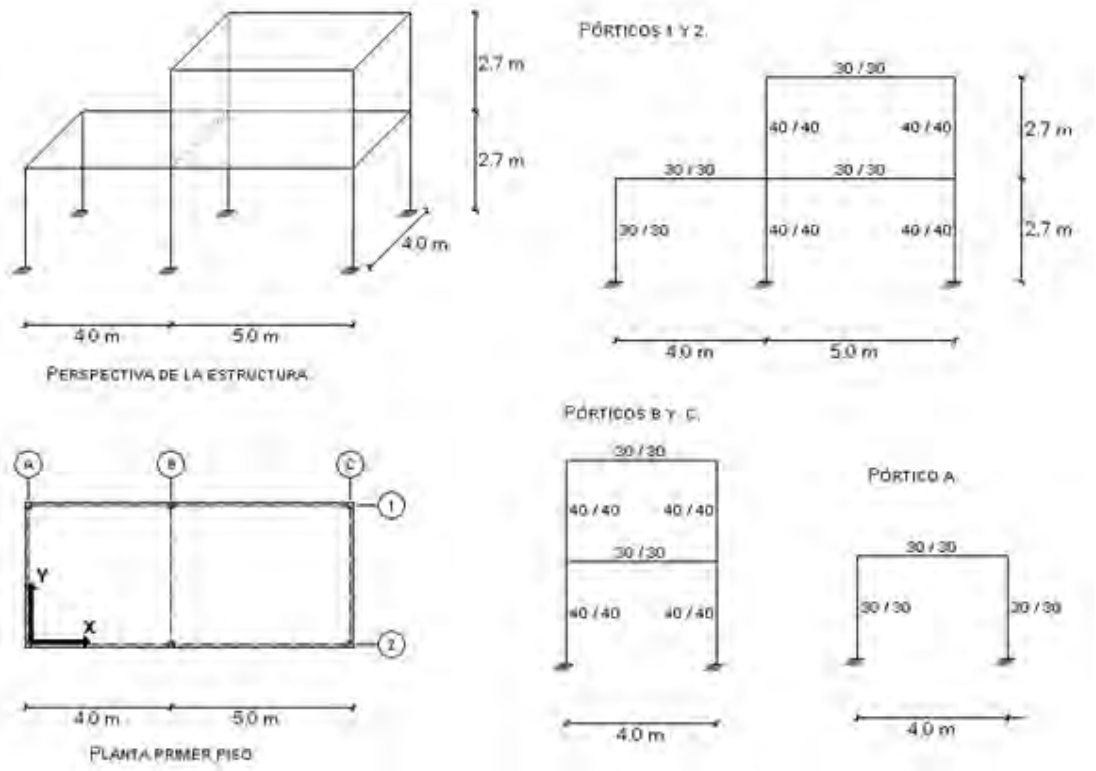



**Figura 17.13** Estructura irregular de 2 pisos.

- **SOLUCIÓN**

Da igual trabajar con inercias gruesas o con inercias agrietadas ya que con éstas últimas todas las columnas quedan multiplicadas por 0.8 que es el factor que considera el NEC-11. En el

ejemplo se trabaja con inercias agrietadas. El procedimiento de cálculo está basado en un principio básico de las estructuras y que es el equilibrio de fuerzas y momentos.

Al igual que en el ejemplo anterior el análisis se realiza en dos sentidos X e Y pero para el presente ejemplo no existe excentricidad en sentido X, razón por la que no se presenta el cálculo en dicho sentido solo existe excentricidad en sentido Y.

Las columnas del pórtico A son de 30 x 30 y todas las restantes columnas en el primer piso y en el segundo piso son de 40 x 40. En la figura 17.14 se indican la rigidez t de cada una de las columnas.

- Análisis en sentido Y

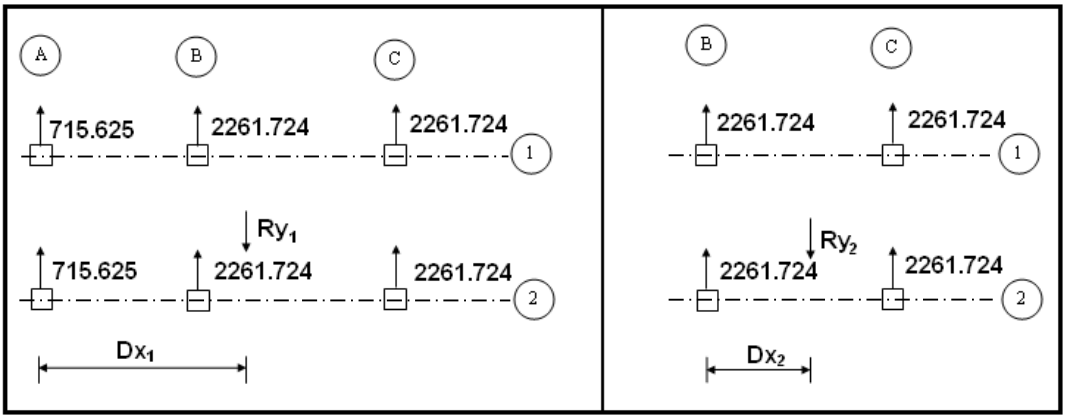



**Figura 17.14** Rigidez "t" en las columnas para el análisis en sentido Y.

El análisis se realiza por separado en cada uno de los pisos. Sea $R_{Y2}$ la resultante de las fuerzas en sentido Y en el segundo piso. Por equilibrio de fuerzas se tiene:

$$R_{Y2} = 2261.724 * 4 = 9046.896\,T$$

Por otra parte del equilibrio de momentos con respecto al eje B2 se tiene:

$$2261.724 * 4 + 2261.724 * 4 = R_{Y2} * D_{X2} \qquad \Rightarrow D_{X2} = 2.5\,m.$$

$$e_{X2} = 2.5 - 2.5 = 0.0\,m.$$

Para el primer piso el equilibrio de fuerzas en sentido Y, el de momentos con respecto al eje A2, reporta:

$$R_{Y1} = 2261.724 * 4 + 715.625 * 2 = 10478.146\,T.$$

$$2261.724 * 4 * 2 + 2261.724 * 9 * 2 = 10478.146 * D_{X1} \qquad \Rightarrow D_{X1} = 5.612\,m.$$

$$e_{X1} = 5.612 - 4.5 = 1.11\,m.$$

Nótese que la distancia $D_{X1}$ es medida con respecto al punto A2 y que la distancia $D_{X2}$ es medida con relación al punto B2. Por ese motivo para calcular las excentricidades se restan las distancias correspondientes al Centro de Masa. Por otra parte se aprecia que existe una diferencia considerable en la excentricidad del primer piso en relación a la que se obtuvo del planteamiento matricial ya que el cálculo en función de la matriz t es aproximado, más exactitud se tiene si se calcula en función de la rigidez de piso de cada uno de los pórticos como se ilustra a continuación.

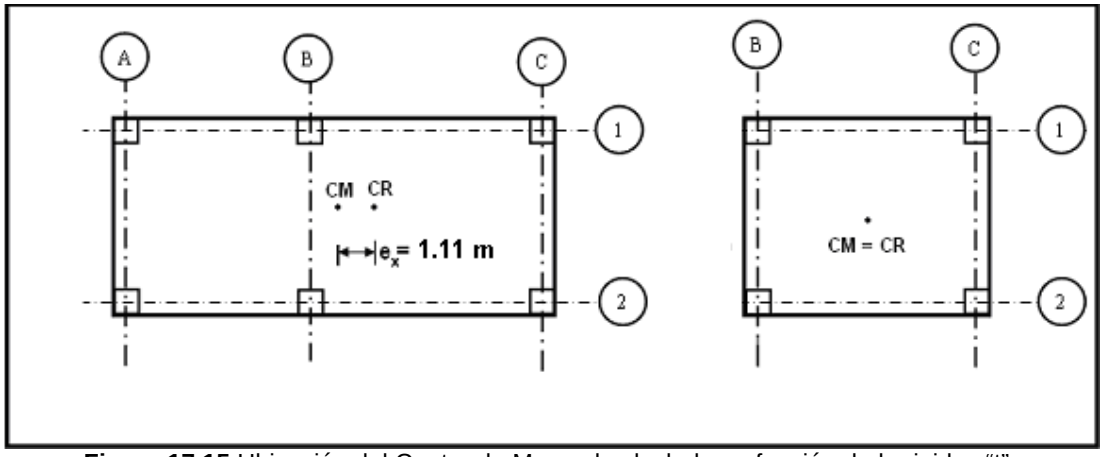



**Figura 17.15** Ubicación del Centro de Masa al calcularlo en función de la rigidez "t".

## 17.8 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCIÓN DE RIGIDEZ DE PISO

Se define la rigidez de piso $K_i$ como la relación entre el cortante de piso $V_i$ dividido para el desplazamiento relativo de piso.

$$K_i = \frac{V_i}{q_i - q_{i-1}} \tag{17.11}$$

En este caso tanto el cortante de piso como los desplazamientos laterales de piso se obtienen en función de una acción sísmica. Existen fórmulas aproximadas para determinar la rigidez de piso sin tener en cuenta la acción sísmica, es más se puede hallar a partir de la matriz de rigidez lateral.

Una vez que se tiene la rigidez de piso de cada uno de los pórticos se obtiene el centro de rigidez en forma similar a la realizada en los dos ejercicios anteriores, es decir se realiza primero el equilibrio de fuerzas y después el equilibrio de momentos en cada X y en Y.

- **EJEMPLO 8**

Encontrar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejemplo 2 en función de la rigidez de piso de cada uno de los pórticos, que se indican en la figura 17.16.

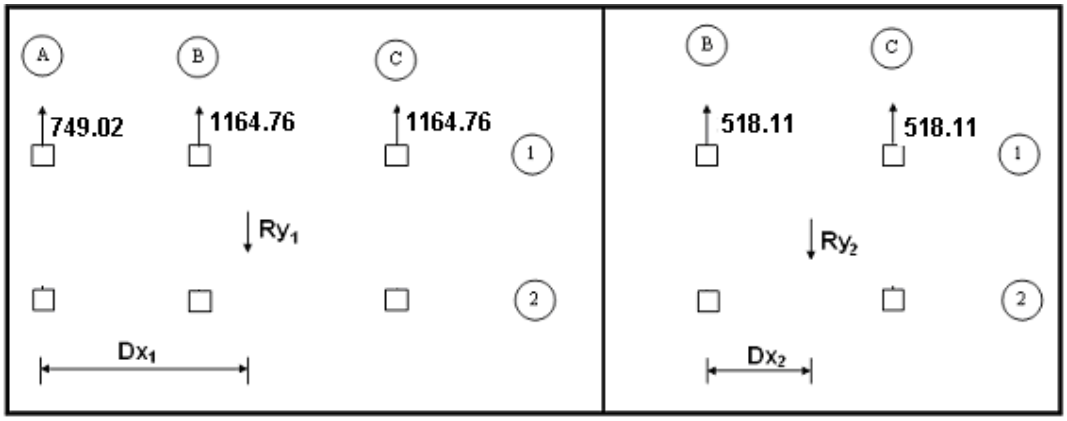



**Figura 17.16** Rigidez de piso de cada uno de los pórticos. Tomado de Roberto Aguiar Noury (2002)

- **SOLUCIÓN**

En sentido X no hay excentricidad pero si lo hay en sentido Y.

Para el segundo piso se tiene:

$$R_{Y2} = 518.11 + 518.11 = 1036.22$$

$$D_{X2} = \frac{518.11 * 5}{1036.22} = 2.5\ m.$$
$$e_{X2} = 2.5 - 2.5 = 0.0\ m.$$

Para el primer piso se tiene:

$$R_{Y1} = 1164.76 + 1164.76 + 749.02 = 3078.54$$
$$D_{X1} = \frac{1164.76 * 9 + 1164.76 * 4}{3078.54} = 4.92\ m.$$
$$e_{X1} = 4.92 - 4.5 = 0.42\ m.$$

En la figura 17.17 se indica la ubicación del centro de rigidez que se obtiene en función de la rigidez de piso. Los resultados obtenidos son muy similares a los que se encontraron al aplicar el método matricial y cuyos resultados se indican en la figura 17.7

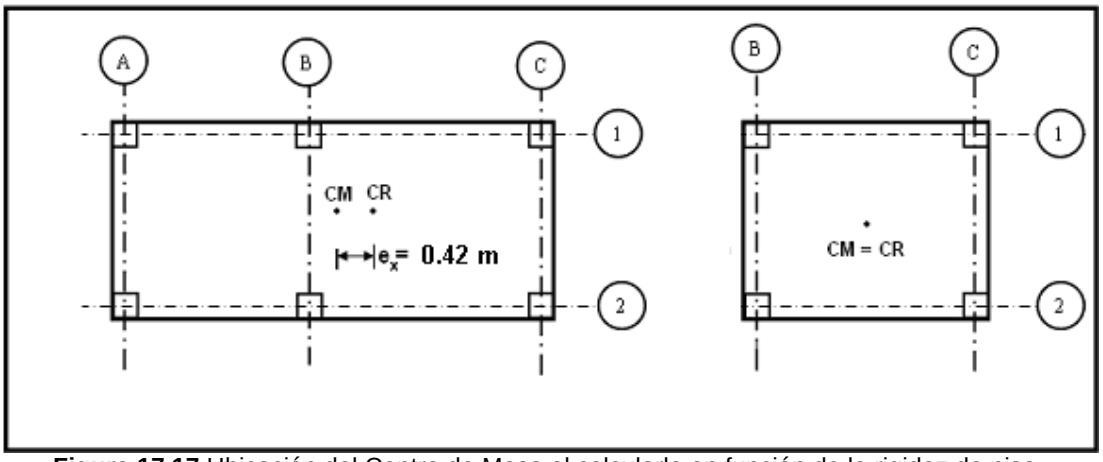



**Figura 17.17** Ubicación del Centro de Masa al calcularlo en función de la rigidez de piso.

## 17.9 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- **EJEMPLO 9**

Determinar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura irregular en elevación mostrada en la figura 17.18. Las columnas son de 40/40 cm., y las vigas de 30/30 cm. El módulo de elasticidad del material es $E = 2400000\ T/m^2$. Las luces son de 5 m., y la altura del entrepiso de 3 m.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 17.19 se presentan las coordenadas de piso, en el centro de masas. La forma más fácil de resolver es haciendo regular la estructura con elementos ficticios de sección transversal cero.

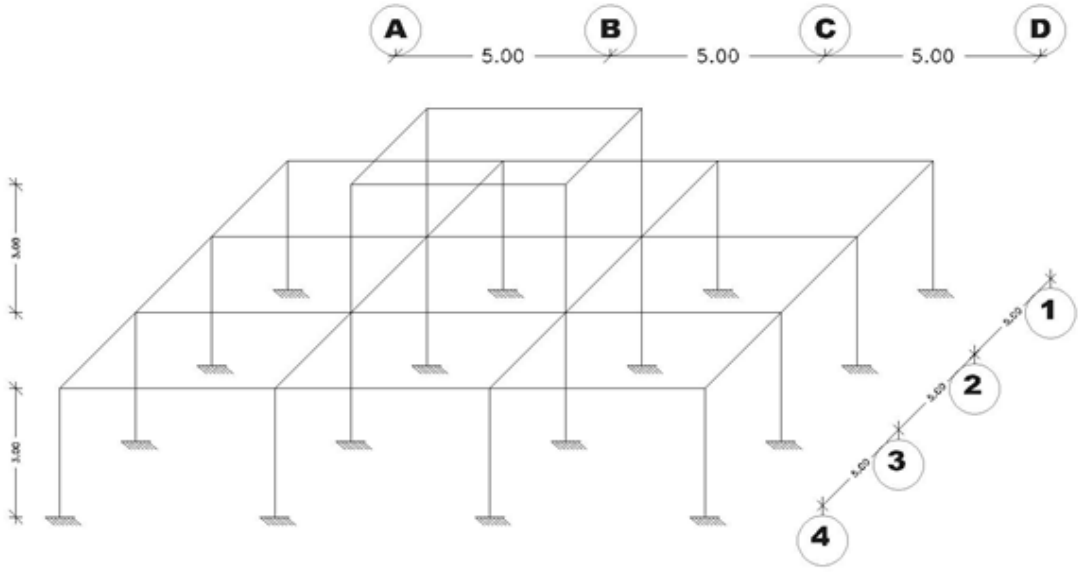



**Figura 17.18** Estructura irregular en elevación de dos pisos.

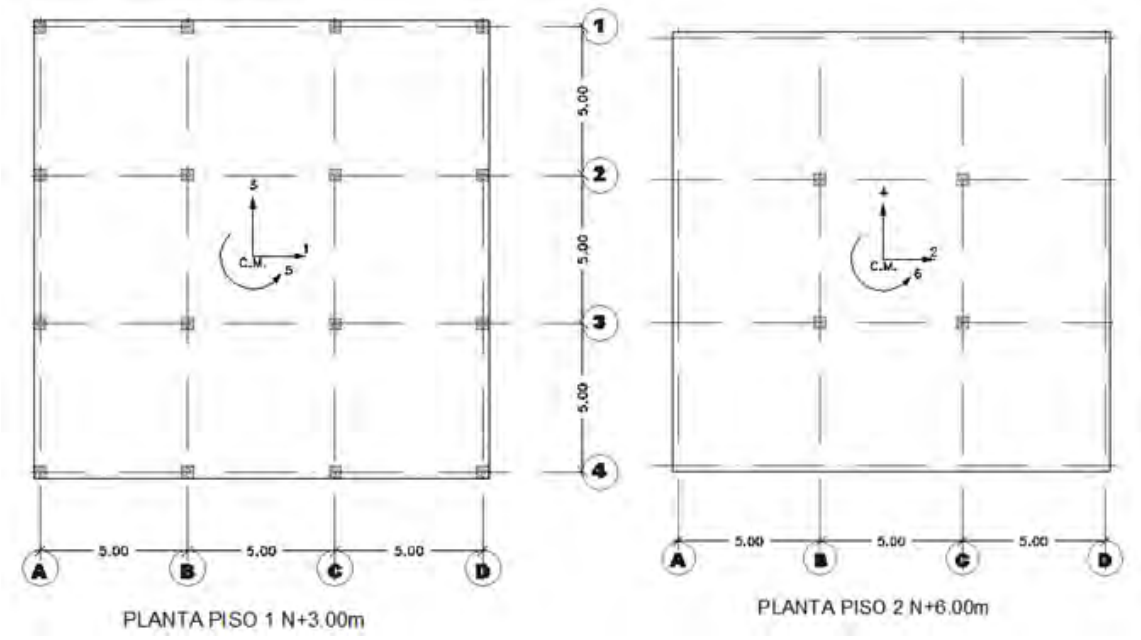



**Figura17.19** Coordenadas de piso

En la parte superior de la figura 17.20 se presenta un pórtico exterior; nótese que en el segundo piso se han colocado columnas y vigas de dimensiones muy pequeñas por que no existen. En la parte inferior se muestra un pórtico central que solo tiene columnas y vigas en el tramo central del segundo piso, en los extremos se ha puesto elementos ficticios.

Tanto para los pórticos exteriores como para los interiores, la numeración de los nudos y elementos es la misma y es la presentada en la figura 17.21.

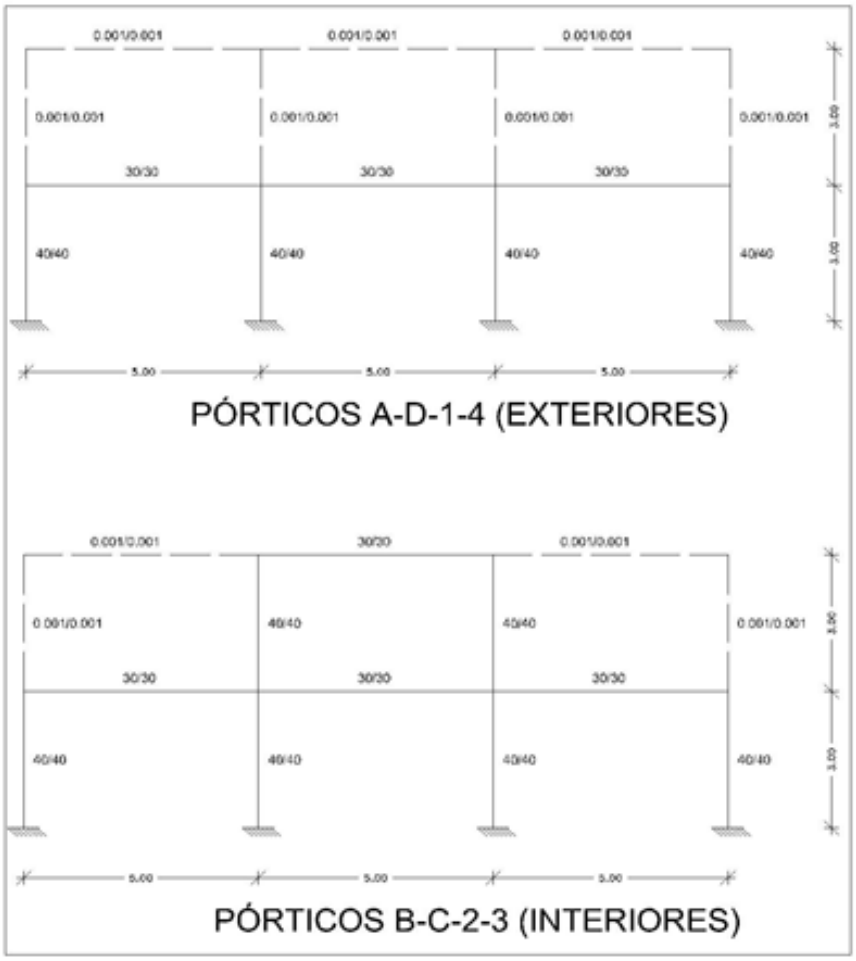



**Figura 17.20** Geometría de los Pórticos de la Estructura.

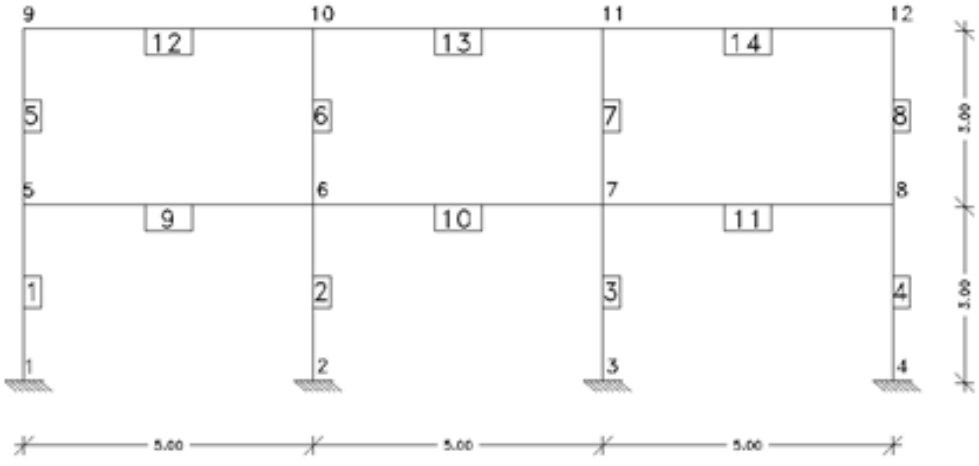



**Figura 17.21** Numeración de nudos y elementos.

```
%Programa Eje9_libro Capítulo 17
nod=12;np=2;nr=4;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);
GEN=[1 1 5 3 1 1 1;5 5 9 3 1 1 1;9 5 6 2 1 1 1;12 9 10 2 1 1 1];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
NUDOS=[1 0.0 0.0 3 1 5 0;5 0.0 3.0 3 1 5 0;9 0.0 6.0 3 1 5 0.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
dibujo(X,Y,NI,NJ)
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
% Porticos Exteriores
SECCION=[1 0.4 0.4 3 1;5 0.0001 0.0001 3 1;9 0.30 0.30 2 1;
    12 0.0001 0.0001 2 1];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
E=2400000;[KE]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
nb=2;[KLE]=kcondensada(KE,nb)% Matriz de rigidez lateral
% Porticos Interiores
SECCI=[1 0.4 0.4 3 1;5 0.0001 0.0001 1 3;6 0.4 0.4 1 1;
    9 0.30 0.30 2 1; 12 0.0001 0.0001 1 2; 13 0.30 0.30 0 0];
[ELE]=gelem_portico(SECCI);
[KI]=krigidez(ngl,ELE,L,seno,coseno,VC,E);
[KLI]=kcondensada(KI,nb) % Matriz de rigidez lateral
% Matriz de rigidez en coordenadas de piso
rA=[-7.5 0;0 0];r1=rA;rB=[-2.5 0;0 -2.5];r2=rB;rC=[2.5 0;0 2.5];r3=rC;
rD=[7.5 0;0 0];r4=rD;
kxx=(KLE+KLI)*2;kyy=kxx;ktt=(KLE*r1^2+KLI*r2^2)*4;
KE=[kxx zeros(2,2)  zeros(2,2);zeros(2,2)  kyy zeros(2,2);
    zeros(2,2) zeros(2,2) ktt]
```

Se denomina $\boldsymbol{K}_{LE}$ a la matriz de rigidez de un pórtico exterior; $\boldsymbol{K}_{LI}$ a la matriz de rigidez de un pórtico interior y $\boldsymbol{K}_{E}$ a la matriz de rigidez en coordenadas de piso.

$$\boldsymbol{K}_{LE} = \begin{bmatrix} 4142.7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}_{LI} = \begin{bmatrix} 7692 & -2097.3 \\ -2097.3 & 1295.9 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{E} = 10^{6} \begin{bmatrix} 0.0237 & -0.0042 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0042 & 0.0026 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0237 & -0.0042 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0042 & 0.0026 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1244 & -0.0524 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0524 & 0.0324 \end{bmatrix}$$

El programa desarrollado sirve para entender la forma como se obtuvo en primer lugar las matrices de rigidez lateral y en segundo lugar la matriz de rigidez en coordenadas de piso. La estructura es irregular en elevación pero a la vez es simétrica.

- **EJEMPLO 10**

A la izquierda de la figura 17.22 se presenta una estructura irregular de 2 pisos que se encuentra sobre aisladores sísmicos elastoméricos que tiene una rigidez horizontal $k_{ef} = 60\,T/m$ y una rigidez vertical $k_v = 30000\,T/m$. En total se han colocado 8 aisladores de 15 cm., de alto. La estructura tiene columnas de 30/40 cm. y vigas de 30/30 cm. La dimensión mayor de las columnas es en la dirección de los ejes “A”, “B”. El módulo de elasticidad del hormigón es $E = 2400000\frac{T}{m^2}$. Se pide:

1. Presentar rápidamente el marco teórico para considerar al aislador un elemento corto.

2. Elaborar un programa de computación, utilizando la librería de ***CEINCI-LAB*** para hallar la matriz de rigidez lateral de los pórticos y de la estructura en coordenadas de piso.

3. Presentar las matrices indicadas al final del párrafo anterior.

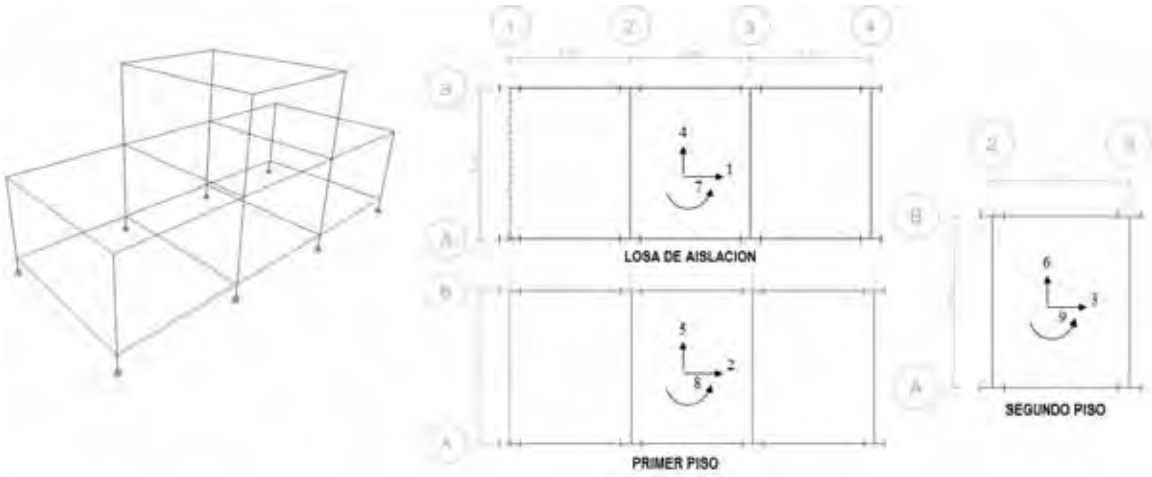



**Figura 17.22** Estructura Irregular sobre aisladores sísmicos.

- **SOLUCIÓN**

**1. Marco Teórico**

A la izquierda de la figura 17.23 se observa un aislador sísmico colocado entre dos vigas; a la derecha se muestra la viga superior e inferior de hormigón armado y el aislador. Se ha denominado $l_i, l_j$ a las longitudes desde el centro de gravedad del aislador hasta el punto central de las vigas inferior y superior, respectivamente. El aislador va a ser modelado como un elemento corto de altura $l_i + l_j$

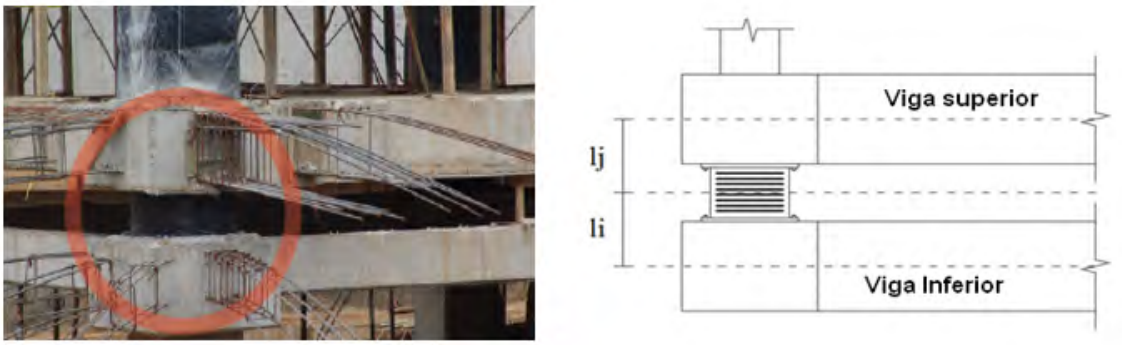



**Figura 17.23** Estructura con aisladores y modelo de análisis.

A la izquierda de la figura 17.24, se presenta las coordenadas locales para aislador modelado como un elemento corto, la matriz de rigidez en coordenadas locales $\boldsymbol{k}_0$ es.

$$\boldsymbol{k}_0 = \begin{bmatrix} k_{ef} & 0 \\ 0 & k_v \end{bmatrix} \tag{17.12}$$

Donde $k_{ef}$ es la rigidez horizontal del aislador (rigidez secante); $k_v$ es la rigidez vertical del aislador. En el libro: "Microzonificación Sísmica de Quito", Aguiar (2013) se presenta la forma como se obtiene estas rigideces para un aislador elastomérico con núcleo de plomo.

A la derecha de la figura 17.24 se muestra el elemento corto en coordenadas globales, se tiene 6 grados de libertad, 3 en el nudo inicial y 3 en el nudo final. La matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales $\boldsymbol{k}_3$ se obtiene con la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{T}^t \, \boldsymbol{k}_0 \, \boldsymbol{T} \tag{17.13}$$

Donde $\boldsymbol{T}$ es la matriz de paso de coordenadas locales a globales.

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & l_i & 1 & 0 & l_j \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

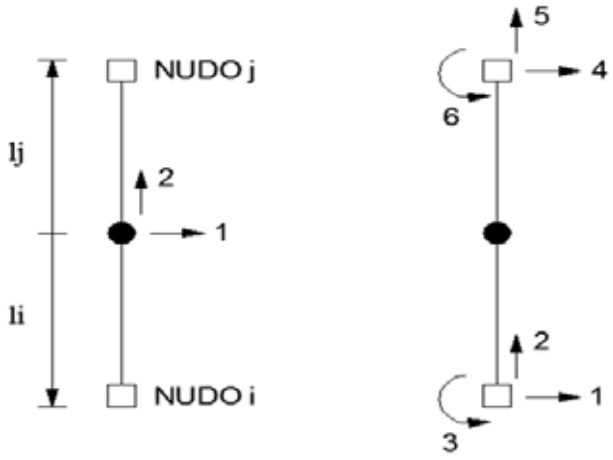



**Figura 17.24** Coordenadas locales y globales de un elemento aislador.

Una vez que se tiene la matriz de rigidez en coordenadas globales $\boldsymbol{k}_3$ se realiza el ensamblaje directo para hallar la contribución del elemento aislador a la matriz de rigidez de la estructura, utilizando el respectivo vector de colocación. El programa ***kaislador*** encuentra la contribución de todos los aisladores a la matriz de rigidez de la estructura. La entrada de datos de este programa es la siguiente.

- ***[K]=kaisladores (ngl,nais,Ko,T,VCAIS)***

ngl Número de grados de libertad de la estructura.
nais Número de aisladores.
$\boldsymbol{K}_0$ Matriz que contiene en la diagonal la matriz de rigidez de un aislador en coordenadas locales.
T Es la matriz de paso de locales a globales, en algunos libros de aislación la denominan $L_0$
VCAIS Matriz que contiene a los vectores de colocación de los elementos aisladores.

Cuando estaba escribiendo este capítulo, se registró un sismo de 5.1, en el norte de Quito, asociado a un segmento de las fallas ciegas de Quito, que hasta el momento ha dejado 3 muertos. Los sismos asociados a estas fallas son de tipo impulsivo, es decir son sismos cortos, que liberan una gran cantidad de energía en el campo cercano y son muy destructivos.

La capital del Ecuador se encuentra sobre fallas geológicas, en estas condiciones es importante que se diseñen estructuras con sistemas de protección sísmica como disipadores de energía o aisladores sísmicos. Al 2014 hay muy pocas estructuras con estos dispositivos de control pasivo pero esto tiene que cambiar por este motivo se realizó este ejemplo, como una introducción en esta temática.

## 2. Programa en *CEINCI-LAB*

En la figura 17.25 se presenta la numeración de nudos y elementos del Pórtico 1 que es de 2 pisos, incluyendo el sistema de aislación, en líneas entrecortadas se ha colocado los elementos ficticios necesarios para utilizar el programa ***cg_sismo_gaus***. También se indica del Pórtico 2 y del

Pórtico A. Nótese que en todos los casos primero se ha numerado a los elementos de hormigón armado y al final los elementos aisladores.

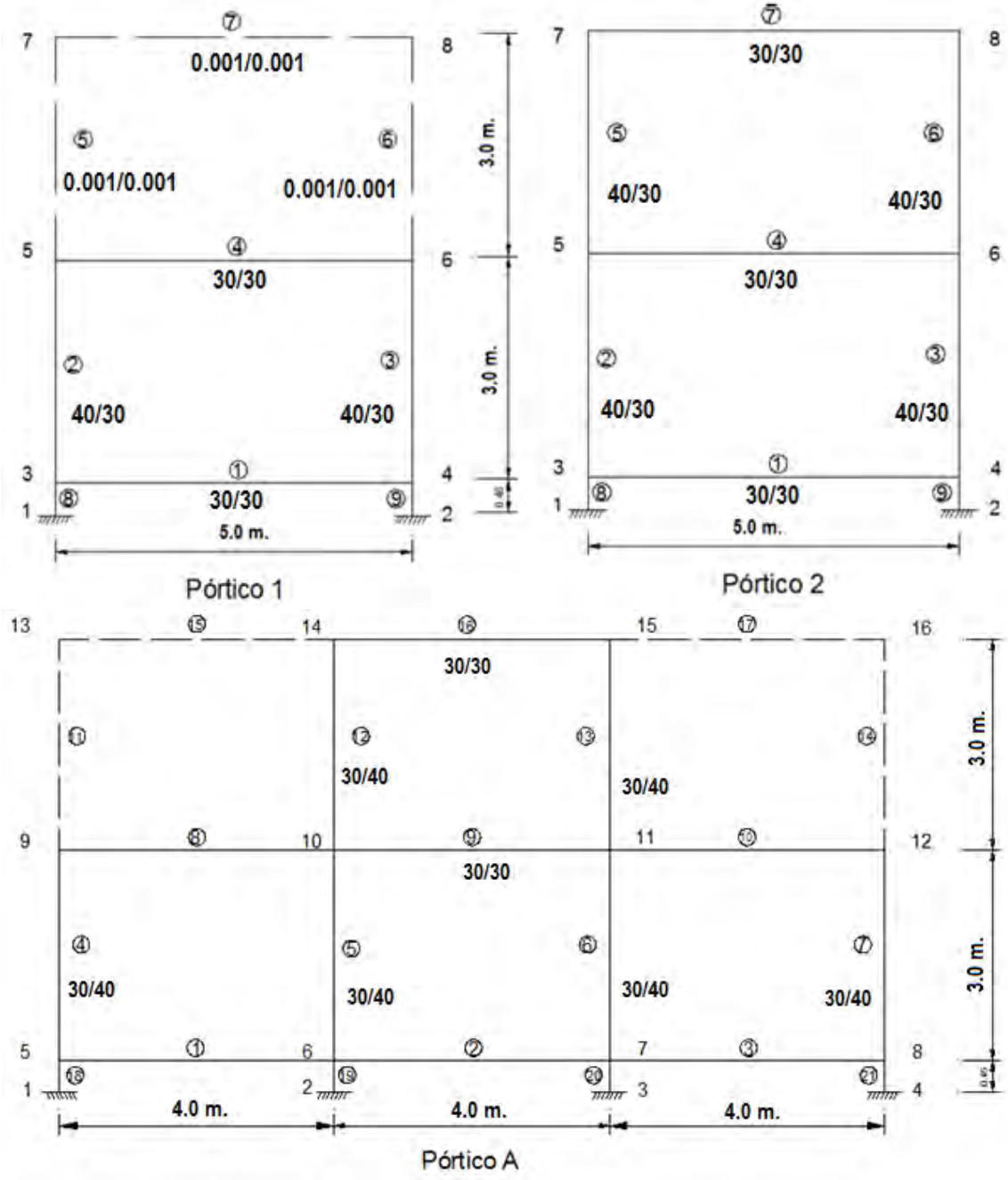



**Figura 17.25** Numeración de nudos y elementos.

La altura del elemento aislador es 15 cm de alto más 30 cm., que es la altura de la viga de aislación. Se supone que en la base se tiene una viga de igual dimensión que la del sistema de aislación. Es hipótesis de cálculo.

En la figura 17.25 es importante tener en cuenta la base y la altura de la sección transversal de las columnas. A continuación se presenta el programa desarrollado, como se sabe que no hay torsión no se calcula $k_{\theta x}, k_{\theta y}$.

```
%Programa Ejel0_libro Capitulo 17
%Pórtico 1
nod=8;np=3;nr=2;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);
GEN=[1 3 4 2 3 2 2;2 3 5 1 1 1 1;5 5 7 1 1 1 1;8 1 3 1 1 1 1];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
NUDOS=[1 0.0 0.0 1 1 5 0;3 0 0.45 1 1 5 0;5 0 3.45 1 1 5 0;
    7 0 6.45 1 1 5 0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS); % dibujo(X,Y,NI,NJ)
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
SECCION=[1 0.3 0.3 1 3;2 0.4 0.3 1 1;5 0.0001 0.0001 4 1];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
E=2400000;[KH1]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
kef=60;kv=30000;ko=[kef 0;0 kv]; Ko=[ko zeros(2,2); zeros(2,2) ko];
li=0.225;lj=0.225;Lo=[-1 0 li 1 0 lj; 0 -1 0 0 1 0];
VCAIS=VC(8:9,:);nais=2;
[KAIS1]=kaisladores(ngl,nais,Ko,Lo,VCAIS);
KT1=KAIS1+KH1;
nb=3;[KL1]=kcondensada(KT1,nb)% Matriz de rigidez lateral pórtico 1
% Portico 2
SECCION2=[1 0.3 0.3 2 3;2 0.4 0.3 1 1;5 0.4 0.3 1 1;
    8 0.0001 0.0001 1 1];
[ELEM2]=gelem_portico(SECCION2);
[KH2]=krigidez(ngl,ELEM2,L,seno,coseno,VC,E);
KT2=KAIS1+KH2;
[KL2]=kcondensada(KT2,nb) % Matriz de rigidez lateral pórtico 2
% Portico A
nod=16;nr=4;[CGA,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);
GENA=[1 5 6 2 1 1 1;4 5 9 3 1 1 1;8 9 10 2 1 1 1;11 9 13 3 1 1 1;
    15 13 14 2 1 1 1;18 1 5 3 1 1 1];
[NIA,NJA]=gn_portico(GENA);
NUDOSA=[1 0.0 0.0 3 1 4.0 0.0;5 0.0 0.45 3 1 4.0 0.0;9 0.0 3.45 3 1 4.0 0;
    13 0.0 6.45 3 1 4.0 0.0];
[XA,YA]=glinea_portico(NUDOSA); % dibujo(XA,YA,NIA,NJA)
[VCA]=vc(NIA,NJA,CGA);
SECCIONA=[1 0.3 0.3 2 1;4 0.3 0.4 3 1; 8 0.3 0.3 2 1;11 0.0001 0.0001 1 3;
    12 0.3 0.4 1 1;15 0.0001 0.0001 1 2;16 0.3 0.3 0 0;18 0.0001 0.0001 3 1];
[ELEMA]=gelem_portico(SECCIONA);
[LA,senoA,cosenoA]=longitud (XA,YA,NIA,NJA);
[KHA]=krigidez(ngl,ELEMA,LA,senoA,cosenoA,VCA,E);
Ko=[ko zeros(2,2) zeros(2,2) zeros(2,2);
    zeros(2,2) ko zeros(2,2) zeros(2,2);
    zeros(2,2) zeros(2,2)  ko zeros(2,2);
    zeros(2,2) zeros(2,2)  zeros(2,2)  ko];
VCAISA=VCA(18:21,:);nais=4;
[KAISA]=kaisladores(ngl,nais,Ko,Lo,VCAISA);
KTA=KHA+KAISA;[KLA]=kcondensada(KTA,nb);
% Matriz de rigidez en coordenadas de piso
r1=[-6 0 0;0 -6 0;0 0 0];r2=[-2 0 0;0 -2 0; 0 0 -2];r3=-1*r2
r4=-1*r1;rB=[-2.5 0 0;0 -2.5 0;0 0 -2.5];rA=-1*rB
kxx=KLA+KLA;kyy=(KL1+KL2)*2;ktt=(KLA*rA^2+KL1*r1^2+KL2*r2^2)*2;
KE=[kxx zeros(3,3)  zeros(3,3);zeros(3,3)  kyy zeros(3,3);
    zeros(3,3) zeros(3,3) ktt]
```

**3. Resultados**

$$K_L^{(1)} = \begin{bmatrix} 709.93 & -583.81 & 0 \\ -583.81 & 577.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_L^{(2)} = \begin{bmatrix} 877.2 & -1048 & 297.6 \\ -1048 & 2077.2 & -1037.2 \\ 297.6 & -1037.2 & 740.7 \end{bmatrix}$$

$$K_L^{(A)} = \begin{bmatrix} 2534.4 & -2709.8 & 427.9 \\ -2709.8 & 4293.1 & -1596.6 \\ 427.9 & -1596.6 & 1169.4 \end{bmatrix}$$

$$KE = 10^5 * \begin{bmatrix} 0,0507 & -0,0542 & 0,0086 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0542 & 0,0859 & -0,0319 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0086 & -0,0319 & 0,0234 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0317 & -0,0326 & 0,0060 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0326 & 0,0531 & -0,0207 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0060 & -0,0207 & 0,0148 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8981 & -0,8429 & 0,0773 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8429 & 1,1187 & -0,2825 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0773 & -0,2825 & 0,2054 \end{bmatrix}$$

## 17.10 ESTRUCTURACIÓN SÍSMICA

Para que una estructura sea resistente a la torsión es necesario que la sub matriz $K_{\theta\theta}$ sea lo más grande posible y para que ello se cumpla es conveniente que en una edificación se coloquen en el perímetro las líneas más resistentes para que su matriz de rigidez lateral $K_L$ sea lo más grande posible ya que $K_{\theta\theta}$ es igual a la sumatoria de $K_L$ por el vector $(r)^2$, cuando los centros de masas son colineales o $K_{\theta\theta}$ es igual a la sumatoria de $r^t K_L r$.

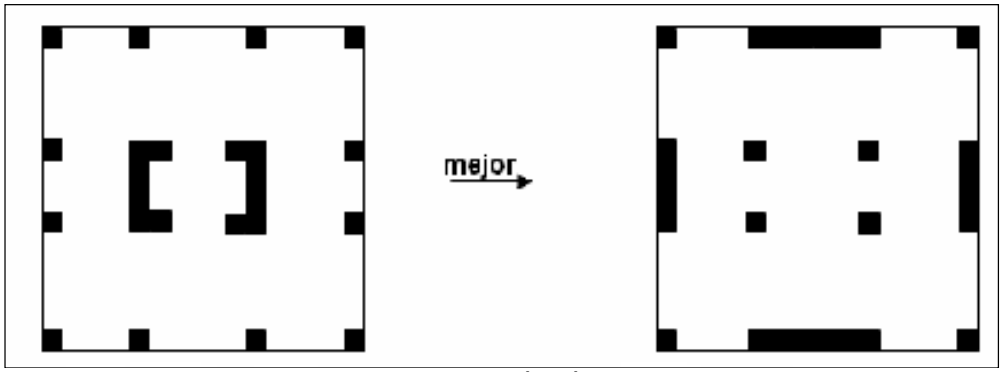



**Figura 17.26** Mala y Buena Estructuración Sísmica desde el punto de vista torsional.

En la figura 17.26 se tienen dos estructuraciones para un mismo edificio en el de la izquierda los muros de corte se hallan en el centro del edificio en consecuencia las líneas resistentes de los pórticos centrales tendrán mayor rigidez lateral. En cambio en el edificio de la derecha los muros de corte se han colocado en los pórticos perimetrales luego son éstos pórticos los que tienen mayor rigidez lateral.

Por otra parte para los dos edificios el Centro de Masa se encuentra en su centro de gravedad. Por lo tanto la sub matriz $K_{\theta\theta}$ será mayor en el edificio de la derecha de la figura 17.26 ya que los pórticos exteriores tienen mayor rigidez lateral y $K_{\theta\theta}$ es igual al producto de $K_L$ por la distancia al cuadrado, por $r^2$.

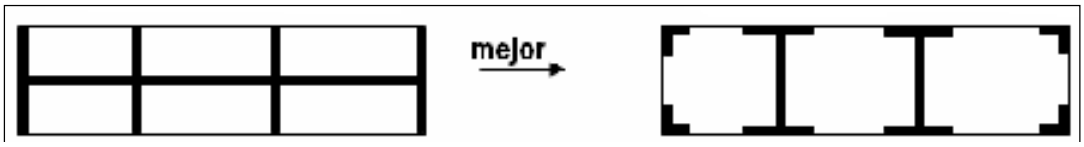



**Figura 17.27** Mala y Buena estructuración desde el punto de vista torsional.

En la figura 17.27 se presentan dos casos de distribución de los elementos estructurales con problema similar al que se presentó en la figura 17.26. En la figura de la izquierda de 17.27 se aprecia que solo existe un pórtico en sentido X y que este pasa por el centro de masa en consecuencia no va a aportar a $K_{\theta\theta}$ ya que su matriz $r$ será nula para evitar esto se recomienda estructurar el edificio como se indica a la derecha de la figura 17.27, donde se tienen dos líneas resistentes en los pórticos exteriores que no pasan por el centro de masa luego aportan a la sub matriz $K_{\theta\theta}$.

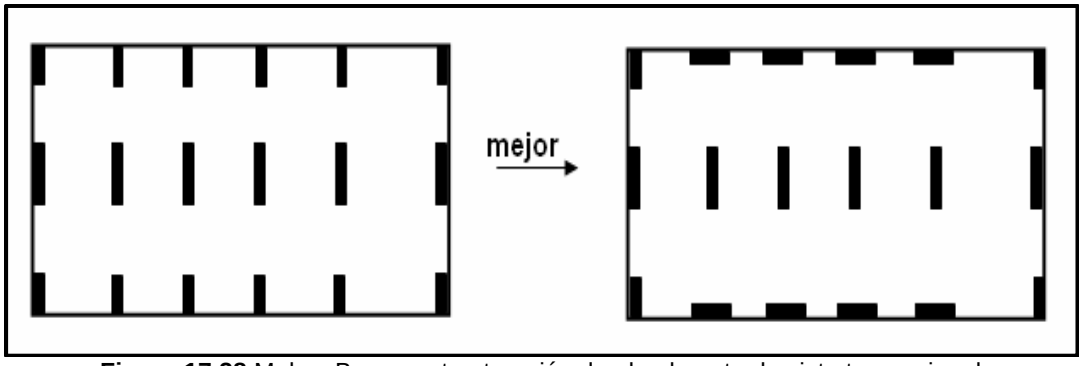



**Figura 17.28** Mala y Buena estructuración desde el punto de vista trasnacional

En realidad uno de los problemas más críticos en un edificio es el problema torsional pero a más de ello se debe tener especial cuidado en tener un equilibrio entre las sub matrices $K_{XX}$ y $K_{YY}$, equilibrio en el sentido de que las dos tengan valores similares. A la izquierda de la figura 17.28 se aprecia un edificio en el cual solo existen líneas resistentes en sentido Y, y no existen líneas resistentes en sentido X de tal forma que en sentido Y va a ser muy rígido se va a desplazar muy poco en ese sentido pero es muy flexible en sentido X y tendrá grandes desplazamientos en X. Para evitar esto se recomienda la estructuración indicada a la derecha de la figura 17.28 ya que existen líneas resistentes en sentido X.

Con los tres ejemplos que se han indicado en el presente apartado se pretende que el lector en la distribución de los elementos resistentes dentro de un edificio tenga en cuenta lo siguiente:

- Que la sub matriz $K_{XX}$ tenga valores similares a la sub matriz $K_{YY}$.
- Que la sub matriz $K_{\theta\theta}$ sea lo más grande posible.
- Que se distribuya en forma simétrica las líneas resistentes en los dos sentido en X, Y.
- Que las líneas resistentes de los pórticos exteriores sean mayores que las líneas resistentes de los pórticos interiores.

## 17.11 EJERCICIOS PROPUESTOS

### EJERCICIO N.- 1

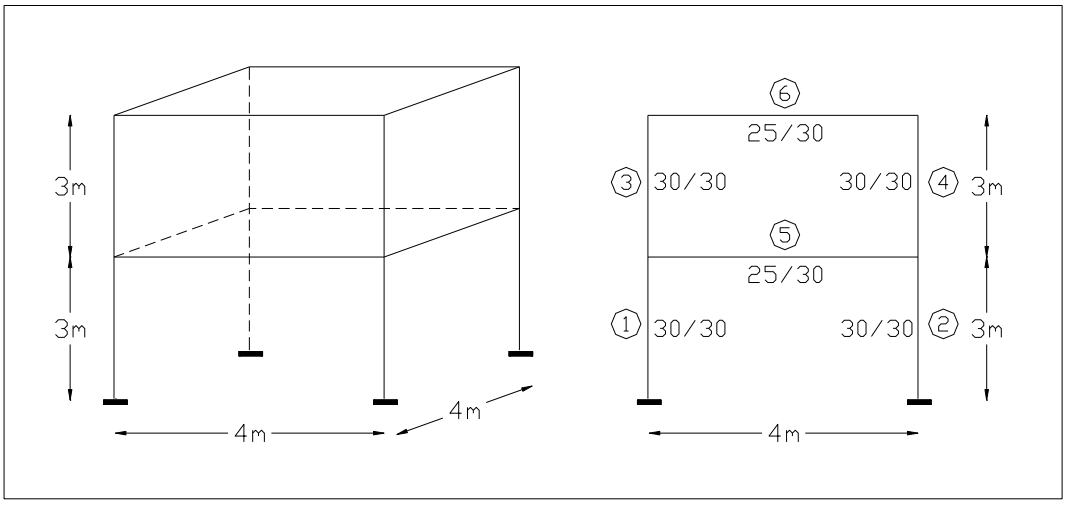
Encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de pisos de la estructura de dos pisos que se indica a continuación, si todos los pórticos son iguales y tienen las dimensiones indicadas en la figura que está a la derecha. Calcular con un $E = 2400000\ \frac{T}{m^2}$ y de la siguiente manera:

i) Con inercias gruesas y en base a la matriz de compatibilidad.

ii) Con inercias agrietadas de acuerdo al NEC-11 y en base a la matriz de compatibilidad.

iii) Con inercias agrietadas de acuerdo al NEC-11 y utilizando las sub matrices de la matriz de rigidez $\boldsymbol{KE}$ .

iv) Colocar una losa de aislación cuyas vigas sean de las mismas dimensiones de las vigas del primer piso; la altura del aislador es 15 cm., las rigideces de los aisladores son $k_{ef} = 20\,T/m$, y la rigidez vertical $k_v = 20000\,T/m$.




### EJERCICIO N.- 2

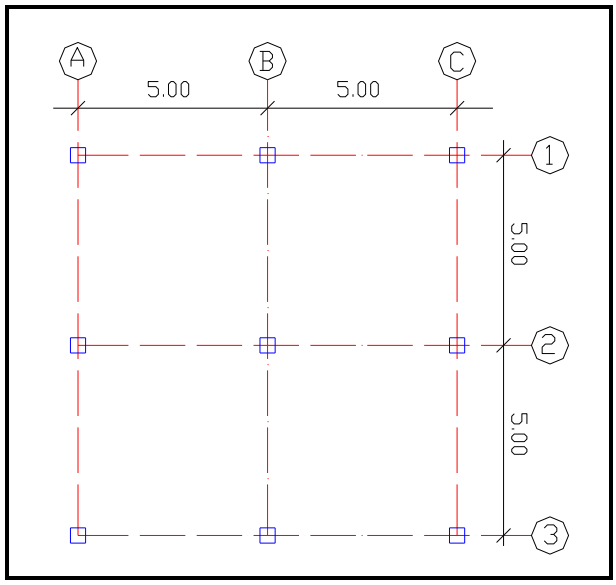
Encontrar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejercicio N.- 1 de las siguientes maneras:

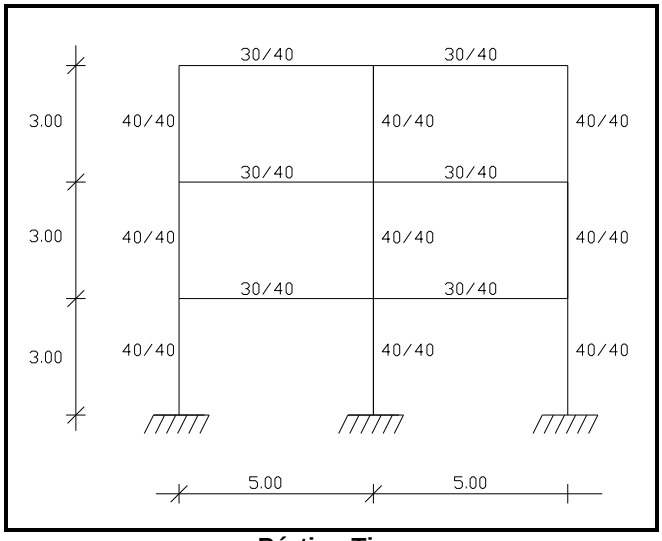
i) En base al planteamiento matricial con $\boldsymbol{Q_X} = \boldsymbol{Q_Y} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}$ T.

ii) En base a la rigidez “t”.

### EJERCICIO N.- 3

Determinar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura de tres pisos que se indica a continuación, en la cual todos los pórticos son iguales. Calcular con inercias agrietadas de acuerdo a lo estipulado por el NEC-11. Considerar $E = 2400000\ \frac{T}{m^2}$.




**Pórtico Tipo**

**EJERCICIO N.- 4**

Determinar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejercicio N.- 3 si $\boldsymbol{Q_X} = \boldsymbol{Q_Y} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ T.

**EJERCICIO N.- 5**

Resolver el ejercicio anterior si $\boldsymbol{Q_X} = \boldsymbol{Q_Y} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \end{bmatrix}$ T.

*CAPITULO 18*

# MALLAS ESPACIALES

## RESUMEN

El Método de los Desplazamientos se aplica a cualquier tipo de estructura, para ello lo que se debe definir en primer lugar es como trabaja la estructura que se está analizando, en este caso una malla espacial y determinar un modelo de cálculo de las deformaciones en el sistema 1, que no considera los desplazamientos como cuerpo rígido. Posteriormente se halla la matriz de rigidez en coordenadas locales y globales y se resuelve como se realizó en pórticos planos y armaduras planas.

La primera parte del capítulo está dedicada a reforzar los conocimientos de cálculo en el sistema 1, por ese motivo se trabaja con elementos totalmente flexibles, luego con elementos torsionalmente rígidos y con elementos transversalmente rígidos. Se determina la matriz de compatibilidad de deformaciones, el vector de cargas generalizadas y se resuelve una estructura en forma manual.

Se presenta la librería de programas de ***CEINCI-LAB*** que permite resolver de una manera muy fácil cualquier armadura espacial con elementos totalmente flexibles.

El último de los ejercicios propuestos es parte de una consultoría que realizó el autor del libro para diseñar una Bodega, donde se tenía que cubrir luces de 10 m., se desea que los estudiantes resuelvan este ejercicio fundamentalmente utilizando los programas de ***CEINCI-LAB*** por este motivo se ha dado una gran cantidad de información para facilitar la tarea y se indican los resultados en términos de fuerzas y momentos en los extremos de los elementos.

## 18.1 INTRODUCCIÓN

Las Mallas Espaciales, también se conocen con el nombre de Parillas, son estructuras que se hallan en el plano horizontal y sobre las cuales gravita una carga en el plano vertical. Los elementos de una malla espacial trabajan a flexión, corte y torsión.

En la figura 18.1 se indica la simbología a emplearse para definir las restricciones de los nudos, a la izquierda se presenta un empotramiento perfecto, el rectángulo con dos diagonales significa que no existe desplazamiento vertical, la línea entrecortada axial al eje significa que no hay giro de torsión y la línea entrecortada perpendicular al eje significa que no existe giro a flexión.

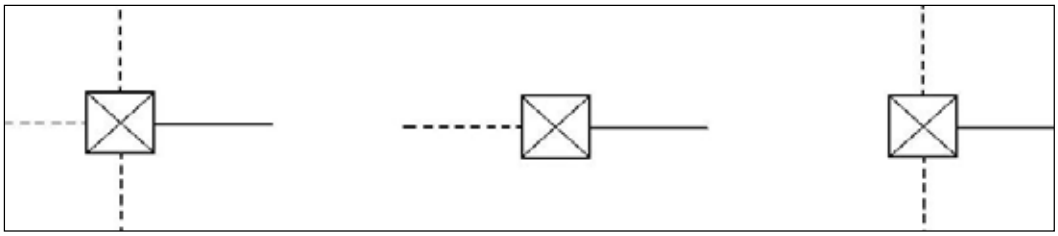


**Figura 18.1** Simbología utilizada para definir las restricciones de los nudos.

En la parte central de la figura 18.1 se presenta un nudo que no puede desplazarse verticalmente y tampoco puede rotar con respecto al eje del elemento. Finalmente a la derecha de la figura 18.1 se tiene un nudo que únicamente admite un giro con respecto al eje del elemento.

Cada nudo interior de una malla espacial tiene tres grados de libertad, que para el caso general, son: rotación con respecto al eje X, rotación con respecto al eje Y, desplazamiento vertical con relación al eje Z.

## 18.2 ESTUDIO EN SISTEMA 1

En el Capítulo 6 se desarrolló el modelo numérico de cálculo que se indica en la figura 18.2, en el cual no se considera los movimientos como cuerpo rígido y se tienen tres deformaciones en el elemento, dos a flexión y una deformación axial; las mismas que se encuentran con las siguientes ecuaciones.

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

Donde $u_1, v_1, \theta_1$ son las componentes de desplazamiento axial, transversal y rotación del nudo inicial; $u_2, v_2, \theta_2$ las componentes de desplazamiento axial, transversal y rotación del nudo final. Las deformaciones se agrupan en el vector $\boldsymbol{p}$**.** Por otro lado el momento en el nudo inicial $P_1$, en el nudo final $P_2$ y la fuerza axial $P_3$ se agrupan en el vector $\boldsymbol{P}$

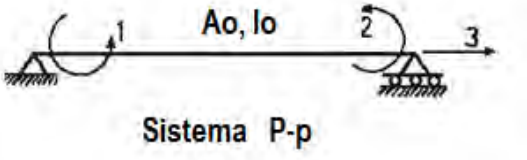



**Figura 18.2** Modelo de cálculo de pórticos planos sin considerar movimientos como cuerpo rígido.

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

La relación entre las cargas $\boldsymbol{P}$ y las deformaciones $\boldsymbol{p}$**,** viene dada por la matriz de rigidez del elemento en el sistema uno, que se denominó $\boldsymbol{k}_1$. Cuando no se considera el efecto del corte, se tiene.

$$\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{4\,E\,I}{L} & \frac{2\,E\,I}{L} & 0 \\ \frac{2\,E\,I}{L} & \frac{4\,E\,I}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E\,A}{L} \end{bmatrix}$$

Donde $E$ es el módulo de elasticidad del material; $I$ es el momento de inercia a flexión; $J$ es el momento de inercia a torsión; $L$ es la longitud del elemento.

Ahora bien el modelo numérico de cálculo en el sistema 1 para un elemento de una malla espacial, es el indicado en la figura 18.3. En el nudo inicial no se considera el desplazamiento vertical y la rotación axial (a torsión) y en el nudo final no se toma en cuenta el desplazamiento vertical; estas tres vienen a ser los desplazamientos como cuerpo rígido. Las deformaciones $\boldsymbol{p}$ son dos de flexión y una de torsión; las deformaciones de flexión se obtienen con el mismo formulario para el caso de pórticos planos, por lo que no se vuelve a copiar las ecuaciones y la de torsión en forma análoga a la deformación axial pero con los giros de torsión del nudo final e inicial.

$$p_3 = \theta_{t2} - \theta_{t1} \tag{18.1}$$

Donde $\theta_{t2},\ \theta_{t1}$, son los giros de torsión del nudo final e inicial del elemento. El valor de $p_3$ será positivo si el elemento se alarga torsionalmente y será negativo si se acorta torsionalmente.

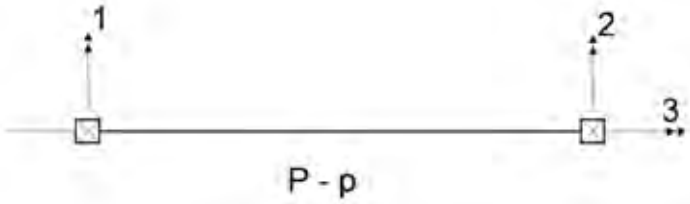



**Figura 18.3** Sistema 1, para un elemento de una malla espacial.

Es importante destacar en la figura 18.3, que las deformaciones por flexión $p_1, p_2$ son positivas si rotan en forma horaria, al contrario de lo que se tiene en pórticos planos, ver figura 18.2 pero las ecuaciones de cálculo de las deformaciones a flexión son las mismas, claro está que ahora los giros a flexión $\theta_1, \theta_2$, serán positivos si rotan en forma horaria; los desplazamientos verticales $v_2, v_1$ son positivos si van hacia arriba pero en el plano horizontal.

El vector $\boldsymbol{P}$ para el caso de un elemento de una malla espacial, está compuesta por los momentos a flexión del nudo inicial y final denominados $P_1, P_2$ y por el momento a torsión del nudo final $P_3$. Ahora la matriz de rigidez del elemento, en sistema 1, es:

$$\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{4\,E\,I}{L} & \frac{2\,E\,I}{L} & 0 \\ \frac{2\,E\,I}{L} & \frac{4\,E\,I}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G\,J}{L} \end{bmatrix} \tag{18.2}$$

Las variables todavía no definidas son: $G$ que es el módulo de corte $G \approx 0.4\,E$; $J$ es el momento de inercia a torsión.

$$I = \frac{b\ h^3}{12} \qquad J = \beta\ h\ b^3 \qquad \beta \approx \frac{1}{3} - 0.21\ \frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12\ h^4}\right) \tag{18.3}$$

Donde $b, h$ son la base y la altura de la sección transversal de la viga.

### 18.2.1 Matriz de compatibilidad A

Al igual que en pórticos y armaduras planas, se define la matriz $\boldsymbol{A}$ de la forma:

$$\boldsymbol{p = A\, q}$$

Donde $\boldsymbol{q}$ es el vector de coordenadas generalizadas y $\boldsymbol{p}$ el vector de deformaciones.

El objetivo de ver mallas espaciales, en este libro, es con dos propósitos, primero como una introducción paulatina al análisis espacial y segundo para que el lector vea que los conceptos y definiciones básicas estudiadas en pórticos y armaduras planas se aplican a otro tipo de estructuras. En este caso concreto se va a calcular la matriz de compatibilidad $\boldsymbol{A}$ de mallas espaciales con elementos totalmente flexibles; con elementos transversalmente rígidos y con elementos torsionalmente rígidos y se verá que el cálculo es similar al desarrollado en pórticos planos.

- **EJEMPLO 1**

Determinar la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$, de la malla indicada en la figura 18.4, si sus elementos son totalmente flexibles.

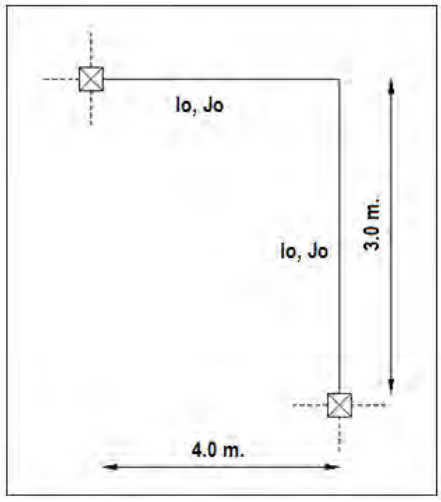



**Figura 18.4** Malla Espacial de Ejemplo 1.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 18.5 se presentan los sistemas $\boldsymbol{Q - q}$ de la estructura y $\boldsymbol{P - p}$ de los elementos, respectivamente. La estructura tiene 3 grados de libertad y 6 deformaciones de los elementos.

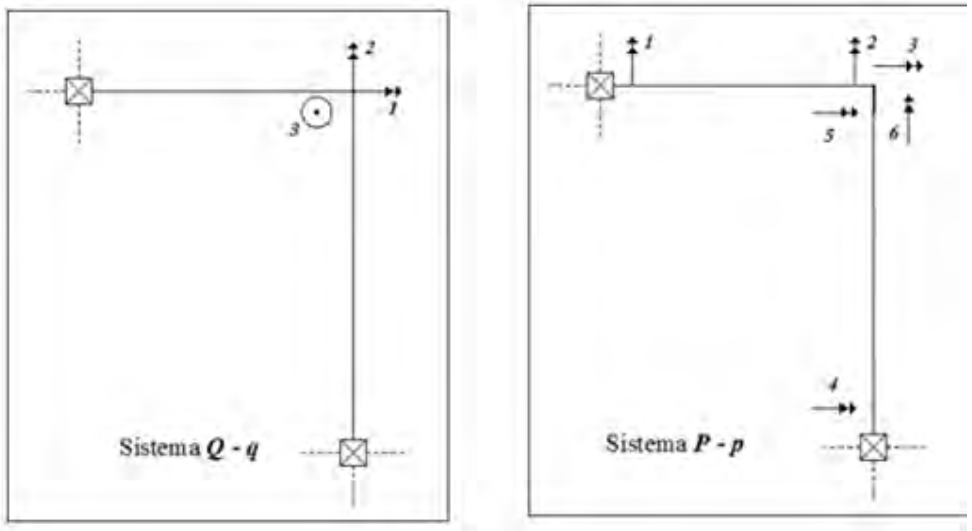
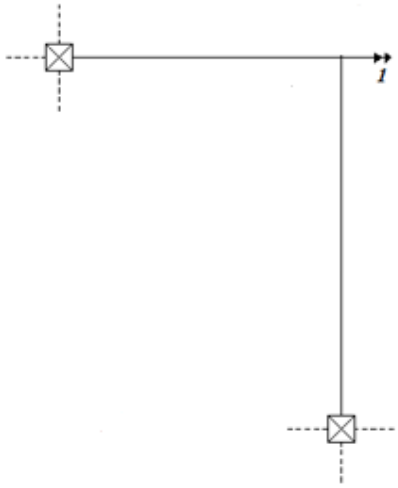



**Figura 18.5** Sistemas $\boldsymbol{Q - q, P - p}$.

- **Primera columna de la Matriz A**

$$q_1 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 1$$




**Deformada elemental $q_1$**

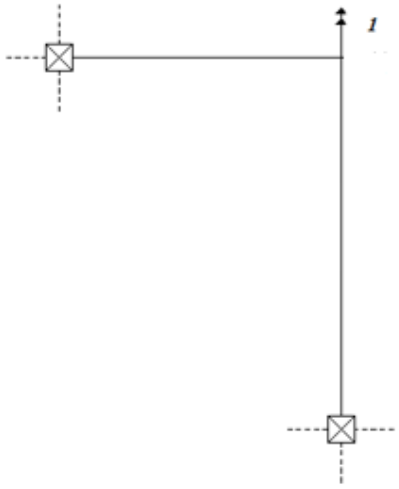
En este caso existe torsión en el elemento en sentido X, y flexión en el elemento en sentido Y.

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \quad p_3 = 1$$

$$p_4 = 0 \quad p_5 = 1 \quad p_6 = 0$$

- **Segunda columna de la Matriz A**

$$q_2 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 2$$



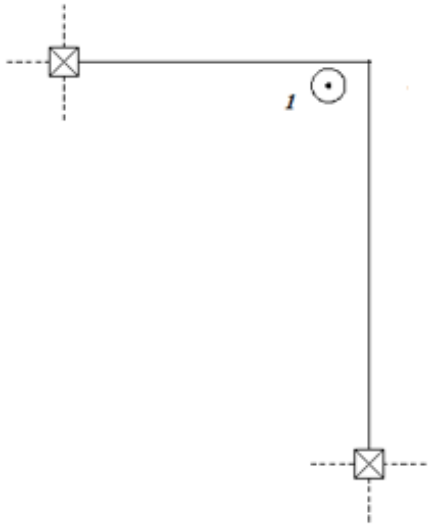

**Deformada elemental $q_2$**

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 1 \quad p_3 = 0$$

$$p_4 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_6 = 1$$

- **Tercera columna de la Matriz A**

$$q_3 = 1 \; y \; q_i = 0; \;\; i \neq 3$$




**Deformada elemental $q_3$**

En este caso el nudo sube verticalmente la unidad, en esa deformada se traza la cuerda y las tangentes, para el elemento en sentido X, el ángulo entre la cuerda y la tangente es horario por lo tanto son positivas $p_1$ y $p_2$. Para el elemento en sentido Y el ángulo es negativo por lo tanto $p_4$ y $p_5$ son negativas.

$$p_1 = \frac{1}{4} \qquad p_2 = \frac{1}{4} \qquad p_3 = 0$$

$$p_4 = -\frac{1}{3} \qquad p_5 = -\frac{1}{3} \qquad p_6 = 0$$

**Matriz A**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 2**

En la malla espacial presentada en la figura 18.6, el elemento AD es $J = \infty$, torsionalmente rígido y el elemento EC es $I = \infty$, transversalmente rígido, los demás elementos completamente flexibles, se pide seleccionar sistemas $\boldsymbol{Q - q, P - p,}$ y determinar la matriz $\boldsymbol{A}$.

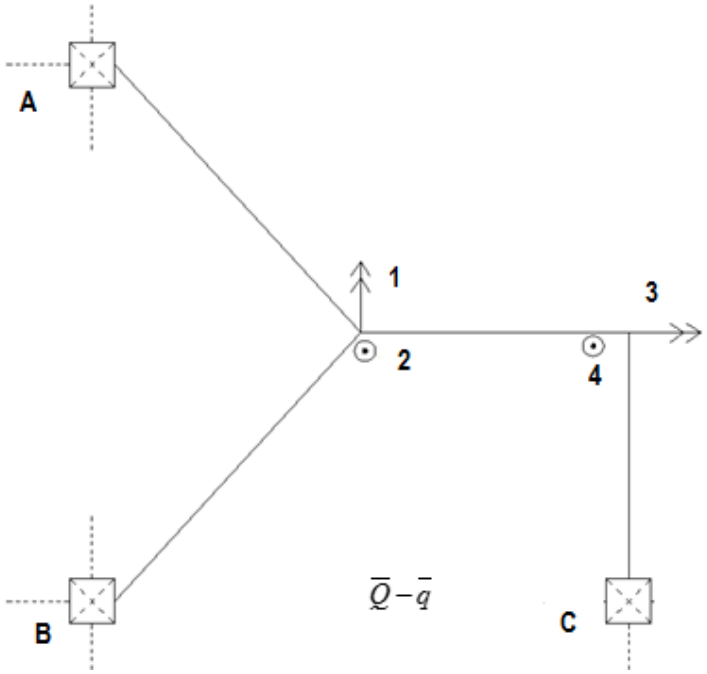



**Figura 18.6** Malla espacial con elementos torsionalmente rígido y transversalmente rígido.

- **SOLUCIÓN**

El nudo C admite giro con respecto a un eje en sentido X. Se tiene tres grados de libertad por nudo interior más la rotación de C, lo que da 7 grados de libertad; ahora bien el elemento $I = \infty$, disminuye 2 grados de libertad y el $J = \infty$, un grado de libertad. Por lo tanto el sistema tiene 4 grados de libertad que son los indicados a la izquierda de la figura 18.7. Se destaca que el giro 4 en el nudo C es igual al giro a flexión del nudo E por que el elemento es $I = \infty$.

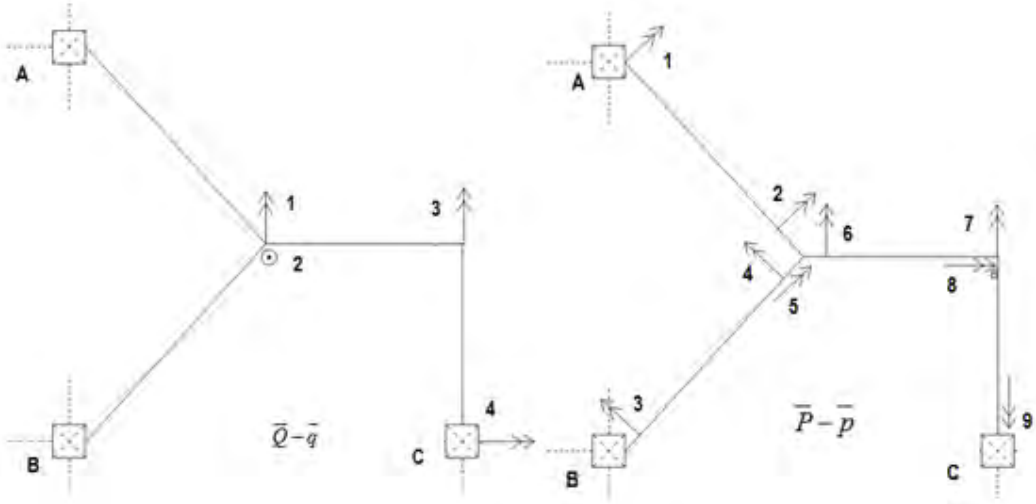
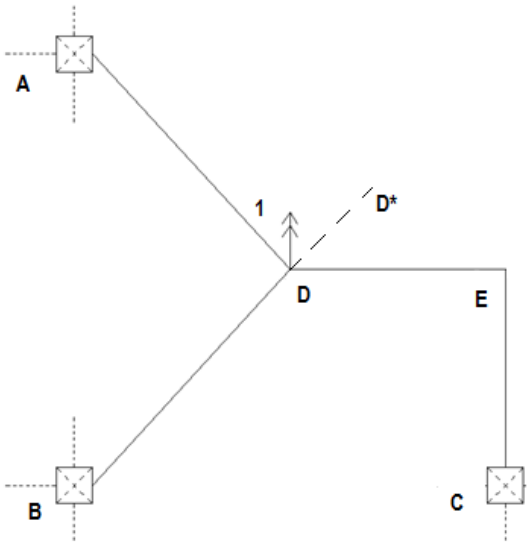



**Figura 18.7** Sistemas de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q-q}$, y de elementos $\boldsymbol{P-p}$

A la derecha de la figura 18.7 se tiene el sistema de coordenadas $\boldsymbol{P-p}$. En el elemento $J = \infty$ solo existen las deformaciones a flexión, mientras que en el elemento $I = \infty$ solo hay la deformación a torsión.

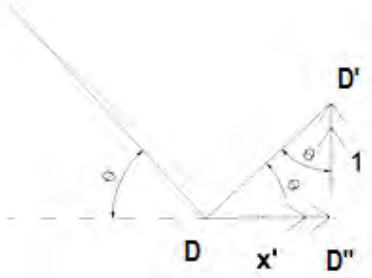
- **Primera columna de la matriz $A$**

$$q_1 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 1$$



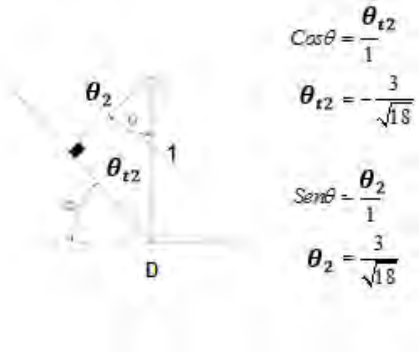

**Deformada elemental $q_1$**

La posición final del nudo D, debe encontrarse en una perpendicular que pasa por el nudo D, ya que el elemento AD es torsionalmente rígido. La recta DD* es perpendicular al eje AD, a lo largo de esta recta se encuentra D' posición final de D. Para que eso suceda sebe existir un giro en sentido X, y esto es factible porque no existe coordenada en ese sentido. Sea $x'$ este giro como se observa en la siguiente figura. Por la geometría de la malla $\theta = 45^0$. Por lo tanto $x' = 1$




En consecuencia en el nudo D se tienen dos giros unitarios en las direcciones X, Y. Ahora en base a estos giros se calcula las deformaciones en los elementos AD y BD. Para que sea más fácil su explicación se lo realiza por separado y luego se aplica el principio de superposición.

**Elemento AD**

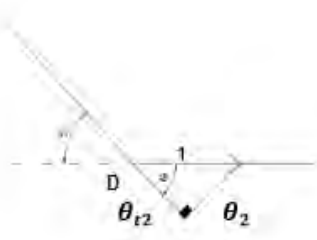



$$Cos\theta = \frac{\theta_{t2}}{1}$$

$$\theta_{t2} = -\frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$Sen\theta = \frac{\theta_2}{1}$$

$$\theta_2 = \frac{3}{\sqrt{18}}$$




$$Cos\theta = \frac{\theta_{t2}}{1}$$

$$\theta_{t2} = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

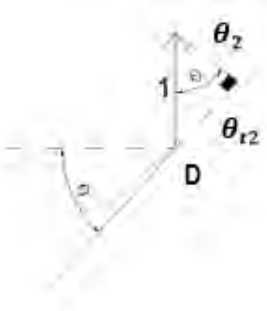
$$Sen\theta = \frac{\theta_2}{1}$$

$$\theta_2 = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$\boldsymbol{\theta_2} = \frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{18}}$$

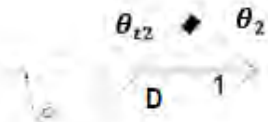
$$p_1 = 0 \qquad p_2 = \frac{6}{\sqrt{18}}$$

**Elemento BD**




$$Cos\theta = \frac{\boldsymbol{\theta_2}}{1} \qquad \boldsymbol{\theta_2} = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$Sen\theta = \frac{\boldsymbol{\theta_{t2}}}{1} \qquad \boldsymbol{\theta_{t2}} = \frac{3}{\sqrt{18}}$$




$$Cos\theta = \frac{\boldsymbol{\theta_{t2}}}{1} \qquad \boldsymbol{\theta_{t2}} = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

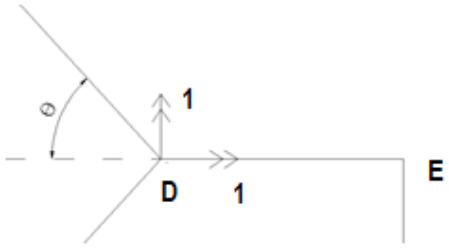
$$Sen\theta = \frac{\boldsymbol{\theta_2}}{1} \qquad \boldsymbol{\theta_2} = -\frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$\theta_2 = \frac{3}{\sqrt{18}} - \frac{3}{\sqrt{18}} = 0$$

$$\theta_{t2} = \frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{18}}$$

$$p_3 = 0 \qquad p_4 = 0 \qquad p_5 = \frac{6}{\sqrt{18}}$$

**Elemento DE**



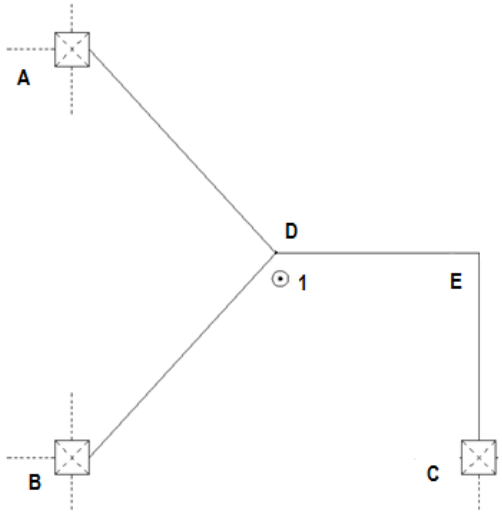

$$p_6 = 1 \qquad p_7 = 0 \qquad p_8 = -1$$

**Elemento EC**

$$p_9 = 0$$

- **Segunda columna de la matriz $A$**

$$q_2 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 2$$




**Deformada elemental $q_2$**

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{18}} = p_2$$

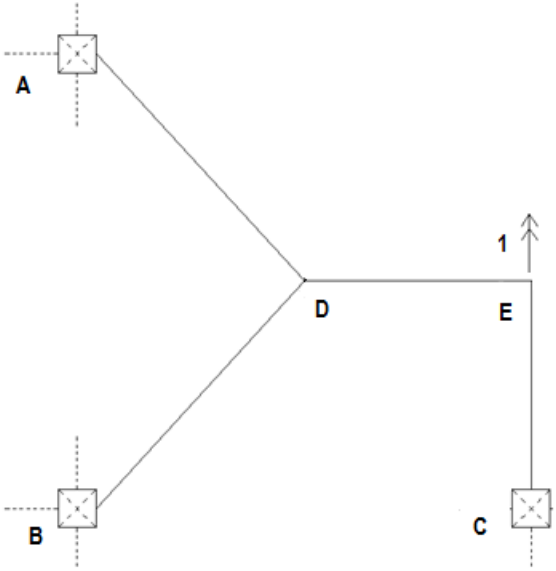
$$p_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} = p_4 \qquad p_5 = 0$$

$$p_6 = -\frac{1}{3} = p_7 \qquad p_8 = 0$$

$$p_9 = 0$$

- **Tercera columna de la matriz $A$**

$$q_3 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 3$$



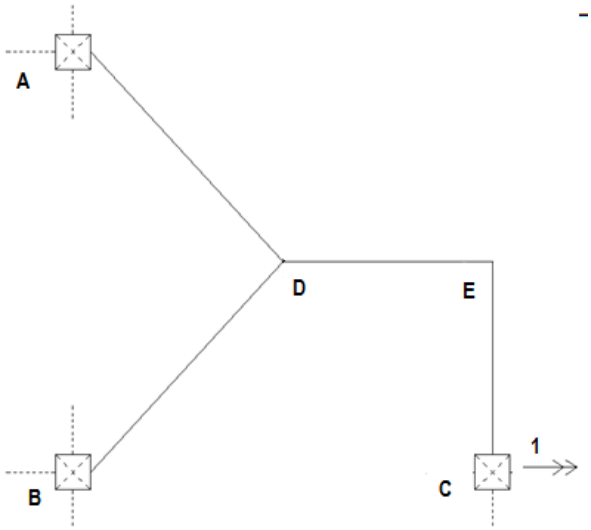

**Deformada elemental $q_3$**

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_5 = 0$$

$$p_6 = 0 \quad p_7 = 1 \quad p_8 = 0 \quad p_9 = 1$$

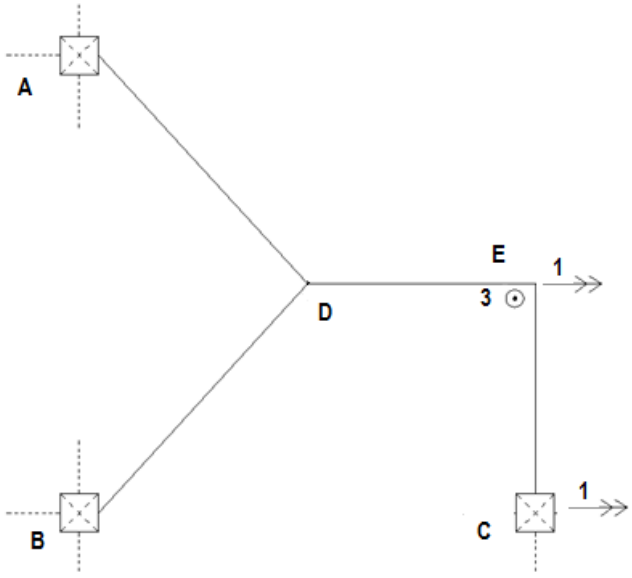
- **Cuarta columna de la matriz $A$**

$$\boldsymbol{q_4 = 1 \; y \; q_i = 0;\; i \neq 4}$$




**Deformada elemental $q_4$**

Al rotar el nudo C la unidad, por ser el elemento CE transversalmente rígido, el nudo E también gira la unidad y sube 3 m. (arco para radio igual ángulo) De tal manera que se tiene.




$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_5 = 0$$

$$p_6 = \frac{3}{3} \quad p_7 = \frac{3}{3} \quad p_8 = 1 \quad p_9 = 0$$

Las deformaciones a flexión del elemento DE son debidas a que el nudo E sube 3.

- **Matriz $A$**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \end{bmatrix} A^{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \end{bmatrix} A^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{18}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{1} & \frac{1}{0} \end{bmatrix} A^{(4)}$$

### 18.2.2 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez de una estructura $\boldsymbol{K}$ se halla con la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}^{(i)t}\, \boldsymbol{k}^{(i)}\, \boldsymbol{A}^{(i)}$$

Donde $\boldsymbol{A}^{(i)}$ es la matriz de compatibilidad del elemento $i$; $\boldsymbol{k}^{(i)}$ es la matriz de rigidez del elemento $i$; $n$ es el número de elementos de la estructura.

- **EJEMPLO 3**

Encontrar la matriz de rigidez de la malla espacial indicada en la figura 18.8. La matriz de compatibilidad de deformación se encontró en el Ejemplo 1. Considerar $E = 2400000\ T/m^2$

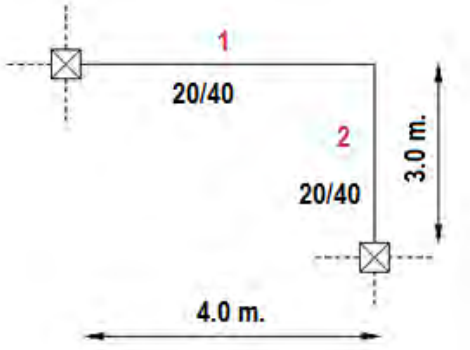



**Figura 18.8** Malla Espacial de Ejemplo 3

- **SOLUCIÓN**

- **Matrices de rigidez de los Elementos**

$$\boldsymbol{k}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 2560 & 1280 & 0 \\ 1280 & 2560 & 0 \\ 0 & 0 & 175.8 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 3413.3 & 1706.7 & 0 \\ 1706.7 & 3413.3 & 0 \\ 0 & 0 & 234.4 \end{bmatrix}$$

- **Triples productos matriciales**

$$A^{(1)t}k_1^{(1)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 175.8 & 0 & 0 \\ 0 & 2560 & 960 \\ 0 & 960 & 480 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)t}k_1^{(2)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3413.3 & 0 & -1705 \\ 0 & 234.4 & 0 \\ -1705 & 0 & 1135.5 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de la malla espacial**

$$K = A^{(1)t}k_1^{(1)}A^{(1)} + A^{(2)t}k_1^{(2)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3589.1 & 0 & -1705 \\ 0 & 2794.4 & 960 \\ -1705 & 960 & 1615.5 \end{bmatrix}$$

- **Programa de Computación**

```
% Ejemp_3 Ejemplo de Capitulo 18 de libro
b=0.20;h=0.40;L=[4;3];E=2400000;G=0.4*E;
I=b*h^3/12;f=b/h;beta=1/3-0.21*f*(1-f^4/12);J=beta*h*b^3;
A1=[0 0 0.25;0 1 0.25;1 0 0];A2=[0 0 -0.333;1 0 -0.333; 0 1 0];
for i=1:2
    k=[4*E*I/L(i)    2*E*I/L(i)   0;
          2*E*I/L(i)    4*E*I/L(i)   0;
          0             0          G*J/L(i)]
    if i==1;k1=k;else k2=k;end
end
K=A1'*k1*A1+A2'*k2*A2
```

### 18.2.3 Vector de cargas Q

Al igual que en Pórticos Planos el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ se puede obtener empleando el Problema Primario y Complementario o por Trabajos Virtuales.

- **EJEMPLO 4**

Los elementos de la malla espacial presentada en la figura 18.9, son totalmente flexibles y sobre cada una de las tres vigas, gravita una carga uniforme distribuida. Se pide encontrar el vector de cargas generalizadas por medio del Problema Primario y Complementario.

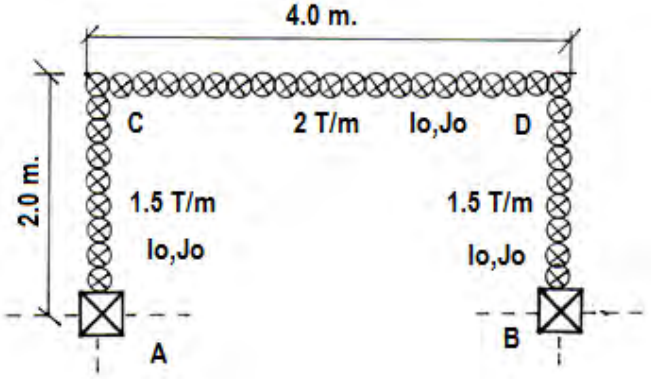



**Figura 18.9** Estructura con carga uniforme distribuida.

- **SOLUCIÓN**

La malla espacial tiene 6 grados de libertad, los mismos que se indican en la figura 18.10.

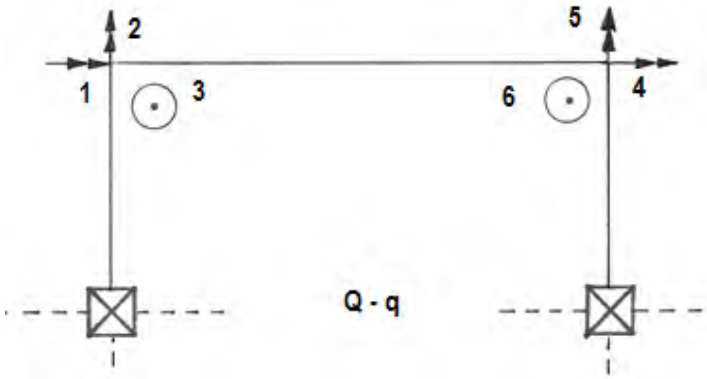
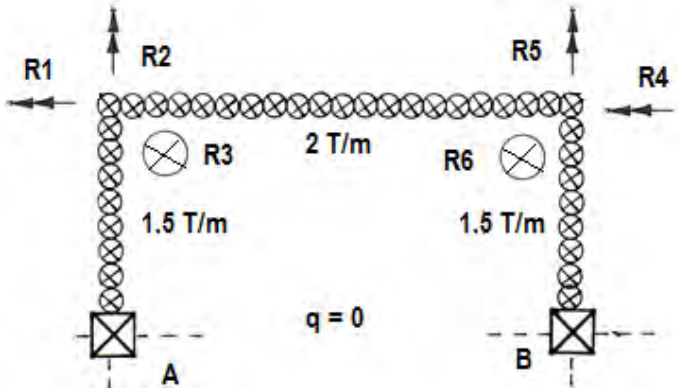


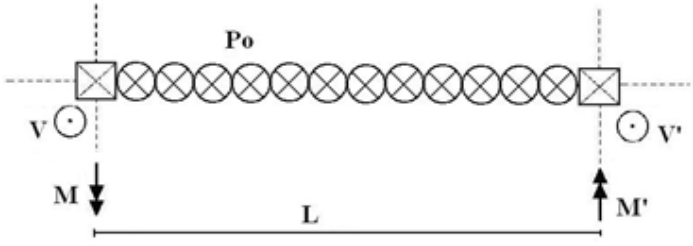

**Figura 18.10** Coordenadas Generalizadas.

- **Problema Primario**




- **Equilibrio de elementos**

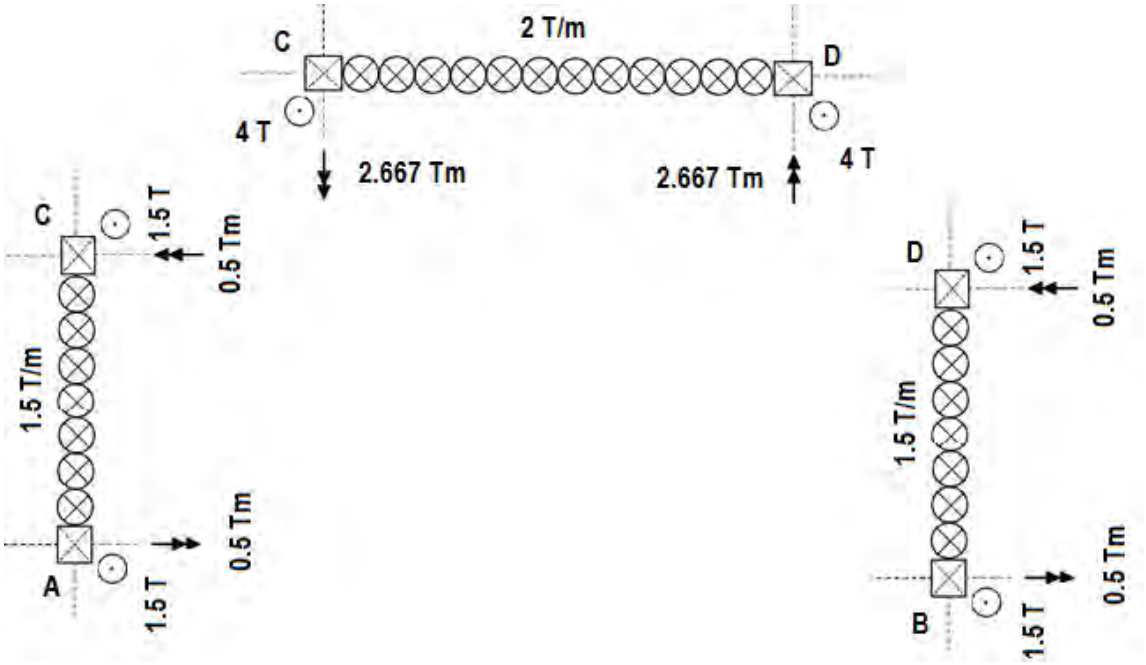
Para un elemento de sección constante las acciones de empotramiento perfecto ante una carga uniforme distribuida son.



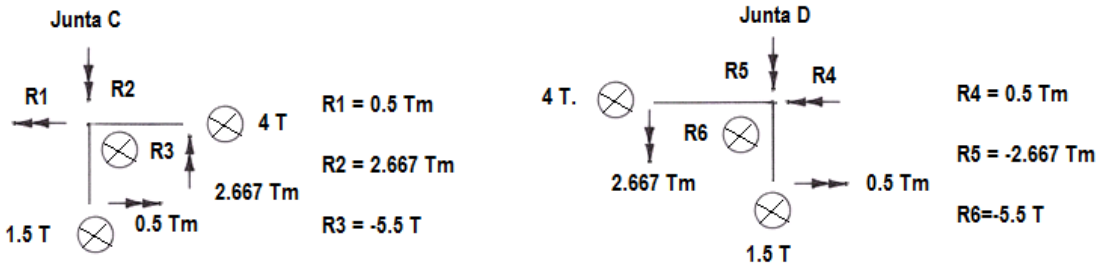

**Acciones de empotramiento perfecto.**

$$M = M' = \frac{P_o L^2}{12}$$

$$V = V' = \frac{P_o L}{2}$$




**Equilibrio de Elementos**




**Equilibrio de Nudos**

- **Problema Complementario**

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.667 \\ -5.5 \\ 0.5 \\ -2.667 \\ -5.5 \end{bmatrix}$$

### 18.2.4 Método de los desplazamientos

Con el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura y el vector de cargas generalizadas, el lector se habrá podido dar cuenta que la base teórica es la misma lo que cambia son las aplicaciones al nuevo tipo de estructura; por esto es muy empleado el Método de los Desplazamientos ya que su formulación es muy general, con el desarrollo del siguiente ejemplo se aspira aclarar cualquier inquietud que se tenga al respecto.

- **EJEMPLO 5**

Resolver completamente, la malla espacial de la figura 18.11, si sus elementos son completamente flexibles y sobre ella actúa un momento vertical de 4 Tm., en la parte central del elemento AD y una carga uniforme distribuida de 2 Tm sobre el elemento DE. Todas las vigas son de 30/30 cm.; el módulo de elasticidad del hormigón $E = 2400000\ T/m^2$. Considerar $G = 0.4\ E$.

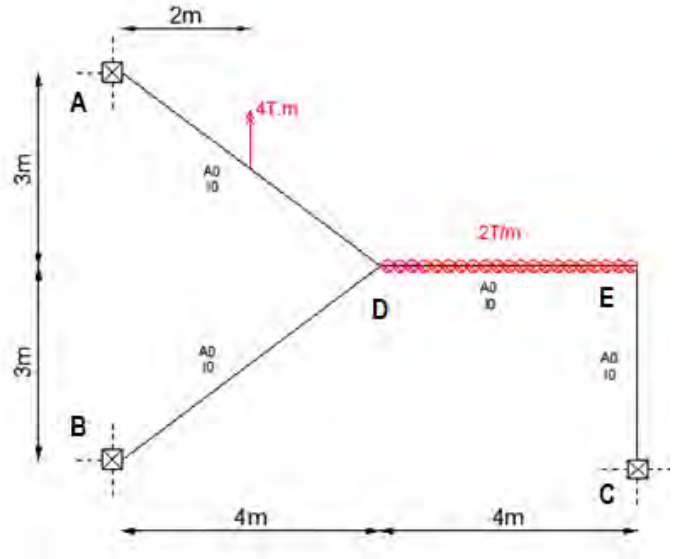



**Figura 18.11** Malla Espacial de Ejemplo 5

- **SOLUCIÓN**

La estructura tiene 6 grados de libertad y son los indicados a la izquierda de la figura 8.12. A la derecha de la misma gráfica se presenta el sistema de coordenadas **P – p**, para el modelo que se está estudiando.

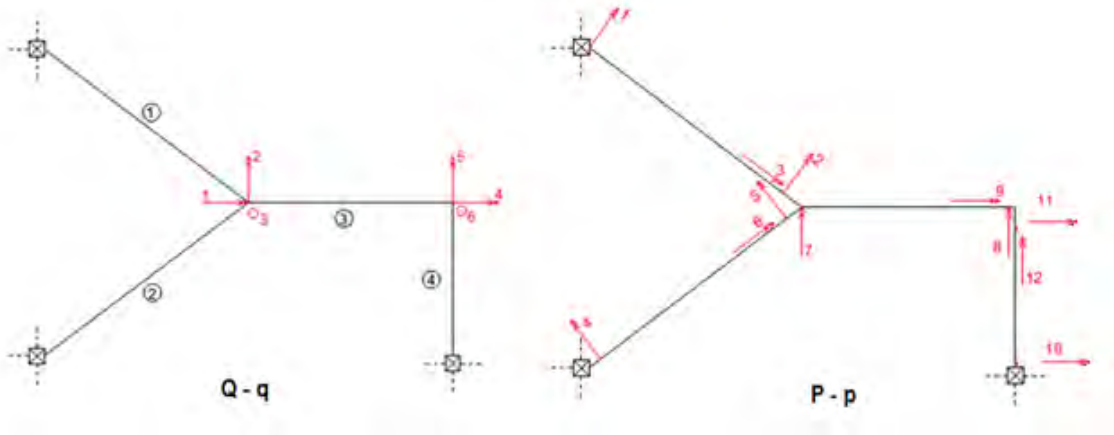


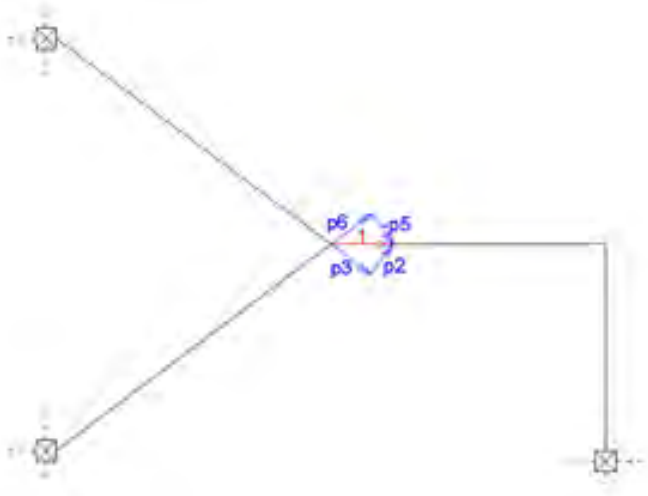

**Figura 18.12** Sistema de coordenadas de la estructura **Q-q** y de los elementos **P - p**

- **Matriz de compatibilidad de deformaciones**

Para encontrar la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$, se construyen las deformadas elementales en el sistema $\boldsymbol{q}$ y se miden las deformaciones $\boldsymbol{p}$.

- **Primera columna de la matriz $A$**

$$q_1 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 1$$



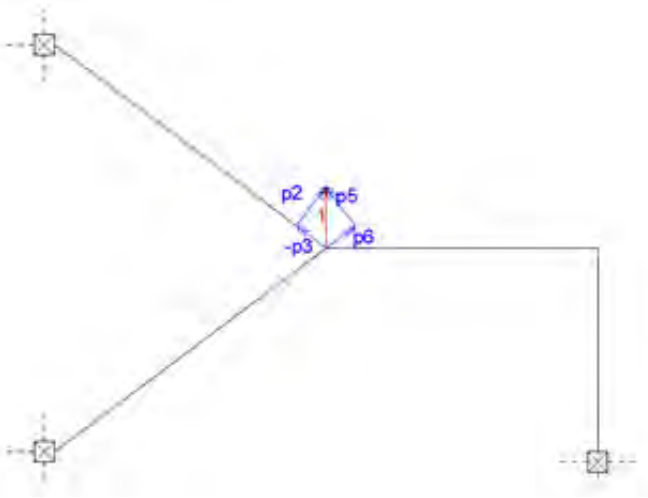

**Deformada elementa $q_1$**

El giro unitario en sentido X, se descompone de acuerdo a cada uno de los elementos en uno axial y en otro transversal.

| | | | |
|---|---|---|---|
| p1=0 | p4=0 | p7=0 | p10=0 |
| p2=3/5 | p5=-3/5 | p8=0 | p11=0 |
| p3=4/5 | p6=4/5 | p9=-1 | p12=0 |

- **Segunda columna de la matriz $A$**

$$q_2 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 2$$



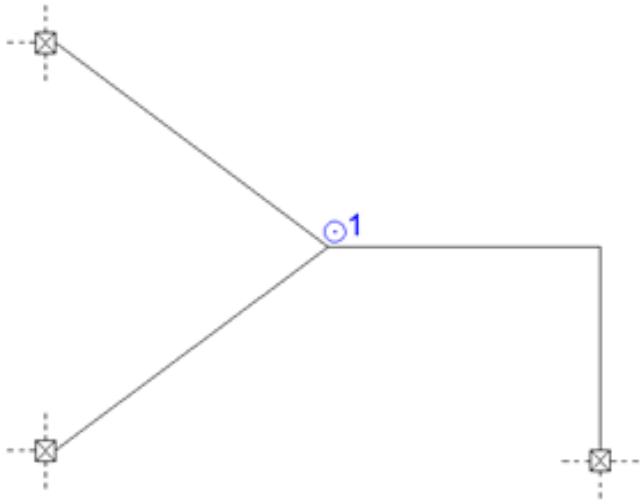

**Deformada elemental $q_2$**

Se procede de igual manera a la primera deformada elemental, descomponiendo el giro en sentido Y. Las deformaciones $\boldsymbol{p}$ que se obtienen, son.

| | | | |
|---|---|---|---|
| p1=0 | p4=0 | p7=1 | p10=0 |
| p2=4/5 | p5=4/5 | p8=0 | p11=0 |
| p3=-3/5 | p6=3/5 | p9=0 | p12=0 |

- **Tercera columna de la matriz $A$**

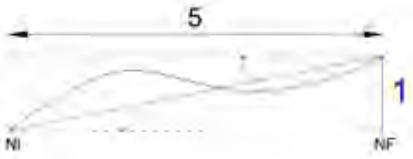
$$q_3 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 3$$




**Deformada elemental $q_3$**

La longitud de los elementos inclinados en el plano horizontal es de 5 m., y del elemento en sentido X es 4 m. Para calcular las deformaciones a flexión se encuentra el ángulo que se forma desde la cuerda a la tangente considerando que el giro si es horario es positivo.

Deformada para elementos 1 y 2

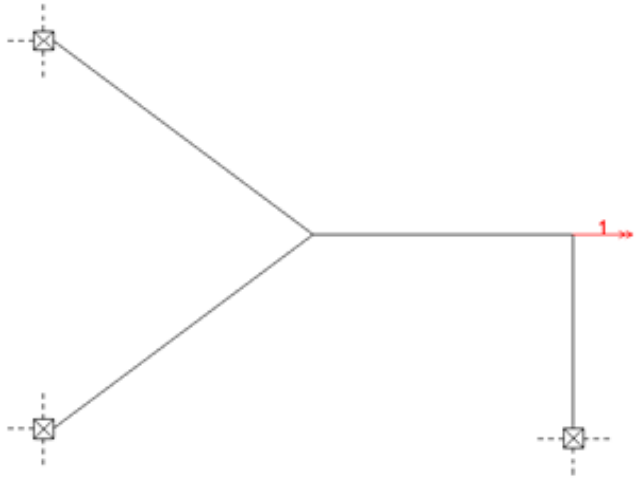



| | | | |
|---|---|---|---|
| p1=1/5 | p4=1/5 | p7=-1/4 | p10=0 |
| p2=1/5 | p5=1/5 | p8=-1/4 | p11=0 |
| p3=0 | p6=0 | p9=0 | p12=0 |

Deformada para elemento 3

- **Cuarta columna de la matriz $A$**

$$q_4 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 4$$



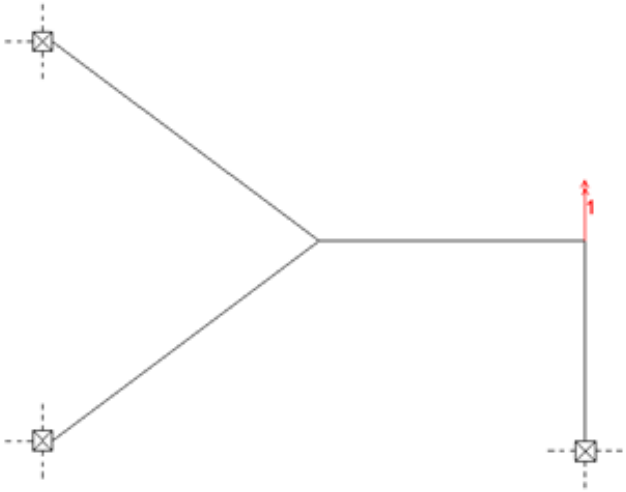

**Deformada elemental $q_4$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| p1=0 | p4=0 | p7=0 | p10=0 |
| p2=0 | p5=0 | p8=0 | p11=1 |
| p3=0 | p6=0 | p9=1 | p12=0 |

Nótese que $p_{11}$ es positivo ya que está rotando en forma horaria.

- **Quinta columna de la matriz $A$**

$$q_5 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 5$$

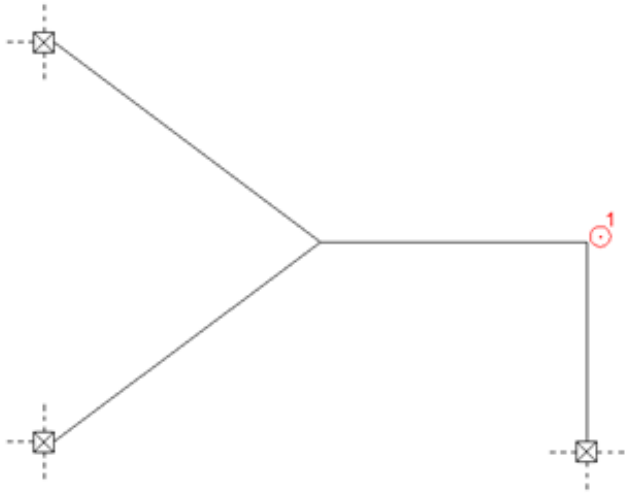



**Deformada elemental $q_5$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| p1=0 | p4=0 | p7=0 | p10=0 |
| p2=0 | p5=0 | p8=1 | p11=0 |
| p3=0 | p6=0 | p9=0 | p12=1 |

- **Sexta columna de la matriz $A$**

$$q_6 = 1 \; y \; q_i = 0; \; i \neq 6$$




**Deformada elemental $q_6$**

Deformada para elemento 3

Deformada para el elemento 4

p1=0 p4=0 p7=1/4 p10=-1/3

p2=0 p5=0 p8=1/4 p11=-1/3

p3=0 p6=0 p9=0 p12=0

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1 & 1/4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ A^{(1)} \\ \\ \\ \\ A^{(2)} \\ \\ \\ \\ A^{(3)} \\ \\ \\ \\ A^{(4)} \end{matrix}$$

- **Matriz de rigidez de elemento considerando efecto de corte**

$$\boldsymbol{k_1} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} * \frac{1+\emptyset}{1+4\emptyset} & \frac{2EI}{L} * \frac{1-2\emptyset}{1+4\emptyset} & 0 \\ \frac{2EI}{L} * \frac{1-2\emptyset}{1+4\emptyset} & \frac{4EI}{L} * \frac{1+\emptyset}{1+4\emptyset} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}$$

**Tabla 18.1** Descripción de los elementos de Ejemplo 5.

| Elemento | b | h | A=b.h | I=b.h$^3$/12 | β | J=βhb$^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | [m] | [m] | [m$^2$] | [m$^4$] | | |
| **1** | 0.30 | 0.30 | 0.09 | 0.00068 | 0.1408 | 0.0011 |
| **2** | 0.30 | 0.30 | 0.09 | 0.00068 | 0.1408 | 0.0011 |
| **3** | 0.30 | 0.30 | 0.09 | 0.00068 | 0.1408 | 0.0011 |
| **4** | 0.30 | 0.30 | 0.09 | 0.00068 | 0.1408 | 0.0011 |

$$\boldsymbol{k_1^{(1)}} = \boldsymbol{k_1^{(2)}} = \begin{bmatrix} 1285.6 & 637.6 & 0 \\ 637.6 & 1285.6 & 0 \\ 0 & 0 & 219 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k_1^{(3)}} = \begin{bmatrix} 1599.8 & 789.8 & 0 \\ 789.8 & 1599.8 & 0 \\ 0 & 0 & 273.8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k_1^{(4)}} = \begin{bmatrix} 2112.8 & 1032.8 & 0 \\ 1032.8 & 2112.8 & 0 \\ 0 & 0 & 365 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de la estructura**

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A^{(1)t}}\, \boldsymbol{k_1^{(1)}}\, \boldsymbol{A^{(1)}} + \boldsymbol{A^{(2)t}}\, \boldsymbol{k_1^{(2)}}\, \boldsymbol{A^{(2)}} + \boldsymbol{A^{(3)t}}\, \boldsymbol{k_1^{(3)}}\, \boldsymbol{A^{(3)}} + \boldsymbol{A^{(4)t}}\, \boldsymbol{k_1^{(4)}}\, \boldsymbol{A^{(4)}}$$

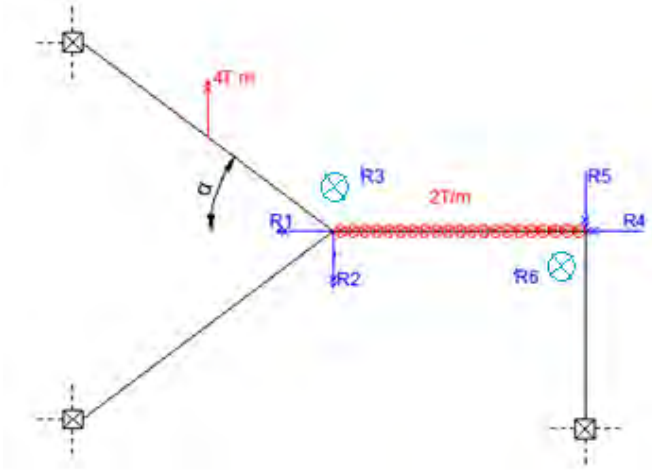
$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1479.8 & 0 & 0 & -273.8 & 0 & 0 \\ 0 & 3403.1 & 18 & 0 & 789.8 & 597.4 \\ 0 & 18 & 606.4 & 0 & -597.4 & -298.7 \\ -273.8 & 0 & 0 & 2386.6 & 0 & -1048.5 \\ 0 & 789.8 & -597.4 & 0 & 1964.9 & 597.4 \\ 0 & 597.4 & -298.7 & -1048.5 & 597.4 & 997.7 \end{bmatrix}$$

- **Vector de cargas generalizadas**

El momento de 4 Tm, debe descomponerse en un perpendicular al eje del elemento y en un axial al eje del elemento.

$$Mx = 4 * Sen\ \propto = 4 * \frac{3}{5} = 2.4\ T.m$$

$$My = 4 * Cos\ \propto = 4 * \frac{4}{5} = 3.2\ T.m$$




**Problema Primario**

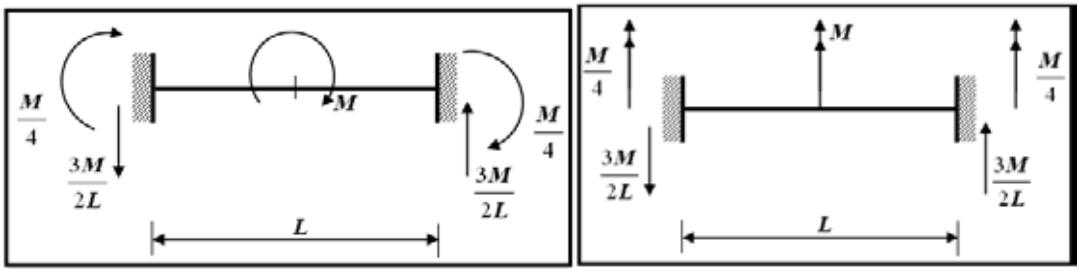
Para hallar las acciones de empotramiento perfecto que produce el momento $M_y$ se recuerda las fórmulas de cálculo que fueron presentadas en el Capítulo 3. Se destaca que primero se deben derivar las funciones de forma y encontrar su valor en el punto de aplicación del momento que es perpendicular al eje del elemento.

$$V = M\ \phi_2^{'}(x) = -\frac{3M}{2L}$$

$$M = M\phi_3^{'}(x) = -\frac{M}{4}$$

$$V^{'} = M\phi_5^{'}(x) = \frac{3M}{2L}$$

$$M^{'} = M\phi_6^{'}(x) = -\frac{M}{4}$$



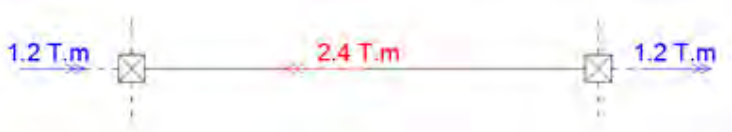

**Acciones de empotramiento perfecto para momento actuando en la mitad**

Al remplazar valores se tiene:

**Acciones de empotramiento perfecto para un momento de 3.2 Tm.**

Para el momento de torsión se debe calcular con las siguientes ecuaciones.

$$MT = \emptyset_1(x) * Mx = 0.5 * Mx = 1.2$$
$$MT' = \emptyset_4(x) * Mx = 0.5 * Mx = 1.2$$

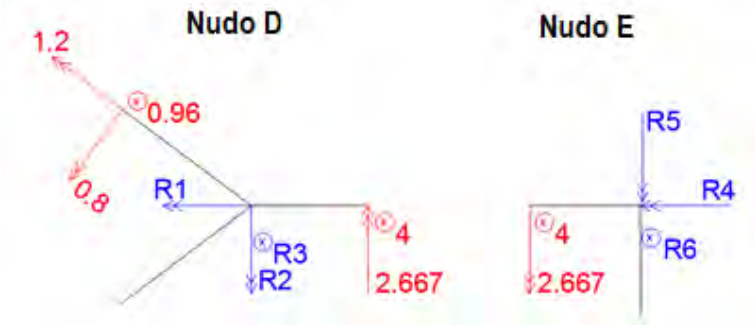



**Acciones de empotramiento para momento de torsión de 2.4 Tm**

Para carga uniforme distribuida, se deja al estudiante la deducción de los siguientes valores.

**Acciones de empotramiento perfecto para carga uniforme distribuida.**

- **Equilibrio de nudos**




**Nudo D**

$$\sum \boldsymbol{M_x = 0} \quad \rightarrow 1.2\,\text{Cos}\alpha + 0.8\,\text{sen}\,\alpha + \text{R1} = 0 \quad \rightarrow 0.96 + 0.48 + \text{R1} = 0 \quad \rightarrow \text{R1} = -1.44\ \text{Tm}$$

$$\sum \boldsymbol{M_y = 0} \quad \rightarrow 1.2\,\text{Sen}\alpha - 0.8\cos\alpha - \text{R2} + 2.667 = 0 \quad \rightarrow 0.72 - 0.64 - \text{R2} + 2.667 = 0$$
$$\rightarrow \text{R2} = 2.75\text{Tm}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \rightarrow 0.96 + R3 + 4 = 0 \quad \rightarrow R3 = -4.96\,T$$

**Nudo E**

$$\sum M_x = 0 \quad \rightarrow R4 = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad \rightarrow R5 = -2.667$$

$$\sum F_z = 0 \quad \rightarrow R6 = -4$$

- **Vector de cargas $Q$**

$$Q^t = [-1.44 \quad 2.75 \quad -4.96 \quad 0 \quad -2.667 \quad -4]$$

- **Vector de coordenadas $q$**

$$K\ q = Q$$

$$q^t = [-0.0030 \quad 0.0060 \quad -0.0238 \quad -0.0108 \quad -0.0038 \quad -0.0238]$$

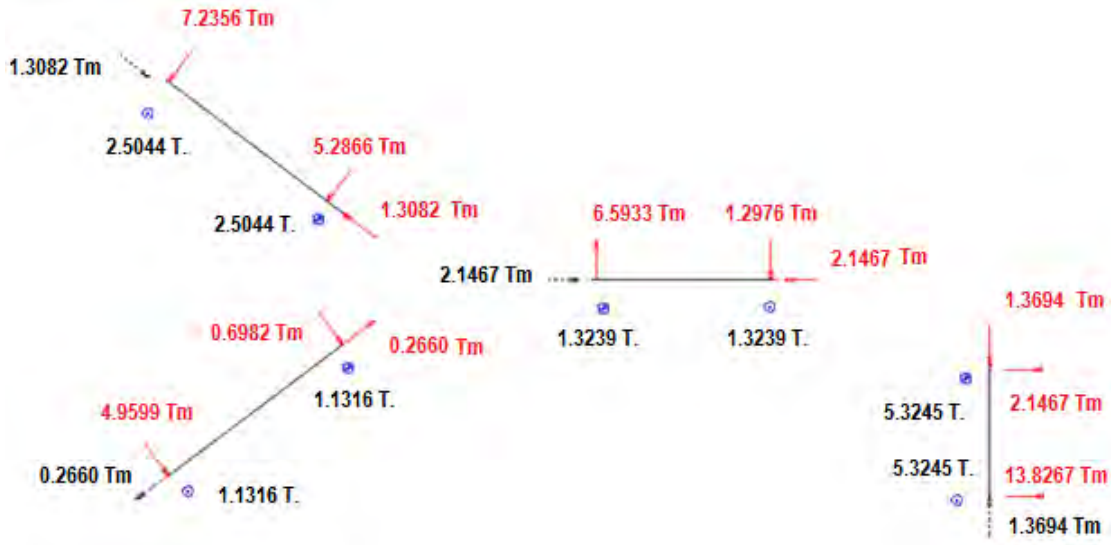
- **Vector de deformaciones y cargas en los elementos**

En la segunda columna de la tabla 18.2 se presenta el cálculo de las deformaciones de los elementos para lo cual se multiplica la matriz de compatibilidad de cada elemento por el vector de coordenadas generalizadas. En la tercera columna se indica las cargas en los elementos que se halla multiplicando la rigidez del elemento por el vector de deformaciones, se obtiene el momento a flexión en nudo inicial, el momento a flexión en nudo final y el momento de torsión en el nudo final.

**Tabla 18.2** Deformaciones y fuerzas en los elementos

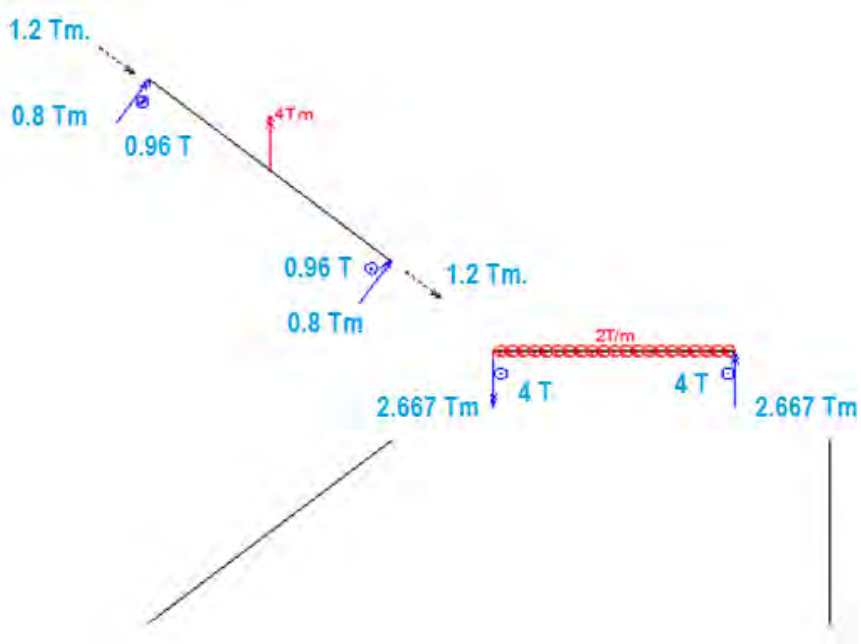
| Elemento | Deformaciones | Cargas |
|---|---|---|
| | $p^{(i)} = A^{(i)}\ q$ | $P^{(i)} = k^{(i)}\ p^{(i)}$ |
| **1** | $p^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.0048 \\ -0.0018 \\ -0.0060 \end{bmatrix}$ | $P^{(1)} = \begin{bmatrix} -7.2356 \\ -5.2866 \\ -1.3082 \end{bmatrix}$ |
| **2** | $p^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.0048 \\ 0.0018 \\ 0.0012 \end{bmatrix}$ | $P^{(2)} = \begin{bmatrix} -4.9599 \\ -0.6982 \\ 0.2660 \end{bmatrix}$ |
| **3** | $p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0060 \\ -0.0038 \\ -0.0078 \end{bmatrix}$ | $P^{(3)} = \begin{bmatrix} 6.5933 \\ -1.2976 \\ -2.1467 \end{bmatrix}$ |
| **4** | $p^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.0079 \\ -0.0029 \\ -0.0038 \end{bmatrix}$ | $P^{(4)} = \begin{bmatrix} 13.8267 \\ 2.1467 \\ -1.3694 \end{bmatrix}$ |

A continuación se indican los momentos encontrados en cada uno de los elementos, de acuerdo al sistema $P - p$ mostrado en la figura 18.12. Con estos valores se realiza el equilibrio en cada elemento, con los momentos de flexión se encuentran los cortantes por equilibrio.




**Solución del Problema Complementario**

La solución total es igual a la suma del Problema Primario más el Problema Complementario. El Problema Primario son las acciones de empotramiento perfecto que se indica a continuación.




**Problema Primario**

La suma algebraica del Problema Primario más el Problema Complementario se indica a continuación. Se deja al lector la comprobación del equilibrio de los nudos.

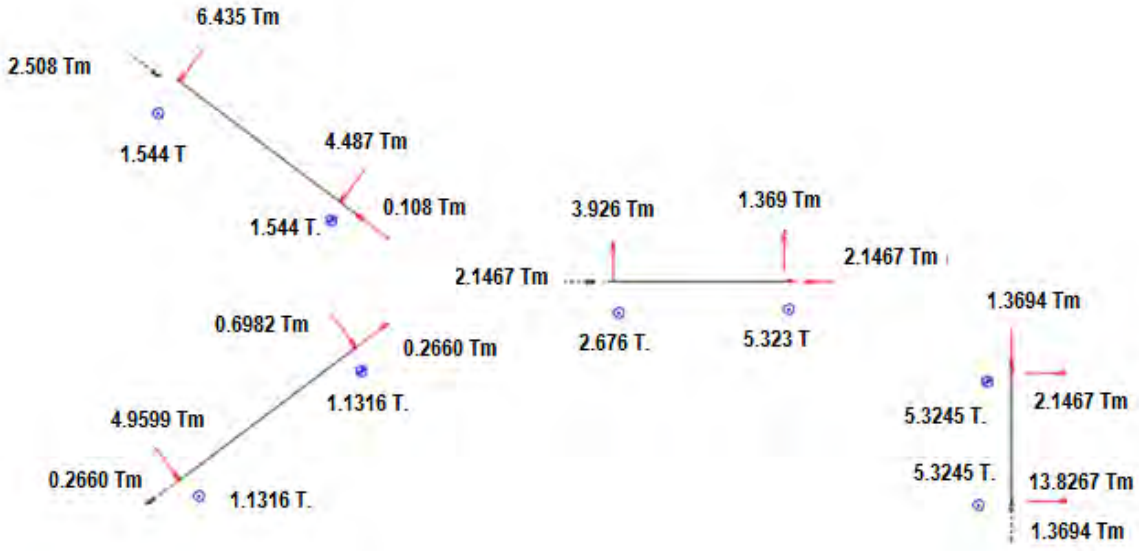



**Figura 18.13** Solución Final

## 18.3 MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES

Para poder aplicar el ensamblaje directo de la matriz de rigidez, se debe encontrar la matriz de rigidez de un elemento de la malla espacial, en coordenadas locales y en coordenadas globales. Esto se lo obtiene con las matrices de paso $\boldsymbol{T}_{1-2}$ y $\boldsymbol{T}_{2-3}$, igual que en pórticos planos y armaduras planas.

### 18.3.1 Matriz de rigidez en coordenadas locales

A la izquierda de la figura 18.14 se presenta el sistema 1, con el cual se trabajó en el apartado anterior; en este sistema no se consideran los desplazamientos como cuerpo rígido. A la derecha se indica el sistema 2 que corresponde a las Coordenadas locales. Únicamente por didáctica se han llamado sistemas $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ a las coordenadas del sistema 1 y $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$ a las coordenadas locales.

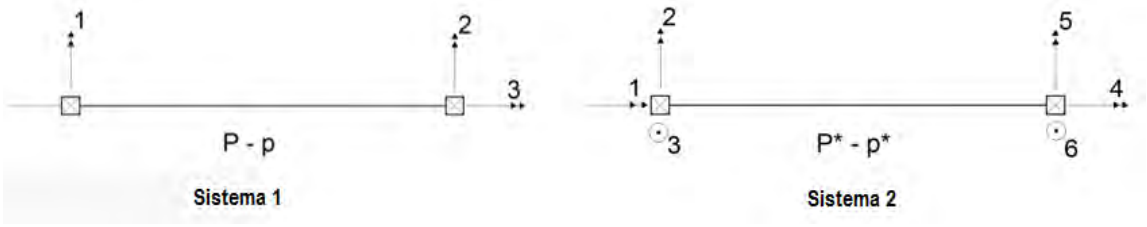



**Figura 18.14** Sistemas 1 y 2 para un elemento de una malla espacial.

No está por demás indicar que $P_1^*$ es el momento de torsión en el nudo inicial, positivo si es horario; $P_2^*$ es el momento de flexión en el nudo inicial, positivo si es horario; $P_3^*$ es el cortante en el nudo inicial, positivo si va hacia arriba; $P_4^*, P_5^*, P_6^*$ similar pero en el nudo final.

Se define la matriz de paso del sistema 1 al sistema 2, de la siguiente manera.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T_{1-2}}\, \boldsymbol{p}^*$$

Se deja al lector que deduzca la matriz de paso, que resulta.

$$\boldsymbol{T_{1-2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 1 & \frac{1}{L} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea $\boldsymbol{k}_2$ la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales, la misma que se halla con la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{k_2} = \boldsymbol{T_{1-2}}^t\, \boldsymbol{k_1}\, \boldsymbol{T_{1-2}}$$

$$\boldsymbol{k_2} = \begin{bmatrix} \frac{Gj}{L} & 0 & 0 & \frac{Gj}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{Gj}{L} & 0 & 0 & \frac{Gj}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \qquad (18.4)$$

El significado de las variables ha sido ya definido. Se destaca que no se considera el efecto de corte en la ecuación (18.4).

### 18.3.2 Matriz de rigidez en coordenadas globales

Para un elemento en sentido X, como el mostrado a la derecha de la figura 18.14, las

coordenadas locales y globales son iguales; para un elemento inclinado, en el plano horizontal, como el presentado en la figura 18.15 ya son diferentes.

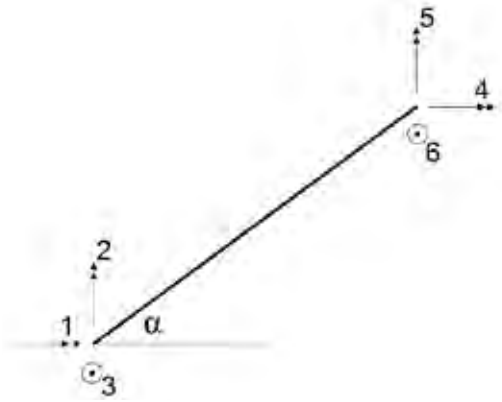



**Figura 18.15** Coordenadas globales para un elemento inclinado en el plano horizontal.

Se deja al lector la deducción de la matriz de paso de coordenadas locales a globales, que es la siguiente.

$$\boldsymbol{T_{2-3}} = \begin{bmatrix} Cos\,\alpha & Sen\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Sen\,\alpha & Cos\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cos\,\alpha & Sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Sen\,\alpha & Cos\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $\boldsymbol{k_3}$ la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales, que se encuentra con la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{k_3} = \boldsymbol{T_{2-3}}^t\, \boldsymbol{k_2}\, \boldsymbol{T_{2-3}}$$

$$\mathbf{k_3} = \begin{bmatrix} \frac{G\dot{j}}{L}Cx^2 + \frac{4EI}{L}Cy^2 & \left(\frac{G\dot{j}}{L} - \frac{4EI}{L}\right)CxCy & \frac{6EI}{L^2}Cy & -\frac{G\dot{j}}{L}Cx^2 + \frac{4EI}{L}Cy^2 & -\frac{G\dot{j}}{L}Cy & -\frac{6EI}{L^2}Cy \\ \left(\frac{G\dot{j}}{L} - \frac{4EI}{L}\right)CxCy & \frac{G\dot{j}}{L}Cy^2 + \frac{4EI}{L}Cx^2 & -\frac{6EI}{L^2}Cx^2 & -\left(\frac{G\dot{j}}{L} + \frac{2EI}{L}\right)CxCy & -\frac{G\dot{j}}{L}Cy^2 + \frac{2EI}{L}Cx^2 & \frac{6EI}{L^2}Cx \\ \frac{6EI}{L^2}Cy & -\frac{6EI}{L^2}Cx^2 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2}Cy & -\frac{6EI}{L^2}Cx & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{G\dot{j}}{L}Cx^2 + \frac{4EI}{L}Cy^2 & -\left(\frac{G\dot{j}}{L} + \frac{2EI}{L}\right)CxCy & \frac{6EI}{L^2}Cy & \frac{G\dot{j}}{L}Cx^2 + \frac{4EI}{L}Cy^2 & \left(\frac{G\dot{j}}{L} - \frac{4EI}{L}\right)CxCy & -\frac{6EI}{L^2}Cy \\ -\frac{G\dot{j}}{L}Cy & -\frac{G\dot{j}}{L}Cy^2 + \frac{2EI}{L}Cx^2 & -\frac{6EI}{L^2}Cx & \left(\frac{G\dot{j}}{L} - \frac{4EI}{L}\right)CxCy & \frac{G\dot{j}}{L}Cy^2 + \frac{4EI}{L}Cx^2 & \frac{6EI}{L^2}Cx \\ -\frac{6EI}{L^2}Cy & \frac{6EI}{L^2}Cx & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}Cy & \frac{6EI}{L^2}Cx & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$C_x = \cos\alpha \qquad C_y = sen$$

## 18.4 PROGRAMAS DE *CEINCI-LAB* PARA MALLAS

Una buena parte de los programas utilizados para resolver Pórticos Planos, se utilizan para resolver Mallas Espaciales. Los nuevos programas que se requieren son.

- ***[K3]=kmiembro_malla(b,h,L,E,seno,coseno)***

Determina la matriz de rigidez de un elemento de una malla espacial en coordenadas globales, $k_3$ considera el efecto del corte. Los datos de entrada son.

| | |
|---|---|
| ***b,h*** | Son la base y la altura de la sección transversal de un elemento. |
| ***L*** | Longitud del elemento. |
| ***E*** | Es el módulo de elasticidad del material. |
| ***seno*** | Es el seno del ángulo $\alpha$ |
| ***coseno*** | Es el coseno del ángulo $\alpha$. |

- ***[K]=krigidez_malla(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E)***

El programa ***krigidez_malla*** encuentra la matriz de rigidez de la estructura $K$, por ensamblaje directo. Los datos de entrada del programa son los mismos que para pórticos planos. Únicamente para tener completo se vuelve a repetir.

| | |
|---|---|
| ***ngl*** | Número de grados de libertad de la estructura. |
| ***ELEM*** | Matriz que contiene la base y la altura de los elementos de la Malla Espacial. |
| ***L*** | Vector con las longitudes de los elementos de la Malla Espacial. |
| ***seno*** | Vector que contiene los senos del ángulo $\alpha$ de cada elemento de la Malla Espacial. |
| ***coseno*** | Vector que contiene los cosenos del ángulo $\alpha$ de cada elemento de la Malla. |
| ***VC*** | Matriz con los vectores de colocación de cada elemento de la Malla. |
| ***E*** | Módulo de elasticidad del material. |

- ***[Q,Q2]=cargas_malla(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos)***

El vector de cargas generalizadas $Q$ se encuentra con el programa ***cargas_malla***, los datos de entrada son:

| | |
|---|---|
| ***njc,nmc*** | Número de nudos y elementos cargados. |
| ***ngl,L,seno*** | Número de grados de libertad; vector con longitudes y vector con seno de $\alpha$. |
| ***coseno*** | Vector con el coseno de $\alpha$ de todos los elementos de la malla espacial. |
| ***CG,VC*** | Matrices con las coordenadas generalizadas y vectores de colocación. |
| ***F*** | Matriz que contiene el nudo cargado, momento en sentido X, momento en Y, y cortante. Positivos, de acuerdo al sistema de coordenadas generalizadas. |
| ***Fm*** | Matriz que tiene el número del elemento cargado, valor del momento actuante, código de carga, número de elementos con igual carga e incremento en la numeración de los elementos. Si el momento es uniforme distribuido el código es uno, si el usuario va a suministrar las acciones de empotramiento perfecto el código es 4. |
| ***datos*** | solo para código de carga igual a 4; contiene: momento de torsión en el nudo inicial, momento de flexión en nudo inicial, cortante en nudo final, momento de torsión en nudo final, momento de flexión en nudo final y cortante en nudo final. |

El programa reporta el vector de cargas $Q$ y la matriz que contiene las acciones de empotramiento perfecto de los elementos $Q2$

- ***[FF]=fuerzas_malla(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)***

Programa para hallar las cargas finales en los elementos en coordenadas locales. La matriz ***FF*** contienes para cada elemento: momento a torsión, flexión y corte en nudo inicial y final, respectivamente; son 6 cantidades por fila. Los datos de entrada son:

| | |
|---|---|
| ***ngl, ELEM*** | Número de grados de libertad y matriz con la base y altura de las vigas de la malla. |

| | |
|---|---|
| ***L, seno*** | Vectores con las longitudes y el valor de seno de $\alpha$, de cada elemento. |
| ***coseno*** | Vector con el coseno de $\alpha$ de cada elemento. |
| ***VC, E*** | Matriz con los vectores de colocación de los elementos y módulo de elasticidad. |
| ***q*** | Vector de coordenadas generalizadas, contiene giros y desplazamientos verticales. |
| ***Q2*** | Matriz con las acciones de empotramiento perfecto en coordenadas locales, halladas con el programa ***cargas_malla.*** |

- **EJEMPLO 6**

Presentar un programa de computación para resolver la malla espacial del Ejemplo 5 que se dibuja a continuación; las vigas son de 30/30 cm. El valor de $E = 2400000\frac{T}{m^2}$.

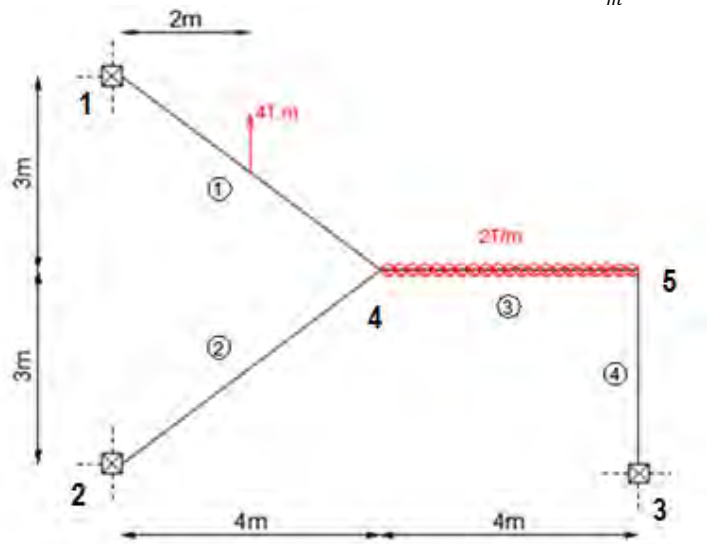



**Figura 18.16** Numeración de nudos y elementos de estructura de Ejemplo 6.

- **SOLUCIÓN**

```
% Programa Ejemp_6 de libro de Capitulo 18
nod=5;nr=3;RES=[1 1 1 1; 2 1 1 1; 3 1 1 1];
[CG,ngl]=cg (nod,nr,RES);
GEN=[1 1 4 0 0 0 0;2 2 4 0 0 0 0;3 4 5 0 0 0 0;4 3 5 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
NUDOS=[1 0.0 6.0 0 0 0 0;2 0.00 0.0 1 1 8 0;4 4.0 3.0 1 1 4.0 0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
% dibujo(X,Y,NI,NJ);
SECCION=[1 0.3 0.3 3 1];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
[VC]=vc(NI,NJ,CG)
E=2400000;
[K]=krigidez_malla(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
njc=0;F=0;nmc=2;Fm=[3 2 1 0 0;1 2 4 0 0];
datos=[1.2 0.8 -0.96 1.2 0.8 0.96];
[Q,Q2]=cargas_malla(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos)
q=K\Q
[FF]=fuerzas_malla(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)
```

Los resultados del Ejemplo 6, son los mismos que los del Ejemplo 5. Razón por la cual se

copia a continuación únicamente los momentos y fuerzas finales en coordenadas locales que reporta el programa ***fuerzas_malla*** esto se presenta en la tabla 18.3, se deja al lector la interpretación.

**Tabla 18.3** Momentos y Fuerzas en Coordenadas Locales

| Elemento | Nudo Inicial | | | Nudo Final | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Momento Torsión (Tm.) | Momento Flexión (Tm.) | Cortante (T.) | Momento Torsión (Tm.) | Momento Flexión (Tm.) | Cortante (T.) |
| 1 | 2.5080 | -6.4352 | 1.5445 | -0.1080 | -4.4872 | -1.5445 |
| 2 | -0.2659 | -4.9599 | 1.1319 | 0.2659 | -0.6995 | -1.1319 |
| 3 | 2.1463 | 3.9251 | 2.6764 | -2.1463 | 1.3694 | 5.3236 |
| 4 | 1.3694 | -13.8246 | 5.3236 | -1.3694 | -2.1463 | -5.3236 |

## 18.5 EJEMPLOS COMPLEMENTARIOS

- **EJEMPLO 7**

Seleccionar sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y sistema de coordenadas $\boldsymbol{P-p}$, para el sistema de coordenadas 1, para la malla espacial indicada en la figura 18.17, cuyos elementos son totalmente flexibles y determinar la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$, tal que $\boldsymbol{p = A\,q}$

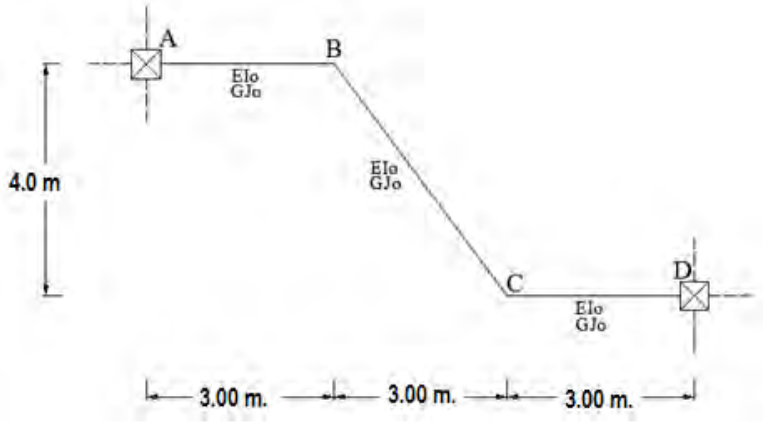



**Figura 18.17** Malla Espacial de Ejemplo 7

- **SOLUCIÓN**

A la izquierda de la figura 18.18 se indican los 6 grados de libertad que tiene la malla y a la derecha se presenta el sistema de coordenadas $\boldsymbol{P-p}$, en el sistema 1.

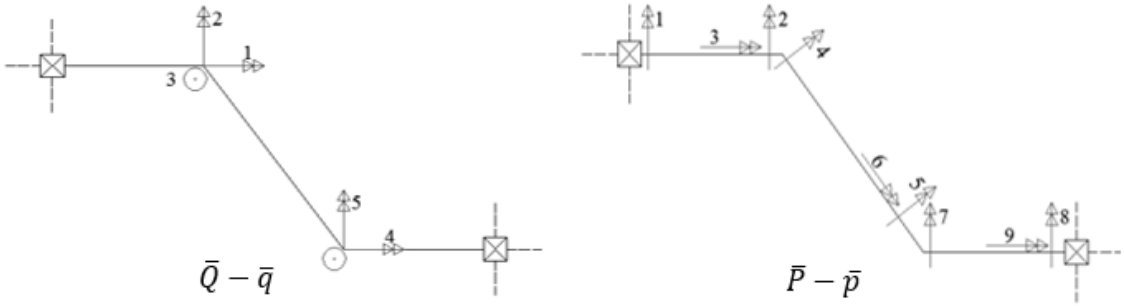


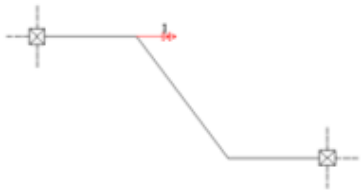

**Figura 18.18** Sistema de coordenadas de la estructura y de los elementos

Sea $\alpha$ el ángulo que forma el elemento inclinado en el nudo C. Tal que

$$sen\alpha = \frac{4}{5} \qquad cos\alpha = \frac{3}{5}$$

- **Primera columna de matriz $A$**

$$q_1 = 1 \; y \; q_i = 0, i \neq 1$$



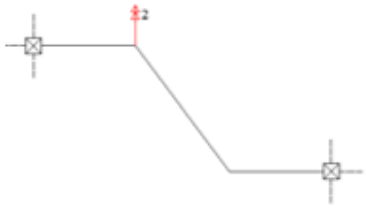
**Deformada elemental $q_1$**

Para el elemento inclinado, en el plano horizontal se debe descomponer el giro en una componente axial y una transversal.

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 1 \\ p_4 = \frac{4}{5} & p_5 = 0 & p_6 = -3/5 \\ p_7 = 0 & p_8 = 0 & p_9 = 0 \end{array}$$

- **Segunda columna de matriz $A$**

$$q_2 = 1 \; y \; q_i = 0, i \neq 2$$

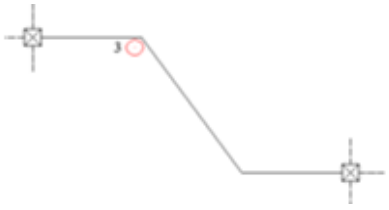


**Deformada elemental $q_2$**

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0 & p_2 = 1 & p_3 = 0 \\ p_4 = \frac{3}{5} & p_5 = 0 & p_6 = 4/5 \\ p_7 = 0 & p_8 = 0 & p_9 = 0 \end{array}$$

- **Tercera columna de matriz $A$**

$$q_3 = 1 \; y \; q_i = 0, i \neq 3$$



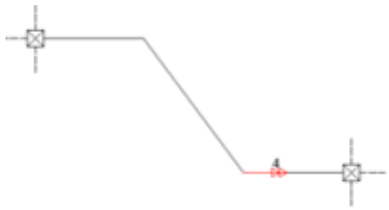
**Deformada elemental $q_3$**

$$p_1 = \frac{1}{3} \qquad p_2 = \frac{1}{3} \qquad p_3 = 0$$

$$p_4 = -\frac{1}{5} \qquad p_5 = -\frac{1}{5} \qquad p_6 = 0$$
$$p_7 = 0 \qquad p_8 = 0 \qquad p_9 = 0$$

- **Cuarta columna de matriz $A$**

$$q_4 = 1 \; y \; q_i = 0, i \neq 4$$

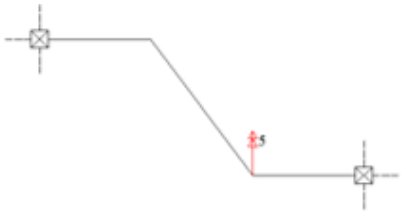


**Deformada elemental $q_4$**

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = 0$$
$$p_4 = 0 \qquad p_5 = \frac{4}{5} \qquad p_6 = \frac{3}{5}$$
$$p_7 = 0 \qquad p_8 = 0 \qquad p_9 = -1$$

- **Quinta columna de matriz $A$**

$$q_5 = 1 \; y \; q_i = 0, i \neq 5$$

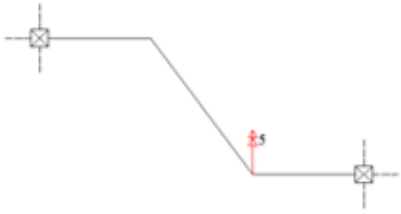


**Deformada elemental $q_5$**

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = 0$$
$$p_4 = 0 \qquad p_5 = \frac{3}{5} \qquad p_6 = -\frac{4}{5}$$
$$p_7 = 1 \qquad p_8 = 0 \qquad p_9 = 0$$

- **Sexta columna de matriz $A$**

$$q_6 = 1 \; y \; q_i = 0, i \neq 6$$



**Deformada elemental $q_6$**

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = 0$$
$$p_4 = \frac{1}{5} \qquad p_5 = \frac{1}{5} \qquad p_6 = 0$$
$$p_7 = -\frac{1}{3} \qquad p_8 = -\frac{1}{3} \qquad p_9 = 0$$

- **Matriz $A$**

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4/5 & 3/5 & -1/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & -1/5 & 4/5 & 3/5 & 1/5 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ A^{(1)} \\ \\ \\ A^{(2)} \\ \\ \\ A^{(3)} \end{array}$$

## 18.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

- **EJERCICIO N.- 1**

En la malla espacial, presentada a la izquierda de la figura 100, determinar la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$, si el sistema de coordenadas generalizadas se encuentra en la parte central y el sistema de deformaciones de los elementos a la derecha de la figura 18.19. Posteriormente calcular la matriz de rigidez de la estructura si $E = 2400000\ T/m^2$ y $G = 0.4\ E$.

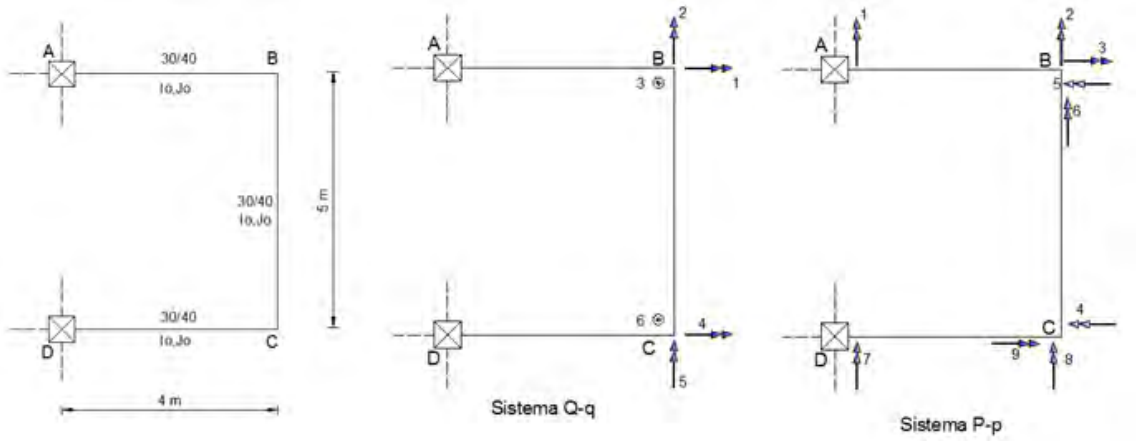



**Figura 18.19** Malla de Ejercicio 1.

- **EJERCICIO N.- 2**

El elemento AB es torsionalmente rígido y el elemento DC es transversalmente rígido, de la estructura indicada en la figura 18.20. Se pide seleccionar sistemas de coordenadas de y de elementos en sistema 1 y determinar la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$.

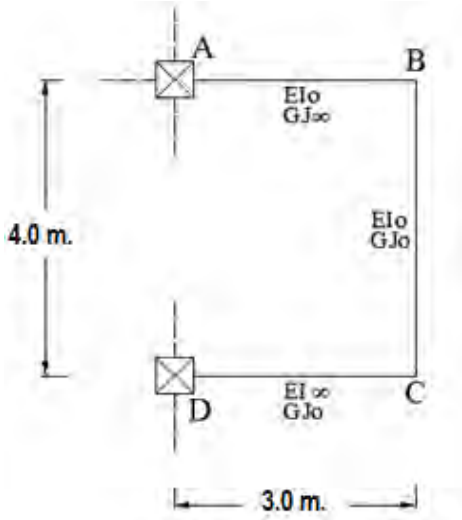



**Figura 18.20** Malla espacial con elemento torsionalmente rígido y transversalmente rígido.

- **EJERCICIO N.- 3**

Realizar el análisis estático de una bodega que solo tiene columnas en su periferia y se desea cubrir una luz de 10 m., en los dos sentidos como se observa en la figura 18.21. Las vigas en el tramo de 3 m., tienen altura variable de 60 cm., en el extremo a 40 cm., en el centro como se aprecia en la parte inferior de 18.21. Para el análisis en la luz de 3 m., considerar una viga de 40/50 cm.; las centrales que cubren una luz de 4 m., son de 40/40 cm.

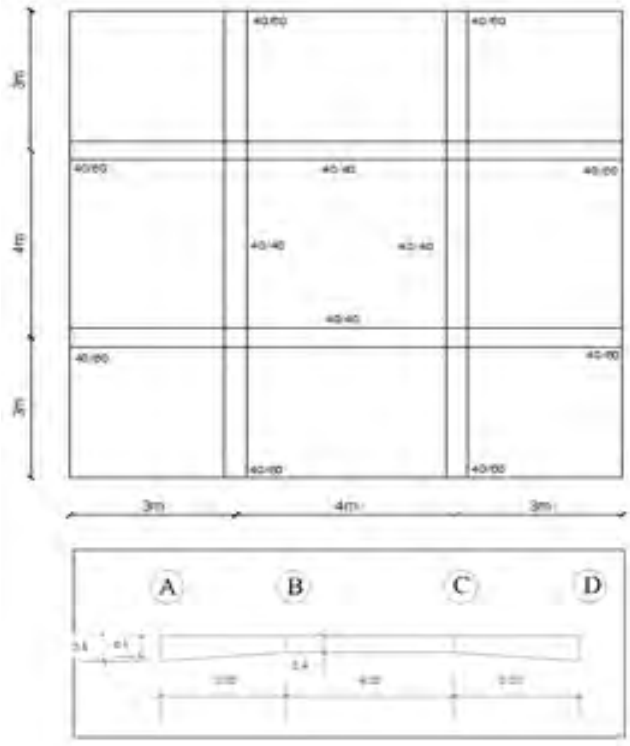



**Figura 18.21** Malla Espacial de una Bodega.

En la figura 18.22 se indica el modelo de cálculo y las cargas verticales que gravitan sobre las vigas. La armadura longitudinal de las vigas se anclará en las vigas de la periferia que no se han dibujado para que exista empotramiento. En la figura 18.23 se indica la numeración de los nudos y

elementos de la malla y en la figura 18.24 los grados de libertad.

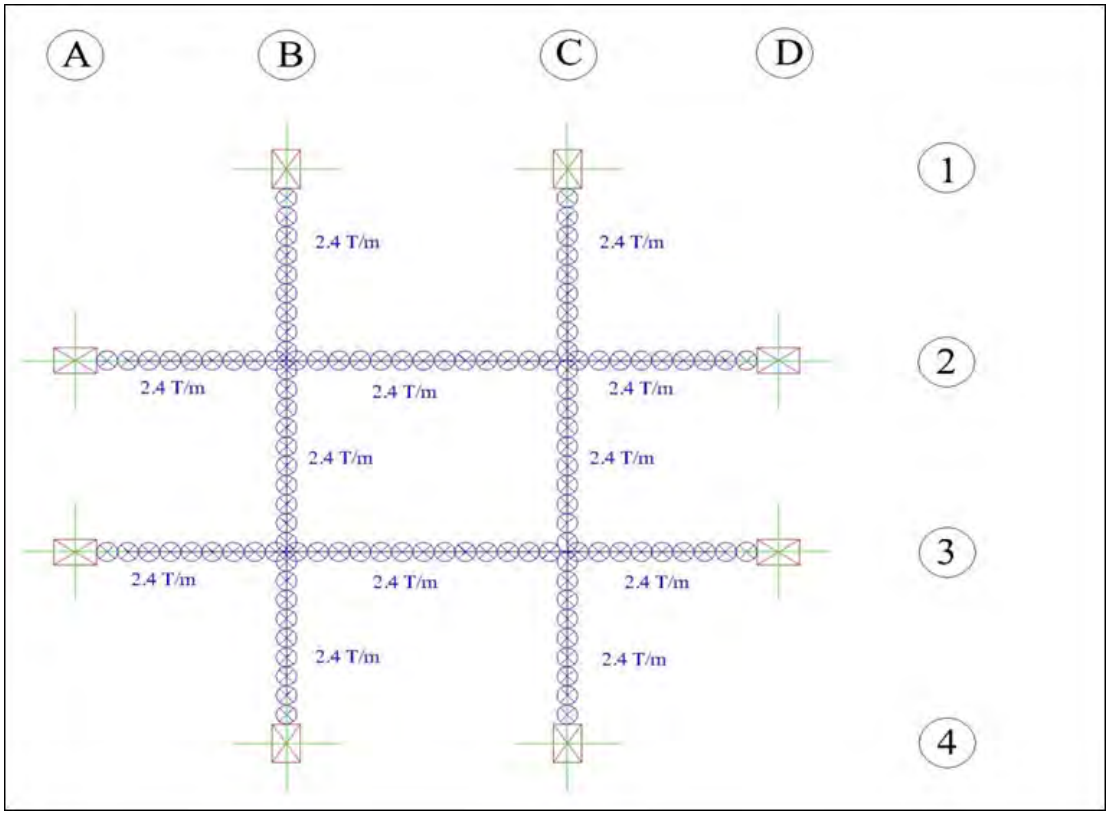



**Figura 18.22** Modelo y cargas verticales.

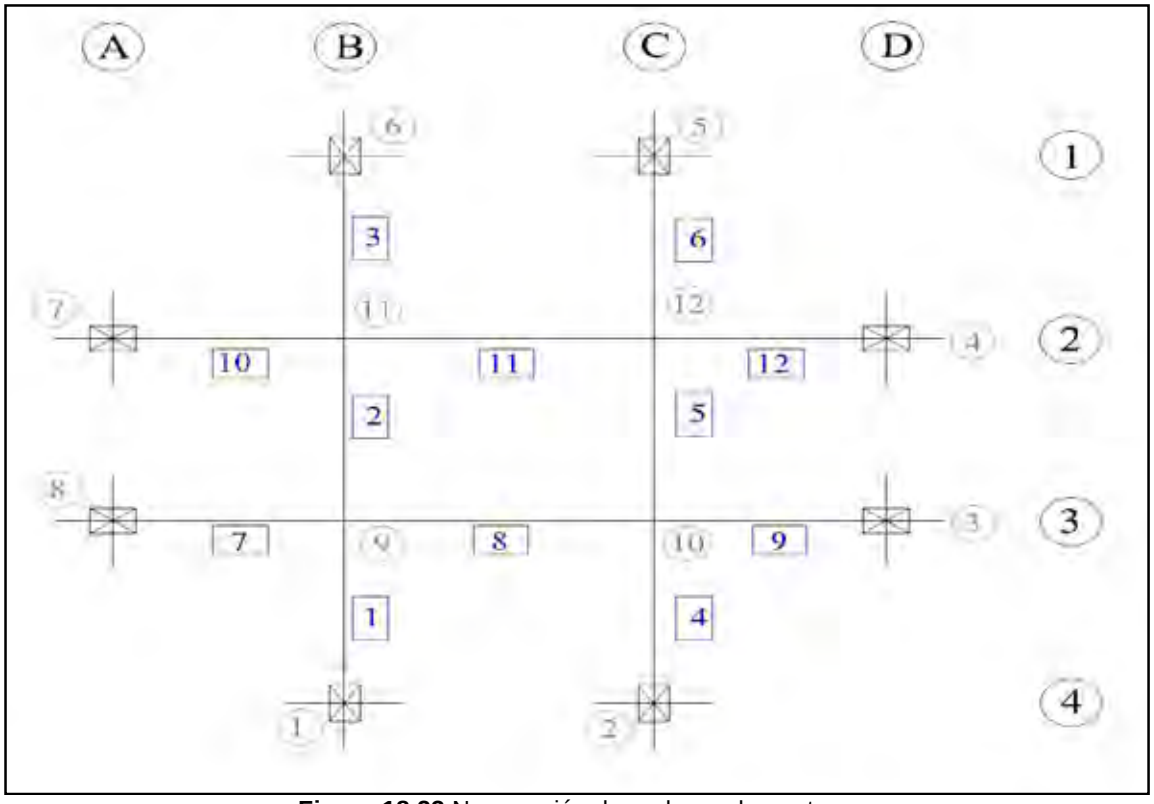



**Figura 18.23** Numeración de nudos y elementos.

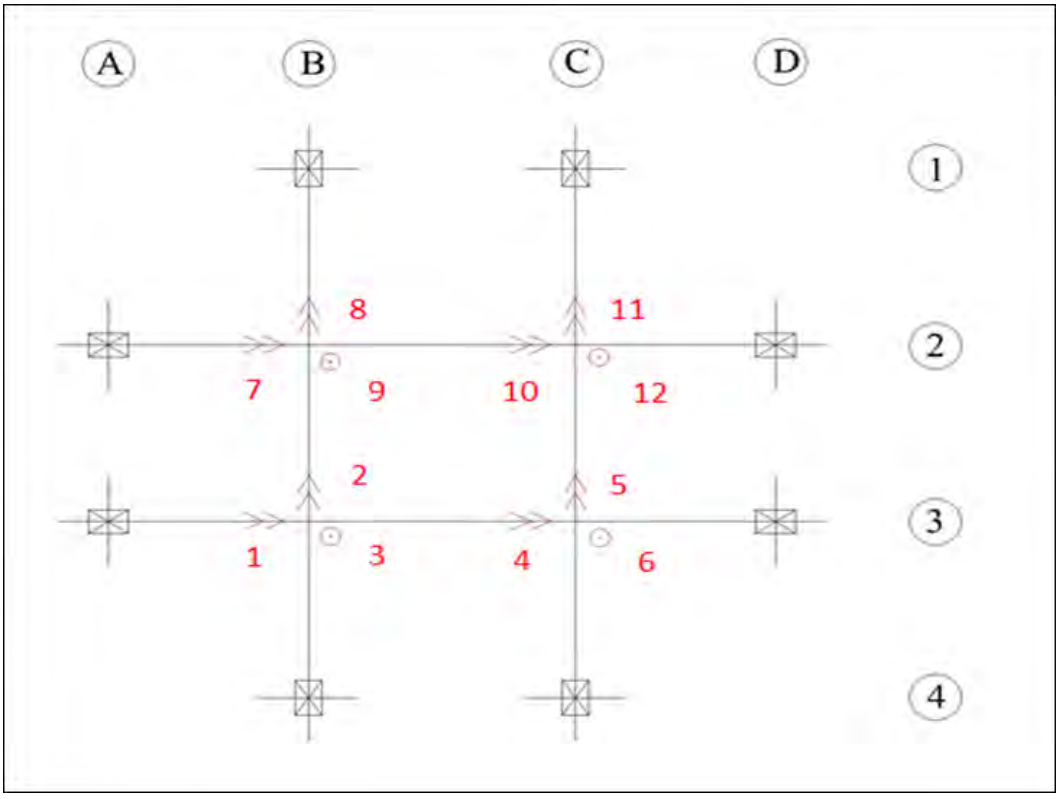



**Figura 18.24** Grados de libertad de la Malla.

Calcular con un módulo de elasticidad de $E = 1800000\ T/m^2$. Los resultados en términos de fuerzas y momentos en los extremos de los elementos se indican en la figura 18.25. Utilizar la librería de programas de ***CEINCI-LAB.***

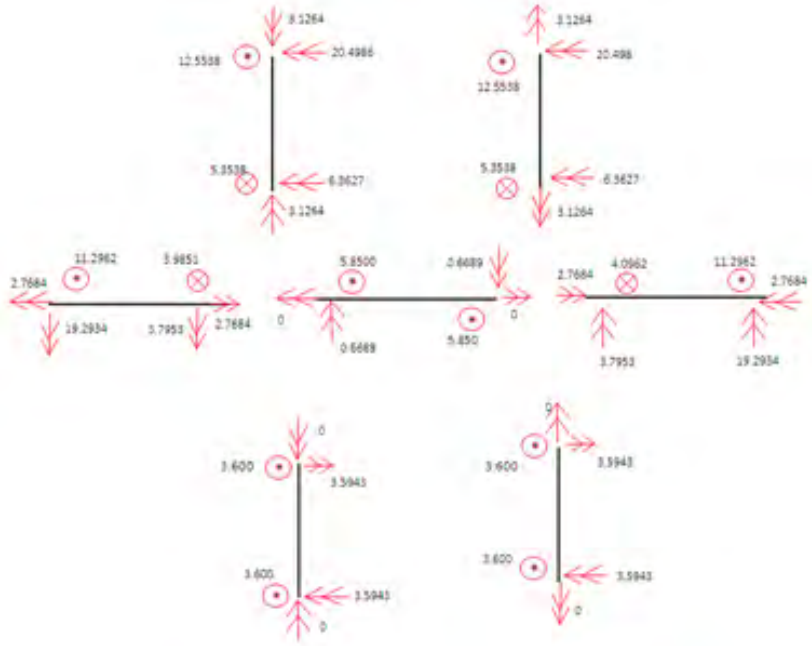


**Figura 18.25** Resultados en términos de fuerzas y momentos en los elementos.

# CAPITULO 1

## 1. COORDENADAS GENERALIZADAS Y GRADOS DE LIBERTAD

1.1 DEFINICIONES ESTRUCTURALES……1

1.1.1 Vínculos……1

1.1.2 Elementos……3

1.1.3 Juntas o Nudos……4

1.1.4 Estructura……6

1.2 DEFINICIONES DE MECÁNICA……6

1.2.1 Coordenadas generalizadas……6

1.2.2 Números de grados de libertad……8

1.2.3 Sistemas deformables……8

1.3 GRADOS DE LIBERTAD EN UNA ESTRUCTURA……9

1.3.1 Clases de estructuras……9

1.3.2 Pórticos planos con elementos flexibles……9

1.3.3 Deformadas Elementales……11

1.3.4 Pórtico plano con elementos axialmente rígidos……11

1.3.5 Pórtico plano con elementos transversalmente rígidos……14

1.3. 6 Pórtico plano con elementos totalmente rígidos……16

1.4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN……17

1.5 EJERCICIOS PROPUESTOS……27

# CAPITULO 2

## 2. SISTEMA DE CARGAS Y COORDENADAS GENERALIZADAS

2.1 COORDENADAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA……29

2.1.1 Vector de coordenadas generalizadas……29

2.1.2 Coordenadas generalizadas ortogonales……30

2.1.3 Coordenadas generalizadas no ortogonales……31

2.1.4 Coordenadas absolutas y relativas……34

2.2 CARGAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA……37

2.2.1 Hipótesis considerada……37

2.2.2 Sistema Q – q……39

2.2.3 Solución general del problema……40

2.2.4 Problema primario ……41

2.2.5 El problema complementario……41

2.3 DESPLAZAMIENTO DE LOS ELEMENTOS……44

2.4 EJERCICIOS RESUELTOS……47

2.5 EJERCICIOS PROPUESTOS……57

## CAPITULO 3

### 3. FUNCIONES DE FORMA O DE INTERPOLACIÓN

3.1 ORDENADAS DE LA ELASTICA……59

3.2 PRIMERA FORMA DE CÁLCULO: RESISTENCIA DE MATERIALES……60

3.2.1 Efecto de $u_1$ en la ordenada de la elástica……60

3.2.2 Efecto de $v_1$ en la ordenada de la elástica……62

3.2.3 Efecto de $\theta_1$ en la ordenada de la elástica……64

3.2.4 Resumen de funciones de forma para sección constante……66

3.3 SEGUNDA FORMA DE CÁLCULO: INTERPOLACIÓN……66

3.3.1 Problema axial: Cálculo de $\emptyset_1\ (\boldsymbol{x})$……67

3.3.2 Problema de flexión: Forma clásica……67

3.3.3 Matriz de rigidez en coordenadas locales……69

3.4 TERCERA FORMA DE CÁLCULO……70

3.4.1 Cálculo de $Ø_4(x)$ .....71

3.4.2 Cálculo de $Ø_5(x)$ y $Ø_6(x)$ .....71

3.4.3 Resumen de las ordenadas de la elástica.....72

3.5 INTRODUCCIÓN A LOS ELEMENTOS FINITOS.....72

3.5.1 Funciones de forma en un elemento finito lineal de dos nudos.....73

3.5.2 Cálculo de la matriz de rigidez de miembro.....74

3.5.3 Elemento finito lineal de 3 nudos.....75

3.6 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE FORMA.....77

3.6.1 Cálculo de momentos de empotramiento.....77

3.6.2 Cálculo de cortantes de empotramiento.....78

3.6.3 Cálculo de la fuerza axial de empotramiento.....79

3.6.4 Forma directa de encontrar las acciones de empotramiento perfecto.....80

3.6.5 Cálculo de las deflexiones.....86

3.7 APLICACIÓN A LA INGENIERÍA SISMORRESISTENTE.....91

3.7.1 Carga rectangular equivalente.....95

3.8 EJERCICIOS RESUELTOS.....96

3.9 EJERCICIOS PROPUESTOS.....106

**CAPITULO 4**

**4. VECTOR DE CARGAS GENERALIZADAS Q**

4. 1 PROBLEMA PRIMARIO Y COMPLEMENTARIO.....109

4.1.1. Introducción.....109

4.1.2 Problema primario.....110

4.1.3 Problema complementario.....111

4.2 TRABAJOS VIRTUALES.....124

4.3 EJERCICIOS RESUELTOS.....128

4.4 EJERCICIOS PROPUESTOS.....156

## CAPITULO 5

### 5. RELACIÓN ENTRE DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

5. 1 CAMBIO DE COORDENADAS.....159

5.2 PUNTO DE VISTA GEOMÉTRICO.....160

5.2.1 Relación entre dos sistemas de coordenadas generalizadas.....160

5.2.2 Relación entre dos sistemas de Cargas Generalizadas.....163

5.3 PUNTO DE VISTA ESTÁTICO.....165

5.3.1 Relación entre dos sistemas de cargas.....165

5.3.2 Relación entre dos sistemas de desplazamientos.....169

5.3.3 Relación entre $T$ y $T_1$.....171

5.4 RELACIÓN ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS NO GENERALIZADAS.....171

5.4.1 Relación $\overline{q}_{ng} = \overline{T}\,\overline{q}$.....171

5.4.2 Relación $Q = T^t Q_{ng}$.....172

5.5 CALCULO DEL VECTOR $Q$ POR MEDIO DE LA MATRIZ $T$.....172

5.5.1 Matriz $T_{2-3}$.....172

5.5.2 Cálculo de $Q$ orientado al ordenador.....174

5.5.2.1 Caso de cargas en las juntas.....175

5.5.2.2 Caso de cargas en los elementos.....177

5.6 EJERCICIOS RESUELTOS.....181

5.7 EJERCICIOS PROPUESTO.....210

## CAPITULO 6

### 6. RELACIÓN ENTRE CARGAS Y DESPLAZAMIENTOS GENERALIZADOS. ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES

6. 1 MATRIZ DE RIGIDEZ.....215

6.1.1 Relación entre Q–q……215

6.1.2 Características de la matriz de rigidez……218

6.2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD……220

6.2.1 Relación entre q – Q……220

6.2.2 Relación entre F y K……221

6.3 DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS……223

6.3.1 Deformaciones de un elemento……226

6.3.2 Cálculo mediante Trabajos Virtuales……233

6.3.3 Otro sistema de coordenadas del elemento……234

6.4 EJERCICIOS RESUELTOS……237

6.5 EJERCICIOS PROPUESTOS……240

## CAPITULO 7

### 7. MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UN ELEMENTO LINEAL

7. 1 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE UN ELEMENTO $f$……243

7.1.1 Forma general……243

7.1.2 Coeficiente de forma $\beta$……246

7.1.3 Elementos de sección constante considerando el efecto de corte……249

7.1.4 Elementos de sección constante sin considerar el efecto de corte……251

7.1.5 Elementos axialmente rígidos de sección constante……251

7.1.6 Elementos transversalmente rígidos……252

7.1.7 Relación fuerza deformación……252

7.1.8 Modelo de Giberson……253

7.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO k……253

7.2.1 Forma general……253

7.2.2 Elementos de sección constante considerando el efecto de corte……254

7.2.3 Elementos de sección constante sin considerar el efecto de corte……254

7.2.4 Elementos axialmente rígidos……254

7.2.5 Elementos transversalmente rígidos……255

7.2.6 Relación deformación fuerza……255

7.3 OBTENCIÓN DE $f$ Y $k$ UTILIZANDO LA MATRIZ $T$……256

7.3.1 Planteamiento del Problema……256

7.3.2 Solución del Problema……257

7.3.3 Cálculo de la matriz de rigidez usando la geometría……259

7.3.4 Cálculo de la matriz de flexibilidad usando la estática……261

7.3.5 Obtención de $k$ y $f$ cuando se cambia la numeración del sistema de coordenadas..263

7.4 FUNCIONES DE FORMA……265

7.4.1 Cálculo de $\emptyset\mathbf{1}(x)$ para un elemento de sección constante……265

7.4.2 Cálculo de $\emptyset\mathbf{2}(x)$ para un elemento de sección constante……266

7.4.3 Cálculo de $\emptyset\mathbf{3}(x)$ para un elemento de sección constante……266

7.5 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS……276

7.6 EJERCICIOS PROPUESTOS……283

## CAPITULO 8

### 8. MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UN ESTRUCTURA A PARTIR DEL CONCEPTO

8. 1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA $K$……285

8.1.1 Definición……285

8.1.2 Procedimiento de cálculo……285

8.1.3 Primera forma de cálculo numérico……286

8.1.4 Segunda forma de cálculo numérico……291

8. 2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE UNA ESTRUCTURA F……294

8.2.1 Definición……294

8.2.2 Procedimiento de cálculo……294

8.2.3 Principio de superposición……302

8. 3 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE UNA ESTRUCTURA.....306

8.3.1 Cálculo de la matriz de rigidez y de flexibilidad.....306

8.3.2 Regla práctica.....308

8. 4 EJERCICIOS RESUELTOS.....309

8. 5 EJERCICIOS PROPUESTOS.....318

## CAPITULO 9

### 9. MATRICES A y B

9. 1 RELACIÓN ENTRE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES.....321

9.1.1 Introducción.....321

9.1.2 Definición.....322

9.1.3 Matriz fuerza carga $A^t$.....322

9. 2 CÁLCULO DE LA MATRIZ $A$.....323

9.2.1 Pórticos Planos.....323

9.2.2 Armadura Plana.....338

9.2.3 Coordenadas *P – p* arbitrarias.....347

9.3 RELACIÓN ENTRE CARGAS GENERALIZADAS Y FUERZAS INTERNAS.....350

9.3.1 Introducción.....350

9.3.2 Definición.....350

9.3.3 Relación entre $B$ y $A$.....350

9.4 CÁLCULO DE LA MATRIZ B.....351

9.4.1 Coordenadas *P – p* usuales.....351

9.4.2 Coordenadas *P – p* arbitrarias.....360

9. 5 EJERCICIOS PROPUESTOS.....366

## CAPITULO 10

### 10. CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA POR MEDIO DE LA MATRIZ A

10. 1 FORMULACIÓN MATRICIAL.....371

10. 2 CÁLCULO DE $K$ TRABAJANDO CON SUBMATRICES.....374

10. 3 CÁLCULO DE $K$ CON CUALQUIER SISTEMA $P - p$.....383

10. 4 EDIFICIO DE CORTE.....388

10.5 EJERCICIOS RESUELTOS.....390

10.6 EJERCICIOS PROPUESTOS.....405

## CAPITULO 11

### 11. EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

11. 1 CONSIDERACIONES GENERALES.....409

11.1.1 Reseña Histórica.....409

11.1.2 Ideas generales del Método de los Desplazamientos.....410

11.1.3 Comentarios del Método de los Desplazamientos.....411

11.2 SISTEMAS CINEMATICAMENTE DETERMINADOS.....412

11.2.1 Indeterminación estática y cinemática.....412

11.2.2 Definición de la matriz A.....412

11.2.3 Procedimiento de solución.....413

11.3 SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES.....413

11.3.1 Método de Gauss.....413

11.3.2 Matriz Simétrica.....417

11.3.3 Sistema de ecuaciones simétricas bandeadas.....420

11.3.4 Otros métodos.....424

11.4 PÓRTICOS PLANOS.....426

11.4.1 Cargas solo en los nudos.....426

11.4.2 Cargas en los elementos.....431

11.4.3 Pórticos con elementos axialmente rígidos.....444

11.5 ARMADURAS PLANAS.....448

11.5.1 Cargas en los nudos.....448

11.5.2 Cargas en nudos y miembros……453

11.6 EJERCICIOS PROPUESTOS……457

## CAPITULO 12

### 12. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO AL USO DEL COMPUTADOR

12. 1 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE DE UN PÓRTICO PLANO……461

12.1.1 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales……461

12.1.2 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales……466

12.1.3 Matriz de rotación $T_{2-3}$ ……468

12. 2 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE DE UNA ARMADURA PLANA……469

12.2.1 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales……469

12.2.2 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales……471

12.3 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE O VARIABLE DE UN PÓRTICO……472

12.3.1 Sistema 1……472

12.3.2 Forma general de $k_2$ en coordenadas locales……474

12.3.3 Consideraciones del efecto de corte en un elemento de sección constante……475

12.4 DIAGRAMA DE MASAS ELASTICA……477

12.4.1 Definiciones y nomenclatura……477

12.4.2 Cálculo de $\alpha$……479

12.4.3 Cálculo de $\varepsilon$……479

12.4.4 Cálculo de $\alpha'$ ……480

12.5 EJERCICIOS RESUELTOS……481

12.6 ELEMENTO LINEAL CON DOS SECTORES DE RIGIDEZ INFINITA……486

12.7 ELEMENTO LINEAL CON INERCIA ESCALONADA……492

12.8 EJERCICIOS PROPUESTOS……493

## CAPITULO 13

### 13. ENSAMBLAJE DIRECTO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA

13. 1 MATRIZ DE COMPATIBILIDAD $A$.....495

13.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA.....499

13.3 ENSAMBLAJE DIRECTO.....500

13.4 EJERCICIOS RESUELTOS.....501

13.5 DIAGRAMA DE FLUJO.....516

13.6 EJERCICIOS PROPUESTOS.....518

## CAPITULO 14

### 14. SOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA PLANA ORIENTADA AL USO DEL COMPUTADOR

14. 1 ANTECEDENTES.....523

14.2 DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS.....524

14.3 ACCIONES DE LOS ELEMENTOS.....527

14.4 EJERCICIOS RESUELTOS.....528

14.5 EJERCICIOS PROPUESTOS.....537

## CAPITULO 15

### 15. ANALISIS ESTATICO CON CEINCI-LAB

15.1 ARMADURAS PLANAS.....542

15.1.1 Matriz de rigidez de un elemento.....542

15.1.2 Solución total de una armadura plana.....543

15.1.3 Reforzamiento de estructuras de acero.....550

15.2 PORTICOS PLANOS.....554

15.2.1 Matriz de rigidez de un elemento.....554

15.2.2 Solución de un Pórtico Plano.....556

15.2.3 Comentario de los Programas.....566

15.2.4 Cálculo de las Reacciones.....569

15.2.5 Estructuras con cargas puntuales.....571

15.2.6 Reforzamiento sísmico de estructuras.....574

# CAPITULO 16

## 16. CONDESACION ESTATICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

16.1 INTRODUCCION……580

16.2.1 Condensación a las coordenadas “a”……581

16.2.2 Condensación a las coordenadas “b”……582

16.2.3 Programa cg _ sismo……582

16.3 CONDENSACION MEDIANTE SOLUCION DE ECUACIONES……584

16.3.1 Caso en que $Q_b = 0$……584

16.3.2 Caso en que $Q_a = 0$……586

16.3.3 Coordenadas secundarias……586

16.4 CONDENSACION MEDIANTE ELIMINACION DE AGUAS……586

16.4.1 Triangularizacion de la matriz de rigidez……586

16.4.2 Programas para Condensación en CEINCI-LAB……587

16.5 MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL……588

16.6 SIGNIFICADO FISICO……590

16.7 ANALISIS CON NUDO RIGIDO……590

16.8 ANALISIS CON PISO FLEXIBLE……592

16.9 VARIABLES EN LA MODELACION……594

16.9.1 Modelación de las condiciones de apoyo……594

16.9.2 Modelación de las inercias……596

16.9.3 Modelación de los nudos……599

16.10 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS……599

16.11 EJERCICIOS PROPUESTOS……605

# CAPITULO 17

## 17. MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS DE PISO

17.1 DESCRIPCION DEL MODELO……607

17.2 HIPOTESIS DEL MODELO.....609

17.3 MATRIZ $K_E$.....609

17.4 SUBMATRICES DE KE.....616

17.5 CENTRO DE RIGIDEZ.....618

17.5.1 Análisis en Sentido X.....619

17.5.2 Análisis en Sentido Y.....619

17.6 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCION RIGIDEZ LATERAL.....621

17.7 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCION RIGIDEZ "t".....626

17.8 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCION RIGIDEZ DE PISO.....628

17.9 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS.....629

17.10 ESTRUCTURACION SISMICA.....637

17.11 EJERCICIOS PROPUESTOS.....639

## CAPITULO 18

### 18. MALLAS ESPACIALES

18.1 INTRODUCCION.....641

18.2 ESTUDIO EN SISTEMA 1 .....642

18.2.1 Matriz de compatibilidad A.....643

18.2.2 Matriz de rigidez.....652

18.2.3 Vector de cargas Q.....653

18.2.4 Métodos de los desplazamientos.....655

18.3 MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES.....665

18.3.1 Matriz de rigidez en coordenadas locales.....666

18.3.2 Matriz de rigidez en coordenadas globales.....666

18.4 PROGRAMAS DE CEINCI – LAB PARA MALLAS.....667

18.5 EJEMPLOS COMPLEMENTARIOS.....670

18.6 EJERCICIOS PROPUESTOS.....673

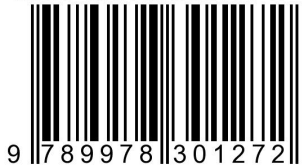
ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS

INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

DEPARTAMENTO
DE CIENCIAS DE LA
TIERRA Y LA CONSTRUCCIÓN

ISBN: 978-9978-301-27-2




Publicaciones Científicas