VICERRECTORADO DE INVESTIGACION, INNOVACION Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGIA

CENTRO DE POSGRADOS

MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCION DEL TITULO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

TEMA: DESCOMPOSICION GENETICA DE LA INTEGRAL DE LEBESGUE

AUTOR: CALDERON VALLE, ROBERTO DANIEL

DIRECTOR: CUEVA ALMEIDA, MARIO EDMUNDO

SANGOLQUI, 2018

VICERRECTORADO DE INVESTIGACION, INNOVACION Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGIA

CENTRO DE POSGRADOS

CERTIFICACION

Certifico que el trabajo de titulación **"Descomposición genética de la Integral de Lebesgue"** fue realizado por el señor **Calderón Valle, Roberto Daniel** el mismo que ha sido revisado en su totalidad, analizado por la herramienta de de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que los sustente públicamente.

Sangolquí, 19 de junio de 2018

Firma:

MSc. Mario Edmundo Cueva Almeida

CC: 1711572840

VICERRECTORADO DE INVESTIGACION, INNOVACION Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGIA

CENTRO DE POSGRADOS

AUTORIA DE RESPONSABILIDAD

Yo, **Calderón Valle, Roberto Daniel** con cédula de ciudadanía 1711622066, declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **Descomposición genética de la Integral de Lebesgue** es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Consecuentemente el contenido de la investigación es veraz

Sangolquí, 19 de junio de 2018

Firma:

MSc. Roberto Daniel Calderón Valle

CC: 1711622066

VICERRECTORADO DE INVESTIGACION, INNOVACION Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGIA

CENTRO DE POSGRADOS

AUTORIZACION

Yo, **Calderón Valle, Roberto Daniel** con cédula de ciudadanía 1711622066, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación **Descomposición genética de la Integral de Lebesgue** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad .

Sangolquí, 19 de junio de 2018

Firma:

MSc. Roberto Daniel Calderón Valle

CC: 1711622066

Índice

Índice de figuras

RESUMEN

En la malla curricular de todas las carreras de Ingeniería, consta la asignatura de Cálculo Integral y como parte medular de la misma, el concepto de Integral. Las aplicaciones de La Integral son innumerables en cualquier rama de las ingenierías mencionadas, sin embargo los estudiantes llegan a tener un conocimiento global de la operatividad de la integración pero no de sus aplicaciones inmediatas. Por ejemplo, en lo que a La Integral se refiere, a finales del siglo XIX surgió la idea de que la Integral de Riemann resultaba incompleta en relación a su comportamiento en los procesos de límite, básicamente porque una función Riemann-integrable debe ser definida en una colección de intervalos $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$ [3]. Debido a esta restricción parecía necesario reemplazarla por otro tipo de integral más versátil. Es así como surge la integral de Lebesgue, que a diferencia de Riemann, es definida en términos de una clase más amplia de funciones, las funciones medibles, las cuales se generalizan de las funciones simples. Esta innovación hace de la integral de Lebesgue más apropiada para tratar aplicaciones más avanzadas de matemática como es el área de trabajo de La Probabilidad [4]. La descomposición genética de la Integral de Lebesgue requiere la adquisición de conocimientos básicos de las matemáticas y bajo esta perspectiva, este tema se encuentra en una delgada línea entre la matemática elemental y la matemática avanzada, su desarrollo es abordado de manera "redundante" exclusivamente con el afán de explicar dichos conceptos en forma andragógica [1].

PALABRAS CLAVE:

- **UNION GENERALIZADA**
- **INTERSECCION GENERALIZADA**
- **MEDIDA**
- **FUNCION SIMPLE**

ABSTRACT

In the academic record of all engineer carrers we have the subject of Integral Calculus and like main topic: The Integral Concept. There are a plenty applications of Integral, nevertheless students know how to make integrals but without knowledge about the applications. For instance, if we talk about Integral, at the end of 20th century appeared the idea about Riemman's Integral was incomplete because basically a function of Riemann must be defined in collection of intervals $[a, b]$, with $a, b \in \mathbb{R}$. For that reason it was looked like necessary replace it by other type of integral; we talk about Lebesgue's integral. This Integral is defined for other kind of functions, measurable functions. This innovation makes Lebesgue's Integral more appropriate to solve advanced application of Math like Probabilities Field. The Genetic Desintegration of Lebesgue's Integration requires the acquisition of basics knowledge of math and it's too difficult see the difference between basic math advanced math. This development is "redundant"because this text will be so andragogic.

KEY WORDS:

- **GENERALIZED UNION**
- **GENERALIZED INTERSECCION**
- **MEASURE THEORY**
- **FUNCTION SIMPLE**

1. Descomposición genética

1.1. Definición

En primer lugar, cabe mencionar que es un término nuevo en comparación a los temas que aborda, a su vez se ha convertido en un tópico muy requerido para entender conceptos complejos, que la metodología tradicional no ha podido abordar con éxito, entendiéndose como éxito la comprensión cabal de un término matemático. La descomposición genética es la construcción del significado de un concepto en particular desde varios análisis sean estos: epistemológico, praxiológico, cognitivo y curricular.

Forma parte de la descomposición genética la explicación de todo concepto que involucra una temática, no axiomatizar absolutamante nada, así como tampoco dar por entendido ningún tópico. Forma parte de la descomposición o desintegración genética, el hallar nuevos mecanismos de aprendizaje no tradicionales con el único afán de explicar a detalle todo lo relacionado a algún tema en particular. Tal como puede notarse, la descomposición genética construye el conocimiento mas no lo aprehende de definiciones previas sino más bien se interioriza en el génesis de las partes constitutivas del conocimiento.

Casi al finalizar las primeras dos décadas del nuevo milenio, se dispone en el entorno de una innumerable cantidad de conocimiento y varias vías de obtención del mismo; libros digitales, aulas virtuales, facebook, whatsapp, youtube, skype que son entornos académicos más usados día a día para el aprendizaje, sin embargo para muchos son insuficientes para alcanzar el dominio de alguna temática en particular.

1.2. Ejemplo de descomposición genética

1.2.1. La multiplicación tradicional

Se toma una operación común como la que sigue. En el caso de la multiplicación de 86×8, se enseña:

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times \quad 8 \\ \hline \end{array}$$

8×6=48 se anota el 8 y se lleva 4, 8×8=64 y 4 que se llevaba, 68; el resultado es 688. Esta es la manera tradicional en la que se ha enseñado a multiplicar desde generaciones muy antiguas. El algoritmo tiene coherencia y se fundamenta en la multiplicación de valores absolutos; pero ¿qué hay de los valores relativos? Se puede verificar que es posible multiplicar valores relativos en lugar de los valores absolutos; así por ejemplo: el número 8 del 86 no significa 8 sino 80, por la posición que ocupa en el número. Así pues el algoritmo propuesto consiste en identificar que el número 86 está conformado por el 80 y por el 6; por lo tanto las multiplicaciones quedan 8×6=48 y 8×80=640.

El resultado final resulta de sumar todos los valores calculados, es decir

$$48 + 640{=}688$$

Ahora bien, se puede operar una multiplicación con números de más cifras. Aplicando el algoritmo tradicional, se verifica que:

$$\begin{array}{r} 387 \\ \times\ 264 \\ \hline 1548 \\ 2322 \\ 774 \\ \hline 102168 \end{array}$$

Sin embargo con el algoritmo alternativo se puede multiplicar valores relativos en lugar de valores absolutos como ya se mencionó con anterioridad. El número 387 consta de 300, 80 y 7. El número 264 consta de 200, 60 y 4. De este modo la operatividad de la multiplicación consiste en permutar todos los valores relativos; $200 \times 300 = 60000$; $200 \times 80 = 16000$; $200 \times 7 = 1400$;

$60 \times 300 = 18000$; $60 \times 80 = 4800$; $60 \times 7 = 420$; $4 \times 3000 = 12000$; $4 \times 80 = 320$; $4 \times 7 = 28$.

El resultado final es la suma de todos las valores calculados, es decir

$$60000+16000+1400+18000+4800+420+1200+320+28=102168$$

1.2.2. Descomposición genética de la multiplicación

En los 2 ejemplos anteriores se ha indicado la operatividad de la multiplicación de 2 números que poseen más de una cifra, sin analizar y definir previamente conceptos fundamentales para un estudiante de aritmética. La descomposición genética propuesta consiste en:

1. Definir todos los términos utilizados en la multiplicación.

    - **Cifra:** Es un signo simple que se representa de manera gráfica mediante un símbolo que en un sistema de numeración forma una cantidad. Así se tienen los números dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ o inclusive las letras del alfabeto $A, B, C, D, E, ...$, etc.
    - **Suma:** También llamada adición, es la operación matemática fundamental binaria que consiste en reunir varias cantidades en una sola; se representa con el signo $+$.
    - **Multiplicación:** Es la operación matemática fundamental binaria en un conjunto numérico que consiste en sumar un número tantas veces como indica otro número; se representa con el signo $\times$.
    - **Valor posicional:** Es el valor que toma un dígito de acuerdo con la posición que ocupa dentro del número (unidades, decenas, centenas, etc) y es debido a ello que el cambio de posición de un mismo dígito dentro de un número altera el valor del mismo.
    - **Propiedad Conmutativa de la multiplicación:** También llamada propiedad de orden de la multiplicación. Esta propiedad significa que los factores se pueden multiplicar en cualquier orden y que el producto siempre es el mismo.
    - **Propiedad Asociativa de la Adición:** La propiedad asociativa aparece en el contexto del álgebra. Esta propiedad indica que, cuando existen tres o más cifras en estas operaciones, el resultado no depende de la manera en la que se agrupan los términos.

2. Detallar la operatividad utilizada en la multiplicación

   La operatividad incluye:

   - En primer lugar debe verificarse que carece de importancia el orden en que se dispongan los números a multiplicar por la propiedad conmutativa de la multiplicación. En el caso del primer ejemplo que se menciona, 86×8 es exactamente equivalente a 8×86.
   - Aquí puede evidenciarse claramente el valor posicional de los números, puesto que el 8 del número de una cifra tiene un valor de 8 mientras que el 8 del 86 tienen un valor de 80.
   - La operatividad inicia reconociendo que el número 86 posee 2 cifras: el 8 ubicado en la columna de las decenas y el 6 en la columna de las unidades.
   - Es de destacar que el usuario del procedimiento conoce las tablas de multiplicar al menos hasta el 8; puesto que lo va a requerir para multiplicar $8 \times 6 = 48$, de tal forma que escriba el 8 en la columna de las unidades y *lleva*[1] 4.
   - Inmediatamente después el usuario del procedimiento multiplica $8 \times 8 = 64$ y adicionará el 4 de la anterior multiplicación; obteniendo un valor de 68 que escribe junto al 8 a la izquierda. Es decir el resultado total es de 688.

3. Mencionar ejemplos similares

   La operatividad incluye:

   - En primer lugar debe verificarse que carece de importancia el orden en que se dispongan los números a multiplicar por la propiedad conmutativa de la multiplicación. En el caso del segundo ejemplo que se menciona, 387×264 es exactamente equivalente a 264×387.
   - Aquí puede evidenciarse el valor posicional de los números puesto que en el número 387 el 7 tiene un valor de 7, el 8 tiene un valor de 80 y el 3 tiene un valor de 300.

[1] sumará en el resultado de la siguiente multiplicación

Mientras que en el número 264 el 4 tiene un valor de 4, el 6 tiene un valor de 60 y el otro 2 posee un valor de 200.

- La operatividad inicia reconociendo que el número 387 posee 3 cifras: el 7 ubicado en la columna de las unidades, el 8 en la columna de las decenas y el 3 en la columna de las centenas; y el 264 que posee al número 2 en la columna de las unidades, al número 6 en la columna de las decenas y al 2 en la columna de las centenas.
- El usuario del procedimiento conoce las tablas de multiplicar al menos hasta el 6; puesto que lo va a requerir para multiplicar $6 \times 8 = 48$, de tal forma que escriba el 8 en la columna de las unidades y *lleva*[2] 4.
- Inmediatamente después el usuario del procedimiento multiplica 4×7 igual 28 donde anota el 8 y lleva 2. Enseguida multiplica 4×8 igual a 32 sumando los 2 que llevaba dan 34 de donde anota el 4 y lleva 3; para finalmente multiplicar 4×3 igual 12 más 3 que llevaba igual 15.
- Posteriormente multiplica 6×7 igual 42 de donde anota el 2 y lleva 4, 6×8 igual 48 sumando el 4 igual a 52 de donde anota el 2 y lleva 5; finalmente multiplica 6×3 igual 18 más 5 que llevaba 23.
- Para finalizar, multiplica 2×7 igual 14 anota el 4 y lleva 1, continúa con 2×8, 16 más 1 que llevaba igual 17, anota el 7 y lleva 1 y finalmente $2 \times 3 = 6$ más 1 que llevaba igual 7.
- Ahora el problema se reduce a sumar los números generados $1548 + 2322 + 774 = 102168$.

4. Indicar potenciales aplicaciones

   - 86×8**:** En una construcción se requiere colocar 86 metros lineales de baldosa para completar las lavanderías de todas las casas. Si se conoce que cada metro de baldosa tiene un precio de 8 USD la operatividad explicada anteriormente es de gran utilidad.

[2] sumará en el resultado de la siguiente multiplicación

- 387×264**:** En una empresa de call center se contrataron 264 operadores con el salario básico como remuneración mensual. Luego del primer mes es necesario calcular el valor de egreso de la organización por concepto de salario para todos aquellos empleados. La operatividad explicada anteriormente es de gran utilidad.

2. Bases conceptuales de la Integral de Lebesgue

2.1. Unión generalizada de conjuntos

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, la unión generalizada se define por

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : (\exists i \in I)(x \in A_i)\}$$

Así por ejemplo, si $I = \mathbb{N}$ y $A_i = [0, i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $\bigcup_{i\in I} A_i = [0, +\infty)$

Con la unión generalizada de conjuntos puede establecerse dos mecanismos para definir a los números reales:

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{-n, n\} = \mathbb{R}$
- $\bigcup_{r\in\mathbb{R}} \{r\} = \mathbb{R}$

2.2. Intersección generalizada de conjuntos

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, la intersección generalizada se define por

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : (\forall i \in I)(x \in A_i)\}$$

Así por ejemplo, si $I = \mathbb{N}$ y $A_i = [0, i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $\bigcap_{i\in I} = \{0\}$

2.3. Numerabilidad

El término numerable posee un concepto claro y hasta axiomático si de lenguaje común se trata, pero si se trata como fundamento de la integral de Lebesgue, el término toma otras connotaciones. En primer lugar, el término "numerable" es exclusivo para conjuntos[3] y no para funciones como se verá más adelante. Por ejemplo, se define el conjunto C_i por:

[3] indexados o no

$$C_i = \begin{cases} (-i-1, -i); i \in \mathbb{N}, i\ es\ impar \\ (i, i+1); i \in \mathbb{N}, i\ es\ par \end{cases}$$

$C_1 = (-2, -1)$

$C_2 = (2, 3)$

$C_3 = (-4, -3)$

$C_4 = (4, 5)$

$C_5 = (-6, -5)$

$C_6 = (6, 7)$

Dado un conjunto A, se dice que es numerable sí y sólo si existe una $f : \mathbb{N} \mapsto A$, biyectiva. Así pueden notarse los siguientes conjuntos que son numerables:

- Los números Naturales son numerables mediante la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\mapsto \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

- Los números Pares son numerables mediante la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\mapsto \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

- Los números Impares con numerables mediante la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\mapsto \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

- Los números Enteros Positivos son numerables mediante la función

$$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}^+$$
$$n \mapsto f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, si\ n\ es\ par \\ \frac{-n+1}{2}, si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

- Los números racionales son numerables ya que existen tantos números naturales como fracciones de acuerdo con al árbol de Stern - Brocot [7].
- Los números reales no son numerables, lo cual fue demostrado por Cantor [2].

2.4. Función

El concepto más importante de la matemática tiene un papel protagónico en la descomposición genética de la Integral de Lebesgue, puesto que son funciones L-medibles[4] para las cuales ha sido diseñada esta integral. Se debe tener presente la siguiente definición:

Definición 2.1. *Dados dos conjuntos A y B, una función de A en B es un conjunto f que cumple:*

i) $f \subseteq A \times B$

ii) Para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$

iii) Si $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$. Se denota $f : A \mapsto B$ y si $(x, y) \in f$ se denota $f(x) = y$.

Por ejemplo, dados los conjuntos A, B, C con $C \subseteq A$ y $f : A \mapsto B$ es una función, se define la imagen directa de C por

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

[4]Lebesgue-medibles

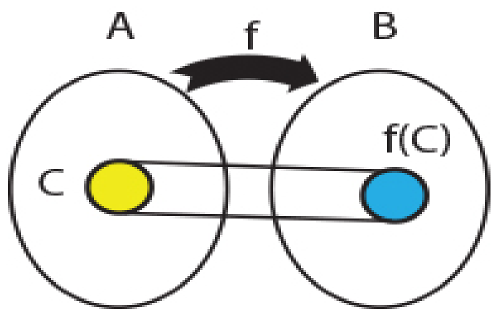

Figura 1: Ejemplo 1 de imagen directa

Por ejemplo, se tiene que si

$$f(0,2) \to (0,4)$$
$$x \to 2x$$

si definimos $C = (\frac{1}{2}, 1)$ entonces $f(C) = (1,2)$

De manera análoga sea $D = (1,2)$, se define la imagen inversa de D por

$$f^{-1}(D) = \{x : f(x) \in D\}$$

Por ejemplo si

$$f : [0,2] \to [0,5]$$
$$x \to 2x$$

entonces

$$f^{-1}[1,2] = [\tfrac{1}{2}, 1]$$

Se nota también que no existe $f^{-1}(5)$ pero $f^{-1}(\{5\}) = \emptyset$

Para tener una idea más clara se considera la función representada en la siguiente gráfica

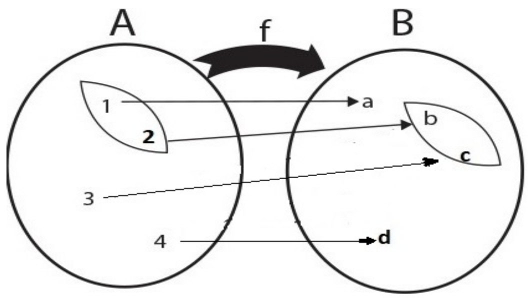

Figura 2: Ejemplo 2 de imagen directa

Se tiene que:

- Si $C = \{1, 2\}$ entonces $f(C) = \{a, b\}$
- Si $D = \{b, c\}$ entonces $g^{-1}(D) = \{2, 3\}$
- Si $E = \{c\}$ entonces $h^{-1}(E) = \{3\}$
- De manera análoga $\nexists f^{-1}(b)$

Proposición 2.1. *Propiedades de la Imagen directa e Imagen inversa*

Si $f : A \to B$ es una función, se pueden verificar las siguientes propiedades:

- $f(\emptyset) = \emptyset$.
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,

Además si $\{D_n\}_{n\in I}$ es una familia de subconjuntos de B, se tiene que

$$f^{-1}\big(\bigcup_{n\in I} D_n\big) = \bigcup_{n\in I} f^{-1}\big(D_n\big)$$
$$f^{-1}\big(\bigcap_{n\in I} D_n\big) = \bigcap_{n\in I} f^{-1}\big(D_n\big)$$

Finalmente, si $D \subseteq B$, entonces

$$f^{-1}(D)^c = [f^{-1}(D)]^c$$

2.5. Partes de E

El conjunto denominado partes de E o $\mathcal{P}(E)$ es el conjunto formado por todos los subconjuntos de E. Por ejemplo: Sea $A = \{a, b\}$ el conjunto de partes de A es,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

2.6. Álgebra de Partes

Definición 2.2. *Un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ es un álgebra de partes si:*

- *el conjunto $\emptyset$ y el conjunto E pertenecen a $\mathcal{A}$*
- *$\mathcal{A}$ es estable[5] al pasar al complementario: si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$*
- *$\mathcal{A}$ es estable por reunión finita y por lo tanto por intersección finita. Si A y B pertenecen a $\mathcal{A}$ entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ pertenecen a $\mathcal{A}$.*

2.7. σ-álgebras

Definición 2.3. *Una σ-álgebra o tribu $\mathcal{G}$ sobre un conjunto dado E, es un álgebra definida sobre E estable por reunión numerable y por intersección numerable. Más precisamente un subconjunto $\mathcal{G}$ de $\mathcal{P}(E)$ es una σ-álgebra si verifica las siguientes condiciones:*

- *$E \in \mathcal{G}$ y $\emptyset \in \mathcal{G}$*
- *Si $A \in \mathcal{G}$ entonces $A^c \in \mathcal{G}$*
- *para toda familia numerable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{G}$, se tienen*

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{G} \text{ y } \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{G}$$

[5] si un conjunto pertenece al álgebra de partes, su complemento también

Un conjunto E dotado de una σ-álgebra $\mathcal{G}$ se denomina espacio medible y se nota $(E, \mathcal{G})$. Los elementos de la σ-álgebra se denominan conjuntos σ-médibles [8].

De la definición se pueden generar dos σ-álgebras notables que son:

- $\mathcal{G} = \{E, \emptyset\}$, que se denomina trivial, y
- $\mathcal{G} = \mathcal{P}(E)$, denominada discreta.

Proposición 2.1. *Sea $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ una familia de σ-álgebras definidas sobre un conjunto E. Entonces la intersección definida por*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{G}_i = \{A \in P(E) : A \in \mathcal{G},\ para\ todo\ i \in I\} \textit{ es una } \sigma\textit{-álgebra}$$

En otras palabras si $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ son σ-álgebras sobre un espacio E entonces $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ también es una σ-álgebra sobre dicho espacio E [8].

Observación 2.1. *La unión indexada de una familia finita de σ-álgebras no es en general una σ-álgebra.*

En otras palabras si $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ son σ-álgebras sobre un espacio E entonces $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ no es una σ-álgebra sobre dicho espacio E [8].

2.8. Generación de σ-álgebras

Existen conjuntos que no son σ-álgebras sobre un espacio E, sin embargo pueden generar una σ-álgebra cumpliendo con los requisitos de la misma. Así se tiene el concepto de σ-álgebra engendrada.

Teorema 2.2. *Sea $C \in \mathcal{P}(E)$ un conjunto cualquiera de partes de E. La intersección de todas las σ-álgebras que contienen C, es una σ-álgebra que se denomina σ-álgebra engendrada o generada por C, que se denota como $\sigma(C)$. Esta es la más pequeña σ-álgebra que contiene C.*

Se puede visualizar el teorema en el siguiente ejemplo, sea $E = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{C} = \{\emptyset, E, \{a\}\}$, es notorio que $\mathcal{C}$ no es una σ-álgebra y que $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$ sí lo es.

Proposición 2.3. *Sea f una función de E en F y sea C un conjunto de partes de F. La imagen recíproca por f de la σ-álgebra $\sigma(C)$ engendrada por C es la σ-álgabra engendrada por la imagen recíproca de C.*

$$f^{-1}[\sigma(\mathcal{C})] = \sigma[f^{-1}(\mathcal{C})]$$

2.9. σ-álgebra de Borel

Sea E un espacio topológico; el álgebra generada por los abiertos de E se denomina la σ-álgebra de Borel o σ-álgebra Boreliana de E y se denota como $\mathcal{B}(E)$. Se denomina conjunto de Borel o conjunto Boreliano a un elemento de la σ-álgebra de Borel.

Observación 2.2. *Dado que toda σ-álgebra es estable por paso al complemento*[6]*, se tiene que la σ-álgebra de Borel de un conjunto E también es engendrada por los cerrados de E.*

Se pueden verificar algunos ejemplos de conjuntos generadores de σ- álgebra de Borel de $\mathbb{R}$:

- Los conjuntos unitarios son conjuntos borelianos dado que son cerrados.
- El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ son conjuntos borelianos puesto que son conjuntos cerrados.
- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, es un conjunto Boreliano. Esto se debe a que $\mathbb{Q}$ puede expresarse como la unión numerable de los unitarios de sus elementos.
- Los complementos de los conjuntos que se han mencionado son también Borelianos. Este es el caso de de los números irracionales $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ que también es un conjunto boreliano.

Cabe mencionar que si se define $\mathcal{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ se tiene que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Así se tiene que los intervalos abiertos generan la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Los siguientes conjuntos también generan esta σ-álgebra:

[6]Definición 4,2

$$\begin{cases} \{[a,b]; a < b\}. \\ \{(a,+\infty); a \in \mathbb{R}\}, \\ \{(-\infty,a); a \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

2.10. Espacios medibles

Definición 2.4. *Sean E un espacio y $\mathcal{G}$ una σ-álgebra sobre E, al par $(E,\mathcal{G})$ se le llama espacio medible y a los elementos de $\mathcal{G}$ se les denomina conjuntos $\mathcal{G}$- medibles o simplemente medibles [4].*

Por ejemplo, sea $E = \{a,b,c\}$ y $\mathcal{G} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{b,c\}\}$, el par $(E,\mathcal{G})$ es un espacio medible y $\{a\}, \{b,c\}$ son conjuntos medibles. Los conjuntos $\{b\}$ o $\{a,c\}$ son conjuntos no medibles, debido a que no forman parte de la σ-álgebra.

2.11. Funciones medibles

Definición 2.5. *Sean $(E,\mathcal{G})$ y $(F,\mathcal{H})$ espacios medibles entonces se define $f : E \mapsto F$ se dice que es una función $(\mathcal{G} - \mathcal{H})$ medible si la preimagen de todo conjunto $\mathcal{H}$-medible es $\mathcal{G}$-medible, es decir si*

$$B \in \mathcal{H} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$$

Por ejemplo si se toma

$E = \{a,b,c\}$	$F = \{y,z,w\}$
$\mathcal{G} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b,c\}\}$	$\mathcal{H} = \{\emptyset, F, \{y\}, \{z,w\}\}$

Se tiene que $(E,\mathcal{G})$ y $(F,\mathcal{H})$ son espacios medibles. Si se toma la función $f : E \mapsto F$ definida como se muestra en la siguiente figura

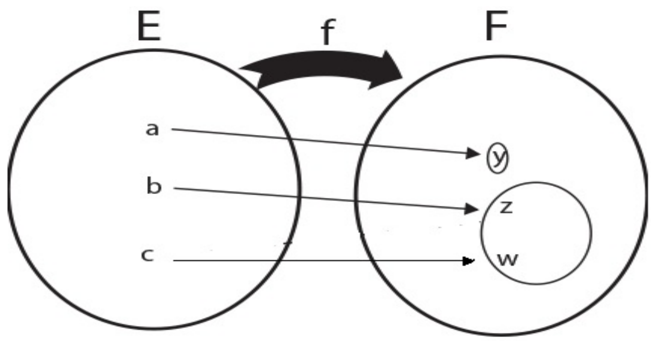

Figura 3: Ejemplo 1 de función medible

Se nota que

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{G}$
- $f^{-1}(F) = E \in \mathcal{G}$
- $g^{-1}(\{y\}) = \{a\} \in \mathcal{G}$
- $h^{-1}(\{z, w\}) = \{b, c\} \in \mathcal{G}$

Es decir la preimagen de todo elemento de $\mathcal{H}$ es elemento de $\mathcal{G}$ por lo tanto es una función $\mathcal{G} - \mathcal{H}$ medible.

Bajo estos mismos espacios, se toma la función $h : E \mapsto F$ descrita en la siguiente figura:

$E = \{a, b, c\}$ $\quad$ $F = \{x, y, w\}$

$\mathcal{G} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$ $\quad$ $\mathcal{H} = \{\emptyset, F, \{y\}, \{x, w\}\}$

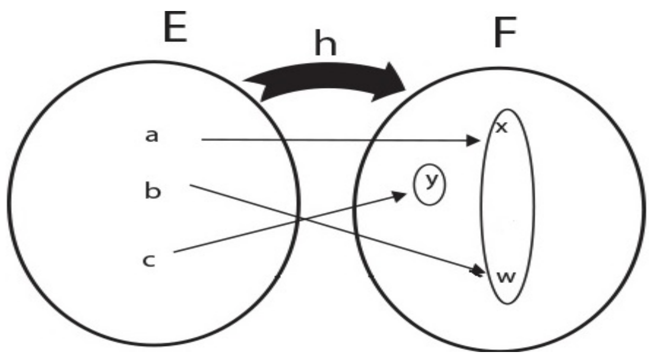

Figura 4: Ejemplo 2 de función medible

Para saber si la función es medible, se verifica que $f^{-1}(\{y\}) = \{c\}$; por lo tanto, h es una función NO medible porque $\{c\} \notin \mathcal{G}$.

Existen mecanismos para reconocer si una función es medible, analizando exclusivamente el conjunto que genera la σ-álgebra, así se tiene:

Teorema 2.4. *Sean $(E, \mathcal{G})$; $(F, \mathcal{H})$ espacios medibles y $\mathcal{C}$ un conjunto generador de la σ-ĺgebra $\sigma(\mathcal{C})$ tal que $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{C})$*

$f : E \to F$ una función, se tiene que f es una función medible si y sólo si la preimagen de todo conjunto $B \in \mathcal{C}$ es $\mathcal{G}$- medible, es decir

$$B \in \mathcal{C} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$$

Esta propiedad es útil dado que para verificar si una función es medible no es necesario comprobar la última implicación para todo elemento de la σ-álgebra, sino únicamente a los elementos del conjunto que la generan.

Teorema 2.5. *Sea $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible, $f : E \to \mathbb{R}$ es medible sí y sólo si, para todo $a \in \mathbb{R}$,*

$$\{f > a\} = \{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{G}$$

- $\{f < a\} = \{x \in E : f(x) < a\} \in \mathcal{G}$

- $\{f \geq a\} = \{x \in E : f(x) \geq a\} \in \mathcal{G}$
- $\{f \leq a\} = \{x \in E : f(x) \leq a\} \in \mathcal{G}$

Así se tiene que:

- Si f es continua, entonces es medible.
- Si f es monótona, entonces es medible.
- Si f es constante, entonces es medible.

2.12. Función característica

Sea E un conjunto y $A \subseteq E$, se define la función característica o función indicatriz a la función definida por:

$$f : E \mapsto \{0,1\}$$
$$x \mapsto \mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1; x \in A \\ 0; x \notin A \end{cases}$$

Por ejemplo se tiene que si $A = (1,2]$, entonces

$$f : E \mapsto \{0,1\}$$
$$x \mapsto \mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1; 1 < x \leq 2, \\ 0; x \leq 1 \vee x > 2. \end{cases}$$

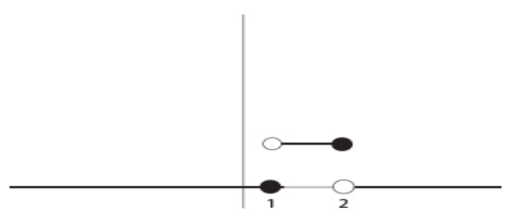

Figura 5: Función Indicatriz de $(1,2]$

Definición 2.6. *Sea E un conjunto y A, B subconjuntos de E, se tiene que*

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$$

Esta propiedad implica considerar la intersección de conjuntos como un producto, que era una noción ya adquirida en estadística.

Definición 2.7. *Sea $(E,\mathcal{G})$ un espacio medible con $A \subseteq E$, $\mathcal{X}_A$ es una función medible si y sólo si $A \in \mathcal{G}$ es un conjunto medible.*

Definición 2.8. *Sea $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible, se dice que una función es simple si toma exclusivamente una cantidad finita de valores. Además se dice que una función es simple-medible si es simple y medible simultáneamente [4].*

De esta definición se tiene que si f es una función simple, entonces existen conjuntos $\{A_1, ..., A_n\}$, que pueden notarse

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{X}_{A_k}(x), \text{ con } \alpha \text{ un escalar}$$

Por ejemplo, si f es la función que se presenta en la siguiente figura se tiene que

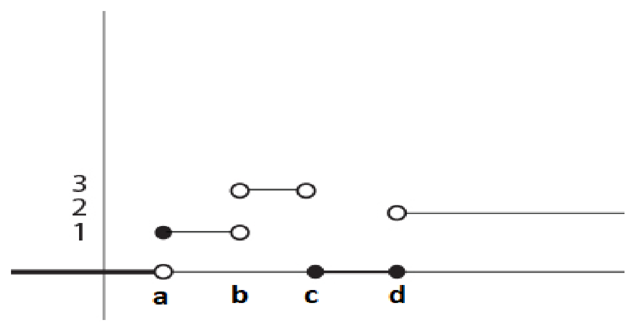

Figura 6: Sucesión de función indicatriz

$f(x) = 1\mathcal{X}_{A_1}(x) + 2\mathcal{X}_{A_2}(x) + 3\mathcal{X}_{A_3}(x)$
f es simple medible si y sólo si $A_1 = [a, b)$; $A_2 = (d, +\infty)$; $A_3 = (b, c)$

Por otro lado se tiene que $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{X}_{A_k}(x)$, donde A_k es un conjunto medible para todo $k \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.6. *Sea $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible, f una función medible no negativa, entonces existe una sucesión (φ_n) tal que:*

- φ_n *es simple medible para todo* $n \in \mathbb{N}$
- $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $x \in E$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$; *para todo* $x \in E$

2.13. Medida

Definición 2.9. *Sea $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible; una medida sobre $(E, \mathcal{G})$ es una función $\mu : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}^+$ que verifica las propiedades siguientes:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$*, debido a que* $\emptyset =]a, a[$ *no existiendo distancia entre "ambos" puntos.*

ii) *Para toda sucesión de elementos disjuntos* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{G}$ *se cumple*

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Esta propiedad se conoce como la σ*-aditividad de* μ *[13].*

La tripleta $(E, \mathcal{G}, \mu)$ se denomina espacio medido y para todo elemento A de $\mathcal{G}$ se denota la cantidad $\mu(A)$, la μ-medida de A. La medida del espacio es $\mu(E)$ y si $\mu(E) < +\infty$ se dice que tiene medida finita [4].

Proposición 2.7. *Sea $(E, \mathcal{G}, \mu)$ un espacio medido; y $A, B \in \mathcal{G}$ entonces se verifican las siguientes propiedades:*

i) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

ii) *Si A, B son disjuntos entonces* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

iii) *Si A, B no son disjuntos, entonces* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ *siempre que* $\mu(A \cap B) < +\infty$*, es decir que sea finita.*

iv) $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ *siempre que* $\mu(B) < +\infty$

Proposición 2.8. *Sea $(E, \mathcal{G}, \mu)$ un espacio medido y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de elementos de $\mathcal{G}$, entonces:*

i) *Si $\{A_n\}$ es creciente ($A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$),*

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

ii) *Si* $\{A_n\}$ *es decreciente* $(... \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1)$

$$\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Definición 2.10. *Sean* $(E, \mathcal{G}, \mu)$ *un espacio medido; se dice que una propiedad* $P(x)$ *que depende de un punto* $x \in E$ *es válida en* μ*-casi todas partes*[7]*, si el conjunto de los* $x \in E$ *en donde esta propiedad no está verificada es un conjunto de* μ*- medida nula o si es un conjunto* μ*-despreciable [4].*

Sean $f : \mathbb{R}^+ - \{a\} \mapsto f$ *y* $g : \mathbb{R}^+ \mapsto g$*; se dice que* $f = g$ *en casi todas partes cuando* $f(x) = g(x)$ *para casi todo* x*, es decir si* $\mu(\{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \neq g(x)\}) = 0$*. Ahora se considera las funciones* f, g *descritas en la figura*

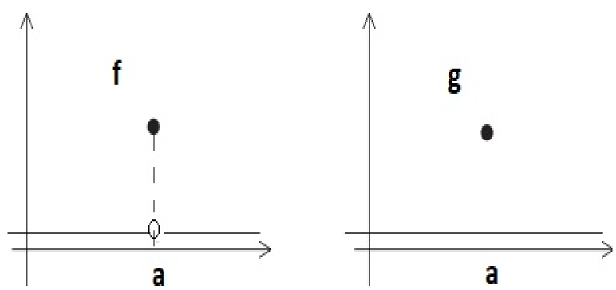

Figura 7: Funciones iguales en casi todas partes

se tiene que

$$\{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \neq g(x)\} = \{a\}$$

así $\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) = 0$*; es decir,* $f = g$ *en casi todas partes.*

Definición 2.11. *Medida* σ*-finita, conjunto* σ *finito. Sea* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio medido.*

a) *Una medida de conjuntos* $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ *es* σ*- finita si existe una sucesión numerable* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *tales que:*

[7] se abrevia e.c.t.p

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mu(A_n) < +\infty$

b) Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ es σ-finito con respecto a la medida μ si es la unión numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ de μ-medida finita.

2.14. Medidas destacadas

Bajo los criterios establecidos en la definición anterior, es posible crear una infinidad de medidas; cada una con sus propias características y que satisfagan las propiedades y condiciones que se quiera; pero las medidas más comúnmente utilizadas se detallan a continuación:

2.14.1. Medida de conteo

Sea E un conjunto y se considera al espacio medible $(E, \mathcal{P}(E))$; la medida de conteo es determinada por:

$\mu : \mathcal{P}(E) \mapsto \mathbb{R}^+$

$$A \mapsto \mu(A) = \begin{cases} |A| & : si\ |A| < +\infty \\ +\infty & : si\ no \end{cases}$$

donde $|A|$ es la cardinalidad de A

La medida de conteo es la medida natural sobre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$; y ambos conjuntos son de inmensa utilidad para el que hacer humano porque sirven para contar elementos de cualquier índole y definir las operaciones aritméticas.

2.14.2. Medida Gruesa

Sea $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible, la medida gruesa es la que asigna a cada conjunto no vacío de $\mathcal{G}$ el valor de $+\infty$. La utilidad de esta medida radica en la construcción eventual de contra ejemplos simples de cualquier índole que tendrán un valor absoluto de $+\infty$ en caso de verificar una condición requerida.

2.14.3. Medida Centrada

Sea $(E, \mathcal{G}, \mu_p),\ p \in E$, se define

$$\mu_p(A)= \begin{cases} 1; p \in A \\ 0; p \notin A \end{cases}$$

Esta medida es muy útil en la definición de atributos o parámetros de una variable discreta que incluya los estatus de *conforme* o *no conforme* cuando se trata de identificar criterios de conformidad.

2.14.4. Medida de Probabilidad

Sea $(E, \mathcal{G}, \mu)$, un espacio medido. Si $\mu(E) = 1$, se dice que $(E, \mathcal{G}, \mu)$ es un espacio probabilístico y que μ es una medida de probabilidad. En tal caso, los elementos de A de $\mathcal{G}$ se llaman eventos y $\mu(A)$, es la probabilidad del evento A [1].

Luego de la Medida de Lebesgue, esta medida es la más aplicada y su utilidad radica en que se constituye como el pilar fundamental del cálculo de las probabilidades. Es así que los 5 postulados de la teoría de las probabilidades guardan estrecha relación con las propiedades de las medidas explicadas en páginas anteriores. Pues se tiene que:

i) $0 \leq \mu(A) \leq 1$

ii) $\mu(E) = 1$

iii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i$; $\mu(A_i) \cap \mu(A_j) = \emptyset, \forall i \neq j$, que corresponden a los eventos mutuamente excluyentes.

iv) $\mu\big(A_i/A_j\big) = \dfrac{\mu(A_i \cap A_j)}{\mu(A_j)}$, con $\mu(A_j) \neq \emptyset$, que corresponde a la definición de probabilidad condicionada.

v) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$; $\mu(A_i) \cap \mu(A_j) = \emptyset, \forall i \neq j$

2.15. Medida de Lebesgue

Esta medida es de suma importancia para el estudio que se propone iniciar, puesto que es con esta medida con la que se procederá a realizar la Integral de Lebesgue. Se ha visto hasta este momento que cada una de las medidas contruidas poseen características propias que incluyen parámetros específicos para su diseño y utilización; éste también es el caso de la medida de Lebesgue [17].

La medida de Lebesgue es la medida de referencia en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y se denota por la letra λ si $n = 1$ y λ_n si $n > 1$. Estos parámetros provienen de la generalización de las operaciones numerables de las funciones aditivas de los conjuntos observados hasta el momento. Es en este punto, donde se puede generalizar que la longitud de un punto es nula y que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es la unión numerable disjunta de puntos por la propiedad de σ-aditividad y el conjunto de $\mathbb{Q}$ es de medida de Lebesgue nula. De la misma forma, en el caso n-dimensional se tiene que $\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Q}^n$ son conjuntos de medida de Lebesgue (n-dimensional) nula [6].

Para entender la medida de Lebesgue, se requiere las siguientes definiciones:

Sea E un conjunto tal que $\mu^* : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) $\mu^*\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$. Se dice que μ^* es una medida exterior sobre E.

Un ejemplo de medida exterior sobre $\mathbb{R}$ está dada por

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$$

$$\lambda^*(A) = \text{ínf}\, \Big\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} (b_i - a_i) : A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (a_i, b_i) \Big\}$$

y se tiene que $\lambda^*([a,b]) = b - a$; y se denomina Medida de Lebesgue exterior.

Definición 2.12. *Sea E un conjunto de una medida exterior μ^*, y $A, B \subseteq E$ se cumple que:*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c), \text{ se dice que } B \text{ es } \mu^*\text{-medible.}$$

Teorema 2.9. *Sea E un conjunto y μ^* es una medida exterior, entonces*

$$\mathcal{G}_{\mu^*} = \{B \subseteq E\text{: } B \text{ es } \mu^*\text{- medible}\}$$

es una σ-álgebra y

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{G}_{\mu^*} &\to \mathbb{R} \\ B &\to \mu(B) = \mu^*(B) \end{aligned}$$

es una medida, así $(E, \mathcal{G}_{\mu^*}, \mu)$ es un espacio medido.

En $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue exterior se tiene que $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_{\lambda^*}, \lambda)$ es un espacio medido y a $\mathcal{G}_{\lambda^*}$ se le llama σ-álgebra de Lebesgue. Además los elementos de $\mathcal{G}_{\lambda^*}$ se les denomina $\mathcal{L}$-medibles.

Los elementos de $\mathcal{G}_{\lambda^*}$ se les denomina conjuntos Lebesgue-medibles y una implicación de aquello es que todo conjunto $\mathcal{B}$-medible es Lebesgue-medible [4].

2.15.1. Propiedades de la Medida de Lebesgue

Para $A \in \mathcal{G}_{\lambda^*}$ se verifican las siguientes propiedades:

L(a) $\lambda([a,b]) = b - a$,

L(b) $\lambda(\{x\}) = 0$,

L(c) $\lambda(A) = \text{ínf}\{\lambda(U) : A \subseteq U, U \ es\ abierto\}$

L(d) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(k) : k \subseteq A\}, k\ es\ compacto^8\}$

[8] cerrado y acotado

L(e) $\lambda(A) = \lambda(A+x)$ donde $A+x = \{u+x : u \in A\}$, es decir que λ es invariante por traslación.

L(f) Si $B \subseteq A$ y $\lambda(A) = 0$, entonces $B \in \mathcal{G}_{\lambda^*}$, a esta propiedad se la nota diciendo que λ es completa [13].

2.15.2. Conjunto no medible: Conjunto de Vitali ($\mathcal{V}$)

.

A pesar de todas las bases que fundamentan la teoría de la medida que se han enlistado, existen conjuntos no medibles como el conjunto de Vitali que se detalla a continuación.

- Dados $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \sim y \in \mathbb{Q}$, se dice que son equivalentes.
- Se define $[x] = \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\}$
- $\mathcal{V}$ es el subconjunto de $[0,1]$ tal que tiene un solo elemento en común en cada $[x], x \in \mathbb{R}$.
- Para $p \in \mathbb{Q}, 0 \leq p \leq 1, \mathcal{V}_p = \{x+p : x \in \mathcal{V}\}$, estos conjuntos son disjuntos porque sumados no volverán a coincidir.
- $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \mathcal{V}_p \subseteq [0,2]$, aplicando la madida exterior en la desigualdad se tiene
- $\mu([0,1]) \leq \mu\big(\bigcup\limits_{p \in \mathbb{Q} \in [0,1]} \mathcal{V}_p\big) \leq \mu([0,2])$, por la definición de medida exterior de intervalos se tiene que
- $1 \leq \sum\limits_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \mu(\mathcal{V}_p) \leq 2$, finalmente el conjunto $\mathcal{V}_p$ es de medida nula por poseer un solo elemento en cada segmento; por lo tanto
- $\mu(\mathcal{V}_p) = 0 \Rightarrow 1 \leq 0$ lo cual es una contradicción

Por esta razón el conjunto de Vitali es no medible [14].

2.16. La Integral de Riemann

En un entorno sencillo se puede definir a la integral de Riemann sobre funciones en un intervalo acotado $[a, b]$ en la recta de los $\mathbb{R}$. En la Integral de Riemann se dice que una función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es escalonada si existe una subdivisión $P = \{x_0 < x_1, ..., x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ tal que φ es constante o igual a c_i sobre $]x_{i-1}, x_i[$. Si la distancia entre cada uno de los puntos $\{x_0, ..., x_n\}$ es constante igual a $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, con n entendida como el número de particiones [9].

La definición de la integral de Riemann para una función viene dada por:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i - x_{i-1})$$

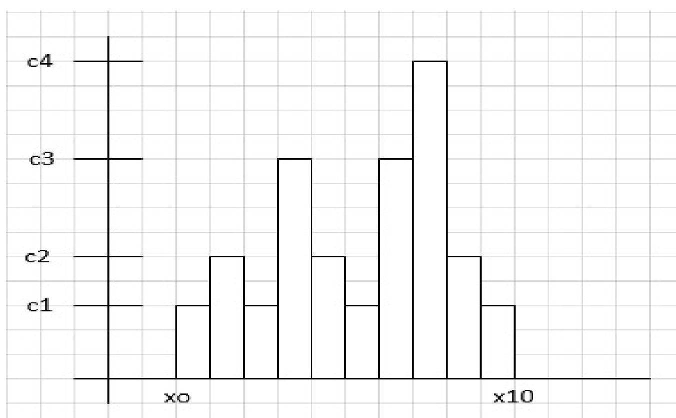

Figura 8: Integral en sentido Riemann

La integral de esta función en el sentido de Riemann viene dada por

$$\int_{a=x_0}^{b=x_{10}} \varphi(x)dx = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + c_1(x_3 - x_2) + c_3(x_4 - x_3) + c_2(x_5 - x_4) + c_1(x_6 - x_5) + c_3(x_7 - x_6) + c_4(x_8 - x_7) + c_2(x_9 - x_8) + c_1(x_{10} - x_9)$$

Esta definición geométrica corresponde al cálculo de la integral mediante la aproximación por el cálculo de áreas de rectángulos de base $(x_i - x_{i-1})$ y con alturas equivalentes a c_i, y así sucesivamente.

2.17. Función simple

Se denota con $S(E, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$ como el conjunto de funciones simples definidas sobre E a valores en $\mathbb{K}$.

El conjunto $S(E, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$ posee una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Es fácil ver que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y toda función $f \in S(E, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, se tiene $\lambda f \in S(E, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$ puesto que $\lambda\alpha_k = \beta_k \in \mathbb{K}$ y

$$\lambda f(x) = \lambda \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathcal{X} A_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda\alpha_k \mathcal{X} A_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \mathcal{X} A_k(x) \in S(E, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$$

Definición 2.13. *Espacio de funciones simples positivas. Sea $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido. Se denota $S^+(E, \mathcal{A}, \mu)$ el conjunto de funciones simples positivas definidas sobre E a valores $\mathbb{R}^+$. Este espacio es claramente un subconjunto de las funciones simples y contiene los casos de $E = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, las funciones escalonadas positivas [5].*

Es posible realizar la descomposición canónica de funciones simples, así por ejemplo: para toda f en $S^+(E, \mathcal{A}, \mu)$ existe una familia finita $(\alpha_k, \mathcal{A}_k)_{0 \leq k \leq n}$, con $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ y $A_k \in \mathcal{A}$, tal que $0 \leq \alpha_0 < ... < \alpha_n, A_k \neq \emptyset$ para todo k en donde los conjuntos A_k son disjuntos tomados dos a dos; de manera que se tiene:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathcal{X} A_k(x)$$

Esta descomposición lleva directamente a la integral de las funciones simple positivas como en la siguiente definición [4].

Definición 2.14. *Integral de funciones simple-positivas. Sea una función $f \in S^+(E, \mathcal{A}, \mu)$ una función simple positiva. La integral de f con respecto a la medida μ es el número real definido por*

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu(f^{-1}(\{a_k\}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu(\{f = \alpha_k\})$$

Esta sumatoria es igual a un número positivo por lo que se menciona que una función simple positiva f es integrable, si su integral es finita; es decir sí y solo si el conjunto $\{x \in E : f(x) \neq 0\}$ es de medida finita [4].

Observación 2.3. *Se propone calcular la integral de una función simple mediante el análisis de la figura y únicamente como inicio; la función φ está definida sobre $\mathbb{R}$, dotado de la σ-álgebra de Borel en valores de* $[0, +\infty[$

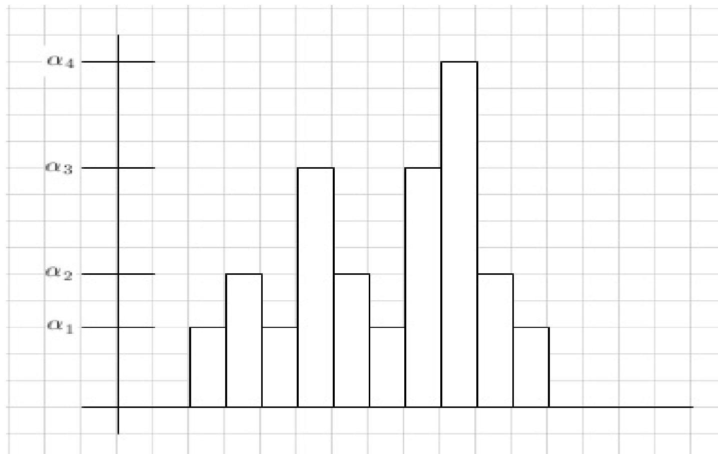

Figura 9: Función Simple

Se definen entonces los conjuntos $A_i = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = \alpha_i\}$, para $i = 1, ..., 4$ de tal manera que $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}(x)$. Por la fórmula generada con anterioridad se tiene:

$$\varphi(x) = \alpha_1 \mathcal{X}_1(x) + \alpha_2 \mathcal{X}_2(x) + \alpha_3 \mathcal{X}_3(x) + \alpha_4 \mathcal{X}_4(x)$$
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\lambda(x) = \alpha_1 \lambda(A_1) + \alpha_2 \lambda(A_2) + \alpha_3 \lambda(A_3) + \alpha_4 \lambda(A_4)$$

La forma de escribir la integral de Lebesgue es totalmente diferente a la integral de Riemann; más allá de que el resultado sea el mismo en un sencillo ejemplo como este.

Proposición 2.2. *Función no simple*

Sea $(E, \mathcal{G}, \mu)$ un espacio medido, f una función $f : E \mapsto \mathbb{R}$ medible existe (φ_n) una sucesión de funciones simples tal que:

i) (φ_n) *es creciente*

ii) $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \varphi_n(x) = f(x)$*, para todo* x

Una forma de obtener la sucesión de la propiedad anterior es para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $k = 0, ..., n2^n$ es definir

$$E_{k,n} = \{x \in E : k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\}$$

conjuntamente con

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n} \chi_{E_{k,n}}(x)$$

Definición 2.15. *Integral de funciones no simples.*

Una vez definida la función no simple como en el ítem anterior; la integral de la misma se define como:

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_E \varphi_n d\mu$$

si f es medible se define

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

En la operatividad de la intregral de funciones simples y no simples se requiere de las propiedades:

i) ***Homogeneidad.*** *Si* $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\int_E (\lambda f)(x) d\mu(x) = \lambda \int_E f(x) d\mu(x)$$

ii) ***Aditividad.***

$$\int_E (f+g)(x)d\mu(x) = \int_E f(x)d\mu(x) + \int_E g(x)d\mu(x)$$

iii) ***Crecimiento o monotonía.*** *si $f \leq g$ en $c.t.p$, se tiene entonces*

$$\int_E f(x)d\mu(x) \leq \int_E g(x)d\mu(x)$$

3. Demostración del cálculo de la Integral de Lebesgue

3.1. Función lineal: $f(x) = 2x + 1$

La función que se presenta inicialmente es una función lineal de la forma $y = mx + b$ de la cual se desea obtener el valor de la integral

$$\int_0^1 (2x+1)dx$$

A continuación se presentan 2 opciones de integración de esta función, para finalmente generar la Integral de Lebesgue con todos los criterios detallados anteriormente.

a) **Integral Definida.**

Exclusivamente por notación se denotará a la integral como

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (2x+1)dx \\ &= \int_0^1 2xdx + \int_0^1 1\ dx \\ &= 2\int_0^1 xdx + \int_0^1 1\ dx \\ &= 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 \\ &= \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 \\ &= x^2\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 \\ &= (1-0) + (1-0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

b) **Sumas de Riemann**

Para realizar la intregración por Riemann debemos primero denotar

$A = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)dx$ es equivalente a

$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$; donde c_i es el elemento al que se aplicará la función:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow c_i = 0 + i\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{i}{n}$$

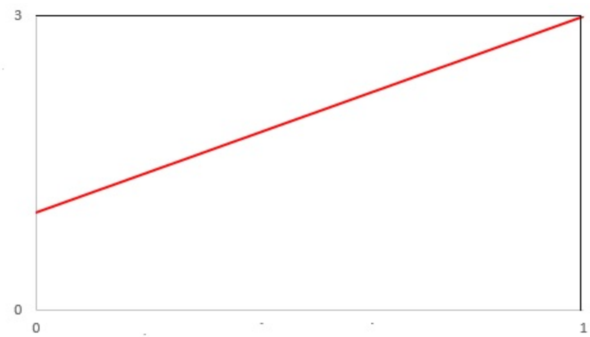

Figura 10: $f(x) = 2x + 1$

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=}^{n} \left[2\left(\frac{i}{n}\right)+1\right]\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=}^{n} \left[\frac{2i}{n}+1\right]\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2i}{n}+1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n}+\sum_{i=}^{n} 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=}^{n} 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{2n(n+1)}{2n}+n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{\cancel{2n}(n+1)}{\cancel{2n}}+n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(n+1+n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(2n+1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}\right) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Como puede verse, también se genera el mismo resultado que en la integral definida.

c) **Integral de Lebesgue**

A continuación se expone el procedimiento de descomposición genética para desarrollar a detalle la integral de Lebesgue:

- La Integral de Lebesgue es análoga a la Integral de Riemann debido a que en lugar de particionar el eje X se realizan particiones en el eje Y. Por la aplicación de la función inversa, estas particiones generan los conjuntos medibles en el eje X; dando lugar a la función $\varphi_{(x)}$ que se aproxima a $f(x)$.
- Para generar la partición se utilizan los conjuntos medibles $E_{k,n}$ donde n denota el número de partición y k el elemento de la partición.
- Se nota que k recorre desde 0 hasta $n2^n$. Para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, la partición se la realiza en el intervalo $[0, n]$ con altura de 2^{-n}. Es notorio que cuando n tiende al infinito la partición se la realiza en el intervalo $[0, +\infty)$ sin embargo la altura de la misma tiende a 0.
- La partición del eje Y más grande menor a 1 con denominador potencia de 2 es $\frac{1}{2}$ por lo que las particiones que corresponden son: $0, \frac{1}{2}$ y 1. Para que se generen 3 espacios con $n = 1$, la única vía posible entre las variables k, n corresponde a $k = n2^n = 2$; de esta forma $k = 0, 1, 2$; es decir los 3 conjuntos medibles generados.
- Una vez establecidos los espacios $E_{k,n}$ se generan desigualdades con el límite inferior a la izquierda seguida de la función en cuestión y el límite superior a la derecha. Se procede a resolver dichas desigualdades y el espacio generado debe ser intersecado con el espacio en que se desea integrar la función, en el caso del ejemplo $[0, 1]$.

$$E_{0,1} = \{x \in [0,1] : 0 \leq 2x + 1 < \tfrac{1}{2}\} = (-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$0 \leq 2x + 1 \wedge 2x + 1 < \tfrac{1}{2}$$

$$-1 \leq 2x \wedge 2x < -\tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2} \leq x \wedge x < -\tfrac{1}{4}$$

$$E_{1,1} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} \leq 2x + 1 < 1\} = (-\infty, -\tfrac{1}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$\tfrac{1}{2} \leq 2x + 1 \wedge 2x + 1 < 1$$

$$-\tfrac{1}{2} \leq 2x \wedge 2x < 0$$

$$-\tfrac{1}{4} \leq x \wedge x < 0$$

$$E_{2,1} = \{x \in [0,1] : 1 \leq 2x+1\} = [0,+\infty) \cap [0,1] = [0,1]$$

- Multiplicando las alturas (imágenes) por las bases (conjuntos medibles) se generan las funciones características, cuya sumatoria es:

  $\varphi_1(x) = 0\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + 1\mathcal{X}_{[0,1]}(x)$

  $\varphi_1(x) = 1\lambda_{([0,1])}$

- Por L(a) y L(b) para dicho intervalo, resulta:

  $\int \varphi_1(x)d\lambda = 1\lambda_{([0,1])}$

  $\int \varphi_1(x)d\lambda = 1(1-0)$

  $\int \varphi_1(x)d\lambda = 1$

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 1$ es la primera aproximación de la integral $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)dx$

- La siguiente partición del eje Y más grande menor que $\frac{1}{2}$ con denominador potencia de 2 es $\frac{1}{4}$ por lo que las particiones que corresponden son: $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$ y $\frac{8}{4}$. Para que se generen 9 espacios con $n = 2$, la única vía posible entre las variables k, n corresponde a $k = n2^n = 8$; de esta forma $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$; es decir los 9 conjuntos medibles generados.

- Una vez establecidos los espacios $E_{k,n}$ se generan desigualdades con el límite inferior a la izquierda seguida de la función en cuestión y el límite superior a la derecha. Se procede a resolver dichas desigualdades y el espacio generado debe ser intersecado con el espacio en que se desea integrar la función, en este caso $[0,1]$.

$$E_{0,2} = \{x \in [0,1] : 0 \leq 2x+1 < \tfrac{1}{4}\} = [-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{8}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$0 \leq 2x+1 \wedge 2x+1 < \tfrac{1}{4}$$

$$-1 \leq 2x \wedge 2x < -\tfrac{3}{4}$$

$$-\tfrac{1}{2} \leq x \wedge x < -\tfrac{3}{8}$$

$$E_{1,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{2}{4}\} = [-\tfrac{3}{8}, -\tfrac{1}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{1}{2}$$

$$2x < -\tfrac{1}{2}$$

$$x < -\tfrac{1}{4}$$

$$E_{2,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{2}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{3}{4}\} = [-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{3}{4}$$

$$2x < -\tfrac{1}{4}$$

$$x < -\tfrac{1}{8}$$

$$E_{3,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{4}{4}\} = (-\tfrac{1}{8}, 0) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x \leq -\tfrac{1}{8} \wedge 2x+1 < 1$$

$$x \leq -\tfrac{1}{8} \wedge x < 0$$

$$E_{4,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{4}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{5}{4}\} = (0, \tfrac{1}{8}) \cap [0,1] = [0, \tfrac{1}{8})$$

$$x \leq 0 \wedge 2x+1 < \tfrac{5}{4}$$

$$x \leq 0 \wedge 2x < \tfrac{1}{4}$$

$$x \leq 0 \leq x \wedge x < \tfrac{1}{8}$$

$$E_{5,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{6}{4}\} = [\tfrac{1}{8}, \tfrac{2}{8}) \cap [0,1] = [\tfrac{1}{8}, \tfrac{2}{8})$$

$$x \leq \tfrac{1}{8} \wedge 2x+1 < \tfrac{6}{4}$$

$$x \leq \tfrac{1}{8} \wedge 2x < \tfrac{2}{4}$$

$$x \leq \tfrac{1}{8} \wedge x < \tfrac{2}{8}$$

$$E_{6,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{6}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{7}{4}\} = [\tfrac{2}{8}, \tfrac{3}{8}) \cap [0,1] = [\tfrac{2}{8}, \tfrac{3}{8})$$

$$x \leq \tfrac{1}{4} \wedge 2x+1 < \tfrac{7}{4}$$

$$x \leq \tfrac{1}{4} \wedge 2x < \tfrac{3}{4}$$

$$x \leq \tfrac{2}{8} \wedge x < \tfrac{3}{8}$$

$$E_{7,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{8}{4}\} = [\tfrac{3}{8}, \tfrac{4}{8}) \cap [0,1] = [\tfrac{3}{8}, \tfrac{4}{8})$$

$$x \leq \tfrac{3}{8} \wedge 2x+1 < 2$$

$$x \leq \tfrac{3}{8} \wedge 2x < 1$$

$$\tfrac{3}{8} \leq x \wedge x < \tfrac{4}{8}$$

$$E_{8,2} = \{x \in [0,1] : 2 \leq 2x+1\} = \{\tfrac{4}{8}, +\infty\} \cap [0,1] = \{\tfrac{4}{8}, 1\}$$

- Multiplicando las alturas (imágenes) por las bases (conjuntos medibles) se generan las funciones características, cuya sumatoria es:

  $\varphi_2(x) = 0\mathcal{X}_\emptyset(x) + \frac{1}{4}\mathcal{X}_\emptyset(x) + \frac{2}{4}\mathcal{X}_\emptyset(x) + \frac{3}{4}\mathcal{X}_\emptyset(x) + \frac{4}{4}\mathcal{X}_{[0,\frac{1}{8})}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{X}_{[\frac{1}{8},\frac{2}{8})}(x) + \frac{6}{4}\mathcal{X}_{[\frac{2}{8},\frac{3}{8})} + \frac{7}{4}\mathcal{X}_{[\frac{3}{8},\frac{4}{8})} + \frac{8}{4}\mathcal{X}_{[\frac{4}{8}]}(x)$

- Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

  $\int \varphi_2(x)d\lambda = 0\lambda_{(\emptyset)} + \frac{1}{4}\lambda_{(\emptyset)} + \frac{2}{4}\lambda_{(\emptyset)} + \frac{3}{4}\lambda_{(\emptyset)} + 1\lambda_{[0,\frac{1}{8})} + \frac{5}{4}\lambda_{[\frac{1}{8},\frac{2}{8})} + \frac{6}{4}\lambda_{[\frac{2}{8},\frac{3}{8})} + \frac{7}{4}\lambda_{[\frac{3}{8},\frac{4}{8})} + 2\lambda_{[\frac{4}{8},1)}$

  $\int \varphi_2(x)d\lambda = \frac{4}{4}(\frac{1}{8} - 0) + \frac{5}{4}(\frac{2}{8} - \frac{1}{8}) + \frac{3}{2}(\frac{3}{8} - \frac{2}{8}) + \frac{7}{4}(\frac{4}{8} - \frac{3}{8}) + \frac{8}{4}(\frac{8}{4} - \frac{4}{8})$

  $\int \varphi_2(x)d\lambda = \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{5}{4}(\frac{1}{8}) + \frac{6}{4}(\frac{1}{8}) + \frac{7}{4}(\frac{1}{8}) + (\frac{8}{4})(\frac{4}{8})$

  $\int \varphi_2(x)d\lambda = \frac{1}{32}(4+5+6+7+32)$

  $\int \varphi_2(x)d\lambda = 1,6875$

  $\int \varphi_2(x)d\lambda = 1,6875$ es la segunda aproximación de la integral $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)dx$

- La siguiente partición del eje Y más grande menor que $\frac{1}{4}$ con denominador potencia de 2 es $\frac{1}{8}$ por lo que las particiones que corresponden son: 0, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{14}{8}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{18}{8}$, $\frac{19}{8}$, $\frac{20}{8}$, $\frac{21}{8}$, $\frac{22}{8}$, $\frac{23}{8}$ y $\frac{24}{8}$. Para que se generen 25 espacios con $n = 2$, la única vía posible entre las variables k, n corresponde a $k = n2^n = 24$; de esta forma $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23,$
  24; es decir los 25 conjuntos medibles generados.

- Una vez establecidos los espacios $E_{k,n}$ se generan desigualdades con el límite inferior a la izquierda seguida de la función en cuestión y el límite superior a la derecha. Se procede a resolver dichas desigualdades y el espacio generado debe ser intersecado con el espacio en que se desea integrar la función, en este caso $[0, 1]$.

$$E_{0,3} = \{x \in [0,1] : 0 \leq 2x+1 < \tfrac{1}{8}\} = [-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{7}{16}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$0 \leq 2x+1 \wedge 2x+1 < \tfrac{1}{8}$$

$$-1 \leq 2x \wedge 2x < -\tfrac{7}{8}$$

$$-\tfrac{1}{2} \leq x \wedge x < -\tfrac{7}{16}$$

$$E_{1,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{2}{8}\} = [-\tfrac{7}{16}, -\tfrac{3}{8}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{1}{4}$$

$$2x < -\tfrac{3}{4}$$

$$x < -\tfrac{3}{8}$$

$$E_{2,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{2}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{3}{8}\} = [-\tfrac{3}{8}, -\tfrac{5}{16}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{3}{8}$$

$$2x < -\tfrac{5}{8}$$

$$x < -\tfrac{5}{16}$$

$$E_{3,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{4}{8}\} = (-\tfrac{5}{16}, -\tfrac{1}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{1}{2}$$

$$2x < -\tfrac{1}{2}$$

$$x < -\tfrac{1}{4}$$

$$E_{4,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{4}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{5}{8}\} = (-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{3}{16}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{5}{8}$$

$$2x < -\tfrac{3}{8}$$

$$x < -\tfrac{3}{16}$$

$$E_{5,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{6}{8}\} = [-\tfrac{3}{16}, -\tfrac{1}{8}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{3}{4}$$

$$2x < -\tfrac{1}{4}$$

$$x < -\tfrac{1}{8}$$

$$E_{6,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{6}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{7}{8}\} = [-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{16}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{7}{8}$$

$$2x < -\tfrac{1}{8}$$

$$x < -\tfrac{1}{16}$$

$$E_{7,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{8}{8}\} = [-\tfrac{1}{16}, 0) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < 1$$

$$2x < 0$$

$$x < 0$$

$$E_{8,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{8}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{9}{8}\} = [0, \tfrac{1}{16}) \cap [0,1] = [0, \tfrac{1}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{9}{8}$$

$$2x < \tfrac{1}{8}$$

$$x < \tfrac{1}{16}$$

$$E_{9,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{9}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{10}{8}\} = [\tfrac{1}{16}, \tfrac{2}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{1}{16}, \tfrac{2}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{5}{4}$$

$$2x < \tfrac{1}{4}$$

$$x < \tfrac{1}{8}$$

$$E_{10,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{10}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{11}{8}\} = [\tfrac{2}{8}, \tfrac{3}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{2}{16}, \tfrac{3}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{11}{8}$$

$$2x < \tfrac{3}{8}$$

$$x < \tfrac{3}{16}$$

$$E_{11,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{11}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{12}{8}\} = [\tfrac{3}{16}, \tfrac{4}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{3}{16}, \tfrac{4}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{3}{2}$$

$$2x < \tfrac{1}{2}$$

$$x < \tfrac{1}{4}$$

$$E_{12,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{12}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{13}{8}\} = [\tfrac{4}{16}, \tfrac{5}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{4}{16}, \tfrac{5}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{13}{8}$$

$$2x < \tfrac{5}{8}$$

$$x < \tfrac{5}{16}$$

$$E_{13,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{13}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{14}{8}\} = [\tfrac{5}{16}, \tfrac{6}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{5}{16}, \tfrac{6}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{7}{4}$$

$$2x < \tfrac{3}{4}$$

$$x < \tfrac{3}{8}$$

$$E_{14,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{14}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{15}{8}\} = [\tfrac{6}{16}, \tfrac{7}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{6}{16}, \tfrac{7}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{15}{8}$$

$$2x < \tfrac{7}{8}$$

$$x < \tfrac{7}{16}$$

$$E_{15,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{15}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{16}{8}\} = [\tfrac{7}{16}, \tfrac{8}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{7}{16}, \tfrac{8}{16})$$

$$2x+1 < 2$$

$$2x < 1$$

$$x < \tfrac{1}{2}$$

$$E_{16,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{16}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{17}{8}\} = [\tfrac{8}{16}, \tfrac{9}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{8}{16}, \tfrac{9}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{17}{8}$$

$$2x < \tfrac{9}{8}$$

$$x < \tfrac{9}{16}$$

$$E_{17,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{17}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{18}{8}\} = [\tfrac{9}{16}, \tfrac{10}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{9}{16}, \tfrac{10}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{9}{4}$$

$$2x < \tfrac{5}{4}$$

$$x < \tfrac{5}{8}$$

$$E_{18,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{18}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{19}{8}\} = [\tfrac{10}{8}, \tfrac{11}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{10}{16}, \tfrac{11}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{19}{8}$$

$$2x < \tfrac{11}{8}$$

$$x < \tfrac{11}{16}$$

$$E_{19,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{19}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{20}{8}\} = [\tfrac{11}{16}, \tfrac{12}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{11}{16}, \tfrac{12}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{5}{2}$$

$$2x < \tfrac{3}{2}$$

$$x < \tfrac{3}{4}$$

$$E_{20,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{20}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{21}{8}\} = [\tfrac{12}{16}, \tfrac{13}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{12}{16}, \tfrac{13}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{21}{8}$$

$$2x < \tfrac{13}{8}$$

$$x < \tfrac{13}{16}$$

$$E_{21,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{21}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{22}{8}\} = [\tfrac{13}{16}, \tfrac{14}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{13}{16}, \tfrac{14}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{11}{4}$$

$$2x < \tfrac{7}{4}$$

$$x < \tfrac{7}{8}$$

$$E_{22,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{22}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{23}{8}\} = [\tfrac{14}{16}, \tfrac{15}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{14}{16}, \tfrac{15}{16})$$

$$2x+1 < \tfrac{23}{8}$$

$$2x < \tfrac{15}{8}$$

$$x < \tfrac{15}{16}$$

$$E_{23,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{23}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{24}{8}\} = [\tfrac{15}{16}, \tfrac{16}{16}) \cap [0,1] = [\tfrac{15}{16}, \tfrac{16}{16})$$

$$2x+1 < 3$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$

$$E_{24,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{24}{8} \leq 2x+1\} = [\tfrac{16}{16}, +\infty)\} \cap [0,1] = \{\tfrac{16}{16}\},$$

$$2x+1 > 3$$

$$2x > 2$$

$$x > 1$$

- Multiplicando las alturas (imágenes) por las bases (conjuntos medibles) se generan las funciones características, cuya sumatoria es:

  $\varphi_3(x) = 0\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{1}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{2}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{3}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{4}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{5}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{6}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{7}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{8}{8}\mathcal{X}_{[0,\frac{1}{16})}(x) + \frac{9}{8}\mathcal{X}_{[\frac{1}{16},\frac{2}{16})}(x) + \frac{10}{8}\mathcal{X}_{[\frac{2}{16},\frac{3}{16})}(x) + \frac{11}{8}\mathcal{X}_{[\frac{3}{16},\frac{4}{16})}(x) + \frac{12}{8}\mathcal{X}_{[\frac{4}{16},\frac{5}{16})}(x) + \frac{13}{8}\mathcal{X}_{[\frac{5}{16},\frac{6}{16})}(x) + \frac{14}{8}\mathcal{X}_{[\frac{6}{8},\frac{7}{16})}(x) + \frac{15}{8}\mathcal{X}_{[\frac{7}{16},\frac{8}{16})}(x) + \frac{16}{8}\mathcal{X}_{[\frac{8}{16},\frac{9}{16})}(x) + \frac{17}{8}\mathcal{X}_{[\frac{9}{16},\frac{10}{16})}(x) + \frac{18}{16}\mathcal{X}_{[\frac{10}{16},\frac{11}{16})}(x) + \frac{19}{8}\mathcal{X}_{[\frac{11}{16},\frac{12}{16})}(x) + \frac{20}{8}\mathcal{X}_{[\frac{12}{16},\frac{13}{16})}(x) + \frac{21}{8}\mathcal{X}_{[\frac{13}{16},\frac{14}{16})}(x) + \frac{22}{8}\mathcal{X}_{[\frac{14}{16},\frac{15}{16})}(x) + \frac{23}{8}\mathcal{X}_{[\frac{15}{16},\frac{16}{16})}(x) + \frac{24}{8}\mathcal{X}_{\{\frac{16}{16}\}}(x)$

- Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

  $\int \varphi_3(x)d\lambda = (\frac{8}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{9}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{10}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{11}{8})(\frac{1}{16} + (\frac{12}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{13}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{14}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{15}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{16}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{17}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{9}{4})(\frac{1}{16}) + (\frac{19}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{20}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{21}{8})(\frac{1}{16}) + (\frac{11}{4})(\frac{1}{16}) + (\frac{23}{8})(\frac{1}{16})$

  $\int \varphi_3(x)d\lambda = \frac{1}{128}(8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23)$

  $\int \varphi_3(x)d\lambda = 1,9375$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 1,9375$ es la tercera aproximación de la integral $\int_0^1 (2x+1)dx$

- La siguiente partición del eje Y más grande menor que $\frac{1}{8}$ con denominador potencia de 2 es $\frac{1}{16}$; por lo que las particiones que corresponden son nueve: $0, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{5}{16}, \frac{6}{16}, \frac{7}{16}, \frac{8}{16}, \frac{9}{16}, \frac{10}{16}, \frac{11}{16}, \frac{12}{16}, \frac{13}{16}, \frac{14}{16}, \frac{15}{16}, \frac{16}{16}, \frac{17}{16}, \frac{18}{16}, \frac{19}{16}, \frac{20}{16}, \frac{21}{16}, \frac{22}{16}, \frac{23}{16}, \frac{24}{16}, \frac{25}{16}, \frac{26}{16}, \frac{27}{16}, \frac{28}{16}, \frac{29}{16}, \frac{30}{16}, \frac{31}{16}, \frac{32}{16}, \frac{33}{16}, \frac{34}{16}, \frac{35}{16}, \frac{36}{16}, \frac{37}{16}, \frac{38}{16}, \frac{39}{16}, \frac{40}{16}, \frac{41}{16}, \frac{42}{16}, \frac{43}{16}, \frac{44}{16}, \frac{45}{16}, \frac{46}{16}, \frac{47}{16}, \frac{48}{16}, \frac{49}{16}, \frac{50}{16}, \frac{51}{16}, \frac{52}{16}, \frac{53}{16}, \frac{54}{16}, \frac{55}{16}, \frac{56}{16}, \frac{57}{16}, \frac{58}{16}, \frac{59}{16}, \frac{60}{16}, \frac{61}{16}, \frac{62}{16}, \frac{63}{16}$ y $\frac{64}{16}$.

  Para que se generen 65 espacios con $n = 4$, la única vía posible entre las variables k, n corresponde a $k = n2^n = 64$; de esta forma $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64$; es decir los 65 conjuntos medibles que se generaron.

- Una vez establecidos los espacios $E_{k,n}$ se generan desigualdades con el límite inferior a la izquierda seguida de la función en cuestión y el límite superior a la derecha. Se procede a resolver dichas desigualdades y el espacio generado debe ser intersecado con el espacio en que se desea integrar la función, en este caso $[0, 1]$.

$$E_{0,4} = \{x \in [0,1] : 0 \leq 2x+1 < \tfrac{1}{16}\} = [-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{15}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$0 \leq 2x+1 \wedge 2x+1 < \tfrac{1}{16}$$

$$-1 \leq 2x \wedge 2x < -\tfrac{15}{16}$$

$$-\tfrac{1}{2} \leq x \wedge x < -\tfrac{15}{32}$$

$$E_{1,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{1}{8}\} = [-\tfrac{15}{32}, -\tfrac{7}{16}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{1}{8}$$

$$2x < -\tfrac{7}{8}$$

$$x < -\tfrac{7}{16}$$

$$E_{2,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{3}{16}\} = [-\tfrac{7}{16}, -\tfrac{13}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{3}{16}$$

$$2x < -\tfrac{13}{16}$$

$$x < -\tfrac{13}{32}$$

$$E_{3,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{1}{4}\} = (-\tfrac{13}{32}, -\tfrac{3}{8}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{1}{4}$$

$$2x < -\tfrac{3}{4}$$

$$x < -\tfrac{3}{8}$$

$$E_{4,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{5}{16}\} = (-\tfrac{3}{8}, -\tfrac{11}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{5}{16}$$

$$2x < -\tfrac{11}{16}$$

$$x < -\tfrac{11}{32}$$

$$E_{5,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{3}{8}\} = [-\tfrac{11}{32}, -\tfrac{5}{16}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{3}{8}$$

$$2x < -\tfrac{5}{8}$$

$$x < -\tfrac{5}{16}$$

$$E_{6,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{7}{16}\} = [-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{9}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{7}{16}$$

$$2x < -\tfrac{-9}{16}$$

$$x < -\tfrac{-9}{32}$$

$$E_{7,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{1}{2}\} = [-\tfrac{9}{32}, -\tfrac{1}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{1}{2}$$

$$2x < -\tfrac{1}{2}$$

$$x < -\tfrac{1}{4}$$

$$E_{8,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} \leq 2x+1 < \tfrac{9}{16}\} = [-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{7}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{9}{16}$$

$$2x < -\tfrac{7}{16}$$

$$x < -\tfrac{7}{32}$$

$$E_{9,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{9}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{5}{8}\} = [-\tfrac{7}{32}, \tfrac{-3}{16}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{5}{8}$$

$$2x < -\tfrac{3}{16}$$

$$x < -\tfrac{3}{16}$$

$$E_{10,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{11}{16}\} = [-\tfrac{3}{16}, -\tfrac{5}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{11}{16}$$

$$2x < -\tfrac{5}{16}$$

$$x < -\tfrac{5}{32}$$

$$E_{11,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{11}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{3}{4}\} = [-\tfrac{5}{32}, -\tfrac{1}{8}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{3}{4}$$

$$2x < -\tfrac{1}{4}$$

$$x < -\tfrac{1}{8}$$

$$E_{12,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{13}{16}\} = [-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{3}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{13}{16}$$

$$2x < -\tfrac{3}{16}$$

$$x < -\tfrac{3}{32}$$

$$E_{13,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{13}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{7}{8}\} = [-\tfrac{3}{32}, -\tfrac{1}{16}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{7}{8}$$

$$2x < -\tfrac{1}{8}$$

$$x < -\tfrac{1}{16}$$

$$E_{14,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{8} \leq 2x + 1 < \tfrac{15}{16}\} = [-\tfrac{1}{16}, -\tfrac{1}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x + 1 < \tfrac{15}{16}$$

$$2x < -\tfrac{1}{16}$$

$$x < -\tfrac{1}{32}$$

$$E_{15,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{15}{16} \leq 2x + 1 < 1\} = [-\tfrac{1}{32}, 0) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x + 1 < 1$$

$$2x < 0$$

$$x < 0$$

$$E_{16,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{16}{16} \leq 2x + 1 < \tfrac{17}{16}\} = [0, \tfrac{1}{32}) \cap [0,1] = [0, \tfrac{1}{32})$$

$$2x + 1 < \tfrac{17}{16}$$

$$2x < \tfrac{1}{16}$$

$$x < \tfrac{1}{32}$$

$$E_{17,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{17}{16} \leq 2x + 1 < \tfrac{18}{16}\} = [\tfrac{1}{32}, \tfrac{2}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{1}{32}, \tfrac{2}{32})$$

$$2x + 1 < \tfrac{9}{8}$$

$$2x < \tfrac{1}{8}$$

$$x < \tfrac{1}{16}$$

$$E_{18,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{18}{16} \leq 2x + 1 < \tfrac{19}{16}\} = [\tfrac{2}{32}, \tfrac{3}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{2}{32}, \tfrac{3}{32})$$

$$2x + 1 < \tfrac{19}{16}$$

$$2x < \tfrac{3}{16}$$

$$x < \tfrac{3}{32}$$

$$E_{19,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{19}{16} \leq 2x + 1 < \tfrac{20}{16}\} = [\tfrac{3}{32}, \tfrac{4}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{3}{32}, \tfrac{4}{32})$$

$$2x + 1 < \tfrac{5}{4}$$

$$2x < \tfrac{1}{4}$$

$$x < \tfrac{1}{8}$$

$$E_{20,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{20}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{21}{16}\} = [\tfrac{4}{32}, \tfrac{5}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{4}{32}, \tfrac{5}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{21}{16}$$

$$2x < \tfrac{5}{16}$$

$$x < \tfrac{5}{32}$$

$$E_{21,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{21}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{22}{16}\} = [\tfrac{5}{32}, \tfrac{6}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{5}{32}, \tfrac{6}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{11}{8}$$

$$2x < \tfrac{3}{8}$$

$$x < \tfrac{3}{16}$$

$$E_{22,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{22}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{23}{16}\} = [\tfrac{6}{32}, \tfrac{7}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{6}{32}, \tfrac{7}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{23}{16}$$

$$2x < \tfrac{7}{16}$$

$$x < \tfrac{7}{32}$$

$$E_{23,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{23}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{24}{16}\} = [\tfrac{7}{32}, \tfrac{8}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{7}{32}, \tfrac{8}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{3}{2}$$

$$2x < \tfrac{1}{2}$$

$$x < \tfrac{1}{4}$$

$$E_{24,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{24}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{25}{16}\} = [\tfrac{8}{32}, \tfrac{9}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{8}{32}, \tfrac{9}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{25}{16}$$

$$2x < \tfrac{9}{16}$$

$$x < \tfrac{9}{32}$$

$$E_{25,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{25}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{26}{16}\} = [\tfrac{9}{32}, \tfrac{10}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{9}{32}, \tfrac{10}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{13}{8}$$

$$2x < \tfrac{5}{8}$$

$$x < \tfrac{5}{16}$$

$$E_{26,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{26}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{27}{16}\} = [\tfrac{10}{32}, \tfrac{11}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{10}{32}, \tfrac{11}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{27}{16}$$

$$2x < \frac{11}{16}$$

$$x < \frac{11}{32}$$

$$E_{27,4} = \{x \in [0,1] : \frac{27}{16} \leq 2x+1 < \frac{28}{16}\} = [\frac{11}{32}, \frac{12}{32}) \cap [0,1] = [\frac{11}{32}, \frac{12}{32})$$

$$2x+1 < \frac{7}{4}$$

$$2x < \frac{3}{4}$$

$$x < \frac{3}{8}$$

$$E_{28,4} = \{x \in [0,1] : \frac{28}{16} \leq 2x+1 < \frac{29}{16}\} = [\frac{12}{32}, \frac{13}{32}) \cap [0,1] = [\frac{12}{32}, \frac{13}{32})$$

$$2x+1 < \frac{29}{16}$$

$$2x < \frac{13}{16}$$

$$x < \frac{13}{32}$$

$$E_{29,4} = \{x \in [0,1] : \frac{29}{16} \leq 2x+1 < \frac{30}{16}\} = [\frac{13}{32}, \frac{14}{32}) \cap [0,1] = [\frac{13}{32}, \frac{14}{32})$$

$$2x+1 < \frac{25}{8}$$

$$2x < \frac{7}{8}$$

$$x < \frac{7}{16}$$

$$E_{30,4} = \{x \in [0,1] : \frac{30}{16} \leq 2x+1 < \frac{31}{16}\} = [\frac{14}{32}, \frac{15}{32}) \cap [0,1] = [\frac{14}{32}, \frac{15}{32})$$

$$2x+1 < \frac{31}{16}$$

$$2x < \frac{15}{16}$$

$$x < \frac{15}{32}$$

$$E_{31,4} = \{x \in [0,1] : \frac{31}{16} \leq 2x+1 < \frac{32}{16}\} = [\frac{15}{32}, \frac{16}{32}) \cap [0,1] = [\frac{15}{32}, \frac{16}{32})$$

$$2x+1 < 2$$

$$2x < 1$$

$$x < \frac{1}{2}$$

$$E_{32,4} = \{x \in [0,1] : \frac{32}{16} \leq 2x+1 < \frac{33}{16}\} = [\frac{16}{32}, \frac{17}{32}) \cap [0,1] = [\frac{16}{2}, \frac{17}{32})$$

$$2x+1 < \frac{33}{16}$$

$$2x < \frac{17}{16}$$

$$x < \frac{17}{32}$$

$$E_{33,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{33}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{34}{16}\} = [\tfrac{17}{32}, \tfrac{18}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{17}{32}, \tfrac{18}{32})$$
$$2x+1 < \tfrac{17}{8}$$
$$2x < \tfrac{9}{8}$$
$$x < \tfrac{9}{16}$$
$$E_{34,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{34}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{35}{16}\} = [\tfrac{18}{32}, \tfrac{19}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{18}{32}, \tfrac{19}{32})$$
$$2x+1 < \tfrac{35}{16}$$
$$2x < \tfrac{19}{16}$$
$$x < \tfrac{17}{32}$$
$$E_{35,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{35}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{36}{16}\} = [\tfrac{19}{32}, \tfrac{20}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{19}{32}, \tfrac{20}{32})$$
$$2x+1 < \tfrac{9}{4}$$
$$2x < \tfrac{5}{4}$$
$$x < \tfrac{5}{8}$$
$$E_{36,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{36}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{37}{16}\} = [\tfrac{20}{32}, \tfrac{21}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{20}{32}, \tfrac{21}{32})$$
$$2x+1 < \tfrac{37}{16}$$
$$2x < \tfrac{21}{16}$$
$$x < \tfrac{21}{32}$$
$$E_{37,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{37}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{38}{16}\} = [\tfrac{21}{32}, \tfrac{22}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{21}{32}, \tfrac{22}{32})$$
$$2x+1 < \tfrac{19}{8}$$
$$2x < \tfrac{11}{8}$$
$$x < \tfrac{11}{16}$$
$$E_{38,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{38}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{39}{16}\} = [\tfrac{22}{32}, \tfrac{23}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{22}{32}, \tfrac{23}{32})$$
$$2x+1 < \tfrac{39}{16}$$
$$2x < \tfrac{23}{16}$$
$$x < \tfrac{23}{32}$$
$$E_{39,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{39}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{40}{16}\} = [\tfrac{23}{32}, \tfrac{24}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{23}{32}, \tfrac{24}{32})$$
$$2x+1 < \tfrac{5}{2}$$

$$2x < \tfrac{3}{2}$$

$$x < \tfrac{3}{4}$$

$$E_{40,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{40}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{41}{16}\} = [\tfrac{24}{32}, \tfrac{25}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{24}{32}, \tfrac{25}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{41}{16}$$

$$2x < \tfrac{25}{16}$$

$$x < \tfrac{25}{32}$$

$$E_{41,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{41}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{42}{16}\} = [\tfrac{25}{32}, \tfrac{26}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{25}{32}, \tfrac{26}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{21}{8}$$

$$2x < \tfrac{13}{8}$$

$$x < \tfrac{13}{16}$$

$$E_{42,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{42}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{43}{16}\} = [\tfrac{26}{32}, \tfrac{27}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{26}{32}, \tfrac{27}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{43}{16}$$

$$2x < \tfrac{27}{16}$$

$$x < \tfrac{27}{32}$$

$$E_{43,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{43}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{44}{16}\} = [\tfrac{27}{32}, \tfrac{28}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{27}{32}, \tfrac{28}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{11}{4}$$

$$2x < \tfrac{7}{4}$$

$$x < \tfrac{7}{8}$$

$$E_{44,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{44}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{45}{16}\} = [\tfrac{28}{32}, \tfrac{29}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{28}{32}, \tfrac{29}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{45}{16}$$

$$2x < \tfrac{29}{16}$$

$$x < \tfrac{29}{32}$$

$$E_{45,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{45}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{46}{16}\} = [\tfrac{29}{32}, \tfrac{30}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{29}{32}, \tfrac{30}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{23}{8}$$

$$2x < \tfrac{15}{8}$$

$$x < \tfrac{15}{16}$$

$$E_{46,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{46}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{47}{16}\} = [\tfrac{30}{32}, \tfrac{31}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{30}{32}, \tfrac{31}{32})$$

$$2x+1 < \tfrac{47}{16}$$

$$2x < \tfrac{31}{16}$$

$$x < \tfrac{31}{32}$$

$$E_{47,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{47}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{48}{16}\} = [\tfrac{31}{32}, \tfrac{32}{32}) \cap [0,1] = [\tfrac{31}{32}, \tfrac{32}{32})$$

$$2x+1 < 3$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$

$$E_{48,4} = \{x \in [0,1] : 3 \leq 2x+1 < \tfrac{49}{16}\} = [\tfrac{32}{32}, \tfrac{33}{32}) \cap [0,1] = \{\tfrac{32}{32}\}$$

$$2x+1 < \tfrac{49}{16}$$

$$2x < \tfrac{33}{16}$$

$$x < \tfrac{33}{32}$$

$$E_{49,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{49}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{25}{8}\} = [\tfrac{33}{32}, \tfrac{34}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{25}{8}$$

$$2x < \tfrac{17}{8}$$

$$x < \tfrac{17}{16}$$

$$E_{50,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{25}{8} \leq 2x+1 < \tfrac{51}{16}\} = [\tfrac{34}{32}, \tfrac{35}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{51}{16}$$

$$2x < \tfrac{35}{16}$$

$$x < \tfrac{35}{32}$$

$$E_{51,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{51}{16} \leq 2x+1 < \tfrac{13}{4}\} = [\tfrac{35}{32}, \tfrac{36}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{31}{16}$$

$$2x < \tfrac{15}{16}$$

$$x < \tfrac{15}{32}$$

$$E_{52,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{13}{4} \leq 2x+1 < \tfrac{53}{16}\} = [\tfrac{36}{32}, \tfrac{37}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \tfrac{53}{16}$$

$$2x < \frac{37}{16}$$

$$x < \frac{37}{32}$$

$$E_{53,4} = \{x \in [0,1] : \frac{53}{16} \leq 2x+1 < \frac{27}{8}\} = [\frac{37}{32}, \frac{38}{21}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \frac{27}{8}$$

$$2x < \frac{19}{8}$$

$$x < \frac{19}{16}$$

$$E_{54,4} = \{x \in [0,1] : \frac{27}{8} \leq 2x+1 < \frac{55}{16}\} = [\frac{38}{32}, \frac{39}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \frac{55}{16}$$

$$2x < \frac{39}{16}$$

$$x < \frac{39}{32}$$

$$E_{55,4} = \{x \in [0,1] : \frac{55}{16} \leq 2x+1 < \frac{7}{2}\} = [\frac{39}{32}, \frac{40}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \frac{7}{2}$$

$$2x < \frac{5}{2}$$

$$x < \frac{5}{4}$$

$$E_{56,4} = \{x \in [0,1] : \frac{7}{2} \leq 2x+1 < \frac{57}{16}\} = [\frac{5}{4}, \frac{41}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \frac{57}{16}$$

$$2x < \frac{41}{16}$$

$$x < \frac{41}{32}$$

$$E_{57,4} = \{x \in [0,1] : \frac{57}{16} \leq 2x+1 < \frac{29}{8}\} = [\frac{41}{32}, \frac{42}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \frac{29}{8}$$

$$2x < \frac{21}{8}$$

$$x < \frac{21}{16}$$

$$E_{58,4} = \{x \in [0,1] : \frac{29}{8} \leq 2x+1 < \frac{59}{16}\} = [\frac{42}{32}, \frac{43}{32}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$2x+1 < \frac{59}{16}$$

$$2x < \frac{43}{16}$$

$$x < \frac{43}{32}$$

$$E_{59,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{59}{16}\leq 2x+1<\tfrac{15}{4}\}=[\tfrac{43}{32},\tfrac{44}{32})\cap[0,1]=\emptyset$$

$$2x+1<\tfrac{15}{4}$$

$$2x<\tfrac{11}{4}$$

$$x<\tfrac{11}{8}$$

$$E_{60,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{15}{4}\leq 2x+1<\tfrac{61}{16}\}=[\tfrac{44}{32},\tfrac{45}{32})\cap[0,1]\emptyset$$

$$2x+1<\tfrac{61}{16}$$

$$2x<\tfrac{45}{16}$$

$$x<\tfrac{45}{32}$$

$$E_{61,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{61}{16}\leq 2x+1<\tfrac{31}{8}\}=[\tfrac{45}{32},\tfrac{46}{32})\cap[0,1]=\emptyset$$

$$2x+1<\tfrac{31}{8}$$

$$2x<\tfrac{23}{8}$$

$$x<\tfrac{23}{26}$$

$$E_{62,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{31}{8}\leq 2x+1<\tfrac{63}{16}\}=[\tfrac{46}{32},\tfrac{47}{32})\cap[0,1]=\emptyset$$

$$2x+1<\tfrac{63}{16}$$

$$2x<\tfrac{47}{16}$$

$$x<\tfrac{47}{32}$$

$$E_{63,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{63}{16}\leq 2x+1<4\}=[\tfrac{47}{32},\tfrac{48}{32})\cap[0,1]=\emptyset$$

$$2x+1<4$$

$$2x<3$$

$$x<\tfrac{3}{2}$$

$$E_{64,4}=\{x\in[0,1]:4\leq 2x+1\}=[\tfrac{3}{2},+\infty)\cap[0,1]=\emptyset$$

$$2x+1>4$$

$$2x>3$$

$$x>\tfrac{3}{2}$$

- Multiplicando las alturas (imágenes) por las bases (conjuntos medibles) se generan las funciones características, cuya sumatoria es:

$\varphi_4(x) = \frac{16}{16}\mathcal{X}_{[0,\frac{1}{32})}(x) + \frac{17}{16}\mathcal{X}_{[\frac{1}{32},\frac{2}{32})}(x) + \frac{18}{16}\mathcal{X}_{[\frac{2}{32},\frac{3}{32})}(x) + \frac{19}{16}\mathcal{X}_{[\frac{3}{32},\frac{4}{32})}(x) + \frac{20}{16}\mathcal{X}_{[\frac{4}{32},\frac{5}{32})}(x) + \frac{21}{16}\mathcal{X}_{[\frac{5}{32},\frac{6}{32})}(x)+\frac{22}{16}\mathcal{X}_{[\frac{6}{32},\frac{7}{32})}(x)+\frac{23}{16}\mathcal{X}_{[\frac{7}{32},\frac{8}{32})}(x)+\frac{24}{16}\mathcal{X}_{[\frac{8}{32},\frac{9}{32})}(x)+\frac{25}{16}\mathcal{X}_{[\frac{9}{32},\frac{10}{8})}(x)+\frac{26}{16}\mathcal{X}_{[\frac{10}{32},\frac{11}{32})}(x)+ \frac{27}{16}\mathcal{X}_{[\frac{11}{32},\frac{12}{32})}(x)+\frac{28}{16}\mathcal{X}_{[\frac{12}{32},\frac{13}{32})}(x)+\frac{29}{16}\mathcal{X}_{[\frac{13}{32},\frac{14}{32})}(x)+\frac{30}{16}\mathcal{X}_{[\frac{14}{32},\frac{15}{32})}(x)+\frac{31}{16}\mathcal{X}_{[\frac{15}{32},\frac{16}{32})}(x)+\frac{32}{16}\mathcal{X}_{[\frac{16}{32},\frac{17}{32})}(x)+ \frac{33}{16}\mathcal{X}_{[\frac{17}{32},\frac{18}{32})}(x)+\frac{34}{16}\mathcal{X}_{[\frac{18}{32},\frac{19}{32})}(x)+\frac{35}{16}\mathcal{X}_{[\frac{19}{32},\frac{20}{32})}(x)+\frac{36}{16}\mathcal{X}_{[\frac{20}{32},\frac{21}{32})}(x)+\frac{37}{16}\mathcal{X}_{[\frac{21}{32},\frac{22}{32})}(x)+\frac{38}{16}\mathcal{X}_{[\frac{22}{32},\frac{23}{32})}(x)+ \frac{39}{16}\mathcal{X}_{[\frac{23}{32},\frac{24}{32})}(x)+\frac{40}{16}\mathcal{X}_{[\frac{24}{32},\frac{25}{32})}(x)+\frac{41}{16}\mathcal{X}_{[\frac{25}{32},\frac{26}{32})}(x)+\frac{42}{16}\mathcal{X}_{[\frac{26}{32},\frac{27}{32})}(x)+\frac{43}{16}\mathcal{X}_{[\frac{27}{32},\frac{28}{32})}(x)+\frac{44}{16}\mathcal{X}_{[\frac{28}{32},\frac{29}{32})}(x)+ \frac{45}{16}\mathcal{X}_{[\frac{29}{32},\frac{30}{32})}(x) + \frac{46}{16}\mathcal{X}_{[\frac{30}{32},\frac{31}{32})}(x) + \frac{47}{16}\mathcal{X}_{[\frac{31}{32},\frac{32}{32})}(x) + \frac{48}{16}\mathcal{X}_{(\{\frac{32}{32}\})}(x)$

- Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

  $\int \varphi_4(x)d\lambda = \frac{1}{512}\big(16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29+30+31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45+46+47)$

  $\int \varphi_4(x)d\lambda = 1,96875$

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 1,96875$ es la cuarta aproximación de la integral $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)dx$

- La siguiente partición del eje Y más grande menor que $\frac{1}{16}$ con denominador potencia de 2 es $\frac{1}{32}$; por lo que las particiones que corresponden son: $0, \frac{1}{32}, \frac{2}{32}, \frac{3}{32}, \frac{4}{32}, \frac{5}{32}, \frac{6}{32}, \frac{7}{32}, \frac{8}{32}, \frac{9}{32}, \frac{10}{32}, \frac{11}{32}, \frac{12}{32}, \frac{13}{32}, \frac{14}{32}, \frac{15}{32}, \frac{16}{32}, \frac{17}{32}, \frac{18}{32}, \frac{19}{32}, \frac{20}{32}, \frac{21}{32}, \frac{22}{32}, \frac{23}{32}, \frac{24}{32}, \frac{25}{32}, \frac{26}{32}, \frac{27}{32}, \frac{28}{32}, \frac{29}{32}, \frac{30}{32}, \frac{31}{32}, \frac{32}{32}, \frac{33}{32}, \frac{34}{32}, \frac{35}{32}, \frac{36}{32}, \frac{37}{32}, \frac{38}{32}, \frac{39}{32}, \frac{40}{32}, \frac{41}{32}, \frac{42}{32}, \frac{43}{32}, \frac{44}{32}, \frac{45}{32}, \frac{46}{32}, \frac{47}{32}, \frac{48}{32}, \frac{49}{32}, \frac{50}{32}, \frac{51}{32}, \frac{52}{32}, \frac{53}{32}, \frac{54}{32}, \frac{55}{32}, \frac{56}{32}, ..., \frac{157}{32}, \frac{158}{32}, \frac{159}{32}$ y $\frac{160}{32}$.

  Para que se generen 161 espacios con $n = 5$, la única vía posible entre las variables k, n corresponde a $k = n2^n = 160$; de esta forma $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, ..., 158, 159, 160$; es decir los 161 espacios medibles que se generados.

- Una vez establecidos los espacios $E_{k,n}$ se generan desigualdades con el límite inferior a la izquierda seguida de la función en cuestión y el límite superior a la derecha. Se procede a resolver dichas desigualdades y el espacio generado debe ser intersecado con el espacio en que se desea integrar la función, en este caso $[0, 1]$.

$$E_{0,5} = \{x \in [0,1] : 0 \leq 2x+1 < \tfrac{1}{32}\} = \emptyset$$

$$0 \leq 2x+1 \wedge 2x+1 < \tfrac{1}{32}$$

$$-\tfrac{1}{2} \leq x \wedge x < -\tfrac{31}{32}$$

$$E_{1,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{32} \leq 2x+1 < \tfrac{2}{32}\} = \emptyset$$

$$\tfrac{1}{32} \leq 2x+1 \wedge 2x+1 < \tfrac{2}{32}$$

$$-\tfrac{31}{64} \leq x \wedge x < -\tfrac{30}{32}$$

.

.

.

$$E_{32,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{32}{32} \leq 2x+1 < \tfrac{33}{32}\} = [0, \tfrac{1}{64}) \cap [0,1] = [0, \tfrac{1}{64})$$

$$\tfrac{0}{32} \leq 2x+1 \wedge 2x+1 < \tfrac{1}{32}$$

$$0 \leq x \wedge x < \tfrac{1}{64}$$

$$E_{33,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{33}{32} \leq 2x+1 < \tfrac{34}{32}\} = [\tfrac{1}{64}, \tfrac{2}{64}) \cap [0,1] = [\tfrac{1}{64}, \tfrac{2}{64})$$

$$\tfrac{1}{32} \leq 2x+1 \wedge 2x+1 < \tfrac{2}{32}$$

$$\tfrac{1}{64} \leq x \wedge x < \tfrac{2}{64}$$

.

.

.

$$E_{96,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{96}{32} \leq 2x+1 \wedge 2x+1 < \tfrac{97}{32}\} = [1, \tfrac{65}{64} \cap [0,1]\} = \{1\}$$

$$1 \leq x \wedge 2x+1 < \tfrac{97}{32}$$

$$1 \leq x \wedge x < \tfrac{65}{64}$$

- Multiplicando las alturas (imágenes) por las bases (espacios medibles) se generan las funciones características, cuya sumatoria es:

  $\varphi_5(x) = \frac{32}{32}\mathcal{X}_{[\frac{0}{64},\frac{1}{64})}(x) + \frac{33}{32}\mathcal{X}_{[\frac{1}{64},\frac{2}{64})}(x) + \frac{34}{32}\mathcal{X}_{[\frac{2}{64},\frac{3}{64})}(x) + \frac{35}{32}\mathcal{X}_{[\frac{3}{64},\frac{4}{64})}(x) + \frac{36}{32}\mathcal{X}_{[\frac{4}{64},\frac{5}{64})}(x) + \frac{37}{32}\mathcal{X}_{[\frac{5}{64},\frac{6}{64})}(x) + \frac{38}{32}\mathcal{X}_{[\frac{6}{64},\frac{7}{64})}(x) + \frac{39}{32}\mathcal{X}_{[\frac{7}{64},\frac{8}{64})}(x) + \frac{40}{32}\mathcal{X}_{[\frac{8}{64},\frac{9}{64})}(x) + \frac{41}{32}\mathcal{X}_{[\frac{9}{64},\frac{10}{64})}(x) + \frac{42}{32}\mathcal{X}_{[\frac{10}{64},\frac{11}{64})}(x) +$

$\frac{43}{32}\mathcal{X}_{[\frac{11}{64},\frac{12}{64})}(x)+\frac{44}{32}\mathcal{X}_{[\frac{12}{64},\frac{13}{64})}(x)+\frac{45}{32}\mathcal{X}_{[\frac{13}{64},\frac{14}{64})}(x)+\frac{46}{32}\mathcal{X}_{[\frac{14}{64},\frac{15}{64})}(x)+\frac{47}{32}\mathcal{X}_{[\frac{15}{64},\frac{16}{64})}(x)+\frac{48}{32}\mathcal{X}_{[\frac{16}{64},\frac{17}{64})}(x)+$
$\frac{49}{32}\mathcal{X}_{[\frac{17}{64},\frac{18}{64})}(x)+\frac{50}{32}\mathcal{X}_{[\frac{18}{64},\frac{19}{64})}(x)+\frac{51}{32}\mathcal{X}_{[\frac{19}{64},\frac{20}{64})}(x)+\frac{52}{32}\mathcal{X}_{[\frac{20}{64},\frac{21}{64})}(x)+\frac{53}{32}\mathcal{X}_{[\frac{21}{64},\frac{22}{64})}(x)+\frac{54}{32}\mathcal{X}_{[\frac{22}{64},\frac{23}{64})}(x)+$
$\frac{55}{32}\mathcal{X}_{[\frac{23}{64},\frac{24}{64})}(x)+\frac{56}{32}\mathcal{X}_{[\frac{24}{64},\frac{25}{64})}(x)+\frac{57}{32}\mathcal{X}_{[\frac{25}{64},\frac{26}{64})}(x)+\frac{58}{32}\mathcal{X}_{[\frac{26}{64},\frac{27}{64})}(x)+\frac{59}{32}\mathcal{X}_{[\frac{27}{64},\frac{28}{64})}(x)+\frac{60}{32}\mathcal{X}_{[\frac{28}{64},\frac{29}{64})}(x)+$
$\frac{61}{32}\mathcal{X}_{[\frac{29}{64},\frac{30}{64})}(x)+\frac{62}{32}\mathcal{X}_{[\frac{30}{64},\frac{31}{64})}(x)+\frac{63}{32}\mathcal{X}_{[\frac{31}{64},\frac{32}{64})}(x)+\frac{64}{32}\mathcal{X}_{[\frac{32}{64},\frac{33}{64})}(x)+\frac{65}{32}\mathcal{X}_{[\frac{33}{64},\frac{34}{64})}(x)+\frac{66}{32}\mathcal{X}_{[\frac{34}{64},\frac{35}{64})}(x)+$
$\frac{67}{32}\mathcal{X}_{[\frac{35}{64},\frac{36}{64})}(x)+\frac{68}{32}\mathcal{X}_{[\frac{36}{64},\frac{37}{64})}(x)+\frac{69}{32}\mathcal{X}_{[\frac{37}{64},\frac{38}{64})}(x)+\frac{70}{32}\mathcal{X}_{[\frac{38}{64},\frac{39}{64})}(x)+\frac{71}{32}\mathcal{X}_{[\frac{39}{64},\frac{40}{64})}(x)+\frac{72}{32}\mathcal{X}_{[\frac{40}{64},\frac{41}{64})}(x)+$
$\frac{73}{32}\mathcal{X}_{[\frac{41}{64},\frac{42}{64})}(x)+\frac{74}{32}\mathcal{X}_{[\frac{42}{64},\frac{43}{64})}(x)+\frac{75}{32}\mathcal{X}_{[\frac{43}{64},\frac{44}{64})}(x)+\frac{76}{32}\mathcal{X}_{[\frac{44}{64},\frac{45}{64})}(x)+\frac{77}{32}\mathcal{X}_{[\frac{45}{64},\frac{46}{64})}(x)+\frac{78}{32}\mathcal{X}_{[\frac{46}{64},\frac{47}{64})}(x)+$
$\frac{79}{32}\mathcal{X}_{[\frac{47}{64},\frac{48}{64})}(x)+\frac{80}{32}\mathcal{X}_{[\frac{48}{64},\frac{49}{64})}(x)+\frac{81}{32}\mathcal{X}_{[\frac{49}{64},\frac{50}{64})}(x)+\frac{82}{32}\mathcal{X}_{[\frac{50}{64},\frac{51}{64})}(x)+\frac{83}{32}\mathcal{X}_{[\frac{51}{64},\frac{52}{64})}(x)+\frac{84}{32}\mathcal{X}_{[\frac{52}{64},\frac{53}{64})}(x)+$
$\frac{85}{32}\mathcal{X}_{[\frac{53}{64},\frac{54}{64})}(x)+\frac{86}{32}\mathcal{X}_{[\frac{54}{64},\frac{55}{64})}(x)+\frac{87}{32}\mathcal{X}_{[\frac{55}{64},\frac{56}{64})}(x)+\frac{88}{32}\mathcal{X}_{[\frac{56}{64},\frac{57}{64})}(x)+\frac{89}{32}\mathcal{X}_{[\frac{57}{64},\frac{58}{64})}(x)+\frac{90}{32}\mathcal{X}_{[\frac{58}{64},\frac{59}{64})}(x)+$
$\frac{91}{32}\mathcal{X}_{[\frac{59}{64},\frac{60}{64})}(x)+\frac{92}{32}\mathcal{X}_{[\frac{60}{64},\frac{61}{64})}(x)+\frac{93}{32}\mathcal{X}_{[\frac{61}{64},\frac{62}{64})}(x)+\frac{94}{32}\mathcal{X}_{[\frac{62}{64},\frac{63}{64})}(x)+\frac{95}{32}\mathcal{X}_{[\frac{63}{64},\frac{64}{64})}(x)+\frac{96}{32}\mathcal{X}_{(\{1\})}(x)$

- Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int\varphi_5(x)d\lambda=\frac{32}{32}\left(\frac{1}{64}-\frac{0}{64}\right)+\frac{33}{32}\left(\frac{2}{64}-\frac{1}{64}\right)+\frac{34}{32}\left(\frac{3}{64}-\frac{2}{64}\right)+\frac{35}{32}\left(\frac{4}{64}-\frac{3}{64}\right)+\frac{36}{32}\left(\frac{5}{64}-\frac{4}{64}\right)+\frac{37}{32}\left(\frac{6}{64}-\right.$
$\left.\frac{5}{64}\right)+\frac{38}{32}\left(\frac{7}{64}-\frac{6}{64}\right)+\frac{39}{32}\left(\frac{8}{64}-\frac{7}{64}\right)+\frac{40}{32}\left(\frac{9}{64}-\frac{8}{64}\right)+\frac{41}{32}\left(\frac{10}{9}-\frac{0}{64}\right)+\frac{42}{32}\left(\frac{11}{64}-\frac{10}{64}\right)+\frac{43}{32}\left(\frac{12}{64}-\frac{11}{64}\right)+$
$\frac{44}{32}\left(\frac{13}{64}-\frac{12}{64}\right)+\frac{45}{32}\left(\frac{14}{64}-\frac{13}{64}\right)+\frac{46}{32}\left(\frac{15}{64}-\frac{14}{64}\right)+\frac{47}{32}\left(\frac{16}{64}-\frac{15}{64}\right)+\frac{48}{32}\left(\frac{17}{64}-\frac{16}{64}\right)+\frac{49}{32}\left(\frac{18}{64}-\frac{17}{64}\right)+\frac{50}{32}\left(\frac{19}{64}-\right.$
$\left.\frac{18}{64}\right)+\frac{51}{32}\left(\frac{20}{64}-\frac{19}{64}\right)+\frac{52}{32}\left(\frac{21}{64}-\frac{20}{64}\right)+\frac{53}{32}\left(\frac{22}{64}-\frac{21}{64}\right)+\frac{54}{32}\left(\frac{23}{64}-\frac{22}{64}\right)+\frac{55}{32}\left(\frac{24}{64}-\frac{23}{64}\right)+\frac{56}{32}\left(\frac{25}{64}-\frac{24}{64}\right)+$
$\frac{57}{32}\left(\frac{26}{64}-\frac{25}{64}\right)+\frac{58}{32}\left(\frac{27}{64}-\frac{26}{64}\right)+\frac{59}{32}\left(\frac{28}{64}-\frac{27}{64}\right)+\frac{60}{32}\left(\frac{29}{64}-\frac{28}{64}\right)+\frac{61}{32}\left(\frac{30}{64}-\frac{29}{64}\right)+\frac{62}{32}\left(\frac{31}{64}-\frac{30}{64}\right)+\frac{63}{32}\left(\frac{32}{64}-\right.$
$\left.\frac{31}{64}\right)+\frac{64}{32}\left(\frac{33}{64}-\frac{32}{64}\right)+\frac{65}{32}\left(\frac{34}{64}-\frac{33}{64}\right)+\frac{66}{32}\left(\frac{35}{64}-\frac{34}{64}\right)+\frac{67}{32}\left(\frac{36}{64}-\frac{35}{64}\right)+\frac{68}{32}\left(\frac{37}{64}-\frac{36}{64}\right)+\frac{69}{32}\left(\frac{38}{64}-\frac{37}{64}\right)+$
$\frac{70}{32}\left(\frac{39}{64}-\frac{38}{64}\right)+\frac{71}{32}\left(\frac{40}{64}-\frac{39}{64}\right)+\frac{72}{32}\left(\frac{41}{64}-\frac{40}{64}\right)+\frac{73}{32}\left(\frac{42}{64}-\frac{41}{64}\right)+\frac{74}{32}\left(\frac{43}{64}-\frac{42}{64}\right)+\frac{75}{32}\left(\frac{44}{64}-\frac{43}{64}\right)+\frac{76}{32}\left(\frac{45}{64}-\right.$
$\left.\frac{44}{64}\right)+\frac{77}{32}\left(\frac{46}{64}-\frac{45}{64}\right)+\frac{78}{32}\left(\frac{47}{64}-\frac{46}{64}\right)+\frac{79}{32}\left(\frac{48}{64}-\frac{47}{64}\right)+\frac{80}{32}\left(\frac{49}{64}-\frac{48}{64}\right)+\frac{81}{32}\left(\frac{50}{64}-\frac{49}{64}\right)+\frac{82}{32}\left(\frac{51}{64}-\frac{50}{64}\right)+$
$\frac{83}{32}\left(\frac{52}{64}-\frac{51}{64}\right)+\frac{84}{32}\left(\frac{53}{64}-\frac{52}{64}\right)+\frac{85}{32}\left(\frac{54}{64}-\frac{53}{64}\right)+\frac{86}{32}\left(\frac{55}{64}-\frac{54}{64}\right)+\frac{87}{32}\left(\frac{56}{64}-\frac{55}{64}\right)+\frac{88}{32}\left(\frac{57}{64}-\frac{56}{64}\right)+\frac{89}{32}\left(\frac{58}{64}-\right.$
$\left.\frac{57}{64}\right)+\frac{90}{32}\left(\frac{59}{64}-\frac{58}{64}\right)+\frac{91}{32}\left(\frac{60}{64}-\frac{59}{64}\right)+\frac{92}{32}\left(\frac{61}{64}-\frac{60}{64}\right)+\frac{93}{32}\left(\frac{62}{64}-\frac{61}{64}\right)+\frac{94}{32}\left(\frac{63}{64}-\frac{62}{64}\right)+\frac{95}{32}\left(\frac{64}{64}-\frac{63}{64}\right)+\frac{96}{32}(0)$

$$\int\varphi_5(x)d\lambda=\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{\sum_{i=32}^{95}i}{32}\right)$$

$$\int\varphi_5(x)d\lambda=1{,}984375$$

$\int\varphi_5(x)d\lambda=1,984375$ es la quinta aproximación de la integral $\displaystyle\int_0^1(2x+1)dx$

Siguiendo esta metodología a detalle, se generan todos los ejemplos del presente trabajo.

3.2. Función polinomial. $f(x) = x^2 + 1$

La función que se presenta incialmente es una función cuadrática de la forma $y = x^2 + b$ de la cual se desea obtener el valor de la integral.

$$\int_0^1 (x^2+1)dx$$

A continuación se presentan 2 opciones de integración de esta función, para finalmente generar la Integral de Lebesgue con todos los detalles expuestos anteriormente.

a) **Integral Definida.**

Exclusivamente por notación se denotará a la integral como

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x^2+1)dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dx \\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\big(1-0\big) + (1-0) \\ &= \frac{4}{3} \simeq 1,3333333... \end{aligned}$$

b) **Sumas de Riemann**

Para realizar la intregración por Riemann debemos primero denotar
$A = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)dx$ es equivalente a

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow c_i = 0 + i\big(\frac{1}{n}\big) = \frac{i}{n}$$

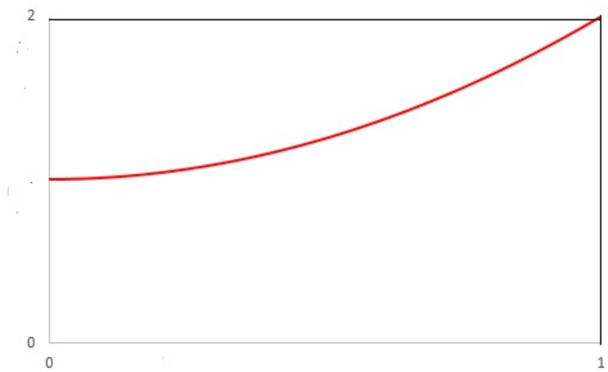

Figura 11: $f(x) = x^2 + 1$

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{i}{n} \right)^2 + 1 \right] \left(\frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i^2}{n^2} + 1 \right] \left(\frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i^2}{n^2} + 1 \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} + \sum_{i=}^{n} 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left\{ \left(\frac{1}{n^2} \right) \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] + n \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} + n \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{2n^2+3n+1}{6n} + n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{2n^2+3n+1+6n^2}{6n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{8n^2+3n+1}{6n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{8n^2}{6n} + \frac{3n}{6n} + \frac{1}{6n} \right) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Como puede verse, también se genera el mismo resultado que en la integral definida.

c) **Integral de Lebesgue**

Con la operatividad detallada en páginas anteriores se disponen de las suficientes herramientas para generar, plantear y desarrollar la integral de Lebesgue del ejemplo en cuestión.

Si se tiene $n = 1, k = n2^n = 2 \Rightarrow k = 0, 1, 2$

$$E_{0,1} = \{x \in [0,1] : 0 \leq x^2 + 1 < \tfrac{1}{2}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$0 \leq x^2+1 \wedge x^2+1 < \tfrac{1}{2}$$

$$-1 \leq x^2 \wedge x^2 < -\tfrac{1}{2}$$

$$E_{1,1} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} \leq x^2+1 < 1\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$\tfrac{1}{2} \leq x^2+1 \wedge x^2+1 < 1$$

$$-\tfrac{1}{2} \leq x^2 \wedge x^2 < 0$$

$$E_{2,1} = \{x \in [0,1] : 1 \leq x^2+1\} = [0,1]$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_1(x) = 0\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + 1\mathcal{X}_{[0,1]}(x)$

Por L(a) y L(b) para dicho intervalo, resulta:

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 1\lambda_{([0,1])}$

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 1$

Ahora si se tiene que para $n = 2, k = n2^n = 8 \Rightarrow k = 0{,}1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$E_{0,2} = \{x \in [0,1] : 0 \leq x^2+1 < \tfrac{1}{4}\} = \emptyset$$

$$0 \leq x^2+1 \wedge x^2+1 < \tfrac{1}{4}$$

$$-1 \leq x^2 \wedge x^2 < -\tfrac{3}{4}$$

$$E_{1,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{4} \leq x^2+1 < \tfrac{1}{2}\} = \emptyset$$

$$x^2+1 < \tfrac{1}{2}$$

$$x^2 < -\tfrac{1}{2}$$

$$E_{2,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} \leq x^2+1 < \tfrac{3}{4}\} = \emptyset$$

$$x^2+1 < \tfrac{3}{4}$$

$$x^2 < -\tfrac{1}{4}$$

$$E_{3,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{4} \leq x^2+1 < 1\} = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < 1$$

$$x^2 < 0$$

$$x < 0$$

$$E_{4,2} = \{x \in [0,1] : 1 \leq x^2 + 1 < \tfrac{5}{4}\} = (0, \tfrac{1}{2}) \cap [0,1] = [0, \tfrac{1}{2})$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{5}{4}$$

$$x^2 < \tfrac{1}{4}$$

$$x < \tfrac{1}{2}$$

$$E_{5,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{3}{2}\} = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}) \cap [0,1] = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{3}{2}$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{1}{2}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$E_{6,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{2} \leq x^2 + 1 < \tfrac{7}{4}\} = [\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{7}{4}$$

$$x^2 < \tfrac{3}{4}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E_{7,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{4} \leq 2x + 1 < 2\} = [\tfrac{3}{8}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1)$$

$$x^2 + 1 < 2$$

$$x^2 < 1$$

$$x < 1$$

$$E_{8,2} = \{x \in [0,1] : 2 \leq x^2 + 1\} = \{1, +\infty\} \cap [0,1] = \{1\}$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_2(x) = 0\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{1}{4}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{3}{4}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + 1\mathcal{X}_{[0,\frac{1}{2})}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{X}_{[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}(x) + \frac{3}{2}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})} + \frac{7}{4}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{3}}{2},1)} + 1\mathcal{X}_{\{1\}}(x)$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 0\lambda_{(\emptyset)} + \frac{1}{4}\lambda_{(\emptyset)} + \frac{1}{2}\lambda_{(\emptyset)} + \frac{3}{4}\lambda_{(\emptyset)} + 1\lambda_{[0,\frac{1}{2})} + \frac{5}{4}\lambda_{[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})} + \frac{3}{2}\lambda_{[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})} + \frac{7}{4}\lambda_{[\frac{\sqrt{3}}{2},1)} + 1\lambda_{\{1\}}$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 1(\frac{1}{2} - 0) + \frac{5}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{7}{4}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}(\frac{\sqrt{2}-1}{2}) + \frac{3}{2}(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}) + \frac{7}{4}(\frac{2-\sqrt{3}}{2})$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}(\sqrt{2} - 1) + \frac{3}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \frac{7}{8}(2 - \sqrt{3})$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 1,231716954$

Ahora si se tiene que para $n = 3, k = n2^n = 24 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 19, 20, 21, 22, 23, 24$

$$E_{0,3} = \{x \in [0,1] : 0 \leq x^2 + 1 < \frac{1}{8}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$0 \leq x^2 + 1 \wedge x^2 + 1 < \frac{1}{8}$$

$$-1 \leq x^2 \wedge x^2 < -\frac{7}{8}$$

$$E_{1,3} = \{x \in [0,1] : \frac{1}{8} \leq x^2 + 1 < \frac{1}{4}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{1}{4}$$

$$x^2 < -\frac{3}{4}$$

$$E_{2,3} = \{x \in [0,1] : \frac{1}{4} \leq x^2 + 1 < \frac{3}{8}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{3}{8}$$

$$x^2 < -\frac{5}{8}$$

$$E_{3,3} = \{x \in [0,1] : \frac{5}{8} \leq x^2 + 1 < \frac{1}{2}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{1}{2}$$

$$x^2 < -\frac{1}{2}$$

$$E_{4,3} = \{x \in [0,1] : \frac{1}{2} \leq x^2 + 1 < \frac{5}{8}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{5}{8}$$

$$x^2 < -\frac{3}{8}$$

$$E_{5,3} = \{x \in [0,1] : \frac{5}{8} \leq x^2 + 1 < \frac{3}{4}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{3}{4}$$

$$x^2 < -\tfrac{1}{4}$$

$$E_{6,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{7}{8}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{7}{8}$$

$$x^2 < -\tfrac{1}{8}$$

$$E_{7,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{8} \leq x^2 + 1 < 1\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < 1$$

$$x^2 < 0$$

$$x < 0$$

$$E_{8,3} = \{x \in [0,1] : 1 \leq x^2 + 1 < \tfrac{9}{8}\} = [0, \tfrac{2}{4}) \cap [0,1] = [0, \tfrac{\sqrt{2}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{9}{8}$$

$$x^2 < \tfrac{1}{8}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{2}}{4}$$

$$E_{9,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{9}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{5}{4}\} = [\tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{1}{2}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{1}{2})$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{5}{4}$$

$$x^2 < \tfrac{1}{4}$$

$$x < \tfrac{1}{2}$$

$$E_{10,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{11}{8}\} = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{6}{4}) \cap [0,1] = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{6}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{11}{8}$$

$$x^2 < \tfrac{3}{8}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{6}}{4}$$

$$E_{11,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{11}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{3}{2}\} = [\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{3}{2}$$

$$x^2 < \frac{1}{2}$$

$$x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$E_{12,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{2} \leq x^2 + 1 < \tfrac{13}{8}\} = [\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{10}}{4}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{10}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{13}{8}$$

$$x^2 < \frac{5}{8}$$

$$x < \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$E_{13,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{13}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{7}{4}\} = [\tfrac{\sqrt{10}}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{10}}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x^2 + 1 < \frac{7}{4}$$

$$x^2 < \frac{3}{4}$$

$$x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E_{14,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{15}{8}\} = [\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{14}}{4}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{14}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{15}{8}$$

$$x^2 < \frac{7}{8}$$

$$x < \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$E_{15,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{15}{8} \leq x^2 + 1 < 2\} = [\tfrac{\sqrt{14}}{4}, 1) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{14}}{4}, 1)$$

$$x^2 + 1 < 2$$

$$x^2 < 1$$

$$x < 1$$

$$E_{16,3} = \{x \in [0,1] : 2 \leq x^2 + 1 < \tfrac{17}{8}\} = [1, \tfrac{3\sqrt{2}}{4}) \cap [0,1] = \{1\}$$

$$x^2 + 1 < \frac{17}{8}$$

$$x^2 < \frac{9}{8}$$

$$x < \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$E_{17,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{17}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{9}{4}\} = [\tfrac{3\sqrt{2}}{4}, \tfrac{\sqrt{5}}{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{9}{4}$$

$$x^2 < \tfrac{5}{4}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

$$E_{18,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{9}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{19}{8}\} = [\tfrac{\sqrt{5}}{2}, \tfrac{\sqrt{22}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{19}{8}$$

$$x^2 < \tfrac{11}{8}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{22}}{4}$$

$$E_{19,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{19}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{5}{2}\} = [\tfrac{\sqrt{22}}{4}, \tfrac{\sqrt{6}}{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{5}{2}$$

$$x^2 < \tfrac{3}{2}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{6}}{2}$$

$$E_{20,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{2} \leq x^2 + 1 < \tfrac{21}{8}\} = [\tfrac{\sqrt{6}}{2}, \tfrac{\sqrt{26}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{21}{8}$$

$$x^2 < \tfrac{13}{8}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{26}}{4}$$

$$E_{21,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{21}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{11}{4}\} = [\tfrac{\sqrt{26}}{4}, \tfrac{\sqrt{7}}{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{11}{4}$$

$$x^2 < \tfrac{7}{4}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{7}}{2}$$

$$E_{22,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{11}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{23}{8}\} = [\tfrac{\sqrt{7}}{2}, \tfrac{\sqrt{30}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{23}{8}$$

$$x^2 < \tfrac{15}{8}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{30}}{4}$$

$$E_{23,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{23}{8} \leq x^2 + 1 < 3\} = [\tfrac{\sqrt{30}}{4}, \sqrt{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < 3$$

$$x^2 < 2$$

$$x < \sqrt{2}$$

$$E_{24,3} = \{x \in [0,1] : 3 \leq x^2 + 1\} = [\sqrt{2}, +\infty)\} \cap [0,1] = \emptyset,$$

$$x^2 + 1 > 3$$

$$x^2 > 2$$

$$x > \sqrt{2}$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_3(x) = 0\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{1}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{1}{4}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{3}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{5}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{3}{4}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{7}{8}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + 1\mathcal{X}_{[0,\frac{\sqrt{2}}{4})}(x) + \frac{9}{8}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2})}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{X}_{[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{4})}(x) + \frac{11}{8}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})}(x) + \frac{3}{2}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5}{16})}(x) + \frac{13}{8}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{10}}{4},\frac{3}{8})}(x) + \frac{7}{4}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{14}}{4})}(x) + \frac{15}{8}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{14}}{4},\frac{1}{2})}(x) + 2\mathcal{X}_{\{1\}}(x)$

Por L(a) y L(b) para dicho intervalo, resulta:

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 1\lambda_{[0,\frac{\sqrt{2}}{4})} + \frac{9}{8}\lambda_{[\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{8})} + \frac{5}{4}\lambda_{[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{4})} + \frac{11}{8}\lambda_{[\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})} + \frac{3}{2}\lambda_{[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{4})} + \frac{13}{8}\lambda_{[\frac{\sqrt{10}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})} + \frac{7}{4}\lambda_{[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{14}}{4})} + \frac{15}{8}\lambda_{[\frac{\sqrt{14}}{4},1)} + 2\lambda_{\{1\}}$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 1\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{10}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{13}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{4}\right) + \frac{7}{4}\left(\frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{15}{8}\left(1 - \frac{\sqrt{14}}{4}\right)$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = \frac{1}{16} + \frac{9}{8}\left(\frac{2-1}{16}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{3-2}{16}\right) + \frac{11}{8}\left(\frac{4-3}{16}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{5-4}{16}\right) + \frac{13}{8}\left(\frac{6-5}{16}\right) + \frac{7}{4}\left(\frac{7-6}{16}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{7-6}{16}\right) + 2\left(\frac{9-8}{16}\right) + \frac{17}{8}\left(\frac{10-9}{16}\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{11-10}{16}\right) + \frac{19}{8}\left(\frac{12-11}{16}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{13-12}{16}\right) + \frac{21}{8}\left(\frac{14-13}{16}\right) + \frac{11}{4}\left(\frac{15-14}{16}\right) + \frac{23}{8}\left(\frac{16-15}{16}\right)$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{32}(2-\sqrt{2}) + \frac{5}{16}(\sqrt{6}-2) + \frac{11}{32}(2\sqrt{2}-\sqrt{6}) + \frac{3}{8}(\sqrt{10}-2\sqrt{2}) + \frac{13}{32}(2\sqrt{3}-\sqrt{10}) + \frac{7}{16}(\sqrt{14}-2\sqrt{3}) + \frac{15}{32}(4-\sqrt{14})$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 1,279369778$

Ahora si se tiene que para $n = 4$, $k = n2^n = 64 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59,$ 60,$61, 62, 63, 64$

$$E_{0,4} = \{x \in [0,1] : 0 \leq x^2 + 1 < \tfrac{1}{16}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$0 \leq x^2 + 1 \wedge x^2 + 1 < \tfrac{1}{16}$$

$$-1 \leq x^2 \wedge x^2 < -\tfrac{15}{16}$$

$$E_{1,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{16} \leq x^2 + 1 < \tfrac{1}{8}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{1}{8}$$

$$x^2 < -\tfrac{7}{8}$$

$$E_{2,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{3}{16}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{3}{16}$$

$$x^2 < -\tfrac{13}{16}$$

$$E_{3,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{16} \le x^2 + 1 < \tfrac{1}{4}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{1}{4}$$

$$x^2 < -\tfrac{3}{4}$$

$$E_{4,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{4} \le x^2 + 1 < \tfrac{5}{16}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{5}{16}$$

$$x^2 < -\tfrac{11}{16}$$

$$E_{5,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{16} \le x^2 + 1 < \tfrac{3}{8}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{3}{8}$$

$$x^2 < -\tfrac{5}{8}$$

$$E_{6,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{8} \le x^2 + 1 < \tfrac{7}{16}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{7}{16}$$

$$x^2 < -\tfrac{-9}{16}$$

$$E_{7,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{16} \le x^2 + 1 < \tfrac{1}{2}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{1}{2}$$

$$x^2 < -\tfrac{1}{2}$$

$$E_{8,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} \le x^2 + 1 < \tfrac{9}{16}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{9}{16}$$

$$x^2 < -\tfrac{7}{16}$$

$$E_{9,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{9}{16} \le x^2 + 1 < \tfrac{5}{8}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{5}{8}$$

$$x^2 < -\tfrac{3}{16}$$

$$E_{10,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{8} \le x^2 + 1 < \tfrac{11}{16}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{11}{16}$$

$$x^2 < -\frac{5}{16}$$

$$E_{11,4} = \{x \in [0,1] : \frac{11}{16} \leq x^2 + 1 < \frac{3}{4}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{3}{4}$$

$$x^2 < -\frac{1}{4}$$

$$E_{12,4} = \{x \in [0,1] : \frac{3}{4} \leq x^2 + 1 < \frac{13}{16}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{13}{16}$$

$$x^2 < -\frac{3}{16}$$

$$E_{13,4} = \{x \in [0,1] : \frac{13}{16} \leq x^2 + 1 < \frac{7}{8}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{7}{8}$$

$$x^2 < -\frac{1}{8}$$

$$E_{14,4} = \{x \in [0,1] : \frac{1}{8} \leq x^2 + 1 < \frac{15}{16}\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{15}{16}$$

$$x^2 < -\frac{1}{16}$$

$$E_{15,4} = \{x \in [0,1] : \frac{15}{16} \leq x^2 + 1 < 1\} = \emptyset \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < 1$$

$$x^2 < 0$$

$$E_{16,4} = \{x \in [0,1] : 1 \leq x^2 + 1 < \frac{17}{16}\} = [0, \frac{1}{4}) \cap [0,1] = [0, \frac{1}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{17}{16}$$

$$x < \frac{1}{16}$$

$$x < \frac{1}{4}$$

$$E_{17,4} = \{x \in [0,1] : \frac{17}{16} \leq x^2 + 1 < \frac{9}{8}\} = [\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}) \cap [0,1] = [\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{9}{8}$$

$$x^2 < \frac{1}{8}$$

$$x < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$E_{18,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{9}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{19}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{4}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{19}{16}$$

$$x^2 < \frac{3}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$E_{19,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{19}{16} \leq x^2 + 1 < \tfrac{5}{4}\} = [\tfrac{\sqrt{3}}{4}, \tfrac{1}{2}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{3}}{4}, \tfrac{1}{2})$$

$$x^2 + 1 < \frac{5}{4}$$

$$x^2 < \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{1}{2}$$

$$E_{20,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{2} \leq x^2 + 1 < \tfrac{21}{16}\} = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{4}) \cap [0,1] = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{5}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{21}{16}$$

$$x^2 < \frac{5}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$E_{21,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{21}{16} \leq x^2 + 1 < \tfrac{11}{8}\} = [\tfrac{\sqrt{5}}{4}, \tfrac{\sqrt{6}}{4}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{5}}{4}, \tfrac{\sqrt{6}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{11}{8}$$

$$x^2 < \frac{3}{8}$$

$$x < \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$E_{22,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{11}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{23}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{\sqrt{7}}{4}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{\sqrt{7}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{23}{16}$$

$$x^2 < \frac{7}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$E_{23,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{23}{16} \leq x^2 + 1 < \tfrac{3}{2}\} = [\tfrac{\sqrt{7}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}) \cap [0,1] = [\tfrac{\sqrt{7}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$x^2 + 1 < \frac{3}{2}$$

$$x^2 < \frac{1}{2}$$

$$x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$E_{24,4} = \{x \in [0,1] : \frac{5}{2} \leq x^2 + 1 < \frac{25}{16}\} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}) \cap [0,1] = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{25}{16}$$

$$x^2 < \frac{9}{16}$$

$$x < \frac{3}{4}$$

$$E_{25,4} = \{x \in [0,1] : \frac{25}{16} \leq x^2 + 1 < \frac{13}{8}\} = [\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{10}}{4}) \cap [0,1] = [\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{10}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{13}{8}$$

$$x^2 < \frac{5}{8}$$

$$x < \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$E_{26,4} = \{x \in [0,1] : \frac{13}{8} \leq x^2 + 1 < \frac{27}{16}\} = [\frac{\sqrt{10}}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}) \cap [0,1] = [\frac{\sqrt{10}}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{27}{16}$$

$$x^2 < \frac{11}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$E_{27,4} = \{x \in [0,1] : \frac{27}{16} \leq x^2 + 1 < \frac{7}{4}\} = [\frac{\sqrt{11}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \cap [0,1] = [\frac{\sqrt{11}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x^2 + 1 < \frac{7}{4}$$

$$x^2 < \frac{3}{4}$$

$$x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E_{28,4} = \{x \in [0,1] : \frac{7}{4} \leq x^2 + 1 < \frac{29}{16}\} = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{29}{16}) \cap [0,1] = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{29}{16})$$

$$x^2 + 1 < \frac{29}{16}$$

$$x^2 < \frac{13}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$E_{29,4} = \{x \in [0,1] : \frac{29}{16} \leq x^2 + 1 < \frac{15}{8}\} = [\frac{\sqrt{13}}{4}, \frac{\sqrt{14}}{4}) \cap [0,1] = [\frac{\sqrt{13}}{4}, \frac{\sqrt{14}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{25}{8}$$

$$x^2 < \frac{7}{8}$$

$$x < \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$E_{30,4} = \{x \in [0,1] : \frac{15}{8} \leq x^2 + 1 < \frac{31}{16}\} = [\frac{\sqrt{14}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}) \cap [0,1] = [\frac{\sqrt{14}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$$

$$x^2 + 1 < \frac{31}{16}$$

$$x^2 < \frac{15}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$E_{31,4} = \{x \in [0,1] : \frac{31}{16} \leq x^2 + 1 < 2\} = [\frac{\sqrt{15}}{4}, 1) \cap [0,1] = [\frac{\sqrt{15}}{4}, 1)$$

$$x^2 + 1 < 2$$

$$x^2 < 1$$

$$x < 1$$

$$E_{32,4} = \{x \in [0,1] : 2 \leq x^2 + 1 < \frac{33}{16}\} = [1, \frac{\sqrt{17}}{4}) \cap [0,1] = \{1\}$$

$$x^2 + 1 < \frac{33}{16}$$

$$x^2 + 1 < \frac{17}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$E_{33,4} = \{x \in [0,1] : \frac{33}{16} \leq x^2 + 1 < \frac{17}{8}\} = [\frac{17}{32}, \frac{9}{16}) \cap [0,1] = [\frac{17}{32}, \frac{9}{16})$$

$$x^2 + 1 < \frac{17}{8}$$

$$x^2 < \frac{9}{8}$$

$$x < \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$E_{34,4} = \{x \in [0,1] : \frac{17}{8} \leq x^2 + 1 < \frac{35}{16}\} = [\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{19}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{35}{16}$$

$$x^2 < \frac{19}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{19}}{4}$$

$$E_{35,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{35}{16} \leq x^2 + 1 < \tfrac{9}{4}\} = [\tfrac{\sqrt{19}}{4}, \tfrac{\sqrt{5}}{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{5}{4}$$

$$x^2 < \tfrac{5}{4}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

$$E_{36,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{9}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{37}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{5}}{2}, \tfrac{\sqrt{21}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{37}{16}$$

$$x < \tfrac{21}{16}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{21}}{4}$$

$$E_{37,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{37}{16} \leq x^2 + 1 < \tfrac{19}{8}\} = [\tfrac{\sqrt{21}}{4}, \tfrac{\sqrt{22}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{19}{8}$$

$$x^2 < \tfrac{11}{8}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{22}}{4}$$

$$E_{38,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{19}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{39}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{22}}{4}, \tfrac{\sqrt{23}}{4}) \cap [0,1]\emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{39}{16}$$

$$2x < \tfrac{23}{16}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{23}}{4}$$

$$E_{39,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{39}{16} \leq x^2 + 1 < \tfrac{5}{2}\} = [\tfrac{\sqrt{23}}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{5}{2}$$

$$x^2 < \tfrac{3}{2}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E_{40,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{2} \leq x^2 + 1 < \tfrac{41}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{6}}{2}, \tfrac{5}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{41}{16}$$

$$x^2 < \tfrac{25}{16}$$

$$x < \tfrac{5}{4}$$

$$E_{41,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{41}{16} \le x^2 + 1 < \tfrac{21}{8}\} = [\tfrac{5}{4}, \tfrac{\sqrt{26}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{21}{8}$$

$$x^2 < \tfrac{13}{8}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{26}}{4}$$

$$E_{42,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{21}{8} \le x^2 + 1 < \tfrac{43}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{26}}{4}, \tfrac{\sqrt{27}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{43}{16}$$

$$x^2 < \tfrac{27}{16}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{27}}{4}$$

$$E_{43,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{43}{16} \le x^2 + 1 < \tfrac{11}{4}\} = [\tfrac{\sqrt{27}}{4}, \tfrac{\sqrt{7}}{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{11}{4}$$

$$x^2 < \tfrac{7}{4}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{7}}{2}$$

$$E_{44,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{11}{4} \le x^2 + 1 < \tfrac{45}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{7}}{2}, \tfrac{\sqrt{29}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{45}{16}$$

$$x^2 < \tfrac{29}{16}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{29}}{4}$$

$$E_{45,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{45}{16} \le x^2 + 1 < \tfrac{23}{8}\} = [\tfrac{\sqrt{29}}{4}, \tfrac{\sqrt{30}}{4}) \cap [0,1]) = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{23}{8}$$

$$x^2 < \tfrac{15}{8}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{30}}{4}$$

$$E_{46,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{23}{8} \le x^2 + 1 < \tfrac{47}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{30}}{4}, \tfrac{\sqrt{31}}{4}) \cap [0,1] = [\tfrac{15}{16}, \tfrac{31}{32})$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{47}{16}$$

$$x^2 < \frac{31}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{31}}{4}$$

$$E_{47,4} = \{x \in [0,1] : \frac{47}{16} \leq x^2 + 1 < 3\} = [\frac{\sqrt{31}}{4}, \sqrt{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < 3$$

$$x^2 < 2$$

$$x < \sqrt{2}$$

$$E_{48,4} = \{x \in [0,1] : 3 \leq x^2 + 1 < \frac{49}{16}\} = [\sqrt{2}, \frac{\sqrt{33}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{49}{16}$$

$$x^2 < \frac{33}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$E_{49,4} = \{x \in [0,1] : \frac{49}{16} \leq x^2 + 1 < \frac{25}{8}\} = [\frac{\sqrt{33}}{4}, \frac{\sqrt{34}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{25}{8}$$

$$x^2 < \frac{17}{8}$$

$$x < \frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$E_{50,4} = \{x \in [0,1] : \frac{25}{8} \leq x^2 + 1 < \frac{51}{16}\} = [\frac{\sqrt{34}}{4}, \frac{\sqrt{35}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{51}{16}$$

$$x^2 < \frac{35}{16}$$

$$x < \frac{\sqrt{35}}{4}$$

$$E_{51,4} = \{x \in [0,1] : \frac{51}{16} \leq x^2 + 1 < \frac{13}{4}\} = [\frac{\sqrt{35}}{4}, \frac{3}{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \frac{13}{4}$$

$$2x < \frac{9}{4}$$

$$x < \frac{3}{2}$$

$$E_{52,4} = \{x \in [0,1] : \frac{13}{4} \leq x^2 + 1 < \frac{53}{16}\} = [\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{37}}{3}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2+1<\tfrac{53}{16}$$

$$x^2<\tfrac{37}{16}$$

$$x<\tfrac{\sqrt{37}}{4}$$

$$E_{53,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{53}{16}\le x^2+1<\tfrac{27}{8}\}=[\tfrac{\sqrt{37}}{4},\tfrac{\sqrt{38}}{4})\cap[0,1]=\emptyset$$

$$x^2+1<\tfrac{27}{8}$$

$$x^2<\tfrac{19}{8}$$

$$x<\tfrac{\sqrt{38}}{4}$$

$$E_{54,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{27}{8}\le x^2+1<\tfrac{55}{16}\}=[\tfrac{\sqrt{38}}{4},\tfrac{\sqrt{39}}{4})\cap[0,1]=\emptyset$$

$$x^2+1<\tfrac{55}{16}$$

$$x^2<\tfrac{39}{16}$$

$$x<\tfrac{\sqrt{39}}{4}$$

$$E_{55,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{55}{16}\le x^2+1<\tfrac{7}{2}\}=[\tfrac{\sqrt{39}}{4},\tfrac{\sqrt{10}}{2})\cap[0,1]=\emptyset$$

$$x^2+1<\tfrac{7}{2}$$

$$x^2<\tfrac{5}{2}$$

$$x<\tfrac{\sqrt{10}}{2}$$

$$E_{56,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{7}{2}\le x^2+1<\tfrac{57}{16}\}=[\tfrac{\sqrt{10}}{2},\tfrac{\sqrt{41}}{4})\cap[0,1]=\emptyset$$

$$x^2+1<\tfrac{57}{16}$$

$$x^2<\tfrac{41}{16}$$

$$x<\tfrac{\sqrt{41}}{4}$$

$$E_{57,4}=\{x\in[0,1]:\tfrac{57}{16}\le x^2+1<\tfrac{29}{8}\}=[\tfrac{\sqrt{41}}{4},\tfrac{\sqrt{32}}{4})\cap[0,1]=\emptyset$$

$$x^2+1<\tfrac{29}{8}$$

$$x^2<\tfrac{21}{8}$$

$$x<\tfrac{\sqrt{42}}{4}$$

$$E_{58,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{29}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{59}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{42}}{4}, \tfrac{\sqrt{43}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{59}{16}$$

$$x^2 < \tfrac{43}{16}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{43}}{4}$$

$$E_{59,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{59}{16} \leq x^2 + 1 < \tfrac{15}{4}\} = [\tfrac{\sqrt{43}}{4}, \tfrac{11}{2}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{15}{4}$$

$$x^2 < \tfrac{11}{4}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{11}}{2}$$

$$E_{60,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{15}{4} \leq 2x + 1 < \tfrac{61}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{11}}{2}, \tfrac{45}{4}) \cap [0,1]\emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{61}{16}$$

$$x^2 < \tfrac{45}{16}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{45}}{4}$$

$$E_{61,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{61}{16} \leq x^2 + 1 < \tfrac{31}{8}\} = [\tfrac{\sqrt{45}}{4}, \tfrac{\sqrt{46}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{31}{8}$$

$$x^2 < \tfrac{23}{8}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{46}}{4}$$

$$E_{62,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{31}{8} \leq x^2 + 1 < \tfrac{63}{16}\} = [\tfrac{\sqrt{46}}{4}, \tfrac{\sqrt{47}}{4}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < \tfrac{63}{16}$$

$$x^2 < \tfrac{47}{16}$$

$$x < \tfrac{\sqrt{47}}{4}$$

$$E_{63,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{63}{16} \leq x^2 + 1 < 4\} = [\tfrac{\sqrt{47}}{32}, \sqrt{3}) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 < 4$$

$$x^2 < 3$$

$$x < \sqrt{3}$$

$$E_{64,4} = \{x \in [0,1] : 4 \leq x^2 + 1\} = [\sqrt{3}, +\infty) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$x^2 + 1 > 4$$

$$x^2 > 3$$

$$x > \sqrt{3}$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_4(x) = 1\mathcal{X}_{[0,\frac{1}{4})}(x) + \frac{17}{16}\mathcal{X}_{[\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})}(x) + \frac{9}{8}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})}(x) + \frac{9}{8}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})}(x) + \frac{19}{16}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2})}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{X}_{[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{4})}(x) + \frac{21}{16}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{6}}{32})}(x) + \frac{11}{8}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{7}}{4})}(x) + \frac{23}{16}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{7}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})}(x) + \frac{3}{2}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4})}(x) + \frac{25}{16}\mathcal{X}_{[\frac{3}{4},\frac{\sqrt{10}}{4})}(x) + \frac{13}{8}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{10}}{4},\frac{\sqrt{11}}{4})}(x) + \frac{27}{16}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{4}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})}(x) + \frac{7}{4}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{13}}{4}} + \frac{29}{16}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{13}}{4},\frac{\sqrt{14}}{4})}(x) + \frac{15}{8}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{14}}{4},\frac{\sqrt{15}}{4})}(x) + \frac{31}{16}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{15}}{4},1)}(x) + 2\mathcal{X}_{[\frac{1}{2},1)}$

Por L(a) y L(b) para dicho intervalo, resulta:

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 1\left(\frac{1}{4} - 0\right) + \frac{17}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{19}{16}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{21}{16}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) + \frac{11}{8}\left(\frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \frac{23}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{25}{16}\left(\frac{\sqrt{10}}{4} - \frac{3}{4}\right) + \frac{13}{8}\left(\frac{\sqrt{11}}{4} - \frac{\sqrt{10}}{4}\right) + \frac{27}{16}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{11}}{4}\right) + \frac{7}{4}\left(\frac{\sqrt{13}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{29}{16}\left(\frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{14}}{4}\right) + \frac{31}{16}\left(1 - \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 1,305168801$

Para $n = 5$ se tiene que $k = n2^2; k = 5(2)^5 = 32 \Rightarrow k = 0,1,2,3,4,5,6,...,158,159,160$

$$E_{0,5} = \{x \in [0,1] : 0 \leq x^2 + 1 < \tfrac{1}{32}\} = \emptyset$$

$$-1 \leq x^2 \wedge x^2 < -\tfrac{31}{32}$$

.

.

.

$$E_{32,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{32}{32} \leq x^2 + 1 < \tfrac{33}{32}\} = [0, \tfrac{\sqrt{33}}{32})$$

$$\tfrac{32}{32} \leq x^2 + 1 \wedge x^2 + 1 < \tfrac{33}{32}$$

$$0 \le x \wedge x < \tfrac{\sqrt{33}}{32}$$

$$E_{33,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{33}{32} \le x^2 + 1 < \tfrac{34}{32}\} = [\tfrac{\sqrt{33}}{32}, \tfrac{\sqrt{64}}{32})$$

$$\tfrac{33}{32} \le x^2 + 1 \wedge x^2 + 1 < \tfrac{34}{32}$$

$$\tfrac{\sqrt{33}}{32} \le x \wedge x < \tfrac{\sqrt{64}}{32}$$

$$E_{34,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{34}{32} \le x^2 + 1 < \tfrac{35}{32}\} = [\tfrac{\sqrt{34}}{32}, \tfrac{\sqrt{96}}{32})$$

$$\tfrac{34}{32} \le x^2 + 1 \wedge x^2 + 1 < \tfrac{35}{32}$$

$$\tfrac{\sqrt{64}}{32} \le x \wedge x < \tfrac{\sqrt{96}}{32}$$

$$E_{35,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{35}{32} \le x^2 + 1 < \tfrac{36}{32}\} = [\tfrac{\sqrt{96}}{32}, \tfrac{\sqrt{128}}{32})$$

$$\tfrac{35}{32} \le x^2 + 1 \wedge x^2 + 1 < \tfrac{36}{32}$$

$$\tfrac{\sqrt{96}}{32} \le x \wedge x < \tfrac{\sqrt{128}}{32}$$

$$E_{36,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{36}{32} \le x^2 + 1 < \tfrac{37}{32}\} = [\tfrac{\sqrt{128}}{32}, \tfrac{\sqrt{160}}{32})$$

$$\tfrac{36}{32} \le x^2 + 1 \wedge x^2 + 1 < \tfrac{37}{32}$$

$$\tfrac{\sqrt{128}}{32} \le x \wedge x < \tfrac{\sqrt{160}}{32}$$

.

.

.

$$E_{63,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{63}{32} \le x^2 + 1 < \tfrac{64}{32}\} = [\tfrac{\sqrt{992}}{32}, \tfrac{\sqrt{1024}}{32})$$

$$\tfrac{63}{32} \le x^2 + 1 \wedge x^2 + 1 < \tfrac{64}{32}$$

$$\tfrac{\sqrt{992}}{32} \le x \wedge x < \tfrac{\sqrt{1024}}{32}$$

$$E_{64,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{64}{32} \le x^2 + 1 < \tfrac{65}{32}\} = \{1\}$$

$$\tfrac{64}{32} \le x^2 + 1 \wedge x^2 + 1 < \tfrac{65}{32}$$

$$\tfrac{\sqrt{1024}}{32} \le x \wedge x < \tfrac{\sqrt{1056}}{32}$$

De tal manera que se genera la función

$$\varphi_5(x) = \frac{32}{32}\mathcal{X}_{[\frac{0}{32},\frac{\sqrt{32}}{32})}(x)+\frac{33}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{32}}{32},\frac{\sqrt{64}}{32})}(x)+\frac{34}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{64}}{32},\frac{\sqrt{96}}{32})}(x)+\frac{35}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{96}}{32},\frac{\sqrt{128}}{32})}(x)+\frac{36}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{128}}{32},\frac{\sqrt{160}}{32})}(x)+$$
$$\frac{37}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{160}}{32},\frac{\sqrt{192}}{32})}(x)+\frac{38}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{192}}{32},\frac{\sqrt{224}}{32})}(x)+\frac{39}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{224}}{32},\frac{\sqrt{256}}{32})}(x)+\frac{40}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{256}}{32},\frac{\sqrt{288}}{32})}(x)+\frac{41}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{288}}{32},\frac{\sqrt{320}}{32})}(x)+$$
$$\frac{42}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{320}}{32},\frac{\sqrt{352}}{32})}(x)+\frac{43}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{352}}{32},\frac{\sqrt{384}}{32})}(x)+\frac{44}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{384}}{32},\frac{\sqrt{416}}{32})}(x)+\frac{45}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{416}}{32},\frac{\sqrt{448}}{32})}(x)+\frac{46}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{448}}{32},\frac{\sqrt{480}}{32})}(x)+$$
$$\frac{47}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{480}}{32},\frac{\sqrt{512}}{32})}(x)+\frac{48}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{512}}{32},\frac{\sqrt{544}}{32})}(x)+\frac{49}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{544}}{32},\frac{\sqrt{576}}{32})}(x)+\frac{50}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{576}}{32},\frac{\sqrt{608}}{32})}(x)+\frac{51}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{608}}{32},\frac{\sqrt{640}}{32})}(x)+$$
$$\frac{52}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{640}}{32},\frac{\sqrt{672}}{32})}(x)+\frac{53}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{672}}{32},\frac{\sqrt{704}}{32})}(x)+\frac{54}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{704}}{32},\frac{\sqrt{736}}{32})}(x)+\frac{55}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{736}}{32},\frac{\sqrt{64}}{768})}(x)+\frac{56}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{738}}{32},\frac{\sqrt{800}}{32})}(x)+$$
$$\frac{57}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{800}}{32},\frac{\sqrt{832}}{32})}(x)+\frac{58}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{832}}{32},\frac{\sqrt{864}}{32})}(x)+\frac{59}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{864}}{32},\frac{\sqrt{896}}{32})}(x)+\frac{60}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{896}}{32},\frac{\sqrt{928}}{32})}(x)+\frac{61}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{928}}{32},\frac{\sqrt{960}}{32})}(x)+$$
$$\frac{62}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{960}}{32},\frac{\sqrt{992}}{32})}(x)+\frac{63}{32}\mathcal{X}_{[\frac{\sqrt{992}}{32},\frac{\sqrt{1024}}{32})}(x)+\frac{64}{32}\mathcal{X}_{(\{1\})}(x)$$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$$\int \varphi_5(x)d\lambda = \left(\frac{1}{1024}\right)\Big[32\sqrt{32}+33\sqrt{32}(\sqrt{2}-1)+34\sqrt{32}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+35\sqrt{32}(\sqrt{4}-\sqrt{3})+36\sqrt{32}(\sqrt{5}-\sqrt{4})+37\sqrt{32}(\sqrt{6}-\sqrt{5})+38\sqrt{32}(\sqrt{7}-\sqrt{6})+39\sqrt{32}(\sqrt{8}-\sqrt{7})+40\sqrt{32}(\sqrt{9}-\sqrt{8})+41\sqrt{32}(\sqrt{10}-\sqrt{9})+42\sqrt{32}(\sqrt{11}-\sqrt{10})+43\sqrt{32}(\sqrt{12}-\sqrt{11})+44\sqrt{32}(\sqrt{13}-\sqrt{12})+45\sqrt{32}(\sqrt{14}-\sqrt{13})+46\sqrt{32}(\sqrt{15}-\sqrt{14})+47\sqrt{32}(\sqrt{16}-\sqrt{15})+48\sqrt{32}(\sqrt{17}-\sqrt{16})+49\sqrt{32}(\sqrt{18}-\sqrt{17})+50\sqrt{32}(\sqrt{19}-\sqrt{18})+51\sqrt{32}(\sqrt{20}-\sqrt{19})+52\sqrt{32}(\sqrt{21}-\sqrt{20})+53\sqrt{32}(\sqrt{22}-\sqrt{21})+54\sqrt{32}(\sqrt{23}-\sqrt{22})+55\sqrt{32}(\sqrt{24}-\sqrt{23})+56\sqrt{32}(\sqrt{25}-\sqrt{24})+57\sqrt{32}(\sqrt{26}-\sqrt{25})+58\sqrt{32}(\sqrt{27}-\sqrt{26})+59\sqrt{32}(\sqrt{28}-\sqrt{27})+60\sqrt{32}(\sqrt{29}-\sqrt{28})+61\sqrt{32}(\sqrt{30}-\sqrt{29})+62\sqrt{32}(\sqrt{31}-\sqrt{30})+63\sqrt{32}(\sqrt{32}-\sqrt{31})\Big]$$

$$\int \varphi_5(x)\lambda = \left(\frac{\sqrt{32}}{1024}\right)\Big[32+33(\sqrt{2}-1)+34(\sqrt{3}-\sqrt{2})+35\sqrt{4}-\sqrt{3})+36(\sqrt{5}-\sqrt{4})+37(\sqrt{6}-\sqrt{5})+38(\sqrt{7}-\sqrt{6})+39(\sqrt{8}-\sqrt{7})+40(\sqrt{9}-\sqrt{8})+41(\sqrt{10}-\sqrt{9})+42(\sqrt{11}-\sqrt{10})+43(\sqrt{12}-\sqrt{11})+44(\sqrt{13}-\sqrt{12})+45(\sqrt{14}-\sqrt{13})+46(\sqrt{15}-\sqrt{14})+47(\sqrt{16}-\sqrt{15})+48(\sqrt{17}-\sqrt{16})+49(\sqrt{18}-\sqrt{17})+50(\sqrt{19}-\sqrt{18})+51(\sqrt{20}-\sqrt{19})+52(\sqrt{21}-\sqrt{20})+53(\sqrt{22}-\sqrt{21})+54(\sqrt{23}-\sqrt{22})+55(\sqrt{24}-\sqrt{23})+56(\sqrt{25}-\sqrt{24})+57(\sqrt{26}-\sqrt{25})+58(\sqrt{27}-\sqrt{26})+59(\sqrt{28}-\sqrt{27})+60(\sqrt{29}-\sqrt{28})+61(\sqrt{30}-\sqrt{29})+62(\sqrt{31}-\sqrt{30})+63(\sqrt{32}-\sqrt{31})\Big]$$

$$\int \varphi_5(x)\lambda = 1{,}318532071$$

3.3. Función con exponente fraccionario: $f(x) = \sqrt{x}$

La función que se presenta incialmente es un radical de la forma $y = \sqrt{x}$ de la cual se desea obtener el valor de la integral

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx$$

A continuación se presentan 2 opciones de integración de esta función, para finalmente generar la Integral de Lebesgue con todos los detalles señalados anteriormente.

a) **Integral Definida.**

Exclusivamente por notación se denotará a la integral como

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \sqrt{x}dx \\ &= \int_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{3}\big(2^{\frac{3}{2}} - 1\big) \\ &\simeq 1,218951416 \end{aligned}$$

b) **Sumas de Riemann**

Para realizar la integración por Riemann debemos primero denotar

$A = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\, dx$ es equivalente a

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow c_i = 1 + i\big(\frac{1}{n}\big) = 1 + \frac{i}{n}$$

Como puede evidenciarse, las sumatorias de Riemann carecen de una definición para $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^{\frac{1}{2}}$; por lo que se realiza el siguiente procedimiento para integrar. En primer lugar se va a particionar el eje Y para facilitar el cálculo. Así:

$$y = \sqrt{x}$$
$$y^2 = x$$

la partición en Y corresponde a

$$\Delta y = \frac{\sqrt{2} - 1}{n}$$

y el c_i corresponde a

$$c_i = 1 + i\Delta y$$

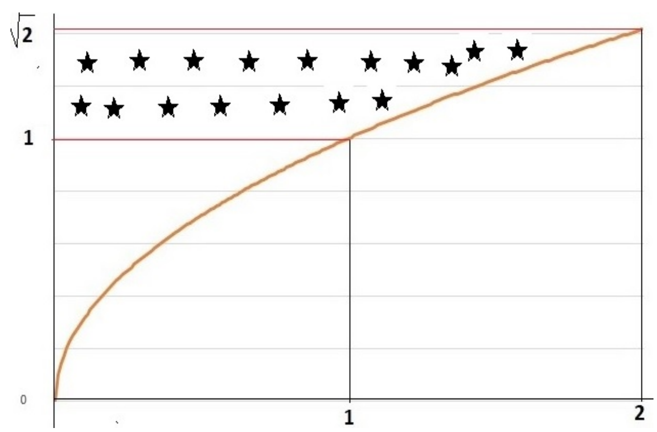

Figura 12: $f(x) = \sqrt{x}$

Por la definición de sumatorias de Riemann se tiene

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta y \\
&= \lim_{n\to\infty} \big[\sum_{i=1}^{n} f(1+i\Delta y)\big]\Delta y \\
&= \lim_{n\to\infty} \big[\sum_{i=1}^{n} (1+i\Delta y)^2\big]\left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}(1+2i\Delta y+i^2\Delta y^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{n} 1+\sum_{n=1}^{n} 2i\Delta y+\sum_{n=1}^{n} i^2\Delta y^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\big(n+2\sum_{i=1} i\Delta y+\sum_{i=1}^{n} i^2\Delta y^2\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\left[n+2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} i+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n} i^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\left[n+2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(\sqrt{2}-1)^2 n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\left[n+(\sqrt{2}-1)(n+1)+\frac{(\sqrt{2}-1)^2(2n^2+3n+1)}{6n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\left[\frac{6n^2+6n(\sqrt{2}-1)(n+1)+(\sqrt{2}-1)^2(2n^2+3n+1)}{6n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\left[\frac{6n^2+6\sqrt{2}n^2+6\sqrt{2}n-6n^2-6n+(3-2\sqrt{2})(2n^2+3n+1)}{6n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\left[\frac{6\sqrt{2}n^2+6\sqrt{2}n-6n+6n^2+9n+3-4\sqrt{2}n^2-6\sqrt{2}n-2\sqrt{2}n}{6n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)\left[\frac{n^2(6\sqrt{2}+6-4\sqrt{2})}{6n}\right] \\
&= 0,609475708
\end{aligned}
$$

que corresponde al área *estrellada*, es decir el área con respecto al eje Y.

La integral buscada, es decir $A = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$; se calcula mediante la diferencia entre el área del ractángulo más grande de base 2 y altura $\sqrt{2}$; el área del rectángulo más pequeño de base 1 y altura 1 y el área hallada que es $0,609475708$.

$$A = (2\sqrt{2}) - (1)(1) - 0,609475705$$
$$= 1,218951417$$

Como puede evidenciarse, es un artificio válido para calcular la integral buscada utilizando sumas de Riemann.

c) **Integral de Lebesgue**

Con la operatividad detallada en páginas anteriores se disponen de las suficientes herramientas para generar, plantear y desarrollar la integral de Lebesgue del ejemplo en cuestión.

Si se tiene que para $n = 1, k = n2^n = 2 \Rightarrow k = 0, 1, 2$

$$E_{0,1} = \{x \in [1, 2] : 1 \leq \sqrt{x} < \tfrac{3}{2}\} = [1, \tfrac{9}{4}) \cap [1, 2] = [1, 2]$$
$$1 \leq \sqrt{x} \wedge \sqrt{x} < \tfrac{3}{2}$$
$$1 \leq x \wedge x < \tfrac{9}{4}$$
$$E_{1,1} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{3}{2} \leq \sqrt{x} < 2\} = [\tfrac{9}{4}, 4) \cap [1, 2] = \emptyset$$
$$\sqrt{x} < 2$$
$$x < 4$$
$$E_{2,1} = \{x \in [1, 2] : 2 \leq \sqrt{x}\} = \{4\} \cap [1, 2] = \emptyset \ \sqrt{x} < 2$$
$$x < 4$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_1(x) = 1\mathcal{X}_{[1,2]}(x) + \frac{3}{2}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + 2\mathcal{X}_{\emptyset}(x)$

Por L(a) y L(b) para dicho intervalo, resulta:

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 1\lambda_{([1,2])}$

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 1(2 - 1)$

$\int \varphi_1(x) d\lambda = 1$

Ahora si se tiene que para $n = 2, k = n2^n = 8 \Rightarrow k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$

$$E_{0,2} = \{x \in [1,2] : 1 \leq \sqrt{x} < \tfrac{5}{4}\} = [1, \tfrac{25}{16}) \cap [1,2] = [1, \tfrac{25}{16})$$

$$1 \leq \sqrt{x} \wedge \sqrt{x} < \tfrac{5}{4}$$

$$1 \leq x \wedge x < \tfrac{25}{16}$$

$$E_{1,2} = \{x \in [1,2] : \tfrac{5}{4} \leq \sqrt{x} < \tfrac{3}{2}\} = [\tfrac{25}{16}, \tfrac{9}{4}) \cap [1,2] = [\tfrac{25}{16}, 2]$$

$$\sqrt{x} < \tfrac{3}{2}$$

$$x < \tfrac{9}{4}$$

$$E_{2,2} = \{x \in [1,2] : \tfrac{3}{2} \leq \sqrt{x} < \tfrac{7}{4}\} = [\tfrac{9}{4}. \tfrac{49}{16}) \cap [1,2] = \emptyset$$

$$\sqrt{x} < \tfrac{7}{4}$$

$$x < \tfrac{49}{16}$$

$$E_{3,2} = \{x \in [1,2] : \tfrac{7}{4} \leq \sqrt{x} < 2\} = [\tfrac{49}{16}, 4) \cap [1,2] = \emptyset$$

$$\sqrt{x} < 2$$

$$x < 4$$

$$E_{4,2} = \{x \in [1,2] : 2 \leq \sqrt{x} < \tfrac{9}{4}\} = [4, \tfrac{81}{16}) \cap [1,2] = \emptyset$$

$$E_{5,2} = \{x \in [1,2] : \tfrac{9}{4} \leq \sqrt{x} < \tfrac{5}{2}\} = [\tfrac{81}{16}, \tfrac{25}{4}) \cap [1,2] = \emptyset$$

$$E_{6,2} = \{x \in [1,2] : \tfrac{5}{2} \leq \sqrt{x} < \tfrac{11}{4}\} = [\tfrac{25}{4}, \tfrac{121}{16}) \cap [1,2] = \emptyset$$

$$E_{7,2} = \{x \in [1,2] : \tfrac{11}{4} \leq \sqrt{x} < 3\} = [\tfrac{121}{16}, 9) \cap [1,2] = \emptyset$$

$$E_{8,2} = \{x \in [1,2] : 3 \leq \sqrt{2}\} = \{9\} \cap [0,1] = \{9\}$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_2(x) = 1\mathcal{X}_{[1,\frac{25}{16})}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{X}_{[\frac{25}{16},2)} + \frac{3}{2}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{7}{4}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + 2\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{9}{4}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{5}{2}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{11}{4}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + 3\mathcal{X}_{\emptyset}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 1\lambda_{[1,\frac{25}{16})} + \frac{5}{4}\lambda_{[\frac{25}{16},2)}$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 1\big(\frac{25}{16} - 1\big) + \frac{5}{4}\big(2 - \frac{25}{16}\big)$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = \frac{25-16}{16} + \frac{5}{4}(\frac{32-25}{16})$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 1,109375$

Ahora si se tiene para $n = 3, k = n2^n = 24 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,$ $14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$

$$E_{0,3} = \{x \in [1, 2] : 1 \leq \sqrt{x} < \tfrac{9}{8}\} = [1, \tfrac{81}{64}) \cap [1, 2] = [1, \tfrac{81}{64})$$

$$1 \leq \sqrt{x} \wedge x < \tfrac{9}{8}$$

$$1 \leq x \wedge x < \tfrac{81}{64}$$

$$E_{1,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{9}{8} \leq \sqrt{x} < \tfrac{5}{4}\} = [\tfrac{81}{64}, \tfrac{25}{16}) \cap [1, 2] = [\tfrac{81}{64}, \tfrac{25}{16})$$

$$E_{2,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{5}{4} \leq \sqrt{x} < \tfrac{11}{8}\} = [\tfrac{25}{16}, \tfrac{121}{64}) \cap [1, 2] = [\tfrac{25}{16}, \tfrac{121}{64})$$

$$E_{3,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{11}{8} \leq \sqrt{x} < \tfrac{3}{2}\} = [\tfrac{121}{64}, \tfrac{9}{4}) \cap [1, 2] = [\tfrac{121}{64}, \tfrac{9}{4})$$

$$E_{4,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{3}{2} \leq \sqrt{x} < \tfrac{13}{8}\} = [\tfrac{9}{4}, \tfrac{25}{16}) \cap [1, 2] = \emptyset$$

de aquí en adelante únicamente se generan espacios vacíos de tal manera que se genera la función

$\varphi_3(x) = 1\mathcal{X}_{[1,\frac{81}{64})}(x) + \frac{9}{8}\mathcal{X}_{[\frac{81}{64},\frac{25}{16})}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{X}_{[\frac{25}{16},\frac{121}{64})}(x) + \frac{11}{8}\mathcal{X}_{[\frac{121}{64},2)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 1\lambda_{[1,\frac{81}{64})} + \frac{9}{8}\lambda_{[\frac{81}{64},\frac{25}{16})} + \frac{5}{4}\lambda_{[\frac{25}{16},\frac{121}{64})} + \frac{11}{8}\lambda_{[\frac{121}{64},2)}$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 1\big(\frac{81}{64} - 1\big) + \frac{9}{8}\big(\frac{25}{16} - \frac{81}{64}\big) + \frac{5}{4}\big(\frac{121}{64} - \frac{25}{16}\big) + \frac{11}{8}\big(2 - \frac{121}{64}\big)$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = \frac{81-64}{64} + \frac{9}{8}\big(\frac{100-81}{64}\big) + \frac{5}{4}\big(\frac{121-100}{64}\big) + \frac{11}{8}\big(\frac{148-121}{64}\big)$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = \frac{17}{64} + \frac{9}{8}\big(\frac{19}{64}\big) + \frac{5}{4}\big(\frac{21}{64}\big) + \frac{11}{8}\big(\frac{7}{64}\big)$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 1,16015625$

Ahora si se tiene que para $n=4, k=n2^n=64 \Rightarrow k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,$ $14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,$ $41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64$

$$E_{0,4}=\{x\in[1,2]:1\leq\sqrt{x}<\tfrac{17}{16}\}=[1,\tfrac{289}{256})\cap[1,2]=[1,\tfrac{289}{256})$$
$$E_{1,4}=\{x\in[1,2]:\tfrac{17}{16}\leq\sqrt{x}<\tfrac{9}{8}\}=[\tfrac{289}{256},\tfrac{81}{64})\cap[1,2]=[\tfrac{289}{256},\tfrac{81}{64})$$
$$E_{2,4}=\{x\in[1,2]:\tfrac{9}{8}\leq\sqrt{x}<\tfrac{19}{16}\}=[\tfrac{81}{64},\tfrac{361}{256})\cap[1,2]=[\tfrac{81}{64},\tfrac{361}{256})$$
$$E_{3,4}=\{x\in[1,2]:\tfrac{19}{16}\leq\sqrt{x}<\tfrac{5}{4}\}=[\tfrac{361}{256}.\tfrac{25}{16})\cap[1,2]=[\tfrac{361}{256}.\tfrac{25}{16})$$
$$E_{4,4}=\{x\in[1,2]:\tfrac{5}{4}\leq\sqrt{x}<\tfrac{21}{16}\}=[\tfrac{25}{16},\tfrac{441}{256})\cap[1,2]=[\tfrac{25}{16},\tfrac{441}{256})$$
$$E_{5,4}=\{x\in[1,2]:\tfrac{21}{16}\leq\sqrt{x}<\tfrac{11}{8}\}=[\tfrac{441}{256},\tfrac{121}{64})\cap[1,2]=[\tfrac{441}{256},\tfrac{121}{64})$$
$$E_{6,4}=\{x\in[1,2]:\tfrac{11}{8}\leq\sqrt{x}<\tfrac{23}{16}\}=[\tfrac{121}{64},\tfrac{529}{256})\cap[1,2]=[\tfrac{121}{64},\tfrac{529}{256})$$
$$E_{7,4}=\{x\in[1,2]:\tfrac{23}{16}\leq\sqrt{x}<\tfrac{3}{2}\}=[\tfrac{529}{256},\tfrac{9}{4})\cap[1,2]=\emptyset$$

A partir de aquí únicamente se generan espacios vacíos, de tal manera que se genera la función

$\varphi_4(x)=1\mathcal{X}_{[1,\frac{289}{256})}(x)+\frac{17}{16}\mathcal{X}_{[\frac{289}{256},\frac{81}{64})}(x)+\frac{9}{8}\mathcal{X}_{[\frac{81}{64},\frac{361}{256})}(x)+\frac{19}{16}\mathcal{X}_{[\frac{361}{256},\frac{25}{16})}(x)+\frac{5}{4}\mathcal{X}_{[\frac{25}{16},\frac{441}{256})}(x)+\frac{21}{16}\mathcal{X}_{[\frac{441}{256},\frac{121}{64})}(x)+$ $\frac{11}{8}\mathcal{X}_{[\frac{121}{64},2)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int\varphi_4(x)d\lambda=1\lambda_{[\frac{1}{4}-0)}+\frac{17}{16}\lambda_{[\frac{289}{256}-\frac{81}{64})}+\frac{9}{8}\lambda_{[\frac{81}{64}-\frac{361}{256})}+\frac{19}{16}\lambda_{[\frac{361}{256}-\frac{25}{16})}+\frac{5}{4}\lambda_{[\frac{25}{16}-\frac{441}{256})}+\frac{21}{16}\lambda_{[\frac{441}{256}-\frac{121}{64})}+$ $\frac{21}{16}\lambda_{[\frac{121}{64}-2)}$

$\int\varphi_4(x)d\lambda=1\left(\frac{289}{256}-1\right)+\frac{17}{16}\left(\frac{289}{256}-\frac{81}{64}\right)+\frac{9}{8}\left(\frac{361}{256}-\frac{81}{64}\right)+\frac{19}{16}\left(\frac{25}{16}-\frac{361}{256}\right)+\frac{5}{4}\left(\frac{441}{256}-\frac{25}{16}\right)+\frac{21}{16}\left(\frac{121}{64}-\right.$ $\left.\frac{441}{256}\right)+\frac{11}{8}\left(2-\frac{121}{64}\right)$

$\int\varphi_4(x)d\lambda=\frac{33}{256}+\frac{17}{16}\left(\frac{35}{256}\right)+\frac{9}{8}\left(\frac{37}{256}\right)+\frac{19}{16}\left(\frac{39}{256}\right)+\frac{5}{4}\left(\frac{41}{256}\right)+\frac{21}{16}\left(\frac{43}{256}\right)+\frac{11}{8}\left(\frac{7}{64}\right)$

$\int\varphi_4(x)d\lambda=1,188720703$

Para $n=5$; se tiene $k=n2^n; k=5(2)^5=160\Rightarrow k=0,1,2,3,4,5,6,...,158,159,160$

$$E_{0,5}=\{\tfrac{32}{32}\leq\sqrt{x}<\tfrac{33}{32}\}=[1,\tfrac{1089}{1024})$$

$$\tfrac{32}{32}\leq\sqrt{x}\wedge\sqrt{x}<\tfrac{33}{32}$$

$$1\leq x\wedge x<\tfrac{1089}{1024}$$

$$E_{1,5}=\{\tfrac{33}{32}\leq\sqrt{x}<\tfrac{34}{32}\}=[\tfrac{1089}{1024},\tfrac{1156}{1024})$$

$$\tfrac{33}{32}\leq\sqrt{x}\wedge\sqrt{x}<\tfrac{34}{32}$$

$$\tfrac{1089}{1024}\leq x\wedge x<\tfrac{1156}{1024}$$

.

.

.

$$E_{45,5}=\{\tfrac{45}{32}\leq\sqrt{x}<\tfrac{46}{32}\}=[\tfrac{2025}{1024},2)$$

$$\tfrac{2025}{1024}\leq x\wedge x<\tfrac{2116}{1024}$$

$$E_{46,5}=\{\tfrac{46}{32}\leq\sqrt{x}<\tfrac{47}{32}\}=\emptyset$$

$$\tfrac{2116}{1024}\leq x\wedge x<\tfrac{2209}{1024}$$

.

.

.

De tal manera que se genera la función:

$\varphi_5(x)=\frac{32}{32}\mathcal{X}_{[\frac{32^2}{32^2},\frac{33^2}{32^2})}(x)+\frac{33}{32}\mathcal{X}_{[\frac{33^2}{32^2},\frac{34^2}{32^2})}(x)+\frac{34}{32}\mathcal{X}_{[\frac{34^2}{32^2},\frac{35^2}{32^2})}(x)+\frac{35}{32}\mathcal{X}_{[\frac{35^2}{32^2},\frac{36^2}{32^2})}(x)+\frac{36}{32}\mathcal{X}_{[\frac{36^2}{32^2},\frac{37^2}{32^2})}(x)+\frac{37}{32}\mathcal{X}_{[\frac{37^2}{32^2},\frac{38^2}{32^2})}(x)+\frac{38}{32}\mathcal{X}_{[\frac{38^2}{32^2},\frac{39^2}{32^2})}(x)+\frac{39}{32}\mathcal{X}_{[\frac{39^2}{32^2},\frac{40^2}{32^2})}(x)+\frac{40}{32}\mathcal{X}_{[\frac{40^2}{32^2},\frac{41^2}{32^2})}(x)+\frac{41}{32}\mathcal{X}_{[\frac{41^2}{32^2},\frac{42^2}{32^2})}(x)+\frac{42}{32}\mathcal{X}_{[\frac{42^2}{32^2},\frac{43^2}{32^2})}(x)+\frac{43}{32}\mathcal{X}_{[\frac{43^2}{32^2},\frac{44^2}{32^2})}(x)+\frac{44}{32}\mathcal{X}_{[\frac{44^2}{32^2},\frac{45^2}{32^2})}(x)+\frac{45}{32}\mathcal{X}_{[\frac{45^2}{32^2},2)}(x)$

$\int\varphi_5(x)d\lambda=\frac{32}{32}\left(\frac{33^2-32^2}{32^2}\right)+\frac{33}{32}\left(\frac{34^2-33^2}{32^2}\right)+\frac{34}{32}\left(\frac{35^2-34^2}{32^2}\right)+\frac{35}{32}\left(\frac{36^2-35^2}{32^2}\right)+\frac{36}{32}\left(\frac{37^2-36^2}{32^2}\right)+\frac{37}{32}\left(\frac{38^2-37^2}{32^2}\right)+\frac{38}{32}\left(\frac{39^2-38^2}{32^2}\right)+\frac{39}{32}\left(\frac{40^2-39^2}{32^2}\right)+\frac{40}{32}\left(\frac{41^2-40^2}{32^2}\right)+\frac{41}{32}\left(\frac{42^2-41^2}{32^2}\right)+\frac{42}{32}\left(\frac{43^2-42^2}{32^2}\right)+\frac{43}{32}\left(\frac{44^2-43^2}{32^2}+\frac{44}{32}\left(\frac{45^2-44^2}{32^2}+\right.\right.$

$\frac{45}{32}\left(2-\frac{32^2}{32^2}\right)$

$\int \varphi_5(x)d\lambda = \left(\frac{1}{32^3}\right)\left\{32(33^2-32^2)+33(34^2-33^2)+34(35^2-34^2)+35(36^2-35^2)+36(37^2-36^2)+37(38^2-37^2)+38(39^2-38^2)+39(40^2-39^2)+40(41^2-40^2)+41(42^2-41^2)+42(43^2-42^2)+43(44^2-43^2)+44(45^2-44^2)+45[2(32)^2-45^2]\right\}$

$\int \varphi_5(x)d\lambda = \left(\frac{1}{32^3}\right)(2080+22121+2346+2485+2628+2775+2926+3081+3240+3403+3570+3741+3916+1035)$

$\int \varphi_5(x)d\lambda = 1{,}203491211$

3.4. Función trigonométrica: $f(x) = \operatorname{sen} x$

La función que se presenta inicialmente es una función trigonométrica de la forma $y = \operatorname{sen} x$ de la cual se desea obtener el valor de la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx$$

A continuación se presentan 2 opciones de integración de esta función, para finalmente generar la Integral de Lebesgue con todos los detalles señalados anteriormente.

a) **Integral Definida.**

Exclusivamente por notación se denotará a la integral como

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) \\ &= -(0-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) **Sumas de Riemann**

Para realizar la intregración por Riemann debemos primero notar que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ está definida por la serie de Taylor [15]

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{2n} = \frac{\pi}{2n} \Rightarrow c_i = 0 + i\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi i}{2n}$$

Como puede evidenciarse, las sumatorias de Riemann carecen de una definición para $\sum_{i=1}^{n} i^5$ y $\sum_{i=1}^{n} i^7$; por lo que se realiza el siguiente procedimiento para integrar.

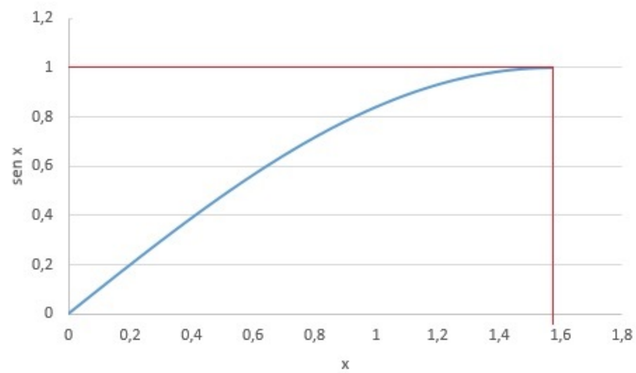

Figura 13: $f(x) = \operatorname{sen} x$

Por la definición de sumatorias de Riemann se tiene

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{\pi i}{2n}\right)\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right) \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{\pi i}{2n}\right) \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\pi i}{2n} - \frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^3 i^3}{6}\right] \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\pi i}{2n} - \frac{\pi^3 i^3}{48n^3}\right] \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi i}{2n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi^3 i^3}{48n^3}\right] \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{\pi^3}{48n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right] \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\frac{\pi}{2n}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\pi^3}{48n^3}\frac{n(n+1)^2}{4}\right] \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\frac{\pi}{2}\frac{(n+1)}{2} - \frac{\pi^3}{48n}\frac{(n+1)^2}{4}\right] \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\frac{\pi(n+1)}{4} - \frac{\pi^3(n^2+2n+1)}{192n}\right] \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\frac{\pi n+\pi}{4} - \frac{\pi^3 n^2 + 2\pi^3 n + \pi^3}{192n}\right] \\
&= \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^4}{387}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{8}\left(1 - \frac{\pi^2}{48}\right) \\
&= 0{,}9800
\end{aligned}
$$

c) **Integral de Lebesgue**

Con la operatividad detallada en páginas anteriores se disponen de las suficientes herramientas para generar, plantear y desarrollar la integral de Lebesgue del ejemplo en cuestión.

Si se tiene que para $n = 1, k = n2^n = 2 \Rightarrow k = 0, 1, 2$

$$E_{0,1} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : 0 \leq \sin x < \tfrac{\pi}{4}\} = [0; 0, 903339) \cap [0, \tfrac{\pi}{2}] = [0; 0, 903339)$$

$$0 \leq \sin x \wedge \sin x < \tfrac{\pi}{4}$$

$$E_{1,1} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{\pi}{4} \leq \sin x < \tfrac{\pi}{2}\} = \emptyset$$

$$\sin x < \tfrac{\pi}{2}$$

$$E_{2,1} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{\pi}{2} \leq \sin x\} = \emptyset$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_1(x) = 0\mathcal{X}_{[0;0{,}903339]}(x) + \frac{\pi}{4}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{\pi}{2}\mathcal{X}_{\emptyset}(x)$

Por L(a) y L(b) para dicho intervalo, resulta:

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 0\lambda_{[0;0{,}903339]}$

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 0(0{,}903339 - 0)$

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 0$

Ahora si se tiene que para $n = 2, k = n2^n = 8 \Rightarrow k = 0{,}1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$E_{0,2} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : 0 \leq \sin x < \tfrac{\pi}{8}\} = [0; 0{,}403564)$$

$$0 \leq \sin x \wedge \sin x < \tfrac{\pi}{8}$$

$$E_{1,2} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{\pi}{8} \leq \sin x < \tfrac{2\pi}{8}\} = [0{,}403564; 0{,}903339)$$

$$\sin x < \tfrac{2\pi}{8}$$

$$E_{2,2} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{2\pi}{8} \leq \sin x < \tfrac{3\pi}{8}\} = \emptyset$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_2(x) = \frac{2\pi}{8}\mathcal{X}_{[0{,}403564;0{,}903339)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_2(x)d\lambda = \dfrac{2\pi}{8}\lambda_{[0,403564;0,903339)}$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = \dfrac{2\pi}{8}(0{,}903339 - 0{,}403564)$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 0{,}392522$

Ahora si se tiene para $n = 3, k = n2^n = 24 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,$
$14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$

$$E_{0,3} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : 0 \leq \sin x < \tfrac{\pi}{16}\} = [0; 0{,}191633)$$

$$E_{1,3} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{\pi}{16} \leq \sin x < \tfrac{2\pi}{16}\} = [0{,}191633; 0{,}403564)$$

$$E_{2,3} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{2\pi}{16} \leq \sin x < \tfrac{3\pi}{16}\} = [0{,}403564; 0{,}629881)$$

$$E_{3,3} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{3\pi}{16} \leq \sin x < \tfrac{4\pi}{16}\} = [0{,}629881; 0{,}903339)$$

$$E_{4,3} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{4\pi}{16} \leq \sin x < \tfrac{5\pi}{16}\} = [0{,}903339; 1{,}379442)$$

$$E_{5,3} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{5\pi}{16} \leq \sin x < \tfrac{6\pi}{16}\} = \emptyset$$

de aquí en adelante únicamente se generan espacios vacíos de tal manera que se genera la función

$\varphi_3(x) = \frac{\pi}{16}\mathcal{X}_{[0,197633;0,403564)}(x) + \frac{2\pi}{16}\mathcal{X}_{[0,403564;0,629881)}(x) + \frac{3\pi}{16}\mathcal{X}_{[0,629881;0,903339)}(x) + \frac{4\pi}{16}\mathcal{X}_{[0,903339;1,379412)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_3(x)d\lambda = \frac{\pi}{16}\lambda_{[0,197633;0,403564)} + \frac{2\pi}{16}\lambda_{[0,403564;0,629881)} + \frac{3\pi}{16}\lambda_{[0,629881;0,903339)} + \frac{4\pi}{16}\lambda_{[0,903339;1,379412)}$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = \frac{\pi}{16}(0{,}403564 - 0{,}197633) + \frac{2\pi}{16}(0{,}629881 - 0{,}403564) + \frac{3\pi}{16}(0{,}903339 - 0{,}629881) +$
$\frac{4\pi}{16}(1{,}379412 - 0{,}903339)$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 0, 664295$

Ahora si se tiene que para $n = 4, k = n2^n = 64 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,$
$14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,$
$41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60{,}61, 62, 63, 64$

$$E_{0,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : 0 \leq \sin x < \tfrac{\pi}{32}\} = [0; 0{,}098333)$$

$$E_{1,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{2\pi}{32}\} = [0{,}098333; 0{,}197633)$$

$$E_{2,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{2\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{3\pi}{32}\} = [0{,}197633; 0{,}298957)$$

$$E_{3,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{3\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{4\pi}{32}\} = [0{,}298957; 0{,}403564)$$

$$E_{4,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{4\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{5\pi}{32}\} = [0{,}403564; 0{,}513092)$$

$$E_{5,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{5\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{6\pi}{32}\} = [0{,}513092; 0{,}629881)$$

$$E_{6,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{6\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{7\pi}{32}\} = [0{,}629881; 0{,}757659)$$

$$E_{7,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{7\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{8\pi}{32}\} = [0{,}757659; 0{,}903339)$$

$$E_{8,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{8\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{9\pi}{32}\} = [0{,}903339; 1{,}083437)$$

$$E_{9,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{9\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{10\pi}{32}\} = [1{,}083437; 1{,}379442)$$

$$E_{10,4} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{10\pi}{32} \leq \sin x < \tfrac{11\pi}{32}\} = \emptyset$$

A partir de aquí únicamente se generan espacios vacíos, de tal manera que se genera la función

$\varphi_4(x) = \frac{\pi}{32}\mathcal{X}_{[0{,}098333;0{,}197633)}(x) + \frac{2\pi}{32}\mathcal{X}_{[0{,}197366;0{,}298957)}(x) + \frac{3\pi}{32}\mathcal{X}_{[0{,}29857;0{,}403564)}(x) + \frac{4\pi}{32}\mathcal{X}_{[0{,}403564;0{,}513092)}(x) + \frac{5\pi}{32}\mathcal{X}_{[0{,}513042;0{,}629881)}(x) + \frac{6\pi}{32}\mathcal{X}_{[0{,}629881;0{,}757659)}(x) + \frac{7\pi}{32}\mathcal{X}_{[0{,}757659;0{,}903339)}(x) + \frac{8\pi}{32}\mathcal{X}_{[0{,}903339{,}1{,}083437)}(x) + \frac{9\pi}{32}\mathcal{X}_{[1{,}083437;1{,}379442)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_4(x)d\lambda = \frac{\pi}{32}\big(0{,}197633 - 0{,}098333\big) + \frac{2\pi}{32}\big(0{,}293957 - 0{,}197633\big) + \frac{3\pi}{32}\big(0{,}403564 - 0{,}298957\big) + \frac{4\pi}{32}\big(0{,}513042 - 0{,}403564\big) + \frac{5\pi}{32}\big(0{,}629881 - 0{,}513042\big) + \frac{6\pi}{32}\big(0{,}757659 - 0{,}629881\big) + \frac{7\pi}{32}\big(0{,}903339 - 0{,}757659\big) + \frac{8\pi}{32}(1{,}083437 - 1{,}903339)$

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 9{,}74875 \times 10^{-3} + 0{,}018913 + 0{,}030868 + 0{,}043011 + 0{,}057353 + 0{,}075267 + 0{,}100114 + 0{,}141448 + 0{,}261542$

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 0{,}738264$

Ahora si se tiene que para $n = 5, k = n2^n = 160 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,$

$41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60{,}61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, ...$
$141, 142{,}143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160$

$$E_{0,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : 0 \leq \sin x < \tfrac{\pi}{64}\} = [0; 0{,}049107)$$

$$E_{1,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{2\pi}{64}\} = [0{,}049107; 0{,}098333)$$

$$E_{2,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{2\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{3\pi}{64}\} = [0{,}098333; 0{,}147799)$$

$$E_{3,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{3\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{4\pi}{64}\} = [0{,}147799; 0{,}197633)$$

$$E_{4,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{4\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{5\pi}{64}\} = [0{,}197366; 0{,}247970)$$

$$E_{5,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{5\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{6\pi}{64}\} = [0{,}247970; 0{,}298957)$$

$$E_{6,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{6\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{7\pi}{64}\} = [0{,}298957; 0{,}350760)$$

$$E_{7,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{7\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{8\pi}{64}\} = [0{,}350760; 0{,}403564)$$

$$E_{8,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{8\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{9\pi}{64}\} = [0{,}403564; 0{,}457589)$$

$$E_{9,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{9\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{10\pi}{64}\} = [0{,}457589; 0{,}513092)$$

$$E_{10,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{10\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{11\pi}{64}\} = [0{,}513092; 0{,}570391)$$

$$E_{11,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{11\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{12\pi}{64}\} = [0{,}510391; 0{,}629881)$$

$$E_{12,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{12\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{13\pi}{64}\} = [0{,}629881; 0{,}692074)$$

$$E_{13,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{13\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{14\pi}{64}\} = [0{,}692074; 0{,}757659)$$

$$E_{14,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{14\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{15\pi}{64}\} = [0{,}757659; 0{,}827601)$$

$$E_{15,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{15\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{16\pi}{64}\} = [0{,}827601; 0{,}903339)$$

$$E_{16,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{16\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{17\pi}{64}\} = [0{,}903339; 0{,}987198)$$

$$E_{17,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{17\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{18\pi}{64}\} = [0{,}987198; 1{,}083437)$$

$$E_{18,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{18\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{19\pi}{64}\} = [1{,}083437; 1{,}201718)$$

$$E_{19,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{19\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{20\pi}{64}\} = [1{,}201718; 1{,}379442)$$

$$E_{20,5} = \{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] : \tfrac{20\pi}{64} \leq \sin x < \tfrac{21\pi}{64}\} = \emptyset$$

A partir de aquí únicamente se generan espacios vacíos, de tal manera que se genera la función

$$\varphi_5(x) = \frac{\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}049107;0{,}098333)}(x) + \frac{2\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}098333;0{,}2147799)}(x) + \frac{3\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}147799;0{,}197633)}(x) + \frac{4\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}197633;0{,}247970)}(x) + \frac{5\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}247970;0{,}298957)}(x) + \frac{6\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}298957;0{,}350760)}(x) + \frac{7\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}350760;0{,}403564)}(x) + \frac{8\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}403564{,}0{,}457589)}(x) + \frac{9\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}457589;0{,}513092)}(x) + \frac{10\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}513022;0{,}510391)}(x) + \frac{11\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}570391;0{,}629881)}(x) + \frac{12\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}629881;0{,}629074)}(x) + \frac{13\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}622074;0{,}757659)}(x) + \frac{14\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}757659;0{,}827601)}(x) + \frac{15\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}827601;0{,}903339)}(x) + \frac{16\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}903339;0{,}987198)}(x) + \frac{17\pi}{64}\mathcal{X}_{[0{,}987198{,}1{,}083437)}(x) + \frac{18\pi}{64}\mathcal{X}_{[1{,}083437;1{,}201718)}(x) + \frac{19\pi}{64}\mathcal{X}_{[1{,}201718;1{,}379442)}(x)$$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int\varphi_5(x)d\lambda=\frac{\pi}{64}\big(0{,}098333-0{,}049107\big)+\frac{2\pi}{64}\big(0{,}147749-0{,}098333\big)+\frac{3\pi}{64}\big(0{,}197633-0{,}147799\big)+\frac{4\pi}{64}\big(0{,}247970-0{,}197633\big)+\frac{5\pi}{64}\big(0{,}298957-0{,}247970\big)+\frac{6\pi}{64}\big(0{,}350760-0{,}298957\big)+\frac{7\pi}{64}\big(0{,}403564-0{,}350760\big)+\frac{8\pi}{64}(1{,}457589-0{,}403564)+\frac{9\pi}{64}(0{,}513092-0{,}457589)+\frac{10\pi}{64}(0{,}570391-0{,}513092)+\frac{11\pi}{64}(0{,}629881-0{,}570391)+\frac{12\pi}{64}(0{,}692074-0{,}629881)+\frac{13\pi}{64}(0{,}757659-0{,}692074)+\frac{14\pi}{64}(0{,}827601-0{,}757659)+\frac{15\pi}{64}(0{,}903339-0{,}827601)+\frac{16\pi}{64}(0{,}987198-0{,}903339)+\frac{17\pi}{64}(1{,}083437-0{,}987198)+\frac{18\pi}{64}(1{,}201718-1{,}083437)+\frac{19\pi}{64}(1{,}379442-1{,}201718)$

$\int\varphi_5(x)d\lambda=2{,}41637\times10^{-3}+4{,}8514\times10^{-3}+7{,}338662\times10-3+9{,}88364\times10^{-3}+0{,}012514+0{,}015257+0{,}018144+0{,}021212+0{,}024520+0{,}028126+0{,}032122+0{,}036634+0{,}041852+0{,}048065+0{,}055766+0{,}065846+0{,}080310+0{,}104509+0{,}165756$

$\int\varphi_5(x)d\lambda=0{,}774322$

3.5. Función logarítmica: $f(x) = \ln x$

La función que se presenta inicialmente es una función logarítmica de la forma $y = \ln x$ de la cual se desea obtener el valor de la integral

$$\int_1^2 \ln x \, dx$$

A continuación se presentan 2 opciones de integración de esta función, para finalmente generar la Integral de Lebesgue con todos los detalles señalados anteriormente.

a) **Integral Definida.**

Exclusivamente por notación se denotará a la integral como

$$A = \int_1^2 \ln x \, dx$$

Se propone una integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \ln x & \qquad u' &= \frac{1}{x} \\ v' &= 1 & \qquad v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= x \ln x - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int_1^2 dx \\ &= x \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 \\ &= (2 \ln 2 - 1 \ln 1) - (2 - 1) \\ &= 0{,}3862... \end{aligned}$$

b) **Sumas de Riemann**

Para realizar la intregración por Riemann debemos primero notar que la función $f(x) = \ln x$ está definida por la serie de Taylor [16]

$$f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + ...$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow c_i = 1 + i(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{i}{n}$$

Se realiza el siguiente procedimiento para integrar:

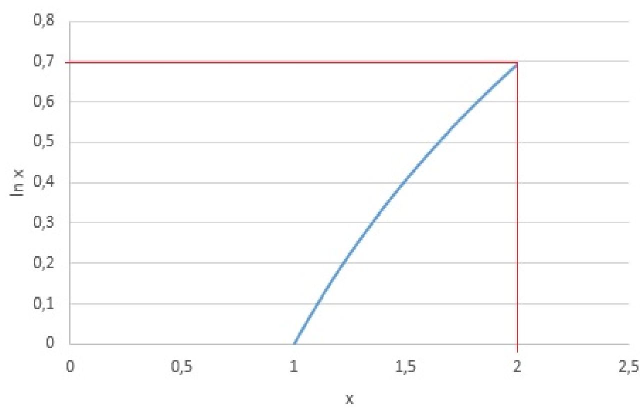

Figura 14: $f(x) = \ln x$

Por la definición de sumatorias de Riemann se tiene

$$A = \text{lím}_{n\mapsto\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left\{\left[\left(1+\frac{i}{n}-1\right)\right] - \frac{\left[\left(1 + \frac{i}{n} - 1\right)\right]^2}{2} + \frac{\left[\left(1 + \frac{i}{n} - 1\right)\right]^3}{3} - \frac{\left[\left(1 + \frac{i}{n} - 1\right)\right]^4}{4}\right\}$$

$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{2n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{3n^3} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{4n^4}\right)$$

$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{3n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{1}{4n^4}\sum_{i=1}^{n} i^4\right)$$

$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{3n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{4n^2}\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\right]$$

$$A = \lim_{n \mapsto \infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{44n^4}{120n^3}\right)$$
$$A = 0{,}3666...$$

c) **Integral de Lebesgue**

Con la operatividad detallada en páginas anteriores se disponen de las suficientes herramientas para generar, plantear y desarrollar la integral de Lebesgue del ejemplo en cuestión.

Si se tiene que para $n = 1, k = n2^n = 2 \Rightarrow k = 0, 1, 2$

$$E_{0,1} = \{x \in [1, 2] : 0 \leq \ln x < \tfrac{1}{2}\} = [1, 1{,}648721) \cap [1, 2] = [1; 1{,}648721]$$

$$1 \leq \ln x \wedge \ln x < \tfrac{1}{2}$$

$$E_{1,1} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{1}{2} \leq \ln x < 1\} = [1{,}648721; 2) \cap [1, 2] = [1{,}648721; 2)$$

$$E_{2,1} = \{x \in [1, 2] : 1 \leq \ln x\} = [e, \infty) \cap [1, 2] = \emptyset$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\mathcal{X}_{([1{,}648721;2)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_1(x) d\lambda = \frac{1}{2}\lambda_{([1{,}648721;2)}$

$\int \varphi_1(x) d\lambda = \frac{1}{2}(2 - 1, 648721)$

$\int \varphi_1(x) d\lambda = 0{,}175639$

Ahora si se tiene que para $n = 2, k = n2^n = 8 \Rightarrow k = 0{,}1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$E_{0,2} = \{x \in [1, 2] : 0 \leq \ln x < \tfrac{1}{4}\} = [1; 1{,}284025) \cap [1, 2] = [1; 1{,}284025)$$

$$E_{1,2} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{1}{4} \leq \ln x < \tfrac{2}{4}\} = [1{,}284025; 1648721)$$

$$E_{2,2} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{2}{4} \leq \ln x < \tfrac{3}{4}\} = [1{,}648721; 2)$$

$$E_{3,2} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{3}{4} \leq \ln x < \tfrac{4}{4}\} = [2; e) \cap [1; 2] = \emptyset$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_2(x) = \frac{1}{4}\mathcal{X}_{[1{,}284025;1{,}648721)} + \frac{1}{2}\mathcal{X}_{[1{,}648721;2)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_2(x)d\lambda = \frac{1}{4}\lambda_{[1,284025;1,648721)} + \frac{1}{2}\lambda_{[1,648721;2)}$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = \frac{1}{4}(1{,}648721 - 1{,}284025) + \frac{1}{2}(2 - 1{,}648721)$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 0{,}266813$

Ahora si se tiene para $n = 3, k = n2^n = 24 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,$ $14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$

$$E_{0,3} = \{x \in [1, 2] : 0 \leq \ln x < \tfrac{1}{8}\} = [1; 1{,}133148)$$

$$E_{1,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{1}{8} \leq \ln x < \tfrac{2}{8}\} = [1{,}133148; 1{,}284025)$$

$$E_{2,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{2}{8} \leq \ln x < \tfrac{3}{8}\} = [1{,}284025; 1{,}454991)$$

$$E_{3,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{3}{8} \leq \ln x < \tfrac{4}{8}\} = [1{,}454991; 1{,}648721)$$

$$E_{4,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{4}{8} \leq \ln x < \tfrac{5}{8}\} = [1{,}648721; 1{,}868245)$$

$$E_{5,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{5}{8} \leq \ln x < \tfrac{6}{8}\} = [1{,}868245; 1{,}2)$$

$$E_{6,3} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{6}{8} \leq \ln x < \tfrac{7}{8}\} = \emptyset$$

de aquí en adelante únicamente se generan espacios vacíos de tal manera que se genera la función

$\varphi_3(x) = \frac{1}{8}\mathcal{X}_{[1,133148;1,284025)}(x) + \frac{2}{8}\mathcal{X}_{[1,284025;1,454491)}(x) + \frac{3}{8}\mathcal{X}_{[1,454991;1,648721)}(x) + \frac{4}{8}\mathcal{X}_{[1,648721;1,868245)}(x) +$ $\frac{5}{8}\mathcal{X}_{[1,868145,2)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_3(x)d\lambda = \frac{1}{8}\big(1{,}284025 - 1{,}133148\big) + \frac{2}{8}\big(1{,}454991 - 1{,}284025\big) + \frac{3}{8}\big(1{,}648721 - 0{,}454991\big) +$ $\frac{4}{8}\big(1{,}868245 - 1{,}648721\big)$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 0{,}018859 + 0{,}542741 + 0{,}072648 + 0{,}109762 + 0{,}082409$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 0{,}326419$

Ahora si se tiene que para $n = 4, k = n2^n = 64 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,$ $14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,$ $41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59,$ 60,$61, 62, 63, 64$

$$E_{0,4} = \{x \in [1, 2] : 0 \leq \ln x < \tfrac{1}{16}\} = \emptyset$$

$$E_{1,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{1}{16} \leq \ln x < \tfrac{2}{16}\} = [1{,}064494; 1{,}133148)$$

$$E_{2,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{2}{16} \leq \ln x < \tfrac{3}{16}\} = [1{,}133148; 1{,}206230)$$

$$E_{3,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{3}{16} \leq \ln x < \tfrac{4}{16}\} = [1{,}206230; 1{,}284025)$$

$$E_{4,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{4}{16} \leq \ln x < \tfrac{5}{16}\} = [1{,}284025; 1{,}366837)$$

$$E_{5,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{5}{16} \leq \ln x < \tfrac{6}{16}\} = [1{,}366837; 1{,}454991)$$

$$E_{6,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{6}{16} \leq \ln x < \tfrac{7}{16}\} = [1{,}454991; 1{,}548830)$$

$$E_{7,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{7}{16} \leq \ln x < \tfrac{8}{16}\} = [1{,}548830; 1{,}648721)$$

$$E_{8,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{8}{16} \leq \ln x < \tfrac{9}{16}\} = [1{,}648721; 1{,}755054)$$

$$E_{9,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{9}{16} \leq \ln x < \tfrac{10}{16}\} = [1{,}755054; 1{,}868245)$$

$$E_{10,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{10}{16} \leq \ln x < \tfrac{11}{16}\} = [1{,}868245; 1{,}988737)$$

$$E_{11,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{11}{16} \leq \ln x < \tfrac{12}{16}\} = [1{,}988737; 2)$$

$$E_{12,4} = \{x \in [1, 2] : \tfrac{12}{16} \leq \ln x < \tfrac{13}{16}\} = \emptyset$$

A partir de aquí únicamente se generan espacios vacíos, de tal manera que se genera la función

$\varphi_4(x) = \frac{1}{16}\mathcal{X}_{[1{,}064491;1{,}133148)}(x) +$
$\frac{2}{16}\mathcal{X}_{[1{,}133148;1{,}206230)}(x)+\frac{3}{16}\mathcal{X}_{[1{,}206230;1{,}284025)}(x)+\frac{4}{16}\mathcal{X}_{[1{,}284025;1{,}366837)}(x)+\frac{5}{16}\mathcal{X}_{[366837;1{,}454991)}(x)+$
$\frac{6}{16}\mathcal{X}_{[1{,}454991;1{,}548830)}(x)+\frac{7}{16}\mathcal{X}_{[1{,}548830;1{,}648721)}(x)+\frac{8}{16}\mathcal{X}_{[1{,}648721;1{,}755054)}(x)+\frac{9}{16}\mathcal{X}_{[1{,}755054;1{,}868245)}(x)+$
$\frac{10}{16}\mathcal{X}_{[1{,}868245;1{,}988737)}(x) + \frac{11}{16}\mathcal{X}_{[1{,}988737;2)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_4(x)d\lambda = \frac{1}{16}\big(1{,}133148-1{,}064991\big)+\frac{2}{16}\big(1{,}206230-1{,}133148\big)+\frac{3}{16}\big(1{,}284025-1{,}206230\big)+$
$\frac{4}{16}\big(1{,}3668737-1{,}284025\big)+\frac{5}{16}\big(1{,}454991-1{,}366837\big)+\frac{6}{16}\big(1{,}548830-1{,}459991\big)+\frac{7}{16}\big(1{,}648721-$

$1{,}548830\big)+\frac{8}{16}\big(1{,}755054-1{,}648721\big)+\frac{9}{16}\big(1{,}8682452-1{,}755054\big)+\frac{10}{16}\big(1{,}9887372-1{,}868245\big)+\frac{11}{16}\big(2-1{,}988737\big)$

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 4{,}29 \times 10^{-3} + 9{,}135 \times 10^{-3} + 0{,}014586 + 0{,}020703 + 0{,}027548 + 0{,}035189 + 0{,}043702 + 0{,}053416 + 0{,}063669 + 0{,}075307 + 7{,}743 \times 10^{-3}$

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 0{,}355289$

Ahora si se tiene que para $n = 5, k = n2^n = 160 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60{,}61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, ...$ $141, 142{,}143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160$

$$E_{0,5} = \{x \in [1,2] : 0 \leq \ln x < \tfrac{1}{32}\} = [1; 1{,}031743)$$

$$E_{1,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{1}{32} \leq \ln x < \tfrac{2}{32}\} = [1{,}031743; 1{,}064494)$$

$$E_{2,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{2}{32} \leq \ln x < \tfrac{3}{32}\} = [1{,}064994; 1{,}098285)$$

$$E_{3,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{3}{32} \leq \ln x < \tfrac{4}{32}\} = [1{,}098285; 1{,}133148)$$

$$E_{4,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{4}{32} \leq \ln x < \tfrac{5}{32}\} = [1{,}133148; 1{,}169118)$$

$$E_{5,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{5}{32} \leq \ln x < \tfrac{6}{32}\} = [1{,}169118; 1{,}206230)$$

$$E_{6,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{6}{32} \leq \ln x < \tfrac{7}{32}\} = [1{,}206230; 1{,}244520)$$

$$E_{7,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{7}{32} \leq \ln x < \tfrac{8}{32}\} = [1{,}244520; 1{,}284025)$$

$$E_{8,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{8}{32} \leq \ln x < \tfrac{9}{32}\} = [1{,}284025; 1{,}324784)$$

$$E_{9,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{9}{32} \leq \ln x < \tfrac{10}{32}\} = [1{,}324784; 1{,}366837)$$

$$E_{10,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{10}{32} \leq \ln x < \tfrac{11}{32}\} = [1{,}366837; 1{,}410220)$$

$$E_{11,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{11}{32} \leq \ln x < \tfrac{12}{32}\} = [1{,}410220; 1{,}454991)$$

$$E_{12,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{12}{64} \leq \ln x < \tfrac{13}{32}\} = [1{,}454991; 1{,}501177)$$

$$E_{13,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{13}{32} \leq \ln x < \tfrac{14}{32}\} = [1{,}501177; 1{,}548830)$$

$$E_{14,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{14}{32} \leq \ln x < \tfrac{15}{32}\} = [1{,}548830; 1{,}599975)$$

$$E_{15,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{15}{32} \leq \ln x < \tfrac{16\pi}{32}\} = [1{,}597975; 1{,}648721)$$

$$E_{16,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{16}{32} \leq \ln x < \tfrac{17}{32}\} = [1{,}648721; 1{,}701057)$$

$$E_{17,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{17}{32} \leq \ln x < \tfrac{18}{32}\} = [1{,}701057; 1{,}755054)$$

$$E_{18,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{18}{32} \leq \ln x < \tfrac{19}{32}\} = [1{,}755054; 1{,}810766)$$

$$E_{19,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{19}{32} \leq \ln x < \tfrac{20}{32}\} = [1{,}810766; 1{,}868245)$$

$$E_{20,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{20}{32} \leq \ln x < \tfrac{21}{32}\} = [1{,}868245; 1{,}927550)$$

$$E_{21,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{21}{32} \leq \ln x < \tfrac{22}{32}\} = [1{,}927550; 1{,}988737)$$

$$E_{22,5} = \{x \in [1,2] : \tfrac{22}{32} \leq \ln x < \tfrac{23}{32}\} = [1{,}988737; 2)$$

A partir de aquí únicamente se generan espacios vacíos, de tal manera que se genera la función

$\varphi_5(x) = \frac{1}{32}\mathcal{X}_{[1,031748;1,064494)}(x)+\frac{2}{32}\mathcal{X}_{[1,064494;1,098285)}(x)+\frac{3}{32}\mathcal{X}_{[1,098285;1,133148)}(x)+\frac{4}{32}\mathcal{X}_{[1,133148;1,169118)}(x)+\frac{5}{32}\mathcal{X}_{1,169118;1,206280)}(x)+\frac{6}{32}\mathcal{X}_{[1,206280;1,204520)}(x)+\frac{7\pi}{32}\mathcal{X}_{[1,244520;1,284025)}(x)+\frac{8}{32}\mathcal{X}_{[1,284025;1,324784)}(x)+\frac{9\pi}{32}\mathcal{X}_{[1,324784;1,366837)}(x)+\frac{10}{32}\mathcal{X}_{[1,366837;1,410220)}(x)+\frac{11}{32}\mathcal{X}_{[1,410220;1,454991)}(x)+\frac{12}{32}\mathcal{X}_{[1,454991;1,501177)}(x)+\frac{13}{32}\mathcal{X}_{[1,501177;1,548830)}(x)+\frac{14}{32}\mathcal{X}_{[1,548830;1,597975)}(x)+\frac{15}{32}\mathcal{X}_{[1,597975;1,648721)}(x)+\frac{16}{32}\mathcal{X}_{[1,648721;1,701057)}(x)+\frac{17}{32}\mathcal{X}_{[1,701057,1,755054)}(x)+\frac{18}{32}\mathcal{X}_{[1,755054;1,810766)}(x)+\frac{19}{32}\mathcal{X}_{[1,810766;1,868245)}(x)+\frac{20}{32}\mathcal{X}_{[1,868245;1,927550)}(x)+\frac{21}{32}\mathcal{X}_{[1,927550;1,988737)}(x)+\frac{22}{32}\mathcal{X}_{[1,988737;2)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_5(x)d\lambda = \frac{1}{32}\big(1{,}064494-1{,}031748\big)+\frac{2}{32}\big(1{,}098285-1{,}064494\big)+\frac{3}{32}\big(1{,}133148-1{,}098285\big)+\frac{4}{32}\big(1{,}169118-1{,}133148\big)+\frac{5}{32}\big(1{,}206280-1{,}161618\big)+\frac{6}{32}\big(1{,}244520-1{,}206280\big)+\frac{7}{32}\big(1{,}284025-1{,}244520\big)+\frac{8}{32}(1{,}324784-1{,}284025)+\frac{9}{32}(1{,}366837-1{,}324784)+\frac{10}{32}(1{,}410220-1{,}366837)+\frac{11}{32}(1{,}454991-1{,}410220)+\frac{12}{32}(1{,}501177-1{,}454991)+\frac{13}{32}(1{,}548830-1{,}501177)+\frac{14}{32}(1{,}597995-1{,}548830)+\frac{15}{32}(1{,}548721-1{,}597925)+\frac{16}{32}(1{,}701057-1{,}648721)+\frac{17}{32}(1{,}755054-1{,}701057)+\frac{18}{32}(1{,}810766-1{,}755054)+\frac{19}{32}(1{,}868245-1{,}810766)+\frac{20}{32}(1{,}927550-1{,}868245)+\frac{21}{32}(1{,}988757-1{,}927550)+\frac{22}{32}(2-1{,}988737)$

$\int \varphi_5(x)d\lambda = 1{,}023 \times 10^{-3} + 2{,}111 \times 10^{-3} + 3{,}268 \times 10{-}3 + 4{,}496 \times 10^{-3} + 6{,}931 \times 10^{-3} + 6{,}931 \times 10^{-3} + 7{,}179 \times 10^{-3} + 8{,}641 \times 10^{-3} + 0{,}010190 + 0{,}011827 + 0{,}013560 + 0{,}015390 + 0{,}017319 + 0{,}019359 + 0{,}021509 + 0{,}023810 + 0{,}026168 + 0{,}037065 + 0{,}040153 + 7{,}74 \times 10^{-3}$

$\int \varphi_5(x)d\lambda = 0{,}371889$

3.6. Función exponencial: $f(x) = e^x$

La función que se presenta inicialmente es una función exponencial de la forma $y = e^x$ de la cual se desea obtener el valor de la integral

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

A continuación se presentan 2 opciones de integración de esta función, para finalmente generar la Integral de Lebesgue con todos los detalles señalados anteriormente.

a) **Integral Definida.**

Exclusivamente por notación se denotará a la integral como

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 e^x dx \\ &= e^x \Big|_0^1 \\ &= e^1 - e^0 \\ &= 1{,}7182... \end{aligned}$$

b) **Sumas de Riemann**

Para realizar la intregración por Riemann debemos primero notar que la función $f(x) = e^x$ está definida por la serie de Taylor [16]

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...\frac{x^n}{n!} + ...$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow c_i = 0 + i\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{i}{n}$$

Se realiza el siguiente procedimiento para integrar:

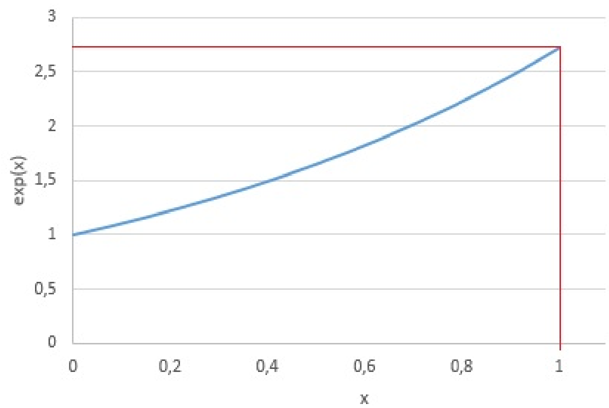

Figura 15: $f(x) = e^x$

Por la definición de sumatorias de Riemann se tiene

$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$
$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$
$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{i}{n} + \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^3}{3!} + + \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^4}{4!}\right]$$
$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n} + \frac{i^2}{2n^2} + \frac{i^3}{6n^3} + \frac{i^4}{24n^4}\right)$$
$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2}{2n^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^3}{6n^3}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^4}{24n^4}\right)\right]$$
$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} i + \left(\frac{1}{2n^2}\right) \sum_{i=1}^{n} i^2 + \left(\frac{1}{6n^3}\right) \sum_{i=1}^{n} i^3 + \left(\frac{1}{24n^4}\right) \sum_{i=1}^{n} i^4\right]$$
$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left[n + \frac{n(n+1)}{2n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^2} + \frac{n^2(n+1)^2}{24n^2} + \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\right]$$
$$A = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{720n^4 + 360n^4 + 120n^4 + 30n^4 + 6n^4}{720n^3}\right)$$

$A = 1{,}7167...$

c) **Integral de Lebesgue**

Con la operatividad detallada en páginas anteriores se disponen de las suficientes herramientas para generar, plantear y desarrollar la integral de Lebesgue del ejemplo en cuestión.

Si se tiene que para $n = 1, k = n2^n = 2 \Rightarrow k = 0, 1, 2$

$$E_{0,1} = \{x \in [0, 1] : 0 \leq e^x < \tfrac{1}{2}\} = \emptyset$$

$$0 \leq e^x \wedge e^x < \tfrac{1}{2}$$

$$E_{1,1} = \{x \in [0, 1] : \tfrac{1}{2} \leq e^x < 1\} = \emptyset$$

$$E_{2,1} = \{x \in [0, 1] : 1 \leq e^x\} = [0, 1)$$

$$\ln 1 \leq x \ln e$$

$$0 \leq x$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_1(x) = 0\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_{\emptyset}(x) + 1\mathcal{X}_{[0,1)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 0\lambda_{(\emptyset)} + \frac{1}{2}\lambda_{(\emptyset)} + 1\lambda_{([0,1))}$

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 1(1 - 0)$

$\int \varphi_1(x)d\lambda = 1$

Ahora si se tiene que para $n = 2, k = n2^n = 8 \Rightarrow k = 0{,}1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$E_{0,2} = \{x \in [0, 1] : 0 \leq e^x < \tfrac{1}{4}\} = \emptyset$$

$$0 \leq e^x \wedge e^x < \tfrac{1}{4}$$

$$E_{1,2} = \{x \in [0, 1] : \tfrac{1}{4} \leq e^x < \tfrac{1}{2}\} = \emptyset$$

$$\tfrac{1}{4} \leq e^x \wedge e^x < \tfrac{1}{2}$$

$$E_{2,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} \leq e^x < \tfrac{3}{4}\} = \emptyset$$

$$\tfrac{1}{2} \leq e^x \wedge e^x < \tfrac{3}{4}$$

$$E_{3,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{4} \leq e^x < 1\} = \emptyset$$

$$\tfrac{3}{4} \leq e^x \wedge e^x < 1$$

$$E_{4,2} = \{x \in [0,1] : 1 \leq e^x < \tfrac{5}{4}\} = [0, \ln \tfrac{5}{4})$$

$$E_{5,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{4} \leq e^x < \tfrac{6}{4}\} = [\ln \tfrac{5}{4}, \ln \tfrac{6}{4})$$

$$E_{6,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{6}{4} \leq e^x < \tfrac{7}{4}\} = [\ln \tfrac{6}{4}, \ln \tfrac{7}{4})$$

$$E_{7,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{4} \leq e^x < \tfrac{8}{4}\} = [\ln \tfrac{7}{4}, \ln \tfrac{8}{4})$$

$$E_{8,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{8}{4} \leq e^x\} = [\ln 2, 1)$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_2(x) = 1\mathcal{X}_{[0,\ln \frac{5}{4})}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{X}_{[\ln \frac{5}{4},\ln \frac{6}{4})}(x) + \frac{6}{4}\mathcal{X}_{[\ln \frac{6}{4},\ln \frac{7}{4})}(x) + \frac{7}{4}\mathcal{X}_{[\ln \frac{7}{4},\ln \frac{8}{4})}(x) + 2\mathcal{X}_{[\ln \frac{8}{4},1)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 1\big(\ln \frac{5}{4} - 0\big) + \frac{5}{4}\big(\ln \frac{6}{4} - \ln \frac{5}{4}\big) + \frac{7}{4}\big(\ln 2 - \ln \frac{7}{4}\big) + 2\big(1 - \ln 2\big)$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 0{,}2231 + 0{,}2279 + 0{,}2312 + 0{,}2336 + 0{,}6137$

$\int \varphi_2(x)d\lambda = 1,5295$

Ahora si se tiene para $n = 3, k = n2^n = 24 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,$ $14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$

$$E_{7,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{8} \leq e^x < \tfrac{8}{8}\} = \emptyset$$

$$E_{8,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{8}{8} \leq e^x < \tfrac{9}{8}\} = [0, \ln \tfrac{9}{8})$$

$$E_{9,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{9}{8} \leq e^x < \tfrac{10}{8}\} = [\ln \tfrac{9}{8}, \ln \tfrac{10}{8})$$

$$E_{10,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{10}{8} \leq e^x < \tfrac{11}{8}\} = [\ln \tfrac{10}{8}, \ln \tfrac{11}{8})$$

$$E_{11,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{11}{8} \leq e^x < \tfrac{12}{8}\} = [\ln \tfrac{11}{8}, \ln \tfrac{12}{8})$$

$$E_{12,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{12}{8} \leq e^x < \tfrac{13}{8}\} = [\ln \tfrac{12}{8}, \ln \tfrac{13}{8})$$

$$E_{13,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{13}{8} \leq e^x < \tfrac{14}{8}\} = [\ln \tfrac{13}{8}, \ln \tfrac{14}{8})$$

$$E_{14,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{14}{8} \leq e^x < \tfrac{15}{8}\} = [\ln \tfrac{14}{8}, \ln \tfrac{15}{8})$$

$$E_{15,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{15}{8} \leq e^x < \tfrac{16}{8}\} = [\ln \tfrac{15}{8}, \ln \tfrac{16}{8})$$

$$E_{16,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{16}{8} \leq e^x < \tfrac{17}{8}\} = [\ln \tfrac{16}{8}, \ln \tfrac{17}{8})$$

$$E_{17,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{17}{8} \leq e^x < \tfrac{18}{8}\} = [\ln \tfrac{17}{8}, \ln \tfrac{18}{8})$$

$$E_{18,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{18}{8} \leq e^x < \tfrac{19}{8}\} = [\ln \tfrac{18}{8}, \ln \tfrac{19}{8})$$

$$E_{19,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{19}{8} \leq e^x < \tfrac{20}{8}\} = [\ln \tfrac{19}{8}, \ln \tfrac{20}{8})$$

$$E_{20,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{20}{8} \leq e^x < \tfrac{21}{8}\} = [\ln \tfrac{20}{8}, \ln \tfrac{21}{8})$$

$$E_{21,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{21}{8} \leq e^x < \tfrac{22}{8}\} = [\ln \tfrac{21}{8}, 1)$$

$$E_{22,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{22}{8} \leq e^x < \tfrac{23}{8}\} = \emptyset$$

$$E_{23,3} = \{x \in [0,1] : \tfrac{23}{8} \leq e^x < \tfrac{24}{8}\} = \emptyset$$

de aquí en adelante únicamente se generan espacios vacíos de tal manera que se genera la función

$\varphi_3(x) = 1\mathcal{X}_{[0,\ln \frac{9}{8})}(x) + \frac{9}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{9}{8},\ln \frac{10}{8})}(x) + \frac{10}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{10}{8},\ln \frac{11}{8})}(x) + \frac{11}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{11}{8},\ln \frac{12}{8})}(x) + \frac{12}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{12}{8},\ln \frac{13}{8})}(x) + \frac{13}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{13}{8},\ln \frac{14}{8})}(x) + \frac{14}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{14}{8},\ln \frac{15}{8})}(x) + \frac{15}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{15}{8},\ln \frac{16}{8})}(x) + \frac{16}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{16}{8},\ln \frac{17}{8})}(x) + \frac{17}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{17}{8},\ln \frac{18}{8})}(x) + \frac{18}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{18}{8},\ln \frac{19}{8})}(x) + \frac{19}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{19}{8},\ln \frac{20}{8})}(x) + \frac{20}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{20}{8},\ln \frac{21}{8})}(x) + \frac{21}{8}\mathcal{X}_{[\ln \frac{21}{8},1)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 1\big(\ln \frac{9}{8} - 0\big) + \frac{9}{8}\big(\ln \frac{10}{8} - \ln \frac{9}{8}\big) + \frac{10}{8}\big(\ln \frac{11}{8} - \ln \frac{10}{8}\big) + \frac{11}{8}\big(\ln \frac{12}{8} - \ln \frac{11}{8}\big) + \frac{12}{8}\big(\ln \frac{13}{8} - \ln \frac{12}{8}\big) + \frac{13}{8}\big(\ln \frac{14}{8} - \ln \frac{13}{8}\big) + \frac{14}{8}\big(\ln \frac{15}{8} - \ln \frac{14}{8}\big) + \frac{15}{8}\big(\ln \frac{16}{8} - \ln \frac{15}{8}\big) + \frac{16}{8}\big(\ln \frac{17}{8} - \ln \frac{16}{8}\big) + \frac{17}{8}\big(\ln \frac{18}{8} - \ln \frac{17}{8}\big) + \frac{18}{8}\big(\ln \frac{19}{8} - \ln \frac{18}{8}\big) + \frac{19}{8}\big(\ln \frac{20}{8} - \ln \frac{19}{8}\big) + \frac{20}{8}\big(\ln \frac{21}{8} - \ln \frac{20}{8}\big) + \frac{21}{8}\big(\ln \frac{22}{8} - \ln \frac{21}{8}\big)$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 0{,}1177 + 0{,}1185 + 0{,}1191 + 0{,}1196 + 0{,}1200 + 0{,}1204 + 0{,}1207 + 0{,}1210 + 0{,}1212 + 0{,}1214 + 0{,}1216 + 0{,}1218 + 0{,}1219 + 0{,}1221$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 1,687$

Ahora si se tiene que para $n = 4, k = n2^n = 64 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60,61, 62, 63, 64$

$$E_{15,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{15}{16} \leq e^x < \tfrac{16}{16}\} = \emptyset$$

$$E_{16,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{16}{16} \leq e^x < \tfrac{17}{16}\} = [0, \ln \tfrac{17}{16})$$

$$E_{17,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{17}{16} \leq e^x < \tfrac{18}{16}\} = [\ln \tfrac{17}{16}, \ln \tfrac{18}{16})$$

$$E_{18,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{18}{16} \leq e^x < \tfrac{19}{16}\} = [\ln \tfrac{18}{16}, \ln \tfrac{19}{16})$$

$$E_{19,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{19}{16} \leq e^x < \tfrac{20}{16}\} = [\ln \tfrac{19}{16}, \ln \tfrac{20}{16})$$

$$E_{20,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{20}{16} \leq e^x < \tfrac{21}{16}\} = [\ln \tfrac{20}{16}, \ln \tfrac{21}{16})$$

$$E_{21,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{21}{16} \leq e^x < \tfrac{22}{16}\} = [\ln \tfrac{21}{16}, \ln \tfrac{22}{16})$$

$$E_{22,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{22}{16} \leq e^x < \tfrac{23}{16}\} = [\ln \tfrac{22}{16}, \ln \tfrac{23}{16})$$

$$E_{23,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{23}{16} \leq e^x < \tfrac{24}{16}\} = [\ln \tfrac{23}{16}, \ln \tfrac{24}{16})$$

$$E_{24,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{24}{16} \leq e^x < \tfrac{25}{16}\} = [\ln \tfrac{24}{16}, \ln \tfrac{25}{16})$$

$$E_{25,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{25}{16} \leq e^x < \tfrac{26}{16}\} = [\ln \tfrac{25}{16}, \ln \tfrac{26}{16})$$

$$E_{26,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{26}{16} \leq e^x < \tfrac{27}{16}\} = [\ln \tfrac{26}{16}, \ln \tfrac{27}{16})$$

$$E_{27,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{27}{16} \leq e^x < \tfrac{28}{16}\} = [\ln \tfrac{27}{16}, \ln \tfrac{28}{16})$$

$$E_{28,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{28}{16} \leq e^x < \tfrac{29}{16}\} = [\ln \tfrac{28}{16}, \ln \tfrac{29}{16})$$

$$E_{29,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{29}{16} \leq e^x < \tfrac{30}{16}\} = [\ln \tfrac{29}{16}, \ln \tfrac{30}{16})$$

$$E_{30,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{30}{16} \leq e^x < \tfrac{31}{16}\} = [\ln \tfrac{30}{16}, \ln \tfrac{31}{16})$$

$$E_{31,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{31}{16} \leq e^x < \tfrac{32}{16}\} = [\ln \tfrac{31}{16}, \ln \tfrac{32}{16})$$

$$E_{32,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{32}{16} \leq e^x < \tfrac{33}{16}\} = [\ln \tfrac{32}{16}, \ln \tfrac{33}{16})$$

$$E_{33,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{33}{16} \leq e^x < \tfrac{34}{16}\} = [\ln \tfrac{33}{16}, \ln \tfrac{34}{16})$$

$$E_{34,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{34}{16} \leq e^x < \tfrac{35}{16}\} = [\ln \tfrac{34}{16}, \ln \tfrac{35}{16})$$

$$E_{35,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{35}{16} \leq e^x < \tfrac{36}{16}\} = [\ln \tfrac{35}{16}, \ln \tfrac{36}{16})$$

$$E_{36,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{36}{16} \leq e^x < \tfrac{37}{16}\} = [\ln \tfrac{36}{16}, \ln \tfrac{37}{16})$$

$$E_{37,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{37}{16} \leq e^x < \tfrac{38}{16}\} = [\ln \tfrac{37}{16}, \ln \tfrac{38}{16})$$

$$E_{38,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{38}{16} \leq e^x < \tfrac{39}{16}\} = [\ln \tfrac{38}{16}, \ln \tfrac{39}{16})$$

$$E_{39,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{39}{16} \leq e^x < \tfrac{40}{16}\} = [\ln \tfrac{39}{16}, \ln \tfrac{40}{16})$$

$$E_{40,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{40}{16} \leq e^x < \tfrac{41}{16}\} = [\ln \tfrac{40}{16}, \ln \tfrac{41}{16})$$

$$E_{41,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{41}{16} \leq e^x < \tfrac{42}{16}\} = [\ln \tfrac{41}{16}, \ln \tfrac{42}{16})$$

$$E_{42,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{42}{16} \leq e^x < \tfrac{43}{16}\} = [\ln \tfrac{42}{16}, \ln \tfrac{43}{16})$$

$$E_{43,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{43}{16} \leq e^x < \tfrac{44}{16}\} = [\ln \tfrac{43}{16}, \ln \tfrac{44}{16})$$

$$E_{44,4} = \{x \in [0,1] : \tfrac{44}{16} \leq e^x < \tfrac{45}{16}\} = [\ln \tfrac{44}{16}, \ln \tfrac{45}{16})$$

A partir de aquí únicamente se generan espacios vacíos, de tal manera que se genera la función

$\varphi_4(x) = 1\mathcal{X}_{[1,\ln \frac{17}{16})}(x) + \frac{17}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{17}{16},\ln \frac{18}{16})}(x) + \frac{18}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{18}{16},\ln \frac{19}{16})}(x) + \frac{19}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{19}{16},\ln \frac{20}{16})}(x) + \frac{20}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{20}{16},\ln \frac{21}{16})}(x) + \frac{21}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{21}{16},\ln \frac{22}{16})}(x) + \frac{22}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{22}{16},\ln \frac{23}{16})}(x) + \frac{23}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{23}{16},\ln \frac{24}{16})}(x) + \frac{24}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{24}{16},\ln \frac{25}{16})}(x) + \frac{25}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{25}{16},\ln \frac{26}{16})}(x) + \frac{26}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{26}{16},\ln \frac{27}{16})}(x) + \frac{27}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{27}{16},\ln \frac{28}{16})}(x) + \frac{28}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{28}{16},\ln \frac{29}{16})}(x) + \frac{29}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{29}{16},\ln \frac{30}{16})}(x) + \frac{30}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{30}{16},\ln \frac{31}{16})}(x) + \frac{31}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{31}{16},\ln \frac{32}{16})}(x) + \frac{32}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{32}{16},\ln \frac{33}{16})}(x) + \frac{33}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{33}{16},\ln \frac{34}{16})}(x) + \frac{34}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{34}{16},\ln \frac{35}{16})}(x) + \frac{35}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{35}{16},\ln \frac{36}{16})}(x) + \frac{36}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{36}{16},\ln \frac{37}{16})}(x) + \frac{37}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{37}{16},\ln \frac{38}{16})}(x) + \frac{38}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{38}{16},\ln \frac{39}{16})}(x) + \frac{39}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{39}{16},\ln \frac{40}{16})}(x) + \frac{40}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{41}{16},\ln \frac{42}{16})}(x) + \frac{41}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{41}{16},\ln \frac{42}{16})}(x) + \frac{42}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{42}{16},\ln \frac{43}{16})}(x) + \frac{43}{16}\mathcal{X}_{[\ln \frac{43}{16},\ln e)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 1\big(\ln \frac{17}{16} - 0\big) + \frac{17}{16}\big(\ln \frac{18}{16} - \ln \frac{17}{16}\big) + \frac{18}{16}\big(\ln \frac{19}{16} - \ln \frac{18}{16}\big) + \frac{19}{16}\big(\ln \frac{20}{16} - \ln \frac{19}{16}\big) + \frac{20}{16}\big(\ln \frac{21}{16} - \ln \frac{20}{16}\big) + \frac{21}{16}\big(\ln \frac{22}{16} - \ln \frac{21}{16}\big) + \frac{22}{16}\big(\ln \frac{23}{16} - \ln \frac{22}{16}\big) + \frac{23}{16}\big(\ln \frac{24}{16} - \ln \frac{23}{16}\big) + \frac{24}{16}\big(\ln \frac{25}{16} - \ln \frac{24}{16}\big) + \frac{25}{16}\big(\ln \frac{26}{16} - \ln \frac{25}{16}\big) + \frac{26}{16}\big(\ln \frac{27}{16} - \ln \frac{26}{16}\big) + \frac{27}{16}\big(\ln \frac{28}{16} - \ln \frac{27}{16}\big) + \frac{28}{16}\big(\ln \frac{29}{16} - \ln \frac{28}{16}\big) + \frac{29}{16}\big(\ln \frac{30}{16} - \ln \frac{29}{16}\big) + \frac{30}{16}\big(\ln \frac{31}{16} - \ln \frac{30}{16}\big) + \frac{31}{16}\big(\ln \frac{32}{16} - \ln \frac{31}{16}\big) + \frac{32}{16}\big(\ln \frac{33}{16} - \ln \frac{32}{16}\big) + \frac{33}{16}\big(\ln \frac{34}{16} - \ln \frac{33}{16}\big) + \frac{34}{16}\big(\ln \frac{35}{16} - \ln \frac{34}{16}\big) + \frac{35}{16}\big(\ln \frac{36}{16} - \ln \frac{35}{16}\big) + \frac{36}{16}\big(\ln \frac{37}{16} - \ln \frac{36}{16}\big) + \frac{37}{16}\big(\ln \frac{38}{16} - \ln \frac{37}{16}\big) + \frac{38}{16}\big(\ln \frac{39}{16} - \ln \frac{38}{16}\big) + \frac{39}{16}\big(\ln \frac{40}{16} - \ln \frac{39}{16}\big) + \frac{40}{16}\big(\ln \frac{41}{16} - \ln \frac{40}{16}\big) + \frac{41}{16}\big(\ln \frac{42}{16} - \ln \frac{41}{16}\big) + \frac{42}{16}\big(\ln \frac{43}{16} - \ln \frac{42}{16}\big) + \frac{43}{16}\big(\ln \frac{44}{16} - \ln e\big)$

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 0{,}060624 + 0{,}060730 + 0{,}060825 + 0{,}060910 + 0{,}060987 + 0{,}061057 + 0{,}061121 + 0{,}061179 + 0{,}061232 + 0{,}061282 + 0{,}061328 + 0{,}061370 + 0{,}061480 + 0{,}061513 + 0{,}061543 + 0{,}061571 + 0{,}061598 + 0{,}061623 + 0{,}061647 + 0{,}061670 + 0{,}061691 + 0{,}061712 + 0{,}061731 + 0{,}061749 + 0{,}061767 + 0{,}031177 + 0{,}061409 + 0{,}061446$

$\int \varphi_4(x)d\lambda = 1,687922$

Ahora si se tiene que para $n = 5, k = n2^n = 160 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60{,}61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, ...$ $141, 142{,}143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160$

$$E_{0,5} = \{x \in [0,1] : 0 \leq e^x < \tfrac{1}{32}\} = \emptyset$$

$$E_{1,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{32} \leq e^x < \tfrac{2}{32}\} = \emptyset$$

$$E_{32,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{32}{32} \leq e^x < \tfrac{33}{32}\} = [0; \ln \tfrac{33}{32})$$

$$E_{33,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{33}{32} \leq e^x < \tfrac{34}{32}\} = [\ln \tfrac{33}{32}; \ln \tfrac{34}{32})$$

$$E_{34,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{34}{32} \leq e^x < \tfrac{35}{32}\} = [\ln \tfrac{34}{32}; \ln \tfrac{35}{32})$$

$$E_{35,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{35}{32} \leq e^x < \tfrac{36}{32}\} = [\ln \tfrac{35}{32}; \ln \tfrac{36}{32})$$

$$E_{36,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{36}{32} \leq e^x < \tfrac{37}{32}\} = [\ln \tfrac{36}{32}; \ln \tfrac{37}{32})$$

$$E_{37,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{37}{32} \leq e^x < \tfrac{38}{32}\} = [\ln \tfrac{37}{32}; \ln \tfrac{38}{32})$$

$$E_{38,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{38}{32} \leq e^x < \tfrac{39}{32}\} = [\ln \tfrac{38}{32}; \ln \tfrac{38}{32})$$

$$E_{39,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{39}{32} \leq e^x < \tfrac{40}{32}\} = [\ln \tfrac{39}{32}; \ln \tfrac{40}{32})$$

$$E_{40,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{40}{32} \leq e^x < \tfrac{41}{32}\} = [\ln \tfrac{40}{32}; \ln \tfrac{41}{32})$$

$$E_{41,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{41}{32} \leq e^x < \tfrac{42}{32}\} = [\ln \tfrac{41}{32}; \ln \tfrac{42}{32})$$

$$E_{42,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{42}{32} \leq e^x < \tfrac{43}{32}\} = [\ln \tfrac{42}{32}; \ln \tfrac{43}{32})$$

$$E_{43,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{43}{32} \leq e^x < \tfrac{44}{32}\} = [\ln \tfrac{43}{32}; \ln \tfrac{44}{32})$$

$$E_{44,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{44}{32} \leq e^x < \tfrac{45}{32}\} = [\ln \tfrac{44}{32}; \ln \tfrac{45}{32})$$

$$E_{45,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{45}{32} \le e^x < \tfrac{46}{32}\} = [\ln \tfrac{45}{32}; \ln \tfrac{46}{32})$$

$$E_{46,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{46}{32} \le e^x < \tfrac{47}{32}\} = [\ln \tfrac{46}{32}; \ln \tfrac{47}{32})$$

$$E_{47,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{47}{32} \le e^x < \tfrac{48}{32}\} = [\ln \tfrac{47}{32}; \ln \tfrac{48}{32})$$

$$E_{48,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{48}{32} \le e^x < \tfrac{49}{32}\} = [\ln \tfrac{48}{32}; \ln \tfrac{49}{32})$$

$$E_{49,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{49}{32} \le e^x < \tfrac{50}{32}\} = [\ln \tfrac{49}{32}; \ln \tfrac{50}{32})$$

$$E_{50,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{50}{32} \le e^x < \tfrac{51}{32}\} = [\ln \tfrac{50}{32}; \ln \tfrac{51}{32})$$

$$E_{51,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{51}{32} \le e^x < \tfrac{52}{32}\} = [\ln \tfrac{51}{32}; \ln \tfrac{52}{32})$$

$$E_{52,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{52}{32} \le e^x < \tfrac{53}{32}\} = [\ln \tfrac{52}{32}; \ln \tfrac{53}{32})$$

$$E_{53,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{53}{32} \le e^x < \tfrac{54}{32}\} = [\ln \tfrac{53}{32}; \ln \tfrac{54}{32})$$

$$E_{54,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{54}{32} \le e^x < \tfrac{55}{32}\} = [\ln \tfrac{54}{32}; \ln \tfrac{55}{32})$$

$$E_{55,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{55}{32} \le e^x < \tfrac{56}{32}\} = [\ln \tfrac{55}{32}; \ln \tfrac{56}{32})$$

$$E_{56,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{56}{32} \le e^x < \tfrac{57}{32}\} = [\ln \tfrac{56}{32}; \ln \tfrac{57}{32})$$

$$E_{57,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{57}{32} \le e^x < \tfrac{58}{32}\} = [\ln \tfrac{57}{32}; \ln \tfrac{58}{32})$$

$$E_{58,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{58}{32} \le e^x < \tfrac{59}{32}\} = [\ln \tfrac{58}{32}; \ln \tfrac{59}{32})$$

$$E_{59,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{59}{32} \le e^x < \tfrac{60}{32}\} = [\ln \tfrac{59}{32}; \ln \tfrac{60}{32})$$

$$E_{60,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{60}{32} \le e^x < \tfrac{61}{32}\} = [\ln \tfrac{60}{32}; \ln \tfrac{61}{32})$$

$$E_{61,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{61}{32} \le e^x < \tfrac{62}{32}\} = [\ln \tfrac{61}{32}; \ln \tfrac{62}{32})$$

$$E_{62,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{62}{32} \le e^x < \tfrac{63}{32}\} = [\ln \tfrac{62}{32}; \ln \tfrac{63}{32})$$

$$E_{63,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{63}{32} \le e^x < \tfrac{64}{32}\} = [\ln \tfrac{63}{32}; \ln \tfrac{64}{32})$$

$$E_{64,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{64}{32} \le e^x < \tfrac{65}{32}\} = [\ln \tfrac{64}{32}; \ln \tfrac{65}{32})$$

$$E_{65,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{65}{32} \le e^x < \tfrac{66}{32}\} = [\ln \tfrac{65}{32}; \ln \tfrac{66}{32})$$

$$E_{66,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{66}{32} \le e^x < \tfrac{67}{32}\} = [\ln \tfrac{66}{32}; \ln \tfrac{67}{32})$$

$$E_{67,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{67}{32} \le e^x < \tfrac{68}{32}\} = [\ln \tfrac{67}{32}; \ln \tfrac{68}{32})$$

$$E_{68,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{68}{32} \leq e^x < \tfrac{69}{32}\} = [\ln \tfrac{68}{32}; \ln \tfrac{69}{32})$$

$$E_{69,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{69}{32} \leq e^x < \tfrac{70}{32}\} = [\ln \tfrac{69}{32}; \ln \tfrac{70}{32})$$

$$E_{70,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{70}{32} \leq e^x < \tfrac{71}{32}\} = [\ln \tfrac{70}{32}; \ln \tfrac{71}{32})$$

$$E_{71,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{71}{32} \leq e^x < \tfrac{72}{32}\} = [\ln \tfrac{71}{32}; \ln \tfrac{72}{32})$$

$$E_{72,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{72}{32} \leq e^x < \tfrac{73}{32}\} = [\ln \tfrac{72}{32}; \ln \tfrac{73}{32})$$

$$E_{73,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{73}{32} \leq e^x < \tfrac{74}{32}\} = [\ln \tfrac{73}{32}; \ln \tfrac{74}{32})$$

$$E_{74,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{74}{32} \leq e^x < \tfrac{75}{32}\} = [\ln \tfrac{74}{32}; \ln \tfrac{75}{32})$$

$$E_{75,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{75}{32} \leq e^x < \tfrac{76}{32}\} = [\ln \tfrac{75}{32}; \ln \tfrac{76}{32})$$

$$E_{76,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{76}{32} \leq e^x < \tfrac{77}{32}\} = [\ln \tfrac{76}{32}; \ln \tfrac{77}{32})$$

$$E_{77,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{77}{32} \leq e^x < \tfrac{78}{32}\} = [\ln \tfrac{77}{32}; \ln \tfrac{78}{32})$$

$$E_{78,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{78}{32} \leq e^x < \tfrac{79}{32}\} = [\ln \tfrac{78}{32}; \ln \tfrac{79}{32})$$

$$E_{79,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{79}{32} \leq e^x < \tfrac{80}{32}\} = [\ln \tfrac{79}{32}; \ln \tfrac{80}{32})$$

$$E_{80,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{80}{32} \leq e^x < \tfrac{81}{32}\} = [\ln \tfrac{80}{32}; \ln \tfrac{81}{32})$$

$$E_{81,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{81}{32} \leq e^x < \tfrac{82}{32}\} = [\ln \tfrac{81}{32}; \ln \tfrac{82}{32})$$

$$E_{82,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{82}{32} \leq e^x < \tfrac{83}{32}\} = [\ln \tfrac{82}{32}; \ln \tfrac{83}{32})$$

$$E_{83,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{83}{32} \leq e^x < \tfrac{84}{32}\} = [\ln \tfrac{83}{32}; \ln \tfrac{84}{32})$$

$$E_{84,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{84}{32} \leq e^x < \tfrac{85}{32}\} = [\ln \tfrac{84}{32}; \ln \tfrac{85}{32})$$

$$E_{85,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{85}{32} \leq e^x < \tfrac{86}{32}\} = [\ln \tfrac{85}{32}; \ln \tfrac{86}{32})$$

$$E_{86,5} = \{x \in [0,1] : \tfrac{86}{32} \leq e^x < \tfrac{87}{32}\} = [\ln \tfrac{86}{32}; 1)$$

-

A partir de aquí únicamente se generan espacios vacíos, de tal manera que se genera la función

$\varphi_5(x) = \frac{32}{32}\mathcal{X}_{[0;\ln \frac{33}{32})}(x)+\frac{33}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{33}{32};\ln \frac{34}{32})}(x)+\frac{34}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{34}{32};\ln \frac{35}{32})}(x)+\frac{35}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{35}{32};\ln \frac{36}{32})}(x)+\frac{36}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{36}{32};\ln \frac{37}{32})}(x)+$
$\frac{37}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{37}{32};\ln \frac{38}{32})}(x)+\frac{38}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{38}{32};\ln \frac{39}{32})}(x)+\frac{39}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{39}{32};\ln \frac{40}{32})}(x)+\frac{40}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{40}{32};\ln \frac{41}{32})}(x)+\frac{41}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{41}{32};\ln \frac{42}{32})}(x)+$

$\frac{42}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{42}{32};\ln \frac{43}{32})}(x)+\frac{43}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{43}{32};\ln \frac{44}{32})}(x)+\frac{44}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{44}{32};\ln \frac{45}{32})}(x)+\frac{45}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{45}{32};\ln \frac{46}{32})}(x)+\frac{46}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{46}{32};\ln \frac{47}{32})}(x)+$
$\frac{47}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{47}{32};\ln \frac{48}{32})}(x)+\frac{48}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{48}{32};\ln \frac{49}{32})}(x)+\frac{49}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{49}{32};\ln \frac{50}{32})}(x)+\frac{50}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{50}{32};\ln \frac{51}{32})}(x)+\frac{51}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{51}{32};\ln \frac{52}{32})}(x)+$
$\frac{52}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{52}{32};\ln \frac{53}{32})}(x)+\frac{53}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{53}{32};\ln \frac{54}{32})}(x)+\frac{54}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{54}{32};\ln \frac{55}{32})}(x)+\frac{55}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{55}{32};\ln \frac{56}{32})}(x)+\frac{56}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{56}{32};\ln \frac{57}{32})}(x)+$
$\frac{57}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{57}{32};\ln \frac{58}{32})}(x)+\frac{58}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{58}{32};\ln \frac{59}{32})}(x)+\frac{59}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{59}{32};\ln \frac{60}{32})}(x)+\frac{60}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{60}{32};\ln \frac{61}{32})}(x)+\frac{61}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{61}{32};\ln \frac{62}{32})}(x)+$
$\frac{62}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{62}{32};\ln \frac{63}{32})}(x)+\frac{63}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{63}{32};\ln \frac{64}{32})}(x)+\frac{64}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{64}{32};\ln \frac{65}{32})}(x)+\frac{65}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{65}{32};\ln \frac{66}{32})}(x)+\frac{66}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{66}{32};\ln \frac{67}{32})}(x)+$
$\frac{67}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{67}{32};\ln \frac{68}{32})}(x)+\frac{68}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{68}{32};\ln \frac{69}{32})}(x)+\frac{69}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{69}{32};\ln \frac{70}{32})}(x)+\frac{70}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{70}{32};\ln \frac{71}{32})}(x)+\frac{71}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{71}{32};\ln \frac{72}{32})}(x)+$
$\frac{72}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{72}{32};\ln \frac{73}{32})}(x)+\frac{73}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{73}{32};\ln \frac{74}{32})}(x)+\frac{74}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{74}{32};\ln \frac{75}{32})}(x)+\frac{75}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{75}{32};\ln \frac{76}{32})}(x)+\frac{76}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{76}{32};\ln \frac{77}{32})}(x)+$
$\frac{78}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{78}{32};\ln \frac{79}{32})}(x)+\frac{79}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{79}{32};\ln \frac{80}{32})}(x)+\frac{80}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{80}{32};\ln \frac{81}{32})}(x)+\frac{81}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{81}{32};\ln \frac{82}{32})}(x)+\frac{82}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{32}{32};\ln \frac{83}{32})}(x)+$
$\frac{83}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{83}{32};\ln \frac{84}{32})}(x) + \frac{84}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{84}{32};\ln \frac{85}{32})}(x) + \frac{85}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{85}{32};\ln \frac{86}{32})}(x) + \frac{86}{32}\mathcal{X}_{[\ln \frac{33}{32};1)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_5(x)d\lambda = \frac{32}{32}\big(\ln \frac{33}{32}-0\big)+\frac{33}{32}\big(\ln \frac{34}{32}-\ln \frac{33}{32}\big)+\frac{34}{32}\big(\ln \frac{35}{32}-\ln \frac{34}{32}\big)+\frac{35}{32}\big(\ln \frac{36}{32}-\ln \frac{35}{32}\big)+\frac{36}{32}\big(\ln \frac{37}{32}-$
$\ln \frac{36}{32}\big)+\frac{37}{32}\big(\ln \frac{38}{32}-\ln \frac{37}{32}\big)+\frac{38}{32}\big(\ln \frac{39}{32}-\ln \frac{38}{32}\big)+\frac{39}{32}\big(\ln \frac{40}{32}-\ln \frac{39}{32}\big)+\frac{40}{32}\big(\ln \frac{41}{32}-\ln \frac{40}{32}\big)+\frac{41}{32}\big(\ln \frac{42}{32}-$
$\ln \frac{41}{32}\big)+\frac{42}{32}\big(\ln \frac{43}{32}-\ln \frac{42}{32}\big)+\frac{43}{32}\big(\ln \frac{44}{32}-\ln \frac{43}{32}\big)+\frac{44}{32}\big(\ln \frac{45}{32}-\ln \frac{44}{32}\big)+\frac{45}{32}\big(\ln \frac{46}{32}-\ln \frac{45}{32}\big)+\frac{46}{32}\big(\ln \frac{47}{32}-$
$\ln \frac{46}{32}\big)+\frac{47}{32}\big(\ln \frac{48}{32}-\ln \frac{47}{32}\big)+\frac{48}{32}\big(\ln \frac{49}{32}-\ln \frac{48}{32}\big)+\frac{49}{32}\big(\ln \frac{50}{32}-\ln \frac{49}{32}\big)+\frac{50}{32}\big(\ln \frac{51}{32}-\ln \frac{50}{32}\big)+\frac{51}{32}\big(\ln \frac{52}{32}-$
$\ln \frac{51}{32}\big)+\frac{52}{32}\big(\ln \frac{53}{32}-\ln \frac{52}{32}\big)+\frac{53}{32}\big(\ln \frac{54}{32}-\ln \frac{53}{32}\big)+\frac{54}{32}\big(\ln \frac{55}{32}-\ln \frac{54}{32}\big)+\frac{55}{32}\big(\ln \frac{56}{32}-\ln \frac{55}{32}\big)+\frac{56}{32}\big(\ln \frac{57}{32}-$
$\ln \frac{56}{32}\big)+\frac{57}{32}\big(\ln \frac{58}{32}-\ln \frac{57}{32}\big)+\frac{58}{32}\big(\ln \frac{59}{32}-\ln \frac{58}{32}\big)+\frac{59}{32}\big(\ln \frac{60}{32}-\ln \frac{59}{32}\big)+\frac{60}{32}\big(\ln \frac{61}{32}-\ln \frac{60}{32}\big)+\frac{61}{32}\big(\ln \frac{62}{32}-$
$\ln \frac{61}{32}\big)+\frac{62}{32}\big(\ln \frac{63}{32}-\ln \frac{62}{32}\big)+\frac{63}{32}\big(\ln \frac{64}{32}-\ln \frac{63}{32}\big)+\frac{64}{32}\big(\ln \frac{65}{32}-\ln \frac{64}{32}\big)+\frac{65}{32}\big(\ln \frac{66}{32}-\ln \frac{65}{32}\big)+\frac{66}{32}\big(\ln \frac{67}{32}-$
$\ln \frac{66}{32}\big)+\frac{67}{32}\big(\ln \frac{68}{32}-\ln \frac{67}{32}\big)+\frac{68}{32}\big(\ln \frac{69}{32}-\ln \frac{68}{32}\big)+\frac{69}{32}\big(\ln \frac{70}{32}-\ln \frac{69}{32}\big)+\frac{70}{32}\big(\ln \frac{71}{32}-\ln \frac{70}{32}\big)+\frac{71}{32}\big(\ln \frac{72}{32}-$
$\ln \frac{71}{32}\big)+\frac{72}{32}\big(\ln \frac{73}{32}-\ln \frac{72}{32}\big)+\frac{73}{32}\big(\ln \frac{74}{32}-\ln \frac{73}{32}\big)+\frac{74}{32}\big(\ln \frac{75}{32}-\ln \frac{74}{32}\big)+\frac{75}{32}\big(\ln \frac{76}{32}-\ln \frac{75}{32}\big)+\frac{76}{32}\big(\ln \frac{77}{32}-$
$\ln \frac{76}{32}\big)+\frac{77}{32}\big(\ln \frac{78}{32}-\ln \frac{77}{32}\big)+\frac{78}{32}\big(\ln \frac{79}{32}-\ln \frac{80}{32}\big)+\frac{79}{32}\big(\ln \frac{80}{32}-\ln \frac{79}{32}\big)+\frac{80}{32}\big(\ln \frac{81}{32}-\ln \frac{80}{32}\big)+\frac{81}{32}\big(\ln \frac{82}{32}-$
$\ln \frac{81}{32}\big)+\frac{82}{32}\big(\ln \frac{83}{32}-\ln \frac{82}{32}\big)+\frac{83}{32}\big(\ln \frac{84}{32}-\ln \frac{83}{32}\big)+\frac{84}{32}\big(\ln \frac{85}{32}-\ln \frac{84}{32}\big)+\frac{85}{32}\big(\ln \frac{86}{32}-\ln \frac{85}{32}\big)+\frac{86}{32}\big(1-\ln \frac{86}{32}\big)$

$\int \varphi_5(x)d\lambda = 0{,}030771+0{,}030785+0{,}030799+0{,}030811+0{,}030823+0{,}030835+0{,}030856+$
$0{,}030865+0{,}030874+0{,}030883+0{,}030892+0{,}030900+0{,}030907+0{,}030915+0{,}030922+$
$0{,}030928+0{,}030935+0{,}030941+0{,}030947+0{,}030953+0{,}030964+0{,}030969+0{,}030974+$
$0{,}030979+0{,}030983+0{,}030988+0{,}030992+0{,}030996+0{,}031060+0{,}031004+0{,}031008+$
$0{,}031012+0{,}031015+0{,}031019+0{,}031022+0{,}031025+0{,}031028+0{,}031031+0{,}031094+$
$0{,}031037+0{,}031040+0{,}031043+0{,}031046+0{,}031048+0{,}031051+0{,}031053+0{,}031056+$

$0{,}031058 + 0{,}031060 + 0{,}031063 + 0{,}031065 + 0{,}031067 + 0{,}030958 + 0{,}030606$

$\int \varphi_5(x) d\lambda = 1{,}702678$

3.7. Función discontinua

$$f : [0,2] \mapsto \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 1 \\ x+1 ; & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

La función que se presenta es una función discontinua de la cual se desea obtener el valor de la integral se presentan 2 opciones de integración de esta función, para finalmente generar la Integral de Lebesgue con todos los detalles señalados anteriormente.

a) **Integral Definida.**

Exclusivamente por notación se denotará a la integral como

$$\begin{aligned}
\int_0^2 F(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 g(x)dx \\
&= \int_0^1 xdx + \int_1^2 (x+1)dx \\
&= \int_0^1 xdx + \int_1^2 xdx + \int_1^2 1dx \\
&= \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + \frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 + x\bigg|_1^2 \\
&= \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(4-1) + (2-1) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

b) **Sumas de Riemann**

Se realiza el siguiente procedimiento para integrar:

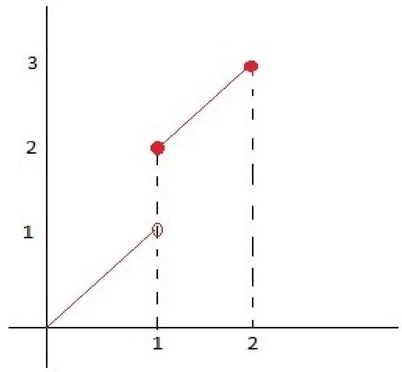

Figura 16: $f(x)$ es discontinua

Por la definición de sumatorias de Riemann se tiene

$A = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

$A = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x + \lim\limits_{n \mapsto \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x$

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow c_i = 0 + i(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{i}{n}$

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow c_i = 1 + i(\dfrac{1}{n}) = 1 + \dfrac{i}{n}$

$A = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{i}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n}\right) + \lim\limits_{n \mapsto \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} g\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$A = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{i}{n}\right) + \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} g\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$

$A = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{i}{n}\right) + \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\left(1+\dfrac{i}{n}\right)+1\right]$

$A = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} i + \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} \left(2+\dfrac{i}{n}\right)$

$A = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} i + \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) \left(\sum\limits_{i=1}^{n} 2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i}{n}\right)$

$A = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n^2}\right) \dfrac{n(n+1)}{2} + \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) \left[2n + \dfrac{1}{n}\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

$A = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{n+1}{2n}\right) + \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) \left(\dfrac{4n+n+1}{2}\right)$

$A = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$

$A = 3$

c) **Integral de Lebesgue**

Con la operatividad detallada en páginas anteriores tenemos las suficientes herramientas para generar, plantear y desarrollar la integral de Lebesgue del ejemplo en cuestión. En primer lugar se tiene que:

Si se tiene que para $n = 1, k = n2^n = 2 \Rightarrow k = 0, 1, 2$

$$E_{0,1} = \{x \in [0, 2] : [(0 \leq x < \tfrac{1}{2}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(0 \leq x + 1 < \tfrac{1}{2}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]\}$$

$$\{[0, \tfrac{1}{2}) \cap [0, 1)\} \vee \{[-1, -\tfrac{1}{2}) \cap [1, 2]\}$$

$$[0, \tfrac{1}{2}) \cup \emptyset = [0, \tfrac{1}{2}]$$

$$E_{1,1} = \{x \in [0, 2] : [(\tfrac{1}{2} \leq x < \tfrac{2}{2}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(\tfrac{1}{2} \leq x + 1 < \tfrac{2}{2}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]\} = [\tfrac{1}{2}, 1]$$

$$E_{2,1} = \{x \in [0, 2] : [(\tfrac{2}{2} \leq x) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(\tfrac{2}{2} \leq x + 1) \wedge (1 \leq x \leq 2)]\} = [\tfrac{1}{2}, 1] = [0, 2]$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_1(x) = 0\mathcal{X}_{[0,\frac{1}{2})}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_{([\frac{1}{2},1)}(x) + \mathcal{X}_{([0,2))}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_1(x) d\lambda = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) + 1(2 - 0)$

$\int \varphi_1(x) d\lambda = 2{,}25$

Ahora si se tiene que para $n = 2, k = n2^n = 8 \Rightarrow k = 0{,}1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$E_{0,2} = \{x \in [0, 2] : [(0 \leq x < \tfrac{1}{4}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(0 \leq x + 1 < \tfrac{1}{4}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]\}$$

$$\{[0, \tfrac{1}{4}) \cap [0, 1)\} \vee \{[-1, -\tfrac{3}{4}) \cap [1, 2]\}$$

$$[0, \tfrac{1}{4}) \cup \emptyset = [0, \tfrac{1}{4}]$$

$$E_{1,2} = \{x \in [0, 2] : [(\tfrac{1}{4} \leq x < \tfrac{2}{4}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(\tfrac{1}{4} \leq x + 1 < \tfrac{2}{4}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]\} = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4})$$

$$E_{2,2}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{2}{4}\leq x<\tfrac{3}{4})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\tfrac{2}{4}\leq x+1<\tfrac{3}{4})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{2}{4},\tfrac{3}{4})$$

$$E_{3,2}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{3}{4}\leq x<\tfrac{4}{4})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\tfrac{3}{4}\leq x+1<\tfrac{4}{4})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{3}{4},\tfrac{4}{4})$$

$$E_{4,2}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{4}{4}\leq x<\tfrac{5}{4})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\tfrac{4}{4}\leq x+1<\tfrac{5}{4})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{4}{4},\tfrac{5}{4})$$

$$E_{5,2}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{5}{4}\leq x<\tfrac{6}{4})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\tfrac{5}{4}\leq x+1<\tfrac{6}{4})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{5}{4},\tfrac{6}{4})$$

$$E_{6,2}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{6}{4}\leq x<\tfrac{7}{4})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\tfrac{6}{4}\leq x+1<\tfrac{7}{4})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{6}{4},\tfrac{7}{4})$$

$$E_{7,2}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{7}{4}\leq x<\tfrac{8}{4})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\tfrac{7}{4}\leq x+1<\tfrac{8}{4})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{7}{4},\tfrac{8}{4})$$

$$E_{8,2}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{8}{4}\leq x)\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\tfrac{8}{4}\leq x+1)\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[1,2)$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_2(x)=\frac{1}{4}\mathcal{X}_{[\frac{1}{4},\frac{2}{4})}(x)+\frac{2}{4}\mathcal{X}_{[\frac{2}{4},\frac{3}{4})}(x)+\frac{3}{4}\mathcal{X}_{[\frac{3}{4},\frac{4}{4})}(x)+\frac{5}{4}\mathcal{X}_{[\frac{5}{4},\frac{6}{4})}(x)+\frac{6}{4}\mathcal{X}_{[\frac{6}{4},\frac{7}{4})}(x)+\frac{7}{4}\mathcal{X}_{[\frac{7}{4},\frac{8}{4})}(x)+\frac{8}{4}\mathcal{X}_{[1,2)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int\varphi_2(x)d\lambda=\frac{1}{4}(\frac{2}{4}-\frac{1}{4})+\frac{2}{4}(\frac{3}{4}-\frac{2}{4})+\frac{3}{4}(\frac{4}{4}-\frac{3}{4})+\frac{4}{4}(\frac{5}{4}-\frac{4}{4})+\frac{5}{4}(\frac{6}{4}-\frac{5}{4})+\frac{6}{4}(\frac{7}{4}-\frac{6}{4})+\frac{7}{4}(\frac{8}{4}-\frac{7}{4})+\frac{8}{4}(\frac{8}{4}-1)$

$\int\varphi_2(x)d\lambda=\frac{1}{4}(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}+\frac{7}{4})+\frac{8}{4}$

$\int\varphi_2(x)d\lambda=2{,}75$

Ahora si se tiene para $n=3,k=n2^n=24\Rightarrow k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,$
$14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24$

$$E_{0,3}=\{x\in[0,2]:[(0\leq x<\tfrac{1}{8})\wedge(0\leq 1)]\vee[(0\leq x+1<\tfrac{1}{8})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}$$
$$\{[0,\tfrac{1}{8})\cap[0,1)\}\cup\{[-1,-\tfrac{7}{8})\cap[1,2]\}$$
$$[0,\tfrac{1}{8})\cup\emptyset)=[0,\tfrac{1}{8})$$

$$E_{1,3}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{1}{8}\leq x<\tfrac{2}{8})\wedge(0\leq 1)]\vee[(\tfrac{1}{8}\leq x+1<\tfrac{2}{8})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{1}{8},\tfrac{2}{8})$$
$$E_{2,3}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{2}{8}\leq x<\tfrac{3}{8})\wedge(0\leq 1)]\vee[(\tfrac{2}{8}\leq x+1<\tfrac{3}{8})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{2}{8},\tfrac{3}{8})$$
$$E_{3,3}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{3}{8}\leq x<\tfrac{4}{8})\wedge(0\leq 1)]\vee[(\tfrac{3}{8}\leq x+1<\tfrac{4}{8})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{3}{8},\tfrac{4}{8})$$
$$E_{4,3}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{4}{8}\leq x<\tfrac{5}{8})\wedge(0\leq 1)]\vee[(\tfrac{4}{8}\leq x+1<\tfrac{5}{8})\wedge(1\leq x\leq 2)]\}=[\tfrac{4}{8},\tfrac{5}{8})$$

$$E_{5,3}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{5}{8}\le x<\tfrac{6}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{5}{8}\le x+1<\tfrac{6}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{5}{8},\tfrac{6}{8})$$
$$E_{6,3}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{6}{8}\le x<\tfrac{7}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{6}{8}\le x+1<\tfrac{7}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{6}{8},\tfrac{7}{8})$$
$$E_{7,3}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{7}{8}\le x<\tfrac{8}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{7}{8}\le x+1<\tfrac{8}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{7}{8},\tfrac{8}{8})$$
$$E_{8,3}=\{x\in[0,2]:[(\tfrac{8}{8}\le x<\tfrac{9}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{8}{8}\le x+1<\tfrac{9}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=\{1\}$$
$$E_{9,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{9}{8}\le x<\tfrac{10}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{9}{8}\le x+1<\tfrac{10}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=\emptyset$$
$$E_{10,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{10}{8}\le x<\tfrac{11}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{10}{8}\le x+1<\tfrac{11}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=\emptyset$$
$$E_{11,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{11}{8}\le x<\tfrac{12}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{11}{8}\le x+1<\tfrac{12}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=\emptyset$$
$$E_{12,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{12}{8}\le x<\tfrac{13}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{12}{8}\le x+1<\tfrac{13}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=\emptyset$$
$$E_{13,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{13}{8}\le x<\tfrac{14}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{13}{8}\le x+1<\tfrac{14}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=\emptyset$$
$$E_{14,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{14}{8}\le x<\tfrac{15}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{14}{8}\le x+1<\tfrac{15}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=\emptyset$$
$$E_{15,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{15}{8}\le x<\tfrac{16}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{15}{8}\le x+1<\tfrac{16}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=\emptyset$$
$$E_{16,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{16}{8}\le x<\tfrac{17}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{16}{8}\le x+1<\tfrac{17}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{8}{8},\tfrac{9}{8})$$
$$E_{17,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{17}{8}\le x<\tfrac{18}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{17}{8}\le x+1<\tfrac{18}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{9}{8},\tfrac{10}{8})$$
$$E_{18,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{18}{8}\le x<\tfrac{19}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{18}{8}\le x+1<\tfrac{19}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{10}{8},\tfrac{11}{8})$$
$$E_{19,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{19}{8}\le x<\tfrac{20}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{19}{8}\le x+1<\tfrac{20}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{11}{8},\tfrac{12}{8})$$
$$E_{20,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{20}{8}\le x<\tfrac{21}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{20}{8}\le x+1<\tfrac{21}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{12}{8},\tfrac{13}{8})$$
$$E_{21,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{21}{8}\le x<\tfrac{22}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{21}{8}\le x+1<\tfrac{22}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{13}{8},\tfrac{14}{8})$$
$$E_{22,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{22}{8}\le x<\tfrac{22}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{22}{8}\le x+1<\tfrac{23}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{14}{8},\tfrac{15}{8})$$
$$E_{23,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{23}{8}\le x<\tfrac{24}{8})\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{23}{8}\le x+1<\tfrac{24}{8})\wedge(1\le x\le 2)]\}=[\tfrac{15}{8},\tfrac{16}{8})$$
$$E_{24,3}\{x\in[0,2]:[(\tfrac{24}{8}\le x)\wedge(0\le 1)]\vee[(\tfrac{24}{8}\le x+1)\wedge(1\le x\le 2)]\}=\{2\}$$

de tal manera que se genera la función

$\varphi_3(x)=\frac{1}{8}\mathcal{X}_{[\frac{1}{8},\frac{2}{8})}(x)+\frac{2}{8}\mathcal{X}_{[\frac{2}{8},\frac{3}{8})}(x)+\frac{3}{8}\mathcal{X}_{[\frac{3}{8},\frac{4}{8})}(x)+\frac{4}{8}\mathcal{X}_{[\frac{4}{8},\frac{5}{8})}(x)+\frac{5}{8}\mathcal{X}_{[\frac{5}{8},\frac{6}{8})}(x)+\frac{6}{8}\mathcal{X}_{[\frac{6}{8},\frac{7}{8})}(x)+\frac{7}{8}\mathcal{X}_{[\frac{7}{8},\frac{8}{8})}(x)+\frac{8}{8}\mathcal{X}_{[\frac{8}{8},\frac{9}{8})}(x)+\frac{9}{8}\mathcal{X}_{[\frac{9}{8},\frac{10}{8})}(x)+\frac{10}{8}\mathcal{X}_{[\frac{10}{8},\frac{11}{8})}(x)+\frac{11}{8}\mathcal{X}_{[\frac{11}{8},\frac{12}{8})}(x)+\frac{12}{8}\mathcal{X}_{[\frac{12}{8},\frac{13}{8})}(x)+\frac{13}{8}\mathcal{X}_{[\frac{13}{8},\frac{14}{8})}(x)+\frac{14}{8}\mathcal{X}_{[\frac{14}{8},\frac{15}{8})}(x)+\frac{15}{8}\mathcal{X}_{[\frac{15}{8},\frac{16}{8})}(x)+\frac{16}{8}\mathcal{X}_{[\frac{16}{8},\frac{17}{8})}(x)+\frac{17}{8}\mathcal{X}_{[\frac{17}{8},\frac{18}{8})}(x)+\frac{18}{8}\mathcal{X}_{[\frac{18}{8},\frac{19}{8})}(x)+\frac{19}{8}\mathcal{X}_{[\frac{19}{8},\frac{20}{8})}(x)+\frac{20}{8}\mathcal{X}_{[\frac{20}{8},\frac{21}{8})}(x)+\frac{21}{8}\mathcal{X}_{[\frac{21}{8},\frac{22}{8})}(x)+\frac{22}{8}\mathcal{X}_{[\frac{22}{8},\frac{23}{8})}(x)+\frac{23}{8}\mathcal{X}_{[\frac{23}{8},\frac{24}{8})}(x)+\frac{24}{8}\mathcal{X}_{(\{2\})}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int\varphi_3(x)d\lambda=\frac{1}{8}(\frac{2}{8}-\frac{1}{8})+\frac{2}{8}(\frac{3}{8}-\frac{2}{8})+\frac{3}{8}(\frac{4}{8}-\frac{3}{8})+\frac{4}{8}(\frac{5}{8}-\frac{4}{8})+\frac{5}{8}(\frac{6}{8}-\frac{5}{8})+\frac{6}{8}(\frac{7}{8}-\frac{6}{8})+\frac{7}{8}(\frac{8}{8}-\frac{7}{8})+$

$\frac{8}{8}(0)+\frac{9}{8}(0)+\frac{10}{8}(0)+\frac{11}{8}(0)+\frac{12}{8}(0)+\frac{13}{8}(0)+\frac{14}{8}(0)+\frac{15}{8}(0)+\frac{16}{8}(\frac{17}{8}-\frac{16}{8})+\frac{17}{8}(\frac{18}{8}-\frac{17}{8})+$
$\frac{18}{8}(\frac{19}{8}-\frac{18}{8})+\frac{19}{8}(\frac{20}{8}-\frac{19}{8})+\frac{20}{8}(\frac{21}{8}-\frac{20}{8})+\frac{21}{8}(\frac{22}{8}-\frac{21}{8})+\frac{22}{8}(\frac{23}{8}-\frac{22}{8})+\frac{23}{8}(\frac{24}{8}-\frac{23}{8})+\frac{24}{8}(0)$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = \frac{1}{8}(\frac{1+2+3+4+5+6+7+16+17+18+19+20+21+22+23}{8})$

$\int \varphi_3(x)d\lambda = 2{,}875$

Ahora si se tiene que para $n=4, k=n2^n=64 \Rightarrow k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,$ $14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,$ $41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60{,}61,62,63,64$

$$E_{0,4}=\{x\in[0,2]:[(0\leq x<\frac{1}{16})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(0\leq x+1<\frac{1}{16})\wedge(1\leq x<2)]\}$$
$$\{[0,\frac{1}{16})\cap[0,1)\}\vee\{[-1,-\frac{15}{16}]\cap[1,2]\}$$
$$[0,\frac{1}{16})\cup\emptyset=[0,\frac{1}{16})$$

$E_{1,4}=\{x\in[0,2]:[(\frac{1}{16}\leq x<\frac{2}{16})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\frac{1}{16}\leq x+1<\frac{2}{16})\wedge(1\leq x<2)]\}=$ $[\frac{1}{16},\frac{2}{16})$

$E_{2,4}=\{x\in[0,2]:[(\frac{2}{16}\leq x<\frac{3}{16})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\frac{2}{16}\leq x+1<\frac{3}{16})\wedge(1\leq x<2)]\}=$ $[\frac{2}{16},\frac{3}{16})$

$E_{3,4}=\{x\in[0,2]:[(\frac{3}{16}\leq x<\frac{4}{16})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\frac{3}{16}\leq x+1<\frac{4}{16})\wedge(1\leq x<2)]\}=$ $[\frac{3}{16},\frac{4}{16})$

.

.

.

$E_{16,4}=\{x\in[0,2]:[(\frac{16}{16}\leq x<\frac{17}{16})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\frac{17}{16}\leq x+1<\frac{18}{16})\wedge(1\leq x<2)]\}$
$\{[\frac{16}{16},\frac{17}{16})\cap[0,1)\}\vee\{[0,\frac{1}{16}]\cap[1,2]\}=\{\frac{16}{16}\}$

$E_{17,4}=\{x\in[0,2]:[(\frac{17}{16}\leq x<\frac{18}{16})\wedge(0\leq x<1)]\vee[(\frac{17}{16}\leq x+1<\frac{18}{16})\wedge(1\leq x<2)]\}$
$\{[\frac{17}{16},\frac{18}{16})\cap[0,1)\}\vee\{[\frac{1}{16},\frac{2}{16}\cap[1,2]\}$

$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

.

.

.

$E_{32,4} = \{x \in [0,2] : [(\frac{32}{16} \leq x < \frac{33}{16}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(\frac{32}{16} \leq x + 1 < \frac{33}{16}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]\}$
$\emptyset \cup [\frac{16}{16}, \frac{17}{16}) = [\frac{16}{16}, \frac{17}{16})$

.

.

.

$E_{48,4} = \{x \in [0,2] : [\frac{48}{16} \leq x < \frac{49}{16}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(\frac{48}{16} \leq x + 1 < \frac{49}{16}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]\}$
$\emptyset \cup [\frac{32}{16}, \frac{33}{16}) = \{\frac{32}{16}\}$

De esta manera se genera la función

$\varphi_4(x) = \frac{1}{16}\mathcal{X}_{[\frac{1}{16},\frac{2}{16})}(x) + \frac{2}{16}\mathcal{X}_{[\frac{2}{16},\frac{3}{16})}(x) + \frac{3}{16}\mathcal{X}_{[\frac{3}{16},\frac{4}{16})}(x) + \frac{4}{16}\mathcal{X}_{[\frac{4}{16},\frac{5}{16})}(x) + \frac{5}{16}\mathcal{X}_{[\frac{5}{16},\frac{6}{16})}(x) + \frac{6}{16}\mathcal{X}_{[\frac{6}{16},\frac{7}{16})}(x) + \frac{7}{16}\mathcal{X}_{[\frac{7}{16},\frac{8}{16})}(x) + \frac{8}{16}\mathcal{X}_{[\frac{8}{16},\frac{9}{16})}(x) + \frac{9}{16}\mathcal{X}_{[\frac{9}{16},\frac{10}{16})}(x) + \frac{10}{16}\mathcal{X}_{[\frac{10}{16},\frac{11}{16})}(x) + \frac{11}{16}\mathcal{X}_{[\frac{11}{16},\frac{12}{16})}(x) + \frac{12}{16}\mathcal{X}_{[\frac{12}{16},\frac{13}{16})}(x) + \frac{13}{16}\mathcal{X}_{[\frac{13}{16},\frac{14}{16})}(x) + \frac{14}{16}\mathcal{X}_{[\frac{14}{16},\frac{15}{16})}(x) + \frac{15}{16}\mathcal{X}_{[\frac{15}{16},\frac{16}{16})}(x) + \frac{16}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{17}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{18}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{19}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{20}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{21}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{22}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{23}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{24}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{25}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{26}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{27}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{28}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{29}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{30}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{31}{16}\mathcal{X}_{\{\emptyset\}}(x) + \frac{32}{16}\mathcal{X}_{[\frac{16}{16},\frac{17}{16})}(x) + \frac{33}{16}\mathcal{X}_{[\frac{17}{16},\frac{18}{16})}(x) + \frac{34}{16}\mathcal{X}_{[\frac{18}{16},\frac{19}{16})}(x) + \frac{35}{16}\mathcal{X}_{[\frac{19}{16},\frac{20}{16})}(x) + \frac{36}{16}\mathcal{X}_{[\frac{20}{16},\frac{21}{16})}(x) + \frac{37}{16}\mathcal{X}_{[\frac{21}{16},\frac{22}{16})}(x) + \frac{38}{16}\mathcal{X}_{[\frac{22}{16},\frac{23}{16})}(x) + \frac{39}{16}\mathcal{X}_{[\frac{23}{16},\frac{24}{16})}(x) + \frac{40}{16}\mathcal{X}_{[\frac{24}{16},\frac{17}{16})}(x) + \frac{41}{16}\mathcal{X}_{[\frac{25}{16},\frac{26}{16})}(x) + \frac{42}{16}\mathcal{X}_{[\frac{26}{16},\frac{17}{16})}(x) + \frac{43}{16}\mathcal{X}_{[\frac{27}{16},\frac{28}{16})}(x) + \frac{44}{16}\mathcal{X}_{[\frac{28}{16},\frac{17}{16})}(x) + \frac{45}{16}\mathcal{X}_{[\frac{29}{16},\frac{30}{16})}(x) + \frac{46}{16}\mathcal{X}_{[\frac{30}{16},\frac{17}{16})}(x) + \frac{47}{16}\mathcal{X}_{[\frac{31}{16},\frac{32}{16})}(x) + \frac{48}{16}\mathcal{X}_{\{\frac{32}{16}\}}(x) + \frac{49}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{50}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{51}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{52}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{53}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{54}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{55}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{56}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{57}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{58}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{59}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{60}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{61}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{62}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{63}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x) + \frac{64}{16}\mathcal{X}_{(\emptyset)}(x)$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$\int \varphi_4(x) d\lambda = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{16} - \frac{1}{16}\right) + \frac{2}{16}\left(\frac{3}{16} - \frac{2}{16}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{4}{16} - \frac{3}{16}\right) + \frac{4}{16}\left(\frac{5}{16} - \frac{4}{16}\right) + \frac{5}{16}\left(\frac{6}{16} - \frac{5}{16}\right) + \frac{6}{16}\left(\frac{7}{16} - \frac{6}{16}\right) + \frac{7}{16}\left(\frac{8}{16} - \frac{7}{16}\right) + \frac{8}{16}\left(\frac{9}{16} - \frac{8}{16}\right) + \frac{9}{16}\left(\frac{10}{16} - \frac{9}{16}\right) + \frac{10}{16}\left(\frac{11}{16} - \frac{10}{16}\right) + \frac{11}{16}\left(\frac{12}{16} - \frac{11}{16}\right) + \frac{12}{16}\left(\frac{13}{16} - \frac{12}{16}\right) + \frac{13}{16}\left(\frac{14}{16} - \frac{13}{16}\right) + \frac{14}{16}\left(\frac{15}{16} - \frac{14}{16}\right) + \frac{15}{16}\left(\frac{16}{16} - \frac{15}{16}\right) + \frac{16}{16}\left(0\right) + \ldots + \frac{32}{16}\left(\frac{17}{16} - \frac{16}{16}\right) + \frac{33}{16}\left(\frac{18}{16} - \frac{17}{16}\right) + \frac{34}{16}\left(\frac{19}{16} - \frac{18}{16}\right) + \frac{35}{16}\left(\frac{20}{16} - \frac{19}{16}\right) + \frac{36}{16}\left(\frac{21}{16} - \frac{20}{16}\right) + \frac{37}{16}\left(\frac{22}{16} - \frac{21}{16}\right) + \frac{38}{16}\left(\frac{23}{16} - \frac{22}{16}\right) + \frac{39}{16}\left(\frac{24}{16} - \frac{23}{16}\right) + \frac{40}{16}\left(\frac{25}{16} - \frac{24}{16}\right) + \frac{41}{16}\left(\frac{26}{16} - \frac{25}{16}\right) + \frac{42}{16}\left(\frac{27}{16} -\right.$

$\frac{26}{16}) + \frac{43}{16}(\frac{28}{16} - \frac{27}{16}) + \frac{44}{16}(\frac{29}{16} - \frac{28}{16}) + \frac{45}{16}(\frac{30}{16} - \frac{29}{16}) + \frac{46}{16}(\frac{31}{16} - \frac{30}{16}) + \frac{47}{16}(\frac{32}{16} - \frac{31}{16}) + \frac{48}{16}(0) + ... + \frac{64}{16}(0)$

$\int \varphi_4(x)d\lambda = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{15} i}{16}\right) + \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{\sum_{i=32}^{47} i}{16}\right)$
$\int \varphi_4(x)d\lambda = 2{,}9375$

Ahora si se tiene que para $n = 5, k = n2^n = 160 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,$ $14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,$ $41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60{,}61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, ...$ $141, 142{,}143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160$

$$E_{0,5} = \{x \in [0, 2] : [(0 \leq x < \tfrac{1}{32}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(0 \leq x + 1 < \tfrac{1}{32}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]$$
$$\{[0, \tfrac{1}{32}) \cap [0, 1)\} \cup \{[-1, -\tfrac{1}{2}) \cap [1, 2]\} = [0, \tfrac{1}{32}) \cup \emptyset = [0, \tfrac{1}{32})$$
$$E_{1,5} = \{x \in [0, 2] : [(\tfrac{1}{32} \leq x < \tfrac{2}{32}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(\tfrac{1}{32} \leq x + 1 < \tfrac{2}{32}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]$$
$$\{[\tfrac{1}{32}, \tfrac{2}{32}) \cap [0, 1)\} \cup \{[-\tfrac{31}{32}), -\tfrac{30}{32} \cap [1, 2]\} = [\tfrac{1}{32}, \tfrac{2}{32}) \cup \emptyset = [\tfrac{1}{32}, \tfrac{2}{32})$$

.

.

.

$$E_{64,5} = \{x \in [0, 2] : [(\tfrac{64}{32} \leq x < \tfrac{65}{32}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(\tfrac{64}{32} \leq x + 1 < \tfrac{65}{32}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]$$
$$\{[\tfrac{64}{32}, \tfrac{65}{32}) \cap [0, 1)\} \cup \{[\tfrac{32}{32}), \tfrac{33}{32} \cap [1, 2]\} = \emptyset \cup [\tfrac{32}{32}, \tfrac{33}{32}) = [\tfrac{32}{32}, \tfrac{33}{32})$$

.

.

.

$$E_{96,5} = \{x \in [0, 2] : [(\tfrac{96}{32} \leq x < \tfrac{97}{32}) \wedge (0 \leq x < 1)] \vee [(\tfrac{96}{32} \leq x + 1 < \tfrac{97}{32}) \wedge (1 \leq x \leq 2)]$$
$$\{[\tfrac{96}{32}, \tfrac{97}{32}) \cap [0, 1)\} \cup \{[\tfrac{64}{32}), \tfrac{65}{32} \cap [1, 2]\} = \emptyset \cup \{\tfrac{64}{32}\} = \{\tfrac{64}{32}\}$$

A partir de aquí únicamente se generan espacios vacíos, de tal manera que se genera la función

$$\varphi_5(x) = \frac{1}{32}\mathcal{X}_{[\frac{1}{32};\frac{2}{32})}(x)+\frac{2}{32}\mathcal{X}_{[\frac{2}{32};\frac{3}{32})}(x)+\frac{3}{32}\mathcal{X}_{[\frac{3}{32};\frac{4}{32})}(x)+\frac{4}{32}\mathcal{X}_{[\frac{4}{32};\frac{5}{32})}(x)+\frac{5}{32}\mathcal{X}_{[\frac{5}{32};\frac{6}{32})}(x)+\frac{6}{32}\mathcal{X}_{[\frac{6}{32};\frac{7}{32})}(x)+$$
$$\frac{7}{32}\mathcal{X}_{[\frac{7}{32};\frac{8}{32})}(x)+\frac{8}{32}\mathcal{X}_{[\frac{8}{32};\frac{9}{32})}(x)+\frac{9}{32}\mathcal{X}_{[\frac{9}{32};\frac{10}{32})}(x)+\frac{10}{32}\mathcal{X}_{[\frac{10}{32};\frac{11}{32})}(x)+\frac{11}{32}\mathcal{X}_{[\frac{11}{32};\frac{12}{32})}(x)+\frac{12}{32}\mathcal{X}_{[\frac{12}{32};\frac{13}{32})}(x)+$$
$$\frac{13}{32}\mathcal{X}_{[\frac{13}{32};\frac{14}{32})}(x)+\frac{14}{32}\mathcal{X}_{[\frac{14}{32};\frac{15}{32})}(x)+\frac{15}{32}\mathcal{X}_{[\frac{15}{32};\frac{16}{32})}(x)+\frac{16}{32}\mathcal{X}_{[\frac{16}{32};\frac{17}{32})}(x)+\frac{17}{32}\mathcal{X}_{[\frac{17}{32};\frac{18}{32})}(x)+\frac{18}{32}\mathcal{X}_{[\frac{18}{32};\frac{19}{32})}(x)+$$
$$\frac{19}{32}\mathcal{X}_{[\frac{19}{32};\frac{20}{32})}(x)+\frac{20}{32}\mathcal{X}_{[\frac{20}{32};\frac{21}{32})}(x)+\frac{21}{32}\mathcal{X}_{[\frac{21}{32};\frac{22}{32})}(x)+\frac{22}{32}\mathcal{X}_{[\frac{22}{32};\frac{23}{32})}(x)+\frac{23}{32}\mathcal{X}_{[\frac{23}{32};\frac{24}{32})}(x)+\frac{24}{32}\mathcal{X}_{[\frac{24}{32};\frac{25}{32})}(x)+$$
$$\frac{25}{32}\mathcal{X}_{[\frac{25}{32};\frac{26}{32})}(x)+\frac{26}{32}\mathcal{X}_{[\frac{26}{32};\frac{27}{32})}(x)+\frac{27}{32}\mathcal{X}_{[\frac{27}{32};\frac{28}{32})}(x)+\frac{28}{32}\mathcal{X}_{[\frac{28}{32};\frac{29}{32})}(x)+\frac{29}{32}\mathcal{X}_{[\frac{29}{32};\frac{30}{32})}(x)+\frac{30}{32}\mathcal{X}_{[\frac{30}{32};\frac{31}{32})}(x)+$$
$$\frac{31}{32}\mathcal{X}_{[\frac{31}{32};\frac{32}{32})}(x)+\frac{64}{32}\mathcal{X}_{[\frac{32}{32};\frac{33}{32})}(x)+\frac{65}{32}\mathcal{X}_{[\frac{33}{32};\frac{34}{32})}(x)+\frac{66}{32}\mathcal{X}_{[\frac{34}{32};\frac{35}{32})}(x)+\frac{67}{32}\mathcal{X}_{[\frac{35}{32};\frac{36}{32})}(x)+\frac{68}{32}\mathcal{X}_{[\frac{36}{37};\frac{37}{32})}(x)+$$
$$\frac{69}{32}\mathcal{X}_{[\frac{69}{32};\frac{70}{32})}(x)+\frac{70}{32}\mathcal{X}_{[\frac{70}{32};\frac{71}{32})}(x)+\frac{71}{32}\mathcal{X}_{[\frac{71}{32};\frac{72}{32})}(x)+\frac{72}{32}\mathcal{X}_{[\frac{72}{32};\frac{73}{32})}(x)+\frac{73}{32}\mathcal{X}_{[\frac{73}{32};\frac{74}{32})}(x)+\frac{74}{32}\mathcal{X}_{[\frac{74}{32};\frac{75}{32})}(x)+$$
$$\frac{75}{32}\mathcal{X}_{[\frac{75}{32};\frac{76}{32})}(x)+\frac{76}{32}\mathcal{X}_{[\frac{76}{32};\frac{77}{32})}(x)+\frac{77}{32}\mathcal{X}_{[\frac{77}{32};\frac{78}{32})}(x)+\frac{78}{32}\mathcal{X}_{[\frac{78}{32};\frac{79}{32})}(x)+\frac{79}{32}\mathcal{X}_{[\frac{79}{32};\frac{80}{32})}(x)+\frac{80}{32}\mathcal{X}_{[\frac{80}{32};\frac{81}{32})}(x)+$$
$$\frac{81}{32}\mathcal{X}_{[\frac{81}{32};\frac{82}{32})}(x)+\frac{82}{32}\mathcal{X}_{[\frac{82}{32};\frac{83}{32})}(x)+\frac{83}{32}\mathcal{X}_{[\frac{83}{32};\frac{84}{32})}(x)+\frac{84}{32}\mathcal{X}_{[\frac{84}{32};\frac{85}{32})}(x)+\frac{85}{32}\mathcal{X}_{[\frac{85}{32};\frac{86}{32})}(x)+\frac{86}{32}\mathcal{X}_{[\frac{86}{32};\frac{87}{32})}(x)+$$
$$\frac{87}{32}\mathcal{X}_{[\frac{87}{32};\frac{88}{32})}(x)+\frac{88}{32}\mathcal{X}_{[\frac{88}{32};\frac{89}{32})}(x)+\frac{89}{32}\mathcal{X}_{[\frac{89}{32};\frac{90}{32})}(x)+\frac{90}{32}\mathcal{X}_{[\frac{90}{32};\frac{91}{32})}(x)+\frac{91}{32}\mathcal{X}_{[\frac{91}{32};\frac{92}{32})}(x)+\frac{92}{32}\mathcal{X}_{[\frac{92}{32};\frac{93}{32})}(x)+$$
$$\frac{93}{32}\mathcal{X}_{[\frac{93}{32};\frac{94}{32})}(x)+\frac{94}{32}\mathcal{X}_{[\frac{94}{32};\frac{95}{32})}(x)+\frac{95}{32}\mathcal{X}_{[\frac{95}{32};\frac{96}{32})}(x)$$

Por L(a) y L(b) para dichos intervalos, resulta:

$$\int \varphi_5(x)d\lambda = \frac{1}{32}\left(\frac{\sum_{i=1}^{31} i}{32}\right) + \frac{1}{32}\left(\frac{\sum_{i=64}^{95} i}{32}\right)$$

$$\int \varphi_5(x)d\lambda = 2{,}96875$$

3.8. Funciones Riemann-Integrables ($\mathcal{R}$-integrables)

Definición 3.1. *Una función es $\mathcal{R}$-integrable si está definida como $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ si I es un intervalo y $f : I \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f_{[a,b]} : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ para todo $[a,b] \in I$ y para todo $c \in I$ restringida a $[a,b]$. Si*

$$L_1 = \lim_{a \to \inf(I)} \int_a^c f(x)dx$$
$$L_2 = \lim_{b \to \sup(I)} \int_a^c f(x)dx$$

existen; entonces se dice que f es impropia y $\displaystyle\int_I f(x)dx = L_1 + L_2.$

Por ejemplo la función planteada con anterioridad $f(x) = x^2 + 1$ definida en $[a,b]$.

En resumen se tienen las siguientes generalidades [9]:

- Una función $\mathcal{R}$-integrable es $\mathcal{L}$-integrable
- Una función $\mathcal{R}$-integrable es Riemann-Impropia Integrable
- Si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es acotada entonces f es $\mathcal{R}$-integrable sí y solo si f es continua en c.t.p
- Si $A \subseteq \mathbb{R}$, f es $\mathcal{L}$-integrable y $\displaystyle\int_A f d\lambda = \int f \mathcal{X}_A d\lambda$

3.9. Funciones Lebesgue-Integrables ($\mathcal{L}$-integrables)

Para definir la integral de Lebesgue con mayor precisión se requiere el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Sea* $(E, \mathcal{G}, \mu)$ *un espacio medido.* $f : E \mapsto \mathbb{R}$ *es medible y positiva* $\displaystyle\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu : \varphi \leq f \right\}$ *y* φ *es una función simple y positiva.*

Definición 3.2. *Sea* $f : E \mapsto \mathbb{R}$ *una función, se define*

$f^+ : E \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}$

y se le llama parte positiva de f

$f^- : E \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}$

y se le llama parte negativa de f

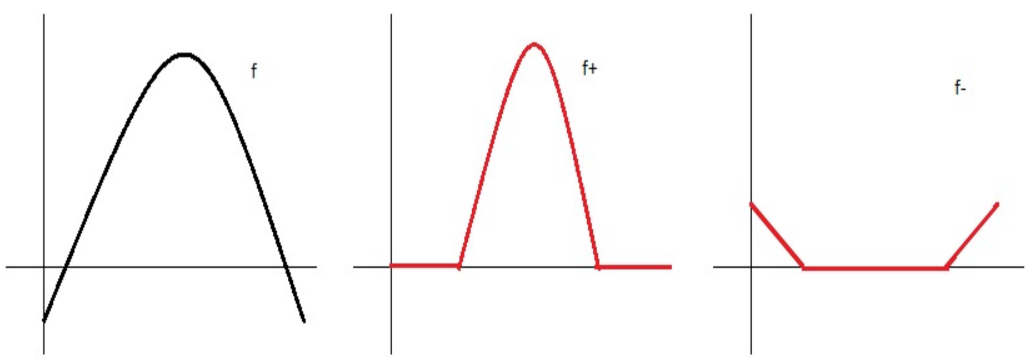

Figura 17: Función positiva - Función negativa

Proposición 3.1. *Si* $f : E \mapsto \mathbb{R}$ *es una función, entonces*

$f = f^+ - f^-,$

$|f| = f^+ + f^-$

Definición 3.3. *Sea* $(E, \mathcal{G}, \mu)$ *un espacio medido y* $f : E \mapsto \mathbb{R}$ *es medible, se dice que es* μ*-integrable si*

$\int f^+ d\mu$ y $\int f^- d\mu$ son finitas y su integral es

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

- *Si $\displaystyle\int f^+ d\mu = +\infty$ y $\displaystyle\int f^- d\mu$ es finita se dice que $\displaystyle\int f d\mu = \infty$*
- *Si $\displaystyle\int f^- d\mu = +\infty$ y $\displaystyle\int f^+ d\mu$ es infinita se dice que $\displaystyle\int f d\mu = -\infty$*

En estos casos se dice que la función tiene integral infinita (integral diverge).
Si $\displaystyle\int f^+ d\mu$ y $\displaystyle\int f^- d\mu$ son infinitas se dice que f no es μ-integrable.

Consideremos los siguientes ejemplos:

a) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ y se plantea calcular la integral; entonces

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)dx$, utilizando integración por partes se tiene que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$u = \dfrac{1}{x} \qquad du = \dfrac{1}{x^2}$

$dv = \operatorname{sen} x \qquad v = -\cos x$, así que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = -\frac{\cos b}{b} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

Se cumple que si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ existe $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ también existe; entonces

$$
\begin{aligned}
\int_1^b \frac{\cos x}{x^2}dx = \int_1^b \frac{|\cos x|}{x^2}dx &\leq \int_1^b \frac{1}{x^2}dx \\
&\leq \int_1^b \frac{1}{x^2}dx \\
&\leq \frac{1}{x}\Big|_1^b \\
&\leq \cancel{\frac{1}{b}} - \frac{1}{1}; \quad b \mapsto +\infty \\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

existe por tanto es una función $\mathcal{R}$-integrable [9].

b) $f^{+}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}; & 2k\pi \leq 2k\pi + \pi \\ 0 & ; si\ no \end{cases}$

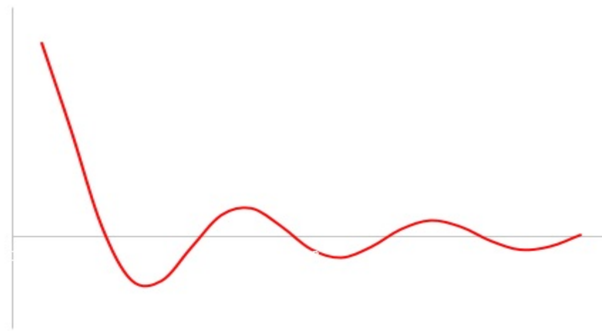

Figura 18: Función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

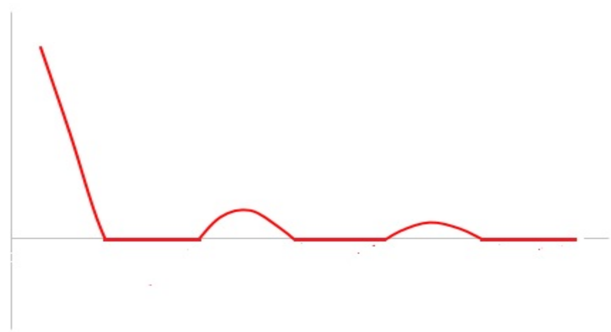

Figura 19: Función $f^{+}(x) = \frac{\sin x}{x}$

y se plantea calcular la integral, de donde $\displaystyle\int_E f d\lambda = \int_E f^{+} d\lambda - \int_E f^{-} d\lambda$

$$\begin{aligned}
\int f^+ d\lambda &= \int_0^{+\infty} f^+(x)dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0\ dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{3\pi}^{4\pi} 0\ dx + \int_{4\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{x}dx + ... \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{4\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{x}dx + ... \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x}dx
\end{aligned}$$

luego se plantea el cambio de variable

$x = u + 2k\pi$

$dx = du$

x	u
$2k\pi$	0
$2k\pi + \pi$	π

$$\begin{aligned}
\int f^+ d\lambda &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin(u+2k\pi)}{u+2k\pi}dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+2k\pi}dx \\
&\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin u}{u+2k\pi}du
\end{aligned}$$

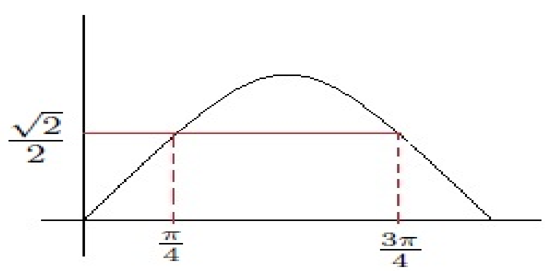

Figura 20: Mayoración $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\begin{aligned}\int f^{+}d\lambda &\geq \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{u+2k\pi}du\\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{u+2k\pi}du\end{aligned}$$

Del mismo modo se tiene que

$$\begin{aligned}\sin u &\geq \tfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sin u}{u+2k\pi} &\geq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{u+2k\pi}\end{aligned}$$

Se mayora exclusivamente la integral de manera que resulta:

$$\begin{aligned}\int f^{+}d\lambda &\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}du\\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} du\\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}du\\ &\geq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{3\pi+8k\pi}\\ &\geq \sqrt{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3+8k}\rightarrow +\infty\end{aligned}$$

Por lo tanto no es una función Lebesgue-Integrable.

Además se conoce que la función $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ no posee una integral indefinida en términos de funciones trascendentes [15], por lo que se recurre a las Series de Potencias para solucionar este inconveniente. Es así que:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

en esta misma vía, la función $\sin x$ dividida para x, únicamente implica la reducción de la potencia n a la x.

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

de tal manera que la integral resulta

$$\int \frac{\sin x}{x} = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right] dx$$

que tiende a $+\infty$ por lo que no es Lebesgue-integrable.

Cabe mencionar que la metodología descrita permite verificar qué tipo de integral conviene realizar.

4. Convergencia entre la Integral de Riemann y la Integral de Lebesgue

De los ejemplos anteriores puede notarse que bajo ciertas condiciones la Integral de Lebesgue y la Integral de Riemann coinciden plenamente; para lo cual se dispone del siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de la recta real y f una función acotada definida sobre $[a, b]$ en valores reales. Entonces:*

- *la función f es Riemann-integrable si y solo si es continua en casi todo punto de $[a, b]$.*
- *si la función f es Riemann-integrable entonces es Lebesgue-integrable y ambas integrales coinciden [8].*

Sin embargo es de destacar también que para construir la Integral de Riemann, el dominio de definición debe ser un intervalo de la forma $[a, b]$, en otras palabras es necesario tomar en cuenta también a las integrales impropias para obtener la integral sobre toda la recta real. Este particular detalle difiere con la definición original de la Integral de Lebesgue, que está inicialmente construida sobre toda la recta real. La generalidad de la construcción de la Integral de Lebesgue hace que no se restrinja la definición a espacios euclídeos sino a cualquier espacio medido.

5. Conclusiones y recomendaciones

Luego de haber realizado la descomposición genética de la Integral de Lebesgue se concluye:

- La desintegración o descomposición genética de cualquier tema de índole académico - científico es la ruptura epistemológica en lo que a enseñanza-aprendizaje se refiere, ya que en la actualidad por la gran cantidad de información disponible de cualquier tema, ya no se tiene la certeza de que la tradicional manera de enseñar sea la indicada.

- La descomposición genética de la Integral de Lebesgue ha sido realizada definiendo parámetros fundamentales tales como: unión e intersección indexada de conjuntos, numerabilidad, espacios medibles, medida de Lebesgue, funciones simples e integral de funciones simples; la ausencia de alguno de estos conceptos hace inviable la construcción y desarrollo de la Integral de Lebesgue.

- Luego de revisar una amplia bibliografía se puede asegurar que no existen trabajos que desglosen a detalle la operatividad de la Integral de Lebesgue como el trabajo que se pone a consideración. La metodología incluye la definición de los espacios $E_{k,n}$, el planteamiento y resolución de las inecuaciones generadas, la intersección con los espacios de interés, el planteamiento de la función característica $\mathcal{X}(x)$ y las propiedades de la Medida de Lebesgue para obtener el valor de la Integral, que se compara con la Integral definida y la Integral de Riemann.

- Las condiciones particulares de la Integral de Lebesgue permiten plantear los intervalos en el que una función va a poseer intersección no vacía, que reducirá significativamente el número de iteraciones en el cálculo:

Para el caso de la función $f(x) = 2x + 1$ se tuvo que:

$$E_{k,n} = \{x \in [0,1] : k2^{-n} \leq 2x + 1 < (k+1)2^{-n}\}$$

$$n = 1, k = n2^n; k = (1)2^1 \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$E_{0,1} = \{x \in [0,1] : 0(2)^{-1} \leq 2x + 1 < (0+1)2^{-1}\}$$

$$E_{0,1} = \{x \in [0,1] : 0 \leq 2x + 1 < \tfrac{1}{2}\}$$

$$E_{1,1} = \{x \in [0,1] : 1(2)^{-2} \leq 2x + 1 < (1+1)2^{-2}\}$$

$$E_{1,1} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} \leq 2x + 1 < \tfrac{2}{2}\}$$

$$E_{2,1} = \{x \in [0,1] : \tfrac{2}{2} \leq 2x + 1\}$$

$$n = 2, k = n2^n; k = (2)2^2 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

$$E_{0,2} = \{x \in [0,1] : 0(2)^{-1} \leq 2x + 1 < (0+1)2^{-2}\}$$

$$E_{0,2} = \{x \in [0,1] : 0 \leq 2x + 1 < \tfrac{1}{4}\}$$

$$E_{1,2} = \{x \in [0,1] : 1(2)^{-2} \leq 2x + 1 < (1+1)2^{-2}\}$$

$$E_{1,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{4} \leq 2x + 1 < \tfrac{2}{4}\}$$

$$E_{2,2} = \{x \in [0,1] : 2(2)^{-2} \leq 2x + 1 < (2+1)2^{-2}\}$$

$$E_{2,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{2}{4} \leq 2x + 1 < \tfrac{3}{4}\}$$

$$E_{3,2} = \{x \in [0,1] : 3(2)^{-2} \leq 2x + 1 < (3+1)2^{-2}\}$$

$$E_{3,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{4} \leq 2x + 1 < \tfrac{4}{4}\}$$

$$E_{4,2} = \{x \in [0,1] : 4(2)^{-2} \leq 2x + 1 < (4+1)2^{-2}\}$$

$$E_{4,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{4}{4} \leq 2x + 1 < \tfrac{5}{4}\}$$

$$E_{5,2} = \{x \in [0,1] : 5(2)^{-2} \leq 2x + 1 < (5+1)2^{-2}\}$$

$$E_{5,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{4} \leq 2x + 1 < \tfrac{6}{4}\}$$

$$E_{6,2} = \{x \in [0,1] : 6(2)^{-2} \leq 2x + 1 < (6+1)2^{-2}\}$$

$$E_{6,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{6}{4} \leq 2x + 1 < \tfrac{7}{4}\}$$

$$E_{7,2} = \{x \in [0,1] : 7(2)^{-2} \leq 2x + 1 < (7+1)2^{-2}\}$$

$$E_{7,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{4} \leq 2x + 1 < \tfrac{8}{4}\}$$

$$E_{8,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{8}{4} \leq 2x + 1\}$$

y así sucesivamente conforme crece el valor de n acompañado de k. Si se desarrollan las inecuaciones tal como plantea la descomposición genética propuesta se obtiene todo la resolución que consta en el ejemplo. Generalizando resulta:

$$k2^{-n} \leq 2x + 1 < (k+1)2^{-n}$$

$$k2^{-n} - 1 \leq 2x < (k+1)2^{-n} - 1$$
$$\frac{k2^{-n} - 1}{2} \leq x < \frac{(k+1)2^{-n} - 1}{2}$$

por lo tanto para simplificar el número de iteraciones se verifica que:

$$E_{k,n} = \begin{cases} \emptyset \ si \ 2^{-n} \leq \frac{1}{k+1}, \\ \left[\frac{k\ 2^{-n}-1}{2}, \frac{(k+1)2^{-n}-1}{2}\right] \ si \ 2^n \leq k < 2^{n+1}, \\ \{1\} \ si \ 2^{-n} = \frac{3}{k}, \\ \emptyset \ si \ 2^{-n} > \frac{3}{k} \end{cases}$$

Para el caso de la función $f(x) = x^2 + 1$ se tuvo que:

$$E_{k,n} = \{x \in [0,1] : k2^{-n} \leq x^2 + 1 < (k+1)2^{-n}\}$$

$$n = 1, k = n2^n; k = 1{,}2^1 \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$E_{0,1} = \{x \in [0,1] : 0(2)^{-1} \leq x^2 + 1 < (0+1)2^{-1}\}$$

$$E_{0,1} = \{x \in [0,1] : 0 \leq x^2 + 1 < \tfrac{1}{2}\}$$

$$E_{1,1} = \{x \in [0,1] : 1(2)^{-1} \leq x^2 + 1 < (1+1)2^{-1}\}$$

$$E_{1,1} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} \leq x^2 + 1 < \tfrac{2}{2}\}$$

$$E_{2,1} = \{x \in [0,1] : 1 \leq x^2\}$$

$$n = 2, k = n2^n; k = 2{,}2^2 \Rightarrow k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$$

$$E_{0,2} = \{x \in [0,1] : 0(2)^{-2} \leq x^2 + 1 < (0+1)2^{-2}\}$$

$$E_{0,2} = \{x \in [0,1] : 0 \leq x^2 + 1 < \tfrac{1}{4}\}$$

$$E_{1,2} = \{x \in [0,1] : 1(2)^{-2} \leq x^2 + 1 < (1+1)2^{-2}\}$$

$$E_{1,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{2}{4}\}$$

$$E_{2,2} = \{x \in [0,1] : 2(2)^{-2} \leq x^2 + 1 < (2+1)2^{-2}\}$$

$$E_{2,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{2}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{3}{4}\}$$

$$E_{3,2} = \{x \in [0,1] : 3(2)^{-2} \leq x^2 + 1 < (3+1)2^{-2}\}$$

$$E_{3,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{4}{4}\}$$

$$E_{4,2} = \{x \in [0,1] : 4(2)^{-2} \leq x^2 + 1 < (4+1)2^{-2}\}$$

$$E_{4,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{4}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{5}{4}\}$$

$$E_{5,2} = \{x \in [0,1] : 5(2)^{-2} \leq x^2 + 1 < (5+1)2^{-2}\}$$

$$E_{5,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{5}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{6}{4}\}$$

$$E_{6,2} = \{x \in [0,1] : 6(2)^{-2} \leq x^2 + 1 < (6+1)2^{-2}\}$$

$$E_{6,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{6}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{7}{4}\}$$

$$E_{7,2} = \{x \in [0,1] : 7(2)^{-2} \leq x^2 + 1 < (7+1)2^{-2}\}$$

$$E_{7,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{7}{4} \leq x^2 + 1 < \tfrac{8}{4}\}$$

$$E_{8,2} = \{x \in [0,1] : \tfrac{8}{4} \leq x^2 + 1\}$$

y así sucesivamente conforme crece el valor de n acompañado de k; generalizando resulta:

$$k2^{-n} \leq x^2 + 1 < (k+1)2^{-n}$$

$$k2^{-n} - 1 \leq x^2 < (k+1)2^{-n}1$$

$$\sqrt{k2^{-n} - 1} \leq x < \sqrt{(k+1)2^{-n} - 1}$$

por lo tanto para simplificar el número de iteraciones se verifica que:

$$E_{k,n} = \begin{cases} \emptyset \; si \; k < 2^n, \\ \left[\sqrt{k2^{-n} - 1}, \sqrt{(k+1)2^{-n} - 1}\right] \; si \; 2^n \leq k < 2^{n+1}, \\ \{1\} \; si \; k = 2^{n+1}, \\ \emptyset \; si \; 2^{n+1} < k \end{cases}$$

Esta metodología propuesta permite reducir significativamente el número de iteraciones en el desarrollo de la Integral de Lebegue, tal como puede evidenciarse en todos los ejemplos a partir de $n = 5$, donde se verifican aquellos espacios en los que la intersección de los conjuntos medibles resultan $\emptyset$.

- Las limitantes de la Integral de Riemann radican en que para que una función cualquiera sea Riemann-Integrable debe ocurrir que para todo $\epsilon > 0$, existan dos funciones escalonadas φ y ψ tales que:

  $$\varphi(x) < f(x) < \psi(x) \text{ para todo } x \in [a,b] \text{ y } \int_b^a (\psi - \varphi)(x)dx < \epsilon$$

  Esta fórmula [4], significa que una función es Riemann Integrable si puede ser aproximada inferior y superiormente por funciones escalonadas.

  Esta limitante se evidencia si se desea integrar la función de Dirichlet, que está definida como:

  $$f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$$
  $$f(x) = \begin{cases} 1; x \in \mathbb{Q} \\ 0; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

  La función de Dirichlet es una función matemática especial, que tiene la peculiaridad de no ser continua en ningún punto de su dominio; de ahí que $\int_0^1 f(x)dx$ no existe pues la función es discontinua en todo punto.

Sin embargo mediante la integral de Lebesgue, $\displaystyle\int_{[0,1]} f d\lambda = \lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$ porque el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ es de medida de Lebesgue nula[9].

- Para el caso de las funciones tratadas en este estudio como $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$, note que las integrales Riemann fueron efectuadas mediante la utilización de las series de Taylor [15]:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ... + \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + ...$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$
$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + ...$$

  sin las cuales no hubiese sido factible integrar por Riemann.

- Adicionalmente nótese que se ha trabajado con las series de Taylor hasta la potencia $cuarta$[10] dejando de lado las de orden superior a este exponente lo que genera una inexactitud aún mayor. Otra ventaja de la integral de Lebesgue radica en que no se requiere definir ninguna serie sino únicamente el valor de n para comenzar a generar los espacios y funciones para mediante las propiedades de la Medida de Lebesgue; calcular el número real a la que converge la integral deseada.

- Es importante notar que la Integral de Lebesgue con una aproximación con $n = 5$ ya genera un valor bastante cercano al que se genera con la Integral de Riemann, que lo hace con valores que tienden al infinito, lo cual genera una ventaja con respecto de Riemann, a pesar de poseer cargas operativas semejantes.

- Finalmente, la Integral de Riemann y la Integral de Lebesgue coinciden cuando ambas están definidas para funciones simples y se verifique que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$. Esta nueva integral es una extensión de la de Riemann y es aplicable a una familia de funciones más

[9] Pág 28

[10] páginas 87, 95, 102

amplia que en definitiva, compensa un peor comportamiento de la función, que la hace no Riemann integrable, con la consideración de conjuntos dominio más generales, a los que sólo se les exige ser *medibles*.

Además se recomienda:

- La operatividad de la Integral de Lebesgue requiere de un sustento importante en temas como: unión e intersección generalizada de conjuntos, imagen directa e imagen inversa, σ-álgebras pero sobre todo conjuntos medibles. El desconocimiento de cualquiera de estos tópicos dificulta enormemente el aprendizaje de la Integral de Lebesgue.
- La verificación de si una función es Riemann o Lebesgue Integrable es muy importante para estudiantes formales de teoría de la medida o topología porque la carga operativa de la Integral de Lebesgue es enorme y, dado el caso hipotético de que una integral tienda al infinito; la misma debe ser integrada por Riemann.
- Debido a la escacez bibliográfica en español de la Integral de Lebesgue se recomienda hacer uso de libros en francés e inglés que son las lenguas en que Riemann y Lebesgue desarrollaron sus estudios. Si bien es cierto que las diferencias entre español, inglés y francés son marcadas, el lenguaje matemático es similar y permite apreciar las obras.
- Finalmente y debido a la enorme cantidad de iteraciones que se requiere, se recomienda el uso de un software informático para operar la integral de Lebesgue cuando $n > 3$ ya que $k = n2^n$ y si $n > 4 \Rightarrow k = 64, 160, 384, 896, ...$ y a pesar de utilizar la desigualdad que genera espacios vacíos, es un trabajo arduo y superfluo.

Referencias

[1] ALEGRÍA, P, *Teoría de la Medida*, Departamento de Matemática, Universidad del País Vasco, Bilbao, España, 2007

[2] APOSTOL, T. M, *Análisis Matemático*, Vol I, Editorial Reverté California, EEUU. 2012

[3] BÁRCENAS, D, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol XIII, Mérida, Venezuela 2006

[4] BARTLE, R, *The Elements of Integration of Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library Edition, Illinois, EEUU, 1995.

[5] BEAR, H.S, *A Primer of Lebesgue Integration*, Segunda edición, Academic Press, New York, 2002.

[6] BENALCÁZAR, H, *Álgebra Lineal y Aplicaciones*, Solugraph, Primera edición, Quito, Ecuador, 2013

[7] CASTRILLÓN, M & DOMÍNGUEZ, M, *Un encuentro entre las matemáticas y la teoría de escalas musicales*, La Gaceta de RSME, 2013

[8] CHAMORRO, D, *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*, Colección de Matemáticas Universitarias Volumen 1, Editorial AMARUN Paris, Francia, 2017.

[9] EDWARDS, C; PENNY, D, *Cálculo: Cálculo con trascendentes tempranas*, Séptima edición, International Thompson Editores, México. DF, 2008

[10] FAVA, N & FELIPE, Z, *Medida e integral de Lebesgue*, Fascículo 4 - Cursos de grado - Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires, Argentina, 2013.

[11] GONZÁLEZ, L, *Serie de funciones e integral de Lebesgue*, Segunda edición, Madrid, España, 2015.

[12] HAEUSSLER, E, ETAL, *Matemáticas para administración y economía*, Editorial Pearson, México, DF, 2015

[13] HAWKINS, T, *Lebesgue theory of integration: its origins and development*, Segunda edición, Chelsea, USA, 1975.

[14] JONES, F, *Lebesgue Integration on Euclidean Space*, única edición, Sudbury MA, 2001.

[15] LARSON, R; EDWARDS, B, *Cálculo Tomo I*, Décima edición. Departamento de Matemática EPN, México DF, 2016

[16] MONTOYA, L; ROSERO, P, *Teoría de la Medida. Resumen y ejercicios resueltos*, Departamento de Matemática EPN, Quito, Ecuador, 2016

[17] QUEZADA, R, *Una introducción a la medida e integral de Lebesgue*, primera edición, Madrid, España, 2014.

[18] STEWART, J, *Cálculo: Conceptos y Contextos*, International Thompson Editores, Buenos Aires, Argentina, 1998

[19] STEWART, J, *Cálculo: Trascendentes tempranas*, Séptima edición, Cengage Learning, México, DF, 2014

[20] WEISSTEIN, E, Diccionario de Matemáticas, Funciones especiales, *Enciclopedia Mathworld* Diccionario de Matemáticas, Funciones especiales, California, USA, 2005