



**Diseño de un libro iterativo multimedia,
desde el principio de exhaustión hasta el concepto de sucesión**

Villagrán Díaz, Nelson Oswaldo

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

“Maestría en Enseñanza de la Matemática”

Trabajo de titulación, previo a la obtención del título de Magíster en Enseñanza de la
Matemática

Mgs. Bernis Llanos, Richard Marino

27 de julio de 2020

Fecha del Informe: 21 de septiembre del 2020.

INFORME ANALISIS URKUND

MAESTRANTE: NELSON OSWALDO VILLAGRAN DÍAZ

URKUND

Document Information

Analyzed document	Tesis PUBLICAR 11-9-2020.pdf (D79214452)
Submitted	9/16/2020 7:23:00 AM
Submitted by	Bernis Ricardo
Submitter email	rmbernis@espe.edu.ec
Similarity	8%
Analysis address	rmbernis.espe@analysis.arkund.com



Ing. Richard Marino Bernis Llanos MSc.

Firma del Director



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE
TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación, *Diseño de un libro iterativo multimedia*, desde el principio de *exhaución* hasta el concepto de *sucesión* fue realizado por el señor *Villagrán Díaz, Nelson Oswaldo*, el cual ha sido revisado y analizado en su totalidad por la herramienta de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 27 de julio de 2020

Ing. Bernis Llanos, Richard Marino, Mgtr.

C.C. 171249717-9



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE
TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA

Yo, *Villagrán Díaz, Nelson Oswaldo*, con cédula de ciudadanía n.º 1706363387 declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **Diseño de un libro iterativo multimedia, desde el principio de exhaución hasta el concepto de sucesión** es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 27 de julio de 2020

Villagrán Díaz, Nelson Oswaldo
C.C. 170636338-7



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE
TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Yo, Villagrán Díaz, Nelson Oswaldo, con cédula de ciudadanía n.º 1706363387, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: **Diseño de un libro iterativo multimedia, desde el principio de exhaustión hasta el concepto de sucesión** en el repositorio institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 27 de julio de 2020

Villagrán Díaz, Nelson Oswaldo
C.C. 170636338-7

Dedicatoria

A Dios por su infinita bondad al concederme la salud y la sabiduría para llegar a la culminación de esta investigación.

A mi padre, Nelson Oswaldo, en el cielo, y a mi madre, Mariana Magdalena, que sembraron en mí la semilla de la responsabilidad del trabajo emprendido y cumplido.

A Mary Hipatia, por ser la mujer que hoy me inspira y a la que debo su empuje y el ánimo que diariamente instituyó en mí para hacer una realidad el camino a la titulación. Gracias amor.

A mi hermana Katya Elizabeth que creyó en mí y que, pese a su dolor corporal, siempre me aconsejó para continuar adelante. Gracias infinitas por tus bendiciones y hoy desde el cielo.

A mis hijos, Nelson Oswaldo, Verónica Daniela, Pamela Vanessa, a mis nietos: Nicolás, Camila, Mikaela y Franches, quienes son la iluminación y continuidad de mi ser.

A mis hijos María Cristina y Sebastián Alejandro que me brindaron su entera confianza en este nuevo amanecer de mi vida.

Agradecimiento

A mis maestros de la enseñanza de la Matemática, en especial a Margarita Kostikova, motivo de mi inspiración, en la que fundamenté esta investigación y el paradigma educativo con el que diseñé mis sesiones en el aula.

Al Ing. Richard Bernis Llanos, que con su juventud me transfirió su ávida energía y la experiencia profesional para que se haga realidad mi primer libro.

A las señoras docentes: Dra. Karina Cela Rosero, Lic. Natacha Guayasamín Azacata, Ing. Jenny Venegas Balseca y una vez más a Margarita Kostikova, que por su gran experiencia en la comunidad académica conformaron el grupo de expertos, y con sus observaciones, acompañaron el desarrollo del proyecto permitiendo que el trabajo tenga el tinte purista y científico que requiere una tesis.

A la Lic. Sandra Guerra por ser la revisora de mis textos y que con sus consejos y anotaciones ayudó a construir mi sueño.

Al Ing. Patricio Pugarín Díaz, coordinador académico de la Maestría, quien siempre estuvo presto a apoyar de forma diligente los procesos que conllevaron esta investigación.

Índice de contenidos

Urkund	2
Certificación.....	3
Responsabilidad de autoría	4
Autorización de publicación	4
Dedicatoria	5
Dedicatoria	6
Agradecimiento	7
Índice de contenidos.....	8
Índice de tablas	10
Índice de figuras	12
Resumen.....	14
Abstract 15	
Introducción.....	16
Capítulo 1	20
Planteamiento del problema.....	20
Formulación del problema.....	22
Justificación e importancia	23
Objetivos.....	24
Capítulo 2.....	26
Antecedentes del problema.....	26
Fundamentación teórica.....	30
<i>Problemas en la enseñanza de la Matemática</i>	63
<i>Paradigmas y enfoques</i>	65
<i>Metodología ACODESA</i>	83
Fundamentación conceptual	87
<i>Fundamentación filosófica</i>	87
<i>Fundamentación pedagógica</i>	88
<i>Fundamentación psicológica</i>	89
Razonamiento	90
Razonamiento lógico	90
Razonamiento verbal	92
Razonamiento abstracto	92

Capítulo 3.....	109
Principio de exhaustión al concepto de sucesión	109
Metodología tecnológica	114
Multimedia como herramienta educativa	115
Animación tridimensional 3D	116
Plataforma de programación	118
HEAD	118
BODY	121
Índice de contenidos del Libro iterativo multimedia	122
Cuentos	125
SCRIPTS.....	131
Importancia del uso de herramientas informáticas embebidas en la enseñanza de las matemáticas	136
Introducción a “Geogebra” y uso de herramientas de Applet embebido	136
“Geogebra”	136
Implementación del Sistema aplicativo Libro iterativo multimedia	137
Integración móvil del aplicativo	137
Emulación de validación Android	140
Implementación del Sistema aplicativo <i>Libro iterativo multimedia</i>	141
Acceso a la aplicación <i>Libro iterativo multimedia</i> Desktop y Mobile	149
Requerimientos de la aplicación Libro iterativo multimedia	149
Sistema (Desktop)	149
Plataformas (Android)	149
Capítulo 4.....	150
Matriz de evaluación, revisión y verificación del grupo de expertos.....	150
Certificación del grupo de expertos	153
Conclusiones	155
Recomendaciones	158
Glosario de términos	162
Referencias	168
Webgrafía.....	178
Anexos	180

Índice de tablas

Tabla 1. <i>Objetivos del área de matemáticas</i>	33
Tabla 2. <i>Criterios de evaluación del Área de Matemáticas</i>	35
Tabla 3. <i>Mapa de contenidos de indicadores</i>	37
Tabla 4. <i>Contenidos Matemáticas 2 BGU</i>	40
Tabla 5. <i>Contenidos Matemáticas 3 BGU</i>	41
Tabla 6. <i>Contenidos Matemáticas</i>	42
Tabla 7. <i>Contenido del programa de estudios</i>	43
Tabla 8. <i>Contenido de los temas adicionales del Nivel Superior</i>	44
Tabla 9. <i>Contenido de nivel medio Unidad 2</i>	44
Tabla 10. <i>Contenido de nivel medio Unidad 5</i>	44
Tabla 11. <i>Matriz Carga horaria Educación General Básica</i>	45
Tabla 12. <i>Matriz Carga horaria Bachillerato General Unificado</i>	46
Tabla 13. <i>Aplicaciones e interpretación de la Matemática</i>	48
Tabla 14. <i>Análisis y enfoque de la Matemática</i>	49
Tabla 15. <i>Contenidos en Matemáticas</i>	51
Tabla 16. <i>Contenidos en Fundamentos de Matemáticas</i>	52
Tabla 17. <i>Contenidos en Matemáticas</i>	53
Tabla 18. <i>Contenidos en Cálculo Diferencial e Integral</i>	54
Tabla 19. <i>Contenidos en Matemáticas Financiera</i>	55
Tabla 20. <i>Interpretación de un test RCTM</i>	72
Tabla 21. <i>Estrategias y estilos de aprendizaje</i>	73
Tabla 22. <i>Modelo tradicional de los hemisferios cerebrales</i>	74
Tabla 23. <i>Característica del cerebro central</i>	76
Tabla 24. <i>Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje (MAE). Comprensión conceptual</i>	80

Tabla 25. <i>Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje (MAE). Habilidades</i>	81
Tabla 26. <i>Enfoques de la enseñanza y aprendizaje (MAE), indagación, modelos y tecnología</i>	82
Tabla 27. <i>El principio de la exhaución</i>	95
Tabla 28. <i>Dos maneras de ver las cosas</i>	97
Tabla 29. <i>¿Quién construye la empalizada?</i>	100
Tabla 30. <i>Un método novedoso</i>	102
Tabla 31. <i>Cauchy define el concepto de sucesión</i>	105
Tabla 32. <i>Newton perfecciona una técnica</i>	107
Tabla 33. <i>Estructura de programación</i>	119

Índice de figuras

Figura 1. <i>Orientación del estudiante, método de enseñanza y nivel de compromiso</i> ..68	68
Figura 2. <i>Esquemas de los estilos de aprendizaje</i>69	69
Figura 3. <i>Investigación en didáctica de las matemáticas</i>78	78
Figura 4. <i>Desarrollo del pensamiento</i>91	91
Figura 5. <i>Gestión de metaprocesos</i>118	118
Figura 6. <i>Cabecera de la aplicación</i>120	120
Figura 7. <i>Cuerpo de la programación</i>121	121
Figura 8. <i>Contenido del Menú principal “A”</i>123	123
Figura 9. <i>Contenido del Menú principal “B”</i>124	124
Figura 10. <i>Contenido del Menú principal “C”</i>125	125
Figura 11. <i>Contenido del Menú principal “C”</i>126	126
Figura 12. <i>Cuentos 1 y 2</i>127	127
Figura 13. <i>Cuentos 3 y 4</i>128	128
Figura 14. <i>Cuentos 5 y 6</i>129	129
Figura 15. <i>Contraportadas y Botoneras</i>130	130
Figura 16. <i>Scripts A: Inclusión de Librerías</i>132	132
Figura 17. <i>Scripts B1: Búsqueda de páginas Flipbook</i>133	133
Figura 18. <i>Scripts B2: Búsqueda de páginas Flipbook</i>134	134
Figura 19. <i>Scripts B3: Búsqueda de páginas Flipbook</i>135	135
Figura 20. <i>Logo de “Geogebra”</i>137	137
Figura 21. <i>Procedimiento de integración Móvil A1</i>138	138
Figura 22. <i>Procedimiento de integración Móvil A2</i>139	139
Figura 23. <i>Procedimiento de integración emulado: Plataforma Nexus S</i>140	140
Figura 24. <i>Procedimiento de integración emulado: Plataforma Nexus 7</i>140	140

Figura 25. <i>Procedimiento de integración emulado: Plataforma Samsung S6</i>	141
Figura 26. <i>Especificaciones del formato de Libro Iterativo Multimedia</i>	141
Figura 27. <i>Enlace al contenido de la aplicación</i>	142
Figura 28. <i>Representación de las flechas: Avanzar y Retroceder</i>	142
Figura 29. <i>Contenido de la aplicación</i>	143
Figura 30. <i>Introducción Libro iterativo multimedia</i>	144
Figura 31. <i>Cuento 1 del Libro iterativo multimedia</i>	145
Figura 32. <i>Botonera del proceso de reproducción del video</i>	145
Figura 33. <i>Software embebido “Geogebra”: Cuento 1</i>	146
Figura 34. <i>Historieta 1: El Principio de exhaustión</i>	146
Figura 35. <i>Historieta 2: Dos maneras de ver las cosas</i>	147
Figura 36. <i>Historieta 3: ¿Quién construye la empalizada?</i>	147
Figura 37. <i>Historieta 4: Un método novedoso, PI es sucesión de aproximaciones decimales</i>	147
Figura 38. <i>Historieta 5: Definición del concepto de sucesión</i>	148
Figura 39. <i>Historieta 6: Perfecciona una técnica de Vieta</i>	148
Figura 40. <i>Matriz de evaluación, revisión y verificación del grupo de expertos</i>	150

Resumen

Los docentes prestan poca o casi ninguna atención a la formación de conceptos no primitivos, pues en realidad no se forman. En los primeros minutos de una sesión de clase, el punto de partida es expresar de forma oral o escrita la definición de un tema matemático. Las definiciones no se expresan, se construyen con el estudiante. El concepto de sucesión pasa por ahí, por tanto, el fundamento de esta investigación es que el estudiante, desde un enfoque constructivista, alcance el aprendizaje significativo y las competencias que él requiere para la comprensión posterior de la matemática diferencial e integral donde usará de manera permanente el concepto de sucesión como función. El proyecto implementa una metodología que toma a la sucesión desde su nacimiento con el principio de exhaustión y a través de su evolución histórica, el estudiante va aprendiendo a construir el concepto de sucesión. Al final se presentará un libro didáctico iterativo como principal instrumento de la metodología para su enseñanza. Se espera que este método educativo incida de manera positiva en el razonamiento lógico, abstracto y numérico del estudiante con el objetivo de que procese la resolución de cualquier problema o ejercicio y mejore por acción su aprendizaje en la asignatura de Matemática.

- Palabras clave

- **EXHAUCIÓN**
- **SUCESIÓN**
- **APRENDIZAJE**
- **METODOLOGÍA**
- **ITERATIVO**

Abstract

Teachers pay little or almost no attention to the formation of non-primitive concepts, as they are not actually formed. In the first minutes of a class session, the starting point is to express orally or in writing the definition of a mathematical topic. Definitions are not expressed, they are built with the student. The concept of succession goes through there, therefore, the foundation of this research is that the student, from a constructivist approach, achieves significant learning and the skills that he requires for the subsequent understanding of differential and integral mathematics where he will use permanent the concept of succession as a function. The project implements a methodology that takes succession from birth with the principle of exhalation and through its historical evolution, the student learns to build the concept of succession. At the end, an iterative didactic book will be presented as the main instrument of the methodology for its teaching. This educational method is expected to have a positive impact on the logical, abstract and numerical reasoning of the student in order to process the resolution of any problem or exercise and improve by action their learning in the subject of Mathematics.

- Key words

- **EXHAUSTION**
- **SUCCESSION**
- **LEARNING**
- **METHODOLOGY**
- **ITERATIVE**

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son actividades muy complejas. Desde siempre, el mundo se ha preguntado: ¿cuál es la forma más apropiada de enseñar y aprender matemáticas? Es difícil dar una respuesta concisa, precisamente porque el transmisor y el receptor son seres humanos y, por naturaleza, los seres humanos son diferentes por actitud y por aptitud.

Para la mayoría de los estudiantes, el aprendizaje de la matemática ha sido un problema, porque se utiliza en gran medida el razonamiento, que les exige pensar de forma lógica y ordenada y los docentes no alcanzan a desarrollar con éxito la enseñanza de la matemática. El problema tiene dos sentidos, no es unidireccional, justificando así el presente trabajo que utiliza una metodología para un contenido matemático que merece atención prioritaria por parte de la Academia como es el concepto de la sucesión.

Entender qué es sucesión, cómo explicar su concepto, de qué manera podemos acercarnos a su concepto, cómo dirigirnos a los estudiantes con este tema, cuál debe ser la actitud de los docentes para lograr el objetivo, cómo motivar a los estudiantes, qué actividades de aprendizaje hay que incluir para definir una sucesión, posee el docente dominio claro y profundo sobre sucesión son, entre otras, preguntas que deben contestarse.

Contexto

El proceso de enseñanza se planifica a partir de un modelo epistemológico que considera a la sucesión como un objeto matemático propio de situaciones-problema de la vida diaria (la sucesión es útil en todo proceso donde la solución debe ser aproximada por pasos recursivos), del lenguaje matemático y de las propiedades con fundamentos y argumentos lógicos (entre los números trascendentes y los

números decimales no hay diferencias), además de las definiciones y procedimientos (sucesión convergente y sucesión divergente). En la organización de la enseñanza, los procesos matemáticos van gradualmente de lo más fácil (desde el principio de exhaustión) a lo más complejo (como es la definición formal de sucesión y aplicaciones).

Una enseñanza efectiva de la matemática con fundamento científico o empírico tiene que ser direccionada a satisfacer una necesidad de aprendizaje, por ello el docente requiere comprensión de lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender. Su metodología debe ser creativa y motivadora al momento de reflexionar sobre sus creencias y actitudes hacia las matemáticas e inducir en los estudiantes una visión constructiva y sociocultural, en procura de un aprendizaje significativo, que logre en ellos las competencias, destrezas y habilidades.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un libro iterativo multimedia para dispositivos móviles y computadores personales que contribuya al aprendizaje y enseñanza de la matemática a partir de la teoría de sucesiones.

La metodología que se propone se basa en:

1. Un libro físico que contiene 36 cuentos matemáticos. La estructura de cada uno es: una referencia a la sucesión, concreción del problema, formulación, solución con fundamentación matemática, gráfica(s), verificación y conclusión.
2. Un libro iterativo multimedia como instrumento y desarrollo de la presente tesis, compuesto por seis cuentos escogidos de los treinta y seis que integran el libro físico. En este instrumento se usó dos herramientas:
 - a. **Narración.** El estudiante tiene el control sobre el libro, lo que le va a permitir hacer lecturas pausadas de la narrativa, con el fin de que logre la comprensión reflexiva de cada proceso matemático.

b. Retroalimentación del resultado. El estudiante interactuará de forma recursiva mediante un software Geogebra embebido para interiorizar el conocimiento adquirido sobre la sucesión como un proceso feedback del resultado. La pantalla muestra gráficas para diferenciar de forma simultánea al valorar parámetros previamente indicados en el contenido del cuento matemático.

El plan analítico contiene cuatro capítulos:

El Capítulo 1 trata sobre el planteamiento y la formulación de los principales problemas que se abordan en la Educación General Básica, Bachillerato General Unificado, Nivelación y Primer año de Carrera desde el punto de vista de contenidos, niveles de razonamiento lógico, verbal y abstracto referentes a sucesiones, cómo potenciar la metodología de la enseñanza de sucesiones mediante el uso de la tecnología, qué actividades interactivas e iterativas tecnológicas de aprendizaje se deberían incluir para aplicarlas en la enseñanza de la teoría de sucesiones y como docente de qué manera puede utilizar una metodología y plataforma tecnológica apropiada y adaptable para que el estudiante encuentre la conceptualización de sucesión. Además, incluye el capítulo, la justificación e importancia del tema y la definición de los objetivos del trabajo.

El Capítulo 2 trata sobre el marco teórico. Se abordan los antecedentes del problema; la fundamentación teórica en la que se basan los problemas de la enseñanza de la matemática, paradigmas y enfoques de la investigación; la fundamentación conceptual, amparada en la fundamentación filosófica, pedagógica y psicológica; y, los tipos de razonamiento lógico, verbal y abstracto con respecto a la sucesión.

El Capítulo 3 inicia con un breve recorrido sobre los temas que abarca el libro *Desde el principio de exhaustión hasta el concepto de sucesión*, luego consta el marco

tecnológico y diseño del libro iterativo multimedia, que puede operar en un equipo de escritorio con conectividad a Internet con cable o en una laptop o tableta para conectividad inalámbrica. De esta manera se presenta un instrumento pedagógico desarrollado a partir de los lineamientos y conceptos de software iterativos multimedia, con aplicaciones para la enseñanza y aprendizaje de la sucesión, con componentes de razonamiento lógico y abstracto, incorporando elementos visuales, que permiten la interacción como herramienta didáctica y de estimulación cognitiva. Se explica la estructura del libro iterativo basada en la gestión de metaprocesos, que caracteriza procesos para la administración, arquitectura y creación de rasgos para la programación en HTML para páginas web, Javascript y el empleo del software “Geogebra”.

El Capítulo 4 contiene la matriz de expertos y el certificado de aval por presentar de forma pertinente los tratados y contenidos vinculantes en las áreas del conocimiento: Pedagogía, Matemáticas y Tecnologías alcanzando el desarrollo de los objetivos programados en la presente investigación. Finalmente, conclusiones y recomendaciones.

Capítulo 1

El problema

Planteamiento del problema

El Ministerio de Educación, institución rectora de la Educación General Básica y Bachillerato General Unificado en el país, tiene desarrollados currículos matemáticos basados desde la experiencia de los docentes y pensados en la diversidad de los estudiantes desde los años 2009 y 2011, respectivamente, herramientas donde el estudiante es el protagonista de los procesos de enseñanza considerando sus diferentes ritmos de aprendizaje.

La matemática es una ciencia de por sí conductista, porque el estudiante debe memorizar leyes, propiedades, axiomas, teoremas, fórmulas. El docente de matemáticas toma esa posición y actúa como el elemento principal de la clase, su método hetero-estructurante se centra en él, pasando a ser un transmisor magistral del conocimiento y su estudiante un receptor quien se limita a tomar apuntes de la pizarra o de la conferencia, incluso el docente puede hacer dictados cuando llega a una definición o conceptualización de un tema para que luego el estudiante memorice y refuerce en una tarea o en la resolución de cuestionarios que se presentan normalmente al final de una unidad del texto matemático. Boud, citado por Sierra Gómez (2013), dice: “el énfasis de la educación no debe recaer sobre la transmisión de contenidos, sino en el proceso de adquisición de los mismos” (p. 5). Aquí es donde el presente trabajo intenta anclar el aprendizaje activo con el avance y desarrollo de la tecnología, para adaptar los recursos tecnológicos a las metodologías de la educación.

La reforma presentada por el Ministerio de Educación indica en el perfil de salida, que los bachilleres están aptos para aplicar el razonamiento lógico, crítico y

complejo (Ministerio de Educación, 2016); sin embargo, hay evidencias que el estudiante no alcanza a desarrollar este precepto holístico y heurístico que se requiere, pierde el proceso racional, procedimental, ordenado, lógico y justificado que exige la matemática, ciencia que aporta a las otras en la formación de individuos lógicos, ordenados y organizados. Los docentes de Matemáticas deben trabajar en procesos con fundamentación teórica considerando la diversidad y el pensamiento de los estudiantes; diversidad que no debe ser vista desde un punto de vista étnico, social o económico, sino, desde su diversidad para receptar información, aplicarla y transformarla, y desde un pensamiento que debe ser lógico, creativo y planificador.

Frente al gran abanico de contenidos que ofrece la Matemática, se ha seleccionado para esta investigación un tema que se considera supremo e importante como es el concepto de sucesión; sin embargo, los docentes poco profundizan la teoría de la sucesión, punto de partida para la comprensión y el entendimiento de una matemática más formal como es el cálculo matemático diferencial e integral.

Ante esta superficialidad en el currículo y en la metodología de la enseñanza, el presente trabajo intenta resolver los equívocos mencionados con el diseño de un libro iterativo multimedia, que usa la visión interdisciplinar y multidisciplinar del conocimiento para plantear el problema matemático a través de una narrativa tipo cuento. Presentado así el ejercicio, el uso del razonamiento abstracto, lógico y verbal, provoca la formulación procedimental y organizada del conocimiento previo para pasar de lo inconcreto a lo concreto cuando se descubre el patrón o la generalización principio de la sucesión y se busca un aprendizaje con mayores niveles de desempeño al hacer uso de un instrumento que desarrolla una interfaz gráfica didáctica para validar el resultado, potenciando de esta forma las destrezas y la capacidad cognitiva del estudiante.

Se espera que esta investigación contribuya al dominio de los aprendizajes en matemática, mediante la utilización de la tecnología informática y software matemático, que tiene como objetivo principal mejorar y reforzar las habilidades y capacidades de los estudiantes en relación con la adquisición de los conocimientos en el proceso de aprendizaje y su desarrollo racional gracias a la sinergia del lenguaje, la computación, la tecnología y la matemática.

Formulación del problema

El proyecto acude a hechos de los que se desprenden varias interrogantes tales como:

- ¿Cuáles son los contenidos programáticos de la Teoría de sucesiones definidos por los programas de Bachillerato en el Ministerio de Educación?
- ¿Cuáles son los contenidos programáticos de la Teoría de sucesiones definidos por los programas de Ciencias Exactas de las universidades, politécnicas y específicamente de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE?
- ¿Cuáles son los niveles de razonamiento lógico, numérico, abstracto y verbal que se utilizan para la enseñanza de la Teoría de sucesiones?
- ¿Qué actividades iterativas tecnológicas de aprendizaje se deberían aplicar en la enseñanza de la Teoría de sucesiones?
- ¿De qué manera el docente puede utilizar una metodología y plataforma tecnológica apropiada y adaptable para que el estudiante encuentre la conceptualización apropiada de sucesión?
- ¿Cómo lograr, a través del uso eficiente de tecnologías, motivar a los estudiantes para que conceptualicen eficientemente la Teoría de sucesiones?

Justificación e importancia

Dentro de la política pública de educación superior, la Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación (SENESCYT) empezó a evaluar a los estudiantes de las universidades y escuelas politécnicas a través de exámenes de media carrera, luego procedió a la acreditación universitaria, lo que motivó a los docentes a reorganizar los planteamientos micro curriculares, para garantizar que los estudiantes alcancen competencias y aprendizajes significativos en los conocimientos adquiridos a lo largo de su preparación básica, formativa y profesionalizante.

El origen de la presente investigación tiene su fundamento en la necesidad de plantear una alternativa que incida en el aprendizaje académico de los estudiantes del Bachillerato, universitarios o politécnicos de niveles de formación, apoyada en la búsqueda y desarrollo de estrategias oportunas, a través de metodologías pedagógicas contemporáneas, que permitan fortalecer las competencias como este caso con la utilización de la metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y autorreflexión), que integra varias situaciones problema interrelacionadas unas con otras (p. 9) según Glaeser, citado por Hitt & Cortés (2009), y con el uso de recursos tecnológicos se logra la interacción eficiente entre las modelaciones, lenguajes de comunicación y aplicativos matemáticos como procesos del aprendizaje de la matemática.

Este trabajo desarrolla un libro interactivo multimedia bajo el enfoque del aprendizaje y enseñanza de la matemática fundamentado en el uso de inteligencias múltiples (visual, auditiva), interacción con herramientas tecnológicas, estimulación sensorial, aprendizaje matemático, razonamiento lógico-abstracto-verbal y aplicación de herramientas matemáticas especializadas, como el software “Geogebra”, que brindan un instrumento de apoyo e inclusión social dentro del proceso educativo.

Esta investigación espera sea de utilidad práctica, porque busca brindar a los docentes y estudiantes entornos de enseñanza y aprendizaje a través de aplicativos matemáticos que se originan en cuentos matemáticos que procesan la modelación matemática como una estrategia didáctica que tiene como objetivo el dar contexto a las matemáticas en la escuela. (Rodríguez Gallegos & Quiroz Rivera, 2016, p. 104).

Objetivos

Objetivo general

Desarrollar un libro iterativo multimedia, una aplicación para dispositivos móviles y computadores personales, que contribuya al aprendizaje y enseñanza de la matemática tanto de estudiantes como de docentes en referencia a la Teoría de sucesiones, para alcanzar un desarrollo lógico, abstracto y dinámico en el proceso académico.

Objetivos específicos

- Identificar la secuencia de los contenidos programáticos de matemáticas definida por el Ministerio de Educación en los niveles del Bachillerato y la propuesta por las universidades, escuelas politécnicas y específicamente por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, en referencia a la temática de la enseñanza de sucesiones.
- Realizar una revisión sistemática de documentos y fuentes bibliográficas con el fin de establecer el estado del tema a investigar y definir la redacción pertinente de las historietas matemáticas a desarrollar.

- Diseñar un conjunto de actividades didácticas que consolide la construcción progresiva, reflexiva y científica del conocimiento matemático utilizando los aportes teóricos de paradigmas constructivistas, que garanticen el correcto desarrollo del instrumento pedagógico tecnológico.
- Establecer los niveles de razonamiento cognitivo a alcanzar en el aprendizaje de la Teoría de sucesiones, a través de la metodología e instrumentos propuestos en el desarrollo del libro iterativo multimedia.
- Desarrollar una aplicación multimedia para enseñar de manera didáctica e interactiva los temarios vinculados a la ciencia de la Matemática para estudiantes de Bachillerato.
- Realizar una serie de historietas interactivas e innovadoras dentro del aplicativo, para narrar de forma didáctica los diferentes temas vinculados en el aprendizaje de la temática de sucesiones.
- Afianzar el conocimiento alcanzado a través de los relatos teóricos adaptativos mediante el uso y aplicación de las herramientas matemáticas embebidas del software matemático “Geogebra”.

Capítulo 2

Marco teórico

Antecedentes del problema

Este trabajo toma a la sucesión como un tema de suprema importancia en la educación superior, base de la Teoría de límites y cimiento para el cálculo diferencial e integral; sin embargo, muchos docentes pasan por alto el tema de sucesión, situación que se repite en varios autores de textos matemáticos, porque lo consideran trivial o dan por hecho que este es un concepto implícito, recursivo, que está interiorizado en el estudiante. Así lo entiende Velásquez Naranjo (2012):

A partir de las corrientes convencionalista, legalista y la epistemología genética queda expuesto claramente que el concepto de sucesión se empieza a formar desde tempranas edades con la construcción del concepto de número y que, por ende, el abordaje de las mismas puede iniciarse en la básica primaria. (p.15).

La Matemática es una asignatura integral que cursa todos los niveles de formación. Constituye un eje imprescindible en el desarrollo holístico de los estudiantes, por cuanto recurre a una actividad mental que exige la utilización de competencias cognitivas y complejas que necesitan ser desarrolladas en forma eficiente y eficaz por parte de los estudiantes. ¿Cómo hacer y cómo pensar que Matemática representa un verdadero desafío para los estudiantes en todos los niveles de educación formal?

Existen importantes estudios para este proyecto como el de Buitrón & Ortiz (2013) quienes señalan que:

Los docentes del área de matemáticas coincidieron en que las estudiantes tienen falencias al momento de razonar puesto que no existe ningún

tipo de apoyo pedagógico que fomente el desarrollo del pensamiento lógico matemático y la mayoría de estudiantes nunca han trabajado según un cronograma de estudios; por lo cual perjudica el aprendizaje de los estudiantes volviéndolo monótono y desordenado ocasionando la no construcción de un aprendizaje significativo. (p. 126).

Según Mejía, citada por Chila Meza (2012):

La finalidad de la Matemática en Educación es construir los fundamentos del razonamiento lógico-matemático en los estudiantes, y no únicamente la enseñanza del lenguaje simbólico-matemático. Sólo así podrá la educación matemática cumplir sus funciones formativa (desarrollando las capacidades de razonamiento y abstracción), instrumental (permitiendo posteriores aprendizajes tanto en la asignatura de Matemática como en otras áreas), y funcional (posibilitando la comprensión y resolución de problemas de la vida cotidiana), para formar estudiantes que interpreten, argumenten y propongan; que sean capaces de dar sentido a un texto gráfico, que al sustentar proyecten alternativas para reconstruir un conocimiento general, (p. 70).

Ayora Carchi (2012) sostiene lo siguiente: “La forma en que los profesores aprenden un tema para enseñarlo a sus alumnos, así lo enseñarán y la metodología de enseñanza influye directamente en la manera en que los alumnos estudian y aprenden”. (p. 94).

Velásquez Naranjo (2012) presenta una propuesta de enseñanza para el aula basada en el reconocimiento de los procesos de variación subyacentes en las sucesiones y dice:

Ayudar a que los estudiantes identifiquen patrones y regularidades no basta, es importante además que los puedan describir y representar a través de diversos sistemas como: la representación escrita para poder

comunicar las conclusiones que se establezcan de las observaciones, las representaciones pictóricas que les permiten mostrar lo que sucede en diversos momentos de la situación de cambio, representación tabular útil en los procesos aritméticos y la construcción de fórmulas y finalmente la representación algebraica para condensar la información. Estos tipos de representaciones ayudan a los estudiantes para que finalmente puedan modelar una situación matemática a través de la captación de las propiedades antes mencionadas. (p. 17)

Pantoja Padilla (2017) cita a Godino, quien en su obra *Matemáticas y su didáctica para maestros* manifiesta que: “el proceso histórico de construcción de las Matemáticas muestra la importancia del razonamiento empírico-inductivo que en muchos casos desempeña un papel mucho más activo en la elaboración de nuevos conceptos que el razonamiento deductivo”, (p.25). Esta afirmación expresa la forma cómo trabajan los matemáticos para formular un teorema. Deben trabajar por tanteo, con casos particulares, con modificaciones hasta llegar a la teoría idónea, es decir, trabajan en la construcción del conocimiento.

La sociedad actual produce cambios acelerados en todas las áreas de desarrollo, especialmente en el campo de la ciencia y de la tecnología. Los conocimientos, las herramientas, los recursos iterativos multimedia, las maneras de hacer y comunicar la matemática también evolucionan, sin que esto signifique que hayan caducado criterios como los expuestos por Pólya (1965) en el libro *Cómo plantear y resolver problemas*, citado por May Cen, (2015). Pólya introduce el término “heurística” para comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso, y para la consolidación de los conocimientos y desarrollo de aptitudes.

Tanto el aprendizaje como la enseñanza de esta asignatura deben estar enfocados al desarrollo de las destrezas necesarias para que los estudiantes sean capaces de resolver problemas cotidianos y de esta manera fortalecer el pensamiento. Así lo afirman Alvarado Estrada & Lunarejo López, (2015): No basta conocer variadas estrategias, lo importante es saber seleccionar la estrategia adecuada y cuándo usarla (conocimiento estratégico) y ponen en funcionamiento la regulación, control y reflexión sobre las decisiones a tomar en el momento de resolver las tareas (p. 37), es decir, el estudiante debe ser capaz de conceptualizar su plan, y el docente a no imponérselo, para que ejecute bajo la elaboración del proceso creativo, argumentando y verificando cada paso como veracidad de todo razonamiento y al final reconsidere tanto la solución como el procedimiento que le llevó a esta.

Es importante estudiar y aplicar nuevas estrategias y metodologías para trabajar en el área de Matemáticas y así contribuir al desarrollo del pensamiento lógico en los estudiantes. En el Ecuador y la región, si bien se han desarrollado proyectos de libros iterativos multimedia en áreas como Ciencias de la Vida, Ciencias Sociales, no se evidencian textos iterativos multimedia enfocados en una oportuna estimulación en referencia al desarrollo del pensamiento concreto, lógico y abstracto de las Ciencias Exactas: Matemáticas, Física, Química.

Existe desconocimiento y no hay un buen uso de las herramientas multimedia, lo cual evidencia la carencia de instrumentos pedagógicos diseñados sobre la base del uso de los recursos didácticos iterativos multimedia en la enseñanza de Matemáticas, lo que pone al descubierto que hay un desinterés o inexperiencia por parte del docente de Matemáticas en la utilización y aplicación de la tecnología en el proceso educativo y esto promueve una desvinculación de la Informática como apoyo didáctico en la enseñanza. Es por ello que este proyecto pretende desarrollar un instrumento

apropiado, creativo e innovador, que permita suplir la necesidad imperiosa de vinculación del uso de herramientas multimedia en la enseñanza de las Matemáticas.

En función de las características propias de este proyecto creativo e innovador, se considera la revisión por pares y/o grupo de expertos, quienes contribuirán a establecer apropiadamente la importancia del tema, a mantener la rigurosidad en todas las fases del desarrollo de este proyecto y al manejo idóneo de la información correlacionada en el ámbito del proceso. Se establece este control eficiente que ayudará a determinar los factores relacionados con el cumplimiento del objetivo, con el propósito de medir la calidad, factibilidad, eficiencia y credibilidad del proyecto planteado, con miras a ser validado, socializado y/o publicado, ya sea en sus procesos o sus efectos, considerando que el proyecto planteado responda a esta normativa idónea de certificación.

Fundamentación teórica

En esta investigación surgen relaciones entre diversidad, programas de contenidos, razonamiento, conducta, actitudes y motivaciones de los docentes y estudiantes, cómo son y cómo se manifiestan, hasta su relación y su vinculación entre ellos.

Es importante concretar a qué nos referimos con diversidad en el aprendizaje de la matemática. Por ejemplo, Muñoz Escolano, Arnal Bailera, Beltrán Pellicer, Callejo de la Vega & Carrillo Yañez (2017) aluden a una diversidad de capacidades intelectuales y citan a dos autores con investigaciones que difieren dos décadas en el tiempo: Presmeg y Van Garderen (p. 74). Presmeg (1986) se refiere a estudiantes con alta capacidad matemática, dice que la mayoría de ellos no son visualizadores; sin embargo, Van Garderen (2006) obtiene resultados opuestos y concluye que este grupo de estudiantes

son observadores porque usan más imágenes mentales que sus compañeros con capacidad matemática media, mientras que Núria Planas, en Muñoz Escolano, Arnal Bailera, Beltrán Pellicer, Callejo de la Vega & Carrillo Yañez, (2017), se refiere a una diversidad de lenguas en la enseñanza de las matemáticas, las unas y las otras “difieren teóricamente pero comparten la propuesta de entender manifestaciones de una dimensión específica de la diversidad en el aprendizaje matemático”, (p. 69). Se entenderá como diversidad a los diferentes estilos y formas que tienen los estudiantes para recibir el nuevo conocimiento que se imparte. Desde ese punto de vista se comparte con David Kolb, autor del modelo de aprendizaje basado en experiencias. “Los estudiantes efectivos dependen de cuatro modos de aprendizaje: experiencia concreta (EC), observación reflexiva (OR), conceptualización abstracta (CA) y experimentación activa (EA)”. (Aragón de Vian, 2000, p. 10)

Los contenidos relacionados con un tema son tan diversos, que en el micro currículum el docente en el aula juega un papel fundamental en procura de lograr el mejor aprendizaje para los estudiantes, más aún cuando se trata de Matemáticas. La creatividad en esta asignatura debe ponerse de manifiesto para manejar un fuerte programa de contenidos y es en este punto donde se produce desaliento en una gran mayoría de estudiantes cuando no alcanzan los logros del aprendizaje. La pedagogía y la metodología implementada por el docente es vital si le conectamos con la diversidad de estudiantes presentes en un recinto educativo.

De estos hechos se desprenden varias interrogantes: ¿Cuáles son los contenidos programáticos de Teoría de sucesiones definidos por los Programas de Bachillerato en el Ministerio de Educación?

Los niveles de Educación General Básica (Preparatoria, Elemental, Media, Superior y Bachillerato General Unificado) se rigen por un mapa de contenidos por área. Del programa de contenidos en Matemáticas (comprende tres bloques: Bloque 1:

Álgebra y Funciones; Bloque 2: Geometría y Medida; Bloque 3: Estadística y Probabilidades) se indican en la tabla 1, aquellos que se relacionan con el tema sucesiones. Estos bloques son transversales y están organizados por objetivos generales. Los tres primeros niveles están diseñados para trabajar “en lo concreto y a partir del subnivel superior empieza un tratamiento más abstracto de la Matemática, con la introducción de símbolos y variables, contenidos que se profundizan en el Bachillerato”. (Ministerio de Educación, 2016, p. 227).

Los diferentes currículos para la enseñanza de la Matemática, objetivos, resultados de aprendizaje mediante indicadores definidos por criterios de evaluación y destrezas con criterios de desempeño deben estar canalizados a la formación y desarrollo integral del estudiante y hacia el aprendizaje a través del impulso de sus destrezas de pensamiento y de la capacidad de razonar, pensar, relacionar, aplicar, fundamentar, valorar, validar, comunicar y retroalimentar, esto es lo que se espera deben adquirir los estudiantes.

La investigación se centra en aspectos que van encaminados a la sucesión que es la temática de la tesis.

La tabla 1 es una extracción de los objetivos de la Matemática e indican el logro del aprendizaje que debe conducir a una mejor conceptualización de la sucesión.

Tabla 1*Objetivos del área de matemáticas*

Matriz de progresión de los objetivos del Área de Matemáticas

Educación General Básica

	Preparatoria		Elemental		Media		Superior
OM.1.1	Reconocer la posición y atributos de colecciones de objetos, mediante la identificación de patrones observables, a su alrededor, para la descripción de su entorno.	OM.2.1	Explicar y construir patrones de figuras y numéricos relacionándolos con la suma, la resta y la multiplicación, para desarrollar el pensamiento lógico matemático.	OM.3.1	Utilizar el sistema de coordenadas cartesianas y la generación de sucesiones con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, como estrategias para solucionar problemas del entorno, justificar resultados, comprender modelos matemáticos y desarrollar el pensamiento lógico matemático.	OM.4.1	Reconocer las relaciones existentes entre los conjuntos de números enteros, racionales, irracionales y reales; ordenar estos números y operar con ellos para lograr una mejor comprensión de procesos algebraicos y de las funciones (discretas y continuas); y fomentar el pensamiento lógico y creativo.

	<u>Preparatoria</u>		<u>Elemental</u>		<u>Media</u>		<u>Superior</u>
OM.1.2	Comprender la noción de cantidad, las relaciones de orden, y las nociones de adición y sustracción, con el uso de material concreto, para desarrollar su pensamiento y resolver problemas de la vida cotidiana.	OM.2.2	Utilizar objetos del entorno para formar conjuntos, establecer gráficamente la correspondencia entre sus elementos y desarrollar la comprensión de modelos matemáticos.	OM.3.2	Participar en equipos de trabajo, en la solución de problemas de la vida cotidiana, empleando como estrategias los algoritmos de las operaciones con números naturales, decimales y fracciones, la tecnología y los conceptos de proporcionalidad.		
OM.1.3	Reconocer, comparar y describir las características de cuerpos y figuras geométricas de su entorno inmediato para lograr una mejor comprensión de su medio.	OM.2.4	Aplicar estrategias de conteo, procedimientos de cálculos de suma, resta, multiplicación y divisiones del 0 al 9 999, para resolver de forma colaborativa problemas cotidianos de su entorno.	OM.3.4	Descubrir patrones geométricos en diversos juegos infantiles, en edificaciones, en objetos culturales, entre otros, para apreciar la Matemática y fomentar la perseverancia en la búsqueda de soluciones ante situaciones cotidianas.		

Nota. Fuente: Ministerio de Educación, (2016).

Los objetivos se conectan con criterios de evaluación en cada nivel, según tabla 2 para indicar el grado de aprendizaje que se espera del estudiante y que aporten en la conceptualización de sucesión.

Tabla 2

Criterios de evaluación del Área de Matemáticas

Matriz de Criterios de evaluación del Área de Matemáticas							
Educación General Básica				Bachillerato General Unificado Superior			
Preparatoria		Elemental		Media			
CE.M.1.1	Clasifica objetos del entorno; establece sus semejanzas y diferencias y la ubicación en que se encuentran en referencia a sí mismos y a otros objetos; y selecciona los atributos que los caracterizan, para construir patrones sencillos y expresar situaciones cotidianas.	CE.M.2.1	Descubre regularidades matemáticas del entorno inmediato utilizando los conocimientos de conjuntos y las operaciones básicas con números naturales, para explicar verbalmente, en forma ordenada, clara y razonada, situaciones cotidianas y procedimientos para construir otras regularidades.	CE.M.3.1	Emplea de forma razonada la tecnología, estrategias de cálculo y los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales, en el planteamiento y solución de problemas, la generación de sucesiones numéricas, la revisión de procesos y la comprobación de resultados; explica con claridad los procesos utilizados.	CE.M.5.4	Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética.

	Preparatoria	Elemental	Media	Superior
CE.M.1.3	Utiliza las nociones de longitud, capacidad, volumen y superficie, peso o temperatura (corto/largo; alto/bajo; vacío/lleño; grande/pequeño; liviano/pesado; caliente/frío) para describir y comparar objetos o lugares, e identificar cuerpos (prismas, cilindros y esferas) y figuras geométricas (triángulos, cuadrados y círculos) en el entorno, comprende y valora el espacio que lo rodea, y soluciona de forma individual o grupal situaciones cotidianas.		CE.M.3.2 Aprecia la utilidad de las relaciones de secuencia y orden entre diferentes conjuntos numéricos, así como el uso de la simbología matemática, cuando enfrenta, interpreta y analiza la veracidad de la información numérica que se presenta en el entorno.	CE.M.5.5 Aplica el álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral, interpreta las derivadas de forma geométrica y física, y resuelve ejercicios de áreas y problemas de optimización.

Nota. Fuente: Ministerio de Educación, (2016).

En la tabla 3 se extrae del mapa de contenidos, los indicadores que tienen relación con la sucesión para la evaluación del criterio.

Tabla 3

Mapa de contenidos de indicadores

Indicadores definidos por criterio de evaluación			
Preparatoria	Elemental	Medio	Bachillerato General Unificado
Patrones de:	Patrones de objetos y figuras hasta con dos atributos	Números naturales del 0 al 9999	Sucesiones numéricas:
- Objetos			- Reales monótonas
- Cuerpos geométricos	Patrones numéricos:	Sucesiones con:	- Reales por recurrencia
- Figuras planas	- Crecientes con sumas y multiplicaciones	- Adición	- Sucesión convergente
- Secuencias:	Patrones numéricos:	- Resta	Progresiones:
Ascendentes del 1 al 10	Decrecientes con restas	- Multiplicación	- Aritméticas
Descendentes del 1 al 10		- División	- Geométricas
		Polígonos:	- Álgebra de sucesiones convergentes
		- Regulares	- Matemática financiera
		- Irregulares	

Preparatoria	Elemental	Medio	Bachillerato General Unificado
			<ul style="list-style-type: none">- Sumas parciales finitas de sucesiones numéricas - Suma y multiplicación de sucesiones numéricas reales - Multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales

Nota. Fuente: Ministerio de Educación, (2016).

En el mapa de contenidos para Educación Básica Media Superior, tabla 3, se observa una desconexión explícita con sucesiones al no especificar indicadores en el Bloque de Álgebra y Funciones. Se puede inferir en este nivel, que el estudiante tiene interiorizado en su cognitivo el concepto de sucesión. Sin embargo, el bloque de Álgebra y Funciones en el Bachillerato Unificado, vuelve a retomar la conexión con sucesiones puesto que a este nivel el perfil de salida del estudiante debe alcanzar un razonamiento lógico, crítico y complejo, entonces “los contenidos matemáticos tienen un carácter más formal, se enfatizan las aplicaciones y la solución de problemas mediante la elaboración de modelos”, (Ministerio de Educación, 2016, p. 1250) modelos que se originan con la exploración de patrones.

Quedan evidenciados los errores que se produjeron en el Ministerio de Educación al momento que se dio la Reforma cuando se reestructuran los vacíos y se reacomodan los contenidos. En efecto, el error detectado se corrige en el texto *Matemática 2 BGU*. Esta vez, en la tabla 4 se observa que la Unidad 2 involucra a la progresión aritmética y a la progresión geométrica, después que en la Unidad 1 el estudiante ha conceptualizado a la función (Ministerio de Educación, 2016, p. 3). Corresponde entonces entender que sucesión es un tipo de función. Sin embargo, el abordaje para progresiones es frío y calculador, cuando a manera de introducción en una sola línea se dice que sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales (Ministerio de Educación, 2016, p. 35).

Tabla 4*Contenidos Matemáticas 2 BGU*

Unidad	Tema	Subtema
1	Función	Concepto de función
2	Progresiones aritméticas	
3	Progresiones geométricas	Término general de una progresión geométrica Suma de los n términos de una progresión geométrica Producto de los n términos de una progresión geométrica
4	Intermediarios financieros	

Nota. Fuente: Ministerio de Educación, (2016).

En el libro *Matemática 3 BGU*, la Unidad 2 muestra que el contenido que se conecta a sucesiones empieza con Límites de funciones, ver tabla 5 (Ministerio de Educación, 2016, p. 3), donde a partir de la definición rigurosa expresa simbólicamente al límite como $\lim_{x \rightarrow} f(x) = L$.

Tabla 5*Contenidos Matemáticas 3 BGU*

Unidad	Tema	Subtema
1	Exponentes y logaritmos	
2	Límites de funciones	Límite finito de una función en un punto Límites laterales finitos Relación entre el límite y los límites laterales Límite infinito de una función en un punto Límites de una función en el infinito
3	Propiedades de los límites	
4	Cálculo de límites	

Nota. Fuente: Ministerio de Educación, (2016).

En los libros de matemáticas con primera impresión en marzo de 2020 del Ministerio de Educación: Octavo EGB, (p. 89), Noveno EGB, (p. 89), Décimo EGB, (p. 89), Primero BGU, (p. 117), Segundo BGU, (p. 105), Tercero BGU, (p. 69), se formulan cambios en los contenidos que son evaluados por la Universidad SEK, mediante Acuerdo Ministerial MINEDUC-SFE-2017-00063-A del 18 de octubre de 2017. Existen avances importantes que se da a la sucesión para Nivel Superior y Bachillerato, pero se mantienen serias inconsistencias en el contenido en Primero de Bachillerato, debido a que los estudiantes que van a recibir teoría de límites y derivadas no han trabajado previamente con el concepto de sucesión.

Tabla 6*Contenidos Matemáticas*

8.º EBG UNIDAD 6	9.º EBG UNIDAD 6	10.º BEG UNIDAD 3	1 BGU UNIDAD 4	2 BGU UNIDAD 3	3 BGU UNIDAD 3
Polinomios y valor numérico	Producto cartesiano y relaciones	Producto cartesiano	Noción intuitiva de límite	Definición de sucesión numérica real	Sucesiones convergentes Límite de una sucesión
Operaciones con conjuntos	Funciones	Funciones, modelos matemáticos como funciones	Significado de $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$	Sucesiones definidas por recurrencia	Álgebra de sucesiones convergentes
Producto cartesiano y relaciones	Función crecientes, decrecientes y constantes	Función real	Noción de límite de una función real	Sucesiones monótonas	Propiedades básicas de los límites de sucesiones convergentes
Cuerpos geométricos	Función lineal afín	Función lineal	Cociente incremental Noción de derivada	Progresiones aritméticas	Distribución binomial o de Bernoulli B(n,p)
Probabilidad	Probabilidad	Función potencia		Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética	Probabilidad
Estrategias para resolver problemas		Teorema de Pitágoras		Progresiones geométricas	Solución de problemas cotidianos
Proyecto	Estrategias para resolver problemas	Estrategias para resolver problemas		Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica Aplicación de progresiones en finanzas	

Nota. Fuente: Ministerio de Educación, (2016).

Los siguientes cuadros se refieren a contenidos de la organización del Bachillerato Internacional (2019), nivel adoptado por algunas instituciones educativas bajo el Acuerdo Ministerial MINEDUC-ME-2016-00020-A. Del programa de estudios de Matemáticas se presenta aquellos contenidos que se relacionan con sucesiones. En las tablas 7 y 8, los contenidos de Nivel Medio se refieren siempre a progresiones como la definición más próxima a sucesión.

Tabla 7

Contenido del programa de estudios

Matemáticas: Aplicaciones e interpretación	
Unidad 1: Aritmética y Álgebra	
Contenido del Nivel Medio (NM). Horas lectivas recomendadas:16	
NM 1.2*	Progresiones y series aritméticas; uso de las fórmulas del término enésimo y de la suma de los n primeros términos de la progresión; uso de la notación de sumatoria para expresar la suma de progresiones aritméticas; aplicaciones; análisis, interpretación y predicción en aquellos casos en los que un modelo no se corresponda con una situación totalmente aritmética en la vida real
NM 1.3*	Progresiones y series geométricas; uso de las fórmulas del término enésimo y la suma de los n primeros términos de la progresión; uso de la notación de sumatoria para $a < 10^k$ $1 \leq a < 10$ k expresar la suma de progresiones geométricas; aplicaciones tales como la propagación de una enfermedad, los aumentos y disminuciones salariales o el crecimiento de la población
NM 1.4*	Aplicaciones financieras de las progresiones y las series geométricas, incluido el interés compuesto y la depreciación anual
NM 1.6	Aproximación: lugares decimales y cifras significativas; límite superior e inferior de un número al que se ha aplicado un redondeo; porcentajes de error; estimación
NM 1.7	Amortización y anualidades utilizando medios tecnológicos

Nota. Fuente: Organización del Bachillerato Internacional, (2019). Contenidos del programa de estudios. Matemáticas: Aplicaciones e interpretación, Unidad 1, Aritmética y Álgebra, pp. 6-7.

Tabla 8*Contenido de los temas adicionales del Nivel Superior*

Contenido de los temas adicionales del Nivel Superior (TANS)	
Horas lectivas recomendadas: 13	
TANS 1.11	La suma de progresiones geométricas infinitas

Nota. Fuente: Organización del Bachillerato Internacional, (2019). Contenidos del programa de estudios. Matemáticas: Aplicaciones e interpretación, Unidad 1, Aritmética y Álgebra, p. 7.

Tabla 9*Contenido de nivel medio Unidad 2*

Unidad 2: Funciones	
Contenido del nivel medio (NH)	
Horas lectivas recomendadas: 31	
NM 2.2*	Concepto de función, dominio, recorrido y gráfico; notación de funciones; el concepto de función como modelo matemático; concepto informal de función inversa

Nota. Fuente: Organización del Bachillerato Internacional, (2019). Contenidos del programa de estudios. Matemáticas: Aplicaciones e interpretación, Unidad 2, Funciones, p. 8.

Tabla 10*Contenido de nivel medio Unidad 5*

Unidad 5: Análisis	
Contenido del Nivel Medio (NM)	
Horas lectivas recomendadas: 19	
NM 5.1*	Introducción al concepto de límite; interpretación de la función derivada como pendiente de la recta tangente a la curva y como medida de la razón de cambio entre dos variables

Nota. Fuente: Organización del Bachillerato Internacional, (2019). Contenidos del programa de estudios. Matemáticas: Aplicaciones e interpretación, Unidad 5, Análisis, p. 13.

En las tablas 11 y 12 se presenta la matriz de carga horaria normada en el Ministerio de Educación. Se puede ver que el número de horas para esta asignatura disminuye conforme se incrementa el nivel de estudios, dando libertad a la institución educativa para que aumente o disminuya la carga horaria en función de las necesidades que presenten sus estudiantes, orientándose a cumplir con los objetivos curriculares de cada una de las áreas, en cada grado y nivel. (Ministerio de Educación, 2016, pp. 30-31).

Tabla 11

Matriz Carga horaria Educación General Básica

Áreas	Asignaturas	Subniveles de EGB		
		Elemental	Media	Superior
Lengua y Literatura (1)	Lengua y Literatura	10	8	6
Matemática (1)	Matemática	8	7	6
Ciencias Sociales	Estudios Sociales	2	3	4
Ciencias Naturales	Ciencias Naturales	3	5	4
Educación Cultural y Artística	Educación Cultural y Artística	2	2	2
Educación Física	Educación Física	5	5	5
Lengua Extranjera (1)	Inglés	3	3	5
Proyectos escolares (2)		2	2	3
Horas pedagógicas totales		35	35	35

Nota. Fuente: Ministerio de Educación, (2016). Matriz Carga horaria, Educación General Básica, p. 30.

Tabla 12*Matriz Carga horaria Bachillerato General Unificado*

	Áreas	Asignaturas	Cursos		
			1.º	2.º	3.º
Tronco común	Matemática	Matemática	5	4	3
	Ciencias Naturales	Física	3	3	2
		Química	2	3	2
		Biología	2	2	2
	Ciencias Sociales	Historia	3	3	2
		Educación para la Ciudadanía	2	2	-
		Filosofía	2	2	-
	Lengua y Literatura	Lengua y Literatura	5	5	2
	Lengua Extranjera	Inglés	5	5	3
	Educación Cultural y Artística	Educación Cultural y Artística	2	2	-
Educación Física	Educación Física	2	2	2	
Módulo interdisciplinar	Emprendimiento y Gestión	2	2	2	
Bachillerato en Ciencias	Horas pedagógicas del tronco común		35	35	20
	Horas adicionales a discreción para Bachillerato en Ciencias (1)		5	5	5
	Asignaturas Optativas		-	-	15
	Horas pedagógicas totales del Bachillerato en Ciencias		40	40	40
Bachillerato Técnico	Horas adicionales para Bachillerato Técnico		10	10	25
	Horas pedagógicas totales del Bachillerato Técnico		45	45	45

Nota. Fuente: Ministerio de Educación, (2016). Matriz Carga horaria, Bachillerato General Unificado, p. 31.

Se observa que en los primeros años de Educación Básica hay un mayor compromiso con la Matemática criterio al que se llega por el número de horas semanales destinadas a esta asignatura. Conforme avanza el nivel en la educación, se produce una relación inversa con el número de horas dedicadas, como se muestra en la tabla 12, correspondiente al Bachillerato, con tres horas semanales. Las autoridades educativas parten del supuesto que el estudiante que está perfilándose para pasar a la educación superior, con la carga horaria normada, adquiere las bases suficientes en Matemáticas, sin embargo, en referencia a las horas adicionales deja a discreción en el Bachillerato, para que las instituciones educativas “puedan incluir asignaturas que consideren pertinentes de acuerdo con su Proyecto Educativo Institucional”; cuando no exista una oferta específica, las instituciones educativas incrementarán la carga horaria de las áreas instrumentales “... en función de las necesidades que presenten sus estudiantes”, (Ministerio de Educación, 2016, p. 31).

Dentro del Bachillerato Internacional, modalidad implementada en el país por el Ministerio de Educación a través de acuerdos ministeriales de julio de 2013 y diciembre de 2015 para su funcionamiento, en lo que corresponde al área de Matemáticas, presenta dos matrices: una para Aplicaciones e interpretación de la Matemática; y, otra para Análisis y enfoque de la Matemática. La diferencia entre las dos matrices radica en los contenidos y uso de herramientas tecnológicas: mientras la primera interpreta, la segunda modela y explora.

Tabla 13*Aplicaciones e interpretación de la Matemática*

Matemáticas: Aplicaciones e interpretación		
Resumen del programa de estudios		
Componente de programa de estudios	Horas lectivas recomendadas	
	NM	NS
Unidad 1:		
Aritmética y Álgebra	16	29
Unidad 2:		
Funciones	31	42
Unidad 3:		
Geometría y Trigonometría	18	46
Unidad 4:		
Estadística y Probabilidad	36	52
Unidad 5:		
Análisis	19	41
Herramientas y exploración matemática. Desarrollo de habilidades de investigación, de resolución de problemas y de modelización que conducirán a la elaboración de una exploración individual. La exploración es un trabajo escrito que implica investigar un área de Matemáticas.	30	30
Total de horas lectivas	150	240

Nota. Fuente: Bachillerato Internacional, (2019). Resumen del Programa de estudios. Matemáticas: Aplicaciones e interpretación, p. 6.

Tabla 14*Análisis y enfoque de la Matemática*

Matemáticas: Análisis y enfoques			
Resumen del programa de estudios			
Componente de programa de estudios	Horas lectivas recomendadas		
	NM	NS	
Unidad 1:			
Aritmética y Álgebra	19	39	
Unidad 2:			
Funciones	21	32	
Unidad 3:			
Geometría y Trigonometría	25	51	
Unidad 4:			
Estadística y Probabilidad	27	33	
Unidad 5:			
Análisis	28	55	
Herramientas y exploración matemática. Desarrollo de habilidades de investigación, de resolución de problemas y de modelización que conducirán a la elaboración de una exploración individual. La exploración es un trabajo escrito que implica investigar un área de matemáticas.	30	30	
Total de horas lectivas	150	240	

Nota. Fuente: Bachillerato Internacional, (2019). Resumen del Programa de estudios. Matemáticas: Análisis y enfoques, p. 17.

Se puede observar en las tablas 13 y 14 diferencias con respecto a la carga horaria en la Educación Pública. El énfasis que se da a la asignatura de Matemática es visible. Mientras en Educación General Básica en segundo y tercer nivel de Bachillerato es de cuatro y tres horas semanales, respectivamente, en Bachillerato Internacional el número de horas destinado a las unidades 1 y 2 es de 47 horas para Nivel Medio y 71 horas para Nivel Superior para estudiantes dedicados a Aplicaciones e Interpretación de la Matemática y de 40 y 71 horas, respectivamente, para estudiantes de Análisis y Enfoques de la Matemática.

En la Unidad 1, en lo que se refiere a Aritmética y Álgebra, el docente tiene al menos diez horas en Nivel Medio para revisar progresiones y 20 horas en Nivel Superior. Hay un grupo de temas que se adicionan en la Unidad 1, que son exclusivos del Nivel Superior, donde el docente tiene horas adicionales para tratar la suma de progresiones geométricas infinitas como introducción a las series.

Tanto en el Nivel Medio como en el Superior, para la Unidad 2 (Funciones) y para la Unidad 5 (Análisis), el docente tiene horas adicionales para revisión del concepto de función como modelo matemático y concepto de límite, respectivamente.

¿Cuáles son los contenidos programáticos de Teoría de sucesiones definidos por los programas de Ciencias Exactas, universidades, politécnicas y Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE?

La Educación Superior tiene un periodo de nivelación (antes denominado Prepolitécnico o Preuniversitario, luego Nivelación SENESCYT, hoy Nivelación de Carrera), como una interfaz entre el Bachillerato General Unificado y el primer año de Carrera, que debe aprobar el estudiante egresado de la malla curricular del Ministerio de Educación.

Los contenidos en este periodo de nivelación son autónomos en las Instituciones de Educación Superior (IES) y están dentro del sílabo y le corresponde al área del

conocimiento estructurar y revisar periódicamente los temas y subtemas que correspondan a las carreras.

En 2011 cuando se dio la Reforma en el Ministerio de Educación para el Bachillerato General Unificado, este fue el temario para el Prepolitécnico en la Escuela Politécnica del Ejército, ahora Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, sin existir cambios desde entonces. Del temario se extrae únicamente la parte que interesa en el tema de investigación. Se observa en la tabla 15 que lo más próximo a sucesión es la teoría que se deriva de la descomposición factorial.

Tabla 15

Contenidos en Matemáticas

Unidad 1	Subtema
	Clasificación de los números
	Exponentes y radicales
	Polinomios
	Operación con polinomios
	Productos y cocientes notables
Expresiones algebraicas	Descomposición factorial
	Máximo común divisor/Mínimo común múltiplo
	Fracciones algebraicas
	Operaciones con fracciones algebraicas
	Racionalización

Nota. Fuente: Vicerrectorado Académico. Sílabo Matemática. Nivelación ESPE. Anexo 1.

En un temario de la Escuela Politécnica Nacional para estudiantes que ingresan a rendir exámenes de ubicación para Ingeniería y Tecnología, se puede observar en la tabla 16 que lo más cercano a sucesiones es lo que corresponde a progresiones como un apéndice del Binomio de Newton.

Tabla 16

Contenidos en Fundamentos de Matemáticas

Tema	Subtema
Expresiones algebraicas	
Introducción a la lógica matemática	
Introducción a la Teoría de conjuntos	
	Definiciones generales
	Axiomas de campo y de orden
Los números reales	Inducción
	Binomio de Newton, progresiones
	Valor absoluto
	Operaciones con números reales
	Ecuaciones e inecuaciones

Nota. Fuente: Fundamentos de Matemáticas. Ingeniería y Tecnología. Escuela Politécnica Nacional. Anexo 2.

La tabla 17 presenta un contenido de Nivelación de la Universidad Central para estudiantes que ingresan a carreras de Ingeniería y Ciencias Físicas y de la Matemática. Se observa que lo más cercano a sucesiones es lo que corresponde a descomposición factorial.

Tabla 17*Contenidos en Matemáticas*

Unidad 4	Subtema
	El conjunto de los números reales
	Expresiones algebraicas
	Productos notables y cocientes notables
Números reales	Descomposición factorial
	Fracciones algebraicas
	Potenciación y radicación
	Ecuaciones lineales
	Ecuaciones cuadráticas
	Sistemas de ecuaciones

Nota. Fuente: Sistema de Nivelación de Carrera. Sílabo Matemática. Universidad Central. Anexo 3.

La tabla 18 se refiere a un tema de la Unidad 1 de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral, que toma como punto de partida al límite de una función.

Tabla 18*Contenidos en Cálculo Diferencial e Integral*

Unidad 1	Tema
	Intervalos y entornos
	Definición intuitiva y rigurosa de límites
	Interpretación
Límites y continuidad	Teoremas y propiedades de límites
	Indeterminaciones.
	Límites algebraicos
	Límites laterales
	Límites finitos
	Límites infinitos
	Límites especiales
	Límites trigonométricos

Nota. Fuente: Vicerrectorado académico. Sílabo de Cálculo Diferencial e Integral. Carreras Técnicas, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. Anexo 4.

En la tabla 19, el contenido corresponde a la asignatura de Matemática Financiera en una carrera de Administración. Se observa que se considera a la progresión como un insumo de la teoría del interés simple.

Tabla 19*Contenidos en Matemáticas Financiera*

Unidad 1	Subtema
	Progresión aritmética, progresión geométrica
	Interés simple
Expresiones algebraicas	Análisis de variables de la expresión del interés
	Variaciones en el cálculo del interés simple y la tasa de interés
	Monto e interés simple

Nota. Fuente: Vicerrectorado académico. Sílabo de Matemática Financiera. Carrera Finanzas y Auditoría, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. Anexo 5.

Como se puede ver, hay conexión en los contenidos entre lo que se espera demuestre el bachiller que opta por ingresar a la Escuela Politécnica Nacional y los contenidos que aprobó en una institución educativa del Ministerio de Educación. Pero una vez que ese estudiante ingresa a la Educación Superior, es en esta etapa de transición que él pierde el contacto con la sucesión, porque el docente curricular da por hecho que el concepto de sucesión lo ha interiorizado el estudiante, llegando en estas condiciones al abordaje del cálculo en primer año de una carrera técnica o administrativa.

¿Cuáles son los niveles de razonamiento lógico, numérico, abstracto y verbal que se utilizarían para la enseñanza de la Teoría de sucesiones?

En una sucesión, el estudiante trabaja con el conjunto de los números naturales \mathbb{N} como conjunto de salida cuyo dominio está representado por $n \in \mathbb{N}$ en la recta $x = n$, y el recorrido representado por $f(n) \in \mathbb{R}$ en la recta $y = f(n)$. El conjunto

solución de la sucesión en dimensión \mathbb{R}^2 representa el grafo de la sucesión.

(Benalcázar Gómez, 2014, p. 391)

$$\{(x = n, y = f(n)) \in \mathbb{R}^2 / n \in \mathbb{N}\}$$

La sucesión pasa por un nivel de abstracción elevado, puesto que requiere encontrar el patrón o la regla que define el problema. La estrategia inicia por un método de razonamiento deductivo y termina este razonamiento por ser inductivo, esto porque el estudiante en la formulación debe relacionar dos dimensiones para encontrar el término general $f(n)$ de la sucesión. Para llegar a la formulación se debe seguir una estrategia mediante procesos lógicos, ordenados y organizados.

Los niveles de razonamiento lógico, abstracto y verbal con que los estudiantes llegan a la Educación Superior no son suficientes, producto de los continuos cambios y desconexiones en los contenidos en Educación General Básica y Bachillerato General Unificado. Además, no trabajan con sucesiones que generen patrones de segundo y tercer nivel, limitándose a sucesiones con progresiones aritméticas y geométricas de un solo nivel o patrón. Esto contradice con el aprendizaje, que debe ser desarrollado bajo una variedad de procesos cognitivos.

Los estudiantes deben ser capaces de poner en práctica un amplio repertorio de procesos, tales como: identificar, analizar, reconocer, asociar, reflexionar, razonar, deducir, inducir, decidir, explicar, crear, etc., evitando que las situaciones de aprendizaje se centren, tan solo, en el desarrollo de algunos de ellos. (Ministerio de Educación, 2016)

Varios autores de Teoría matemática omiten el concepto de sucesión, porque a este tema lo consideran trivial; otros autores dan por hecho que este es un tema entendido. Los docentes siguen este preámbulo y no generan el concepto en clase, sino que lo enuncian de forma directa, poniendo hincapié al conductismo. La definición y la

notación usadas deben ser asimiladas de manera constructivista y no memorística, entonces, la enseñanza tiene que ser direccionada a satisfacer una necesidad de aprendizaje, por ello deberá ser creativa al aplicar una metodología.

Hay muchísimos libros que referencian a las sucesiones, pero varios se limitan a conceptualizar a la sucesión como una lista de números en un orden específico (p. 698) como se indica en el capítulo 11 (“Sucesiones, series y el teorema del binomio”) del libro *Álgebra intermedia* de Allen (2008). Del mismo modo, Mata (2007), en su libro *Álgebra lineal* (capítulo 6 “Sucesiones y series numéricas”), define a la sucesión como cualquier lista ordenada de números reales (p. 1).

Otros autores no referencian a la sucesión, ni en el índice ni en el contenido del texto como se puede observar en los libros *Análisis matemático* de Lara Prado & Arroba (2014), *Matemáticas superiores, precálculo: teoría y ejercicios* de Galindo de la Torre (2012) y *Matemáticas superiores, cálculo diferencial e integral* de Galindo de la Torre, (2011) por citar algunos ejemplos, que son textos de teoría matemática más avanzada. Sin embargo, el mismo Lara Prado, (2013), en su libro *Ecuaciones diferenciales ordinarias* en el proceso interactivo de Picard, menciona el paso 3: “Por inducción, generamos una sucesión de funciones $\{y_n(x)\}$, la cual, bajo las hipótesis hechas sobre $f(x, y)$, converge a la solución $y(x)$ del problema del valor inicial” (p. 13). Note que el autor da por sobreentendido que el estudiante viene con un conocimiento claro de lo que es una sucesión.

En el libro *Fundamentos de Matemática* de Benalcázar Gómez, (2014), el capítulo 10 (p. 391), referido a sucesiones reales convergentes inicia con la definición de sucesión real como función, siendo este caso el otro extremo. El autor, imagina al estudiante como un erudito en la ciencia al presentar en sus textos teorías muy técnicas, situación que puede llevar a un posible desapego y desmotivación al tema. El

método que utiliza el autor está dedicado a un grupo minoritario de personas, consecuentemente, implica deficiencias permanentes, profundizando los vacíos que de por sí ya traen la mayoría de los estudiantes.

Existen escritos referidos a cuentos matemáticos, que buscan a través de la literatura que las personas encuentren en el entorno la relación que existe con las matemáticas, por ejemplo, con la naturaleza, con las plantas, con los animales o simplemente con las cosas que hacen. Este es el caso de “El jardín matemáticamente anotado” y “Diseños matemáticos y arte” de Pappas (2007) en Material para “Apoyo al último año a la secundaria para la articulación con el nivel superior” del Ministerio de Ciencias y Tecnología de la Nación de Argentina. Varios de estos eventos, hechos o acontecimientos se basan en estructuras geométricas como los espirales, que son familias de curvas bi y tridimensionales, los fractales, las redes que se confabulan con el número de Fibonacci, entre otras. La lectura hace una continua abstracción para lograr descifrar la literatura del cuento. Su lenguaje es interesante, pero a la vez confuso para un joven nobel en matemáticas superiores.

Llevar la literatura y las matemáticas de forma comprensible, amigable puede ser una metodología bastante interesante en la búsqueda del entendimiento fácil de la matemática mediante la apropiación del estudiante de forma sutil y atrevida del contenido del cuento.

En el cuento “El jardín del conde” de Martín, (2016) el autor, a partir de un jardín geométrico, acerca al lector a lo que es una sucesión y una progresión. Si bien la literatura usa un lenguaje fácil y accesible, aún no va de la mano de forma tácita con la parte matemática.

“Euler y la conjetura de Fermat sobre números triangulares” de Sánchez Muñoz, (2011) citado en *Pensamiento matemático*, es una historia matemática que relata como Fermat encuentra la existencia de infinitos números triangulares bi cuadráticos, que le

lleva a pensar en sucesiones divergentes. Esta estructura literaria es útil, puesto que la historia matemática en un cuento matemático le da sobriedad y le vuelve atractivo al lector.

Todo esto nos lleva a fomentar una metodología que le permita al estudiante integrar el lenguaje y la matemática como menciona Conde Abellán, (2019): “Aunque no lo creas, desde los albores de la humanidad, las matemáticas nacen desde el mismo momento en que los hombres sienten la necesidad de expresarse de una forma u otra con todo aquello que les rodea”. Julio Rey Pastor en su discurso titulado “Álgebra del lenguaje” dice: “no nos asustemos pues, de esta imprevista amistad del ‘álgebra y la poesía’. Peralta (1998) señala: “Si juntamos ambas las buenas sensaciones se incrementan; por ello no podemos renunciar a disfrutar la literatura y las matemáticas, y sus complejas relaciones”, idea mencionada en la *Revista Guía de lectura, Matemáticas literarias* del Gobierno de Aragón, (2013), lo que conduce a contar con personas que tengan fuertes habilidades en ciencias matemáticas con buen dominio del lenguaje.

Esto se conseguirá editando un texto que trabaje desde el pensamiento matemático con literatura amigable pero sobria, que muestre en situaciones concretas el camino que recorrió el concepto de sucesión desde su descubrimiento hasta nuestros días, así como su empleo en múltiples aplicaciones.

¿Qué actividades interactivas tecnológicas de aprendizaje se deberían incluir para aplicarlas en la enseñanza de la teoría de sucesiones?

Crear un instrumento a partir de la producción de textos que desarrolle una interfaz gráfica didáctica, creativa y amigable que conduzca a receptor los conocimientos y aprendizajes matemáticos en forma más eficiente, con mejor información para lograr potencializar las capacidades cognitivas, psicomotrices e intelectuales de los estudiantes.

Considerar enlaces en la Web para trabajar en plataformas de forma interactiva con los contenidos que de manera sistemática nos lleven hacia la conceptualización de la sucesión, partiendo desde conocimientos básicos hasta los más complejos para dar el salto al uso de aplicaciones, análisis y enfoques.

Ejemplos de contenidos

- ✓ El área del círculo es sucesión de áreas de polígonos inscritos
- ✓ La diferencia entre el círculo y el polígono inscrito
- ✓ Círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros
- ✓ La diferencia entre el perímetro de la circunferencia y el perímetro del polígono encerrar el perímetro del círculo entre un polígono circunscrito y un polígono inscrito de un mismo número de lados
- ✓ El método de Herón para extraer raíces cuadradas
- ✓ El método de Newton para aproximar números trascendentes
- ✓ Operaciones de sucesiones
- ✓ La definición de Cauchy para definir convergencia
- ✓ Criterios para comparación de series
- ✓ Método mejorado de Newton a las perturbaciones de la raíz de Vieta o linealización de un polinomio
- ✓ Método de Newton para resolver una ecuación trascendente
- ✓ Método de procesos iterativos de Joseph Raphson
- ✓ Método de la falsa posición de Bolzano
- ✓ Método de los intervalos encajados de Carl Weierstrass

¿De qué manera el docente puede utilizar una metodología y una plataforma tecnológica adecuada y adaptable para que el estudiante encuentre la conceptualización apropiada de sucesión?

En cuanto a la metodología, haciendo uso del texto físico narrativo de cuentos matemáticos, luego seleccionando varios de ellos para transformarlos en cuentos que toman vida con el empleo de diversos recursos digitales (TIC), que coadyuvan para fundamentar con argumentación lógica las situaciones problemas del entorno, procesando y organizando la información de forma adecuada, aplicando modelos complejos de índole algebraica o funcional, con la ayuda de métodos o algoritmos matemáticos (Ministerio de Educación 2016, p. 1251), de modo que se constituya en un instrumento didáctico mediante el cual el estudiante asimile el conocimiento.

El uso del lenguaje matemático debe ir de la mano del lenguaje oral. Se dice que la matemática se aprende fundamentando. La justificación que el estudiante realiza en su mente debe ser expresada, comunicada; al repetir esta acción en cada proceso se forma un hábito. Esto permite que la matemática se conecte con el lenguaje y es precisamente la narrativa la metodología que potencia este trabajo. Las narrativas son cuentos matemáticos, textos que son dinámicos porque avanzan conforme el ritmo que impone el estudiante, acompañadas de animaciones y que, mediante recursos de voz, audio, visión, lectura sostenida y escritura, se puede obtener una mejor comprensión.

El primer proceso está basado en un relato de narrativas históricas secuenciales a través de pictogramas “Frameworks”, asociados al entorno de las matemáticas, que contribuyen al desarrollo de la memoria cognitiva.

El segundo proceso corresponde al desarrollo de la memoria visual y el razonamiento lógico, que hacen uso del aplicativo matemático Software “Geogebra”, que permite realizar cálculos, presentar resultados y determinar verificaciones.

La propuesta de enseñanza para el aula se basa en el reconocimiento de los procesos de variación ocultos o escondidos subyacentes en las sucesiones utilizando lúdica geométrica de inicio como:

- ✓ Diferencia entre el círculo y el polígono inscrito a través de las áreas, de sus diámetros y de sus perímetros y expresar de este modo al área del círculo como una sucesión de áreas de polígonos inscritos.
- ✓ Utilizando proporciones se trabaja con los teoremas de Eudoxo: círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros.
- ✓ La diferencia entre el perímetro de la circunferencia y el perímetro del polígono.
- ✓ Encajar el perímetro del círculo entre un polígono circunscrito y un polígono inscrito de un mismo número de lados.

Esta primera parte conduce a trabajar en las observaciones y abstracciones, el registro de datos y análisis de las regularidades para descubrir patrones, esto con el fin de que el estudiante utilice sus preconcepciones y sin definiciones predeterminadas pueda hacer un acercamiento al concepto de sucesión y patrón.

¿Cómo lograr a través del uso eficiente de tecnologías motivar a los estudiantes para que conceptualicen eficientemente la teoría de sucesiones?

El uso de celulares, tabletas, laptops, computadores como recursos en la educación es una necesidad cada vez más imperiosa y facilita el desarrollo del currículo. (Ministerio de Educación, 2016, p. 855). Conversar con los estudiantes sobre el tiempo que es medible en un cronómetro que todo equipo electrónico posee, es un buen ejemplo de lo que es una sucesión finita o infinita, los bits son caracteres que responden a una sucesión, las sucesiones son conjuntos de números finitos o infinitos que guardan una estructura o un patrón. El patrón se transforma en una expresión recursiva que bien utilizada y ayudada por la tecnología, el estudiante puede discernir y concretar con facilidad varios conceptos.

Ver un gráfico en pantalla de un computador le lleva al estudiante a entender de forma rápida la diferencia, por ejemplo, que existe entre sucesión y función logrando

conceptualizar más por observación que por lógica. Si bien es cierto, que la matemática obliga a representar de manera formal a la sucesión o a la función, no es menos cierto que un gráfico visualizado a través de la tecnología, que puede cambiar cada vez que se ingresa un nuevo valor que se asigna a un parámetro o a una variable, tan solo con un clic, ayuda en mucho a cumplir los objetivos.

Utilizar las TIC en una producción combinada oral y escrita, elevada a un recurso audiovisual, permite que el estudiante pueda encontrar la simbiosis que él requiere para que la ciencia matemática se vuelva una ciencia amiga, más cuando entiende y de da cuenta de que la tecnología, que es lo que le gusta, le ofrece un nuevo concepto de calidad de vida, algo distinto y que hoy disfruta precisamente gracias a las matemáticas.

En esta propuesta se parte de que los estudiantes del siglo XXI deben dominar las 3R y 4C en el conocimiento: lectura (Reading), escritura (wRiting), aritmética (aRithmetic), pensamiento crítico y enfocado a la solución de problemas (cRitic), creatividad e innovación (Creativity), comunicación (Communication) y colaboración (Collaboration). (Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología y Educación, 2014)

Problemas en la enseñanza de la Matemática

El continuo cambio que imprime el Ministerio de Educación a los contenidos curriculares desde 2011 es un problema para la enseñanza de la Matemática, no por lo dinámico, ya que “las concepciones del currículo están profundamente adheridas a una concepción para la cual la educación se reduce a la dinámica entre enseñanza y aprendizaje” (Molina, 2006, p. 50). Esta ciencia que de por sí es abstracta, para la gran mayoría de estudiantes sigue siendo inaccesible. Los textos impresos en marzo de 2020 por el Ministerio de Educación muestran otra presentación de los currículos. Esta vez, las unidades están desarrolladas bajo una sinergia entre los tres bloques: Álgebra y

Funciones; Geometría y Medida; y, Estadística y Probabilidad, bloques que aparecían en currículos anteriores como entes adyacentes, pero no incluyentes en la unidad de estudio, lo que constituye una novedad, un avance.

La simbología matemática que traen los nuevos textos corresponde a la de una matemática muy formal, lo que puede causar que en forma rápida los estudiantes encuentren desmotivación por esta ciencia al presentar un lenguaje complicado. Expreso, no por la autoría o los encargados de aprobar los contenidos, puesto que la Matemática debe ser siempre formal, sino porque los estudiantes a este nivel requieren de metodologías más inclusivas que faciliten la comprensión inmediata, que permitan la transición posterior hacia la rigidez con la que se presentan los contenidos matemáticos superiores.

Sin embargo, siguen apareciendo desconexiones en los contenidos que pueden ahondar en serios problemas, como indica Edward de Bono citado en *La Matemática Superior y las competencias*, (Córdova Rosas & Oliveros, 2005, p. 56) “vivimos inmersos en una caja”, debido a que existen muchos vacíos en el conocimiento que causan inseguridad a medida que aumenta el contenido del currículo.

El tiempo que se dedica a la asignatura es otro inconveniente. El ente regulador deja abierta a las instituciones educativas la carga horaria. El número de horas es un indicador que marca la diferencia en el aprendizaje. En la educación, “existe una correlación positiva entre el tiempo total dedicado al estudio de las Matemáticas y el desempeño general en esta disciplina”. (Grouws & Cebulla, 2000, p. 11)

El docente debe trabajar con innovación y creatividad en sus clases para causar en el estudiante el ambiente y la actitud que le lleve a ser el descubridor y el constructor de sus habilidades y competencias y de un aprendizaje significativo. El menor impacto en los estudiantes se produce por la habilidad que tiene el docente para desarrollar su clase.

En ese contexto, se debe inducir a la construcción del nuevo conocimiento, cuando nos referimos a los conceptos matemáticos que no deben ser proporcionados por el docente. El papel del docente es inducir al estudiante para que él cree el concepto, no en la presentación rígida que exige la matemática pero sí bajo sus palabras, su criterio o su propia realidad; que se transforme en una experiencia enriquecedora y productiva tanto para el docente cuanto para el estudiante, así se entiende a Stenhouse citado por Molina cuando se refiere al currículo fundamentalmente como “una tentativa para comunicar los principios y rasgos esenciales de un propósito educativo...”, estos principios involucran cosas como “qué es lo que debe aprenderse y enseñarse” y “cómo debe aprenderse y enseñarse”, lo cual es por demás consecuente con su concepción de que tanto la escuela como la enseñanza se definen por la responsabilidad de “planificar y organizar el aprendizaje” (Molina, 2006, p. 50).

Paradigmas y enfoques

Tanto el concepto de zona de desarrollo próximo de Vygotsky como la idea de andamiaje de Bruner se utilizan en el estudio. El punto de partida es reconocer la diferencia entre lo que el estudiante es capaz de realizar por sí solo con lo que podría hacer con el apoyo de sus pares y la guía del docente. Así, “los procesos recursivos forman una parte importante de este acercamiento didáctico, y por lo cual deberían ser introducidos en el salón de clase” (Mochón, 1998, p. 70). De esta forma, el docente al generar la situación problema crea el ambiente de trabajo en el que provee procesos graduales, como es, iniciar una primera parte con las creencias del estudiante, luego en una segunda parte, y como consecuencia del debate, “comenzar con la construcción de tablas de acuerdo a su proceso recursivo y posteriormente apoyarse en gráficas para un mejor análisis de la situación real” (p. 70), situación que permite ampliar la zona de

desarrollo próximo del menos experto para llegar a un aprendizaje de mayor comprensión y, por último, en una tercera parte, aplicar el conocimiento adquirido con familias de funciones, relaciones o representaciones similares a la situación problema y, por observación de las gráficas y los resultados de los procesos recursivos, alcanzar el conocimiento por aprendizaje significativo.

La metodología de enseñanza de la matemática insiste en dos procesos: uno apegado a una lógica rígida, para resolver ejercicios de razonamiento y el otro, la repetición insistente en procura de fijar procesos y operaciones mecánicas (Tapia Barrera & Pulla Salinas, 2011, p. 10).

La matemática rigurosa sigue pasando por el conductismo de Skinner que dominó la enseñanza y el aprendizaje gran parte del siglo XX. El avance de la tecnología que imprime el siglo XXI sugiere repensar en el objetivo de la enseñanza.

El docente debe involucrarse con los estudiantes más débiles o pasivos, aquellos que requieren orientación académica, ese es su reto. El bajo nivel de comprensión de la matemática es un factor que incide a tener estudiantes pasivos. Si el docente no actúa de forma inmediata, los resultados pueden ser al final muy frustrantes. El pensamiento del estudiante le conduce a creer que es inútil para esta ciencia.

El nivel de compromiso de un estudiante y la actitud de él y del docente influyen en el grado de motivación y respuesta del estudiante en su aprendizaje. Benjamín Bloom citado por Bustos (1997) menciona que en el proceso de enseñanza y aprendizaje intervienen tres aspectos: el cognitivo, el afectivo y el psicomotor que persigue la metodología de este trabajo.

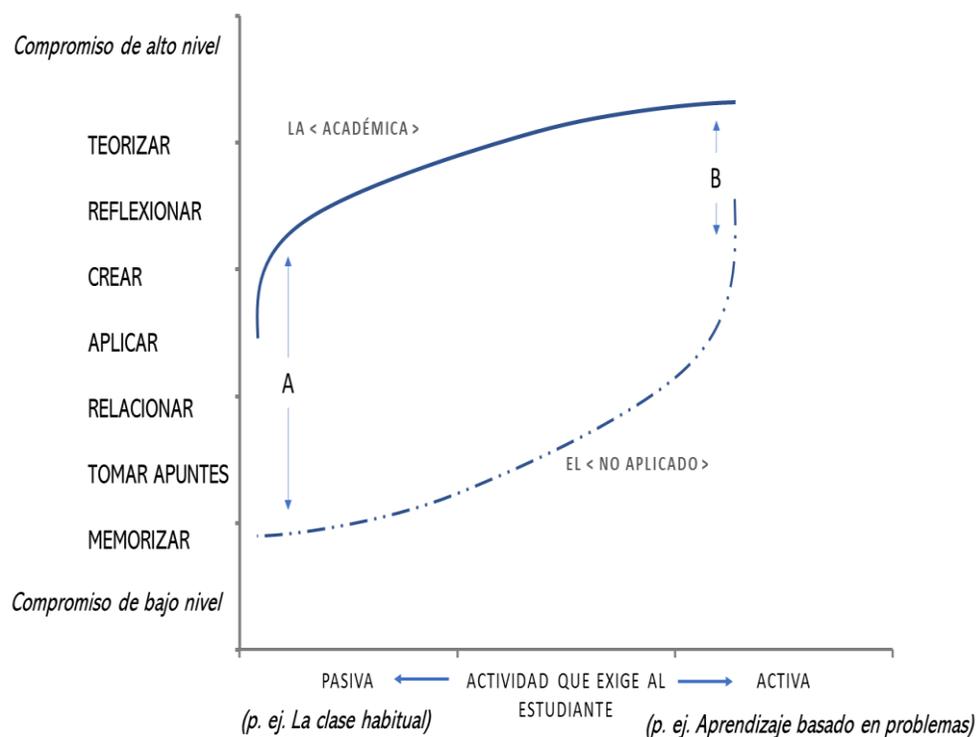
Para Piaget, citado por Regader (2017), existen dos tipos de aprendizaje: uno de ellos es el verdadero aprendizaje que consiste en la adquisición de una nueva estructura de operaciones mentales a través del proceso de equilibrio, que es más estable y duradero porque puede ser generalizado, mientras que el otro es el que se

alcanza con un enfoque constructivista que pone énfasis en la figura del aprendiz como el agente, que en su última instancia es el motor de su propio aprendizaje al que se le debe brindar competencias en un entorno agradable, creativo e innovador.

Este enfoque, continúa Regader, enfatiza la autonomía de la que disponen los individuos <algunos menos comprometidos> a la hora de interiorizar todo tipo de conocimientos. Es la persona quien sienta las bases de su propio conocimiento, dependiendo de cómo organiza e interpreta la información que capta del entorno.

Figura 1

Orientación del estudiante, método de enseñanza y nivel de compromiso



Nota. En el gráfico se muestra el nivel de compromiso que tienen dos estudiantes ante la presencia de un problema matemático a ser resuelto. Tomado de Biggs (2006).

Mientras el estudiante menos comprometido piensa en memorizar, el estudiante más comprometido se encuentra en la etapa entre la reflexión y la teorización, y cuando este logra interiorizar el conocimiento, el primer estudiante se encuentra teorizando la solución.

Para identificar pronto a este grupo de estudiantes, la investigación recurre previamente a las teorías de los estilos de aprendizaje de Kolb y la Triádica de Waldemar de Gregory, las dos son complementarias para ubicar con mejor exactitud el potencial y nivel de aprendizaje que desarrolla el estudiante.

De acuerdo con Mariana (2000), “los estudiantes efectivos dependen de cuatro modos de aprendizaje: experiencia concreta (EC), observación reflexiva (OR), conceptualización abstracta (CA) y experimentación activa (EA). Esto significa que:

- ✓ Tienen que ser capaces de adentrarse completa y abiertamente, sin ningún prejuicio, en nuevas experiencias (EC).
- ✓ Tienen que ser capaces de reflexionar y observar estas experiencias desde varias perspectivas (OR).
- ✓ Tienen que ser capaces de crear conceptos que integren sus observaciones en teorías lógicas (CA).
- ✓ Tienen que ser capaces de usar estas teorías para tomar decisiones y resolver problemas (EA)”.

Figura 2

Esquemas de los estilos de aprendizaje



Nota. El gráfico representa los diversos esquemas de estilos de aprendizaje. Tomado de www.actualidadenpsicologia.com.

La importancia de identificar pronto las fortalezas de los estudiantes para que la información construida en el aula se transforme en conocimiento y de esta forma la experiencia de cómo aprender privilegie al qué aprender fundamenta lo que “un aprendizaje óptimo requiere de las cuatro fases, por lo que será conveniente presentar nuestra materia de tal forma que garanticemos actividades que cubran todas las fases de la rueda de Kolb. Con eso, por una parte, facilitaremos el aprendizaje de todos los alumnos, cualquiera que sea su estilo preferido y, además, les ayudaremos a potenciar las fases con los que se encuentran más cómodos” (Secretaría de Educación Pública de México, 2004, p. 23), logrando que el aprendizaje tenga un cognitivo a largo plazo.

A los estudiantes se les aplica los test (Anexo 6 y Anexo 7) para evaluar los cuatro modos de aprendizaje de Kolb y los tres cerebros de Gregory.

Para evaluar se realizan los siguientes pasos con el test de Kolb:

- ✓ Registrar los valores de los estilos de aprendizaje sobre los ejes.
- ✓ Proyectar sobre el plano, la coordenada en cada cuadrante.
- ✓ Formar la cuadrícula entre estos cuatro puntos.
- ✓ Trazar las diagonales para encontrar el punto de intersección.

Algunos casos requieren de mayor información especialmente cuando el punto de intersección que define el estilo de aprendizaje está ubicado en zonas próximas al centro de origen del cuadrante, entonces, la Teoría triádica de Gregory actúa como complemento para definir el lóbulo más desarrollado del estudiante.

Esta teoría fundamenta que el cerebro central es confundido con el límbico derecho y a partir de esta confirmación, el ser humano posee tres lóbulos: el derecho, el central y el izquierdo. Se sustenta en enfoques neurocientistas como Sigmund Freud, Alexander Luria, Jean Piaget y Paul McLean. El enfoque considera un conjunto de tres elementos: dos en competencia o contradicción y un tercero en cooperación; o dos en cooperación y un tercero en competencia o contradicción.

Para entender la función del cerebro en el contexto de educación, se buscan formas de hacer “tomografías” circunstanciales de los tres cerebros para decidir en qué y cómo intervenir educacionalmente. Para eso se desarrollaron instrumentos “reveladores” del cociente triádico para cada uno de los cuatro niveles.

- ✓ Será alguien con predominio de un lado del cerebro sin perder la conexión y proporcionalidad con los otros dos.
- ✓ Será un especialista (cerebro lógico) ubicado en el contexto holístico (generalista) y que también tiene buena conexión con la realidad práctica (cerebro central).
- ✓ Será un generalista (predominio del cerebro intuitivo) con capacidad lógico-crítica, y manteniendo los pies en tierra.
- ✓ Será un administrador pragmático (predominio del lado central) comprometido con la vida global y capaz de investigar y analizar científicamente su realidad.

La aplicación del Revelador del cociente triádico (Anexo 8) permite registrar de manera más objetiva el nivel de desarrollo de los tres cerebros de cada uno de los estudiantes y, a su vez, del grupo, lo cual constituye una herramienta valiosa para los docentes al momento de generar estrategias metodológicas, enriqueciendo cada vez más la práctica pedagógica. (Pérez Carrero, Rodríguez Moreno & Sánchez Mayorga, 2015).

Tabla 20*Interpretación de un test RCTM*

Cerebro	Dominante	Cerebro subdominante		
		Derecho	Central	Izquierdo
Central	Es práctico y lucha por la sobrevivencia.	Líder humanista, populista, intuitivo emocional		Líder calculista
Derecho	Creativo, sensible, afectuoso, Soñador.		Sensible, práctico, soñador con los pies sobre la tierra	Racional humanista. Se ubica lejos de la realidad.
Izquierdo	Pensador intelectual.	Teórico, distraído	Consciente, raciocina en función de la sobrevivencia	

Nota. Fuente: Interpretación de un test RCTM.

Esta nueva visión implica el replanteamiento de la educación, a fin de desarrollar las competencias de la investigación y comprensión con el comando de su cerebro lógico; la visión creativa, afectiva y prospectiva, dirigido por el cerebro emocional, y la gestión transformadora, liderada por el cerebro operativo. (Tapia Barrera & Pulla Salinas, 2011).

La tabla 21 extraída del *Manual de estilos de aprendizaje* (Secretaría de Educación Pública de México, 2004, p. 46) muestra las estrategias que son aplicables en cualquier momento de la clase e independientemente del estilo de aprendizaje que prevalezca en los alumnos. La aplicación de estas depende mucho de la percepción del docente respecto a su grupo y de la información y contenidos a tratar; sin embargo, puede establecerse una relación entre las estrategias, los modelos de estilos de aprendizaje y la aplicación de cada una de ellas.

Tabla 21*Estrategias y estilos de aprendizaje*

Estrategia	Modelos de estilos de aprendizaje	Aplicación
Metáfora	Modelo de los hemisferios cerebrales	Presentación de un nuevo tema.
	Modelo de Felder y Silverman	Conexión de conceptos.
	Modelo de inteligencias múltiples	Estimulación de la imaginación.
	Modelo de Kolb	Medio para organizar y recordar la información.
	Modelo de los cuadrantes cerebrales	Favorece los procesos de clasificación e integración.
Pensamiento visual	Modelo de programación neurolingüística	Recordar información. Efectuar funciones matemáticas.
	Modelo de los hemisferios cerebrales	Representación gráfica de conceptos, ampliando la comprensión de los mismos. Resolución de problemas que impliquen relaciones espaciales. Favorece el desarrollo de capacidades visuales, la clarificación del pensamiento y la comunicación de ideas a otros.
Fantasía	Modelo de los hemisferios cerebrales	Resolución de problemas.
	Modelo de Felder y Silverman	Tratamiento de temas que requieren de concienciación y empatía, como los valores, los derechos humanos, preservación del medioambiente, etc. Promueve la experiencia cinestésica y la respuesta emocional. Estimula el involucramiento.

Estrategia	Modelos de estilos de aprendizaje	Aplicación
Experiencia directa	Modelo de Kolb Modelo de inteligencias múltiples Modelo de los cuadrantes cerebrales	Estimula un involucramiento más personal. Fomenta un conocimiento propio. Fomenta las habilidades interpersonales. Favorece el desarrollo de la empatía. Favorece un sentido del todo más que de las partes.

Nota. Fuente: Estas estrategias fueron retomadas y adaptadas del libro de Verlee Williams, Linda, *Aprender con todo el cerebro*. Ed. Martínez Roca, España, 1995.

La tabla 22 extraída del *Manual de estilos de aprendizaje* (Secretaría de Educación Pública de México, 2004, p. 36) se refiere al modelo tradicional de los hemisferios cerebrales que es una teoría diádica y muestra las características de los hemisferios relacionados con el pensamiento, habilidades asociadas y comportamiento en el aula.

Tabla 22

Modelo tradicional de los hemisferios cerebrales

	Hemisferio lógico (normalmente el izquierdo)	Hemisferio derecho (normalmente el derecho)
Modos de pensamiento	Lógico y analítico Abstracto Secuencias (de la parte al todo) Lineal Realista Verbal Temporal Simbólico Cuantitativo Lógico	Holístico e intuitivo Concreto Global (del todo a la parte) Aleatorio Fantástico No verbal Atemporal Literal Cualitativo Analógico

	Hemisferio lógico (normalmente el izquierdo)	Hemisferio derecho (normalmente el derecho)
Habilidades asociadas	<p>Escritura</p> <p>Símbolos</p> <p>Lenguaje</p> <p>Lectura</p> <p>Ortografía</p> <p>Oratoria</p> <p>Escucha</p> <p>Localización de hechos y detalles</p> <p>Asociaciones auditivas</p> <p>Procesa una cosa a la vez</p> <p>Sabe cómo hacer algo</p>	<p>Relaciones espaciales</p> <p>Formas y pautas</p> <p>Cálculos matemáticos</p> <p>Canto y música</p> <p>Sensibilidad al color</p> <p>Expresión artística</p> <p>Creatividad</p> <p>Visualización, mira la totalidad</p> <p>Emociones y sentimientos</p> <p>Procesa todo al mismo tiempo</p> <p>Descubre qué puede hacerse</p>
Comportamiento en el aula	<p>Visualiza símbolos abstractos (letras, números) y no tiene problemas para comprender conceptos abstractos.</p> <p>Verbaliza sus ideas.</p> <p>Aprende de la parte al todo y absorbe rápidamente los detalles, hechos y reglas.</p> <p>Analiza la información paso a paso.</p> <p>Quiere entender los componentes uno por uno</p> <p>Le gustan las cosas bien organizadas y no se va por las ramas.</p> <p>Necesita orientación clara, por escrito y específica.</p> <p>Se siente incómodo con las actividades abiertas y poco estructuradas.</p> <p>Le preocupa el resultado final.</p> <p>Le gusta comprobar los ejercicios y le parece importante no equivocarse.</p> <p>Quiere verificar su trabajo.</p> <p>Lee el libro antes de ir a ver la película.</p> <p>Su tiempo de reacción promedio es de dos segundos.</p>	<p>Visualiza imágenes de objetos concretos, pero no símbolos abstractos como letras o números.</p> <p>Piensa en imágenes, sonidos, sensaciones, pero no verbaliza esos pensamientos.</p> <p>Aprende del todo a la parte. Para entender las partes necesita partir de la imagen global.</p> <p>No analiza la información, la sintetiza.</p> <p>Es relacional, no le preocupa las partes en sí, sino saber cómo encajan y se relacionan unas partes con otras.</p> <p>Aprende mejor con actividades abiertas, creativas y poco estructuradas.</p> <p>Le preocupa más el proceso que el resultado final.</p> <p>No le gusta comprobar los ejercicios, alcanza el resultado final por intuición.</p> <p>Necesita imágenes, ve la película antes de leer el libro.</p> <p>Su tiempo de reacción promedio es de tres segundos.</p>

Nota. Fuente: Verlee Williams, Linda, *Aprender con todo el cerebro*, Ed. Martínez Roca, España, 1995.

Si se efectúa una extrapolación, la teoría triádica aporta:

Tabla 23

Característica del cerebro central

	Cerebro central
Modos de pensamiento	Planificador
Habilidades asociadas	Organiza, delega, evalúa actividades.
Comportamiento en el aula	Le gustan las cosas bien organizadas y no se va por las ramas. Busca resultados

La evaluación de los test facilita al docente estructurar grupos de tres estudiantes con estilos de aprendizaje y tipos de cerebro dominantes y subdominantes variados. Definidos e identificados así los estudiantes, se intenta que los grupos de trabajo tengan equilibrio al estar conformados por un estudiante creativo, un estudiante planificador y un estudiante lógico. La interacción del grupo permitirá que aquel miembro con falencias para la matemática se sienta más seguro.

El estudiante lógico que maneja con mayor facilidad la parte verbal y escrita puede estructurar con ayuda del estudiante creativo narrativas tipo cuentos matemáticos; las actividades que demande el trabajo son organizadas por el estudiante planificador estructurando de esta manera la base de un paradigma educativo que se soporta en un paradigma de pensamiento complejo sobre la base de estrategia y no de programa, según Caicedo Nagles & Calderón López, (2016).

Font (2003) es citado en el currículo diseñado por el Ministerio de Educación (2016) que toma como base su perspectiva epistemológica emergente de la Matemática

denominada pragmático-constructivista (considerada una síntesis de diferentes visiones: pragmatistas, convencionalistas, constructivistas, antropológicas, semióticas, falibilistas, socio-históricas y naturalistas), cuyo modelo epistemológico considera que el estudiante alcanza un aprendizaje significativo cuando resuelve problemas de la vida real aplicando diferentes conceptos y herramientas matemáticos. (p. 221)

La metodología que se propone trabaja en un enfoque cognitivo colaborativo para enseñar a pensar denominado ACODESA, que tiene como propósito desarrollar la secuencia didáctica de las matemáticas como una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas. (Hitt & Cortés, 2009, p. 9)

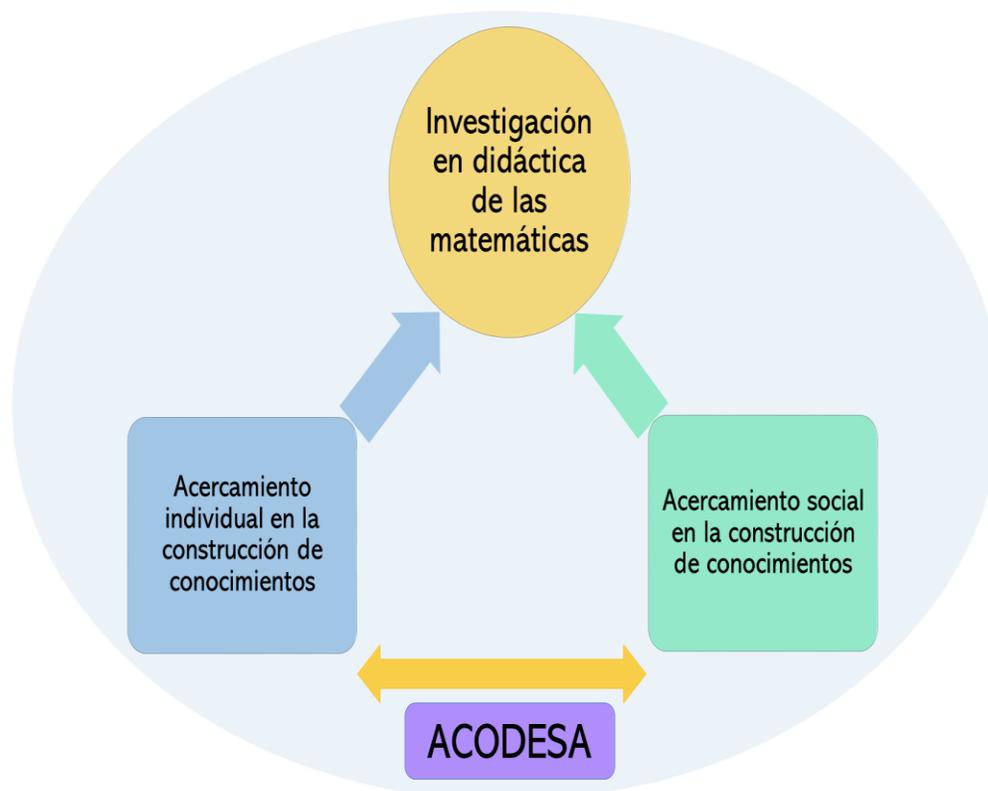
El docente presenta la situación problema en la narrativa del cuento matemático, que según MELS (2007) citado en Hitt (Seminario Repensar las Matemáticas, 2013) y la define cuando:

- a) La situación no ha sido previamente presentada en el curso del aprendizaje;
- b) La obtención de una solución satisfactoria requiere del uso de reglas o principios no aprendidos anteriormente.
- c) El producto o su forma esperada no ha sido presentada anteriormente. (Versión aligerada de situación didáctica de Brousseau, 1997)¹

¹<https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2013/01/s60-un-pequec3b1o-resumen.p>

Figura 3

Investigación en didáctica de las matemáticas



Nota. Tomado de <https://repensarlasmatemáticas.files.wordpress.com/2013>

El docente puede inducir posteriormente en los estudiantes a crear la situación problema mediante la escritura creativa que refuerza la elaboración de textos con valor estético, así, el grupo se ve inmerso en una suerte de autores de su propio conocimiento, donde se enfrenta “con una tarea no rutinaria, y sus actuaciones pueden servir como un puente para la comprensión y para la organización de acciones para la resolución de la tarea”, (Hitt, Seminario Repensar las Matemáticas, 2013, p, 12).

La metodología ACODESA menciona que en esta interacción social van apareciendo representaciones funcionales o representaciones espontáneas construidas por los estudiantes frente a una situación matemática que se traduce en un

conocimiento operativo antes de la acción, y el producto tangible (la representación exterior) permite al estudiante comprender la situación y actuar para resolverla (p. 11) Las representaciones funcionales contienen también características individuales, que son susceptibles de sufrir transformaciones para llegar a las representaciones institucionales (p. 12), llamadas así a las representaciones que se encuentran en libros de texto, o las utilizadas por los docentes en su enseñanza, o las que se encuentran en pantallas de un ordenador (p. 10) (Hitt, Seminario Repensar las Matemáticas, 2013). Los conceptos científicos están en las representaciones institucionales y son como “una guía propedéutica en el desarrollo de los conceptos espontáneos que vienen a ser las representaciones funcionales en ACODESA. De esta forma, el estudiante va formando sus conceptos.

Un concepto es una “idea importante”, un principio o una noción perdurable cuya importancia trasciende sus orígenes, disciplinas o marcos temporales. Los conceptos representan la comprensión que acompañará a los estudiantes en la aventura del aprendizaje durante toda la vida. Los ayudan a formular principios, generalizaciones y teorías. Los estudiantes utilizan la comprensión conceptual para resolver problemas, analizar cuestiones y evaluar decisiones que pueden tener un impacto en su vida, en su comunidad y en el resto del mundo.

En la metodología ACODESA se considerarán los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje para la comprensión conceptual, habilidades, indagación, modelos y tecnología, detallados en las siguientes tres tablas.

Los doce conceptos que se muestran en la tabla 24 favorecen la comprensión conceptual y ayudan a organizar las unidades de trabajo, así como la enseñanza y el aprendizaje. (Matemáticas-Internacional Baccalaureate, 2019).

Tabla 24*Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje (MAE). Comprensión conceptual*

Aproximación	Este concepto se refiere a una cantidad o a una representación que es casi correcta, pero no exacta.
Cambio	Este concepto se refiere a una variación de tamaño, cantidad o comportamiento.
Equivalencia	Este concepto se refiere a la calidad de idéntico o intercambiable, aplicada a enunciados, cantidades o expresiones.
Generalización	Este concepto se refiere a un enunciado general formulado sobre la base de ejemplos específicos.
Modelación	Este concepto se refiere a la manera en que se pueden usar las matemáticas para representar el mundo real.
Patrones	Este concepto se refiere al orden subyacente, la regularidad o la predictibilidad de los elementos de un sistema matemático.
Cantidad	Este concepto se refiere a una cuantía o un número.
Relaciones	Este concepto se refiere a las conexiones existentes entre cantidades, propiedades o conceptos, que pueden expresarse en forma de modelos, reglas o enunciados. Las relaciones ofrecen a los alumnos oportunidades de explorar patrones en el mundo que los rodea.
Representación	Este concepto se refiere a la utilización de palabras, fórmulas, diagramas, tablas, gráficos, grafos y modelos para representar información matemática.
Espacio	Este concepto se refiere al marco de dimensiones geométricas que describe una entidad.
Sistema	Este concepto se refiere a grupos de elementos interrelacionados.
Validez	Este concepto se refiere a la utilización de matemáticas lógicas y bien fundamentadas para llegar a una conclusión cierta y precisa o a una interpretación razonable de resultados.

Nota. Fuente: Matemáticas-Internacional Baccalaureate, (2019).

La tabla 25 muestra las habilidades de los enfoques del aprendizaje que se clasifican en cinco categorías que son comunes a todos los programas de educación. Dentro de cada categoría, los programas identifican habilidades concretas que pueden presentarse, practicarse y consolidarse dentro y fuera del aula. (Matemáticas-Internacional Baccalaureate, 2019).

Tabla 25

Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje (MAE). Habilidades

Categoría	Indicador de habilidad
Habilidades de pensamiento	Tener en cuenta la prioridad y el orden de precedencia al resolver problemas.
Habilidades sociales	Ayudar a los demás a obtener buenos resultados durante el trabajo en grupo.
Habilidades de comunicación	Organizar e interpretar datos utilizando herramientas tanto analógicas como digitales.
Habilidades de autogestión	Ejercitar la capacidad de atención y concentración al resolver múltiples problemas.
Habilidades de investigación	Usar una variedad de tecnologías y plataformas mediáticas, incluidas las redes sociales e Internet, para extraer información.

Nota. Fuente: Matemáticas-Internacional Baccalaureate, (2019).

En la metodología, los estudiantes deben introducir de forma adecuada los procesos de indagación matemática, utilización de modelos matemáticos y el uso de la tecnología, como se muestra en la tabla 26. Estos procesos no deben ser tratados de modo aislado. (Matemáticas-Internacional Baccalaureate, 2019).

Tabla 26

Enfoques de la enseñanza y aprendizaje (MAE), indagación, modelos y tecnología

Indagación matemática	Modelos matemáticos	Tecnología
Fomenta el aprendizaje a través de la experimentación, el cuestionamiento y el descubrimiento. En las clases del bachillerato, los estudiantes deben, por lo general, aprender matemáticas por medio de la participación activa en actividades de aprendizaje, en lugar de ser receptores de la enseñanza.	Es una técnica importante para resolver problemas y entender el mundo real. A menudo, se emplea para ayudarnos a entender mejor una situación, para comprobar los efectos de un cambio o para fundamentar la toma de decisiones. Interesar a los alumnos en la modelización matemática será, por lo tanto, muy beneficioso. Es una de las habilidades matemáticas más útiles para que los estudiantes tengan éxito en los diversos cursos y carreras profesionales, tanto en el ámbito de las matemáticas como en otros.	Se puede utilizar para potenciar la visualización y ayudar al estudiante a comprender conceptos matemáticos. Puede ser útil en la recopilación, registro, organización y análisis de datos. El uso de la tecnología aumenta la viabilidad para que los estudiantes trabajen en contextos de problemas interesantes donde reflexionan, razonan, resuelven problemas y toman decisiones.

Nota. Fuente: Matemáticas-Internacional Baccalaureate, (2019). Organización del bachillerato, *Guía de Matemática Análisis y enfoques*, febrero, 2019. Elaborado por: Carrasco Fernando.

Esta metodología se basa en el trabajo colaborativo, en el trabajo en equipo, una interacción basada en sus diversos estilos de aprendizaje y en el potencial de sus pensamientos para que puestos en experiencia fluya la creatividad en ellos, para presentar la situación problema <de sucesión> a partir de una narrativa tipo cuento. En él, los estudiantes se transforman en los actores del texto narrativo, se involucran a

través del diálogo y literalmente se sumergen en la fantasía del mismo, para juntos ingresar en una experiencia rica en aprendizajes que con seguridad se volverán significativos y de largo plazo.

Metodología ACODESA

La metodología se divide en tres etapas donde la Pedagogía, la Matemática y la Tecnología cumplen una sinergia dando validez a la propuesta. Bajo este esquema, el estudiante transita de la imaginación a la concreción, luego es el paso a la abstracción y nuevamente regresa a un estado de concreción para asegurar el conocimiento.

Proposición de la situación problema

En lo profundo entre lo recto y lo redondo no hay diferencias.

- ✓ Diferencia entre el círculo y el polígono inscrito a través de las áreas, y expresar de este modo al área del círculo como una sucesión de áreas de polígonos inscritos.

Primera etapa

Se selecciona, se lee o se crea un cuento donde el estudiante imagina su escenario o su realidad. La metodología ACODESA se asienta en una parte imaginativa para establecer en principio un juicio de valor. La matemática tiene una base filosófica y la filosofía cuestiona.

Este campo imaginativo o escenario hipotético se llega a demostrar en la tercera etapa. En esta transición, la primera etapa constituye el paso de la imaginación a lo concreto.

Es una fase de actividad individual para comprender la situación problema, los estudiantes encuentran relaciones entre las representaciones, gráficas, números,

aspectos que generan el uso de diferentes tipos de funciones en el proceso de modelización matemática en la etapa 2 y en la etapa 3.

En esta etapa hay una comunión entre la lectura y la parte áspera de la matemática, el estudiante concibe variables, desarrolla su pensamiento a su albedrío y de esta manera establece un acercamiento de forma amigable con la matemática.

Al finalizar la etapa el estudiante va formando sus conclusiones.

Segunda etapa

Es la etapa del reconocimiento de funciones, los estudiantes se juntan y en un trabajo en equipo establecen actividades de discusión y validación, donde se explican los fenómenos físicos en un contexto de modelización matemática. Se hace uso de funciones conocidas que son susceptibles de aplicar a diferentes tipos de situaciones. Empiezan a generar datos y encuentran un modelo matemático que permita explicar el fenómeno y predecir lo que puede suceder en un momento dado.

Es un proceso de reconstrucción y autorreflexión, es un proceso algebraico, es un proceso de modelación.

El grupo de estudiantes hace uso del libro interactivo, el cuento recreado refuerza la lectura y para ello manejan los botones para regresar o adelantar la escritura, el audio texto ayuda en la comprensión de la lectura.

En esta fase el docente presenta fórmulas o representaciones institucionales como punto de partida para la apropiación del conocimiento, en razón de que se van generando o construyendo representaciones funcionales, por lo cual esta etapa es el paso de lo concreto a la abstracción.

Se elaboran tablas con los resultados que se obtienen de los cálculos, por lo que es imprescindible el uso de las TIC o la multimedia.

En un medio de discusión del grupo o debate en aula, la parte imaginativa que el estudiante adquirió en la primera etapa encuentra un acercamiento a la parte elemental de la situación problema del cuento. Aquí es donde el estudiante se autoevalúa y define si estaba bien o mal procesada la formulación realizada en la primera etapa, corrige, formaliza la matemática y obtiene conclusiones.

Tercera etapa

Es el proceso de institucionalización de la situación problema, se analizan parámetros de ciertas familias de funciones y es la parte final donde la matemática se la lleva al formalismo. Requiere la intervención y acompañamiento del docente como guía.

Es el paso de la abstracción a lo concreto, donde el docente puede provocar variaciones a partir de los modelos utilizados por los estudiantes en la primera etapa o a partir de las relaciones funcionales encontradas en la segunda etapa para que el estudiante deduzca nuevas relaciones funcionales que pasan a ser relaciones institucionales en la parte final, donde la matemática será llevada al formalismo aplicativo.

Esta representación institucional es la base y esencia de la parte digital embebida como acople a la validación. A través del software embebido se pasa a la parte formal de la matemática para correlacionar la fórmula con el gráfico y observar los cambios y diferencias que se obtienen cuando se manipulan variables o parámetros y emite sus conclusiones. De este modo se concreta el conocimiento.

Posteriormente el estudiante está listo para hacer uso de la aplicación con otro software o con otra representación institucional. El conocimiento adquirido es la fuente secuencial de nuevos cognitivos para el cálculo diferencial y análisis numérico. (Anexos 8, 9, 10, 11, 12, 13)

El docente debe ser proactivo y creativo en la guía, no debe inferir ni concluir que el concepto de sucesión está implícito en el cognitivo del estudiante. Hay que trabajar constantemente en el desarrollo del pensamiento en razón de que “los currículos no incluyen componentes instruccionales que de manera deliberada contribuyan a estimular formas de pensamiento dirigidas a complementar los esquemas lineales que tradicionalmente se han utilizado con mayor énfasis” (Sánchez Amestoy, 2012), por eso el papel del docente será siempre el de un guía constructor para enseñar a pensar que es distinto a dar pensando, así se concuerda con Ruiz Paredes, (2014) quien dice:

La metodología de trabajo se fundamenta en la participación activa, no solo del alumnado, sino por parte de nosotros mismos como docentes, para que los <estudiantes> consigan adentrarse en el análisis de los conceptos matemáticos procedentes del cuento (p. 389).

El estudiante en el proceso de aprendizaje es el único responsable de la construcción del nuevo conocimiento, su docente solo es un facilitador que enseña a saber hacer, mejorando de esta forma la efectividad de su enseñanza mediante el cambio en sus prácticas educativas. Se debe tener como premisa que “la calidad en la aplicación de la práctica de enseñanza influye considerablemente en el impacto que tiene el estudiante en el aprendizaje”. Si se trabaja con flexibilidad en los métodos, teorías y estrategias de enseñanza y con habilidad al diseñar el plan de clase, las sesiones y las prácticas no son mutuamente exclusivas o excluyentes; por el contrario, tienden a ser complementarias.

La abstracción del ambiente de aprendizaje y la forma como los estudiantes se relacionan con él deben ser regulados con cuidado, vigilados de cerca y escogidos concienzudamente, además de tomar en cuenta los intereses

y la trayectoria de los estudiantes. Las matemáticas que se enseñan y se aprenden deben parecer razonables; así tendrán sentido para los estudiantes.

(Grouws & Cebulla, 2000, p. 16)

Fundamentación conceptual

Fundamentación filosófica

El método de investigación responde a una fundamentación filosófica bajo la selección de los paradigmas positivista, hermenéutico, cualitativo.

La percepción varía en cada individuo, por lo que todo sujeto tendrá representaciones mentales que van complejizándose y transformándose en representaciones funcionales, que con un trabajo sociocultural colaborativo tiene opción a corregir errores, enriquecer el cognitivo y los procesos mentales, razón del paradigma positivista.

El filósofo Aristóteles, en su dialéctica y desde su perspectiva es el precursor de la sucesión, cuando se refiere a que las entidades matemáticas están provistas de sustancias compuestas y sensibles, tal cual un ser racional forjado de la divinidad, al que se le brindó pensamiento para valorar, crear y discernir lo bueno de lo malo; lo hermoso de lo feo; lo recto de lo redondo, lo geométrico de lo aritmético y Dios puso en la sucesión al fractal como el fenómeno extraño que se da en la naturaleza, tanto a nivel del macrocosmos como del microcosmos, que parece desvirtuar la teoría del caos y querer demostrar la existencia de un orden superior².

Todo objeto sustancial sensible posee dimensiones, y puede ser estudiado solo en cuanto que tiene cantidad, y a partir de esa propiedad proceder a sucesivas

²<https://filosofia.laguia2000.com/ciencia-y-filosofia/los-fractales>

sustracciones e investigaciones como de hecho hacen la geometría y la aritmética como ramas de la matemática³, que basan su teoría en el punto y el número, cimiento de la sucesión como principio y fin para comprender la realidad y transformarla, desde este sentido, el paradigma es hermenéutico.

Es cualitativo porque se recurre al método explicativo-causal para estudiar las causas, condiciones y por qué ocurre que el estudiante tiene dificultad para trabajar con una sucesión. El nivel de investigación es de tipo exploratorio, descriptivo, considerando el contexto para comprender los problemas que presentan los docentes en el marco de creer cómo enseñar la sucesión matemática, por lo que la subjetividad juega un rol desde el punto de vista de la realidad.

Fundamentación pedagógica

La fundamentación pedagógica de esta investigación se basa en un modelo auto-estructurante: el cognitivismo, constructivismo, constructivismo social (ACODESA) y modificabilidad cognitiva estructural, asegurando una enseñanza forjada con la construcción del conocimiento desde el interior de cada estudiante, como el centro sobre el que debe girar la actividad pedagógica que privilegia las estrategias por descubrimiento e invención, quedando el docente como un guía, acompañante o facilitador en todo el proceso.

La propuesta metodológica de enseñanza de las sucesiones busca que la simbología, estructuras, definiciones y notaciones usadas como representaciones institucionales no sean un obstáculo en el proceso de aprendizaje, sino que contribuyan a “la formación de esos individuos partícipes y descubridores de su propio aprendizaje y al desarrollo de competencias acordes con las necesidades de su entorno (Marcolini

³http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0188-66492017000100043

Bernardi, Sánchez Gómez & Rosso, 2008, p. 368), y que sean capaces de describir o representar a través de diversos sistemas como:

- ✓ Representación escrita para comunicar las conclusiones que se establezcan de las observaciones.
- ✓ Representación pictórica que les permite mostrar lo que sucede en diversos momentos de la situación de cambio.
- ✓ Representación tabular útil en los procesos aritméticos y la construcción de fórmulas.
- ✓ Representación algebraica para condensar la información.

De esta forma se llegaría a modelar una situación matemática a través de la captación de las propiedades antes mencionadas, mediante una interacción constante con las tecnologías de la información y la comunicación como parte fundamental de la enseñanza.

Fundamentación psicológica

Desde el punto de vista psicológico, la sucesión es un concepto psicofísico que conecta lo físico y lo mental cuando se descubre el patrón o la variación subyacente. Tiene su fundamento en Muller y Fechner. El primero demostraría que las condiciones trascendentales del conocimiento son en realidad orgánicas, no captamos objetos sino sensaciones con la que estos afectan a nuestro cuerpo.

Gustav Fechner en 1860 publica sus trabajos de psicofísica que consistían en el estudio de la conexión entre el mundo físico y el mental a través de las sensaciones. Relacionó matemáticamente la magnitud de los estímulos con la intensidad de la sensación y llegó a corroborar que la fuerza de la sensación es una función logarítmica, lo que se llamó Ley de Weber-Fechner ya que había sido anticipada por Ernst Weber en

1840. Esa ley se denominó función logarítmica del estímulo, $S = k \cdot \log E$ (Lafuente Miño, Loredo Narciandi, Castro Tejerina & Pizarro López, 2017) en Fisiología sensorial y psicofísica, capítulo IV.

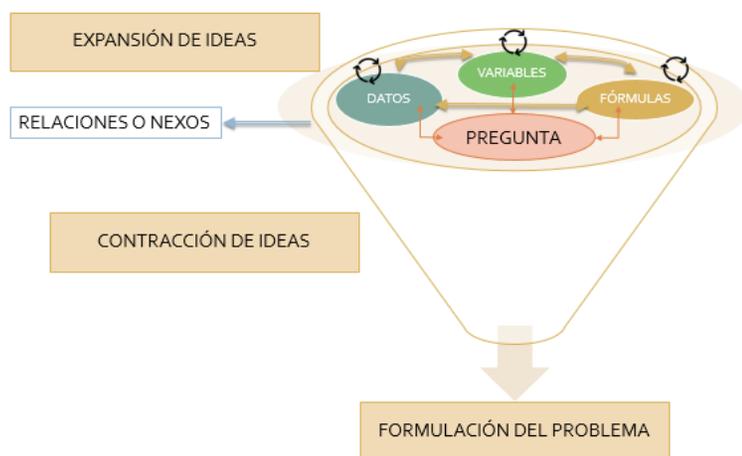
Razonamiento

El razonamiento como actividad mental exige de procesos de expansión y contracción de ideas, de procesos básicos e integradores del pensamiento que propician el desarrollo del potencial intelectual para actuar en una demostración o en la solución de un problema.

En este contexto, la Matemática se ajusta a niveles altos de razonamiento abstracto, lógicos y numéricos que suponen realizan distintos tipos de argumentaciones inductivas o deductivas, justificadas. El estudiante utiliza los conocimientos y experiencias adquiridas para relacionar y concretar en un razonamiento efectivo guiado por el docente, esto es, primero imaginar, después probar (Arguedas T., 2014, p. 4), lo que Pólya llamó cómo enseñar a conjeturar.

Razonamiento lógico

El razonamiento es un proceso de relaciones entre datos, variables, teoremas, axiomas, fórmulas, preguntas que interactúan ante sí y entre sí, en sentido unidireccional y bidireccional. Las relaciones se van encausando en la concreción del pensamiento. A través del desarrollo del pensamiento el estudiante logra la competencia requerida para aprender y aprender a aprender, como consecuencia se tendrá un pensador analítico, crítico, constructivo y abierto al cambio, capaz de monitorear su propio desarrollo y de entender y mejorar. (Sánchez Amestoy, 2012, p. 8)

Figura 4*Desarrollo del pensamiento*

El razonamiento lógico conduce a tener estructuras ordenadas y organizadas, claramente fundamentadas que siguen un proceso debidamente encadenado, independientemente de que el razonamiento sea ascendente o descendente, inductivo o deductivo, analítico o sintético. Exponerlo como hábito diario enriquece el cognitivo.

Encontrar el patrón en una sucesión reviste de abstracción del objeto de estudio a través de las habilidades del pensamiento: conocimiento, comprensión, aplicación y sus niveles: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear, y esto demanda de la utilización del pensamiento analítico, crítico, constructivo para desarrollar los conocimientos, habilidades, actitudes y los valores asociados a los estilos de pensamiento convergente y divergente. (Sánchez Amestoy, 2012, p. 7)

Existen seis procesos básicos fundamentales del pensamiento para facilitar el aprendizaje y la retención a través de la construcción, comprensión, organización y extensión del conocimiento. Estos procesos son: observación, comparación, relación, clasificación simple, ordenamiento y clasificación jerárquica. (Sánchez Amestoy, 2012, (p. 36)

Razonamiento verbal

La investigación utiliza a la escritura como arte para combinar lenguaje con ciencias exactas y se fundamenta en narrativas de cuentos referidos a sucesiones matemáticas. El estudiante pone a disposición su imaginación, entra en una libertad creativa, se posesiona de su literatura y a través de la escritura transforma una situación problema del entorno o de la vida real en un ejercicio matemático a ser resuelto tal cual un frío ejercicio algebraico se presentase en un libro o en la pizarra de una clase.

A la hora de resolver el ejercicio, la comunicación escrita conlleva un razonamiento siempre verbal, sea para crear literatura o para fundamentar el ejercicio propuesto. La mente habla cada vez que se ejecuta un pensamiento lógico numérico, el proceso queda justificado, fundamentado y escrito. La acción recursiva le vuelve a la narrativa pragmática. Pólya creía que, bajo la guía del profesor, los estudiantes podían internalizar el proceso de cómo un matemático dialoga consigo mismo durante el proceso de solución y utilizarlo de manera natural sin ayuda externa. (Arguedas T, 2014, p. 2)

Este tipo de razonamiento convierte a la actividad en una experiencia lúdica, al ser un proceso dialógico entre el estudiante y el texto, lo que permite encender pasión y originalidad en el estudiante, acrecentando su interés por la lectura y respondiendo a sus propias interrogantes. (Ministerio de Educación, 2016, p. 878)

Razonamiento abstracto

El razonamiento abstracto que va desarrollando el estudiante con mayor énfasis desde el Nivel Superior de Bachillerato juega un rol fundamental en problemas o ejercicios de sucesiones a la hora de establecer patrones subyacentes o para modelizar el término general de la sucesión.

En la narrativa del cuento, el pensamiento abstracto también permite realizar conexiones sintácticas complejas para expresarse con mayor eficiencia. En la cita que se hace a Piaget, refiere a que el estudiante de este nivel está en una etapa operacional formal, para perfeccionar el vocabulario, el uso adecuado de las palabras, la estructura sintáctica y la redacción de textos. (Ministerio de Educación, 2016, p. 1228)

La metodología que se emplea, refuerza también las representaciones gráficas que utilizan este tipo de razonamiento que, por complejas en muchas ocasiones, tratan de ser evitadas por los estudiantes en sus análisis, sin embargo, son necesarias y recurrentes, solamente así se logra hacer uso del principio de la vinculación de lo concreto y de lo abstracto, principio que al igual que, la sistematicidad, se encuentra en la base misma de la teoría de la asimilación. No es posible que el estudiante alcance un conocimiento abstracto, sin vínculo alguno con su correspondiente manifestación concreta. (Vásquez Beltrán, 2001, p. 58).

Si bien es cierto los tres tipos de razonamiento están presentes en cada instante, en la metodología se da un orden de participación a cada uno de ellos en cada proceso, sin que esto signifique una regla. Así:

- ✓ El razonamiento abstracto porque genera las relaciones a través de la expansión de ideas entre los datos del problema y lo que se intenta demostrar.
- ✓ El razonamiento lógico que trabaja con la concreción de ideas y establece la formulación y estrategia para resolver el problema.
- ✓ El razonamiento verbal que comunica y expresa las ideas siguiendo un proceso ordenado.

Esta práctica constituye un aspecto esencial del aprendizaje porque propicia en el estudiante:

- ✓ El Observar y el relacionar, cuando se ejecutan procesos de abstracción y expansión de ideas.

- ✓ El Reflexionar y el teorizar, cuando se ejecutan procesos de argumentación y contracción de ideas.

Finalmente, el estudiante está en capacidad de diseñar su propio pseudocódigo como resultado del proceso que desarrolló iterativamente en cada una de las etapas de la metodología ACODESA, recordando que, para concretar el conocimiento, se determinó de forma recursiva o iterativa relaciones funcionales que conducen a entender la importancia del uso de la variable n y la razón del porqué n es fundamento en la conceptualización de la sucesión. De esta forma, el estudiante interpreta con facilidad las tablas y los grafos que visualiza con el "Geogebra" en el libro iterativo como última actividad de validación de resultados, asegurando de manera constructiva y por aprendizaje significativo el concepto de sucesión.

Tabla 27*El principio de la exhaustión*

Cuento matemático	Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
El principio de la exhaustión	En lo profundo entre lo recto y lo redondo no hay diferencias. ✓ Diferencia entre el círculo y el polígono inscrito a través de las áreas, y expresar de este modo al área del círculo como una sucesión de áreas de polígonos inscritos.		
	¿Lo recto y lo redondo son diferentes?	Relacionar lo redondo con el círculo y lo recto con una cuerda secante inscrita en el círculo.	Expresar lo recto como el perímetro de un polígono y lo redondo como el perímetro del círculo.
	¿Relacionar lo recto y lo redondo con variables como longitud, área o volumen?	El círculo no tiene volumen. Pensar en fórmulas que involucren longitud del círculo y el polígono; y área del círculo y el polígono.	Expresar a la longitud y al área como las variables. A través de los valores de la longitud de la circunferencia y del polígono. A través de los valores del área del círculo y del polígono encontrar la diferencia entre lo recto y lo redondo.
¿Cómo encontrar o estimar la diferencia?	Seleccionar el área como indicador de comparación. Trabajar con la longitud o perímetro del círculo y del polígono como indicador alternante de comparación.	Escribir las fórmulas del área y de los perímetros del círculo y del polígono regular a utilizar.	

Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
¿Se puede estimar la diferencia como un proceso recursivo?	Duplicar de forma recurrente el número de lados del polígono o cambiar el radio del círculo.	Graficar el nuevo polígono duplicado inscrito en el círculo.
¿Se puede encontrar intuitivamente la diferencia entre lo recto y lo redondo? ¿Un modelo gráfico me ayuda a encontrar la diferencia entre lo recto y lo redondo?	Utilizar las gráficas con cada polígono duplicado inscrito en el círculo. Utilizar la porción del sector circular y del triángulo formado por los radios como lados de este triángulo y como base de la figura la cuerda o el lado del polígono inscrito.	Pintar las diferencias sobre las figuras que intervienen en el análisis. Graficar las figuras que intervienen en el análisis.
¿Se puede tabular las diferencias del modelo gráfico utilizado?	Utilizar las fórmulas del área del círculo y del área de cada polígono duplicado. Restar sus valores.	Calcular y tabular diferencias de las figuras que intervienen en cada análisis.
¿Se puede encontrar otro modelo gráfico que ayude a formular la modelación matemática?	Utilizar el segmento circular: porción de la figura entre la cuerda o el lado del polígono y el arco del círculo.	Graficar las figuras que intervienen en el análisis.

Tabla 28*Dos maneras de ver las cosas*

Cuento matemático	Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
Dos maneras de ver las cosas	<p>✓ La diferencia entre la circunferencia y el polígono puede ser hecha tan pequeña como desee.</p> <p>¿La circunferencia y el polígono son diferentes?</p> <p>¿Encontrar modelos gráficos que relacionen la diferencia entre la circunferencia y el polígono?</p> <p>¿Relacionar la circunferencia y el polígono con la variable longitud?</p> <p>¿Cómo encontrar o estimar la diferencia?</p>	<p>Relacionar lo redondo con el círculo y lo recto con una cuerda secante inscrita en el círculo.</p> <p>Relacionar un polígono encajado entre dos circunferencias o relacionar una circunferencia encajada entre dos polígonos.</p> <p>Pensar en fórmulas que involucren longitud del círculo y del polígono.</p> <p>Seleccionar la longitud y el número de lados del polígono como variables e indicadores de comparación.</p>	<p>Expresar lo recto como el perímetro de un polígono y lo redondo como el perímetro del círculo.</p> <p>Graficar un modelo.</p> <p>Expresar a la longitud como la variable independiente en la fórmula de la longitud de la circunferencia y del polígono.</p> <p>Escribir las fórmulas del perímetro del círculo y del perímetro regular a utilizar.</p>

Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
¿Se puede estimar la diferencia como un proceso recursivo?	Duplicar de forma recurrente el número de lados del polígono o trabajar de forma recurrente con dos polígonos del mismo número de lados: uno inscrito y otro circunscrito a un círculo.	Graficar el nuevo polígono duplicado inscrito en el círculo y trazar la circunferencia circunscrita al polígono duplicado, o Graficar los polígonos inscrito y circunscrito a la circunferencia.
¿Se puede encontrar intuitivamente la diferencia entre la circunferencia y el polígono?	Utilizar la gráfica con el polígono duplicado inscrito en el círculo y trazar un círculo inscrito en el polígono original para encajar a los perímetros de los polígonos o utilizar las gráficas con cada polígono inscrito y circunscrito en el círculo.	Pintar las diferencias sobre las figuras que intervienen en el análisis.
¿Un modelo gráfico me ayuda a encontrar la diferencia entre la circunferencia y el polígono?	Utilizar la porción encajada y emplear la relación de orden entre los perímetros encajados.	Graficar las figuras que intervienen en el análisis. Expresar la relación de orden.

Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
¿Se puede tabular las diferencias del modelo gráfico utilizado?	Utilizar las fórmulas del perímetro del círculo y del perímetro de cada polígono duplicado. Restar sus valores.	Calcular y tabular diferencias de las figuras que intervienen en cada análisis.
¿Se puede encontrar otro modelo gráfico que ayude a encontrar la modelación matemática?	Utilizar el segmento circular o un polígono encajado entre dos circunferencias.	Graficar las figuras que intervienen en el análisis.

Tabla 29

¿Quién construye la empalizada?

Cuento matemático	Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
¿Quién construye la empalizada?	<p>¿La sog a mide un número par o impar de pasos?</p> <p>Datos: La sog a mide 141 pasos.</p> <p>Forma de la empalizada: cuadrada</p> <p>✓ La raíz cuadrada de un número resultó ser una sucesión de números fraccionarios</p>		
	¿Cómo se determina la diagonal en la empalizada?	Utilizar el Teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de un cuadrado.	Expresar la fórmula del Teorema de Pitágoras: $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
	¿Cuál es la teoría a utilizar?	Aproximar la raíz cuadrada de un número A utilizando la fórmula de Herón de Alejandría.	Expresar la fórmula de Herón: $\sqrt{a^2 \pm b} \sim \left(a \pm \frac{b}{2a}\right)$
	¿Se puede reemplazar en la fórmula de Herón valores arbitrarios de ayb ?	Escoger los valores de ayb , tal que: $A = a^2 \pm b$	Expresar los valores de ayb en la fórmula de Herón. $\sqrt{A} = \left(a \pm \frac{b}{2a}\right)$
	¿Los valores arbitrarios de ayb son los correctos?	Recordar que no se puede obtener la raíz cuadrada de un número negativo. Si es así buscar otros valores arbitrarios de ayb .	Expresar los nuevos valores de ayb en la fórmula de Herón. $\sqrt{A} = \left(a \pm \frac{b}{2a}\right)$

Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
¿El valor calculado con la fórmula de Herón es igual a la raíz cuadrada del número A o es una aproximación grosera?	Comparar el valor de \sqrt{A} que se obtuvo con el Teorema de Pitágoras y con la fórmula de Herón:	Expresar la relación de orden y establecer si es una aproximación grosera. Raíz número < Raíz de la aproximación $\sqrt{A} < \sqrt{A}$
¿Puedo mejorar la aproximación del valor \sqrt{A} ?	Reemplazar el cálculo por el Teorema de Herón: $\sqrt{A} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{A}{a} \right)$	Expresar los valores de a y A en el Teorema de Herón, donde a se reemplaza con el valor de la aproximación grosera y A es el número del cual se desea obtener la raíz cuadrada.
¿Puedo mejorar la aproximación del valor \sqrt{A} calculado con el Teorema de Herón utilizando un proceso recursivo?	Comparar los valores de a_n y \sqrt{A} . Si no es una buena aproximación, realizar nuevo cálculo. Si son iguales termina el cálculo.	Expresar los valores de a por a_n y A en el Teorema de Herón. Expresar la relación de orden y establecer si es una muy buena aproximación. Raíz número < Raíz de la aproximación $\sqrt{A} < a_n$

Tabla 30

Un método novedoso

Cuento matemático	Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
Un método novedoso	<p>Reemplazar el cálculo del área del círculo por el cálculo del área debajo de la curva.</p> <p>✓ El trascendente número π resultó ser una sucesión de números decimales.</p> <p>Datos: $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ donde x varía entre 0 y $\frac{1}{2}$:</p> <p>¿Cómo se puede relacionar el cálculo del área del círculo por el cálculo del área debajo de la curva?</p> <p>¿Cuál es la función derivada a utilizar?</p> <p>¿Cuál es la función primitiva al integrar?</p> <p>¿Cómo representar el área $\frac{\pi}{6}(u^2)$ en un círculo de radio 1?</p>	<p>Utilizar el Teorema fundamental del cálculo y la fórmula del área de un sector circular.</p> <p>Utilizar una función derivada cuya función primitiva es una función trigonométrica inversa.</p> <p>La función primitiva es la función $\arcsen(x)$</p> <p>Encontrar el ángulo θ en la fórmula del área del sector circular.</p>	<p>Expresar el Teorema fundamental del cálculo:</p> $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ <p>Expresar la fórmula del área de un sector circular:</p> $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\theta \pi r^2}{360^\circ}$ <p>Expresar la función derivada:</p> $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ <p>Expresar los límites para integrar la función derivada: x varía entre 0 y $\frac{1}{2}$.</p> <p>Integrar la función y sustituir los límites:</p> $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen(x) \Big _0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} (u^2)$ <p>Reemplazar el valor del área bajo la curva y el radio 1 en la fórmula del área del sector circular:</p> $\frac{\pi}{6} = \frac{\theta \pi 1^2}{360^\circ}$

Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
¿Cómo comparar el área del círculo con el área debajo de la curva?	Establecer gráficas y conclusiones entre el área del segmento circular y el área debajo de la curva.	Graficar las áreas del sector circular en función de θ Graficar el área bajo la curva en función de x Escribir conclusiones.
¿Cómo transformar la función derivada en una función binomial?	Propiedad de la radicación.	Aplicar la propiedad de la radicación, $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$
¿Cómo resolver la expresión binomial?	Utilizar la Teoría de Binomio de Newton.	Expresar el desarrollo de un Binomio de Newton. $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(1)}{n!}x^n$
¿Se puede sustituir términos en la expresión general del binomio de Newton?	Utilizar la teoría de Binomio de Newton. Primer término: 1 Segundo término: $-x^2$ Potencia binomio: $-\frac{3}{2}$	Reemplazar términos: $(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}(-x^2)^3 + \dots$
¿Se puede sustituir los términos de la serie por la función primitiva e integrar cada término?	Sustituir la serie en la integral y proceder a integrar término a término.	Expresar la sustitución. $\int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int 1 dx + \int \frac{1}{2}x^2 dx + \int \frac{3}{2^2 \cdot 2!}x^4 dx + \int \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3!}x^6 dx + \int \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!}x^8 dx + \dots$

Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
¿Cómo se interpreta el resultado?	La función primitiva es una serie donde su argumento x es el primer término de la serie, por lo que x representa una aproximación grosera del valor real de la función.	Expresar la función primitiva como serie. $\arcsen(x) = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} x^5 + \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3! \cdot 7} x^7 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4! \cdot 9} x^9 + \dots + \frac{(2n-1)!}{2^{n-1} \cdot (2n+1)} x^{2n+1}$
¿Se puede utilizar este resultado de forma recursiva?	Es una sumatoria de infinitos términos.	Expresar la función recurrente. $\arcsen(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(4)^n \cdot (n!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot (x)^{2n+1}$
¿Cómo transformo el resultado en una familia de funciones?	Sustituir el valor de x y el valor de la función $\arcsen(x) = \frac{\pi}{6}$ que es el área del sector circular.	Expresar la nueva función. $\pi = 3 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(16)^n \cdot (n!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1}$
¿Cómo se interpreta el resultado?	Sustituir el valor de x y el valor de la función $\arcsen(x) = \frac{\pi}{6}$ que es el área del sector circular.	El trascendente número π es una sucesión de números decimales. $\pi = \{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, \dots\}$

Tabla 31

Cauchy define el concepto de sucesión

Cuento matemático	Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
Cauchy define el concepto de sucesión	<p>La sucesión $\{a_n\}$ converge siempre y cuando exista su límite:</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ <p>✓ En el caso contrario decimos que la sucesión diverge.</p> <p>¿La convergencia y la divergencia son diferentes? ¿Relacionar la convergencia y la divergencia mediante cambios de la variable dependiente n?</p> <p>¿Cómo interpretar esta variación?</p> <p>¿Se puede estimar a partir de qué n la función converge?</p>	<p>Relacionar una función que converge y una función que no converge, Pensar en evaluar las funciones.</p> <p>Seleccionar el valor de la función como indicador de comparación.</p> <p>Plantear una expresión que relacione la convergencia.</p>	<p>Expresar las funciones en términos de la variable n Evaluar las funciones y determinar su variación.</p> <p>Escribir converge si el resultado de la valoración tiende a sólo un número. Escribir diverge si tiende a dos números o la tendencia es el infinito positivo o el infinito negativo. Expresar las siguientes desigualdades: $\forall n \geq N, a_n - a < \varepsilon$</p>

Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
<p>¿Aparecen varios datos que se desconocen en las dos desigualdades?</p> <p>¿Qué significa la expresión $a_n - a < \varepsilon$?</p>	<p>Utilizar la segunda desigualdad.</p> <p>Definir: La sucesión es: a_n La convergencia es el valor: a El entorno del punto n en la sucesión: ε.</p>	<p>Expresar la segunda desigualdad en el análisis.</p> $ a_n - a < \varepsilon$ <p>Reemplazar en la desigualdad y encontrar el valor de n.</p> $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+$ $a = 1$ $\varepsilon = \frac{1}{1000}$
<p>¿Se puede conocer el número N?</p> <p>¿Se puede verificar la expresión?</p> $\forall n \geq N, a_n - a < \varepsilon$	<p>Utilizar la primera desigualdad.</p> <p>Utilizar la expresión de las desigualdades.</p>	<p>Expresar la primera desigualdad en el análisis.</p> $n \geq N$ <p>Reemplazar en la expresión de la desigualdad</p> $n = N$ <p>Evaluar el valor absoluto y verificar si</p> $ a_n - a < \varepsilon$ <p>Concluir:</p> $\forall n \geq N, a_n - \text{valor de convergencia} < \varepsilon$ <p>Entonces</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
<p>¿Se puede encontrar otro modelo que ayude a formular la divergencia?</p>	<p>Negar la convergencia.</p>	<p>Expresar la negación de la convergencia.</p> $\forall b \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N > 0 : \exists n \geq N, b_n - b > \varepsilon$

Tabla 32

Newton perfecciona una técnica

Cuento matemático	Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
Newton perfecciona una técnica de Vieta	<p>La técnica consiste en calcular los polinomios sucesivos de unas perturbaciones de la raíz que se van obteniendo al resolver ecuaciones algebraicas.</p> <p>✓ Linealización de polinomios o convergencia lineal.</p>		
	<p>¿Se puede estimar la raíz de un polinomio $P(x)$ o de una ecuación $P(x) = 0$?</p>	<p>Evaluar el polinomio para $x \in \mathbb{R}$ de forma que entre dos evaluaciones consecutivas exista un cambio de signo.</p>	<p>Expresar el polinomio y reemplazar el valor de x en la variable.</p>
	<p>Si existe cambio de signo, ¿qué significa?</p>	<p>Interpretar que la gráfica del polinomio en el intervalo entre estos dos números, está sobre y bajo el eje x,</p>	<p>Expresar como un intervalo de x. Uno de estos valores extremos se define como x_0.</p>
	<p>¿Cómo determinar la raíz exacta?</p>	<p>Encajar el intervalo para lo cual se elige una nueva variable p cuyo valor aproxima de mejor forma a la raíz.</p>	<p>Escribir a la raíz como $x_1 = x_0 + p$</p>

Razonamiento abstracto	Razonamiento lógico	Razonamiento verbal
¿Se puede evaluar el polinomio para $x_0 + p$?	Evaluar el polinomio en función de la nueva variable p .	Expresar y desarrollar $P(x_0 + p) = 0$
¿Aparece un polinomio en términos de p ?	Linealizar el polinomio, es decir, despreciar los términos de p potencia > 1 y dejar como un polinomio lineal.	Expresar el polinomio lineal como una ecuación y resolver. Encontrar el valor de p . Sustituir y calcular x_1 .
¿Esta es una raíz mejorada?	Interpretar el resultado x_1 como una mejor aproximación a la raíz.	Evaluar el polinomio y comparar si es igual a cero. $P(x_1) = 0$.
¿Este es un método recursivo?	Repetir el número de veces necesarias hasta que se cumpla que $P(x_n) = 0$	Verificar $P(x_n) = 0$.
¿Cómo se interpreta el resultado?	Es la raíz exacta del polinomio $P(x)$.	Expresar la raíz como una sucesión de números decimales. $x^2 - 2x - 5 = 0$ $x = \{2, 2.0, 2.09, 2.094, 2.0945, \dots\}$
¿Se puede utilizar este método para polinomios de grado $n \geq 3$?	Es un método universal.	Es una convergencia lineal para resolver ecuaciones algebraicas.

Capítulo 3

Marco metodológico y diseño del libro iterativo multimedia

Principio de exhaustión al concepto de sucesión

En el siglo IV a. de C., Eudoxo (408-335 a. de C.) descubrió el siguiente Principio de exhaustión (o de agotamiento de diferencias).

Principio de exhaustión

Si tenemos dos magnitudes desiguales, y de la menor sustraemos por lo menos la mitad; de lo que queda, nuevamente sustraemos por lo menos la mitad; y así sucesivamente, quedará una magnitud menor que la menor de las dos magnitudes dadas.

Con la ayuda de este Principio, Eudoxo demostró el siguiente lema:

Lema de Eudoxo

La diferencia entre el círculo y el polígono inscrito puede ser hecha tan pequeña como se quiera.

—Entre lo recto y lo redondo parecen existir diferencias —decía Eudoxo—, pero no es así. Si puedo hacer la diferencia entre el área del círculo y el área de un polígono inscrito menor que cualquier magnitud dada, por más pequeña que esta sea, es que, en algún nivel de la mente, entre lo recto y lo redondo no existen diferencias. ¡Entonces, podemos identificar el círculo con la sucesión de polígonos inscritos en él!

De este modo, la idea de aproximaciones sucesivas, o de sucesión, empezó a vivir en las Matemáticas.

Posteriormente, Arquímedes retomó la idea de Eudoxo, pero no la aplicó a las áreas del círculo y el polígono, sino a sus perímetros. Dijo:

—Si puedo hacer la diferencia entre el perímetro del círculo y el perímetro de un polígono inscrito menor que cualquier magnitud dada, por más pequeña que esta sea, habré demostrado que, para Dios, entre lo recto y lo redondo no hay diferencias. ¡Así que podemos identificar el círculo con la sucesión de polígonos inscritos en él!

Herón utilizó el Principio de exhaustión para calcular raíces cuadradas, aproximándolas por números racionales. Se dijo:

—Puedo hacer la diferencia entre el número irracional $\sqrt{2}$ y un número racional menor que cualquier número dado, por más pequeño que este sea. ¿Por qué es así? Porque, en el cielo, entre los números irracionales y los números racionales no hay diferencias. Por eso, aquí, podemos identificar el número $\sqrt{2}$ con la siguiente sucesión de números racionales que lo aproximan:

$$\sqrt{2} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \dots \right\}$$

Más tarde, Isaac Newton retomó la idea de Herón y la aplicó también a los números trascendentes. Afirmó:

—Puedo hacer la diferencia entre el número trascendente π y un número decimal menor que cualquier número positivo dado, por más pequeño que sea tal número. Y ello es así porque, en verdad, entre los números trascendentes y los números decimales no hay diferencias. Entonces, para asuntos de cálculo, podemos identificar el número π con la siguiente sucesión de números decimales:

$$\pi = \left\{ 3; 3 + \frac{1}{10}; 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}; 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000}; \dots \right\}$$

De este modo nacieron los números reales. Como podemos ver, el Principio de exhaustión de Eudoxo con sus aproximaciones sucesivas jugó en ese nacimiento un papel fundamental.

Posteriormente, Augustin Cauchy definió el concepto de sucesión y de límite de una sucesión de manera formal. Gracias a ello, pudo demostrar las siguientes propiedades que estos poseen:

- El límite de la suma de dos sucesiones es igual a la suma de sus límites.
- El límite de la resta de dos sucesiones es igual a la resta de sus límites.
- El límite del producto de dos sucesiones es igual al producto de sus límites.
- El límite del cociente de dos sucesiones es igual al cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea nulo.

Como el concepto de número real se había definido como una sucesión de sumas cuya cantidad de sumandos aumenta indefinidamente, surgió la necesidad de definir el concepto de serie. Al inicio una serie se definió como una suma de infinitos términos. Pero entonces surgieron algunas paradojas. Así, por ejemplo, la serie

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$$

resultaba tener dos sumas: 1 y $\frac{1}{2}$. En efecto, por un

lado, esta serie podía ser escrita como:

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{4}{7} - \frac{5}{9}\right) + \dots$$

Abriendo los paréntesis, se simplificaban todos los términos menos el primero; por tanto, la suma de la serie resultaba ser 1:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots = 1$$

Por otro lado, esta serie también podía ser escrita como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots$$

Abriendo los paréntesis, se obtenía:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \dots$$

Aquí también se simplificaban todos los términos menos el primero; por tanto, la suma de la serie resultaba ser $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots = \frac{1}{2}$$

Para evitar estas ambigüedades, Augustin Cauchy definió la suma de una serie infinita como el límite de la sucesión de sus sumas parciales. De esta manera pudo demostrar que cada serie infinita posee una suma única. El papel que jugó en ello el concepto de sucesión fue vital.

Las sucesiones también ayudaron a resolver otro problema que surgió en el estudio de las series infinitas. Al inicio se creía que, para que una serie sea convergente era suficiente y necesario que su término general tienda a cero. Sin embargo, los hermanos Bernoulli pronto descubrieron que no es así, pues el término general de la serie armónica tiende a cero, y, sin embargo, la serie diverge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty$$

Para que una serie sea convergente, la condición de que el término general tienda a cero demostró ser necesaria, pero no suficiente. Debido a ello, surgió la necesidad de descubrir criterios de convergencia para las series infinitas. Pronto se descubrieron varios criterios, como el del cociente, el de la raíz, etc. Todos ellos necesitaban, para su expresión, el concepto de límite de una sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}},$$

El papel que jugó en estos criterios el concepto de sucesión también fue fundamental.

Posteriormente, el mismo Newton en 1669 mejora el Método de las perturbaciones de la raíz de Francois Vieta, linealizando polinomios para determinar que una raíz es la sucesión de números decimales.

Más tarde, Newton desarrolla el método de aproximaciones para concluir que una raíz para ecuaciones trascendentes es una sucesión de intersecciones x_{n+1} de la tangente a la curva de $f(x)$ en x_n y el eje x , dando inicio a la época del cálculo diferencial.

Joseph Raphson desarrolla el Método de procesos iterativos para expresar a la raíz de una ecuación algebraica como una sucesión de aproximaciones decimales.

Bernhard Bolzano descubre el Método de la falsa posición para determinar a una raíz como la sucesión de números decimales.

Carl Weirstrass aplica el método de los intervalos encajados para demostrar que una raíz de ecuaciones algebraicas y trascendentes es una sucesión de números decimales.

En resumen, desde que Eudoxo formuló el Principio de exhaustión, el cual nos permite acercarnos a una magnitud, en forma de aproximaciones sucesivas, tanto como

queramos, el concepto de sucesión ha vivido en las Matemáticas hasta la actualidad. Las sucesiones nos son útiles en todo proceso donde la solución no puede ser hallada de inmediato, y debe ser aproximada por pasos sucesivos.

El objetivo de este trabajo consiste en mostrar, en situaciones concretas, tanto el camino que recorrió el concepto de sucesión, desde su descubrimiento hasta nuestros días, como sus múltiples usos. Esperamos que este material didáctico brinde una ayuda eficaz a profesores y estudiantes de Matemáticas, a nivel medio y universitario.

Metodología tecnológica

El presente instrumento pedagógico se desarrolló bajo los lineamientos y conceptos de software iterativo multimedia, con aplicaciones para la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Exactas, con componentes de razonamiento lógico y abstracto, incorporando elementos visuales, que permitan la interacción como herramienta, didáctica y de estimulación cognitiva, para ofrecer a los estudiantes una modalidad de aprendizaje óptimo en el desarrollo de sus procesos académicos en los niveles de formación de Bachillerato y Preuniversitario.

Actualmente se evidencia poca o nula aplicación de recursos informáticos iterativos que aúnen esfuerzos en este sentido. La contribución en referencia a estos procesos de enseñanza y aprendizaje en las ramas de las Matemáticas debe direccionarse hacia el uso eficiente de las tecnologías de la información. Considerar, incluir e integrar herramientas y sistemas tecnológicos permite a los estudiantes recibir, razonar y percibir de mejor manera la recepción de conceptos matemáticos alcanzando, mediante el desarrollo de sistemas y/o programas informáticos, aportes pertinentes sobre el amplio espectro de inteligencias múltiples de los aprendizajes del ser humano.

En la selección de herramientas y lenguajes de programación se consideró la necesidad tecnológica de los estudiantes. En lo que se refiere a las herramientas para

el desarrollo del texto están: HTML, JavaScript con Frameworks como Bootstrap, por su adaptabilidad a cualquier plataforma moderna; BookBlock, que coadyuva a los procesos de recreación y animación de las historietas dentro del libro iterativo multimedia, además de otros Frameworks utilitarios, que fueron escogidos en el desarrollo de este aplicativo.

Para las animaciones y procesamiento de imágenes y videos, las herramientas y programas seleccionados fueron: Photoshop, para imágenes dinámicas y sugestivas; Unity para, para manipular y recrear videos, animaciones innovativas que capten la atención del estudiante; y, para la edición de video, CrazyTalk 8.1, iClone 7.0 y audio Blabolka como la mejor opción.

Multimedia como herramienta educativa

El uso de las tecnologías de información y comunicación demanda cada día más la existencia e implementación de aulas integradas con copiosos recursos multimedia (audio/video), elementos orientados para la búsqueda de información y que se encuentren a disposición inmediata de maestros y estudiantes.

La educación actual demanda de sus procesos educativos el uso de elementos de interacción tales como: imágenes, presentaciones, audios, animaciones y videos. En concreto, las herramientas multimedia instan al uso de recursos y herramientas de calidad, tanto para sus desarrolladores como para sus usuarios, sean estos aplicativos de uso con interacción local y/o en red. Los únicos inconvenientes latentes que hay que considerar aún son el ancho de banda requerido para las operaciones adecuadas y las provisiones de infraestructuras tecnológicas para su implementación en los centros educativos.

Años atrás no se imaginaba ni se pensaba en la evolución que iba a alcanzar la tecnología y los logros en materia de procesamiento de imágenes y videos que ha

logrado en la actualidad. El continuo desarrollo de la nanotecnología ha permitido crear nuevos equipos y dispositivos multimedia, que incluyen innovadoras tipologías de formatos, almacenamiento, procesamiento y digitalización de la información; el video adquiere una nueva dimensión, extendiendo su uso incluso a través de aplicativos en portales especializados en Internet.

Un video educativo constituye un elemento didáctico que facilita el descubrimiento de conocimientos y la asimilación de estos. Además, puede ser motivador para los estudiantes puesto que las imágenes en movimiento y los sonidos pueden captar de mejor manera su atención. (educacontic, 2019)

Animación tridimensional 3D

La animación tridimensional 3D es una técnica de desarrollo muy impresionante, en la actualidad su uso es muy recurrente en diferentes aplicaciones multimedia. Los avances tecnológicos alcanzados en los procedimientos relacionados con la animación ofrecen cada vez más programas y utilitarios de desarrollo, lo que permite que los programadores plasmen ideas y pensamientos a través de las pantallas. Entre sus características más relevantes es importante señalar:

Tridimensionalidad

Una de las grandes ventajas de la animación 3D es su profundidad. Permite manejar una tercera dimensión y abre las posibilidades narrativas y la creación de efectos visuales más atractivos para el estudiante. Posibilita el mando de cámaras, que pueden ser modificadas aún tras haber realizado la animación y se puede cambiar las cámaras en cualquier instante. Esto ofrece flexibilidad para corregir errores u optimizar las escenas. Esta tridimensionalidad también permite efectuar rotaciones, generando movimientos propios para los personajes de escena, traduciéndose cada escena en particular.

Modificaciones automáticas

La animación 3D permite trabajar con el modelamiento de personajes y locaciones. Las escenas suelen trabajarse con dichos personajes y objetos linkeados a un archivo original del modelo. Esto permite realizar cambios a dichos personajes u objetos que se actualizan automáticamente en las escenas de animación.

Reutilización de objetos

En una producción 3D se modela una gran cantidad de objetos que pueden ser reutilizados infinidad de veces. Una mesa modelada y texturizada para una escena puede aprovecharse en otra, sin invertir tiempo adicional para efectuar distinto modelamiento. Incluso se podría tomar el objeto original, duplicarlo y hacer ajustes de proporción, escala o textura, según se requiera en una nueva escena.

Fluidez de la animación

Los softwares especializados de animación 3D (Maya o Blender) se encargan de calcular la interpolación entre cada fotograma clave establecido por el animador. Esto significa que un animador 3D que realice entre 12 o 15 keyframes puede obtener una animación fluida de hasta 60 cuadros por segundo. Esta fluidez, sumada a la calidad del render que se puede obtener de los programas ya mencionados, permite alcanzar niveles de hiperrealismo casi imposibles en procedimientos de animación 2D.

Especialización en cada área

En la animación 3D, cada colaborador se especializa en su área, esto permite que cada quien se enfoque exclusivamente en su trabajo y logre mayor experticia en el mismo. Un animador 3D se encarga única y exclusivamente de animar, él no debe

preocuparse de nada más allá del movimiento del personaje, ya que la física, los encuadres, movimientos de cámara, iluminación y composición general serán realizados por otros expertos en dichas áreas. Esto puede significar mayor eficacia en la animación como tal. (grupoaudiovisual.com, 2017)

Plataforma de programación

El metaproceso de software propone caracterizar un proceso de software o metodología desde la gestión, estructuración e innovación. Estos procesos corresponden a la administración, arquitectura y creación de rasgos para el proceso de software, respectivamente.

Figura 5

Gestión de metaprocesos



HEAD

La metodología de programación estructurada hace uso exclusivo de programación web, lo que involucra conocimientos preliminares de HTML, CSS, Javascript, Node.js, Electron, Cordova, JQuery, JQuery Mobile, Bootstrap, Applets, entre otras herramientas importantes para el desarrollo del mismo.

La cabecera del documento es la sección comprendida entre `<head>` Flipbook `</head>`. En esta se debe encontrar, obligatoriamente, el título (entre las etiquetas `<title>` Flipbook `</title>`). El título de la página debe describir los contenidos (se tiene que usar títulos que sean descriptivos y relativos al contenido de la página).

Además de la etiqueta *title* dentro de la Sección de cabecera se estila incluir otras etiquetas. La tabla 33 muestra un resumen de elementos que pueden ir dentro de la etiqueta *head*.

Tabla 33

Estructura de programación

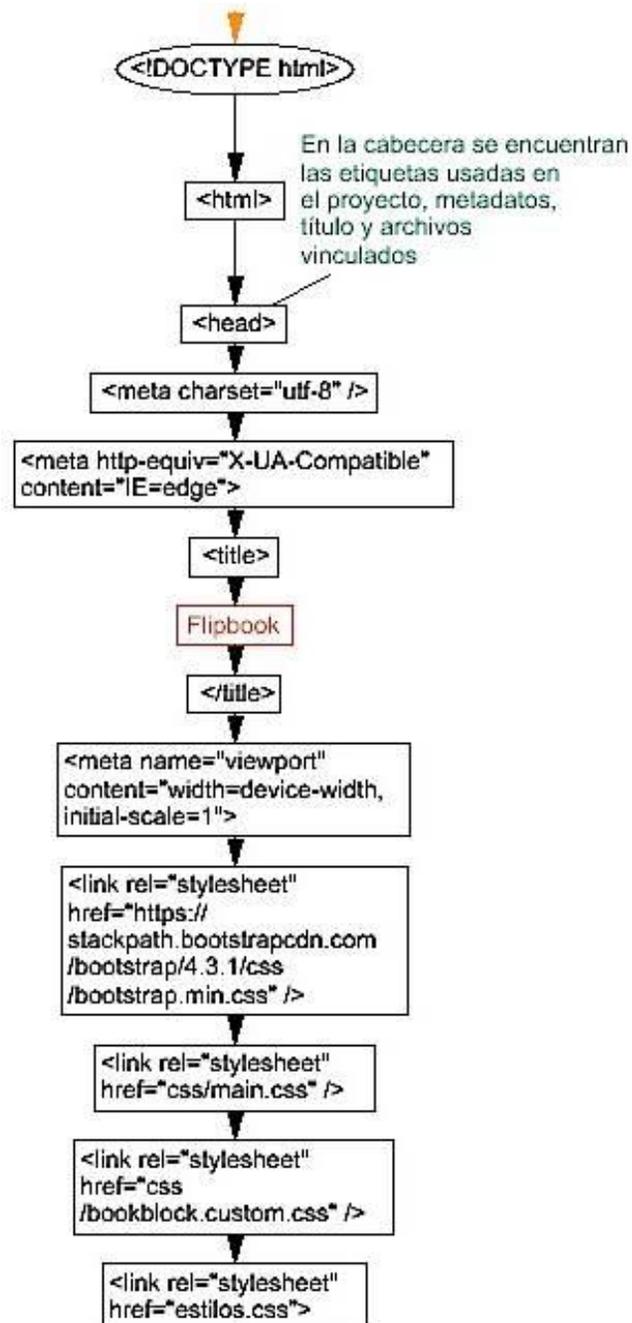
Etiqueta en cabecera	Función	¿Es obligatoria?
<code><title></code>	Da un título al documento HTML.	Sí
<code><base></code>	Define ruta de acceso.	No
<code><link></code>	Define archivos vinculados.	No
<code><meta></code>	Define metadatos como descripción y palabras clave.	No
<code><script></code>	Delimita scripts incluidos.	No
<code><style></code>	Delimita definición de estilos.	No

Nota. Fuente: Foros aprender a programar.com, 2020.

La tabla 33 presenta la cabecera del proyecto y el uso de los metadatos, así como de los archivos vinculados e importantes para el desarrollo del proyecto.

Figura 6

Cabecera de la aplicación



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

BODY

El cuerpo (body) del documento HTML es normalmente lo más importante. Es aquí donde se tiene que colocar el contenido de la página: texto, fotografías, etc. El cuerpo está delimitado por las etiquetas `<body>` y `</body>`.

Figura 7

Cuerpo de la programación



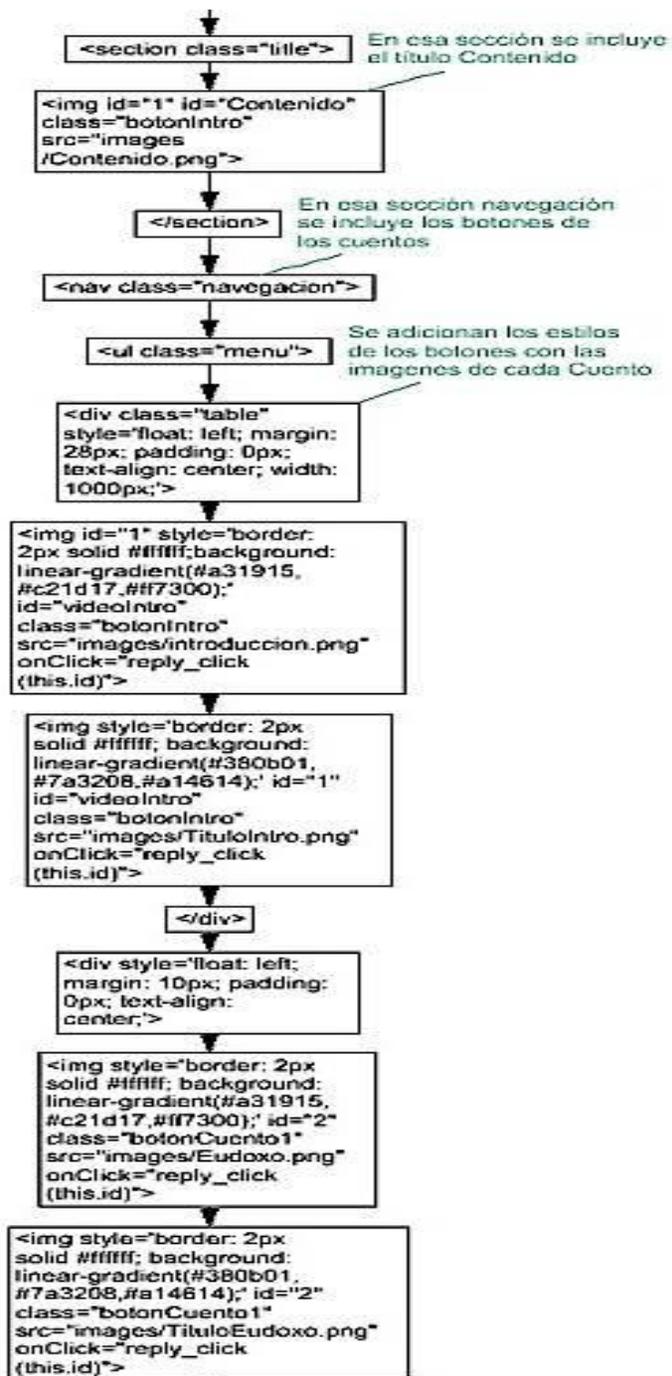
Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Índice de contenidos del *Libro iterativo multimedia*

El índice contiene el menú principal de la aplicación del *Libro iterativo multimedia*, donde se especifican de manera minuciosa las historietas, direccionándolas a sus respectivas páginas del flipbook; su representación en la programación estructurada es mediante el uso de botoneras.

Figura 8

Contenido del Menú principal "A"



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 9

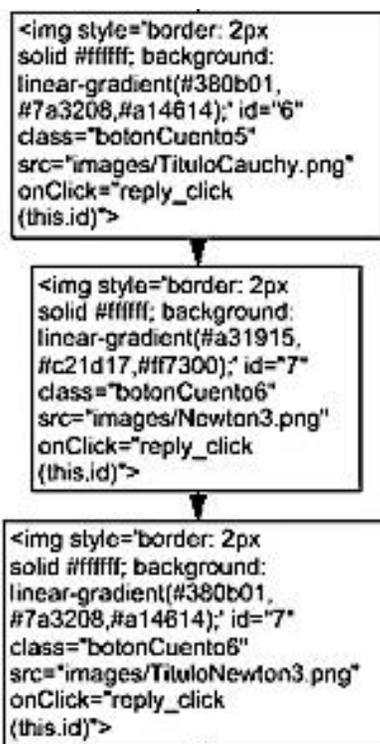
Contenido del Menú principal "B"



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 10

Contenido del Menú principal "C"



F

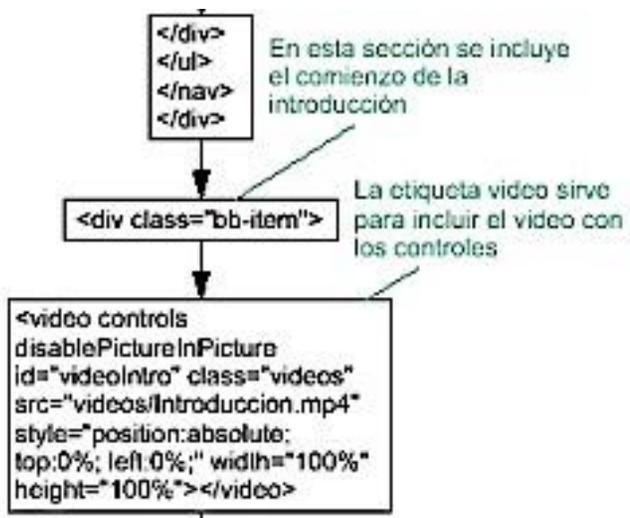
Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Cuentos

Para incluir y visualizar el material que corresponde a las historietas se hace uso de reproductores personalizados, los cuales ayudarán a reproducir, visualizar, maximizar y minimizar la presentación mediante el uso de botones predefinidos. La programación web es muy importante ya que permite desarrollar y recrear acciones apropiadamente, mediante el uso de eventos en el desarrollo de este libro.

Figura 11

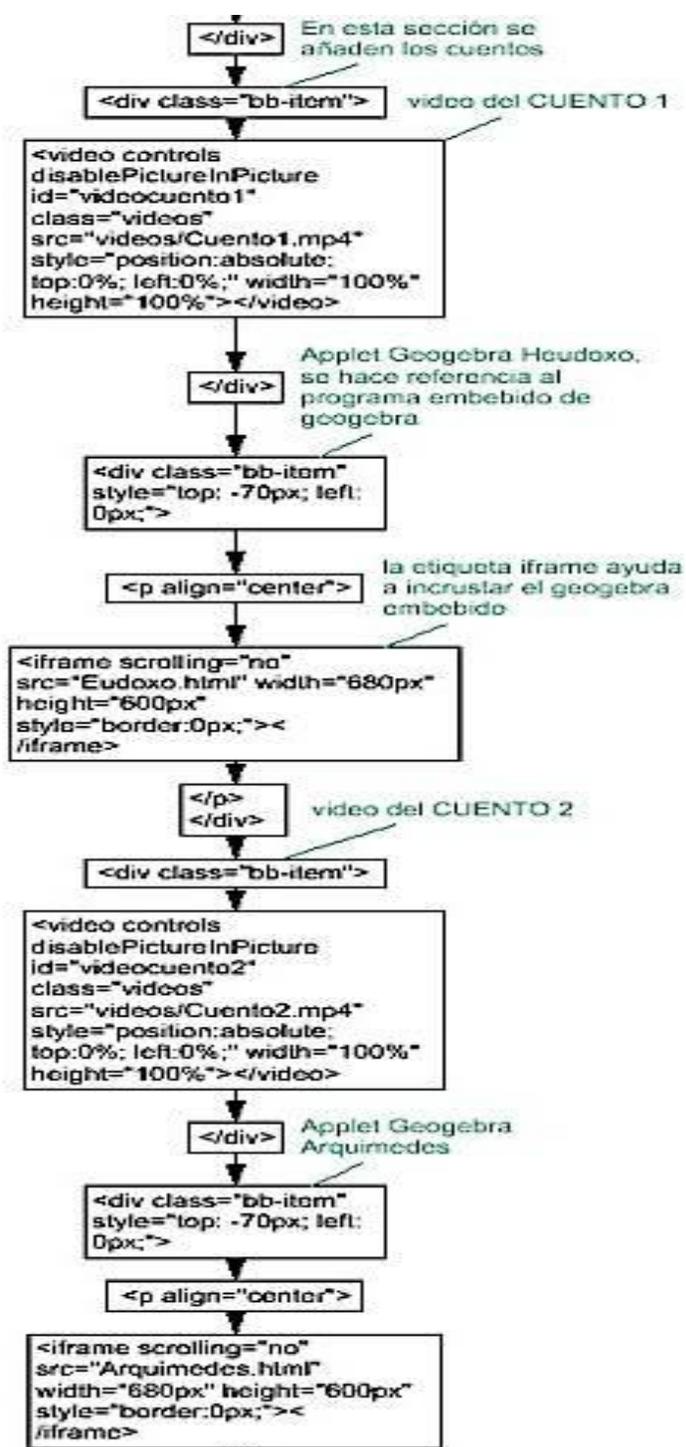
Contenido del Menú principal "C"



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 12

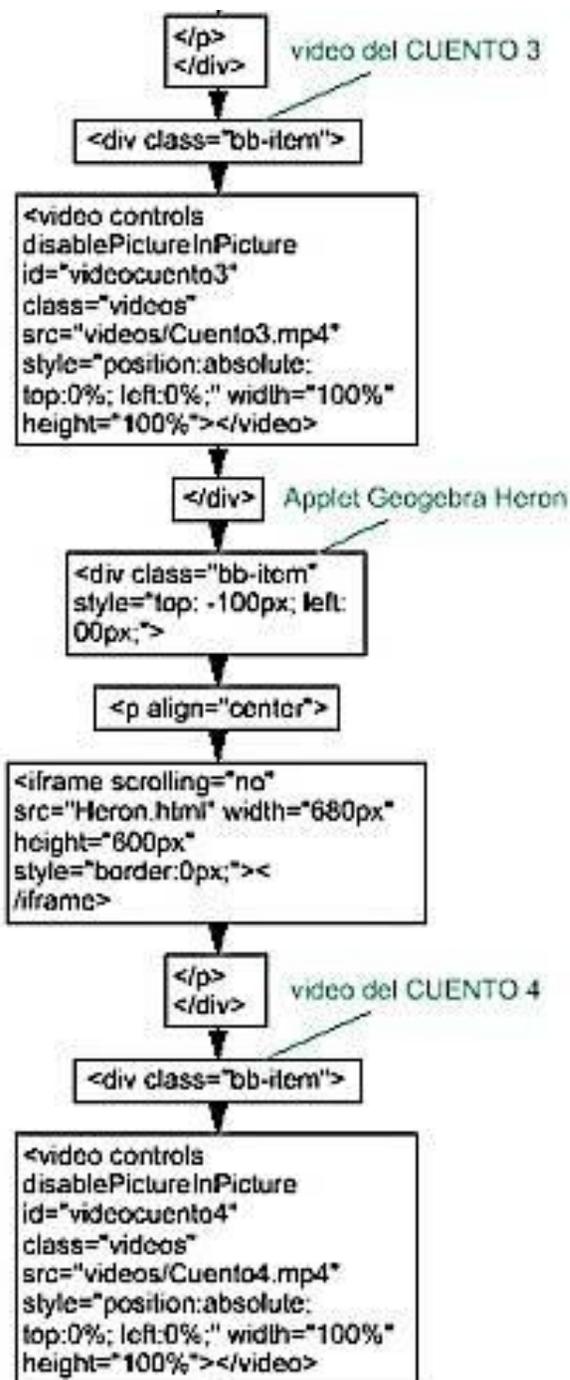
Cuentos 1 y 2



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 13

Cuentos 3 y 4



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 14

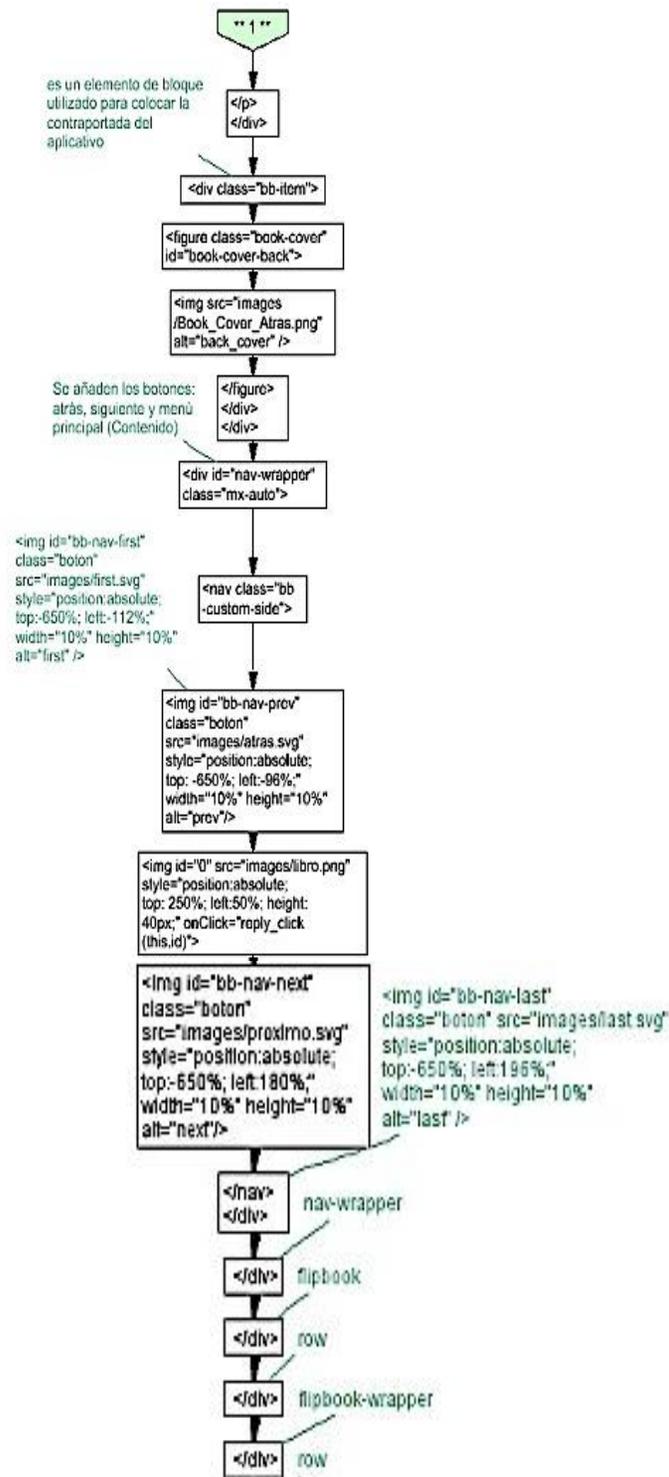
Cuentos 5 y 6



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 15

Contraportadas y Botoneras



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

SCRIPTS

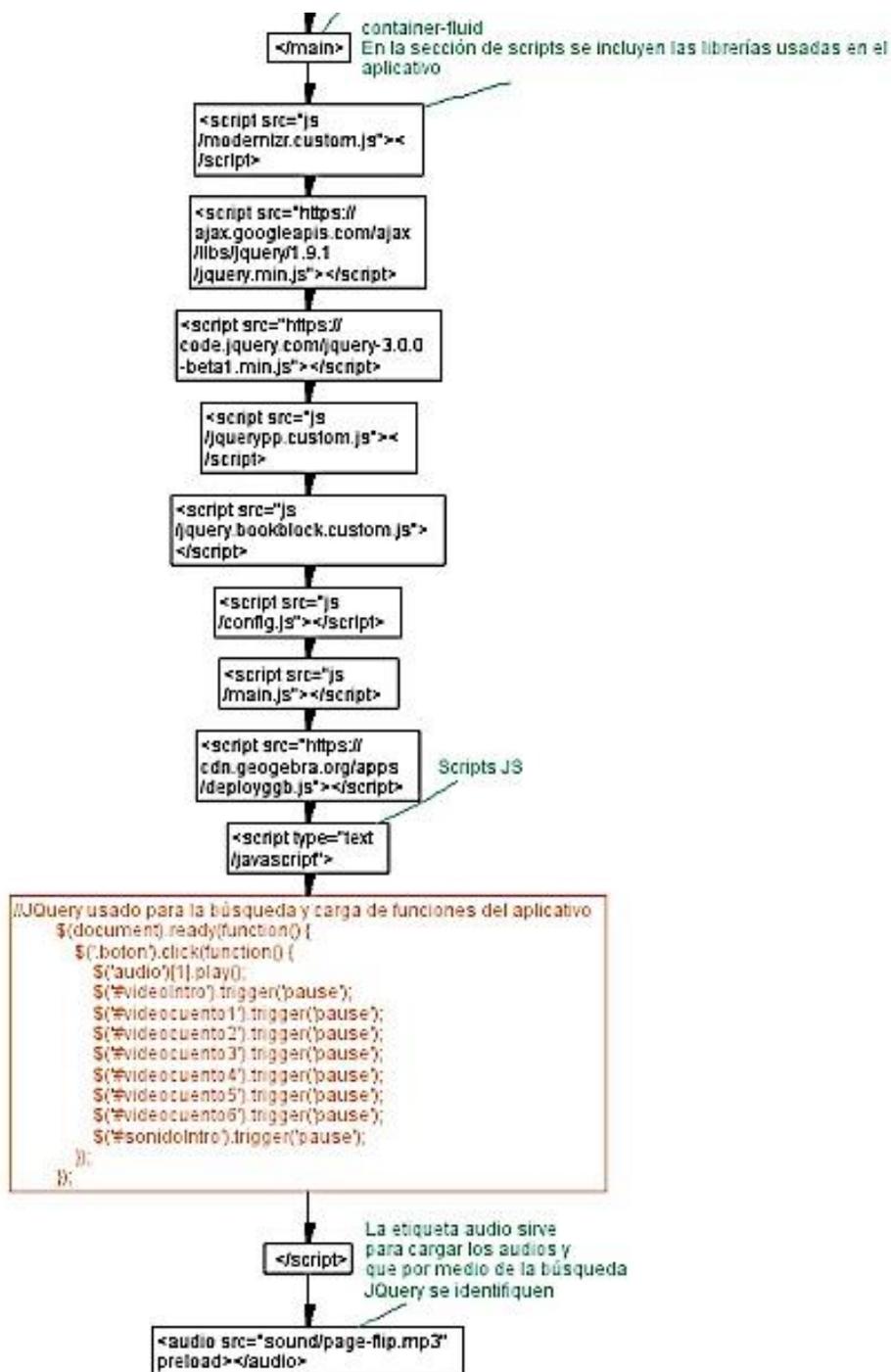
Las etiquetas `<script>` sirven para incluir código en lenguajes de script. Dentro de la cabecera en muchas páginas se incluye código en JavaScript, que es un lenguaje de programación que los navegadores son capaces de reconocer e interpretar. El código JavaScript se reconoce porque va comprendido entre las etiquetas:

```
<script type="text/javascript">  
  
// Aquí se desarrolla el código  
  
</script>
```

En la Sección de scripts se incluye toda la programación estructurada, necesaria para el correcto funcionamiento del programa haciendo uso de programación web, lo que involucra un conocimiento apropiado de HTML, CSS, Javascript, Node.js, frameworks, Electron, Cordova, JQuery, JQuery Mobile, Bootstrap, Applets Embed, entre otras herramientas importantes útiles para el desarrollo de búsquedas dinámicas del libro iterativo.

Figura 16

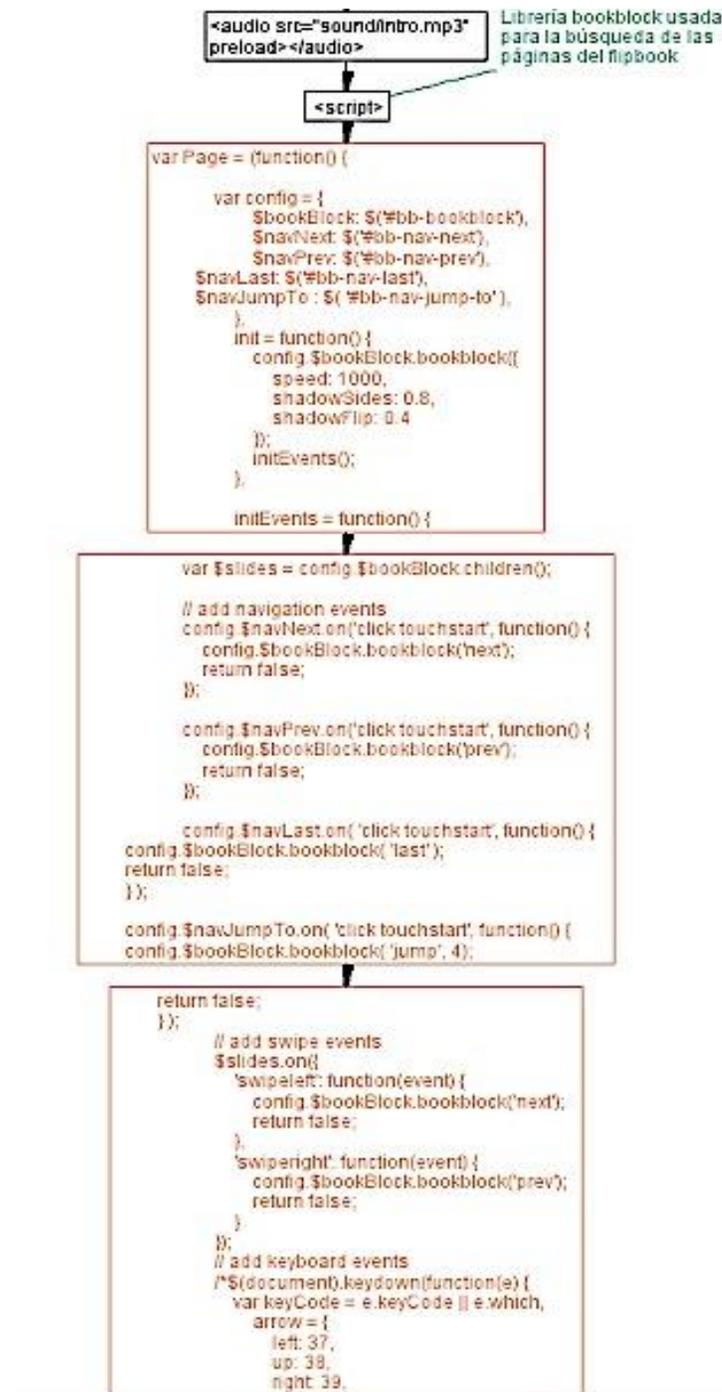
Scripts A: Inclusión de Librerías



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 17

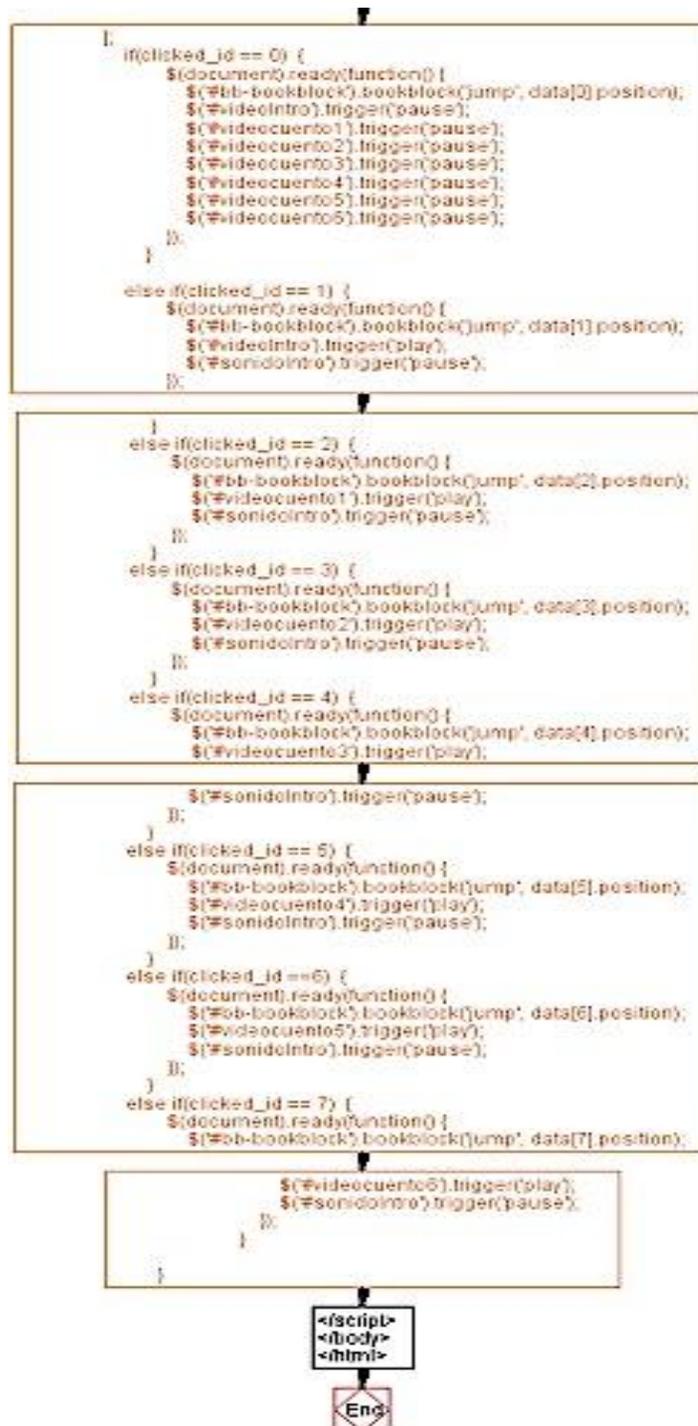
Scripts B1: Búsqueda de páginas Flipbook



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 19

Scripts B3: Búsqueda de páginas Flipbook



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia*.

Importancia del uso de herramientas informáticas embebidas en la enseñanza de las matemáticas

El desarrollo cognitivo de las matemáticas en la actualidad se produce a edades tempranas, por lo cual se debería aprovechar al máximo la concreción de estos saberes, fomentando una enseñanza y formación de calidad acorde a la era informática en la que estamos inmersos. Hoy se puede encontrar innumerables herramientas y plataformas de desarrollo tecnológico, que pueden ser acopladas a diversas aplicaciones, mediante una correcta selección, verificación y validación de recursos informáticos, que permiten una programación integral mediante la creación de softwares únicos y personalizados, agradables y óptimos para los usuarios.

Introducción a “Geogebra” y uso de herramientas de Applet embebido

“Geogebra”

“GeoGebra” es un software libre de matemática para educación en todos los niveles disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente Aritmética, Geometría, Álgebra y Cálculo en un único conjunto, tan sencillo a nivel operativo como potente.

Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. Ha recibido numerosas distinciones y ha sido galardonado en Europa y Estados Unidos en organizaciones y foros de software educativo. (feandalucia, 2020)

El docente debe actualizarse continuamente sobre cómo usar herramientas tecnológicas “Geogebra”. Existe un espectro amplio de material de ayuda y soporte para aprender a usar la plataforma de la mejor forma posible. Y, además de las comunidades extraoficiales, la propia plataforma integra lo que se denominan comunidades internacionales, divididas en países, y que son un recurso muy interesante para estar atento a lo que sucede alrededor de la herramienta.

Cada vez que se utiliza la aplicación para cada una de las opciones que se considere emplear, existe al alcance una ayuda en la que explica cómo funciona esta opción, y abre las posibilidades para investigarla. “Geogebra” también dispone de tutoriales guiados, paso a paso, para iniciarse en diferentes temas específicos, recopilados a lo largo de la aplicación y que se los va descubriendo a medida que se la utiliza. (Espeso, 2016)

Figura 20

Logo de “Geogebra”



Nota. Fuente: <https://www.geogebra.org/m/yYfwuzcd>

Implementación del Sistema aplicativo *Libro iterativo multimedia*

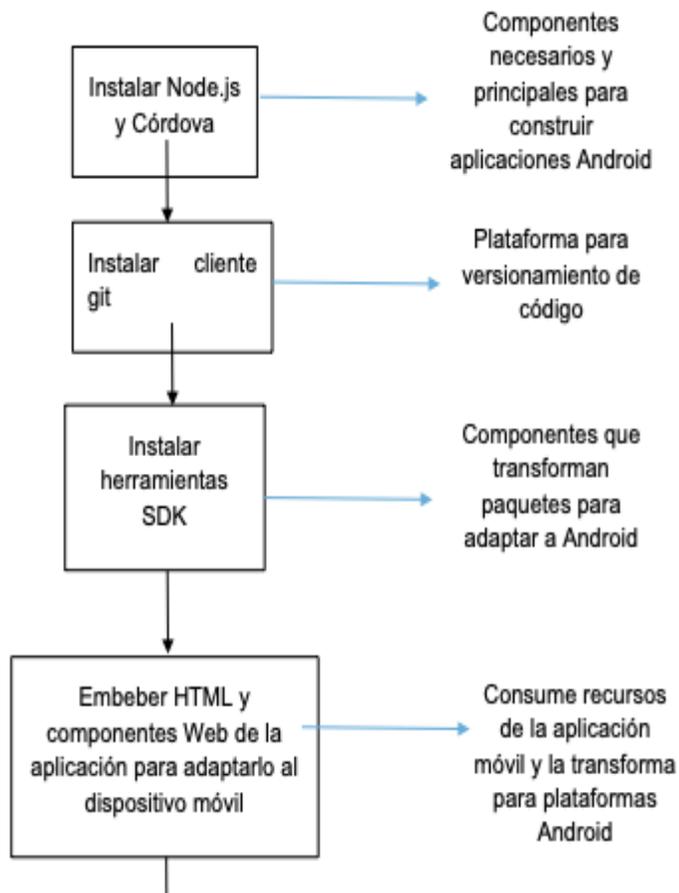
Integración móvil del aplicativo

El desarrollo móvil utiliza el entorno de Córdova, que permite incluir paquetes HTML ejecutados en Android.

Para instalar la herramienta de línea de comandos de Córdoba, el procedimiento requiere el siguiente proceso:

Figura 21

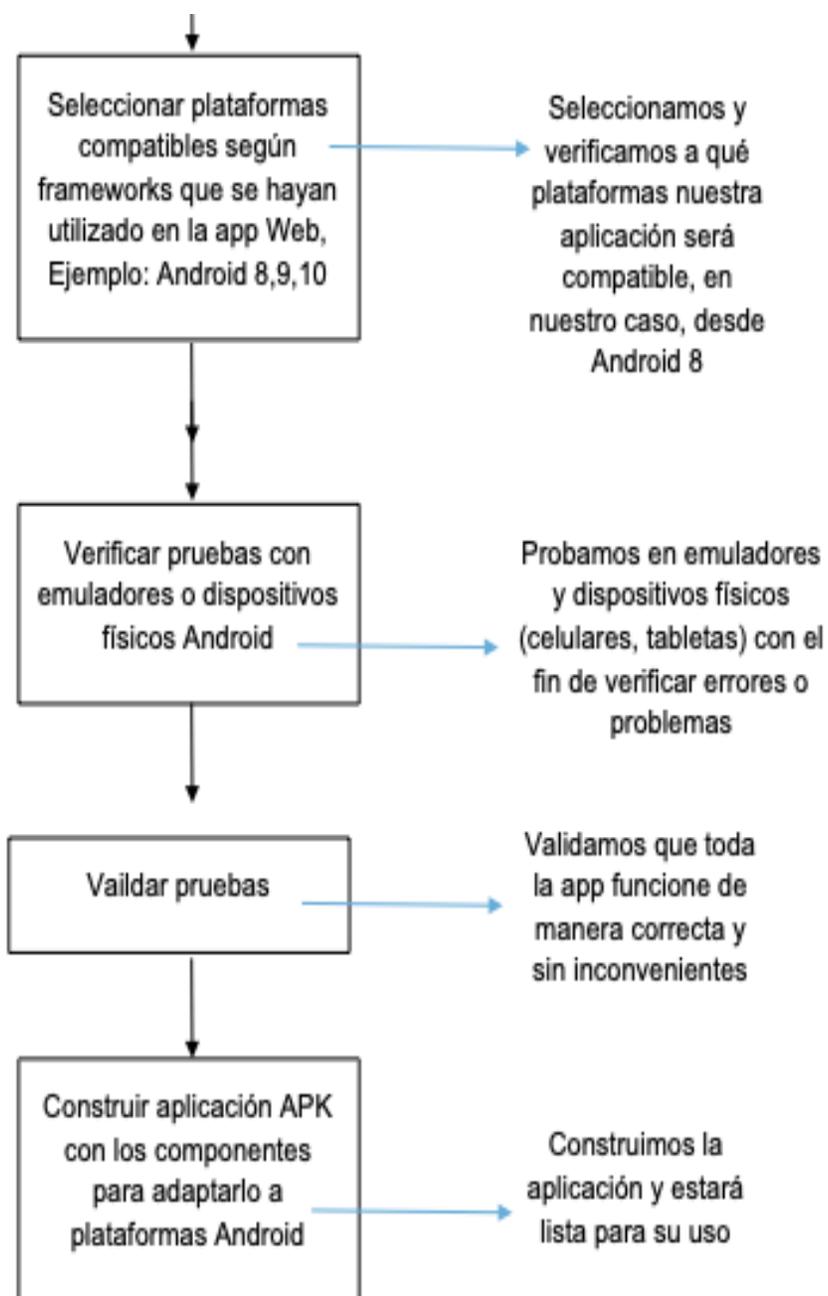
Procedimiento de integración Móvil A1



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia para aplicación móvil*.

Figura 22

Procedimiento de integración Móvil A2



Nota. Fuente: Tomado de la arquitectura del *Libro iterativo multimedia para aplicación móvil.*

Emulación de validación Android

Emulación de validación para Tabla Nexus S con Android 8 y dimensiones de 63 mm de alto por 123.9 mm de ancho.

Figura 23

Procedimiento de integración emulado: Plataforma Nexus S



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

Emulación de validación para Tabla Nexus 7 con Android 9 y dimensiones de 200 mm de alto por 114 mm de ancho.

Figura 24

Procedimiento de integración emulado: Plataforma Nexus 7



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

El último proceso emulado utilizado es para la plataforma de Tablet Samsung S6 con Android 10 y dimensiones de 244.5 mm de alto por 159.5 mm de ancho.

Figura 25

Procedimiento de integración emulado: Plataforma Samsung S6



Nota. Fuente: Tomado del Libro iterativo multimedia.

Implementación del Sistema aplicativo *Libro iterativo multimedia*

Se ha utilizado el formato de un libro iterativo multimedia ya que es un proyecto sustentado en la narración de historietas literarias científicas correspondientes al Área de las Ciencias de las Matemáticas, cumpliendo así con el desarrollo del material didáctico tecnológico planificado.

Figura 26

Especificaciones del formato de Libro Iterativo Multimedia



Nota. Fuente: Tomado del Libro iterativo multimedia.

Se presenta un ícono pequeño “Libro” que apuntará hacia el contenido o índice de los cuentos de la aplicación.

Figura 27

Enlace al contenido de la aplicación



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

La aplicación presenta dos flechas laterales que servirán para avanzar o retroceder las páginas, así el estudiante puede desplazarse dentro de los contenidos de manera apropiada e intuitiva en la revisión de los mismos.

Figura 28

Representación de las flechas: Avanzar y Retroceder



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

En la segunda página de la aplicación del *Libro iterativo multimedia* se presentará el menú de contenidos, que mostrará los botones que enlazarán al estudiante con la introducción, los diferentes títulos de los cuentos y con ello a las aplicaciones iterativas embebidas de “Geogebra”, para que pueda acceder inmediatamente a las secciones de su interés.

Figura 29

Contenido de la aplicación

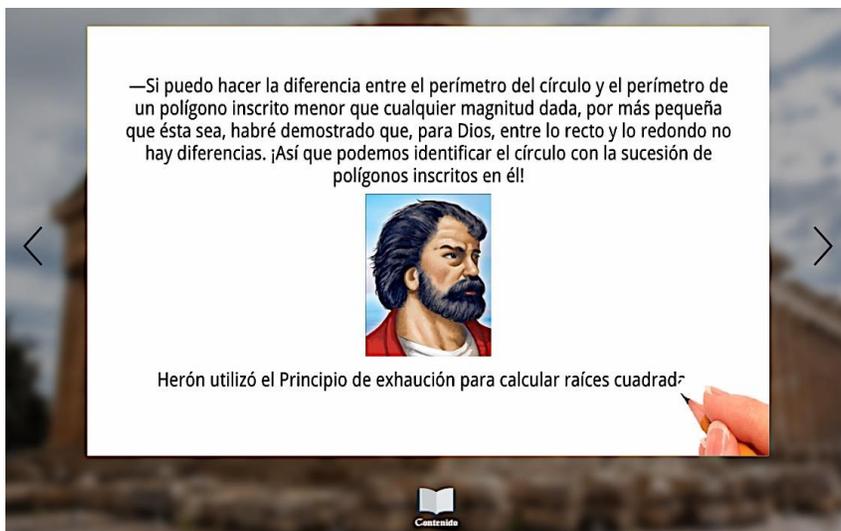


Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

En el caso de avanzar de página o acceder directamente dentro del menú, en “Introducción” se presentará un resumen del contenido de los cuentos iterativos que se abordarán en el presente programa. Esta sección se presenta atractiva para captar la atención del usuario mediante la animación de un lápiz que describirá el texto en forma amigable y recreativa.

Figura 30

Introducción Libro iterativo multimedia



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

En el caso de continuar avanzando de página o acceder directamente dentro del menú, en “Eudoxo: El Principio de exhaución” se visualizará el video recreativo del cuento literario científico, este será una representación de la primera temática de matemáticas relacionada con el libro iterativo multimedia *Del Principio de exhaución al concepto de sucesión*.

El cuento presenta una animación 3D, con personajes muy bien definidos y representados que darán vida a la enseñanza del tema matemático tratado; además, su lenguaje es expresado mediante un audio recreado en formato karaoke para que el usuario pueda escucharlo y leerlo de mejor manera.

Figura 31

Cuento 1 del Libro iterativo multimedia



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

El video tendrá las opciones de “Play”, para dar inicio a la reproducción del mismo, “Pantalla completa” y “Ajuste de audio”, para ubicar la reproducción en el momento que el estudiante requiera.

Figura 32

Botonera del proceso de reproducción del video

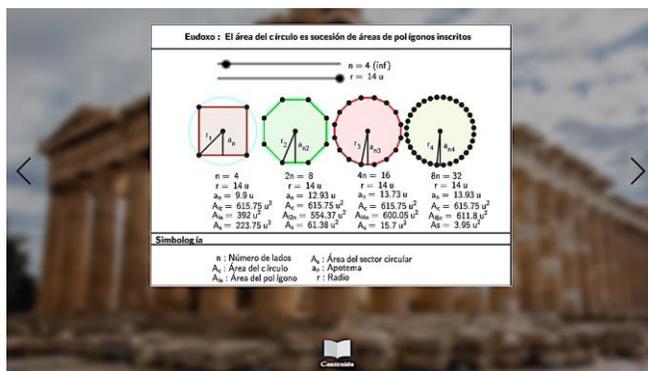


Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

Finalizada la reproducción del Cuento 1, en la siguiente página se visualizará el aplicativo correspondiente del “Geogebra” embebido, que le permitirá al estudiante aprender, consolidar y validar mediante la interacción didáctica la temática vinculante al Cuento 1, mejorando su aprendizaje matemático de forma sustancial.

Figura 33

Software embebido “Geogebra”: Cuento 1



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

A continuación, se enlista todos los cuentos que componen el *Libro iterativo multimedia* desarrollado dentro del aplicativo.

Figura 34

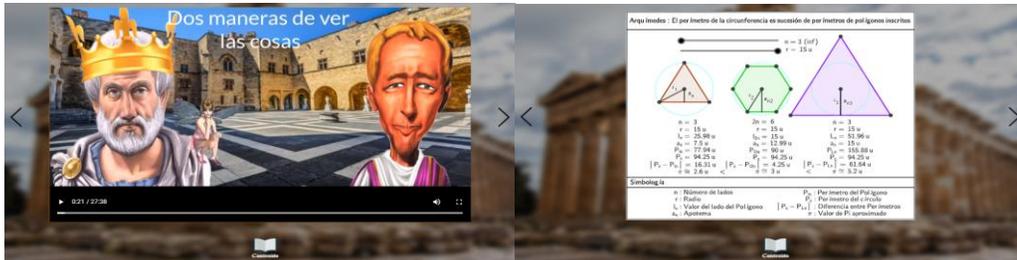
Historieta 1: El Principio de exhaustión



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 35

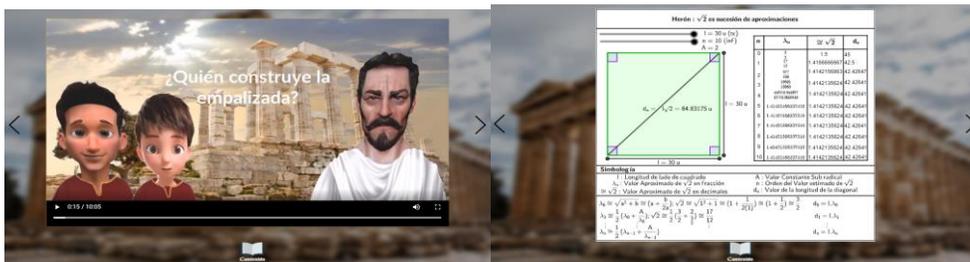
Historieta 2: Dos maneras de ver las cosas



Nota. Fuente: Tomado del Libro iterativo multimedia.

Figura 36

Historieta 3: ¿Quién construye la empalizada?



Nota. Fuente: Tomado del Libro iterativo multimedia.

Figura 37

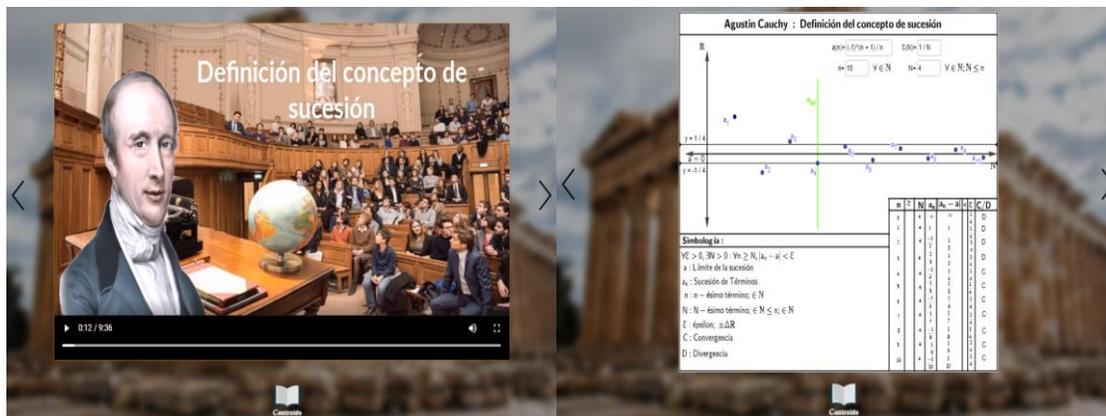
Historieta 4: Un método novedoso, π es sucesión de aproximaciones decimales



Nota. Fuente: Tomado del Libro iterativo multimedia.

Figura 38

Historieta 5: Definición del concepto de sucesión



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

Figura 39

Historieta 6: Perfecciona una técnica de Vieta



Nota. Fuente: Tomado del *Libro iterativo multimedia*.

Acceso a la aplicación *Libro iterativo multimedia* Desktop y Mobile

Requerimientos de la aplicación *Libro iterativo multimedia*

Sistema (Desktop)

Requisitos mínimos

- Sistema operativo: Windows 7
- Procesador: 2.4 GHz Dual Core
- Memoria Ram: 4 GB
- Disco duro: 5 GB libre

Requisitos recomendados

- Sistema operativo: Windows 10
- Procesador: 2.4 GHz Quad Core o INTEL CORE I7
- Memoria Ram: 8 GB
- Disco duro: 30 GB libre
- Tarjeta de video: NVIDIA GeForce GTX 560/ ATI Radeon HD
- Tarjeta de sonido: DirectX 9.0 c Compliant

Plataformas (Android)

Requisitos mínimos

- Android 8
- Memoria Ram: 2 GB
- Memoria interna: 2 GB libre

Requisitos recomendados

- Android 9 y 10
- Memoria Ram: 8 GB
- Memoria interna: 8 GB Libres

Capítulo 4

Análisis e interpretación de resultados

Matriz de evaluación, revisión y verificación del grupo de expertos

Figura 40

Matriz de evaluación, revisión y verificación del grupo de expertos

1. Consideraciones previas	Si	No					
			PUNTAJE				
	4	3	2	1	0		
	sobresaliente	bueno	regular	insuficiente	no presenta		
Verifique que el revisor posee la experticia suficiente en el área							
Verifique que el revisor no posee conflicto de intereses							
Verifique que el revisor tenga el tiempo necesario para completar la revisión en el plazo solicitado							
2. Resumen de la investigación e percepción general							
El artículo es original y aporta con nuevo conocimiento en el tema							
El artículo esta acorde al área propuesta de investigación							
Resume la información contenida en el manuscrito							
Resalta las fortalezas y debilidades del manuscrito							
Recomienda la acción a seguir							
3. Resultados y Discusión de áreas específicas para mejorar							
Los resultados se presentan adecuadamente en vinculo directo con el tema							
La metodología para el analisis estadístico de resultados esta acorde con la investigación							
Los datos son completos y se vinculan con la discusión							
Separa la revisión en 2 áreas, de importancia mayor y de importancia menor							
La discusión es amplia y específica acorde a los resultados del manuscrito							
La discusión plantea nuevas interrogantes/ o direcciona a nuevas investigaciones.							
Se establecen las limitantes del estudio.							
Las conclusiones responden a los resultados							
El manuscrito detalla todas las referencias bibliográficas citadas.							
Posee detalles técnicos							
Redacción científica adecuada							
4. Otras consideraciones de interés							
La investigación cumple con los lineamientos éticos							
La investigación no posee conflictos de interés							
Nota: Si el manuscrito completa de 60 a 72 se APRUEBA							
De 60 puntos para abajo se envia a una nueva revisión							
Menos de 50 el manuscrito es rechazado							

Schonhaut Berman L, Millan Klusse T y Podesta López L. 2017. Revisión por pares: evidencias y desafíos. *Rev. chil. pediatr. [online]* 88:5, 577-581

4.1 Matriz de Evaluación, Revisión y Verificación del Grupo de Expertos. (Matriz GP)					
1. Consideraciones previas					
Verifique que el revisor posee la experticia suficiente en el área	Si	No			
Verifique que el revisor no posee conflicto de intereses	x				
Verifique que el revisor tenga el tiempo necesario para completar la revisión en el plazo solicitado	x				
	PUNTAJE				
	4	3	2	1	0
	notable	bueno	regular	insuficiente	no presenta
2. Resumen de la investigación y percepción en el tema					
El artículo es original y aporta con nuevo conocimiento en el tema	4				
El artículo esta acorde al área propuesta de investigación	4				
Resume la información contenida en el manuscrito	4				
Resalta las fortalezas y debilidades del manuscrito	4				
Recomienda la acción a seguir	4				
3. Resultados y Discusión de áreas específicas para mejorar					
Los resultados se presentan adecuadamente en vinculo directo con el tema	4				
La metodología para el análisis estadístico de resultados esta acorde con la investigación	4				
Los datos son completos y se vinculan con la discusión	4				
Separa la revisión en 2 áreas, de importancia mayor y de importancia menor	4				
La discusión es amplia y específica acorde a los resultados del manuscrito	4				
La discusión plantea nuevas interrogantes / o direcciona a nuevas investigaciones.		3			
Se establecen las limitantes del estudio.					0
Las conclusiones responden a los resultados			2		
El manuscrito detalla todas las referencias bibliográficas citadas.	4				
Posee detalles técnicos	4				
Redacción científica adecuada	4				
4. Otras consideraciones de interés					
La investigación cumple con los lineamientos éticos	4				
La investigación no posee conflictos de interés	4				
	60	3	2	0	0
5. Total / 72	65				
Nota: Si el manuscrito completa de 60 a 72 se APRUEBA					
De 60 A 50 puntos para abajo se envía a una nueva revisión					
Menos de 50 el manuscrito es rechazado					
Schonhaut Berman L, Millan Klusse T y Podesta López L. 2017. Revisión por pares: evidencias y desafíos. Rev. Chil. Pediatr. [online] 88:55, 577-581					

Página única
PhD. Karina Cela Rosero
Ver una niña cada vez

4.1 Matriz de Evaluación, Revisión y Verificación del Grupo de Expertos. (Matriz GP)					
1. Consideraciones previas					
Verifique que el revisor posee la experticia suficiente en el área	Si	No			
Verifique que el revisor no posee conflicto de intereses	x				
Verifique que el revisor tenga el tiempo necesario para completar la revisión en el plazo solicitado	x				
	PUNTAJE				
	4	3	2	1	0
	notable	bueno	regular	insuficiente	no presenta
2. Resumen de la investigación y percepción en el tema					
El artículo es original y aporta con nuevo conocimiento en el tema	4				
El artículo esta acorde al área propuesta de investigación	4				
Resume la información contenida en el manuscrito	4				
Resalta las fortalezas y debilidades del manuscrito	4				
Recomienda la acción a seguir	4				
3. Resultados y Discusión de áreas específicas para mejorar					
Los resultados se presentan adecuadamente en vinculo directo con el tema	4				
La metodología para el análisis estadístico de resultados esta acorde con la investigación		3			
Los datos son completos y se vinculan con la discusión		3			
Separa la revisión en 2 áreas, de importancia mayor y de importancia menor		3			
La discusión es amplia y específica acorde a los resultados del manuscrito	4				
La discusión plantea nuevas interrogantes / o direcciona a nuevas investigaciones.	4				
Se establecen las limitantes del estudio.	4				
Las conclusiones responden a los resultados		3			
El manuscrito detalla todas las referencias bibliográficas citadas.	4				
Posee detalles técnicos	4				
Redacción científica adecuada	4				
4. Otras consideraciones de interés					
La investigación cumple con los lineamientos éticos	4				
La investigación no posee conflictos de interés	4				
	56	12	0	0	0
5. Total / 72	68				
Nota: Si el manuscrito completa de 60 a 72 se APRUEBA					
De 60 A 50 puntos para abajo se envía a una nueva revisión					
Menos de 50 el manuscrito es rechazado					
Schonhaut Berman L, Millan Klusse T y Podesta López L. 2017. Revisión por pares: evidencias y desafíos. Rev. Chil. Pediatr. [online] 88:55, 577-581					

D. Guayasamín
1705390308

Msc. Natacha Guayasamín

4.1 Matriz de Evaluación, Revisión y Verificación del Grupo de Expertos. (Matriz GP)							
1. Consideraciones previas	Si	No	PUNTAJE				
			4	3	2	1	0
Verifique que el revisor posee la experticia suficiente en el área			notable	bueno	regular	insuficiente	no presenta
Verifique que el revisor no posee conflicto de intereses							
Verifique que el revisor tenga el tiempo necesario para completar la revisión en el plazo solicitado							
2. Resumen de la investigación y percepción en el tema							
El artículo es original y aporta con nuevo conocimiento en el tema	4						
El artículo esta acorde al área propuesta de investigación	4						
Resume la información contenida en el manuscrito	4						
Resalta las fortalezas y debilidades del manuscrito	4						
Recomienda la acción a seguir	4						
3. Resultados y Discusión de áreas específicas para mejorar							
Los resultados se presentan adecuadamente en vínculo directo con el tema		3					
La metodología para el análisis estadístico de resultados esta acorde con la investigación		3					
Los datos son completos y se vinculan con la discusión		3					
Separa la revisión en 2 áreas, de importancia mayor y de importancia menor	4						
La discusión es amplia y específica acorde a los resultados del manuscrito	4						
La discusión plantea nuevas interrogantes / o direcciona a nuevas investigaciones.	4						
Se establecen las limitantes del estudio.		3					
Las conclusiones responden a los resultados		3					
El manuscrito detalla todas las referencias bibliográficas citadas.	4						
Posee detalles técnicos	4						
Redacción científica adecuada	4						
4. Otras consideraciones de interés							
La investigación cumple con los lineamientos éticos	4						
La investigación no posee conflictos de interés	4						
5. Total / 72	52, 0	15, 0	0	0	0	0	0
	67, 0						
Nota: Si el manuscrito completa de 60 a 72 se APRUEBA							
De 60 A 50 puntos para abajo se envía a una nueva revisión							
Menos de 50 el manuscrito es rechazado							
Schonhaut Berman L, Millan Klusse T y Podestá López L. 2017. Revisión por pares: evidencias y desafíos. Rev. Chil. Pediatr. [online] 88:55, 577-581							


Msc. Jenny Venegas B.
170867036-7

4.1 Matriz de Evaluación, Revisión y Verificación del Grupo de Expertos. (Matriz GP)							
1. Consideraciones previas	Si	No	PUNTAJE				
			4	3	2	1	0
Verifique que el revisor posee la experticia suficiente en el área	X		notable	bueno	regular	insuficiente	no presenta
Verifique que el revisor no posee conflicto de intereses	X						
Verifique que el revisor tenga el tiempo necesario para completar la revisión en el plazo solicitado	X						
2. Resumen de la investigación y percepción en el tema							
El artículo es original y aporta con nuevo conocimiento en el tema	4						
El artículo esta acorde al área propuesta de investigación	4						
Resume la información contenida en el manuscrito	4						
Resalta las fortalezas y debilidades del manuscrito	4						
Recomienda la acción a seguir	4						
3. Resultados y Discusión de áreas específicas para mejorar							
Los resultados se presentan adecuadamente en vínculo directo con el tema	4						
La metodología para el análisis estadístico de resultados esta acorde con la investigación	4						
Los datos son completos y se vinculan con la discusión	4						
Separa la revisión en 2 áreas, de importancia mayor y de importancia menor	4						
La discusión es amplia y específica acorde a los resultados del manuscrito	4						
La discusión plantea nuevas interrogantes / o direcciona a nuevas investigaciones.	4						
Se establecen las limitantes del estudio.	4						
Las conclusiones responden a los resultados	4						
El manuscrito detalla todas las referencias bibliográficas citadas.	4						
Posee detalles técnicos	4						
Redacción científica adecuada	4						
4. Otras consideraciones de interés							
La investigación cumple con los lineamientos éticos	4						
La investigación no posee conflictos de interés	4						
5. Total / 72	72		0	0	0	0	0
	72						
Nota: Si el manuscrito completa de 60 a 72 se APRUEBA							
De 60 A 50 puntos para abajo se envía a una nueva revisión							
Menos de 50 el manuscrito es rechazado							
Schonhaut Berman L, Millan Klusse T y Podestá López L. 2017. Revisión por pares: evidencias y desafíos. Rev. Chil. Pediatr. [online] 88:55, 577-581							


Mgs. Margarita Kostikova
MARGARITA KOSTIKOVA
C.I. 170628105-0

Certificación del grupo de expertos**CERTIFICADO**

El grupo de expertos notifica al maestrante **Sr. Ing. Nelson Oswaldo Villagrán Díaz**, luego de haber cumplido los procesos de socialización y revisión del proyecto, que procede a “avaluar en forma pertinente los tratados y contenidos vinculantes en las áreas del conocimiento: Pedagogía, Matemáticas y Tecnologías”, alcanzando el desarrollo de los objetivos programados.

Por la presente, certifica que el diseño del *Libro iterativo multimedia Desde el Principio de exhaustión hasta el concepto de sucesión*, es un texto de contenido científico de investigación en Ciencias Exactas, Matemáticas e Ingenierías. En cumplimiento a lo manifiesto, se sugiere considerar su precedente indexación:

Grupo de expertos

PhD. Karina Cela Rosero, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Ecuador.

Mgs. Margarita Kostikova, docente del Centro de Posgrados en la Maestría Enseñanza de la Matemática, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Ecuador.

Msc. Natacha Guayasamín, exdirectora de la Carrera de Administración Educativa de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Ecuador.

Msc, Jenny Venegas B, coordinadora académica Área 4, Sistema de Nivelación de la Universidad Central del Ecuador (UCE), Ecuador.

La valoración del *Libro iterativo multimedia* se realiza mediante el sistema de revisión por pares (peer review) y se engloba bajo una Licencia Creative Commons: Atribución – No Comercial – Sin Obra Derivada 4.0 Internacional.

Y para que así conste, se expide la presente certificación en Quito, 15 de julio de 2020.

Diseño de un *libro iterativo multimedia desde el principio de exhaución hasta el concepto de sucesión*

Villagrán Díaz, Nelson Oswaldo

Bernis Llanos, Richard Marino

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Quito, Ecuador

*Autor principal/Corresponding autor, e-mail: novillagran@espe.edu.ec





PhD. Karina Cela Rosero

Mgs. Margarita Kostikova

Msc. Natacha Guayasamín



Msc. Jenny Venegas

Conclusiones

- El trabajo se diseñó como consecuencia de múltiples factores que inciden en el campo educativo, contenidos, horas de dedicación, motivación de estudiantes y docentes, tipos de razonamiento, autores de textos matemáticos referidos al tema de sucesión, estilos de aprendizaje, estudiantes menos comprometidos.
- Esta investigación se basó en el diseño y desarrollo de un libro físico didáctico constructivista que permita alcanzar aprendizajes significativos, que brinden al estudiante habilidades en su pensamiento, que conceptúe a la sucesión matemática y que permita que su cognitivo se enliste para un aprendizaje más formal y rígido en el cálculo y análisis numérico.
- La investigación se basa en un libro físico que contiene 36 cuentos matemáticos de autoría del tesista y se recrean seis de ellos en el libro iterativo, tomándose este como un proyecto piloto.
- La metodología utilizó procesos para enseñar a pensar y a cuestionar. Si bien es cierto, el docente no puede introducirse en el pensamiento del estudiante, no es menos cierto que el nivel de abstracción del docente fue modelado sobre la base del tiempo y el ejercicio de su pensamiento, es decir, los docentes abstraen algo que les llevó mucho tiempo practicar y aprender, así que no se debe esperar del estudiante que realice una abstracción de algo que nunca ha concretado. Es mejor utilizar la experticia en beneficio de los estudiantes para transformar la enseñanza difícil en un aprendizaje fácil.
- La metodología se diseñó para trabajar en los procesos mentales con los estudiantes menos favorecidos para las matemáticas. Esta es una de las

funciones principales del docente de esta asignatura. Se consideró a la metodología ACODESA como creativa y que mejor se adapta al grupo de estudiantes.

- Este trabajo se presenta como un paradigma educativo para alcanzar objetivos del aprendizaje significativo mediante el trabajo individual y grupal, asistido por el docente únicamente como guía en la actividad académica válida para la modalidad presencial o virtual.
- En el presente trabajo se mencionó un par de instrumentos y técnicas (test de Gregory y Kolb) que el docente puede optar para identificar las características de los pensamientos y estilos de aprendizaje de sus estudiantes.
- El contenido de un sílabo no debe ser camisa de fuerza para el cumplimiento del docente. Avanzar con los temas y dejar vacíos en el conocimiento es la peor frustración en la relación docente-estudiante. El micro currículo le pertenece al docente, y con este trabajo se expresa que existen metodologías para que los estudiantes sean descubridores de su conocimiento e interpreten los conceptos bajo sus ideas, creencias y propias realidades.
- El docente debe diseñar un conjunto de actividades estructuradas que consoliden la construcción progresiva, reflexiva y científica de los conocimientos matemáticos utilizando los aportes teóricos de paradigmas constructivistas que garanticen una correcta implementación tecnológica del instrumento.
- Las metodologías de enseñanza y aprendizaje deben seguir procesos de continua transición, de lo abstracto a lo concreto, de lo concreto a lo abstracto, de lo abstracto a lo concreto de forma que el estudiante en este vaivén asiente su conocimiento.
- Se trabajó con cuentos o narrativas matemáticas, para despertar la creatividad

que todo ser humano tiene en el lenguaje y su buen uso. El hábito de la comunicación logra que el estudiante aprenda a conversar o hablar consigo mismo por cada proceso mental que se ejecuta, y lo que él piensa, escriba y fundamente. Esta parte es importante porque se enseña al estudiante a pensar en variables, a establecer relaciones, a usar propiedades y a justificar matemáticamente.

- La parte literaria llevada a conceptos matemáticos en el trabajo requirió de mucho estudio científico e histórico matemático-literario, una gran navegación para determinar el estado del arte. Este es un aporte invaluable para que el estudiante relacione la matemática con el lenguaje.
- Se realizó una revisión sistemática de literatura a fin de establecer la redacción narrativa de historietas pertinentes implementadas, de esta forma se vincularon los personajes que narran de forma lúdica los diferentes temas vinculados con el aprendizaje de matemáticas en el tema de sucesiones con recreaciones innovadoras en el libro iterativo, con el propósito de captar la atención de los estudiantes y provocar así el acercamiento amigable en la búsqueda del concepto matemático presente en la narrativa.
- Se establecieron los niveles de razonamiento cognitivos requeridos en el aprendizaje de la Teoría de sucesiones a través de la metodología e implementación del instrumento desarrollado: *Libro iterativo multimedia*.
- Se desarrolló una aplicación digital del *Libro iterativo multimedia* para dispositivos electrónicos y/o “computadores personales”, que contribuya al aprendizaje y enseñanza de la matemática en referencia a la Teoría de sucesiones; este será un instrumento pedagógico tecnológico base que permita alcanzar un desarrollo lógico, abstracto y dinámico en el proceso académico.

- Se implementó una aplicación de enseñanza innovadora e interactiva utilizando software y herramientas de apoyo académico de interés social y, a su vez, de gran utilidad. Los docentes pueden hacer uso de cualquier software libre.
- Se consolidaron los conocimientos mediante el uso y aplicación de herramientas matemáticas y luego la validación con los resultados que se presentan en tablas o en gráficos generados por la variación de parámetros o variables manipuladas por el estudiante y observadas gracias al software embebido “Geogebra”; de este modo, el estudiante asegura y afianza el conocimiento.
- La propuesta es una herramienta metodológica que se espera que los estudiantes y los docentes la usen como una forma de potenciar no solo la comprensión de la definición de una sucesión, sino de cualquier tema matemático.

Recomendaciones

- El docente debe ser creativo, ante todo, poseer la pasión para enseñar, esta es la ruta para desterrar la enseñanza tradicional y no esperar que las autoridades en educación encuentren la respuesta e implementen los cambios, correcciones o ajustes que se requieran. Es el docente el responsable de democratizar el conocimiento y formar pensadores que enfrenten con éxito los problemas de la vida en comunión con el avance de la tecnología, la matemática y este trabajo aportan para ello.
- La metodología y el libro iterativo diseñados para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática quedan como instrumentos que deben ser aprovechados por la Institución para sustentar la relevancia, analizar el impacto en el estudiante y promover el cambio de paradigma en el docente.

- Para que esta investigación recurra a la metodología cuantitativa, se recomienda basarse en el paradigma positivista orientado a la comprobación, reduccionista, inferencial e hipotético-deductivo, desde la cual la realidad es independiente, en razón de que la subjetividad por hoy es la realidad. En algún momento se debe validar el libro y ver el efecto del trabajo. La tesis no se centró en cómo evaluar el instrumento sino en la creación, el diseño y el desarrollo del instrumento.
- Profundizar en investigaciones que permitan el diseño de propuestas metodológicas de enseñanza donde las definiciones y la notación usadas sean asimiladas de forma no memorística, pero sí constructivista, mucho más, considerando que la sucesión es un tema sumamente importante, por lo que merece el estudio para potenciar científica y metodológicamente su comprensión.
- Se recomienda al docente trabajar con los estudiantes en la expansión y contracción de ideas, estrategias y formulación de problemas que es la base para la solución de un problema.
- En la ejecución del proyecto *Libro iterativo multimedia*, se recomienda para la grabación de audios de los personajes disponer de un micrófono profesional con sistema de amplificación, esto optimizará la elaboración de voces, minimizando espacios blancos en la fluidez de la narración y, además, promover el uso de software profesional para el procesamiento del sonido.
- La animación 3D demanda considerables recursos tecnológicos en su desarrollo, por ello se recomienda el uso de computadores de última generación, con características de procesamientos gráficos de alta resolución y definición, con procesadores, tarjetas de video y de audio para una óptima renderización.
- En el desarrollo de aplicaciones móviles futuras del *Libro iterativo multimedia*, que

- requieran implementar mayor número de historietas, se recomienda a la institución efectuar un análisis financiero que garantice el presupuesto necesario en este sentido y, por otra parte, considerar la demanda de tiempos que conllevaría su implementación o, en su defecto, contemplar un equipo de trabajo consolidado en diferentes áreas.
- El proyecto contempla un desarrollo tecnológico para sistemas Android y Windows; la elaboración en plataformas IOS y Mac requiere licenciamiento, programas y recursos que son pagados y, por ende, se necesita presupuesto. En el caso de elaborar un proyecto de uso en multiplataforma, se recomienda considerar la inversión.
 - Otro factor a considerar en el perfeccionamiento del proyecto es la selección de programas para desarrollo de animación, edición de video y audio, frameworks de desarrollo web y móvil que en varias ocasiones podrían requerir licenciamientos y gastos inadvertidos. Se recomienda los siguientes programas:
 - **Camtasia.** Es una suite o conjunto de programas, creados y publicados por TechSmith, para elaborar edición de video, para el uso de todas las herramientas; requiere la versión pagada.
 - **Filmora.** Software para editar video, la versión 2019 demanda paquetes pagados.
 - **Iclone 6.** Software en 3D en tiempo real más rápido, software de animación industrial, produce animaciones profesionales para películas, cortometrajes, animación, videojuegos, desarrollo de contenido, de aplicación educativa y arte.
 - El reconocimiento de este trabajo queda al momento a expensas de expertos académicos que con juicios de valor califican el presente instrumento., por lo que se recomienda realizar una post investigación a esta metodología y al libro iterativo. Si

los resultados son positivos la comunidad académica puede aceptar y efectuar cambios e innovación en el paradigma de nuestra educación superior en cursos iniciales de matemáticas y sentar las bases para el diseño de nuevas técnicas de enseñanza y aprendizaje que mucho necesita esta asignatura.

Glosario de términos

- **ACODESA.** Aprendizaje en colaboración, debate científico y autorreflexión.
- **Acrobat.** Es un lenguaje script multiparadigma, basado en prototipos, dinámico, soporta estilos orientados a objetos, imperativos y declarativos.
- **Apache Cordova** (anteriormente **PhoneGap**). Es un marco de desarrollo de aplicaciones móviles creado originalmente por Nitobi. Adobe Systems compró Nitobi en 2011, lo renombró como PhoneGap y luego lanzó una versión de código abierto del software llamado Apache Cordova.
- **APK.** Android Application Package. Es decir, un archivo ejecutable de aplicaciones para Android. Un archivo con extensión APK es un paquete para el sistema operativo Android. Este formato es una variante del formato JAR de Java y se usa para distribuir e instalar componentes empaquetados para la plataforma Android, tanto smartphones como tablets. APK hace referencia a un tipo de formato para archivos Android, en la mayoría de los casos se trata de aplicaciones o juegos, que nos permite instalarlos en nuestro dispositivo sin necesidad de utilizar Play Store.
- **Applet.** Es un componente de una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo, en un navegador web. El applet debe ejecutarse en un contenedor, que le proporciona un programa anfitrión, mediante un plugin, o en aplicaciones como teléfonos móviles que soportan el modelo de programación por "applets".
- **Bootstrap.** Es una biblioteca multiplataforma o conjunto de herramientas de código abierto para diseño de sitios y aplicaciones web. Contiene plantillas de diseño con tipografía, formularios, botones, cuadros, menús de navegación y

otros elementos de diseño basado en HTML y CSS, así como extensiones de JavaScript adicionales.

- **CSS.** Es lo que se denomina lenguaje de hojas de estilo en cascada y se usa para estilizar elementos escritos en un lenguaje demarcado como HTML. CSS separa el contenido de la representación visual del sitio.
- **Deployggb.js.** Es una biblioteca del lenguaje de programación Javascript para embeber aplicativos de “Geogebra”.
- **Didáctica de la matemática.** o educación matemática es una disciplina científica cuyo objeto de estudio es la relación entre los saberes, la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos propios de la matemática.
- **Electron.** Es un framework de código abierto creado por Cheng Zhao, y ahora desarrollado por GitHub.2. Permite el desarrollo de aplicaciones gráficas de escritorio usando componentes del lado del cliente y del servidor originalmente desarrolladas para aplicaciones web: Node.js del lado del servidor y Chromium como interfaz.
- **Embeber.** Es un término ligado a la programación que se utiliza para hablar de la acción de incrustar o insertar un contenido elaborado en un lenguaje de programación en otro lenguaje diferente.
- **Falibilismo.** Es la doctrina lógica que sostiene la posibilidad de que una proposición dada puede ser negada, cambiando su valor de verdad y a partir de ella obtener una nueva discriminación certera acerca de lo conocido. Esta doctrina tiene su génesis en el lógico Charles Sanders Peirce, conformando un elemento fundamental de sus sistemas lógico y filosófico.
- **Framework.** Un framework, entorno de trabajo o marco de trabajo es un conjunto estandarizado de conceptos, prácticas y criterios para enfocar un tipo

de problemática particular que sirve como referencia para enfrentar y resolver nuevos problemas de índole similar.

- **Git.** Es un sistema de control de versiones distribuido gratuitamente y de código abierto diseñado para manejar todo, desde proyectos pequeños hasta muy grandes, con rapidez y eficiencia.
- **Head.** Es un término utilizado en la programación web.
 - * **<head>** Provee información general (metadatos) acerca del documento, incluyendo su título y enlaces a scripts y hojas de estilos.
 - * **<title>** Define un título para su documento HTML.
 - * **<base>** Define ruta de acceso.
 - * **<body>**: Cuerpo de una estructura HTML.
 - * **<link>** Define archivos vinculados.
 - * **<meta>** Define metadatos como descripción y palabras clave.
 - * **<script>** Delimita scripts incluidos.
 - * **<style>** Delimita definición de estilos.
- **Hermenéutica.** es el arte o teoría de interpretar textos.
- **Heurística.** Cuando se usa como sustantivo, se refiere a la disciplina, el arte o la ciencia del descubrimiento. Cuando aparece como adjetivo, se refiere a cosas más concretas, como estrategias, reglas, silogismos y conclusiones.
- **Holístico.** Como adjetivo, holístico u holística significa una concepción basada en la integración total y global frente a un concepto o situación.
- **HTML.** Es un lenguaje demarcado que se utiliza para el desarrollo de páginas de Internet. Se trata de la sigla que corresponde a HyperText Markup Language, es decir, Lenguaje de Marcas de Hipertexto.

- **Iframe.** El elemento HTML <iframe> (de inline frame) representa un contexto de navegación anidado, el cual permite incrustar otra página HTML en la página actual.
- **Interactividad.** Se utiliza para referirnos a la relación de participación entre los usuarios, sistemas informáticos, libros, etc... Es un proceso de comunicación entre humanos y computadoras; Rost se refiere a ella como la capacidad de las computadoras por responder a los requerimientos de los usuarios.¹ Es un concepto ampliamente utilizado en las ciencias de la comunicación, en informática, en diseño multimedia y en diseño industrial.
- **Iteración.** Significa repetir varias veces un proceso con la intención de alcanzar una meta deseada, objetivo o resultado. Cada repetición del proceso también se le denomina una "iteración", y los resultados de una iteración se utilizan como punto de partida para la siguiente iteración.
- **Javascript.** Es un lenguaje de programación ligero e interpretado, orientado a objetos con funciones de primera clase. Aunque es más conocido como el lenguaje de scripting para páginas web, muchos entornos no relacionados con el navegador también lo usan, tales como node.js, Apache CouchDB y Adobe
- **JQuery.** Es una biblioteca multiplataforma de JavaScript, creada inicialmente por John Resig, que permite simplificar la manera de interactuar con los documentos HTML, manipular el árbol DOM, manejar eventos, desarrollar animaciones y agregar interacción con la técnica AJAX a páginas web.
- **Keyframe.** Un keyframe o "fotograma clave" es una marca que guarda la posición, escala, rotación y opacidad de un objeto en un momento específico de la escena.

- **Lema.** es una proposición demostrada, utilizada para establecer un teorema menor o una premisa auxiliar que forma parte de un teorema más general.
- **Metadato.** Es un término que se acuñó en los años 60 para describir un conjunto de datos, pero es ahora cuando está obteniendo más importancia y cuando más se está escuchando por el mundo virtual. Su primera acepción fue la de dato sobre dato, pero a partir de 2004 fue evolucionando hasta convertirse en lo que hoy lo conocemos: metadato.
- **Método exhaustivo.** es un procedimiento geométrico de aproximación a un resultado, con el cual el grado de precisión aumenta en la medida en que avanza el cálculo.

También se conoce como:

- **método por agotamiento**

- **método de exhaustión**

- **método de exhaustión**

El término proviene del inglés *method of exhaustion* (que sería mejor traducido como 'método por agotamiento', ya que la Real Academia Española no ha aceptado aún el sustantivo «exhaustión», a pesar de reconocer el adjetivo «exhausto»). El inglés *exhaustion* proviene del latín *exhaustiō* ('agotamiento').

- **Modelo positivista.** Tiene una visión de evolución, de crecimiento en etapas.
- **Node.js.** Es un entorno en tiempo de ejecución multiplataforma, de código abierto, para la capa del servidor (pero no limitándose a ello) basado en el lenguaje de programación JavaScript, asíncrono, con E/S de datos en una arquitectura orientada a eventos y basado en el motor V8 de Google.

- **Paradigmas.** Modelos de conocimiento aceptados por las comunidades científicas.
- **Prop.** Dentro del desarrollo de videojuegos, un prop es todo aquel elemento que pertenece al escenario del juego.
- **Script.** Es un término informal que se usa para designar a un programa relativamente simple. Los *scripts* regularmente no se compilan con anticipación a código máquina, sino que son ejecutados por un intérprete que lee el archivo de código fuente al momento; o incluso por una consola interactiva donde el usuario suministra el programa al intérprete paso a paso. Los guiones se pueden usar para prototipar programas, automatizar tareas repetitivas, hacer procesamiento por lotes e interactuar con el sistema operativo y el usuario (debido a esto, los intérpretes de comandos o *shells* suelen diseñarse con funcionalidades de programación).
- **Semiología o semiótica.** Es la ciencia derivada de la filosofía que trata de los sistemas de comunicación dentro de las sociedades humanas, estudiando las propiedades generales de los sistemas de signos, como base para la comprensión de toda actividad humana. Aquí, se entiende por signo un objeto o evento presente que está en lugar de otro objeto o evento ausente, en virtud de un cierto código.
- **SDK.** Es el acrónimo de “Software Development Kit” (Kit de desarrollo de software). El SDK reúne un grupo de herramientas que permiten la programación de aplicaciones móviles.

Referencias

- Allen, Á. (2008). *Álgebra intermedia*. México: Pearson Educación. Obtenido de https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/algebra_angel_ca_p11.pdf
- Alvarado Estrada, J., & Lunarejo López, D. (2015). Estrategias cognitivas de aprendizaje y el nivel de razonamiento geométrico en los estudiantes, especialidad de Mecánica de Producción. IESTP, Manuel Seoane Corrales. *Tesis de grado académico*, 167. Lima, Perú: Escuela de Posgrado, Universidad César Vallejo. Obtenido de http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12692/5071/Alvarado_EJ-Lunarejo_LDJ.pdf?sequence=1
- Aragón de Vian, M. (2000). *Estilos de aprendizaje*. (U. R. Landívar, Ed.) Guatemala, Guatemala: PROFASR, Guatemala C.A. Obtenido de http://biblio3.url.edu.gt/Libros/2011/est_aprende.pdf
- Arguedas T., V. (2014). George Pólya: El razonamiento plausible. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 12(2). Obtenido de <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1679>
- Ayora Carchi, R. M. (2012). *El razonamiento lógico matemático y su incidencia en el aprendizaje de los estudiantes de la Escuela Teniente Hugo Ortiz, de la comunidad Zhizho, cantón Cuenca, provincia del Azuay*. Ambato: Universidad Técnica de Ambato. Obtenido de https://repositorio.uta.edu.ec/jspui/bitstream/123456789/2843/1/tebs_2012_416.pdf
- Benalcázar Gómez, H. (2014). *Fundamentos de matemática* (segunda ed.). (UCE, Ed.) Quito.

- Biggs, J. (2006). *Calidad del aprendizaje universitario*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones. Obtenido de <https://barajasvictor.files.wordpress.com/2014/05/libro-j-biggs.pdf>
- Buitrón Bejarano, I. N., & Ortiz Jaramillo, J. L. (2012). *Influencia de las inteligencias lógicas, matemática y espacial en el rendimiento académico en el área de matemáticas*. Ibarra: Universidad Técnica del Norte. Obtenido de <http://repositorio.utn.edu.ec/bitstream/123456789/1564/1/TESIS%20L%C3%93GICA%20MATEM%C3%81TICA.pdf>
- Bustios Rivera, P. (1997). *Niveles de aprendizaje cognitivo programados y evaluados por los docentes de las escuelas académico-profesionales de obstetricia de las universidades del Perú*. Obtenido de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual/tesis/Human/Bustios_R_P/marco_teorico.htm
- Caicedo Nagles, J., & Calderón López, J. H. (2016). Currículo: en búsqueda de precisiones conceptuales. *Revista de Educación & Pensamiento*(23), 57-77. doi:ISSN: 1692-2697
- Chila Meza, A. A. (2012). *El razonamiento lógico matemático y el rendimiento académico*. Milagro: Universidad Estatal de Milagro. Obtenido de <http://repositorio.unemi.edu.ec/bitstream/123456789/579/3/EL%20RAZONAMIENTO%20L%C3%93GICO%20e2%80%93MATEM%C3%81TICO%20EN%20EL%20RENDIMIENTO%20ACAD%C3%89MICO.pdf>
- Conde Abellán, C. (2019). Literatura y matemáticas. *CEPA*, 13. Obtenido de <https://www.yumpu.com/es/document/view/50031882/literatura-y-matematicas-pagina-personal-de-cipri>

- Córdova Rosas, N., & Oliveros, E. (2014). Matemática superior y las competencias. Estrategia de implementación de competencias matemáticas. *Gaceta Sansana*, 1(4). Obtenido de <http://publicaciones.usm.edu.ec/index.php/GS/article/view/45>
- educacontic. (2019). *El uso de las TIC en las aulas*. Obtenido de <http://www.educacontic.es/blog/el-video-como-herramienta-didactica>
- Escuela Normal Superior de México. (2004). *Los problemas alrededor del concepto de límite y su enseñanza a través del uso de computadora*. México.
- Espeso, P. (2016). *Educación 3.0*. Obtenido de Geogebra, una práctica herramienta para aprender matemática: <https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/herramienta-aprender-matematicas/>
- Federación de Enseñanza de CC. OO. (2010). ¿Qué es GeoGebra? *Temas para la Educación*, 5. doi:ISSN: 1989-4023
- Galindo de la Torre, E. (2011). *Matemáticas superiores, cálculo diferencial e integral* (tercera ed.). Quito: ProCiencia Editores.
- Galindo de la Torre, E. (2012). *Matemáticas superiores, precálculo: teoría y ejercicios* (cuarta ed.). Quito: ProCiencia Editores.
- Gobierno de Aragón. (2013). *Matemáticas literarias. Guía de lectura*. Aragón. Obtenido de https://www.google.com/search?rlz=1C1GCEA_enEC876EC876&sxsrf=ALeKk02QT177JF3A_zKFRWO8QpwdNRSR4A:1595374447195&source=univ&tbm=isch&q=las+matem%C3%A1ticas+son+como+la+literatura+una+fuentes+de+placer+i+nagotable.+si+juntamos+ambas+las+buenas+sensaciones+se+i
- Grouws, D. A., & Cebulla, K. J. (2000). Mejoramiento del desempeño en matemáticas. *UNESDOC Digital Library*. Ginebra-Suiza, Bélgica: Academia Internacional de

- Educación, Palais des Académies, Bélgica y Oficina Internacional de Educación (IBE). Obtenido de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000125453_spa
- Hitt, F. (2013). *Aprendizaje de las matemáticas en ambiente de colaboración y resolución de problemas y de situaciones problemas*.
- Hitt, F., & Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de la calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 10(1), 30. Obtenido de <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977/1801>
- IB. (2019). *Bachillerato Internacional IB*. Obtenido de <https://www.ibo.org/es/programmes/diploma-programme/curriculum/mathematics/>
- IB. (2019). *Sinopsis de asignatura del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional*. Obtenido de <https://ibo.org/contentassets/5895a05412144fe890312bad52b17044/subject-brief-dp-math-applications-and-interpretations-es.pdf>
- Lafuente Miño, E., Loredó Narciandi, J. C., Castro Tejerina, J., & Pizarro López, N. (2017). *Historia de la psicología*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia. Obtenido de https://books.google.com.ec/books?id=JqMKDgAAQBAJ&pg=PT59&lpg=PT59&dq=La+psicolog%C3%ADa+en+una+sucesi%C3%B3n+aritmética&source=bl&ots=K1dNhJyTCa&sig=ACfU3U1Vi40EIXm9HxqJbgoKAJluC7_R_A&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwiF0lvgnNDpAhXNc98KHaitDMEQ6AEwB3oECAgQAQ#v=onepa
- Lara Prado, J. (2013). *Ecuaciones diferenciales ordinarias* (tercera ed.). Quito: Unidad de Matemática, Universidad Central del Ecuador.

- Lara Prado, J., & Arroba, J. (2014). *Análisis matemático*. Quito: Unidad de Matemáticas, Universidad Central del Ecuador.
- Marcolini Bernardi, M., Sánchez Gómez, C., & Rosso, A. (2008). Construcción del concepto de serie numérica con soporte informático, a través de modelos matemáticos. Santa Rosa, La Pampa, Argentina: Universidad de Jaén y Universidad Nacional de Río Cuarto. Obtenido de <http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/poster/P01.pdf>
- Martín Corujo, J. A. (2000). *Cuentos y matemáticas*. Canarias: Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes. Obtenido de <http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/edublogs/proyectonewton/files/2016/10/Cuentos-y-Matematicas-MATEMATICAS-SECUNDARIA.pdf>
- Mata Hernández, F. Á., & Reyes Castro, M. (2007). Sucesiones y series numéricas. En *Álgebra lineal*. Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid. Obtenido de http://www.dma.fi.upm.es/personal/mreyes/Calculo/Guia/C61_SucesionesNumericas.pdf
- May Cen, I. d. (2015). Cómo plantear y resolver problemas. *Entreciencias Diálogos en la Sociedad del Conocimiento*, 3(8), 6. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/4576/457644946012.pdf>
- Ministerio de Educación. (8 de 4 de 2016). *Currículo de los niveles de educación obligatoria*. Quito, Ecuador: Ministerio de Educación. Obtenido de <https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/03/Curriculo1.pdf>
- Ministerio de Educación. (2016). *Matemática 2.º curso BGU. Texto del estudiante* (Primera impresión ed.). Quito, Ecuador: Don Bosco LNS. Obtenido de <https://educacion.gob.ec/wp->

content/uploads/downloads/2016/08/curriculo/Matematica/Matematica_BGU_2.pdf

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática 3.º curso BGU. Texto del estudiante*

(Primera impresión ed.). Quito, Ecuador: Don Bosco LNS. Obtenido de

[https://educacion.gob.ec/wp-](https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/08/curriculo/Matematica/Matematica_BGU_3.pdf)

[content/uploads/downloads/2016/08/curriculo/Matematica/Matematica_BGU_3.p](https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/08/curriculo/Matematica/Matematica_BGU_3.pdf)

[df](https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/08/curriculo/Matematica/Matematica_BGU_3.pdf)

Ministerio de Educación. (2020). *Matemática 1.º BGU. Texto del estudiante* (Primera

impresión ed.). Quito, Ecuador: Maya Ediciones Cía Ltda. Obtenido de

[https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/1bgu-Mat-](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/1bgu-Mat-F2.pdf)

[F2.pdf](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/1bgu-Mat-F2.pdf)

Ministerio de Educación. (2020). *Matemática 10.º EGB. Texto del estudiante* (Primera

impresión ed.). Quito: Maya Ediciones Cía. Ltda. Obtenido de

[https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/10egb-Mat-](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/10egb-Mat-F2.pdf)

[F2.pdf](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/10egb-Mat-F2.pdf)

Ministerio de Educación. (2020). *Matemática 2.º BGU. Texto del estudiante*. Quito: Maya

Ediciones Cía. Ltda. Obtenido de [https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/2bgu-Mat-F2..pdf)

[content/uploads/2020/04/2bgu-Mat-F2..pdf](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/2bgu-Mat-F2..pdf)

Ministerio de Educación. (2020). *Matemática 3.º BGU. Texto del estudiante*. Quito: Maya

Ediciones Cía. Ltda. Obtenido de [https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/3bgu-Mat-F2..pdf)

[content/uploads/2020/04/3bgu-Mat-F2..pdf](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/3bgu-Mat-F2..pdf)

Ministerio de Educación. (2020). *Matemática 8.º EGB. Texto del estudiante*. Quito: Maya

Ediciones Cía. Ltda. Obtenido de [https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/8egb-Mat-F2.pdf)

[content/uploads/2020/04/8egb-Mat-F2.pdf](https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/8egb-Mat-F2.pdf)

- Ministerio de Educación. (2020). *Matemática 9.º EGB. Texto del estudiante*. Quito: Maya Ediciones Cía. Ltda. Obtenido de <https://recursos2.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/2020/04/9egb-Mat-F2.pdf>
- Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. (2007). *Miradas sobre el mundo de la matemática*. Ciudad de Buenos Aires, Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires. Obtenido de <http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL002393.pdf>
- Mochón, S. (1998). La importancia de la recursividad en las matemáticas a nivel elemental. *Educación Matemática*, 10(2). Obtenido de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10-2.pdf>
- Molina B., V. (2006). Currículo, competencias y noción de enseñanza-aprendizaje: necesidad de una reformulación de nuestras concepciones sobre educación. *Revista PRELAC*(3), 50-63. Obtenido de <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000151583>
- Muñoz Escolano, J., Arnal Bailera, A., Beltrán Pellicer, P., Callejo de la Vega, M., & Carrillo Yáñez, J. (Edits.). (2017). *Investigación en educación matemática XXI*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza. Obtenido de <https://www.seiem.es/docs/actas/21/ActasXXISEIEM.pdf>
- Organización de Estados Iberoamericanos (OEI). (2014). *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Buenos Aires. Obtenido de <https://www.oei.es/historico/congreso2014/contenedor.php?ref=memorias>
- Organización del Bachillerato Internacional. (2019). *Guía de matemáticas, análisis y bloques (MAE)*. Ginebra-Suiza.
- Pantoja Padilla, R. J. (2017). *Estrategias metodológicas para promover el razonamiento lógico en el área de Matemáticas en Educación Básica Superior*. Quito: Pontificia

Universidad Católica del Ecuador. Obtenido de

<http://repositorio.puce.edu.ec/bitstream/handle/22000/14306/TESIS%2016%20RICHARD%20PANTOJA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Peralta, J. (1998). Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. *Tendencias Pedagógicas*(Extra II), 235-244. Obtenido de

<https://revistas.uam.es/tendenciaspedagogicas/article/view/tp1998.extra2.ART22>

Pérez Carrero, C., Rodríguez Moreno, S. M., & Sánchez Mayorga, L. d. (2015). El cerebro triádico y su relación con la curiosidad, el trabajo en equipo y la explicación de fenómenos para el desarrollo de actitud científica. *Rostros Rostros*, 17(31). Obtenido de

<https://revistas.ucc.edu.co/index.php/ra/article/view/1106>

Productora Audiovisual. (2017). *GrupoAudiovisual.com*. Obtenido de

<https://grupoaudiovisual.com/que-es-y-ventajas-animacion-3d/>

Regader, B. (15 de agosto de 2017). *Teoría del aprendizaje de Jean Piaget*. Obtenido de Directorio Escolar, Piza, Tiza, Pizarrón, Tu educación en red.com:

<http://pisatizapizarron.com/teoria-del-aprendizaje-de-jean-piaget/>

Rodríguez Gallegos, R., & Quiroz Rivera, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. (I. N. Monterrey, Ed.) *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 99-124.

RSS aprenderaprogramr.com. (2020). *apr* . Obtenido de aprenderaprogramar.com:

https://www.aprenderaprogramar.com/index.php?option=com_content&view=article&id=474:head-y-body-html-etiquetas-basicas-de-paginas-web-title-titulo-meta-tag-description-y-keywords-cu00711b&catid=69&Itemid=192

Ruiz Paredes, M. d. (2014). Propuesta didáctica para trabajar los cuentos tradicionales en el aprendizaje lógico-matemático en la educación infantil. En P. Miralles

- Martínez, M. Alfageme González, & R. A. Rodríguez Pérez, *Investigación e innovación en educación infantil* (primera ed., pág. 387). Murcia: Universidad de Murcia. Servicios de Publicaciones. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5883015>
- Sánchez Amestoy, A. (2012). *Desarrollo del pensamiento, organización del pensamiento* (Vol. Tomo 1). Quito: Sistema Nacional de Nivelación y Admisión Senescyt.
- Sánchez Amestoy, A. (2012). *Desarrollo del pensamiento, solución de problemas y creatividad* (Vol. Tomo 3). Quito, Ecuador: Sistema Nacional de Nivelación y Admisión Senescyt.
- Sánchez Muñoz, J. M. (2011). Historias matemáticas. Euler y la conjetura de Fermat sobre números triangulares. (S. Creative, Ed.) *Revista de Investigación Pensamiento Matemático*(0), 4. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3756425>
- Schonhaut Berman, L., Millan Kluse, T., & Podestá López, L. (2017). *Revisión por pares, evidencias y desafíos*, 88. Obtenido de Revista Chilena de Perdiatría: <https://revistachilenadepediatria.cl/index.php/rchped/article/view/487/0>
- Secretaría de Educación Pública de México. (2004). *Manual de estilos de aprendizaje. Material autoinstruccional para docentes y orientadores educativos*. México: Dirección General de Bachillerato.
- Sierra Gómez, H. (2013). *El aprendizaje activo como mejora de las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje*. Navarra: Universidad Pública de Navarra. Obtenido de <https://academica-e.unavarra.es/bitstream/handle/2454/9834/TFM%20HELENA%20SIERRA.pdf>
- Tapia Barrera, J. R., & Pulla Salinas, O. G. (2011). *Metodologías para el desarrollo del pensamiento multidimensional y el aprendizaje significativo de las matemáticas y*

geometría en los estudiantes de educación básica del Colegio Agronómico Salesiano de Paute, durante el año lectivo 2010-2011. Quito: Universidad Politécnica Salesiana de Ecuador. Obtenido de <https://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/4897>

Vásquez Beltrán, M. (2001). *La computación y la enseñanza de las matemáticas.* Nueva León: Dirección General de Bibliotecas, Universidad Autónoma de Nueva León. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/76583591.pdf>

Velásquez Naranjo, L. J. (2012). Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado cuarto de básica primaria. 57. Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Obtenido de <https://core.ac.uk/reader/11058332>

Webgrafía

https://es.wikipedia.org/wiki/Metodo_exhaustivo

<https://es.wikipedia.org/wiki/Holismo>

https://es.wikiversity.org/wiki/Planteo_historiogr%C3%A1fico

<https://es.wikipedia.org/wiki/Paradigma>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Hermeneutica>

https://es.wikipedia.org/wiki/Did%C3%A1ctica_de_la_matem%C3%A1tica

[https://es.wikipedia.org/wiki/Lema_\(matem%C3%A1ticas\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Lema_(matem%C3%A1ticas))

<https://es.wikipedia.org/wiki/Heuristica>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Semiologia>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Falibilismo>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Iteracion>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Interactividad>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Applet>

<https://neoattack.com/neowiki/embeber/>

https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Apps_Embedding

<https://developer.mozilla.org/es/docs/Web/HTML/Elemento/iframe>

<https://help.wideo.co/hc/es/articles/360034621712--Qu%C3%A9-es-un-keyframe->

<https://es.wikipedia.org/wiki/Framework>

<https://developer.mozilla.org/es/docs/Web/HTML/Elemento/head>

<https://www.powerdata.es/metadatos>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Script>

<https://codigofacilito.com/articulos/que-es-html>

<https://www.hostinger.es/tutoriales/que-es-css/>

<https://developer.mozilla.org/es/docs/Web/JavaScript>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Node.js>

[https://es.wikipedia.org/wiki/Electron_\(software\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Electron_(software))

<https://es.wikipedia.org/wiki/JQuery>

[https://es.wikipedia.org/wiki/Bootstrap_\(framework\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Bootstrap_(framework))

https://en.wikipedia.org/wiki/Apache_Cordova

<https://git-scm.com/>

<https://www.samsung.com/latin/support/mobile-devices/what-is-an-apk/>

<https://www.atinternet.com/es/glosario/sdk/>

<https://www.geogebra.org/m/yYfwuzcd>

Anexos