



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Modelo matemático y simulación de la dinámica de crecimiento del camarón de agua dulce

Sarango Cuenca Juan Carlos

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

Maestría en la Enseñanza de la Matemática

Trabajo de titulación, previo a la obtención del título de Magíster en Enseñanza de la Matemática

Fís. Jiménez Calderon Edward Henry.PhD

17 de Agosto del 2020

Document Information

Analyzed document Modelo Matemático y Simulación de la dinamica del camarón.pdf (D77877673)
Submitted 8/18/2020 12:05:00 AM
Submitted by
Submitter email carlos.llerena@ikiam.edu.ec
Similarity 0%
Analysis address carlos.llerena.ikiam@analysis.arkund.com

Sources included in the report

W URL: <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/75938/1060648898.2020.pdf?se...>
Fetched: 3/19/2020 11:58:46 PM



1

Edw orcl Jimenez. Th. J
1708042732



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE
TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA

Yo **Sarango Cuenca, Juan Carlos**, con cédula de ciudadanía n° 1717252389, declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **Modelo matemático y simulación de la dinámica de crecimiento del camarón de agua dulce** es de mí autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 17 de Agosto del 2020

Firma

Sarango Cuenca, Juan Carlos

C.C.:1717252389



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE
TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Yo **Sarango Cuenca, Juan Carlos** autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: **Modelo matemático y simulación de la dinámica de crecimiento del camarón de agua dulce** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi/nuestra responsabilidad.

Sangolquí, 17 de Agosto del 2020

Firma

Sarango Cuenca, Juan Carlos

C.C.:1717252389

Dedicatoria

Este proyecto ha demandado varias horas de trabajo y sacrificio se lo dedico con todo amor a mi familia que me ha brindado su apoyo y colaboración en todo momento. A mi esposa Paulina por su paciencia mis hijos Hamilton y Ana Paula que son el motor de inspiración para hacer un mundo mejor.

Agradecimientos

Agradezco a Dios y a la virgen de Guadalupe por haber bendecido mi vida y poder terminar una etapa más en mi carrera profesional.

A mi director de tesis Edward Jiménez Calderón .PhD, quien es la persona más destacada en su profesión. Además por la motivación y experiencia en compartir sus conocimiento científicos, por demostrar paciencia en el largo proceso de investigación. Gracias por creer y apoyar mi emprendimiento que ahora puedo apoyar dando trabajo a otras personas que en realidad lo necesitan.

También doy gracias a la Universidad de las fuerzas Armadas ESPE en especial a todos los docentes de la maestría Enseñanza de la Matemática , quienes consolidaron mis conocimientos y me enseñaron a pensar en grande aplicando las ciencias exactas.

Finalmente agradezco a mi familia especialmente a mi padre Vicente Sarango, mi hermana Ximena que me acompañaron en el desarrollo del proyecto.

! Gracias a Todos !

Índice de Contenidos

Índice de Contenidos	7
Índice de tablas	9
Índice de figuras	11
1 Acuicultura y Camarón Litopenaeus Vannamei	15
Generalidades Acuicultura	15
Producción de la Acuicultura	17
Acuicultura y la Camaronicultura.	18
Camarón Litopenaeus vannamei	19
2 Sector Camaronero en el Ecuador	25
Situación Actual del Ecuador	25
Ecuador en el sector internacional y la importancia del sector camaronero	27
Exportaciones de Camarón Blanco	32
Producción de Camarón blanco en Agua Dulce en piscina Manglar	35
Beneficios de producción en Agua Dulce en campo abierto	35
Desventajas de producción de Agua dulce en campo abierto	36
Producción de camarón blanco de agua dulce en piscina de geomenbrana.	36
Beneficios de producción en Agua Dulce en sistema cerrado	37
Desventajas de producción en Agua Dulce en sistema cerrado	37

	8
3 Modelos matemáticos en dinámica poblacional	39
Biología del crecimiento en el camarón.	40
Modelos matemáticos en dinámica poblacional	41
Modelo poblacional	42
Modelo matemático de Ludwing Von Bertalanffy	42
Modelo logístico	51
Modelo matemático de Fisher-Kolmogorov	52
Método de diferencias finitas	57
4 Modelamiento y Simulación numérica	62
Simulación numérica Matlab	63
Ecuación de crecimiento de Ludwing Von Bertalanffy	63
Ecuación Logística	64
Ecuación Fisher-Kolmogorov	66
Estimación de parámetros Software R-Studio	68
Cálculo de la muestra	69
Prueba de normalidad	70
Pruebas de hipótesis de dos muestras de crecimiento de <i>litopenaeus vannamei</i>	72
Parámetros físicos químicos del agua	74
5 Conclusiones y Recomendaciones	79
Conclusiones	79
Recomedaciones	81
Bibliografía	82

Índice de tablas

Tabla1.1	Países pioneros en el sector Acuicola	18
Tabla1.2	Camarón Blanco L. Vanname	19
Tabla2.1	Hectáreas cultivadas de camarón	26
Tabla2.2	Exportaciones FOB	29
Tabla2.3	Resumen de exportaciones no petroleras FOB 2017	30
Tabla2.4	Exportaciones no petroleras en millones de dolares	32
Tabla2.5	Camarones congelados 2017	33
Tabla2.6	Exportaciones de camarones preparados y en conserva 2017	33
Tabla2.7	Principales exportadores 2015 CIT	34
Tabla4.1	Toma de datos distribución de media	70
Tabla4.2	Temperatura de agua piscina 1 y 2	76
Tabla4.3	Oxígeno disuelto en las piscinas 1 y 2	77
Tabla4.4	Niveles de pH en el agua piscina 1 y 2	78

Índice de figuras

Figura1.1	Producción mundial de pesca de captura y la acuicultura	17
Figura1.2	Camarón Blanco L. Vannamei	19
Figura1.3	Ciclo de vida del camarón vannamei	20
Figura1.4	Desarrollo Larvario Vannamei	22
Figura1.5	Anatomía Externa del Vannamei	23
Figura2.1	Exportaciones 2013 a Julio 2017	34
Figura2.2	Piscina de camarón en agua dulce	36
Figura2.3	Piscina con geomembrana agua salina	38
Figura3.1	PL32 Camarón vanamei 32 días con una longitud de 26mm	50
Figura3.2	Espacio $\Omega \subseteq R^n$	54
Figura3.3	Derivada de una función $f(x)$	58
Figura3.4	Método de dos niveles (molécula)	60
Figura4.1	Solución de crecimiento para una $L = 15cm$	63
Figura4.2	Crecimiento de una población para $x_0 > 0$	64
Figura4.3	Crecimiento de una población para $x_0 = 10mil$	65
Figura4.4	Crecimiento de una población para $x_0 = 0,4cm$	66
Figura4.5	Simulación de la solución para distintas difusiones	67
Figura4.6	Muestra de larva PL11	68
Figura4.7	Muestra de larva PL17	69

Figura4.8 Prueba de normalidad piscina 1	71
Figura4.9 Prueba de normalidad piscina 2	71
Figura4.10 Prueba de dos colas escala de t	73
Figura4.11 Piscinas 1 y 2 con sistema de aireación automático	74
Figura4.12 anque de aclimatación	75
Figura4.13 Temperatura del agua piscina 1 y 2	76
Figura4.14 Niveles de oxígeno disuelto en el agua de la piscina 1 y 2	77
Figura4.15 Niveles de pH en el agua de la piscina 1 y 2	78

Resumen

El camarón blanco conocido científicamente *Litopenaeus vannamei* (PérezFarfante y Kensley) es la especie que obtiene los mejores rendimientos de crecimiento y la que tolera mejor las condiciones ambientales en cautiverio. El cultivo se inicia con la adaptación de la postlarva, que generalmente se comercializa por los laboratorios de producción, es importante que la postlarva de camarón antes de que sean sembradas en los estanques, sean sometidas a diferentes condiciones de salinidad y temperatura para estimar previamente su calidad en la supervivencia. La investigación se desarrollara durante el proceso, basándose en, una metodología cuantitativa, mediante la aplicación del modelo matemático de Ludwig Von Bertalanffy más, siendo un modelo fundamentado en una función no lineal, considerando el proceso de crecimiento. Para realizar el ajuste de este modelo se aplicara el método iterativo de tal forma que se pueda analizar la convergencia de la función, y con la recolección de información por el método experimental se pueda aplicar la estimación de parámetros. Adicional se realizara el análisis de las ecuaciones diferenciales de Difusión-Reacción de Fisher-Kolmogorov para poder determinar la transformación local, crecimiento, interacciones y cambio de estado de la especie.

Palabras clave:

- VON BERTALANFFY
- DIFUSION-REACCION
- FISHER-KOLMOGOROV

Abstract

The scientifically known white shrimp *Litopenaeus vannamei* (PérezFarfante and Kensley) is the species that obtains the best growth performance and the one that better tolerates the environmental conditions in captivity. The culture begins with the adaptation of the postlarva, which is generally marketed by production laboratories, it is important that the shrimp postlarvae, before they are stocked in the ponds, are subjected to different salinity conditions and to previously estimate their quality. in survival. The research will be developed during the process, subsistence in, a quantitative methodology, by applying the mathematical model of Ludwig Von Bertalanffy more, being a model based on a non-linear function, considering the growth process. To carry out the adjustment of this model, the iterative method will be applied in such a way that the convergence of the function can be analyzed, and with the collection of information by the experimental method, the parameter estimation can be applied. Additionally, the analysis of the Fisher-Kolmogorov Differential Diffusion-Reaction equations will be carried out in order to determine the local transformation, growth, interactions and change of state of the species.

Keywords:

- VON BERTALANFFY
- DIFFUSION-REACTION
- FISHER-KOLMOGOROV

1. Acuicultura y Camarón *Litopenaeus Vannamei*

El propósito de este capítulo es conocer del sector las generalidades de la acuicultura en cuanto a la crianza de especies acuáticas en especial la animal como el camarón *litopenaeus vannamei*.

Además muestra detalles interesantes sobre la producción, exportación de camarón blanco en el Ecuador durante los últimos 5 años. En donde se estimara la producción anual, y los factores que están relacionados directamente con la producción.

La producción de la especie se puede desarrollar en piscinas a campo abierto con áreas de hasta 1 ha , con agua salina cerca de la costa ecuatoriana, especialmente en la provincia del Guayas y el Oro y también se cultiva en agua dulce cerca de las riberas especialmente en la provincia de Manabí. Considerando que también se puede producir en sistemas cerrados , piscinas con geomembrana mediante la aplicación RAS¹.

Generalidades Acuicultura

La acuicultura es un conjunto de actividades, técnicas y de conocimiento de crianza de especies acuáticas animales y vegetales.

De acuerdo a la FAO²(1999), la necesidad de buscar alternativas de alimentación para el planeta, ha generado que el ser humano evolucione implementando técnicas de producción

¹Sistema de recirculación de Agua

²Organización de la Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (Food and Agriculture Organization of the United State)

acuáticas, logrando fuentes de proteínas de bajo costo y alta productividad, requisito básico para la supervivencia y normal desempeño laboral.

En el planeta se produce un promedio de treinta y nueve mil millones de TN de productos acuícolas valorados en cincuenta y dos mil cuatrocientos millones de dólares aproximadamente es flujo de divisas en grande y el efecto en la economía de países es diversos. (Avault J, 1995)

El crecimiento poblacional en el mundo es de forma exponencial, lo que implica una extracción intensa de los recursos marinos, y la aplicación de metodologías sistemáticas sustentadas en modelos matemáticos, dando a lugar la generación de técnicas de cultivo acuático e implementación de tecnología. En la actualidad la población es de 7564,6 millones de habitantes mientras, en el 2020 llegará a 7,7 mil millones, en 2040 a 9,1 mil millones, en 2060 a 10,1 mil millones, en 2080 a 10,8 mil millones y en 2100 la Tierra tendrá 11,2 mil millones de habitantes.(Unidas, 2017)

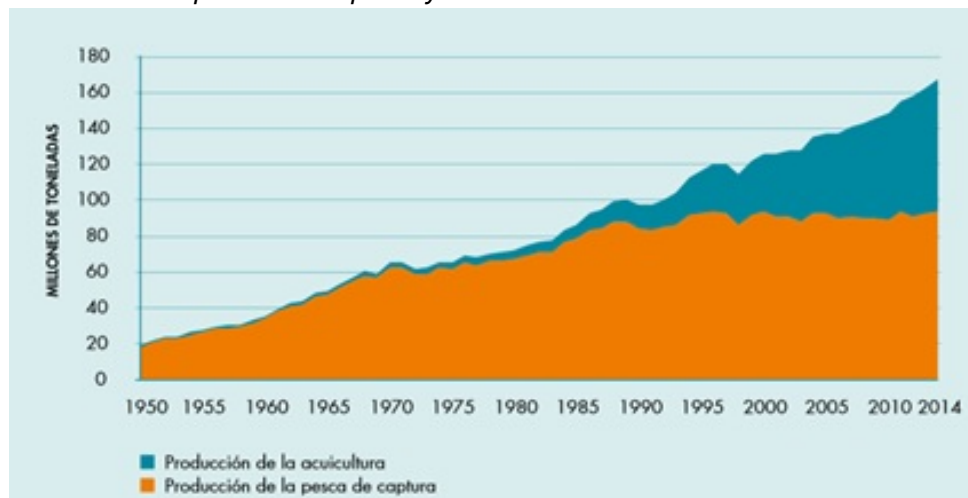
El recurso marino es finito y en la actualidad está en detrimento por la contaminación ambiental, sobreexplotación y subutilización de recursos pesqueros, agotamiento y lenta recuperación de especies marinas, utilización de recursos agrícolas para suplir demandas de energía. Todo esto, ha provocado un resquebrajamiento en todos los procesos productivos agrícolas y pecuarios, poniendo en riesgo la seguridad alimentaria del planeta. La ciencia y tecnología, también contribuyen con el desarrollo de explotaciones animales de una forma intensiva, pero se ven incapaces de cubrir la demanda suscitada por el incremento poblacional.(Tirado, 2015)

Producción de la Acuicultura

La acuicultura ha sido la desencadenante del impresionante crecimiento del suministro de pescado para el consumo humano. Si bien la acuicultura proporcionó solo el 7% del pescado para consumo humano en 1974, este porcentaje aumentó al 26% en 1994 y al 39% en 2004. La producción de animales acuáticos en 2014, procedentes de la acuicultura ascendió a 73,8 millones de toneladas, con un valor de primera venta estimado de 160.200 millones de USD.(FAO, 2016)

Figura 1.1

Producción mundial de pesca de captura y la Acuicultura



Dentro de la producción mundial de acuicultura en el mundo declarada por la FAO en el año 2016 se detallan los 25 primeros países pioneros en el sector Acuícola, siendo China el país con mayor producción.

Tabla 1.1

Países pioneros en el sector Acuicola

Productores Principales	Peces de Escama					Total de Peces	Plantas Acuáticas	Producción Acuicola Total
	Acuicultura Continental	Acuicultura Marina/Costera	Acuicultura Continental	Acuicultura Marina/Costera	Otros Animales Acuáticos			
China	26029,7	1189,7	13418,7	3993,5	839,5	45471,1	13326,3	58797,4
Indonesia	2857,6	782,3	44,4	613,9	0,1	4298,3	10077	14375,3
India	4391,1	90	14,2	385,7		4881	3	4884
Viet Nam	2478,5	208,5	198,9	506,2	4,9	3397	14,3	3411,3
Filipinas	299,3	373	41,1	74,6		788	1549,6	2337,6
Bangladesh	1733,1	93,7		130,2		1957		1957
República de Corea	17,2	83,4	359,3	4,5	15,9	480,3	1087	1567,3
Noruega	0,1	1330,4	2			1332,5		1332,5
Chile	68,7	899,4	246,4			1214,5	12,8	1227,3
Egipto	1129,9			7,2		1137,1		1137,1
Japón	33,8	238,7	376,8	1,6	6,1	657	363,4	1020,4
Myanmar	901,9	1,8		42,8	15,6	962,1	2,1	964,2
Tailandia	401	19,6	209,6	300,4	4,1	934,7		934,7
Brasil	474,3		22,1	65,1	0,3	561,8	0,7	562,5
Malasia	106,3	64,3	42,6	61,9	0,6	275,7	245,3	521
República Popular Democrática de Corea	3,8	0,1	60,2		0,1	64,2	444,3	508,5
Estados Unidos de América	178,3	21,2	160,5	65,9		425,9		425,9
Ecuador	28,2			340		368,2		368,2
Provincia china de Taiwan	117,3	97,8	99	21,9	3,6	339,6	1	340,6
Irán	297,5	0,1		22,5		320,1		320,1
Nigeria	313,2					313,2		313,2
España	15,5	44	222,5	0,2		282,2		282,2
Turquía	108,2	126,1			0,1	234,4		234,4
Reino Unido	13,5	167,3	23,8			204,6		204,6
Francia	43,5	6	154,5			204	0,3	204,3
Subtotal de los 25 Productores Principales	42041,5	5837,4	15696,6	6638,1	890,9	71104,5	27127,1	98231,6
Mundo	43559,3	6302,6	16113,2	6915,1	893,6	73783,7	27307	101090,7
{Porcentaje de los 25 Productores en Total Mundial	96,5	92,6	97,4	96,0	99,7	96,4	99,3	97,2

Fuente: FAO 2016

La aplicación de modelos matemáticos para el estudio dinámico animal es muy importante debido a que los resultados obtenidos a priori, lo que nos llevara a tomar decisiones a posteriori, mejorando la optimización de recursos en proyectos que puedan ser sostenibles y sustentables en la actualidad.

Acuicultura y la Camaronicultura.

La acuicultura se divide en grandes grupos debido a su taxonomía³ de las especies que se cultivan, una de ellas es la camaronicultura. Dentro de la clase Crustácea se incluyen varias especies de camarones:

³La taxonomía biológica forma parte de la biología sistemática, dedicada al análisis de las relaciones de parentesco entre los organismos.

Tabla 1.2

*Camarón Blanco L. Vannamei***Taxonomía**

Phylum	Arthropoda
Clase	Crustásea
Sub-clase	Eumalacostraca
Orden	Decápoda
Sub-orden	Natantia
Super familia	Penaeoidea
Familia	Renaeidae
Género	Litopenaeus

Camarón Litopenaeus vannamei

Una de las principales especies a estudiar es el camarón litopenaeus vannamei nombre común camarón blanco. Donde su Origen y distribución, crece o es nativo de la costa oriental del Océano Pacífico 1.2, se encuentra distribuido desde el Alto Golfo de California hasta Perú.

Su morfología es conformada por un cefalotórax, abdomen y cola.

Figura 1.2

Camarón Blanco L. Vannamei**Ciclo de Vida**

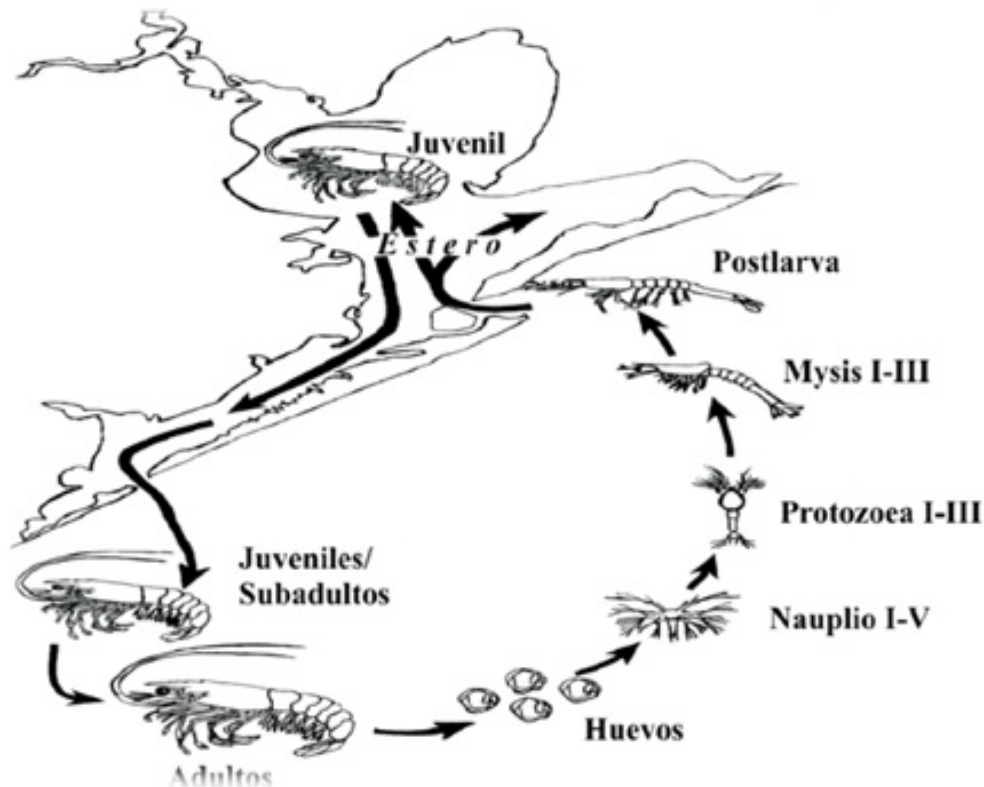
El ciclo de vida de un camarón vannamei se divide en 6 fases: embrionaria, larval, juvenil, adolescente, pre adulta y adulta. La fase larval y juvenil son principalmente esturinas. En la fase

adolescente los caracteres sexuales ya son distinguibles y el animal migra hacia el mar y en la fase adulta tiene hábitos completamente oceánicos 1.3. Las diferencias morfofisiológicas de cada fase o estadio se manifiestan en sus hábitos ecológicos y finalmente en su distribución.

Así Chapa (1986).

Figura 1.3

Ciclo de vida del camarón vannamei



Desarrollo Larvario

El desarrollo larvario consta de los siguientes estadios 1.4:

- Nauplio: Presenta cuerpo periforme con tres pares de apéndices primeras antenas, segundas antenas y mandíbulas con función natatoria. Esta comprende de 5 a 6 estadios según la especie Kitani (1982).
- Zoea: Presenta 3 subestadios que se caracterizan por cambios morfológicos y sus respectivas mudas. El cuerpo se divide en dos partes principalmente : un caparazón con

forma hexagonal irregular y la parte posterior dividida en un tórax con seis segmentos y un abdomen no segmentado Kitani (1982).

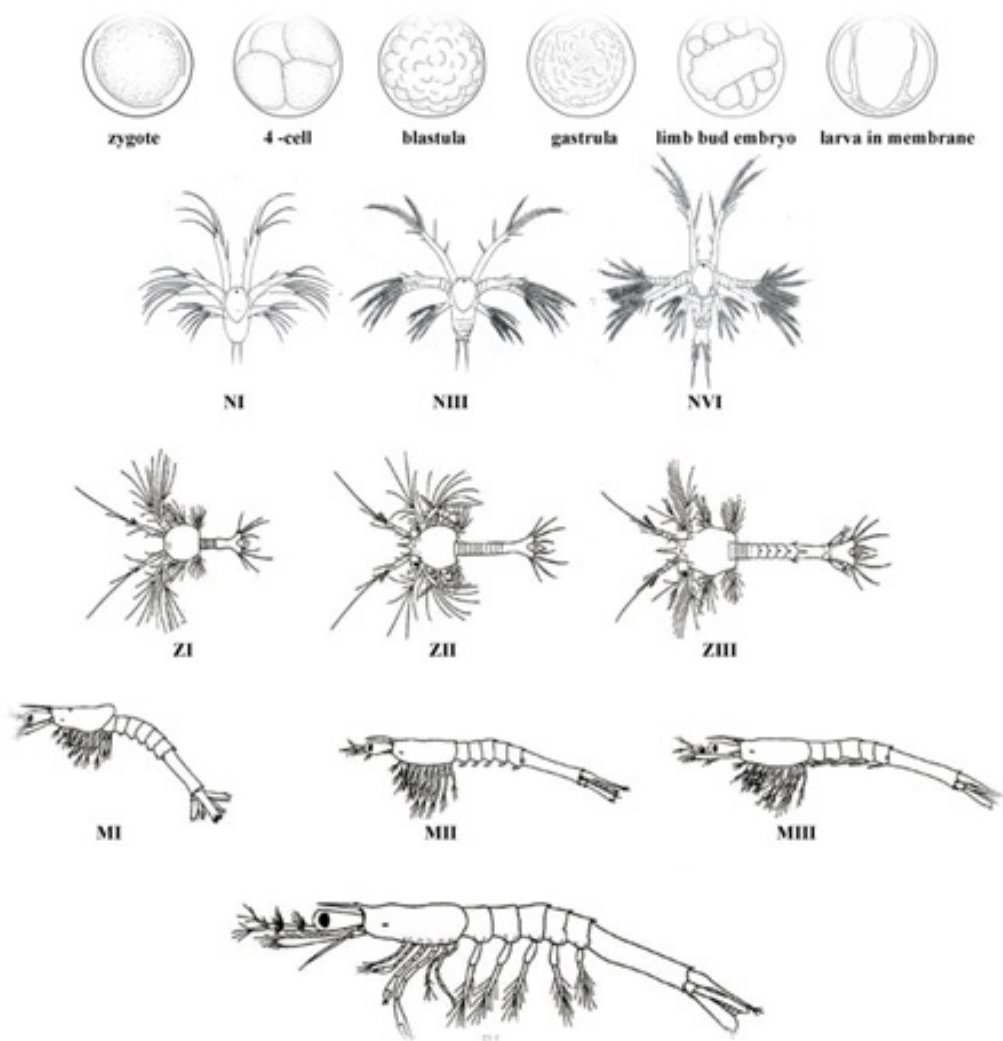
- Mysis: El cuerpo se alarga y adquiere una apariencia similar a la postlarva. Uno de los rasgos particulares de este estadio es la forma de nadar, es decir que la cabeza siempre permanece hacia abajo en y avanzando hacia atrás, con el abdomen hacia adelante. Kitani (1982).

- Postlarva: Este estadio es poco notoria, lo importante es la desaparición de los pereiópodos⁴ y el desarrollo de setas en los pleópodos⁵.

⁴El pereion es un tagma o región del cuerpo de los crustáceos, y se refiere al conjunto de toracómeros (segmentos del tórax) libres, no fusionados con la cabeza.

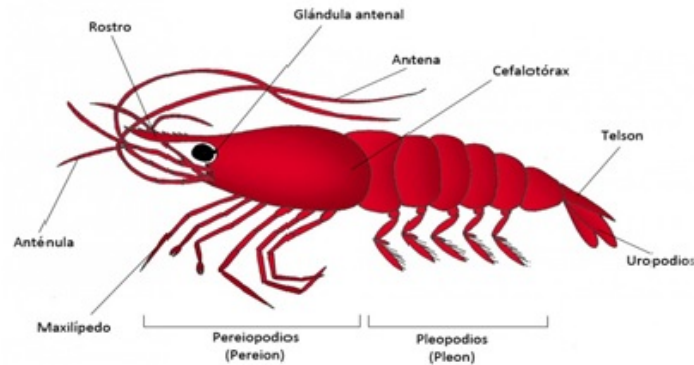
⁵Los pleópodos son las patas que nacen del abdomen o pleon.

Figura 1.4

Desarrollo Larvario Vannamei

Dentro de los estadios anteriormente descritos, podemos observar 1.5 , como el *Vannamei* ya se encuentra totalmente desarrollado en un estadio llamado juvenil.

Figura 1.5

Anatomía Externa del Vannamei**Salinidad**

La salinidad es un parámetro muy importante en el proceso evolutivo de la especie, además considera propiedad fundamental del agua de mar, de donde las aguas oceánicas oscilan entre $34a38g/l$. La salinidad de una muestra de capa es determinada por la cantidad de sólidos disueltos medidos en gramos, contenidos en un kilogramo de agua de mar.

PH

El PH es una medida de la acidez o alcalinidad de una sustancia. El agua (molécula de H_2O), tiene iones libres de Hidrógeno (H), este conjunto de iones tiene un peso, ese peso define el valor del pH. El ph se mide en una escala de 1 a 7 en la escala indican las soluciones ácidas y de 1 a 14 las soluciones alcalinas. Cuando el pH está entre 6.5 y 8.5 es favorable para la vida acuática en su hábitat. Toro Gonzáles (2011) De donde el agua de mar se considera ligeramente alcalina, estando sus valores comprendidos entre pH 7,4 y 8,5.

Alimentación

Los camarones son conocidos con el nombre científico de Carídia, son crustáceos decápodos y a la vez bentónicos, estos generalmente viven en donde se les facilita encontrar

comida como en arrecifes, fango en las arenas de playa, cuevas también viven en aguas dulces estancadas. Estos crustáceos se alimentan de una variedad de materia vegetal, de algas (fitoplancton), de crustáceos microscópicos, carroña, restos de animales en descomposición, excremento de peces, algunas especies de camarones son de tipo limpiadores, es decir se alimentan de paracitos de los peces, los peces que están infectados acuden a estos camarones para que los desparasiten, comiéndose el tejido dañado de los peces y los microbios, estos son capaces de entrar en las agallas y limpiar todo lo que tienen infestado, sin que estos peces se los coma (FAO (2002)).

Temperatura

Los camarones peinados se pueden dividir en dos grandes grupos:

- **Camarones de Aguas Tropicales:** Tienen requerimientos de temperaturas superiores a $20^{\circ}C$, con crecimiento óptimo entre $26^{\circ}C$ y $32^{\circ}C$, entre los representantes de este grupo podemos mencionar *P.stylirostris*, *P.vannamei*, *P.occidentalis* en las costas del Pacífico. (FAO (2014))
- **Camarones de Aguas Templadas:** En este grupo las especies sobre las que más se ha trabajado en América son *Artemesia longinaris* y *Pleoticus muelleri*. Estas tienen requerimientos de temperaturas de desove entre $16^{\circ}C$ y $22^{\circ}C$ y entre $19^{\circ}C$ y $23^{\circ}C$ para el langostino. (FAO (2014))

2. Sector Camaronero en el Ecuador

El propósito de este capítulo es mostrar la importancia del sector acuícola en nuestro país, tanto comercial como económica y presentar una perspectiva actual del sector camaronero, siendo el camarón como un producto con mayor acogida en mercados internacionales, que ubica a Ecuador como el segundo país en ranking en producir camarón a gran escala y de mejor calidad después de China a nivel Internacional, y como el segundo producto tradicional no petrolero de exportación con mayor rubros, después del banano.

Además se presenta la innovación e implementan tecnológica para la producción de *Litopenaeus vannamei* en piscinas a campo abierto y cerrado tanto en agua salina como en agua dulce, debido a las bondades geológicas que el país posee, en la periferia del pacífico como en sus riveras.

Situación Actual del Ecuador

Según el Ministerio de Coordinación de la Producción, Empleo y Competitividad, de acuerdo al mapa de la cadena sobre el que se realizó el Plan Estratégico del Sector Acuícola Camaronero, éste cuenta con un proceso que posee seis áreas que van desde la elaboración de alimentos hasta la exportación del camarón en sus diversas presentaciones estos son Global-Consult (2010):

1. Laboratorios de producción de nauplios.
2. Laboratorios de producción de larvas

3. Fincas camaroneras
4. Empresas de alimento balanceado
5. Intermediarios y empacadoras
6. Exportadoras.

Los laboratorios de producción de nauplios en Ecuador tienen un capacidad promedio aproximada de 410 millones al día, con un total anual de 149.650 millones de nauplios, estos laboratorios están equipados con la más alta tecnología y con un equipo de especialización eficaz GlobalConsult (2010).

Los Laboratorios de producción de larvas tienen la característica principal de relación directa con los empresarios , quienes son los que implementan una infraestructura para la producción de larvas hasta un periodo de tiempo PL12, estos laboratorios tienen la capacidad de producir 89.790 millones de larvas al año, para posterior iniciar la etapa de engorde GlobalConsult (2010)

Según el MAGAP (subsecretaria de Acuicultura), las empresas camaroneras del Ecuador están concentradas en 5 provincias, las cuáles abarcan el 100 % de producción, en la siguiente tabla se detalla el área en Hectareas de producción.

Tabla 2.1

Hectáreas cultivadas de camarón

Provincias	Guayas	El Oro	Manabi	Esmeraldas	Santa Elena
Hectareas	138283	40386	18595	14720	2871
Participación	64,3610807	18,796863	8,65467408	6,85113216	1,33625003

Fuente: Pro Ecuador 2016

Se observa que la provincia de Guayas posee un 69,36 % de participación en producción de camarón , mientras que el Oro es la segunda provincia con el 18,79 % de participación en producción de camarón. Esto implica que Guayas es la provincia que mayor alevines siembra

por poseer la mayor superficie en zona de playa , bahía y tierras altas.

Mientras que las empacadoras/exportadoras corresponden a las de gran amplitud, por el nivel de inversión, sobre todo en la industrialización del producto, es decir empaquetadura, codificado, congelamiento que requieren los mercados internacionales. Lo que implica una alta disponibilidad de capital de trabajo, por la fase cíclica de la cosecha de camarón en cautiverio. Según el Ministerio de Agricultura, Acuicultura y Pesca a noviembre de 2016 se registran 40 empresas comercializadoras registradas y aprobadas. GlobalConsult (2010)

Finalmente se encuentran las empresas de alimentos balanceados como indica GlobalConsult (2010), disponen de una gran variedad de producto, con énfasis en sectores más dinámicos de la economía. Cada empresa posee un determinada formula con materia prima calificada (soya, harina de pescado, maíz, arina de arroz ,etc.), Además que recalcar que en los últimos 10 años estas empresas han evolucionado en la implementación de ingredientes de origen vegetal, para balancear la dieta de la especie.

Ecuador en el sector internacional y la importancia del sector camaronero

El Ecuador ha encajado en el sector internacional debido a que se trata de un país históricamente agroexportador, que ha mantenido una participación muy importante en las exportaciones, entre estos productos está el cacao, catalogado como uno de los mejores del mundo, el banano, el café, los productos del mar, etc.

Como resultado de una política de apertura comercial en la década de los noventa, el crecimiento de las exportaciones no tradicionales fue muy importante y coincidió con los esfuerzos realizados a finales de los 80 y principios de los 90 por liberalizar el comercio. La política de comercio exterior del Ecuador ha sido de gran debate, en cuanto, la apertura para eliminar el sesgo anti exportador y la protección, para preservar industrias o sectores más o menos sen-

sibles a la competencia internacional. La política de comercio exterior el Ecuador ha tenido, en el pasado reciente, fases de preapertura como en la década de los 1980s, y de apertura gradual Ponce Leiva (2005).

Ecuador mantiene una alta concentración de sus exportaciones en pocos productos: petróleo y sus derivados (recurso no renovable), y algunos de carácter básico, como banano, camarón, café, cacao, flores, atún, etc. Por tanto, una de las prioridades de la política comercial ecuatoriana debe ser la de diversificar las exportaciones para reducir la vulnerabilidad.

Según el Instituto de Promoción de Exportaciones e Inversiones del Ecuador (PRO ECUADOR) Las exportaciones no petroleras registraron un crecimiento del 10,5% en valor FOB¹, pasando de \$ 5.551 millones en el primer semestre de 2016 a \$ 6.135 millones en el mismo periodo de 2017.

Así lo informó ProEcuador, entidad adscrita al Ministerio de Comercio Exterior, que refiriendo cifras del Banco Central del Ecuador señala que el incremento en volumen fue del 7,1%, pasando de 4.897 toneladas a 5.245 toneladas en el mismo lapso. Las exportaciones de camarones y langostinos congelados crecieron 21,2%. De 1,194 millones en 2016, llegando a 1.447 millones en el 2017.

Otros productos de exportación que registran incrementos significativos son el aceite de palma en bruto con 26,1%; atún, listado y bonitos en conserva con 47,8%; harina de pescado con 3,1%; y rosas frescas cortadas con 15,9%.

En términos de dinero, los sectores productivos de banano y plátano, acuicultura, pesca, flores y plantas, cacao y elaborados, agroindustria, concentraron el 81,0% de las exportaciones no petroleras en el primer semestre del 2017. Es así que el sector de banano y plátano, por

¹El valor de mercado en la aduana, FOB es una abreviatura que corresponde a las iniciales de la frase en inglés 'Free on board' que en español significa 'Libre a bordo'

ejemplo, tuvo una participación del 26,7 % en valor FOB y de 67,0 % en toneladas, ubicándose como el primer sector de exportación del Ecuador. Universo (2017)

Y según la Cámara de Comercio de Quito las exportaciones en el Ecuador registran un crecimiento de 17,4 %, esto muestra una recuperación en relación al año anterior donde la situación comercial decayó por la recesión económica y la caída de los precios de petróleo. Las ventas petroleras siguen impulsando a la economía ecuatoriana, para el octavo mes del año registran un crecimiento de 29,1 %, cabe señalar que el aumento de las exportaciones viene dado del incremento del precio y no por aumento del volumen exportado.

Los bienes no petroleros registran un crecimiento menor pero aun así importante, los bienes tradicionales registran un crecimiento de 14,2% y los no tradicionales de 5,7%; la firma del acuerdo comercial con la Unión Europea ha permitido el incremento de las ventas a ese país y ha impulsado los bienes no petroleros. El sector exportador está a la espera de la postura que tome el actual gobierno y cuáles van a ser los posibles incentivos a este sector para mejorar su productividad y competitividad en relación a sus competidores.

Las ventas al exterior deben seguir siendo un motor importante para la economía ecuatoriana y para lo mismo se debe seguir en la búsqueda de posibles acuerdos comerciales que ayuden al sector. Cámara de Comercio (2017)

Tabla 2.2

Exportaciones FOB

Exportaciones (FOB) Enero-Agosto 2017						
Rubro	Miles de Toneladas	de Toneladas	Millones USD	de Porcentaje total	To-	Variación anual en porcentaje
Totales	21204		12457	100		15,8
Petroleras	14320		4350	34,9		29,1
No Petroleras	6883		8108	65,1		9,8
Tradicionales	5071		4748	38,1		13,3
No Tradicionales	1812		3359	27		5,2

Fuente:Fuente Banco Central del Ecuador

El Banco Central del Ecuador resalta que el 58.6 % de las exportaciones no petroleras del

2017 se concentran en 5 grandes grupos de productos tradicionales. El sector bananero y plátano corresponde al 26,7 %, el sector camaronero corresponde al 24 %, el cacao y elaborados corresponde al 5,1 %, atún y pescado corresponde el 1,9 %, café y elaborados al 0,9 % .Mientras que las exportaciones no petroleras no tradicionales corresponden al 41,4 %, entre ellos tenemos, los enlatados, flores, otras manufacturas de metal, productos mineros, extractos y aceites, vegetales, madera, Manufactura cuero, plástico y caucho, jugos y conservas, etc.

En el siguiente gráfico se ven las proporciones de participación en cuanto a exportaciones no petroleras, en el cual se resaltan productos tradicionales y no tradicionales ecuatorianos.

Tabla 2.3

Resumen de exportaciones no petroleras FOB 2017

Rubro	Miles de Toneladas	Millones de USD	Valor Unitario	Porcentaje Total %	Variación Anual
No Petroleras	6100	7180,5		100	11,1
Tradicionales	4518	4214,2		58,7	14,1
Banano Y Plátano	4057	1890,7	466	26,3	16,5
Camarón	255	1764	6908,6	24,6	21,9
Cacao y elaborados	154	355,5	2315,8	5,0	-8,8
Atún y Pescado	42	137,4	3299,4	1,9	-14,2
Café y Elaborados	11	66,7	6231,8	0,9	-9,6
No Tradicionales	1582	2966,3		41,3	7
Enlatados de Pescado	168	685,7	4073,5	9,5	34,3
Flores Naturales	100	566	5651,8	7,9	14
Otras manufacturas de metal	231	187,2	809,2	2,6	14,6
Productos mineros	83	197	2373	2,7	8,8
Extractos y aceites vegetales	89	152,7	1713,1	2,1	-9,9
Madera	267	129,2	484,2	1,8	-10,5
Manuf. De cuero, plástico y caucho	87	84,4	968,5	1,2	17,5
Jugos y conservas de frutas	44	81,7	1845,7	1,1	-4,1
Químicos y Fármacos	28	80,8	2862,6	1,1	-16,2
Elaborados de banano	57	71,2	1248,2	1,0	-1,4
Harina de pescado	30	67,9	2259,8	0,9	-20,2
Vehículos	1	40,8	37700,2	0,6	-17,6
Otras Manufac. Textiles	4	36,7	9227,6	0,5	50,8
Maderas terciadas y prensadas	49	35,6	724,8	0,5	14,7
Manuf. De papel y cartón	34	38	1108,8	0,5	8,3
Fruta	39	34	871,4	0,5	11,5
Otros elaborados del mar	9	32,9	3635,6	0,5	-9,9
Tabaco en rama	17	23,1	1384,8	0,3	-6,8
Abacá	6	13,9	2270,5	0,2	2,2
Textiles	0	8	17916,5	0,1	-16,9
Otros	236	399,6	1690,9	5,6	-9,5

Fuente: Banco Central del Ecuador

El crecimiento del Ecuador para el año 2017 según las estimaciones del Banco Central del

Ecuador estará sustentado por el aumento de las exportaciones; pero se tomar en cuenta que el peso de las ventas petroleras es alto y por tanto puede no ser tan real. El Ecuador debe mirar a mejorar la competitividad en productos tradiciones y no tradicionales que en los últimos años han crecido y han generado un incremento en el empleo con la consecuente mejora en las condiciones de vida de los ecuatorianos. La cuenta corriente no petrolera aún sigue registran valores negativos, aunque el valor ha bajado por una mejor balanza comercial hay que estar atentos a ver qué sucede en los meses próximos con un precio del petróleo que es aún fluctuante y que desde el mes de junio se liberan las salvaguardias impuestas a las importaciones. Cámara de Comercio (2017) Bajo este análisis, se resalta claramente que el sector acuícola es uno de los más importantes para la economía de nuestro país, así como para la satisfacción de la demanda tanto nacional como internacional en relación a los alimentos derivados de las actividades de la pesca y acuicultura. Cámara de Comercio (2017)

En el siguiente cuadro podemos observar el porcentaje de exportaciones de productos no petroleros a otros países en el periodo Enero- Agosto del 2017 estos países pertenecen al continente Americano, Asia y Europa. Estados unidos es el principal país consumidor lo que implica que tiene una participación del 33,30% seguido de Vietnam con 7,53%, Chile con 6,71%, Perú con 5,90% , Rusia con 4,50%, Colombia con 3,99% Panamá. Cámara de Comercio (2017)

Tabla 2.4

Exportaciones no petroleras en millones de dolares

Ranking Ago 2016	Ene- Ago 2016	Ranking Ago 2017	Ene- Ago 2017	País	Ene-Ago 2016	Ene-Ago 2017	TVA %	Participación Ene-Ago 2017
1		1		Estados Unidos	3511,52	4157,97	18,4	33,38
3		2		Vietnam	707,49	938,34	32,6	7,53
2		3		Chile	719,85	836,2	16,2	6,71
6		4		Perú	495,04	735,08	48,5	5,9
5		5		Rusia	496,69	560,93	12,9	4,5
4		6		Colombia	519,55	497,04	-4,3	3,99
8		7		China	420,07	484,25	15,3	3,89
7		8		Panamá	445,95	472,41	5,9	3,79
10		9		España	366,63	410,1	11,9	3,29
11		10		Italia	290,35	399,03	37,4	3,2
9		11		Alemania	370,21	332,47	-10,2	2,67
12		12		Países Bajos (Holanda)	273,43	330,49	20,9	2,65
13		13		Japón	199,98	213,55	6,8	1,71
14		14		Francia	186,31	186,54	0,1	1,5
16		15		Argentina	130,74	156,63	19,8	1,26
Total					9133,81	10711,03	15,8	

Fuente: Banco Central del Ecuador

Exportaciones de Camarón Blanco

Los productores mundiales de camarón tuvieron un buen año en el 2016, según un informe de Globefish, especialmente en el mercado de exportación. El total fue una buena noticia para los productores, ya que los primeros pronósticos pronosticaban cifras más bajas debido a que la enfermedad y las condiciones climáticas adversas cobraron su peaje en la primera mitad de 2016. Sin embargo, la situación se recuperó durante la segunda mitad del año. Clúster (2017) India, Vietnam y Ecuador lideran el mercado de camarón.

Lo que implica que Ecuador sigue siendo uno de los países en crecimiento en cuanto a la exportación de camarón congelado, en la siguiente tabla podemos observar el incremento anual de producción de camarón en toneladas.

Tabla 2.5

Camarones congelados 2017

Camarones Congelados		
Año	TON Miles	FOB Millones USD
2013	\$ 221,59	\$ 1.777,80
2014	\$ 296,90	\$ 2.519,57
2015	\$ 341,85	\$ 2.285,81
2016	\$ 370,80	\$ 2.585,71
jul-17	\$ 255,34	\$ 1.768,51
TOTAL	\$ 1.486,48	\$ 10.937,40

Fuente: Banco Central del Ecuador

Y según el diario el Productor, las exportaciones de camarón de Ecuador aumentaron un 15 % año con año a 426.000 toneladas en 2017, según cifras recientes de la Cámara Nacional de Acuicultura del país.

Las exportaciones Nacionales de camarón y en conserva por país (2013-julio 2017) FOB en millones USD, se observa en la siguiente tabla que Estados Unidos lidera seguido de Vietnam como segundo destino de exportación, mientras que los países bajos se encuentran en segundo lugar.

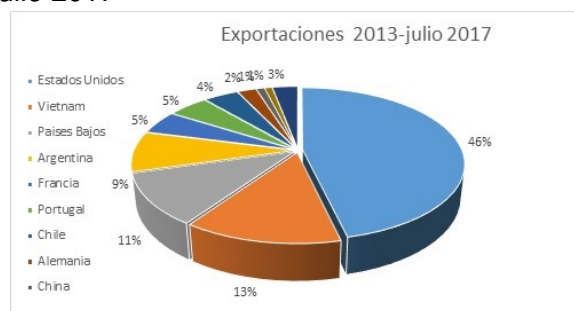
Tabla 2.6

Exportaciones de camarones preparados y en conserva 2017

Camarones Preparados y en Conserva						
Pais	2013	2014	2015	2016	2017	Total
Estados Unidos	6,3	10,86	10,09	7,46	3,04	37,75
Vietnam	0		9,36	1,46		10,82
Países Bajos	3,23	3,76	1,71	0,17		8,87
Argentina	1,11	1,67	1,47	1,87	0,8	6,92
Francia	1,2	1,18	1,25	0,17	0,22	4,02
Portugal	0,25	1,21	1,04	1,28	0,14	3,92
Chile	0,04	0,08	0,64	1,18	1,43	3,37
Alemania	0,17	0,29	1,27	0,07		1,8
China			0,81			0,81
España	0,32	0	0,39	0		0,71
Resto del Mundo	0	0,12	1,85	0,31	0,16	2,44
Total general	12,62	19,17	29,88	13,97	5,79	81,43

Fuente: Banco Central del Ecuador

Figura 2.1

Exportaciones 2013 a Julio 2017

Fuente: Banco Central del Ecuador

Según el International Trade Center, en el 2015 bajo la partida arancelaria 030617, que contempla camarones y langostinos congelados excepto en agua fría, se exportaron aproximadamente 1'707.072 toneladas, que representan US \$13'968.955 (miles) en todo el mundo. Dichos datos representan un crecimiento anual en términos monetarios entre el 2011 y 2015 del 4% y en cantidad del 0%. Comparando solo el 2014 y el 2015 hubo una contracción del 17% en cuanto al crecimiento anual de valores, lo que evidencia la presencia en los últimos años de una baja del precio de estos productos a nivel mundial. Sánchez (2017)

Tabla 2.7

Principales exportadores 2015 CIT

Principales exportadores 2015					
Puesto	Exportadores	Valor de exportación 2015 miles USD	Saldo comercial 2015 miles USD	Cantidad exportada TON	Valor unitario USD
	Mundo	\$ 13.968.955,00	\$ 877.522,00	1.707.072,0	\$ 8,183
1	India	\$ 3.072.991,00	\$ 3.070.633,00	369.018,0	\$ 8,327
2	Ecuador	\$ 1.894.670,00	\$ 1.894.670,00	284.988,0	\$ 6,648
3	Viet Nam	\$ 1.731.416,00	\$ 1.345.819,00	184.626,0	\$ 9,378
4	Indonesia	\$ 1.189.566,00	\$ 1.185.312,00	129.995,0	\$ 9,151
5	China	\$ 970.555,00	\$ 529.950,00	95.051,0	\$ 10,211
6	Argentina	\$ 763.760,00	\$ 762.076,00	120.786,0	\$ 6,323
7	Tailandia	\$ 624.041,00	\$ 549.489,00	68.805,0	\$ 9,070
8	Bangladesh	\$ 429.530,00	\$ 428.877,00	37.741,0	\$ 11,381
9	México	\$ 320.463,00	\$ 259.284,00	28.703,0	\$ 11,165
10	España	\$ 302.546,00	\$ 808.490,00	34.543,0	\$ 8,759

Fuente: International Trade Center

Sin embargo, el presidente de CNA (cámara nacional de acuicultura) indica que el cama-

rón se consolida como el principal producto de exportación no petrolero. En el acumulado de Enero-Octubre 2017 el crustáceo supero al banano en el liderazgo de ventas al exterior, esto ratifica su puesto en ranking como el segundo exportador de camarón a nivel mundial después de la India. CNA (2017)

Las proyecciones de crecimiento del sector camaronero son alentadoras. Según el Banco Central, el área de acuicultura y pesca del crustáceo crecerá un 10 % al final del 2017 y un 7 % el 2018.

Producción de Camarón blanco en Agua Dulce en piscina Manglar

La producción de camarón de mar en agua dulce se está dando en varios sectores del país en especial en la provincia de Manabí. Según el productor José Zambrano, de Chone, asegura que el camarón criado en agua dulce tiene un mejor sabor que el criado en agua salada. Es decir que el camarón de Manabí es uno de los mejores de país debido a que en la provincia existe mayor cantidad de luz, lo que permite la creación de algas, sumando la producción que se realiza en agua dulce. Además el producir en campos abiertos y con agua dulce tiene sus ventajas y desventajas con respecto a agua salada. Cluster (2017)

Beneficios de producción en Agua Dulce en campo abierto

Los beneficios de producir camarón blanco en agua dulce son relevante es decir:

- Se produce cinco veces más que otras camaroneras.
- El agua dulce es amigable con el medio ambiente.
- Es agua que se oxigena, fertiliza y adapta para los camarones.
- Además del uso de cultivo, se puede emplear para riegos.
- Solo recibe fertilizantes naturales.

- No existe riesgo de contaminación biológica.
- El tamaño del camarón de agua dulce es similar al de los camarones marinos.
- Su índice de colesterol es bajo, con valor proteico de 70%.

Desventajas de producción de Agua dulce en campo abierto

Las desventajas de producir tierra adentro son:

- Eliminación de manglares
- Erosión del Suelo
- Exposición a depredadores

En la siguiente figura podemos observar las piscinas a campo abierto :

Figura 2.2

Piscina de camarón en agua dulce



Producción de camarón blanco de agua dulce en piscina de geomenbrana.

En nuestro país la producción de cultivo de camarón blanco de agua dulce, *Litopenaeus vannamei*, en un sistema cerrado aún no ha sido desarrollado, sin embargo la implementación

de tecnología en camarónicas de agua salina ha ido evolucionando, debido a la gran aceptación de nuestro producto a nivel internacional. Además recalando que Ecuador es el segundo país a nivel mundial en la producción y exportación de camarón blanco.

Una piscina de geomembrana ² con se indica en la 2.3, implica un mayor control y desarrollo de la especie vannamei, los parámetros importantes a controlar son la temperatura, dosificación de alimento, alcalinidad del agua y oxígeno. Como todo sistema tiene sus ventajas y desventajas.

Beneficios de producción en Agua Dulce en sistema cerrado

Los beneficios de producir camarón blanco en agua dulce en un sistema cerrado son:

- Mejor control de temperatura
- Mejor control del agua
- Mejor control de alimentación
- No existe depredadores
- Y lo más importante se puede tener un cultivo súper-intensivo (alta densidad de biomasa).
- No existe erosión de la tierra, es decir amigable con el medio ambiente.
- Conservación del ecosistema manglares.

Desventajas de producción en Agua Dulce en sistema cerrado

Dentro de las desventajas tenemos las siguientes:

- Implementación de tecnología específica en nuestro país.

²Geomembrana (Plastiliner), es una película para impermeabilizar y recubrir piscinas de camarones, tilapias etc. Película de polietileno de alta densidad.

- Costo de inversión de tecnología sino no se implementa un estudio previo, para determinar que sea un proyecto rentable.

Figura 2.3

Piscina con geomembrana agua salina



Fuente: Balanova

3. Modelos matemáticos en dinámica poblacional

Los métodos o modelos de rutina para predecir el comportamiento (dinámica de crecimiento) y contribuir al manejo productivo de diferentes explotaciones de animales terrestres y acuáticos han cambiado de manera estructural. De los sistemas estáticos de formulación de los requerimientos alimenticios se ha pasado a sistemas dinámicos de simulación que caracterizan la respuesta animal a un amplio rango de condiciones ambientales mediante el estudio de parámetros físico-químicos, que expresan diferentes realidades productivas.

Uno de los fenómenos más estudiado dentro de los modelos de simulación es el crecimiento, que se caracteriza en el camarón por ser un fenómeno complejo, indeterminado y de gran plasticidad biológica¹.

En nuestro país se cultiva dos tipos de camarón el *Litopenaeus vannamei* que conforma el 95 % de producción y el *litopenaeus stylirostris* que conforma el 5 % de la producción. Siendo la primera, la especie más resistente es decir la que se adapta a varios climas durante su etapa de desarrollo en cautiverio. Esta especie puede ser cultivada en estanques bajo ciertos parámetros de control que merecen un tratamiento matemático.

Por lo tanto, la investigación pretende aplicar y analizar un modelo matemático que ayude a determinar el crecimiento del camarón blanco (longitud y peso) y de esta manera poder ge-

¹Plasticidad biológica o capacidad del cuerpo de hacer frente a presiones medioambientales.

nerar un sistema de producción óptimo, rentable y sustentable para pequeños productores. Los modelos matemáticos han sido desarrollados para ajustar los registros de variables como la longitud y peso corporal, en la búsqueda de una mayor exactitud y precisión, atributos que pueden ser valorados por medio de técnicas estadísticas como el cuadrado medio del error de predicción (MSPE).

Otra de las alternativas para estudiar el crecimiento del camarón es mediante una aproximación mecanística, es decir mediante modelos bioenergéticos² y dinámica de macromoléculas³ (agua, lípidos, proteína, cenizas) en los cuales a partir de los contenidos de dichos componentes corporales de los camarones a diferentes edades se definen funciones matemáticas o relaciones alométricas. Aguilar (2010)

Biología del crecimiento en el camarón.

El término crecimiento significa cambio en magnitud de una variable como la longitud u otra dimensión física como el volumen, el peso o la masa de un organismo, como un todo o de sus tejidos y órganos, así mismo de sus componentes celulares o contenido de macromoléculas (proteína, lípidos, agua, cenizas) o de la energía corporal o de sus componentes. Weatherley (1897)

En la estructura y conceptos involucrados en el crecimiento de los tejidos subyacen tres premisas que son determinantes del crecimiento de animales terrestres y acuáticos. Estas son:

a La primera premisa la genética del tamaño de un órgano es el contenido final del ADN del órgano en un estado maduro y normalmente los individuos de las diferentes especies y los

²Modelo Bioenergética. Se refiere al flujo de energía en sistemas vivos. Los organismos mantienen su estructura y sus actividades que sostienen la vida por medio del gasto constante de energía obtenida finalmente a partir del ambiente.

³Dinámica de macromoléculas. Se refiere a las propiedades de la dinámica global dependientes de tamaños y formas globales, bien definidas.

estados nutricionales determinan la tasa de acumulación de ADN y si el blanco de contenido de ADN es alcanzado. Bywater (1897)

b La segunda premisa hace referencia a que cada unidad de ADN específica una definida base genética para cada uno de los tejidos y cada especie produce como resultado final la formación de una cantidad específica de material celular conformado por macromoléculas (agua, proteína, lípidos y cenizas), en donde el estatus nutricional y fisiológico define si el blanco es alcanzado. Bywater (1897)

c La tercera premisa hace referencia al principio de que las actividades específicas de las enzimas ⁴ responsables del crecimiento tisular varían exponencialmente con el tamaño del órgano y las propiedades dinámicas de estas enzimas son relativamente constantes a través de las especies. Bywater (1897)

En especies acuáticas como los peces y crustáceos de agua templada y como resultado de las variaciones de temperatura del agua, debido a las estaciones, se ha observado como fenómeno de crecimiento estacional, también denominado crecimiento multifásico o discontinuo, caracterizado por periodos de lento crecimiento manteniendo el peso corporal en bajas temperaturas y periodos de rápido crecimiento en las estaciones cálidas. Macdonald (1973)

Modelos matemáticos en dinámica poblacional

Actualmente, en algunos campos de la Ciencia los esfuerzos van dirigidos, dentro de ciertas limitaciones, a conocer el desarrollo de algunos fenómenos reales. En este camino se estudia su comportamiento, sus consecuencias y fines, según sus parámetros y variables que intervienen sin necesidad de que se produzcan dichos fenómenos.

⁴Enzima : Proteína soluble producida por las células del organismo

Modelo poblacional

La dinámica de poblaciones es uno de los temas de mayor importancia para entender el desarrollo temporal y espacial de grupos de organismos de la misma especie que se desarrollan en diferentes ambientes. En términos generales y prácticos sirve para estimar densidades pesqueras, para manejar poblaciones silvestres, para comprender la epidemiología de numerosas enfermedades, para el manejo de plagas agrícolas etc. Marmol (2007)

Para predecir y analizar la dinámica de crecimiento del camarón, se utilizará el modelo matemático de Ludwing Von Bertalanffy que se basa en la Teoría General de Sistemas, además el modelo de Fisher-Kolmogorov que se basa en las ecuaciones diferenciales de Difusión-Reacción y la proporción Aurea o Golden Ratio para determinar la razón de crecimiento de dicha especie.

Modelo matemático de Ludwing Von Bertalanffy

La Teoría General de Sistemas (TGS) fue formulada por el biólogo austriaco Ludwing Von Bertalanffy (1901-1972), que se presenta como una forma sistemática y científica de aproximación y representación de la realidad y, al mismo tiempo, como una orientación hacia una práctica estimulante para formas de trabajo transdisciplinarias, formalizada matemáticamente. Arnold (1990)

Quizá en formular una teoría sobre el crecimiento orgánico basado en principios biológicos fue Von Bertalanffy (1938). Para Bertalanffy el crecimiento se basa en la acción encontrada de procesos anabólicos⁵ y catabólicos⁶. Es decir que el organismo crece cuando la formación sobrepasa a la degradación y se detiene cuando se equilibran ambos procesos. El catabolismo

⁵Anabolismo es el total de reacciones metabólicas que se llevan a cabo en la célula con el objetivo de crear nuevas moléculas a partir de moléculas sencillas, es decir que el anabolismo es la fase constructiva del organismo.

⁶Catabolismo es el conjunto de reacciones que convierten moléculas complejas en otras más sencillas, es decir la parte destructiva del organismo.

en muchos organismos, es proporcional al volumen (peso) y el anabolismo es proporcional a la superficie. Valle (1986)

Para la teoría de crecimiento animal utilizaremos las ecuaciones que propuso Bertalanffy en (1976).

$$\frac{dV}{dt} = hS_t - kV_t \quad (3.1)$$

Donde h es el coeficiente de anabolismo,

S_t es la superficie de resorción del animal en el tiempo.

k es la constante de catabolismo.

V_t es el peso o volumen del animal.

Para postular su modelo, Von Bertalanffy se basó en el argumento de Puter (1920), quién establece que, en un organismo que crece isométricamente, la tasa de anabolismo es proporcional a la potencia $2/3$ del peso, en tanto que la tasa de catabolismo lo es al peso mismo.

De acuerdo a lo anterior Von Bertalanffy supuso que el área de la superficie involucrada con el anabolismo era proporcional a una dimensión lineal al cuadrado, y que el volumen relacionada con el proceso catabólico, es proporcional a la misma dimensión lineal, pero elevado al cubo es decir que:

Si L es la longitud de animal, entonces:

$$S_t = pL_t^2 \quad (3.2)$$

$$V_t = qL_t^3 \quad (3.3)$$

Siendo p, q constantes.

Para obtener la ecuación diferencial de la longitud tenemos que realizar algunas operaciones, para lo cuál: La ecuación 3.2 y 3.3 reemplazamos en 3.1

$$\frac{dV_t}{dt} = hpL_t^2 - kqL_t^3 \quad (3.4)$$

De la ecuación 3.3 despejamos L , entonces:

$$L_t = \frac{V_t^{1/3}}{q^{1/3}} \quad (3.5)$$

Luego reemplazamos la ecuación 3.5 en la ecuación 3.2 obteniendo:

$$S_t = p \left[\frac{V_t^{1/3}}{q^{1/3}} \right]^2$$

$$S_t = p \frac{V_t^{2/3}}{q^{2/3}} \quad (3.6)$$

Si definimos que :

$$r = \frac{p}{q^{2/3}}, \text{ entonces :}$$

$$S_t = rV_t^{2/3} \quad (3.7)$$

La ecuación 3.7 reemplazamos en la ecuación 3.1 obteniendo:

$$\frac{dV}{dt} = hrV_t^{2/3} - kV_t$$

Si el volumen o masa de la especie $V_t = W$ y las constantes $hr = \eta$, $k = \gamma$, $m = 2/3$ implica que la ecuación se denota por:

$$\frac{dW}{dt} = \eta W^m - \gamma W \quad (3.8)$$

Siendo la ecuación 3.8 la del peso o más conocido como la ecuación para el crecimiento iso-

métrico.

Luego, si derivamos la ecuación 3.3 resulta que :

$$V_t = qL_t^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3qL_t^2 * \frac{dL}{dt} \quad (3.9)$$

Iguamos la ecuación 3.9 con la ecuación 3.4

$$3qL_t^2 \frac{dL}{dt} = hpL_t^2 - kpL_t^3$$

de donde:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{hp}{3q} - \frac{k}{3}L_t \quad (3.10)$$

Si llamamos las constantes $H = \frac{hp}{3q}$ y $K = \frac{k}{3}$

Tenemos la ecuación reducida:

$$\frac{dL}{dt} = H - KL_t \quad (3.11)$$

y sacando factor común K se obtiene la ecuación:

$$\frac{dL}{dt} = K\left(\frac{H}{K} - L_t\right)$$

si $\frac{H}{K} = A$, tal que $K \neq 0$, resulta la ecuación :

$$\frac{dL}{dt} = K(A - L_t), \text{ de donde} \quad (3.12)$$

K es la constante de crecimiento y A es la longitud asintótica L_∞ , dando lugar a la ecuación:

$$\frac{dL}{dt} = K(L_\infty - L_t), \text{ conocida} \quad (3.13)$$

como la ecuación de longitud del organismo en el tiempo.

Ecuación que describe la longitud.

La ecuación que describe el crecimiento en longitud está dada por:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L_t) \\ C.I : L(t_0) = L_0 = 4mm \end{cases} \quad (3.14)$$

Donde L_t : Longitud del organismo en el tiempo

L_∞ :Es la longitud teórica máxima o longitud asintótica.

K : Es la constante de crecimiento

Sea la ecuación $L' = F(L, t)$ donde F es la función que depende de las variables L y t ; donde la longitud de un organismo cambia a una velocidad proporcional a la diferencia de Longitudes entre el medio externo y el cuerpo.

La ecuación 3.14 se la puede resolver utilizando el método de integración de **variables separables**:

$$\frac{dL}{(L_\infty - L_t)} = k * dt \quad (3.15)$$

$$- \frac{dL}{(L_t - L_\infty)} = k * dt \quad (3.16)$$

Integrando a ambos lados 3.16:

$$-\int \frac{dL}{(L_t - L_\infty)} = k \int dt \quad (3.17)$$

Se obtiene:

$$-\ln |L_t - L_\infty| = kt + C \quad (3.18)$$

Despejando L :

$$e^{-\ln |L_t - L_\infty|} = e^{(kt+C)}$$

$$e^{\ln |L_t - L_\infty|^{-1}} = e^{(kt+C)}$$

$$|L_t - L_\infty|^{-1} = e^{(kt+C)}$$

$$\frac{1}{|L_t - L_\infty|} = e^{(kt+C)}, \text{ de donde:}$$

$$\frac{1}{e^{(kt+C)}} = |L_t - L_\infty| \quad (3.19)$$

Analizando el valor absoluto:

$$|L_t - L_\infty| = \begin{cases} \text{i) } L_t - L_\infty > 0 \longrightarrow L_t > L_\infty \\ \text{ii) } L_t - L_\infty < 0 \longrightarrow L_t < L_\infty \end{cases} \quad (3.20)$$

Para el caso : i) Si $L_t - L_\infty > 0$

$$\frac{1}{e^{(kt+C)}} = (L_t - L_\infty)$$

$$e^{-(kt+C)} = L_t - L_\infty$$

$$L_t = L_\infty + e^{-(kt+C)} \quad (3.21)$$

La ecuación 3.21 no satisface debido a que L_t en el tiempo no puede ser mayor que L_∞ o de saturación.

Para el caso: *ii*) Si $L_t - L_\infty < 0$

$$\frac{1}{e^{(kt+C)}} = -(L_t - L_\infty)$$

$$e^{-(kt+C)} = -L_t + L_\infty$$

$$L_t = L_\infty - e^{-(kt+C)} \quad (3.22)$$

La ecuación 3.22 satisface , por lo tanto, para encontrar el valor de C cuando las condiciones del iniciales del organismo son:

Sea $C.I : t = 0[di\acute{a}] \rightarrow L_0 = 0[mm]$ en la ecuación 3.18 se tiene que :

$-\ln |L_t - L_\infty| = kt + C$ cuando $L_0 = 0$, entonces:

$$-\ln |0 - L_\infty| = kt_0 + C$$

$$-\ln L_\infty| = kt_0 + C$$

$$C = -kt_0 - |L_\infty| \quad (3.23)$$

Reemplazando la ecuación3.23 en la ecuación 3.22, se tiene :

$$L_t = L_\infty - e^{-(kt-kt_0-|L_\infty|)}$$

$L_t = L_\infty - e^{-k(t-t_0)} * e^{\ln|L_\infty|}$, si $L_\infty > 0$, entonces:

$e^{\ln|L_\infty|} = L_\infty$, de donde

$$L_t = L_\infty - e^{-k(t-t_0)} * L_\infty$$

$$L_t = L_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)}) \quad (3.24)$$

Siendo la ecuación 3.24 la función en el tiempo de la longitud de crecimiento del organismo.

Ecuación que describe el peso

La ecuación que describe el crecimiento en peso

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = \eta W^m - \gamma W \\ C.I : W(t_0) = W_0 = 1,5gr \end{cases} \quad (3.25)$$

Donde W = Peso o volumen del organismo

η, γ = Constantes de anabolismo y catabolismo

De la ecuación 3.3 reemplazamos la ecuación 3.24

$$V_t = q[L_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)})]^3 \quad (3.26)$$

Golden ratio

Golden Ratio o proporción aurea, es la razón extrema media , la cual se trata de un número algebraico irracional es decir que su representación decimal no tiene periodo, fue descubierto en la antigüedad no como una expresión sino como una relación o proporción entre dos segmentos de una recta, es decir una construcción geométrica que a la vez se relaciona con el

crecimiento animal. Levendis (2008)

Figura 3.1

PI32 Camarón vanamei 32 días con una longitud de 26mm



Fuente: Piscina Guayllabamba

En la siguiente figura 3,1 se puede observar una proporción de crecimiento entre la cabeza y el cuerpo torácico. La constante de crecimiento K , puede adquirir un valor numérico a $0 < K < 2$.

Sin embargo el aporte de esta investigación será relacionar el valor aproximado de dicha constante mediante "Golden Ratio", o más conocido como el número de Oro. Este número irracional tiene varias propiedades únicas, establecidas por cálculo simple. Estar en proporción aurea quiere decir que la relación de la longitud total y la parte mayor , es lo mismo que la relación entre la parte mayor sobre la menor, es decir :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad (3.27)$$

De modo que, descomponiendo en fracciones simples la ecuación 3.27, se tiene que:

$$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

Realizando cambio de variable si $k = \frac{b}{a}$, se tiene que:

$$1 + K = \frac{1}{K}$$

Simplificando la expresión se obtiene una ecuación cuadrática de la forma:

$$K^2 + K - 1 = 0 \tag{3.28}$$

Al resolver la ecuación 3.28 se obtiene las raíces soluciones:

$$K = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$K_1 = 0,618033988... \vee K_2 = -1,618033988...$$

Siendo K_1 el valor de la constante de crecimiento para la especie estudiada.

Modelo logístico

El modelo logístico, es un modelo matemático para determinar el crecimiento de una población, del cuál se deducirá posteriormente la ecuación de Fisher-kolmogorov, como caso particular de la ecuación reacción-difusión. Este modelo manifiesta, que el crecimiento de una población con ciertos recursos limitados esta gobernado por la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{du_t}{dt} = \gamma u_t (P_0 - u_t), & \gamma, P_0 \in R^+ \\ C.I : u(0) = x_0 & x_0 \in [0, P_0] \end{cases}$$

donde $u = u_t$ es la densidad de población, γ es la constante de crecimiento (relacionada con el nacimiento y muerte) y P_0 es la capacidad de carga del espacio.

El problema puede ser, resuelto mediante el método de variables separables, como se muestra:

$$\frac{du_t}{dt} = \gamma u_t (P_0 - u_t), \text{ de donde } u_t \neq 0, P_0 \quad (3.29)$$

$$\frac{du_t}{u_t(P_0 - u_t)} = \gamma dt$$

Integrando ambas partes:

$$\int \frac{du_t}{u_t(P_0 - u_t)} = \int \gamma dt$$

se logra obtener:

$$\ln\left(\frac{u_t - P_0}{u_t}\right) = -\gamma P_0 t + C, \text{ siendo } C \text{ constante}$$

Despejando u_t la densidad de población resulta:

$$u_t = \frac{P_0}{1 - C e^{-\gamma P_0 t}}$$

Aplicando la condición inicial

$$u_t = \frac{P_0 x_0}{x_0 + (P_0 - x_0) e^{-\gamma P_0 t}} \quad t \geq 0 \quad (3.30)$$

Modelo matemático de Fisher-Kolmogorov

El modelo matemático de Fisher-Kolmogorov se basa en las ecuaciones de Difusión - Reacción, es decir la descripción de una o más sustancias distribuidas en un espacio, que cambian bajo la influencia de dos procesos :

1 Difusión (Movimiento local)

2 Reacción (Crecimiento, interacciones o cambios de estado)

Difusión

La Difusión es un fenómeno por medio del cual un grupo de partículas se mueven como grupo de acuerdo a la trayectoria irregular de cada una de las partículas, de modo que los movimientos particulares irregulares, dan como resultado un movimiento regular como grupo.

Peña (2012)

Reacción

Las partículas pueden tener reacciones químicas o procesos biológicos, debido a las interacciones o también de manera espontánea. Peña (2012)

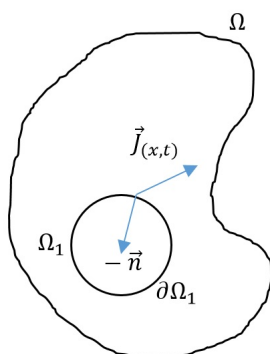
Deducción de las ecuaciones de reacción difusión

Los modelos reacción difusión permiten traducir supuestos locales sobre el movimiento, mortalidad y reproducción de individuos en conclusiones globales sobre la persistencia o extinción de poblaciones. Cantrell (2004)

Sea un espacio $\Omega_1 \subset \Omega$, tal que Ω abierto, en donde existe una población $u(x, t)$ sabiendo que el movimiento de ciertos individuos va de altas densidades a bajas densidades se considera $J(x, t) \in \Omega$ el flujo de individuos que entran y salen de Ω_1 .

Figura 3.2

Espacio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$



Como se puede observar en 3.2 para nuestro estudio la ecuación de conservación, nos dice que la tasa de cambio en la densidad de población $u(x, t)$ en Ω_1 es igual a la tasa de cambio de flujo que individuos que se mueven en la frontera $\partial\Omega_1$ más el cambio en la tasa de mortalidad y nacimiento de individuos en Ω . Escrito de forma matemática :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_1} u(x, t) d\Omega_1 = - \int_{\partial\Omega_1} \vec{J}(x, t) \cdot \vec{n} d\partial\Omega_1 + \int_{\Omega_1} f(u(x, t)) d\Omega_1 \quad (3.31)$$

donde $f(u(x, t))$ es la función que describe la muerte y nacimiento de individuos en Ω .

Teorema 3.2.4.1. Teorema de Gauss de la divergencia. Sea un espacio Ω abierto simple de \mathbb{R}^2 y $S = d\partial\Omega$ su borde, orientado con la norma exterior unitaria \vec{n} . Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $C^1(\Omega)$.

Entonces:

$$\int_{\Omega} \text{div} F d\Omega = \int_S F \cdot \vec{n} dS \quad (3.32)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la ecuación 3.31, se obtiene:

$$\int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f(u) + \operatorname{div} J \right) d\Omega_1 = 0$$

Por la ley de Fick, el flujo es proporcional al gradiente de la concentración del material, donde la d es la constante de proporcionalidad, es decir :

$$\vec{J} = -d\nabla u \quad (3.33)$$

De modo que el gradiente corresponde el máximo crecimiento de una función, relacionado con la investigación implicaría el máximo decreciendo de la densidad de individuos dentro de la región Ω_1 . Dando como resultado la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla(d\nabla u) + f(u) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= d\Delta u + f(u) \end{aligned} \quad (3.34)$$

La ecuación de la forma 3.34, se conoce como la ecuación de **reacción-difusión** , considerando condiciones iniciales y de frontera se tiene el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(u), & x \in \Omega \\ C.I : u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega; t \in \mathbb{R}^+ \\ C.F : u(x, 0) = f(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.35)$$

Donde f depende de la forma no lineal de u .

En el modelo logístico 3.35, se supone que el modelo espacial de la densidad de la población es de poca importancia para el crecimiento de esta, es decir que la población se distribuye de forma uniforme sobre una área todo el tiempo . Sin embargo en situaciones reales, no siempre es verdad. Gómez (2014)

Por lo tanto se trabaja con la siguiente ecuación, derivando la ecuación de modelo logístico 3.29.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + \gamma u(P_0 - u) \quad (3.36)$$

El sistema de Reacción - Difusión basado en determinar la transformación local, crecimiento, interacciones y cambio de estado de la especie, basado en el modelo de Ronald Fisher⁷ y Andrei Kolmogorov⁸ (1903-1987), expresado por la ecuación con las condiciones iniciales y de frontera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = d\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \gamma P(1 - P), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \\ C.I : P(x, t_0) = P(x, 0) = 0, \quad x \in R; t \in R^+ \\ C.F : P(0, t) = 0 \quad \quad \quad P(L, t) = 0; (Problema - de - dirichlet) \end{array} \right.$$

Donde $P = P(x, t)$ corresponde a la función probabilidad de crecimiento de camarones y γ representa la constante de natalidad y muerte del *Litopenaeus vannamei*.

Mientras que $P(0, t) = P(L, t) = 0$, donde L es el la longitud del dominio. La condición por la que se escogen estas longitudes en la frontera, es porque se asume que el área es cerrada.

La ecuación Fisher-Kolmogoro constituye unas de las ecuaciones más elementales de reacción-difusión no lineal y uno en la modelización de crecimiento poblacional de seres vivos (camarón el *Litopenaeus vannamei*), principalmente en el crecimiento finito del camarón, lo que justifica las condiciones de frontera.

⁷ Estadístico y biólogo Británico que uso la matemática para combinar las leyes de Mendel con la selección natural.

⁸ Matemático Ruso que realizó aportes de primera línea en los contenidos de la teoría de la probabilidad y de topología.

Sin embargo el crecimiento del camarón es complejo de forma biológica, debido a las condiciones (espacio-tiempo) que requiere para poder desarrollarse es decir tipo de especie, parámetros ambientales, temperatura, ph, oxigenación, alcalinidad, salinidad, niveles amonio, etc. Para construir un modelo matemático se tiene que hacer algunas suposiciones previas. El modelo más simple constituye el crecimiento de la especie en longitud, asumiendo que el crecimiento del camarón sigue un modelo exponencial.

La generación de un término de difusión, conduce al $d\Delta u$, es decir una ecuación diferencial parcial de orden 2, de modo que, cuando los camarones crecen lo suficiente se difunden.

En términos generales, se podría modelar otras características del crecimiento del **Litopenaeus vannamei**. Sin embargo la ecuación 3.36 modela dos de las más importantes: reacción (crecimiento) y difusión. Resolver la ecuación 3.36 de forma analítica es complejo, por tal razón se aplicará un método numérico para dar solución.

Método de diferencias finitas

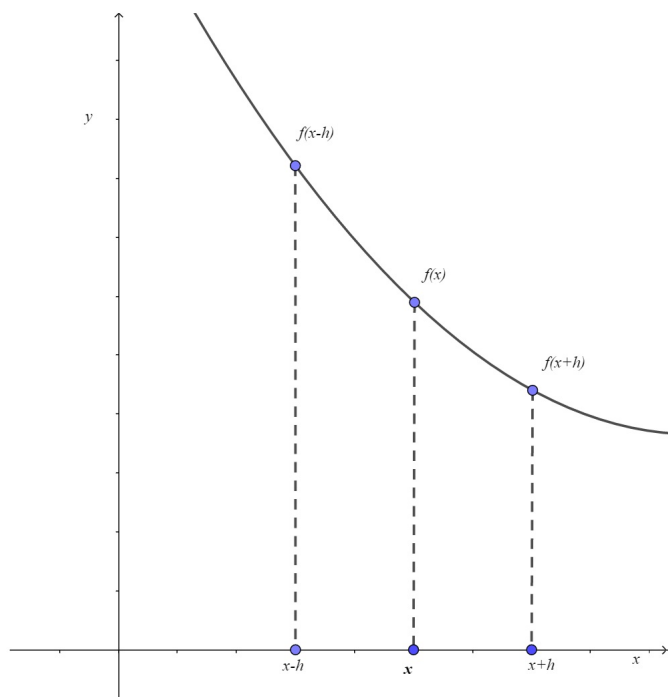
El principio de los métodos de diferencia finita está cerca de los esquemas numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Consiste en aproximar el operador diferencial al reemplazar las derivadas en la ecuación usando cocientes diferenciales, mediante la discretización de la función en el plano, en el que se quiere resolver la ecuación con una malla, por conveniencia cuadrada.

Método Explícito

Este método consiste en la discretización natural de una función $f(x)$, es decir:

Figura 3.3

Derivada de una función $f(x)$



La primera derivada de una función $f'(x)$ se conoce como la pendiente de una recta entre dos puntos, para ello escogemos los puntos $f(x)$ y $f(x+h)$ como se muestra en la 3.3 y calculamos la pendiente.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.37)$$

de donde h representa la distancia entre los puntos en el $Dom(f)$, y la segunda derivada $f''(x)$ es:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h}$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

ordenando se tiene:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \quad (3.38)$$

En la práctica, se utiliza una cuadrícula o malla discreta con pares ordenados (x_i, t_j) en donde se aplica un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas. Sea los conjuntos $N, M \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$$x_i = ih, 0 \leq i \leq N$$

$$t_j = jk, 0 \leq j \leq M$$

donde h y k son los pasos de discretización espacial y temporal. De esta forma, se denota $U_i^j \approx u(x_i, t_j)$, y se lee la aproximación numérica en el punto discreto x_i en el tiempo t_j .

Como ejemplo tenemos la discretización de la ecuación de transferencia de calor $u_t = ku_{xx}$, sabiendo que el cambio de temperatura se da en el tiempo y espacio, para $1 \leq i \leq N-1$, $j \geq 0$ se tiene:

La diferencia finita aproximada hacia adelante para la primera derivada

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} \quad (3.39)$$

La diferencia finita centrada para la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad (3.40)$$

Remplazando la ecuación 3.39 y 3.40 en $u_t = ku_{xx}$ se obtiene:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = k \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}$$

donde k es el coeficiente de transferencia de calor y $\Delta x = x_{i-1} - x_i \approx h$, resulta la ecuación:

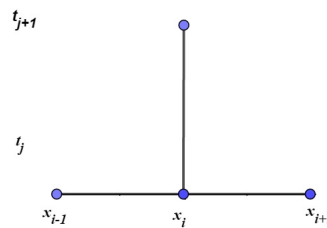
$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = k \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}$$

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \lambda(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j) \quad (3.41)$$

donde $\lambda = \frac{\Delta t \cdot k}{h^2}$ por lo tanto la ecuación 3.41 implica el calculo de la temperatura mediante términos de datos en tiempo anteriores. En la figura 3.4, se representa el método a dos niveles para la ecuación 3.41.

Figura 3.4

Método de dos niveles (molécula)



El método explícito tiene una restricción de estabilidad en el tiempo , lo que implica que :

$\lambda \leq \frac{1}{2}$ para existe convergencia y estabilidad , o es lo mismo decir:

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Expresión en diferencias finitas para la ecuación de Fisher-Kolmogorov

Se ha estudiado la ecuación de transferencia de calor $u_t = ku_{xx}$. Para nuestro modelo , se aplicará en la ecuación de Fisker-Kolmogorov

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + \gamma u(P_0 - u)$$

Aplicando el método explícito en diferencias finitas se tiene la siguiente discretización :

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = d \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} + \gamma U_i^j (1 - U_i^j)$$

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{dk}{h^2} (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j) + \gamma k U_i^j (1 - U_i^j)$$

Utilizando las condiciones iniciales se tiene que :

$$U_0^{j+1} = f(x_i); i = 0, 1, \dots, N$$

mientras que con las condiciones de frontera tiene las siguientes ecuaciones en diferencias

:

$$U_0^{j+1} = U_0^j + \frac{dk}{h^2} (U_1^j - 2U_0^j) + \gamma k U_0^j (1 - U_0^j)$$

$$U_N^{j+1} = U_N^j + \frac{dk}{h^2} (U_{N-1}^j - 2U_N^j) + \gamma k U_N^j (1 - U_N^j)$$

Siendo $N = L/h$, donde L es la longitud del dominio.

4. Modelamiento y Simulación numérica

El modelamiento numérico es capaz de simular el comportamiento de crecimiento del camarón *Litopenaeus vannamei*, mediante el análisis exploratorio de datos y la aplicación de algoritmos para simular aproximaciones de solución . Este modelamiento es muy aplicado en las ciencias de la ingeniería.

En cualquier actividad de la ciencia, la técnica , los negocios o la vida cotidiana, que dé como resultado una serie de mediciones, se obtiene más información que las simples cifras recolectadas. El como conseguir la información, su análisis e interpretación se puede realizar de muchas maneras, pero primero se debe tener una idea clara de las características más importantes de los datos obtenidos.Galindo (2013)

El análisis exploratorio de datos , es la aplicación de una estadística descriptiva que consiste en presentar información ya sea en tablas o en gráficos, sin embargo para complementar el análisis de datos haremos uso de una prueba de hipótesis, es decir la aplicación de una estadística diferencial¹.

¹Estadística Inferencial se deriva de muestras, observaciones conocidas de un conjunto numeroso de elementos

Simulación numérica Matlab

Ecuación de crecimiento de Ludwig Von Bertalanffy

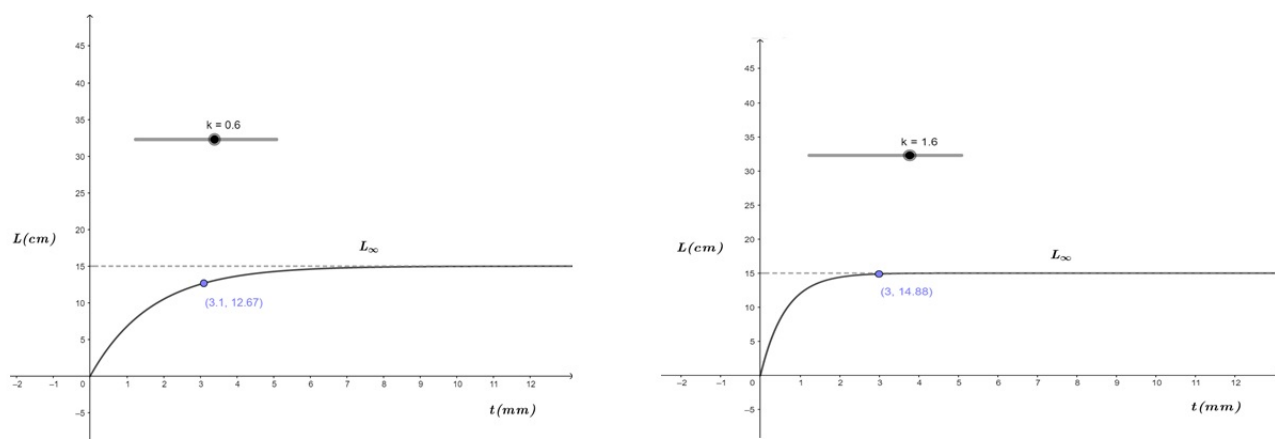
En esta sección modelaremos la ecuación de LVB para predecir el crecimiento del camarón blanco :

$$L_t = L_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)})$$

Se supone una longitud máxima de comercialización es de 15[cm], es decir que $L_\infty = 15[cm]$, lo que implica que la función converge.

Figura 4.1

Solución de crecimiento para una $L_\infty = 15[cm]$



Se observa en la figura 4.1 , la especie se desarrolla en el tiempo alcanzando una longitud de comercialización, que va a depender de la constante de crecimiento k . Para una constante de crecimiento $k = 0,6$ se observa que la especie alcanza una longitud aproximadamente de 12,67[cm], en el tiempo de 3 meses, es decir que se tarda en alcanzar el tamaño de cosecha, mientras que para una $k = 1,6180\dots$, se puede observar que la especie alcanza una longitud de 14,88[cm] en el tiempo de tres meses lo que implica, la especie puede ser cosechada, considerando un crecimiento óptimo.

Ecuación Logística

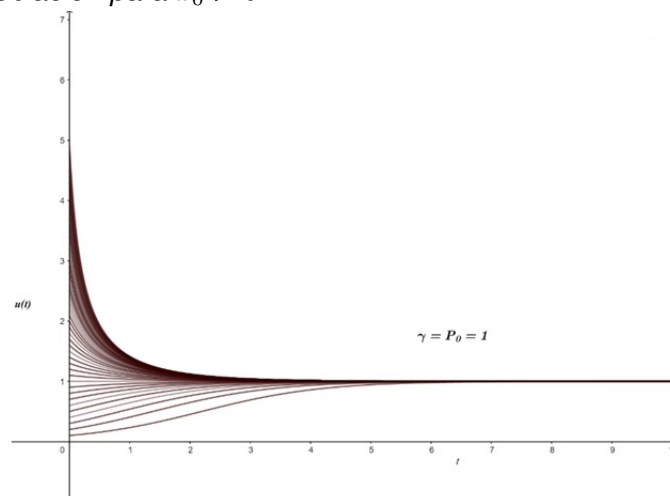
La ecuación logística está denotada por la ecuación:

$$u_t = \frac{P_0 x_0}{x_0 + (P_0 - x_0)e^{-\gamma P_0 t}} \quad t \geq 0$$

Se considera que la $u_t = P_0$ cuando el tiempo $t \rightarrow 0$, como se muestra en la figura 4.2

Figura 4.2

Crecimiento de una población para $x_0 > 0$



Por ejemplo si $\gamma = P_0 = 1$, para $x_0 > 0$, se puede observar que la gráfica converge a 1, por lo tanto todas las poblaciones tienden a P_0 .

Para el modelo de crecimiento del camarón, el modelo logístico es aplicado para una cierta densidad de individuos, debido a que depende de las capacidad de carga, población inicial y una tasa de crecimiento poblacional. Chiappa (2009) Se considera una capacidad de carga asintótica de $P_0 = 15$ mil, población inicial de $x_0 = 10$ mil y una tasa de crecimiento población determinada por:

$$\frac{du}{dt} = n - m$$

Donde la constante n corresponde a la natalidad y m la mortalidad, sin embargo existe una tasa de crecimiento más eficiente conocida como la tasa de crecimiento poblacional per cápita,

es decir una tasa de crecimiento por individuo cada año.

$$\gamma = \frac{du}{dt} \frac{1}{u_0}$$

Además se supone que camarón blanco las hembras alcanzan una madurez sexual a los 85[mm]de longitud y los machos a los 74[mm] aproximadamente, lo que implica que cada hembra de 172[mm] produce 860,000 (nauplios) en cuatros fases de su vida , es decir a los 6, 8,11 y 15 meses, pero tomando en cuenta la mortalidad, está puede reducirse en 16 veces. Con este dato consideramos un $n = 215,000$ en la primera fase , $m = 201,563$ y $u_0 = 100000$ por lo tanto la tasa de crecimiento poblacional per cápita $\gamma = 0,13$ [año⁻¹].

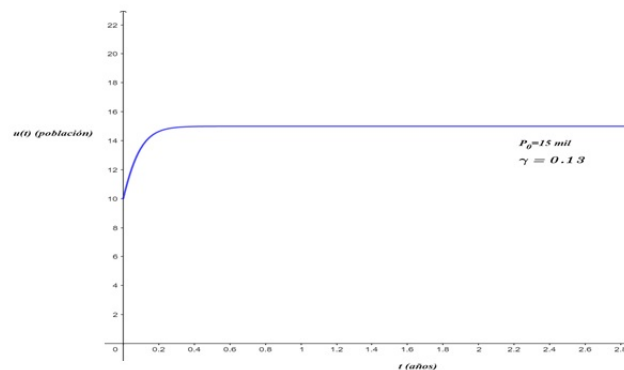


Figura 4.3

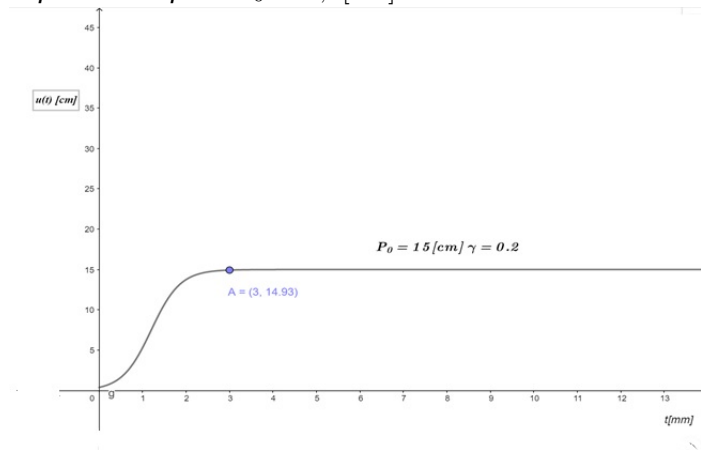
Crecimiento de una población para $x_0 = 10 \text{ mil}$

En la figura4.3 se puede observar el crecimiento poblacional de la especie , considerando que los recursos son limitados , alimentación, oxigenación y espacio, donde la capacidad de carga es 15 mil unidades se logra alcanzar a cuarto mes aproximadamente.

La longitud la especie también se puede simular mediante el modelo logístico, con la diferencia que la constante de crecimiento viene dada por la diferencia entre el anabolismo y catabolismo , siendo $\gamma = 0,2$

Figura 4.4

Crecimiento de una población para $x_0 = 0,4[cm]$



Se observa en la figura 4.4 la especie a los 3 meses alcanza una longitud de $14,93[cm]$, lo que implica que se encuentra en etapa de comercialización.

Ecuación Fisher-Kolmogorov

En esta sección se aplicará el método de diferencias finitas para estudiar el comportamiento de las soluciones, donde se tomarán distintos valores de difusión y crecimiento. La ecuación Fisher-Kolmogorov (FK), se utiliza en el crecimiento de especies como el camarón blanco, donde se describe el comportamiento de una densidad $P = P(x, t)$ de especies que pueden moverse y crecer, la cual viene dada por la expresión:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = d \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \gamma P(1 - P), 0 < x < L$$

Considerando el intervalo de integración de $[-L/2, L/2]$ cuando $L = 15[cm]$, además se utiliza como condición inicial la siguiente función :

$$u_0(x) = U_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

Lo cual se supone que el crecimiento del camarón se distribuye, mediante una distribución

gaussiana, donde $U_0 \in]0, 1[$, tomado valores entre $U_0 \in [10^{-2}, 10^{-1}]$. Los parámetros de difusión y crecimiento se supone que cumplen $D \in [10^{-1}, 15] \text{cm}^2/\text{mes}$ y $\gamma \in [10^{-2}, 1,5] 1/\text{mes}$.

El intervalo de tiempo donde se desea explorar el crecimiento de la especie es $T \in [10^{-1}, 10] \text{meses}$ y σ , se elige debido a que la distribución espacial inicial en donde la especie se desarrolla es muy pequeña $\sigma \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$

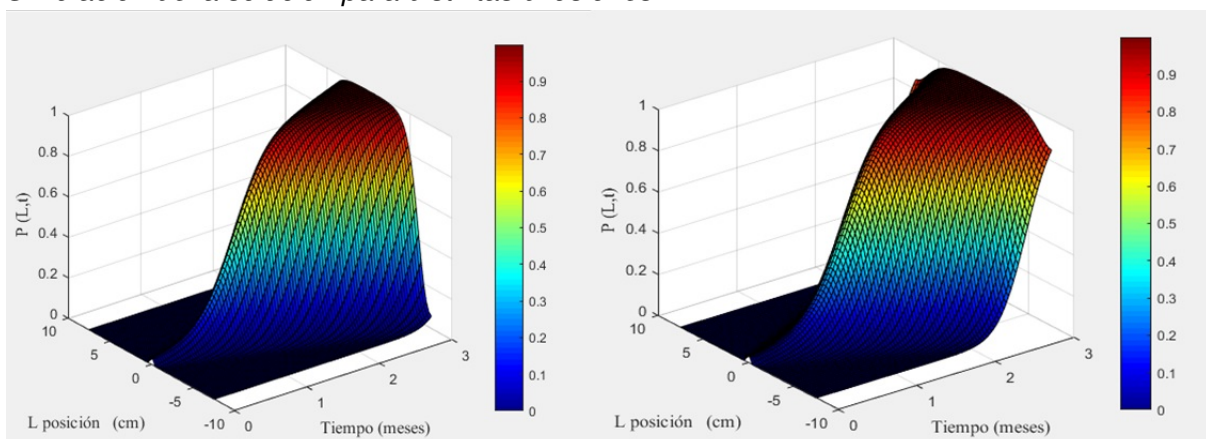
En base a estos parámetros se simula una posible solución del crecimiento del *litopenaeus vannamei*, utilizando en método explícito de diferencias finitas mediante el software Matlab R2016a/V.9.0.0.341360 (win64), llamando la función ² DFFK.m :

DFFK(Nx, Mt, L, T, D, alfa, U0, sigma)

Donde los valores de $Nx = 50$, $Mx = 100$ cooresponden a la división en malla de espacio y tiempo, $U_0 = 0.05$, $T = 3$, $L = 15$ y $\sigma = 0.05$ que serán fijos para nuestro propósito.

Figura 4.5

Simulación de la solución para distintas difusiones



Se puede observar en la figura 4.5 la especie llega a obtener su longitud de crecimiento máxima para la comercialización, para un valor γ no tan excesivo (constante de crecimiento),

²Observar página de anexos código de programa

suponiendo que sea $P = 1$ con la ecuación normalizada.

Además se puede determinar que para un mismo γ , en la figura de la izquierda el crecimiento es lento para una difusión de $D= 0.5$, mientras que en la figura de la derecha el crecimiento es más rápido para una difusión de $D=1$ tendiendo a cubrir toda el área de integración en un trimestre.

Estimación de parámetros Software R-Studio

El procesamiento de la información relacionado con el crecimiento del *Litopenaeus vannamei*, es procesado en el paquete computacional estadístico R-Studio , versión 8.11 de la organización R-Tools Technology Inc, mediante el cual se realizó el análisis de la varianza, pruebas de normalidad y aplicación del estadístico de prueba.

La toma de muestra se realizó en diferentes estadios como se observa en la figura 4.6 y figura 4.7

Figura 4.6

Muestra de larva PL11



Fuente: Laboratorio Lederma San Pablo - Salinas

Figura 4.7

Muestra de larva PL17



Fuente: Piscinas Guayallabamba - Quito

Cálculo de la muestra

El tamaño de la muestra necesaria para tener un error prefijado e , a un nivel de confianza de $(1 - \alpha) * 100\%$, a partir de una población de tamaño N es:

$$n = \frac{N * z^2 * p * q}{e^2 N + z^2 * p * q};$$

siendo z el factor de probabilidad que varía dependiendo del nivel de confianza, e el error máximo permitido, pq varianza de la proporción, sin embargo como se desconoce p , se toma el tamaño máximo de la muestra, que se obtiene haciendo $p = q = 0,5$, es decir :

$$n = \frac{N * z^2}{4N * e^2 + z^2}; \text{ por lo tanto}$$

Considerando un error $e = 5\%$ para un nivel de confianza $\alpha = 0,05$ el estadístico $z = 1,96$ Galindo (2013), con una población de $N_1 = 10000$ y $N_2 = 15000$ es tamaño de la muestra es:

$$n_1 = 369,89 \approx 370[pl]; \text{ para } 60\text{PL}/m^2$$

$$n_2 = 374,56 \approx 375[pl]; \text{ para } 120\text{PL}/m^2$$

De modo que la muestra para el análisis estadístico se tomara según lo calculado tanto para una muestra n_1 de la piscina 1 y una muestra n_2 para la piscina 2.

Prueba de normalidad

La prueba de normalidad se la realiza con el objetivo para que los datos se encuentren dentro de una distribución normal, por lo tanto utilizamos las pruebas de shapiro.test(x) y llie.test(x), donde analizamos el p-valor ³. Debido a que los datos son extensos se trabajó mediante la distribución de medias en las piscinas 1 y 2 como se muestra en la tabla 4.1:

Tabla 4.1

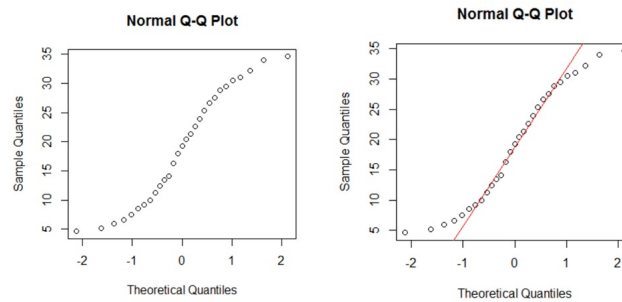
Toma de datos distribución de medias

Días	Longitud Piscina LC1 milímetros	Longitud Piscina LC2 milímetros
1	4,6	5,0
2	5,2	5,7
3	5,9	6,4
4	6,6	7,1
5	7,5	7,8
6	8,5	8,5
7	9,2	9,2
8	10	9,8
9	11,2	10,5
10	12,4	11,2
11	13,5	11,9
12	14,1	12,6
13	16,3	13,3
14	18	14,0
15	19,2	14,7
16	20,4	15,4
17	21,3	16,1
18	22,6	16,8
19	23,9	17,5
20	25,3	18,2
21	26,7	18,8
22	27,6	19,5
23	28,8	20,2
24	29,5	20,9
25	30,5	21,6
26	31,1	22,3
27	32,2	23,0
28	34	23,7
29	34,6	24,4

Piscina 1: Para shapiro-wilk el $p - valor = 0,07144$, mientras que para Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) $p - valor = 0,5538$ lo que indica que los datos superan el nivel de significancia del 5%, en conclusión los datos pertenecen a una distribución normal.

³Observar anexo prueba de normalidad

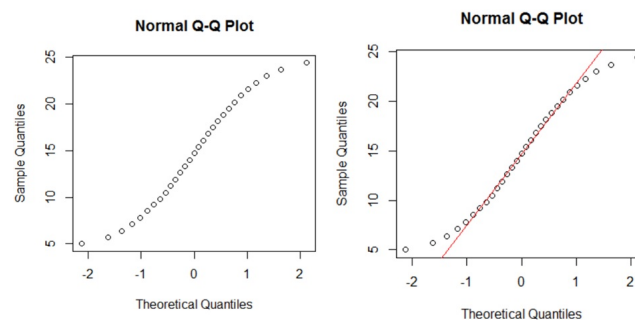
Figura 4.8

Prueba de normalidad piscina 1

En la figura 4.8 de la izquierda se podría decir que tiene una hipótesis de normalidad y para estar seguros que los datos siguen una distribución normal trazamos una recta en la figura de la derecha, y podemos estimar como los cuántiles teóricos y los cuántiles de la muestra se aproximan a la recta.

Piscina 2: Para shapiro-wilk el $p - valor = 0,291$, mientras que para Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) $p - valor = 0,9591$ lo que indica que los datos superan el nivel de significancia del 5%, en conclusión los datos pertenecen a una distribución normal.

Figura 4.9

Prueba de normalidad piscina 2

En la figura 4.9 de la izquierda se podría decir que tiene una hipótesis de normalidad y para estar seguros que los datos siguen una distribución normal trazamos una recta en la figura de la derecha, y podemos estimar como los cuántiles teóricos y los cuántiles de la muestra se aproximan a la recta.

Pruebas de hipótesis de dos muestras de crecimiento de *litopenaeus vannamei*

En la estadística inferencial para determinar la prueba de hipótesis se aplicara cinco pasos Douglas A (2012):

Paso 1: Se establece la hipótesis nula H_0 y la alternativa H_1

H_0 : Los crecimientos (longitud promedio μ) de las lavas *litopenaeus vannamei* son iguales cuando se cultivan a densidades de 60PL y 120PL, bajo los mismos parámetros de temperatura, ph, alcalinidad y oxígeno $\mu_0 = \mu_1$

H_1 : Los crecimientos (longitud promedio μ) de las lavas *litopenaeus vannamei* son diferentes cuando se cultivan a densidades de 60PL y 120PL, bajo los mismos parámetros de temperatura, ph, alcalinidad y oxígeno $\mu_0 \neq \mu_1$

Paso 2: Se selecciona un nivel de confianza

Se escoje el nivel de confianza de 95 %, éste es α la probabilidad de cometer un error de tipo I, lo que implica la probabilidad de rechazar una hipótesis nula verdadera.

Paso 3: Se identifica el estadístico de prueba

Para $\alpha = 0,05$, se utiliza el estadístico t para dos medias de muestra, debido a que no se conoce la desviación estándar de la población σ .

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{sp^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \quad (4.1)$$

Donde \bar{x} es la media muestral, sp^2 es la desviación estándar al cuadrado n es el tamaño

muestral. Mientras que la varianza sp^2 será igual a:

$$sp^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (4.2)$$

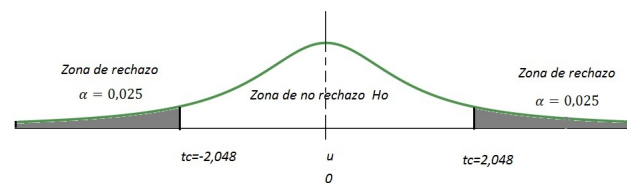
Siendo s_1^2 la desviación estandar de la muestra uno al cuadrado y s_2^2 la desviación estandar de la muestra dos al cuadrado, con grados de libertad de $n_1 + n_2 - 2$

Paso 4: Se formula una regla para la toma de decisiones

Debido a que la hipótesis alternativa indica dos direcciones, entonces aplicaremos una prueba de dos colas como se muestra en la figura 4.10.

Figura 4.10

Prueba de dos colas escala de t



Los valores críticos de t son $-2,048$ y $2,048$. Si el valor calculado de t se encuentra entre el intervalo $-2,048$ y $2,048$ la H_0 no se rechaza. Los cálculos se evidencian en el anexo software R.

Paso 5: Se toma una muestra, se llega a una decisión.

Se tomo una muestra de 29 en la piscina 1, observando una media de $\bar{x}_1 = 18,9mm$ con una desviación estandar de $s_1 = 9,737mm$, mientras que en la piscina 2 se determino una media de $\bar{x}_2 = 14,69mm$ con una desviación estandar de $s_2 = 5,89mm$.

El valor calculado de t es $-2,033$ lo que implica que se encuentra en la zona de no rechazo, es decir que la media de crecimiento es de los *L. vannamei* en ambas piscinas es significativa

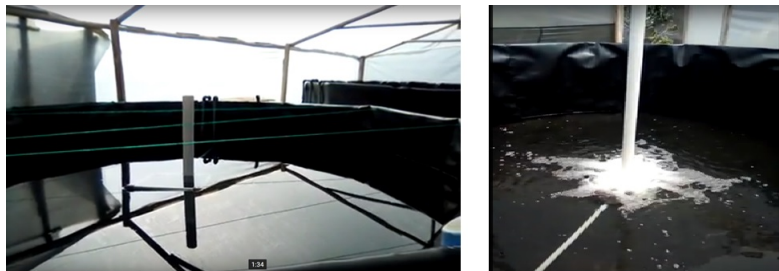
bajo las mismas condiciones de temperatura, oxígeno y ph.

Parámetros físicos químicos del agua

Durante el tiempo de cultivo de *L. vannamei*, se construyó dos piscinas diámetro de $\emptyset = 2m$ como se puede observar en la figura 4.11 .

Figura 4.11

Piscinas 1 y 2 con sistema de aireación automático



Previa a la siembra de alevines se realizó un análisis de agua a utilizar en el laboratorio de aguas de la facultad de ciencias químicas de la Universidad Central del Ecuador anexo Análisis de agua.

Etapas de aclimatación *L. vannamei*

La etapa de aclimatación se realizó en un reservorio de 100 litros de agua como se observa en la figura 4.12.

Figura 4.12

Tanque de aclimatación

Donde la temperatura se mantiene en $28,5^{\circ}C$ mediante una resistencia eléctrica, salinidad de 14 ‰, oxígeno de $6,61mg/l$, ph con 8.1 potencial de hidrógeno, tds $127ppm$ para poder bajar la salinidad se realizó reposiciones de agua dulce de 10 litros cada 2 horas, y así garantizar que la salinidad del agua haya bajado a 0 ‰ .

Los parámetros de temperatura, oxígeno , ph y alcalinidad se registraron a las 6 : 00am, 12 : 00pm, 6 : 00pm, adicional 2 : 00am, mientras que los datos de ph se tomaron, con estos análisis se logró mantener la calidad de agua para los alevines *L. vannamei*.

Temperatura del agua

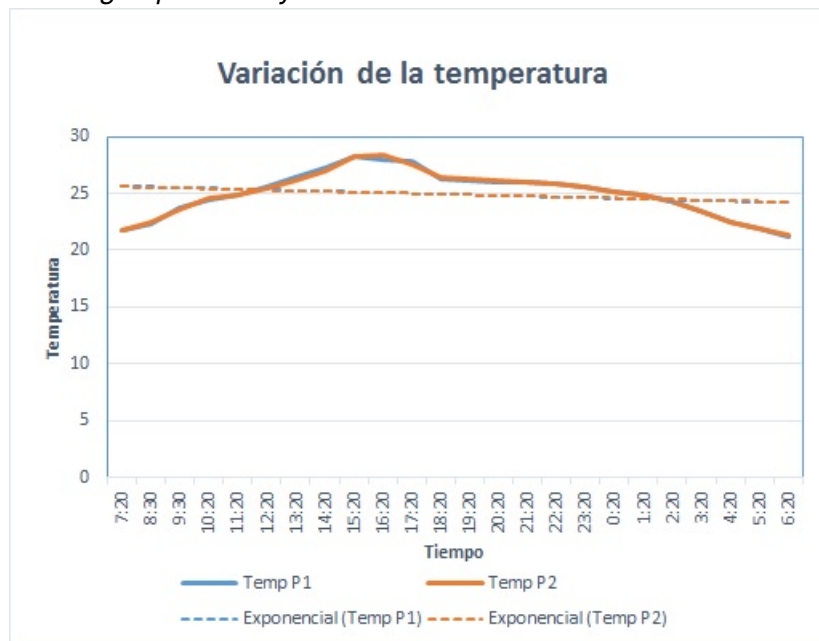
La temperatura de las piscinas 1 y 2 que se registraron datos como se observa en la tabla 4.2.

Tabla 4.2

Temperatura de agua piscina 1 y 2

Tiempo [horas]	Temperatura Piscina 1 grados Centigrados	Temperatura Piscina 2 grados Centigrados
7:20	21,8	21,7
8:30	22,3	22,4
9:30	23,8	23,6
10:20	24,5	24,6
11:20	24,8	24,8
12:20	25,6	25,4
13:20	26,4	26,2
14:20	27,3	27
15:20	28,2	28,3
16:20	28	28,4
17:20	27,8	27,6
18:20	26,3	26,4
19:20	26,2	26,3
20:20	26	26,1
21:20	26	26
22:20	25,8	25,9
23:20	25,6	25,6
0:20	25,2	25,2
1:20	24,8	24,8
2:20	24,3	24,3
3:20	23,5	23,5
4:20	22,4	22,4
5:20	21,9	21,9
6:20	21,2	21,3

Figura 4.13

Temperatura del agua piscina 1 y 2

En la gráfica se puede observar que los niveles de temperatura en la madrugada son bajos, por lo tanto para poder compensar este descenso de temperatura en cada piscina se colocó resistencias eléctricas de 500 W , lo que implica que la temperatura se mantiene dentro del

intervalo de 26 a 30°C

Niveles de oxígeno disuelto en el agua

Los niveles de oxígeno que se registraron en las piscinas 1 y 2 , se observa en la siguiente tabla4.3.

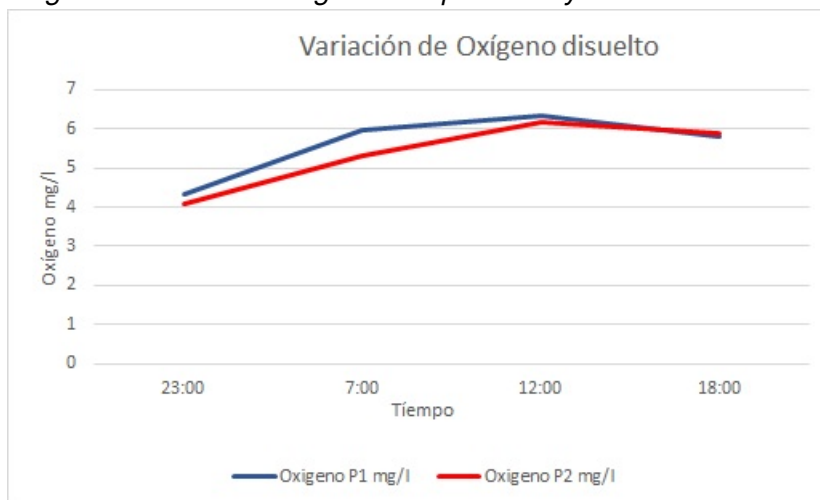
Tabla 4.3

Oxígeno disuelto en las piscinas 1 y 2

Tiempo [horas]	Oxígeno P1 mg/l	Oxígeno P2 mg/l
23:00	4,32	4,08
7:00	5,98	5,33
12:00	6,32	6,17
18:00	5,8	5,9

Figura 4.14

Niveles de oxígeno disuelto en el agua de la piscina 1 y 2



Como se puede observar en la gráfica de color rojo que corresponde a los niveles de oxígeno disuelto en el agua en la piscina 2, existe una pequeña variación debido a la población es de 15 mil alevines, mientras que en la piscina 1 , existen 10 mil alevines.

Niveles de pH en el agua

Los niveles de pH que se registraron en las piscinas 1 y 2, se observa en la siguiente tabla 4.4.

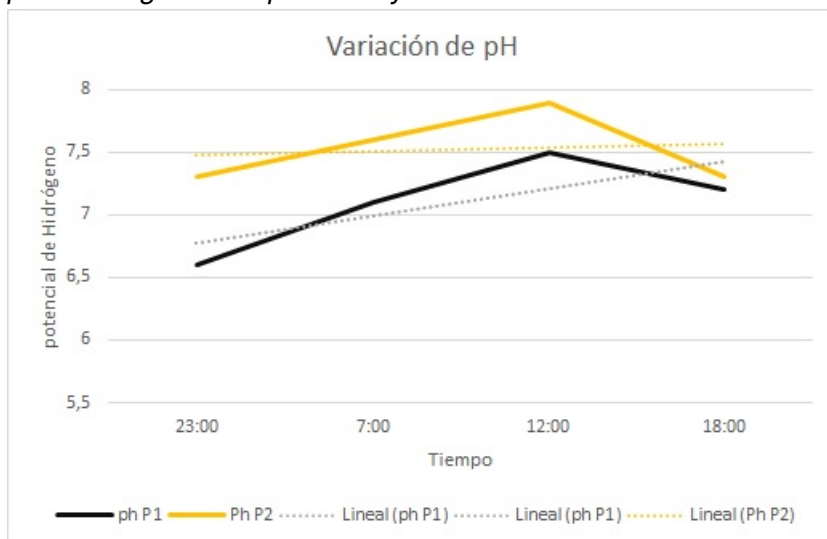
Tabla 4.4

Niveles de pH en el agua piscina 1 y 2

Tiempo [horas]	ph P1	Ph P2
23:00	6,6	7,3
7:00	7,1	7,6
12:00	7,5	7,9
18:00	7,2	7,3

Figura 4.15

Niveles de pH en el agua de la piscina 1 y 2



Los niveles de pH del agua en ambas piscinas se mantienen dentro del intervalo de 6,8 a 8,5, lo que garantiza una calidad de agua óptima para el crecimiento de los alevines.

5. Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

Se ha realizada exitosa mente la simulación numérica del crecimiento del camarón *Litopenaeus Vannamei* o más conocido como camarón blanco en agua dulce, mediante el modelo matemático de Ludwing Von Bertalanffy y el modelo de difusión-reacción de Fisher-Kolmogorov mediante el método de diferencias finitas, para ello se utilizó el software Matlab y se ha verificado los resultados en sitio mediante toma de muestras para posterior aplicar un estadístico de prueba mediante el software R-studio.

Los resultados obtenidos de este estudio permiten visualizar el crecimiento en longitud de la especie en diferentes densidades 60PL y 120 PL, en ambientes controlados mediante la construcción de piscinas con geomenbrana y procesos automáticos. Se puede observar que a mayor densidad de población de especies el crecimiento es menor con respecto a densidades bajas en un mismo espacio y tiempo.

Además el modelo de Ludwing Von Bertalanffy nos permite simular el crecimiento de la especie en longitud mediante una función exponencial, de manera que la convergencia de la función se da en L_{∞} , es decir la máxima longitud que alcanza el *L. vannamei*. Sin embargo esta función depende del anabolismo y catabolismo lo que implica que existe una constante k

de crecimiento, que permite que la especie crezca proporcionalmente.

Siendo esta constante de crecimiento un parámetro muy importante en la evolución nuestra naturaleza y que matemáticamente la podemos relacionar con el número de golden ratio o número de oro $\Phi = 1,618\dots$.

El modelo de Fisher-Kolmogorov de difusión-reacción se acopla muy bien al crecimiento de una población de *L. vannamei* debido a que se trata de un modelo completo que estudia a un fenómeno en espacio y tiempo. Siendo un modelo que se construyó para describir el comportamiento de una densidad $P(x, t)$ de especies que pueden moverse y crecer.

Para poder estimar y comprobar los resultados se construyó un sistema automático de adaptación para la especie *L. vannamei*, piscinas con geomenbrana de 1000u, sistema de tratamiento de sólidos y se implementó la instrumentación¹ necesaria para llevar a cabo el estudio.

El sitio de estudio se localiza en el sector de Guayallamba a 20 km de la capital de Quito, siendo un sector con clima templado y seco, lugar propicio con temperaturas de max de $17^{\circ}C$, sin embargo para llegar a obtener la temperatura adecuada $\geq 26^{\circ}C$, se implementó las piscinas bajo invernadero y para garantizar la misma se instaló resistencias eléctricas.

En este lugar se llevo acabo las estadísticas, es decir la toma de muestras para dos densidades diferentes es decir piscina 1 se sembró 10000 *PL12* y en la segunda piscina 15000 *PL12*, obserbando que el crecimiento es significativo y la gráfica de crecimiento se asemeja mucho a las simuladas matemáticamente.

Se puede concluir que el estudio realizado mediante un modelo matemático nos ayuda a predecir el crecimiento de especies en cautiverio en tiempo y espacio.

¹Anexo de instrumentación

Recomendaciones

Para darle un mayor grado de presión al modelo es necesario evaluar las condiciones físico químicas del agua, es decir realizar un tratamiento de agua mediante bacterias benéficas, y la biomasa de la especie siendo este último una variable que dependerá del tipo de alimentación.

El presente trabajo se enfocó en el crecimiento del *L. vannamei* en longitud de agua dulce, debido a la alta demanda de consumo en nuestro país.

La producción y consumo de esta especie y considerando los cambios climáticos, se recomienda realizar proyectos innovadores en donde la implementación de modelos matemáticos nos ayuden a predecir y estimar el crecimiento de especies en cautiverio y sobre todo cuidar nuestro medio ambiente.

Bibliografía

- Aguilar, F. (2010). Modelo matemáticos no lineales. *Herramientas para evaluar el crecimiento de la tilapia roja*, page 120.
- Arnold, M. (1990). Teoría general de sistemas. *Departamento de Antropología*, page 47.
- Avault J, W. (1995). How to be successful in commercial aquaculture. *Aquaculture Magazine*, 00.
- Bywater, A. (1897). Modelling animal growth. mathematics and computers in simulation. *St-Pierre*, page 89.
- Cantrell, C. (2004). Spatial ecology via reaction-diffusion equations. *Arizona State University*, page 551.
- Chapa, S. H. (1986). La biología y el cultivo de camarón. *SP*, page 53.
- Chiappa, X. (2009). Modelos matemáticos de crecimiento con aplicaciones en sistemas biológicos. *Unidad Multidisciplinaria de docencia e investigación*, page 83.
- Clúster (2017). Mercado de camarón crece a nivel mundial. *CLúster Camarón*, page 3.
- Cluster (2017). Emercado de camarón crece a nivel mundial. *Clúster Camarón*, page 4.
- Cámara de Comercio, Q. (2017). Comercio exterior. *Exportaciones 2017*, page 11.
- CNA (2017). El camarón se consolida como el principal producto de exportación. *Lideres*, page 4.

- Douglas A, L. (2012). Estadística aplicada a los negocios y a la economía. *Coastal Carolina University and The University of Toledo*, page 333.
- FAO (2002). Nutrición de peces y de camarones. *Departamento de pesca*, page 12.
- FAO (2014). Biología de camarones peinados. *FAO*, page 7.
- FAO (2016). Estado mundial de la pesca y la acuicultura. *Acuicultura 2016*, page 24.
- Galindo, E. (2013). Estadística métodos y aplicaciones. *Prociencia Editores*, page 447.
- GlobalConsult (2010). “levantamiento de la estructura de costos de producción y su evolución reciente para determinar el nivel de competitividad del sector camaronero ecuatoriano. *Investigación requirente del Ministerio de Coordinación de la Producción, Empleo y Competitividad*, page 10.
- Gómez, M. (2014). Modelos matemáticos en oncología y simulación numérica. *Facultad de Ciencias Zaragoza*, page 5.
- Kitani, H. y. A. (1982). The larval development of the pacific brown shrimp *penaeus californiensis*. *SPBulletin of japanese Society of Scientific Fisheries*, page 80.
- Levendis, D. (2008). Demetrius c. *University of the Witwatersrand*, page 44.
- Macdonald, P. (1973). Two models for seasonal growth in fishes. *British Ecological Society*, page 56.
- Marmol, G. (2007). Modelos matemáticos de poblaciones. *España*, page 22.
- Peña, R. (2012). Ecuaciones de reacción-difusión. *Universidad de Guanajuato*, page 28.
- Ponce Leiva, R. (2005). Comercio exterior. *Alternativas para el Ecuador*, pages 15–44.
- Sánchez, M. (2017). Comercio internacional y acuicultura: caso del camarón en Ecuador. *Programa de Maestría de Investigación en Relaciones Internacionales Mención en Economía y Finanzas*, page 83.

- Tirado, J. (2015). Acuicultura. *Comisión Editorial de las Fuerzas Armadas ESPE*, pages 140–143.
- Toro Gonzáles, C. (2011). El ph. *Monitoreo de calidad de Agua Universidad de Mayaguez*, page 12.
- Unidas, O. N. (2017). *Crecimiento Poblacional*. Mundo Población.
- Universo, D. (2017). Proecuador. *Evolución de las Exportaciones*, pages 7–8.
- Valle, J. (1986). A ecuacion de crecimiento de von bertalanffy en la determinacion de la edad y el crecimiento de arboles tropicales. *Departamento de Agronomía*, page 14.
- Weatherley, A. (1897). The biology of fish growth. *Academic Press*, page 120.