Una estrategia didáctica para la enseñanza de funciones basada en criterios hebegógicos y de modelamiento matemático

Haz López, Fátima Aurora

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Trabajo de titulación, previo a la obtención del título de Magíster en Enseñanza de la Matemática

Mayorga Zambrano, Juan Ricardo Ph.D

06 de enero del 2023

Similitud de contenidos

CERTIFICADO DE ANÁLISIS
magister

Z_TESIS_FATIMAHAZ_2023

1% Similitudes

1% Texto entre comillas
0% similitudes entre comillas
< 1% Idioma no reconocido

Nombre del documento: Z_TESIS_FATIMAHAZ_2023.pdf
ID del documento: d4e53ee2fb526d2f5b19f05e8a7326eebd2cd477
Tamaño del documento original: 1,02 Mo

Depositante: Juan Mayorga Zambrano
Fecha de depósito: 7/1/2023
Tipo de carga: interface
fecha de fin de análisis: 7/1/2023

Número de palabras: 17.585
Número de caracteres: 101.627

Ubicación de las similitudes en el documento:

Fuentes principales detectadas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	**repositorio.espe.edu.ec** https://repositorio.espe.edu.ec/bitstream/21000/24388/1/T-ESPEL-MAI-0706.pdf	< 1%		Palabras idénticas : < 1% (58 palabras)
2	**repositorio.puce.edu.ec** http://repositorio.puce.edu.ec/bitstream/handle/22000/18545/Guanochanga Quisupangui-Tesis.pdf?se... 3 fuentes similares	< 1%		Palabras idénticas : < 1% (50 palabras)
3	**lozano-geogebraytic.blogspot.com** | MODELACIÓN MATEMÁTICA Y TIC - GeoGebra: ... https://lozano-geogebraytic.blogspot.com/2016/05/problema-12-un-campo-de-forma.html	< 1%		Palabras idénticas : < 1% (23 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	**www.oecd.org** https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook - PISA-D Framework_PRELIMINARY version_SPANISH.pdf	< 1%		Palabras idénticas : < 1% (35 palabras)
2	**www.studocu.com** | Práctica 1 Variación del volumen temperatura - PROCESO PLAN ... https://www.studocu.com/latam/document/universidad-nacional/quimica-general-teoria/practica-1-var...	< 1%		Palabras idénticas : < 1% (11 palabras)
3	**www.clubensayos.com** | La situación didáctica - Informes - jose2394 https://www.clubensayos.com/Ciencia/La-situación-didáctica/2181559.html	< 1%		Palabras idénticas : < 1% (10 palabras)
4	**techlandia.com** | Cómo saber si existen límites en el gráfico de una función | Techla... https://techlandia.com/13118299/como-saber-si-existen-limites-en-el-grafico-de-una-funcion	< 1%		Palabras idénticas : < 1% (10 palabras)

Firmado electrónicamente por:
JUAN RICARDO
MAYORGA
ZAMBRANO

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

Certificación

Certifico que el trabajo de titulación **“Una estrategia didáctica para la enseñanza de funciones basada en criterios hebegógicos y de modelamiento matemático”** fue realizado por la señora **Haz López, Fátima Aurora** el mismo que cumple con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, además fue revisado y analizado en su totalidad por la herramienta de prevención y/o verificación de similitud de contenidos; razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que se lo sustente públicamente.

Sangolquí, 06 de enero de 2023

. . . .

Mayorga Zambrano, Juan Ricardo Ph.D.

CC: 1802377406

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

Responsabilidad de Autoría

Yo, **Haz López, Fátima Aurora**, con cédula de ciudadanía 1706645585, declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **Una estrategia didáctica para la enseñanza de funciones basada en criterios hebegógicos y de modelamiento matemático** es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 06 de enero de 2023

. . . .

Haz López, Fátima Aurora

CC: 1706645585

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

Autorización de Publicación

Yo, **Haz López Fátima Aurora**, con cédula de ciudadanía 1706645585, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: **Una estrategia didáctica para la enseñanza de funciones basada en criterios hebegógicos y de modelamiento matemático** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 06 de enero de 2023

. . . .

Haz López, Fátima Aurora

CC: 1706645585

Dedicatoria

El logro alcanzado lo dedico a:

Paola y Daniela mis amadas hijas, quienes son el motor de mi vida y la inspiración para cumplir mis metas

Vicente y Yolanda mis amados padres, quienes han sido mi soporte y apoyo incondicional en todo momento.

Mi familia y amigos que me dieron palabras de aliento para culminar esta nueva etapa de mi vida.

Fátima Aurora

Agradecimiento

Agradezco a:

Dios por ser mi guía en cada paso que doy en mi vida.

Mis hijas por su apoyo y comprensión

Mi director de tesis, el Doctor Juan Mayorga Zambrano, por su guía en este proyecto de innovación.

Al coordinador de la Maestría Mgs. Patricio Pugarín, quien me motivó a culminar el programa.

Fátima Aurora

Índice general

Índice de figuras

Resumen

El proyecto de innovación educativa desarrollado presenta una estrategia didáctica para la enseñanza de funciones con modelamiento matemático, considerando al adolescente como el protagonista del aprendizaje. En los objetivos propuestos se considera los tres ejes primordiales a considerar: eje hebegógico, eje didáctico y eje matemático.

La estrategia didáctica que se propone ha sido diseñada para aplicarla en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes adolescentes, con el fin de que ellos se motiven y tengan el interés de adquirir el conocimiento de funciones que le permitan resolver situaciones con modelos matemáticos.

La didáctica de la matemática y la hebegogía de las cuales se hacen referencia en el capítulo 2, tienen un papel fundamental en la educación y enseñanza del adolescente. Además, se toman en consideración criterios hebegógicos que dan al docente pautas para el proceso de enseñanza, de manera que se fomente la participación, colaboración y mejor desempeño de las competencias matemáticas.

El diseño de la estrategia sigue una secuencia didáctica, la cual pretende que el estudiante adquiera un aprendizaje significativo que le permita desarrollar las competencias matemáticas. Además se considera la teoría de las situaciones didácticas en los momentos del aprendizaje en los cuales se propone el desarrollo del modelo matemático considerado.

Se finaliza con las conclusiones y recomendaciones que dan respuesta a los objetivos planteados en el proyecto.

Palabras clave: estrategia didáctica, hebegogía, modelo matemático.

Abstract

The educational innovation project developed presents a didactic strategy for the teaching of functions with mathematical modeling, considering the adolescent as the protagonist of learning. The proposed objectives consider the three main axes to be considered: hebegogic axis, didactic axis and mathematical axis.

The proposed didactic strategy has been designed to be applied in the teaching-learning process of adolescent students so that they are motivated and interested in acquiring the knowledge of functions that allow them to solve situations with mathematical models.

The didactics of mathematics and hebegogy, referred to in chapter 2, play a fundamental role in the education and teaching of adolescents, taking into consideration hebegogical criteria that provide the teacher with guidelines for the teaching process in order to encourage participation, collaboration and better performance of mathematical competencies.

The design of the didactic strategy follows a didactic sequence, which aims at the student acquiring significant learning that will allow him/her to develop mathematical competences. In addition, the theory of didactic situations is considered in the learning moments in which the development of the mathematical model considered is proposed. It ends with conclusions and recommendations that respond to the objectives set out in the project.

Keywords: didactic strategy, hebegogy, mathematical model.

Capítulo 1

Introducción

Antecedentes

La matemática es una herramienta indispensable en diferentes áreas como ingeniería, medicina, ciencias sociales, etc. y permite el desarrollo de la humanidad. En Ecuador, la enseñanza de esta ciencia ha atravesado dificultades como la falta de capacitación docente, continuidad de planes y programas de estudio, técnicas y estrategias de enseñanza. Esta enseñanza durante mucho tiempo tuvo un enfoque reduccionista, limitando su “aprendizaje” a la memorización y mecanización de procesos.

En [1] se enfatiza el desarrollo de destrezas matemáticas a través de la resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana, en base a un correcto conocimiento de conceptos y un adecuado desarrollo de procesos. Por otro lado, los resultados de las pruebas PISA-D 2018 indican que los estudiantes ecuatorianos, atraviesan graves dificultades en el desenvolvimiento de situaciones que requieren la capacidad de resolver problemas matemáticos. En [2] se menciona que el 70,9 % de los estudiantes ecuatorianos no alcanzaron en Matemáticas el nivel básico [1] de desempeño académico. Por lo tanto, uno de los retos del docente de bachillerato ecuatoriano en el proceso educativo es aprender matemáticas con todo su rigor y despertar en el estudiante el interés por aprender matemáticas y que aplique los conocimientos en la resolución de problemas.

La pedagogía acompaña los procesos formativos de niños desde la teoría conductista hasta la constructivista. El adolescente, al iniciar una nueva etapa de aprendizaje debe formar

[1] En el nivel básico los estudiantes llevan a cabo algoritmos, operaciones, son capaces de interpretar y reconocer matemáticamente una situación.

sus propios criterios que le permitan tomar decisiones y reforzar su identidad. En estos procesos intervienen factores que van de acuerdo con la etapa biológica, psicológica, sociológica por donde el adolescente debe transitar, por lo que los criterios de las ciencias agógicas consideran que su aprendizaje no pueden centrarse en la pedagogía.

La mayoría de los docentes considera a la pedagogía como medio del proceso de enseñanza sin considerar que esta praxis, de acuerdo con los criterios de las ciencias agógicas, estudia la educación del niño en la etapa que corresponde a la educación básica, mientras que, la hebegogía en la etapa de educación básica superior y bachillerato, se ocupa de la educación del adolescente.

Problema a abordar

La reforma educativa ecuatoriana del año 2010, considera algunos principios de la pedagogía crítica en donde el estudiante es protagonista del aprendizaje. La enseñanza de la matemática presenta contenidos complejos que para los adolescentes, debido a la etapa que atraviesan, son difíciles.

En lo que tiene que ver con el concepto de función es importante señalar que en realidad no existe aprendizaje significativo y uno de los factores es que cuando se resuelve problemas no se modela la situación que le permita explicar el fenómeno; además no se vincula la teoría con la aplicación fuera del salón de clases.

En cuanto a la praxis educativa del docente de matemática, no debe limitarse a transmitir contenidos; basados en los años de experiencia, se podría inferir que la dificultad presentada en la enseñanza de funciones es por no conocer bien el tema.[2]

[2]Esto se puede deducir por las falencias mostradas por los estudiantes en los primeros semestres de carreras

Justificación, importancia y alcance.

El ajuste curricular para el bachillerato establecido por el Ministerio de Educación ubica al estudiante como principal protagonista del aprendizaje en la solución e interpretación de problemas y su formación como persona competente. Esto no es correcto pues en el proceso educativo son varios los actores que influyen en el aprendizaje de los jóvenes; el docente guía al estudiante en todo el proceso de aprendizaje y es potencialmente capaz de transformar su praxis pedagógica, [1].

Los cambios curriculares impulsan al docente a revisar las estrategias metodológicas que está aplicando en el proceso de enseñanza-aprendizaje para intentar dar una respuesta positiva al generalizado bajo nivel de Matemáticas que evidencian los estudiantes de bachillerato en Ecuador. Este bajo nivel es claramente lo que refleja la prueba PISA-D.

Como se manifiesta en [4], la implementación de las mediciones de PISA para matemáticas vino precedida de un debate científico sobre el papel de la enseñanza de las matemáticas. Considera que dominar las habilidades técnicas más básicas no es suficiente para salir adelante en la vida pues la comprensión de las matemáticas es fundamental en la sociedad moderna. Dentro de los contenidos de las pruebas PISA-D está el de Funciones, fundamental en esta ciencia.

Los resultados de la prueba PISA-D, demuestran que nuestro país está extremadamente mal en matemáticas y se necesita innovar aumentando sustancialmente la calidad de la educación matemática. Es en esa dirección que va nuestro trabajo, pues diseñaremos una propuesta de estrategia didáctica para poder enseñar el concepto de función tomando en cuenta su aplicabilidad (modelamiento matemático) y la edad de los educandos (hebegogía).

universitarias.

En efecto, el estudiante de bachillerato se enfrenta a cambios continuos que son significativos dentro del ciclo del desarrollo humano. El cambio de la niñez a la edad adulta le genera confusiones pues no sabe con exactitud si es niño o adulto y estos cambios influyen en su aprendizaje.

En cuanto al aprendizaje de las funciones por parte del adolescente existen dificultades en entender su concepto. El problema principal es que la gran mayoría de docentes no conocen bien el concepto de función por lo que transmiten de manera errada este contenido.

La estrategia didáctica que proponemos en este trabajo para la enseñanza de funciones intenta que el concepto de función adquiera significado en los jóvenes y además permita establecer conexiones entre los conceptos y la aplicación en contextos de la vida real. Pensamos que es importante considerar estrategias didácticas que implementen herramientas basadas en modelos matemáticos para favorecer al desempeño académico y la obtención de un mejor aprendizaje del concepto de función.

La estrategia didáctica tiene presente la edad del estudiante y busca mejorar el desarrollo de su pensamiento lógico matemático para obtener aprendizajes significativos [3] relacionándolos con el entorno en el que se desenvuelven.

Estado del Arte

Se hace una revisón de trabajos dirigidos para la enseñanza de la Matemática, de los cuales algunos hacen referencia a aquellos donde interviene la modelización matemática como método de enseñanza para ingenieros, utilizando software computacionales que le permitan re-

[3] En el proceso de este aprendizaje, se utilizan los conocimientos previos que poseen los estudiantes para relacionarlos con la nueva información y así construir el nuevo aprendizaje.

solver situaciones didácticas.

La propuesta didáctica [5], dirigida a estudiantes de carreras de ingeniería, aborda la enseñanza del contenido matemático con problemas donde se aplique el Análisis de Fourier, cuyo fundamento matemático y didáctico se incorporan a la enseñanza-aprendizaje y de esta manera fortalecer la formación matemática del ingeniero puesto que las Series y Transformadas de Fourier son fundamentales al modelizar fenómenos en algunos campos de la ingenieria. La intervención de la modelación matemática y la teoría de situaciones didácticas se convierten en una guía para la ejecución de la propuesta, además se utiliza como soporte para la ejemplificación de ciertos conceptos referentes al tema, el Sistema de Algebra Computacional Máxima porque es un instrumento tecnológico que favorece a la sociedad del conocimiento.

En [6], se utilizan herramientas tecnológicas (matlab y geogebra) como un soporte dentro del proceso de aprendizaje; sin embargo, los estudiantes de ingeniería dan poca importancia en cuanto a su aplicación a problemas enfocados en aspectos propios de la vida cotidiana. La investigación tuvo como meta plantear una propuesta metodológica donde se lleve a cabo un cambio con respecto a la enseñanza tradicional en concreto dentro de cálculo diferencial e integral. Considera que, implementar la modelización matemática como método de enseñanza y aprendizaje permite reestructurar los contenidos programáticos de los cursos de cálculo para aproximar a los estudiantes de ingeniería de la universidad de San Buenaventura (USB) a su área específica de conocimiento. La incorporación de tecnología electrónica como apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, regulan este proceso en la formación de los futuros ingenieros, manteniendo el interés de los estudiantes y su vinculación con el proyecto.

En [7] se consideran los factores involucrados en la pedagogía matemática, mencionando al estudiante como el factor principal en el proceso de enseñanza-aprendizaje; sin embargo, en ellos existen dudas en la aplicabilidad y utilidad en la vida profesional de los conceptos presentes en matemática ya que la asignatura les resulta difícil de aprender, causa ansiedad y frustración. Esto motiva a los docentes a enfocarse en el aprendizaje de los estudiantes y además buscar estrategias pedagógicas, con el fin de lograr mayor grado de desarrollo en el pensamiento crítico a la hora de resolver problemas.

Los otros factores que considera [6], son los docentes y el currículo; el primero cumple un rol importante porque son los transmisores del conocimiento en el proceso enseñanza-aprendizaje mientras que el segundo contiene la información necesaria en base a los contenidos y temas que se van a tratar. Es importante tomar en cuenta que al momento de planificar, los docentes deben incluir temas que permitan contextualizar en el área de la administración. Concluye que frente a la problemática en la enseñanza de las matemáticas, una alternativa consiste en implementar estrategias pedagógicas innovadoras y orientarlas hacia el aprendizaje basado en problemas de manera que permita que el estudiante desarrolle habilidades y actitudes que le benefician de manera personal y profesional.

Para [8], el estudio sobre la estrategia didáctica indica que la actuación profesional de los docentes de matemática guarda relación con el Modelo Didáctico Alternativo, donde el conocimiento académico integra diversos referentes como son: disciplinares, cotidianos, problemática social, ambiental y conocimiento. En [9] se presentan algunas posturas acerca del uso de la modelación en el aula, así como los resultados de ciertas experiencias específicas de su aplicación en la enseñanza universitaria, por lo que se da cuenta de las posibilidades y limitaciones de esta metodología de enseñanza. Llegó a la conclusión que el diseño de las situaciones constituye un elemento central para que el uso de la modelación tenga éxito.

Objetivos y aspectos generales

Objetivo general

Diseñar una estrategia didáctica para la enseñanza de funciones basada en criterios hebegógicos y modelamiento matemático.

Objetivos específicos

- Diseñar una estrategia didáctica para la enseñanza de funciones que tome en cuenta la hebegogía como ciencia de la educación en el adolescente.
- Diseñar una estrategia didáctica para la enseñanza de matemática que permita el aprendizaje significativo a través del modelamiento matemático.

Metodología

El presente proyecto es una innovación educativa que tiene un componente de investigación. La técnica para este trabajo se lo hace desde un enfoque cualitativo utilizado ampliamente en el mundo académico; además, también se considera el enfoque constructivista porque el constructivismo propone al investigador entender el mundo complejo a partir de la experiencia vivencial.

En el desarrollo de este trabajo se busca articular la teoría con la práctica, de manera que el adolescente use modelos matemáticos para construir el conocimiento de funciones poniendo en práctica su capacidad de reconocer, descomponer y reconstruir situaciones problemáticas.

Al ser un proyecto de innovación educativa, su evaluación se lo realiza con la técnica del focus group, donde un grupo de expertos proporcionarán opiniones representativas y valorativas sobre la estrategia a desarrollar, para lograr el aprendizaje matemático deseado.

Capítulo 2

Fundamento teórico

En la elaboración de la estrategia didáctica, se consideran aspectos didácticos y matemáticos que, a nuestro criterio, dan al docente herramientas útiles para la enseñanza-aprendizaje de funciones.

Fundamentación didáctica

En el proceso de enseñanza-aprendizaje, el conocimiento de la didáctica es importante para los docentes, pues proporciona técnicas, recursos y metodologías educativas.

En cuanto a la pedagogía, [17], tiene que ver con la educación a niños; sin embargo, ésta asume una intención educativa que no comparte la didáctica por ser específica. Por otro lado, la pedagogía tiene un limitante para atender los procesos formativos del ser humano de acuerdo a la edad; por ello, consideramos a la hebegogía para la educación y enseñanza del adolescente.

Los métodos de enseñanza, los recursos y el cómo enseñar juegan un papel importante en el desarrollo del proceso educativo, pues permiten llegar a un fin, como es el de la enseñanza-aprendizaje.

Didáctica de la matemática

La didáctica, [15], es el arte de enseñar, y por tanto, destila pautas para el proceso enseñanza-aprendizaje, pues ayudan al docente a conocer cómo aprenden los estudiantes. En lo referente a Matemática, sabemos que es la única ciencia exacta (lógica y rigurosa) pues todas las demás ciencias tienen un componente experimental.

Como en [16], podemos afirmar que la **didáctica de la matemática es el arte de enseñar lo más exacto en el mundo**, mediante mecanismos que no son exactos. De esta manera la didáctica debe estar al servicio de la matemática y no viceversa.

La didáctica de la matemática está vinculada con el concepto de **competencia matemática**, entendida como la capacidad para resolver un problema. Por ello la situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el único fin de que los estudiantes adquieran un saber determinado.

La didáctica de la matemática es una didáctica especial y hace referencia al estudio de métodos y prácticas para el proceso de enseñanza de la matemática, donde se establecen diferentes estrategias para enseñar a través de procedimientos y recursos.

En este sentido la teoría de situaciones didácticas [1]propuestas por Brousseau considera dividir a los temas matemáticos en cuatro situaciones: acción, formulación, valorización e interpretación.

Criterios de las ciencias agógicas

Los criterios de las ciencias agógicas (dentro de las Ciencias de la Educación) se encargan del proceso de formación de los seres humanos en cada etapa de su vida, pues, es importante identificar las diferencias que existen en el proceso de aprendizaje. Estos criterios de las ciencias agógicas, los encontramos agrupados de la siguiente manera:

[1]La característica de la teoría de situaciones didácticas es que exista una situación construida intencionalmente para que el estudiante adquiera los conocimientos.

1. **Paidogogía**. Encargada de la educación de los niños en su etapa preescolar.
2. **Pedagogía**. Encargada de la educación del niño en su etapa de educación básica.
3. **Hebegogía**. Dedicada específicamente a la educacion del adolescente.
4. **Andragogía**. Encargada de la educación de la persona adulta.
5. **Gerontogogía**. Encargada de la educación de los adultos mayores.

Hebegogía

La palabra hebegogía, [11], proviene del vocablo griego *hebe* en honor a la diosa de la juventud y *gogía* cuyo significado es guiar, conducir, acompañar. La hebegogía se centra en la educación del adolescente (12 a 18 años aproximadamente) tomando en cuenta las capacidades y necesidades propias en esta etapa.

No obstante la Hebegogía propone que las estrategias de aprendizaje deben considerar las distintas capacidades individuales, el aprendizaje cooperativo, experiencial y el componente social. Los métodos, técnicas y procedimientos que en ella se proponen son propios del grupo etario de la adolescencia, de manera que le ayuden a su desarrollo en la toma de decisiones.

Para nuestro trabajo, algunos criterios hebegógicos, [14], son relevantes:

- El proceso de enseñanza-aprendizaje no debe caracterizarse en imposiciones; por el contrario, debe desarrollarse con una metodología para el conocimiento, comprensión y transformación de los contenidos desarrollados.
- Se debe disminuir el aprendizaje memorizado y reemplazarlo por el reflexivo y constructivo.
- Se debe construir el conocimiento a través de la búsqueda, descubrimiento y reflexibilidad profunda

- Las debilidades se convierten en desafíos y, con colaboración grupal, se edifican alternativas de solución.
- El profesor juega un papel de orientador para guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- El ambiente de trabajo se desarrolla en un marco de la solidaridad y cooperación.

Aprendizaje en el adolescente

Durante del proceso de cambios por los que pasa el adolescente, la etapa de aprendizaje [2] es quizás la más complicada debido a que también se modifica el sistema cognitivo.

En la etapa de la adolescencia los jóvenes deberían desarrollar la capacidad de realizar operaciones formales orientadas a resolver problemas, organizar datos, aislar y controlar variables, formular hipótesis, [10]. El aprendizaje debe ser duradero, por ello Ausubel en su teoría del aprendizaje significativo, considera que la adquisición de los nuevos aprendizajes depende de los que ya existen en la estructura cognitiva del estudiante. En cuanto al aprendizaje del conocimiento matemático se debe proporcionar actividades concretas, de manera que se relacionen los nuevos contenidos con los que ya adquirieron los estudiantes.

La enseñanza de funciones

Uno de los temas que contempla el currículo ecuatoriano es el estudio de las funciones, que debería iniciar en el nivel medio y continuar en el nivel universitario. En la enseñanza de funciones, el docente piensa que al exponer el conocimiento sobre este tema es asimilado por el estudiante sin dificultad; sin embargo, al estudiante le resulta difícil comprenderlo por ser uno

[2] El aprendizaje es una función mental a través del cual se manejan habilidades, destrezas, conocimientos, conductas; es decir, se relaciona con la educación y la formación de la persona.

de los conceptos abstractos de la matemática, por ello es necesario que el docente tenga una buena preparación sobre este tema para que logre los objetivos propuestos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la enseñanza de funciones se consideran problemas que relacionan cantidades o variables; por ejemplo, el salario de una persona que puede depender del número de horas trabajadas, la distancia que recorre un objeto puede depender del tiempo desde que salió de un punto, etc.

Función

A continuación se establecen algunas definiciones básicas relacionados con el tema de función.

Definiciones básicas

En lo que sigue, se asume que el estudiante maneja el concepto de conjunto, pues es parte de los contenidos declarados en el bachillerato ecuatoriano.

Relación

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una relación r de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir

$$r \subseteq A \times B.$$

Se suele escribir

$$x \,\mathbf{r}\, y$$

para indicar que

$$(x, y) \in \mathbf{r}.$$

Si $A = B$, se dice que r es una relación en A.

Una relación r en A, es

i) **reflexiva** si

$$\forall x \in A : \quad x\,\mathbf{r}\,x;$$

ii) **simétrica** si

$$\forall x, y \in A : \quad x\mathbf{r}y \Rightarrow y\,\mathbf{r}\,x;$$

iii) **antisimétrica** si

$$\forall x, y \in A : \quad x\,\mathbf{r}\,y \,\wedge\, y\,\mathbf{r}\,x \Rightarrow x = y;$$

iv) **transitiva** si

$$\forall x, y, z \in A : \quad x\,\mathbf{r}\,y \,\wedge\, y\,\mathbf{r}\,z \Rightarrow x\,\mathbf{r}\,z.$$

Relaciones de orden y de equivalencia

Existe una relación de orden $\leq$, sobre un conjunto A si y sólo si la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se dice que $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado.

Existe una relación de equivalencia $\sim$, sobre un conjunto A si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Función

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una relación $g \subseteq A \times B$ es una **función de A en B**, si y sólamente si cumple que

$$\forall x \in A, \exists! y \in B : \quad (x, y) \in g.$$

Si $(x_0, y_0) \in g$, se suele usar la notación

$$y_0 = g(x_0),$$

y se dice que y_0 es **<u>la</u> imagen de x_0**, y x_0 es **<u>una</u> preimagen de y_0**.

La función g se denota en su **forma expandida** de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g : & A \longrightarrow B \\ & t \longmapsto g(t), \end{aligned}$$

o, en **forma compacta**, denotada por

$$A \ni t \longmapsto g(t) \in B,$$

o, con alternativa como

$$A \ni y \longmapsto g(y) \in B.$$

Con respecto a la notación, recordemos que lo importante es entender que la función toma un elemento genérico del conjunto A, lo procesa a través de la fórmula $g(x)$ para devolver un elemento del conjunto B.

La función g presenta tres componentes:

- **Dominio** de g, también llamado conjunto de salida: $\mathrm{Dom}(g) = A$
- **Codominio** de g, corresponde al conjunto de llegada: $\mathrm{Cod}(g) = B$
- **Fórmula** de g que es la forma de procesar un elemento del dominio: g(t)

El **rango** o **imagen** de la función g es el subconjunto del codominio formado por imágenes:

$$\mathrm{Rg}(g) = \{y_0 \in B \,/\, \exists x_0 \in A : \; y_0 = g(x_0)\}.$$

Una función g es:

- **inyectiva** si a cada imagen le corresponde una única preimagen:

$$\forall x_1, x_2 \in A : \quad g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- **sobreyectiva** si todos los elementos del codominio son imágenes:

$$\mathrm{Cod}(f) = \mathrm{Rg}(f)$$

- **biyectiva** si la función es, al mismo tiempo, inyectiva y sobreyectiva.

Tipos de funciones

Presentamos algunos tipos de funciones. Sea $w : A \to B$. Se dice que w es una función

- *real si* $B \subseteq \mathbb{R}$;
- *compleja si* $B \subseteq \mathbb{C}$;
- *entera si* $B \subseteq \mathbb{Z}$;
- *vectorial si* $B \subseteq \mathbb{R}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$;
- *matricial real si* $B \subseteq M_{mn}(\mathbb{R})$, para algunos $m, n \in \mathbb{N}$;
- *de variable real si* $A \subseteq \mathbb{R}$;
- *de variable compleja si* $A \subseteq \mathbb{C}$;
- *de variable entera si* $A \subseteq \mathbb{Z}$;
- *de variable matricial (real) si* $A \subseteq M_{mn}(\mathbb{R})$, para algunos $m, n \in \mathbb{N}$; etc.

Por tanto, una función real de variable real es una función donde el dominio y codominio son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \qquad \wedge \qquad \mathrm{Cod}(f) \subseteq \mathbb{R}$$

Regla del Máximo Dominio

Si en un contexto no se especifica a una función real de variable real f y sólo se tiene una fórmula $f(x)$, la Regla del Máximo Dominio establece trabajar con la función

$$\begin{aligned} f : & I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

donde I es un subconjunto de $\mathbb{R}$, también conocido como dominio de definición o máximo dominio de la fórmula $f(x)$, es decir que I es el subconjunto más grande posible para que la fórmula tenga sentido, respetando las propiedades de los números reales.

Observación 2.1. *Se denomina* ***sucesión real****, a las funciones reales de variable natural. Por ejemplo,*

$$\mathbb{N} \ni n \longmapsto x_n \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{N} \ni m \longmapsto y_m \in \mathbb{R}.$$

Gráfica de funciones

Una función real f es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$; por tanto, se puede describir un gráfico representativo de ésta función siguiendo los siguientes pasos: Establecemos una red nutrida de puntos

$$M_i = (x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, ..., N,$$

donde $x_i \in \mathrm{Dom}(f)$ y $y_i = f(x_i)$, y posterirormente unimos con líneas estos puntos.

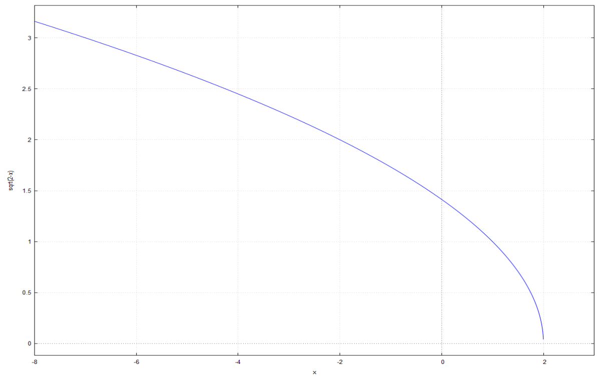
Por ejemplo, la gráfica representativa de la función real f, se presenta en la Figura 1

$$f :] - \infty, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(x) = \sqrt{2 - x}$$

Cabe indicar que esta técnica de red de puntos para describir la gráfica de una función prácticamente se encuentra en desuso toda vez que en la actualidad se cuenta con herramientas informáticas que permiten graficar funciones.

Figura 1

Gráfica de la función $]-\infty, 2] \ni x \longmapsto f(x) = \sqrt{2-x} \in \mathbb{R}$



Álgebra de funciones

Sean dos funciones reales f y g con el mismo dominio $I \subseteq \mathbb{R}$ y codominio $\mathbb{R}$. Se define la

- función suma, $f+g$, como

$$\begin{aligned} f+g : & I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

- función producto, $f \cdot g$, como

$$\begin{aligned} f \cdot g : & I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

- la función $\lambda \cdot f$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, como

$$\lambda \cdot f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

- función cociente f/g, como

$$f/g : I^* \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right),$$

  donde $I^* = \{x \in I /\, g\,(x) \neq 0\}$.

Función lineal afín

Una función lineal afín es toda función que tiene la forma

$$L : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto L(x) = mx + b$$

donde

- $m \in \mathbb{R}$ es una constante que se conoce como la pendiente de la recta descrita por L.
- $b \in \mathbb{R}$ es una constante que se refiere al intersecto de L.

Función cuadrática

La función cuadrática es una función de la forma

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $b, c \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

El valor

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

conocido como punto optimal de f, corresponde a un punto de **máximo** o de **mínimo** de la función.

El rango de la función cuadrática es

$$\mathrm{Rg}(f) = [f(x_0), +\infty[,\ si\ a > 0;$$

$$\mathrm{Rg}(f) =]-\infty, f(x_0)],\ si\ a < 0.$$

El signo del discriminante, definido por $\Delta = b^2 - 4ac$, y el punto optimal, permite bosquejar de manera rápida el gráfico de la función f que corresponde a una parábola.

La gráfica de una función cuadrática, en particular:

- intercepta dos veces al eje horizontal si $\Delta > 0$;

- intercepta una sola vez el horizontal si $\Delta = 0$;

- no intercepta el eje horizontal si $\Delta < 0$.

Monotonía de una función

Una función es **monótona** si es creciente o decreciente.

Sea f una función real, decimos que

- es creciente si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f): \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2);$$

- es estrictamente creciente si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f): \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2);$$

- es decreciente si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f): \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2);$$

- es estrictamente decreciente si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f): \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Paridad de funciones

Una función f

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.2}$$

$$x \longmapsto f(x),$$

es

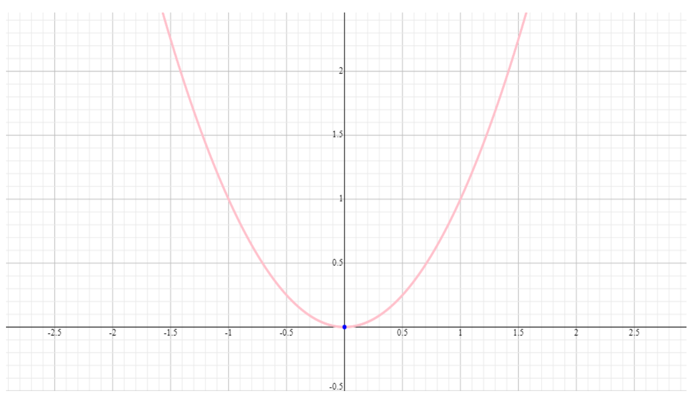
- par, si

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = f(-x),$$

  La función par es simétrica con respecto al eje vertical.

Figura 2

Gráfica de una función par



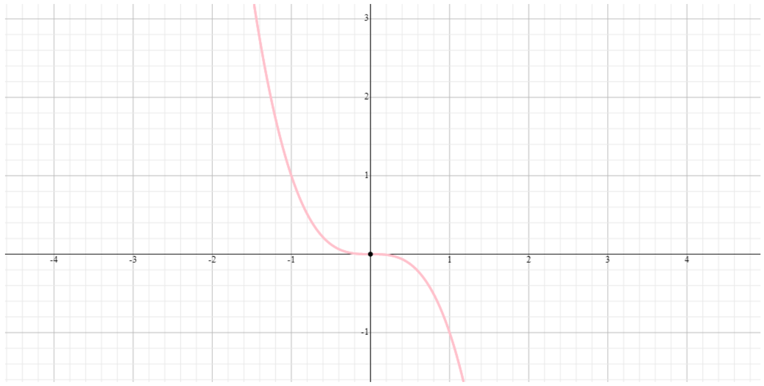
- impar, si

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = -f(x).$$

  La función impar es antisimétrica con respecto al eje vertical.

Figura 3

Gráfica de una función impar



Existen funciones que no son ni pares ni impares.

Límite de una función

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga a x_0 y sea A un número real. La notación

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

significa que $f(x)$ se acerca tanto como se quiera al número A, en tanto que x se elija suficientemente próximo a x_0

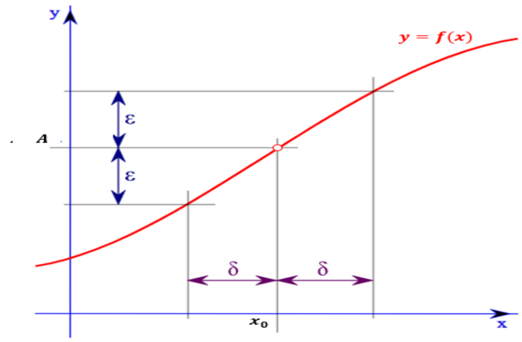
Definición 1. *Sea f una función real y $x \in \mathrm{Dom}(f)$. El límite de una función se define por*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0 : \; [|x - x_0| < \delta \;\wedge\; x \in \mathrm{Dom}(f)] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Si $f(x)$ se acerca tanto a A cuando x está próximo a x_0 con valores mayores que x_0,

Figura 4

Gráfica que interpreta el límite de una función.



decimos que A es el límite por la derecha de f en x_0, lo que se indica con

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A,$$

del mismo modo se define el límite por la izquierda restringiendo a x con valores menores que x_0, es decir

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

Si f tiene el límite a la derecha y el límite a la izquierda de x_0 iguales a A, entonces existe el límite de una función f.

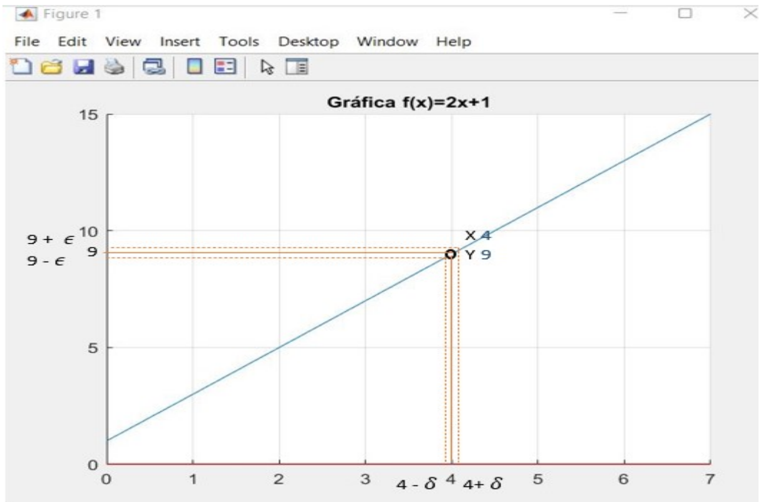
Ejemplo 2.1. *Sea la función f determinada por la fórmula $f(x) = 2x + 1$. Entonces,*

$$\lim_{x\to 4}(2x + 1) = 9$$

Para cualquier número real de un intervalo abierto que contenga a 4, excepto posiblemente en 4, $2x + 1$ está definido. Se tiene que $f(x)$ se puede acercar a 9 tanto como queramos tomando un valor suficientemente cercano a 4. En la Figura 5 se observa que $f(x)$ en el eje vertical se *localizará entre $9-\varepsilon$ y $9+\varepsilon$ en tanto que x, en el eje horizontal se localice entre $4-\delta$ y $4+\delta$*

Figura 5

Gráfica que interpreta el límite de la función determinada por la fórmula $f(x)=2x+1$



Derivada de una función

Si f es una función continua en un intervalo (a,b) y $x_0 \in (a,b)$. La función f es derivable en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \equiv f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Para calcular la derivada de una función definida por una fórmula, podemos usar reglas de derivación o fórmulas para derivar.

Reglas de derivación [25]

Sean una constante $c \in \mathbb{R}$, u y v dos funciones reales que son derivables en el punto

$x \in \mathrm{Dom}(u) \cap \mathrm{Dom}(v)$. Entonces,

i) $(c)' = 0$;

ii) $(x)' = 1$;

iii) $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$;

iv) $(cu)'(x) = cu'(x)$;

v) $(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$;

vi) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$, si $v(x) \neq 0$

Algunas fórmulas para las derivadas son

- $f(x) = x^p$, $f'(x) = px^{p-1}$; $p \neq 0$
- $f(x) = sen(x)$, $f'(x) = cos(x)$;
- $f(x) = cos(x)$, $f'(x) = -sen(x)$;
- $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

Derivadas de orden superior

Si una función f es derivable, su derivada f' también es una función.

Si f' es derivable, obtenemos la segunda derivada, que denotamos por

$$f'' = (f')'$$

o como

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right),$$

f'' se conoce como derivada de segundo orden de f.

Si f se puede seguir derivando, tendremos una derivada de orden $m \in \mathbb{N}$, dada por

$$\frac{d^m f}{dx^m} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}}\right)$$

Ejemplo 2.2. *Halle la derivada de segundo orden de la función definida por la fórmula*

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6$$

Hallamos la primera derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6\right)'$$

$$f'(x) = x^2 - 6x$$

La segunda derivada es

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f''(x) = (x^2 - 6x)'$$

$$f''(x) = 2x - 6$$

Definición 2. *x_0 es un punto crítico de una función real f derivable en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, si se tiene que $f'(x_0) = 0$.*

Observación 2.2. *Para hallar los puntos críticos en una función f, hay que resolver la ecuación asociada a la fórmula de la función.*

$$f'(x) = 0, \quad x \in \mathrm{Dom}(f')$$

Criterio de la segunda derivada (Máximos y mínimos)

Sea f una función real derivable hasta segundo orden y x_0 un punto crítico de f.

Evaluando la segunda derivada con los puntos críticos se puede decidir, muchas veces, de qué tipo es un punto crítico:

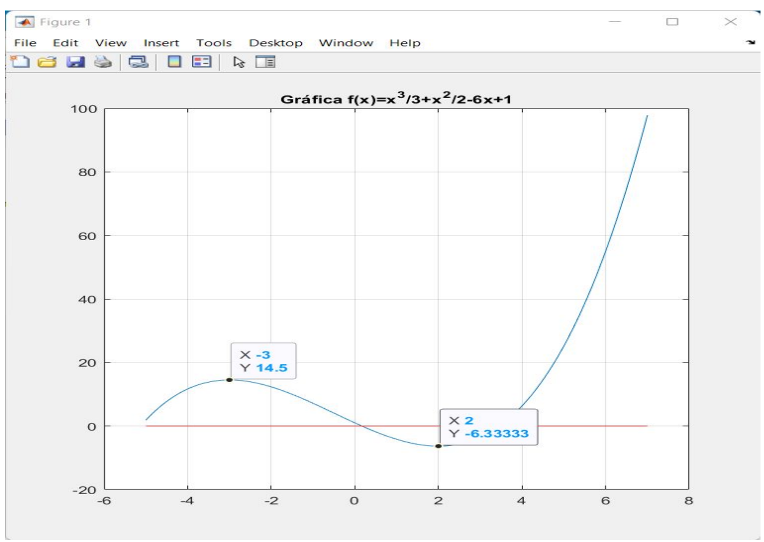
- si $f''(x_0) < 0$, se tiene un máximo local
- si $f''(x_0) > 0$, se tiene un mínimo local

Ejemplo 2.3. *Consideramos la función determinada por la fórmula*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

Figura 6

Gráfica de la función determinada por la fórmula $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$



Los puntos críticos de f son las soluciones de la ecuación asociada con la fórmula $f(x)$,

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

es decir

$$x_1 = -3, \quad y \quad x_2 = 2$$

Evaluando en la segunda derivada $f''(x) = 2x + 1$*, se tiene*

$$f''(-3) = -5 < 0$$

y

$$f''(2) = 5 > 0$$

Por tanto, tenemos que

$f(x_1) = f(-3) = \frac{29}{2}$*, es un máximo local de* f*; y,*

$f(x_2) = f(2) = \frac{-19}{3}$*, es un mínimo local de* f*.*

Modelamiento matemático

Un modelo matemático fue formulado por Galileo Galilei en el siglo XVI, cuando encontró que, en ausencia de la resistencia del aire, todos los objetos caen con aceleración uniforme. Durante ese siglo prevalecía la idea errónea de Aristóteles, de que los objetos pesados, en caída libre, descendían más rápido que los objetos ligeros.

La fórmula matemática obtenida por Galileo mediante el uso de planos inclinados corresponde a

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

en donde

h: representa la altura de caída;

g: representa la aceleración de la gravedad y

t: representa el tiempo de caída.

El modelo de Galileo ayudó a comprender mejor el fenómeno; sin embargo, al presentarse situaciones donde la resistencia del aire no se puede despreciar, el modelo ya no es útil, por ello se debe recurrir a modelos más sofisticados que permitan analizar la nueva situación.

El modelo matemático de Galileo, expresado en la forma expandida de una función, corresponde a

$$\begin{aligned} h :& [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longmapsto h(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Conceptos básicos

Como se menciona en [20], las **teorías** son un conjunto de conceptos propuestos, pueden explicar los fenómenos del mundo real, por lo tanto son aproximaciones o **modelos** de la realidad. El proceso de interés se denomina **sistema**.

Un modelo matemático es idóneo cuando ayuda a la comprensión de los fenómenos y a la solución de los problemas de la vida real. Si las relaciones matemáticas que forman parte del problema son simples, el modelo puede dar una solución analítica al problema. No obstante, la mayoría de los fenómenos son complejos por lo que el modelo matemático que representa al sistema es usualmente estudiado por simulaciones a través de un computador.

Muchas de las áreas de conocimiento presentan modelos como funciones matemáticas, por ello podemos decir que, el modelo matemático más simple es una **función**, pues, nos permite comprender al sistema o fenómeno que se presentan en áreas como economía, química, física, etc. Al ser el modelo más básico una función, éste tiene dominio, codominio y una fórmula que indica como transformar una variable de control en una variable objetivo.

Para **formular un modelo matemático**, [20], sugiere lo siguiente:

1. Establecer el estado del sistema o conjunto de variables de control del sistema, con este paso se permite especificar el nivel de resolución del modelo.

2. Establecer el conjunto de hipótesis razonables del sistema a describir, estas hipótesis incluyen las leyes empíricas que son aplicables al sistema.

3. En la resolución del modelo, comprobar si es aceptable, es decir, si la solución es consistente con datos experimentales o con la información conocida sobre el comportamiento del sistema.

4. Si las predicciones son deficientes, aumentar el nivel de resolución [3] del modelo matemático o elaborar hipóteis alternativas sobre mecanismos de cambio del sistema y repetir los pasos del proceso de modelado.

Para clasificar los modelos matemáticos, [20], considera tres referencias

- **Estático** y **dinámico**. El primero representa un sistema cuando el tiempo no desempeña un rol relevante; mientras que, el modelo dinámico representa un sistema cuando el tiempo cambia o evoluciona.

[3] Al aumentar el nivel de resolución, aumentamos la complejidad del modelo.

- **Deteminístico** si el modelo no contiene elementos probabilísticos o aleatorios; y **Estocástico** si al menos una variable es aleatoria.
- **Discreto** y **Continuo**. Esto hace referencia a la representación de las variables que definen el modelo.

Modelo matemático y la solución de problemas

Un modelo matemático se puede descubrir a partir de un sistema y para su solución se realizan predicciones o análisis. A veces los sistemas generan problemas que pueden ser de optimización y para dar solución al problema, los modelos matemáticos extraen y utilizan la mayor información posible del fenómeno [19].

En una situación, por ejemplo, de una persona que desea cruzar un río y llegar a un punto fijo en el menor tiempo posible; revisando los conceptos básicos mencionados anteriormente, tenemos que para esta situación el sistema es el río; conocer el tiempo mínimo que necesita una persona para cruzarlo es el problema a resolver; el modelo matemático que permita resolver este problema será la expresión matemática obtenida con la ayuda de una fórmula de la Física.

En el modelo matemático debemos expresar las ideas de forma clara, realizar análisis y utilizar herramientas matemáticas, que permitan hacer cálculos de manera correcta.

Para la solución de un problema [4], como parte del aprendizaje de la Matemática, se requiere de una formulación matemática (modelo).

En [21], se sugieren cuatro pasos para resolver problemas.

- Comprender el problema. Haciendo preguntas como: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los

[4] Un problema es una situación inherente a un objeto que puede tener una o varias soluciones.

datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es suficiente?, ¿es contradictoria?, ¿es posible satisfacer la condición?, ¿es la condición suficiente para determinar la incógnita?, etc.

- Concebir un plan, indica que el problema debe asociarse con problemas semejantes al que se enfrenta, debe relacionarse con resultados útiles y determinar si puede recurrir a problemas similares.

- Ejecución del plan para lo cual debe examinar todos los detalles, diferenciar entre un problema por resolver de uno por demostrar. Para ello puede plantear las siguientes interrogantes: ¿puede ver claramente que el paso es correcto?, ¿puede demostrarlo?

- Examinar la solución obtenida o también conocida como etapa de la visión retrospectiva. Es necesario verificar el resultado y razonamiento seguido, para lo cual debe preguntar ¿puede verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado de forma diferente? ¿puede utilizar el resultado o método en algún otro problema?

Para la solución de una situación didáctica, también se podrían seguir estos pasos con la guía del docente.

1. Plantear una situación o problema que no tenga mucha complejidad. Es necesario en esta parte comprender la situación.

2. Interpretar la información relevante en términos de lenguaje matemático, la misma que nos conducirá a establecer el modelo matemático.

3. Esquematizar gráficamente con el fin de facilitar la solución.

4. Resolver el problema y verificar la solución.

5. Comprender problemas similares.

No se puede establecer una sola forma de resolver problemas; sin embargo debemos tener claro que para poder dar solución al problema, no podemos regresar a mirar el sistema directamente; el problema se soluciona con el **modelo matemático**, por ello consideramos que para tratar los problemas o situaciones seguiremos los siguientes pasos prácticos.

1. Comprensión de la situación;
2. Modelamiento matemático;
   - Dibujo de la situación;
   - Variable objetivo o dependiente;
   - Variable de control o independiente;
   - Relación entre variables; y,
   - Modelo matemático.
3. Definición del problema matemático; y,
4. Resolución del problema matemático.

En la construcción de un concepto matemático, el modelo matemático debe ser elaborado según el nivel escolar, debido a que en los estudiantes las necesidades e intereses de aprendizaje son diferentes y su realidad incluye la percepción del contexto en el que se encuentra. A continuación se presentan algunos ejemplos de situaciones con modelos matemáticos.

Ejemplo 2.4. *(Tomado de [26])*

Situación

El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura *absoluta y a la temperatura de 175[℃] el gas ocupa 100 [m^3]. Determine el modelo matemático que expresa el volumen como una función de la temperatura.*

Sea $f(x)$ metros cúbicos el volumen del gas cuya temperatura es x grados Celsius. Por la consideración de variación directamente proporcional

$$f(x) = kx, \tag{2.3}$$

donde, k es una constante positiva

Sustituyendo los valores del volumen de gas de 100 [m^3] y la temperatura de 175[℃] en (2.3)*,*

$$100 = k(175)$$

encontramos que $k = \dfrac{4}{7}$. Por tanto, el modelo matemático queda expresado por

$$\begin{aligned} f :] - 273.15, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) &= \frac{4}{7}x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Observación 2.3. *La temperatura absoluta (cero absoluto), es el valor de la temperatura teórica más baja que se puede alcanzar, también se la define como el punto en donde las moléculas de cualquier material dejan de moverse. El valor de la temperatura con la que inicia el cero absoluto es 0 $[^\circ K]$ y medida en grados celsius corresponde al valor de -273.15 [℃].*

En el modelo matemático (2.4) *tenemos que*

$$\mathrm{Dom}(f) =] - 273.15, +\infty[$$

Ejemplo 2.5. *(Tomado de [19])*

Situación *Consideremos un modelo simple de una enfermedad que se expande en una comunidad. Para un tiempo t, denotemos por*

- $S(t)$ *a la fracción de la población susceptible de infectarse;*
- $I(t)$ *a la fracción de infectados (y transmisores); y,*
- $R(t)$ *la correspondiente fracción de recuperados (y entonces inmunes).*

*Interesa hacer el seguimiento en el tiempo al vector (S, I, R). El **modelo***

$$[0, +\infty[\ni t \longmapsto \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

se puede escribir en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales como

$$\begin{cases} S'(t) = -a\,S(t)\,I(t), \\ I'(t) = a\,S(t)\,I(t) - b\,I(t), \qquad t \in [0, +\infty[\\ R'(t) = b\,I(t), \end{cases}$$

donde a y b son parámetros positivos.

Ejemplo 2.6. *Con permiso del autor [29], presentamos el siguiente ejemplo para resolver un problema con Cálculo clásico, en donde se busca diseñar una lata cilíndrica.*

Situación

Un equipo expedicionario se está entrenando para que sus integrantes puedan sobrevivir *y realizar una tarea en zonas casi desérticas. Para mantener el equipo en buenas condiciones de salud, cada integrante debe tomar exactamente un volumen V de una bebida especial, cada tres horas. Para esto necesitamos diseñar una lata cilíndrica circular usando la menor cantidad de material.*

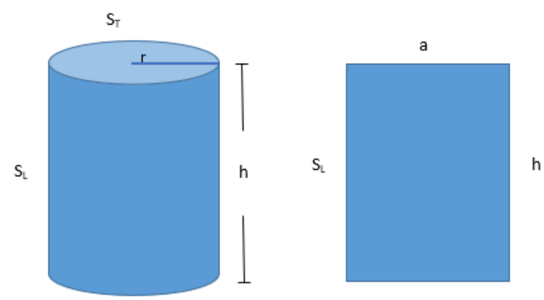
Encontremos el modelo matemático que permita solucionar el problema.

Modelo matemático

1. *Dibujo de la situación.*

Figura 7

Esquema simplificado de la lata. Fuente: [29]



Los dibujos de la Figura 7, ayudan a comprender la situación.

2. *Variable objetivo o dependiente. Queremos minimizar el área de la superficie del cilindro.*

   S: *área de la superficie del cilindro circular.*

3. *Variable de control o independiente. Controlaremos la variable objetivo con r : el radio del cilindro.*

4. *Relación entre variables. El área de la superficie, está dada por*

$$S = S_L + 2S_T$$

Tenemos que

$$S_T = \pi r^2$$

y

$$S_L = ah = 2\pi rh.$$

Por otro lado el volumen es constante, $V = S_T$ *y* $V = \pi r^2 h$ *, donde*

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Haciendo los reemplazos respectivos, se tiene

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

.

5. *Modelo matemático.*

   El modelo matemático corresponde a la función

$$\begin{aligned} S :]0, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Observación 2.4. *En la función* (2.5)*, el* $0 \notin \mathrm{Dom}(S)$ *porque con este valor el radio* r *sería* 0*, por tanto deja de existir la lata cilíndrica circular.*

Estrategia didáctica

Una estrategia didáctica es un proceso planificado por el docente, donde utiliza métodos, técnicas, recursos con el fin de orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje para alcanzar los objetivos propuestos [31].

La aplicación de buenas estrategias didácticas permite que el docente innove en la enseñanza en cada tema propuesto, además, involucran situaciones y actividades que pueden favorecer el desarrollo de habilidades cognitivas y entrenar al estudiante en la solución de problemas con el fin de llegar a la construcción del conocimiento matemático, [18].

Como características de las estrategias didácticas podemos señalar:

- Las actividades de aprendizaje se centran en los estudiantes;
- Promueven el aprendizaje autónomo;
- Se adaptan a los recursos disponibles y a los contenidos, favoreciendo a la comprensión y aplicación de los conceptos;
- Contribuyen a la reflexión y razonamiento en la transferencia de conocimientos, para aprender significativamente y solucionar problemas.

Tomando en cuenta que en el proceso enseñanza-aprendizaje, queremos que el estudiante logre aprendizajes significativos y competencia matemática, es necesario establecer una secuencia didáctica [5] por medio de instrucciones como referente para trabajar con los estudiantes.

[5] En una secuencia didáctica se establecen procedimientos que se desarrollan en el proceso educativo.

En la estrategia didáctica las actividades a desarrollar, permiten la interacción del estudiante con el tema de estudio, por ello el material a ser utilizado en las estrategias de enseñanza como uno de los recursos didácticos es la **guía didáctica**, la misma que integra otros recursos y componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Clasificación de las estrategias didácticas

Como se menciona en [8], las estrategias en función de los elementos del proceso didáctico son:

- Estrategias de enseñanza, aquellas que se centran en la enseñanza donde el docente interviene directamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Estrategias que se enfocan en el contenido y la forma como se representan para que den sentido al conocimiento, de manera que los estudiantes puedan integrar la nueva información, modelos y teorías
- Estrategias referidas al estudiante, aquellas que respondan a las necesidades e intereses de los estudiantes y que potencien su participación dentro del aprendizaje.

La evaluación, también se la considera como parte de la estrategia, pues, se refiere a los procedimientos que permiten la valoración de los logros alcanzados por los estudiantes.

Para el proceso de enseñanza, [32] clasifica la estrategia de acuerdo con el momento de aplicación en:

- Pre-instruccional, ejecutada antes del desarrollo de la planificación del docente, en ella el estudiante se prepara con relación a qué y cómo va a aprender.

- Co-instruccional, realizada durante la aplicación de la planificación, donde se consideran experiencias previas del estudiante para obtener resultados que permitan los aprendizajes esperados.

- Post-instruccional, hace referencia a las acciones que realiza el docente después de la presentación del contenido, para valorar la adquisición de habilidades de aprendizaje asimiladas por el estudiante.

Guía didáctica

Como se menciona en [22], una guía didáctica es un documento donde consta la información necesaria para el estudio de los contenidos con el fin de orientar al estudiante.

Para llevar a cabo la estrategia didáctica en el desarrollo de las actividades con modelos matemáticos, la guía didáctica establecida en este trabajo tiene la siguiente estructura:

1. Tema, que corresponde al de la unidad.

2. Objetivo, que debe ser específico para la unidad.

3. Proceso, donde se consideran tres momentos, para las actividades que se realizan en el aula.

1. **Inicio**, donde se considerará los conocimientos previos[a] con ideas, preguntas relacionadas al tema o con un documento de apoyo elaborado por el docente o tomado del texto de matemática, el cual debe ser leído con anterioridad por parte del estudiante para ser orientado hacia el nuevo conocimiento.

2. **Desarrollo**, esta etapa se considera de gran importancia ya que constituye el proceso de la estrategia a desarrollar en el aula; aquí se considera utilizar algunos criterios hebegógicos en espera de que el estudiante construya el conocimiento ya sea a través de procesos mentales o que realice la búsqueda, el descubrimiento y la reflexión sobre la situación planteada. Aquí se debe proporcionar ejercicios que aumenten su grado de complejidad, además, incluir preguntas desequilibrantes del tema de estudio permitirá al estudiante comprender el significado del problema para obtener sus propias conclusiones.

   Los estudiantes pueden desarrollar sus actividades de forma individual o grupal.

3. **Cierre**, aquí se incluirán actividades de ejercicios o problemas propuestos para aplicar lo aprendido.

[a]Se entiende por conocimientos previos aquellos que poseen los estudiantes de un determinado nivel, para iniciar el proceso de aprendizaje y que permiten la integración de los nuevos conocimientos.

Es importante considerar una evaluación como parte del desarrollo de las actividades realizadas en la estrategia, pues con ella se puede verificar si se han alcanzado los objetivos propuestos en el proceso de enseñanza-aprendizaje y medir el grado de conocimiento que hayan adquirido los estudiantes. Además, la evaluación permite al docente a tomar decisiones que ayuden a enfrentar los problemas.

Capítulo 3

Estrategia didáctica para la enseñanza de funciones

En el presente capítulo proponemos una estrategia didáctica que busca dar una orientación al docente de matemáticas de bachillerato en la enseñanza de funciones, teniendo como público objetivo a los estudiantes de décimo año de educación general básica y de primero de bachillerato. Con esta estrategia, se espera favorecer el desempeño académico de los estudiantes, así como también despertar el interés hacia la matemática y motivar el acceso al conocimiento a través del modelamiento matemático, teniendo en cuenta el factor etario.

Directrices de la estrategia

La necesidad de que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo, debería motivar al docente de bachillerato ecuatoriano a capacitarse en Matemáticas (donde están sus mayores debilidades) y luego, ya con este insumo básico, utilizar estrategias didácticas que incidan positivamente en el proceso de aprendizaje. Se debe motivar a que el estudiante no sólo encuentre soluciones matemáticas clásicos sino que, además, convierta el conocimiento en una herramienta para aplicarla de acuerdo al contexto en el que se desenvuelve. Saber matemática, no es utilizarla exclusivamente (como se da en la realidad ecuatoriana) como un instrumento básico para resolver problemas de manera mecánica, es dominar primeramente los conceptos que forman parte de ella.

La matemática permite resolver situaciones provenientes de diferentes ámbitos; por ello, centramos el proceso de enseñanza-aprendizaje teniendo como ejes orientadores las características del adolescente (eje hebegógico) y los ejes matemáticos y didácticos, todos ellos importantes para el desarrollo de esta estrategia en el salón de clases.

Figura 8

Ejes orientadores de la estrategia didáctica.

La Figura 8 muestra los ejes que forman parte de las directrices a seguir en la estrategia didáctica.

Eje hebegógico

Durante la adolescencia se producen importantes cambios en el joven, a nivel psicológico, biológico y social. La adolescencia se encuentra entre la infancia y la edad adulta, como un tiempo de fuertes transformaciones.

Para [10], en la adolescencia se consolida el pensamiento lógico formal por lo que se potencializan cualidades como la criticidad; además, el adolescente se incorpora a la sociedad ubicando su identidad con sentido de pertenencia dentro de una cultura. En esta etapa el estudiante necesita de herramientas que le permitan asumir su rol con responsabilidad y comprometerse con su ser; además, muestra posturas de aprendizaje con su interés, argumentación y preguntas del mundo personal y social.

La educación del adolescente y su aprendizaje deben tener muy presente el desarrollo de las funciones cognitivas, del autocontrol y de la autonomía. Dentro del proceso de aprendizaje, los aspectos que caracterizan esta educación, son el razonamiento crítico, la capacidad de abstracción, la orientación para aprendizaje y la motivación para aprender,[28].

En la etapa de desarrollo, el adolescente construye interiormente teorías (representaciones abstractas de lo real y posible) y sistemas o conjunto de conocimientos organizados; por este motivo la estrategia a emplear en el proceso de enseñanza aprendizaje debe permitir que los contenidos se planifiquen en función de esos cambios.

En la estrategia didáctica se propone el desarrollo de habilidades y competencias que contempla el conocimiento del adolescente, es decir cómo piensa como actúa y los aspectos que motivan su razonamiento; y las características fundamentales de la hebegogía:

- Razonamiento crítico;
- Capacidad de abstracción;
- Orientación para el aprendizaje;
- Motivación para aprender; y,
- Aprendizaje colaborativo.

Eje matemático

La Matemática es la única ciencia exacta y, por tanto, todas las otras ciencias dependen de ella. La palabra matemática del lat. mathematicus, [15], la define como la ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos y sus relaciones. Al ser una ciencia permite conocer a la naturaleza y entender las leyes que la rigen.

En el campo educativo, la enseñanza de la matemática debería impulsar el desarrollo del pensamiento de los jóvenes, con aplicaciones de problemas que le permitan entender la realidad y así empoderarse del conocimiento matemático.

Para la enseñanza de matemática, según el grupo al cual va dirigida, se pueden utilizar diferentes métodos de manera que conduzcan al estudiante a desarrollar su competencia matemática para medir los logros de aprendizaje.

En el desarrollo de la estrategia didáctica se considera el siguiente esquema:

1. Comprensión de la situación;
2. Modelamiento matemático;
   - Dibujo de la situación;
   - Variable objetivo o dependiente;
   - Variable de control o independiente;
   - Relación de las variables;
   - Modelo matemático;
3. Definición del problema matemático; y,

4. Resolución del problema matemático.

Eje didáctico

La didáctica, del griego didaktiké, es el arte de enseñar y su objetivo es el estudio de los procesos y elementos que existen en la enseñanza y aprendizaje, además, ayuda al docente a establecer las condiciones adecuadas para su tarea educativa.

Enseñar matemática de manera memorística no aporta a la vida del estudiante. La didáctica permite el uso de herramientas, métodos, técnicas adecuadas para medir logros de aprendizaje de los estudiantes.

En [30] se menciona que la tarea fundamental de la didáctica es la de estructurar los componentes que caracterizan el proceso: contenido, formas y métodos de enseñanza, medios de enseñanza apoyándose en leyes de manera que se produzca el conocimiento.

La didáctica de la matemática trata de enseñar lo más exacto, por ello la transmisión de conocimientos matemáticos requiere que el docente tenga una buena formación matemática. Por lo tanto en el diseño de la estrategia didáctica se considera las siguientes situaciones intencionales:

- Situación de acción;
- Situación de formulación; y,
- Situación de validación.

Diseño de la estrategia

En el diseño de la estrategia se toma en cuenta el fundamento matemático con contenidos esenciales sobre funciones. Partiremos de aquí para que el estudiante adquiera el nuevo conocimiento, tomando en cuenta que en el proceso de aprendizaje, el estudiante está atravesando cambios físicos y emocionales que indirectamente afectan el nivel en la adquisición de los conocimientos, así como también la interpretación y transformación de las situaciones presentadas de su entorno.

En cada unidad didáctica se establece una serie de contenidos conceptuales donde el proceso cognitivo motivará al estudiante a poner en práctica procesos de identificación, reflexión, análisis, comparación, etc.

A continuación se establecen pautas para el conjunto de acciones a desarrollarse en la estrategia didáctica por parte del docente, con el fin de lograr el aprendizaje en el adolescente.

1. Ubicación y contexto educativo[1]

   a) Alcance o tiempo se refiere al tiempo empleado para que el estudiante consolide la información sobre el tema tratado.

   b) Nivel y grupo de estudiantes en el cual se establece el grupo etario al cual va dirigida la estrategia.

2. Declaración de los elementos curriculares.

   a) Contenido o tema central

[1] Son los elementos que favorecen u obstaculizan el proceso de enseñanza aprendizaje, hacen referencia al escenario donde se encuentran docente y estudiante, por ejemplo la localidad, situación geográfica, población etc. [24]

   b) Objetivos de aprendizaje que están centrados en el estudiante y que deberán describir la competencia desarrollada por el estudiante, tomando en cuenta sus necesidades e intereses.

3. Secuencia didáctica o momento de la clase. Considerando que en esta fase existe la interacción directa entre el docente y el estudiante, las actividades a desarrollar en la planificación de la secuencia didáctica tendrá los siguientes puntos:

   a) Motivación son tendencias emocionales que guien o faciliten el logro de los objetivos. En la motivación se debe considerar los cambios por los que atraviesa el adolescente.

   b) Proceso

      En el proceso de la estrategia didáctica se desarrolla la guía didáctica tomando en cuenta que las fases o momentos de clase (inicio, desarrollo y cierre) son parte de la misma.

      Recordemos que en la fase de inicio nos permite hacer un revisión previa de conocimientos y a la vez reforzarlos, así como también se puede hacer una introducción del tema que se va a tratar. Cabe indicar que en la fase del desarrollo se profundiza el tema con el que se va a trabajar. Esta fase favorece el trabajo con los estudiantes (en forma individual o grupal), pues le permite al docente detectar las falencias o inconvenientes durante el proceso de aprendizaje, toda vez que el estudiante también trabaja con ejercicios matemáticos o situaciones con modelos matemáticos que se relacionan con el el entorno donde se desenvuelven.

4. Recursos didácticos que hacen referencia al material que el docente utiliza para facilitar en el alumno el procesamiento, codificación y recuperación de la información, [33]. Dentro de estos recursos también se pueden considerar las herramientas tecnológicas.

5. Evaluación.

   Como parte del proceso educativo permite constatar el grado en que se logran los objetivos propuestos y que el proceso de enseñanza-aprendizaje se mantenga acorde con las metas de aprendizaje. En esta fase se puede detectar las fortalezas o deficiencias del desempeño de los estudiantes.

   El objetivo principal en una evaluación es ver si se alcanzaron los logros de aprendizaje así como también estudiar que las técnicas y métodos empleados en la enseñanza favorezcan el aprendizaje.

Observación 3.1. *En la estrategia didáctica las actividades planificadas para el desarrollo de un tema de la unidad, podrían ser ejecutadas en una o varias clases.*

Componentes de la estrategia

La estrategia didáctica presenta los siguientes componentes:

1. Escenario del encuentro hebegógico con un ambiente y espacio físico propicio para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje. El docente, tomando en cuenta el período de transición por la que atraviesa el estudiante, debe fomentar la participación para que se produzca el aprendizaje.

2. Tiempo, como factor elemental del proceso de enseñanza aprendizaje, permite que exista un equilibrio entre tiempo empleado para las acciones desarrolladas por el docente y el tiempo que necesita el estudiante para las actividades de aprendizaje.

3. Objetivo de aprendizaje es la acción que se pretende que el estudiante alcance en el aprendizaje, es decir, lo que debe ser capaz de demostrar al final del periodo de aprendizaje.

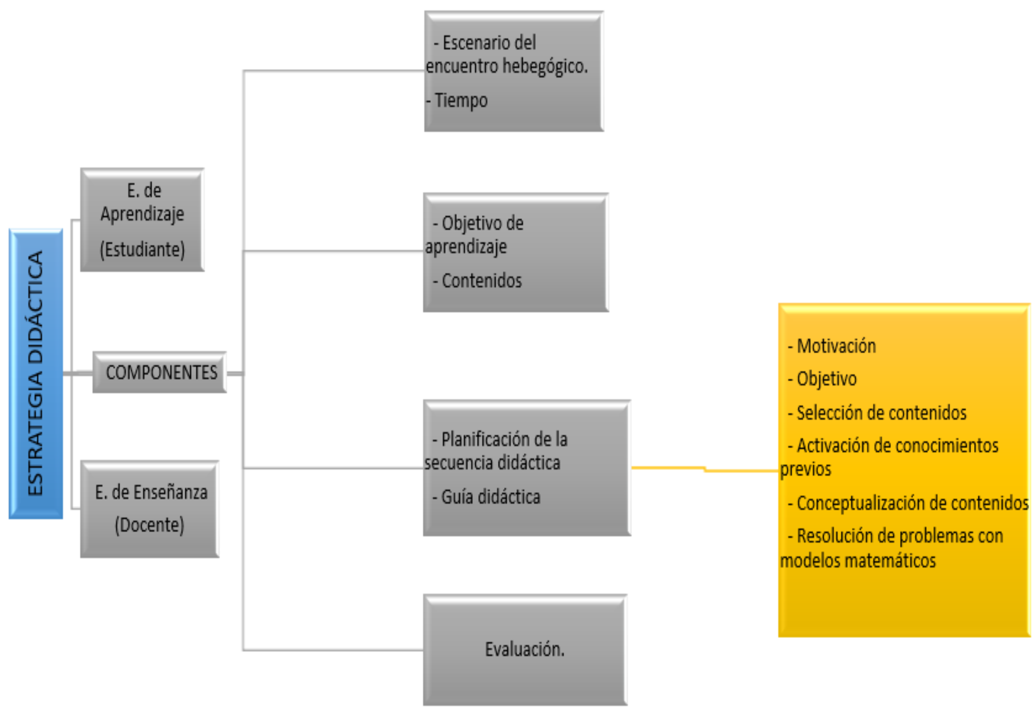
4. Planificación de la secuencia didáctica, está formada por una serie de acciones encaminadas para cumplir los objetivos y guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Al planificar el docente no improvisa, motiva al estudiante, optimiza tiempo, organiza los recursos a utilizar, establece los momentos (inicio, desarrollo y cierre) de la clase según el contenido y el grupo al cual está dirigido. Los estudiantes participaran de manera colaborativa en el desarrollo de las actividades bajo la dirección del docente.

    - Motivación, como factor importante para el desarrollo del aprendizaje, se refiere al estado mental que impulsa hacia un objetivo concreto. La motivación podría permitir el enlace entre los conocimientos previos con los nuevos cuando el docente se acerque y conozca los intereses de los estudiantes, utilice material significativo y busque experiencias que generen orgullo y satisfacción, además de aumentar la responsabilidad y autonomía [34]. La motivación se podría ejecutar al momento de empezar el proceso de enseñanza, tomando en cuenta que el grupo al cual va dirigida son los adolescentes.
    - Activación de conocimientos previos a través de videos, lectura de texto o documento preparado para la clase, actividad que el estudiante debe realizar antes del momento de la clase.
    - Conceptualización de contenidos implica desarrollo, construcción y ordenación de ideas sobre determinado tema a desarrollar en el transcurso de la clase, ésta conceptualización también podría ser dado por el estudiante con la guía del docente.
    - Resolución de problemas con modelos matemáticos, que permitan a los estudiantes explorar soluciones, comparar y cuestionar resultados, comprender que pueden haber diferentes maneras de encontrar una respuesta, para lo cual, es necesario la orientación del docente.

5. Evaluación, permite al docente medir el logro de aprendizaje a través de diferentes técnicas o instrumentos [2]. Con la evaluación se puede corregir y replantear situaciones que no permitieron cumplir lo propuesto.

Figura 9

Componentes de la estrategia didáctica. Fuente: elaboración propia.



La Figura 9 muestra los componentes de la estrategia didáctica que se propone en este trabajo de titulación.

[2]Se consideran como instrumentos de evaluación las pruebas objetivas, exámenes o también talleres con ejercicioso tomados y/o adaptados de textos como el Cálculo de Leithold, Problemas y ejercicios de análisis matemático de Demidovich.

Aplicación de la estrategia

Antes de iniciar el estudio sobre funciones, el estudiante debería haber estudiado los siguientes temas:

1. Conjuntos
2. Números reales.

- Como fase inicial el estudiante podría realizar actividades como describir los contenidos que serán tratados, revisar temas de clases anteriores, introducir situaciones que le permita reflexionar; es decir, que en esta fase se deben realizar actividades que despierten la curiosidad y el interés en el estudiante por aprender.
- Desarrollo: en la estrategia didáctica, la situación problema [3] ejemplifica como se aborda el contenido durante el desarrollo de la clase, con temas esenciales sobre funciones.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de aplicación de la estrategia didáctica.

Ejemplo 3.1. *Secuencia de la estrategia para el tema de funciones.*

1. *Ubicación y contexto.*
   - *Tiempo: 1 semana* [4]
   - *Nivel y grupo de estudiantes: Primero de bachillerato*
2. *Elementos curriculares*

[3] Llamamos situación problema a aquella situación que conceptualiza, simboliza y aplica algoritmos para plantear y resolver problemas matemáticos [23].

[4] Para el desarrollo de este tema, en base a la experiencia de la autora, se considera el tiempo aproximado de una semana debido a que la complejidad del tema causa en los estudiantes dificultades para identificar los componentes que forman parte de una función, por lo que el tema debe ser explicado de forma minuiciosa.

- *Contenido: Función Real*
- *Objetivo: Al finalizar la unidad los estudiantes serán capaces de manejar el concepto de la función real.*

3. *Secuencia didáctica*

- *Motivación: La participación del estudiante en el desarrollo de este proceso motiva el conocimiento de sus compañeros.*
- *Proceso*

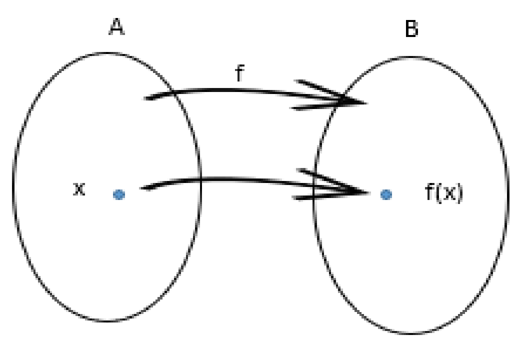
Inicio

Recordemos la definición de función:

Una función es un tipo especial de relación donde a cada elemento del conjunto de salida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada.

Figura 10

Esquema básico de una función. Fuente: elaboración propia.



Dominio *de* f*, también llamado conjunto de salida:* $A = \mathrm{Dom}(f)$

Codominio *de* f*, corresponde al conjunto de llegada:* $B = \mathrm{Cod}(f)$

La función f en su forma expandida tiene la siguiente notación

$$
\begin{aligned}
f :& A \longrightarrow B \\
& x \longmapsto f(x),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

A veces en lugar de la notación (3.1) *se escribe*

$$A \ni x \longmapsto f(x) \in B$$

Observación 3.2. *En esta fase inicial se realizan preguntas relacionadas al tema y se verifica el conocimiento que poseen los estudiantes.*

Desarrollo

Una función tiene tres componentes: dominio, codominio y fórmula.

Observemos las siguientes funciones:

$$
\begin{aligned}
f :& \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
& x \longmapsto f(x) = x^3 - 8
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
g :&]2, +\infty[\subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
& x \longmapsto g(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

En la función f, se tiene

***Dominio**:* $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

***Codominio**:* $\mathrm{Cod}(f) = \mathbb{R}$

***Fórmula**: $f(x) = x^3 - 8$*

Mientras que, en la función g, se tiene

***Dominio**: $\mathrm{Dom}(g) =]2, +\infty[$*

***Codominio**: $\mathrm{Cod}(g) = \mathbb{R}$*

***Fórmula**: $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$*

Podemos mencionar que (3.2) *representa una función real de variable real y que* (3.3) *representa una función racional de variable real.*

*Se denomina **función real** a la función cuyo dominio y codominio son subconjuntos de $\mathbb{R}$.*

$$\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \qquad \wedge \qquad \mathrm{Cod}(f) \subseteq \mathbb{R}$$

Además, si se cumple que

$$y_0 = f(x_0),$$

se dice que

*y_0 es **la imagen de** x_0, y*

*x_0 es **una preimagen de** y_0.*

<u>Cierre</u>

Del siguiente conjunto de funciones, determine sus componentes e indique cuáles son funciones reales.

a)

$$\begin{aligned} m :& \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto m(x) = 2x + sen(x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} w :&]-\infty, -8[\subseteq \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ & x \longmapsto w(x) = \frac{x-5}{x+8} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \setminus \{5\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = \frac{x^3 + 2x - 3}{x-5} \end{aligned}$$

4. *Recurso*

   Textos, hojas de trabajo

5. *Evaluación*

   Taller de ejercicios [5]

Ejemplo 3.2. *Secuencia de la estrategia para el tema de Regla del Máximo Dominio.*

1. *Ubicación y contexto.*

   - *Tiempo: 1 semana* [6]

[5] Tomados del libro de Demidovich. Se considera este texto porque contiene ejercicios que si bien es cierto tienen un poco de dificultad para los estudiantes, les permiten comprender a ellos el tema según los van desarrollando.

[6] Para el estudio de este tema se considera el tiempo de 1 semana porque para encontrar el dominio de definición de

- *Nivel y grupo de estudiantes: Primero de bachillerato*

2. *Elementos curriculares*

   - *Contenido: Regla del Máximo Dominio*
   - *Objetivo: Determinar el dominio de definición o máximo dominio de una fórmula.*

3. *Secuencia didáctica:*

   - *Motivación: Comprender los conceptos y procedimientos en el desarrollo de este tema, permitirá entender la utilidad que tiene la matemática en los estudiantes.*
   - *Proceso*

   <u>Inicio</u>

   El dominio de definición o máximo dominio de una fórmula permite suponer como dominio de una función el conjunto más grande de los números reales, donde la fórmula tiene sentido.

   Las fórmulas

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{ln(x)}{x + 7}$$

   no son funciones.

   <u>Desarrollo</u>

   La Regla del Máximo Dominio establece que se debe trabajar con una función asociada a una fórmula, cuando no se proporcionan de manera explícita dominio y codominio. Para aprovechar los libros antiguos donde suelen confundirse los conceptos de función

una fórmula, los estudiantes tendrán que aplicar procesos de operaciones con números reales donde suelen cometer errores.

y fórmula, la regla indica trabajar con la función

$$\begin{aligned} f :&I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

donde I *es un subconjunto de* $\mathbb{R}$*, conocido como dominio de definición o máximo dominio de la fórmula* $f(x)$*.*

Por ejemplo, se nos pide trabajar con la "función real"

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} \tag{3.4}$$

Sabemos que $f(x)$ *es sólo una fórmula, puesto que no se ha establecido dominio y codominio.*

La Regla del Máximo Dominio establece trabajar con la función

$$\begin{aligned} f :&I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} \end{aligned}$$

donde I *corresponde al dominio de definición de la fórmula* (3.4)*.*

La fórmula tiene sentido cuando

- *El denominador está bien definido, es decir,*

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in Q_1 =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$$

- *y el numerador está bien definido, es decir que*

$$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in Q_2 = [-3, \infty[$$

Por tanto, el ***dominio de definición*** *de la fórmula* $f(x)$ *es*

$$\mathrm{Dom}(f) = Q_1 \cap Q_2 = [-3, 1[\cup]1, \infty[$$

Lo que nos permite trabajar con la función

$$\begin{aligned} f :& [-3, 1[\cup]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto & f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Cierre

Mediante la Regla del Máximo Dominio defina las funciones asociadas a las fórmulas

- $f(x) = \sqrt{1 + x^2} \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{4-x^2} \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} \in \mathbb{R}$

4. *Recurso*

   Texto, hojas impresas, herramientas tecnológicas.

5. *Evaluación*

   Tareas

Ejemplo 3.3. *Secuencia de la estrategia con un modelo matemático.*

1. *Ubicación y contexto*

   - *Tiempo: 2 semanas* [7]
   - *Nivel y grupo de estudiantes: Primero de bachillerato*

2. *Elementos curriculares*

   - *Contenido: Modelo matemático*
   - *Objetivo: Al finalizar la unidad los estudiantes serán capaces de resolver problemas con modelos matemáticos.*

3. *Secuencia didáctica:*

   - *Motivación: El modelo matemático, inserto en algunas situaciones de un contexto, contribuye al desarrollo de sus competencias matemáticas.*
   - *Proceso*

   Inicio

   Galileo Galilei, en el siglo XVI, encontró que, en ausencia de la resistencia del aire, todos los objetos caen con aceleración uniforme. Durante ese siglo prevalecía la idea errónea de Aristóteles, de que los objetos pesados, en caída libre, descendían más rápido que los objetos ligeros.

   La fórmula obtenida por Galileo mediante el uso de planos inclinados corresponde a

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

   de manera que

[7] El aprendizaje con modelos matemáticos requierne del estudiante la participación conciente y activa en este tema que es compleja por cuanto no sólo se trata de resolver un problema, si no que para encontrar la solución se debe seguir de manera minuiciosa los pasos que le permitan obtener el modelo y la dependencia con la variable de estudio.

***h**: representa la altura de caída;*

***g**: representa la aceleración de la gravedad y*

***t**: representa el tiempo de caída.*

La función representa la clase más simple de modelos matemáticos. El modelo de Galileo expresado en forma expandida de una función corresponde a

$$\begin{aligned} h :& [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longmapsto h(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{Dom}(h) = [0, +\infty[$$

Debido a que t representa el tiempo, su valor se considera a partir de cero.

Desarrollo

Situación

A un campo de forma rectangular se le colocaron 240 [m] de cerca. Encuentre el modelo matemático que exprese el área del terreno como función de su longitud. Determine el dominio de definición de la fórmula y las dimensiones de mayor área que pueda cercarse con 240 [m].

Modelamiento matemático

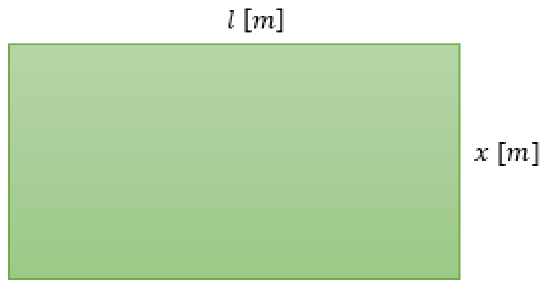
- ***Dibujo de la situación***

  El dibujo se observa en la Figura 11

  Donde x y l representan las dimensiones de los lados del terreno.

Figura 11

Esquema de las longitudes del terreno. Fuente: elaboración propia.



- ***Variable objetivo o dependiente***

  Queremos maximizar

  A: *área del terreno*

- ***Variable de control***

  Controlaremos la variable objetivo con x

- ***Relación entre variables***

  El área del terreno viene dado por

$$A(x) = lx$$

Observación 3.3. *El perímetro del terreno en forma rectangular es* $P = 2l + 2x$

Al colocarse $240[m]$ *de cerca, se tiene*

$P = 240$*, entonces*

$240 = 2l + 2x$ *donde se despeja* l*, obteniendo*

$$l = \frac{240 - 2x}{2}$$

es decir,

$l = 120 - x.$

Al reemplazar l *en la fórmula* $A(x) = lx$, *se tiene*

$A(x) = (120 - x)x$

- ***Modelo matemático***

  Cuando $A(x) = 0$ *se tiene,*

  $(120 - x)x = 0$*, donde*

  $x_1 = 0$ *y* $x_2 = 120$

  Por lo que el dominio de definición se encuentra en el intervalo $]0, 120[$*,*

  El modelo matemático corresponde a la función

$$\begin{aligned} A :]0, 120[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto A(x) = x(120 - x), \end{aligned} \tag{3.6}$$

En el dominio de definición de la función no se consideran los valores extremos del intervalo porque no existiría el valor del área.

Problema matemático

El problema puede escribirse matemáticamente como

$$\begin{cases} Encontrar \quad x_0 \in]0, 120[\quad talque \\ \qquad A(x_0) = \sup\limits_{x \in]0,120[} A(x) \end{cases}$$

El objetivo es maximizar la función A

Resolviendo el problema

La fórmula $A(x) = x(120 - x)$*, se puede expresar como*

$$A(x) = 120x - x^2$$

La función A *es una función cuadrática de la forma* (2.1)*, donde el punto optimal se obtiene con*

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \tag{3.7}$$

En $A(x) = x(120 - x)$*, se tiene:*

$b = 120$*,* $\quad a = -1$

y al reemplazarlos en (3.7)*, se tiene*

$x_0 = 60$

Lo que indica que las longitudes del terreno son:

$x = 60[m]$ *y* $l = 120 - 60$*,* $l = 60[m]$*; y,*

El área máxima es:

$A(x) = 120x - x^2$*;* $A(x) = 120(60) - 60^2$ $A(x) = 3600[m^2]$.

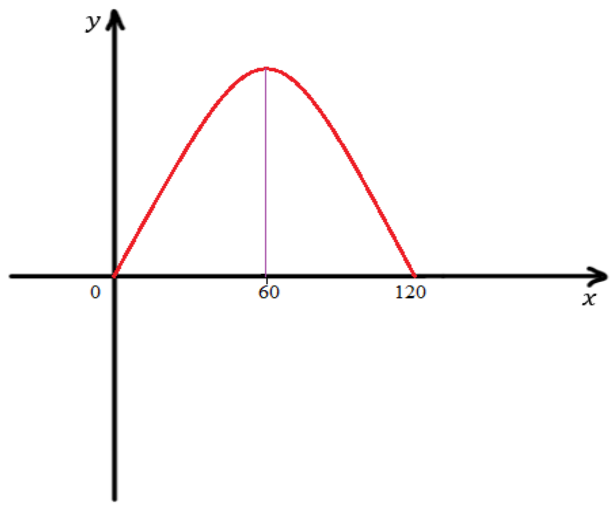
Resolución no formal

Podemos observar que la gráfica 12 de la fórmula $A(x)$ *representa una parábola por lo cual siguiendo las propiedades de la parábola se la dibuja sin necesidad de utilizar un software matemático. Los valores que se obtienen para la función* A*, observados en la gráfica son:*

El dominio de definición de la función es $\mathrm{Dom}(A) =]0, 120[$*, el área máxima es* $3600[m^2]$

Figura 12

Gráfica de la función que representa el área máxima del terreno



Las dimensiones del campo rectangular de mayor área son $x = 60m$ $l = 60m$

<u>Cierre</u>

Resolver:

Situación

En un jardin rectangular se le colocaron $100[m]$ *de cerca.*

a) *Encuentre un modelo matemático que exprese el área del jardín como una función de su longitud.*

b) *¿Cuál es el dominio de la función del inciso a)?*

c) *Trace la gráfica, estime con aproximación de pies, las dimensiones del jardín rectangular de mayor área que pueda cercarse con* $100[m]$

4. *Recurso*

Texto, folletos, gráficas.

5. *Evaluación*

   Tareas del texto [8]

Ejemplos de guía didáctica como parte de la estrategia

A continuación presentamos ejemplos de guía didáctica a utilizar en el aula, como parte de la estrategia para el desarrollo de un ejercicio.

Ejemplo 3.4. *Apliquemos la guía didáctica para el tema de relaciones.*

1. *Tema: Relaciones*

2. *Objetivo: Al finalizar esta unidad, el estudiante explicará a través del desarrollo de ejercicios los conceptos básicos que intervienen en el estudio de las relaciones.*

3. *Proceso*

   a) ***Inicio***

      Lea el material de apoyo sobre el producto cartesiano.

   b) ***Desarrollo***

      - *Dados los conjuntos* $A =]0,5[$ *y* $B = \{0,1,2\}$.

      Calcule el producto cartesiano $A \times B$.

      ¿Cuál es el conjunto de salida de $A \times B$ *?*

      Realice el diagrama del producto $A \times B$

      ¿El producto cartesiano entre A y B, es igual al producto cartesiano entre B y A?

      En el producto $A \times B$ $a \in A$ *y* $b \in B$, *escriba un subconjunto de este producto donde* $a < b$

[8] Escogidos del Cálculo de Leithold.

Al desarrollar la actividad se tiene que:

El conjunto A tiene 4 elementos y el conjunto B tiene 3 elementos, por lo que el producto cartesiano $A \times B$ tiene 12 elementos.

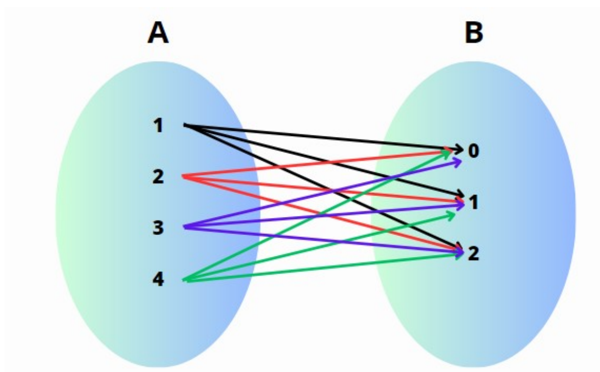
$A \times B = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2)\}$

El conjunto de salida de $A \times B$ es $A = \{1,2,3,4\}$

Diagrama del producto $A \times B$:

Figura 13

Diagrama de $A \times B$. Fuente: elaboración propia.



El producto cartesiano $B \times A$ tendrá 12 elementos, pues B tiene 3 elementos y A tiene 4 elementos.

$B \times A = \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$

Por tanto $A \times B \neq B \times A$

El subconjunto de $A \times B$ donde $a < b$ es

$c = \{(1,2)\}$

- *Sea el conjunto* $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 2x\}$

  a) *¿Cuál es el conjunto de salida de r?*

  b) *¿Cuál es el conjunto de llegada de r?*

Al ser r *el conjunto formado por el producto* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, se tiene que:*

El conjunto de salida está formado por los números Reales; y,

el conjunto de llegada de r *son los números Reales.*

4. ***Cierre***

   Para la relación $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$*, determine el dominio y codominio. Grafique la relación* A

Ejemplo 3.5. *Apliquemos la guía para el tema de funciones, por medio de un ejercicio.*

1. *Tema: Funciones*

2. *Objetivo: Manejar el concepto abstracto de función como un tipo particular de una relación matemática.*

3. *Proceso*

   a) ***Inicio***

   Sea la relación $f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ y = x^2\right\}$*, establezca si corresponde a una función.*

   b) ***Desarrollo***

   La relación f *asignada por la expresión matemática* $y = x^2$ *indica que :*

   $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, donde el dominio de* f *pertenece al conjunto de* $\mathbb{R}$*.*

*La relación $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es una **función de** $\mathbb{R}$ **en** $\mathbb{R}$, si y sólamente si cumple que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R} : \quad (x, y) \in f.$$

En la fórmula $y = x^2$, cada vez que se da un valor a x, se obtiene un valor de y que es único.

Con este análisis se puede decir que f es una función y se la puede denotar de la siguiente forma:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = f(x) = x^2$$

c) ***Cierre***

Dadas las siguientes relaciones, determine si corresponden o no a una función, de ser así encuentre su dominio y codominio. (Tomado de [26])

1) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 4\}$

2) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{x^2 - 4}\right\}$

3) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{x + 1}\}$

Ejemplos de situaciones problema

Ejemplo 3.6. *Situación*

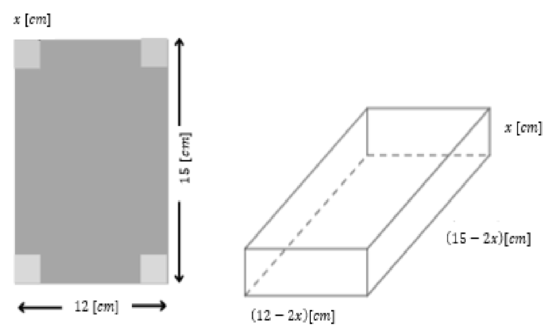
De una pieza de cartón de forma rectangular de $12[cm]$ por $15[cm]$, se desea elaborar una caja abierta, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados *salientes.Encuentre el modelo matemático que exprese el volumen de la caja como función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. ¿Cuál es la longitud del lado de los cuadrados que se recortan de modo que la caja tenga el volumen más grande posible? ¿Cuál es el volumen máximo?*

Modelamiento matemático

1. *Dibujo de la situación, presentado en la Figura 14*

Figura 14

Esquema de la caja de cartón. Fuente: elaboración propia.



Aquí x representa la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán.

2. *Variable objetivo o dependiente.Queremos maximizar*

   ***V:** volumen de la caja*

3. *Variable de control. Controlaremos la variable objetivo con x*

4. *Relación entre variables.*

   El volumen viene dado por

$$V(x) = x(12-2x)(15-2x)$$

5. *Modelo matemático. El modelo matemático corresponde a la función*

$$\begin{aligned} V :]0,6[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto V(x) = x(12-2x)(15-2x). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Observación 3.4. *Al tener limitaciones, se debe cumplir que*

$$x > 0, \quad (12-2x) > 0 \quad y \quad (15-2x) > 0$$

En el primer caso tenemos $x < 6$ y en el segundo $x < 7.5$, por lo tanto el intervalo que corresponde al dominio de definición de $V(x)$ se establece en $]0,6[$, donde x no puede ser 0 ni 6, porque al tomar esos valores la caja deja de existir.

Problema matemático *El problema puede escribirse matemáticamente como*

$$\begin{cases} Encontrar \quad x_0 \in]0,6[\quad talque \\ \qquad V(x_0) = \sup\limits_{x \in]0,6[} V(x) \end{cases}$$

El objetivo es maximizar la función V

Resolución no formal del problema

Los valores que se obtienen al graficar la función V son los siguientes:

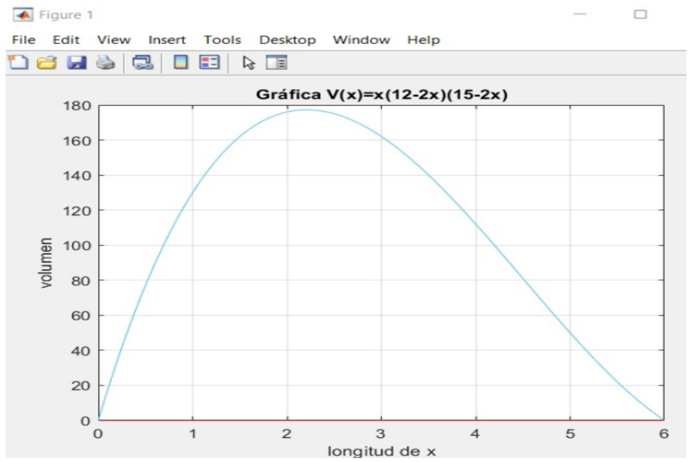
Dominio de la función, es $\mathrm{Dom}(V) =]0,6[$

Volumen máximo, aproximadamente es $177.2[cm^3]$

La longitud del lado de los cuadrados es aproximadamente $2.2[cm]$

Figura 15

Gráfica de la función que representa al problema



De forma eficiente varios programas matemáticos pueden describir el gráfico que representa una función. Por ejemplo, describamos el proceso con matlab para obtener la gráfica de la Figura 15

```
f='x.(12-2.*x).(15-2.*x)'
syms x
x=0:0.01:6;
y= eval(f);
plot(x,y)
grid on
hold on
plot(x,zeros(size(x)),'r')
title('Gráfica V(x)=x(12-2x)(15-2x)')
xlabel('longitud de x')
ylabel('volumen')
```

Resolución del problema

Otra forma de resolver el problema, se lo hace utilizando los conocimientos del Cálculo clásico

- *Derivando la fórmula asociada con la función* (3.8)

  Para $x \in]0,6[$*, tenemos*

$$V'(x) = 12x^2 - 108x + 180 \tag{3.9}$$

- *Puntos críticos.*

  Para obtener los puntos críticos, asociamos la fórmula (3.9) *con una ecuación.*

  Los puntos críticos de V *son las soluciones de la ecuación*

$$V'(x) = 0, \quad x \in]0,6[$$

$$12x^2 - 108x + 180 = 0, x \in]0,6[\tag{3.10}$$

Recordemos que una función cuadrática dada por la fórmula

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

tiene raíces reales si y sólo si $\Delta = b^2 - 4ac$ *y que los factores de* f *son los monomios definidos por las fórmulas*

$$f_1(x) = x - x_1, \quad f_2(x) = x - x_2,$$

donde

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

En (3.10)

$$\Delta = (-9)^2 - 4(1)(15) = 21$$

donde

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{21}}{2},$$

$$x_2 = \frac{9 + \sqrt{21}}{2},$$

entonces, los puntos críticos x_1 *y* x_2 *son las soluciones de la ecuación. Para ver de qué tipo son estos puntos críticos, evaluaremos*

$$V''(x) = 24x - 108,$$

$$V''\left(\frac{9 - \sqrt{21}}{2}\right) = -12\sqrt{21} < 0$$

$$V''\left(\frac{9 + \sqrt{21}}{2}\right) = 12\sqrt{21} > 0$$

Observación 3.5. *El cálculo de puntos críticos de una función, permite encontrar los puntos mínimos o máximos de la función. Un punto crítico es un punto de máximo si* $f''(x_0) < 0$

Entonces

$$x = \frac{9-\sqrt{21}}{2}[cm],$$

es el valor de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán para que la caja tenga el volumen más grande posible.

El volumen máximo [9] *será*

$$V\left(\frac{9-\sqrt{21}}{2}\right) \approx 177.23[cm^3],$$

Por tanto

$$x_0 = \frac{9-\sqrt{21}}{2}$$

es punto de máximo,

$$y_0 = V(x_0) \approx 177.23$$

es el máximo.

Ejemplo 3.7. ***Situación***

Un envase cerrado de hojalata, cuyo volumen es de $60cm^3$*, tiene la forma de un cilindro circular recto. Determine un modelo matemático que exprese el área de la superficie total del envase en dependencia del radio de la base. Determine el radio de la base si se emplea la cantidad mínima de hojalata en su elaboración.*

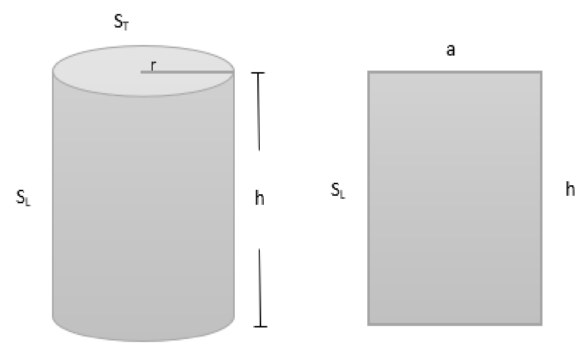
Modelamiento matemático

[9]Considerando el criterio de la segunda derivada para extremos de una función.

1. *Dibujo de la situación*

Figura 16

Esquema simplificado del envase. Fuente: [29]



2. *Variable objetivo o dependiente.Queremos minimizar el área de la superficie del envase*

   S: área de la superficie del envase.

3. *Variable de control. Controlaremos la variable objetivo con* r

   r: *radio del cilindro*

4. *Relación entre variables. El área de la superficie* [10] *viene dada por*

$$S = S_L + 2S_T$$

Con $S_T = \pi r^2$ *y* $S_L = ah = 2\pi rh$

Observación 3.6. *El volumen de un cilindro circular recto es* $V = \pi r^2 h$ *y el volumen del envase es* $60[cm^3]$

[10] El área total de la superficie del envase en forma de cilindro es $S = S_L + 2S_T$, donde $S_L = 2\pi rh$, corresponde al área lateral del cilindro, observamos en el esquema simplificado que ya que en el esquema simplificado ésta área es el es la superficie y $S_T = \pi r^2$, corresponde al área de la base que tiene la forma de una circunferencia

5. *Modelo matemático. El modelo matemático corresponde a la función*

$$\begin{aligned} S :]0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto S(r) = 2\pi r^2 + \frac{120}{r}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Problema matemático *El problema puede escribirse matemáticamente como*

$$\begin{cases} Encontrar \quad r_0 \in]0,\infty[\quad talque \\ \qquad S(r_0) = \inf_{r\in]0,\infty[} S(r) \end{cases}$$

El objetivo es minimizar la función S

Resolución no formal del problema

Los valores que se obtienen al graficar la Figura 17, para la función (3.11), con $V = 60[cm^3]$*, son los siguientes:*

El dominio de la función es $\mathrm{Dom}(S) =]0,\infty[$*, el radio para la superficie total mínima es aproximadamente* $2.12[cm]$

Tenemos el punto de mínimo $\quad r_0 \approx 2.12$

Mínimo: $\quad S(r_0) \approx 84.84$

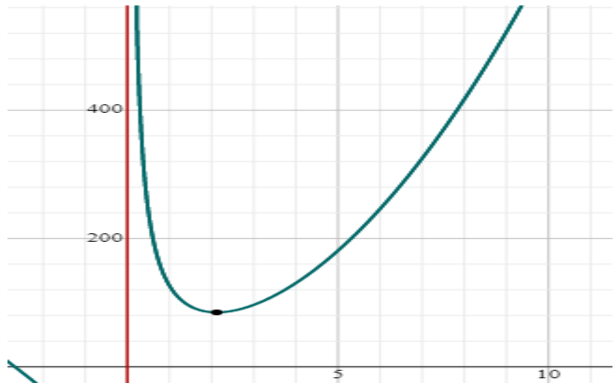
Resolución del problema

Para resolver el problema, podemos utilizar los conocimientos del Cálculo clásico

- *Derivando la fórmula asociada a la función (3.11).*

Figura 17

Gráfica de la función S que representa el problema del envase



Para $r \in]0, \infty[$, tenemos

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{120}{r^2} \tag{3.12}$$

- *Puntos críticos.*

  Para hallar los puntos críticos consideraremos la función determinada por la fórmula (3.12)

$$4\pi r - \frac{120}{r^2} = 0$$

  de donde

$$r^3 = \frac{30}{\pi}, \quad r \approx 2.12[cm]$$

Para ver de qué tipo es este punto crítico, evaluaremos en la segunda derivada

$$S''(r) = 4\pi r + \frac{240}{r^3} \tag{3.13}$$

$$S''(2.12) = 4\pi r + \frac{240}{2.12^3} = 37.75 > 0$$

El criterio de la segunda derivada para $S''(2.12) = 37.75 > 0$ *indica que se tiene un mínimo*

Por lo tanto

$$S(2.12) \approx 84.84[cm^2]$$

Capítulo 4

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

- Se propone una estrategia didáctica para la enseñanza de funciones considerando criterios hebegógicos y de modelamiento matemático, lo cual esperamos que permita desarrollar en el estudiante la capacidad de analizar y modelar problemas de la vida cotidiana para dar soluciones usando razonamiento matemático.

- Se diseñó la estrategia didáctica considerando algunos aspectos relevantes de la hebegogia que potencialmente permitan al docente guiar, conducir y acompañar al estudiante en la búsqueda y descubrimiento del conocimiento a través de actividades colaborativas. Se busca fortalecer el aprendizaje significativo, sin dejar a un lado las capacidades y necesidades propias del adolescente.

- La estrategia didáctica apela al concepto de modelo matemático que constituye la representación o abstracción de una parte de la realidad. Esto propicia en el estudiante una mejor comprensión de los contenidos incrementando el grado de interés.

- En la estrategia didáctica se hizo manifiesto la importancia de contar con una adecuada planificación, para evitar improvisaciones que conducirían al estudiante a no tener claro lo que está aprendiendo en el proceso de enseñanza aprendizaje.

- La evaluación realizado por el grupo de expertos, da como resultado un promedio de $82/90$, lo cual indica que la estrategia didáctica es aceptada para la enseñanza de funciones con modelamiento matemático y criterios hebegógicos.

Recomendaciones

- Se recomienda a los docentes aplicar la estrategia didáctica en el proceso de enseñanza en diferentes temática de matemática considerando los criterios hebegógicos y modelamiento matemático con el fin de fortalecer la capacidad de analizar y modelar problemas en los adolescentes.
- Se recomienda que al momento de implementar la estrategia didáctica para la enseñanza de funciones, se utilice modelamiento matemático propuesto en base a una planificación de clase donde se especifique los objetivos, actividades, recursos y metodología de enseñanza.

Bibliografía

[1] Ministerio de Educación (2010). *Actualización y Fortalecimiento Curricular de Educación General Básica*, Ecuador.

[2] Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2018). *Resultados de PISA para el Desarrollo, Ecuador*.

[3] Castillo, F. (2018). *Hebegogía y la educación de adolescentes*. Soluciones Educativas.

[4] Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2017) *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el desarrollo*, París.

[5] Iñiguez, S. (2019). *"Una propuesta didáctica basada en problemas para la enseñanza del análisis de Fourier aplicado a la ingeniería con apoyo de Máxima"*, Universidad de las Fuerzas Armadas.

[6] Morales, J. and Peña, L. (2013). *"Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo en ingeniería, basada en la modelación matemática"* Universidad de San Buenaventura Bogotá, Colombia.

[7] Suárez, M. (2018). *" Estrategias pedagógicas para la enseñanza de las matemáticas en Administración*, Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado (REIFOP).

[8] Bravo, P. and Varguillas, C. (2015). *Estrategias didáctica para la enseñanza de la asignatura Técnicas de estudio en la Universidad Nacional de Chimborazo*, Red de revistas científicas de Acceso Abierto Diamante.

[9] Trigueros, M. (2009). *El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas, Innovación Educativa*, Instituto Politécnico Nacional, México.

[10] Urquijo, S y González, G (1997). *Adolescencia y Teorías del Aprendizaje. Fundamentos. Documentos Base*. Mar del Plata: Universidad Nacional de Mar del Plata.

[11] Corral, Y., Corral, I.y Franco, A. (2020). *"La pandemia COVID-19: Reflexión pedagógica desde el valor de la vida bajo visión educativa desde la perspectiva de las ciencias agógicas y la teoría sinérgica del aprendizaje"*, Revista ARJE.

[12] Ibañez, J., Pachón, M. y Muñoz, O. *"La representación algebraica en la formación de competencias de modelamiento matemático* (Pg. 115).

[13] Ruiz, A. (2006). *"La escuela francesa de didáctica de las matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica"*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.

[14] Doubront, M. (2021). *Necesidad de una hebegogía transformacional*, Rev. Int. Investig. SCIELO, Asunción.

[15] Real A. Española, *Diccionario de la Lengua Española*. (2014). Vigésima tercera edición, España.

[16] Mayorga, J. (2021). *Taller Tópicos de Didáctica de la Matemática*.

[17] Brousseau, G. (2004). *Investigaciones en educación matemática*.

[18] Espeleta, A. et al. (2016). *Estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de Matemática*, Universidad de Costa Rica.

[19] Mayorga, J., Colmenares, G., Barragán, G. (2019). *Fundamentos de matemática*, Colección de matemáticas Universitarias X, Asociación Amarun.

[20] Mayorga, J. (2020). *Matemática Superior para Ciencias e Ingeniería*, Colección de Matemáticas Universitarias 4, Asociación AMARUN, París.

[21] Polya G., *Cómo plantear y resolver problemas*, Décima quinta reimprensión, Editorial Trillas, México.

[22] Andrade, M. (2010). *Aprendizaje Basado en Problemas como estrategia didáctica para la enseñanza de la asignatura de inteligencia atificial*, Ecuador.

[23] Rúa, J., *Un modelo de situación problema para la evaluación de competencias matemáticas*.

[24] López, L. (2016, Febraury 12). *Análisis del contexto educativo e investigación social*.

[25] Mayorga, J., *La derivada y sus aplicaciones*. Curso Propedéutico de la Maestría en Enseñanza de la Matematica.

[26] Leithold, L., *El Cálculo 7ed.*, Oxford University Press, México.

[27] Pedroza, R. y Villalobos, G., *La práctica educativa con modelos fenomenológicos-sistémicos basados en la hebegogía para el desarrollo del aprendizaje en el nivel medio superior*, INNOVAGOGÍA CONGRESO 2012, España.

[28] Minguez, C. (2012). *Estrategias de aprendizaje para adolescentes del siglo XXI*, Madrid.

[29] Mayorga, J., *A course of Functional Analysis with Calculus of Variations*, Colección Yachay Tech, 01

[30] Mendomatica (2010). *Didáctica de la Matemática*. Revista Digital de Matemática.

[31] Universidad Estatal a Distancia (UNED). (2013). *¿Qué son las estrategias didácticas?*. Centro de Capacitación en Educación a Distancia.

[32] Velasquez, F., *Estrategia de enseñanza: investigaciones sobre didáctica en instituciones educativas de la ciudad de Pasto*, Bogotá D.C.

[33] Bastidas, P., *Estrategias y técnicas didácticas*, Ecuador.

[34] Polanco, A., *La motivación en los estudiantes universitarios*, Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación.