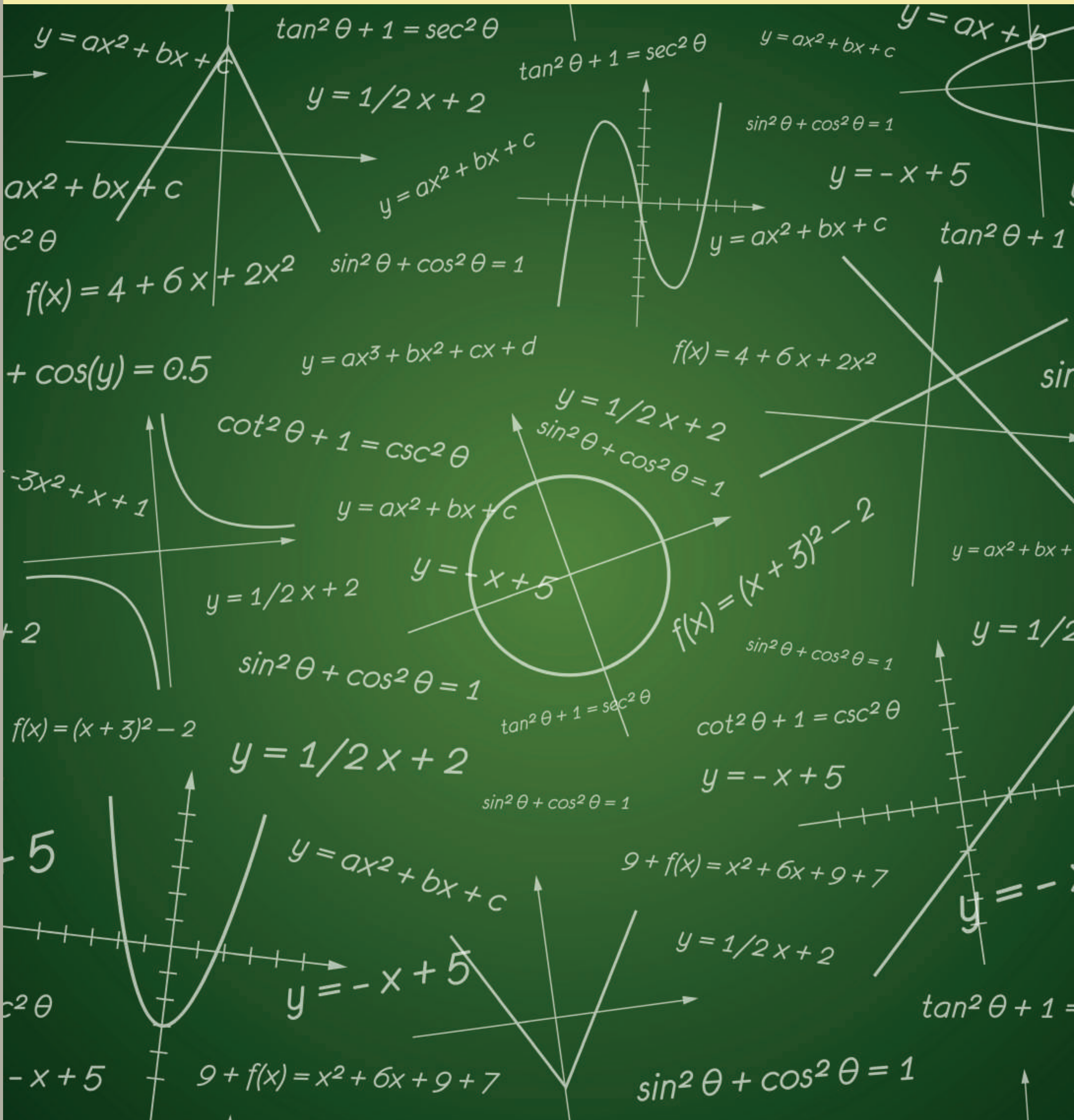
ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA



Álgebra lineal: teoría y ejercicios

Alberto Santillán, Iván Vega, Atal Vivas y Holger Zapata

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Álgebra lineal: teoría y ejercicios

Alberto Benjamín Santillán Tituaña, Iván Francisco Vega Quiñonez,
Atal Kumar Vivas Paspuel y Holger Alfredo Zapata Mayorga

Primera edición electrónica: marzo, 2024
ISBN: 978-9942-652-00-3
Revisión científica:
Edgar Gabriel Valencia Rodríguez, MsC.
Kelvin Diego Moposita Ortega, Mtr.

Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE
Crnl. de C.S.M. Víctor Villavicencio A., Ph. D.
Rector

Publicación autorizada por:
Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE
Mayo. Edgar Parra, Ph.D. - Vicerrector de Investigación
Presidente

Corrección de estilo y diseño
Mtr. Xavier Chinga

Imagen de cubierta: https://acortar.link/ibT9bc

Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE
Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador
www.espe.edu.ec

Sede
Santo Domingo
de los Tsáchilas

Álgebra lineal: Teoría y Ejercicios

Alberto Benjamín Santillán Tituaña
Iván Francisco Vega Quiñonez
Atal Kumar Vivas Paspuel
Holger Alfredo Zapata Mayorga

EDITORIAL
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE

Alberto Benjamín Santillán Tituaña

benjisan7@gmail.com

Ingeniero en Electrónica y Control, Máster en Energías Renovables y Sostenibilidad, Máster en Estadística Aplicada. Ex-profesor en la Escuela Politécnica Nacional y de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. Participante en la investigación de post-doctorado: “Estimulador magnético cerebral de 8 canales”.

Iván Francisco Vega Quiñonez

ifvega@espe.edu.ec

Licenciado en Radiofísica y Magister en Física Aplicada de la Universidad Rusa Amistad de los Pueblos. Docente Universitario del Departamento de Ciencias Exactas en la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-Sede Santo Domingo.

Atal Kumar Vivas Paspuel
akvivas@espe.edu.ec

Ingeniero en Electrónica, Magister en Matemática Aplicada por la Universidad San Francisco de Quito y Magíster en Matemática y Computación por la Universidad de la Rioja. Ha trabajado como docente en varias universidades del país y actualmente es docente de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-Sede Santo Domingo.

Holger Alfredo Zapata Mayorga
hazapata@espe.edu.ec

Ingeniero Mecánico de la Escuela Politécnica Nacional. Master en Gestión de la Producción de la Universidad Técnica de Cotopaxi. Cursando la Maestría en Estadística Aplicada de la Universidad Politécnica del Carchi. Docente del departamento de Ciencias Exactas en la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-Sede Santo Domingo.

Índice

Índice de figuras

Agradecimiento

Quisiéramos expresar nuestro más profundo agradecimiento a la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, Sede Santo Domingo, por brindarnos un entorno académico excepcional que ha fomentado nuestra pasión por la enseñanza y la investigación en el campo del álgebra lineal. Especialmente, deseamos reconocer y agradecer al director del Departamento de Ciencias Exactas, Washington Ponce Tusa, por su apoyo incondicional y su visión inspiradora.

Su compromiso con la excelencia académica y su liderazgo han sido fundamentales para que esta obra sea posible. Apreciamos profundamente su confianza en nuestro equipo de profesores y su disposición constante para escuchar nuestras ideas y brindarnos orientación. Su apoyo nos ha motivado a esforzarnos aún más en la creación de este libro, y su aliento ha sido un impulso invaluable en cada etapa de este proyecto.

También deseamos expresar nuestro agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Ciencias Exactas, tanto docentes como personal administrativo, por su colaboración y respaldo en la realización de este libro. Su compromiso con la calidad educativa y su dedicación a nuestros estudiantes han sido fuentes constantes de inspiración para todos nosotros.

No podemos dejar de mencionar a nuestros estudiantes, quienes son la razón de ser de nuestra labor como educadores. Su entusiasmo, su curiosidad y su perseverancia nos han motivado a profundizar en nuestros conocimientos y a encontrar nuevas formas de transmitir la belleza del álgebra lineal. Agradecemos a todos aquellos que han sido parte de nuestras clases, quienes han planteado preguntas desafiantes y nos han impulsado a buscar respuestas más allá de los límites convencionales.

Asimismo, queremos extender nuestro agradecimiento a nuestros colegas profesores de álgebra lineal en otras universidades y centros educativos. La comunidad académica ha sido un espacio de intercambio de ideas, colaboración y crecimiento mutuo. Agradecemos sus aportes y discusiones, que han enriquecido nuestra perspectiva y nos han desafiado a mejorar continuamente.

Finalmente, queremos expresar nuestro agradecimiento a aquellas personas que nos brindan su apoyo incondicional, nuestras familias y seres queridos. Su amor, apoyo y comprensión han sido fundamentales en este viaje académico y personal. Agradecemos su paciencia durante nuestras largas horas de dedicación a este proyecto y su constante aliento para seguir adelante.

Este libro es el resultado del esfuerzo colectivo de un equipo de profesores comprometidos con la educación y la promoción del conocimiento en álgebra

lineal. Esperamos que sea una valiosa contribución a la comunidad académica y que inspire a futuras generaciones de estudiantes y educadores.

Profesores del Departamento de Ciencias Exactas
Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, Sede Santo Domingo

Prefacio

Una guía integral de Álgebra Lineal

Con gran placer y entusiasmo presentamos este libro de Álgebra Lineal, el cual surge como resultado del arduo trabajo y la pasión compartida por un grupo de dedicados profesores del departamento de Ciencias Exactas de nuestra universidad. Con el propósito de unificar y fortalecer el conocimiento que impartimos en nuestras aulas, hemos reunido nuestras experiencias y conocimientos en estas páginas, con la esperanza de que se convierta en una valiosa guía, tanto para nuestros estudiantes, como para aquellos que buscan profundizar en esta fascinante disciplina matemática.

El álgebra lineal es considerada una rama esencial de las matemáticas, ya que está relacionada fuertemente con otras y tiene por sí sola muchas aplicaciones en las ciencias y la ingeniería. Su comprensión y dominio son esenciales para el desarrollo de habilidades analíticas y de razonamiento lógico, así como para la resolución de problemas complejos. Reconociendo su importancia, hemos estructurado este libro de manera secuencial, comenzando desde los fundamentos básicos y avanzando hacia conceptos más sofisticados, ofreciendo así una sólida base de conocimiento en esta materia.

Nuestro libro consta de ocho capítulos, cada uno de los cuales aborda aspectos esenciales del álgebra lineal. Comenzamos en el Capítulo 1, donde introducimos los sistemas de ecuaciones lineales y exploramos métodos de resolución y representación gráfica. A partir de ahí, nos adentramos en el estudio de las matrices en el Capítulo 2, analizando sus propiedades, operaciones y aplicaciones en la resolución de sistemas de ecuaciones. En el Capítulo 3 nos enfocamos en los determinantes, destacando su importancia en el análisis de la invertibilidad de matrices.

A medida que avanzamos, nos sumergimos en el estudio de los sistemas de ecuaciones de n variables en el Capítulo 4, donde exploramos métodos de solución y analizamos las distintas formas de representar y clasificar dichos sistemas. Luego, en el Capítulo 5 nos adentramos en los espacios vectoriales, comprendiendo su estructura algebraica y las propiedades que los caracterizan.

En el Capítulo 6 ampliamos nuestro enfoque al considerar los espacios vectoriales con producto interno, abordando temas como la ortogonalidad, las bases ortonormales y las proyecciones vectoriales. A continuación, en el Capítulo 7 exploramos las transformaciones lineales, comprendiendo su relación con las matrices y estudiando aspectos como la imagen, el núcleo y la composición de transformaciones.

Finalmente, cerramos nuestro recorrido en el Capítulo 8, dedicado a los valores y vectores propios. Aquí examinamos la importancia de estos conceptos en el análisis de la estabilidad de sistemas lineales y en la diagonalización de matrices, demostrando su utilidad en diversas aplicaciones prácticas.

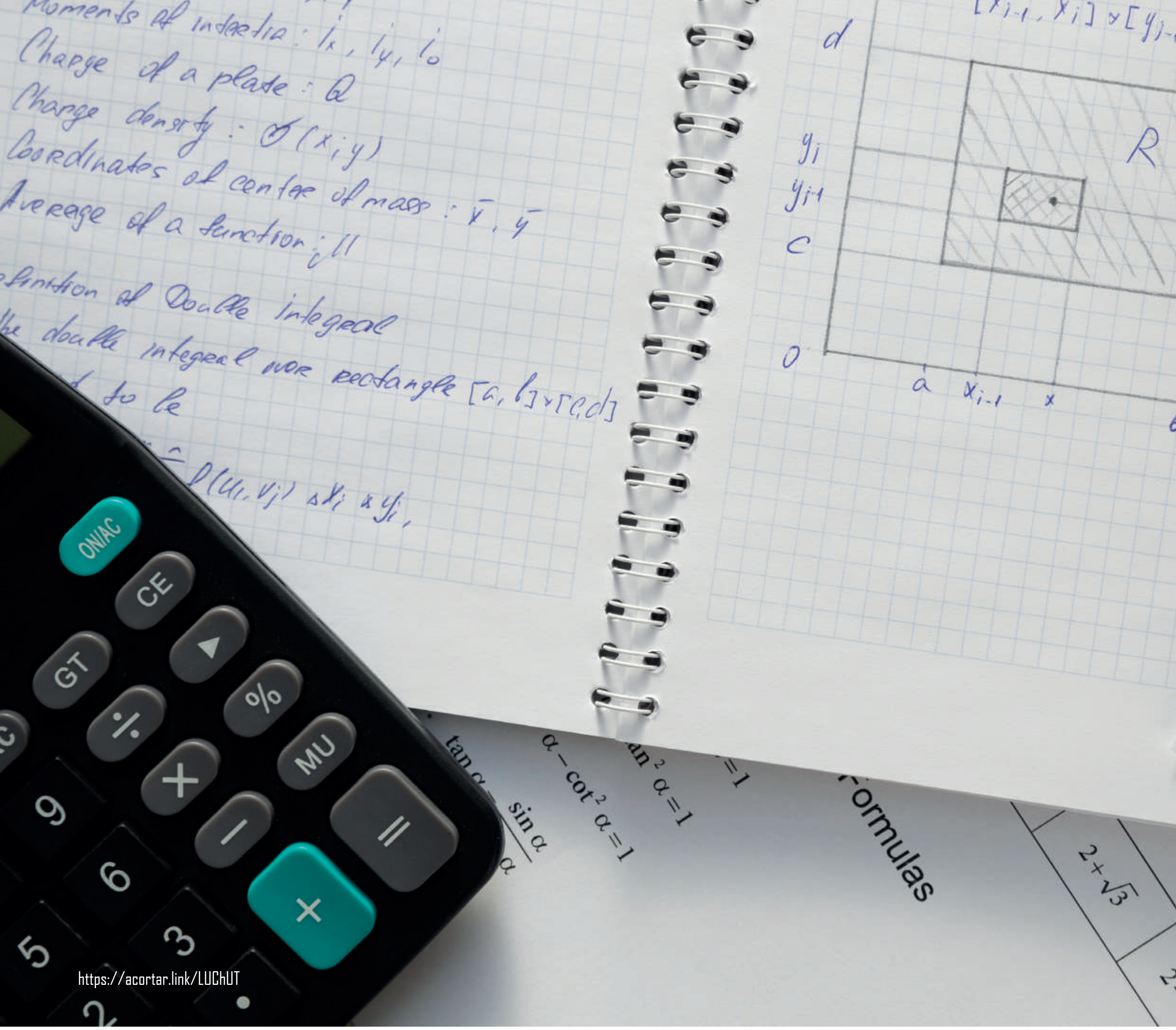
A lo largo de este libro, hemos procurado presentar los conceptos y teoremas de manera clara y accesible, apoyados con ejemplos ilustrativos y ejercicios prácticos. Asimismo, hemos incorporado numerosos diagramas y gráficos que facilitan la comprensión visual de los temas tratados. Nuestra intención es que los lectores puedan asimilar los fundamentos teóricos y desarrollar las habilidades necesarias para enfrentar problemas reales de álgebra lineal.

Esperamos que esta obra sea una valiosa herramienta de estudio y consulta, tanto para estudiantes universitarios que se inician en el álgebra lineal, como para aquellos que buscan ampliar y reforzar sus conocimientos en esta disciplina. Confiamos en que su contenido les inspire curiosidad, fomente el pensamiento crítico y les brinde una base sólida sobre la cual construir futuros desarrollos matemáticos.

Finalmente, nos complace compartir este libro con la comunidad académica y esperamos que su utilidad trascienda nuestras fronteras universitarias. Estamos convencidos de que el álgebra lineal tiene un poder transformador en el mundo actual, y esperamos que este libro sea una herramienta valiosa para aquellos que deseen explorar y comprender las maravillas de esta disciplina.

Profesores del Departamento de Ciencias Exactas

Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE, Sede Santo Domingo



https://acortar.link/LUChUT

CAPÍTULO I

Ecuaciones lineales y sistemas

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales son conjuntos de ecuaciones que comparten variables comunes, cuya importancia radica en su capacidad para modelar y resolver una amplia variedad de problemas en diferentes campos, como el modelado matemático, la ingeniería, economía, ciencia de datos, entre otros.

El objetivo de resolver un sistema de ecuaciones lineales es encontrar los valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones del sistema de manera simultánea. Dependiendo del número de ecuaciones y variables en el sistema, puede haber una solución única, ninguna solución o infinitas soluciones.

Por ejemplo, en la economía, los sistemas de ecuaciones se utilizan para analizar el equilibrio en los mercados, calcular costos y beneficios, y estudiar las interacciones entre variables económicas. En física, se aplican para describir fenómenos como el movimiento de los cuerpos, la transferencia de calor y la propagación de ondas. En ingeniería, son esenciales para diseñar circuitos eléctricos, estructuras y sistemas de control.

Una de las propiedades fundamentales de los sistemas de ecuaciones lineales es precisamente su linealidad, esto significa que las ecuaciones se componen de términos lineales en las variables, es decir, las variables aparecen elevadas a la potencia uno y no están multiplicadas o divididas entre sí. Gracias a esta propiedad, los sistemas de ecuaciones lineales pueden resolverse de manera algebraica utilizando métodos como la eliminación de Gauss, la sustitución y la matriz inversa (Lay, 2001).

1.1.1 Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

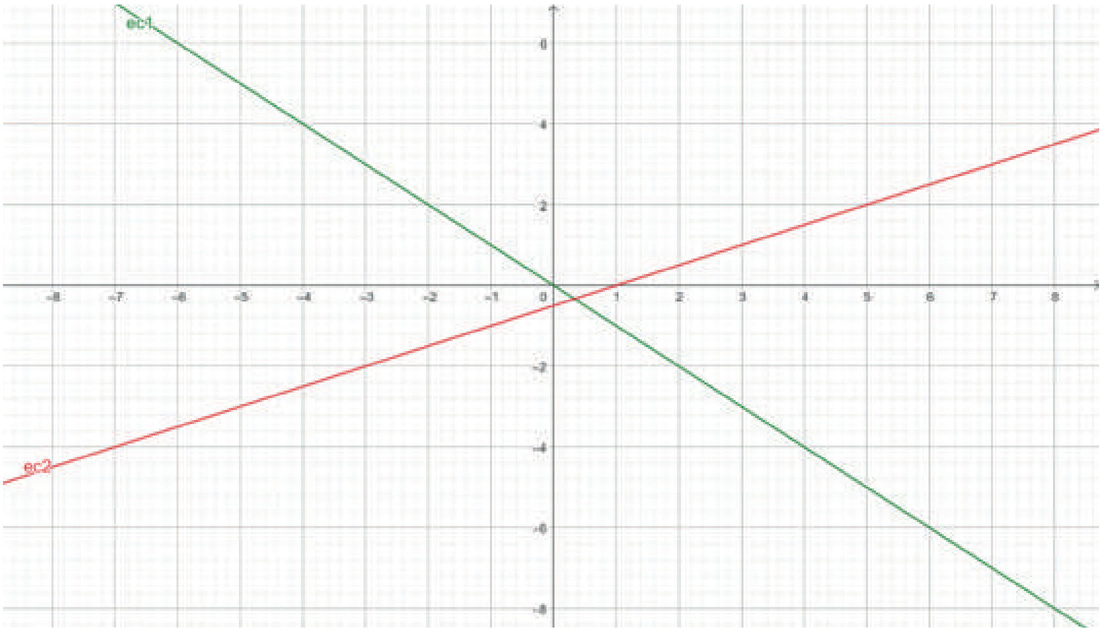
Planteamos el siguiente ejemplo en el que se desea encontrar la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \qquad (1.1)$$

El sistema (1.1) se trata de un ejemplo de dos ecuaciones con dos incógnitas. Una forma aproximada de resolverlo es por medio de una gráfica de las dos rectas en la que la solución al sistema es el punto de corte (donde las rectas se encuentran). En la Fig. 1.1 podemos ver que el corte parece ser el punto de coordenadas (1/3,-1/3).

Figura 1.1

Rectas que corresponden al sistema de ecuaciones planteado



El hecho más importante es que el sistema tiene como solución un punto de coordenadas en el plano y es único, es decir la solución es única.

Otra forma de encontrar la solución del sistema es la forma analítica, resolviendo el sistema de ecuaciones. Esto quiere decir, buscar el valor de x y y que satisfagan ambas ecuaciones. Así para resolver este pequeño sistema de ecuaciones, despejamos una de las variables en la primera ecuación y reemplazamos este resultado en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x = -y \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

al reemplazar tenemos:

$$\begin{aligned} -y - 2y &= 1 \\ -3y &= 1 \\ y &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores obtenemos: x=1/3

De ahí la solución al mencionado sistema de ecuaciones, equivale a encontrar el punto de intersección de las dos rectas: (1/3,-1/3).

Veamos ahora el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

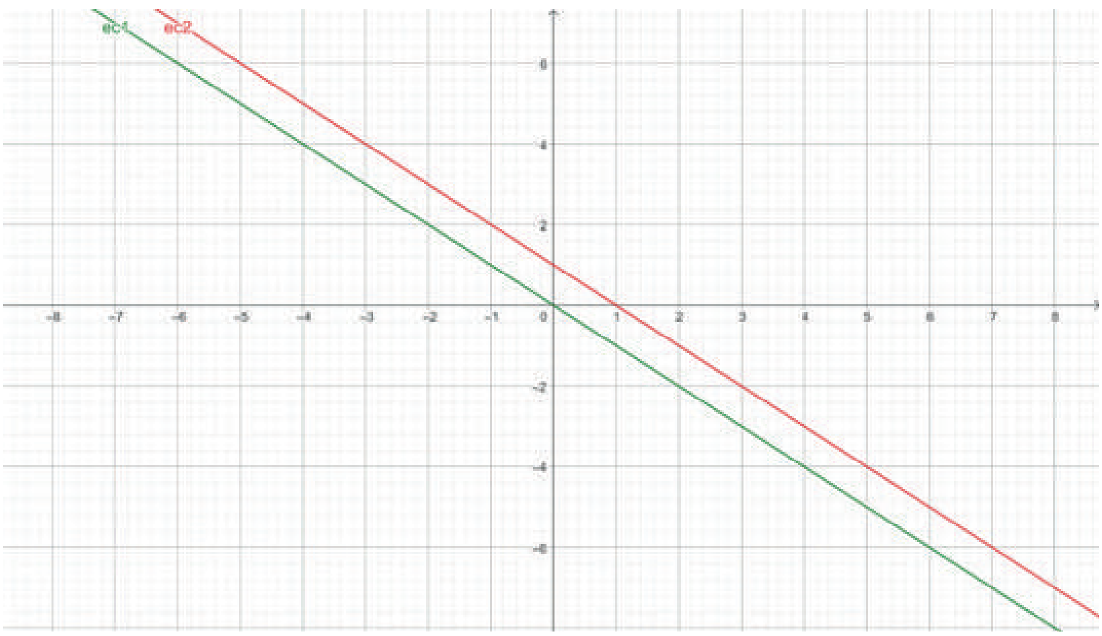
Al resolver el sistema de ecuaciones, utilizando el método analítico anterior, llegamos una expresión contradictoria:

$$0 = 1$$

¿Qué es lo que sucedió? Dado que, geométricamente, la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas implica encontrar el punto donde las dos rectas en el plano se encuentran, para este caso ese punto no existe ya que ambas rectas son paralelas (dos rectas paralelas en el plano no se encuentran en ningún punto) como lo podemos ver en la Fig. 1.2.

Figura 1.2

Rectas que corresponden al sistema de ecuaciones sin solución



Por lo que concluimos que el sistema de ecuaciones no tiene solución, pues no existe ningún par ordenado que satisfaga al sistema de ecuaciones.

El caso que queda por analizar es aquel en el que se obtienen infinitas soluciones, veamos un ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad (1.3)$$

Intentamos solucionarlo analíticamente: x+y=1 implica que x=1-y, por lo tanto:

$$2(1 - y) + 2y = 2$$

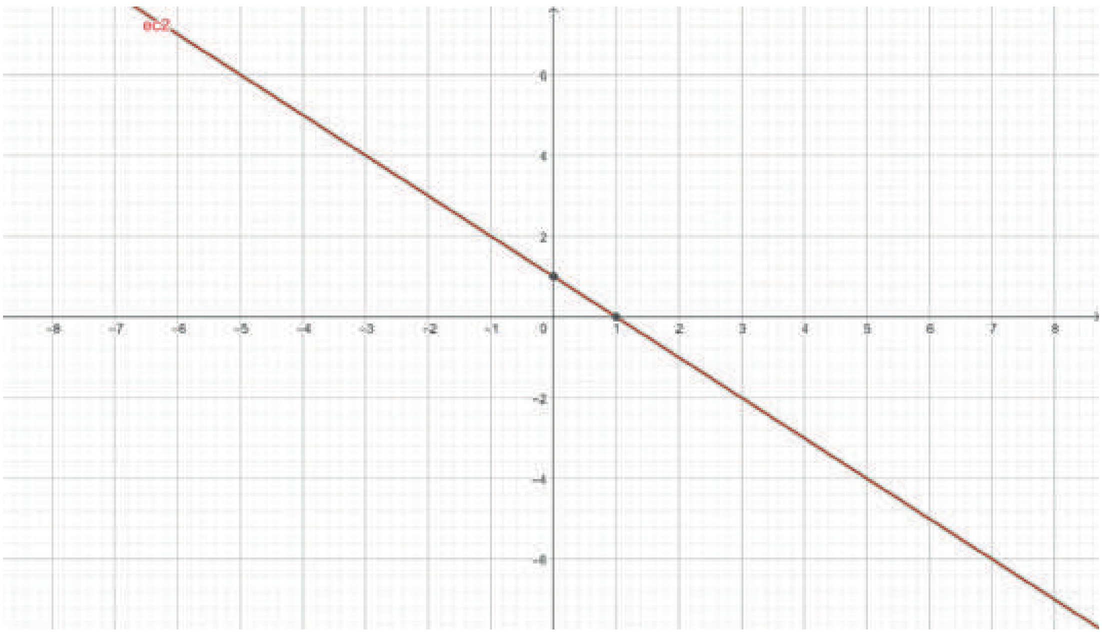
$$2 - 2y + 2y = 2$$

$$2 = 2$$

Ahora, en lugar de encontrar una contradicción, hemos encontrado la verdad 2=2. ¿Qué significa este resultado? Nuevamente, si realizamos la gráfica de las rectas del sistema (Fig. 1.3), podemos ver que ambas rectas se sobreponen, es decir, que tenemos infinitos puntos en los cuales las rectas se encuentran.

Figura 1.3

Rectas superpuestas que corresponden al sistema de ecuaciones con infinitas soluciones



En efecto, al dar solución al sistema llegamos a una expresión coherente, pero que no está dependiendo de las variables. ¿Qué podemos concluir? Evidentemente, el sistema de ecuaciones sí tiene solución. ¿Cuál es la solución? Como se mencionó anteriormente, resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores de x y y que satisfagan las ecuaciones. Es decir, encontrar los puntos que, al reemplazar en las ecuaciones del sistema, cumplan la igualdad.

Para el sistema de ecuaciones anterior, uno de los puntos que satisfacen ambas ecuaciones es el par ordenado (1,0). Esto se puede comprobar reemplazando el punto en ambas ecuaciones, con lo cual decimos que el punto es una solución del sistema.

¿Será este el único punto de solución? Respondemos esta pregunta utilizando otro punto de coordenadas, por ejemplo, el punto (2,-1). Comprobamos evaluando el punto en ambas ecuaciones y concluimos que también dicho punto es una solución del sistema de ecuaciones.

¿Existirá algún otro punto solución? Podemos probar que todos los puntos pertenecientes a las rectas del sistema (que son los mismos) serán la solución del sistema. Por lo tanto, se dice que este tipo de sistemas tienen infinitas soluciones.

Estos tres ejemplos introductorios nos permiten concluir que la solución de un sistema de ecuaciones no siempre es única, sino que puede pertenecer a una de estas categorías:

a. Solución única

b. No existe solución

c. Infinitas soluciones

Para ampliar nuestra visión sobre los sistemas de ecuaciones, podemos aumentar el número de variables al sistema. Para el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, las gráficas se realizan en el plano y su análisis es sencillo. Cuando trabajamos con sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas el análisis pasa al sistema de coordenadas en tres dimensiones, lo que vuelve un poco más complejo el análisis gráfico. Sin embargo, tomando en cuenta que se pueden ir agregando ecuaciones y variables al sistema, podemos intuir que ya no dependeremos de un análisis gráfico, sino que todo el estudio será analítico. El objetivo de analizar gráficas en un principio es facilitar la compresión de los sistemas de modo que luego se pueda generalizar los sistemas con una mejor comprensión.

1.1.2 Tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y - z = 0 \qquad (1.4)$$

$$x + y + z = 0 \qquad (1.5)$$

$$2x - y + 2z = 0 \qquad (1.6)$$

Podemos ver que los lados derechos de las ecuaciones son 0, por lo tanto, bastaría en pensar que las variables x,y,z sean 0 para que las tres ecuaciones se cumplan simultáneamente.

Analíticamente se puede resolver el sistema por el método de reducción. Tomando la ecuación (1.4) y se le resta la ecuación (1.5) y obtenemos:

$$-2z=0 \rightarrow z=0 \qquad (1.7)$$

Ahora sumemos la ecuación (1.5) con la (1.6) y obtenemos:

$$3x+3z=0 \qquad (1.8)$$

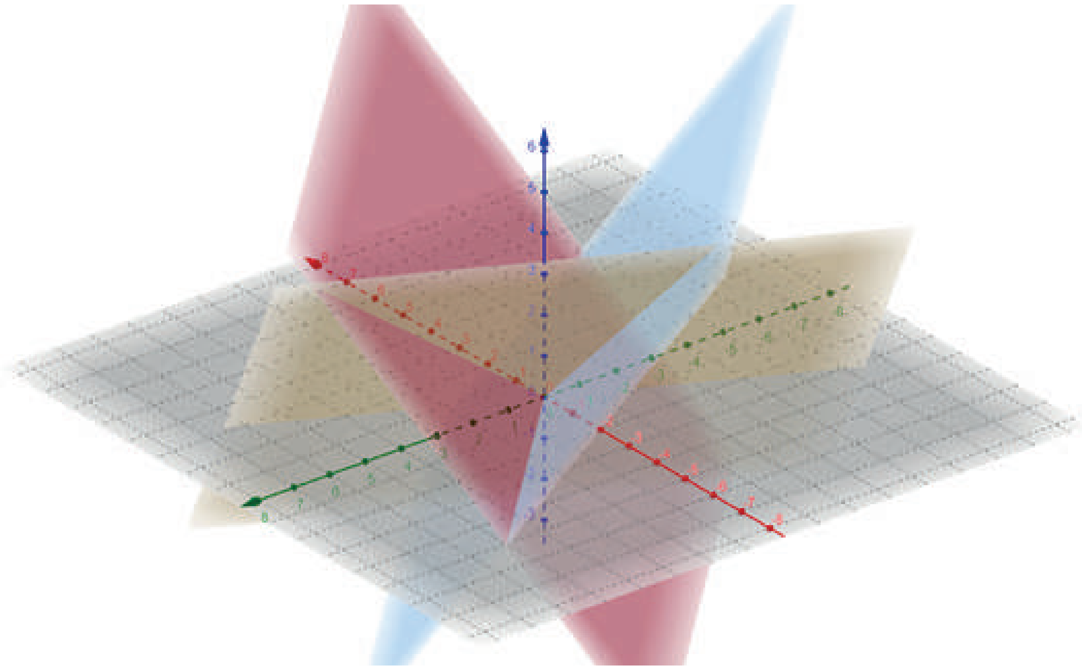
al reemplazar la ecuación (1.7) en la ecuación (1.8) tenemos: $3x+3(0)=0 \rightarrow x=0$

Al reemplazar x=0, z=0, en cualquiera de las ecuaciones iniciales se obtiene: y=0. Entonces la solución al sistema de ecuaciones ha sido el punto (0,0,0).

Gráficamente, la solución al sistema de ecuaciones será el punto donde se intersecan todos los planos, siempre que el sistema tenga solución única. En este sistema, el punto (0,0,0) es el punto donde se encuentran los tres planos como se muestra en la Fig. 1.4 de la página siguiente.

Figura 1.4

Tres planos que representan el sistema con solución única de tres ecuaciones



Consideremos ahora el siguiente sistema:

$$x + y - z = 0 \quad (1.9)$$

$$x + y + z = 0 \quad (1.10)$$

Resolvemos analíticamente por reducción, a la ecuación (1.9) le restamos la ecuación (1.10) lo que da como resultado:

$$-2z = 0 \rightarrow z = 0 \quad (1.11)$$

La nueva ecuación obtenida se reemplaza en cualquiera de las anteriores y da como resultado: $x+y+0=0$, despejamos $y=-x$, que nos recuerda la ecuación de una recta en el plano.

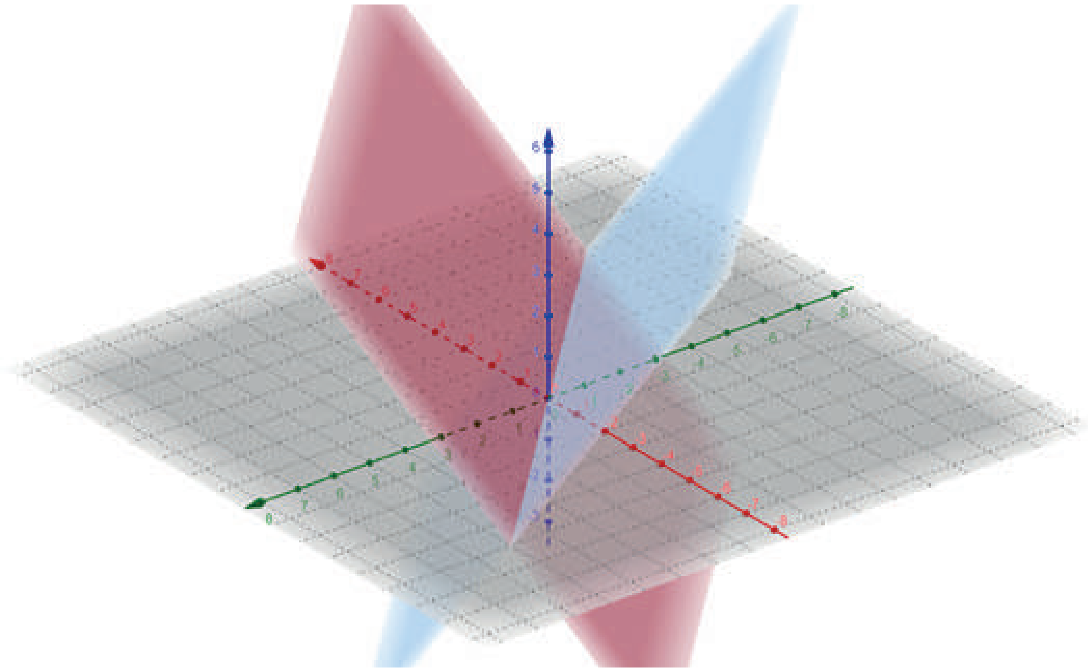
Los matemáticos suelen usar un parámetro para definir la respuesta en la que se asigna a x el parámetro de t, luego $y=-t$, y también $z=0$. Por lo que la respuesta serán todos los puntos que cumplen las condiciones: $(t,-t,0)$ que sin duda forma la ecuación paramétrica de una recta en el espacio tridimensional:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

Graficando el sistema de ecuaciones, como se observa en la Fig. 1.5, los dos planos que representan a las dos ecuaciones planteadas se cortan formando una recta cuya ecuación es la solución obtenida en el proceso analítico. De esto podemos deducir que este sistema presenta infinitas soluciones, ya que existen infinitos puntos (los puntos de las rectas) en los que los planos se encuentran.

Figura 1.5

Dos planos que corresponden al sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas con infinitas soluciones



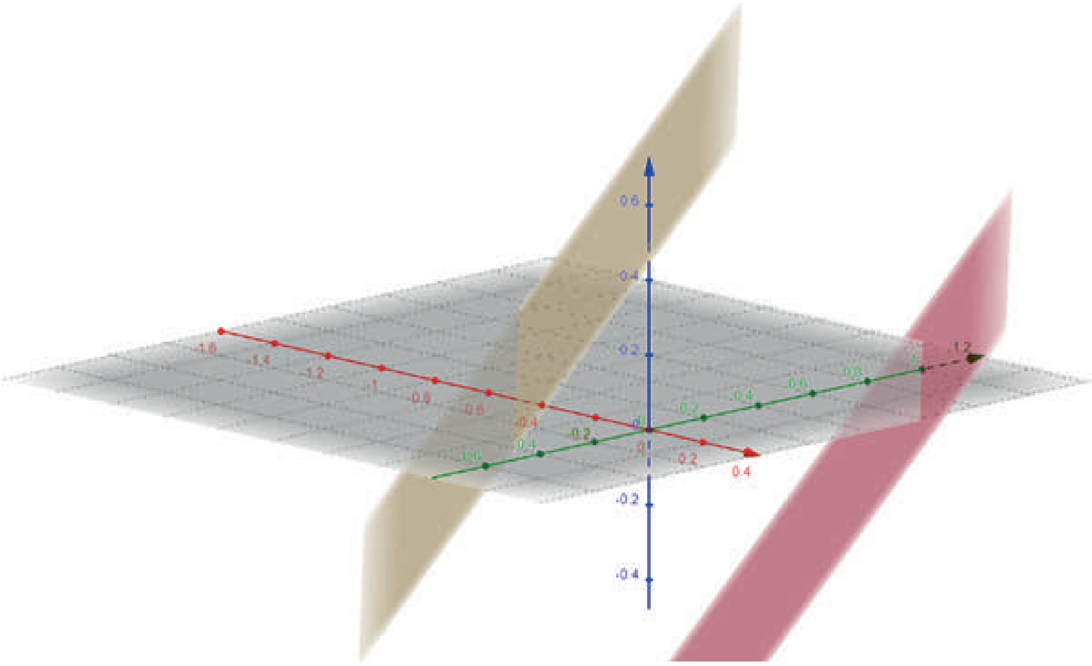
Para el caso de un sistema con tres variables sin solución, consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = -1 \end{cases} \quad (1.12)$$

Analíticamente el sistema (1.12) puede ser resuelto por reducción lo cual da como resultado la expresión 0=-3. Esto implica una contradicción, con lo cual se determina que el sistema no tiene solución. Esto lo podemos verificar gráficamente en la Fig. 1.6, en la que podemos observar a los dos planos que son paralelos y por lo tanto no tienen puntos comunes.

Figura 1.6

Dos planos que corresponden al sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas sin solución



Hemos visto los sistemas para dos y tres incógnitas, los cuales pueden tener solución única, infinitas soluciones o no tener soluciones. Las metodologías utilizadas han sido las usuales, el álgebra lineal propone otras técnicas que se consideran más generales en las que se pueden incluir grandes cantidades de variables.

1.2 Ejercicios propuestos

I. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

En los ejercicios halle la solución al sistema de ecuaciones lineales.

1. $x + y = 3$
   $2x + 2y = 6$

2. $3x + 2y = 4$
   $6x + 4y = 8$

3. $2x - y = 5$
   $4x - 2y = 10$

4. $3x - 2y = 7$
   $6x - 4y = 14$

5. $x + 2y = 5$
   $2x + 4y = 10$

6. $2x - 3y = 8$
   $4x - 6y = 16$

7. $x + y = 5$
   $x - y = 3$

8. $3x + 2y = 6$
   $6x + 4y = 12$

9. $2x - y = 3$
   $4x - 2y = 5$

10. $3x - 4y = 6$
    $6x - 8y = 12$

II. Sistema de ecuaciones consistentes e inconstantes:

11. Encuentra los valores de *a* para que el sistema tenga solución única:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 5x + \boldsymbol{a}y &= 2 \end{aligned}$$

12. Encuentra los valores de *a* para que el sistema sea consistente y tenga infinitas soluciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}x + y &= 3 \\ 2x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

13. Encuentra los valores de *a* para que el sistema sea inconsistente:

$$\begin{aligned} x + \boldsymbol{a}y &= 4 \\ 3x - y &= 8 \end{aligned}$$

14. Encuentra los valores de *a* para que el sistema tenga solución única:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 6 \\ \boldsymbol{a}x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

15. Encuentra los valores de *a* y *b* para que el sistema sea consistente y tenga infinitas soluciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}x + 3y &= 2 \\ 2x + \boldsymbol{b}y &= 2 \end{aligned}$$

16. Encuentra los valores de *a* y *b* para que el sistema sea inconsistente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}x + 5y &= 1 \\ 3x + \boldsymbol{b}y &= 1 \end{aligned}$$

17. Encuentra los valores de *a* y *b* para que el sistema sea consistente y tenga infinitas soluciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}x + 2y &= 0 \\ 5x + \boldsymbol{b}y &= 0 \end{aligned}$$

18. Encuentra los valores de a, b, c y d para que el sistema sea inconsistente:

$$\begin{aligned} ax + by &= 2 \\ cx + dy &= 4 \end{aligned}$$

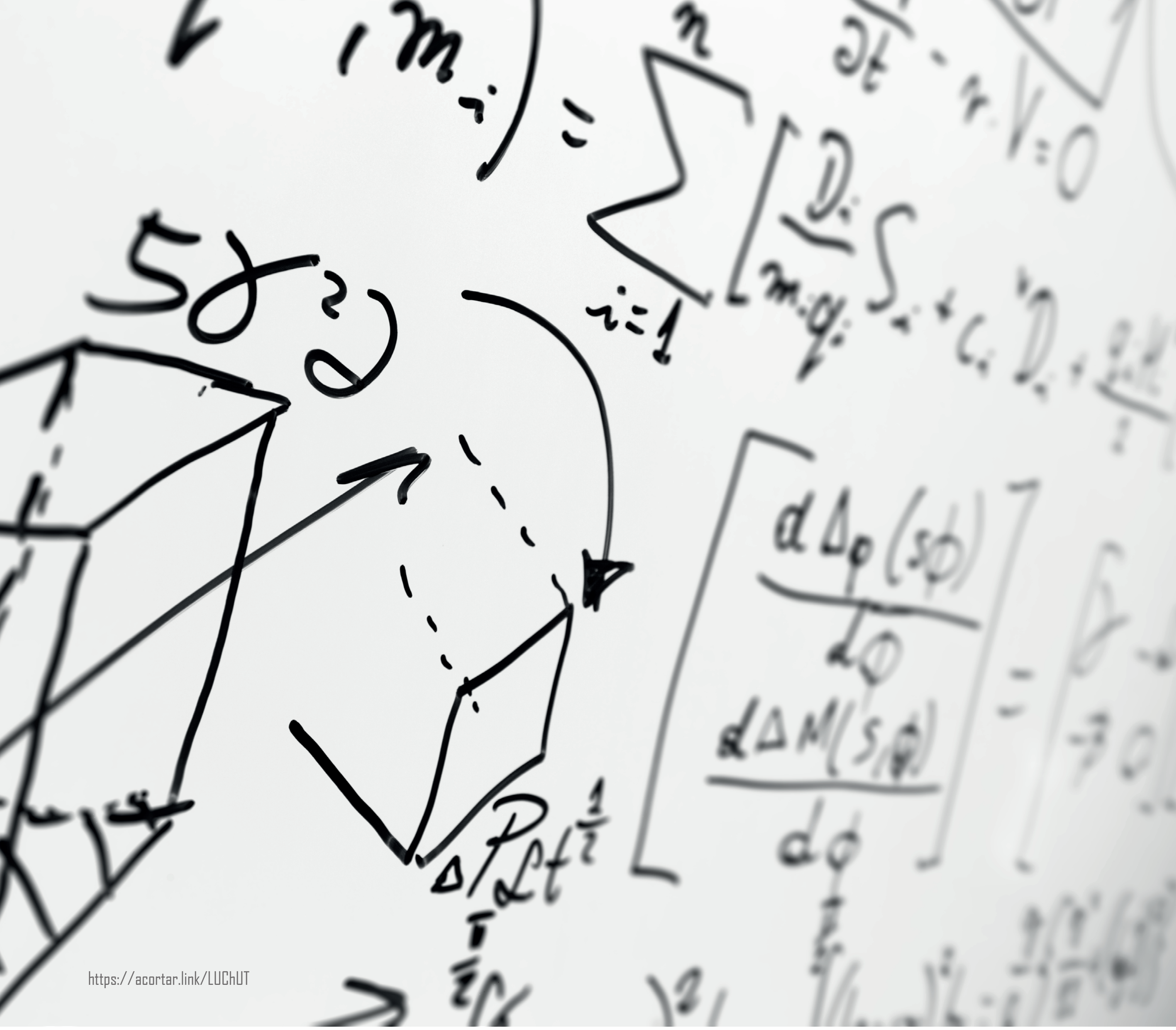
19. Encuentra los valores de a, b, c y d para que el sistema tenga solución única:

$$\begin{aligned} ax + by &= 7 \\ cx + dy &= 7 \end{aligned}$$

20. Encuentra los valores de a, b, c y d para que el sistema sea consistente y tenga infinitas soluciones:

$$ax + by = 5$$

$$cx + dy = 1$$



https://acortar.link/LUChUT

CAPÍTULO II

Matrices

2.1 Caracterización de una Matriz

Una matriz puede ser definida como un conjunto de filas y columnas que forman un arreglo en el que cada posición estará representada por elementos que pertenecen a un campo definido, es decir, los elementos pueden ser números, funciones, matrices, entre otros.

Una matriz se denota con letras mayúsculas del abecedario. Los elementos de la matriz suelen denotarse con letras minúsculas y con dos subíndices, el primero para describir el número de fila y el segundo para describir el número de columna que ocupa el elemento. En forma general, el elemento y su posición se describen como a_{ij} en donde:

i: representa la fila en la que se posiciona el elemento, y

j: representa la columna en la que se posiciona el elemento.

Cabe mencionar que las filas deben ser observadas en forma horizontal y las columnas en forma vertical. En la ecuación (2.1) se observa una matriz que posee 3 filas y 3 columnas, por lo que sus elementos correspondientes son los que aparecen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Así, como ejemplo, se dice que el elemento a_{21} es el término que se encuentra en la segunda fila de la primera columna de la matriz A.

2.1.1 Orden de una matriz

Hemos visto los sistemas para dos y tres incógnitas, los cuales pueden tener solución única, infinitas soluciones o no tener solución. En adelante se usarán otras técnicas más generales para la respuesta de estos sistemas y podrán ser aplicados para muchas más variables.

Utilizaremos los números naturales para definir el orden de una matriz. El orden de la matriz es la cantidad de filas y columnas que esta posee. Específicamente, utilizaremos la notación:

$$A = (a_{ij})_{m\,x\,n} \tag{2.2}$$

En esta notación, m representa el número de filas y n representa el número de columnas que la matriz posee. Por ejemplo, la matriz en (2.1) tiene 3 filas y 3 columnas, por lo que su orden será 3x3.

Si los elementos de la matriz son números reales $\mathbb{R}$, se dice que la matriz está sobre el campo de los reales. En el caso en el que los elementos de la matriz sean números complejos, se dice que la matriz trabaja en el campo de los complejos.

Las matrices también pueden ser consideradas como una función, cuyo dominio son las diferentes posiciones o pares ordenados $(\quad)_{ij}$ donde i y j pertenecen a los números naturales $\mathbb{N}$; y su recorrido es el campo K (números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$).

Con esta definición, la matriz en (2.1) quedaría definida como la función:

$$\begin{aligned} A: \quad & 3x3 \rightarrow \mathrm{K} \\ & (\quad)_{ij} \rightarrow a_{ij} \end{aligned}$$

Como se dijo anteriormente, los subíndices indican el número de fila y columna respectivamente.

Ejemplo 2.1. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

a. ¿Cuál es el orden de la matriz?

b. Encuentre los elementos a_{22}, a_{23}, a_{31}

c. Escriba la definición de la matriz A en forma de función:

Solución:

a. El orden de la matriz es de 2 x 3, es decir 2 filas x 3 columnas

b. $a_{22}=5$; $a_{23}=4$; a_{31}: no existe este término

c. $A: \quad 2x3 \rightarrow \mathbb{R}$

$\qquad (\quad)_{ij} \rightarrow a_{ij}$

Utilizamos la notación $M_{m\times n}$ para notar las matrices de cualquier orden m×n. Se las conoce como rectangulares. Para el caso en el que la matriz tenga el mismo número de filas y columnas, la matriz recibe el nombre de cuadrada y se la denota como M_n.

2.1.2 Matrices iguales

Se dice que dos matrices son iguales si sus elementos correspondientes son iguales, esto implica que el orden debe de ambas también será el mismo. Por ejemplo, para que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ sean iguales, se debe cumplir que: a=2 y b =4. Para que las matrices $\begin{pmatrix} -k+2 \\ 2-3m \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sean iguales, se debe cumplir: $-k+2=2$ y $2-3m=0$, entonces $k=0$ y m=2/3.

2.1.3 Vector

El vector junto con la matriz, son los elementos más importantes del álgebra. El vector puede ser considerado como una matriz fila o matriz columna. Un vector es la representación en una o varias dimensiones de alguna variable, es un arreglo de n números ordenados en una fila o columna.

Vector fila: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Vector columna: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Los x_n son los elementos o componentes del vector.

2.1.4 Dimensión de un vector

Se relaciona la dimensión de un vector con el número de componentes de este, de esta manera un vector de n componentes, es un vector de dimensión n. Por ejemplo:

a. (1,1) es un vector fila, de dimensión 2.

b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un vector columna, de dimensión 4.

2.1.5 Vector nulo o cero

Llamaremos vector cero a aquel vector de dimensión n, cuyos elementos son todos cero. Por ejemplo:

a. (0,0,0) es un vector nulo, de dimensión 3.

b. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector nulo, de dimensión 2.

2.2 Operaciones con matrices

Se definen las siguientes operaciones básicas con matrices:

2.2.1 Multiplicación matriz – escalar

Definición: Dada la matriz A=(a_{ij}) de orden m x n y un escalar cualquiera α. Entonces, se define el producto αA como la multiplicación del escalar α por las componentes a_{ij} de la matriz A, dando como resultado una nueva matriz de orden $m \times n$.

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades:

1. Clausurativa: $\alpha A \in M_{m\times n}$
2. Asociativa: $(a\beta)A=a(\beta A)$, $A(aB)=a(AB)=(aA)B$
3. Distributiva con respecto a la suma de matrices $a(A+B)=aA+aB$
4. Distributiva con respecto a la suma de escalares:$(a+\beta)A = aA+\beta A$
5. El 1 es el elemento identidad del producto escalar: 1A=A

Ejemplo 2.2

Multiplicar 3 por la matriz A= $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0.5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

Para esto, multiplicamos el escalar 3 por cada valor de la matriz A, por tanto:

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0.5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1.5 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Partiendo desde la misma matriz A, calcule: $1/2\ A$ y $0A$.

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0.5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0.25 & -1.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0A = 0\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0.5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.3

Realizar la multiplicación de α=5 por la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\alpha A = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.4

En el campo de los complejos también se puede realizar esta operación: Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

Multiplicar el escalar z=(1-2i) por la matriz A= $\begin{pmatrix} 2+i & 3-i & 4 \\ 3i & -i & 1-2i \\ 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

$$zA = (1-2i)\begin{pmatrix} 2+i & 3-i & 4 \\ 3i & -i & 1-2i \\ 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2+i)(1-2i) & (3-i)(1-2i) & 4(1-2i) \\ 3i(1-2i) & -i(1-2i) & (1-2i)(1-2i) \\ (1-i)(1-2i) & (1+i)(1-2i) & 0(1-2i) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2-4i+i-2i^2) & (3-6i-i+2i^2) & (4-8i) \\ (3i-6i^2) & (-i+2i^2) & (1-2i-2i+4i^2) \\ (1-2i-i+2i^2) & (1-2i+i-2i^2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2-3i-2(-1)) & (3-7i+2(-1)) & (4-8i) \\ (3i-6(-1)) & (-i+2(-1)) & (1-4i+4(-1)) \\ (1-3i+2(-1)) & (1-i-2(-1)) & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4-3i & 1-7i & 4-8i \\ 6+3i & -2-i & -3-4i \\ -1-3i & 3-i & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Suma de matrices

Definición: Tenemos dos matrices A=(a_{ij}) y B=(b_{ij}), ambas del mismo orden m×n. Podemos definir la operación suma de A y B como otra matriz del mismo orden $m \times n$, cuyos elementos son el resultado de sumar las componentes a_{ij} y b_{ij} respectivamente.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Nota: La suma de matrices es posible si y sólo si las matrices involucradas son del mismo orden (tamaño).

Propiedades

1. Clausurativa: A+B $\in M_{m\times n}$
2. Asociativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. Conmutativa $A+B=B+C$
4. Existencia del neutro aditivo: $\forall$ matriz A $\in M_{m\times n}$, $\exists$ una matriz 0 $\in M_{m\times n}$ $\therefore$ $A+0=A$
5. Existencia del inverso aditivo: $\forall$ *matriz A* $\in M_{m\times n}$, $\exists$ una matriz (-A) $\in M_{m\times n}$ $\therefore$ $A + (-A) = 0$

Ejemplo 2.5

Sean A= $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Encontrar $A + B$

Solución:

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -4\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & 2+4 & -4-5\\ 0-1 & 5+0 & -2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6 & -9\\ -1 & 5 & -3\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.6

Sean $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 3 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Encontrar $A+B$

Solución:

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 3 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-4 & 5-1\\ -1+3 & 0-3\\ 3-1 & -2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.7

Sean $A=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$. Encontrar $A+B$

Solución:

$$A+B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+4\\ 2-1\\ 3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.8

Sean $A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Encontrar $A+B$

Solución:

$$A+B=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1 & \frac{-1}{2}-1 & \frac{4}{5}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

Para matrices cuyos elementos pertenecen al campo complejo, se puede definir la operación suma de matrices de forma análoga: Sea A y B $\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

Ejemplo 2.9

Sean $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2-i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+2i \\ 3+2i & 1-2i \end{pmatrix}$. Encontrar $A+B$

Solución:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+2i & 2-i \\ 2i & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-3i & 1+2i \\ 3+2i & 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i+2-3i & 2-i+1+2i \\ 2i+3+2i & 3+1-2i \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3-i & 3+i \\ 3+4i & 4-2i \end{pmatrix}$$

Encontrar *A-B*

Solución:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+2i & 2-i \\ 2i & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-3i & 1+2i \\ 3+2i & 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i-2+3i & 2-i-1-2i \\ 2i-3-2i & 3-1+2i \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1+5i & 1-3i \\ -3 & 2+2i \end{pmatrix}$$

¿Cómo realizar la resta de matrices?

La resta de matrices se puede escribir como *A-B* y para su cálculo podemos acudir a la suma de las matrices *A y (-B)*. Bastaría con multiplicar *B* por el escalar -1 para luego sumar este resultado con la matriz *A*. Esto implica realizar la resta aritmética término a término entre *A y (-B)*.

Ejemplo 2.10

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, calcule:

i. $A-B$

ii. $2B - \frac{1}{3}C$

Solución:

i. $A-B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

ii. $2B - \frac{1}{3}C = 2\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{13}{3} \\ \frac{20}{3} & \frac{31}{3} \end{pmatrix}$

2.2.3 Multiplicación de matrices

Definición: El producto entre dos matrices: $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, de orden $m \times n$ y orden $n \times p$ respectivamente, se denota como AB y el resultado es una nueva matriz $C=(c_{ij})$ de orden $m \times p$, cuyos elementos se calculan como:

$c_{ij}=(Fila\ i\ de\ A) \cdot (Columna\ j\ de\ B)$, es decir:

$c_{ij}= a_{i1}\, b_{1j}+ a_{i2}\, b2j+\ldots+a_{in}\, b_{nj}$

Analizando el proceso de multiplicación podemos notar que, para que la multiplicación se pueda dar, es necesario que el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de filas de la matriz B.

Propiedades:

1. Asociativa: (AB)C = A(BC)
2. Distributiva: A(B+C) = AB+AC
3. Asociativa: (AB)C=A(BC)
4. Distributiva: A(B+C) =AB+AC
5. No conmutativa (en general) AB≠BA

Ejemplo 2.11

Sean $A = (4 \quad -1 \quad 2)$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Encontrar $C = A \cdot B$

Solución:

Para que la multiplicación entre A y B sea posible, el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B. A es una matriz de orden 1×3 es decir 1 fila y 3 columnas, por otro lado, B es una matriz de orden 3×1 es decir 3 filas y 1 columna. Se cumple la condición para multiplicar A y B. El resultado es la suma de los productos correspondientes que equivalen a una matriz de dimensión 1×1.

$$C = F \cdot C = (4 \quad -1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 9$$

Ejemplo 2.12

$$\text{Sean } A = (4 \quad -1 \quad 2) \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Encontrar } B \cdot A$$

Solución:

Se tiene que B es de orden 3×1 y A es de orden 1×3. Las matrices cumplen la condición para efectuar el producto, el resultado será una matriz 3×3. No olvidar que el procedimiento es: Primera fila de A por la primera columna de B y este resultado es el primero elemento de la primera fila de C, decir c_{11}. Luego, la primera fila de A por segunda columna de B y esto produce el elemento c_{12}, podemos continuar así sucesivamente.

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (4 \quad -1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Conclusión: Como ya se esperaba, la operación de multiplicar matrices, en general, no es conmutativa. Es decir, no es lo mismo el producto de A·B que el producto de B·A

Ejemplo 2.13

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Encontrar } C = A \cdot B$$

Solución:

A es una matriz de orden 2×2 y B es una matriz de orden 2×2 por lo tanto A y B cumplen con la condición y el resultado será una matriz 2×2.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & -2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Encontrar $C = B \cdot A$

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.14

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Encontrar $C = A \cdot B$

Solución:

Podemos ver que *A* es una matriz de orden 2×3 y *B* es una matriz de orden 3×4, se cumple la condición de la multiplicación.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (3 \quad -2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 4$$

$$c_{12} = (3 \quad -2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (0) = -7$$

$$c_{13} = (3 \quad -2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot (1) = -7$$

$$c_{14} = (3 \quad -2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 4$$

$$c_{21} = (-1 \quad 0 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -6$$

$$c_{22} = (-1 \quad 0 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (0) = 1$$

$$c_{23} = (-1 \quad 0 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$c_{24} = (-1 \quad 0 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -5$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -7 & 4 \\ -6 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Encontrar $C = B \cdot A$

Solución:

B es una matriz de orden 3×4 y *A* es una matriz de orden 2×3. *A* y *B* no cumplen la condición, ya que *B* tiene 4 columnas y *A* solo 2 filas, por lo tanto, no se puede realizar esa operación.

En el campo de los complejos también se puede realizar la operación de producto de matrices: Sea A y $B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Ejemplo 2.15

Sean $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2i \\ 2-i & 1-i \\ -2 & i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2-3i \\ 1+i \end{pmatrix}$. Encontrar $C = A \cdot B$

Solución:

Dado que A es una matriz de orden 3×2 y B es una matriz de orden 2×1 se puede efectuar el producto de ambas y se obtendrá una matriz de orden 3×1.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1+2i & 2i \\ 2-i & 1-i \\ -2 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-3i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2i)(2-3i) + 2i(1+i) \\ (2-i)(2-3i) + (1-i)(1+i) \\ -2(2-3i) + i(1+i) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-3i+4i-6i^2+2i+2i^2 \\ 4-6i-2i+3i^2+1+i-i-i^2 \\ -4+6i+i+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3i \\ 3-8i \\ -5+7i \end{pmatrix}$$

2.2.4 Potencia de una matriz

Definición: Se denomina potencia k de una matriz cuadrada A, al producto de k veces la matriz A.

Ejemplo 2.16

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Encontrar A^3

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.17

Sea $A = \begin{pmatrix} 1-2i & -i \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$. Encontrar A^3

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-2i & -i \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2i & -i \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-4i & -1-3i \\ 0 & 3+4i \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -3-4i & -1-3i \\ 0 & 3+4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2i & -i \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+2i & -3-4i \\ 0 & 2+11i \end{pmatrix}$$

2.3 Matrices especiales

2.3.1 Sub-matriz

Definición: Matriz que se forma al seleccionar ciertas filas y ciertas columnas de otra matriz más grande.

Existen ocasiones en donde es aconsejable manejar matrices de órdenes grandes como bloques más pequeños, es decir, sub-matrices.

La sub-matriz se usa con mayor frecuencia en la multiplicación de matrices, y se denomina *multiplicación por bloques*. La multiplicación por bloques es muy similar a la multiplicación ordinaria (Del Valle Sotelo, 2011).

Ejemplo 2.18

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar $A \cdot B$

Solución:

Como vemos, A tiene orden 4×4 y B tiene orden 4×3 por lo tanto las matrices A y B cumplen con la condición para el producto y el resultado será una matriz 4×3.

Podemos tomar las matrices A y B y partirlas en bloques de modo que podamos aplicar la operación de multiplicación con sub-matrices.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [C] & [D] \\ [E] & [F] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [G] & [H] \\ [J] & [K] \end{pmatrix}$$

Donde $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y así las demás sub-matrices. Vemos entonces que las matrices A y B se reducen a matrices de orden 2×2. Aplicamos el proceso de una multiplicación ordinaria.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [CG + DJ] & [CH + DK] \\ [EG + FJ] & [EH + FK] \end{pmatrix}$$

Luego realizamos la operación *CG* y *DJ*.

$$CG = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$DJ = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 22 \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos estos resultados para obtener *CG*+*DJ*.

$$\boldsymbol{CG + DJ} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -13 & 23 \end{pmatrix}$$

De esta forma, se coloca el resultado en donde corresponde, y continuamos con los siguientes corchetes.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -13 & 23 \end{bmatrix} & [CH + DK] \\ [EG + FJ] & [EK + FK] \end{pmatrix}$$

$$CH = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$DK = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{CH + DK} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$EG = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$FJ = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{EG + FJ} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$EH = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$FK = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{EK} + \boldsymbol{FK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} [CG + DJ] & [CH + DK] \\ [EG + FJ] & [EH + FK] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -13 & 23 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 0 \\ -13 & 23 & 1 \\ 8 & -6 & -2 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Hipermatriz

Definición: Hipermatriz es aquella que representa más de dos dimensiones, es decir, que tiene tres o más dimensiones y se la denota con la letra *T*. Para entender de mejor manera esta definición recapitulamos lo aprendido hasta ahora:

Ejemplo 2.19

1. Veamos el vector A que equivale a una matriz en una dimensión:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Para obtener una matriz en dos dimensiones podemos efectuar la multiplicación de dos vectores, así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

3. El producto de la matriz anterior por un vector podría verse como una hipermatriz que tiene tres dimensiones:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$T = A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Aparentemente no cumplen las condiciones para que se realice la multiplicación, pero la realidad es que la matriz $A{\cdot}B$ es un plano (2D) conformado por tres vectores. El procedimiento que describimos a continuación se utiliza para multiplicar en 3D.

$$T = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Procedemos a realizar el producto de $A{\cdot}B$ por C

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 32 & 36 \\ 56 & 64 & 72 \\ 84 & 96 & 108 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 45 \\ 70 & 80 & 90 \\ 105 & 120 & 135 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 48 & 54 \\ 84 & 96 & 108 \\ 128 & 144 & 162 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 28 & 32 & 36 \\ 56 & 64 & 72 \\ 84 & 96 & 108 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 35 & 40 & 45 \\ 70 & 80 & 90 \\ 105 & 120 & 135 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42 & 48 & 54 \\ 84 & 96 & 108 \\ 128 & 144 & 162 \end{pmatrix} \right]$$

Podemos generalizar para la multiplicación en 3D y decir que:

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix}$$

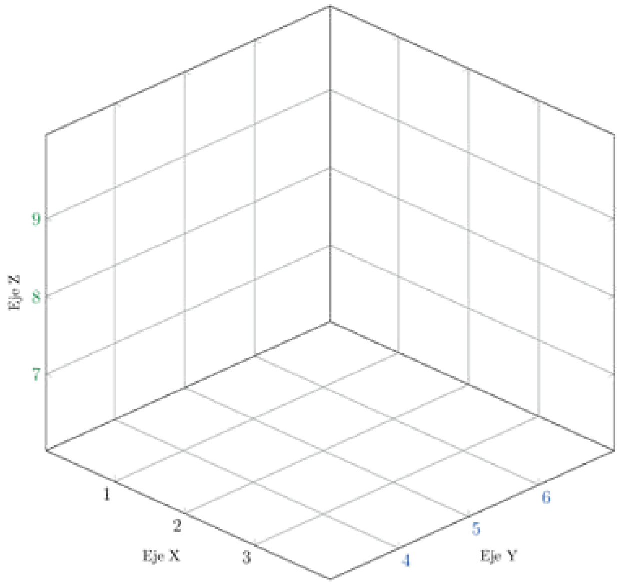
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix}$$

$$T = \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} & a_{11}b_{11}c_{12} & a_{11}b_{11}c_{13} \\ a_{21}b_{11}c_{11} & a_{21}b_{11}c_{12} & a_{21}b_{11}c_{13} \\ a_{31}b_{11}c_{11} & a_{31}b_{11}c_{12} & a_{31}b_{11}c_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}b_{12}c_{11} & a_{11}b_{12}c_{12} & a_{11}b_{12}c_{13} \\ a_{21}b_{12}c_{11} & a_{21}b_{12}c_{12} & a_{21}b_{12}c_{13} \\ a_{31}b_{12}c_{11} & a_{31}b_{12}c_{12} & a_{31}b_{12}c_{13} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_{11}b_{13}c_{11} & a_{11}b_{13}c_{12} & a_{11}b_{13}c_{13} \\ a_{21}b_{13}c_{11} & a_{21}b_{13}c_{12} & a_{21}b_{13}c_{13} \\ a_{31}b_{13}c_{11} & a_{31}b_{13}c_{12} & a_{31}b_{13}c_{13} \end{pmatrix} \end{matrix} \right]$$

Podemos utilizar un esquema cartesiano con ejes x, y, z para graficar o representar una hipermatriz de tres dimensiones, podemos asignar los vectores A,B y C de forma arbitraria.

Figura 2.1

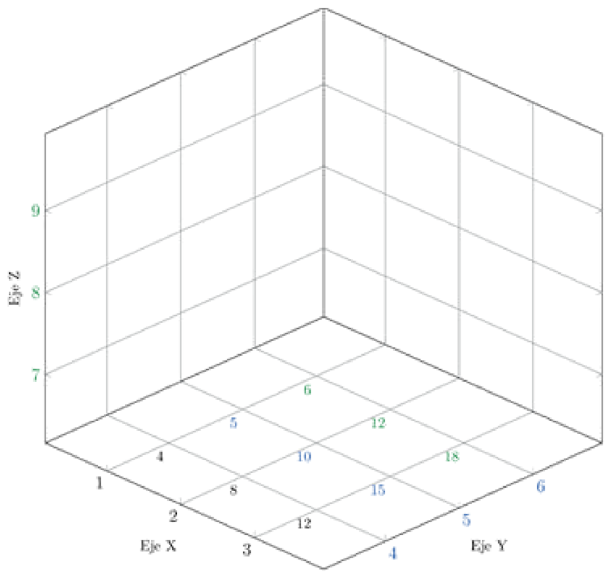
Plano cartesiano para la representación gráfica de hipermatrices



En este caso, A esta en el *eje x*, B en el *eje y* y C en el *eje z*. Por consiguiente, el producto $A{\cdot}B$ se encuentra en el plano xy. Esto se muestra en la Fig. 2.2.

Figura 2.2

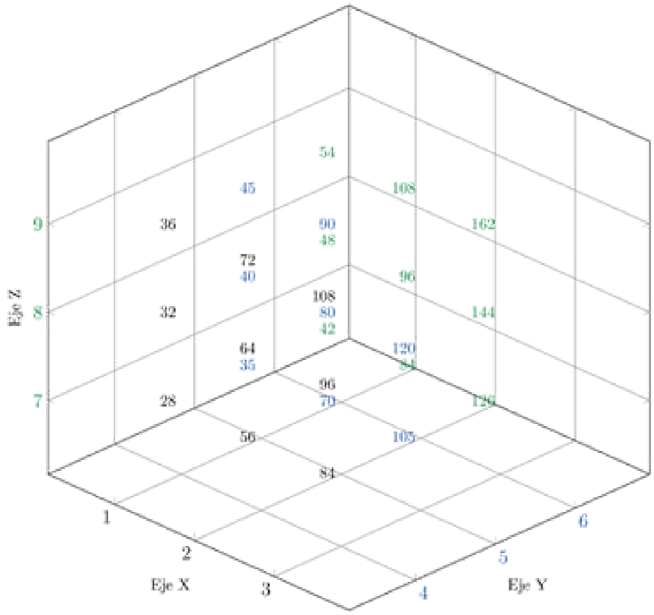
Representación del producto A·B en el eje y.



Al multiplicar $A{\cdot}B$ por C, tenemos:

Figura 2.3

Representación del producto A·B por el vector C.



Cada color representa una de las matrices que componen a T.

2.4 Clasificación de Matrices

2.4.1 Matriz cuadrada

Definición: Una matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ se denomina cuadrada sí es que es de orden $n \times n$, es decir, el número de filas es igual al número de columnas.

Se llama *diagonal principal* para una matriz cuadrada a aquellos elementos que van desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.4.2 Matriz Nula

Definición: Se denomina matriz cero o nula, a la matriz $O=(a_{ij})_{m\times n}$ si y sólo si $a_{ij}=0$ para todo i y para todo j.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Matriz Identidad

Definición: Matriz identidad es la matriz cuadrada $I_n=(aij)_{n\times n}$ cuyos elementos de la diagonal principal son 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.20

La matriz identidad de orden 3, se denota I_3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.4 Matriz transpuesta

Definición: Se denomina matriz transpuesta de $A = (a_{ij})_{m\times n}$, a la matriz $A^t = (\hat{a}_{ij})_{n\times m}$ si y sólo si $\hat{a}_{ij}=a_{ji}$. Esto quiere decir que, para obtenerla, podemos escribir las filas como columnas, esto hace que cambie el orden si la matriz no es cuadrada.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.21

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Encontrar A^t.

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.4.5 Matriz simétrica

Definición: Se denomina matriz simétrica, a la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_n$ en la que se cumple que $A = A^t$.

Ejemplo 2.22

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Demostrar que A es simétrica.

Solución:

Encontramos A^t

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado que $A^t = A$ podemos afirmar que A es simétrica.

2.4.6 Matriz antisimétrica

Definición: Se llama matriz antisimétrica, a la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_n$ en la que se cumple que $A^t = -A$.

Ejemplo 2.23

Sea a $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que A es antisimétrica.

Solución:

Encontramos A^t y $-A$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } -A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que $A^t = -A$ por lo tanto, podemos afirmar que ^{A} es antisimétrica.

2.4.7 Matriz diagonal

Definición: Se denomina matriz diagonal, a la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_n$ tal que los elementos de no están en la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.24

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4.8 Matriz triangular superior

Definición: Se denomina matriz triangular superior a la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_n$ tal que los elementos debajo de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4.9 Matriz triangular inferior

Definición: Se denomina matriz triangular inferior a la matriz cuadrada $A=(a_{ij})_n$ en la que los elementos encima de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.26

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.4.10 Matriz conjugada

Definición: Se denomina matriz conjugada de $A=(a_{ij})_{m\times n}$, a la matriz $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{m\times n}$, si y sólo si $\bar{a}_{ij}$ es la conjugada del número complejo a_{ij}.

Ejemplo 2.27

Sea $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 2+2i & i \\ -3i & -2-i \end{pmatrix}$. Encontrar $\bar{A}$.

Solución:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 2-2i & -i \\ 3i & -2+i \end{pmatrix}$$

2.4.11 Matriz hermitiana

Definición: Se denomina matriz hermitiana a la matriz cuadrada $A=(a_{ij})_n$, en la que se cumple que $At=\bar{A}$

Ejemplo 2.28

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i & -i \\ 1-2i & 1 & 2+i \\ i & 2-i & 2 \end{pmatrix}$. Encontrar sí A hermitiana.

Solución:

Encontramos A^t y $\bar{A}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1-2i & i \\ 1+2i & 1 & 2-i \\ -i & 2+i & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1-2i & i \\ 1+2i & 1 & 2-i \\ -i & 2+i & 2 \end{pmatrix}$$

Encontramos que $A^t = \bar{A}$ por lo tanto, queda demostrado que A es hermitiana. Observe que los elementos que pertenecen a la diagonal principal de esta matriz son reales.

2.4.12 Matriz reducida

Definición: Una matriz se llama reducida si cumple dos condiciones:

a. El primer elemento diferente de cero que aparezca en cada fila de izquierda a derecha debe ser uno.

b. El resto de elementos de la columna donde se encuentre dicho número uno (mencionado en la condición anterior), deben ser ceros.

Ejemplo 2.29

A, B y C son matrices reducidas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D, E y F, no son matrices reducidas:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.13 Matriz reducida

Definición: Llamaremos matriz reducida a una matriz que cumpla dos condiciones:

a. En cada fila no nula de la matriz, el primer elemento deberá ser el número uno (siempre visto de izquierda a derecha).

b. En la columna donde se encuentre dicho número uno (mencionado en la condición anterior), los demás elementos deben ser ceros.

Ejemplo 2.30

A, B y C son matrices reducidas:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

D, E y F, no son matrices reducidas:

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 12 & 0\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2.5 Operaciones de fila de una matriz

Se pueden efectuar tres tipos de operaciones de fila en una matriz, estas son

1. Multiplicar una fila F_n por una constante α distinta de cero. Es decir, reemplazar la fila F_n por su equivalente aF_n. Notación: $F_n \to aF_n$, donde n, es el número de la fila.
2. Sumar α veces la fila F_n a una fila F_r. Es decir, reemplazar la fila F_r por su equivalente $aF_n + F_r$. Notación: $F_r \to aF_n + F_r$, donde n y r, son el número de fila.
3. Intercambiar la fila F_r por la fila F_s. Es decir, reemplazar la fila F_r por la fila F_s. Notación: $F_r \rightleftharpoons F_s$.

Se emplea el símbolo ~ para indicar que se ha realizado una operación de fila a la matriz y se dice que este cambio produce una matriz equivalente por filas a la matriz anterior

El objetivo de realizar operaciones de fila en una matriz es llevarla a su forma reducida y debe cumplir las condiciones dadas en esta definición.

Ejemplo 2.31

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, utilice operaciones de fila sobre la matriz A.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}_{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}_{F_2 \to F_1 + F_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 9/2 \end{pmatrix}_{F_2 \to \frac{2}{9}F_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{F_2 \to \frac{2}{9}F_2}$$

Ejemplo 2.32

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, utilice operaciones de fila sobre la matriz A.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}_{F_3 \to -2F_2 + F_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{F_2 \to -F_1 + F_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5.1 Matriz aumentada

Definición: Es la matriz resultante de ampliar uniendo una primera matriz con otra. Se las puede escribir una después de la otra. La representación se la hace dibujando una línea entre ambas matrices. Su notación es: $(A_{n\times m} \mid B_{n\times p})$

El número de filas de la matriz *A* debe ser igual al número de filas de la matriz *B*.

Ejemplo 2.33

Utilice la matriz identidad de orden 3 para crear una matriz aumentada para la matriz *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculemos la matriz ampliada $(A_n \mid I_n)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2.5.2 Traza de una matriz

Definición: La traza de una matriz cuadrada se la obtiene al sumar los elementos de la diagonal principal. Se denota:

$$tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Ejemplo 2.34

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Encontrar la traza de A.

Solución:

tr A=1+(-3)+7=5

Ejemplo 2.35

Sea $A = \begin{pmatrix} 2+i & 3-i & 4 \\ 3i & -i & 1-2i \\ 1-i & 1+i & 1-2i \end{pmatrix}$. Encontrar la traza de A.

Solución:

tr A =(2+i)+(-i)+(1-2i)=2+i-i+1-2i=3-2i

2.6 Ejercicios propuestos

I. Realizar las operaciones indicadas sobre las matrices definidas.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Hallar la suma A+3D
2. Hallar la suma -B+2A
3. Hallar la suma 4A-3C
4. Hallar la suma 4D-2C
5. Hallar la suma D-3B
6. Hallar la suma 2A+3D-2C
7. Hallar el resultado de 3C-A+2B
8. Hallar el resultado de -3D-B+2C
9. Calcule la matriz X, dado: 3A-2C+X=B
10. Hallar el valor de la matriz X, dado: 3B-2C+2X=D+4A

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3-i & 1+i & 2-3i \\ -3 & 2i & 3+i \\ 1-2i & i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+2i & -2i & 3+i \\ -2+i & -5 & -2-3i \\ 2+i & i+2i & 4-3i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2i & -2i & i \\ 3 & -4+3i & -2i \\ -i & 6i & 5 \end{pmatrix}$ y , $D = \begin{pmatrix} 5 & -3i & 3 \\ -3 & -5 & 8 \\ 1 & -3i-i & 4-3i \end{pmatrix}$

11. Hallar la suma B+3D
12. Hallar la suma 2A-3C
13. Hallar la suma A-3B
14. Hallar la suma 4D-2C
15. Hallar la suma D-3A
16. Hallar el resultado de -3D-B+2C
17. Hallar el resultado de 2B-3A+5C
18. Hallar el resultado de 2A+3D-2C
19. Calcule la matriz X, dado: 2A-3C+X=2B
20. Hallar el valor de la matriz X, dado: 3D-5C-2X=2B+A

II. Multiplicación de matrices

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\6&-3&1\\-5&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\0&4&3\\1&-3&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\\3&-2\end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}0&3&-1\\1&5&2\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}4&-1\\6&3\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}1&2&4&-1\\5&-1&2&3\\-2&-1&0&6\end{pmatrix}$ y $G=\begin{pmatrix}1&5\\-1&2\\3&4\\4&-2\end{pmatrix}$

21. Hallar el producto de AB y BA
22. Hallar el producto de AC y CA
23. Hallar el producto de AD y DA
24. Hallar el producto de AF y FA
25. Hallar el producto BC y CB
26. Hallar el producto BD y DB
27. Hallar el producto BF y FB
28. Hallar el producto BC y CB
29. Hallar el producto CD y DC
30. Hallar el producto CE y EC
31. Hallar el producto DE y ED
32. Hallar el producto DF y FD
33. Hallar el producto DG y GD
34. Hallar el producto EG y GE
35. Calcule los productos FG y GF

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3-i&1+i&2-3i\\-3&2i&3+i\\1-2i&i&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1+i&2-i&2-i\\-1+2i&-3&i\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1+i&-1+2i\\0&3+2i\\1-i&-1-2i\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-i&-1+2i\\2&3-i\end{pmatrix}$,

$E=\begin{pmatrix}-1+2i&1&1-2i&2+i\\1-3i&0&-3-2i&-1+2i\\2-i&i&1+3i&-2i\end{pmatrix}$ y $F=\begin{pmatrix}-1-2i&5i\\2+3i&2-i\\6&4+3i\\4+i&-2+3i\end{pmatrix}$

36. Hallar el producto de AB y BA
37. Hallar el producto de AC y CA
38. Hallar el producto de AE y EA
39. Hallar el producto de BC y CB
40. Hallar el producto de BD y DB
41. Hallar el producto de BE y EB
42. Hallar el producto de BF y FB
43. Hallar el producto de CD y DC
44. Hallar el producto de DF y FD
45. Hallar el producto de EF y FE

III. Potencia de matrices

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1-i & -1+2i \\ 2-3i & 3-i \end{pmatrix}$

46. Hallar A^2
47. Hallar A^3
48. Hallar B^2
49. Hallar B^3
50. Hallar C^2
51. Hallar C^3
52. Hallar D^2
53. Hallar D^3
54. Hallar E^2
55. Hallar E^3

IV. Matrices especiales

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

56. Hallar el producto de AB y BA
57. Hallar el producto de AC y CA
58. Hallar el producto de AD y DA
59. Hallar el producto de BC y CB
60. Hallar el producto de BD y DB
61. Hallar el producto de CD y DC

V. Operaciones elementales de fila

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

62. Reducir A a una matriz triangular superior
63. Reducir A a una matriz identidad
64. Reducir B a una matriz triangular superior
65. Reducir B a una matriz identidad
66. Reducir C a una matriz triangular superior
67. Reducir C a una matriz identidad
68. Reducir D a una matriz triangular superior
69. Reducir D a una matriz identidad
70. Reducir la matriz E al mínimo
71. Reducir la matriz F al mínimo
72. Reducir la matriz G al mínimo

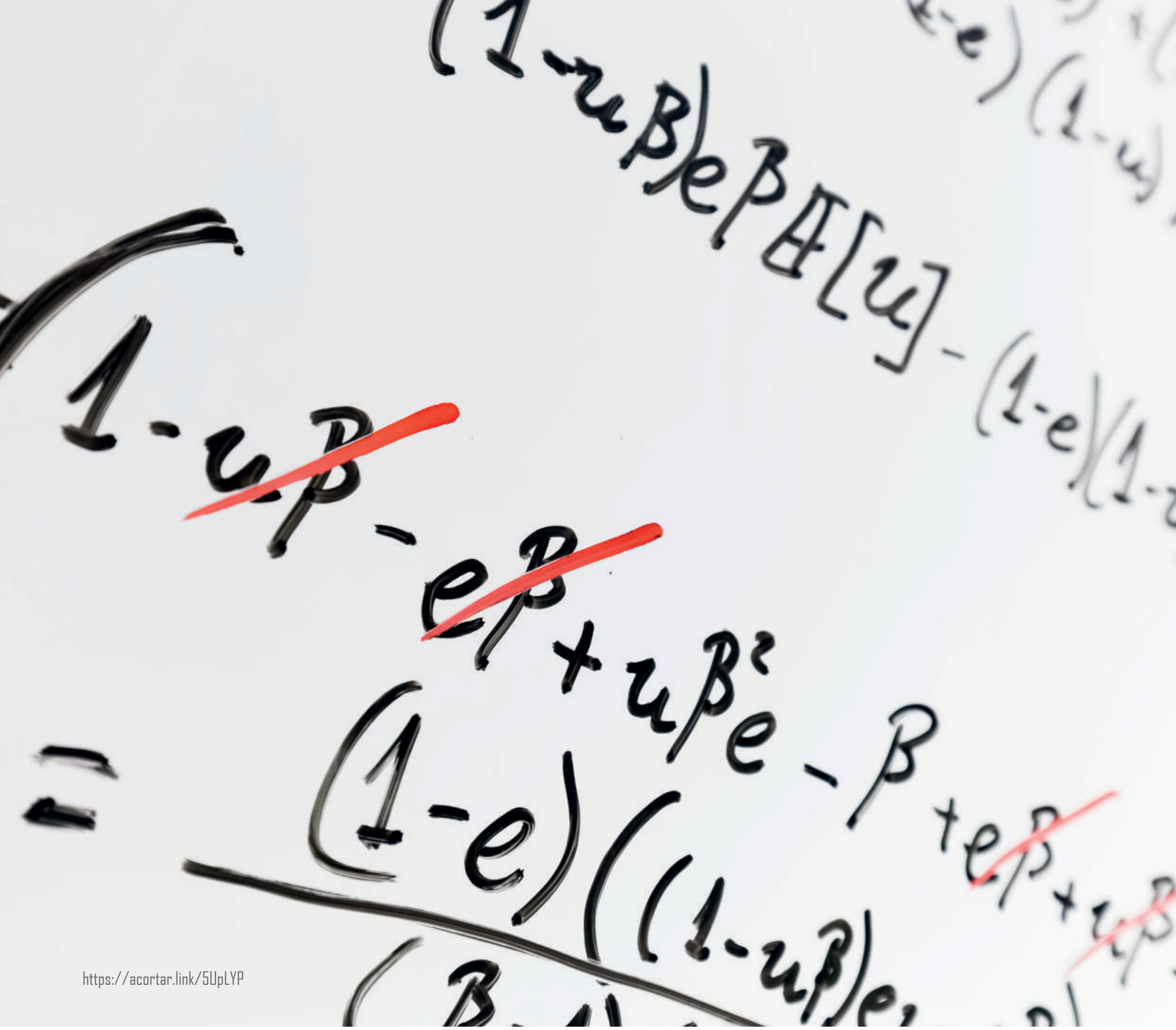
VI. Traza de una matriz

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

73. Hallar la traza de A
74. Hallar la traza de B
75. Hallar la traza de C
76. Hallar la traza de D
77. Hallar la traza de E
78. Calcule la traza de F

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3-i & 1+i & 2-3i \\ -3 & 2i & 3+i \\ 1-2i & i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+2i & -2i & 3+i \\ -2+i & -5 & -2-3i \\ 2+i & i+2i & 4-3i \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 1-i & -1+2i \\ 2-3i & 3-i \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -i & -1+2i \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}$

79. Hallar la traza de A
80. Hallar la traza de B
81. Hallar la traza de C
82. Hallar la traza de D
83. Hallar la traza de E
84. Hallar la traza de F


https://acortar.link/5UpLYP

CAPÍTULO III

Determinantes

3.1. Determinantes y definiciones

El determinante de una matriz es un número escalar asociado a esa matriz cuadrada. Este número proporciona información importante sobre la matriz y le da cierta caracterización. La notación de un determinante correspondiente a la matriz A se escribe de la siguiente manera:

$$det(A) \text{ o } |A|$$

Los determinantes están relacionados con las matrices, por lo cual no sería raro que se defina a los determinantes también como funciones, donde a cada matriz cuadrada le corresponde su determinante (Kolman, 2006).

$$\begin{aligned} \text{det:} \quad M_n &\to \mathrm{K} \\ A &\to \det(\mathrm{A}) \end{aligned}$$

Ahora es natural hacerse la pregunta ¿Cuál es el número correspondiente a cada matriz? El valor del determinante de una matriz depende básicamente del valor de sus elementos y también depende del orden de la matriz en cuestión. Existen métodos para encontrar el determinante de matrices de bajo orden: 1×1, 2×2 y 3×3, pero también existen métodos generales para cualquier orden de la matriz. Podemos comenzar estudiando los determinantes de matrices de orden 1, 2 y 3, por su facilidad. Luego estudiaremos un método recursivo para obtener el valor del determinante para matrices de orden superior.

3.1.1 Determinante de una matriz 1 × 1

Sea A=(a_{11}) una matriz 1 × 1. El determinante de esta matriz se define como: det(A)= a_{11}.

3.1.2 Determinante de una matriz 2 × 2

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz 2×2. El determinante de esta matriz se define como:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Como podemos ver. se deben multiplicar los números de la diagonal principal de la matriz (a_{11} a_{22}), y a ese resultado se debe restan del producto de los números de la diagonal secundaria (a_{12} a_{21}).

Se denotará como:

$$|A| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3.1.3 Determinante de una matriz 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz 3×3. Existen algunos métodos definidos para obtener su determinante, se pueden mencionar el método de Sarrus, (donde se duplican filas o columnas), o el método de la estrella. Sin embargo, nos interesa definir el siguiente método:

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Este método es mucho más interesante, pues es recursivo. Nos damos cuenta de que reduce un determinante de orden 3 en determinantes de orden menor.

Ejemplo 3.1

Calcule el determinante para $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

Para este ejemplo se tiene una matriz de orden 2×2, por tanto:

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (-3)(-1) = -1$$

Ejemplo 3.2

Calcule el determinante para $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

Observe que se trata de una matriz de orden 3×3, por tanto, tenemos:

$$\det(C) = -1\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$
$$= -1[(4)(2)-(1)(2)] - 0[(0)(2)-(1)(1)] + 2[(0)(2)-(4)(1)]$$
$$= -6 - 0 - 8 = -14$$

Al calcular un determinante, su valor puede ser cero como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3

Calcule el determinante para $A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

Solución

$$\det(A) = -1\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}$$
$$= -1[(0)(2)-(1)(-1)] - 1[(0)(2)-(1)(1)] + 2[(0)(-1)-(0)(1)]$$
$$= -1 + 1 + 0 = 0$$

Se procede ahora a definir los términos de matriz menor y cofactor con el objetivo de obtener un método más general en el cálculo de determinantes de matrices de orden superior.

3.1.4 Matriz Menor M_{ij}

Para una matriz *A* de orden *nxn*, se puede obtener una matriz M_{ij} de menor orden (n-1)×(n-1), al eliminar la fila *i* y la columna *j* de la matriz *A*, se la llama matriz menor *ij* de *A*, o simplemente menor.

Ejemplo 3.4

Para la siguiente matriz, obtenga los menores M_{12} y M_{33}, $C = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

De acuerdo con la definición, la matriz menor M_12 para la matriz C de orden 3x3 es la matriz de orden 2x2 que se obtiene al eliminar la fila 1 y la columna 2, por tanto:

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo, la matriz M_{33} resulta de eliminar la fila 3 y columna 3 en la matriz original C.

$$M_{33} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3.1.5 Cofactor

Sea A una matriz $n \times n$. El cofactor ij de A que se denota como A_{ij}, se define como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Esto significa que el cofactor A_{ij} se calcula multiplicando el determinante del menor M_{ij} por el número $(-1)^{i+j}$. El valor de $(-1)^{i+j}$ tomará dos posibles valores: 1 si $(i + j)$ es par y -1 si $(i + j)$ es impar.

Ejemplo 3.5

Obtenga los cofactores A_{12} y A_{33} para la matriz $A= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

De acuerdo con la definición:

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

$$A_{12} = 1$$

Del mismo modo, la matriz:

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right|$$

$$A_{33} = -4$$

Ejemplo 3.6

Para la matriz C, obtenga el valor de los cofactores: a) C_{11}, b) C_{21}, c) C_{33}.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = (2)\cdot(0) - (-6)\cdot(4) = 24$
   $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot 24 = 24$

2. $M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = (3)\cdot(0) - (-6)\cdot(-1) = -6$
   $C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)\cdot(-6) = 6$

3. $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = (1)\cdot(-6) - (-5)\cdot(3) = 9$
   $C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)\cdot(9) = -9$

3.2 Matriz Inversa

Definición: Podemos definir la matriz inversa para una matriz A de orden $n \times n$, como la matriz A^{-1} de orden $n \times n$ que satisface la propiedad.

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

Observe que I corresponde a la matriz identidad $n\ x\ n$.

Está demostrado que para algunas matrices no es posible obtener su inversa. Por eso se dice que, si A tiene una inversa, la matriz puede llamarse como *invertible*. Además, se ha probado que la inversa de una matriz A de orden $n\ x\ n$ es única.

Ejemplo 3.7

Demostrar que la siguiente matriz no tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2b & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Si suponemos que existe una matriz A^{-1} que es la matriz inversa de A, tal que $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ entonces podemos afirmar que $A\ A^{-1} = I$.

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ 2bc & 2bd \end{pmatrix}$$

Observamos que si $\begin{pmatrix} ac & ad \\ 2bc & 2bd \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego: $ac=1$, $ad=0$, $2bc=0$, $2bd=1$.

Este conjunto no tiene solución por tanto A no tiene inversa.

Ejemplo 3.8

Demostrar que si *ad - bc ≠ 0*.

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Se puede multiplicar:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - cd & -cb + ad \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos utilizar el método correspondiente para determinar la inversa de matrices de 2 x 2. Para matrices de dimensiones mayores se utilizan otros métodos que veremos más adelante.

Ejemplo 3.9

Calcule la matriz inversa de la matriz $A= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ usando la fórmula descrita en el ejemplo anterior.

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3\cdot 4-5\cdot(-1)}\begin{pmatrix} 4 & -(-1) \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12+5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/17 & 1/17 \\ -5/17 & 3/17 \end{pmatrix}$$

Comprobación $A\ A^{-1} = I$

$$A\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/17 & 1/17 \\ -5/17 & 3/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, revisaremos otras formas de calcular la matriz inversa.

3.2.1 Método de la matriz aumentada

El método que se describe a continuación es aplicable para matrices cuya dimensión es superior a 2 × 2.

Para determinar la matriz inversa de $A_{n\times n}$, en caso de que exista, seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Escribimos la matriz aumentada $(A_n \mid I_n)$.
2. Reducir por renglones a la matriz A para hallar su forma escalonada.
3. Concluido el paso anterior habremos convertido a la matriz A en una matriz identidad, al mismo tiempo la matriz que se forma del lado derecho de la barra vertical es A^{-1}.
4. Si a la izquierda de la barra vertical se encuentra un renglón de ceros, significa que A no tiene matriz inversa.

Ejemplo 3.10

Hallar la matriz inversa A^{-1}. Sea A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Paso 1: Escribimos la matriz ampliada $(A_n \mid I_n)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_1 \leftrightarrows F_2 \\ F_1 \to -F_1}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_3 \to -2F_2+F_3}$$

Paso 2: Reducimos la matriz ampliada A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_1 \leftrightarrows F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \to 2F_1+F_2 \\ F_3 \to 3F_1+F_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)_{F_3 \to F_3 - F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)_{F_3 \to -\frac{1}{2}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)_{\substack{F_1 \to -F_3+F_1 \\ F_2 \to -F_1+F_2}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 4 & 1 & 1/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right)_{\substack{F_1 \to -F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{4}F_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & 5/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right)_{F_1\to 2F_2+F_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & 5/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Paso 3: Determinamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/8 & 5/8 & 1/8 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3.2.2. Método de la matriz adjunta

Suponga que en una matriz A de $n \times n$ eliminamos momentáneamente el i-ésimo renglón y la j-ésima columna para obtener una matriz de $(n-1)\times(n-1)$. El determinante de esta submatriz se llama (i, j)-ésimo menor de A y se denota por M_{ij}. El número C_{ij} representa el $(_{i,\,j})$- ésimo cofactor de la matriz A y está dado por el valor $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

En una matriz A de $n\ x\ n$, el (i, j)-esimo cofactor de A, se denota por C_{ij}. La matriz de cofactores de A expresada por $Cof(A)$ es de la siguiente manera:

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

La transpuesta de esta matriz de cofactores es la adjunta de A denotada por $Adj(A)$.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 3.1

La proposición establece que, si A es una matriz de tamaño $n \times n$, entonces: $A \cdot Adj\,(A) = (det\ A)\cdot I$

Entonces podemos definir a la matriz inversa de A como: $A^{-1} = \frac{1}{det\ A}$ adj (A), si y sólo si $det\ A \neq 0$.

Ejemplo 3.11

Dada la matriz A hallar su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz de cofactores es:

$$Cof\ (A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -26 & 18 \\ -32 & 20 & 24 \\ 14 & -19 & -31 \end{pmatrix}$$

Tomamos la transpuesta de la matriz *Cof (A)*.

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -24 & -32 & 14 \\ -26 & 20 & -19 \\ 18 & 24 & -31 \end{pmatrix}$$

El determinante de A puede ser calculado por el método de cofactores a lo largo de la 1era. columna de la matriz A.

$$det\ A = 1(-24) + 7(-32) + 6(14) = -164$$

Aplicando la fórmula descrita en el teorema 3.1 y hallamos la inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\ adj\ (A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-164}\begin{pmatrix} -24 & -32 & 14 \\ -26 & 20 & -19 \\ 18 & -24 & -31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24/-164 & -32/-164 & 14/-164 \\ -26/-164 & 20/-164 & -19/-164 \\ 18/-164 & 24/-164 & 31/164 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6/41 & 8/41 & -7/82 \\ 13/82 & -5/41 & 19/164 \\ -9/82 & -6/41 & 31/164 \end{pmatrix}$$

3.3 Ejercicios propuestos

I. Determinantes y cofactores:

Encontrar el determinante de las matrices propuestas:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Determinar los cofactores según como se indica:

13. Hallar los cofactores a) A_{11} , b) A_{21} , c) A_{33}. De la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
14. Hallar los cofactores a) B_{12} , b) B_{22} , c) B_{32}. De la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
15. Hallar los cofactores a) C_{13} , b) C_{23} , c) C_{31}. De la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
16. Hallar los cofactores a) D_{12} , b) D_{21} , c)D_{33}. De la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
17. Hallar los cofactores a) E_{11} , b) D_{22} , c)D_{33}. De la matriz $E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
18. Hallar los cofactores a) F_{13} , b) F_{23} , c)F_{32}. De la matriz $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
19. Hallar los cofactores a) G_{12} , b) G_{21} , c)G_{31}. De la matriz $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
20. Hallar los cofactores a) G_{13} , b) G_{23} , c)G_{33}. De la matriz $H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

II. Matriz inversa

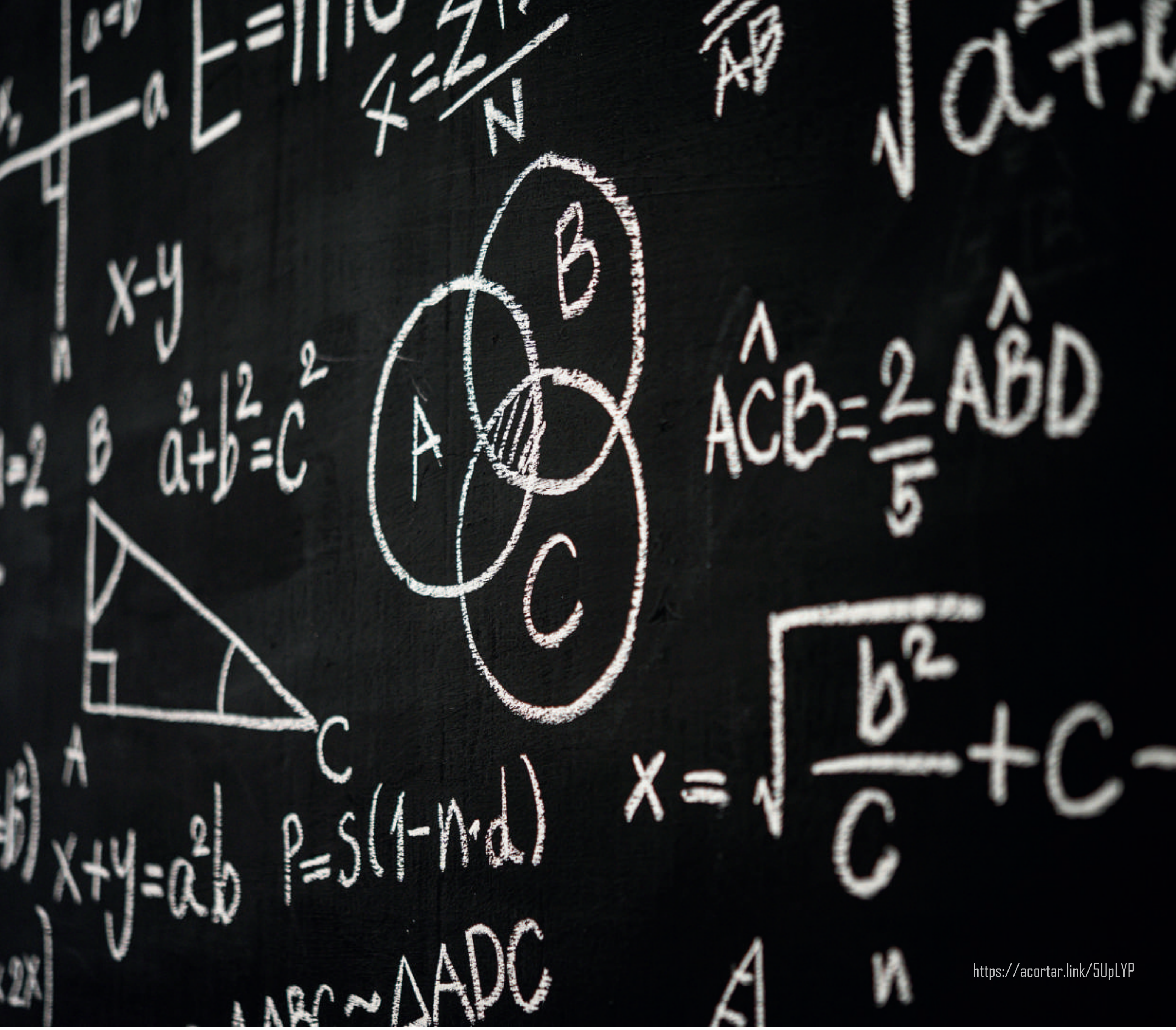
Hallar la matriz inversa de las siguientes matrices, usando en método de la matriz aumentada:

21. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
26. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
30. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
24. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
31. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
32. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz inversa de las siguientes matrices, usando en método de la matriz adjunta:

33. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
34. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
36. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
37. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
38. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
39. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
40. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
41. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
42. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
43. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
44. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$



https://acortar.link/5UpLYP

CAPÍTULO IV

Sistemas de ecuaciones de *n* variables

Una ecuación lineal en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se define como aquella que puede expresarse de la siguiente manera:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \quad (4.1)$$

Donde:

$a_1, \ldots, a_n$ – se denomina *coeficientes* y pueden tomar valores reales o imaginarios;

n – es el *subíndice* es cualquier valor entero positivo;

b – se conoce como *término independiente*;

x1, …, xn – son las *incógnitas*.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones lineales: Podemos ver que:

$2x_1 - 5x_2 = 0$ y $\sqrt{3}\, x_3 + 8x_2 - 0.2x_1 = -3$

son ejemplos de ecuaciones lineales, mientras que:

$x_1\, x_2 - 2x_3 + 5 = 0$ y $x_1^2 + 3x_2 = 4$

no están conformadas de acuerdo con (4.1), en consecuencia, no son lineales.

4.1 Sistema lineal

A un conjunto de varias ecuaciones lineales se denomina *sistema lineal*, siempre y cuando contengan las mismas variables $x_1, \ldots, x_n$. La solución de un sistema lineal es el conjunto de números $\{s_1, \ldots, s_n\}$, mismos que al ser reemplazados por las variables $x_1, \ldots, x_n$ satisfacen las igualdades del sistema, entonces:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

es un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

Son ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

4.2 Solución de un Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales es necesario hallar los valores de $x_1, \ldots, x_n$, de tal manera que cumplan con las condiciones del sistema lineal.

Ejemplo 4.1

Dar solución al siguiente sistema de ecuaciones propuesto:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \quad (1) \\ -x_1 + 3x_2 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Al restar las ecuaciones (1) - (2) tenemos:

$$3x_1 = 4$$

Luego de despejar, hallamos el valor de x_1

$$x_1 = \frac{4}{3}$$

Para hallar x_2, colocamos el valor de x_1 en la primera o segunda ecuación y obtendremos:

$$x_2 = \frac{4}{9}$$

Solución

Por lo tanto, los valores que satisfacen el sistema lineal son: $x_1 = \frac{4}{3}; x_2 = \frac{4}{9}$

Podemos verificar si el resultado es correcto, reemplazando los valores encontrados para x_1 y x_2 en las ecuaciones propuestas. Entonces:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{4}{3}\right) + 3\left(\frac{4}{9}\right) &= 4 \\ -\left(\frac{4}{3}\right) + 3\left(\frac{4}{9}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2

Dar solución al sistema de ecuaciones propuesto:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Una solución que cumple con las condiciones del sistema de ecuaciones es: $x_1 = 2$; $x_2 = 2/3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$, pero existe otro conjunto de valores que también satisfacen el sistema, observe la solución siguiente: $x_1 = 1$; $x_2 = 4/3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$.

Es evidente que existen sistemas lineales que tienen más de una solución. A continuación, revisaremos los tipos de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales.

En el primer capítulo de este libro se hizo una breve introducción sobre los sistemas lineales, donde se menciona que las soluciones pueden ser:

a. solución única
b. un infinito número de soluciones
c. no tener solución

Cuando la solución de un sistema lineal es única o tiene infinitas soluciones, se dice que el sistema es ***consistente***; por otro lado, si no tiene solución decimos que el sistema es ***inconsistente***.

4.3 Notación matricial para sistemas lineales

Sea:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 \qquad\quad + 2x_4 &= -1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 &= 8 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Un sistema de ecuaciones lineales, entonces podemos escribir sus coeficientes de forma compacta en un arreglo rectangular que llamaremos ***matriz de coeficientes***, así, el sistema de ecuaciones en (4.2) se puede escribir a la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Para completar la matriz aumentada debemos agregar en la parte derecha la columna con los valores de los *términos independientes*, de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

4.4 Métodos de resolución para sistemas lineales

Hay diversas técnicas para solucionar un conjunto de ecuaciones, pero en este análisis nos centraremos en los métodos de reducción, los cuales se valen de la representación matricial de un sistema de ecuaciones.

4.4.1 Método de Gauss

La esencia de este método implica sustituir un sistema de ecuaciones por otro equivalente que facilite la obtención de la solución de manera más directa y simple. Para emplear este método, usaremos las operaciones elementales de fila de una matriz para reducir a la matriz original como se revisó en el capítulo 2. La solución del nuevo sistema lineal será igual al de la matriz original, dado que las dos son equivalentes por filas.

Ejemplo 4.3

Resuelva el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Utilizaremos la notación matricial de un sistema de ecuaciones y realizamos operaciones elementales de fila para reducirla:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right)_{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \to F_1 + F_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 9/2 & 2 \end{array}\right)_{F_2 \to \frac{2}{9}F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 4/9 \end{array}\right)_{F_2 \to \frac{2}{9}F_2}$$

Al reducir por filas a la matriz asociada obtenemos una matriz equivalente a la original y de ella se desprenden las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 2$$
$$x_2 = \frac{4}{9}$$

Con estas nuevas ecuaciones es fácil resolver ese sistema. Reemplazamos el valor de x_2 en la primera ecuación, se despeja y obtenemos el valor para x_1 = 4/3; la solución puede escribirse así:

$$Sol: \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{9}\right)$$

Ejemplo 4.4

Halle el valor de las incógnitas *x1, x2* y *x3*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 4 \end{aligned}$$

Solución

Utilizaremos la notación matricial de un sistema de ecuaciones y realizamos operaciones elementales de fila para reducirla:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \end{array}\right)_{F_3 \to -2F_2 + F_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \to -F_1 + F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido la matriz equivalente a la original de donde podemos obtener las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Siempre que la matriz reducida presente una forma como en (4.3), se presentan dos tipos de variables: **básicas** y **libres**. Para este caso, consideramos a x_1 y x_2 como variables básicas, por otro lado, las variables como x_3 se consideran libres. Para presentar una solución al sistema de ecuaciones, las variables básicas deben estar en función de las variables libres. El adjetivo libre se refiere a que la variable en cuestión puede tomar cualquier valor dentro del campo en el que se esté trabajando.

En consecuencia, acogiendo lo antes escrito tenemos:

$$x_2 = 1 - 2x_3$$
$$x_1 = 1 - 2x_2 + 3x_3$$

Sabemos que $x_2 = 1 - 2x_3$, por tanto:

$$x_1 = 1 - 2(1 - 2x_3) + 3x_3 = -1 + 7x_3$$

Notamos que los valores de x_1 y x_2 dependerán del valor de x_3 y dado que a x_3 se le puede asignar cualquier valor real, entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Sin embargo, podemos dar un valor a x_3 para hallar una solución finita, por ejemplo, si $x_3 = 0$, entonces, $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, la solución sería (-1,1,0).

Ejemplo 4.5

Encontrar la solución para el sistema de ecuaciones, si la hay.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 \quad + 2x_4 &= -1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 &= 8 \end{aligned}$$

Solución

Utilizaremos la notación matricial de un sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

Reducimos por filas para hallar la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right)_{F_4 \to -F_1 + F_4} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

En la primera operación de fila se ha reducido un elemento de la fila F_4. La operación realizada se muestra en la esquina inferior derecha de la matriz ($F_4 \to -F_1 + F_4$), indica que hemos reemplazado la fila cuatro por la combinación $-F_1 + F_4$, donde:

$$\begin{array}{r} -(1 \quad 2 \quad -4 \quad -1) \\ \underline{+(1 \quad 5 \quad 1 \quad -3)} \\ (0 \quad 3 \quad 5 \quad -2) \end{array}$$

El objetivo es "hacer ceros" (reducir) debajo de la primera fila:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 4 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \to -3F_1 + F_2 \\ F_3 \to 2F_1 + F_3}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 12 & 5 & -13 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 4 \end{array}\right)_{F_2 \rightleftharpoons F_3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 12 & 5 & -13 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 4 \end{array}\right)_{\substack{F_3 \to 7F_2 + F_3 \\ F_4 \to -3F_2 + F_4}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & 43 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & -20 \end{array}\right)_{F_3 \to -\frac{1}{9}F_3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -43/9 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & -20 \end{array}\right)_{F_4 \to -14F_3 + F_4} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -43/9 \\ 0 & 0 & 0 & -19/9 & 422/9 \end{array}\right)_{F_4 \to -9/19F_4}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -43/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -422/19 \end{array}\right)$$

Con en ejemplos anteriores, a partir de la matriz reducida obtenemos las ecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= 4 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 &= 8 \\ x_3 + \frac{2}{9}x_4 &= -\frac{43}{9} \\ x_4 &= -\frac{422}{19} \end{aligned}$$

Se reemplaza el valor de x4 en la penúltima ecuación para obtener $x_3 = 3/19$. Repetimos el proceso, colocando el valor de x_3 y x_4 en la segunda ecuación y se obtiene $x_2 = -261/19$. Finalmente reemplazamos todos los valores en la primera ecuación y hallamos $x_1 = 188/19$.

Ejemplo 4.6

Resuelva el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Aplicamos la notación matricial de un sistema de ecuaciones y realizamos operaciones elementales de fila para reducirla:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right)_{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \to F_1 + F_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

En la parte izquierda de la fila 2, se han obtenido dos ceros. Al escribir la ecuación equivalente que corresponde a esta fila tenemos:

$$0x_1 + 0x_2 = 2$$

Es evidente que esta ecuación no tiene solución, ya que no hay valores de x_1 y x_2 que permita que la igualdad verdadera. Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

4.4.2 Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan consiste en llevar a la matriz aumentada hasta su forma escalonada reducida en lugar de solo reducirla, como es el caso del método de Gauss. En este sentido el método de Gauss-Jordan actúa como complemento del método de Gauss.

Ejemplo 4.7

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Aplicamos la notación matricial de un sistema de ecuaciones y realizamos operaciones elementales de fila para reducirla:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right)_{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \to F_1 + F_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 9/2 & 2 \end{array}\right)_{F_2 \to \frac{2}{9}F_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 4/9 \end{array}\right)$$

Hasta este punto se ha reducido con el método de Gauss, los pasos siguientes completarán la reducción hasta llevarla a la forma escalonada reducida.

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 4/9 \end{array}\right)_{F_1 \to -\frac{3}{2}F_2 + F_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 4/9 \end{array}\right)$$

De la matriz reducida obtenemos las ecuaciones equivalentes al sistema original, ya no será necesario despejar puesto que el método Gauss-Jordan nos proporciona directamente la solución al sistema:

$$x_1 = \frac{4}{3}$$
$$x_2 = \frac{4}{9}$$

Con lo que se llega a la misma solución:

$$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{9}\right)$$

Ejemplo 4.8

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Solución

Aplicamos la notación matricial de un sistema de ecuaciones. Luego usamos el método de Gauss-Jordan para reducirla a su equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)_{\substack{F_1 \leftrightarrows F_2 \\ F_1 \to -F_1}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \to -3F_1 + F_2 \\ F_3 \to -2F_1 + F_3}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -4 & 7 \\ 0 & 7 & -4 & 8 \end{array}\right)_{F_2 \to -F_3 + F_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 8 \end{array}\right)_{F_2 \to \frac{1}{4}F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 7 & -4 & 8 \end{array}\right)_{F_3 \to -7F_2 + F_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -4 & \frac{39}{4} \end{array}\right)_{F_3 \to -\frac{1}{4}F_3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{39}{16} \end{array}\right)_{F_1 \to -F_3 + F_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & \frac{7}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{39}{16} \end{array}\right)_{F_1 \to 3F_2 + F_1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{39}{16} \end{array}\right)_{F_1 \to -F_2 + F_1}$$

De la matriz equivalente se obtiene la solución del sistema, así:

$$x_1 = -\frac{5}{16}; x_2 = -\frac{1}{4}; x_3 = -\frac{39}{16}$$

Si queremos expresar la respuesta en forma vectorial, tenemos:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{5}{16}, -\frac{1}{4}, -\frac{39}{16}\right)$$

Ejemplo 4.9

Cuál debe ser el valor de k, si queremos que sea un sistema:

a) Consistente

b) Inconsistente

$$\begin{cases} kx + 3y = 6 \\ 3x + ky = -6 \end{cases}$$

Solución

Resolvemos por eliminación:

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 3 & 6 \\ 3 & k & -6 \end{array}\right)_{F_1 \leftrightarrows F_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & k & -6 \\ k & 3 & 6 \end{array}\right)_{F_1 \to \frac{F_1}{3}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k/3 & -2 \\ k & 3 & 6 \end{array}\right)_{F_2 \to -kF_1 + F_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{k}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{k^2}{3}+3 & -2k+6 \end{array}\right)$$

Luego:

$$\left(-\frac{k^2}{3}+3\right)y = -2k+6$$

$$y = \frac{-2k+6}{-\frac{k^2}{3}+3}$$

El denominador debe ser diferente de cero para que la ecuación tenga solución:

$$-\frac{k^2}{3}+3 \neq 0$$

La solución de esta ecuación es $k \neq 3$ y $k \neq -3$.

Para $k = 3$ el sistema inicial nos da:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 6 \\ 3x + 3y = -6 \end{cases}$$

Este sistema es inconsistente ya que representa 2 rectas paralelas que no se cruzan, por tanto, no existe una solución.

Para $k = -3$ el sistema inicial nos da:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 3x - 3y = -6 \end{cases}$$

Cambiando de signo a la ecuación inferior:

$$-3x + 3y = 6$$
$$-3x + 3y = 6$$

Este sistema es consistente y tiene múltiples soluciones, ya que representa 2 rectas que se superponen, una sobre otra.

a. El sistema es inconsistente para: $k = 3$.
b. El sistema es consistente para todo $k \neq 3$.

4.5. Sistemas lineales homogéneos

El término "sistema de ecuaciones homogéneas" se refiere a un conjunto de ecuaciones lineales que comparten las mismas variables $x_1, x_2 \ldots, x_n$, cuya solución es una serie de números $(s_1, \ldots, s_n)$, que, al ser sustituidos en $x_1, \ldots, x_n$, satisfacen las igualdades del sistema. Así:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{gathered}$$

Es un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas.

Ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas son:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (2) \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución trivial ($x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; ... $x_n = 0$) es una de las soluciones para los sistemas mostrados. Existen además infinitas soluciones cuando $n > m$ como el sistema en (2)

Ejemplo 4.10

Hallar la solución del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + kx_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Pongamos la matriz ampliada asociada al sistema anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones de fila para reducir de la matriz ampliada hasta su forma escalonada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_1 \leftrightarrows F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \to -2F_1 + F_2 \\ F_3 \to -3F_1 + F_3}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & -2k-1 & 0 \\ 0 & 1 & -3k+1 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \to -F_2 + F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -2k-1 & 0 \\ 0 & 0 & -k+2 & 0 \end{array}\right)$$

Del sistema anterior:

$$(-k+2)\,x_3 = 0$$

Consecuentemente, el valor de $x_3 = 0$; entonces al despejar las otras incógnitas tenemos: $x_2 = 0$ y $x_1 = 0$.

Además: $-k + 2 = 0$; entonces con $k = 2$ el sistema nos da múltiples soluciones.

4.6. Problemas propuestos

I. Sistemas de ecuaciones lineales

Usando el método de Gauss o Gauss-Jordan resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -2 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 12 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 0{,}5x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -3 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 14 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -7 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 21 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 13 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$

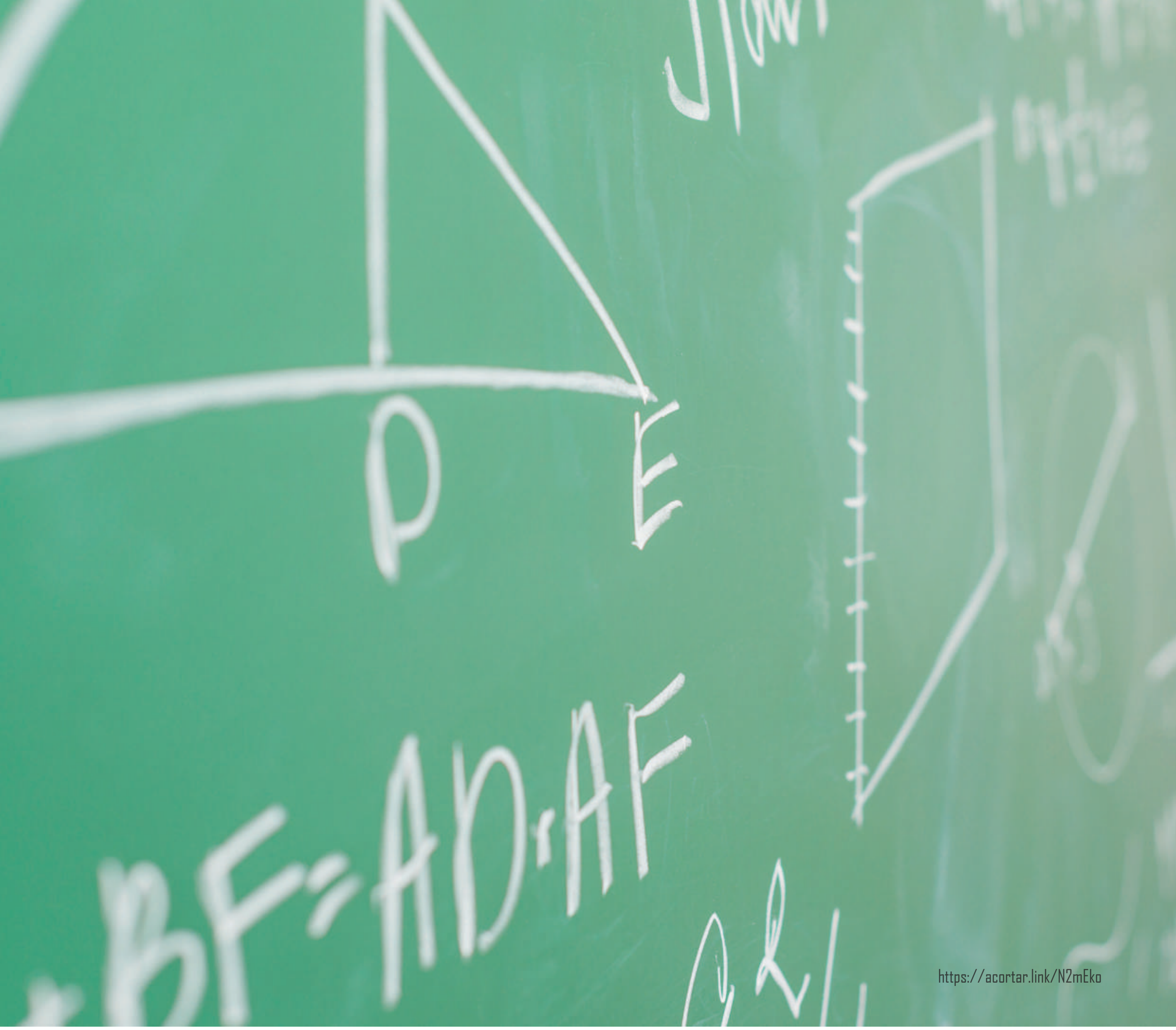
26. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -2 \end{aligned}$



CAPÍTULO V

Espacios Vectoriales

5.1 Introducción

Es interesante comparar los números y sus operaciones con los llamados espacios vectoriales. En las matemáticas, el hablar de los números nos lleva a la idea de clasificarlos en conjuntos (números naturales, enteros, racionales, irracionales, etc.). Además, cuando aprendemos un sistema de numeración, vemos de inmediato operaciones relacionadas con el mismo (suma, resta, multiplicación, etc.).

De manera general, los espacios vectoriales se definen como conjuntos de elementos, y estos elementos se llaman vectores. Entre vectores se puede realizar las operaciones de la suma, resta, multiplicación por un escalar, entre otras operaciones. Entonces viene a nuestra mente la siguiente inquietud ¿Los números agrupados en conjuntos, podrían ser considerados espacios vectoriales? Para dar respuesta con fundamentos y justificación, tendremos que definir formalmente a un espacio vectorial (Stanley & Flores, 2012).

5.2. Espacio Vectorial

Un espacio vectorial consiste en un conjunto de elementos conocidos como vectores, en el cual se ha definido previamente las operaciones de suma y multiplicación por un escalar. Estas operaciones deben cumplir con las propiedades o axiomas correspondientes a la suma y la multiplicación por un escalar.

Para los siguientes enunciados se nombran a los vectores con letras minúsculas, ejemplo: u,v,w. Y se nombran a los espacios vectoriales con letras mayúsculas, ejemplo: V,W. Ahora definimos las propiedades.

5.2.1 Propiedades de la suma

Clausurativa:

Sea $u \in V$ y $v \in V$, entonces: $u + v \in V$

Conmutativa

Sea $u \in V$ y $v \in V$, entonces: $u + v = v + u$

Asociativa

Sea $u \in V$, $v \in V$, $w \in V$, entonces: $(u + v) + w = u + (v + w)$

Existencia de un neutro aditivo

Sea $u \in V$, $\exists$ un $0_v \in V$, tal que: $u + 0_v = 0_v + u = 0_v$ (El *0v*, hace referencia al cero vector del espacio *V*)

Existencia de un inverso aditivo

Sea $u \in V$, $\exists$ un $-u \in V$, tal que: $u - u = 0_v$ (El 0_v, hace referencia al cero vector del espacio *V*).

5.2.2 Propiedades de la multiplicación por un escalar

Clausurativa:

Sea $u \in V$, y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces: $au \in V$

($\mathbb{K}$ *es el campo de los escalares,suele considerarse el conjunto de los numeros reales* $\mathbb{R}$)

Asociativa respecto de la multiplicación de escalares

Sea $u \in V$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces: $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$

Existencia de un escalar idéntico multiplicativo

Sea $u \in V$, $\exists$ un $1 \in \mathbb{K}$, entonces: $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$

Distributiva respecto de la multiplicación de un escalar a la suma de dos vectores

Sea $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces: $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

Distributiva respecto de la multiplicación de un vector a la suma de dos escalares

Sea $u \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces: $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

Es importante recalcar que un espacio vectorial debe cumplir las diez propiedades mencionadas. Si deja de cumplir alguna propiedad, el conjunto ya no será considerado un espacio vectorial.

Ejemplos conocidos de espacios vectoriales son: los Reales de dos dimensiones ($\mathbb{R}^2$) y los Reales de 3 dimensiones ($\mathbb{R}^3$). En estos espacios se tiene definida la suma de vectores y la multiplicación por un escalar.

Los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ cumplen con las diez propiedades mencionadas. Asimismo, las matrices, los polinomios y las funciones cuentan con definiciones para la suma y la multiplicación por un escalar, y cumplen con los axiomas antes mencionados. Es por esta razón que se les denomina espacios vectoriales.

5.2.3 Propiedad clausurativa de la suma

Enunciado: Si u y $v \in \mathbb{R}^2$, entonces $(u + v) \in \mathbb{R}^2$

Demostración:

Suponemos $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$, la suma está definida para vectores en $\mathbb{R}^2$, se tiene:

$u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ reemplazamos el valor de los vectores dados

$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ Aplicamos la definición de la suma de vectores en $\mathbb{R}^2$

Analizamos el resultado: El vector de coordenados $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ pertenece al conjunto $\mathbb{R}^2$. Dado que es un vector en $\mathbb{R}^2$ cual se cumple la propiedad Clausurativa.

5.2.4 Propiedad conmutativa de la suma

Enunciado: Si u y $v \in \mathbb{R}^3$, entonces u+ v=v+u

Demostración:

Supongamos $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dos vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^3$, con la suma definida para vectores en $\mathbb{R}^3$, se tiene:

$$u + v = v + u$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ reemplazamos los valores de los vectores dados.

$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \\ z_2 + z_1 \end{pmatrix}$ aplicamos la definición de en $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$ propiedad conmutativa en los Reales

El resultado evidencia que se cumple la propiedad Conmutativa.

5.2.5 Propiedad asociativa de la suma

Enunciado: Si $A, B, C \in M_{mn}$, entonces $(A + B) + C = A + (B + C)$

Demostración:

Sea $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{mn}$, $C = (c_{ij})_{mn}$ matrices que pertenecen a M_{mn}, con la suma definida para las matrices, se tiene:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$[(a_{ij})_{mn} + (b_{ij})_{mn}] + (c_{ij})_{mn} = (a_{ij})_{mn} + [(b_{ij})_{mn} + (c_{ij})_{mn}] \text{ definición } M_{mn}$$

$$(a_{ij} + b_{ij})_{mn} + (c_{ij})_{mn} = (a_{ij})_{mn} + (b_{ij} + c_{ij})_{mn} \qquad \text{suma en } M_{mn}$$

$$(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})_{mn} = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})_{mn} \qquad \text{suma en } M_{mn}$$

La última igualdad indica que se cumple la propiedad asociativa.

5.2.6 Propiedad de existencia de un neutro aditivo

Enunciado: Si $p(x) \in P_n(x)$, entonces $\exists\, 0(x) \in P_n(x)$; $p(x) + 0(x) = 0(x) + p(x) = p(x)$

Demostración:

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ con la suma definida para los polinomios.

Sea el elemento neutro, el polinomio nulo: $0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n$

Entonces:

$$p(x) + 0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \quad \text{reemplazamos}$$

$$= a_0 + 0 + (a_1 + 0)x + (a_2 + 0)x^2 + \cdots + (a_n + 0)x^n \qquad \text{suma en } P_n(x)$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad \text{suma en los Reales}$$

$$= p(x)$$

También:

$$0(x) + p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad \text{reemplazamos}$$

$$= 0 + a_0 + (0 + a_1)x + (0 + a_2)x^2 + \cdots + (0 + a_n)x^n \qquad \text{suma en } P_n(x)$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad \text{suma en los Reales}$$

$$= p(x)$$

Se comprueba la existencia de un elemento neutro.

Cualquier conjunto puede ser llamado *espacio vectorial* únicamente si se demuestra que cumple con los 10 axiomas aquí analizados. A continuación, se indicará un ejemplo.

Ejemplo 5.1

Demostrar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Solución

Se puede demostrar usando la inducción matemática, es decir, primero se demostraría que es verdad para n=1, luego para n=k y finalmente para n=k+1. Sin embargo, en esta ocasión vamos a demostrar de forma directa:

Sea el conjunto $V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, donde\ x_i \in \mathbb{R}\ para\ i = 1,2, \dots, n \right\}$ con las operaciones de suma y producto bien definidas, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, +, ·) - un campo con sus operaciones de suma y producto bien definidas.

Demostrar que (V, $\mathbb{K}$, +, ·) es un espacio vectorial.

Respecto al conjunto R, recordemos que sus elementos son: $\mathbb{R}$={-∞…,-2,-1,0,1,2,…,∞}

Usamos los 10 axiomas:

1.- Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V \therefore$

$$v + u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = w \in V$$

Si $x_i \in V=\mathbb{R}$ y $y_i \in \mathbb{R}=V$, entonces, por axioma de cuerpo de los reales la suma de los dos, da como resultado otro real, por lo tanto, el primer axioma se cumple.

2.- Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in V \therefore$

$$v + (u + w) = (v + u) + w$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix}$$

Se cumple el segundo axioma.

3.- Sea el vector $0_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} y\ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \epsilon\, V \ \therefore$

$$v + 0_v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v$$

Se cumple el tercer axioma.

4.- Si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \epsilon\, V \ \therefore\ \exists -v = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} \epsilon\, V \rightarrow$

$$v + (-v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_v$$

Recordar que este axioma se cumple, por cuanto en conjunto V si tiene números negativos.

5.- Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} y\ u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \epsilon\, V \ \therefore$

$$v + u = u + v$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix}$$

Si $x_i \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces por axioma de cuerpo de los reales el producto de los dos, es otro número real, por lo tanto, se cumple el axioma 6.

7.- Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K} \therefore$

$$\alpha \cdot (v + u) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot u$$

$$\alpha \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \cdot y_1 \\ \alpha \cdot y_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \cdot y_1 \\ \alpha \cdot y_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot y_n \end{pmatrix}$$

Se cumple el séptimo axioma.

8.- Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ y α y $\beta \in \mathbb{K} \therefore$

$$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot x_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot x_2 \\ \vdots \\ (\alpha + \beta) \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \cdot x_1 \\ \beta \cdot x_2 \\ \vdots \\ \beta \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot x_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot x_2 \\ \vdots \\ (\alpha + \beta) \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot x_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n + \beta \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot x_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot x_2 \\ \vdots \\ (\alpha + \beta) \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot x_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot x_2 \\ \vdots \\ (\alpha + \beta) \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Se cumple el axioma.

9.- Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ y α y $\beta \in \mathbb{K} \therefore$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} \beta \cdot x_1 \\ \beta \cdot x_2 \\ \vdots \\ \beta \cdot x_n \end{pmatrix} = (\alpha\beta) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha\beta) \cdot x_1 \\ (\alpha\beta) \cdot x_2 \\ \vdots \\ (\alpha\beta) \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta) \cdot x_1 \\ (\alpha\beta) \cdot x_2 \\ \vdots \\ (\alpha\beta) \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Se cumple el axioma.

10.- Si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \;\therefore\; \exists\, 1$

$$1 \cdot v = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v$$

Existe un elemento neutro llamado unidad elemento del campo $\mathbb{K}$. Por lo tanto, se cumple el axioma 10.

$\therefore$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial.**

A continuación, a través de ejemplos, demostraremos algunos de los espacios vectoriales elementales.

Ejemplo 5.2

Espacio vectorial trivial.

Sea el conjunto $V = \{0\}$ con las operaciones de suma y producto bien definidas, $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, +, \cdot)$ un campo con sus operaciones de suma y producto bien definidas.

Demostrar que $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial**.

Solución:

Usamos los 10 axiomas:

1. Sea $v = 0$ y $u = 0 \in V$ $\therefore$

$v + u = 0 + 0 = 0 \in V$

Por lo tanto, el primer axioma se cumple.

2. Sea $v = 0$, $u = 0$ y $w = 0 \in V \therefore$
$v + (u + w) = (v + u) + w$
$0 + [0 + 0] = [0 + 0] + 0$
$0 = 0$
Se cumple el segundo axioma.

3. Sea el vector $0v = 0$ y $v = 0 \in V \therefore$
$v + 0_v = 0 + 0 = 0 = v$
Se cumple el tercer axioma.

4. Si $v = 0 \in V \therefore \exists\ -v = 0 \in V \rightarrow$
$v + (-v) = 0 + 0 = 0v$
Este axioma se cumple.

5. Sea $v = 0$ y $u = 0 \in \mathrm{V} \therefore$
$v + u = u + v$
$0 + 0 = 0 + 0$
$0 = 0$
Se cumple axioma 5.

6. Sea $v = 0 \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K} \therefore$
$\alpha \cdot v = \alpha \cdot 0 = 0$
$0 \in \mathbb{R}$, por lo tanto, se cumple axioma 6.

7. Sea $v = 0$ y $u = 0 \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K} \therefore$
$\alpha \cdot (v + u) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot u$
$\alpha \cdot [0 + 0] = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$
$0 = 0 + 0 = 0$
Se cumple el séptimo axioma.

8. Sea $v = 0 \in V$ y α y $\beta \in \mathbb{K} \therefore$
$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
$((\alpha + \beta) \cdot 0) = (\alpha \cdot 0) + (\beta \cdot 0)$
$0 = 0 + 0 = 0$
Se cumple el axioma.

9. Sea $v = 0 \in V$ y α y $\beta \in \mathbb{K} \therefore$

$\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$
$\alpha \cdot (\beta \cdot 0) = (\alpha\beta) \cdot 0$
$((\alpha\beta) \cdot 0) = 0$
$0 = 0$
Se cumple el axioma.

10. Si $v = 0 \in V \therefore \exists\ 1$
$1 \cdot v = 1 \cdot 0 = 0 = v$
Existe un elemento neutro llamado unidad elemento del campo $\mathbb{K}$. Por lo tanto, se cumple el axioma 10.

$\therefore$ $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial.**

Aquellos conjuntos que dejen de cumplir al menos uno de los axiomas ya no se consideran espacios vectoriales. Se detalla el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3

Conjunto formado por un elemento distinto de cero.

Sea el conjunto V=$\{a\}$ con las operaciones de suma y producto bien definidas, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, +, \cdot$) un campo con sus operaciones de suma y producto bien definidas.

Demostrar que $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Solución

El primer axioma no se cumple:
1. Sea $v = a$ y $u = a \in V \therefore$
$v + u = a + a = 2a \notin V$

Recordemos que el único elemento que pertenece al conjunto V es $\{a\}$. Por lo tanto, el elemento $2a$ no es parte del conjunto V, y, por ende, no cumple con el primer axioma.

Podríamos seguir con los otros axiomas, pero es innecesario, ya que el incumplimiento de uno solo de los axiomas, lo invalida como espacio vectorial.

$\therefore$ $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ **no es un espacio vectorial.**

Ejemplo 5.4

Una de las demostraciones necesarias para continuar con el entendimiento de los espacios vectoriales, se refiere a que los subconjuntos que pertenecen a un espacio vectorial definido pueden, a su vez, ser un espacio vectorial.

El conjunto de puntos en R^3 que pertenecen a un plano que pasa por el origen. Sea el conjunto: $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \wedge ax + by + cz = 0 \right\}$

Donde el vector normal (a, b, c) pasa por el origen; con las operaciones de suma y producto bien definidas, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, +, \cdot$), un campo con sus operaciones de suma y producto bien definidas.

Demostrar que (V, $\mathbb{K}$, +, ·) es un espacio vectorial.

Solución

Usamos los 10 axiomas:

1.- Sea $v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix} \in V \therefore$

$$v + u = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) \\ b(y_1 + y_2) \\ c(z_1 + z_2) \end{pmatrix} = w \in V$$

$a(x_1 + x_2)$, $b(y_1 + y_2)$ y $c(z_1 + z_2) \in \mathbb{R}$, entonces, por axioma de cuerpo de los reales la suma y producto de dos reales, da como resultado otro real, por lo tanto, el primer axioma se cumple.

2.- Sea $v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} ax_3 \\ by_3 \\ cz_3 \end{pmatrix} \in V \therefore$

$$v + (u + w) = (v + u) + w$$

$$\begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_3 \\ by_3 \\ cz_3 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} ax_3 \\ by_3 \\ cz_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a(x_1 + x_2 + x_3) \\ b(y_1 + y_2 + y_3) \\ c(z_1 + z_2 + z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2 + x_3) \\ b(y_1 + y_2 + y_3) \\ c(z_1 + z_2 + z_3) \end{pmatrix}$$

Se cumple el segundo axioma.

3.- Sea el vector $0_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y\ v = \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix} \epsilon\, V \ \therefore$

$$v + 0_v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} = v$$

Se cumple el tercer axioma.

4.- Si $v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} \epsilon\, V \ \therefore\ \exists - v = \begin{pmatrix} -ax_1 \\ -by_1 \\ -cz_1 \end{pmatrix} \epsilon\, V \rightarrow$

$$v + (-v) = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ax_1 \\ -by_1 \\ -cz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_v$$

Recordar que este axioma se cumple, por cuanto en conjunto V sí tiene números negativos.

5.- Sea $v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} \ y\ \ u = \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix} \epsilon\, V \therefore$

$$v + u = u + v$$

$$\begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) \\ b(y_1 + y_2) \\ c(z_1 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) \\ b(y_1 + y_2) \\ c(z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$

Si $x_i \epsilon\, \mathbb{R}$, entonces por axioma de cuerpo de los reales el orden de los factores no cambia el resultado, por lo tanto, se cumple axioma 5.

6.- Sea $v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} \epsilon\, V\ y\ \ \alpha\ \epsilon\ \ \mathbb{K} \therefore$

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot ax_1 \\ \alpha \cdot by_1 \\ \alpha \cdot cz_1 \end{pmatrix}$$

$\alpha \cdot ax, \alpha \cdot by, \alpha \cdot cz\ \epsilon\ \mathbb{R}$, entonces por axioma de cuerpo de los reales el producto de dos reales, da como resultado otro real, por lo tanto, el primer axioma se cumple.

7.- Sea $v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix} \epsilon\, V\, y\, \alpha\, \epsilon\, \mathbb{K} \therefore$

$\alpha \cdot (v + u) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot u$

$$\alpha \cdot \left[\begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix}\right] = \alpha \cdot \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} ax_2 \\ by_2 \\ cz_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot ax_1 \\ \alpha \cdot by_1 \\ \alpha \cdot cz_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \cdot ax_2 \\ \alpha \cdot by_2 \\ \alpha \cdot cz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot ax_1 \\ \alpha \cdot by_1 \\ \alpha \cdot cz_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \cdot ax_2 \\ \alpha \cdot by_2 \\ \alpha \cdot cz_2 \end{pmatrix}$$

Se cumple el séptimo axioma.

8.- Sea $v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} \in V\, y\, \alpha\, y\, \beta \in \mathbb{K} \therefore$

$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

$$\begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot ax_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot by_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot cz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot ax_1 \\ \alpha \cdot by_1 \\ \alpha \cdot cz_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \cdot ax_1 \\ \beta \cdot by_1 \\ \beta \cdot cz_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot ax_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot by_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot cz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot ax_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot by_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot cz_1 \end{pmatrix}$$

Se cumple el axioma.

9.- Sea $v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} \in V\, y\, \alpha\, y\, \beta \in \mathbb{K} \therefore$

$\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} \beta \cdot ax_1 \\ \beta \cdot by_1 \\ \beta \cdot cz_1 \end{pmatrix} = (\alpha\beta) \cdot \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha\beta) \cdot ax_1 \\ (\alpha\beta) \cdot by_1 \\ (\alpha\beta) \cdot cz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta) \cdot ax_1 \\ (\alpha\beta) \cdot by_1 \\ (\alpha\beta) \cdot cz_1 \end{pmatrix}$$

Se cumple el axioma

10.- Si $v = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} \in V \therefore \exists 1$ por lo tanto:

$$1 \cdot v = 1 \cdot \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ by_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} = v$$

Existe un elemento neutro llamado *unidad* elemento del campo $\mathbb{K}$. Por lo tanto, se cumple el axioma 10.

$\therefore$ $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Se podría llegar a la errada conclusión de que todo subconjunto de un espacio vectorial, es un espacio vectorial. Esto no es condición suficiente. A continuación, vemos el contra ejemplo:

Ejemplo 5.5

Revisar si el conjunto de vectores en el plano $\mathbb{R}^2$ que pertenecen a una recta que no pasa por el origen es un espacio vectorial.

Sea el conjunto $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \wedge y = ax + b \right\}$ con las operaciones de suma y producto bien definidas, $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, +, \cdot)$ - un campo con sus operaciones de suma y producto bien definidas.
Demostrar que $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Solución:

Usamos los 10 axiomas:

1.- Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V \therefore$

$$v + u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ax_1 + b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ ax_2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ a(x_1 + x_2) + 2b \end{pmatrix} = w \in V$$

$a(x_1 + x_2) + 2b \notin V$. Si recordamos en la expresión $ax + b$, b es el corte de la recta en el eje Y, entonces la coordenada $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ a(x_1 + x_2) + 2b \end{pmatrix}$ no pertenece a la recta original.

Entonces, ya no es necesario continuar verificando los demás axiomas, puesto que, si no cumple uno de ellos, entonces no es espacio vectorial.

$\therefore$ $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ *no es un espacio vectorial.*

Es necesario poner mucha atención a los enunciados y condiciones que se den para comprobar los axiomas. A continuación, se indica un ejemplo.

Ejemplo 5.6

Conjunto de puntos pertenecientes a un semiplano de $\mathbb{R}^2$

Sea el conjunto $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ x,y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 0\right\}$ con las operaciones de suma y producto bien definidas, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, +, ·) - un campo con sus operaciones de suma y producto bien definidas.

Demostrar que (V, $\mathbb{K}$, +,·) es un espacio vectorial.

Solución:

1.- Sea $v = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \in V \therefore$

$$v + u = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + x_2\\y_1 + y_2\end{pmatrix} = w \in V$$

Si $y_1 \geq 0$ y $y_2 \geq 0$, entonces la suma de dos números positivos es siempre otro positivo, es decir $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$, por lo tanto $w \in V$ y se cumple el axioma 1.

2.- Sea $v = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix} \in V \therefore$

$$v + (u + w) = (v + u) + w$$

Se cumple el segundo axioma.

3.- Sea el vector $0_v = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \in V \therefore$

$$v + 0_v = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = v$$

Se cumple el tercer axioma.

4.- Si $v = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \epsilon V \therefore \exists -v = \begin{pmatrix}-x_1\\-y_1\end{pmatrix} \in V \rightarrow$

Lo cual no se cumple porque en el conjunto V no hay número negativos, es decir, no existe el inverso del vector $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$. No se cumple el axioma

Podríamos continuar con los demás axiomas, pero al no cumplirse uno de ellos, ya no se constituye como un espacio vectorial.

$\therefore$ (V, $\mathbb{K}$, +, ·) **no es un espacio vectorial.**

Para finalizar, se menciona el siguiente teorema:

Teorema 5.1

Para un espacio vectorial V, para todo $u \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se cumple que:

1. $\alpha \cdot 0_v = 0_v$
2. $0 \cdot u = 0_v$
3. Si $\alpha \cdot u = 0_v$, entonces $\alpha = 0$ o $u = 0_v$
4. $(-1) \cdot u = -u$, para todo $u \in V$

El 0_v pertenece a V, y el 0 pertenece a los escalares $\mathbb{K}$

Los subconjuntos que cumplen con los 10 axiomas de un espacio vectorial se denominan subespacios vectoriales. En el siguiente capítulo se desarrollan los conceptos relacionados con los mencionados.

5.3 Subespacios Vectoriales

En el capítulo anterior, se ha definido un espacio vectorial. Un subespacio vectorial es también un espacio vectorial. El subespacio es un subconjunto de un espacio vectorial. En consecuencia, el subespacio vectorial también cuenta con la operación de suma y multiplicación por un escalar definidas, así mismo cumple con sus correspondientes axiomas o propiedades.

Todo espacio vectorial tiene subconjuntos que son espacios vectoriales también. A continuación, definiremos las condiciones para comprobar que un subconjunto sea subespacio vectorial.

Es un espacio vectorial el subconjunto no vacío perteneciente a un espacio vectorial, si tiene bien definidas las operaciones de suma y producto de un escalar por un vector incluido sus propiedades. Así, si el subconjunto no cumple con alguna de las propiedades ya no se considera subespacio vectorial (Lay, 2001).

Llamaremos al subespacio vectorial S y al espacio vectorial V. Al ser S un subconjunto de V, se puede comprobar que la suma y el producto por un escalar estarán definidas en S. Además, algunas propiedades se cumplirán por defecto, al tener S vectores de V:

De la suma:

- la conmutativa,
- la asociativa

Del producto por un escalar:

- la asociativa
- las distributivas
- la de existencia de un neutro multiplicativo

Para demostrar que un subconjunto es subespacio vectorial se deben entonces verificar las siguientes propiedades:

- Clausurativa de la suma
- Existencia del neutro aditivo
- Existencia del inverso aditivo
- Clausurativa de la multiplicación por un escalar

Es necesario recordar que basta que un solo axioma deje de cumplirse y se concluiría que el subconjunto ya no es subespacio.

Se puede encerrar un poco más la definición a las dos propiedades clausurativas si se define: S es subespacio vectorial de V si, y solamente si:

- S cumple la propiedad Clausurativa de la suma para todo vector de S y si S cumple la propiedad Clausurativa de la multiplicación por un escalar, para todo escalar. Es decir:
- Si $S \subset V$, sea u y $v \in S$, entonces: $u + v \in S$, y
- Sea $u \in S$, y $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$, entonces: $\alpha u \in S$

El indicar que la propiedad clausurativa de la multiplicación por un escalar se cumple para todo escalar, asegura que exista el neutro aditivo de la suma (0_v) y el inverso aditivo de la suma (-u); pues se puede obtener estos vectores al usar los escalares 0 y -1.

Ejemplo 5.7

Un espacio vectorial es un subespacio de sí mismo.

De acuerdo con la teoría de conjuntos; el conjunto V, es subconjunto de sí mismo; por lo tanto, si V es un espacio vectorial, entonces también es un subespacio vectorial. No hace falta demostrar mediante axiomas.

Ejemplo 5.8

Subespacio vectorial trivial.

Todo espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ contiene al elemento $\{0\}$, si $H = \{0\}$ entonces $H \subset V$. En el Ejemplo 5.2 quedó demostrado que el conjunto cuyo único elemento es el $\{0\}$, es un espacio vectorial (trivial) y por lo tanto, es también un subespacio. Sin embargo, utilizaremos los dos axiomas para formalizar la demostración:

1. Sea $v = 0$ y $u = 0 \in H \therefore$

$v + u = 0 + 0 = 0 \in V$

2. Sea $v = 0 \in H$ y $\forall\, \alpha \in K \therefore$

$\alpha \cdot v = \alpha \cdot 0 = 0$

$\therefore$ (H, K, +, ·) **es un subespacio vectorial.**

Ejemplo 5.9

Un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$

Si $V = \mathbb{R}^2$, el subconjunto $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ con escalares pertenecientes también a $\mathbb{Z}^0$, cumplen con los axiomas. Entonces:

Primero recordemos que el conjunto $\mathbb{Z}^0$ esta constituido por los enteros positivos y negativos incluido el cero. Luego:

1.- Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in H \therefore$

$$v + u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in H$$

La suma de dos enteros, es siempre otro entero.

2.- Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}^0 \therefore$

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x \\ \alpha \cdot y \end{pmatrix} \in H$$

El producto entre enteros es otro entero.

$\therefore$ $(H, \mathbb{Z}^0, +, \cdot)$ es un **subespacio vectorial**.

Ejemplo 5.10

Un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$

Si $V = \mathbb{R}^3$, los subconjuntos de V, como el conjunto de puntos de un plano que pasa por el origen o el conjunto de puntos de una recta que pasa por el origen, cumplen con los axiomas.

Sea $H=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}: x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x = at,\ y = bt, z = ct: donde\ a,\ b, c, t \in \mathbb{R}\right\}$ (una recta en $\mathbb{R}^3$que pasa por el origen. Demostrando:

1.- Sea $v = \begin{pmatrix} at_1 \\ bt_1 \\ ct_1 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} at_2 \\ bt_2 \\ ct_2 \end{pmatrix} \in H \therefore$

$$v + u = \begin{pmatrix} at_1 \\ bt_1 \\ ct_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} at_2 \\ bt_2 \\ ct_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t_1 + t_2) \\ b(t_1 + t_2) \\ c(t_1 + t_2) \end{pmatrix} \in H$$

El vector resultante tiene el mismo vector director de coordenadas *(a, b, c)*.

2.- Sea $v = \begin{pmatrix} at \\ bt \\ ct \end{pmatrix} \in H\ y\ \forall \alpha \in\ \mathbb{K} \therefore$

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot \begin{pmatrix} at \\ bt \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot at \\ \alpha \cdot bt \\ \alpha \cdot ct \end{pmatrix} \in H$$

El vector resultante tiene el mismo vector director de coordenadas *(a, b, c)*.

$\therefore$ $(H, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un **subespacio vectorial.**

5.4. Combinaciones lineales

Con base en las definiciones previas, sabemos que, al sumar vectores que a su vez están multiplicados por escalares obtendremos como resultado otro vector, llamaremos al vector resultante de esta operación como combinación lineal de los vectores sumados. Es decir, la *combinación lineal* se define como sigue.

5.4.1. Combinación lineal

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vectores pertenecientes a un espacio vectorial V y sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ escalares, entonces cualquier vector que tome la forma $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$ se denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ con escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Ejemplo 5.11

Determine si el vector $v=\begin{pmatrix}-12\\5\\3\end{pmatrix}$ en R^3 es una combinación lineal de los siguientes vectores:

$\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

Solución:

$$v = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 = \alpha \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\5\\3\end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes:

$$-2\alpha + 2\beta + 0\gamma = -12$$

$$1\alpha + 0\beta + 1\gamma = 5$$

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 0 & -6\\ 1 & 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 2 & 1 & -5\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)$$

De donde se concluye que:

$$\alpha = 2$$

$$\beta = -4$$

$$\gamma = 3$$

Finalmente:

$$2\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\5\\3\end{pmatrix}$$

$\therefore$ v es combinación lineal de u_1, u_2 y u_3.

Ejemplo 5.12

Dados los vectores $u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ y $v=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, determinar si v es una combinación lineal de u_1 y u_2.

Solución:

$$v=\alpha\cdot u_1+\beta\cdot u_2=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\alpha+3\beta=-3$$

$$-\alpha-4\beta=2$$

Usamos el método de Gauss-Jordan para hallar los valores de los coeficientes:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&-3\\-1&-4&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&3&-3\\0&-1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&3&-3\\0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-6\\0&1&1\end{array}\right)$$

Entonces los valores de los coeficientes son: $\alpha=-6$ y $\beta=1$

$$\therefore v=-6\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

$\therefore$ v es combinación lineal de u_1 y u_2.

Ejemplo 5.13

Demuestre que $v=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ $u_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$ y $u_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Solución:

$$v=\alpha\cdot u_1+\beta\cdot u_2+\gamma\cdot u_2=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$$

Realizado el producto y la suma se los vectores y escalares, se tiene las ecuaciones:

$$\alpha+3\beta+2\gamma=-1$$

$$-\alpha-2\beta-\gamma=1$$

$$3\alpha+2\beta+3\gamma=4$$

Usamos la matriz ampliada para resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{array}\right)$$

Entonces los valores de los coeficientes serían: $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = -\frac{7}{4}$ y $\gamma = \frac{7}{4}$

$$\therefore v = \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ v es combinación lineal de u_1, u_2 y u_3

Ejemplo 5.14

Dados los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y el vector $v = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, compruebe si v es una combinación lineal de los vectores dados.

Solución:

$$v = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\alpha - \beta - 3\gamma = -12$$

$$-\alpha + \gamma = 4$$

$$2\alpha + 2\beta = 2$$

$$\alpha = -1$$

No es necesario usar matrices para resolver este sistema, ya que la solución es muy evidente:

$$\alpha = -1$$

$$\beta = 2$$

$$\gamma = 3$$

$$\therefore v = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ v es combinación lineal de u_1, u_2 y u_3

Ejemplo 5.15

Sea $u_1 = 1$, $u_2 = \cos^2 x$, y $v = \cos 2x$, determinar si v es una combinación lineal de u_1 y u_2.

Solución:

$$v = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \cos^2 x = \cos 2x$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta - 3\gamma &= -12 \\ -\alpha + \gamma &= \ \ 4 \\ 2\alpha + 2\beta &= \ \ 2 \\ \alpha &= -1 \end{aligned}$$

No es necesario usar matrices para resolver este sistema, ya que la solución es muy evidente:

$$\alpha = -1$$

$$\beta = 2$$

$$\gamma = 3$$

$$\therefore v = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ v es combinación lineal de u_1, u_2 y u_3

5.4.2 Conjunto generador

A continuación, estudiaremos a determinados conjuntos de vectores que generan espacios vectoriales. Al conjunto de vectores que generan un espacio vectorial se lo llama *conjunto generador*. El término *generar*, en este contexto, es usado para referirnos a que con los vectores del conjunto generador podemos obtener nuevos vectores por medio de la combinación lineal.

Sea *gen*= $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, un conjunto de vectores pertenecientes a V. Entonces V es generado por el conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si y solo sí, todos y cada uno de los vectores v en el espacio V se puede escribir como una combinación lineal de los vectores de *gen*, es decir:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

Donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son coeficientes reales.

Teorema 5.2

Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ un conjunto de m vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, si $m < n$, entonces $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ no generan $\mathbb{R}^n$. Si $m > n$ entonces $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ generan $\mathbb{R}^n$ (debe comprobarse la independencia lineal) (Lay, 2001).

Ejemplo 5.16

Sean $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinar si generan el espacio $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Amparados en el teorema 5.2, se necesitan tres vectores en $\mathbb{R}^3$ para generar el espacio $\mathbb{R}^3$; sin embargo, aplicaremos el siguiente proceso para justificar la respuesta.

Dado $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$v = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\alpha + 3\beta = x$$

$$-\alpha - 2\beta = y$$

$$3\alpha + 2\beta = z$$

Usamos matrices:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ -1 & -2 & y \\ 3 & 2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & -7 & -3x+z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2x-3y \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 4x+7y+z \end{array}\right)$$

Para que el sistema tenga solución se debe cumplir que: $4x + 7y + z = 0$

Como podrán notar, se obtiene una ecuación que representa a un plano que pasa por el origen. Esto significa que los vectores dados generan un plano que pertenece a $\mathbb{R}^3$ y un plano no constituye todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

5.4.3 Espacio generado

Definición: Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k$, un conjunto de k vectores pertenecientes a un espacio vectorial V. Llamamos espacio generado al conjunto de combinaciones lineales que resulten de los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. En notación de conjuntos tenemos:

$$gen\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{v : v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k\}$$

La notación *gen* se lee espacio generado por.

Ejemplo 5.17

Determinar si los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^2$.

Solución:

Dado $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces:

$$v = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-\alpha + 3\beta + 4\gamma = x$$

$$\alpha - 3\beta - 2\gamma = y$$

Usamos matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & x \\ 1 & -3 & -2 & y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -x \\ 0 & 0 & 2 & x + y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & x + 2y \\ 0 & 0 & 2 & x + y \end{array}\right)$$

El último sistema no indica ninguna condición para x o y, por lo cual:

$$\mathbb{R}^2 = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Con esto último se demuestra que los espacios generados por un conjunto de vectores es un subespacio vectorial y por consiguiente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.3

Dado un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, que pertenecen de un espacio vectorial V, entonces, gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un subespacio vectorial de V (Stanley & Flores, 2012).

Ejemplo 5.18

Determinar si los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Como se detalló en el teorema 5.2 para generar $\mathbb{R}^3$, se quieren mínimo tres vectores linealmente independientes entre sí, para generar $\mathbb{R}^3$.

Comprobamos la independencia lineal:

Dado $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$v = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\alpha - \beta - \gamma = x$$

$$-\alpha + 2\beta + \gamma = y$$

$$3\beta + 2\gamma = z$$

Usamos matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ -1 & 2 & 1 & y \\ 0 & 3 & 2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & x+y \\ 0 & 3 & 2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2x+y \\ 0 & 1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 2 & -3x-3y+z \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2x+y \\ 0 & 1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z \end{array}\right)$$

El sistema no tiene condiciones especiales para x, y, z, significa que los tres vectores generan $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^3 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Ejemplo 5.19

Determinar si los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^4$.

Solución:

Dado $v = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$v = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$2\alpha + 2\beta - 2\gamma = w$$

$$\alpha - \beta + 3\gamma - \delta = x$$

$$3\beta + \gamma + \delta = z$$

$$-\alpha + 4\gamma + \delta = y$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 & w \\ 1 & -1 & 3 & -1 & x \\ 0 & 3 & 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & 4 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 1 & -1 & 3 & -1 & x \\ 0 & 3 & 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & 4 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & -2 & 4 & -1 & -\frac{1}{2}w + x \\ 0 & 3 & 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & 4 & 1 & z \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & -2 & 4 & -1 & -\frac{1}{2}w + x \\ 0 & 3 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2}w + z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}w - \frac{1}{2}x \\ 0 & 3 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2}w + z \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}w - \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}w + \frac{3}{2}x + y \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2}w + z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}w - \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}w + \frac{3}{2}x + y \\ 0 & 0 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}w + \frac{1}{2}x + z \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}w-\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{28}w+\frac{3}{14}x+\frac{1}{7}y \\ 0 & 0 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}w+\frac{1}{2}x+z \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}w-\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{28}w+\frac{3}{14}x+\frac{1}{4}y \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{11}{14}w-\frac{4}{7}x-\frac{5}{7}y+z \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}w-\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{28}w+\frac{3}{14}x+\frac{1}{7}y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12}w-\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}y+\frac{7}{6}z \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}w-\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{24}w+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}y+\frac{1}{12}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12}w-\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}y+\frac{7}{6}z \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{5}{24}w-\frac{1}{6}x+\frac{5}{12}y-\frac{7}{12}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{24}w+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}y+\frac{1}{12}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12}w-\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}y+\frac{7}{6}z \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{24}w+\frac{1}{6}x+\frac{7}{12}y-\frac{5}{12}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{24}w+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}y+\frac{1}{12}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12}w-\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}y+\frac{7}{6}z \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24}w+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}y+\frac{1}{12}z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{24}w+\frac{1}{6}x+\frac{7}{12}y-\frac{5}{12}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{24}w+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}y+\frac{1}{12}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12}w-\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}y+\frac{7}{6}z \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4}w-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{24}w+\frac{1}{6}x+\frac{7}{12}y-\frac{5}{12}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{24}w+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}y+\frac{1}{12}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12}w-\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}y+\frac{7}{6}z \end{array}\right)$$

No hay condiciones especiales para x, y, z, w, significa que los cuatro vectores generan $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbb{R}^4 = gen\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

5.4.4 Independencia lineal

Supongamos dos vectores en $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}$, queremos combinar estos dos vectores mediante escalares c_1 y c_2 de modo que se obtenga el vector nulo, es decir:

$$c_1\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Entonces, ¿Cuánto deben valer c_1 y c_2? Observando los vectores podemos determinar que $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$, es decir, $2\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. De hecho, hay muchas maneras de lograr esto. Cuando esto sucede, se dice que ambos vectores son linealmente dependientes, esto ocurre debido a que los vectores son múltiplos entre ellos. Sin embargo, si los vectores fuesen $\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$ la única manera de que su combinación sea nula es haciendo que $c_1=0$ y $c_2=0$. En consecuencia, es correcto colegir que bajo esta condición los vectores son linealmente independientes. Esta idea se puede generalizar con la siguiente definición.

Definición: Sean $v_1, v_2, \dots, v_n$, un conjunto de n vectores pertenecientes a un espacio vectorial V. Entonces diremos que $v_1, v_2, \dots, v_n$ son vectores linealmente independientes si los escalares c_1,c_2,…,c_n son todos cero en la siguiente combinación lineal:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$$

Si esta condición no se cumple, colegimos que los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$, son linealmente dependientes.

Ejemplo 5.20

Determinar si los vectores $u_1 = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución:

De la definición escribimos la ecuación:

$$\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-2\alpha + 4\beta = 0$$

$$3\alpha + 7\beta = 0$$

Usamos matrices:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 4 & 0\\ 3 & 7 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ 3 & 7 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ 0 & 13 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Los valores de los coeficientes son: $\alpha = 0$ y $\beta = 0$

$\therefore$ los vectores u_1 y u_2 son **linealmente independientes**.

Teorema 5.4

Si para dos vectores pertenecientes a un mismo espacio vectorial se cumple que, uno de ellos es un múltiplo escalar del otro, diremos que los vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo 5.21

Determinar si los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -20 \\ -29 \end{pmatrix}$ y $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución:

Dado $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$v = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -20 \\ -29 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-\alpha + 7\beta + \gamma = 0$$

$$-20\beta - 5\gamma = 0$$

$$11\alpha - 29\beta + \gamma = 0$$

Usamos matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & -5 & 0 \\ 11 & -29 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -20 & -5 & 0 \\ 0 & 48 & 12 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

$$\alpha + \frac{3}{4}\gamma = 0$$

$$\beta + \frac{1}{4}\gamma = 0$$

Consideremos: γ=1, entonces:

$$\alpha + \frac{3}{4}\gamma = 0$$

$$\beta + \frac{1}{4}\gamma = 0$$

∴ los vectores u_1, u_2 y u_3 son linealmente dependientes.

Teorema 5.5

Son linealmente dependientes todo conjunto de n vectores en el espacio R^m si y solo sí $n > m$ (Lay, 2001).

De este teorema podemos concluir que un conjunto de vectores linealmente independientes en R^n contiene a lo sumo n vectores.

Teorema 5.6

Se necesitan exactamente n vectores en R^n para generar el espacio R^n (Lay, 2001).

Ejemplo 5.22

Determinar si las matrices $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $u_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Dado $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$v = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$2\alpha + 4\gamma = 0$$

$$-\alpha - 3\beta + \gamma = 0$$

$$4\alpha + \beta + 7\gamma = 0$$

$$5\beta - 5\gamma = 0$$

Usamos matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Solución del sistema: $\alpha=0$, $\beta=0$ y $\gamma=0$

$\therefore$ las matrices u_1, u_2 y u_3 son **linealmente independientes.**

Teorema 5.7

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$, un conjunto de n vectores en R^n que han sido colocados en forma de columnas para generar una matriz $A_{n\times n}$. Entonces los vectores v_1, $v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si se cumple que la única solución al sistema $Ax = 0$ es la trivial, $x=0$.

Una forma equivalente de escribir este teorema es: $detA \neq 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes (Stanley & Flores, 2012).

Ejemplo 5.23

Dado el sistema homogéneo siguiente:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$$

Halle los vectores linealmente independientes correspondiente a la solución.

Solución:

Aplicamos el método de la matriz aumentada para reducir la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 5 & 4 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 6 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -13 & 0\\ 0 & 1 & 6 & 0\end{array}\right)$$

Tenemos:

$$x_1 - 13x_3 = 0$$

$$x_2 + 6x_3 = 0$$

Hallando los vectores de este sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13x_3 \\ -6x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es un solo vector $\begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ y es lineal independiente en sí mismo.

∴ La solución del sistema es un vector linealmente independiente.

5.5. Bases y dimensión

Llegados a esta instancia es fácil entender que podemos escribir cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lo mismo es aplicable para cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, los cuales podemos expresar como una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Estos vectores funcionan como una base para la generación de cualquier vector. Esta idea puede ser generalizada mediante el siguiente concepto.

Definición: Sean el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ perteneciente al espacio vectorial V, entonces diremos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para el espacio vectorial V, si y sólo si, el conjunto es linealmente independiente y es generador de V.

Podemos escribir la base para el espacio $\mathbb{R}^n$ usando los vectores:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix},$$

Los mismos que forman la llamada *base canónica*. Si colocamos a los vectores E_1, E_2 … E_n como columnas de una matriz, obtendremos la matriz identidad cuyo determinante es igual a uno, de allí en nombre de *base canónica.*

Ejemplo 5.24

La base canónica de un conjunto de matrices que pertenece al espacio M_{22} sería:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.25

La base canónica de un conjunto de matrices que pertenece al espacio M_{mn} sería:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ldots,\quad u_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ldots,\quad u_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 5.8

Si el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para V y si v pertenece al espacio V, entonces existe una combinación lineal única tal que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$.

Definición: Los espacios vectoriales que tienen bases con un número finito de vectores reciben el nombre de *espacios vectoriales de dimensión finita* y el número de vectores que componen la base es la dimensión de espacio vectorial, y la denotaremos como $dimV$.

La dimensión de R^n es n ya que una base de R^n requiere de n vectores, es decir, $dimR^n = n$. La dimensión de las matrices de m x n es $dimM_{mn} = m \cdot n$

Teorema 5.9

Si H un subespacio que pertenecer a un espacio vectorial V que tiene finita dimensión. Entonces H igualmente tiene dimensión finita y se cumple que: $dimH \leq dimV$.

Ejemplo 5.26

Encontrar una base para el conjunto de vectores que se encuentran en el plano $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0 \right\}$

Solución:

Para resolver despejamos una de las variables, en este caso despejamos y. Entonces:

$$y = 2x + 3z$$

Dado que la base es un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$, por ello:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituyen una base para el plano H, entonces podemos escribir que:

$$H = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim H = 2$$

Ejemplo 5.27

Sea S es el espacio solución del sistema homogéneo de ecuaciones propuesto, entonces determine una base cualquiera para S.

$$S = \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Solución:

Reducimos el sistema usando las operaciones elementales de fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Entonces:

$$x - \frac{1}{5}z = 0 \to x = \frac{1}{5}z$$

$$y - \frac{6}{5}z = 0 \to y = \frac{6}{5}z$$

$$z = z$$

La base para este conjunto es elemento de $\mathbb{R}^3$, por ello:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z \\ \frac{6}{5}z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base para este espacio solución está formada por el vector: $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$; o podemos multiplicar por 5 el vector y tenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, que también es otra base para este espacio. Entonces:

$$S = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim S = 1$$

Teorema 5.10

Un conjunto de *n* vectores de dimensión n constituye una base para el espacio vectorial *V* si y sólo si son linealmente independientes entre sí y generan a *V*.

5.5.1 Cambio de bases

Si bien es cierto que las bases canónicas son usualmente las más usadas y fáciles de tratar, a veces se requiere representar vectores en otras bases. Como se debe notar, existen muchas bases para un espacio vectorial y debe ser posible pasar de una base a otra base de alguna manera.

Ahora, imaginemos al vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ que podemos expresarlo como $x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir que hemos representado x como una combinación lineal de la base canónica de R^2 que llamaremos B_1. Usando una combinación lineal podemos reescribir a este vector x en términos de otros dos vectores que formen una base no canónica, pudiendo ser estos vectores, por ejemplo, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ que son linealmente independientes, ya que un vector no es múltiplo del otro. A esta base llamaremos B_2. Para decir que x está escrito en términos de B_1, se escribe $(x)_{B1}$ y para decir que x está escrito en términos de B_2, se escribe $(x)_{B2}$.

Luego $(x)_{B_1} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y cuando encontramos c_1 y c_2 podemos escribir $(x)_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Para realizar este cambio de bases, se requiere una matriz A, llamada matriz de transición de modo que $(x)_{B_2} = A(x)_{B_1}$. Para hallar la matriz A que toma vectores en base canónica B_1 y los lleva a otra base B_2 nos basamos en el siguiente teorema.

Teorema 5.11

Si A es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2, entonces A^{-1} será la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1 (Stanley & Flores, 2012).

Con base en el teorema dado, podemos realizar el siguiente procedimiento

1. Escriba una matriz M= $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, donde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vectores de B_2.
2. Halle M^{-1}, esta es la matriz A que se busca.

Ejemplo 5.28

Al vector $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ que está en base canónica, escribirlo en función de una nueva base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Ponemos el vector v_1, en términos de B_2:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = v_2$$

Hallamos α y β:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$$

v_2 es el vector v_1 en la nueva base B_2.

Ejemplo 5.29

Al vector $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ que está en base canónica, escribirlo en función de una nueva base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ponemos el vector v_1, en términos de B_2:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = v_2$$

Hallamos α, β y γ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{5} & 3 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{7}{5} & 3 & \frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{23}{10} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{44} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{27}{220} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{43}{44} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{44} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{43}{44} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{44} \end{array}\right)$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{22} \\ \frac{43}{44} \\ \frac{23}{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 14 \\ 43 \\ 23 \end{pmatrix} = v_2$$

v_2 es el vector v_1 en la nueva base B_2.

5.6 Operaciones con Subespacios Vectoriales

Existen algunas operaciones que se pueden realizar con los llamados subespacios vectoriales. Al ser estos subconjuntos algunas operaciones son las mismas que la de los conjuntos (intersección, unión). Otras operaciones son propias de los subespacios vectoriales (suma, suma directa).

5.6.1 Intersección

Al igual que la intersección de conjuntos, la intersección de subespacios vectoriales se obtiene al colectar los elementos que tienen en común dos subespacios.

La intersección de dos subespacios, da como resultado siempre otro subespacio.

Sean S y T dos subespacios vectoriales pertenecientes al espacio vectorial V. Denotaremos a $S \cap T$ como la intersección de los dos subespacios, matemáticamente se escribe:

$$S \cap T = \{v : v \in S \ \wedge T\}$$

Los vectores de la intersección deben pertenecer a S y a T al mismo tiempo.

La intersección de dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio también.

Ejemplo 5.30

Dados los subespacios

H_1= $H_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \ x - y + 2z = 0\right\}$ y $H_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \ 2x + y - z = 0\right\}$.

Además H_1 y $H_2 \subset \mathbb{R}^3$ y representan un conjunto de vectores de un plano que cruza por el origen. ¿Es $H_1 \cap H_2$ es un espacio vectorial? Demostrar.

Solución:

Con ayuda de la matriz extendida podemos hallar el vector o vectores resultantes pertenecientes a la intersección de H_1 y H_2:

Partimos de las ecuaciones dadas en los subespacios, que son las condiciones de los vectores:

$$x - y + 2z = 0$$

$$2x + y - z = 0$$

Las convertimos en un matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Entonces como solución tenemos:

$$x + \frac{1}{3}z = 0 \to \; x = -\frac{1}{3}z$$

$$x - \frac{5}{3}z = 0 \to \; y = \frac{1}{5}z$$

Si consideramos a z=t, tendremos:

$$v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t \\ \frac{1}{5}t \\ t \end{pmatrix}$$

Observe que lo que se ha obtenido son las ecuaciones paramétricas de una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen; ya se demostró anteriormente que el conjunto de puntos que están en una recta que atraviesa el origen es un espacio vectorial.

$\therefore H_1 \cap H_2$ es un subespacio vectorial.

5.6.2 Unión

A diferencia de la intersección, la unión de dos subespacios vectoriales que pertenecen a un mismo espacio V, no es obligatoriamente un subespacio vectorial.

Sean S y T dos subespacios vectoriales pertenecientes a V. Denotaremos a $S \cup T$ como la unión de estos dos subespacios, y matemáticamente se escribe:

$$S \cup T = \{v : v \in S \;\vee T\}$$

Los vectores de la unión pueden pertenecer a S o a T.

5.6.3 Suma

La suma de dos subespacios vectoriales es siempre un subespacio vectorial. Sean S y T dos subespacios vectoriales pertenecientes a V. Denotaremos a S + T como la suma de S y T, matemáticamente se escribe:

$$S + T = \{v: v = s + t; s \in S \wedge t \in T\}$$

Con la definición, la suma de dos subespacios vectoriales cumple con los axiomas clausurativos de la suma y la multiplicación por un escalar.

Para encontrar el conjunto generador de $S + T$ se debe:

- Hallar las bases de S y T
- Juntar los vectores de ambas bases en un solo conjunto. Ese conjunto es el generador del espacio $S + T$

$$S = gen\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$T = gen\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

$$S + T = gen\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

El conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$, no necesariamente es linealmente independiente, por lo cual es conveniente convertir el conjunto en independiente extrayendo el o los vectores que generan dependencia.

5.6.4 Suma directa

Denotaremos a $S \oplus T$ como la suma directa de los subespacios vectoriales S y T que pertenecen a espacio V.

Definición:

$$S + T \ es\ directa \ \ si\ solo\ si \ \ S \cap T = \{0\}$$

Ejemplo 5.31

Calcular $H + K$ (verificar si es directa) y $H \cap K$, dado:

$$H = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 3z = 0\right\} \text{ y } K = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\right\}$$

Solución:

Primero hallamos una base para H, para ello despejamos y de la ecuación del subespacio H:

$$y = -2x + 3z$$

Luego hallamos los vectores de la base:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base para este conjunto está formada por los vectores: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$H = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ por tanto, } \dim H = 2$$

Hallamos una base para K:

Despejamos $x = 2y - z$, y luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base para este conjunto está formada por los vectores: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$K = gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim H = 2$$

Ahora calculas $H + K$:

$$H + K = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Hallados los vectores de la base debemos comprobar si los mismos son linealmente independientes, para ello usamos la matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0\end{array}\right)$$

El sistema reducido tiene tres pivotes; significa que, de los 4 vectores, 3 son linealmente independientes y uno debe ser dependiente. Por lo tanto:

$$H+K=gen\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim(H+K)=3$$

A continuación, aplicamos el criterio de las dimensiones para la suma directa:

$$\dim(H+K)=\dim H+\dim K-\dim(H\cap K)$$

$$3=2+2-1$$

La intersección $H \cap K$ es:

$$H\cap K=gen\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim(H\cap K)=1$$

Por lo tanto $H + K$ no es una suma directa.

Ejemplo 5.32

Calcular $H + K$ (verificar si es directa) y $H \cap K$, dado:

$$H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3:-x+y+3z=0\right\}\text{ y }\quad K=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3:x-y-z=0\wedge\ 2x-y=0\right\}$$

Solución:

Primero hallamos una base para H:

Despejamos $y = x - 3z$, y luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x-3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base para este conjunto está formada por los vectores: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$H = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim H = 2$$

Hallamos una base para K:

Despejamos $z = x - y = -x$ y $y = 2x$, luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La base para este conjunto está formada por los vectores: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$K = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim H = 1$$

Ahora, calculas $H + K$:

$$H + K = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Verificamos si los vectores de la base son linealmente independientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema reducido tiene tres pivotes; significa que, los 3 vectores son linealmente independientes, por lo tanto:

$$H + K = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim(H + K) = 3$$

Recordando el teorema de las dimensiones:

$$\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K)$$

$$3 = 2 + 1 - 0$$

La intersección $H \cap K$ es:

$$H \cap K = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim(H \cap K) = 0$$

Por lo tanto, $H + K$ es suma directa.

5.7. Ejercicios propuestos

I. Espacios vectoriales

Determinar si los conjuntos propuestos son espacios vectoriales. De no serlo, indique qué axiomas no se cumplen.

1. El conjunto de números naturales $\mathbb{N}^{+0}$ como vectores, $\mathbb{N}$ +0 como escalares y la multiplicación para números naturales.
2. El conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como vectores, $\mathbb{Q}$ (números racionales) como escalares, suma y multiplicación para números naturales.
3. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ como vectores, $\mathbb{N}$ como escalares, suma y multiplicación para números enteros.
4. El conjunto de matrices diagonales de n×n bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.
5. {(x, y): y ≥ 0; x, y reales} con la suma de vectores y multiplicación por un escalar usuales.
6. Los vectores en el plano en el tercer cuadrante.
7. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, x, 0).

8. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^2$ de la forma (x, x).
9. El conjunto de matrices 2×2 con determinante 0 bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.
10. El conjunto de funciones polinómicas de grado ≤ 2 bajo la suma de funciones y multiplicación por un escalar usuales.
11. El conjunto de matrices 2x2 con todos los elementos 0 bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.
12. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^2$ tales que su suma de componentes sea cero.
13. El conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo [0, 1] bajo la suma de funciones y multiplicación por un escalar usuales.
14. El conjunto de matrices 3×3 con traza igual a 0 bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.
15. El conjunto de funciones pares (f(x) = f(-x)) bajo la suma de funciones y multiplicación por un escalar usuales.
16. El conjunto de todas las funciones f(x) = kx para algún escalar k bajo la suma de funciones y multiplicación por un escalar usuales.
17. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ con la propiedad de que la suma de sus coordenadas es igual a 1.
18. El conjunto de polinomios de grado ≤ 3 bajo la suma de polinomios y multiplicación por un escalar usuales.
19. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^4$ con al menos una coordenada negativa.
20. El conjunto de funciones periódicas con periodo π bajo la suma de funciones y multiplicación por un escalar usuales.
21. El conjunto de matrices 3x3 con rango 1 bajo la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.
22. El conjunto de números reales bajo la suma y multiplicación usuales.
23. El conjunto de vectores en R3 tales que la suma de sus componentes sea un número par.
24. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial y'' - y' + y = 0 bajo la suma de funciones y multiplicación por un escalar usuales.
25. El conjunto de matrices triangulares superiores 3x3 bajo la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.

26. El conjunto de polinomios de grado impar bajo la suma de polinomios y multiplicación por un escalar usuales.
27. El conjunto de matrices 2x2 con traza igual a 0 bajo la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.
28. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^4$ cuyas coordenadas suman 1.
29. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación $x^2 - y^2 = 0$ bajo la suma de vectores y multiplicación por un escalar usuales.
30. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que la suma de sus componentes es 42.
31. El conjunto de funciones constantes bajo la suma de funciones y multiplicación por un escalar usuales:

II. Sub-espacios vectoriales

Determinar si los conjuntos propuestos son sub-espacios vectoriales. De no serlo, indique que axiomas no se cumplen.

32. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x^3 + y^3 = 1\}$
33. $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(x, y, z); xz = 0\}$
34. $V = \mathbb{R}^4$; $H = \{(x, y, z, w); x + y + z + w = 0\}$
35. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x^2 = y^2\}$
36. $V = \mathbb{R}^3$; H = el eje z y el plano yz
37. $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(x, y, z); x + y = z\}$
38. $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(x, y, z); x = 2\}$
39. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x \geq 0\}$
40. $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(x, y, z); x = y\}$
41. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); y \leq 2x\}$
42. $V = \mathbb{R}^3$; H = el plano xz
43. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$
44. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x^2 + y^3 < 1\}$
45. $V = M_{2x2}$; $H = \{D \in M_{2x2}$; D es diagonal$\}$

46. $V = M_{2x2}$; $H = \{T \in M_{2x2}$; T es triangular superior$\}$
47. $V = P^2$ (conjunto de polinomios de grado ≤ 2); $H = \{p \in P^2; p(1) = 0\}$
48. $V = \mathbb{R}^4$; H = el plano $x + 2y + 3z + 4w = 0$
49. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x + y = 1\}$
50. $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(x, y, z); x - y + z = 0\}$
51. $V = M_{3x3}$; $H = \{A \in M_{3x3}$; A es simétrica$\}$
52. $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
53. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); xy = 0\}$
54. $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(x, y, z); x = 2y = 3z\}$
55. $V = P^3$ (conjunto de polinomios de grado ≤ 3); $H = \{p \in P^3; p'(x) = 0\}$
56. $V = M_{2x2}$; $H = \{A \in M_{2x2}; \text{traza}(A) = 0\}$
57. $V = P^4$ (conjunto de polinomios de grado ≤ 4); $H = \{p \in P^4; p'(1) = 0\}$
58. $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(x, y, z); x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$
59. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x^3 = y^3\}$
60. $V = P^2$ (conjunto de polinomios de grado ≤ 2); $H = \{p \in P^2; p(0) = 1\}$
61. $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(x, y, z); x + y + z = 1\}$
62. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x + y > 0\}$
63. $V = P^3$ (conjunto de polinomios de grado ≤ 3); $H = \{p \in P3; p''(0) = 0\}$

III. Combinaciones lineales y Conjunto generador

64. Determina si los vectores (1, 2, 3) y (-1, 0, 1) generan R^3.
65. Comprueba si los vectores (1, 0, 0) y (0, 1, 0) generan el plano xy en R^3.
66. Verifica si los vectores (1, 1, 0) y (0, 1, 1) generan R^3.
67. Decide si los vectores (1, -1, 0) y (2, -2, 0) generan el plano xy en R^3.
68. Comprueba si los vectores (1, 2) y (3, 6) generan R^2.
69. Determina si los vectores (1, 0) y (0, 1) generan R^2.
70. Verifica si los vectores (1, 1, 0) y (0, 0, 1) generan el plano xy en R^3.
71. Decide si los vectores (1, -1, 1) y (-2, 2, -2) generan R^3.

72. Comprueba si los vectores (1, 2, 3) y (2, 4, 6) generan R^3.
73. Determina si los vectores (1, 2, 3) y (-1, -2, -3) generan R^3.
74. Verifica si los vectores (1, 2, 0) y (0, 1, 3) generan R^3.
75. Decide si los vectores (1, 0, 1) y (0, 1, -1) generan R^3.
76. Comprueba si los vectores (1, 1, 1) y (-1, 0, 1) generan el plano en R^3.
77. Determina si los vectores (1, 2) y (-2, -4) generan R^2.
78. Verifica si los vectores (1, -1) y (-2, 2) generan R^2.
79. Decide si los vectores (1, 1, 1) y (2, 2, 2) generan la recta en R^3.
80. Comprueba si los vectores (1, 1, 0) y (0, 1, 1) generan R^3.
81. Determina si los vectores (1, 0, 0) y (0, 1, 1) generan R^3.
82. Verifica si los vectores (1, 2, 3) y (1, 1, 1) generan R^3.
83. Decide si los vectores (1, 0, 0) y (1, 1, 0) generan el plano xy en R^3. Determina si los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) generan R^3.
84. Comprueba si los vectores (1, 2, 3), (2, 4, 6) y (3, 6, 9) generan R^3.
85. Verifica si los vectores (1, 1, 0), (0, 0, 1) y (1, 0, 1) generan R^3.
86. Decide si los vectores (1, -1, 0), (-1, 1, 0) y (0, 0, 1) generan R^3.
87. Determina si los vectores (1, 2, 1), (0, 1, 0) y (-1, -2, -1) generan R^3.
88. Comprueba si los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 1) y (1, 1, 0) generan R^3.
89. Verifica si los vectores (1, 0, -1), (0, 1, -1) y (1, 1, -2) generan R^3.
90. Decide si los vectores (1, 1, 1), (1, 1, -1) y (-1, 1, 0) generan R^3.
91. Determina si los vectores (2, -1, 0), (1, 0, 1) y (-1, 1, 2) generan R^3.
92. Comprueba si los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 0) y (-1, 0, 1) generan R^3.
93. Determina si los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) y (1, 1, 1) generan R^3.
94. Comprueba si los vectores (1, 2, 0), (0, 1, 2), (1, 1, 1) y (-1, -1, -1) generan R^3.
95. Verifica si los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0) y (1, -1, 0) generan R^3.
96. Decide si los vectores (1, 2, -1), (2, 4, -2), (0, 0, 1) y (1, 0, 0) generan R^3.
97. Determina si los vectores (1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, -2) y (-1, 1, 0) generan R^3.

98. Comprueba si los vectores (1, 1, 1), (1, 1, -1), (-1, 1, 0) y (0, 1, -1) generan R^3.

99. Verifica si los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1) y (0, 0, 1) generan R^3.

100. Decide si los vectores (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1) y (-1, 1, 0) generan R^3.

101. Determina si los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) y (2, 2, 2) generan R^3.

102. Comprueba si los vectores (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5) y (4, 5, 6) generan R^3.

103. Determina si los vectores (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) y (0, 0, 0, 1) generan R^4.

104. Comprueba si los vectores (1, 2, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (1, 1, 1, 1) y (-1, -1, -1, -1) generan R^4.

105. Verifica si los vectores (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0) y (1, -1, 0, 1) generan R^4.

106. Decide si los vectores (1, 2, -1, 0), (2, 4, -2, 0), (0, 0, 1, 1) y (1, 0, 0, 1) generan R^4.

107. Determina si los vectores (1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 1, -2, 1) y (-1, 1, 0, -1) generan R^4.

108. Comprueba si los vectores (1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (-1, 1, 0, 0) y (0, 1, -1, 0) generan R^4.

109. Verifica si los vectores (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0) y (0, 0, 1, 1) generan R^4.

110. Decide si los vectores (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0) y (-1, 1, 0, 1) generan R^4.

111. Determina si los vectores (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) y (2, 2, 2, 2) generan R^4.

112. Comprueba si los vectores (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6) y (4, 5, 6, 7) generan R^4.

IV. Independencia lineal

113. Determina si los vectores (1, 0, 0) y (0, 1, 0) son linealmente independientes en R^3.

114. Comprueba si los vectores (1, 2, 3) y (2, 4, 6) son linealmente dependientes en R^3.

115. Verifica si los vectores (1, 0, 1) y (0, 1, 1) son linealmente independientes en R^3.

116. Decide si los vectores (1, -1, 0) y (-1, 1, 0) son linealmente independientes en R^3.

117. Determina si los vectores (1, 2, -1) y (2, 4, -2) son linealmente dependientes en R^3.

118. Comprueba si los vectores (1, 1, 1) y (1, 1, -1) son linealmente independientes en R^3.

119. Verifica si los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (1, 1, 1) son linealmente independientes en R^3.

120. Decide si los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 1) y (1, 1, 0) son linealmente independientes en R^3.

121. Determina si los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) son linealmente independientes en R^3.

122. Comprueba si los vectores (1, 2, 3) y (-2, -4, -6) son linealmente independientes en R^3.

123. Verifica si los vectores (1, 0, -1), (0, 1, -1) y (1, 1, -2) son linealmente independientes en R^3.

124. Decide si los vectores (1, 2, 0) y (-2, -4, 0) son linealmente dependientes en R^3.

125. Determina si los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 1) y (-1, 1, 0) son linealmente independientes en R^3.

126. Comprueba si los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 0) son linealmente independientes en R^3.

127. Verifica si los vectores (1, 1, 0), (0, 1, 1) y (1, 0, 1) son linealmente independientes en R^3.

128. Decide si los vectores (1, 2, 1) y (2, 4, 2) son linealmente dependientes en R^3.

129. Determina si los vectores (1, 2, 3) y (3, 2, 1) son linealmente independientes en R^3.

130. Comprueba si los vectores (1, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 3) son linealmente independientes en R^3.

131. Verifica si los vectores (1, 2, 0) y (-1, -2, 0) son linealmente dependientes en R^3.

132. Decide si los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 1) y (1, 1, 2) son linealmente independientes en R^3.

133. ¿Son los vectores (1, 0) y (0, 1) linealmente independientes en R^2?

134. ¿Los vectores (2, 3) y (-1, -1) son linealmente dependientes en R^2?

135. ¿Son los vectores (1, 1) y (-1, 1) linealmente independientes en R^2?

136. ¿Los vectores (1, 2) y (3, 6) son linealmente dependientes en R^2?

137. ¿Son los vectores (1, -1) y (0, 0) linealmente independientes en R^2?

138. ¿Los vectores (1, 2) y (2, 4) son linealmente dependientes en R^2?

139. ¿Son los vectores (-1, 1) y (-2, 2) linealmente independientes en R^2?

140. ¿Los vectores (3, 4) y (-2, -2) son linealmente dependientes en R^2?

141. ¿Son los vectores (0, 0) y (1, -1) linealmente independientes en R^2?

142. ¿Los vectores (-1, 2) y (2, -4) son linealmente dependientes en R^2?

143. ¿Son los vectores (1, 2, 3, 4), (-2, -1, 0, 1) y (0, 0, 1, -1) linealmente independientes en R^4?

144. ¿Los vectores (1, 0, 1, -1), (2, 1, 0, 1) y (-1, -1, 1, 0) son linealmente dependientes en R^4?

145. ¿Son los vectores (1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 0) y (2, 2, 0, -1) linealmente independientes en R^4?

146. ¿Los vectores (3, 3, 3, 3), (-1, -1, -1, -1) y (2, 2, 2, 2) son linealmente dependientes en R^4?

147. ¿Son los vectores (1, -1, 1, -1), (2, 0, 2, 0) y (-1, 2, -1, 2) linealmente independientes en R^4?

148. ¿Los vectores (0, 2, -2, 0), (1, 1, -1, 1) y (-1, -1, 1, -1) son linealmente dependientes en R^4?

149. ¿Son los vectores (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1) y (0, 0, 1, 1) linealmente independientes en R^4?

150. ¿Los vectores (2, 0, 2, 0), (0, 2, -2, 0) y (1, -1, 1, -1) son linealmente dependientes en R^4?

151. ¿Son los vectores (-1, 2, -3, 1), (4, -3, 2, -1) y (1, 1, -1, -1) linealmente independientes en R^4?

152. ¿Los vectores (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5) y (3, 4, 5, 6) son linealmente dependientes en R^4?

153. ¿Son los vectores (1, 0, 1, -1), (2, 1, 0, 1), (-1, -1, 1, 0) y (1, 2, 1, 0) linealmente independientes en R^4?

154. ¿Los vectores (1, 2, 0, -1), (0, 1, 1, 0), (-1, 0, -1, 1) y (0, 1, 0, 1) son linealmente dependientes en R^4?

155. ¿Son los vectores (1, 1, 0, -1), (-1, 0, -1, 0), (2, 1, 2, -2) y (1, 0, 1, -1) linealmente independientes en R^4?

156. ¿Los vectores (1, 0, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1, -1), (2, 1, 2, -2, 0) y (0, 1, 0, 1, 1) son linealmente dependientes en R^4?

157. ¿Son los vectores (1, 0, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1, 0), (-1, -1, 1, -1, 1), (0, 0, -1, 1, -1) y (1, 2, 1, 0, 1) linealmente independientes en R^5?

158. ¿Los vectores (1, 2, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1, -1), (2, 1, 2, -2, 0) y (0, 1, 0, 1, 1) son linealmente dependientes en R^5?

159. ¿Son los vectores (1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1, -1), (2, 1, 2, -2, 0) y (0, 1, 0, 1, 1) linealmente independientes en R^5?

160. ¿Los vectores (1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (-1, -1, 1, -1, 1), (0, 0, -1, 1, -1) y (1, 2, 1, 0, 1) son linealmente dependientes en R^5?

161. ¿Son los vectores (1, 0, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (-1, -1, 1, 0, 1), (0, 0, -1, 1, -1) y (1, 2, 1, 1, 1) linealmente independientes en R^5?

V. Base y dimensión

Encuentra una base en R^3 para los conjuntos de vectores en los planos siguientes:

162. $2x - 3y + z = 0.$
163. $x + 2y - 3z = 0.$
164. $2x - y + z = 0$
165. $x + 3y - z = 0$
166. $4x - 2y + 6z = 0.$
167. $-x + 2y + 5z = 0.$
168. $-2x + 4y - z = 0.$
169. $x + y + 2z = 0.$
170. $2x - y + 3z = 0.$
171. $x + y - z = 0.$

Encuentra una base en R^3 para los conjuntos de vectores en las rectas siguientes:

172. $3x = 2y = -z.$
173. $x = 2y = 3z.$
174. $-x = y = -2z.$
175. $x = 2y = -3z.$
176. $x = -y = 2z.$
177. $-3x = 2y = z.$
178. $4x = -y = 3z.$
179. $x = 2y = -z.$
180. $-3x = y = -z.$
181. $x = -2y = -z.$

Encuentra una base Encuentra una base para los espacios de solución de los sistemas homogéneos siguientes:

182. $3x + 2y - 5z = 0$
$2x + y - 3z = 0$
$x - y + z = 0.$

183. $x + y + 2z = 0$
$2x - y + z = 0$
$3x + y - z = 0.$

184. $x + 2y - z = 0$
$2x - y + z = 0$
$3x - y + 2z = 0.$

185. $2x - y + z = 0$
$x + y - 2z = 0$
$3x + 4y - 5z = 0.$

186. $x - 3y + z = 0$
$x + y - z = 0$
$3x + 2y - 4z = 0.$

187. $x - 2y + 3z = 0$
$2x + 4y - 6z = 0$
$3x + y - 7z = 0.$

188. $4x + 2y - z = 0$
$2x + y + z = 0$
$6x + 3y - 2z = 0.$

189. $-x + y - z = 0$
$x - 2y + 3z = 0$
$2x - 3y + 5z = 0.$

190. $x + 2y - z = 0$
$-x + 3y - 2z = 0$
$2x - y + z = 0.$

191. $2x + 2y - z = 0$
$-x + 3y - 3z = 0$
$2x - y + 2z = 0.$

VI. Cambio de base

Escribir el vector en R^2 en términos de una nueva base:

192. Poner el vector (2, -1) en términos de la base {(3, -2), (2, 7)}.

193. Expresar el vector (-1, 4) en términos de la base {(1, 1), (0, 2)}.

194. Escribir el vector (5, -3) en términos de la base {(2, 1), (-1, 4)}.

195. Expresar el vector (0, 1) en términos de la base {(1, 0), (2, -1)}.

196. Poner el vector (3, 2) en términos de la base {(-1, 2), (4, 3)}.

197. Escribir el vector (-2, -5) en términos de la base {(-3, 1), (1, -2)}.

198. Expresar el vector (7, -8) en términos de la base {(2, -3), (-4, 5)}.

199. Poner el vector (1, 1) en términos de la base {(-1, 0), (0, -1)}.

200. Escribir el vector (-4, 6) en términos de la base {(2, -1), (3, 2)}.

201. Expresar el vector (9, -2) en términos de la base {(-2, 3), (1, -2)}.

Escribir un vector en R^3 en términos de una nueva base:

202. Poner el vector (2, -1, 3) en términos de la base {(3, -2, 1), (2, 7, 4), (2, 1, -2)}.

203. Expresar el vector (-1, 4, 0) en términos de la base {(1, 1, 0), (0, 2, 1), (2, -1, 1)}.

204. Escribir el vector (5, -3, 2) en términos de la base {(2, 1, 1), (-1, 4, 0), (0, -2, -1)}.

205. Poner el vector (0, 1, -2) en términos de la base {(-1, 0, 2), (2, -1, 1), (0, 2, -2)}.

206. Expresar el vector (3, 2, 1) en términos de la base {(-1, 2, -1), (4, 3, 0), (2, 0, 1)}.

207. Escribir el vector (-2, -5, 4) en términos de la base {(-3, 1, 2), (1, -2, 0), (0, 4, -1)}.

208. Poner el vector (7, -8, 9) en términos de la base {(2, -3, 1), (-4, 5, -2), (1, 0, 3)}.

209. Expresar el vector (1, 1, 1) en términos de la base {(-1, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 1, 1)}.

210. Escribir el vector (-4, 6, -2) en términos de la base {(2, -1, 3), (3, 2, 0), (-1, 1, -2)}.

211. Poner el vector (9, -2, 5) en términos de la base {(-2, 3, -1), (1, -2, 4), (0, 1, 2)}.

Escribir una matriz 2x2 en términos de una nueva base:

212. Poner la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

213. Expresar la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}$.

214. Escribir la matriz $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

215. Poner la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

216. Expresar la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$.

217. Escribir la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.

218. Poner la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

219. Expresar la matriz $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

220. Escribir la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$.

221. Poner la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$.

Escribir un polinomio P^2 en términos de una nueva base:

222. Poner el polinomio $2 + 3x - x^2$ en términos de la base $\{1 + 4x - 2x^2, 2 - x + x^2, 1 + 3x + 2x^2\}$.

223. Expresar el polinomio $1 - 2x + 3x^2$ en términos de la base $\{2 + x - x^2, 3 - 2x + 3x^2, 1 + 4x - 2x^2\}$.

224. Escribir el polinomio $3x - x^2$ en términos de la base $\{1 + x - x^2, 2 - 2x + 3x^2, 3 + 4x - 2x^2\}$.

225. Poner el polinomio $4 - x + x^2$ en términos de la base $\{1 + x - x^2, 2 - 2x + 3x^2, 3 + 4x - 2x^2\}$.

226. Expresar el polinomio $2x^2 - 3x$ en términos de la base $\{1 + x - x^2, 2 - 2x + 3x^2, 3 + 4x - 2x^2\}$.
227. Escribir el polinomio $-1 + 2x + 3x^2$ en términos de la base $\{1 + x - x^2, 2 - 2x + 3x^2, 3 + 4x - 2x^2\}$.
228. Poner el polinomio $2 - x + 3x^2$ en términos de la base $\{1 + x - x^2, 2 - 2x + 3x^2, 3 + 4x - 2x^2\}$.
229. Expresar el polinomio $1 + 2x - x^2$ en términos de la base $\{1 + x - x^2, 2 - 2x + 3x^2, 3 + 4x - 2x^2\}$.
230. Escribir el polinomio $-3x + 2x^2$ en términos de la base $\{1 + x - x^2, 2 - 2x + 3x^2, 3 + 4x - 2x^2\}$.
231. Poner el polinomio $2 - 3x + x^2$ en términos de la base $\{1 + x - x^2, 2 - 2x + 3x^2, 3 + 4x - 2x^2\}$.

VII. Operaciones con subespacios vectoriales

Dado H_1 y H_2. Hallar la intersección de $H_1 \cap H_2$.

232. $H_1 = \{(x, y, z): x - y + 2z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x + y - z = 0\}$.

233. $H_1 = \{(x, y): x + y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x - y = 0\}$.

234. $H_1 = \{(x, y, z): x + y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}$.

235. $H_1 = \{(x, y): x - y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x + y = 0\}$.

236. $H_1 = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x + 2y - z = 0\}$.

237. $H_1 = \{(x, y): x + 2y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x - 2y = 0\}$.

238. $H_1 = \{(x, y, z): 3x - y + 2z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x + y - z = 0\}$.

239. $H_1 = \{(x, y, z): x + y - 2z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x - y + 3z = 0\}$.

240. $H_1 = \{(x, y, z): x - y + z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 3x + 2y - 2z = 0\}$.

241. $H_1 = \{(x, y, z): x + y + z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x - 2y - z = 0\}$.

Dado H_1 y H_2. Hallar la intersección de $H_1 \cup H_2$.

242. $H_1 = \{(x, y, z): x - y + 2z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x + y - z = 0\}$.

243. $H_1 = \{(x, y): x + y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x - y = 0\}$.

244. $H_1 = \{(x, y, z): x + y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}$.

245. $H_1 = \{(x, y): x - y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x + y = 0\}$.

246. $H_1 = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x + 2y - z = 0\}$.

247. $H_1 = \{(x, y): x + 2y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x - 2y = 0\}$.

248. $H_1 = \{(x, y, z): 3x - y + 2z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x + y - z = 0\}$.

249. $H_1 = \{(x, y, z): x + y - 2z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x - y + 3z = 0\}$.

250. $H_1 = \{(x, y, z): x - y + z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 3x + 2y - 2z = 0\}$.

251. $H_1 = \{(x, y, z): x + y + z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x - 2y - z = 0\}$.

Dados H1 y H2. Determinar si la suma de subespacios vectoriales es suma o suma directa:

252. $H_1 = \{(x, y, z): x - y + 2z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x + y - z = 0\}$.

253. $H_1 = \{(x, y): x + y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x - y = 0\}$.

254. $H_1 = \{(x, y, z): x + y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}$.

255. $H_1 = \{(x, y): x - y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x + y = 0\}$.

256. $H_1 = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x + 2y - z = 0\}$.

257. $H_1 = \{(x, y): x + y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x - y = 0\}$.

258. $H_1 = \{(x, y, z): x - y + 2z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x + y - z = 0\}$.

259. $H_1 = \{(x, y): x - y = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y): x + y = 0\}$.

260. $H_1 = \{(x, y, z): x + y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}$.

261. $H_1 = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x + 2y - z = 0\}$.

CAPÍTULO VI

Espacios Vectoriales con producto interno

6.1. Producto interno

El producto interno o producto escalar en R^n, se define como:

Sea $u = (x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, y_3 \ldots, y_n)$, entonces:

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n$$

Ejemplo 6.1

Determinar el producto escalar, para los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 3 \times (-1) + (-1) \times 2 = -3$$

Cuando el resultado del producto escalar entre dos vectores es igual a cero, se dice que los vectores son ortogonales (ortonormales) o perpendiculares entre sí.

Ejemplo 6.2

Determinar el producto escalar, para los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \times 1 + 0 \times (-1) + (-1) \times 3 = 0$$

$\therefore$ Los vectores v_1 y v_2 son **ortogonales**

6.2 Relaciones métricas: norma, vector unitario y ángulo entre vectores

6.2.1 Norma o longitud de un vector

Con la definición de producto interno, se puede calcular la norma de los vectores en R^n.

Sea $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El producto interno de $v \cdot v$ se escribe:

$$v \cdot v = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$$

Al aplicar la raíz se obtiene:

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}$$

Donde $|v|$ es la longitud o norma de un vector, y por lo tanto $\sqrt{(v \cdot v)} \geq 0$

Ejemplo 6.3

Hallar la norma del vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

Ejemplo 6.4

Encuentre la norma de $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

6.2.2 Vector unitario

Llamamos vector unitario a un vector en R^n que tiene módulo igual a la unidad. Todo vector en R^n, tiene un vector unitario en la misma dirección. Se puede obtener dicho unitario con la siguiente definición:

$$u_v = \frac{1}{|v|}v$$

Donde u_v, es el vector unitario en la dirección del vector v.

Ejemplo 6.5

Hallar el vector unitario de $v=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$u_v = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

Verificando el módulo u_v:

$$|u_v| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

Ejemplo 6.6

Determinar el unitario del vector $v=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$u_v = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Verificando el módulo u_v:

$$|u_v| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2} = 1$$

6.2.3 Ángulo entre vectores

Otra definición en donde se puede aplicar el producto punto es para hallar el ángulo entre vectores. La siguiente definición permite encontrar θ, el ángulo entre dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1||v_2|}$$

Ejemplo 6.7

Hallar el ángulo entre los vectores: $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$\cos\theta = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1||v_2|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}\right)\left(\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)\times 3 + 2\times 2 + 1\times 1}{\left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{14}\right)} = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\right) = 77.4^{\circ}$$

Ejemplo 6.8

Hallar el ángulo entre los vectores: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$\cos\theta = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1||v_2|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2}\right)\left(\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}\right)}$$

$$= \frac{0 \times 2 + (-3) \times (-2) + 4 \times 1}{(5)(3)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48.2°$$

6.3 Proyecciones ortogonales

Con la siguiente definición es posible encontrar el vector proyección de v en la dirección de cualquier otro vector w.

$$\text{proy}_w\, v = \frac{v \cdot w}{|w|^2} w$$

Ejemplo 6.9

Hallar la proyección de $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sobre $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$\text{proy}_w\, v = \frac{v \cdot w}{|w|^2} w = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}\right)^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2 \times 2 + (-3) \times 2 + 4 \times (-1)}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{6}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.10

Hallar la proyección de $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Por definición:

$$\text{proy}_w\, v = \frac{v \cdot w}{|w|^2} w = \frac{\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}}{\left(\sqrt{5^2+2^2+1^2}\right)^2} \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{3\times 5 + 3\times 2 + 3\times 1}{30} \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{24}{30}\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\ \frac{8}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

6.3.1 Bases ortonormales y proceso de Gram-Schmidt

Conocemos que en $\mathbb{R}^n$, n vectores linealmente independientes conforman una base para ese espacio. Es muy común usar bases canónicas en los diferentes espacios vectoriales. Recordemos que dichas bases en $\mathbb{R}^n$ están conformadas por los vectores $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. Esta base tiene dos propiedades importantes: el producto escalar de un vector de la base consigo mismo es 1 y el producto escalar de un vector de la base con cualquier otro es 0. Es decir, $E_i \cdot E_i = 1$ y $E_i \cdot E_j = 0$, $\forall i \neq j$.

6.3.2 Conjunto Ortonormal

Un conjunto $M = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ se llama ortonormal si $\forall i \neq j$:

i. $u_i \cdot u_i = 1$

ii. $u_i \cdot u_j = 0$

Para decir que un conjunto de vectores es ortogonal no es necesario que se cumplan las dos condiciones, basta que la ii) se cumpla.

6.3.3 Teorema del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Toda base de vectores puede ser transformada a una base ortonormal. Jörgen Pederson Gram y Erhardt Schmidt desarrollaron un proceso para transformar cualquier base en una base ortonormal y se lo conoce como el proceso de Gram-Schmidt.

Para todo H subespacio vectorial de tamaño m en $\mathbb{R}^n$, existe una base ortonormal B tal que $B \subset H$.

Se desarrolla ahora el proceso de Gram-Schmidt tomando un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ que conforman una base para H. Se presentan los pasos necesarios para tomar esta base y convertirla en una base ortonormal (Stanley & Flores, 2012).

1. Calculamos el vector unitario de v_1 y este será nuestro primer unitario u_1:

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$$

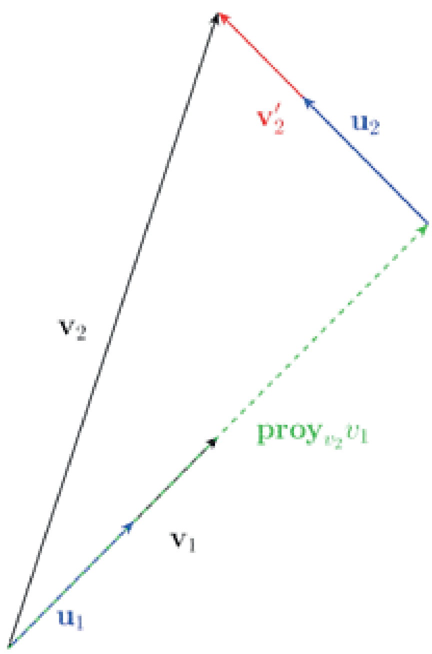
Sabemos que $|u_1|=1$.

2. Se calcula un segundo vector ortogonal a u_2

Para este punto es necesario hallar un vector perpendicular a v_2, lo cual haremos usando la teoría de proyecciones ortogonales, observemos la Figura 6.1:

Figura 6.1

Representación geométrica del teorema de Gram-Schmidt



De la figura se concluye que $v'_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1$. A continuación, calculamos el unitario de v'_2

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|}$$

Con el procedimiento anterior hemos obtenido los vectores u_1 y u_2 que son ortogonales entre sí. El proceso continúa calculando todos los m vectores necesarios para formar la base de H. Supongamos que se tienen calculados j vectores con $j < m$. El proceso debe continuar calculando el vector unitario para v_{j+1}, para esto realizamos el siguiente cálculo previo:

$$v'_{j+1} = v_{j+1} - (v_{j+1} \cdot u_1)u_1 - (v_{j+1} \cdot u_2)u_2 - \cdots - (v_{j+1} \cdot u_j)u_j$$

De este modo, v'_{j+1} es ortogonal a todos los vectores previos por lo que calculamos su unitario:

$$u_{j+1} = \frac{v'_{j+1}}{|v'_{j+1}|}$$

Este proceso continúa hasta completar los m vectores de la base.

Ejemplo 6.11

1. Encontrar una base ortonormal para los vectores que componen al plano $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 4z = 0 \right\}$

Solución:

Primero hallaremos una base cualquiera. Entonces:

$$y = 3x + 4z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x + 4z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diremos que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Estos dos vectores constituyen la base de H. Podemos determinar si estos vectores son ortogonales, al aplicar el producto punto y verificar si el mismo es igual a cero:

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 3 \times 4 + 0 \times 1 = 12$$

Los vectores $\mathbf{v_1}$ y v_2 no son ortogonales, entonces usaremos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, para ello hallaremos primero u_1 (unitario de v_1)

$$u_1 = \frac{1}{|v_1|}v_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2+0^2}}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\\ 0\end{pmatrix}$$

Posteriormente hallamos v'_2:

$$v'_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\\ 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} - \left[\frac{12}{\sqrt{10}}\right]\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{12}{10}\\ \frac{36}{10}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5}\\ 1\end{pmatrix}$$

Finalmente, hallamos u_2:

$$u_2 = \frac{1}{|v'_2|}v'_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+1^2}}\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{5}}}\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{13}}\\ \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{13}}\\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{6}{\sqrt{65}}\\ \frac{2}{\sqrt{65}}\\ \frac{5}{\sqrt{65}}\end{pmatrix}$$

Verificamos que los vectores u_1 y u_2 sean ortogonales:

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{6}{\sqrt{65}}\\ \frac{2}{\sqrt{65}}\\ \frac{5}{\sqrt{65}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\times\left(-\frac{6}{\sqrt{65}}\right)+\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{65}}+0\times\frac{5}{\sqrt{65}} = 0$$

Los vectores u_1 y u_2 son ortogonales.

Ejemplo 6.12

Hallar una base ortogonal para el conjunto de vectores perteneciente al plano H = $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\right\}$

Primero hallaremos un base cualquiera:

$$x = 2y + z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diremos que $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Estos dos vectores constituyen la base de *H*. Podemos determinar si estos vectores son ortogonales, al aplicar el producto punto y verificar si el mismo es igual a cero:

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 2$$

Los vectores v_1 y v_2 no son ortogonales, entonces usaremos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, para ello hallaremos primero u_1 (unitario de v_1):

$$u_1 = \frac{1}{|v_1|}v_1 = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posteriormente hallamos v'_2:

$$v'_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right]\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hallamos u_2:

$$u_2 = \frac{1}{|v'_2|}v'_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}}}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

Verificamos que los vectores u_1 y u_2 sean ortogonales:

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{30}}\right) + 0 \times \frac{5}{\sqrt{30}} = 0$$

6.4 Ejercicios propuestos

I. Producto interno

Hallar el producto escalar de los vectores dados.

1. (2, -3) y (4, 1).
2. (-1, 2) y (3, 5).
3. (0, -2) y (-3, 1).
4. (1, 0) y (-2, 4).
5. (2, 3) y (0, -1).
6. (5, -2) y (-1, -3).
7. (2, -3, 1) y (-1, 4, 2).
8. (0, 2, -3) y (1, -2, 4).
9. (5, -2, 1) y (2, 3, -1).
10. (-2, 1, 3) y (-4, 0, -5).
11. (3, 2, 0) y (-1, 0, 4).
12. (1, -1, 2) y (0, 3, 1).
13. (4, -2, -1) y (2, 1, -3).
14. (2, 0, 1) y (-1, 4, 2).
15. (3, -1, 2) y (-2, -3, 0).
16. (1, -2, 0) y (0, 1, -4).
17. (2, -3, 1, 0) y (-1, 4, 2, -3).
18. (0, 2, -3, 1) y (1, -2, 4, 0).
19. (5, -2, 1, -4) y (2, 3, -1, 2).
20. (-2, 1, 3, 0) y (-4, 0, -5, 1).
21. (3, 2, 0, -1) y (-1, 0, 4, 2).
22. (1, -1, 2, -3) y (0, 3, 1, -2).

II. Relaciones métricas:

Halle el vector unitario de los siguientes vectores:

23. (2, -3)
24. (4, 1)
25. (-1, 2)
26. (3, 5)
27. (0, -2)
28. (-3, 1)
29. (1, 0)
30. (-2, 4)
31. (2, 3)
32. (0, -1)
33. (5, -2)
34. (-1, -3)
35. (2, -3, 1)
36. (-1, 4, 2)
37. (0, 2, -3)
38. (1, -2, 4)
39. (5, -2, 1)
40. (2, 3, -1)
41. (-2, 1, 3)
42. (-4, 0, -5)
43. (3, 2, 0)
44. (-1, 0, 4)
45. (1, -1, 2)
46. (0, 3, 1)
47. (4, -2, -1)
48. (2, 1, -3)
49. (2, 0, 1)
50. (-1, 4, 2)
51. (3, -1, 2)
52. (-2, -3, 0)
53. (1, -2, 0)
54. (0, 1, -4)
55. (2, -3, 1, 0)
56. (-1, 4, 2, -3)
57. (0, 2, -3, 1)
58. (1, -2, 4, 0)
59. (5, -2, 1, -4)
60. (2, 3, -1, 2)
61. (-2, 1, 3, 0)
62. (-4, 0, -5, 1)
63. (3, 2, 0, -1)
64. (-1, 0, 4, 2)
65. (1, -1, 2, -3)
66. (0, 3, 1, -2)
67. (1, 3, -2, 2)

Halle el ángulo entre vectores siguientes:

68. (2, -3) y (4, 1).
69. (-1, 2) y (3, 5).
70. (0, -2) y (-3, 1).
71. (1, 0) y (-2, 4).
72. (2, 3) y (0, -1).
73. (5, -2) y (-1, -3).
74. (2, -3, 1) y (-1, 4, 2).
75. (0, 2, -3) y (1, -2, 4).
76. (5, -2, 1) y (2, 3, -1).
77. (-2, 1, 3) y (-4, 0, -5).
78. (3, 2, 0) y (-1, 0, 4).
79. (1, -1, 2) y (0, 3, 1).
80. (4, -2, -1) y (2, 1, -3).
81. (2, 0, 1) y (-1, 4, 2).
82. (3, -1, 2) y (-2, -3, 0).
83. (1, -2, 0) y (0, 1, -4).
84. (2, -3, 1, 0) y (-1, 4, 2, -3).
85. (0, 2, -3, 1) y (1, -2, 4, 0).
86. (5, -2, 1, -4) y (2, 3, -1, 2).
87. (-2, 1, 3, 0) y (-4, 0, -5, 1).
88. (3, 2, 0, -1) y (-1, 0, 4, 2).
89. (1, -1, 2, -3) y (0, 3, 1, -2)

III. Proyecciones ortogonales

Hallar la proyección de v sobre w.

90. v= (2, -3) y w= (4, 1).
91. v= (-1, 2) y w= (3, 5).
92. v= (0, -2) y w= (-3, 1).
93. v= (1, 0) y w= (-2, 4).

94. v= (2, 3) y w= (0, -1).

95. v= (5, -2) y w= (-1, -3).

96. v= (2, -3, 1) y w= (-1, 4, 2).

97. v= (0, 2, -3) y w= (1, -2, 4).

98. v= (5, -2, 1) y w= (2, 3, -1).

99. v= (-2, 1, 3) y w= (-4, 0, -5).

100. v= (3, 2, 0) y w= (-1, 0, 4).

101. v= (1, -1, 2) y w= (0, 3, 1).

102. v= (4, -2, -1) y w= (2, 1, -3).

103. v= (2, 0, 1) y w= (-1, 4, 2).

104. v= (3, -1, 2) y w= (-2, -3, 0).

105. v= (1, -2, 0) y w= (0, 1, -4).

106. v= (2, -3, 1, 0) y w= (-1, 4, 2, -3).

107. v= (0, 2, -3, 1) y w= (1, -2, 4, 0).

108. v= (5, -2, 1, -4) y w= (2, 3, -1, 2).

109. v= (-2, 1, 3, 0) y w= (-4, 0, -5, 1).

110. v= (3, 2, 0, -1) y w= (-1, 0, 4, 2).

111. v= (1, -1, 2, -3) y w= (0, 3, 1, -2)

IV. Bases ortonormales y proceso de Gram-Schmidt

Usando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, halle una base ortogonal para el subespacio dado.

112. $W = \{(x, y, z) \in R^3: 2x + y - 2z = 0\}$.

113. $V = \{(x, y, z) \in R^3: 2x + y - 3z = 0\}$.

114. $D = \{(x, y, z, w) \in R^4: x + y - 2z + w = 0\}$.

115. $U = \{(x, y, z, w) \in R^4: 3x - y + 2z + 4w = 0\}$.

116. $P = \{(x, y, z) \in R^3: x - 3y + 2z = 0\}$.

117. $Q = \{(x, y, z) \in R^3: 2x + 4y - z = 0\}$.

118. $E = \{(x, y, z, w, u) \in R^5: x - y + 2z - w + 3u = 0\}$.

119. $F = \{(x, y, z, w, u) \in R^5: 3x - y + 2z + 4w - u = 0\}$.

120. $G = \{(x, y, z) \in R^3: 2x + 2y + 2z = 0\}$.

121. $H = \{(x, y, z) \in R^3: x - y - z = 0\}$.

122. $I = \{(x, y, z, w) \in R^4: 4x + 2y - 3z - 2w = 0\}$.

123. $J = \{(x, y, z, w) \in R^4: 3x - y + 2z + w = 0\}$.

124. $K = \{(x, y, z) \in R^3: x + y + z = 0\}$.

125. $L = \{(x, y, z) \in R^3: 2x - y - z = 0\}$.

126. $M = \{(x, y, z, w, u) \in R^5: 2x + 4y + 2z - w - 2u = 0\}$.

127. $N = \{(x, y, z, w, u) \in R^5: 3x - y - 2z + w + 3u = 0\}$.

128. $= \{(x, y, z) \in R^3: 3x - 3y + 3z = 0\}$.

129. $P = \{(x, y, z) \in R^3: x + y - z = 0\}$.

130. $Q = \{(x, y, z, w) \in R^4: x - y + 2z - w = 0\}$.

131. $R = \{(x, y, z, w) \in R^4: 2x + 4y - z + w = 0\}$.

132. $S = \{(x, y, z) \in R^3: x - y + z = 0\}$.

133. $T = \{(x, y, z) \in R^3: 2x + 2y - 2z = 0\}$.

CAPÍTULO VII

Transformaciones lineales

Dado que una transformación lineal es en sí una función, se puede emplear la teoría de funciones para conceptualizar a la transformada lineal.

7.1 Definición y propiedades sobre el cuerpo de los reales

Definición: Sean U y V dos espacios vectoriales en el campo de los reales, entonces la transformada lineal se puede definir de la siguiente manera:

$$T: U \to V$$

Como representación de una función con dominio U e imagen V. Esta función asigna a cada vector del espacio vectorial U y devuelve un vector del espacio vectorial V. Si denominamos a los vectores del espacio vectorial U como u y a cada vector del espacio vectorial V como v.

Podemos completar la definición de transformada como una función:

$$T: U \to V$$

$$u \to v$$

La notación de una transformada lineal es similar a la notación que usamos en las funciones *f(x)*. El argumento x es reemplazado por el vector u en las transformadas lineales, entonces tenemos *T(u)*. El *T(u)* se entenderá como la transformada de u o también, T de u.

Así como el concepto de función nos indica que es una relación que cumple ciertas características. La transformada lineal debe cumplir dos condiciones:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

Y sea α un número que pertenece a los escalares y u un vector que pertenecen al espacio vectorial *U*.

$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

Ejemplo 7.1

Compruebe que la siguiente relación es una transformada.

Solución:

$$\mathrm{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ \mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix}$$

Demostrando:

$$\text{Sea } u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ y } u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

a) $$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

b) $$T\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 + \alpha z_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 + \alpha z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 + \alpha z_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix}\ \textit{es una transformación lineal.}$$

Ejemplo 7.2

Compruebe que la siguiente relación es una transformada:

$$\mathrm{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ \mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 1$$

Solución:

Demostrando:

Sea $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

c) $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 1) + (x_2 + 1)$

$(x_1 + x_2) + 1 \neq (x_1 + x_2) + 2$

d) $T\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix}$

$(\alpha x_1 + 1) \neq \alpha(x_1 + 1)$

$\therefore \mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 1$ no es una transformación lineal.

7.2. Matriz asociada, núcleo e imagen de una transformación lineal

Como en una función la transformada lineal tiene un dominio y un recorrido dentro de cada conjunto encontramos el núcleo y la imagen respectivamente. Antes de definir el núcleo y la imagen se revisa los siguientes teoremas:

Teorema 7.1

Sea la transformada lineal $T : U \rightarrow V$, para todo vector que pertenece a U, se cumple:

$$T(0) = 0$$

La transformada del vector nulo es el vector nulo.

$$T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2)$$

La transformada de la suma de dos vectores es igual a la suma de las transformadas de cada vector.

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \cdots + \alpha_n T(u_n)$$

Es importantes saber que la transformada lineal cumple con las propiedades de linealidad, es decir, si sumamos *n* vectores u_k y cada uno de estos vectores está multiplicado por un escalar a_k (*siendo* $k = 1,2,\ldots, n$), podemos aplicar por separado la transformada a cada sumando y podemos sacar los escales fuera a transformada (Stanley & Flores, 2012).

Teorema 7.2

Sea la base B= $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de un espacio vectorial *U* (con dimensión finita *n*).

Sean T_1 y T_2 dos transformadas lineales:

$$T_1 : U \to V$$

$$T_2 : U \to V$$

Si $T_1\,(u_i) = T_2\,(u_i)$ para $i = 1,2, \ldots, n$, entonces $T_1 = T_2$.

Si conocemos la transformada lineal de los vectores de la base del conjunto de partida, entonces se puede determinar la imagen de cualquier vector en *U*. Debemos recordar que cualquier vector se puede escribir en función de los vectores de la base, por lo tanto, aplicando el teorema:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

$$T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \cdots + \alpha_n T(u_n)$$

Podemos conocer la transformada de cualquier vector.

Ejemplo 7.3

Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y considerando que T$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, T$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ y T$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. Hallar T$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

Solución:

Resolviendo:

$$T\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=T\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right]=T\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$=2\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3\mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$$

Hallar una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ para el plano $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: x-2y+z\right\}$.

Resolviendo: Primero hallamos una base para H y lo asociamos con la base estándar de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y-z\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$B_H=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Entonces:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Se puede verificar el teorema así:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathrm{T}\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=x\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y\\x\\y\end{pmatrix}$$

Teorema 7.3

Sea la base $B=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de un espacio vectorial U con dimensión finita n. Sea el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ perteneciente al espacio vectorial V, entonces existe una transformación lineal única, tal que:

$$T: U \to V;\ T(u_i)=\ v_i, para\ i=1,2,\ldots,n$$

7.2.1 Núcleo

El núcleo de una transformada lineal es un conjunto de vectores dentro del dominio de la transformada lineal. Sean *U* y *V* dos espacios vectoriales correspondientes al dominio y recorrido de la transformada lineal *T*.

$$T: U \rightarrow V$$

Sea *u* cualquier vector perteneciente a *U*, entonces:

$$nu\, T = \{u \in U;\ T(u) = 0\}$$

Denotamos *nu T* al núcleo de la Transformada, y consideramos parte del conjunto núcleo a todo vector cuya transformada devuelva el vector nulo 0.

7.2.2 Nulidad

La nulidad de una transformada es la dimensión del núcleo. Se puede denotar como:

$$\nu(T) = \dim nu\, T$$

7.2.3 Imagen

La imagen de una transformada es un subconjunto del recorrido de dicha transformada. Se denota como *Im T*. Para la misma transformada *T*:

$$T: U \rightarrow V$$

Sea *v* cualquier vector perteneciente a *V*, entonces:

$$\boldsymbol{im\, T} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{v} = T(u)\}$$

La imagen es el conjunto de vectores que se puede obtener con la transformada.

7.2.4 Rango

El rango de una transformada lineal es la dimensión de la imagen, se denota como:

$$\rho(T) = \dim im\, T$$

7.2.5 Matriz asociada a una transformación lineal

Toda transformada lineal tiene una matriz asociada. Si T es una transformación lineal:

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Para todo vector x perteneciente a $\mathbb{R}^n$, se cumple que: $Tx = A_T\, x$, siendo A_T la matriz asociada a la transformada T.

Esta matriz es única, y; analizando la dimensión del vector $(n \times 1)$, la matriz debe tener una dimensión $m \times n$. También es posible demostrar que A es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base de $\mathbb{R}^n$ que se obtienen de $T(e_i)$.

Utilizando la matriz de transformación lineal es posible obtener de una forma más sencilla el núcleo y la imagen de una transformada.

Toda matriz tiene asociada a sí misma un espacio nulo, dicho espacio nulo es el núcleo de la transformada:

$$N_A = nu\, T$$

Por ende, sería conveniente conocer el proceso para encontrar el espacio nulo de una matriz. Encontrar el espacio nulo de la matriz A

Una vez que conocemos el proceso para encontrar el espacio nulo de una matriz, tendremos también el núcleo.

La imagen de la transformada lineal $Im\ T$, se puede obtener también con el espacio generado por las columnas de la matriz de transformación lineal C_{AT}

$$C_{A_T} = Im\, T$$

Por ende, es necesario conocer el proceso para encontrar el espacio generado por las columnas de la matriz:

Encontrar el espacio generado por las columnas de *A*.

Es interesante también conocer que existe una relación entre el rango de la matriz de transformación y el rango de la transformada lineal.

$$\rho(A_T) = \rho(T)$$

7.3 Transformaciones inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

En las nociones sobre cálculo se dice que las funciones se pueden clasificar en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas y que una función biyectiva tiene inversa. Estas ideas se pueden ampliar y generalizar para las transformaciones lineales. Esto quiere decir que las transformaciones lineales pueden ser clasificadas en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

7.3.1 Transformada inyectiva

La transformada inyectiva es aquella en donde a cada elemento en el conjunto de origen se le asigna un único elemento en el conjunto de llegada y viceversa, para cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un solo elemento del conjunto de partida. Es decir que:

$$T: U \rightarrow V$$

$$T(u) = v$$

Donde v, es un único vector correspondiente a u. Esto quiere decir que si $T(u)=T(v)$ entonces $u=v$. Esta implicación es una forma para demostrar que la transformación es inyectiva.

Teorema 7.4

La transformada lineal es inyectiva si y sólo si $nu\ T=\{0\}$.

Para que una transformación lineal sea inyectiva, la dimensión de su núcleo debe ser 0. Es decir que el único vector del conjunto de partida que pertenece al núcleo es el vector nulo.

7.3.2 Transformada sobreyectiva

La sobreyectividad es una característica estrechamente relacionada con la imagen de una transformación lineal. La transformada sobreyectiva es aquella en donde para cada elemento del conjunto de llegada le corresponde algún elemento del conjunto de salida, es decir, sea:

$$T: U \rightarrow V$$

$$T(u) = v$$

Donde $\forall v \in V, \exists u \in U$ tal que $T(u) = v$.

Teorema 7.5

La transformada lineal es sobreyectiva si solo si *Im T*=*V*.

Esto equivale a decir que la dimensión de la imagen debe ser igual a la dimensión del espacio *V*, dim *im T* =dim *V*. Entonces, para saber si una transformación lineal es sobreyectiva, podemos comparar la dimensión de la imagen con la del espacio de llegada (Stanley & Flores, 2012).

7.3.3 Transformada biyectiva

La transformada biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. Cuando esto se cumple se dice que la transformación lineal es un isomorfismo.

Teorema 7.6

Una transformada lineal es biyectiva si cumple con los criterios de inyectividad y sobreyectividad, es decir, si solo si *nu T*={0} y *Im T*=*V*.

Se cumple también que, si las dimensiones del dominio y el conjunto de llegada de una transformación son iguales, entonces tenemos que:

T es inyectiva si y sólo si *T* es sobreyectiva.

7.4 Ejercicios propuestos

I. Transformaciones lineales

1. $T: R^2 \to R^3;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ xy \end{pmatrix}$
2. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ z \end{pmatrix}$
3. $T: R^2 \to R^2;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ y \end{pmatrix}$
4. $T: R^2 \to R^3;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ y \end{pmatrix}$
5. $T: R^3 \to R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \\ z \end{pmatrix}$
6. $T: R^2 \to R^2;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y - 1 \end{pmatrix}$
7. $T: R^3 \to R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y - z \\ 2x + 3z \end{pmatrix}$
8. $T: R^2 \to R^2;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$
9. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x - z \end{pmatrix}$
10. $T: R^3 \to R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \\ x - z \end{pmatrix}$
11. $T: R^2 \to R^3;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ x + y \\ y \end{pmatrix}$
12. $T: R^3 \to R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ z \end{pmatrix}$
13. $T: R^2 \to R^2;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x - y \end{pmatrix}$
14. $T: R^2 \to R^3;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$
15. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - z \end{pmatrix}$
16. $T: R^2 \to R^3;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ xy \end{pmatrix}$

17. $T: R^3 \to R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y - z \\ z \end{pmatrix}$

18. $T: R^3 \to R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y + z \\ xy \end{pmatrix}$

19. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - z \end{pmatrix}$

20. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2y - z \end{pmatrix}$

21. $T: R^2 \to M_{2\times 2};\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & y \\ x - y & 3y \end{pmatrix}$

22. $T: R^3 \to M_{2\times 2};\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y & z \\ 2x - y & y \end{pmatrix}$

23. $T: R^2 \to M_{2\times 2};\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x + y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$

24. $T: R^3 \to M_{3\times 3};\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y & y + z & z \\ 0 & x + y & 2z \\ -x & 0 & 3z \end{pmatrix}$

25. $T: R^2 \to M_{2\times 3};\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x + y & 2x - y & xy \\ x & y & x^2 \end{pmatrix}$

II. Matriz asociada a una transformación lineal

Usando la matriz asociada a una transformación. Determinar el núcleo, nulidad, imagen y nulidad de las siguientes transformaciones lineales:

26. $T: R^2 \to R^3;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \\ 3y \end{pmatrix}.$

27. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ x - z \end{pmatrix}.$

28. $T: R^4 \to R^2;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x + y \\ z - w \end{pmatrix}.$

29. $T: R^2 \to R^2;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + y \end{pmatrix}.$

30. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$

31. $T: R^4 \to R^3;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x - w \\ x + 3y \end{pmatrix}.$

32. $T: R^5 \to R^3;\ T(x,y,z,w,u) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ z - w \\ u \end{pmatrix}.$

33. $T: R^2 \to R^3;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ v \end{pmatrix}.$

34. $T: R^3 \rightarrow R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ z \end{pmatrix}.$

35. $T: R^4 \rightarrow R^3;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-w \\ z \end{pmatrix}.$

36. $T: R^6 \rightarrow R^4;\ T(x,y,z,w,u,v) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ u+v \\ z-w \\ y \end{pmatrix}.$

37. $T: R^2 \rightarrow R^4;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \\ y \\ -x \end{pmatrix}.$

38. $T: R^3 \rightarrow R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+z \end{pmatrix}.$

39. $T: R^4 \rightarrow R^3;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x-w \\ 3z \end{pmatrix}.$

40. $T: R^3 \rightarrow R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y-z \\ z \end{pmatrix}(x+y+z, 2x-y-z, z).$

41. $T: R^4 \rightarrow R^4;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x-z \\ y+w \\ 2z \\ 3w \end{pmatrix}.$

42. $T: R^2 \rightarrow R^4;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}.$

43. $T: R^2 \rightarrow M_{2\times2};\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & y \\ x-y & 3y \end{pmatrix}$

44. $T: R^3 \rightarrow M_{2\times2};\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y & z \\ 2x-y & y \end{pmatrix}$

45. $T: R^2 \rightarrow M_{2\times2};\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$

46. $T: R^3 \rightarrow M_{3\times3};\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & y+z & z \\ 0 & x+y & 2z \\ -x & 0 & 3z \end{pmatrix}$

47. $T: R^2 \rightarrow M_{2\times3};\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 2x-y & xy \\ x & y & x^2 \end{pmatrix}$

III. Isomorfismo de transformaciones lineales.

48. $T: R^2 \rightarrow R^3;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}.$

49. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ x - z \end{pmatrix}$.

50. $T: R^4 \to R^2;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x + y \\ z - w \end{pmatrix}$.

51. $T: R^2 \to R^2;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + y \end{pmatrix}$.

52. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$.

53. $T: R^4 \to R^3;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x - w \\ x + 3y \end{pmatrix}$.

54. $T: R^5 \to R^3;\ T(x,y,z,w,u) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ z - w \\ u \end{pmatrix}$.

55. $T: R^2 \to R^3;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ y \end{pmatrix}$.

56. $T: R^3 \to R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \\ z \end{pmatrix}$.

57. $T: R^4 \to R^3;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - w \\ z \end{pmatrix}$.

58. $T: R^6 \to R^4;\ T(x,y,z,w,u,v) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ u + v \\ z - w \\ y \end{pmatrix}$.

59. $T: R^2 \to R^4;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ y \\ -x \end{pmatrix}$.

60. $T: R^3 \to R^2;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + z \end{pmatrix}$.

61. $T: R^4 \to R^3;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x - w \\ 3z \end{pmatrix}$.

62. $T: R^3 \to R^3;\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y - z \\ z \end{pmatrix}(x + y + z, 2x - y - z, z)$.

63. $T: R^4 \to R^4;\ T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x - z \\ y + w \\ 2z \\ 3w \end{pmatrix}$.

64. $T: R^2 \to R^4;\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$.

65. $T: R^2 \to M_{2\times 2};\ T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & y \\ x - y & 3y \end{pmatrix}$

66. $T: R^3 \to M_{2\times 2};\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y & z \\ 2x-y & y \end{pmatrix}$

67. $T: R^2 \to M_{2\times 2};\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$

68. $T: R^3 \to M_{3\times 3};\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & y+z & z \\ 0 & x+y & 2z \\ -x & 0 & 3z \end{pmatrix}$

69. $T: R^2 \to M_{2\times 3};\ T(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 2x-y & xy \\ x & y & x^2 \end{pmatrix}$

CAPÍTULO VIII

Valores y vectores propios

8.1 Definición y propiedades, sobre el cuerpo de los reales

Los valores y vectores propios son conceptos importantes en el álgebra lineal, ya que las aplicaciones en la ingeniería son muchas. Por ejemplo, en el campo del procesamiento de señales y el procesamiento de imágenes, los valores y vectores propios se emplean para realizar la descomposición en componentes principales, lo que permite reducir la dimensionalidad de los datos y extraer características relevantes para el análisis y la clasificación. En el estudio de sistemas dinámicos, como circuitos eléctricos, sistemas de control y modelos matemáticos, los valores y vectores propios se utilizan para analizar la estabilidad y la respuesta transitoria de estos sistemas. Los valores propios están relacionados con los modos de vibración y las frecuencias naturales en sistemas mecánicos y eléctricos. Los valores y vectores propios son útiles para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, lo que tiene aplicaciones en la modelización y simulación de fenómenos físicos en ingeniería. La idea es muy sencilla, teniendo una matriz A de dimensión $n \times n$, es necesario determinar si existe un número λ y un vector $v \neq 0$ tal que, $Av = \lambda v$.

8.1.1 Vector propio

Definición: Sea una matriz $A_{n\times n}$. Suponga que $v \neq 0$ en R^n y λ es un número tal que $Av = \lambda v$.

Dado que v es un vector, es correcto asumir que Av es un múltiplo del mismo. En este contexto, v se conoce como vector propio de A, y, por otro lado, λ es el valor propio asociado a la matriz A. En consecuencia, λ actúa como el valor propio para v, siendo este el vector propio que corresponde a λ.

Los valores y vectores propios están definidos solamente para matrices cuadradas. Los vectores propios suelen ser llamados eigenvectores así como los valores propios suelen ser llamados eigenvalores.

8.1.2 Cálculo de los valores propios

Para encontrar los valores propios de una matriz A_{nxn} procedemos a resolver la ecuación $Av = \lambda v$.

$Av = \lambda v$

$Av=\lambda(Iv)$; en donde I es la matriz identidad. Luego:

$(A-\lambda I)v=0$

Si cumple que $(A-\lambda I)v=0$, entonces el sistema tiene soluciones no triviales y λ será un valor característico de A. Se puede plantear esto mediante el siguiente teorema.

Teorema 8.1

λ es un valor propio de A si y sólo si $p(\lambda)= det(A-\lambda I)=0$.

Llamaremos ecuación característica a $det(A-\lambda I)$, a partir de ella obtendremos el polinomio $p(\lambda)$ de grado n, al mismo que denotaremos como polinomio característico de la matriz A (Lay, 2001).

Ejemplo 8.1:

Para la matriz A, calcule el polinomio y valores característicos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la ecuación $|A-\lambda I|=0$, entonces:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollamos el determinante para calcular el polinomio característico:

$$\lambda^2(3-\lambda) + 1 - 3\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

Se factoriza y se utiliza Ruffini:

$$(\lambda-1)(\lambda-1)(-\lambda+1) = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-1)(-1)(\lambda-1) = 0$$

$$-(\lambda-1)^3 = 0$$

Resuelto el polinomio característico hallamos que el valor de λ se repite tres veces (exponente +3), dando un valor λ=1. De acuerdo el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado *n*, tiene *n* raíces de las cuales todas o algunas pueden repetirse. El número de veces que se repite una raíz se denomina *multiplicidad* de la raíz.

Ejemplo 8.2: Para la matriz *A*, calcule el polinomio y valores característicos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = 0$$

Aplicamos la expresión *det(A-λI)*= 0, entonces:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollamos el determinante para calcular el polinomio característico:

$$(2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$
$$(2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) = 0$$
$$2-4\lambda+2\lambda^2-\lambda+2\lambda^2-\lambda^3 = 0$$
$$-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = 0$$

Se factoriza y se utiliza Ruffini:

$$(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$$

De este cálculo se deduce que tenemos uno de los valores λ_1=1 que se repite 2 veces, el otro valor propio es λ_2=2.

8.1.3 Cálculo de los vectores propios

Para el cálculo de vectores propios podemos seguir los siguientes pasos:

i. Calcule *p(λ)= det (A-λI)*.

ii. Calcule las raíces para *p(λ)* tomando en cuenta que, según el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado n, tiene n raíces.

iii. Resuelva el sistema de ecuaciones homogéneo obtenido de $(A-\lambda\_i I)v=0$ para cada uno de los valores propios λ_i encontrados.

Ejemplo 8.3: Para la matriz A, encuentre sus vectores propios asociados:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Anteriormente, se determinó que el polinomio característico de esta matriz A es $(\lambda\text{-}1)^3$, lo que significa que tenemos un valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad 3. Ahora procede la resolución del sistema homogéneo de ecuaciones asociado $(A\text{-}\lambda_i\ I)v= 0$. Al reemplazar $\lambda = 1$ y realizando la resta de matrices tenemos el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicando el método de Gauss-Jordan reducimos la matriz aumentada y obtenemos lo siguiente: $x_2 = x_3$ y $x_1 = x_2$. Si asignamos x_1=1, podemos obtener el vector propio asociado a $\lambda = 1$ que es $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 8.2

Sea λ un valor propio de la matriz $A_{n\times n}$, y sea $E\lambda= \{v : Av = \lambda v\}$, entonces $E\lambda$ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Donde $\mathbb{C}^n$ es el espacio de vectores complejos de dimensión n (Lay, 2001).

El subespacio $E\lambda$ se denomina espacio propio de la matriz A correspondiente al valor propio λ.

Ejemplo 8.4:

En el caso del ejemplo anterior, se calculó el valor propio λ=1 cuyo vector propio fue $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, este vector genera el subespacio propio $E_1 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Teorema 8.3

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$ con valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, y los correspondientes vectores propios $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Por consiguiente: $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son linealmente independientes.

Ejemplo 8.5:

Determinar los vectores propios asociados a la matriz A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, posteriormente comprobar que son linealmente independientes.

Solución:

Calculamos el polinomio característico:

$$det(A - \lambda I) = det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

Resuelto el polinomio obtenemos $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$.

Reemplazamos el valor de $\lambda_1 = 1$ en el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v=0$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar las matrices se genera la ecuación $3x_1 + 2x_2 = 0$, por lo tanto, un vector propio asociado puede ser $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Para λ_2=6, obtenemos el sistema $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que sugiere que los valores $x_1 = x_2$, por lo tanto, un vector propio asociado puede ser $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Observe que v_1 y v_2 son linealmente independientes ya que uno no es múltiplo del otro.

8.1.4 Matrices simétricas y diagonalización

Teorema 8.4

Sea una matriz $A_{n\times n}$ simétrica, entonces sus valores propios son reales.

Teorema 8.5

Sea una matriz $A_{n\times n}$ simétrica real, entonces, A tiene n vectores propios reales ortogonales.

La propiedad fundamental de las matrices simétricas es que sus vectores propios correspondientes para diferentes valores propios son ortogonales entre sí. Esto significa que si tienes una matriz real simétrica A y encuentras sus n vectores propios, estos vectores son ortogonales entre sí.

Definición: Una matriz $A_{n\times n}$ es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal S tal que $S^{-1}AS$ sea una matriz diagonal D, donde $D=diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sean los valores propios de A.

Teorema 8.6

Sea $A_{n\times n}$ una matriz real, entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Para encontrar la matriz diagonalizante S se puede encontrar una base ortonormal para cada espacio propio de A usando Gram-Schmidt. Entonces S está compuesta por los vectores propios ortogonales ubicados como columnas en la matriz.

Ejemplo 8.6:

Halle la matriz Diagonal para la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Se calculan los valores propios entonces det $(A\text{-}\lambda I)= 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda)-(-2)(-1)$$

$=12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2$

$=\lambda^2 - 7\lambda + 10$

$=(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$

Los valores propios son $\Rightarrow \lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 5$

Ahora, hallamos los vectores propios, usamos: $(A - \lambda I)\bar{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a - b = 0$$
$$a = b$$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 5$

$$\begin{pmatrix} 3-5 & -1 \\ -2 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2a - b = 0$$
$$a = -\frac{1}{2}b$$

Sea $b = 2$. Entonces: $a = -1$

$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Una vez hallados los valores y vectores propios, podemos construir las matrices S y D:

$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Comprobación

$D = S^{-1}AS$

$$S^{-1} = \frac{1}{(1)(2)-(-1)(1)}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.7:

Halle la matriz Diagonal para la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula los valores propios entonces det $(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & 4 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$=(5-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-2]+4[1(1-\lambda)+1]+4[2-\lambda]$

$=(5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)+4[2-\lambda]+4[2-\lambda]$

$=(\lambda-2)[(5-\lambda)(\lambda+1)-4]$

$=(\lambda-2)[4\lambda+5\lambda^2-8]=(\lambda-2)[-\lambda^2+4\lambda-3]$

$=-(\lambda-2)[\lambda^2-4\lambda+3]=-(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$

Los valores propios son $\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 1$

Ahora hallamos los vectores propios, usamos:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 4 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para λ_1=2

$$\begin{pmatrix} 5-2 & -4 & 4 \\ 1 & 0-2 & 1 \\ -1 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a + 2c = 0 & \quad a = -2c \\ 2b + c = 0 & \quad b = -\frac{1}{2}c \end{matrix}$$

Sea $c = -2$. Entonces: $a = 4$ y $b = 1$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -4 & 4 \\ 1 & 0-3 & 1 \\ -1 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & o \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a + 4c = 0 & \quad a = -4c \\ b + c = 0 & \quad b = -c \end{matrix}$$

Sea $c = -1$. Entonces: $a = 4$ y $b = 1$

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 5-1 & -4 & 4 \\ 1 & 0-1 & 1 \\ -1 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a + 2c = 0 \qquad a = -2c$$
$$b + c = 0 \qquad b = -c$$

Sea $c = 1$. Entonces: $a = 2$ y $b = 1$

$$\bar{v}3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una vez hallados los valores y vectores propios, podemos construir las matrices S y D:

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$D = S^{-1}AS$$

$$S^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.2 Ejercicios propuestos:

I. Calcular los valores propios y los espacios propios para las matrices dadas:

$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -4\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 3\\ -1 & 3 & -4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & -1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -6 & 7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4 & -1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -5 & 4 & 2\\ 1 & -6 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2 & -1 & -7\\ 1 & 2 & 1\\ -6 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & -5 & -3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 6 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -6 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 3\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 8\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 6 & -3 & 1\\ -5 & -1 & 2\end{pmatrix}$

II. Hallar la matriz diagonal para cada una de las siguientes matrices:

$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -6 & 7\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & -5 & -3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -5 & 4 & 2\\ 1 & -6 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4 & -1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 6 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 8\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Referencias

Del Valle Sotelo, J. C. (2011). *Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias*. McGraw-Hill/Interamericana.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal.* Pearson Educación.

Lay, D. C. (2001). *Álgebra lineal.* Prentice Hall.

Stanley, G. S., & Flores Godoy, J. J. (2012). *Álgebra lineal.* McGrawHill.

Bibliografía recomendada

Álvaro, P. S., Hernández, F. J. V., & Pulido, P. O. (1998). *Problemas de álgebra lineal: cuestiones, ejercicios y tratamiento en Derive*. Prentice Hall.

Anton, H. (2003). *Introducción al álgebra lineal.*

Arce, C., Castillo, W., & González, J. (2004). *Algebra lineal.* San José. Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Barrera Mora, F. (2014). *Álgebra lineal.* Grupo Editorial Patria.

Cabello, J. G. (2005). *Álgebra lineal*. Sus aplicaciones en economía, ingenierías y otras ciencias. Delta Publicaciones.

Castellet, M., & Llerena, I. (2020). *Álgebra lineal y geometría*. Reverté.

Mayorga, M. E. C., Benítez, C. A. S., Toscano, O., & Rosa, T. H. P. (2023). Aplicación del Álgebra Lineal en la Ingeniería. *Domino de las Ciencias, 9*(2), 1639-1656.

MERINO GONZALEZ, L. M., & SANTOS ALAEZ, E. V. A. N. G. E. L. I. N. A. (2021). *Álgebra lineal con métodos elementales*. 3a. Ediciones Paraninfo, SA.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal*. Cengage Learning.

Strang, G. (1986). *Algebra lineal y sus aplicaciones* (No. 512.897 S8Y 2007.). Addison-Wesley Iberoamericana.

Álgebra lineal: teoría y ejercicios

Este libro, diseñado específicamente para estudiantes de Ingeniería en sus primeros dos semestres, es la guía perfecta para adentrarse en las profundidades de una de las ramas más esenciales y poderosas de las matemáticas. El Álgebra Lineal es el lenguaje que conecta la teoría con la aplicación en un amplio espectro de disciplinas, desde la Física hasta la Ingeniería, la Informática y más allá. Este libro es su pasaporte a una comprensión sólida de los conceptos fundamentales que forman la base de su futura carrera.

Este libro ha sido creado por expertos en el campo, y su enfoque es poner al estudiante en el asiento del conductor del proceso de aprendizaje. Cada capítulo se presenta de manera clara y estructurada, con ejemplos prácticos que demuestran cómo aplicar conceptos teóricos en situaciones del mundo real.

Prepárese para un emocionante viaje por el Álgebra Lineal que le brindará las herramientas esenciales para su futura carrera en la ingeniería. Ya sea que esté abordando el Álgebra Lineal por primera vez o buscando una revisión exhaustiva, este libro será su compañero de confianza.

¡Demos el primer paso hacia el dominio del Álgebra Lineal y el éxito en su viaje en la ingeniería!

Los autores

ISBN: 978-9942-652-00-3
9 789942 652003

ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA