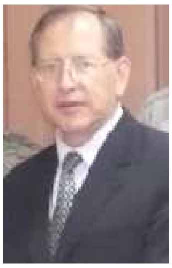


# ANÁLISIS ESTÁTICO DE PÓRTICOS PLANOS CON *CEINCI-LAB*

**Dr. Roberto Aguiar Falconí**

10 de Octubre de 2011

Se recomienda al lector estudiar el libro ***Análisis Matricial de Estructuras*** del autor de este artículo, antes de utilizar la librería de programas del sistema de computación ***CEINCI-LAB*** que se presenta en este artículo.

El marco teórico se reduce a presentar el cálculo de la Matriz de Rigidez de un elemento en coordenadas globales; a la obtención del Vector de Cargas mediante el Algoritmo del Problema Primario y Complementario; la determinación cada cuarto de la luz del desplazamiento vertical, la rotación, el momento a flexión y el cortante, todo esto a partir de las ordenadas de la elástica que se obtienen con las funciones de forma; finalmente se indica el cálculo en forma directa de las reacciones.

Por otra parte, se describen cada uno de los programas, en base a los cuales el usuario de ***CEINCI-LAB*** elaborará su propio programa para resolver un Pórtico Plano. Con el propósito de que se comprenda su utilización se presentan dos ejemplos, en el primero se resuelve paso a paso, en el sentido de que se presentan los resultados conforme se va utilizando cada uno de los programas de la librería de ***CEINCI-LAB.*** En el otro ejercicio que se resuelve se presenta en forma resumida los resultados y se indica el programa elaborado para su solución

## 1. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO

En el libro ***Análisis Matricial de Estructuras*** del autor de este artículo, se obtiene la matriz de rigidez de un elemento en Coordenadas Globales siguiendo el esquema indicado en la figura 1. En el sistema 1 no se consideran los desplazamientos como cuerpo rígido; el sistema 2 son las coordenadas locales (axial y transversal) y el sistema 3 son las coordenadas globales (horizontal y vertical). Por este motivo se recomienda, que se estudie en primer lugar el mencionado libro debido a que en las páginas siguientes se presentan las matrices de cálculo y los respectivos programas.

La matriz de rigidez en el sistema 1, es la siguiente:

$$\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Donde $E$ es el módulo de elasticidad del material; $I$ es el momento de inercia de la sección transversal; $A$ es el área de la sección transversal; $L$ es la longitud del elemento; $\phi$ es el factor que mide el efecto del corte.

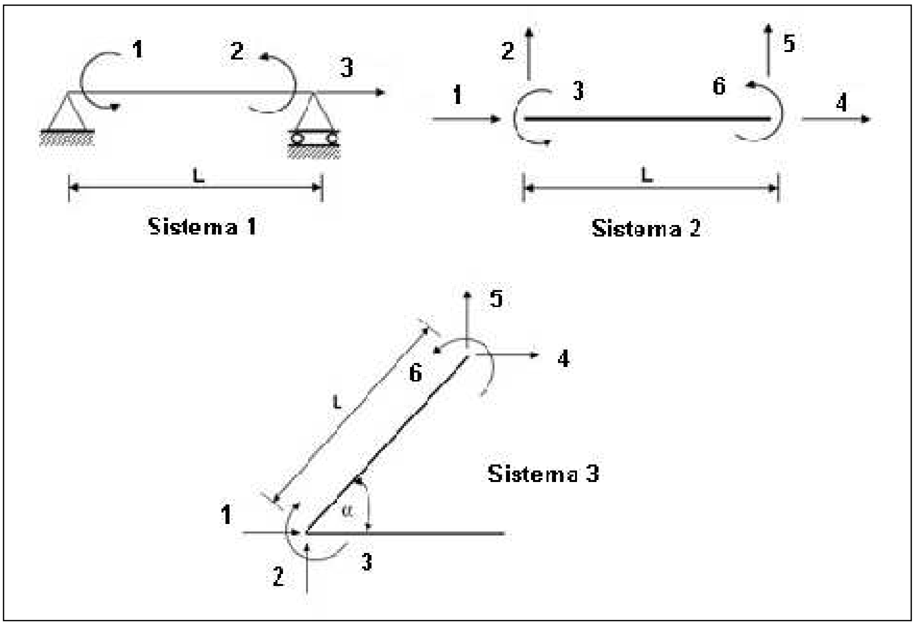



**Figura 1** Sistema de coordenadas de un elemento de un pórtico plano.

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} \tag{2}$$

Siendo $\beta$ el factor de forma que vale 1.2 para elementos rectangulares; $G$ es el módulo de corte. Para un elemento rectangular de sección constante.

$$A = b\,h \qquad\qquad I = \frac{b\,h^3}{12} \tag{3}$$

Donde $b$ es la base de la sección transversal; $h$ es la altura de la sección transversal del elemento.

La matriz de paso de los sistemas 1 al 2 y del 2 al 3, valen:

$$\boldsymbol{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Donde $\alpha$ es el ángulo que forma el eje del elemento con el eje de las X, como se aprecia en la barra inclinada de la figura 1. Para una viga $\alpha = 0°$; para una columna $\alpha = 90°$.

Las matrices de rigidez en coordenadas locales $\boldsymbol{k}_2$ y en coordenadas globales $\boldsymbol{k}_3$ se hallan con las ecuaciones (6) y (7).

$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{T}_{1-2}^{t} \ \boldsymbol{k_1} \ \boldsymbol{T}_{1-2} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{T}_{2-3}^{t} \ \boldsymbol{k_2} \ \boldsymbol{T}_{2-3} \tag{7}$$

En CEINCI-LAB el programa que determina la matriz de rigidez de un elemento de un pórtico plano se denomina: ***kmiembro*** cuya forma de uso se indicará en el siguiente apartado.

## 2. DESCRIPCIÓN DE LOS PROGRAMAS

- El programa ***cg*** sirve para encontrar las coordenadas generalizadas de un pórtico plano. La forma de uso del programa es: ***[CG,ngl]=cg (nod,nr,RES)*** Donde: ***nod*** es el número de nudos del pórtico; ***nr*** es el número de nudos restringidos; ***RES*** matriz que contiene, número de nudo restringido, código en X, código en Y, código de rotación. Son los grados de libertad en X, Y, y rotación; si existe grado de libertad se coloca cero, si no existe se coloca uno. El programa reporta una matriz que contiene a las coordenadas generalizadas de la estructura ***CG*** y el número de grados de libertad ***ngl.*** **Se destaca que los nudos restringidos se deben numeran en primer lugar.**

- El programa ***gn_portico*** sirve para obtener dos vectores que contienen al nudo inicial ***NI*** y al nudo final ***NJ*** de cada uno de los elementos del pórtico plano. La forma de uso del programa es: ***[NI,NJ]=gn_portico (GEN).*** Donde ***GEN*** es una matriz con la siguiente información, para cada uno de los elementos: número del elemento; nudo inicial del elemento; nudo final del elemento; número de elementos a generar; incremento en la numeración de los elementos; incremento en la numeración del nudo inicial; incremento en la numeración del nudo final.

- El programa ***vc*** genera el vector de colocación de un pórtico plano; la forma de uso es: ***[VC] = vc (NI,NJ,CG)***. Donde ***NI*** es el vector que contiene a los nudos iniciales; ***NJ*** el vector con los nudos finales; ***CG*** es una matriz con las coordenadas generalizadas. El programa reporta la matriz que contiene a los vectores de colocación de cada uno de los elementos. El vector de colocación está compuesto por los grados de libertad del nudo inicial y del nudo final, sirve para encontrar la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ por ensamblaje directo y para hallar el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$**.**

  El programa ***vc*** determina los vectores de colocación de estructuras que tienen dos o tres grados de libertad por nudo.

- El programa ***glinea_portico*** genera las coordenadas de los nudos, tanto en sentido X, como en sentido Y. La forma de uso es: ***[X,Y] = glinea_portico (Nudos)*** Donde ***Nudos*** es una matriz que contiene: Número de nudo; coordenada en X del nudo; coordenada en Y del nudo; número de nudos a generar; incremento en la numeración del nudo; incremento de longitud en sentido X; incremento de longitud en sentido Y. La forma de uso de este programa es: ***[ X, Y] = glinea_portico (Nudos)***. Reporta dos vectores ***X,Y*** con las coordenadas en X y Y de cada nudo.

- El programa ***dibujo***, presenta el pórtico. La forma de uso es: ***dibujo (X,Y,NI,NJ)*** Las variables de entrada de este programa ya fueron indicadas. Este programa ayuda a visualizar que la estructura sea la que realmente se está analizando.

  Una vez que el usuario ha comprobado que la estructura es la correcta se recomienda colocar % antes del programa ***dibujo*** de esta manera ya no volverá a ver la estructura.

- El programa ***longitud*** determina la longitud; $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$ de cada uno de los elementos del pórtico. (Ver figura 1) $\alpha$ es el ángulo que forma el eje del elemento con el eje de las X. Los valores sirven para encontrar la matriz de paso $T$ de coordenadas locales a globales. La forma de uso del programa es: ***[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ).***

  Donde ***L*** es un vector que contiene la longitud de cada uno de los elementos; ***seno*** un vector con el valor del $sen\,\alpha$ de cada uno de los elementos; ***coseno*** un vector con el valor del $\cos\alpha$ de cada elemento.

- El programa ***cargas*** determina el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ en pórticos con cargas en las juntas y cargas en los elementos; la forma de uso de este programa es la siguiente: ***[ Q, Q2]= cargas (njc, nmc, ngl, L,seno, coseno, CG, VC, F, Fm).*** Donde ***njc*** es el número de juntas cargadas, ***nmc*** es el número de elementos cargados; ***ngl*** es el número de grados de libertad; ***L*** vector con la longitud de cada uno de los elementos; ***seno*** vector con el $sen\,\alpha$ de los elementos; **coseno** vector con el $\cos\alpha$ de los elementos; ***CG***, matriz que contiene las coordenadas generalizadas de la estructura; ***VC***, matriz con los vectores de colocación de los elementos; ***F*** matriz que contiene el número del elemento cargado, la fuerza horizontal (positiva hacia la derecha), la fuerza vertical (positiva hacia arriba) y el momento (antihorario positivo) de cada una de las juntas cargadas; ***Fm*** matriz que contiene el número del elemento cargado; la carga que actúa en el elemento; Código de Carga; el número de elementos a generar con la misma carga; el incremento en la numeración de los elementos a generarse.

  El Código de Carga es igual a 1 para carga uniforme; 2 para carga triangular, 3 para carga trapezoidal y 4 para carga puntual.

  Si no hay cargas en las juntas se debe especificar $\boldsymbol{njc}=0$ y se debe indicar $\boldsymbol{F}=0$. Lo propio si no hay cargas en los elementos se debe indicar $\boldsymbol{nmc}=0$ y $\boldsymbol{Fm}=0$.

  El programa ***cargas*** determina el vector de coordenadas generalizadas ***Q*** y una matriz denominada ***Q2*** que contiene las acciones de empotramiento perfecto en coordenadas locales de cada uno de los elementos de la estructura. Esta matriz ***Q2*** es dato para el programa ***fuerzas***, que se indica posteriormente.

- El programa ***krigidez*** determina la matriz de rigidez de la estructura por ensamblaje directo. Este a su vez llama al programa ***kmiembro*** que determina la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales, en la forma indicada en el apartado anterior. La forma de uso es: ***[SS]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E).*** Las variables todavía no definidas son: ***ELEM*** es una matriz que contiene la base y la altura de cada uno los elementos del pórtico plano; ***E*** es el módulo de elasticidad del material. Se ha denominado ***SS*** a la matriz de rigidez de la estructura.

- El programa ***kmiembro*** es llamado por el programa ***krigidez,*** los datos de este programa son: ***[K3]=kmiembro(b,h,L,E,seno,coseno)*** Donde ***b, h*** son la base y la altura de la sección transversal; ***L*** la longitud del elemento; ***seno, coseno*** es el valor de la función seno y coseno del ángulo $\alpha$ con el que se determina la matriz $\boldsymbol{T_{2-3}}$

- El programa ***fuerzas*** obtiene las fuerzas y momentos finales en el nudo inicial y final de cada uno de los elementos del pórtico plano, en coordenadas locales. La forma de uso es: ***[FF]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2).*** Para usar este programa se necesita que el usuario de ***CEINCI-LAB*** haya obtenido el Vector de Coordenadas Generalizadas ***q***, que contiene los desplazamientos y giros de la estructura, para ello se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

(8)

La matriz de rigidez de la estructura se halló con el programa ***krigidez*** y el vector de cargas ***Q*** con el programa **cargas.** La solución de ecuaciones con MATLAB es muy elemental, ***q*** = ***K \ Q***

- El programa ***cada_cuarto_portico*** determina el desplazamiento vertical, el giro, el momento y el corte; cada cuarto de la luz, en cada uno de los elementos de la estructura. ***[TOT]=cada_cuarto_portico(q,VC,ELEM,L,Fm,E,seno,coseno)***

La información que el programa requiere ha sido ya indicada anteriormente. Se destaca que actualmente se obtiene la respuesta cada cuarto de la luz, únicamente para el caso de carga uniforme distribuida.

El desplazamiento vertical se halla con las funciones de forma, teniendo en cuenta que la solución total es igual a la solución del Problema Primario más la solución del Problema Complementario. A partir de esta solución se encuentra el giro derivando una vez, el momento derivando dos veces y el cortante derivando tres veces. Más adelante se detalla lo indicado. En el apartado 4 se presenta el marco teórico y la convención de signos con la que se trabaja.
**Con todos estos programas, el usuario de *CEINCI-LAB* debe elaborar su propio programa para resolver un Pórtico Plano.**

## 3. EJEMPLO ELEMENTAL PASO A PASO

En la figura 2 se tiene una estructura de un piso, de Hormigón Armado, con columnas de 40/30 en la forma indicada (40 cm., se tiene en la dirección paralela al pórtico 1); las vigas son de 30/30; la altura de entrepiso es de 3.0 m., se tiene un voladizo de 1 m. El módulo de elasticidad E=1600000 T/m$^2$. La losa es de 20 cm., de peralte alivianada en dos direcciones.

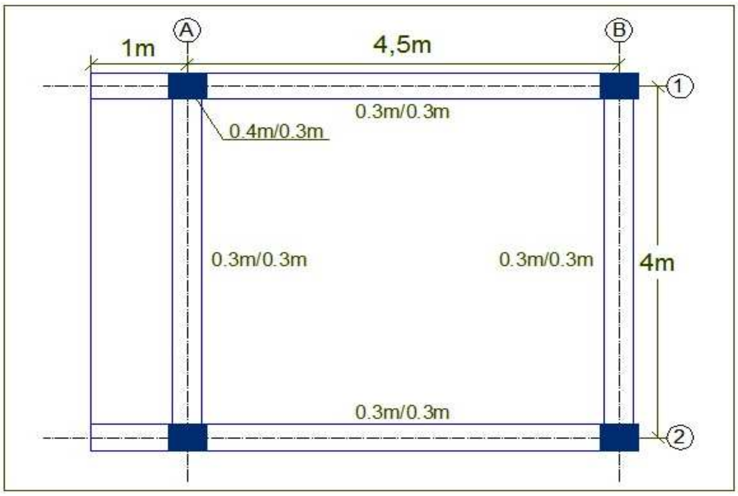



**Figura 2** De la estructura indicada se va a resolver el Pórtico 1.

Se va a resolver el pórtico 1, con las cargas indicadas en la figura 3. No se ha colocado la fuerza sísmica equivalente de 3 T., que actúa en el primer piso, la misma que si se indica en la figura 5. A más de explicar el uso de ***CEINCI-LAB*** se desea explicar dos temas elementales que el estudiante suele tener problemas. El primero se refiere a definir la base y la altura de la sección transversal de una columna y el segundo a la forma como se trata los volados.

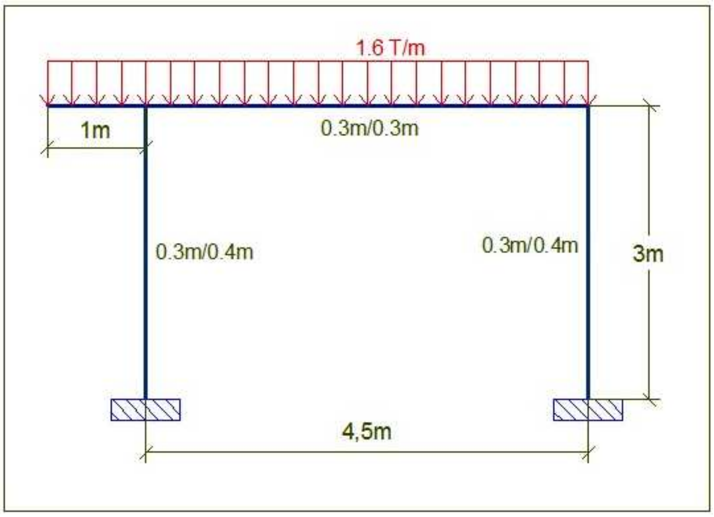



**Figura 3** Descripción del Pórtico 1 que se va a resolver.

Para el primer tema se debe indicar que **la base es siempre perpendicular a la dirección de análisis**. Por esto en la figura 3 se tiene en las columnas (0.3/0.4) primero se ha identificado a la base y luego a la altura.

Para el segundo tema, se debe indicar que la forma más práctica de considerar el voladizo es encontrando en primer lugar las acciones de empotramiento perfecto, como lo ilustra la figura 4 y luego estas acciones se colocan como cargas puntuales, con sentido contrario en la estructura, ver figura 5.

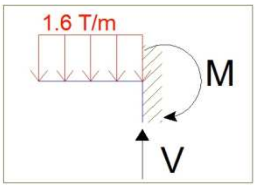



**Figura 4** Acciones de empotramiento perfecto.

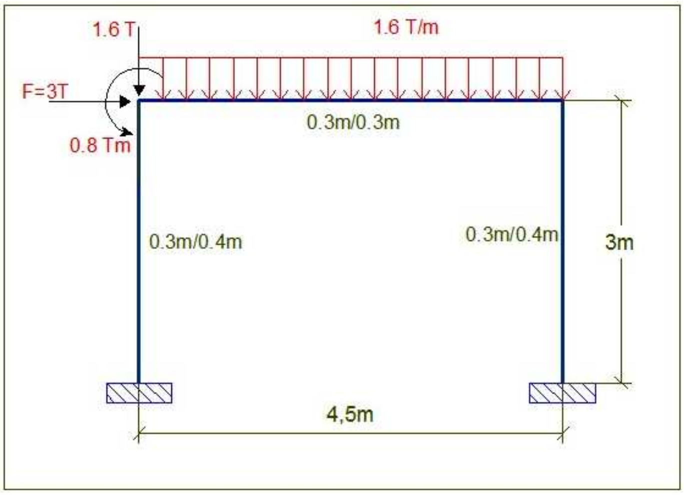



**Figura 5** Cargas actuantes en las Juntas y en el elemento.

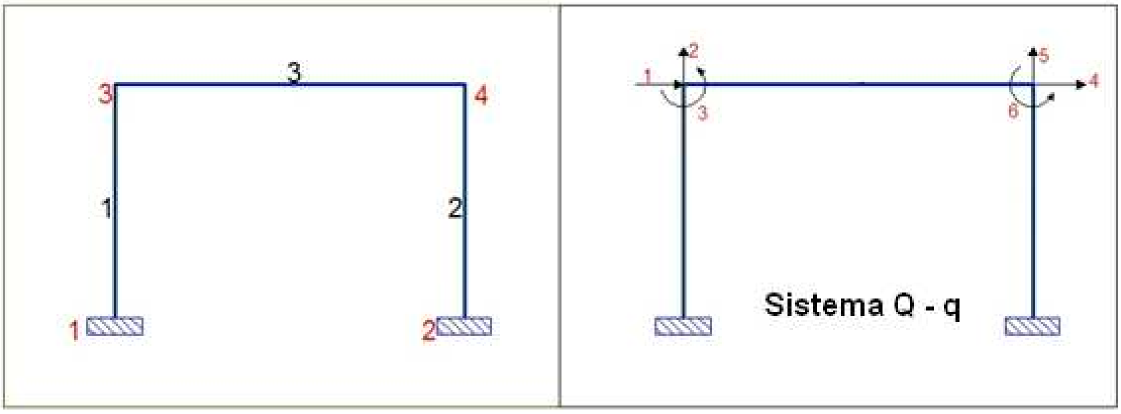



**Figura 6** Numeración de nudos, elementos y grados de libertad.

A la izquierda de la figura 6 se presenta la numeración de los nudos y elementos. El usuario de ***CEINCI-LAB*** deberá numerar en primer lugar los nudos restringidos (1 y 2).

Con relación a la numeración de los elementos es indiferente pero es conveniente numerar en primer lugar todas las columnas de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha; luego se recomienda numerar las vigas en la misma secuencia, de esta forma se tendrá agrupado los resultados.

A continuación se indica el programa que el usuario de ***CEINCI-LAB*** debe elaborar para resolver el ejercicio, pero se lo va presentado paso a paso. Se escribe una parte del programa y se lo ejecuta, los resultados se presentan en la mitad de la página.

```
%Solucion de un portico plano
nod=4;nr=2; % Número de nudos y nudos restringidos
res=[1 1 1 1;
     2 1 1 1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,res)
```

CG =

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |

ngl =6

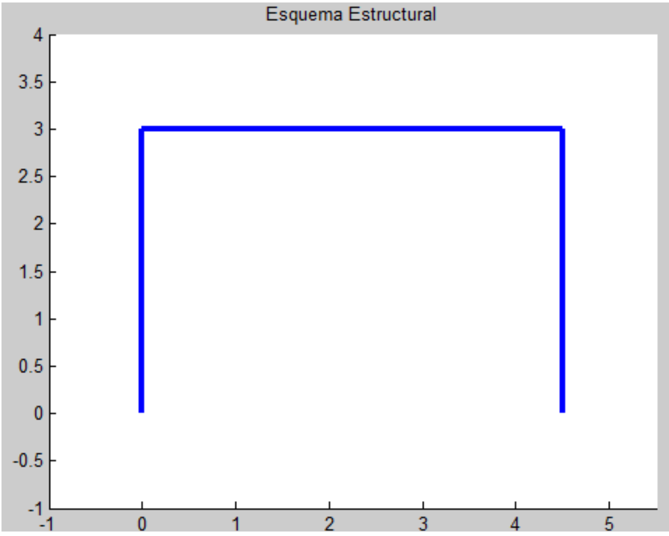
```
%Solucion de un portico plano
nod=4;nr=2; % Número de nudos y nudos restringidos
res=[1 1 1 1;
     2 1 1 1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,res);
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;3 3 4 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN)
[VC]=vc(NI,NJ,CG)
```

NI = 1 2 3
NJ =3 4 4

VC =

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

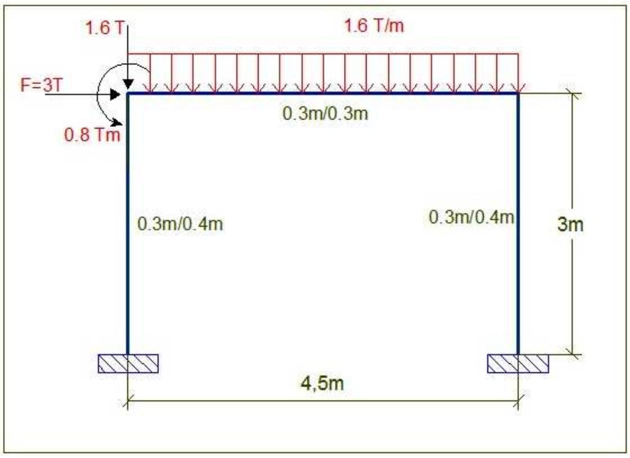
```
%Solucion de un portico plano
nod=4;nr=2; % Número de nudos y nudos restringidos
res=[1 1 1 1;
     2 1 1 1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,res);
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;
    3 3 4 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
X=[0;4.5;0;4.5];
Y=[0;0;3;3];
dibujo(X,Y,NI,NJ)
```




```
%Solucion de un portico plano
nod=4;nr=2; % Número de nudos y nudos restringidos
res=[1 1 1 1;
     2 1 1 1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,res);
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;
    3 3 4 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
X=[0;4.5;0;4.5];
Y=[0;0;3;3];
dibujo(X,Y,NI,NJ);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ)
elem=[0.3 0.4;
      0.3 0.4;
      0.3 0.3];
E=1600000;  %Modulo de elasticidad
[SS]=krigidez(ngl,elem,L,seno,coseno,VC,E)
```

L =
3.0000 3.0000 4.5000
seno =
1 1 0
coseno =
0 0 1

```
SS =

  1.0e+004 *

    3.3093         0    0.1640   -3.2000         0         0
         0    6.4141    0.0317         0   -0.0141    0.0317
    0.1640    0.0317    0.4266         0   -0.0317    0.0473
   -3.2000         0         0    3.3093         0    0.1640
         0   -0.0141   -0.0317         0    6.4141   -0.0317
         0    0.0317    0.0473    0.1640   -0.0317    0.4266
```



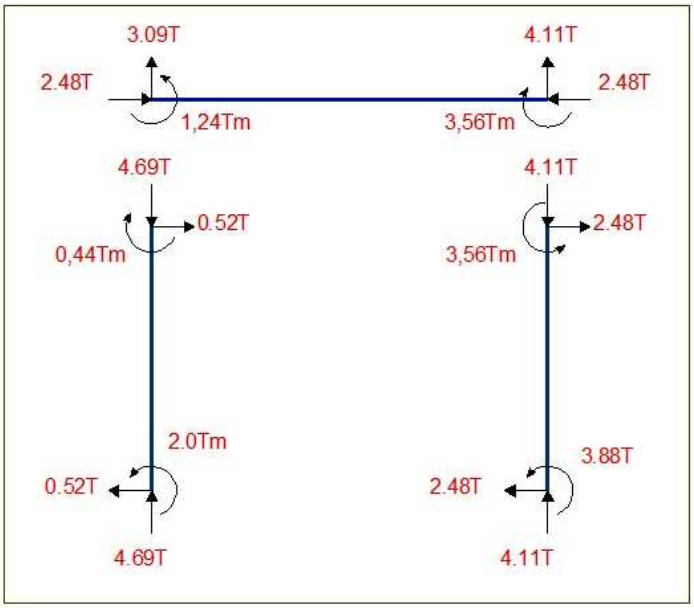

```
%Solucion de un portico plano
nod=4;nr=2; % Número de nudos y nudos restringidos
res=[1 1 1 1;
     2 1 1 1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,res);
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;
    3 3 4 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
X=[0;4.5;0;4.5];
Y=[0;0;3;3];
dibujo(X,Y,NI,NJ);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
elem=[0.3 0.4;
      0.3 0.4;
      0.3 0.3];
E=1600000;  %Modulo de elasticidad
[SS]=krigidez(ngl,elem,L,seno,coseno,VC,E);
%Estado de carga  D+L+S
F=[3 3 -1.6 0.8 ];
FM=[3 1.6 1 0 0];
njc=1;nmc=1;
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,FM)
```

```
Q =
    3.0000
   -5.2000
   -1.9000
         0
   -3.6000
    2.7000

Q2 =

         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0    3.6000    2.7000         0    3.6000   -2.7000
```

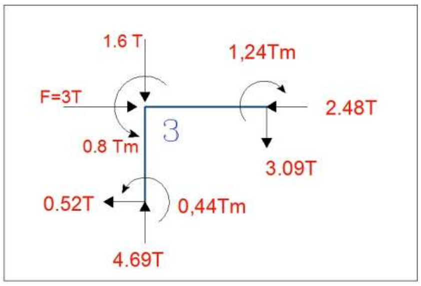
```
%Solucion de un portico plano
nod=4;nr=2; % Número de nudos y nudos restringidos
res=[1 1 1 1;
     2 1 1 1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,res);
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;
    3 3 4 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
X=[0;4.5;0;4.5];
Y=[0;0;3;3];
dibujo(X,Y,NI,NJ);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
elem=[0.3 0.4;
      0.3 0.4;
      0.3 0.3];
E=1600000;  %Modulo de elasticidad
[SS]=krigidez(ngl,elem,L,seno,coseno,VC,E);
%Estado de carga  D+L+S
F=[3 3 -1.6 0.8 ];
FM=[3 1.6 1 0 0];
njc=1;nmc=1;
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,FM);
q=SS\Q
[FF]=fuerzas(ngl,elem,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)
```

```
q =
    0.0026
   -0.0001
   -0.0014
    0.0025
   -0.0001
   -0.0002

FF =

    4.6852    0.5205    2.0041   -4.6852   -0.5205   -0.4426
    4.1148    2.4795    3.8792   -4.1148   -2.4795    3.5592
    2.4795    3.0852    1.2426   -2.4795    4.1148   -3.5592
```

La interpretación de las fuerzas y momentos encontrados es la siguiente.




Es importante que se compruebe el equilibrio de elementos y de juntas. A continuación se presentan las fuerzas que actúan en la Junta 3 y se deja al lector la verificación del equilibrio.




```
%Solucion de un portico plano
nod=4;nr=2; % Número de nudos y nudos restringidos
res=[1 1 1 1;
     2 1 1 1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,res);
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;
    3 3 4 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
X=[0;4.5;0;4.5];
Y=[0;0;3;3];
dibujo(X,Y,NI,NJ);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
elem=[0.3 0.4;
      0.3 0.4;
      0.3 0.3];
E=1600000;  %Modulo de elasticidad
[SS]=krigidez(ngl,elem,L,seno,coseno,VC,E);
%Estado de carga  D+L+S
F=[3 3 -1.6 0.8 ];
FM=[3 1.6 1 0 0];
njc=1;nmc=1;
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,FM);
```

```
q=SS\Q;
[FF]=fuerzas(ngl,elem,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2);
[TOT]=cada_cuarto_portico(q,VC,elem,L,Fm,E,seno,coseno)
```

```
  ELEMENTO
i =
     1

        X       Desplaz     Giro      Momento     Corte
TOT =

         0          0          0    -2.0359     0.5417
    0.7500     0.0002     0.0005    -1.6296     0.5417
    1.5000     0.0008     0.0010    -1.2234     0.5417
    2.2500     0.0016     0.0013    -0.8171     0.5417
    3.0000     0.0026     0.0014    -0.4109     0.5417

  ELEMENTO
i =
     2

        X       Desplaz     Giro      Momento     Corte
TOT =

         0          0          0    -4.0304     2.5802
    0.7500     0.0004     0.0009    -2.0952     2.5802
    1.5000     0.0012     0.0012    -0.1600     2.5802
    2.2500     0.0021     0.0010     1.7752     2.5802
    3.0000     0.0025     0.0002     3.7104     2.5802

  ELEMENTO
i =
     3

        X       Desplaz     Giro      Momento     Corte
TOT =

         0     0.0001     0.0014    -1.2308     3.0800
    1.1250     0.0018     0.0013     1.2216     1.2800
    2.2500     0.0024    -0.0004     1.6491    -0.5200
    3.3750     0.0011    -0.0015     0.0515    -2.3200
    4.5000     0.0001     0.0002    -3.5710    -4.1200
```

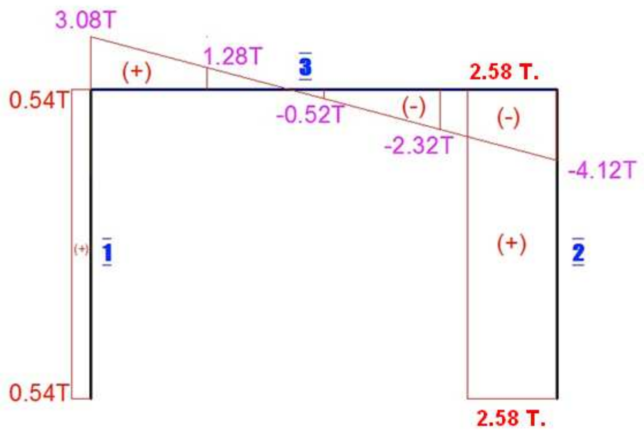



**Diagrama de Corte**

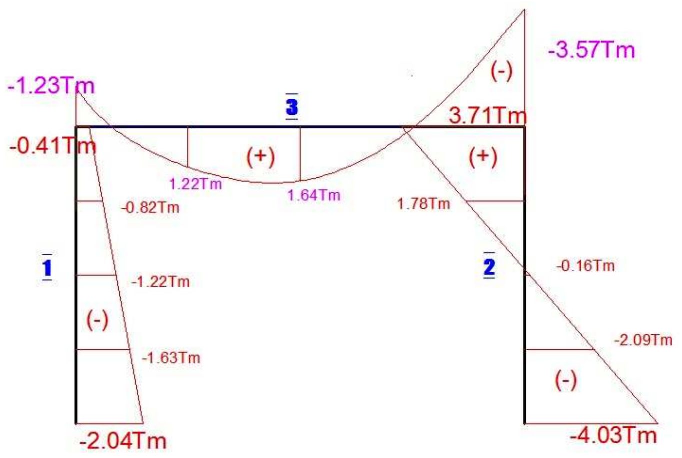



**Diagrama de Momentos**

## 4. CALCULO CADA CUARTO DE LA LUZ

En el presente apartado se ilustra la forma como el programa ***cada_cuarto_portico*** encuentra el desplazamiento vertical, el giro, el momento y el corte, cada cuarto de la luz, para un elemento de sección constante.

En la figura 7, se presenta una viga de sección constante con carga uniforme distribuida , el desplazamiento vertical en cualquier punto de la viga se halla a partir de la solución de la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{P_o}{EI} \tag{9}$$

Donde es la carga uniforme distribuida; es el módulo de elasticidad del material; es el momento de inercia; es la ordenada donde se desea obtener el desplazamiento vertical .

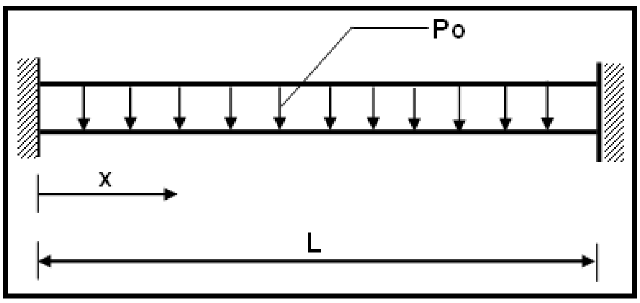



**Figura 7** Viga de sección contante con carga uniforme distribuida (Problema Primario)

La solución de la ecuación diferencial es la siguiente. Aguiar (2004)

$$v(x) = -\frac{P_o L}{12EI} X^3 + \frac{P_o L^2}{24EI} X^2 + \frac{P_o}{24EI} X^4$$

$$v(x) = \frac{P_o}{24EI}\left(X^4 + X^2 L^2 - 2X^3 L\right) \tag{10}$$

$$\theta(x) = \frac{P_o}{24EI}\left(4X^3 + 2XL^2 - 6X^2 L\right)$$

Es importante tener en cuenta, que en la ecuación (10), $v(x)$ es positivo si el desplazamiento es hacia abajo; $\theta(x)$ es el giro que se obtiene derivando $v(x)$; el giro es positivo si es horario. Estrictamente la ecuación (10) reporta la solución del Problema Primario, en la que sus elementos están empotrados.

En la figuras 1 y 6 se observa que la convención de signos con las que se resuelve un pórtico plano es los desplazamientos son positivos si van hacia arriba; el giro es positivo si es antihorario. Esta es la convención de signos de Análisis Matricial de Estructuras. Pero ahora, se está trabajando con la convención de signos de Resistencia de Materiales; esto se debe tener muy en cuenta cuando se utiliza el programa ***cada_cuarto_portico*.**

En el Método de los Desplazamientos, se ve que la solución total es igual a la solución del Problema Primario más la solución del Problema Complementario. Por lo tanto, se tiene:

$$v(x) = -\left(v_1\phi_2(x) + \theta_1\phi_3(x) + v_2\phi_5(x) + \theta_2\phi_6(x)\right) + \frac{P_o}{24EI}\left(X^4 + X^2L^2 - 2X^3L\right) \tag{11}$$

Donde $v_1, \theta_1$ son el desplazamiento transversal y rotación del nudo inicial; $v_2, \theta_2$ son el desplazamiento transversal y rotación del nudo final; $\phi_2, \phi_3, \phi_5, \phi_6$, son las funciones de forma. Para un elemento de sección constante se tiene:

$$\phi_2(x) = 1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3}$$

$$\phi_3(x) = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 \tag{12}$$

$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - 2\frac{X}{L}\right)$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

En la ecuación (11) la convención de signos adoptada es hacia abajo positiva. El giro se obtiene derivando la ecuación (11); el Momento $M(x)$ aplicando la siguiente ecuación.

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \tag{13}$$

El momento es positivo si la tracción se encuentra en la fibra inferior. Finalmente el Corte $V(x)$ se halla derivando la ecuación de momentos.

## 5. EJERCICIO EN FORMA RESUMIDA

Se desea resolver el pórtico plano indicado en la figura 8, las columnas son de 30/40 y la viga de 30/30. Sobre la estructura actúa una fuerza horizontal de 3 T., y una carga uniforme distribuida de 2 T/m. El módulo de elasticidad $E = 1800000\, T/m^2$.

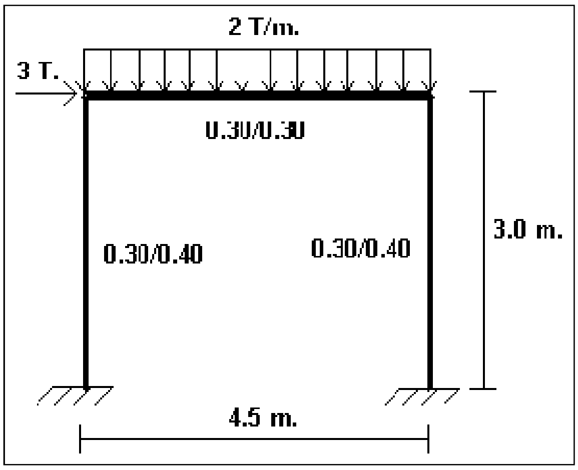



**Figura 8** Pórtico plano a resolver con ***CEINCI-LAB***

A la izquierda de la figura 9 se muestra la numeración de los nudos y elementos; a la derecha se indican los grados de libertad. Las matrices **CG** (Coordenadas Generalizadas) y **VC** (Vectores de colocación) son:

$$\boldsymbol{CG} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{VC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

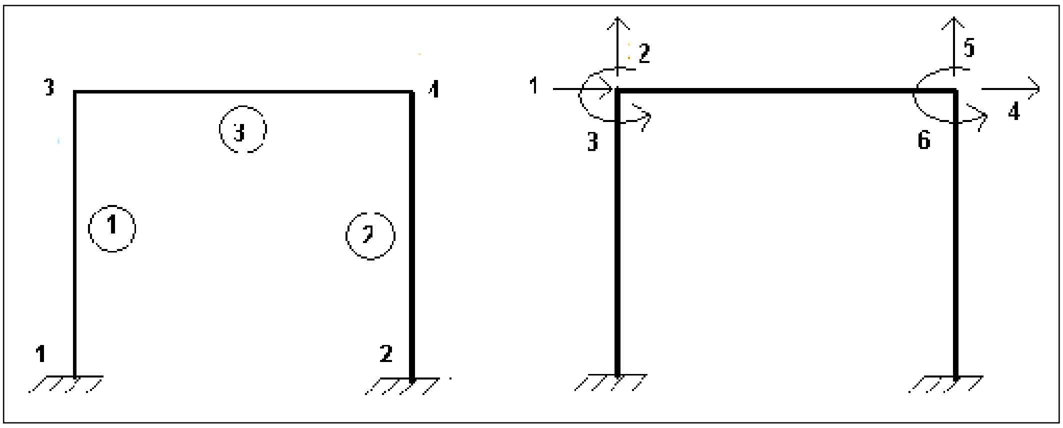



**Figura 9** Numeración de nudos y elementos. Grados de libertad de la estructura.

El vector de cargas es $\mathbf{Q}^t$ = [ 3.00 -4.50 -3.375 0.00 -4.50 3.375]. De la solución del sistema de ecuaciones **K Q =q** , se encuentra: $\mathbf{q}^t$ =[0.0026 -0.0001 -0.0017 0.0025 -0.0001 -0.0001].

**Tabla 1** Fuerzas y momentos finales en extremos de elementos

| **Elemento** | **Nudo Inicial** | | | **Nudo Final** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Fuerza Axial ( T. ) | Fuerza de Corte ( T.) | Momento ( T.m.) | Fuerza Axial ( T. ) | Fuerza de Corte ( T.) | Momento ( T.m.) |
| **1** | 3.8762 | 0.0646 | 1.7255 | -3.8762 | -0.0646 | -1.5316 |
| **2** | 5.1238 | 2.9354 | 4.4765 | -5.1238 | -2.9354 | 4.3386 |
| **3** | 2.9354 | 3.8762 | 1.5316 | -2.9354 | 5.1238 | -4.3386 |

En la tabla 1, se muestran las fuerzas y momentos en cada uno de los elementos, en coordenadas locales. El archivo de datos del programa que resuelve el pórtico indicado es el siguiente.

```
%
% Programa para resolver Porticos Planos
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%        CEINCI-ESPE
%        Septiembre de 2009
%-----------------------------------------------------------
% Ejemplo 1 Pórtico con base empotrada de un vano y un piso
%-----------------------------------------------------------
nod=4;  % Número de nudos del pórtico plano
nr=2;   % Número de nudos restringidos
%
% MATRIZ DE RESTRICCIONES DE LOS NUDOS
RES=[ 1   1    1   1; % Nudo restringido Des X, Des Y, Rot
      2   1    1   1];
% Calculo de Coordenadas Generalizadas y grados de libertad
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES) % CG  Matriz de coord generalizadas
% MATRIZ DE GENERACION DE NUDOS DE LOS ELEMENTOS
GEN=[1 1 3 0 0 0 0; %elem, ni, nf, elem a gene, inc en elem, inc en ni, inc en nf
     2 2 4 0 0 0 0;
     3 3 4 0 0 0 0];
 % Generación de vector NI (Nudo Inicial) y NJ (Nudo Final) de elementos
 [NI,NJ]=gn_portico(GEN)
% MATRIZ DE GENERACION DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
NUDOS=[1 0.0 0.0 0 0 0.0 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
       2 4.5 0.0 0 0 0.0 0.0;
       3 0.0 3.0 0 0 0.0 0.0;
       4 4.5 3.0 0 0 0.0 0.0];
% Generación de las coordenadas de los nudos
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS)
% Dibuja el portico plano
dibujo (X,Y,NI,NJ)
% Vector de colocación
 [VC]=vc(NI,NJ,CG)
 % Longitud, Seno y Coseno de elementos
 [L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ)
% Vector de cargas generalizadas
njc=1; % Número de juntas Cargadas
F=[3  3.0  0.0  0.0]; %Junta Cargada, FH, FV y Momento
nmc=1; % Número de miembros cargados
Fm=[3  2.0  1  0  0]; %Elem carg, carga, código, elem a gener, incr numero elemento
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm)
% Secciones de los elementos
SECCION=[1  0.30  0.40  0   0; % Eleme, base, altura, elem a gener, increm en elem
         2  0.30  0.40  0   0;
         3  0.30  0.30  0   0];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION)
% Matriz de rigidez de la estructura
E=1800000; % Modulo de elasticidad del material
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E)
% Desplazamientos y Giros
q=K\Q
% Fuerzas y momentos finales en los elementos
[FF]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)
% ---end---
```

## 6. CÁLCULO DE LAS REACCIONES

En la forma como se han resuelto los pórticos, no es posible calcular directamente las reacciones de los apoyos; se debe hacer equilibrio en los apoyos y colocar las fuerzas en los extremos de los elementos que se han obtenido. Si se desea encontrar directamente, las reacciones se debe considerar como que no existe apoyo en la base y numerar esos grados de libertad.

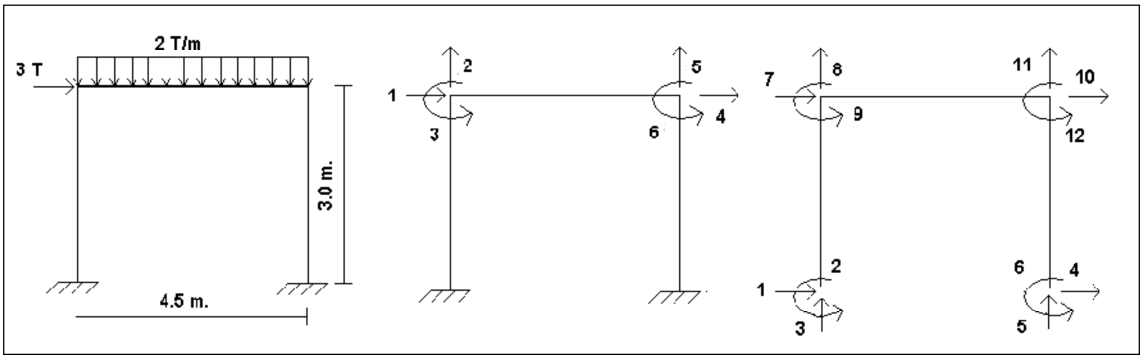



**Figura 10** Modelo para calcular las reacciones de los apoyos directamente.

En la figura 10, se presenta a la izquierda el pórtico resuelto en el apartado anterior con los grados de libertad (gdl) indicados en la gráfica central. Ahora se va a resolver este pórtico con los gdl., indicados a la derecha, con 12 gdl.

La ecuación básica de análisis matricial de estructuras, es la siguiente. Aguiar (2004)

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$$

Donde $\boldsymbol{Q}$ es el vector de cargas generalizadas; $\boldsymbol{K}$ es la matriz de rigidez de la estructura y $\boldsymbol{q}$ es el vector de coordenadas generalizadas. Para encontrar directamente las reacciones se debe reconocer dos tipos de coordenadas, las que están directamente relacionadas con las reacciones, en el ejemplo sería de la 1 a la 6, a estas se denominan ***coordenadas a**,* y los restantes grados de libertad que en este caso van del 7 al 12, a estas se llaman ***coordenadas b**.* Luego la ecuación básica de análisis matricial, queda:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q_A} + \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{Q_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{AA}} & \boldsymbol{K_{AB}} \\ \boldsymbol{K_{BA}} & \boldsymbol{K_{BB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_A} \\ \boldsymbol{q_B} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Siendo $\boldsymbol{Q_A}$ el vector de cargas generalizadas asociadas a las coordinas 1 a 6 pero debido a las cargas que gravitan en la estructura, para el ejemplo este vector vale cero. $\boldsymbol{R}$ es el vector que contiene las reacciones de los apoyos; $\boldsymbol{Q_B}$ es el vector de cargas generalizadas asociado a las coordenadas 7 a 12. La matriz de rigidez de la estructura es de 12 por 12 y la partición se realiza de acuerdo al número de coordenadas $a$ y $b$; se denominan $na$ al número de coordenadas $a$ que en este caso es 6; $nb$ al número de coordenadas $b$ que también es 6. Luego las submatrices $\boldsymbol{K_{AA}}$ es de $(na, na)$; $\boldsymbol{K_{AB}}$ de $(na, nb)$; $\boldsymbol{K_{BB}}$ de $(nb, nb)$ y $\boldsymbol{K_{BA}} = \boldsymbol{K}^t_{\boldsymbol{AB}}$. El vector $\boldsymbol{q_A}$ contiene a los desplazamientos y giros de las coordenadas $a$ que vale cero ya que la estructura es empotrada y $\boldsymbol{q_B}$ son los desplazamientos y giros de las coordenadas $b$. Al desarrollar la ecuación (14) se tiene:

$$Q_A + R = K_{AB} * q_B$$
$$Q_B = K_{BB}\ q_B$$

De la segunda ecuación se obtiene $q_B$ resolviendo el sistema de ecuaciones indicado. Al reemplazar $q_B$ en la primera ecuación se halla $R$ .

$$R = K_{AB} * q_B - Q_A \qquad (15)$$

El programa con el cual se obtiene directamente las reacciones de los apoyos de la estructura indicada en la figura 10 se lista a continuación.

```
%
% Programa para resolver Porticos Planos
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%         CEINCI-ESPE
%         Septiembre de 2009
%-------------------------------------------------------------
% Ejemplo de calculo de reacciones directamente
%-------------------------------------------------------------
nod=4;  % Número de nudos del pórtico plano
nr=2;   % Número de nudos restringidos
%
% MATRIZ DE RESTRICCIONES DE LOS NUDOS
RES=[ 1   0  0  0; % Nudo restringido Des X, Des Y, Rot
      2   0  0  0];
%
% Calculo de Coordenadas Generalizadas y grados de libertad
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES) % CG  Matriz de coord generalizadas
% MATRIZ DE GENERACION DE NUDOS DE LOS ELEMENTOS
GEN=[1 1 3 0 0 0 0; %elem, ni, nf, elem a gene, inc en elem, inc en ni, inc en nf
     2 2 4 0 0 0 0;
     3 3 4 0 0 0 0];
 % Generación de vector NI (Nudo Inicial) y NJ (Nudo Final) de elementos
 [NI,NJ]=gn_portico(GEN)
% MATRIZ DE GENERACION DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
NUDOS=[1 0.0 0.0 0 0 0.0 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
       2 4.5 0.0 0 0 0.0 0.0;
       3 0.0 3.0 0 0 0.0 0.0;
       4 4.5 3.0 0 0 0.0 0.0];
% Generación de las coordenadas de los nudos
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS)
% Dibuja el portico plano
dibujo (X,Y,NI,NJ)
% Vector de colocación
 [VC]=vc(NI,NJ,CG)
 % Longitud, Seno y Coseno de elementos
 [L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ)
% Vector de cargas generalizadas
njc=1; % Número de juntas Cargadas
F=[3  3.0  0.0  0.0]; %Junta Cargada, FH, FV y Momento
nmc=1; % Número de miembros cargados
Fm=[3  2.0  1  0  0]; %Elem carg, carga, código, elem a gener, incr numero elemento
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm)
% Secciones de los elementos
SECCION=[1  0.30  0.40  0   0; % Eleme, base, altura, elem a gener, increm en elem
         2  0.30  0.40  0   0;
         3  0.30  0.30  0   0];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION)
```

```
% Matriz de rigidez de la estructura
E=1800000; % Modulo de elasticidad del material
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E)
r=[1:ngl];r1=[1,2,3,4,5,6]; %Grados de libertad de base fija
r2=setdiff(r,r1); %Grados de libertad de nudos libres
Kaa=K(r1,r1);Kab=K(r1,r2);Kbb=K(r2,r2)
% Desplazamientos y Giros de grados de libertad libres
% Kaa*qa+Kab*qb=F1+R;   Kab'*qa+Kbb*qb=F2
Qb=Q(r2);qb=Kbb\Qb;
% Cálculo de las reacciones
Qa=Q(r1);% Son las contribuciones de los elementos
R=Kab*qb-Qa
% Desplazamientos y Giros
for j=1:6; qa(j)=0;end; qa=qa'; % Base empotrada
q=[qa;qb];
% Fuerzas y momentos finales en los elementos
[FF]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)
% ---end---
```

El vector que contiene las reacciones $\boldsymbol{R}$ que reporta el programa es:

$$\boldsymbol{R}^{t} = [-0.0646 \quad 3.8762 \quad 1.7255 \quad -2.9354 \quad 5.1238 \quad 4.4675]$$

## 7. VECTOR DE CARGAS Q

Existen dos maneras de encontrar el Vector de Cargas **Q** en una estructura. La primera es mediante el Algoritmo denominado Problema Primario y Complementario. La segunda mediante Trabajos Virtuales. En este apartado se va a presentar el cálculo del vector **Q** de la primera forma, para el efecto se resuelve un pórtico interior del Colegio mostrado en la figura 11. En la figura 12 se presenta a la izquierda el modelo numérico de cálculo y a la derecha el sistema de Coordenadas Generalizadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$.


**Figura 11** Estructura en la cual se va a encontrar el vector de cargas en un pórtico central.

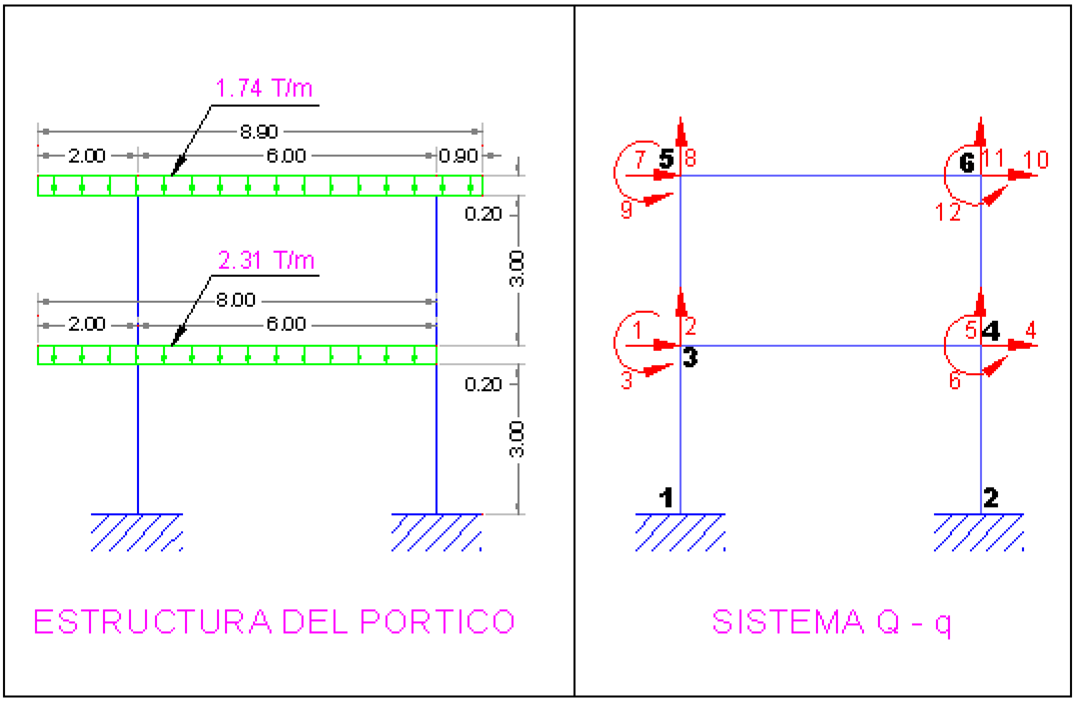



**Figura 12** Modelo numérico de cálculo y grados de libertad.

- **PROBLEMA PRIMARIO**

El Problema Primario es aquel en el cual actúan todas las cargas pero con la condición de que el vector $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ . Para que se cumpla que no hay desplazamientos ni giros en la estructura deben existir fuerzas de fijación $R_i$ las mismas que se muestran a la izquierda de la figura 13. Las fuerzas y momentos $R_i$ se colocan con sentido contrario al sistema **Q**. En el cálculo del Problema Primario se determinará el verdadero sentido de estas cargas.

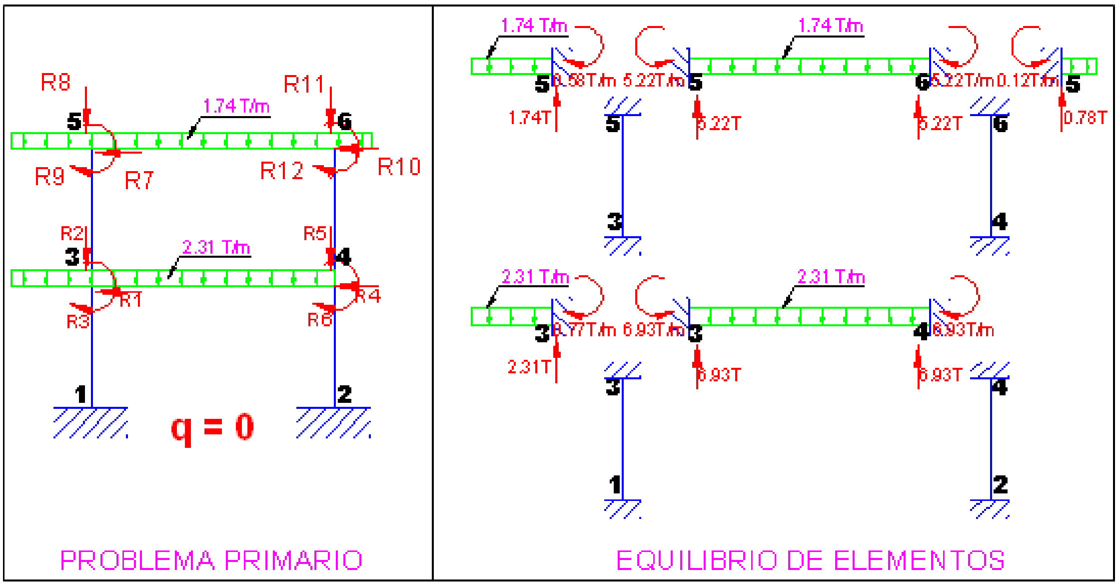



**Figura 13** Problema Primario.

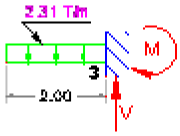
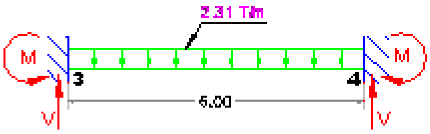
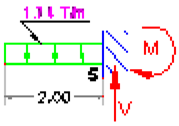
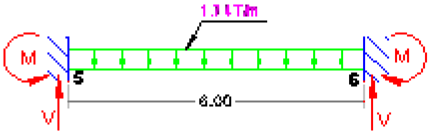
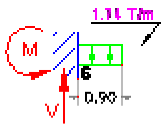
| | |
|---|---|
|   | RESOLVER 3:<br>$V = \frac{Po \times L}{2} = \frac{2.31\ T/m \times 2m}{2} = 2.31\ T$<br>$M = \frac{Po \times L^2}{12} = \frac{2.31 T/m \times (2m)^2}{12} = 0.77\ T/m$ |
|   | RESOLVER 3 - 4:<br>$V = \frac{Po \times L}{2} = \frac{2.31\ T/m \times 6m}{2} = 6.93\ T$<br>$M = \frac{Po \times L^2}{12} = \frac{2.31 T/m \times (6m)^2}{12} = 6.93\ T/m$ |
|   | RESOLVER 5:<br>$V = \frac{Po \times L}{2} = \frac{1.74\ T/m \times 2m}{2} = 1.74\ T$<br>$M = \frac{Po \times L^2}{12} = \frac{1.74\ T/m \times (2m)^2}{12} = 0.58\ T/m$ |
|   | RESOLVER 5 - 6:<br>$V = \frac{Po \times L}{2} = \frac{1.74\ T/m x 6m}{2} = 5.22\ T$<br>$M = \frac{Po \times L^2}{12} = \frac{1.74\ T/m \times (6m)^2}{12} = 5.22\ T/m$ |
|   | RESOLVER 6:<br>$V = \frac{Po \times L}{2} = \frac{1.74\ T/m \times 0.90m}{2} = 0.78\ T$<br>$M = \frac{Po \times L^2}{12} = \frac{1.74\ T/m \times (0.90m)^2}{12} = 0.12\ T/m$ |

**Figura 14** Equilibrio de elementos

Al no haber desplazamientos y giros en el Problema Primario, cada uno de los elementos se considera empotrado-empotrado. Por este motivoen la figura 14 se presentan las acciones de empotramiento perfecto que viene a ser las fuerzas y momentos con las cuales se equilibran los elementos.

El Problema Primario tiene dos etapas que son: Equilibrio de Elementos, figura 13 lado derecho y Equilibrio de Juntas, figura 15.

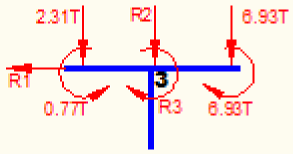
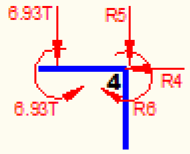
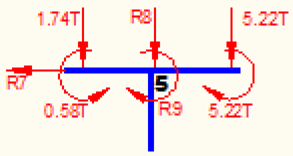
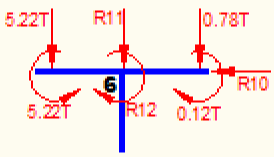
| | |
|---|---|
|  | EQUILIBRIO DE LA JUNTA 3:<br>$\sum FX = -R1 = 0$<br>$R1 = 0$<br>$\sum FY = -2.31T - R2 - 6.93T = 0$<br>$-9.24T - R2 = 0$<br>$R2 = -9.24T$<br>$\sum FM = 0.77T - R3 - 6.93T = 0$<br>$-6.16T - R3 = 0$<br>$R3 = -6.16T$ |
|  | EQUILIBRIO DE LA JUNTA 4:<br>$\sum FX = -R4 = 0$<br>$R4 = 0$<br>$\sum FY = -6.93T - R5 = 0$<br>$R5 = -6.93T$<br>$\sum FM = 6.93T - R6 = 0$<br>$R6 = 6.93T$ |
|  | EQUILIBRIO DE LA JUNTA 5:<br>$\sum FX = -R7 = 0$<br>$R7 = 0$<br>$\sum FY = -1.74T - R8 - 5.22T = 0$<br>$-6.96T - R8 = 0$<br>$R8 = -6.96T$<br>$\sum FM = 0.58T - R9 - 5.22T = 0$<br>$4.64T - R9 = 0$<br>$R9 = 4.64T$ |
|  | EQUILIBRIO DE LA JUNTA 6:<br>$\sum FX = -R10 = 0$<br>$R10 = 0$<br>$\sum FY = -5.22T - R11 - 0.78T = 0$<br>$-6.00T - R11 = 0$<br>$R11 = -6.00T$<br>$\sum FM = 5.22T - R12 - 0.12T = 0$<br>$5.10T - R12 = 0$<br>$R12 = 5.10T$ |

**Figura 15** Equilibrio de Juntas.

En cada Junta se debe verificar que la suma de fuerzas en sentido horizontal y vertical sea cero; lo propio debe suceder con la sumatoria de momentos. En esta etapa se encuentran los valores de las fuerzasde fijación con su respectivo signo.

En el Problema Complementario actúan únicamente las cargas de fijación pero con sentido contrario al del Problema Primario y son las que generan los desplazamientos y giros en la estructura.

Para la estructura analizada, el vector de cargas **Q** vale.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \\ R_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-9.24} \\ \mathbf{-6.16} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-6.93} \\ \mathbf{6.93} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-6.96} \\ \mathbf{4.64} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-6} \\ \mathbf{5.10} \end{bmatrix}$$

Ahora se deja al lector el cálculo de este vector con ***CEINCI-LAB*** para el efecto en la figura 16 se muestra la numeración de los nudos y elementos.

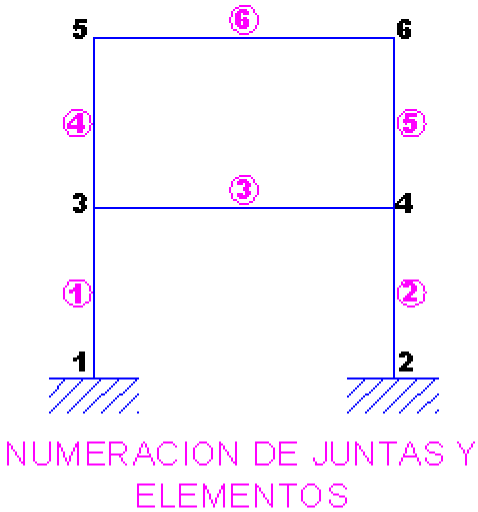



**Figura 16** Numeración de nudos y elementos

Este ejercicio fue resuelto por la Arq. Lourdes Joza, en la Maestría de Nuevas Tecnologías de la Construcción de la Universidad de Guayaquil, en Septiembre de 2011.

Por último es importante indicar que si se desea resolver un pórtico plano, para diferentes estados de carga, se deberá obtener en primer lugar la matriz de rigidez de la estructura y luego para cada uno de los estados se encuentra el vector de cargas generalizadas y se hallan las fuerzas y momentos finales. Se hace incapié que solo se encuentra una sola vez la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$.

## REFERENCIA

1. Aguiar Roberto (2004), *Análisis Matricial de Estructuras,* Centro de Investigaciones Científicas, CEINCI. Escuela Politécnica del Ejército. Tercera Edición, 550 p. Quito, Ecuador.