VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y VINCULACIÓN CON LA COLECTIVIDAD

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PROMOCIÓN I

TEMA: "ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO APLICANDO EL MODELO DE VAN HIELE CON EL USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA"

Autor:

RICARDO GABRIEL ENRÍQUEZ DELGADO

DIRECTORA: MSC. MARGARITA KOSTIKOVA

SANGOLQUÍ, DICIEMBRE DEL 2014

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CERTIFICACIÓN DEL DIRECTOR

MsC. Margarita Kostikova

CERTIFICA:

Que el trabajo titulado "Análisis del Conocimiento Geométrico aplicando el modelo de Van Hiele con el uso del software Geogebra", realizado por el maestrante Enríquez Delgado Ricardo Gabriel, ha sido guiado y revisado periódicamente, cumpliendo con las normas establecidas por el Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, por tanto, se autoriza su presentación para los fines legales pertinentes.

Sangolquí, diciembre 2014

____

MsC. Margarita Kostikova

DIRECTORA DE TESIS

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD

Yo: Enríquez Delgado Ricardo Gabriel

DECLARO QUE:

La tesis de grado titulada "Análisis del Conocimiento Geométrico aplicando el modelo de Van Hiele con el uso del software Geogebra", ha sido desarrollada con base a una profunda investigación, respetando derechos intelectuales de terceros, conforme a las citas correspondientes, cuyas fuentes constan en la bibliografía. Consecuentemente este trabajo es de mi autoría.

En virtud de esta declaración, me responsabilizo del contenido, veracidad y alcance científico de la tesis de grado en mención.

Sangolquí, diciembre 2014

____

Ricardo Enríquez

C.C: 171453397-1

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

AUTORIZACIÓN

Yo: Enríquez Delgado Ricardo Gabriel

Autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, la publicación en la biblioteca virtual de la institución, de mi trabajo denominado: "Análisis del Conocimiento Geométrico aplicando el modelo de Van Hiele con el uso del software Geogebra", cuyo contenido, ideas y criterios son de mi exclusiva responsabilidad y autoría.

Sangolquí, diciembre 2014

Ricardo Enríquez

C.C: 171453397-1

AGRADECIMIENTO

Mi sincero agradecimiento a los docentes y estudiantes de octavo, noveno y décimo año de Educación General Básica del año lectivo 2013-2014 del Colegio Católico José Engling; por su apoyo y colaboración en el desarrollo de la presente investigación.

A la MsC.Margarita Kostikova quien con sus vastos conocimientos supo guiarme durante el desarrollo de este trabajo.

Al MsC. Juan Carlos Trujillo, profesor oponente de la tesis.

A los Doctores Marco Flores y Edgar Velasco, quienes me ayudaron a estructurar el perfil del proyecto.

DEDICATORIA

Esta tesis de grado, la dedico con mucho cariño y gratitud a mi amada esposa y mi hijo Matías Gabriel, que con su paciencia y apoyo incondicional han hecho posible la realización del presente trabajo.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE CUADROS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

RESUMEN

La Geometría es la ciencia de las formas espaciales del mundo material. Proporciona una disciplina mental, potencializando en los estudiantes su creatividad y pensamiento espacial. La presente investigación evalúa el nivel de impacto que una metodología propuesta (Modelo de Van Hiele y/o el uso del software Geogebra) tiene en el rendimiento académico de los estudiantes, dentro del bloque temático de Geometría de la asignatura de Matemática del programa de estudios para los tres años de Educación General Básica Superior en el Colegio Católico José Engling de la parroquia de Tumbaco en el año lectivo 2013-2014. Para cumplir con este objetivo se realizó una investigación cuasiexperimental de grupos no equivalentes (dos grupos), utilizando un diseño pretest-postest. Se elaboró, validó y aplicó una prueba objetiva al inicio y al final del proceso de enseñanza del bloque geométrico en los dos paralelos de cada uno de los niveles de estudio. De igual forma, se diseñó para cada nivel los procesos de cada modelo con sus actividades de aprendizaje y materiales didácticos respectivos. Los profesores participantes como docentes recibieron capacitación del modelo a aplicar y el acompañamiento durante todo el proceso. Se determinó que el rendimiento académico de los estudiantes de octavo y décimo año de Educación Básica, de los paralelos en los que se aplicó como estrategias de enseñanza el modelo de Van Hiele y el modelo de Van Hiele con el uso del software Geogebra, respectivamente, aumentó de manera significativa; concluyendo que la intervención aplicada en estos cursos produce un mejoramiento general en el desempeño académico en Geometría.

PALABRAS CLAVES: GEOMETRÍA, RENDIMIENTO ACADÉMICO, MODELO DE VAN HIELE, SOFTWARE GEOGEBRA, EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA SUPERIOR.

ABSTRACT

Geometry is the science of spatial forms of the material world. It provides mental discipline and intensify students in their creativity and spatial thinking. This research evaluates the level of impact that a proposed methodology (the model of Van Hiele and / or the use of Geogebra software) has on the academic performance of students, in the block of Geometry in Mathematics Course Syllabus for the three years of High General Basic Education in the Catholic High School José Engling in Tumbaco on the school year 2013-2014. To achieve this objective it was performed a non-equivalent quasi-experimental groups (two groups) investigation, using a pretest-posttest design. Was developed, validated and applied a test at the beginning and at the end of the teaching process of Geometry in the two grades of each of the levels. Similarly, it was designed for each level the process of each model with their respective learning activities and teaching materials. The participating teachers were trained in the model to implement and received support throughout the process. It was determined that the academic performance of students in eighth and tenth years of Basic Education, in the grades where was applied the model of Van Hiele and the model of Van Hiele using the software Geogebra as teaching strategies, respectively, increased significantly; concluding that the intervention that was applied in these courses produces an overall improvement in academic performance in Geometry.

KEYWORDS: GEOMETRY, ACADEMIC PERFORMANCE, MODEL OF VAN HIELE, GEOGEBRA SOFTWARE, HIGH GENERAL BASIC EDUCATION.

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO APLICANDO EL MODELO DE VAN HIELE CON EL USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA.

Hoy en día, en nuestro país al igual que en muchos otros, se están realizando cambios significativos en la educación, pues las demandas al sistema educativo son el desarrollo de nuevas competencias necesarias para una sociedad globalizada de la información y comunicación.

Frente a esta necesidad, se pretende enriquecer el modelo de intervención en Matemática para la Educación General Básica Superior, en particular el de la Geometría; estimulando en los estudiantes la creatividad y una actitud positiva hacia el aprendizaje de esta área, y en los docentes el uso de nuevas estrategias de enseñanza que enriquezcan los procesos en el aula.

Es por ello que el presente estudio tuvo como objetivo el proponer una metodología de enseñanza de la Geometría con base en el Modelo de Van Hiele y/o el uso del software Geogebra y analizar el impacto que ésta tiene sobre el rendimiento académico de los estudiantes.

En el contexto de lo anteriormente expuesto, se realiza esta investigación, de la que a continuación se presentan sus etapas.

En el primer capítulo se presenta el planteamiento del estudio, el problema de investigación, los objetivos, su importancia, viabilidad y consecuencias en el ámbito educativo, así como las hipótesis, sus variables e indicadores.

En el segundo capítulo se muestra el marco teórico, que sirve como fundamento científico a la investigación. En él se presentan varios temas que se consideran importantes para poder aclarar los aspectos planteados en el problema de investigación y relacionarlos luego con las variables de las hipótesis.

En el tercer capítulo se plantea la metodología de la investigación, en donde se definen el diseño y modelo de investigación, el universo y la muestra, los instrumentos que se emplean y la metodología de trabajo.

En el cuarto capítulo se muestra el análisis e interpretación de los resultados obtenidos en función de la aplicación de los instrumentos de investigación. En él se presenta la prueba de las hipótesis planteadas en este estudio.

Finalmente se exponen las conclusiones, recomendaciones, la bibliografía utilizada y los documentos que validan esta investigación.

CAPÍTULO I
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.Desarrollo del Problema

La educación es la base fundamental e indispensable para el desarrollo de la humanidad. Innumerables fuentes de información pública lo manifiestan con el eslogan: “Educación es la Solución”. (Aguirre, 2012)

La Educación General Básica en el Ecuador abarca diez niveles de estudio, desde primer grado hasta décimo. Las personas que terminan este nivel, serán capaces de continuar los estudios de bachillerato y participar en la vida política y social, conscientes de su rol histórico como ciudadanos ecuatorianos. (Ministerio de Educación del Ecuador, s.f.)

Este nivel educativo permite que el estudiantado desarrolle capacidades para comunicarse, para interpretar y resolver problemas, y para comprender la vida natural y social.

En el año 2010, el Ministerio de Educación elaboró una Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica, cuyo objetivo fue desarrollar la condición humana y preparar a los estudiantes para la comprensión. El presente currículo propone la ejecución de actividades extraídas de situaciones y problemas de la vida y el empleo de métodos participativos de aprendizaje, para ayudar al estudiantado a alcanzar los logros de desempeño que propone el perfil de salida de la Educación General Básica.

Una de las áreas que se imparte en la Educación Básica es la de Matemática, cuyo eje curricular es: “desarrollar el pensamiento lógico y crítico para interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana”, es decir, cada año debe promover en los estudiantes la habilidad de plantear y resolver problemas con una variedad de estrategias, metodologías activas y recursos, no únicamente como una herramienta de aplicación, sino como una base del enfoque general para el trabajo en todas las etapas del proceso de enseñanza-aprendizaje en esta área. (Ecuador, 2014)

El área de Matemática se estructura en cinco bloques curriculares: de relaciones y funciones, numérico, geométrico, de medida y de estadística y probabilidad.

Con el bloque geométrico se espera que los estudiantes analicen las características y propiedades de formas y figuras de dos y tres dimensiones, desarrollen argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas, especifiquen localizaciones, describan relaciones espaciales, apliquen transformaciones y utilicen simetrías para analizar situaciones matemáticas, potenciando así un desarrollo de la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico en la resolución de problemas. Para lograr esto, se requiere que los docentes apliquen una metodología de enseñanza adecuada, que potencialice las destrezas de los estudiantes.

En el Colegio Católico José Engling, en los años de Educación General Básica Superior, un gran problema que existe es el bajo rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Matemática. Un gran porcentaje de estudiantes no logran alcanzar los objetivos esperados, sobre todo en la parte de Geometría, en la cual, los resultados son preocupantes. En el año lectivo 2012-2013, en el parcial donde se dictó el bloque geométrico, más del 70% de los estudiantes tuvieron un promedio académico deficiente (menor de 7 puntos sobre 10). Es por ello, que en el presente año lectivo, uno de los objetivos primordiales del Colegio es mejorar los resultados en esta área. Al ser un Colegio que ofrece el programa del Diploma del Bachillerato Internacional, tiene que preparar a los estudiantes desde la educación básica para que tengan los conocimientos y destrezas necesarias para enfrentarse a tan exigente programa de estudios.

Frente a esta necesidad, el presente trabajo de investigación busca proponer una nueva metodología de enseñanza de la Geometría en los tres niveles de Educación General Básica Superior del Colegio Católico José Engling en el presente año lectivo (2013-2014); en un intento para mejorar la calidad de la educación.

1.2.Planteamiento del Problema

El modelo de enseñanza de Van Hiele determina cómo se adquiere el conocimiento geométrico en etapas; sin embargo, en la educación básica en nuestro medio, los docentes en su mayoría no lo conocen ni lo aplican. De la misma manera, no lo hacen con los software disponibles, entre ellos el Geogebra. Por lo tanto, con la siguiente interrogante direcciono la presente investigación:

- ¿Cuál sería el rendimiento académico en Geometría que alcanzarán los alumnos de EGB Superior con el uso del modelo de Van Hiele y el uso del software Geogebra?

1.3.Formulación del problema a resolver

¿Cuál es el rendimiento académico que evidencian los estudiantes de Educación General Básica Superior sobre los contenidos del bloque temático de Geometría al aplicar el modelo de Van Hiele y/o el uso del software Geogebra?

1.4.Justificación e importancia

La Geometría es considerada como la ciencia que estudia los conocimientos espaciales analíticos de las formas que hace la mente humana para su comprensión. Desde este punto de vista, se puede considerar a la Geometría como la Matemática del espacio.

El implementar un modelo de enseñanza de la Geometría favorecerá la experimentación directamente con las formas de los objetos cotidianos, los que, paulatinamente, van permitiendo tomar posición del espacio para orientarse, analizando sus formas, y estableciendo las relaciones espaciales o simplemente por la contemplación, en un comienzo en forma intuitiva, exploratoria y posteriormente en forma deductiva.

El emplear un software computacional, dentro de un modelo de enseñanza, favorecerá la integración a un principio educativo y la didáctica; esto es conformar al engranaje del aprender, o sea, integrar curricularmente las nuevas tecnologías. (Sánchez, 2001)

El investigar y probar un modelo de enseñanza de la Geometría dentro de la asignatura de Matemática en los niveles de Educación General Básica Superior permitirá validar una estrategia para una propuesta de intervención en la Educación Matemática de nuestro país. Esta propuesta innovadora permitirá desarrollar en los estudiantes destrezas para enfrentar problemas espaciales, lo que mejorará la comprensión y el aprendizaje de esta área de la Matemática, elevando a su vez su rendimiento académico y con él la calidad de educación.

Se puede viabilizar el presente proyecto, ya que se cuenta con los recursos por parte del investigador y el acceso a la información necesaria por parte de la Institución Educativa.

La enseñanza de la Matemática como ciencia tiene como una de sus funciones ser formadora y desde esta perspectiva la Geometría despierta la curiosidad, estimula la creatividad, desarrolla el sentido de la observación a través de la visualización; promueve la comprensión y captación de lo espacial, por la razón evidente de que nuestro ambiente físico así lo es; como también propicia en cada estudiante la oportunidad de modelar libremente su propia vida y participar en la sociedad en constante cambio. (Delors, 1997)

Los trabajos de investigación relacionados con la didáctica de la Geometría son muy escasos. Las dos escuelas psicológicas que más ideas han aportado al respecto, han sido la Escuela Piagetiana y la de los esposos Van Hiele que, aunque publicaron sus estudios sobre sus investigaciones antes de los años 60, han permanecido ignorados hasta la actualidad.

Los esposos Pierre y Dina Van Hiele, a partir de su experiencia docente como profesores de Geometría en la enseñanza secundaria en Holanda, elaboraron un modelo que trata de explicar cómo evoluciona el razonamiento geométrico en los estudiantes y, también, cómo el maestro puede diseñar las actividades para potencializar dicho razonamiento.

El brindar nuevas herramientas didácticas a los docentes contribuirá al mejoramiento de su labor, promoviendo de esta manera el aprendizaje significativo en sus estudiantes.

En consecuencia, se espera que la realización de posteriores investigaciones en esta área del saber promueva la reflexión sobre la labor del docente, profundice el objeto matemático (conceptos, proposiciones, teoría); utilice estrategias que mejoren la enseñanza de la Matemática, diseñe actividades para el aprendizaje, emplee recursos didácticos entre los cuales, se destaquen los medios tecnológicos que están al alcance en el contexto.

1.5.Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Analizar el rendimiento académico que evidencian los estudiantes de Educación General Básica Superior sobre los contenidos del bloque temático de Geometría al aplicar el modelo de enseñanza de Van Hiele y/o el uso del software Geogebra.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Analizar el rendimiento académico que alcanzan en Geometría los alumnos de EGB Superior de octavo año con el uso del modelo de Van Hiele.

- Analizar el rendimiento académico que alcanzan en Geometría los alumnos de EGB Superior de noveno año con el uso del software Geogebra.

- Analizar el rendimiento académico que alcanzan en Geometría los alumnos de EGB Superior de décimo año con el uso del modelo de Van Hiele y el software Geogebra.

1.6.Hipótesis

Hipótesis para 8vo año de Educación General Básica Superior

Hipótesis alternativas:H_i: $\bar{X}_a \neq \bar{X}_b$

H_{i1}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del modelo de Van Hiele se incrementa frente al uso del método tradicional.

H_{i2}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del modelo de Van Hiele disminuye frente al uso del método tradicional.

Hipótesis nula: H_0: $\bar{X}_a = \bar{X}_b$

H_{01}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del modelo de Van Hiele es igual a la aplicación del método tradicional.

Hipótesis para 9no año de Educación General Básica Superior

Hipótesis alternativas: H_i: $\bar{X}_a \neq \bar{X}_b$

H_{i3}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del software Geogebra se incrementa frente al uso del método tradicional.

H_{i4}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del software Geogebra disminuye frente al uso del método tradicional.

Hipótesis nula: H_0: $\bar{X}_a = \bar{X}_b$

H_{02}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del software Geogebra es igual a la aplicación del método tradicional.

Hipótesis para 10mo año de Educación General Básica Superior

Hipótesis alternativas: $H_i: \bar{X}_a \neq \bar{X}_b$

H_{i5}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del modelo de Van Hiele y el uso del software Geogebra se incrementa frente al uso del método tradicional.

H_{i6}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del modelo de Van Hiele y el uso del software Geogebra disminuye frente al uso del método tradicional.

Hipótesis nula: $H_0: \bar{X}_a = \bar{X}_b$

H_{03}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del modelo de Van Hiele y el uso del software Geogebra es igual a la aplicación del método tradicional.

1.7.Variables de las Hipótesis

8vo año de Educación General Básica Superior

Variable Independiente (V.I): uso del modelo de Van Hiele
Variable dependiente (V.D): rendimiento académico

Indicadores:

V.I.: niveles de Van Hiele (visualización o reconocimiento, análisis y ordenación o clasificación)
V.D.: escala de calificaciones del Ministerio de Educación

9no año de Educación General Básica Superior

Variable Independiente (V.I): uso del software Geogebra
Variable dependiente (V.D): rendimiento académico

Indicadores:

V.I.: construcción, medición y animación
V.D.: escala de calificaciones del Ministerio de Educación

10mo año de Educación General Básica Superior

Variable Independiente (V.I): uso del modelo de Van Hiele con el software Geogebra
Variable dependiente (V.D): rendimiento académico

Indicadores:

V.I.: niveles de Van Hiele (visualización o reconocimiento, análisis y ordenación o clasificación)
Construcción, medición y animación
V.D.: escala de calificaciones del Ministerio de Educación

1.7.1. Operacionalización de las variables

Metodología de enseñanza basada en el Modelo de Van Hiele

Son las estrategias y técnicas que emplea el docente para la enseñanza del bloque geométrico, basadas en las cinco fases de aprendizaje y tres primeros niveles de Van Hiele.

El primer nivel o visualización, en donde los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus componentes.

El segundo nivel o análisis, en donde se perciben las propiedades y componentes de los objetos y figuras. Esto se obtiene tanto de la observación como de la experimentación.

El tercero u ordenación, en donde se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir.

Uso del Software Geogebra

Es el empleo del programa computacional: Software Geogebra desarrollado por Marjus Hohenwarter y un equipo internacional de programadores en la Universidad de Salzburgo y la Universidad de Atlantic, Florida.

El Geogebra es un programa de Geometría dinámica que favorece el desarrollo de conceptos matemáticos, permitiendo visualizar, experimentar y descubrir relaciones geométricas.

Metodología de enseñanza tradicional

Es el conjunto de técnicas y actividades de enseñanza-aprendizaje propuestas tanto en las guías para docentes como en los textos de Matemática para estudiantes de octavo, noveno y décimo año de Educación General Básica del Ministerio de Educación del Ecuador.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO (ANÁLISIS DEL ESTADO DEL ARTE)

2.1. Marco Legal

2.1.1. Constitución del Ecuador

Art. 343.- El sistema nacional de educación tendrá como finalidad el desarrollo de capacidades y potencialidades individuales y colectivas de la población, que posibiliten el aprendizaje, y la generación y utilización de conocimientos, técnicas, saberes, artes y cultura. El sistema tendrá como centro al sujeto que aprende, y funcionará de manera flexible y dinámica, incluyente, eficaz y eficiente …

Art. 344.- El sistema nacional de educación comprenderá las instituciones, programas, políticas, recursos y actores del proceso educativo, así como acciones en los niveles de educación inicial, básica y bachillerato, y estará articulado con el sistema de educación superior.

2.1.2. Ley Orgánica de Educación Intercultural

Art. 7.- Las y los estudiantes tienen los siguientes derechos:

a. Ser actores fundamentales en el proceso educativo.
b. Recibir una formación integral y científica, que contribuya al pleno desarrollo de su personalidad, capacidades y potencialidades, …

Art. 11.- Las y los docentes tienen las siguientes obligaciones:

b. Ser actores fundamentales en una educación pertinente, de calidad y calidez con las y los estudiantes a su cargo;

i. Dar apoyo y seguimiento pedagógico a las y los estudiantes, para superar el rezago y dificultades en los aprendizajes y en el desarrollo de competencias, capacidades, habilidades y destrezas;…

2.1.3. Reglamento a la Ley Orgánica de Educación Intercultural

Art. 193.-Aprobación y alcance de logros.- Se entiende por "aprobación" al logro de los objetivos de aprendizaje definidos para una unidad, programa de asignatura o área de conocimiento, fijados para cada uno de los grados, cursos, subniveles y niveles del Sistema Nacional de Educación. El rendimiento académico de los estudiantes se expresa a través de la escala de calificaciones prevista en el siguiente artículo del presente reglamento.

Art. 194.- Escala de calificaciones. Las calificaciones hacen referencia al cumplimiento de los objetivos de aprendizaje establecidos en el currículo y en los estándares de aprendizaje nacionales. Las calificaciones se asentarán según la siguiente escala:

Tabla 1

Escala cualitativa del rendimiento académico

Escala cualitativa	Escala cuantitativa
Supera los aprendizajes requeridos.	$9-10$
Domina los aprendizajes requeridos.	$8-9$
Alcanza los aprendizajes requeridos.	$7-8$
Está próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos.	$4-7$
No alcanza los aprendizajes requeridos.	≤ 4

FUENTE: (Órgano del Gobierno del Ecuador, 2012)

Art. 195.- Promoción. Se entiende por "promoción" al paso de los estudiantes de un grado o curso al inmediato superior.

Art. 196.- La calificación mínima requerida para la promoción, en cualquier establecimiento educativo del país, es de siete sobre diez $(7/10)$.

En el subnivel de Básica Superior y el nivel de Bachillerato, para la promoción al siguiente grado o curso, se requiere una calificación promedio de siete sobre diez (7/10) en cada una de las asignaturas del currículo nacional.

2.2. Marco Conceptual

2.2.1. Geometría. Etimología e inicios

La palabra "Geometría" proviene de dos palabras griegas antiguas, la una que significa tierra y la otra medida. Los orígenes de la Geometría son muy antiguos (es probablemente la rama más antigua de la Matemática) con varias culturas antiguas (la india, babilonia, egipcia, china y griega), las que desarrollaron una forma de Geometría adaptada a las relaciones entre longitudes, áreas, y volúmenes de objetos físicos. En estos tiempos antiguos, se utilizó la Geometría en la medida de la tierra (o, como diríamos hoy, topografía) y en la construcción de artefactos religiosos y culturales. Los ejemplos incluyen los Vedas hindúes, las antiguas pirámides egipcias, nudos celtas, etc. (Jones, 2002)

2.2.2. Orígen de la Geometría como una Ciencia

Los comienzos de la Geometría como ciencia fueron en Egipto, que se remonta por lo menos tres mil años antes de Cristo. Herodoto manifiesta en sus escritos que la Geometría surgió de la necesidad de medir áreas, ya que el río Nilo, al desbordarse, borraba las señales que delimitaban los terrenos de los agricultores, reduciendo los terrenos, por lo que debían pagar sobre lo que quedaba, una proporción del impuesto anual fijado. Precisamente, la palabra Geometría significa "medición de tierra". (Osorio, 2010)

La sustancia de la Geometría egipcia se encuentra en un antiguo rollo de papiro en el museo británico. Este rollo es, en efecto, un tratado matemático escrito por un escriba llamado Ahmes al menos 1700 a.C, que es una copia de una obra más antigua, que data del año 3000 a.C.

2.2.3. Épocas en el desarrollo de la Geometría

Desde Egipto fue transferido el conocimiento de la Geometría a Grecia, de donde se extendió a otros países. Así, tenemos las siguientes épocas principales en el desarrollo de la Geometría:

1. Egipcia: 3000 a.C. – 1500 a.C.
2. Griega: 600 a.C. – 100 a.C.
3. Hindú: 500 d.C. – 1100 d. C.
4. Árabe: 800 d. C. – 1200 d. C.
5. Europea: 1200 d. C.

En el año de 1120 d.C., Athelard, un monje inglés, visitó Córdova, en España, bajo el disfraz de un estudiante musulmán, y adquirió una copia de la Geometría Euclidiana en el idioma árabe. Este libro lo trajo de vuelta al centro de Europa, donde fue traducido al latín y se convirtió en la base de todo estudio geométrico en Europa hasta el año 1533, cuando, debido a la toma de Constantinopla por los turcos, las copias de las obras de los matemáticos griegos en el griego original se dispersaron por Europa.

2.2.4. Historia de los Métodos Geométricos

2.2.4.1. Métodos retóricos

Por procedimientos retóricos en la presentación de las verdades geométricas, se entiende el uso de definiciones, axiomas, teoremas, figuras geométricas, la representación de magnitudes geométricas por el uso de las letras, etc. Los egipcios no se basaban en esto, su conocimiento geométrico se limitaba a la solución de algunos ejemplos numéricos, en donde las reglas utilizadas eran inferidas.

Tales (Grecia, 600 a.C.) fue el primero en enunciar una propiedad abstracta de una figura geométrica. Tenía una vaga idea de un teorema geométrico.

Pitágoras (Italia, 525 a.C.) introdujo definiciones formales en la Geometría, aunque algunas de éstas no eran muy precisas. Por ejemplo, su definición de punto es la “unidad que tiene posición”. Pitágoras también organizó las proposiciones principales conocidas por él en algo así como un orden lógico.

Hipócrates (Atenas, 420 a.C.) fue el primero que de manera sistemática designó a un punto por una letra mayúscula, y a un segmento de recta por dos letras mayúsculas, como el segmento AB, tal y como se lo hace en la actualidad. También escribió el primer libro de texto de Geometría.

Platón (Atenas, 380 a.C.) realizó definiciones, axiomas y postulados, los principios y bases de la Geometría.

A Euclides (Alejandría, 280 a.C.) se debe la división de la Geometría en libros, la enunciación formal de teoremas, la construcción formal, la demostración y la tesis en la presentación de una proposición. También introdujo el uso del corolario.

Usando estos métodos de presentación de las verdades de la Geometría, Euclides escribió un libro de texto de Geometría en trece libros, el cual fue el libro estándar de esta materia por cerca de dos mil años.

El uso de los símbolos $\triangle$, ▱, $\parallel$ etc., en demostraciones geométricas se originó en Estados Unidos en años recientes.

2.2.4.2.Métodos lógicos

Los egipcios no utilizaron algún método formal de demostración. Probablemente obtuvieron sus pocos procesos geométricos como resultado de la experimentación.

Los hindúes también utilizaron demostraciones no formales. Uno de sus escritores en la Geometría se limita a indicar un teorema, dibujar una figura, y decir: “He aquí”.

El uso de métodos lógicos de demostración geométrica se debe a los griegos. Los primeros geómetras griegos utilizaban métodos experimentales, a veces, con el fin de obtener verdades geométricas. Por ejemplo, se determinó que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales, al sobreponer una mitad del triángulo sobre la otra y observar que los ángulos mencionados coincidieron como un hecho, pero sin probar formalmente que deben coincidir.

Pitágoras (525 a.C) fue el primero en establecer verdades geométricas mediante una deducción sistemática, pero sus métodos eran algo defectuosos. Por ejemplo, él creía que lo contrario de una proposición era necesariamente una verdad.

Hipócrates (420 a.C) usó deducciones correctas y rigurosas en pruebas geométricas. Introdujo métodos específicos de demostración, tal como el método de reducción al absurdo.

Platón (380 a.C) introdujo el método de demostración por análisis, que es, con base en proposiciones verdadera probar otras.

A Eudoxo (360 a.C.) se le atribuye el método de demostración de límites; aunque su método, conocido también como el método de exhaución, es crudo y engorroso.

Apolonio (Alejandría, 225 a.C.) usó proyecciones, que, en los tiempos modernos, se han desarrollado en el tema de la Geometría Descriptiva.

2.2.4.3.Métodos mecánicos

Los griegos, en la demostración de un teorema geométrico, generalmente dibujaban la figura en la arena. Este método tenía ciertas ventajas, pero no fue adoptado por una gran audiencia.

Los tratados griegos, sin embargo, fueron escritos en pergamino o papiro con el uso de la caña, el cálamo y la tinta.

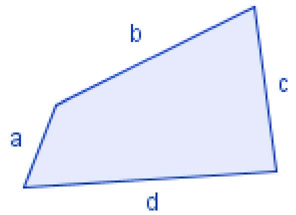
En la época romana, y en la Edad Media, las figuras geométricas se dibujaban en cera untada sobre una tabla de madera. Se sintieron atraídos por el uso del lápiz, un palo de metal, puntiagudo en un extremo para hacer marcas y amplio en el otro para el borrado de las marcas. Estas tablillas de cera todavía estaban en uso en la época de Shakespeare. La pizarra y lápices de colores son invenciones modernas.

Los griegos inventaron muchos tipos de instrumentos de dibujo para trazar curvas. Fue debido a la influencia de Platón de que, en la construcción de figuras geométricas, se permitía el uso únicamente de la regla y el compás.

2.2.5. Historia de la Geometría Plana

2.2.5.1. Figuras rectilíneas

Los egipcios obtenían el área de cualquier cuadrilátero, multiplicando la semisuma de un par de lados opuestos por la semisuma del otro par; así: $area = \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$.



Los egipcios tenían un cariño especial para las construcciones geométricas, como constructores de templos. Existía una clase de trabajadores llamados "cuerda - camillas", cuya actividad era la marca de los cimientos de los edificios. Estos hombres conocían cómo bisecar un ángulo y cómo construir un ángulo recto. Ahmose, en su tratado, propone varias formas de construir un trapecio isósceles a partir de diferentes datos.

Tales (600 a. C.) enunció los siguientes teoremas:

- Si dos rectas se cortan, los ángulos opuestos son iguales;

- Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales;
- Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo incluido entre ellos en un triángulo son iguales a los dos lados y el ángulo incluido entre ellos del otro triángulo;
- La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos;
- Dos triángulos mutuamente equiangulares son semejantes.

Tales usó el último de estos teoremas para medir la altura de la gran pirámide, midiendo la longitud de la sombra proyectada por la pirámide y también la medición de la longitud de la sombra de un bastón de altura conocida, al mismo tiempo y al hacer una proporción entre estas cantidades.

Pitágoras (525 a. C.) y sus seguidores descubrieron fórmulas correctas para las áreas de las principales figuras rectilíneas, y también descubrieron los teoremas que las áreas de polígonos semejantes son como los cuadrados de sus lados homólogos, y que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Este último se llama el teorema de Pitágoras. También descubrieron cómo construir un cuadrado equivalente a un paralelogramo determinado, y cómo dividir una línea dada en relación media y extrema.

A Eudoxo (380 a. C.) le debemos la teoría general de la proporción en la Geometría y el tratamiento de cantidades inconmensurables por el método de exhaución. Mediante el uso de esto, obtuvo teoremas como el que las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios, o de sus diámetros.

En los escritos de Herón (Alejandría, 125 a. C.) encontramos primero la fórmula para el área de un triángulo en términos de sus lados, $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Los romanos, aunque sobresalieron en la ingeniería, aparentemente no apreciaron el valor de la Geometría de los griegos. Siguieron utilizando fórmulas anticuadas e inexactas para el cálculo de áreas, algunas de ellas de origen oscuro. Así por ejemplo, utilizaban la fórmula egipcia para calcular el área de un cuadrilátero:

$A = \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$. Determinaron el área de un triángulo equilátero de lado a, por diferentes fórmulas, todas incorrectas, como $A = \frac{13a^2}{30}$, $A = \frac{1}{2}(a^2 + a)$, y $A = \frac{1}{2}a^2$.

2.2.5.2.El círculo

Tales enunció el teorema de que todo diámetro biseca a un círculo, y demostró el teorema que un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

A Hipócrates (420 a.C.) se debe el descubrimiento de muchas de las propiedades principales del círculo.

Los egipcios consideraban al área del círculo como equivalente a $\frac{64}{81}$ del cuadrado del diámetro, lo que hacía que $\pi = 3{,}1604$.

Los judíos y los babilonios consideraban a $\pi = 3$.

Arquímedes, mediante el uso de polígonos regulares inscritos y circunscritos, determinó que el verdadero valor de π está entre $3\frac{1}{7}$ y $3\frac{10}{71}$; es decir, entre $3{,}14285$ y $3{,}1408$.

Los escritores hindúes atribuyeron distintos valores a π, como 3, $3\frac{1}{8}$, $\sqrt{10}$, pero Aryabhatta (530 d.C.) dió la aproximación correcta, $3{,}1416$. Los hindúes utilizaban la fórmula $\sqrt{2 - \sqrt{4 - AB^2}}$ para calcular el valor numérico de π.

En los últimos tiempos, el valor de π se ha aproximado a 5 billones de decimales.

El uso del símbolo π para la relación de la circunferencia de un círculo con el diámetro se estableció en la Matemática por Euler.

2.2.6. Historia de la Geometría Espacial

2.2.6.1. Poliedros

Los egipcios calculaban los volúmenes de cuerpos geométricos mediante las dimensiones lineales de tales figuras. Por lo tanto, Ahmose calculó el contenido de un granero egipcio por métodos que son equivalentes a la utilización de la fórmula $V = a \times b \times \frac{3c}{2}$. Como no se conoce la forma de este granero, no es posible decir si esta fórmula estaba correcta o no.

Pitágoras descubrió, o conoció, todos los poliedros regulares a excepción del dodecaedro. Estos poliedros se suponían que tenían muchas propiedades mágicas. De ahí que el estudio de los mismos se hizo muy prominente.

Hípaso (470 a.C.) descubrió el dodecaedro.

Eudoxo (380 a.C.) demostró que el volumen de una pirámide es equivalente a un tercio del producto del área de su base por su altura. También descubrió que el volumen de un cono equivale a un tercio del área de su base por su altura.

Arquímedes descubrió las fórmulas para el cálculo del área y el volumen de una esfera.

2.2.7. Geometría no Euclideana

La idea de que pueda existir un espacio con diferentes propiedades se ha atribuido a diferentes pensadores en diferentes tiempos, pero Lobatchevsky (Rusia, 1793 – 1856) fue el primero en hacer un uso sistemático de este principio. Encontró que si, en lugar de aceptar el quinto postulado de Euclides como verdadero, suponemos que por un punto dado en un plano se pueden trazar varias rectas paralelas a una determinada, el resultado no es una serie de absurdos, por el contrario, se obtiene una serie coherente de teoremas.

2.2.8. La Geometría en la actualidad

Alrededor del año 300 a.C., la mayor parte del conocimiento acumulado de la Geometría fue codificada en un texto que se conoció como los "Elementos de Euclides". En los 13 libros que componen este texto, y sobre la base de 10 axiomas y postulados, varios cientos de teoremas fueron probados por la lógica deductiva. Los Elementos llegaron a encarnar el método axiomático-deductivo durante muchos siglos. Es probable que ninguna otra obra, excepto tal vez la Biblia cristiana y el Corán musulmán, se han utilizado más ampliamente, editado, o estudiado, y probablemente ninguna otra obra ha ejercido una mayor influencia en el pensamiento científico. Mientras que algunos pergaminos existen desde el siglo noveno, se dice que más de mil ediciones de los Elementos de Euclides han aparecido desde la primera edición impresa en 1482, y durante más de dos milenios este trabajo ha dominado todos los aspectos de la Geometría, incluyendo su enseñanza.

En el siglo XIX, la Geometría, como la mayoría de las disciplinas académicas, pasó por un período de crecimiento. Desde entonces el contenido de la Geometría y de su diversidad ha aumentado increíblemente. La Geometría de Euclides se convirtió en no más de una subespecie de la vasta familia de teorías matemáticas sobre el espacio, entre las cuales están: Geometría diferencial, Geometría hiperbólica, Geometría de Lobachevski, Geometría proyectiva, Geometría elíptica, Geometría analítica, Geometría de Riemann, etc. Hoy en día es posible clasificar a la Geometría en más de 50 tipos. (Malkevithc, 1991)

2.2.9. La enseñanza de la Geometría

La Geometría es un área de la Matemática maravillosa para enseñar, está llena de interesantes problemas y sorprendentes teoremas. Tiene una larga historia, íntimamente relacionada con el desarrollo de la Matemática. Es una parte integral de nuestra experiencia cultural, un componente vital de numerosos aspectos de la vida cotidiana. Lo que es más, la Geometría apela a nuestros sentidos visual, estético e intuitivo. Puede ser un tema que capte el interés de los estudiantes, que a menudo encuentran otras áreas de la Matemática, como el Álgebra, una fuente de incomprensión y confusión en lugar de entusiasmo y creatividad. La enseñanza de la Geometría bien puede lograr que los estudiantes encuentren el éxito en la Matemática.

Estos aspectos y consideraciones también tienden a hacer que la Geometría sea un tema exigente de enseñarlo. La enseñanza de la Geometría implica una habilidad para saber reconocer los problemas y teoremas interesantes, apreciando la historia y el contexto cultural de la misma, y la comprensión del sin número de usos que nos brinda. Significa apreciar lo que una educación geométrica completa y rica puede ofrecer a los estudiantes, cuando el currículo es a menudo dominado por otras áreas como la Aritmética y el Álgebra. Significa lograr que la enseñanza sea atractiva y conduzca a la comprensión.

Ahora, para abordar el problema de qué Geometría incluir en el currículo de la Matemática, vale la pena preguntarnos qué es la Geometría y tener en cuenta los objetivos de enseñanza de la misma.

Una definición contemporánea de la Geometría es la que se atribuye al matemático británico Christopher Zeeman: "La Geometría comprende la rama de la Matemática que se aprovecha de la intuición visual (el más dominante de nuestros sentidos) para recordar los teoremas, comprender una demostración, inspirar a la conjetura, percibir la realidad, y dar una visión global; habilidades transferibles que son necesarias para todas las demás ramas de la Matemática y la Ciencia" (Council, 2001). Los objetivos de la enseñanza de la geometría son (Council, 2001):

- Desarrollar la orientación espacial, la intuición geométrica y la capacidad de visualizar;
- Proporcionar una amplia gama de experiencias geométricas en dos y tres dimensiones;
- Desarrollar el conocimiento y la comprensión, así como la capacidad de utilizar las propiedades geométricas y teoremas;

- Fomentar el desarrollo y uso de la conjetura, el razonamiento deductivo y la demostración;
- Desarrollar habilidades para aplicar la Geometría a través de la modelización y resolución de problemas en contextos del mundo real;
- Desarrollar competencias en el uso de las TICs en contextos específicamente geométricos;
- Generar una actitud positiva hacia la Matemática; y
- Desarrollar una conciencia de la herencia histórica y cultural de la Geometría en la sociedad, y de las aplicaciones contemporáneas de la misma.

En resumen, el estudio de la Geometría contribuye a los estudiantes a desarrollar las habilidades de visualización, el pensamiento crítico, la intuición, la perspectiva, la resolución de problemas, conjeturas, razonamiento deductivo, razonamiento lógico y la demostración. Las representaciones geométricas se pueden utilizar para ayudar a los estudiantes a tomar sentido de otras áreas de la Matemática: fracciones y multiplicación en la Aritmética, las relaciones entre las gráficas de funciones, y representaciones gráficas de los datos en la Estadística. El razonamiento espacial es importante en otras áreas del currículo, así como la Ciencia, Geografía, Arte, Diseño y Tecnología. Puede ayudar incluso a desarrollar la motricidad fina.

La Geometría proporciona un contexto cultural e históricamente rico dentro de la Matemática. Hay muchos resultados interesantes, a veces sorprendentes o contrarios a la intuición de la Geometría que pueden estimular a los estudiantes a querer saber más y entender el por qué. La presentación de la Geometría de una manera que estimule la curiosidad y aliente la exploración puede mejorar el aprendizaje de los estudiantes y sus actitudes hacia la Matemática. El animar a los estudiantes a discutir los problemas geométricos, articular sus ideas y desarrollar argumentos claramente estructurados para apoyar sus intuiciones, puede conducir a que mejoran su comunicación y reconozcan la importancia de la demostración. La contribución de la Matemática para el desarrollo espiritual, moral, social y cultural de los alumnos se puede realizar de manera efectiva a través de la Geometría.

Vivimos en un planeta sólido, en un mundo en tercera dimensión; y como gran parte de nuestra experiencia es a través de estímulos visuales, la capacidad de interpretar la información visual es fundamental para la existencia humana. El desarrollar una comprensión de cómo se relacionan los fenómenos espaciales y aplicar ese entendimiento con la confianza para resolver problemas y dar sentido a situaciones novedosas tiene que ser parte de la experiencia educativa de todos los estudiantes. La Geometría ofrece una rica forma de desarrollar habilidades de visualización. La visualización permite a los estudiantes encontrar una forma de explorar los problemas matemáticos sin la necesidad de producir diagramas exactos o utilizar representaciones simbólicas.

Gran parte de nuestra vida cultural es visual. La apreciación estética del arte, la arquitectura, la música, implica principios geométricos como la simetría, la perspectiva, la escala, la orientación, etc. Comprender muchos principios científicos y fenómenos tecnológicos también exige la conciencia geométrica.

Existen muchas áreas en las que se plantean problemas geométricos, dentro de las cuales están: la Química (Química computacional y las formas de las moléculas), la Física de materiales (modelado de diversas formas de vidrio y materiales agregados), Biología (modelización de proteínas), la información geográfica (Sistemas SIG), y la mayoría de los campos de la ingeniería.

Como se puede observar, existe una serie de razones por las que la Geometría debe ser una parte importante dentro del aprendizaje de la Matemática en todos los niveles.

A mediados del siglo 20 la Geometría Euclidiana perdió su estatus como la única Geometría y otras Geometrías se convirtieron en el objeto de investigación. A raíz de la puesta en marcha del Sputnik 1 por los soviéticos en 1957, se inició una revisión a fondo de la Matemática en la escuela (y la ciencia) en la mayoría de los países occidentales. Una de las ideas de la reforma fue orientar la enseñanza de la Matemática hacia el Cálculo y el Álgebra lineal. El impacto de estos cambios era reducir la cantidad de Geometría Euclidiana, mientras que, al mismo tiempo, aumentar el énfasis en la Geometría de coordenadas e introducir algunos elementos de la Geometría y la Topología de la transformación. Como resultado, la cantidad de Geometría que se enseñaba en la moda euclidiana disminuyó.

Desde entonces hasta la actualidad se ha variado el plan de estudios de la Geometría en muchos países y todos los niveles, desde el inicial hasta el superior.

2.2.10. El currículo geométrico ecuatoriano en la Educación General Básica

En nuestro país, actualmente se ha enfocado el currículo de la Matemática y con él el de la Geometría en la Educación General Básica en el desarrollo de destrezas necesarias para la resolución de problemas, compresión de reglas, teoremas y fórmulas, para el desarrollo del sentido común de los estudiantes, por lo cual se han eliminado algunos contenidos anteriores e incluido otros. Por ejemplo, se ha dejado de lado la enseñanza de la Geometría analítica y centrado el estudio en la Geometría plana y espacial. En algunos años se ha bajado el nivel de exigencia, mientras que en otros se lo ha incrementado, con el fin de que permita a los educandos desarrollar sus habilidades y destrezas para interactuar e interpretar con soltura y seguridad en un mundo extremadamente competitivo y cambiante. Pero en todos ellos el profesorado debe comprobar que el estudiantado ha captado los conceptos, teoremas, algoritmos y aplicaciones con el fin de lograr una sólida base de conocimientos geométricos. (Ministerio de Educación del Ecuador)

Es por esto que el eje curricular máximo del área de Matemática es el “Interpretar y resolver problemas de la vida” es decir, cada año de la educación general básica, debe promover en las y los estudiantes la habilidad de plantear y resolver problemas con una variedad de estrategias, metodologías activas y recursos, no sólo como contenido procedimental, sino también como una base del enfoque general a trabajar, situándose como un aspecto central en la enseñanza y el aprendizaje en esta área. (Ministerio de Educación del Ecuador)

El área de Matemática se estructura en cinco bloques curriculares, y dentro de ellos el bloque geométrico, con el cual se busca que los estudiantes analicen las características y propiedades de formas y figuras de dos y tres dimensiones, además de desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas, especificar localizaciones, describir relaciones espaciales, aplicar transformaciones y utilizar simetrías para analizar situaciones matemáticas, potenciando así un desarrollo de la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico en la resolución de problemas. (Ministerio de Educación del Ecuador)

En la tabla 2 puede observarse los contenidos que han de enseñarse en el bloque de Geometría en los tres niveles de Educación General Básica Superior.

Tabla 2

Contenidos del bloque geométrico en los años de Educación General Básica Superior

Contenidos del bloque geométrico		
Octavo de Básica	**Noveno de Básica**	**Décimo de Básica**
• Polígonos: Elementos, clasificación, propiedades y congruencia. • Triángulos: Elementos, clasificación, congruencia y rectas notables. • Cuadriláteros. • Razón y proporcionalidad de segmentos. • Rectas secantes cortadas por paralelas (Teorema de Tales) • Triángulos semejantes (criterios de semejanza) • Polígonos semejantes (perímetros y áreas) • Figuras semejantes (escalas)	• Perímetros y áreas de paralelogramos (rectángulo, cuadrado, romboide y rombo). • Perímetros y áreas de triángulos. • Perímetros y áreas de polígonos regulares e irregulares. • Estimación de áreas. • Simetrías central y axial. • Áreas de primas, pirámides y troncos de pirámide. • Áreas de cilindros, conos y troncos de cono.	• Generalidades de los poliedros. Prismas • Pirámide y troncos de pirámide. • Cuerpos de revolución. • Áreas de prismas, pirámides y pirámides truncadas. • Áreas de cilindros, conos y conos truncados. • Volúmenes. Principio de Cavalieri. • Volúmenes de prismas y cilindros. • Volúmenes de pirámides y conos. • Volumen y área de una esfera. • Cálculo aproximado de volúmenes.

FUENTE: (Ministerio de Educación del Ecuador)

2.2.11. El aprendizaje de la Geometría

2.2.11.1. Teorías del aprendizaje de la Geometría

De la gama de trabajos teóricos sobre ideas geométricas, el de Piaget (y colegas) y del matrimonio Van Hiele son probablemente los más conocidos. El trabajo de Piaget tiene dos temas principales. El primer tema es que nuestra representación mental del espacio no es una percepción de lo que está a nuestro alrededor. Más bien, construimos nuestro mundo desde nuestra propia representación mental. En segundo lugar, la organización progresiva de las ideas geométricas sigue un orden definido y este orden es más vivencial (y posiblemente más matemáticamente lógico) de lo que es histórico.

2.2.11.2. El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele

Un equipo de educadores holandeses, los esposos Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, notaron las dificultades que sus estudiantes tenían en el aprendizaje de la Geometría, la escasa comprensión ante nuevos conceptos, propiedades y resolución de problemas. Estas observaciones les llevaron a desarrollar una teoría que implica niveles de pensamiento geométrico, los cuales deben pasar los estudiantes a medida que progresa su conocimiento, desde el mero reconocimiento de una figura hasta el escribir una prueba formal de un teorema. Su teoría explica por qué muchos estudiantes encuentran dificultades en el aprendizaje geométrico. Por supuesto, sobre todo en aquellas actividades que implican un grado de formalización o abstracción. Los Van Hiele creen que el llegar a escribir pruebas formales requiere de un pensamiento en un nivel relativamente alto, y que muchos de los estudiantes necesitan tener más experiencia en el pensamiento a niveles más bajos antes de la enseñanza formal de los conceptos geométricos.

Este modelo está formado por dos partes: la descriptiva, que lo constituyen los niveles de razonamiento o fases de aprendizaje por la que pasan los estudiantes; y la aplicativa, constituida por las fases de enseñanza y que son unas directrices para el trabajo del docente.

El modelo tiene como ideas de fundamento que (Carreño, 2010):

- El razonamiento geométrico pasa por diversos niveles continuos de perfección.
- Lo que se pretende que los estudiantes comprendan debe estar acorde al nivel del razonamiento geométrico en el que se encuentran, si ellos no están preparados para afrontar un nuevo conocimiento de un nivel superior, hay que esperar a que adquieran las habilidades necesarias.
- La manera de razonar no se enseña, solo se encamina hacia ella.

Las propiedades del modelo de Van Hiele son: secuencial, progresivo, intrínseco y extrínseco, lingüístico y desajuste. (Crowley, 1987)

Secuencial. Una persona debe recorrer los niveles en orden. Para tener éxito en un nivel el estudiante tiene que haber adquirido las estrategias de los niveles anteriores.

Progresivo. El progreso de un nivel a otro depende más del contenido y métodos de enseñanza que de la edad.

Intrínseco y extrínseco. Los objetos implícitos en un nivel pasan a ser objetos de estudio explícitos en el siguiente nivel.

Lingüístico. Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones entre símbolos.

Desajuste. Si el docente, el material didáctico, el contenido, el vocabulario, etc. están en un nivel superior al del estudiante, éste no será capaz de comprender lo que se le presente y no progresará. (Sanz, 2001)

2.2.11.2.1. Los niveles de Razonamiento Geométrico

Son etapas que debe pasar un estudiante para conseguir un nivel de abstracción y formalización en su razonamiento geométrico. Los niveles de razonamiento guardan una secuencia jerarquía entre ellos pues cada uno necesita del anterior y aunque hay habilidades implícitas que se usan en un determinado nivel, éstas se hacen explícitas en el siguiente nivel. Por ende, no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel anterior. El desarrollo de cada uno de los niveles está en estrecha relación con el lenguaje que utilizan los individuos. Así, en los primeros niveles se utilizan expresiones informales mientras que en el último nivel de razonamiento está presente el rigor y la formalización propios de la Matemática. (Carreño, 2010)

Nivel I: Reconocimiento

Es la etapa más incipiente del razonamiento. Ésta se caracteriza por percibir los objetos geométricos de manera global y aislada. Todo se reduce al plano perceptivo, se toma en cuenta los prototipos visuales, por ello no se hace incidencia en las propiedades de los objetos, cada uno de sus atributos es visto de manera aislada e imprecisa y en la descripción de las figuras solo se toma en cuenta el aspecto físico mas no sus componentes, y así se realizan las clasificaciones y las comparaciones. En consecuencia, no se generaliza las características de una figura a otras de su misma clase.

Nivel II: Análisis

En este nivel se inicia el razonamiento matemático, propiamente dicho. Las propiedades y los componentes de las figuras son tomados en cuenta, aunque se enuncian de manera informal e independiente, los estudiantes al compararlas lo hacen mediante el uso explícito de las propiedades de sus componentes. Aún no pueden hacer clasificaciones lógicas considerando las propiedades, pues siguen viéndolas de manera aislada, de aquí que no pueda clasificarse de manera inclusiva las diversas familias de figuras.

La deducción de propiedades a partir de otras se logra a través de la experimentación y la manipulación. El vocabulario que se emplea en este nivel es un poco más elaborado.

Sin embargo, las demostraciones siguen careciendo de significado al igual que las definiciones, por ende, los estudiantes rechazan las dadas por el libro de texto o por el profesor, pues no ven la necesidad de las mismas. Cuando los alumnos definen en este nivel, se limitan a enunciar propiedades sin considerar las necesarias y las suficientes.

Nivel III: Clasificación

En este nivel los razonamientos se siguen apoyando en la manipulación, los alumnos pueden clasificar lógicamente diferentes familias de figuras a partir de propiedades ya conocidas, es decir que pueden realizar clasificaciones inclusivas. También pueden definir objetos matemáticos de manera correcta y sin redundancias puesto que identifican conjuntos diferentes de propiedades que caracterizan a una clase de figuras y comprueban su suficiencia.

Comprenden demostraciones formales cuando se las explica el profesor o las detalla un libro. Sin embargo, no distinguen una implicación $p \to q$ de su recíproca $q \to p$, en consecuencia, no comprenden el significado de la deducción ni el papel de los axiomas.

Por esto, se apoyan en representaciones físicas de las figuras para realizar deducciones sobre las mismas.

Nivel IV: Deducción Formal

El avance del razonamiento geométrico es visible pues los estudiantes realizan conjeturas e intentos de verificación de las mismas de manera deductiva. Comprenden las interacciones entre una implicación $p \rightarrow q$ y su recíproca $q \rightarrow p$, por ello dan argumentos deductivos formales aunque, no investigan los sistemas axiomáticos en sí mismos ni comparan sistemas axiomáticos diferentes.

Aceptan la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto, las demostraciones ya tienen sentido y utilidad para ellos. Comprenden la estructura axiomática de la Matemática y retoman afirmaciones vistas en niveles anteriores razonándolas y justificándolas de manera rigurosa

Nivel V: Rigor

Es el nivel máximo de abstracción y razonamiento, en él se acepta la existencia de sistemas axiomáticos diferentes y los alumnos pueden analizarlos y compararlos. Se prescinde de cualquier soporte concreto para desarrollar una actividad matemática. Sin embargo, no todos incluyen este nivel de razonamiento, sino que consideran como nivel máximo el nivel IV o nivel de deducción formal. Gutiérrez y Jaime en la propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría (1994) consideran este quinto nivel de razonamiento geométrico aunque no lo hacen en la propuesta de fundamentación del Modelo de Van Hiele de 1990.

En este estudio, se está tomando en cuenta los cinco niveles de razonamiento, ya que se cree que la abstracción y el rigor con el que se pueden tratar los objetos matemáticos son graduales y puede llegarse a un nivel superior y casi inalcanzable para muchos.

Como síntesis de estos cinco niveles, se muestra la siguiente tabla.

Cuadro 1

Niveles de Van Hiele y sus elementos

Nivel	Elementos explícitos	Elementos implícitos	Tipos de redes
I.Reconocimiento	Figuras.	Elementos y propiedades de las figuras	Muy simple. Formada por nombres de figuras sin conexión (subredes independientes).
II. Análisis	Elementos y propiedades de las figuras.	Implicaciones entre las propiedades de las figuras.	Simple. Se amplían las subredes, aunque continúan siendo independientes. Las relaciones se establecen únicamente entre cada propiedad y las representaciones verbal o gráfica de la figura. Estas relaciones se basan en la memoria y la observación.
III. Clasificación	Implicaciones entre las propiedades de las figuras.	Deducción formal de teoremas.	Poco compleja. Permite integrar diversas subredes en una sola red. Se establecen relaciones lógicas utilizando materiales.
IV. Deducción formal	Deducción formal de teoremas.	Comparación de sistemas axiomáticos.	Compleja. El número de conexiones entre las redes es mayor y se fundan en un razonamiento formal y abstracto. Se pueden establecer nuevas relaciones entre las subredes.
V. Rigor	Comparación de sistemas		Muy compleja.

FUENTE: (Carreño, 2010)

Además, Van Hiele propone una serie de fases de aprendizaje para pasar de un nivel a otro. (Vargas & Gamboa, 2014)

Fase 1: Información

En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema a estudiar. El docente tiene la oportunidad de identificar los conocimientos previos que puedan tener sus estudiantes sobre un nuevo tema y su nivel de razonamiento en el mismo.

Los estudiantes deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

Esto es, se presenta a los estudiantes situaciones de aprendizaje dando el vocabulario y las observaciones necesarias para el trabajo, y permitiendo la familiarización con el material propuesto.

El propósito de estas actividades es doble: el profesor vé cuáles son los conocimientos previos de los estudiantes en relación al tema, y los estudiantes ven qué dirección tomarán los estudios posteriores. (Crowley, 1987)

Fase 2: Orientación dirigida

El maestro propone una secuencia de actividades a realizar y explorar. Estas actividades deberán permitir que los estudiantes descubran y aprendan las propiedades de los conceptos implicados. Consecuentemente, las actividades propuestas deberán ser tareas cortas y diseñadas para obtener respuestas específicas que les lleven directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender.

La ejecución y la reflexión propuesta, guiada por el docente, servirán de motor para propiciar el avance en los niveles de conocimiento.

Fase 3: Explicitación

Los estudiantes expresan verbalmente o por escrito los resultados que han obtenido, intercambian sus experiencias y discuten sobre ellas con sus compañeros y el profesor, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. (Andrade & Gutiérrez, 1996)

En consecuencia, el tipo de trabajo es de discusión y comentarios sobre las actividades anteriores, sobre los elementos y propiedades que se hayan utilizado y observado.

El rol del docente será ayudar a los estudiantes a que usen un lenguaje preciso y apropiado para describir sus experiencias y comunicar sus conocimientos, lo que ayudará a que afiancen los nuevos conocimientos.

Durante esta fase el estudiante estructurará el sistema de relaciones exploradas.

Esta fase debe entenderse como una actitud permanente de diálogo y discusión en todas las actividades de las diferentes fases de aprendizaje. (Andrade & Gutiérrez, 1996)

Fase 4: Orientación libre

Los estudiantes aplican sus conocimientos y lenguaje de forma significativa a otras situaciones distintas de las presentadas, pero con estructura comparable. Serán tareas abiertas más complejas que puedan presentarse de diferentes formas.

En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, generalmente, más complejos.

Los problemas que se planteen en esta fase no deben ser una simple aplicación directa de una definición o un algoritmo conocidos, sino que deben contener nuevas relaciones o propiedades. Estos problemas deben ser más abiertos que los de las fases anteriores, preferiblemente con varias vías de resolución. (Andrade & Gutiérrez, 1996)

Fase 5: Integración

Los objetos y las relaciones son unificadas e interiorizadas en su sistema mental de conocimientos, adquiriendo así una visión general. Las actividades de esta fase deben favorecer este objetivo, al mismo tiempo que permitir a los profesores evaluar sobre los logros conseguidos.

El profesor debe presentar una síntesis de lo que los estudiantes han trabajado y aprendido, para ayudarlos a revisar, integrar y diferenciar los conceptos, propiedades, procedimentos, etc. Es importante que las actividades que se propongan no impliquen nuevos conceptos, sino sólo la organización de los ya adquiridos.

El optar por el modelo de Van Hiele nos brinda la oportunidad de explicar cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico y cómo es posible ayudar a los estudiantes a incrementar su aprendizaje.

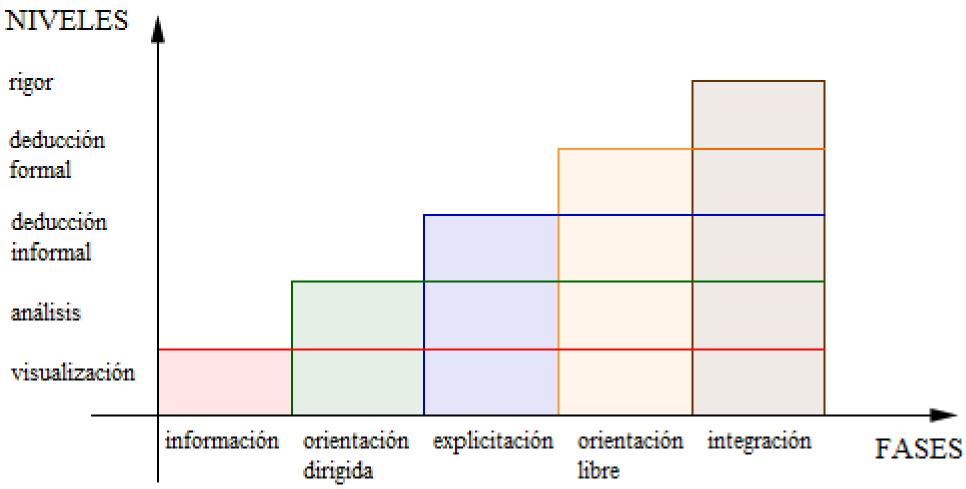


Gráfico 1. Relación de los niveles y fases de aprendizaje según el modelo de Van Hiele

FUENTE: (Lastra, 2005)

2.2.12. Los recursos para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría

Si bien es importante que los estudiantes tengan un buen conocimiento de los hechos geométricos, para que puedan desarrollar su pensamiento espacial y la intuición geométrica, existe una variedad de enfoques beneficiosos. Por ejemplo, algunos datos pueden ser introducidos de manera informal, otros desarrollados de manera deductiva o encontrados a través de la exploración.

Para enseñar la Geometría con eficacia a estudiantes de cualquier edad o habilidad, es importante asegurarse de que ellos entiendan los conceptos que están aprendiendo y los pasos que están involucrados en los procesos particulares más que los estudiantes que aprenden solamente reglas.

Los métodos de enseñanza más eficaces alientan a los estudiantes a reconocer las conexiones entre diferentes formas de representar ideas geométricas y entre la Geometría y otras áreas de la Matemática. La evidencia sugiere que es probable que esto ayude a los estudiantes a retener los conocimientos y habilidades y les permita abordar nuevos problemas geométricos con cierta confianza.

Al planificar enfoques de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, es importante animar a los estudiantes a desarrollar un entusiasmo por el tema, proporcionando oportunidades para investigar las ideas espaciales y resolver problemas de la vida real. Se debe asegurar que haya una buena comprensión de los conceptos y el lenguaje de la Geometría con el fin de proporcionar una base para el trabajo futuro.

Para muchos estudiantes, la enseñanza de la Geometría requiere métodos de enseñanza similares a los utilizados en años anteriores. Un enfoque formal, deductivo para enseñar Geometría tiene que ser tratado con mucho cuidado, y ver si va a ser adecuado para todos los alumnos. Con estudiantes más capaces, es posible fomentar una mayor comprensión de las definiciones y de las leyes de la lógica deductiva. Esto puede incluir las nociones de axiomas, una apreciación de la importancia de la demostración, la comprensión de algunas demostraciones y la capacidad de construir demostraciones simples por ellos mismos.

La Geometría se puede enseñar haciendo poco uso de recursos prácticos, pero esto no es necesariamente la mejor manera de hacerlo. Es útil tener en cuenta la Geometría como un tema práctico y proporcionar oportunidades para que los estudiantes usen una variedad de recursos para explorar e investigar las propiedades de las formas geométricas. Se debe prestar especial atención a las TICs como recurso de enseñanza, con la ventaja que cada vez son más accesibles.

Los ejemplos más importantes para la ayuda de la enseñanza de la Geometría mediante medios informáticos son los llamados programas de Geometría Dinámica. Proporcionan, sin duda una ayuda extraordinaria para la experimentación, es decir, para la construcción de conceptos y la visualización de resultados y propiedades geométricas a través de la práctica experimental. Un programa de la categoría de Sistemas de Geometría Dinámica (DGS) permite construcciones de Geometría elemental, donde los elementos que se construyen se definen fundamentalmente por propiedades cualitativas no mediante ecuaciones y Geometría analítica, aunque ésta esté detrás, en el funcionamiento interno del programa y en algunos casos como Geogebra también delante y en pantalla. (Pérez, 2007)

Una vez definida la construcción ésta se puede mover y deformar, pero las condiciones que definen cada elemento no varían. Normalmente al abrir un programa de Geometría Dinámica aparece una ventana con un área de trabajo que desempeña el papel de pizarra donde se dibujan las construcciones geométricas. Además hay una barra con botones de herramientas y menús que permiten la definición y características de cada elemento. (Pérez, 2007)

Existen varios programas de Geometría Dinámica que son similares pero cada uno con características especiales que le hacen mejor para algunas cosas. Entre estos programas se pueden citar a: Cabri – Geometre, Geogebra, The Geometer´s Sketchpad, Cinderella, R y C, GEUP, WinGeom y Poly Pro.

2.2.13. El software Geogebra

Este programa fue elaborado por Marjus Hohenwarter y un equipo internacional de programadores en la Universidad de Salzburgo y la Universidad de Atlantic, Florida (Eskola20). Dentro de las ramas de la Matemática engloba a la Geometría, el Álgebra y el Cálculo, y puede ser utilizado en todos los niveles educativos.

Es un sistema de Geometría Dinámica. Con él se pueden realizar construcciones utilizando puntos, vectores, segmentos, rectas y secciones cónicas como funciones, y luego modificarlas dinámicamente. (Iespugaramon)

Las ecuaciones y coordenadas pueden ser introducidas de forma directa; por lo que tiene la capacidad de hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático. (Eskola20)

Es decir, una expresión en la ventana algebraica de Geogebra corresponde a un objeto de la zona gráfica y viceversa.

Es un software libre desarrollado bajo una licencia Creative Commons, por lo que se puede copiar, distribuir y transmitir sin finalidades comerciales.

Es un programa realizado en Java, lo que garantiza su funcionamiento adecuado en sistemas operativos MacOSX, Windows, Linux y Solaris. Se encuentra disponible en 45 idiomas. En la web se pueden encontrar comunidades virtuales de ayuda y soporte técnico, manuales y wikis. (Eskola20)

Ha recibido varios premios internacionales, entre los cuales están: el European Academic Software Award, el Internacional Free Software Award y el Tech Awards.

La última versión de Geogebra es la 4.4.40.0 y fue lanzada el 8 de Julio de 2014. Incluye algunas funciones novedosas como la vista de cálculo simbólico (que permite trabajar con expresiones algebraicas y operar con ellas), la representación gráfica de desigualdades y el trabajo con las regiones producidas, la ventana de cómputo de probabilidades (que maneja las representaciones gráficas asociadas a diferentes distribuciones), el inspector de funciones (que evidencia propiedades típicas del análisis), entre otras. (Vitabar, 2011)

2.2.14. Rendimiento académico

2.2.14.1. Conceptualizaciones generales

El rendimiento académico es una de las variables fundamental de la actividad docente, que actúa como halo de la calidad de un Sistema Educativo (Jaspe, 2010). Algunos autores definen el rendimiento académico como el resultado alcanzado por los participantes durante un periodo escolar, tal el caso de Requena (1998), quien afirma que el rendimiento académico es fruto del esfuerzo y la capacidad de trabajo del estudiante, de las horas de estudio, de la competencia y el entrenamiento para la concentración.

En otro ámbito lo describe De Natale (1990), quien asevera que el aprendizaje y rendimiento escolar implican la transformación de un estado determinado en un nuevo estado, que se alcanza con la integración en una unidad diferente con elementos cognoscitivos y de estructuras no ligadas inicialmente entre sí.

2.2.14.2.Factores que influyen en el rendimiento académico

Existen diversas causas de un bajo rendimiento académico, entre las cuales se pueden citar: la mala orientación, la ausencia de un método de estudio, un bajo nivel de competencias, la falta de motivación, problemas de tipo económico, etc. (Torres, 2012)

Muchas veces se piensa que el estudiante es el único culpable de su fracaso estudiantil, sin analizar que existen muchos factores externos a él que pueden estar íntimamente relacionados con el problema, entre los cuales se encuentran: el entorno social, lo familiar y cultural, lo institucional, etc.

Frente al problema del bajo rendimiento escolar, es necesario e importante realizar un diagnóstico como mecanismo de evaluación, con el fin de conocer las competencias y deficiencia del estudiante, y así poder prevenirlo y evitar combatirlo.

Para el éxito en el aprendizaje de los estudiantes los diferentes factores influyen en los siguientes porcentajes (Maddox, 1973):

- La inteligencia y las facultades especiales entre el 50 y el 60%
- La actividad, el esfuerzo y los métodos eficaces de estudio entre el 30 y 40%.
- La suerte y factores ambientales entre el 10 y el 15%

2.2.14.2.1. Factores cognitivos

2.2.14.2.1.1. La inteligencia

En este contexto nos referimos no sólo a la inteligencia general, sino a la capacidad intelectual considerando las aptitudes específicas que varían en cada individuo, así como la estructura cognoscitiva existente.

En la capacidad intelectual influyen factores biológicos, fisiológicos, culturales, ambientales...

Aunque es un factor muy importante, la inteligencia por sí sola, no es garantía de éxito; se da el caso de personas muy inteligentes, que pueden estar bloqueadas emocionalmente o estar deshabituadas a los procesos intelectuales, y tienen un bajo rendimiento académico.

2.2.14.2.1.2. La memoria

La memoria no es un receptáculo pasivo en el que se almacenan los conocimientos, sino que es un proceso de recuerdo, el cual requiere la participación activa de la persona y está relacionada directamente con la atención y la comprensión. Mientras se presta mayor atención, existe una mayor comprensión; y a más atención y comprensión mejor retención de lo almacenado.

No existe aprendizaje sin memoria, podemos decir que aprendemos algo cuando somos capaces de explicarlo, criticarlo, aplicarlo; sobre todo, porque lo hemos comprendido. En todo ello, subyace la memoria, la cual nos permite recordar conocimientos adquiridos anteriormente y así comprender los actuales, en este sentido participa en el aprendizaje, no sólo en la repetición al pie de la letra del contenido de estudio.

A la memoria debemos ejercitarla al igual que un músculo, ya que de esta forma se fortalecerá y será mayor su capacidad, agilidad y utilidad.

Las técnicas de estudio también ayudan en estos procesos. Se recuerda mejor el material estructurado si es significativo y organizado. Es muy difícil comprender y recordar materiales desorganizados, muy extensos, o no comprensibles.

La memoria no se manifiesta igual en todas las personas. No todas recuerdan de la misma manera. Hay quienes recuerdan fácilmente las imágenes, otras los sonidos, otras recuerdan entornos, etc.

Los sistemas sensoriales (vista, oído, olfato, gusto y tacto) proporcionan la información a los sistemas de memoria, y actúan en diferentes niveles.

La memoria suele trabajar con la asociación de ideas, por eso es conveniente que recordemos las leyes de la asociación:

- Por la ley de proximidad, recordamos los hechos o acontecimientos que están próximos en el espacio y en el tiempo.
- Por la ley del contraste, una imagen tiende a evocar a su contraria, es decir recordamos en muchos casos aquellas cosas que son totalmente diferentes, por el frío pensamos en el calor, por le enfermedad en la salud…
- Por la ley de la semejanza se asocia y se tiende a evocar a lo que se parece, atendiendo al color, la forma, la estructura…
- Por la ley de la persistencia recordamos mucho mejor lo que se repite con más frecuencia.
- La ley del interés es la que nos hace recordar las cosas que están unidas a los sentimientos.

La memoria es selectiva, ciertos hechos, acontecimientos o experiencias se suelen retener con más facilidad porque nos interesan, otros los olvidamos porque nos resultan desagradables.

Otro aspecto que influye y está relacionado con la memoria es el estado general de la persona, tanto el estado físico (sueño, hambre, enfermedad…), como el psicológico (ansiedad, depresión…).

La capacidad de la memoria varía, puede desarrollarse y perfeccionarse. Hay que tener en cuenta que lo que no se usa se atrofia y lo que se usa se desarrolla. Es decir, con entrenamiento adecuado, se puede tener una buena memoria.

2.2.14.2.1.3. Los procesos perceptivos

Son factores determinantes para lograr los procesos cognitivos. A veces no se les suele prestar demasiada atención y son en muchos casos clave del éxito. Son fundamentales para la lectura, la escritura, la captación de las formas espaciales; aspectos claves para un correcto aprendizaje, pues como sabemos, muchos de los problemas de rendimiento académico se deben a una deficiente lectura o escritura ocasionadas por los procesos perceptivos.

El desarrollo de estos procesos se inicia en los primeros meses de la vida, dependen de la maduración del sistema nervioso y de la interacción con el medio. En la edad adulta hemos de cuidar y crear las condiciones materiales idóneas para que los procesos de la visión y la audición sean óptimos. Las condiciones físicas del medio no deben menospreciarse.

La percepción se diferencia de la sensación en cuanto que ésta se centra, solamente, en el reconocimiento de las cualidades de un objeto (físicas, fisiológicas o psicológicas).

Todos los conocimientos se basan en la percepción. La capacidad para recordar y utilizar lo captado por los sentidos, se debe mayormente a la observación del ambiente y a la discriminación correcta que se hace de lo captado.

2.2.14.2.1.4. Los procesos atencionales

La atención se entiende como la concentración de la mente en algún contenido. Es la aplicación selectiva a una situación concreta o fuente de información. Nos prepara y orienta para la percepción o comprensión de un objeto, forma o idea. Si no existe la atención suficiente se dá una mala comprensión y por tanto un bajo rendimiento. (Rubio, 2004)

La percepción es selectiva y se centra sólo en la información a la que atendemos. Es evidente que la captación y la comprensión de la información no dependen sólo de los sentidos, sino de que el sujeto presta atención a la información, y esta depende de muchas causas movidas por las aptitudes, los intereses, actitudes y necesidades de la persona. Cuantas veces oímos o vemos una determinada cosa y no captamos muchos de los aspectos que nuestros sentidos sí tuvieron la ocasión de conocer; cuando leemos, o escuchamos a una persona o a un profesor en clase, lo hacemos distraídamente, es decir, no ponemos atención.

El hábito de prestar atención es difícil conseguirlo, por ello hay que esforzarse deliberadamente, procurar tener un estado anímico adecuado, libre de otras preocupaciones, y buscar el ámbito de interés que más nos motive a prestar atención.

La distracción, es la causa de que no percibamos todas las cosas que nuestros sentidos pueden captar. Este fenómeno inverso a la atención se produce en la mayoría de los casos por diversos motivos, entre los cuales se pueden citar: falta de descanso y la excesiva fatiga física o psíquica; una alimentación deficiente o excesiva; somnolencia; falta de salud; deficiencias en la visión o audición; desorganización personal, académica o familiar; falta de motivación; falta de comprensión y problemas personales o familiares. (Rubio, 2004)

2.2.14.2.2. Factores motivacionales

Casi todas las tareas intelectuales necesitan de una motivación especial, ésta será como el motor que proporciona la energía para seguir adelante. En general, se podría designar como motivación del aprendizaje, a toda condición individual que lleve al sujeto a realizar y a perseverar en una tarea de aprendizaje.

Entre la distintas fuentes motivacionales se encuentra la llamada “pulsión cognoscitiva” o “deseo de saber, dominar y entender”, es una motivación primaria o interna (Rubio, 2004). Esta motivación junto con las motivaciones sociales, es decir, conseguir un determinado status, un título o salida profesional, tienen una influencia mucho mayor y más duradera que la que podría darse por una motivación externa; por ejemplo, el obsequio o el premio que se ofrece a un determinado joven si consigue determinado rendimiento académico.

En general se puede establecer una relación directa entre motivación y rendimiento académico, a mayor motivación mayor rendimiento. También se ha de tener en cuenta que a veces una excesiva motivación se convierte en ansiedad, y perjudica al rendimiento, incluso provoca el abandono de los estudios, porque el excesivo celo por conseguir un rendimiento académico excelente lleva a quemar etapas y a comportarse como los malos lectores de novelas que se saltan páginas para conocer rápido el desenlace, privándose así de la comprensión suficiente de la narración. (Rubio, 2004)

2.2.14.2.3. Factores socio-ambientales

2.2.14.2.1. La familia

En la edad infantil y juvenil los padres son los protagonistas principales de la educación de sus hijos y de ellos va a depender en gran parte las actitudes que adopten ante la vida y la forma de enfrentarse a los problemas.

Si la familia no sólo acepta, sino que motiva, anima y colabora para el logro de las metas, mostrando una actitud positiva, será más fácil tener una seguridad y confianza que ayudarán al rendimiento académico eficaz, y en especial a la continuidad. (Rubio, 2004)

El estudiante ya sabe que las cosas tienen un valor, y conseguirlas supone un esfuerzo, al que ayudará la familia cuando existen en ella el orden, la disciplina y el respeto.

Si en la familia hay otros miembros con títulos académicos, o estudian, se creará un clima que facilite la comprensión; si no es así, el estudiante deberá favorecer el entorno con el entusiasmo y la actitud positiva presentando las bondades que el estudio le aporta para hacer partícipes a los demás de ello, motivándoles, logrado no sólo el interés de los demás, sino reforzar el suyo propio, ya que tiene aliados en el esfuerzo que realiza.

2.2.14.2.2. Profesor/grupo de estudiantes

La actitud y trato del profesor es esencial para la construcción de una sana relación educativa entre maestro – estudiante. Como docentes debemos evitar homogeneizar y estandarizar a nuestros estudiantes, tratarlos como sujetos y no como objetos.

No puede darse una auténtica acción educativa sin el binomio profesor – estudiante, precisamente porque al educar se da una relación intrapersonal e interpersonal. Intrapersonal porque el proceso educativo debe originarse y desarrollarse desde dentro de las personas. Interpersonal porque el objetivo de la misma es la interacción de las personas. (Matínez, 2005)

El genuino educador es aquel que provoca crecimiento, porque es capaz de ver, de descubrir y valorar la potencialidad que se encuentra en la interioridad del educando. (Matínez, 2005)

2.2.14.2.4. Factores metodológicos

Tanto la metodología de aprendizaje como la metodología de enseñanza son instrumentos básicos para el rendimiento académico.

La comprensión, la rapidez lectora, la riqueza de vocabulario, la agilidad de cálculo, los hábitos de estudio, etc., son piezas claves para conseguir un aprendizaje significativo. El saber estudiar influye en el rendimiento académico entre un treinta y un cuarenta por ciento. (García, 1991)

Si hubiera que buscar las causas en muchas ocasiones del bajo rendimiento escolar tendríamos que referirnos, por un lado, a factores intelectuales, actitudinales, motivacionales, y de autoestima; y, por otro, a deficiencias en factores que tienen mucho que ver con los hábitos de estudio, y estrategias o habilidades de aprendizaje, por ejemplo: la falta de estudio diario, el no utilizar fuentes adecuadas de información, la mala organización de la materia, el abuso de la memorización sin intentar comprender los temas, la dificultad en la expresión oral y escrita, la lectura lenta, las malas condiciones ambientales, la falta de concentración, etc.

Las técnicas de trabajo intelectual y los hábitos de estudio pueden mejorar notablemente el rendimiento académico. (Rubio, 2004)

Por otro lado, el aplicar un determinado modelo de enseñanza y desarrollar un conjunto de actividades son claves para el aprendizaje de los estudiantes.

Es necesario que el maestro utilice variadas estrategias en el aula. Desde su posición de intermediario entre el alumno y la cultura, la atención en la diversidad de los estudiantes y las situaciones requerirá, en varias ocasiones, retar, dirigir, en otras, proponer, explorar, analizar, contrastar. (Lastra, 2005)

En la enseñanza constructivista se focaliza en torno a la actividad mental del estudiantes y también en su diversidad. Promover esta actividad significa que el estudiante entiende lo que hace y por qué lo hace, tiene consciencia del proceso que está realizando. Esto le permite darse cuenta de sus dificultades y si es necesario solicitar la ayuda del docente. (Lastra, 2005)

El hecho de que el estudiante aprenda, no solo se debe al interés y preocupación personal, sino que se debe a que el maestro sea capaz de acompañarlo en el proceso, ayudarlo a comprender, a dar sentido a lo que le presenta, cómo lo presenta, cómo lo motiva, y le hace sentir que el aporte personal es necesario para aprender. (Lastra, 2005)

Por consiguiente, el modelo didáctivo, enfocado hacia la enseñanza de la Geometría, debe considerar que el profesorado cuente con el mayor número de medios y estrategias para poder atender a las diferentes necesidades que aparezcan durante el proceso de aprendizaje.

CAPÍTULO III
METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1. Diseño

La presente investigación es de tipo cuasiexperimental, ya que se varió los niveles de la variable independiente (uso del modelo de Van Hiele y/o uso del software Geogebra) para poder ver los efectos que causa dicha variación en la variable dependiente (rendimiento académico), pero sin ejercer el grado de control característico del método experimental.

El tipo de diseño cuasiexperimental que se aplicó fue el de grupos no equivalentes. Con base en esta metodología se analizó una relación de causalidad, se manipuló la variable independiente y analizó su efecto sobre la variable dependiente, pero, a diferencia de la metodología experimental, se partió de grupos ya formados de una manera natural; seis paralelos, dos de cada nivel de estudios de Educación General Básica Superior del Colegio Católico José Engling.

Dentro del diseño de grupos no equivalentes se empleó el diseño de dos grupos, con el cual se comparó la medida de la variable dependiente del grupo sometido a un nivel de la variable independiente (G(A)) con la medida obtenida por otro grupo que no ha recibido dicho nivel de la variable independiente (G(B)). Para ello se utilizó un diseño pretest-postest, estimándose la equivalencia de los grupos sólo en la variable que se mida, mas no en las demás.

Tabla 3

Diseño de la investigación

	Octavo de Básica		Noveno de Básica		Décimo de Básica	
	G(A)	G(B)	G(A)	G(B)	G(A)	G(B)
Metodología de Van Hiele	X					
Software Geogebra			X			
Metodología de Van Hiele y Software Geogebra					X	

3.2. Modelo de investigación

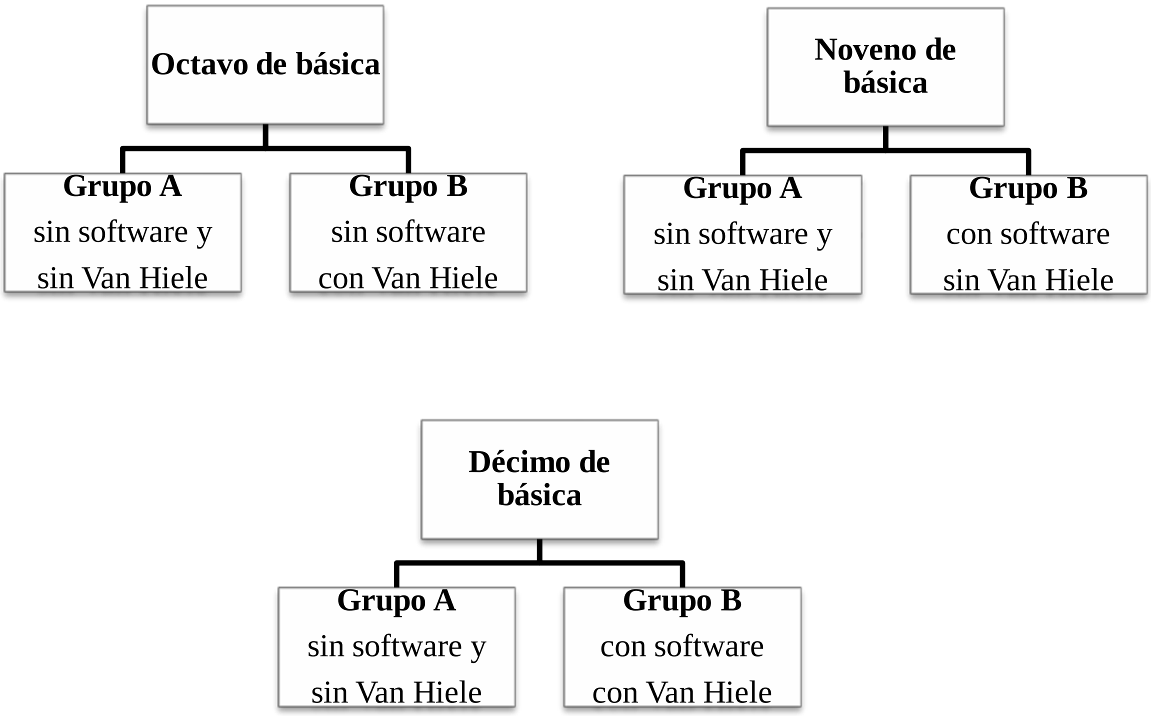


Gráfico 2. Modelo de investigación

3.3. Universo y Muestra

3.3.1. Universo

175 estudiantes de octavo, noveno y décimo año de Educación General Básica del Colegio Católico José Engling de la Parroquia de Tumbaco.

Tabla 4

Población de estudiantes por nivel de estudio

UNIVERSO DE ESTUDIANTES					
Niveles de estudio	**Paralelos**				**Total**
	A	**B**	**C**	**D**	
Octavo de Básica	15	18	18	18	69
Noveno de Básica	14	12	14	11	51
Décimo de Básica	22	14	19		55
Total					**175**

FUENTE: Secretaría del Colegio Católico José Engling.- Registro de matriculación año lectivo 2013-2014

3.3.2. Muestra

Se seleccionó dos paralelos al azar de cada uno de los niveles de estudio; para ello se empleó el software Microsoft Excel 2010. Luego, de la misma forma se seleccionó al curso que correspondió al grupo de control y al experimental, que se visualiza en la tabla 5.

Tabla 5

Muestra de estudiantes por paralelos

Nivel de estudio	Número de estudiantes por paralelos		Total
	Paralelo B (Grupo A)	**Paralelo D (Grupo B)**	
Octavo de básica	18	18	36
Nivel de estudio	**Paralelo A (Grupo A)**	**Paralelo C (Grupo B)**	
Noveno de básica	14	14	28
Nivel de estudio	**Paralelo B (Grupo A)**	**Paralelo C (Grupo B)**	
Décimo de básica	14	19	36

3.4. Instrumentos

Para recolectar la información en relación a las variables involucradas en la investigación, se aplicó una prueba objetiva de conocimientos del bloque temático de

Geometría, según el Programa del Ministerio de Educación, al inicio y al final del proceso de enseñanza-aprendizaje.

3.5. Metodología de trabajo

El bloque temático de Geometría, ubicado en el programa de estudios de la asignatura de Matemática en los niveles de octavo, noveno y décimo año de Educación General Básica Superior, fue el objeto de análisis en la presente investigación.

Para desarrollar este estudio se diseñó una prueba objetiva que se aplicó al inicio y al final de la enseñanza en cada uno de los niveles de estudio. Los indicadores levantados para estos instrumentos midieron el logro de los aprendizajes que se plantean en el bloque geométrico. Siguiendo el mismo procedimiento se diseñó para cada nivel, los procesos de cada modelo con sus respectivas actividades de aprendizaje y materiales didácticos.

De los 5 niveles de jerarquización del conocimiento humano propuesto por Van Hiele se consideraron los tres primeros, por el desarrollo evolutivo en que se encuentran los estudiantes, alrededor de los 12 y 15 años, edad que hace imposible la adquisición de los otros niveles.

Los profesores participantes como docentes en el proceso de investigación, recibieron capacitación del modelo a aplicar, con base en las planificaciones didácticas, el material requerido para cada estudiante y el acompañamiento durante todo el proceso.

Los profesores realizaron la enseñanza del bloque de Geometría en las seis horas semanales designadas para la asignatura de Matemática, durante el tercer parcial del segundo quimestre del año lectivo 2013-2014.

La validación de las pruebas objetivas que fueron aplicadas a cada uno de los grupos de control y experimental de cada nivel de estudios, se realizó por dos expertos especializados en Matemáticas con una Maestría en Docencia Matemática. Con base en las recomendaciones de los expertos, se realizó la corrección de los ítems defectuosos y así se tuvo las pruebas definitivas.

Se aplicó las pruebas definitivas por primera vez en los dos paralelos de cada nivel de estudios la segunda semana de mayo y por segunda vez, la tercera semana de junio que fue el término del Bloque Temático de Geometría. Ambos procesos se realizaron dentro del horario de clases en las horas asignadas para la enseñanza de la Matemática.

3.6. Prueba de hipótesis

Para probar las hipótesis se empleó el software IBM-SPSS versión 22 y se aplicó la prueba “t” Student de diferentes medias para dos grupos relacionados y para dos grupos independientes.

CAPÍTULO IV
ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

La investigación se desarrolló en el marco de las clases normales de los estudiantes de octavo, noveno y décimo año de Educación General Básica Superior que formaron la muestra. Cabe destacar que estos alumnos no presentaban características especiales distintas al resto de los estudiantes de los otros paralelos. El aplicar una prueba al inicio y al final de la investigación permitió recoger un conjunto de datos, y con ellos, obtener varios resultados.

El objetivo para aplicar esta medición fue el evaluar el rendimiento académico alcanzado por los estudiantes después de implementar diversas metodologías de enseñanza para el bloque temático de Geometría. El capacitar y acompañar a los docentes durante todo el proceso permitió que la investigación sea efectiva.

En la medición que se realizó se eliminó un caso de los estudiantes de octavo año del análisis porque no estuvo en la primera ni en la segunda prueba. Otro elemento importante, en cada nivel de estudios se tomaron como erróneas aquellas preguntas donde el estudiante contestó dos o más alternativas.

En este capítulo se presenta el análisis estadístico de los datos, con el cálculo de algunas medidas de tendencia central y de variabilidad, niveles de significancia y las pruebas "t" Student, que se hacen en función de los objetivos planteados.Así mismo se describe las características de los cursos y de los profesores que desarrollaron la experiencia.

También se muestra la interpretación de los resultados obtenidos en el análisis, para determinar si se aceptan o se rechazan las hipótesis que surgen del problema de investigación.

4.1. Interpretación

4.1.1. Global

Es importante señalar que todos los estudiantes al iniciar la experiencia se sintieron muy contentos de ser partícipes de esta investigación, como también de hacerlo en Geometría, pues el trabajar en esta área les demuestra que se pueden realizan actividades novedosas y aprender en forma entretenida. Por otro lado, los profesores se sintieron muy reconocidos al participar en este proceso, pues consideran que es un crecimiento en su labor profesional, y de profundización en el conocimiento geométrico.

En la tabla 6 se muestra un resumen de los resultados que se obtuvieron de los análisis estadísticos en los paralelos de estudio de cada uno de los tres niveles, por las pruebas aplicadas al inicio y al término de la investigación (calificación 1 y calificación 2 respectivamente).

Tabla 6

Medias por paralelos de cada nivel de estudios con prueba antes y después del proceso educativo

			Calif. 1	Calif. 2
Octavo de Básica	**D**	Media	2,176	7,794
		N	17	17
		Desv. Típica	0,9176	0,9692
	B	Media	2,417	7,083
		N	18	18
		Desv. Típica	0,9432	1,0037
	Total	Media	2,296	7,439
		N	35	35
		Desv. Típica	0,9304	0,9865
Noveno de Básica	**A**	Media	3,500	8,357
		N	14	14
		Desv. Típica	1,0561	0,9078
	C	Media	3,071	7,821
		N	14	14
		Desv. Típica	0,9778	1,1537
	Total	Media	3,286	8,089
		N	28	28
		Desv. Típica	1,0170	1,0308
Décimo de Básica	**B**	Media	3,036	7,536
		N	14	14
		Desv. Típica	1,0825	1,2163
	C	Media	2,789	6,368
		N	19	19
		Desv. Típica	1,0842	0,8794
	Total	Media	2,913	6,952
		N	33	33
		Desv. Típica	1,0834	1,0479

Octavo de Básica

Paralelo D: modelo de Van Hiele

Paralelo B: grupo control

Noveno de Básica

Paralelo A: uso del software Geogebra

Paralelo C: grupo control

Décimo de Básica

Paralelo B: modelo de Van Hiele y uso del software Geogebra

Paralelo C: grupo control

(Anexo 1)

De la tabla 6 se extrae que en los tres niveles de estudio el rendimiento de los estudiantes se incrementa entre la prueba antes y después del proceso enseñanza-aprendizaje, independientemente que éstos sean grupos de control o intervenidos. Por lo tanto, los estudiantes de todos los cursos han mejorado su rendimiento en este período.

La desviación estándar o desviación típica general de cada nivel tanto en la primera como en la segunda prueba está entre 0,9304 y 1,0834; lo cual muestra que los cursos son homogéneos.

Al efectuar las diferencias entre las medias de cada paralelo de los tres niveles entre la primera y segunda calificación, se obtiene como promedio general de estas diferencias de medias en los paralelos controles 4,3317 y en los paralelos intervenidos 4,9917. Por lo que el crecimiento en los promedios de las calificaciones obtenidas en los paralelos intervenidos es mayor que en los paralelos controles.

En general se puede afirmar que existen diferencias y logros en los diferentes niveles, pero a la vez no se observan mayores cambios que permitan a través de un primer análisis extraer conclusiones más radicales.

4.1.2. Por nivel de estudios

Octavo de Básica

Paralelo D: modelo de Van Hiele
Paralelo B: control

El paralelo D tiene una matrícula de 18 estudiantes, ninguno en educación diferencial. El profesor de matemática promueve en sus estudiantes excelentes hábitos de estudio y disciplina.Es un profesional que está en búsqueda permanente de variar las actividades que prepara para sus estudiantes, de crear los ambientes adecuados para generar el aprendizaje. Sus clases son expositivas, frontales, los estudiantes trabajan en silencio, se prioriza los resultados o productos sobre los procesos. Es una persona cercana a los 50 años, su salud se ve afectada por una prótesis que tiene en su cadera, lo cual le impide estar mucho tiempo de pie. En este curso se aplicó el modelo de enseñanza de Van Hiele.

El paralelo B tuvo en principio una matrícula de 18 estudiantes, pero a mediados del año lectivo se retiró un alumno. Ningún estudiante presenta necesidades educativas especiales. El profesor de matemática es el mismo que en el paralelo D. En este paralelo se aplicó el modelo de enseñanza tradicional.

En el gráfico 3 se observa que el paralelo B presenta un rendimiento académico al inicio de la experiencia mayor que el paralelo D, pero al final de la misma, menor. El paralelo D que aplica la experiencia presenta una diferencia de rendimiento mayor que el paralelo B.

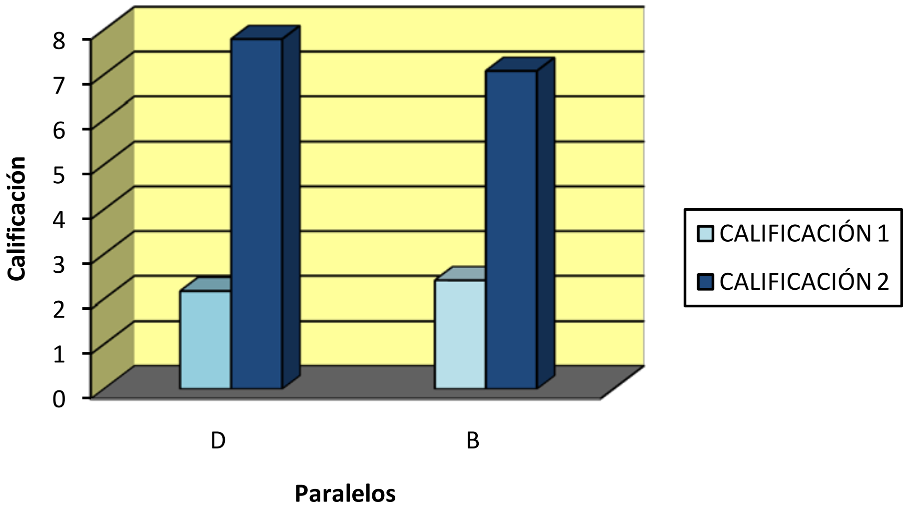


Gráfico 2. Octavo de Básica, Calificaciones medias en los paralelos D y B

En la tabla 7 se presentan los estadísticos: número de elementos, medias y desviación típica de los paralelos D y B en las calificaciones antes y después del proceso, que se utilizan para probar si estas diferencias entre las medias se deben o no al azar.

Tabla 7

Octavo de Básica, Medias de calificación 1 y 2 en los paralelos D y B

CALIFICACIÓN 1				CALIFICACIÓN 2			
PARALELO	**N**	**media**	**desv. típica**	**PARALELO**	**N**	**Media**	**desv. típica**
D	17	2,176	0,9176	**D**	17	7,794	0,9692
B	18	2,417	0,9432	**B**	18	7,083	1,0037
Total	35	2,296	0,9304	**total**	35	7,439	0,9865

En la tabla 7 se puede observar que las medias de las calificaciones en la prueba al inicio y al término de la experiencia muestran una diferencia entre los paralelos D y B. Para responder si esta diferencia es estadísticamente significativa se utiliza la prueba “t” Student para dos muestras relacionadas.

En las tablas 8 y 9 se presentan los resultados de la prueba t aplicada a los paralelos D y B.

Tabla 8

Octavo de básica, Paralelo D: Prueba “t” Student de dos muestras relacionadas

Paralelo D	Media	Desv. estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza		t	gl	Sig. bilateral
				Inferior	Superior			
calif. 2- calif. 1	5,62	1,56	0,38	4,82	6,42	14,9	16	0,00

El valor de la significancia es de 0,00<0,05; con lo cual podemos concluir con un 95% de probabilidad que existe una diferencia significativa en las medias de las calificaciones de los estudiantes antes y después del proceso enseñanza-aprendizaje.

Tabla 9

Octavo de básica, Paralelo B: Prueba “t” Student de dos muestras relacionadas

Paralelo B	Media	Desv. estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza		t	gl	Sig. bilateral
				Inferior	Superior			
calif. 2- calif. 1	4,67	1,18	0,28	4,08	5,25	16,8	17	0,00

Continuando con este mismo análisis en el otro paralelo (paralelo B), y al observar el valor de la significancia de 0,00<0,05; de igual manera se puede afirmar con un 95% de probabilidad que la diferencia entre las medias de las calificaciones de los estudiantes antes y después del proceso enseñanza-aprendizaje resulta ser significativa.

Es decir, tanto para el paralelo B como para el paralelo D el proceso educativotuvo efectos significativos sobre el rendimiento académico de los estudiantes.

Es natural que los estudiantes de ambos paralelos hayan incrementado significativamente su rendimiento académico durante el proceso, pues al inicio de la aplicación de la prueba no conocían el tema geométrico, y al incorporarse la enseñanza sobre el mismo, ellos aprendieron, adquiriendo nuevos conocimientos.

Los estudiantes de ambos paralelos tienen ya algunos años de formación en la rama de la Matemática, por lo que al inicio de la experiencia tenían diferentes niveles de conocimientos previos sobreGeometría, y al aplicar su enseñanza durante más de un mes, ambos cursos incrementaron significativamente su aprendizaje. Cabe entonces plantearse la siguiente pregunta ¿el incremento mayor en el rendimiento académico que experimenta el paralelo D con el modelo que realiza la intervención es realmente significativo?

Para analizar si las medias en el incremento de las calificaciones de ambos paralelos tienen diferencias significativas y probar la hipótesis, se aplica la prueba "t" Student de dos muestras independientes. Los resultados se muestran en la tabla 10

Tabla 10

Octavo de Básica, Paralelos D y B: Prueba "t" Student para dos muestras independientes

	Prueba Levene calidad var.		Prueba t para la igualdad de medias						
	F	Sig.	t	gl	Sig. (bilat.)	Dif. de medias	Dif. de error	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
								Inf.	Sup.
CALIF. Se asumen varianzas iguales	1,626	0,211	2,05	33	0,049	0,951	0,46	0,006	1,896
No se asumen varianzas iguales			2,03	29,8	0,051	0,951	0,47	0,006	1,908

Tomando en cuenta varianzas iguales (anexo 3), el valor de la significancia es de 0,049<0,05; con lo cual se puede asegurar con un 95% de probabilidad que entre los dos paralelos existen diferencias significativas en el incremento de las calificaciones antes y después del proceso educativo. Por lo tanto, el incremento en el rendimiento académico que experimenta el paralelo D en donde se aplicó el modelo de Van Hiele frente al que experimenta el paralelo B en donde se utilizó el método de enseñanza tradicional, es realmente significativo; con lo cual se prueba la H_{i1}.

H_{i1}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del modelo de Van Hiele se incrementa frente al uso del método tradicional.

Noveno de Básica

Paralelo A: uso del software Geogebra
Paralelo C: control

El noveno A tiene 14 estudiantes y su profesor de Matemática (28 años) está recién iniciando en la docencia. Aquí se aplicó el modelo de enseñanza con el uso del software Geogebra. Al realizar su capacitación en el software se mostró muy entusiasmado y motivado por la experiencia. La ventaja que se tuvo es que el nivel de uso que tiene el docente sobre el computador es bueno, no únicamente como procesador de texto y recopilador de información a través de internet, sino como una herramienta de enseñanza a través de blogs y plataformas virtuales.

El docente en sus clases incentiva a la participación y creatividad de sus estudiantes. Los alumnos se sienten acogidos y que están aprendiendo. Las actividades desarrolladas con el software Geogebra permitieron que los estudiantes trabajaran de forma individual en el laboratorio de computación, siguiendo las instrucciones de su maestro. Cada actividad la guardaban en una carpeta personal, para luego ser revisada por el profesor.

El paralelo C consta también de 14 estudiantes, y el profesor de Matemática es el mismo que en el noveno A. En este paralelo se aplicó el modelo de enseñanza tradicional.

En ambos cursos se inicia la investigación el día jueves 8 de mayo de 2014 con la aplicación de la prueba al inicio de la experiencia y se concluye el martes 17 de junio del mismo año. La aplicación de los dos modelos se realiza durante las seis horas semanales de clase asignadas para la cátedra de Matemática.

La experiencia que se realiza en este nivel de estudios permite probar la hipótesis H_{i3} que se enuncia a partir de la pregunta ¿El rendimiento académico de los estudiantes en Geometría se incrementa al aplicar una metodología de enseñanza con el uso del software Geogebra frente al uso del método tradicional?

H_{i3}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del software Geogebra se incrementa frente al uso del método tradicional.

En la tabla 11 se presentan los estadísticos: medias, desviación estándar y el número de estudiantes que conformaron la muestra en los paralelos A y C en las pruebas al inicio (calificación 1) y al final (calificación 2) de la experiencia.

Tabla 11

Noveno de Básica, Medias de calificación 1 y 2 en los paralelos A y C

CALIFICACIÓN 1				CALIFICACIÓN 2			
PARALELO	**N**	**media**	**desv. Típica**	**PARALELO**	**N**	**Media**	**desv. típica**
A	14	3,500	1,0561	**A**	14	8,357	0,9078
C	14	3,071	0,9778	**C**	14	7,821	1,1537
Total	28	3,286	1,0169	**total**	28	8,089	1,0308

Estos estadísticos se utilizan para aplicar pruebas que se refieren a la significación estadística de las diferencias que pueden encontrarse y para probar si estas diferencias entre las medias se deben o no al azar.

Tal y como se aprecia en el gráfico 4 las medias de los puntajes en la prueba 1 y 2 muestran una diferencia entre el paralelo A y el C. Para responder si esta diferencia es estadísticamente significativa, se utiliza la prueba t Student para dos muestras relacionadas.

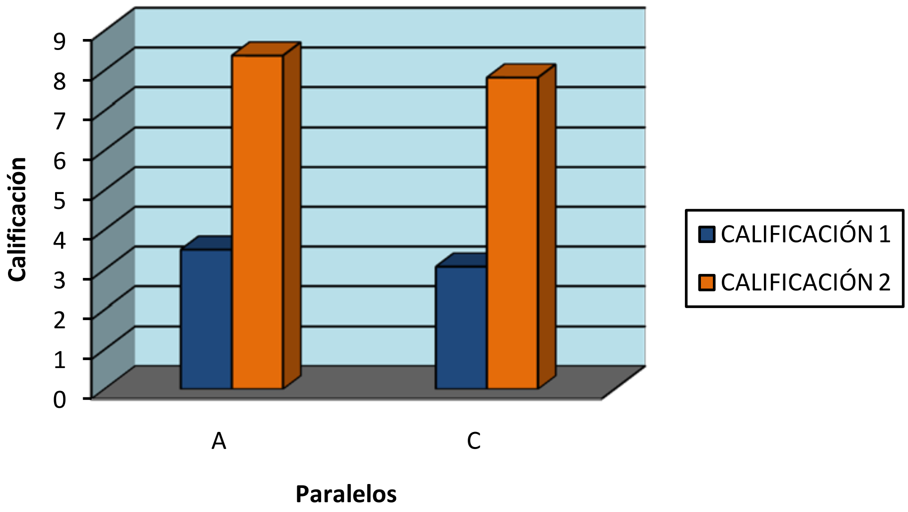


Gráfico 4. Noveno de Básica, Calificaciones medias en los paralelos A y C

Prueba de hipótesis

Al efectuar la prueba estadística (anexo 2), los resultados que se obtienen son:

Tabla 12

Noveno de básica, Paralelo A: Prueba "t" Student de dos muestras relacionadas

Paralelo A	Media	Desv. estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza		t	gl	Sig. bilateral
				Inferior	Superior			
calif. 2- calif. 1	4,86	1,38	0,37	4,06	5,65	13,2	13	0,00

FUENTE: Elaborado por (autor de la investigación)

El valor de la significancia es de 0,00<0,05; con lo cual podemos concluir con un 95% de probabilidad que existe una diferencia significativa en las medias de las calificaciones de los estudiantes al inicio y al final del proceso enseñanza-aprendizaje; concluyendo que el proceso educativo sí tuvo efectos significativos sobre el rendimiento académico de los estudiantes.

Tabla 13

Noveno de básica, Paralelo C: Prueba "t" Student de dos muestras relacionadas

Paralelo C	Media	Desv. estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza		t	gl	Sig. bilateral
				Inferior	Superior			
calif. 2- calif. 1	4,75	1,52	0,41	3,87	5,63	11,7	13	0,00

Al igual que para el paralelo anterior, el valor de la significancia es de 0,00<0,05; con lo cual podemos asegurar con un 95% de probabilidad que la diferencia entre las medias de las calificaciones de los estudiantes antes y después del proceso educativo es significativa.

Estos análisis confirman nuevamente lo comentado para el nivel de octavo de Básica, es evidente que los estudiantes experimenten un avance en el conocimiento geométrico, que se expresa en las diferencias de las medias de las calificaciones obtenidas entre la prueba al inicio y al final de la investigación.

Estas evidencias permiten aplicar la prueba "t" para dos muestras independientes, para probar si la diferencia en el incremento de las calificaciones del paralelo A (intervenido) es significativa con respecto al paralelo C; y así probar la hipótesis H_{i3}(anexo 3).

La tabla 14 entrega todos los resultados para esta prueba.

Tabla 14

Noveno de Básica, Paralelos A y C: Prueba "t" Student para dos muestras independientes

	Prueba Levene calidad var.		Prueba t para la igualdad de medias						
	F	Sig.	t	gl	Sig. (bilat.)	Dif. de medias	Dif. de error	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
								Inf.	Sup.
CALIF. Se asumenvarianzas iguales	0,158	0,694	0,196	26	0,846	0,1071	0,548	-1,02	1,233
No se asumenvarianzas iguales			0,196	25,77	0,846	0,1071	0,548	-1,02	1,233

Tomando en cuenta varianzas iguales (anexo 3), el valor de la significancia es de 0,846>0,05. Por lo tanto, se concluye con un 95% de probabilidad que no hay diferencias significativas entre los incrementos en las calificaciones de los dos paralelos; por lo que se acepta la hipótesis nula H_{02}.

H_{02}: El rendimiento académico en Geometría con el uso del software Geogebra es igual a la aplicación del método tradicional.

Décimo de Básica

Paralelo B: modelo de Van Hiele con uso del software Geogebra

Paralelo C: control

La experiencia comienza el martes 6 de mayo de 2014 con la aplicación de la prueba por primera vez en los dos paralelos y la enseñanza en las seis horas semanales asignadas para la cátedra de Matemática. El décimo B tiene 14 estudiantes. Aquí se aplicó el modelo de enseñanza de Van Hiele con el uso del software Geogebra. El profesor aceptó el desafío de participar de esta experiencia, pues le agrada mucho la idea de innovar en la Educación Matemática. Trabajó con mucho interés y dedicación, siguiendo el plan de trabajo diseñado, realizando todas las actividades propuestas.

La implementación del modelo de Van Hiele y el uso del software Geogebra, requirió la apertura del maestro, disposición y compromiso para innovar en la enseñanza, repasar previamente las actividades que son desarrolladas con el software, así como tomar las medidas oportunas para que los computadores estén en óptimas condiciones para iniciar la actividad.

En el paralelo C se trabajó con el modelo de enseñanza tradicional. El docente es el mismo que en pararlo B. Aquí fue él quien desarrolló las clases de una manera expositiva, sin mayor participación de los estudiantes. No hubo el trabajo en equipo, cada alumno lo hizo de forma individual y pasiva, escuchando la exposición del profesor y luego replicando lo propuesto por él. El maestro realiza una enseñanza muy estructurada, no promueve la exploración y discusión desde el estudiante, no plantea preguntas que les permitan reflexionar y que se orienten hacia un pensamiento crítico.

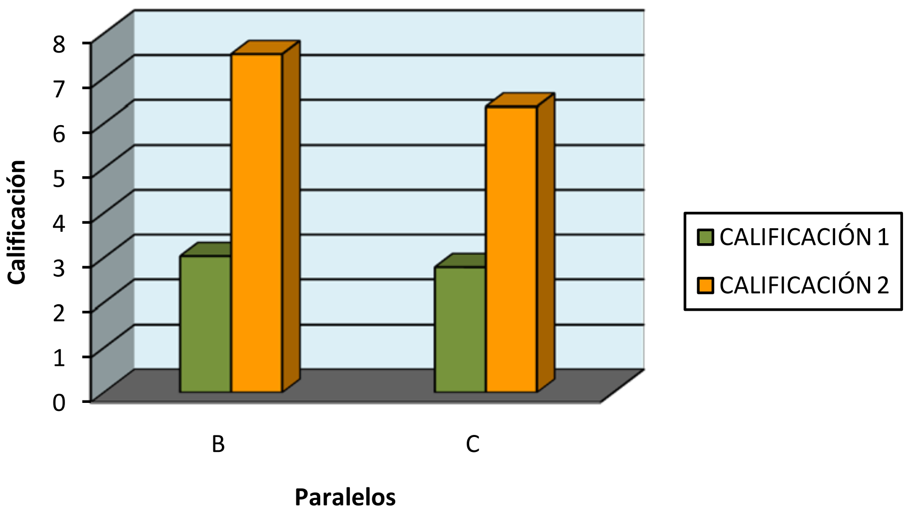


Gráfico 5. Décimo de Básica, Calificaciones medias en los paralelos B y C

El gráfico 5 nos muestra que se producen diferencias entre las medias de las calificaciones en los paralelos B y C, y que la diferencia en el paralelo B es mayor. Estos puntajes con mayor detalle se registran en la tabla 15.

Tabla 15

Décimo de Básica, Medias de calificación 1 y 2 en los paralelos B y C

CALIFICACIÓN 1				CALIFICACIÓN 2			
PARALELO	**N**	**media**	**desv. típica**	**PARALELO**	**N**	**Media**	**desv. típica**
B	14	3,036	1,0825	**B**	14	7,536	1,2163
C	19	2,789	1,0842	**C**	19	6,368	0,8794
Total	33	2,913	1,0834	**total**	33	6,952	1,0479

La tablas 16 y 17 muestran los resultados de la aplicación de la prueba "t" Student para dos muestras relacionadas en los paralelos B y C, respectivamente; con el fin de conocer si existen o no diferencias significativas entre las medias de las calificaciones antes y después del proceso.

Tabla 16

Décimo de básica, Paralelo B: Prueba "t" Student de dos muestras relacionadas

Paralelo B	Media	Desv. estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza		t	gl	Sig. bilateral
				Inferior	Superior			
calif. 2- calif. 1	4,50	1,37	0,37	3,71	5,29	12,3	13	0,00

El valor de la significancia es de 0,00<0,05; con lo cual se concluye con un 95% de probabilidad que la diferencia entre medias de las calificaciones antes y después del proceso enseñanza-aprendizaje, es significativa.

Tabla 17

Décimo de básica, Paralelo C: Prueba "t" Student de dos muestras relacionadas

Paralelo C	Media	Desv. estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza		t	gl	Sig. bilateral
				Inferior	Superior			
calif. 2- calif. 1	3,58	0,98	0,22	3,11	4,05	16,0	18	0,00

De la misma forma que en el paralelo B, aquí se puede observar que el valor de la significancia es de 0,00<0,05; con lo cual se puede aseverar con un 95% de probabilidad que la diferencia entre las medias de las calificaciones de los estudiantes antes y después del proceso educativo, resulta ser significativa.

Ahora, para analizar si estos dos grupos difieren significativamente entre sí en cuando al incrementoen sus calificaciones antes y después del proceso enseñanza-aprendizaje, se aplica la prueba “t” Student para dos muestras independientes (anexo 3).

Prueba de hipótesis

Hipótesis alternativas: $H_i: \bar{X}_a \neq \bar{X}_b$

H_{i5}: El rendimiento académico en Geometríacon el uso del modelo de Van Hiele y el uso del software Geogebra se incrementa frente al uso del método tradicional.

Hipótesis nula: $H_0: \bar{X}_a = \bar{X}_b$

H_{03}: El rendimiento académico en Geometríacon el uso del modelo de Van Hiele y el uso del software Geogebra es igual a la aplicación del método tradicional.

Tabla 18

Décimo de Básica, Paralelos B y C: Prueba "t" Student para dos muestras independientes

	Prueba Levene calidad var.		Prueba t para la igualdad de medias						
	F	Sig.	t	gl	Sig. (bilat.)	Dif. de medias	Dif. de error	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
								Inf.	Sup.
CALIF. Se asumenvarianzas iguales	2,465	0,127	2,257	31	0,031	0,9211	0,408	0,089	1,754
No se asumenvarianzas iguales			2,143	22,25	0,043	0,9211	0,430	0,030	1,812

Asumiendo varianzas iguales (anexo 3), el valor de la significancia es de 0,031<0,05; con lo cual se concluye con un 95% de probabilidad que la diferencia enel incremento de las calificaciones entre los estudiantes de los paralelos B y C es significativa; por lo que se rechaza la hipótesis nula H_{03} y se acepta la hipótesis alternativaH_{i5}.

H_{i5}: El rendimiento académico en geometríacon el uso del modelo de Van Hiele y el uso del software Geogebra se incrementa frente al uso del método tradicional.

Al finalizar el análisis para cada uno de los niveles de estudio, se concluye que el incremento en elrendimiento académico en Geometría de octavo y décimo año de Educación General Básica Superior se debe a las variables intervinientes, el modelo de Van Hiele y el modelo de Van Hiele con el uso del software Geogebra respectivamente.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

La tabla 19 permite sintetizar aspectos relevantes de la investigación. En ella se registran la intervención que se implementó en cada uno de los cursos en los tres años de Educación General Básica Superior y las conclusiones que se obtienen después de la aplicación de las pruebas 1 y 2, y haber docimado las hipótesis.

Tabla 19

Síntesis de las conclusiones obtenidas

	Octavo de Básica	Noveno de Básica	Décimo de Básica
Intervención	Modelo de Van Hiele	Software Geogebra	Modelo de Van Hiele y software Geogebra
Conclusiones obtenidas entre la primera y segunda prueba en ambos paralelos	El rendimiento académico en Geometría se incrementa	El rendimiento académico en Geometría se incrementa	El rendimiento académico en Geometría se incrementa
Conclusiones obtenidas entre los dos paralelos	El rendimiento académico en Geometría se incrementa significativamente con la intervención	El rendimiento académico en Geometría no se incrementa significativamente con la intervención	El rendimiento académico en Geometría se incrementa significativamente con la intervención

- Los resultados determinan que el rendimiento académico en Geometría aumenta significativamente en los dos paralelos de cada uno de los tres niveles, entre la primera y la segunda prueba. Esta conclusión resulta evidente, por la enseñanza del bloque geométrico que se implementó a partir de la primera prueba. Por consiguiente, los resultados que se obtienen a partir de este instrumento permiten mostrar que los estudiantes de los seis paralelos tuvieron conocimientos previos sobre el tema y sus niveles de conocimiento inicial fueron diferentes.

El paradigma constructivista de la enseñanza-aprendizaje propone considerar como punto de partida para la adquisición del nuevo conocimiento, recabar los contenidos que los estudiantes ya poseen sobre el tema. Gracias a lo que el estudiante ya sabe, puede conformar la primera visión del nuevo contenido, atribuirle un primer significado y sentido, y así iniciar en el proceso de aprender.

- Después de aplicar la segunda prueba se observa que el rendimiento académico de los estudiantes de octavo de básica del paralelo D en donde se aplicó la estrategia del modelo de Van Hiele, y el de los estudiantes de décimo de básica del paralelo B en donde se empleó el modelo de Van Hiele con el uso del software Geogebra, aumenta significativamente. Esto determina que la intervención aplicada en estos cursos produce un mejoramiento general en el rendimiento académico en Geometría.

Lo complicado de los procesos educativos hace que difícilmente se pueda predecir lo que sucederá en el aula. La implementación del modelo de Van Hiele y/o el uso del software Geogebra permiten plantear un conjunto de relaciones de interacción que intervienen en el aprendizaje y que están en relación con las funciones del docente y el comportamiento de los estudiantes.

- El hecho de que los maestros trabajen con una planificación de acuerdo al modelo sorteado facilita su tarea, evita el trabajo sin sentido e improvisado. Las actividades propuestas en la planificación ofrecen al estudiante la posibilidad de realizar diferentes actividades de forma individual y en pequeños grupos. Pero también se necesita que el docente cuente con una serie de conocimientos, habilidades y destrezas para atender las demandas que pueden surgir en el proceso.

- Como existe una planificación de los temas, sus objetivos y actividades, los estudiantes conocieron previamente lo que tenían que realizar, y el por qué, otorgándole sentido a lo que hicieron. Esta situación fue una condición indispensable para que la propuesta del modelo de enseñanza les resulte atractiva y motivadora, y para que ellos estén dispuestos a realizar el máximo esfuerzo por aprender.

- En los paralelos en los que se aplicó como estrategia de enseñanza el uso del software Geogebra, los estudiantes sientieron que aprenden de una manera diferente y por sí mismos; requisito importante que convierte el aprendizaje en un proceso significativo.

- El desarrollo de las planificaciones que aplican el modelo de Van Hiele y/o el uso del software Geogebra se convierte en una guía para cualquier profesor. El revisar y seguir la descripción de la planificación proporciona orientaciones que pueden ayudar a mejorar su práctica docente en el aula.

- Los dos maestros que incorporaron el software tuvieron buena predisposición hacia este recurso tecnológico y mostraron interés y motivación por su aplicación. No tuvieron problema en emplearlo ya que los alumnos utilizan este recurso desde la educación básica inicial.

RECOMENDACIONES

- Tomar en cuenta que cuando se aplica un modelo de intervención en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, la Institución Educativa debe hacerse cargo de ello, asumiendo responsabilidades de tal manera que el docente que participe tenga el tiempo y el espacio suficiente para analizar el modelo propuesto.

- El maestro debe conocer muy bien el programa de estudio y dominar los conocimientos de la asignatura, para de esta manera realizar una adecuada y efectiva transferencia en el aula.

- Al momento de aplicar un modelo de intervención en la enseñanza con la utilización de un software es importante tener presente la disposición de los docentes hacia el uso de la tecnología, su conocimiento y capacidad. Revisar en qué condiciones están los recursos tecnológicos que posee la Institución Educativa. Además, lo ideal es que trabaje un estudiante por computador, con un máximo de dos alumnos por máquina, para que puedan interactuar y se familiaricen de una manera óptima con el uso del recurso.

- Elaborar cuentos o historias sobre problemas Geométricos de la vida cotidiana e incluirlos en las clases, como motivación hacia el estudio de esta rama de la Matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Aguirre, J. (27 de Mayo de 2012). *Formación pedagógica y didácticas universitarias.* Obtenido de http://www.nhc.noaa.gov/ftp/graphiscs/ATB/AL 1302 W.GIF. 6p.

Andrade, J., & Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano. Síntesis.* Madrid: EDU.

Carreño, E. (2010). *Análisis del conocimiento geométrico en estudiantes para profesor de matemáticas. Capacidades y destrezas que lo evidencian.* Recuperado el 23 de Junio de 2014, de https://www.google.com.ec/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0CCMQFjAB&url=http%3A%2F%2Firem.pucp.edu.pe%2Fwp-content%2Fuploads%2F2011%2F10%2Freporte_2_carreno_iii_coloquio.doc&ei=ub7JU6LiHKrMsQTnmYK4Cg&usg=AFQjCNEosddo2bl68nz5BaC

Council, R. S. (2001). *Teaching and Learning Geometry 11-19.* London: Royal Society / Joint Mathematical Concil.

Crowley, M. (1987). *Learning and Teachin Geometry.*

Delors, J. (1997). *La educación encierra un tesoro.* México: UNESCO.

Ecuador, M. d. (13 de 03 de 2014). *Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica 2010 Matemáticas: educacion.gob.ec.* Obtenido de file:///C:/Users/vanesita/Downloads/AC_7_M.pdf

Eskola20. (s.f.). Recuperado el 7 de Julio de 2014, de http://www.eskola20.org/formacion/tutoriales/nivel1/jugaryaprender/modulos/es/content_1_19.html

García, J. (1991). *Las técnicas de estudio, un complemento para el rendimiento escolar.* Asturias: UNED.

Iespugaramon. (s.f.). Recuperado el 7 de Julio de 2014, de http://www.iespugaramon.com/ies-puga-ramon/resources/explorando_funciones_con_geogebra1304680623831.pdf;jsessionid=F8DA0E8136526F71FAA82CCC6507465A

Jaime, & Gutiérrez. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele.* Sevilla: Alfar.

Jaspe, C. (2010). *El rendimiento estudiantil y las estrategias de enseñanza y aprendizaje.* Recuperado el 5 de Julio de 2014, de http://wwwestrategias264.blogspot.com/2010/07/rendimiento-academico-escolar.html

Jones, K. (2002). *Enseñanza y aprendizaje de la Geometría.* London: RoutledgeFalmer.

Lastra, S. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza-aprendizaje de la Geometría aplicada a escuelas críticas.* Santiago.

Maddox, H. (1973). *Cómo estudiar.* Barcelona: Oikos-tau S.A.

Malkevithc, J. (1991). *Geometría del Futuro.* Arlington: MA: COMAP.

Matínez, V. (2005). *Genesis.* Recuperado el 7 de Julio de 2014, de http://genesis.uag.mx/posgrado/revistaelect/educa/edu005.htm

Ministerio de Educación del Ecuador. (s.f.). Obtenido de http://educacion.gob.ec/

Ministerio de Educación del Ecuador. (s.f.). *educacion.gob.ec.* Recuperado el 21 de Julio de 2014, de http://web.educacion.gob.ec/_upload/10mo_anio_MATEMATICA.pdf

Órgano del Gobierno del Ecuador. (26 de Julio de 2012). *educacion.gob.ec.* Obtenido de http://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2012/08/Reglamento_LOEI.pdf

Osorio, N. (2010). *Geometria.* Recuperado el 19 de Julio de 2014, de http://es.scribd.com/doc/105171274/GEOMETRIA

Pérez, A. (1 de Septiembre de 2007). *Divulgamat2.* Recuperado el 21 de Julio de 2014, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=9976%3A8-septiembre-2007-programas-informcos-para-la-ensea-de-la-geometr&catid=74%3Arecursos-didicos-en-internet&directory=67&showall=1

Rubio, M. (2004). *Orientación y Metodología para la Educación a Distancia.* Loja: Universidad Técnica Particular de Loja.

Sánchez, I. (2001). *Aprendizaje Visible y Tecnología invisible.* Santiago de Chle: Dolmen.

Sanz, I. (2001). *Matemáticas y su Didáctica II. Geometría y medida.* Lejona: Universidad del País Vasco.

Torres, R. (2012). *Los achaques de la educación.* Recuperado el 3 de Julio de 2014, de http://books.google.com.ec/books?id=EHHObinBntwC&pg=PA81&dq=factores+que+inciden+en+el+rendimiento+academico&hl=es&sa=X&ei=XDOUT5HoI8SMgwekufzWBA&ved=0CC0Q6AEwAA#v=onepage&q=factores%20que%20inciden%20en%20el%20rendimiento%20academico&f=false

Vargas, G., & Gamboa, R. (10 de Junio de 2014). *revistas.una.ac.cr.* Obtenido de file:///C:/Users/rafael/Downloads/4944-10424-1-SM.pdf

Vitabar, F. (Agosto de 2011). *Semur.* Recuperado el 21 de Julio de 2014, de http://www.semur.edu.uy/curem3/actas/70.pdf