



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y
MECÁNICA**

CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

**PROYECTO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO**

**TEMA: ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN CONDUCTOS
FORMADOS POR LÁMINAS METÁLICAS DE PARED DELGADA
SOMETIDAS A CARGAS DE SUELO**

AUTOR: MORENO CÁRDENAS, MANUEL ALBERTO

**DIRECTOR: Ing. FERNÁNDEZ, EDGARDO
CODIRECTOR: Ing. PAZMIÑO, FRANCISCO MSc.**

SANGOLQUÍ

2015

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS ESPE
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

CERTIFICADO

Ing. EDGARDO FERNÁNDEZ (DIRECTOR)
Ing. FRANCISCO PAZMIÑO MSc. (CODIRECTOR)

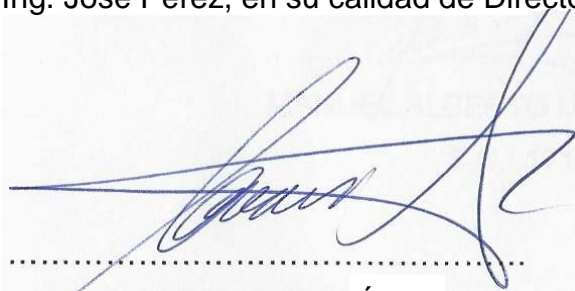
CERTIFICAN:

Que el trabajo titulado **“ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN CONDUCTOS FORMADOS POR LÁMINAS METÁLICAS DE PARED DELGADA SOMETIDAS A CARGAS DE SUELO”**, realizado por : Moreno Cárdenas Manuel Alberto, ha sido guiado y revisado periódicamente y cumple normas estatutarias establecidas por la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE, en el Reglamento Estudiantes de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.

Debido a que constituye un trabajo de excelente contenido científico que ayudará a la aplicación de conocimientos y al desarrollo profesional, recomiendan su publicación.

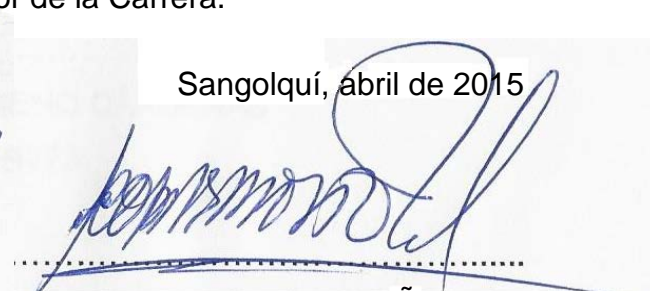
El mencionado trabajo consta de un documento empastado y un disco compacto el cual contiene los archivos en formato portátil de Acrobat (PDF). Autorizan al señor Manuel Alberto Moreno Cárdenas que lo entregue el señor Ing. José Pérez, en su calidad de Director de la Carrera.

Sangolquí, abril de 2015



Ing. EDGARDO FERNÁNDEZ

DIRECTOR



Ing. FRANCISCO PAZMIÑO MSc.

CODIRECTOR

**UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS ESPE
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA**

DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD

Yo,

Moreno Cárdenas Manuel Alberto

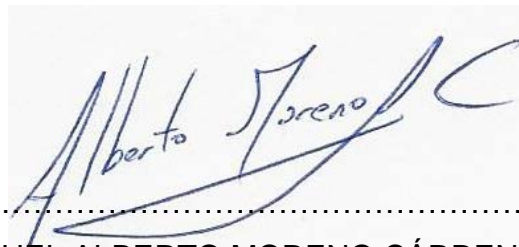
DECLARO QUE:

El proyecto de grado titulado “ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN CONDUCTOS FORMADOS POR LÁMINAS METÁLICAS DE PARED DELGADA SOMETIDAS A CARGAS DE SUELO”, ha sido desarrollado en base a una investigación exhaustiva, respetando derechos intelectuales de terceros, conforme las citas que constan en los pie de páginas correspondientes, cuyas fuentes se incorporan en la bibliografía.

Consecuentemente este trabajo es de mi propia autoría.

En virtud de esta declaración, me responsabilizo del contenido, veracidad y alcance científico del proyecto de titulación en mención.

Sangolquí, abril de 2015



MANUEL ALBERTO MORENO CÁRDENAS

C.C.: 1715304273

**UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS ESPE
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA**

AUTORIZACIÓN

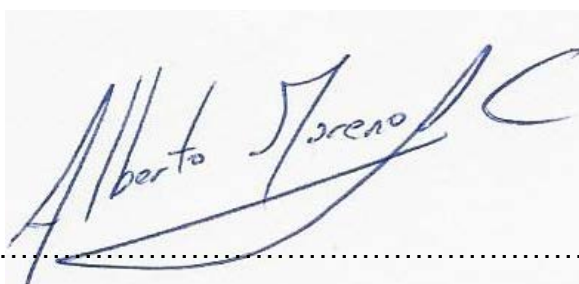
Yo,

MANUEL ALBERTO MORENO CÁRDENAS

AUTORIZO:

A la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, la publicación en la biblioteca Virtual de la Institución del trabajo titulado: **“ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN CONDUCTOS FORMADOS POR LÁMINAS METÁLICAS DE PARED DELGADA SOMETIDAS A CARGAS DE SUELO”**, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi exclusiva responsabilidad y autoría.

Sangolquí, abril de 2015

A handwritten signature in blue ink, reading "Manuel Alberto Moreno Cárdenas". The signature is written in a cursive style with a large, sweeping flourish at the end.

MANUEL ALBERTO MORENO CÁRDENAS

C.C.: 1715304273

DEDICATORIA

Este proyecto es dedicado especialmente a Dios por darme la virtud y la fortaleza para enfrentar grandes desafíos, a mi madre que gracias a su amor y apoyo incondicional me ayudó a alcanzar las metas que me he propuesto en el hermoso camino de la vida, a la memoria de mi padre Oswaldo el cual me dejó un gran ejemplo de valores y cariño, a mis hermanos y familia por todo su sustento.

A las personas que me brindaron ayuda y amistad a través de todos los años de estudio y a aquellos que brindan a mi vida de momentos inolvidables.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por guiarme en el camino correcto en la vida, tanto personal como espiritual, a mis padres por darme la vida y ser los inspiradores de mis logros, a mis familiares por ayudarme a superar los retos más duros.

Agradezco a los docentes de la ESPE por proporcionarme una educación de alto nivel académico y moral para emprender mi camino en el campo laboral y tener éxito en el mismo.

Al Ing. Edgardo Fernández y al Ing. Francisco Pazmiño, director y codirector respectivamente de este proyecto, por las enseñanzas y conocimientos impartidos para la elaboración acertada en el tiempo de desarrollo de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

CERTIFICADO	ii
DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD	iii
AUTORIZACIÓN	iv
DEDICATORIA	v
AGRADECIMIENTOS	vi
ÍNDICE GENERAL	vii
ÍNDICE DE CUADROS.....	x
ÍNDICE DE ECUACIONES.....	xi
ÍNDICE DE FIGURAS.....	xii
SIMBOLOGÍA.....	xvi
RESUMEN.....	xvii
ABSTRACT	xviii
CAPÍTULO 1 GENERALIDADES.....	1
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. ANTECEDENTES.....	2
1.3. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA.....	3
1.4. OBJETIVOS.....	4
1.4.1. GENERAL	4
1.4.2. ESPECÍFICOS	4
1.5. ALCANCE	4
CAPÍTULO 2 FUNDAMENTO TEÓRICO.....	5
2.1. DEFORMACIONES Y ESFUERZOS	5
2.1.1. DEFORMACIÓN ELÁSTICA	5

2.1.2. DEFORMACIÓN PLÁSTICA.....	6
2.1.3. ESFUERZOS EN ELEMENTOS CILÍNDRICOS	7
2.1.4. DESPLAZAMIENTOS EN ELEMENTOS CILÍNDRICOS	9
2.2. ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD	11
2.2.1. ANÁLISIS DEL EQUILIBRIO.....	11
2.2.2. ESTUDIO DEL PANDEO	19
2.3. ESTUDIO DE CARGAS.....	36
2.3.1. ESTADOS DE CARGA	36
2.3.2. CARGAS ESTABLECIDAS POR NORMATIVA	38
2.3.3. DETERMINACIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE CARGAS.....	40
2.4. ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS.....	43
2.4.1. PROCESO DE ANÁLISIS	44
2.4.2. VARIABLES MECÁNICAS Y ECUACIONES BÁSICAS.....	47
2.4.3. EQUILIBRIO EN GEOMETRÍAS COMPLEJAS	48
2.4.4. ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD	55
2.5. USO DEL PROGRAMA ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS PROFESSIONAL PARA ANÁLISIS DE PANDEO	57
2.5.1. MÓDULO APLICATIVO DE PANDEO	58
2.5.2. MÉTODO DE AUTOVALORES EN ROBOT STRUCTURAL	59
2.5.3. PROCESO DE ANÁLISIS EN ROBOT STRUCTURAL.....	61
CAPÍTULO 3 ANÁLISIS DE PANDEO CON AUTODESK ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS PROFESSIONAL.....	62
3.1. PANDEO EN ELEMENTOS DE PARED DELGADA DE SECCIÓN CONSTANTE	62
3.1.1. PLACA RECTANGULAR	62
3.1.2. ARCO SEMICIRCULAR.....	64
3.1.3. CILINDRO	67

CAPÍTULO 4	COMPARACIÓN DE RESULTADOS	71
4.1.	PANDEO EN ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE	71
4.1.1.	ARCO CON APOYOS ARTICULADOS	71
4.1.2.	ARCO CON APOYOS EMPOTRADOS	77
4.2.	PANDEO EN CILINDRO DE SECCIÓN CONSTANTE	83
4.2.1.	CILINDRO DE MEDIA LONGITUD (APROXIMADAMENTE 10m).....	84
4.2.2.	CILINDRO DE GRAN LONGITUD (APROXIMADAMENTE 500 m)....	87
CAPÍTULO 5	PANDEO EN CONDUCTOS CORRUGADOS	90
5.1.	CONDUCTO CORRUGADO TIPO ARCO SEMICIRCULAR	91
5.2.	CONDUCTO CORRUGADO CILÍNDRICO	98
5.3.	CONDUCTO CORRUGADO ABOVEDADO	99
5.4.	ALTURAS DE RELLENO.....	101
CAPÍTULO 6	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	104
6.1.	CONCLUSIONES	104
6.2.	RECOMENDACIONES.....	105
BIBLIOGRAFÍA	107	
ANEXO 1	SELECCIÓN DE PANDEO EN ROBOT STRUCTURAL	109
ANEXO 2	VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS EN ROBOT STRUCTURAL	110
ANEXO 3	VISUALIZACIÓN DE DEFORMACIONES EN ROBOT STRUCTURAL	111
ANEXO 4	COMPARACIÓN EJEMPLO DE DISEÑO – MÉTODO AISI	112

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 2-1 Factor k para arcos empotrados bajo presión uniforme	33
Cuadro 2-2 Cargas vivas para carreteras y ferroviarias.....	38
Cuadro 4-1 Cargas críticas de pandeo de arco de sección constante con variación del ángulo entre apoyos (apoyos articulados)	72
Cuadro 4-2 Cargas críticas de pandeo de arco de sección constante con variación del espesor (apoyos articulados)	73
Cuadro 4-3 Cargas críticas de pandeo de arco de sección constante con variación del radio (apoyos articulados)	75
Cuadro 4-4 Cargas críticas de pandeo de arco de sección constante con variación de longitud (apoyos articulados)	76
Cuadro 4-5 Cargas críticas de pandeo de arco de sección constante con variación del ángulo entre apoyos (apoyos empotrados)	78
Cuadro 4-6 Cargas críticas de pandeo de arco de sección constante con variación del espesor (apoyos empotrados).....	79
Cuadro 4-7 Cargas críticas de pandeo de arco de sección constante con variación del radio (apoyos empotrados)	81
Cuadro 4-8 Cargas críticas de pandeo de arco de sección constante con variación de longitud (apoyos empotrados).....	82
Cuadro 4-9 Cargas críticas de pandeo de cilindro de longitud intermedia (aproximadamente 10m) de sección constante con variación del espesor.....	84
Cuadro 4-10 Errores carga crítica de cilindro de longitud intermedia (aproximadamente 10m) de sección constante con variación del radio.....	86
Cuadro 4-11 Cargas críticas de pandeo de cilindro de gran longitud (aproximadamente 500m) de sección constante con variación del espesor	87
Cuadro 4-12 Cargas críticas de pandeo de cilindro de gran longitud (aproximadamente 500m) de sección constante con variación del radio.....	88

Cuadro 5-1 Cargas críticas de arco de radio 2.5 [m] con variación de espesor y tipo de sección corrugada	92
Cuadro 5-2 Cargas críticas de arco de radio 5[m] con variación de espesor y tipo de sección corrugada	93
Cuadro 5-3 Cargas críticas de arco de radio 10[m] con variación de espesor y tipo de sección corrugada	95
Cuadro 5-4 Cargas críticas de arco de radio 15[m] con variación de espesor y tipo de sección corrugada	96
Cuadro 5-5 Alturas de relleno máximas en metros de arco de radio 2.5 [m] con variación de espesor y tipo de sección corrugada.....	101
Cuadro 5-6 Alturas de relleno máximas en metros de arco de radio 5 [m] con variación de espesor y tipo de sección corrugada ...	102
Cuadro 5-7 Alturas de relleno máximas de arco de radio 10 [m] con variación de espesor y tipo de sección corrugada	102

ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 2-1	5
Ecuación 2-2.....	8
Ecuación 2-3.....	9
Ecuación 2-4.....	11
Ecuación 2-5.....	13
Ecuación 2-6.....	13
Ecuación 2-7	16
Ecuación 2-8.....	18
Ecuación 2-9.....	18
Ecuación 2-10.....	18
Ecuación 2-11	23
Ecuación 2-12.....	24
Ecuación 2-13.....	25
Ecuación 2-14.....	28

Ecuación 2-15.....	28
Ecuación 2-16.....	30
Ecuación 2-17.....	30
Ecuación 2-18.....	32
Ecuación 2-19.....	34
Ecuación 2-20.....	34
Ecuación 2-21.....	35
Ecuación 2-22.....	35
Ecuación 2-23.....	42
Ecuación 2-24.....	54
Ecuación 2-25.....	54
Ecuación 2-26.....	55
Ecuación 2-27.....	56
Ecuación 2-28.....	59
Ecuación 2-29.....	60
Ecuación 2-30.....	60
Ecuación 2-31.....	60
Ecuación 5-1.....	98

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Curva Esfuerzo – Deformación.....	6
Figura 2-2 Esfuerzos Circunferenciales en cilindros.....	7
Figura 2-3 Esfuerzos Longitudinales.....	8
Figura 2-4 Tensiones en pared de cilindros.....	9
Figura 2-5 Placa sometida a cargas directas.....	12
Figura 2-6 Placa sometida a cargas laterales.....	13
Figura 2-7 Proyección Nxy en plano z.....	15
Figura 2-8 Equilibrio en un arco.....	17
Figura 2-9 Diagrama Carga – Deflexión.....	19
Figura 2-10 Estados de Equilibrio.....	20

Figura 2-11 Equilibrio estable	20
Figura 2-12 Equilibrio Indiferente	21
Figura 2-13 Equilibrio Inestable	21
Figura 2-14 Punto de bifurcación	22
Figura 2-15 Caso de Carga en Placa Rectangular	23
Figura 2-16 Parámetro K carga de pandeo.....	25
Figura 2-17 Arco Semicircular bajo presión lateral externa	26
Figura 2-18 Arco uniformemente comprimido (articulado)	29
Figura 2-19 Arco uniformemente comprimido (empotrado)	31
Figura 2-20 Cilindro con presión lateral externa	33
Figura 2-21 Área usada para el cálculo de CM.....	37
Figura 2-22 Carga de Maquinaria Pesada y Avión sobre conductos Av. Luis Tufiño	37
Figura 2-23 Combinación de carga viva H-20 de carreteras con carga muerta.....	39
Figura 2-24 Combinación de carga viva E-80 de ferroviaria con carga muerta.....	39
Figura 2-25 Diagrama de fuerzas ejercidas por el suelo en un túnel	41
Figura 2-26 Esquema Método de Elementos Finitos	43
Figura 2-27 Discretización del Dominio	45
Figura 2-28 Parámetros Fundamentales de Estado e Incremento.....	51
Figura 2-29 Estados de un arco bajo presión radial externa uniforme.....	52
Figura 2-30 Algoritmo de Newton-Raphson.....	54
Figura 2-31 Presentación Autodesk Robot Structural Analysis Professional	57
Figura 2-32 Entorno de Pandeo.....	58
Figura 2-33 Entorno de elementos de pared delgada.....	61
Figura 3-1 Modelo de Placa Rectangular analizada con Robot Structural....	62
Figura 3-2 Modelo de Placa simplemente apoyada después del análisis de pandeo	63
Figura 3-3 Modelo de Arco Articulado analizado con Robot Structural.....	64
Figura 3-4 Modelo de arco articulado después del análisis de pandeo	65

Figura 3-5 Modelo de Arco Empotrado analizado con Robot Structural	66
Figura 3-6 Modelo de arco empotrado después del análisis de pandeo	67
Figura 3-7 Modelo de Cilindro simplemente soportado analizado con Robot Structural	67
Figura 3-8 Modelo de cilindro de longitud intermedia (aproximadamente 10m) después del análisis de pandeo	69
Figura 3-9 Modelo de cilindro de gran longitud (aproximadamente 500m) después del análisis de pandeo	70
Figura 4-1 Modelo de Arco articulado	71
Figura 4-2 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación de ángulo entre apoyos (apoyos articulados)	72
Figura 4-3 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación del espesor (apoyos articulados)	74
Figura 4-4 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación del radio (apoyos articulados)	75
Figura 4-5 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación de longitud (apoyos articulados)	77
Figura 4-6 Modelo de Arco empotrado	77
Figura 4-7 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación de ángulo entre apoyos (apoyos empotrados)	78
Figura 4-8 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación del espesor (apoyos empotrados)	80
Figura 4-9 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación del radio (apoyos empotrados)	81
Figura 4-10 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación de longitud (apoyos empotrados)	83
Figura 4-11 Modelo de cilindro simplemente soportado	83
Figura 4-12 Errores carga crítica de cilindro de longitud intermedia (aproximadamente 10m) de sección constante con variación del espesor	85

Figura 4-13 Errores carga crítica de cilindro de longitud intermedia (aproximadamente 10m) de sección constante con variación del radio.....	86
Figura 4-14 Errores carga crítica de cilindro de gran longitud (aproximadamente 500m) de sección constante con variación del espesor.....	88
Figura 4-15 Errores carga crítica de cilindro de gran longitud (aproximadamente 500m) de sección constante con variación del radio.....	89
Figura 5-1 Tipos de corrugaciones	90
Figura 5-2a Cargas críticas en arco corrugado de 2.5 [m] de radio (P38-P100).....	92
Figura 5-3a Cargas críticas en arco corrugado de 5 [m] de radio (P38-P100).....	94
Figura 5-4a Cargas críticas en arco corrugado de 10 [m] de radio (P38-P100).....	95
Figura 5-5a Cargas críticas en arco corrugado de 15 [m] de radio (P38-P100).....	97
Figura 5-6 Carga crítica de cilindro corrugado de radio 1.5 [m] con corrugado P152	98
Figura 5-7 Ducto corrugado de tipo abovedado 20PA3-11	99
Figura 5-8 Carga crítica de ducto abovedado modelo 20PA3-11 con corrugado P152.....	100

SIMBOLOGÍA

CM	Carga Muerta o permanente
CV	Carga Viva
D	Rigidez a la flexión
h	Espesor de placa o cilindro
n_{cr}	Modo de pandeo crítico
N_x, N_y, N_{xy}	Fuerzas Normales y cortante por unidad en la superficie media
P_{cr}	Carga Crítica de Pandeo
R	Radio de Curvatura
u, v, w	Desplazamientos en los ejes x, y, z respectivamente
x, y, z	Coordenadas rectangulares
ρ	Densidad de masa
ε	Deformación
σ	Esfuerzo
ν	Número de Poisson

RESUMEN

El aumento de la construcción de carreteras en el país obliga a buscar soluciones para los distintos problemas de intersecciones de vías de gran densidad de flujo, como también para el manejo de agua lluvia. Con la ayuda de ductos livianos fabricados con láminas metálicas de pared delgada se intenta obtener una solución rápida, eficaz y económica en comparación con puentes o conductos fabricados con hormigón. Este estudio muestra las características de resistencia al pandeo que presentan estos ductos al ser sometidos a presión radial, con diferentes características geométricas. Este objetivo se logró mediante la investigación de la teoría de la estabilidad elástica que contempla soluciones analíticas al pandeo de ductos curvos, el estudio del comportamiento del suelo y las soluciones matemáticas usadas para resolverlos. Posteriormente se realizó un análisis con Autodesk Robot Structural Analysis Professional, el programa simula el problema de pandeo con el método de elementos finitos y la resolución de autovalores, por lo cual la solución es aproximada y los valores obtenidos tienen un porcentaje mínimo de divergencia. Comparando los resultados derivados analíticamente con los obtenidos del cálculo del programa, se demuestra que las soluciones analíticas están vigentes y se observa que el comportamiento del programa es bastante confiable. Por último se simularon conductos corrugados usados en la construcción dentro del país, así como algunas nuevas secciones de corrugado, utilizadas recientemente en el resto del mundo, obteniendo las resistencias al pandeo de los ductos, y relacionándolos con las cargas del suelo para obtener alturas máximas de relleno.

PALABRAS CLAVE:

- **LÁMINAS METÁLICAS DE PARED DELGADA**
- **PANDEO EN ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS**
- **PANDEO DE ARCO**
- **DUCTO CORRUGADO**
- **ALCANTARILLA METÁLICA**

ABSTRACT

The increasement of road construction in the country engaged in seeking solutions to the various problems of large flow ways intersections, as well as for rainwater management. Through the help of light ducts made of thin-walled metal sheets a quick, efficient and economical solution compared to bridges or conduits made of concrete is achieved. This study shows the buckling resistance characteristics presented by these products when they are subjected to radial pressure, with different geometric features. This was reached by investigating the elastic stability theory which provides analytical solutions for curved ducts buckling, the study of the behavior of soils and math solutions used to solve them. Subsequently a calculation with Autodesk Robot Structural Analysis Professional is performed, the program solves the buckling problem with the finite element method and the resolution of eigenvalues, whereby the solution is approximated and the obtained values have a minimum percentage of divergence. Comparing analytical results with those obtained by the program, showed that the analytical solutions are current and a quite reliable program behavior was observed. Finally corrugated pipes used in construction within the country were simulated as well as some new corrugated sections recently used in the world, getting values of bucking resistance of pipes, and linking it with loads of soil to obtain maximum filling heights.

KEYWORDS:

- **THIN WALLED METAL SHEETS**
- **BUCKLING IN ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS**
- **ARC BUCKLING**
- **CORRUGATED PIPE**
- **METAL CULVERT**

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES

1.1. INTRODUCCIÓN

Los conductos flexibles de acero tienen amplias aplicaciones como elementos estructurales en muchos campos de la ingeniería, debido a que su capacidad de carga es controlada por su resistencia al pandeo producido por imperfecciones geométricas presentes en la misma, dando como resultado diseños altamente eficientes en aplicaciones mecánicas, civiles, aeroespaciales, navales, etc.

El proceso de conformado de las láminas delgadas, que conformarán el sistema estructural, es altamente complejo dando vulnerabilidad a la aparición de una gran cantidad de imperfecciones afectando la capacidad de carga de las placas. Por lo cual un pronóstico de una fuerza admisible es de gran importancia, ya que un fallo por pandeo puede ser desastroso.

En este documento se asimilarán los desarrollos matemáticos que facilitan el cálculo de las deformaciones que se presentaran en las láminas de pared delgada que constituyen los ductos, luego comparándolos con fundamentos teóricos para poder evidenciar los efectos de distintos valores de carga en el elemento estructural.

1.2. ANTECEDENTES

La construcción con técnicas modernas de ingeniería constituyen un reto para ingenieros, consultores, contratistas y funcionarios públicos. Los conductos flexibles de acero sometidos a cargas de suelo, desempeñan un papel importante en aplicaciones como alcantarillas, desagües pluviales, obras de drenaje subterráneo, vertederos, pasos a desnivel, y túneles para servicios. Estos conductos se emplean para carreteras, ferrocarriles, aeropuertos, obras municipales, zonas recreativas, parques industriales, obras para conservación, defensas contra inundaciones, instalaciones para reducir la contaminación del agua, entre otros.

Los conductos de acero, reconocidos desde hace mucho tiempo por su destacada resistencia estructural bajo las cargas de suelo pesadas, se conocen ahora como el resultado de una compleja combinación, la interacción entre suelo y el acero. Esta interacción implica que el conducto flexible de acero actúa con el relleno de tierra que lo rodea para soportar las cargas.

Las propiedades mecánicas del acero se controlan durante la producción, y el producto terminado cumple estrictamente con las rigurosas especificaciones requeridas por normativa. La resistencia y solidez de las estructuras “suelo-acero” es casi ilimitada, como resultado de numerosos experimentos en instalaciones de laboratorio y terreno.

1.3. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA

En el entorno de la construcción se hace importante el uso de drenajes transversales en carreteras, pasos a desnivel y otros necesarios, y con el crecimiento de las urbanizaciones se requiere que éstas posean una mayor capacidad para el flujo dentro del mismo, ya sea de aguas, vehículos, personas, etc.

En el mercado nacional existen muchos tipos de conductos, dependiendo de la necesidad de campo. Pueden ser éstas de hormigón, plástico o a su vez metálicas, en el cual se va a concentrar este estudio, debido a la gran acogida en el mercado nacional por su menor costo, facilidad de transporte y menor tiempo de instalación.

Se hace importante el estudiar el comportamiento de varias geometrías de conductos metálicos ya que esto permite mejorar los productos existentes, además de instaurar una base para el diseño de geometrías requeridas en la construcción que actualmente no se pueden obtener.

La importancia del proyecto de analizar el comportamiento de la estabilidad de conductos formados por placas de pared delgada está en el desarrollo de nuevos diseños que puedan ayudar a cumplir los requerimientos presentes en obra para llegar a ser más competitivos a nivel internacional.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. GENERAL

Analizar la estabilidad en conductos formados por láminas metálicas de pared delgada sometidas a cargas de suelo.

1.4.2. ESPECÍFICOS

- Realizar un estudio teórico, que concentre los temas necesarios para apreciar los fundamentos aplicados en el cálculo de estabilidad.
- Analizar la resistencia al pandeo en conductos formados por láminas metálicas de pared delgada utilizando un software adecuado.
- Comparar y analizar los resultados entregados por el software.

1.5. ALCANCE

El análisis de la estabilidad de conductos conformados con láminas de pared delgada, brindará información técnica valiosa para el desarrollo de productos estructurales que soportan cargas de suelo, los cuales son utilizados actualmente en la construcción vial.

El estudio que aquí se desarrolla servirá de ayuda para verificar los estados límite de pandeo que alcanzan ductos curvos de sección constante e isotrópica, dentro de la zona de deformación elástica, para luego aplicar el conocimiento adquirido en problemas complejos de arcos corrugados de sección ortotrópica, como también ejemplos de sección cilíndrica y abovedada sometidos a cargas radiales, comparando los resultados obtenidos con valores de catálogos comerciales. Este estudio no contempla el análisis de conexiones entre placas o de sus apoyos, tampoco se examinan condiciones geotécnicas, es decir características de suelo, pendiente, asentamiento, etc.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTO TEÓRICO

2.1. DEFORMACIONES Y ESFUERZOS

Dependiendo del tipo de material, geometría, tamaño y de las fuerzas aplicadas sobre un elemento, pueden ocurrir dos tipos de deformaciones, las cuales son:

- Deformación elástica
- Deformación plástica

2.1.1. DEFORMACIÓN ELÁSTICA

Este tipo de deformación es reversible, ya que una vez que las fuerzas son retiradas, el elemento vuelve a su posición original. La deformación elástica está gobernada por la ley de Hooke, la cual establece (Budynas & Nisbett, 2008, p. 29),

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2-1)$$

Donde σ es el esfuerzo, ε la deformación resultante y E es el módulo de elasticidad o también conocido como el módulo de Young. Esta relación se aplica solamente en el rango elástico e indica que la pendiente de la curva esfuerzo – deformación es usada para encontrar el módulo de elasticidad.

2.1.2. DEFORMACIÓN PLÁSTICA

Este tipo de deformación es irreversible, y se manifiesta de dos maneras:

- *Endurecimiento por deformación*: El material adquiere tenacidad a través del movimiento interno de las celdas.
- *Estricción*: Se caracteriza por la reducción de la sección transversal del material. Éste se alcanza al superar el límite de esfuerzo último. Durante esta fase, el material no puede soportar la tensión máxima y la deformación incrementa rápidamente, terminando con la fractura del elemento.

Se puede observar dichas deformaciones en el diagrama esfuerzo – deformación (Figura 2-1).

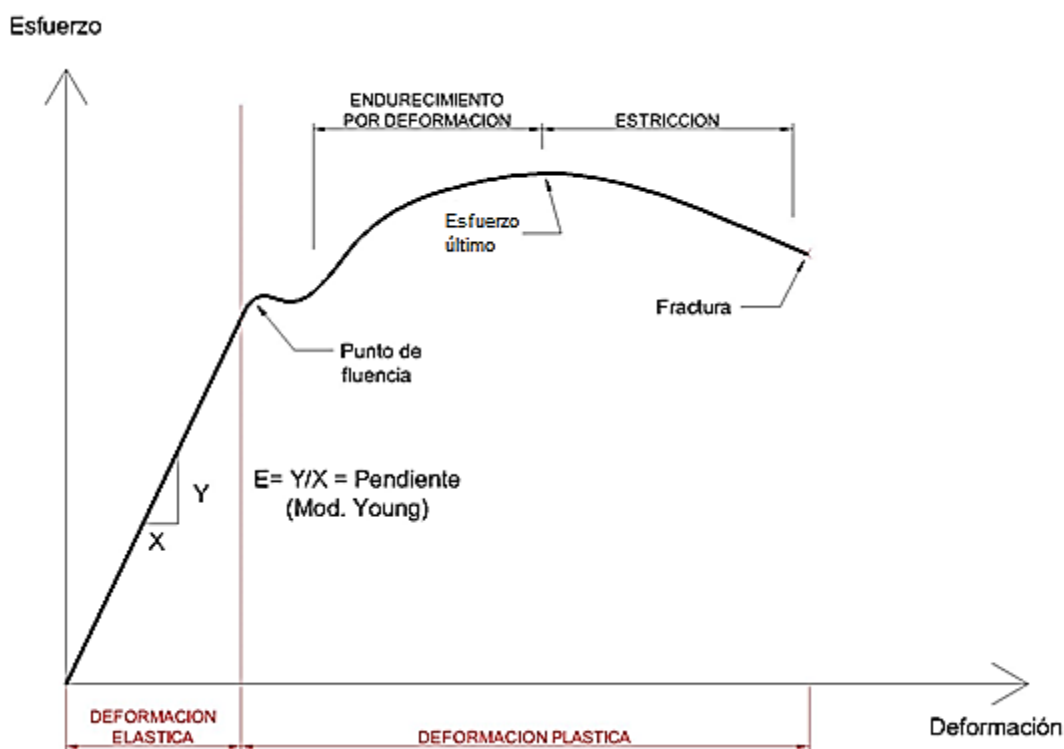


Figura 2-1 Curva Esfuerzo – Deformación (Hibbeler, 2011, p. 84)

Para el presente trabajo se tomara en cuenta únicamente la zona de deformación elástica, ya que el alcance comprende al momento la estabilidad elástica, debido a la complejidad de la resolución de sistemas no lineales en el rango plástico.

2.1.3. ESFUERZOS EN ELEMENTOS CILÍNDRICOS

Los esfuerzos que aparecen en elementos con paredes redondeadas han sido estudiados ampliamente en la aviación y en la industria petrolera, de los cuales se derivan los siguientes esfuerzos:

- **Esfuerzos Circunferenciales o de anillo**

Éste es un tipo de esfuerzo mecánico característico de los elementos cilíndricos, como resultado de una presión ya sea interna o externa. Ésta puede ser definida también como la fuerza circunferencial promedio, perpendicular al eje y a la tangente de la pared del cilindro, sobre cada elemento de área del espesor del cilindro.

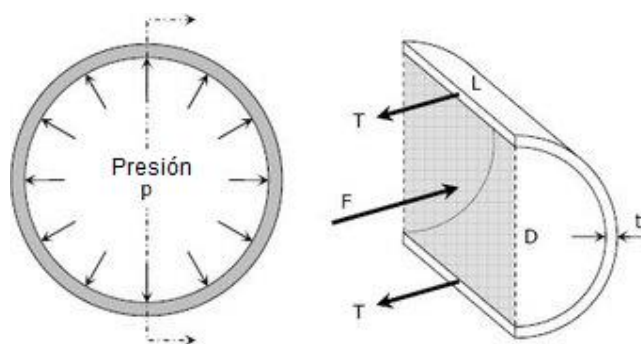


Figura 2-2 Esfuerzos Circunferenciales en cilindros

Debido a que el espesor de la pared es pequeño comparado con el diámetro, la fuerza que trata de partir el cilindro por la presión es,

$$F = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} prL \cos\theta d\theta = 2prL = pD_i L$$

El área que soporta esta fuerza está definido por $A = 2tl$, al sustituir en la ecuación básica de esfuerzo se obtiene (Budynas & Nisbett, 2008, p. 113),

$$\sigma_H = \frac{F}{A} = \frac{pD_i L}{2tL} = \frac{pD_i}{2t} \quad (2-2)$$

- **Esfuerzos Longitudinales o Axiales**

Son los esfuerzos que se producen en la dirección longitudinal

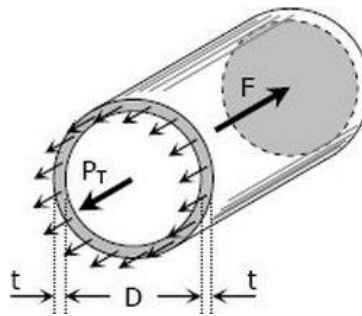


Figura 2-3 Esfuerzos Longitudinales

En este caso se consideran las fuerzas que tratan de dividir el cilindro a lo largo de su longitud. La fuerza debida a la presión es,

$$F = \int_0^r 2p\pi r dr = 2p\pi \frac{r^2}{2} = p \frac{\pi D_i^2}{4}$$

El área que soporta esta fuerza está definido por $A = \pi D_i t$, y al igual que en el caso anterior, se tiene (Beer, Johnston, Dewolf, & Mazurek, 2012, p. 151),

$$\sigma_L = \frac{F}{A} = \frac{p \frac{\pi D_i^2}{4}}{\pi D_i t} = \frac{p D_i}{4t} \quad (2-3)$$

- **Esfuerzos Radiales**

Las tensiones radiales son normales al plano curvado aislado del elemento. En cilindros de pared delgada, éstas normalmente no se consideran, porque son despreciables en comparación con las otras dos tensiones.

2.1.4. DESPLAZAMIENTOS EN ELEMENTOS CILÍNDRICOS

En una porción rectangular mínima de un cilindro de pared delgada existen dos tipos de esfuerzos, perpendiculares entre sí, el esfuerzo longitudinal σ_L y circunferencial σ_H , como se muestra en la figura 2-4.

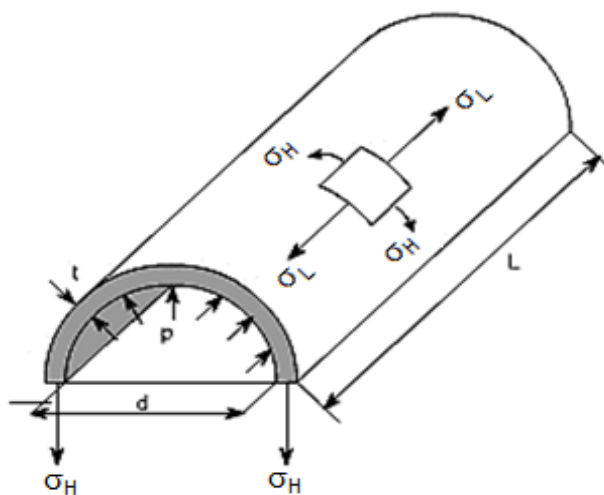


Figura 2-4 Tensiones en pared de cilindros

De la teoría de esfuerzos y deformaciones, se obtiene que la deformación longitudinal es (Mechanical and Industrial Engineering Department, 2004, pp. 39.7-39.9),

$$\varepsilon_L = \frac{1}{E}(\sigma_L - \nu\sigma_H) \quad (a)$$

Sustituyendo ambos esfuerzos con las ecuaciones calculadas anteriormente, se obtiene la siguiente fórmula para la deformación longitudinal,

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \left(\frac{pD}{4t} - \nu \frac{pD}{2t} \right) = \frac{pD}{4tE} (1 - 2\nu) \quad (b)$$

La deformación circunferencial puede ser definida como,

$$\varepsilon_C = \frac{\Delta \text{Circunferencia}}{\text{Circunferencia}_o} \quad (c)$$

$$\varepsilon_C = \frac{\pi(D + \Delta D) - \pi D}{\pi D} = \frac{\Delta D}{D} \quad (d)$$

La conclusión obtenida es que el esfuerzo circunferencial es equivalente a la deformación formada por el diámetro. A partir de la teoría básica de esfuerzos y deformaciones, la deformación circunferencial correspondiente es

$$\varepsilon_C = \frac{1}{E}(\sigma_C - \nu\sigma_L) \quad (e)$$

Sustituyendo ambos esfuerzos, al igual que en el anterior caso, se tiene que,

$$\varepsilon_C = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E} \left(\frac{pD}{2t} - \nu \frac{pD}{4t} \right) = \frac{pD}{4tE} (2 - \nu) \quad (f)$$

Y la deformación volumétrica está definida por,

$$\varepsilon_V = \frac{pD}{4tE} (5 - 4\nu) \quad (2-4)$$

2.2. ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD

2.2.1. ANÁLISIS DEL EQUILIBRIO

Cuando una placa es sometida a cargas laterales sobre el plano neutral se producen deflexiones tan pequeñas, por lo cual se desprecian dichas deformaciones, este plano se considera como *plano neutral*. Si además se incluyen fuerzas actuando en el plano medio de la placa, éstas producirán la deformación del plano y la aparición de esfuerzos. Para lo cual se tiene dos posibles casos:

1. Los esfuerzos en el plano medio son despreciables respecto a los esfuerzos críticos de pandeo. Así, el esfuerzo total se puede obtener añadiendo tensiones causadas por deformación y flexión del plano neutro.

2. Los esfuerzos en el plano medio no son despreciables, y su influencia en la deflexión de la placa son considerados. Para obtener la ecuación diferencial correspondiente para este caso se considera una placa de dimensiones dx y dy , como se muestra en la figura 2-5.

- **Análisis del equilibrio de una lámina rectangular**

Suponiendo una placa cuyas dimensiones son dx y dy sujeta a las fuerzas N_x , N_y y N_{xy} .

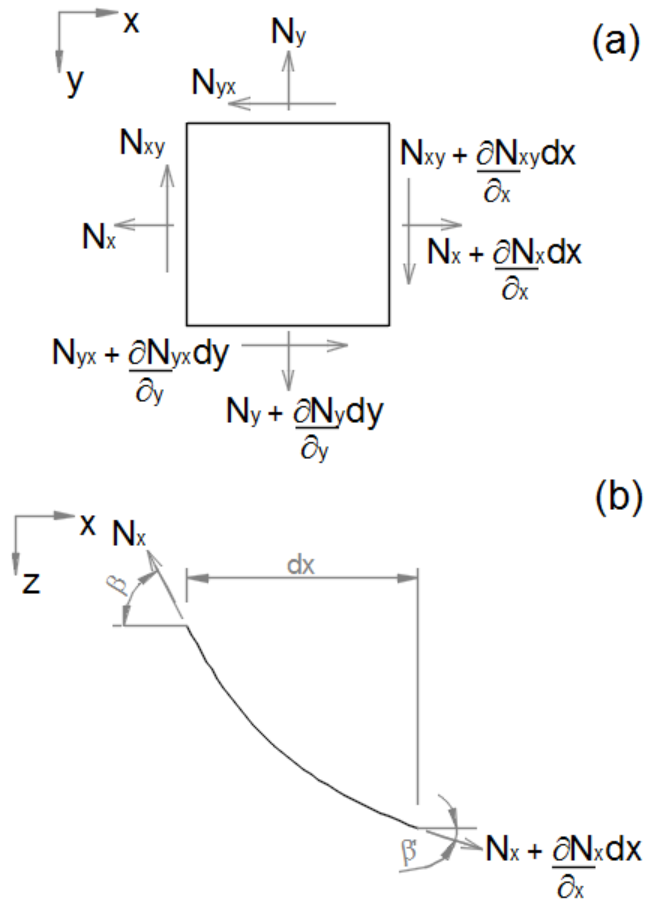


Figura 2-5 Placa sometida a cargas directas

Las fuerzas laterales de intensidad $p(x,y)$ se aplican al elemento, y los momentos que éstas producen se muestra en la figura 2-6.

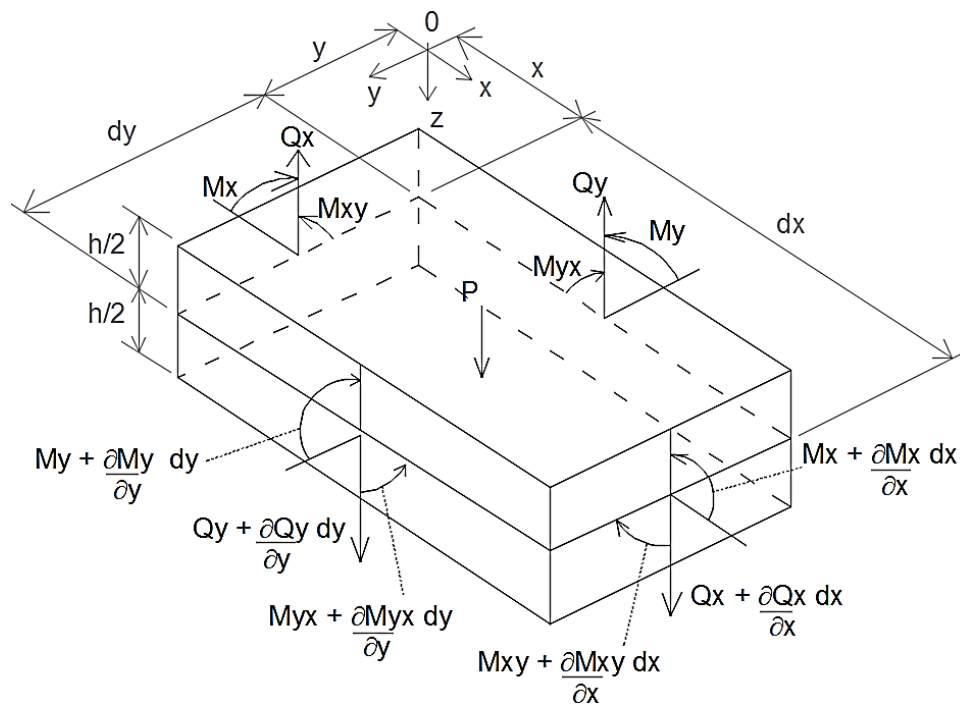


Figura 2-6 Placa sometida a cargas laterales

Analizando el equilibrio del elemento se obtiene que la sumatoria de las fuerzas es igual a cero, por lo tanto la sumatoria de fuerzas en el eje x es,

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy * \cos \beta' - N_x dy * \cos \beta = 0$$

Ya que las deflexiones son pequeñas, se puede deducir que $\cos \beta = \cos \beta' = 1$ con lo cual se tiene,

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2-5)$$

De la misma manera aplicando sumatoria de fuerzas en el eje y se obtiene,

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2-6)$$

Estas ecuaciones son independientes de la ecuación de deflexión de una placa bajo cargas laterales, por lo cual no se toman en cuenta en casos de deflexiones pequeñas.

Considerando las proyecciones de las fuerzas en el eje z según la figura 2-5(b), y debido a la curvatura de la placa de las fuerzas N_x se consigue,

$$-N_x dy * \sin \beta + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy * \sin \beta' \quad (a)$$

Ya que los ángulos β y β' son despreciables, resultan $\sin \beta \approx \beta \approx \partial w / \partial x$

$$\beta' = \beta + d\beta = \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \quad (b)$$

$$\beta' = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (c)$$

Sustituyendo en la ecuación 2-5, despreciando términos de segundo orden y simplificando se obtiene,

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (d)$$

De la misma manera se tiene la proyección en el eje z de las fuerzas N_y

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (e)$$

Las fuerzas N_{xy} se determinan considerando la curva de deflexión de la placa en la dirección y en los bordes de x, como muestra la figura 2-7.

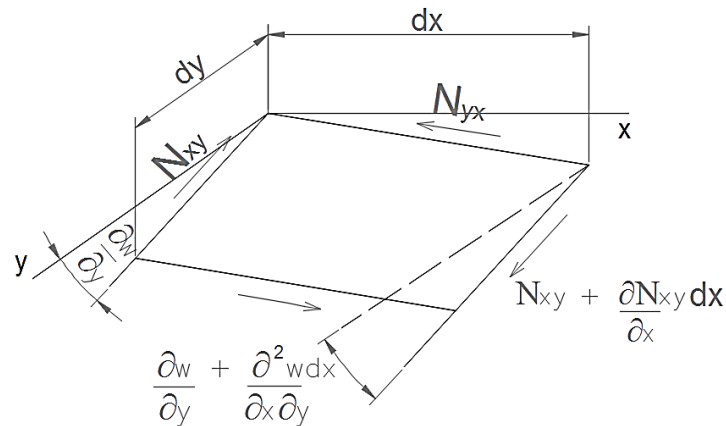


Figura 2-7 Proyección N_{xy} en plano z

Al reemplazar $\partial w/\partial y$, $\partial w/\partial y + (\partial^2 w/\partial x \partial y)dx$, se obtiene ecuaciones similares a las anteriores,

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (f)$$

Una expresión similar se obtiene para las fuerzas N_{yx}

$$N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (g)$$

Finalmente haciendo sumatoria de fuerzas en Z para las figuras 2-5 y 2-6

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \\ + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (h)$$

Por inspección se eliminan los elementos entre los paréntesis de (h) dando,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (i)$$

Reemplazando las cargas con las expresiones de la deformada del estudio de flexión de placas con carga lateral se obtiene la *ecuación diferencial que rige la flexión para placas de pared delgada sujeta a cargas laterales y directas* (Ventsel & Krauthammer, 2001, p. 98).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2-7)$$

- **Análisis del equilibrio de un arco**

Considerando solamente desplazamientos sin deformaciones y asumiendo que sobre una sección cualquiera de arco actúa una fuerza constante S y un momento flector. El efecto de la fuerza S en la flexión del arco puede ser sustituido con una carga distribuida equivalente en dirección radial, las cuales mantienen en equilibrio del arco, como se muestra en la figura 2-8.

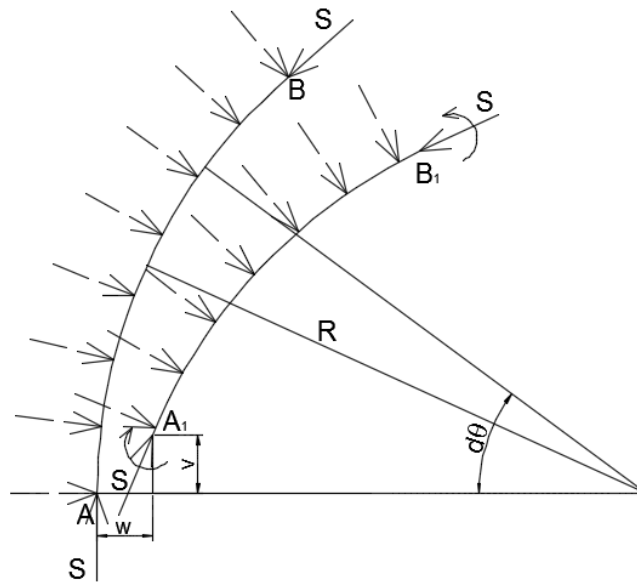


Figura 2-8 Equilibrio en un arco

Ya que el arco se desplaza sin deformarse, el arco AB toma la posición A_1B_1 pudiendo encontrar la magnitud de los momentos flectores.

Debido al cambio de la curvatura, la sección B del arco rota con respecto a la sección A,

$$Rd\theta \left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) \quad (a)$$

Debido a esta rotación, las fuerzas axiales rompen el equilibrio con las fuerzas uniformes, por lo cual se añade una fuerza adicional en dirección radial, cuya magnitud es,

$$SRd\theta \left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) \quad (b)$$

Así para tomar en cuenta el efecto de la fuerza S en la flexión del anillo, se añade una carga ficticia,

$$S \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) = \frac{S}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) \quad (c)$$

Tomando en cuenta un desplazamiento w , debido a la fuerza compresiva S y usando una solución de series trigonométricas, se concluye que cada coeficiente de la serie incrementa en una relación

$$\frac{1}{1 - \frac{SR^2}{(n^2 - 1)EI}} \quad (d)$$

Se puede observar que la deflexión incrementa indefinidamente, cuando la fuerza compresiva S se aproxima al valor

$$S = \frac{(n^2 - 1)EI}{R^2} \quad (2-8)$$

En el caso de un elemento cilíndrico largo, sometido a compresión uniforme por presión externa, se considera un anillo de ancho unitario, obteniendo el valor crítico de la fuerza de compresión (S_{cr}), sustituyendo $E/(1-\nu^2)$ en lugar de E y usando $I=h^3/12$, con lo cual se tiene,

$$S_{cr} = \frac{Eh^3}{4(1-\nu^2)R^2} \quad (2-9)$$

Se observa que la fuerza compresiva en el anillo es igual a qR , donde q es la presión uniforme, encontrando la carga crítica (Timoshenko & Gere, 1985, p. 289),

$$q_{cr} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{R} \right)^3 \quad (2-10)$$

2.2.2. ESTUDIO DEL PANDEO

Los diferentes elementos que crean un sistema estructural pueden fallar por distintos motivos, los cuales presentan distintas formas de manifestación según los materiales utilizados, fuerzas a los que son sometidos, tipos de apoyo, etc. En el estudio de la estabilidad de los elementos se pretende encontrar los límites en los cuales las tensiones y deformaciones se encuentren en un rango admisible, evitando el fallo abrupto.

Uno de los tipos es la falla por *pandeo* o inestabilidad, el cual puede ocurrir en elementos estructurales sometidos a compresión, produciendo una deformación del elemento al buscar la forma del equilibrio. Los efectos son generalmente geométricos, como grandes desplazamientos o distorsiones en sectores vulnerables.

Se han desarrollado distintas teorías de la estabilidad con el fin de determinar las condiciones en las que el sistema estructural, que está en equilibrio, deja su configuración estable. Para lo cual se evalúa la carga en la que el sistema deja de ser estable y empieza a pandear, conocida como carga crítica de pandeo (P_{cr}).

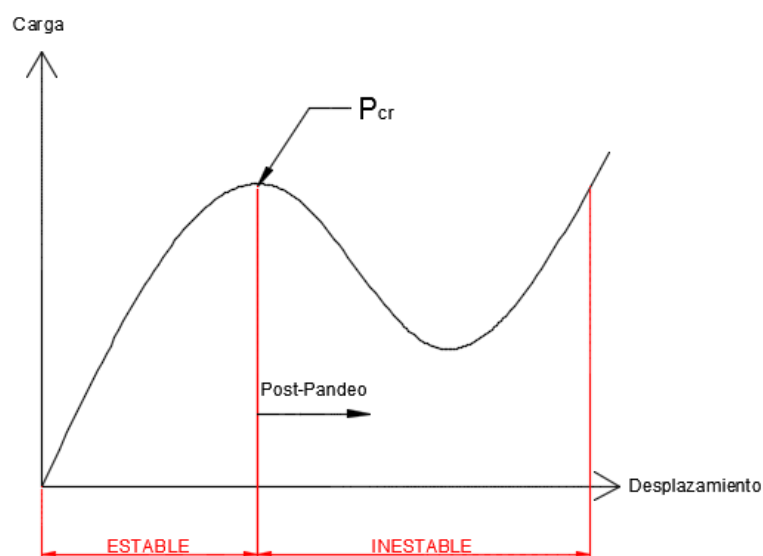


Figura 2-9 Diagrama Carga – Deflexión (Jones, 2006, p. 5)

El equilibrio de un sistema puede tener tres tipos de estado, los cuales son:

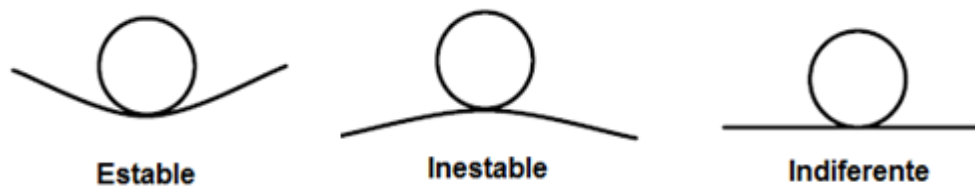


Figura 2-10 Estados de Equilibrio

- *Equilibrio Estable:* Para que la configuración de un cuerpo o sistema sean permanentes, las fuerzas que actúan sobre el mismo deben anularse, esto significa que las fuerzas aplicadas al sistema no pueden superar a la carga crítica.

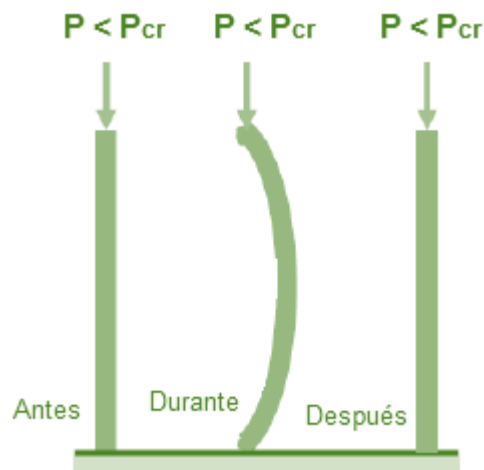


Figura 2-11 Equilibrio estable

- *Equilibrio indiferente:* En este tipo de equilibrio el sistema puede sufrir alteraciones en su configuración inicial, sin que su equilibrio se altere, para el caso de pandeo significa que la carga alcanza el nivel crítico y la energía que requiere para retornar a su posición inicial es insuficiente, encontrando una nueva configuración estable sin alcanzar la fractura

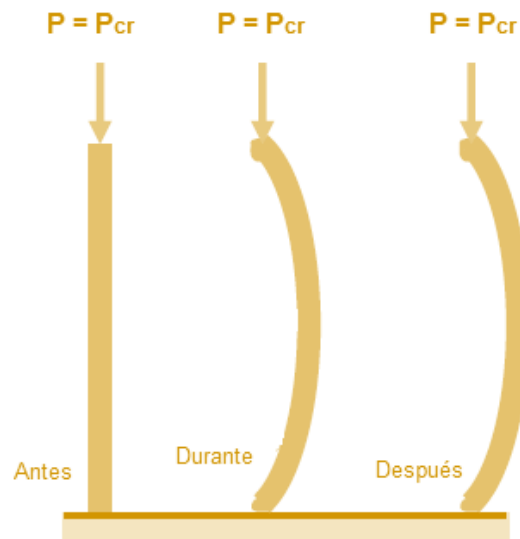


Figura 2-12 Equilibrio Indiferente

- *Equilibrio Inestable*: En este caso la configuración es precaria, ya que una pequeña perturbación hace que el sistema se aleje de su configuración inicial, buscando una configuración estable distinta. El elemento es sometido a una carga que excede la carga crítica y el elemento se deformará considerablemente inclusive llegando a colapsar y fracturarse.

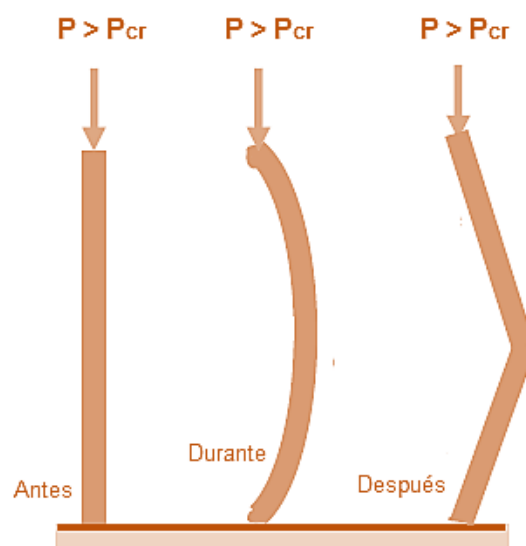


Figura 2-13 Equilibrio Inestable

- **Pandeo en una lámina rectangular de pared delgada**

Habitualmente placas delgadas de varias formas están sujetas a cargas de compresión y corte, dependiendo de las condiciones a las cuales estén sujetas se puede producir pandeo. La carga crítica de pandeo de una placa estructural dependerá de su espesor, a menor espesor la carga crítica disminuirá. El análisis de la estabilidad en placas es análogo a la estabilidad de columnas, o carga crítica de Euler, por lo cual se puede utilizar el método de cálculo para barras sometidas a compresión.

Para el cálculo del pandeo se puede asumir que la placa posee inicialmente una fuerza mínima que induce una curvatura mínima inicial, éste es de mayor utilidad para análisis de pandeo inelástico. Otra manera de determinar la carga crítica es asumir que la placa pandea ligeramente bajo la acción de fuerzas aplicadas en el plano medio, luego calculando los valores para los cuales la placa puede deformar, pudiendo retornar a su estado original.

Se puede notar fácilmente que la placa para pasar de un estado estable a uno inestable pasa por el estado indiferente, el cual es considerado como el estado de borde del equilibrio. Matemáticamente este estado corresponde a una bifurcación en la curva de deformación, en otras palabras “la carga crítica es la menor carga del estado de equilibrio, en la cual son posibles la configuración plana de la placa y una configuración de deformación mínima”. (Ventsel & Krauthammer, 2001, p. 250)

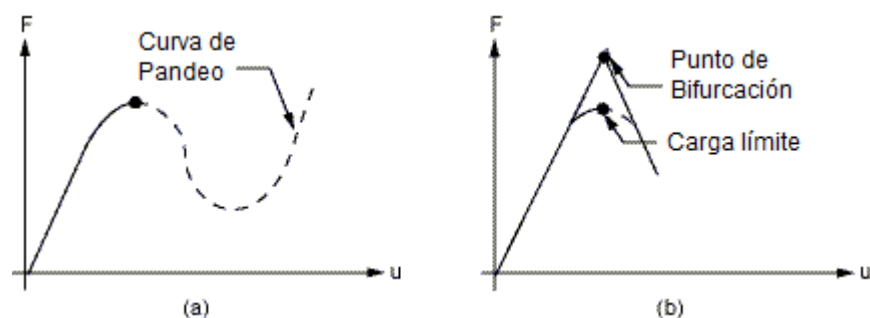


Figura 2-14 Punto de bifurcación (ANSYS Help, 2014)

Para describir la ecuación que rige el pandeo de placas, se usa la ecuación diferencial de la deflexión (ecuación 2-7), asumiendo que no existen cargas laterales, es decir $q = 0$ y despreciando el peso propio, se obtiene (Ventsel & Krauthammer, 2001, p. 251),

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2-11)$$

Donde N_x , N_y y N_{xy} son las fuerzas internas en la superficie media de la placa. La parte derecha se interpreta como una fuerza transversal ficticia, generada por las proyecciones normales de las fuerzas externas que actúan sobre la placa.

- **Estado límite**

Uno de los casos más importantes y prácticos de resolver la ecuación 2-11 mediante métodos analíticos, es una placa rectangular con dos de sus caras simplemente apoyadas, y sometida a una carga de compresión como muestra la figura 2-15.

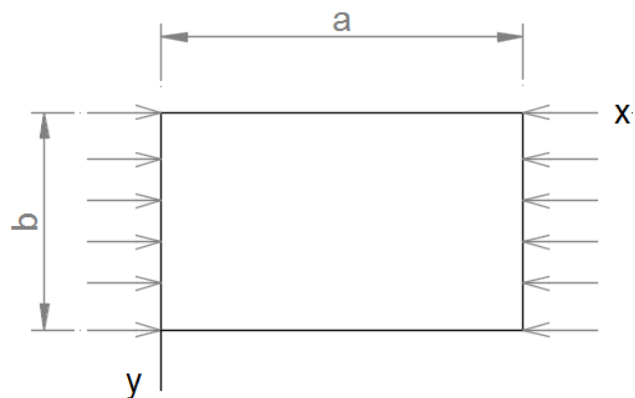


Figura 2-15 Caso de Carga en Placa Rectangular

Para este caso se tiene que $N_x = -qx$, $N_y = N_{xy} = 0$, entonces la ecuación diferencial se reduce a

$$D\nabla^2\nabla^2w + N_x\frac{\partial^2w}{\partial x^2} = 0 \quad (a)$$

Resolviendo la ecuación con las series de Fourier se obtiene,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - q_x\pi^2 \frac{m^2}{a^2} \right] w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (b)$$

Ya que el valor que se busca es distinto de cero (solución trivial correspondiente al equilibrio sin pandeo), igualando el primer término se obtiene,

$$\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - q_x\pi^2 \frac{m^2}{a^2} = 0 \quad (c)$$

Al despejar q_x de (c) se obtiene,

$$q_x = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (d)$$

O de otra manera,

$$q_x = K \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (2-12)$$

Donde,

$$K = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (d)$$

Derivando K con respecto a m e igualando a cero se llega a la conclusión que $m=a/b$, sustituyendo en la ecuación 2-12 se obtiene la carga crítica,

$$q_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \quad (e)$$

La variación del parámetro de carga de pandeo K como función de la relación a/b para $m=1, 2, 3, 4, 5$ se muestra en la figura 2-16.

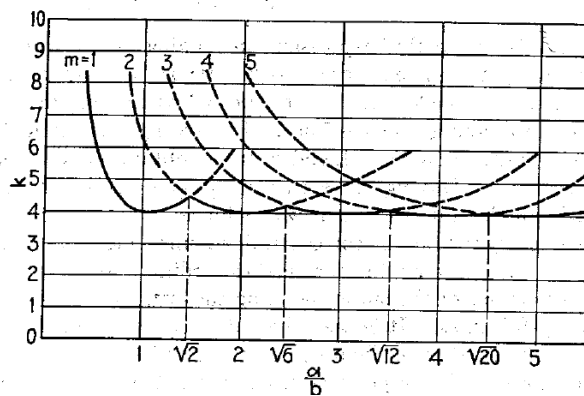


Figura 2-16 Parámetro K carga de pandeo (Timoshenko & Gere, 1985, p. 353)

La figura 2-16 muestra que para placas muy cortas y anchas, la relación a/b puede ser despreciada con respecto a la relación b/a . Como resultado el valor mínimo de K es b^2/a^2 y el valor de la fuerza crítica para este caso es

$$q_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (2-13)$$

Donde D es la relación de rigidez de flexión, relación definida en la ecuación 2-16.

- **Pandeo de un arco semicircular sometido a presión lateral externa**

Considerando un anillo ideal comprimido uniformemente y asumiendo que se produce una pequeña desviación de la forma circular de equilibrio, el valor crítico de dicha presión es aquel necesario para mantener al anillo en la forma ligeramente deformada asumida en equilibrio.

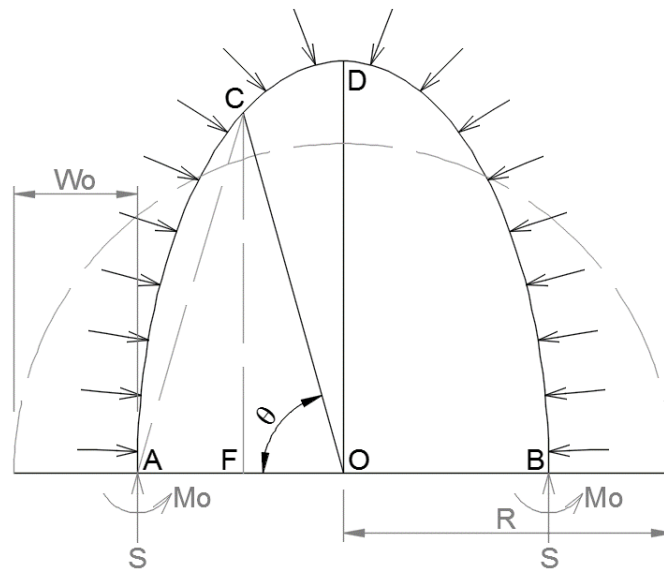


Figura 2-17 Arco Semicircular bajo presión lateral externa

La línea segmentada indica la forma circular inicial del anillo y la línea continua representa el anillo ligeramente deformado sobre la cual actúa una presión uniforme. Se asume que AB y OD son ejes de simetría del anillo pandeado, además de que la acción de la porción inferior removida es reemplazada por una fuerza compresiva longitudinal S y un momento flector M_o actuando en A y B. Siendo q la presión normal uniforme por unidad de longitud de la línea central del anillo y w_0 el desplazamiento radial en A y B. Entonces la fuerza compresiva en A y B es igual a,

$$S = q(R - w_0) = q\overline{AO} \quad (a)$$

El momento flector en cualquier sección transversal C del anillo pandeado es,

$$M = M_0 + q\overline{AO} \cdot \overline{AF} - \frac{q}{2}\overline{AC}^2 \quad (b)$$

Considerando el triángulo ACO, se tiene que,

$$\overline{OC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 - 2\overline{AO} \cdot \overline{AF} \quad (c)$$

Sustituyendo esta expresión en (b) se obtiene,

$$M = M_0 - \frac{1}{2}q(\overline{OC}^2 + \overline{AO}^2) \quad (d)$$

Ya que $\overline{AO} = R - w_0$ y que $\overline{OC} = R - w$ y despreciando cantidades w y w_0 de segundo orden, entonces el momento flector es

$$M = M_0 - qR(w_0 - w) \quad (e)$$

Con esta expresión para el momento flector, la ecuación diferencial para la curva de la deflexión es

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{R^2}{EI} [M_0 - qR(w_0 - w)] \quad (f)$$

El valor crítico de la presión uniforme es obtenido integrando la ecuación

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w \left(1 + \frac{qR^3}{EI}\right) = \frac{-M_0R^2 + qR^3w_0}{EI} \quad (g)$$

Usando la notación,

$$k^2 = 1 + \frac{qR^3}{EI} \quad (2-14)$$

Se obtiene para la solución general

$$w = A_1 \sin k\theta + A_2 \cos k\theta + \frac{-M_0 R^2 + qR^3 w_0}{EI + qR^3} \quad (h)$$

Considerando las condiciones en las secciones transversales A y D del anillo pandeado. De la simetría se concluye que,

$$\left(\frac{dw}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0 \quad \left(\frac{dw}{d\theta}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$$

De la primera condición se encuentra que $A_1 = 0$, y de la segunda (Timoshenko & Gere, 1985, pp. 290-291),

$$\sin \frac{k\pi}{2} = 0 \quad (i)$$

La menor solución de la ecuación (i), diferente de cero, es $k\pi/2 = \pi$ y $k = 2$. Al sustituir se obtiene el valor de la presión crítica (Canadian Corrugated Steel Pipe Institute, 2007, p. 294),

$$q_{cr} = \frac{3EI}{R^3} \quad (2-15)$$

- **Pandeo de un arco circular comprimido con apoyos articulados**

Si una lámina curva con extremos articulados y con su plano medio en forma de arco de circunferencia es sometida a la acción de una presión uniforme q , pandeará como muestra la figura 2-18.

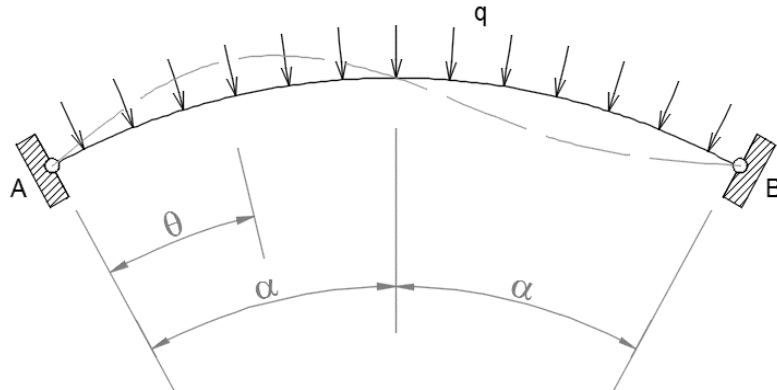


Figura 2-18 Arco uniformemente comprimido (articulado)

El valor crítico de la presión q para la cual el pandeo ocurre puede ser resuelto de la ecuación diferencial de la curva de deflexión de una barra circular, considerando el arco circular inicial como una curva funicular para la presión uniforme, entonces se tiene que,

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{R^2Sw}{EI} \quad (a)$$

Donde $S = qR$ es la fuerza de compresión axial y w es el desplazamiento radial hacia el centro, sustituyendo la ecuación 2-14 se obtiene,

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + k^2w = 0 \quad (b)$$

La solución general para la ecuación (b) es

$$w = A \sin k\theta + B \cos k\theta \quad (c)$$

Para satisfacer las condiciones de frontera en el extremo izquierdo ($\theta = 0$), el valor de $B = 0$, y al extremo derecho ($\theta = 2\alpha$) se cumple si

$$\sin 2\alpha k = 0 \quad (d)$$

Resolviendo (d), el mínimo valor de k se obtiene

$$k = \frac{\pi}{\alpha} \quad (e)$$

Reemplazando k se tiene la carga crítica,

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \quad (f)$$

Sustituyendo la relación de rigidez de flexión (D) por EI , donde,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2-16)$$

Se obtiene (Timoshenko & Gere, 1985, p. 299),

$$q_{cr} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)R^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \quad (2-17)$$

- **Pandeo de un arco circular comprimido con apoyos empotrados**

Para el caso de un arco empotrado, la forma de pandeo ocurre como muestra la figura 2-19.

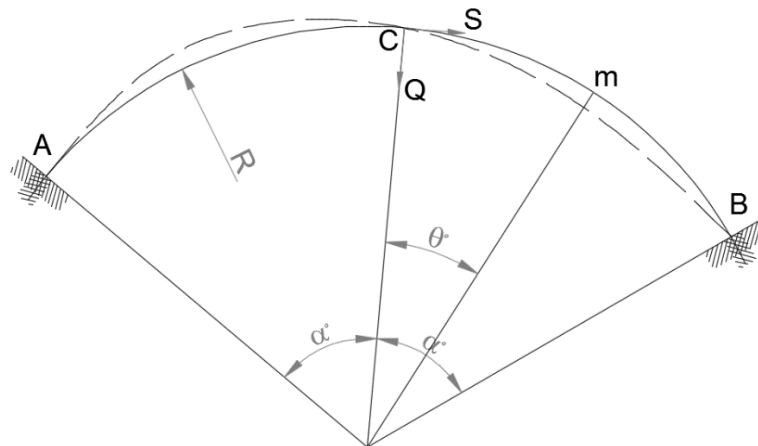


Figura 2-19 Arco uniformemente comprimido (empotrado)

En el punto medio C además de la fuerza compresiva horizontal S, actuará una fuerza vertical de corte Q. Considerando como en el caso anterior la curva funicular bajo presión uniforme y denotando w el desplazamiento radial hacia el centro, el momento flector en cualquier punto definido por el ángulo θ es,

$$M = Sw - QR \sin \theta \quad (a)$$

Utilizando la ecuación de pandeo para una barra circular, se obtiene,

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{R^2}{EI} (Sw - QR \sin \theta) \quad (b)$$

Haciendo uso de la ecuación 2-14, se tiene

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + k^2w = \frac{QR^3 \sin \theta}{EI} \quad (c)$$

La solución general de esta ecuación es,

$$w = A \sin k\theta + B \cos k\theta + \frac{QR^3 \sin \theta}{(k^2 - 1)EI} \quad (d)$$

Las condiciones de frontera para resolver las constantes A, B y la fuerza Q son,

$$w = \frac{d^2w}{d\theta^2} = 0, \quad (\theta = 0) \qquad w = \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad (\theta = \alpha)$$

Con lo cual se obtiene el sistema de ecuaciones,

$$A \sin k\alpha + Q \frac{R^3 \sin \alpha}{(k^2 - 1)EI} = 0 \quad (e1)$$

$$Ak \cos k\alpha + Q \frac{R^3 \cos \alpha}{(k^2 - 1)EI} = 0 \quad (e2)$$

Igualando el determinante del sistema de ecuaciones a cero, se obtiene,

$$k \tan \alpha \cot k\alpha = 1 \quad (f)$$

El valor de k y el valor de la presión crítica dependen del valor de α , además sustituyendo EI por la ecuación 2-16, el resultado es (Timoshenko & Gere, 1985, p. 300),

$$q_{cr} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)R^3} (k^2 - 1) \quad (2-18)$$

Varios valores de k están dados en el cuadro 2-1:

CUADRO 2-1

FACTOR K PARA ARCOS EMPOTRADOS BAJO PRESIÓN UNIFORME

α°	15	30	45	60	75	90
k	17.183	8.621	5.782	4.375	3.542	3
α°	105	120	135	150	165	180
k	2.627	2.364	2.182	2.066	2.010	2

- **Pandeo de cilindros de pared delgada sometidos a presión lateral externa**

Para el presente estudio se considera un cilindro de pared delgada sujeto a presión externa de intensidad p , este tipo de carga es típico en los cascos submarinos y en las carcasas de aviones, también tanques en plantas químicas soportan excesivas presiones externas.

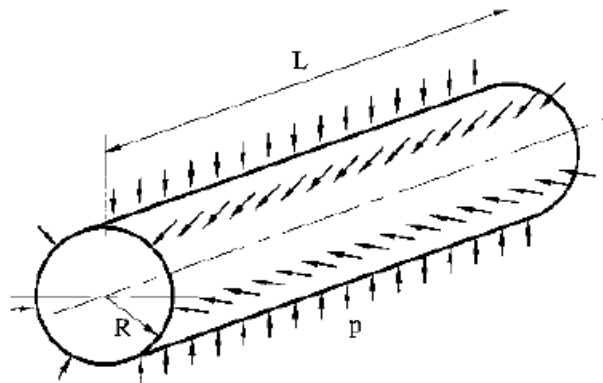


Figura 2-20 Cilindro con presión lateral externa

La fuerza externa uniforme produce los esfuerzos de membrana (σ_L) longitudinal y circunferencial (σ_H), así como los esfuerzos de flexión en el cilindro. Analizando el pandeo del mismo, el esfuerzo de compresión circunferencial es el de mayor importancia. Si un cilindro es lo suficientemente largo, entonces los valores límite de la presión externa p afectan levemente

las condiciones de borde, lo cual significa que la deformación de la sección transversal circular es idéntica a lo largo de la longitud del cilindro.

Por lo tanto, el análisis de pandeo de un cilindro largo puede ser reemplazado por el análisis de la estabilidad de un anillo de unidad de longitud con el mismo radio y espesor del cilindro inicial. Dicho caso fue analizado anteriormente en el análisis de equilibrio en un arco de lámina delgada, donde

$$p_{cr} = \frac{(n^2 - 1)EI}{R^3} \quad (a)$$

Reemplazando D (ecuación 2-16) por EI , se deduce la ecuación para cilindros de gran longitud (Ventsel & Krauthammer, 2001, p. 583),

$$p_{cr} = \frac{3Eh^3}{12(1 - \nu^2)R^3} \quad (2-19)$$

Esta solución se reduce únicamente a la solución de cilindros de gran longitud y desprecia la teoría de membrana que aparece en el estudio de láminas de pared delgada. Una solución más adecuada se deduce de la teoría de elementos cilíndricos de pared delgada, asumiendo que los extremos son simplemente apoyados y no existe flexión del cilindro.

El esfuerzo circunferencial es $\sigma_H = -pR/h$. Así, la acción de la presión transversal p es equivalente a la acción de las fuerzas compresivas circunferenciales, iguales a pR . Haciendo uso de la ecuación fundamental de la estabilidad para recipientes de pared delgada (Ventsel & Krauthammer, 2001, p. 574)

$$D\nabla^4\nabla^4w_1 + Eh\nabla_k^2\nabla_k^2w_1 = \nabla^4(p_s^{(f)}) \quad (2-20)$$

Se impone las condiciones de frontera, $N_{10} = 0, N_{20} = -pr, S = 0$ y dividiendo ambos lados para h se obtiene,

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{pR}{h} \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (a)$$

Al resolver esta ecuación para las condiciones de borde descritas, con la ayuda de serie de senos se tiene,

$$\frac{D}{h} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \frac{m^4 \pi^4}{L^4} - \frac{pR}{h} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \frac{n^2}{R^2} = 0 \quad (b)$$

Es evidente que para encontrar el valor crítico se asume que $m=1$, lo cual significa que el cilindro pandea en su longitud más de una media onda. Despejando se consigue (Ventsel & Krauthammer, 2001, p. 584),

$$p_n = \frac{Dn^2}{R^3} \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 + \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{L} \right)^4}{n^6 \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right]^2} \quad (2-21)$$

Esta ecuación tiene varios rangos de solución dependiendo de la longitud del cilindro, para lo cual una ecuación resultado de la derivación y valores límites de la ecuación 2-21 dan la condición de que el modo de pandeo crítico para longitudes intermedias, es decir $0.3\sqrt{R/h} > L/R > \sqrt{h/R}$ sea,

$$n_{cr} = \sqrt{\frac{\pi R}{L} \sqrt[4]{36(1-v^2)} \sqrt{\frac{R}{h}}} \quad (2-22)$$

2.3. ESTUDIO DE CARGAS

2.3.1. ESTADOS DE CARGA

La primera consideración de un proyecto es la evaluación de las cargas sobre el conducto. Los conductos subterráneos están sujetos a dos tipos de cargas principalmente:

1. *Cargas Muertas*: Éstas son producidas por el terraplén o el relleno, más las cargas superpuestas sobre la superficie, uniformes o concentradas
2. *Cargas Vivas*: Cargas en movimiento, incluyendo impactos, como cargas de carreteras por vehículos, trenes o aviones en los aeropuertos.

- **Cargas Muertas**

Existen dos tipos básicos de instalaciones. La condición “protuberante” o de terraplén, representada por una alcantarilla; la condición de zanja, típica de una cloaca. Se considera como carga muerta al prisma del suelo sobre la tubería. La presión unitaria de este prisma, que actúa sobre el plano horizontal en la corona de la tubería, es igual a (National Corrugated Steel Pipe Association, 2008, p. 382):

$$CM = \rho \cdot h$$

Donde:

- | | | |
|--------|---|---|
| ρ | → | Densidad del suelo |
| h | → | Altura de relleno sobre el conducto |
| CM | → | Presión de la carga pasiva o carga muerta |

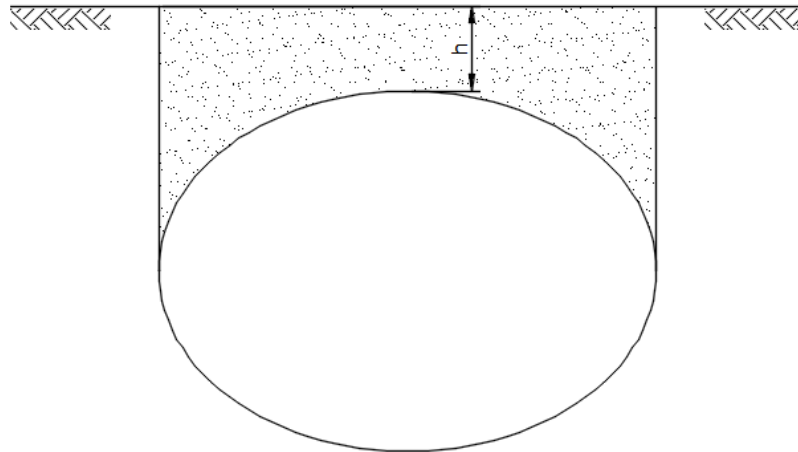


Figura 2-21 Área usada para el cálculo de CM

- **Cargas Vivas**

En la práctica las cargas vivas sobre los ductos son originadas por el tránsito vial, ferroviario o aeroportuarias moviéndose sobre el conducto, las cuales son distribuidas a la tubería o conducto a través del suelo. Éstas están normalmente consideradas en las normas para construcciones viales AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials). Las cargas vivas que actúan sobre la corona del conducto son mayores cuando el peso del relleno sobre la parte superior del conducto es pequeño y decrece cuando aumenta el relleno.



Figura 2-22 Carga de Maquinaria Pesada y Avión sobre conductos Av. Luis Tufiño (Samaniego, 2007)

2.3.2. CARGAS ESTABLECIDAS POR NORMATIVA

- **Cargas vivas bajo condiciones de carretera**

Las cargas vivas para carreteras en general, se rigen bajo las normas AASHTO, en ésta se especifican varios tipos de vehículos pesados, cuyas cargas soportan las estructuras en conjunto con el suelo.

Para lo cual esta normativa posee según las necesidades de la vía diferentes tipos de vehículos, la presión de las cargas vivas generadas por AASHTO H-20 y AASHTO H-25, incluyendo efectos de impacto, se detallan en el siguiente cuadro.

CUADRO 2-2

CARGAS VIVAS PARA CARRETERAS Y FERROVIARIAS (Canadian Corrugated Steel Pipe Institute, 2007, p. 211)(*)

Carga Carretera			Carga Ferroviaria	
Altura de Relleno	Carga (KPa)		Altura de relleno	Carga (KPa)
(m)	H-20	H-25	(m)	E-80
0.30	86	109	0.6	182
0.50	56	75	1.0	147
0.75	34	46	1.2	133
1.00	25	31	1.5	115
1.25	17	22	2.0	91
1.50	13	16	3.0	53
1.75	10	12	4.0	34
2.00	8	10	6.0	15
2.25	6	8	8.0	7
2.50	5	6	9.0	5
* Se omite carga viva cuando sea inferior a 5 KPa, emplear solo carga muerta				

Estas cargas vivas son obtenidas posicionando el eje más pesado del camión de diseño centrado a la parte superior de la tubería, con el relleno completo.

Las figuras 2-23 y 2-24 (Canadian Corrugated Steel Pipe Institute, 2007, p. 212) muestran la variación de la presión con la profundidad para carreteras y vías férreas. Estos gráficos modifican la distribución teórica de las cargas vivas a valores compatibles con el desempeño de las estructuras bajo condiciones relativamente livianas.

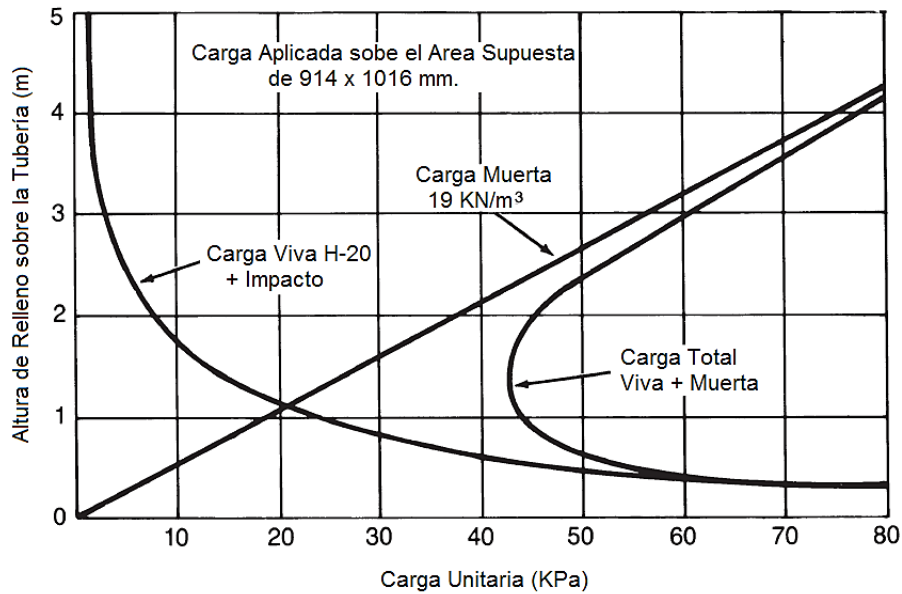


Figura 2-23 Combinación de carga viva H-20 de carreteras con carga muerta

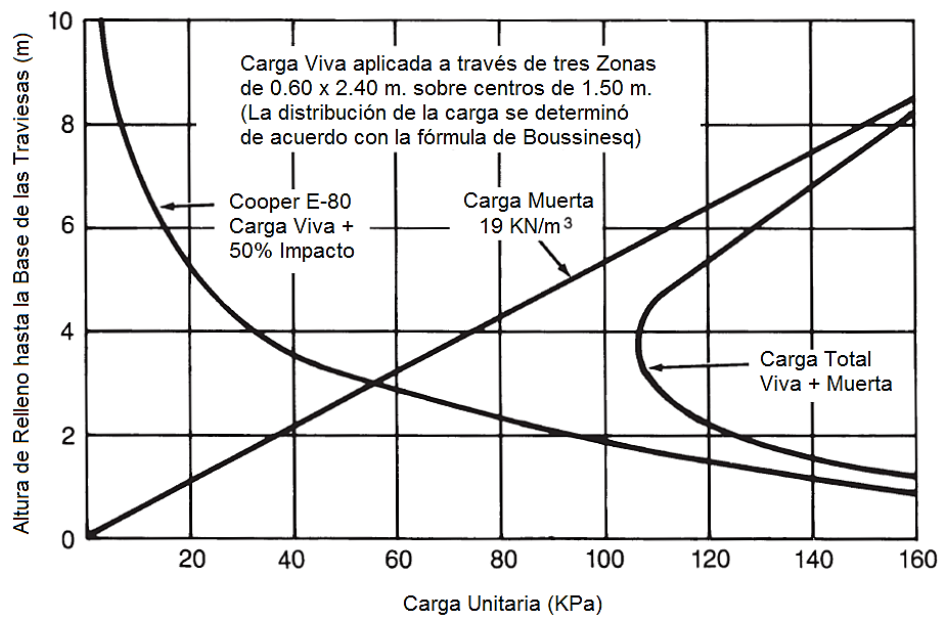


Figura 2-24 Combinación de carga viva E-80 de ferroviaria con carga muerta

La presión de otras cargas concentradas a menudo se calcula sobre la base de una pendiente de distribución de carga 1/2 a 1 (horizontal a vertical). Un método también es provisto en la norma AASHTO LRFD.

- **Cargas Aeroportuarias**

La importancia de la carga de los aviones consiste principalmente en su relación con la cobertura mínima necesaria. Los proyectos modernos para aeropuertos incluyen en algunos casos cargas por rueda muy pesadas para aviones aun no proyectados.

2.3.3. DETERMINACIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

Cuando se afloja una masa de roca o suelo firme sobre el techo de un túnel, por efecto de la excavación y del peso de la carga suprayacente, el comportamiento de esa masa puede asimilarse al de una porción de suelo granular colocada en un silo, cuando se abre el desfogue inferior.

- **Efecto de arco**

Si una parte de soporte de una masa de suelo cede mientras que el resto permanece en el lugar, el suelo contiguo a ésta se mueve de su posición original entre las masas estacionarias adyacentes del suelo. El movimiento relativo dentro del suelo es opuesto por una resistencia al cizallamiento dentro de la zona de contacto entre las masas estacionarias y las que ceden.

Dado que la resistencia al cizallamiento tiende a mantener la masa en su posición original, se reduce la presión en la parte elástica del apoyo y aumenta la presión sobre la parte estacionaria contigua.

Esta transferencia de presión de una masa de suelo que cede sobre suelo estacionario adyacente se denomina comúnmente como *efecto de arco*. Este efecto también tiene lugar si una parte de un soporte se mueve hacia fuera más que las partes adyacentes.

- **Teoría de Arco**

La mayoría de las teorías existentes de arco tratan con la presión de la arena seca en fluencia de franjas horizontales. Se pueden dividir en tres grupos. Los autores de las teorías del primer grupo sólo consideran las condiciones para el equilibrio de la arena que se encuentra inmediatamente por encima de la tira cargada. Las teorías del segundo grupo se basan en la suposición injustificada de que toda la masa de arena situada por encima de la tira de fluencia está en un estado de equilibrio plástico. La teoría más simple es la de la tercera categoría que se basa en la suposición de que las superficies de deslizamiento son verticales. Se considera que la resistencia del suelo está dada por la ley de Mohr-Coulomb,

$$\gamma = c + \sigma \tan \phi \quad (a)$$

Se considera también, inicialmente, que en la superficie del terreno actúa una carga uniformemente repartida de magnitud q .

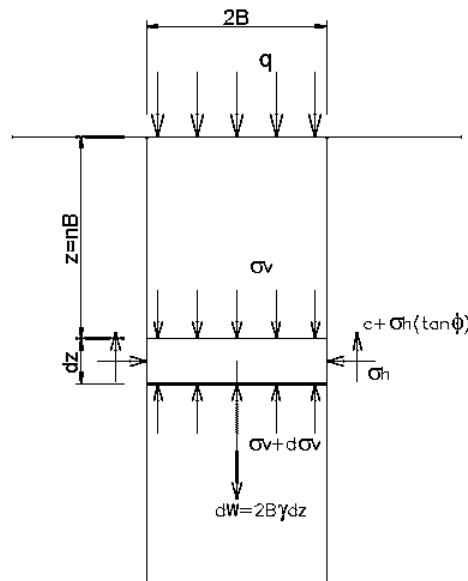


Figura 2-25 Diagrama de fuerzas ejercidas por el suelo en un túnel

En el elemento diferencial de la figura 2-25 se tiene un estado de esfuerzos geostáticos dados por,

$$\sigma_H = K\sigma_V \quad (b)$$

Donde K es el coeficiente empírico de presión de la tierra en cualquier punto del relleno. Considerando el equilibrio vertical del prisma de carga se tiene:

$$2B\gamma dz = 2B(\sigma_V + D\sigma_V) - 2B\sigma_V + 2cdz + 2K\sigma_V dz \tan \phi \quad (c)$$

Donde $2B\gamma$ es el peso de la columna de suelo. Simplificando,

$$\frac{d\sigma_V}{dz} + \sigma_V \frac{K}{B} \tan \phi = \gamma - \frac{c}{B} \quad (d)$$

Resolviendo esta ecuación para las condiciones de borde $\sigma_V = q$ y $z = 0$, se obtiene,

$$\sigma_V = \frac{B \left(\gamma - \frac{c}{B} \right)}{K \tan \phi} \left[1 - e^{-K \tan \phi \left(\frac{z}{B} \right)} + q e^{-K \tan \phi \left(\frac{z}{B} \right)} \right] \quad (e)$$

Considerando que el material es puramente friccional ($c = 0$) y que no existe sobrecarga superficial se tiene,

$$\sigma_V = \frac{B\gamma}{K \tan \phi} \left[1 - e^{-K \tan \phi \left(\frac{z}{B} \right)} \right] \quad (f)$$

Cuando la altura tiende al infinito el valor de σ_V se consigue (Terzagui, 1943, p. 73),

$$\sigma_V = \frac{B\gamma}{K \tan \phi} \quad (2-23)$$

Aquí es importante notar la proporcionalidad existente entre la presión vertical y las dimensiones del túnel.

2.4. ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos se ha convertido en una herramienta muy importante para resolver problemas de ingeniería, éste permite la resolución de casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposible de resolverlos por métodos matemáticos tradicionales. Además que se debía construir prototipos, probarlos e ir iterando hasta encontrar una solución adecuada, lo cual era altamente costoso y demandaba gran cantidad de tiempo.

Este método proporciona modelos matemáticos para calcular el sistema real, de una manera más práctica y económica que una experimental; sin embargo éste aún es utilizado como un método aproximado, debido a los supuestos básicos del método, por lo que los métodos experimentales aún son necesarios para un diseño más preciso.

El método de elementos finitos como formulación matemática es relativamente nueva, aunque su estructura básica ha sido conocida por mucho tiempo, su desarrollo alcanzó altos niveles gracias a los avances en la tecnología computacional, permitiendo al profesional visualizar detalladamente las deformaciones, tensiones y otras propiedades de un elemento. La idea principal del método es la división de un sistema continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos, como se muestra en la figura 2-26.

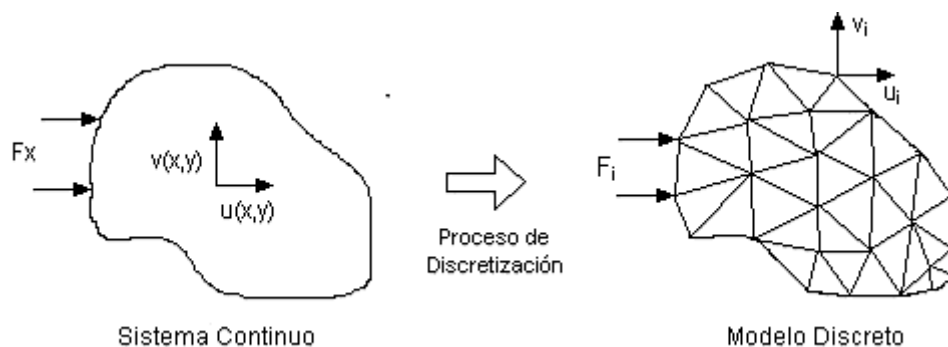


Figura 2-26 Esquema Método de Elementos Finitos

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del dominio también gobiernan el comportamiento de los elementos. En cualquier sistema sujeto a análisis por el método, se puede observar las siguientes partes:

- *Dominio*: Es el espacio geométrico donde se analiza el sistema.
- *Condiciones de Frontera*: Son variables conocidas que determinan los cambios en el sistema.
- *Variables Incógnitas*: Son las variables a encontrar luego de aplicar las condiciones de frontera al sistema.

2.4.1. PROCESO DE ANÁLISIS

En un continuo de cualquier dimensión, el campo de variables posee un número infinito de valores debido a que es una función de cada uno de los nodos en la región de solución. La discretización del método de elementos finitos reduce el problema a uno solo, con un finito número de variables desconocidas, dividiendo la región de solución en elementos y expresando el campo de variables en términos de las funciones aproximadas dentro de cada elemento.

Los valores nodales del campo de variables y las funciones de interpolación para los elementos definen completamente el comportamiento del dominio. Claramente, la naturaleza de la solución y el grado de aproximación no sólo dependen del tamaño y número de los elementos utilizados, sino también en las funciones de interpolación seleccionadas. Como era de esperar, no se puede elegir funciones arbitrariamente, porque ciertas condiciones de compatibilidad deben ser satisfechas. A menudo se eligen funciones de modo que la variable de campo o sus derivados son continuas a través de límites de elementos adyacentes. Estos se aplican a la formulación de diferentes tipos de elementos.

Una característica importante del método de elementos finitos que lo diferencia de otros métodos numéricos es la capacidad de formular soluciones para elementos individuales antes de ponerlos juntos para representar a todo el problema. En esencia, un problema complejo se reduce a considerar una serie de problemas muy simples.

Independientemente del método utilizado para determinar las propiedades de los elementos, la solución de un problema continuo por el método de elementos finitos siempre sigue un proceso ordenado paso a paso. Considerando un cuerpo de materia (sólido, líquido o gas) o simplemente una región del espacio en el que se está produciendo un fenómeno en particular. Los pasos a seguir para llevar a cabo un análisis de elementos finitos son:

1. *Discretización del dominio*: El primer paso es dividir el dominio o región de solución en elementos. La forma de los elementos puede ser variada e inclusive de distinta forma dentro de la misma región, de hecho al analizar una estructura elástica que tiene diferentes tipos de componentes tales como placas y vigas, es necesario utilizar diferentes elementos en la misma solución.

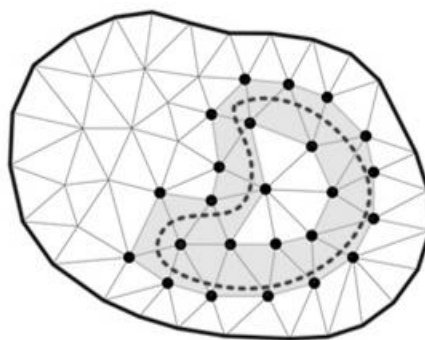


Figura 2-27 Discretización del Dominio

2. *Selección de las funciones de interpolación*: El siguiente paso es asignar nodos a cada elemento y elegir las funciones de interpolación para representar la variación del campo de variables sobre el elemento. La variable de campo puede ser un escalar, un vector, o un tensor de orden superior.

A menudo, los polinomios se seleccionan como funciones de interpolación para la variable de campo ya que son fáciles de integrar y diferenciar. El grado del polinomio elegido depende del número de nodos asignados al elemento, la naturaleza y el número de incógnitas en cada nodo, y ciertos requisitos de continuidad impuesta en los nodos y a lo largo de los límites del elemento.

3. *Determinación de las propiedades características del elemento:* Una vez que el modelo de elementos finitos se ha establecido, las ecuaciones matriciales que expresan las propiedades de los elementos individuales se pueden determinar.

4. *Vinculación de las propiedades de los elementos para obtener el sistema de ecuaciones:* Para encontrar las propiedades del sistema global modelado por la malla de elementos, se "acoplan" todas sus características. En otras palabras, se combinan las ecuaciones matriciales que expresan el comportamiento de los elementos y se forman las ecuaciones matriciales que expresan el comportamiento de todo el sistema. Las ecuaciones matriciales para el sistema tienen la misma forma que las ecuaciones para un elemento individual pero contienen muchos más términos, ya que incluyen todos los nodos.

La base para el procedimiento de acoplamiento se deriva del hecho de que en un nodo, donde los elementos están interconectados, el valor de la variable de campo es el mismo para cada elemento de intercambio de ese nodo. Una característica única del método de elementos finitos es que las ecuaciones del sistema son generadas por el conjunto de las ecuaciones de elementos individuales. En contraste, en el método de diferencias finitas las ecuaciones del sistema son generados escribiendo ecuaciones nodales.

5. *Evaluación de las condiciones de frontera:* Antes de que el sistema de ecuaciones esté listo para ser resuelto, se modifican para tener en cuenta las

condiciones de frontera del problema. En esta etapa se imponen valores nodales conocidos de las variables dependientes o cargas nodales.

6. *Resolución del sistema de ecuaciones:* El proceso de acople de las ecuaciones da un conjunto de ecuaciones simultáneas que se resuelven para obtener los valores nodales desconocidos del problema. Si el problema describe el comportamiento estacionario o de equilibrio, entonces se resuelve un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales. Existen diferentes técnicas de solución de estas ecuaciones. Si el problema es inestable, las incógnitas nodales son una función del tiempo, por lo que se resuelve un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o no lineales.

2.4.2. VARIABLES MECÁNICAS Y ECUACIONES BÁSICAS

Una ventaja importante del método de elementos finitos es que su uso no se restringe por el tipo de estructura. Para lograr una presentación uniforme y clara se usa operadores aplicados a matrices variables. Las variables a su vez se dividen en incógnitas y condiciones de frontera.

Las ecuaciones básicas son:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}}_k \cdot \underline{\underline{u}} \quad (\text{Ley cinemática})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{Ley del material})$$

$$-\left(\underline{\underline{p}} + \underline{\underline{f}}\right) = \underline{\underline{D}}_G \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{Condiciones de equilibrio dinámico})$$

Donde:

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ → Vector de desplazamientos internos

$\underline{\underline{u}}$ → Vector de desplazamientos externos

$\underline{\underline{\sigma}}$ → Vector de fuerzas internas

\underline{p}	→	Vector de fuerzas externas
\underline{f}	→	Vector de fuerzas inerciales

A lo largo de las zonas de frontera las siguientes variables son definidas:

\underline{t}	→	Vector fuerzas de frontera
\underline{r}	→	Vector desplazamientos de frontera

Además, las restricciones geométricas y estáticas se cumplen en los límites del sistema mecánico

$\underline{r} = \underline{R}_r \cdot \underline{u}$	→	Condición de desplazamientos de frontera
$\underline{t} = \underline{R}_t \cdot \underline{\sigma}$	→	Condición de fuerzas de frontera

2.4.3. EQUILIBRIO EN GEOMETRÍAS COMPLEJAS

Para la formulación del equilibrio en estructuras complejas, el método de energías es el más indicado ya que simplifica las ecuaciones. Como principal tipo de energía interna se tienen los desplazamientos virtuales, ésta es una formulación global basada en la certeza de que la suma de los trabajos virtuales es igual a cero.

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e = 0 \quad (a)$$

Por lo cual, un cuerpo deformado está en equilibrio solo si su energía o trabajos virtuales internos y externos debido al desplazamiento virtual son iguales.

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (b)$$

El presente trabajo trata de estructuras formadas por láminas de pared delgada, cuyo principio es (National Cooperative Highway Research, 2007),

$$\int_A \underline{\sigma}^T \cdot \delta \underline{\varepsilon} \cdot dA = \int_A \underline{p}^T \cdot \delta \underline{u} \cdot dA + \int_{St} \underline{t}^T \cdot \delta \underline{r} \cdot dS_t \quad (c)$$

En la teoría del equilibrio de estructuras de geometría compleja, son tomadas en cuenta grandes deformaciones, para lo cual la ecuación cinemática básica es,

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D}_k \cdot \underline{u} = \left[\underline{D}_{KL} + \frac{1}{2} \underline{D}_{KN}(\underline{u}) \right] \cdot \underline{u} \quad (d)$$

El operador cinemático \underline{D}_k se puede dividir en un operador lineal de deformación independiente \underline{D}_{KL} y un operador dependiente no lineal $\underline{D}_{KN}(\underline{u})$. La deformación virtual es obtenida de la ecuación (d) por variación,

$$\delta \underline{\varepsilon} = \frac{d\underline{\varepsilon}}{d\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} = \left[\underline{D}_{KL} + \underline{D}_{KN}(\underline{u}) \right] \cdot \delta \underline{u} \quad (e)$$

La ley de la elasticidad de los materiales o ley de Hooke en elementos lineales es,

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon} = \underline{E} \cdot \underline{D}_k \cdot \underline{u} \quad (f)$$

Los desplazamientos virtuales en la zona de frontera o de borde $\delta \underline{r}$, son expresados con el operador de frontera \underline{R}_r por el campo de distribución de desplazamientos $\delta \underline{u}$,

$$\delta \underline{r} = \underline{R}_r \cdot \delta \underline{u} \quad (g)$$

Sustituyendo (g) y (d) en (c), se obtiene,

$$\begin{aligned}
& \int_A \underline{u}^T \cdot \left[\underline{D}_{KL} + \frac{1}{2} \underline{D}_{KN}(\underline{u}) \right]^T \cdot \underline{E} \cdot \left[\underline{D}_{KL} + \underline{D}_{KN}(\underline{u}) \right] \cdot \delta \underline{u} \cdot dA \\
& = \int_A \underline{p}^T \cdot \delta \underline{u} \cdot dA + \int_A \underline{t}^T \cdot \underline{R}_r \cdot \delta \underline{u} \cdot dS_t
\end{aligned} \tag{h}$$

El método de elementos finitos es un método de aproximación, por lo cual las deformaciones de los elementos son aproximados,

$$\underline{u} = \underline{\Omega} \cdot \underline{v} \tag{i}$$

Derivando se obtiene,

$$\delta \underline{u} = \underline{\Omega} \cdot \delta \underline{v} \tag{j}$$

Donde $\underline{\Omega}$ es la matriz de la función de forma y \underline{v} representa el desplazamiento virtual del nodo.

Sustituyendo (i) y (j) en (h)

$$\begin{aligned}
& \delta \underline{v}^T \int_A \underline{\Omega}^T \cdot \left[\underline{D}_{KL} + \frac{1}{2} \underline{D}_{KN}(\underline{\Omega} \cdot \underline{v}) \right]^T \cdot \underline{E} \cdot \left[\underline{D}_{KL} + \underline{D}_{KN}(\underline{\Omega} \cdot \underline{v}) \right] \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{v} \cdot dA \\
& = \delta \underline{v}^T \int_A \underline{\Omega}^T \cdot \underline{p} \cdot dA + \delta \underline{v}^T \int_{S_t} \underline{\Omega}^T \cdot \underline{R}_r^T \cdot \underline{t} \cdot dS_t
\end{aligned} \tag{k}$$

Después de la introducción de las matrices lineales y no lineales de deformaciones, se tiene

$$\underline{H}_L = \underline{D}_{KL} \cdot \underline{\Omega} \tag{l}$$

$$\underline{H}_N(\underline{v}) = \underline{D}_{KN} \cdot (\underline{\Omega} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{\Omega} \tag{m}$$

Simplificando y dividiendo para $\delta \underline{v}^T$, la ecuación (k) resulta,

$$\int_A [\underline{H}_L + \underline{H}_N(\underline{v})]^T \cdot \underline{E} \cdot \left[\underline{H}_L + \frac{1}{2} \underline{H}_N(\underline{v}) \right]^T \cdot dA \cdot \underline{v} = \int_A \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{p} \cdot dA + \int_{S_t} \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{R}_r^T \cdot \underline{t} \cdot dS_t \quad (n)$$

Esta relación no lineal para el equilibrio del elemento no puede ser resuelta fácilmente, por lo cual se requiere un método de solución numérica. Para esto se incrementan las variables de fuerza y deformación, es decir éstas son divididas en estados fundamentales que se asumen a encontrar (-) y los incrementos (+)

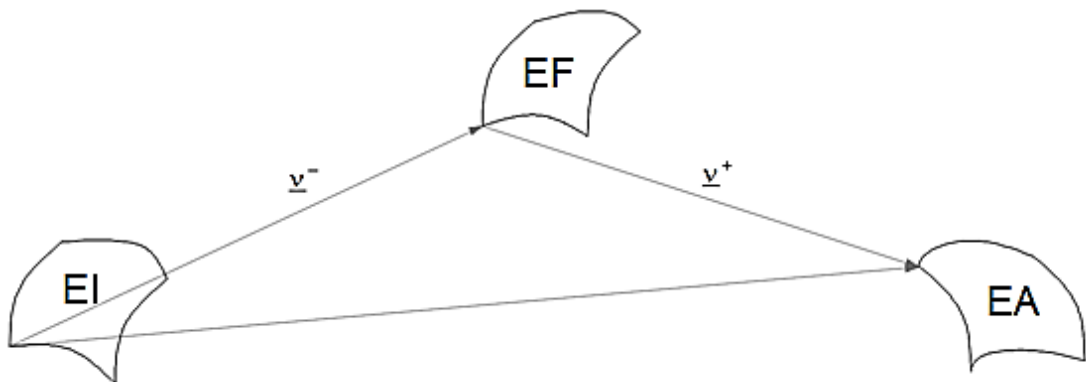


Figura 2-28 Parámetros Fundamentales de Estado e Incremento

Donde,

- **EI** → Estado Inicial
- **EF** → Incremento fundamental
- **EA** → Incremento adyacente

En la figura 2-29 se muestra los estados mencionados:

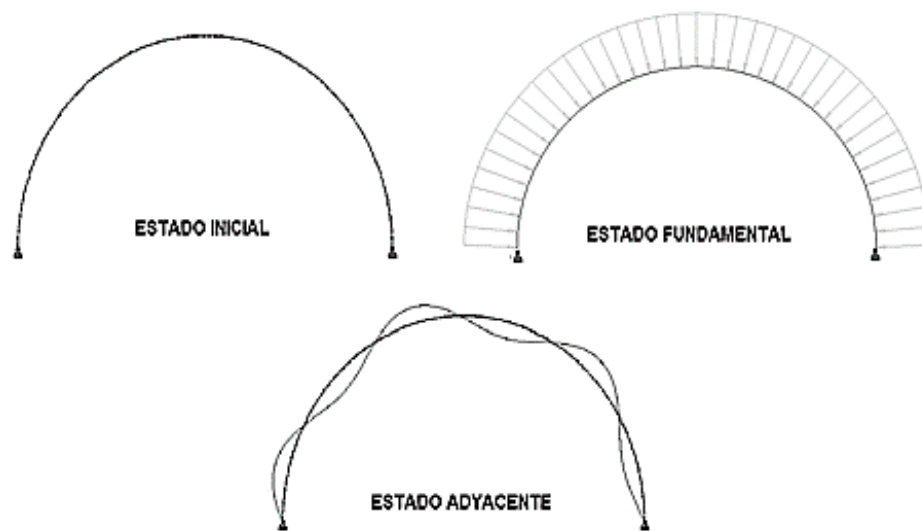


Figura 2-29 Estados de un arco bajo presión radial externa uniforme

Por lo tanto, se obtiene:

$$\underline{v} = \underline{v}^- + \underline{v}^+ \qquad \underline{p} = \underline{p}^- + \underline{p}^+ \qquad \underline{t} = \underline{t}^- + \underline{t}^+$$

Introduciendo estas relaciones en la ecuación (n), queda

$$\begin{aligned} \int_A [\underline{H}_L + \underline{H}_N(\underline{v}^- + \underline{v}^+)]^T \cdot \underline{E} \cdot \left[\underline{H}_L + \frac{1}{2} \underline{H}_N(\underline{v}^- + \underline{v}^+) \right]^T \cdot dA \cdot (\underline{v}^- + \underline{v}^+) \\ = \int_A \underline{Q}^T \cdot (\underline{p}^- + \underline{p}^+) \cdot dA + \int_{St} \underline{Q}^T \cdot \underline{R}_r^T \cdot (\underline{t}^- + \underline{t}^+) \cdot dS_t \end{aligned} \quad (o)$$

Después de simplificar los resultados, se plantean las siguientes matrices y vectores de los elementos:

- Matriz de rigidez elástico

$$\underline{k}_e \cdot \underline{v}^+ = \int_A \underline{H}_L^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{H}_L \cdot dA \cdot \underline{v}^+ \quad (p)$$

- Matriz de esfuerzos lineales iniciales

$$\underline{k}_{\sigma L} \cdot \underline{v}^+ = \int_A \underline{H}_N^T(\underline{v}^+) \cdot \underline{E} \cdot \underline{H}_L \cdot \underline{v}^- \cdot dA \quad (q)$$

- Matriz de esfuerzos no lineales iniciales

$$\underline{k}_{\sigma N} \cdot \underline{v}^+ = \int_A \frac{1}{2} \underline{H}_N^T(\underline{v}^+) \cdot \underline{E} \cdot \underline{H}_N \cdot (\underline{v}^-) \cdot (\underline{v}^-) \cdot dA \quad (r)$$

- Matriz de deformación lineal inicial

$$\underline{k}_{uL} \cdot \underline{v}^+ = \int_A (\underline{H}_L^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{H}_N \cdot (\underline{v}^-) + \underline{H}_N^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{H}_L) \cdot \underline{v}^+ \cdot dA \quad (s)$$

- Matriz de deformación no lineal inicial

$$\underline{k}_{uN} \cdot \underline{v}^+ = \int_A (\underline{H}_N^T \cdot (\underline{v}^-) \cdot \underline{E} \cdot \underline{H}_N \cdot (\underline{v}^-)) \cdot dA \cdot \underline{v}^+ \quad (t)$$

- Vector de fuerzas iniciales en el estado fundamental

$$\underline{g} \cdot \underline{v}^+ = \int_A [\underline{H}_L + \underline{H}_N \cdot (\underline{v}^-)]^T \cdot \underline{E} \cdot [\underline{H}_L + \frac{1}{2} \underline{H}_N \cdot (\underline{v}^-)] \cdot dA \cdot \underline{v}^- \quad (u)$$

- Vector de elemento de carga en el estado fundamental

$$\underline{p}^- = \int_A \underline{Q}^T \cdot \underline{p}^- \cdot dA + \int_{S_t} \underline{Q}^T \cdot \underline{R}_r^T \cdot \underline{t}^- \cdot dS_t \quad (v)$$

- Vector de incremento de carga

$$\underline{p}^+ = \int_A \underline{Q}^T \cdot \underline{p}^+ \cdot dA + \int_{S_t} \underline{Q}^T \cdot \underline{R}_r^T \cdot \underline{t}^+ \cdot dS_t \quad (w)$$

Sumando todas las matrices relacionadas, se obtiene la matriz de rigidez tangencial de los elementos,

$$\underline{k}_T = \underline{k}_e + \underline{k}_{\sigma L} + \underline{k}_{\sigma N} + \underline{k}_{uL} + \underline{k}_{uN} \quad (2-24)$$

Con las matrices y vectores introducidos, la relación del equilibrio se puede convertir en la siguiente representación matricial:

$$\underline{k}_T \cdot \underline{v}^+ = (\underline{k}_e + \underline{k}_{\sigma L} + \underline{k}_{\sigma N} + \underline{k}_{uL} + \underline{k}_{uN}) \cdot \underline{v}^+ = \underline{p} - \underline{g} \cdot (\underline{v}^-) \quad (x)$$

Después del análisis de elementos finitos, la relación de la rigidez tangencial del sistema es,

$$\underline{K}_T \cdot \underline{V}^+ = (\underline{K}_e + \underline{K}_{\sigma L} + \underline{K}_{\sigma N} + \underline{K}_{uL} + \underline{K}_{uN}) \cdot \underline{V}^+ = \underline{P} - \underline{G} \cdot (\underline{V}^-) \quad (2-25)$$

Una de las aplicaciones para la resolución de este tipo de problemas es la solución por algoritmos, en la cual la carga se incrementa, es decir se divide en pequeños tramos de carga. Dentro de este último paso, la ecuación (2-20) se resuelve iterativamente hasta que el lado derecho es cero.

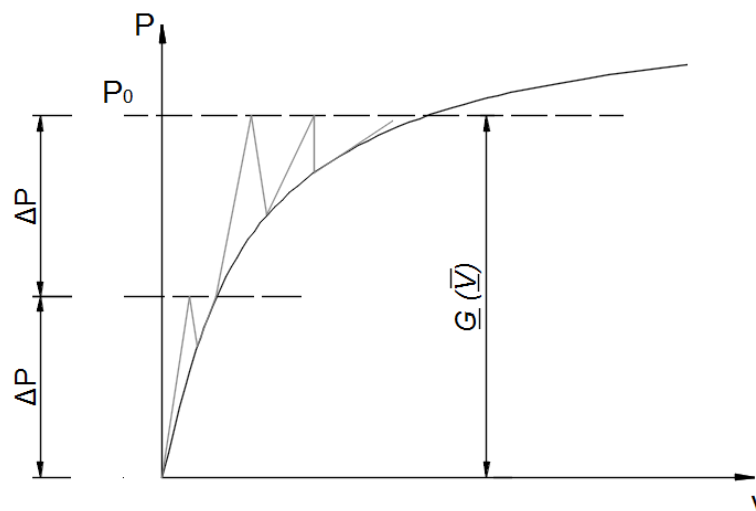


Figura 2-30 Algoritmo de Newton-Raphson (Zienkiewicz & Taylor, 2000, p. 28)

En las investigaciones geoméricamente lineales, las deformaciones \underline{V} que surgen son por definición muy pequeñas. El estado fundamental se puede conectar al estado de salida ($\bar{\underline{V}} = 0$). El vector deformación $\underline{V}^+ = \underline{V}$ describe el campo buscado de desplazamiento. La única matriz del sistema que permanece independiente de los estados de deformación fundamentales, es la matriz de rigidez elástica, de modo que a partir de la ecuación (2-25) el siguiente sistema lineal de ecuaciones resulta,

$$\underline{K}_e \cdot \underline{V} = \underline{P} \quad (2-26)$$

La matriz de rigidez total \underline{K}_e es simétrica y definida positiva, por lo que se puede utilizar algoritmos de solución eficientes.

2.4.4. ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD

En la ejecución de estudios de pandeo el método estudiado en el numeral anterior es posible, solo si al lado de un estado de equilibrio dado (estado fundamental $\bar{\underline{V}}$) es posible una posición de equilibrio adyacente (estado adyacente \underline{V}^+), sin cambiar la carga externa. Si el vector deformación $\bar{\underline{V}}$ describe un estado de equilibrio balanceado, entonces la ecuación de rigidez tangencial es igual a cero, debido que las cargas externas \underline{P} y los esfuerzos internos $\underline{G}(\bar{\underline{V}})$ están en equilibrio.

La posición de equilibrio deseada en el estado adyacente (\underline{V}^+) ocurrirá sin modificar la carga. La condición de equilibrio de acuerdo a la ecuación de rigidez tangencial queda:

$$\underline{K}_T \cdot \underline{V}^+ = \underline{0}$$

Donde el vector $\underline{V}^+ \neq 0$

Este criterio puede ser observado por el incremento iterativo después de cada paso de carga balanceado por un cálculo de autovalores. Si un autovalor de \underline{K}_T es igual a cero, su determinante también será cero (Chapra & Canale, 2010, p. 305), dando un punto de inestabilidad.

El enfoque principal de esta tesis trata el análisis de conductos formados por paredes delgadas bajo cargas radiales, por lo tanto el estado fundamental se produce solo en deformación radial, dando lugar a un así llamado estado lineal de pandeo previo. Las matrices de deformación inicial $\underline{K}_{\mu L}$ y $\underline{K}_{\mu N}$ son cero para este caso. Suponiendo además que los estados fundamentales de deformación que aparecen son pequeños, entonces se desprecian los términos de segundo orden \overline{V} . Esto significa que la matriz no lineal inicial $\underline{K}_{\sigma N}$ es despreciable.

Simplificando así la ecuación anterior de la forma,

$$\left(\underline{K}_e + \underline{K}_{\sigma L}\right) \cdot \underline{V}^+ = \underline{0}$$

En la implementación computacional del análisis de estabilidad, la estructura se somete a la acción de una carga de referencia ${}^0\underline{P}$, así determinando el aumento en el factor de carga λ_{Kr} en donde ocurre la estabilidad. Considerando esta aproximación en la ecuación anterior, se tiene el problema inicial llamado estabilidad clásica:

$$\left(\underline{K}_e + \lambda_{Kr} \cdot \underline{K}_{\sigma L}({}^0\underline{P})\right) \cdot \underline{V}^+ = \underline{0} \quad (2-27)$$

De la solución de este problema de autovalores, se obtiene los factores de carga críticos λ y los correspondientes modos de pandeo \underline{V}^+ .

2.5. USO DEL PROGRAMA ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS PROFESSIONAL PARA ANÁLISIS DE PANDEO

Autodesk Robot Structural Analysis Professional es un software de la casa de Autodesk, usado para la modelación, análisis y diseño de varios tipos de estructuras. El programa permite al diseñador efectuar cálculos estáticos y dinámicos, cumpliendo con los estándares de la construcción. Es posible desarrollar el proyecto considerando normativas nacionales e internacionales, además de la creación de reportes y documentación rápida de los resultados obtenidos.

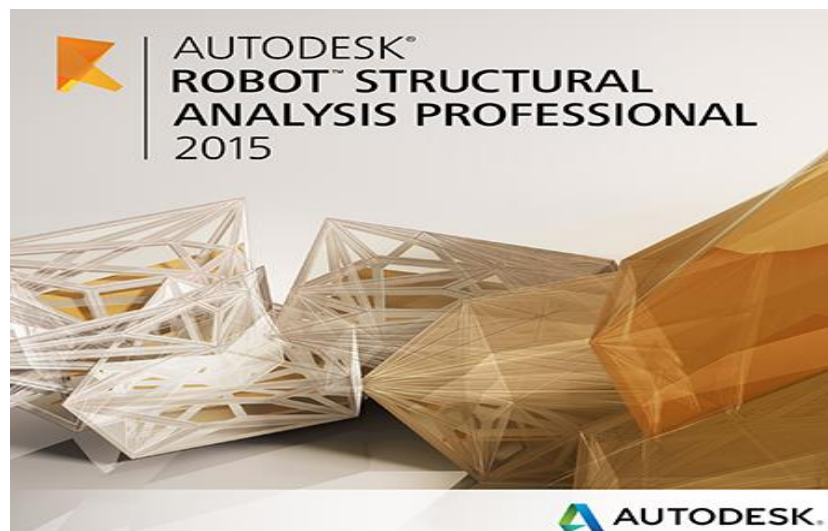


Figura 2-31 Presentación Autodesk Robot Structural Analysis Professional

Las características más importantes de Robot Structural Analysis son:

- La definición completa de la estructura es efectuada en modo gráfico (también es posible cargar, por ejemplo, archivos de formato DXF que contienen la geometría de la estructura)
- La posibilidad de presentación en modo gráfico la estructura diseñada y los varios resultados de cálculos (fuerzas, desplazamientos, trabajo simultáneo en varias ventanas en la misma pantalla, etc.)
- La posibilidad de efectuar análisis dinámicos y estáticos de estructuras.

- La posibilidad de asignar el tipo de barra durante la creación de la estructura en lugar de asignarlo en los módulos reglamentarios.
- La posibilidad de composición arbitraria de copias impresas (notas de cálculo, captura de pantalla, composición de copia impresa, copia de objetos a otros programas)

La estructura del programa se organiza en varios módulos, cada uno es responsable para una etapa específica del diseño del proyecto (creación del modelo de la estructura, cálculos de la estructura, dimensionamiento etc.). Los módulos funcionan en el mismo entorno modificando su visualización según las necesidades.

2.5.1. MÓDULO APLICATIVO DE PANDEO

El problema del análisis de pandeo lineal de una estructura es formulado y resuelto a través del problema de autovalores. Para cada modo de pandeo requerido se determinan los coeficientes críticos (autovalores) y autovectores.

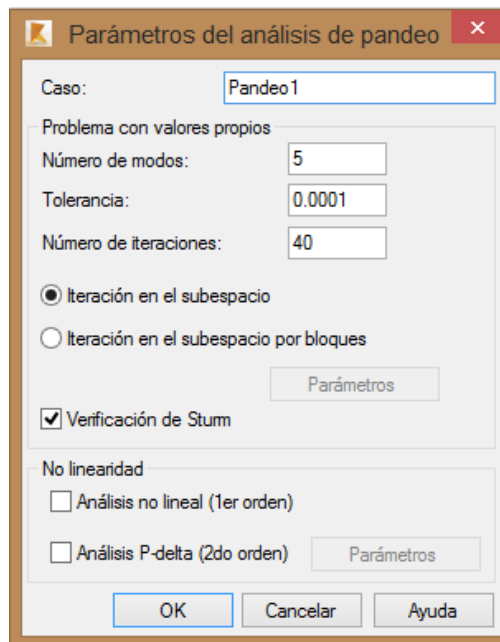


Figura 2-32 Entorno de Pandeo

Los parámetros que se definen en el análisis de pandeo son:

- *Caso*: Es el nombre del caso de carga.
- *Número de Modos de Pandeo*: Es el número de pandeos requeridos.
- *Tolerancia*: Valor de tolerancia que se quiere lograr durante el análisis iterativo de una estructura
- *Número de Iteraciones*: El máximo número de iteraciones a realizarse.
- *Los métodos para resolver el problema*: iteración en el subespacio o iteración en el subespacio por bloques.
- *Verificación de Sturm*: Alterna el algoritmo que encuentra los modos de vibración omitidos de una estructura. Si el algoritmo identifica un modo de vibración omitido, los cálculos iterativos se repiten.

2.5.2. MÉTODO DE AUTOVALORES EN ROBOT STRUCTURAL

El análisis de pandeo por autovalores predice la resistencia al pandeo teórico de una estructura elástica ideal. Este análisis se utiliza para predecir el punto de bifurcación utilizando un modelo linealizado de la estructura elástica. Éste se conoce como el análisis clásico de pandeo de Euler.

El método de iteración en el subespacio es usado por el programa para resolver el problema generalizado de autovalores (Autodesk, 2015),

$$K\phi - \lambda B\phi = 0 \quad (2-28)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación 2-27 del capítulo de elementos finitos, donde K es la matriz de rigidez, B es la matriz de la masa para análisis dinámico o la matriz de rigidez de esfuerzos, que originan la linealización del operador no lineal apropiado en el caso del análisis de pandeo.

λ	→	Autovalor
ϕ	→	Autovector

Se puede seleccionar todos los tipos de matrices de masa (consistente, agrupada con rotaciones, concentrada sin rotaciones). El rango de aplicación es limitado al análisis modal. Si la verificación de Sturm está activa, se lleva a cabo durante el proceso de verificación para determinar los autovalores omitidos.

El método de iteración en el subespacio por bloques consiste en iteraciones simultáneas de un vector de determinada dimensión. Cada vector para el que se ha realizado el proceso de convergencia se retira del subespacio de trabajo y se añade un nuevo vector de inicio en su lugar. La ortogonalidad de los vectores está asegurada en cada paso iterativo, aplicando el criterio de convergencia según la ecuación 2-29.

$$\left| \frac{\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k}{\lambda_i^k} \right| < Tolerancia \quad (2-29)$$

Donde i y k son los números de modos e iteraciones, respectivamente. El análisis de pandeo se determina con cierta precisión, la cual está determinada por la siguiente ecuación,

$$\varepsilon = \frac{\|\phi_{-i} - \lambda_i K^{-1} B \phi_{-i}\|}{\|\phi_{-i}\|} \quad (2-30)$$

Si el proceso de convergencia es lento, es recomendable aplicar el procedimiento de cambios (shift) en el análisis,

$$K_\sigma \underline{\phi} - \lambda M \underline{\phi} = 0 \quad (2-31)$$

Donde, $K_\sigma = K - \sigma M$ y σ es el valor de cambio.

2.5.3. PROCESO DE ANÁLISIS EN ROBOT STRUCTURAL

El entorno del programa es bastante amigable, al iniciar despliega la pantalla con los distintos tipos de geometrías.

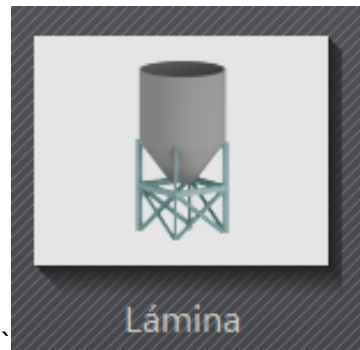


Figura 2-33 Entorno de elementos de pared delgada

Para el caso de análisis de pandeo en conductos de pared delgada se selecciona el entorno de *LÁMINA* (figura 2-33), que es el que mejor se adapta a las necesidades requeridas. Luego de haber dispuesto las propiedades geométricas y mecánicas, se configura para que el análisis que realiza el programa sea la verificación del pandeo como se observa en el ANEXO 1.

Posteriormente se dispone los parámetros del cuadro de dialogo según la figura 2-32 del literal 2.5.1. Tras lo cual se procede al análisis, obtención de resultados y visualización de esfuerzos y deformaciones. Para el caso específico de pandeo, los valores críticos se encuentran en análisis avanzado, como se visualiza en el ANEXO 2.

Y por último se puede observar las deformaciones y varios resultados (esfuerzos, fuerzas, etc.) como muestra el ANEXO 3.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE PANDEO CON AUTODESK ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS PROFESSIONAL

3.1. PANDEO EN ELEMENTOS DE PARED DELGADA DE SECCIÓN CONSTANTE

3.1.1. PLACA RECTANGULAR

El alcance del presente trabajo comprende el análisis de pandeo en conductos de lámina de pared delgada, la mayoría de estos son conformados por láminas curvas, pero el comportamiento de una placa rectangular plana se deriva de un estudio diferente, por lo cual el estudio teórico y el análisis a continuación, sirven de fundamento para un futuro análisis de posibles conductos que posean elementos con paredes rectas. La solución de la ecuación de pandeo de placas planas rectangulares tiene un sinnúmero de condicionantes, por lo cual tanto en la teoría, como en el análisis, solo se tomó el caso de solución analizado en las páginas 22 a 24.

Tomando en cuenta éste preliminar se tiene la siguiente disposición:

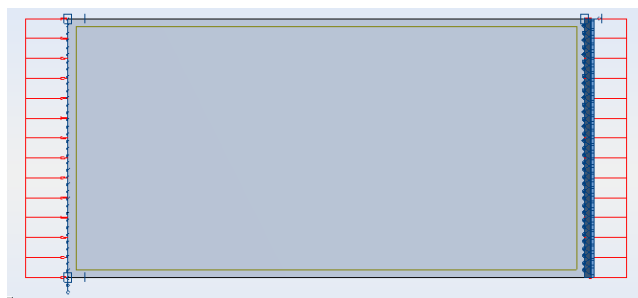


Figura 3-1 Modelo de Placa Rectangular analizada con Robot Structural

La placa está simplemente apoyada en los lados de menor longitud, además de ser sometida a una fuerza uniforme en la dirección de mayor longitud, como detalla el estudio teórico.

Las características geométricas y del material son:

- Longitud (a): 2 [m].
- Ancho (b): 1 [m].
- Espesor (h): 3 [mm].
- Módulo de Elasticidad (E): 199.95 [GPa].
- Número de Poisson (ν): 0.3

La solución analítica se encuentra resolviendo la ecuación 2-13.

$$q_{cr} = \frac{\pi^2 E h^3}{12 a^2 (1 - \nu^2)} = \frac{\pi^2 * 1.99 * 10^{11} * 0.003^3}{12 * 1 * (1 - 0.3^2)} = 1219.9 [Pa]$$

El análisis de pandeo con Robot Structural da el siguiente resultado:

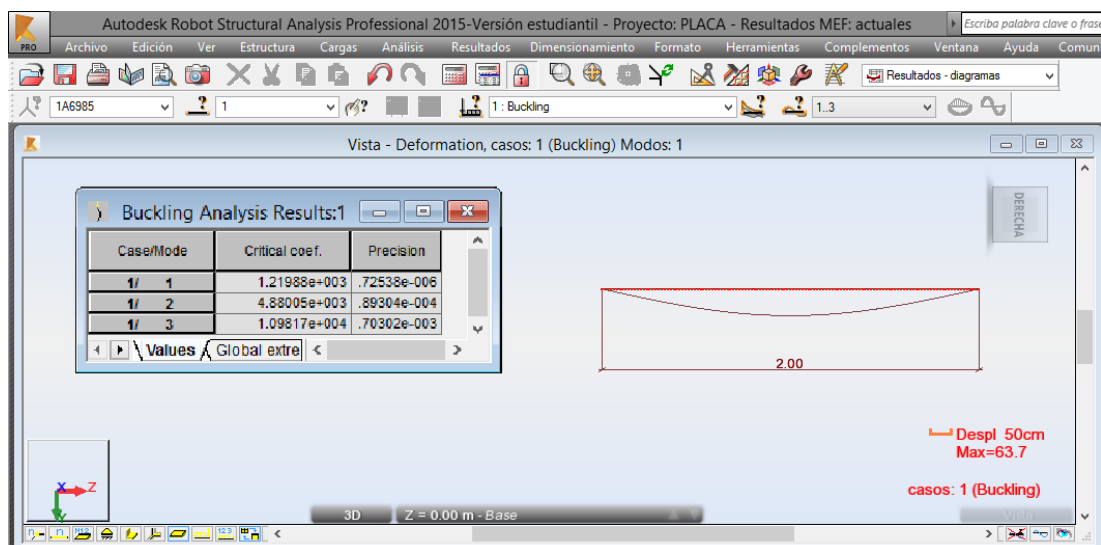


Figura 3-2 Modelo de Placa simplemente apoyada después del análisis de pandeo

El valor de carga crítica obtenido por el programa es 1219.9 [Pa]; con lo que el error relativo es:

$$\varepsilon = \frac{1219.9 - 1219.8}{1.2198} * 100 = 0.008\%$$

3.1.2. ARCO SEMICIRCULAR

La fase inicial de este estudio comprende un arco de longitud unitaria con apoyos articulados y luego con apoyos empotrados, para comparar la solución analítica con los resultados obtenidos.

- **Apoyos Articulados**

En esta sección, el cálculo de la estabilidad usando el programa de elementos finitos Robot Structural se lleva a cabo en un arco bajo compresión radial uniforme, como muestra la figura 3-3.

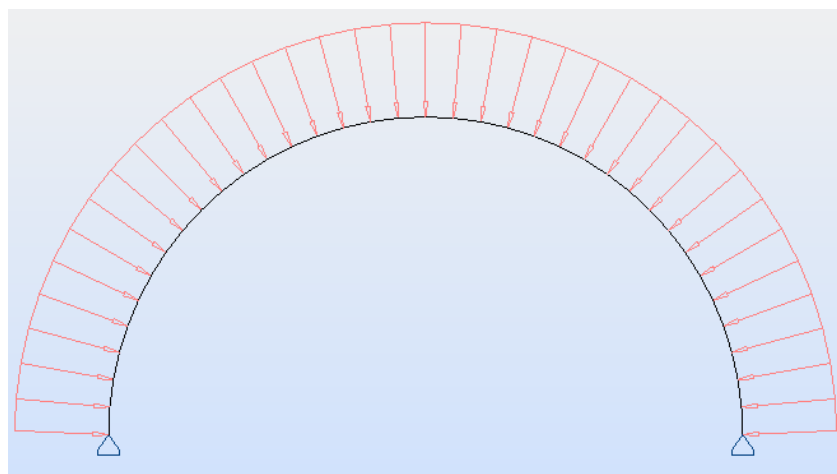


Figura 3-3 Modelo de Arco Articulado analizado con Robot Structural

La estructura se soporta en la parte inferior con apoyos articulados, todo el arco es sometido a una presión externa uniforme en dirección radial.

Las características geométricas y del material son:

- Radio (R): 5 [m].
- Espesor (h): 3 [mm].
- Longitud (L): 1 [m].
- Módulo de Elasticidad (E): 199.95 [GPa].
- Número de Poisson (ν): 0.3

La solución analítica se encuentra resolviendo la ecuación 2-17. Para este caso donde se tiene un semicírculo se reduce a la ecuación 2-15.

$$q_{cr} = \frac{3Eh^3}{12(1-\nu^2)R^3} = \frac{3 * 1.99 * 10^{11} * 0.003^3}{12(1-0.3^2)5^3} = 11.88 [Pa]$$

El análisis de pandeo con Robot Structural da el siguiente resultado:

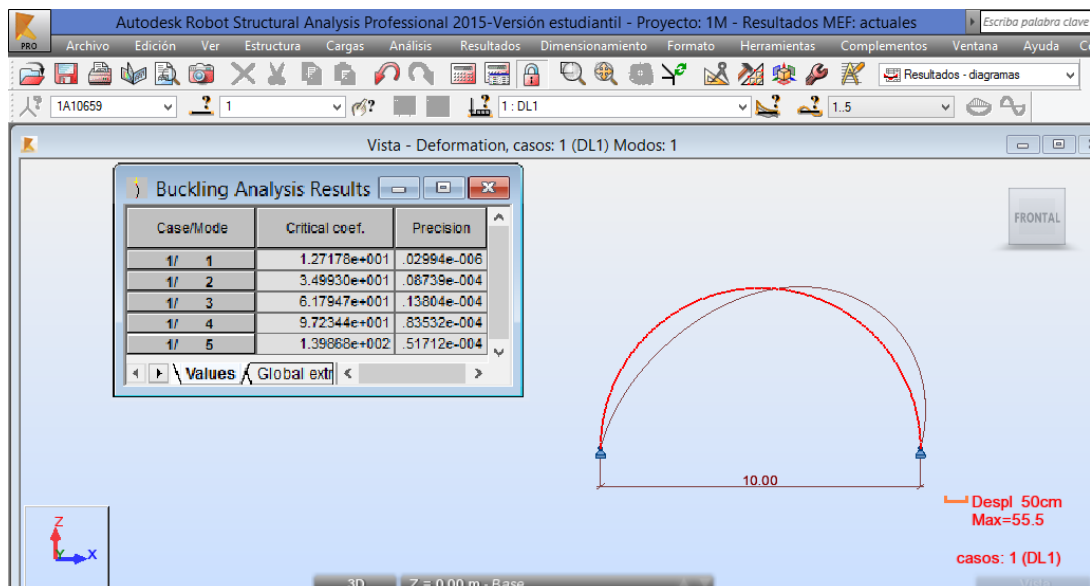


Figura 3-4 Modelo de arco articulado después del análisis de pandeo

El valor de carga crítica obtenido por el programa es 12.71 [Pa]; con lo que el error relativo es:

$$\varepsilon = \frac{12.71 - 11.88}{11.88} * 100 = 6.98\%$$

▪ Apoyos Empotrados

Para el análisis de arco con apoyos empotrados se toma las mismas características geométricas y del material del caso anterior, luego de lo cual la configuración queda como muestra la figura 3-5.

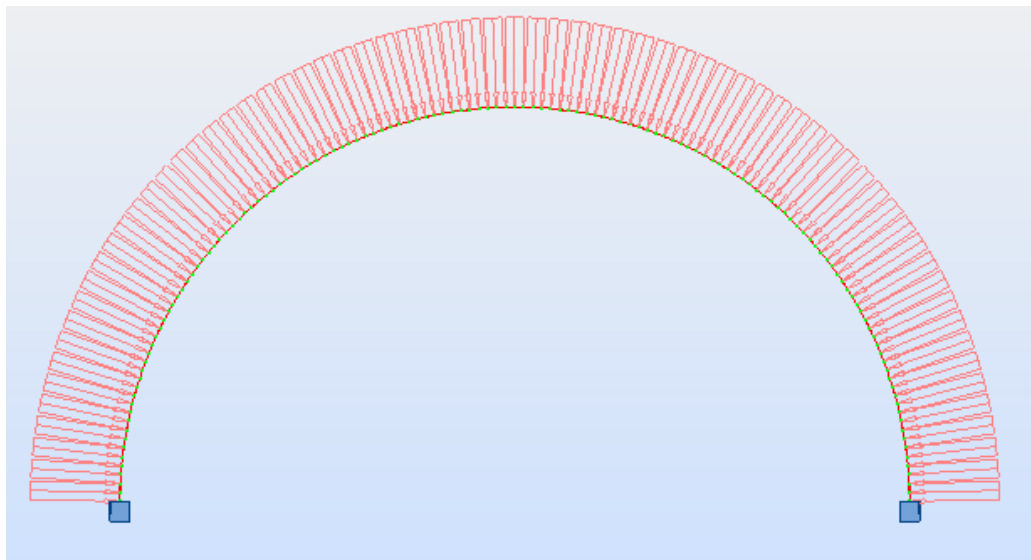


Figura 3-5 Modelo de Arco Empotrado analizado con Robot Structural

La solución analítica se encuentra resolviendo la ecuación 2-18. Para este caso donde se tiene un semicírculo el factor k toma el valor de 3 (Cuadro 2-1), con lo cual se tiene:

$$q_{cr} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^3} (k^2 - 1) = \frac{1.99 * 10^{11} * 0.003^3}{12(1-0.3^2)5^3} (3^2 - 1) = 31.64 [Pa]$$

El análisis de pandeo con Robot Structural da el siguiente resultado:

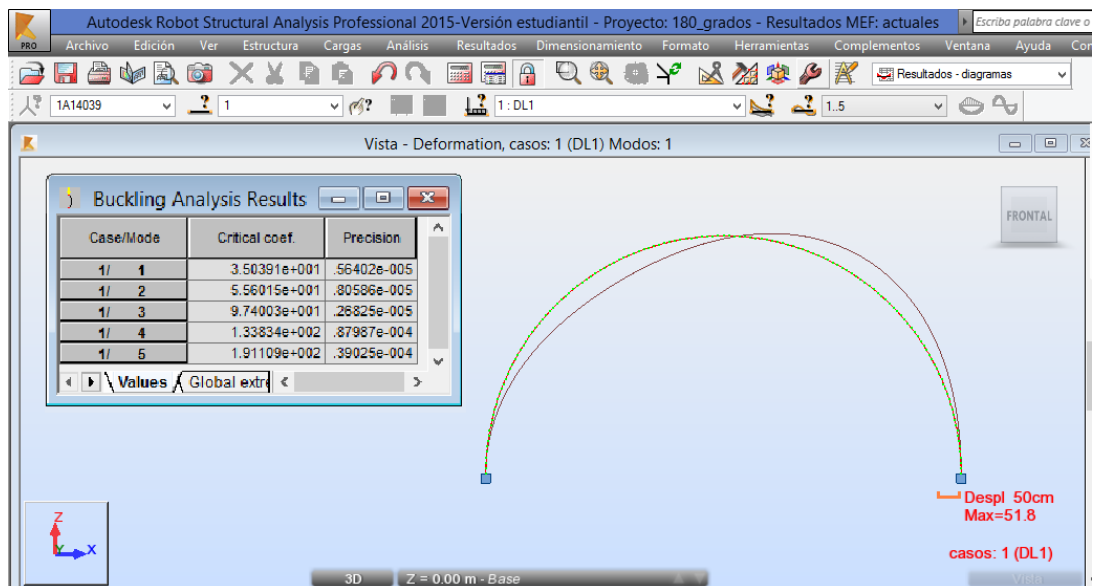


Figura 3-6 Modelo de arco empotrado después del análisis de pandeo

El valor de carga crítica obtenido por el programa es 35.03 [Pa]; con lo que el error relativo es:

$$\varepsilon = \frac{35.03 - 31.64}{31.64} * 100 = 10.7\%$$

3.1.3. CILINDRO

Esta sección comprende el análisis de estabilidad para un cilindro bajo compresión radial uniforme, como muestra la figura 3-7.

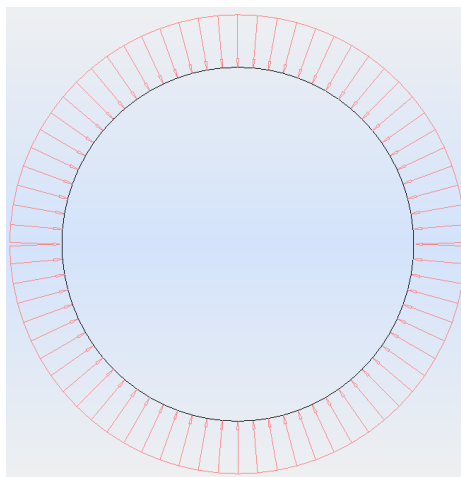


Figura 3-7 Modelo de Cilindro simplemente soportado analizado con Robot Structural

La estructura es simplemente soportada en sus extremos, toda la circunferencia es sometida a una presión externa uniforme en dirección radial.

- **Longitud Media (Aproximadamente 10m)**

Las características geométricas y del material son:

- Radio (R): 5 [m].
- Espesor (h): 3 [mm].
- Longitud (L): 10 [m].
- Módulo de Elasticidad (E): 199.95 [GPa].
- Número de Poisson (ν): 0.3

La solución analítica se encuentra resolviendo las ecuaciones 2-21 y 2-22.

$$n_{cr} = \sqrt{\frac{\pi R}{L} \sqrt[4]{36(1 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}} = \sqrt{\pi * \frac{5000}{10000} * \sqrt[4]{36(1 - 0.3^2)}} \approx 13$$

$$p_n = \frac{Dn^2}{R^3} \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 + \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{L} \right)^4}{n^6 \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right]^2} = 835.05 [Pa]$$

El análisis de pandeo con Robot Structural da el siguiente resultado:

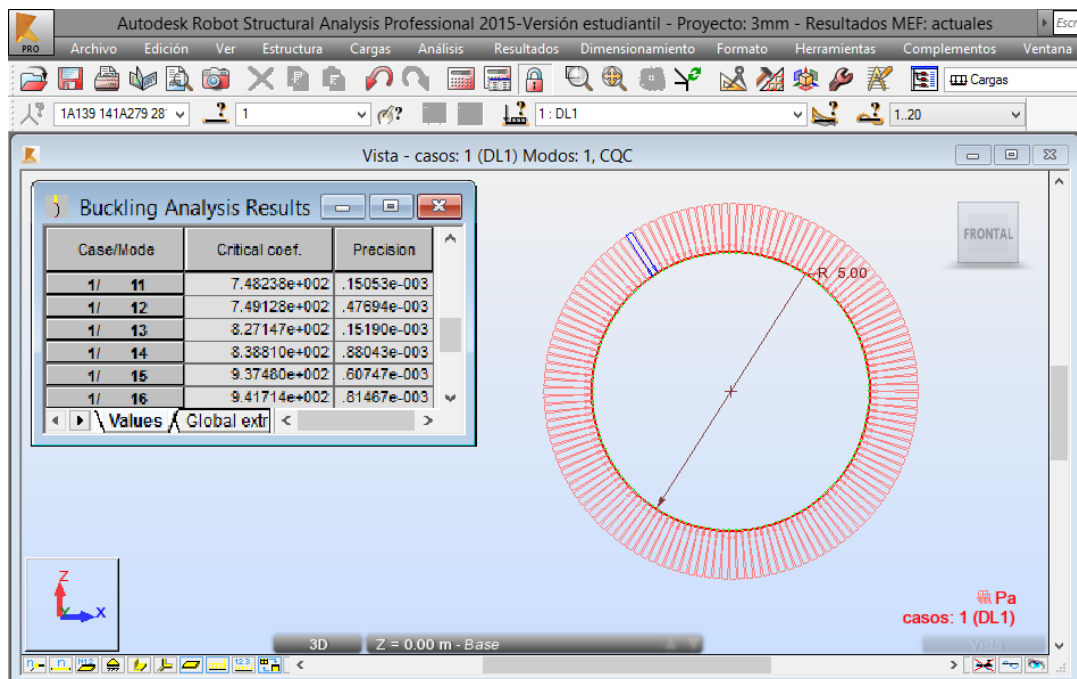


Figura 3-8 Modelo de cilindro de longitud intermedia (aproximadamente 10m) después del análisis de pandeo

El valor de carga crítica obtenido por el programa es 827.14 [Pa]; con lo que el error relativo es:

$$\varepsilon = \frac{835.05 - 827.14}{835.05} * 100 = 0.94\%$$

- **Gran Longitud (Aproximadamente 500 m)**

Las características geométricas son las mismas del anterior caso, pero la única diferencia es:

- Longitud (L): 600 [m].

La solución analítica se encuentra resolviendo la ecuación 2-21.

$$p_n = \frac{Dn^2}{R^3} \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 + \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{L} \right)^4}{n^6 \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right]^2} = 16.706 \text{ [Pa]}$$

El análisis de pandeo con Robot Structural da el siguiente resultado:

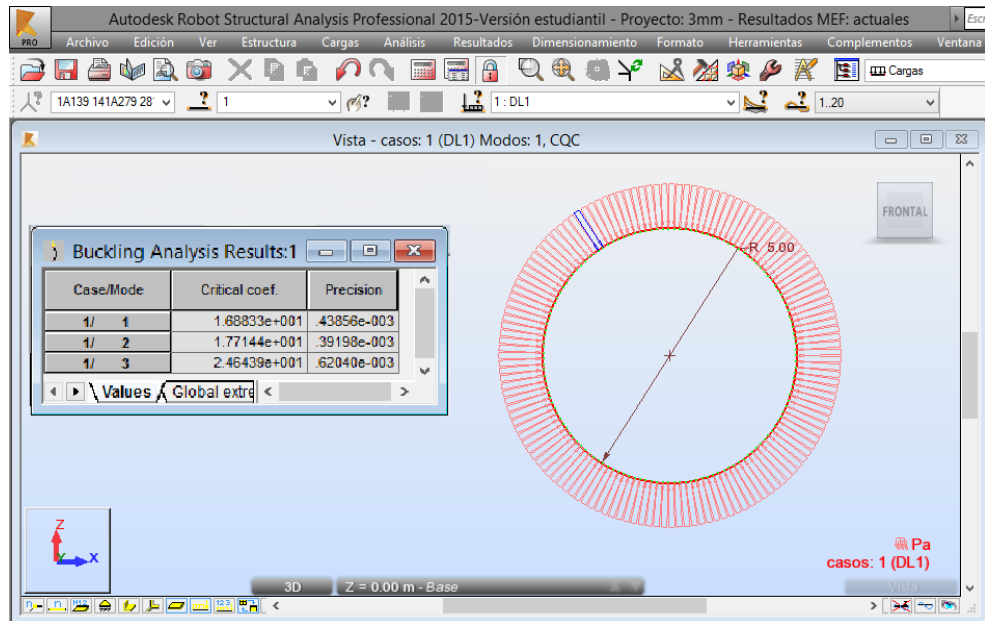


Figura 3-9 Modelo de cilindro de gran longitud (aproximadamente 500m) después del análisis de pandeo

El valor de carga crítica obtenido por el programa es 16.883 [Pa]; con lo que el error relativo es:

$$\varepsilon = \frac{16.883 - 16.706}{16.706} * 100 = 1.06\%$$

CAPÍTULO 4

COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se realiza un análisis más profundo, variando parámetros geométricos como el diámetro, espesor, longitud, ángulos según sea el caso, para compararlos con las soluciones teóricas analíticas para que quede demostrado la validez del análisis de elementos finitos realizado por el programa.

4.1. PANDEO EN ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE

4.1.1. ARCO CON APOYOS ARTICULADOS

Para la variación del ángulo, espesor y radio la longitud es unitaria, la configuración del arco articulado está dispuesta según la figura 4-1.

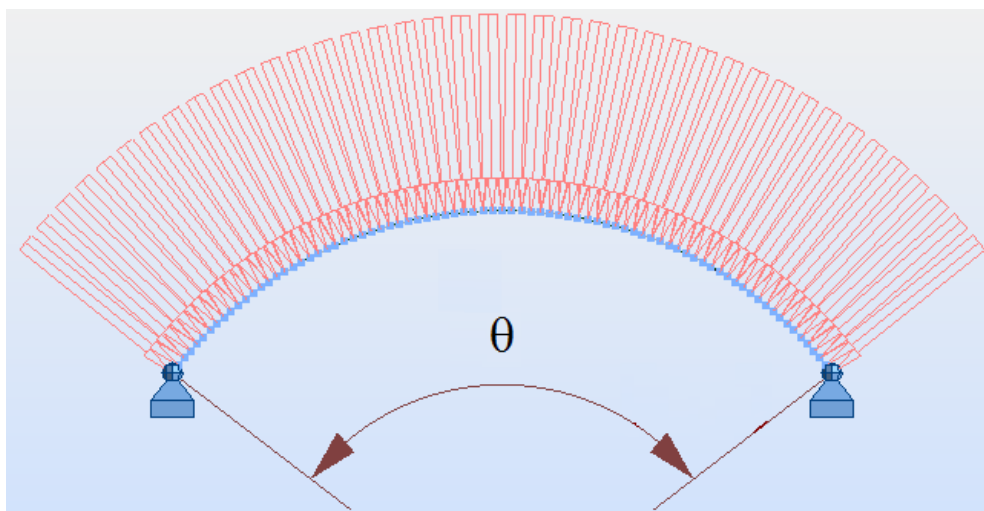


Figura 4-1 Modelo de Arco articulado

La variación de parámetros geométricos se dispone a continuación:

▪ VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE ARCO

Para un arco con un radio de 5 [m] y espesor 3[mm] con variación el ángulo se tiene,

CUADRO 4-1

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL ÁNGULO ENTRE APOYOS (APOYOS ARTICULADOS)

θ°	Pcr.(Analítico) [Pa]	Pcr.(Robot) [Pa]	Error [%]
15	2274.13	2210.0	-2.82
30	565.57	561.33	-0.75
45	249.17	252.7	1.42
60	138.43	139.91	1.07
75	87.17	89.29	2.43
90	59.33	61.62	3.87
105	42.54	44.96	5.70
120	31.64	33.93	7.24
135	24.17	26.25	8.61
150	18.83	20.57	9.26
165	14.87	16.21	9.00
180	11.87	12.72	7.21
195	9.52	9.84	3.31
210	7.67	7.44	-2.97

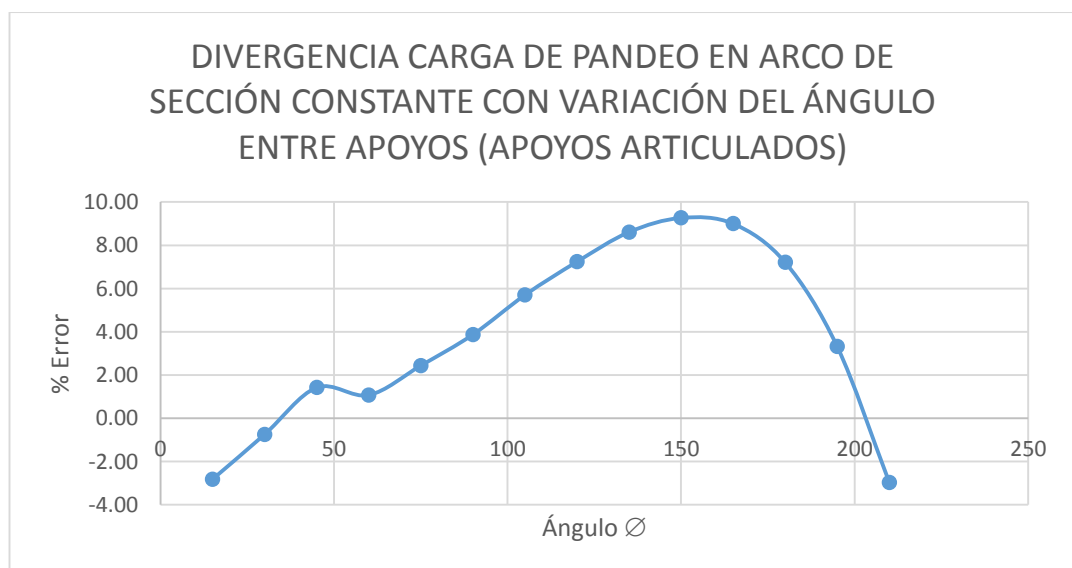


Figura 4-2 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación de ángulo entre apoyos (apoyos articulados)

Se puede observar que al cambiar el ángulo comprendido entre los apoyos, el error que se consigue se encuentra debajo del 10%, lo cual es aceptable, además se observa que al acercarse los puntos de apoyo entre sí, la carga crítica disminuye, esto se puede explicar tomando en cuenta que ambos apoyos coincidan en un punto permitiendo al anillo rotar como un cuerpo alrededor de un apoyo común.

▪ VARIACIÓN DEL ESPESOR

Para un arco con un radio de 5 [m] y ángulo entre apoyos de 210° con variación del espesor se tiene,

CUADRO 4-2

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL ESPESOR (APOYOS ARTICULADOS)

h [mm]	Pcr. (Analítico) [Pa]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
0.5	0.04	0.04	-1.43
1	0.28	0.28	-2.16
1.5	0.96	0.94	-2.40
2	2.27	2.21	-2.62
2.5	4.44	4.32	-2.72
3	7.67	7.45	-2.92
3.5	12.18	11.81	-3.10
4	18.18	17.61	-3.21
4.5	25.88	25.04	-3.35
5	35.50	34.31	-3.47
5.5	47.25	45.61	-3.60
6	61.34	59.16	-3.69
6.5	77.99	75.14	-3.80
7	97.41	93.75	-3.90
7.5	119.81	115.21	-3.99
8	145.41	139.69	-4.09

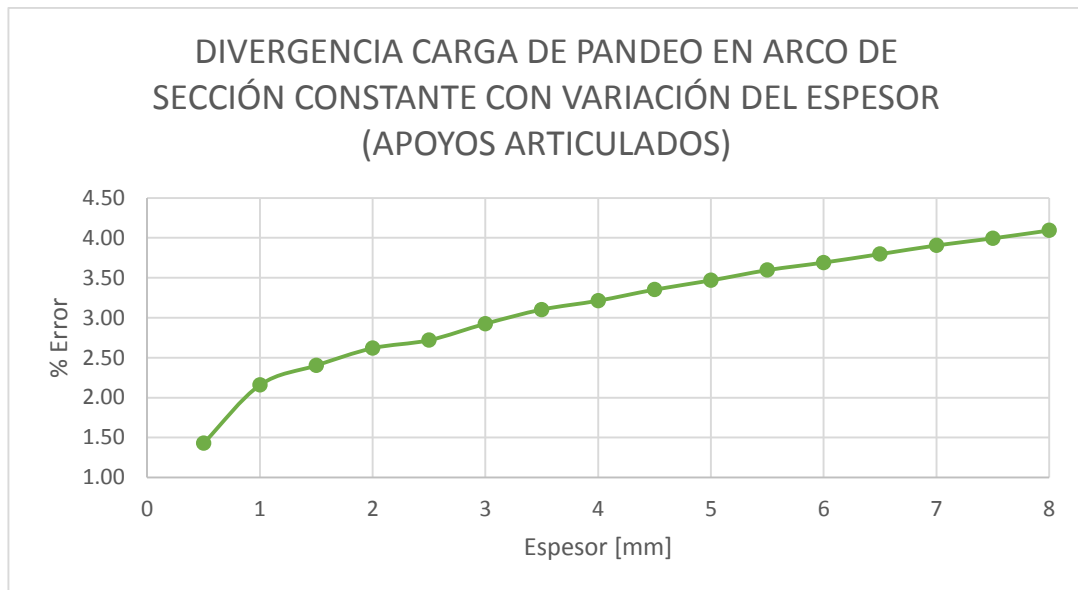


Figura 4-3 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación del espesor (apoyos articulados)

Al analizar el gráfico de error relativo, cuando se cambia el espesor del arco se puede observar que éste aumenta de una manera constante pero despreciable, ya que alcanza el máximo valor de 4% en espesor 8mm, lo cual muestra que los valores son muy cercanos a los reales.

▪ VARIACIÓN DE RADIO

Para un arco con un espesor de 3[mm] y ángulo entre apoyos de 195° con variación del radio se tiene,

CUADRO 4-3

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL RADIO (APOYOS ARTICULADOS)

Radio [m]	Pcr. (Analítico) [Pa]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
1	1190.60	1241.58	4.28
2	148.83	155.33	4.37
3	44.10	45.74	3.73
4	18.60	19.26	3.54
5	9.52	9.84	3.34
6	5.51	5.69	3.18
7	3.47	3.58	3.01
8	2.33	2.39	2.88
9	1.63	1.68	2.73
10	1.19	1.22	2.62
11	0.89	0.92	2.49
12	0.69	0.71	2.39

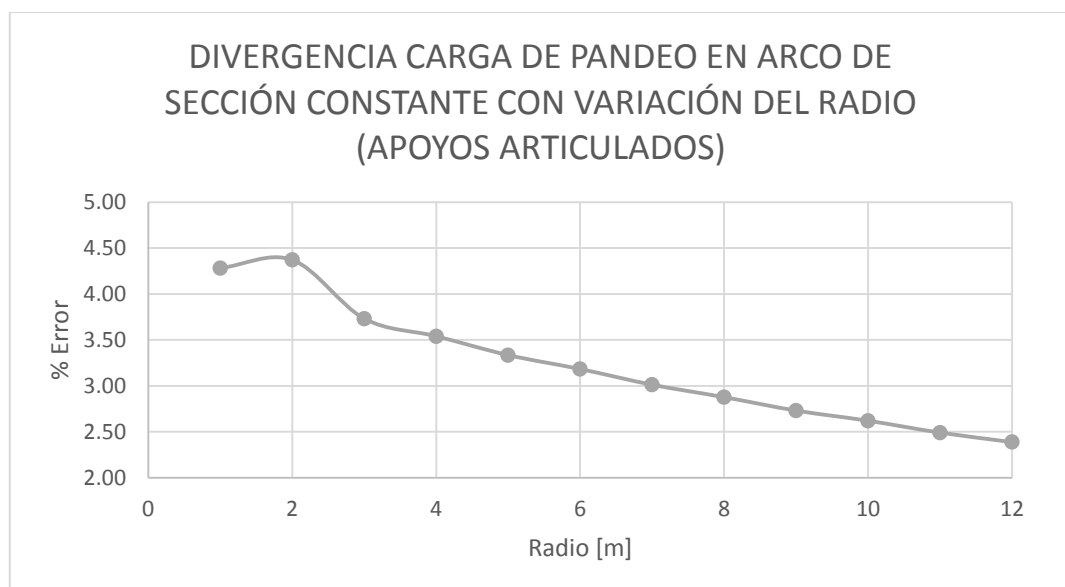


Figura 4-4 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación del radio (apoyos articulados)

Al aumentar el radio aumenta la distancia entre los apoyos, dando una menor resistencia al pandeo y por ende una menor carga crítica. Por lo cual la diferencia entre valores se va acortando, como lo demuestra figura 4-4.

▪ VARIACIÓN DE LA LONGITUD

La solución analítica da como resultado el mismo valor de carga crítica para cualquier longitud, por lo cual la carga crítica teórica para todos los casos es 11.87 [Pa]. Para un arco de semicírculo con un radio de 5 [m] y un espesor de 3[mm], con variación de longitud se tiene,

CUADRO 4-4

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DE LONGITUD (APOYOS ARTICULADOS)

Longitud [m]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
1	12.71	7.08
5	12.91	7.08
10	12.93	7.08
15	12.94	7.08
20	12.94	7.08
25	12.94	7.08
30	12.94	7.08
35	12.94	7.08
40	12.95	7.08
45	12.95	7.08
50	12.95	7.08
55	12.95	7.08
60	12.95	7.08
65	12.95	7.08
70	12.95	7.08

De los datos obtenidos se puede comprobar que se cumple la condición indicada en la teoría, de que la longitud no afecta en la carga crítica del arco, ya que el error relativo se mantiene constante al variar la extensión de la estructura como muestra la figura 4-5.

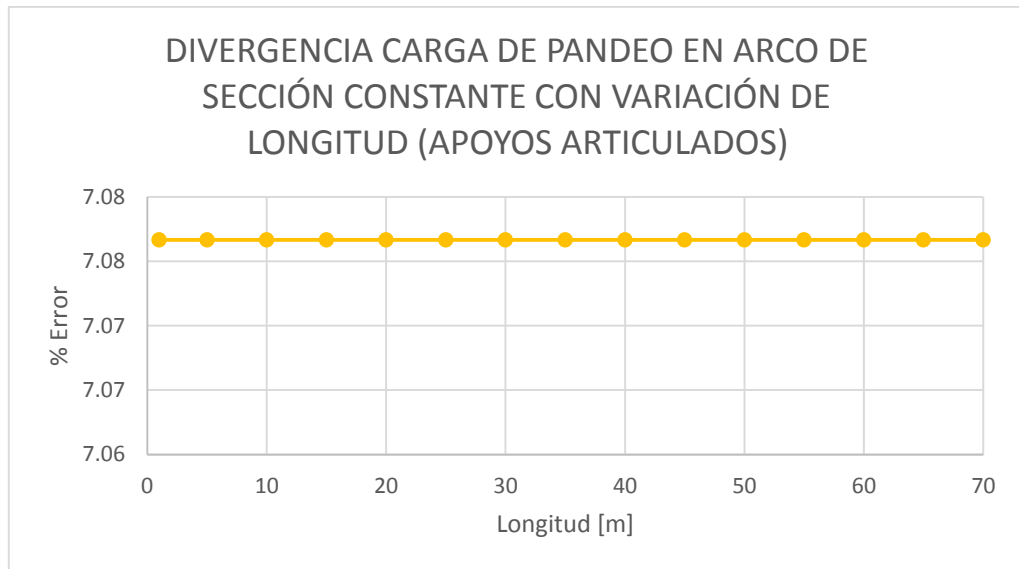


Figura 4-5 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación de longitud (apoyos articulados)

4.1.2. ARCO CON APOYOS EMPOTRADOS

Para la variación del ángulo, espesor y radio la longitud es unitaria, la configuración del arco empotrado está dispuesta según la figura 4-6.

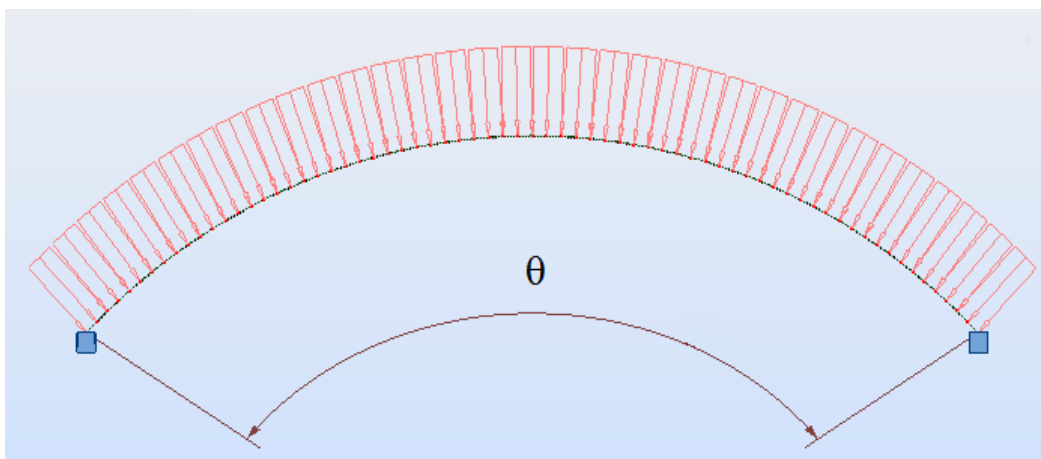


Figura 4-6 Modelo de Arco empotrado

La variación de parámetros geométricos se dispone a continuación:

▪ VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE ARCO

Para un arco con un radio de 5 [m] y espesor 3[mm] con variación el ángulo se tiene,

CUADRO 4-5

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL ÁNGULO ENTRE APOYOS (APOYOS EMPOTRADOS)

θ°	Pcr. (Analítico) [Pa]	Pcr. (robot) [Pa]	Error [%]
15	4659.08	4657.31	-0.04
30	1163.79	1170.27	0.56
45	516.53	519	0.48
60	290.01	292.95	1.01
75	185.18	188.9	2.01
90	128.26	132.47	3.28
105	93.97	98.46	4.78
120	71.74	76.3	6.36
135	56.52	61.02	7.96
150	45.67	49.91	9.28
165	37.68	41.58	10.35
180	31.64	35.03	10.71
210	23.34	25.28	8.33
240	18.15	18.03	-0.68

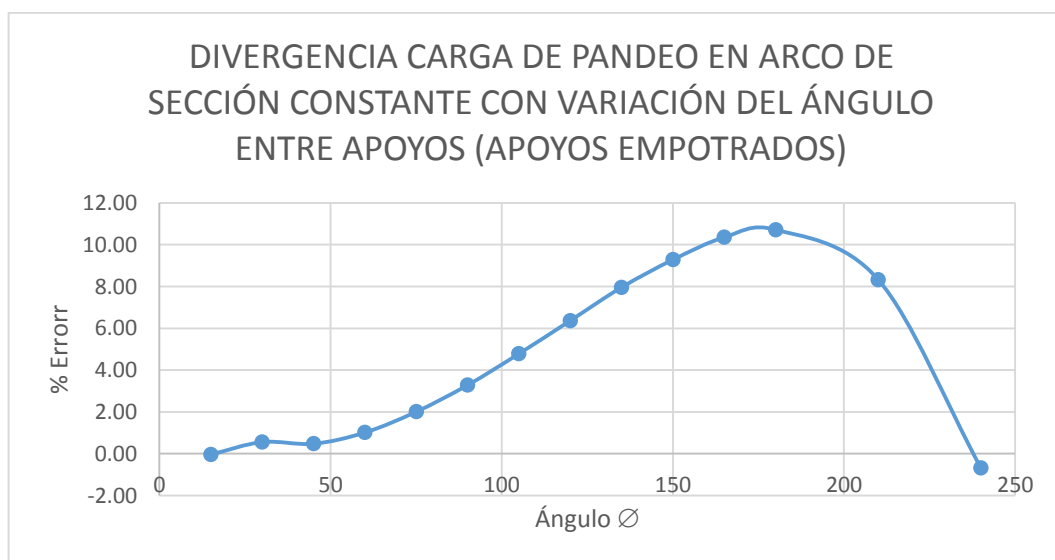


Figura 4-7 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación de ángulo entre apoyos (apoyos empotrados)

En la figura 4-7 se observa el comportamiento similar al de la figura 4-2 de arco con apoyos articulados, ya que las curvas de error son de forma parecida.

▪ VARIACIÓN DEL ESPESOR

Para un arco con un radio de 5 [m] y ángulo entre apoyos de 90° con variación del espesor se tiene,

CUADRO 4-6

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL ESPESOR (APOYOS EMPOTRADOS)

h [mm]	Pcr. (Analítico) [Pa]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
0.5	0.594	0.6185	4.16
1	4.751	4.939	3.97
1.5	16.033	16.6376	3.77
2	38.004	39.3687	3.59
2.5	74.227	76.7706	3.43
3	128.265	132.47	3.28
3.5	203.680	210.078	3.14
4	304.035	313.202	3.02
4.5	432.894	445.438	2.90
5	593.819	610.373	2.79
5.5	790.373	811.588	2.68
6	1026.118	1052.66	2.59
6.5	1304.619	1337.14	2.49
7	1629.438	1668.6	2.40
7.5	2004.138	2050.59	2.32
8	2432.281	2486.63	2.23

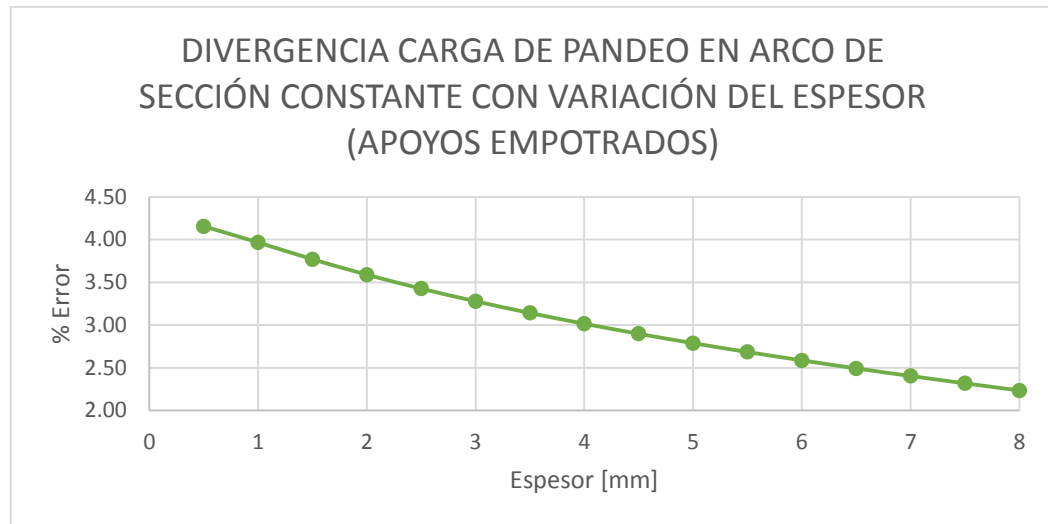


Figura 4-8 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación del espesor (apoyos empotrados)

Al contrario de la figura 4-3 de un arco con apoyos articulados, el error en este caso disminuye al aumentar el espesor, pero aun así el rango de porcentaje de error es menor al 5%, lo cual muestra que los resultados son admisibles.

▪ VARIACIÓN DE RADIO

Para un arco con un espesor de 3[mm] y ángulo entre apoyos de 60° con variación del radio se tiene,

CUADRO 4-7

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL RADIO (APOYOS EMPOTRADOS)

Radio [m]	Pcr. (Analítico) [Pa]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
1	36251.472	36859.4	1.68
2	4531.434	4587.67	1.24
3	1342.647	1355.71	0.97
4	566.429	570.713	0.76
5	290.012	291.658	0.57
6	167.831	168.5	0.40
7	105.689	105.963	0.26
8	70.804	70.8827	0.11
9	49.728	49.7522	0.05
10	36.251	36.1961	-0.15
11	27.236	27.1618	-0.27
12	20.979	20.8973	-0.39

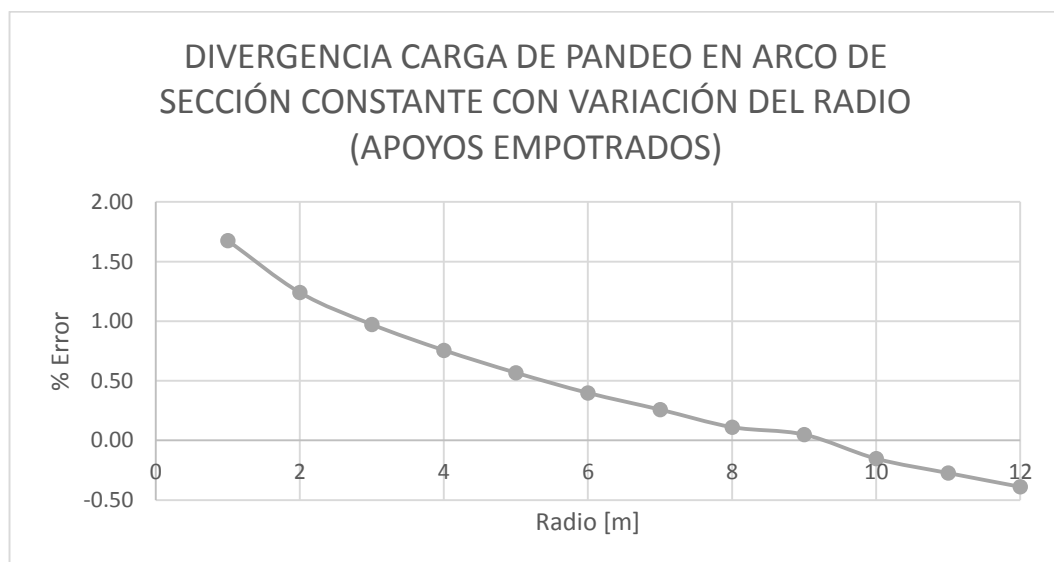


Figura 4-9 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación del radio (apoyos empotrados)

El error máximo obtenido para este caso es de 1.68%, lo que significa que los valores de carga crítica son altamente aproximados

▪ VARIACIÓN DE LA LONGITUD

La carga crítica teórica para todos los casos es 31.64 [Pa]. Para un arco de semicírculo con un radio de 5 [m] y un espesor de 3[mm], con variación de longitud se tiene,

CUADRO 4-8

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DE LONGITUD (APOYOS EMPOTRADOS)

Longitud [m]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
1	35.03	10.71
5	35.48	12.15
10	35.56	12.42
15	35.63	12.62
20	35.64	12.64
25	35.64	12.66
30	35.64	12.67
35	35.65	12.68
40	35.65	12.68
45	35.65	12.69
50	35.65	12.69
55	35.65	12.70
60	35.65	12.70
65	35.65	12.70
70	35.65	12.70

Al igual que en el análisis anterior de arco con apoyos articulados, queda demostrado que la longitud no afecta en el valor de la carga del arco, como muestra la figura 4-10. El valor del error relativo se mantiene constante, es decir que tanto en condición articulada o empotrada la longitud no influye en la resistencia al pandeo de arco, los datos divergen por valores decimales, ya que todos los valores son cercanos a los 35 [Pa].

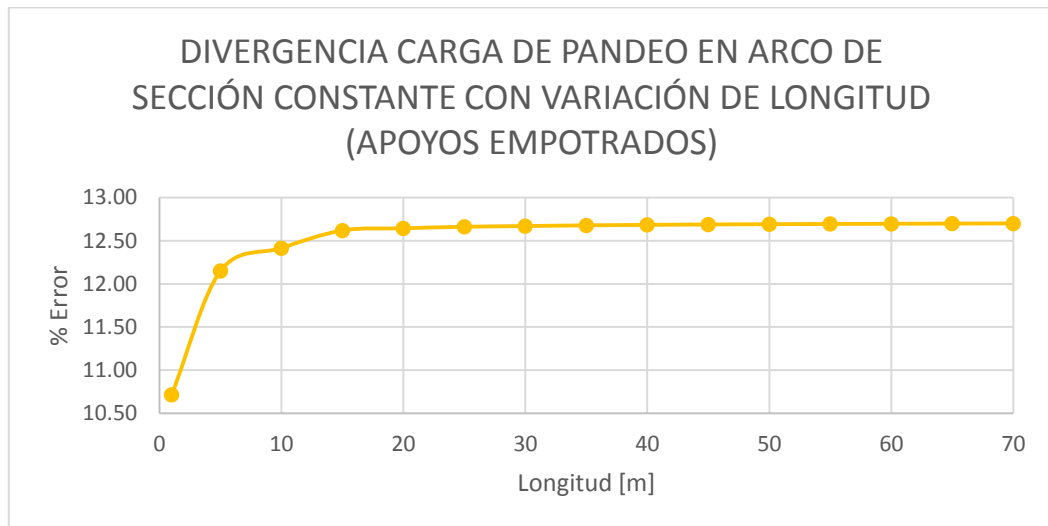


Figura 4-10 Errores carga crítica de arco de sección constante con variación de longitud (apoyos empotrados)

4.2. PANDEO EN CILINDRO DE SECCIÓN CONSTANTE

El desarrollo de soluciones analíticas para resolver el problema de pandeo en cilindros se enfoca básicamente en cilindros simplemente apoyados, además de esto la longitud es uno de los parámetros más importantes para el cálculo del mismo, por lo cual el análisis se divide en dos grupos, los de longitud intermedia y los de gran longitud. La configuración del cilindro simplemente apoyado está dispuesto según la figura 4-11.

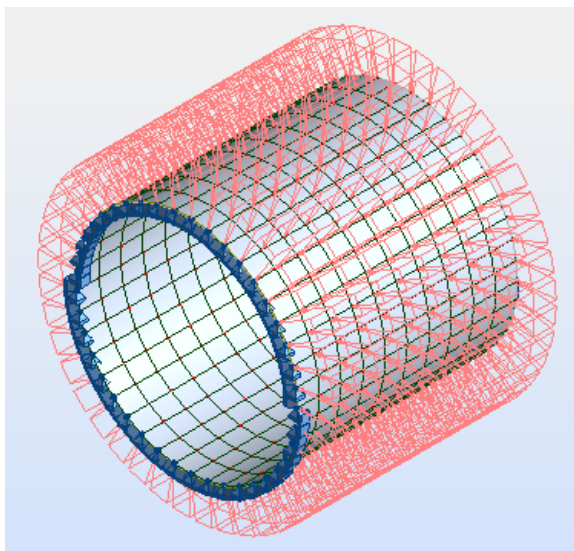


Figura 4-11 Modelo de cilindro simplemente soportado

4.2.1. CILINDRO DE MEDIA LONGITUD (APROXIMADAMENTE 10m)

La variación de parámetros geométricos se dispone a continuación:

- **VARIACIÓN DEL ESPESOR**

Para un cilindro con un radio de 5 [m] y longitud de 10 [m] con variación el espesor se tiene,

CUADRO 4-9

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE CILINDRO DE LONGITUD INTERMEDIA (APROXIMADAMENTE 10m) DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL ESPESOR

h [mm]	n_{cr}	Pcr. (Analítico) [Pa]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
0.5	20	9.23	9.22	0.07
1	17	52.42	53.55	-2.16
1.5	15	143.30	144.5	-0.84
2	14	294.35	285.73	2.93
2.5	13	512.90	510.87	0.40
3	13	819.71	827.15	-0.91
3.5	12	1189.75	1184.79	0.42
4	12	1676.12	1650.51	1.53
4.5	11	2233.55	2189.3	1.98
5	11	2902.67	2880.35	0.77
5.5	11	3704.73	3722.79	-0.49
6	11	4653.01	4774.75	-2.62
6.5	10	5605.25	5721.71	-2.08
7	10	6728.55	6851.14	-1.82
7.5	10	8005.66	7760.24	3.07
8	10	9447.56	9294.03	1.63

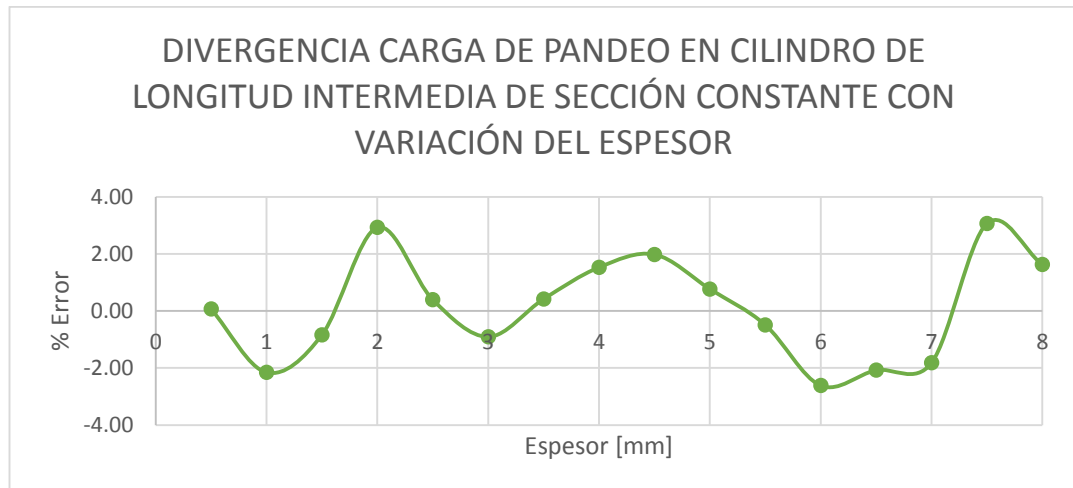


Figura 4-12 Errores carga crítica de cilindro de longitud intermedia (aproximadamente 10m) de sección constante con variación del espesor

El error es dispersamente divergente, esto responde a la aparición de fuerzas de membrana debido a las condiciones de frontera en el cilindro, lo cual hace que tenga un comportamiento variado, pero aun así el error máximo que se tiene es menor al 4%, valor que es tolerable.

▪ VARIACIÓN DEL RADIO

Para un cilindro con un espesor de 3 [mm] y longitud de 10 [m] con variación del radio se tiene,

CUADRO 4-10

ERRORES CARGA CRÍTICA DE CILINDRO DE LONGITUD INTERMEDIA
(APROXIMADAMENTE 10m) DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL RADIO

R [m]	n_{cr}	Pcr. (Analítico) [Pa]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
1.5	6	5696.03	5972.24	-4.85
2.0	7	3425.38	3497.06	-2.09
2.5	6	3095.86	3160.89	-2.10
3.0	9	1779.99	1751.94	1.58
3.5	9	1405.38	1402.47	0.21
4.0	11	1145.77	1160.42	-1.28
4.5	11	957.01	958.12	-0.12
5.0	13	819.71	827.14	-0.91
5.5	13	703.58	682.08	3.06
6.0	14	616.22	613.94	0.37

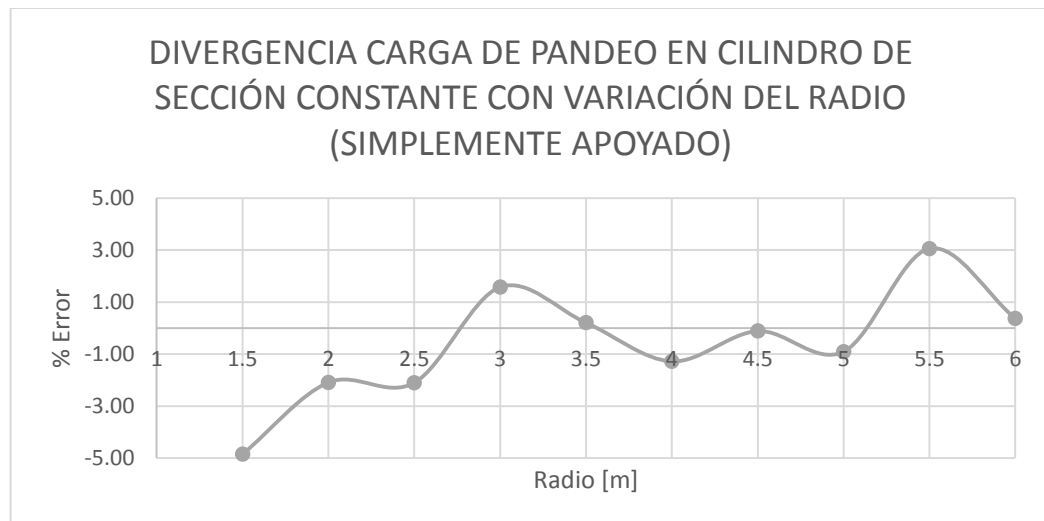


Figura 4-13 Errores carga crítica de cilindro de longitud intermedia (aproximadamente 10m) de sección constante con variación del radio

Al igual que en el análisis anterior el error es disperso, pero los valores se encuentran entre el $\pm 5\%$, estos valores son convenientes para el estudio posterior.

4.2.2. CILINDRO DE GRAN LONGITUD (APROXIMADAMENTE 500 m)

La variación de parámetros geométricos se dispone a continuación:

- **VARIACIÓN DEL ESPESOR**

Para un cilindro con un radio de 5 [m] y longitud de 600 [m] con variación el espesor se tiene,

CUADRO 4-11

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE CILINDRO DE GRAN LONGITUD (APROXIMADAMENTE 500m) DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL ESPESOR

h	Pcr. (Analítico) [Pa]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
0.5	0.220	0.2219	-0.87
1	0.880	0.8817	-0.24
1.5	2.42	2.41	0.11
2	5.28	5.31	-0.65
2.5	9.89	9.98	-0.94
3	16.71	16.88	-1.06
3.5	26.16	26.45	-1.13
4	38.69	39.14	-1.16
4.5	54.73	55.38	-1.19
5	74.73	75.63	-1.20
5.5	99.13	100.33	-1.21
6	128.36	129.93	-1.22
6.5	162.87	164.87	-1.22
7	203.10	205.59	-1.23
7.5	249.47	252.54	-1.23
8	302.45	306.17	-1.23

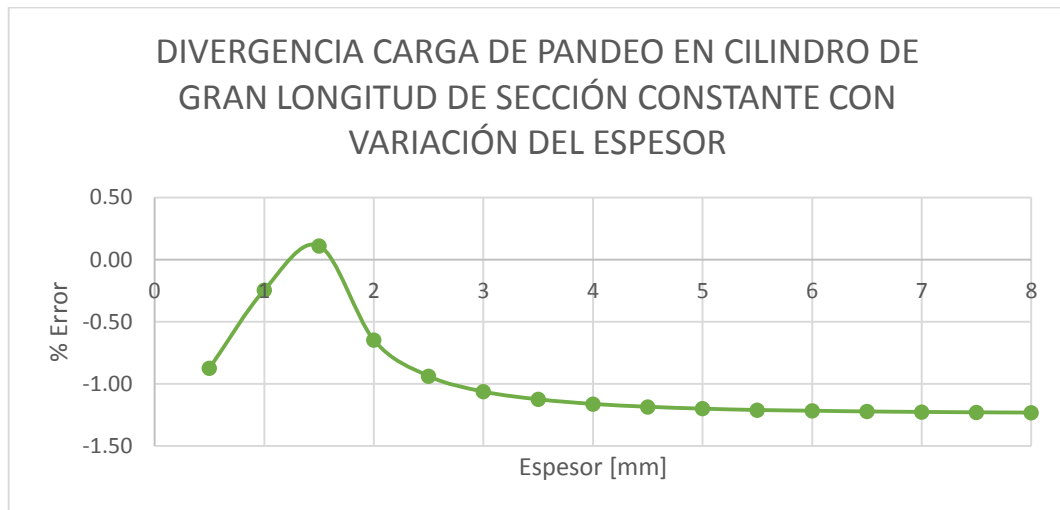


Figura 4-14 Errores carga crítica de cilindro de gran longitud (aproximadamente 500m) de sección constante con variación del espesor

Cuando la longitud del cilindro es mayor al diámetro, las condiciones de frontera son casi despreciables, por lo que se asemeja al de un anillo de longitud unitaria, lo cual se refleja en la curva de la figura 4-14.

▪ VARIACIÓN DEL RADIO

Para un cilindro con un espesor de 3 [mm] y 600 [m] de longitud con variación del radio se tiene:

CUADRO 4-12

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE CILINDRO DE GRAN LONGITUD (APROXIMADAMENTE 500m) DE SECCIÓN CONSTANTE CON VARIACIÓN DEL RADIO

R [m]	Pcr. (Analítico) [Pa]	Pcr. (Robot) [Pa]	Error [%]
2	247.26	252.39	-2.07
2.5	126.68	128.31	-1.29
3	73.44	74.09	-0.88
3.5	46.43	47.52	-2.34
4	31.36	33.45	1.00
4.5	22.35	22.67	-1.46
5	16.71	16.88	-1.06
5.5	13.06	13.05	0.07
6	10.68	10.68	-0.01

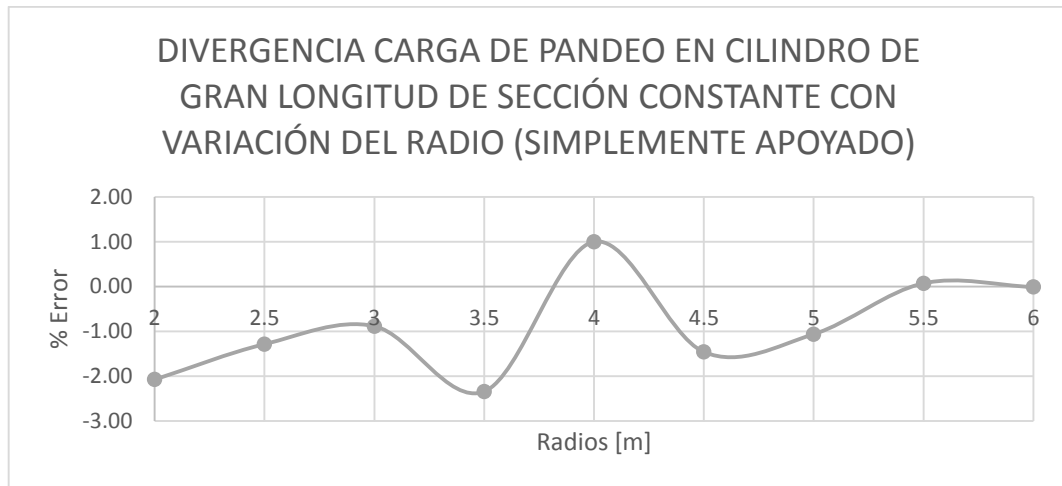


Figura 4-15 Errores carga crítica de cilindro de gran longitud (aproximadamente 500m) de sección constante con variación del radio

El error para cilindros de gran longitud es igual que el caso del arco con variación de longitud, la divergencia del error es mínima debido a que las condiciones de frontera son despreciables y no afectan en la resistencia de los conductos.

CAPÍTULO 5

PANDEO EN CONDUCTOS CORRUGADOS

- Tipos de corrugaciones

Las principales secciones de corrugación son las que se muestran en la figura 5-1. De éstas en el Ecuador se utilizan las PP-68, PM-100 y PG-152 que están listadas en la norma (NTE INEN 1674, 2005, p. 5.1.1.2). Los demás tipos de corrugaciones son utilizados en otras partes del mundo.

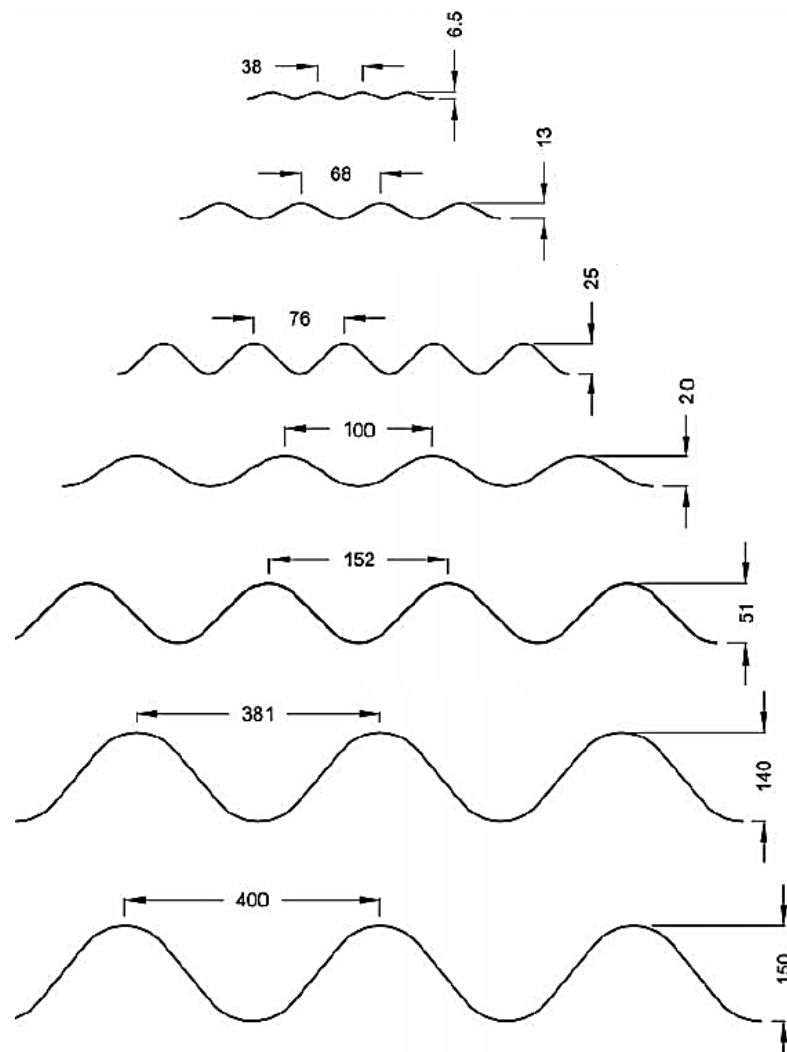


Figura 5-1 Tipos de corrugaciones

El programa Robot Structural Analysis Professional nos da la opción de integrar secciones ortotrópicas, analizando el cambio de la matriz de rigidez de la sección, ya que el material tendrá valores diferentes de E y ν en cada dirección.

Para lo cual a continuación se evaluará el pandeo en el arco semicircular corrugado a profundidad, mientras en el cilindro y abovedado un solo ejemplo de cada uno, ya que el análisis de arco abarca el análisis para todos los tipos de secciones, debido a que la carga crítica se la calcula sobre la cresta de la estructura.

Además se toma en consideración únicamente el caso de arco empotrado, ya que en problemas cotidianos se asume dicha condición de apoyo para el diseño.

5.1. CONDUCTO CORRUGADO TIPO ARCO SEMICIRCULAR

Para el análisis de pandeo en el ducto corrugado tipo arco semicircular se analizan los distintos tipos de corrugas, variando los espesores y diámetros, además de la sección constante para semejar la desviación del cálculo teórico.

Para lo cual se han planteado 4 casos variando el diámetro, y dentro de estos los espesores y tipos de corruga, cada uno con su color característico para poder guiarse de manera más rápida a través del trabajo, consiguiendo cargas críticas y alturas máximas de relleno reales, los casos son:

- **CASO 1:** Arco semicircular con 2.5 [m] de radio (*ANARANJADO*).
- **CASO 2:** Arco semicircular con 5 [m] de radio (*VERDE*).
- **CASO 3:** Arco semicircular con 10 [m] de radio (*ROJO*).
- **CASO 4:** Arco semicircular con 15 [m] de radio (*AZUL*).

El primer paso es calcular las cargas críticas que soportan los arcos en los distintos casos:

- **CASO 1:**

Arco semicircular con 2.5 [m] de radio

CUADRO 5-1

CARGAS CRÍTICAS DE ARCO DE RADIO 2.5 [m] CON VARIACIÓN DE ESPESOR Y TIPO DE SECCIÓN CORRUGADA EN PASCALES

Paso	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm
Lisa	10.48	83.57	281.45	665.94	1298.62	2240.85	3553.79	5298.43
Teór.	9.38	74.99	253.12	599.99	1171.86	2024.92	3215.57	4799.92
Error	11.74%	11.43%	11.19%	10.99%	10.82%	10.66%	10.52%	10.39%
P38	69.2	1383.0	2072.9	2760.1	3443.4	4121.1	4791.4	5452.4
P68	2789.4	5578.3	8366.0	11151.3	13933.0	16709.7	19479.6	2.2E+04
P76	1.1E+04	2.2E+04	3.3E+04	4.4E+04	5.5E+04	6.6E+04	7.7E+04	8.9E+04
P100	6.6E+03	1.3E+04	2.0E+04	2.6E+04	3.3E+04	4.0E+04	4.6E+04	5.3E+04
P152	4.6E+04	9.2E+04	1.4E+05	1.8E+05	2.3E+05	2.8E+05	3.2E+05	3.7E+05
P381	3.5E+05	7.1E+05	1.1E+06	1.4E+06	1.8E+06	2.1E+06	2.5E+06	2.8E+06
P400	4.1E+05	8.1E+05	1.2E+06	1.6E+06	2.0E+06	2.4E+06	2.8E+06	3.3E+06

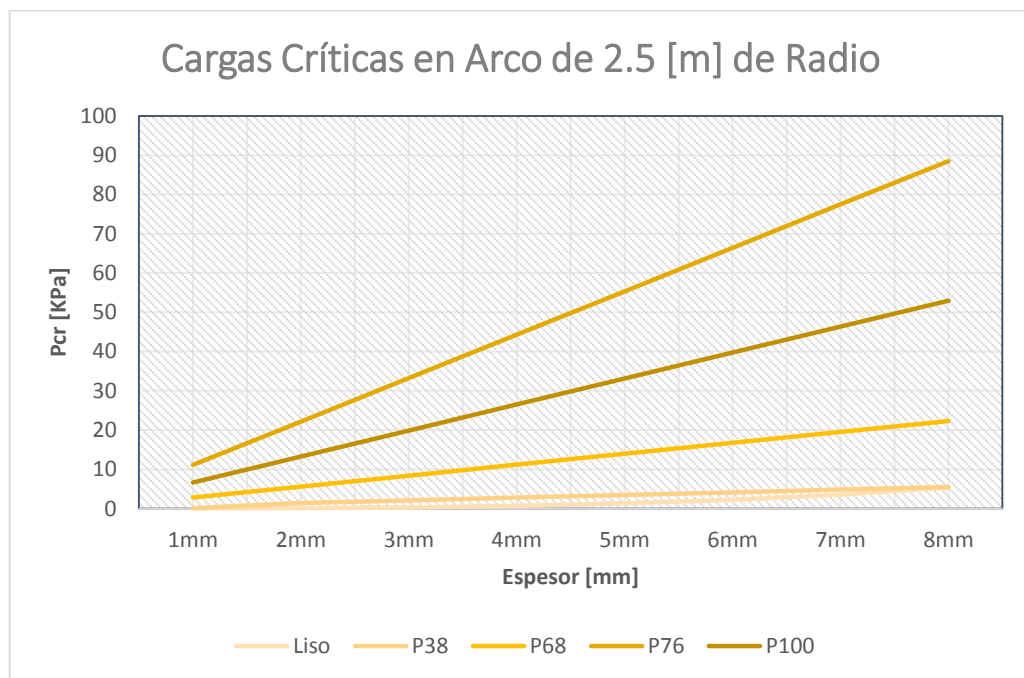


Figura 5-2a Cargas críticas en arco corrugado de 2.5 [m] de radio (P38-P100)

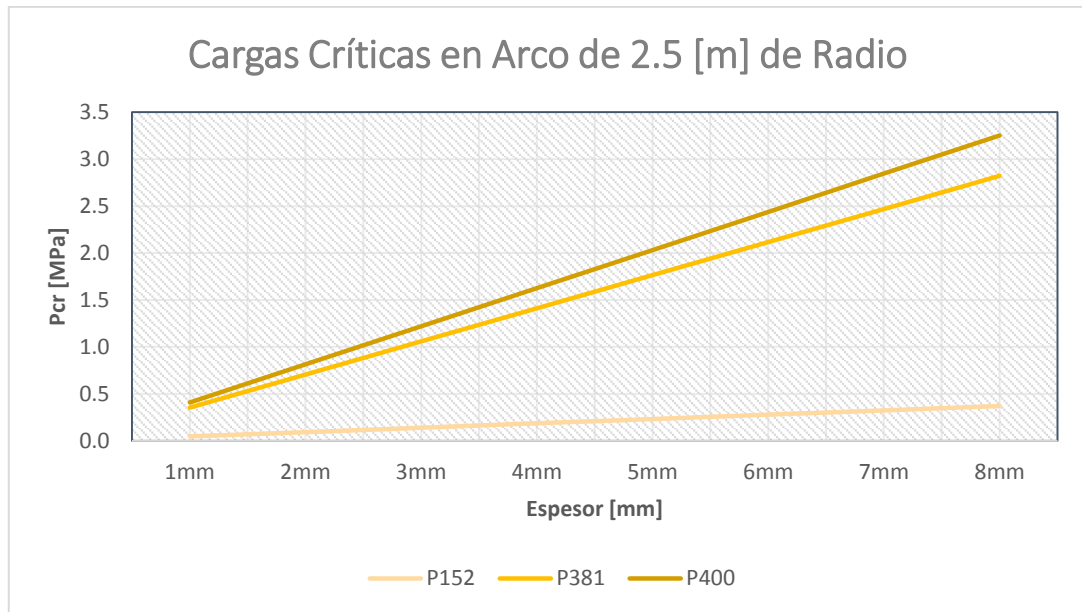


Figura 5-2b Cargas críticas en arco corrugado de 2.5 [m] de radio (P152-P400)

- CASO 2:**

Arco semicircular con 5 [m] de radio

CUADRO 5-2

CARGAS CRÍTICAS DE ARCO DE RADIO 5[m] CON VARIACIÓN DE ESPESOR Y TIPO DE SECCIÓN CORRUGADA EN PASCALES

Paso	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm
Lisa	1.31	10.40	34.99	82.74	161.24	278.07	440.74	656.77
Teór.	1.17	9.38	31.64	74.99	146.48	253.12	401.95	599.99
Error	11.35%	10.95%	10.59%	10.32%	10.08%	9.85%	9.65%	9.46%
P38	86.5	172.8	258.9	344.6	429.5	513.4	596.1	677.0
P68	348.7	697.2	1045.6	1393.5	1740.7	2087.1	2432.1	2775.7
P76	1384.0	2767.9	4151.7	5535.2	6918.2	8300.6	9682.2	11062.7
P100	828.3	1656.5	2484.5	3312.2	4139.2	4965.3	5790.2	6613.7
P152	5781	11562	17343	23123	28904	34683	40462	46240
P381	44346	88692	133038	177380	221730	266075	310420	354764
P400	51135	102269	153403	204537	255671	306804	357937	409070

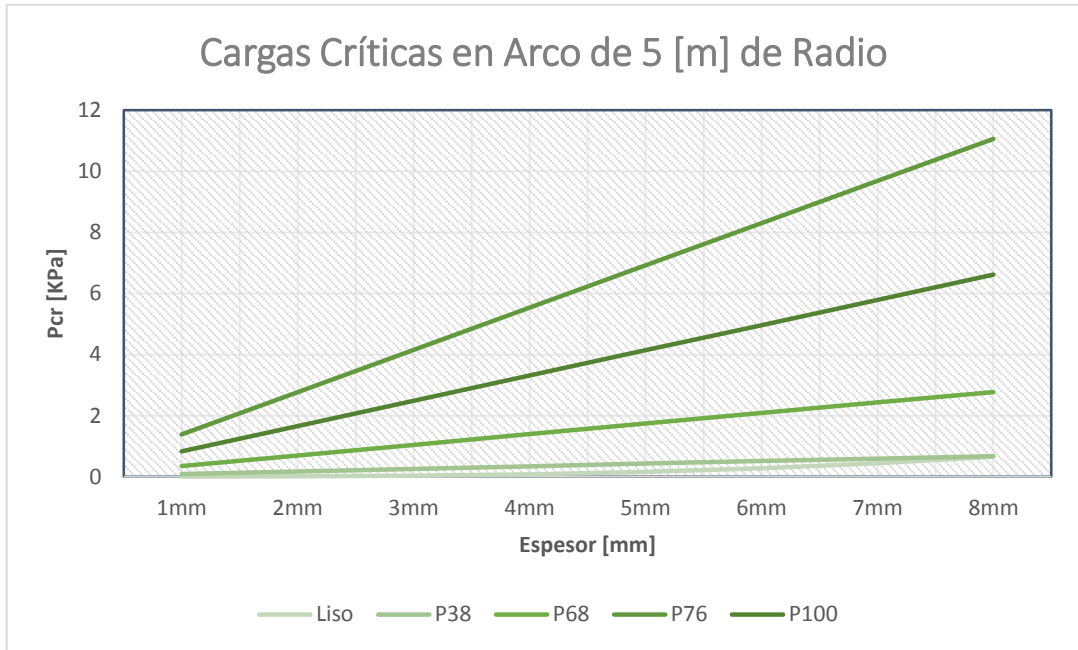


Figura 5-3a Cargas críticas en arco corrugado de 5 [m] de radio (P38-P100)

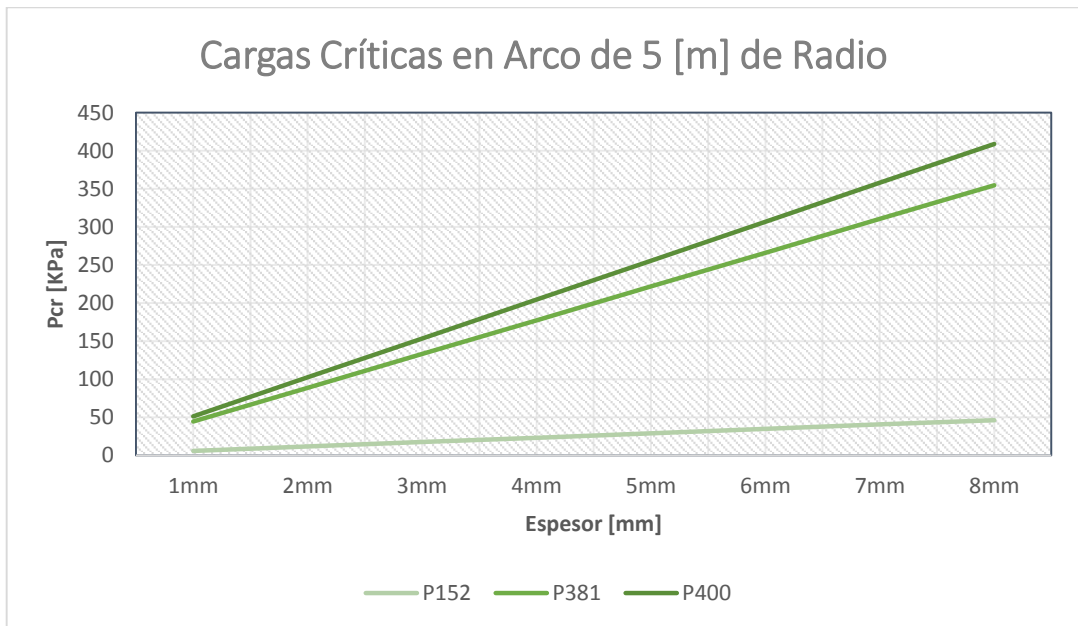


Figura 5-3b Cargas críticas en arco corrugado de 5 [m] de radio (P152-P400)

- CASO 3:

Arco semicircular con 10 [m] de radio

CUADRO 5-3

CARGAS CRÍTICAS DE ARCO DE RADIO 10[m] CON VARIACIÓN DE ESPESOR Y TIPO DE SECCIÓN CORRUGADA EN PASCALES

Paso	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm
Lisa	0.163	1.293	4.343	10.257	19.967	34.394	54.447	81.028
Teór.	0.146	1.172	3.955	9.375	18.31	31.64	50.243	75
Error	11.3%	10.32%	9.81%	9.41%	9.05%	8.70%	8.36%	8.03%
P38	10.8	21.6	32.3	43.0	53.5	63.9	74.0	83.8
P68	43.6	87.1	130.7	174.1	217.4	260.6	303.5	346.2
P76	173.0	346.0	519.0	691.9	864.7	1037.4	1210.0	1382.3
P100	103.5	207.1	310.5	414.0	517.3	620.4	723.3	826.0
P152	722.8	1445.5	2168.2	2890.9	3613.5	4336.0	5058.4	5780.6
P381	5551.2	11102.5	16653.7	22204.9	27756.0	33307.0	38858.0	44408.9
P400	6402.3	12804.6	19206.8	25609.1	32011.0	38413.4	44815.4	51217.3

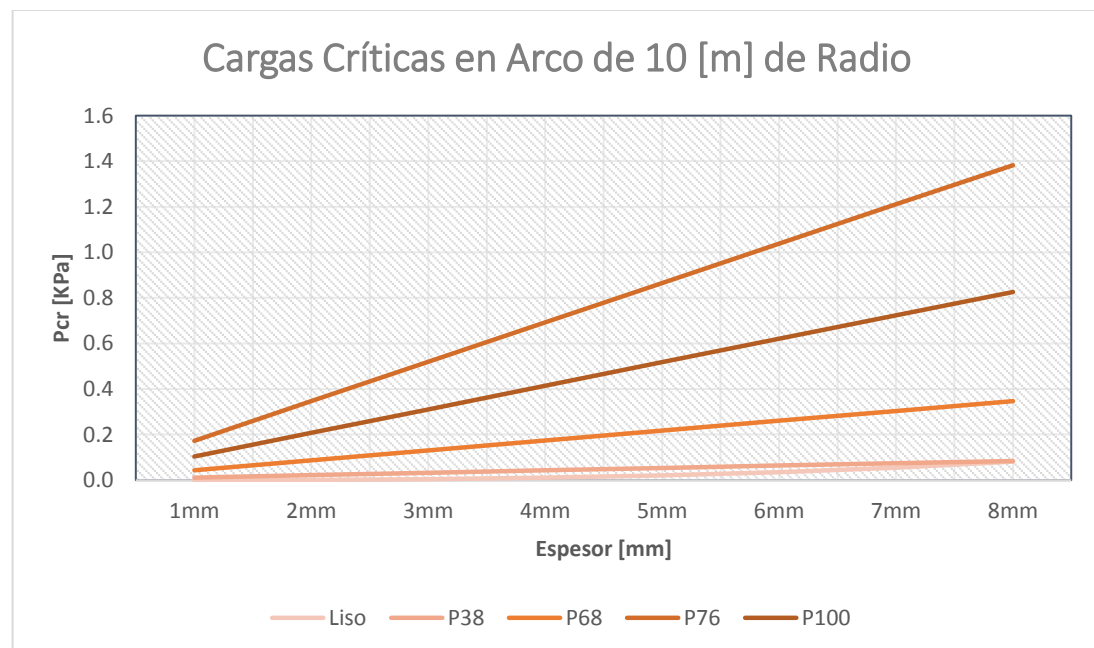


Figura 5-4a Cargas críticas en arco corrugado de 10 [m] de radio (P38-P100)

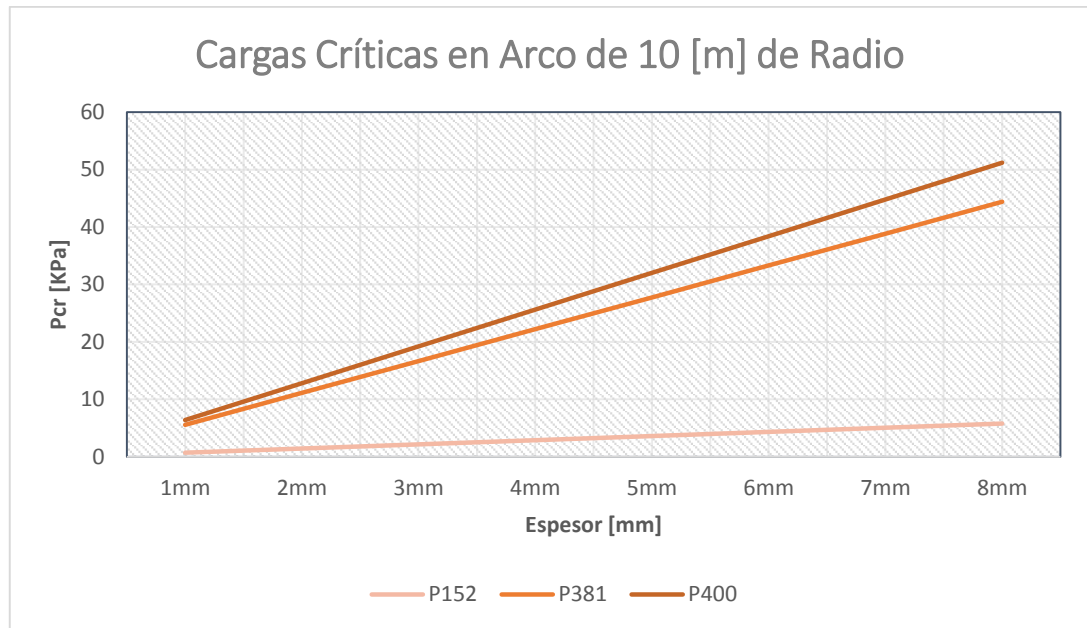


Figura 5-4b Cargas críticas en arco corrugado de 10 [m] de radio (P152-P400)

- CASO 4:**

Arco semicircular con 15 [m] de radio

CUADRO 5-4

CARGAS CRÍTICAS DE ARCO DE RADIO 15[m] CON VARIACIÓN DE ESPESOR Y TIPO DE SECCIÓN CORRUGADA EN PASCALES

Paso	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm
Lisa	0.048	0.381	1.28	3.02	5.87	10.10	15.96	23.73
Teór.	0.043	0.347	1.17	2.78	5.43	9.38	14.89	22.22
Error	11.6%	9.88%	9.13%	8.67%	8.18%	7.68%	7.21%	6.78%
P38	3.2	6.4	9.6	12.7	15.8	18.9	21.8	24.6
P68	12.9	25.8	38.7	51.6	64.4	77.1	89.8	102.4
P76	51.3	102.5	153.8	205.0	256.2	307.3	358.4	409.4
P100	30.7	61.4	92.0	122.6	153.2	183.8	214.2	244.5
P152	214.2	428.3	642.5	856.6	1070.7	1284.8	1498.8	1712.7
P381	1645.3	3290.5	4935.8	6581.1	8226.3	9871.5	11517.0	13161.8
P400	1897.6	3795.2	5692.7	7590.3	9487.8	11385.3	13282.8	15180.3

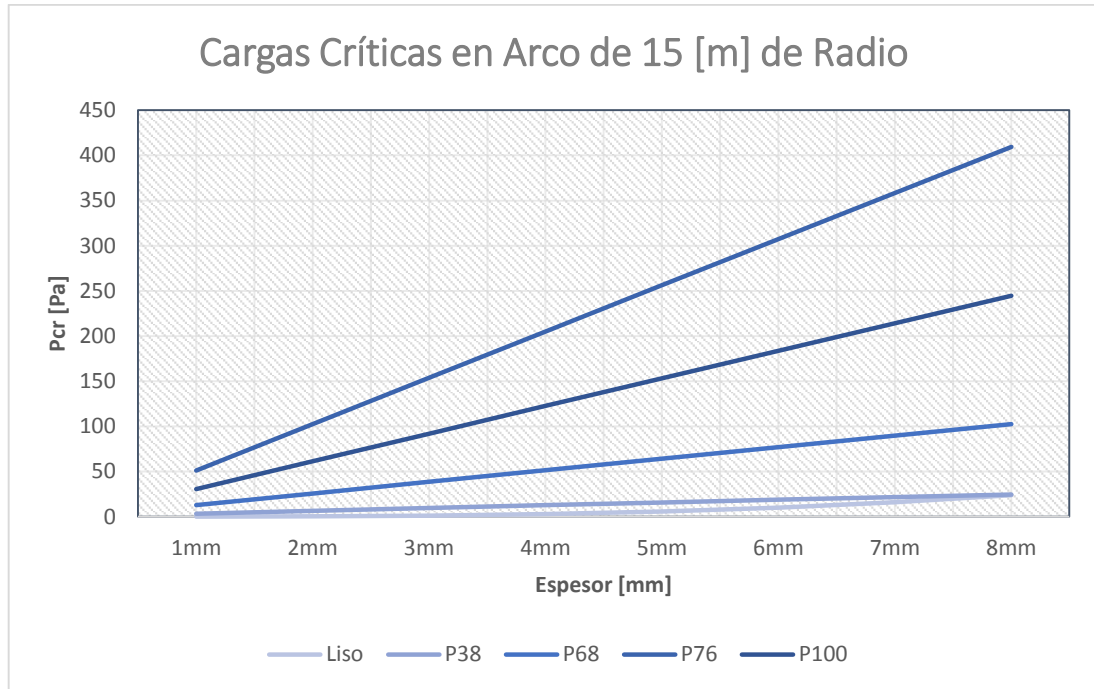


Figura 5-5a Cargas críticas en arco corrugado de 15 [m] de radio (P38-P100)

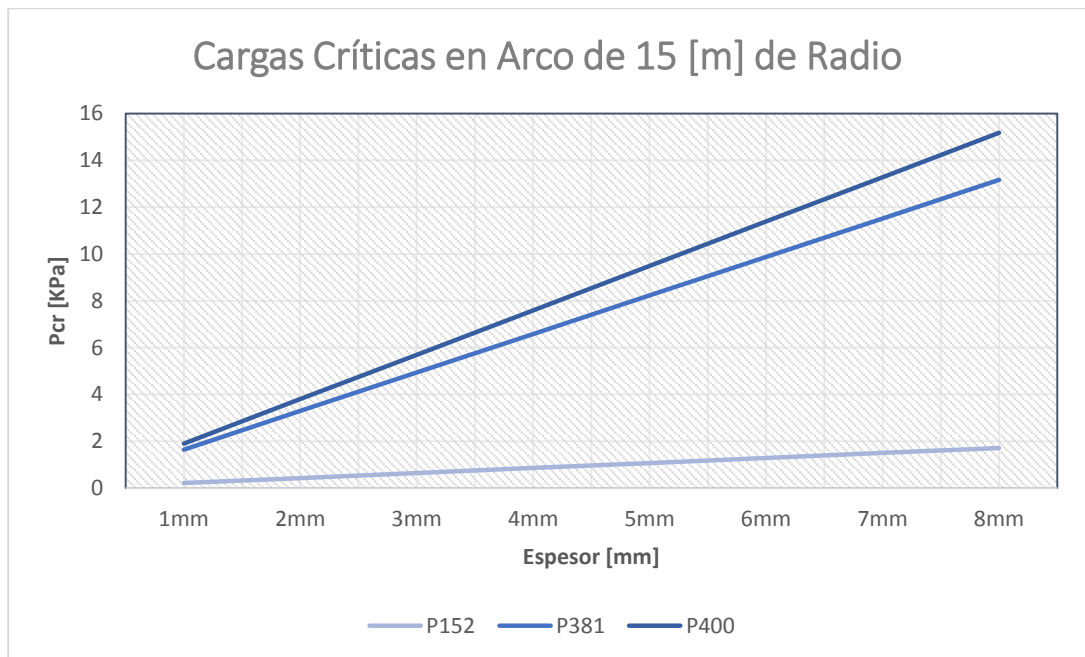


Figura 5-5b Cargas críticas en arco corrugado de 15 [m] de radio (P152-P400)

5.2. CONDUCTO CORRUGADO CILÍNDRICO

Para el análisis de pandeo en el ducto corrugado tipo cilíndrico se analiza un ejemplo, el cual tiene las siguientes características.

- Diámetro: 3.0 [m]
- Espesor: 2.5 [mm]
- Tipo de Corruca: P152

Del programa se obtiene el siguiente resultado:

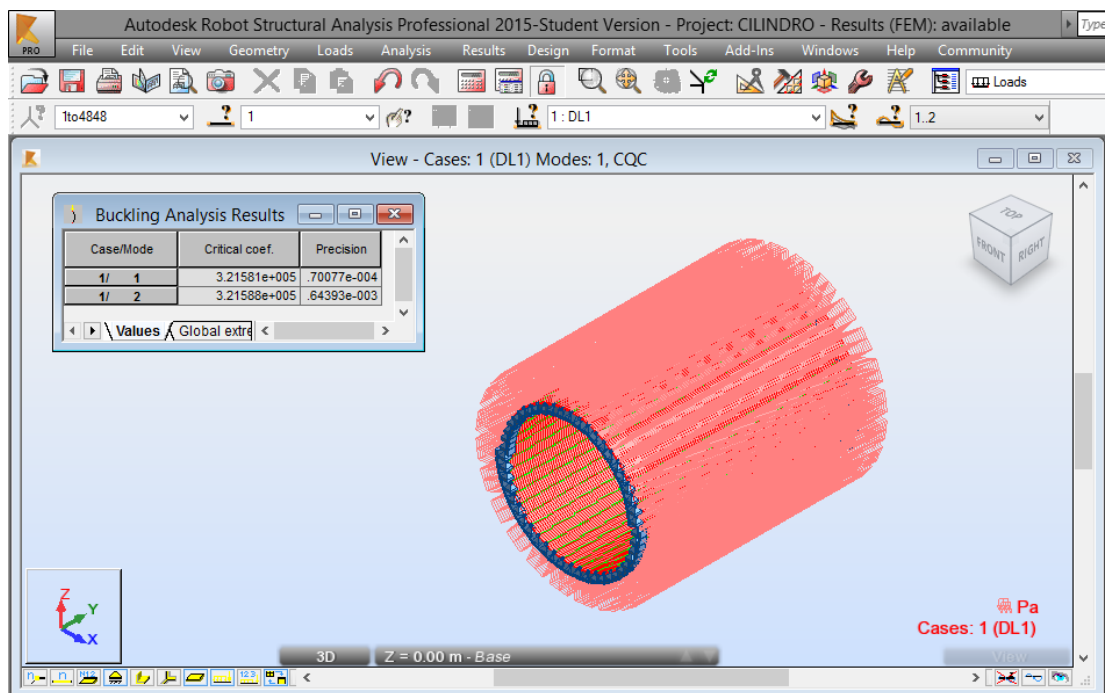


Figura 5-6 Carga crítica de cilindro corrugado de radio 1.5 [m] con corruga P152

La altura de relleno máxima se consigue de la suma de las cargas

$$p_{cr} = CM + CV$$

De la cual se obtiene que

$$h_{max,relleno} = \frac{p_{cr} - CV}{\rho_{suelo}} \quad (5-1)$$

Considerando que el resultado de altura sea mayor a 2.44 [m], el valor de CV es cero, y con un factor de seguridad de 10% se obtiene

$$h_{max,relleno} = \frac{3.21 * 10^5 [Pa] - 0}{18.85 \left[\frac{KN}{m^3} \right]} * 0.9 = 15.51 [m]$$

Del catálogo de (Novacero, p. 18) se tiene que para el diámetro de 3 [m] y espesor de 2.5 [mm] la altura de relleno máxima es de 13.53 [m], resultado cercano al calculado.

5.3. CONDUCTO CORRUGADO ABOVEDADO

Para el análisis de pandeo en el ducto corrugado tipo abovedado se analiza la geometría 20PA3-11 detallada en (Novacero, p. 20), el cual tiene las siguientes características.

- Luz: 3.32 [m]
- Flecha: 2.19 [m]
- Espesor: 2.5 [mm]
- Tipo de Corruca: P152

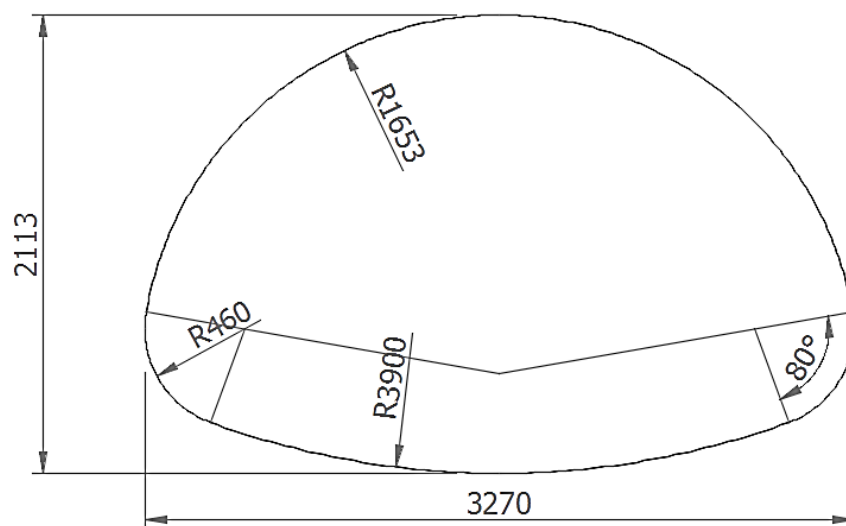


Figura 5-7 Ducto corrugado de tipo abovedado 20PA3-11

Del programa se obtiene el siguiente resultado:

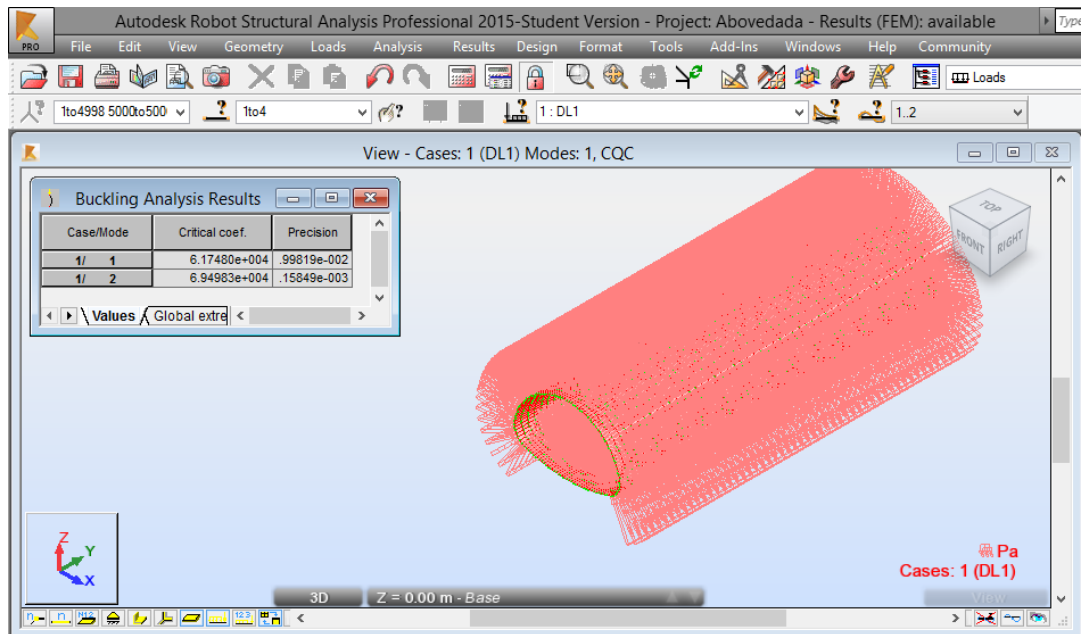


Figura 5-8 Carga crítica de ducto abovedado modelo 20PA3-11 con corrugado P152

Considerando al igual que el caso anterior, que el resultado de altura sea mayor a 2.44 [m], el valor de CV es cero,

$$h_{max,relleno} = \frac{6.1748 * 10^5 [Pa] - 0}{18.85 \left[\frac{KN}{m^3} \right]} = 3.28[m]$$

Del catálogo de (Novacero, p. 18) se tiene que para la geometría abovedada analizada, la altura de relleno máxima es de 3.79 [m], resultado cercano al calculado.

5.4. ALTURAS DE RELLENO

Continuando con los casos de pandeo en arcos de la sección 5.1, la segunda parte es calcular las alturas máximas de relleno, para esta sección se toma únicamente las alturas máximas superiores a 2.40 [m], para las cuales se desprecian las cargas vivas, ya que para añadir esta carga existe una infinidad de combinaciones dependiendo de la altura de relleno según el CUADRO 2-2

Resolviendo la ecuación 5-1 se obtiene las alturas de relleno para los casos citados en el literal 5.1:

- **CASO 1:**

CUADRO 5-5

ALTURAS DE RELLENO MÁXIMAS DE ARCO DE RADIO 2.5 [m] CON VARIACIÓN DE ESPESOR Y TIPO DE SECCIÓN CORRUGADA, EN METROS

Paso	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm
Lisa	0.001	0.004	0.015	0.035	0.069	0.119	0.189	0.281
P38	0.004	0.073	0.110	0.146	0.183	0.219	0.254	0.289
P68	0.148	0.296	0.444	0.592	0.739	0.887	1.033	1.180
P76	0.587	1.175	1.762	2.349	2.936	3.523	4.110	4.696
P100	0.352	0.703	1.055	1.406	1.757	2.108	2.459	2.809
P152	2.452	4.898	7.356	9.808	12.26	14.711	17.163	19.614
P381	18.72	37.43	56.15	74.86	93.58	112.29	131.01	149.72
P400	21.57	43.13	64.69	86.25	107.81	129.38	150.94	172.50

(*) Resultados resaltados son alturas máximas aceptables

- **CASO 2:**

CUADRO 5-6

ALTURAS DE RELLENO MÁXIMAS DE ARCO DE RADIO 5 [m] CON VARIACIÓN DE ESPESOR Y TIPO DE SECCIÓN CORRUGADA, EN METROS

Paso	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm
Liso	0.000	0.001	0.002	0.004	0.009	0.015	0.023	0.035
P38	0.005	0.009	0.014	0.018	0.023	0.027	0.032	0.036
P68	0.018	0.037	0.055	0.074	0.092	0.111	0.129	0.147
P76	0.073	0.147	0.220	0.294	0.367	0.440	0.514	0.587
P100	0.044	0.088	0.132	0.176	0.220	0.263	0.307	0.351
P152	0.307	0.613	0.920	1.227	1.533	1.840	2.147	2.453
P381	2.353	4.706	7.058	9.411	11.764	14.117	16.469	18.822
P400	2.713	5.426	8.139	10.852	13.565	16.277	18.990	21.703

(*) Resultados resaltados son alturas máximas aceptables

- **CASO 3:**

CUADRO 5-7

ALTURAS DE RELLENO MÁXIMAS DE ARCO DE RADIO 10 [m] CON VARIACIÓN DE ESPESOR Y TIPO DE SECCIÓN CORRUGADA, EN METROS

Paso	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm
Liso	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004
P38	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.004
P68	0.002	0.005	0.007	0.009	0.012	0.014	0.016	0.018
P76	0.009	0.018	0.028	0.037	0.046	0.055	0.064	0.073
P100	0.005	0.011	0.016	0.022	0.027	0.033	0.038	0.044
P152	0.038	0.077	0.115	0.153	0.192	0.230	0.268	0.307
P381	0.295	0.589	0.884	1.178	1.473	1.767	2.062	2.356
P400	0.340	0.679	1.019	1.359	1.698	2.038	2.378	2.717

(*) Resultados resaltados son alturas máximas aceptables

Todos los valores mostrados en las tablas anteriores consideran solamente la carga muerta, es decir la columna de suelo sobre la cresta del conducto, por esa razón se subraya únicamente aquellas alturas de relleno que desprecian la carga viva o de carga vial. Para considerar la carga viva, el valor de la altura de relleno requerida es proporcionado por las necesidades puntuales de cada obra, de esta manera incrementando las cargas vivas, dependientes de la altura de suelo y de la normativa de diseño.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. CONCLUSIONES

- En este trabajo se desarrolló la teoría necesaria para la comprensión completa del análisis de pandeo en ductos formados por láminas de pared delgada; para placas rectangulares, arcos y cilindros de sección constante e isotrópica, basadas en la teoría de la estabilidad elástica. Estos conceptos fueron utilizados posteriormente para el desarrollo de modelos computacionales, los cuales fueron comparados con soluciones analíticas, para lo cual fueron planteados varios ejemplos que evidencian la precisión de los resultados, deduciendo que la teoría es válida y está vigente.
- La resistencia al pandeo depende de muchos factores, como el espesor de la placa, radio de curvatura, la distancia entre sus apoyos, la condición de apoyo, longitud, etc. De todos éstos los que más incidencia tienen son el radio de curvatura y el espesor, ya que tanto como para la fórmula 2-17 y 2-18 estos valores están elevados al cubo, lo cual se evidencia en la divergencia de las gráficas del literal 4.1. Estos errores sin embargo están dentro de un rango aceptable de error, demostrando la confiabilidad del programa Robot Structural Analysis en el análisis de pandeo en conductos de pared delgada.
- En la obtención de los datos se observó que aumentando el número de elementos (refinamiento de la malla), los resultados tienen una mayor proximidad a la solución analítica, esto es debido a que la

interpolación se ajusta de mejor manera a la curva efectiva, pero el error se reduce hasta que no puede disminuir de un cierto valor, llegando a un punto de convergencia que debe ser aceptable.

- Los valores obtenidos por el programa divergen, en la mayoría de los casos, debido a que el método de autovalores por el cual resuelve el análisis de la estabilidad el programa, encuentra el punto de bifurcación de la curva de pandeo (figura 2-14), este punto es la proyección de la curva en forma linealizada, además que el método de elementos finitos es un método de aproximación aumentando la divergencia de los resultados.

6.2. RECOMENDACIONES

- Se recomienda a futuro realizar un proyecto de investigación en el cual se comparen los datos calculados en este trabajo con modelos reales, ya que estos evidenciarán valores fehacientes de presión del suelo, para mejorar los factores de seguridad utilizados actualmente, alcanzando espesores y secciones de corruga menores, disminuyendo el peso de la estructura.
- Es recomendable además realizar el estudio geotécnico a profundidad desde el punto de vista de la ingeniería civil, ya que en el presente trabajo se enfocó únicamente a la estructura metálica, y como el suelo induce cargas sobre éste, ya que el comportamiento del suelo y sus propiedades de cohesión pueden afectar drásticamente el nivel de suelo de relleno propuesto, además que pueden surgir recomendaciones de compactación diferentes a las listadas en tablas.

- También sería de gran ayuda para el constructor, como para el fabricante, el estudio comparativo entre costos, tiempo de fabricación e impacto ambiental con respecto a ductos de hormigón y plásticos, ya que este tipo de ducto metálico es en su totalidad reutilizable.

BIBLIOGRAFÍA

1. ANSYS Help. (2014). SAS IP, Inc.
2. ARMCO. (1995). *Manual de Productos de Acero Para Drenaje y Construcción Vial*. Middletown: Armco Inc.
3. Autodesk. (2015). Autodesk Robot Structural Analysis Professional - Help. *Help*.
4. Beer, F. P., Johnston, R. E., Dewolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2012). *Mecánica de Materiales*. Nueva York: Mc Graw Hill.
5. Budynas, R. G., & Nisbett, K. J. (2008). *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*. México D.F.: Mc. Graw Hill.
6. Canadian Corrugated Steel Pipe Institute. (2007). *Handbok of Steel Drainage & Highway construction*. Ontario: CSPI.
7. Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2010). *Metodos Numéricos para Ingenieros*. Nueva York: Mc Graw Hill.
8. Hibbeler, R. C. (2011). *Mecánica de Materiales*. México D.F.: Prentice Hall.
9. INEN. (2005). NTE INEN 1674. *Alcantarillas metálicas galvanizadas corrugadas. Requisitos*. Ecuador.
10. Jones, R. M. (2006). *Buckling of Bars, Plates and Shells*. Virginia: Bull Ridge.
11. Mechanical and Industrial Engineering Department. (2004). Pressure Cylinders. In S. Bhaduri, *Pressure Cylinders* (pp. 39.1-39.21). Texas: Mc. Graw Hill.
12. National Cooperative Highway Research. (2007). *Culvert Analysis and Design Solution Methods and Formulations*.
13. National Corrugated Steel Pipe Association. (2008). *Corrugated Steel Pipe Design Manual*. Dallas: NCSPA.
14. Novacero. (2010). *Manual de soluciones viales*. Quito.

15. Samaniego, M. A. (2007, Noviembre 12). *elmundo.es*. Retrieved from *elmundo.es*:
<http://www.elmundo.es/elmundo/2007/11/12/internacional/1194889201.html>
16. Terzagui, K. (1943). *Mecánica de suelos*. New York: John Wiler ans Sons, Inc.
17. Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (1985). *Theory of Elastic Stability*. New York: McGraw-Hill.
18. Ventsel, E., & Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates and Shells*. New York: Marcel Dekker, Inc.
19. Wei-Wen, Y. (2000). *Cold-Formed Steel Design*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc.
20. Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2000). *El método de elementos finitos*. Barcelona: Butterworth Heinemann.