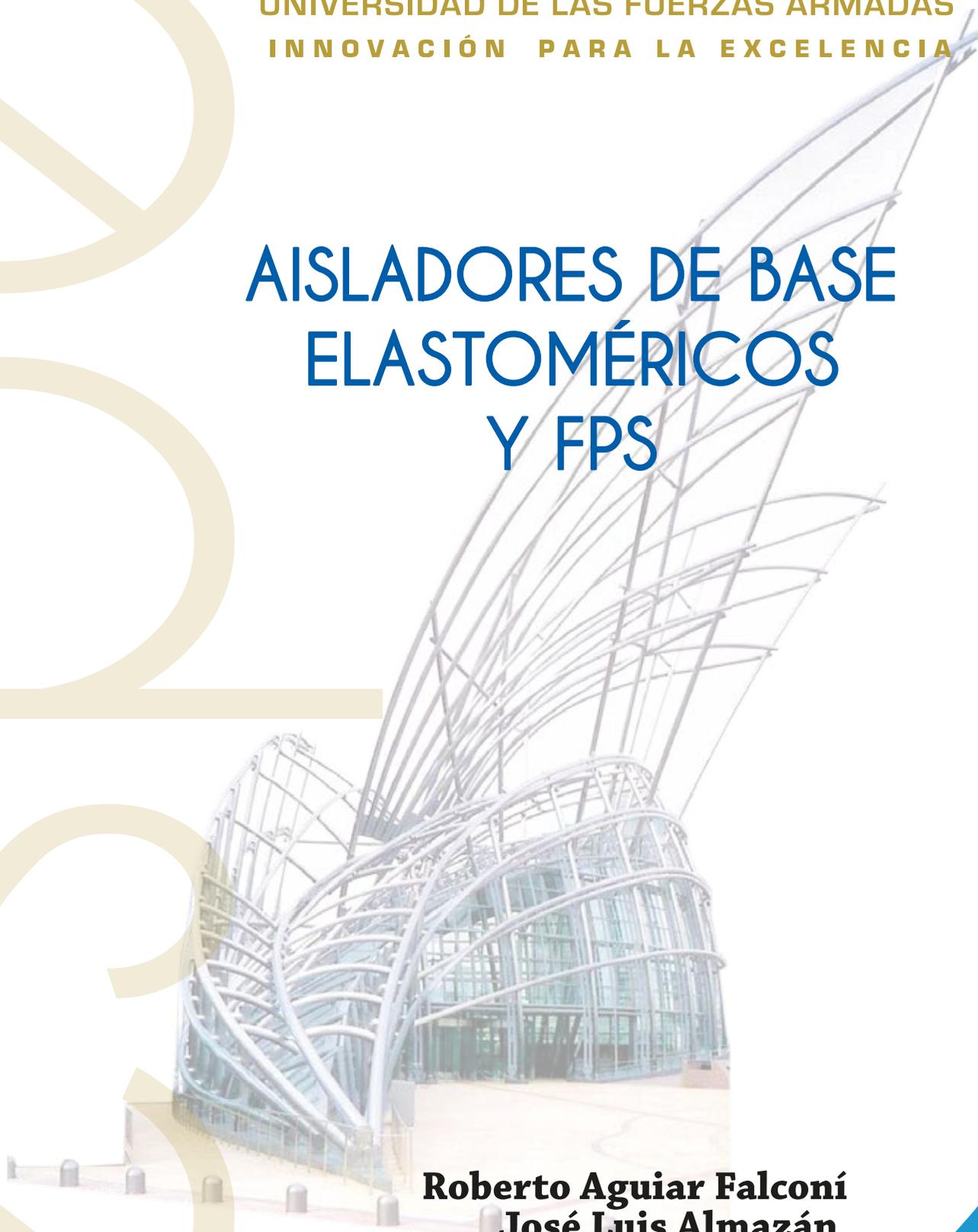


---

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

# AISLADORES DE BASE ELASTOMÉRICOS Y FPS



**Roberto Aguiar Falconí  
José Luis Almazán  
Peter Dechent  
Vinicio Suárez**

**CIENCIAS DE LA TIERRA**

# **AISLADORES DE BASE ELASTOMÉRICOS Y FPS**

**Roberto Aguiar Falconí**

**José Luis Almazán**

**Peter Dechent**

**Vinicio Suárez**

## **Aisladores de base elastoméricos y FPS**

Dr. Roberto Aguiar Falconí, Ph. D.; José Luis Almazán, Ph. D.; Peter Dechent, Ph. D.; y Vinicio Suárez, Ph. D.

Primera edición electrónica **revisada**. Diciembre de 2016

**ISBN: 978-9978-301-25-8**

### **Pares revisión científica:**

Pablo Caiza Ph. D.; Diego Sosa Ph. D.

### **Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

Grab. Roque Moreira Cedeño

Rector

Crn. Ramiro Pazmiño

Vicerrector Académico General

### **Publicación autorizada por:**

**Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

### **Edición y producción**

David Andrade Aguirre

daa06@yahoo.es

### **Diseño**

Pablo Zavala A.

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico.

El contenido, uso de fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias es de **exclusiva responsabilidad** del autor.

### **Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador.

[www.espe.edu.ec](http://www.espe.edu.ec)

Los derechos de esta edición electrónica son de la **Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**, para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en: [www.repositorio.espe.edu.ec](http://www.repositorio.espe.edu.ec).

# **AISLADORES DE BASE ELASTOMÉRICOS Y FPS**

## **ROBERTO AGUIAR FALCONÍ**

Centro de Investigaciones Científicas  
Escuela Politécnica del Ejército  
Quito, Ecuador

## **JOSÉ LUIS ALMAZÁN**

Escuela de Ingeniería  
Pontificia Universidad Católica de Chile  
Santiago, Chile

## **PETER DECHENT**

Escuela de Ingeniería  
Universidad de Concepción  
Concepción, Chile.

## **VINICIO SUÁREZ**

Escuela de Ingeniería  
Universidad Técnica Particular de Loja  
Loja, Ecuador

**CEINCI ESPE**, Quito, Ecuador

A Alice

A Julieta y Nancy

A Gloria y Nicole

A María del Rocío

## PRESENTACIÓN

---

El futuro de la Ingeniería Sísmica, será una masificación de las construcciones con aisladores de base. Por este motivo, se ha escrito este libro y constituye la puerta de ingreso a los sistemas de aislación que actualmente existen en el mundo. En esta obra se tratan tres tipos de aisladores: los denominados elastoméricos sin núcleo de plomo, elastoméricos con núcleo de plomo y el tipo péndulo de fricción de la primera generación FPS (Frictional Pendulum System).

La primera obra construida con aislación sísmica fue el Partenón en el año 440 A. C., en la cual las columnas podían desplazarse verticalmente para permitir una rotación en su base y poder disipar energía mediante la fricción y deformación inelástica de un elemento de plomo que se incorporó como protección de los elementos de madera. Luego durante el transcurso de la vida ha habido otras obras en diferentes partes del mundo en que se han construido estructuras con aislación sísmica, tal vez en forma primitiva de acuerdo a la tecnología existente en la época.

En las últimas décadas en que hemos tenido un gran desarrollo científico y tecnológico en los diferentes campos del conocimiento, se han perfeccionado estos aisladores de base y actualmente se cuentan con equipos muy sofisticados y seguros. Paralelamente ha existido un gran desarrollo teórico con un sustento experimental que garantiza el buen uso de los aisladores de base.

En Latinoamérica el País que cuenta al 2008, con la mayor cantidad de estructuras con aisladores de base es Chile, donde ya se tienen más de treinta estructuras con aisladores, la mayor parte de ellas son elastoméricos. En el Ecuador, se está construyendo el puente que une Bahía de Caráquez con San Vicente y que tiene una longitud de aproximadamente 2 Km., con aisladores FPS. De tal manera que ya es una realidad en nuestros Países la construcción de estructuras con aisladores de base y su uso se va a ir incrementando en el futuro a la luz del buen comportamiento sísmico que van a tener ante la acción de sismos severos.

Quienes estamos inmersos en la investigación científica a más de presentar el resultado de nuestras investigaciones en revistas nacionales e internacionales, en congresos nacionales e internacionales, tenemos la obligación de escribir libros de carácter didáctico en el que se exponga en forma amplia el marco teórico y se desarrollen varios ejemplos que ayuden a entender la teoría expuesta y esto se ha tenido cuenta en la escritura del libro que se está presentando.

Para facilitar el análisis sísmico de estructuras con aisladores de base elastoméricos y FPS se han desarrollado e incorporado en el texto, una serie de programas de computación escritos en Matlab, que serán de valiosa ayuda para el proyectista estructural y además para entender bien el marco teórico, mediante la lectura cuidadosa de los programas. Esta lectura no solamente sirve para entender el tema que se está analizando sino también para aprender un poco más de Matlab que tiene una serie de comandos que facilitan la solución numérica de aspectos muy avanzados que pueden ser aplicados en otras disciplinas científicas.

Complementando los capítulos de análisis, se incluyen dos capítulos sobre el diseño de edificios y puentes con dos tipos de aisladores, elastoméricos con núcleo de plomo y FPS. La teoría presentada se respalda con ejemplos de diseño. También se incluyen ejemplos de verificación donde las estructuras diseñadas son sometidas a análisis no-lineal de historia en el tiempo utilizando OPENSEES.

Gracias al mundo de la globalización que estamos viviendo y al idealismo de cada uno de los autores del libro se ha logrado terminar una obra que empezó en el 2006 en la Escuela Politécnica del Ejército, Ecuador y en la Universidad de Concepción, Chile y que se fue extendiendo a la Universidad Católica de Santiago de Chile en el 2007 y finalmente a la Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador en el 2008. Hemos culminado esta obra que constituye el inicio de un trabajo en conjunto, entre universidades latinoamericanas que tienen un interés en común, cual es aportar con el conocimiento científico a tener estructuras más seguras ante la acción de los sismos y de esta manera disminuir la vulnerabilidad sísmica de nuestros países y de todos aquellos a donde llegue el presente libro.

Es el inicio del trabajo en conjunto ya que solo se trata el análisis de dos tipos de aisladores, los elastoméricos sin núcleo de plomo y los FPS de la primera generación pero se los estudia a fondo, empezando desde lo más elemental hasta aspectos muy avanzados y complicados como es el análisis no lineal, de tal manera que el lector pueda con facilidad seguir su lectura e ir aprendiendo paulatinamente.

Numerosos son los estudiantes, que mediante el desarrollo de su tesis de grado, han aportado en la realización del libro, a todos, queremos presentarles nuestro agradecimiento, omitimos sus nombres por temor a olvidarnos de alguno de ellos. De igual manera queremos agradecer a la Escuela Politécnica del Ejército por haber publicado este libro.

Finalmente pero en primer lugar nuestro agradecimiento a Dios, ya que sin su ayuda no somos capaces de escribir una sola línea.

Roberto Aguiar Falconí  
José Luis Almazán Campillay  
Peter Dechent  
Vinicio Suárez Chacón

## ÍNDICE GENERAL

<b>1</b>	<b><u>SISTEMAS DE CONTROL PASIVO PARA REDUCIR RIESGO</u></b>	
	<b><u>SÍSMICO</u></b>	
1.1	<u>INTRODUCCIÓN</u> .....	1
1.2	<u>RIESGO SÍSMICO</u> .....	2
1.3	<u>CRITERIOS DE DISEÑO</u> .....	2
1.4	<u>DISIPACIÓN DE ENERGÍA Y SUS APLICACIONES</u> .....	3
1.5	<u>ECUACIONES DE BALANCE DE ENERGÍA</u> .....	3
1.6	<u>DISPOSITIVOS DISIPADORES</u> .....	4
1.6.1	<u>Dispositivo Sumitomo</u> .....	5
1.6.2	<u>Amortiguador de extrusión de plomo</u> .....	5
1.6.3	<u>Amortiguador Viscoso HiDAM</u> .....	6
1.6.4	<u>Amortiguador Viscoelástico VE</u> .....	7
1.6.5	<u>Disipadores Viscoelásticos desarrollados en el CEINCI-ESPE</u> .....	8
1.6.6	<u>Amortiguadores con Memoria de Forma</u> .....	9
1.7	<u>AISLACIÓN BASAL</u> .....	10
1.7.1	<u>Aisladores Elastoméricos</u> .....	11
1.7.2	<u>Aisladores de Péndulo de Fricción</u> .....	13
1.8	<u>CONSIDERACIONES DE DISEÑO</u> .....	13
	<u>REFERENCIAS</u> .....	14

## **2 SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD EN ESTRUCTURAS CON AISLADORES ELASTOMÉRICOS**

2.1	<u>INTRODUCCIÓN</u> .....	17
2.2	<u>VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO</u> .....	19
2.3	<u>APLICACIÓN ORIENTADA AL DISEÑO</u> .....	22
2.4	<u>FACTORES DE PARTICIPACIÓN MODAL</u> .....	30
2.5	<u>FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO</u> .....	31
2.6	<u>DESACOPPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES</u> .....	33
2.7	<u>RESPUESTA ANTE MOVIMIENTO ARMÓNICO DEL SUELO</u> .....	34
2.7.1	<u>Sistema de un grado de libertad con base empotrada</u> .....	34
2.7.2	<u>Amplificación en sistema con aislamiento de base</u> .....	36
2.7.3	<u>Factores de amplificación con aislamiento de base</u> .....	37
2.7.4	<u>Programa abkelly</u> .....	39
2.8	<u>PROCEDIMIENTO DE ESPACIO DE ESTADO</u> .....	41
	<u>REFERENCIAS</u> .....	45

## **3 ANÁLISIS PLANO DE ESTRUCTURAS CON AISLADORES ELASTOMÉRICOS**

3.1	<u>INTRODUCCIÓN</u> .....	47
3.2	<u>SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES</u> .....	48
3.3	<u>MÉTODO DE NEWMARK</u> .....	51
3.4	<u>PROGRAMA DE ORDENADOR AISLAMIENTODEBASEPLANO</u> .....	55
3.5	<u>MODELO SIMPLIFICADO DE UN PUENTE CON AISLADORES</u> .....	58
3.6	<u>AISLADORES EN PISOS INTERMEDIOS</u> .....	60
3.6.1	<u>Cálculo de <math>M^*</math></u> .....	62
3.6.2	<u>Sistema de ecuaciones diferenciales</u> .....	63
	<u>REFERENCIAS</u> .....	64

## **4 ANÁLISIS SÍSMICO ESPACIAL DE ESTRUCTURAS CON AISLADORES ELASTOMÉRICOS**

4.1	<u>INTRODUCCIÓN</u>	65
4.2	<u>MODELO DE PAN Y KELLY</u>	66
4.2.1	<u>Matriz de rigidez <math>K^{(b)}</math></u>	67
4.2.2	<u>Matriz de masas <math>M^{(t)}</math></u>	68
4.2.3	<u>Programa PANYKELLY</u>	71
4.3	<u>SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES</u>	76
4.3.1	<u>Matriz de rigidez <math>K^{(s)}</math></u>	78
4.3.2	<u>Matriz de masas <math>M^{(s)}</math></u>	79
4.4	<u>MÉTODO CUASI-ESTÁTICO</u>	80
4.4.1	<u>Hipótesis y procedimiento de cálculo</u>	80
4.4.2	<u>Programa CUASIESTATICO</u>	85
4.5	<u>MÉTODO DE MASA CORREGIDA</u>	91
4.6	<u>SOLUCIÓN EXÁCTA</u>	97
4.7	<u>MÉTODO MODAL ESPACIAL</u>	103
4.7.1	<u>Respuesta en superestructura</u>	106
	<u>REFERENCIAS</u>	109

## **5 BALANCE TORSIONAL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE ESTRUCTURAS CON AISLADORES ELASTOMÉRICOS**

5.1	<u>INTRODUCCIÓN</u>	111
5.1.1	<u>Centro de Masas</u>	112
5.1.2	<u>Centro de Rigidez</u>	115
5.1.3	<u>Matriz de rigidez</u>	117
5.2	<u>ESTRUCTURA SIN AISLADORES DE BASE</u>	118

5.2.1	<a href="#">Programa BALANCETORSIONAL SIN AISLAMIENTO</a>	123
5.3	<a href="#">SISTEMA DE AISLACIÓN Y SUPERESTRUCTURA</a>	128
5.4	<a href="#">BALANCE TORSIONAL</a>	130
5.4.1	<a href="#">Programa BALANCETORSIONAL CON AISLAMIENTO</a>	133
	<a href="#">REFERENCIAS</a>	138
<b>6</b>	<b><a href="#">MODELOS SIMPLIFICADOS DE AISLADORES FPS</a></b>	
6.1	<a href="#">INTRODUCCIÓN</a>	139
6.2	<a href="#">RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO EFECTIVO DEL DISPOSITIVO FPS</a>	141
6.3	<a href="#">MODELO DE UN GRADO DE LIBERTAD</a>	144
6.4	<a href="#">MODELO MATEMÁTICO EN EL PLANO</a>	150
6.5	<a href="#">MODELO FÍSICO CON ELEMENTO GAP</a>	154
6.5.1	<a href="#">Sistema de ecuaciones diferenciales</a>	155
6.5.2	<a href="#">Fuerzas restitutivas</a>	157
6.5.3	<a href="#">Ecuaciones en Espacio de Estado</a>	159
6.5.4	<a href="#">Coeficiente de rozamiento</a>	160
6.5.5	<a href="#">Modelo de Histéresis</a>	161
6.5.6	<a href="#">Programa FPS MODELO 6GDL</a>	162
	<a href="#">REFERENCIAS</a>	170
<b>7</b>	<b><a href="#">ANÁLISIS SÍSMICO DE ESTRUCTURAS CON FPS</a></b>	
7.1	<a href="#">INTRODUCCIÓN</a>	173
7.2	<a href="#">MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL – VERTICAL</a>	174
7.3	<a href="#">MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS DE PISO</a>	179
7.4	<a href="#">MODELO SIMPLIFICADO DE TRES GRADOS DE LIBERTAD</a>	182
7.5	<a href="#">PROGRAMA ESPACIAL VERTICAL 6GDL</a>	183
	<a href="#">REFERENCIAS</a>	190

**8 ESTUDIO EXPERIMENTAL EN ESTRUCTURAS CON FPS**

8.1	<u>INTRODUCCIÓN</u>	191
8.2	<u>MESA VIBRATORIA Y ESTRUCTURA</u>	193
8.3	<u>SISMOS DE ANÁLISIS</u>	194
8.4	<u>VARIACIÓN DE LA FUERZA FRICCIONANTE</u>	195
8.5	<u>EFECTOS TORSIONALES</u>	197
8.6	<u>CENTRO DE RESISTENCIA FRICCIONAL</u>	199
8.7	<u>VALIDACIÓN ANALÍTICO EXPERIMENTAL EN AISLACIÓN</u>	203
8.8	<u>ENSAYOS EN SUPERESTRUCTURA CON AISLADORES</u>	205
8.9	<u>RESULTADOS CON MODELO ANALÍTICO Y EXPERIMENTAL</u>	207
8.9.1	<u>Ruido Blanco</u>	208
8.9.2	<u>Propiedades de base fija y aislada</u>	208
8.9.3	<u>Comparación de modelo analítico con experimental</u>	209
8.10	<u>RESULTADOS EN SUPERESTRUCTURA</u>	212
8.11	<u>RESULTADOS DE BASE FIJA Y AISLADA</u>	213
	<u>REFERENCIAS</u>	216

**9 DISEÑO DE EDIFICIOS AISLADOS EN SU BASE**

9.1	<u>INTRODUCCIÓN</u>	217
9.2	<u>FILOSOFÍA DE DISEÑO</u>	218
9.2.1	<u>Objetivos del diseño</u>	218
9.2.2	<u>Revisión de los métodos de diseño</u>	219
9.3	<u>MÉTODO DE LA FUERZA LATERAL EQUIVALENTE</u>	221
9.3.1	<u>Aplicación</u>	222
9.4	<u>ANÁLISIS DE RESPUESTA ESPECTRAL</u>	228
9.5	<u>DISEÑO DIRECTO BASADO EN DESPLAZAMIENTOS</u>	231

9.6	<a href="#">DISEÑO DE AISLADORES ELASTOMÉRICOS CON NÚCLEO DE PLOMO</a>	241
9.6.1	<a href="#">Filosofía de diseño</a>	241
9.6.2	<a href="#">Respuesta fuerza lateral – desplazamiento del LRB</a>	242
9.6.3	<a href="#">Capacidad de desplazamiento lateral del LRB</a>	245
9.6.4	<a href="#">Estabilidad del LRB</a>	246
9.6.5	<a href="#">Procedimiento de diseño para los LRBs</a>	246
9.7	<a href="#">DISEÑO DE PÉNDULOS FRICCIONANTES (FPS)</a>	249
9.7.1	<a href="#">Filosofía de diseño</a>	249
9.7.2	<a href="#">Respuesta fuerza lateral – desplazamiento del FPS</a>	250
9.7.3	<a href="#">Procedimiento de diseño</a>	252
	<a href="#">REFERENCIAS</a>	253

## CAPÍTULO 1

---

---

### SISTEMAS DE CONTROL PASIVO PARA REDUCIR RIESGO SÍSMICO

#### 1.1 INTRODUCCIÓN

La idea espontánea que surge luego de observar los daños en obras de infraestructura producidos por movimientos basales severos causados por sismos, es la de interpretar un sismo en términos de fuerzas y deformaciones inducidas en la estructura. Como una consecuencia, existe una tendencia a pensar solo en aumentar la resistencia de la estructura.

Realmente las fuerzas y los desplazamientos son solo una mera manifestación del ataque sísmico en vez que su verdadera esencia. Los sismos son en esencia fenómenos energéticos, contra los cuales las estrategias de defensa deben ser organizadas debidamente considerando esta naturaleza intrínseca. Akiyama (1985) y Uang y Bertero (1988), efectúan una contribución importante al desarrollo de los aspectos teóricos de una aproximación basada en la energía. Cabe recordar que Housner (1956), había ya sugerido un método de diseño basado en la energía, sin embargo se puede decir que la atención en este concepto se esta ganado recientemente de manera generalizada. Hurtado (1999).

Los sismos son desastres naturales cuyo carácter distintivo, es que la mayoría de las perdidas humanas y económicas que ocurren, no son debidas a los mecanismos del terremoto mismo, sino a fallas que ocurren en las estructuras realizadas por el hombre; edificios, represas, puentes, sistemas de transporte, líneas de abastecimiento, etc. los cuales supuestamente fueron diseñados y construidos para el confort de los seres humanos. Bertero (1995).

La buena experiencia observada en obras de infraestructura que han resistido exitosamente los efectos de sismos de gran magnitud otorga confianza a los ingenieros estructurales y demuestran que los problemas sísmicos son problemas, que en principio tiene solución. La tarea de resolver este problema corresponde a la Ingeniería Sísmica, es decir la rama de la Ingeniería Civil que efectúa los esfuerzos prácticos para reducir e idealmente evitar el riesgo sísmico.

En este capítulo se presentan nuevas técnicas del diseño sismo-resistente, donde dispositivos disipadores pasivos estratégicamente ubicados en las estructuras juegan un rol fundamental al limitar la energía de deformación y cinética de estas durante la duración de un evento sísmico.

Luego de analizar la ecuación general de diseño sísmico se discuten algunos de los dispositivos disipadores del tipo pasivo más utilizados en la actualidad y como ellos intervienen en la ecuación de balance de energía.

## 1.2 RIESGO SÍSMICO

A fin de aprender como controlar el riesgo sísmico es necesario definir Riesgo Sísmico. Riesgo Sísmico es la probabilidad que las consecuencias sociales o económicas de eventos sísmicos igualen o excedan valores especificados en un sitio durante un tiempo de exposición especificada. El riesgo sísmico es el resultado de la peligrosidad sísmica tal como se describe mediante la siguiente relación:

$$\text{Riesgo Sísmico} = \text{Peligrosidad Sísmica} \otimes \text{Vulnerabilidad} \quad (1.1)$$

Donde, Peligrosidad Sísmica representa la probabilidad de ocurrencia, dentro de un periodo específico de tiempo y dentro de un área dada, de un movimiento sísmico de una intensidad determinada. Vulnerabilidad sísmica representa el grado de daño debido a la ocurrencia de un movimiento sísmico de una intensidad determinada.

De lo anterior se puede concluir, que la solución al problema de la mitigación sísmica reside en controlar la vulnerabilidad del medio ambiente construido porque esto permite controlar las fuentes potenciales de peligrosidad sísmica, las cuales son una consecuencia de la interacción de la actividad sísmica (no se puede controlar) y de la vulnerabilidad del medio ambiente construido (controlable). Aunque la Ingeniería Sísmica es una rama relativamente nueva de la ingeniería, los avances realizados en esta área han cumplido ya un efecto importante al reducir el riesgo sísmico a través del mejoramiento del medio ambiente construido, haciendo posible el diseño y construcción de estructuras sismo resistentes tales como puentes, represas, líneas de abastecimiento, edificios de alto riesgo, etc. Los problemas encontrados en la Ingeniería Sísmica son complejos y sus soluciones son por lo general también complejas, que requieren una contribución interdisciplinaria de grupos de investigación, de profesionales prácticos, de usuarios, de oficinas gubernamentales, etc.

## 1.3 CRITERIOS DE DISEÑO

A fin de un mejor entendimiento de la temática que se está tratando, se revisarán a continuación algunos conceptos generales. Como se sabe, cualquier criterio de resistencia que se adopte para el dimensionamiento de una estructura, ya sea por tensiones admisibles, por estados límites u otros, siempre requiere la verificación de

$$\text{DEMANDA} < \text{CAPACIDAD} \quad (1.2)$$

Los términos DEMANDA y CAPACIDAD asumen de acuerdo a la situación que se analice un significado apropiado. En el caso del diseño sísmico de estructuras, la ecuación (1.2) también se puede interpretar como una ecuación de diseño, pero que utiliza conceptos energéticos para definir los tamaños, tipos y ubicación de los elementos estructurales.

## 1.4 DISIPACIÓN DE ENERGÍA Y SUS APLICACIONES

Los principios de la física que gobiernan los efectos de la disipación de energía sobre fenómenos dinámicos fueron estudiados hace ya más de dos siglos. Sus aplicaciones prácticas sin embargo fueron realizadas mucho tiempo después en diferentes sectores de la ingeniería. Entre los sectores pioneros en la aplicación de las tecnologías de amortiguamiento, se puede citar a la industria automotriz, para asegurar el confort y estabilidad de vehículos de motor. La aplicación en la Ingeniería Civil se tarda mas aun y recién en las últimas dos décadas se pueden observar las primeras aplicaciones. Entre los factores que pueden haber demorado la aplicación de sistemas disipativos en la Ingeniería Civil se pueden mencionar: La desconfianza de los ingenieros hacia dispositivos mecánicos, los cuales con el propósito de amortiguar, deben ser insertados estratégicamente en la estructura e interactuar con ella, la falencia del software apropiado con métodos confiables de cálculo que permiten modelar la estructura y realizar análisis dinámicos y finalmente la no existencia del hardware, esto es la falencia de dispositivos mecánicos aptos para disipar energía. Este atraso con respecto a otras áreas de la ingeniería se ha ido salvando en el transcurso de las dos últimas décadas. Los progresos alcanzados han sido el resultado de nuevas estrategias de diseño, por ejemplo la aislación basal, que este libro se presenta en los capítulos posteriores.

No obstante, la concepción de las nuevas estrategias de diseño no habrían encontrado utilidad sin el desarrollo paralelo del hardware necesario para su implementación. Así muchos laboratorios de investigación y algunas industrias pioneras han decidido invertir importantes recursos en este campo, inventando y perfeccionando una serie de dispositivos que utilizan fenómenos bien conocidos de la física adaptándolos para la protección de estructuras. La Ingeniería Sísmica intenta proveer de una protección adecuada a las estructuras de los llamados fenómenos naturales, en otras palabras limita la transmisión de energía mecánica de estos fenómenos hacia las estructuras. Los efectos de un sismo se caracterizan porque los niveles de potencia son decididamente altos, pero de corta duración, alrededor de un minuto en algunos casos. La consecuencia lógica de esta observación es que dispositivos antisísmicos son diseñados para resistir pocos ciclos histeréticos pero con desplazamientos substanciales, así como también pocos ciclos de alta potencia. Por lo anterior **el dispositivo debe ser capaz de absorber calor con un aumento substancial de temperatura, esto porque la gran cantidad de energía producida en forma de calor no alcanza a ser disipada al medio ambiente sino de una manera limitada.**

## 1.5 ECUACIÓN DE BALANCE DE ENERGÍA

Considérese la siguiente ecuación de balance de energía, Dechent (1989), Calderón (1995)

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_D \quad (1.3)$$

Donde  $E_I$  es la energía absoluta de entrada,  $E_S$  representa la energía almacenada y  $E_D$  es la energía disipada. La energía  $E_S$  se puede almacenar de dos maneras distintas:

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{E}_E + \mathbf{E}_K \quad (1.4)$$

Donde  $E_E$  es la energía de deformación elástica recuperable y  $E_K$  representa la energía cinética. La energía  $E_D$ , por otro lado también se puede disipar por dos mecanismos diferentes

$$\mathbf{E}_D = \mathbf{E}_V + \mathbf{E}_H \quad (1.5)$$

Donde  $E_V$  es la energía disipada por amortiguamiento viscoso y  $E_H$  corresponde a la energía disipada por mecanismos histeréticos. La energía  $E_V$  esta asociada **con las fuerzas que dependen solo de la velocidad** a través de diferentes leyes constitutivas, mientras que la energía  $E_H$  esta asociada con **fuerzas que depende solo de las deformaciones o desplazamientos**. Introduciendo expresiones (1.4) y (1.5) en ecuación (1.3), se obtiene la siguiente ecuación de balance de energía:

$$E_I = E_E + E_K + E_V + E_H \quad (1.6)$$

Cuando se compara la ecuación anterior con la ecuación de diseño ( 1.2 ), queda claro que  $E_I$  puede ser interpretada como la DEMANDA mientras que los cuatro términos del lado derecho de la ecuación (1.6) representan las posibles CAPACIDADES de la estructura. Para aplicar la relación ( 1.6 ) en el marco de un diseño estratégico, el ingeniero proyectista debe como primera etapa, al comienzo de su proyecto realizar una buena estimación de  $E_I$ . La segunda etapa consiste en el análisis de la factibilidad técnica y económica de balancear la demanda solo por medio de un comportamiento elástico de la estructura o si es conveniente recurrir a los términos disipativos  $E_V$  y  $E_H$ .

Si esto último fuera el caso, ha sido una practica común de diseño por un buen numero de años, por lo menos en ingeniería sísmica, utilizar solo el termino  $E_H$ , que proviene del comportamiento inelástico o plástico de la estructura, es decir induciendo deformaciones que van mas allá del limite elástico de la estructura. Se debe recordar aquí, que la acción de estos mecanismos disipativos **resultan en un daño de los elementos estructurales cuya reparación puede ser muy costosa y también pueden dejar a la estructura fuera de servicio temporalmente**.

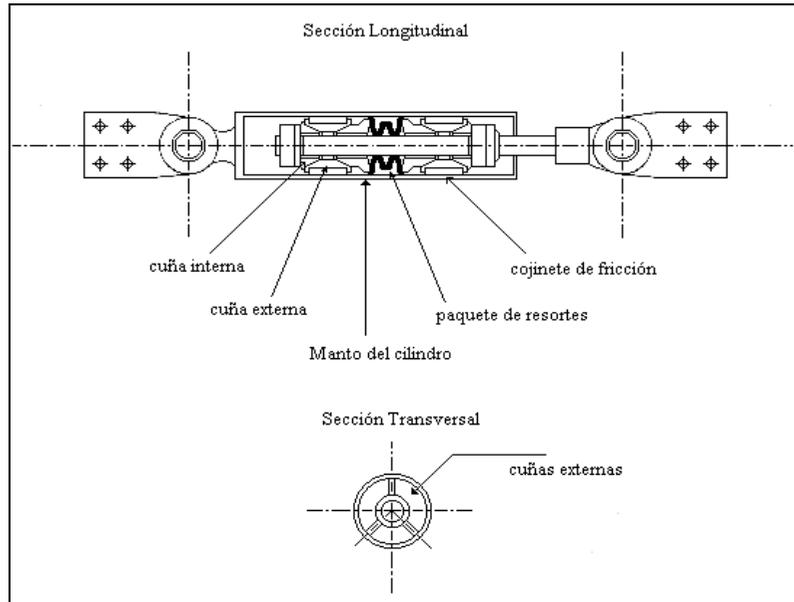
## 1.6 DISPOSITIVOS DISIPADORES

A pesar de que el libro trata sobre aisladores de base, vale la pena presentar en forma rápida los dispositivos disipadores que son muy eficientes para reforzar edificios contra sismos o para diseñar nuevos edificios.

Hace pocos años se ha reconocido, que es posible aumentar significativamente  $E_V$  y  $E_H$ , tanto como sea necesario para controlar la estructura entera a través del uso de dispositivos disipadores de energía dispuestos en lugares estratégicos en la estructura. De manera representativa para una gran variedad de dispositivos disipadores disponibles en la actualidad se muestran a continuación de manera esquemática una serie de dispositivos sísmicos.

### 1.6.1 Dispositivo Sumitomo

En la figura 1.1 se ilustra un amortiguador que fabrica la empresa Sumitomo, que utiliza mecanismos disipadores que se basan en la fricción, Gäbler (1996).



**Figura 1.1** Corte longitudinal y transversal del dispositivo de Sumitomo.

Este consiste en una serie de cuñas las cuales actúan unas en contra de las otras cuando se encuentran bajo una carga que al actuar sobre el resorte crea fuerzas en los cojinetes. Los cojinetes deslizan directamente por sobre la superficie de acero interior del dispositivo. Los cojinetes de fricción son una mezcla de cobre que tiene incrustaciones de grafito los que proveen lubricación seca al sistema, asegurándose de lograr una fuerza de fricción estable y reduciendo el ruido durante el movimiento. Para fuerzas menores que la fuerza de deslizamiento, los cojinetes no se deslizan y en consecuencia no disipan energía.

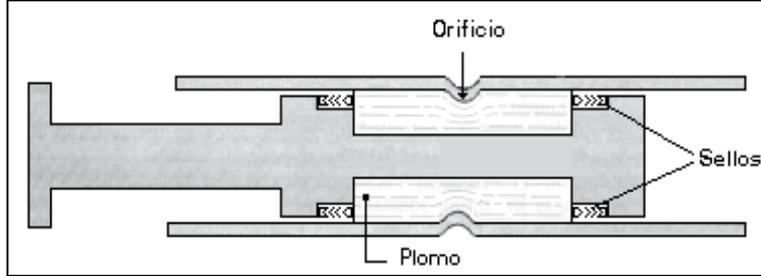
Estos dispositivos tienen un gran rendimiento. **Su comportamiento histerético es extremadamente regular y reiterable.** Además su comportamiento (respuesta fuerza desplazamiento) no se ve afectado por la amplitud, ni la frecuencia, ni temperatura, ni el número de ciclos de cargas.

### 1.6.2 Amortiguador de extrusión de plomo

La figura 1.2 ilustra esquemáticamente un dispositivo de disipación de energía, que utiliza como mecanismo disipador la extrusión de plomo Gäßler (1996). Es desarrollado por la empresa neozelandesa Penguin Engineering Ltd, y son usados actualmente con gran éxito en muchos edificios y puentes en Japón, U.S.A., Italia y Nueva Zelanda.

El amortiguador de extrusión de plomo, en que el plomo es extruído cíclicamente, es decir, el material a extrusar (plomo) que se encuentra en el cuerpo cilíndrico de acero del amortiguador, por medio de un émbolo se fuerza (al metal) a fluir a través de un orificio. El proceso de extrusión es un complejo problema elasto-plástico, en el que se producen grandes deformaciones plásticas.

El amortiguador de la figura 1.2 es de un tipo 'tubo contraído' y consiste esencialmente de dos pistones sobre un vástago, los cuales fuerzan al plomo por medio de una constricción.



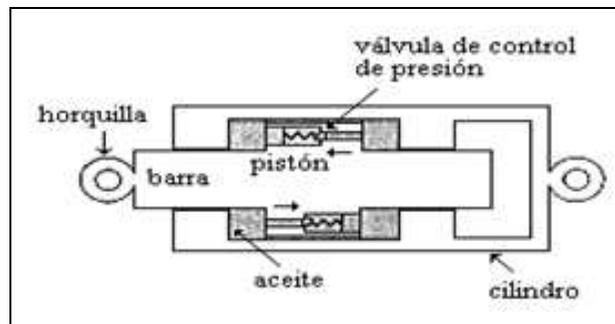
**Figura 1.2** Esquema del amortiguador de extrusión de plomo tipo 'tubo contraído'.

El proceso de recuperación de las propiedades mecánicas después y durante la deformación plástica es rápido, vía el proceso interrelacionado de recuperación, recristalización y crecimiento granular. Estos procesos son particularmente eficientes a temperatura ambiente a causa del bajo punto de fusión del plomo ( $327^{\circ}\text{C}$ ). En otras palabras, la fluencia del plomo a un nivel bajo de tensiones (10MPa), implica un aumento en el amortiguamiento efectivo del sistema.

### 1.6.3 Amortiguador Viscoso HiDAM

La figura 1.3 ilustra un amortiguador de aceite de alto rendimiento, denominado HiDAM, dispositivo producido por la empresa japonesa Kajima Corporation, Gäbler (1996). Este dispositivo de control sísmico de tipo pasivo utiliza un mecanismo de amortiguamiento viscoso. Como se muestra en la figura 1.3, el dispositivo encierra aceite en ambos lados de un pistón. La eficiencia del amortiguamiento es lograda por el movimiento relativo del pistón y la resistencia del fluido (aceite) que pasa por las válvulas de control de presión que conectan ambas cámaras de aceite de manera que genera una gran fuerza de amortiguamiento por un pequeño golpe del pistón.

El dispositivo es conectado al arriostramiento por medio del anillo de horquilla fijado en el extremo de la barra y el cilindro.



**Figura 1.3** Sección transversal del HiDAM

Una disposición típica en estructuras para cualquiera de los tres amortiguadores descritos anteriormente se esquematiza en figura 1.4. De esta manera los amortiguadores aprovechan el desplazamiento relativo entre el arriostramiento y la viga, para disipar la energía de vibración y de esta forma reducir el movimiento de respuesta de la estructura.

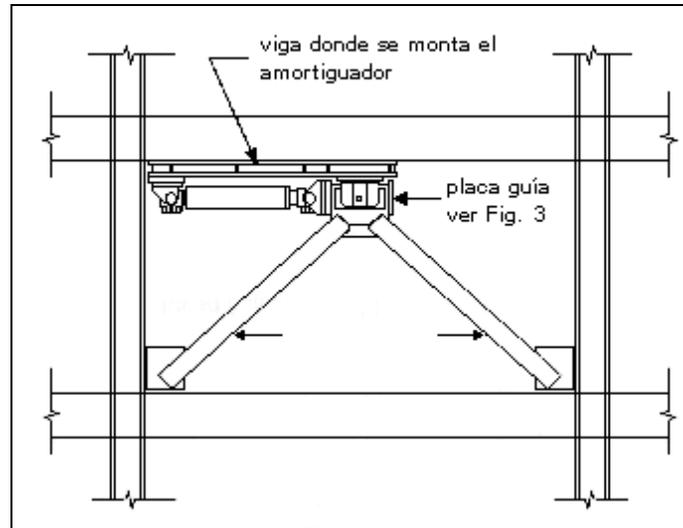


Figura 1.4 Ubicación de Amortiguadores en la estructura. Gäbler (1996).

### 1.6.4 Amortiguador Viscoelástico VE

La figura 1.5 ilustra un amortiguador de corte viscoelástico (VE), el cual comprende dos o más capas de material con una configuración tipo sándwich, Gäbler (1996). Generalmente, son ubicados en los arriostramientos de diagonales simples, tal como se muestra en figura 1.6. El material usado en los amortiguadores son **polímeros** altamente disipativos que tienen un comportamiento viscoelástico. El más utilizado corresponde a una clase de copolímero de acrílico que ha sido desarrollado por la empresa estadounidense 3M Co. (Minnesota Mining and Manufacturing (3M) Company). Los materiales tienen características dinámicas estables, son químicamente inertes, y poseen buenas propiedades de envejecimiento. Además, son resistentes a los contaminantes ambientales.

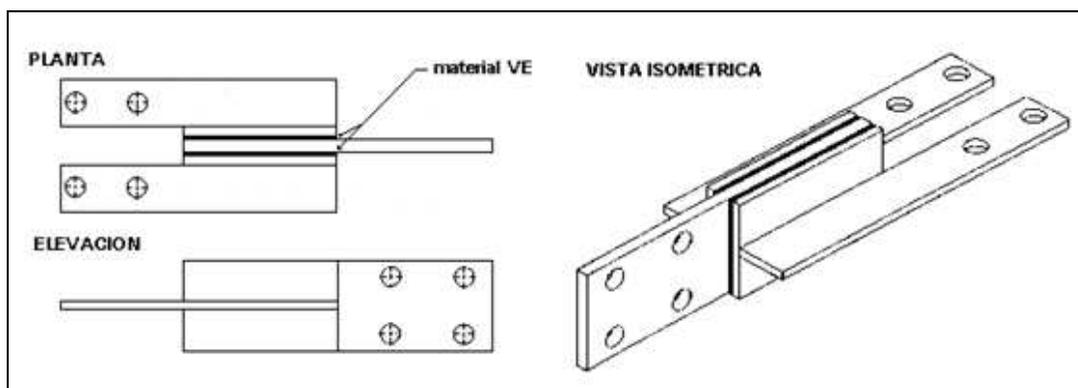
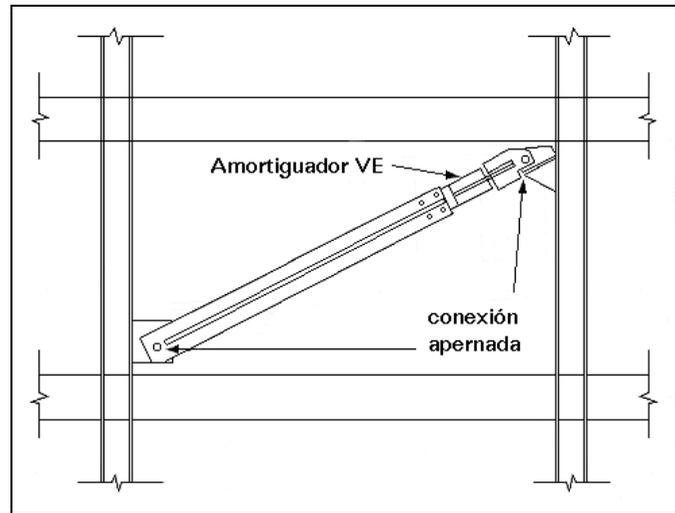


Figura 1.5 Vista isométrica, planta y elevación del amortiguador viscoelástico 3M.

El comportamiento del material VE queda definido por tres propiedades importantes. Estas son el módulo de pérdida del sistema, el módulo de almacenamiento del sistema y su razón definida como el factor de pérdida. Estas propiedades son sensibles a la frecuencia de excitación, cambios de temperatura y al nivel de tensión de deformación.

Este tipo de amortiguador también aprovecha el desplazamiento relativo entre el arriostramiento y la viga para disipar la energía de vibración y de esta forma reducir el movimiento de respuesta de la estructura.



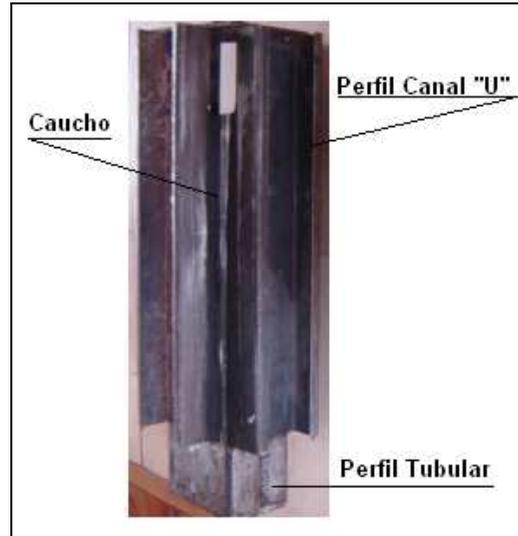
**Figura 1.6** Instalación típica del amortiguado viscoelástico en un marco arriostrado.

### 1.6.5 Disipadores Viscoelástico desarrollados en el CEINCI-ESPE

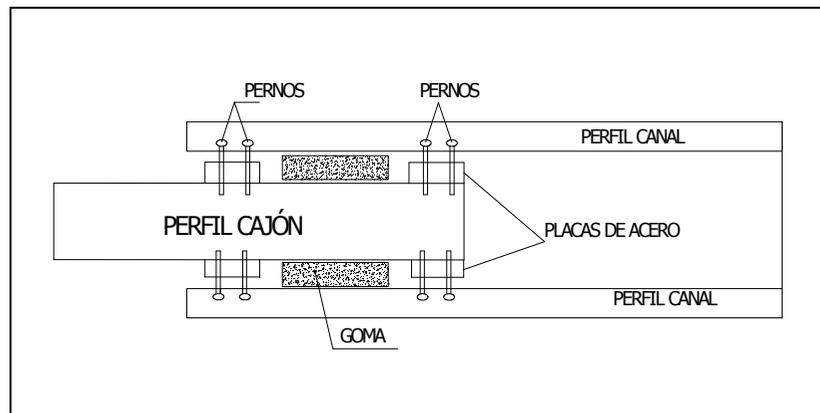
En el **Centro de Investigaciones Científicas, CEINCI** de la **Escuela Superior Politécnica del Ejército, ESPE**, se han desarrollado dos disipadores viscoelásticos el uno denominado **diagonal viscoelástica** que sirve para reforzar o diseñar edificaciones de poca altura o mediana altura y el otro denominado **muro viscoelástico** para reforzar o diseñar edificios de gran altura.

La diagonal viscoelástica está compuesto por un perfil tubular de lámina delgada doblado en frío, en su parte central, rodeando al perfil cajón se tiene la goma y tapando la goma se tiene un perfil canal "U" en cada cara. En la figura 1.7 se tiene una vista longitudinal del disipador visco elástico, para una mayor fijeza en los extremos se coloca una placa de acero debidamente empernada y entre la placa y la goma existe una distancia para permitir las deformaciones por corte de la goma. La goma está vulcanizada a los perfiles de lámina delgada, de tal manera que ante movimientos sísmicos no se desprenda. En la figura 1.8 se aprecia una vista longitudinal de la diagonal visco elástica.

El perfil de acero debe ser diseñado para que ante la acción de un sismo severo trabaje en el rango elástico, de esta manera se garantiza que la goma va a disipar energía en forma viscoelástica. Los ciclos de histéresis que se obtuvieron en laboratorio son regulares, no se tuvo degradación de resistencia. Aguiar (2008).



**Figura 1.7** Vista de diagonal visco elástico.



**Figura 1.8** Vista longitudinal de diagonal visco elástico.

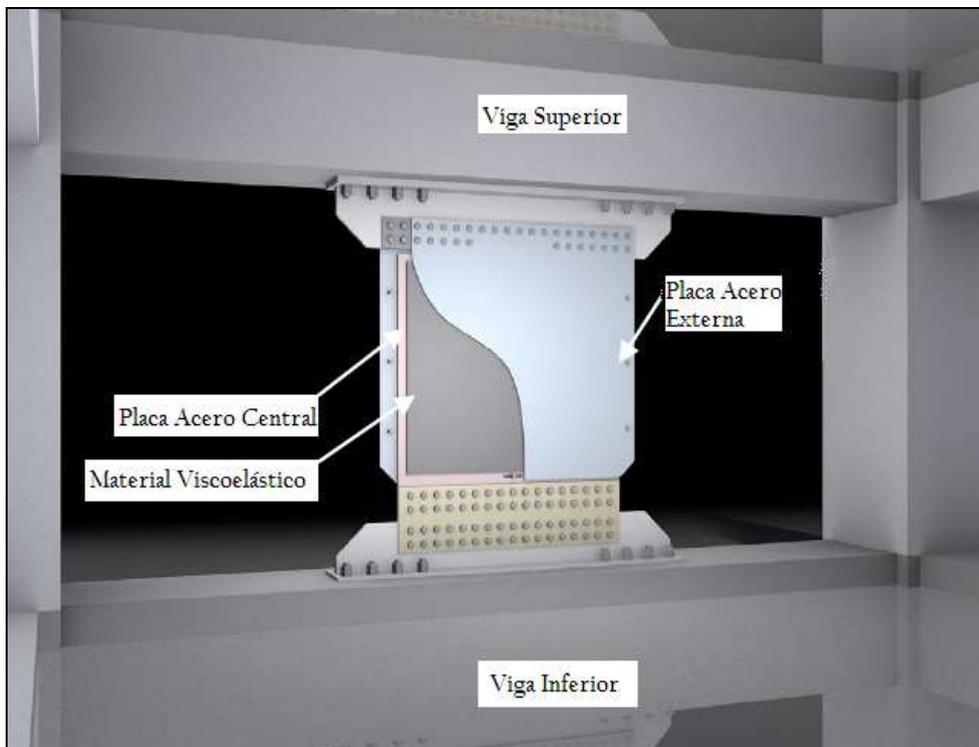
El muro visco elástico está compuesto por una plancha de acero central, la misma que va unida a las vigas superior e inferior de un piso, en forma apernada. A los dos lados de la plancha de acero se tiene goma y recubriendo a la goma se tiene otras planchas de acero. De igual manera trabaja a corte la goma y es la que disipa energía. En la figura 1.9 se muestra un prototipo construido y en la figura 1.10 se aprecia como se coloca en la estructura.

### 1.6.6 Amortiguadores con Memoria de Forma

El término materiales con memoria de forma se aplica a un grupo de materiales metálicos que demuestran la habilidad de volver a alguna forma o tamaño predefinido cuando se someten a procedimientos térmicos apropiados. La base del efecto memoria de forma es que estos materiales padecen un cambio en su ordenamiento cristalino o un cambio de fase cuando ellos son calentados o enfriados a través de sus temperaturas de transformación característica. La aplicación de estos materiales en el desarrollo de disipadores de energía se fundamenta en las características de súper elasticidad y diferentes patrones de tensiones que ellos exhiben en carga y descarga.



**Figura 1.9** Prototipo del Muro Visco Elástico.



**Figura 1.10** Vista de un muro visco elástico.

## 1.7 AISLACIÓN BASAL

Si no es técnicamente factible o si es económicamente desventajoso balancear la energía  $E_I$  con  $E_S$  solamente o a través de  $E_S + E_D$  entonces existe también la opción de intentar disminuir la energía de entrada  $E_I$ . En Ingeniería Sísmica esto se puede lograr a través de las técnicas de aislación basal, Becerra (1998), Silva, (1998), Kelly (1997). Cabe recordar que la aislación sísmica fue propuesta ya hace más de un siglo, pero su aplicación extensiva se ha realizado solo durante las dos últimas décadas. Jara y Casas (2002).

La aislación basal hoy en día se considera como un diseño estratégico que esta dirigido a **reducir la cantidad de energía de entrada a las fundaciones de una estructura**. Dicha estrategia logra su efectividad mediante los siguientes mecanismos:

- 1) A través de la reducción de la respuesta sísmica como una consecuencia al corrimiento del periodo fundamental de la estructura.
- 2) A través de una limitación de las fuerzas transmitidas a la fundación. Una alta capacidad de amortiguamiento de los aisladores permite controlar y reducir los desplazamientos relativos.

Antes de 1995 en Japón habían 80 edificios con aisladores de base, luego al observar el gran comportamiento que tuvieron esos edificios durante el sismo de Kobe (1995) el número de estructuras con aisladores de base creció notablemente habiendo actualmente más de 600 edificios con aisladores. Algo similar ocurrió en Estados Unidos de Norte América luego del sismo de Northridge (1994).

Al igual que en los disipadores de energía, hay una gran cantidad de aisladores de base pero únicamente se van a presentar los dos que se tratan en los capítulos posteriores de este libro y son los aisladores elastoméricos y los aisladores tipo péndulo de fricción.

### 1.7.1 Aisladores Elastoméricos

En la figura 1.11 se ilustra un aislador elastomérico. Este apoyo está compuesto por capas alternadas de goma y placas de acero unidas entre sí por un proceso de vulcanización. De este modo, la rigidez del apoyo es controlada por el espesor de las capas de goma. Así, **mientras más gruesas son estas capas más flexibles es el apoyo en la dirección horizontal**. En cambio, la rigidez vertical del apoyo es controlada por la alta rigidez en planta de las placas de acero que inhibe la expansión lateral de la goma que resulta de la presión vertical.

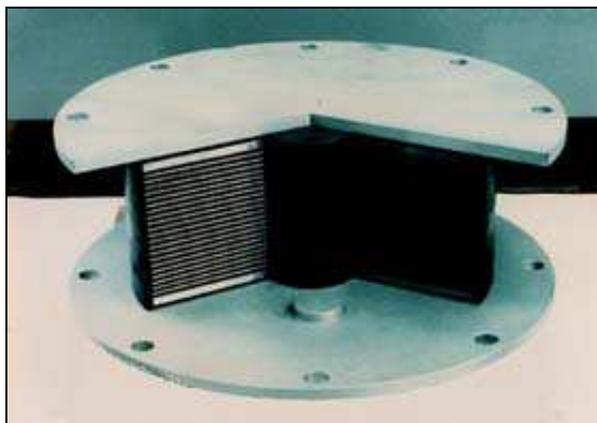


Figura 1.11 Aislador Elastomérico

A objeto de aumentar la capacidad de disipación de un sistema de aislación basal como el mostrado, se puede elegir entre varias alternativas tales como: a) Agregar aditivos a la goma para aumentar sus propiedades de amortiguamiento. b) Incorporar un corazón de plomo en el centro del disipador para aprovechar las propiedades disipativas del plomo y así aumentar la disipación del aislador y c) Acoplar a los aisladores otros dispositivos tales como los amortiguadores viscosos, de fricción o por extrusión de plomo.



**Figura 1.12** Edificio San Agustín y Clínica San Carlos construidos con aisladores de base

En Chile, el número de estructuras con aisladores de base se ha incrementado notablemente en los últimos años. A manera de ejemplo en la figura 1.12 se indica a la izquierda el Edificio San Agustín (2002) en la Pontificia Universidad Católica (Campus San Joaquín) que tiene 17 aisladores con núcleo de plomo y 11 deslizadores. A la derecha se muestra la Clínica San Carlos (2001) de Apoquindo en Santiago que tiene 22 aisladores con núcleo de plomo y 30 aisladores sin núcleo de plomo. De La Llera *et al* (2004).

El primer edificio construido en Chile con aisladores Elastoméricos fue uno ubicado en la Comunidad Andalucía (1992) se utilizaron 6 aisladores sin núcleo de plomo para el edificio de cuatro pisos que aparece a la izquierda de la figura 1.13. En el mismo conjunto habitacional, frente al edificio aislado hay otro edificio de las mismas características pero sin aisladores de base. Los dos edificios están instrumentados y sirven para estudiar el comportamiento de estos dos edificios el uno con y el otro sin aisladores. Moroni *et al* (1998).



**Figura 1.13** Bloque de la Comunidad Andalucía construido con aisladores elastoméricos.

Al centro de la figura 1.13 se aprecia un aislador sobre un plinto. Nótese que ya está perfectamente empernado y asegurado en su base; en la parte superior se hará lo propio pero a la losa de aislación que se debe construir en la planta baja. Finalmente, a la derecha se aprecia un aislador elastomérico similar a los que se colocaron en la Comunidad Andalucía.

### 1.7.2 Aislador de Péndulo de Fricción

Dentro de los sistemas de aislación basal existen los sistemas deslizantes (friccional). Uno de los representantes más conocidos de esta clase es el sistema de péndulo friccional FPS (Frictional Pendulum System). El apoyo FPS consiste de un deslizador (resbalador) articulado sobre una superficie de acero inoxidable esférica como se muestra esquemáticamente en la figura 1.14. Características de estos apoyos son la superficie deslizante esférica de acero inoxidable pulido y el deslizador articulado, que está revestido con un material compuesto de alta capacidad de soporte basado en politetrafluoroetileno (teflón) que tiene un bajo coeficiente de fricción (aproximadamente 5 a 7%). Los apoyos están sellados e instalados con la superficie deslizante boca abajo para evitar la contaminación de la interface de deslizamiento.

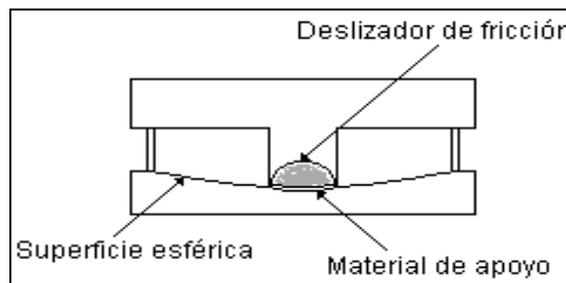


Figura 1.14 Esquema Aislador FPS.

El aislador indicado en la figura 1.14 corresponde a la primera generación de aisladores. Zayas *et al* (1987) y es el que se va a tratar en este libro, en los capítulos posteriores.

El apoyo FPS es activado sólo cuando la fuerza de corte sobre la interface de aislación, debida a las fuerzas sísmicas, supera la fuerza de fricción estática. Una vez en movimiento, el cursor articulado (deslizador) se mueve a lo largo de la superficie esférica cóncava, causando la elevación de la masa soportada, con movimientos equivalentes a los de un péndulo simple. **Los resultados de aislación basal deseados se alcanzan por la geometría del apoyo y la gravedad.** Durante la elevación a lo largo de la superficie esférica, el apoyo desarrolla una fuerza resistente lateral igual a la combinación de la fuerza friccional movilizada y una fuerza de restauración inducida por la gravedad. Verdaderamente, esta última fuerza es la fuerza de restauración del sistema.

En base a lo indicado, en el párrafo anterior se tienen dos fases en un sistema FPS, la primera denominada de agripamiento en que el deslizador no se mueve y la segunda que corresponde al deslizador en movimiento.

## 1.8 CONSIDERACIONES DE DISEÑO

Al comenzar el desarrollo de un proyecto, el ingeniero proyectista debe realizar ciertas elecciones estratégicas considerando una serie de limitaciones, que dependen del tipo de estructura, de la sismicidad y naturaleza geológica del sitio, de la norma vigente y de otros parámetros que inciden. En el pasado existía otra limitación adicional, esta es la falencia del dispositivo sísmico adecuado (hardware) que fuera digno de confianza. Este factor limitante ya no existe. Hoy en día el ingeniero estructural puede realmente contar con numerosas soluciones y dispositivos sísmicos apropiados, que ya han sido adoptados en las últimas dos décadas. Dichas soluciones, no obstante de su gran variedad, se pueden agrupar en dos tipos principales:

1. **Soluciones convencionales.** Aquellas que proveen al elemento estructural de suficiente flexibilidad, resistencia y ductilidad para absorber y disipar la energía de entrada.
2. **Mitigación sísmica.** Aquellas dirigidas a proteger la estructura contra el daño sísmico limitando los efectos del ataque sísmico, en vez de resistirlo, utilizando dispositivos sísmicos estratégicamente insertados en la estructura.

Finalmente debe resaltarse una vez más, el comportamiento extremadamente estable de los dispositivos sísmicos presentados, con leyes constitutivas bien definidas aumenta además la confiabilidad de los resultados obtenidos mediante la simulación numérica de un modelo.

## REFERENCIAS

1. Aguiar R. (2008) *Análisis sísmico de edificios*. Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 322 p., Quito, Ecuador.
2. Akiyama H., Kato B., (1980) "Energy concentration of multistory buildings, *Earthquake Engineering 7<sup>th</sup> Conf.* Vol 4., Istanbul.
3. Akiyama H., (1985) *Earthquake resistant limit state of buildings*, University of Tokyo Press, 372 p.
4. Becerra C. (1998) *Aislación Basal de un edificio para Vivienda Social*. Memoria de título, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Concepción, 112 p. Concepción, Chile.
5. Bertero, V. (1995) *Apuntes del Profesor Bertero*, Universidad Técnica Federico Santa María y ACHISINA, Valparaíso, Chile.
6. Calderón R. (1995) *Ductilidad mediante Fricción en Estructuras*. Memoria de Título, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Concepción, Concepción, Chile.
7. Dechent P. (1989) *Berechnung und Bemessung reibge-dämpfter Bauwerke unter Erdbebenbeanspruchung*, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr Universität Bochum, TWM Report Nr. 89-7. Germany.
8. De La Llera J.C., Lüders C., Leigh P., and Sady H., (2004), "Analysis, testing and implementation of seismic isolation of buildings in Chile", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **33**, 543-574.
9. Gäbler, C. (1996) *Dispositivos para el Control de Vibraciones*. Memoria de título, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Concepción, Chile.
10. Housner G. W., (1956) "Limit design of structures to resist earthquake", *Proceedings of the 1956 World Conference on Earthquake Engineering*, Earthquake Engineering Research Institute, San Francisco.
11. Hurtado J., (1999) *Modelación estocástica de la acción sísmica*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Monografía **CIMNE IS-33**, 93 p., Barcelona, España.
12. Jara M., y Casas J. R., (2002) *Control de vibraciones en puentes. Un estado del arte y*

*de la práctica*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Monografía **CIMNE IS-48**, 120 p., Barcelona, España.

13. Kelly J., (1997) *Earthquake-Resistant Design with rubber*. 2<sup>nd</sup> ed. Berlin and New York: Springer – Verlag.
14. Moroni M., Sarrazin M., and Boroschek R., (1998), “Experiments on a base-isolated building in Santiago, Chile”, *Engineering Structures*, **20**, 720-725.
15. Silva J. (1998) **Factibilidad de Aislación Basal en Concepción**, Memoria de título, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Concepción, Concepción, Chile.
16. Uang C. M., and Bertero V. (1988) *Use of energy as design criterion in earthquake resistant design*, Earthquake Engineering Research Centre, University of California at Berkeley, **Report N.- UCB/EERC-88/13**.
17. Zayas V., Low S., Mahin S. (1987), *The FPS Earthquake Resisting System*, Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley, **UCB/EERC-87/01**, California, USA.

## CAPÍTULO 2

### SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD EN ESTRUCTURAS CON AISLADORES ELASTOMÉRICOS

#### 2.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO

En este capítulo se plantea la ecuación diferencial del movimiento de una estructura de un vano y un piso sobre aisladores de base, como se muestra a la izquierda de la figura 2.1. La estructura se modela como un sistema que tiene dos grados de libertad, que son el desplazamiento en la base  $d_b$  y el desplazamiento en el primer piso  $d_1$ . Estos se los agrupa en el vector  $D_c$  definido como:

$$D_c = \begin{bmatrix} d_b \\ d_1 \end{bmatrix}$$

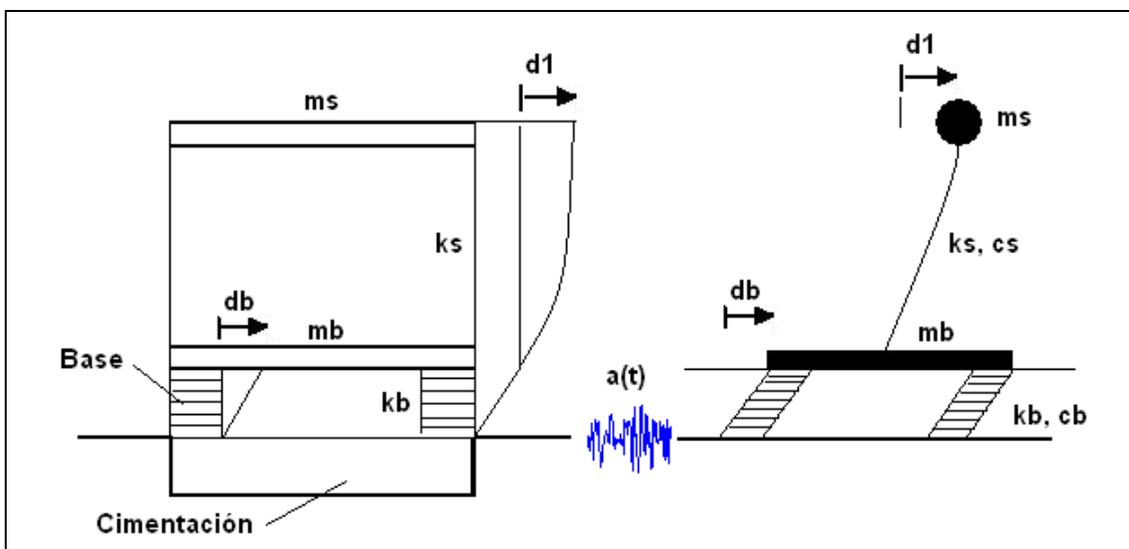


Figura 2.1 Modelo numérico de un sistema de dos grados de libertad.

Nótese que la definición de los grados de libertad cinemáticos en figura 2.1, produce que ante el movimiento de la base  $d_b$ , el pórtico se mueve como cuerpo rígido y toda la deformación de la superestructura se define con el **grado de libertad relativo**  $d_1$ , el cual se mide a partir de la estructura desplazada. Para lograr esta condición en el modelo, se unen las dos columnas con una losa si el modelo fuera en tres dimensiones o con una viga para el modelo en dos dimensiones.

El sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el problema dinámico está definido por:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}_C + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}}_C + \mathbf{K} \mathbf{D}_C = -\mathbf{M} \mathbf{J}_C \mathbf{a}(t) \quad (2.1)$$

Donde  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez,  $\mathbf{D}_C, \dot{\mathbf{D}}_C, \ddot{\mathbf{D}}_C$  son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración. El vector  $\mathbf{J}_C$  sirve para definir como incide la dirección de la aceleración basal en el vector de cargas generalizadas;  $\mathbf{a}(t)$  aceleración del suelo, definido por su acelerograma o por el espectro. Kelly (1993).

La matriz de masas se obtiene evaluando la energía cinética de la estructura  $T_C$ , para el presente caso se tiene:

$$T_C = \frac{1}{2} m_b \dot{d}_b^2 + \frac{1}{2} m_s (\dot{d}_b + \dot{d}_1)^2$$

Donde  $m_b$  es la masa de la base de la superestructura;  $m_s$  es la masa de la superestructura. Al sacar factor común 1/2 se tiene y al desarrollar el término elevado al cuadrado se tiene:

$$T_C = \frac{1}{2} \{ (m_b + m_s) \dot{d}_b^2 + 2 m_s \dot{d}_b \dot{d}_1 + m_s \dot{d}_1^2 \}$$

Luego la matriz de masas se obtiene de la derivada de la energía cinética con respecto a la velocidad para cada grado de libertad.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_b + m_s & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix}$$

La evaluación de la matriz de rigidez y de amortiguamiento es directa y resultan:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix}$$

Nótese que cuando se trabaja con coordenadas relativas la matriz de masa no es diagonal y las matrices de rigidez y amortiguamiento son diagonales. El vector  $\mathbf{J}_C$  toma la forma:

$$\mathbf{J}_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2.2 VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO

Para el caso de vibración libre, sin amortiguamiento, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}_c + \mathbf{K} \mathbf{D}_c = 0 \quad (2.2)$$

La solución de ( 2.2 ) conduce a resolver el determinante siguiente:

$$\det |\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0$$

$$\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} = \begin{vmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_s \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} m_b + m_s & m_s \\ m_s & m_s \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} k_b - \lambda(m_b + m_s) & -\lambda m_s \\ -\lambda m_s & k_s - \lambda m_s \end{bmatrix}$$

Donde  $\lambda$  es el valor propio. Al encontrar el determinante e igualar a cero se halla el polinomio característico, este es:

$$k_b k_s - \lambda k_s (m_b + m_s) - \lambda k_b m_s + \lambda^2 m_s (m_b + m_s) - \lambda^2 m_s^2 = 0$$

Al dividir para  $m_s (m_b + m_s)$ . Dechent (2006), se obtiene:

$$\lambda^2 - \lambda^2 \frac{m_s}{m_b + m_s} - \lambda \left( \frac{k_b}{m_b + m_s} + \frac{k_s}{m_s} \right) + \frac{k_s}{m_s} \frac{k_b}{m_b + m_s} = 0$$

Si se define:

$$\gamma = \frac{m_s}{m_b + m_s}$$

El polinomio característico queda:

$$\lambda^2(1-\gamma) - \lambda \left( \frac{k_b}{m_b + m_s} + \frac{k_s}{m_s} \right) + \frac{k_s}{m_s} \frac{k_b}{m_b + m_s} = 0$$

Se sabe que la frecuencia natural  $\omega$  se obtiene sacando la raíz cuadrada del valor propio. Luego el polinomio característico en función de la frecuencia natural resulta:

$$\omega^4 (1-\gamma) - \omega^2 \left( \frac{k_b}{m_b + m_s} + \frac{k_s}{m_s} \right) + \frac{k_s}{m_s} \frac{k_b}{m_b + m_s} = 0$$

Se definen los siguientes parámetros:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \quad \omega_b = \sqrt{\frac{k_b}{m_b + m_s}} \quad \varepsilon = \frac{\omega_b^2}{\omega_s^2}$$

Siendo  $\omega_s$  la frecuencia fundamental de vibración de la superestructura considerando base empotrada.  $\omega_b$  es la frecuencia natural del sistema estructural considerado como cuerpo rígido sobre los aparatos de apoyo. Con estas definiciones las raíces del polinomio característico son:

$$\omega^2 = \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1-\gamma)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1-\lambda)\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}} \right]$$

La frecuencia fundamental del sistema, resulta:

$$\omega_1^2 = \frac{(\omega_b^2 + \omega_s^2) - \sqrt{(\omega_b^2 + \omega_s^2)^2 - 4(1-\gamma)\omega_b^2\omega_s^2}}{2(1-\gamma)}$$

La frecuencia máxima del sistema, es:

$$\omega_2^2 = \frac{(\omega_b^2 + \omega_s^2) + \sqrt{(\omega_b^2 + \omega_s^2)^2 - 4(1-\gamma)\omega_b^2\omega_s^2}}{2(1-\gamma)}$$

Al desarrollar las ecuaciones indicadas y luego de algún trabajo algebraico y aproximaciones en base a suponer pequeños valores para  $\varepsilon$  se obtiene:

$$\omega_1^2 \approx \omega_b^2 \left( 1 - \gamma \frac{\omega_b^2}{\omega_s^2} \right) \approx \omega_b^2 (1 - \gamma \varepsilon) \approx \omega_b^2 \quad (2.3)$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\omega_s^2}{(1-\gamma)} \left( 1 + \gamma \frac{\omega_b^2}{\omega_s^2} \right) \approx \frac{\omega_s^2}{(1-\gamma)} (1 + \gamma \varepsilon) \approx \frac{\omega_s^2}{(1-\gamma)} \quad (2.4)$$

Al contar con herramientas computacionales poderosas como es el MATLAB no tendría mucho sentido encontrar expresiones aproximadas para hallar las frecuencias de vibración, pero para entender el funcionamiento de estructuras con aislamiento de base si que lo tiene y es así que de las ecuaciones ( 2.3 ) y ( 2.4 ) se desprende:

- $\omega_1$  es función de la frecuencia de vibración del sistema de aislamiento y de la frecuencia de vibración de la superestructura pero se acostumbra considerar que:

$$\omega_1^2 \approx \omega_b^2 \quad (2.5)$$

Esta ecuación se utiliza para definir el tamaño de los aisladores. El proyectista se impone un período objetivo  $T_D$ , que desea tenga la estructura con el aislamiento. Entonces se tiene:

$$\left( \frac{2\pi}{T_D} \right)^2 = \frac{k_b}{m_b + m_s}$$

De donde:

$$T_D = 2\pi \sqrt{\frac{m_b + m_s}{k_b}} \quad (2.6)$$

- La segunda frecuencia resulta mayor que la frecuencia correspondiente a la superestructura con base empotrada y se incrementa significativamente en la medida que la masa de la superestructura es cada vez más dominante comparada a la del nivel de aislación. Dechent (2006).

Para el cálculo de los modos de vibración se debe reemplazar  $\lambda$  en:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\phi = \mathbf{0}$$

Donde el vector  $\phi$  esta compuesto por:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_b \\ \phi_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_b - \lambda(m_b + m_s) & -\lambda m_s \\ -\lambda m_s & k_s - \lambda m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_b \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al dividir la primera ecuación para  $m_b + m_s$  y la segunda para  $m_s$  se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \omega_b^2 - \lambda & -\lambda \gamma \\ -\lambda & \omega_s^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_b \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular la primera forma modal se reemplaza  $\lambda = \omega_1^2$ . Como el sistema de ecuaciones es linealmente dependiente, solo se puede trabajar con la primera o con la segunda ecuación, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} (\omega_b^2 - \lambda)\phi_b - \lambda \gamma \phi_1 &= 0 \\ (\omega_b^2 - \omega_1^2)\phi_b - \omega_1^2 \gamma \phi_1 &= 0 \\ \omega_1^2 &= \omega_b^2(1 - \gamma \varepsilon) \end{aligned}$$

Si  $\phi_b = 1$  al reemplazar  $\omega_1^2$  se halla:

$$(\omega_b^2 - \omega_b^2 + \omega_b^2 \gamma \varepsilon)1 - [\omega_b^2(1 - \gamma \varepsilon)]\gamma \phi_1 = 0$$

De donde:

$$\phi_1 = \frac{\omega_b^2 \gamma \varepsilon}{\omega_b^2 \gamma (1 - \gamma \varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{1 - \gamma \varepsilon} \approx \varepsilon$$

Luego el primer modo de vibración resulta:

$$\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

Para encontrar el segundo modo se reemplaza  $\lambda = \omega_2^2 = \frac{\omega_s^2}{1 - \gamma}(1 + \gamma \varepsilon)$  en la primera ecuación, obteniéndose:

$$\left[ \omega_b^2 - \frac{\omega_s^2}{1 - \gamma}(1 + \gamma \varepsilon) \right] 1 - \frac{\omega_s^2}{1 - \gamma}(1 + \gamma \varepsilon) \gamma \phi_1 = 0$$

Luego de algunas simplificaciones y aproximaciones (Dechent 2006) se llega a:

$$\phi_1 \approx -\frac{1}{\gamma} [1 - (1 - \gamma) \varepsilon] \approx -\frac{1}{\gamma}$$

Por lo tanto:

$$\phi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\gamma} \end{bmatrix}$$

Se han encontrado los modos de vibración en función de  $\varepsilon = \frac{\omega_b^2}{\omega_s^2}$  y  $\gamma = \frac{m_s}{m_b + m_s}$

### 2.3 APLICACIÓN ORIENTADA AL DISEÑO

Con el propósito de ir orientando lo estudiado hacia el diseño de aisladores, pero haciendo hincapié, en que las dimensiones que se van a obtener de los aisladores tienen el carácter de preliminar, se describe a continuación una secuencia de cálculo a partir de la carga vertical que llega a un aislador para los estados de carga D y L.

- i. Se obtiene la carga total a largo plazo  $P_{LT}$  y se hallan el diámetro exterior  $D_e$  del aislador. Para esto se necesita conocer cual es el esfuerzo admisible del aislador a compresión  $\sigma_{LT}$

$$\sigma_{LT} \geq \frac{P_{LT}}{A} = \frac{D + L}{\frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2)} \quad (2.7)$$

Donde  $D, L$  son las cargas verticales que gravitan en un oscilador correspondiente a los estados de carga muerta y viva.  $D_i, D_e$  son los diámetros interior y exterior del oscilador visco elástico. El diámetro interior puede tener varios objetivos, para insertar un corazón de plomo y de esa manera aumentar la rigidez inicial del aislador y para aumentar su capacidad de disipación cuando el plomo alcanza la fluencia para deformaciones mayores, pero también se puede utilizar para controlar la rigidez de los aisladores utilizando un mismo diámetro exterior. Es necesario imponerse  $D_i$  y con la ecuación ( 2.7 ) se halla  $D_e$ . Estrictamente se halla el valor mínimo de  $D_e$  que satisface ( 2.7 ).

- ii. Una vez definidos los diámetros interiores y exterior de los aisladores circulares con un orificio hueco en el centro, falta por determinar el espesor  $H_r$ , para lo cual se utiliza la ecuación ( 2.6 ). El proyectista estructural se impone el período objetivo, que desea tenga la estructura con los aisladores  $T_D$ . Se destaca que la rigidez  $k_b$  es igual a:

$$k_b = \frac{G_a A}{H_r} \quad (2.8)$$

Donde  $G_a$  es el módulo de almacenamiento de la goma, también conocido como módulo de corte;  $A$  es el área de la goma que trabaja a corte, es el denominador de ecuación (2.7). La ecuación (2.6) se puede escribir de la forma:

$$T_D = 2\pi \sqrt{\frac{W}{k_b g}} \quad (2.9)$$

Siendo  $W$  la carga vertical que actúa sobre un oscilador calculada como la suma de la carga muerta más un porcentaje de la carga viva;  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Con las ecuaciones (2.8) y (2.9) se determina un valor preliminar de  $H_r$ .

- iii. Una vez que se tiene la geometría del aislador se determina la matriz de masas y de rigidez.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_b + m_s & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix}$$

- iv. Se encuentran los valores y vectores propios y se determinan las frecuencias de vibración. Con la primera frecuencia se verifica si el período obtenido es similar al período objetivo. Si se está de acuerdo se prosigue con el análisis, caso contrario se puede modificar alguna de las dimensiones del aislador.

## • EJEMPLO 1

Determinar las dimensiones preliminares de los aisladores de goma que se colocarían para un pórtico de un vano y un piso cuyas columnas son de 30/30 y la viga es de 25/25. En la figura 2.2 se indica la geometría respectiva de un eje estructural. La carga muerta total  $D$  y la carga viva total  $L$ , son las siguientes:  $D = 4 \text{ T.}$ ,  $L = 1.6 \text{ T.}$  Sobre cada aislador actúa la mitad de estas cargas. Se destaca que se ha indicado el ciento por ciento de la carga viva. Se desean las dimensiones para que el período objetivo sea de 2 s.

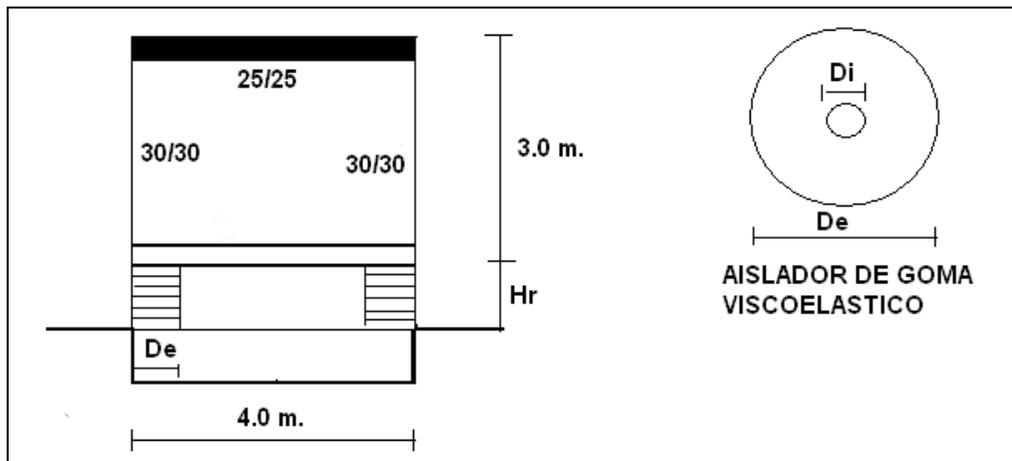


Figura 2.2 Estructura con aisladores circulares.

## • SOLUCIÓN

La carga vertical que gravita en cada oscilador es  $D = 2 T.$ ,  $L = 0.8 T.$  Luego la carga total vertical es:

$$P_{LT} = 2 + 0.8 = 2.8 T.$$

Se considera que el esfuerzo admisible a compresión del aislador, para cargas a largo plazo, es  $\sigma_{LT} = 120 \text{ Kg} / \text{cm}^2$  y se impone un diámetro interior de 10 cm. Luego:

$$\frac{2800}{\frac{\pi}{4}(D_e^2 - 10^2)} \leq 120 \quad \Rightarrow \quad D_e \geq 11.389 \text{ cm}.$$

Se desea que el diámetro exterior sea igual a la dimensión de la columna, razón por la cual se decide que  $D_e = 30 \text{ cm}$ .

El área de corte de la goma vale:

$$A = \frac{\pi}{4}(D_e^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{4}(30^2 - 10^2) = 628.3185 \text{ cm}^2$$

Se considera una goma, que tiene un módulo de corte  $G_a = 5.72 \text{ Kg} / \text{cm}^2$  (No se trata de una goma eficiente). Este módulo está asociado a una deformación de corte del 50%.

$$k_b = \frac{G_a A}{H_r} = \frac{5.72 * 628.31825}{H_r} = \frac{3593.98}{H_r}$$

Para determinar el espesor de la goma, se utiliza el período objetivo. Para ello se realiza una estimación del peso sísmico, que se considera igual a la carga muerta más el 25% de la carga viva. Se considera que la estructura es una vivienda.

$$W = 2 + 0.25 * 0.8 = 2.2 T.$$

El período objetivo es 1 s. Luego:

$$T_D = 2\pi \sqrt{\frac{W}{k_b g}} \quad \Rightarrow \quad 2 = 2\pi \sqrt{\frac{2200}{\frac{3593.98}{H_r} * 980}} \quad \Rightarrow \quad H_r = 162.21 \text{ cm}.$$

Se decide que  $H_r = 160 \text{ cm}$ . Con estos datos la rigidez del aislador es:

$$k_b = \frac{G_a A}{H_r} = \frac{5.72 * 628.31825}{160} = \frac{3593.98}{160} = 22.46 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}} = 2.246 \frac{T}{m}$$

La matriz de rigidez para el modelo con dos grados de libertad es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix}$$

Como existen dos aisladores en la estructura de la figura 2.2, se tiene  $k_b = 2 * 2.246 = 4.492 \frac{T}{m}$ . La rigidez  $k_s$  es la matriz de rigidez lateral de la estructura considerando base empotrada, que tiene un solo elemento. Se cálculo la matriz de rigidez lateral para un modulo de elasticidad del hormigón  $E = 1738965.21 \frac{T}{m^2}$ . Para el ejemplo se tiene:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4.492 & 0.0 \\ 0.0 & 756.0397 \end{bmatrix}$$

La matriz de masas se obtiene suponiendo que la masa de la base es el 10% de la masa de la superestructura y esta masa se obtiene sumando la carga muerta más el 25% de la carga viva. Para el ejemplo la matriz de masas, resulta:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.4939 & 0.4490 \\ 0.4490 & 0.4490 \end{bmatrix}$$

Con las matrices de rigidez y de masas indicadas se hallan las frecuencias y modos de vibración. Estas son:

$$\omega_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2.09 \text{ s.}$$

$$\omega_2 = 43.1427 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.1456 \text{ s.}$$

$$\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.4160 \\ -0.0077 \end{bmatrix} \quad \phi^{(2)} = \begin{bmatrix} -4.5019 \\ 4.9496 \end{bmatrix}$$

Los comentarios que se pueden realizar, en base a los últimos resultados son los siguientes:

- El período fundamental de la estructura con aisladores es 2.09 s., similar al período objetivo que era de 2.0 s.
- En la forma del primer modo se aprecia un predominio del primer valor 1.4160 con respecto al segundo valor 0.0077. Esto significa que la estructura se deforma muy poco, el desplazamiento es en los aisladores. Como los dos valores son negativos se omitió el signo ya que los modos de vibración son linealmente dependientes. Aguiar (2007).
- Las cantidades del segundo modo si son comparables, pero hay que destacar que el período asociado al segundo modo es muy bajo por lo que la estructura trabajará básicamente en el primer modo. Además el factor de participación modal es muy bajo en el segundo modo como se verá posteriormente.

Para facilitar el cálculo de un sistema de dos grados de libertad, en la forma presentada en el presente apartado se ha elaborado el programa **modos\_2gdl\_aislamiento** que se indica a continuación.

```
function[Td]=modos_2gdl_aislamiento(nombre,pesoD,pesoL)
%
% Programa para encontrar encontrar los modos de vibracion y las
% dimensiones tentativas de amortiguadores viscoelasticos. En un
% sistema de dos grados de libertad. Es un portico de un piso y un vano.
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi y Peter Dechent
%      CEINCI-ESPE
%      Agosto de 2006
%-----
% [Td]=modos_2gdl_aislamiento (nombre,pesoD,pesoL)
%-----
% Td   Periodo fundamental de estructura con aislamiento de base
% CG   Matriz de coordenadas generalizadas
% VC   Vector de colocacion
% E    Modulo de elasticidad del material
% SS   Matriz de rigidez de la estructura
% b:   base de la seccion transversal.
% h:   altura de la seccion transversal.
% long: longitud del elemento.
% nombre Archivo de datos que contiene la base, la altura y la longitud
%       de cada uno de los elementos. El nombre debe tener extension
% pesoD Carga total que actua en el portico debido a carga muerta.
% pesoL Carga total que gravita en el portico debido a carga viva,
%       porcentaje de la carga.
% Ga   Modulo de corte de la goma de almacenamiento considerando 90% de
%       eficiencia y 50% de deformacion. Ga=5.72 kg/cm2.
% eta  Factor de perdida, con 90% de eficiencia y 50% de deformacion
%       eta=0.17

%nod=input('\n Numero de nudos:');
%np=input(' Numero de pisos:');
%nr=input(' Numero de nudos restringidos:');
%E=input(' Modulo de elasticidad:');
% Coordenadas Generalizadas
nv=input('\n Ingrese el numero de aisladores :');
Ga=5.72; eta=0.17;
nod=3;np=1;nr=2;E=1738965.21;CG=zeros(nod,2);ngl=0;k=nr;
for i=1:np
    ngl=ngl+1;
    for j=1:nr
        k=k+1; CG(k,1)=ngl;
    end
end
for i=1:nod-nr
    ngl=ngl+1;k=nr+i; CG(k,2)=ngl;
end
ncol=np*nr; mbr=ncol+(nr-1)*np;nvig=mbr-ncol;ici=0;icf=nr;
for i=1:ncol
```

```

    ici=ici+1; icf=icf+1;ini(i)=ici;fin(i)=icf;
end
ii=ncol;
for j=1:np
    ici=j*nr;
    for i=1:nr-1
        ii=ii+1;ici=ici+1;ini(ii)=ici;fin(ii)=ici+1;
    end
end
% Arreglo VC. Vectores de colocacion
for i=1:mbr
    for k=1:2
        VC(i,k)= CG(ini(i),k);VC(i,k+2) = CG(fin(i),k);
    end
end
% Matriz de rigidez de miembro y de la estructura
for i=1:mbr
    B(i)=nombre(i,1);H(i)=nombre(i,2);L(i)=nombre(i,3);
end
% Calculo de la matriz de rigidez de la estructura
fprintf ('\n Calcula con: Inercias gruesas, codigo=0. Con inercias agrietadas, codigo=1');
icod=input('\n Ingrese codigo de inercias :');
SS=zeros(ngl,ngl);
for i=1:mbr
    b=B(i);h=H(i);long=L(i);iner=b*h^3/12;ei=E*iner;
    if i<=ncol
        if icod==1
            iner=0.8*iner;ei=E*iner;
        end
        k(1,1)=12*ei/long^3;k(1,2)=-6*ei/long^2;k(1,3)=-k(1,1);k(1,4)=k(1,2);
        k(2,1)=k(1,2);k(2,2)=4*ei/long;k(2,3)=-k(1,2);k(2,4)=2*ei/long;
        k(3,1)=k(1,3);k(3,2)=k(2,3);k(3,3)=k(1,1);k(3,4)=6*ei/long^2;
        k(4,1)=k(1,4);k(4,2)=k(2,4);k(4,3)=k(3,4);k(4,4)=k(2,2);
    else
        if icod==1
            iner=0.5*iner;ei=E*iner;
        end
        k=zeros(4,4);k(2,2)=4*ei/long;k(2,4)=2*ei/long;k(4,2)=k(2,4);k(4,4)=k(2,2);
    end
    for j=1:4
        jj=VC(i,j);
        if jj==0
            continue
        end
        for m=1:4
            mm=VC(i,m);
            if mm==0
                continue
            end
            SS(jj,mm)=SS(jj,mm)+k(j,m);
        end
    end
end
end
% Matriz de rigidez lateral
na=np;nb=ngl-np;

```

```

Kaa=SS(1:na,1:na);Kab=SS(1:na,na+1:ngl);Kba=Kab';Kbb=SS(na+1:ngl,na+1:ngl);
KL=Kaa-Kab*inv(Kbb)*Kba;
Di=input(' Indique el diametro interior (recomendacion 10 cm) :');
sigmaLT=input(' Indique el esfuerzo admisible a compresion de goma (120 kg/cm2): ');
pesoLmaximo=pesoL*4; pesototal=(pesoD+pesoLmaximo)*1000;
pesototal=pesototal/nv; % son nv aisladores
den=(pi/4)*sigmaLT; aux1=pesototal/den; De=sqrt(aux1+Di*Di);
fprintf(' El diametro exterior tiene que ser mayor o igual a '); De
De=input('Indique el diametro exterior en cm (mire el referencial) ');
Td=input('Indique el periodo efectivo de la estructura aislada que desea ');
pesoparasismo=(pesoD+pesoL)*1000;pesoparasismo=pesoparasismo/nv; %son nv
aisladores
aux2=(Td/(2*pi))*(Td/(2*pi)); Kh=pesoparasismo/(aux2*980);
Area=(pi/4)*(De*De-Di*Di); Hr=Ga*Area/Kh;
fprintf(' La altura de la goma es '); Hr
Hr=input('Indique la altura de la goma en cm (mire el valor referencial) ')
% Matriz de Masas. Se considera que la masa de la cimentacion es 10% de la
% masa de la superestructura.
ms=(pesoD+pesoL)/9.8; mb=0.1*ms; Mc= [mb+ms ms; ms ms];
% Matriz de rigidez
Kh=Ga*Area/Hr;Kh=Kh/10; % Para tener en T/m.
Kc=[Kh*nv 0; 0 KL];
% Valores y vectore propios
[V,D]=eig(Kc,Mc);W=sqrt(diag(D));
% Se ordenan las frecuencias y los modos de vibracion de menor a mayor
[W]=sort(W); Td=2*pi/W(1);
fprintf('Frecuencias de vibracion ');W
fprintf('Periodo fundamental ');Td
% Modos de vibracion
V
% Dibujo de los modos de vibracion
figure (1)
fi(:,1)=V(:,1);z=[0; Hr; L(1)*100+Hr];
y(1)=0; y(2)=fi(1,1); y(3)=fi(1,1)+fi(2,1);plot(y,z)
xlabel('Valor modal'); ylabel('Altura en cm '); title('Primer Modo');
figure (2)
fi(:,2)=V(:,2);y1(1)=0; y1(2)=fi(1,2); y1(3)=fi(2,2)+fi(1,2);plot(y1,z)
xlabel('Valor modal'); ylabel('Altura en cm '); title('Segundo Modo');
figure (3)
subplot (121); plot(y,z); xlabel('Valor modal'); ylabel('Altura en cm ');
title('Primer Modo');
subplot (122); plot(y1,z); xlabel('Valor modal'); ylabel('Altura en cm ');
title('Segundo Modo');
%---fin---

```

Para usar el programa, previamente se debe cargar un archivo de datos en el cual está la base, la altura y la longitud de las columnas y la viga. Luego se debe indicar el peso total debido a carga muerta y el porcentaje del peso debido a carga viva. Luego se escribe:

```
[Td]=modosaislamientodebase(nombre,pesoD,pesoL)
```

Para el ejemplo desarrollado el archivo de datos se llama casa y tiene la siguiente información:

0.30	0.30	3.00
0.30	0.30	3.00
0.25	0.25	4.00

El vector de carga muerta vale 4 T. y el vector de carga viva vale 0.4 T., es el 25% de la carga viva). Esto se ingresa por consola de la siguiente manera:

```
pesoD=[4]
pesoL=[0.4]
```

Para el caso específico se ejecuta el programa de la siguiente manera:

```
[Td]=modos_2gdl_aislamiento (casa,pesoD,pesoL)
```

Calcula con: Inercias gruesas, código=0. Con inercias agrietadas, código=1

Ingrese código de inercias :0

Indique el diametro interior (recomendación 10 cm) :10

Indique el esfuerzo admisible a compresión de goma (120 kg/cm<sup>2</sup>): 120

El diametro exterior tiene que ser mayor o igual a

De =

11.3890

Indique el diametro exterior en cm (mire el referencial) 30

Indique el periodo efectivo de la estructura aislada que desea 2

La altura de la goma es

Hr =

162.2107 cm.

Indique la altura de la goma en cm (mire el valor referencial) 160

Hr =

160

Frecuencias de vibración

W =

3.0086

136.4331

Periodo fundamental

Td =

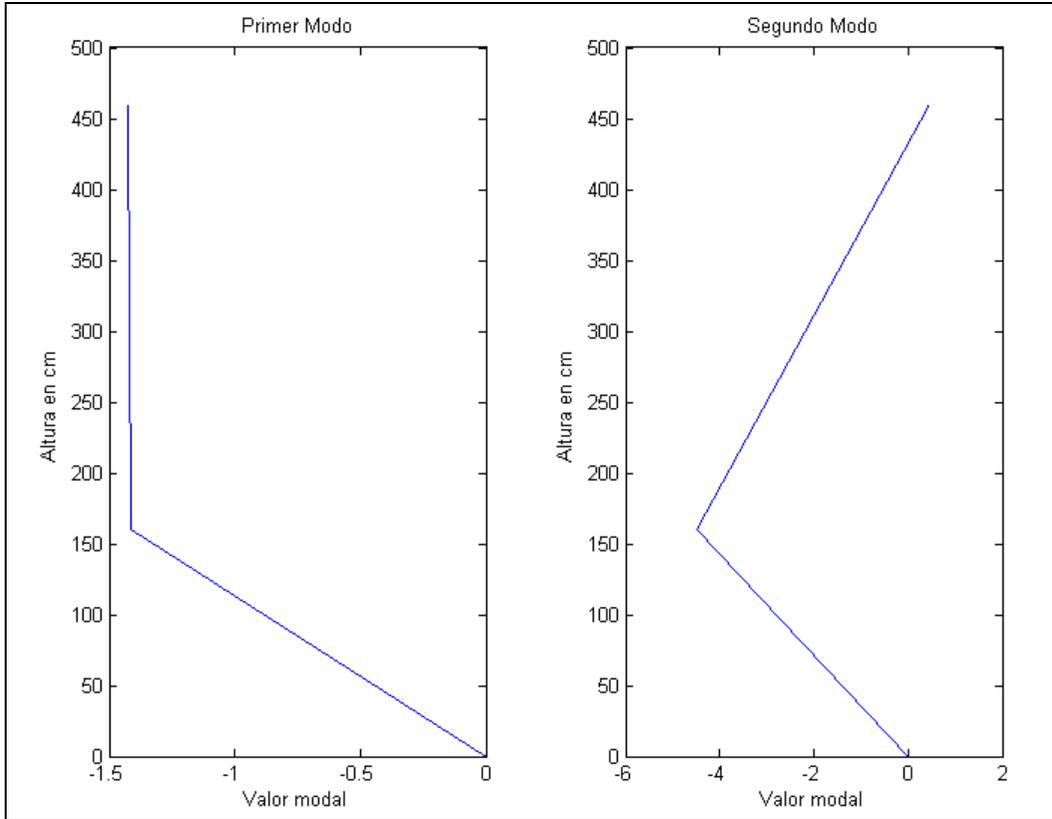
2.0884

V =

-1.4160 -4.5020

-0.0077 4.9497

El programa **modos\_2gdl\_aislamiento** presenta tres figuras, en la uno está el primer modo de vibración, en la dos el segundo modo y en la tres el primer y segundo modo de vibración. En la figura 2.3 se muestran los dos modos.



**Figura 2.3** Primer modo de vibración de estructura con aislamiento de base.

## 2.4 FACTORES DE PARTICIPACIÓN MODAL

El factor de participación modal se obtiene con la siguiente ecuación.

$$L_j = \frac{\phi^{(j)T} M J_C}{\phi^{(j)T} M \phi^{(j)}} \tag{2.10}$$

$$J_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$L_j$  es el factor de participación modal del modo j. Para encontrar el factor de participación asociado al primer modo de vibración  $\phi_1$  se tiene que el denominador de (2.10) se obtiene de la siguiente manera:

$$\phi^{(1)T} M \phi^{(1)} = [1 \quad \varepsilon] \begin{bmatrix} m_b + m_s & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = [(m_b + m_s) + \varepsilon m_s \quad m_s + \varepsilon m_s] \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\phi^{(1)T} M \phi^{(1)} = (m_b + m_s) + \varepsilon m_s + \varepsilon m_s + \varepsilon^2 m_s = (m_b + m_s) + 2 \varepsilon m_s + \varepsilon^2 m_s$$

El numerador de ( 2.10 ) para el primer modo de vibración se halla como se indica a continuación:

$$\phi^{(1)T} M J_C = [1 \quad \varepsilon] \begin{bmatrix} m_b + m_s & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [(m_b + m_s) + \varepsilon m_s \quad m_s + \varepsilon m_s] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi^{(1)T} M J_C = (m_b + m_s) + \varepsilon m_s$$

Luego el factor de participación modal del primer modo, vale:

$$L_1 = \frac{\phi^{(1)T} M J_C}{\phi^{(1)T} M \phi^{(1)}} = \frac{(m_b + m_s) + \varepsilon m_s}{(m_b + m_s) + 2 \varepsilon m_s + m_s \varepsilon^2}$$

Al dividir el numerador y denominador de  $L_1$  por  $m_b + m_s$  se tiene:

$$L_1 = \frac{1 + \gamma \varepsilon}{1 + 2 \gamma \varepsilon + \gamma \varepsilon^2} \approx \frac{1 + \gamma \varepsilon}{1 + 2 \gamma \varepsilon}$$

Se puede demostrar que el factor de participación del primer modo es aproximadamente igual a:

$$L_1 = 1 - \gamma \varepsilon \quad (2.11)$$

Para el segundo modo se procede en forma similar (Dechent 2006) y se halla que:

$$L_2 = \gamma \varepsilon \quad (2.12)$$

## 2.5 FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO

Al desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan los problemas de dinámica de estructuras y considerando la ortogonalidad de los modos con respecto a la matriz de amortiguamiento se halla lo siguiente para el primer modo de vibración:

$$2 \omega_1 \xi_1 = \frac{\phi^{(1)T} C \phi^{(1)}}{\phi^{(1)T} M \phi^{(1)}}$$

Donde  $\omega_1$  es la frecuencia natural de vibración del primer modo,  $\xi_1$  es el factor de amortiguamiento del primer modo. En el apartado anterior se acaba de demostrar que:

$$\phi^{(1)T} M \phi^{(1)} \approx (m_b + m_s) + 2 \varepsilon m_s$$

Para el numerador se tiene:

$$\phi^{(1)T} C \phi^{(1)} = [1 \quad \varepsilon] \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = [c_b + \varepsilon^2 c_s] \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = c_b + \varepsilon^2 c_s$$

$$2 \omega_1 \xi_1 = \frac{c_b + \varepsilon^2 c_s}{(m_b + m_s) + 2 \varepsilon m_s}$$

Pero:

$$c_b = 2(m_b + m_s) \omega_b \xi_b$$

$$c_s = 2 m_s \omega_s \xi_s$$

Donde  $\xi_b$ ,  $\omega_b$  son el factor de amortiguamiento y la frecuencia de vibración del sistema de aislamiento. Al reemplazar se tiene:

$$2 \omega_1 \xi_1 = \frac{2(m_b + m_s) \omega_b \xi_b + \varepsilon^2 2 m_s \omega_s \xi_s}{(m_b + m_s) + 2 \varepsilon m_s}$$

Al dividir numerador y denominador por  $(m_b + m_s) (1 - 2\varepsilon\gamma)$  se tiene:

$$2 \omega_1 \xi_1 = \frac{2 \omega_b \xi_b + \varepsilon^2 2 \gamma \omega_s \xi_s}{1 + 2 \varepsilon \gamma} \frac{1 - 2\varepsilon\gamma}{1 - 2\varepsilon\gamma}$$

$$2 \omega_1 \xi_1 = \frac{2 \omega_b \xi_b (1 - 2\varepsilon\gamma) + \varepsilon^2 2 \gamma \omega_s \xi_s (1 - 2\varepsilon\gamma)}{1 - 4 \varepsilon^2 \gamma^2}$$

Al despreciar los términos en  $\varepsilon^2$  se tiene:

$$2 \omega_1 \xi_1 = 2 \omega_b \xi_b (1 - 2\varepsilon\gamma)$$

Al reemplazar el valor de  $\omega_1 = \omega_b \sqrt{1 - \gamma\varepsilon}$  y despejando  $\xi_1$  se tiene:

$$\xi_1 = \frac{\omega_b \xi_b (1 - 2\varepsilon\gamma)}{\omega_b \sqrt{1 - \gamma\varepsilon}} = \frac{\xi_b (1 - 2\varepsilon\gamma) \sqrt{1 - \gamma\varepsilon}}{\sqrt{1 - \gamma\varepsilon} \sqrt{1 - \gamma\varepsilon}} = \frac{\xi_b (1 - 2\varepsilon\gamma) \left(1 - \frac{1}{2} \gamma\varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \gamma^2 \dots\right)}{1 - \gamma\varepsilon}$$

Despreciando nuevamente los términos en  $\varepsilon^2$  se obtiene:

$$\xi_1 = \frac{\xi_b \left(1 - \frac{5}{2} \varepsilon\gamma\right)}{1 - \gamma\varepsilon}$$

Al multiplicar numerador y denominador por  $1 + \gamma\varepsilon$  se encuentra:

$$\xi_1 = \frac{\xi_b \left(1 - \frac{5}{2} \varepsilon\gamma\right)}{1 - \gamma\varepsilon} \frac{1 + \gamma\varepsilon}{1 + \gamma\varepsilon} = \frac{\xi_b \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon\gamma - \frac{5}{2} \varepsilon^2 \gamma^2\right)}{1 - \gamma^2 \varepsilon^2}$$

Despreciando los términos de  $\varepsilon^2$

$$\xi_1 \approx \xi_b \left( 1 - \frac{3}{2} \varepsilon \gamma \right) \approx \xi_b \quad (2.13)$$

Procediendo en forma similar se halla el factor de amortiguamiento asociado al segundo modo  $\xi_2$ . Dechent (2006)

$$\xi_2 \approx \frac{\sqrt{\varepsilon} \xi_b \gamma + \xi_s}{\sqrt{1-\gamma}} \left( 1 - \frac{\gamma \varepsilon}{2} \right) \approx \frac{\sqrt{\varepsilon} \xi_b \gamma + \xi_s}{\sqrt{1-\gamma}} \quad (2.14)$$

## 2.6 DESACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

La ecuación diferencial del movimiento para un sistema de dos grados de libertad con aislamiento de base, es acoplada debido a que la matriz de masas no es diagonal. Para facilitar su solución se desacopla esta ecuación. Para recordar el problema, nuevamente se escribe esta ecuación:

$$M \ddot{D}_C + C \dot{D}_C + K D_C = -M J_C a(t)$$

Para el desacoplamiento se plantea el siguiente cambio de variable:

$$D_C = \Phi y(t)$$

Donde  $\Phi$  es la matriz modal cuyas columnas son los modos de vibración. Para el sistema de dos grados de libertad que se analiza se tiene:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & \phi^{(2)} \end{bmatrix}$$

En las nuevas coordenadas, y luego de algún trabajo algebraico, el sistema de ecuaciones diferenciales queda:

$$M^* \ddot{y} + C^* \dot{y} + K^* y = Q^*$$

Siendo:

$$M^* = \Phi^T M \Phi \quad C^* = \Phi^T C \Phi \quad K^* = \Phi^T K \Phi \quad Q^* = \Phi^T Q$$

Donde  $M^*$ ,  $C^*$ ,  $K^*$  son matrices diagonales, para esto se considera que los modos son ortogonales y que el amortiguamiento del sistema es bajo. Al ser diagonales las matrices  $M^*$ ,  $C^*$ ,  $K^*$  se tiene:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)T} M \phi^{(1)} \ddot{y}_1(t) + \phi^{(1)T} C \phi^{(1)} \dot{y}_1(t) + \phi^{(1)T} K \phi^{(1)} y_1(t) &= -\phi^{(1)T} M J a(t) \\ \phi^{(2)T} M \phi^{(2)} \ddot{y}_2(t) + \phi^{(2)T} C \phi^{(2)} \dot{y}_2(t) + \phi^{(2)T} K \phi^{(2)} y_2(t) &= -\phi^{(2)T} M J a(t) \end{aligned}$$

Al dividir la primera ecuación para  $\phi^{(1)T} M \phi^{(1)}$  y la segunda para  $\phi^{(2)T} M \phi^{(2)}$  se obtiene:

$$\ddot{y}_1(t) + \frac{\phi^{(1)T} C \phi^{(1)}}{\phi^{(1)T} M \phi^{(1)}} \dot{y}_1(t) + \frac{\phi^{(1)T} K \phi^{(1)}}{\phi^{(1)T} M \phi^{(1)}} y_1(t) = -L_1 a(t)$$

$$\ddot{y}_2(t) + \frac{\phi^{(2)T} C \phi^{(2)}}{\phi^{(2)T} M \phi^{(2)}} \dot{y}_2(t) + \frac{\phi^{(2)T} K \phi^{(2)}}{\phi^{(2)T} M \phi^{(2)}} y_2(t) = -L_2 a(t)$$

Siendo  $L_1$  y  $L_2$  los factores de participación modal. Por otra parte se tiene:

$$2 \omega_1 \xi_1 = \frac{\phi^{(1)T} C \phi^{(1)}}{\phi^{(1)T} M \phi^{(1)}} \quad 2 \omega_2 \xi_2 = \frac{\phi^{(2)T} C \phi^{(2)}}{\phi^{(2)T} M \phi^{(2)}}$$

$$\omega_1^2 = \frac{\phi^{(1)T} K \phi^{(1)}}{\phi^{(1)T} M \phi^{(1)}} \quad \omega_2^2 = \frac{\phi^{(2)T} K \phi^{(2)}}{\phi^{(2)T} M \phi^{(2)}}$$

Con lo que las ecuaciones diferenciales desacopladas, quedan:

$$\ddot{y}_1(t) + 2 \omega_1 \xi_1 \dot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = -L_1 a(t) \quad (2.15)$$

$$\ddot{y}_2(t) + 2 \omega_2 \xi_2 \dot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) = -L_2 a(t) \quad (2.16)$$

Una vez que se conoce  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  que son las respuestas en cada modo de vibración, para encontrar las respuestas del sistema se aplica un criterio de combinación modal.

## 2.7 RESPUESTA ANTE MOVIMIENTO ARMÓNICO DEL SUELO

Interesa conocer los factores de amplificación dinámica de una estructura con aisladores ante movimientos armónicos del suelo. Para ello se encontrará primero la respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad ante una fuerza armónica y luego se encuentra por analogía la respuesta de la estructura con aisladores.

### 2.7.1 Sistema de un grado de libertad con base empotrada

Se desea hallar la respuesta de una estructura de un piso con base empotrada, la misma que se modela como un sistema de un grado de libertad ante una fuerza armónica definida por  $F_o \text{ sen} \Omega t$ . Donde  $F_o$  es la amplitud de la fuerza armónica y  $\Omega$  es la frecuencia de la excitación. La ecuación diferencial del movimiento es:

$$m \ddot{q} + c \dot{q} + k q = F_o \text{ sen} \Omega t \quad (2.17)$$

Se denomina con la letra  $q$  al desplazamiento con base empotrada, para no confundir con las variables  $d_1$  y  $d_b$ , ya que ahora se tiene un sistema de un grado de libertad con base fija. Con esta aclaración, la solución del problema  $q(t)$  es igual a la solución homogénea más la solución particular. Aguiar (2007)

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t)$$

La solución homogénea  $q_h(t)$  se halla igualando a cero la ecuación diferencial, pero esta desaparece en los primeros instantes del tiempo por lo que normalmente se la ignora y el sistema trabaja en la solución particular  $q_p(t)$ , la misma que se presenta a continuación:

$$m\ddot{q}_p + c\dot{q}_p + kq_p = F_o \text{ sen}\Omega t$$

Sea la solución particular de la forma:

$$q_p = A \text{ sen}\Omega t + B \text{ cos}\Omega t$$

Donde  $A, B$  son constantes de integración que se determinan en base a la ecuación diferencial. Las derivadas de  $q_p$  con respecto al tiempo, son:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= A \Omega \text{ cos}\Omega t - B \Omega \text{ sen}\Omega t \\ \ddot{q} &= -A \Omega^2 \text{ sen}\Omega t - B \Omega^2 \text{ cos}\Omega t\end{aligned}$$

Al reemplazar en ecuación diferencial y agrupando términos se tiene:

$$\left(-m\Omega^2 A - B c \Omega + k A\right) \text{ sen}\Omega t + \left(-B m \Omega^2 + A c \Omega + k B\right) \text{ cos}\Omega t = F_o \text{ sen}\Omega t$$

Al igualar coeficientes se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned}(k - m\Omega^2)A - c\Omega B &= F_o \\ c\Omega A + (k - m\Omega^2)B &= 0\end{aligned}$$

La solución del sistema reporta:

$$A = \frac{F_o (k - m\Omega^2)}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} \quad B = -\frac{c \Omega F_o}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}$$

La suma de dos armónicos es otro armónico por lo que la solución se la presenta generalmente de la forma:

$$q_p = q = \frac{F_o}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c \Omega)^2}} \text{ sen}(\Omega t + \gamma)$$

Siendo  $\gamma$  el ángulo de fase, el cual se encuentra de la expresión siguiente:

$$\gamma = \text{tg}^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{c \Omega}{k - m \Omega^2}\right)$$

La respuesta máxima del sistema  $q$  es el factor que multiplica a la función armónica. Luego:

$$q = \frac{F_o}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

Si se divide numerador y denominador para  $m$  y teniendo en cuenta que la frecuencia natural del sistema  $\omega = k/m$  y que  $c/m = 2\xi\omega$ . Se tiene:

$$q = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2}}$$

Pero  $F_o/m$  se puede representar como el desplazamiento estático, multiplicado por la frecuencia natural de la excitación,  $q_o\omega$  para un grado de libertad. Con lo que se halla que la respuesta máxima para la excitación armónica vale:

$$q = \frac{q_o\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\Omega^2}} \quad (2.18)$$

## 2.7.2 Amplificación en sistema con aislamiento de base

Se define el desplazamiento del suelo de la siguiente manera:

$$d(t) = d_{\max} \text{sen}(\Omega t)$$

Donde  $d_{\max}$  es el desplazamiento máximo del terreno y  $\omega$  la frecuencia de la excitación armónica de movimiento del suelo. Al derivar dos veces esta expresión se tiene:

$$a(t) = -d_{\max} \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$$

Al reemplazar  $a(t)$  en ( 2.15 ) y ( 2.16 ) se tienen las ecuaciones a partir de las cuales se hallan los desplazamientos en el sistema con aisladores, pero se recuerda que después se debe aplicar un criterio de combinación modal

$$\ddot{y}_1(t) + 2\omega_1\xi_1\dot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = L_1 d_{\max} \Omega^2 \text{sen}(\Omega t) \quad (2.19)$$

$$\ddot{y}_2(t) + 2\omega_2\xi_2\dot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) = L_2 d_{\max} \Omega^2 \text{sen}(\Omega t) \quad (2.20)$$

Para que las ecuaciones ( 2.19 ) y ( 2.20 ) sean de la forma de la ecuación ( 2.17 ), se debe reemplazar el coeficiente de la velocidad y el desplazamiento en función de la rigidez, la masa y el amortiguamiento. Al realizar esto, se halla que el término de la derecha está multiplicado por la masa. Con esta indicación la respuesta máxima se halla por analogía con la ecuación (2.18) encontrando:

$$y_{1\max} = \frac{L_1 d_{\max} \Omega^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \Omega^2}}$$

$$y_{2\max} = \frac{L_2 d_{\max} \Omega^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_2^2 \omega_2^2 \Omega^2}}$$

Las respuestas en las coordenadas  $D_C$  se hallan utilizando el criterio del valor máximo probable, con la siguiente expresión:

$$D_C = \sqrt{(\phi^{(1)} y_{1\max})^2 + (\phi^{(2)} y_{2\max})^2}$$

Los modos de vibración, valen:

$$\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad \phi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\gamma} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} d_{b\max} \\ d_{1\max} \end{bmatrix} = \sqrt{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \frac{L_1 d_{\max} \Omega^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \Omega^2}} \right\}^2 + \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \frac{L_2 d_{\max} \Omega^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_2^2 \omega_2^2 \Omega^2}} \right\}^2}$$

De donde:

$$d_{b\max} = d_{\max} \sqrt{\frac{L_1^2 \Omega^4}{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \Omega^2} + \frac{L_2^2 \Omega^4}{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_2^2 \omega_2^2 \Omega^2}} \quad (2.21)$$

$$d_{1\max} = d_{\max} \sqrt{\frac{\varepsilon^2 L_1^2 \Omega^4}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \Omega^2}} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{L_2^2 \Omega^4}{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_2^2 \omega_2^2 \Omega^2}} \quad (2.22)$$

### 2.7.3 Factores de amplificación con aislamiento de base

Sean  $A_b$  y  $A_s$  los factores de amplificación del desplazamiento del aislador y del primer piso, respectivamente, con relación al desplazamiento máximo del suelo  $d_{\max}$ . Kelly (1993), Molinares y Barbat (1994). Definidos por:

$$A_b = \frac{d_{b\max}}{d_{\max}}$$

$$A_s = \frac{d_{1\max}}{d_{\max}}$$

Al reemplazar ( 2.21 ) y ( 2.22 ) se halla:

$$A_b = \sqrt{\frac{L_1^2 \Omega^4}{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \Omega^2} + \frac{L_2^2 \Omega^4}{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_2^2 \omega_2^2 \Omega^2}}$$

$$A_s = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 L_1^2 \Omega^4}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \Omega^2}} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{L_2^2 \Omega^4}{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_2^2 \omega_2^2 \Omega^2}}$$

Al sustituir los factores de participación modal, aproximados:  $L_1 = 1 - \gamma \varepsilon$ ;  $L_2 = \gamma \varepsilon$  se halla:

$$A_b = \sqrt{\frac{(1 - \gamma \varepsilon)^2 \Omega^4}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \Omega^2}} + \frac{\gamma^2 \varepsilon^2 \Omega^4}{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_2^2 \omega_2^2 \Omega^2}}$$

$$A_s = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 (1 - \gamma \varepsilon)^2 \Omega^4}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \Omega^2}} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^4}{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_2^2 \omega_2^2 \Omega^2}}$$

Ahora, al sustituir las expresiones aproximadas de  $\omega_1 = \omega_b$  y  $\omega_2 = \frac{\omega_s}{\sqrt{1 - \gamma}}$  se tiene:

$$A_b = \sqrt{\frac{(1 - \gamma \varepsilon)^2 \Omega^4}{\sqrt{(\omega_b^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_b^2 \Omega^2}} + \frac{\gamma^2 \varepsilon^2 \Omega^4}{\left(\frac{\omega_s^2}{1 - \gamma} - \Omega^2\right)^2 + 4\xi_2^2 \frac{\omega_s^2}{1 - \gamma} \Omega^2}}$$

$$A_s = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 (1 - \gamma \varepsilon)^2 \Omega^4}{\sqrt{(\omega_b^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_1^2 \omega_b^2 \Omega^2}} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^4}{\left(\frac{\omega_s^2}{1 - \gamma} - \Omega^2\right)^2 + 4\xi_2^2 \frac{\omega_s^2}{1 - \gamma} \Omega^2}}$$

Recordando:

$$\varepsilon = \frac{\omega_b^2}{\omega_s^2} \Rightarrow \omega_b^2 = \varepsilon \omega_s^2$$

Se define por medio de la variable  $r$  a la relación entre la frecuencia de la excitación  $\Omega$  y la frecuencia de la estructura con base empotrada  $\omega_s$ .

$$r = \frac{\Omega}{\omega_s} \Rightarrow \Omega = r \omega_s$$

$$A_b = \sqrt{\frac{(1 - \gamma \varepsilon)^2 r^4 \omega_s^4}{\left(\varepsilon \omega_s^2 - r^2 \omega_s^2\right)^2 + 4\xi_1^2 \varepsilon \omega_s^2 r^2 \omega_s^2}} + \frac{\gamma^2 \varepsilon^2 r^4 \omega_s^4}{\left(\frac{\omega_s^2}{1 - \gamma} - r^2 \omega_s^2\right)^2 + 4\xi_2^2 \frac{\omega_s^2}{1 - \gamma} r^2 \omega_s^2}}$$

Luego:

$$A_b = \sqrt{\frac{(1-\gamma\epsilon)^2 r^4}{(\epsilon-r^2)^2 + 4\xi_1^2 \epsilon r^2} + \frac{\gamma^2 \epsilon^2 r^4}{\left(\frac{1}{1-\gamma} - r^2\right)^2 + 4\xi_2^2 \frac{1}{1-\gamma} r^2}} \quad (2.23)$$

Por otra parte:

$$A_s = \sqrt{\frac{\epsilon^2 (1-\gamma\epsilon)^2 r^4 \omega_s^4}{\sqrt{(\epsilon\omega_s^2 - r^2\omega_s^2)^2 + 4\xi_1^2 \epsilon \omega_s^4 r^2}} + \frac{\epsilon^2 r^4 \omega_s^4}{\left(\frac{\omega_s^2}{1-\gamma} - r^2\omega_s^2\right)^2 + 4\xi_2^2 \frac{\omega_s^2}{1-\gamma} r^2 \omega_s^2}}$$

Finalmente:

$$A_s = \sqrt{\frac{\epsilon^2 (1-\gamma\epsilon)^2 r^4}{\sqrt{(\epsilon-r^2)^2 + 4\xi_1^2 \epsilon r^2}} + \frac{\epsilon^2 r^4}{\left(\frac{1}{1-\gamma} - r^2\right)^2 + 4\xi_2^2 \frac{1}{1-\gamma} r^2}} \quad (2.24)$$

### 2.6.3 Programa abkelly

El programa denominado **abkelly** que se lista a continuación sirve para encontrar los factores de amplificación  $A_b$  y  $A_s$ , definidos en las ecuaciones ( 2.23 ) y ( 2.24 ).

```
function [r]=abkelly(gama,epsi,sedab,sedas)
%
% Factor de amplificación del desplazamiento en estructuras con
% aislamiento de base, modeladas como un sistema de 2gdl.
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi y Peter Dechent
%       ESPE y U. de Concepción
%       Agosto de 2006
%-----
% [r]=abkelly(gama,epsi,sedab,sedas)
%-----
% gama = ms/(ms+mb)
% epsi = wb^2/ws^2
% sedab: factor de amortiguamiento del aislamiento de base
% sedas: factor de amortiguamiento de la estructura
% ms : masa de la estructura
% mb : masa del aislamiento de base
% wb : frecuencia natural del aislamiento de base
% ws : frecuencia natural de la estructura
% r = w/ws
% w : frecuencia natural de la excitación
%
% ab : Factor de amplificación del desplazamiento horizontal del
% aislador con respecto al desplazamiento máximo del suelo.
% as : Factor de amplificación del desplazamiento horizontal de piso con
% respecto al desplazamiento máximo del suelo.
%
aux1=1-gama;aux2=gama^2*epsi^2;aux3=sqrt(epsi)*sedab*gama+sedas;
```

```

seda1=sedab*(1-1.5*gama*epsi);
aux4=sedas/sqrt(aux1); aux5=gama*sedab*sqrt(epsi)/sqrt(aux1);
aux7=1-0.5*gama*epsi; seda2=(aux4+aux5)*aux7;
aux6=4*seda2^2/aux1;aux8=1/aux1;aux9=4*seda1^2*epsi;aux10=1-gama*epsi;
dx=0.01;
for i=1:300
    r=dx*i;x(i)=r;
    den1=(epsi-r^2)^2+(4*seda1^2*r^2*epsi);
    den2=((1/aux1)-r^2)^2+(aux6*r^2);
    ab(i)=sqrt((r^4*aux10^2/den1)+(aux2*r^4/den2));
    as(i)=sqrt((aux10^2*epsi^2*r^4)/den1+(epsi^2*r^4/den2));
end
hold on
plot (x,ab)
plot (x,as,':')
% fin

```

Los datos de entrada y forma de uso del programa son:

```
>> [r]=abkelly(gama,epsi,sedab,sedas)
```

- **gama**  $\gamma = \frac{m_s}{m_b + m_s}$
- **epsi**  $\varepsilon = \frac{W_b^2}{W_s^2}$
- **sedab**  $\xi_b$
- **sedas**  $\xi_s$

## • EJEMPLO 2

Utilizando el programa abkelly encontrar las curvas de variación de los factores de amplificación  $A_b$  y  $A_s$ , para los siguientes datos:  $\gamma = 0.40$ ,  $\varepsilon = 0.035$ ,  $\xi_b = 0.06$ ,  $\xi_s = 0.05$ .

## • SOLUCIÓN

Las gráficas que se piden, se encuentran en el libro *Earthquake-Resistant Design with Rubber*, Kelly (1993).

```
>> [r]=abkelly(0.40,0.035,0.06,0.05)
```

En la figura 2.4 se presentan las curvas solicitadas, ahora es importante hacer los siguientes comentarios:

- Para una relación de frecuencias  $r = 0.25$  el desplazamiento lateral del aislador se amplifica notablemente. Para los restantes rangos el desplazamiento lateral del aislador es igual al desplazamiento máximo del terreno.

- El primer piso se mueve muy poco para todos los rangos de frecuencias. Únicamente hay dos picos en  $r = 0.20$  y en  $r = 1.25$  pero el factor de amplificación es muy bajo.

El objetivo principal de este apartado era mostrar que ante ciertas relaciones de frecuencias existe amplificación de los desplazamientos laterales de la estructura. Por este motivo se debe tener cuidado en el diseño de estructuras con aislamiento de base, el contenido de frecuencias del sismo, si es de alta frecuencia o de baja frecuencia. Esta información se debe correlacionar con la frecuencia de vibración de la estructura.

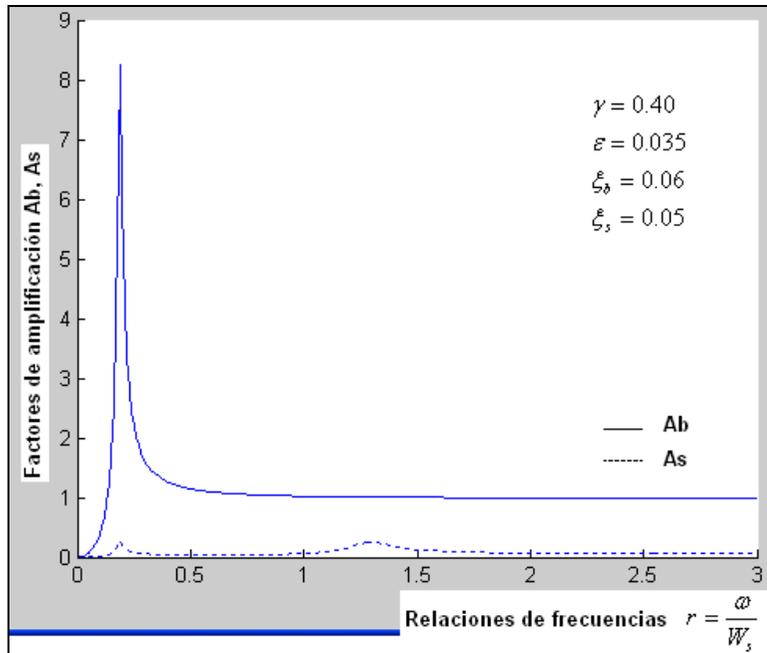


Figura 2.4 Factores de amplificación del aislador y del movimiento horizontal.

## 2.8 PROCEDIMIENTO DE ESPACIO DE ESTADO

Uno de los métodos numéricos más utilizados para encontrar la respuesta dinámica de estructuras ante acciones sísmicas es el denominado **Procedimiento de Espacio de Estado**, PEE. debido a que es un método estable ya que para  $t = t_0$  se conocen las variables conjuntamente con el conocimiento de la entrada para  $t \geq t_0$  con esto se halla completamente la respuesta del sistema para  $t \geq t_0$ . A continuación se presenta el PEE, en forma general y al final se aplica al caso del modelo de 2 gdl.

Al multiplicar por  $M^{-1}$  a los dos lados de la ecuación (2.1) se halla:

$$\ddot{D}_c + M^{-1} C \dot{D}_c + M^{-1} K D_c = -J_c a(t)$$

Como artificio numérico de cálculo se introduce la siguiente ecuación:

$$\dot{D}_c - \dot{D}_c = 0$$

Se define:

$$Y = \begin{bmatrix} D_c \\ \dot{D}_c \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{D}_c \\ \ddot{D}_c \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Con esta notación, las dos ecuaciones, quedan:

$$\dot{Y} = F Y + B a(t) \quad (2.26)$$

Donde:

$$F = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -J_c \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

La solución del sistema en Procedimiento de Espacio de Estado, resulta:

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= A Y_k + B_D a_k \\ B_D &= F^{-1} [(A - I) B] \Rightarrow F B_D = (A - I) B \\ A &= \exp(F dT) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Donde  $k$  representa un punto discreto y  $a_k$  es la aceleración en el punto discreto  $k$ .

Para el modelo de 2 gdl., que se está analizando  $J_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

### • EJEMPLO 3

En un sistema de 2 gdl., como el definido en la figura 2.1, va a ser sometido a la componente E-W del sismo de El Centro de (1940). Los datos del sistema son:  $m_b = 0.1 \text{ T s}^2 / \text{cm}$ ;  $m_s = 1 \text{ T s}^2 / \text{cm}$ ;  $\xi_b = 0.15$ ,  $\xi_s = 0.05$  y el período objetivo es 2.0 s. Se pide:

- i. Construir un espectro de respuesta elástico para los desplazamientos pero empleando el modelo de 2 gdl., en el sistema con base empotrada. Por lo tanto se pide el espectro de la superestructura.
- ii. Construir un espectro de respuesta para la superestructura pero con aisladores de base que tengan el período objetivo  $T_b = 2 \text{ s}$ .
- iii. Encontrar un espectro que relacione el desplazamiento espectral de la superestructura con base fija con el desplazamiento espectral de la superestructura con base aislada.
- iv. Encontrar un espectro para el sistema de aislación para  $T_b = 2 \text{ s}$ .

## • SOLUCIÓN

Para encontrar el espectro de la superestructura con base empotrada, utilizando el modelo de 2 gdl., se debe considerar un período bastante bajo para el sistema de aislación, se utilizó  $T_b = 0.0001 s$

En la partición work de MATLAB se tiene un archivo .mat que se ha denominado reg\_centro que contiene dT y las tres componentes del sismo de El Centro; dT es el incremento de tiempo de los registros de aceleraciones. La primera componente corresponde al registro en sentido X (E-W) la segunda al registro en sentido Y (N-S) y la tercera a la componente vertical. Cada componente se encuentra en un arreglo fila (1 x n) siendo n el número de datos del registro. La componente en sentido X, se denomina ux; la de sentido Y, se llama uy; y de sentido Z, se denomina uz.

```
%
% Ejemplo 3
% Por: Roberto Aguiar
% Octubre de 2008
%-----
% Datos
alfa=10; Tb=2.0; sedab=0.15; sedas=0.05; mb=0.1; ms=alfa*mb;
load rec_centro
T=[0.05:dT:3]'; np=length(T);
%-----
% Matriz de masa en funcion de alfa
M=[mb+ms ms; ms ms]; m=[alfa+1;alfa];mt=mb+ms;
%-----
fprintf ('Tenga paciencia esta procesando');
% Analisis con base empotrada
Tb=0.00001 % Es unicamente para hallar con base empotrada
for i=1:np % Espectro para base empotrada
    TT=T(i);wb=2*pi/Tb; ws=2*pi/TT; kb=wb*wb*mt; ks=ws*ws*ms;
    C=[2*sedab*mt*wb 0; 0 2*sedas*ms*ws];
    K=[kb 0; 0 ks];
    F=[zeros(2,2) eye(2,2); -inv(M)*K -inv(M)*C];
    B=[0; 0; -1; 0]; A=expm(F*dT); Bd=F\((A-eye(4))*B; Y=zeros(4,1);
    for j=1:length(ux)-1;
        Y(:,j+1)=A*Y(:,j)+Bd*ux(1,j);
    end
    sdsbf(i,1)=max(abs(Y(2,:))); % Desplazamiento de superestructura
                                % con base fija
end
%-----
% Analisis con base aislada
Tb=2.5;M=[mb+ms ms; ms ms]; m=[alfa+1;alfa]
for i=1:np % Espectro para base aislada
    TT=T(i);wb=2*pi/Tb; ws=2*pi/TT; kb=wb*wb*mt; ks=ws*ws*ms;
    C=[2*sedab*mt*wb 0; 0 2*sedas*ms*ws];
    K=[kb 0; 0 ks];
    F=[zeros(2,2) eye(2,2); -inv(M)*K -inv(M)*C];
    B=[0; 0; -1; 0]; A=expm(F*dT);Bd=F\((A-eye(4))*B; Y=zeros(4,1);
    for j=1:length(ux)-1;
        Y(:,j+1)=A*Y(:,j)+Bd*ux(1,j);
    end
end
```

```

end
sds(i,1)=max(abs(Y(2,:))); % Desplazamiento de superestructura
sdb(i,1)=max(abs(Y(1,:))); % Desplazamiento de aislamiento
end

%-----
% Reduccion de los desplazamientos
%      rd= xs/xsbf
%
for i=1:size(sdb)
    rd(i,1)=sdsbf(i,1)/sds(i,1);
end
%-----
% Graficas
figure (1)
subplot (221); plot(T,sdsbf); grid
subplot (222); plot(T,sds); grid
subplot (223); plot(T,rd);grid
subplot (224); plot(T,sdb); grid
    
```

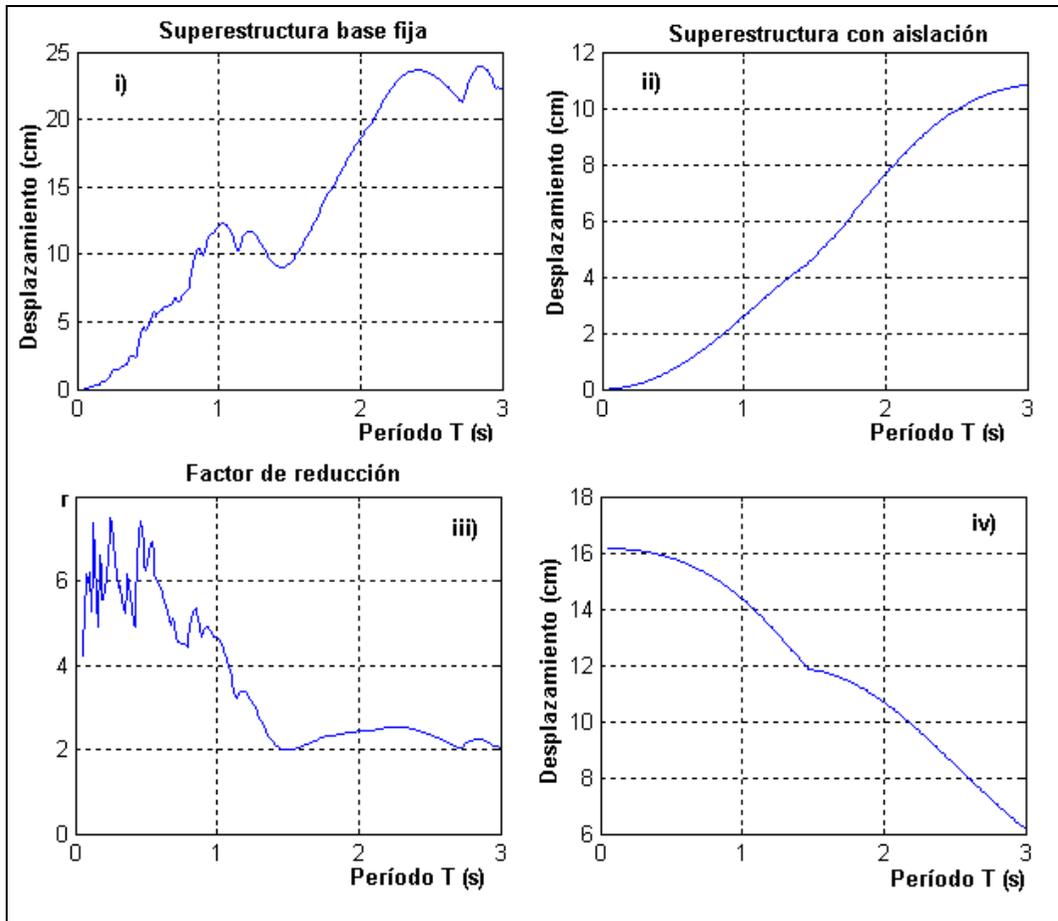


Figura 2.5 Respuesta a ejemplo 3.

En la gráfica superior izquierda de 2.5 se muestra el espectro de desplazamientos de la superestructura con base empotrada para  $\xi_s = 0.05$ . En la parte superior derecha se tiene el espectro de desplazamientos de la superestructura pero sobre aisladores. Evidentemente los desplazamientos laterales de esta gráfica son menores a los de la izquierda.

En la parte inferior izquierda se aprecia la relación entre los desplazamientos máximos en la superestructura con base fija con relación a esos mismos desplazamientos pero en la estructura con base aislada. Los mayores valores de  $r$  corresponden a las estructuras en las cuales es óptimo trabajar con aisladores. Se aprecia que las que tienen períodos bajos, menores a 0.5 s., se tiene una gran reducción en la respuesta del desplazamiento lateral con relación a las estructuras que tienen períodos altos. Hasta estructuras con períodos menores a 1 s., se tiene una gran reducción de la respuesta con aisladores de base para estructuras con períodos mayores existe reducción en los desplazamientos pero no es mayor.

Finalmente, en el gráfico inferior derecho se aprecia el desplazamiento lateral del sistema de aislación para estructuras con diferentes períodos. Se aprecia que en la medida que aumenta el período de las estructuras con base fija los aisladores no son tan efectivos ya que se desplazan muy poco.

**Por lo tanto, en estructuras que son muy flexibles no es adecuado colocar aisladores de base. En este caso se debe pensar en la colocación de disipadores de energía para que la estructura tenga mayor rigidez, resistencia y amortiguamiento, dependiendo del tipo de disipador que se utilice.**

## REFERENCIAS

1. Aguiar R., (2007), *Dinámica de Estructuras con MATLAB*, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 292 p., Quito, Ecuador.
2. Dechent P., (2006), *Conceptos básicos de aislación sísmica basal, métodos de análisis, consideraciones de diseño y aplicaciones*, Universidad de Concepción, 175 p., Concepción, Chile.
3. Kelly J., (1993), *Earthquake-Resistant Design with Rubber*, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 134 p. California, USA.
4. Molinares N., y Barbat A., (1994), *Edificios con aislamiento de base no lineal*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, **Monografía CIMNE IS-5**, 97 p., Barcelona España.

## CAPÍTULO 3

### ANÁLISIS PLANO DE ESTRUCTURAS CON AISLADORES ELASTOMÉRICOS

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

Como se indicó en el capítulo 1, los aisladores elastoméricos, que se están estudiando, están compuestos por una serie de láminas de goma intercaladas con láminas de acero a manera de un sandwich, como se aprecia en la figura 3.1. En la parte superior e inferior del aislador se colocan placas de anclaje las mismas que van conectadas a la superestructura (la superior) y a la cimentación (la inferior) por medio de pernos de anclaje.



Figura 3.1 Detalle de un aislador elastomérico.

Durante su construcción, las láminas de goma se intercalan con las láminas de acero, dentro de un molde de acero que tiene la forma final del aislador y luego se le aplica presión a una temperatura muy alta, alrededor a los 140 °C, por un tiempo que varía entre 4 y 8 horas, para que la goma se vulcanice y adquiera el conjunto su propiedad elástica, que le permita ser **muy flexible horizontalmente debido a la goma y muy rígido verticalmente por la presencia de las láminas de acero**, que impiden la deformación lateral de la goma.

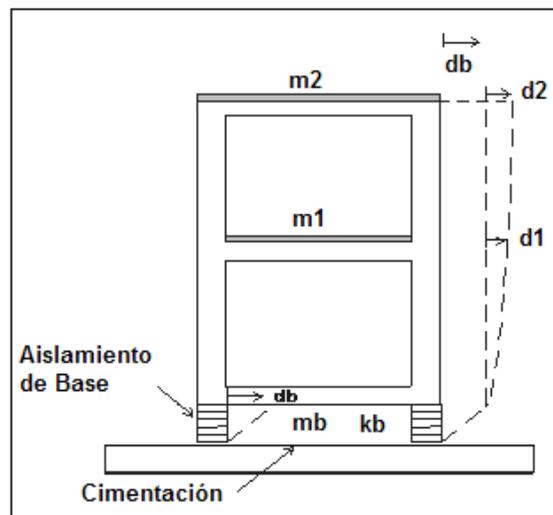
En la figura 3.1 se ha presentado un aislador con un orificio cilíndrico en la parte central. Ahora bien, no es necesario dejar este orificio se lo puede fabricar todo lleno. Si se deja el orificio se tiene la posibilidad de colocar un núcleo de plomo para darle mayor eficiencia al aislador. **Este capítulo está dedicado al estudio de aisladores sin núcleo de plomo.**

El sistema de aislamiento más estudiado es el conocido como **apoyo de goma laminado**, que se abrevia como **RB (Laminated Rubber Bearing)**, para diferenciarlos de los que llevan núcleo de plomo y corresponde al descrito en la figura 3.1. Los RB tienen un comportamiento, que se puede aproximar como visco-elástico lineal equivalente, para el rango de deformaciones de interés. Dentro de estos se tienen los de bajo amortiguamiento y los de alto amortiguamiento.

Los RB de bajo amortiguamiento tienen un factor de amortiguamiento menor a 0.07 y pueden deformarse lateralmente hasta un 200% de la altura del aislador  $H_r$ . Si bien es cierto que pueden deformarse hasta el 200% de la altura del aislador **en el diseño es conveniente que la deformación lateral no exceda de la altura del aislador o del radio del aislador. Priestley et al (2007)**. En cambio los de alto amortiguamiento, permiten alcanzar un factor de amortiguamiento entre 0.10 y 0.20.

### 3.2 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Para el análisis sísmico de pórticos planos con aislamiento de base, se considera un grado de libertad por planta y un grado de libertad en el aislamiento, como se muestra en el pórtico plano de dos pisos de la figura 3.2.



**Figura 3.2** Grados de libertad de un pórtico de 2 pisos y nomenclatura.

El vector transpuesto, de desplazamiento  $D_C$  para la estructura de la figura 3.2 es el siguiente:  $D_C^t = [d_b \quad d_1 \quad d_2]$ . Donde  $d_b$  es el desplazamiento horizontal del aislador con respecto al suelo;  $d_1$ ,  $d_2$  son los desplazamientos relativos de los pisos uno y dos con respecto al movimiento del aislador, como se aprecia en la figura 3.2.

Para el caso plano, el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el problema dinámico es el siguiente:

$$M_C \ddot{D}_C + C_C \dot{D}_C + K_C D_C = -M_C J_C a(t) \quad (3.1)$$

Donde  $M_C, C_C, K_C$  son las matrices de masas, amortiguamiento y rigidez del sistema con aislamiento de base,  $D_C, \dot{D}_C, \ddot{D}_C$  son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración,  $J_C$  es un vector que sirve para definir el vector de cargas generalizadas en los grados de libertad dinámicos,  $a(t)$  es la aceleración del suelo. Para el caso plano se tiene:

$$M_C = \begin{bmatrix} m_b + \sum_{i=1}^n m_i & J^t M \\ M J & M \end{bmatrix} \quad C_C = \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad K_C = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

$$J = 1 \quad J_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_C = \begin{bmatrix} d_b \\ D \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$c_b = 2 \xi_b \sqrt{k_b \left( m_b + \sum_{i=1}^n m_i \right)}$$

Siendo  $m_b$  la masa del sistema de aislamiento,  $n$  es el número de pisos de la estructura,  $m_i$  es la masa del piso  $i$ ;  $J$  es un vector unitario de orden  $n$ ;  $M$  es la matriz de masas de la estructura con base empotrada;  $c_b$  es el amortiguamiento del sistema de aislamiento;  $C$  es la matriz de amortiguamiento de la estructura con base empotrada;  $k_b$  es la rigidez del sistema de aislamiento;  $K$  es la matriz de rigidez de la estructura con base empotrada y  $D$  es el vector que contiene los grados de libertad de la estructura con base empotrada.

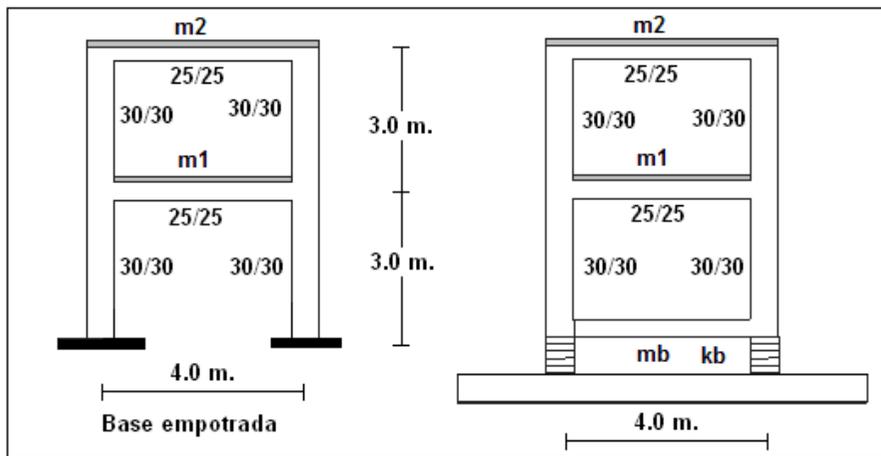
### • EJEMPLO 1

Determinar las matrices de masas, amortiguamiento y rigidez, de la estructura de la figura 3.3, si el factor de amortiguamiento con base empotrada son:  $\xi_1 = \xi_2 = 0.02$  para los modos 1 y 2 respectivamente y del sistema de aislamiento  $\xi_b = 0.06$ . Las masas:  $m_1 = 0.56, m_2 = 0.40$ , y  $m_b = 0.288 \text{ Ts}^2 / m$ . La rigidez  $k_b$  del sistema de aislamiento es  $12.317 \text{ T} / m$ .

## • SOLUCIÓN

La matriz de rigidez, condensada a los grados de libertad horizontales y la matriz de masas con base empotrada (figura 3.3, izquierda), son:

$$K = \begin{bmatrix} 1544.9 & -608.1 \\ -608.1 & 385.9 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.00 \\ 0.00 & 0.40 \end{bmatrix}$$



**Figura 3.3** Estructura con base empotrada y con aislamiento de base.

Los valores y vectores propios, con base empotrada son:

$$\lambda_1 = 294.8 \quad \lambda_2 = 3428.7 \quad \phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.6179 \\ 1.4020 \end{bmatrix} \quad \phi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.1849 \\ -0.7311 \end{bmatrix}$$

Las frecuencias y períodos de vibración son:

$$\omega_{n1} = 17.169 \frac{1}{s} \quad \omega_{n2} = 58.555 \frac{1}{s} \quad T_1 = 0.366 \text{ s.} \quad T_2 = 0.107 \text{ s.}$$

La matriz de amortiguamiento  $C$ , se la obtiene aplicando el algoritmo de Wilson y Penzien, para ello se debe encontrar la contribución de cada modo de vibración  $C_i$ .

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (3.3)$$

$$C_i = \frac{2 \xi_i \omega_{ni}}{\phi_i^t M \phi_i} (M \phi_i) (\phi_i^t M) \quad (3.4)$$

Siendo  $\phi_i$ , el modo de vibración  $i$ ;  $\omega_{ni}$  la frecuencia de vibración del modo  $i$ ;  $\xi_i$  el factor de amortiguamiento del modo  $i$ ;  $M$  es la matriz de masas.

$$c_b = 2 \xi_b \sqrt{k_b \left( m_b + \sum_{i=1}^n m_i \right)} = 2 * 0.06 \sqrt{12.317(0.288 + 0.56 + 0.40)} = 0.4705$$

$$M = \begin{bmatrix} 1.248 & 0.56 & 0.40 \\ 0.56 & 0.56 & 0.00 \\ 0.40 & 0.00 & 0.40 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.4705 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.1135 & -0.3212 \\ 0.00 & -0.3212 & 0.4163 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 12.317 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1544.9 & -608.1 \\ 0.0 & -608.1 & 385.9 \end{bmatrix}$$

### 3.3 MÉTODO DE NEWMARK

La estructura con aisladores va a trabajar en el rango elástico y los aisladores elastoméricos tienen un comportamiento que se puede considerar aproximadamente lineal para el rango de deformaciones que interesan en la respuesta. Por este motivo para encontrar la respuesta en el tiempo se puede aplicar el Método de Newmark en el rango lineal. Aguiar (2007).

El procedimiento de cálculo, para el análisis lineal, utilizando el método  $\beta$  de Newmark, es el siguiente:

- i. Se determina la matriz de rigidez efectiva.

$$\hat{K} = K_C + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M_C + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C_C$$

- ii. Para el instante de tiempo  $i + 1$  se determina el vector de cargas efectivo.

$$F_{i+1} = -M_C J_C a_{i+1} + M_C \left[ \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{q}_i + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{q}_i \right] - C_C \left[ \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{q}_i + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{q}_i \right] - K_C q_i$$

- iii. Se obtiene el incremento de desplazamiento para el tiempo  $i + 1$ , para ello se debe resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\hat{K} \Delta q_{i+1} = F_{i+1}$$

- iv. Se calculan la aceleración, velocidad y desplazamiento en el incremento de tiempo  $i + 1$ .

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{q}_{i+1} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{q}}_i - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_i$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{q}_{i+1} + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{q}}_i + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_i$$

$$\mathbf{q}_{i+1} = \Delta \mathbf{q}_{i+1} + \mathbf{q}_i$$

- v. Se actualizan desplazamientos, velocidades y aceleraciones y se pasa al próximo punto desde el paso ii.

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{i+1}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_{i+1}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$$

El valor de  $\gamma = 0.5$  y el valor de  $\beta$  puede ser 0.25 si se considera que la respuesta en aceleraciones es constante, en cada intervalo de tiempo. Si se considera que la variación es lineal el valor de  $\beta = 1/6$ .

## • EJEMPLO 2

Encontrar la respuesta en el tiempo de las estructuras de la figura 3.3, con base empotrada y con aisladores de base elastoméricos, ante el acelerograma indicado a la izquierda de la figura 3.4, que corresponde a un acelerograma artificial compatible con el espectro del Código Ecuatoriano de la Construcción en la zona de mayor peligrosidad sísmica y en suelo S3, a la derecha se presenta su espectro de respuesta elástica para un factor de amortiguamiento del 2%.

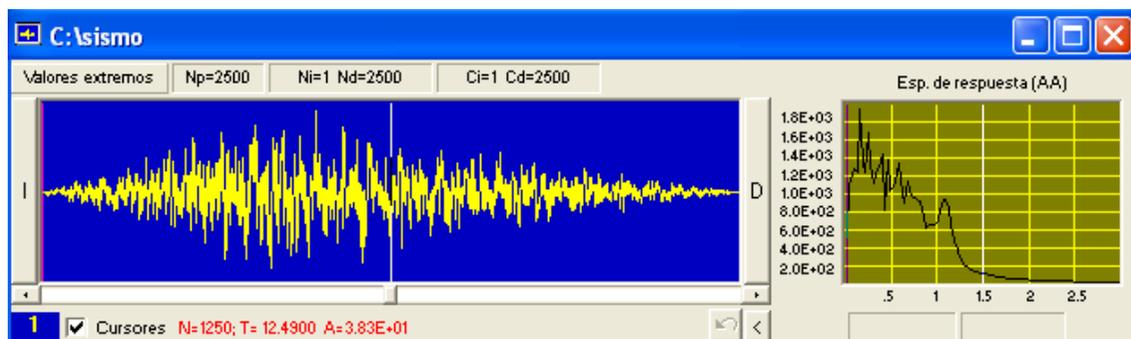


Figura 3.4 Acelerograma y espectro de respuesta elástica.

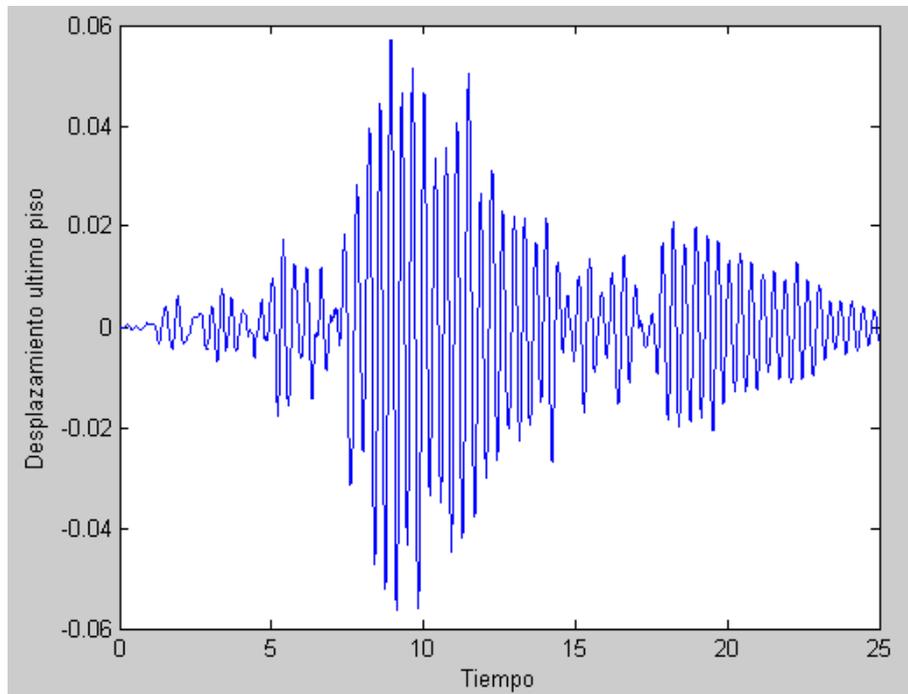
## • SOLUCIÓN

Para encontrar la respuesta con base empotrada se utiliza el programa **NEWMARKLINEAL** que se presenta en el capítulo 8 del libro que se indicó en párrafos

anteriores (Aguar, 2007) y para la respuesta con aisladores de base se utiliza el programa **AISLAMIENTO DE BASE PLANO** que se muestra en el siguiente apartado, con la forma de uso.

En la figura 3.5 se indica la respuesta en el tiempo de los desplazamientos en el segundo piso, de la estructura con base empotrada. Nótese que los desplazamientos son bastante altos y se encuentran entre los 4 y 6 centímetros.

En la tabla 3.1 se indican las respuestas máximas en la estructura con base empotrada y con aisladores. En la estructura con aisladores de base se aprecia que los desplazamientos en los pisos uno y dos son muy pequeños del orden de milímetros, con respecto a lo que se desplaza el aislador lo que significa que la estructura no se deforma lateralmente en consecuencia no habrá daño. Si los desplazamientos son pequeños, las fuerzas laterales son muy bajas en la estructura con aislador lo que no sucede con la estructura con base empotrada.



**Figura 3.5** Respuesta en desplazamientos del segundo piso con base empotrada.

**Tabla 3.1** Respuestas máximas sin y con aislamiento de base.

Piso	Con base empotrada			Con aislador		
	Desplazamiento (m.)	Fuerza (T.)	Deriva de piso	Desplazamiento (m.)	Fuerza (T.)	Deriva de piso
0	-----	-----	-----	0.0478	0.5883	-----
1	0.0260	5.4476	0.0087	0.2641	0.2641	0.00037
2	0.0570	6.2068	0.010	0.2423	0.2423	0.00043

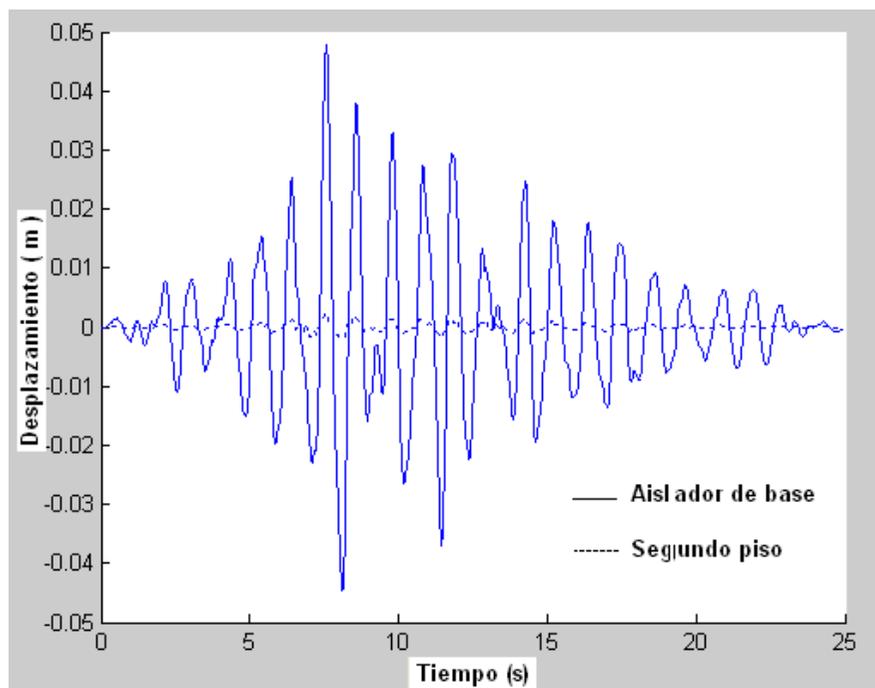
La estructura con aisladores tiene un período fundamental de 2.00 s., y la de base empotrada un período de 0.36 s. Si con estos períodos, se ingresa al espectro elástico de la figura 3.4 se tiene que para un período de 2.00 s., la aceleración espectral es 52 gals y que para un período de 0.36 s., la aceleración espectral es 980 gals. Por consiguiente, la

aceleración espectral en la estructura con base empotrada es 18.85 (980/52) veces mayor que la aceleración con base aislada.

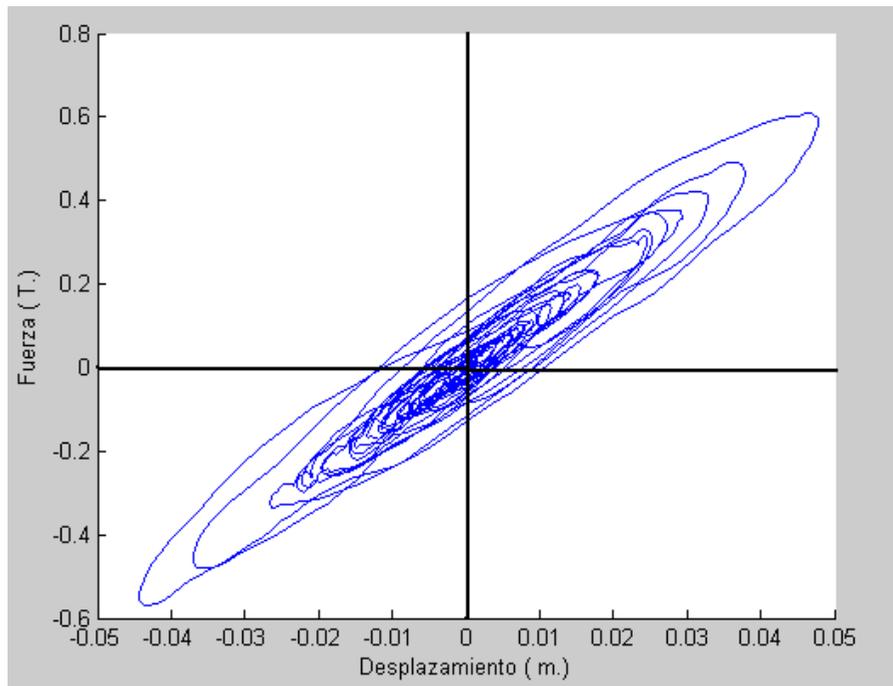
La rigidez  $k_b$  del sistema de aislamiento que se dio como dato, se obtuvo de tal manera que el período objetivo sea 2.0 s., de tal manera que no fue casualidad el tener menores fuerzas y desplazamientos laterales en la estructura con aislador sino que responde a que se obtuvo un período objetivo donde las aceleraciones espectrales son muy bajas.

En la figura 3.6 se muestra con línea continua el desplazamiento del aislador con respecto al suelo y con línea entrecortada el desplazamiento del segundo piso con respecto al desplazamiento del aislador, se observa que los desplazamientos del segundo piso son muy bajos.

En la figura 3.7 se presenta la curva de histéresis del aislador. Nótese que para grandes deformaciones se ensancha la curva ya que está disipando una mayor cantidad de energía, y como el aislador es visco elástico, a mayor velocidad de deformación, mayor disipación.



**Figura 3.6** Desplazamientos horizontales del aislador y del segundo piso.



**Figura 3.7** Comportamiento disipativo del aislador de base.

### 3.4 PROGRAMA DE ORDENADOR AISLAMIENTODEBASEPLANO

La forma de uso del programa **AISLAMIENTODEBASEPLANO** que sirve para encontrar la respuesta sísmica de marcos planos con aisladores de base, ante un acelerograma es la siguiente.

Antes de ejecutar el programa, el usuario debe haber calculado la matriz de rigidez lateral, de la estructura con base empotrada, con cualquier otro programa. Se recomienda el programa **RLAXINFI** que se encuentra en el libro *Análisis Dinámico Espacial*, Aguiar (2007). Este programa obtiene la matriz de rigidez lateral y la transfiere a consola.

Luego se carga el archivo del acelerograma, el cual no debe contener ninguna línea de comentarios. **Este archivo debe estar en gals ya que el programa lo pasa a  $m/s^2$** . Después se carga el vector zeda que contiene los factores de amortiguamiento de la estructura con base empotrada. Una vez suministrada toda esta información se ejecuta el programa **AISLAMIENTODEBASEPLANO**

**>> [despla]=aislamientodebaseplano(K,zeda,p,dt,beta)**

- K es la matriz de rigidez lateral de la estructura con base empotrada.
- zeda vector que contiene los factores de amortiguamiento de la estructura con base empotrada.
- p Nombre del archivo que contiene al acelerograma en gals
- dt Incremento de tiempo con el cual se halla la respuesta sísmica en el Método de Newmark. Se considera que el dt es el incremento de tiempo utilizado en el acelerograma.
- beta Valor del Método  $\beta$  de Newmark. Se recomienda  $\beta = 0.1667$

Los restantes datos, como las masas de cada piso, la masa del sistema de aislamiento, el factor de amortiguamiento del aislamiento se proporciona de manera interactiva cuando se ejecuta el programa. El listado del programa es el siguiente:

```
function [despla]=aislamientodebaseplano(K,zeda,p,dt,beta)
%
% Respuesta en el tiempo para estructuras con aisladores de base
% viscoelasticos por el Metodo de Newmark
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%   CEINCI ESPE
%   Diciembre de 2006
% -----
% [despla]=aislamientodebaseplano(K,zeda,p,dt,beta)
% -----
% K   Matriz de rigidez lateral del portico plano con base empotrada
% M   Matriz de masas del portico con base empotrada
% mb, kb Masa y rigidez del sistema de aislamiento de base.
% NP  Numero de pisos.
%     Por pantalla se indicara las masas de cada piso y la masa mb.
%     Previamente el usuario habra calculado la matriz de rigidez lateral
%     con programa rlaxinfi
% T   Periodos de vibracion.
% C   Matriz de amortiguamiento.
% zeda Vector que contiene los coeficientes de amortiguamiento.
% Calculo de la matriz de amortiguamiento utilizando
% Algoritmo de Wilson y Penzien
%
% p : vector que contiene los registros del acelerograma
% Mc : matriz de masas del sistema con aislamiento de base
% Cc : matriz de amortiguamiento del sistema con aislamiento de base
% Kc : matriz de rigidez del sistema con aislamiento de base
% Jc : Q=-Mc Jc a(t) solo la primera cantidad es uno los demas son cero
% dt : incremento de tiempo con el cual se calcula la respuesta.
% beta: Vale 1/4 para aceleracion constante y 1/6 para aceleracion lineal
% gama: Vale 0.5
% d, v, a : desplazamiento, velocidad y aceleracion de la respuesta
% despla  : desplazamientos laterales maximos
%
NP = input (' \n Numero de pisos ');
M = zeros(NP,NP); C = zeros(NP,NP);sumademas=0;
for i=1:NP
    fprintf ('Indique la masa del piso , %2d',i);
    M(i,i) = input (' Valor de la masa: ');
    sumademas=sumademas+M(i,i);
end
fprintf ('Indique la masa total del sistema de aislacion ');
mb=input (' Valor de la masa mb ');
[V,D]=eig(K,M); Wn=sqrt(D); W=diag(Wn);
for i=1:NP
    fi=V(:,i); mi=fi'*M*fi; aux=2*zeda(i)*W(i)/mi;
    C=C+aux.*M*fi*fi'*M;
end
```

```

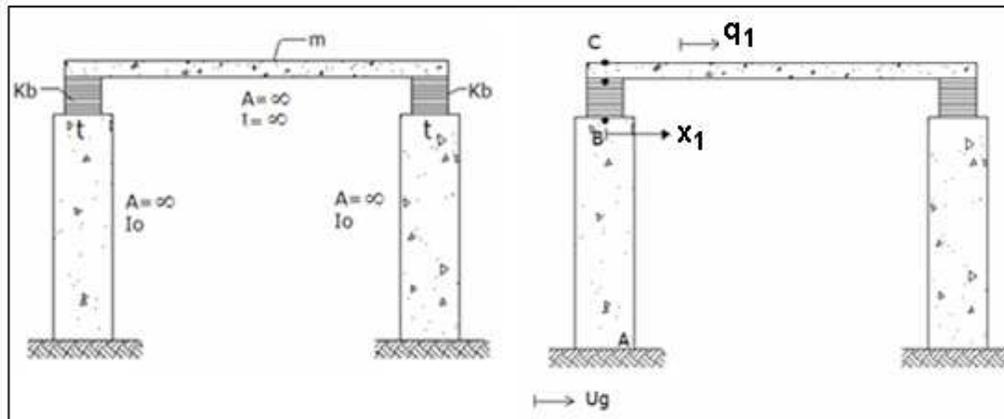
fprintf ('Matriz de amortiguamiento con base empotrada');
C
% Matriz de masa de sistema con aislamiento de base
Mc=zeros(NP+1,NP+1); Mc(1,1)=mb+sumademasas;
for i=1:NP
    Mc(1,i+1)=M(i,i); Mc(i+1,1)=M(i,i);Mc(i+1,i+1)=M(i,i);
end
% Matriz de rigidez de sistema con aislamiento de base
fprintf ('Indique la rigidez total del sistema de aislacion ');
kb=input (' Valor de la rigidez kb ');
Kc=zeros(NP+1,NP+1); Kc(1,1)=kb;
for i=1:NP
    for j=1:NP
        Kc(i+1,j+1)=K(i,j);
    end
end
% Matriz de amortiguamiento de sistema con aislamiento de base
fprintf ('Indique el factor de amortiguamiento del sistema de aislacion ');
sedab=input (' Valor de seda ');
cb=2*sedab*sqrt(kb*Mc(1,1));
Cc=zeros(NP+1,NP+1); Cc(1,1)=cb;
for i=1:NP
    for j=1:NP
        Cc(i+1,j+1)=C(i,j);
    end
end
% Vector Jc
Jc(1)=1;
for i=1:NP
    Jc(i+1)=0;
end
Jc=Jc';
% Metodo de Newmark
n=length(p);tmax=dt*n;t=linspace(0,tmax,n)';gama=0.5;ngl=length(Kc);
% Cambio de cm/s2 a m/s2 en el acelerograma
for i=1:n
    p(i)=p(i)/100;
end
% Constantes auxiliares de calculo
fac1=1/(beta*dt);fac2=gama/(beta*dt); fac3=1/(beta*dt*dt);
fac4=(1/(2*beta))-1;fac5=1-(gama/beta); fac6=1-(gama/(2*beta));
% Calculo de K sombrero
Ks=Kc+fac3*Mc+fac2*Cc;
% Condiciones iniciales
for i=1:ngl
    d(i)=0; v(i)=0; a(i)=0;
end
d=d';v=v';a=a';
for j=1:NP+1
    despla (j)=0;
end
% Respuesta en el tiempo
for i=1:n-1
    F=-Mc* Jc*p(i+1)+Mc*(fac1*v+fac4*a)-Cc*(fac5*v+fac6*dt*a)-Kc*d;
    dq=Ks\F;aa=fac3*dq-fac1*v-fac4*a;

```

```

vv=fac2*dq+fac5*v+fac6*dt*a;dd=dq+d;
y(i)=dd(ngl);tt(i)=dt*i;yb(i)=dd(1);
d=dd; v=vv; a=aa;
% Fuerza en el aislador
fb(i)=cb*vv(1)+kb*dd(1);
for j=1:NP+1
    if d(j)>despla(j)
        despla(j)=d(j);
    end
end
end
hold on
%Respuesta de fuerza de histeresis
%plot (yb,fb)
%ylabel ('Fuerza ( T.); xlabel ('Desplazamiento ( m.);
% Respuesta en el tiempo de desplazamientos
plot (tt,y,':')
plot (tt,yb)
%ylabel('Desplazamiento lateral ( m. ');xlabel('Tiempo ( s.)')
despla=despla';Fuerza=Kc*despla
% Calculo de Periodos de vibracion
[V,D]=eig(Kc,Mc);W=sqrt(diag(D));
for i=1:NP+1; T(i)=2*pi/W(i);end
fprintf ('Frecuencias de vibracion')
W
fprintf ('Periodos de vibracion')
T
% ---fin

```



**Figura 3.8** Modelo simplificado de un puente sobre aisladores de base.

### 3.5 MODELO SIMPLIFICADO DE UN PUENTE CON AISLADORES

A la izquierda de la figura 3.8 se muestra un modelo simplificado de un puente sobre aisladores de base, se considera que el tablero es completamente rígido en su plano y tiene una masa total  $m$ . Se ha denominado  $x_1$  al desplazamiento horizontal de la pila con respecto al movimiento del suelo;  $q_1$  al desplazamiento del sistema de aislamiento con respecto al punto

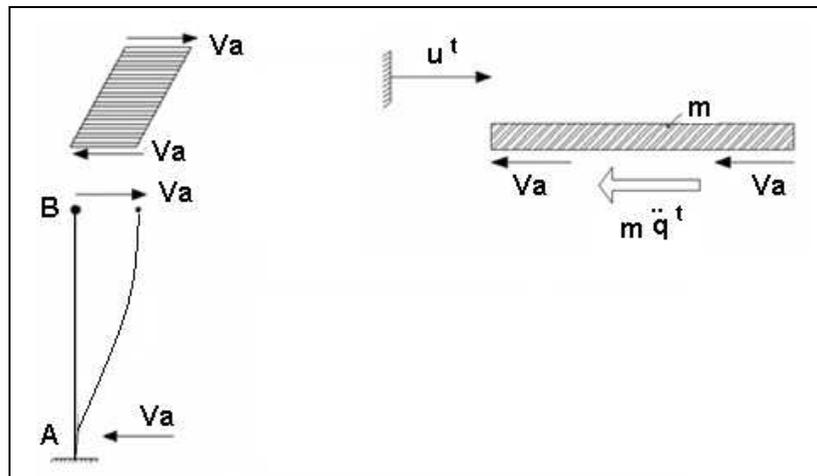
B. A la derecha de la figura 3.8 se muestran los grados de libertad indicados. Fernández (2008).

Por otra parte, los aisladores tienen rigidez  $k_b$  y las pilas tienen una rigidez lateral  $t$ . En la figura 3.9, a la izquierda se presenta la deformada general de la pila y las fuerzas de corte que se generan en sus extremos  $V_a$ , de esta gráfica se obtiene lo siguiente:

$$V_a = k_b q_1 = t x_1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{k_b}{t} q_1$$

Luego:

$$\ddot{x}_1 = \frac{k_b}{t} \ddot{q}_1$$



**Figura 3.9** Diagrama de desplazamientos y cuerpo libre.

Del equilibrio de fuerzas del tablero (Figura 3.9, a la derecha) se halla:

$$2V_a + m \ddot{q}^t = 0$$

Donde  $\ddot{q}^t$  es la aceleración total del sistema de aislación para ello se tiene:

$$\ddot{q}^t = u_g + \ddot{x}_1 + \ddot{q}_1 \quad \Rightarrow \ddot{q}^t = \ddot{u}_g + \ddot{x}_1 + \ddot{q}_1$$

Al reemplazar la aceleración total del sistema de aislación  $\ddot{q}^t$ , el valor de  $V_a$  y  $\ddot{x}_1$  en la ecuación de equilibrio, se encuentra:

$$2k_b q_1 + m \left( \ddot{u}_g + \frac{k_b}{t} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_1 \right) = 0$$

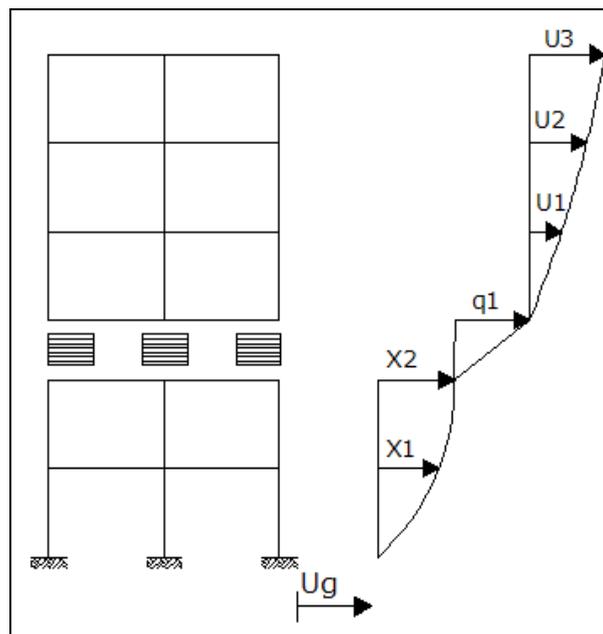
De donde:

$$\left( m \frac{k_b}{t} + m \right) \ddot{q}_1 + 2 k_b q_1 = -m \ddot{u}_g \quad (3.5)$$

### 3.6 AISLADORES EN PISOS INTERMEDIOS

No necesariamente los aisladores de base tienen que estar ubicados sobre la cimentación, pueden encontrarse en pisos intermedios, como se ilustra en la figura 3.10. En este caso se tienen tres componentes del sistema que se denomina: **subestructura** que corresponde a los pisos que se hallan bajo los aisladores; **aislación** que es la interface entre la superestructura y la subestructura; **superestructura** que se halla sobre el sistema de aislación. Se considera que los pisos son completamente rígidos en el plano.

Se colocan aisladores en pisos intermedios cuando el edificio tiene sótanos, en este caso es conviene colocar el sistema de aislación a nivel del piso de la calle, de esta manera se evita construir una losa de fondo adicional para el caso de que se coloque los aisladores sobre la cimentación.



**Figura 3.10** Superestructura, aislamiento y subestructura.

Se han denominado con la letra  $x$  los grados de libertad de la subestructura, con la letra  $q$  del sistema de aislación y con la letra  $u$  de la superestructura. Es importante destacar que se trabaja con desplazamientos relativos como se aprecia a la derecha de la figura 3.10. Ahora bien, los desplazamientos totales de cada uno de los pisos de la estructura de la figura 3.10 valen:

$$u_3^t = u_g + x_2 + q_1 + u_3$$

$$u_2^t = u_g + x_2 + q_1 + u_2$$

$$u_1^t = u_g + x_2 + q_1 + u_1$$

$$q_1^t = u_g + x_2 + q_1$$

$$x_2^t = u_g + x_2$$

$$x_1^t = u_g + x_1$$

En forma matricial los desplazamientos totales con respecto a los desplazamientos relativos valen:

$$\begin{bmatrix} u_3^t \\ u_2^t \\ u_1^t \\ q_1^t \\ x_2^t \\ x_1^t \\ u_g^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ q_1 \\ x_2 \\ x_1 \\ u_g \end{bmatrix}$$

Se ha particionado la matriz de acuerdo al número de grados de libertad de la superestructura, para el ejemplo se tienen 3 grados de libertad  $u$  por lo que se ha particionado en la tercera fila y tercera columna; luego se tiene un grado de libertad  $q$  y dos grados de libertad de la subestructura. Con esta partición y al agrupar los desplazamientos en los vectores  $u, q, x$ , se tiene:

$$\begin{bmatrix} u^t \\ q^t \\ x^t \\ u_g^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & r^{(s)} & r^{(s)}r^{(b)} & r^{(s)}r^{(b)}r^{(i)} \\ 0 & I & r^{(b)} & r^{(b)}r^{(i)} \\ 0 & 0 & I & r^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \\ x \\ u_g \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Donde  $r^{(i)}$  son los desplazamientos de la subestructura debido a la deformada elemental del suelo  $u_g = 1$ ;  $r^{(b)}$  son los desplazamientos del sistema de aislación debido a la deformada elemental de la superestructura en cada coordenada, las deformadas elementales se hallan haciendo que una de las coordenadas valga la unidad y las restantes cero. Aguiar (2004);  $r^{(s)}$  son los desplazamientos de la superestructura debido a la deformada elemental

del sistema de aislación. En la escritura de la ecuación ( 3.6 ) se ha utilizado la nomenclatura empleada por Segúin (2007). Con relación a la estructura de la figura 3.10, se tiene:

$$\mathbf{r}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}^{(b)} = [1 \quad 0] \quad \mathbf{r}^{(s)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación ( 3.6 ) se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{q}^t \\ \mathbf{x}^t \\ \mathbf{u}_g^t \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_g \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Donde  $\mathbf{T}$  es la matriz de paso de las coordenadas relativas a las coordenadas totales y está definida en la ecuación ( 3.6 ). Sea  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{Q}$  las matrices de masa, amortiguamiento, rigidez y el vector de cargas, en coordenadas totales, se obtiene habitualmente  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{Q}$  con respecto al movimiento de suelo y sea  $\mathbf{M}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{K}^*, \mathbf{Q}^*$  las matrices de masa, amortiguamiento, rigidez y cargas en coordenadas relativas. Ahora bien, de acuerdo a la dinámica de estructuras y al análisis matricial de estructuras. Aguiar (2004,2007) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* &= \mathbf{T}^t \mathbf{M} \mathbf{T} \\ \mathbf{C}^* &= \mathbf{T}^t \mathbf{C} \mathbf{T} \\ \mathbf{K}^* &= \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T} \\ \mathbf{Q}^* &= \mathbf{T}^t \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Estrictamente, la matriz  $\mathbf{T}$  que permite obtener las matrices  $\mathbf{M}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{K}^*$  y el vector  $\mathbf{Q}^*$  es la siguiente, la misma que se obtiene eliminando la cuarta fila y cuarta columna que están relacionados con el movimiento del suelo.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{r}^{(s)} & \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{r}^{(b)} \\ 0 & \mathbf{I} & \mathbf{r}^{(b)} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & 0 \\ \mathbf{r}^{(s)t} & & \mathbf{I} \\ \mathbf{r}^{(b)t} & \mathbf{r}^{(s)t} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.6.1 Cálculo de $\mathbf{M}^*$

La matriz de masas  $\mathbf{M}$  que se obtiene al trabajar con coordenadas totales (con respecto al suelo), es la siguiente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(s)} & & \\ & \mathbf{M}^{(b)} & \\ & & \mathbf{M}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Donde  $\mathbf{M}^{(s)}$  es una matriz diagonal compuesta por cada una de las masas de la superestructura;  $\mathbf{M}^{(b)} = m_b$  es la masa del sistema de aislación y  $\mathbf{M}^{(i)}$  es una matriz diagonal compuesta por cada una de las masas de la subestructura. Al realizar el producto matricial indicado en la ecuación (3.9), para hallar  $\mathbf{M}^*$ , se obtiene.

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(s)} & \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} & \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{r}^{(b)} \\ \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} & \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} & \left( \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} \right) \mathbf{r}^{(b)} \\ \mathbf{r}^{(b)t} \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} & \mathbf{r}^{(b)t} \left( \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} \right) & \mathbf{r}^{(b)t} \left( \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} \right) \mathbf{r}^{(b)} + \mathbf{M}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

### 3.6.2 Sistema de ecuaciones diferenciales

En forma similar se obtienen las matrices de rigidez y amortiguamiento, estas resultan “diagonales” ya que se trabaja con coordenadas relativas. El sistema de ecuaciones diferenciales al que se llega. Según (2007) es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(s)} & \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} & \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{r}^{(b)} \\ \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} & \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} & \left( \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} \right) \mathbf{r}^{(b)} \\ \mathbf{r}^{(b)t} \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} & \mathbf{r}^{(b)t} \left( \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} \right) & \mathbf{r}^{(b)t} \left( \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} \right) \mathbf{r}^{(b)} + \mathbf{M}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(s)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(s)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{r}^{(b)} \\ \left( \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} \right) \mathbf{r}^{(b)} \\ \mathbf{r}^{(b)t} \left( \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} + \mathbf{M}^{(b)} \right) \mathbf{r}^{(b)} + \mathbf{M}^{(i)} \end{bmatrix} \mathbf{r}^{(i)} \ddot{\mathbf{u}}_g \quad (3.12)$$

Donde  $\mathbf{C}^{(s)}$ ,  $\mathbf{C}^{(b)}$ ,  $\mathbf{C}^{(i)}$  son las matrices de amortiguamiento de las superestructura, aislamiento y subestructura;  $\mathbf{K}^{(s)}$ ,  $\mathbf{K}^{(b)}$ ,  $\mathbf{K}^{(i)}$  son las matrices de rigidez de la superestructura, aislamiento y subestructura.

## REFERENCIAS

1. Aguiar R., (2004) *Análisis Matricial de Estructuras*. Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército. Tercera Edición, 550 p. Quito, Ecuador.
2. Aguiar R., (2007) *Dinámica de Estructuras con MATLAB*. Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 292 p., Quito, Ecuador.
3. Fernández C., (2008) *Notas de clase*. Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago de Chile.
4. Priestley M., Calvi G., and Kowalsky M., (2007), *Displacement-Based Seismic Design of Structures*. IUSS Press, Pavia Italy, 721 p.
5. Segúin E., (2007) *Torsión en sistemas aislados sísmicamente con dispositivos elastoméricos*. Tesis Doctoral Ph.D., Escuela de Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile. 229 p. Santiago de Chile.



Edificio con aisladores elastoméricos, sobre las columnas de la planta baja, en un edificio de Viña del Mar que se comportó muy bien en el Mega Sismo de Chile de 2010.

## CAPÍTULO 4

---

---

# ANÁLISIS SÍSMICO ESPACIAL DE ESTRUCTURAS CON AISLADORES ELASTOMÉRICOS

## 4.1 INTRODUCCIÓN

Existen varios modelos para el análisis sísmico de espacial de estructuras, con aislamiento de base sin núcleo de plomo, considerando que la losa de entrepiso es completamente rígida en el plano horizontal. En este capítulo se presentan cinco modelos.

El primer modelo que se presenta es el desarrollado por Pan y Kelly (1983) que consideran a la superestructura como un cuerpo rígido de manera que el sistema tiene en total tres grados de libertad, concentrados en el sistema de aislamiento. En cambio los otros cuatro modelos realizan el análisis sísmico con tres grados de libertad por planta en la superestructura y tres grados de libertad en el sistema de aislamiento.

Ahora bien, de acuerdo a la forma de solución del sistema de ecuaciones diferenciales, los cuatro métodos se identifican de la siguiente manera: Método **Cuasi-Estático** De la Llera *et al* (2005) **Masa Corregida**, el **Método Exacto** Aguiar (2007,1) y **Método Modal Espectral** Según (2007)

En el Método Cuasi-Estático la solución del sistema de aislamiento se lo hace en forma dinámica sin considerar la aceleración proveniente de la superestructura y la solución de la superestructura se la realiza en forma estática.

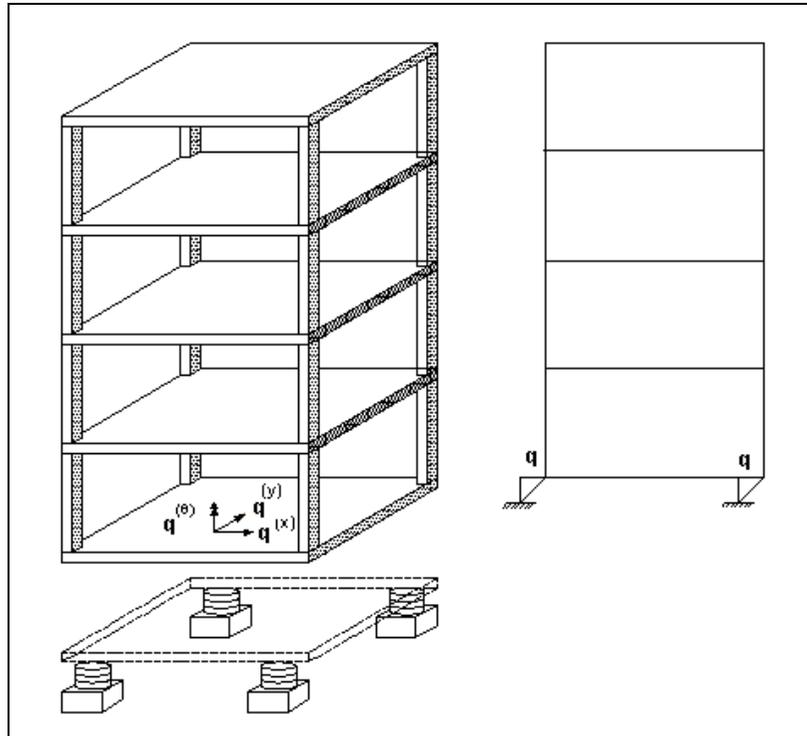
En el de Masa Corregida, se resuelve en forma dinámica tanto el sistema de aislamiento como el de la superestructura pero sin considerar la aceleración de la superestructura, por lo que éste método también es aproximado.

En el Método Exacto se resuelve en forma interactiva pero considerando la aceleración de la superestructura. El algoritmo de análisis que se presenta en este capítulo es diferente a la forma de solución de Según (2007) pero los dos se sustentan en dos etapas en que se predice y corrige la respuesta.

En el Método Modal Espectral la acción sísmica está definida por un espectro y básicamente se aplica el método modal espectral en el sistema de aislamiento y luego con cada modo se encuentra la respuesta en la superestructura con el Método Cuasi-Estático, variante que se ha realizado al método propuesto por Seguí (2007)

## 4.2 MODELO DE PAN Y KELLY

El modelo de Pan y Kelly (1983) considera que la superestructura se mueve en su conjunto como un cuerpo rígido, con el movimiento del sistema de aislamiento que tiene 3 gdl, ubicados en el **Centro de Masas, C.M.**, de la losa de aislación como se aprecia a la izquierda de la figura 4.1 y a la derecha se muestra una deformada del sistema en que se aprecia que la superestructura se mueve como un cuerpo rígido, no se deforma.



**Figura 4.1** Modelo de cuerpo rígido propuesto por Pan y Kelly (1983)

El sistema de ecuaciones diferenciales para el sistema de aislamiento está definido por:

$$\mathbf{M}^{(t)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} = -\mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g - \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} \quad (4.1)$$

Donde  $\mathbf{M}^{(t)}$  es la matriz de **masa total de la estructura completa como cuerpo rígido**;  $\mathbf{C}^{(b)}$  es la matriz de amortiguamiento del sistema de aislamiento;  $\mathbf{K}^{(b)}$  es la rigidez del sistema de aislamiento;  $\mathbf{r}^{(b)}$  es un vector de colocación de  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  en los grados de libertad de la base;  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  es la aceleración del suelo, definida por su acelerograma;  $\mathbf{r}^{(s)}$  es la matriz de

colocación de  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  en los grados de libertad de la estructura;  $\ddot{\mathbf{u}}$  es la aceleración en la superestructura.  $\mathbf{M}^{(s)}$  es la matriz de masas de la superestructura.  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$  son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración, respectivamente. El vector  $\mathbf{q}$  vale:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(x)} \\ \mathbf{q}^{(y)} \\ \mathbf{q}^{(\theta)} \end{bmatrix}$$

Donde  $q^{(x)}$  es la componente de desplazamiento horizontal del sistema de aislamiento en sentido X;  $q^{(y)}$  es similar a  $q^{(x)}$  pero en sentido Y;  $q^{(\theta)}$  es la rotación de piso con respecto a un plano perpendicular a la losa. En la propuesta de Pan y Kelly no se considera la aceleración de la superestructura por lo que la ecuación (4.1) queda:

$$\mathbf{M}^{(t)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} = -\mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g \quad (4.2)$$

A continuación se indica como se obtienen las matrices que intervienen en (4.2) ya que sirven también para los otros métodos.

#### 4.2.1 Matriz de Rigidez $\mathbf{K}^{(b)}$

La matriz de rigidez en coordenadas de piso  $\mathbf{K}^{(b)}$  es simétrica, por lo que se indica a continuación, la matriz triangular superior, para estructuras cuyos pórticos son ortogonales.

$$\mathbf{K}^{(b)} = \begin{bmatrix} K_{XX} & 0 & K_{X\theta} \\ & K_{YY} & K_{Y\theta} \\ & & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} K_{XX} &= \sum k_x^i & K_{YY} &= \sum k_y^i \\ K_{\theta\theta} &= \sum k_x^i r_{yi}^2 + k_y^i r_{xi}^2 & & \\ K_{X\theta} &= \sum k_x^i r_{yi} & K_{Y\theta} &= \sum k_y^i r_{xi} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Donde  $k_x^i$  es la rigidez del aislador  $i$  en sentido X;  $k_y^i$  es la rigidez del aislador  $i$  en sentido Y. Para aisladores circulares se tiene que  $k_x^i = k_y^i$ . Por otra parte  $r_{xi}$  es la distancia en sentido X del aislador  $i$  al centro de masas;  $r_{yi}$  es la distancia en sentido Y del aislador  $i$  al centro de masas. Los valores de  $r_{xi}$ ,  $r_{yi}$  tienen signo, serán positivos si la orientación positiva del aislador rota con respecto al centro de masas en forma antihorario. Aguiar (2004).

#### 4.2.2 Matriz de Masas $M^{(t)}$

La matriz de masas  $M^{(t)}$  se debe calcular considerando el peso total de la superestructura. Para el modelo numérico de la figura 4.1, se indica las áreas cooperantes en base a las cuales se hallan la masa que gravita sobre el aislador proveniente de la superestructura, en la figura 4.2; a ésta masa se debe añadir la masa del aislador y de la cimentación. Con esta acotación, la matriz  $M^{(t)}$  es la siguiente:

$$M^{(t)} = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & J \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Siendo  $m$  es la masa total de la estructura más los aisladores de base y más la masa de la cimentación.  $J$  es el momento de inercia de cada una de las masas  $m_i$  con respecto al C.M., y se determina mediante la siguiente ecuación:

$$J = \sum m_i r_i^2 \quad (4.6)$$

Donde  $m_i$  es la masa total que gravita sobre el aislador  $i$ ;  $r_i$  es el radio de giro de cada aislador. Para un aislador que se halla en las coordenadas  $x_i, y_i$  se tiene:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

Siendo  $x_i, y_i$  las distancias del aislador  $i$  al C.M. en las direcciones X, Y. Como se aprecia en la figura 4.2, en que se tienen cuatro aisladores de base pero se destaca que la formulación es general, para cualquier número de aisladores de base.

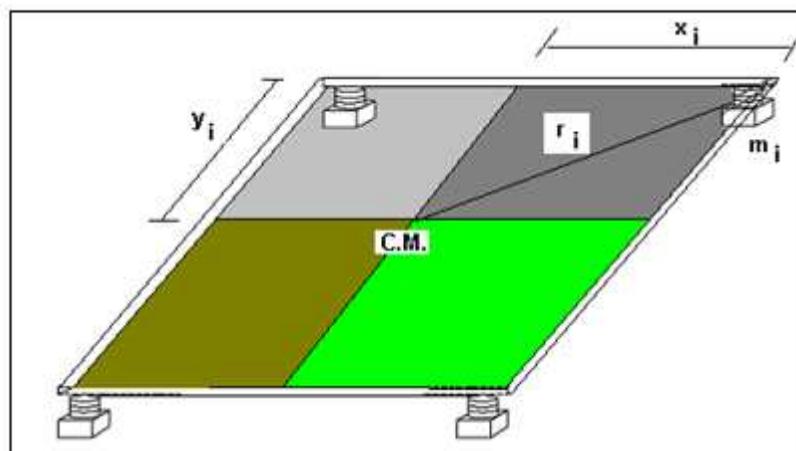


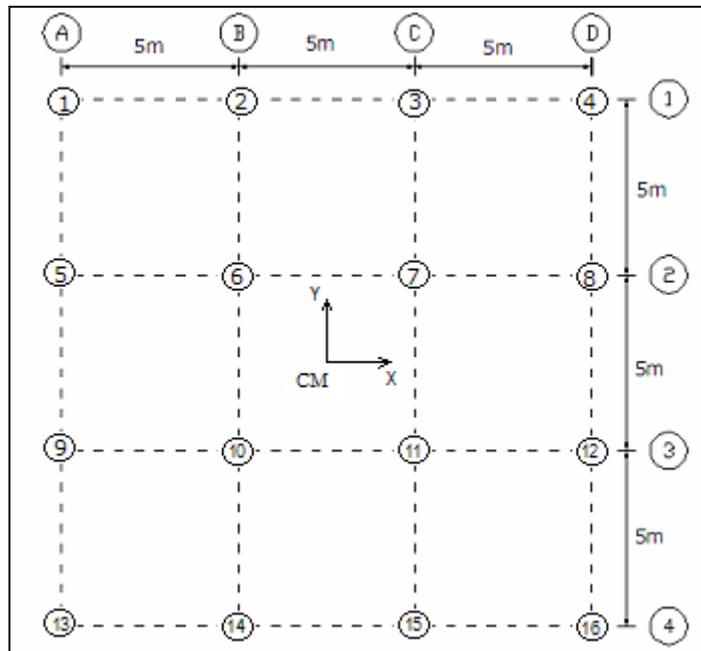
Figura 4.2 Distribución de las masas en modelo.

La matriz de amortiguamiento  $C^{(b)}$  se halla aplicando el algoritmo de Wilson y Penzien visto en el capítulo anterior. Por lo que resta únicamente indicar la forma del vector  $r^{(b)}$  para tener resuelto el problema.

El vector  $r^{(b)}$  depende de la dirección del análisis sísmico. Para sismo en sentido X, este vector vale.  $r^{(b)t} = [1 \ 0 \ 0]$ . Nótese que se ha escrito el vector transpuesto. Para sismo en sentido Y,  $r^{(b)t} = [0 \ 1 \ 0]$ .

### • EJEMPLO 1

En la figura 4.3 se presenta una planta de una estructura de tres pisos de hormigón armado, sobre aisladores de base elastoméricos y se ha numerado cada uno de los aisladores. Se desea encontrar la respuesta en el tiempo ante la componente N-S del sismo de El Centro del 18 de mayo de 1940 que tuvo una aceleración máxima del suelo igual a 0.348 g.



**Figura 4.3** Distribución en planta de edificio de tres pisos y numeración de los aisladores de base.

En la tabla 4.1 se muestran las dimensiones y propiedades de los aisladores de base **para conseguir un periodo del sistema que esté alrededor de los 2 segundos**. La tabla contienen el número de aislador, su área cooperante [ $m^2$ ], la masa que aporta la superestructura a cada aislador [ $T \ s^2/m$ ], los diámetros exterior e interior de los aisladores circulares [cm], la altura del aislador [cm], el área que trabaja al corte del aislador [ $cm^2$ ], la rigidez del aislador [ $T/m$ ], la masa que aporta cada aislador [ $T \ s^2/m$ ] y finalmente la masa total [ $T \ s^2/m$ ]. No se ha considerado la masa de la cimentación.

**Tabla 4.1** Dimensiones de aisladores de base y aporte de masas en edificio de tres pisos.

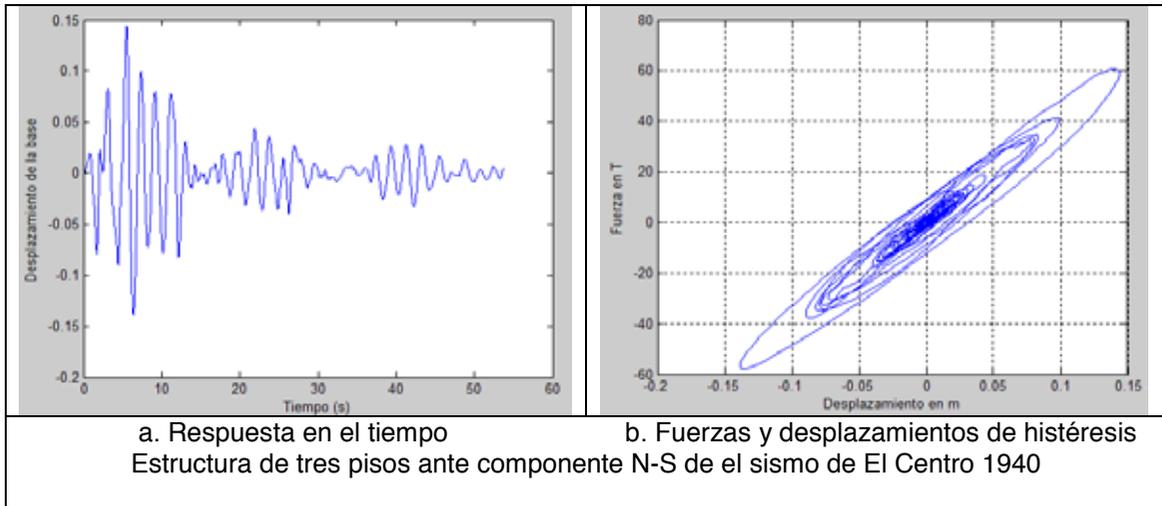
mi	A	me	De	Di	Hr	Ac	Kb	mb	mT
1	6.25	1.1288	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	1.1347
2	12.50	2.2577	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	2.2636
3	12.50	2.2577	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	2.2636
4	6.25	1.1288	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	1.1347
5	12.50	2.2577	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	2.2636
6	25.00	4.5153	55	10	40	2297.29	40.20	0.0115	4.5268
7	25.00	4.5153	55	10	40	2297.29	40.20	0.0115	4.5268
8	12.50	2.2577	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	2.2636
9	12.50	2.2577	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	2.2636
10	25.00	4.5153	55	10	40	2297.29	40.20	0.0115	4.5268
11	25.00	4.5153	55	10	40	2297.29	40.20	0.0115	4.5268
12	12.50	2.2577	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	2.2636
13	6.25	1.1288	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	1.1347
14	12.50	2.2577	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	2.2636
15	12.50	2.2577	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	2.2636
16	6.25	1.1288	40	10	40	1178.10	20.62	0.0059	1.1347

Se considera que el sistema de aislamiento tiene un amortiguamiento  $\xi = 0.10$  y es igual en los tres modos de vibración. Como la estructura es completamente simétrica el sentido de análisis sísmico es indiferente.

• **SOLUCIÓN**

$$K^{(b)} = \begin{bmatrix} 408.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 408.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2159.9 \end{bmatrix} \quad M^{(t)} = \begin{bmatrix} 40.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 40.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4584.9 \end{bmatrix}$$

$$C^{(b)} = \begin{bmatrix} 25.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 25.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1990.3 \end{bmatrix}$$



**Figura 4.4** Respuesta en el tiempo de desplazamientos y diagrama de histéresis.

La respuesta en el tiempo se la halló utilizando el programa **PANYKELLY**, el mismo que reporta las matrices de rigidez, masa, amortiguamiento, indicadas y también los períodos de vibración que en este caso fue de 1.985 s.

### 4.2.3 Programa PANYKELLY

El programa **PANYKELLY** trabaja con el programa **PSE2**. Por lo tanto se debe verificar que estos dos programas estén cargados. El programa PANYKELLY encuentra las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, como se indicó en los apartados anteriores y envía estas matrices al programa PSE2 que encuentra la respuesta en el tiempo por el Procedimiento de Espacio de Estado.

Es en el programa PSE2 donde se halla la respuesta en el tiempo de los desplazamientos, gráfica izquierda de la figura 4.4. Para esto en el programa PANYKELLY se debe colocar como comentarios las instrucciones que grafican el diagrama de histéresis, mostrado a la derecha de la figura 4.4. Si se desea mostrar el diagrama de histéresis se debe quitar el % en las sentencias correspondientes del programa PANYKELLY y colocar el % en las sentencias del programa PSE2 que obtiene la respuesta de desplazamientos.

Como toda la estructura se mueve como cuerpo rígido, el desplazamiento horizontal de todos los pisos de la superestructura es el mismo y es igual al desplazamiento horizontal del sistema de aislamiento que se ha indicado a la izquierda de la figura 4.4. El desplazamiento lateral máximo es de 14.4 cm.

El área encerrada en la curva de histéresis es la energía disipada por el sistema de aislamiento. Nótese que la forma de esta curva es del tipo Kelvin Voight.

La rigidez de los aisladores y las masas totales de cada uno de ellos se suministra al programa por consola, al igual que otra información que solicita el programa como el número de ejes que tiene la estructura en cada dirección y el sentido del análisis sísmico. La entrada de datos del programa es la siguiente:

➤ **[T]=PanyKelly(p,r,dt)**

- **p** Nombre del archivo que contiene el acelerograma
- **r** Vector que contiene la distancia desde el C.M. a cada eje de aisladores. Tienen signo, si la orientación positiva del eje de aisladores rota en forma antihoraria con respecto al C.M. son positivos. Se indicará primero las distancias del C.M. a los pórticos en sentido X, y luego en sentido Y. Para el ejemplo 1, el vector **r** transpuesto, vale:

$$r^t = [-7.5 \quad -2.5 \quad 2.5 \quad 7.5 \quad -7.5 \quad -2.5 \quad 2.5 \quad 7.5]$$

- **dt** Incremento de tiempo con el cual está grabado el acelerograma. Con este valor de dt se encuentra la respuesta en el tiempo.
- **T** Períodos de vibración del sistema. El programa reporta tres períodos ya que se considera un modelo de tres grados de libertad. Es importante mirar los períodos y los modos de vibración para saber cual es el período fundamental de traslación.

```

function [T]=PanyKelly(p,r,dt)
%
% Analisis Sismico de Estructuras con Aislamiento de Base en tres
% dimensiones utilizando el modelo de Pan y Kelly (1983) que considera
% la superestructura completamente rigida. El modelo tiene 3 gdl en total.
%
% -----
% Programa realizado por:
% Roberto Aguiar Falconi
% Febrero de 2007, Revisado en Agosto de 2007
% -----
%
% -----
% % [T]=PanyKelly(p,r,dt)
% -----
% p Vector que contiene el acelerograma, debe estar en unidades
% compatibles con la que se esta trabajando la matriz de rigidez y de masas
% r Vector con la distancia del C.M. a los porticos, primero se indican
% las distancias a los porticos en X, luego a los de sentido Y.
% dt Incremento de tiempo del acelerograma, con este dt se halla la
% respuesta en el tiempo.
% nd Numero de aisladoares
% kx rigidez de un aislador en sentido X.
% ky rigidez de un aislador en sentido Y.
% Kx suma de las rigideces de los aisladores en sentido X.
% Ky suma de las rigideces de los aisladores en sentido Y.
% ry Distancia del C.M. a los porticos en sentido X.
% rx Distancia del C.M. a los porticos en sentido Y.
% nx Numero de porticos en sentido X.
% ny Numero de porticos en sentido Y.
%
% Para procesar el programa se requiere la subrutina PSE2 que
% encuentra la respuesta en el tiempo por el Procedimiento de Espacio
% de Estado
%
fprintf ('\nPara analisis sismico en X, digite 1, para sismo en Y, digite 2')
isismo= input ('\nIndique el codigo del analisis sismico: ');
nx= input ('\Numero de ejes de columnas en sentido X: ');
ny= input ('\Numero de ejes de columnas en sentido Y: ');
nd=nx*ny;
fprintf ('\nSi los aisladores son circulares e iguales digite 1, caso contrario 2')
cod= input ('\nIndique el codigo, sobre si los aisladores son iguales o diferentes: ');
% Matriz de rigidez en coordenadas de piso
Kx=0; Ky=0; Ktt=0; Kxte=0; Kyte=0;
if cod==1
    kais=input ('Rigidez del aislador: ');
    for i=1:nd
        kx(i)=kais; ky(i)=kais; Kx=Kx+kx(i); Ky=Ky+ky(i);
    end
else
    for i=1:nd
        fprintf ('\nIndique la rigidez para el aislador %i',i)
        kx(i)=input ('\nRigidez del aislador: '); Kx=Kx+kx(i);
        ky(i)=kx(i); Ky=Ky+ky(i);
    end
end

```

```

end
contx=0;conty=0;cont=0;
for i=1:nx
    for j=1:ny
        contx=contx+1;ry(contx)=r(i);
    end
end
for i=1:ny
    for j=1:nx
        conty=conty+1;rx(conty)=r(i+nx);
    end
end
for i=1:nx
    for j=1:ny
        cont=cont+1;kxy(i,j)=kx(cont);
    end
end
kyx=kxy';cont=0;
for i=1:ny
    for j=1:nx
        cont=cont+1; ky(cont)=kyx(i,j);
    end
end
for i=1:nd
    Ktt=Ktt+kx(i)*ry(i)*ry(i);Kxte=Kxte+kx(i)*ry(i);
end
for i=1:nd
    Ktt=Ktt+ky(i)*rx(i)*rx(i);Kyte=Kyte+ky(i)*rx(i);
end
KE=zeros(3); KE(1,1)=Kx; KE(2,2)=Ky; KE(1,3)=Kxte; KE(2,3)=Kyte;KE(3,3)=Ktt;
KE(3,1)=KE(1,3); KE(3,2)=KE(2,3);
% Matriz de masas
ij=0;M=0;Jm=0;
for i=1:nx
    for j=1:ny
        ij=ij+1; d(ij)=sqrt(ry(i)*ry(i)+rx(j)*rx(j));
    end
end
fprintf ('\nSi todas las masas son iguales, digite 1, caso contrario 2')
icod= input ('\nIndique el codigo, sobre las masas: ');
if icod==1
    masa=input ('\nIndique la masa sobre el aislador: ');
    for i=1:nd
        m(i)=masa; M=M+m(i); Jm=Jm+m(i)*d(i)*d(i);
    end
else
    for i=1:nd
        fprintf ('\nIndique la masa sobre el aislador %i',i)
        m(i)=input('\nMasa sobre el aislador: ');
        M=M+m(i); Jm=Jm+m(i)*d(i)*d(i);
    end
end
fprintf ('\n Matriz de rigidez en coordenadas de piso')
KE
%Masa=zeros(3); Masa(1,1)=M; Masa(2,2)=M; Masa(3,3)=Jm;

```

```

Masa=zeros(3); Masa(1,1)=M;Masa(2,2)=M;Masa(3,3)=Jm;
fprintf ('\n Matriz de masas en coordenadas de piso')
Masa
[V,D]=eig(KE,Masa);
fprintf ('\n Modos de vibracion')
V
Wn=sqrt(diag(D)); for i=1:3; T(i)=2*pi/Wn(i); end;
fprintf ('\n Frecuencias de vibracion')
Wn
fprintf ('\n Periodos de vibracion')
T
if isismo==1
    JJ(1)=1;JJ(2)=0;JJ(3)=0;JJ=JJ';
    var=2;
else
    JJ(1)=0;JJ(2)=1;JJ(3)=0;JJ=JJ';
    var=1;
end
modo1=V(1:3,1);modo2=V(1:3,2);modo3=V(1:3,3);
L1=(modo1*Masa*JJ)/(modo1*Masa*modo1);L2=(modo2*Masa*JJ)/(modo2*Masa*modo
2);
L3=(modo3*Masa*JJ)/(modo3*Masa*modo3);
fprintf ('\n Factores de participacion modal')
L1
L2
L3
seda= input ('\nIndique el valor de seda con el que desea trabajar: ');
seda=[seda;seda;seda];
C=zeros(3);
[V,D]=eig(KE,Masa); Wn=sqrt(D); W=diag(Wn); Wo=sort(W);
if Wo==W
    for i=1:3
        fi=V(:,i); mi=fi*Masa*fi; aux=2*seda(i)*Wo(i)/mi; C=C+aux.*Masa*fi*fi*Masa;
    end
else
    np=3
    for i=1:np
        Vo(:,i)=V(:,np); i=i+1;np=np-1;
    end
    V=Vo
    for i=1:3
        fi=V(:,i); mi=fi*Masa*fi; aux=2*seda(i)*Wo(i)/mi; C=C+aux.*Masa*fi*fi*Masa;
    end
end
fprintf ('\n Matriz de amortiguamiento')
C
Qo=Masa*JJ*(-1);
[q,v]=pse2(Masa,C,KE,Qo,p,dt,var);
% fuerzas y desplazamientos de histeresis valido para estructuras
% simetricas
if isismo==1
    Cam=C(1,1);rig=KE(1,1);
else
    Cam=C(2,2);rig=KE(2,2);
end

```

```

npuntos=length(p);
for j=1:npuntos-1
    Fuerza(j)=Cam*v(j)+rig*q(j);
end
%plot (q,Fuerza); grid on;
%xlabel ('Desplazamiento en m');
%ylabel ('Fuerza en T');
% fin

function [q,v]=pse2(M,C,K,Qo,p,dt,var)
%
% Procedimiento de Espacio de Estado para sistemas de n grados de libertad
% Programa general en que se requiere la respuesta ante un acelerograma.
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%      CEINCI ESPE
% -----
% [q,v]=pse2(M,C,K,Qo,p,dt,var)
% -----
% M   Matriz de masas.
% C   Matriz de amortiguamiento.
% K   Matriz de rigidez.
% Qo  Coeficiente del vector de cargas que multiplica a la aceleracion
%     del suelo.
% p   Acelerograma para el cual se calcula la respuesta en el tiempo.
%     Previamente el usuario habrá calculado las matrices de masa,
%     amortiguamiento, rigidez, así como el coeficiente Qo.
% F   Matriz de orden 2nx2n
% q   Los n primeros valores corresponden a los desplazamientos y los
%     restantes a las velocidades.
% v   Se encuentra el vector de velocidad
% dt  Incremento de tiempo con el cual se obtiene la respuesta.
% q   Reporta el desplazamiento en la base. EL modelo de Kelly y Pan
%     considera que la estructura se mueve como cuerpo rigido.Luego
%     este desplazamiento es igual al del tope del edificio.
%
ngl=length(K);
% Matriz F
CERO=zeros(ngl,ngl); IDENT=eye(ngl,ngl);MIK=(-1)*inv(M)*K;MIC=(-1)*inv(M)*C;
F=[CERO IDENT; MIK MIC];
% Exponencial de la matriz F multiplicado por dt
A=expm(dt*F);
% Matrices P1 y P2
IDEN=eye(2*ngl,2*ngl); P1=inv(F)*(A-IDEN); P2=inv(F)*((1/dt)*P1-A);
% Vector r de cargas sísmicas
for i=1:ngl; NULO(i)=0; end; MIQ=inv(M)*Qo;
% respuesta en el tiempo
n=length(p);
for i=1:2*ngl; Xk(i)=0;end; Xk=Xk';q=Xk(ngl);
for i=1:n-1
    t(i)=i*dt;
    MCARGA=MIQ*p(i);    MCARGA2=MIQ*p(i+1);rk=[NULO';    MCARGA];rk2=[NULO';
MCARGA2];
    Xk2=A*Xk+P1*rk2+P2*(rk2-rk);

```

```

% Solo almacena la respuesta en el tiempo de la base en el sentido de
% analisis.
q(i)=Xk2(ngl-var); Xk=Xk2; v(i)=Xk2(2*ngl-var);
end
q=q'; t=t'; v=v';
%Dibujo para la respuesta en el tiempo de la base
plot (t,q)
xlabel ('Tiempo (s)'); ylabel ('Desplazamiento de la base');
% ---fin

```

### 4.3 SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Antes de explicar los otros métodos de análisis sísmico, indicado en el apartado 4.1, conviene estudiar el sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan al sistema de aislamiento y a la superestructura, para luego ver las hipótesis que tiene cada uno de los métodos. Pero antes se indica la nomenclatura utilizada para definir los grados de libertad, en la figura 4.5

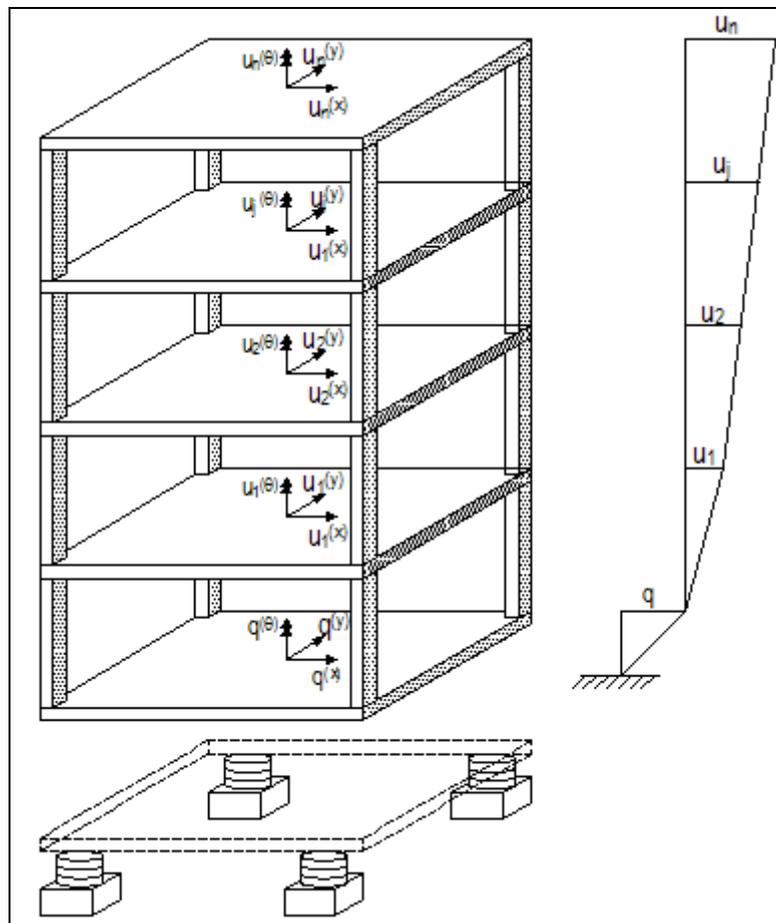


Figura 4.5 Modelo de tres grados de libertad por planta

Los grados de libertad se agrupan en dos vectores que son:  $\mathbf{q}$ , para el sistema de aislamiento y  $\mathbf{u}$  para la superestructura.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q^{(x)} \\ q^{(y)} \\ q^{(\theta)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(x)} \\ \bar{\mathbf{u}}^{(y)} \\ \bar{\mathbf{u}}^{(\theta)} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}}^{(x)} = \begin{bmatrix} u_1^{(x)} \\ u_2^{(x)} \\ \dots \\ u_n^{(x)} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}}^{(y)} = \begin{bmatrix} u_1^{(y)} \\ u_2^{(y)} \\ \dots \\ u_n^{(y)} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}}^{(\theta)} = \begin{bmatrix} u_1^{(\theta)} \\ u_2^{(\theta)} \\ \dots \\ u_n^{(\theta)} \end{bmatrix}$$

Donde  $\bar{\mathbf{u}}^{(x)}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}^{(y)}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}^{(\theta)}$ , son vectores que contienen a los desplazamientos horizontales en sentido X de cada uno de los pisos de la superestructura; desplazamientos horizontales en sentido Y; rotaciones con respecto a un eje perpendicular a la losa, respectivamente. En todos los casos se empieza desde la planta baja hasta el último piso. El significado de los grados de libertad del sistema de aislamiento ya fue indicado en el apartado anterior.

El sistema de ecuaciones diferenciales, está definido por las siguientes ecuaciones, para el sistema de aislamiento y la superestructura, respectivamente.

$$\mathbf{M}^{(t)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} = -\mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g - \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = -\mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \left[ \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g \right] \quad (4.8)$$

Los términos de la ecuación (4.7) ya fueron indicados, resta por tanto indicar el significado de los elementos de (4.8);  $\mathbf{M}^{(s)}$ ,  $\mathbf{C}^{(s)}$  y  $\mathbf{K}^{(s)}$ , son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de la superestructura, con base empotrada;  $\mathbf{r}^{(s)}$  es la matriz de colocación de  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  en los grados de libertad de la estructura.

Al despejar de la ecuación (4.7), el vector de aceleraciones del sistema de aislamiento  $\ddot{\mathbf{q}}$ , se tiene:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g - \mathbf{M}^{(t)-1} \left[ \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} + \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} \right]$$

Al sustituir  $\ddot{\mathbf{q}}$  en ecuación (4.8) se halla luego de simplificar  $\mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g$ , el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \left( \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} + \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} \right) \quad (4.9)$$

Al desarrollar el segundo término de (4.9) se tiene:

$$\mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \left( \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} \right) + \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \left( \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} \right)$$

$$\left( \mathbf{M}^{(s)} - \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \right) \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \left( \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} \right)$$

Se denomina **Matriz de Masa corregida**  $\tilde{\mathbf{M}}^{(s)}$ , a:

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)} - \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \quad (4.10)$$

Luego, el sistema de ecuaciones diferenciales para la superestructura, queda:

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.11)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}^{(t)-1} \left( \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} \right) \quad (4.12)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es el vector de aceleración de la superestructura. Las ecuaciones (4.7) y (4.9) son las que se resuelven en el Método Exacto. Ahora para los Métodos aproximados: Cuasi-Estático y de Masa Corregida, se considera que  $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  en la ecuación (4.7) que implica suponer que la flexibilidad de la superestructura no influye en la respuesta del sistema de aislamiento, especialmente cuando el período de vibración de la superestructura es menor a 1.0 s. Kulkarni y Jangrid (2002).

#### 4.3.1 Matriz de Rigidez $\mathbf{K}^{(s)}$

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(s)}$  de la superestructura, con base empotrada, se obtiene en forma similar a  $\mathbf{K}^{(b)}$  indicado en el apartado 4.2.1. La diferencia se tiene que en lugar de rigidez del aislador se tiene ahora matriz de rigidez lateral del pórtico plano. El formulario de cálculo, para pórticos ortogonales, es el siguiente.

$$\mathbf{K}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{XX} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{X\theta} \\ & \mathbf{K}_{YY} & \mathbf{K}_{Y\theta} \\ & & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_{XX} &= \sum k_{LX}^i & K_{YY} &= \sum k_{LY}^j \\ K_{\theta\theta} &= \sum k_{LX}^i r_{yi}^2 + \sum k_{LY}^j r_{xi}^2 \\ K_{X\theta} &= \sum k_{LX}^i r_{yi} & K_{Y\theta} &= \sum k_{LY}^j r_{xi} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Donde  $k_{LX}^i$  es la matriz de rigidez lateral del pórtico  $i$  en sentido X;  $k_{LY}^j$  es la matriz de rigidez del pórtico  $j$  en sentido Y. Por otra parte  $r_{xi}$  es la distancia en sentido X del pórtico  $j$  al centro de masas;  $r_{yi}$  es la distancia en sentido Y del pórtico  $i$  al centro de masas. Los

valores de  $r_{xi}$ ,  $r_{yi}$  tienen signo, serán positivos si la orientación positiva del pórtico rota con respecto al centro de masas en forma antihorario. Aguiar (2004).

#### 4.3.2 Matriz de Masas $M^{(s)}$

La matriz de masas de la superestructura  $M^{(s)}$ , se evalúa de la siguiente manera:

$$M^{(t)} = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & J \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Las submatrices  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{J}$ , valen:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & m_i & \\ & & & & \dots \\ & & & & & m_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & J_i & \\ & & & & \dots \\ & & & & & J_n \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Donde  $m_i$  es la masa total del piso  $i$ ;  $J_i$  es el momento de inercia de la masa  $m_i$  con respecto al C.M. Para una planta rectangular sin orificios, de dimensiones  $a_i, b_i$  se tiene:

$$J_i = \frac{m_i}{12} (a_i^2 + b_i^2) \quad (4.17)$$

Una vez determinado las matrices de rigidez  $K^{(s)}$  y de masas  $M^{(s)}$  se encuentra la matriz de amortiguamiento  $C^{(s)}$  empleando el algoritmo de Wilson y Penzien. Luego para resolver el problema dinámico falta indicar el vector  $r^{(s)}$  el mismo que depende de la dirección del análisis sísmico. Para análisis en sentido X, se tiene:

$$r^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Donde  $\mathbf{1}$  es el vector unitario de orden NP, siendo NP el número de pisos de la superestructura;  $\mathbf{0}$  es el vector cero de orden NP.

## 4.4 MÉTODO CUASI-ESTÁTICO

En el Método Cuasi-Estático, se considera que la aceleración de la superestructura  $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  con lo que la ecuación (4.7) que define el movimiento del sistema de aislamiento, queda:

$$\mathbf{M}^{(t)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} = -\mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g \quad (4.19)$$

De tal manera que el movimiento del sistema de aislamiento se resuelve en forma dinámica, empleando el Procedimiento de Espacio de Estado o cualquier otro método para encontrar la respuesta  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Por otra parte, la respuesta de la superestructura se halla en forma estática mediante las ecuaciones (4.20) y (4.21)

$$\mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.21)$$

La ecuación (4.20) es la ecuación básica de equilibrio de estructuras estáticas pero aquí se debe calcular en cada incremento de tiempo,  $\mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  que son las fuerzas que actúan en la superestructura en cada piso.

En estos métodos se considera que la masa de la superestructura está rígidamente vinculada al aislamiento, por este motivo se ha calculado  $\mathbf{M}^{(b)}$  como la suma de la masa de la superestructura más la masa del aislamiento. Nótese que en la ecuación (4.19) se tiene  $\mathbf{M}^{(t)}$ .

### 4.4.1 Hipótesis y procedimiento de cálculo

El Método Cuasi-Estático tiene las siguientes hipótesis:

- El sistema de aislamiento de base considera a la superestructura como un cuerpo rígido.
- La superestructura recibe fuerzas laterales que son provenientes de una aceleración generada en base al sistema de aislamiento.

El procedimiento de análisis sísmico, se resume en los siguientes pasos:

1. Se encuentra la respuesta en el tiempo del sistema de aisladores  $\mathbf{q}$ , resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales descrito en (4.19), que se repite a continuación.

$$\mathbf{M}^{(t)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} = -\mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g$$

2. Se halla el vector de aceleración total de la estructura completa como cuerpo rígido  $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}^{(t)-1} (\mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q})$$

3. Se encuentran las fuerzas laterales en cada piso  $\mathbf{F}^{(s)}$

$$\mathbf{F}^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

4. Se obtienen los desplazamientos laterales y giros en el centro de masas de cada piso, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = \mathbf{F}^{(s)}$$

5. Se hallan los desplazamientos laterales en cada pórtico  $\mathbf{d}^{(j)}$ .

$$\mathbf{p}^{(j)} = \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{u} \quad (4.22)$$

Donde  $\mathbf{A}^{(j)}$  es la matriz de compatibilidad de deformaciones entre las coordenadas laterales  $\mathbf{d}^{(j)}$  del pórtico y las coordenadas del centro de masa  $\mathbf{u}$ . La  $j$  representa el pórtico  $j$ . La forma de la matriz  $\mathbf{A}^{(j)}$  es la siguiente:

$$\mathbf{A}^{(j)} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\alpha & & \text{Sen}\alpha & & r_1 & & \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ & & \text{Cos}\alpha & & \text{Sen}\alpha & & \\ & & & & & & r_n \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo que forma la dirección positiva del pórtico  $j$  con el eje de las X.  $r_1$  es la distancia del centro de masas al pórtico  $j$  en el primer piso,  $r_n$  es similar a  $r_1$  pero en el último piso. La matriz  $\mathbf{A}^{(j)}$  tiene NP filas y 3 por NP columnas. Siendo NP el número de pórticos de la estructura. En base a la matriz de compatibilidad de deformaciones, se obtiene la matriz de rigidez de la superestructura  $\mathbf{K}^{(s)}$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}^{(s)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}^{(j)t} \mathbf{K}_L^{(j)} \mathbf{A}^{(j)} \quad (4.24)$$

Siendo  $n$  el número de pórticos de la estructura;  $\mathbf{K}_L^{(j)}$  la matriz de rigidez lateral del pórtico  $j$ . La ecuación (4.13) es un caso particular de  $\mathbf{K}^{(s)}$  y es valida para edificios con pórticos a noventa grados. Al reemplazar (4.23) en (4.24) y luego de efectuar el triple producto matricial se tiene la forma general de  $\mathbf{K}^{(s)}$ .

$$\mathbf{K}^{(s)} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{NP} \text{Cos}^2 \alpha K_L^{(j)} & \sum_{j=1}^{NP} \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha K_L^{(j)} & \sum_{j=1}^{NP} \text{Cos} \alpha K_L^{(j)} r^{(j)} \\ \sum_{j=1}^{NP} \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha K_L^{(j)} & \sum_{j=1}^{NP} \text{Sen}^2 \alpha K_L^{(j)} & \sum_{j=1}^{NP} \text{Sen} \alpha K_L^{(j)} r^{(j)} \\ \sum_{i=1}^{NP} \text{Cos} \alpha K_L^{(j)} r^{(j)} & \sum_{i=1}^{NP} \text{Sen} \alpha K_L^{(j)} r^{(j)} & \sum_{i=1}^{NP} K_L^{(j)} (r^{(j)})^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

## • EJEMPLO 2

Realizar el análisis sísmico de la estructura de un piso indicada en la figura 4.6, ante el sismo de El Centro de 1940, componente N-S, cuyo acelerograma se muestra en la figura 4.7. Todas las columnas son de 30/30 cm., las vigas también son iguales y son de 20/30 cm. Las luces de la estructura son de 5.0 m., y la altura del entrepiso es de 3.0 m.

La carga muerta es  $D = 500 \text{ Kg} / \text{m}^2$ . La carga viva  $L = 200 \text{ Kg} / \text{m}^2$ . El C.M. es colineal entre la losa superior al aislamiento de base y la losa del primer piso. La rigidez de cada aislador es de  $k_b = 20 \text{ T} / \text{m}$ . La masa del aislador más la cimentación es  $m_b = 0.10 \text{ T s}^2 / \text{m}$ . El amortiguamiento del aislador  $\xi_b = 0.10$ .

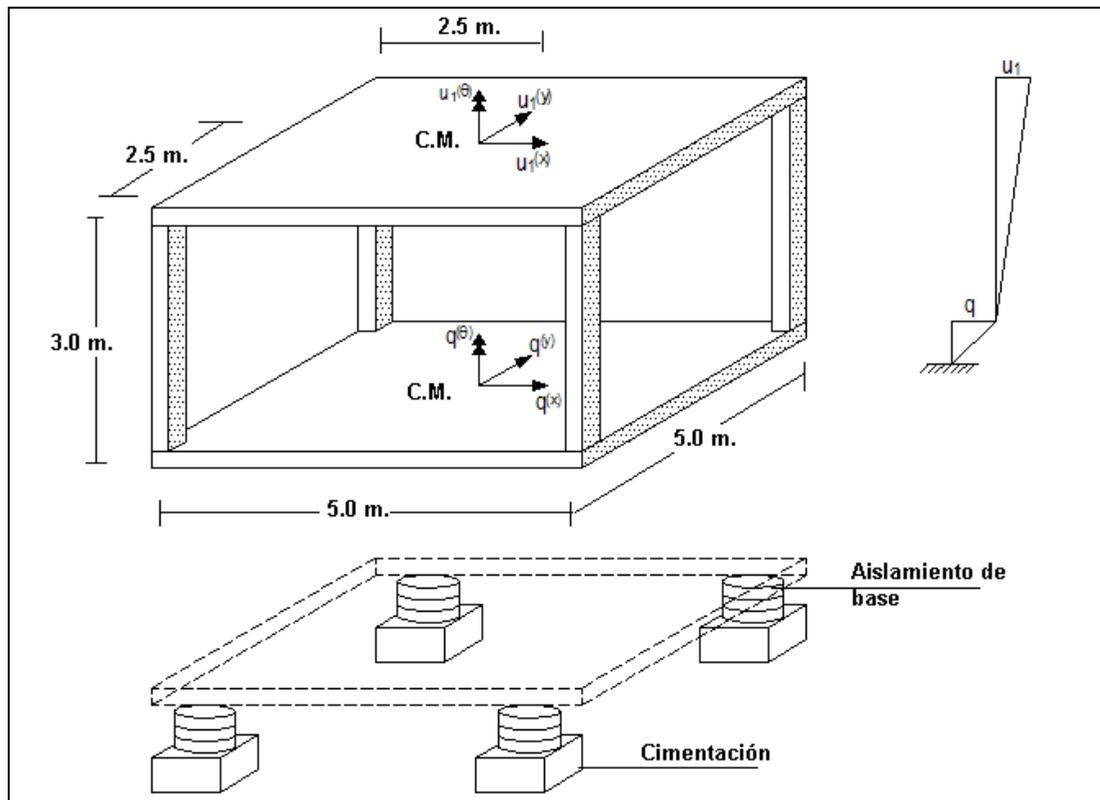
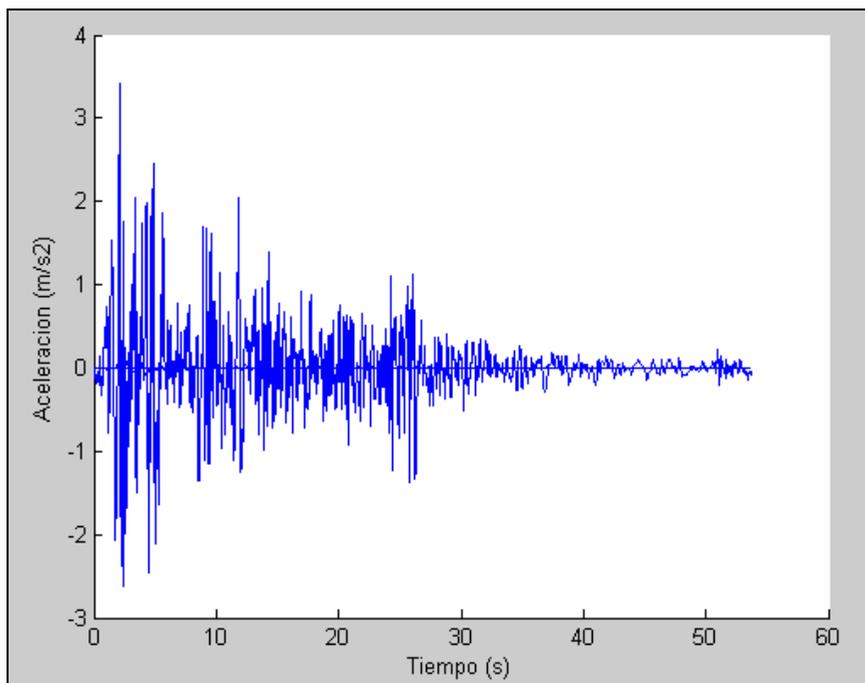


Figura 4.6 Estructura de análisis de ejemplo 2.

## • SOLUCIÓN

Al utilizar el programa **RLAXINFI**, con un módulo de elasticidad del hormigón considerado es  $E = 1738965.21 T/m^2$ . Se halla que la matriz de rigidez lateral de un pórtico vale  $K_L = 554.5 T/m$ . El programa RLAXINFI está descrito en Aguiar (2007,2).

El peso  $D$  del primer piso vale  $D = 0.5 * 25 = 12.5 T$ . La estructura en estudio es una vivienda, luego se tomará el 25% de la carga viva para el análisis sísmico. Por lo tanto,  $L = 0.25 * 0.2 * 25 = 1.25 T$ .



**Figura 4.7** Componente N-S del sismo de El Centro de 1940.

La masa que llega a cada aislador proveniente de la superestructura es el peso total debido a carga muerta más porcentaje de carga viva dividida para la aceleración de la gravedad y dividida para 4 aisladores.  $m_i = (12.5 + 1.25) / 9.8 / 4 = 0.35 T s^2 / m$ . A esta masa se debe añadir la masa de los aisladores más la cimentación que se considera igual a  $0.10 T s^2 / m$ .

La distancia del centro de masas C.M. a cada uno de los pórticos es de 2.5 m., pero tienen signo, para hallar las matrices de rigidez  $K^{(s)}$  y  $K^{(b)}$ . Para explicar los signos en la figura 4.8 se han identificado los pórticos y se ha definido la orientación positiva ya que la distancia será positiva si la orientación positiva del pórtico rota con relación al C.M. en forma antihoraria.

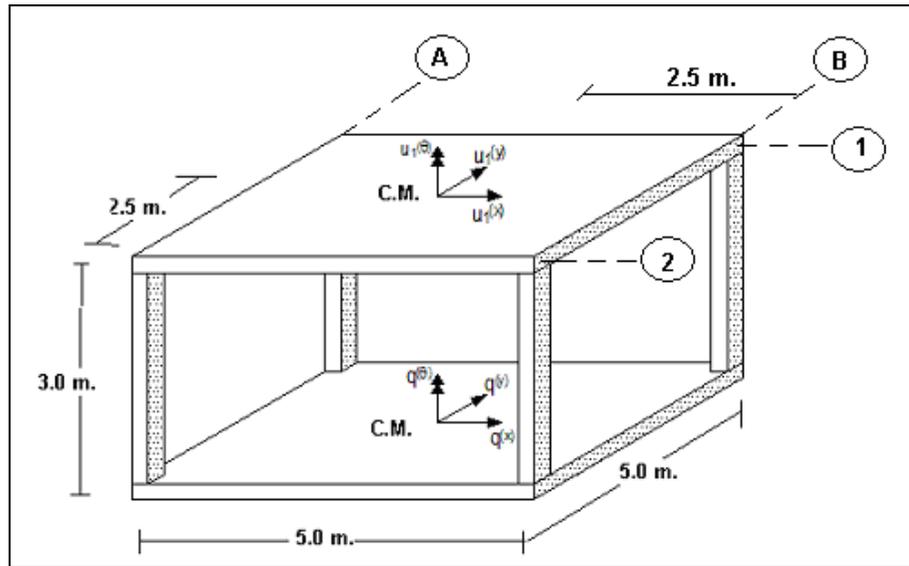


Figura 4.8 Identificación de los pórticos.

Tabla 4.2 Valores  $r$  y  $\alpha$  de los pórticos para hallar la matriz de compatibilidad  $A$ .

Pórtico	Distancia del C.M. al pórtico. $r$	Ángulo $\alpha$
1	-2.5 m.	0
2	2.5 m.	0
A	-2.5 m.	90
B	2.5 m.	90

En la tabla 4.2 se indican los valores del vector  $r$  de cada uno de los pórticos y los valores del ángulo  $\alpha$ , que se mide a partir del eje X hasta la orientación positiva del pórtico. Con estos valores se forma la matriz de compatibilidad  $A$ , ecuación (4.23). Estas son:

$$A^{(1)} = [1 \quad 0 \quad -2.5]$$

$$A^{(2)} = [1 \quad 0 \quad 2.5]$$

$$A^{(A)} = [0 \quad 1 \quad -2.5]$$

$$A^{(B)} = [0 \quad 1 \quad 2.5]$$

La matriz de rigidez de la superestructura  $K^{(s)}$  que se encuentra con la ecuación (4.13) o con la ecuación (4.24) es:

$$K^{(s)} = \begin{bmatrix} 1109 & 0 & 0 \\ 0 & 1109 & 0 \\ 0 & 0 & 13857 \end{bmatrix}$$

La matriz de masa  $M^{(s)}$  para el ejemplo, es:

$$\mathbf{M}^{(s)} = \begin{bmatrix} 1.4031 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4031 & 0 \\ 0 & 0 & 5.8461 \end{bmatrix}$$

Las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema de aislamiento de base, para este ejemplo, son diagonales y valen.

$$\mathbf{M}^{(b)} = \begin{bmatrix} 1.80 & & \\ & 1.80 & \\ & & 22.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{(b)} = \begin{bmatrix} 2.4 & & \\ & 2.4 & \\ & & 21.2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{(b)} = \begin{bmatrix} 80 & & \\ & 80 & \\ & & 500 \end{bmatrix}$$

La respuesta en el tiempo encontrada con el programa **CUASIESTATICO**, en desplazamientos, se presenta en la figura 4.9 para el sistema de aislamiento y para el desplazamiento del primer piso, medidos en el C.M. Nótese que el desplazamiento de la superestructura es muy pequeño en comparación al desplazamiento del sistema de aislamiento.

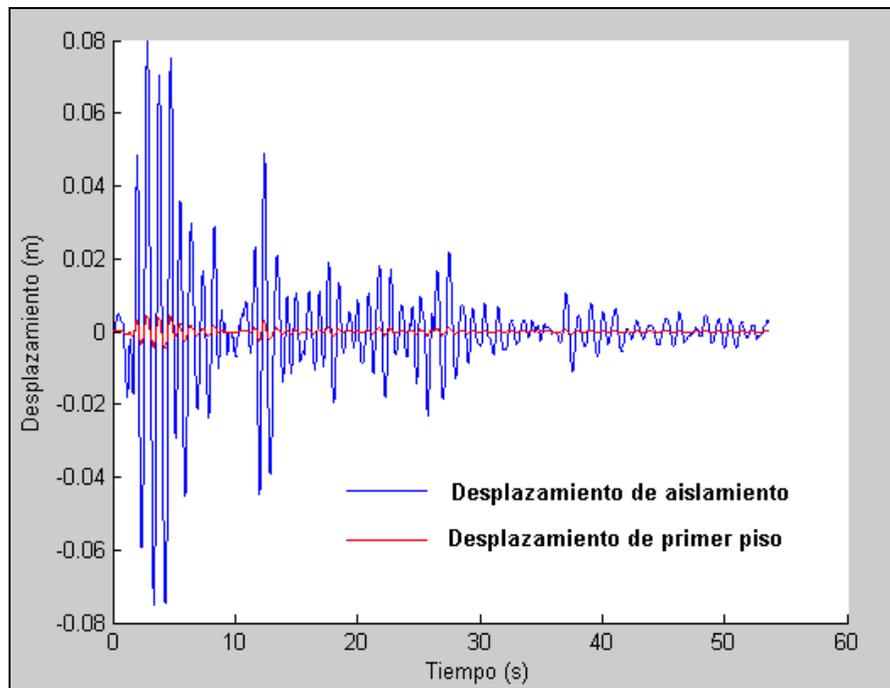


Figura 4.9 Desplazamientos del sistema de aislamiento y del primer piso, en el C.M.

#### 4.4.2 Programa CUASIESTATICO

Los datos de entrada del programa **CUASIESTATICOAISLAMIENTO** son:

>> [NP]=cuasiestaticoaislamiento(NP,Sedabase,Iejes,PesoD,PesoL,CLG,r,Sismo,dt)

- **NP** Número de pisos del edificio.
- **Sedabase** Factor de amortiguamiento de los aisladores de base.
- **lejes** Número de pórticos de la estructura en el sentido de análisis sísmico.
- **PesoD** Vector en el que se indica el peso total de cada uno de los pisos, desde el primer piso al último, debido a carga muerta D.
- **PesoL** Vector en el que se indica el peso de cada planta debido al porcentaje de carga viva L, que se considera en el análisis de acuerdo al uso de la estructura.
- **KLK** Matriz que contiene las matrices de rigidez lateral de cada uno de los pórticos de la estructura.
- **r** Vector que contiene la distancia desde el Centro de Masas a cada pórtico, con signo. Se da un solo dato por pórtico debido a que **el programa CUASIESTATICOAISLAMIENTO contempla que el centro de masas es colineal.**
- **Sismo** Archivo que contiene el acelerograma del sismo que se analiza. Este archivo tiene una sola columna y el número de filas es igual al número de puntos del sismo. Se recomienda que esté en  $m/s^2$ .
- **dt** Incremento de tiempo del acelerograma. La respuesta en el tiempo de la estructura se la obtiene para este incremento de tiempo.

Para el ejemplo 2, se debe proceder de la siguiente manera:

```
>> load c:centro
>> KLG=[554.50; 554.50; 554.50; 554.50]
>> r = [-2.5; 2.5; -2.5; 2.5]
>> [NP]=cuasiestaticoaislamiento(1,0.10,2,12.5,1.25,KLG,r,centro,0.02)
Numero total de porticos de la estructura :4
```

Codigos para analisis sismico: Sentido X=1 Sentido Y=2  
 Ingrese codigo de sentido de analisis sismico :1

Matriz de rigidez con base empotrada  
 KS =

1.0e+004 \*

0.1109	0	0
0	0.1109	0
0	0	1.3863

Matriz de masa con base empotrada  
 MS =

1.4031	0	0
0	1.4031	0
0	0	5.8461

Si los aisladores son circulares e iguales digite 1, caso contrario 2  
 Indique el codigo, sobre si los aisladores son iguales o diferentes: 1  
 Rigidez del aislador: 20

Matriz de rigidez del sistema de aislacion

**KB =**

<b>80</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>80</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>500</b>

**Si todas las masas son iguales, digite 1, caso contrario 2**  
**Indique el codigo, sobre las masas: 1**

**Indique la masa sobre el aislador: 0.45**

**Matriz de masas en coordenadas de piso**

**MB =**

<b>1.8000</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>1.8000</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>22.5000</b>

**Matriz de amortiguamiento del sistema de aislacion**

**CB =**

<b>2.4000</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>2.4000</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>21.2132</b>

Finalmente el programa reporta la historia de desplazamientos del sistema de aislamiento y del último piso de la superestructura. Se puede encontrar la respuesta de desplazamientos de cualquier piso pero para ello el usuario deberá hacer pequeñas modificaciones al programa, que se lista a continuación.

En el programa que se lista a continuación, no está activado el grafico de la respuesta de desplazamientos del último piso y del sistema de aislamiento sino que encuentra la respuesta de desplazamientos de los pórticos exteriores en el último piso y en el primer piso.

**function [NP]=cuasiestaticoaislamiento(NP,sedabase,iejes,pesoD,pesoL,KLG,r,sismo,dt)**

**%**

**% Analisis sismico en el tiempo, espacial de estructuras con aislamiento de base**

**% por el Metodo cuasiestatico, considerando 3 gdl por planta.**

**%**

**% Por: Roberto Aguiar Falconi**

**% CEINCI-ESPE**

**% Marzo-2007**

**% Segunda versión Julio-2007**

**%-----**

**% [NP]=cuasiestaticoaislamiento(NP,sedabase,iejes,pesoD,pesoL,KLG,r,sismo,dt)**

**%-----**

**%**

**% sedabase Factor de amortiguamiento de los aisladores.**

**% iejes # de ejes de columnas en el sentido de analisis sismico.**

**% alt Vector que contine las alturas a cada piso medido desde la base.**

**% pesoD Vector que contiene la carga muerta D de cada piso.**

```

% pesoL Vector que contiene la carga viva L de cada piso.
% KLG Matriz que contiene las matrices de rigidez lateral de todos los
% porticos con inercias gruesas. Primero los de sentido X.
% r Vector que contiene la distancia del portico al centro de masa, de
% cada uno de los porticos, con signo, positivo antihorario. Primero
% se ingresan las distancias a los porticos en sentido X. luego a los
% porticos en sentido Y.
%
% rs Matriz de colocacion de la aceleracion del suelo en gdl superestructura
% rb Vector de colocacion de la aceleracion del suelo en gdl de la base
% sismo Archivo que contiene el acelerograma
% dt Incremento de tiempo del acelerograma
% ace aceleracion total en la superestructura
% F Fuerza estatica que actua en cada piso de la superestructura
% u Vector de desplazamientos laterales de cada piso de la superestructura
% umax Vector que contiene los maximos desplazamientos del ultimo piso
% utot Matriz que contiene los desplazamientos de superestructura en cada
% incremento de tiempo. En las filas estan los incrementos de tiempo.
% p Matriz que contiene la respuesta en el tiempo de cada portico.
% La fila 1 es para el portico 1, la 2 para el 2, etc.
% A Matriz de paso de coordenadas de piso a coordenadas de portico. Las
% primeras filas son para el portico 1 las siguientes para el 2, etc.
% NP Numero de pisos
%
% KS Matriz de rigidez de superestructura en coordenadas de piso.
% MS Matriz de masa de superestructura en coordenadas de piso.
% KB Matriz de rigidez del sistema de aislamiento.
% MB Matriz de masas del sistema de aislamiento.
% CB Matriz de amortiguamiento del sistema de aislamiento.
% qt Matriz que contiene desplazamientos de la base para todos los gdl.
% vt Matriz que contiene velocidades de la base para todos los gdl.
% q Vector que contiene solo historia de desplazamientos de la base.
%
ntot=input('\n Numero total de porticos de la estructura :');
fprintf('\n Codigos para analisis sismico: Sentido X=1 Sentido Y=2');
isismo=input('\n Ingrese codigo de sentido de analisis sismico :');
rs=zeros(3*NP,3);rb=[0;0;0];
if isismo==1;nx=iejes; ny=ntot-nx;rb(1)=1; var=2;for j=1:NP; rs(j,1)=1; end;
else;ny=iejes; nx=ntot-ny;rb(2)=1;var=1;for j=1:NP; rs(j+NP,2)=1; end; end;
%Submatrices de rigidez: KEE, con inercias gruesas
Kxx=zeros(NP,NP);Kyy=zeros(NP,NP);Kteta=zeros(NP,NP);cero=zeros(NP,NP);
Kxt=zeros(NP,NP);Kyt=zeros(NP,NP);for k=1:NP;identidad(k,k)=1;end;
for i=1:ntot
for k=1:NP
rtet(k,k)=r(i);
end
rteta=rtet*rtet;
ji=NP*(i-1)+1;jf=NP*(i-1)+NP;
if i<=nx
Kxx=Kxx+KLG(ji:jf,1:NP);Kxt=Kxt+KLG(ji:jf,1:NP)*rtet;
Kteta=Kteta+KLG(ji:jf,1:NP)*rteta;
A(ji:ji+NP-1,:)=[identidad cero rtet];
else
Kyy=Kyy+KLG(ji:jf,1:NP);Kyt=Kyt+KLG(ji:jf,1:NP)*rtet;
Kteta=Kteta+KLG(ji:jf,1:NP)*rteta;

```

```

    A(ji:ji+NP-1,:)= [cero identidad rtet];
end
end
%Matriz de rigidez espacial con 3 grados de libertad por planta
KS=[Kxx cero Kxt;cero Kyy Kyt;Kxt Kyt Kteta];
fprintf ('\n Matriz de rigidez con base empotrada')
KS
%Matriz de masas de superestructura
disty=abs(r(1))+abs(r(nx));distx=abs(r(nx+1))+abs(r(ntot));
for i=1:NP; masaD(i)=pesoD(i)/9.8; masaL(i)=pesoL(i)/9.8;
mas(i)=masaD(i)+masaL(i);end
masa=zeros(NP,NP);for i=1:NP; masa(i,i)=mas(i);end
mj=zeros(NP,NP);for i=1:NP, mj(i,i)=mas(i)*(distx^2+disty^2)/12;end
MS=[masa cero cero;cero masa cero;cero cero mj];
fprintf ('\n Matriz de masa con base empotrada')
MS
contx=0;conty=0;cont=0;
for i=1:nx
    for j=1:ny
        contx=contx+1;rx(contx)=r(i);
    end
end
for i=1:ny
    for j=1:nx
        conty=conty+1;ry(conty)=r(i+nx);
    end
end
% Matriz de rigidez del sistema de aislamiento en coordenadas de piso
nd=nx*ny;
fprintf ('\nSi los aisladores son circulares e iguales digite 1, caso contrario 2')
cod= input ('\nIndique el codigo, sobre si los aisladores son iguales o diferentes: ');
Kx=0; Ky=0; Kt=0; Kxte=0; Kyte=0;
if cod==1
    kais=input ('Rigidez del aislador: ');
    for i=1:nd
        kx(i)=kais; Kx=Kx+kx(i);
    end
else
    for i=1:nd
        fprintf ('\nIndique la rigidez para el aislador %i',i)
        kx(i)=input ('\nRigidez del aislador: '); Kx=Kx+kx(i);
    end
end
for i=1:nx
    for j=1:ny
        cont=cont+1; kxy(i,j)=kx(cont)
    end
end
kyx=kxy';cont=0;
for i=1:ny
    for j=1:nx
        cont=cont+1; ky(cont)=kyx(i,j); Ky=Ky+ky(cont);
    end
end
for i=1:nd

```

```

    Kt=Kt+kx(i)*rx(i)*rx(i);Kxte=Kxte+kx(i)*rx(i);
end
for i=1:nd
    Kt=Kt+ky(i)*ry(i)*ry(i);Kyte=Kyte+ky(i)*ry(i);
end
KB=zeros(3); KB(1,1)=Kx; KB(2,2)=Ky; KB(1,3)=Kxte; KB(2,3)=Kyte;KB(3,3)=Kt;
KB(3,1)=KB(1,3); KB(3,2)=KB(2,3);
fprintf ('\n Matriz de rigidez del sistema de aislacion')
KB
% Matriz de masas del sistema de aislamiento en coordenadas de piso
ij=0;M=0;Jm=0;
for i=1:nx
    for j=1:ny
        ij=ij+1;d(ij)=sqrt(r(i)*r(i)+r(j+nx)*r(j+nx));
    end
end
fprintf ('\nSi todas las masas son iguales, digite 1, caso contrario 2')
icod= input ('\nIndique el codigo, sobre las masas: ');
if icod==1
    masa=input ('\nIndique la masa sobre el aislador: ');
    for i=1:nd
        m(i)=masa;M=M+m(i);Jm=Jm+m(i)*d(i)*d(i);
    end
else
    for i=1:nd
        fprintf ('\nIndique la masa sobre el aislador %i',i)
        m(i)=input('\nMasa sobre el aislador: ');
        M=M+m(i); Jm=Jm+m(i)*d(i)*d(i);
    end
end
end
MB=zeros(3); MB(1,1)=M;MB(2,2)=M;MB(3,3)=Jm;
fprintf ('\n Matriz de masas en coordenadas de piso')
MB
% Matriz de amortiguamiento del aislamiento en coordenadas de piso
% Tipo Wilson y Penzien (1982)
for i=1:3; zed(i)=sedabase; end;
CB=zeros(3,3);[VV,DD]=eig(KB,MB);WW=sqrt(diag(DD));
% Se ordenan las frecuencias y los modos de vibracion de menor a mayor
[Wwn,JJ]=sort(WW);
for i=1:3; fj(:,i)=VV(:,JJ(i));end
for i=1:3
    fff=fj(:,i);mi=fff*MB*fff; aux=2*zed(i)*Wwn(i)/mi;
    CB=CB+aux.*MB*fff*fff*MB;
end
fprintf ('\n Matriz de amortiguamiento del sistema de aislacion')
CB
fprintf ('\n Tenga paciencia el programa esta corriendo, se demora unos segundos')
% Respuesta en el tiempo de aisladores de base
Qo=MB*rb*(-1);
[qt,vt,q]=pse3(MB,CB,KB,Qo,sismo,dt,var);
npuntos=length(sismo);MBI=inv(MB);
for i=1:npuntos-1;
    t(i)=i*dt;
    for j=1:3
        qpb(j)=vt(i,j);qb(j)=qt(i,j);
    end
end

```

```

end
if i==1
    qpb=qpb';qb=qb';
end
ace=MBI*(CB*qpb+KB*qb);F=MS*rs*ace;u=KS\F;umax(i)=u(NP);
for j=1:3*NP
    utot(i,j)=u(j);
end
end
% Respuestas en porticos extremos, en ultimo piso y en primer piso
for i=1:ntot
    ji=NP*(i-1)+1;jf=NP*(i-1)+NP;a=A(ji:jf,1:3*NP);
    for j=1:npuntos-1;
        for k=1:3*NP;
            dd(k)=utot(j,k);
        end
        dd=dd';p=a*dd;dd=dd';
        if i==1 & isismo==1; p1(j)=p(NP); end
        if i==nx & isismo==1; pnx(j)=p(1); end
        if i==nx+1 & isismo==2; p2(j)=p(NP); end
        if i==ntot & isismo==2; pnt(j)=p(1); end
    end
end
hold on
% Dibujo de respuestas maximas en porticos exteriores en ultimo y 1 piso
if isismo==1
    p1=p1',pnx=pnx';
    subplot (2,1,1);plot(t,p1); ylabel ('Desplazamiento (m)');title('Desplazamiento ultimo
    piso. Portico 1');
    subplot (2,1,2); plot(t,pnx); xlabel ('Tiempo (s)');ylabel ('Desplazamiento (m)');
    title ('Desplazamiento primer piso. Portico Extremo en sentido X');
else
    p2=p2';pnt=pnt';
    subplot (2,1,1);plot (t,p2);ylabel ('Desplazamiento (m)');
    subplot (2,1,2);plot (t,pnt);xlabel ('Tiempo (s)');ylabel ('Desplazamiento (m)');
end
%Dibujo de respuestas maximas de la base y de ultimo piso
%plot (t,q);
%plot (t,umax,'r'); xlabel ('Tiempo (s)'); ylabel ('Desplazamiento (m)');
%---fin

```

#### 4.5 MÉTODO DE MASA CORREGIDA

Únicamente para tener presente las ecuaciones se indica el procedimiento de cálculo a seguir con el Método de Masas Corregidas.

- i. Se halla la matriz de masas corregidas  $\tilde{M}^{(s)}$

$$\tilde{M}^{(s)} = M^{(s)} - M^{(s)} r^{(s)} M^{(t)-1} r^{(s)t} M^{(s)}$$

- ii. Se encuentra la respuesta en el sistema de aislamiento  $q$  y  $\dot{q}$

$$M^{(t)} \ddot{q} + C^{(b)} \dot{q} + K^{(b)} q = -M^{(t)} r^{(b)} \ddot{u}_g$$

Nótese que se ignora la aceleración de la superestructura. Para cada instante de tiempo se hallan los vectores  $q$  y  $\dot{q}$ , empleando el Procedimiento de Espacio de Estado P.E.E., o cualquier otro método de análisis dinámico.

- iii. Se halla el vector de aceleraciones de la superestructura  $\tilde{a}(q, \dot{q})$

$$\tilde{a}(q, \dot{q}) = M^{(t)-1} (C^{(b)} \dot{q} + K^{(b)} q)$$

- iv. Se encuentra la respuesta dinámica en la superestructura, empleando el PEE.

$$\tilde{M}^{(s)} \ddot{u} + C^{(s)} \dot{u} + K^{(s)} u = M^{(s)} r^{(s)} \tilde{a}(q, \dot{q})$$

**function**

**[T1b,T1s,error]=masacorregidaaislamiento(NP,seda,sedabase,iejes,pesoD,pesoL,KLG,r,sismo,dt)**

%

% Analisis sismico en el tiempo, espacial de estructuras con aislamiento de base  
% por el Metodo de la masa corregida, considerando 3 gdl por planta.

%

% Por: Roberto Aguiar Falconi

% CEINCI-ESPE

% Primera Version Julio de 2007

% Segunda Version Agosto de 2008

%-----

%

**[T1b,T1t,T1s,rel,error]=masacorregidaaislamiento(NP,seda,sedabase,iejes,pesoD,pesoL,KLG,r,sismo,dt)**

%-----

%

% rel Relacion entre periodo superestructura con relacion a periodo aislamiento

% seda Factor de amortiguamiento de la superestructura.

% sedabase Factor de amortiguamiento de los aisladores.

% iejes # de ejes de columnas en el sentido de analisis sismico.

% alt Vector que contine las alturas a cada piso medido desde la base.

% pesoD Vector que contiene la carga muerta D de cada piso.

% pesoL Vector que contiene la carga viva L de cada piso.

% KLG Matriz que contiene las matrices de rigidez lateral de todos los

% porticos con inercias gruesas. Primero los de sentido X.

% r Vector que contiene la distancia del portico al centro de masa, de

% cada uno de los porticos, con signo, positivo antihorario.

% rs Matriz de colocacion de la aceleracion del suelo en gdl superestructura

% rb Vector de colocacion de la aceleracion del suelo en gdl de la base

% sismo Archivo que contiene el acelerograma

% dt Incremento de tiempo del acelerograma

% ace aceleracion total en la superestructura

% F Fuerza estatica que actua en cada piso de la superestructura

% u Vector de desplazamientos laterales de cada piso de la superestructura

% umax Vector que contiene los maximos desplazamientos del ultimo piso

```

% utot Matriz que contiene los desplazamientos de superestructura en cada
% incremento de tiempo. En las filas estan los incrementos de tiempo.
% p Matriz que contiene la respuesta en el tiempo de cada portico.
% La fila 1 es para el portico 1, la 2 para el 2, etc.
% A Matriz de paso de coordenadas de piso a coordenadas de portico. Las
% primeras filas son para el portico 1 las siguientes para el 2, etc.
% NP Numero de pisos
%
% KS Matriz de rigidez de superestructura en coordenadas de piso.
% MS Matriz de masa de superestructura en coordenadas de piso.
% MSC Matriz de masa corregida.
% KB Matriz de rigidez del sistema de aislamiento.
% MB Matriz de masas del sistema de aislamiento.
% CB Matriz de amortiguamiento del sistema de aislamiento.
% qt Matriz que contiene desplazamientos de la base para todos los gdl.
% vt Matriz que contiene velocidades de la base para todos los gdl.
% q Vector que contiene solo historia de desplazamientos de la base.
% qs Matriz que contiene desplazamientos de la estructura para los gdl.
% vs Matriz que contiene velocidades de la estructura para todos los gdl
% Son matrices porque cada fila corresponde a un instante de tiempo.
% error Diferencia de desplazamientos en porticos exteriores.
%
ntot=input ('\n Numero total de porticos de la estructura :');
fprintf ('\n Codigos para analisis sismico: Sentido X=1 Sentido Y=2');
isismo=input ('\n Ingrese codigo de sentido de analisis sismico :');
rs=zeros(3*NP,3);rb=[0;0;0];
if isismo==1;nx=iejes; ny=ntot-nx;rb(1)=1; var=2;for j=1:NP; rs(j,1)=1; end;
else;ny=iejes; nx=ntot-ny;rb(2)=1;var=1;for j=1:NP; rs(j+NP,2)=1; end; end;
%Submatrices de rigidez: KEE, con inercias gruesas
Kxx=zeros(NP,NP);Kyy=zeros(NP,NP);Kteta=zeros(NP,NP);cero=zeros(NP,NP);
Kxt=zeros(NP,NP);Kyt=zeros(NP,NP);for k=1:NP;identidad(k,k)=1;end;
for i=1:ntot
    for k=1:NP
        rtet(k,k)=r(i);
    end
    rteta=rtet*rtet; ji=NP*(i-1)+1;jf=NP*(i-1)+NP;
    if i<=nx
        Kxx=Kxx+KLG(ji:jf,1:NP);Kxt=Kxt+KLG(ji:jf,1:NP)*rtet;
        Kteta=Kteta+KLG(ji:jf,1:NP)*rteta;
        A(ji:ji+NP-1,:)=[identidad cero rtet];
    else
        Kyy=Kyy+KLG(ji:jf,1:NP);Kyt=Kyt+KLG(ji:jf,1:NP)*rtet;
        Kteta=Kteta+KLG(ji:jf,1:NP)*rteta;
        A(ji:ji+NP-1,:)=[cero identidad rtet];
    end
end
end
%Matriz de rigidez espacial con 3 grados de libertad por planta
KS=[Kxx cero Kxt;cero Kyy Kyt;Kxt Kyt Kteta];
fprintf ('\n Matriz de rigidez con base empotrada')
KS
%Matriz de masas de superestructura
masatotal=0;disty=abs(r(1))+abs(r(nx));distx=abs(r(nx+1))+abs(r(ntot));
for i=1:NP; masaD(i)=pesoD(i)/9.8; masaL(i)=pesoL(i)/9.8;
mas(i)=masaD(i)+masaL(i); masatotal=masatotal+mas(i);end
masa=zeros(NP,NP);for i=1:NP; masa(i,i)=mas(i);end

```

```

mj=zeros(NP,NP);for i=1:NP, mj(i,i)=mas(i)*(distx^2+disty^2)/12;end
MS=[masa cero cero;cero masa cero;cero cero mj];
fprintf ('\n Matriz de masa con base empotrada')
MS
% Matriz de amortiguamiento, tipo Wilson y Penzien (1982)
for i=1:3*NP; zeda(i)=seda; end;zeda=zeda';
CS=zeros(3*NP,3*NP);[V,D]=eig(KS,MS);W=sqrt(diag(D));
% Se ordenan las frecuencias y los modos de vibracion de menor a mayor
[Wn,II]=sort(W); for i=1:3*NP; fi(:,i)=V(:,II(i));end;T1s=2*pi/Wn(1);
for i=1:3*NP
    ff=fi(:,i);mi=ff*MS*ff;aux=2*zeda(i)*Wn(i)/mi; CS=CS+aux.*MS*ff*ff*MS;
end
fprintf ('\n Matriz de amortiguamiento con base empotrada')
CS
contx=0;conty=0;cont=0;
for i=1:nx
    for j=1:ny
        contx=contx+1;rx(contx)=r(i);
    end
end
for i=1:ny
    for j=1:nx
        conty=conty+1;ry(conty)=r(i+nx);
    end
end
% Matriz de rigidez del sistema de aislamiento en coordenadas de piso
nd=nx*ny;
fprintf ('\nSi los aisladores son circulares e iguales digite 1, caso contrario 2')
cod= input ('\nIndique el codigo, sobre si los aisladores son iguales o diferentes: ');
Kx=0; Ky=0; Kt=0; Kxte=0; Kyte=0;
if cod==1
    kais=input ('Rigidez del aislador: ');
    for i=1:nd
        kx(i)=kais; Kx=Kx+kx(i);
    end
else
    for i=1:nd
        fprintf ('\nIndique la rigidez para el aislador %i',i)
        kx(i)=input ('\nRigidez del aislador: '); Kx=Kx+kx(i);
    end
end
for i=1:nx
    for j=1:ny
        cont=cont+1; kxy(i,j)=kx(cont);
    end
end
kyx=kxy';cont=0;
for i=1:ny
    for j=1:nx
        cont=cont+1; ky(cont)=kyx(i,j); Ky=Ky+ky(cont);
    end
end
for i=1:nd
    Kt=Kt+kx(i)*rx(i)*rx(i);Kxte=Kxte+kx(i)*rx(i);
end
end

```

```

for i=1:nd
    Kt=Kt+ky(i)*ry(i)*ry(i);Kyte=Kyte+ky(i)*ry(i);
end
KB=zeros(3); KB(1,1)=Kx; KB(2,2)=Ky; KB(1,3)=Kxte; KB(2,3)=Kyte;KB(3,3)=Kt;
KB(3,1)=KB(1,3); KB(3,2)=KB(2,3);
fprintf ('\n Matriz de rigidez del sistema de aislacion')
KB
% Matriz de masas del sistema de aislamiento en coordenadas de piso
ij=0;M=0;Jm=0; masa=masatotal*1.1/nd;
for i=1:nx
    for j=1:ny
        ij=ij+1;d(ij)=sqrt(r(i)*r(i)+r(j+nx)*r(j+nx));
    end
end
fprintf ('\nSi todas las masas son iguales, digite 1, caso contrario 2')
icod= input ('\n Indique el codigo, sobre las masas: ');
if icod==1
    for i=1:nd
        m(i)=masa;M=M+m(i);Jm=Jm+m(i)*d(i)*d(i);
    end
else
    for i=1:nd
        fprintf ('\nIndique la masa sobre el aislador %i',i)
        m(i)=input('\nMasa sobre el aislador: ');
        M=M+m(i); Jm=Jm+m(i)*d(i)*d(i);
    end
end
end
MB=zeros(3); MB(1,1)=M;MB(2,2)=M;MB(3,3)=Jm;
fprintf ('\n Matriz de masas en coordenadas de piso')
MB
fprintf ('\n Si desea obtener el grafico del comportamiento de la estructura en un cierto
intervalo de tiempo digite 1,')
fprintf ('\n caso contrario digite 2');
intervalo=input ('\n Ingrese el codigo de intervalo de analisis sismico :');
if intervalo==1
    inf=input ('\n Ingrese el limite inferior (segundos) :');
    ii=inf/dt;
    sup=input ('\n Ingrese el limite superior (segundos) :');
    jj=sup/dt;
end
% Matriz de amortiguamiento del aislamiento en coordenadas de piso
% Tipo Wilson y Penzien (1982)
for i=1:3; zed(i)=sedabase; end;
CB=zeros(3,3);[VV,DD]=eig(KB,MB);WW=sqrt(diag(DD));
% Se ordenan las frecuencias y los modos de vibracion de menor a mayor
[Wwn,JJ]=sort(WW); for i=1:3; fj(:,i)=VV(:,JJ(i));end; T1b=2*pi/Wwn(1);rel=T1s/T1b;
T1s=2*pi/Wwn(3);
for i=1:3
    fff=fj(:,i);mi=fff*MB*fff; aux=2*zed(i)*Wwn(i)/mi;
    CB=CB+aux.*MB*fff*fff*MB;
end
fprintf ('\n Matriz de amortiguamiento del sistema de aislacion')
CB
fprintf ('\n Tenga paciencia el programa esta en aislamiento de base, se demora unos
segundos')

```

```

% Respuesta en el tiempo de aisladores de base
Qo=MB*rb*(-1);
[qt,vt,q]=pse3(MB,CB,KB,Qo,sismo,dt,var);
% Calculo de desplazamientos en porticos extremos de sistema de aislacion
d1=input ('\n Ingrese distancia del CM al portico debil con signo ')
d2=input ('\n Ingrese distancia del CM al portico fuerte con signo ')
adebil= [1 0 d1]; afuerte=[1 0 d2]; d3=abs(d1)+abs(d2);
% Correccion de masa
npuntos=length(sismo);MBI=inv(MB);MBBI=inv(MB');
MSC=MS-MS*rs*MBBI*rs*MS; MSSC=zeros(3*NP,3*NP); for i=1:3*NP; MSSC(i,i)=MSC(i,i);
end
for i=1:npuntos-1;
    tt(i)=i*dt; qcm(i)=qt(i,1); qcteta(i)=qt(i,3)*d3;
    for j=1:3
        qpb(j)=vt(i,j);qb(j)=qt(i,j);
    end
    if i==1
        qpb=qpb';qb=qb';
    end
    p1b(i)=afuerte*qb; pnxb(i)=adebil*qb; ac=MBBI*(CB*qpb+KB*qb);
    if isismo==1; acelera(i)=ac(1); else; acelera(i)=ac(2); end
end
fprintf ('\n Tenga paciencia el programa esta en la estructura, se demora unos segundos')
% Respuesta en el tiempo de superestructura.
Qo=MS*rs;
if isismo==1; Qs=Qo(:,1); else; Qs=Qo(:,2); end
[qs,vs,qq]=pse3(MSSC,CS,KS,Qs,acelera,dt,var);
% Respuestas en porticos extremos, en ultimo piso en porticos extremos
for i=1:ntot
    ji=NP*(i-1)+1;jf=NP*(i-1)+NP;a=A(ji:jf,1:3*NP);
    for j=1:npuntos-2;
        t(j)=j*dt;
        for k=1:3*NP;
            dd(k)=qs(j,k);
        end
        dd=dd';p=a*dd;dd=dd';
        if i==1 & isismo==1; p1(j)=p(NP); end
        if i==nx & isismo==1; pnx(j)=p(NP); end
        if i==nx+1 & isismo==2; p2(j)=p(NP); end
        if i==ntot & isismo==2; pnt(j)=p(NP); end
    end
end
suma=0; icont=0;
for j=1:npuntos-2;
    if isismo==1
        if abs(p1(j)) <= 0.00001 | abs ( pnx(j)) <= 0.00001
            continue
        else
            icont=icont+1;ttt(icont)=icont*dt; if abs(p1(icont)/pnx(icont))>= 100;continue; else;
            rx(icont)=p1(icont)/pnx(icont);
            suma=suma+(1.0-rx(icont))*(1.0-rx(icont));
        end
    end
else
    ry(j)=p2(j)/pnt(j);suma=suma+(1.0-ry(j))*(1.0-ry(j));
end

```

```

end
end
error =sqrt(suma/icont); hold on;
% Determinacion de intervalos y dibujo de respuestas maximas de
% desplazamiento (m) en el ultimo piso
if intervalo==1
    if isismo==1
        for n=1:jj-ii
            tint(n)=t(ii); p1int(n)=p1(ii); pnxint(n)=pnx(ii); ii=ii+1;
        end
        %p1int=p1int';pnxint=pnxint';
        %plot (tint,p1int); plot(tint,pnxint,':'); xlabel ('Tiempo (s)');ylabel ('Desplazamiento
(m)');
        title ('Desplazamiento ultimo piso. Portico Extremo en sentido X');
    else
        for n=1:jj-ii
            tint(n)=t(ii); p2int(n)=p2(ii); pntint(n)=pnt(ii); ii=ii+1;
        end
        p2int=p2int';pntint=pntint';
        subplot (2,1,1);plot(tint,p2int); ylabel ('Desplazamiento (m)');title('Desplazamiento
ultimo piso. Portico 1');
        subplot (2,1,2); plot(tint,pntint); xlabel ('Tiempo (s)');ylabel ('Desplazamiento (m)');
        title ('Desplazamiento ultimo piso. Portico Extremo en sentido Y');
    end
end
else
    if isismo==1
        %p1=p1';pnx=pnx'; plot(t,p1); plot(t,pnx,':'); ylabel ('Desplazamiento (m)');
        %xlabel ('Tiempo (s)'); title('Desplazamiento ultimo piso. Porticos exteriores');
        %ttt=ttt';rx=rx'; plot(ttt,rx)
        p1b=p1b'; pnxb=pnxb'; qcm=qcm'; qcteta=qcteta';
        %plot(tt,qcteta); plot (tt,qcm,'--')
        %ylabel ('Desplazamiento (m)'); xlabel ('Tiempo (s)')
    else
        p2=p2';pnt=pnt'; plot(t,p2); plot(t,pnt,':'); ylabel ('Desplazamiento (m)');
        xlabel ('Tiempo (s)'); title('Desplazamiento ultimo piso. Porticos exteriores');
    end
end
end
q1fuerte= max(abs(p1b))
q2debil=max(abs(pnxb))
q3cm= max(abs(qcm))
%Dibujode respuestas maximas de la base y de ultimo piso
plot (tt,q); plot (t,p1,'r'); xlabel ('Tiempo (s)'); ylabel('Desplazamiento (m)');
%---fin

```

## 4.6 SOLUCIÓN EXÁCTA

Al comportarse en el rango elástico el sistema de aislamiento, el sistema de ecuaciones diferenciales ( 4.7 ) puede descomponerse en dos problemas, a saber:

$$\mathbf{M}^{(t)} \ddot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q}_b = -\mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g \quad (4.26)$$

$$\mathbf{M}^{(t)} \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q}_s = -\mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} \quad (4.27)$$

Siendo  $\mathbf{q}_b$  y  $\mathbf{q}_s$  la solución de los sistemas de ecuaciones ( 4.26 ) y ( 4.27 ) respectivamente. De tal manera que el vector  $\mathbf{q}$  es igual a la suma de estos dos vectores.

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_b + \mathbf{q}_s \quad (4.28)$$

El procedimiento propuesto para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acoplado ( 4.7 ) y ( 4.11 ). Es el siguiente:

- i. Se resuelve ( 4.26 ) y se hallan los vector  $\mathbf{q}_b$  y  $\dot{\mathbf{q}}_b$  empleando el PEE.
- ii. En base a  $\mathbf{q}_b$  y  $\dot{\mathbf{q}}_b$  se encuentra el vector  $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_b, \dot{\mathbf{q}}_b)$

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_b, \dot{\mathbf{q}}_b) = \mathbf{M}^{(t)-1} \left( \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q}_b \right)$$

- iii. Se halla la respuesta en la superestructura  $\mathbf{u}$  y  $\dot{\mathbf{u}}$  empleando el PEE, en:

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_b, \dot{\mathbf{q}}_b)$$

- iv. Se encuentra el vector de aceleraciones de la superestructura  $\ddot{\mathbf{u}}$ , a partir de la ecuación diferencial de paso iii.

$$\ddot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{M}}^{(s)-1} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_b, \dot{\mathbf{q}}_b) - \tilde{\mathbf{M}}^{(s)-1} \left( \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} \right)$$

- v. Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales ( 4.27 ) y se halla  $\mathbf{q}_s$  empleando el PEE.
- vi. Una vez conocidos  $\mathbf{q}_b$  y  $\mathbf{q}_s$  se obtiene el vector  $\mathbf{q}$  mediante la ecuación ( 4.28 ).

Este momento se tiene el vector  $\mathbf{q}$  en el sistema de aislamiento y el vector  $\mathbf{u}$  en la superestructura con lo que se termina la primera iteración. A partir de este instante el procedimiento de cálculo se repite en forma cíclica hasta lograr que las respuestas tanto del sistema de aislamiento como de la superestructura en un ciclo n sean parecidas a las del ciclo anterior.

- vii. Se determina la aceleración de la superestructura  $\ddot{\mathbf{u}}$ .

$$\ddot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{M}}^{(s)-1} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \left( \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} \right) - \tilde{\mathbf{M}}^{(s)-1} \left( \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} \right)$$

- viii. Se halla la respuesta en la superestructura  $\mathbf{u}$  y  $\dot{\mathbf{u}}$  empleando el PEE.

$$\mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \left( \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} + \mathbf{r}^{(s)t} \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}} \right)$$

- ix. Se obtiene la aceleración en la superestructura  $\ddot{u}_s$  pero únicamente con los vectores  $u$  y  $\dot{u}$ , ya que se va a determinar  $q_s$  en el sistema de aislamiento.

$$\ddot{u} = -\tilde{M}^{(s)-1} (C^{(s)} \dot{u} + K^{(s)} u)$$

- x. Se encuentra  $q_s$  aplicando el PEE en:

$$M^{(t)} \ddot{q}_s + C^{(b)} \dot{q}_s + K^{(b)} q_s = -r^{(s)t} M^{(s)} \ddot{u}$$

- xi. Se halla el vector  $q$  en el sistema de aislamiento empleando (4.28)

El vector  $q_b$  se determina una sola vez, en el primer paso. Lo que se obtiene en los ciclos posteriores es el vector  $q_s$ . Si la respuesta tanto del sistema de aislamiento  $q$  como de la superestructura  $u$  no son parecidas a las del ciclo anterior se repite el procedimiento desde el paso vii.

### • EJEMPLO 3

Se analiza la estructura de tres pisos del ejemplo 1, ante la componente N-S del sismo de El Centro de 1940, si este actúa en el sentido X. En la figura 4.10 se indica la distribución en planta. La altura de los entrepisos es de 3.0 m. Se encuentra sobre aisladores de goma sin núcleo de plomo. El factor de amortiguamiento de la superestructura es  $\xi^{(s)} = 0.05$  y de los aisladores  $\xi^{(b)} = 0.10$ .

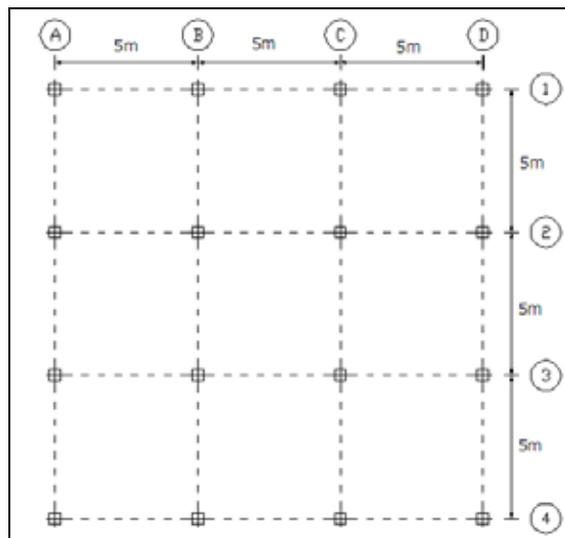


Figura 4.10 Distribución en planta de estructura analizada, de tres pisos.

La carga muerta en el primer piso es de  $580 \text{ kg/m}^2$ , en el segundo de  $540 \text{ kg/m}^2$  y en el tercero de  $500 \text{ kg/m}^2$ . La carga viva es de  $200 \text{ kg/m}^2$ . Para el análisis sísmico se considera el

25% de la carga viva. En la tabla 4.3 se indican los pesos totales que se consideran para el análisis sísmico y las dimensiones de columnas y vigas. En la tabla 4.1 se indicó la geometría y rigidez de los aisladores de base.

**Tabla 4.3** Dimensiones de columnas, vigas y pesos para el análisis sísmico

Piso	Ejes de columnas				Vigas (cm.)	Peso Total D	% de Carga L
	1	2	3	4			
1	30/30	35/35	35/35	30/30	25/30	130.5 T.	11.25 T.
2	30/30	35/35	35/35	30/30	25/30	121.5 T.	11.25 T.
3	30/30	35/35	35/35	30/30	25/30	112.5 T	11.25 T.

## • SOLUCIÓN

Las matrices de rigidez lateral que se obtienen en los diferentes pórticos se indican a continuación. Se consideró  $E = 1738965.21 T / m$ .

$$K_L^A = K_L^B = K_L^C = K_L^D = \begin{bmatrix} 5080.3 & -2888.8 & 628.4 \\ -2888.8 & 3895.0 & -1791.0 \\ 628.4 & -1791.0 & 1275.3 \end{bmatrix}$$

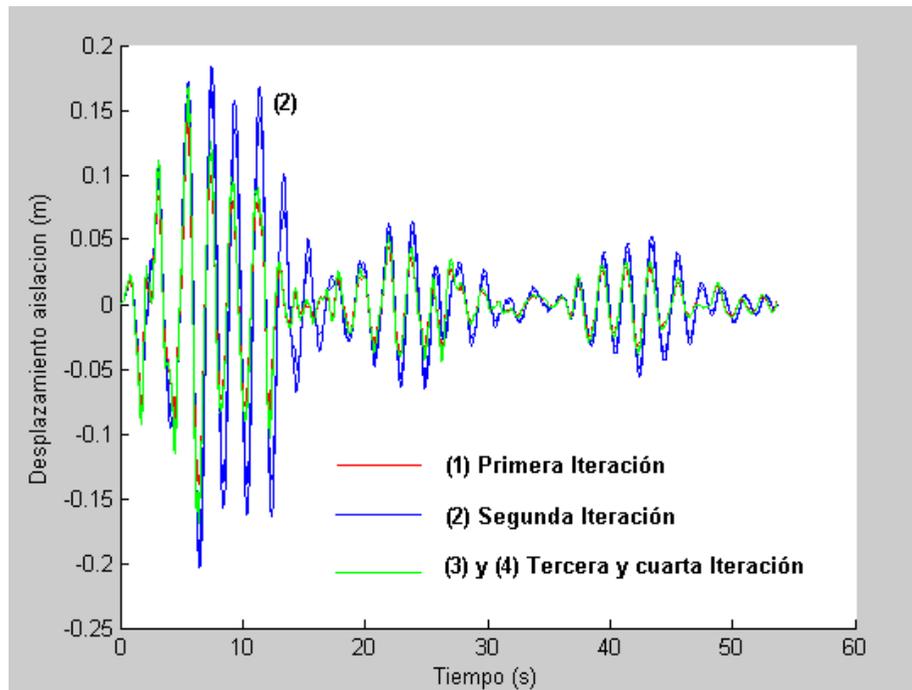
$$K_L^1 = K_L^4 = \begin{bmatrix} 3624.0 & -2038.2 & 409.3 \\ -2038.2 & 2891.2 & -1353.9 \\ 409.3 & -1353.9 & 1012.1 \end{bmatrix}$$

$$K_L^2 = K_L^3 = \begin{bmatrix} 6484.9 & -3706.8 & 844.7 \\ -3706.8 & 4751.6 & -2132.6 \\ 844.7 & -2132.6 & 1451.5 \end{bmatrix}$$

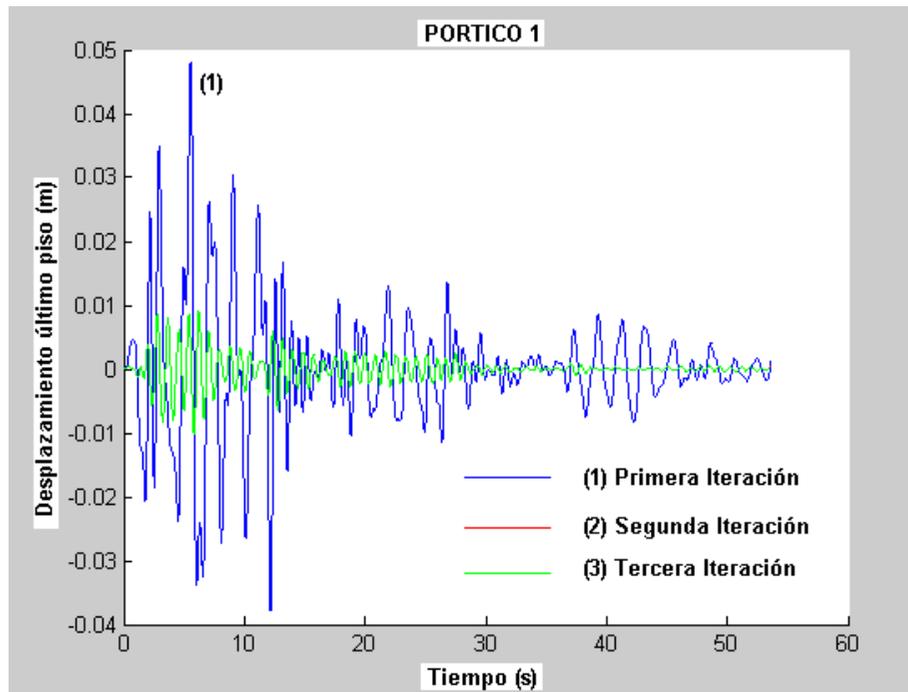
Con estas matrices de rigidez lateral se halla la matriz de rigidez de la superestructura, en coordenadas de piso  $K^{(s)}$  que es de 9 por 9. Las matrices de masa y de amortiguamiento de la superestructura son del mismo orden. En el ejemplo 1, se indicó las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento para el aislamiento de base.

En la figura 4.11 se presenta la respuesta en el tiempo del sistema de aislamiento en sentido X. Se aprecia que únicamente en la segunda iteración la respuesta es diferente a la que se obtiene en las iteraciones (1), (3) y (4). Las respuestas para las iteraciones (3) y (4) son prácticamente las mismas, por lo que con cuatro iteraciones se finaliza el análisis.

En la figura 4.12, se presenta la respuesta de desplazamientos en el tercer piso del pórtico 1 y se aprecia que las respuestas de las iteraciones (2) y (3), son prácticamente las mismas. Nótese que la respuesta de la primera iteración reporta resultados muy altos.



**Figura 4.11** Respuesta del sistema de aislamiento en cuatro iteraciones.



**Figura 4.12** Desplazamiento horizontal de tercer piso en las tres primeras iteraciones.

#### • EJEMPLO 4

Comparar las respuestas en el tiempo que se obtienen con los métodos: Cuasi-Estático, Masa Corregida y Solución Exacta de la estructura del ejemplo tres. Comparar historia

de desplazamientos horizontales en el C.M., para el sistema de aislamiento y en el último piso del pórtico 1.

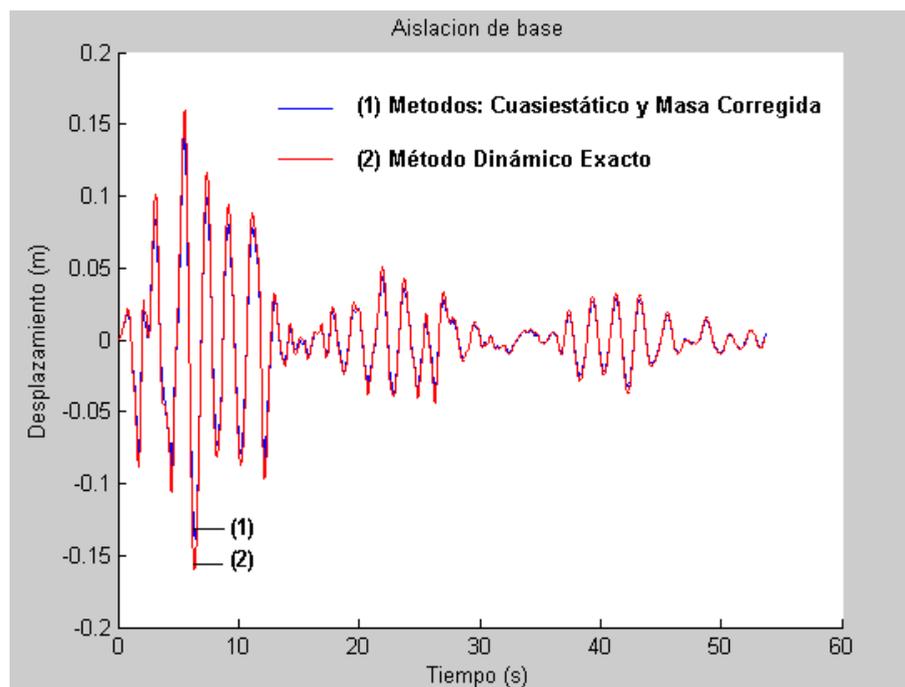
## • SOLUCIÓN

En la figura 4.13 se compara la respuesta en el tiempo del sistema de aislamiento, con los tres métodos. En realidad para el sistema de aislamiento son solo dos ya que para el Método Cuasi estático y de Masa Corregida, el procedimiento de solución para el sistema de base, es el mismo.

Se aprecia que el Método Dinámico Exacto reporta valores ligeramente superiores para cuando se tienen las respuestas máximas que están entre los 3 a 8 segundos y después los tres métodos presentan resultados muy similares.

En la superestructura no sucede lo mismo, como se puede observar en la figura 4.14 en que se indica la respuesta de desplazamientos del tercer piso del pórtico 1. Se aprecia que con el Método de Masa Corregida se tienen las mayores respuestas y lo contrario sucede con el Método Dinámico Exacto. El Método Cuasi-estático presenta valores intermedios.

Lo importante es notar que en la superestructura las respuestas que se hallan con los diferentes métodos son diferentes.



**Figura 4.13** Respuestas en sistema de aislamiento, en el C.M., con los tres métodos.

La relación entre el período de vibración de la superestructura con relación al período de vibración del sistema de aislamiento de base, de la estructura analizada es 0.222. Es importante tener en cuenta esta relación ya que para relaciones menores a 0.4; la aproximación entre los métodos es bastante buena. Según (2007).

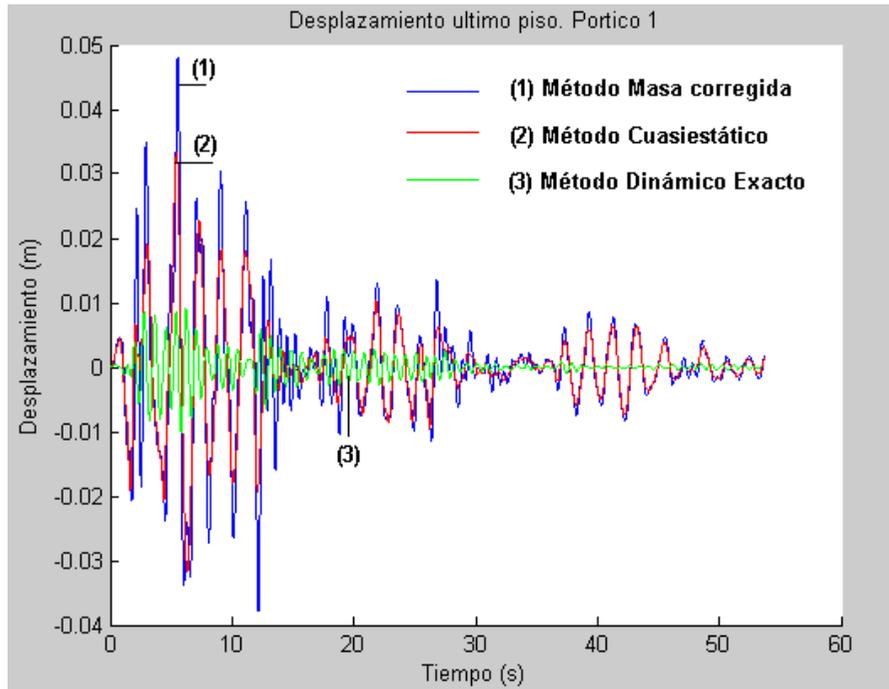


Figura 4.14 Respuesta en tercer piso de pórtico 1 con los tres métodos.

## 4.7 MÉTODO MODAL ESPECTRAL

Para aplicar el **Método Modal Espectral**, **MME** se considera que el modelo es lineal, esto es una aproximación, ya que los aisladores tienen comportamiento no lineal, la superestructura es la que tiene comportamiento lineal, debido a que sus desplazamientos laterales son bajos.

Por otra parte, se considera  $\ddot{u} = 0$  en el sistema de aislación, esto implica suponer que la aceleración de la superestructura en el movimiento del sistema de aislación es nulo. Hipótesis bastante aceptada debido a los pequeños desplazamientos laterales de la superestructura, con esta aproximación la ecuación diferencial para el aislamiento de base queda:

$$M^{(t)} \ddot{q} + C^{(b)} \dot{q} + K^{(b)} q = -M^{(t)} r^{(b)} \ddot{u}_g$$

Es en esta ecuación donde se aplica el MME. Se resume a continuación el cálculo únicamente del vector  $q$ . Para ello se realiza el siguiente cambio de coordenadas con el objeto de desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$q = \Phi X \quad (4.29)$$

Donde  $\Phi$  la matriz modal, conformada por cada uno de los modos de vibración de la estructura;  $X$  el vector de desplazamientos y giro del sistema de aislamiento, en el nuevo sistema de coordenadas.

$$\Phi = [\phi^{(1)} \quad \phi^{(2)} \quad \phi^{(3)}] \quad (4.30)$$

Siendo  $\phi^{(1)}$  el primer modo de vibración el sistema de aislamiento,  $\phi^{(2)}$  el segundo modo de vibración y  $\phi^{(3)}$  el tercer modo de vibración. Solo se tienen tres modos de vibración ya que el sistema de aislamiento tiene tres grados de libertad. En las coordenadas  $X$  el sistema de ecuaciones diferenciales está desacoplado, por esta razón se suele denominar a este sistema como coordenadas principales. En este nuevo sistema de coordenadas se tiene:

$$M^* \ddot{X} + C^* \dot{X} + K^* X = Q^* \quad (4.31)$$

De la Dinámica de Estructuras, se conoce que:

$$\begin{aligned} M^* &= \Phi^t M^{(t)} \Phi & C^* &= \Phi^t C^{(b)} \Phi \\ K^* &= \Phi^t K^{(b)} \Phi & Q^* &= \Phi^t Q^{(b)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para el caso que se está analizando que tiene tres grados de libertad, estas matrices, son:

$$M^* = \begin{bmatrix} \eta & & \\ & \eta & \\ & & \eta \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$C^* = 2 \xi^{(b)} \eta \begin{bmatrix} W_{n1} & & \\ & W_{n2} & \\ & & W_{n3} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$K^* = \eta \begin{bmatrix} W_{n1}^2 & & \\ & W_{n2}^2 & \\ & & W_{n3}^2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\phi^{(i)t} M^{(t)} \phi^{(i)} = \eta \quad (4.36)$$

Donde  $W_{n1}, W_{n2}, W_{n3}$ , son las frecuencias naturales de vibración de los tres modos de vibración  $\xi^{(b)}$  es el factor de amortiguamiento del aislamiento, que se considera igual en todos los modos. Los vectores de cargas generalizadas  $Q^{(b)}$  y  $Q^*$  valen:

$$Q^{(b)} = -M^{(t)} r^{(b)} \ddot{U}_g$$

$$\mathbf{Q}^* = - \begin{bmatrix} \phi^{(1)t} \\ \phi^{(2)t} \\ \phi^{(3)t} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (4.37)$$

De tal manera que el sistema de ecuaciones diferenciales, en coordenadas principales resulta:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \eta \\ \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + 2 \xi^{(b)} \eta \begin{bmatrix} W_{n1} \\ W_{n2} \\ W_{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} W_{n1}^2 \\ W_{n2}^2 \\ W_{n3}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = - \mathbf{Q}^* \quad (4.38)$$

La ecuación diferencial de la fila  $i$ , del sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado en coordenadas principales, es:

$$\eta \ddot{x}_i + 2 \xi^{(b)} \eta W_{ni} \dot{x}_i + \eta W_{ni}^2 x_i = -\phi^{(i)t} \mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{U}}_g \quad \text{Para } i=1,2,3$$

Al dividir todo para  $\eta$  se tiene:

$$\ddot{x}_i + 2 \xi^{(b)} W_{ni} \dot{x}_i + W_{ni}^2 x_i = -\frac{\phi^{(i)t} \mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)}}{\eta} \ddot{\mathbf{U}}_g$$

Se denomina factor de participación modal  $\gamma_i^{(b)}$  a:

$$\gamma_i^{(b)} = \frac{\phi^{(i)t} \mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)}}{\eta} = \frac{\phi^{(i)t} \mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)}}{\phi^{(i)t} \mathbf{M}^{(t)} \phi^{(i)}} \quad (4.39)$$

$$\ddot{x}_i + 2 \xi^{(b)} W_{ni} \dot{x}_i + W_{ni}^2 x_i = -\gamma_i^{(b)} \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (4.40)$$

La expresión ( 4.40 ) corresponde a la ecuación diferencial de un sistema de un grado de libertad, donde  $\ddot{\mathbf{U}}_g$  viene definido por un espectro de diseño o un espectro de respuesta, generalmente para un valor de amortiguamiento de 0.05. La máxima respuesta es:

$$x_i = \gamma_i S_{di} = \gamma_i \left( \frac{T_i^{(b)}}{2\pi} \right)^2 A_{di} \quad (4.41)$$

Donde  $T_i^{(b)}$  es el período de vibración del modo  $i$  del sistema de aislamiento;  $S_{di}$ ,  $A_{di}$  son el desplazamiento y la aceleración espectral asociada al período  $T_i^{(b)}$ . Finalmente para encontrar la respuesta en las coordenadas  $\mathbf{q}$  se utiliza la ecuación ( 4.29 ), obteniendo:

$$\mathbf{q}^{(i)} = \gamma_i \left( \frac{\mathbf{T}_i^{(b)}}{2\pi} \right)^2 A_{di} \phi^{(i)} \quad (4.42)$$

Se destaca que  $\mathbf{q}^{(i)}$  es el vector que contiene los dos desplazamientos (en sentido X, y en sentido Y, la rotación de piso, en el modo de vibración  $i$ ). Por lo tanto, para hallar la respuesta final se debe aplicar un criterio de combinación modal. Aguiar (2008).

Por otro lado  $S_{di}$  o  $A_{di}$  son las ordenadas espectrales asociadas al espectro de desplazamientos o aceleraciones obtenido por  $\xi_i^{(b)}$ . Generalmente, los espectros están dados para un factor de amortiguamiento de 0.05. Por lo que para hallar las ordenadas espectrales para cualquier tipo de amortiguamiento  $\xi$  a partir del espectro para 0.05, se debe encontrar el factor  $B_0$  y multiplicar las ordenadas espectrales por este factor.

$$B_0 = 2 \left( \frac{1 + \xi}{1 + 14.68 \xi^{0.865}} \right) \quad (4.43)$$

#### 4.7.1 Respuesta en superestructura

Se puede aplicar el MME en la superestructura, con cada uno de los modos de vibración del sistema de aislamiento. Según (2007). Pero también se pueden hallar estos desplazamientos laterales a partir del vector  $\mathbf{q}$  final encontrado en el sistema de aislamiento y es así como se lo resuelve a continuación.

Existen varios métodos de análisis para encontrar los desplazamientos en la superestructura que ya han sido indicados anteriormente, uno de ellos es el denominado **Método Cuasi Estático**. De la Llera *et al* (2005) en el cual se aplica en cada piso de la superestructura, fuerzas estáticas provenientes del sistema de aislación y se encuentran los desplazamientos laterales  $\mathbf{u}$  mediante un análisis lineal estático. Las fuerzas que se aplican en cada piso se hallan con la siguiente ecuación, que ya fue indicada anteriormente.

$$\mathbf{F}^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{M}^{(t)-1} \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} \quad (4.44)$$

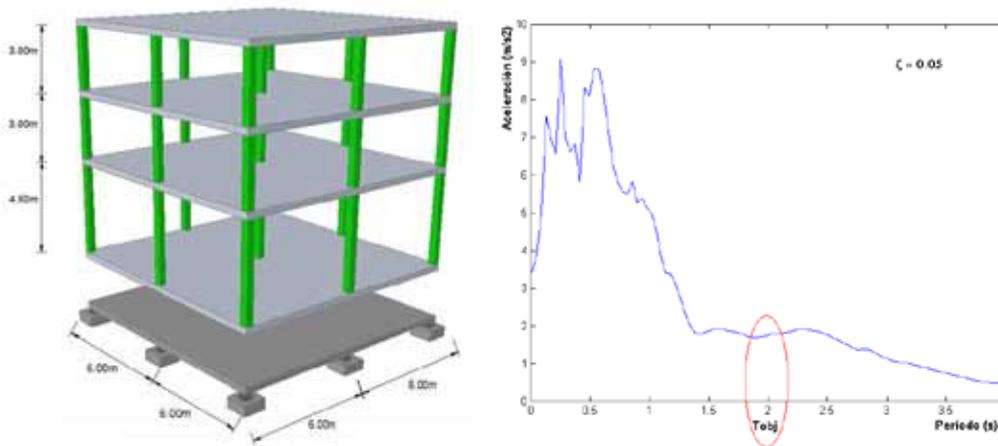
Para hallar los desplazamientos en cada piso de la superestructura se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales, el mismo que viene dado por:

$$\mathbf{F}^{(s)} = \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u}$$

#### • EJEMPLO 5

Se desea conocer el desplazamiento máximo a nivel del sistema del aislamiento y en cada uno de los pisos de la estructura mostrada en la figura 4.15, ante la acción del sismo de El Centro de 1940, cuyo espectro de respuesta elástico se indica a la derecha de la figura 4.15. Todas las columnas son de 60/60 y las vigas de 50/50. La carga muerta vale  $0.65 \text{ T/m}^2$  y la

carga viva  $0.2 \text{ T/m}^2$ . Para el análisis sísmico se considera el 25% de la carga viva y la carga de la cimentación y peso del aislador se considera igual a un 10% del peso total.



**Figura 4.15** Estructura y espectro de análisis

La estructura está sobre aisladores elastoméricos que tienen un factor de amortiguamiento  $\xi^{(b)} = 0.10$  y el período objetivo del sistema de aislamiento es de 2.0 s.

## • SOLUCIÓN

La matriz de rigidez lateral, encontrada para  $E=1800000 \text{ T/m}^2$ , es la siguiente:

$$K_L = \begin{bmatrix} 24034 & -19997 & 5076 \\ & 29286 & -13231 \\ & & 8764 \end{bmatrix}$$

Todos los pórticos de la estructura, cuyo primer piso tiene 4.5 m., y los restantes 3.0 m. tienen la misma matriz de rigidez lateral. Con esta matriz se halló la matriz de rigidez  $K^{(s)}$ .

La matriz de masa  $M^{(t)}$  es la siguiente:

$$M^{(t)} = \begin{bmatrix} 33.9 & & \\ 0 & 33.9 & \\ 0 & 0 & 1629.3 \end{bmatrix}$$

$$33.9 = [(0.65 + 0.5) * 144 * 3 * 1.1] / 9.8$$

La rigidez de cada aislador, para tener el período objetivo prefijado, vale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m^{(t)}}{k_b}} \rightarrow k_b = \frac{4\pi^2}{T^2} m^{(t)} = \frac{4\pi^2}{4} 3.77 = 37.2 T / m$$

La matriz de rigidez del sistema de aislamiento, vale:

$$\mathbf{K}^{(b)} = \begin{bmatrix} 335 & & \\ 0 & 335 & \\ 0 & 0 & 16080 \end{bmatrix}$$

Al resolver el problema de valores y vectores propios con las matrices  $\mathbf{K}^{(b)}$  y  $\mathbf{M}^{(t)}$  se halla que los modos de vibración. Estos resultan:

$$\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.1716 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1716 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0248 \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0.1716 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1716 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0248 \end{bmatrix}$$

Los valores propios, las frecuencias y períodos de vibración del sistema de aislación, son:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 9.869 & W_{n1} = 3.141 & T_1 = 2.0 s = T_{obj} \\ \lambda_2 = 9.869 & W_{n2} = 3.141 & T_2 = 2.0 s \\ \lambda_3 = 9.869 & W_{n3} = 3.141 & T_3 = 2.0 s \end{array}$$

La matriz  $\mathbf{M}^*$  es unitaria luego  $\eta = 1 = \phi^{(i)t} \mathbf{M}^{(t)} \phi^{(i)}$  Para los tres modos de vibración. Para sismo actuando en dirección X. Los factores de participación son:

$$\gamma_1 = \frac{\phi^{(1)t} \mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)}}{\eta} = 5.8260 \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = 0 :$$

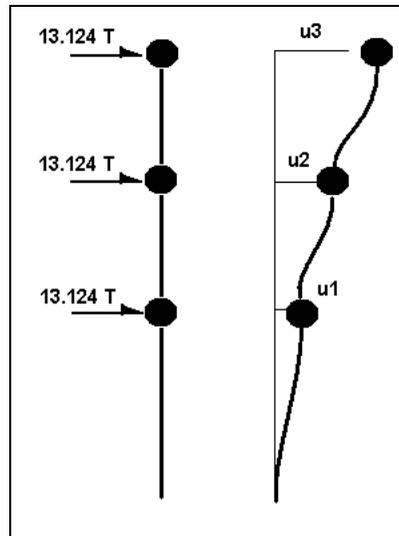
Para  $\xi^{(b)} = 0.10$  el valor de  $B_0$  es igual a:

$$\xi^{(b)} = 0.10 \rightarrow B_0 = 2 \left( \frac{1 + 0.10}{1 + 14.68 * 0.10^{0.865}} \right) = 0.733$$

Para  $B_0 = 0.733$  el valor de  $A_d = 1.276 \text{ m/s}^2$ . El valor que se halla del espectro para  $T=2 \text{ s.}$ , indicado a la derecha de la figura 4.15 se multiplica por  $B_0$  con lo que se halla la cantidad anotada.

$$q^{(i)} = \gamma_i \left( \frac{T_i^{(b)}}{2\pi} \right)^2 A_{di} \phi^{(i)} = 5.826 \left( \frac{2}{2\pi} \right)^2 1.276 \begin{bmatrix} 0.1716 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1293 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el desplazamiento máximo del sistema de aislamiento es de 12.93 cm. Ahora, para encontrar los desplazamientos de cada piso de la superestructura se debe determinar en primer lugar las fuerzas a aplicarse, que se obtienen con ecuación (4.44). Los resultados que no son nulos se indican en la figura 3, se destaca que para el ejemplo el vector  $F^{(s)}$  tiene nueve elementos, los tres primeros son los que se indican en la figura 4.16 y corresponden a las fuerzas en sentido X, los restantes valores son nulos. Estas son las fuerzas debidas al movimiento del sistema de aislación actuando en la superestructura.



**Figura 4.16** Fuerzas que actúan en la superestructura y desplazamientos asociados.

Los desplazamientos que se encuentran al resolver el sistema de ecuaciones lineales, son:  $u_1 = 0.34 \text{ cm}$ .  $u_2 = 0.57 \text{ cm}$ .  $u_3 = 0.72 \text{ cm}$ .

## REFERENCIAS

1. Aguiar R., (2004), *Análisis Matricial de Estructuras*, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército. Tercera Edición, 550 p., Quito, Ecuador.
2. Aguiar R., (2007,1), "Tres modelos de análisis sísmico en estructuras con aislamiento de base elastomérico", *Revista Ciencia. Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército*, **10 (1)**, 35-20. Quito, Ecuador.
3. Aguiar R., (2007,2), *Dinámica de Estructuras con MATLAB*, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 292 p., Quito, Ecuador.
4. Aguiar R., (2008), *Análisis Sísmico de Edificios*, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 322 p., Quito, Ecuador.
5. De La Llera J. Almazán J., y Seguí C., (2005), "Control de Estructuras asimétricas mediante aislamiento sísmico", *IX Congreso Chileno de Sismología e Ingeniería Antisísmica*, 12 p., Concepción.

6. Kulkarni J., Jangrid R., (2002), "Rigid body response of base-isolated structures", *Journal of Structural Control*, **9**, 171-188.
7. Pan TC, Kelly JM. (1983), "Seismic response of torsionally coupled base-isolated structures", *International J Earthquake Engineering Structural Dynamics*, **11 (6)**, 749-770.
8. Segúin E., (2007), *Torsión en sistemas aislados sísmicamente con dispositivos elastoméricos*, Tesis para optar por el grado de Doctor en Ciencias de la Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile, 229 p., Santiago de Chile.

## CAPÍTULO 5

---

---

### BALANCE TORSIONAL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE ESTRUCTURAS CON AISLADORES ELASTOMÉRICOS

#### 5.1 INTRODUCCIÓN

En zonas sísmicas es conveniente que una estructura sea regular en planta y elevación para que el **Centro de Rigidez C.R.** coincida o esté lo más próximo posible al **Centro de Masas C.M.**, en la medida que la estructura es irregular se tiene problemas de torsión en planta, lo que lleva a un mal desempeño sísmico.

Si se colocan aisladores de base en las estructuras irregulares se minimiza el problema de torsión por dos motivos: primero, debido a que los desplazamientos en la superestructura son bastante bajos, como se ha visto en los capítulos anteriores y segundo, que si se ubican en forma adecuada se puede llegar a desacoplar los movimientos de torsión con los movimientos horizontales de la estructura; lo que significa tener desplazamientos simétricos de los pórticos extremos, con respecto al C.M.

El objetivo de este capítulo es saber colocar los aisladores de base de forma tal que el acoplamiento lateral-torsional sea mínimo. Para lograr este objetivo y sobre todo para que sea didáctico en este apartado se presenta la forma como se obtiene el C.M., el C.R., la excentricidad estática, la matriz de rigidez en coordenadas de piso en función de la excentricidad estática y la rigidez torsional con respecto al C.R., todo esto mediante el desarrollo de un ejemplo, en una estructura en forma de "L" de un piso. No está demás indicar que en la práctica se debe evitar tener estructuras con forma de "L", "H", "T"; lo mejor es tener configuraciones en planta rectangulares.

Posteriormente, se presenta detalladamente el sistema de ecuaciones diferenciales para un sistema sin aisladores de base. Todo esto con el propósito de ir presentando paulatinamente la forma como se normaliza la excentricidad estática, como se obtiene las frecuencias de vibración desacopladas y la relación de frecuencias. Almazán *et al* (2007), De la Llera *et al* (2005), Seguíñ *et al* (2008), Tena y Zambrano (2005). Se presenta además el programa **BALANCETORSIONALSINAISLAMIENTO** para encontrar la respuesta en desplazamientos de los pórticos extremos y en el C.M., respuesta normalizada con respecto al desplazamiento horizontal máximo de la estructura simétrica.

Finalmente, se presentan las ecuaciones de cálculo para el análisis sísmico de un sistema mono simétrico con aislamiento sísmico para un modelo de dos grados de libertad por planta y se presenta el uso del programa **BALANCETORSIONALCONAISLAMIENTO**, que encuentra la respuesta en el tiempo por el Método Cuasi-Estático, estudiado en el capítulo anterior. Mediante el desarrollo de un ejemplo se ilustra la forma como se logra tener respuesta simétrica con respecto al C.M., en los pórticos exteriores, de una estructura asimétrica.

### 5.1.1 Centro de Masas

Se define el **Centro de Masa C.M.**, como el lugar geométrico en el cual se considera concentrada toda la masa. En una estructura completamente regular con distribución de cargas simétricas el C.M. coincide con el **Centro de Gravedad C.G.** de la planta. Las coordenadas del C.M. del nivel  $i$  están dadas por:

$$X_{CM}^i = \frac{\sum_j W_j X_j}{W_i} \quad Y_{CM}^i = \frac{\sum_j W_j Y_j}{W_i} \quad (5.1)$$

Donde  $X_{CM}^i, Y_{CM}^i$  son las coordenadas del C.M. en el piso  $i$ ;  $W_i$  es el peso total del nivel  $i$ ;  $X_j, Y_j$  son las coordenadas del C.M. de la figura  $j$  con respecto a un eje arbitrario;  $W_j$  es el peso de la figura  $j$ .

#### • EJEMPLO 1

Encontrar el C.M., y el momento de inercia de la masa  $J$  de la estructura en forma de "L" de un piso, destinada para vivienda e indicada en la figura 5.1. Si la carga muerta  $D = 0.5 T/m^2$  y la carga viva  $L = 0.2 T/m^2$ . Por ser vivienda se considera el 25% de  $L$  en el análisis sísmico.

#### • SOLUCIÓN

El peso, por metro cuadrado, vale  $0.5 + 0.25 * 0.20 = 0.55 T/m^2$ .

La planta en forma de "L" se descompone en los dos rectángulos que se indican en la figura 5.2 y en la tabla 5.1 se sintetiza el cálculo del C.M. aplicando las ecuaciones (5.1). En el borde inferior izquierdo se ha considerado el origen de coordenadas.

**Tabla 5.1** Determinación del C.M. de estructura en forma de "L"

Fig.	$X_j$ (m.)	$Y_j$ (m.)	$A$ (m <sup>2</sup> .)	$W_j$ (T.)	$X_j W_j$ (Tm.)	$Y_j W_j$ (Tm.)
1	2.25	8.00	72.00	39.60	89.10	316.80
2	6.75	2.00	18.00	9.90	66.825	19.80
				49.5	155.925	336.60
$X_{CM} = \frac{155.925}{49.5} = 3.15 \text{ m.} \quad Y_{CM} = \frac{336.60}{49.5} = 6.80 \text{ m.}$						

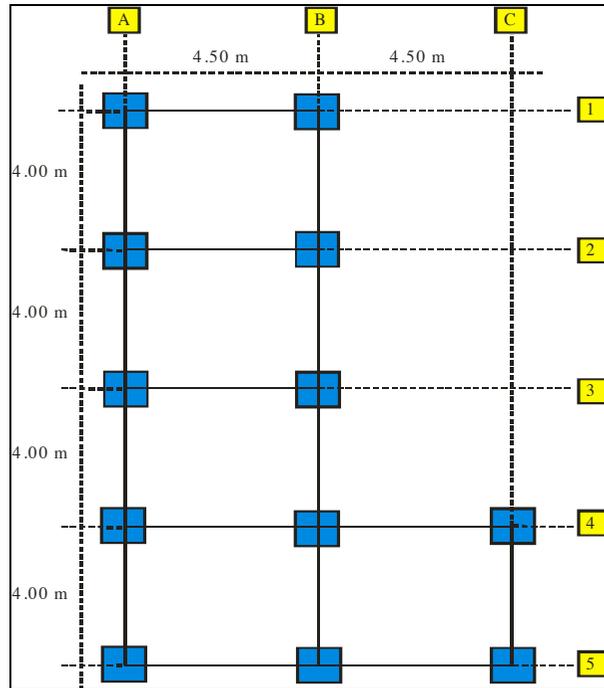


Figura 5.1 Distribución en planta de edificio analizado de un piso

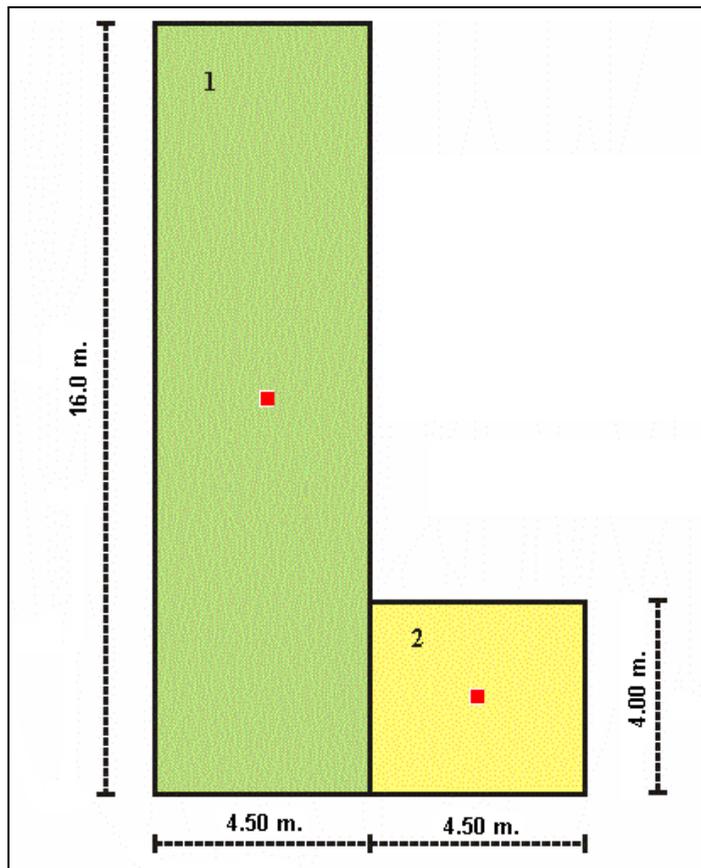


Figura 5.2 Descomposición en dos figuras rectangulares para hallar el C.M.

Por ser la carga vertical igual en toda la planta. El C.M. de la estructura analizada coincide con el C.G. Por lo tanto si se halla el C.G. se encontraran las mismas coordenadas.

Para encontrar el momento de inercia de la masa  $J$  con respecto al C.M. se aplica el teorema de los ejes paralelos.

$$J_{CM}^i = \sum_j (J_{CM}^j + m^j d_{CM}^j) \quad (5.2)$$

Donde  $J_{CM}^i$  es el momento de inercia de la masa en el C.M. en el piso  $i$ ;  $J_{CM}^j$  es el momento de inercia de la masa de la figura  $j$  en su C.M.;  $m^j$  es la masa de la figura  $j$ ;  $d_{CM}^j$  es la distancia desde el C.M. de la figura  $j$  al C.M. de todo el piso  $i$ . En la figura 5.3 se presentan los C.M. de cada figura y las distancias  $d_{CM}^j$  que se han denominado  $d_1, d_2$ , respectivamente. En la tabla 5.2 se presenta el cálculo de  $J$ .

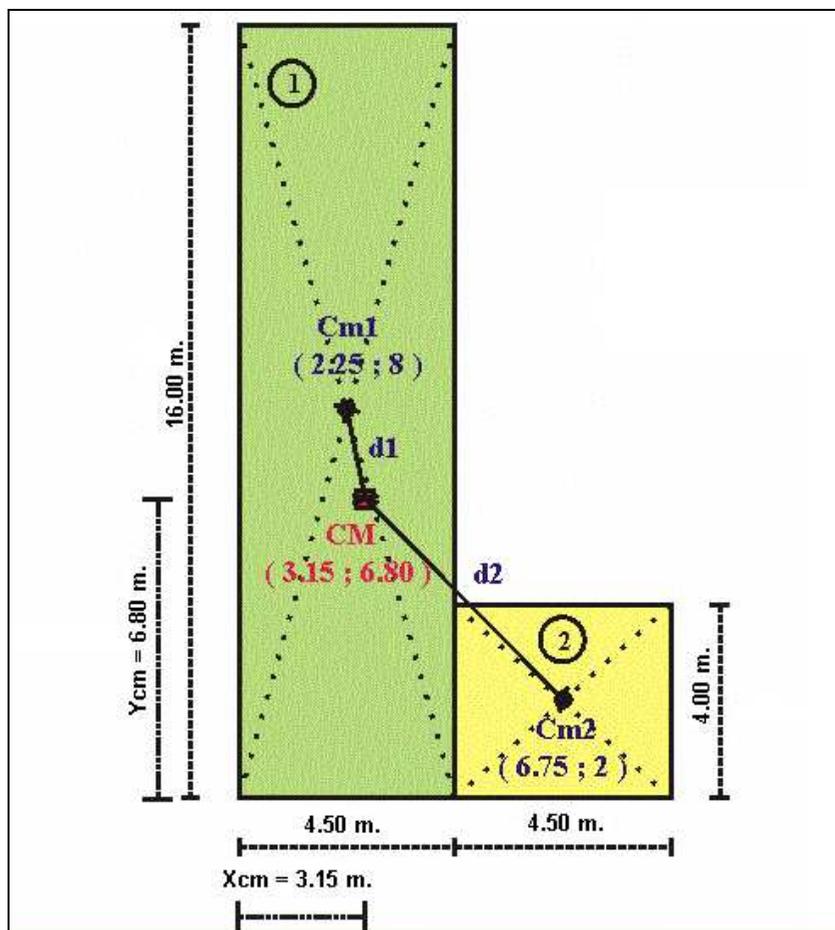


Figura 5.3 Determinación del momento de inercia  $J$ .

**Tabla 5.2** Cálculo del momento de inercia de la masa

Fig	$m^j$	$J_{CM}^j$	$d_{CM}^j$	$m^j (d_{CM}^j)^2$
	(T s <sup>2</sup> /m)	(T s <sup>2</sup> m)	(m)	(T s <sup>2</sup> m)
1	$\frac{16 * 4.5 * 0.55}{9.8} = 4.04$	$\frac{4.04}{12} (16^2 + 4.5^2) = 93.004$	$\sqrt{(6.8 - 8)^2 + (3.15 - 2.25)^2} = 1.5$	9.09
2	$\frac{4.5 * 4 * 0.55}{9.8} = 1.01$	$\frac{1.01}{12} (4.5^2 + 4.0^2) = 3.05$	$\sqrt{(6.75 - 3.15)^2 + (2 - 6.8)^2} = 6.0$	36.36
		96.054		45.45
$J_{CM} = 96.054 + 45.45 = 141.504 \text{ T s}^2 / \text{m}$				

### 5.1.2 Centro de Rigidez

Se define el Centro de Rigidez **C.R.**, como el lugar geométrico donde al aplicar las fuerzas sísmicas la estructura se traslada y no rota. En estructuras de un piso el cálculo del C.R., es sencillo y directo lo que no sucede cuando la estructura es de varios pisos. Vásquez y Riddell (1984), Cheung y Tso (1986).

#### • EJEMPLO 2

Encontrar el C.R., de la estructura en forma de "L" indicada en la figura 5.1. La altura del entrepiso es de 3.0 m. Las columnas A1, B1, A2 y B2 son de 20/20 cm., y todas las restantes columnas son de 20/30. La dimensión de 30 cm., es paralela a las luces de 4.5 m. Las vigas son todas de 20/25, en los dos sentidos. Considerar un módulo de elasticidad  $E = 1738965.21 \text{ T} / \text{m}^2$ .

#### • SOLUCIÓN

La matriz de rigidez lateral  $K_L$  de cada uno de los pórticos, encontrados con el programa RLAXINFI (Aguar, 2008) se indica en la figura 5.4, en forma de vector. Así la matriz de rigidez lateral del pórtico 1 vale  $153.7568 \text{ T/m}^2$ . Conceptualmente es la fuerza necesaria para obtener un desplazamiento unitario.

El C.R. se obtiene del equilibrio de fuerzas y momentos, en sentido X, y en sentido Y.

- Sentido X

$$\sum F_x = 153.7568 + 153.7568 + 365.1317 + 587.8617 + 587.8617$$

$$\sum F_x = 2271.1185$$

La sumatoria de momentos se obtiene con respecto al eje A5.

$$\sum M = 153.7568 * 16 + 153.7568 * 12 + 365.1317 * 8 + 587.8617 * 4 = 2271.1185 * Y_{CR}$$

$$Y_{CR} = 5.18 \text{ m.}$$

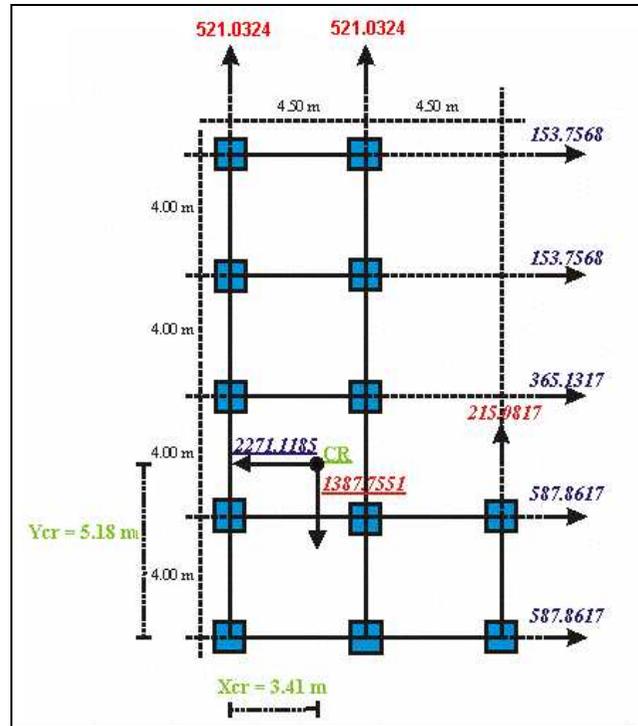


Figura 5.4 Coordenadas del Centro de Rigidez.

- Sentido Y

$$\sum F_Y = 521.0324 + 521.0324 + 215.9817$$

$$\sum F_Y = 1387.7551$$

$$\sum M = 521.0324 * 4.5 + 215.9817 * 9 = 1387.7551 * X_{CR}$$

$$X_{CR} = 3.41 \text{ m.}$$

### • EJEMPLO 3

Determinar la excentricidad estática de la estructura en forma de "L" que se ha venido resolviendo.

### • SOLUCIÓN

Se define a la excentricidad estática a la distancia que existe entre el C.M., y el C.R. En la figura 5.5 se ha ubicado el C.M. y el C.R. y se ha definido la distancia en sentido X, como  $e_x$  y la excentricidad en sentido Y, como  $e_y$ . En la figura 5.5 se aprecia que:

$$e_x = 3.41 - 3.15 = 0.26 \text{ m.}$$

$$e_y = 6.80 - 5.18 = 1.62 \text{ m.}$$

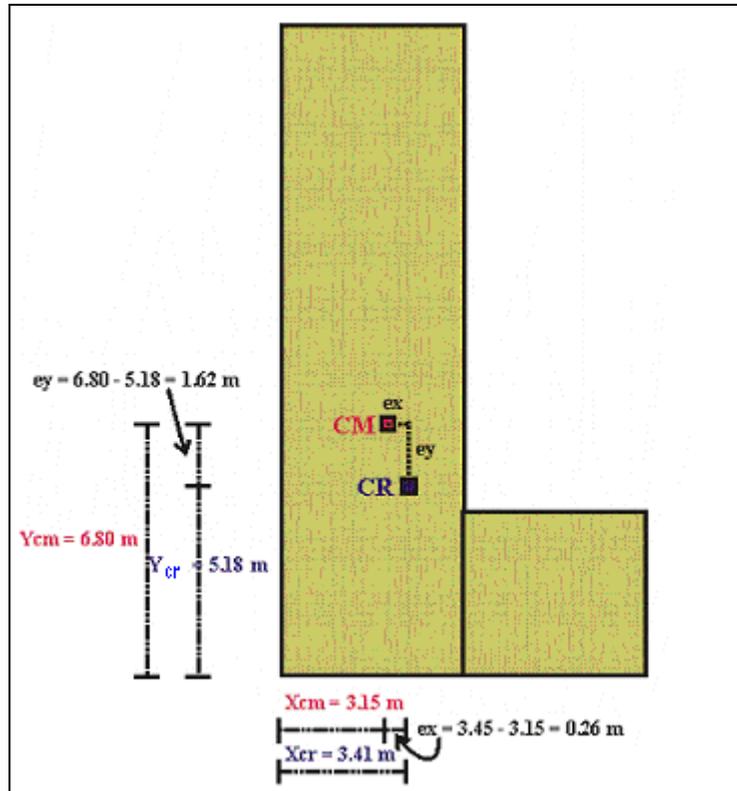


Figura 5.5 Excentricidad estática de estructura analizada

### 5.1.3 Matriz de rigidez

En el capítulo anterior se estudió la matriz de rigidez de la superestructura  $K^{(s)}$  y se indicó que era de la siguiente forma.

$$K^{(s)} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\theta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\theta} \\ K_{\theta X} & K_{\theta Y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

Para pórticos ortogonales  $K_{XY} = K_{YX} = \mathbf{0}$ . Por otra parte, si se recuerda la forma como se obtuvo las diferentes submatrices de  $K^{(s)}$  en el capítulo anterior y se tiene presente la forma en que se encontró el C.R. Se demuestra fácilmente, para el caso de una estructura de un piso, que:

$$e_x = \frac{K_{Y\theta}}{K_{YY}} \quad e_y = \frac{K_{X\theta}}{K_{XX}} \quad (5.3)$$

$$K_{\theta\theta} = e_x^2 K_{YY} + e_y^2 K_{XX} + K_{\theta\theta}^{C.R.} \quad (5.4)$$

El único término nuevo es  $K_{\theta\theta}^{C.R.}$  que es la rigidez  $K_{\theta\theta}$  pero evaluada con respecto al C.R.

- **EJEMPLO 4**

La matriz de rigidez en coordenadas de piso, de la estructura en forma de "L" es:

$$\mathbf{K}^{(s)} = \begin{bmatrix} 1848.4 & 0.0 & 2991.2 \\ 0.0 & 1257.1 & 320.4 \\ 2991.2 & 320.4 & 62969.0 \end{bmatrix}$$

Se pide encontrar la excentricidad estática y el valor de  $K_{\theta\theta}$  utilizando las ecuaciones (5.3) y (5.4).

- **SOLUCIÓN**

$$e_x = \frac{320.4}{1257.1} = 0.254 \text{ m.} \qquad e_y = \frac{2991.2}{1848.4} = 1.618 \text{ m.}$$

$$K_{\theta\theta}^{C.R.} = 153.7568(-10.82)^2 + 153.7568(-6.82)^2 + 365.1317(-2.82)^2 + 587.8617(1.18)^2 \\ + 587.8617(5.18)^2 + 521.0324(-3.41)^2 + 521.0324(1.09)^2 + 215.9817(5.59)^2$$

$$K_{\theta\theta}^{C.R.} = 58074.91$$

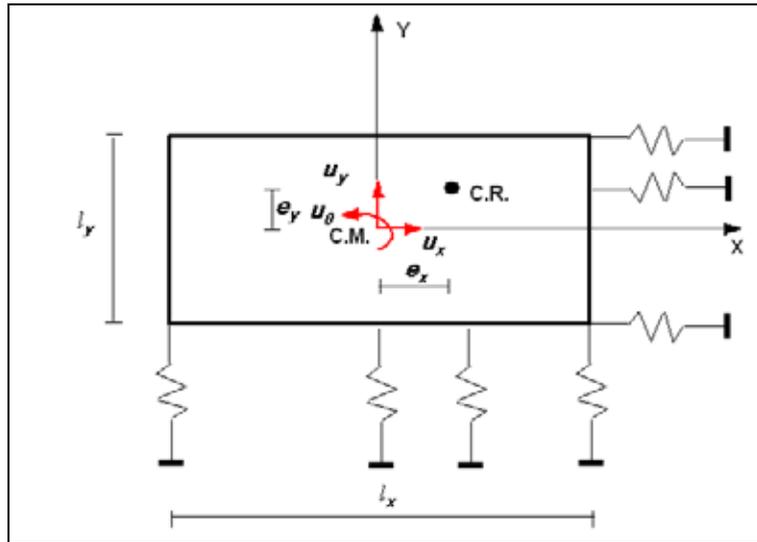
$$K_{\theta\theta} = (0.254)^2 * 1257.1 + (1.618)^2 * 1848.4 + 58074.91$$

$$K_{\theta\theta} = 62994.98 \approx 62969.0$$

No dio exactamente igual, por los decimales, ya que en la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(s)}$  se trabajó con un solo decimal.

## 5.2 ESTRUCTURA SIN AISLADORES DE BASE

En la figura 5.6 se presenta una estructura de un piso con base empotrada, que tiene tres pórticos en el sentido X, y 4 pórticos en el sentido Y. La rigidez lateral de cada pórtico está representada por un resorte. La planta es rectangular de dimensiones  $l_x, l_y$ . Se indica además el sistema de coordenadas con el cual se ha venido trabajando y que será modificado en el siguiente apartado.



**Figura 5.6** Coordenadas de piso y simbología a utilizar.

Como no se tienen aisladores de base, el sistema de ecuaciones diferenciales se puede escribir de la siguiente manera.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{u}_g \quad (5.5)$$

Donde  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez;  $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$  son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración. El vector de desplazamientos, transpuesto, contiene  $\mathbf{u}^t = [u_x \quad u_y \quad u_\theta]$ ;  $\mathbf{r}$  es el vector que relaciona los grados de libertad con el movimiento del suelo. Así para sismo en sentido X, el vector transpuesto  $\mathbf{r}^t = [1 \quad 0 \quad 0]$ , para sismo en sentido Y, el 1 va en la mitad;  $\ddot{u}_g$  es la aceleración del suelo. Las matrices de masa y rigidez son:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \rho^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{l_x^2 + l_y^2}{12}}$$

Como se ha estudiado la matriz de amortiguamiento se encuentra en función de las matrices de masa y rigidez. Para estructuras con pórticos ortogonales  $k_{xy} = k_{yx} = 0$ . Al reemplazar (5.3) en la matriz de rigidez, el sistema de ecuaciones diferenciales (5.5) para el caso de que el sismo actúa en la dirección Y, queda:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & e_y k_{xx} \\ 0 & k_{yy} & e_x k_{yy} \\ e_y k_{xx} & e_x k_{yy} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{u}_g$$

Al desarrollar los productos matriciales indicados se tiene:

$$\begin{aligned} m \ddot{u}_x + C^{(1)} + k_{xx} u_x + e_y k_{xx} u_\theta &= 0 \\ m \ddot{u}_y + C^{(2)} + k_{yy} u_y + e_x k_{yy} u_\theta &= -m \ddot{u}_g \\ m \rho^2 \ddot{u}_\theta + C^{(3)} + e_y k_{xx} u_x + e_x k_{yy} u_y + k_{\theta\theta} u_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Donde  $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}$  son las filas uno, dos y tres que resultan del producto de  $\mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}$ . Ahora si las dos primeras ecuaciones se dividen para  $m$  y la tercera ecuación para  $m l_x$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_x + \frac{C^{(1)}}{m} + \frac{k_{xx}}{m} u_x + e_y \frac{k_{xx}}{m} u_\theta &= 0 \\ \ddot{u}_y + \frac{C^{(2)}}{m} + \frac{k_{yy}}{m} u_y + e_x \frac{k_{yy}}{m} u_\theta &= -\ddot{u}_g \\ \frac{\rho^2}{l_x} \ddot{u}_\theta + \frac{C^{(3)}}{m l_x} + e_y \frac{k_{xx}}{m l_x} u_x + e_x \frac{k_{yy}}{m l_x} u_y + \frac{k_{\theta\theta}}{m l_x} u_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Se definen las frecuencias de vibración desacopladas, de la siguiente manera:

$$w_x = \sqrt{\frac{k_{xx}}{m}} \quad w_y = \sqrt{\frac{k_{yy}}{m}} \quad w_\theta = \sqrt{\frac{k_{\theta\theta}^{C.R.}}{m \rho^2}} \quad (5.6)$$

En función de ( 5.6 ) y de la ecuación ( 5.4 ) el sistema de ecuaciones diferenciales, queda:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_x + \frac{C^{(1)}}{m} + w_x^2 u_x + e_y w_x^2 u_\theta &= 0 \\ \ddot{u}_y + \frac{C^{(2)}}{m} + w_y^2 u_y + e_x w_y^2 u_\theta &= -\ddot{u}_g \\ \frac{\rho^2}{l_x} \ddot{u}_\theta + \frac{C^{(3)}}{m l_x} + \frac{e_y}{l_x} w_x^2 u_x + \frac{e_x}{l_x} w_y^2 u_y + \frac{(e_x^2 k_{yy} + e_y^2 k_{xx} + w_\theta^2 m \rho^2)}{m l_x} u_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Se normalizan las excentricidades estáticas, como sigue:

$$\hat{e}_x = \frac{e_x}{l_x} \quad \hat{e}_y = \frac{e_y}{l_x} \quad (5.8)$$

A los términos de la tercera ecuación diferencial que contiene  $\ddot{u}_\theta$  y  $u_\theta$  se multiplica y divide por  $l_x$  y al reemplazar (5.8) en esta ecuación diferencial se halla:

$$\frac{\rho^2}{l_x^2} l_x \ddot{u}_\theta + \frac{C^{(3)}}{m l_x} + \hat{e}_y w_x^2 u_x + \hat{e}_x w_y^2 u_y + \left( \hat{e}_x^2 w_y^2 + \hat{e}_y^2 w_x^2 + \left( \frac{\rho}{l_x} \right)^2 w_\theta^2 \right) l_x u_\theta = 0$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$u_r = l_x u_\theta \quad (5.9)$$

Con el cambio de variable indicado el sistema de ecuaciones diferenciales (5.7) queda:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_x + \frac{C^{(1)}}{m} + w_x^2 u_x + \hat{e}_y w_x^2 u_r &= 0 \\ \ddot{u}_y + \frac{C^{(2)}}{m} + w_y^2 u_y + \hat{e}_x w_y^2 u_r &= -\ddot{u}_g \\ \left( \frac{\rho}{l_x} \right)^2 \ddot{u}_r + \frac{C^{(3)}}{m l_x} + \hat{e}_y w_x^2 u_x + \hat{e}_x w_y^2 u_y + \left[ \hat{e}_x^2 w_y^2 + \hat{e}_y^2 w_x^2 + \left( \frac{\rho}{l_x} \right)^2 w_y^2 \Omega_\theta^2 \right] u_r &= 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Se denomina:

$$\alpha = \frac{l_y}{l_x} \quad (5.11)$$

Con lo que:

$$\rho = l_x \sqrt{\frac{1 + \alpha^2}{12}}$$

$$\ddot{u}_x + \frac{C^{(1)}}{m} + w_x^2 u_x + \hat{e}_y w_x^2 u_r = 0$$

$$\ddot{u}_y + \frac{C^{(2)}}{m} + w_y^2 u_y + \hat{e}_x w_y^2 u_r = -\ddot{u}_g$$

$$\frac{1+\alpha^2}{12} \ddot{u}_r + \frac{C^{(3)}}{m l_x} + \hat{e}_y w_x^2 u_x + \hat{e}_x w_y^2 u_y + \left[ \hat{e}_x^2 w_y^2 + \hat{e}_y^2 w_x^2 + \left( \frac{\rho}{l_x} \right)^2 w_\theta^2 \right] u_r = 0$$

En forma matricial se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\alpha^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_r \end{bmatrix} + \frac{\hat{C}}{m} \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x^2 & 0 & \hat{e}_y w_x^2 \\ 0 & w_y^2 & \hat{e}_x w_y^2 \\ \hat{e}_y w_x^2 & \hat{e}_x w_y^2 & \hat{e}_x^2 w_y^2 + \hat{e}_y^2 w_x^2 + \left( \frac{\rho}{l_x} \right)^2 w_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{u}_g$$

Donde  $\hat{C}$  es la matriz de amortiguamiento en la cual los elementos de la tercera fila y tercera columna están divididos para  $m l_x$ . La primera y segunda fila y sus respectivas columnas de  $\hat{C}$  están divididas para  $m$ .

Se definen las siguientes relaciones de frecuencias, desacopladas:

$$\Omega_\theta = \frac{w_\theta}{w_y} = \frac{\rho_s}{\rho} \quad \rho_s = \sqrt{\frac{k_{\theta\theta}^{C.R.}}{k_{yy}}} \quad (5.12)$$

$$\Omega_x = \frac{w_x}{w_y} \quad (5.13)$$

En función de la relación de frecuencias, el sistema de ecuaciones diferenciales, queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\alpha^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_r \end{bmatrix} + \frac{\hat{C}}{m} \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_r \end{bmatrix} + w_y^2 \begin{bmatrix} \Omega_x^2 & 0 & \hat{e}_y \Omega_x^2 \\ 0 & 1 & \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \Omega_x^2 & \hat{e}_x & \hat{e}_x^2 + \hat{e}_y^2 \Omega_x^2 + \left(\frac{\rho_s}{l_x}\right)^2 w_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{u}_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

### 5.2.1 Programa BALANCETORSIONALSINAISLAMIENTO

El programa denominado **BALANCETORSIONALSINAISLAMIENTO** encuentra la respuesta sísmica en una estructura rectangular, mono simétrica, que solo tiene excentricidad estática  $e_x$ , con base empotrada, sin aisladores de base. Realiza el análisis sísmico en sentido Y, con un modelo de dos grados de libertad, que son el desplazamiento horizontal  $u_y$  y la rotación  $u_r$ . Por lo tanto se trabaja con matrices de masa, rigidez y amortiguamiento de 2X2. El programa realiza lo siguiente:

- Encuentra la respuesta en desplazamientos en una estructura completamente simétrica y halla la respuesta máxima en absoluto del desplazamiento horizontal,  $u_{y\max}$ .
- Para una excentricidad estática dada encuentra la historia en el tiempo de los desplazamientos de los pórticos extremos, que corresponden al pórtico débil y al pórtico fuerte. Estas respuestas se normalizan para  $u_{y\max}$  y son las que se presentan en forma gráfica.
- Encuentra la respuesta  $u_y, u_r$  en el C.M., para una excentricidad estática determinada, y se normalizan con respecto a  $u_{y\max}$  y se grafica en el eje de las X,  $u_y / u_{y\max}$  y en el eje de las Y,  $u_r / u_{y\max}$ .
- Halla el coeficiente de correlación de la respuesta normalizada de  $\hat{u}_y, \hat{u}_r$  descrita en el párrafo anterior.

La forma de uso del programa es:

➤ **[correlacion]=balancetorsionalsinaislamiento(alfa,exs,Ty,omega,seda,sismo,dt)**

- **alfa** Es el valor de  $\alpha = l_y / l_x$
- **exs** Es la excentricidad normalizada  $\hat{e}_x = e_x / l_x$
- **Ty** Es el período de vibración de la estructura en sentido Y.
- **omega** Es el valor de  $\Omega_\theta = w_\theta / w_y$ .
- **seda** Es el factor de amortiguamiento  $\xi$  que se considera igual en todos los modos.
- **sismo** Archivo que contiene el acelerograma de análisis.

- **dt** Incremento de tiempo del acelerograma, con este valor se halla la respuesta en el tiempo.

```

function [correlacion]=balancetorsionalsinislamiento(alfa,exs,Ty,omega,seda,sismo,dt)
%
% Balance Torsional en el dominio del tiempo en estructuras rectangulares de
% un piso, Mono simetrica
% Respuesta en el tiempo de porticos extremos normalizados con
% respecto a respuesta maxima de desplazamiento, de estructura simetrica.
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%      CEINCI-ESPE
%      Agosto-2007
%-----
% [correlacion]=balancetorsionalsinislamiento(alfa,exs,Ty,omega,seda,sismo,dt)
%-----
% alfa   : Relacion de lado corto a largo de estructura rectangular
% exs    : excentricidad estatica normalizada con respecto a Lx.
% Ty     : Periodo de vibracion de estructura en sentido Y.
% omega  : Relacion de frecuencia wteta con respecto a wy.
% sismo  : Archivo que contiene acelerograma.
% dt     : Incremento de tiempo en que viene el acelerograma.
% seda   : Factor de amortiguamiento (se considera igual en todos los
%          modos)
% uymax  : Respuesta maxima en absoluto de estructura completamente
%          simetrica
% urmax  : Respuesta maxima en absoluto rotacional de estructura
%          completamente simetrica.
% correlacion : Matriz que reporta los coeficientes de correlacion,
%              interesa entre desplazamiento horizontal y rotacional.
%
% Primero se encuentra la respuesta en el tiempo para estructura simetrica
% Matriz de masas
MS(1,1)=1; MS(1,2)=0; MS(2,1)=0; MS(2,2)=(1+alfa*alfa)/12;
% Matriz de rigidez
wy=2*pi/Ty;factor=wy*wy;
KS(1,1)=factor; KS(1,2)=factor*exs; KS(2,1)=KS(1,2);
KS(2,2)=(exs*exs+((1+alfa*alfa)/12)*omega*omega)*factor;
KSI(1,1)=factor;KSI(1,2)=0.0;KSI(2,1)=0.0; KSI(2,2)=((1+alfa*alfa)/12)*omega*omega*factor;
% Matriz de amortiguamiento tipo Wilson y Penzien
[VS,DS]=eig(KSI,MS); Wn=sqrt(DS); W=diag(Wn); zeda(1)=seda; zeda(2)=seda;
CSI=zeros(2,2);
for i=1:2
    fi=VS(:,i); mi=fi'*MS*fi; aux=2*zeda(i)*W(i)/mi;
    CSI=CSI+aux.*MS*fi*fi'*MS;
end
% Respuesta en el tiempo por Procedimiento de Espacio de Estado
Qo(1)=-1; Qo(2)=0;var=1;Qo=Qo';
npuntos=length(sismo);
% Procedimiento de Espacio de Estado
[qt,vt,q]=pse3(MS,CSI,KSI,Qo,sismo,dt,var);
% Respuestas en porticos extremos,
for j=1:npuntos-1;
    t(j)=j*dt;

```

```

    uys(j)=qt(j,1);urs(j)=qt(j,2);
    dfuerte(j)=uys(j)+0.5*urs(j);
    ddebil(j)=uys(j)-0.5*urs(j);
end
dfuermax=max(abs(dfuerte));ddebmax=max(abs(ddebil));
uymax=max(abs(uys));
%
% Respuesta en el tiempo de estructura asimetrica
%
% Matriz de amortiguamiento tipo Wilson y Penzien
[V,D]=eig(KS,MS); Wn=sqrt(D); W=diag(Wn);
CS=zeros(2,2);
for i=1:2
    fi=V(:,i); mi=fi'*MS*fi; aux=2*zeda(i)*W(i)/mi;
    CS=CS+aux.*MS*fi*fi'*MS;
end
% Procedimiento de Espacio de Estado
[qt,vt,q]=pse3(MS,CS,Ks,Qo,sismo,dt,var);
% Respuestas en porticos extremos,
for j=1:npuntos-2;
    tt(j)=j*dt;
    uy(j)=qt(j,1);uyy(j)=uy(j)/uymax;
    ur(j)=qt(j,2);urr(j)=ur(j)/uymax;
    dfuertenor(j)=(uy(j)+0.5*ur(j))/dfuermax;
    ddebilnor(j)=(uy(j)-0.5*ur(j))/ddebmax;
end
correlacion=corrcoef(uyy,urr); clf;
subplot (2,1,1); plot (tt,dfuertenor); hold on; plot (tt,ddebilnor,':');
xlabel ('Tiempo (s)');ylabel('Desp. Normalizado');
subplot (2,1,2); plot (uyy,urr);
xlabel ('uy/uymax');ylabel('ur/uymax');
% ---fin---

```

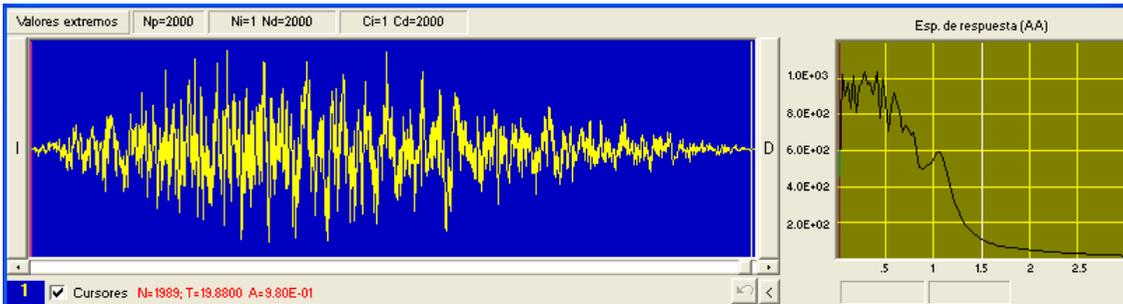
## • EJEMPLO 5

En la figura 5.7, a la izquierda, se presenta un acelerograma sintético cuyo espectro elástico se indica a la derecha y es aproximado al espectro del Código Ecuatoriano de la Construcción CEC-2000 para la zona de mayor peligrosidad sísmica del Ecuador en un perfil de suelo S1. A este acelerograma artificial se denominará SISMO. Para este evento se desea encontrar la respuesta en desplazamientos de los pórticos extremos y la respuesta que relaciona  $\hat{u}_y$  con  $\hat{u}_r$  en el C.M para los siguientes datos:

$$\alpha = 0.5; \hat{e}_x = 0.10; T_y = 1.0 \text{ s}; \Omega_\theta = 0.8; \xi = 0.05 .$$

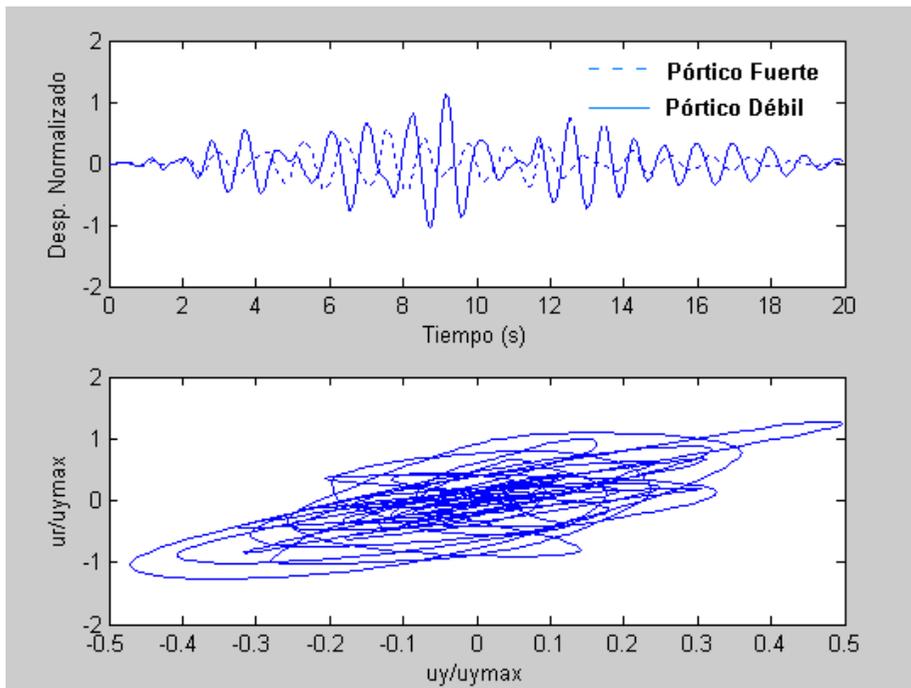
## • SOLUCIÓN

En la figura 5.8 se indica las respuestas que reporta el programa. En la parte superior se observa los desplazamientos de los pórticos exteriores, normalizados con respecto al desplazamiento máximo de la estructura simétrica, se aprecia que están desfasados debido a la excentricidad estática. Con la incorporación de los aisladores de base se pretende que estas dos respuestas sean lo más semejante posibles, de manera que exista simetría en la respuesta con respecto al C.M.



**Figura 5.7** Acelerograma sintético denominado SISMO y espectro de respuesta elástico.

En la parte inferior se aprecia que existe acoplamiento entre la respuesta horizontal y rotacional por la excentricidad estática. En el eje de las X, se tiene el desplazamiento horizontal  $u_y$  normalizado y en el eje de las Y la rotación  $u_r$  normalizado. Se observa claramente que hay acoplamiento en la respuesta de traslación con la respuesta de rotación.



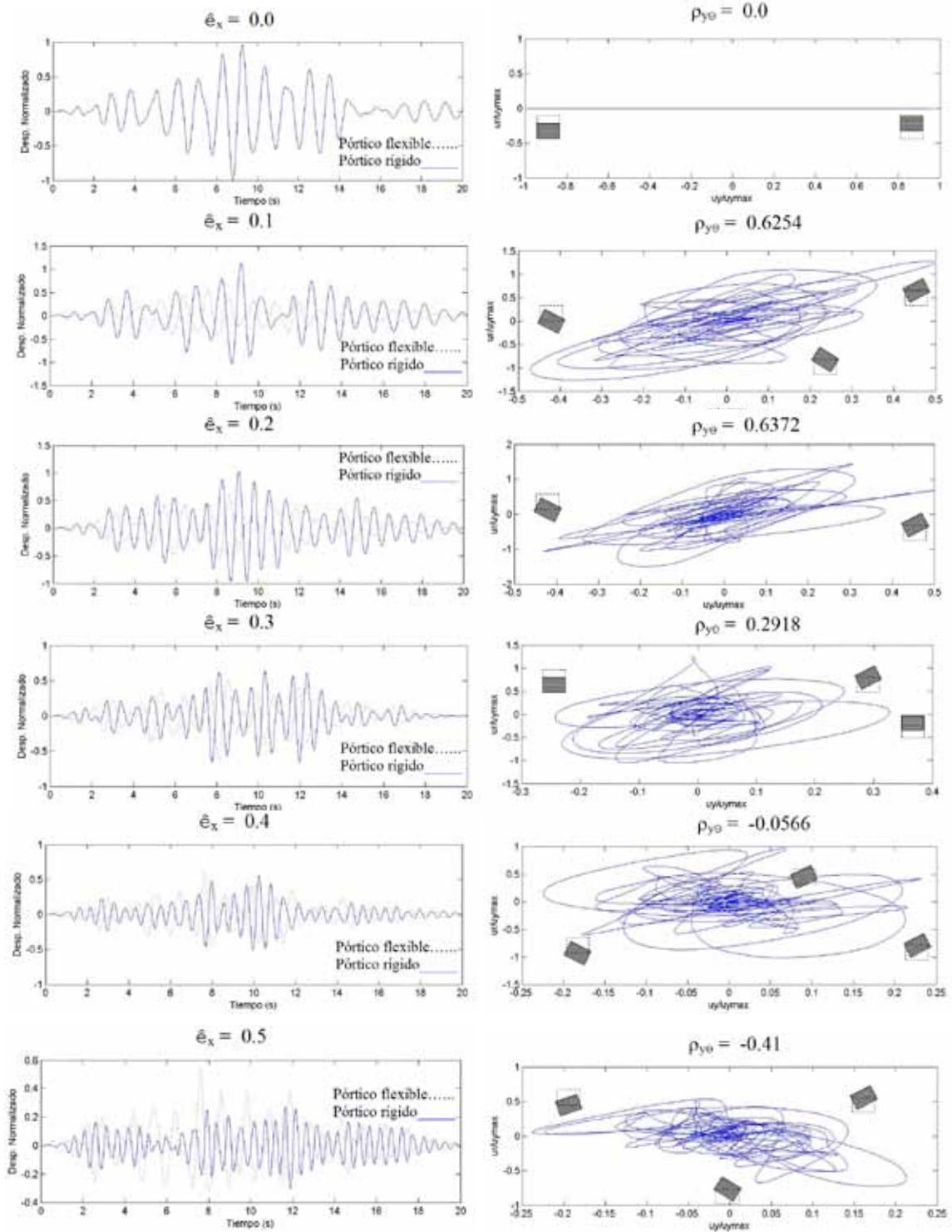
**Figura 5.8** Historia en el tiempo que reporta programa BALANCETORSIONAL SIN AISLAMIENTO.

• **EJEMPLO 6**

Presentar en forma gráfica la respuesta en el tiempo de la estructura del ejemplo 5,  $\alpha = 0.5$ ;  $T_y = 1.0$  s;  $\Omega_\theta = 0.8$ ;  $\xi = 0.05$ . Para valores de:

$$\hat{e}_x = 0; \hat{e}_x = 0.10; \hat{e}_x = 0.20; \hat{e}_x = 0.30; \hat{e}_x = 0.40; \hat{e}_x = 0.50$$

• SOLUCIÓN



**Figura 5.9** Respuestas en el tiempo para diferentes casos de excentricidad estática.

En la figura 5.9 se presenta la solución del problema. El primer caso  $\hat{e}_x = 0$ , corresponde a una estructura completamente simétrica. Se aprecia que la historia de

desplazamientos de los pórticos externos es la misma (figura izquierda) y que el coeficiente de correlación  $\rho_{y\theta} = 0$  (figura derecha) esto es debido a que no hay rotación de la planta.

En los restantes casos, en que existe excentricidad estática el coeficiente de correlación es diferente de cero. En los gráficos de la derecha se ha indicado con un rectángulo la posición aproximada de la planta.

### 5.3 SISTEMA DE AISLACIÓN Y SUPERESTRUCTURA

Al despreciar la aceleración de la superestructura en el sistema de aislamiento  $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  el sistema de ecuaciones diferenciales, es el siguiente:

$$\mathbf{M}^{(t)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{(b)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{(b)} \mathbf{q} = -\mathbf{M}^{(t)} \mathbf{r}^{(b)} \ddot{\mathbf{u}}_g \quad (5.15)$$

Siendo  $\mathbf{M}^{(t)}$  la matriz de masa total de la estructura completa como cuerpo rígido;  $\mathbf{C}^{(b)}$  es la matriz de amortiguamiento del sistema de aislamiento;  $\mathbf{K}^{(b)}$  es la rigidez del sistema de aislamiento;  $\mathbf{r}^{(b)}$  es un vector de colocación de  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  en los grados de libertad de la base; para el caso de sismo en sentido Y, vale  $\mathbf{r}^{(b)T} = [0 \quad 1 \quad 0]$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  es la aceleración del suelo,  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$  son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración, respectivamente, el vector  $\mathbf{q}^T = [q_x \quad q_y \quad q_\theta]$ .

En la figura 5.10, se indican los grados de libertad, la ubicación del C.M. y del C.R. De igual manera se aprecia la excentricidad estática del sistema de aislamiento,  $e_x^{(b)}, e_y^{(b)}$ .

Al proceder en forma similar a la indicada en el apartado anterior se encuentra que el sistema de ecuaciones diferenciales, para el análisis sísmico en sentido Y, del aislamiento, queda definido por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J^{(b)}}{l_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_y \\ \ddot{q}_r \end{bmatrix} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{m^{(t)}} \begin{bmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_x^{(b)2} & 0 & \hat{e}_y^{(b)} \Omega_x^{(b)2} \\ 0 & 1 & \hat{e}_x^{(b)} \\ \hat{e}_y^{(b)} \Omega_x^{(b)2} & \hat{e}_x^{(b)} & \hat{e}_x^{(b)2} + \hat{e}_y^{(b)2} \Omega_x^{(b)2} + \left( \frac{J^{(b)}}{m l_x^2} \right) w_\theta^{(b)2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{u}_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_x^{(b)} &= \frac{e_x^{(b)}}{l_x} & \hat{e}_y^{(b)} &= \frac{e_y^{(b)}}{l_x} \\
 \Omega_\theta^{(b)} &= \frac{w_\theta^{(b)}}{w_y^{(b)}} & \Omega_x^{(b)} &= \frac{w_x^{(b)}}{w_y^{(b)}} & (5.17) \\
 w_x^{(b)} &= \sqrt{\frac{k_{xx}^{(b)}}{m^{(t)}}} & w_y^{(b)} &= \sqrt{\frac{k_{yy}^{(b)}}{m^{(t)}}} & w_\theta^{(b)} &= \sqrt{\frac{k_{\theta\theta}^{(b)}}{J^{(b)}}}
 \end{aligned}$$

Siendo  $m^{(t)}$  la masa total del sistema de aislamiento y de la superestructura.  $J^{(b)}$  el momento de inercia de las masas del sistema de aislamiento, calculadas en la forma que se indicó en el capítulo anterior.

Para la superestructura es lo mismo indicado en el apartado anterior, únicamente que se debe colocar el superíndice (s) en las ecuaciones.

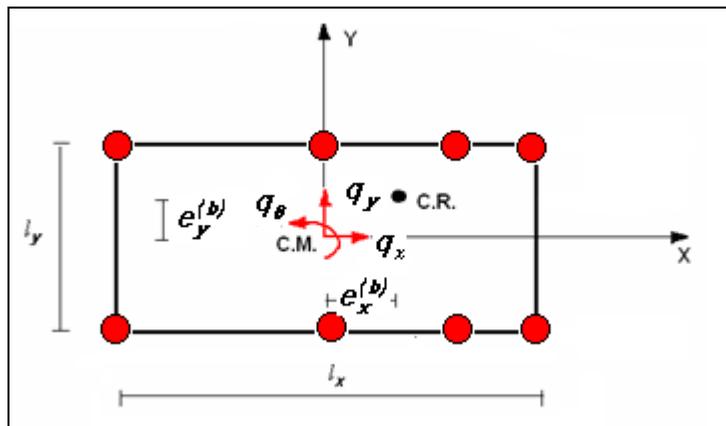


Figura 5.10 Sistema de coordenadas en el sistema de aislamiento y excentricidad estática

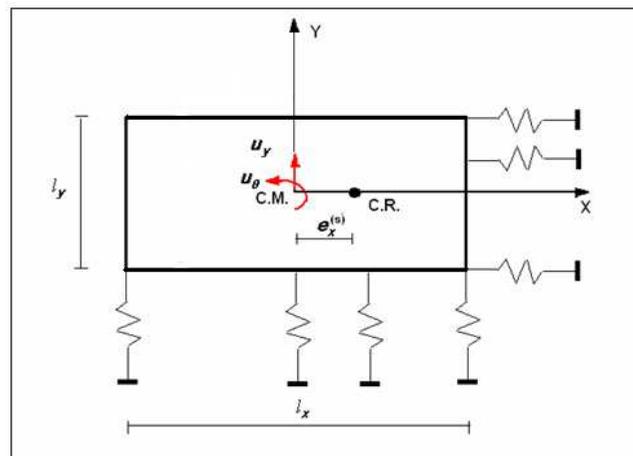


Figura 5.11 Estructura de un piso mono simétrica con aisladores de base.

## 5.4 BALANCE TORSIONAL

Se analiza el caso de una estructura mono simétrica, sobre aisladores de base, de un solo piso, que solo tiene excentricidad en la dirección X, como la indicada en la figura 5.11. Para el análisis sísmico en la dirección Y, se resuelve el problema con los dos grados de libertad indicados en 5.11.

### • EJEMPLO 7

Se tiene una estructura de un piso, con las siguientes características:

$$\alpha = 0.5, \hat{e}_x^{(s)} = 0.2, T_y^{(s)} = 0.22 \text{ s}, \Omega_\theta^{(s)} = 1.4, \xi^{(s)} = 0.05$$

Se desea:

- 1) Encontrar la respuesta en el tiempo de los pórticos exteriores, ante el registro de Newhall (Sismo de Northridge 1994), que se indica a la izquierda de la figura 5.12. Considerando la base empotrada.

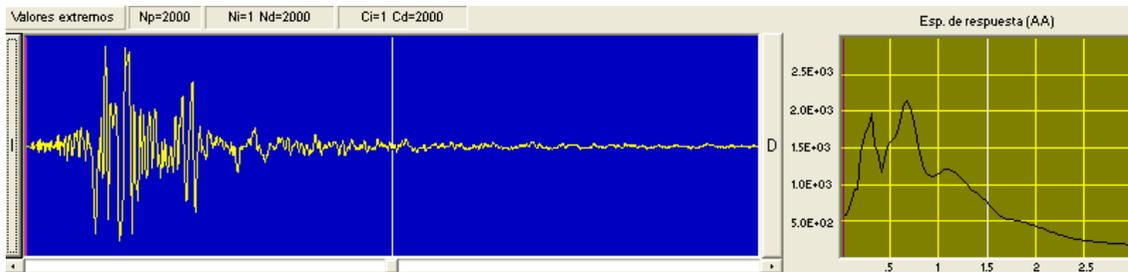


Figura 5.12 Registro de Newhall y espectro elástico.

- 2) Hallar la respuesta en los pórticos exteriores del sistema de aislamiento y de la superestructura si el C.R. del sistema de aislamiento coincide con el C.M. de la superestructura y esta definida por los siguientes parámetros:

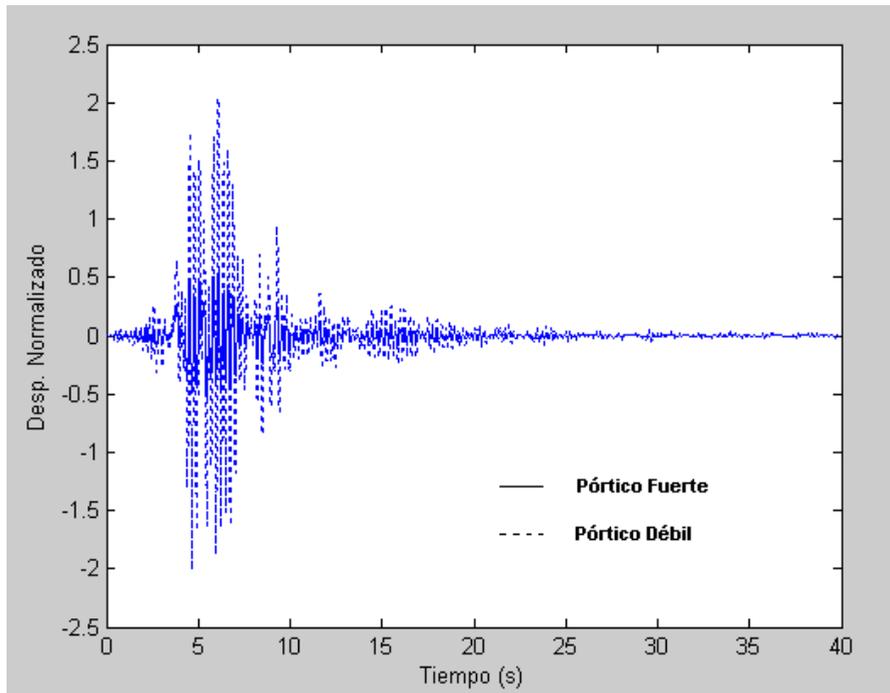
$$\hat{e}_x^{(b)} = 0.0, T_y^{(b)} = 2.0 \text{ s}, \Omega_\theta^{(b)} = 1.0, \xi^{(b)} = 0.15$$

- 3) Idéntico a la pregunta anterior pero con:

$$\hat{e}_x^{(b)} = \hat{e}_x^{(s)}, \Omega_\theta^{(b)} = 1.20$$

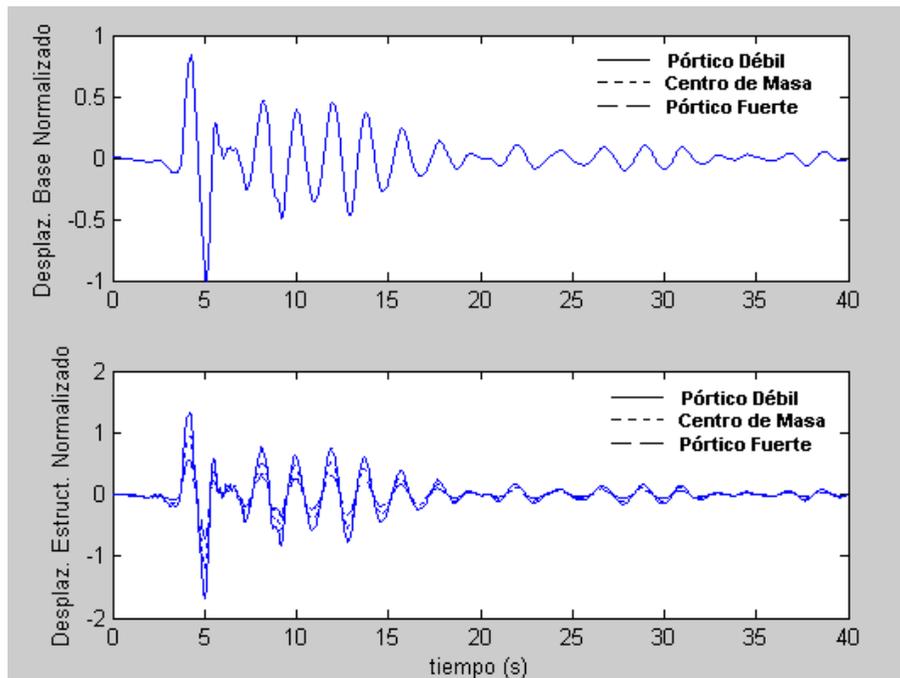
### • SOLUCIÓN

En la figura 5.13 se presentan los desplazamientos de los pórticos exteriores normalizados con respecto al desplazamiento lateral máximo de la estructura completamente simétrica. Para el pórtico débil el mayor valor es de 2.04. Por lo tanto, este pórtico tiene una amplificación de los desplazamientos con respecto a una estructura simétrica de 2.04. En el pórtico fuerte el desplazamiento máximo normalizado es 0.54.



**Figura 5.13** Respuesta de desplazamientos normalizados de estructura sin aisladores de base.

A la derecha de la figura 5.12 se indica el espectro de respuesta elástica del registro de Newhall. Se aprecia que para un período de 0.22 s., que tiene la estructura con base empotrada, la ordenada espectral es bastante alta. Se van a colocar aisladores de base cuyo período de vibración del sistema de aislamiento es 2.0 s., para este período la ordenada espectral es bastante baja. Por lo tanto, la respuesta estructural será muy baja en comparación al de base empotrada.

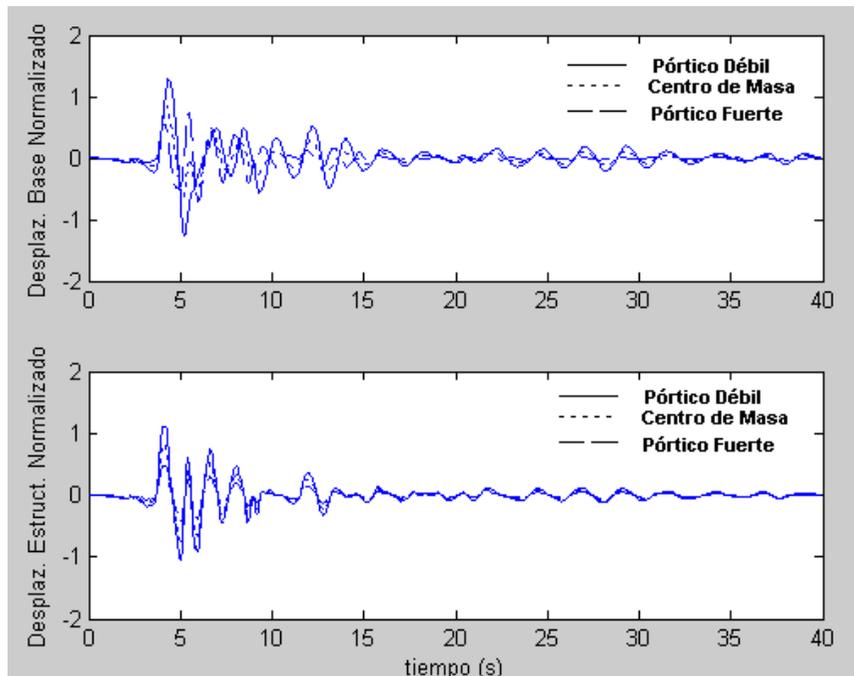


**Figura 5.14** Respuesta del sistema de aislamiento en la parte superior y de la superestructura.

La figura 5.13 se obtuvo con el programa **BALANCETORSIONAL SIN AISLAMIENTO**, la 5.14 con el programa **BALANCETORSIONAL CON AISLAMIENTO**, que se presentará posteriormente.

La figura 5.14 es la respuesta de la segunda pregunta del ejemplo 7. En la parte superior se aprecia que los desplazamientos horizontales del pórtico fuerte, del C.M., y del pórtico débil son los mismos cuando el C.R. del sistema de aislamiento coincide con el C.M. de la superestructura.

En la parte inferior de la figura 5.14 se aprecian las respuestas en el tiempo, normalizadas con respecto al desplazamiento máximo de la estructura simétrica con aislamiento de base, se aprecia que los desplazamientos son diferentes. Más amplificación existe en el pórtico débil, le sigue el C.M. y luego el Pórtico Fuerte. Es decir el problema de la torsión todavía se mantiene aunque en menor escala por el sistema de aislamiento.



**Figura 5.15** Respuesta de tercera pregunta de ejemplo 7.

La respuesta a la tercera pregunta de ejemplo 7 se muestra en la figura 5.15. Lo importante de esta figura es notar que a partir de los 8 segundos las respuestas de la superestructura del Pórtico Débil, Centro de Masa y Pórtico Fuerte, son prácticamente las mismas, figura inferior. En el sistema de aislamiento las tres respuestas son diferentes pero en la superestructura se ha logrado tener bastante simetría en las respuestas de los pórticos exteriores que es el objetivo del balance torsional.

Se puede lograr una mejor simetría en la respuesta de la superestructura variando el C.R. del sistema de aislamiento alrededor del C.R. del sistema de la superestructura y también variando  $\Omega_{\theta}^{(b)}$ .

### 5.4.1 Programa BALANCETORSIONALCONAISLAMIENTO

```

function
[corres,correbb,qbmax,ddfmax,dddmax]=balancetorsionalconaislamiento(alfa,exs,Ty,ome
ga,seda,exb,Tyb,omegab,sedab,sismo,dt)
%
% Balance Torsional en el dominio del tiempo en estructuras rectangulares de
% un piso, Mono simetrica con aislamiento de base elastomerico
% Respuesta en el tiempo de porticos extremos normalizados con
% respecto a respuesta maxima de desplazamiento, de estructura simetrica.
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%      CEINCI-ESPE
%      Septiembre-2007
%-----
%
[corres,corref,qbmax,qfmax,qdmax]=balancetorsionalconaislamiento(alfa,exs,Ty,omega,
seda,exb,Tyb,omegab,sedab,sismo,dt)
%-----
% alfa   : Relacion de lado largo a corto de estructura rectangular
% exs    : excentricidad estatica normalizada de superestructura.
% Ty     : Periodo de vibracion de estructura en sentido Y.
% omega  : Relacion de frecuencia wteta con respecto a wy.
% sismo  : Archivo que contiene acelerograma.
% dt     : Incremento de tiempo en que viene el acelerograma.
% seda   : Factor de amortiguamiento de superestructura
%        (se considera igual en todos los modos)
% exb    : excentricidad estatica normalizada de sistema de aislamiento
% Tyb    : Periodo de vibracion en Y de sistema de aislamiento.
% omegab : Relacion wteta con respecto a wy de sistema de aislamiento.
% sedab  : Factor de amortiguamiento de sistema de aislacion
% uymax  : Respuesta maxima en absoluto de estructura completamente
%         simetrica
% urmax  : Respuesta maxima en absoluto rotacional de estructura
%         completamente simetrica.
% uymaxb : Igual a uymax pero de sistema de aislamiento.
% corres : Matriz que reporta los coeficientes de correlacion,
%         interesa entre desplazamiento horizontal y rotacional.
% correbb : Similar a corres pero del sistema de aislacion
% qbmax  : Desplazamiento maximo de aislacion, normalizada.
% ddfmax : Desplaz. max. del Port. Fuerte del sistema de aislacion, normalizado.
% dddmax : Desplaz. max. del Port. Debil del sistema de aislacion, normalizado.
% Primero se encuentra la respuesta en el tiempo para estructura simetrica
% Matriz de masas de superestructura y sistema de aislacion
MS(1,1)=1; MS(1,2)=0; MS(2,1)=0; MS(2,2)=(1+alfa*alfa)/12;
MB(1,1)=1; MB(1,2)=0; MB(2,1)=0; MB(2,2)=(1+alfa*alfa)/12;
% Matriz de rigidez de superestructura
wy=2*pi/Ty;factor=wy*wy;
KS(1,1)=factor; KS(1,2)=factor*exs; KS(2,1)=KS(1,2);
KS(2,2)=(exs*exs+((1+alfa*alfa)/12)*omega*omega)*factor;
KSI(1,1)=factor;KSI(1,2)=0.0;KSI(2,1)=0.0; KSI(2,2)=((1+alfa*alfa)/12)*omega*omega*factor;
% Matriz de rigidez de sistema de aislacion
wyb=2*pi/Tyb;factorb=wyb*wyb;

```

```

KB(1,1)=factorb; KB(1,2)=factorb*exb; KB(2,1)=KB(1,2);
KB(2,2)=(exb*exb+((1+alfa*alfa)/12)*omegab*omegab)*factorb;
KSIB(1,1)=factorb;KSIB(1,2)=0.0;KSIB(2,1)=0.0;
KSIB(2,2)=((1+alfa*alfa)/12)*omegab*omegab*factorb;
% Matriz de amortiguamiento tipo Wilson y Penzien de estructura simetrica
[VS,DS]=eig(KSI,MS); Wn=sqrt(DS); W=diag(Wn); zeda(1)=seda; zeda(2)=seda;
CSI=zeros(2,2);CSIB=zeros(2,2);CSB=zeros(2,2);
for i=1:2
    fi=VS(:,i); mi=fi*MS*fi; aux=2*zeda(i)*W(i)/mi;CSI=CSI+aux.*MS*fi*fi*MS;
end
% Matriz de amortiguamiento tipo Wilson y Penzien de sistema de aislacion simetrica
[VB,DB]=eig(KSIB,MB); Wn=sqrt(DB); W=diag(Wn); zedab(1)=sedab; zedab(2)=sedab;
for i=1:2
    fi=VB(:,i); mi=fi*MB*fi; aux=2*zedab(i)*W(i)/mi;CSIB=CSIB+aux.*MB*fi*fi*MB;
end
% Respuesta en el tiempo por P.E.E. de superestructura simetrica
npuntos=length(sismo);
% Respuesta en el tiempo por P.E.E. de sistema de aislacion simetrico
Qo(1)=-1; Qo(2)=0;var=1;Qo=Qo';
[qtb,vtb,qb]=pse3(MB,CSIB,KSIB,Qo,sismo,dt,var);
for j=1:npuntos-1;
    uysb(j)=qtb(j,1);
end
uymaxb=max(abs(uysb));
%
% Respuesta en el tiempo de estructura simetrica por Metodo Cuasi-Estatico
%
MBI=inv(MB);rs=zeros(2,2); rs(1,1)=1;
for i=1:npuntos-1;
    t(i)=i*dt;
    for j=1:2
        qvs(j)=vtb(i,j);qds(j)=qtb(i,j);
    end
    if i==1
        qvs=qvs';qds=qds';
    end
    ace=MBI*(CSIB*qvs+KSIB*qds); F=MS*rs*ace;u=KSI\F;uys(i)=u(1);
end
uymax=max(abs(uys));
% Respuesta en el tiempo de sistema de aislacion asimetrico.
% Matriz de amortiguamiento de sistema de aislacion asimetrico
[VB,DB]=eig(KB,MB); Wn=sqrt(DB); W=diag(Wn);CB=zeros(2,2);
for i=1:2
    fi=VB(:,i); mi=fi*MB*fi; aux=2*zedab(i)*W(i)/mi; CB=CB+aux.*MB*fi*fi*MB;
end
% Procedimiento de Espacio de Estado para aillacion asimetrico
[qbais,vbais,q]=pse3(MB,CB,KB,Qo,sismo,dt,var);
for j=1:npuntos-1;
    ub(j)=qbais(j,1);urb(j)=qbais(j,2);ubb(j)=ub(j)/uymaxb;urbb(j)=urb(j)/uymaxb;
    dfb(j)=ub(j)+0.5*urb(j); dfbnor(j)=dfb(j)/uymaxb;
    ddb(j)=ub(j)-0.5*urb(j); ddbnor(j)=ddb(j)/uymaxb;
end
qbmax=max(abs(ub))/uymaxb;dfbmax=max(abs(dfbnor));dddmax=max(abs(ddbnor));
%
% Respuesta en el tiempo de estructura asimetrica por Metodo Cuasi-Estatico

```

```

%
MBI=inv(MB);rs=zeros(2,2); rs(1,1)=1;
for i=1:npuntos-1;
    t(i)=i*dt;
    for j=1:2
        qve(j)=vbais(i,j);qde(j)=qbais(i,j);
    end
    if i==1
        qve=qve';qde=qde';
    end
    ace=MBI*(CB*qve+KB*qde); F=MS*rs*ace;u=KSI\F;uy(i)=u(1);ur(i)=u(2);
end
% Respuestas en porticos extremos,
for j=1:npuntos-1;
    tt(j)=j*dt;
    uyy(j)=uy(j)/uymax;urr(j)=ur(j)/uymax;
    dfuertenor(j)=(uy(j)+0.5*ur(j))/uymax; ddebilnor(j)=(uy(j)-0.5*ur(j))/uymax;
end
qfmax=max(abs(dfuertenor)); qdmax=max(abs(ddebilnor));
corres=corrcoef(uyy,urr);clf; correb=corrcoef(ubb,urbb);
%subplot (4,1,1); plot (tt,dfuertenor); hold on; plot (tt,ddebilnor,':');
%xlabel ('Tiempo (s)');ylabel('u');%subplot (4,1,2); plot (uyy,urr);
%xlabel ('uy/uymax');ylabel('ur/uymax');%subplot (4,1,3); plot (t,dfbnor); hold on;plot
(t,ddbnor,':');%xlabel ('Tiempo (s)');ylabel('q');
%subplot (4,1,4); plot (ubb,urbb);%xlabel ('qy/qymax');ylabel('qr/qymax');
subplot (2,1,1); plot (t,ubb,':'); hold on; plot (t,ddbnor);plot (t,dfbnor,'--');
ylabel('Desplaz. Base Normalizado');
subplot (2,1,2); plot (tt,uyy,':'); hold on; plot(tt,ddebilnor);plot(tt,dfuertenor,'--');
xlabel ('tiempo (s)'); ylabel ('Desplaz. Estruct. Normalizado');
% ---fin---

```

La forma de uso del programa, es la siguiente:

- **[corres,correbb,qbmax,ddfmax,dddmax]=balancetorsionalconaislamiento(alfa,exs, Ty,omega,seda,exb,Tyb,omegab,sedab,sismo,dt)**

Resultados:

- ✓ **corres** Es el coeficiente de correlación de la superestructura.
- ✓ **correbb** Es el coeficiente de correlación del sistema de aislamiento.
- ✓ **qbmax** Es la respuesta máxima del desplazamiento en C.M., del sistema de aislamiento
- ✓ **ddfmax** Respuesta máxima en la base del Pórtico Fuerte.
- ✓ **dddmax** Respuesta máxima en la base del Pórtico Débil.

Datos:

- **alfa** Es el valor de  $\alpha = l_y / l_x$
- **exs** Es  $\hat{e}_x^s$  excentricidad estática de la superestructura.
- **Ty** Es el período de vibración desacoplado de superestructura en sentido Y.
- **omega** Es el valor de  $\Omega_\theta^{(s)}$ .

- **seda** Es el valor de  $\xi^{(s)}$ .
- **exb** Es el valor de  $\hat{e}_x^{(b)}$  excentricidad estática del sistema de aislamiento.
- **Tyb** Es el período de vibración en sentido Y. del sistema de aislamiento.
- **omegab** Es el valor de  $\Omega_\theta^{(b)}$ .
- **sedab** Es el valor de  $\xi^{(b)}$ .
- **sismo** Es el nombre del archivo que contiene al acelerograma.
- **dt** Es el incremento de tiempo del acelerograma.

### • EJEMPLO 8

En base a los datos del ejemplo 7. Se pide:

- 1) Encontrar la curva que relaciona el desplazamiento lateral  $\hat{u}_y$  con el rotacional  $\hat{u}_r$  y hallar el coeficiente de correlación para el sistema con base empotrada.
- 2) Hallar las curvas  $\hat{u}_y$  vs.,  $\hat{u}_r$  para la superestructura, y la curva  $\hat{q}_y$  vs.  $\hat{q}_r$  para el sistema de aislamiento, para el caso de que el C.R. coincide con el C.M. de la superestructura. Encontrar también los respectivos coeficientes de correlación.

$$\alpha = 0.5, \hat{e}_x^{(s)} = 0.2, T_y^{(s)} = 0.22 \text{ s}, \Omega_\theta^{(s)} = 1.4, \xi^{(s)} = 0.05$$

$$\hat{e}_x^{(b)} = 0.0, T_y^{(b)} = 2.0 \text{ s}, \Omega_\theta^{(b)} = 1.0, \xi^{(b)} = 0.15$$

- 3) Hallar las curvas  $\hat{u}_y$  vs.,  $\hat{u}_r$  para la superestructura, y la curva  $\hat{q}_y$  vs.  $\hat{q}_r$  para el sistema de aislamiento, para el caso de que el C.R. coincide con el C.R. de la superestructura y  $\Omega_\theta^{(b)} = 1.2$ . Encontrar también los respectivos coeficientes de correlación.

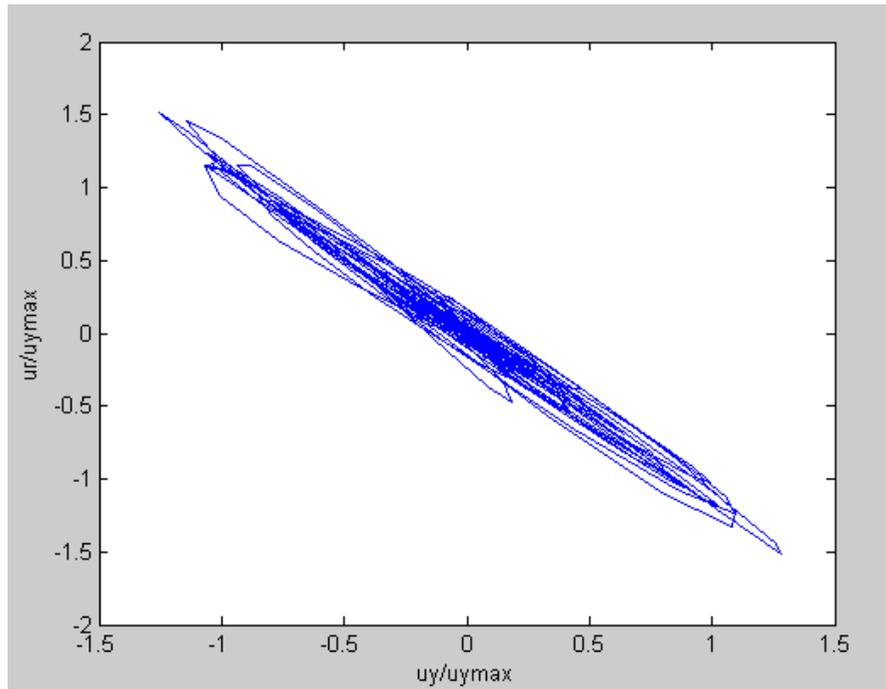
$$\alpha = 0.5, \hat{e}_x^{(s)} = 0.2, T_y^{(s)} = 0.22 \text{ s}, \Omega_\theta^{(s)} = 1.4, \xi^{(s)} = 0.05$$

$$\hat{e}_x^{(b)} = 0.2, T_y^{(b)} = 2.0 \text{ s}, \Omega_\theta^{(b)} = 1.2, \xi^{(b)} = 0.15$$

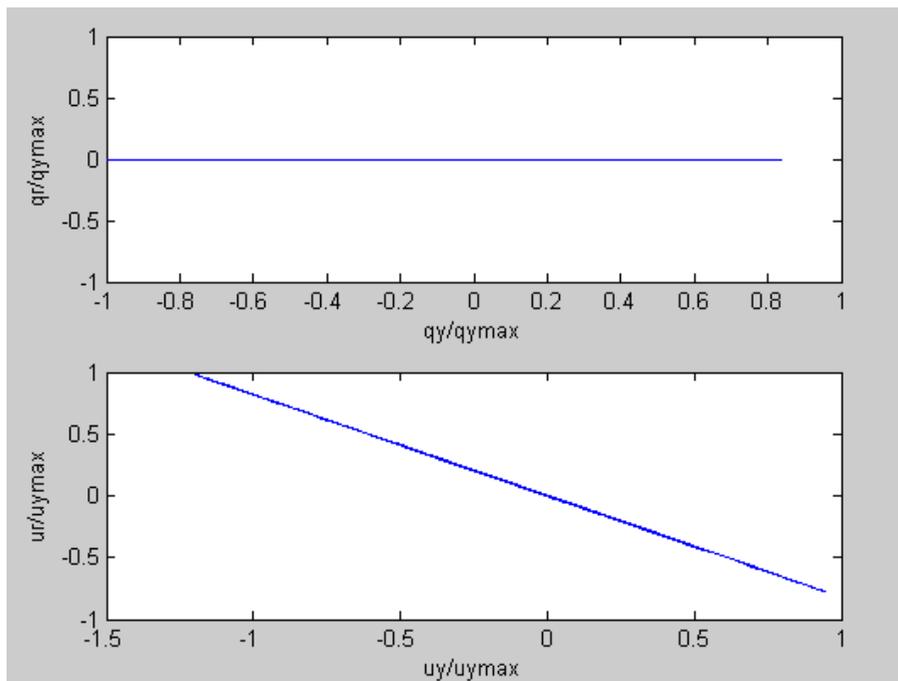
### • SOLUCIÓN

En la figura 5.16 se presenta la curva  $\hat{u}_y$  vs.,  $\hat{u}_r$  para la estructura con base empotrada. El coeficiente de correlación es -0.9892. Lo que significa que existe un gran acoplamiento entre el desplazamiento horizontal y la rotación. Por lo tanto la estructura tiene problemas de torsión.

En la figura 5.17 se muestra la respuesta de la segunda pregunta del ejemplo 8. La curva de la parte superior corresponde al sistema de aislamiento y la inferior a la superestructura. El coeficiente de correlación para el sistema de aislamiento es 0, lo cual es muy bueno pero el coeficiente de correlación para la superestructura es -1, lo cual es muy malo. Pero se destaca que los desplazamientos en la superestructura son muy bajos, con lo que el problema no es tan crítico.

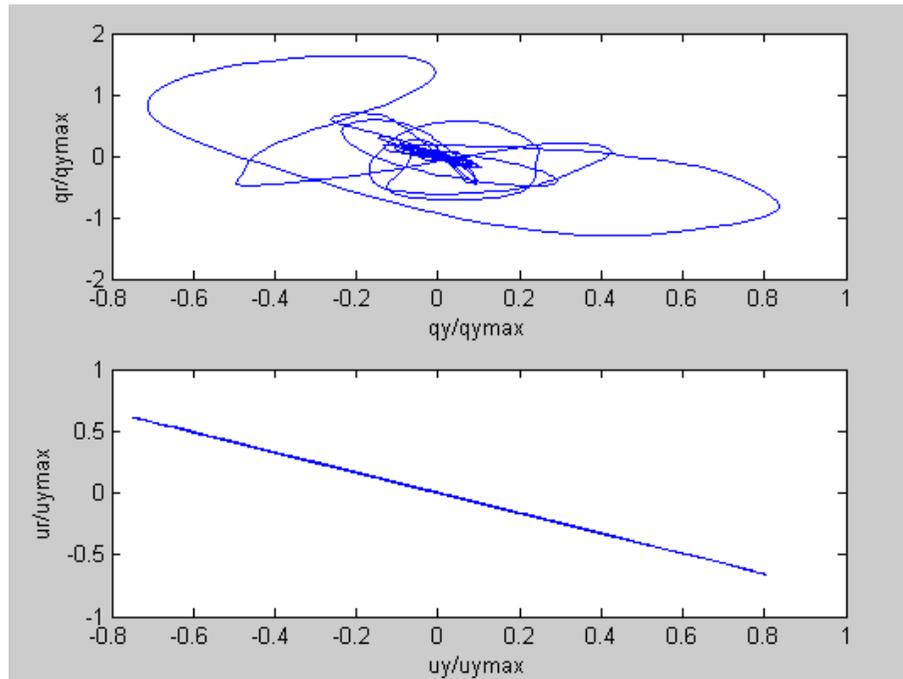


**Figura 5.16** Respuesta  $\hat{u}_y$  vs.,  $\hat{u}_r$  en estructura con base empotrada.



**Figura 5.17** Respuesta  $\hat{q}_y$  vs.  $\hat{q}_r$  en aislamiento y  $\hat{u}_y$  vs.,  $\hat{u}_r$  en estructura. Parte dos de ejemplo.

En la figura 5.18 se presenta la respuesta a la tercera pregunta. En este caso el coeficiente de correlación del sistema de aislamiento es -0.5138 y el de la superestructura es menos uno.



**Figura 5.18** Respuesta  $\hat{q}_y$  vs.  $\hat{q}_r$  en aislamiento y  $\hat{u}_y$  vs.,  $\hat{u}_r$  en estructura. Parte tres de ejemplo.

## REFERENCIAS

9. Aguiar R., (2008), *Análisis Sísmico de Edificios*, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 322 p., Quito, Ecuador.
10. Almazán J. L., Seguí C., De la Llera J.C., (2007), "Recomendaciones para el control torsional de estructuras asimétricas por medio de disipadores de energía y aisladores sísmicos", *VII Encuentro de Investigadores y Profesionales Argentinos de la Construcción, VII-EIPAC*, 14 p., Salta, Argentina.
11. Cheung W., and Tso W., (1986), "Eccentricity in irregular multistory buildings", *Canadian Journal of Civil Engineering*, **13**, 46-52.
12. De la Llera J., Almazán J., Seguí C., (2005), "Control de estructuras asimétricas mediante aislamiento sísmico", *IX Congreso Chileno de Sismología e Ingeniería Antisísmica. Universidad Nacional de Concepción*, 12 p., Concepción, Chile.
13. Seguí E., De La Llera J.C., Almazán J.L., (2008), "Base-structure interaction of linearly isolated structures with lateral-torsional coupling", *Engineering Structures*, **30**, 110-125.
14. Tena A., Zambrano C., (2005), "Dynamics torsional amplifications of base-isolated structures with an eccentric isolation system", *Engineering Structures*, **28**, 72-83.
15. Vásquez J., and Riddell R., (1984), "Existence of centers of resistance and torsional uncoupling of earthquake response of buildings", *Proc., of the 8<sup>th</sup> World. Conf. in Earthquake Engineering., Prentice Hall, Inc*, **IV**, 187-194, Englewood Cliffs.

## CAPÍTULO 6

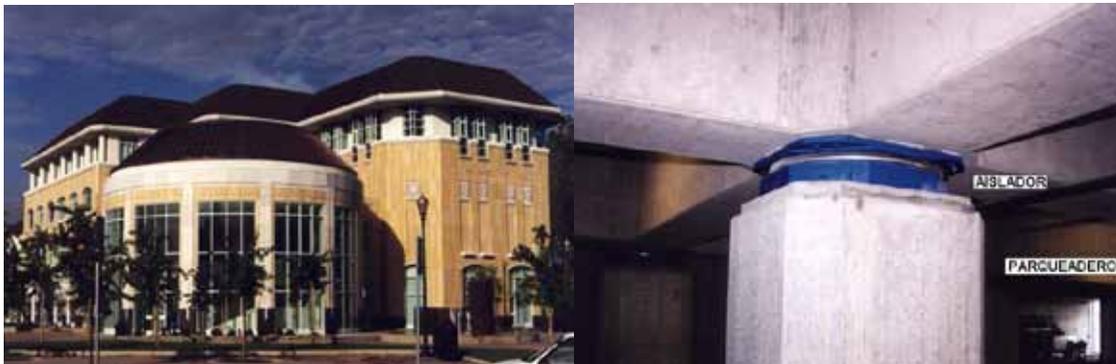
---

### MODELOS SIMPLIFICADOS DE AISLADORES FPS

#### 6.1 INTRODUCCIÓN

El primer edificio diseñado con aisladores de base tipo péndulo de fricción, que en Inglés se conoce con las siglas FPS (**F**riictional **P**endulum **S**ystem) fue el edificio gubernamental Hayward City Hall, que se halla ubicado en la ciudad de Hayward en el estado de California. A la izquierda de la figura 6.1, se indica la fachada del edificio construido en 1996. En este edificio colocaron 53 aisladores FPS, los mismos que se encuentran en el subsuelo que sirve de parqueadero; a la derecha de la figura 6.1 se aprecia el aislador FPS y las vigas de la base de la superestructura. EPS (2007).

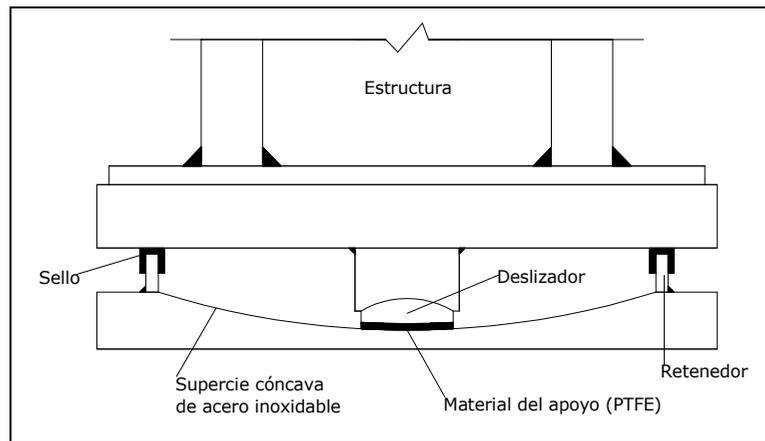
La compañía **E**arthquake **P**rotection **S**ystems, EPS ha sido quien patentó el aislador FPS y le ha dado gran impulso, es así como en menos de 12 años se tienen tres generaciones de aisladores tipo péndulo de fricción. A los de la primera generación se los conoce también como *simple péndulo de fricción* y son los que se van a estudiar en este capítulo y a los de la tercera generación se los identifica como *triple péndulo de fricción*. En el 2008 se está construyendo en el Ecuador un puente de más de 2 Km., de longitud para unir San Vicente con Bahía de Caráquez, con aisladores triple péndulo de fricción.



**Figura 6.1** Edificio, Hayward City Hall, con aisladores FPS.

Los FPS hacen que una estructura trabaje como un péndulo de una altura considerable que tiene un gran período y como consecuencia de esto las aceleraciones espectrales son bajas y por ende las fuerzas que gravitan en la estructura por efecto de un sismo son bajas.

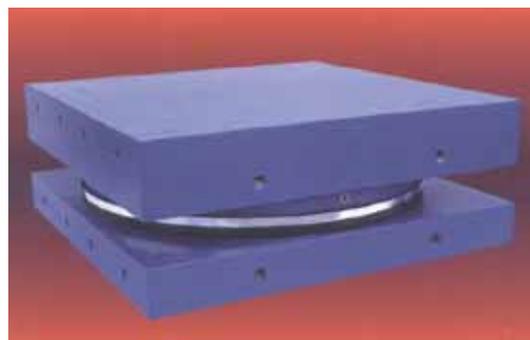
En la figura 6.2 se muestra un FPS de la primera generación, en el se aprecia el deslizador articulado que se mueve a lo largo de la superficie cóncava, cuando hay una acción sísmica, esto genera un levantamiento de la masa soportada y la estructura empieza a oscilar como un péndulo. El deslizador está recubierto por un Politetrafluoroetileno, PTFE o teflón que tiene un coeficiente de fricción bajo y tiene por objeto evitar la ralladura de la superficie esférica de acero.



**Figura 6.2** Descripción del FPS de la primera generación.

Los FPS tienen una superficie esférica, de acero inoxidable, sobre la cual se mueve la estructura ante la acción de un sismo o del viento pero cuando se desliza el peso propio de la estructura ocasiona que esta vuelva a su posición de equilibrio.

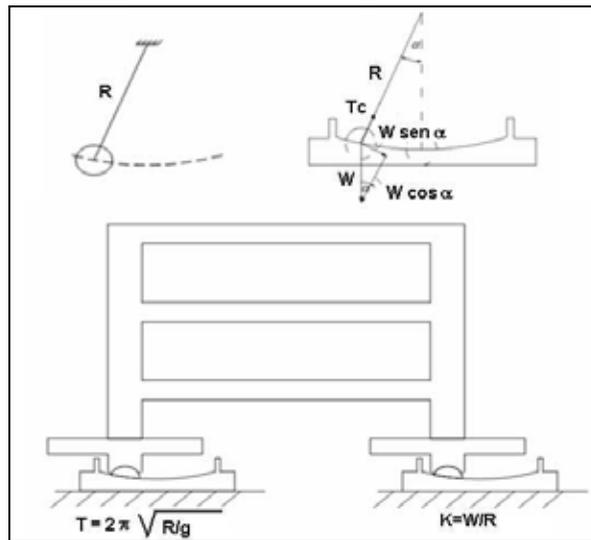
En la periferia del FPS hay unos topes que limitan el desplazamiento del deslizador y todo esto se halla herméticamente cerrado para evitar que el medio ambiente pueda dañar al aislador. En la figura 6.3 se presenta la forma exterior de un FPS.



**Figura 6.3** Vista de un FPS.

## 6.2 RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO EFECTIVO DEL DISPOSITIVO FPS

Los aisladores de base FPS empiezan a trabajar cuando la fuerza sísmica en la base es mayor a  $\nu W$ , siendo  $\nu$  el coeficiente de fricción del material que está recubierto el deslizador y  $W$  el peso total que gravita en el disipador; de la física básica se conoce que  $\nu W$  es la fuerza de fricción en el aislador, para que empiece a trabajar como péndulo la fuerza sísmica tiene que ser mayor a  $\nu W$ .



**Figura 6.4** Movimiento de una estructura con FPS

Para el caso de que la fuerza sísmica es mayor a  $\nu W$ , en la figura 6.4 se ha dibujado una estructura de 2 pisos con aisladores FPS; en la parte superior izquierda se aprecia el movimiento pendular de una masa que tiene un peso total  $W$  unida a una cuerda inextensible de radio  $R$ . En la parte superior derecha se muestra un diagrama de fuerzas, se aprecia que existe una tensión en la cuerda de magnitud  $T_C$  y las dos componentes del peso, la tangencial que tiene una magnitud  $W \text{ sen } \alpha$  y la radial que tiene un valor  $W \text{ cos } \alpha$ . La componente tangencial es la que se opone al movimiento pendular.

El arco que ha recorrido la masa del péndulo, vale  $R \alpha$ , siendo  $R$  el radio; este arco es la distancia recorrida por la masa. Ahora bien la fuerza inercial que se opone al movimiento tiene un valor de  $\frac{W}{g} R \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ ; donde  $\frac{d^2 \alpha}{dt^2}$  es la aceleración angular;  $W/g$  es la masa. Luego al hacer el equilibrio de las fuerzas tangenciales se tiene:

$$\frac{W}{g} R \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + W \text{ sen } \alpha = 0$$

Para valores pequeños de  $\alpha$ , que es el caso del movimiento de los edificios ante un sismo, el valor de  $\text{sen}\alpha = \alpha$  y tomando en cuenta que  $W$  no puede ser cero, la ecuación diferencial del movimiento pendular queda:

$$\alpha'' + \frac{g}{R} \alpha = 0 \quad (6.1)$$

En movimiento armónico simple (vibración libre, sin amortiguamiento. Aguiar, 2007) la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\alpha'' + w_b^2 \alpha = 0$$

Siendo  $w_b$  la frecuencia circular pero ya adaptándole a una estructura con FPS,  $w_b$  es la frecuencia circular nominal de la aislación y al observar la ecuación, se tiene:

$$w_b = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (6.2)$$

Pero  $w_b$  también es igual a la raíz cuadrada de la rigidez del aislador dividido para la masa. Luego se tiene:

$$w_b = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{k_b}{m}} \quad \rightarrow \quad k_b = \frac{mg}{R}$$

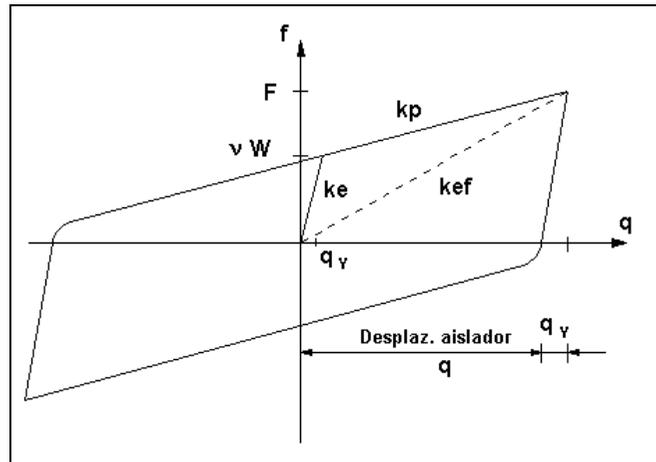
$$k_b = \frac{W}{R} \quad (6.3)$$

El período de vibración  $T_b$  del aislador es igual a  $2\pi$  dividido para  $w_b$  con lo que se obtiene, lo siguiente.

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (6.4)$$

Al examinar la ecuación (6.4) se observa que el período del sistema de aislación solo depende del radio de curvatura de la superficie esférica del FPS. Por lo tanto, con la ecuación (6.4) se determina el radio del aislador para el período objetivo que se desea tenga el sistema de aislación.

En la figura 6.5 se presenta el comportamiento no lineal de un aislador FPS de la primera generación. Al comienzo trabaja en el rango elástico con una rigidez  $k_e$  hasta cuando la fuerza actuante supera el valor de  $\nu W$  en ese instante ingresa al rango no lineal y trabaja con una rigidez  $k_p$ . Anteriormente se indicó que cuando la fuerza es mayor a  $\nu W$  la estructura empieza a actuar como péndulo. Por lo tanto la rigidez  $k_p = k_b$ . Luego se tiene.



**Figura 6.5** Comportamiento de histéresis de un aislador FPS

$$k_e = \frac{\nu W}{q_Y} \quad (6.5)$$

$$k_p = \frac{W}{R}$$

La variable todavía no definida es  $q_Y$  que es el desplazamiento de fluencia. En el lazo de histéresis de la figura 6.5 se ha identificado con la variable  $F$  a la fuerza asociada al desplazamiento del aislador  $q$  más  $q_Y$ . El valor de la fuerza  $F$  es el siguiente:

$$F = \nu W + k_p q$$

$$F = \nu W + \frac{W}{R} q \quad (6.6)$$

En la figura 6.5 se ha presentado también la rigidez secante que se ha denominado  $k_{ef}$  y a futuro se denominará rigidez efectiva del aislador que es igual a la fuerza  $F$  dividida para el desplazamiento  $q$ .

$$k_{ef} = \frac{\nu W + \frac{W}{R} q}{q} \quad (6.7)$$

Por otra parte, se define el amortiguamiento efectivo  $\xi_{ef}$  como la relación entre la energía disipada en un ciclo de histéresis  $W_D$  (área encerrada en la curva de histéresis) con relación a  $4\pi W_E$ . Donde  $W_E$  es la energía elástica. Estas energías, valen:

$$W_D = 4 \nu W q$$

$$W_E = \frac{1}{2} K_{ef} q^2$$

Al reemplazar en la definición de  $\xi_{ef}$  y luego de sustituir el valor de  $K_{ef}$  se encuentra:

$$\xi_{ef} = \frac{W_D}{4\pi W_E} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{v}{v + \frac{q}{R}} \right] \quad (6.8)$$

Tanto en la ecuación ( 6.7 ) como en la ecuación ( 6.8 ) la rigidez efectiva como el amortiguamiento efectivo depende del desplazamiento lateral  $q$  . De tal manera que el análisis sísmico se hace iterando hasta que converge el valor de  $q$  , ya que para encontrar  $k_{ef}$  o  $\xi_{ef}$  se necesita conocer el valor de  $q$  , en un primera iteración uno se impone este valor pero a futuro se calcula  $q$  se compara con el impuesto y se recalcula  $k_{ef}$  y  $\xi_{ef}$  .

### 6.3 MODELO DE UN GRADO DE LIBERTAD

Como un inicio, para estudiar el comportamiento sísmico de una estructura sobre aisladores de base FPS, de la primera generación, se modela como un sistema de **1 grado de libertad**, **1gdl**, que tiene  $m_e, c_e, k_e$  masa, amortiguamiento y rigidez equivalente y que está sujeto a una excitación  $\ddot{u}_{gx}(t)$  , como se muestra en la figura 6.6. Ahora, en primer lugar se va a indicar como se obtiene  $m_e, c_e, k_e$  a partir de una estructura espacial y en segundo lugar se va a presentar el algoritmo propuesto por Bozzo y Mahin (1989) para encontrar la respuesta sísmica.

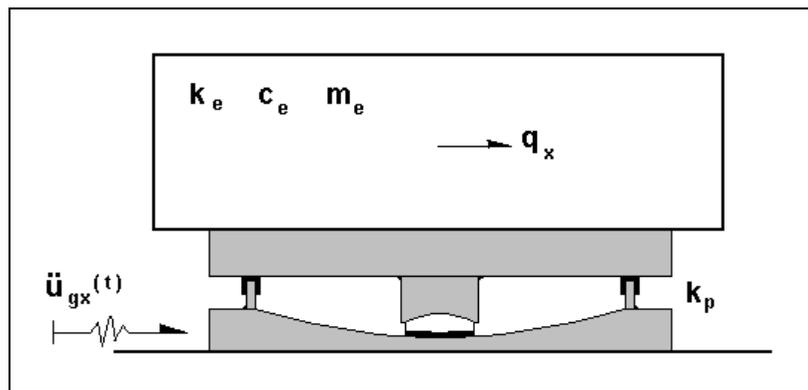


Figura 6.6 Modelo unidimensional de un grado de libertad.

Sea  $M^{(s)}, K^{(s)}$  la matriz de masa y rigidez de una estructura espacial, en la cual se han considerado tres grados de libertad por planta. A partir de este modelo, de un sistema que tiene **múltiples grados de libertad**, **mgdl** se halla un modelo simplificado de 1 gdl, como lo ilustra la figura 6.7. Existen varios modelos para encontrar la masa y rigidez, fundamentalmente de un sistema de 1 gdl a partir de un sistema de mgdl, entre los que se destacan los propuestos por Rodríguez (1994), Fajfar y Gaspersic (1996), Esteva (1999), Aguiar (2001).

Aquí se presenta en forma resumida el primero de ellos que considera que la frecuencia natural de vibración en el primer modo de vibración de la estructura con mgdl,  $w_n$  es igual a la frecuencia natural de vibración en el sistema de 1 gdl  $w$ . A partir de esta consideración, se halla.

$$\begin{aligned} k &= \phi^{(1)t} K^{(s)} \phi^{(1)} \\ m_e &= \phi^{(1)t} M^{(s)} r^{(s)} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Donde  $\phi^{(1)}$  es el primer modo de vibración que se obtiene de la solución del problema de valores y vectores propios con las matrices  $K^{(s)}$  y  $M^{(s)}$ ;  $k$  es la rigidez equivalente de la superestructura en el modelo de 1 gdl;  $r^{(s)}$  es un vector que relaciona los grados de libertad de la estructura con mgdl con la dirección del movimiento del suelo.

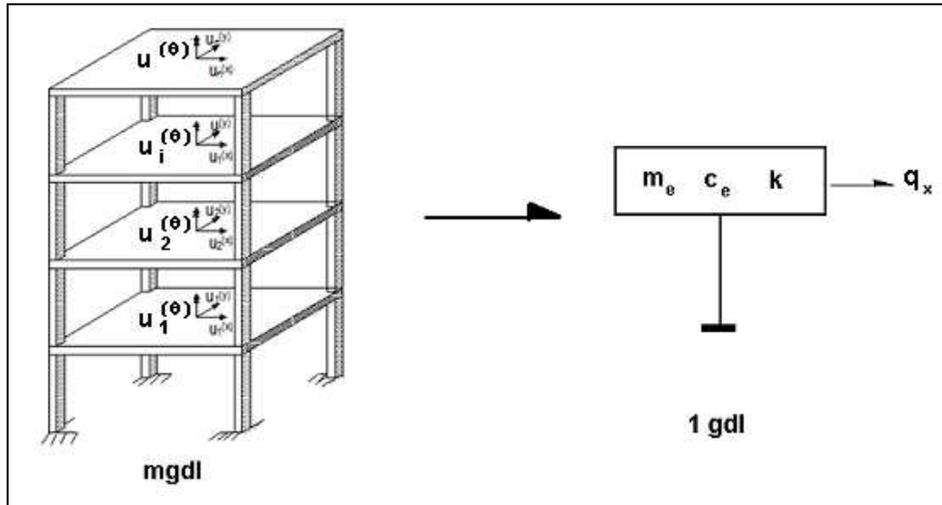


Figura 6.7 Sistemas de mgdl y de 1 gdl.

El modelo de Bozzo y Mahín (1989) que está descrito en Zayas *et al* (1989) contempla las siguientes hipótesis:

- La masa del sistema de aislación es tan pequeña en comparación con la masa de la superestructura que se puede despreciar.
- El amortiguamiento de la superestructura es de tipo viscoso y el del sistema de aislación con FPS es de tipo friccional o de Coulomb, sin embargo de ello y teniendo en cuenta que la masa  $m_e$  y rigidez  $k$  de la superestructura son mayores a la masa y rigidez del sistema FPS, se considera que el sistema de un grado de libertad tiene amortiguamiento viscoso. Luego se cumple:

$$c_e = 2 \xi^* m_e \sqrt{\frac{k}{m_e}} \quad (6.10)$$

Donde  $\xi^*$  es el amortiguamiento ficticio de la estructura con aisladores de base FPS y es aproximadamente igual a:

$$\xi^* \approx \frac{T^{(b)}}{T^{(s)}} \xi \quad (6.11)$$

Donde  $\xi$  es el factor de amortiguamiento de la superestructura;  $T^{(b)}$  es el período de vibración del sistema de aislamiento. Este período normalmente se impone el proyectista estructural y es el que desea tenga la estructura con aislamiento de base, es el período objetivo;  $T^{(s)}$  es el período fundamental de la superestructura. La ecuación ( 6.11 ) se halla a partir de  $\xi^* = \left( w / w^{(b)} \right) \xi$ . Siendo  $w$  la frecuencia natural en el sistema de 1gdl y  $w^{(b)}$  la frecuencia natural de vibración del sistema FPS.

- iii. Se considera que la fuerza de corte entre el sistema FPS y la superestructura son iguales , de tal manera que sus flexibilidades pueden combinarse en el modelo considerándolas con una flexibilidad equivalente.

$$f_e = f^{(s)} + f^{(b)}$$

Donde  $f_e$  es la flexibilidad del sistema equivalente;  $f^{(s)}$  es la flexibilidad de la superestructura;  $f^{(b)}$  es la flexibilidad del sistema de aislación. Al reemplazar  $f^{(s)}$  y  $f^{(b)}$  se halla:

$$\frac{i}{k_e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_p} \quad \Rightarrow k_e = \frac{k k_p}{k + k_p} \quad (6.12)$$

Siendo  $k$  la rigidez del sistema equivalente del sistema de 1 gdl que se obtiene a partir de la rigidez de la superestructura.  $k_p$  es la rigidez del sistema de aislación FPS (tramo final), que es igual a  $k_p = W / R$ , donde  $W$  es el peso total y  $R$  es el radio del FPS.

- iv. Cuando el sistema no desliza la rigidez es igual a  $k$  la rigidez del sistema de 1 gdl y cuando el sistema desliza la rigidez del sistema es  $k_e$  como se muestra en la figura 6.8. La rigidez  $k_e$  se halla con la ecuación ( 6.12 ).

La ecuación del movimiento para el sistema de 1 gdl que representa a una estructura sobre aisladores FPS, es la siguiente para cuando se desea realizar un análisis no lineal.

$$m_e \ddot{q} + 2 m_e w \xi^* \dot{q} + f(t) = -m \ddot{U}_{gx} \quad (6.13)$$

Donde  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  es el desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema de 1 gdl.  $q$  es el desplazamiento horizontal del sistema de aislación más el desplazamiento relativo de la superestructura;  $m_e$  es la masa equivalente del sistema de 1 gdl que se halla con ( 6.9 );  $w$  es

la frecuencia del sistema;  $\xi^*$  es el factor de amortiguamiento obtenido con ( 6.11 );  $f(t)$  es la fuerza de resistencia equivalente definido en el modelo de la figura 6.8;  $\ddot{U}_{gx}$  es la aceleración del suelo en sentido X. El período equivalente  $T_e$  cuando desliza el sistema FPS vale:

$$T_e = 2\pi \sqrt{\frac{m_e}{k_e}} \quad (6.14)$$

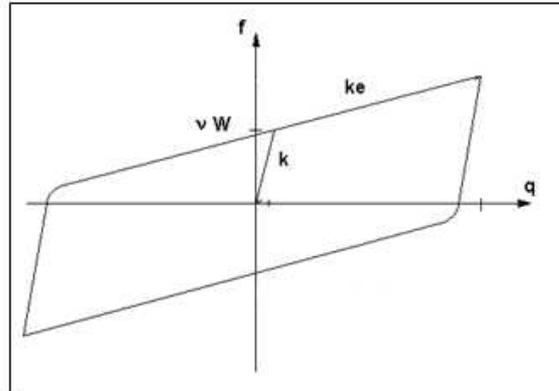


Figura 6.8 Modelo bilineal utilizado por Bozzo y Mahin .

Bozzo y Mahín (1989) también proponen realizar un análisis lineal, aproximado en el sistema de 1 gdl, para el efecto la ecuación diferencial del movimiento a resolver es la siguiente:

$$m_e \ddot{q} + 2 m_e w \xi^* \dot{q} + k_e q = -m \ddot{U}_{gx} \quad (6.15)$$

### • EJEMPLO 1

La estructura de tres pisos de la figura 6.9, tiene columnas de 50/50 y vigas de 40/40, se encuentra sobre aisladores de base FPS, el valor de la fricción del eslizador  $\nu = 0.04$  y el período objetivo es de 2.0 s.; la carga muerta es  $0.6 \text{ T/m}^2$  y la carga viva es  $0.2 \text{ T/m}^2$ , se considera el 25% de la carga viva en el análisis. Se pide:

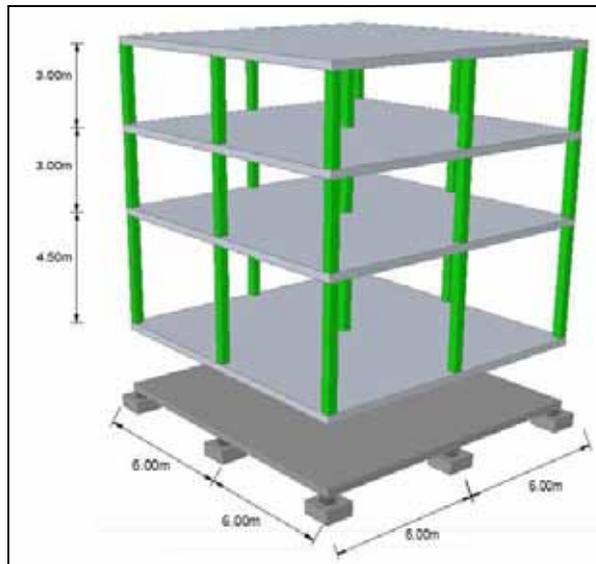
- i. Mostrar la matriz de rigidez lateral de uno de los pórticos.
- ii. Mostrar los primeros elementos de la matriz de rigidez y de la matriz de masas de la superestructura.
- iii. Presentar el primer modo de vibración.
- iv. Encontrar la masa equivalente y la rigidez equivalente del sistema de 1 gdl.
- v. Encontrar el radio del sistema FPS para que el aislamiento tenga un período de 2 s.
- vi. Encontrar la rigidez  $k_p$ , la rigidez  $k_e$ , la resistencia de fluencia  $f_y$  y  $\xi^*$ .
- vii. Encontrar la respuesta en el tiempo ante el sismo de El Centro de 1940, mediante un análisis lineal en el sistema de 1 gdl.
- viii. Encontrar la respuesta ante el sismo de El Centro de 1940, mediante un análisis no lineal en el sistema de 1 gdl.

- ix. Si se duplica el acelerograma de el sismo de El Centro de 1940 encontrar la respuesta lineal y no lineal.
- x. Para el análisis no lineal mostrar la relación fuerza desplazamiento.

### • SOLUCIÓN

Se considero un módulo de elasticidad  $E = 1800000 T / m^2$  y se utilizó el programa rlxinfi descrito en Aguiar (2008) para encontrar la matriz de rigidez lateral, esta resulta:

$$K_L = \begin{bmatrix} 11453 & -9517 & 2469 \\ & 13659 & -6101 \\ & & 3940 \end{bmatrix}$$



**Figura 6.9** Geometría de edificio de 3 pisos con planta cuadrada.

Las matrices  $M^{(s)}$  y  $K^{(s)}$  son de 9 X 9, ya que se obtienen con un modelo de tres grados de libertad por planta. Los primeros elementos de estas matrices son:

$$M^{(s)} = \begin{bmatrix} 9.55 & & & & & & & & \\ & 9.55 & & & & & & & \\ & & 9.55 & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & \\ & & & & 229.22 & & & & \end{bmatrix} \quad K^{(s)} = \begin{bmatrix} 34359 & -28551 & 7407 & & & & & & \\ & 40977 & -18303 & & & & & & \\ & & 11820 & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & \\ & & & & & & & & 567360 \end{bmatrix}$$

El primer modo de vibración  $\phi^{(1)T} = [0.435 \quad 0.768 \quad 1.0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

La masa y rigidez equivalente para el sistema de 1 gdl, valen:

$$m_e = 21.048 \text{ Ts}^2 / m \quad k = 1745.7 \text{ T} / m$$

Para calcular el radio del aislador se parte del período objetivo de 2 s.

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad \Rightarrow \quad R = \left( \frac{T}{2 \pi} \right)^2 g = \left( \frac{2}{2 \pi} \right)^2 9.8 \approx 1.0 \text{ m}.$$

El peso total de la estructura es:

$$W = (0.6 * 144 * 3 + 0.25 * 0.2 * 144 * 3) * 1.1 = 308.88 \text{ T}.$$

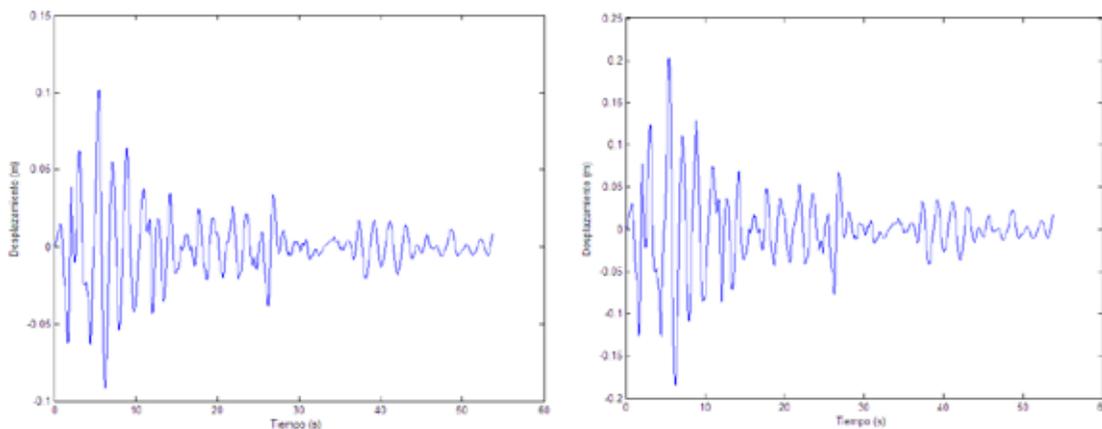
Se ha mayorado la carga en 10%, que es lo que se ha estimado que pesa la cimentación y el sistema FPS.

$$k_p = \frac{W}{R} = \frac{308.88}{1} = 308.88 \text{ T} / m \quad k_e = \frac{k k_p}{k + k_p} = \frac{1745.7 * 308.88}{1745.7 + 308.88} = 262.44 \text{ T} / m$$

$$f_y = v * W = 0.04 * 308.88 = 12.35 \text{ T}.$$

$$\xi^* = \frac{T^{(b)}}{T^{(s)}} \xi = \frac{2}{0.619} * 0.05 = 0.1613$$

A la izquierda de la figura 6.10 se presenta la respuesta de la estructura ante el sismo de El Centro de 1940 y a la derecha la respuesta ante dos veces el sismo de dicho sismo pero multiplicado por 2. En la figura 6.11 se aprecia lo propio pero utilizando análisis no lineal.



**Figura 6.10** Respuestas lineal ante sismo de El Centro y 2 veces el sismo de El Centro.

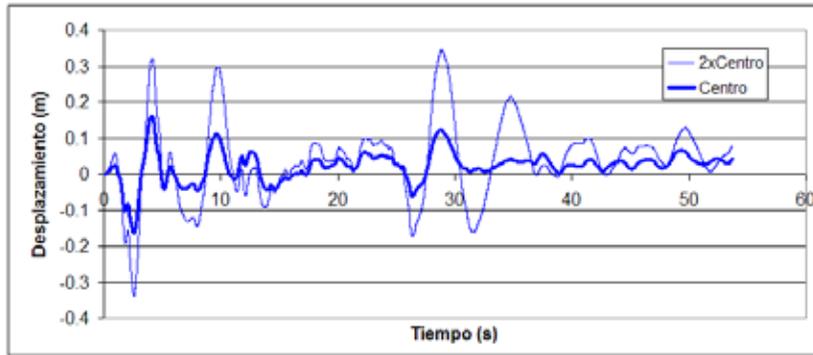


Figura 6.11 Respuestas lineal ante sismo de El Centro y 2 veces el sismo de El Centro.

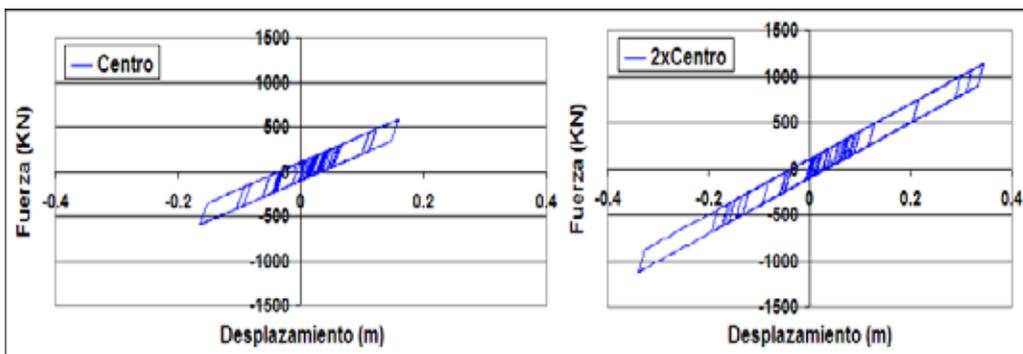


Figura 6.12 Relación fuerza desplazamiento ante sismo de El Centro y 2 veces el sismo de El Centro.

## 6.4 MODELO MATEMÁTICO EN EL PLANO

Se analiza el comportamiento de una superestructura de un piso en el plano, sobre un aislador FPS, las columnas que sostienen a la superestructura son modeladas por medio de resortes y amortiguamientos lineales, como se aprecia en la figura 6.13. El sistema tiene cuatro grados de libertad que se han denominado con las letras  $x$ . Dos grados de libertad se utilizan para la estructura y dos para el sistema de aislamiento, son grados de libertad con respecto al movimiento del suelo; lo importante del modelo es que se considera el desplazamiento vertical de la estructura y del sistema de aislación.

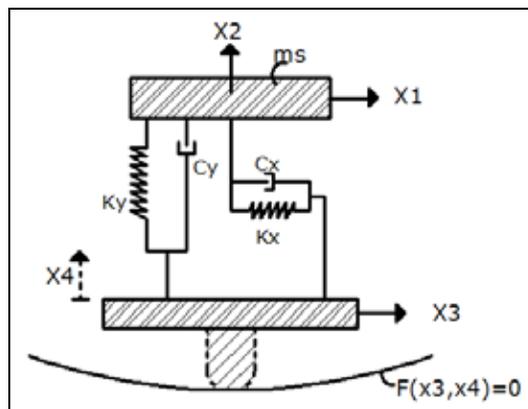


Figura 6.13 Modelo numérico considerado para estructura sobre FPS.

Es importante destacar que el desplazamiento vertical del sistema de aislación  $x_4$  es una coordenada dependiente ya que se la obtiene a partir de la ecuación de una esfera cuando se analiza en 3 dimensiones o a partir de la ecuación de un círculo que corresponde al presente caso en que se analiza en dos dimensiones.

Las matrices de rigidez  $K$ , masa  $M$  y amortiguamiento  $C$  son las siguientes:

$$K = \begin{bmatrix} k_x & & & \\ 0 & k_y & & \\ -k_x & 0 & k_x & \\ 0 & -k_y & 0 & k_y \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} m_s & & & \\ 0 & m_s & & \\ 0 & 0 & m_b & \\ 0 & 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_x & & & \\ 0 & c_y & & \\ -c_x & 0 & c_x & \\ 0 & -c_y & 0 & c_y \end{bmatrix}$$

Donde  $k_x, k_y$  son las rigideces de los resortes en sentido horizontal y vertical;  $c_x, c_y$  son los amortiguamientos horizontal y vertical;  $m_s, m_b$  son las masas de la estructura y del sistema de aislamiento.

Las ecuaciones del movimiento de la superestructura, en forma matricial queda definido por:

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x & 0 \\ 0 & k_y & 0 & -k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_x & 0 & -c_x & 0 \\ 0 & c_y & 0 & -c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_{gx} \\ \ddot{U}_{gy} \end{bmatrix}$$

Como hay tres coordenadas independientes se ha particionado la matriz de rigidez y amortiguamiento en la tercera columna. Al volver a reescribir el sistema de ecuaciones diferenciales pero únicamente en función de las coordenadas independientes, se tiene:

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x \\ 0 & k_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_x & 0 & -c_x \\ 0 & c_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 0 \\ k_y \end{bmatrix} x_4 - \begin{bmatrix} 0 \\ c_y \end{bmatrix} \dot{x}_4 - \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_{gx} \\ \ddot{U}_{gy} \end{bmatrix}$$

En forma compacta se tiene:

$$M_s \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = -K(1:2,1:3) X - C(1:2,1:3) \dot{X} - K(1:2,4) x_4 - C(1:2,4) \dot{x}_4 - M_s \begin{bmatrix} \ddot{U}_{gx} \\ \ddot{U}_{gy} \end{bmatrix}$$

La notación  $(i:j,k:l)$  representa la submatriz delimitada entre las filas  $i$  y  $j$ , y las columnas  $k$  y  $l$ . Al escribir en forma más compacta el sistema de ecuaciones diferenciales de la superestructura, se tiene:

$$M_s \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K(1:2,1:3) & -C(1:2,1:3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K(1:2,4) & -C(1:2,4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} \\ - M_s \begin{bmatrix} \ddot{U}_{gx} \\ \ddot{U}_{gy} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Por otra parte, la ecuación del movimiento para el sistema de aislamiento es:

$$m_b \ddot{x}_3 = - \begin{bmatrix} -k_x & 0 & k_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -c_x & 0 & c_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} - m_b \ddot{U}_{gx} - f_x \quad (6.18)$$

Donde  $f_x$  es la fuerza de resistencia en el aislador, que será definida más adelante. Al escribir en forma compacta, las ecuaciones (6.17) y (6.18) se obtiene.

$$\begin{bmatrix} m_s & & \\ 0 & m_s & \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K(1:3,1:3) & -C(1:3,1:3) \\ K(1:3,4) & -C(1:3,4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_s & & \\ 0 & m_s & \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ddot{U}_g - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_x \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\ddot{U}_g = \begin{bmatrix} \ddot{U}_{gx} \\ \ddot{U}_{gy} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Se denomina  $q = [1:3]$  a las coordenadas independientes y con la letra  $r$  a la coordenada dependiente. Por otra parte, se define:

$$M_q = \begin{bmatrix} m_s & & \\ 0 & m_s & \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} \quad \ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} \quad B_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Con esta notación, el sistema de ecuaciones diferenciales para la superestructura y aislamiento, queda:

$$M_q \ddot{X} = - \begin{bmatrix} K(q,q) & -C(q,q) \\ K(q,r) & -C(q,r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K(q,r) & -C(q,r) \\ K(q,r) & -C(q,r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} - M_q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ddot{U}_g - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_x \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\ddot{X} = -M_q^{-1} \begin{bmatrix} K(q,q) & -C(q,q) \\ K(q,r) & -C(q,r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} - M_q^{-1} \begin{bmatrix} K(q,r) & -C(q,r) \\ K(q,r) & -C(q,r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ddot{U}_g - M_q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_x$$

Se denomina:

$$\begin{aligned}
 B_r &= -M_q^{-1} [K(q,r) \quad C(q,r)] \\
 B_f &= -M_q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Ahora, al escribir como una ecuación de espacio de estado, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \ddot{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_q^{-1}K(q,q) & -M_q^{-1}C(q,q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} + B_r \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} + B_U \ddot{U}_g + B_f f_x$$

Sea:

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \ddot{X} \end{bmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_q^{-1}K(q,q) & -M_q^{-1}C(q,q) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Con esto, el sistema de espacio de estado, queda:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y} &= A Y + B_r^* Y_r + B_U^* \ddot{U}_g + B_f^* f_x \\
 B_U^* &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_U \end{bmatrix} \quad B_f^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B_f \end{bmatrix} \quad B_r^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B_r \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

## 6.5 MODELO FÍSICO CON ELEMENTO GAP

Cuando una estructura sobre aisladores FPS, está sometida a pequeños desplazamientos laterales, la componente vertical de movimiento del sistema de aislación no es muy importante. Ahora bien cuando está sujeto a grandes deformaciones es obligatorio considerar esta componente, como también el posible levantamiento e impacto. Almazán *et al* (1998), Almazán y De la Llera (2001)

En el apartado anterior se incorporó la componente vertical que se lo denominó  $x_4$ , si bien el planteamiento del sistema de ecuaciones diferenciales no es complejo si lo es la solución de la ecuación escrita en espacio de estado descrita en (6.23). Una forma que facilita la solución del problema es mediante la incorporación de un elemento denominado *gap* que se describe más adelante. Constantinou *et al* (1990), Almazán (2001).

Antes de presentar el modelo físico, se recalca que en el modelo indicado en el apartado anterior, se trabajó con coordenadas con respecto al suelo, para ese caso la matriz

de masa es diagonal y la matriz de rigidez no es diagonal. Ahora bien cuando se trabaja con coordenadas relativas, como se lo hace en este apartado la matriz de rigidez es diagonal y la matriz de masa no es diagonal.

En la figura 6.14 se presenta el modelo numérico que se va a estudiar. La superestructura es de un piso y tiene una masa  $m_s$ , la misma que se halla apoyada sobre resortes que tienen rigideces  $k_{sx}, k_{sy}, k_{sz}$  y amortiguadores  $c_{sx}, c_{sy}, c_{sz}$ ; la rigidez y amortiguamiento se lo ha definido en los tres sentidos X, Y, Z. Se tiene un solo aislador FPS y en la parte inferior el elemento *gap* que representa la flexibilidad axial del vástago vertical del FPS el mismo que está sujeto a la estructura mientras que el otro desliza por la superficie esférica.

Este *gap* hace que la estructura se mueva lateral y verticalmente respetando la restricción cinemática impuesta por la superficie esférica del aislador. El *gap* no transmite fuerzas de tracción permitiendo de esta manera el probable levantamiento y posterior impacto del aislador.

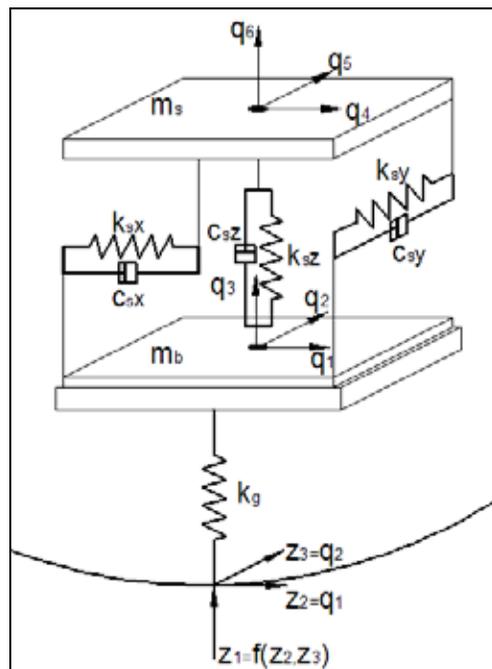


Figura 6.14 Modelo numérico estudiado y grados de libertad.

### 6.5.1 Sistema de ecuaciones diferenciales

Se ha denominado con la letra  $q$ , a los grados de libertad, se ha empezado la numeración primero por el sistema de aislación luego por la superestructura; con letra  $z$ , se identifica a los grados de libertad del *gap*. Se destaca que  $z_2 = q_1$  y que  $z_3 = q_2$ . Luego las fuerzas horizontales  $R_x, R_y$  se transmiten rígidamente a los grados de libertad  $q_1, q_2$ . Para estas condiciones las matrices de masa  $M$ , rigidez  $K$  y amortiguamiento  $C$  son las siguientes.

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} m^{(b)} + m^{(s)} & \\ & m^{(s)} \end{bmatrix} & m^{(b)} &= \begin{bmatrix} m_b & & \\ & m_b & \\ & & m_b \end{bmatrix} & m^{(s)} &= \begin{bmatrix} m_s & & \\ & m_s & \\ & & m_s \end{bmatrix} \\
 K &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & k^{(s)} \end{bmatrix} & k^{(s)} &= \begin{bmatrix} k_{sx} & & \\ & k_{sy} & \\ & & k_{sz} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & c^{(s)} \end{bmatrix} & c^{(s)} &= \begin{bmatrix} c_{sx} & & \\ & c_{sy} & \\ & & c_{sz} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Donde  $m^{(b)}$ ,  $m^{(s)}$  son las sub matrices de masa y rigidez del sistema de aislamiento y superestructura,  $m_b$ ,  $m_s$  son las masas del sistema de aislación y de la superestructura, son elementos de  $m^{(b)}$ ,  $m^{(s)}$ . Por otra parte,  $k^{(s)}$ ,  $c^{(s)}$  son las sub matrices de rigidez y amortiguamiento de la superestructura. Los elementos de  $k^{(s)}$ ,  $c^{(s)}$  están indicados en la figura 6.14. Finalmente  $\bar{0}$  es una matriz de 3 X 3 con elementos 0.

**Se va a resolver en forma no lineal el sistema de aislamiento** por este motivo, la primera sub matriz de  $K$  y de  $C$  son  $\bar{0}$ . En análisis no lineal la rigidez depende de la deformación, depende del modelo de histéresis que se utiliza. Consecuentemente en el proceso de cálculo se hallarán estos valores que hoy se han colocado nulos.

Si se realiza un **análisis lineal** la fuerza restitutiva  $f_L = k^{(b)} q + c^{(b)} \dot{q}$ . En este caso la relación fuerza deformación es lineal. Ahora bien, para análisis no lineal se pudo haber escrito las matrices de rigidez y de amortiguamiento de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
 K &= \begin{bmatrix} k^{(b)} & \bar{0} \\ \bar{0} & k^{(s)} \end{bmatrix} & k^{(b)} &= \begin{bmatrix} k_b & & \\ & k_b & \\ & & k_z \end{bmatrix} & k^{(s)} &= \begin{bmatrix} k_{sx} & & \\ & k_{sy} & \\ & & k_{sz} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} c^{(b)} & \bar{0} \\ \bar{0} & c^{(s)} \end{bmatrix} & c^{(b)} &= \begin{bmatrix} c_b & & \\ & c_b & \\ & & c_z \end{bmatrix} & c^{(s)} &= \begin{bmatrix} c_{sx} & & \\ & c_{sy} & \\ & & c_{sz} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Siendo  $k^{(b)}$ ,  $c^{(b)}$  las sub matrices de rigidez del sistema de aislamiento,  $k_b$ ,  $k_z$ ,  $c_b$ ,  $c_z$  los elementos de  $k^{(b)}$ ,  $c^{(b)}$ . Si se escriben las matrices  $K$ ,  $C$  en la forma indicada, para el análisis no lineal del sistema de aislamiento, se debe tener en cuenta lo siguiente.

$$f_{NL} = f_{NL} + f_L - f_L$$

Más adelante se muestra el sistema de ecuaciones diferenciales de una estructura con aisladores FPS. Por ahora se indica que si se ha colocado en  $K, C$  las sub matrices  $k^{(b)}, c^{(b)}$ , cuando se evaluán las fuerzas restitutivas se lo hará con  $\hat{f}_{NL} = f_{NL} - f_L$ .

Retomando el problema presentado en la figura 6.14, el sistema de ecuaciones diferenciales, está definido por:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q + Q = -M L_w \ddot{U}_g \quad (6.15)$$

Donde  $q$  es el vector de grados de libertad;  $Q$  es el vector de las fuerzas restitutivas no lineales generadas por el aislador, que se va a tratar en el siguiente numeral;  $L_w$  es la matriz de incidencia del input  $\ddot{U}_g$  en los grados de libertad del sistema de aislamiento; finalmente  $\ddot{U}_g = [\ddot{U}_{gx}, \ddot{U}_{gy}, \ddot{U}_{gz} + g]^t$  siendo  $\ddot{U}_{gx}, \ddot{U}_{gy}, \ddot{U}_{gz}$  las componentes de aceleración del suelo en las direcciones  $X, Y, Z$ .  $g = 981 \text{ cm/s}^2$ . Para el modelo que se está analizando, se tiene:

$$L_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M L_w = \begin{bmatrix} m_b + m_s \\ m_b + m_s \\ m_b + m_s \\ m_s \\ m_s \\ m_s \end{bmatrix}$$

### 6.5.2 Fuerzas restitutivas

Únicamente para hacer más fácil la explicación se halla el vector  $Q$  para el caso plano pero luego por inducción se coloca su formulación para el caso espacial. Por este motivo en la figura 6.15, a la izquierda se presenta el modelo de la figura 6.14 pero en el plano, al centro se muestra el diagrama del cuerpo libre de la base y a la derecha el modelo de la relación fuerza deformación del *gap*.

En la figura central de 6.15,  $\lambda_h, \lambda_v$  son las fuerzas de corte y axial en la base provenientes de la super estructura;  $f_g$  es la fuerza de compresión del *gap* como este elemento trabaja solo a compresión vale 0 cuando la deformación axial del *gap*,  $\delta_g > 0$  como se aprecia a la derecha de la figura 6.15. Las variables no definidas son la reacción horizontal y vertical,  $R_x, R_z$ .

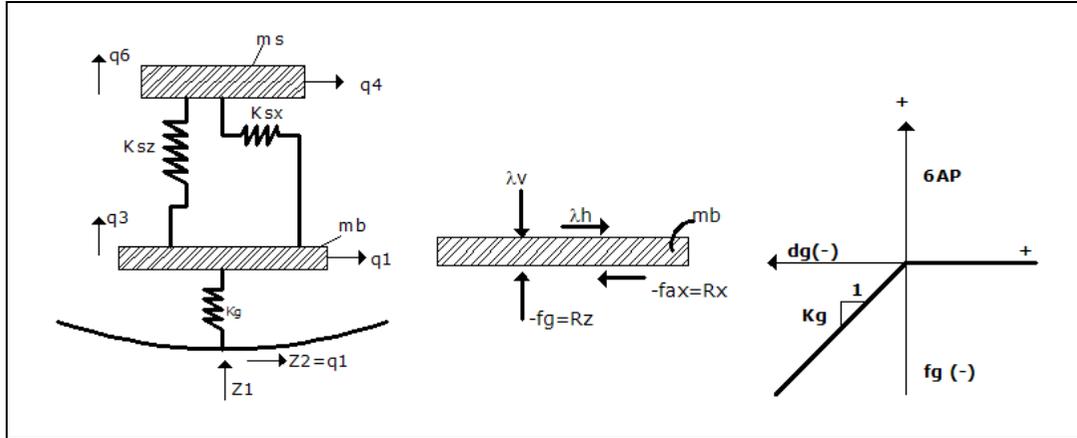


Figura 6.15 Diagrama de cuerpo libre en dos dimensiones.

Para el caso plano, el desplazamiento vertical se obtiene con  $z_1 = R - \sqrt{R^2 - q_1^2}$ .  
 Nótese que se ha considerado  $z_2 = q_1$ . Con esto la deformación vertical y la fuerza vertical en el *gap* se halla de la siguiente manera:

$$\delta_g = q_3 - \left( R - \sqrt{R^2 - q_1^2} \right)$$

$$f_g = k_g \delta_g \left[ \frac{1 - \text{sign}(\delta_g)}{2} \right] \tag{6.16}$$

Si  $f_g \geq 0$  todo es cero ya que el *gap* no trabaja a tracción. Luego la fuerza normal es cero, el coeficiente de fricción  $\nu$  es cero, etc.

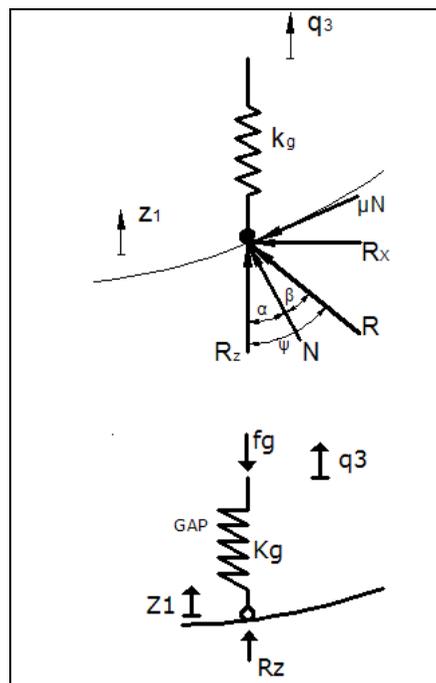


Figura 6.16 Fuerzas que actúan en la interfase de la aislación.

En la figura 6.16 se aprecia con más detalle el cuerpo libre, en la interfase de aislación. Se indica la fuerza tangencial  $v N$ , la fuerza normal  $N$  que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje vertical, las reacciones horizontal y vertical  $R_x, R_z$  y las resultantes de estas reacciones  $R$ .

El ángulo  $\psi$  que forma la resultante de las reacciones con el eje vertical se evalúa de la siguiente manera:

$$\psi = \alpha + \beta = \arcsen\left(\frac{q_1}{R}\right) + \arctg(v) \operatorname{sign}(\dot{q}_1)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \dot{q}_1 > 0 \quad \psi &= \alpha + \beta \\ \text{Si } \dot{q}_1 < 0 \quad \psi &= \alpha - \beta \end{aligned} \quad (6.17)$$

Una vez que se ha calculado  $f_g$  y los ángulos se obtiene la fuerza normal  $N$  descomponiendo las fuerzas normal y tangencial en sus componentes horizontal y vertical y haciendo equilibrio de fuerzas; luego de ello se encuentra la fuerza tangencial. Las reacciones, para el caso plano se encuentran con las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} R_z &= -f_g \\ R_x &= R_z \operatorname{tg} \psi \\ |R| &= -f_g / \cos \psi \end{aligned} \quad (6.18)$$

Una vez que se ha explicado como se obtienen las reacciones, fuerza normal y tangencial en el modelo plano, el cálculo del vector que contiene las fuerzas restitutivas  $Q$  es directo por lo que se omite este paso y se coloca este vector pero para el modelo espacial descrito en la figura 6.14. Este resulta:  $Q = [R_x \quad R_y \quad R_z \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

### 6.5.3 Ecuaciones en Espacio de Estado

Se reescribe nuevamente la ecuación (6.15) y se multiplica por la izquierda por la inversa de la matriz de masa  $M$  y se despeja  $\ddot{q}$ .

$$\begin{aligned} M \ddot{q} + C \dot{q} + K q + Q &= -M L_w \ddot{U}_g \\ \ddot{q} &= (-M^{-1} K) q + (-M^{-1} C) \dot{q} + (-M^{-1}) Q - L_w \ddot{U}_g \end{aligned}$$

El producto  $-M^{-1} Q$  se puede escribir de la siguiente forma:

$$-M^{-1} Q = -M^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -M^{-1} L_f R \quad (6.19)$$

Luego:

$$\ddot{q} = (-M^{-1} K) q + (-M^{-1} C) \dot{q} + (-M^{-1}) L_f R - L_w \ddot{U}_g$$

Con esto la ecuación de estado, queda:

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} K & -M^{-1} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1} L_f \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0 \\ -L_w \end{bmatrix} \ddot{U}_g \quad (6.20)$$

Por otra parte es conveniente escribir  $\ddot{q}$  de la siguiente manera:

$$\ddot{q} = -M^{-1} [K q + C \dot{q} + L_f R + M L_w \ddot{U}_g] \quad (6.21)$$

Para este caso ya se indicó el producto  $M L_w$

#### 6.5.4 Coeficiente de rozamiento

Constantinou *et al* (1990), Almazán (2001) han demostrado que el coeficiente de fricción  $\nu$  varía con la velocidad de deformación de los FPS y por otra parte hacen notar la presencia de la fricción estática  $\nu_{st}$  y esto afecta a la respuesta de la estructura. Constantinou *et al* (1990) propone la siguiente ecuación que toma en cuenta la variación de velocidad  $V$ .

$$\nu(V) = \mu_{\max} - (\mu_{\max} - \mu_{\min}) \exp(-a_f V) \quad (6.22)$$

Donde  $\nu_{\min}$  es el coeficiente de fricción para velocidad cercana a cero;  $\nu_{\max}$  es el coeficiente de fricción asociado a grandes velocidades;  $a_f$  es un coeficiente de transición entre la velocidad mínima y la máxima que alcanza el dispositivo;  $V$  es un vector que contiene las velocidades a las cuales está sometido el aislador durante una excitación sísmica y  $\nu(V)$  es el coeficiente de fricción asociada a una velocidad dada.

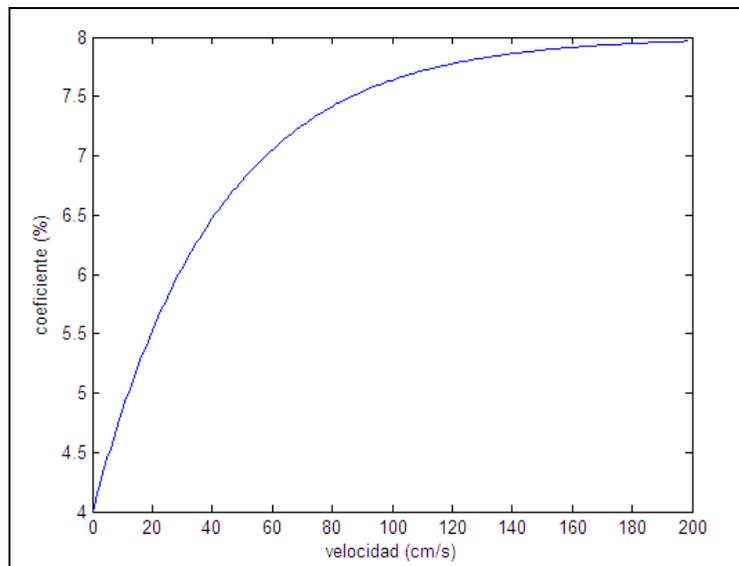
- **EJEMPLO 2**

Presentar la variación del coeficiente de fricción para los siguientes datos:

$$v_{\min} = 0.04, \quad v_{\max} = 0.08, \quad a_f = 0.024 \text{ s/cm}$$

- **SOLUCIÓN**

En la figura 6.17 se presenta la variación de  $\nu$  de acuerdo al modelo propuesto por Constantinou *et al* (1990).



**Figura 6.17** Variación del coeficiente de fricción

### 6.5.5 Modelo de Histéresis

Para el modelaje, no lineal, de las fuerzas friccionales en la interfase de la superficie cóncava de acero con el deslizador de teflón, se trabaja con el modelo de histéresis bidimensional propuesto por Park *et al* (1986) y recomendado por Constantinou *et al* (1990), que se va a describir en este apartado pero este modelo tiene su origen en el trabajo desarrollado por Bouc y complementado posteriormente por Wen, Baber y Noori.

El modelo está definido por la siguiente ecuación diferencial de primer orden (ecuación de estado).

$$\dot{\eta}_k = G_k(\eta_k, \dot{\delta}_{kh}) \dot{\delta}_{kh} \quad (6.23)$$

$$G_k(\eta_k, \dot{\delta}_{kh}) = \frac{1}{\Delta_{sk}} \left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_x \eta_{xk}^2 & a_y \eta_{xk} \eta_{yk} \\ a_y \eta_{xk} \eta_{yk} & a_y \eta_{yk}^2 \end{bmatrix} \right)$$

Donde  $G_k(\eta_k, \dot{\delta}_{kh})$  es la matriz de interacción del elemento;  $\eta_k = [\eta_{xk}, \eta_{yk}]^t$  es el vector de estado, es adimensional;  $\dot{\delta}_{kh} = [\dot{\delta}_{xk}, \dot{\delta}_{yk}]^t$ , es un vector que contiene las componentes horizontales del elemento, es dato de entrada;  $a_x = \beta + \gamma \operatorname{sgn}(\dot{\delta}_{xk} \eta_{xk})$  y  $a_y = \beta + \gamma \operatorname{sgn}(\dot{\delta}_{yk} \eta_{yk})$  son variables que definen la fase del elemento. Por otra parte:  $a_x = a_y = \beta + \gamma$  para la fase de deslizamiento y  $a_x = a_y = \beta - \gamma$  para la fase de agripamiento (no deslizamiento).  $\Delta_{sk} = \max(\mu_k N_k / k_s, \Delta_{s \min})$  es la deformación límite a partir de la cual se produce el deslizamiento,  $k_s$  es la rigidez durante la fase de agripamiento,  $\Delta_{s \min}$  es el valor mínimo que se puede adoptar para  $\Delta_{sk}$  para no tener división por cero, se recomienda  $\Delta_{s \min} = 0.02$ . Finalmente  $A, \beta, \gamma$  son constantes adimensionales que controlan la forma de los lazos de histéresis y de la curva de interacción  $\Phi(\eta_k) = 0$ .

La fuerza de fricción desarrollada en el elemento  $f_{kh}^{(v)}$  se halla con:

$$f_{kh}^{(v)} = v_k N_k \eta_k \quad (6.24)$$

Durante la fase de deslizamiento, la ecuación diferencial ( 6.23 ) cumple con dos propiedades, a saber: i) describe una curva de interacción circular solo cuando  $A / (\beta + \gamma) = 1$ . ii) los puntos que pertenecen a dicho círculo cumplen con la siguiente condición:  $\eta_{xk} = \cos \theta$  y  $\eta_{yk} = \operatorname{sen} \theta$ . Siendo  $\theta = \operatorname{arc} \tan(\dot{\delta}_{yk} / \dot{\delta}_{xk})$  es el ángulo que forma la trayectoria del aislador con el eje local  $X_k$ . Con el cumplimiento de estas propiedades se demuestra que el modelo de histéresis adoptado es consistente con el modelo de Coulomb durante el deslizamiento, que se presentó al comienzo del capítulo y de acuerdo al modelo estudiado se tiene:  $f_{kh}^{(v)} = v_k N_k [\cos \theta, \operatorname{sen} \theta]^t$ . Almazán (2001).

### 6.5.6 Programa fpsmodelo6gdl

Se presenta el programa **FPSMODELO6GDL** que sirve para el análisis del modelo físico indicado en la figura 6.14 ante la acción de tres componentes sísmicas. Este modelo tiene 6 grados de libertad, 3 en el aislamiento y 3 en la superestructura. Este programa llama a las siguientes subrutinas.

- **fps\_LD\_3dofs** Que encuentra el coeficiente de fricción. Está programado para  $a_f = 0.1$ ,  $v_{\min} = 0.05$ ,  $v_{\max} = 0.08$  (Ecuación 6.22 ). Determina las

fuerzas normales y tangenciales del FPS y prepara datos para el modelo de histéresis.

- **wen2d** Que encuentra la curva de histéresis. Está programado para  $A = 1$ ,  $\alpha = \beta = 0.5$ . (Ecuación 6.23).
- **modelo01** Que sirve para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. (Ecuación 6.20). Se destaca que el vector  $\dot{Y}$  a más de contener al vector de velocidades y aceleraciones, contiene al final al vector  $\eta_k$  de ( 6.23 ).

Los datos del programa **FPSMODELO6GDL** que deben indicarse antes de usar el programa, son los siguientes:

- **ms** Masa de la superestructura.
- **alfa** Que relaciona la masa del sistema de aislación con la masa de la superestructura ( $\text{alfa} = m_b / m_s$ ).
- **Ts** Período de vibración de la superestructura.
- **beta** Relaciona la frecuencia vertical con la frecuencia horizontal de la superestructura ( $\text{beta} = w_v / w_s$ ). Valores típicos de beta están entre 5 y 15.
- **Tb** Período de vibración del sistema de aislamiento FPS.

Las tres componentes de la acción sísmica deben estar grabados previamente en un archivo **.mat**. Este archivo contiene el incremento de tiempo de los registros  $dT$  y las tres componentes sísmicas. Luego se tiene:  $dT \quad \ddot{U}_{gx} \quad \ddot{U}_{gy} \quad \ddot{U}_{gz}$ . Cada registro tiene una fila y np aceleraciones del suelo en gals, siendo np el número de puntos del registro. Una vez que se tenga este archivo .mat en la carpeta work de Matlab se debe cargar en el programa FPSMODELO6GDL, para ello se debe cambiar la instrucción respectiva. Actualmente está para las tres componentes del sismo de El Centro de 1940. Una descripción general del programa se indica a continuación.

- Lee los datos y determina los parámetros del modelo de 6 grados de libertad.
- Encuentra las condiciones iniciales, debidas al peso propio, para ello se aplica la carga vertical muy lentamente se ha programado para que el peso se aplique en 3 s., hasta 1.5 se tiene una rampa triangular y luego es constante.
- Únicamente por didáctica se ha considerado que el acelerograma  $\ddot{U}_{gx}$  es de tipo sinusoidal y que no existe sismo en dirección Y. El objetivo es que se visualice las respuesta ante una excitación armónica. Se puede cambiar la excitación con otra función o en su defecto omitirla.
- Finalmente se halla la respuesta para las tres componentes del sismo que se requiera.

```
function [Ro]=fpsmodelo6gdl (ms,alfa,Ts,beta,Tb)
% Programa para encontrar la respuesta en un modelo de 3 gdl para superestructura
% y 3 gdl para sistema de aislacion
%
% Por: Jose Luis Almazan
% Septiembre de 2008
%
% -----
% function [A]=fpsmodelo6gdl (ms,alfa,Ts,beta,Tb)
% -----
%
```

```

% ms      masa de superestructura de un piso
% mb      masa de sistema de aislacion FPS
% alfa    = mb/ms
% Ts      Periodo de la superestructura
% beta    = vv/wo frecuencia vertical/frecuencia horizontal
% Tb      Periodo de sistema de aislamiento
% -----
% Las tres componentes sismicas deben estar guardadas en un archivo.mat
% Los datos son dT Ugx Ugy Ugz en este orden
% Cada componente es un archivo de 1 fila.
% dT      Intervalo de tiempo se acelerograma
% =====
% Paso 0) Calcula parámetros del modelo
g=981; % se trabaja en gals
wsx=2*pi/Ts; wsy=wsx; wsz=beta*wsx;
ksx=ms*wsx^2; ksy=ms*wsy^2; ksz=ms*wsz^2;
xis=0.05; wb=2*pi/Tb; % frecuencia del sistema de aislacion
Ro=g/wb^2; % radio de curvatura del FPS
mb=alfa * ms; % masa del sistema de aislacion
csx=2*xis*wsx*ms; csy=2*xis*wsy*ms; csz=2*xis*wsz*ms; % amortiguamiento
Ks=diag([ksx;ksy;ksz]); % Matriz de rigidez de superestructura
Cs=diag([csx;csy;csz]); % Matriz de amortiguamiento de superestructura
Ms=ms*eye(3,3); % Matriz de masa de superestructura
Wt=(ms+mb)*g; % Peso total
kb=Wt/Ro; kg=10*ksz; % Rigidez de aislamiento y rigidez de elemento gap
%Kb=diag([kb;kb;kg]); % Matriz de rigidez de sistema de aislacion
%Cb=zeros(size(Kb)); % Matriz de amortiguamiento de aislacion
Mb=mb*eye(3,3); % Matriz de masa de aislacion
M=[Mb+Ms Ms;Ms Ms]; % Matriz del sistema empezando por los gdl de aislacion en local
Ze=zeros(3,3);
K=[Ze Ze;Ze Ks]; % K=[Ze Ze;Ze Ks];
C=[Ze Ze;Ze Cs]; %C=[Ze Ze;Ze Cs];
Lw=-[Mb+Ms; Ms];
mu_min=0.05; mu_max=0.08; expomu=0.1; kf=kg;
tipos{1}='fps_LD_3dofs'
propnl{1}=[1, Ro, mu_min, mu_max, expomu, kg, kf];
Lf{1}=[eye(3,3) Ze];
save datos_modelo1
clear
% =====
load datos_modelo1
%Paso 1) Setting ode
%opt=odeset; opt.Maxorder=2; opt.BDF='on'; opt.NormControl='on';
opt.RelTol=1.e-4; opt.AbsTol=1.e-4;
% =====
tic
% Paso 2) Condicion inicial
n=size(K,1); % Es modelo de 6 gdl.
ne=size(propnl,1); % Para ej ne=1
Yo=zeros(2*n+2*ne,1); % Yo tiene 14 elementos contiene despla y veloci. Los
% dos ultimos valores son para la curva de histeresis
tu=[0:.01:3]; nn=length(tu); mm=round(nn/2);
ugz=[tu(1:mm)*1/tu(mm) ones(1,nn-mm)]*981; %rampa para carga vertical trian-const.
ugx=zeros(size(tu));
ugy=ugx;

```

```

ug=[ugx;ugy;ugz];
[T,Y]=ode15s('modelo01',[0 2.5],Yo,opt,K,M,C*10, Lw,tipos,propnl,Lf, tu,ug);
Y=Y';
Yo=Y(:,end);
%=====
% 3- Resp. a un seno
tu=[0:.01:15]; nn=length(tu);
ugz=[ones(1,nn)]*981;
ugx=0.2*981*sin(4*pi*tu);
ug=[ugx;0*ugx;ugz];
[time1,Y1]=ode15s('modelo01',[0 7],Yo,opt,K,M,C, Lw,tipos,propnl,Lf,tu,ug);
Y1=Y1';

%=====
% 4- Resp. a un sismo
load rec_centro
%load rec_sylmar
tu=[0:length(ux)-1]*dT; nn=length(tu);
ugz=ones(1,nn)*981+uz;
ugx=ux; ugy=uy;
ug=[ugx;ugy;ugz];
[time2,Y2]=ode15s('modelo01',[0,10],Yo,opt,K,M,C,Lw,tipos,propnl,Lf,tu,ug);
Y2=Y2';

%=====
% 5- Grafica
close all
figure(1)
subplot(211), plot(T,Y(3,:)), grid

figure(2)
subplot(211), plot(time1,Y1([1,4,:])), grid
subplot(223), plot(time1,Y1(13,:)), grid
subplot(224), plot(time1,Y1(14,:)), grid

figure(3)
subplot(221), plot(time2,Y2([1,4,:])), grid
subplot(222), plot(time2,Y2([2,5,:])), grid
subplot(223), plot(Y2(13,:),Y2(14,:)), grid, axis('equal')
subplot(224), plot(Y2(2,:),Y2(14,:)), grid

% Propósito: Aislador friccional de 3 grados de libertad
%      Modelo constitutivo para el roce (Ref. Constantinou)
%       $\mu = \mu_{max} - (\mu_{max} - \mu_{min}) * \exp(-\expomu * v_o)$ 
%
% Entrada:
%      param = [Ro mu_min mu_max expomu kg kmax];      [1,6]
%      Parámetros del dispositivo
%      Ro   : Radio de curvatura
%      mu_min : Coeficiente de fricción mínimo
%      mu_max : Coeficiente de fricción máximo
%      expomu : Parámetro exponencial
%      kg   : Rigidez del vertical gap

```

```

%           kmax : Rigidez horizontal del gap
%
%           Dk   = Deformación del elemento           [3,1]
%           Ddk  = Velocidad de deformación          [3,1]
%           Z    = Estado del sistema                [2,1]
%
% Salida:
%           f    = Fuerzas nodales                    [3,1]
%           Zd   = Derivada del estado                [2,1]
%
%           Adicionalmente se pueden obtener cantidades locales:
%           floc = fuerza total                       [3,1]
%           fmu  = fuerza tangencial friccional      [3,1]
%           N    = fuerza normal (a la superficie curva) [1,1]
%           Dk   = deformaciones en ejes locales    [3,1]
%           Ddk  = velocidades de deformación       [3,1]
%           dg   = deformación del gap              [1,1]
%           fg   = fuerza en el gap                 [1,1]
%

```

```
function [f,Zd, floc,fmu,N,Dk,Ddk,dg,fg]=fps_LD_3dofs(param, Dk,Ddk,Z)
```

```
Ro=param(1); mu_min=param(2); mu_max=param(3); expomu=param(4);
kg=param(5); kmax=param(6);
```

```
aux=sqrt(Ro^2-Dk(1)^2-Dk(2)^2);
dz=Ro-aux; %movimiento vertical real
dg=Dk(3)-dz; %deformacion gap
```

```
% 3- Vectores normal y tangencial
```

```
Dk(3)=dz;
n=[Dk(1); Dk(2); Dk(3)-Ro]/Ro;
dzp=(Dk(1)*Ddk(1)+Dk(2)*Ddk(2))/aux; %vel. de def. vertical real
Ddk(3)=dzp;
Zo=norm(Z);
if Zo==0;
    alfa=0;
else
    alfa=atan2(Dk(1)*Z(1)/Zo+Dk(2)*Z(2)/Zo,(Ro-dz));
end
tg=[Z(1)*cos(alfa);Z(2)*cos(alfa);Zo*sin(alfa)];
```

```
% 4- Fuerza del gap
```

```
fg=kg*dg*(1-sign(dg))/2;
if fg>=0; f=zeros(3,1); Zd=zeros(2,1); N=0;
    floc=zeros(3,1); fmu=zeros(3,1); return
end
```

```
% 5- Fuerza normal (equilibrio)
```

```
vo=norm(Ddk);
mu=mu_max-(mu_max-mu_min)*exp(-expomu*vo);
N=fg/(n(3)+mu*sin(alfa));
```

```

% 6- Fuerza tangencial-friccional
fult=mu*N;
fmu=fult*tg;

% 7- Fuerza total
floc=N*n+fmu;
%f=Lev'*floc;
f=floc;

% 8- Wen
ye=mu*N/kmax;
Zd=wen2d(Dk(1:2),Ddk(1:2),Z, ye);
return

% -----

% Modelo gap, Bouc - Wen, 2D
% -----

function [zd]=wen2d(x,xd,z, ye);

if ye==0
    zd=zeros(size(z));
    return
elseif ye<0.02
    ye=.02;
end

A=1; beta=0.5; gama=0.5;

zx=z(1); zy=z(2);
dx=x(1); dy=x(2);
vx=xd(1); vy=xd(2);
P=[zx^2*(gama*sign(vx*zx)+beta)  zx*zy*(gama*sign(vy*zy)+beta);
   zx*zy*(gama*sign(vx*zx)+beta)  zy^2*(gama*sign(vy*zy)+beta)];

zd=(A*eye(2,2)-P)*xd;
zd=zd/ye;

return

% -----

function Ydot=modelo01(t,Y, dummy, K,M,C,Lw, tipo,prop,Lf, tu,ug)
% Y      Vector de Condiciones Iniciales
% K,M,C  Matrices del sistema
n=length(M);
X=Y(1:n); % Vector de desplazamiento del sistema
Xd=Y(n+1:2*n); % Vector de velocidad del sistema
Z=Y(2*n+1:end); % Variable de estado (Curva de histeresis)

```

```

Zd=zeros(size(Z));
F=zeros(n,1);

nel=size(prop,2); %ojo es una celda de 1 fila y nel columnas
    % Para ejemplo nel = 1.
for k=1:nel
    dk=Lf{k}*X; vk=Lf{k}*Xd;
    jj=2*k-1:2*k; zk=Z(jj);
    j=prop{k}(1); propk=prop{k}(2:end);
    [fk,zdk]=feval(tipo{j}, propk,dk,vk,zk); %fractal (escala menor)
    F=F+Lf{k}*fk;
    Zd(jj)=zdk;
end

% Interpola linealmente el input
ugt=interp1(tu,ug',t)';

%Equilibrio dinamico: M*Xdd+C*Xd+K*X+Fn=Lw*ugt
Xdd=M\ (Lw*ugt-(C*Xd+K*X+F));

Ydot=[Xd;Xdd;Zd];
disp(t)
return

```

### • EJEMPLO 3

Resolver el ejemplo 1, con los datos obtenidos para la masa equivalente del sistema de un grado de libertad utilizando el programa **fpsmodelo6gdl**. Concretamente, se pide:

- Encontrar la respuesta si solo se tiene sismo en la dirección X. Definida por el acelerograma de El Centro de 1940. Comparar los resultados con los obtenidos en el ejemplo 1.
- Considerar ahora  $\ddot{U}_{gx}$  igual a 2 veces el sismo de El Centro. No hay aceleración en sentido Y.
- Encontrar la respuesta si actúan las tres componentes del sismo de El Centro.

Los datos del ejemplo 1, son:

$$m = 21.048 T s^2 / m = 0.2104 T s^2 / cm$$

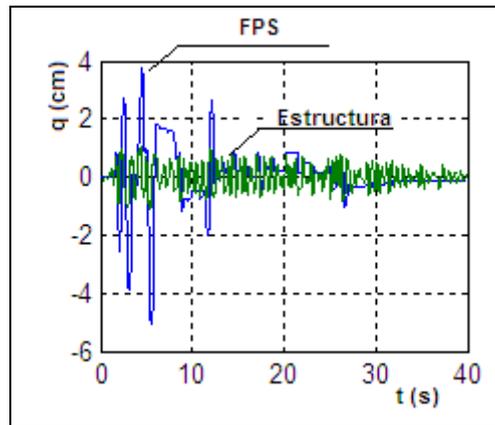
$$\alpha = 0.10 \quad T_s = 0.619 s \quad T_b = 2.0 s \quad \beta = 10$$

### • SOLUCIÓN

La forma de ejecutar el programa es la siguiente:

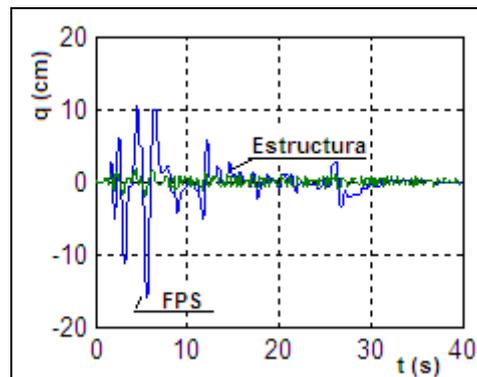
```
>> [Ro]=fpsmodelo6gdl (0.21048,0.10,0.619,10,2.0)
```

En la figura 6.18 se encuentra la respuesta para cuando solo actúa la componente en sentido X del sismo de El Centro. El programa reporta el desplazamiento horizontal en sentido X en: el sistema de aislamiento y en la superestructura; en el ejemplo 1 el modelo de un grado de libertad reportaba el desplazamiento total del sistema. Por lo tanto, para comparar las respuestas con el ejemplo 1 se debe sumar las dos componentes de desplazamiento que reporta el programa fpsmodelo6gdl.



**Figura 6.18** Desplazamiento en la base y superestructura.  $\ddot{U}_{gx} = 1$  Centro.

En la figura 6.19 se presenta la historia en el tiempo de los desplazamientos, tanto en el sistema de aislación como en la superestructura cuando actúa 2 veces el sismo de El Centro pero solo con la componente en sentido X.



**Figura 6.19** Desplazamiento en la base y superestructura.  $\ddot{U}_{gx} = 2$  Centro.

Finalmente, la figura 6.20 corresponde al caso en que actúan las tres componentes sísmicas del sismo de El Centro (1940). En la parte superior se tiene las historias de desplazamientos tanto en sentido horizontal X, como en sentido horizontal Y. En la parte inferior en cambio, a la izquierda se ha graficado  $\eta_x$  con  $\eta_y$  se aprecia que todos los puntos están dentro del círculo o en el borde lo que significa que el modelo de histéresis es consistente con el modelo de Coulomb. Constantinou *et al* (1990). En la parte inferior derecha se ha graficado  $\eta_y$  con el desplazamiento en sentido Y del aislador.

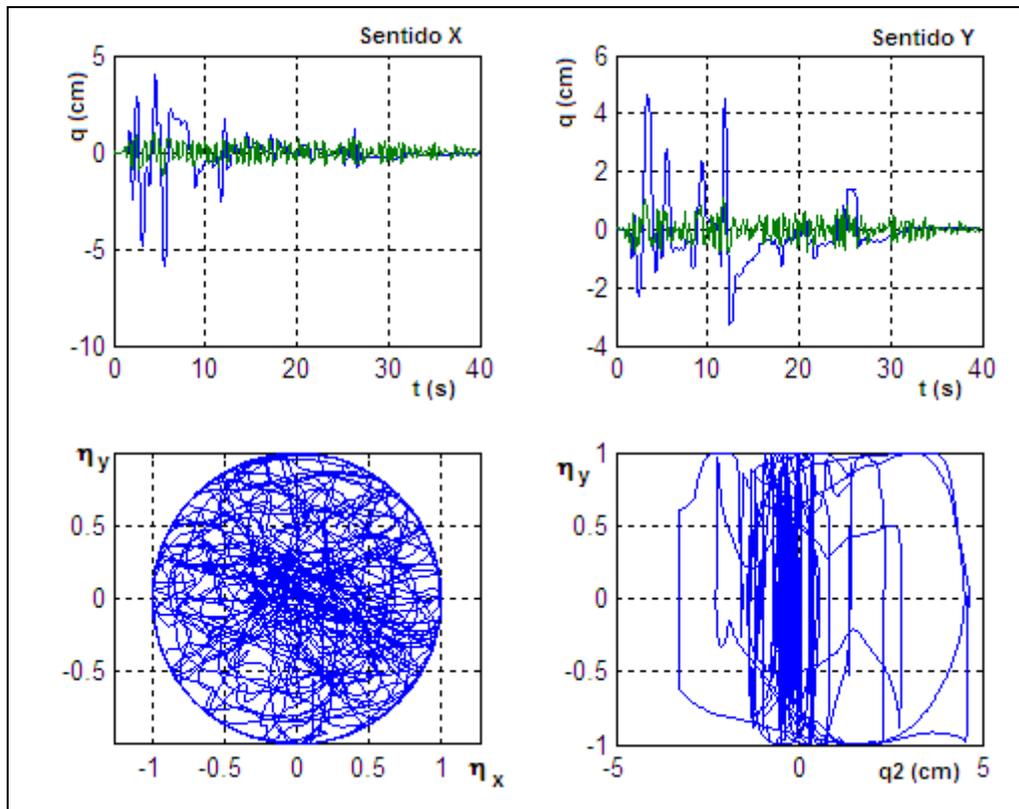


Figura 6.20 Respuesta de desplazamientos en la parte superior y variables de estado.

## REFERENCIAS

1. Almazán J. L., De la Llera J., and Inaudi J. (1998), (2001), "Modeling aspects of structures isolated with the frictional pendulum system", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **27**, 845-867.
2. Almazán J. L., (2001), *Torsión accidental y natural en estructuras aisladas con el sistema de péndulo friccional*, Tesis Doctoral. Pontificia Universidad Católica de Chile, 288 p., Santiago.
3. Almazán J. L., and De la Llera J. C., (2001), "Analytical model for structures with frictional pendulum isolators", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*.
4. Bozzo L., Mahin S., (1989), "Response of elastic single degree of freedom systems supported on FPS connections", *Earthquake Engineering Research Center. University of California at Berkeley, Report N.- UCB/ERC-89/09*, Chapter 8, 189-194, Berkeley California.
5. Constantinou M. C., Mokha A., and Reinhorn A., (1990), "Teflon bearing in base isolation, Part II: Modeling", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **116**, 455-474.
6. Park Y., Wen Y., and Ang H-S., (1986), "Random vibration of hysteretic systems under bi-directional ground motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **14**, 543-557.

7. Zayas V., Low S., Bozzo L., Mahin S., (1989), *Feasibility and performance studies on improving the earthquake resistance of new and existing buildings using the friction pendulum system* Earthquake Engineering Research Center. University of California at Berkeley, **Report N.- UCB/EERC-89/09**, 308 p., Berkeley, California.



Aisladores FPS tipo Triple Péndulo utilizados en la construcción de 3 Puentes en la Provincia de Esmeraldas en Ecuador.



Los Pernos de anclaje inferiores van a la base del Estribo del Puente y los Pernos de anclaje superiores a la viga transversal de acero. Sobre las vigas de acero viene el tablero del Puente. Estos Pernos de anclaje a más de fijar al aislador como armadura de anclaje vertical para que el Puente no se levante ante la componente vertical.

## CAPÍTULO 7

---

# ANÁLISIS SÍSMICO DE ESTRUCTURAS CON FPS

## 7.1 INTRODUCCIÓN

En base al modelo de 6 **grados de libertad gdl.**, presentado en el capítulo 6, se va a encontrar la respuesta sísmica de edificios de  $n$  pisos, para ello primero se debe determinar un modelo simplificado de tres gdl. de la estructura de **múltiples grados de libertad mgdl.** Para la superestructura con base empotrada se considera un modelo de piso rígido en el plano, con tres grados de libertad por piso que son las tres componentes de desplazamiento medidas en el **Centro de Masa CM.** Para este modelo se halla en primer lugar la matriz de rigidez y de masas en coordenadas de piso. Luego se obtiene el modelo simplificado de 3 gdl.

Para encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de piso, se asume que cada pódico es un elemento de una estructura que está unida por una losa rígida. El sistema de coordenadas de cada elemento (pódico) está compuesto por un desplazamiento de piso y la componente de desplazamiento vertical en cada uno de los nudos del pódico. Para este modelo numérico de cálculo se obtiene la matriz de rigidez *lateral-vertical*. Para facilitar su cálculo se ha desarrollado el programa **rlaxinfivertical**.

Una vez que se tiene la matriz de rigidez *lateral-vertical* de cada uno de los pódicos se halla la matriz de rigidez de la estructura para las coordenadas descrito anteriormente, en base a la matriz de compatibilidad de deformaciones que relaciona las coordenadas del elemento con las coordenadas de la estructura. Se determina también la matriz de masas en coordenadas de piso y se obtienen las propiedades dinámicas de la estructura. En base a toda esta información se halla el modelo simplificado de 3 gdl. Todo esto se lo realiza con el programa **espacial\_vertical\_6gdl**.

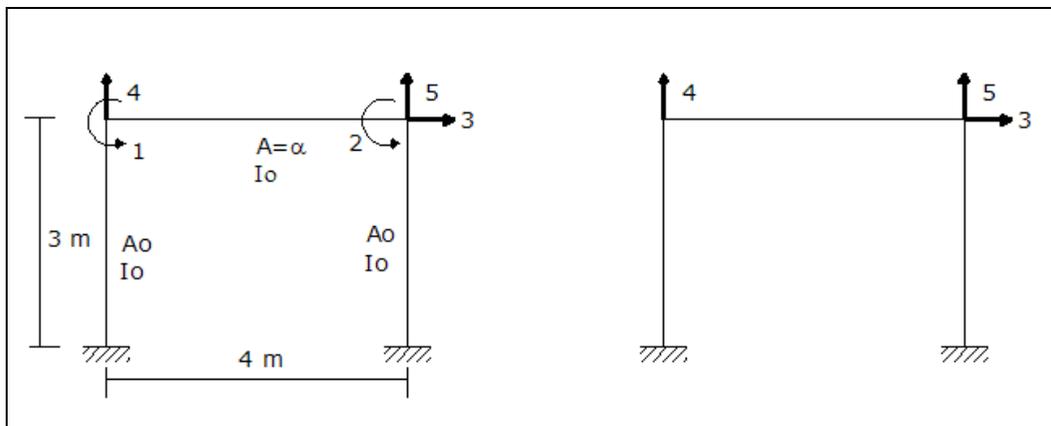
El programa **espacial\_vertical\_6gdl** determina además los datos que se requieren para encontrar la respuesta sísmica, no lineal, de una estructura con aisladores de base FPS utilizando el programa **fpsmodelo6gdl** estudiado en el capítulo anterior. Este programa encuentra la respuesta ante las tres componentes sísmicas, considera además que el coeficiente de fricción de los FPS dependen de la velocidad y trabaja con el modelo de histéresis de Bouc Wen.

## 7.2 MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL-VERTICAL

Para encontrar la respuesta de una estructura con base empotrada ante la componente vertical de movimiento del suelo o cuando se realiza el análisis sísmico de estructuras con aisladores FPS, se necesita encontrar la matriz que se ha denominado *Lateral-Vertical*, que considera un grado de libertad horizontal por piso y un grado de libertad en cada una de los nudos de un pórtico.

Se considera que todos los elementos horizontales son axialmente rígidos de tal manera que todos los nudos de un piso se mueven exactamente lo mismo y los elementos verticales se consideran totalmente flexibles. Es importante diferenciar las coordenadas principales y las coordenadas secundarias. Aguiar (2007).

Para ilustrar el procedimiento de cálculo de la matriz de rigidez lateral-vertical, a la izquierda de la figura 7.1, se muestra una estructura de un piso y un vano, con todos sus grados de libertad. Nótese que se han numerado primero las coordenadas secundarias (giros) y al final las coordenadas principales (desplazamientos horizontales y verticales). La matriz de rigidez que se busca es aquella que está asociada a las **coordenadas principales** y el sistema de coordenadas se muestra a la derecha de la figura 7.1



**Figura 7.1** Modelo numérico para hallar la matriz de rigidez lateral-vertical.

Si se trata de un pórtico de varios pisos y de varios vanos, los grados de libertad se numeran primero todas las rotaciones (coordenadas secundarias); luego todos los desplazamientos de piso (uno por piso) y finalmente los desplazamientos verticales de cada nudo. Cuando se procede de esta manera la matriz de rigidez lateral-vertical se halla con la siguiente ecuación. Aguiar (2007).

$$\mathbf{K}_{LV} = \mathbf{K}_{BB} - \mathbf{K}_{BA}^t \mathbf{K}_{AA}^{-1} \mathbf{K}_{AB} \quad (7.1)$$

Donde  $\mathbf{K}_{BB}$  es la sub matriz asociada a las coordenadas principales;  $\mathbf{K}_{AA}$  es la sub matriz asociada a las coordenadas secundarias;  $\mathbf{K}_{BA} = \mathbf{K}_{AB}^t$  es la sub matriz asociada a las coordenadas principales y secundarias.

- **EJEMPLO 1**

Determinar la matriz de rigidez *lateral-vertical*, de la estructura de un piso de la figura 7.1, si las columnas son de 30/30 cm., y las vigas de 25/25 cm. Considerar  $E = 1800000 \text{ T/m}^2$ .

- **SOLUCIÓN**

La matriz de rigidez del elemento columna, vale:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} t & 0 & -b & -t & 0 & -b' \\ & r & 0 & 0 & -r & 0 \\ & & k & b & 0 & a \\ & & & t & 0 & b' \\ & & & & r & 0 \\ & & & & & k' \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$k = \frac{4(EI)_o}{L} \left[ \frac{1+\phi}{1+4\phi} \right] \quad (7.3.1)$$

$$k' = k \quad (7.3.2)$$

$$a = \frac{2(EI)_o}{L} \left[ \frac{1-2\phi}{1+4\phi} \right] \quad (7.3.3)$$

$$b = \frac{6(EI)_o}{L^2} \left[ \frac{1}{1+4\phi} \right] \quad (7.3.4)$$

$$b' = b \quad (7.3.5)$$

$$t = \frac{12(EI)_o}{L^3} \left[ \frac{1}{1+4\phi} \right] \quad (7.3.6)$$

$$\phi = \frac{3(EI)_o \beta}{(GA)_o L^2} \quad (7.3.7)$$

$$r = \frac{EA}{L} \quad (7.3.8)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $I$  es la inercia a flexión de la sección transversal,  $\beta$  es el factor de forma por corte de la sección,  $A$  es el área de la sección transversal,  $G$  es el módulo de corte y  $L$  la longitud del elemento. En solución se ha considerado que  $\phi \approx 0$ . La matriz de rigidez del elemento columna, vale:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 540 & 0 & -810 & -540 & 0 & -810 \\ & 54000 & 0 & 0 & -54000 & 0 \\ & & 1620 & 810 & 0 & 810 \\ & & & 540 & 0 & 810 \\ & & & & 54000 & 0 \\ & & & & & 1620 \end{bmatrix}$$

Para el elemento viga, la matriz de rigidez, vale:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} t & b & -t & b' \\ & k & -b & a \\ & & t & -b' \\ & & & k' \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Los términos de la matriz de rigidez del elemento viga, han sido ya indicados. Los valores que resultan para el ejemplo, son:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 109.8633 & 219.7166 & -109.8633 & 219.7266 \\ & 585.9375 & -219.7266 & 292.9688 \\ & & 109.8633 & -219.7266 \\ & & & 585.9375 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura, que se halla por ensamblaje directo, resulta:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2206 & 293 & \vdots & 810 & 220 & -220 \\ & 2206 & \vdots & 810 & 220 & -220 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & 1080 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & 54110 & -110 \\ & & \vdots & & & 54110 \end{bmatrix}$$

La primera sub matriz es  $\mathbf{K}_{AA}$  de (2X2), la segunda es  $\mathbf{K}_{AB}$  de (2X3), la tercera  $\mathbf{K}_{BB}$  de (3X3) y la última es  $\mathbf{K}_{BA} = \mathbf{K}_{AB}^t$ . Al aplicar la ecuación (7.1) se halla.

$$K_{LV} = \begin{bmatrix} 555 & -142 & 142 \\ & 54071 & -71 \\ & & 54071 \end{bmatrix}$$

El programa que obtiene la matriz de rigidez *lateral-vertical* se denomina **RLAXINFIVERTICAL** y se lista a continuación.

```
function[KL]=rlaxinfivertical(nombre)
%
% Programa para encontrar la matriz de rigidez lateral de un portico plano
% orientado al analisis con componente horizontal y vertical del sismo
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%      CEINCI-ESPE
%      Octubre 2008
%-----
% [KL]=rlaxinfivertical(nombre)
%-----
% CG  Matriz de coordenadas generalizadas
% VC  Vector de colocacion
% E   Modulo de elasticidad del material
% SS  Matriz de rigidez de la estructura
% b:  base de la seccion transversal.
% h:  altura de la seccion transversal.
% long: longitud del elemento.
% nombre Archivo de datos que contiene la base, la altura y la longitud
%       de cada uno de los elementos. El nombre debe tener extension .txt
%
nod=input('\n Numero de nudos:');
np=input(' Numero de pisos:');
nr=input(' Numero de nudos restringidos:');
E=input(' Modulo de elasticidad:');
% Coordenadas Generalizadas
ngl=0; CG=ones(nod,3);
for i=1:np; nn(i)=(i+1)*nr; end
for i=1:nr;for j=1:3;CG(i,j)=0;end;end
% colocacion de grados de libertad rotacionales
for i=1:nod
    for j=2
        if CG(i,j+1)~=0
            ngl=ngl+1;CG(i,j+1)=ngl;
        else,end
    end
end
% colocacion de grados de libertad horizontales
ico=0;ii=1;
for i=1:nod-nr
    j=nr+i;
    if ico==0
        ngl=ngl+1; ico=1;
    else, end
    if j<=nn(ii)
```

```

    CG(j,1)=ngl;
else,end
if j==nn(ii)
    ico=0;ii=ii+1;
else,end
end
% colocacion de grados de libertad verticales
for i=1:nod
    for j=1
        if CG(i,j+1)~=0
            ngl=ngl+1;CG(i,j+1)=ngl;
        else,end
    end
end
fprintf('\n Numero de Grados de libertad = %d',ngl)
ncol=np*nr; mbr=ncol+(nr-1)*np;nvig=mbr-ncol;
ici=0;icf=nr;
for i=1:ncol
    ici=ici+1; icf=icf+1;ini(i)=ici;fin(i)=icf;
end
ii=ncol;
for j=1:np
    ici=j*nr;
    for i=1:nr-1
        ii=ii+1;ici=ici+1;ini(ii)=ici;fin(ii)=ici+1;
    end
end
% Arreglo VC. Vectores de colocacion
for i=1:mbr
    for k=1:3
        VC(i,k)= CG(ini(i),k);
        VC(i,k+3) = CG(fin(i),k);
    end
end
% Matriz de rigidez de miembro y de la estructura
for i=1:mbr
    B(i)=nombre(i,1);H(i)=nombre(i,2);L(i)=nombre(i,3);
end
% Calculo de la matriz de rigidez de la estructura
fprintf ('\n Calcula con: Inercias gruesas, codigo=0. Con inercias agrietadas, codigo=1');
icod=input('\n Ingrese codigo de inercias :');
SS=zeros(ngl,ngl);
for i=1:mbr
    b=B(i);h=H(i);long=L(i);iner=b*h^3/12;ei=E*iner;area=b*h;
    if i<=ncol
        if icod==1
            iner=0.8*iner;ei=E*iner;
        end
        kf=((4*E*iner)/long); a=((2*E*iner)/long);kpf=kf; b=(kf+a)/long;
        bp=b; t=(b+bp)/long;r=E*area/long;
        k=zeros(6);
        k(1,1)=t; k(1,3)=-b; k(1,4)=-t; k(1,6)=-bp; k(2,2)=r; k(2,5)=-r;
        k(3,3)=kf; k(3,4)=b; k(3,6)=a; k(4,4)=t; k(4,6)=bp; k(5,5)=r; k(6,6)=kpf;
        for li=1:5;for j=li+1:6;k(j,li)=k(li,j);end;end
    else

```

```

if icod==1
    iner=0.5*iner;ei=E*iner;
end
kf=((4*E*iner)/long); a=((2*E*iner)/long);kpf=kf; b=(kf+a)/long; bp=b; t=(b+bp)/long;
k=zeros(6);
k(2,2)=t; k(2,3)=b; k(2,5)=-t; k(2,6)=bp; k(3,3)=kf; k(3,5)=-b; k(3,6)=a;
k(5,5)=t; k(5,6)=-bp; k(6,6)=kpf;k(3,2)=k(2,3);k(5,2)=k(2,5);k(6,2)=k(2,6);
k(5,3)=k(3,5);k(6,3)=k(3,6);k(6,5)=k(5,6);
end
for j=1:6
    jj=VC(i,j);
    if jj==0
        continue
    end
    for m=1:6
        mm=VC(i,m);
        if mm==0
            continue
        end
        SS(jj,mm)=SS(jj,mm)+k(j,m);
    end
end
end
% Matriz de rigidez lateral
na=nod-nr;nb=ngl-na;
Kaa=SS(1:na,1:na);Kab=SS(1:na,na+1:ngl);Kba=Kab';Kbb=SS(na+1:ngl,na+1:ngl);
KL=Kbb-Kba*inv(Kaa)*Kab;
fprintf ('\n Matriz de rigidez lateral-vertical (primero coordenadas laterales) :');
%save c:\KL
%---fin---

```

Antes de utilizar el programa se debe generar un archivo de datos que contiene la base, la altura y la longitud de cada uno de los elementos. Primero se debe ingresar la información de todas las columnas, empezando desde la planta baja hasta el último piso. Luego se indicarán los datos de todas las vigas de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha. Para el ejemplo 1, el archivo de datos se ha denominado CASAY y contiene:

```

0.30  0.30  3.00
0.30  0.30  3.00
0.25  0.25  4.00

```

La restante información del programa **RLAXINFIVERTICAL** se suministra por pantalla.

### 7.3 MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS DE PISO

Se considera que cada una de las losas, en su plano, son completamente rígidas, de tal manera que se consideran tres grados de libertad por planta: desplazamiento horizontal en sentido X, desplazamiento horizontal en sentido Y, desplazamiento vertical Z. La matriz de rigidez en coordenadas de piso  $K_{EV}$  se obtiene aplicando la teoría de Análisis Matricial de Estructuras. Aguiar (2004).

$$\mathbf{K}_{EV} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}^{(i)t} \mathbf{K}_{LV}^{(i)} \mathbf{A}^{(i)} \quad (7.5)$$

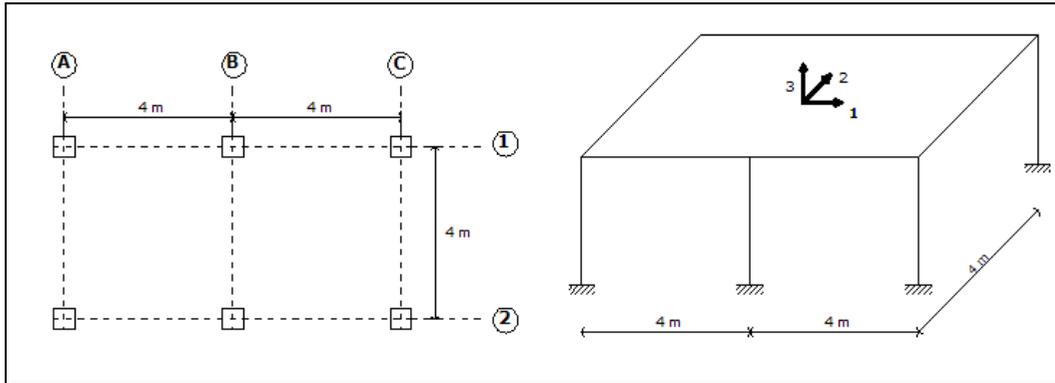
Donde  $\mathbf{K}_{LV}^{(i)}$  es la matriz de rigidez *lateral-vertical* del pórtico ( i );  $n$  es el número de pórticos de la estructura;  $\mathbf{A}^{(i)}$  es la matriz de compatibilidad del pórtico ( i ) que relaciona las coordenadas del pórtico con las coordenadas de piso. Las coordenadas de piso se consideran primero todos los desplazamientos en sentido X, desde el primer piso al último; segundo todos los desplazamientos en sentido Y, desde el primer piso al último y finalmente los desplazamientos verticales del primero al último. Para estas condiciones, la forma de la matriz de compatibilidad  $\mathbf{A}^{(i)}$  es la siguiente:

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \dots & \vdots & \sin \alpha & 0 & \dots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \cos \alpha & \vdots & 0 & \dots & \sin \alpha & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo que forma la orientación positiva del pórtico con el eje de las X. Las columnas de la matriz  $\mathbf{A}^{(i)}$  están particionadas en tres partes, cada una de ellas tiene NP columnas siendo NP el número de pisos. De igual forma las filas de la matriz  $\mathbf{A}^{(i)}$  están particionadas en grupos, el primer grupo tiene NP filas, del segundo al último tienen NC filas, siendo NC el número de columnas por piso y así hasta el último grupo que corresponde al último piso. El tercer grupo de datos tiene 1 en la primera columna, el sexto grupo de datos tiene 1 en la segunda columna y así sucesivamente.

## • EJEMPLO 2

Encontrar la matriz de rigidez, en coordenadas de piso de la estructura de un piso indicada en la figura 7.2. Todas las columnas son de 30/30 cm., y todas las vigas son de 25/25 cm., El módulo de elasticidad  $E = 1800000 \text{ T} / \text{m}^2$ .

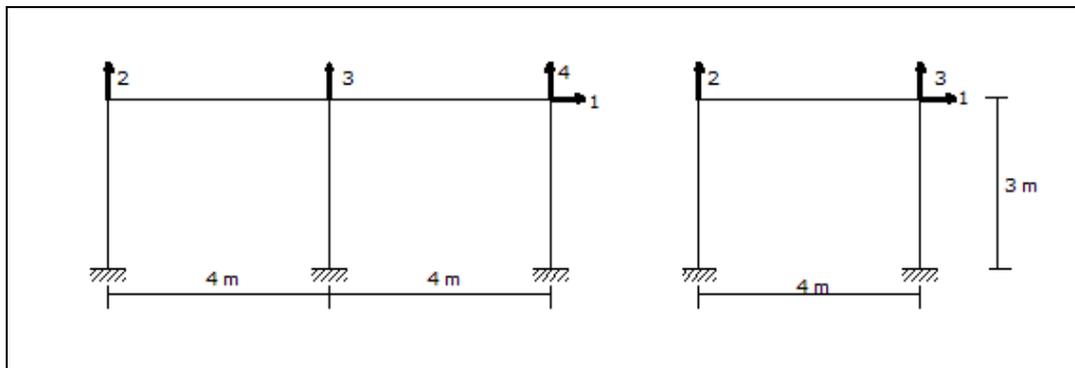

**Figura 7.2** Estructura de ejemplo 2.

### • SOLUCIÓN

A la izquierda de la figura 7.3 se indica el sistema de coordenadas del pórtico 1 que es igual al pórtico 2, y a la derecha se muestra el sistema de coordenadas de los pórticos A, B y C. Para estos sistemas de coordenadas las matrices de rigidez *lateral-vertical* son:

$$K_{LV}^{(1)} = K_{LV}^{(2)} = \begin{bmatrix} 895 & -122 & 0 & 122 \\ & 54075 & -88 & 13 \\ & & 54176 & -88 \\ & & & 54075 \end{bmatrix}$$

$$K_{LV}^{(A)} = K_{LV}^{(B)} = K_{LV}^{(C)} = \begin{bmatrix} 555 & -142 & 142 \\ & 54071 & -71 \\ & & 54071 \end{bmatrix}$$


**Figura 7.3** Sistema de coordenadas de los pórticos en sentido X y en sentido Y.

Las matrices de compatibilidad de los pórticos en sentido X, Y son:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(A)} = \mathbf{A}^{(B)} = \mathbf{A}^{(C)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez, para el sistema de coordenadas de piso, indicado a la derecha de la figura 7.2, es diagonal y vale:

$$\mathbf{K}_{EV} = \begin{bmatrix} 1790 & & \\ & 1660 & \\ & & 648000 \end{bmatrix}$$

#### 7.4 MODELO SIMPLIFICADO DE TRES GRADOS DE LIBERTAD

La matriz de masa  $\mathbf{M}_{EV}$  en coordenadas de piso, del modelo estudiado tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_{EV} = \begin{bmatrix} m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Donde  $m$  es la sub matriz diagonal que contiene a las masas de cada piso, es de orden NPXNP.  $\mathbf{0}$  es la matriz compuesta por ceros de orden NPXNP.

Con la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{EV}$  y con la matriz de masas  $\mathbf{M}_{EV}$  se hallan los valores propios  $\lambda^{(i)}$  y los modos de vibración  $\phi^{(i)}$ . Donde  $(i)$  representa el modo de vibrar. Los valores propios están ordenados de menor a mayor. La matriz modal  $\Phi$  contiene a todos los vectores propios, cada columna de  $\Phi$  representa un modo de vibración.

Ahora bien, Según (2007) propone encontrar un modelo simplificado de tres grados de libertad a partir del modelo de múltiples grados de libertad, de la siguiente manera:

- i. Se determina la matriz modal  $\hat{\Phi}$  que es de 3 por 3, en base a los modos más representativos, generalmente son el primero y segundo modo que están asociados a los grados de libertad horizontales, para el tercer modo se debe ver cual es el modo más influyente verticalmente en el último piso. Una vez seleccionados los modos (columnas) los elementos de  $\hat{\Phi}$  son los valores en el último piso (filas) en cada modo seleccionado.

- ii. Se determina la matriz de masa equivalente en el sistema de 3 gdl. A esta matriz se denomina  $\hat{M}$

$$\hat{M} = \text{diag} [m, m, m] \quad (7.8)$$

$$m = \sum m_k$$

Donde  $m_k$  es la masa del piso  $k$ . La sumatoria se extiende a todos los pisos.

- iii. Se halla la matriz  $\hat{\Delta}^2 = \text{diag} [W_{nI}^2, W_{nII}^2, W_{nIII}^2] = \text{diag} [\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}]$ . Donde  $W_n$  son las frecuencias naturales de vibración y  $\lambda$  los valores propios,  $(I, II, III)$  son los modos seleccionados de acuerdo a lo indicado en el paso i.
- iv. Se considera que los valores propios seleccionados en el sistema de múltiples grados de libertad y que se encuentran en la matriz  $\hat{\Delta}^2$  son los valores propios del sistema de 3 gdl. Sea  $\hat{K}$  la matriz de rigidez en el sistema de 3 gdl. Con esta acotación, en el sistema de 3 gdl., se tiene:

$$\hat{K} \hat{\Phi} = \hat{M} \hat{\Phi} \hat{\Delta}^2$$

## 7.5 PROGRAMA ESPACIAL\_VERTICAL\_6GDL

El programa **espacial\_vertical\_6gdl** determina la matriz de rigidez y la matriz de masa en coordenadas de piso, para una estructura de múltiples grados de libertad, considerando tres grados de libertad por planta que son los tres desplazamientos: dos horizontales y un vertical. Luego el programa determina el modelo equivalente de tres grados de libertad y finalmente obtiene los datos de entrada del programa **fpsmodelo6gdl** presentado en el capítulo 6 y que sirve para el análisis sísmico no lineal de una estructura sobre aisladores FPS ante la acción de tres componentes sísmicas.

**function**

```
[Ms,Ks,ms,Ts,beta]=espacial_vertical_6gdl(NP,nrx,nry,iejes,KLGX,KLGY,pesoD,pesoL)
%
% Programa que determina la matriz de rigidez en coordenadas de piso
% considerando tres desplazamientos por planta, determina matriz de masa
% valores y vectores propios y modelo simplificado de tres grados de
% libertad, siguiendo propuesta de Seguín (2007).
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%      CEINCI-ESPE
%      Octubre de 2008
%-----
% [Ms,Ks,ms,Ts,beta]=espacial_vertical_6gdl(NP,nrx,nry,iejes,KLGX,KLGY,pesoD,pesoL)
%-----
%
% Np  Numero de pisos
% nrx  Numero de columnas en sentido X
% nry  Numero de columnas en sentido Y.
% iejes # de ejes de columnas en el sentido de analisis sismico.
% pesoD Vector que contiene la carga muerta D de cada piso.
% pesoL Vector que contiene la carga viva L de cada piso.
```

```

% KLGX Matriz que contiene las matrices de rigidez lateral-vertical de
%   los porticos en sentido X.
% KLGY Matriz que contiene las matrices de rigidez lateral-vertical de los
%   porticos en sentido Y.
% A Matriz de paso de coordenadas de piso a coordenadas de portico. Las
%   primeras filas son para el portico 1 las siguientes para el 2, etc.
% KEE Matriz de rigidez de superestructura en coordenadas de piso.
% MASA Matriz de masa de superestructura en coordenadas de piso.
% pesoD Vector que contiene el peso total D de cada piso
% pesoL Vector que contiene el porcentaje del peso L de cada piso
%
% Ms Matriz de masa de sistema equivalente de 3 gdl
% Ks Rigides equivalente de sistema de 3 gdl
%
% ms Masa del sistema de aislacion para uso programa fpsmodelo6gdl.
% Ts Periodo de superestructura para uso de programa fpsmodelo6gdl.
% beta Relacion de frecuencia vertical con relacion a horizontal para
%   uso de programa fpsmodelo6gdl.
%-----
ntot=input ('\n Numero total de porticos de la estructura :');
fprintf ('\n Codigos para analisis sismico: Sentido X=1 Sentido Y=2');
isismo=input ('\n Ingrese codigo de sentido de analisis sismico :');
if isismo==1;nrx=iejes; ny=ntot-nx; else;ny=iejes; nx=ntot-ny; end;
%Submatrices de rigidez: KEE, con inercias gruesas
KEE=zeros(3*NP,3*NP);cero=zeros(NP,NP);identidad= eye (NP,NP);
for i=1:(nrx*NP); for j=1:NP; cerovx(i,j)=0; cerovix(i,j)=0; end; end
for j=1:NP; for i=nrx*(j-1)+1:nrx*j; cerovix(i,j)=1; end; end
for i=1:(nry*NP); for j=1:NP; cerovy(i,j)=0; ceroviy(i,j)=0; end; end
for j=1:NP; for i=nry*(j-1)+1:nry*j; ceroviy(i,j)=1; end; end
for i=1:ntot
    if i <= nx;
        ji=(NP+nrx*NP)*(i-1)+1;jf=(NP+nrx*NP)*i;
        KLVX=KLGX(ji:jf,:);
        AX=[identidad cero cero; cerovx cerovx cerovix];
        KEE=KEE+AX*KLVX*AX;
    else
        j=i-nx;
        ji=(NP+nry*NP)*(j-1)+1; jf=(NP+nry*NP)*j;
        KLVY=KLGX(ji:jf,:);
        AY=[cero identidad cero;cerovy cerovy ceroviy];
        KEE=KEE+AY*KLVY*AY;
    end
end
% Matriz de masa
masa=zeros(NP,NP);MASA=zeros(3*NP,3*NP);masatotal=0;CERO=zeros(NP,NP);
for i=1:NP; masaD(i)=pesoD(i)/9.8; masaL(i)=pesoL(i)/9.8;
mas(i)=masaD(i)+masaL(i);masa(i,i)=mas(i); masatotal=masatotal+mas(i);end
MASA=[masa CERO CERO; CERO masa CERO; CERO CERO masa];
% Valores y vectores propios
[V,D]=eig(KEE,MASA);W=sqrt(diag(D));
% Se ordenan las frecuencias y los modos de vibracion de menor a mayor
[Wn,Il]=sort(W); for i=1:3*NP; fi(:,i)=V(:,Il(i));end;
T1=2*3.141592/Wn(1);
% Modelo simplificado de 3 gdl. Propuesta de Seguin (2007)
Fs=zeros(3); % Es la matriz modal de los 2 primeros modos en ultimo piso

```

```

% Y el principal modo vertical.
Vs=zeros(3); % Matriz que contiene valores propios
Fs(1,1)=fi(NP,1);Fs(2,1)=fi(2*NP,1);Fs(3,1)=fi(3*NP,1);
Fs(1,2)=fi(NP,2);Fs(2,2)=fi(2*NP,2);Fs(3,2)=fi(3*NP,2); ico=0;
for j=1:3*NP; if abs(fi(3*NP,j))==1 & ico==0;
    Fs(1,3)=fi(NP,j);Fs(2,3)=fi(2*NP,j);Fs(3,3)=fi(3*NP,j);
    Vs(3,3)=Wn(j)*Wn(j);ico=1;end;
end
Ms=zeros(3);
for i=1:3; Ms(i,i)=masatotal; end % Matriz de masa equivalente
for i=1:2; Vs(i,i)=Wn(i)*Wn(i); end % Matriz de vectores propios
Fs(1,3)=fi(NP,3);Fs(2,3)=fi(2*NP,3);Fs(3,3)=fi(3*NP,3);
Ks=Ms*Vs; % Matriz de rigidez equivalente.
% Datos para usar el programa fpsmodelo6gdl
ms=masatotal;Ts=T1;beta=sqrt(Vs(3,3))/sqrt(Vs(1,1));
%---fin

```

### • EJEMPLO 3

Todas las columnas de la estructura de tres pisos indicada en la figura 7.4, son de 50/50 cm., y todas las vigas son de 40/40 cm. La estructura tiene tres vanos en sentido X y dos vanos en sentido Y., el módulo de elasticidad del material vale  $E = 1800000 T / m^2$ . Por otra parte, la carga total en cada piso es de  $1 T / m^2$ . Se pide:

- 1) Presentar las matrices de rigidez y de masas en coordenadas de piso.
- 2) Presentar los modos de vibración con los que se obtiene el modelo reducido de tres grados de libertad.
- 3) Mostrar la matriz modal  $\hat{\Phi}$  y la matriz  $\hat{\Delta}^2$ .
- 4) Indicar las matrices de rigidez y de masa del sistema equivalente de 3 gdl.
- 5) Indicar los datos para utilizar el programa **fpsmodelo6gdl**
- 6) Encontrar la respuesta ante las tres componentes del sismo de Newhall. Si la estructura está sobre aisladores FPS y si  $T_b = 2.0 s$  y  $\alpha = 0.1$ .

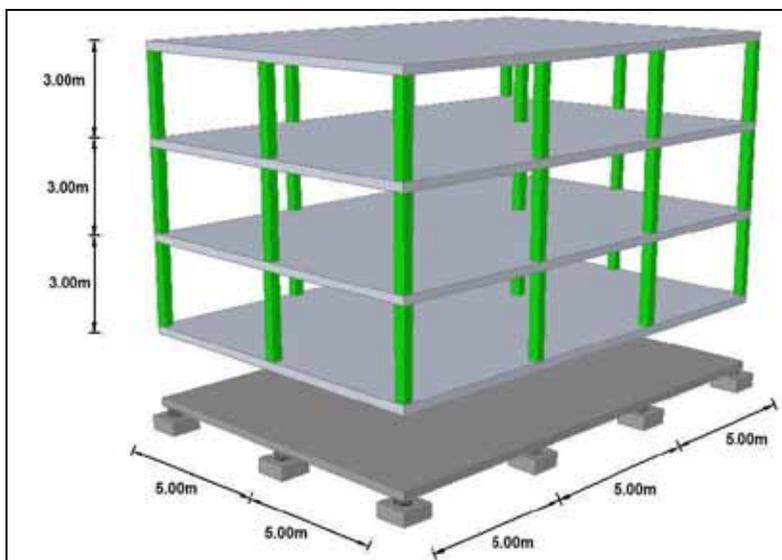
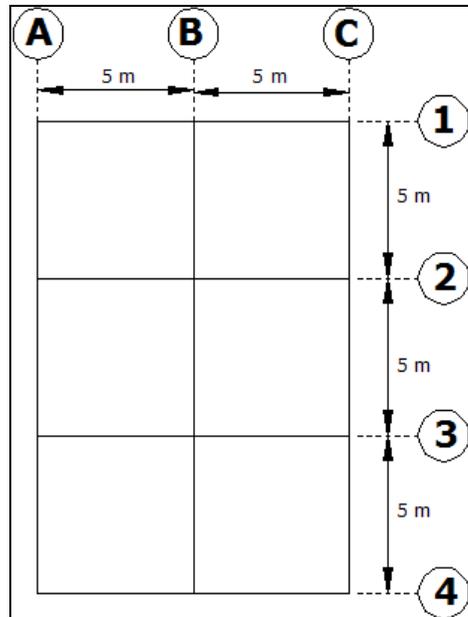


Figura 7.4 Estructura de ejemplo 3. (Daniel hacer la estructura de 3 vanos con luces de 5m).

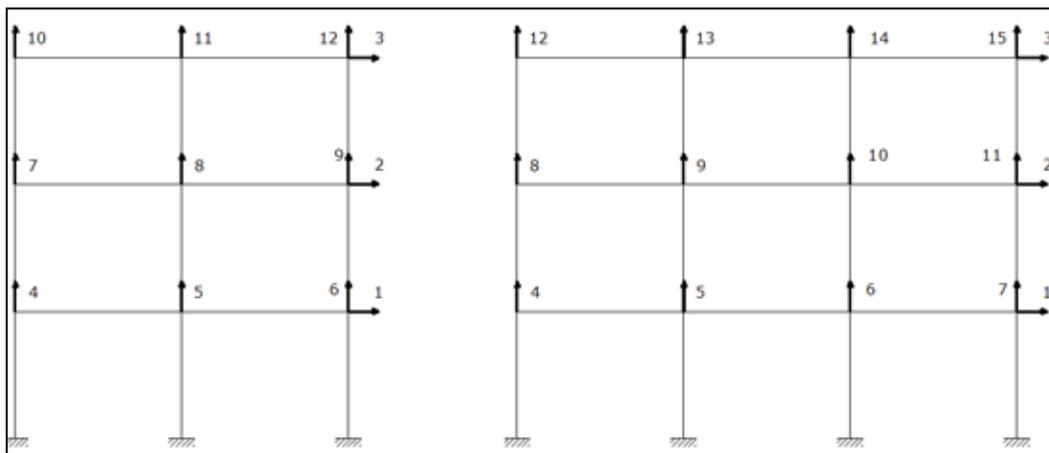
• **SOLUCIÓN**

En la figura 7.5 se muestra la estructura en planta y se identifican los pórticos. Los pórticos 1, 2, 3 y 4 están en sentido X, tienen la misma matriz de rigidez lateral-vertical  $K_{LV}$  y los pórticos A, B, y C, tiene la misma matriz de rigidez  $K_{LV}$ . Para usar el programa **espacial\_vertical\_6gdl** se debe indicar el número de ejes de columnas en sentido X y en sentido Y, que en este caso son 4 y 3.



**Figura 7.5** Identificación de los pórticos en planta.

Antes de usar el programa **espacial\_vertical\_6gdl** se debe determinar la matriz de rigidez *lateral-vertical* de los pórticos con el programa **rlaxinfivertical**. En la figura 7.6 se muestra el sistema de coordenadas lateral-vertical de un pórtico en sentido X y de un pórtico en sentido Y. Las matrices de rigidez  $K_{LV}$  son de 12X12 para el pórtico en sentido X y de 15X15 para el pórtico en sentido Y.



**Figura 7.6** Sistema de coordenadas de un pórtico en sentido X y de un pórtico en sentido Y.

La matriz de rigidez  $K_{EV}$  que se obtiene con el programa **espacial\_vertical\_6gdl** es la siguiente:

$$K_{EV} = \begin{bmatrix} K_{XX} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_{YY} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & K_{ZZ} \end{bmatrix}$$

Donde  $\mathbf{0}$  es una matriz de 3X3 con ceros. Las restantes sub matrices son las siguientes:

$$K_{XX} = \begin{bmatrix} 82900 & -47600 & 11200 \\ & 58900 & -26000 \\ & & 17100 \end{bmatrix}$$

$$K_{YY} = \begin{bmatrix} 83500 & -47800 & 11000 \\ & 60400 & 26900 \\ & & 18000 \end{bmatrix}$$

$$K_{ZZ} = \begin{bmatrix} 7200000 & -3600000 & 0 \\ & 7200000 & -3600000 \\ & & 3600000 \end{bmatrix}$$

La matriz de masa  $M_{EV}$  es diagonal y es de orden 15X15. El valor de la diagonal es igual a 15.3061.

Los modos de vibración, más representativos para el movimiento en dirección X, en dirección Y, y en dirección vertical son el primero, segundo y séptimo modo. Ya que para estos modos se tiene el mayor valor en el último piso. Luego:

$$\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.2632 \\ 0.6806 \\ 1.0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.2696 \\ -0.6877 \\ -1.0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi^{(7)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.4450 \\ -0.8019 \\ -1.0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con estos valores la matriz  $\hat{\Phi}$  y la matriz  $\hat{\Delta}^2$  valen:

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Delta}^2 = \begin{bmatrix} 153 & & \\ & 164 & \\ & & 46584 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez y de masa del sistema simplificado de 3 gdl, son:

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 7000 & & \\ & 7500 & \\ & & 2139100 \end{bmatrix} \quad \hat{M} = \begin{bmatrix} 45.9184 & & \\ & 45.9184 & \\ & & 45.9184 \end{bmatrix}$$

Los valores no indicados de las matrices  $\hat{\Delta}^2$ ,  $\hat{K}$ ,  $\hat{M}$  son nulos. Los datos que reporta el programa **espacial\_vertical\_6gdl** para ser utilizados en el programa **fpsmodelo6gdl** son los siguientes:

$$m_s = 45.9184 \text{ T s}^2 / m \quad T_s = 0.5082 \text{ s} \quad \beta = 17.4576$$

Los registros del sismo de Newhall están en gals. Por lo tanto, es conveniente que se coloque  $m_s = 0.459184 \text{ T s}^2 / \text{cm}$ . Por otra parte, la relación entre la masa del sistema de aislación con respecto a la masa de la superestructura es  $\alpha = 0.1$  y el período objetivo del sistema de aislación es  $T_b = 2.0 \text{ s}$ . Para estos datos las respuestas que se obtienen se indican en la figura 7.7.

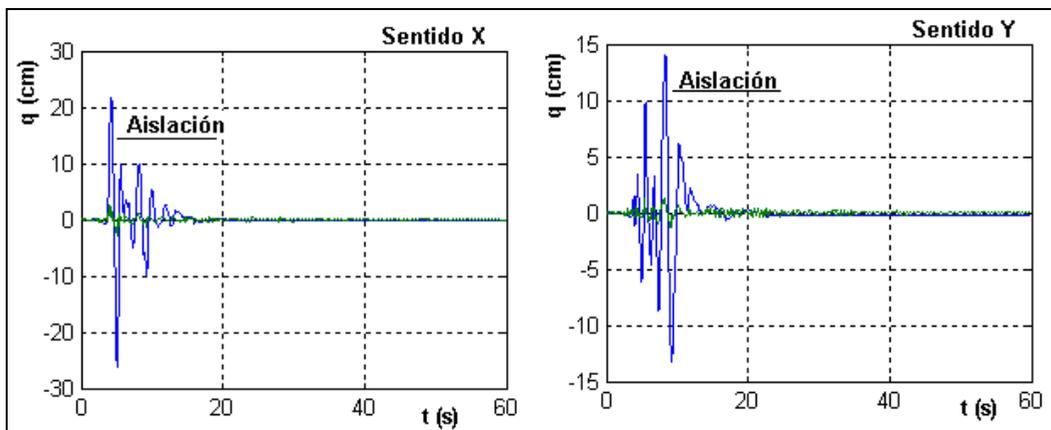


Figura 7.7 Respuesta de aislación y superestructura ante 3 componentes del sismo de Newhall.

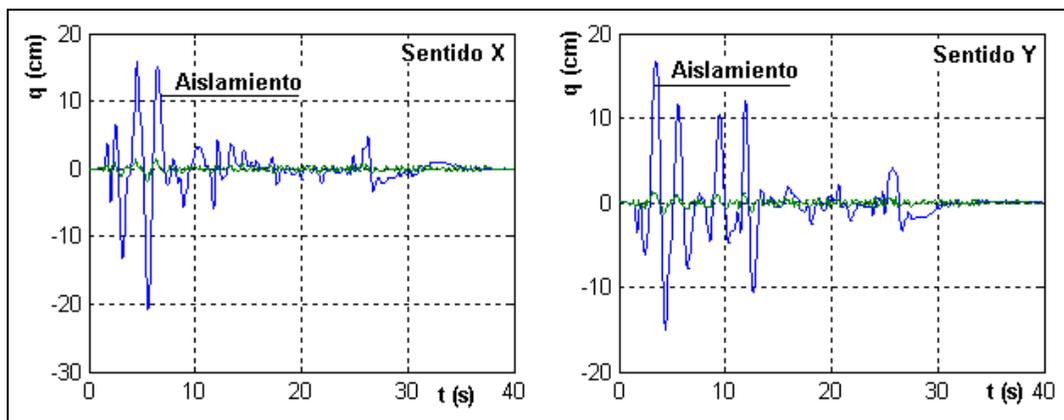
#### • EJEMPLO 4

Con los datos del ejercicio anterior, encontrar:

- La respuesta en el tiempo si ahora actúa solo la componente en sentido X y en sentido Y del sismo de El Centro (1940) pero duplicado. (2 \* El Centro)
- La respuesta en el tiempo si actúan 2\* El Centro pero en las tres componentes.

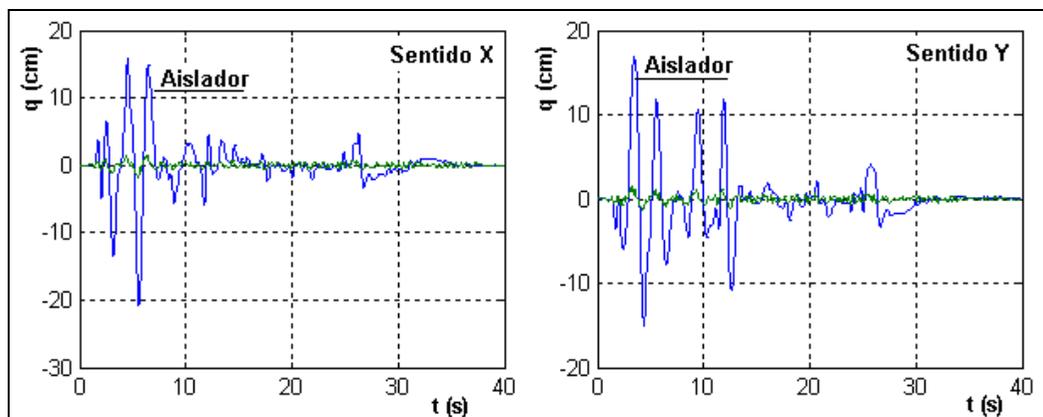
#### • SOLUCIÓN

En la figura 7.8 se presenta la respuesta cuando actúan las dos componentes horizontales de movimiento del suelo. Pero 2 X El Centro.



**Figura 7.8** Respuesta no lineal del sistema de aislación. Solo  $\ddot{U}_x = 2 \times$  El Centro.

Ahora bien, cuando actúan las tres componentes sísmicas, duplicadas las aceleraciones, la respuesta se muestra en la figura 7.9.



**Figura 7.9** Respuesta no lineal ante las tres componentes sísmicas.

Las respuestas son muy parecidas, para este ejercicio la componente vertical no tiene mayor influencia.

## REFERENCIAS

1. Aguiar R., (2004), *Análisis Matricial de Estructuras*, Centro de Investigaciones Científicas, Escuela Politécnica del Ejército, **Tercera edición**, 550 p.
2. Aguiar R., (2007), *Dinámica de estructuras con MATLAB*, Centro de Investigaciones Científicas y Colegio de Ingenieros Civiles de Pichincha., 292 p. Quito.
3. Seguíñ (2007), *Torsión en sistemas aislados sísmicamente con dispositivos elastoméricos*, Tesis Doctoral (Ph.D.) Escuela de Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile, 229 p., Santiago.



Colocación de 3 aisladores FPS sobre la Pila de un Puente de Esmeraldas, en Ecuador. En la figura inferior se aprecia el Puente terminado.



## CAPÍTULO 8

---

### ESTUDIO EXPERIMENTAL EN ESTRUCTURAS CON FPS

#### 8.1 INTRODUCCIÓN

El estudio experimental ayuda a comprender los problemas físicos y a más de ello sirve para convalidar los modelos analíticos con los resultados experimentales. En el presente caso se construyó una estructura de tres pisos, simétrica, a escala, la misma que mediante pequeñas modificaciones se transforma en estructura asimétrica, de tal manera que se realizarán ensayos en dos modelos uno simétrico y otro asimétrico. Los ensayos se realizaron sobre una mesa vibratoria de 6 grados de libertad ante la acción de cuatro sismos reales y un sismo artificial.

Se debe destacar que se realizaron dos grupos de ensayos, uno solamente en la losa de aislación, sin la superestructura y otro en la losa de aislación con la superestructura. Para los grupos se consideró el modelo simétrico y asimétrico que se describirá posteriormente. El objetivo de los ensayos se resume a continuación:

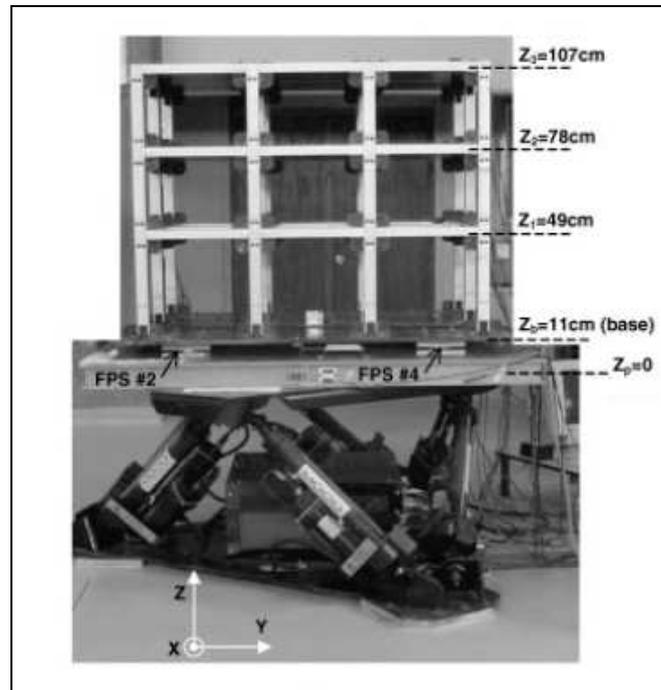
- Encontrar el coeficiente de fricción  $\nu$  y comparar con el modelo propuesto por Constantino *et al* (1990), para ver la variación de  $\nu$  en función de la carga y de la velocidad de movimiento del deslizador. Además de ello mostrar la presencia del coeficiente de fricción estático.
- Encontrar la excentricidad debida a la variación del coeficiente de fricción.
- Validar los modelos analíticos con resultados experimentales.
- Evaluar la magnitud del efecto de torsión accidental.
- Cuantificar la eficacia del sistema FPS para controlar la respuesta lateral y torsional de estructuras con distribución simétrica y asimétrica de masa.

Primero se va a presentar los resultados experimentales en la losa de aislación sin la superestructura, hasta el apartado 8.7. Luego se mostrarán los resultados experimentales con la superestructura.

## 8.2 MESA VIBRATORIA Y ESTRUCTURA

En la figura 8.1 se aprecia la mesa vibratoria MOOG, la plataforma, los aisladores FPS y la superestructura de tres pisos. La plataforma permite manejar 6 grados de libertad, que son: 3 desplazamientos y tres rotaciones, puede soportar un peso máximo de 1.5 T., pudiendo alcanzar desplazamientos horizontales máximos de  $\pm 30 \text{ cm}$ , desplazamiento vertical de  $\pm 18 \text{ cm}$ , rotaciones de hasta  $\pm 24^\circ$ , velocidades de  $\pm 50 \text{ cm/s}$ ; velocidad angular de  $\pm 40^\circ/\text{s}$ , aceleraciones lineales de hasta  $\pm 0.6 \text{ g}$  y aceleraciones angulares de  $\pm 500^\circ/\text{s}^2$ .

Se trabajó con un factor de reducción de escala  $E_L = 1/7$ . La estructura está compuesta por cuatro pórticos en una dirección y tres pórticos en la dirección perpendicular, está formada por columnas de 4 cm., de lado y vigas de 3 cm., de lado, de aluminio duro. El espesor de estos elementos es de 1.5 mm. Para lograr uniones rígidas en los nudos se apernaron y atiesaron.



**Figura 8.1** Mesa vibratoria y estructura de tres pisos a escala.

En cada planta se tienen 6 vanos, de tal manera que la losa de entrepiso está compuesta por placas de 35 cm., de lado de 2.5 cm., de espesor que tiene un peso de 24 kg., cada una. La losa de aislación (base) esta materializada por una placa rectangular única de acero de 100 cm x 140 cm., de lado y 1.3 cm., de espesor. El peso total de la estructura es  $W_T = 754 \text{ kg}$ . Almazán (2001).

Se consideraron dos distribuciones de masa, figura 8.2, una simétrica y otra asimétrica, en esta última las placas de acero limitados entre los ejes 1 y 2 se desplazaron en los tres pisos hacia el vano situado entre los ejes 3 y 4, teniendo de esta manera una excentricidad de masa  $e = 0.19 b$ . Para el modelo simétrico las coordenadas del Centro de Masa, CM son

$X_{CM} = 40\text{ cm}$  y  $Y_{CM} = 60\text{ cm}$  medidos a partir de la intersección de los ejes A y 1. En cambio para el modelo asimétrico las coordenadas del CM son  $X_{CM} = 40\text{ cm}$  y  $Y_{CM} = 86.67\text{ cm}$  con lo que la excentricidad de masa es  $e = 86.67 - 60 = 26.67\text{ cm} = 0.19 b$

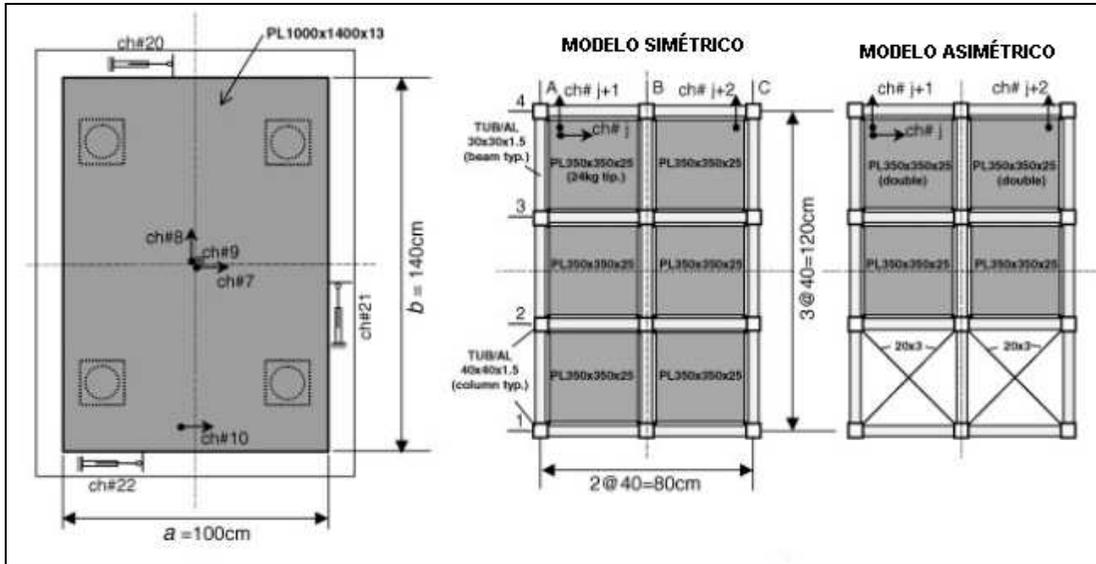


Figura 8.2 Distribución de aisladores y modelos de distribución de masa.

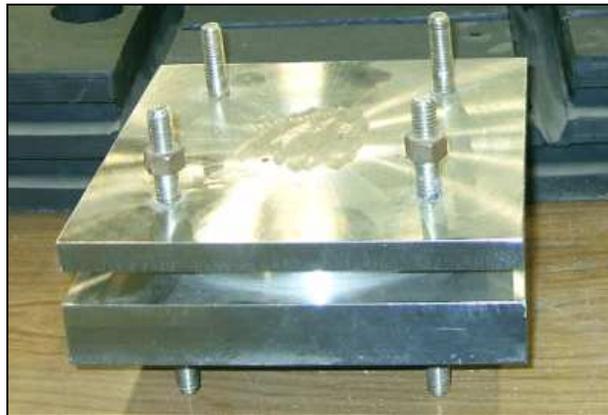
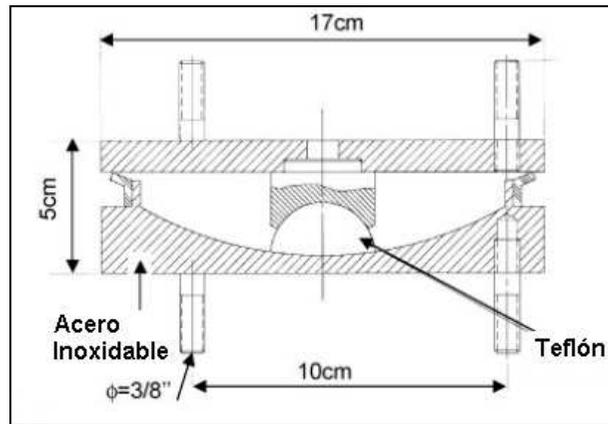
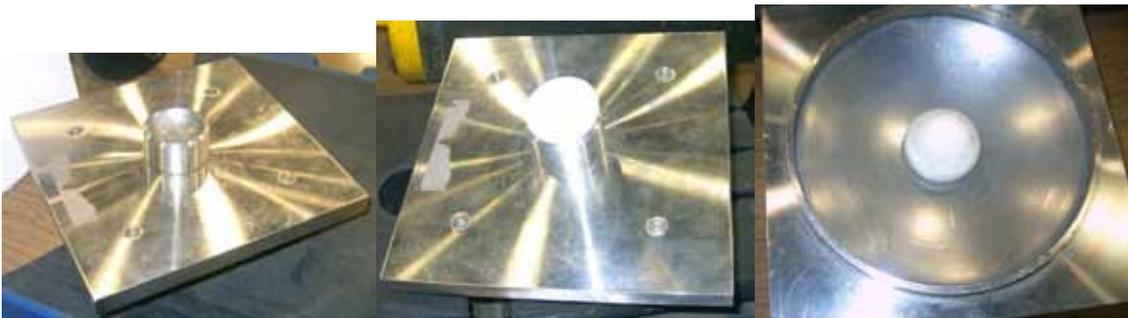


Figura 8.3 Geometría de aislador FPS utilizado.

A la izquierda de la figura 8.2 se observan los 4 aisladores de base FPS que tienen 14.3 cm., de radio de curvatura equivalente a 100 cm., en el prototipo y tiene una capacidad de deformación lateral de 5 cm., que equivale a 35 cm., en el prototipo. En la parte superior de la figura 8.3 se aprecia las dimensiones del aislador FPS utilizado y en la parte inferior se observa una fotografía del mismo con los pernos de anclaje a la estructura.

En la figura 8.4, a la izquierda se observa la superficie plana con el vástago que fue construido con acero inoxidable, en la parte central se aprecia con el deslizador, que es de teflón y la figura de la derecha la superficie cóncava del aislador. La superficie plana se colocó en contacto con la plataforma y la superficie cóncava con la superestructura (sentido inverso), en la figura 8.5 se aprecia lo indicado y corresponde al montaje de la superestructura.



**Figura 8.4** Aislador FPS destapado.



**Figura 8.5** Montaje de la superestructura.

### 8.3 SISMOS DE ANÁLISIS

Para el estudio se emplearon cinco registros sísmicos y se trata de los registros de Newhall (Northridge, 1994), JMA (Kobe 1995), El Centro (Imperial Valley 1940) amplificado por un factor de 2, Melipilla (Chile, 1985) amplificado por un factor de 2 y un registro artificial compatible con el espectro de diseño de la Norma de Chile para suelo tipo 2 y zona sísmica I. En la tabla 8.1 se indican las aceleraciones máximas de los acelerogramas considerados.

Se mantuvo la escala de aceleración  $E_A = 1$ . Por lo que tiene que tuvo que comprimirse el factor del tiempo de la siguiente manera.

$$E_A = \frac{E_L}{E_T^2} = 1 \quad \rightarrow \quad E_T = \sqrt{\frac{E_L}{E_A}} = \sqrt{\frac{1/7}{1}} = \sqrt{\frac{1}{7}}$$

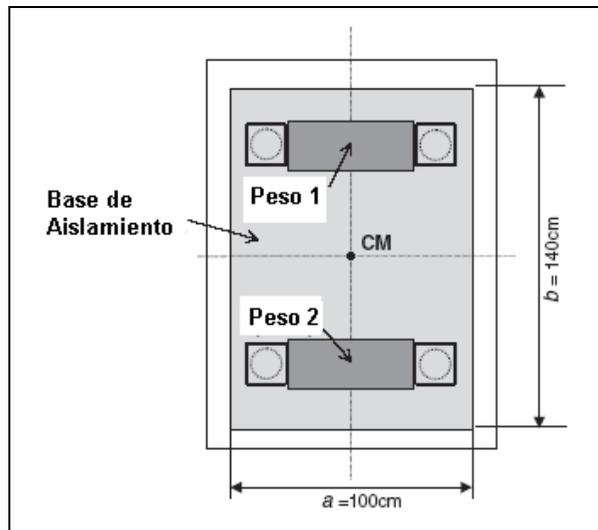
Por lo tanto, el tiempo se comprimió por un factor  $\sqrt{1/7}$ , esto significa que la duración total del registro se multiplicó por ese factor y para ese tiempo resultante se realizó el ensayo.

**Tabla 8.1** Aceleraciones máximas de sismos considerados

Registro	Evento	Aceleraciones máximas (gals)		
		Sentido X	Sentido Y	Vertical
Newhall	Northridge (USA, 1995 M=6.7)	578.8	568.9	539.5
JMA	Kobe (Japón, 1995 M=7.2)	817.8	617.1	332.2
2 x El Centro	Imperial Valley (USA, 1940 M=7)	2 x 306.9	2 x 210.7	2 x 201.3
2 x Melipilla	Chile (1985, M=7)	2 x 518.0	2 x 763.0	2 x 250.0
Artificial	Norma de Chile	657.71	600.7	375.0

## 8.4 VARIACIÓN DE LA FUERZA FRICCIONANTE

Se encontró el coeficiente de fricción, que en este capítulo se lo identifica como  $\mu$  de dos maneras, la primera considerando solo la base de aislamiento en la cual se colocó dos pesos y la segunda con la estructura completa, de esta manera se puede ver que el coeficiente de fricción también es función de la carga vertical.

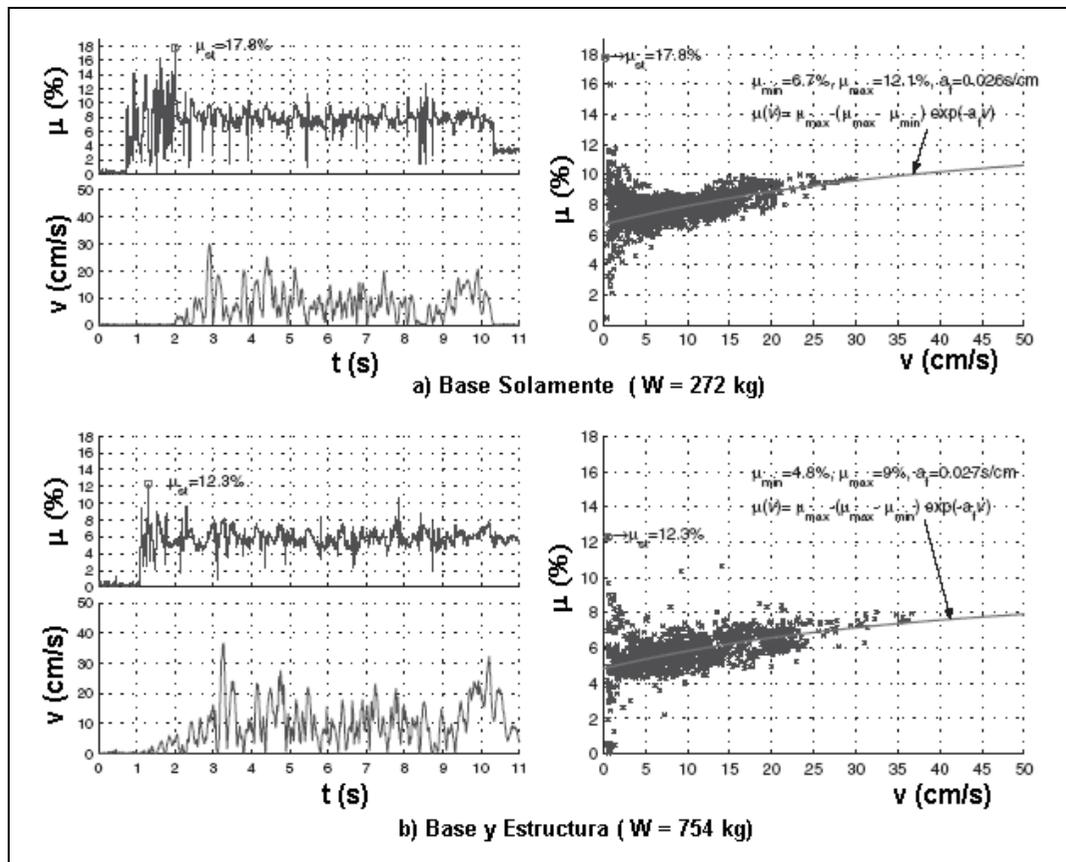


**Figura 8.6** Base de aislamiento con dos pesos.

En la figura 8.6 se muestra el modelo para el primer caso de estudio, la base de aislamiento tiene un peso de 176 kg., y cada uno de los pesos son de 48 kg. Por lo tanto para el primer caso el peso total es de 272 kg. En cambio para el segundo caso, cuando se realicen los ensayos con la superestructura el peso total es de 754 kg.

Para el primer caso se desmontó la estructura **para estudiar el comportamiento de la losa de aislación trabajando como cuerpo rígido bidimensional**, de esta manera se evitan las fuentes de asimetría provenientes de la superestructura, como la componente de torsión accidental proveniente del momento volcante de la superestructura.

En la figura 8.7 se aprecian los resultados encontrados de la variación del coeficiente de fricción ante la acción del sismo artificial para los dos casos analizados. En la parte superior se indican los resultados para la base de aislamiento con los dos pesos y en la parte inferior los resultados para la estructura con aisladores FPS.



**Figura 8.7** Resultados del coeficiente de fricción ante sismo artificial.

A la izquierda de la figura 8.7 se muestra el coeficiente de fricción  $\mu$  en función del tiempo y en la parte inferior la variación de la velocidad con el tiempo. La forma de cálculo del coeficiente de fricción  $\mu$  está descrita en Almazán (2001). Lo importante de estas gráficas, de la izquierda, es notar la presencia de la fricción estática  $\mu_{st}$  que se produce cuando la velocidad es cero, el valor máximo alcanzado es  $\mu_{st} = 17.8\%$  para el caso uno y  $12.3\%$  para el caso dos. Por lo tanto existe fricción en la etapa de agripamiento y es mayor mientras menos

peso existe en la estructura. Se trabajó con el valor medio del coeficiente de fricción hallado en los cuatro aislamientos.

En los dos gráficos de la derecha de la figura 8.7 se muestra la variación del coeficiente de fricción en función de la velocidad. Para el caso de solo que solo existe la base de aislación el  $\mu_{\min} = 6.7\%$  y el  $\mu_{\max} = 12.1\%$ . En cambio para cuando se tiene la presencia de la superestructura  $\mu_{\min} = 4.8\%$  y  $\mu_{\max} = 9.0\%$ . Por lo tanto, el coeficiente de fricción  $\mu$  depende de la carga vertical, depende de la presión de contacto, **a mayor presión de contacto menor es  $\mu$** .

Por otro lado se aprecia, a la derecha de la figura 8.7, que a mayor velocidad del sistema de aislamiento, mayor es el valor del coeficiente de fricción. Por cierto, el valor presentado de velocidad corresponde al valor promedio de las velocidades en cada aislador y de las tres componentes de los registros. La velocidad se halló por diferenciación numérica de las deformaciones de cada aislador.

Finalmente con los puntos obtenidos del coeficiente de fricción y de la velocidad se halló el coeficiente  $a_f$  de la ecuación propuesta por Constantinou *et al* (1990) y que se reescribe en (8.1). Se halló  $a_f = 0.026 \text{ s/cm}$  para el primer caso y  $a_f = 0.027 \text{ s/cm}$  para el segundo caso.

$$v(V) = \mu_{\max} - (\mu_{\max} - \mu_{\min}) \exp(-a_f V) \quad (8.1)$$

Con línea continua se ha dibujado la ecuación (8.1) en las gráficas de la derecha de la figura 8.7. Se aprecia en estas graficas que existe una gran dispersión de los valores hallados con relación a la forma de la ecuación propuesta por Constantinou *et al* (1990). Sin embargo la curva describe bastante bien los valores medios.

Resumiendo, del estudio experimental **se ha visto que el coeficiente de fricción depende de la presión de contacto, depende de la velocidad del sistema, la existencia de la fricción estática y que la forma de la ecuación propuesta por Constantinou *et al* (1990) ajusta bastante bien los valores medios.** De la Llera y Almazán (2003). Resultados similares se hallaron con las otras componentes sísmicas. Almazán (2001).

En base a los resultados encontrados se puede indicar que las fuerzas friccionales son la principal fuente de incertidumbre en estructuras con aisladores FPS. De tal manera que se puede hablar de torsión accidental por efecto de la variación del coeficiente de fricción.

## 8.5 EFECTOS TORSIONALES

Como se indicó, se tienen dos casos de estudio para la losa de aislación sin la superestructura, una estructura simétrica y otra estructura asimétrica con excentricidad de masa. Para estos dos casos se halló la respuesta ante la acción de los sismos indicados en la tabla 8.1. En la figura 8.8, se presenta los resultados experimentales cuando sobre cada una de las estructuras, actúan las tres componentes sísmicas del sismo de Newhall y 2 veces el sismo de El Centro. Se muestran la deformación en sentido X, para los bordes de la **losa de aislación** en  $y = \pm b/2$ ; las figuras de la parte superior corresponde a la estructura simétrica y en la parte inferior a la estructura asimétrica.

Al observar la respuesta experimental de las estructuras simétrica y asimétrica se aprecia que prácticamente son las mismas, a pesar de que la excentricidad de masa es considerable en la estructura asimétrica, con esto se demuestra que los aisladores FPS realmente minimizan los problemas de torsión y cumplen con la propiedad de ser **autocentrantes**.

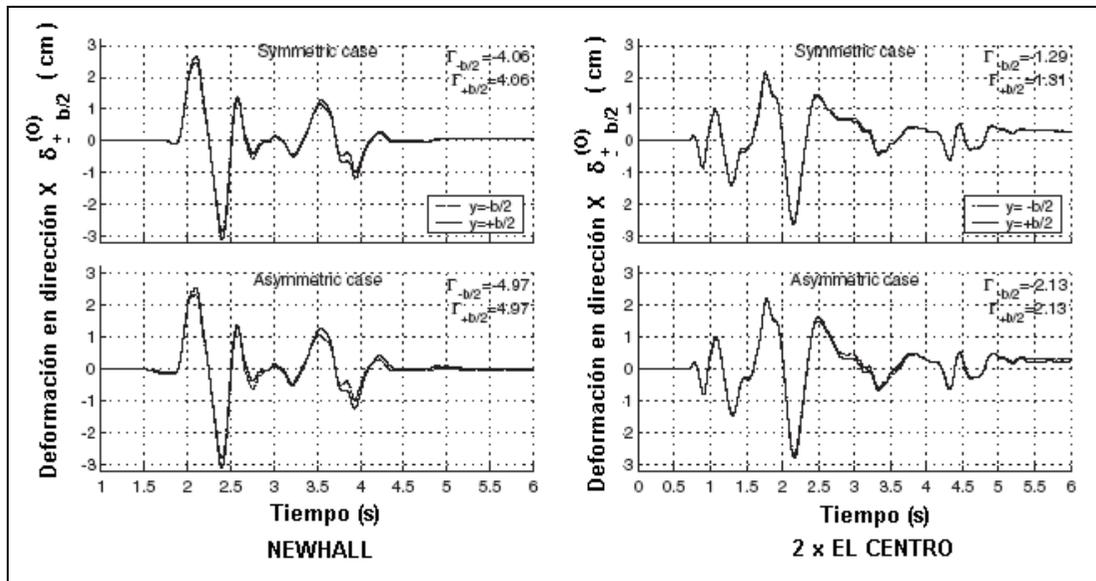
Llama la atención que en la estructura simétrica no se tengan los mismos desplazamientos en los bordes, con el sismo de Newhall la diferencia es más significativa que con el sismo de 2 veces El Centro. Esto se debe en parte a lo que se indicó en el apartado anterior relacionado con la **variabilidad del coeficiente de fricción**.

Para medir el efecto de la torsión accidental en las deformaciones máximas de la base y la superestructura se utiliza el indicador espectral *tipo*  $\Gamma$  que mide la deformación máxima en los bordes  $y = \pm b/2$  con respecto a la deformación máxima en el CM  $y = 0$ .

$$\Gamma_{\pm b/2}^{(b)} = 100\% \times \frac{\max \|d_{x(\pm b/2)}^{(b)}\| - \max \|q_x\|}{\max \|q_x\|} \quad (8.2)$$

$$\Gamma_{b/2}^{(b)} = \max \left( \Gamma_{+b/2}^{(b)}, \Gamma_{-b/2}^{(b)} \right) \quad (8.3)$$

Donde  $\max \|q_x\|$  es el máximo desplazamiento de la base del aislador en sentido X, en el CM.;  $\max \|d_{x(\pm b/2)}^{(b)}\|$  es el desplazamiento máximo de la base del aislador en los extremos del mismo.



**Figura 8.8** Respuestas experimentales en los bordes de la losa de aislación.

En la figura 8.8 se indica el indicador  $\Gamma$  para la losa de aislación. Para el sismo de Newhall se aprecia que este vale 4.97 para la estructura asimétrica; esto significa que los desplazamientos de los bordes se amplifican con respecto a los desplazamientos en el CM., en 4.97 %. En la tabla 8.2 se muestran los factores de amplificación torsional encontrados en las

estructuras simétrica y asimétrica, se aprecia que el valor medio es 2.61 para la estructura simétrica y 2.26 para la estructura asimétrica, valores muy parecidos que demuestran otra vez la propiedad autocentrante de los FPS en estructuras asimétricas.

En la tabla 8.2, aparece el indicador *tipo*  $\Xi$  que se define de la siguiente manera:

$$\Xi_{b/2}^{(b)} = 100\% \times \frac{\max \|\delta_{\theta}^{(b)}\|}{\max \|q_x\|} \quad (8.4)$$

$$\delta_{\theta}^{(b)} = q_{\theta} \times b/2 \quad (8.5)$$

Donde  $q_{\theta}$  es la rotación en el CM, de la losa de aislación;  $b/2$  es la distancia desde el CM hasta el borde.

**Tabla 8.2** Factores de amplificación torsional en losa de aislación de estructura simétrica y asimétrica.

Registro	Estructura Simétrica				Estructura Asimétrica			
	$\Gamma_{-b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{+b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{b/2}^{(b)}$	$\Xi_{b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{-b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{+b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{b/2}^{(b)}$	$\Xi_{b/2}^{(b)}$
Newhall	-4.06	4.06	4.06	4.56	-4.97	4.97	4.97	5.54
Artificial	-0.68	0.76	0.76	6.55	-1.16	1.293	1.293	7.76
2 x El Centro	-1.29	1.31	1.31	2.64	-2.13	2.13	2.13	3.08
2 x Melipilla	2.55	-2.46	2.55	5.26	0.95	-0.95	0.95	5.20
JMA	-4.29	4.39	4.39	6.46	-1.71	1.96	1.96	4.27
Media			<b>2.61</b>	<b>5.10</b>			<b>2.26</b>	<b>5.17</b>
Media + Desv. Es			<b>4.22</b>	<b>6.70</b>			<b>3.85</b>	<b>6.90</b>

Es importante destacar que los indicadores tipo  $\Xi$  son una cota superior de los indicadores tipo  $\Gamma$ . Estos dos indicadores serán iguales solo cuando las máximas respuestas de traslación y rotación ocurren en el mismo instante de tiempo. Por consiguiente, la relación entre ambos indicadores es una medida de la correlación entre la respuesta lateral y torsional de la estructura.

## 8.6 CENTRO DE RESISTENCIA FRICCIONAL FCR

Una forma para interpretar el comportamiento no lineal torsional es por medio de las Superficies Últimas de Torque y Corte (USST). De la Llera y Chopra (1995), De la Llera *et al* (2000), que no se va a utilizar en este apartado para explicar el problema torsional producido por asimetría friccional, sino que se va a emplear lo que se ha denominado: Superficies Últimas de Torque y Corte Friccional (FUSST).

El FUSST representa a las infinitas combinaciones de Corte y Torque (Momento de Torsión) que pueden alcanzarse en el espacio tridimensional de fuerzas friccionales, asociadas a las infinitas combinaciones cinemáticas posibles de movimientos laterales y torsionales del sistema.

Para la losa de aislamiento se ha trabajado con un modelo de tres grados de libertad. De tal manera que se tiene un sistema  $Q - q$ . Donde  $Q$  es el vector de cargas generalizadas y  $q$  el vector de coordenadas generalizadas. Se ha utilizado la letra  $b$  para indicar que se trata del aislamiento, a lo largo de este libro y se va emplear el supra índice  $(\mu)$  para identificar que el problema es por variación del coeficiente de fricción. Con esta acotación se tiene.

$$Q_b^{(\mu)} = \begin{bmatrix} Q_x^{(\mu)} \\ Q_y^{(\mu)} \\ Q_\theta^{(\mu)} \end{bmatrix}$$

Donde  $Q_x^{(\mu)}$  es la fuerza de corte en la losa del aislador en sentido X (Fuerza horizontal en X);  $Q_y^{(\mu)}$  fuerza de corte en sentido Y,  $Q_\theta^{(\mu)}$  es el momento de torsión con respecto al eje perpendicular a la losa (Torque). Para hacerlo adimensional y poder comparar el corte con el torque. Se define:

$$Q_{bn}^{(\mu)} = [Q_{xn}^{(\mu)} \quad Q_{yn}^{(\mu)} \quad Q_{\theta n}^{(\mu)}]^t = \left[ \frac{Q_x^{(\mu)}}{C_n^{(\mu)}} \quad \frac{Q_y^{(\mu)}}{C_n^{(\mu)}} \quad \frac{Q_\theta^{(\mu)}}{C_n^{(\mu)} \rho_\mu} \right]^t \quad (8.6)$$

$$C_n^{(\mu)} = \mu_n W$$

Donde  $\mu_n$  es el coeficiente de fricción nominal;  $W$  es el peso de la estructura;  $\rho_u$  es el radio de giro nominal de la resistencia friccional. Para encontrar el FUSST se requiere que el sistema tenga el mayor número de pares de valores de  $Q_{xn}^{(\mu)}, Q_{\theta n}^{(\mu)}$  para el sentido X, o  $Q_{yn}^{(\mu)}, Q_{\theta n}^{(\mu)}$  para el sentido Y. Para lograr este objetivo al sistema se le proporcionó como excitación movimientos simultáneos de traslación y rotación de la mesa vibradora en torno al eje vertical Z, generados en forma aleatoria e independientes una de la otra es decir como ruidos blancos no correlacionados.

Como excitación se empleó el movimiento denominado WN/T&R1cm/1/70rad, que indica 1 cm., de amplitud máxima de traslación y 1/70 rad en rotación con dos incrementos de tiempo, el uno es  $\Delta T = 0.005 s$ . para cuando se realizó el experimento tomando en cuenta la fase de agripamiento y la fase de deslizamiento y el otro  $\Delta T = 0.01 s$  para cuando solo se consideró la fase de deslizamiento. Para este último caso se encontró la magnitud y dirección del vector de velocidad normalizado  $\dot{q}_n = [\dot{q}_x, \dot{q}_y, \rho_u \dot{q}_\theta]^t$  encontrando las velocidades derivando con respecto al tiempo los desplazamientos y giros, respectivamente; la velocidad resultante está representada con una flecha de distinto tamaño de acuerdo a su magnitud.

Los ensayos se realizaron en la estructura simétrica y en la estructura asimétrica y los resultados se muestran en la figura 8.9 únicamente para el caso de que la excitación se aplica en la dirección  $X - \Theta$  destacando que algo similar se obtuvo cuando se aplicó la excitación en dirección  $Y - \Theta$ . Almazán (2001). En todos los gráficos se ha indicado con línea entrecortada con línea segmentada la intersección de la FUSST nominal con el plano  $Q_{yn}^{(\mu)} = 0$ , para este caso las curvas son simétricas debido a que el FCR coincide con el CM para el caso de simetría en planta, coincide también con el centro de referencia de las cargas. Del estudio realizado y que se resume en la figura 8.9 se desprende, lo siguiente:

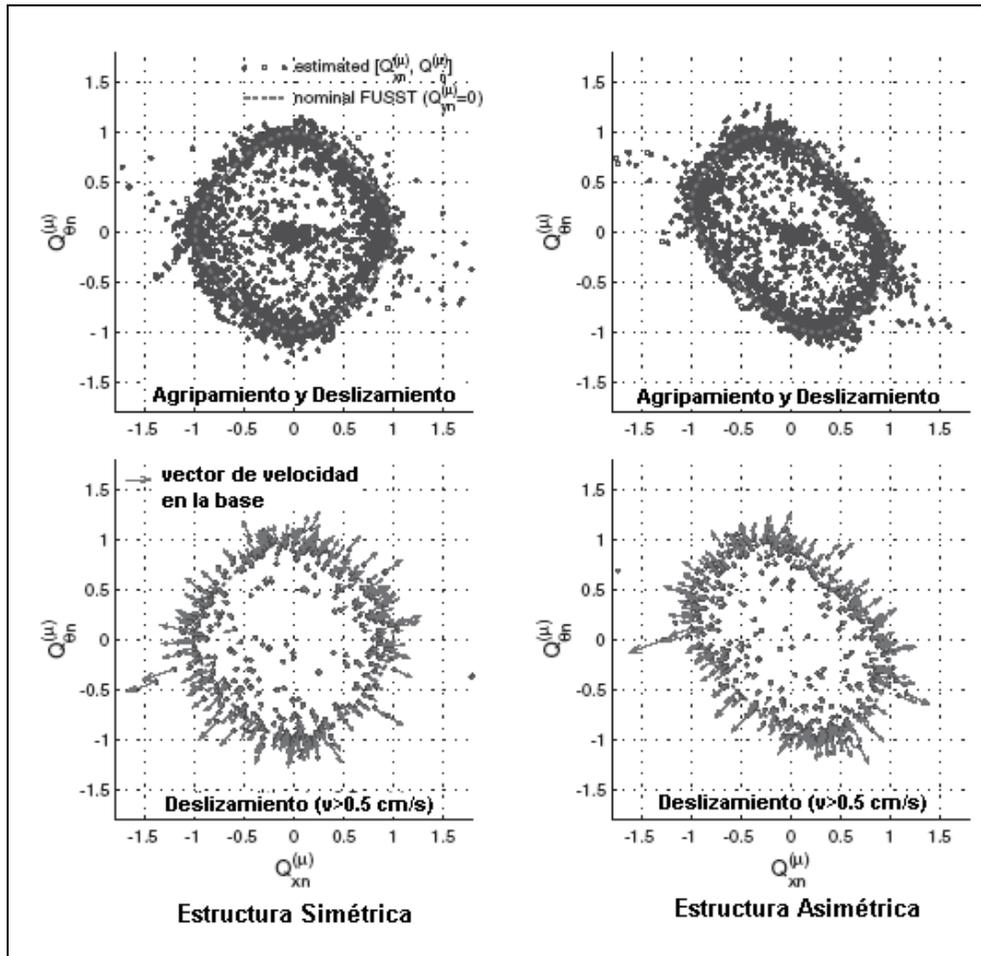


Figura 8.9 Superficie última de corte y torque friccional.

- Se observa una zona donde se concentra una mayor cantidad de pares de valores de momento torsión y corte, a esta zona se identifica como *zona de fluencia aparente*.
- Durante la fase de deslizamiento se aprecia un aumento de las fuerzas friccionales con la velocidad de deformación. Se aprecia que las flechas más largas se encuentran a mayor distancia de la zona de fluencia aparente. (Gráficas Inferiores)
- En la fase de agripamiento se aprecia la presencia de la elevada fricción estática  $\mu_{st} / \mu_n \approx 2$  como se observa en los puntos que se hallan a gran distancia de la zona de fluencia aparente las que ocurren a baja o nula velocidad (flechas cortas) durante el agripamiento.
- Los vectores de velocidad de deformación normalizada  $\dot{q}_n$  son prácticamente ortogonales a la FUSST lo que constituye una valiosa validación empírica de la conocida "regla de flujo asociado", empleada en la teoría de plasticidad y especialmente a la aplicación de esta regla en el estudio de torsión natural no lineal. De la Llera y Chopra (1995) y De la Llera *et al* (2000).

Para la estructura simétrica la superficie de fluencia aparente está centrada, en cambio para la estructura asimétrica se inclina en el plano  $X - \Theta$ . Este resultado experimental es consistente y valida numerosos resultados analíticos que fueron desarrollados en el estudio de la torsión natural no lineal. Consecuentemente, el concepto de un macro elemento en el piso de

aislación surge naturalmente como una alternativa para el análisis sísmico de estructuras sobre aisladores FPS. Almazán (2001).

Para identificar la excentricidad friccional se utiliza una propiedad de la FUSST según la cual las combinaciones de torsión y cortante correspondientes a movimientos de traslación pura definen una curva  $\Psi_{tp}$ , elipse, contenida en un plano  $\Pi_{tp}$  cuya ecuación en el espacio adimensional de torsión y corte está definida por la siguiente ecuación.

$$\Pi_{tp} \left( Q_{xn}^{(\mu)}, Q_{yn}^{(\mu)}, Q_{\theta n}^{(\mu)} \right) = \frac{-e_y^{(\mu)}}{\rho_\mu} Q_{xn}^{(\mu)} + \frac{e_x^{(\mu)}}{\rho_\mu} Q_{yn}^{(\mu)} - Q_{\theta n}^{(\mu)} = 0 \quad (8.7)$$

Donde  $e_x^{(\mu)}, e_y^{(\mu)}$  son las excentricidades friccionales del sistema de aislación. Se destaca que la traslación pura se obtiene cuando  $\dot{q}_\theta = 0$ . En base a la ecuación (8.7) se deriva el siguiente procedimiento para encontrar las excentricidades friccionales.

- i. Encontrar los instantes  $t^*$  en que la velocidad de rotación es nula  $\dot{q}_\theta = 0$ .
- ii. Para dichos instantes en que la velocidad es nula, extraer la secuencia de fuerzas friccionales  $Q_b^{(\mu)}(t^*) = \left[ \tilde{Q}_{xn}^{(\mu)}(t^*), \tilde{Q}_{yn}^{(\mu)}(t^*), \tilde{Q}_{\theta n}^{(\mu)}(t^*) \right]$  que corresponden a cortantes y torsión en traslación pura.
- iii. Usar mínimos cuadrados para ajustar una superficie plana a la secuencia de combinaciones  $Q_b^{(\mu)}(t^*)$  empleando la forma de la ecuación (8.7) como funcional. Luego.

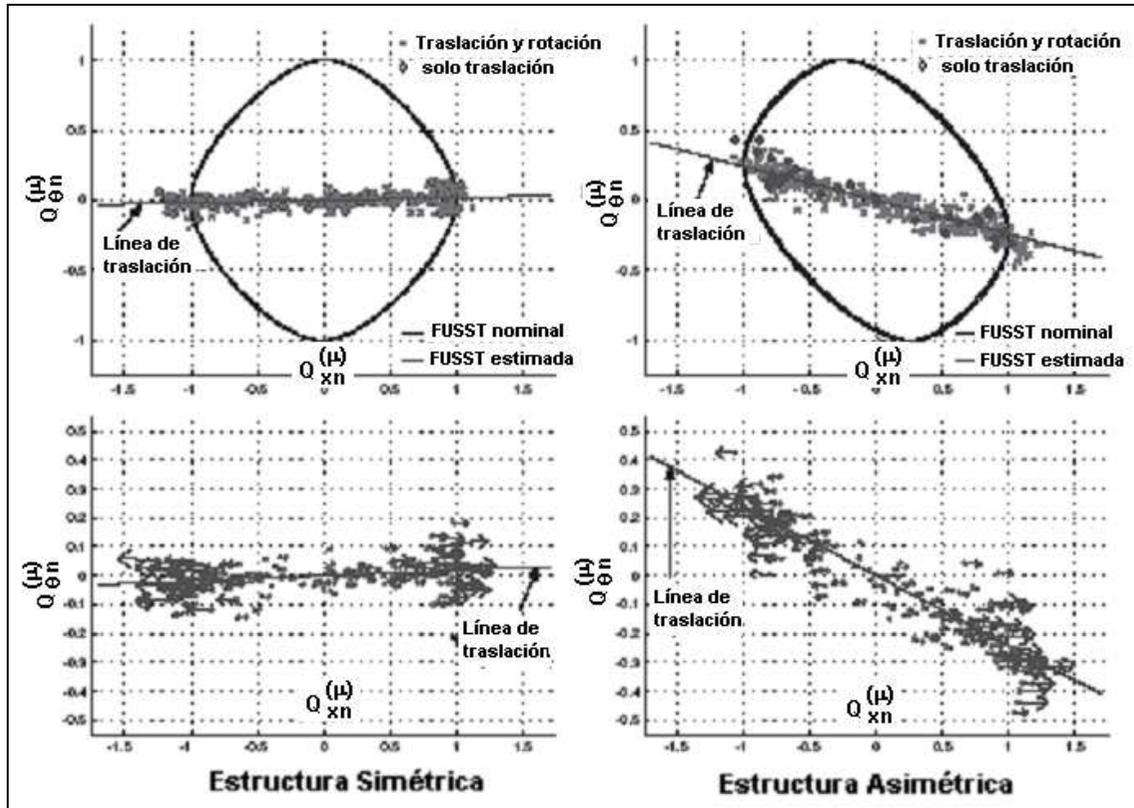
$$\left[ \hat{e}_x^{(\mu)}, \hat{e}_y^{(\mu)} \right] = \min_{\hat{e}_x^{(\mu)}, \hat{e}_y^{(\mu)}} \left( \frac{-\hat{e}_y^{(\mu)}}{\rho_\mu} \tilde{Q}_{xn}^{(\mu)} + \frac{\hat{e}_x^{(\mu)}}{\rho_\mu} \tilde{Q}_{yn}^{(\mu)} - \tilde{Q}_{\theta n}^{(\mu)} \right) \quad (8.8)$$

Siendo  $\hat{e}_x^{(\mu)}, \hat{e}_y^{(\mu)}$  las estimaciones de la excentricidad friccional *promedio* del sistema de aislación a lo largo del tiempo.

En la figura 8.10 se presenta en la parte superior de los gráficos, con cruces los pares de valores del momento de torsión y cortante en la losa de aislamiento, con círculo los pares de valores torsión-cortante pero en traslación pura todo esto para el sismo 2 x El Centro. Se presenta también la traza del plano  $\Pi_{tp}$  identificada como línea de traslación pura. Se indica también la FUSST nominal y estimada, la estimada se halla empleando coeficientes de fricción diferentes en los FPS. En base a todo lo indicado se ha hallado  $\hat{e}_x^{(\mu)}, \hat{e}_y^{(\mu)}$  y los resultados se muestran en la tabla 8.3 para la estructura simétrica y asimétrica y para todos los sismos de la tabla 8.1. En la última fila de esta tabla se indican los valores medios de la excentricidad friccional y se observa que los valores son iguales para las dos estructuras, lo que demuestra una vez más la propiedad autocentrante de los FPS.

Los gráficos de la columna izquierda de la figura 8.10 corresponden a la estructura simétrica y los de la columna derecha a la estructura asimétrica. En la parte inferior de esta figura se tiene una representación ampliada de la respuesta donde se han agregado los vectores de velocidad de deformación  $\dot{q}_n$  se aprecia como las combinaciones de corte y

torsión con velocidad torsional positiva y negativa tienden a situarse por encima y por debajo del plano  $\Pi_{tp}$ . Almazán (2001).



**Figura 8.10** Cálculo de las excentricidades friccionales por medio del plano de traslación pura. Sismo 2 x El Centro.

## 8.7 VALIDACIÓN ANALÍTICO EXPERIMENTAL EN AISLACIÓN

Continuando los ensayos únicamente en el sistema de aislación, sin la superestructura. Ahora se comparan los resultados obtenidos en forma experimental con los hallados en forma analítica en la que se empleó el modelo físico (gap) para representar los FPS, se incluyó la variación del coeficiente de fricción con la velocidad de deformación y el efecto de fricción estática, todo esto con los valores obtenidos experimentalmente y que fueron presentados en el apartado 8.4. Además para incorporar el efecto de la simetría friccional se utilizó la información indicada en la tabla 8.3, adoptando para todas las simulaciones numéricas un corrimiento del FCR de -1.6 cm, en dirección Y. No se consideró la excentricidad en sentido X debido a que el valor promedio de esta tiende a cero. El mencionado corrimiento del FCR se obtuvo adoptando coeficientes de fricción diferentes en cada aislador, cuya relaciones respecto al valor promedio  $\bar{\mu}$  son 1.05 para los FPS 1 y 2, y 0.95 para el 3 y 4. Los aisladores 1 y 2 están en la dirección  $-b/2$ .

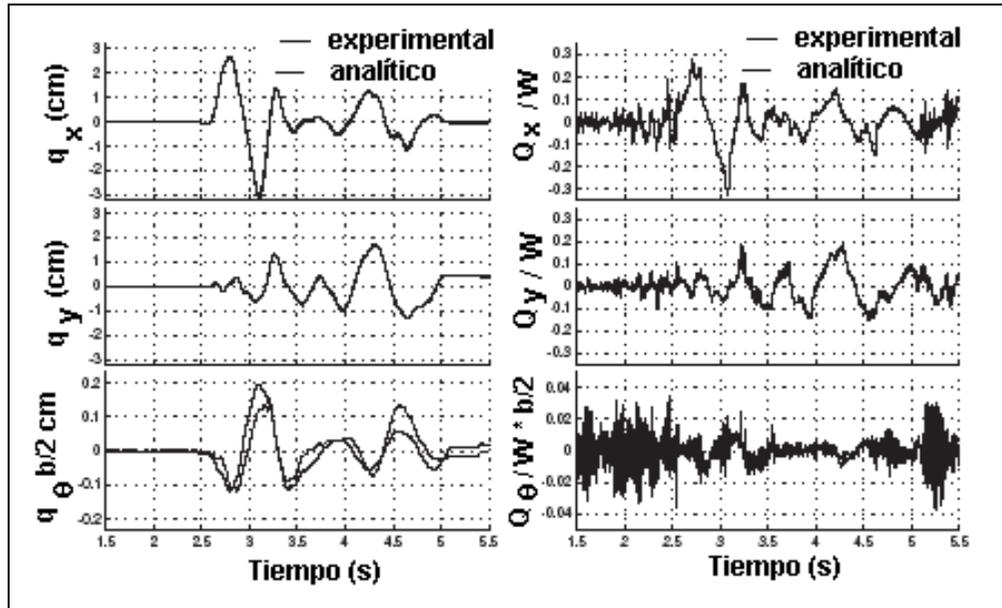
En la figura 8.11 se muestran los resultados obtenidos en forma experimental y analítica, ante las tres componentes del sismo de Newhall, aplicado en la estructura simétrica, en la columna de la izquierda se muestra las respuestas de desplazamientos en el CM., en dirección X, Y y  $\theta$ , para esta última se ha multiplicado el giro de torsión por la distancia  $b/2$  para que tenga unidades de desplazamiento. En la columna de la derecha se muestran las

fuerzas y momentos de torsión, normalizados para el peso total en el caso de las fuerzas y para el producto de la fuerza total por la distancia  $b/2$  para el momento de torsión, de tal manera que se tienen cargas adimensionales.

**Tabla 8.3** Excentricidades friccionales estimadas correspondientes a la losa de aislación, sin edificio.

Registro	Estructura simétrica		Estructura asimétrica	
	$\hat{e}_x^{(\mu)}$ (cm)	$\hat{e}_y^{(\mu)}$ (cm)	$\hat{e}_x^{(\mu)}$ (cm)	$\bar{e}_y^{(\mu)} - \hat{e}_y^{(\mu)}$ (cm)
Newhall	-0.677	-2.735	-0.425	-4.60
Artificial	-0.508	-0.922	0.514	-0.36
2 x El Centro	0.213	-1.04	0.505	-2.08
2 x Melipilla	0.693	-1.17	-0.177	-1.52
JMA	-1.06	-2.06	-0.454	0.66
Media	<b>-0.27</b>	<b>-1.59</b>	<b>-0.007</b>	<b>-1.58</b>

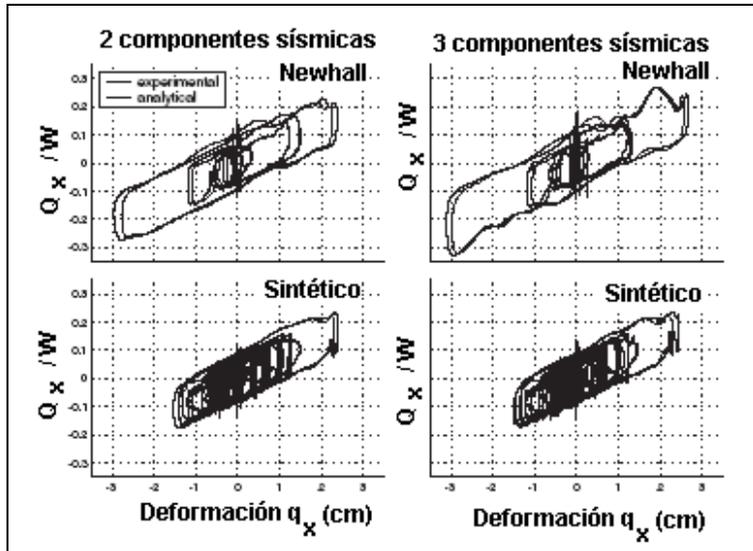
En la figura 8.11 se aprecia una muy buena aproximación entre los resultados analíticos y experimentales para el movimiento lateral en sentido X, y en sentido Y. Lo propio a nivel de fuerzas. Esto se debe a que las variaciones del coeficiente de fricción han sido incorporadas en el modelo teórico. Una menor coincidencia se aprecia en la componente rotacional, la diferencia se debe a que la excentricidad friccional del sistema no es constante como se ha supuesto en la modelación y a la existencia de otras fuentes de asimetría en planta que han sido ignoradas, a pesar de ello el modelo analítico sigue bastante bien la secuencia del movimiento torsional. Almazán (2001). Los resultados encontrados para la estructura con asimetría de masa son similares.



**Figura 8.11** Comparación entre respuesta experimental y analítica en la losa de aislación Debido al sismo de Newhall

En la figura 8.12 se presenta la relación fuerza horizontal – desplazamiento horizontal, medidas en el CM., las gráficas de la parte superior corresponden al sismo de Newhall y las de la parte inferior al sismo artificial. Por otra parte, las gráficas de la columna izquierda son para cuando la excitación está definida por las dos componentes horizontales de movimiento del

suelo y las gráficas de la columna derecha corresponden al caso en que actúan las tres componentes sísmicas, las dos componentes horizontales y la vertical.



**Figura 8.12** Respuesta experimental y analítica de losa de aislación con masa simétrica con 2 y 3 componentes sísmicas.

En la figura 8.12 se aprecia la gran similitud entre la respuesta analítica y la experimental. Ahora bien es importante notar que cuando actúan los tres registros del sismo de Newhall se tienen mayores fuerzas en relación a la que se hallan cuando actúan dos componentes sísmicas. Este incremento es del orden del 20%, **este incremento de fuerzas es proporcional a la correlación estadística entre la componente horizontal y vertical del movimiento sísmico**. Para el caso de los sismos de Newhall y Artificial, la correlación entre las dos componentes X y Z son respectivamente -0.18 y 0.04, respectivamente. Lo que explica la diferencia en las fuerzas halladas. Almazán (2001).

## 8.8 ENSAYOS EN SUPERESTRUCTURA CON AISLADORES

A partir de este apartado se presentan los resultados obtenidos en la superestructura con aisladores de base. La figura 8.13 corresponde a los resultados experimentales hallados en la estructura simétrica y en la estructura asimétrica, cuando actúan las tres componentes de los sismos de Newhall, 2 x El Centro y el Artificial. Se indican los desplazamientos en la losa de aislación en los bordes ( $\pm b/2$ ), los gráficos de la parte superior corresponden al modelo simétrico y los de la parte inferior al modelo de masa asimétrico.

En cada gráfico de la figura 8.13 se muestra el indicador  $\Gamma$  descrito en (8.3) que mide el efecto de torsión, se aprecia que estos valores son aproximadamente el doble en las estructuras asimétricas con relación a las simétricas.

En la tabla 8.4 se muestran los indicadores que miden el efecto de torsión, los factores de correlación y la excentricidad friccional, en la estructura simétrica y en la tabla 8.5 se presenta lo mismo pero en la estructura asimétrica. Si se compara los valores medios de la tabla 8.4 con los de la tabla 8.2 que corresponde a la losa sin superestructura se ve que  $\Gamma_{b/2}^{(b)} = 2.61$  en el caso de losa de aislación con superestructura y  $\Gamma_{b/2}^{(b)} = 2.51$  para solo losa de

aislación pero para el caso del modelo asimétrico son mayores en la tabla 8.5 con relación a la tabla 8.2, estos puede ser debido al input torsional de la mesa vibradora y as excentricidades fricciónales.

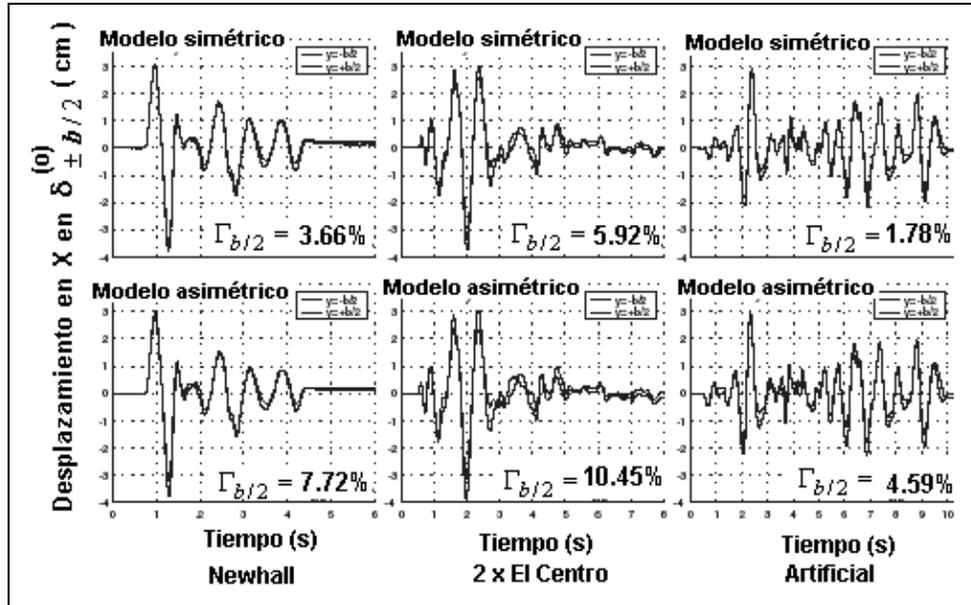


Figura 8.13 Respuestas experimentales en los bordes de edificios simétrico y asimétrico.

Tabla 8.4 Resultados experimentales, en la losa de aislación, en edificio **simétrico** de tres pisos.

Registro	Factores de amplificación de torsión de la base en (%)				Factores de correlación		Excentricidades Fricciónales (cm)	
	$\Gamma_{-b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{+b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{b/2}^{(b)}$	$\Xi_{b/2}^{(b)}$	$\rho_{x\theta}$	$\rho_{y\theta}$	$\hat{e}_x^{(\mu)}$	$\hat{e}_y^{(\mu)}$
Newhall	-3.66	3.66	3.66	4.18	-0.597	0.139	-2.65	-1.89
Artificial	-1.78	1.78	1.78	7.52	-0.732	0.376	-0.41	-3.06
2 x El Centro	-5.89	5.92	5.92	9.96	-0.579	0.704	-3.34	-2.23
2 x Melipilla	1.03	-0.69	1.03	7.69	-0.472	0.372	-1.51	-3.21
JMA	0.14	0.16	0.16	8.28	-0.451	0.447	-0.52	-2.84
Media			<b>2.51</b>	<b>7.53</b>	<b>-0.566</b>	<b>0.407</b>	<b>-1.69</b>	<b>-2.65</b>
Media + Desv.			4.81	9.63				

Tabla 8.5 Resultados experimentales, en la losa de aislación, en edificio **asimétrico** de tres pisos.

Registro	Factores de amplificación de torsión de la base en (%)				Factores de Correlación		Excentricidades Fricciónales (cm)	
	$\Gamma_{-b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{+b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{b/2}^{(b)}$	$\Xi_{b/2}^{(b)}$	$\rho_{x\theta}$	$\rho_{y\theta}$	$\hat{e}_x^{(\mu)}$	$\bar{e}_y^{(\mu)} - \hat{e}_y^{(\mu)}$
Newhall	-7.72	7.72	7.72	8.77	-0.639	0.194	-3.21	-0.72
Artificial	-4.01	4.59	4.59	12.51	-0.635	0.587	-2.27	-2.82
2 x El Centro	-10.41	10.45	10.45	13.27	-0.661	0.752	-6.53	-1.47
2 x Melipilla	-2.98	3.30	3.30	9.38	-0.449	0.543	-3.50	-2.35
JMA	-4.32	4.89	4.89	14.04	-0.573	0.604	-1.51	-3.39
Media			<b>6.19</b>	<b>11.59</b>	<b>-0.591</b>	<b>0.536</b>	<b>-3.44</b>	<b>-2.15</b>
Media + Desv.			9.07	13.97				

Al ver los signos del coeficiente de correlación de las tablas 8.4 y 8.5 indican que el FCR (Centro de Resistencia Friccional) se ubica en el tercer cuadrante que refleja la tendencia de la losa de aislación de rotar con respecto a un punto ubicado en dicho cuadrante.

Si se compara la figura 8.8, desplazamientos en los bordes del aislamiento en modelo sin superestructura con los desplazamientos de la figura 8.13 que corresponde a los desplazamientos de los bordes del aislamiento pero en el modelo con superestructura se aprecia que estos últimos son mayores en un 30%, esta disminución probablemente se debe a la disminución del coeficiente de fricción ocasionado por el aumento en 277% de la presión de contacto estática en los aisladores, debido al mayor peso del modelo ya que ahora está con la superestructura. Constantinou *et al* (1990). En Almazán (2001) se aprecia que el coeficiente de fricción disminuye aproximadamente en un 40% en el modelo con superestructura con relación al modelo sin superestructura.

## 8.9 RESULTADOS CON MODELO ANALÍTICO Y EXPERIMENTAL

Para la estructura de tres pisos, con doce columnas se consideró un modelo de tres grados de libertad por piso y 12 grados de libertad por piso colocados en la intersección de las vigas con las columnas. Los tres grados de libertad por piso son las dos componentes de desplazamiento horizontal y la componente de rotación de la planta con respecto a un eje perpendicular a la losa. Las masas se concentraron en los nudos, de cada piso.

La matriz de rigidez de la superestructura del modelo analítico fue calibrado de tal manera que sus frecuencias coincidan con las frecuencias halladas en el modelo de base fija. Se trabajó con una matriz de amortiguamiento no clásica que se obtiene de la siguiente manera.

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_{12} \\ C_{12}^t & C_2 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Donde  $C$  es la matriz de amortiguamiento del sistema, para los grados de libertad de la losa de aislamiento y de la superestructura, en ese orden;  $C_2$  es la matriz de amortiguamiento de la superestructura con base empotrada.

$$\begin{aligned} C_{12} &= -\Psi^t C_2 \\ C_1 &= \Psi^t C_2 \Psi \\ \Psi &= -K_{22}^{-1} K_{12}^t \end{aligned} \quad (8.10)$$

Donde  $\Psi$  es la matriz de influencia y se halla a partir de la matriz de rigidez completa del sistema. Para ello se debe tener en cuenta que:

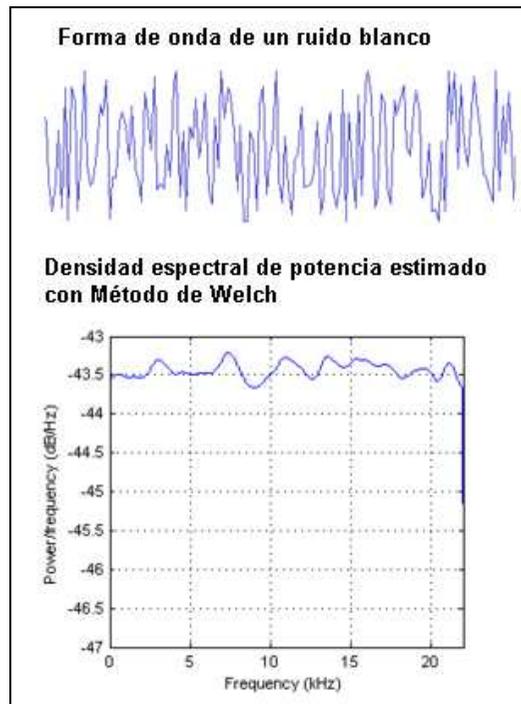
$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_{12} \\ K_{12}^t & K_2 \end{bmatrix}$$

En la sub matriz  $C_2$  se utilizó los factores de amortiguamiento hallados en la estructura con base empotrada. Por otra parte los aisladores FPS fueron modelados con los elementos

*gap* incluyendo las variaciones dinámicas del coeficiente de fricción y los corrimientos estimados del FCR.

### 8.9.1 Ruido Blanco

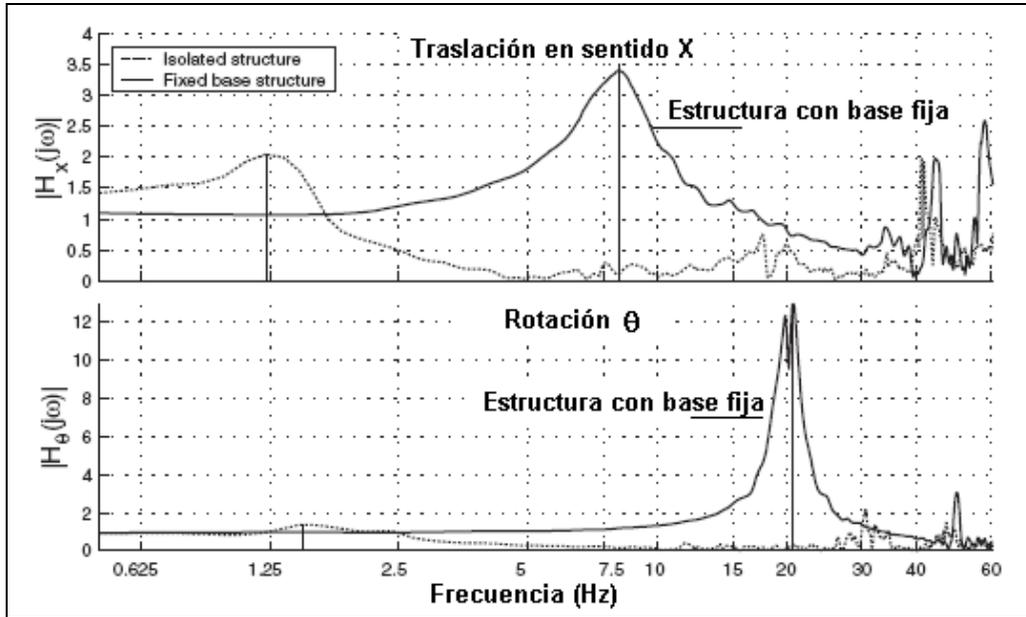
Para determinar las propiedades dinámicas de la estructura con base fija se aplicaron movimientos tipo ruido blanco, razón por la cual se explica brevemente las características de este movimiento tomado de la enciclopedia Wikipedia. Ruido Blanco es una señal aleatoria (proceso estocástico) que se caracteriza por que sus valores de señal en dos instantes de tiempo diferentes no guardan correlación estadística, como consecuencia de ello su densidad espectral de potencias es una constante, su gráfica es plana. Esto significa que la señal contiene todas las frecuencias y todas ellas tienen la misma potencia. En la figura 8.14 se muestra una señal tipo ruido blanco y su correspondiente densidad espectral de potencia hallada con el Método de Welch.



**Figura 8.14** Onda ruido blanco y densidad espectral de potencia.

### 8.9.2 Propiedades de base fija y aislada

En la figura 8.14 se indican los resultados de los ensayos realizados en la superestructura con base fija y en la superestructura con aisladores de base. Se presentan las funciones de transferencia empírica (EFT) entre aceleraciones totales para las direcciones  $X$  y  $\theta$ , halladas a partir de la respuesta a ruido blanco aplicado en forma unidimensional en cada dirección.



**Figura 8.14** Funciones de transferencia empíricas, correspondientes al modelo simétrico Con base empotrada y con aislamiento.

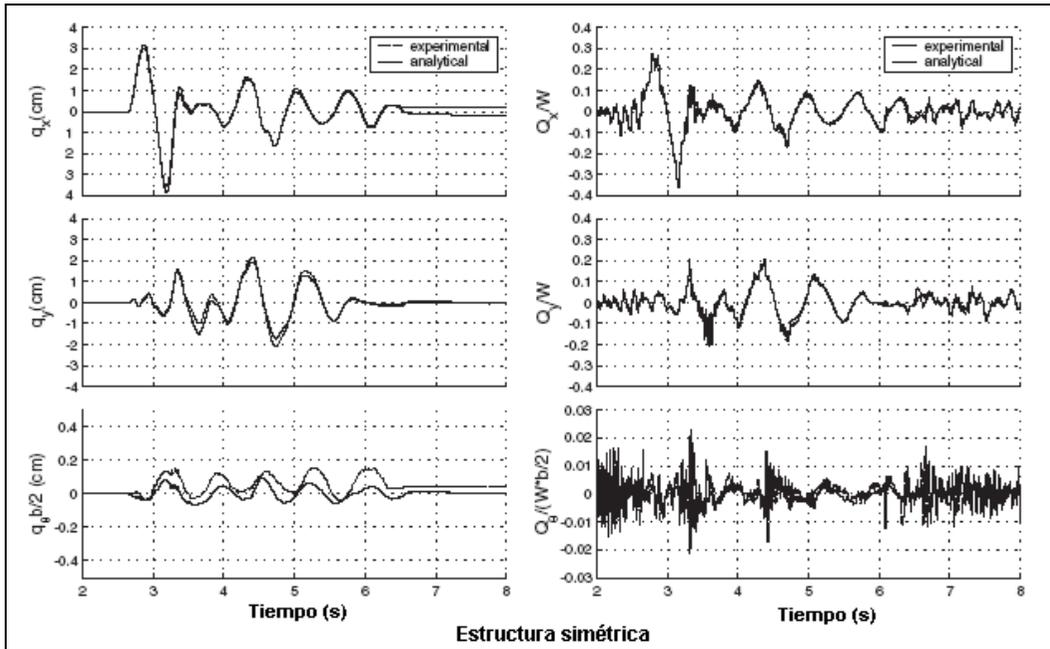
Para la estructura con base empotrada la frecuencia fundamental para traslación en sentido X es 8 Hz (0.125 s.) y 20 Hz (0.05 s.) en dirección  $\theta$ ; las razones de amortiguamiento son de un 20% y un 6% respectivamente. Se tiene un elevado valor de la relación de amortiguamiento en la dirección X y esto se debe a la disipación de energía por fricción que se produce en las 48 uniones apernadas entre vigas y columnas.

Con relación a los resultados hallados en la estructura con aisladores del modelo simétrico de tres pisos, debe indicarse que se han presentado los EFT del tercer piso obtenidas a partir de la respuesta a un movimiento combinado de traslación y rotación (WN/T&R/1cm/70 rad). La frecuencia fundamental para traslación en sentido X, del sistema de aislación coincide con el valor de 1.30 Hz (0.75 s.) que corresponde al radio de curvatura  $R = 14.3 \text{ cm}$  de los FPS. Se recuerda que  $T_b = 2\pi \sqrt{R/g}$ . Para la dirección torsional se tiene que la frecuencia vale 1.59 Hz, con lo que el período torsional  $T_{b\theta} = 1/1.59 = 0.629 \text{ s}$ , con lo que se halla que  $\Omega_b = T_b / T_{b\theta} = 0.75 / 0.629 = 1.19$ .

### 8.9.3 Comparación de modelo analítico con experimental a nivel de losa de aislación.

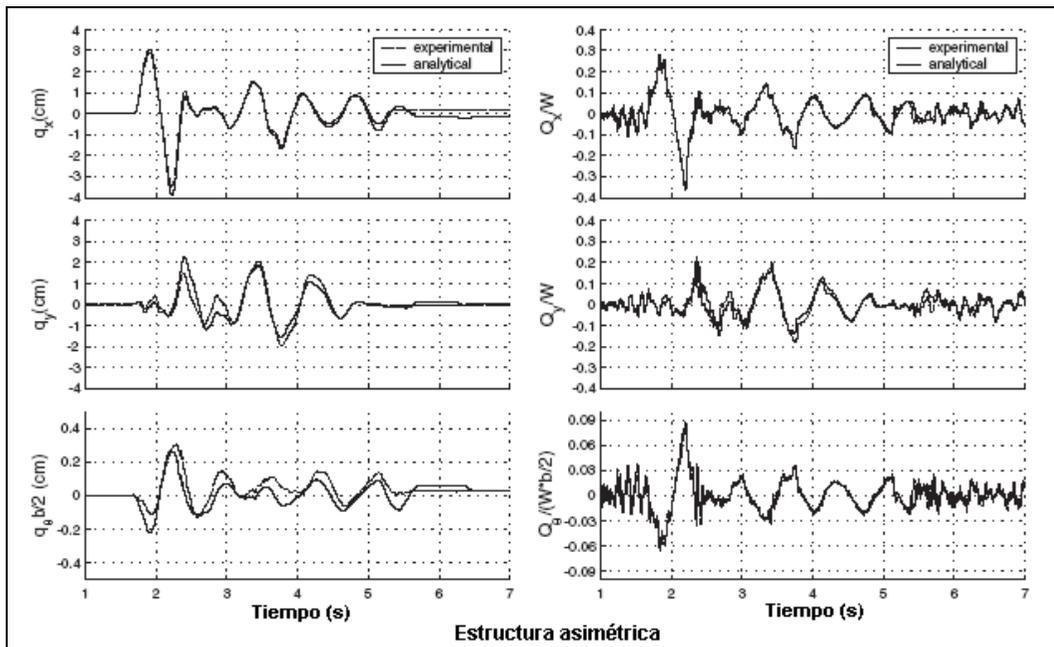
En la figura 8.15 se compara la respuesta obtenida en el modelo **simétrico**, a nivel del C.M., de la losa de aislación, entre el modelo analítico y los resultados experimentales, ante las tres componentes del sismo de Newhall. Se aprecia que a nivel de desplazamientos  $q_x, q_y$  el modelo analítico predice muy bien la respuesta, como se aprecia en los gráficos superiores de la izquierda, existe diferencia a nivel del giro de torsión  $q_\theta$  pero está es mínima, la forma general se mantiene. Se destaca que en el modelo analítico se incorporó la excentricidad friccional.

En la columna derecha de la figura 8.15 se comparan las fuerzas pero normalizadas, de tal forma que son adimensionales. Se aprecia una muy buena aproximación del modelo analítico tanto en fuerzas como en momentos, medidos en el CM.



**Figura 8.15** Comparación de respuesta analítica y experimental en CM., del sistema de aislamiento. Ante el sismo de Newhall aplicado en estructura **simétrica**.

Con formato igual a la figura 8.15, en la figura 8.16 se comparan, en la columna de la izquierda los desplazamientos y giros y en la columna de la derecha las fuerzas y momentos normalizados de la estructura **asimétrica**, ante las tres componentes del sismo de Newhall, con resultados similares al obtenido en la estructura simétrica.



**Figura 8.16** Comparación de respuesta analítica y experimental en CM., del sistema de aislamiento. Ante el sismo de Newhall aplicado en estructura **asimétrica**.

En las tablas 8.6 y 8.7 se muestran las amplificaciones torsionales encontradas con el modelo analítico, obtenidas de dos maneras, considerando la excentricidad friccional y sin considerar la excentricidad friccional. La tabla 8.6 corresponde a los valores hallados en el modelo simétrico y la tabla 8.7 a los encontrados en el modelo asimétrico. Para los dos casos se indican los valores de la amplificación torsional en la losa de aislación.

**Tabla 8.6** Resultados analíticos de amplificación torsional (%) en modelo **simétrico** de tres pisos. En la losa de aislación con y sin excentricidad friccional.

Registro	$\hat{e}_x^{(\mu)} = \hat{e}_y^{(\mu)} = -1.5 \text{ cm}$		$\hat{e}_x^{(\mu)} = \hat{e}_y^{(\mu)} = 0$	
	$\Gamma_{b/2}^{(b)}$	$\Xi_{b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{b/2}^{(b)}$	$\Xi_{b/2}^{(b)}$
Newhall	2.06	2.43	0.14	1.76
Artificial	2.67	4.38	0.03	2.53
2 x El Centro	6.57	7.47	3.64	4.88
2 x Melipilla	1.63	4.46	0.74	2.19
JMA	4.41	5.05	0.62	1.49
Media	<b>3.47</b>	<b>4.76</b>	<b>1.03</b>	<b>2.57</b>
Media + desv. Estándar	5.50	6.56	2.52	3.92

Las excentricidades friccionales que han sido incorporadas al modelo analítico son las que se obtuvieron en el estudio experimental y que ya fueron indicadas, las dos primeras columnas de resultados de las tablas 8.6 y 8.7 corresponden a dichos casos. Los resultados de las tablas 8.6 y 8.7 están en porcentaje.

**Tabla 8.7** Resultados analíticos de amplificación torsional (%) en modelo **asimétrico** de tres pisos. En la losa de aislación con y sin excentricidad friccional.

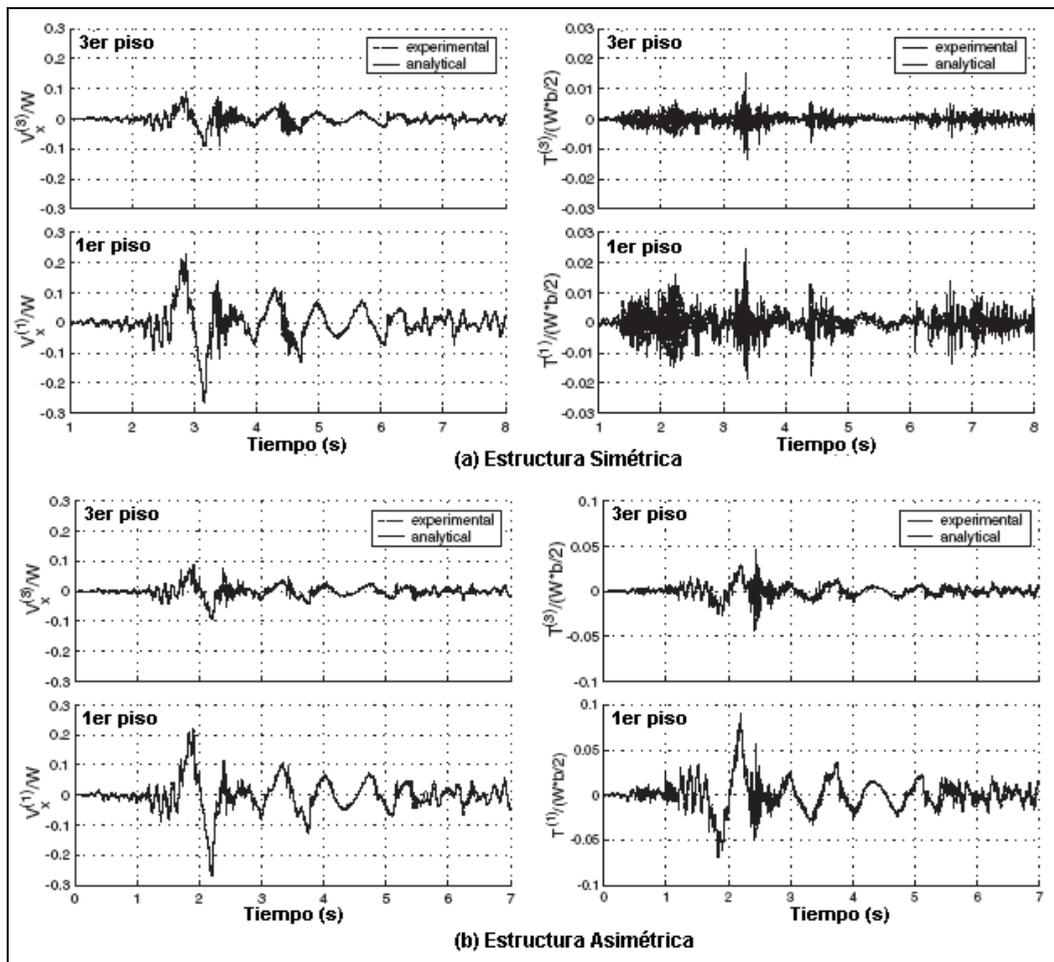
Registro	$\hat{e}_x^{(\mu)} = -3.5 \text{ cm}$ $\bar{e}_y^{(\mu)} - \hat{e}_y^{(\mu)} = -3.5 \text{ cm}$		$\hat{e}_x^{(\mu)} = 0$ $\bar{e}_y^{(\mu)} - \hat{e}_y^{(\mu)} = 0$	
	$\Gamma_{b/2}^{(b)}$	$\Xi_{b/2}^{(b)}$	$\Gamma_{b/2}^{(b)}$	$\Xi_{b/2}^{(b)}$
Newhall	6.73	6.77	2.14	3.76
Artificial	6.79	10.00	0.35	2.18
2 x El Centro	8.46	11.49	1.39	2.28
2 x Melipilla	4.30	12.15	1.49	3.26
JMA	8.55	10.77	0.35	3.66
Media	<b>6.97</b>	<b>10.24</b>	<b>1.14</b>	<b>3.03</b>
Media + desv. Estándar	8.70	12.33	1.92	3.78

Del análisis de las tablas 8.6 y 8.7 se desprende lo siguiente:

- Existe diferencia en los factores de amplificación torsional si se considera o no la excentricidad friccional. Para la estructura simétrica estas diferencias son mínimas pero para la estructura asimétrica ya son un poco mayores.
- Los resultados medios de las tablas 8.6 y 8.7 (modelo analítico) son parecidos a los resultados medios de las tablas 8.4 y 8.5 (modelo experimental).

## 8.10 RESULTADOS EN SUPERESTRUCTURA

En la figura 8.17 se comparan los resultados obtenidos en forma analítica con los experimentales, en la estructura simétrica y asimétrica ante la acción de las tres componentes del sismo de Newhall. En la columna de la izquierda se comparan los resultantes del cortante en dirección X, normalizados para el peso total de la estructura, se presentan las respuestas en el CM. del tercer piso y tercer piso, se aprecia que el modelo analítico predice bastante bien la respuesta.



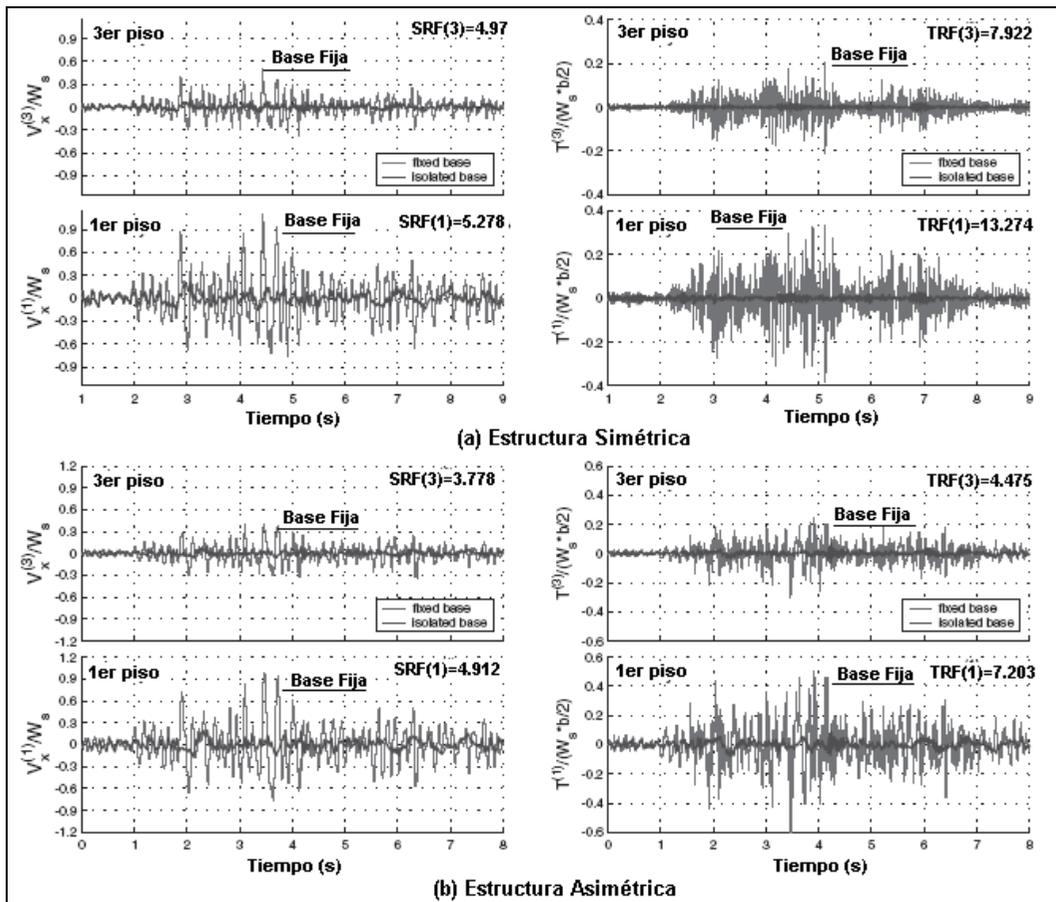
**Figura 8.17** Comparación de Fuerzas y Momentos normalizados entre modelo analítico y Experimental de estructura simétrica y asimétrica. Sismo de Newhall.

El cortante de piso es función de los desplazamientos laterales y estos a su vez son función de los primeros modos de vibración, los mismos que están asociados a bajas frecuencias y períodos altos. Por otra parte, los momentos de torsión están en función de los giros de torsión y están relacionados con altas frecuencias y bajos períodos de vibración. Se indica todo esto para entender porque los momentos de torsión obtenidos con el modelo analítico tiene pequeña diferencia con el modelo experimental como se aprecia a la derecha de la figura 8.17.

Se puede decir que los modos de vibración asociados a bajas frecuencias y períodos altos son *modos aislados* controlados especialmente por el radio de curvatura de los FPS y los modos de vibración asociados a altas frecuencias y períodos bajos son *modos no aislados* que dependen de las propiedades dinámicas de la superestructura sobre la cual existe mayor incertidumbre.

## 8.11 RESULTADOS DE BASE FIJA Y AISLADA

La bondad de los aisladores de base FPS con respecto a las estructuras con base empotrada, en el sentido de que se minimizan los desplazamientos laterales en la superestructura ha sido reconocida por numerosos investigadores. Zayas *et al* (1987, 1989), Mokha *et al* (1991), Al- Hussaini *et al* (1994) y a lo largo de este libro se lo ha visto con el desarrollo de ejemplos. Lo que se desea ilustrar en el presenta apartado es ver como los aisladores de base FPS minimizan los problemas de torsión.



**Figura 8.18** Comparación de respuestas experimentales de base fija y aislada de estructura simétrica y asimétrica ante 2 X Melipilla.

Para cuantificar la reducción de la respuesta por corte y torsión se definen los siguientes indicadores:

$$SRF^{(j)} = \frac{V_{x0}^{(j)} \Big|_{base\ fija}}{V_{x0}^{(j)} \Big|_{base\ aislada}}$$

$$TRF^{(j)} = \frac{T_{x0}^{(j)} \Big|_{base\ fija}}{T_{x0}^{(j)} \Big|_{base\ aislada}} \quad (8.11)$$

Donde  $V_{x0}^{(j)}$  y  $T_{x0}^{(j)}$  son los valores máximos en valor absoluto en corte y torsión del piso ( $j$ ), respectivamente. En la figura 8.18 se muestra a la izquierda, la respuesta en el tiempo de los cortantes normalizados y a la derecha de los momentos de torsión también normalizados, los resultados de la parte superior corresponden a la estructura simétrica y los de la parte inferior a la estructura asimétrica. Son respuestas ante las tres componentes del sismo de 2 X Melipilla.

Como era de esperarse, las estructuras con aisladores de base FPS tienen menores respuestas en relación a la estructura con base fija. En la parte superior derecha de cada una de estas gráficas se han colocado los valores de los indicadores hallados con la ecuación (8.11) y se aprecia que las mayores reducciones de la respuesta se dan en los momentos de torsión, con lo cual se demuestra que efectivamente los aisladores FPS reducen los problemas de torsión. En las tablas 8.8 y 8.9 se indican los factores de reducción de respuesta que se hallaron en cada piso y con todos los sismos de análisis. Almazán (2001).

**Tabla 8.8** Factores de reducción de respuesta por uso de aisladores FPS. Estructura **Simétrica**

Registro	Corte en dirección X p/piso			Torsión p /piso		
	Piso 1	Piso 2	Piso 3	Piso 1	Piso 2	Piso 3
Newhall	3.08	3.69	2.93	9.55	11.34	9.17
Artificial	3.22	2.48	2.51	3.95	3.60	4.41
2 X El Centro	3.13	3.19	3.26	6.46	5.96	5.72
2 X Melipilla	5.27	5.00	4.97	13.27	11.99	7.92
JMA	4.58	5.19	5.68	6.32	5.42	4.82
Promedio	3.86	3.91	3.87	7.91	7.66	6.41
	<b>3.88</b>			<b>7.33</b>		

**Tabla 8.9** Factores de reducción de respuesta por uso de aisladores FPS. Estructura **Asimétrica**

Registro	Corte en dirección X p/piso			Torsión p /piso		
	Piso 1	Piso 2	Piso 3	Piso 1	Piso 2	Piso 3
Newhall	3.02	3.64	4.02	3.76	2.72	2.63
Artificial	3.64	3.83	3.91	5.89	6.16	6.07
2 X El Centro	3.37	3.23	2.94	2.94	3.27	3.25
2 X Melipilla	4.92	4.10	3.78	7.20	5.41	4.47
JMA	4.44	5.05	5.26	5.62	6.10	6.41
Promedio	3.87	3.97	3.98	5.08	4.73	4.57
	<b>3.94</b>			<b>4.79</b>		

En la última fila de las tablas 8.8 y 8.9 se ha presentado el valor promedio de los tres pisos y para los cinco sismos de análisis. Estos valores son 3.88 y 3.94 para la reducción de la respuesta por corte en la estructura simétrica y asimétrica, respectivamente. Para la reducción de los momentos de torsión los valores promedios normalizados, son: 7.33 y 4.79. Con lo que

se demuestra una vez más que los FPS son muy apropiados para reducir los problemas de torsión en las simétricas (torsión accidental) y en las estructuras asimétricas.

Como los valores máximos de corte y torsión, no se producen simultáneamente, en el caso general, es necesario encontrar un indicador que acople estos valores, sin tomar en consideración las deformaciones, únicamente en base a la fuerza de corte y momento de torsión. Este indicador de amplificación torsional de respuesta, es:

$$\tilde{\Gamma}_{\pm b/2}^{(j)} = 100\% \left( \frac{\max \left( V_x^{(j)} \pm T^{(j)} \frac{b/2}{\Omega_s^2 \rho_j^2} \right)}{\max (V_x^{(j)})} - 1 \right) \quad (8.12)$$

Siendo  $\Omega_s$  la relación entre la frecuencias fundamentales desacopladas de torsión y traslación de la estructura de **base fija**;  $\rho_j$  es el radio de giro de la inercia torsional del j-ésimo piso. Las restantes variables ya fueron indicadas. Los resultados hallados con este indicador se muestran en las tablas 8.10 y 8.11 para la estructura simétrica y asimétrica, respectivamente.

**Tabla 8.10** Indicadores de amplificación torsional de entrepiso. Estructura **Simétrica**

Registro	Base fija			Base aislada		
	Piso 1	Piso 2	Piso 3	Piso 1	Piso 2	Piso 3
Newhall	10.50	15.43	15.56	0.79	1.51	10.57
Artificial	7.50	16.90	21.33	4.36	2.95	4.51
2 X El Centro	0.71	0.32	2.97	1.58	0.03	1.50
2 X Melipilla	18.33	21.52	23.64	0.90	0.16	12.25
JMA	9.47	10.05	9.88	0.23	0.51	4.77
Promedio	9.30	12.84	14.68	1.57	1.03	6.72
	<b>12.27</b>			<b>3.11</b>		

**Tabla 8.11** Indicadores de amplificación torsional de entrepiso. Estructura **Asimétrica**

Registro	Base fija			Base aislada		
	Piso 1	Piso 2	Piso 3	Piso 1	Piso 2	Piso 3
Newhall	31.76	31.86	31.33	22.29	24.72	26.97
Artificial	39.35	41.63	41.15	27.97	29.31	29.58
2 X El Centro	19.69	27.41	33.22	16.91	27.05	29.71
2 X Melipilla	40.16	45.97	46.02	25.80	27.37	29.97
JMA	19.83	15.24	15.36	22.88	24.90	26.33
Promedio	30.16	32.42	33.41	23.17	26.67	28.51
	<b>32.00</b>			<b>26.12</b>		

En la tabla 8.10 se presentan los factores de amplificación torsional para la estructura **simétrica**, las tres primeras columnas corresponden al caso de base fija y las tres últimas al caso de base aislada. Se aprecia que el valor medio de todos los pisos y con todos los sismos de análisis es 12.27 % para el caso de base empotrada y de 3.11 para el caso de base aislada, resultados que refuerzan lo que ya se ha indicado respecto a la eficiencia de los FPS para reducir los problemas de torsión. Es importante notar que en la estructura de base fija y aislada, en el tercer piso se tienen las mayores amplificaciones de torsión.

En la tabla 8.11 se muestran los resultados hallados en la estructura **asimétrica** se aprecia que no existe un piso dominante donde se produzcan las mayores amplificaciones torsionales, lo que refleja el predominio de la torsión natural por sobre la accidental. El valor promedio es 32.00 % para la estructura de base fija y 26.12 % para la estructura de base aislada. Se nota una reducción de la amplificación natural torsional en 1.23 veces.

## REFERENCIAS

1. Almazán J. L. (2001) *Torsión accidental y natural en estructuras aisladas con el sistema de péndulo friccional*, Tesis Doctoral Ph.D. Escuela de Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile, 288 p., Santiago.
2. Al-Hussaini T., Zayas V., and Constantinou M., (1994), *Seismic Isolation of Multi-Story Frame Structures Using Spherical Sliding Isolation System*. Report **NCEER-94-0007**, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo.
3. Constantinou M., Mokha A., and Reinhorn A., (1990), "Teflon Bearing in Base Isolation, Part II: Modeling", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **117**, 455-474.
4. De La Llera J.C. y Almazán J. L. ( 2003), "An experimental study of nominally symmetric and asymmetric structures isolated with the FPS", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **32**, 891-918.
5. De La Llera J.C., Vásquez J., Chopra A., and Almazán J., (2000), "A Macro element model for inelastic building analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **29**, 1725-1757.
6. De La Llera J., and Chopra A., (1995), "A simplified model for analysis and designs of asymmetric-plan buildings", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **24 (4)**, 573-594.
7. Mokha A., Constantinou M., Reinhorn A., and Zayas V., (1991), "Experimental study of friction pendulum isolation system", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **116 (4)**, 1201-1216.
8. Zayas V., Low S., Bozzo L., and Mahin S. (1989), *Feasibility and Performance Studies on Improving the Earthquake Resistance of New and Existing Buildings using the frictional pendulum system*", Report **UCB/EERC-89/09**, Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley.
9. Zayas V., Low S., and Mahin S. (1987), *The FPS Earthquake Resisting System*, Report **UCB/EERC-87/01**, Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley.

## CAPÍTULO 9

---

---

### DISEÑO DE EDIFICIOS AISLADOS EN SU BASE

#### 9.1 INTRODUCCIÓN

Como ha sido explicado en capítulos anteriores, la incorporación de dispositivos de aislamiento y disipación de energía en la base de los edificios busca aislar a la edificación del movimiento sísmico, evitando así su daño.

El colocar un sistema de aislamiento con muy baja rigidez lateral debajo de un edificio causa que los movimientos laterales inducidos por el sismo se concentren en el sistema de aislamiento. Esto evita el desplazamiento relativo entre base y tope del edificio y por lo tanto los esfuerzos que producen el daño en la estructura.

Adicionalmente, la instalación de dispositivos de baja rigidez alarga el periodo de vibración de la estructura (el periodo aislado puede ser de 2 segundos o más), lo que sumado al incremento de amortiguamiento causa una reducción drástica en las fuerzas generadas por el movimiento sísmico.

En edificios aislados, los dispositivos de aislamiento y disipación de energía son piezas clave del sistema resistente. Estos dispositivos deben ser provistos de una capacidad de desplazamiento muy alta (50-70 cm pueden ser necesarios en Japón o California). Además deben ser construidos con rigurosos controles de calidad y sometidos a pruebas para garantizar un desempeño adecuado.

Este capítulo se enfoca en el diseño de edificios con aislamiento en la base. Se presentan dos métodos, uno tradicional basado en fuerzas y otro basado en desplazamientos, acompañados de ejemplos de aplicación. La filosofía de diseño de edificios aislados se toma de las regulaciones de la Agencia Federal de Manejo de Emergencias de los Estados Unidos (FEMA, 2003) ya que a criterio de los autores este documento representa el estado del arte en el diseño de este tipo de estructuras.

La teoría propuesta cubre el diseño de edificios con aisladores elastoméricos con núcleo de plomo y péndulos friccionantes (LRB y FPS por sus siglas en inglés respectivamente). También se presenta el procedimiento de diseño de estos dispositivos de aislamiento. Los procedimientos para el diseño de LRB y FPS presentados en este capítulo son también usados en el próximo capítulo para el diseño de estos dispositivos en puentes.

## 9.2 FILOSOFIA DE DISEÑO

Idealmente, la mayor parte del desplazamiento lateral en una estructura aislada debería concentrarse en el sistema de aislamiento. La razón es que los dispositivos aisladores son especialmente diseñados para incursionar en el rango inelástico disipar grandes cantidades de energía sin dañarse o perder resistencia. En esta sección se revisan los objetivos y procedimientos con los que se diseñan los edificios aislados.

### 9.2.1 Objetivos de diseño

Aunque cada código establece sus propios objetivos de diseño, en general el desempeño especificado para edificios aislados es más exigente que el señalado para edificios convencionales. De acuerdo a las regulaciones FEMA 450 (FEMA, 2003) los edificios aislados deben:

1. Resistir movimientos sísmicos menores y moderados sin daño a los elementos estructurales, elementos no estructurales, o a los contenidos del edificio.
2. Resistir movimientos sísmicos mayores sin que el sistema de aislamiento colapse, sin daño significativo a los elementos estructurales y no estructurales, y sin mayor interrupción al funcionamiento del edificio.

En adición a esto los edificios aislados deberán resistir fuerzas de viento y gravitacionales sin la activación del sistema de aislamiento. Es decir, se debe evitar que bajo efectos del viento, el sistema de aislamiento se desplace lateralmente puesto que esto podría resultar muy incomodo para los ocupantes del edificio y además estos desplazamientos pudieran no ser recuperables luego de que el viento haya cesado.

Considerando que la mayoría de códigos de diseño establecen que los edificios convencionales pueden alcanzar el estado límite de seguridad de vida bajo movimientos sísmicos mayores, el objetivo de desempeño planteado para edificios aislados es sin duda más exigente.

Siendo la capacidad de desplazamiento la propiedad más importante de un sistema de aislamiento, FEMA 450 prevé que este parámetro sea verificado bajo la acción del Sismo Máximo Considerado (SMC), mientras que la resistencia del sistema de aislamiento y de la estructura debe satisfacer la demanda del sismo de diseño únicamente ( $2/3$  de la intensidad del SMC). En la mayoría de códigos de diseño sísmico, el sismo de diseño se define como sismo "raro", con un periodo de retorno de 475 años o una probabilidad de excedencia de 10% en 50 años.

Los objetivos de diseño planteados se resumen en la tabla 9.1. El valor de deriva presentado en la tabla es el propuesto por FEMA 450. Si se desea limitar aun más el daño en la superestructura (estructura sobre el sistema de aislamiento), el límite de deriva presentado puede reducirse y el diseño ejecutarse mediante el método de Diseño Directo Basado en Desplazamientos (DDBD), tal como se explica posteriormente. En la tabla 9.1 también se pone

en evidencia que la demanda sísmica de desplazamiento debe limitarse no solo a la capacidad de desplazamiento del sistema de aislamiento, si no a la capacidad de acomodar grandes desplazamientos en las instalaciones de servicio y en las juntas que se crean entre el edificio aislado y el suelo a su alrededor. No se debe perder de vista que una posible reducción de costos en la superestructura, debido a la reducción de las fuerzas de diseño, puede requerir grandes inversiones en materia de dispositivos con gran capacidad de desplazamiento y juntas extensibles para las instalaciones de servicio.

**Tabla 9.1** Objetivo de diseño sísmico para edificios aislados.

PARAMETRO	CRITERIO DE ACEPTACION	SISMO
Deriva de piso en el edificio	Menor o igual que 1.5 %	RARO
Desplazamiento del sistema de aislamiento	Menor o igual que la capacidad de desplazamiento del dispositivo. Menor o igual que la capacidad de desplazamiento de la junta entre el edificio aislado y suelo alrededor. Menor o igual que la capacidad de desplazamientos en las juntas de las instalaciones eléctricas, de agua, alcantarillado, gas, etc. que conectan al edificio	SMC

## 9.2.2 Revisión del los métodos de diseño

El diseño de una estructura aislada se puede abordar con dos enfoques distintos, uno basado en fuerzas y otro basado en desplazamientos. La principal diferencia es que el diseño basado en fuerzas parte del periodo deseado en la estructura aislada y produce los desplazamientos y fuerzas de diseño. Por el contrario, el diseño basado en desplazamientos parte de un desplazamiento meta para la estructura y produce las fuerzas de diseño. Ya que el daño en la estructura se controla con límites en derivas de piso o límites en el desplazamiento permisible en los dispositivos, el diseño basado en fuerzas requiere iteración para alcanzar un diseño óptimo. El Diseño Directo Basado en Desplazamientos (DDBD) no requiere iteración alguna y produce un diseño óptimo en el que la estructura alcanza el desempeño propuesto.

Para el diseño basado en fuerzas, FEMA 450 propone tres métodos de análisis:

1. Análisis estático equivalente
2. Análisis de respuesta espectral
3. Análisis de historia en el tiempo

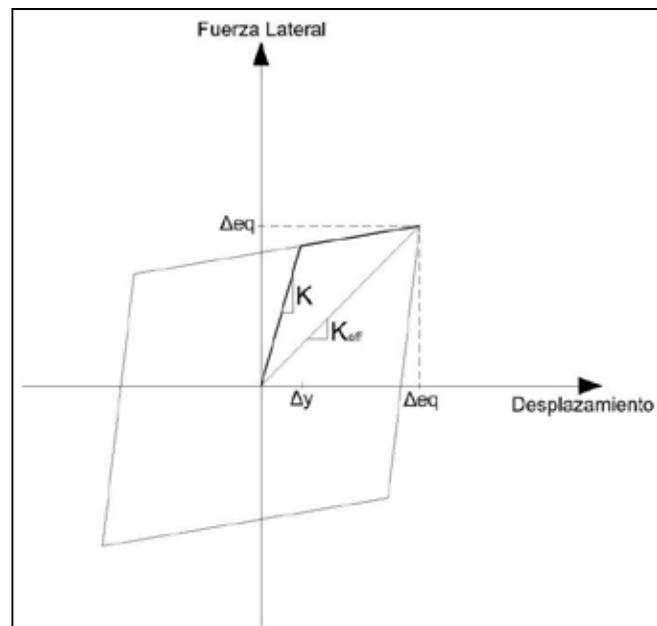
El análisis estático equivalente se utiliza con edificios en los que la superestructura es rígida y regular. Por el contrario, los otros métodos se recomiendan cuando la superestructura es flexible y/o irregular. De cualquier manera estos métodos adolecen de la mayoría de los problemas atribuidos a los métodos de diseño basado en fuerzas (Priestley et al, 2007) y que se resumen a continuación:

1. La respuesta máxima de la superestructura es calculada a partir de un modelo elástico que no reconoce que la rigidez es proporcional a la resistencia. Es decir, la inercia que se asigna a las secciones de vigas y columnas no considera la cantidad de refuerzo

que se va a incorporar en estas. Esto sin duda afecta a la magnitud de los desplazamientos y derivas que resultan del análisis.

2. El obtener las fuerzas de diseño requiere de un proceso con varios niveles de iteración. Esto se debe principalmente a que los desplazamientos y derivas son el resultado del análisis. Por lo tanto, si los valores encontrados no son satisfactorios, el análisis tiene que repetirse variando la estructura.
3. La utilización de un factor constante "R" de reducción de fuerza sísmica, asumiendo que todas las estructuras aisladas dentro de una misma categoría tendrán la misma demanda de ductilidad, sobre-resistencia y redundancia no es adecuado. Inclusive, la utilización del factor R ligado a un valor específico de deriva (como es el caso en FEMA 450) limita el uso del método y su aplicación para el diseño por desempeño.

El método de Diseño Directo Basado en Desplazamientos (DDBD) fue propuesto por Priestley (1993) como una herramienta para el diseño por desempeño de estructuras. Solventando varias de las deficiencias de los métodos basados en fuerzas. Desde entonces, muchas investigaciones han sido realizadas para implementar el método al diseño de varios tipos de estructuras tales como puentes (Calvi 1997, Kowalsky 2002, Dwairi 2006, Ortiz 2006, Suarez 2006, Suarez 2008), edificios (Priestley, 2000) y estructuras de mampostería. Priestley *et al* (2007). Actualmente, DDBD ha sido incorporado al "Blue Book" de la Sociedad de Ingenieros Estructurales de California como un método para el diseño por desempeño de edificios (SEAOC 2003). Detalles sobre el procedimiento se presentan mas adelante.



**Figura 9.1** Definición de sistema sustituto

Para el diseño de estructuras aisladas, tanto en el diseño basado en fuerzas como en el basado en desplazamientos, la estructura real, no-lineal, es substituida por una equivalente elástica. Este concepto fue introducido por Shibata y Sosen (1976). Con referencia a la figura 9.1, la estructura substituta se define con rigidez secante,  $K_{eff}$ , al punto de desplazamiento máximo,  $\Delta_{eq}$ . Como consecuencia de esto, la estructura substituta tiene un periodo de vibración efectivo,  $T_{eff}$ , más largo que el de la estructura real en su rango elástico. Finalmente, para

modelar la disipación de energía en el sistema de aislamiento y en la superestructura, amortiguamiento equivalente,  $\xi_{eq}$ , es asignado a la estructura substituta.

Mientras que el alargamiento del periodo conduce a un aumento de la demanda de desplazamiento, el incremento del amortiguamiento conduce a su reducción. FEMA 450 presenta la tabla 9.2 con los valores del coeficiente de reducción espectral por amortiguamiento,  $R_{\xi}$ , para varios niveles de  $\xi_{eq}$  en el sistema substituto. Aunque tradicionalmente DDBD ha utilizado el modelo de reducción espectral incluido en el Eurocode (1998), los valores presentados en la tabla 9.2 pueden ser utilizados sin ningún impedimento.

**Tabla 9.2** Coeficiente de reducción espectral  $R_{\xi}$  de FEMA 450.

<b>AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE</b>	
$\xi_{eq}(\%)$	<b>FACTOR DE REDUCCIÓN ESPECTRAL <math>R_{\xi}</math></b>
$\leq 2$	1.25
5	1.00
10	0.83
20	0.66
30	0.59
40	0.52
$\geq 50$	0.50

### 9.3 METODO DE LA FUERZA LATERAL EQUIVALENTE

Este procedimiento, en muchos aspectos similar al utilizado para edificios convencionales, produce la resistencia y desplazamiento de diseño para el sistema de aislamiento y un vector de fuerzas sísmicas equivalentes para diseño de la superestructura. FEMA (2003) restringe la aplicación de este método a estructuras que cumplen con las siguientes condiciones:

1. La estructura se implanta en un sitio con clasificación A,B,C o D y la aceleración espectral para periodo 1 s es menor a 0.6g
2. La altura del edificio sobre el sistema de aislamiento (es decir la superestructura) es menor que 20 m
3. El periodo efectivo del sistema de aislamiento bajo el SMC es menor o igual que 3s
4. El periodo efectivo del sistema de aislamiento bajo el sismo de diseño es mayor que tres veces el periodo de la superestructura si estuviera empotrada en su base
5. La superestructura es regular
6. El sistema de aislamiento cumple con las siguientes condiciones:

- a. Su rigidez secante al desplazamiento de diseño es mayor que un tercio de la rigidez secante al 20% del desplazamiento de diseño. Esto se hace para limitar el desplazamiento en los dispositivos.
- b. La fuerza de restauración es tal que la fuerza al desplazamiento de diseño es al menos 2.5% del peso que soportan los dispositivos mayor que la misma fuerza a 50% del desplazamiento de diseño. Con esto se logra que los dispositivos tengan una buena capacidad de auto-centrado después del sismo.
- c. La capacidad de desplazamiento no es menor que la demanda de desplazamiento por el SMC. Esto se lo hace para prevenir el colapso de la estructura aun bajo el SMC.

### 9.3.1 Aplicación

Este método se aplica con el siguiente procedimiento:

**PASO 1: Selección del periodo de vibración y nivel de amortiguamiento para el sistema de aislamiento.** Sabemos que la reducción de las fuerzas de diseño sísmico se logra alargando el periodo e incrementando el amortiguamiento de la estructura.

En este método el diseñador tiene que seleccionar, con base en su experiencia, el periodo efectivo,  $T_{eff}$ , de vibración que le quiere dar al edificio. Entre los criterios de selección se pueden anotar los siguientes:

1. El periodo escogido deberá ser mayor que el periodo del edificio sin aislamiento.
2. Un buen comienzo puede ser el escoger  $T_{eff}$  igual a 2 s. Con un periodo de esta magnitud se logrará una reducción sustancial de las fuerzas de diseño.
3. Hay que tomar en cuenta que aunque alargar el periodo reduce las fuerzas, también incrementa la demanda de desplazamiento. Un periodo demasiado largo podría generar desplazamientos que no pueden ser fácilmente acomodados en el sistema de aislamiento. Ya que el cálculo del desplazamiento de diseño es posterior, es posible que se necesiten varias iteraciones, variando el periodo, hasta lograr un diseño apropiado.

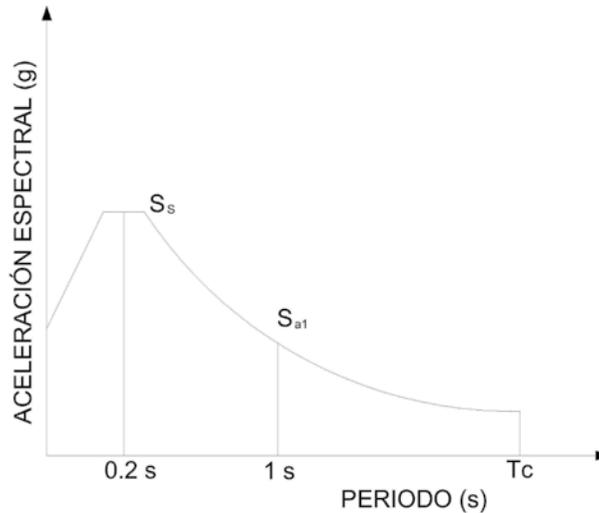
En adición a la selección del  $T_{eff}$  el diseñador también tiene que seleccionar un valor meta para el amortiguamiento equivalente,  $\xi_{eq}$  del sistema de aislamiento. Algunos criterios para la selección de  $\xi_{eq}$  son:

1. Mientras mayor sea  $\xi_{eq}$  menor será la demanda de desplazamiento sísmica, por lo tanto conviene seleccionar el valor máximo posible. Dispositivos como los LRBs y los FPS pueden alcanzar niveles de  $\xi_{eq}$  superiores a 30%, sin embargo FEMA 450 y otros códigos admiten amortiguamientos hasta de 30% en el diseño.
2. Además de tener alta capacidad de disipación de energía (es decir amortiguamiento), es necesario que los dispositivos de aislamiento tengan la capacidad de restaurar su posición inicial luego del sismo. Desafortunadamente, dispositivos con alto  $\xi_{eq}$  no tienen capacidad de auto-restauración ya que su rigidez post-fluencia es baja. Nuevamente, ya que la capacidad de auto-restauración se comprueba más adelante en el diseño, el valor escogido de amortiguamiento podría tener que ser revisado mediante un proceso iterativo.

**PASO 2: Determinación del desplazamiento de diseño.** El desplazamiento de diseño se obtiene con la ecuación (9.1) en función de la aceleración espectral a un segundo,  $S_{a1}$ , reducida por el factor  $R_{\xi}$  y el periodo,  $T_{eff}$  del sistema equivalente. Esta ecuación se deriva

del espectro de diseño mostrado en la figura 9.2, el cual representa la amenaza sísmica en el sitio de emplazamiento de la estructura. El factor  $R_{\xi}$  se obtiene de la Tabla 9.2.

$$\Delta_{eq} = \left( \frac{g}{4\pi^2} \right) S_{a1} R_{\xi} T_{eff} \quad (9.1)$$



**Figura 9.2** Espectro de aceleración.

**PASO 3: Rigidez efectiva y fuerza de diseño del sistema de aislamiento.** Con la masa de la superestructura,  $M_{eff}$  y  $T_{eff}$ , la rigidez efectiva del sistema equivalente,  $K_{eff}$  se calcula con la ecuación (9.2). Luego la fuerza lateral de diseño,  $V_{eq}$ , para el sistema de aislamiento se obtiene con la ecuación (9.3). La fuerza de diseño de cada dispositivo de aislamiento se obtiene dividiendo  $V_{eq}$  para el número de dispositivos que se emplean en el sistema de aislamiento.

$$K_{eff} = \frac{4\pi^2 M_{eff}}{T_{eff}^2} \quad (9.2)$$

$$V_{eq} = \Delta_{eq} K_{eff} \quad (9.3)$$

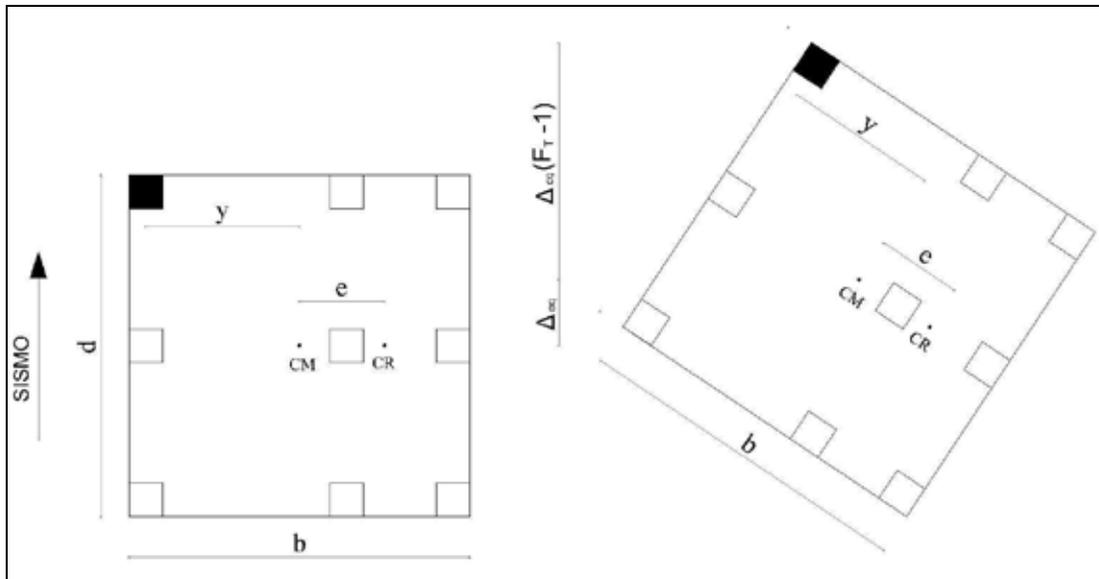
**PASO 4: Demanda máxima de desplazamiento en el sistema de aislamiento.** A los dispositivos del sistema de aislamiento deben proveérseles de una capacidad de desplazamiento mayor o igual a la demanda de desplazamiento del SMC, incluyendo los efectos de la torsión inherente o accidental del edificio.

La excentricidad del centro de masa con respecto al centro de rigidez del sistema de aislamiento provoca torsión en planta. De ahí que el desplazamiento de diseño,  $\Delta_{eq}$ , calculado con la ecuación (9.1) para la aceleración espectral a 1 segundo del SMC (  $3/2$  de la aceleración para el sismo raro) debe multiplicarse por el factor de amplificación por torsión,  $F_T$ , presentado en la ecuación (9.4) para obtener la máxima demanda de desplazamiento en cada dispositivo.

El mayor valor encontrado puede usarse como valor de diseño, ya que es conveniente utilizar el mismo tipo de dispositivo en todo el sistema de aislamiento.

$$F_T = 1 + y \left( \frac{12e}{b^2 + d^2} \right) \quad (9.4)$$

En la ecuación (9.4),  $y$  es la distancia perpendicular a la dirección de diseño entre el dispositivo y el centro de rigidez, CR,  $e$  es la excentricidad entre el centro de masas, CM, y el centro de rigidez, CR, del sistema de aislamiento. A la excentricidad se aumenta un 5% de la dimensión en planta perpendicular a la dirección del diseño como excentricidad accidental,  $b$  y  $d$  son las dimensiones del edificio en planta, tal como se muestra en la figura 9.3



**Figura 9.3** Efectos de la Torsión en Planta en el Desplazamiento de los Dispositivos de Aislamiento

**PASO 5: Diseño de los dispositivos del sistema de aislamiento.** Para el diseño de los dispositivos resta calcular: (i) El nivel de resistencia mínimo, (ii) La carga que soportan los dispositivos.

El nivel de resistencia mínimo para la activación del sistema de aislamiento puede estar dado por la fuerza del viento que se obtiene directamente en función del área expuesta en la superestructura. El sistema de aislamiento debe resistir la fuerza lateral generada por viento sin activarse.

También se debe estimar la carga gravitacional máxima que soportan los dispositivos del aislamiento.

El diseño de los dispositivos de aislamiento se detalla en los apartados 9.6 y 9.7 para LRBs y FPSs respectivamente.

**PASO 6: Fuerzas de diseño para la superestructura.** Una vez que los dispositivos del sistema de aislamiento se han diseñado, se conoce su resistencia real. Este valor sobreescribe el valor  $V_{eq}$  de diseño y sirve de base para el diseño de la superestructura.

Los elementos de la superestructura se diseñan y se construyen para soportar una mínima carga lateral,  $V_{eq,s}$ , cumpliendo con todos los requerimientos como si se tratara de una estructura no-aislada.  $V_{eq,s}$  se determina con la ecuación 9.5, donde  $R$  es un factor de reducción de resistencia que depende del tipo de estructura. De acuerdo a las disposiciones de FEMA 450, las fuerzas de diseño en pórticos de hormigón armado, pórticos de acero, sistemas duales con muros de corte de hormigón armado y pórticos de hormigón armado o acero y sistemas con muros de corte de hormigón armado se calculan con  $R$  igual a 2. Además, se estipula que en ningún caso  $V_{eq,s}$  será menor que:

1. La fuerza lateral requerida para una estructura convencional del mismo tipo y masa pero con periodo  $T_{eff}$
2. La fuerza lateral requerida para resistir la carga factorada de viento
3. La fuerza lateral para activar completamente el sistema de aislamiento multiplicada por 1.5

La fuerza lateral  $V_{eq,s}$  se distribuye para cada piso de la superestructura de acuerdo a la ecuación 9.6, donde  $w_i$  es el peso del piso  $i$ ,  $h_x$  es la altura del piso  $i$ . Las fuerzas de diseño para cada elemento de la superestructura se obtienen a partir del análisis elástico de un modelo de la estructura bajo la acción del vector de cargas equivalentes  $[F_{eq,s}]$

$$V_{eq,s} = \frac{V_{eq}}{R} \quad (9.5)$$

$$F_{eq,s,i} = V_{eq,s} \frac{w_i h_i}{\sum w_i h_i} \quad (9.6)$$

**PASO 7: Diseño y detallamiento de los elementos de la superestructura.** El vector de fuerzas sísmicas equivalentes obtenido en el paso 6 es aplicado a un modelo elástico de la superestructura para obtener las fuerzas de diseño en las vigas, columnas y otros elementos del sistema sismo-resistente. No es necesario modelar el sistema de aislamiento. La estructura puede considerarse como empotrada en su base. En el modelo matemático los elementos se modelan con rigidez correspondiente a secciones agrietadas.

El procedimiento aplicado aquí es similar al que se realiza con edificios convencionales y adolece de las deficiencias mencionadas en la sección 9.2. De cualquier manera resulta indispensable aplicar los principios del diseño por capacidad (Paulay y Priestley, 1992) para garantizar la formación de las rotulas plásticas en sitios preseleccionados y evitar la formación de mecanismos indeseables.

**PASO 8: Chequeo de derivas.** Los desplazamientos elásticos obtenidos en el paso anterior, se multiplican por el factor de reducción  $R$  utilizado para obtener derivas inelásticas. La deriva de piso no debe superar 1.5%. Si el límite en las derivas es superado, el análisis deber repetirse desde el paso 7 aumentando el tamaño de las secciones.

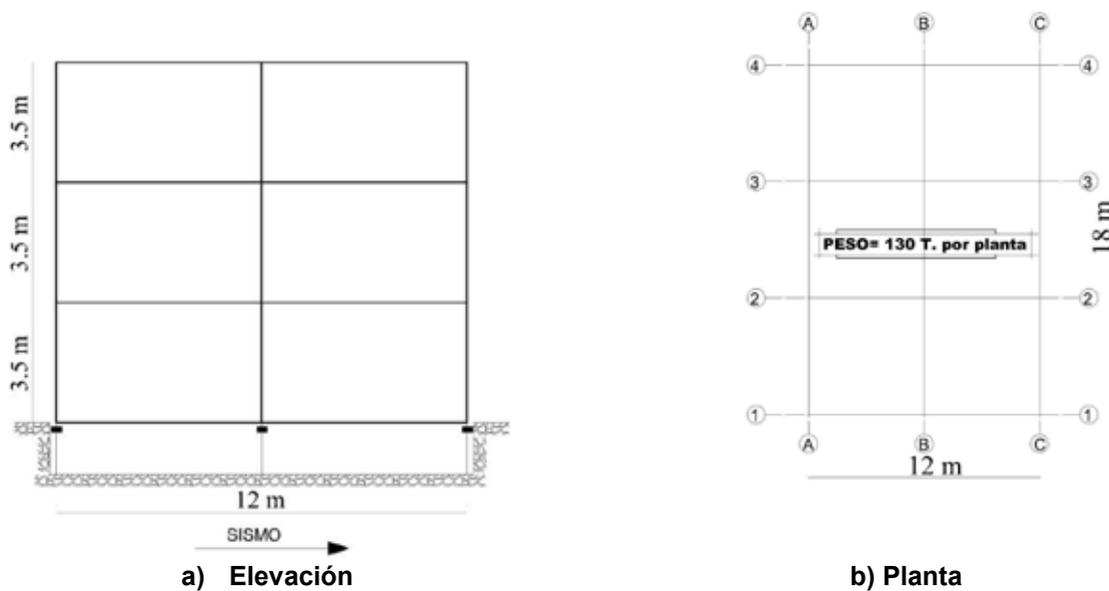


Figura 9.4 Esquema de Ejemplo 1

## • EJEMPLO 1

Determinación de los desplazamientos y fuerzas de diseño para un edificio aislado de 3 pisos por el método de la fuerza lateral equivalente. El edificio que se muestra en la figura 9.4 se construirá en una zona de alta sismicidad. Para el sismo raro,  $S_{a1} = 0.6 \text{ g}$  y para el SMC  $S_{a1} = 0.95 \text{ g}$ . Debido a la alta sismicidad y a la importancia del edificio se ha decidido diseñarlo y construirlo con un sistema de aislamiento en la base.

## • SOLUCIÓN

Ya que el edificio es totalmente regular se aplicara el método de la fuerza lateral equivalente para determinar: a) La fuerza de diseño en el sistema de aislamiento, b) la fuerza de diseño en la superestructura, c) La demanda máxima de desplazamiento para los dispositivos de aislamiento, d) La carga gravitacional y de viento para el diseño de los dispositivos.

**PASO 1: Selección del periodo efectivo y Amortiguamiento Equivalente.** Como primer paso se selecciona el periodo efectivo,  $T_{eff} = 2 \text{ s}$  y un amortiguamiento meta  $\xi_{eq} = 30\%$  para el sistema de aislamiento en el edificio.

**PASO 2: Determinación del desplazamiento de diseño.** Para el sismo de diseño, con  $S_{a1} = 0.6\text{g}$  se determina el desplazamiento de diseño utilizando la ecuación 9.1 con un factor de reducción espectral  $R_{\xi} = 0.59$  tomado de la tabla 9.2.

$$\Delta_{eq} = \left( \frac{g}{4\pi^2} \right) (S_{a1} R_{\xi} T_{eff}^2)$$

$$\Delta_{eq} = \left( \frac{9.81}{4\pi^2} \right) (0.6 \times 0.59 \times 2)$$

$$\Delta_{eq} = 0.176 \text{ m}$$

La máxima demanda de desplazamiento bajo el SMC es:

$$\Delta_{SMC} = \left( \frac{0.95}{0.6} \right) (0.18) = 0.29 \text{ m}$$

**PASO 3: Rigidez efectiva y Fuerza de diseño de aislamiento.** Para un peso de 130 T por planta, la masa efectiva de la estructura es  $M_{eff} = 130 \times 3 / g = 39.76 \text{ Ts}^2/\text{m}$ . La rigidez efectiva  $K_{eff}$  obtenida con la ecuación 9.2 es:

$$K_{eff} = \frac{4\pi^2 \times 39.76}{2^2}$$

$$K_{eff} = 392.42 \text{ T/m}$$

y la resistencia lateral requerida por la ecuación 9.3 es:

$$V_{eq} = 0.176 \times 392.42$$

$$V_{eq} = 70.64 \text{ T}$$

**PASO 4: Demanda máxima de desplazamiento en el sistema de aislamiento.** El edificio es simétrico y regular por lo que una mínima torsión en planta proviene únicamente de la torsión accidental  $e = 5 \% \times 18 \text{ m} = 0.90 \text{ m}$ . Utilizado la ecuación 9.4 sobre el desplazamiento SMC se obtiene:

Dispositivo	Y	FT	$\Delta_{\max}(\text{m})$
A4-B4-C4	9	1.01	0.29
A3-B3-C3	3	1.00	0.29
A2-B2-C2	-3	1.00	0.29
A1-B1-C1	-9	1.01	0.29

Por lo tanto todos los dispositivos se construirán con una capacidad de desplazamiento igual a 0.29 m

**PASO 5: Diseño de los dispositivos del sistema de aislamiento.** Si se instala debajo de cada columna un dispositivo de aislamiento, con un número total de aisladores  $n = 12$ , la fuerza lateral con la que será diseñada cada dispositivo es:

$$V_{eq,disp} = \frac{V_{eq}}{n}$$

$$V_{eq,disp} = \frac{70.64}{12} = 5.89T$$

También se debe considerar el desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq} = 0.18m$  y la demanda máxima de desplazamiento  $\Delta_{SMC} = 0.29m$ . No se va a considerar cargas de viento. La carga gravitacional sobre el dispositivo más cargado es  $W = 65T$  considerando  $36 m^2$  como área de aportación por piso. El diseño de los dispositivos se cubre posteriormente en este capítulo.

**PASO 6: Fuerzas de diseño para la superestructura.** Asumiendo que se diseñaron los dispositivos y que luego se verificó que la resistencia máxima de estos es  $V_{eq}$ . El siguiente paso es determinar el cortante basal de en la superestructura,  $V_{eq,s}$  con  $R=2$

$$V_{eq,s} = \frac{V_{eq}}{R}$$

$$V_{eq,s} = \frac{70.64}{2} = 35.32T$$

De acuerdo a la ecuación (9.6),  $V_{eq,s}$  se distribuye de la siguiente manera en cada piso de la superestructura:

Piso	$W_i$ (T)	$h_i$ (m)	$W_i h_i$	$F_i$ (T)
1	130	3.5	455	5.89
2	130	7	910	11.77
3	130	10.5	1365	17.66
Suman:			2730	35.32

**PASO 7: Diseño y detallamiento de los elementos de la superestructura.** No se cubre en este ejemplo porque es similar al diseño de un edificio convencional.

**PASO 8: Chequeo de derivas.** No se incluye en este ejemplo el chequeo de derivas que se realiza de igual forma que para un edificio convencional.

## 9.4 ANALISIS DE RESPUESTA ESPECTRAL

En este procedimiento, la respuesta máxima del primer modo de vibración es reducida en función del amortiguamiento del sistema de aislamiento y luego combinada con la respuesta de la estructura en sus otros modos de vibración considerados elásticos.

FEMA 450 restringe la aplicación de este método a estructuras que cumplen con los siguientes requisitos:

1. No estar emplazadas en un sitio clasificado como E
2. El sistema de aislamiento cumple con los mismos requisitos enunciados en la sección 9.3 para estructuras que se diseña con el método de fuerzas equivalentes.

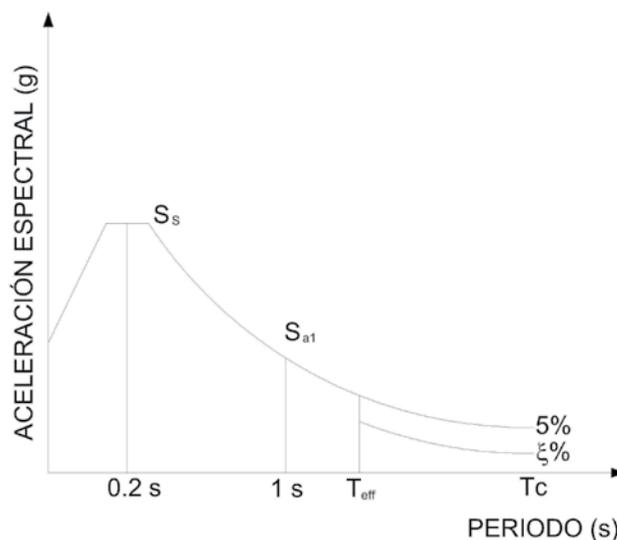
A diferencia del método de la fuerza lateral equivalente, este método considera la flexibilidad de la superestructura y la participación de sus modos de vibración en la respuesta global de la estructura. El diseño de una estructura mediante este método se realiza con el siguiente procedimiento:

**PASO 1: Amortiguamiento, periodo efectivo y rigidez efectiva del sistema de aislamiento.** Los pasos 1,2 y 3 del procedimiento de la fuerza lateral equivalente (sección 9.3) se realizan para obtener un valor estimado del desplazamiento de diseño y de la rigidez efectiva del sistema de aislamiento. La rigidez efectiva de cada dispositivo se obtiene dividiendo la rigidez total para el número de dispositivos.

**PASO 2: Modelación de la estructura.** Se construye un modelo elástico del edificio incluyendo el sistema de aislamiento. Cada dispositivo de aislamiento se modela con elementos elásticos con la rigidez efectiva calculada en el paso anterior. La superestructura se modela con elementos cuya rigidez corresponde a las propiedades de las secciones agrietadas.

**PASO 3: Preparación de un espectro de diseño compuesto.** Un espectro como el que se muestra en la figura 9.5 es preparado como representación de la demanda sísmica sobre la estructura. El uso del espectro compuesto se basa en que el solo el primer modo en una estructura plana o los dos primeros modos en una estructura espacial activan el sistema de aislamiento.

En el espectro compuesto la demanda para el periodo efectivo del sistema de aislamiento se reduce en función del amortiguamiento del sistema de aislamiento mientras que la respuesta de los otros modos de vibración se da al mismo nivel de amortiguamiento que tendría la estructura si no tuviera aislamiento. El amortiguamiento equivalente, periodo efectivo y factor de reducción espectral fueron obtenidos en el paso 1.



**Figura 9.5** Espectro compuesto de diseño.

**PASO 4: Ejecución del análisis de respuesta espectral.** Para un análisis en dos dimensiones, el 100% del espectro de diseño es aplicado en la dirección de estudio. En un análisis espacial, 100% del espectro de diseño es aplicado en una dirección mientras que 30% del espectro es aplicado simultáneamente en la otra dirección o viceversa. La respuesta máxima de la estructura será producida por la combinación más desfavorable.

Con base en la regla de iguales desplazamientos (Newmark, 1969), del análisis de respuesta espectral se obtienen los desplazamientos del sistema de aislamiento y derivas en la estructura.

**PASO 5: Chequeo de derivas.** Las derivas de piso que se obtienen del análisis elástico de la estructura, se multiplican por el factor de reducción R utilizado para obtener derivas inelásticas. La deriva de piso no debe superar 1.5%. Si este límite es excedido, el análisis se repite incrementando el tamaño de las secciones desde el paso 4.

**PASO 6: Obtención de las fuerzas de diseño.** Del análisis de respuesta espectral se obtienen también fuerzas en los dispositivos de aislamiento y en los elementos de la superestructura.

Las fuerzas laterales en los dispositivos de aislamiento serán probablemente distintas para cada dispositivo debido a la torsión inherente o accidental de la superestructura. El tener fuerzas distintas implica realizar un diseño específico para cada dispositivo, lo cual es impráctico debido a que los costos de construcción y prueba de los dispositivos aumentarían. Por lo tanto, a sabiendas de que la respuesta de los dispositivos es en realidad inelástica, se puede realizar una redistribución de la fuerza total de diseño de manera que todos los dispositivos se diseñen para la misma fuerza y que un solo tipo de dispositivo sea usado en todo el edificio.

Las fuerzas que se obtienen del análisis de respuesta espectral en la superestructura deben ser reducidas con el factor R de acuerdo a lo descrito en la sección 9.3.

Si el edificio que se diseña es regular, la fuerza lateral de diseño en la superestructura no deberá tomarse menor que el 80% que  $V_{eq,s}$  calculado con la ecuación 9.4. Si el edificio es irregular, la misma fuerza no deberá tomarse menor que el 100% de  $V_{eq,s}$  obtenido de acuerdo a la ecuación 9.4. Cuando las fuerzas provenientes del análisis espectral estén por debajo de los límites antes explicados, estas fuerzas mas todos los otros parámetros de respuesta (desplazamientos, derivas, etc.) deberán incrementarse proporcionalmente hasta que las fuerzas de diseño alcancen el límite establecido.

**PASO 7: Demanda máxima de desplazamiento en el sistema de aislamiento.** A los dispositivos del sistema de aislamiento deben proveérseles de una capacidad de desplazamiento mayor o igual a la demanda de desplazamiento del SMC, incluyendo los efectos de la torsión inherente o accidental del edificio. El análisis de respuesta espectral realizado en el paso 4 ya incorporó directamente los efectos de torsión. Por lo tanto, para obtener desplazamientos al nivel del SMC, los desplazamientos en los dispositivos de aislamiento obtenidos para el sismo raro deben ser amplificados por la relación entre la  $S_{a1}$  del SMC y la  $S_{a1}$  del sismo raro.

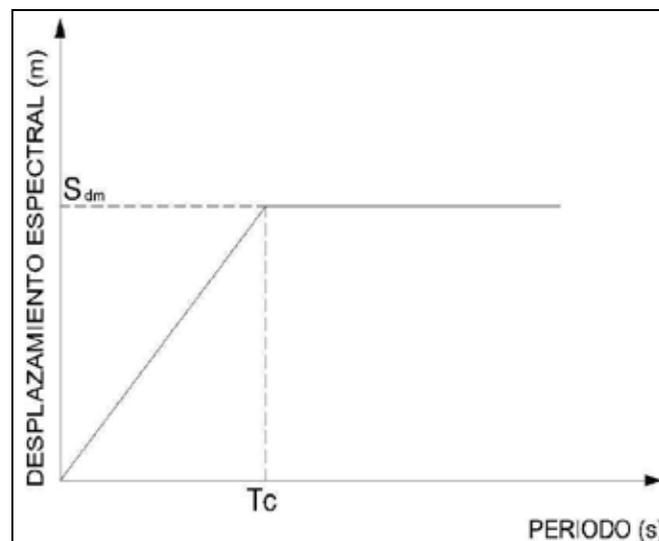
**PASO 8: Diseño de los dispositivos del sistema de aislamiento.** Igual que para el diseño por el método de la fuerza equivalente.

**PASO 9: Diseño y detallamiento de los elementos de la superestructura.** Igual que para el diseño por el método de la fuerza equivalente.

## 9.5 DISEÑO DIRECTO BASADO EN DESPLAZAMIENTOS

El método DDBD fue introducido en la sección 9.2. Con este método la estructura se diseña para que alcance un perfil especificado de desplazamiento bajo el sismo de diseño. El procedimiento para el diseño directo basado en desplazamiento de edificios aislados es similar al usado para el diseño de edificios convencionales, siendo esto una gran ventaja. El detalle de cada uno de los pasos en el procedimiento se presenta a continuación:

**PASO 1: Selección del objetivo de diseño.** El objetivo de diseño se establece mediante la definición del espectro de desplazamiento para el sismo de diseño y del desempeño que deberá alcanzar la estructura ante ese sismo. Los parámetros que definen el espectro de desplazamiento se muestran en la figura 9.6, donde  $T_c$  es el periodo de esquina, y  $S_{dm}$  es el desplazamiento espectral máximo.

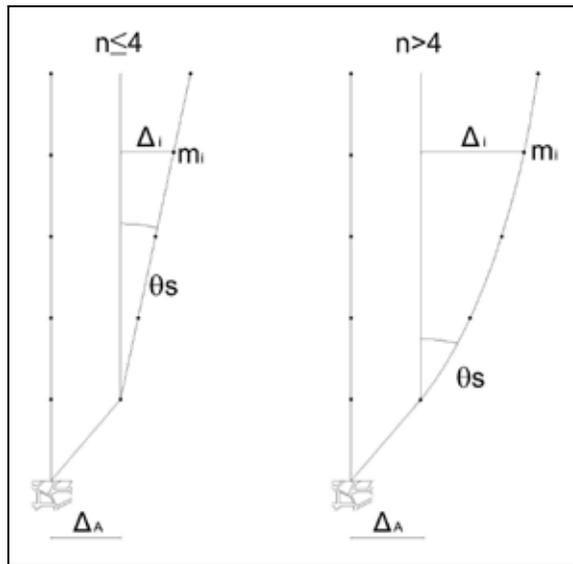


**Figura 9.6** Espectro de desplazamiento para DDBD.

El desempeño se especifica en forma de la deriva máxima de piso para la superestructura  $\theta_s$  y del desplazamiento de diseño para el sistema de aislamiento  $\Delta_A$ . El DDBD puede realizarse para cualquier combinación de desempeño y sismo. Por esta razón, DDBD puede usarse para el diseño basado en desempeño de estructuras.

**PASO 2: Definición del perfil de desplazamiento de diseño.** En función de la deriva de diseño para la superestructura,  $\theta_s$  y del desplazamiento de diseño para el sistema de aislamiento  $\Delta_A$ , se define el perfil meta de desplazamiento para el edificio tal como se muestra en la figura 9.7

El desplazamiento de diseño para el sistema de aislamiento,  $\Delta_A$ , debe seleccionarse en función de: (i) la capacidad de desplazamiento de los dispositivos disponibles comercialmente, (ii) el máximo desplazamiento permisible en la junta que se genera entre el edificio y el suelo de su alrededor, (iii) la capacidad de desplazamiento de las juntas extensibles que se usaran para las instalaciones sanitarias, eléctricas, de gas, y otras que conectan al edificio.



**Figura 9.7** Perfil de desplazamiento para DDBD de edificios aislados.

Tal como se menciona en la sección 9.2, mientras mayor sea el desplazamiento del sistema de aislamiento, menores serán las fuerzas de diseño y por ende el costo de la superestructura disminuye. Sin embargo, los costos de los dispositivos y juntas aumentan. Dispositivos como los péndulos friccionantes pueden acomodar fácilmente grandes desplazamientos. Otros dispositivos como los LRBs no suelen desplazarse más de 350 mm (Robinson, 2008).

La forma del perfil inelástico de desplazamiento de la superestructura, mostrado en la figura 9.7, depende del número de pisos,  $n$  (Priestey *et al*, 2007). Para edificios de cuatro o menos pisos el perfil de desplazamiento es lineal, como lo indica la ecuación 9.7, donde  $H_i$  y  $H_n$  son respectivamente la altura del piso  $i$  y la altura total del edificio medidas sobre el sistema de aislamiento. Para edificios con más de cuatro pisos, la forma del perfil de desplazamiento se determina con la ecuación (9.8).

$$\delta_i = \frac{H_i}{H_n} \quad (9.7)$$

$$\delta_i = \frac{4}{3} \left( \frac{H_i}{H_n} \right) \left( 1 - \frac{H_i}{4H_n} \right) \quad (9.8)$$

Los desplazamientos laterales para cada piso se determinan amplificando la forma del perfil de desplazamiento inelástico para alcanzar la deriva de diseño. Al desplazamiento de cada piso de la superestructura se suma el desplazamiento del sistema de aislamiento como se indica en la ecuación (9.9).

$$\Delta_i = \Delta_A + \delta_i \frac{\theta_s H_1}{\delta_1} \quad (9.9)$$

**PASO 3: Determinación de las propiedades del sistema de un grado de libertad equivalente.** Para el perfil de desplazamiento seleccionado, el desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq}$  y

la masa efectiva  $M_{eff}$  de un sistema de un grado de libertad equivalente pueden estimarse con las ecuaciones (9.10) y (9.11) respectivamente. En estas ecuaciones,  $m_i$  es la masa en el piso  $i$

$$\Delta_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \Delta_i^2)}{\sum_{i=1}^n (m_i \Delta_i)} \quad (9.10)$$

$$M_{eff} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \Delta_i)}{\Delta_{eq}} \quad (9.11)$$

**PASO 4: Estimación del amortiguamiento equivalente en el edificio.** El amortiguamiento global resulta de la combinación del amortiguamiento en la superestructura y el amortiguamiento en el sistema de aislamiento. El amortiguamiento en la superestructura puede calcularse con la ecuación (9.12) Priestley *et al* (2007) en función de la demanda de ductilidad en la superestructura,  $\mu$ . Este último parámetro se calcula con la ecuación (9.13). La deriva de fluencia,  $\theta_y$  de la superestructura se estima con la ecuación (9.14) para pórticos con vigas de longitud promedio,  $L_v$ , peralte  $h_v$ , reforzadas con un acero con deformación de fluencia  $\varepsilon_y$ .

$$\xi_{eq,S} = 5 + 55 \frac{\mu - 1}{\pi \mu} \quad (9.12)$$

$$\mu = \frac{\theta_s}{\theta_y} \quad (9.13)$$

$$\theta_y = 0.5 \varepsilon_y \frac{L_v}{h_v} \quad (9.14)$$

El amortiguamiento en el sistema de aislamiento  $\xi_{eq,A}$  se selecciona con los mismos criterios descritos para el método de la fuerza equivalente (sección 9.3), es decir:

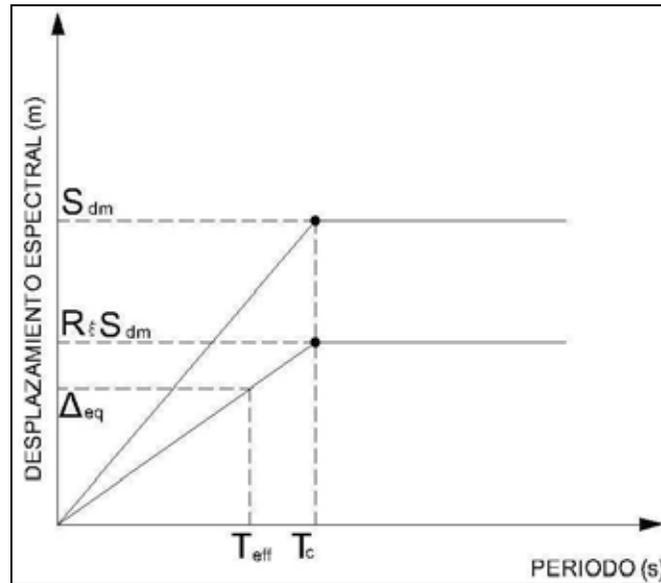
1. Mientras mayor sea  $\xi_{eq}$  menor será la demanda de desplazamiento sísmica, por lo tanto conviene seleccionar el valor máximo posible. Dispositivos como los LRBs y los FPS pueden alcanzar niveles de  $\xi_{eq}$  superiores a 30%, sin embargo FEMA 450 y otros códigos admiten amortiguamientos hasta de 30% en el diseño.
2. Además de tener alta capacidad de disipación de energía (es decir amortiguamiento), es necesario que los dispositivos de aislamiento tengan la capacidad de restaurar su posición inicial luego del sismo. Desafortunadamente, dispositivos con alto  $\xi_{eq}$  no tienen capacidad de auto-restauración ya que su rigidez post-fluencia es baja. Nuevamente, ya que la capacidad de auto-restauración se comprueba mas adelante en el diseño, el valor escogido de amortiguamiento podría tener que ser revisado mediante un proceso iterativo.

Finalmente los dos amortiguamientos son combinados con la ecuación (9.15). Esta ecuación se basa en la hipótesis de que el amortiguamiento debe combinarse en función del trabajo realizado por cada componente aportante (Kowalsky, 2002). Ya que la fuerza lateral en el sistema aislamiento es la misma que en la estructura, la combinación se realiza en términos del desplazamiento únicamente.

$$\xi_{eq} = \frac{(\Delta_{eq} - \Delta_{eq,A})\xi_{eq,s} + \Delta_{eq,A}\xi_{eq,A}}{\Delta_{eq}} \quad (9.15)$$

**PASO 5. Determinación de la resistencia requerida en el sistema de aislamiento.**

El periodo efectivo  $T_{eff}$ , que requiere la estructura para alcanzar el desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq}$  se obtiene utilizando el espectro de desplazamiento de diseño reducido por el factor de reducción espectral  $R_\xi$ . Este último se lo obtiene de la tabla 9.2 en función del amortiguamiento equivalente de la estructura calculado en el paso anterior. La figura 9.9 esquematiza este procedimiento.



**Figura 9.8** Obtención del periodo efectivo en DDBD.

Cuando  $\Delta_{eq}$  es menor que  $R_\xi S_{dm}$ , de la figura 9.8 se deriva la ecuación (9.16). Cuando  $\Delta_{eq}$  es mayor que  $R_\xi S_{dm}$  cualquier valor de  $T_{eff} > T_c$  puede seleccionarse, entendiendo además que el  $\Delta_{eq}$  no va a ser alcanzado porque el sismo de diseño solo puede causar un desplazamiento máximo  $S_{dm}$ . Cuando  $T_{eff}$  es mayor que  $T_c$ , las fuerzas de diseño bajan y el diseño del sistema de aislamiento esta generalmente controlado por fuerzas de viento.

$$T_{eff} = T_c \frac{\Delta_{eq}}{S_{dm} R_\xi} \quad (9.16)$$

Una vez que  $T_{eff}$  ha sido evaluado, la rigidez efectiva  $K_{eff}$  requerida en el sistema puede calcularse con la ecuación (9.17). Esta ecuación proviene de la relación entre periodo, masa y rigidez de sistemas de un grado de libertad. Finalmente, la resistencia requerida en el sistema de aislamiento se obtiene con la ecuación (9.18).

$$K_{eff} = \frac{4\pi^2 M_{eff}}{T_{eff}^2} \quad (9.17)$$

$$V_{eq} = K_{eff} \Delta_d \quad (9.18)$$

La fuerza de diseño para cada uno de los dispositivos de aislamiento se obtiene dividiendo  $V_{eq}$  para el numero de dispositivos a utilizarse.

**PASO 6: Diseño de los dispositivos del sistema de aislamiento.** Igual que para el diseño por el método de la fuerza equivalente.

**PASO 7: Investigación del desempeño del sistema de aislamiento a otros niveles de sismicidad.** Esto se hace como parte de un diseño donde interese satisfacer varios niveles de desempeño. Por ejemplo, satisfacer el requisito de FEMA 450 de que la capacidad de desplazamiento debe darse al sistema de aislamiento en función de la demanda del MSC.

La demanda de desplazamiento para el nuevo nivel de sismicidad se la obtiene de la siguiente manera:

1. Se asume el mismo nivel de amortiguamiento equivalente y el mismo periodo efectivo para el nuevo nivel de sismicidad.
2. Se reduce el nuevo espectro de desplazamiento aplicando el factor  $R_\xi$  tomado de la tabla 9.2
3. Se lee el desplazamiento espectral  $S_d$ , entrando con el  $T_{eff}$  de la estructura. Esto se puede sintetizar en las ecuaciones (9.19) y (9.20). Donde los valores de  $S_{dm}$  y  $T_c$  corresponden al nuevo espectro

$$S_d = \frac{R_\xi S_{dm} T_{eff}}{T_c} \quad T_{eff} < T_c \quad (9.19)$$

$$S_d = R_\xi S_{dm} \quad T_{eff} \geq T_c \quad (9.20)$$

4. Se re-evalúa la rigidez efectiva del sistema de aislamiento,  $K_{eff}$  y el periodo efectivo  $T_{eff}$  con las ecuaciones (9.21) y (9.22) respectivamente

$$K_{eff} = \frac{V_{eq}}{S_d} \quad (9.21)$$

$$T_{eff} = 2\pi \sqrt{\frac{M_{eff}}{K_{eff}}} \quad (9.22)$$

5. Se re-calcula el amortiguamiento del sistema de aislamiento utilizando un modelo apropiado para el tipo de dispositivo utilizado (estos modelo se presentan en las secciones 9.6 y 9.7). Para esto  $S_d$  se reduce para encontrar el desplazamiento del sistema de aislamiento,  $\Delta_A$ , en la misma proporción que fuera incrementado con la ecuación (9.10).
6. Se encuentra el amortiguamiento combinado con ecuación (9.15).
7. Se repite desde 2 hasta alcanzar convergencia en el desplazamiento  $\Delta_A$ . Esto puede tomar 2 o 3 iteraciones.
8. Finalmente se toma el desplazamiento encontrado,  $\Delta_A$  y se lo amplifica con el factor de amplificación por torsión,  $F_T$ , presentado en la ecuación (9.6) para obtener la máxima demanda de desplazamiento en cada dispositivo.

Si el nivel de desplazamiento encontrado no es satisfactorio, el diseño se repite modificando el objetivo de diseño.

**PASO 8: Fuerzas de diseño para la superestructura.** Una vez que los dispositivos del sistema de aislamiento se han diseñado, se conoce la resistencia real. Este valor sobreescribe al valor  $V_{eq}$  de diseño y sirve de base para el diseño de la superestructura.

La superestructura y el sistema de aislamiento están conectados en serie, por lo tanto toda la resistencia que se desarrolle en el sistema de aislamiento se transmite a la superestructura. Para garantizar la activación completa del sistema de aislamiento, es entonces necesario diseñar la superestructura para el cortante basal,  $V_{eq,s}$ , amplificando  $V_{eq}$  (obtenido en el paso 5) con un factor  $\Omega$  que considere la posible sobre-resistencia del sistema de aislamiento, tal como se indica en la ecuación (9.23). De esta manera la superestructura está protegida frente a una sobrecarga de cortante y se garantiza que la superestructura alcance el nivel de deriva previsto solo después de que el sistema de aislamiento haya alcanzado su desplazamiento de diseño.

$$V_{eq,s} = \Omega V_{eq} \quad (9.23)$$

El valor de  $\Omega$  deberá ser consultado al fabricante de los dispositivos que se van a utilizar. Para un diseño preliminar utilizar de 10% a 20% de sobre-resistencia parece razonable.

Para la distribución del cortante en todos los pisos se utiliza la distribución dada por la ecuación (9.24). Donde se considera  $F_t = 0.1 V_{eq,s}$  para el último piso y  $F_t = 0$  para los pisos inferiores.  $F_i$  es la fuerza lateral que se aplicará en cada nivel de la estructura. Esta distribución busca proteger a la superestructura de la amplificación de derivas causada por la participación de modos de vibración con periodos menores a  $T_{eff}$ .

$$F_i = F_t + 0.9V_{eq,s} \cdot \frac{m_i \Delta_i}{\sum m_i \Delta_i} \quad (9.24)$$

**PASO 9: Diseño y detallamiento de los elementos de la superestructura.** Los momentos en las secciones donde se espera la formación de rotulas plásticas se obtienen del análisis elástico de un modelo de la superestructura bajo la acción del vector  $[F_i]$  de fuerzas laterales. El modelo elástico debe representar el estado de la superestructura al nivel de desempeño esperado.

Es importante recalcar que el análisis elástico tiene como único objetivo distribuir el cortante basal entre los elementos de la estructura. Este análisis no se ejecuta con el objeto de chequear derivas. El que la estructura alcance las derivas de diseño ya fue previsto en los primeros pasos del procedimiento.

Los cortantes en vigas, momentos y cortantes en columnas son obtenidos a partir de la sobre-resistencia a flexión de las vigas. Garantizando de esta manera la formación de rotulas plásticas en los extremos de vigas y un comportamiento dúctil para la estructura. Este proceso sigue los principios del Diseño por Capacidad. Paulay y Priestley (1992)

Adicionalmente los cortantes en las columnas deben considerar la amplificación dinámica causada por la participación de altos modos de vibración. Priestley *et al* (2007).

## • EJEMPLO 2

Determinación de los desplazamientos y fuerzas de diseño para un edificio aislado de 3 pisos por el método de Diseño Directo Basado en Desplazamientos

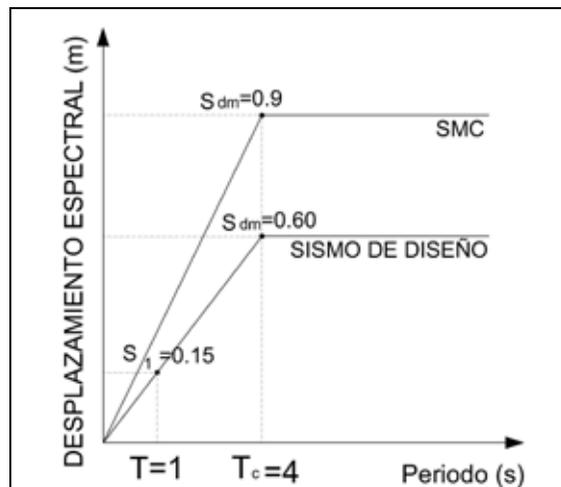
## • SOLUCIÓN

En este ejemplo se repite el diseño del edificio descrito en el ejemplo 1 usando Diseño Directo Basado en Desplazamientos.

**PASO 1. Selección del objetivo de diseño.** Se propone diseñar el edificio con los siguientes objetivos:

1. Bajo el sismo de diseño, caracterizado por  $S_{a1} = 0.6g$ , el sistema de aislamiento se desplazara 0.25 m. Se selecciona este valor porque no se dispone de juntas extensibles para las instalaciones de servicios que tengan mayor capacidad de desplazamiento.
2. Bajo el sismo de diseño, la deriva alcanzara 1.5%

DDBD usa el espectro de desplazamiento como medida de la amenaza sísmica. Convirtiendo el espectro de aceleración del problema 1 en espectro de desplazamiento, fijando el periodo de esquina  $T_c = 4s$ , se obtiene los siguientes espectros para el sismo de diseño y para el SMC.



**PASO 2. Definición del perfil de desplazamiento de diseño.** Se define el perfil de desplazamiento de diseño con la ecuación (9.7) y (9.9). De acuerdo al objetivo de diseño planteado  $\Delta_A = 0.25m$  y  $\theta s = 1.5\%$

Piso	$\delta_i$	$\Delta_s(m)$	$\square_A(m)$	$\Delta_{eq,i}(m)$
1	0.33	0.05	0.25	0.30
2	0.67	0.11	0.25	0.36
3	1	0.16	0.25	0.41

**PASO 3. Determinación de las propiedades del sistema de un grado de libertad equivalente.** El desplazamiento  $\Delta_{eq}$  y masa efectiva,  $M_{eff}$ , de un sistema equivalente de 1 grado de libertad se obtienen con las ecuaciones (9.10) y (9.11)

Piso	$\Delta_{eq,i}(m)$	$M_i(T.s^2/m)$	$M_i\Delta_{ti}$	$M_i\Delta_{eq,i}^2$
1	0.3	13.25	3.98	1.19
2	0.36	13.25	4.77	1.72
3	0.41	13.25	5.43	2.23
Suman:			14.18	5.14

$$\Delta_{eq} = \frac{5.14}{14.18} = 0.36m$$

$$M_{eff} = \frac{14.18}{0.36} = 39.30Ts^2 / m$$

**PASO 4. Estimación del amortiguamiento equivalente en el edificio.** El amortiguamiento global del sistema está dado por la combinación de amortiguamiento en la superestructura y en los aisladores en proporción al trabajo que realizan.

Las dimensiones de las vigas del edificio son:

$$L_v = 6m$$

$$h_v = 0.50m \quad (\text{pre dimensionado})$$

Para  $\varepsilon_y = 0.002$  y de acuerdo a la ecuación (9.14), la deriva de fluencia de la superestructura es

$$\theta_y = 1.2\%$$

Por lo tanto, la demanda de ductilidad esperada en la superestructura es:

$$\mu = \frac{0.015}{0.012} = 1.25$$

En función de la ductilidad se calcula el amortiguamiento de la superestructura con ecuación (9.12).

$$\xi_{eq,s} = 5.35\%$$

El amortiguamiento del sistema aislado es  $\xi_{eq,A} = 30\%$ . Por lo tanto aplicando ecuación (9.15) el amortiguamiento combinado es:

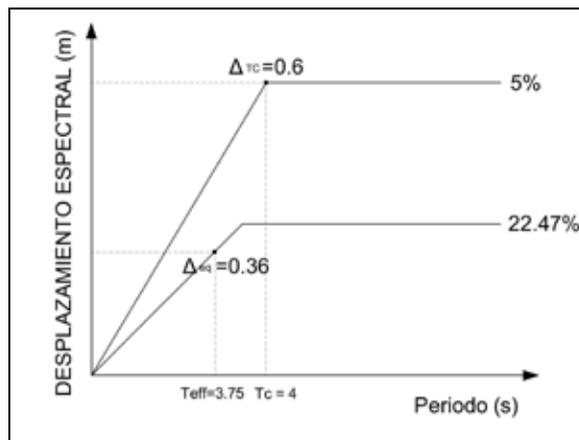
$$\xi_{eq} = \frac{(0.36 - 0.25)(5.35) + (0.25)(30)}{0.36} = 22.47\%$$

**PASO 5. Determinación de la resistencia requerida en el sistema de aislamiento.**

Conociendo el amortiguamiento, se obtiene el factor de reducción espectral usando la tabla 9.2. Lo cual resulta en  $R_{\xi} = 0.65$ . Luego se calcula el periodo efectivo que necesita la estructura con ecuación 9.16. Por lo tanto:

$$T_{eff} = 3 \frac{0.36}{(0.59)(0.65)} = 3.75s$$

Este resultado se aprecia en la siguiente figura:



A partir del periodo efectivo determinamos  $K_{eff}$  (Ec.9.21) y  $V_{eq}$  (Ec.9.3)

$$K_{eff} = \frac{4\pi^2 39.39}{3.75^2} = 110.58T/m$$

$$V_{eq} = K_{eff} \times \Delta_{eq}$$

$$V_{eq} = 110.58 \times 0.36 = 39.81T$$

**PASO 6: Diseño de los dispositivos del sistema de aislamiento.**

Si se instala debajo de cada columna un dispositivo de aislamiento, con un número total de aisladores  $n = 12$ , la fuerza lateral con la que será diseñada cada dispositivo es:

$$V_{eq} = 3.34T$$

También se debe considerar el desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq} = 0.25m$ . No se va a considerar cargas de viento. La carga gravitacional sobre el dispositivo más cargado es  $W = 65T$  considerando  $36 m^2$  como área de aportación por piso. El diseño de los dispositivos se cubre posteriormente en este capítulo.

**PASO 7: Investigación del desempeño del sistema de aislamiento a otros niveles de sismicidad.** Solo se puede hacer si los aisladores ya han sido diseñados

**PASO 8: Fuerzas de diseño para la superestructura.** Una vez que los dispositivos del sistema de aislamiento se han diseñado, se conoce resistencia real. Este valor sobreescribe al valor  $V_{eq}$  de diseño y sirve de base para el diseño de la superestructura. Como se explica en 9.5 para garantizar la activación del sistema de aislamiento se toma  $\Omega=1.2$ , para obtener  $V_{eq,s}$  con la ecuación (9.23).

$$V_{eq,s} = 1.2 \times (39.81T) = 47.77T$$

Una vez determinado  $V_{eq,s}$  se lo distribuye en cada piso a partir de la ecuación (9.24).

Piso	Mi $\Delta$ ti	Fi(T)
1	3.98	12.07
2	4.77	14.46
3	5.43	21.24
Suman:	14.18	47.77

**PASO 9: Diseño y detallamiento de los elementos de la superestructura.** No se incluye en este ejemplo

### 9.5.1 Comparación del diseño basado en fuerzas y el diseño basado en desplazamientos

En el apartado 9.2 se explico sobre algunos de los problemas del diseño basado en fuerzas y su comparación con el DDBD. De la ejecución de los ejemplos 1 y 2 se puede extender la discusión con las siguientes comparaciones:

- El diseño basado en fuerzas partió de un valor de periodo que se le quería dar a la estructura sin considerar el nivel de desplazamiento en el sistema de aislamiento. El DDBD partió de una definición completa del desempeño deseado en la estructura.
- El diseño basado en fuerzas no considero la flexibilidad de la superestructura y asumió que el amortiguamiento total es igual al amortiguamiento del sistema de aislamiento. El DDBD de forma racional considero la participación de la superestructura durante el cálculo de las propiedades del sistema de un grado de libertad equivalente.
- El diseño basado en fuerzas mezcla los conceptos de linearizacion equivalente y regla de iguales desplazamiento, utilizando amortiguamiento equivalente y el factor R a la vez. Esto no es apropiado. El DDBD no usa el factor R. La disipación de energía en la superestructura es tomada en cuenta directamente cuando se calcula su amortiguamiento en función de la demanda de ductilidad real.
- El DDBD usa principios de diseño por capacidad para asegurar la activación completa del sistema de aislamiento, previniendo el daño no deseado en la superestructura.

- El DDBD puede usarse de la misma manera para cualquier combinación de deriva y sismo.

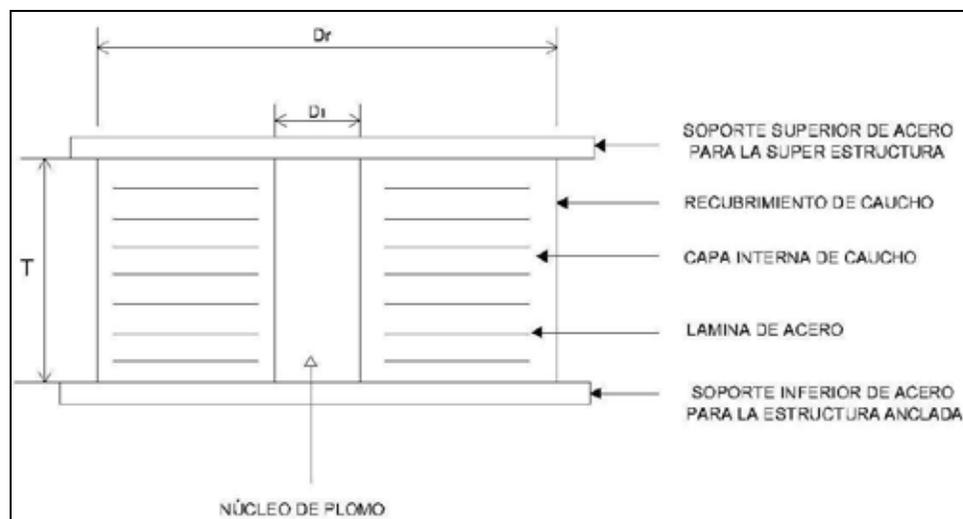
Por estas razones se recomienda usar DDBD para el diseño de edificios aislados. El diseño obtenido con DDBD puede verificarse mediante análisis no lineal de historia en el tiempo. La utilización de un análisis de respuesta espectral para verificar el diseño mediante DDBD no es adecuada puesto que este método adolece de algunos de los problemas atribuidos al método de la fuerza lateral equivalente.

## 9.6 DISEÑO DE AISLADORES ELASTOMÉRICOS CON NUCLEO DE PLOMO

### 9.6.1 Filosofía de Diseño

A continuación se presentan algunos criterios para el diseño de estos dispositivos:

- La capacidad de desplazamiento del dispositivo deberá ser mayor o igual que la máxima demanda calculada en el diseño. El cálculo de la demanda debería considerar el SMC y los efectos del envejecimiento, cambios de temperatura, etc. en las propiedades del elemento.
- El dispositivo deberá diseñarse para soportar la acción combinada de fuerzas laterales, axiales y de torsión.
- El dispositivo será dúctil y responderá de forma predecible sin pérdida apreciable de resistencia frente a cargas laterales
- El dispositivo no deberá pandearse o desestabilizarse por la acción combinada de cargas axiales y laterales.



**Figura 9.9** Componentes de un LRB.

Una representación esquemática de un LRB se da en la figura 9.9. Sea cual fuere el procedimiento utilizado, el diseño debe resultar en la siguiente información necesaria para que el fabricante pueda construir el dispositivo:

- a) Diámetro exterior
- b) Diámetro del núcleo de plomo
- c) Altura, y
- d) Numero es espesor de las placas de confinamiento

Una vez que estos parámetros son definidos, es conveniente que el diseñador busque en los catálogos de los fabricantes dispositivos que con las mismas o superiores características. El utilizar dispositivos que aparecen en los catálogos siempre será más económico que utilizar dispositivos especialmente fabricados para el proyecto. Otra recomendación importante es utilizar a medida de lo posible el mismo tipo de dispositivo en toda la estructura. Aunque esto pudiera parecer a primera vista poco óptimo, resulta conveniente económicamente debido al ahorro que produce al no tener que realizar las costosas pruebas de laboratorio necesarias para establecer las propiedades reales de de los prototipos previo al diseño final de la superestructura.

### 9.6.2 Respuesta fuerza lateral – desplazamiento del LRB

Con fines de diseño y análisis, es comúnmente aceptado (FEMA 2003, AASHTO 2000) el idealizar la respuesta lateral de los LRBs con una curva histerética bilineal tal como se muestra en la figura 9.10. La curva bilineal resulta de la acción en paralelo del elastómero, para el cual se asume una respuesta elástica, y del núcleo de plomo que se modela como elasto-plástico. Este modelo captura los principales rasgos del comportamiento del dispositivo aunque ignora los efectos de la velocidad de aplicación de la carga lateral y de los cambios en carga axial en la respuesta. Del análisis de la figura 9.10 se obtienen muchas de las relaciones necesarias para el diseño del dispositivo.

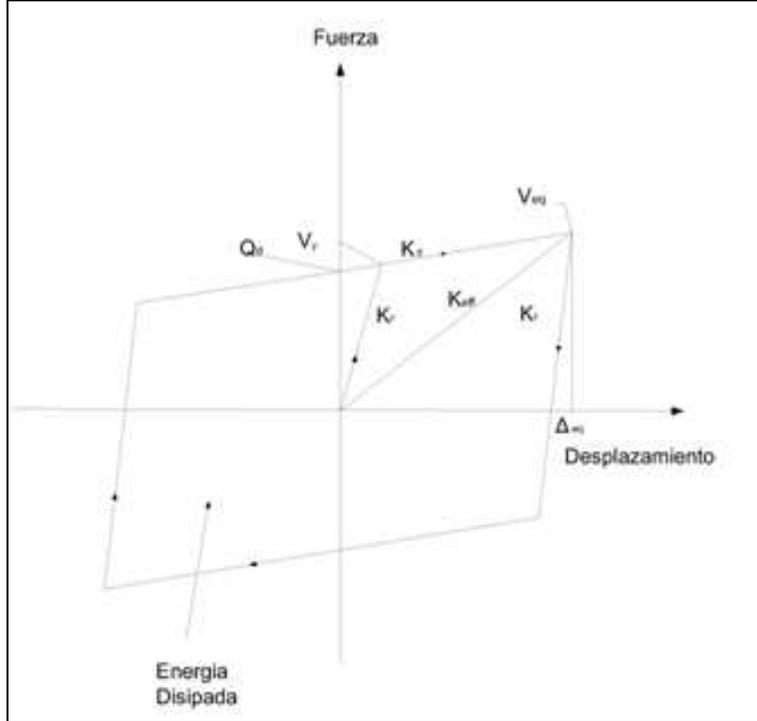
El elastómero controla la rigidez post-fluencia del dispositivo,  $k_d$ , como se muestra en la ecuación (9.25) donde se considera que la rigidez post fluencia del núcleo de plomo solo contribuye un 10% a la rigidez post fluencia del dispositivo.

$$k_d = 1.1k_r \quad (9.25)$$

La rigidez del elastómero,  $k_r$ , es función de su modulo de corte  $G_R$ , área neta  $A_r$ , altura efectiva  $T_r$  y se obtiene con la ecuación (9.26). El área neta,  $A_r$ , se obtiene con la ecuación (9.27) con referencia al diámetro externo del dispositivo,  $D_e$ , y al diámetro del núcleo de plomo,  $D_i$ . La altura efectiva,  $T_r$ , resulta al descontar de la altura total del dispositivo,  $T$ , el número total de placas de confinamiento de espesor  $T_i$ . El modulo de corte  $G_r$  varia con la dureza del elastómero como se muestra en la tabla 9.2 junto a otros parámetros necesarios para el diseño.

$$k_r = \frac{G_r A_r}{T_r} \quad (9.26)$$

$$A_r = \frac{\pi(D_e^2 - D_i^2)}{4} \quad (9.27)$$


**Figura 9.10** Respuesta lateral idealizada para un LRB

El núcleo de plomo, por su parte controla la rigidez inicial,  $k_u$ , fuerza de fluencia  $V_y$  y desplazamiento de fluencia del dispositivo. La fuerza lateral necesaria para causar la fluencia del núcleo de plomo,  $V_{y,b}$  es proporcional al área de su sección y al esfuerzo de fluencia por corte del plomo,  $f_{y1}$ , tal como se indica en la ecuación (9.29).  $f_{y1}$  suele tomarse como 9 MPa o 90 kg/cm<sup>2</sup>. El coeficiente  $\beta$  permite considerar los efectos de la velocidad de carga en la resistencia del plomo. Para cargas sísmicas  $\beta = 1$ . Para cargas de servicio  $\beta = 0.5$

**Tabla 9.3** Propiedades mecánicas de los elastómeros.

Endurecimiento	Modulo de elasticidad E		Modulo de corte Gr		Constante de material k'	Modulo Bulk K	
	kg/cm <sup>2</sup>	MPa	kg/cm <sup>2</sup>	Mpa		kg/cm <sup>2</sup>	Mpa
IRHD/Shore A							
30	9.35	0.92	3.09	0.30	0.93	10194.76	1000
35	12.23	1.18	3.45	0.37	0.89	10194.76	1000
40	15.32	1.50	4.57	0.45	0.85	10194.76	1000
45	19.35	1.80	5.48	0.54	0.80	10194.76	1000
50	22.42	2.20	6.54	0.64	0.73	10500.60	1030
55	33.12	3.25	9.23	0.81	0.64	11112.28	1090
60	45.35	4.45	10.69	1.08	0.57	11723.97	1150
65	60.61	5.85	13.99	1.37	0.54	12335.65	1210
70	74.25	7.35	17.65	1.73	0.53	12947.34	1270
75	95.83	9.40	22.64	2.22	0.52	13559.02	1330

$$V_{y,l} = \frac{\pi D_l^2}{4} \beta f_{yl} \quad (9.28)$$

La rigidez por corte del núcleo de plomo,  $k_l$ , se obtiene con la ecuación (9.29), donde  $\gamma_l$  es la deformación de fluencia por corte para el plomo aproximadamente igual a 0.09. El producto  $T\gamma_l$  es el desplazamiento de fluencia,  $\Delta_y$ , del núcleo de plomo y por ende del dispositivo.

$$k_l = \frac{V_{y,l}}{T\gamma_l} \quad (9.29)$$

Cuando el núcleo de plomo alcanza su límite de fluencia, la fuerza desarrollada por el elastómero se suma a la fuerza de fluencia del núcleo de plomo. Por lo tanto, la resistencia de fluencia del dispositivo,  $V_y$  se obtiene con la ecuación (9.30) y  $k_u$  con la ecuación (9.31).

$$V_y = V_{y,l} + k_r T \gamma_l \quad (9.30)$$

$$k_u = k_l + k_r \quad (9.31)$$

La resistencia característica del dispositivo,  $Q_d$ , se obtiene entonces con la ecuación (9.32). Donde  $\Delta_{eq}$  y  $V_{eq}$  son la resistencia y desplazamientos de diseño para el dispositivo.

$$Q_d = V_{eq} - k_d \Delta_{eq} \quad (9.32)$$

La fuerza de restauración que trata de devolver al dispositivo a su posición original luego del sismo depende directamente de  $k_d$ . FEMA 450 requiere para el diseño de edificios aislados, que la fuerza de restauración al nivel de desplazamiento de diseño,  $\Delta_{eq}$ , sea al menos  $W/40$  mayor que la fuerza de restauración a 50% del  $\Delta_{eq}$ . Donde  $W$  es la carga gravitacional que soporta el dispositivo. Esta condición se cumple con la siguiente ecuación:

$$k_d \geq \frac{W}{20\Delta_{eq}} \quad (9.33)$$

La especificaciones para el diseño de puentes aislados de AASHTO (2003) son menos exigentes y requieren que la fuerza de restauración a  $\Delta_{eq}$ , sea al menos  $W/80$  mayor que la fuerza de restauración a 50% del  $\Delta_{eq}$  y que el periodo de vibración del sistema de aislamiento calculado en base  $k_d$  sea menor que 6 segundos. Estos dos requisitos se satisfacen con las siguientes ecuaciones:

$$k_d \geq \frac{W}{40\Delta_{eq}} \quad (9.34)$$

$$k_d \geq \frac{4\pi^2 W}{36g} \quad (9.35)$$

Finalmente, el amortiguamiento equivalente, como una medida de la capacidad de disipación de energía del dispositivo, puede ser calculado con la ecuación (9.36). Este modelo se basa en el método de áreas de histéresis propuesto por Jacobsen (1930)

$$\xi_{LRB} = \frac{2Q_D(\Delta_{eq} - \Delta_y)}{\pi\Delta_{eq}(Q_D + k_d\Delta_{eq})} \quad (9.36)$$

### 9.6.3 Capacidad de desplazamiento lateral del LRB

La capacidad de desplazamiento lateral está controlada por dos factores principalmente: (i) límites en la deformación unitaria en el elastómero, (ii) estabilidad lateral del dispositivo. La deformación de corte en el elastómero,  $\gamma_G$ , causada por la carga gravitacional que actúa en el dispositivo se calcula con las ecuaciones (9.37) y (9.38) en función del factor de forma  $S$  obtenido con la ecuación 9.39 para dispositivos circulares.

$$\gamma_G = \frac{3SW}{2A_r G_r (1 + 2k' S^2)} \quad \text{si } S \leq 15 \quad (9.37)$$

$$\gamma_G = \frac{3W(1 + 8G_r k' S^2 / K)}{4G_r k' S A_r} \quad \text{si } S > 15 \quad (9.38)$$

$$S = \frac{D_b^2 - D_l^2}{4D_b t_i} \quad (9.39)$$

La deformación por corte,  $\gamma_{eq}$ , causada por el desplazamiento sísmico lateral se obtiene con la ecuación (9.40). De la misma manera, la deformación por corte causada por desplazamientos laterales causados por cargas de servicio,  $\gamma_s$ , se obtiene con ecuación (9.41). Finalmente, la deformación por corte causada por rotación inducida en el dispositivo,  $\gamma_r$ , se calcula con ecuación (9.42). En estas ecuaciones  $\Delta_s$  es el desplazamiento lateral por cargas de servicio y  $\theta$  es la rotación inducida en el dispositivo.

$$\gamma_{eq} = \frac{\Delta_{eq}}{T_r} \quad (9.40)$$

$$\gamma_s = \frac{\Delta_s}{T_r} \quad (9.41)$$

$$\gamma_r = \frac{D_r^2 \theta}{2t_i T_r} \quad (9.42)$$

La norma AASHTO para el diseño sísmico de puentes aislados (2000) pone límites a la deformación de corte en el elastómero tal como se muestra en las ecuaciones (9.43), (9.44) y (9.45), restringiendo de esta manera la capacidad de desplazamiento lateral de los LRBs. Estos límites son también aplicables al diseño de edificios aislados.

$$\gamma_G \leq 2.5 \quad (9.43)$$

$$\gamma_G + \gamma_s + \gamma_r \leq 5 \quad (9.44)$$

$$\gamma_G + \gamma_{eq} + \gamma_r \leq 5.5 \quad (9.45)$$

### 9.6.4 Estabilidad del LRB

La carga axial crítica,  $P_{cr}$ , que causa pandeo del dispositivo en posición no desplazada se obtiene con la ecuación (9.46). Cuando el dispositivo se ha desplazado lateralmente, la carga crítica disminuye al valor  $P'_{cr}$  obtenido con la ecuación (9.47) donde  $\delta$  es dado por la ecuación (9.49). La reducción en la capacidad de carga proviene de la reducción de área de soporte como se muestra en la figura 9.11. Este modelo fue propuesto por Buckle y Liu (1994) para dispositivos circulares que se empernan a la estructura.

$$P_{cr} = 0.218 \frac{G_r D_r^4}{t_i T_r} \quad (9.46)$$

$$P'_{cr} = P_{cr} (\delta - \sin \delta) / \pi \quad (9.47)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left( \frac{\Delta_{eq}}{D} \right) \quad (9.48)$$

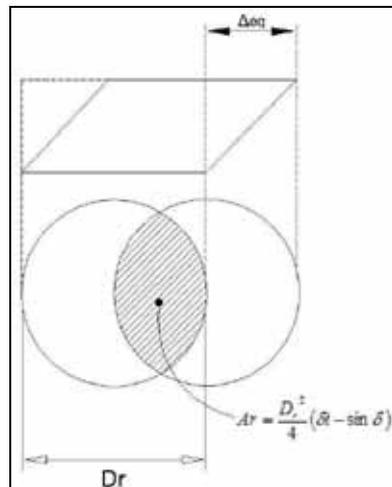


Figura 9.11 Área traslapada de la cara superior sobre la cara inferior de un LRB.

El factor de seguridad frente a una falla por inestabilidad se calcula dividiendo  $W$  por  $P'_{cr}$ .

### 9.6.5 Procedimiento de diseño para los LRBs

A continuación se presenta un procedimiento de diseño para LRBs, derivado de la teoría presentada anteriormente. Este procedimiento es aplicable a LRBs que se instalan en edificios o puentes y produce el diseño completo del dispositivo con los siguientes datos de entrada:

1. Desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq}$
2. Desplazamientos laterales causados por cargas de servicio  $\Delta_s$
3. Rotación inducida por cargas de servicio  $\theta$
4. Resistencia lateral requerida por sismo  $V_{eq}$
5. Mínima resistencia lateral requerida por cargas de servicio  $V_s$
6. Carga gravitacional sobre el dispositivo  $W$
7. Amortiguamiento equivalente,  $\xi_A$  usado para el cálculo de  $V_{eq}$

Con esta información el diseño se ejecuta de la siguiente manera:

**PASO 1: Determinación de la rigidez post fluencia,  $k_d$ .** La rigidez post-fluencia del LRB deberá ser igual que la calculada con ecuación (9.49). Esta ecuación se obtiene de la combinación de las ecuaciones (9.32) y (9.36). La rigidez post-fluencia calculada de esta manera garantiza que el LRB posea el amortiguamiento meta seleccionado en el proceso de obtención de las fuerzas de diseño.

$$k_d = \frac{\left(2 - \pi \frac{\xi_A}{100}\right) V_{eq}}{\pi \xi_A + \left(2 - \pi \frac{\xi_A}{100}\right) \Delta_{eq}} \quad (9.49)$$

No obstante deberá verificarse que  $k_d$  sea mayor que el valor calculado con las ecuaciones (9.33), (9.34) y (9.35). El cumplimiento de este requerimiento asegura que el dispositivo tenga los niveles mínimos de fuerza de restauración explicados previamente.

**PASO 2: Primera estimación del diámetro del núcleo de plomo.** La resistencia característica  $Q_d$  del dispositivo se obtiene con la ecuación (9.32). Luego, asumiendo que la fuerza de fluencia del LRB es 10% mayor que  $Q_d$  y que la relación entre  $k_u$  y  $k_d$  es 10, se obtiene la ecuación (9.50) partir de la ecuación (9.28).

$$D_l = 1.24 \sqrt{\frac{Q_d}{f_{yl}}} \quad (9.50)$$

El diámetro obtenido de esta manera deberá ser mayor que el requerido para resistir las fuerzas laterales de servicio  $V_s$ . El diámetro mínimo del núcleo de plomo se calcula con la ecuación (9.51) derivada de la ecuación (9.28).

$$D_{l,\min} = \sqrt{\frac{4V_s}{\pi f_{yl}}} \quad (9.51)$$

Pudiera resultar de la aplicación de esta ecuación que  $Q_d$  resulte negativo. Esto significaría que **no se necesita un núcleo de plomo en el dispositivo**. Además significa que solo el elastómero podría ser suficiente para proporcionar la resistencia necesaria. Sin embargo, esta conclusión tendría que ser verificada **reduciendo el amortiguamiento** empleado para calcular la resistencia de diseño ya que los elastómeros normales tienen niveles de amortiguamiento mucho menores que los de los LRBs

**PASO 3: Determinación del diámetro externo del dispositivo.** Esta determinación requiere el asumir la altura total de las capas de elastómero,  $T_r$ , y el espesor de cada capa de elastómero,  $t_i$ . Se recomienda que el valor de  $t_i$  no se tome mayor que 9 mm. Buckle y Constantinou, (2006). El valor de  $T_r$  debe corregirse mediante un proceso iterativo, sin embargo, como punto de partida, el diseñador debe escoger un valor con base en su experiencia o tomando como referencia catálogos de los fabricantes.

Para el valor asumido de  $T_r$  y con el valor estimado de  $D_l$  se encuentra  $D_r$  con la ecuación (9.52). Esta ecuación resulta de la combinación de las ecuaciones (9.25), (9.26) y (9.27). Esta solución asegura que el dispositivo tenga la rigidez  $k_d$

$$D_r = \sqrt{\frac{4k_d T_r}{1.1\pi G_r} - D_l^2} \quad (9.52)$$

Para el diámetro externo encontrado, es necesario comprobar la estabilidad del dispositivo calculando el factor de seguridad contra inestabilidad. Este proceso fue descrito anteriormente. Se recomienda tener un factor de seguridad contra la inestabilidad de al menos 1.5

**PASO 4: Chequeo de niveles de deformación en el elastómero.** La deformación de corte en el elastómero deberá estar por debajo de los límites especificados en las ecuaciones (9.43), (9.44) y (9.45). El cálculo de las deformaciones se realiza como se explica en esa sección. Si los niveles de deformación son menores a los límites especificados entonces la altura seleccionada fue adecuada. Caso contrario la altura del dispositivo debe incrementarse y el proceso repetirse desde el PASO 3.

Si se incrementa la altura, se debe tener en cuenta que la estabilidad del dispositivo se verá afectada. El incrementar la altura también incrementa el costo del dispositivo.

Cuando los límites de deformación no puedan satisfacerse, el diseñador deberá considerar el uso de otro dispositivo en lugar del LRB.

La altura total del dispositivo sin considerar las placas de sujeción puede estimarse considerando placas de confinamiento de 1mm de espesor. El uso de placas de otros espesores es normalmente estudiado por el fabricante.

**PASO 5: Verificación de las dimensiones del núcleo de plomo.** Un valor refinado de  $V_y$  puede despejarse de la ecuación (9.30) y el correspondiente valor de  $D_l$  de la ecuación (9.29). Si este último valor difiere significativamente del estimado en el paso 2, el proceso de diseño deberá repetirse desde el paso 3 con el nuevo valor de  $D_l$ .

**PASO 6: Calcular factores de ajuste y propiedades máximas y mínimas para el dispositivo.**

En los pasos anteriores se han encontrado todos los factores que definen la respuesta lateral del dispositivo. Además se ha comprobado que el dispositivo es estable, que tiene una adecuada capacidad de restauración y que el elastómero no alcanza límites de deformación críticos.

El siguiente paso es obtener las propiedades de un dispositivo real (obtenidas del fabricante), construible, cuyas propiedades se acerquen lo más posible a las propiedades obtenidas en el diseño. Estas propiedades se obtienen generalmente con ensayos de carga realizados sobre los prototipos de los dispositivos. Así lo disponen FEMA 450 y AASHTO. Además estas propiedades deberán modificarse para considerar los efectos de cambios en la temperatura, envejecimiento y de otros factores ambientales. Buckle y Constantinou, (2006).

Una vez que se conocen las propiedades reales del dispositivo que se instalara en el sistema de aislamiento se procede con el diseño de la superestructura.

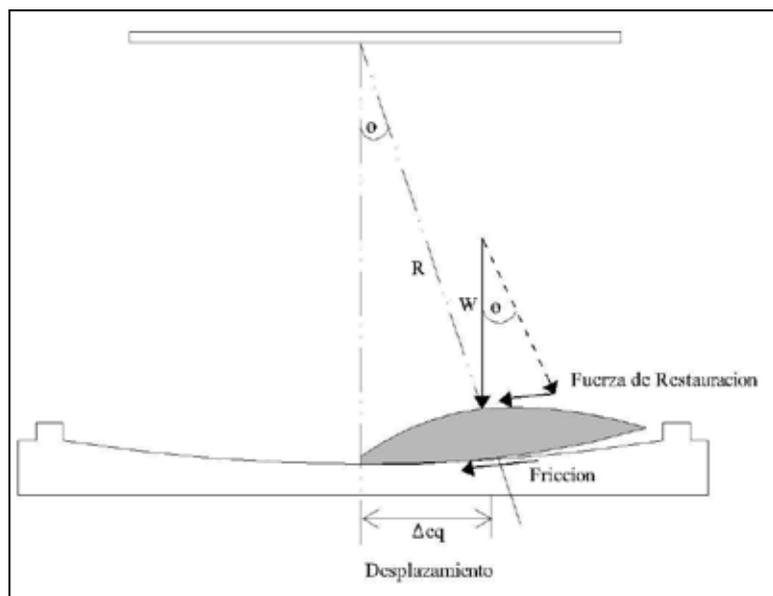
## 9.7 DISEÑO DE PENDULOS FRICCIONANTES (FPS)

La respuesta de los FPS está gobernada por la misma ecuación que gobiernas el movimiento de péndulos convencionales. Por lo tanto su periodo de vibración es directamente proporcional al radio de curvatura de la superficie cóncava,  $R$ . La disipación de energía en este tipo de dispositivo se produce por la fricción entre deslizador articulado y la superficie cóncava, al mismo tiempo que la carga axial,  $P$ , crea una fuerza de restauración debida a la curvatura del dispositivo. El funcionamiento del FPS se esquematiza en la figura 9.12

### 9.7.1 Filosofía de Diseño

A continuación se presentan algunos criterios para el diseño de estos dispositivos:

- La capacidad de desplazamiento del dispositivo deberá ser mayor o igual que la máxima demanda calculada en el diseño. El cálculo de la demanda debería considerar el SMC y los efectos del envejecimiento, cambios de temperatura, etc. en las propiedades del elemento.
- A diferencia de los LRBs, los FPS debido a su configuración y construcción en acero, tienen gran capacidad de carga axial, gran capacidad de desplazamiento y no tienen problemas de estabilidad.



**Figura 9.12** Funcionamiento de un FPS.

La teoría que se presenta a continuación puede ser usada de distintas formas para el diseño de los FPSs. Sea cual fuere el procedimiento utilizado el diseño debe resultar en la siguiente información necesaria para que el fabricante pueda construir el dispositivo:

- a) Diámetro
- b) Radio de curvatura

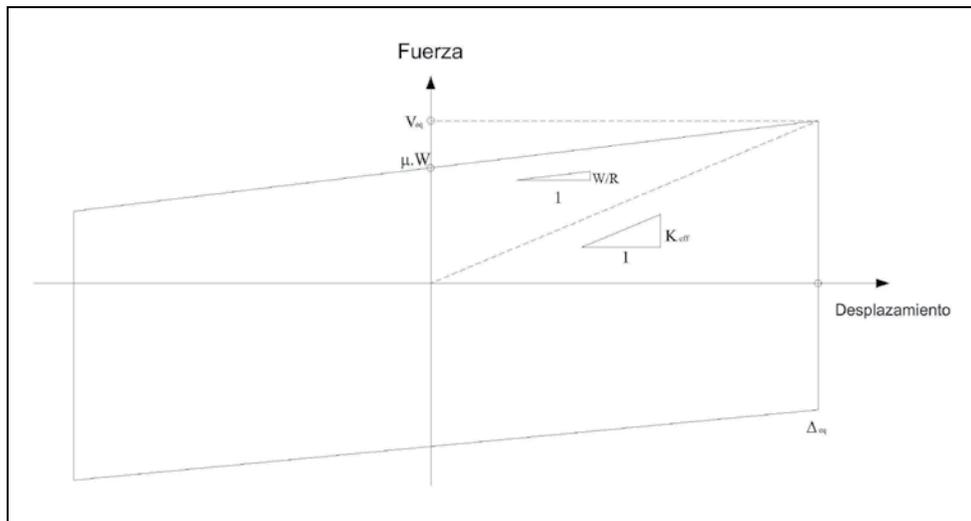
## c) Coeficiente de fricción

Al igual que con los LRB, una vez que estos parámetros son definidos, es conveniente que el diseñador busque en los catálogos de los fabricantes dispositivos que con las mismas o superiores características. El utilizar dispositivos que aparecen en los catálogos siempre será más económico que utilizar dispositivos especialmente fabricados para el proyecto. Otra recomendación importante es utilizar a medida de lo posible el mismo tipo de dispositivo en toda la estructura. Aunque esto pudiera parecer a primera vista poco óptimo, resulta conveniente económicamente debido al ahorro que produce al no tener que realizar las costosas pruebas de laboratorio necesarias para establecer las propiedades reales de los prototipos previo a la diseño final y construcción de la estructura. Detalles específicos sobre las especificaciones de los materiales, espesores de las superficies de contacto son comúnmente manejados por el fabricante.

### 9.7.2 Respuesta fuerza lateral – desplazamiento del FPS

La respuesta fuerza lateral-desplazamiento de un FPS puede ser idealizada como se muestra en la figura 9.13 con una histéresis bilineal. Este modelo captura los principales rasgos del comportamiento del dispositivo aunque ignora los efectos de la velocidad de aplicación de la carga lateral y de los cambios en carga axial en la respuesta. Del análisis de la figura 9.12 y 9.13 se obtienen muchas de las relaciones necesarias para el diseño del dispositivo.

La resistencia al desplazamiento lateral del dispositivo tiene dos componentes. El primero es por la fricción generada entre el deslizador articulado y la superficie cóncava. Esta fuerza resulta del producto de la fuerza normal a la superficie,  $W\cos(\theta)$ , y el coeficiente de fricción dinámico entre las dos superficies en contacto,  $\mu$ . La fuerza de fricción es el único componente de resistencia que existe cuando el dispositivo está en su posición no desplazada tal como se observa en la figura 9.13.



**Figura 9.13** Modelo idealizado de respuesta lateral de un FPS.

La otra fuente de resistencia viene de la componente de  $W\sin(\theta)$  que actúa como fuerza de restauración en dirección tangencial a la superficie cóncava. Cuando el

desplazamiento,  $\Delta_{eq}$ , del dispositivo es pequeño comparado con su radio de curvatura,  $R$ , el  $\cos(\theta)$  se aproxima a 1 y el  $\sin(\theta)$  a  $\Delta_{eq}/R$ . Por lo tanto la fuerza lateral  $V_{eq}$  del FPS se relaciona con el desplazamiento  $\Delta_{eq}$  por medio de la ecuación (9.53) en donde la resistencia característica del dispositivo  $Q_d$  viene dada por la ecuación (9.54) y la rigidez post-fluencia,  $k_d$ , por la ecuación (9.55).

$$V_{eq} = \mu W + \frac{W}{R} \Delta_{eq} \quad (9.53)$$

$$Q_d = \mu W \quad (9.54)$$

$$k_d = \frac{W}{R} \Delta_{eq} \quad (9.55)$$

Al relacionar  $V_{eq}$  en la ecuación (9.53) con el desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq}$  se obtiene la rigidez efectiva  $K_{eff}$  dada por (9.56).

$$K_{eff} = \frac{\mu W}{\Delta_{eq}} + \frac{W}{R} \quad (9.56)$$

La fuerza de restauración que trata de devolver al dispositivo a su posición original luego del sismo depende directamente de  $k_d$ . FEMA 450 requiere para el diseño de edificios aislados, que la fuerza de restauración al nivel de desplazamiento de diseño,  $\Delta_{eq}$ , sea al menos  $W/40$  mayor que la fuerza de restauración a 50% del  $\Delta_{eq}$ . Donde  $W$  es la carga gravitacional que soporta el dispositivo. Esta condición se cumple con la siguiente ecuación:

$$k_d \geq \frac{W}{20\Delta_{eq}} \quad (9.57)$$

La especificaciones para el diseño de puentes aislados de AASHTO (2000) son menos exigentes y requieren que la fuerza de restauración a  $\Delta_{eq}$ , sea al menos  $W/80$  mayor que la fuerza de restauración a 50% del  $\Delta_{eq}$  y que el periodo de vibración del sistema de aislamiento calculado en base  $k_d$  sea menor que 6 segundos. Estos dos requisitos se satisfacen con las siguientes ecuaciones:

$$k_d \geq \frac{W}{40\Delta_{eq}} \quad (9.58)$$

$$k_d \geq \frac{4\pi^2 W}{36g} \quad (9.59)$$

Al igual que en el caso de los LRB, el amortiguamiento equivalente de los FPS puede estimarse con el método de Jacobsen en función del área de la curva de histéresis, lo que resulta en la ecuación (9.57).

$$\xi_A = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\mu}{\mu + \frac{\Delta_{eq}}{R}} \right) \quad (9.60)$$

### 9.7.3 Procedimiento de Diseño

A continuación se presenta un procedimiento de diseño para FPSs, derivado de la teoría presentada anteriormente. Este procedimiento produce el diseño completo del dispositivo con los siguientes datos de entrada:

1. Desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq}$
2. Desplazamientos laterales causados por cargas de servicio  $\Delta_s$
3. Resistencia lateral requerida para el sismo de diseño  $V_{eq}$
4. Mínima resistencia lateral requerida por cargas de servicio  $V_s$
5. Peso soportado por el dispositivo,  $W$
6. Amortiguamiento equivalente,  $\xi_A$  usado para el cálculo de  $V_{eq}$

Con esta información el diseño se ejecuta de la siguiente manera:

**PASO 1: Determinación del radio de curvatura  $R$  y coeficiente de fricción  $\mu$ .** Estos valores se obtienen iterando con las ecuaciones (9.58) y (9.59). Con estas ecuaciones se soluciona el sistema de ecuaciones formado por (9.53) y (9.57).

$$\mu = \frac{V_{eq}}{W} - \frac{\Delta_{eq}}{R} \quad (9.61)$$

$$R = \frac{\Delta_{eq} \xi_A}{\frac{2}{\pi} \mu^2 - \xi_A \mu} \quad (9.62)$$

Para empezar, el valor de  $R$  se puede tomar igual a 40 veces  $\Delta_{eq}$  si es que el FPS se instalara en un puente o igual a 20 veces  $\Delta_{eq}$ , si es que se instala en un edificio. En cada caso, utilizar valores mayores de  $R$  causa que el dispositivo no cumpla con los requisitos de fuerza de restauración mínimos descritos anteriormente, ecuaciones (9.57) a (9.59).

Con el valor estimado de  $R$  se calcula  $\mu$  con la ecuación (9.61), para luego obtener un valor refinado de  $R$  con la ecuación (9.62). Con el nuevo valor de  $R$  se calcula  $\mu$  con la ecuación (9.61) y se repite el proceso hasta que converja.

El resultado de este proceso son los valores de  $R$  y  $\mu$  necesarios para que el FPS desarrolle la resistencia requerida y el amortiguamiento meta considerado en el cálculo de las fuerzas de diseño. Si  $R$  converge en un valor mayor los requeridos por (9.57) o (9.58), el cálculo de la fuerza de diseño  $V_{eq}$  deberá repetirse con un menor valor de amortiguamiento equivalente.

**PASO 2: Determinación del diámetro del dispositivo.** El FPS deberá tener un tamaño suficiente para acomodar los desplazamientos laterales por cargas de servicio más los

desplazamientos generados por el MSC. El diámetro mínimo requerido para el dispositivo se calcula con la ecuación (9.63).

$$D_{fps} = 2(\Delta_{MSC} + \Delta_s) \quad (9.63)$$

### **PASO 3: Calcular factores de ajuste y propiedades máximas y mínimas para el dispositivo.**

En los pasos anteriores se han encontrado todos los factores que definen la respuesta lateral del dispositivo. Además se ha determinado el diámetro mínimo para el FPS. El siguiente paso es obtener del fabricante, las propiedades de un dispositivo real, construible, cuyas propiedades se acerquen lo más posible a las propiedades obtenidas en el diseño. Estas propiedades se obtienen generalmente con ensayos de carga realizados sobre los prototipos de los dispositivos. Así lo disponen FEMA 450 y AASHTO. Además estas propiedades deberán modificarse para considerar los efectos de cambios en la temperatura, envejecimiento y de otros factores ambientales. Buckle y Constantinou, (2006).

Una vez que se conocen las propiedades reales del dispositivo que se instalara en el sistema de aislamiento se procede con el diseño de la superestructura.

## **REFERENCIAS**

1. AASHTO, (2000), *Guide Specification for Seismic Isolation Design*, <https://bookstore.transportation.org/>.
2. Buckle, I.G, Constantinou, M., (2006), *Seismic Isolation of Highway Bridges*, <http://mceer.buffalo.edu>.
3. Buckle, I.G, Liu, H. ,(1994), "Critical Loads of Elastomeric Isolators at High Shear Strain". *Proc. 3<sup>rd</sup> US-Japan Workshop on Earthquake Protective Systems for Bridges*".
4. Calvi M, Kingsley GR. (1997) *Displacement-based seismic design of multi-degree-of-freedom bridge structures*.
5. Dwairi, H. and Kowalsky, M.J., (2006), "Implementation of Inelastic Displacement Patterns in Direct Displacement-Based Design of Continuous Bridge Structures", *Earthquake Spectra*, **22 (3)**, 631-662.
6. EuroCode 8, (1998), *Structures in seismic regions – Design. Part 1, General and Building*", Commission of European Communities, Report **EUR 8849 EN**.
7. FEMA, (2003), *NEHRP Recommended Provisions for Seismic Regulations for New Buildings and other Dtructures (FEMA 450)*, disponible en <http://www.fema.gov/library>.
8. Jacobsen L.S., (1930) "Steady forced vibrations as influenced by damping". *ASME Transacione*, **52(1)**, 169-181.

9. Kowalsky M.J. (2002) "A Displacement-based approach for the seismic design of continuous concrete bridges". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **31**, 719-747.
10. Ortiz, J., (2006), "Displacement-Based Design of Continuous Concrete Bridges under Transverse Seismic Excitation". *European School for Advanced Studies in Reduction of Seismic Risk (ROSE School)*.
11. Paulay, T, Priestley, M.J.N., (1992), "Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings", Wiley, 978-0-471-54915-4.
12. Priestley, Calvi and Kowalsky, (2007), *Displacement Based Design of Structures*, IUSS Press.
13. Priestley M. and Kowalsky M. (2000) *Direct Displacement - Based Seismic Design Of Concrete Buildings*. Bulletin Of The New Zealand Society For Earthquake Engineering. **Vol. 33. No.4**.
14. Robinson, (2008), "Catalogue of Robinson Seismic Bearings", <http://www.rslnz.com/>.
15. SEAOC, (2003) *Revised Interim Guidelines Performance-Based Seismic Engineering / Force-Displacement Approach for Performance-Based Seismic Engineering*. Blue Book.
16. Shibata A. and Sozen M. (1976), "Substitute structure method for seismic design in R/C". *Journal of the Structural Division, ASCE*, **102(ST1)**, 1-19.
17. Suarez, V.A. and Kowalsky M.J. (2007), "Displacement-Based Seismic Design of Drilled Shaft Bents with Soil-Structure Interaction", *Journal of Earthquake Engineering*, **11 (6)**, 1010 – 1030.
18. Suarez, V.A., (2008), *Implementation of Direct Displacement Based Design for Highway Bridges*, PhD Dissertation, North Carolina State University.

## CAPÍTULO 10

---

### DISEÑO DE PUENTES CON AISLAMIENTO SÍSMICO

#### 10.1 INTRODUCCIÓN

Luego del terremoto en Loma Prieta en 1989, varias investigaciones fueron realizadas para desarrollar mejores criterios para el diseño sísmico de puentes, enfatizando el uso de desplazamientos en vez de fuerzas como medida de la demanda sísmica y del daño. Varias metodologías para el Diseño Basado en Desplazamientos (DBD) de puentes convencionales emergieron, siendo dos las que han tenido mayor desarrollo:

- El Método de Diseño Directo Basado en Desplazamientos (DDBD) fue propuesto por Priestley en 1993 y ha probado ser efectivo para el diseño basado de pilas de puentes, Kowalsky *et al* (1995), Suárez and Kowalsky (2007), puentes continuos, Calvi and Kingsley (1995), Kowalsky (2002, Dwairi and Kowalsky (2006, Suárez (2008), edificios y otros tipos de estructuras, Priestley *et al* (2007). Tal como fuera explicado en el capítulo 9, DDBD ha sido incorporado al código para el diseño de edificios (SEAOC, 2003). Además DDBD está actualmente está bajo estudio para ser incorporado a las normas ACI-341 para el diseño sísmico por desempeño de Puentes.
- El Diseño Basado en Iguales Desplazamientos, fue implementado por el Departamento de Transportes de California (Caltrans, 2006) en 1999, aceptando las recomendaciones del proyecto ATC-32 (ATC 1996). Recientemente AASHTO aprobó la Especificación Guía para Diseño Sísmico LRFD de Puentes, Imbsen (2007), en base a las normas de Caltrans y a los resultados del proyecto NCHRP 12-49 (ATC 2003)

En lo que respecta al diseño de puentes con aislamiento sísmico, las primeras aplicaciones datan de los años 70 en Nueva Zelanda, Italia y Japón. Sin embargo la aplicación sistemática de esta tecnología ocurre desde los años 90, Kawashima, (1993). Actualmente, el 90% de las estructuras aisladas en el mundo son puentes, Buckle, (2006).

En Japón, el primer intento para desarrollar una metodología para aislamiento sísmico condujo a la publicación de una “Guía para el Aislamiento Sísmico de Puentes”, publicada en 1989 por el Centro de Desarrollo Tecnológico para el Desarrollo de la Tierra. Aunque el uso de esta norma no fue obligatorio, su publicación marco la era del aislamiento sísmico de puentes. Pocos años después, la técnica de diseño de puentes con aislamiento sísmico se denominó diseño “Menshin” y en 1992 se publicó una norma más detallada bajo el nombre de “Manual para el Diseño Menshin de Puentes”. Kawashima (1993).

En los Estados Unidos, el aislamiento sísmico de puentes comenzó a inicios de la década de los noventa primordialmente como una técnica de rehabilitación y reforzamiento estructural más que como una técnica para el diseño de puentes nuevos. La primera “Especificación para el Diseño de Aislamiento Sísmico” fue publicada por AASHTO en 1991. La versión actual de esta normativa fue revisada en el año 2000 (AASHTO 2000).

Las especificaciones estadounidenses suplementan la “Especificación AASHTO Estándar para el Diseño de Puentes” en su 16th edición (AASHTO 2004). Por lo tanto son consistentes con la metodología de diseño basado en fuerzas de esa normativa.

Observando la evolución del diseño sísmico de puentes convencionales, y de las múltiples ventajas que el diseño basado en desplazamientos ofrece, este capítulo se enfocará exclusivamente en el Diseño Directo Basado en Desplazamientos de puentes con aislamiento sísmico. Adicionalmente a la presentación ejemplos de diseño, se incluye un ejemplo sencillo de análisis inelástico de historia del tiempo utilizando OpenSees.

## 10.2 FILOSOFIA DE DISEÑO

El diseño sísmico se realiza después de que se haya realizado el diseño por cargas no-sísmicas. Inclusive, la decisión de aislar a un puente viene después de que no se ha logrado un diseño sísmico satisfactorio sin aislamiento.

Tanto en las normas de diseño japonesas como en las estadounidenses, se establece el aislamiento sísmico como una técnica para mejorar el desempeño de la estructura y no para disminuir la demanda de resistencia y tamaño de las secciones de la subestructura. Por lo tanto, es común que los puentes aislados se diseñen para que las pilas y estribos respondan elásticamente, con desplazamientos menores que los de fluencia, mientras que todo el desplazamiento inelástico se concentra en el sistema de aislamiento. Parte esencial del proceso de diseño es estimar la demanda global de desplazamiento, de manera que las juntas en los estribos puedan ser apropiadamente diseñadas.

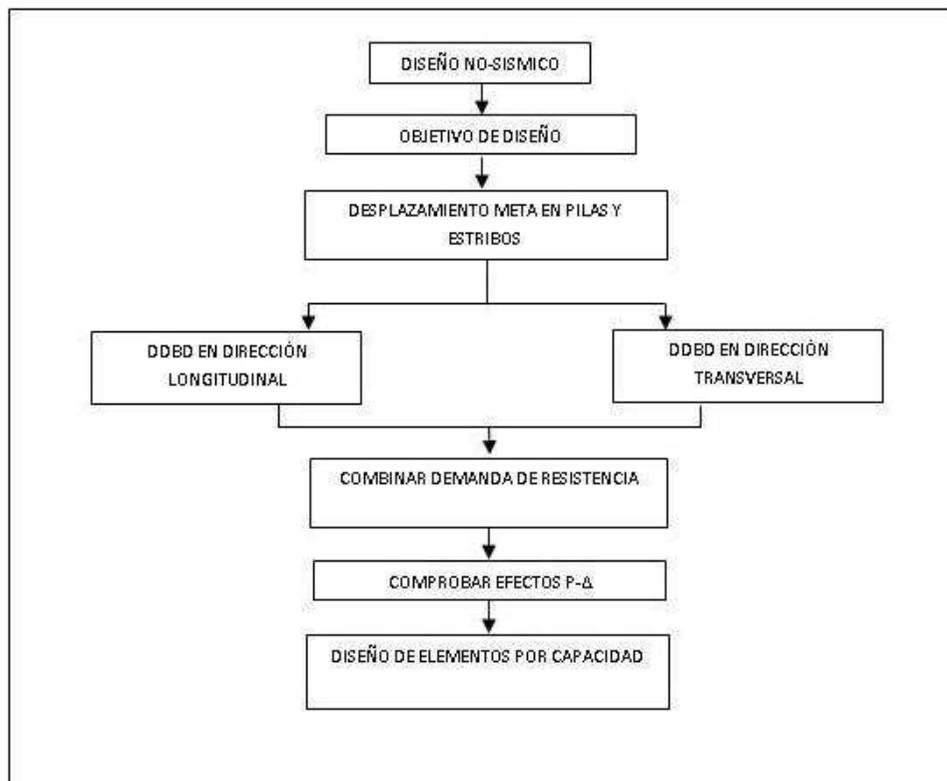
Los sistemas de aislamiento se diseñan para no activarse bajo cargas no-sísmicas tales como viento, frenado, fuerza centrífuga entre otras. Además, los dispositivos de aislamiento deben tener características de auto-centrado y estabilidad.

DDBD es compatible con todos estos principios para el diseño de puentes aislados. La aplicación de este método se presenta a continuación.

## 10.3 DDBD DE PUENTES AISLADOS

Los fundamentos del DDBD de puentes son los mismos descritos en la sección 9.5 para edificios, por lo tanto no hace falta repetirlos. No obstante, es importante recordar que:

- DDBD es una herramienta para el diseño basado en desempeño que permite diseñar una estructura para que alcance cualquier nivel de desempeño bajo cualquier nivel de daño.
- DDBD parte de un perfil de desplazamiento meta y retorna la resistencia que la estructura deber tener para alcanzar el nivel de desempeño previsto bajo el sismo de diseño.
- DDBD usa el concepto de estructura substituta mediante el cual la estructura real es remplazada por una elástica con rigidez secante al desplazamiento de diseño, periodo efectivo correspondiente a la rigidez secante, y amortiguamiento equivalente para que la estructura substituta alcance un máximo desplazamiento igual al de la estructura real.
- En el DDBD se asume el modo de vibración para las estructuras de múltiples grados de libertad. En función de la forma de desplazamiento seleccionada se calculan el desplazamiento y masa de un sistema de un grado de libertad equivalente.
- El método de DDBD es aplicable a puentes convencionales, asilados y puentes con interacción suelo estructura.

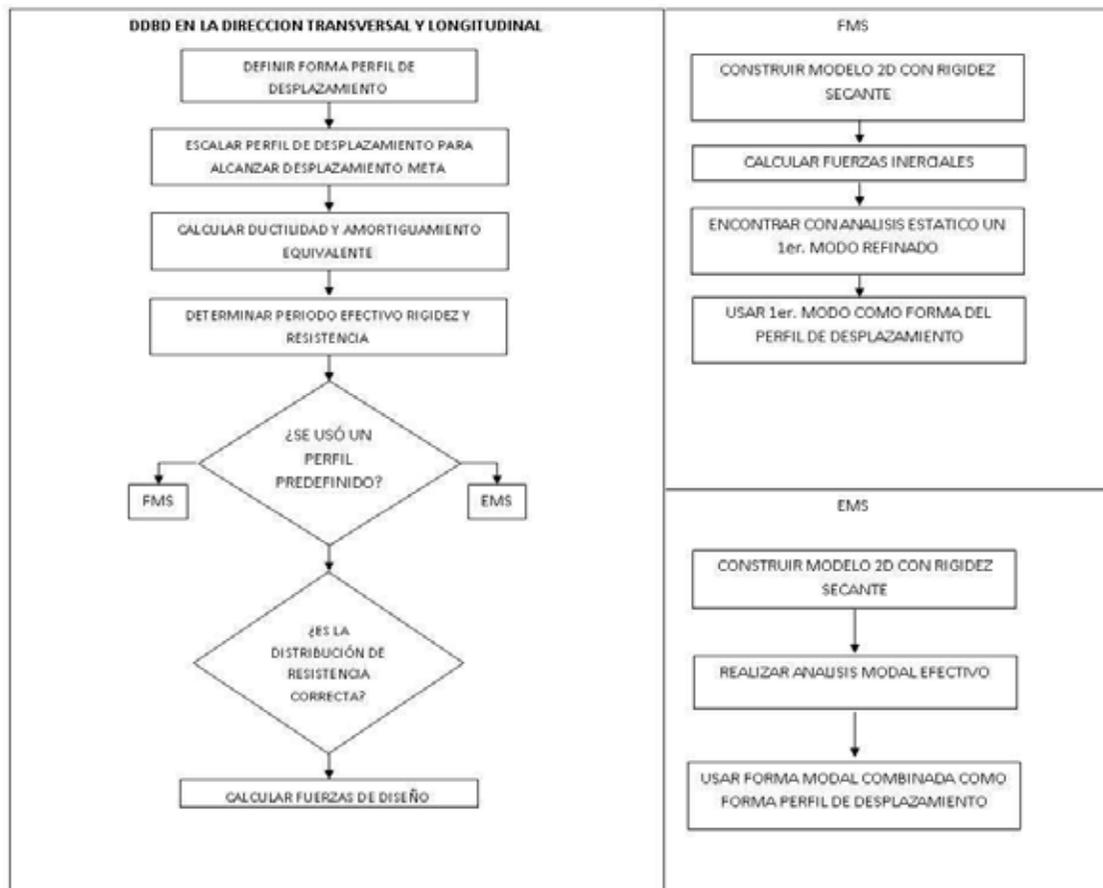


**Figura 10.1** Diagrama de flujo general para la aplicación de DDBD

El procedimiento de aplicación del DDBD se muestra en la figura 10.1. El puente debe previamente diseñarse por cargas no-sísmicas de manera que su configuración, la sección de su superestructura y su cimentación sean conocidas. DDBD comienza con la postulación de un

objetivo de diseño en el que se definen el desempeño esperado y el sismo de diseño. Luego un perfil de desplazamiento meta es determinado. Entonces, DDBD es aplicado en la en los ejes transversal y longitudinal del puente, los resultados son combinados, los efectos P- $\Delta$  controlados y el refuerzo de las secciones es diseñado y detallado de acuerdo a los principios del diseño por capacidad.

Los diagramas de flujo en la figura 10.2 muestran el procedimiento de aplicación de DDBD en los ejes transversal (perpendicular al tráfico) y longitudinal (paralelo al tráfico) de un puente convencional, como parte del proceso mostrado en la figura 10.1. Como se ve en la figura 10.2 existen tres variaciones del procedimiento: (1) Si la forma del perfil de desplazamiento es conocida, DDBD es aplicado directamente; (2) Si la forma del perfil de desplazamiento es desconocida pero dominada por el primer modo de vibración, el algoritmo iterativo FMS es usado, Calvi and Kingsley (1995); (3) Si la forma del perfil de desplazamiento es desconocida pero dominada por la combinación de varios modos de vibración, el algoritmo iterativo EFM es empleado. Kowalsky (2002).



**Figura 10.2** Diagramas de flujo complementarios para DDBD

Es importante notar que la aplicación de DDBD no requiere análisis Pushover u otro tipo de análisis no-lineal. El diseño de un puente en el cual la forma del perfil de desplazamiento puede predecirse requiere de la ejecución de cálculos manuales solamente. La aplicación del algoritmo FMS requiere análisis estático en dos dimensiones y el EMS requiere análisis modal espectral.

En la implementación de DDBD para puentes aislados se debe considerar los siguientes aspectos:

### 10.3.1 Tipos de puentes y pilas que se pueden diseñar con DDBD

Muchas investigaciones realizadas en la década pasada han mostrado que DDBD es efectivo para el diseño de los tipos de puentes comúnmente utilizados en las autopistas. Suárez (2008). El diseño en la dirección longitudinal es siempre más sencillo que el diseño en la dirección transversal. En la dirección longitudinal, la superestructura con gran rigidez axial, hace que todos los elementos de la subestructura se desplacen la misma cantidad, generando un solo grado de libertad.

Quando se diseñan puentes convencionales en la dirección transversal, dependiendo de la rigidez relativa entre la superestructura, subestructura y estribos, la superestructura responde como cuerpo rígido o con un perfil de desplazamiento flexible. De ahí que la exactitud y efectividad del DDBD depende en gran medida de la apropiada selección de la forma del perfil de desplazamiento.

La aplicación directa de DDBD, cuando la forma del perfil de desplazamiento es conocida, es mucho más sencilla que cuando se requiere aplicar algoritmos FMS y EMS. Investigaciones recientes, Suárez y Kowalsky (2008) mostraron que formas predefinidas del perfil de desplazamiento pueden usarse de manera efectiva para el diseño de marcos de puentes, puentes con estribos de asiento o otros tipos de estribos con baja resistencia y puentes hasta con dos juntas de expansión en la superestructura. Esto es posible en puentes que tengan una distribución balanceada de masa y rigidez de acuerdo a lo especificado en la norma sísmica AASHTO LRFD. Imbsen (2007). Puentes con estribos integrales requieren la aplicación del algoritmo FMS y el algoritmo EMS puede ser usado con cualquier tipo de puente.

La tabla 10.1 muestra los algoritmos recomendados para el diseño en la dirección transversal de varios tipos de puentes, Suárez y Kowalsky (2008). En esta tabla TCR es Traslación de Cuerpo Rígido. PDL es perfil de desplazamiento lineal, aplicable a puentes donde existen hasta dos juntas de expansión en la superestructura.

**Tabla 10.1** Clasificación de puentes y algoritmos de diseño

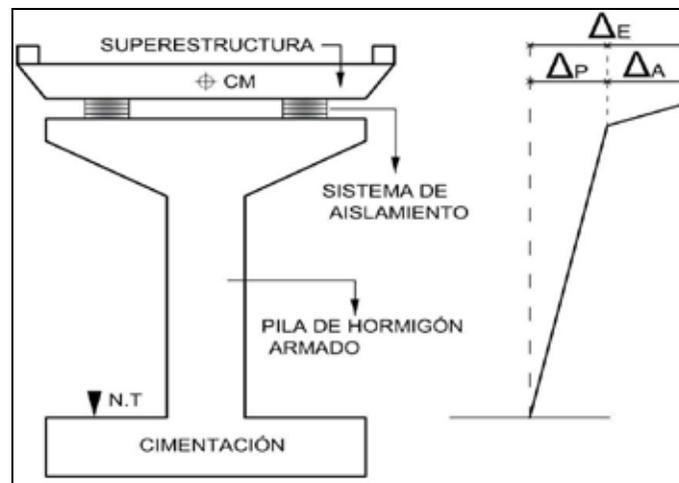
PUENTE	MASA Y RIGIDEZ BALANCEADA	MASA Y RIGIDEZ NO BALANCEADA
MARCO	RBT	EMS
ESTRIBO DEBIL	RBT	EMS
ESTRIBO FUERTE	FMS	EMS
UNA JUNTA DE EXPANSIÓN	LDP1	EMS
DOS JUNTAS DE EXPANSIÓN	LDP2	EMS
MAS DE DOS JUNTAS DE EXPANSIÓN	EMS	EMS
AISLADOS	RBT	EMS

Los diagramas muestran los perfiles de desplazamiento asociados a los algoritmos: RBT (perfil de desplazamiento rígido), FMS (perfil de desplazamiento flexible), LDP<sub>1</sub> (perfil de desplazamiento lineal con una junta de expansión) y LDP<sub>2</sub> (perfil de desplazamiento lineal con dos juntas de expansión).

Debido a la baja rigidez de los dispositivos de aislamiento y al uso del mismo tipo de dispositivo en todas las pilas, la rigidez efectiva de los sistemas pila-aislador es muy similar incluso cuando las pilas tengan distintas alturas. Por esta razón, la mayoría de puentes asilados tienen una distribución balanceada de masa y rigidez y pueden ser diseñados con DDBD en forma directa, asumiendo que la superestructura se desplaza como cuerpo rígido.

En la dirección longitudinal, como ya se mencionó anteriormente, la superestructura se desplaza como cuerpo rígido debido a su rigidez y DDBD puede aplicarse en forma directa.

En cuanto al tipo de pilas que pueden diseñarse con DDBD, estas deben cumplir con dos requisitos: (i) que un desplazamiento meta, basado en nivel de desempeño especificado, pueda establecerse en función de la geometría del elemento; (ii) que el amortiguamiento equivalente pueda estimarse. El primer requerimiento se satisface fácilmente en los tipos de pilas más comunes donde relaciones entre desplazamiento y deformación unitaria, curvatura o ductilidad puede establecerse fácilmente en función de la geometría y configuración del elemento. Priestley *et al* (2007). El segundo requerimiento también puede satisfacerse fácilmente ya que existen modelos, Dwairi (2005), Blandon (2005) que dan el amortiguamiento equivalente en función de la ductilidad de desplazamiento. El detalle de todos los tipos de pilas que pueden diseñarse con DDBD en puentes convencionales se presenta en Suárez (2008).

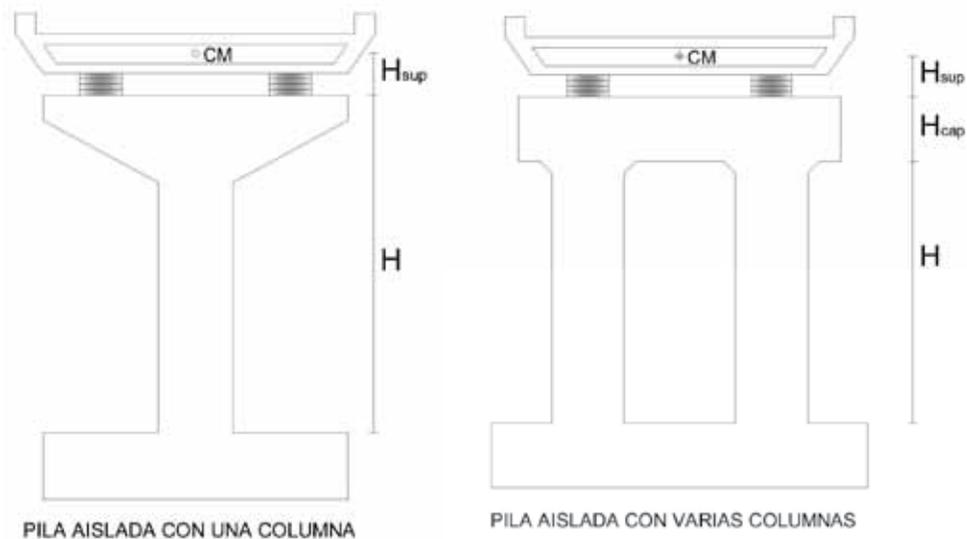


**Figura 10.3** Sistema pila-aislador y su perfil de desplazamiento lateral

En el caso de puentes asilados, las pilas y estribos se conectan a la superestructura mediante dispositivos de aislamiento sísmico, tal como se muestra en la figura 10.3. En los sistemas resultantes pila-aislador y estribo-aislador, los aisladores se funcionan en serie con el elemento que los soporta. El desplazamiento en la cara superior de un sistema pila-aislador resulta de la suma de los desplazamientos de la pila y de los aisladores, y el amortiguamiento también resulta de la combinación de los amortiguamientos en la pila y en los disipadores. Lo mismo sucede en los estribos. Por lo tanto los tipos más comunes de pilas con aisladores sísmicos pueden diseñarse con DDBD puesto que cumplen con los 2 requerimientos antes mencionados para pilas convencionales. La figura 10.4 muestra esquemas de sistemas pila-aislador con una o varias columnas. En la tabla 10.2 se definen los parámetros necesarios para el diseño. En esta tabla  $n_c$  es el número de columnas en la pila. Los otros parámetros se definen en la figura 10.4

**Tabla 10. 2** Parámetros de diseño para pilas aisladas.

TIPO DE PILA	Altura efectiva ( $H_p$ )		Coeficiente para desplazamiento de fluencia ( $C_1$ )		Coeficiente para rigidez ( $C_2$ )		Altura de Corte ( $H_s$ )	
	En plano	Fuera del plano	En plano	Fuera del plano	En plano	Fuera del plano	En plano	Fuera del plano
Pila aislada con una sola columna	$H+L_{SP}$	$H+L_{SP}$	1/3	1/3	1/3	1/3	$H+H_{SUP}$	H
Pila aislada con varias columnas	$H+2L_{SP}$	$H+H_{CAP}+L_{SP}$	1/6	1/3	$n_c/12$	$n_c/3$	H/2	H

**Figura 10.4** Algunos sistemas pila-aislador soportados por DDBD

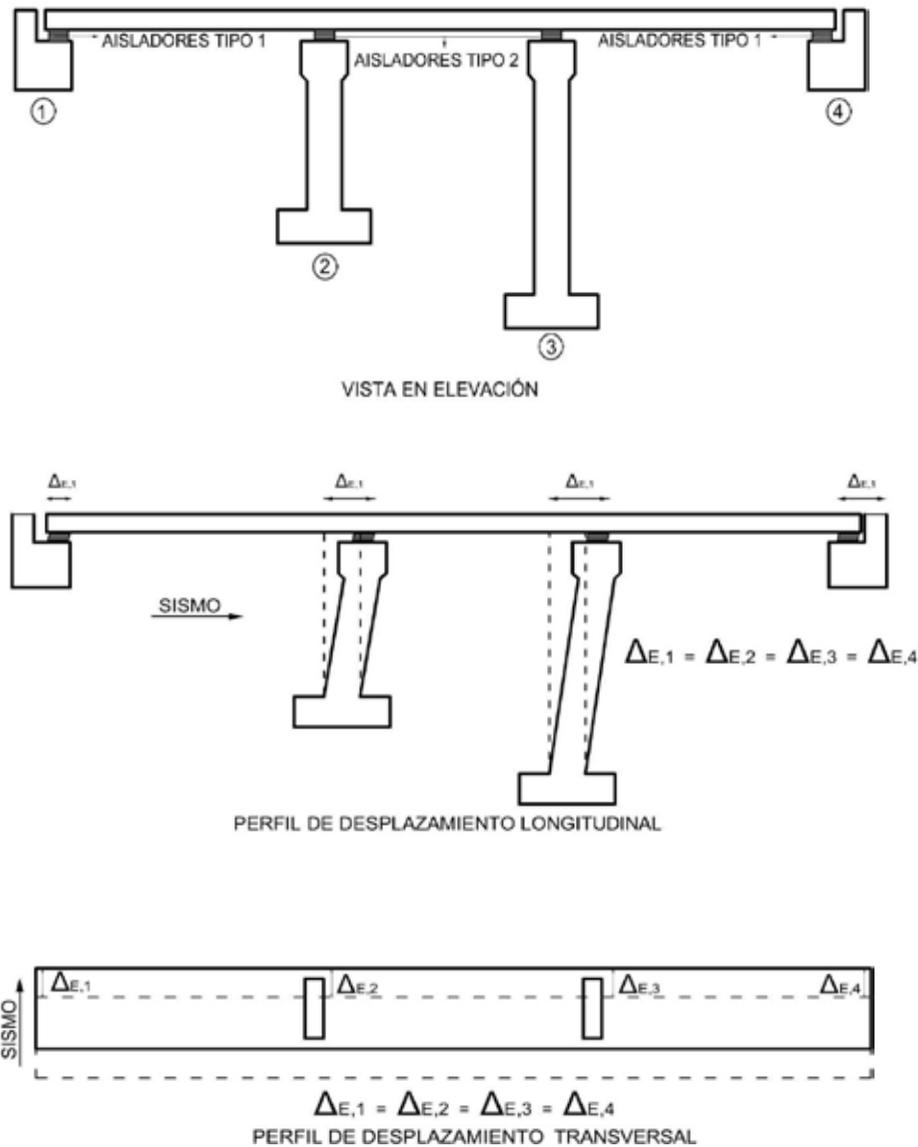
### 10.3.2 Perfil de desplazamiento para puentes asilados

Como se mencionó anteriormente, debido a la baja rigidez de los dispositivos de aislamiento, la superestructura de puentes aislados se desplaza como un cuerpo rígido. En el caso de puentes rectos, esto implica:

- Que en la dirección longitudinal del puente el desplazamiento en todos los puntos de la superestructura es el mismo.
- Que en la dirección transversal, si el puente tiene una distribución regular de masa y rigidez, el centro de rigidez coincide con el centro de masa y por lo tanto el desplazamiento en todos los puntos de la superestructura es el mismo.
- Que en la dirección transversal, si el puente tiene una distribución de masa irregular asimétrica, la excentricidad entre el centro de masa y el centro de rigidez genera desplazamiento con rotación de la superestructura; el desplazamiento en todos los puntos de la superestructura no es el mismo.

Que el desplazamiento de todos los puntos de la superestructura sea el mismo implica que el desplazamiento en la cara superior de los aisladores será el mismo por lo cual el desplazamiento meta para todo el puente será dictado por el sistema pila-aislador o estribo-aislador con el menor desplazamiento de diseño. Tal como se muestra en la figura 10.4

De existir excentricidad de rigidez, esta no puede ser determinada al inicio de la aplicación de DDBD, ya que depende de la rigidez efectiva de cada sistema pila-aislador que se obtiene como resultado al final del diseño. Como resultado de esto es necesario asumir desplazamiento rígido sin rotación para el diseño transversal de puentes aislados.



**Figura 10.5** Perfil de desplazamiento rígido sin rotación para diseño de puentes aislados.

### 10.3.3 Desplazamiento meta para el sistema pila-aislador

La selección de un desplazamiento meta para el diseño de un sistema pila-aislador, figura 10.3, debería seguir los siguientes criterios:

- i. El desplazamiento meta pila-aislador debería ser mayor o igual que el desplazamiento meta para la pila sin aislamiento. Caso contrario, no se lograría mayor ventaja en la reducción de las fuerzas de diseño.
- ii. El desplazamiento meta pila-aislador no debería ser mayor que el que causa que se rebase el índice de estabilidad especificado para limitar los efectos P- $\Delta$ .
- iii. El desplazamiento meta pila-aislador no debería ser mayor que el desplazamiento que se pueda acomodar con juntas en los estribos del puente.
- iv. El desplazamiento meta para los dispositivos de aislamiento deberían estar dentro de los límites especificados por el fabricante

#### Calculo del desplazamiento mínimo basado en el desplazamiento de la pila sin aislamiento.

Los puentes convencionales (sin aislamiento) se diseñan para que las pilas formen rotulas plásticas. El desplazamiento meta en este caso se estima con el método de la rotula plástica, Priestley y Calvi (1995) en donde el desplazamiento meta,  $\Delta_d$ , es la suma del desplazamiento de fluencia,  $\Delta_y$ , y del desplazamiento plástico, como se muestra en la ecuación (10.1).

El desplazamiento de fluencia,  $\Delta_y$  es dado por la ecuación (10.2). En estas ecuaciones,  $\phi_d$  es la curvatura de diseño en la sección crítica de la pila;  $\phi_y$  es la curvatura de fluencia en la misma sección;  $L_p$  es la longitud de la rotula plástica calculada con la ecuación (10.3) Priestley *et al* (2007);  $H_p$  y  $C_1$  se toman de la tabla 10.2;  $L_{sp}$  es la longitud de penetración de deformación calculada con la ecuación (10.4) en términos de la resistencia de fluencia del acero de refuerzo a flexión,  $f_y$ , y del diámetro de las barras de refuerzo,  $d_{bl}$ .

$$\Delta_{DC} = \Delta_y + \phi_p L_p H_p \quad (10.1)$$

$$\Delta_y = C_1 \phi_y H_p^2 \quad (10.2)$$

$$L_p = k H_s + L_{sp} \quad k = 0.2 \left( \frac{f_u}{f_y} - 1 \right) \leq 0.07 \quad (10.3)$$

$$L_{sp} = 0.022 f_y d_{bl} \quad (\text{MPa}) \quad (10.4)$$

Para columnas circulares, la curvatura de fluencia  $\phi_y$  puede ser estimada con la ecuación (10.5), en función de la del diámetro de la sección,  $D$ , y de la deformación de fluencia del acero de refuerzo a flexión,  $\epsilon_y$ .

$$\phi_y = 2.25 \frac{\epsilon_y}{D} \quad (10.5)$$

La curvatura plástica de diseño dependerá del nivel de desempeño especificado para la estructura. Tal como fue indicado en el inicio de este capítulo, generalmente los puentes convencionales se diseñan para que alcancen el estado límite de “control de daño” bajo el ataque del sismo de diseño. La curvatura plástica de control de daño puede ser estimada con la ecuación (10.6) en función de la carga axial,  $P$ , en la sección, del área de la sección  $A_g$ , de la resistencia a la compresión del concreto,  $f'_c$ , y de otros parámetros ya definidos. Kowalsky (2002).

$$\phi_p = \frac{\left(0.068 - 0.068 \left(\frac{P}{A_g * f'_c}\right)\right)}{D} - \phi_y \quad (10.6)$$

### **Cálculo del desplazamiento máximo basado en estabilidad**

Los efectos P- $\Delta$  deber ser limitados para preservar la estabilidad durante los terremotos. Estos efectos son usualmente cuantificados a través de un índice de estabilidad,  $\theta_s$ , que relaciona los momentos P- $\Delta$  inducidos en las secciones de columna con su capacidad a flexión. Para puentes convencionales diseñados con DDBD, si  $\theta_s$  excede 30%, el diseño debe ser repetido reduciendo el desplazamiento meta para la pila bajo diseño.

Para evitar un proceso iterativo, el desplazamiento de diseño con el que se alcanza un valor predefinido del índice de estabilidad puede estimarse al inicio del diseño con la ecuación 10.7 Suárez and Kowalsky (2008). En donde la constante,  $C$ , calculada con 10.8, es una función del periodo de esquina del espectro de diseño,  $T_c$ , (ver figura 9.6), del desplazamiento espectral máximo,  $S_{dm}$ , del desplazamiento de fluencia de la pila,  $\Delta_y$ , de la carga axial que soporta  $P$ , de la masa efectiva  $M_{eff}$  y de su altura  $H_p$ .

$$\Delta_{\theta_s} = \Delta_y \left(1.256 - 0.126C - 0.766 \frac{C - 0.724}{C}\right) \quad (10.7)$$

$$C = \frac{T_c \Delta_y}{2\pi S_{dm}} \sqrt{\frac{P}{\theta_s M_{eff} H_p}} \quad (10.8)$$

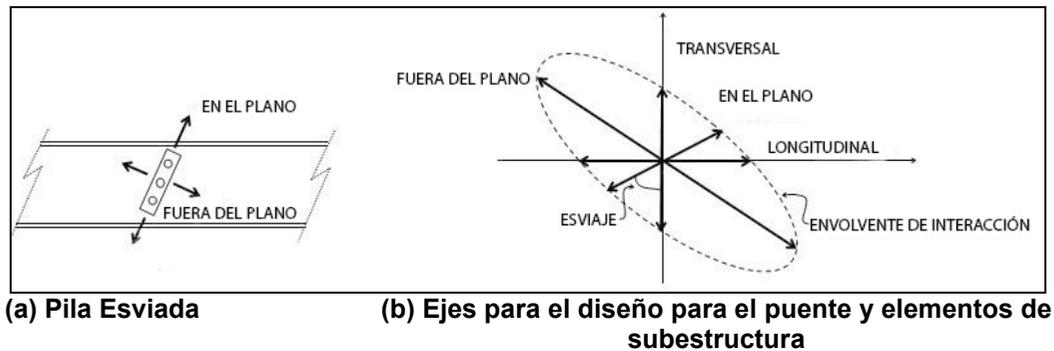
Este modelo fue derivado para pilas aisladas que se desplazan en su plano o fuera de él. La masa efectiva  $M_{eff}$  puede ser calculada tomando un área tributaria de superestructura y añadiendo la masa de la viga cabezal y una porción de la masas de las columnas (1/3 es apropiado). En esa investigación también se verifico que el modelo funciona con puentes regulares, donde la demanda de ductilidad es similar para todas las pilas. No obstante, aunque la aplicación de este modelo reduce la necesidad de iteración, los efectos P- $\Delta$  deberán comprobarse al final de diseño.

### **Comparación de desplazamientos y obtención del desplazamiento meta**

Si el desplazamiento basado en efectos P- $\Delta$  resulta ser menor que el desplazamiento meta calculado para otros estados límites, entonces el desplazamiento P- $\Delta$  se debería utilizar como desplazamiento de diseño.

### 10.3.4 Esviaje en pilas y estribos

Es muy común encontrar puentes en los que los estribos y pilas tienen esviaje para permitir la alineación adecuada de pasos bajo el puente. Desde la perspectiva de diseño, el efecto del esviaje es que los ejes locales de las pilas o estribos ya no están alineados con los ejes globales del puente. Los ejes locales se orientan en el plano y perpendicular al plano de la subestructura. Los ejes globales se alinean en la dirección longitudinal y transversal del puente como se muestra en la figura 10.6



**Figura 10.6** Ejes locales y ejes globales para DDBD

Los efectos del esviaje pueden ser considerados en DDBD al determinar la proyección de los parámetros de diseño, tales como el desplazamiento de fluencia,  $\Delta_y$ , desplazamiento meta  $\Delta_E$ , altura de corte  $H_s$  y otros con respecto a los ejes globales del puente. Tal determinación puede hacerse usando la función de interacción elíptica dada en ecuaciones (10.9) y (10.10).

$$rp_T = rp_{IN} + skew \frac{rp_{OUT} - rp_{IN}}{90} \quad (10.9)$$

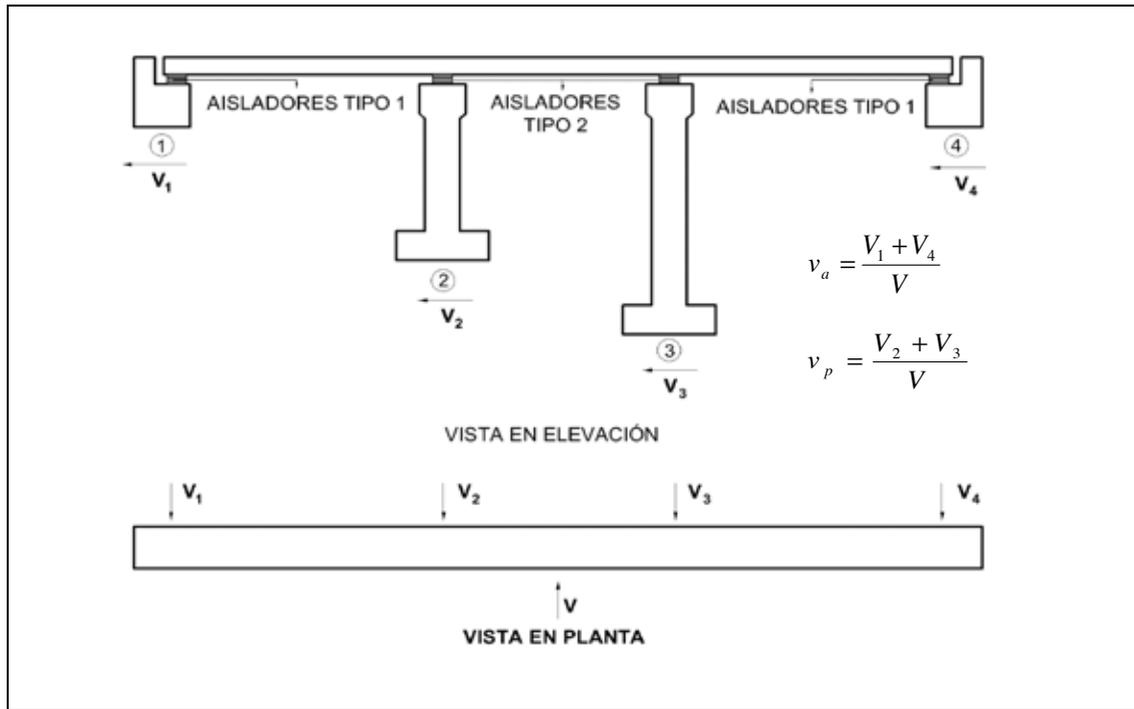
$$rp_L = rp_{OUT} + skew \frac{rp_{IN} - rp_{OUT}}{90} \quad (10.10)$$

Donde,  $rp_{IN}$  es el valor del parámetro de respuesta en el plano del elemento,  $rp_{OUT}$  es el parámetro de respuesta fuera del plano del elemento,  $rp_T$  es la proyección del parámetro de respuesta en la dirección transversal y  $rp_L$  es la proyección del parámetro de respuesta en la dirección longitudinal.

### 10.3.5 Distribución de resistencia

Existen dos caminos de carga para las fuerzas inerciales que se generan en la superestructura de los puentes. Uno es a través de los estribos y otro a través de las pilas. En el caso de puentes aislados, la proporción del cortante basal,  $V$ , que se transmite a través de los estribos, puede ser seleccionada por el diseñador. Además, la forma en que el cortante basal se distribuye entre las pilas también puede ser decidida por el diseñador. Esto es posible

porque la distribución de fuerzas entre los elementos de la subestructura es proporcional a su rigidez efectiva (secante al desplazamiento máximo) y no a su rigidez inicial.



**Figura 10.7** Distribución de resistencia en puentes aislados.

Cuando se diseñan puentes aislados resulta práctico distribuir el cortante entre las pilas en partes iguales. De esta forma la fuerza lateral de diseño para los dispositivos de aislamiento sobre las pilas es la misma y por lo tanto un mismo tipo de dispositivo puede usarse. La distribución de cortante es esquematizada en la figura 10.7 donde  $v_a$  es la proporción de  $V$  tomada por los estribos,  $v_p$  es la proporción de  $V$  tomada por las pilas.

### 10.3.6 Amortiguamiento equivalente

El amortiguamiento equivalente en el puente resulta de la combinación del amortiguamiento entre los sistemas pila-aislador y pila-estribo. La combinación del amortiguamiento se hace en función del trabajo realizado por cada componente (Kowalsky, 2002) tal como se indica en la ecuación 10.11; donde  $\xi_{E-A,i}$  es el amortiguamiento equivalente de del estribo-aislador  $i$  y  $\xi_{P-A,i}$  es el amortiguamiento equivalente en la pila-aislador  $i$ . La ecuación 10.11 considera que los sistemas estribos-aislador y todos los sistemas pila-aislador se desplazan lo mismo.

$$\xi_{eq} = \frac{\sum v_{E-A,i} \xi_{E-A,i} + \sum v_{P-A,i} \xi_{P-A,i}}{v_{E-A} + v_{P-A}} \quad (10.11)$$

La determinación del amortiguamiento equivalente en cada sistema pila-aislador requiere la combinación del amortiguamiento en la pila con el amortiguamiento en los

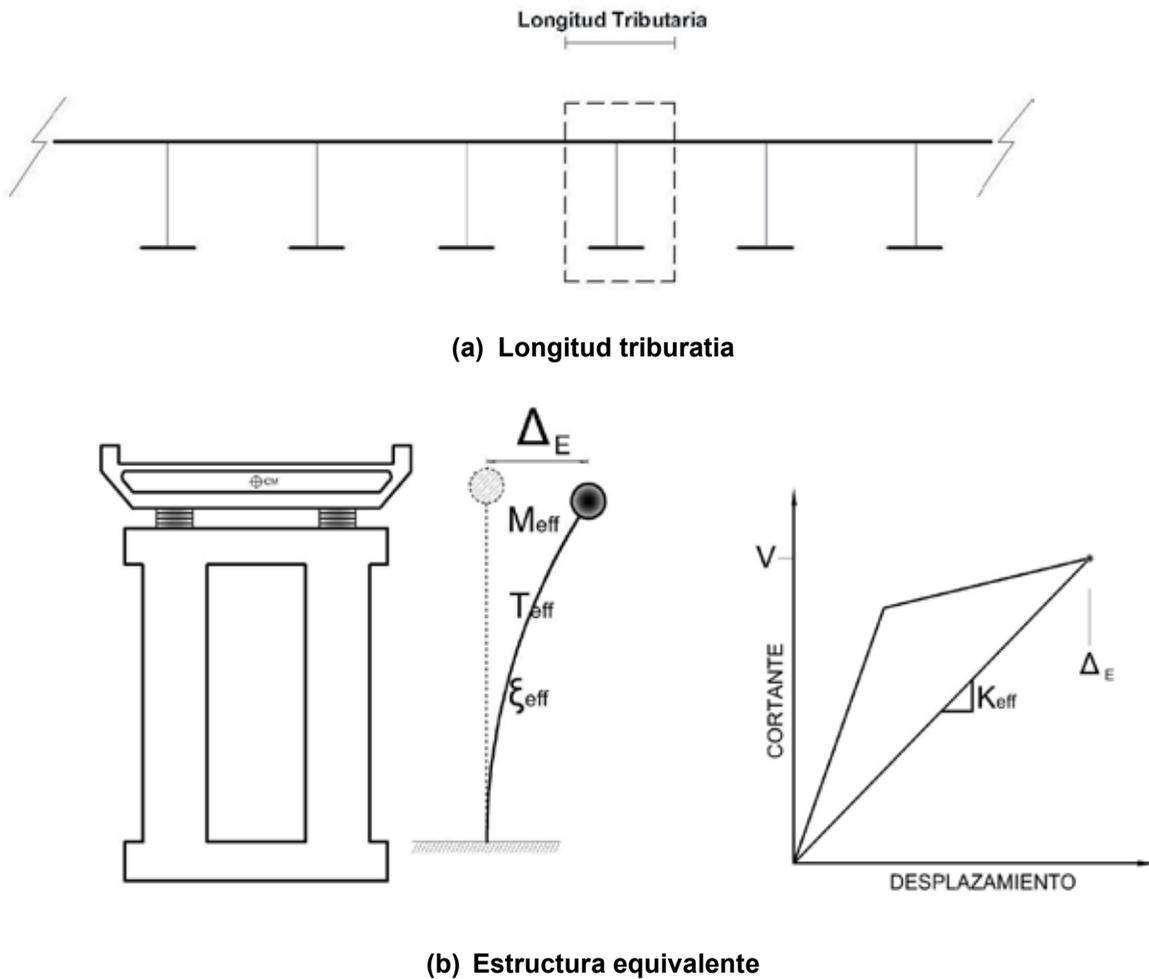
dispositivos de aislamiento sobre esta. Esta combinación también se realiza en términos de trabajo, sin embargo, ya que la fuerza en los dispositivos y la pila es la misma (ver Fig. 10.3), la ecuación 10.12 se presenta en términos del desplazamiento solamente.

$$\xi_{P-A} = \frac{\Delta_p \xi_p + \Delta_A \xi_A}{\Delta_p + \Delta_A} \tag{10.12}$$

El amortiguamiento en las pilas de hormigón armado se calcula con ecuación 10.13. Priestley (2007). Si las pilas se diseñan para permanecer elásticas durante el sismo,  $\xi_p = 5\%$ .

$$\xi_p = 5 + 44.5 \frac{(\mu - 1)}{\pi \mu} \tag{10.13}$$

El amortiguamiento en los sistemas estribo-aislador puede tomarse igual al amortiguamiento de los aisladores que se instalan en los estribos. Esto es posible ya que el desplazamiento de los estribos y por lo tanto su trabajo es pequeño comparado al de los aisladores.



**Figura 10.8** Diseño del sistema pila-aislador como una estructura aislada.

El nivel de amortiguamiento en los dispositivos de aislamiento que se instalan en las pilas y el de los dispositivos que se instalan en los estribos se selecciona por el diseñador. Si el contante basal en las pilas se distribuye en partes iguales, y si se usa al mismo tipo de dispositivo en todas las pilas, entonces el desplazamiento máximo que desarrollaran los dispositivos será en mismo y por ende el amortiguamiento también será el mismo. Lo mismo sucede con los dispositivos que se instalan en los estribos.

### 10.3.7 Diseño del sistema pila-aislador como una estructura aislada

Cuando un puente es largo, regular, con vanos iguales, donde se pueda advertir que no habrá interacción entre las pilas durante la respuesta del puente, cada pila y su sistema de aislamiento pueden ser diseñados en forma independiente. Este análisis considera la pila, el sistema de aislamiento sobre la pila y el peso y masa de la superestructura. Estos últimos se calculan considerando una longitud tributaria de superestructura que se extiende medio vano al lado de la pila de diseño, tal como se muestra en la figura 10.8

La aplicación de DDBD en este caso es muy sencilla ya que se trabaja con una estructura con un grado de libertad. Un ejemplo de diseño se presenta posteriormente.

### 10.3.8 Fuerzas de diseño para los aisladores

Los aisladores se diseñan para el cortante  $V_E$  obtenido de la aplicación del DDBD. La fuerza de diseño para cada aislador se obtiene dividiendo  $V_E$  para el número dispositivos sobre la pila o estribo.

El diseño de los LRBs o FPSs sigue el mismo procedimiento descrito en los apartados 9.6 y 9.7 del diseño de edificios aislados. Además de la fuerza lateral de diseño es necesario conocer la resistencia lateral mínima para cargas de servicio, rotaciones derivadas de las cargas laterales y la carga axial.

Cuando se diseñe LRBs la rotación en el dispositivo cuando se alcanza el desplazamiento de fluencia en la pila se la obtiene con la ecuación (10.14).

$$\theta_y = \frac{\phi_y H}{2} \quad (10.14)$$

### 10.3.9 Fuerzas de diseño para las pilas

La fuerza de diseño de las pilas es mayor que la fuerza de diseño de los aisladores y viene dada por la ecuación (10.15). Donde  $V_E$  es el cortante de diseño en el sistema pila-aislador,  $\Omega$  es el coeficiente de sobre-resistencia de los aisladores,  $V_v$  es la fuerza generada en la pila al vibrar en su periodo fundamental de vibración.

$$V_p = \sqrt{(\Omega V_E)^2 + V_v^2} \quad (10.15)$$

La sobre resistencia de los aisladores,  $\Omega$ , se puede obtener solo luego de que estos dispositivos hayan sido diseñados. Inclusive, la norma AASHTO para el diseño de puentes aislados (AASHTO, 2000) requiere la ejecución de pruebas de carga lateral cíclica sobre prototipos de los dispositivos a utilizarse.

La determinación de las fuerzas generadas por la vibración de la pila en su modo fundamental de vibración requiere de la estimación del periodo de vibración,  $T$ , con la ecuación (10.16). Donde la masa  $M$  se toma como la masa de la viga cabezal más un tercio de la masa de las columnas. La rigidez elástica,  $K$ , de la pila se estima con la ecuación (10.17), donde  $C_2$ , se obtiene de la tabla 10.2. La inercia,  $I$ , debe representar a la inercia de la sección agrietada que se puede estimar como 50% de la inercia gruesa.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} \quad (10.16)$$

$$K = C_2 \frac{EI}{H_p^3} \quad (10.17)$$

Finalmente la fuerza  $V_v$  se obtiene con ecuación (10.18), como el producto de la masa  $M$  y de la aceleración espectral,  $S_a$  calculada para el periodo  $T$  de la pila usando un espectro de aceleración del sismo de diseño con 5% de amortiguamiento.

$$V_v = S_a M \quad (10.18)$$

El momento de diseño en la sección crítica se obtiene mediante la ecuación (10.19) donde  $n_c$  es el número de columnas resistiendo  $V_p$  en la pila y  $H_s$  es la altura de corte definida en la tabla 10.2

$$M_p = \frac{V_p H_s}{n_c} \quad (10.19)$$

El momento P- $\Delta$  en la sección crítica se obtiene con la ecuación (10.20) donde P es la carga gravitacional que soporta la pila

$$M_{P-\Delta} = \frac{P \Delta_p H_s}{n_c H_p} \quad (10.20)$$

El índice de estabilidad,  $\theta_s$ , se obtiene de la relación entre el  $M_{P-\Delta}$  y el momento de diseño  $M_p$ . Si  $\theta_s$  es mayor que 8%, al momento  $M_p$  se agrega el 50% del  $M_{P-\Delta}$  para contrarrestar su efecto. Si  $\theta_s$  es mayor que 30%, el diseño debe repetirse disminuyendo el desplazamiento meta para la pila. Priestley *et al* (2007).

El proceso de obtención del momento de diseño debe aplicarse en la dirección longitudinal y transversal del puente. Finalmente, la pila se diseñara para la combinación más desfavorable de momento y carga axial. En este proceso no se deberá descuidar las acciones generadas por las cargas gravitacionales. Además, los principios de diseño por capacidad deberían aplicarse para asegurar que de formarse rotulas plásticas estas se ubiquen en secciones especialmente detalladas en los extremos de las columnas.

### 10.3.10 Fuerzas en los estribos

Generalmente, los estribos de los puentes aislados se diseñan previamente para resistir las acciones no-sísmicas. Por lo tanto, luego de la aplicación del DDBD es necesario verificar que la resistencia lateral de los estribos es mayor que la sobre-resistencia de los aisladores instalados en los estribos. De esta manera se garantiza la total activación del sistema de aislamiento sin causar daño a los estribos.

Si la sobre-resistencia de los aisladores es mayor que la resistencia de los estribos, entonces el diseño debe repetirse disminuyendo el porcentaje de carga sísmica,  $v_a$ , asignada a los estribos.

## 10.4 PROCEDIMIENTO DE DDBD PARA PUENTES

### PASO 1. Definición del Objetivo de Diseño.

Al igual que en el diseño de edificios aislados, el primer paso en la aplicación del DDBD para puentes aislados es definir el desempeño que se desea para el puente bajo el sismo de diseño. El desempeño se lo especifica mediante los siguientes parámetros:

- a) Desplazamiento máximo que se puede acomodar en las juntas en los estribos
- b) Desplazamiento máximo que se puede acomodar en los dispositivos de aislamiento
- c) Índice de estabilidad para control de efectos P- $\Delta$  en pilas
- d) Deformación unitaria, curvatura, ductilidad o deriva de diseño para las pilas

El sismo de diseño se define mediante un espectro de desplazamiento tal como el que se muestra en la figura 9.6

### PASO 2. Conceptualización e idealización del problema.

El diseñador tiene que decidir si el puente en estudio puede diseñarse considerando cada sistema pila-aislador como una estructura aislada. Los criterios para tomar esta decisión fueron dados en la sección 10.3.7

### PASO 3. Determinación del perfil de desplazamiento meta.

De acuerdo al desempeño propuesto en el objetivo de diseño y a la teoría presentada en 10.3.2, 10.3.3 y 10.3.4 se realizan las siguientes tareas:

1. Se determina el desplazamiento meta en el plano y fuera del plano para todos los sistemas pila-aislador y pila-estribo.
2. Los desplazamientos meta en el plano y fuera del plano se proyectan sobre los ejes transversal y longitudinal del puente, considerando el esviaje existente. Si el esviaje es cero, desplazamiento transversal = desplazamiento en el plano y desplazamiento longitudinal = desplazamiento fuera del plano.

3. Al asumir desplazamiento rígido sin rotación en la superestructura, el mínimo desplazamiento meta transversal se convierte en el desplazamiento de diseño transversal,  $\Delta_E$ . Lo mismo sucede en la dirección longitudinal

#### PASO 4. Distribución de resistencia.

Si el puente tiene estribos, es necesario seleccionar la proporción del cortante total que será tomado por estos elementos. Como se explica en 10.3.10, si la demanda de resistencia en los estribos, resulta mayor que la resistencia proporcionada para resistir cargas no-sísmicas, la proporción de cortante asignada deberá disminuirse y el diseño repetirse. Como punto de inicio,  $v_a$  puede calcularse con la ecuación (10.21), donde  $np$  es el número de pilas en el puente.

Esta ecuación transfiere a cada estribo la misma cantidad de cortante que resisten las pilas, lo cual es consistente con la suposición de traslación de cuerpo rígido de la superestructura y resultara en un dispositivo de características similares para las pilas y los estribos. El valor seleccionado de  $v_a$  puede, aunque no es necesario, usarse para el diseño en la dirección transversal y longitudinal del puente.

$$v_a = \frac{2}{2 + np} \quad (10.21)$$

#### PASO 5. Obtención de las propiedades del sistema de un grado de libertad equivalente.

De manera independiente en la dirección transversal y longitudinal del puente se determinan:

1. La masa efectiva  $M_{eff}$ . Ya que se asume desplazamiento rígido, la masa efectiva es igual a la masa total del puente. Se debe considerar, la masa de la superestructura y masa de la subestructura con la consideración que solo 1/3 de la masa de las columnas es efectiva para generar fuerzas inerciales. La masa de los estribos no deberá ser considerada.
2. El amortiguamiento equivalente, de acuerdo a la sección 10.3.6. El amortiguamiento en los dispositivos de aislamiento es seleccionado por el diseñador de acuerdo a los siguiente criterios:
  - a. Mientras mayor sea  $\xi_{eq}$  menor será la demanda de desplazamiento sísmica, por lo tanto conviene seleccionar el valor máximo posible. Dispositivos como los LRBs y los FPS pueden alcanzar niveles de  $\xi_{eq}$  superiores a 30%, sin embargo AASHTO y otros códigos admiten amortiguamientos hasta de 30% en el diseño.
  - b. Además de tener alta capacidad de disipación de energía (es decir amortiguamiento), es necesario que los dispositivos de aislamiento tengan la capacidad de restaurar su posición inicial luego del sismo. Desafortunadamente, dispositivos con alto  $\xi_{eq}$  no tienen capacidad de auto-restauración ya que su rigidez post-fluencia es baja. Nuevamente, ya que la capacidad de auto-restauración se comprueba más adelante en el diseño, el valor escogido de amortiguamiento podría tener que ser revisado mediante un proceso iterativo.

#### PASO 6. Determinación de la resistencia requerida en el sistema de aislamiento.

Este paso es similar al que se realizó en el DDBD de edificios, no obstante se repite para dar claridad al procedimiento.

El periodo efectivo  $T_{eff}$ , que requiere la estructura para alcanzar el desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq}$  se obtiene utilizando el espectro de desplazamiento de diseño reducido por el factor de reducción espectral  $R_{\xi}$ . Este último se lo obtiene de la tabla 9.2 en función del amortiguamiento equivalente de la estructura calculada en el paso anterior. La figura 9.8 esquematiza este procedimiento.

Cuando  $\Delta_{eq}$  es menor que  $R_{\xi}S_{dm}$ , de la figura 9.8 se deriva la ecuación (10.22). Cuando  $\Delta_{eq}$  es mayor que  $R_{\xi}S_{dm}$  cualquier valor de  $T_{eff} > T_c$  puede seleccionarse, entendiéndose además que el  $\Delta_{eq}$  no va a ser alcanzado porque el sismo de diseño solo puede causar un desplazamiento máximo  $S_{dm}$ . Cuando  $T_{eff}$  es mayor que  $T_c$ , las fuerzas de diseño bajan y el diseño del sistema de aislamiento está generalmente controlado por fuerzas de viento.

$$T_{eff} = T_c \frac{\Delta_E}{S_{dm} R_{\xi}} \quad (10.22)$$

Una vez que  $T_{eff}$  ha sido evaluado, la rigidez efectiva  $K_{eff}$  requerida en el sistema puede calcularse con la ecuación (10.23). Esta ecuación proviene de la relación entre periodo, masa y rigidez de sistemas de un grado de libertad. Finalmente, la resistencia requerida en el sistema de aislamiento se obtiene con la ecuación (10.24).

$$K_{eff} = \frac{4\pi^2 M_{eff}}{T_{eff}^2} \quad (10.23)$$

$$V_E = K_{eff} \Delta_E \quad (10.24)$$

La fuerza de diseño para cada uno de los dispositivos de aislamiento se obtiene dividiendo  $V_E$  para el número de dispositivos a utilizarse.

#### **PASO 6. Diseño de los dispositivos del sistema de aislamiento.**

De acuerdo las secciones 9.6. Y 9.7

#### **PASO 7. Diseño de las pilas y chequeo de demanda en los estribos.**

De acuerdo a las secciones 10.3.9 y 10.3.10

### **10.5 PROGRAMAS PARA EL DISEÑO SÍSMICO DE PUENTES AISLADOS**

El Laboratorio Virtual de Ingeniería Sísmica (LVIS) de la Universidad Técnica Particular de Loja contiene una serie de herramientas útiles para el diseño de puentes aislados. Estas herramientas pueden usarse libremente ingresando a la página web del LVIS en [www.utpl.edu.ec/vlee](http://www.utpl.edu.ec/vlee). Algunas de las herramientas se describen brevemente a continuación:

**DDBD-Bridges.** Permite el diseño sísmico de varios tipos de puentes, incluyendo puentes aislados, mediante el método DDBD.

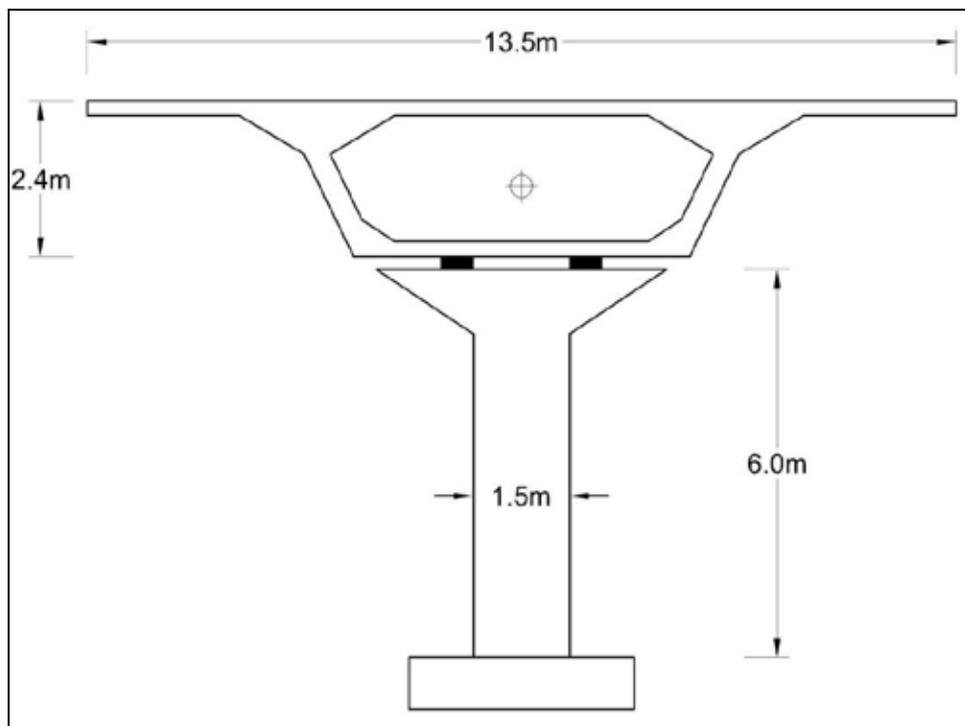
**ITHA-Bridges.** Permite que los usuarios ejecuten fácilmente Análisis Inelástico de Historia en el Tiempo de puentes viales diseñados o no con DDBD-Bridge. Esta herramienta simula los efectos de terremotos reales en puentes utilizando OpenSees, y permite evaluar la eficacia de los métodos de diseño.

**RC-Analysis.** Produce la respuesta Momento-Curvatura con acoplamiento de resistencia a cortante para varios tipos de secciones de hormigón armado. Este análisis es básico para el entendimiento del comportamiento de elementos de concreto reforzado sometidos a flexo-compresión, como es el caso de columnas y vigas de edificios y pilas de puentes.

**RC-Design.** Diseña vigas y columnas de hormigón armado considerando flexo-compresión y cortante. Adicionalmente, RC-Design produce la respuesta Momento-Curvatura con acoplamiento de resistencia a cortante para las secciones diseñadas.

**SPECTRUM.** Obtiene espectros de respuesta elástica o inelástica para registros de aceleración o funciones armónicas.

**SIMUQUAKE.** Produce registros sísmos artificiales compatibles con un espectro de diseño especificado por el usuario.

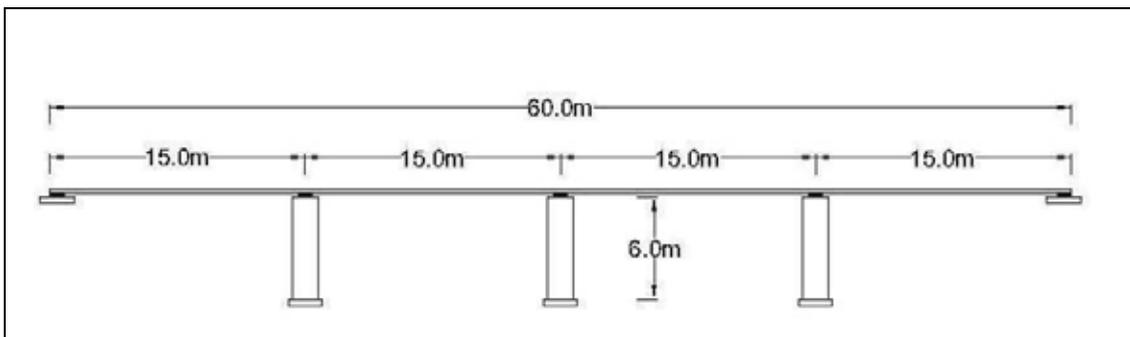


**Figura 10.9** Sistema pila-aisladores

## • EJEMPLO 1

Determinación de los desplazamientos y fuerzas de diseño para los dispositivos de aislamiento de la pila que se muestra en la figura 10.9. La pila forma parte de un puente regular y simétrico de 4 vanos de 15 m. El puente se muestra en la figura 10.10

La superestructura del puente es una viga cajón continua de hormigón armado. Las pilas de hormigón armado se reforzaran con acero de resistencia de fluencia  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . La resistencia a la compresión especificada para el hormigón en las pilas es  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ .



**Figura 10.10** Elevación longitudinal.

## • SOLUCIÓN

### PASO 1. Definición del Objetivo de Diseño.

Bajo el ataque del sismo representado por los espectros mostrados en la figura 10.11, el puente deberá alcanzar el siguiente desempeño:

- El índice de estabilidad en las pilas será menor o igual a 25%
- La pilas de hormigón armado no superara su desplazamiento de fluencia

### PASO 2. Conceptualización e idealización del problema.

Ya que el puente es completamente regular y simétrico, una de las pilas centrales y su sistema de aislamiento serán diseñados en la dirección transversal, como si se tratara de una estructura independiente.

### PASO 3. Determinación del desplazamiento meta.

El desplazamiento lateral del sistema pila-aislamiento es la suma del desplazamiento de la pila mas el desplazamiento del sistema de aislamiento. De acuerdo al objetivo de diseño, el desplazamiento en la pila no superará el desplazamiento de fluencia.

Para la columna circular de 1.5 m de diámetro, cumpliendo con las recomendaciones de espaciamiento de refuerzo de AASHTO (Imbsen 2007), barras de 30 mm serán usadas para

refuerzo longitudinal. La longitud de penetración con barras de ese tamaño es  $L_{sp} = 0.022 \times 420 \text{ MPa} \times 0.030 \text{ m} = 0.28 \text{ m}$

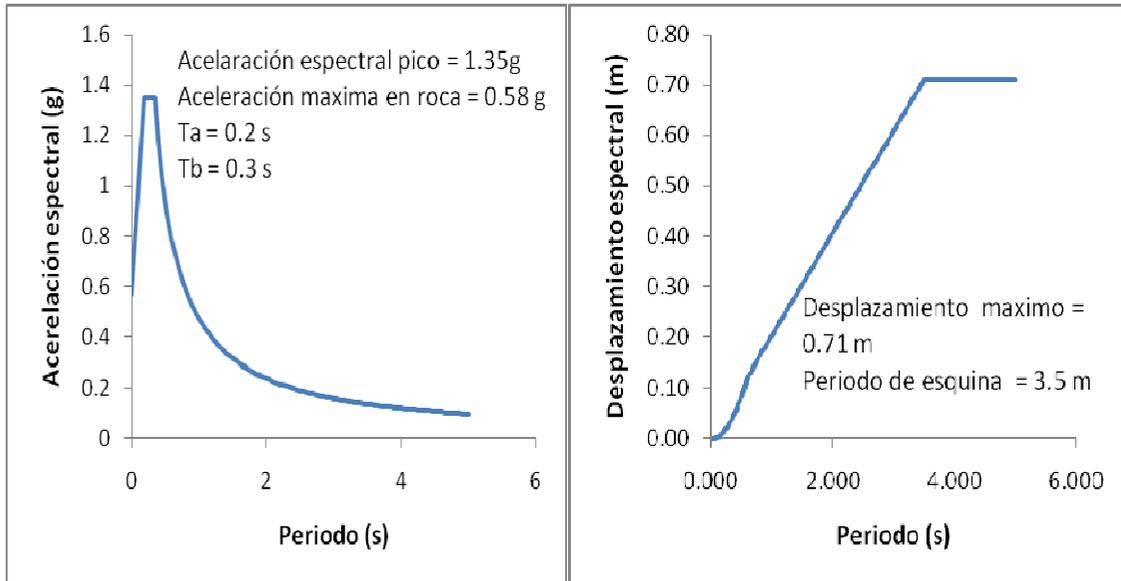


Figura 10.11 Espectros de diseño.

La altura efectiva de la pila, con referencia a tabla 10.2, es  $H_p = 6 + 2.4 + 0.28 \text{ m} = 8.70 \text{ m}$

La curvatura de fluencia de la pila puede estimarse con la ecuación 10.5. La deformación de fluencia del refuerzo longitudinal es  $\varepsilon_y = 4200/2000000 = 0.002$ . Por lo tanto,

$$\phi_y = 2.25\varepsilon_y / D = 2.25 \times 0.002 / 1.5 = 0.0032 \quad 1/m$$

Usando ecuación 10.2. con  $C_1 = 1/3$ , el desplazamiento de fluencia de la pila es:

$$\Delta_y = \frac{1}{3} \times 0.0032 \times 8.70^2 = 0.08 \text{ m}$$

El desplazamiento con el que se alcanzaría un límite de estabilidad  $\theta_s = 25\%$  en la pila se calcula con ecuación 10.17. La información del espectro de desplazamiento fue dada en el paso 1. La masa efectiva en la pila es  $M_{\text{eff}} = 26 \text{ T/g}$  y fue calculada tomando en consideración una longitud tributaria de 15 m de superestructura mas el 1/3 de la masa de la pila. La carga gravitacional que soporta la pila es de 256 T. Por lo tanto:

$$C = \frac{3.5 \times 0.08}{2\pi \times 0.71} \sqrt{\frac{256}{0.25 \times 26.1 \times 8.70}} = 0.133$$

y

$$\Delta_{\theta_s} = 0.08 \left( 1.256 - 0.126 \times 0.133 - 0.766 \frac{0.133 - 0.724}{0.133} \right) = 0.37 \text{ m}$$

Para un desplazamiento meta de  $\Delta_E = 0.37\text{m}$ , si la pila solo puede desplazarse  $\Delta_y = 0.08\text{ m}$ , el sistema de aislamiento tiene que diseñarse para un desplazamiento de  $\Delta_A = 0.29\text{ m}$

Por comprobación a continuación se calcula el desplazamiento meta para la misma pila con un diseño convencional, en el que se permite que la pila forme una rotula plástica en su base. Usando la ecuación 10.3. la longitud de la rotula plástica es  $L_p = 0.83\text{ m}$ . La curvatura plástica de control de daño, obtenida con la ecuación 10.6. es  $\phi_p = 0.04\text{ 1/m}$ . Por lo tanto el desplazamiento de control de daño calculado con el método de la rotula plástica (10.1) es:

$$\Delta_{CD} = 0.08 + 0.04 \times 0.83 \times 8.70 = 0.36\text{m}$$

El desplazamiento meta seleccionado para la pila aislada es similar al desplazamiento meta para un diseño convencional. La razón es que el desplazamiento del sistema aislado está controlado por los efectos P- $\Delta$ . A pesar de que con el aislamiento no se va a lograr una reducción importante de las fuerzas de diseño. Es importante notar que con el aislamiento, todo el desplazamiento plástico se concentra en los aisladores mientras que la columna de hormigón armado se comporta elásticamente.

#### PASO 4. Distribución de resistencia.

Al diseñar el sistema pila-aislador como una estructura aislada, donde la masa se ha tomado sobre una longitud tributaria de superestructura, implícitamente ya se ha distribuido la resistencia en función de esta longitud. Ya que todos los vanos son de igual longitud, la resistencia de cada pila es 25% del cortante total, mientras que la resistencia en cada estribo es solo 12.5%.

#### PASO 5. Obtención de las propiedades del sistema de un grado de libertad equivalente.

La masa efectiva ya fue determinada en 26.1 T/g. Para los dispositivos de aislamiento se selecciona un amortiguamiento equivalente  $\xi_A = 30\%$ . Considerando que la respuesta esperada en la pila es elástica, su amortiguamiento es  $\xi_p = 5\%$ . Por lo tanto, combinando los amortiguamientos con la ecuación 10.12, el amortiguamiento equivalente para el sistema pila-aislador es:

$$\xi_{eq} = \frac{30 \times 0.29 + 5 \times 0.08}{0.37} = 24.5\%$$

#### PASO 6. Determinación de la resistencia requerida en el sistema de aislamiento.

Para el amortiguamiento en la estructura, el coeficiente de reducción espectral, tomado de la tabla 9.2 es  $R_\xi = 0.66$ . El periodo efectivo requerido por la estructura para alcanzar el desplazamiento meta se calcula con la ecuación 10.22, lo cual resulta en,

$$T_{eff} = \frac{3.5 \times 0.37}{0.66 \times 0.71} = 2.76\text{s}$$

Luego se determina la rigidez efectiva  $K_{eff}$  con la ecuación (10.23)

$$K_{eff} = \frac{4\pi^2 \times 26.1}{2.76^2} = 135.26 \text{ T / m}$$

Finalmente se calcula la fuerza cortante  $V$  con la siguiente ecuación (10.24)

$$V_E = 135.26 \times 0.37 = 50 \text{ T}$$

Si existen dos aisladores por pila, la fuerza de diseño para cada aislador será entonces 25 T.

## • EJEMPLO 2

Diseño de un LRB para aislar el puente del ejemplo 1. En resumen, el dispositivo se diseña bajo los siguientes parámetros:

Amortiguamiento equivalente  $\xi_A = 30\%$

Desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq} = 0.29 \text{ m}$

Resistencia de diseño  $V_{eq} = 25 \text{ T}$

Desplazamiento lateral por cargas de servicio  $\Delta_s = 0.05 \text{ m}$  (asumido)

La carga axial sobre el dispositivo es  $W = 128 \text{ T}$

## • SOLUCIÓN

El diseño de los LRB se realiza de acuerdo al procedimiento presentado en la sección 9.6

### PASO 1: Determinación de la rigidez post fluencia, $k_d$ .

Usando la ecuación (9.49), la rigidez  $k_d$  necesaria para asegurar el nivel de amortiguamiento equivalente seleccionado para el dispositivo es

$$k_d = \frac{25 \left( 2 - \pi \frac{30}{100} \right)}{0.29 \times 2} = 45.58 \text{ T / m}$$

Este valor deber ser mayor que el mínimo dado por (9.34) y (9.35) para asegurar suficiente fuerza de auto-centrado.

$$k_d \geq \frac{128}{40 \times 0.29} \geq 11.03 \text{ T / m}$$

$$k_d \geq \frac{4\pi^2 \times 128}{36 \times 9.81} \geq 14.31 \text{ T / m}$$

Por lo tanto el valor de  $k_d$  es apropiado.

**PASO 2: Primera estimación del diámetro del núcleo de plomo.**

La resistencia característica,  $Q_d$ , del LRB se obtiene con la ecuación (9.32),

$$Q_d = 25 - 45.58 \times 0.29 = 11.8 \text{ T}$$

Luego un primer estimado del diámetro del núcleo de plomo se obtiene con la ecuación, (9.50). El esfuerzo de fluencia del plomo se toma igual a  $1070 \text{ T/m}^2 = 10.5 \text{ MPa}$

$$D_l = 1.24 \sqrt{\frac{11.8}{1070}} = 0.13 \text{ m}$$

Con este diámetro debería comprobarse si el núcleo de plomo tiene la resistencia suficiente para resistir las fuerzas laterales de servicio.

**PASO 3: Determinación del diámetro externo del dispositivo.**

Asumiendo una altura neta de elastómero  $T_r = 0.35 \text{ m}$  (este valor se comprueba en el siguiente paso). El diámetro externo del LRB necesario para obtener la rigidez  $k_d$  se calcula con la ecuación (9.52). Para un elastómero con modulo de corte  $G_r = 0.62 \text{ MPa} = 63.20 \text{ T/m}^2$  se obtiene:

$$D_b = \sqrt{\frac{4 \times 45.58 \times 0.35}{1.1 \times \pi \times 63.2} - 0.13^2} = 0.52 \text{ m}$$

**PASO 4: Chequeo de niveles de deformación en el elastómero.**

Seleccionando un espesor para cada banda de elastómero  $t_r = 9 \text{ mm}$ , el factor de forma  $S$  calculado con (9.39) es:

$$S = \frac{0.52^2 - 0.13^2}{4 \times 0.52 \times 0.009} = 13.54$$

Con la ecuación (9.27) el área neta del elastómero es:

$$A_r = \frac{\pi(0.52^2 - 0.13^2)}{4} = 0.19 \text{ m}^2$$

Aplicando ecuaciones (9.38), (9.40) y (9.41) se comprueba que la deformación de corte del elastómero está por debajo de los límites dados en (9.43), (9.44) y (9.45). Por lo que la altura asumida para el elastómero es apropiada.

La altura total del elastómero se calcula considerando que el espesor de las placas de confinamiento es 1 mm. Por lo tanto, la altura total es  $T=0.35/0.009*0.001+0.35=0.39\text{m}$

#### **PASO 5: Verificación de las dimensiones del núcleo de plomo.**

Despejando  $D_i$  de la ecuación (9.29), se comprueba que este valor no difiere significativamente del valor estimado en el paso 2.

#### **PASO 6: Calcular factores de ajuste y propiedades máximas y mínimas para el dispositivo.**

Una vez determinados las dimensiones requeridas para el dispositivo, se selecciona de entre los dispositivos disponibles comercialmente aquel con propiedades iguales o mejores que el dispositivo diseñado.

El dispositivo seleccionado tiene 40 cm de altura 60 cm de diámetro externo y el núcleo de plomo tiene un diámetro de 15 cm. De acuerdo al fabricante este dispositivo excede los requerimientos de diseño en cuanto a capacidad de desplazamiento lateral y estabilidad. Debido a su mayor tamaño, este dispositivo excede la resistencia de diseño en 15%, es decir  $V_E = 28.75 \text{ T}$ . El diseño de la pila deberá basarse en esta resistencia.

### • EJEMPLO 3

Diseño de un FPS para aislar el puente del ejemplo 1. En resumen, el dispositivo se diseña bajo los siguientes parámetros:

Amortiguamiento equivalente  $\xi_A = 30\%$   
 Desplazamiento de diseño  $\Delta_{eq} = 0.29 \text{ m}$   
 Resistencia de diseño  $V_E = 25 \text{ T}$   
 Desplazamiento lateral por cargas de servicio  $\Delta_s = 0.05 \text{ m}$  (asumido)  
 La carga axial sobre el dispositivo es  $W = 128 \text{ T}$

### • SOLUCIÓN

El diseño se ejecuta de acuerdo a la teoría presentada en la sección 9.7

#### **PASO 1: Determinación del radio de curvatura $R$ y coeficiente de fricción $\mu$ .**

Estos valores se obtienen iterando con las ecuaciones (9.58) y (9.59). Como valor máximo se toma  $R = 40\Delta_E = 40 \times 0.29 \text{ m} = 11.6 \text{ m}$ . Este es el valor máximo de  $R$  con el que el dispositivo cumple con las especificaciones de auto-centrado.

Con la aplicación sucesiva de las ecuaciones 9.58 y 9.59 se determina que el sistema de ecuaciones se satisface cuando  $\mu = 0.092$  y  $R = 2.8 \text{ m}$

Con el valor encontrado para  $\mu$ , la fuerza lateral que activa el dispositivo es  $128 \times 0.092 = 11.8$  T. Como parte del proceso de diseño se deberá chequear que esta fuerza sea mayor que la que proviene de cargas no-sísmicas tales como viento, frenado, y otras.

### **PASO 2: Determinación del diámetro del dispositivo.**

En función de los desplazamientos impuestos por el sismo de diseño y de cargas de servicio, el diámetro del dispositivo deberá ser mayor o igual que  $2 \times (0.29 + 0.05) = 0.68$  m

### **PASO 3: Calcular factores de ajuste y propiedades máximas y mínimas para el dispositivo.**

Una vez que el FPS ha sido dimensionado, un dispositivo disponible comercialmente, con propiedades iguales o mejores las requeridas se selecciona para el proyecto. Las propiedades reales del dispositivo seleccionado, tomando en cuenta los efectos de envejecimiento, variación de temperatura, etc., son necesarias para el diseño de la columna de la pila.

#### **• EJEMPLO 4**

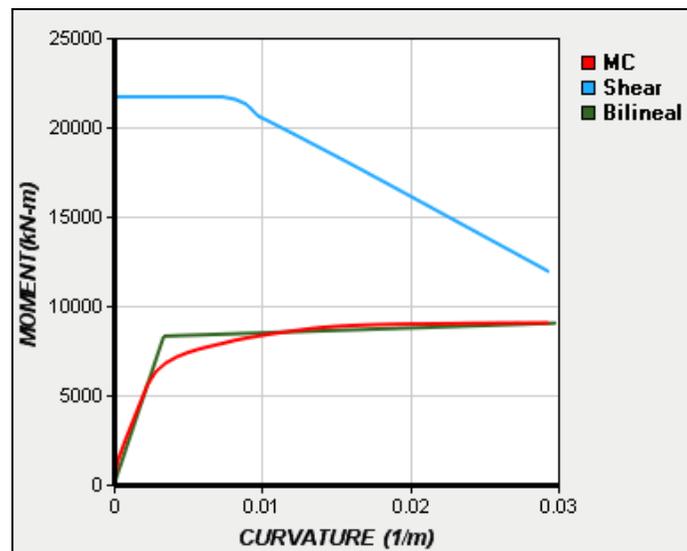
Diseño de la columna de la pila del puente del ejemplo 1 en función del LRB diseñado en el ejemplo 2. La sobre-resistencia de los 2 LRB colocados sobre la pila es  $V_E = 57.5$  T. La carga axial que actúa sobre la columna es 256 T. La altura de la columna hasta el centroide de la superestructura es 8.40m. El diámetro de la columna es 1.5 m. Se usará hormigón con resistencia  $f'_c = 280$  kg/cm<sup>2</sup> y acero con fluencia  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>

#### **• SOLUCIÓN**

De acuerdo a las recomendaciones dadas en la sección 10.3.9. El momento de diseño en la base de la columna, deberá basarse en la sobre-resistencia de los dispositivos de aislamiento y en el momento generado por la vibración de la columna en su modo fundamental de vibración.

El cortante en la columna debido a la sobre-resistencia de los LRBs es  $V_E = 57.5$  T. El cortante debido a la vibración de la pila requiere de la estimación de su periodo fundamental de vibración. Utilizando las ecuaciones 10.16, 10.17 y 10.18, la rigidez agrietada de la pila se estima en  $K = 4331$  T/m. Para la pila con una masa de 3.66T/g proveniente de la masa de la viga cabezal y de 1/3 de la masa de la columna, el periodo de vibración  $T = 0.23$ s. Por lo tanto la aceleración espectral para respuesta elástica de la pila es  $S_a = 13.24$  m/s<sup>2</sup> y el cortante generado por la vibración de la pila en su modo fundamental de vibración es 48.6 T

El cortante total de diseño se obtiene combinando los modos de vibración de acuerdo a la ecuación 10.15. Esto resulta en 75.28 T de ahí que el momento de diseño en la base de la columna es  $75.28 \times 8.4 = 632$  T.m



**Figura 10.12** Análisis seccional de la columna de 1.5m de diámetro.

El diseño del refuerzo en la sección crítica en la base de la columna circular se realiza para los efectos combinados del momento sísmico de 632 T.m y de una carga axial de 256 T. Utilizando el programa RC-Design. Suárez (2008) (de acceso gratuito a través de [www.utpl.edu.ec/vlee/es](http://www.utpl.edu.ec/vlee/es)), se determina que se requiere 32 barras longitudinales de 30mm de diámetro como refuerzo a flexo-compresión. También se determina que se requiere un espiral de 10mm espaciado 150mm para proveer la resistencia a cortante y confinamiento y asegurar un comportamiento dúctil en la sección.

## • EJEMPLO 5

Investigar el desempeño de la pila de puente con LRBs diseñada en los ejemplos 1,2 y 4 mediante análisis inelástico de historia en el tiempo en OpenSees. Mazzoni (2004).

OpenSees es un sistema de código abierto para simulación en Ingeniería Sísmica. Es un software orientado a la simulación de la respuesta sísmica de estructuras y sistemas geotécnicos.

OpenSees ha sido desarrollado como una plataforma computacional para la investigación de ingeniería sísmica basada en desempeño para el Centro de Investigaciones de Ingeniería Sísmica del Pacífico (PEER). OpenSees es también un componente de simulación para el NEESit desde el 2004.

OpenSees posee capacidades avanzadas para modelar y analizar la respuesta no lineal de sistemas, usando un amplio rango de modelos de materiales, elementos y algoritmos de solución. El software está diseñado cálculos en paralelo que permiten simulaciones escalables o estudios de parámetros.

OpenSees permite a los usuarios crear aplicaciones basadas en elementos finitos para simular la respuesta de sistemas estructurales y geotécnicos, sujetos a sismos.

OpenSees puede obtenerse en forma gratuita de <http://opensees.berkeley.edu>

## • SOLUCIÓN

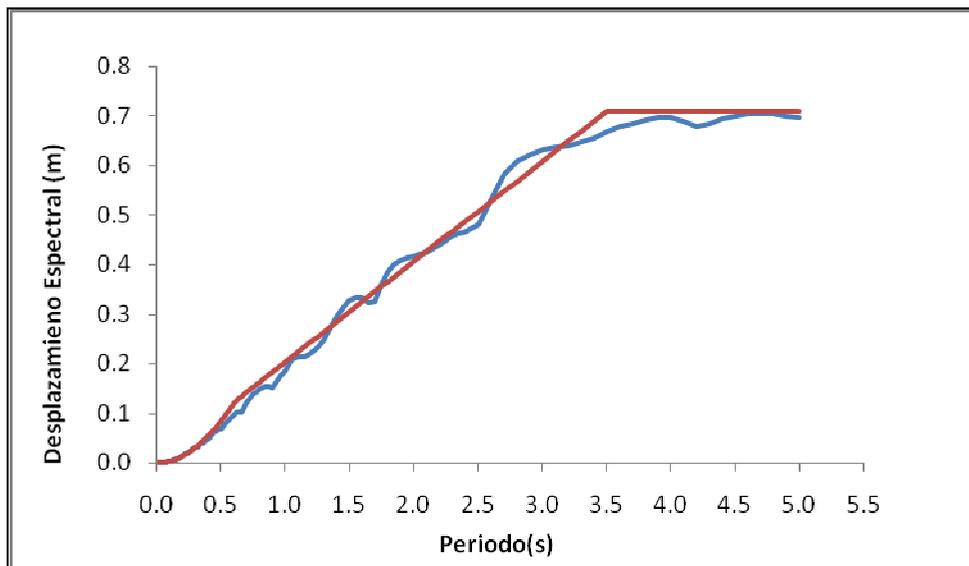
La solución de este ejemplo requiere la ejecución de las siguientes tareas:

1. Obtención de un registro sísmico compatible con el sismo de diseño
2. Crear un modelo matemático de pila y su sistema de aislamiento
3. Ejecutar el análisis inelástico de historia en el tiempo
4. Observar y analizar los resultados

### Obtención de un registro sísmico compatible

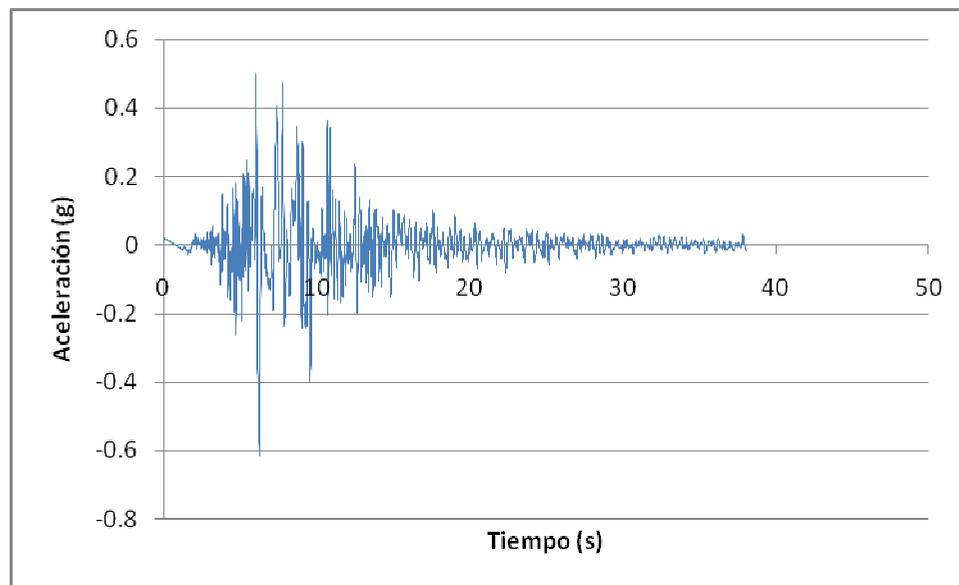
El programa SIMUQUAKE. Suárez (2008) fue usado para generar un registro artificial de aceleraciones sísmicas compatible con el espectro desplazamientos del sismo de diseño. La compatibilidad se obtiene cuando el espectro de desplazamiento del registro artificial coincide con el espectro de diseño en el rango de periodos de interés.

La figura 10.13 muestra los espectros de diseño (curva uniforme) y del registro artificial. Se observa una buena aproximación entre las dos curvas. El registro de aceleraciones del sismo artificial se muestra en la figura 10.14. La duración del registro es 38s, la aceleración pico es 0.5 g



**Figure 10.13** Espectro compatible con sismo de diseño.

Los modelos para análisis con OpenSees se crean escribiendo código Tcl en un procesador de texto. Aunque existen algunos pre-procesadores y post-procesadores para OpenSees como el OpenSees Navigator (<http://peer.berkeley.edu/OpenSeesNavigator>), es preferible, sobre todo cuando se está trabajando en un proyecto de investigación, familiarizarse y manejar los objetos y comandos de OpenSees en el ambiente Tcl ya que esto le da mayor control al investigador sobre el problema que está tratando de simular.



**Figure 10.14** Registro artificial compatible con sismo de diseño

### Creación del modelo matemático en para análisis con OpenSees

Tcl es un lenguaje de programación de alto nivel tipo "Script". Ya que se trata de un código abierto, mucha información sobre la programación en este lenguaje está disponible en el Internet (<http://www.tcl.tk/>). El interprete Tcl tiene que ser descargado e instalado para que funcione OpenSees. Instaladores e instrucciones de instalación del intérprete Tcl y de OpenSees pueden obtenerse desde <http://opensees.berkeley.edu/>

OpenSees es desarrollado en C++, una vez compilado, sus librerías están disponibles desde el interprete Tcl para la creación de objetos y ejecución de comandos. Los comandos de OpenSees se suman a los comandos de programación existentes en Tcl, resultando en una herramienta muy poderosa. Por ejemplo, en Tcl se puede escribir código para que en forma automática el análisis de una estructura se repita miles de veces variando sus dimensiones, propiedades de materiales, sismos, etc.

Con fines demostrativos se ha creado un modelo muy simple de la pila de hormigón armado con su sistema de aislamiento. Este modelo tiene las siguientes características:

- Tiene 4 nudos y tres elementos solamente. Se utiliza un elemento viga-columna para modelar la columna, un elemento de longitud cero para modelar los dos LRBs y un elemento viga-columna elástico para llegar hasta el centro de masas de la superestructura.
- El elemento que modela la columna de hormigón armado tiene secciones compuestas por fibras de hormigón no confinado, hormigón confinado, y acero para modelar la sección tal como fue diseñada.
- El elemento que modela los LRB tiene movimiento lateral únicamente. En esa dirección, el elemento responde con una histéresis bilineal. Los parámetros que definen la respuesta del elemento han sido evaluados considerando la respuesta combinada de los 2 LRB
- Toda la masa ha sido concentrada en el nudo que representa al centro de masas de la superestructura

- El registro de aceleración se aplica en el nudo en la base del modelo.

El código en lenguaje Tcl del modelo se presenta a continuación. Toda la información que aparece luego del signo “#” son comentarios que buscan explicar el uso de los comandos de OpenSees. Se recomienda usar el manual de comandos de OpenSees para seguir el código de ejemplo. Este código realiza dos análisis sobre el modelo de la estructura. Primero se aplica de la carga vertical sobre la estructura y luego se aplica el registro sísmico.

```
#####
# Archivo Tcl con modelo OPENSEES para: #
# ANALISIS INELÁSTICO DE HISTORIA EN EL TIEMPO #
# MODELO 3D PILA-AISLADORES #
# Unidades: T-m #
#####

wipe ; # Limpia memoria antes de empezar

# DEFINICIÓN DE PARAMETROS PARA GENERACIÓN DE MODELO
#-----

#constantes
set pi 3.1415927

# Geometría del modelo
set alturacolumna 6 ; # m
set alturasuper 2.4 ; # m

# Propiedades del hormigón no confinado en el recubrimiento de la columna
set fpc [expr {280*10}] ;# T/m2 Resistencia a la compresión del concreto sin confinar
set eco 0.002 ;# Deformación unitaria a fpc
set ecu 0.004 ;# Deformación unitaria última

# Propiedades del hormigón confinado en el núcleo de la columna
set fpcc [expr {320*10}] ;# T/m2 Resistencia a la compresión del concreto confinado
set ecco 0.004 ;# Deformación unitaria a fpcc
set eccu 0.018 ;# Deformación unitaria ultima

# Propiedades del acero de refuerzo a flexión
set fy [expr {4200*10}] ;# T/m2 Esfuerzo de fluencia
set Es [expr {210000*10}] ;# T/m2 Modulo de elasticidad
set shf 0.005; # Coeficiente de endurecimiento post-fluencia

# Parámetros que definen la sección de la columna
set D 1.5 ;# m Diámetro de la sección
set rec 0.05 ;# m Recubrimiento
set nfc 32 ;# Número de fibras en la dirección circunferencial
set nfr 3 ;# Número de fibras en la dirección radial dentro del recubrimiento
set nfr 12 ;# Número de fibras en la dirección radial dentro del núcleo confinado
set nbl 32 ;# Numero de barras de refuerzo a flexión
set dbl 30 ;# Diámetro de las barras de refuerzo a flexión
set lp 0.83 ;# m Longitud de la rotula plástica

# Parámetros que definen el sistema de aislamiento
```

```

set Vy [expr {2*(11.78+45.58*0.03)}] ;# T Fuerza de fluencia 2LRB = 2*(Qd+kd*Dy)
set Ki [expr {$Vy/0.03}] ;# T/m Rigidez inicial
set Kd [expr {45.58*2}] ;# T/m Rigidez post-fluencia

# Masa y carga axial
set masa 26.1 ;# T/g
set P 256 ;# T

# Archivos de resultados
set Desp "C:/vlee/desp.txt" ;# Aquí se guardan los desplazamientos
set Fuerzas "C:/vlee/force.txt" ;# Aquí se guardan los momentos y cortante en la columna
set Curvatura "C:/vlee/curvatura.txt" ;# Aquí se guarda la curvatura en la rotula plástica

# Registro de aceleración sísmica
set Sismo "C:/vlee/s1h1.txt" ;# Ruta y nombre del archivo que contiene el sismo de evaluación
set DtSismo 0.005 ;# s Paso del registro sísmico
set DuracionSismo 38 ;# s duración del sismo
set Fsismo 9.81 ;# Factor que multiplica los datos del registro sísmico para obtener m/s2

# GENERACION DE MODELO
# -----

# Se define modelo en 2 dimensiones y 3 GDL por nudo
model BasicBuilder -ndm 3 -ndf 6

# Coordenadas de los nudos
node 1 0 0 0
node 2 0 $alturacolumna 0
node 3 0 $alturacolumna 0
node 4 0 [expr {$alturacolumna + $alturasuper}] 0

# Restricciones
fix 1 1 1 1 1 1 ;# Se empotra el nudo 1

# Masas nodales
mass 4 $masa 1e-6 1e-6 1e-6 1e-6 1e-6

# Definicion de materiales

# Columna
uniaxialMaterial Steel01 1 $fy $Es $shf ;# Acero de refuerzo a flexión
uniaxialMaterial Concrete01 2 -$fpc -$sec0 0 -$secu ;# Hormigón no confinado
uniaxialMaterial Concrete01 3 -$fpcc -$ecco 0 -$eccu ;# Hormigón confinado

# LRB
uniaxialMaterial Steel01 4 $Vy $Ki [expr {$Kd/$Ki}] ;# Material bilineal para modelar los LRB
uniaxialMaterial Elastic 5 1000000 ;# Material elástico rígido para restringir grados de libertad

# Definición de la sección de la columna
section Fiber 1 { ;# sección compuesta por fibras
patch circ 2 $nfc $nfr 0 0 [expr {$D/2-$rec}] [expr $D/2] 0 360 ;# Fibras de concreto no
confinado
patch circ 3 $nfc $nfr 0 0 0 [expr {$D/2-$rec}] 0 360 ;# Fibras de concreto confinado
layer circ 1 $nbl [expr {$pi*pow($dbl/1000.0,2)/4.0}] 0 0 [expr {$D/2-$rec}] ;# Barras de acero
}

```

```

# Definición de elementos
geomTransf Linear 1 0 0 1 ;# Transformación geométrica
set Ec [expr {150000*sqrt($fpc)}]
set A [expr {$pi*pow($D,2)/4}]
set I [expr {$pi*pow($D,4)/64}]
set G $Ec
set J 1
element beamWithHinges 1 1 2 1 $lp 1 $lp $Ec $A $I $G $J 1 ;# Columna
element elasticBeamColumn 2 3 4 1 1E8 1E8 1 1 1 1 ;# Elemento elástico rígido para modelar
superestructura
element zeroLength 3 2 3 -mat 4 5 5 5 5 -dir 1 2 3 4 5 6 ;# Elemento de longitud 0 para
modelar LRB
#element zeroLength 3 2 3 -mat 5 5 5 5 5 -dir 1 2 3 4 5 6 ;# Elemento de longitud 0 para
modelar LRB

```

#### # ANALISIS BAJO CARGAS GRAVITACIONALES

```
# -----
```

#### # Definición del patrón de cargas

```

set Linear "Linear -factor 1" ;# la carga se aplica linealmente
pattern Plain 1 $Linear {
load 4 0 -$P 0 0 0 ;# Carga axial aplicada en el nudo 4
}

```

#### # Definición de opciones de análisis

```

constraints Plain ;# Forma en la que se manejan las restricciones de nudo
numberer Plain ;# Forma en la que se numeran los nudos para minimizar ancho de banda
system BandGeneral ;# Algoritmo de solución de sistema de ecuaciones
set Tol 1.e-4 ;# Tolerancia en la solución
set maxNumIter 6 ;# Maximo numero de iteraciones para alcanzar tolerancia
set printFlag 0 ;# Para que OpenSees notifique sobre falta de convergencia
set TestType EnergyIncr ;# Tipo de test para prueba de convergencia
test $TestType $Tol $maxNumIter $printFlag
algorithm Newton ;# Algoritmo de solución paso a paso
integrator LoadControl 0.1 ;# Se le indica a OpenSees que aplique 10% de la carga en cada
paso
analysis Static ;# Tipo de análisis
analyze 10 ;# Se le indica a OpenSees que analice 10 pasos

```

#### # ANALISIS INELASTICO DE HISTORIA EN EL TIEMPO

```
# -----
```

```

loadConst -time 0.0 ;# Este comando congela la aplicación de cargas gravitacionales y encera
el tiempo en el dominio de análisis
wipeAnalysis ;# elimina los objetos que definen el tipo de análisis

```

#### # Grabadores de resultados

```

recorder Node -file $Desp -time -node 2 3 4 -dof 1 disp ;# define donde se grabaran los
desplazamientos

```

```

recorder Element -file $Fuerzas -time -ele 1 globalForce; # define donde se grabaran las
fuerzas en la columna
recorder Element -file $Curvatura -time -ele 1 section 1 deformation ; # define donde se
grabaran la curvatura en la columna

```

```
# Define opciones de análisis
```

```
# -----
```

```
set equakex "Series -dt $DtSismo -filePath $Sismo -factor $Fsismo"
pattern UniformExcitation 2 1 -accel $equakex

```

```
# Definicion de opciones de analisis
```

```

constraints Plain ;# Forma en la que se manejan las restricciones de nudo
numberer Plain ;# Forma en la que se numeran los nudos para minimizar ancho de banda
system SparseGeneral -piv ;# Algoritmo de solución de sistema de ecuaciones
set maxNumIter 6 ;# Maximo numero de iteraciones para alcanzar tolerancia
set printFlag 0; ;# Para que OpenSees notifique sobre falta de convergencia
set TestType EnergyIncr ;# Tipo de test para prueba de convergencia
set Tol 1.e-6 ;# Tolerancia en la solución
test $TestType $Tol $maxNumIter $printFlag
set algorithmType Newton ;# Algoritmo de solución paso a paso
algorithm $algorithmType
set NewmarkGamma 0.5; # Parámetro gama para el método de integración de Newmark
set NewmarkBeta 0.25; # Parámetro beta para el método de integración de Newmark
integrator Newmark $NewmarkGamma $NewmarkBeta
analysis Transient ;# Tipo de análisis
set Nsteps [expr int($DuracionSismo/$DtSismo)*2]; # número de puntos de análisis
analyze $Nsteps [expr {$DtSismo/2}]; # comando que ejecutar el análisis

```

### Ejecución del análisis y obtención de los resultados

El código presentado arriba puede ser copiado a un editor de texto como el Notepad de Windows y grabado en la carpeta donde está el ejecutable de OpenSees con cualquier nombre pero con extensión “.tcl”. Ejemplo: “Pila-LRB.tcl”

En la misma carpeta deberá residir un archivo de texto con una sola columna con los valores de aceleración del sismo con el que se desea evaluar la estructura. Del sismo de evaluación se deberá conocer el paso (intervalo de tiempo entre dos puntos consecutivos del registro de aceleración), la duración total, y el factor necesario para transformar las unidades de aceleración del registro a  $m/s^2$ . Estos datos deberán reemplazar a los existentes en la siguiente sección del código:

```
# Registro de aceleración sísmica
```

```
set Sismo "RUTA Y NOMBRE DE MI SISMO"
```

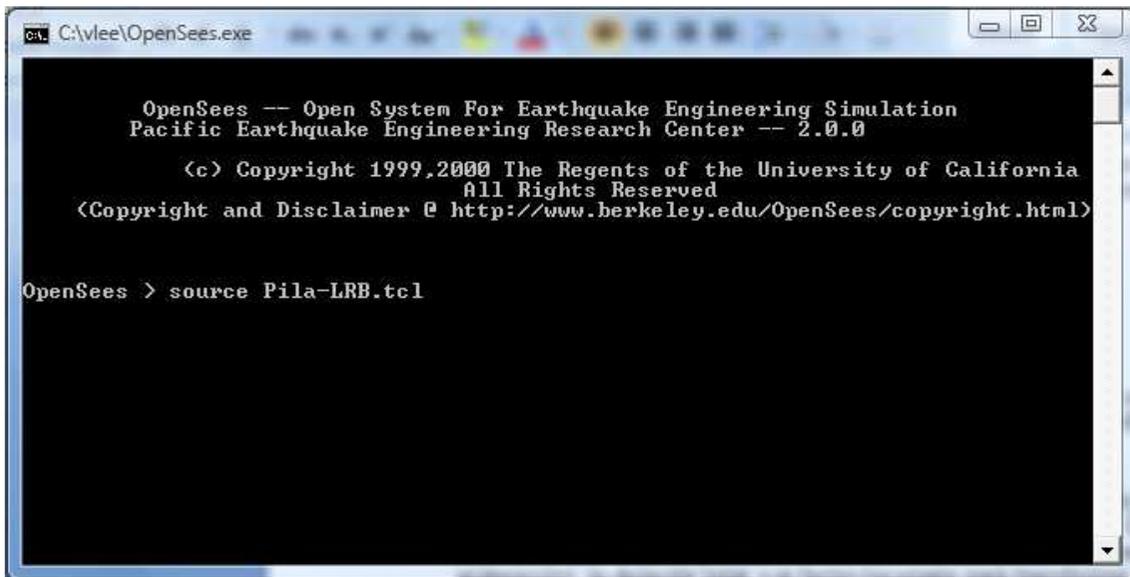
```
set DtSismo PASO ;# s Paso del registro sísmico
```

```
set DuracionSismo MIDURACION ;# s duración del sismo
```

```
set Fsismo MIFACTOR ;# Factor que multiplica los datos del registro sísmico para obtener m/s2
```

Para ejecutar el análisis primero se ejecuta OpenSees luego se llama al archivo que contiene el modelo con la instrucción “source Pila-LRB.tcl”, tal como se muestra en la figura 10.15. Esto dará inicio al análisis que puede tomar unos 30 s dependiendo de la computadora.

En este ejemplo el análisis fue ejecutado de dos veces, en la primera el elemento de zero longitud con el que se modelan los LRB fue bloqueado (rigidizado), con el objeto de obtener la respuesta de la estructura como si no tuviera aislamiento. En la segunda ocasión el elemento fue liberado para obtener la respuesta de la estructura con aislamiento.



```
C:\vlee\OpenSees.exe

OpenSees -- Open System For Earthquake Engineering Simulation
Pacific Earthquake Engineering Research Center -- 2.0.0

(c) Copyright 1999,2000 The Regents of the University of California
All Rights Reserved
(Copyright and Disclaimer @ http://www.berkeley.edu/OpenSees/copyright.html)

OpenSees > source Pila-LRB.tcl
```

**Figure 10.15** Interpretador Tcl para OpenSees

Luego de la ejecución del análisis se crearan, en la misma carpeta donde reside OpenSees, los archivos Desp.txt, Curvatura.txt y Fuerza.txt, conteniendo la historia de desplazamiento, curvatura y fuerzas internas en columna respectivamente.

Estos archivos de texto pueden abrirse en Excel u otros programas de análisis de datos para obtener graficas de resultados como se muestra a continuación:

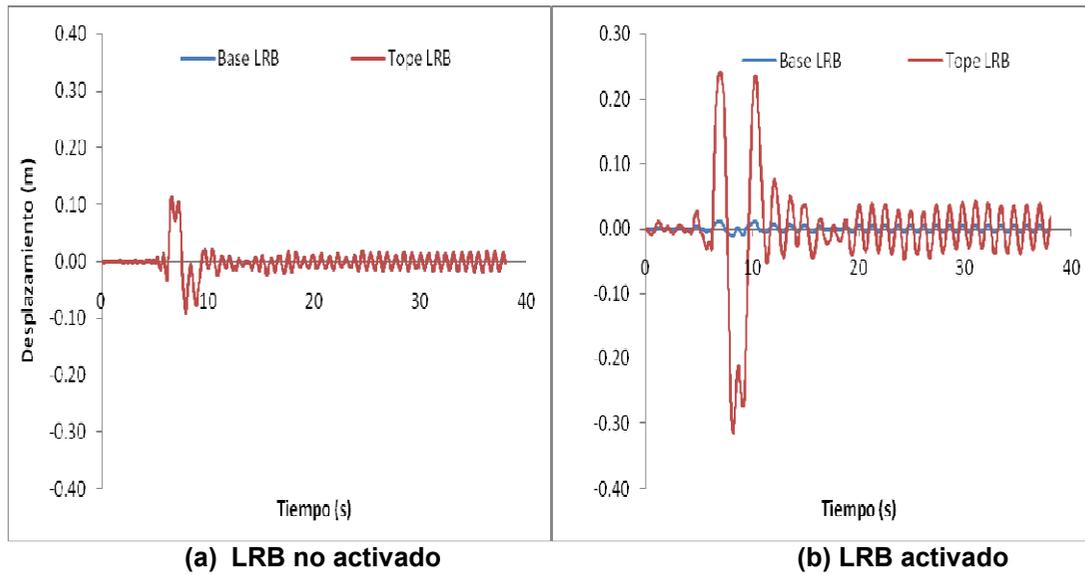


Figura 10.16 Desplazamiento lateral en la base y tope del sistema de aislamiento.

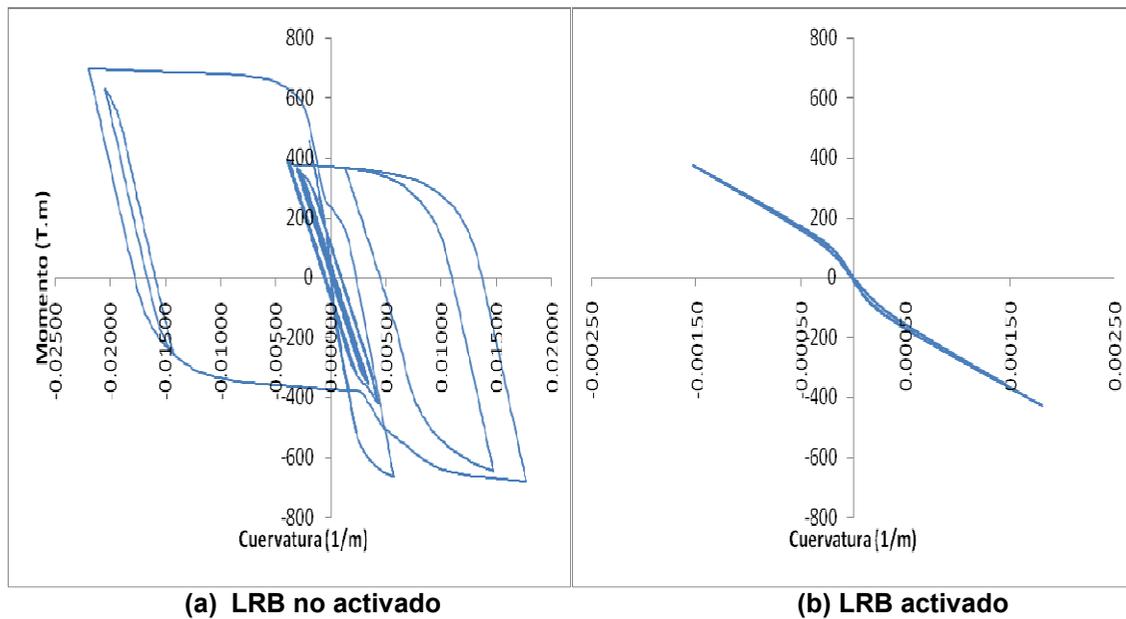
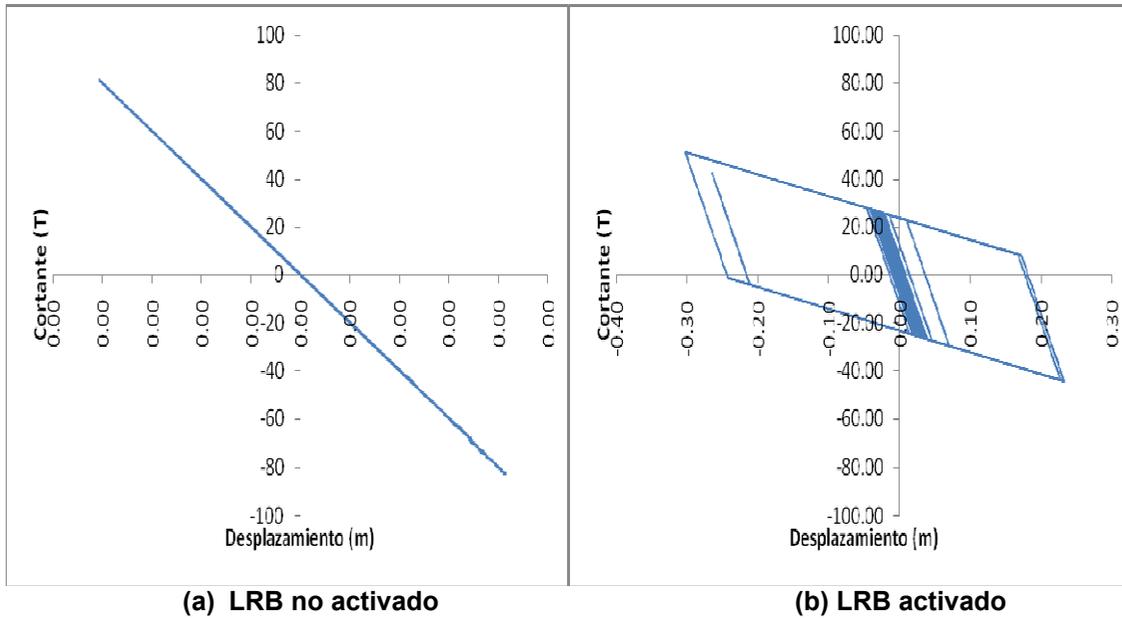


Figura 10.17 Respuesta Momento-Curvatura en la base de la columna de hormigón armado.



**Figura 10.18** Respuesta Fuerza-Desplazamiento del elemento LRB.

### Análisis de resultados

El análisis de las figuras 10.16-18 permite concluir lo siguiente:

Comparando las figuras 10.16a y b se observa que la estructura aislada alcanza mayores desplazamientos que la no aislada. El desplazamiento máximo de la estructura aislada es cercano al desplazamiento de diseño en DDBD. Además se observa que el periodo de vibración de la estructura aislada es mayor (fíjese en la separación de dos crestas consecutivas de respuesta).

En el caso de la estructura aislada, la mayor parte de los desplazamientos se concentraron en los LRB, de ahí la gran diferencia entre los desplazamientos en el tope y en la base del LRB. Los desplazamientos en la base del LRB son los desplazamientos que experimenta la columna. En el caso de la estructura no aislada el desplazamiento de la columna fue mucho menor que en el de la estructura no aislada.

Comparando las figuras 10.17a y b se observa que la columna en la estructura no aislada ingreso en el rango inelástico produciendo ciclos histéricos de gran amplitud. Esto significa que la columna sufrió daño y disipo energía. En la estructura aislada, los ciclos histéricos son muy pequeños lo cual implica que la columna no se dañó.

Los momentos desarrollados en la base de la columna no aislada son mayores que los de la columna aislada. Lo cual implica que el aislamiento produjo una reducción de la demanda de resistencia en el sistema.

Comparando las figuras 10.18a y b se observa que en el análisis de la estructura aislada, el elemento con el que se modeló los LRB desarrolló grandes ciclos inelásticos con mucha disipación de energía.

Aunque para poder concluir que el diseño fue satisfactorio sería necesario simular la respuesta de la estructura bajo la acción de al menos 7 registros sísmicos. Los resultados del

análisis de este sismo en particular muestran que la estructura diseñada con DDBD se desempeña de manera satisfactoria. Los niveles de fuerza y desplazamiento observado se aproximan muy bien a los que se predijo durante el diseño.

## REFERENCIAS

1. AASHTO, (2000), Guide Specification for Seismic Isolation Design, <https://bookstore.transportation.org/>.
2. AASHTO, (2004), AASHTO Standard Bridge design specifications, fourth edition, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, D.C.
3. ATC, (2003), NCHRP 12-49 Recommended LRFD Guidelines for the Seismic Design of Highway Bridges, <http://www.ATCouncil.org>, (accessed June, 2008)
4. ATC,(1996), ATC-32 Improved Seismic Design Criteria for California Bridges ,<http://www.ATCouncil.org>, (accessed June, 2008)
5. Blandon Uribe C., Priestley M. (2005), Equivalent viscous damping equations for direct displacement based design, "Journal of Earthquake Engineering", Imperial College Press, London, England, 9, SP2, pp.257-278.
6. Buckle, I.G, Constantinou, M., (2006), Seismic Isolation of Highway Bridges, <http://mceer.buffalo.edu>.
7. Calvi G.M. and Kingsley G.R., (1995), Displacement based seismic design of multi-degree-of-freedom bridge structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 24, 1247-1266.
8. Dwairi, H. and Kowalsky, M.J.,( 2006), Implementation of Inelastic Displacement Patterns in Direct Displacement-Based Design of Continuous Bridge Structures, Earthquake Spectra, Volume 22, Issue 3, pp. 631-662
9. Dwairi, H., (2004). Equivalent Damping in Support of Direct Displacement - Based Design with Applications To Multi - Span Bridges. PhD Dissertation, North Carolina State University
10. Imbsen, (2007), AASHTO Guide Specifications for LRFD Seismic Bridge Design, AASHTO, <http://cms.transportation.org/?siteid=34&pageid=1800>, (accessed April 18, 2008).
11. Kawashima K, (1993). "SEISMIC ISOLATION OF BRIDGES IN JAPAN". Tokyo Institute of Technology O-Okayama, Tokyo, Japan
12. Kowalsky M.J.,( 2002), A Displacement-based approach for the seismic design of continuous concrete bridges, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 31, pp. 719-747.
13. Kowalsky M.J., Priestley M.J.N. and MacRae G.A. (1995). Displacement-based Design of RC Bridge Columns in Seismic Regions, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 24, 1623-1643.

14. Mazzoni, S., McKenna, F., Scott, M. and Fenves, G., (2004), OpenSees command language manual, <http://opensees.berkeley.edu>, (accessed April 18, 2008)
15. Priestley, Calvi and Kowalsky, (2007), Displacement Based Design of Structures, IUSS Press.
16. Priestley, M. J. N., (1993), Myths and fallacies in earthquake engineering-conflicts between design and reality, Bulletin of the New Zealand Society of Earthquake Engineering, 26 (3), pp. 329–341
17. SEAOC, 2003, Revised Interim Guidelines Performance-Based Seismic Engineering / Force-Displacement Approach for Performance-Based Seismic Engineering. Blue Book.
18. Suárez V., Kowalsky M, (2008), Displacement Patterns for Direct Displacement Based Design of Conventional Highway Bridges, Earthquake Spectra, en proceso de impresión
19. Suárez (2008), Laboratorio Virtual de Ingeniería Sísmica, [www.utpl.edu.ec/vlee/es](http://www.utpl.edu.ec/vlee/es)
20. Suárez V, Kowalsky M, (2008), A Stability-Based Target Displacement for Direct Displacement Based Design of Bridges, Journal of Earthquake Engineering, en proceso de impresión
21. Suárez, V.A. and Kowalsky M.J. (2007), Displacement-Based Seismic Design of Drilled Shaft Bents with Soil-Structure Interaction, Journal of Earthquake Engineering, Volume 11, Issue 6 , pp. 1010 – 1030
22. Suárez, V.A., (2008), Implementation of Direct Displacement Based Design for Highway Bridges, PhD Dissertation, North Carolina State University.



# ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA



DEPARTAMENTO  
DE CIENCIAS DE LA  
TIERRA Y LA CONSTRUCCIÓN

ISBN: 978-9978-301-25-8



9 789978 301258