



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y LA
CONSTRUCCIÓN**

**CARRERA DE INGENIERÍA GEOGRÁFICA Y DEL MEDIO
AMBIENTE**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE INGENIERO GEÓGRAFO Y DEL MEDIO AMBIENTE**

**TEMA: METODOLOGÍA PARA LA DETERMINACIÓN DEL
CUASIGEOIDE PARA EL ECUADOR CONTINENTAL
APLICANDO LA TEORÍA DE MOLODENSKY**

**AUTOR: TNTE DE E BARAHONA PAZOS, CHRISTIAN
ARMANDO**

DIRECTOR: DR. TIERRA CRIOLLO, ALFONSO RODRIGO

SANGOLQUÍ

2016



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y LA CONSTRUCCIÓN
CARRERA DE INGENIERÍA GEOGRÁFICA Y DEL MEDIO AMBIENTE

CERTIFICADO

Certifico que el trabajo de titulación, “METODOLOGÍA PARA LA DETERMINACIÓN DEL CUASIGEOIDE PARA EL ECUADOR CONTINENTAL APLICANDO LA TEORÍA DE MOLODENSKY” realizado por el señor CHRISTIAN ARMANDO BARAHONA PAZOS, ha sido revisado en su totalidad y analizado por el software anti-plagio, el mismo cumple con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, por lo tanto me permito acreditarlo y autorizar al señor CHRISTIAN ARMANDO BARAHONA PAZOS para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 19 de agosto de 2016

Dr. Alfonso Rodrigo Tierra Criollo

DIRECTOR



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y LA CONSTRUCCIÓN
CARRERA DE INGENIERÍA GEOGRÁFICA Y DEL MEDIO AMBIENTE

AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD

Yo, CHRISTIAN ARMANDO BARAHONA PAZOS, con cédula de identidad No. 1713296018, declaro que este trabajo de titulación “METODOLOGÍA PARA LA DETERMINACIÓN DEL CUASIGEOIDE PARA EL ECUADOR CONTINENTAL APLICANDO LA TEORÍA DE MOLODENSKY” ha sido desarrollado considerando los métodos de investigación existentes, así como también se ha respetado los derechos intelectuales de terceros considerándose en las citas bibliográficas.

Consecuentemente declaro que este trabajo es de mi autoría, en virtud de ello me declaro responsable del contenido, veracidad y alcance de la investigación mencionada.

Sangolquí, 19 de agosto de 2016

A handwritten signature in blue ink, which appears to be 'Christian Barahona Pazos', is written over a horizontal line.

Christian Armando Barahona Pazos



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y LA CONSTRUCCIÓN
CARRERA DE INGENIERÍA GEOGRÁFICA Y DEL MEDIO AMBIENTE

AUTORIZACIÓN

Yo, CHRISTIAN ARMANDO BARAHONA PAZOS, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar en la biblioteca Virtual de la institución el presente trabajo de titulación “METODOLOGÍA PARA LA DETERMINACIÓN DEL CUASIGEOIDE PARA EL ECUADOR CONTINENTAL APLICANDO LA TEORÍA DE MOLODENSKY” cuyo contenido, ideas y criterios son de mi autoría y responsabilidad.

Sangolquí, de agosto de 2016

Christian Armando Barahona Pazos

DEDICATORIA

Este sueño fue alcanzado, no solo por mérito propio, sino por tu lucha diaria, mi amada esposa Karen Priscila. Este trabajo está dedicado para ti, por acompañarme y ser pieza fundamental de esta etapa culminada. Por los esfuerzos y anhelos compartidos, por reanimarme con solo una mirada cuando las fuerzas se desvanecían y devolverme la claridad cuando el panorama se tornaba oscuro. Por las noches y madrugadas que estudiaste a mi lado sin entender de Geodesia o Geografía. Por ser la lámpara eterna cercana a mi escritorio, silenciosa pero llenando todos los espacios. Por volverme siempre al camino, guiándome de tu mano para no desviarme de nuestras metas.

Por haberme dado el regalo más valioso, nuestros hijos Ezequiel Nicolás y Juan Sebastián, por quienes nos despertamos cada día y hacemos todo por ver sus pequeñas y hermosas sonrisas.

AGRADECIMIENTO

“Mira que te mando que te esfuerces y seas valiente; no temas ni desmayes, porque Jehová tu Dios estará contigo en dondequiera que vayas”

(Josué 1:9)

Sin la ayuda de Dios, nada hubiese sido posible. Mi mayor agradecimiento es al Señor Jesucristo por ser la guía de mi vida, por escuchar y contestar mis oraciones que me permitieron alcanzar una nueva meta. Por todas sus bendiciones y por ser mi fuerza durante las adversidades, pero sobretodo por nunca abandonarme.

Deseo expresar mi gratitud a las Instituciones que hicieron posible conseguir este objetivo. Al Ejército del Ecuador por la oportunidad de realizar mis estudios de Ingeniería. A la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE por su excelente formación académica, a la cual guardaré para siempre en un lugar muy especial de mi corazón. Al Instituto Geográfico Militar por su apertura e incondicional apoyo.

Quiero dar las gracias a las personas que fueron parte de mi formación y a quienes compartieron conmigo tantas vivencias durante nuestro paso por nuestra querida Carrera de Ingeniería Geográfica y del Medio Ambiente. A mi Director del proyecto de titulación, Dr. Alfonso Tierra quien es un verdadero ejemplo a seguir por sus cualidades, tanto personales como profesionales. A mi Crnl Ramiro Pazmiño por estar siempre presto a brindarme su colaboración y guía. A mi Tcrn Carlos Estrella por su confianza en mí y su constante ayuda. A todos mis docentes por sus enseñanzas y consejos que irán impregnados en mí para siempre. A mi querida señora Gracita Larrea y Carlitos Álvarez por su colaboración pero sobretodo por su imborrable amistad.

A Alejandra Román, Rainiero Estrella, Irene Quishpe, Gabriel Vinueza, Mario Balseca, Daniela Guallichico, Gabriela Wolf, Gabriela Rondal, David Velasco, Carlos Carrillo y mis compañeros en general.

Pero sobretodo a mi madre Jacqueline Pazos, una mujer increíble, una verdadera guerrera, quien nunca se rindió, a quien le debo todo lo que soy.

ÍNDICE

| | |
|--|------------|
| CERTIFICADO | ii |
| AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD | iii |
| AUTORIZACIÓN | iv |
| DEDICATORIA | v |
| AGRADECIMIENTO | vi |
| ÍNDICE | vii |
| ÍNDICE DE TABLAS | xi |
| ÍNDICE DE FIGURAS | xii |
| RESUMEN | xv |
| ABSTRACT | xvi |
| | |
| CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.1. Antecedentes | 1 |
| 1.2. Definición del problema..... | 2 |
| 1.3. Justificación e importancia del problema..... | 3 |
| 1.4. Descripción del área de estudio | 3 |
| 1.5. Objetivos | 4 |
| 1.5.1. Objetivo general..... | 4 |
| 1.5.2. Objetivos específicos | 4 |
| 1.6. Metas | 5 |
| | |
| CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO | 6 |
| 2.1. Superficies de referencia..... | 6 |

| | |
|--|----|
| 2.1.1. Sistema de referencia | 6 |
| 2.1.2. Marco de referencia..... | 7 |
| 2.1.3. Superficies terrestres | 8 |
| 2.2. Campo de gravedad terrestre | 11 |
| 2.2.1. Fundamentos de la teoría del potencial..... | 11 |
| 2.2.2. Fuerza de gravedad | 16 |
| 2.2.3. Superficies de nivel | 17 |
| 2.2.4. Potencial terrestre..... | 18 |
| 2.2.5. Problema de Stokes | 22 |
| 2.3. Sistemas de alturas..... | 24 |
| 2.3.1. Alturas geométricas..... | 24 |
| 2.3.2. Nivelación geométrica | 26 |
| 2.3.3. Números geopotenciales | 28 |
| 2.3.4. Alturas físicas..... | 29 |
| 2.4. Teoría de Molodensky | 31 |
| 2.4.1. Alturas normales y anomalías de altura. Cuasigeoide y teluroide | 32 |
| 2.4.2. Anomalías de gravedad de Molodensky | 34 |
| 2.5. Correcciones de mareas | 35 |
| 2.5.1. Sistemas de mareas permanentes | 35 |
| 2.5.2. Efectos de mareas en observaciones geodésicas y gravimétricas | 37 |
| 2.5.3. Transformación entre sistemas de mareas..... | 37 |
| 2.6. Ajuste de redes geodésicas | 39 |
| 2.6.1. Método de mínimos cuadrados | 39 |
| 2.6.2. Método correlativo para ajuste de observaciones | 41 |
| 2.6.3. Prueba de hipótesis..... | 43 |

| | |
|--|-----------|
| 2.7. Interpolación de gravedad..... | 47 |
| 2.7.1. Anomalías de Bouguer | 47 |
| 2.7.2. Modelos Globales Geopotenciales | 48 |
| CAPÍTULO III: METODOLOGÍA | 50 |
| 3.1. Análisis inicial de los datos | 50 |
| 3.1.1. Red vertical de nivelación geométrica | 50 |
| 3.1.2. Valores de gravedad observada y GPS de precisión..... | 56 |
| 3.2. Cálculo de números geopotenciales..... | 58 |
| 3.2.1. Determinación de las líneas para la red de números geopotenciales | 58 |
| 3.2.2. Interpolación gravimétrica | 63 |
| 3.2.3. Cálculo de desniveles geopotenciales | 70 |
| 3.2.4. Prueba de hipótesis del ajuste | 75 |
| 3.2.5. Cotas geopotenciales..... | 78 |
| 3.3. Metodología de la teoría de Molodensky | 78 |
| 3.3.1. Cálculo de alturas normales | 79 |
| 3.3.2. Generación del modelo cuasigeoidal | 79 |
| CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS..... | 80 |
| 4.1. Red de números geopotenciales..... | 80 |
| 4.1.1. Análisis de la red de nivelación | 80 |
| 4.1.2. Análisis de valores de gravedad en la red de números geopotenciales.... | 84 |
| 4.1.3. Interpolación gravimétrica | 84 |
| 4.2. Ajuste de la red de números geopotenciales | 89 |
| 4.3. Teoría de Molodensky | 93 |

| | |
|--|------------|
| CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES..... | 97 |
| 5.1. Conclusiones..... | 97 |
| 5.2. Recomendaciones | 99 |
| | |
| REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 101 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 1 Parámetros del elipsoide GRS80..... | 11 |
| Tabla 2 Líneas de la red de números geopotenciales | 61 |
| Tabla 3 Errores de cierre de los anillos de la red de números geopotenciales..... | 73 |
| Tabla 4 Desniveles geopotenciales ajustados y residuos | 74 |
| Tabla 5 Especificaciones de precisiones altimétricas en Colombia..... | 81 |
| Tabla 6 Especificaciones de precisiones altimétricas en Perú | 82 |
| Tabla 7 Especificaciones de precisiones altimétricas en México | 82 |
| Tabla 8 Especificaciones técnicas de precisiones para altimetría del FGCC..... | 83 |
| Tabla 9 Residuos de gravedad de los modelos por rastreos terrestres | 85 |
| Tabla 10 Residuos de gravedad de los modelos geopotenciales..... | 87 |
| Tabla 11 Estadísticas de los errores de cierre para el ajuste de la red | 89 |
| Tabla 12 Estadísticas de los residuos después del ajuste de la red | 90 |
| Tabla 13 Puntos sin gravedad en la red de números geopotenciales | 90 |
| Tabla 14 Estadísticas de las alturas normales | 94 |
| Tabla 15 Variaciones de las alturas normales con la aproximación analítica..... | 95 |
| Tabla 16 Estadísticas de las anomalías de altura | 95 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 Superficies de referencia..... | 8 |
| Figura 2 Elipsoide de revolución | 10 |
| Figura 3 Atracción entre dos masas | 12 |
| Figura 4 Atracción entre dos puntos | 13 |
| Figura 5 Atracción de un punto a un cuerpo sólido | 14 |
| Figura 6 Fuerza centrífuga | 16 |
| Figura 7 Línea de plomada..... | 18 |
| Figura 8 Diferencia entre el geoide y el elipsoide de referencia..... | 21 |
| Figura 9 Esfera unidad y terrestre | 23 |
| Figura 10 Altura elipsoidal..... | 25 |
| Figura 11 Nivelación geométrica | 26 |
| Figura 12 Diferencias entre alturas niveladas y alturas ortométricas | 27 |
| Figura 13 Gravedad media a lo largo de la línea de plomada..... | 30 |
| Figura 14 Ondulación geoidal, altura ortométrica y elipsoidal..... | 31 |
| Figura 15 Cuasigeoide..... | 32 |
| Figura 16 Teluroide..... | 33 |
| Figura 17 Prueba de una cola derecha..... | 45 |
| Figura 18 Prueba de una cola izquierda | 45 |
| Figura 19 Prueba de dos colas..... | 46 |
| Figura 20 Red de nivelación del Ecuador continental | 50 |
| Figura 21 Especificaciones técnicas de Ecuador de precisiones para altimetría | 51 |
| Figura 22 Líneas de la red vertical con precisión $4 \text{ mm } \sqrt{k}$ | 52 |
| Figura 23 Líneas de la red vertical con precisión $6 \text{ mm } \sqrt{k}$ | 52 |
| Figura 24 Líneas de la red vertical con precisión $8,4 \text{ mm } \sqrt{k}$ | 53 |
| Figura 25 Análisis de líneas y puntos de la red de nivelación | 55 |
| Figura 26 Resumen de líneas que no se enlazan a nodos..... | 56 |
| Figura 27 Puntos con gravedad en la red de nivelación..... | 57 |
| Figura 28 Puntos con GPS de precisión en la red de nivelación..... | 57 |

| | |
|--|----|
| Figura 29 Criterios de descarte de las líneas de nivelación | 59 |
| Figura 30 Líneas de la red de nivelación descartadas | 59 |
| Figura 31 Red de números geopotenciales para el Ecuador continental..... | 60 |
| Figura 32 Puntos de control para la validación gravimétrica..... | 63 |
| Figura 33 Mapa de interpolación de gravedad observada..... | 64 |
| Figura 34 Mapa de interpolación de anomalías de aire libre | 65 |
| Figura 35 Mapa de interpolación de anomalías de Bouguer simple | 65 |
| Figura 36 Mapa de interpolación de perturbaciones de gravedad..... | 66 |
| Figura 37 Mapa de interpolación del funcional gravedad terrestre del modelo EGM 2008..... | 67 |
| Figura 38 Mapa de interpolación del funcional gravedad terrestre del modelo EIGEN6S4 | 67 |
| Figura 39 Mapa de interpolación del funcional gravedad terrestre del modelo GGM05G | 68 |
| Figura 40 Corrección de aire libre para el Ecuador continental..... | 69 |
| Figura 41 Corrección de Bouguer para el Ecuador continental | 69 |
| Figura 42 Anillos de la red de números geopotenciales | 71 |
| Figura 43 Prueba de hipótesis bilateral | 76 |
| Figura 44 Prueba de hipótesis unilateral | 77 |
| Figura 45 Datos de la red de números geopotenciales para aplicar la metodología de Molodensky | 79 |
| Figura 46 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad interpolada | 85 |
| Figura 47 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad interpolada mediante anomalías de aire libre | 86 |
| Figura 48 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad interpolada mediante anomalías de Bouguer simple | 86 |
| Figura 49 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad interpolada mediante perturbaciones de gravedad | 86 |
| Figura 50 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad del modelo EGM2008 | 87 |

| | |
|--|----|
| Figura 51 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad del modelo EIGEN6S4 | 88 |
| Figura 52 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad del modelo GGM05G | 88 |
| Figura 53 Distribución de puntos sin gravedad dentro de las líneas de la red de números geopotenciales | 92 |
| Figura 54 Modelo digital del terreno de alturas normales para el Ecuador continental .. | 94 |
| Figura 55 Modelo del cuasigeoide para el Ecuador continental | 96 |

RESUMEN

El modelamiento de la figura terrestre a través de la determinación del geoide, presenta dificultades debido a la imposibilidad de medir la gravedad en el interior de la Tierra, conllevando al planteamiento de diversas hipótesis referentes a la distribución interna de las masas terrestres. Para obviar estas hipótesis es utilizada la teoría de Molodensky la cual considera a la superficie topográfica como la tierra real y proponiendo al cuasigeoide como una superficie auxiliar. La distancia entre el cuasigeoide y la superficie terrestre corresponde a las alturas normales, próximas a las alturas ortométricas. Mientras que la separación entre el elipsoide y el cuasigeoide es conocida como anomalía de altura. El desarrollo de las técnicas satelitales de posicionamiento, permite desarrollar en la actualidad la teoría de Molodensky, pues se requiere de la utilización conjunta de mediciones geodésicas y gravimétricas en la superficie terrestre. El presente proyecto tiene como objetivo establecer la metodología para determinar el cuasigeoide del Ecuador continental. Para lo cual, se basó en los registros de desnivel, GPS de precisión y gravedad correspondientes a la Red de Nivelación del Ecuador proporcionados por el Instituto Geográfico Militar. De manera inicial, se desarrolló una red de números geopotenciales, donde los valores de gravedad inexistentes fueron obtenidos mediante interpolación gravimétrica a través de anomalías de Bouguer. Estos números geopotenciales fueron ajustados utilizando el Método de los Mínimos Cuadrados. Posteriormente se calcularon las alturas normales para determinar las anomalías de altura y generando el modelo cuasigeoidal para el Ecuador continental.

PALABRAS CLAVE:

- **CUASIGEOIDE**
- **TEORÍA DE MOLODENSKY**
- **ANOMALÍAS DE ALTURA**
- **NÚMEROS GEOPOTENCIALES**
- **TELUROIDE**

ABSTRACT

The modeling of the Earth's figure through geoid determination presents difficulties due to the inability to measure gravity in the interior of the Earth, leading to approach various hypotheses concerning the internal distribution of land masses. To avoid these hypotheses is used the Molodensky's theory which considers the topographic surface as the real Earth and proposing the quasigeoid as an auxiliary surface. The distance between the Earth's surface and the quasigeoid is known as normal heights, which are close to the orthometric heights. While the separation between the ellipsoid and the quasigeoid is known as height anomalies. The development of global navigation satellite system can now develop the Molodensky's theory, because it requires the joint use of geodetic and gravimetric measurements on the Earth's surface. This project aims to establish the methodology for determining the continental Ecuador's quasigeoid. For that, it is based on records of altitude, GPS and gravity corresponding for the Ecuador's Network Levelling provided by the Military Geographical Institute. Initially it developed a network of geopotential numbers, where nonexistent gravity values were obtained by gravimetric interpolation through Bouguer anomalies. These geopotential numbers were adjusted using the Method of Least Squares. Finally, the normal heights were calculated to determine the height anomalies and generate the continental Ecuador's quasigeoidal model.

KEYWORDS:

- **QUASIGEOID**
- **MOLODENSKY'S THEORY**
- **HEIGHT ANOMALIES**
- **GEOPOTENTIAL NUMBERS**
- **TELLUROID**

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

El geoide ha sido el foco principal de muchas investigaciones por lo que se han generado varios métodos para poder determinarlo, debido a que todas las mediciones geodésicas deben ser reducidas hacia él, para lo cual se aplica el método tradicional o “conservador” de la integral de Stokes. Este método se ha utilizado debido a que el geoide es la representación del geopotencial terrestre y permite obtener una intuición geométrica dentro de los problemas geodésicos (Heiskanen & Moritz, 1985).

La solución de Stokes se basa en dos premisas importantes: que no existan masas atrayentes fuera del geoide y que la gravedad debe ser medida en esta superficie (Moritz & Yurkina, 2000). Por lo tanto para el desarrollo de este método, se deben conocer o estimar de alguna manera, la densidad de las masas entre el geoide y la superficie terrestre, lo cual resulta prácticamente imposible, siendo necesario plantear diferentes hipótesis al respecto. Por lo tanto, el método de Stokes presenta un serio inconveniente, en el que los datos de gravedad observados en la superficie terrestre deben ser reducidos hacia el geoide, para lo cual se necesita conocer la geometría y la densidad de la Tierra (Sevilla, 1987).

En el año de 1945, el geodesta ruso Mikhail Sergeevich Molodensky propone un método alternativo al de Stokes, demostrando que es imposible determinar el geoide, como resultado de que las ondulaciones geoidales y las alturas ortométricas pueden ser obtenidas con precisión (Novotný, 1998). También menciona que la tarea fundamental de la Geodesia es: “Determinar el campo gravitacional externo y la superficie terrestre” (Moritz & Yurkina, 2000), donde se incluyen las alturas normales, cercanas a las ortométricas, pero que puedan ser medidas con mayor facilidad y de la misma forma se determinan las anomalías de altura, que representan el rol de la ondulación geoidal, pero que se encuentran referidas a la superficie terrestre.

Con el desarrollo de los Sistemas de Navegación Global – GNSS, actualmente es posible determinar las alturas elipsoidales y generar un cambio fundamental para la determinación de la superficie terrestre, sin utilizar la densidad de la corteza. De esta forma, se abandonan los intentos de determinar el geoide, debido al cambio de superficie de referencia hacia el elipsoide, implicando que las anomalías de gravedad y las desviaciones de la vertical sean referidas al terreno y ya no al nivel del mar (Heiskanen & Moritz, 1985). Las perturbaciones de gravedad son un ejemplo de dicho cambio de superficie, pues se traslada a la topografía terrestre los valores reales y teóricos de gravedad, con el objetivo de compararlos en la misma superficie, sin realizar formulaciones en cuanto a la densidad de las masas terrestres (Pedraza & Tocho, 2011).

1.2. Definición del problema

Como se mencionó anteriormente, el principal problema consiste en la utilización del geoide para las mediciones geodésicas y para determinar la forma de la Tierra. Tradicionalmente se utiliza el método de Stokes, donde el geoide es el principal objeto de estudio. Para determinar las alturas ortométricas, se necesita conocer la gravedad media a lo largo de la línea de plomada entre el geoide y el terreno, lo cual resulta imposible, por la dificultad de medir la gravedad en el interior de la Tierra, lo que conduce a plantear hipótesis en cuanto a las densidades existentes (Heiskanen & Moritz, 1985).

Las alturas medidas referidas al nivel medio del mar, presentan inconvenientes. Estas están relacionadas a un mareógrafo, que mediante varias mediciones a lo largo de un período de varios años, entrega una cota inicial, de la cual parten los demás valores de alturas, mediante nivelación. Estas alturas no tienen un significado físico, ya que difieren completamente del concepto del geoide. En conclusión, el geoide que es una superficie equipotencial, que se asume que coincide con el nivel medio del mar en reposo, resulta compleja establecerla matemáticamente debido a su forma y comportamiento. Para facilitar los cálculos y los estudios, se planteó al elipsoide de

nivel, como una superficie equipotencial con un campo de gravedad normal, siendo el modelo más adecuado para aproximar las dimensiones de la Tierra.

1.3. Justificación e importancia del problema

Con la teoría de Molodensky se alcanza una nueva etapa en el modelamiento de la figura terrestre, ya que determinar el geoide únicamente por métodos geodésicos y sin usar hipótesis sobre la estructura terrestre es completamente imposible (Zakatov, 1997). Esta metodología permite estudiar de una manera alternativa la superficie física de la Tierra junto a su campo gravitacional exterior, proporcionando un buen desarrollo científico y práctico sin la utilización de hipótesis. Esto permitirá que los errores en la precisión de los trabajos, depende exclusivamente de las mediciones geodésicas y gravimétricas obtenidas, mas no de la teoría utilizada (Zakatov, 1997).

La teoría de Molodensky, planteada en 1945, solo puede ser desarrollada en la actualidad, debido a las técnicas satelitales de posicionamiento GNSS para establecer un elipsoide de referencia. Esta metodología permite utilizar conjuntamente todas las mediciones realizadas en la superficie terrestre (p.ej.: nivelación, gravimetría) con las técnicas satelitales para posición. Esto conlleva a una combinación de métodos geométricos y físicos para resolver problemas geodésicos con una solvente base matemática (Zakatov, 1997).

En nuestro país, no existe un modelo cuasigeoidal oficial ni se han planteado proyectos similares dentro del territorio nacional como información de anomalías de altura o elementos relacionados a la metodología de Molodensky. Otra consideración importante es que no existe una para nuestro país, siendo estos fundamentales para el posicionamiento vertical y como red de enlace con otros países.

1.4. Descripción del área de estudio

El presente proyecto de investigación se llevará a cabo en la superficie continental de la República del Ecuador. Se generará en base a los datos de nivelación geométrica y

gravimétrica, proporcionadas por el Instituto Geográfico Militar. En base a estos puntos se interpolará para cubrir la totalidad del territorio nacional continental.

El Ecuador continental se ubica en la zona noroccidental de Sudamérica, entre los paralelos $01^{\circ} 30' N$ y $03^{\circ} 23,5' S$; y los meridianos $75^{\circ} 12' W$ y $81^{\circ} 00' W$. La extensión del territorio continental es de 262826 km^2 (INOCAR, 2012). El territorio continental se encuentra dividido por la cordillera de los Andes dividiéndolo en tres regiones naturales las cuales son costa, sierra y oriente. Estas zonas presentan variaciones en altura con respecto al nivel medio del mar, lo cual determinará diferencias en las medidas de gravedad a lo largo del territorio.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Desarrollar el modelo cuasigeoidal aplicando la teoría de Molodensky para la definición del sistema de alturas del Ecuador continental.

1.5.2. Objetivos específicos

- Calcular los números geopotenciales a partir de valores de gravedad observada y diferencias de nivel para determinar el sistema de alturas dentro del territorio nacional continental.
- Realizar el ajuste de la red de los números geopotenciales a través del método de mínimos cuadrados.
- Obtener el valor de la altura normal para determinar el cuasigeoide a partir de las anomalías de altura.

1.6. Metas

- Generar una red vertical para el cálculo de los números geopotenciales que cubra la parte continental del Ecuador.
- Determinar una base de datos con los valores de las alturas normales y gravedad normal referidas al elipsoide GRS80.
- Desarrollar un mapa con el modelo cuasigeoidal del Ecuador continental.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Superficies de referencia

Comúnmente se conoce que, para determinar la posición de un objeto físico, este debe estar referido a un origen o punto de referencia establecido. Dentro de los avances en el campo de la Geodesia, el desarrollo de los sistemas de referencia, ha tenido la finalidad de obtener coordenadas sobre la Tierra, y a su vez, determinar su forma y dimensiones (Moirano, 2000). Es fundamental para otras Ciencias de la Tierra (p. ej.: Geofísica, Geodinámica, Cartografía), pues permite, además de localizar las observaciones realizadas, analizar el movimiento y las deformaciones en la corteza terrestre (Furones, 2011).

2.1.1. Sistema de referencia

Los sistemas de referencia comprende un conjunto de teorías y constantes que interactúan entre sí, con la finalidad de localizar cualquier punto en el espacio con respecto a una terna de ejes coordenados con origen y orientación (Furones, 2011). Por lo tanto, los sistemas de referencia deben definir el origen, la orientación y los fundamentos de los ejes del sistema. Para catalogar a un sistema de referencia como convencional, deben estar establecidos, previa y explícitamente, los modelos, hipótesis, algoritmos y constantes numéricas.

Anteriormente se utilizaba un modelo elipsoidal de revolución, que gira con una velocidad angular constante alrededor del eje de simetría del elipsoide. El origen de coordenadas coincide con el geocentro, el eje “z” coincide con el eje de rotación, el eje “x” está en la dirección del plano del ecuador orientado hacia el meridiano central, mientras que el eje “y” se encuentra contenido en el plano ecuatorial y es perpendicular al eje “x” (Moritz, 1984). En la actualidad, como resultado de los avances tecnológicos que han introducido el posicionamiento mediante técnicas satelitales, en Geodesia son

necesarios, tanto los sistemas de referencia terrestre como los espaciales. Los sistemas de referencia terrestre describen la geometría sobre la superficie y su campo gravitacional, mientras que los sistemas de referencia celestes describen la orientación de la Tierra junto a otros cuerpos en el espacio (Torge, 2001). Los sistemas de referencia en la Geodesia satelital, son globales y geocéntricos, siendo esenciales para la descripción de los movimientos del satélite, modelamiento de las observaciones y para la representación de sus productos (Seeber, 2003). Los actuales sistemas de referencia terrestres (p. ej.: SIRGAS, ITRS, WGS84) tienen como origen el centro de masas de la Tierra, incluyendo los océanos y la atmósfera. Dentro de los sistemas celestes se tiene al International Celestial Reference System –ICRS-, que es compatible para una conexión con el International Terrestrial Reference System –ITRS- (IERS, 2013). Con respecto a las mediciones gravimétricas, el sistema de referencia correspondiente es el International Gravity Standardization Net 1971 (IGSN71).

2.1.2. Marco de referencia

Los marcos de referencia son la materialización de los sistemas de referencia. Por lo tanto, cada sistema definido a través de teorías y convenciones, es plasmado a través de su correspondiente marco, mediante puntos ubicados sobre la superficie terrestre. Estos puntos poseen sus propias coordenadas y velocidades, de acuerdo al sistema de referencia convencional, para concretarlo en el espacio (Furones, 2011). Sin duda alguno, los progresos en Geodesia satelital han contribuido al establecimiento de marcos globales de referencia (Seeber, 2003).

De esta manera, el International Terrestrial Reference Frame –ITRF- es el marco correspondiente del ITRS. Este marco se encuentra referido a una época determinada de observación, por lo que se han definido varios marcos (p. ej.: ITRF94, ITRF2000, ITRF2005, ITRF2008) El último marco definido es el ITRF2014, presentando como innovación a sus predecesores, modelos de deformación post-sísmicos (ITRF, 2016). Con respecto a los otros sistemas mencionados anteriormente, el ICRS es materializado a través del International Celestial Reference Frame –ICRF-; el Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas –SIRGAS-, al ser definido idéntico al ITRS, su

realización comprende la densificación regional del marco global ITRF en Latinoamérica y El Caribe.

Debido a la diversidad y constante actualización de los marcos, es necesario realizar transformaciones, a través de parámetros de rotación, traslación y diferencia de escala, así como un modelo de velocidades, para obtener las coordenadas en un marco y época deseados.

2.1.3. Superficies terrestres

Una de las tareas científicas principales de la Geodesia es determinar el campo gravitacional externo y la superficie terrestre (Moritz & Yurkina, 2000); así como establecer la forma y dimensiones de esta. En este apartado se referirá, de manera general, a las superficies terrestres como son el geoide, el elipsoide y la superficie terrestre (ver figura 1), sin adentrarse en las consideraciones del campo gravitacional, el cual será expuesto en el siguiente tema.

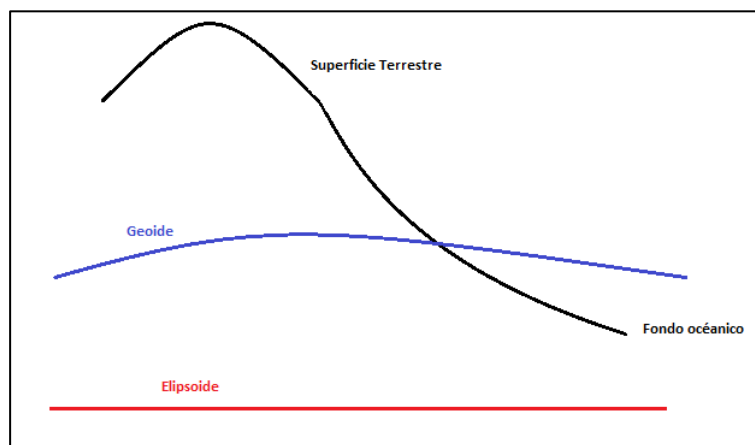


Figura 1 Superficies de referencia

La superficie terrestre, como es conocida tradicionalmente, se refiere a la topografía, donde se ubican los objetos geográficos, tanto naturales como artificiales, y donde se realizan las observaciones y mediciones (p. ej.; geodésicas, topográficas, gravimétricas). Como se citó que se busca determinar la figura real de la Tierra, inicialmente se estableció el concepto de geoide, definido de manera general, como la superficie del agua en reposo en los océanos extendida bajo los continentes (Zakatov, 1997). Esta superficie depende de la distribución de las masas en el interior terrestre, lo que la hace indeterminable. Al ser compleja la determinación del geoide, se vuelca imposible emplearla dentro de las soluciones matemáticas dentro de la Geodesia. Esto conlleva al empleo del elipsoide como la figura matemática que mejor se acopla a la forma de la Tierra, resolviendo las dificultades vistas anteriormente, a través del empleo de ecuaciones.

El elipsoide debe alcanzar la mayor proximidad a la forma de la Tierra, por lo que debe cumplir la condición de coincidir su centro, con el centro de masas de la Tierra y su plano ecuatorial con el plano del ecuador terrestre (Zakatov, 1997). El uso de las observaciones satélites para posicionamiento ha permitido la consolidación de esta figura terrestre. A diferencia del elipsoide geocéntrico (p. ej.: WGS84, GRS80), se tienen también, elipsoides no geocéntricos (p.ej.: Internacional de Hayford), los cuales se adaptan a las necesidades de una región o localidad predefinida. Pero hay que destacar que estos elipsoides no cumplen con la condición de coincidencia de su centro con el geocentro, con la finalidad de adaptarse a un terreno deseado. Esto implica que no haya concomitancia en los planos ecuatoriales y que su superficie no coincida con la superficie de la Tierra o la del geoide (Zakatov, 1997).

El elipsoide, proviene de la rotación alrededor de su eje menor y representa la figura geométrica que mejor se aproxima al geoide. Puede definirse por los parámetros de sus semiejes, achatamiento y excentricidades.

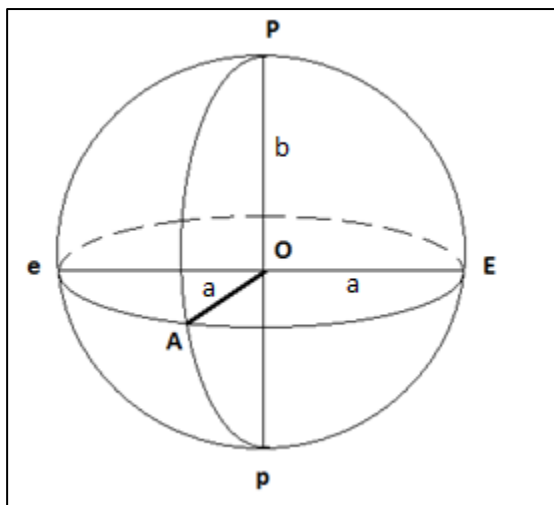


Figura 2 Elipsoide de revolución

Refiriéndose a la figura 2, se detallan los parámetros del elipsoide con su correspondiente notación (Zakatov, 1997):

Semieje mayor o ecuatorial (a) que resulta el segmento $O-E$, o sus correspondientes $O-e$ y $O-A$.

El semieje menor o polar (b), que corresponde al segmento $O-P$, o a $O-p$.

El achatamiento polar (f) viene de la relación entre sus semiejes de la siguiente manera:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (2-1)$$

La primera excentricidad del meridiano de la elipse corresponde a la ecuación:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (2-2)$$

Y finalmente, la segunda excentricidad del meridiano es:

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (2-3)$$

Estos parámetros son los principales para la conformación del elipsoide y a partir de estos valores se pueden obtener varias relaciones que serán útiles para los cálculos geodésicos.

Los parámetros geométricos y físicos para el elipsoide GRS80, son los adoptados dentro de SIRGAS (Ver tabla 1)

Tabla 1

Parámetros del elipsoide GRS80

| | PARÁMETRO | VALOR | UNIDAD |
|----------------------------|-------------------------------------|---------------------------|-----------|
| a | Eje mayor | 6378137 | m |
| b | Eje menor | 6356752,3141 | m |
| f | Achatamiento | 0,003352810681 | |
| m | $\omega^2 a^2 b^2 / GM$ | 0,00344978600308 | |
| ω | Velocidad angular | 7292115×10^{-11} | rad/s |
| GM | Constante gravitacional geocéntrica | 3986005×10^5 | m^3/s^2 |

Fuente: (Moritz, 1984)

2.2. Campo de gravedad terrestre

2.2.1. Fundamentos de la teoría del potencial

La teoría del potencial tiene su base en la Ley Universal de Gravitación de Newton, donde se establece que cada partícula del Universo atrae a otras, a través de una fuerza F cuya dirección es la línea que las une (ver figura 3), y cuya magnitud es directamente el producto de sus masas m_1 y m_2 , e inversa al cuadrado de su distancia l (Kellogg, 1929).

$$F = k \frac{m_1 \cdot m_2}{l^2} \quad (2-4)$$

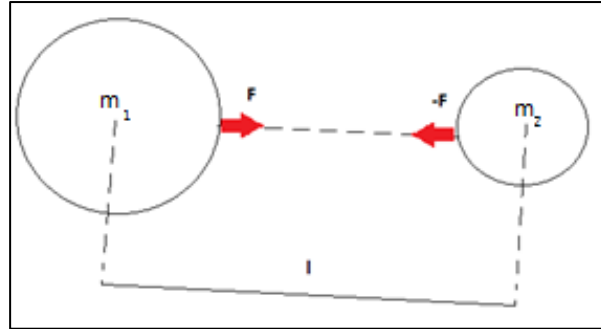


Figura 3 Atracción entre dos masas

Las masas m_1 y m_2 , a pesar de ser atraídas de forma simétrica, es recomendable diferenciarlas como masa atrayente y masa atraída. El valor de k , representa la constante de gravitación de Newton con valor

$$k = 6,67428 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \ s^2} \quad (2-5)$$

Esta medición corresponde a los estándares numéricos proporcionados por el International Earth Rotation and Reference Systems Service (Petit & Luzum, 2010).

Para simplificación, se asume que la masa atraída corresponde a la unidad, obteniendo

$$F = k \frac{m}{l^2} \quad (2-6)$$

De este modo, se tiene al punto de masa m con coordenadas (x, y, z) , y las coordenadas del punto atraído, como origen del sistema, con coordenadas (a, b, c) (ver figura 4)

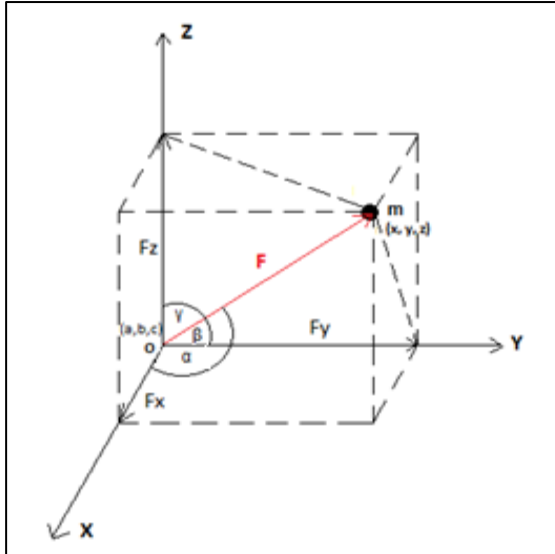


Figura 4 Atracción entre dos puntos

La distancia l , es igual a

$$l = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} \quad (2-7)$$

Las componentes de la fuerza F están dadas por

$$F_x = F \cos \alpha = \frac{km(x - a)}{l^2} \frac{1}{l} = \frac{km(x - a)}{l^3} \quad (2-8)$$

$$F_y = F \cos \beta = \frac{km(y - b)}{l^2} \frac{1}{l} = \frac{km(y - b)}{l^3} \quad (2-9)$$

$$F_z = F \cos \gamma = \frac{km(z - c)}{l^2} \frac{1}{l} = \frac{km(z - c)}{l^3} \quad (2-10)$$

Esta fuerza de atracción representa un vector y es obtenida a partir de la aplicación del gradiente al potencial gravitatorio V (Heiskanen & Moritz, 1985):

$$V = \frac{k \cdot m}{l} \quad (2-11)$$

$$F = \text{grad } V = \left(\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz} \right) \quad (2-12)$$

Las componentes de la fuerza gravitatoria se formulan por

$$F_x = \frac{dV}{dx} \quad (2-13)$$

$$F_y = \frac{dV}{dy} \quad (2-14)$$

$$F_z = \frac{dV}{dz} \quad (2-15)$$

La forma más general, es la atracción de un punto P hacia un cuerpo con masa M y densidad ρ (ver figura 5). Dicha densidad se obtiene a partir de (2-16) donde dm corresponde a un elemento de masa y dv a un elemento de volumen

$$\rho = \frac{dm}{dv} \quad (2-16)$$

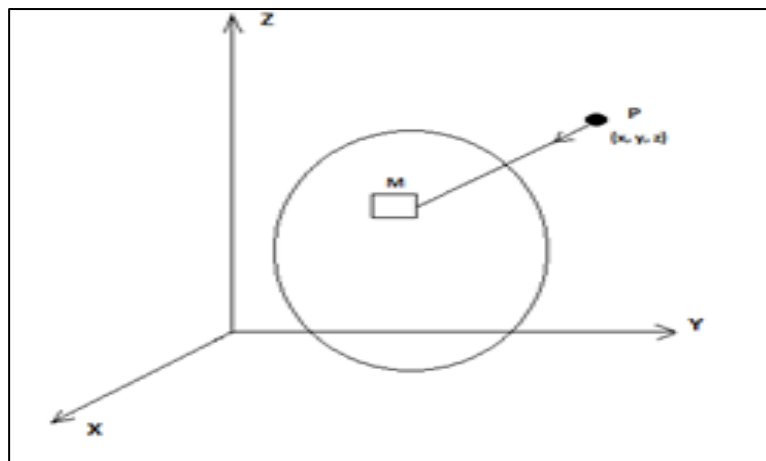


Figura 5 Atracción de un punto a un cuerpo sólido

El elemento de volumen del cuerpo dv se encuentra dividido en volúmenes elementales da , db , dc , que al reemplazarlos en (2-16) se obtiene

$$dv = \rho (da \cdot db \cdot dc) \quad (2-17)$$

Las proyecciones de la fuerza de atracción de la masa M al punto P son

$$dFx = \frac{k (x - a)}{l^3} dm = \frac{k \rho (x - a)}{l^3} da db dc \quad (2-18)$$

$$dFy = \frac{k (y - b)}{l^3} dm = \frac{k \rho (y - b)}{l^3} da db dc \quad (2-19)$$

$$dFz = \frac{k (z - c)}{l^3} dm = \frac{k \rho (z - c)}{l^3} da db dc \quad (2-20)$$

Al sumar la atracción de las masas en todo el cuerpo se tiene

$$Fx = k \iiint \frac{\rho (x - a)}{l^3} da db dc \quad (2-21)$$

$$Fy = k \iiint \frac{\rho (y - b)}{l^3} da db dc \quad (2-22)$$

$$Fz = k \iiint \frac{\rho (z - c)}{l^3} da db dc \quad (2-23)$$

Por lo tanto, el potencial de atracción del cuerpo con masa m en el punto P es expresado por

$$V = k \iiint \frac{\rho}{l^3} da db dc \quad (2-24)$$

Y reemplazando el valor de los volúmenes elementales en la masa y posteriormente sustituyendo (2-16) se obtiene

$$V = k \iiint_v \frac{dm}{l} = k \iiint_v \frac{\rho}{l} dv \quad (2-25)$$

2.2.2. Fuerza de gravedad

En la naturaleza existen interacciones básicas producidas por las fuerzas gravitatoria, electromagnética y nuclear. La fuerza gravitatoria resulta despreciable cuando la interacción se da entre cuerpos pequeños pero es determinante entre cuerpos de magnitudes grandes, como son los cuerpos celestes. El campo de gravedad terrestre es la sumatoria de las fuerzas que ejercen sobre cuerpos en reposo sobre la superficie terrestre; donde intervienen la fuerza gravitatoria, fuerza centrífuga, la fuerza de atracción con otros cuerpos celestes y la fuerza de atracción de la atmósfera terrestre. Estas dos últimas son consideradas despreciables y por ende, la fuerza de gravedad g es la resultante entre la fuerza gravitatoria F y la fuerza centrífuga f_c de rotación terrestre (Heiskanen & Moritz, 1985). La interacción de estos elementos se aprecia dentro de un sistema de coordenadas geocéntrico (ver figura 6).

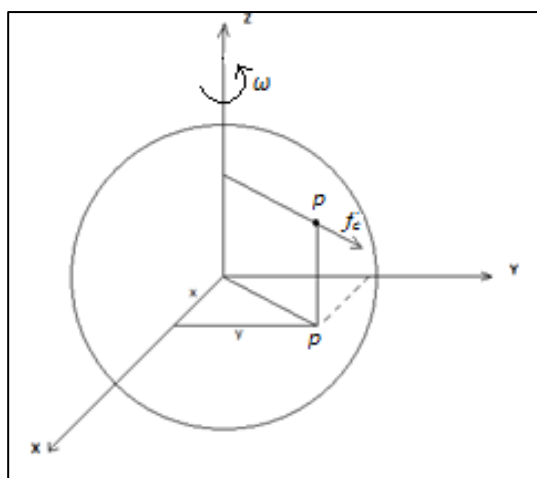


Figura 6 Fuerza centrífuga

La fuerza centrífuga por unidad de masa está determinada por el producto de la velocidad angular de rotación terrestre ω y la distancia al eje de rotación p

$$f_c = \omega^2 p \quad (2-26)$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2-27)$$

En función del potencial centrífugo Φ , la fuerza centrífuga es dada a través de

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2-28)$$

$$f_c = \text{grad } \Phi = \left(\frac{d\Phi}{dx}, \frac{d\Phi}{dy}, \frac{d\Phi}{dz} \right) \quad (2-29)$$

Como la fuerza de gravedad es la suma entre la fuerza gravitatoria y la fuerza centrífuga de rotación, el potencial de gravedad W resulta del potencial gravitatorio más el potencial centrífugo

$$W = V + \Phi = k \iiint_v \frac{\rho}{l} dv + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2-30)$$

Aplicando el gradiente al potencial de gravedad se obtiene el vector gravedad \vec{g} o vector fuerza total

$$\vec{g} = \text{grad } W = \left(\frac{dW}{dx}, \frac{dW}{dy}, \frac{dW}{dz} \right) \quad (2-31)$$

La magnitud de la gravedad, es una dimensión física de aceleración, medida en gales, y su dirección es la línea de plomada o vertical (Heiskanen & Moritz, 1985).

$$1 \text{ gal} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \quad (2-32)$$

2.2.3. Superficies de nivel

Cuando una superficie cumple con la condición que su potencial de gravedad W sea constante, es considerada como superficie de nivel o superficie equipotencial W_0 .

$$W = W_0 = \text{constante} \quad (2-33)$$

Las superficies de nivel intersecan en ángulos rectos a las líneas de plomadas que presentan una ligera curvatura y no son rectas (ver figura 7). El vector gravedad es tangente a la línea de plomada y las alturas ortométricas H se miden a lo largo de estas (Heiskanen & Moritz, 1985).

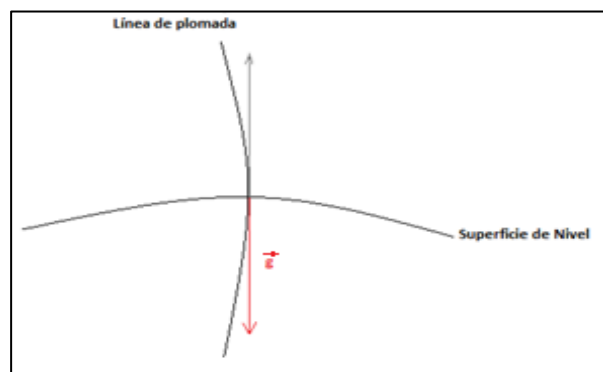


Figura 7 Línea de plomada

2.2.4. Potencial terrestre

2.2.4.1. Geopotencial

Las mediciones geodésicas están referidas tradicionalmente sobre la línea de plomada y al geoide como superficie de nivel. El geoide es fundamental dentro de la Geodesia como superficie de referencia para la determinación de alturas. Si bien, fue definido como la superficie de nivel que mejor representa el nivel medio del mar; en la actualidad, el geoide es la superficie equipotencial del campo de gravedad de la Tierra (Vanicek, Santos, Tenzer, & Hernández-Navarro, 2003). Dentro del aspecto físico, se considera a las masas oceánicas como materia homogénea de libre movimiento que están sujetas únicamente a la fuerza gravedad y son independientes de las variaciones temporales. Al alcanzar un equilibrio, la superficie de los océanos “idealizados” permitiría asumir una superficie equipotencial del campo de gravedad (Torge, 2001).

Al existir la influencia de los cuerpos celestes como la Luna y el Sol, se generan mareas que van modificando el potencial terrestre con el tiempo, siendo recomendable

establecer un geoide para una época determinada (Introcaso, 2006). En otras palabras, el geoide debe ser la superficie equipotencial que mejor se ajusta a un nivel medio del mar en dicha época establecida. Las mareas en cuestión, presentan efectos permanentes en tres maneras posibles: el primer efecto corresponde a un *geoide medio (mean)*, donde se incluyen los efectos directos de la atracción y los efectos indirectos de deformación. Este coincide con el nivel del mar en relativa calma. En el segundo efecto, se tiene al *geoide sin mareas (non-tidal o tide free)*, debido a la eliminación del efecto total de mareas para satisfacer la condición de la fórmula de Stokes, de que todas las masas permanezcan dentro del geoide. Por último, el *geoide cero (zero)*, donde se elimina la atracción permanente de las mareas lunar y solar pero la deformación permanente es retenida (Torge, 2001).

2.2.4.2. Esferopotencial

El elipsoide de revolución, que representa a la Tierra normal, presenta un campo de gravedad teórico, pudiendo ser determinado mediante los parámetros de un elipsoide predefinido. Si bien ya se mencionó que la Tierra no tiene la forma de un elipsoide, menos aún el campo gravitacional terrestre será similar al de la figura geométrica, pero adoptar este modelo resulta conveniente debido a su fácil manejo matemático. De esta forma, las superficies equipotenciales U son constantes, pero el esferopotencial U_0 corresponde al campo de gravedad normal de un elipsoide de revolución de nivel, siendo de esta manera, la figura normal de la Tierra.

$$U = U_0 = \text{constante} \quad (2-34)$$

El vector gravedad normal γ es el gradiente del campo de gravedad normal

$$\gamma = \text{grad } U \quad (2-35)$$

Este vector es perpendicular al elipsoide de nivel y para determinarla, se utiliza la ecuación de Somigliana, en la cual se incluye la gravitación de la masa atmosférica (Somigliana, 1929)

$$\gamma = \frac{a \gamma_a \cos^2 \varphi + b \gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2-36)$$

Esta fórmula está definida en función de la latitud φ y los semiejes del elipsoide a y b . También se deben incluir los valores de gravedad normal en el ecuador γ_a y en el polo γ_b . Para el elipsoide GRS80 se tienen definidos estos valores (Moritz, 1984)

$$\gamma_a = 978032,67715 \text{ mgal} \quad (2-37)$$

$$\gamma_b = 983218,63685 \text{ mgal} \quad (2-38)$$

De acuerdo a la teoría del equipotencial del elipsoide, se considera que el potencial gravitacional normal debe ser una función armónica fuera del elipsoide, lo cual implica la ausencia de la masa atmosférica. Por lo tanto, si la fórmula de Somigliana incluye los efectos atmosféricos es necesario realizar correcciones a los valores calculados de gravedad normal (Moritz, 1984).

2.2.4.3. Potencial perturbador

Ya presentados ambos potenciales, es lógico que exista una diferencia entre ambos. Esta pequeña diferencia es conocida como potencial perturbador o potencial anómalo T .

Este potencial corresponde al valor, necesario a sumarse al esferopotencial U para determinar el geopotencial W .

$$W = U + T \quad (2-39)$$

2.2.4.4. Teorema de Bruns. Anomalía de gravedad y perturbación de gravedad

La distancia de separación entre un punto P del geoide y su correspondiente punto Q en el elipsoide referencial, es la ondulación geoidal o altura geoidal N (ver figura 8).

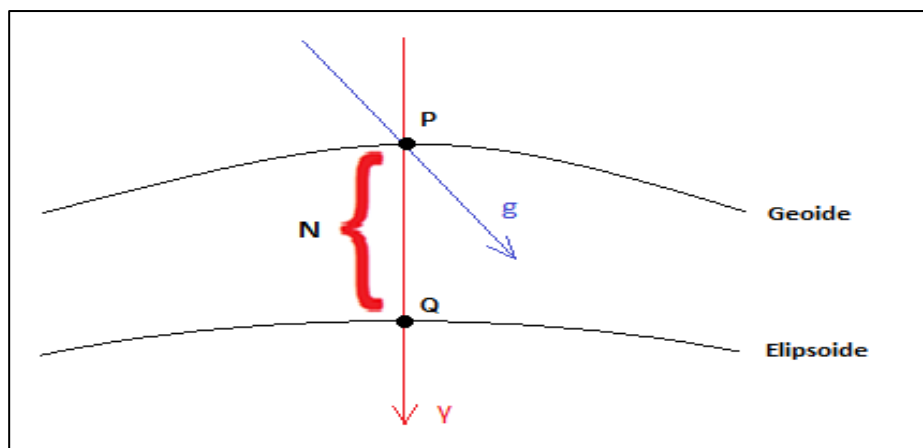


Figura 8 Diferencia entre el geoide y el elipsoide de referencia

La diferencia entre el vector gravedad g en el punto P y el vector gravedad normal γ en Q es el vector anomalía de gravedad Δg . Su magnitud es nombrada como anomalía de gravedad y su dirección corresponde a la desviación de la vertical

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \quad (2-40)$$

Otra manera posible de comparar ambos vectores, es en el mismo punto a través del vector perturbación de gravedad δg

$$\delta g = g_P - \gamma_P \quad (2-41)$$

Su magnitud es la perturbación de gravedad y su dirección es la misma desviación de la vertical mencionada anteriormente, debido a que las direcciones del vector gravedad normal en la superficie terrestre y en el elipsoide son prácticamente coincidentes (Heiskanen & Moritz, 1985).

Considerando al vector gravedad como gradiente del geopotencial y al vector gravedad normal como gradiente del esferopotencial, el vector perturbación de gravedad corresponde al gradiente del potencial anómalo

$$\delta g = \text{grad } T = \text{grad } (W - U) \quad (2-42)$$

Tradicionalmente, el uso de perturbaciones de gravedad se ha visto relegado debido a las anomalías de gravedad a pesar de ser más simples. Pero en la actualidad, su importancia y uso se debió al desarrollo de las técnicas satelitales de posicionamiento que permiten obtener alturas elipsoidales. Esto generó un cambio en la superficie de referencia terrestre hacia el elipsoide, por las complejidades de obtener el gradiente del campo de gravedad real, resultando más conveniente reemplazarlo por el gradiente del campo normal de gravedad. De este modo, si la superficie de referencia vertical es el geoide se debe relacionar a las anomalías de gravedad; pero si la referencia es el elipsoide deben ser las perturbaciones de gravedad (Hinze, Aiken, Brozena, Coakley, & Dater, 2005). Las perturbaciones de gravedad pueden, de la misma manera que las anomalías de gravedad, utilizarse para determinar ondulaciones geoidales y anomalías de altura (Ferreira, Zhang, & de Freitas, 2013).

Para vincular las ondulaciones geoidales con el potencial perturbador se utiliza el teorema de Bruns

$$N = \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad (2-43)$$

Esto permite determinar la distancia geoidal N , puesto que el potencial perturbador puede ser definido por mediciones satelitales a través de series finitas extensas (Novotný, 1998).

2.2.5. Problema de Stokes

La teoría de Stokes tiene su base en el desarrollo de la fórmula de Stokes (2-44), publicada por George Gabriel Stokes en 1849, que permite determinar el geoide a través de datos gravimétricos

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2-44)$$

Para alcanzar dicha fórmula se utilizó el teorema de Bruns y para analizar su deducción se recomienda al lector revisar (Heiskanen & Moritz, 1985) y (Novotný, 1998).

Dentro de la fórmula de Stokes, la doble integral corresponde a la extensión sobre la esfera unidad (ver figura 9); $d\sigma$ corresponde al elemento de ángulo sólido definido como el elemento superficie de la esfera unidad; R es el elemento de superficie de la esfera terrestre, $S(\psi)$ viene definido por

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (2-45)$$

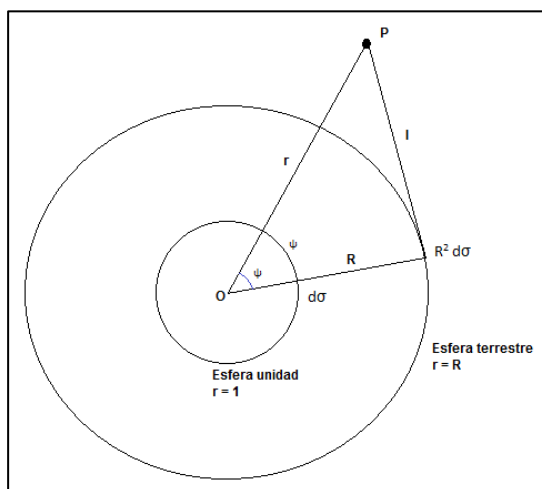


Figura 9 Esfera unidad y terrestre

Fuente: (Heiskanen & Moritz, 1985)

La fórmula de Stokes solamente es utilizable para un elipsoide de referencia que cumpla con las condiciones de tener el mismo potencial del geoide; que su masa sea igual a la masa terrestre; y, que sea geocéntrico. Debido a que obtener el mismo potencial y masa, no pueden ser alcanzados en su totalidad, la fórmula de Stokes debe ser cambiada para el elipsoide determinado.

La tarea de Stokes se basa en que no existan masas atrayentes fuera del geoide y que sobre esta superficie se mida la gravedad (Moritz & Yurkina, 2000), para lo cual es necesario que se regularice la Tierra, a través del descuento de la correspondiente reducción de gravedad (Sánchez, 2003). Dentro de (2-44) se incluye el cálculo de anomalías de gravedad siendo necesario eliminar el efecto de las masas encima del geoide a través de reducciones de gravedad (p. ej.: Aire Libre, Bouguer, Isostáticas) las cuales difieren en el método para desplazar las masas topográficas. Para las reducciones es necesario plantear hipótesis de la distribución de las masas internas debido a la imposibilidad de determinar con exactitud la densidad terrestre. Cada hipótesis generará sus propios supuestos y planteamientos, lo que conducirá a sus correspondientes valores para las condiciones de frontera, obteniendo diferentes anomalías de gravedad y por consiguiente diferentes geoides (Sánchez, 2003).

2.3. Sistemas de alturas

Los diferentes tipos de alturas existentes, dependen de la utilización de nociones geométricas y físicas mediante la vinculación de la altitud con el potencial. Cada tipo de altura, dependerá también de la referencia vertical utilizada; donde principalmente son las superficies equipotenciales. Si se utilizan mediciones geométricas se tienen sus alturas nombradas de la misma manera, pero cuando en estos valores intervienen mediciones de gravedad se obtienen las alturas físicas. Las alturas geométricas son las alturas niveladas y alturas elipsoidales; mientras que dentro de las alturas físicas, constan las alturas ortométricas, alturas dinámicas y alturas normales.

2.3.1. Alturas geométricas

2.3.1.1. Alturas elipsoidales

Las alturas elipsoidales h corresponden a la distancia que separa la superficie terrestre y el elipsoide de referencia a lo largo de la normal (ver figura 10), siendo

calculadas a través de un sistema de coordenadas cartesianas referidas al centro del elipsoide; pero actualmente, su facilidad de determinación se debe al uso de técnicas de navegación y posicionamiento satelital GNSS.

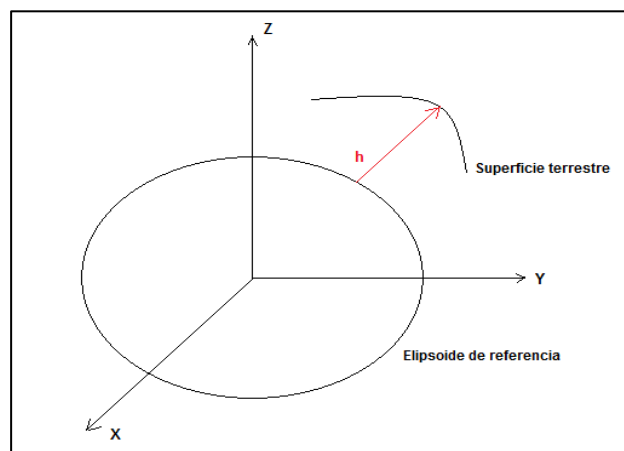


Figura 10 Altura elipsoidal

Al ser una altura netamente geométrica sin obtener valores de gravedad, se pueden tener valores similares en puntos situados en diferentes niveles, así como tener valores diferentes de altura sobre una misma superficie de nivel (Freitas & Blitzkow, 1999). A pesar de este inconveniente, su facilidad de determinación mediante las técnicas de rastreo GPS ha permitido que estas alturas sean utilizadas de manera común.

2.3.1.2. Alturas niveladas

Cuando la referencia vertical corresponde al nivel medio del mar se determinan las alturas niveladas. El nivel medio del mar es fijado dentro de una época definida, debido a las constantes variaciones producidas por efectos oceanográficos y meteorológicos, pero sobretodo a la influencia de la luna mediante ciclos que producen fluctuaciones en el nivel del mar. Debido a esto, se utilizan tradicionalmente los mareógrafos en un período de 18,6 años, donde se mide continuamente la altura del nivel del agua con respecto a una marca inicial de referencia muy próxima al geoide (Torge, 2001). De esta forma se determina la marca o cota de marea de nivel, desde donde parten las

mediciones geodésicas de nivelación para el arrastre de nivelación de las redes de control vertical. En Ecuador, esta cota inicial, nombrada como BM3, es definida por el Instituto Oceanográfico de la Armada (Alavera & Nath, 2013) y el valor definido hasta el año 2010 es

$$Cota\ BM3 = 6,2707\ m \quad (2-46)$$

2.3.2. Nivelación geométrica

Para la determinación de las cotas y la posterior asignación de valores de altura nivelada se utiliza el proceso de nivelación geométrica. El principio básico para calcular el desnivel entre dos puntos A y B , consiste en utilizar dos miras verticales en dichos puntos y un nivel situado entre la mitad de ambos (ver figura 11).

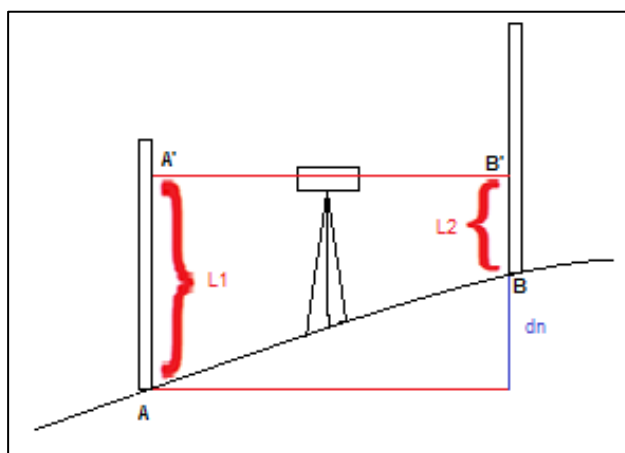


Figura 11 Nivelación geométrica

Al ser la línea $A'B'$ horizontal, la diferencia de nivel dn entre los puntos A y B corresponde a la diferencia entre las lecturas $L1$ y $L2$ de las miras

$$dn = A'A - B'B = L1 - L2 \quad (2-47)$$

El proceso de nivelación es muy complejo, debido a los errores de cierre que se obtienen, a pesar de alcanzar buenas precisiones, durante un circuito cerrado de nivelación a través de la suma de los desniveles alcanzados. De esta manera, la diferencia entre las alturas niveladas Hn no será igual a la diferencia entre alturas ortométricas H debido al no paralelismo de las superficies de nivel (ver figura 12).

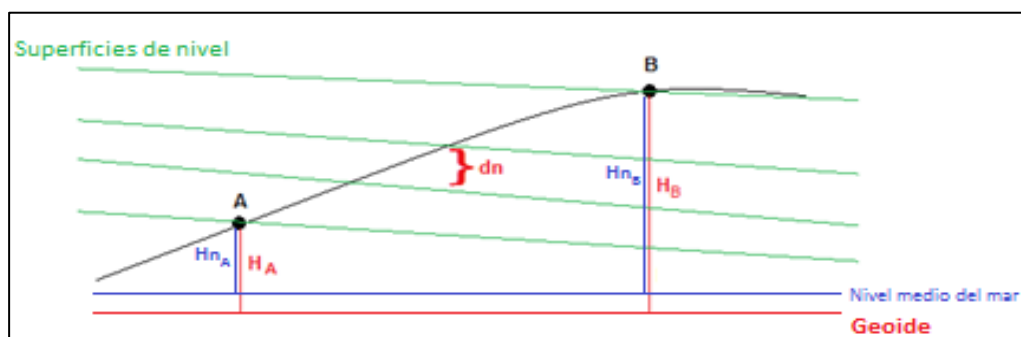


Figura 12 Diferencias entre alturas niveladas y alturas ortométricas

De esta forma, aquí se aprecia la necesidad de añadir mediciones de gravedad donde se obtienen diferencias de potencial (Heiskanen & Moritz, 1985)

$$W_B - W_A = - \int_A^B g \, dn \quad (2-48)$$

De acuerdo al circuito que se siga entre los puntos A y B , el resultado del potencial debe ser el mismo, pues es una función de posición

$$\oint g \, dn = -W_A + W_A = 0 \quad (2-49)$$

Pero el incremento de desniveles para alcanzar las alturas, no será cero, puesto que depende de la trayectoria de integración

$$\Delta n_{AB} = \int_A^B dn \quad (2-50)$$

$$\oint dn \neq 0 \quad (2-51)$$

Utilizar únicamente valores de diferencias de nivel no es correcto al generar errores de cierre, sino que deben generarse diferencias de potencial al aumentar los valores de las mediciones de gravedad; puesto que el desnivel no es un diferencial perfecto pero al aumentar el valor del factor integrante $-g$ se convierte en un diferencial óptimo (Heiskanen & Moritz, 1985)

2.3.3. Números geopotenciales

Mencionadas ya las diferencias de potencial entre dos puntos, si se determina la diferencia de potencial entre un punto A y el potencial del geoide W_0 se obtiene su correspondiente número geopotencial C .

$$C = \int_0^A g \, dn = W_0 - W_A \quad (2-52)$$

Los números geopotenciales son medidos en unidades geopotenciales (ugp)

$$1 \, ugp = 1 \, kgal \, m \quad (2-53)$$

El número geopotencial de un punto es independiente al trayecto de nivelación determinado y resulta ser el mismo para la superficie de nivel en la que permanece dicho punto y sus valores son casi similares a los valores de alturas niveladas, a pesar de no tener dimensiones de longitud.

El valor del potencial sobre el geoide W_0 ha sido estimado, empíricamente, mediante la combinación de modelos globales de gravedad y modelos de nivel medio del mar (Sánchez, 2005)

$$W_0 = 62636853,4 \frac{m^2}{s^2} \quad (2-54)$$

2.3.4. Alturas físicas

La determinación de los números geopotenciales permite obtener posteriormente, diferentes alturas físicas, en función del tipo de gravedad utilizada

$$Altura = \frac{Número\ geopotencial}{Valor\ de\ gravedad} \quad (2-55)$$

Si la gravedad, entre el punto y la superficie de referencia, es el valor medio teórico se obtienen las alturas normales; si se utiliza una gravedad constante arbitraria se tendrán las alturas dinámicas; y, si se usa el valor medio de gravedad real se definirán las alturas ortométricas. Las consideraciones de las alturas normales serán expuestas en el capítulo 3 de manera individual.

2.3.4.1. Alturas dinámicas

Tradicionalmente, para la obtención de alturas dinámicas se utilizaba el valor arbitrario de la gravedad normal para una latitud de 45°. Este tipo de altura no posee significado geométrico, generando que la división a un valor arbitrario de gravedad teórica no desarrolle el propio significado físico de las diferencias de potencial (Heiskanen & Moritz, 1985). Hay que destacar que los puntos medidos sobre la misma superficie de nivel poseen el mismo valor de altura dinámica y que no se necesitan plantear hipótesis para determinarlas.

$$H^{dyn} = \frac{C}{\gamma_{45^\circ}} \quad (2-56)$$

2.3.4.2. Alturas ortométricas

Al utilizar el valor medio de la gravedad real g_m sobre la línea de plomada entre el un punto P en la superficie terrestre y su correspondiente punto P_o en el geoide, se calculan las alturas ortométricas H .

$$H = \frac{C}{g_m} \quad (2-57)$$

Para obtener la gravedad media se debe reducir la gravedad observada en la superficie hacia un punto medio m sobre la línea de plomada (ver figura 13)

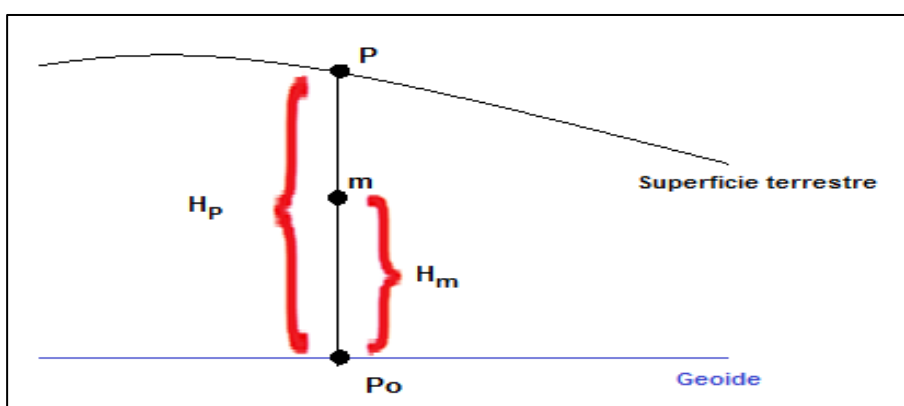


Figura 13 Gravedad media a lo largo de la línea de plomada

La reducción tradicional corresponde al método de Poincaré-Prey (2-62), que utiliza el gradiente de gravedad para obtener la gravedad en el punto m . Asumiendo la densidad de la Tierra con un valor promedio de $2,67 \frac{g}{cm^3}$ y de $6,67 \times 10^{-9}$ para k (Heiskanen & Moritz, 1985) se obtiene:

$$g_m = g_P + 0,0848 (H_P - H_m) \quad (2-58)$$

A través del desarrollo investigativo, se han ido proponiendo diferentes tipos de metodologías para estimar la gravedad media, demostrando la dificultad seria de

determinar este valor (p ej.: Helmert, Niethammer, Baranov) (Sánchez, 2002) y (Vanicek, Santos, Tenzer, & Hernández-Navarro, 2003).

Dentro de los inconvenientes en el uso de estas alturas, está la formulación de hipótesis para la distribución de las masas internas terrestres y del gradiente vertical de gravedad, lo que ocasiona que la gravedad media pueda definirse, solamente de manera aproximada, puesto que es necesario medir la aceleración de gravedad en cada punto de la vertical entre el geoide y la superficie terrestre, lo que es prácticamente imposible (Sánchez, 2002).

Las alturas ortométricas H junto a las alturas elipsoidales h están vinculadas mediante la ondulación geoidal N a través de una relación geométrica entre estas (ver figura 14)

$$h = H + N \quad (2-59)$$

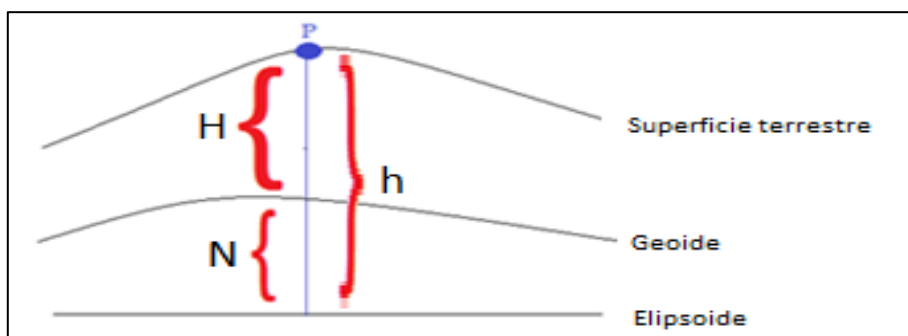


Figura 14 Ondulación geoidal, altura ortométrica y elipsoidal

2.4. Teoría de Molodensky

Como se mencionó en la sección 2.2.5, la tarea de Stokes presenta dos inconvenientes para determinar la forma de la Tierra, siendo matemáticamente indeterminable. Se presentan dos suposiciones: la figura de contorno esférica como aproximación a la forma terrestre y la inexistencia de masas fuera del geoide. Esta

última, genera que se asuma que los datos de gravedad medidos en la superficie terrestre, han sido reducidos hacia el geoide, para lo cual se generan teorías y supuestos para definir la densidad de las masas internas, debido a que obtener dichos valores con métodos directos es prácticamente imposible. Como alternativa a esta cuestión, el geodesta ruso M. S. Molodensky planteó determinar directamente, a través de mediciones gravimétricas, la superficie física de la Tierra y su campo gravitacional exterior sin el planteamiento de hipótesis. Actualmente, la teoría de Molodensky tiene su fortaleza en la facilidad de utilizar las observaciones en la superficie terrestre, mediante técnicas gravimétricas, nivelación y posicionamiento satelital.

2.4.1. Alturas normales y anomalías de altura. Cuasigeoide y teluroide

La teoría de Molodensky se basa en utilizar una nueva superficie de referencia, de la cual parte un nuevo tipo de altura física. Como superficie auxiliar de nivel, se propuso al cuasigeoide, que no es una superficie de nivel, pero es cercana al geoide y no posee un significado físico. La anomalía de altura ζ , es la altura comprendida entre el elipsoide y el cuasigeoide; y la altura normal H^N , va desde el cuasigeoide a la superficie terrestre (ver figura 15).

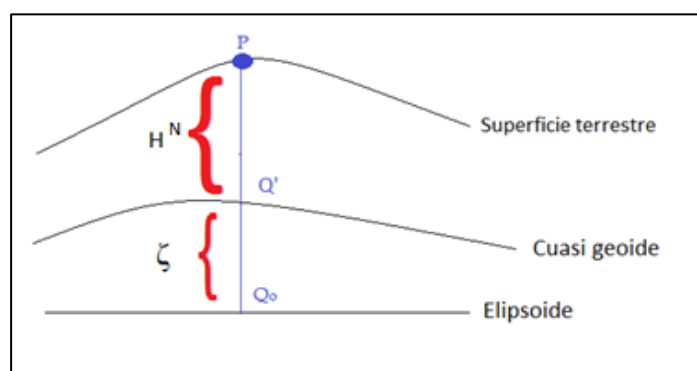


Figura 15 Cuasigeoide

Tanto el geoide como el cuasigeoide, en las zonas continentales, están más próximos al elipsoide que a la superficie terrestre; pero el problema principal con respecto a las reducciones de gravedad, usadas en Stokes, genera extrapolaciones profundas que

produce grandes errores de precisión, los mismos a los que serían propensos con el uso del cuasigeoide (Novotný, 1998). Como resultado, Molodensky propone una nueva superficie, cercana a la superficie terrestre conocida como teluroide. En este caso, la anomalía de altura ζ , es la altura comprendida entre la superficie terrestre y el teluroide; y la altura normal H^N , comprende la distancia entre el teluroide y el elipsoide (ver figura 16).

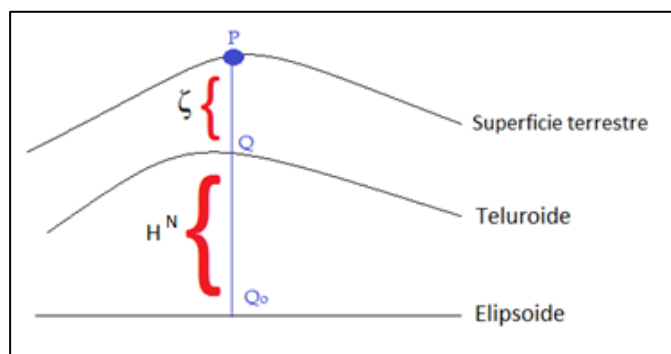


Figura 16 Teluroide

Así, la altura elipsoidal será determinada por la suma de la anomalía de altura ζ y la altura normal H^N . La altura normal, que es la distancia del teluroide al elipsoide, sustituye a la altura ortométrica y la anomalía de altura sería el equivalente a la ondulación geoidal.

$$h = H^N + \zeta \quad (2-60)$$

El teluroide junto a las alturas normales se pueden obtener a través de nivelación geométrica junto a mediciones de gravedad, iniciando con el cálculo del número geopotencial C respectivo (Heiskanen & Moritz, 1985):

$$C = \int_0^P g \cdot dn \quad (2-61)$$

Donde g corresponde a la gravedad observada y dn es el incremento en la nivelación. A continuación el cálculo de la altura normal se obtendrá de dividir el número geopotencial C para la gravedad normal en el elipsoide γ_o , siguiendo las consideraciones planteadas en la ecuación (2-55).

$$H^N = \frac{C}{\gamma_o} \quad (2-62)$$

También se plantea una fórmula analítica más precisa (Heiskanen & Moritz, 1985)

$$H^N = \frac{C}{\gamma_o} \left[1 + (1 + f + m - 2f \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{C}{a \gamma_o} + \left(\frac{C}{a \gamma_o} \right)^2 \right] \quad (2-63)$$

Los valores m , f y a corresponden a los parámetros del elipsoide GRS80 (ver tabla 1).

Hay que tener en consideración, que el teluroide no es una superficie equipotencial, y a cada punto sobre la superficie de terrestre le corresponde una superficie geopotencial diferente. De la misma manera, el cuasigeoide tampoco es una superficie de nivel y no presenta ningún significado físico, pero está dado por la necesidad de tener una concepción similar al geoide.

2.4.2. Anomalías de gravedad de Molodensky

Las anomalías de gravedad dentro de este contexto, a pesar de tener la misma consideración conceptual, varían de acuerdo a las superficies real y normal. Ahora la superficie real ya no es el geoide, sino la superficie topográfica terrestre; mientras que la superficie teórica viene dada por el teluroide o cuasigeoide. Las anomalías de gravedad de Molodensky Δg_M son calculadas de una forma mucho más sencilla, al evitar reducciones y planteamientos hipotéticos de densidad. Así, vienen dadas por la diferencia entre la gravedad real observada en el terreno g_P y la gravedad normal sobre el teluroide γ_Q . Comparando con las anomalías de gravedad tradicionales que estaban

referidas al geoide, este concepto alternativo está referido al nivel del terreno (Heiskanen & Moritz, 1985).

$$\Delta g_M = g_P - \gamma_Q \quad (2-64)$$

La gravedad normal γ_Q en el teluroide se obtiene a través de (2-65), siendo γ_o la gravedad normal en el elipsoide en su punto correspondiente

$$\gamma_Q = \gamma_o \left[1 - 2(1 + f + m - 2f \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{H^N}{a} + 3 \left(\frac{H^N}{a} \right)^2 \right] \quad (2-65)$$

2.5. Correcciones de mareas

2.5.1. Sistemas de mareas permanentes

Las fuerzas gravitacionales del Sol y la Luna ocasionan mareas, tanto en el océano como en la superficie terrestre. La Tierra, debido a las fuerzas periódicas de mareas, actúa como un cuerpo deformable. Dicha elasticidad ha sido caracterizada por los números de Love h , y k . El primero describe el desplazamiento vertical de la superficie cortical relativa al elipsoide; mientras que el segundo representa el potencial adicional debido a la deformación (Ekman, 1988). Estos valores son

$$k = 0,3 \quad (2-66)$$

$$h = 0,62 \quad (2-67)$$

En la sección 2.5.1 se mencionaron los tres tipos de efectos permanentes de mareas, que producen deformaciones en la Tierra y de acuerdo a la consideración de estos efectos, se pueden determinar tres diferentes tipos de geoides y elipsoides de referencia, cuyas consideraciones se detallan a continuación (Ekman, 1988).

2.5.1.1. Mean tide

Tradicionalmente, a las medidas de gravedad se les realizaba la corrección de mareas sustrayendo el efecto total de mareas, incluyendo la marea permanente. El geoide en este sistema no coincidía con el nivel medio del mar sin disturbios, por lo que Honkasalo sugirió que la parte permanente debe ser restaurada. Este sistema no cumple con los requisitos del problema de Stokes, pues se supone que todas las masas se encuentran dentro del geoide; pero *mean tide* incluye la atracción permanente de mareas debido a que las masas se ubican fuera del geoide. Esto genera ondulaciones geoidales erróneas al utilizarse dicho sistema dentro de la fórmula de Stokes.

2.5.1.2. Tide free o non-tidal

Debido a los inconvenientes presentados en el sistema *mean tide*, Heikkinen propuso eliminar el término de Honkasalo en las correcciones de mareas, retornando a la corrección tradicional. En esta consideración, el geoide se da para una Tierra libre de mareas al remover en su totalidad los efectos del sol y luna. Este sistema no es idóneo por la dificultad de eliminar con alta precisión la deformación permanente de mareas y este valor difiere del valor medio de gravedad y corresponde a un geoide que no coincide con el nivel medio del mar.

2.5.1.3. Zero tide

Con los inconvenientes citados en los tipos de mareas anteriores, se propuso eliminar los efectos directos permanentes de la luna y el sol, pero conservar el componente del efecto indirecto relacionado a la deformación elástica de la Tierra (Lemoine, y otros, 1998). La atracción permanente de mareas del Sol y la Luna deben ser eliminadas, mientras que la deformación permanente de la Tierra debe ser retenida.

2.5.2. Efectos de mareas en observaciones geodésicas y gravimétricas

De acuerdo a resolución de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) en el año 1984 (Petit & Luzum, 2010), debido a la necesidad de un tratamiento uniforme de las correcciones de mareas para mediciones geodésicas y gravimétricas, se recomendó no remover el efecto indirecto, por lo tanto utilizar *zero tide* para cantidades asociadas con geopotencial (p. ej.: geoide, gravedad, anomalías de gravedad) y *mean tide* para valores asociados con desplazamientos de estaciones. Pero estas recomendaciones no han sido implementadas en el análisis de valores geodésicos en general; por lo tanto se tiene los valores de posicionamiento, a través del International Terrestrial Reference Frame ITRF_{xx}, en el sistema tradicional *tide free*. Los sistemas de referencia gravimétricos actuales, a partir de 1988, se encuentran en el sistema *zero tide*; mientras que el sistema IGSN71 contiene el término de Honkasalo (Hinze, Aiken, Brozena, Coakley, & Dater, 2005) como es el caso de los datos de gravedad en Ecuador. Los sistemas de alturas se encuentran en el sistema *mean tide*; sin embargo, cuando a estos valores se aplica la corrección luni-solar se transforman los valores al sistema *tide free* (Mäkinen & Ihde, 2007).

2.5.3. Transformación entre sistemas de mareas

Las correcciones de mareas deben realizarse para unificar las mediciones geodésicas. A continuación se detalla las correcciones para gravedad y alturas (Ekman, 1988).

2.5.3.1. Valores de gravedad

Para transformar gravedad en el sistema *zero tide* al sistema *mean tide* se obtiene la relación

$$g_{mean} - g_{zero} = -30,4 + 91,2 \text{ sen}^2\varphi \quad (2-68)$$

Del sistema *tide free* al sistema *zero tide*, se utiliza

$$g_{zero} - g_{free} = (\delta - 1)(-30,4 + 91,2 \text{ sen}^2 \varphi) \quad (2-69)$$

Y para convertir de *tide free* a *mean tide*, a través de

$$g_{mean} - g_{free} = \delta (-30,4 + 91,2 \text{ sen}^2 \varphi) \quad (2-70)$$

Estas transformaciones se encuentran en microgales. El valor de δ corresponde a

$$\delta = 1 + h - \frac{3}{2}k \approx 1,17 \quad (2-71)$$

2.5.3.2. Valores de alturas

Para transformar los datos de diferencias de alturas, provenientes de nivelación entre dos estaciones, una norte y otra al sur se tienen las siguientes correcciones, expresadas en centímetros a través de las siguientes relaciones

Para transformar una diferencia de alturas en el sistema *zero tide* al sistema *mean tide* se utiliza

$$\Delta H_{mean} - \Delta H_{zero} = 29,6 (\text{sen}^2 \varphi_N - \text{sen}^2 \varphi_S) \quad (2-72)$$

Del sistema *tide free* al sistema *zero tide*, es

$$\Delta H_{zero} - \Delta H_{free} = 29,6 (Y - 1)(\text{sen}^2 \varphi_N - \text{sen}^2 \varphi_S) \quad (2-73)$$

Y para convertir de *tide free* a *mean tide* se realiza a través de

$$\Delta H_{mean} - \Delta H_{free} = 29,6 Y (\text{sen}^2 \varphi_N - \text{sen}^2 \varphi_S) \quad (2-74)$$

El valor de Y corresponde a

$$Y = 1 + k - h \approx 0,68 \quad (2-75)$$

2.6. Ajuste de redes geodésicas

Las redes geodésicas y gravimétricas consisten en una serie de puntos de control, materializados a través de placas o monumentos, para materializar los sistemas de referencia para posición y gravedad. Las redes de control vertical son constituidas por puntos con información de alturas de precisión, generalmente obtenidas por procesos de nivelación geométrica. Estos puntos están referidos a un punto referencial conocido como datum vertical, siendo generalmente el nivel medio del mar. Las redes de nivelación deben poseer altos niveles de precisión, pero existen errores sistemáticos que se acumulan debido a largas distancias (Torge, 2001).

2.6.1. Método de mínimos cuadrados

De manera general, el método estadístico de mínimos cuadrados consiste en ajustar una recta de regresión estimada a los datos; donde se presentan errores en el ajuste del modelo lineal conocidos como residuos e . Este método reside en encontrar los parámetros de una recta, de forma que la suma de los cuadrados de los residuos sea mínima (Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2007). El método de mínimos cuadrados es utilizado para el ajuste de datos, cuando se tienen varias observaciones y la presencia de estos errores en el ajuste, hacen que el sistema sea inconsistente. Esto se debe a que si se repite determinadas veces una observación, la medición variará a través de una región; siendo estas fluctuaciones consideradas como errores aleatorios, generando la inconsistencia en el sistema de ecuaciones (Klein, Matsuoka, De Souza, & Veronez, 2011).

Dentro de las mediciones geodésicas, realizadas a partir de varias observaciones, se busca determinar los parámetros que corresponden a las incógnitas. El primer paso constituye en generar un modelo matemático, a través de las expresiones matemáticas que relacionen las incógnitas con las observaciones. Como la mayoría de problemas geodésicos son no lineales, es necesario realizar la linealización de estos para aplicar el método (Aguilera, 2001). Lo óptimo es contar con más ecuaciones que incógnitas, permitiendo tener mayor cantidad de grados de libertad para el ajuste.

Si se tienen n mediciones de l que representan una magnitud x

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_n \quad (2-76)$$

Como no se puede obtener un valor verdadero de x , se asume un valor aproximado para evaluar sus residuos. Siendo i desde 1 hasta n .

$$x - l_i = e_i \quad (2-77)$$

La mejor estimación de x es la que haga mínima la suma de los cuadrados de sus residuos (Gemael, 1994)

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \min \quad (2-78)$$

Se deben incluir pesos P cuando las ecuaciones no brindan un mismo grado de confianza

$$\sum_{i=1}^n P e_i^2 = \min \quad (2-79)$$

Para expresar (2-78) de forma matricial, se utiliza el vector columna de residuos V

$$V^T V = \min \quad (2-80)$$

Y del mismo modo, (2-79) de forma matricial, al introducir la matriz cuadrada diagonal de pesos P

$$V^T P V = \min \quad (2-81)$$

Así, mínimos cuadrados para un sistema de ecuaciones lineales se ve expresada por

$$Ax = L_a = L_b + V \quad (2-82)$$

Donde L_b es la matriz que representa las observaciones; L_a corresponde a la matriz de los valores de las observaciones corregidas. Desarrollando (2-82) y reemplazando en (2-80) se tiene

$$(Ax - L_b)^T (Ax - L_b) = \min \quad (2-83)$$

Realizando el desarrollo matricial de (2-83), finalmente se obtiene la ecuación matricial que representa el conjunto de ecuaciones e incógnitas

$$x = (A^T A)^{-1} A^T L_b \quad (2-84)$$

Y finalmente incluyendo la matriz de pesos se obtiene

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P L_b \quad (2-85)$$

2.6.2. Método correlativo para ajuste de observaciones

El modelo matemático que se determina para el método correlativo en el ajuste por mínimos cuadrados está dado por ecuaciones de condición de la siguiente forma

$$F(L_a) = 0 \quad (2-86)$$

Cuando se incluyen los residuos junto a las observaciones, como se describe en (2-82) el modelo matemático queda expresado

$$F(L_b + V) = 0 \quad (2-87)$$

Es necesario aplicar una linealización a (2-87) mediante la serie de Taylor (Gemael, 1994), y expresándola de forma matricial se tiene

$$F(L_a) = F(L_b) + \left. \frac{dF}{dL_a} \right|_{L_b} (L_a - L_b) = 0 \quad (2-88)$$

Para la facilidad en el manejo de las expresiones, la matriz de derivadas parciales será reemplazada por B ; la matriz $F(L_b)$ será W ; y junto a los correspondientes reemplazos de las observaciones expresados en (2-86) y (2-87) se tiene

$$F(L_a) = W + BV = 0 \quad (2-89)$$

Posteriormente con el desarrollo matricial de (2-89), incluyendo los pesos de las observaciones, se normalizan las ecuaciones, con el objetivo de que las incógnitas satisfagan el método de mínimos cuadrados y los residuales sean mínimos, a través de la introducción de los operadores de Lagrange o correlatos M y K (Gemael, 1994)

$$M = BP^{-1}B^T \quad (2-90)$$

$$K = -M^{-1}W \quad (2-91)$$

El vector de residuos se obtiene de

$$V = P^{-1}B^TK \quad (2-92)$$

Finalmente para obtener las observaciones corregidas se aplica el valor obtenido en (2-92) en el reemplazo de (2-86) con (2-87)

$$L_a = L_b + V \quad (2-93)$$

Las precisiones de los resultados se obtienen a través de la matriz varianza-covarianza de los valores ajustados

$$\Sigma L_a = \Sigma L_b [I - B^T M^{-1} B P^{-1}] \quad (2-94)$$

Donde

$$I = -P^{-1}B^T M^{-1} \frac{dW}{dL_b} \quad (2-95)$$

$$\Sigma L_b = \sigma_o^2 P^{-1} \quad (2-96)$$

La matriz varianza-covarianza de residuos se da por

$$\Sigma V = \sigma_o^2 P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} \quad (2-97)$$

Y comparando se obtiene

$$\Sigma L_a = \Sigma L_b - \Sigma V \quad (2-98)$$

La varianza *a posteriori* de observación indica

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{V^T P V}{r} \quad (2-99)$$

Donde r corresponde a al número de grados de libertad del modelo matemático, siendo de la misma manera, el número de ecuaciones de condición generadas.

2.6.3. Prueba de hipótesis

Las observaciones realizadas en campo corresponden a valores estadísticos que requieren de la utilización de un procedimiento de decisión, basado en los mismos datos, para generar conclusiones dentro de la estimación de un parámetro poblacional. Estas conclusiones pueden ser puestas como hipótesis estadísticas para llegar a una inferencia, según su rechazo o aceptación. Una hipótesis estadística es una aseveración o suposición con respecto a una o más poblaciones (Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2007). Comprobar la veracidad de una hipótesis resulta complicado puesto que sería necesario analizar toda una población; llegando a ser poco práctico en la mayoría de los casos, como es el caso de las observaciones geodésicas.

Este procedimiento de decisión debe realizarse comprendiendo que existe la probabilidad de una conclusión errónea. De manera explicativa, para establecer una prueba de hipótesis para el análisis de una o más poblaciones, deben seguirse los siguientes pasos: planteo de hipótesis nula y alternativa; elección de un nivel de significancia fijo; establecimiento de la región crítica; selección del estadístico de prueba; y, conclusiones científicas y de ingeniería.

2.6.3.1. Hipótesis nula y alternativa

La hipótesis nula H_0 corresponde a la suposición inicial que se desea probar. Si esta es rechazada, significa la aceptación de su opuesto, la hipótesis alternativa H_1 . La hipótesis alternativa representa, comúnmente, el supuesto a probarse dentro del planteamiento del problema inicial. Se debe tener en consideración que la hipótesis nula siempre debe ser una igualdad; por consiguiente la hipótesis alternativa será una desigualdad correspondiente a la pregunta inicial que se necesita responder. En el

presente estudio será necesario realizar una prueba de hipótesis relacionada con varianzas, por lo tanto en (2-100) se representa la hipótesis nula correspondiente.

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad (2-100)$$

Desarrollar las inecuaciones de la hipótesis alternativa, será fundamental para determinar la unilateralidad o bilateralidad de las alternativas, a través del número de colas en la selección de la región crítica. Si la alternativa es unilateral será una prueba de una cola, hacia la derecha o la izquierda. Si se trata de una alternativa bilateral se tendrá una prueba de dos colas.

Si la alternativa es unilateral será una prueba de una cola; si la región crítica en la hipótesis alternativa es (2-101) se dirigirá hacia la derecha (ver figura 17)

$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad (2-101)$$

Del mismo modo, si la hipótesis alternativa es (2-102) la cola se dirigirá hacia la izquierda (ver figura 18)

$$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad (2-102)$$

Si la alternativa es bilateral (2-103) se tendrá una prueba de dos colas (ver figura 19)

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad (2-103)$$

2.6.3.2. Nivel de significancia

El nivel de significancia α consiste en la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es realmente verdadera. Su selección se debe para controlar el riesgo máximo de cometer un error tipo I (Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2007). El nivel de significancia junto al nivel de confianza, deben sumar el 100%. Los valores más comunes de niveles de significancia son 0,1; 0,05; 0,01 y 0,005; en las cuales se basan las tablas estadísticas para la selección de los límites de la región crítica.

2.6.3.3. Región crítica

Para establecer los límites se utilizan tablas de distribución para cada estadístico, las cuales se encuentran en función del nivel de significancia α y los grados de libertad v .

En la alternativa unilateral (2-101), correspondiente a una cola hacia la derecha la región crítica es

$$\chi^2 > \chi^2_{(v; \alpha)} \quad (2-104)$$

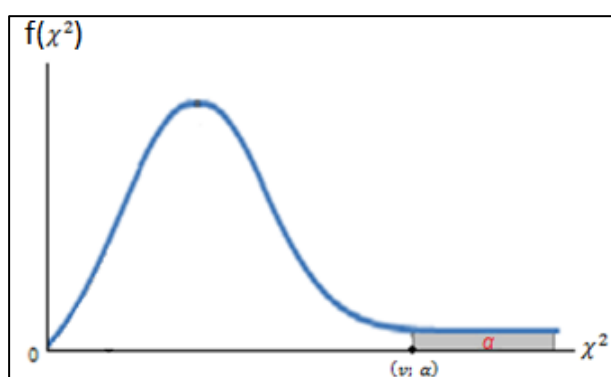


Figura 17 Prueba de una cola derecha

Para la alternativa unilateral (2-102); una cola hacia la izquierda, se tiene

$$\chi^2 < \chi^2_{(v; 1-\alpha)} \quad (2-105)$$

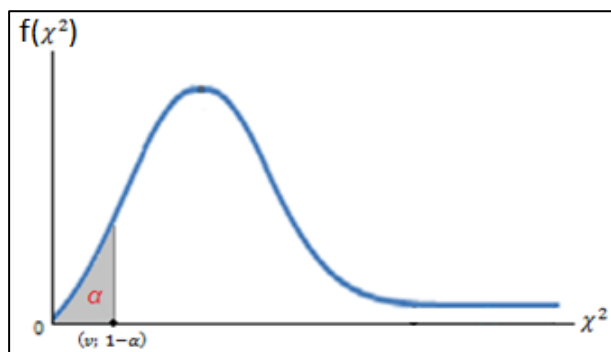


Figura 18 Prueba de una cola izquierda

Para una prueba de dos colas o alternativa bilateral (2-103), la región crítica es

$$\chi^2(v; 1-\frac{\alpha}{2}) > \chi^2 > \chi^2(v; \frac{\alpha}{2}) \quad (2-106)$$

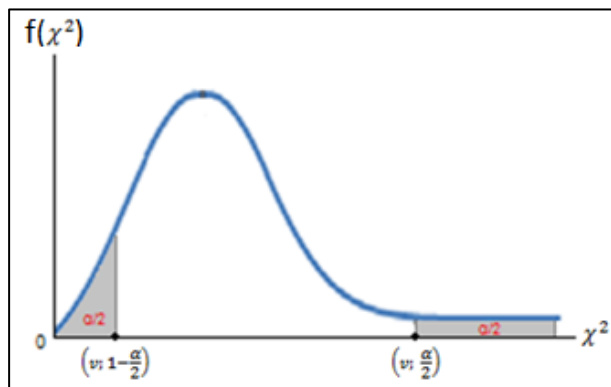


Figura 19 Prueba de dos colas

2.6.3.4. Estadístico de prueba: Chi cuadrado

El estadístico de prueba dependerá de dos factores importantes: el número de muestras a analizar y si se comparan varianzas o medias. Para las pruebas de una muestra, relacionada con varianzas se utiliza el estadístico χ^2 (2-107), donde n es el tamaño de observaciones; $\nu = n-1$ son los grados de libertad; σ^2 es la varianza poblacional; y s^2 es la varianza muestral.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \quad (2-107)$$

El resultado obtenido del estadístico de prueba nos permite el rechazo o no rechazo de la hipótesis nula, para lo cual el valor encontrado debe encontrarse dentro de la región crítica. Si se rechaza la hipótesis nula cuando es verdadera se llama error tipo I; y, si no se rechaza la hipótesis nula cuando es falsa se habla de un error tipo II.

2.7. Interpolación de gravedad

Como ya se explicó en la sección 2.3.2, es necesario añadir valores de gravedad a las diferencias de nivel. Pero, generalmente, se dispone de una densidad menor de puntos gravimétricos en comparación con puntos de nivelación. Dichos valores pueden ser interpolados en función de su ubicación. Interpolar directamente la gravedad no resulta un método recomendable, al obtenerse altas desviaciones en comparación con la interpolación a través de anomalías de gravedad. Las anomalías de Bouguer representan las variables más estables para la estimación de valores de gravedad, mientras que los estimadores Kriging y Curvatura Mínima presentan los mejores resultados para la interpolación gravimétrica a través de técnicas geoestadísticas (Villela & Pacino, 2010) y (Coyago, 2010).

2.7.1. Anomalías de Bouguer

Las anomalías de Bouguer simples son obtenidas mediante

$$\Delta g_{BC} = g_{obs} + CAL - \gamma_Q + CB \quad (2-108)$$

Donde g_{obs} es la gravedad medida en la superficie terrestre; CAL es la corrección de aire libre; γ_Q es la gravedad normal; y, CB corresponde a la corrección de la lámina de Bouguer.

Con la interpolación, al extraer los valores de anomalías de Bouguer estimados, se debe realizar el cálculo inverso de (2-108) para obtener los valores de gravedad interpolada g_{int}

$$g_{int} = \Delta g_{BC} - CAL + \gamma_Q - CB \quad (2-109)$$

La corrección de aire libre consiste en reducir la gravedad observada en la superficie terrestre hacia el geoide, suponiendo que no existen masas sobre éste. Esta reducción se la hace en función de la altura nivelada del punto. Para el Ecuador el valor aproximado es (Tierra, 2003):

$$CAL_E = 0,307716 Hn - 7,21 \times 10^{-8} Hn^2 \quad (2-110)$$

La reducción de Bouguer se basa en la suposición de contar con una lámina plana y horizontal entre la estación y el geode, y que las masas que se encuentran entre ellas tienen una densidad constante. Esta corrección tiene como propósito eliminar completamente las masas externas al geode, por lo tanto se quita dicha lámina lo que asimila a restar su atracción de la gravedad medida (Heiskanen & Moritz, 1985). Con una densidad estándar ρ de $2,67 \text{ g/cm}^3$, y en función de la altura nivelada de la estación, se tiene

$$CB = 2 \pi k \rho Hn = 0,1119 Hn \quad (2-111)$$

2.7.2. Modelos Globales Geopotenciales

Un modelo global geopotencial es a una función matemática que describe, de modo aproximado, el potencial real de gravedad terrestre en un espacio tridimensional (Barthelmes, Global Models, 2014). A través de los modelos, varios funcionales relacionados al campo de gravedad pueden ser calculados (p. ej.: potencial de gravedad, vector gravedad); pero otros funcionales deben ser calculados de acuerdo a un sistema de referencia (p. ej: ondulación geoidal, anomalías de gravedad, perturbaciones de gravedad). El desarrollo de los modelos globales geopotenciales se vio beneficiado por los avances en la Geodesia satelital, a través de diversas misiones como CHAMP (Challenging Minisatellite Payload), GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) y GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer).

En general, los modelos globales del campo gravitacional provienen de una combinación de datos satelitales y terrestres para altimetría. Así el ICGEM (International Centre for Global Earth Models), como servicio del IGFS (International Gravity Field Service) que pertenece al IAG, es destinado a recolectar y archivar los modelos globales existentes. El ICGEM desarrolló una interfaz web interactiva (disponible en <http://icgem.gfz-potsdam.de/>), donde se puede calcular diferentes funcionales del campo de gravedad de los modelos, a través de grillas seleccionadas

mediante coordenadas. Las teorías y fórmulas están basadas en la definición del geopotencial mediante modelos de armónicos esféricos (Barthelmes, 2013). Este servicio permite calcular varios funcionales, como anomalías de altura, ondulaciones geoidales, anomalías de gravedad de Molodensky y anomalías de aire libre clásicas, perturbaciones de gravedad, gravedad real y normal, entre otros, de diferentes modelos disponibles (p. ej.: EIGEN-6S4, GGM05C, EGM2008). Este servicio no tiene el alcance para investigaciones científicas, pero si es idóneo dentro de propósitos educativos y como una ayuda para obtener valores relacionados al potencial de una manera sencilla y rápida (Barthelmes & Köhler, 2015).

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Análisis inicial de los datos

El análisis de los datos proporcionados por el Instituto Geográfico Militar, corresponden a los requerimientos para el desarrollo del proyecto de generación del modelo cuasigeoidal para el Ecuador continental; por lo tanto, la finalidad es determinar los insumos para el desarrollo de una red de números geopotenciales y posteriormente un sistema de alturas normales para el territorio continental. Los datos necesarios para la elaboración del proyecto corresponden a la red de nivelación vertical, valores de gravedad observada y datos de posicionamiento global satelital de precisión. .

3.1.1. Red vertical de nivelación geométrica

La red de nivelación geométrica consta de 5055 puntos que se encuentran distribuidos en 100 líneas y 92 nodos (ver figura 20).

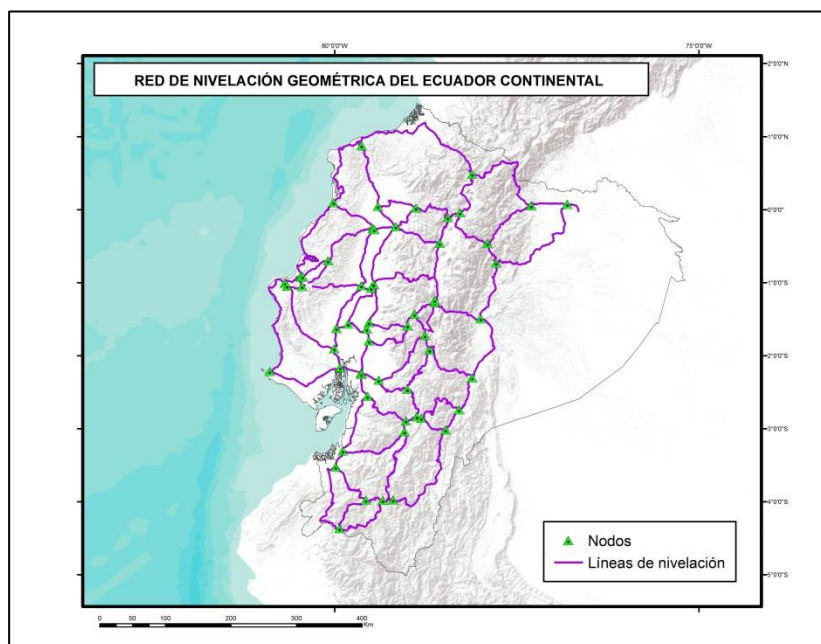


Figura 20 Red de nivelación del Ecuador continental

En determinados puntos se incluyeron mediciones de gravedad observada y posición. Los atributos de estos valores constan de la información de la placa inicial y final, desnivel, distancia, discrepancia, con la fecha de levantamiento de la información en campo.

Dentro de las especificaciones técnicas de precisiones en altimetría para la realización de cartografía topográfica correspondientes para Ecuador, se divide en primer y segundo orden, donde se especifica el tipo de trabajo de acuerdo a las tolerancias permisibles de los trabajos (ver figura 21).

| | | | |
|--------------------------|--------------------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| PRIMER ORDEN | RED BÁSICA DE CONTROL VERTICAL | $4\text{ mm } \sqrt{k}$ | |
| | | $6\text{ mm } \sqrt{k}$ | Cuando se repite una sección |
| SEGUNDO ORDEN | PROYECTOS ESPECIALES | $8,4\text{ mm } \sqrt{k}$ | |
| | PLANOS DE CIUDADES | $9\text{ mm } \sqrt{k}$ | Cuando se repite una sección |

Figura 21 Especificaciones técnicas de Ecuador de precisiones para altimetría

Fuente: (IGM, 2006)

En el análisis de la tolerancia de cada línea se obtuvieron 23 líneas que no se encuentran dentro de los valores permisibles de tolerancia para una red básica de control vertical con la precisión de $4\text{ mm } \sqrt{k}$ (ver figura 22). En el siguiente análisis, con una precisión de $6\text{ mm } \sqrt{k}$, destacando que esta consideración se da cuando la nivelación se repite en una sección o recorrido (ida o regreso), se mantienen 10 líneas que no entran en los valores permisibles de tolerancia para una red básica de control vertical (ver figura 23).

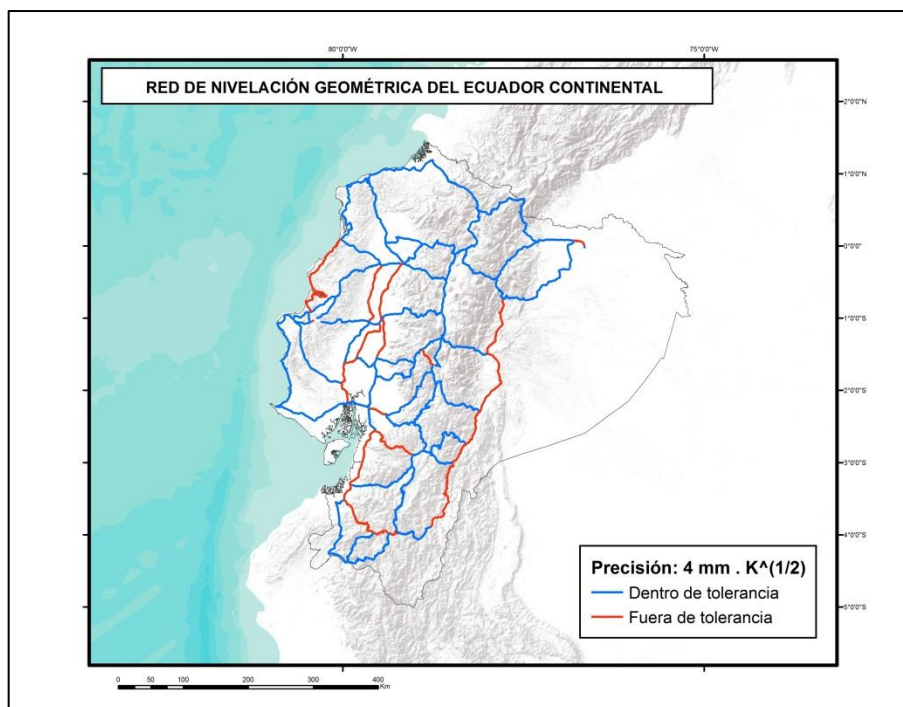


Figura 22 Líneas de la red vertical con precisión $4 \text{ mm} \sqrt{k}$

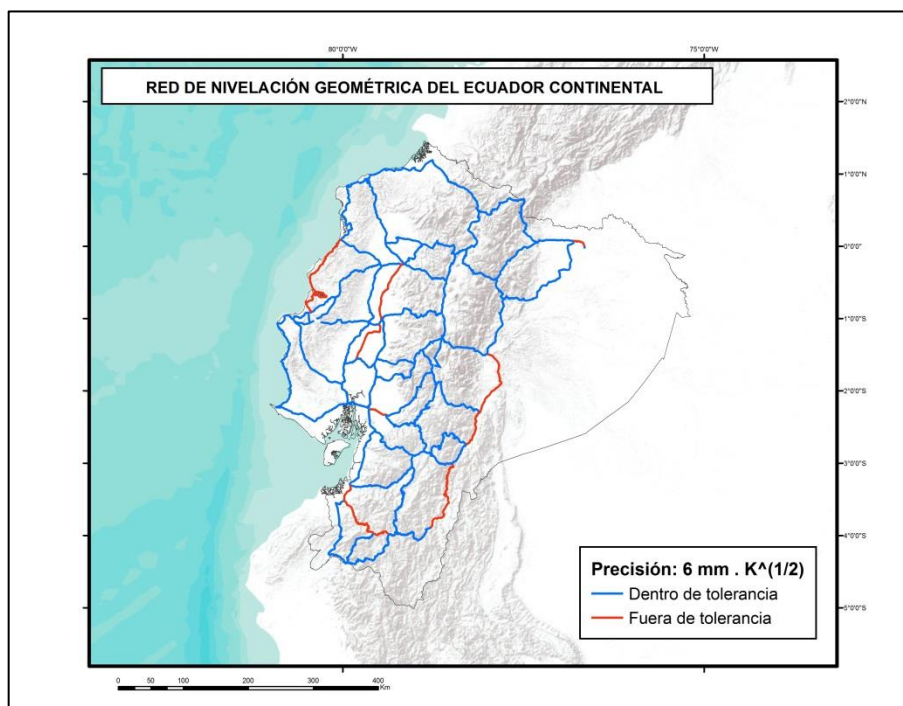


Figura 23 Líneas de la red vertical con precisión $6 \text{ mm} \sqrt{k}$

Al encontrarse aún líneas que no entran en la tolerancia para una red de primer orden, se consideró el valor de $8,4 \text{ mm } \sqrt{k}$, correspondiente a una red de segundo orden, específicamente para proyectos especiales. Dos líneas continuaron sin entrar en esta precisión, ajustándose una con $9 \text{ mm } \sqrt{k}$, correspondiente a una red de segundo orden para planos de ciudades; mientras que la restante se ajusta con $12 \text{ mm } \sqrt{k}$, valor encontrando fuera de los estándares nacionales de precisión vertical (ver figura 24).

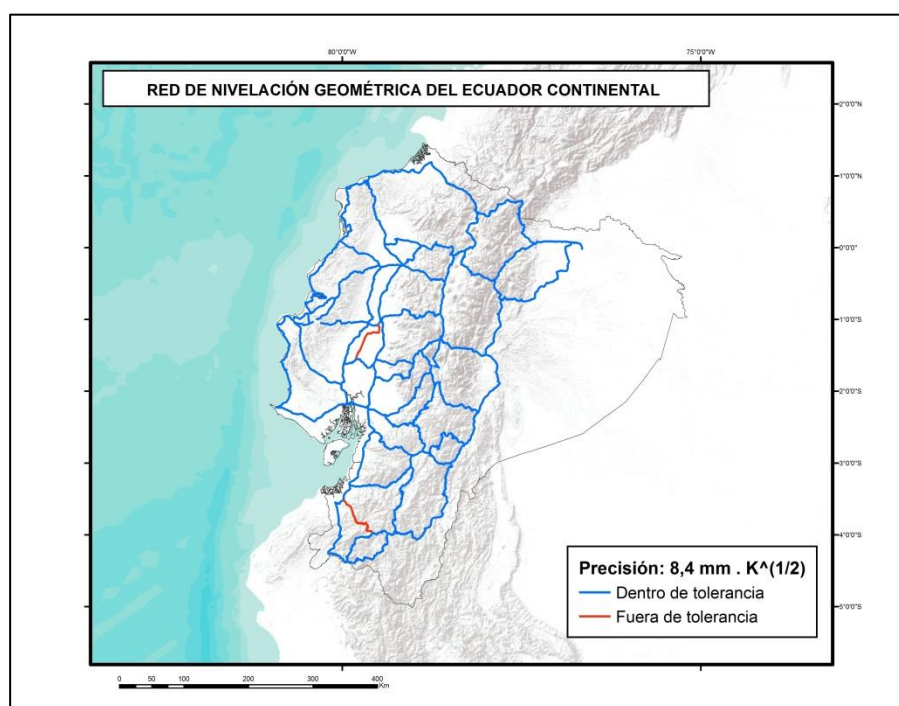
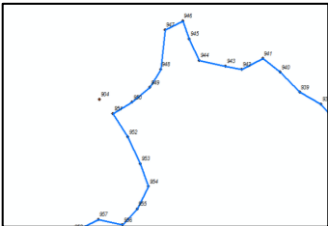
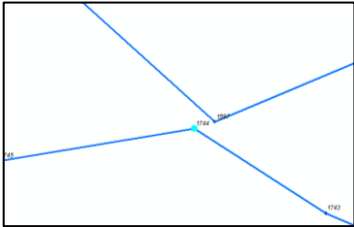



Figura 24 Líneas de la red vertical con precisión $8,4 \text{ mm } \sqrt{k}$

Con una depuración inicial basada en las especificaciones técnicas para tolerancia de acuerdo a la tabla 2, el siguiente paso consistió en examinar los registros de las placas para determinar inconvenientes en los puntos y nodos de la red. En la figura 25 se indican las observaciones detalladas de las placas, referidas a los códigos de los puntos y nomenclatura de líneas del IGM.

| CÓDIGO | LÍNEA | OBSERVACIÓN |
|----------------------|------------------------------|---|
| 391 392 | II-L2 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |
| 745 753 | IV-L1 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |
| 904 | VI-L2 | Revisar coordenada se encuentra fuera de las líneas  |
| 1108 1109 | VII-L2 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |
| 1182 1183 | VII-L3 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |
| 1744 1597 | X-L2 | Revisar seguimiento de las líneas y anillo  |
| 1826 1827 | XI-L2 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |
| 2324 2298 2458 | XVI-L2 XVI-L1 XVIII-L1 | Falta la placa XI-L4-8 como placa final. No existe enlace con los puntos mencionados |
| 2518 2519 | XVIII-L2 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |
| 2968 2980 | XXI-L4 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |
| 3353 3354 | XXIII-L5 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |
| 3641 3643 | XXIV-L3 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |

Continúa 

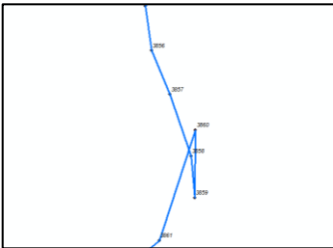
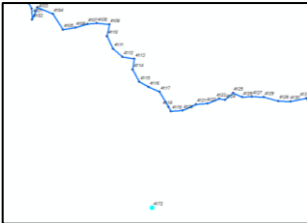
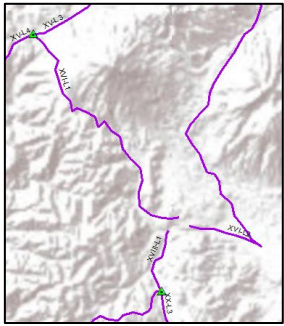

| CÓDIGO | LÍNEA | OBSERVACIÓN |
|--------------|-----------|---|
| 3860 | XXVI-L2 | Revisar seguimiento de las líneas y anillo  |
| 4172 | XXVIII-L2 | Revisar coordenada se encuentra fuera de las líneas  |
| 4728 4732 | XXXI-L1 | Poseen mismos valores de coordenada de navegador |

Figura 25 Análisis de líneas y puntos de la red de nivelación

Dentro del análisis de puntos y líneas, se confirmaron las líneas que no disponían de enlace a través de la ausencia de un nodo. En la figura 26 se detallan dichas observaciones, en base a los códigos numéricos y nomenclatura de líneas de nivelación del IGM.

| CÓDIGO | LÍNEA | OBSERVACIÓN |
|----------------------|------------------------------|---|
| 2298 2324 2458 | XVI-L1 XVI-L2 XVIII-L1 |  |

Continúa 

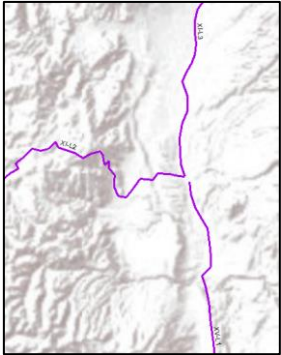

| CÓDIGO | LÍNEA | OBSERVACIÓN |
|----------------------|--------------------------|--|
| 1807 1926 2133 | XI-L2 XI-L3 XV-L1 | No existe registro de la placa final SGM  |
| 494 502 526 | II-L3 II-L4 III-L1 |  |

Figura 26 Resumen de líneas que no se enlazan a nodos

3.1.2. Valores de gravedad observada y GPS de precisión

Para obtener una red de números geopotenciales de acuerdo a (2-61) se necesitan valores de nivelación y gravedad en el mismo punto, mientras que para el desarrollo de alturas normales es necesario disponer, adicionalmente, de valores de GPS de precisión. De los 5055 puntos de la red de nivelación, en la cual se unificaron valores de gravedad observada y GPS de precisión se tiene un total de 2389 puntos que cuentan con medición de gravedad en la superficie (ver figura 27) y 1475 puntos con valores de GPS de precisión (ver figura 28). Dentro de los 429 datos en los que no se dispone del valor de posición por navegador, 11 contienen posición mediante GPS de precisión, por lo tanto 418 puntos no constan de una referencia espacial para ser visualizados ni que permitan los cálculos correspondientes. Al analizar los datos requeridos para el presente proyecto, únicamente se obtienen 818 puntos de la totalidad, que reúnen los tres tipos de datos necesarios como es gravedad, posición y desnivel.

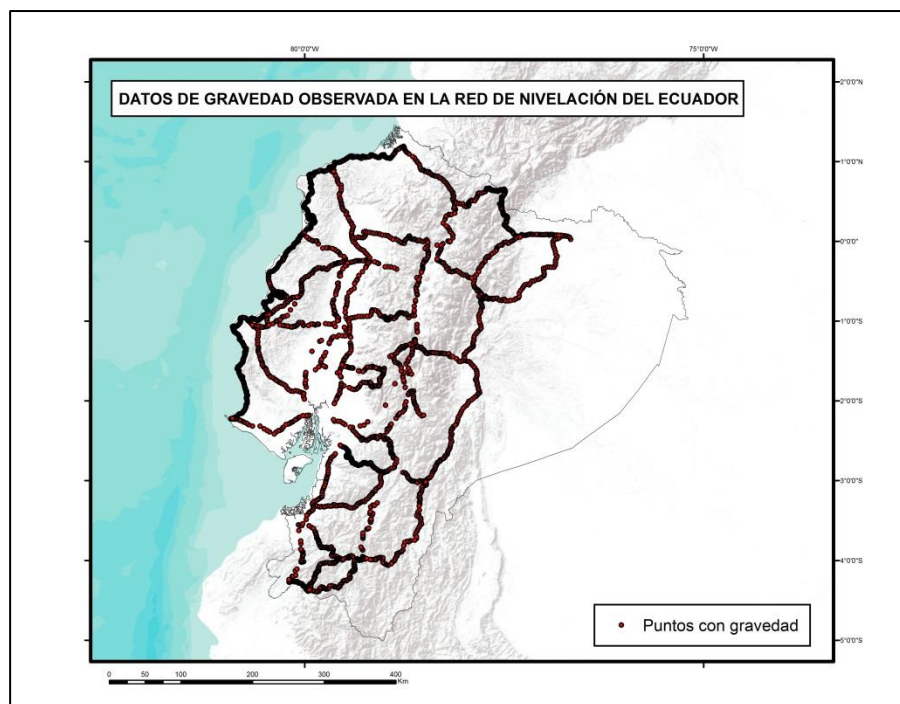


Figura 27 Puntos con gravedad en la red de nivelación

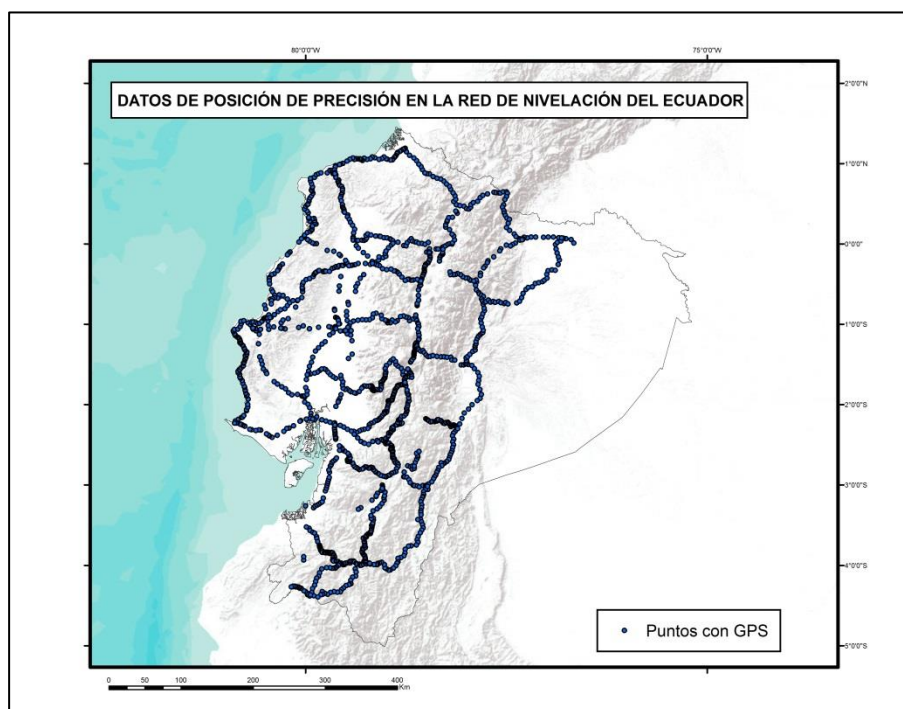


Figura 28 Puntos con GPS de precisión en la red de nivelación


3.2. Cálculo de números geopotenciales

Después del análisis inicial de los datos oficiales de nivelación, se debieron tomar decisiones para la conformación de las líneas para la red de números geopotenciales. Los principales problemas que se detectaron fueron: la tolerancia de la red vertical; ausencia de información de nodos; y, la falta de datos de gravedad para el cálculo del desnivel geopotencial. Las soluciones que se plantearon para resolver los inconvenientes fueron modificar en determinadas líneas su sentido, así como omitir puntos o placas a través de la sumatoria del desnivel hacia la siguiente placa que disponga de la información requerida y unir varias líneas de la red de nivelación para conformar una nueva, para la red de desniveles geopotenciales.

3.2.1. Determinación de las líneas para la red de números geopotenciales

Dentro de la tabla 4 se observa la ausencia de nodos, generando un severo problema para enlazar las líneas y conformar los anillos para el ajuste. En estos casos, se modificó el sentido del desnivel de las líneas, para omitir el nodo faltante. En el primer caso, se eliminó la línea XVI-L1 para unificar las líneas XVI-L2 con la XVIII-L1. En el segundo caso, se excluyó a la línea XI-L2, uniendo la línea XV-L1 con la XI-L3. Como último criterio, se descartaron las líneas que no entraban en la tolerancia de segundo orden. También se suprimieron líneas relacionadas con las mencionadas anteriormente, siempre que no sean muy extensas y relevantes para el enlace con otras. El resumen de las consideraciones para conformar las líneas de la red de números geopotenciales se observa en la figura 29 de acuerdo a la nomenclatura del IGM; resultando de la eliminación de 16 líneas de la red de nivelación geométrica (ver figura 30).

| LÍNEAS | CRITERIO |
|--------|--------------------------|
| II-L3 | No existe nodo de enlace |
| II-L4 | No existe nodo de enlace |
| III-L1 | No existe nodo de enlace |
| II-L5 | Enlazada a línea II-L4 |
| IV-L3 | Enlazada a línea II-L4 |

Continúa 

| LÍNEAS | CRITERIO |
|-----------|---|
| XI-L2 | Se elimina para unificar líneas XV-L1 y XI-L3 que no disponen de nodo |
| XVI-L1 | Se elimina para unificar líneas XVI-L2 y XVIII-L2 que no disponen de nodo |
| XXIII-L2 | No entra en la tolerancia de $8,4 \text{ mm } \sqrt{k}$ |
| XIII-L1 | No entra en la tolerancia de $8,4 \text{ mm } \sqrt{k}$ |
| XXXII-L3 | Enlazada a línea XXIII-L2 |
| XXXII-L2 | Línea no muy extensa |
| IX-L1 | Línea no muy extensa |
| XVIII-L2 | Se elimina para unificar líneas XVI-L2 y XX-L3 que no disponen de nodo |
| XXXIII-L1 | Línea no muy extensa |
| XXIII-L3 | Línea sin enlace |
| XXIV-L1 | Enlazada a línea XXIII-L2 |

Figura 29 Criterios de descarte de las líneas de nivelación

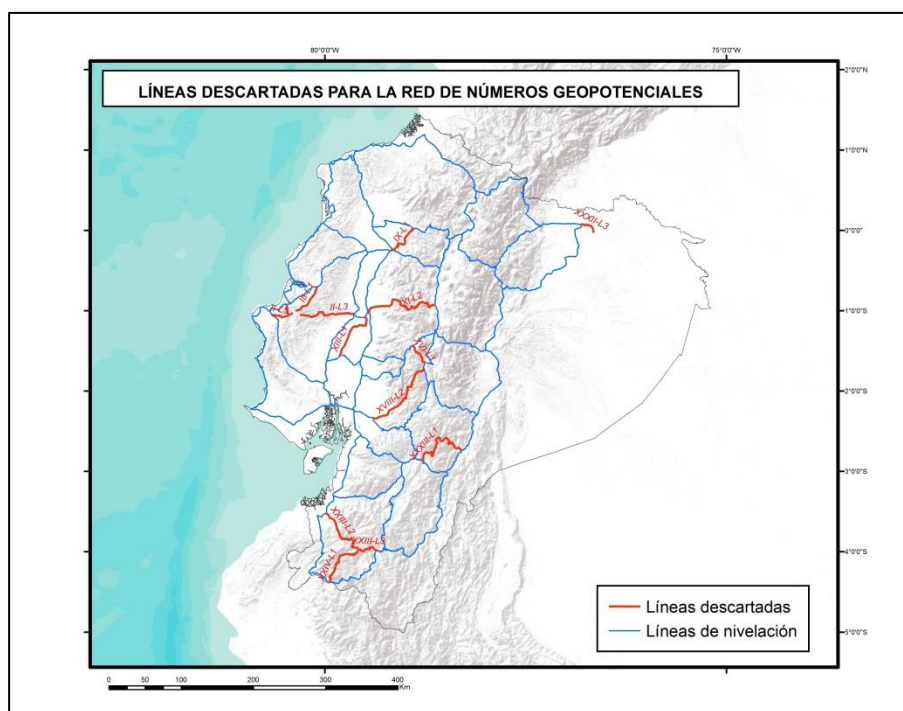


Figura 30 Líneas de la red de nivelación descartadas

Con las líneas ya establecidas, el siguiente paso consistió en verificar la disponibilidad de los datos. Aparentemente, para determinar desniveles geopotenciales,

se requiere de valores de desnivel y gravedad entre los puntos de la red, pero debido al análisis inicial, se tuvo en consideración la ausencia de valores de gravedad en varios puntos de la red, por lo que es necesario estimar este valor a través de interpolación, donde es necesario disponer de coordenadas. Lo recomendable sería contar con coordenadas obtenidas a través de GPS de precisión, pero como ya se explicó en la sección 3.1.2, no se dispone en su totalidad esta información. Como alternativa metodológica, se utilizaron los valores de posición mediante navegador entregados por el IGM. De esta forma, se descartaron los puntos donde no existían coordenadas, a través de la sumatoria de desniveles entre la última placa hasta la siguiente con valores de posición. Finalmente, al descartar o unificar líneas y eliminar puntos sin valores de posición, la red de números geopotenciales quedó establecida a través de 3933 puntos, distribuida en 62 líneas y 41 nodos (ver figura 31).

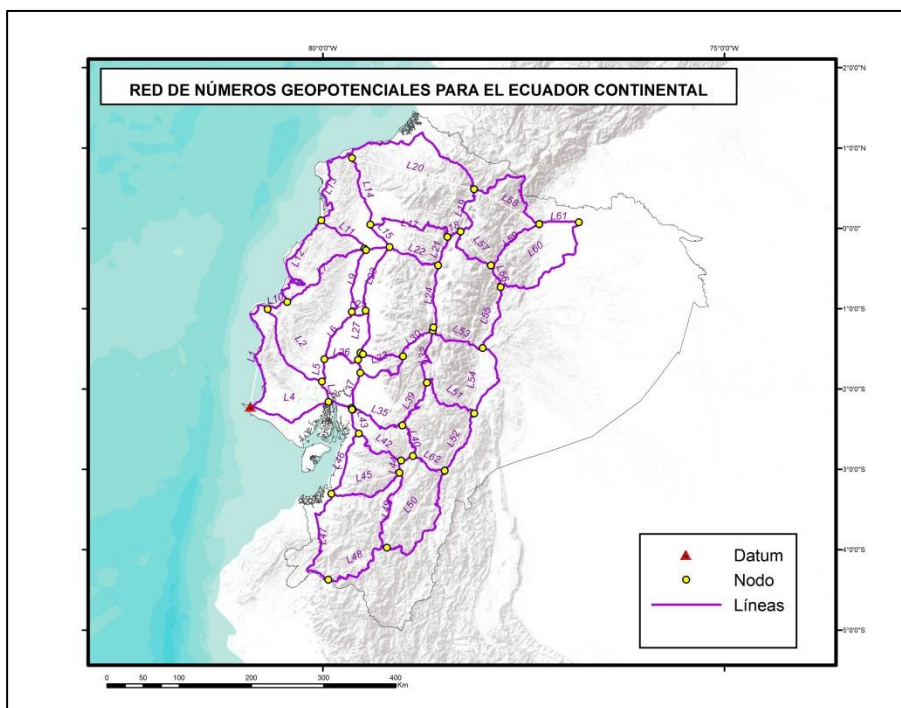


Figura 31 Red de números geopotenciales para el Ecuador continental

En la tabla 2 se detalla la nomenclatura de las líneas de números geopotenciales y las líneas de nivelación del IGM utilizadas para dicha conformación; se incluye el valor de la sumatoria del desnivel de números geopotenciales sin ajuste, así como la distancia de las líneas.

Tabla 2

Líneas de la red de números geopotenciales

| LÍNEAS NÚMEROS GEOPOTENCIALES | LÍNEAS NIVELACIÓN | DESNIVEL (ugp) | DISTANCIA (km) |
|-------------------------------|--------------------|----------------|----------------|
| L1 | I-L1 | 93,0297 | 220,21 |
| L2 | I-L2 I-L3 | -93,1858 | 151,71 |
| L3 | I-L4 | 4,0587 | 32,54 |
| L4 | I-L5 | -3,9875 | 136,15 |
| L5 | II-L1 | 8,5063 | 36,91 |
| L6 | II-L2 | 57,3237 | 86,35 |
| L7 | IV-L1 III-L2 | 213,1135 | 172,32 |
| L8 | III-L3 | 14,2074 | 3 |
| L9 | III-L4 | -172,6553 | 123,31 |
| L10 | V-L1 IV-L2 | -82,0270 | 37,47 |
| L11 | VI-L1 | -201,7533 | 88,45 |
| L12 | VI-L2 | -11,3565 | 225,4 |
| L13 | VII-L1 | -9,3978 | 185,391 |
| L14 | VII-L2 | 179,0805 | 115,76 |
| L15 | VII-L3 | 334,0821 | 44,76 |
| L16 | VII-L4 | -287,7294 | 37,12 |
| L17 | VIII-L1 VIII-L2 | 2432,1234 | 181,44 |
| L18 | VIII-L3 | -150,5074 | 31,3 |
| L19 | VIII-L4 | -931,9009 | 109,64 |
| L20 | VIII-L5 | -1528,7106 | 280,03 |
| L21 | X-L1 | 115,3250 | 53,79 |
| L22 | X-L2 | -2213,1516 | 104,82 |
| L23 | XI-L1 | -479,7322 | 103,69 |
| L24 | XI-L3 XV-L1 | -250,0523 | 101,519 |
| L25 | XII-L1 XII-L2 | -19,4324 | 25,02 |

Continúa 

| LÍNEAS NÚMEROS GEOPOTENCIALES | LÍNEAS NIVELACIÓN | DESNIVEL (ugp) | DISTANCIA (km) |
|----------------------------------|-----------------------------|----------------|----------------|
| L26 | XIV-L3 XIII-L2 | 1,9714 | 65,29 |
| L27 | XIV-L1 | -37,9632 | 80,95 |
| L28 | XIV-L2 | -1,9154 | 12,62 |
| L29 | XV-L2 | -187,3450 | 5,7 |
| L30 | XV-L4 XV-L3 | 118,6485 | 98,12 |
| L31 | XV-L5 | 2549,6520 | 96,08 |
| L32 | XX-L3 XVIII-L1 XVI-L2 | -284,5847 | 104,43 |
| L33 | XVII-L1 | -2557,9094 | 118,19 |
| L34 | XVII-L2 | 6,2147 | 20,45 |
| L35 | XVIII-L3 XX-L1 | 2733,2397 | 118,19 |
| L36 | XVIII-L4 | 4,8129 | 2,27 |
| L37 | XVIII-L5 | 6,9271 | 59,25 |
| L38 | XIX-L1 | -3,1562 | 39,05 |
| L39 | XX-L2 | -216,0416 | 124,12 |
| L40 | XXI-L1 | -477,5912 | 73,95 |
| L41 | XXI-L2 | 239,7251 | 20,33 |
| L42 | XXI-L3 | -2495,5822 | 118,67 |
| L43 | XXI-L4 | 0,1171 | 37,57 |
| L44 | XXII-L1 | 56,4767 | 19,22 |
| L45 | XXII-L2 | -2556,6717 | 138,84 |
| L46 | XXII-L3 | 4,7235 | 103,81 |
| L47 | XXIII-L1 XXIV-L3 | 447,0169 | 237,785 |
| L48 | XXIII-L4 XXV-L1 | -1529,6155 | 187,56 |
| L49 | XXIII-L5 | 579,9459 | 189,63 |
| L50 | XXVI-L2 XXVI-L3 | 353,9747 | 257,8 |
| L51 | XXVII-L1 | -1961,6752 | 138,38 |
| L52 | XXVII-L2 XXXIII-L2 | 629,3131 | 126,71 |
| L53 | XXVIII-L1 | 1587,1493 | 106,43 |
| L54 | XXVIII-L2 | -97,7178 | 127,32 |
| L55 | XXIX-L1 | 251,8385 | 113,65 |
| L56 | XXIX-L2 | -619,7431 | 54,38 |
| L57 | XXIX-L3 | 699,9174 | 105,88 |
| L58 | XXX-L1 XXX-L2 | -1133,8209 | 249,34 |
| L59 | XXX-L3 | 1365,5244 | 120,16 |

Continúa 

| LÍNEAS NÚMEROS GEOPOTENCIALES | LÍNEAS NIVELACIÓN | DESNIVEL (ugp) | DISTANCIA (km) |
|-------------------------------|----------------------|----------------|----------------|
| L60 | XXXI-L1 XXXI-L2 | -873,3535 | 225,25 |
| L61 | XXXI-L3 | 127,3383 | 61,29 |
| L62 | XXVI-L1 XXXIII-L3 | -638,4422 | 80,7 |

3.2.2. Interpolación gravimétrica

En los puntos correspondientes a las nuevas líneas conformadas, se obtuvieron 1812 registros sin valores de gravedad observada en la superficie terrestre. Para una generación eficiente de la red de números geopotenciales, es preciso contar con rastreos gravimétricos en los respectivos desniveles, pero al contar con esta deficiencia, dentro de los fines metodológicos, se planteó estimar la gravedad en los puntos donde no existía. Para esto, se realizó un análisis inicial del mejor método de estimación de gravedad, generando una base de datos adicional con 1623 puntos, en la que se tuvo a disposición datos únicamente de gravedad y GPS de precisión. De estos datos, se seleccionaron 167 puntos de forma aleatoria, correspondientes al 10,3% para asumir la condición de huecos gravimétricos (ver figura 32). Estos puntos no entraron en la interpolación inicial pues serían utilizados para la comparación de la gravedad estimada.

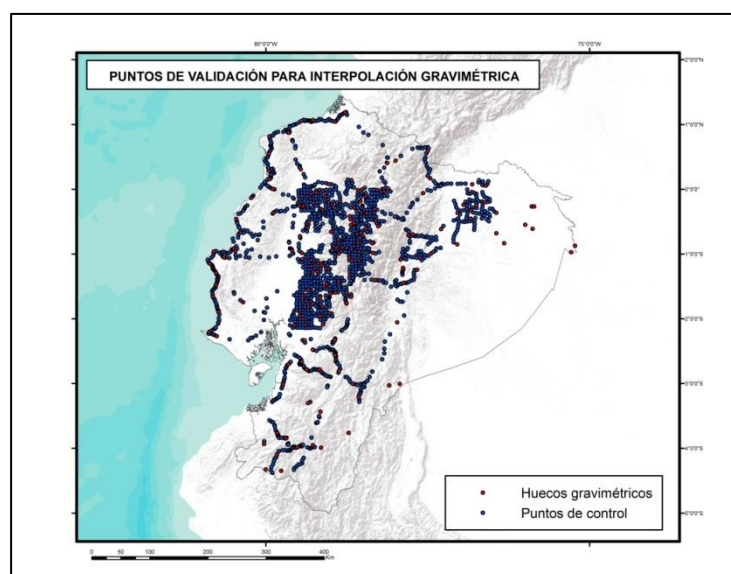


Figura 32 Puntos de control para la validación gravimétrica

Para la comparación del mejor modelo ajustable para estimación de valores gravimétricos, se planteó la interpolación directa de gravedad; a través de anomalías de aire libre; por anomalías de Bouguer simple; y mediante perturbaciones de gravedad. La interpolación de estos cuatro funcionales se realizó a través del método geoestadístico Kriging. Se unificó el sistema de mareas a *tide free* a los datos de gravedad observada para el desarrollo de los modelos.

Para el primer modelo se interpoló directamente los valores de gravedad observada disponibles de la base de datos inicial (ver figura 33).

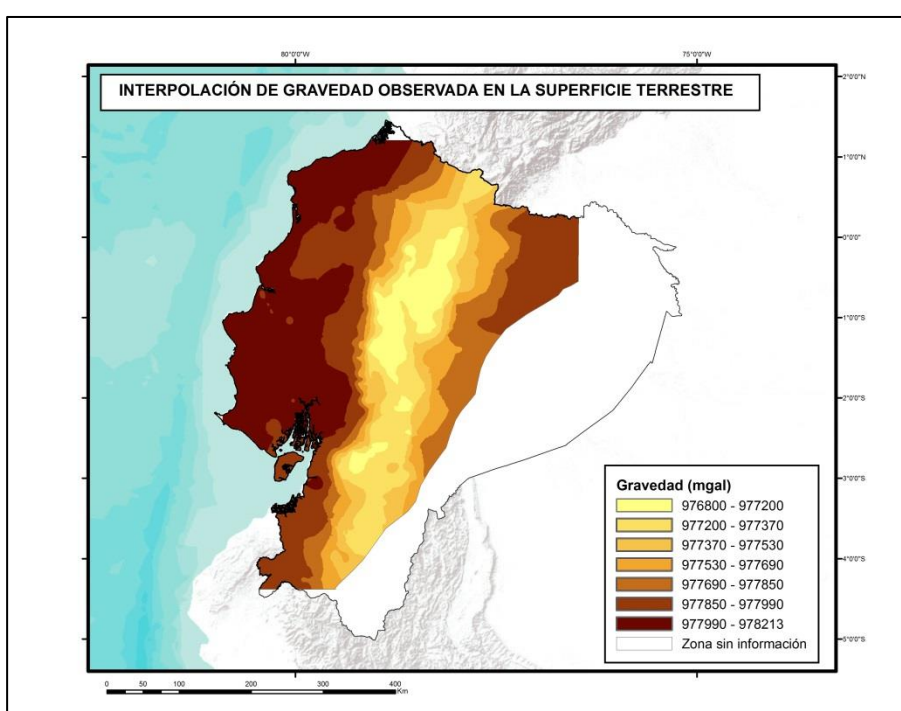


Figura 33 Mapa de interpolación de gravedad observada

Para la generación de los modelos de anomalías de aire libre (ver figura 34) y anomalías de Bouguer simple (ver figura 35), se utilizó el modelo geoidal geométrico del Ecuador continental desarrollado por el Instituto Geográfico Militar para obtener la altura nivelada en el cálculo de las correcciones de aire libre y de Bouguer. Debido a la cobertura territorial del modelo geoidal, se eliminaron 9 puntos de control donde no se realizó la interpolación.

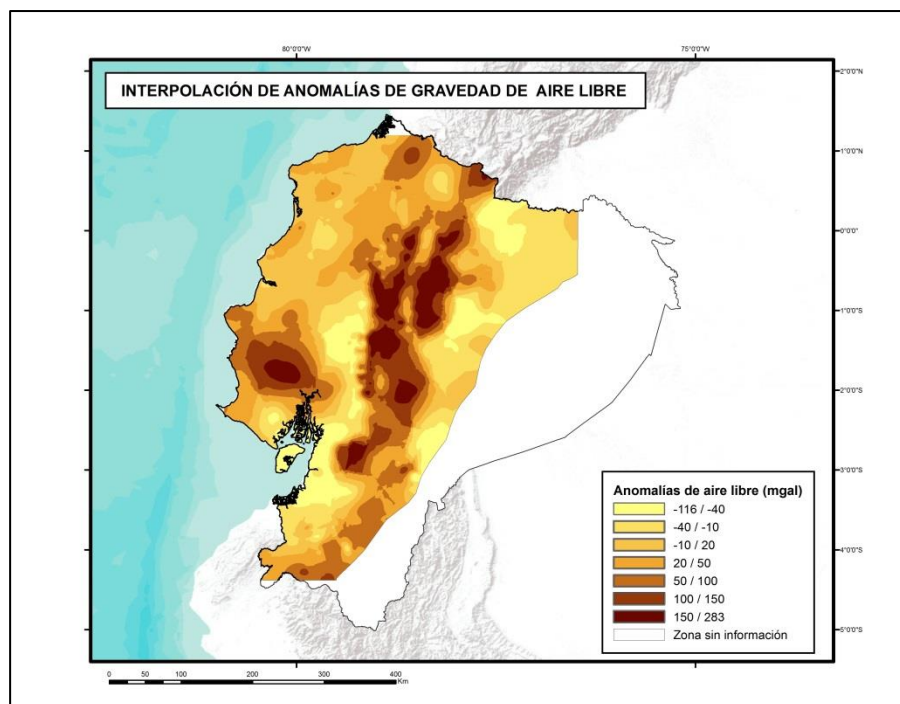


Figura 34 Mapa de interpolación de anomalías de aire libre

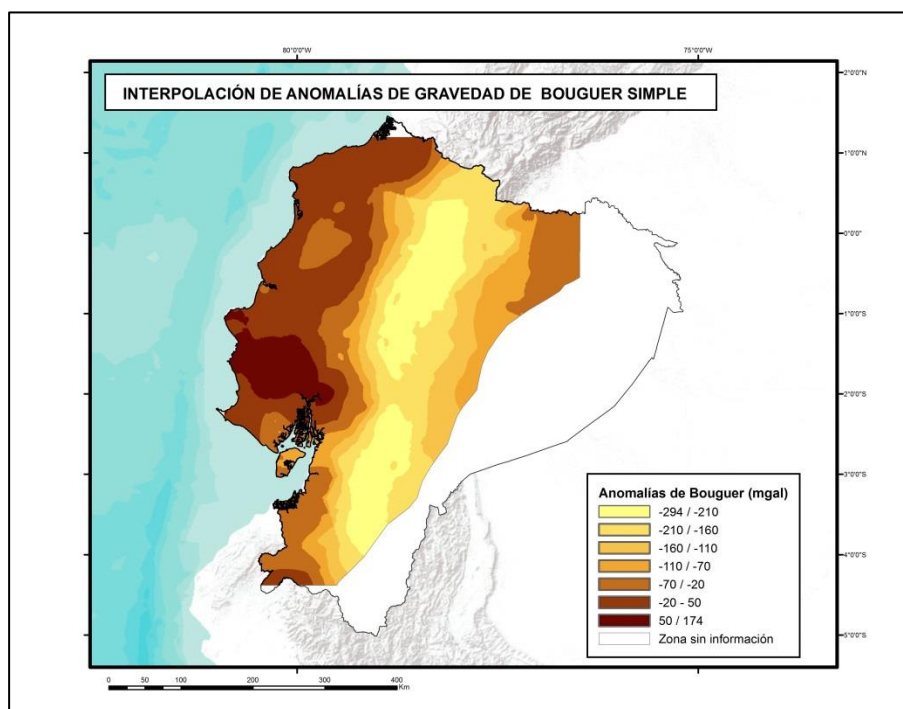


Figura 35 Mapa de interpolación de anomalías de Bouguer simple

Con respecto a las perturbaciones de gravedad (ver figura 36) se calculó a través de (2-41), donde en el cálculo de la gravedad normal (2-36) se utilizaron los parámetros del elipsoide GRS80 (ver tabla 1), de la misma forma que en el desarrollo para las anomalías de gravedad. En este caso se utilizaron los estándares correspondientes a reducciones de gravedad para gravedad normal y real (Hinze, Aiken, Brozena, Coakley, & Dater, 2005).

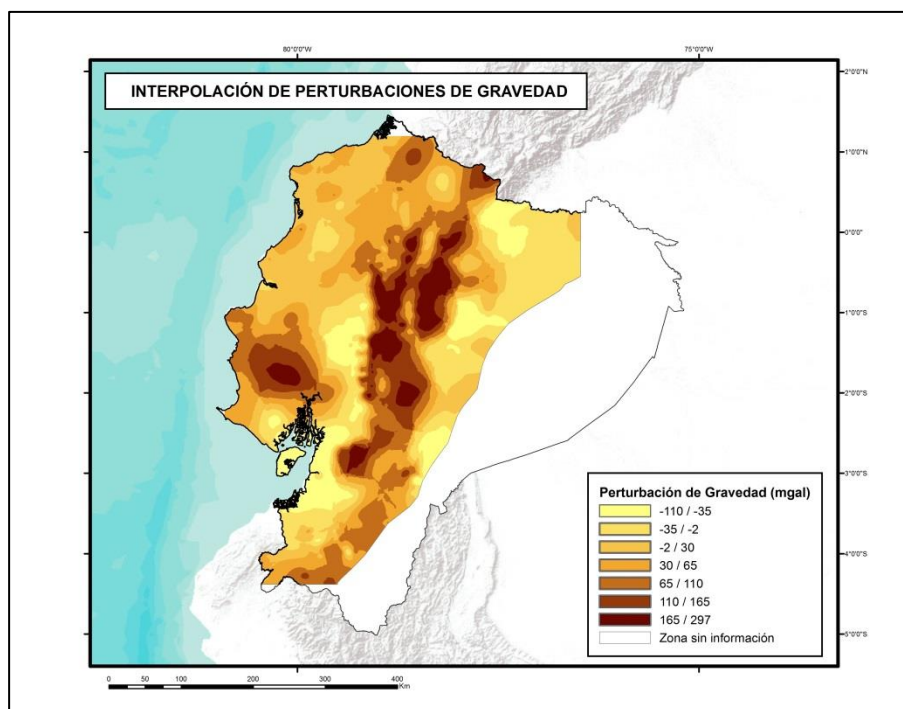


Figura 36 Mapa de interpolación de perturbaciones de gravedad

También se incluyeron los modelos globales geopotenciales EIGEN 6S4 y GGM05G, obtenidos por rastreo satelital, con la finalidad de reducir posibles errores sistemáticos provenientes de información terrestre o altimétrica. También se incluyó el tradicional modelo EGM08, desarrollado a través de rastreo satelital, altimetría e información terrestre de gravedad, para obtener otro campo comparativo en la interpolación mediante técnicas satelitales. La interpolación directa de gravedad, se la realizó a través de la generación de una malla de 1' x 1' entre las latitudes 2° N y 6°S; y las longitudes 74°W y 82°W. Los modelos EGM08 (ver figura 37) y EIGEN 6S4 (ver

figura 38) se encuentran en el sistema de mareas *tide free*, mientras que el GGM05G (ver figura 39) está en *zero tide*. Por lo que, para los dos primeros modelos se unificaron los valores gravimétricos a través de la transformación de los datos de gravedad observada del sistema *zero tide* a *tide free* (2-69).

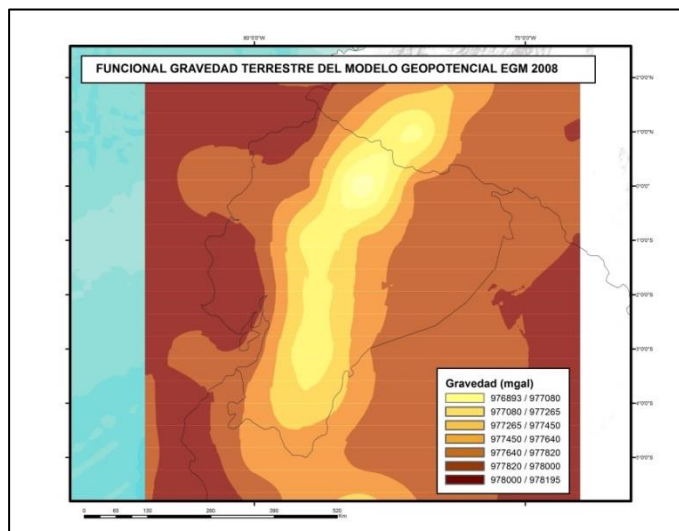


Figura 37 Mapa de interpolación del funcional gravedad terrestre del modelo EGM 2008

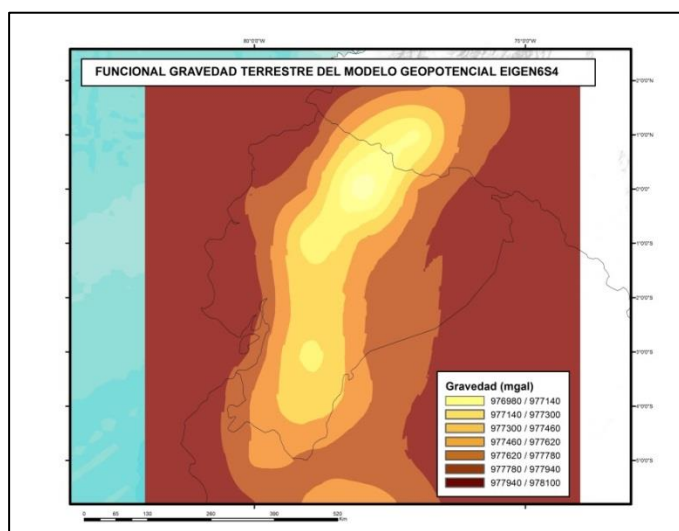


Figura 38 Mapa de interpolación del funcional gravedad terrestre del modelo EIGEN6S4

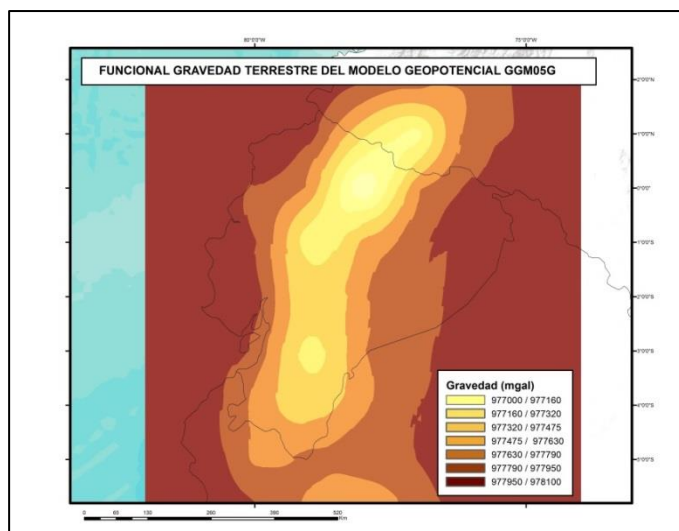


Figura 39 Mapa de interpolación del funcional gravedad terrestre del modelo GGM05G

Con los datos correspondientes a los huecos gravimétricos, se obtuvieron los valores de cada modelo para efectuar la comparación. El modelo que finalmente se utilizó para la interpolación de gravedad en los puntos faltantes fue el de anomalías de Bouguer simple, al presentar un menor residuo, correspondiente a la comparación entre la gravedad observada menos la gravedad interpolada, cuyo análisis se presenta en la sección 4.

Para el cálculo inverso de gravedad, a través de anomalías de Bouguer simple, se extrajeron los valores del modelo de corrección de aire libre (ver figura 40) desarrollado mediante (2-110) y el modelo de la corrección de Bouguer (ver figura 41) calculado a través de (2-111) para cada estación, los cuales fueron interpolados mediante Kriging para disponer de ambos modelos que permitan la extracción de dichos valores en los punto seleccionados para la comparación.

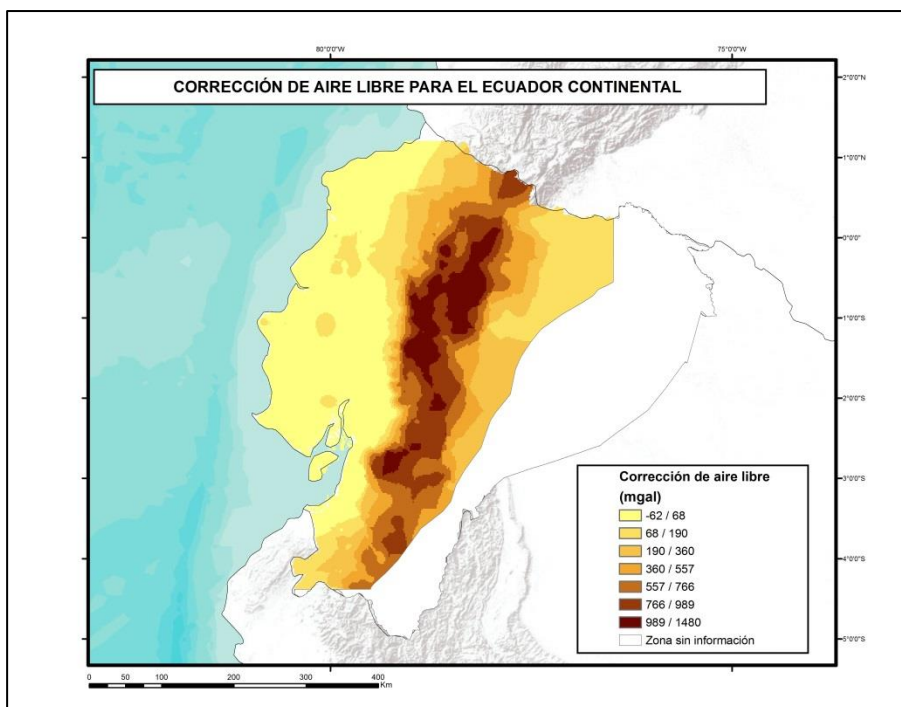


Figura 40 Corrección de aire libre para el Ecuador continental

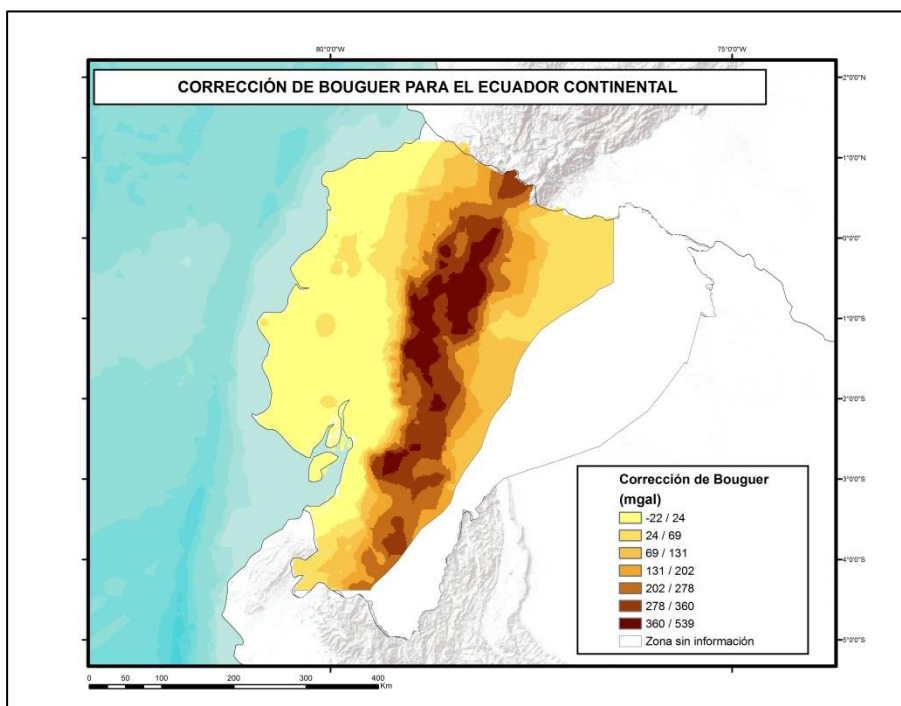


Figura 41 Corrección de Bouguer para el Ecuador continental

3.2.3. Cálculo de desniveles geopotenciales

Los datos de desniveles, al no presentar ninguna corrección (p. ej.: corrección lunisolar) se encuentran en *mean tide* (Mäkinen & Ihde, 2007), mientras que los datos de gravedad al ser obtenidos mediante rastreos posteriores al año 2003 están en el sistema *zero tide*. Para el presente estudio se decidió unificar las componentes al sistema *tide free*, por lo tanto la transformación de los datos de desnivel se realizó a través de (2-74) para convertir de *mean tide* a *tide free*.

El modelo de anomalías de Bouguer (ver figura 35) fue utilizado para asignar valores de gravedad interpolada través (2-109), siendo estimado en 1812 puntos de la red. Los valores de gravedad, tanto observada como interpolada, se encontraban referidos a IGSN71, siendo necesario remover el término de Honkasalo, realizando la transformación del sistema de mareas *mean tide* a *tide free* (2-70). Posteriormente, se calculó la gravedad media entre dos estaciones para multiplicarlo por su diferencia de alturas niveladas correspondiente y obtener el desnivel de número geopotencial (2-61).

La red de números geopotenciales, que conformada mediante 62 líneas y 41 nodos, las cuales conformaron 21 anillos que determinarán las correspondientes ecuaciones de condición para el ajuste de los errores de cierre de cada línea mediante el método correlativo de mínimos cuadrados. El modelo matemático, en cada anillo, se generó en base a la sumatoria de desniveles de las líneas conformantes, partiendo de un nodo determinado hasta llegar al mismo, lo cual arroje el resultado de cero. Se estableció el sentido horario en la conformación de las ecuaciones dentro de los anillos y la dirección de la sumatoria del desnivel se ve reflejada como positiva, hacia donde se dirige la flecha, como se detalla en la figura 42.

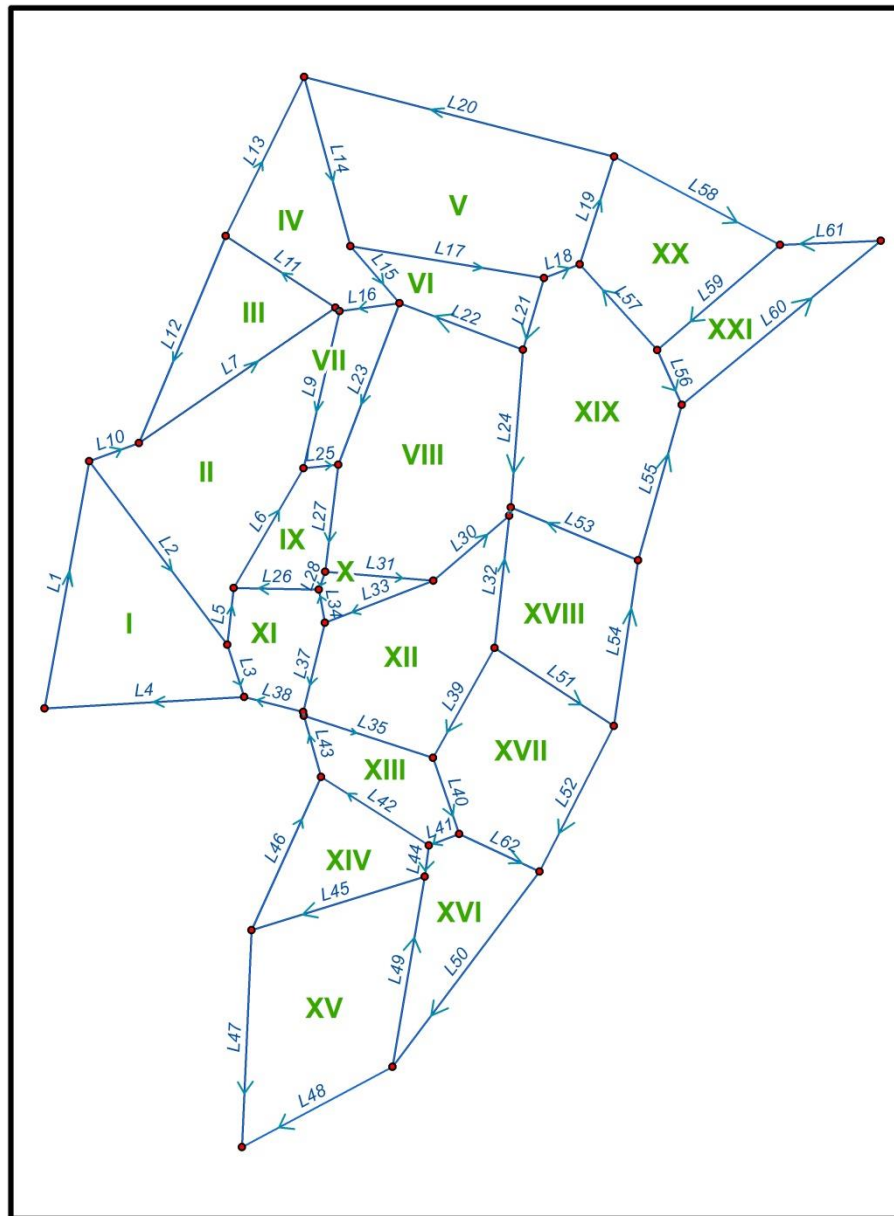


Figura 42 Anillos de la red de números geopotenciales

De esta manera, el modelo matemático se determinó en base a 21 ecuaciones, expresadas a continuación

$$L1 + L2 + L3 + L4 = 0 \quad (3-1)$$

$$L10 + L7 + L8 + L9 - L6 - L5 - L2 = 0 \quad (3-2)$$

$$-L12 - L11 - L7 = 0 \quad (3-3)$$

$$L13 + L14 + L15 + L16 - L8 + L11 = 0 \quad (3-4)$$

$$-L20 - L19 - L18 - L17 - L14 = 0 \quad (3-5)$$

$$L17 + L21 + L22 - L15 = 0 \quad (3-6)$$

$$-L16 + L23 - L25 - L9 = 0 \quad (3-7)$$

$$-L22 + L24 - L29 - L30 - L31 - L27 - L23 = 0 \quad (3-8)$$

$$L25 + L27 + L28 + L26 + L6 = 0 \quad (3-9)$$

$$L31 + L33 + L34 - L28 = 0 \quad (3-10)$$

$$-L26 - L34 + L37 + L38 - L3 + L5 = 0 \quad (3-11)$$

$$-L33 + L30 - L32 + L39 - L35 - L36 - L37 = 0 \quad (3-12)$$

$$L35 + L40 + L41 + L42 + L43 = 0 \quad (3-13)$$

$$-L42 + L44 + L45 + L46 = 0 \quad (3-14)$$

$$-L45 - L49 + L48 - L47 = 0 \quad (3-15)$$

$$L62 + L50 + L49 - L44 - L41 = 0 \quad (3-16)$$

$$L51 + L52 - L62 - L40 - L39 = 0 \quad (3-17)$$

$$-L53 - L54 - L51 + L32 + L29 = 0 \quad (3-18)$$

$$-L57 + L56 - L55 + L53 - L24 - L21 + L18 = 0 \quad (3-19)$$

$$L58 + L59 + L57 + L19 = 0 \quad (3-20)$$

$$-L61 - L60 - L56 - L59 = 0 \quad (3-21)$$

Ya conformadas las ecuaciones de condición y su respectiva matriz de derivadas parciales, se determinó la matriz de pesos para las observaciones, la cual corresponde a

la misma consideración utilizada para una red típica de nivelación (Padín), siendo una matriz diagonal compuesta con el inverso de la distancia de cada línea.

$$P = \frac{1}{D \text{ (km)}} \quad (3-22)$$

La matriz inicial de observaciones corresponde a los valores de los desniveles geopotenciales de cada línea (ver tabla 2) y estos son utilizados dentro del modelo matemático para obtener los errores de cierre de cada anillo (ver tabla 3).

Tabla 3

Errores de cierre de los anillos de la red de números geopotenciales

| ANILLO | ERROR DE CIERRE (ugp) |
|--------------|-----------------------|
| I | -0,0848 |
| II | -0,0056 |
| III | -0,0038 |
| IV | 0,0747 |
| V | -0,0849 |
| VI | 0,2146 |
| VII | 0,0849 |
| VIII | -0,1610 |
| IX | -0,0160 |
| X | -0,1272 |
| XI | 0,0323 |
| XII | 0,1213 |
| XIII | -0,0915 |
| XIV | 0,1107 |
| XV | 0,0934 |
| XVI | -0,7234 |
| XVII | -0,2871 |
| XVIII | 0,3141 |
| XIX | -0,1298 |
| XX | -0,2799 |
| XXI | 0,2339 |

Una vez realizado el ajuste mediante el método correlativo (ver sección 2.6.2), se alcanzaron los desniveles geopotenciales ajustados de cada línea y se puede comparar en la tabla 4, los residuos obtenidos de éste, con su correspondiente valor previo sin ajuste.

Tabla 4

Desniveles geopotenciales ajustados y residuos

| LÍNEAS RED NÚMEROS GEOPOTENCIALES | DESNIVEL GEOPOTENCIAL AJUSTADO (ugp) | RESIDUO (ugp) |
|---|--|------------------|
| L1 | 93,0711 | 0,0413 |
| L2 | -93,1702 | 0,0156 |
| L3 | 4,0611 | 0,0023 |
| L4 | -3,9619 | 0,0256 |
| L5 | 8,5075 | 0,0012 |
| L6 | 57,3408 | 0,0171 |
| L7 | 213,1273 | 0,0137 |
| L8 | 14,2082 | 0,0008 |
| L9 | -172,6335 | 0,0217 |
| L10 | -82,0239 | 0,0032 |
| L11 | -201,7697 | -0,0163 |
| L12 | -11,3576 | -0,0012 |
| L13 | -9,4311 | -0,0333 |
| L14 | 179,0507 | -0,0298 |
| L15 | 334,0910 | 0,0089 |
| L16 | -287,7327 | -0,0033 |
| L17 | 2432,0406 | -0,0827 |
| L18 | -150,5011 | 0,0063 |
| L19 | -931,8577 | 0,0431 |
| L20 | -1528,7325 | -0,0219 |
| L21 | 115,2896 | -0,0354 |
| L22 | -2213,2392 | -0,0877 |
| L23 | -479,7893 | -0,0571 |
| L24 | -250,0342 | 0,0181 |
| L25 | -19,4231 | 0,0094 |
| L26 | 1,9823 | 0,0109 |
| L27 | -37,9774 | -0,0142 |
| L28 | -1,9226 | -0,0072 |
| L29 | -187,3492 | -0,0042 |

Continúa 

| LÍNEAS RED NÚMEROS GEOPOTENCIALES | DESNIVEL GEOPOTENCIAL AJUSTADO (ugp) | RESIDUO (ugp) |
|--------------------------------------|--|------------------|
| L30 | 118,6312 | -0,0173 |
| L31 | 2549,6897 | 0,0377 |
| L32 | -284,6440 | -0,0593 |
| L33 | -2557,8421 | 0,0673 |
| L34 | 6,2298 | 0,0150 |
| L35 | 2733,2786 | 0,0389 |
| L36 | 4,8123 | -0,0006 |
| L37 | 6,9173 | -0,0098 |
| L38 | -3,1516 | 0,0045 |
| L39 | -216,1091 | -0,0675 |
| L40 | -477,6071 | -0,0159 |
| L41 | 239,7069 | -0,0182 |
| L42 | -2495,5185 | 0,0637 |
| L43 | 0,1401 | 0,0230 |
| L44 | 56,4491 | -0,0275 |
| L45 | -2556,6987 | -0,0271 |
| L46 | 4,7311 | 0,0077 |
| L47 | 446,9531 | -0,0638 |
| L48 | -1529,5651 | 0,0504 |
| L49 | 580,1806 | 0,2347 |
| L50 | 354,3628 | 0,3881 |
| L51 | -1961,5213 | 0,1538 |
| L52 | 629,4178 | 0,1047 |
| L53 | 1587,2096 | 0,0602 |
| L54 | -97,6814 | 0,0364 |
| L55 | 251,8067 | -0,0318 |
| L56 | -619,7088 | 0,0343 |
| L57 | 699,9377 | 0,0203 |
| L58 | -1133,7033 | 0,1176 |
| L59 | 1365,6233 | 0,0989 |
| L60 | -873,2744 | 0,0791 |
| L61 | 127,3598 | 0,0215 |
| L62 | -638,3874 | 0,0549 |

3.2.4. Prueba de hipótesis del ajuste

Después del ajuste de la red, se obtuvo la *varianza a posteriori* $\hat{\sigma}^2$ mediante (2-99)

$$\hat{\sigma}^2 = 9,35 \times 10^{-5} \quad (3-23)$$

Para comprobar la bondad del ajuste, es preciso realizar una prueba de hipótesis (ver sección 2.6.3) para comparar la *varianza a posteriori* (3-23), con la *varianza a priori* σ^2 que es la unidad. Como en el análisis interviene una muestra de varianzas, el estadístico utilizado fue *chi cuadrado* (2-107).

$$\chi^2 = 0,001963 \quad (3-24)$$

3.2.4.1. Prueba de bilateralidad

La condición particular para que la red se encuentre bien ajustada es que la *varianza a posteriori* sea igual o se asemeje a la *varianza a priori* a un determinado nivel de significancia fijo, siendo utilizado de 5% en el presente estudio. De esta forma se planteó la hipótesis nula como una igualdad entre ambas varianzas (2-100), mientras que la hipótesis alternativa correspondió a que las varianzas no sean iguales (2-103). La región crítica se obtuvo de las tablas estadísticas, de acuerdo a la ecuación (2-106).

$$\chi^2(v; 1-\frac{\alpha}{2}) = 35,479 \quad (3-25)$$

$$\chi^2(v; \frac{\alpha}{2}) = 10,283 \quad (3-26)$$

El valor obtenido por el estadístico *chi cuadrado* (3-24), se encuentra fuera de la región crítica (ver figura 43); por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula, donde ambas varianzas no son iguales al 95% de confianza.

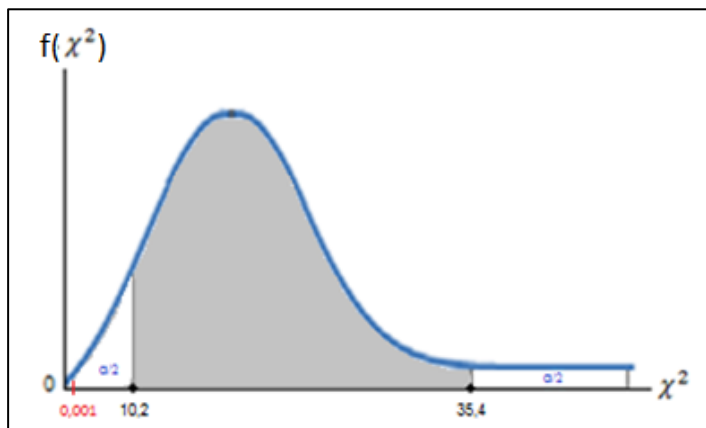


Figura 43 Prueba de hipótesis bilateral

3.2.4.2. Prueba de unilateralidad

Al rechazar la hipótesis de que la *varianza a posteriori* es igual a la *varianza a priori* en un determinado nivel de significancia, se debió plantear una nueva prueba de hipótesis alternativa, en la que se debe suponer que la *varianza a posteriori* no sea mayor a la *varianza a priori*. De tal modo, la hipótesis nula se mantendría (2-100) como una igualdad entre ambas varianzas; mientras que la hipótesis alternativa será que la *varianza a posteriori sea mayor a la varianza a priori* (2-101). La región crítica para este caso, corresponde a la ecuación (2-104) basada en las tablas de distribución para *chi cuadrado*.

$$\chi^2_{(v; \alpha)} = 32,671 \quad (3-27)$$

Como el valor otorgado por la prueba de *chi cuadrado* (3-24) se encuentra dentro de la zona de no rechazo de la hipótesis nula (ver figura 44), en este caso, como prueba unilateral de cola derecha, se admite que ambas varianzas son iguales con el 95% de nivel de confianza, verificando la bondad del ajuste de la red.

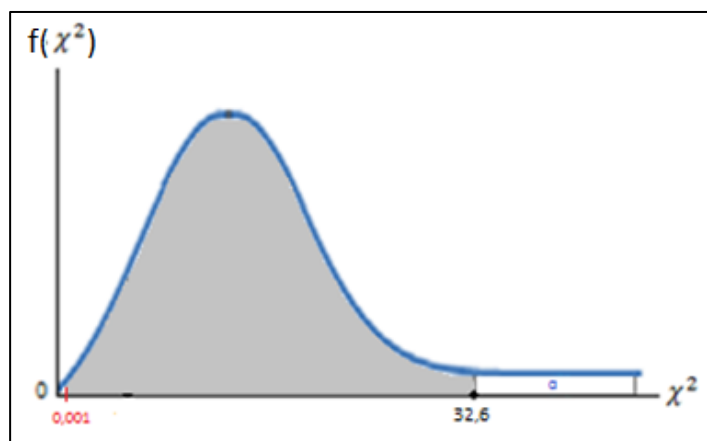


Figura 44 Prueba de hipótesis unilateral

3.2.5. Cotas geopotenciales

Una vez realizado el ajuste, se distribuyó el residuo, dividiéndolo para el número de puntos existentes en cada línea. El datum de la red vertical de nivelación es el mismo para la red de números geopotenciales, cual es la placa BM-3 (2-46). Para generar las cotas geopotenciales de cada punto, se seleccionó dicha placa como la cota inicial, cuyo valor fue obtenido a través de alturas ortométricas de Helmert (Cañizares, 2015).

$$C_o = 6,1334 \text{ ugp} \quad (3-28)$$

Dicho valor se adicionó a los desniveles geopotenciales dentro de cada línea de la red, para obtener finalmente, las cotas geopotenciales de cada placa.

3.3. Metodología de la teoría de Molodensky

Para desarrollar la metodología de la teoría propuesta por Molodensky, los requisitos primordiales son los rastreos obtenidos sobre la superficie terrestre. La red de números geopotenciales fue diseñada mediante una combinación de coordenadas obtenidas con GPS de precisión y navegador, así como de gravedad observada en la topografía junto a gravedad interpolada a través de anomalías de gravedad de Bouguer simple. A continuación es fundamental utilizar únicamente los valores de GPS de precisión, pues presentan el valor de altura elipsoidal propio de cada estación y proporcionan una mejor aproximación para el cálculo de la gravedad teórica correspondiente.

La red de números geopotenciales cuenta con 3933 puntos, de los cuales se filtraron, únicamente, los que poseían datos de GPS de precisión para obtener, finalmente, 1257 puntos distribuidos en el territorio continental del Ecuador (ver figura 45).



Figura 45 Datos de la red de números geopotenciales para aplicar la metodología de Molodensky

3.3.1. Cálculo de alturas normales

Para el cálculo de las alturas normales los datos necesarios son la cota geopotencial y la gravedad normal de cada estación (2-62), pero en el presente estudio, fueron generados mediante la ecuación (2-63), utilizando los parámetros del elipsoide GRS80 (ver tabla 1), la cual presenta mayor precisión, a través de un desarrollo analítico. Así se calcularon las alturas normales para cada estación de los datos disponibles de la red de cotas geopotenciales y se generó un modelo digital de terreno de alturas normales.

3.3.2. Generación del modelo cuasigeoidal

Ya obtenidas las alturas normales, como siguiente paso se generó una diferencia geométrica entre estas, con las alturas elipsoidales correspondientes a cada estación para determinar las anomalías de altura (2-60), correspondientes a la altura comprendida entre el elipsoide y el cuasigeoide. Se calculó, de esta manera, en los puntos disponibles, para la posterior interpolación mediante el método geoestadístico Kriging.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4.1. Red de números geopotenciales

Lo óptimo para obtener una red de números geopotenciales, consiste en tener valores de gravedad entre cada desnivel existente. Analizando ambas categorías de datos, es donde se obtuvo mayor cantidad de dificultades para desarrollar el proyecto. La red de control vertical del país, comprendida en 100 líneas y 92 nodos, fue depurada hasta contar con 62 líneas y 41 nodos, mediante criterios como inexistencia de nodos de enlace entre líneas o que se encuentren enlazadas a líneas que no entraron en tolerancia de $8,4 \text{ mm } \sqrt{k}$.

4.1.1. Análisis de la red de nivelación

Después de examinar los errores de cierre de las líneas de la red de control vertical, se llega a la conclusión que en nuestro país no disponemos de una red vertical fundamental, debido a que el 23% de las líneas no se encuentran dentro de los valores permitidos como primer orden con tolerancia máxima de $4 \text{ mm } \sqrt{k}$, según el estándar nacional publicado por el Instituto Geográfico Militar. Aún si se consideraría el error máximo de cierre de $6 \text{ mm } \sqrt{k}$, tomando en cuenta que la nivelación se realizó repitiendo una sección o recorrido, el 10% de líneas no cumplen con la norma. Pero estas líneas no pueden ser descartadas en la conformación de la red, debido a que son tramos muy extensos de las regiones costa y oriental del país; además, son líneas externas, fundamentales para el ajuste, pues constituyen un enlace importante con el resto de anillos conformados. La mayoría de las líneas de la red vertical nacional entrarían en los valores de tolerancia de $8,4 \text{ mm } \sqrt{k}$, que según nuestra norma vendría a ser una red de segundo orden. Pero todavía quedarían fuera dos líneas internas que su ajuste sería superior a nuestra normativa.

Es de vital importancia disponer de una exactitud vertical de primer orden con el propósito de contar con una red fundamental para el país y que, también permita realizar conexiones internacionales con países fronterizos (IGM Chile, 2009). De tal modo, realizando una comparación con varios países de la región, como Colombia, Chile y México, se coincide que una red de nivelación de primer orden debe tener un error medio menor a $4 \text{ mm } \sqrt{k}$. En Colombia, esta consideración se da para un circuito de nivelación con regreso estableciendo tres órdenes en base a los errores de cierre y las aplicaciones correspondientes (ver tabla 5).

Tabla 5
Especificaciones de precisiones altimétricas en Colombia

| ORDEN | ERROR DE CIERRE | OBSERVACIÓN |
|----------------|---------------------------|--|
| Primero | $4 \text{ mm } \sqrt{k}$ | Métodos de alta precisión Circuito de nivelación con regreso Distancia entre puntos consecutivos 1,2 km en zonas montañosas y 2,5 km en zonas planas |
| Segundo | $8 \text{ mm } \sqrt{k}$ | Circuitos nivelados con alta precisión pero en un solo sentido (Sin regreso) |
| Tercero | $12 \text{ mm } \sqrt{k}$ | Aplicaciones de precisiones menores |

Fuente: (IGAC, 2010)

En el caso del otro país limítrofe, Perú cuenta con estándares diferentes a los mencionados anteriormente sin estar catalogados bajo un orden, sino mediante la precisión del modo de nivelación realizado, quedando en tres clases las cuales se observan en la tabla 6, donde se observa el error de cierre y las observaciones para los trabajos a realizarse.

Tabla 6**Especificaciones de precisiones altimétricas en Perú**

| CLASIFICACIÓN | ERROR DE CIERRE | OBSERVACIÓN |
|---|----------------------------|---|
| Nivelación de alta precisión (NAP) | $1,5 \text{ mm } \sqrt{k}$ | Red Geodésica Vertical Fundamental del país Determinación valores geopotenciales |
| Nivelación de precisión (NP) | $2,5 \text{ mm } \sqrt{k}$ | Nivelación geométrica Red Geodésica Vertical Secundaria |
| Nivelación ordinaria (NO) | $7 \text{ mm } \sqrt{k}$ | Nivelación trigonométrica o satelital Densificación |

Fuente: (IGN Perú, 2015)

Analizando las precisiones utilizadas con los dos países fronterizos, la red vertical ecuatoriana, entraría en el rango de segundo orden según Colombia y estaría fuera de la exigente clasificación peruana. En México, se tiene una clasificación similar a nuestro país en cuanto al primer orden, pero se incluye subdivisiones de clases dentro de los órdenes y especifica la distancia de separación que debe existir entre líneas (ver tabla 7).

Tabla 7**Especificaciones de precisiones altimétricas en México**

| ORDEN | CLASE | ERROR DE CIERRE | SEPARACION ENTRE LINEAS |
|----------------|-------|---------------------------|-------------------------|
| Primero | I | $4 \text{ mm } \sqrt{k}$ | 100 a 300 km |
| | II | $5 \text{ mm } \sqrt{k}$ | 50 a 100 km |
| Segundo | I | $6 \text{ mm } \sqrt{k}$ | 20 a 50 km |
| | II | $8 \text{ mm } \sqrt{k}$ | 10 a 25 km |
| Tercero | | $12 \text{ mm } \sqrt{k}$ | Ajustable |

Fuente: (INEGI, 2010)

De este modo, de acuerdo a nuestras especificaciones técnicas de nivelación y comparando con la normativa mexicana, nuestra tolerancia de primer orden coincide en $4 \text{ mm } \sqrt{k}$, pero nuestro rango de $6 \text{ mm } \sqrt{k}$, considerado en Ecuador como primer orden, resulta ser segundo orden, clase I para México. Y según el análisis de la tolerancia de la red vertical nacional, sería una red de segundo orden, clase II.

Como conclusión, si bien nuestra red no puede ser considerada como fundamental o de primer orden, también es necesario revisar las especificaciones técnicas en cuanto a las precisiones utilizadas. Como se puede observar, dichas normas varían entre cada país, pero se tiene una similitud en cuanto al error de cierre de primer orden. Si bien este estándar fue válido hasta 1984 (Doyle & Kozlowski, 2013), fue modificado por precisiones mayores. Esto puede observarse en la tabla 8, donde los órdenes y su subdivisión en clases presentan variaciones en cuanto a la tolerancia entre los años de 1974 y a partir de 1984.

Tabla 8

Especificaciones técnicas de precisiones para altimetría del FGCC

| ORDEN | CLASE | 1974 | 1984 |
|----------------|-------|---------------------------|----------------------------|
| Primer | I | $3 \text{ mm } \sqrt{k}$ | $0,5 \text{ mm } \sqrt{k}$ |
| | II | $4 \text{ mm } \sqrt{k}$ | $0,7 \text{ mm } \sqrt{k}$ |
| Segundo | I | $6 \text{ mm } \sqrt{k}$ | $1 \text{ mm } \sqrt{k}$ |
| | II | $8 \text{ mm } \sqrt{k}$ | $1,3 \text{ mm } \sqrt{k}$ |
| Tercer | | $12 \text{ mm } \sqrt{k}$ | $2 \text{ mm } \sqrt{k}$ |

Fuente: (FGCC, 1984)

Alcanzar este tipo de precisiones solamente será posible con la utilización de instrumentos y accesorios que permitan lecturas de décimas de milímetro, tales como niveles ópticos automáticos o digitales reversibles (IGN Perú, 2015) complementados con una planificación previa para el levantamiento de los puntos de control vertical.

4.1.2. Análisis de valores de gravedad en la red de números geopotenciales

En los datos de la red vertical, inicialmente se contaba con 2389 puntos sin gravedad de los 5055 existentes; pero al realizar el análisis inicial y la respectiva depuración de información, se tuvieron 3933 puntos finales, de los cuales 1812 no registraban valores de gravedad en la superficie terrestre.

Se consideró omitir la mayor cantidad de puntos sin dato gravimétrico, apreciando, únicamente, en los puntos que resultase estrictamente necesario, omitiendo estimaciones de gravedad hasta un máximo de 10 km de distancia, siempre que entre dos placas no se superen los 2 km (Coyago, 2010). Con este nuevo filtro, se tuvieron 2216 puntos y solamente 102 puntos debían ser estimados en su atributo de gravedad. Esto fue pensado para reducir errores sistemáticos influyentes en el ajuste de la red, pero generó que apenas se cuente con 793 datos con GPS de precisión, fundamentales para el desarrollo de la teoría de Molodensky. Observando esto, junto al ajuste que no era modificado de manera relevante, se tomó la decisión de utilizar los 3933 puntos iniciales, conllevando a estimar el valor de gravedad en los 1812 registros mencionados anteriormente.

4.1.3. Interpolación gravimétrica

Si bien se conoce que las anomalías de Bouguer representan el mejor modelo para interpolar valores de gravedad, en el presente estudio se realizó la respectiva validación, mediante cuatro modelos desarrollados con datos de rastreos sobre la superficie terrestre, tanto de GPS de precisión como de gravedad; así como de tres modelos geopotenciales globales. Este desarrollo fue pensado para obtener nueva información, al interpolar directamente la gravedad observada, o estimar mediante anomalías de aire libre, anomalías de Bouguer simple y perturbaciones de gravedad. En la tabla 9 se muestran los valores máximos, mínimos, media y desviación estándar de los residuos obtenidos mediante la gravedad observada menos la gravedad interpolada obtenida de los cuatro modelos señalados.

Tabla 9**Residuos de gravedad de los modelos por rastreos terrestres**

| RESIDUOS | GRAVEDAD | ANOMALÍAS AIRE LIBRE | ANOMALÍAS BOUGUER SIMPLE | PERTURBACIÓN GRAVEDAD |
|-------------------------------|----------|-------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| Máximo (mgal) | 310,08 | 113,79 | 63,54 | 102,58 |
| Mínimo (mgal) | -150,17 | -99,94 | -8,10 | -111,72 |
| Media (mgal) | 3,16 | 11,79 | 8,73 | -1,37 |
| Desviación estándar (mgal) | 42,86 | 21,20 | 7,91 | 20,99 |

Los residuos obtenidos en cada modelo fueron interpolados mediante Kriging para desarrollar mapas que muestren la variación en el territorio nacional continental entre la comparación gravimétrica con el respectivo histograma. De tal forma a continuación se observan los mapas e histogramas de las diferencia entre gravedad observada con los modelos de gravedad interpolada directamente (ver figura 46); gravedad a partir de anomalías de aire libre (ver figura 47); gravedad obtenida mediante anomalías de Bouguer simple (ver figura 48); y, gravedad estimada a través de perturbaciones de gravedad (ver figura 49).

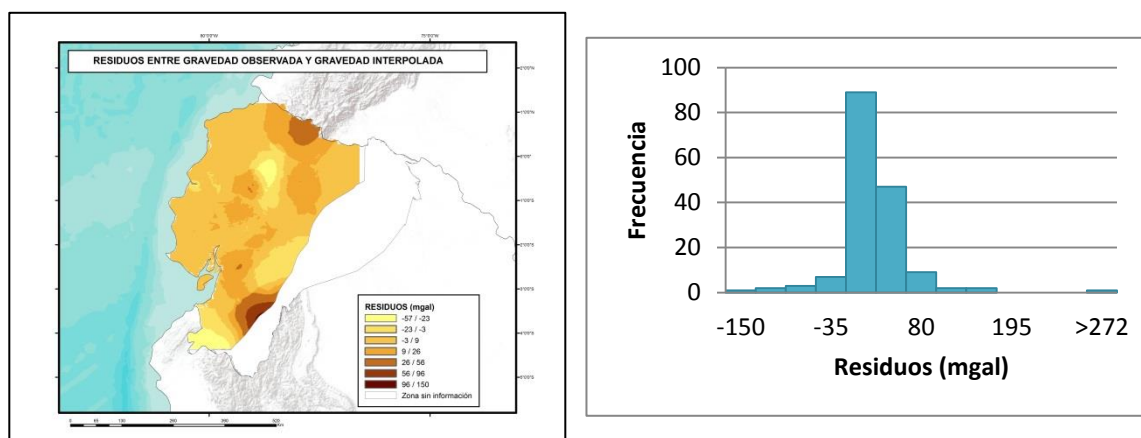


Figura 46 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad interpolada

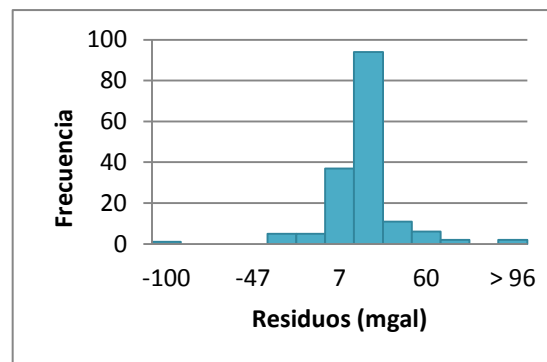
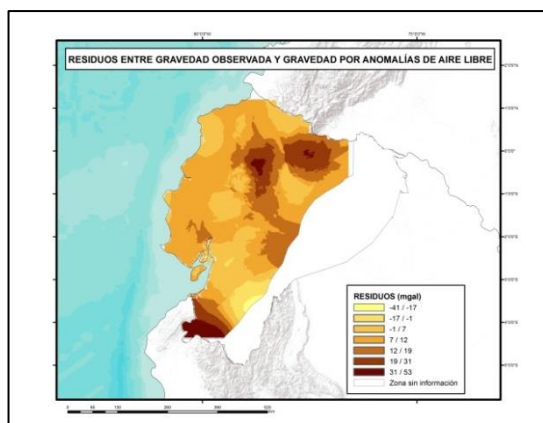


Figura 47 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad interpolada mediante anomalías de aire libre

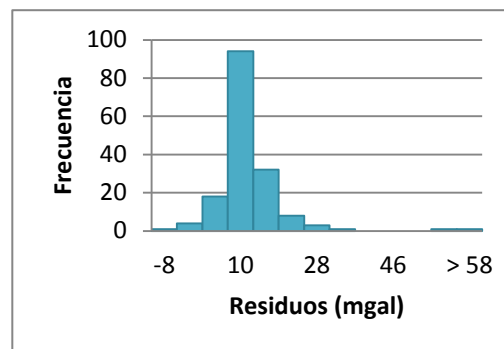
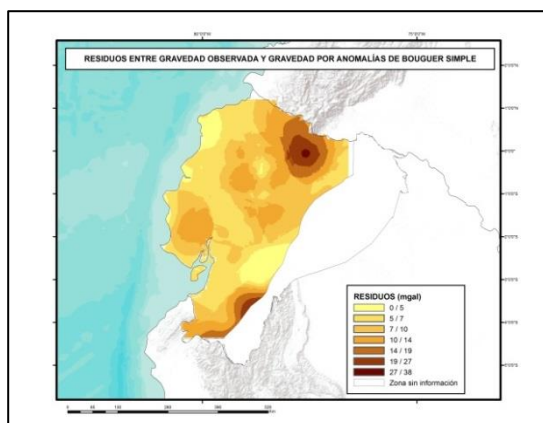


Figura 48 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad interpolada mediante anomalías de Bouguer simple

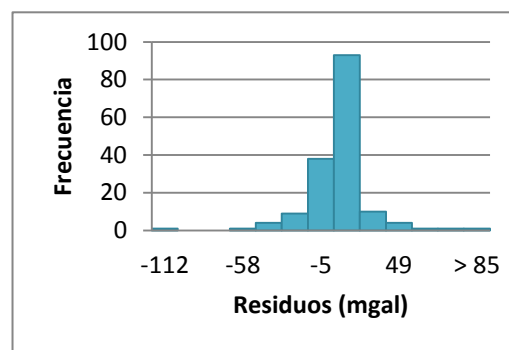
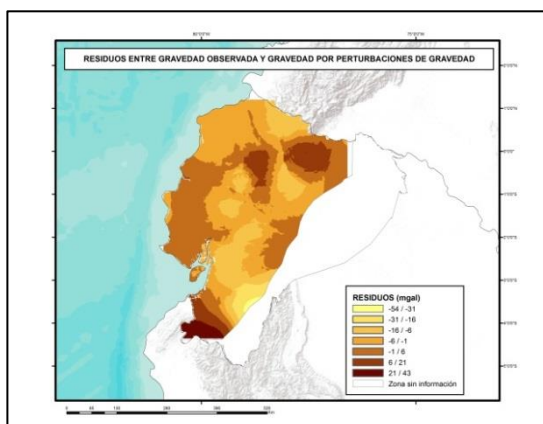


Figura 49 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad interpolada mediante perturbaciones de gravedad

De la misma manera, se utilizaron modelos geopotenciales para validarlos dentro del territorio continental a través de una malla de 1' x 1', utilizando el funcional gravedad para compararlo en los puntos disponibles. Los residuos corresponden a la diferencia entre la gravedad observada con la gravedad extraída del modelo geopotencial, cuyos valores estadísticos se indican en la tabla 10 para los tres modelos utilizados.

Tabla 10

Residuos de gravedad de los modelos geopotenciales

| RESIDUOS | EGM08 | EIGEN6S4 | GGM05G |
|----------------------------|---------|----------|---------|
| Máximo (mgal) | 460,71 | 476,46 | 466,27 |
| Mínimo (mgal) | -407,30 | -421,12 | -427,87 |
| Media (mgal) | 29,15 | 25,40 | 22,00 |
| Desviación estándar (mgal) | 201,57 | 214,30 | 215,45 |

Al igual que se realizó con los modelos anteriores, se desarrollaron mapas para apreciar los residuos obtenidos con su correspondiente histograma de frecuencias. Se observa a continuación el mapa e histograma para las diferencias entre la gravedad observada en el terreno y la extraídas de los modelos EGM2008 (ver figura 50); EIGEN6S4 (ver figura 51); y GGM05G (ver figura 52).

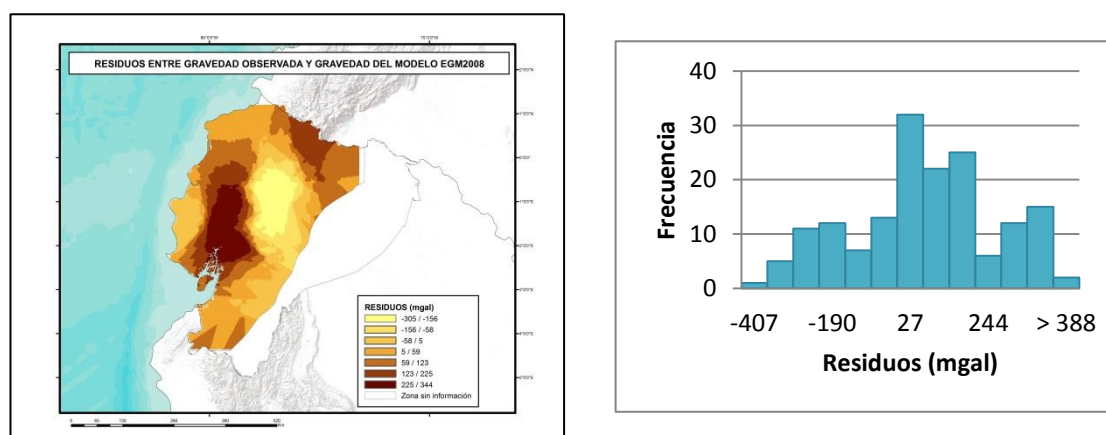


Figura 50 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad del modelo EGM2008

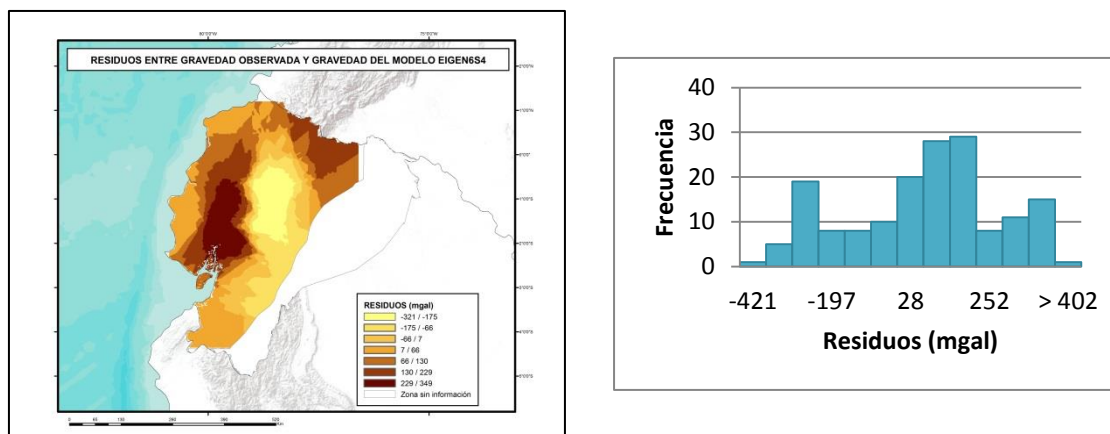


Figura 51 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad del modelo EIGEN6S4

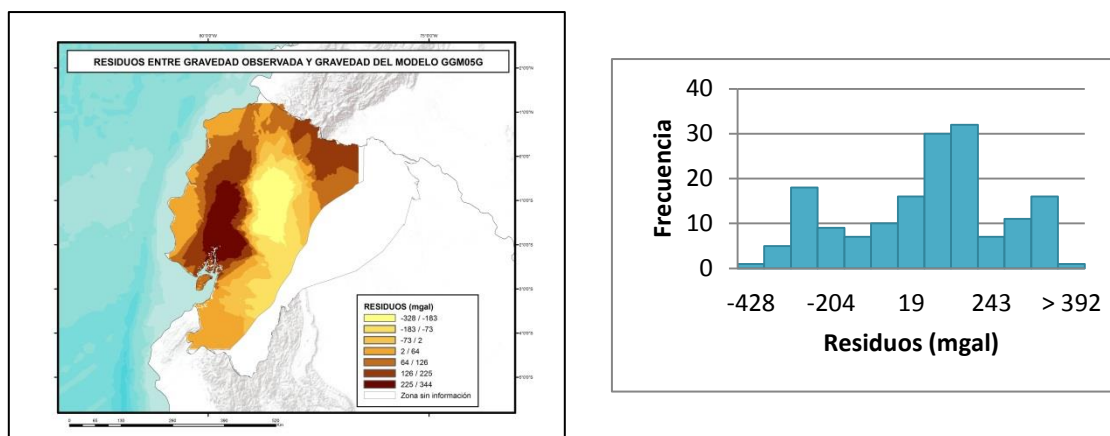


Figura 52 Diferencia e histograma entre valores de gravedad observada y gravedad del modelo GGM05G

Se confirmó que las anomalías de Bouguer comprenden el mejor modelo para interpolar gravedad, a través del cálculo inverso, al presentar el menor desvío estándar. Es notable observar que la interpolación directa de gravedad no resulta recomendable, presentando mayor desviación que al estimar dicho valor, a través de anomalías de gravedad o perturbaciones de gravedad. Los modelos globales geopotenciales presentan desvíos muy altos y una dispersión considerable, por lo tanto no es recomendable la interpolación directa gravimétrica.

4.2. Ajuste de la red de números geopotenciales

Al obtener gravedad interpolada en los puntos faltantes y el posterior cálculo y multiplicación de la gravedad media entre dos placas contiguas, con su respectiva diferencia de alturas niveladas, se obtuvo el desnivel geopotencial. Sin una unificación del sistema de mareas para la red, se contaría con un sistema híbrido con los desniveles y valores de gravedad en *mean tide*. El sistema seleccionado para el presente proyecto fue *tide free*, debido al posterior uso de valores de posición vinculados a dicho sistema.

Con 62 líneas y 41 nodos se conformó la red de números geopotenciales, donde se seleccionó el método correlativo de mínimos cuadrados para el respectivo ajuste de la red. Los 21 anillos conformados representaron el número de ecuaciones de condición para conformar el modelo matemático, mientras que los pesos fueron determinados en manera similar que para una red de nivelación común debido a las precisiones de los gravímetros son mayores a 1 mgal, lo cual sería despreciable al añadir al desnivel en la conformación del error geopotencial. Los errores de cierre de los anillos se establecieron utilizando las ecuaciones de condición y el desnivel estimado de las líneas y el máximo, mínimo y media se detallan en la tabla 11.

Tabla 11

Estadísticas de los errores de cierre para el ajuste de la red

| ESTADÍSTICA | VALOR |
|---------------------|--------------|
| MÁXIMO (ugp) | 0,3141 |
| MÍNIMO (ugp) | -0,7234 |
| MEDIA (ugp) | -0,034 |

Al realizar el ajuste se obtuvieron los residuos, correspondientes al valor ajustado menos el valor estimado inicialmente en cada línea de la red. Las estadísticas de los residuos se muestran en la tabla 12.

Tabla 12**Estadísticas de los residuos después del ajuste de la red**

| ESTADÍSTICA | VALOR |
|-------------|------------|
| MÁXIMO | 0,388 ugp |
| MÍNIMO | -0,087 ugp |
| MEDIA | 0,019 ugp |

La *varianza a posteriori* obtenida no fue aceptada dentro de una prueba de bilateralidad, en un nivel de significancia del 5%, al realizar la conjetura de que sea igual a la *varianza a priori*, por lo que de esta manera no se pudo verificar la bondad del ajuste, generando que se desarrolle una hipótesis diferente, donde la *varianza a posteriori* no sea mayor a la *varianza a priori* que nos permitió aceptar el ajuste realizado. Las posibles causas de este resultado en el ajuste, fue la interpolación gravimétrica en el 46% de puntos disponibles, representando casi la mitad de datos que no cumplen con los requisitos fundamentales para un desarrollo eficiente. A continuación, en la tabla 13 se indica los puntos sin gravedad existente de la red de números geopotenciales y su correspondiente porcentaje considerando la totalidad de los puntos en cada línea.

Tabla 13**Puntos sin gravedad en la red de números geopotenciales**

| LÍNEA | CANTIDAD DE PUNTOS | PUNTOS SIN GRAVEDAD | PUNTOS SIN GRAVEDAD (%) |
|-------|--------------------|---------------------|-------------------------|
| L1 | 142 | 1 | 0,70 |
| L2 | 95 | 43 | 45,26 |
| L3 | 20 | 17 | 85,00 |
| L4 | 90 | 52 | 57,78 |
| L5 | 23 | 16 | 69,57 |
| L6 | 53 | 50 | 94,34 |
| L7 | 115 | 51 | 44,35 |
| L8 | 2 | 1 | 50,00 |

Continúa 

| LÍNEA | CANTIDAD DE PUNTOS | PUNTOS SIN GRAVEDAD | PUNTOS SIN GRAVEDAD (%) |
|-------|--------------------|---------------------|-------------------------|
| L9 | 36 | 4 | 11,11 |
| L10 | 24 | 0 | 0,00 |
| L11 | 26 | 1 | 3,85 |
| L12 | 129 | 1 | 0,78 |
| L13 | 110 | 4 | 3,64 |
| L14 | 72 | 39 | 54,17 |
| L15 | 27 | 15 | 55,56 |
| L16 | 21 | 5 | 23,81 |
| L17 | 113 | 60 | 53,10 |
| L18 | 22 | 21 | 95,45 |
| L27 | 23 | 2 | 8,70 |
| L28 | 4 | 0 | 0,00 |
| L29 | 5 | 4 | 80,00 |
| L30 | 40 | 20 | 50,00 |
| L31 | 31 | 1 | 3,23 |
| L32 | 72 | 50 | 69,44 |
| L33 | 74 | 33 | 44,59 |
| L34 | 13 | 9 | 69,23 |
| L35 | 73 | 38 | 52,05 |
| L36 | 2 | 2 | 100,00 |
| L37 | 17 | 5 | 29,41 |
| L38 | 22 | 22 | 100,00 |
| L39 | 89 | 72 | 80,90 |
| L40 | 54 | 23 | 42,59 |
| L41 | 14 | 6 | 42,86 |
| L42 | 74 | 2 | 2,70 |
| L43 | 32 | 32 | 100,00 |
| L44 | 12 | 5 | 41,67 |
| L45 | 87 | 44 | 50,57 |
| L46 | 65 | 33 | 50,77 |
| L47 | 86 | 18 | 20,93 |
| L48 | 137 | 63 | 45,99 |
| L49 | 130 | 107 | 82,31 |
| L50 | 174 | 102 | 58,62 |
| L51 | 96 | 76 | 79,17 |
| L52 | 88 | 47 | 53,41 |
| L53 | 78 | 40 | 51,28 |

Continúa 

| LÍNEA | CANTIDAD DE PUNTOS | PUNTOS SIN GRAVEDAD | PUNTOS SIN GRAVEDAD (%) |
|------------|--------------------|---------------------|-------------------------|
| L54 | 79 | 41 | 51,90 |
| L55 | 71 | 35 | 49,30 |
| L56 | 37 | 21 | 56,76 |
| L57 | 67 | 34 | 50,75 |
| L60 | 135 | 67 | 49,63 |
| L61 | 34 | 5 | 14,71 |
| L62 | 57 | 35 | 61,40 |

Se puede apreciar que casi la mitad de las líneas de nivelación cuentan entre un 40% y 60% de puntos con gravedad y que los valores de tres líneas (L36, L38 y L43) no disponen de ningún rastreo gravimétrico, generando un verdadero inconveniente al enlazar con el resto de líneas para el cálculo de la gravedad media entre dos placas inmediatas. Esto también se incluye en los nodos de la red, donde 19 de 41 puntos no cuentan con gravedad que ratifican lo mencionado anteriormente. La figura 53 representa el porcentaje de la distribución de los puntos que no cuentan con registros gravimétricos dentro de cada línea de la red de números geopotenciales.

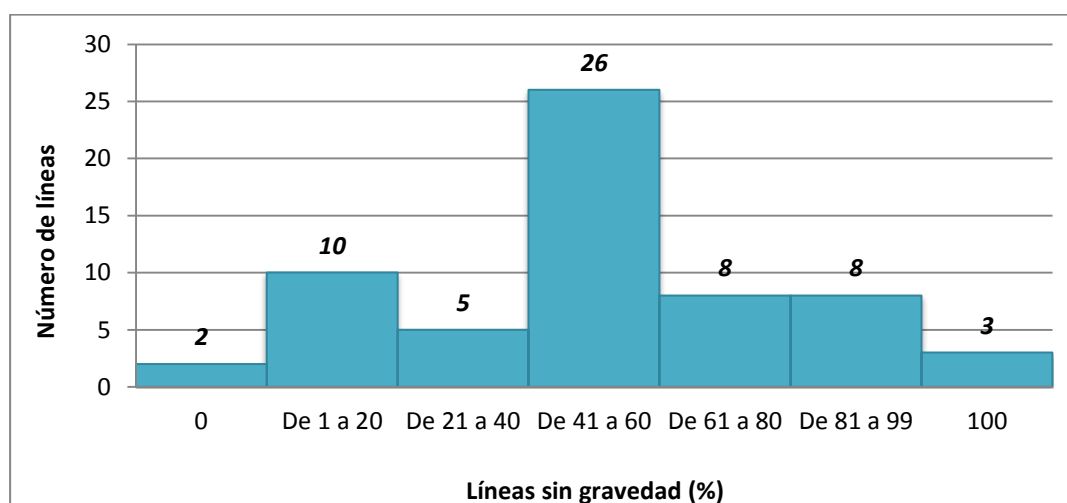


Figura 53 Distribución de puntos sin gravedad dentro de las líneas de la red de números geopotenciales

. La información proporcionada por el Instituto Geográfico Militar, basada en la red de control vertical posee muchas deficiencias en cuanto a la unificación en los datos de las placas, lo cual puede considerarse otro factor influyente en el resultado del ajuste. Existen puntos que no disponen de valores de posición, ya sea mediante GPS o navegador, lo cual genera un serio inconveniente en la visualización o materialización de la estación y en el cálculo de funciones como la gravedad teórica. Los errores más comunes, resultaron en que dos estaciones poseían la misma coordenada; los puntos se ubicaban fuera de la secuencia de la línea de nivelación; o, no existían registros de nodos, generando que varias líneas no se enlacen entre sí. Esto influyó en la conformación de la red de números geopotenciales, pues fue necesario obviar varias placas, así como cambiar el sentido de líneas para generar una coherencia en la secuencia de los datos. De la misma forma, se utilizó los datos de coordenadas por navegador, como alternativa ante la inexistencia de valores de posicionamiento de precisión.

4.3. Teoría de Molodensky

A partir de la red de números geopotenciales, se seleccionaron los registros necesarios para desarrollar la teoría de Molodensky, donde se utilizaron, exclusivamente, los valores con posicionamiento mediante rastreos satelitales, llegando a obtener 1257 puntos para el desarrollo que ya poseían su respectiva cota geopotencial, calculada posteriormente al ajuste de la red, y con la designación de la cota inicial o número geopotencial del datum (3-28). Con dichos datos, se calcularon las alturas normales y con éstas, se generó un modelo digital de terreno para el Ecuador continental (ver figura 54). Las estadísticas obtenidas de las alturas normales se indican en la tabla 14.

Tabla 14

Estadísticas de las alturas normales

| ESTADÍSTICA | VALOR |
|-------------------------|---------|
| MÁXIMO (m) | 4209,22 |
| MÍNIMO (m) | 2,64 |
| MEDIA (m) | 1176,31 |
| DESVIACIÓN ESTÁNDAR (m) | 1188,89 |

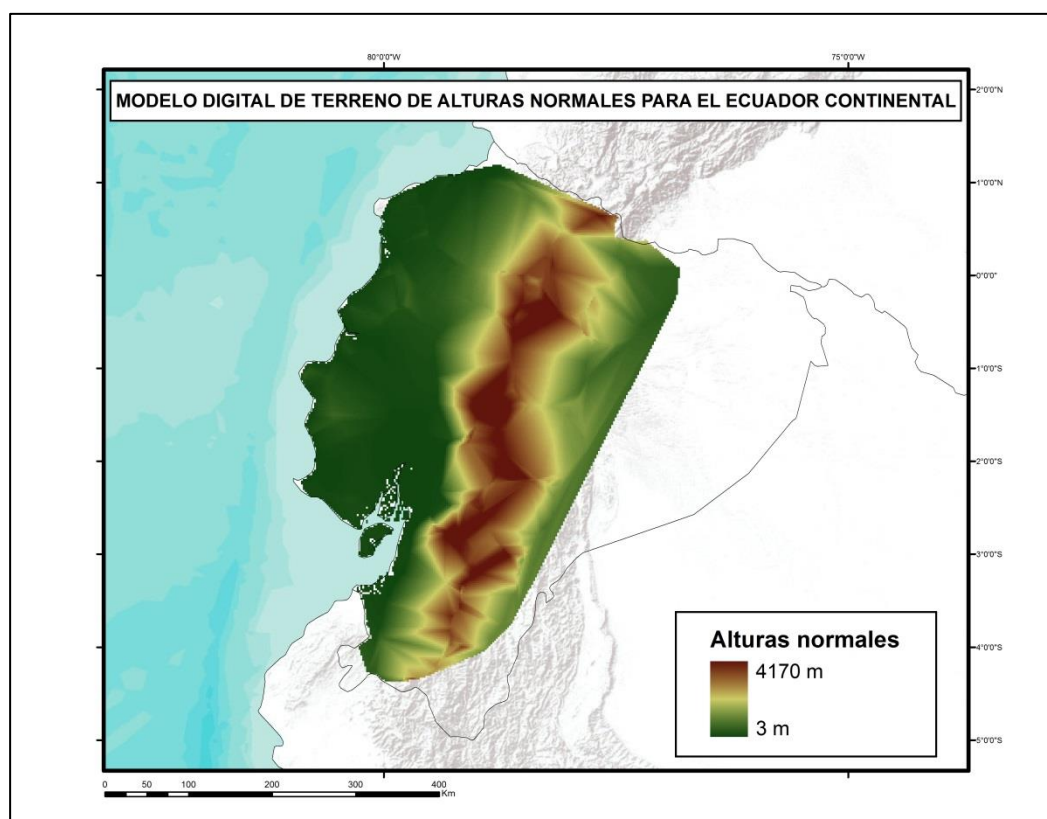


Figura 54 Modelo digital del terreno de alturas normales para el Ecuador continental

Las alturas normales se calcularon a través de la fórmula analítica (2-63) que proporciona una mayor precisión que al obtenerlos a partir de la ecuación más simple que relaciona, únicamente a la cota geopotencial con la gravedad teórica (2-62). Al realizar la comparación de los resultados obtenidos entre (2-63) y (2-62), se observa un incremento directamente proporcional al aumento de las alturas normales. En la tabla 15

se muestran rangos de 500 metros donde se observa el valor máximo, mínimo y media de las variaciones al incluir la aproximación analítica a la fórmula tradicional.

Tabla 15

Variaciones de las alturas normales con la aproximación analítica

| ALTURAS NORMALES (m) | MÁXIMO | MÍNIMO | MEDIA |
|-----------------------|--------|----------------------|--------|
| De 0 a 500 | 0,0393 | $1,1 \times 10^{-6}$ | 0,0044 |
| De 500 a 1000 | 0,1562 | 0,0400 | 0,0944 |
| De 1000 a 1500 | 0,3522 | 0,1580 | 0,2297 |
| De 1500 a 2000 | 0,6310 | 0,3599 | 0,4822 |
| De 2000 a 2500 | 0,9865 | 0,6439 | 0,8316 |
| De 2500 a 3000 | 1,4202 | 0,9935 | 1,1783 |
| De 3000 a 3500 | 1,9211 | 1,4238 | 1,6011 |
| De 3500 a 4200 | 2,7949 | 1,9490 | 2,2347 |

Al relacionar las alturas normales obtenidas junto a la respectiva altura elipsoidal en cada punto mediante (2-60), se alcanzaron las anomalías de altura a través del interpolador Kriging, reflejando el modelo cuasigeoidal para el Ecuador continental (ver figura 55). La tabla 16 refleja las estadísticas obtenidas en las anomalías de altura.

Tabla 16

Estadísticas de las anomalías de altura

| ESTADÍSTICAS | VALOR |
|-------------------------|-------|
| MÁXIMO (m) | 30,23 |
| MÍNIMO (m) | 10,68 |
| MEDIA (m) | 20,35 |
| DESVIACIÓN ESTÁNDAR (m) | 4,51 |

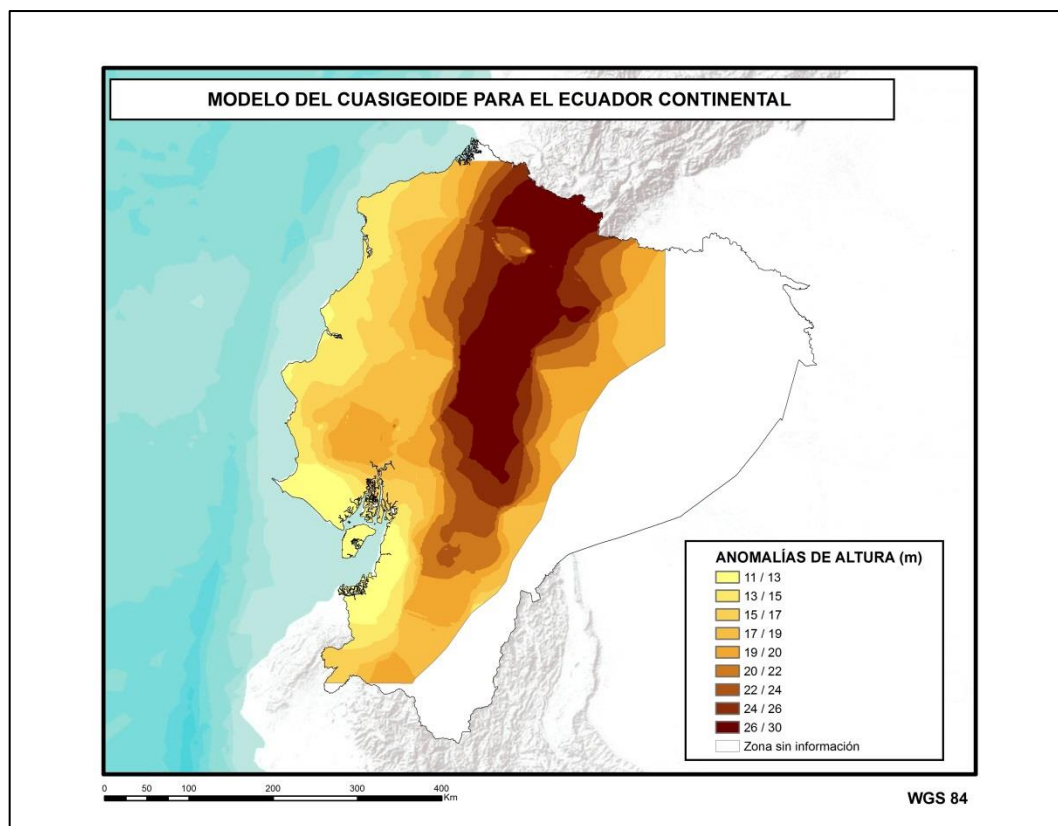


Figura 55 Modelo del cuasigeoide para el Ecuador continental

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

La red de control vertical del Ecuador no puede considerarse como una Red Básica, debido a que el 23% de líneas no cumplen los valores permisibles de tolerancia para una red de primer orden y el 10% no entra cuando se repite una trayectoria de nivelación, de acuerdo a las propias especificaciones técnicas presentadas por el IGM. La mayoría de líneas, entran en la tolerancia de una red de segundo orden, considerada para proyectos especiales, quedando dos líneas, la una dentro de los límites para la tolerancia para la conformación de planos de ciudades; y la otra quedando fuera de los estándares nacionales para precisión vertical. De tal manera, se tendría una red de segundo orden dentro del estándar nacional.

La conformación de la red de números geopotenciales necesita disponer de la mayor cantidad de datos óptimos de gravedad, nivelación y GPS de precisión para el desarrollo del proyecto. Finalmente, se obtuvieron 3933 puntos distribuidos en 62 líneas y 42 nodos; como resultado de una depuración de 16 líneas de la red de nivelación. Se debieron tomar decisiones como incluir valores de navegador en determinados puntos que no contaban con dato GPS de precisión, lo cual significó el 68% de observaciones, así como interpolar valores de gravedad ante la ausencia del 46% de puntos sin registros gravimétricos dentro de la red.

Se realizó una prueba de hipótesis unilateral mediante el estadístico *chi cuadrado*, donde se comparó que la varianza *a posteriori*, obtenida como producto del ajuste, con la no sea mayor a la *varianza a priori* a un nivel de confianza del 95%. En este caso alternativo, se obtuvo la igualdad entre ambas varianzas comprobando la bondad del ajuste de la red.

En el desarrollo de la teoría de Molodensky, las alturas normales fueron calculadas a través de una aproximación analítica que incluye un desarrollo en función de los

parámetros del elipsoide y la latitud, incluidos en la fórmula tradicional donde se utilizan las cotas geopotenciales y la gravedad normal en el elipsoide. A partir de los 2500 metros de alturas normales, se aprecia una diferencia promedio de 1 metro al incluir dicho desarrollo analítico.

Los valores estadísticos alcanzados con el modelo digital de terreno de alturas normales fueron de 4209,22 metros como máximo y 2,64 metros como mínimo. Se obtuvo una media de 1176,31 metros con desvío estándar de 1188,89 metros.

El modelo cuasigeoidal del Ecuador continental se desarrolló a través de la diferencia de alturas elipsoidales con alturas normales, obteniendo las anomalías de altura. Se alcanzó un valor máximo de 30,23 metros y un mínimo de 10,68 metros; mientras que el valor medio para el territorio continental correspondió a 20,35 metros con un desvío de 4,51 mgal.

5.2. Recomendaciones

Es importante e inminente corregir las falencias encontradas en la red de control vertical del país, al obtener 23 líneas sin entrar en la tolerancia de $4 \text{ mm } \sqrt{k}$, lo cual ocasiona que no se tenga una red básica de primer orden. Por lo tanto, deben tomarse consideraciones en los procesos, metodologías, equipos pero sobretodo, debe realizarse una planificación previa para alcanzar los resultados deseados y permitir realizar enlaces con redes de nivelación internacionales dentro de estándares propios de la región.

El desarrollo de la metodología de Molodensky requiere de rastreos sobre la superficie terrestre, especialmente de valores de GPS de precisión, los cuales deben ser complementados con datos gravimétricos para la generación previa de las cotas geopotenciales. El 68% de observaciones no presenta datos de GPS y el 46% de puntos carece de registros gravimétricos; lo cual dificulta seriamente la precisión de los productos generados, puesto que la exactitud de la teoría de Molodensky depende exclusivamente de los datos observados sobre la superficie terrestre. Por lo tanto es necesario contar con los tres tipos de datos (desnivel, posición de precisión y gravedad) en cada placa o estación, para evitar utilizar valores de navegador o gravedad interpolada que influyen negativamente en la precisión final del proyecto.

Estimar valores gravimétricos representa una alternativa que no confiere la confianza necesaria de alcanzar resultados confiables. En este caso, aunque se depende de suposiciones propias de la teoría de Stokes, lo que desvía de la precisión requerida, lo recomendable es calcularlas a través de anomalías de Bouguer, cuidando el manejo de los datos a utilizarse. Por otro lado, los modelos globales geopotenciales no representan actualmente, una alternativa precisa para utilizarse como reemplazo de mediciones geodésicas, siendo no recomendable su uso para proyectos de precisión.

La unificación de los sistemas de mareas es fundamental en el manejo de valores geodésicos y gravimétricos. Si bien, corresponde a una temática que no ha sido implementada en las observaciones de forma general, el tratamiento uniforme de las correcciones de mareas evitará generar modelos híbridos, que resultasen imprecisos

como pueden ser modelos geoidales o cuasigeoidales, donde intervienen combinaciones de datos gravimétricos junto a posición y desnivel.

Los temas referentes a Gravimetría y potencial terrestre merecen ser desarrollados en nuestro país, a partir de la generación de una red oficial de números geopotenciales como referencia vertical de la cual se desprendan los sistemas de alturas. Para ello, es necesario manejar de buena manera los conceptos para mejorar la calidad de la información, las metodologías en procesamiento y uso de instrumentos para la generación de productos y resultados que satisfagan los estándares requeridos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilera, M. (2001). *Desarrollo de una metodología de cálculo de redes geodésicas observadas mediante GPS. Análisis de la influencia de los métodos de cálculo en la precisión. Tesis doctoral*. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Alavera, J., & Nath, J. (2013). *Establecimiento del datum vertical para la cartografía del Ecuador 2010*. Guayaquil: Instituto Oceanográfico de la Armada.
- Barthelmes, F. (2013). *Definition of functionals of the Geopotential and their calculation from spherical harmonica models*. Postdam: Helmholtz-Zentrum.
- Barthelmes, F. (2014). *Global Models*. Postdam: Springer International Publishing.
- Barthelmes, F., & Köhler, W. (2015). *Global Gravity Field Models and the IAG Service ICGEM*. Postdam: Helmholtz-Zentrum.
- Cañizares, E. (2015). *Análisis del sistema de alturas para la red de control básico vertical del Ecuador. Tesis de Grado*. Sangolquí: Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE.
- Coyago, R. (2010). *Ajuste de la red de control básico vertical en función de números geopotenciales. Tesis de Grado*. Sangolquí: Escuela Politécnica del Ejército.
- Doyle, D., & Kozlowski, J. (2013). *FGDC Accuracy standards*. Atlantic City: New Jersey society of professional land surveyors.
- Ekman, M. (1988). *The impact of Geodynamic phenomena on systems for height and gravity*. Ebeltoft: Nordic Geodetic Commission.
- Ferreira, V., Zhang, Y., & de Freitas, S. (2013). *Validation of GOCE gravity field models using GPS-leveling data and EGM08: a case study in Brazil*. Jiangsu: Journal of Geodetic Science.
- FGCC. (1984). *Standards and specifications for geodetic control networks*. Rockville: Federal Geodetic Control Committee.

- Freitas, S., & Blitzkow, D. (1999). *Altitudes e geopotencial*. Milan: International Geoid Service Bulletin No. 9.
- Furones, Á. (2011). *Sistema y marco de referencia terrestre*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Gemael, C. (1994). *Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas*. Curitiba: Editora da UFPR.
- Heiskanen, W., & Moritz, H. (1985). *Geodesia Física* (Primera ed.). Madrid: Instituto Geográfico Nacional de España.
- Hinze, W., Aiken, C., Brozena, J., Coakley, B., & Dater, D. (2005). *New standards for reducing gravity data: The North American gravity database*. University of South Carolina.
- IERS. (2013). *International Earth Rotation and Reference Systems Service*. Obtenido de <http://www.iers.org/>
- IGAC. (2010). *Red de nivelación*. Obtenido de Instituto Geográfico Agustín Codazzi: <http://www.igac.gov.co/>
- IGM. (2006). *Especificaciones técnicas generales para la realización de cartografía topográfica a cualquier escala*. Quito: Instituto Geográfico Militar.
- IGM Chile. (2009). *Nuevo marco de referencia para Chile*. Instituto Geográfico Militar de Chile.
- IGN Perú. (2015). *Especificaciones técnicas para levantamientos geodésicos verticales*. Instituto Geográfico Nacional de Perú.
- INEGI. (2010). *Norma técnica de estándares de exactitud posicional*. México: Instituto Nacional de Estadística y Geografía de México.
- INOCAR. (2012). *Derrotero de las costas ecuatorianas*. Guayaquil: Instituto Oceanográfico de la Armada.

- Introcaso, A. (2006). *Geodesia Física*. Rosario: Universidad Nacional de Rosario.
- ITRF. (2016). *International Terrestrial Reference Frame*. Obtenido de <http://itrf.ensg.ign.fr/>
- Kellogg, O. (1929). *Foundations of Potential Theory*. Berlín: Verlag Von Julius Springer.
- Klein, I., Matsuoka, M., De Souza, S. F., & Veronez, M. (2011). *Ajustamento de observações: uma interpretação geométrica para o método dos mínimos quadrados*. Curitiba: Bol. Ciênc. Geod.
- Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R. G., Pavlis, N. K., Chinn, D. S., . . . Olson, T. R. (1998). *The development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. Greenbelt: National Aeronautics and Space Administration.
- Mäkinen, J., & Ihde, J. (2007). The permanent tide in height systems. En M. Sideris, *Observing our Changing Earth: Proceedings of the 2007 IAG General Assembly*. Berlin: Springer-Verlag.
- Moirano, J. (2000). *Materialización del Sistema de Referencia Terrestre Internacional en Argentina mediante observaciones GPS. Tesis doctoral*. La Plata: Universidad Nacional de La Plata.
- Moritz, H. (1984). *Geodetic Reference System 1980*. Journal of Geodesy.
- Moritz, H. (1984). *Sistemas de referencia en Geodesia*. Madrid: Instituto de Astronomía y Geodesia.
- Moritz, H., & Yurkina, M. (2000). *M.S. Molodensky in memoriam*. Graz: Universität Graz.
- Novotný, O. (1998). *Motions, Gravity field and figure of the Earth*. Salvador: Universidade Federal da Bahia.

- Padín, J. (s.f.). *Temas de Geofísica*. Valencia: Unidad Docente de Geofísica y Prospección. Universitat Politècnica de València.
- Pedraza, A., & Tocho, C. (2011). *Análisis de nuevos estándares para reducir datos de gravedad: aplicación en Tierra de Fuego*. La Plata: Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas.
- Petit, G., & Luzum, B. (2010). *IERS Conventions, Technical Note No. 36*. Frankfurt: International Earth Rotation and Reference Systems Service.
- Sánchez, L. (2002). *Determinación de alturas físicas en Colombia*. Dresden: Technische Universität Dresden.
- Sánchez, L. (2003). *Determinación de la superficie vertical de referencia para Colombia*. Dresden: Technische Universität Dresden.
- Sánchez, L. (2005). Definition and realisation of the SIRGAS vertical Reference System within a Global Unified Height System. En P. Tregoning, & C. Rizos, *Dynamic Planet. Monitoring and understanding a dynamic planet with Geodetic and Oceanographic tools*. Cairns: International Association of Geodesy Symposia.
- Seeber, G. (2003). *Satellite Geodesy* (Segunda ed.). Berlin: Walter de Gruyter.
- Sevilla, M. (1987). *Introducción al problema clásico de Molodensky*. Madrid: Instituto de Astronomía y Geodesia.
- Somigliana, C. (1929). *Teoria generale del campo gravitazionale dell' ellissoide di rotazione* (Cuarta ed.). Milano: Memorie della società astronomica italiana.
- Tierra, A. (2003). *Metodología para a Geração da Malha de Anomalias Gravimétricas para obtenção de Geoide Gravimétrico Local a partir de Dados Esparsos. Tesis doctoral*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná.
- Torge, W. (2001). *Geodesy* (Tercera ed.). New York: Walter de Gruyter.
- Vanicek, P., Santos, M., Tenzer, R., & Hernández-Navarro, A. (2003). Algunos aspectos sobre alturas ortométricas y normales. *Revista Cartográfica*(76/77).

Villela, J., & Pacino, M. C. (2010). *Interpolación gravimétrica para el cálculo de los números geopotenciales en la red altimétrica de Argentina en zonas de alta montaña*. Rosario: Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas.

Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2007). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (Octava ed.). México: Pearson Educación.

Zakatov, P. (1997). *Curso de Geodesia Superior*. Madrid: Rubiños 1860.