



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y
MECÁNICA**

CARRERA DE INGENIERÍA EN PETROQUÍMICA

**TRABAJO DE TITULACIÓN, PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE INGENIERO EN PETROQUÍMICA**

**TEMA: MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE UN
CONTROLADOR MEDIANTE MPC DE UN MOLINO DE
RODILLOS DE ALTA PRESIÓN (HPGR).**

AUTOR: LUIS FERNANDO CEPEDA VACA

DIRECTOR: ING. EDUARDO VYHMEISTER, PH.D.

LATACUNGA

2016




**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA EN PETROQUÍMICA**

CERTIFICACIÓN

Certifico que el proyecto de investigación, “**MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR MEDIANTE MPC DE UN MOLINO DE RODILLOS DE ALTA PRESIÓN (HPGR)**” realizado por **LUIS FERNANDO CEPEDA VACA**, ha sido revisado en su totalidad y analizado por el software anti-plagio, el mismo cumple con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, por lo tanto me permito acreditarlo y autorizar a **LUIS FERNANDO CEPEDA VACA** para que lo sustente públicamente.

Latacunga, diciembre de 2016



Ing. Eduardo Vyhmeister, Ph.D
DIRECTOR



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA EN PETROQUÍMICA**

AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD

Yo, **Luis Fernando Cepeda Vaca**, con cedula de identidad N° 0503449472 declaro que el presente proyecto de investigación, **“MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR MEDIANTE MPC DE UN MOLINO DE RODILLOS DE ALTA PRESIÓN (HPGR)”** ha sido desarrollado considerando los métodos de investigación existentes, así como también se ha respetado los derechos intelectuales de terceros considerándose en las citas bibliográficas.

Consecuentemente declaro que este trabajo es de mi autoría, en virtud de ello me declaro responsable del contenido, veracidad y alcance de la investigación mencionada.

Latacunga, diciembre de 2016


Luis Fernando Cepeda Vaca
C.C.: 0503449472



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA EN PETROQUÍMICA**

AUTORIZACIÓN

Yo, **LUIS FERNANDO CEPEDA VACA**, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar en la Biblioteca Virtual de la institución el presente trabajo de titulación “**MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR MEDIANTE MPC DE UN MOLINO DE RODILLOS DE ALTA PRESIÓN (HPGR)**” cuyo contenido, ideas y criterios son de mi autoría y responsabilidad.

Latacunga, diciembre de 2016


Luis Fernando Cepeda Vaca
C.C.: 0503449472

DEDICATORIA

A Dios Todopoderoso, a la Virgen de Mercedes, a mis padres y hermanos y a toda mi valiosa e incondicional familia.

AGRADECIMIENTO

A Dios Todopoderoso, a la Virgen María en la advocación de la Virgen de Mercedes, a mis padres, hermanos y mi familia; profesores y amigos en especial a Víctor Hugo Andaluz y José Varela quienes en conjunto con todos los integrantes del laboratorio de investigación aportaron para culminar el presente trabajo.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CARÁTULA	i
CERTIFICACIÓN	ii
AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD	iii
AUTORIZACIÓN	iv
DEDICATORIA	v
AGRADECIMIENTO	vi
ÍNDICE DE CONTENIDO	vii
ÍNDICE DE TABLAS	x
ÍNDICE DE FIGURAS	xi
RESUMEN	xii
ABSTRACT	xiii

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Problemática	2
1.2 Propuesta	2
1.3 Objetivos	3
1.3.1 Objetivo General	3
1.3.2 Objetivos Específicos	3
1.4 Metodología	4

CAPÍTULO II

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y ESTADO DEL ARTE	6
2.1 Molino de rodillos de alta presión	6
2.1.1 Fundamentación Teórica	7
2.1.2 Estado del arte	9
2.1.3 Componentes físicos y funcionamiento del HPGR	12
2.1.4 Descripción del principio de operación del HPGR	13
a. Relación ancho diámetro de la prensa de rodillos L/D	14
b. Influencia de la tolva de alimentación	15
2.1.5 Operación con el molino HPGR	16
2.1.6 Estudios acerca de la tecnología HPGR	19

a.	Estudio de la capacidad de tratamiento.....	19
b.	Estudio de la potencia consumida.....	20
c.	Estudio de la granulometría del producto	20
2.2	Introducción al control predictivo basado en el modelo (MPC).....	21
2.2.1	Sistemas lineales	24
2.2.2	Sistemas no lineales.....	25
2.2.3	Control predictivo basado en el modelo	25
a.	Estrategia del MPC	26
b.	Elementos del MPC	26

CAPÍTULO III

3.	MODELACIÓN DINÁMICA DEL HPGR.....	30
3.1	Introducción	30
3.2	Submodelos del HPGR	31
3.2.1	Modelo de la capacidad de tratamiento propuesto	31
3.2.2	Modelo de potencia consumida y consumo de energía específico obtenido de literatura	35
3.2.3	Modelo de granulometría del producto obtenido de literatura.....	37
3.2.4	Modelo propuesto para la obtención de la granulometría total.....	50

CAPÍTULO IV

4.	SIMULACIÓN DEL CONTROL PREDICTIVO BASADO EN EL MODELO MPC	58
4.1	Introducción	58
4.2	Control predictivo basado en el modelo (MPC)	59
4.3	Obtención del modelo de predicción	61
4.3.1	Modelo del proceso	62

CAPÍTULO V

5.	RESULTADOS	66
5.1	Introducción	66
5.2	Valores obtenidos de la constante de velocidad de molienda.....	66
5.2.1	Valores obtenidos de $k_0(i)$ y $E(i)$	67
5.3	Granulometrías estimadas por la simulación dinámica	68
5.4	Resultados del desarrollo del control MPC	70

CAPÍTULO VI

6.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	75
6.1	Conclusiones	75
6.2	Recomendaciones	77
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78
	ANEXOS	83

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Valores de operación de un HPGR escalamiento laboratorio e industrial ..	16
Tabla 2. Valores iniciales y finales de la aplicación del escalón en las variables manipuladas	63
Tabla 3. Constantes de velocidad de molienda	67
Tabla 4. Valores estimados para el factor preexponencial y la potencia mínima necesaria	68
Tabla 5. Parámetros empleados en la simulación dinámica.....	68
Tabla 6. Distribución granulométrica obtenida por el simulador dinámico.....	70
Tabla 7. Límites operacionales de las variables manipuladas y controladas	71

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Esquema de un HPGR	12
Figura 2.	Zonas de prechancado y chancado de un HPGR	14
Figura 3.	Relación L/D.....	14
Figura 4.	Perfil de presión a través del ancho del rodillo.....	18
Figura 5.	Diagrama de bloques de un controlador MPC.....	23
Figura 6.	Señales de predicción en tiempo futuro de un controlador MPC	24
Figura 7.	Respuesta al escalón	27
Figura 8.	Centro de masa de una franja de material en la zona de chancado.....	32
Figura 9.	División de la zona de chancado en dos secciones iguales.....	33
Figura 10.	Proyección superior derecha del rodillo móvil	35
Figura 11.	Circuito cerrado de molienda.....	47
Figura 12.	Discretización de la zona de chancado en bloques horizontales	54
Figura 13.	Esquema del control predictivo basado en el modelo.....	60
Figura 14.	Respuesta de las variables controladas a la excitación de la velocidad periférica usando plotstep (M3)	64
Figura 15.	Respuesta de las variables controladas a la excitación del gap operacional usando plotstep (M3).....	65
Figura 16.	Curva de distribución de tamaños obtenidos vs medidos del equipo ...	69
Figura 17.	Respuesta de las variables manipuladas al cambiar el setpoint en p80 con la inclusión de ruido	72
Figura 18.	Respuesta de las variables manipuladas al cambiar el setpoint en rocm con la inclusión de ruido	73
Figura 19.	Respuesta de las variables manipuladas al cambiar el setpoint en p80 sin la inclusión de ruido	74
Figura 20.	Respuesta de las variables manipuladas al cambiar el setpoint en rocm sin la inclusión de ruido	74

RESUMEN

El presente proyecto de investigación tiene como propósito la generación de un modelo matemático dinámico de un molino de rodillos de alta presión, HPGR (High Pressure Grinding Rolls), con rectificaciones teóricas de los modelos actuales en función de un mejor cálculo de la granulometría final del producto. La deducción del modelo se basa en condiciones fenomenológicas y consideraciones que surgen a partir de la física newtoniana. La estimación de la granulometría del producto se obtiene mediante la aplicación de balances poblacionales, que son la base de los modelos matemáticos de molienda que se emplea en la actualidad. El proceso de validación del modelo matemático se realiza a través de la confrontación de los datos experimentales en estado estacionario con los obtenidos a través del modelado. Los parámetros empleados para la validación y ajuste se obtuvieron del trabajo de tesis denominado: “Modelación y simulación dinámica de un molino de rodillos de alta presión (HPGR), para conminución de minerales de cobre” (Alarcón, Osvaldo, 2012). La validación del modelo tiene como objetivo obtener una representación matemática de la planta lo más cercana a lo real que permita llevar a cabo el control predictivo basado en el modelo (MPC) que tiene como característica el manejo de un horizonte de control finito que permite manejar procesos con restricciones y en general representaciones de plantas que sean de tipo no lineal que se encuentran con frecuencia a nivel industrial.

PALABRAS CLAVE:

- **MODELO MATEMÁTICO DINÁMICO**
- **SIMULACIÓN MOLINO HPGR**
- **CONTROL PREDICTIVO BASADO EN EL MODELO (MPC)**

ABSTRACT

The present research project aims at the generation of a dynamic mathematical model of a high pressure roller mill (HPGR), with theoretical rectifications of the current models in function of a better calculation of the final granulometry of the product. The deduction of the model is based on phenomenological conditions and considerations arising from Newtonian physics. The estimation of the granulometry of the product is obtained by the application of population balances, which are the basis of the mathematical models of grinding that is used today. The process of validation of the mathematical model is done through the comparison of the experimental data in steady state with those obtained through modeling. The parameters used for the validation and adjustment were obtained from the thesis work called: “Modelación y simulación dinámica de un molino de rodillos de alta presión (HPGR), para conminución de minerales de cobre” (Alarcón, Osvaldo, 2012). The validation of the model aims to obtain a mathematical representation of the plant as close to the real that allows to carry out the predictive control based on the model (MPC) Which has as its characteristic the management of a finite control horizon that allows to handle processes with restrictions and in general representations of plants that are of nonlinear type that are frequently found at industrial level.

KEYWORDS:

- **DYNAMIC MATHEMATICAL MODEL**
- **HIGH PRESSURE GRINDING MILL (HPGR) SIMULATION**
- **MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC)**

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN

La operación unitaria de reducción de tamaños corresponde a una de las operaciones unitarias claves en el procesamiento de materiales de alta dureza. En esta, los tamaños medios del tipo de alimentación tratada son reducidos por la aplicación de fuerzas de impacto, compresión, cizalla. Específicamente en el procesamiento de minerales los procesos de conminución (chancado y molienda) constituyen la operación más importante, debido a los costos derivados del consumo energético y al requerimiento de aceros de molienda que se necesitan para obtener un grado específico de liberación que se emplea en tratamientos posteriores.

Una operación de reducción de tamaño se realiza de forma eficiente cuando se realiza una aplicación directa de la energía sobre las partículas de material tratado, además de una conminución predeterminada o selectiva de los tamaños que lo requieran. Para el cumplimiento de los requerimientos mencionados anteriormente se emplean equipos de molienda que tengan como característica la optimización de energía en sus procesos. Una alternativa para ser empleada en los procesos de conminución basándose en los estudios de (Klymoswsky et al., 2002) es la tecnología de molienda de rodillos de alta presión conocida en sus siglas en inglés como HPGR (High Pressure Grinding Rolls), donde se afirma que es un equipo que opera con eficiencia energética.

Las operaciones de molienda que emplean la tecnología HPGR se caracterizan por la reducción de costos de operación, como resultado del uso eficiente de la energía en los procesos de conminución (Bearman, 2006; Daniel, 2008). Estudios realizados por Danilkewich y Hunter desde el año 2006 de la puesta en marcha de la tecnología HPGR en industrias que tratan rocas duras tales como: diamante, cemento y cobre, han evidenciado que tiene como característica un uso más eficiente de la energía, mediante la generación de microfracturas, que revierten la tendencia al gigantismo en equipos posteriores al chancado terciario (chancado

fino). Por otro lado, el equipo presenta ineficiencia al procesar minerales húmedos y arcillosos, minerales de extrema dureza.

1.1 Problemática

A pesar que la tecnología de molienda con rodillos a alta presión (HPGR), posee alrededor de veinte años de resultados exitosos en la industria que ocupan minerales con elevada dureza. Esta tecnología se considera inmadura y su incorporación en el diseño de nuevos proyectos se ve limitada por la ausencia de modelos validados que permitan la evaluación del desempeño del equipo en nuevos circuitos de conminución.

Pese a los estudios realizados acerca del HPGR, no existen modelos dinámicos validados que describan el comportamiento de este equipo de molienda. En la investigación realizada por (Alarcón, Osvaldo, 2012), “Modelación y simulación dinámica de un molino de rodillos de alta presión (HPGR), para conminución de minerales de cobre”, se evidencia que existen parámetros que se consideran constantes pese a ser variantes en el tiempo en la zona de compresión de capas inter partículas (chancado) como: densidad aparente del material tratado, el flujo de material circulante y el contenido de masa; los cuales influyen directamente en el cálculo de la granulometría final del producto.

1.2 Propuesta

En el siguiente proyecto se va a construir el modelo matemático dinámico con una rectificación teórica de los modelos actuales en función de la granulometría final del producto para su posterior aplicación en el control predictivo de un sistema de trituración que emplea un molino de rodillos de alta presión (HPGR). Se obtendrá un modelo que constará de sub modelos que serán representados mediante una familia de ecuaciones que lograrán predecir parámetros como: capacidad de tratamiento del equipo, consumo específico de energía y la granulometría del producto, en función

de las características de alimentación, de las dimensiones del equipo y de las distintas condiciones operacionales de trabajo.

Además, se evaluará la modificación realizada en función del resultado del modelamiento de otros investigadores y resultados experimentales obtenidos en la industria de minera. Finalmente, se controlará el equipo mediante la técnica MPC (Control predictivo basado en el modelo), la cual emplea el modelo matemático, que tiene como objetivo la optimización iterativa de un modelo específico en un horizonte finito de movimientos y tener control de las variables del proceso.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

- Realizar el modelamiento y simulación de un molino de rodillos de alta presión (HPGR), el cuál será controlado mediante la técnica MPC.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Generar un modelo matemático dinámico del molino de alta presión con una rectificación teórica de los modelos actuales en función de un mejor cálculo del centro de masa.
- Evaluar la modificación realizada en función de los resultados del modelamiento de otros investigadores y resultados experimentales.
- Programar en Matlab, Simulink el modelo generado.
- Simular el control del molino de rodillos de alta presión mediante un modelo predictivo de control (multivariable).
- Obtener las variables más importantes en el proceso de control; de forma de especificar las variables manipuladas óptimas del sistema.
- Evaluar el proceso de control generado mediante la implementación de escalones o impulsos en las variables controladas.

1.4 Metodología

Las fases de elaboración del presente proyecto de investigación consisten en primera instancia la recopilación de información existente acerca de la tecnología de molienda de rodillos de alta presión; específicamente sobre los modelos matemáticos que se han realizado para evaluar el desempeño del equipo. El paso siguiente es la identificación y análisis de los parámetros que se emplean en el modelado tales como: los que son característicos del equipo, variantes e invariantes en el tiempo basándose en el estudio de modelos matemáticos en estado estacionario.

El objetivo es elaborar un modelo matemático dinámico predictivo de la capacidad de tratamiento, potencia y granulometría en función de las variables operacionales, especificaciones del equipo y características del mineral tratado. El modelo se encuentra basado en condiciones fenomenológicas y consideraciones que surgen a partir de la física newtoniana; la estimación de la granulometría del producto se realiza a través de la aplicación de balances poblacionales.

El proceso de validación del modelo matemático se realiza a través del contraste de los datos experimentales en estado estacionario con los obtenidos a través de proceso de modelado. Los datos experimentales del equipo HPGR que se emplearán se encuentran reportados en el trabajo de tesis denominado: “Modelación y simulación dinámica de un molino de rodillos de alta presión (HPGR), para conminución de minerales de cobre” (Alarcón, Osvaldo, 2012).

El programa desarrollado debe ser estable, ordenado en su estructura, para proporcionar resultados que sean fiables. Para esto se empleará MATLAB, que es una herramienta de software matemático que ofrece un desarrollo integrado, que facilita al desarrollador o programador la ejecución en un lenguaje característico de la plataforma.

El paso final del desarrollo del presente proyecto consiste en el desarrollo de la simulación que se realizará en Simulink, que es un entorno de programación visual que funciona sobre el entorno de Matlab. El motivo de su uso es su sistema de

programación estructurada o en cajas, lo cual permite la aplicación de bloques personalizables, que interpretan y ejecutan la programación desarrollada en el entorno de Matlab.

Adicionalmente, se controlará el sistema mediante la técnica de control MPC (control predictivo basado en el modelo), el cual se desarrollará empleando los toolbox o herramientas específicas de Simulink.

CAPÍTULO II

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y ESTADO DEL ARTE

2.1 Molino de rodillos de alta presión

La tecnología de molienda HPGR se posesiona como un procedimiento relativamente nuevo en la industria minera de procesamiento de roca dura. Tiene su génesis en la técnica de derivación de briquetas de carbón en la cual se empleaban compactadores de rodillos dobles de alta presión para obtener grumos sólidos del material. En 1979 Schoener demostró que los procesos de compresión de partículas entre dos placas desde el punto de vista energético es el más efectivo para la ruptura de rocas duras (Klymowsky et al., 2002).

En 1985 la industria cementera fue la primera que introdujo la tecnología HPGR para procesos de molienda, pero a partir del año 2006 se emplea esta técnica en aplicaciones de circuitos cerrado para demostrar que proporciona sustanciales ahorros de energía en la industria. A principios del nuevo milenio tuvo una creciente adaptación en la industria y se reportó hasta un ahorro del 50% de energía en comparación con circuitos convencionales de chancado (Casteel, 2005).

Gracias al éxito que tuvo en las cementeras, se empleó en la industria del diamante para operaciones de trituración secundaria. La inmediata adaptación radica en el hecho de producción de mínimo daño en los diamantes en la ruptura de rocas circundantes al aplicar altas presiones. Tras su adaptación en la industria del diamante, el HPGR fue adaptado en la industria del hierro para moler el mineral como una preparación para la granulación.

El empleo de la tecnología HPGR en el procesamiento de minerales de roca dura se inició a mediados de la década del noventa tras una serie de ensayos en la mina de cobre en Arizona, Estados Unidos.

Surgieron problemas como desgastes en las superficies de los rodillos, llevando alrededor de 10 años para mejorar la tecnología HPGR a un nivel aceptable para la preparación de su primera instalación comercial en Cerro Verde, Perú en el año 2006 (Casteel, 2005). Se ha evidenciado un crecimiento en la aplicación en la industria minera incluyendo la instalación en nuevas plantas como Boddington (Australia Occidental), Mogalakwena (Sudáfrica) para funcionar en operaciones de trituración terciaria, así también se ha demostrado su validez en operaciones de trituración cuaternaria en la mina PTFI Grasberg (Indonesia).

Los procesos de trituración primaria, secundaria, terciaria y cuaternaria difieren entre sí de acuerdo a las características granulométricas de alimentación, las operaciones de trituración se caracterizan por realizarse en dos etapas:

- Trituración o chancado primario grueso: tratamiento de una alimentación de rocas extraídas de la mina que tengan un diámetro promedio hasta de 15 centímetros.
- Trituración o chancado fino: proceso que comprende las etapas del chancado secundario al cuaternario que considera tamaños de alimentación promedio hasta de 45 mm.

2.1.1 Fundamentación Teórica

Los circuitos de trituración y molienda constituyen un eje fundamental en la tecnología de procesamiento y son la base del enriquecimiento del mineral. Las operaciones industriales de reducción de tamaño del material de alimentación constituyen las operaciones que consumen gran cantidad de energía, constituyendo del 30 al 45% de los gastos totales de la industria (Alarcón, 2012).

A partir de lo anterior surge en la industria la necesidad de emplear modernas tecnologías de trituración aumentando el porcentaje de disminución de tamaño de finos a un menor consumo de energía. La eficiencia del proceso del pretratamiento del mineral es un factor determinante en la liberación de los minerales deseados. Actualmente uno de los métodos más eficientes que se emplea en las operaciones de

trituration de minerales duros es la tecnología de molienda de rodillos de alta presión, partiendo de la premisa del bajo consumo energético que se necesita para su aplicación frente a otras técnicas empleadas.

La tecnología HPGR es un método eficaz en la reducción del tamaño del material a procesar debido a las siguientes ventajas:

- Bajo consumo de energía, aproximadamente de 0.8 a 3 kWh por tonelada de material tratado (Santibañez, 2009).
- Generación de microfracturas en el material tratado, teniendo una reducción de consumo de energía en el proceso de alrededor del 30%, de acuerdo con las mediciones realizadas a través del índice de trabajo de Bond en investigaciones anteriores (Daniel, 2004).
- Trituración material seco y con humedad de hasta el 10% (Morley, 2006).
- Condiciones de operación favorables con el ambiente: baja contaminación auditiva, disminución en las emisiones de vibración (Alarcón, 2012).
- Baja huella ambiental en comparación con la tecnología semiautógeno SAG (Alarcón, 2012).

A pesar de ser un proceso que posee numerosas ventajas en comparación con la tecnología semiautógena SAG tiene un elevado costo de operación, y posee cierta ineficiencia de operación materiales abrasivos y húmedos (Morley, 2006).

La curva de distribución tamaños (representación gráfica en escala semilogarítmica de los resultados de ensayo de granulometría, donde el porcentaje acumulado pasante es graficado en las ordenadas y el diámetro de las partículas en las abscisas) en la descarga de la tecnología HPGR muestra una distribución granulométrica del producto más extensa y fina frente a la de chancadores convencionales, como característica esencial de este método las partículas presentan microfracturas que ayudan a la reducción del Índice de trabajo de Bond (indicador del consumo energético para la obtención de un tamaño de partícula deseado) para su posterior etapa en un molido de bolas hasta en un 30%, favoreciendo a procesos como la lixiviación para obtener una mayor recuperación con un menor tiempo (Klymowsky et al., 2002).

Teniendo en cuenta todos los aspectos anteriores, el objetivo principal del presente trabajo de investigación es la generación de un modelo matemático de esta tecnología para su posterior control mediante MPC (control predictivo basado en el modelo).

2.1.2 Estado del arte

La simulación de procesos en la industria minera involucra la generación de modelos matemáticos que sirven para describir el comportamiento lo más cercano a lo real de un área de funcionamiento u operación determinada, o a su vez, para determinar la factibilidad de los proyectos, en cuanto al costo de operación (Reza et al., 2014) y al impacto ambiental que generan las operaciones de reducción de tamaño (Winter, 2013).

En minería la simulación se ha empleado durante más de tres décadas y se posiciona como una herramienta ideal para estudiar el comportamiento del proceso (Smith, 2016). La utilidad de un simulador depende principalmente de la representación del comportamiento de la planta o proceso descrito por el modelo matemático. En el procesamiento de minerales la generación de modelos tiene varias complejidades como fuertes no linealidades, acoplamiento de variables y parámetros variantes en el tiempo, etc., convirtiéndose el desarrollo de modelos precisos en una tarea más complicada. Por tal motivo, la obtención de modelos híbridos ha tenido realce en los últimos años, permitiendo describir los diferentes modos de operación y las no linealidades exhibidas por la planta (Karelovic et al., 2016), así como el cálculo de nuevas tasas de ruptura de tipo no lineal para los diferentes tamaños de partícula derivados de parámetros propios del equipo (Wang et al., 2015).

Los procesos de reducción de tamaño de partículas implican fenómenos que funcionan en una amplia escala de longitud, en donde el enfoque del modelado se basa en describir en primera instancia el comportamiento del proceso a micro escala, para posteriormente extrapolar a procesos que requieren grandes caudales de alimentación (Shwarz et al., 2015) optimizando de esta manera los procesos llevados a cabo en escala industrial (Genc, 2016). Específicamente en los procesos de

trituration la modelación y simulación ha sido estudiada a lo largo de los años, basándose en correlaciones de variables para la generación de modelos matemáticos que describen la unidad y las operaciones integradas.

El enfoque básico en los procesos de trituración se basa en la aplicación de presión, con el objetivo de alterar las fuerzas de unión de las partículas que constituyen el mineral; dependiendo del proceso utilizado, se aplican fuerzas de impacto único o múltiple hasta que se produzca la desintegración y reducción del tamaño a niveles especificados (Gupta et al., 2016).

Particularmente, los procesos de reducción de tamaño llevados a cabo en un molino de rodillos de alta presión (HPGR) han tenido éxito en los últimos años, puesto que, tienen como características una operación con eficiencia energética, alta capacidad de molienda y mayor recuperación de material procesado en comparación con las tecnologías de molienda convencionales (molino de bolas y trituradora de cono). El trabajo realizado por Torres M. (2010) presenta un modelo fenomenológico en estado estacionario, basado en submodelos específicos que buscan la estimación del tonelaje tratado, potencia consumida y distribución granulométrica del producto, mediante la aplicación de ecuaciones que surgen a partir de la física newtoniana y el empleo de balances microscópicos junto con las relaciones de tasa y forma de ruptura propuesta por la teoría clásica de la conminución. Adicionalmente, Alarcón O. (2012) detalla un modelo matemático dinámico dividido en tres submodelos similares a los presentados por Torres M., en donde se evidencia el efecto de las variables de salida al tener un comportamiento dinámico en la tolva de alimentación.

Los modelos matemáticos de la tecnología de molienda HPGR, mencionados en el párrafo anterior, han sido el punto de partida para realizar procesos de optimización en cuanto a la energía necesaria para llevar a cabo el proceso de trituración, teniendo como objetivo reducir el consumo energético mediante un control óptimo de las variables operaciones propias del equipo, evidenciando una reducción de hasta el 41.43% de los costos de operación con un desplazamiento de carga de material constante mediante la coordinación de la velocidad de rotación de los rodillos (Numbi et al., 2015). También se han desarrollado modelos de procesos de trituración mixtos que consideran la premolienda llevada a cabo en un HPGR,

demostrando que las tasas de ruptura específica de las partículas aumentan cuando en un circuito cerrado se alimenta con el material tratado por el equipo (Genc, 2016).

Actualmente, se busca generar modelos matemáticos dinámicos que determinen la fragmentación del material en función de las variables operacionales del equipo. Barrios G. (2016) en su trabajo integra la presión ejercida por el sistema hidráulico en el acoplamiento dinámico de múltiples cuerpos con la finalidad de describir el rendimiento del HPGR, teniendo en cuenta las principales variables del equipo incluyendo la geometría y diseño de los rodillos, los parámetros de arranque del sistema hidráulico y variaciones de carga del material. Por otra parte, la mayoría de los modelos dinámicos de equilibrio poblacional para la trituración involucran el concepto de una función de tasa de ruptura específica que describe la cinética de fractura, Hinde A. (2009) en su modelo propone la estimación directa de la función de ruptura a partir de los datos de la planta, demostrando que es un método de modelación adecuado para múltiples tipos de rocas y minerales.

La importancia de la obtención de modelos matemáticos en estado dinámico radica en su aplicación para el desarrollo de controladores. Específicamente la aplicación del control predictivo basado en el modelo (MPC) ha sido considerada como un referente para el control de procesos que tienen múltiples variables con restricciones. Remes A. et al. (2013) en su trabajo propuesto realiza una evaluación de la estrategia de control MPC en los procesos de reducción de tamaño de partículas, basándose en maximizar el rendimiento mientras se mantienen las variables operativas en los límites de seguridad predeterminados para obtener una operación estable. Los trabajos propuestos por Remes A. et al. (2010) y Salazar J. et al. (2014) afirman que el control MPC es una vía idónea para mantener las variables de salida en los valores requeridos, con un proceso de sintonización relativamente sencillo manipulando los horizontes de predicción y control, así como los pesos de importancia de las variables manipuladas y controladas.

Debido a la complejidad de los procesos que normalmente se encuentran en el procesamiento de minerales, existe gran interés en desarrollar técnicas de control avanzadas que respondan en escenarios en los cuales los controladores convencionales son incapaces de desempeñarse de manera adecuada, Neto L. et al.

(2009) y Karelovic P. (2013) proponen un diseño de controladores híbridos incorporando variables lógicas y controladores convencionales (PID) con la finalidad de obtener un mayor desenvolvimiento del controlador.

El presente proyecto de investigación tiene como finalidad generar un modelo matemático de un HPGR que prediga dinámicamente la granulometría del producto considerando un comportamiento variante de los flujos de alimentación en la zona de chancado. El modelo matemático obtenido se empleará en un proceso de control multivariable con la finalidad de mantener las variables controladas o de salida en sus setpoints mediante el ajuste de las variables manipuladas propias de equipo.

2.1.3 Componentes físicos y funcionamiento del HPGR

Una unidad convencional de HPGR posee dos rodillos de giro inverso, los cuáles son acoplados en un sistema de rodamientos que se encuentran soportados en un marco. Estos rodillos tienen un movimiento rotatorio gracias al accionar de dos motores que proveen el movimiento angular.

Mediante un sistema hidro-neumático se aplica presión al lecho mineral que atraviesa la abertura que distancia ambos rodillos. Este sistema se aplica a un solo rodillo, que posee un movimiento libre deslizante ‘rodillo Libre o Flotante’, el que tiene reacción ante la fuerza ejercida desde la superficie del mineral, mientras que el otro se mantiene fijo al rodamiento acoplado al marco ‘Rodillo Fijo’ (Figura 1).

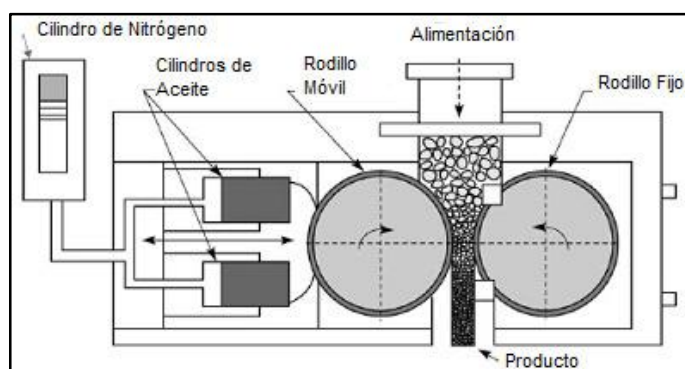


Figura 1. Esquema de un HPGR

Fuente: (Torres; 2010, p.5)

La alimentación se realiza a través de una tolva o chute de alimentación situado por encima de los rodillos que se encuentra en su interior cubierto con materiales que poseen alta resistencia a la abrasión, cuya función es mantener un flujo constante de material para realizar la trituración gracias a que posee un sistema de control de nivel, que juega un papel importante en términos del eficiente uso de la energía empleada por los rodillos.

El lecho de partículas se crea por gravedad entre los dos rodillos de alimentación y la compresión se consigue mediante la aplicación de una alta presión por parte del sistema hidroneumático. La reducción del tamaño de la alimentación se da mediante la compresión inter partícula.

2.1.4 Descripción del principio de operación del HPGR

El equipo de molienda de rodillos de alta presión opera bajo el principio de la conminución por compresión y esfuerzos que se realizan entre las partículas que forman un lecho de material entre los rodillos.

En la región de trituración del HPGR se consideran dos zonas bien definidas (ver Figura 2), la primera zona corresponde a la compresión de partículas aisladas o prechancado, en la cual el material de alimentación se atrapa en los rodillos, para someterlos a un proceso de aceleración con la finalidad de alcanzar la velocidad periférica. El material se compacta gradualmente mientras desciende debido a la reducción del espacio entre los rodillos, como resultado de esto, la alimentación sufre una reorientación de las partículas llenando los espacios que se forman por el mismo material.

La segunda zona definida por el ángulo a_{ip} se denomina región de compresión inter partícula o chancado, las fuerzas de molienda alcanzan su límite y se logra un contacto entre todas las partículas, lo que ocasiona debilitamiento y desintegración de las mismas. Como producto de esta ruptura y compactación de partículas se forma un queque que constituye la alimentación a la tolva de descarga

las cuales son instaladas a gran altura. La compactación del material tratado alcanza un valor similar al 90% del valor de la densidad total del mineral en la zona de alimentación, teniendo como resultado un producto con una granulometría variada con una alta cantidad de finos.

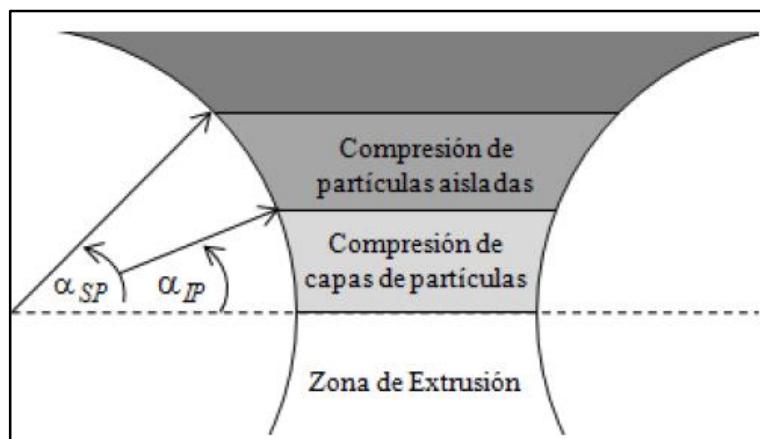


Figura 2. Zonas de prechancado y chancado de un HPGR
Fuente: (Torres; 2010, p. 6)

a. Relación ancho diámetro de la prensa de rodillos L/D

Es un parámetro mecánico de diseño que afecta directamente el funcionamiento del molino de rodillos de alta presión HPGR. Se establecen dos relaciones como se encuentra descrito en la Figura 3:

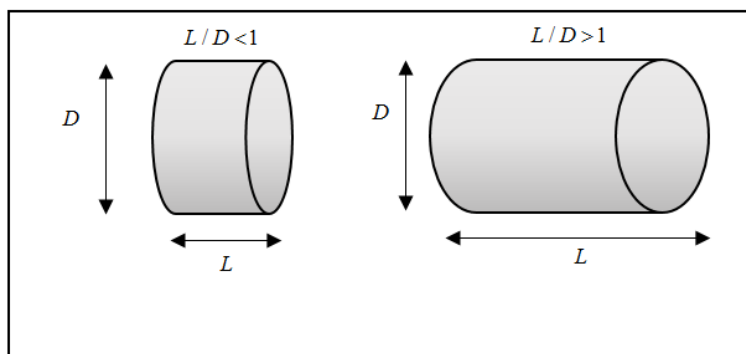


Figura 3. Relación L/D

- Los rodillos que poseen razones $L/D < 1$ se caracterizan por permitir el ingreso de material de mayor tamaño en la zona de alimentación, debido a la relación directamente proporcional entre el diámetro del rodillo y la

granulometría de alimentación, al darse este fenómeno se producen torques de elevadas magnitudes, siendo necesario un requerimiento de potencia mayor para ejercer el giro necesario en los rodillos.

- Para el caso contrario al anterior, es decir, $L/D > 1$, aumenta la capacidad de tratamiento específica del equipo, es decir la cantidad de material tratado en un tiempo, esto a su vez acarrea problemas que se evidencian en el desalineamiento del rodillo móvil o flotante, debido a la no uniformidad en la distribución del material en la tolva o chute de alimentación, para lo cual es necesario contar con rodamientos que tengan un sistema de corrección frente al desalineamiento del rodillo deslizante.

b. Influencia de la tolva de alimentación

En la operación del equipo de molienda rodillos de alta presión la tolva o chute de alimentación juega un papel importante en la operación del equipo, en cuanto al desgaste de las superficies de los revestimientos de los rodillos y de la fluidez del material de alimentación. La dispersión de la alimentación dentro de la tolva y la homogeneidad en la distribución de tamaños de clase es determinada por la forma de alimentación en la correa transportadora.

La correa transportadora tiene como característica principal la acumulación del material en el centro mayor que en los bordes lo cual tiene como resultado una distribución no homogénea en la zona antes de la compresión de capas de partículas produciendo desgastes irregulares en los revestimientos. Las características de llenado y diseño del chute de alimentación determinan la cantidad de material entrante al molino. Las tolvas diseñadas con ángulos pequeños de descarga se caracterizan por tener zonas muertas en los extremos, produciendo un desgaste menor en los extremos de los rodillos.

Con el objetivo de maximizar la vida útil de la tolva y evitar que se adhieran partículas húmedas en la misma se emplean materiales cerámicos de recubrimiento.

También poseen una compuerta variable que permite el control del tonelaje de alimentación sobre el lecho mineral.

2.1.5 Operación con el molino HPGR

La molienda que emplea la tecnología HPGR surge como una alternativa viable y rentable en la minería debido a las ventajas que presenta frente a las otras tecnologías (ver sección 2.1.1), principalmente por experiencias en operaciones que procesan materiales abrasivos probadas en la industria del cemento, hierro y diamante (Alarcón, 2012).

La operación con el molino HPGR necesita tener una alimentación que cuente con un determinado porcentaje de finos con el objetivo de llenar los intersticios entre las partículas, asegurando que al mineral se aplique la presión necesaria para que se produzca la conminución y no el reacomodo de partículas. En la Tabla 1 se evidencia los rangos de operación del HPGR para minerales como: oro, cobre y hierro (Klymowsky et al., 2002).

Tabla 1.
Valores de operación de un HPGR escalamiento laboratorio e industrial

VARIABLES	RANGO DE OPERACIÓN
Diámetro de rodillos, D	0,5 – 2,8 [m]
Largo de rodillos (ancho), L	0,2 – 1,8 [m]
Gap operacional, sO	0,02D – 0,03D [m]
Capacidad de tratamiento, Gs	30 – 3000 [ton/hora]
Fuerza de molienda, F	2000 – 20000 [kN]
Presión media, R_p	20 – 300 [bar]
Potencia instalada máxima, P	2 x 3000 [kW]
Velocidad periférica de los rodillos, U	$U \leq 1,35 \sqrt{D}$ [m/s] si $D < 1,7$ [m] $U \leq D$ [m/s] si $D \geq 1,7$ [m]
Consumo de energía específica, W	1-3 [kWh/ton]

Fuente: (Alarcón; 2012, p.19)

Para entender las operaciones que se llevan a cabo con el HPGR, se emplean varios parámetros y terminologías que son necesario aclarar. Estos parámetros son críticos para pruebas de escala piloto, como para el dimensionamiento de un HPGR a escala industrial.

- **Gap operacional:** Se define como distancia más pequeña entre el rodillo fijo y el rodillo flotante durante la puesta en marcha del HPGR. Varía dependiendo de las características del mineral de alimentación y de las condiciones de funcionamiento de la máquina.
- **Fuerza de presión específica:** Es la fuerza total por unidad de área de proyección del rollo debido a las fuerzas externas ejercidas por los cilindros hidráulicos, como se muestra en la Ecuación 2.1. Este parámetro controla el consumo de energía, el gap operacional y la granulometría del producto que lo posee como el parámetro más crítico (Klymowsky et al., 2006).

$$F_{sp} = \frac{F_t}{D \cdot W} \quad (2.1)$$

Donde:

F_{sp} = Fuerza de presión específica, [N/mm²]

F_t = Fuerza total ejercida por los cilindros hidráulicos, [N]

D = Diámetro del rodillo, [mm]

W = Ancho del rodillo, [mm]

- **Consumo neto de energía específica:** Potencia neta extraída de la tonelada del motor por unidad de mineral procesado, se utiliza para dimensionar el motor para HPGR a escala industrial (Klymowsky et al., 2002).

$$E_{sp} = \frac{P_t - P_i}{Q} \quad (2.2)$$

Donde:

E_{sp} = Consumo neto de energía específica, [kWh/ton]

P_t = Consumo de energía total del motor, [kW]

P_i = Consumo de energía del motor en vacío, [kW]

Q = Rendimiento, [tph]

- **Rendimiento constante específico:** Es la tasa de rendimiento para un HPGR con un diámetro de rodillo de 1 m, con un ancho de 1 m y con una velocidad periférica de 1 m/s. Basándose en esta información se lleva a cabo a escala industrial (Klymowsky et al., 2002).

$$\dot{m} = \frac{Q}{D \cdot L \cdot U} \quad (2.3)$$

Donde:

\dot{m} = Constante específica de rendimiento, [ton/hm³]

Q = Rendimiento, [tph]

D = Diámetro del rodillo, [mm]

L = Ancho del rodillo, [mm]

U = Velocidad periférica del rodillo, [m/s]

- Distribución de la presión en el rodillo del HPGR:** En una unidad de HPGR, el cilindro hidráulico aplica una fuerza al cojinete que se transmite a lo largo de la superficie del rodillo. Sin embargo, estudios previos han demostrado que la distribución de la presión no es uniforme en toda la anchura del material contenido entre los rodillos. Lubjuhn (1992) ha sugerido que la caída de presión en el borde depende de la fuerza de molienda y puede caer hasta en un 75% cuando se compara con la presión en el centro independiente de las propiedades del material. Torres y Casali (2009) utilizaron esta información y representaron gráficamente el perfil de presión a través del ancho del rodillo como se muestra en la Figura 4, donde: P_i^E y P_i^C son la distribución del producto en el borde y el centro del molino respectivamente, a corresponde a la fracción en peso del material que circula por los rodillos dividido en N_B bloques.

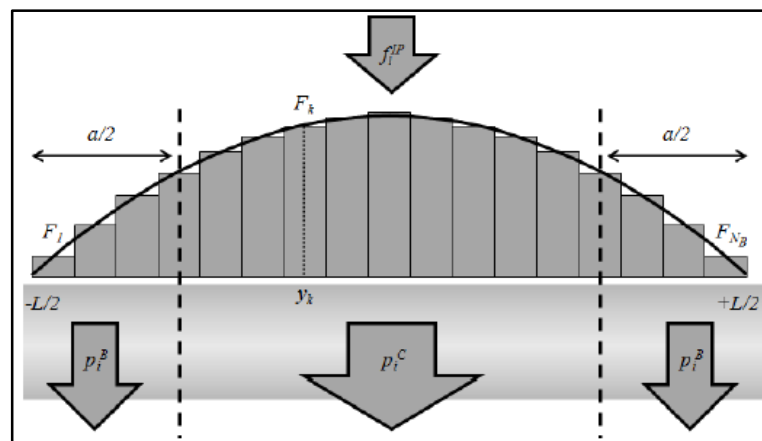


Figura 4. Perfil de presión a través del ancho del rodillo

Fuente: (Torres; 2010, p.42)

2.1.6 Estudios acerca de la tecnología HPGR

El punto de partida para la formulación de ecuaciones que logren modelar matemáticamente el comportamiento del HPGR fue realizado por Taggart (1954), quién dedujo una expresión matemática para el ángulo que determina la división en las dos zonas de chancado que existen en el equipo. Posteriormente el profesor Schoener en los años de 1989 a 1992 realizó grandes avances determinando ecuaciones que logren predecir la capacidad de tratamiento del mineral, potencia consumida y la distribución de tamaños de partículas de producto.

Los modelos matemáticos actuales se basan en el mejoramiento de los modelos en estado estacionario. Éstos permiten obtener predicciones de la capacidad de tratamiento, potencia consumida y granulometría del equipo, que se derivan de la aplicación de tres sub modelos que se detallan en las siguientes secciones.

a. Estudio de la capacidad de tratamiento

El escalamiento del tonelaje tratado o capacidad de tratamiento del equipo se obtiene mediante la aplicación de la Ecuación 2.4, en donde la densidad aparente δ es la relación entre el volumen y la masa del sólido seco incluyendo los espacios que se generen entre partículas independientemente de su formación.

$$G_s = 3600 \cdot \delta \cdot S_0 \cdot L \cdot U \quad (2.4)$$

Donde:

G_s = Capacidad de tratamiento, [kg/s]

S_0 = Gap operacional, [m]

δ = Densidad aparente del mineral que se ha compactado, [kg/m³]

L = Ancho de los rodillos, [m]

U = Velocidad periférica de los rodillos, [m/s]

b. Estudio de la potencia consumida

La potencia consumida por el equipo es proporcional a la cantidad de finos que se desea obtener. Se determina por la dependencia de las siguientes variables:

$$P = 2 \cdot \tau \cdot \frac{U}{D} \quad (2.5)$$

Donde:

P = Potencia consumida, [kW]

τ = Torque del motor, [kNm]

D = Diámetro de los rodillos, [m]

U = Velocidad periférica de los rodillos, [m/s]

c. Estudio de la granulometría del producto

El estudio de la granulometría del producto considera dos zonas de molienda, marcadas por el ángulo de acción característico del mecanismo de trituración equipo. La primera zona corresponde al prechancado, en donde el flujo másico de material es acelerado por el contacto con los rodillos que giran a una velocidad periférica determinada. Los gruesos de material superior al espaciamiento de los rodillos o tamaño crítico X_c , son fracturados previo al ingreso a la zona de chancado.

$$X_c = 0.5 \cdot \left[(D + S_0) - \sqrt{(D + S_0)^2 - 4 \cdot \frac{D \cdot S_0 \cdot \delta}{\rho_a}} \right] \quad (2.6)$$

Donde:

X_c = Tamaño crítico de partícula, [m]

δ = Densidad aparente del mineral compactado, [ton/m³]

ρ_a = Densidad aparente del mineral alimentado, [ton/m³]

D = Diámetro de los rodillos, [m]

S_0 = Gap operacional, [m]

En la segunda zona correspondiente al chancado se distinguen dos mecanismos de fractura: chancado por efecto de borde y chancado por compresión de capas de partículas; los cuales dependen del perfil de presiones del material que se encuentra entre los rodillos (Lubjuhn et al., 1992). La interfase entre los dos tipos de fractura se obtiene mediante la aplicación de la Ecuación 2.7 (Morrel et al., 1997).

$$f = \gamma \cdot \frac{S_0}{L} \quad (2.7)$$

Donde:

f = Interfase entre producto de centro y de borde

γ = Parámetro de ajuste

L = Ancho de los rodillos, [m]

S_0 = Gap operacional, [m]

2.2 Introducción al control predictivo basado en el modelo (MPC)

Una de las herramientas de control más empleadas a nivel industrial es el control proporcional integral derivativo PID, su uso se ha extendido de tal manera que el 95% de los lazos de control existentes son de este tipo. El control PID goza de una gran aceptación porque posee características como su amplia disponibilidad en el mercado y su relativa facilidad de implementación y simplicidad en su uso.

Desgraciadamente este tipo de controladores solamente pueden ser sintonizados alrededor de un punto de operación definido. Es por esto que técnicas modernas de control como el control predictivo basado en el modelo MPC, han sido empleadas en procesos en los cuales el control PID no ha respondido de manera óptima.

El control MPC es un algoritmo que tiene gran capacidad de respuesta, pero su incursión a nivel industrial ha sido demasiado lenta. Es un algoritmo de control que calcula una secuencia temporal discreta de las variables manipuladas a futuro con el objetivo de optimizar el comportamiento de la planta o proceso a controlar.

Esta técnica ha sido considerada como un referente para el control de procesos que tienen múltiples variables con restricciones. La estructura interna se basa en un proceso de optimización, ya que brinda la posibilidad de predecir el comportamiento a futuro de las variables de la planta y sus señales de control, teniendo como base el modelo matemático que describe su comportamiento.

El criterio a optimizar, o función de coste, está relacionado con el comportamiento futuro del sistema, que se predice gracias a un modelo dinámico del mismo, denominado modelo de predicción (de ahí el termino predictivo basado en el modelo). El intervalo de tiempo futuro que se considera en la optimización se denomina horizonte de predicción.

Los algoritmos del control predictivo MPC difieren en el modelo matemático que describe el proceso a controlar y en la función objetivo que posteriormente va a ser minimizada.

Esta tecnología posee ventajas que destacan la consideración de las restricciones y el modelo del proceso, lo que habilita al controlador que opera con una aproximación real de la dinámica del sistema a obtener un mejor desempeño en el control de las variables.

Las desventajas que presenta este método de control es el tiempo requerido para la ejecución por parte del equipo de procesamiento, el cual puede ser un factor limitante en la aplicación de sistemas que poseen dinámicas rápidas debido a que no se puede tener una respuesta de control óptima con la velocidad que requiere el sistema. También se ha evidenciado que en muchos casos, obtener el modelamiento matemático de la planta puede ser muy complejo, el cual es necesario para el planteamiento de optimización.

Como se evidencia en la Figura 5 el principal objetivo del controlador es mantener la variable de salida de la planta en los valores de los setpoints ajustando las variables manipuladas, además de estas variables existen señales de perturbación que pueden ser medidas y otras que no son medibles, estas últimas pueden generar cambios inesperados en el comportamiento de la variable de salida.

Debido a la presencia inevitable de las perturbaciones que no son medibles, estas se adoptan como una señal independiente que no puede tener afectación directa por el controlador. Esta señal representa todos los eventos impredecibles que ocurren y afectan el funcionamiento de la planta.

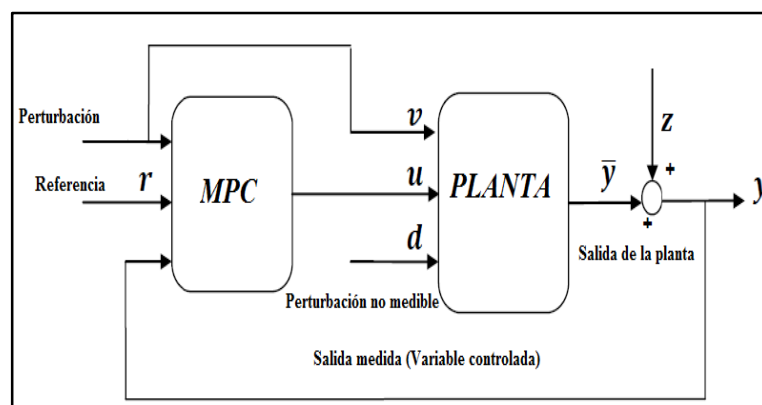


Figura 5. Diagrama de bloques de un controlador MPC
Fuente: (Lopera; 2010, p.115)

En la Figura 5 el controlador tiene como entrada aquellas perturbaciones que son medibles por tal motivo realiza una compensación antes que su accionar se evidencie en la salida, lo que se conoce como un control prealimentado. El control MPC tiene como característica la aplicación de la compensación realimentada para perturbaciones de tipo no medibles y la compensación prealimentada para medibles.

En la primera fase de predicción se emplean todos los cambios previos, valores actuales de variables conocidas y el modelo matemático de la planta con la finalidad de tener una predicción de la variable de salida. Mientras que, en la segunda fase, en la optimización los valores de referencia, restricciones, perturbaciones de tipo medibles, se especifican para un Horizonte de Predicción o instantes de muestreo posteriores. Esta información le permite al controlador estimar valores futuros de la variable manipulada sobre un Horizonte de control.

Para el cálculo del próximo movimiento el controlador MPC aplica una señal restringida a la planta, la cual funciona con esta entrada hasta el próximo Intervalo de Control en donde el controlador realiza nuevas mediciones para repetir las dos fases mencionadas anteriormente como se muestra en la Figura 6.

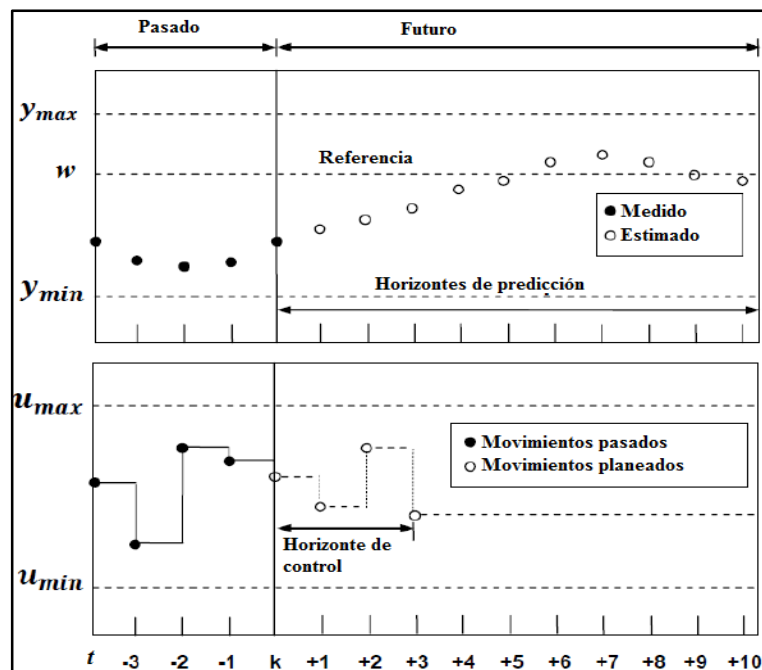


Figura 6. Señales de predicción en tiempo futuro de un controlador MPC
Fuente: (Lopera; 2010, p.116)

2.2.1 Sistemas lineales

Los sistemas lineales son considerados como una “caja negra” en donde las salidas son directamente proporcionales a las entradas. Se denomina lineal si cumple el principio de superposición, que se considera como una cualidad de un sistema lineal. El principio o teorema de superposición permite la descomposición de un sistema lineal en subproblemas más simples que tal manera que la obtención del sistema original se considera como una suma de los subproblemas más sencillos.

Si los coeficientes de una ecuación diferencial son constantes o únicamente están en función de la variable dependiente se denomina lineal. Los sistemas dinámicos que se encuentran formados por ecuaciones diferenciales formadas por parámetros lineales que no varían en el tiempo se denominan sistemas lineales invariantes en el tiempo o sistemas lineales de coeficientes constantes. Caso contrario si el sistema se encuentra formado mediante ecuaciones diferenciales en donde las constantes que los conforman son funciones del tiempo se denominan sistemas lineales variantes en el tiempo.

2.2.2 Sistemas no lineales

Los sistemas no lineales se emplean para representar dinámicas muy complejas que no pueden aproximarse mediante modelos lineales. Al contrario de los sistemas lineales, este tipo de sistemas no cumplen el principio de superposición, es decir, la salida del sistema no es la sumatoria de las respuestas de las entradas. Las entradas de los sistemas no lineales se combinan entre sí y dan como resultado elementos nuevos en las salidas que no se encontraban presentes en las entradas.

En la mayoría de los casos de modelamiento los sistemas físicos considerados “lineales” únicamente lo son en un rango específico. Estos fenómenos no lineales no se pueden describir mediante el comportamiento de un sistema lineal, motivo por el cual es necesario el uso de modelos no lineales mediante la aplicación de ecuaciones diferenciales que describan el comportamiento del sistema.

2.2.3 Control predictivo basado en el modelo

El termino control predictivo basado en el modelo no se refiere a una estrategia de control específica, sino a un amplio rango de métodos de control que hacen uso de un modelo explícito del proceso para obtener la señal de control minimizando la función objetivo.

En todo control predictivo se emplea el modelo matemático explícito del proceso para predecir las salidas del proceso en instantes de tiempo futuro, se calcula la secuencia de control minimizando la función objetivo y se emplea la estrategia de horizonte de retroceso que hace referencia que para cada instante de tiempo del horizonte que es desplazado hacia el futuro, involucra la aplicación de la primera señal de control de la secuencia calculada paso a paso.

a. Estrategia del MPC

La metodología de todos los controladores que pertenecen a la familia MPC se caracterizan por la estrategia que se presenta en la Figura 6. Donde las salidas para un horizonte determinado, N (horizonte de predicción) son predichas mediante la aplicación del modelo matemático del proceso a cada instante de tiempo t .

Las salidas del proceso representadas por: $y(t+k/t), k=1...N$ donde K y N representan el movimiento y número de movimientos dependen de los valores calculados hasta el tiempo t , es decir de las entradas y salidas anteriores y de las futuras señales de control $u(t+k/t), k=1...N$ las cuales serán calculadas y enviadas al sistema.

El conjunto de las futuras señales de control es calculado por optimización de un criterio con el fin de mantener el proceso muy cercano a los valores deseados representados por $w(t+k)$. Este criterio generalmente adquiere la forma de una función cuadrática de los errores entre la señal de salida predicha y el valor de consigna o setpoint, el cual es punto o conjunto de puntos en los que la señal de salida o variable controlada se estable bajo ciertos parámetros deseados.

b. Elementos del MPC

- **Modelo de predicción:** Un diseño completo incluye el mecanismo necesario para obtener el mejor modelo posible, capaz de captar al máximo la dinámica del proceso, también debe ser capaz de permitir el cálculo de las predicciones y al mismo tiempo ser intuitiva y para permitir el análisis teórico. El uso del modelo de predicción es necesario para el cálculo de las salidas $y(t+k/t)$ en instantes futuros.

Las distintas estrategias del MPC emplean varios modelos para representar la relación entre las salidas y las entradas medidas, algunas de las cuales son variables manipuladas y otras pueden ser consideradas como perturbaciones medidas las cuales pueden compensarse mediante una acción de

realimentación. El modelo de predicción puede ser dividido en dos partes: el modelo del proceso actual y las perturbaciones del modelo; ambas necesarias para la acción de predicción.

La obtención del modelo puede darse a través de distintas formas como: respuesta impulsiva, respuesta al escalón, función de transferencia y espacios de estado. En el presente trabajo se empleó la respuesta al escalón, la cual se detalla a continuación:

Respuesta al escalón: Similar a la respuesta al impulso, excepto que la señal de entrada es de tipo escalón. Para sistemas estables la respuesta truncada viene dada por la siguiente expresión (Camacho, 1999):

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t-i) \quad (2.8)$$

Donde g_i son los valores de salida para el escalón de entrada, $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$, como se evidencia en la Figura 7.

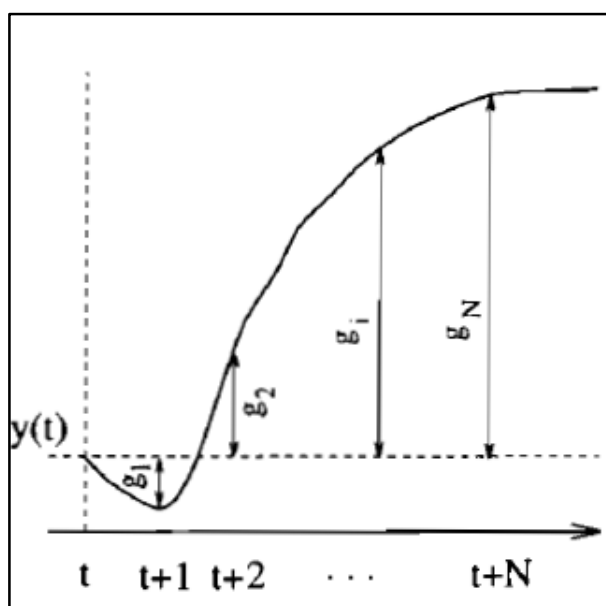


Figura 7. Respuesta al escalón
Fuente: (Camacho; 1999, p.15)

El valor de y_0 puede ser tomado como 0 sin perder la generalidad; el modelo predictor se considera como:

$$\hat{y}(t+k | t) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t+k-1 | t) \quad (2.9)$$

Un impulso se considera como una diferencia entre dos pasos con un desfase en el periodo de muestreo, esto se puede representar como un sistema lineal:

$$h_i = g_i - g_{i-1} \quad (2.10)$$

$$g_i = \sum_{j=1}^i h_j \quad (2.11)$$

- **Función objetivo:** Los diversos algoritmos MPC proponen diferentes funciones de coste para obtener la ley de control. El objetivo general es que las salidas futuras (y) en un horizonte considerado sigan una trayectoria determinada (w) y, al mismo tiempo, seleccionar el esfuerzo de control necesario (Δu) para que esta tarea se cumpla. La expresión general de la función objetivo se considera como:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (2.12)$$

Parámetros: N_1, N_2 corresponden a los horizontes de predicción, y N_u es el horizonte de control. El significado de los horizontes de predicción es intuitivo, marcan el límite de los instantes en los cuales es deseado para las salidas seguir las referencias, para originar unas respuestas suaves del proceso.

Los coeficientes $\delta(j), \lambda(j)$ son secuencias que consideran el comportamiento futuro, por lo general se consideran valores constantes o secuencias exponenciales.

- **Restricciones:** Todos los procesos son sujetos a restricciones, estas definen las condiciones operativas por lo que es necesario su introducción en la función que se va a ser minimizada. Los límites en la amplitud, la velocidad de subida de la señal de control y en las salidas son consideradas de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{l} u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \\ du_{\min} \leq u(t) - u(t-1) \leq d u_{\max} \\ y_{\min} \leq y(t) \leq y_{\max} \end{array} \right. \quad \forall t \quad (2.13)$$

$$\forall t \quad (2.14)$$

$$\forall t \quad (2.15)$$

En donde las expresiones 2.13 – 2.15 representan: los límites de las variables manipuladas, la velocidad de cambio de las variables manipuladas y los límites de las variables controladas o de salida, respectivamente. La función objetivo minimización se hace más compleja por la adición de estas restricciones, de modo que la solución no se puede obtener de forma explícita como fuese el caso de no emplear dichas restricciones.

- **Obtención de la ley de control:** Con el fin de obtener los valores de $u(t+k/t)$ es necesario minimizar la función J de la Ecuación 2.12. Para esto es necesario calcular los valores de las salidas predichas $\hat{y}(t+k/t)$ como una función de los valores anteriores de las entradas y salidas, y las futuras señales de control haciendo uso del modelo seleccionado y reemplazado en la función de coste.

La estructura de la ley de control es algunas veces impuesta por el uso del concepto de horizonte de control (N_u). El mismo considera que después de un cierto intervalo $N_u < N_2$ donde no hay variación en las señales de control propuestas:

$$\Delta u(t+j-1) = 0 \quad j > N_u \quad (2.16)$$

El extremo del caso puede ser considerado como $N_u = 1$ en donde las futuras acciones de control pueden ser igual a $u(t)$.

CAPÍTULO III

3. MODELACIÓN DINÁMICA DEL HPGR

3.1 Introducción

La modelación dinámica del equipo de molienda HPGR constituye una familia de ecuaciones, expresada en tres submodelos definidos que logran predecir la capacidad de tratamiento, el consumo de energía específico y la granulometría del producto. Todos estos parámetros son calculados en base a las características operacionales del equipo y del tipo de mineral a ser tratado.

La base de la modelación llevada a cabo en el presente proyecto de investigación corresponde al trabajo realizado por O. Alarcón (2012), en donde se evidencia el efecto de la acumulación de material en la tolva de alimentación al equipo de molienda.

En el proyecto de investigación llevado a cabo se incluye la modelación dinámica basada en fenómenos físicos como: balances de masa generales, con lo que se demuestra que los flujos de material tratado por el molino son variantes en el tiempo y balances poblacionales con el fin de determinar la distribución granulométrica total del producto.

Se puso énfasis en la zona de compresión inter partículas, la cual fue discretizada en bloques horizontales con el objetivo de verificar el comportamiento dinámico de la densidad, parámetro influyente en el cálculo de la cantidad de material tratado por el equipo que determina la granulometría total del producto.

3.2 Submodelos del HPGR

3.2.1 Modelo de la capacidad de tratamiento propuesto

En la estimación de la capacidad de tratamiento de un molino de rodillos de alta presión se considera la región que va desde la descarga de partículas a la tolva de alimentación, hasta la zona de extrusión del material procesado. Los niveles de llenado de material en el molino varían de acuerdo a las condiciones cambiantes en el tiempo.

Realizando un balance de masa general considerando el flujo de alimentación y la capacidad de tratamiento se evidencia la variación de la masa total de partículas en función de los flujos de entrada y salida.

$$\frac{dm}{dt} = Fa_{HPGR} - G_s \quad (3.1)$$

Donde:

m = Carga interna de material en el molino, [kg]

Fa_{HPGR} = Flujo de alimentación al HPGR, [kg/s]

G_s = Capacidad de tratamiento, [kg/s]

La carga interna de material en el sistema (tolva y zona de compresión) es dependiente de la cantidad de material procesado por los rodillos de diámetro D [m], longitud L [m], con una distancia entre los rodillos fijo y flotante s_0 [m], que giran a una velocidad periférica de U [m/s].

Para obtener la expresión del flujo de descarga del material en función de las variables mencionadas anteriormente, es necesario el cálculo del centro de masa de una franja de material que se encuentra en la zona de compresión de capas inter partículas (Torres y Casali, 2009), que se representa en la Figura 8 en donde \hat{i} y \hat{k} corresponden a la componente horizontal y vertical respectivamente.

$$r(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (D + s0) \hat{i} + \frac{D}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) \hat{k} \quad (3.2)$$

Donde:

$r(\alpha)$ = Vector posición del centro de masas de la franja de material, [m]

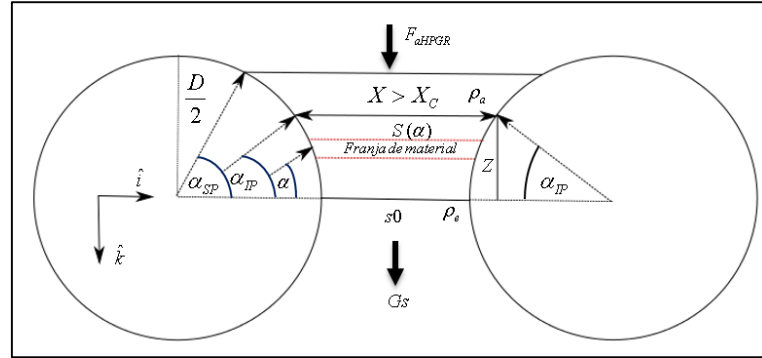


Figura 8. Centro de masa de una franja de material en la zona de chancado

En el presente trabajo el ángulo del centro de masa se propuso obtener en función de la densidad aparente de alimentación ρ_a , del gap operacional $s0$, del diámetro D , y de la densidad aparente en la zona de extrusión ρ_e . Esta última se considera una variable que es igual a la densidad del centro de masa ρ_{cm} .

$$\alpha_{cm} = \cos^{-1} \left(\frac{\rho_a \cdot (s0 + D) - \rho_e \cdot s0}{\rho_a \cdot D} \right) \quad (3.3)$$

Donde:

α_{cm} = Ángulo del centro de masa

ρ_{cm} = Densidad del centro de masa, [ton/m³]

Al dividir la zona de compresión inter partícula en bloques horizontales se evidencia una variación de la densidad del centro de masa por bloque ρ_{cm} , la cual se obtiene mediante la aplicación de un balance de masa general a la sección horizontal de la franja de material que se encuentra entre los rodillos, viene dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\rho_{cm}}{dt} = \frac{Gs_{in} - Gs_{out}}{v_b} \quad (3.4)$$

Donde:

$G_{s_{in}}$ = Flujo másico de entrada al bloque horizontal, [kg/s]

$G_{s_{out}}$ = Flujo másico de salida del bloque horizontal, [kg/s]

v_b = Volumen del bloque horizontal, [m³]

El volumen del bloque horizontal v_b se calcula mediante la aplicación de la Ecuación 3.5 que describe el producto del área del bloque paralelo al flujo por la longitud de los rodillos L . La deducción de la expresión del diferencial de área surge a partir de la división de la zona de chancado en dos partes iguales (ver Figura 9), en donde se relaciona las componentes las componentes horizontales y verticales con la ecuación reducida de la circunferencia: $x^2 + y^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2$ la cual describe la forma de los rodillos.

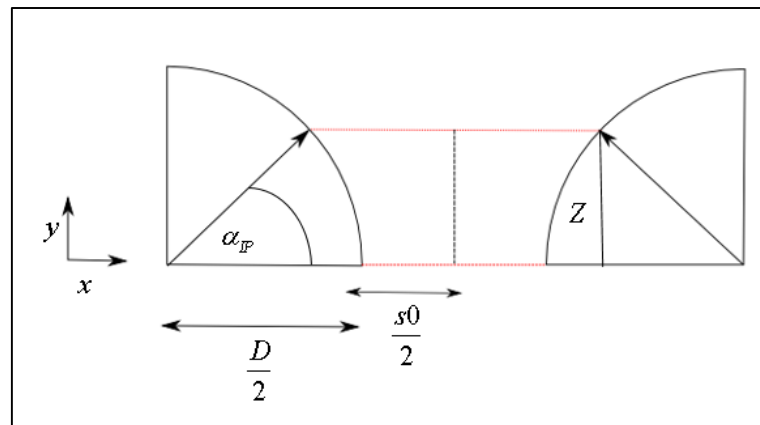


Figura 9. División de la zona de chancado en dos secciones iguales

$$v_b = L \cdot \int_0^Z \left(\frac{D}{2} + \frac{s0}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} \right) dy \quad (3.5)$$

Donde:

v_b = Volumen del bloque horizontal, [m]

Debido a la velocidad determinada de giro de los rodillos, la franja de material adquiere movimiento, descrito por la derivada del vector posición del centro de masa de la franja de material descrito por la Ecuación 3.2.

$$\alpha = \frac{2 \cdot U}{D} \quad (3.6)$$

Donde:

α = Velocidad angular de los rodillos, [1/s]

La primera derivada del vector posición (Torres y Casali, 2009), corresponde a la siguiente expresión:

$$v(\alpha_{cm,i}) = \frac{D}{2} \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha_{cm,i}) \hat{k} \quad (3.7)$$

$$v(\alpha_{cm,i}) = \frac{D}{2} \cdot \frac{2 \cdot U}{D} \cdot \cos(\alpha_{cm,i}) \hat{k} = U \cdot \cos(\alpha_{cm,i}) \hat{k} \quad (3.8)$$

Donde:

$v(\alpha_{cm})$ = Velocidad de la franja de material, [m/s]

En el HPGR en flujo de material circulante entre los rodillos es función de la velocidad periférica de los rodillos U , el cambio de esta variable operacional sirve para controlar el material acumulado en el molino. El flujo másico de descarga en cualquier punto de la franja del material es determinado por la expresión:

$$Gs(\alpha_i) = \rho_{cm,i} \cdot A_{\alpha_{cm,i}} \cdot v_{\alpha_{cm,i}} \quad (3.9)$$

Donde:

G_s = Flujo de material circulante entre los rodillos, [kg/m³]

$A_{\alpha,i}$ = Área de la sección transversal perpendicular al flujo másico, [m²]

El cálculo del área de la sección transversal perpendicular al flujo másico surge a partir de las siguientes ecuaciones:

$$A_{\alpha,i} = L \cdot S_{\alpha,i} \quad (3.10)$$

$$S_{\alpha,i} = s_0 + D \cdot (1 - \cos(\alpha, i)) \quad (3.11)$$

Donde:

$S_{\alpha,i}$ = Gap operacional en función de la densidad del centro de masa, [m]

3.2.2 Modelo de potencia consumida y consumo de energía específico obtenido de literatura

El HPGR opera en una condición de alimentación obstruida, en la que la fuerza aplicada únicamente se distribuye en la parte superior derecha del rodillo móvil como se evidencia en la Figura 10.

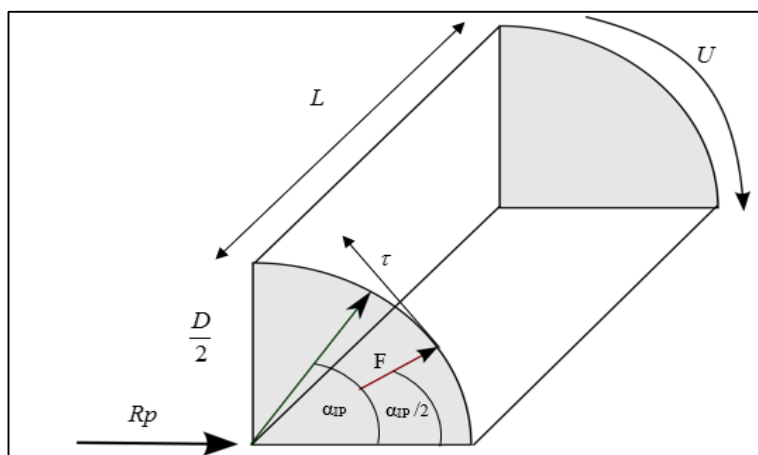


Figura 10. Proyección superior derecha del rodillo móvil

La Fuerza de compresión o fuerza de molienda se encuentra descrita de la siguiente manera:

$$F = 100 \cdot R_p \cdot \frac{D}{2} \cdot L \quad (3.12)$$

Donde:

F= Fuerza de compresión, [KN]

El valor de 100 corresponde al factor de transformación de la presión de operación R_p en [kPa].

La componente vertical produce un torque proveniente de la capa de material obstruido entre los rodillos, este fenómeno puede provocar inestabilidad operacional en el equipo, por lo tanto el HPGR cuenta con un torque de reacción que se encuentra descrito por Expresión 3.13.

$$\tau = F \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha_{IP}}{2} \right) \cdot \frac{D}{2} \quad (3.13)$$

Donde:

τ = Torque producido en cada rodillo, [kNm]

En el cálculo del torque producido en cada rodillo se emplea el criterio para el ángulo de acción de fuerza en la zona de compresión, que corresponde a la mitad del ángulo de la zona de compresión inter partícula, α_{IP} (Klymowsky et al., 2006).

El modelo para el cálculo de la potencia de giro de los rodillos está en función de la fuerza de compresión, del torque producido en cada rodillo y de su velocidad angular.

$$P_r = 2 \cdot F \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha_{IP}}{2}\right) \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{2 \cdot U}{D} \quad (3.14)$$

$$P_r = 2 \cdot F \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha_{IP}}{2}\right) \cdot U \quad (3.15)$$

Donde:

P_r = Potencia de giro de los rodillos, [kW]

La potencia consumida total considera la sumatoria de la potencia de compresión y la potencia de giro de los rodillos como se evidencia en la Ecuación 3.16. El cálculo de la potencia de compresión se lo realiza en función de la multiplicación de la presión de operación R_p por el cociente producto de la división del flujo másico G_s para la densidad del centro de masa ρ_{cm} . Sin embargo, el modelo empleado está expresado en función del torque de reacción en que se considera la fuerza que se opone al movimiento de compresión (ver Ec. 3.15).

$$P = R_p \cdot \frac{G_s}{\rho_{cm}} + 2 \cdot F \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha_{IP}}{2}\right) \cdot U \quad (3.16)$$

Donde:

P = Potencia consumida total, [kW]

El consumo de energía específico del HPGR se determina mediante la división de la potencia de giro de los rodillos P_r para la el flujo másico del material tratado.

$$W = \frac{P_r}{G_s} \quad (3.17)$$

Donde:

W = Consumo de energía específico, [kWh/ton]

3.2.3 Modelo de granulometría del producto obtenido de literatura

El flujo másico de la alimentación de material a la zona de rodillos tiende a sufrir una aceleración que depende de la velocidad periférica de los rodillos U , en el HPGR existen dos zonas de ruptura: el prechancado, en donde los tamaños de material superior a un tamaño crítico X_c (ver Ec. 3.18) se someten a un proceso de fractura similar al que se realiza en un molino de rodillos fijos.

$$X_c = 0.5 \cdot \left[(D + s_0) - \sqrt{(D + s_0)^2 - 4 \cdot \frac{D \cdot s_0 \cdot \rho_e}{\rho_a}} \right] \quad (3.18)$$

Donde:

X_c = Tamaño crítico, [m]

La otra zona es el chancado, que se caracteriza por la existencia de dos mecanismos de fractura que corresponden al chancado por efecto de borde y chancado por compresión de capas de partículas que dependen del perfil de presiones al que se encuentra sometido el material entre los rodillos.

Estas zonas se encuentran delimitadas por el ángulo de compresión de partícula aislada a_{sp} y por el ángulo de compresión inter partícula a_{ip} , respectivamente. El ángulo de compresión inter partícula se calcula mediante la expresión (Torres y Casali, 2009):

$$\cos(a_{ip}) = \frac{1}{2D} \left[(s_0 + D) + \sqrt{(s_0 + D)^2 - \frac{4 \cdot s_0 \cdot \rho_e \cdot D}{\rho_a}} \right] \quad (3.19)$$

Donde:

α_{IP} = Ángulo de compresión inter partícula

La altura de la zona de chancado es función del ángulo de compresión inter partícula y del diámetro de los rodillos.

$$Z = \frac{D}{2} \cdot \text{sen}(\alpha_{IP}) \quad (3.20)$$

Donde:

Z = Altura de la zona de chancado, [m]

- **Zona de compresión de partícula aislada (prechancado):** El flujo de material superior al tamaño crítico X_c es fracturado por los rodillos, los mismos que atrapan las partículas y las aceleran de acuerdo a la velocidad de giro U a la que se encuentre operando. Mediante el modelo de chancado propuesto por Whiten (Whiten, 1993) es posible modelar este suceso. Esta expresión matemática se encuentra descrita en función de un tamaño de partícula superior al espacio de entrada de alimentación a los rodillos.

$$S(\alpha_{IP}) = X_c = s_0 + D(1 - \cos(\alpha_{IP})) \quad (3.21)$$

La obtención de la distribución granulométrica correspondiente a los tamaños superiores a X_c en la zona de prechancado se obtiene mediante la multiplicación de la matriz función ruptura y las masas retenidas de las partículas de cada tamaño de clase.

$$p(i)_{SP} = \sum_{l=1}^N bil \cdot f(l)_{SP} \quad (3.22)$$

Donde:

$p(i)_{SP}$ = Distribución de tamaño de producto en la zona del prechancado

bil = Fracción en peso de partículas de tamaño "l" que por fractura son reducidas a tamaño "i"

$f(l)_{SP}$ = Fracción másica de partículas alimentadas de tamaño "l" superior a X_c

La distribución de tamaño de producto en la zona del prechancado $p(i)_{sp}$ conjuntamente con las partículas alimentadas que no fue necesaria su pre fractura corresponde a la alimentación de la siguiente etapa de fractura (chancado).

- **Zona de compresión inter partícula (chancado):** Se encuentra delimitada por θ y el ángulo α_{ip} , se caracteriza por ser la segunda etapa de fractura, en donde la alimentación de material constituye las partículas provenientes de la etapa anterior (prechancado) en donde son reducidas a un tamaño inferior a X_c (ver Ec. 3.18) en conjunto con las partículas alimentadas en la etapa anterior en donde no fue necesarias reducirlas de tamaño. En esta etapa de chancado el material se somete a un proceso de compresión de capas de partículas que tienen como resultado la formación de microfracturas con una cinética de molienda de primer orden (Alarcón, 2012):

$$\frac{[\text{Tasa de desaparición de las masas de partícula de tamaño "i" por fractura}] \propto}{[\text{Masa de partículas de tamaño "i" presentes en molino en un tiempo t}]}$$

Esta proporcionalidad se encuentra definida a través del parámetro cinético de velocidad específica de molienda, $s(i)$ propio de cada monotamaño. La expresión matemática de la cinética de molienda se encuentra definida de la siguiente manera:

$$\frac{d(M_{rodillos} \cdot m(i))}{dt} = -s(i) \cdot M_{rodillos} \cdot m(i) \quad (3.23)$$

Donde:

$m(i)$ = Fracción en peso de partículas de tamaño "i" presentes entre los rodillos en un tiempo t

$s(i)$ = Velocidad específica de fractura para el monotamaño "i", [1/h]

El HPGR en condiciones de operación normal se caracteriza por contar con una carga constante de material provista por la tolva de alimentación convirtiéndose *Mrodillos* constante, por lo tanto:

$$\frac{dm(i)}{dt} = -s(i) \cdot m(i) \quad (3.24)$$

La formación del monotamaño “i” se puede estar produciendo a través de la fractura de monotamaños mayores “j”, basado en la siguiente relación:

$$\begin{aligned} & [\text{Velocidad de producción de tamaño } i \text{ a partir de la fractura del tamaño } j] = \\ & [\text{Fracción en peso de } j \text{ que por fractura pasa a } i] \cdot [\text{Velocidad de fractura de } j] \end{aligned}$$

La expresión matemática de la relación anterior se define como:

$$\frac{dm(i)}{dt} = b_{ij} \cdot s_j \cdot m_j \quad (3.25)$$

La velocidad neta de producción de tamaño “i” entre los rodillos viene dada por un balance poblacional de los monotamaños presentes en la alimentación que surge a partir de la combinación de las ecuaciones 3.24 y 3.25, de acuerdo a la siguiente relación.

$$\frac{dm(i)}{dt} = (b_{i1} \cdot s_1 \cdot m_1 + b_{i2} \cdot s_2 \cdot m_2 + \dots + b_{i,i-1} \cdot s_{i-1} \cdot m_{i-1}) - (s_i \cdot m_i) \quad (3.26)$$

La expresión compacta de la Ecuación 3.26 viene dada por la siguiente relación:

$$\frac{dm(i)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} \cdot s_j \cdot m_j - s_i \cdot m_i \quad (3.27)$$

Basándose en los estudios realizados por diversos autores como Daniel y Morrel (2004), Klymowsky (2002) y Petzelt (2006), éstos concluyeron que en el HPGR no se genera distribuciones granulométricas uniformes, existiendo la presencia de partículas finas y gruesas. La diferencia de tamaños de producto se debe a la distribución parabólica de la presión de molienda en el material que se encuentra entre los rodillos, de esta manera se obtienen partículas de producto más gruesas en los bordes del rodillo a diferencia de la zona intermedia que se caracteriza por tener mayor presión.

La velocidad específica de fractura de cada uno de los monotamaños de partícula es función de las diferencias de presiones en la zona de compresión. Debido a esto resulta viable la discretización del contenido que se encuentra entre los rodillos en NB bloques verticales y aplicar el balance poblacional a cada uno de ellos.

$$\frac{dm_{i,k}}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} \cdot s_{j,k} \cdot m_{j,k} - s_{i,k} \cdot m_{i,k} \quad (3.28)$$

El subíndice k representa a los NB bloques ($k \geq 1$).

El material circulante entre los rodillos lo hace de manera vertical reduciéndose de tamaño progresivamente hasta alcanzar la zona de extrusión. La fracción másica de tamaños en un tiempo t , depende de la altura o de la posición vertical en la que se encuentra, de esta manera se obtiene la siguiente expresión de granulometría del producto considerando que la velocidad periférica de giro de los rodillos se mantiene constante. En donde Z representa la distancia vertical o la altura de la zona de chancado y U_z que se considera igual a la velocidad periférica de los rodillos U que es una variable propia del comportamiento del equipo.

$$U_z \cdot \frac{dm_{i,k}(Z)}{dZ} = \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} \cdot s_{j,k} \cdot m_{j,k}(Z) - s_{i,k} \cdot m_{i,k}(Z) \quad (3.29)$$

Para obtener la granulometría del producto para los n monotamaños de la alimentación y los NB bloques que fueron creados por la discretización del material entre los rodillos se emplea la expresión propuesta por Reid (1995), que se considera una de las soluciones más acertadas de la Expresión 3.29.

$$p(i)_{IP,k} = \sum_{j=1}^i A_{ij,k} \cdot \exp\left(-\frac{s_{j,k}}{U_h} \cdot h\right) \quad (3.30)$$

Donde:

$p(i)_{IP,k}$ = Distribución granulométrica de producto para cada bloque k en la zona de compresión de partículas aisladas o prechancado

$A_{ij,k}$ = Matriz de Reid

El cálculo de la matriz de Reid se lo realiza en función de las siguientes restricciones:

$$\left[\begin{array}{l} A_{ij,k} = 0, \quad \text{si } i < j \\ A_{ij,k} = \sum_{l=1}^{i-1} \frac{b_{il} \cdot s_{l,k}}{s_{i,k} - s_{j,k}} \cdot A_{ij,k}, \quad \text{si } i > j \\ A_{ij,k} = f(i)_{IP} - \sum_{l=1}^{i-1} A_{ij,k}, \quad \text{si } i = j \end{array} \right] \quad (3.31)$$

$$A_{ij,k} = \sum_{l=1}^{i-1} \frac{b_{il} \cdot s_{l,k}}{s_{i,k} - s_{j,k}} \cdot A_{ij,k}, \quad \text{si } i > j \quad (3.32)$$

$$A_{ij,k} = f(i)_{IP} - \sum_{l=1}^{i-1} A_{ij,k}, \quad \text{si } i = j \quad (3.33)$$

Austin y Luckie (1972), propusieron la solución para el parámetro b_{ij} , obteniendo la siguiente expresión:

$$B_i(x_i) = \alpha_1 \cdot \left(\frac{x_i}{x_2}\right)^{\alpha_2} + (1 - \alpha_1) \cdot \left(\frac{x_i}{x_2}\right)^{\alpha_3} \quad (3.34)$$

Donde:

B_i = Forma acumulada del parámetro b_{ij}

x_i = tamaño de clase "i", [mm]

x_2 = tamaño de clase "2", [mm]

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ = parámetros del modelo dependientes de las características físicas del material como del equipo.

La forma acumulada del parámetro b_{ij} es representada por B_i que se convierte en la suma de las fracciones en peso del material hasta el tamaño "i" generado a partir del tamaño "j". Puede ser calculado por:

$$b_{ij} = B_{i-j+1} - B_{i-j+2}, \quad \text{si } i > j \quad (3.35)$$

$$b_{ij} = 1 - \sum_j b_{ij}, \quad \text{si } i = n \quad (3.36)$$

$$b_{ij} = 0, \quad \text{si } i \leq j \quad (3.37)$$

Además de los parámetros mencionados anteriormente para el cálculo de la granulometría del producto es necesario definir la velocidad específica de fractura de partículas, S_{iE} (ver Ec. 3.38) que se obtiene a partir de la función selección propuesta por Herbst and Fuerstenau (1980), donde \bar{x}_i, \bar{x}_1 corresponden a los promedios medios geométricos de las partículas y S_{1E}, ζ_1, ζ_3 son parámetros del modelo dependientes del tipo de material a procesar y del tipo de equipo. En este modelo se evidencia la dependencia del parámetro s_i con el monotamaño que es fracturado.

$$\ln(S_{iE}/S_{1E}) = \zeta_1 \cdot \ln\left(\frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_1}\right) + \zeta_2 \cdot \ln\left(\frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_1}\right)^2 \quad (3.38)$$

Debido a que la velocidad específica de fractura es dependiente de la distribución de presiones que se genera en el material entre los rodillos, se obtiene el siguiente modelo:

$$s_{i,k} = \frac{P_k}{H_k} \cdot S_{iE} \quad (3.39)$$

Donde:

$s_{i,k}$ = Tasa de ruptura del tamaño "i" en cada bloque k, [1/h]

H_k = Cantidad de material entre los rodillos en cada bloque k, [kg]

P_k = Potencia que se consume en cada bloque k, [kW]

La diferencia de presiones que se genera en la carga de material entre los rodillos afecta directamente a la potencia consumida en cada bloque, la potencia por bloque P_k se obtiene mediante la aplicación del modelo propuesto por (Torres y Casali, 2009).

$$P_k = 2 \cdot F \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha_{IP}}{2}\right) \cdot U \cdot \frac{(L^2 - 4 \cdot y_k^2)}{\sum_{j=1}^{NB} (L^2 - 4 \cdot y_k^2)} \quad (3.40)$$

Donde:

y_k = Posición geométrica del centro de cada bloque productode la dizcretizacion del material, [m]

La ecuación de la potencia por bloque es similar a la expresión para la obtención de la potencia requerida para girar los dos rodillos del molino con la diferencia del cociente que multiplica a la velocidad periférica. Esta fracción matemática representa la distribución de la potencia consumida por el equipo necesaria para llevar a cabo la fractura del material discretizado que se encuentra entre los rodillos.

La estimación de y_k se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$y_k = \frac{L}{2 \cdot NB} \cdot (2 \cdot k - NB - 1) \quad (3.41)$$

Para el escalamiento de la tasa de ruptura del tamaño "i" en cada bloque k , es necesario el cálculo de la carga interna de material H_k que se encuentra presente en los rodillos en cada bloque k de la zona de compresión de capas de partículas. Es posible definir su valor mediante la relación de las siguientes variables:

$$H_k = \frac{1}{NB} \cdot G_s \cdot \frac{Z}{3600 \cdot U} \quad (3.42)$$

Donde:

H_k = Masa o carga interna del materia i en el bloque k , [kg]

Como se mencionó en párrafos anteriores el material que se encuentra entre los rodillos se divide en NB bloques verticales, demostrando la existencia de variación de presión en la zona de chancado; la distribución granulométrica difiere por bloque vertical debido a la cercanía del flujo de material a los bordes de los rodillos, en donde se evidencia que el producto microfracturado en algunas secciones es de granulometría más gruesa. Para la definición de estos bloques, se emplea el parámetro a que constituye la fracción en peso del material que circula por los bordes de los rodillos, que depende de las características propias del equipo que se emplee. De acuerdo a los estudios realizados por Torres y Casali (2009), el número de bloques que representan la distribución de tamaño de partículas en los bordes se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$E = \frac{1}{2} \cdot a \cdot NB \quad (3.43)$$

Donde:

E = Número de bloques que representan la distribución de tamaño de partículas de los bordes.

La definición de la granulometría del producto total del HPGR considera el promedio de cada monotamaño obtenido en todos los bloques del material, la expresión que modela este hecho se define de la siguiente manera:

$$f(i)_{tp} = \frac{1}{NB} \cdot \sum_{k=1}^{NB} p(i)_{IP,k} \quad (3.44)$$

Donde:

$f(i)_{tp}$ = Granulometría total del producto del HPGR

La granulometría de chancado por efecto de borde se obtiene a partir de la funcionalidad matemática de piso y techo (Torres y Casali, 2009):

$$f(i)_{ep} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sum_{k=1}^{[E]} p(i)_{IP,k} + (E - [E]) \cdot p(i)_{IP,[E]} \right] \quad (3.45)$$

Donde:

$f(i)_{ep}$ = Granulometría del producto chancado por efecto de borde

El parámetro $[E]$ es un factor de corrección para los valores de E obtenidos que no son enteros.

Para obtener la granulometría del producto del centro del HPGR se realiza un balance de masa por tamaños, involucrando la granulometría tanto de producto total como la de producto del chancado por efecto de borde.

$$f(i)_{cp} = \frac{1}{1-a} \cdot (f(i)_p - f(i)_{ep}) \quad (3.46)$$

Donde:

$f(i)_{cp}$ = Granulometría de producto de chancado por compresión de capas de partículas aisladas

Los modelos para el cálculo de la distribución granulométrica del producto en el HPGR obtenidos de literatura, tienen la ventaja de considerar una granulometría no uniforme debido a la variación de la distribución de la presión de operación, teniendo un modelo específico para el material que se encuentra cercano a los bordes de los rodillos y otro para el que se encuentra en el centro de la zona de chancado. El análisis de la granulometría de centro y de borde se hace en base a la altura total de la zona de compresión inter partículas (chancado), presentando la desventaja de no poder calcular la distribución granulométrica a una altura diferente.

Sin embargo, el equipo de molienda en condiciones de operación reales lo hace en circuito cerrado o con material recirculante en el sistema (ver Figura 11). Con el objetivo de realizar un modelamiento que arroje datos cercanos a la realidad es necesario contar con modelos adicionales como el correspondiente a las tolvas y al harnero o clasificador de material por tamaño.

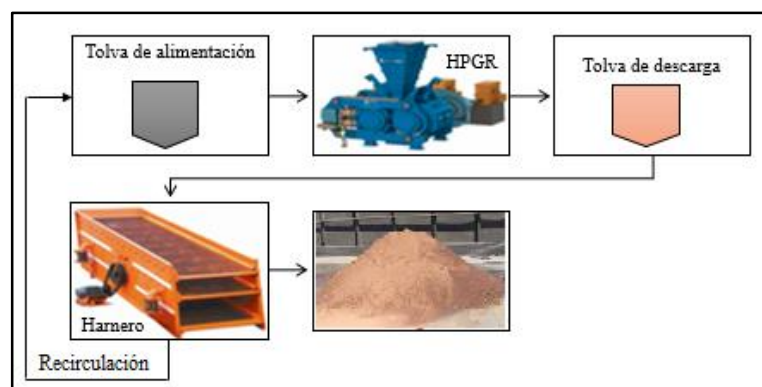


Figura 11. Circuito cerrado de molienda

Las tolvas son equipos cuyo objetivo es mantener un flujo de material continuo para el proceso de molienda. Su dinámica se basa en un balance de masa general en donde se consideran los flujos másicos de alimentación F_a y de descarga F_d del material tratado.

$$\frac{dM}{dt} = F_a - F_d \quad (3.47)$$

Donde:

M =carga interna de material en la tolva, [ton]

La estimación del flujo de descarga de material F_d es función de la cantidad de material que se encuentra en la tolva M multiplicado por un coeficiente de descarga C_v (Alarcón, 2012).

$$\frac{dM}{dt} = F_a - C_v \cdot \sqrt{M} \quad (3.48)$$

Por otro lado, para la clasificación de los componentes del material por tamaño de partículas se emplea un clasificador o harnero, el cual consta de una malla

que posee un reticulado que permite la descarga únicamente de material de igual o menor tamaño al orificio.

La base de la modelación dinámica del harnero fue propuesta por Karra (1979) en función de la eficiencia. Hace referencia que los tamaños de rocas pese a cumplir con un tamaño determinado no pasan por el harnero, debido a una obstrucción existente en el orificio del harnero de tamaño X_A o por el incumplimiento con las especificaciones de tamaño. El modelo de eficiencia para cada tamaño “i” se considera como:

$$n(i) = 1 - \exp \left[k_{a1} \cdot \left(\frac{x_i}{d_{50}} \right)^{k_{a2}} \right] \quad (3.49)$$

Donde:

$n(i)$ = Eficiencia de la clasificación para “i”

x_i = Tamaño de clase, [mm]

d_{50} = Diámetro para el cual pasa el 50% de las partículas, [mm]

k_{a1}, k_{a2} = Parámetros de ajuste dependientes del mineral tratado

De acuerdo a los estudios realizados por Casali A. (2009) el diámetro para el cual pasa el 50% de las partículas se estima de la siguiente manera:

$$d_{50} = \left(\frac{F_{aH} - f_{ua}}{1.6 \cdot k_{a3}} \right)^{0.148} \quad (3.50)$$

Donde:

F_{aH} = Flujo de alimentación al harnero, [kg/s]

f_{ua} = Fracción en peso acumulado de material bajo tamaño a la abertura del harnero

k_{a3} = Parámetro de ajuste operacional

El flujo de los monotamaños de rebalse o rechazo que corresponde a las partículas de mayor tamaño (gruesos) como de rebalse o rechazo en harnero viene dado por la siguiente expresión:

$$F_{(i)rH} = n(i) \cdot F_{(i)aH} \quad (3.51)$$

Donde:

$F_{(i)rH}$ = Flujo de rechazo o rebalse para cada monotamaño

$F_{(i)aH}$ = Flujo de alimentación al harnero para cada monotamaño

El flujo de descarga del harnero se calcula mediante la Ecuación 3.52, que considera el flujo de alimentación y el flujo de rebalse para cada monotamaño.

$$F_{(i)dH} = F_{(i)aH} - F_{(i)rH} \quad (3.52)$$

Donde:

$F_{(i)dH}$ = Flujo de descarga del harnero, para cada monotamaño, [ton(i)/h]

La razón de recirculación R_R para la simulación de un circuito cerrado viene dada por el cociente entre el flujo de rebalse para cada monotamaño y el flujo de alimentación fresca al circuito F_a .

$$R_R = \frac{F_{rH}}{F_a} \quad (3.53)$$

Finalmente es posible estimar la carga circulante de material en el circuito mediante la Expresión 3.54 que relaciona los flujos de alimentación y de rechazo para cada monotamaño.

$$C = \frac{F_a + F_{rH}}{F_a} \quad (3.54)$$

Se realizaron pruebas tratando de incorporar los modelos de la presente sección, específicamente los correspondientes a la zona de compresión inter partícula (chancado) a sistemas dinámicos, manejando las ecuaciones del modelado en un solo sistema de unidades (MKS), en donde se observó que las variables de salida no constituían respuestas estables, por lo tanto, se evitó emplear en el modelamiento propuesto.

3.2.4 Modelo propuesto para la obtención de la granulometría total

A diferencia de los modelos obtenidos por literatura que se emplean para el cálculo de la granulometría total, la cual se encuentra definida mediante una cinética de molienda de primer orden, en el presente proyecto de investigación se propone un modelo para el cálculo de la distribución granulométrica total en función de la altura de la zona de compresión inter partícula (chancado), empleando una nueva alternativa para el cálculo de la cinética de molienda.

Basándose en la ecuación propuesta por Reid (1965) (ver Ec. 3.30) que se emplea para obtener la granulometría del producto para los n monotamaños de la alimentación, se evidencia que posee una estructura similar a la expresión de Arrhenius, detallada por la Expresión 3.55, que se emplea para demostrar la dependencia de la constante de velocidad o cinética de reacciones químicas con la temperatura en la que se lleva a cabo la reacción.

$$k(T) = A \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad (3.55)$$

Donde

$k(T)$ = Constante cinética (dependiente de la temperatura)

A = Factor de frecuencia

E_a = Energía de activación, [J/mol]

R = Constante universal de los gases

T = Temperatura absoluta [K]

Según la Expresión 3.55, el valor de la constante cinética $k(T)$ aumenta de manera exponencial a medida que se incrementa la temperatura. El cálculo de la constante cinética depende de dos parámetros: la energía de activación E_a , la cual es una cantidad mínima de energía que deben superar los reactivos para transformarse en productos, un valor elevado de la misma provocará valores pequeños de $k(T)$; el otro parámetro constituye el factor preexponencial o factor de frecuencia A , que se define como una constante de proporcionalidad que tiene en cuenta la frecuencia de colisión y la orientación de las partículas que van a reaccionar.

Haciendo un símil con la expresión de Arrhenius explicada en el párrafo anterior, la constante de velocidad de molienda propia de cada monotamaño $K(i)$ [s^{-1}] (dependiente de la potencia de giro de los rodillos Pr), se expresa mediante la Ecuación 3.56. En donde $k_0(i)$ representa el factor preexponencial, el cual en los procesos de molienda tiene en cuenta la frecuencia de choque y la orientación de las partículas que se someterán al proceso de microfractura. El otro término que interviene en el cálculo de $K(i)$ es la potencia de giro de los rodillos mínima necesaria $E(i)$ a la que deben someterse las partículas para la reducción de tamaño.

$$K(i) = k_0(i) \cdot \exp\left(-\frac{E(i)}{Pr}\right) \quad (3.56)$$

Donde:

$K(i)$ = Constante de velocidad, [s^{-1}]

$m(i)$ = Masa de la especie i , [kg]

Hk = Carga de material entre rodillos en cada bloque n , [kg]

Los valores de la constante de velocidad de molienda $K(i)$ son obtenidos a partir de un problema de optimización, empleando los datos de salida del modelo en estado estacionario que aparece en el trabajo realizado por O. Alarcón (2012). El proceso de optimización se realizó en el software Matlab R2010a empleando la herramienta OPTIMTOOL, la cual inicia una interfaz gráfica de usuario de los

solucionadores de optimización propios del software, esta herramienta tiene la ventaja de poder editar las opciones por defecto, seleccionar nuevas y ejecutar el solucionador. Dentro del grupo de los solucionadores de optimización se empleó FMINCON, el cual encuentra un mínimo limitado de una función escalar de varias variables a partir de una estimación inicial (optimización no lineal restringida o programación no lineal), resolviendo los problemas de la siguiente forma:

- $x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{\text{eq}}, b_{\text{eq}}, lb, ub, \text{nonlcon})$ comienza en x_0 y encuentra un valor mínimo para x descrito en la función objetivo (fun), sujeta a las desigualdades lineales $A \cdot x \leq b$. x_0 puede ser un escalar, un vector o una matriz. Minimiza fun sujeta a igualdades lineales $A_{\text{eq}} \cdot x = b_{\text{eq}}$ así como $A \cdot x \leq b$. Define un conjunto de límites superiores e inferiores en las variables a encontrar, para que la solución siempre se encuentre en el rango $lb \leq x \leq ub$. Realizando una optimización sujeta a desigualdades no lineales, $c(x)$, o igualdades $ceq(x)$ definidas en nonlcon . El solucionador fmincon optimiza de tal manera que $c(x) \leq 0$ y $ceq(x) = 0$.

El proceso de optimización llevado a cabo tiene como objetivo encontrar los valores mínimos para la constante de velocidad de molienda propuesta, cumpliendo con la siguiente función objetivo:

$$\min : \sum_{i=1}^n (F(i))^2 \quad (3.57)$$

La función a minimizar detallada en la Expresión 3.57, $F(i)$ representa el balance poblacional (ver Ec. 3.58) en estado estacionario aplicado a la especie i , la cual consta de cuatro términos que constituyen respectivamente: el flujo entrada y de salida del monotamaño “ i ”, la formación del monotamaño “ i ” por microfracturas a partir del tamaño “ j ” y la generación de otras especies por microfracturas del monotamaño “ i ” los cuales se detallan en la siguiente expresión:

$$F(i) = Gs(n)_{in} \cdot p(i)_{in} - Gs(n)_{out} \cdot p(i)_{out} + Hk(n) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} p(j) \cdot b_{ij} \cdot K(i) - Hk(n) \cdot p(i)_{out} \quad (3.58)$$

$i > 1$

Donde:

$Gs(i)_{in}$ = Flujo másico de entrada al bloque n, [kg/s]

$Gs(i)_{out}$ = Flujo másico de salida del bloque n, [kg/s]

$p(i)_{in}$ = Fracción en peso del monotamaño "i" de entrada al bloque n, [kg(i)/kg]

$p(i)_{out}$ = Fracción en peso del monotamaño "i" de salida al bloque n, [kg(i)/kg]

$p(j)$ = Fracción en peso del monotamaño "j" que por microfractura forma "i", [kg(i)/kg]

b_{ij} = Selectividad del monotamaño "j"

$K(i)$ = Coeficiente cinético de molienda del monotamaño "j"

Como se mencionó al inicio de la sección el propósito es obtener una constante de velocidad $K(i)$ propia de cada monotamaño, en función de un factor preexponencial k_0 y de la potencia de giro mínima necesaria $E(i)$ para que se lleve a cabo el proceso de molienda. Ambos parámetros dependientes de las características del equipo, específicamente de la potencia de giro de los rodillos Pr , cuyo cálculo se basa en la interacción de tres componentes: la fuerza de compresión, el torque producido en cada rodillo y la velocidad angular.

Para la obtención de los valores de k_0 y $E(i)$ propios de cada tamaño de partícula se emplea un segundo proceso de optimización cumpliendo con la siguiente función objetivo:

$$\min : \left(k_0(i) \cdot e^{\left(\frac{-E(i)}{P} \right)} - K(i)^{ss} \right)^2 \quad (3.59)$$

En la Expresión 3.59 los valores de $K(i)^{ss}$ representan los valores de $K(i)$ obtenidos del primer proceso de optimización realizado (ver Ec. 3.57). Es importante notar que cada constante de velocidad tendrá un valor específico para $k_0(i)$ y $E(i)$.

Además de la constante de velocidad, en el balance poblacional descrito por la Ecuación 3.58 se encuentra la variable Hk , que representa la cantidad de materia total que se encuentra en el bloque horizontal, que a diferencia del modelo propuesto

por O. Alarcón (2012) (ver Ec. 3.42) se calcula mediante el empleo de la siguiente ecuación:

$$Hk(n) = v_b(n) \cdot \rho_{cm}(n) \quad (3.60)$$

Donde:

$v_b(n)$ = Volumen del bloque n, [m³]

$\rho_{cm}(n)$ = Densidad del centro de masa del bloque n, [kg/m³]

Por otro lado, la obtención de la granulometría del producto total en la zona de chancado se calcula en función de la altura, para ello se discretizó la zona de compresión inter partícula en bloques horizontales como se muestra en la Figura 12. En donde se evidencia que el flujo y las fracciones de salida del bloque anterior constituyen la entrada de siguiente bloque.

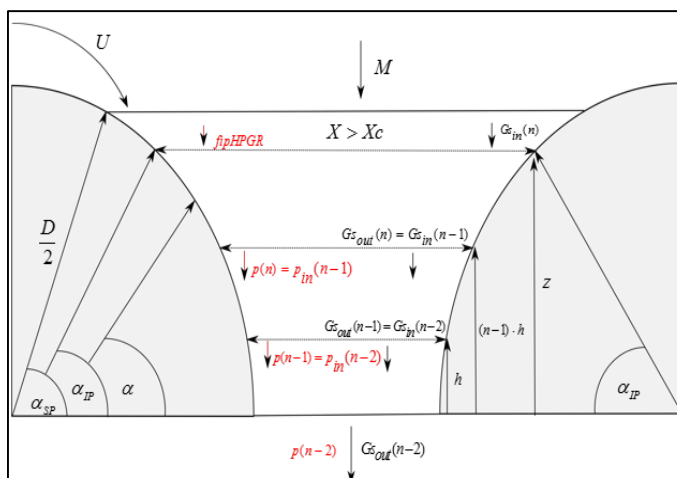


Figura 12. Discretización de la zona de chancado en bloques horizontales

El volumen de cada bloque $v_b(n)$ se obtiene mediante la aplicación de la Ecuación 3.61 que surge de la resolución analítica de la Expresión 3.5, cuya deducción se presenta a continuación:

$$v_b = L \cdot \int_{h_{\min(n)}}^{h_{\max(n)}} \left(\frac{D}{2} + \frac{s0}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} \right) dy$$

Integral de área

$$dA = \int \left(\frac{D}{2} + \frac{s0}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} \right) dy$$

Aplicar la regla de la suma $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

$$A_1 = \int \frac{D}{2} dy = \frac{D}{2} \cdot y$$

$$A_2 = \int \frac{s0}{2} dy = \frac{s0}{2} \cdot y$$

$$A_3 = \int \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} dy = \int \sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2} dy$$

$$\text{Sustituir } y = \frac{\sqrt{D^2}}{\sqrt{4}} \cdot \text{sen}(u) = \frac{D}{2} \cdot \text{sen}(u); \quad y' = \frac{D}{2} \cdot \cos(u) \text{ du}$$

$$y^2 = \frac{D^2}{4} \cdot \text{sen}^2(u); \quad \therefore \frac{D^2}{4} \cdot \text{sen}^2(u) \cdot \frac{D}{2} \cdot \cos(u)$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = -2 \int \left(\frac{D^3 \cdot \text{sen}^2(u) \cdot \cos(u)}{8 \cdot \sqrt{D^2 - \frac{D^2}{4} \cdot \text{sen}^2(u)}} \right) du = -2 \cdot \frac{D^3}{8} \int \frac{\text{sen}^2(u) \cdot \cos(u)}{\sqrt{D^2 - D^2 \text{sen}^2(u)}} du$$

Aplicación del integral por partes

$$\int uv' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$u = \sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2}; \quad u' = -\frac{2y}{\sqrt{-4y^2 + D^2}}; \quad v = y; \quad v' = 1;$$

$$\int uv' = u \cdot v - \int u' \cdot v = \sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2} \cdot y - \int \left(-\frac{2y}{\sqrt{-4y^2 + D^2}} \cdot y \right) dy$$

$$\int uv' = \sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2} \cdot y - \int \left(-\frac{2y^2}{\sqrt{-4y^2 + D^2}} \right) dy$$

$$I_1 = \int \left(-\frac{2y^2}{\sqrt{D^2 - 4y^2}} \right) dy = -2 \int \left(\frac{y^2}{\sqrt{D^2 - 4y^2}} \right) dy$$

Para $\sqrt{a - bx^2}$ sustituir $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \text{sen}(u)$

Aplicar integración por sustitución $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$; $u = g(x)$

Si $\sqrt{D^2 - D^2 \text{sen}^2(u)} = \sqrt{D^2} \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2(u)}$

$$\therefore \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = -2 \cdot \frac{D^3}{8} \int \frac{\text{sen}^2(u) \cdot \cos(u)}{\sqrt{D^2} \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2(u)}} du$$

Si $1 - \text{sen}^2(u) = \cos^2(u)$

$$\therefore -2 \cdot \frac{D^3}{8} \int \frac{\text{sen}^2(u) \cdot \cos(u)}{\sqrt{D^2} \cdot \sqrt{\cos^2(u)}} du = -2 \cdot \frac{D^3}{8} \int \frac{\text{sen}^2(u)}{\sqrt{D^2}} du = -2 \cdot \frac{D^3}{8} \cdot \frac{1}{D} \int \text{sen}^2(u) du$$

Si $\text{sen}^2(u) = \frac{1 - \cos(2u)}{2}$

$$\therefore -2 \cdot \frac{D^3}{8} \cdot \frac{1}{D} \int \frac{1 - \cos(2u)}{2} du = -2 \cdot \frac{D^3}{8} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{2} \int 1 - \cos(2u) du = -\frac{D^2}{8} \left(\int du - \int \cos(2u) du \right)$$

$$I_2 = -\frac{D^2}{8} \cdot \int du = -\frac{D^2}{8} u$$

$$I_3 = \frac{D^2}{8} \cdot \int \cos(2u) du = \frac{D^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2u)$$

$$\therefore -\frac{D^2}{8} \left(\int du - \int \cos(2u) du \right) = -\frac{D^2}{8} \left(u - \frac{1}{2} \text{sen}(2u) \right)$$

Sustituir $u = \arcsen\left(\frac{2}{D} y\right)$

$$-\frac{D^2}{8} \left(u - \frac{1}{2} \text{sen}(2u) \right) = -\frac{D^2}{8} \left(\arcsen\left(\frac{2}{D} y\right) - \frac{1}{2} \text{sen}\left(2 \arcsen\left(\frac{2}{D} y\right)\right) \right)$$

Resolución de A_3

$$\therefore \sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2} \cdot y - \left(-\frac{D^2}{8} \left(\arcsen\left(\frac{2}{D} y\right) - \frac{1}{2} \text{sen}\left(2 \arcsen\left(\frac{2}{D} y\right)\right) \right) \right)$$

$$\therefore \sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2} \cdot y + \frac{D^2}{8} \left(\arcsen\left(\frac{2}{D} y\right) - \frac{1}{2} \text{sen}\left(2 \arcsen\left(\frac{2}{D} y\right)\right) \right)$$

Respuesta total

$$\therefore A_1 + A_2 + A_3 = \frac{D}{2} y + \frac{D^2}{8} y - \left(\sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2} \cdot y + \frac{D^2}{8} \left(\arcsen\left(\frac{2}{D} y\right) - \frac{1}{2} \text{sen}\left(2 \arcsen\left(\frac{2}{D} y\right)\right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \therefore \frac{(D+s0)}{2} y - \left(\sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2} \cdot y + \frac{D^2}{8} \left(\arcsen\left(\frac{2}{D} y\right) + \frac{1}{2} \text{sen}\left(2 \arcsen\left(\frac{2}{D} y\right)\right) \right) \right) \\
& \therefore \left(\frac{D+s0}{2} \right) \cdot h - h \cdot \sqrt{\frac{D^2}{4} - h^2} - \frac{D^2}{8} \left(\arcsen\left(\frac{2h}{D}\right) - \frac{1}{2} \text{sen}\left(\arcsen\left(\frac{2h}{D}\right)\right) \right) \\
v_b(n) &= L \cdot \left[\left(\frac{D+s0}{2} \right) \cdot h - h \cdot \sqrt{\frac{D^2}{4} - h^2} - \frac{D^2}{8} \left(\arcsen\left(\frac{2h}{D}\right) - \frac{1}{2} \text{sen}\left(\arcsen\left(\frac{2h}{D}\right)\right) \right) \right]_{h_{min}(n)}^{h_{max}(n)} \quad (3.61)
\end{aligned}$$

El valor de $v_b(n)$ variará de acuerdo a los límites superiores e inferiores de cada bloque definido por $h_{max}(n)$ y $h_{min}(n)$ respectivamente. El delta de altura de cada bloque se calcula mediante la división de Z que corresponde a la altura total de la zona de chancado expresada por la Ecuación 3.20 para los n bloques horizontales en que se dividió la sección.

Finalmente, se aplica el balance poblacional a cada tamaño de partícula con el objetivo de obtener la respuesta dinámica de la granulometría del producto total en función de la altura de la zona de chancado. Matemáticamente el balance poblacional viene dado por la Expresión 3.62, la cual presenta una variación de la Ecuación 3.58, la división del lado derecho de la ecuación para H_k con el objetivo de obtener las fracciones másicas de cada tamaño.

$$\frac{dp(i)_{out}}{dt} = \frac{Gs(n)_{in} \cdot p(i)_{in} - Gs(n)_{out} \cdot p(i)_{out} + Hk(n) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} p(j) \cdot b_{ij} \cdot k_0(i) \cdot \exp\left(-\frac{E(i)}{Pr}\right) - Hk(n) \cdot p(i)_{out}}{Hk} \quad (3.62)$$

A diferencia de los modelos propuestos en literatura el modelo obtenido (ver Ec. 3.62) permite calcular dinámicamente la distribución granulométrica total de una manera directa considerando una constante de velocidad de molienda propia de cada tamaño, en cuya estimación intervienen dos parámetros k_0 y $E(i)$ dependientes de la potencia de giro de los rodillos, la cual se calcula en base de los parámetros invariantes del equipo como es la velocidad periférica de giro y el gap operacional.

CAPÍTULO IV

4. SIMULACIÓN DEL CONTROL PREDICTIVO BASADO EN EL MODELO MPC

4.1 Introducción

El Control Predictivo Basado en el Modelo (MPC) se ha desarrollado considerablemente en los últimos años tanto dentro de la comunidad de investigación aplicada al control así como en la industria. La razón para este suceso puede ser atribuida al hecho que el MPC es tal vez la vía más general de estructurar procesos de control en el dominio del tiempo. Una de las principales ventajas de esta técnica de control es el manejo de un horizonte de control finito que permite manejar procesos con restricciones y en general procesos no lineales que se encuentran con frecuencia a nivel industrial.

El proceso de control llevado a cabo en el presente trabajo es de tipo multivariable, en el cuál se consideran dos entradas y dos salidas. Las entradas constituyen parámetros independientes de operación propios del Molino de Rodillo de Alta Presión (HPGR) como s_0 y U que constituyen respectivamente la distancia entre el rodillo fijo y el flotante y la velocidad de giro de los rodillos.

Es importante recalcar que estas variables fueron seleccionadas considerando que la tolva de alimentación del HPGR siempre va a contar con una carga interna de material. La manipulación de estas variables sirve para controlar el tamaño de partícula bajo el cual se encuentra el 80% en peso del total de mineral chancado, p_{80} y la densidad aparente en la zona de extrusión del último bloque resultado de la discretización de la zona de chancado en secciones horizontales.

Para el desarrollo del controlador se empleó la herramienta `nlmpc` propia de Simulink que tiene como propósito simular el control predictivo basado en modelo de sistemas en lazo cerrado con límites específicos tanto en las variables

manipuladas y controladas usando modelos lineales en el formato step para plantas no lineales representadas como una Simulink S-function.

4.2 Control predictivo basado en el modelo (MPC)

El control predictivo basado en el modelo corresponde a una técnica de control que emplea un modelo específico de una operación al que se le conoce como el modelo de predicción, con el objetivo de predecir las variables controladas en un intervalo de tiempo predeterminado.

El MPC se basa en una optimización iterativa de un modelo específico en un horizonte finito de movimientos. Esta optimización es desarrollada mediante una función de coste, la misma que considera un rango específico de observación y de control, conocidos como horizonte de predicción y horizonte de control, respectivamente. Estos rangos y restricciones tienen influencia en las variables operacionales, se generan trayectorias con la finalidad de predecir un conjunto de movimientos futuros en las variables manipuladas con la finalidad de obtener una aproximación de las salidas predichas lo más cercanas posible los setpoints o valores de consigna, como se muestra en la Figura 13. En el esquema de control predictivo basado en el modelo intervienen las siguientes variables:

- **Perturbaciones:** Pueden ser de dos tipos: no medidas y medidas. En el primer caso son señales desconocidas, excepto por su efecto en las salidas de la planta, el compensador realiza un trabajo de compensación a través de retroalimentación. En el segundo tipo el controlador realiza una compensación a través de una prealimentación para minimizar el impacto de dichas perturbaciones en las salidas.
- **Valores de referencia o setpoints:** Valores objetivo o de consigna que deben alcanzar las salidas.
- **Variables manipuladas:** Conocidas también como actuadores, corresponde a la/s señal/e/s de ajuste que le permite al controlador alcanzar los valores de ajuste o setpoints.

- **Salidas o variables controladas:** Corresponde a la/s seña le/s que deben mantenerse en los valores de referencia establecidos.
- **Ruido:** Son seña les que representan ruido eléctrico, errores de muestreo, desviación en la calibración y otras, que producen alteran la exactitud y precisión de la medición.

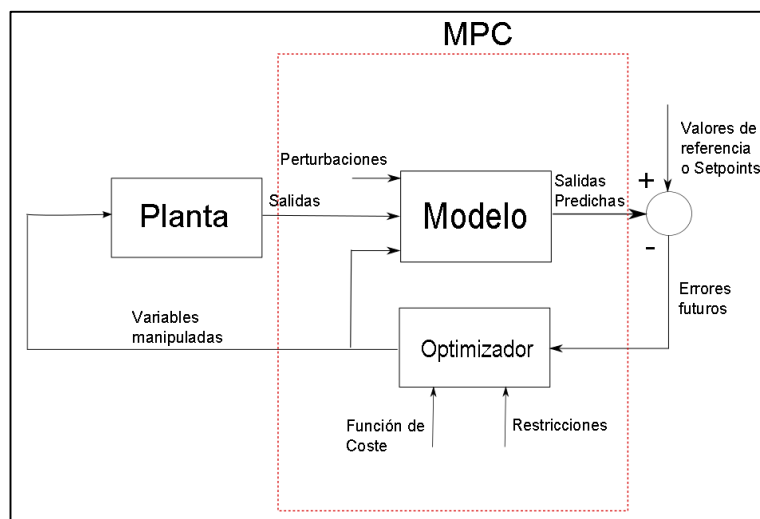


Figura 13. Esquema del control predictivo basado en el modelo

El cálculo de las variables controladas o variables de salida se realiza a través de un proceso de optimización, específicamente de una minimización de una función de coste o función objetivo (ver Ec. 4.1), cuya forma varía según el tipo de controlador. La forma más general es la que emplea un error cuadrático que considera la suma de los errores de predicción, que constituye la resta al cuadrado entre las salidas predichas y los valores de consigna o setpoints.

Una vez que se alcanza los valores de referencia mediante la resolución del problema de optimización constituye la aplicación del primer paso y la optimización es desarrollada nuevamente, matemáticamente el control predictivo basado en el modelo se representa por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
& \min_{\Delta U} \sum_{i=1}^P \left[\left[\Gamma \cdot (\hat{y}(k+1) - y_{set}) \right]^2 - \left[\Lambda \cdot \Delta u(k+i+1) \right]^2 \right] & (4.1) \\
& \Delta u = 0 \quad i = M, M+1, \dots, P \\
& \Delta U_{\min} \leq \Delta u(k+i+1) \leq \Delta U_{\max} \\
& U_{\min} \leq u(k) \leq U_{\max} \\
& Y_{\min} \leq \hat{y}(k+1) \leq Y_{\max}
\end{aligned}$$

En la Ecuación 4.1 P y M corresponden al horizonte de predicción y de control respectivamente. El primero se define como el tiempo sobre el cual se evalúan las posibles respuestas del sistema (respuestas futuras) obtenidas a través del empleo de un modelo explícito Y que describe el comportamiento de la planta, mientras que el segundo es el tiempo sobre el cual varían las acciones de control y después del cual se mantendrán constantes. Λ, Γ corresponden a los pesos de importancia de las variables manipuladas y controladas que son ponderaciones que usualmente toman la siguiente forma:

$$\Gamma(k) = \alpha^{P_f - k} \quad (4.2)$$

En la Ecuación 4.2 P_f corresponde a los valores finales del horizonte de predicción, si $0 < \alpha < 1$ los errores futuros más lejanos de t tienen más peso teniendo un control más suave; por otro lado si $\alpha > 1$, el error los instantes más cercanos a t tienen más peso por lo que el control será más rápido (Rodríguez, 2012).

4.3 Obtención del modelo de predicción

El modelo de predicción o modelo interno es el elemento que tiene mayor importancia en el control predictivo basado en el modelo, debe ser una representación lo más cercana al comportamiento real de la planta pero sin ser tan complejo, puesto que, puede dificultar el análisis teórico del controlador y generar un aumento indiscriminado del tiempo computacional.

La obtención del modelo de predicción se compone de dos secciones: el modelo de perturbaciones que abarca el efecto que tiene el ruido, los errores derivados del modelado y el efecto de las entradas no medibles; y la segunda sección que corresponde al modelo del proceso, indispensable para el desarrollo del controlador.

4.3.1 Modelo del proceso

El modelo del proceso es el parámetro de mayor relevancia en la aplicación del control MPC, la representación matemática de la planta o proceso permite entender el comportamiento dinámico que se va a generar en el sistema (Gonzales, 2014).

Existen diversas maneras para representar la relación entre las salidas y las entradas medidas de un modelo específico. En el presente proyecto la generación del modelo de proceso se realizó a través de la respuesta al escalón, cuya fundamentación teórica se encuentra descrita en la sección b del apartado 2.2.3.

El desarrollo del controlador se ejecutó mediante el empleo de la herramienta `nlimpc` (ver descripción en el Anexo B), la cual emplea un modelo lineal en el formato MPC step, necesario para la estimación de estados en el proceso de control.

El formato de respuesta step constituye un modelo completo del sistema basado en la respuesta al escalón, el cual permite calcular las salidas del sistema para cualquier secuencia de entrada. Los modelos en el formato step pueden ser empleados para procesos estables e inestables y para sistemas con múltiples entradas y salidas (MIMO) conformados por n_v entradas y n_y salidas. El modelo se consigue al excitar las variables manipuladas del sistema a través de la aplicación de escalones obteniéndose una serie de matrices de respuesta S_i , reportadas en una matriz como la que se presenta a continuación:

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{1,1,i} & S_{1,2,i} & \cdots & S_{1,n_y,i} \\ S_{2,1,i} \\ \vdots \\ S_{n_y,1,i} & S_{n_y,2,i} & \cdots & S_{n_y,n_y,i} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

En la matriz 4.3 $S_{l,m,i}$ representa el i^{th} coeficiente de respuesta al escalón relacionado a la entrada m^{th} de la salida l^{th} . El formato MPC step guarda la respuesta del modelo al escalón en el siguiente formato:

$$planta = \begin{bmatrix} & S_1 \\ & S_2 \\ & \vdots \\ & S_n \\ nout(1) & 0 & \cdots & 0 \\ notu(2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ notu(n_y) & 0 & \cdots & 0 \\ n_y & 0 & \cdots & 0 \\ delt2 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(n \cdot n_y + n_y + 2) \cdot n_y} \quad (4.4)$$

La variable *delt2* que aparece en la matriz 4.4 representa el periodo de muestreo y el vector *nout* indica si una salida particular es inestable o estable, tomando un valor de 0 o 1 respectivamente según sea el caso.

La obtención del modelo correspondiente al proceso de molienda llevado a cabo en el HPGR se realiza mediante la excitación de las variables manipuladas a través de la aplicación de escalones cuyos valores iniciales y finales se encuentran descritos en la Tabla 2.

Tabla 2.

Valores iniciales y finales de la aplicación del escalón en las variables manipuladas

Características	Límites de operación	
	Superior	Inferior
Variables manipuladas		
Gap operacional, $s0$, [m]	0,016	0,024
Velocidad periférica de los rodillos, U , [m/s]	0,1	1,21

La Figura 14 representa la respuesta de las variables controladas en formato adimensional en donde la gráfica superior e inferior respectivamente muestra el comportamiento de $p80$ y $rocm$ al aplicar un escalón en la velocidad periférica de los rodillos U , en donde se evidencia que el tamaño de partícula bajo el cual se encuentra el 80% en peso del total de mineral chancado, $p80$, tiene un comportamiento directamente proporcional a las variaciones de la velocidad de giro de los rodillos, mientras que la gráfica inferior detalla un comportamiento invariante de la densidad del centro de masa en la zona de extrusión, $rocm$.

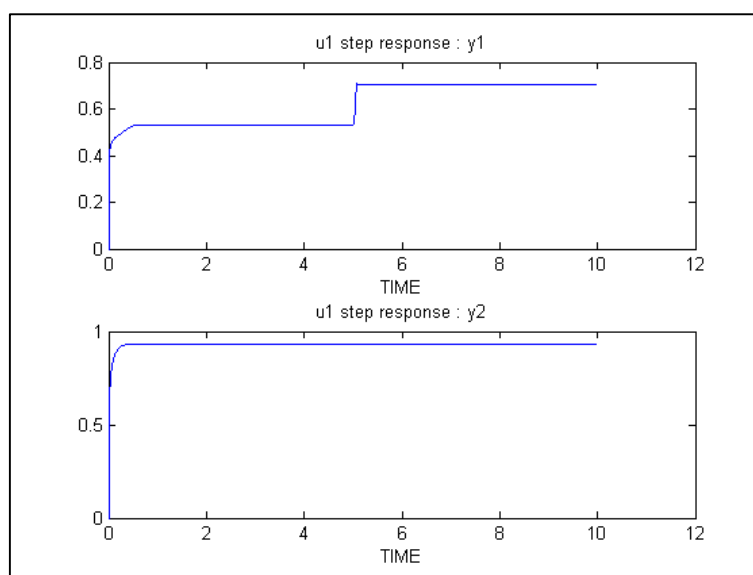


Figura 14. Respuesta de las variables controladas a la excitación de la velocidad periférica usando plotstep (M3)

Los cambios producidos por la excitación de $s0$ producen un comportamiento similar de las variables controladas $p80$ y $rocm$ al descrito en el párrafo anterior (ver Figura 15). Se mantiene una relación directamente proporcional del tamaño de partícula bajo el cual se encuentra el 80% en peso del total de mineral chancado a los cambios en el gap operacional. La densidad del centro de masa en la zona de extrusión mantiene su valor demostrando una respuesta independiente a los cambios en $s0$.

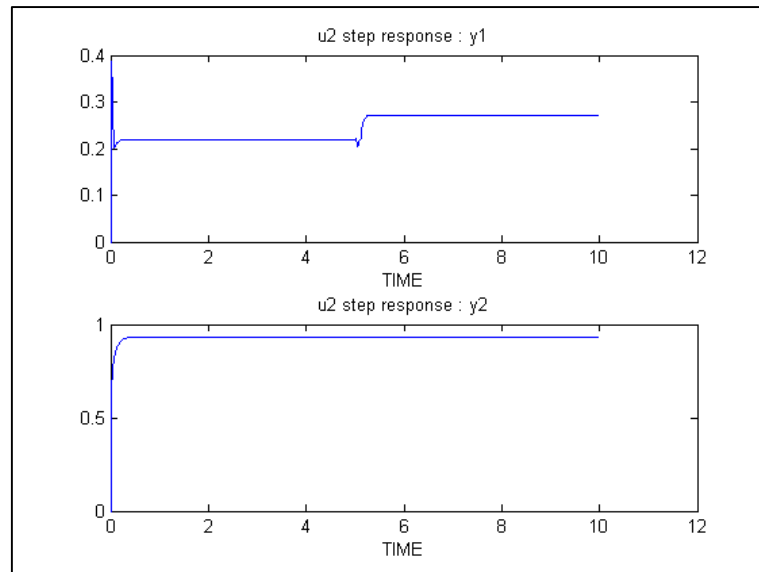


Figura 15. Respuesta de las variables controladas a la excitación del gap operacional usando plotstep (M3)

El comportamiento de la variable controlada *rocm* frente a excitaciones de las variables manipuladas U y $s\theta$ no se encuentra fuera de lo común, puesto que en la modelación matemática del proceso de molienda se considera que la densidad en la zona de extrusión tiene un valor del 85% de la densidad del sólido seco característico de la operación llevada a cabo en un HPGR.

CAPÍTULO V

5. RESULTADOS

5.1 Introducción

Una vez realizada la simulación de la operación de molienda y el proceso de control de un molino de rodillos de alta presión (HPGR) en la plataforma de programación Simulink™ propia del software Matlab™, se presenta los resultados que incluyen los parámetros propios del modelo propuesto en el presente proyecto de investigación como: la constante de velocidad de molienda $K(i)$ y los elementos que intervienen en el cálculo de la misma ($k_o(i)$ y $E(i)$). Estos parámetros son de gran importancia, debido que intervienen en el cálculo de la cinética de molienda de primer orden que determina la rapidez en que las partículas de material sufren el proceso de microfractura para formar otras especies. Por otro lado, se expone la selección de parámetros que se obtuvieron para lograr un buen desempeño del control, los mismos que fueron seleccionados mediante la realización de varias pruebas con diferentes horizontes de control y de predicción, así como la variación en los pesos de importancia de las variables manipuladas y controladas.

5.2 Valores obtenidos de la constante de velocidad de molienda

El proceso de obtención de la constante de velocidad de molienda $K(i)$ se lo realiza a través de un problema de optimización en el software Matlab R2010a empleando la herramienta OPTIMTOOL, y el solucionador de optimización FMINCON, el cual encuentra los valores mínimos restringidos destinados a cumplir una función objetivo (ver Ec. 3.42) que se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3.
Constantes de velocidad de molienda

TAMAÑO DE PARTÍCULA [mm]	CONSTANTE DE VELOCIDAD DE MOLIENDA $K(i)$ [s^{-1}]
31,5	87,7427
22,4	141,0232
16	71,4271
11,2	41,3054
8	25,2115
5,6	12,5626
2,8	2,0494
1	0,6346
0,5	0,4914
0,315	0,4112
0,2	0,3093

La Tabla 3 muestra los valores de la constante de velocidad propia de cada de partícula, evidenciándose una relación directamente proporcional entre el tamaño y el valor de la constante de velocidad de molienda $K(i)$, demostrando que las partículas de mayor tamaño son microfracturadas a una mayor velocidad para formar otras de menor tamaño.

5.2.1 Valores obtenidos de $k_0(i)$ y $E(i)$

Los valores del factor preexponencial $k_0(i)$ y de la potencia mínima requerida para la fractura de partículas $E(i)$ fueron obtenidos mediante un problema de optimización similar al proceso de estimación de la constante de velocidad de molienda $K(i)$ explicado en la sección 5.2, con la variación en el empleo de la función objetivo expresada por la Ecuación 3.45. Los valores estimados para $k_0(i)$ y $E(i)$ que se muestran en la Tabla 4 dependen del tamaño de cada partícula, cumpliendo una relación directamente proporcional entre el tamaño de partícula y el factor preexponencial, indicando que las partículas de mayor tamaño tienen una frecuencia de colisión mayor a las demás, mientras que el orden de los valores de la potencia mínima requerida para la fractura de partículas es similar para todos los tamaños, con un ligero aumento en las partículas más grandes, demostrando que la

potencia de activación para la fractura de partículas es proporcional al tamaño de partícula.

Tabla 4.

Valores estimados para el factor preexponencial y la potencia mínima necesaria

TAMAÑO DE PARTÍCULA [mm]	FACTOR PREEXPONENCIAL $k_0(i)$	POTENCIA MÍNIMA PARA LA FRACTURA DE PARTÍCULAS $E(i)$ [W]
31,5	87,7458	1,4061
22,4	141,0297	1,8519
16	71,4295	1,3116
11,2	41,3067	1,1888
8	25,2123	1,1507
5,6	12,5630	1,1341
2,8	2,0495	1,1294
1	0,6347	1,1258
0,5	0,4915	1,1284
0,315	0,4112	1,1271
0,2	0,3093	1,1193

5.3 Granulometrías estimadas por la simulación dinámica

Las granulometrías obtenidas por el simulador en estado dinámico consideran la operación del equipo de molienda HGPR en circuito abierto (CA) considerando un rango de tamaños de partícula típicos de una operación de chancado terciario es decir un tamaño máximo de 45 [mm]. Los parámetros del modelo y las especificaciones del mineral utilizado para la simulación del circuito de molienda se describen en la Tabla 5.

Tabla 5.

Parámetros empleados en la simulación dinámica

VARIABLE	ESPECIFICACIÓN
Tipo de mineral	Pórfido
Flujo de alimentación, F_a	9,72 [kg/ s]
Granulometría de alimentación, $f_{(i)a}$	Detalle en Tabla 6 [% peso discreto]
Densidad total del mineral, ρ_t	2740 [kg/ m ³]
Densidad aparente del mineral, ρ_a	1620 [kg/ m ³]
Diámetro de los rodillos, D	0,8 [m]
Largo de los rodillos, L	0,25 [m]
Gap operacional, s_0	0,019 [m]
Velocidad periférica de los rodillos, U	0,67 [m/ s]
Presión de operación, R_p	41 [bar]
Parámetros función selección	Adimensionales
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	0,15; 0,21; 6,96

La distribución granulométrica total obtenida por el simulador dinámico del HPGR se detalla en la Tabla 6, en donde se determina que existe un error de 2,3037 % frente a las mediciones del [%] Acumulado pasante total del equipo (ver Figura 16) validando que los resultados obtenidos por el modelo propuesto tienen una muy buena aproximación frente a los obtenidos por medición del equipo.

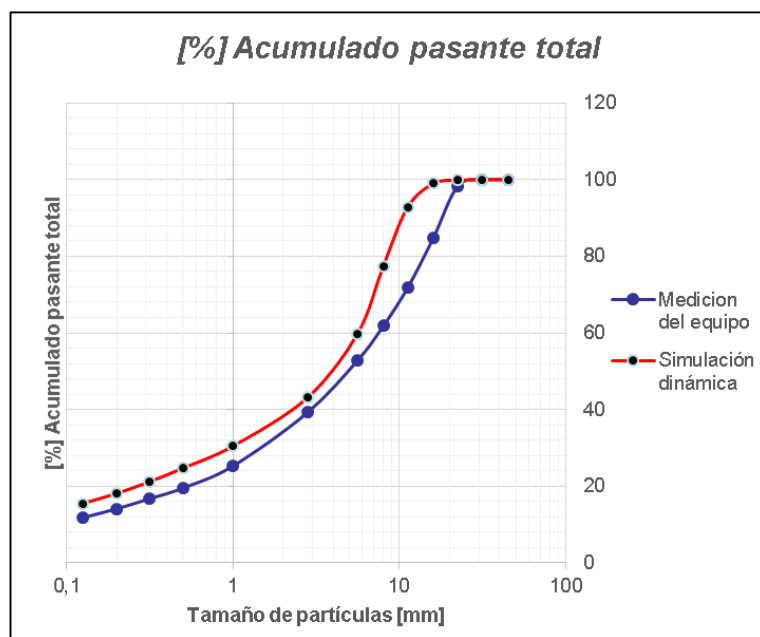


Figura 16. Curva de distribución de tamaños obtenidos vs medidos del equipo

Los datos de medición del equipo HPGR fueron obtenidos de la Planta concentradora “La Esperanza” que se encuentran reportados en el trabajo: Alarcón, Osvaldo. (2012). Modelación y simulación dinámica de un molino de rodillos de alta presión (HPGR), para conminución de minerales de cobre. Santiago-Chile.

Tabla 6.

Distribución granulométrica obtenida por el simulador dinámico.

TAMAÑO DE PARTÍCULA [mm]	Alimentación	Alimentación [%] discreto	MEDICIÓN	SIMULACIÓN
			DEL EQUIPO HPGR	DINÁMICA
			[%] Acumulado	Pasante total
45	100	2,39	100	100
31,5	97,61	40,01	100	100
22,4	57,60	20,89	98,36	99,91
16	36,71	10,90	84,87	99,01
11,2	25,81	5,49	71,80	92,85
8	20,32	4,41	61,82	77,49
5,6	15,91	5,42	52,82	59,81
2,8	10,49	3,74	39,19	43,09
1	6,75	1,59	25,25	30,46
0,5	5,16	0,85	19,49	24,69
0,315	4,31	0,88	16,69	21,15
0,2	3,43	0,85	14,06	18,08
0,125	2,58	2,58	11,75	15,47
RAÍZ DEL ERROR CUADRÁTICO [%]				2,3037

5.4 Resultados del desarrollo del control MPC

El desarrollo del control MPC se lo realizó en la plataforma de programación por bloques SimulinkTM incluida en el software MatlabTM a través del empleo de la herramienta nlcmpc. Para la utilización de esta herramienta es necesario contar con *model*, el cual es un modelo lineal en el formato MPC step que se emplea para la estimación de estados en el controlador, cuyo proceso de obtención se encuentra detallado en la sección 4.3.1.

Los parámetros de ajuste que se emplearon en el nlcmpc fueron obtenidos a través de variaciones sistemáticas, con la finalidad de lograr el mejor comportamiento del controlador considerando sus límites operacionales que se encuentran descritos en la Tabla 7, los cuales son definidos en función de los parámetros de operación dependiendo del escalamiento del equipo (ver Tabla 1).

La selección de los valores para el horizonte de control M y horizonte de predicción P fue determinada en función de la respuesta del sistema, analizando varias combinaciones de horizontes, definiendo que los valores que fijan una mejor respuesta corresponden a $M = 50$ y $P = 50$ mientras que los pesos de las variables manipuladas y controladas que producen un comportamiento menos oscilante del sistema corresponden a $\Lambda = [1,1]$; $\Gamma = [1,1]$, evidenciando que la importancia de ambas variables es igual logrando que el controlador tenga el mismo esfuerzo en controlar y cumplir con el cambio de las variables controladas desde su estado inicial a uno deseado.

Es importante tener en cuenta que las especificaciones técnicas del computador en que se llevó a cabo la simulación y control son: Procesador AMD FX-6300 Six-Core Processor, de una velocidad de 3.50 GHz, memoria RAM de 4 GB y Windows 8.1 pro de 64 bits.

Tabla 7.

Límites operacionales de las variables manipuladas y controladas

Características	Límites de operación	
	Superior	Inferior
VARIABLES MANIPULADAS		
Gap operacional, s_0 , [m]	0,016	0,024
Velocidad periférica de los rodillos, U , [m/s]	0,1	1,21
VARIABLES CONTROLADAS		
Tamaño de partícula bajo el cual se encuentra el 80% en peso del total de mineral chancado, p_{80} , [mm]	0	15
Densidad aparente del material en la zona de extrusión, ρ_{cm} , [kg/m ³]	0	2500

Las Figuras 17-18 muestran los resultados obtenidos de la variación de los setpoints en las variables controladas del proceso con la inclusión de 5% de ruido en el porcentaje de alimentación discreto.

El análisis de estos resultados se basa en el empleo de variables adimensionales en las variables manipuladas y las controladas, con el objetivo de observar su comportamiento en escalas similares.

Las gráfica superior de la Figura 17 describe la respuesta de las variables manipuladas (velocidad periférica de los rodillos U y la distancia entre los rodillos $s0$), mientras que las gráfica inferior representa la respuesta de las variables controladas (densidad del centro de masa del último bloque horizontal de la zona de chancado ρ_{cm} y el tamaño de partícula bajo el cual se encuentra el 80% en peso del total de mineral chancado, $p80$).

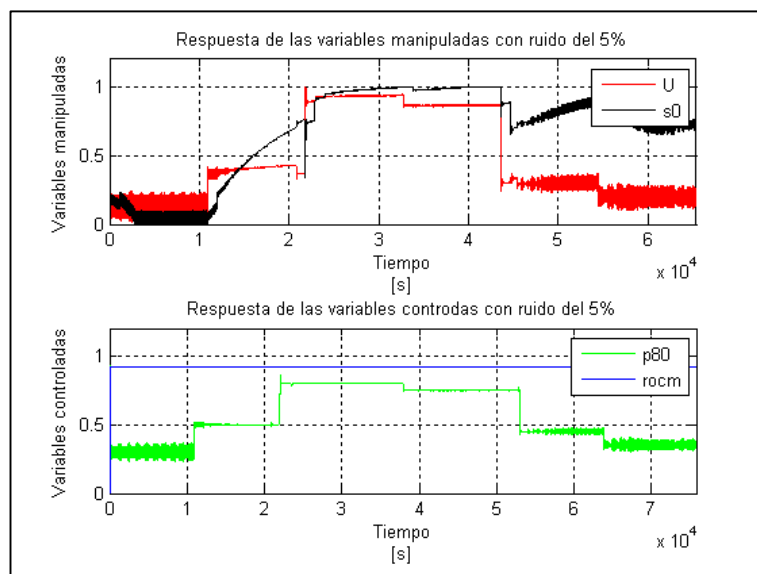


Figura 17. Respuesta de las variables manipuladas al cambiar el setpoint en $p80$ con la inclusión de ruido

Como se puede observar en las gráficas de la Figura 17, el comportamiento de las variables manipuladas y controladas es de tipo oscilante, sin embargo el esquema del control MPC multivariable fue capaz de reestablecer la variable controlada $p80$ alrededor de sus puntos de referencia, evidenciando cambios similares en la velocidad periférica de los rodillos y en el gap operacional.

Al analizar la influencia directa de las variables manipuladas sobre las controladas, se observa que existe una relación proporcional (la cantidad de finos aumenta o disminuye proporcionalmente con los cambios en la velocidad periférica de giro de los rodillos y el gap operacional). Los resultados mostrados dan una clara idea que ambas variables tienen importancia en el modelo, sin embargo la variable $s0$ adopta valores de ajuste mayores en relación a los de U .

Al realizar cambios de setpoint en la variable controlada ρ_{cm} y manteniendo los valores de referencia en p_{80} no se evidencia efecto alguno en el controlador (ver Figura 18), los valores de las variables manipuladas y controladas permanecen constantes. Cabe destacar que el comportamiento del controlador no está fuera de lo común, puesto que el modelo matemático de la planta se lo realizó teniendo la consideración que la tolva de alimentación siempre va a permanecer con carga interna de material.

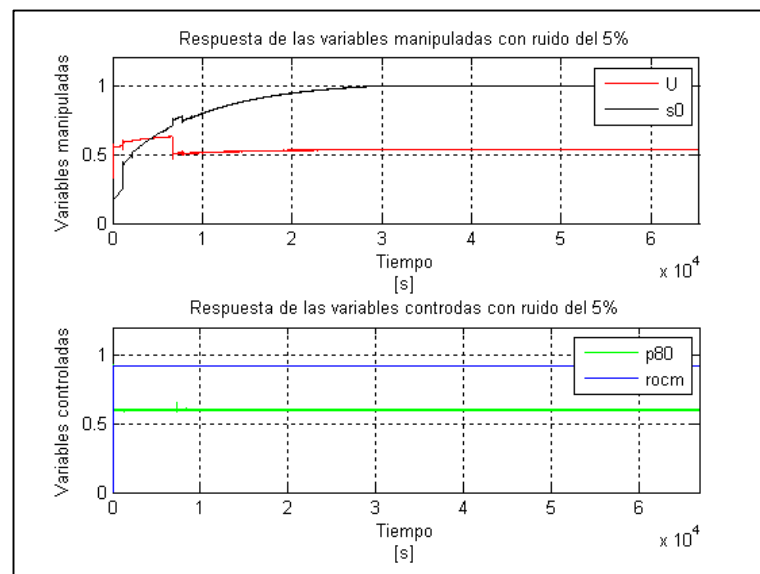


Figura 18. Respuesta de las variables manipuladas al cambiar el setpoint en rocm con la inclusión de ruido

Por otra parte, el comportamiento de la planta sin la inclusión de ruido se destaca por ser ligeramente menos oscilante en comparación con la respuesta al aplicar ruido en el porcentaje de alimentación discreta.

De igual manera como se mencionó en párrafos anteriores al variar los puntos de ajuste en las variables controladas se observa que se mantiene la misma relación entre las entradas y salidas del proceso (ver Figuras 19-20).

Todas las Figuras detalladas (17-20) tienen como objetivo demostrar la capacidad del controlador para manejar múltiples entradas al mismo tiempo, lo que hasta ahora ha sido una tarea difícil para la mayoría de los controladores empleados en operaciones industriales.

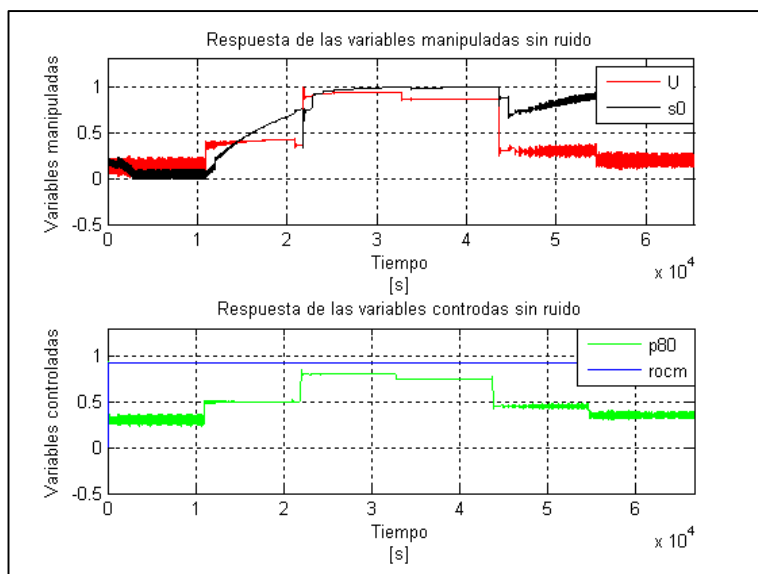


Figura 19. Respuesta de las variables manipuladas al cambiar el setpoint en p80 sin la inclusión de ruido

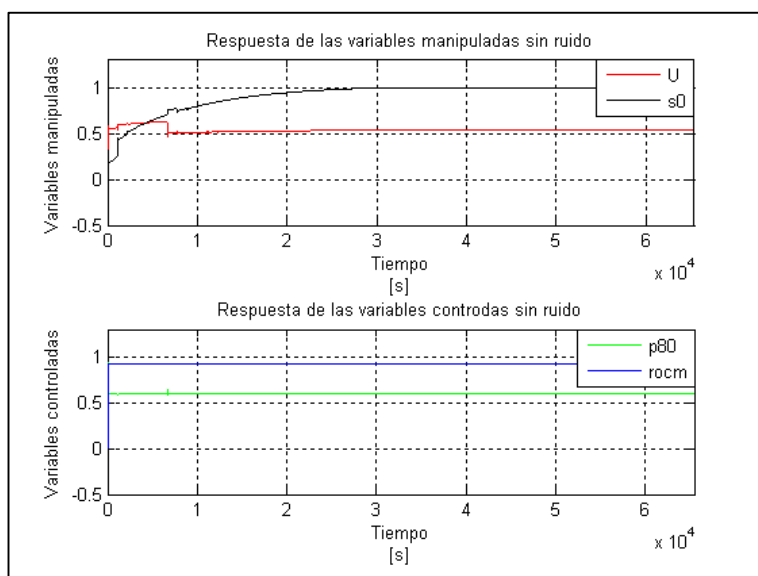


Figura 20. Respuesta de las variables manipuladas al cambiar el setpoint en rocm sin la inclusión de ruido

CAPÍTULO VI

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones

- En el presente proyecto de investigación se desarrolló la modelación dinámica del HPGR considerando la inclusión de una rectificación teórica de los modelos actuales en función de una mejor aproximación del cálculo del vector posición del centro de masa detallado en la sección 3.2.1, en donde el ángulo de centro de masa es un parámetro relevante, ya que define la velocidad de la franja de material y el área de la sección transversal que son considerados en el cálculo del flujo de material circulante entre los rodillos.
- La aplicación del balance de masa general y el poblacional permitió obtener resultados satisfactorios de la distribución granulométrica total de producto que tienen un error de predicción que no supera el 2.5% frente a los resultados de las mediciones tomadas del equipo que corresponden a la planta concentradora La Esperanza reportados en O. Alarcón (2012), demostrando que es un modelo matemático idóneo para su aplicación.
- En el modelo dinámico realizado la cinética de molienda de primer orden se calculó de en base a la aplicación de la expresión de Arrhenius en donde se evidenció que la constante de velocidad tiene una dependencia con la potencia de los rodillos.
- La velocidad periférica de los rodillos y el gap operacional, tienen una influencia directa en la distribución granulométrica del producto, mientras que el efecto provocado mediante la excitación de ambas variables en la densidad aparente del mineral en la zona de extrusión tiene un efecto nulo, manteniendo su valor en el 85% del sólido seco con lo que se demuestra la validez del modelo y el cumplimiento de restricciones bibliográficas.

- Por otra parte, se simuló e implementó un controlador MPC multivariable en un molino de rodillos de alta presión HPGR. Como se muestra en la sección 5.4, la capacidad del simulador desarrollado permitió evaluar distintas condiciones de operación que permite al controlador mantener la variable p_{80} en sus puntos de ajuste, independientemente de la diferencia de regulación de sus setpoints. Sin embargo, a pesar de que el comportamiento del controlador es adecuado, las variables manipuladas velocidad periférica de los rodillos U y gap operacional s_0 no tienen efecto alguno en el control de la densidad aparente del material en la zona de extrusión que se mantiene en un valor aproximado del 85% de la densidad del sólido seco, este comportamiento no es anómalo puesto que la base del modelamiento considera esta característica del equipo resultado de que la tolva de alimentación siempre se encuentre provista de material convirtiendo el control multivariable planteado inicialmente como MIMO en un MISO.
- El tiempo de muestreo es un parámetro influyente al momento de obtener la respuesta del comportamiento del molino al aplicar perturbaciones en las entradas, tiempos muy altos suprimirán señales de respuesta continuas provocando una estimación errónea del comportamiento operacional del HPGR mientras que tiempos muy bajos incrementarán las imprecisiones numéricas en el sistema.
- En la selección de parámetros para emplearse en el controlador los pesos de importancia de las variables manipuladas y controladas determinarán la estabilidad del sistema. En cuanto a los valores del horizonte de predicción y control mejoran la respuesta del sistema en estudio, un aumento indiscriminado de estas ponderaciones provocará un aumento considerable en el tiempo computacional.

6.2 Recomendaciones

- Obtener modelos matemáticos explícitos que permitan calcular de manera directa los parámetros que sean necesarios, con la finalidad de reducir el espacio de memoria empleado en realizar la operación, que tiene un efecto significativo en el tiempo computacional que se demora el ordenador en ejecutar la simulación.
- Para el desarrollo de trabajos futuros en el modelamiento y control del HPGR considerar la presión de operación y el flujo de alimentación inicial como una variable manipulada. En el modelo matemático dinámico realizado en el presente proyecto de investigación no se incluyó la presión de operación por la razón que los límites operaciones descritos en la Tabla 1 no producían cambios en la granulometría total del producto, sin embargo al analizar con valores fuera del rango se evidenciaban variación de la distribución granulométrica. En cuanto al flujo de alimentación, no se consideró puesto que en la base del modelamiento empleado se plantea como una variable dependiente de las características físicas del equipo y de la densidad aparente del material tratado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A., G., & Yan, D. (2016). Mathematical Modelling of Comminution Processes. En G. A., & D. Yan, *Mineral Processing Design and Operations* (págs. 317-355). Radarweng: Relx Group.

Alarcón, O. (2012). *Modelación y simulación dinámica de un molino de rodillos de alta presión (HPGR) para conminución de minerales de cobre*. Santiago de Chile.

Austin, G., & Concha, F. (1994). *Diseño y Simulación de Circuitos de Molienda y Clasificación*. Concepción, Chile: CYTED.

Austin, L. G., & Luckie, P. T. (1972). Estimation of non-normalized breakage distribution. *Powder Technology*, 267-277.

Barrios, G., & L., T. (2016). A preliminary model of high pressure roll grinding using the discrete element method and multi-body dynamics coupling. *International Journal of Mineral Processing*.

Bearman, R. (2006). High-pressure grinding rolls – characterizing and defining process performance for engineers. *Advances in Comminution*, 3-14.

Camacho, E., & Bordons, C. (1998). *Model Predictive Control*. New York: Springer.

Daniel, M., & Morrel, S. (2004). HPGR model verification and scale-up. *Minerals Engineering*, 1149-1161.

Delgado, R. (2013). *Evaluación de un cambio tecnológico para el procesamiento de minerales de alta dureza*. Santiago de Chile.

Feroldi, D. (2012). *Control predictivo basado en el modelo*. Rosario, Argentina.

Genc, O. (2016). Optimization of an industrial scale open circuit three-compartment cement grinding ball mill with the aid of simulation. *International Journal of Mineral Processing*, 1-9.

Genc, O., & A.H., B. (2016). Effect of High Pressure Grinding Rolls (HPGR) pre-grinding and ball mill intermediate diaphragm grate design on grinding capacity of

an industrial scale two-compartment cement ball mill classification circuit. *Minerals Engineering*, 47-56.

Gonzales Zurita, O. O. (2014). *Desarrollo de software para el aprendizaje y estudio del control predictivo en base a modelo (MPC)*. Quito.

H., S. (2016). Process Simulation and Modeling. En M. D. Adams, *Gold Ore Processing* (págs. 141-148). Amsterdam: Book Aid.

Hasanzadeh, V., & Farzanegan, A. (2011). Robust HPGR model calibration using genetic algorithms. *Minerals Engineering*, 425-432.

Herbst, J., & Fuerstenau, D. (1980). Scale-up procedure for continuous grinding mill design. *International Journal of Mineral Processing*, 1-31.

Hinde, A., & Kalala, J. (2009). The application of a simplified approach to modelling tumbling mills, stirred media mills and HPGR's. *Minerals Engineering*, 633-641.

Karelovic, P., Putz, E., & Cipriano, A. (2015). A framework for hybrid model predictive control in mineral processing. *Control Engineering Practice*, 1-12.

Karelovic, P., Putz, E., & Cipriano, A. (2016). Dynamic hybrid modeling and simulation of grinding-flotation circuits for the development of control strategies. *Minerals Engineering*, 65-79.

Karelovic, P., Razzeto, R., & Cipriano, A. (2013). Evaluation of MPC strategies for mineral grinding. *16th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal Processing*, 230-235.

Karra, V. K. (1979). Development of a Model for Predicting the Screening Performance of a Vibrating Screen. *CIM Bulletin*, 167-171.

Klymowsky, R., Patzelt, N., Knecht, J., & Burchardt, E. (2002). Selection and sizing of high pressure grinding rolls. *Mineral processing plant, practice and control*, 636-668.

Klymowsky, R., Patzelt, N., Knecht, J., & Burchardt, E. (2006). An overview of HPGR technology. *Proc. International Conference on Autogenous and Semiautogenous Grinding Technology*, 11-26.

Kumar, A. (2011). *Predicting hpgr performance and understanding rock particle behavior through dem modelling*. Vancouver, Canadá.

Lieberwirth, H., Hillman, P., & Hesse, M. (2016). Dynamics in double roll crushers. *Minerals Engineering*.

Lopera, E., & Mejía, D. (2010). Implementación de un Control Predictivo Basado en Modelo Aplicado a un Sistema de Control de Caudal de Agua Didáctico. *Revistas Tecnológicas*, 109-130.

Lubjuhn, U. (1992). Materialtransport und Druckverteilung im Spalt der Gutbett-Walzenmühle, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 3, Nr. 298, VDI-Verlag. *Dissertation TU Clausthal*.

Maciejowski, J. (2000). *Predictive Control with Constraints*. Harlow, England: Prentice Hall.

Morari, M., & Lawrence, N. (1998). *Model Predictive Control Toolbox for use with Matlab*. Natick: The Math Works Inc.

Morley, C. (2006). High-pressure grinding rolls. *Advances in Comminution*, 15-39.

Morrell, S., Shi, F., & Tondo, L. (1997). Modelling and scale-up of high pressure grinding rolls. *Proc. XX International Mineral Processing Congress*.

Neto, L., Olivares, J., Gatica, J., Ramos, B., & Olmos, H. (2009). Implementation of a Multivariable Controller for Grinding-Classification Process. *IFACMMM*, 55-60.

Numbi, B., & Xia, X. (2015). Systems optimization model for energy management of a parallel HPGR crushing process. *Applied Energy*, 133-147.

Patzelt, N., Klymowsky, R., Knecht, J., & Burchardt, E. (2006). High-pressure grinding rolls for. *Advances in Comminution*, 51-67.

- Philip Schwarz, M., Koh, P., Verelli, D., & Feng, Y. (2015). Sequential multi-scale modelling of mineral processing operations, with application to flotation cells. *Minerals Engineering*.
- Reid, K. J. (1965). A solution to the batch grinding equation. *Chemical Engineering Science*, 953-963.
- Remes, A., Aaltonen, J., & Koivo, H. (2010). Grinding circuit modeling and simulation of particle size control at Siilinjärvi concentrator. *International Journal of Mineral Processing*, 70-78.
- Reza S., A., Reza K., M., & Khoshfarman B., M. (2014). A parametric cost model for mineral grinding mills. *Minerals Engineering*, 96-102.
- Rodríguez Ramirez, D. (2012). *Perpectiva general del control predictivo MIN-MAX*. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Rojas, S. (2006). *Mejoramiento De La Performance Y Gestión Del Dispatch En Cerro Verde*. Lima, Perú.
- Salazar, J., Valdés, H., Vyhmeister, E., & Cubillos, E. (2014). Model predictive control of semiautogenous mills (sag). *Minerals Engineering*, 92–96.
- Santibañez, D. (2009). *Análisis Funcional Molino de Rodillos de Alta Presión (HPGR), para minerales de Cobre, Proyecto Nueva Andina Fase II, Codelco Chile*. Santiago de Chile: Facultad de Ingeniería.
- Saramak, D. (2012). Mathematical models of particle size distribution in simulation analysis of high-pressure grinding roll operations. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, 121-131.
- Saramak, D., Tumidajski, T., Brozek, M., Gawenda, T., & Naziemiec, Z. (2010). Aspects of comminution flowsheets design in processing of mineral raw materials. *Science and Technology-Department of Mineral Processing*, 59-69.
- Steyn, C., Keet, K., & Breytenbach, W. (2013). Optimization and Control of a Primary SAG Mill Using Real-time Grind Measurement. *Metallurgical Technical Engineer*,, 1-15.

- Taggart, A. F. (1954). Handbook of Mineral Dressing. *John Wiley & Sons*, 55-76.
- Torres, M. (2010). *Modelación y simulación de molienda con rodillos a alta presión – HPGR*. Santiago de Chile.
- Torres, M., & Cassali, A. (2009). A novel approach for the modelling of high-pressure grinding rolls. *Minerals Engineering*, 1137–1146.
- Wang, X., Wang, Y., Yang, C., Degang, X., & Gui, W. (2015). Hybrid modeling of an industrial grinding-classification process. *Powder Technology*, 75-85.
- Whiten, W. J. (1973). The simulation of crushing plants. *Applications of computer methods in the*, 317-323.
- Winter, M., Li, W., Kara, S., & Herrmann, C. (2013). Determining optimal process parameters to increase the eco-efficiency of grinding processes. *Journal of Cleaner Production*, 1-11.

ANEXOS



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA


**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y
MECÁNICA
CARRERA DE PETROQUÍMICA**

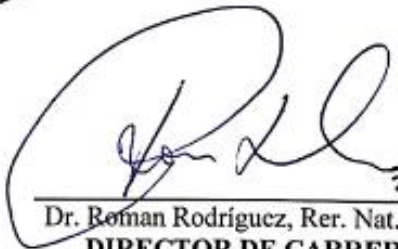
CERTIFICACIÓN

Se certifica que el presente trabajo fue desarrollado por el señor: **Luis Fernando Cepeda Vaca**

En la ciudad de Latacunga, a los 09 días del mes de diciembre del 2016.

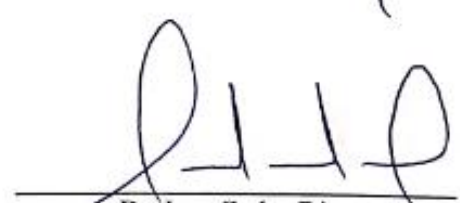
Aprobado por:


Ing. Eduardo Vyhmeister, Ph.D.
DIRECTOR DEL PROYECTO


Dr. Roman Rodriguez, Rer. Nat.
DIRECTOR DE CARRERA



Certificado por:


Dr. Juan Carlos Díaz
SECRETARIO ACADÉMICO