



**ESPE**  
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y  
MECÁNICA**

**CARRERA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL  
TÍTULO DE INGENIERO MECATRÓNICO**

**TEMA: DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO  
DIDÁCTICO DE PÉNDULO INVERTIDO CON 4 DIFERENTES  
TIPOS DE CONTROLADORES**

**AUTOR: CALDERÓN PALACIOS, GUIDO FABRICIO**

**DIRECTOR: ING. LOZA, DAVID**

**SANGOLQUÍ**

**2017**



**ESPE**  
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA**  
**CARRERA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA**

**CERTIFICACIÓN**

Certifico que el trabajo de titulación, “**Diseño y construcción de un prototipo didáctico de péndulo invertido con 4 diferentes tipos de controladores**” realizado por el señor **Guido Fabricio Calderón Palacios**, ha sido revisado en su totalidad por el software anti-plagio, el mismo cumple con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, por lo que me permito acreditarlo y autorizar al señor **Guido Fabricio Calderón Palacios** para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 24 de enero del 2017

Una firma manuscrita en tinta azul que parece decir 'David Loza', escrita sobre una línea horizontal.

Msc. David Loza

DIRECTOR



**ESPE**  
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA**  
**CARRERA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA**

**AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD**

Yo, **Guido Fabricio Calderón Palacios**, con cédula de identidad N° 1003946223, declaro que este trabajo de titulación **“Diseño y construcción de un prototipo didáctico de péndulo invertido con 4 diferentes tipos de controladores”** ha sido desarrollado considerando los métodos de investigación existente, así como también se ha respetado los derechos intelectuales de terceros considerándose en las citas bibliográficas

Consecuentemente declaro que este trabajo es de mi autoría, en virtud de ello me declaro responsable del contenido, veracidad y alcance de la investigación mencionada

Sangolquí, 24 de enero del 2017

Guido Fabricio Calderón Palacios

C.C: 1003946223



**ESPE**  
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA**  
**CARRERA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA**

**AUTORIZACIÓN**

Yo, **Calderón Palacios Guido Fabricio**, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar en la biblioteca virtual de la institución el presente trabajo de titulación **“Diseño y construcción de un prototipo didáctico de péndulo invertido con 4 diferentes tipos de controladores”** cuyo contenido, ideas y criterios, son de mi autoría y responsabilidad.

Sangolquí, 24 de enero del 2017

Guido Fabricio Calderón Palacios

C.C: 1003946223

# Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi familia que en todo momento estuvo conmigo guiándome y aconsejándome para ser una persona de bien y siempre salir adelante. Definitivamente la familia es el pilar fundamental en una persona y siempre va a estar contigo en las buenas y malas.

El presente proyecto lo dedico también a todos mis amigos de los cuales tengo gratos recuerdos y he aprendido mucho tanto de temas académicos como de temas de la vida cotidiana.

Dedico el presente proyecto además a mi novia Alexandra que cada día me da fuerzas para continuar y me ha demostrado que con esfuerzo y dedicación se pueden conseguir grandes cosas.

*Guido Calderón Palacios*

# Agradecimientos

En primer lugar agradezco a Dios por permitirme culminar con éxito esta etapa de mi vida estudiantil, por llenarme de sabiduría y constancia para nunca decaer por más duro que fuese el camino. A mis padres Guido y Lucía por la gran paciencia que han tenido hacia mí y por el amor con el que supieron guiarme durante toda mi vida además de llenarme de consejos que me han servido para llevar una vida correcta y de bien, lo cual he puesto en práctica en mi vida cotidiana.

Agradezco también a mis hermanos Mabelita, Cae y Josué que con sus consejos, bromas y ocurrencias me han enseñado a conocer la importancia de tener un apoyo constante e incondicional en casa. También quiero agradecer por este logro a un hermano que me dio la vida y que me acompañó desde el primer hasta el último día en la universidad, sin tu apoyo y consejos esto no sería posible Luigui.

A todos los amigos que hice en mi vida universitaria ya que de cada uno aprendí algo valioso que pude poner en práctica y en su momento demostraron ser muy valiosos para mí. A mi novia Alexandra que con su cariño se convirtió en un apoyo incondicional para mí para poder alcanzar este logro.

Finalmente quiero agradecer a mi director de tesis de grado Msc. David Loza por permitirme ser parte de este proyecto y por su gran paciencia al instruirme para llevar a cabo de la mejor manera este.

Gracias a todos los que de alguna u otra manera contribuyeron en mi vida universitaria, sin sus enseñanzas y palabras de aliento, este proyecto no hubiera concluido con éxito.

*Guido Calderón Palacios*

# Índice general

Certificación.....	ii
Autoría de responsabilidad .....	iii
Autorización.....	iv
Dedicatoria.....	v
Agradecimientos .....	vi
Resumen.....	xviii
Abstract.....	xix
Capítulo 1.....	1
Generalidades.....	1
1.1. Planteamiento de problema .....	1
1.2. Antecedentes .....	2
1.3. Péndulos invertidos en la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE .....	7
1.4. Objetivos .....	8
1.4.1. Objetivo General .....	8
1.4.2. Objetivos específicos .....	8
1.5. Alcance .....	8
1.6. Justificación.....	9
1.7. Estructura del documento .....	9
Capítulo 2.....	11
Marco teórico.....	11
2.1. Teoría de control .....	11
2.1.1. Sistemas de control .....	12
2.1.2. Ejemplos de sistemas de control .....	13
2.1.3. Función de transferencia .....	16
2.1.4. Espacio de estados.....	17
2.1.5. Sistemas lineales .....	18
2.1.6. Sistemas no lineales .....	19
2.1.7. Linealización de sistemas no lineales .....	20
2.1.8. Estrategia de control de sistemas lineales .....	20

2.1.9.	Estabilidad de sistemas de control lineales .....	21
2.1.10.	Métodos para determinar la estabilidad.....	22
2.1.11.	Controlabilidad y Observabilidad .....	25
2.2.	Tipos de controladores .....	26
2.2.1.	Controlador PID .....	26
2.2.2.	Controlador LQR .....	32
2.2.3.	Controlador Fuzzy.....	35
2.3.	Sensores en un péndulo invertido.....	40
2.3.1.	Acelerómetro.....	40
2.3.2.	Giroscopio .....	43
2.4.	Modelo de un péndulo invertido.....	45
2.4.1.	Análisis de fuerzas y sistemas de ecuaciones de un péndulo invertido.....	45
2.4.2.	Función de transferencia de un péndulo invertido .....	47
2.4.3.	Espacio de estados en un péndulo invertido .....	48
2.5.	Resumen .....	50
Capítulo 3.....		52
Metodología y diseño de la plataforma.....		52
3.1.	Definición del concepto.....	52
3.1.1.	Definición de necesidades.....	52
3.1.2.	Definición de características técnicas .....	53
3.1.3.	QFD.....	54
3.2.	Definición de la estructura funcional .....	55
3.3.	Módulo 1. Base.....	56
3.3.1.	Alternativas para diseño .....	57
3.3.2.	Evaluación y selección de alternativas.....	59
3.3.3.	Definición del diseño .....	61
3.4.	Módulo 2. Tracción .....	62
3.4.1.	Alternativas para diseño .....	62
3.4.2.	Evaluación y selección de alternativas.....	65
3.4.3.	Definición del diseño .....	66
3.5.	Módulo 3. Potencia.....	70
3.5.1.	Alternativas para diseño .....	70
3.5.3.	Definición del diseño .....	74
3.6.	Módulo 4. Energía .....	75
3.6.1.	Alternativas para diseño .....	75

3.6.3.	Definición del diseño .....	78
3.7.	Módulo 5. Posicionamiento angular.....	81
3.7.1.	Alternativas para diseño.....	81
3.7.3.	Definición del diseño .....	85
3.8.	Módulo 6. Adquisición y mando.....	86
3.8.1.	Alternativas para diseño.....	86
3.8.3.	Definición del diseño .....	89
3.9.	Módulo 7. Control .....	91
3.9.1.	Alternativas para diseño.....	91
3.9.3.	Definición del diseño .....	96
3.10.	Definición de concepto final.....	104
3.11.	Resumen.....	105
Capítulo 4.....		107
Construcción y funcionamiento.....		107
4.1.	Construcción de la plataforma.....	107
4.1.1.	Manufactura de las bases acrílicas .....	107
4.1.2.	Instalación de motores.....	108
4.1.3.	Instalación de elementos operativos .....	108
4.1.4.	Instalación shield LCD en Arduino UNO.....	109
4.1.5.	Instalación de soportes metálicos hexagonales .....	109
4.1.6.	Instalación del sensor .....	110
4.1.7.	Conexión de componentes operativos.....	110
4.2.	Pruebas y funcionamiento .....	111
4.2.1.	Evaluación y resultados PID .....	111
4.2.2.	Evaluación y resultados Fuzzy.....	113
4.2.3.	Evaluación y resultados PID-Fuzzy.....	115
4.2.4.	Evaluación y resultados LQR.....	116
4.3.	Comparación de resultados .....	118
4.4.	Resumen .....	119
Capítulo 5.....		121
Conclusiones y Recomendaciones.....		121
5.1.	Conclusiones .....	121
5.2.	Recomendaciones .....	122
Fuentes de consulta.....		124

Apéndice A .....	128
Planos de construcción de la plataforma de péndulo invertido .....	128
A.1. Planos de ensamble.....	129
A.2. Vista explosionada.....	130
A.3. Base inferior .....	131
A.4. Base media.....	132
A.5. Base superior .....	133
A.6. Acople motor .....	134
A.7. Diagrama eléctrico/electrónico.....	135

# Índice de figuras

Figura 1. Vehículo Personal SEGWAY .....	1
Figura 2. Tipos de péndulo invertido.....	4
Figura 3. Cohete Espacial .....	5
Figura 4. Robot Humanoide ASIMO de Honda .....	5
Figura 5. Segway Human Transporter .....	6
Figura 6. Esquema general de un sistema.....	12
Figura 7. Esquema general de un sistema de control.....	13
Figura 8. Ejemplo de sistema de control de velocidad .....	14
Figura 9. Ejemplo de sistema de control de temperatura.....	15
Figura 10. Diagrama de bloques de un sistema de organización en ingeniería.....	16
Figura 11. Diagramas de bloques de un control lineal en tiempo continuo representado en espacio de estados .....	18
Figura 12. Sistema lineal multivariable .....	19
Figura 13. Sistema de péndulo invertido .....	19
Figura 14. Curva par-velocidad de un sistema de amplificador/motor de cd con saturación en el amplificador y realimentación de corriente .....	20
Figura 15. Regiones estable e inestable en el plano s.....	22
Figura 16. Diagrama de Nyquist.....	24
Figura 17. Ejemplo de Diagrama de Bode.....	25
Figura 18. Diagrama de estado de un sistema de estado no controlable .....	26
Figura 19. Diagrama de estado de un sistema que no es observable .....	26
Figura 20. Diagrama de bloques de un PID.....	27
Figura 21. Respuesta a un escalón unitario de una planta .....	29
Figura 22. Curva de respuesta en forma de S .....	30
Figura 23. Sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional .....	31

Figura 24. Oscilación sostenida con periodo $P_{cr}$ (seg).....	31
Figura 25. Regulador LQR .....	33
Figura 26. Diseño de un sistema por control de lógica difusa.....	35
Figura 27. Diagrama de control Fuzzy modificado .....	39
Figura 28. Operaciones en lógica difusa.....	39
Figura 29. Diferentes tipos de acelerómetros .....	40
Figura 30. Esquema acelerómetro mecánico .....	41
Figura 31. Diagrama de un acelerómetro piezo-eléctrico.....	41
Figura 32. Diagrama de un acelerómetro piezo-resistivo .....	42
Figura 33. Principio de funcionamiento de un acelerómetro capacitivo .....	42
Figura 34. Acelerómetro micromecánico .....	43
Figura 35. Giroscopio MEMS .....	44
Figura 36. Funcionamiento interno de un sensor giroscópico MEMS .....	44
Figura 37. Diagramas de cuerpo libre del sistema.....	45
Figura 38. Casa de la calidad .....	55
Figura 39. Péndulo invertido sobre carro.....	57
Figura 40. Péndulo invertido de base con movimiento giratorio.....	58
Figura 41. Péndulo invertido de base móvil con ruedas .....	59
Figura 42. Ubicación elementos en la base.....	62
Figura 43. Motor a pasos .....	63
Figura 44. Servomotor .....	63
Figura 45. Motor DC .....	64
Figura 46. Cargas en reposo sobre una rueda motorizada .....	67
Figura 47. Cargas en el desplazamiento de una rueda motorizada.....	68
Figura 48. Cargas presentes en el desplazamiento de una rueda motorizada desde el reposo.....	69

Figura 49. Puente H con transistores .....	70
Figura 50. Puente H con circuito integrado .....	71
Figura 51. Control con optoacopladores .....	72
Figura 52. Celda solar .....	75
Figura 53. Mini alternador .....	76
Figura 54. Batería LiPo.....	77
Figura 55. Acelerómetro micromecánico .....	82
Figura 56. Sensores magnéticos de posición angular .....	82
Figura 57. Encoder rotativo .....	83
Figura 58. Arduino UNO .....	86
Figura 59. Raspberry Pi 2 .....	87
Figura 60. Beaglebone Green .....	87
Figura 61. Ubicación de elementos en la parte superior.....	91
Figura 62. Control PID de una planta .....	91
Figura 63. Arquitectura de un controlador difuso.....	92
Figura 64. Diagrama de un controlador PID-Difuso con una planta .....	93
Figura 65. Modelo de una red neuronal .....	94
Figura 66. Sistema regulador óptimo.....	94
Figura 67. Reglas de control Fuzzy .....	100
Figura 68. Representación gráfica de las reglas de control .....	100
Figura 69. Reglas de control Fuzzy .....	102
Figura 70. Representación gráfica de las reglas de control .....	102
Figura 71. Modelo CAD de la plataforma de péndulo invertido .....	105
Figura 72. Bases en acrílico.....	108
Figura 73. Colocación de motores y sus respectivos acoples y ruedas.....	108
Figura 74. Colocación de elementos operativos. ....	109

Figura 75. Colocación shield LCD en arduino UNO.....	109
Figura 76. Colocación soportes metálicos hexagonales. ....	110
Figura 77. Colocación de sensor en placa acrílico.....	110
Figura 78. Conexión de componentes operativos .....	111
Figura 79. Respuesta del controlador PID .....	112
Figura 80. Respuesta ante perturbaciones control PID.....	113
Figura 81. Respuesta del controlador FUZZY .....	113
Figura 82. Respuesta ante perturbaciones control Fuzzy .....	114
Figura 83. Respuesta del controlador PID-Fuzzy .....	115
Figura 84. Respuesta ante perturbaciones control PID-Fuzzy.....	116
Figura 85. Respuesta del controlador LQR .....	117
Figura 86. Respuesta ante perturbaciones control LQR .....	118
Figura 87. Comparativa Tiempo establecimiento.....	119

# Índice de tablas

Tabla 1. Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la respuesta escalón de la planta.....	30
Tabla 2. Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la ganancia $K_{cr}$ y periodo $P_{cr}$ .....	32
Tabla 3. Funciones de un conjunto difuso .....	36
Tabla 4. Detalle de necesidades.....	53
Tabla 5. Detalle de características técnicas .....	53
Tabla 6. Resultados de la matriz QFD.....	55
Tabla 7. Módulos de la plataforma de péndulo invertido .....	56
Tabla 8. Ponderación de criterios de evaluación del módulo 1 .....	60
Tabla 9. Ponderación de costo del módulo 1 .....	60
Tabla 10. Ponderación de implementación del módulo 1.....	60
Tabla 11. Ponderación de control del módulo 1 .....	61
Tabla 12. Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 1 .....	61
Tabla 13. Ponderación de criterios de evaluación del módulo 2 .....	65
Tabla 14. Ponderación de costo del módulo 2 .....	65
Tabla 15. Ponderación de implementación del módulo 2.....	65
Tabla 16. Ponderación de control del módulo 2 .....	66
Tabla 17. Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 2 .....	66
Tabla 18. Características motor DC.....	70
Tabla 19. Ponderación de criterios de evaluación del módulo 3 .....	73
Tabla 20. Ponderación de costo del módulo 3 .....	73
Tabla 21. Ponderación de funcionamiento del módulo 3 .....	73
Tabla 22. Ponderación de modularidad del módulo 3 .....	73
Tabla 23. Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 3 .....	74

Tabla 24. Características del controlador L298N .....	75
Tabla 25. Ponderación de criterios de evaluación del módulo 4 .....	77
Tabla 26. Ponderación de costo del módulo 4 .....	78
Tabla 27. Ponderación de implementación del módulo 4.....	78
Tabla 28. Ponderación de tamaño del módulo 4.....	78
Tabla 29. Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 4.....	78
Tabla 30. Clasificación S de las baterías LiPo.....	80
Tabla 31. Características de la batería LiPo usada en la plataforma .....	81
Tabla 32. Ponderación de criterios de evaluación del módulo 5 .....	84
Tabla 33. Ponderación de costo del módulo 5 .....	84
Tabla 34. Ponderación de precisión del módulo 5 .....	84
Tabla 35. Ponderación de robustez del módulo 5 .....	84
Tabla 36. Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 5 .....	85
Tabla 37. Características del acelerómetro/giroscopio MPU-6050 .....	85
Tabla 38. Ponderación de criterios de evaluación del módulo 6 .....	88
Tabla 39. Ponderación de costo del módulo 6 .....	88
Tabla 40. Ponderación de robustez del módulo 6.....	89
Tabla 41. Ponderación de programación del módulo 6 .....	89
Tabla 42. Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 6.....	89
Tabla 43. Comparación de los principales sistemas arduino .....	90
Tabla 44. Características del Arduino UNO .....	90
Tabla 45. Ponderación de criterios de evaluación del módulo 7 .....	95
Tabla 46. Ponderación de sencillez del módulo 7 .....	95
Tabla 47. Ponderación de robustez del módulo 7 .....	96
Tabla 48. Ponderación de implementación del módulo 7.....	96
Tabla 49. Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 7.....	96

Tabla 50. Variables de entrada del controlador Fuzzy. ....	98
Tabla 51. Variable de salida del controlador Fuzzy .....	98
Tabla 52. Reglas de control Fuzzy.....	99
Tabla 53. Variables de entrada del controlador Fuzzy. ....	101
Tabla 54. Variable de salida del controlador Fuzzy .....	101
Tabla 55. Reglas de control Fuzzy.....	102
Tabla 56. Detalle de componentes de la plataforma de péndulo invertido.....	105
Tabla 57. Resultados del Controlador PID .....	112
Tabla 58. Resultados del Controlador Fuzzy.....	114
Tabla 59. Resultados del Controlador PID-Fuzzy.....	115
Tabla 60. Resultados del Controlador LQR.....	117
Tabla 61. Comparación de resultados controladores .....	118

# Resumen

En el trabajo presentado a continuación se diseña y se construye una plataforma de péndulo invertido cuyo objetivo es implementar en el mismo diferentes tipos de controladores para que tenga un uso didáctico para estudiantes. En la primera parte del documento, que corresponde a los capítulos 1 y 2, se detallan conceptos básicos de la teoría de control que servirán para entender los 4 diferentes tipos de controladores que se incorporarán en la plataforma. Además se hace una descripción de los sensores necesarios en una plataforma de este tipo y los diferentes tipos de sensor que existen para esta aplicación.

En la segunda parte, detallada en el capítulo 3, se muestra el desarrollo de las alternativas de diseño y su análisis correspondiente para determinar la mejor opción para implementar en la plataforma. En esta parte del documento se dividen en varios módulos los cuales corresponden a un segmento específico del robot. Aquí se detalla las características, el funcionamiento y la arquitectura de cada uno de estos módulos.

En el capítulo 4 se observa el proceso de construcción de la plataforma de péndulo invertido y se exponen las pruebas realizadas con cada controlador sobre el robot. El presente trabajo finaliza con las conclusiones obtenidas del mismo y con recomendaciones para futuros trabajos en base a lo presentado en este proyecto.

## **PALABRAS CLAVES:**

- **PÉNDULO INVERTIDO**
- **ACELERÓMETRO**
- **GIROSCOPIO**
- **CONTROL PID**
- **CONTROL DIFUSO**
- **CONTROL PID DIFUSO**
- **REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL**

# Abstract

In the present work, a pendulum inverted platform is designed and built with objective is to implement different types of controllers which will have educational use for students. In the first part of the document there are two chapters, where you can find basic concepts about the control theory which will help to understand the next 4 types of controllers that will be incorporated in the platform. Also we made a description about the different types of sensors that exist related to.

In the second part, detailed in chapter 3, it shows the process of the alternatives for the design and the analysis, to help to determine the best option to implement in the platform. In this part of the document, it is divided in different modules which correspond for a specific robot segment. This part contains in detail about the architecture and the robot's operation.

In the chapter 4 it can be seen the process of the inverted pendulum platform construction and the test performed with each controller is also exposed, the present work ends with the obtained conclusions and the recommendations for future works.

## KEYWORDS:

- **INVERTED PENDULUM**
- **ACCELEROMETER**
- **GYROSCOPE**
- **PID CONTROL**
- **FUZZY CONTROL**
- **PID FUZZY CONTROL**
- **LINEAR QUADRATIC REGULATOR**

# Capítulo 1

## Generalidades

El capítulo redacta acerca de los antecedentes de los péndulos invertidos, haciendo especialmente un enfoque en los péndulos de carro que será el tipo estudiado en el presente documento. El planteamiento del problema, la motivación por la que se realizará el presente proyecto y la justificación del mismo serán los temas a analizar en el primer capítulo.

### 1.1. Planteamiento de problema

La idea de un Péndulo Invertido Móvil ha ido tomando valor e importancia en nuestra sociedad con la aparición de vehículos comerciales como Segway Personal Transporter (Segway, 2012), Figura 1; lo que ha reimpulsado el estudio de la teoría del péndulo invertido y lo ha convertido en un área llamativa para realizar trabajos de investigación.



**Figura 1. Vehículo Personal SEGWAY**  
Fuente: Segway, 2012

En la actualidad los centros de educación superior del Ecuador y la comunidad científica ecuatoriana han sido incentivados por medio de la Secretaria Nacional de Ciencia y Tecnología (SENACYT) a realizar proyectos de investigación con la finalidad de generar mayor conocimiento, por lo que la construcción de una plataforma de péndulo invertido es un buen inicio para realizar posteriores investigaciones; considerando que servirá como una plataforma didáctica en los laboratorios de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE.

Uno de las publicaciones científicas más importantes es “JOE: A Mobile, Inverted Pendulum”, donde se presenta un sistema basado en dos controles de espacios de estado desacoplados, uno controla la estabilidad del eje lateral (yaw) y el segundo actúa en la dinámica del eje vertical (pitch), donde la unidad de desacoplamiento transforma la salida de cada controlador, y se traduce en un par que mueve los motores (Colombi y Rufer, 2002). Otro texto de gran valor es “A new family of two-wheeled mobile robots: Modeling and controllability”, donde se manifiesta un análisis de accesibilidad local y un análisis de controlabilidad en un pequeño tiempo, para que de esta manera se pruebe si el torque es el suficiente para usarse en los motores (Salerno & Ángeles, 2003).

En la actualidad las instituciones educativas necesitan dispositivos para fines de investigación o fines didácticos los cuales generalmente son importados, es decir, tienen un alto costo ya que en el país no se desarrollan estos equipos y/o tecnologías. Este tipo de equipos son utilizados en los laboratorios donde se estudia la teoría de control. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente surge la necesidad de diseñar una plataforma didáctica de péndulo invertido para los laboratorios de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE.

## **1.2. Antecedentes**

Desde hace varios años los investigadores le han prestado singular interés al área de la ingeniería de control que estudia los sistemas mecánicos subactuados debido a que este tipo de sistemas ofrecen un ahorro de energía y esfuerzos de control. Esto se realiza con la finalidad de que los sistemas subactuados realicen las mismas tareas que los

sistemas mecánicos completamente actuados, pero solucionando los problemas de control que estos representan utilizando menos actuadores que grados de libertad. (Cruz, M., Márquez, C., Silva R. y Merlo C., 2014)

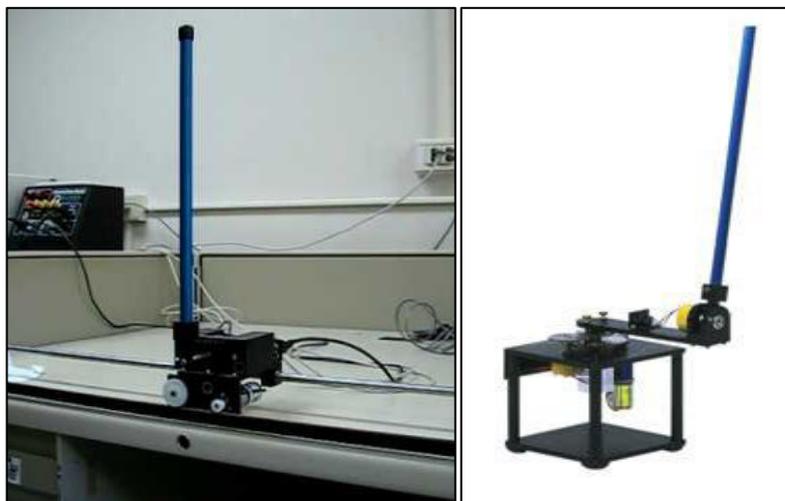
Un ejemplo de los sistemas subactuados es el péndulo invertido, el cual es un buen punto de referencia para muchos problemas de control como los siguientes:

- Identificación de parámetros
- Modelado
- Control de posición y velocidad
- Control no lineal
- Compensación por fricción

De esta manera se han desarrollado dos tipos de péndulos invertidos, dependiendo del mecanismo que los mueve:

- Péndulo con movimiento lineal sobre un carro
- Péndulo con movimiento giratorio

El péndulo invertido con movimiento lineal sobre un carro corresponde a una estructura común de un péndulo invertido. Esto consiste en un carro sobre un riel horizontal y un péndulo con un desplazamiento angular en el plano vertical conectado a un extremo del carro como se muestra en la figura 2-a. Este tipo de estructura tiene un límite en su movimiento que cuenta como una restricción de control.



a)

b)

**Figura 2. Tipos de péndulo invertido.**

a) Péndulo invertido sobre carro) y b) Péndulo de Furuta

Fuente: Cruz, M., Márquez, C., Silva R. y Merlo C. (2014)

El péndulo invertido con movimiento giratorio o mejor conocido como péndulo de Furuta (en honor a su inventor, el profesor del Tokio Institute of technology, K. Furuta), está conformado por 2 eslabones llamados brazo y péndulo, y 2 articulaciones rotacionales como se muestra en la Figura 2-b.

En un extremo del brazo se ubica un motor que funciona como actuador realizando un movimiento angular sobre el plano horizontal, mientras que en el extremo libre del brazo se conecta el péndulo por medio de una articulación que gira libremente y permite la rotación de este último en el plano vertical.

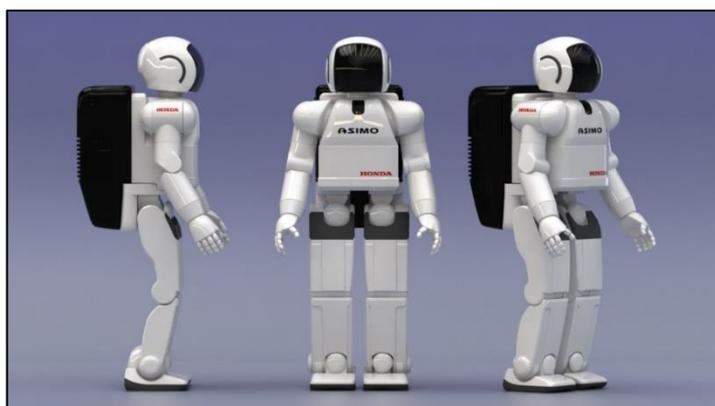
Ejemplos de sistemas mecánicos subactuados los podemos encontrar en diferentes objetos tales como: robots móviles y caminantes, cohetes espaciales, satélites, aviones de despegue vertical, helicópteros, proyectiles, submarinos, etc. Donde este tipo de sistemas tiene un control ligado al sector industrial ya que han mejorado la calidad de los productos, aumentado la eficiencia de los procesos, reducción del consumo de energía, entre otros.

Los péndulos invertidos se encuentran en sectores como el aeroespacial donde se busca que el control activo de un cohete se mantenga en la posición vertical invertida durante el despegue como se observa en la figura 3.



**Figura 3. Cohete Espacial**  
Fuente: NASA, 2012

Otro sector donde se encuentran péndulos invertidos es en la biomecánica donde se los utiliza para diseñar bípedos caminantes como el robot ASIMO de Honda, mostrado en la figura 4. En este tipo de robot la pierna de apoyo que toca el suelo se acostumbra a modelar como un péndulo invertido, mientras que la pierna que realiza el movimiento se modela como un péndulo oscilatorio libre, que se suspende de la cadera del humanoide (Honda, 2015).



**Figura 4. Robot Humanoide ASIMO de Honda**  
Fuente: HONDA, 2015

Un sector donde se usa un péndulo invertido y que en los últimos años ha tomado fuerza, es el sector del transporte, como podemos ver en la figura 5. Este artefacto es el Segway Human Transporter (Segway, 2012), el cual es un péndulo invertido con un

control basado en entradas sensoriales de giroscopios y un sistema de control computarizado que da balance a las personas mientras el dispositivo está avanzando.



**Figura 5. Segway Human Transporter**  
Fuente: Segway, 2012

Además de los ejemplos mostrados anteriormente, existen varias aplicaciones de los péndulos invertidos como la estabilización de grúas, estabilización de balanceo de barcos y automóviles, posicionamiento satelital, entre otros. De esta manera el estudio de los péndulos invertidos constituye un punto de referencia para entender problemas de dinámica y el control no lineal.

Los péndulos invertidos representan un dispositivo de pruebas muy completo para la teoría de control, donde se deben utilizar controladores como el PID, Fuzzy o LQR para un correcto funcionamiento. Esta teoría es poco utilizada en los laboratorios de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, y aunque ya se cuenta con una plataforma de péndulo invertido, esta no usa los controladores que se van a analizar en el presente proyecto.

Observando estos antecedentes y la necesidad de tener un conocimiento más amplio sobre este tipo de controladores y probarlos en algún dispositivo, se decidió realizar el presente proyecto de investigación con la finalidad de que los estudiantes sepan

diseñar los controladores y compararlos en una plataforma de péndulo invertido sobre la cual actuarán.

### **1.3. Péndulos invertidos en la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE**

En las diferentes sedes Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, los péndulos invertidos han sido un tema de gran interés como tema de investigación ya sea en las facultades de electrónica o mecatrónica. Un par de ejemplos donde se usa la teoría del péndulo invertido se muestran a continuación:

Artículo Científico - Diseño y construcción de un vehículo eléctrico autobalanceado personal (VEAP) de dos ruedas en paralelo estilo SEGWAY. (Repositorio Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, extensión Latacunga. Carrera de Ingeniería Automotriz, 2014). El proyecto presenta el diseño y construcción de un vehículo eléctrico autobalanceado personal (VEAP) de dos ruedas en paralelo estilo Segway. Este tipo de vehículos usa la teoría de péndulo invertido para su estabilidad y equilibrio durante su desplazamiento, todo esto sumado a las condiciones mecánicas y de control del vehículo.

Diseño e implementación de un controlador difuso para el sistema carro-péndulo del laboratorio de Servomecanismos (Repositorio Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, Sede Sangolquí. Carrera de Ingeniería Electrónica en Automatización y Control, 2012). El proyecto presenta el diseño y la construcción de un carro-péndulo utilizando un controlador difuso. Este dispositivo usa los principios de un péndulo invertido y explica la obtención y desarrollo del modelo matemático no lineal. Este dispositivo es una plataforma didáctica para los laboratorios de Servomecanismos de la Universidad.

## **1.4. Objetivos**

### **1.4.1. Objetivo General**

Diseñar y construir una plataforma didáctica de péndulo invertido con 4 diferentes tipos de controladores, mediante el uso de software libre para el laboratorio de manufactura de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE.

### **1.4.2. Objetivos específicos**

- Diseñar y construir una estructura mecánica para el movimiento autónomo de la plataforma de bajo costo y bajo peso.
- Evaluar el comportamiento de la plataforma con cada uno de los controladores.

## **1.5. Alcance**

La plataforma de péndulo invertido presenta los siguientes alcances, las cuales representan condiciones de diseño del presente proyecto.

La plataforma contará con una estructura mecánica resistente con la capacidad de soportar eventuales golpes o caídas.

Se debe eliminar perturbaciones para que los controladores funcionen de mejor manera y no exista errores.

Los controladores usados en este proyecto deberán permitir un tiempo de estabilización menor a 1 segundo.

Controladores robustos, es decir, que cumpla con todos los requerimientos de diseño.

Al momento de efectuar una acción de control la plataforma tendrá un margen de error de posición menor a 2°.

## **1.6. Justificación**

La fabricación de la plataforma de péndulo invertido permite a estudiantes implementar diferentes tipos de controladores en una misma planta y así poner en práctica conocimientos aprendidos. Esto además, tendría una gran repercusión económica ya que generalmente estas plataformas son importadas a un costo elevado.

El desarrollo de este tipo de tecnología de diseño y elaboración de equipos modernos de laboratorio de uso cotidiano (plataforma de péndulo invertido) representa un impacto educativo en las instituciones. Especialmente en esta época de innovación tecnológica, donde se busca incentivar la investigación en universidades.

El proyecto hará especial énfasis en lo que a recursos tecnológicos se refiere ya que con la plataforma de péndulo invertido se podrán realizar prácticas de laboratorio, lo que permitirá a los estudiantes desarrollar nuevos equipos para posteriores investigaciones.

El diseño y la construcción de la plataforma de péndulo invertido demuestran que la utilización de una plataforma de código abierto y el uso de componentes de fácil adquisición en el entorno nacional, es una buena opción para la fabricación de equipos didácticos de control sin reducir la eficiencia de los mismos.

## **1.7. Estructura del documento**

El presente documento se estructura en cinco capítulos donde se describirá toda la información relacionada para desarrollar un prototipo didáctico de péndulo invertido con 4 diferentes tipos de controladores. En el primer capítulo se detallan los aspectos o requisitos previos para realizar una investigación. El segundo capítulo detalla los conceptos necesarios sobre teoría de control, modelo de péndulo invertido, sus características y los componentes que se utilizarán en el proyecto.

El tercer capítulo trata de las fases de diseño mecánico, eléctrico-electrónico y de control donde se detalla el dimensionamiento de los componentes y los diferentes controladores. El capítulo cuatro detalla los procedimientos de construcción de la

plataforma de péndulo invertido así como también la implementación de los elementos electrónicos y del sistema de control.

En el quinto y último capítulo se detallan las pruebas de las etapas mecánica, eléctrica-electrónica y de control, en la plataforma de péndulo invertido ya acoplada. Además de esto se indican los resultados de dichas pruebas en todas las etapas de acoplamiento.

También se presenta un análisis económico el proyecto, así como también conclusiones y recomendaciones que dejó el mismo.

# Capítulo 2

## Marco teórico

El capítulo estudiará la teoría necesaria sobre los péndulos invertidos, la cual nos servirá de base para la construcción del mismo. La teoría de control general, sensores y tipos de controladores son parte de la teoría estudiada en este capítulo con lo que nos involucraremos en el funcionamiento de un péndulo y en sus fundamentos matemáticos para su posterior implementación.

### 2.1. Teoría de control

Los péndulos invertidos son dispositivos los cuales se usan como bancos de pruebas ya que constituyen una completa fuente de aplicación de conocimientos sobre la teoría de control. Un péndulo invertido es un modelo de control de posición de un propulsor primario espacial para despegues donde el objetivo del problema del control de posición es conservar el propulsor primario espacial en una posición vertical. El péndulo invertido es inestable porque puede girar en cualquier momento y en cualquier dirección a menos que se aplique una fuerza de control según lo que convenga (Ogata, 2010).

Un péndulo invertido es un sistema mecánico inestable en lazo abierto y de fase no mínima, semejante a un proyectil por su dinámica de un artefacto volador. En la parte mecánica de un sistema de péndulo invertido se deben analizar zonas muertas y juego en el ensamble del prototipo. Esto representa un inconveniente ya que estos valores son difíciles de incluir en el diseño del modelo del sistema.

### 2.1.1. Sistemas de control

Un sistema de control se caracteriza por tener una serie de elementos que influyen directamente en el comportamiento de un sistema. Un sistema de control tiene como objetivo obtener un dominio de las variables de salida, manipulando las variables de control, de tal manera que estas variables alcancen valores previamente establecidos para satisfacer las necesidades de control. (Kuo, 1996)

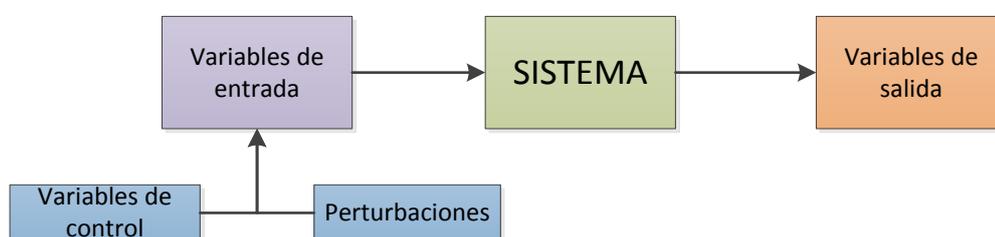


Figura 6. Esquema general de un sistema

Una variable de entrada no es más que una variable del sistema que puede alterar el estado del mismo variando su magnitud o condición. Una variable de salida en cambio es una variable del sistema cuyo valor podemos medir o cuantificar.

El término perturbación hace referencia a una señal que afecta a los valores de la salida que deseamos obtener de un sistema. Existen dos tipos de perturbaciones, las perturbaciones internas que son las que surgen dentro del sistema, y las externas que surgen fuera del sistema y se las debe considerar como una nueva entrada.

Se puede decir que un sistema de control es ideal cuando puede cumplir con los siguientes objetivos:

- Ser robusto ante la aparición de perturbaciones y errores en el sistema.
- Garantizar estabilidad
- Ser eficiente cuanto sea posible según criterios preestablecidos, como que las acciones de control sobre las variables de entrada sean realizables previniendo de esta manera comportamientos abruptos en el sistema.
- Ser de fácil implementación y manejo, pudiendo ser operables en tiempo real utilizando un computador.

Para poder implementar un sistema de control con las anteriores características se necesitan los siguientes elementos:

- Sensores.- permiten conocer los valores de las variables medidas de un sistema
- Controlador.- toma los valores obtenidos por los sensores y los valores que se desea obtener para calcular una acción de control que modifique las variables de control.
- Actuador.- permite la ejecución de una acción física según esté programado en el controlador.

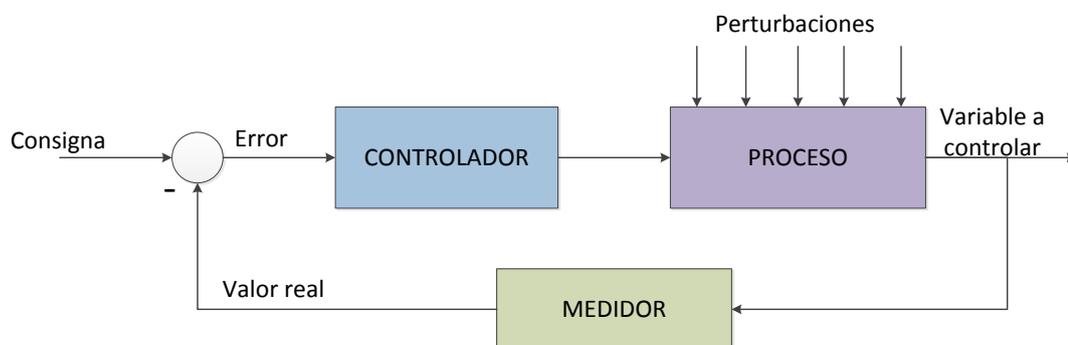


Figura 7. Esquema general de un sistema de control

## 2.1.2. Ejemplos de sistemas de control

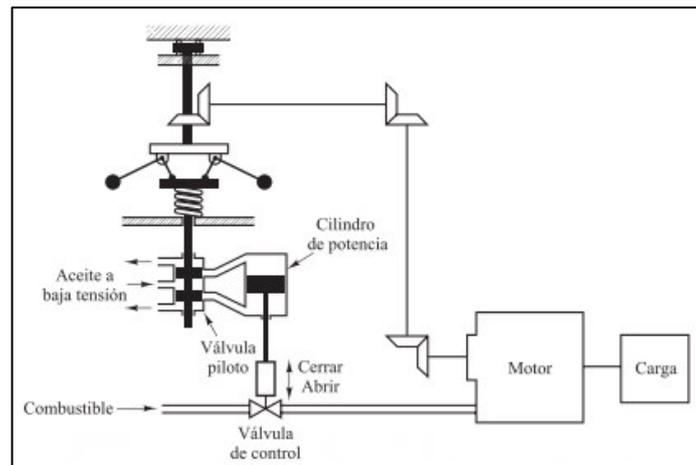
Los sistemas de control se los puede encontrar en diferentes aplicaciones como lo mostrado a continuación:

### 2.1.2.1. Sistema de control de velocidad

Un ejemplo claro de un sistema de control de velocidad lo podemos observar en la figura 8 donde se muestra un regulador de velocidad de Watt. La cantidad de combustible que se admite en la máquina se ajusta de acuerdo con la diferencia entre la velocidad de la máquina que se pretende y la velocidad real. (Ogata, 2010)

En este sistema de control la máquina representa la planta, es decir, el sistema controlado y la variable controlada es la velocidad de la misma. La diferencia entre la

velocidad deseada y la velocidad real representa la señal de error. La cantidad de combustible representa la señal de control que se va a aplicar a la planta, lo cual es la señal de actuación. La entrada externa que se aplica para alterar la variable controlada es la perturbación al igual que un cambio inesperado en la carga es una perturbación.



**Figura 8. Ejemplo de sistema de control de velocidad**  
Fuente: Ogata, 2010

### 2.1.2.2. Sistema de control de temperatura

En la figura 9 se muestra un diagrama esquemático del control de temperatura de un horno eléctrico. La temperatura del dicho horno se mide mediante analógicamente con un termómetro y la convierte a una variable digital mediante un convertidor A/D. La temperatura digital entra a un controlador mediante una interfaz donde se la compara con la temperatura de entrada programada, y si hay una diferencia (error) el controlador envía una señal al calefactor. A través de una interfaz de un amplificador y relé se maneja la temperatura del horno adquiera el valor deseado. (Ogata, 2010)

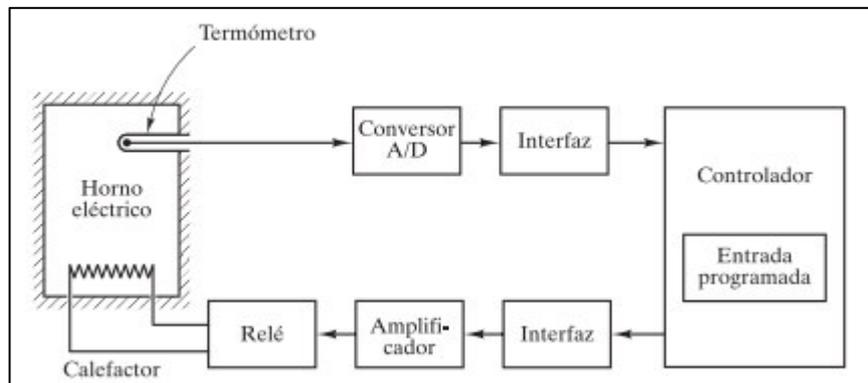


Figura 9. Ejemplo de sistema de control de temperatura  
Fuente: Ogata, 2010

### 2.1.2.3. Sistemas empresariales

En las empresas existen muchos grupos que conforman un sistema empresarial, donde cada tarea asignada a un grupo representará un elemento dinámico del sistema, de tal manera que para la correcta operación de este sistema deben establecerse métodos de realimentación para informar de los logros de cada grupo. (Ogata, 2010)

Un sistema empresarial es un sistema en lazo cerrado, donde las perturbaciones en este sistema son la falta de personal o de materiales, la interrupción de las comunicaciones, los errores humanos, etc.

Un ejemplo de este tipo de estructura organizativa a nivel de ingeniería está compuesto por una serie de grupos tales como gestión, investigación y desarrollo, diseño preliminar, experimentos, diseño de producto y delineación, fabricación y ensamblaje y verificación. Donde estos grupos se interconectan para constituir un sistema completo como podemos observar en la figura 10. (Ogata, 2010)

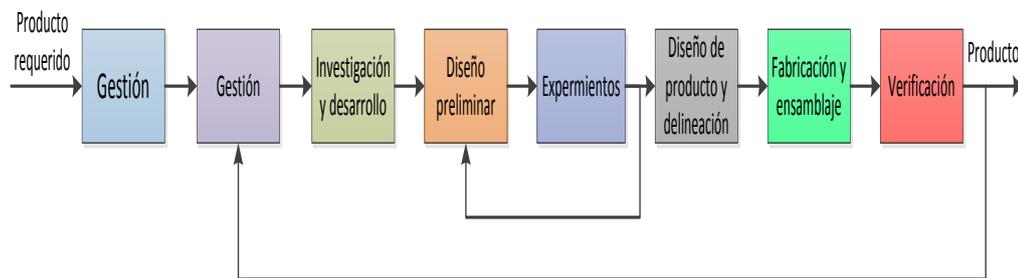


Figura 10. Diagrama de bloques de un sistema de organización en ingeniería

### 2.1.3. Función de transferencia

Mediante cálculos matemáticos podemos conocer el comportamiento de cualquier sistema físico y sus diferentes variaciones; en el caso de un péndulo invertido no es la excepción por lo que de esta manera procedemos a obtener su función de transferencia.

Ogata define a una función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero. (Ogata, 2010)

Una función de transferencia no es más que un modelo matemático que analiza la relación de la respuesta de un sistema (salida) con una señal de excitación a la entrada, todo esto mediante un cociente. Una función de transferencia se la puede representar de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.1)$$

En la ecuación (2.1),  $H(s)$  es la función de transferencia (en otros casos llamada  $G(s)$ );  $Y(s)$  es la transformada de Laplace de la respuesta; y  $U(s)$  es la transformada de Laplace de la señal de entrada.

#### 2.1.4. Espacio de estados

Otra manera de modelar un sistema físico es utilizando el espacio de estados, el cual representa un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas entre sí mediante ecuaciones diferenciales de primer orden y que convergen en una ecuación diferencial matricial de primer orden. Para expresar la dinámica de un sistema lineal utilizamos las siguientes expresiones:

$$x = Ax + Bu \quad (2.2)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.3)$$

La ecuación (2.2) es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante en el tiempo y la ecuación (2.3) es la ecuación de salida para el mismo sistema. (Ogata, 2010)

Donde  $x$  representa el estado del sistema que contiene  $n$  elementos para un sistema de orden  $n$ ;  $u$  es el vector que representa la entrada que contiene  $m$  elementos;  $y$  representa el vector de salida y contiene  $p$  elementos. Asimismo  $A$  representa la matriz del sistema con una dimensión de  $n \times n$ ,  $B$  representa la matriz de entrada con una dimensión de  $n \times m$ ,  $C$  representa la matriz de salida con una dimensión de  $p \times n$ , y  $D$  es una matriz de dimensión  $p \times m$ .

Una de las principales ventajas de trabajar con espacio de estados es conocer el comportamiento interno del sistema además de poder trabajar con sistemas cuyas condiciones iniciales sean diferentes de cero. A estas ventajas se suma la facilidad de realizar diseños asistidos por computadora ya que en la mayoría de softwares dependen de esta representación, Figura 11.

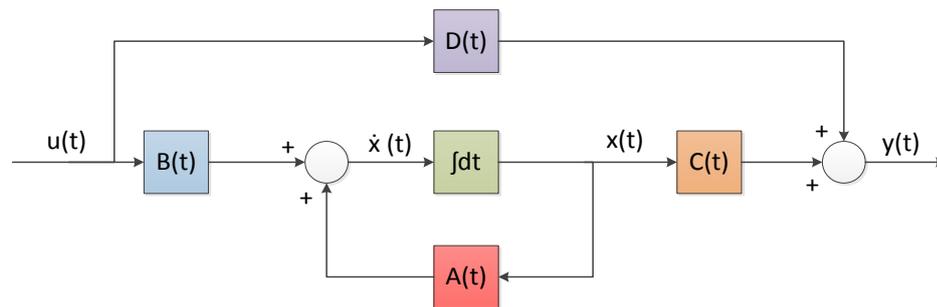


Figura 11. Diagramas de bloques de un control lineal en tiempo continuo representado en espacio de estados

### 2.1.5. Sistemas lineales

Al hablar de sistemas de control lineales nos referimos a sistemas donde la salida sigue fielmente los cambios que se realicen en la entrada, siguiendo básicamente la forma de la entrada como se presenta en la mayoría de sistemas lineales, además de que se rigen mediante ecuaciones lineales. De no ser así y si la salida no tiene la misma forma de la entrada, deberá reflejar los mismos cambios generados en la entrada para ser un sistema lineal.

Dos propiedades que se deben cumplir para que un sistema sea lineal son las siguientes:

- Si las entradas son multiplicadas por una constante, las salidas también son multiplicadas por la misma constante.
- Los sistemas lineales se caracteriza por el hecho de que se puede aplicar el principio de superposición.

El principio de superposición dice que si un sistema como el que se indica en la figura 12 tiene más de una variable de entrada, se puede obtener la salida total del sistema como la suma de las salidas parciales; las cuales resultan de aplicar cada entrada por separado, convirtiendo en cero las demás entradas.



Figura 12. Sistema lineal multivariable

### 2.1.6. Sistemas no lineales

Los sistemas no lineales son todos los que no son lineales, es decir, además de ser regidos por ecuaciones no lineales, presentan varias características como que pueden tener múltiples puntos de operación, los cuales pueden ser estables o no. Los sistemas no lineales ante una excitación sinusoidal pueden generar armónicos de la frecuencia de entrada.

Entre los ejemplos más representativos de los sistemas no lineales tenemos el péndulo invertido, como se muestra en la figura 13. Otros ejemplos donde se manifiestan los sistemas no lineales son los estanques de área variable, los reactores continuos exotérmicos, entre otros.

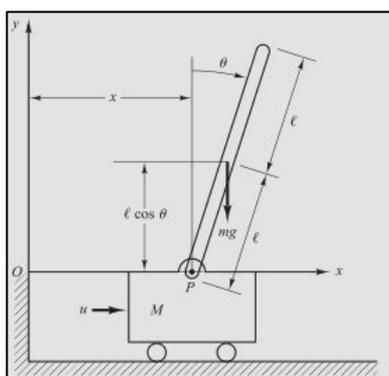


Figura 13. Sistema de péndulo invertido  
Fuente: Ogata, 2010

### 2.1.7. Linealización de sistemas no lineales

Al tener sistemas no lineales en la mayoría de los sistemas físicos existentes, al encontrar dispositivos con características no lineales moderadas o que las propiedades no lineales aparezcan únicamente en ciertas regiones de operación, se puede realizar un proceso de linealización ya que al modelar estos dispositivos como sistemas lineales se pueden obtener resultados muy exactos desde el punto de vista analítico sobre un intervalo amplio de condiciones de operación.

Para los dispositivos con características fuertemente no lineales se realiza un modelo linealizado solo en un intervalo de condiciones de operación muy limitado, y a menudo solo en el punto de operación en el que se realizó la linealización.

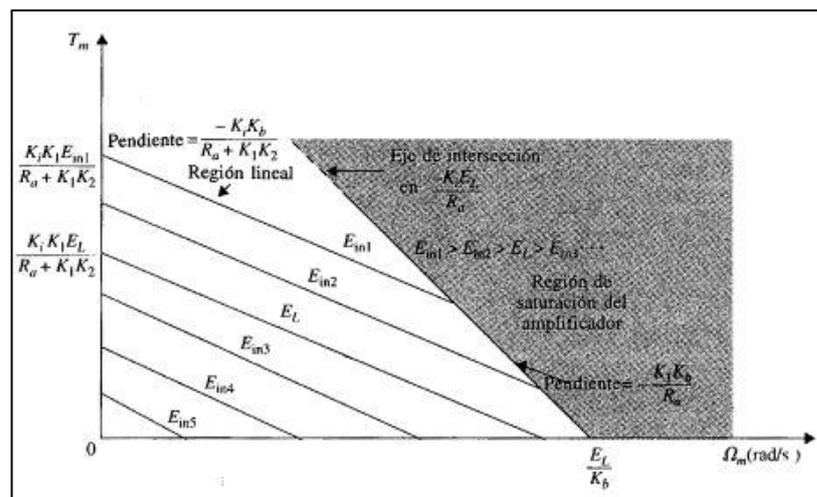


Figura 14. Curva par-velocidad de un sistema de amplificador/motor de cd con saturación en el amplificador y realimentación de corriente

Fuente: Kuo, 1996

### 2.1.8. Estrategia de control de sistemas lineales

Hace referencia a la naturaleza y la dirección de los lazos existentes entre las variables medidas y/o controladas, y las variables de control. (Kuo, 1996)

Según las acciones de control que se puede realizar en un sistema, existen dos diferentes estrategias de control en función a la naturaleza de la información utilizada.

### **2.1.8.1.Lazo abierto**

En este caso la acción de control se calcula según la dinámica del sistema, los valores deseados y estimando las perturbaciones. Esta estrategia de control permite compensar los retrasos inherentes del sistema, pero no es suficiente debido a los errores del modelo y los errores al momento de estimar las perturbaciones. Por esta razón siempre va de la mano con la forma de lazo cerrado, ya que de esta forma permite compensar los errores obtenidos en lazo abierto.

### **2.1.8.2.Lazo cerrado**

En este caso la acción de control se calcula en función del error medido entre la variable controlada y el valor deseado. En esta estrategia de control se consideran indirectamente las perturbaciones por los efectos sobre las variables de salida. El lazo cerrado puede aplicarse sin importar cuál sea la variable controlada, por lo que esta estrategia de control puede observarse en la mayoría de sistemas de control.

## **2.1.9. Estabilidad de sistemas de control lineales**

Una de las principales especificaciones que se requieren al momento de diseñar un sistema es que sea estable, ya que un sistema inestable se considera inútil; al considerarse los diferentes tipos de sistemas (lineal, no lineal, invariante con el tiempo y variante con el tiempo) la estabilidad se puede dar en muchas formas diferentes.

La estabilidad se la puede clasificar en estabilidad absoluta, que no es más que la condición de si el sistema es estable o no lo es; y la estabilidad relativa, que consiste en conocer que tan estable es el sistema.

En la figura 15 se pueden observar las zonas en el plano  $s$  donde un sistema es estable o inestable.

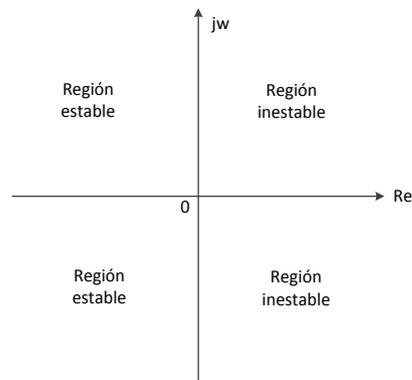


Figura 15. Regiones estable e inestable en el plano s

### 2.1.10. Métodos para determinar la estabilidad

Cuando se diseña un sistema de control existen parámetros desconocidos o variables dentro de la ecuación característica del sistema por lo que se utilizan los siguientes métodos para determinar la estabilidad de sistemas lineales en tiempo continuo sin necesidad de conocer sus raíces.

#### 2.1.10.1. Criterio de Routh-Hourwitz

Este criterio es un método algebraico que proporciona información sobre la estabilidad absoluta de un sistema lineal e invariante en el tiempo que tiene una ecuación característica con coeficientes constantes. El criterio prueba si cualquiera de las raíces de la ecuación característica está en el semiplano derecho del plano s, así como también indica el número de raíces que están sobre el eje jw y en el semiplano derecho del plano. (Kuo, 1996)

Para aplicar el criterio de Routh-Hourwitz debemos considerar un sistema SISO e invariante en el tiempo, el cual tendrá la siguiente ecuación característica:

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.4)$$

En donde los coeficientes son reales y para que la ecuación 2.4 no tenga raíces reales positivas debemos cumplir con las siguientes condiciones:

- Todos los coeficientes de la ecuación tienen el mismo signo.
- Ninguno de los coeficientes es igual a cero.

Estas condiciones relacionan los coeficientes de la ecuación 2.4 como se muestra a continuación:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\sum \text{todas las raíces} \quad (2.5)$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = -\sum \text{productos de las raíces tomando 2 a la vez} \quad (2.6)$$

$$\frac{a_{n-3}}{a_n} = -\sum \text{producto de las raíces tomando 3 a la vez} \quad (2.7)$$

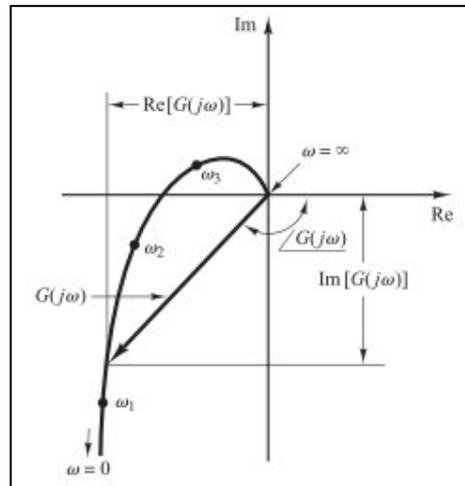
$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \text{ productos de todas las raíces} \quad (2.8)$$

De esta manera todas estas relaciones son positivas y diferentes de cero a menos que una de las raíces tenga una parte real positiva. Estas condiciones no son suficientes ya que una ecuación con todos sus coeficientes distintos de cero y del mismo signo pueden no tener todas las raíces en el semiplano izquierdo del plano  $s$ .

### 2.1.10.2. Criterio de Nyquist

Este criterio es un método semigráfico que provee información sobre la diferencia entre el número de polos y ceros de la función de transferencia en lazo cerrado que están en el semiplano derecho del plano  $s$  mediante la observación del comportamiento de la gráfica de Nyquist de la función de transferencia de lazo. (Kuo, 1996)

También conocido como diagrama polar, el diagrama de Nyquist es una gráfica de la magnitud de  $G(jw)$  con respecto al ángulo de fase de  $G(jw)$  en coordenadas polares cuando  $w$  varía de cero a infinito (Ogata, 2010). Como se puede observar en la figura 16 en un diagrama polar o de Nyquist es importante presentar la graduación de la frecuencia del lugar geométrico, donde las proyecciones de  $G(jw)$  en los ejes real e imaginario son sus componentes real e imaginaria.



**Figura 16. Diagrama de Nyquist**  
Fuente: Ogata, 2010

### 2.1.10.3. Diagrama de Bode

Este diagrama es una gráfica de la magnitud de la función de transferencia de lazo en decibelios y de la fase en grados, en función de la frecuencia. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se puede determinar al observar el comportamiento de estas gráficas. (Kuo, 1996)

Un diagrama de Bode está formado por dos gráficos, uno del logaritmo de la magnitud de la función de transferencia sinusoidal, y el otro es el gráfico del ángulo de fase; ambos gráficos se los realiza contra la frecuencia en escala logarítmica. (Ogata, 2010)

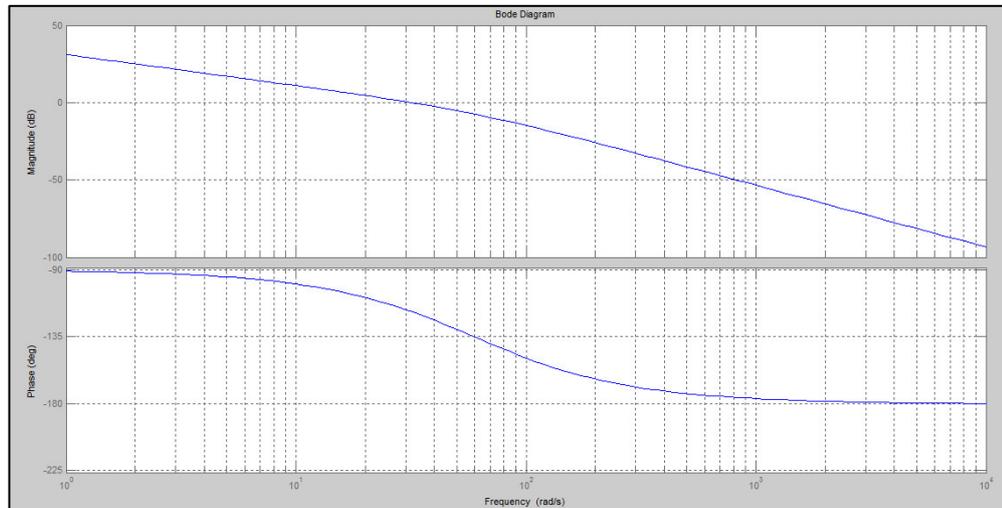


Figura 17. Ejemplo de Diagrama de Bode

## 2.1.11. Controlabilidad y Observabilidad

### 2.1.11.1. Controlabilidad

Un proceso es completamente controlable cuando las variables de estado pueden controlarse individualmente para llegar a un objetivo en tiempo finito mediante un control no restringido. Por este motivo se concluye que si una variable de estado es independiente del control, no se la puede dirigir al estado deseado en un tiempo finito. (Kuo, 1996)

Por lo tanto, ese estado en particular se puede decir que no es controlable (Ver Figura 18), y del mismo modo el sistema no es completamente controlable, o simplemente es no controlable.

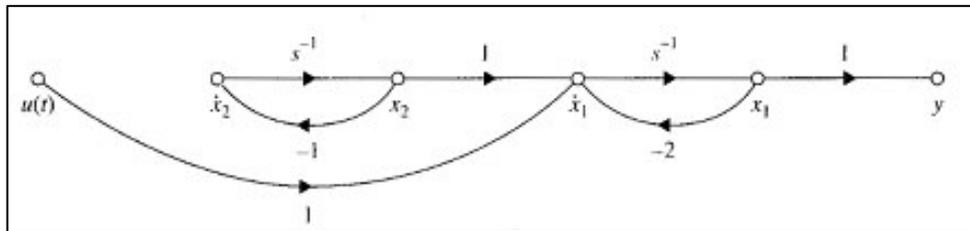


Figura 18. Diagrama de estado de un sistema de estado no controlable  
Fuente: Kuo, 1996

### 2.1.11.2. Observabilidad

Un sistema es completamente observable si cada variable de estado del sistema afecta alguna de las salidas, es decir, si cualquiera de los estados no se puede observar a partir de las mediciones de las salidas. Se dice que el estado es no observable y por lo tanto el sistema no es completamente observable, o simplemente no observable como se observa en la Figura 19. (Kuo, 1996)

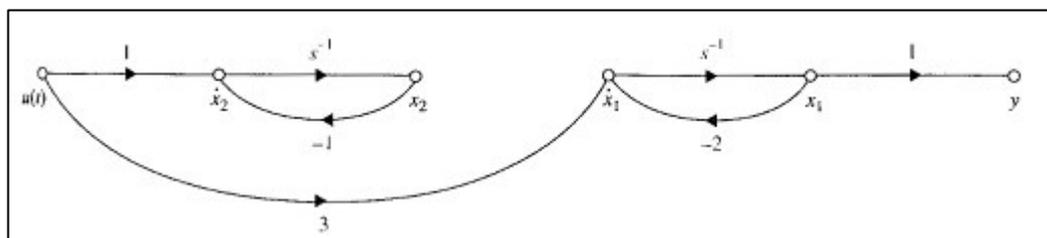


Figura 19. Diagrama de estado de un sistema que no es observable  
Fuente: Kuo, 1996

## 2.2. Tipos de controladores

### 2.2.1. Controlador PID

Un controlador PID ha demostrado ser un controlador muy robusto para varias aplicaciones del sector industrial por lo que también se lo puede hacer para un péndulo invertido.

Se debe tener cuidado con la estructura de un PID ya que es muy sencilla pero al mismo tiempo eso puede representar un inconveniente. Si se considera un sistema SISO (una entrada y una salida) de un grado de libertad, se obtiene el siguiente diagrama:

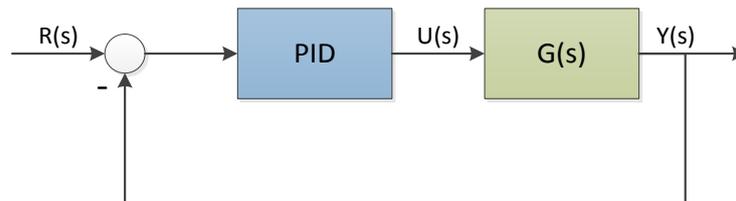


Figura 20. Diagrama de bloques de un PID

El trabajar en un lazo cerrado se obtiene el error del PID restando el valor de la referencia a la salida anterior, y el controlador irá tratando de que dicho error se haga nulo.

Al hablar de controladores PID se refiere a que consta de 3 acciones: proporcional (P), integral (I) y derivativa (D), con los que se pueden hacer diferentes controladores P, I, PI, PD, PID.

- P: Acción de control proporcional: presenta una salida del controlador proporcional al error, es decir,  $u(t) = KP e(t)$ . Este tipo de controladores puede controlar cualquier planta estable, pero su desempeño es limitado y tiene error de régimen permanente.
- I: Acción de control integral: presenta una salida del controlador proporcional al error acumulado, lo que hace que este controlador sea lento.

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

La señal de control  $u(t)$  es diferente de cero cuando el error  $e(t)$  es igual a cero, por lo que cuando la referencia es constante, el error en régimen permanente es cero.

- PI: Acción de control proporcional-integral: se define con la siguiente expresión:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

Donde  $T_i$  es el tiempo integral que ajusta la acción integral, mientras que al existir un control proporcional se necesita un error para que la acción de control sea diferente de cero.

En la acción integral un pequeño error positivo nos dará una acción de control creciente, y en el caso de que fuera negativo será decreciente.

Este análisis nos indica que el error en régimen permanente será siempre cero.

- PD: Acción de control proporcional-derivativa: se define con la siguiente expresión:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.11)$$

Donde  $T_d$  es una constante de tiempo derivativo que hará más rápida la acción de control, pero también amplificará las señales de ruido y puede saturar el actuador.

Una acción de control derivativa nunca se la utiliza por sí sola, ya que solo es eficaz en períodos transitorios.

- PID: Acción de control proporcional-integral-derivativo: este tipo de controlador combina las ventajas de las 3 acciones de control individuales y se la define mediante la siguiente expresión:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.12)$$

$$C_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.13)$$

En una planta cuando se puede obtener su modelo matemático se puede aplicar varias técnicas de diseño para obtener los parámetros del controlador y que cumplan con las especificaciones del transitorio y del estado estacionario del sistema en lazo cerrado. (Ogata, 2010). Cuando en la planta es complicado obtener un modelo matemático no es posible utilizar un método analítico para el PID, por lo que se debe acudir a modelos experimentales como la sintonía del controlador.

Uno de estos métodos de sintonización es el planteado por Ziegler y Nichols que presentan reglas muy convenientes cuando no se conocen los modelos matemáticos de las plantas. Este tipo de reglas han ido cambiando desde su publicación, pero en especial existen 2 métodos los cuales permiten conocer los parámetros para un controlador PID.

### 2.2.1.1. Primer método Ziegler-Nichols

En este método la respuesta de la planta a una entrada escalón unitario se obtiene de manera experimental, donde la planta no tiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados y la curva de respuesta de escalón unitario puede tener forma de S como se ve en la figura 21. (Ogata, 2010)

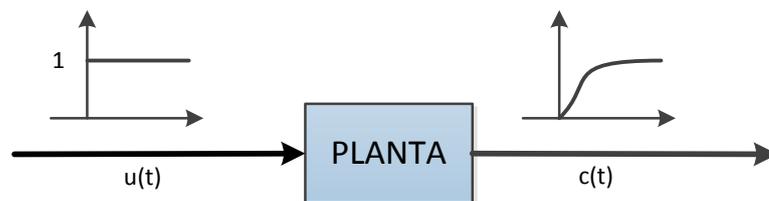
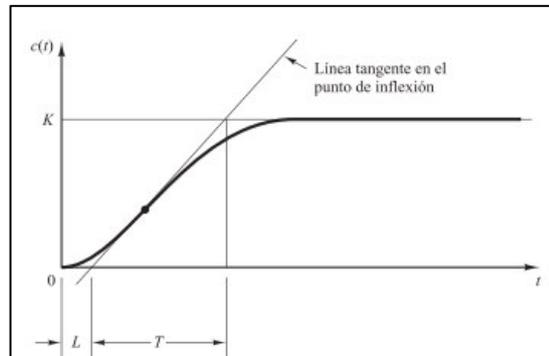


Figura 21. Respuesta a un escalón unitario de una planta  
Fuente: Ogata, 2010

La curva en forma de S se caracteriza por tener como parámetros el tiempo de retardo  $L$  y la constante de tiempo  $T$ , donde ambos parámetros se determinan dibujando una tangente en el punto de inflexión de la curva en forma de S y delimitando las intersecciones de la tangente con el eje del tiempo y con la línea de  $c(t) = K$ , como vemos en la figura 21.



**Figura 22.** Curva de respuesta en forma de S  
Fuente: Ogata, 2010

En la figura 22 observamos una función de transferencia  $C(s)/U(s)$  que se aproxima mediante un sistema de primer orden con un retardo como vemos a continuación:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{ke^{-Ls}}{Ts+1} \quad (2.14)$$

Para esto Ziegler y Nichols plantearon establecer valores de  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  como se puede ver en la tabla 1:

**Tabla 1.**  
Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la respuesta escalón de la planta

<i>Tipo de controlador</i>	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<i>P</i>	$\frac{T}{L}$	$\infty$	$0$
<i>PI</i>	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	$0$
<i>PID</i>	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Donde observamos que el controlador PID sintonizado mediante el primer método de Ziegler-Nichols tiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &= 1.2 \frac{T}{L} \left( 1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) \end{aligned}$$

$$= 0.6T \frac{(s+\frac{1}{L})^2}{s} \quad (2.15)$$

Esto significa que el controlador PID tiene un polo en el origen y un cero doble en  $s = -1/L$ .

### 2.2.1.2. Segundo método Ziegler-Nichols

En este método se fija  $T_i = \infty$  y  $T_d = 0$ , usando solo la acción de control proporcional como se ve en la figura 23 se incrementa  $K_p$  desde 0 hasta un valor crítico  $K_{cr}$ , en donde la salida presente oscilaciones sostenidas. (Ogata, 2010)

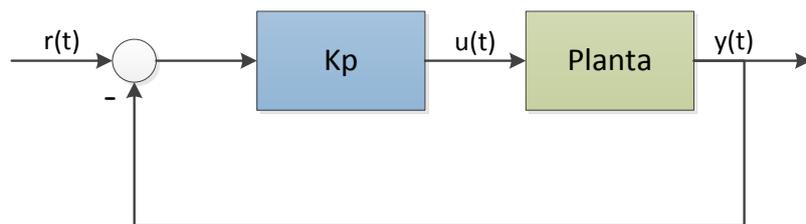


Figura 23. Sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional

Entonces la ganancia crítica  $K_{cr}$  y el periodo  $P_{cr}$  correspondiente se determinan experimentalmente.

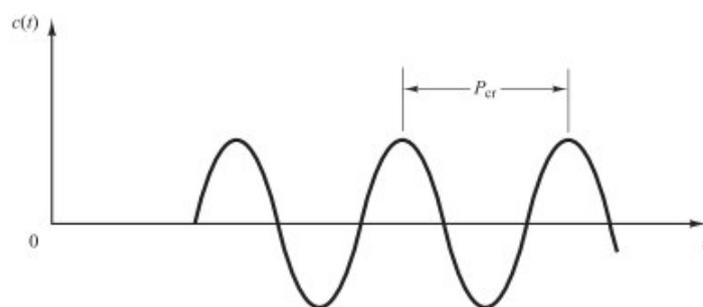


Figura 24. Oscilación sostenida con periodo  $P_{cr}$  (seg)  
Fuente: Ogata, 2010

Para esto Ziegler y Nichols plantearon establecer valores de  $K_p, T_i$  y  $T_d$  como se muestra en la tabla 2:

**Tabla 2.**  
Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la ganancia  $K_{cr}$  y periodo  $P_{cr}$

<i>Tipo de controlador</i>	<i>K<sub>p</sub></i>	<i>T<sub>i</sub></i>	<i>T<sub>d</sub></i>
<i>P</i>	$0.5 K_{cr}$	$\infty$	$0$
<i>PI</i>	$0.45 K_{cr}$	$\frac{1}{1.2} P_{cr}$	$0$
<i>PID</i>	$0.6 K_{cr}$	$0.5 P_{cr}$	$0.125 P_{cr}$

Donde observamos que el controlador PID sintonizado mediante el segundo método de Ziegler-Nichols tiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
 &= 0.6 K_{cr} \left( 1 + \frac{1}{0.5 P_{cr} s} + 0.125 P_{cr} s \right) \\
 &= 0.075 K_{cr} P_{cr} \frac{(s + \frac{4}{P_{cr}})^2}{s}
 \end{aligned} \tag{2. 16}$$

Esto significa que el controlador PID tiene un polo en el origen y un cero doble en  $s = -4/P_{cr}$ .

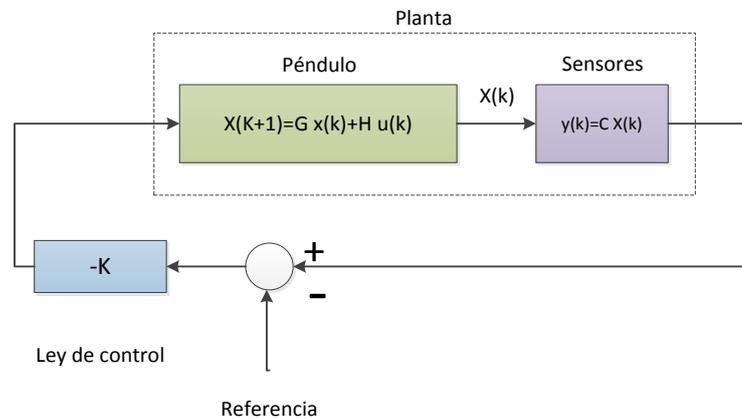
### 2.2.2. Controlador LQR

El diseño de un controlador LQR es más sencillo de realizar si el sistema es representado en espacio de estados. La idea de esto es establecer una retroalimentación completa mediante una combinación lineal de las variables de estado.

El controlador LQR (linear quadratic regulator) es un problema de regulación, que se resuelve a partir de la optimización de un índice de comportamiento cuadrático, dando como resultado a una solución lineal. (Mantz, 2003)

Esto sucedería en un caso ideal, pero en la realidad el estado medido no es complejo, por lo que se necesitaría un observador de orden reducido para estimar parte del estado.

Siendo este el caso, se asume que todos los estados son medibles. Por lo tanto, el resultado final del algoritmo de control será como se observa en la siguiente figura:



**Figura 25. Regulador LQR**

Las estrategias de control óptimo calculan la ley de control de manera que se optimiza una cierta medida del rendimiento del controlador (Rodríguez, D. y Bordóns C., 2005).

En la figura 25 observamos el esquema del algoritmo de control, donde  $K$  es la matriz que realimentará el estado y así obtener la señal de control, es decir,  $u(k) = -Kx(k)$ . A continuación se encuentra el vector  $K$  el cual determinará la ley de control adecuada para la retroalimentación.

La primera opción para realizar esto es asignar arbitrariamente el patrón de polos que queramos que tenga el sistema en lazo cerrado. Y la otra opción es usar un control óptimo variante en el tiempo, en este caso la opción elegida es un control óptimo LQR la cual se manifiesta en la siguiente expresión:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{x}(k)Q x(k) + \hat{u}(k)Ru(k)] \quad (2.17)$$

En la expresión anterior  $J$  es una función de costo asociada a la energía del sistema, ya que se trata de un control que busca minimizar la energía.

La expresión  $\hat{x}(k)Q x(k)$  representa la energía que aporta cada estado.  $Q$  es una matriz no negativa definida donde se puede elegir el peso de cada estado en la función  $J$ . Se

podría decir que  $\hat{x}(k)Q x(k)$  es una  $x^2$  (la energía normalizada) en un sistema con una sola variable.

En este caso  $u(k)$  contiene un solo elemento,  $R \geq 0$  es un elemento indicador del peso que se requiere para darle a la energía asociada a la señal de control.

Por lo tanto partimos de la siguiente expresión:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (2.18)$$

Para resolver este tipo de ecuaciones nos ayudamos de métodos numéricos, lo que resulta muy complejo y solo mencionaremos que la solución resulta de una ley de control variante en el tiempo:

$$u(k) = -K(k)x(k) \quad (2.19)$$

En sistemas donde existan coeficientes constantes,  $K(k)$  permanece fija durante un período de tiempo y luego alcanza un valor de ero. Mientras que si  $N \rightarrow \infty$  la ganancia del controlador será fija todo el tiempo:

$$K(k) = K \quad (2.20)$$

Por lo tanto el valor exacto de  $J$  no es de mucha relevancia ya que solo se pretende encontrar  $K$  necesaria para que sea mínimo. Por su parte es importante los valores relativos de  $Q$  y  $R$  entre si ya que estos parámetros serán los encargados de balancear la importancia relativa de la entrada y los estados en la función de costo que se dese optimizar. El caso más sencillo que se debe considerar es  $R = 1$  y proponer  $Q$  a partir de ahí.

Para calcular la ley de control que reduce el valor de la ecuación (2.17) se define una matriz  $P$  que satisfaga la siguiente ecuación de Riccati:

$$P = Q + \hat{G}PG - G^*PH(R + \hat{H}PH)^{-1}\hat{H}PG \quad (2.21)$$

La solución de la ecuación (2.18) es una matriz  $P$  que es hermítica y definida positiva.

Donde podemos demostrar que la matriz  $K = (R + \hat{H}PH)^{-1}\hat{H}PG$  es la que minimiza el índice de la ecuación (2.18), mediante la ley de control:

$$u(k) = -(R + \hat{H}PH)^{-1} \hat{H}PGx(k) \quad (2.22)$$

Por lo tanto, la ecuación del sistema en bucle cerrado será:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \left( G - H(R + \hat{H}PH)^{-1} \hat{H}PG \right) x(k) \\ &= (I + HR^{-1} \hat{H}P)^{-1} \hat{H}PGx(k) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para desarrollar esta ecuación se ha utilizado el principio de inversión:

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA \quad (2.24)$$

Con  $A = I, B = H$  y  $C = R^{-1} \hat{H}P$ .

### 2.2.3. Controlador Fuzzy

Un control Fuzzy (o difuso) puede ser explicado como un control mediante palabras que representan el sentido común en lugar de números o ecuaciones. De todos modos las variables del proceso no puede medirse en sentido común por lo que es necesario adaptar estas palabras antes de introducir el estado de la variable al controlador, esta fase es la de fusificación.

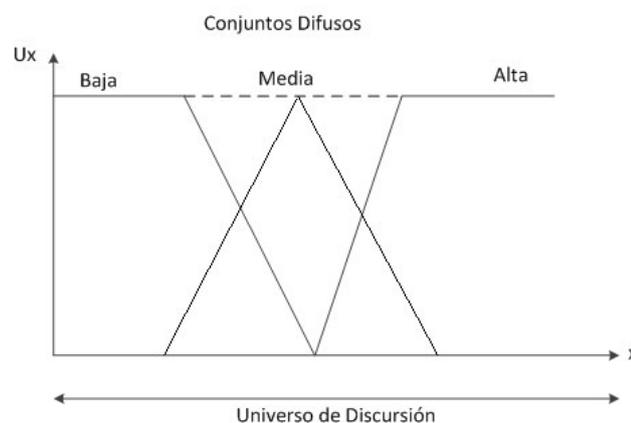


Figura 26. Diseño de un sistema por control de lógica difusa

La fase de fusificación hace que los datos de entrada busquen la correspondencia entre el estado de las variables y las funciones de pertenencia definidas para las posibles expresiones. Para un valor específico de la variable su grado de pertenencia será mayor en una expresión que en las demás.

Una vez expresados los estados de las variables lingüísticamente se pueden realizar las relaciones lógicas entre ellas mediante reglas condicionales (if-then). Esta serie de relaciones interpretan el sentido común y permiten generar una acción deseada que se aplicara a la planta.

Luego esta señal será traducida a un número en la fase de defusificación para que el convertidor digital-análogo la transforme en una señal de tal modo que se pueda aplicar en la planta. Para diseñar un lazo de control Fuzzy en un sistema SISO conviene usar como variables de entrada del controlador el error del proceso ( $e = r - y$ ), la variación del error ( $de/dt$ ) y la acumulación del error ( $\int e(t)dt$ ).

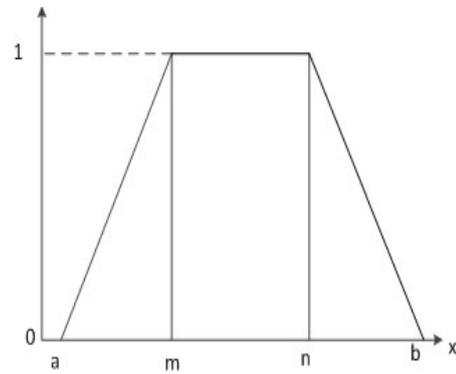
Todas estas entradas son fusificadas y para esto se dispone de varias funciones como gaussianas, triangulares, trapecios, donde cada tipo de entrada posee una ecuación característica como vemos en la tabla 3:

**Tabla 3.**  
**Funciones de un conjunto difuso**

<i>Tipo</i>	<i>Ecuación</i>	<i>Gráfica</i>
<i>Función Singleton</i>	$u(x) = \begin{cases} 0, & x = m \\ 1, & x \neq m \end{cases}$	

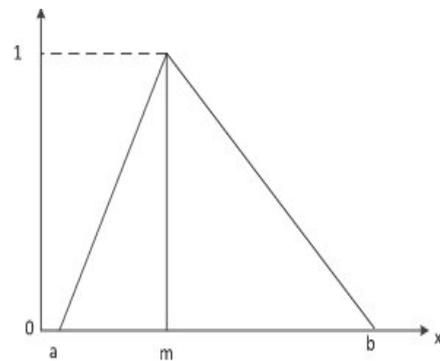
*Función  
Trapezoidal*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{m-a}, & x \in [a, m] \\ 1, & x \in [m, n] \\ \frac{b-x}{b-n}, & x \in [n, b] \\ 0, & x > b \end{cases}$$



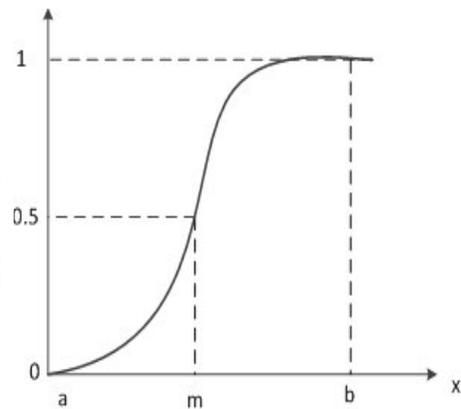
*Función  
Triangular*

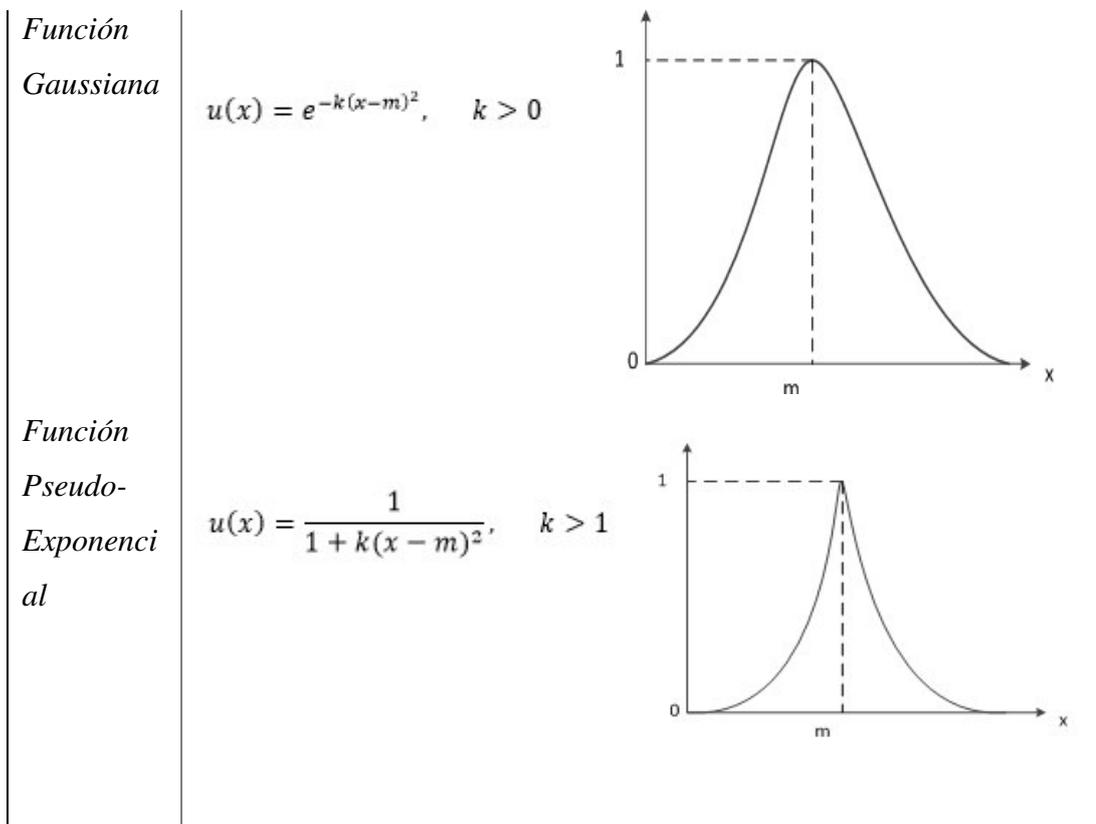
$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{m-a}, & x \in [a, m] \\ \frac{b-x}{b-n}, & x \in [m, b] \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$



*Función S*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a \\ 2 \left\{ \frac{x-a}{b-a} \right\}^2, & x \in (a, m) \\ 1 - 2 \left\{ \frac{x-b}{b-a} \right\}^2, & x \in (m, b) \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$





El proceso para definir las funciones debe cumplir con los siguientes pasos:

- Elegir un número de funciones con el fin de representar todos los posibles estados que la pueda tomar la variable.
- Diseñar de un ancho mínimo suficiente que permita obviar el ruido de la medición.
- Debe existir un grado de cruzamiento entre las funciones para que los estados estén completamente definidos.
- Se recomienda iniciar con funciones simétricas para luego hacer ajustes.
- Se recomienda inicialmente un entrecruzamiento del 50% para que cada elemento este en al menos 2 funciones.
- Definir las reglas para que exista una vinculación lógica entre las variables de entrada.
- Defusificar las reglas convirtiéndolas en números.

La cantidad de reglas base es directamente proporcional a la cantidad de entradas por lo que se recomienda retirar el factor integrativo de las entradas del controlador Fuzzy para sumarlo individualmente a la actuación final.

De esta manera se obtendrá un controlador híbrido en el que el error y la variación del error es determinística como se indica en la figura 27:

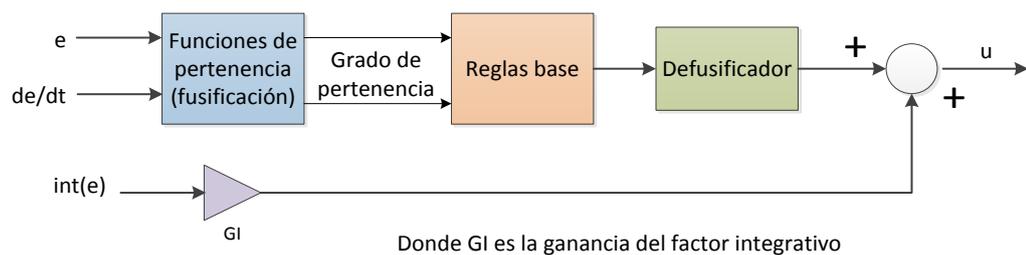


Figura 27. Diagrama de control Fuzzy modificado

En la lógica difusa las operaciones entre conjuntos se plantean de forma de operaciones difusas, donde el grado de pertenencia del conjunto se define mediante la función característica asociada al conjunto difuso para cada valor que pueda tomar la variable  $x$ . Dicha función característica proporciona el grado de pertenencia de ese valor  $x$  al conjunto difuso (Rodríguez L., 2011). Aplicando estas operaciones sobre 2 conjuntos difusos y con funciones de membresía obtenemos:

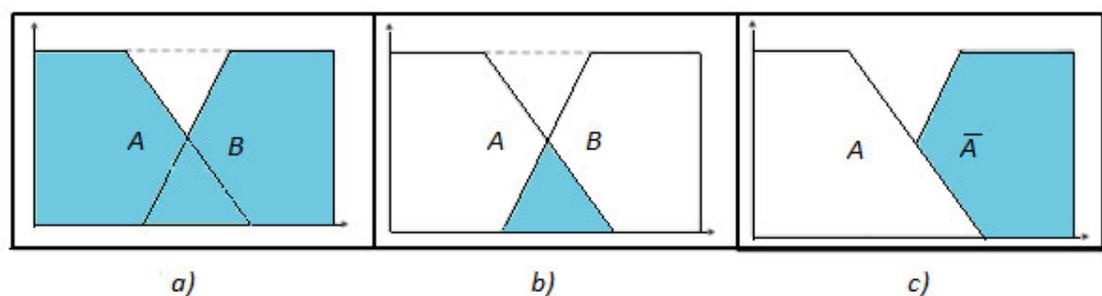


Figura 28. Operaciones en lógica difusa  
a) Unión. b) Intersección. c) Complemento

## 2.3. Sensores en un péndulo invertido

### 2.3.1. Acelerómetro

Un acelerómetro es básicamente un sensor con el que podemos medir la aceleración de un objeto al que va unido considerando su masa inercial interna. Los acelerómetros son sensores inerciales que miden la segunda derivada de la posición y mide la fuerza generada cuando la masa tiene un cambio de velocidad.

Existen varios tipos de acelerómetros según su tecnología (piezo-eléctrico, piezo-resistivo, galgas extensiométricas, laser, térmico, etc.) y sus diseños varían según la necesidad, aplicación y condiciones de uso pero el fin sigue siendo el mismo.

Al momento de elegir un acelerómetro se debe considerar los rangos de funcionamiento de temperatura y frecuencia, así como también el tamaño, resistencia a golpes y el costo.



Figura 29. Diferentes tipos de acelerómetros  
Fuente: Honeywell, 2013

#### 2.3.1.1. Acelerómetros mecánicos

Consta de una masa inerte y resortes elásticos donde los cambios en la aceleración se miden mediante galgas extensiométricas y además incluye sistemas de amortiguación que evitan la propia oscilación.

Para este tipo de acelerómetro las galgas extensiométricas hacen un puente de Wheatstone donde la aceleración produce una deformación en una de ellas

produciendo una variación en la corriente detectada por el puente. Esta deformación es directamente proporcional a la aceleración que se aplica al acelerómetro.

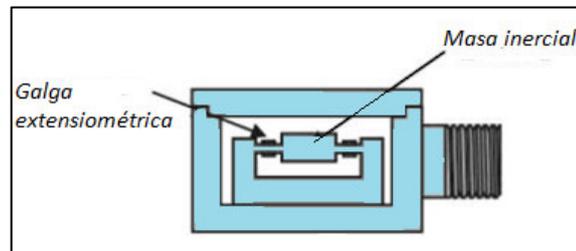


Figura 30. Esquema acelerómetro mecánico

### 2.3.1.2. Acelerómetros piezoeléctricos

Funciona mediante el efecto piezoeléctrico, por lo que su comportamiento consiste en una deformación física del material el cual causa un cambio en la estructura cristalina y así cambian las características eléctricas.

El principal inconveniente de este acelerómetro es su frecuencia máxima de trabajo y su incapacidad de mantener un nivel permanente de salida ante una entrada común.

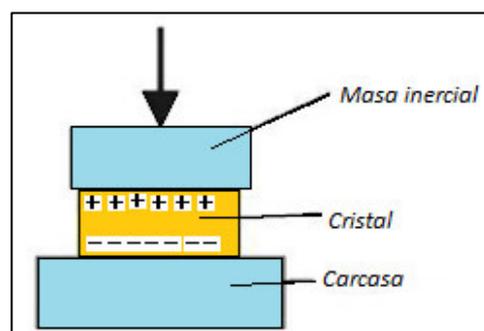


Figura 31. Diagrama de un acelerómetro piezo-eléctrico

### 2.3.1.3. Acelerómetros piezoresistivos

A diferencia de los piezo-eléctricos, un piezo-resistivo utiliza sustrato en lugar de un cristal piezoeléctrico, en este tipo de tecnología las fuerzas de la masa sobre el sustrato hacen variar su resistencia, la cual forma parte de un circuito que mediante un puente

de Wheatstone mide la intensidad de la corriente. La ventaja de este acelerómetro es que pueden medir aceleraciones hasta con cero Hz de frecuencia.

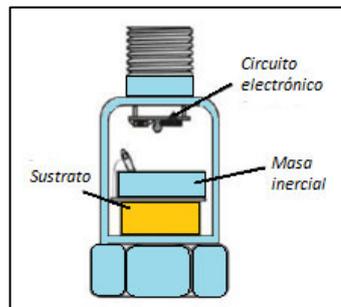


Figura 32. Diagrama de un acelerómetro piezo-resistivo

#### 2.3.1.4. Acelerómetro capacitivo

Este tipo de acelerómetro modifica la posición relativa de las placas de un microcondensador cuando está presente la aceleración. Se basan en la variación de la capacidad entre dos o más conductores entre los que está un dieléctrico, según la variación de la aceleración.

Este dispositivo funciona en un lazo de control electrónico de fuerza/balanceo que evita el movimiento de la masa en aceleración, por la aplicación de una fuerza igual pero opuesta creada por un voltaje en las placas del condensador.

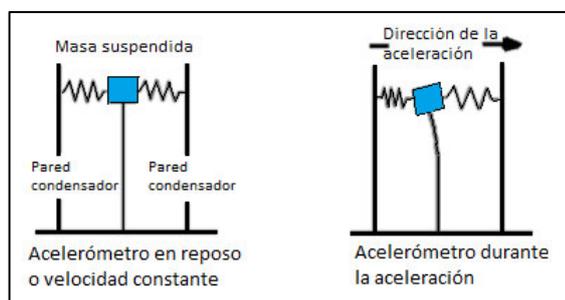


Figura 33. Principio de funcionamiento de un acelerómetro capacitivo

### 2.3.1.5. Acelerómetros micromecánicos (MEMS)

En este tipo de tecnología se distinguen 3 tipos de acelerómetros: el capacitivo de silicio, el piezorresistivo y los térmicos; de los cuales el de silicio abarca la mayor parte del mercado.

Los acelerómetros piezorresistivos son muy adecuados para tipos de acelerómetros compactos de 3 ejes, mientras que los acelerómetros térmicos son particularmente competitivos.

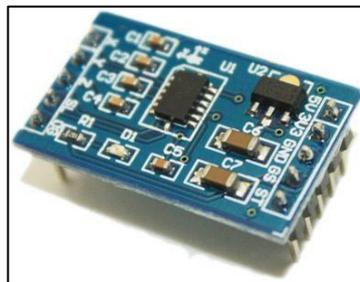


Figura 34. Acelerómetro micromecánico  
Fuente: Arduino (2015)

### 2.3.2. Giroscopio

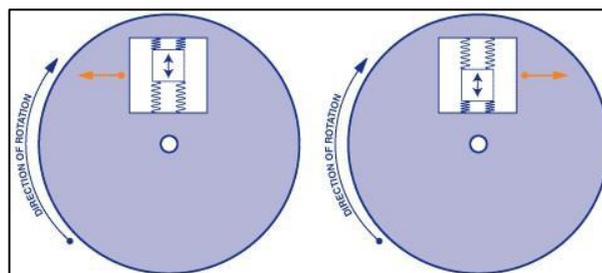
Los giroscopios también llamados girómetros son dispositivos que miden o mantienen el movimiento de rotación. Los giroscopios MEMS (micro electromecánicos) son pequeños sensores de bajo costo que son comúnmente utilizados para medir la velocidad angular que es una medida de la velocidad de rotación. Las unidades de velocidad angular se miden en grados por segundo ( $^{\circ} / s$ ) o revoluciones por segundo (RPS).



**Figura 35. Giroscopio MEMS**  
Fuente: Electrónica 5 Hertz (2014)

Los giroscopios se pueden utilizar para determinar la orientación y se encuentran en la mayoría de los sistemas de navegación autónomos. Este tipo de giroscopios se los usa frecuentemente en la rama de la robótica para medir la rotación de la posición de equilibrio y enviar correcciones a un motor de un robot.

El sensor MEMS dentro de un giroscopio mide entre 1 a 100 micrómetros. Cuando se hace girar el giroscopio, una pequeña masa de resonancia se desplaza con los cambios de velocidad angular. Este movimiento se convierte en señales eléctricas de muy bajas corrientes que se pueden amplificar para ser leídas por un microcontrolador. (Electrónica 5 Hertz, 2014)



**Figura 36. Funcionamiento interno de un sensor giroscópico MEMS**  
Fuente: Electrónica 5 Hertz, 2014

## 2.4. Modelo de un péndulo invertido

### 2.4.1. Análisis de fuerzas y sistemas de ecuaciones de un péndulo invertido

Al tener un modelo correcto del sistema estamos asegurando parte del éxito al momento de diseñar un regulador para el mismo. En el caso de un péndulo invertido al analizar por separado cada uno de los cuerpos al momento de realizar el diseño y modelado como se ve en la figura 41, podemos hacer de esto un proceso un poco más sencillo.

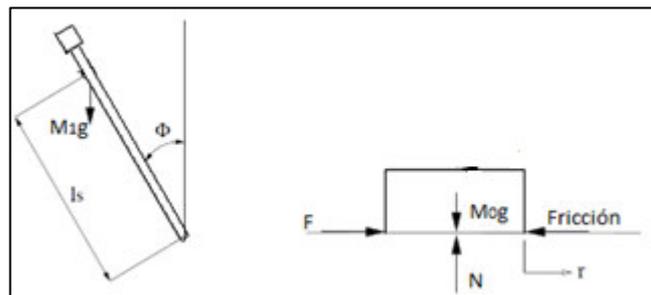


Figura 37. Diagramas de cuerpo libre del sistema

Donde:

$\phi$  = ángulo del péndulo respecto a la vertical

$F$  = fuerza aplicada al carro

$ls$  = longitud del péndulo

$N$  = fuerza normal sobre el carro

$M1g$  = Peso del péndulo

$M0g$  = Peso del carro

A un péndulo invertido se lo puede concebir básicamente como un cuerpo rígido con un movimiento bidimensional, donde sus ecuaciones fundamentales de movimiento plano son:

$$\sum F_i = ma_i \quad (2.25)$$

$$\sum F_j = ma_j \quad (2.26)$$

$$\sum F_G = I \alpha_g \quad (2.27)$$

Al sumar las fuerzas del diagrama de cuerpo libre del sistema en dirección horizontal obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \quad (2.28)$$

No se realizará el mismo proceso en la dirección vertical ya que esa información no es necesaria.

De la ecuación anterior despejamos N y obtenemos la siguiente ecuación:

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \quad (2.29)$$

Si reemplazamos la ecuación (2.35) en la ecuación (2.34) obtenemos la primera ecuación del movimiento del sistema:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \quad (2.30)$$

La segunda ecuación del movimiento la obtenemos sumando las fuerzas del péndulo ubicadas perpendicularmente, esto se representa en la siguiente ecuación:

$$P\sin\theta + N\cos\theta - mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta \quad (2.31)$$

Debemos eliminar los términos P y N en la ecuación (2.37) y se debe sumar los momentos sobre el centroide del péndulo donde obtendremos la ecuación (2.38) a la cual combinamos con la ecuación (2.36) y como resultado tenemos la ecuación (2.39).

$$-Pl\sin\theta - Nl\cos\theta = I\ddot{\theta} \quad (2.32)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = -ml\ddot{x}\cos\theta \quad (2.33)$$

Se utilizarán solo funciones lineales con la finalidad de reducir la complejidad en los cálculos, asumiendo que  $\theta = \pi + \phi$ , donde  $\phi$  representa un ángulo pequeño en la dirección vertical, por lo que las ecuaciones quedarán de la siguiente manera:

$$(I + ml^2)\ddot{\phi} + mgl\phi = -ml\ddot{x} \quad (2.34)$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\phi} = u \quad (2.35)$$

### 2.4.2. Función de transferencia de un péndulo invertido

En el caso del péndulo invertido para obtener la función de transferencia de las ecuaciones del sistema linealizado, se debe tomar la transformada de Laplace de las ecuaciones del sistema. Donde obtenemos como resultado las siguientes ecuaciones:

$$(I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 \quad (2.36)$$

$$(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s + ml\Phi(s)s^2 = U(s) \quad (2.37)$$

La variable que nos interesa en este caso es  $\Phi$ , por lo que despejamos  $X(s)$  de la primera ecuación y la reemplazamos en la segunda:

$$X(s) = \left[ \frac{(I+ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) \quad (2.38)$$

$$(M + m) \left[ \frac{(I+ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) s^2 + b \left[ \frac{(I+ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) s + ml\Phi(s)s^2 = U(s) \quad (2.39)$$

Por lo que la función de transferencia quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q} s^2}{s^4 + \frac{b(I+ml^2)}{q} s^3 - \frac{(M+m)mgl}{q} s^2 - \frac{bmgls}{q}} \quad (2.40)$$

Donde:

$$q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2]$$

De la función de transferencia anteriormente obtenida podemos concluir que existe un polo y un cero en el origen, por lo que pueden ser no considerados y la función de transferencia obtendrá la siguiente forma:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q} s}{s^3 + \frac{b(I+ml^2)}{q} s^2 - \frac{(M+m)mgl}{q} s - \frac{bmgls}{q}} \quad (2.41)$$

Donde:

$M = \text{masa del carro}$

$m = \text{masa del pendulo}$

$b = \text{friccion del carro}$

$l = \text{logitud del pendulo}$

$i = \text{ineracia del pendulo}$

De esta manera ya obtuvimos la función de transferencia de un sistema físico de un péndulo invertido con el que podemos realizar un posterior análisis de estabilidad y otros análisis según sea necesario.

### 2.4.3. Espacio de estados en un péndulo invertido

El vector de estados  $x$  de la ecuación (2.2) tiene en su interior 4 elementos: posición del carro, derivada de la posición, posición del ángulo, derivada del ángulo, mientras que el vector  $y$  según esta considerado debe tener tres variables: la posición del carro, el ángulo y la velocidad del carro. El vector  $u$  solo tiene como elemento la fuerza aplicada al carro. Con estos valores ya se puede determinar las matrices  $C$  y  $D$ , donde  $D=0$ .

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{\phi} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = F$$

Para obtener las matrices  $A$  y  $B$  debemos expresar las ecuaciones (2.6) y (2.11) de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.42)$$

De tal manera que:

$$\dot{x}_1 = f_1(x, u) = x_3 \quad (2.43)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x, u) = x_4 \quad (2.44)$$

Reemplazando en la ecuación (2.36) la expresión  $\alpha = M_1 l_5$ :

$$\dot{x}_3 = \frac{\alpha \dot{x}_4 \cos x_2 - \alpha x_4^2 \operatorname{sen} x_2 - F_r x_3 + u}{M} \quad (2.45)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\alpha \dot{x}_3 \cos x_2 - \alpha g \operatorname{sen} x_2 - C x_4}{\theta} \quad (2.46)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.48), la ecuación (2.51) obtendremos  $\dot{x}_3 = f_3(x, u)$ , pero esta ecuación no es lineal por lo que debe tener la siguiente forma para representarla como ecuación de estado lineal:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u \quad (2.47)$$

Donde  $a_{ij}$  y  $b_i$  son constantes, y para linealizar la ecuación  $\dot{x}_3 = f_3(x, u)$  se puede expresar a  $f_3(x, u)$  como una serie de Taylor y usas únicamente el primer término.

$$\dot{x}_3 \approx \sum_{i=1}^4 \left[ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_i} \Big|_{x=0, u=0} \Delta x_i \right] + \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial u} \Big|_{x=0, u=0} \Delta u \quad (2.48)$$

Al determinar las derivadas parciales y reemplazar  $\beta = \theta M - \alpha^2$ , obtenemos:

$$a_{31} = \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_1} \Big|_{x=0, u=0} = 0 \quad (2.49)$$

$$a_{32} = \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_2} \Big|_{x=0, u=0} = \frac{\alpha^2 g}{\beta} \quad (2.50)$$

$$a_{33} = \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_3} \Big|_{x=0, u=0} = \frac{\theta F_r}{\beta} \quad (2.51)$$

$$a_{34} = \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_4} \Big|_{x=0, u=0} = -\frac{\alpha C}{\beta} \quad (2.52)$$

$$b_3 = \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial u} \Big|_{x=0, u=0} = -\frac{\theta}{\beta} \quad (2.53)$$

$$b_4 = \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial u} \Big|_{x=0, u=0} = \frac{\beta}{\theta} \quad (2.54)$$

En el caso de  $\dot{x}_4$  se debe seguir el mismo proceso que para  $\dot{x}_3$  y luego de esto ya podemos determinar los coeficientes de A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Y si lo expresamos en forma de espacio de estados obtenemos lo siguiente:

$$\dot{X}_n = A_n x_n + B_n u$$

$$Y_n = C x_n$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{I((M+m)+Mml^2)} & \frac{m^2 gl^2}{I((M+m)+Mml^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I((M+m)+Mml^2)} & \frac{mgl(M+m)}{I((M+m)+Mml^2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I+ml^2)}{I((M+m)+Mml^2)} \\ 0 \\ \frac{ml}{I((M+m)+Mml^2)} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.5. Resumen

El estudio de los péndulos invertidos tiene una gran importancia en la actualidad debido a que este tipo de sistemas ofrecen un ahorro de energía y esfuerzos de control. Además que los péndulos invertidos son utilizados como bancos de pruebas ya que constituyen una completa fuente de aplicación de conocimientos sobre la teoría de control.

El estudio de los péndulos invertidos ha trascendido debido al avance de la tecnología incluso incursionado en el ámbito de la movilidad creando vehículos basados en este principio

Los péndulos invertidos, vistos desde el punto de vista de su estructura se clasifican en: péndulo con movimiento lineal sobre un carro y péndulo con movimiento giratorio. Para el modelamiento matemático de un péndulo invertido se necesita tener conocimiento de temas de la teoría de control como: sistemas de control, función de transferencia, espacio de estados, entre otros.

La estabilización de un péndulo invertido involucra diferentes tipos de sensores como acelerómetros, giroscopios o encoders los cuales tienen la función de interpretar la posición actual de la plataforma y de no estarlo, llevarla a su posición de equilibrio. El planteamiento de la plataforma de péndulo invertido se refiere a la capacidad del mismo de colocarse en equilibrio mediante la acción de control elegida.

## Capítulo 3

# Metodología y diseño de la plataforma

El capítulo se centra en el diseño y construcción de la plataforma de péndulo invertido. Basado en el modelo de diseño y desarrollo de productos (Ulrich, K. y Eppinger, S., 2013), donde se comienza estableciendo las necesidades de los usuarios. A partir de esto se definen las especificaciones según las necesidades previamente establecidas y ambos aspectos repercuten en la elaboración de la estructura funcional. Se plantean alternativas de diseño según la estructura de la plataforma para su posterior evaluación. Una vez realizado esto se define el diseño el cual es el inicio de la implementación de los componentes y por último se realiza la corrección de posibles fallos para cumplir todas las especificaciones.

### 3.1. Definición del concepto

Según (Ulrich, K. y Eppinger, S., 2013), para el desarrollo de un producto se debe tener claro el concepto de manera general. Se debe captar el deseo del cliente, se analizan las necesidades y se documentan. Se identifican las especificaciones técnicas más relevantes y se realiza un análisis de la importancia de los mismos.

#### 3.1.1. Definición de necesidades

Es importante definir las necesidades del proyecto debido a que esto define las características y consideraciones que guían el diseño final y además permiten desarrollar las especificaciones técnicas de la plataforma.

**Tabla 4.**  
**Detalle de necesidades.**

<i>Nº</i>	<i>Necesidad</i>
1	No debe caerse
2	Debe responder rápido
3	Debe trabajar para ángulos pequeños
4	Debe ser fácil de usar
5	Debe ser inalámbrico
6	Debe usar nueva tecnología
7	No debe ser tan pesado
8	Debe tener bajos costos

Los conceptos detallados en la Tabla 4 se analizarán por separado y mostrarán posibles soluciones para la elaboración del proyecto. La Tabla 4 tiene como función aclarar los puntos en los cuales se enfocará el diseño de la plataforma de péndulo invertido con el fin de obtener una solución práctica, sencilla y de módulos independientes.

### 3.1.2. Definición de características técnicas

En este aspecto consideramos las necesidades del usuario sumadas a un detalle de métricas que darán como resultado las características técnicas objetivo de la plataforma de péndulo invertido. Las métricas nos darán un reflejo medible de las necesidades, con lo que podremos satisfacer las necesidades del usuario en caso de cumplirlas.

**Tabla 5.**  
**Detalle de características técnicas**

<i>Nº</i>	<i>Características técnicas</i>
1	Diseño resistente
2	Tiempo de Respuesta rápido
3	Error angular pequeño
4	Controladores robustos
5	Sistema inalámbrico
6	Uso de componentes pequeños
7	Estructura de bajo peso
8	Bajos costos

En la tabla 5 se establecen los parámetros que serán base para el diseño de la plataforma de péndulo invertido. Estos valores servirán de referencia con las plataformas existentes.

### **3.1.3. QFD**

La Función de Desarrollo de la Calidad (Quality Function Deployment), también conocida como la casa de la calidad, relaciona los requerimientos de los clientes con las características técnicas que se necesitan para satisfacerlos. Los requerimientos definen la calidad de un producto y son la forma en la que los clientes describen los productos y las características que necesitan en ellos. Métricas asociadas a las características técnicas son usadas para determinar el grado de satisfacción de los clientes con sus requerimientos. Esta medida es fundamental para la mejora continua (Yacuzzi & Martín, 2003).

QFD permite determinar la importancia de cada especificación para la solución del problema final de una forma ordenada, sistemática y eficaz. Logrando que el cliente quede satisfecho y a la vez se reducen los tiempos y costos de diseño del producto. La matriz QFD realizada se muestra en la Figura 42.

Interacciones →

Requerimientos	Características Técnicas								
	Importancia para el cliente	Diseño resistente	Tiempo de respuesta rápido	Error angular pequeño	Controladores robustos	Sistema inalámbrico	Uso de componentes pequeños	Estructura de bajo peso	Bajos costos
No debe caerse	3	9	9	3	9	9	1	1	1
Debe responder rápido	3	3	9	9	9	3	1	1	1
Debe trabajar para ángulos pequeños	2	1	3	9	9	1	1	1	3
Debe ser fácil de usar	1	1	3	1	1	3	1	1	9
Debe ser inalámbrico	2	1	1	3	1	9	3	3	1
Debe usar nueva tecnología	1	1	1	3	3	9	9	3	1
No debe ser tan pesado	2	3	3	1	3	1	3	9	3
Debe tener bajos costos	3	1	1	1	3	1	9	1	9
Importancia Técnica		49	73	63	91	55	51	33	55
Ponderación	%	10,4	15,5	13,4	19,4	11,7	10,85	7,02	11,7

Figura 38. Casa de la calidad

En la tabla 6 se muestran los resultados ordenados según su ponderación de mayor a menor.

Tabla 6.  
Resultados de la matriz QFD

Hitos	Características Técnicas	Porcentaje de ponderación
1	Controladores robustos	19,4
2	Tiempo de Respuesta rápido	15,5
3	Error angular pequeño	13,4
4	Sistema inalámbrico	11,7
5	Bajos costos	11,7
6	Uso de componentes pequeños	10,85
7	Diseño resistente	10,4
8	Estructura de bajo peso	7,02

### 3.2. Definición de la estructura funcional

Para el desarrollo del concepto se deben considerar varios aspectos, uno de ellos es conocer la forma de trabajo que va a tener el producto. Para esto es necesario conocer

cómo funciona el producto ya que de esta manera podemos separar su operatividad y analizar en módulos su funcionamiento.

Al trabajar con módulos se puede distribuir de mejor manera las operaciones funcionales de la plataforma. Para el desarrollo de la plataforma de péndulo invertido se definen los siguientes módulos como vemos en la tabla 7.

**Tabla 7.**  
**Módulos de la plataforma de péndulo invertido**

<i>#</i>	<i>Módulo</i>	<i>Funciones</i>	<i>Hitos a cumplir</i>
<i>1</i>	Base	Soporte de desplazamiento	7,8
<i>2</i>	Tracción	Actuadores de desplazamiento	6,7,8
<i>3</i>	Potencia	Acondiciona señal de control	2,6
<i>4</i>	Energía	Otorga energía a los componentes	4
<i>5</i>	Posicionamiento angular	Registra cambio de posición	3,4
<i>6</i>	Adquisición y mando	Adquirir datos y controlar en nivel bajo	1,2,3,4
<i>7</i>	Control	Controla movimientos de la plataforma	1,2,3

El proceso de diseño de (Ulrich & Eppinger, 2013), presenta dos etapas adicionales:

- Diseño Preliminar
  - Enumera las alternativas para diseño
  - Evalúa las alternativas y selección del diseño
- Diseño final

El diseño final se divide en tres partes principales.

- Diseño mecánico
- Diseño electrónico
- Sistema de control

### **3.3. Módulo 1. Base**

El módulo base constituye el soporte donde estará ubicada la estructura del péndulo invertido, sensores, tarjeta de programación y suministro de energía. Para realizar un correcto dimensionamiento se debe conocer el mecanismo que se va a utilizar. Una de

las especificaciones de diseño indica que la estructura debe ser resistente y que debe procurar tener bajo peso.

### 3.3.1. Alternativas para diseño

#### 3.3.1.1. Base con movimiento lineal sobre un carro

La base con movimiento lineal sobre un carro es un modelo sencillo de desarrollar ya que cuenta con una barra montada en un carro impulsado por un actuador. Este diseño tiene la finalidad de mantener la barra e posición vertical tanto como sea posible y tener el control de la posición del carro.

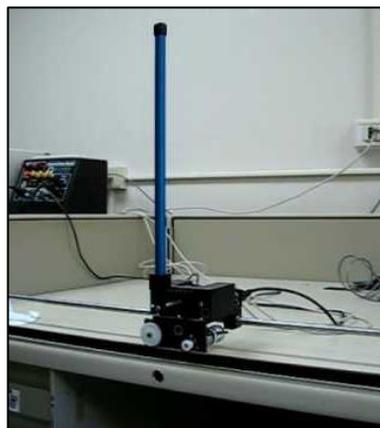


Figura 39. Péndulo invertido sobre carro  
Fuente: Cruz, M., Márquez, C., Silva R. y Merlo C. (2014)

#### Ventajas

- Fácil de implementar
- Necesita un solo motor
- No necesita mucho mantenimiento

#### Desventajas

- Costo de producción elevado
- Necesita mucho espacio
- Puede alcanzar altas temperaturas

### 3.3.1.2. Base con movimiento giratorio

También conocido como péndulo de Furuta, cuenta con dos grados de libertad (ambos rotacionales), dos eslabones y dos articulaciones. El primer eslabón gira en el plano horizontal y en uno de sus extremos se encuentra el actuador (motor). Aquí se conecta al segundo eslabón mediante una articulación que gira libremente y permite su rotación sobre el plano vertical.



Figura 40. Péndulo invertido de base con movimiento giratorio  
Fuente: Cruz, M., Márquez, C., Silva R. y Merlo C. (2014)

#### Ventajas

- Solo posee un actuador
- Puede moverse en dos planos diferentes
- Posee más grados de libertad que actuadores (sistema subactuado)

#### Desventajas

- No se puede realizar una linealización exacta de su sistema
- Limitada variedad de algoritmos de control
- Posee gran cantidad de entradas y salidas interrelacionadas de manera no lineal.

### 3.3.1.3. Base móvil con ruedas

Este tipo de modelo cuenta con ruedas como base, lo que la hace móvil. De esta manera la plataforma puede ser probada en cualquier lugar y sobre cualquier superficie plana. Tienen una disposición vertical de manera que conserva los principios físicos de un péndulo invertido sobre carro.



Figura 41. Péndulo invertido de base móvil con ruedas  
Fuente: The NXT step (2012)

#### Ventajas

- Fácil de transportar
- Necesita menos espacio
- Costo de producción bajo

#### Desventajas

- Complicado de implementar
- Inestabilidad estática y dinámica
- Mucha sensibilidad a perturbaciones

### 3.3.2. Evaluación y selección de alternativas

Como primer paso para la evaluación y selección de la alternativa de diseño, se debe tener una manera única de valoración de cada módulo. Una vez seleccionados los criterios de evaluación realizamos la ponderación de los mismos, donde necesitamos una tabla de ponderaciones en la cual se colocan valores entre 0 y 1.

Si el valor es 1 quiere decir que el criterio de la fila es más relevante que el criterio de la columna, y caso contrario, si el valor es 0 quiere decir que el criterio de la columna es más importante que el correspondiente a la fila. En el caso de que el valor sea 0.5 significa que tanto el criterio de la fila como el de la columna tienen la misma importancia.

A continuación se realiza el análisis detallado y la evaluación correspondiente a las alternativas de los componentes para cada módulo. Y este método se lo realizará para todos los módulos.

**Tabla 8.**  
Ponderación de criterios de evaluación del módulo 1

<i>Criterio</i>	<i>Costo</i>	<i>Implementación</i>	<i>Control</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Costo</i>	-	1	1	3	0,5
<i>Implementación</i>	0	-	1	2	0,33
<i>Control</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Donde:

- Solución A: Base con movimiento lineal sobre un carro
- Solución B: Base con movimiento giratorio
- Solución C: Base móvil con ruedas

**Tabla 9.**  
Ponderación de costo del módulo 1

<i>Costo</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	0	2	0,33
<i>Solución B</i>	0	-	0	1	0,17
<i>Solución C</i>	1	1	-	3	0,50
			<b>Suma</b>	6	1

**Tabla 10.**  
Ponderación de implementación del módulo 1

<i>Implementación</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	1	3	0,50
<i>Solución B</i>	0	-	0	1	0,17
<i>Solución C</i>	0	1	-	2	0,33
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 11.  
Ponderación de control del módulo 1

<i>Control</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	0,5	2,5	0,42
<i>Solución B</i>	0	-	0	1	0,17
<i>Solución C</i>	0,5	1	-	2,5	0,42
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 12.  
Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 1

	<i>Costo</i>	<i>Implementación</i>	<i>Control</i>	$\Sigma$	<i>Orden de selección</i>
<i>Solución A</i>	0,17	0,17	0,07	0,40	2
<i>Solución B</i>	0,08	0,06	0,03	0,17	3
<i>Solución C</i>	0,25	0,11	0,07	0,43	1
			<b>Suma</b>	1,0	

### 3.3.3. Definición del diseño

La alternativa de diseño seleccionada plantea un modelo de una base móvil con ruedas. En la plataforma se posiciona una base horizontal en la que se colocan los motores con sus respectivos acoples y el driver de los mismos. Se colocan también 2 ruedas con la finalidad de mantener el equilibrio de la plataforma, las cuales son ligeras y pueden adherirse a cualquier superficie.

El par de ruedas deben permitir que la plataforma tenga un rápido desplazamiento y una rápida orientación por lo que se seleccionaron las ruedas con un labrado adecuado para la aplicación. Además de esto, las ruedas sirven como punto de apoyo y deben mantener el equilibrio de la plataforma cuando está en posición vertical evitando que esta caiga.

La manufactura de la base consiste en instalar los motores y los demás elementos según el modelo CAD presentado a continuación y con el menor error posible, con la finalidad de que exista equilibrio en la plataforma.

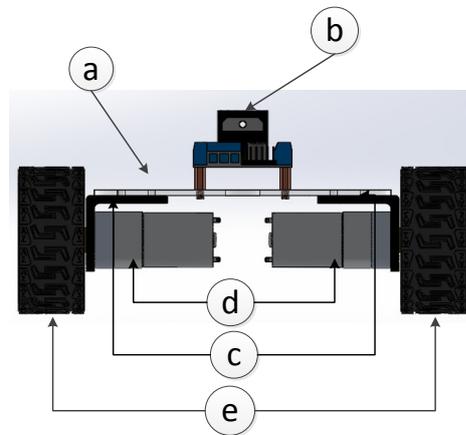


Figura 42. Ubicación elementos en la base.

a) Base acrílica, b) Driver motores, c) Acoples motores, d) Motores, e) Ruedas

## 3.4. Módulo 2. Tracción

En el módulo tracción se encuentran los elementos que generan la energía traslacional que hará mover la plataforma de péndulo invertido. Existen varios tipos de actuadores como los motores de combustión interna, de corriente continua o alterna. Pero por sus elevados costos e instalación compleja se descartan las dos primeras opciones, de tal manera que la más adecuada es el motor de corriente continua.

### 3.4.1. Alternativas para diseño

#### 3.4.1.1. Motor a pasos

Este tipo de motor electromecánico convierte una serie de impulsos eléctricos en movimientos angulares exactos. Este tipo de motores son utilizados comúnmente en mediciones y aplicaciones de control.



**Figura 43. Motor a pasos**  
**Fuente: TECHMAKE (2016)**

### **Ventajas**

- Fácil de controlar e implementar
- Mantiene el torque cuando esta reposo
- Trabaja de 6 a 36 voltios

### **Desventajas**

- Son difíciles de conseguir en el mercado
- Si no se controla correctamente entra en resonancia
- Difícil de operar a altas velocidades

### **3.4.1.2.Servomotor**

Este tipo de motores son similares a los motores de corriente continua y tienen como característica el poder ubicarse en cualquier posición dentro de su rango de operación. Además se mantienen estables en cualquier posición donde se lo ubique.



**Figura 44. Servomotor**  
**Fuente: Electrosome (2016)**

**Ventajas**

- Fácil de controlar e implementar
- Mantiene el torque cuando esta reposo
- Trabaja de 6 a 36 voltios

**Desventajas**

- Difíciles de conseguir en el mercado
- Sus rodamientos se desgastan rápidamente
- Son ruidosos

**3.4.1.3.Motor DC**

Son fáciles de controlar, tanto el arranque/paro, como su posición y velocidad, lo que los ha llevado a ser usados hasta en aplicaciones industriales. Este tipo de motor es el más utilizado a nivel mundial ya que cuenta con una amplia variedad de tamaños y de parámetros de trabajo.



**Figura 45. Motor DC**  
Fuente: Robomart (2015)

**Ventajas**

- Es fácil de conseguir en el mercado
- Trabaja de 6 a 45 voltios
- Existen de diferentes tamaños

### Desventajas

- No funcionan a velocidades bajas
- Necesita sensores adicionales para medir velocidad de rotación
- No mantiene el torque cuando está en reposo

### 3.4.2. Evaluación y selección de alternativas

Utilizando el método de ponderaciones anterior, tenemos el siguiente resultado:

Tabla 13.  
Ponderación de criterios de evaluación del módulo 2

<i>Criterio</i>	<i>Costo</i>	<i>Implementación</i>	<i>Control</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Costo</i>	-	1	1	3	0,5
<i>Implementación</i>	0	-	0	1	0,17
<i>Control</i>	0	1	-	2	0,33
			<b>Suma</b>	6	1

Donde:

- Solución A: Motor a pasos
- Solución B: Servomotor
- Solución C: Motor DC

Tabla 14.  
Ponderación de costo del módulo 2

<i>Costo</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	1	3	0,50
<i>Solución B</i>	0	-	0	1	0,17
<i>Solución C</i>	0	1	-	2	0,33
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 15.  
Ponderación de implementación del módulo 2

<i>Implementación</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0	0	1	0,17
<i>Solución B</i>	1	-	0	2	0,33
<i>Solución C</i>	1	1	-	3	0,50
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 16.  
Ponderación de control del módulo 2

<i>Control</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0	0	1	0,17
<i>Solución B</i>	1	-	1	3	0,50
<i>Solución C</i>	1	0	-	2	0,33
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 17.  
Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 2

	<i>Costo</i>	<i>Implementación</i>	<i>Control</i>	$\Sigma$	<i>Orden de selección</i>
<i>Solución A</i>	0,25	0,03	0,06	0,33	2
<i>Solución B</i>	0,08	0,06	0,17	0,31	3
<i>Solución C</i>	0,17	0,08	0,11	0,36	1
			<b>Suma</b>	1,0	

### 3.4.3. Definición del diseño

El módulo tracción corresponde a los motores que requiere la plataforma y si entregan el torque que necesita la misma. Al realizar la selección de la alternativa de diseño se obtuvo como resultado que la mejor opción son los motores DC para la implementación.

En el diseño de una plataforma de péndulo invertido, la selección del actuador es parte primordial para el correcto funcionamiento de la misma. Debido a que la plataforma debe trasladarse por una superficie, los motores deben tener el torque suficiente para superar la rugosidad del terreno por donde circule, así como vencer la fricción de la rueda con la superficie. De la misma manera se debe considerar que la superficie donde se mueva la plataforma puede tener un grado de inclinación  $\theta$ .

Para poder dimensionar correctamente el motor se deben establecer las cargas en estado de reposo que afectan el comportamiento del mismo. En la figura 43 se puede observar estas cargas para el caso en que la rueda se desplace en un plano inclinado. En la figura 43 se indica como el peso del robot se descompone en dos magnitudes que corresponden a los ejes coordenados del plano inclinado. Con lo que tenemos las siguientes ecuaciones:

$$mg_x = mg\sin(\theta) \quad (3.1)$$

$$mg_y = mg\cos(\theta) \quad (3.2)$$

Donde  $m$  es la masa,  $g_x$  y  $g_y$  son las componentes de la gravedad  $g$  en los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente.

Además, para que la plataforma de péndulo invertido no se deslice por el plano inclinado, debe existir la fuerza de fricción entre la rueda y dicha superficie

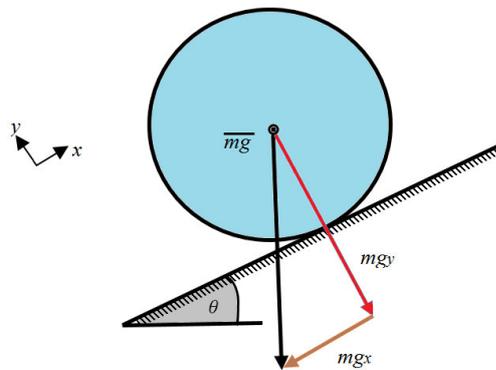


Figura 46. Cargas en reposo sobre una rueda motorizada

Esta relación se expresa con la siguiente ecuación:

$$f = u \times N \quad (3.3)$$

Donde  $f$  es la fuerza de rozamiento,  $u$  es el coeficiente de fricción y  $N$  es la fuerza normal o reacción que se produce cuando están en contacto dos superficies. La fuerza de rozamiento representa el componente energético al cual el torque del motor debe vencer.

En la figura 44 se observan estas fuerzas actuando sobre la rueda cuando esta se desplaza sobre un plano inclinado. La sumatoria de momentos respecto al centro de la rueda no permite establecer la siguiente relación:

$$T = f \times R \quad (3.4)$$

Donde  $T$  es el torque del motor,  $f$  es la fuerza de rozamiento y  $R$  es el radio de la rueda.

Con estos datos ya podemos obtener el torque del motor necesario para mantener el movimiento durante el desplazamiento. Sin embargo, para dimensionar el motor correctamente se debe considerar un caso más extremo todavía. Se trata de tener la rueda en estado estacionario y pretender empezar el movimiento utilizando la aceleración  $a$ .

La figura 44 muestra la adición de este nuevo componente, donde igualando las fuerzas del eje  $x$ , tenemos:

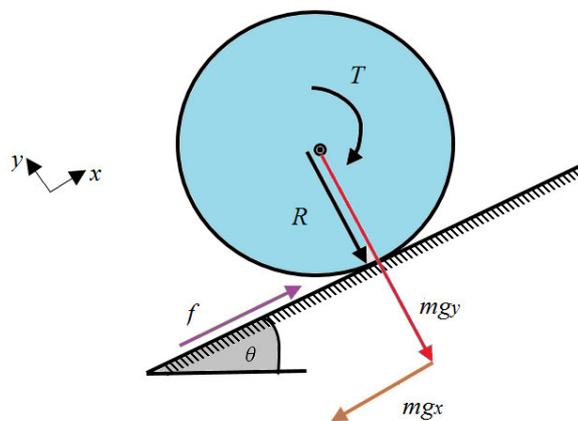


Figura 47. Cargas en el desplazamiento de una rueda motorizada

$$\sum F_x = ma = mg_x + f \quad (3.5)$$

Reemplazamos las ecuaciones 3.1 y 3.4 con lo que obtenemos:

$$ma = mgsin(\theta) + \frac{T}{R} \quad (3.6)$$

Donde despejando la ecuación 3.6 se obtiene:

$$T = [a + gsin(\theta)]mR \quad (3.7)$$

La ecuación 3.7 representa el torque que necesita el robot para avanzar por una pendiente con velocidad variable usando un único motor. El diseño propuesto manifiesta usar 2 motores en configuración diferencial por lo que la ecuación 3.7 debe ser dividida en 2, con lo que tenemos:

$$T_m = \frac{T}{2} = \frac{[a+g\sin(\theta)]mR}{2} \quad (3.8)$$

Se deben considerar además la eficiencia del motor y el factor de seguridad con lo que obtenemos la siguiente expresión:

$$T_{fm} = f_s \left( \frac{100}{e} \right) \left\{ \frac{[a+g\sin(\theta)]mR}{2} \right\} \quad (3.9)$$

Donde  $T_{fm}$  es el torque final del motor,  $f_s$  es el factor de seguridad y  $e$  es la eficiencia del motor.

La ecuación 3.9 nos muestra el modelo matemático que se requiere para dimensionar los motores que se usarán en la plataforma de péndulo invertido.

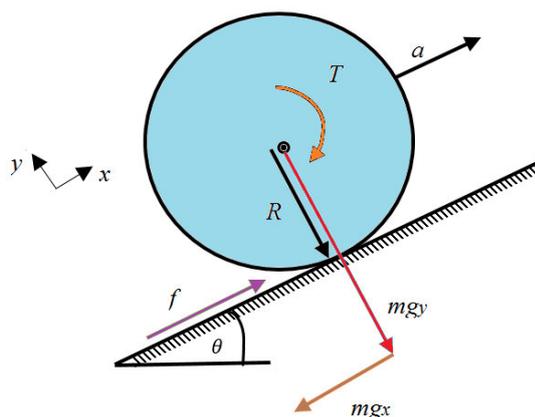


Figura 48. Cargas presentes en el desplazamiento de una rueda motorizada desde el reposo

Se le da un valor numérico a la ecuación 3.9 con los siguientes valores:  $m_{max} = 2 \text{ kg}$ ,  $R = 0.035 \text{ m}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $a = 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $e = 90\%$ ,  $f_s = 2$ . Estos parámetros corresponden a los requisitos establecidos en la sección 3.2 de este documento. Reemplazando en la ecuación 3.9 obtenemos:

$$T_{fm} = 2 \left( \frac{100}{90} \right) \left\{ \frac{[0.1+9.8 \sin(15)]2 \times 0.035}{2} \right\} \quad (3.10)$$

$$T_{fm} = 0.2 \text{ Nm}$$

Según el cálculo anterior el torque para cada motor requerido para el desplazamiento de la plataforma de péndulo invertido en el caso más extremo es 0.2 Nm. Con este

valor y consultando la disponibilidad en el mercado se ha seleccionado 2 motores DC JGA25-370. En la tabla 18 se muestran las características más importantes del motor seleccionado.

Tabla 18.

Características motor DC

Fuente: Arduino (2015)

<i>Característica</i>	<i>Magnitud (Unidad)</i>
<i>Relación de transmisión</i>	1:21
<i>Número de revoluciones</i>	400 RPM
<i>Máximo torque</i>	2.2 kg.cm
<i>Voltaje</i>	12 V
<i>Corriente máxima</i>	1200 mA
<i>Peso</i>	84 gr

### 3.5. Módulo 3. Potencia

Este módulo hace referencia al sistema que suministra de energía controlada a los actuadores con la finalidad de realizar movimientos rotatorios controlados.

#### 3.5.1. Alternativas para diseño

##### 3.5.1.1. Puente H con transistores

El puente H es un circuito electrónico que hace que un motor eléctrico de corriente continua gire en ambos sentidos (horario y antihorario). Este tipo de circuitos se los puede construir con componentes discretos.

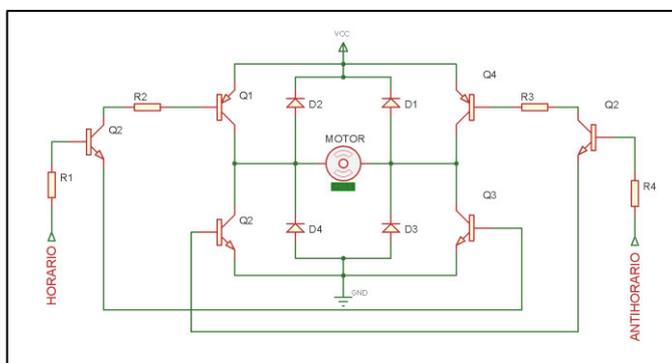


Figura 49. Puente H con transistores

### Ventajas

- Bajo costo
- Resiste potencias altas
- Robusto en cualquier aplicación

### Desventajas

- Difícil de implementar
- Requiere un circuito para cada motor
- Inestabilidad en altas frecuencias

### 3.5.1.2. Puente H con circuito integrado

Este tipo de puente H es una representación reducida ya que en un solo microchip están incluidos todos los componentes requeridos. Este tipo de disposición es de gran ventaja al momento de optimizar espacio.

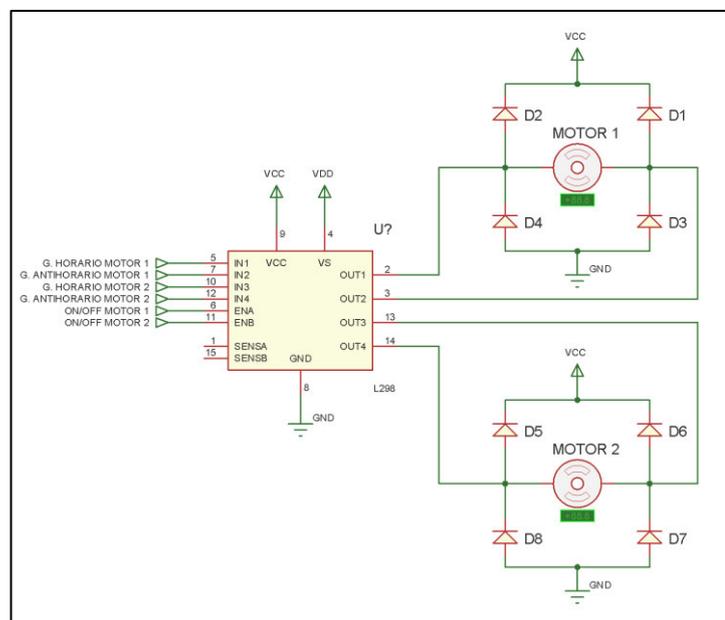


Figura 50. Puente H con circuito integrado

### Ventajas

- Fácil implementación

- Un circuito integrado sirve para 2 motores
- Eficiente a altas frecuencias

### Desventajas

- Alto costo
- No soporta altas frecuencias
- No divide circuitos de potencia y de control

### 3.5.1.3. Control con optoacopladores

Esta opción de propuesta integra un circuito electrónico compuesto por optoacopladores con la finalidad de transmitir las señales de control.

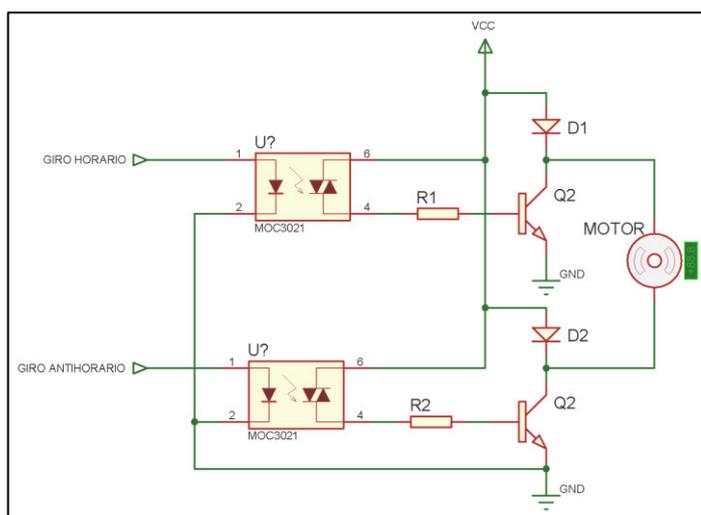


Figura 51. Control con optoacopladores

### Ventajas

- Bajo costo
- Soporta altas potencias
- Eficiente en altas frecuencias

### Desventajas

- Difícil de implementar
- Requiere un circuito para cada motor

### 3.5.2. Evaluación y selección de alternativas

Utilizando el método de ponderaciones anterior, tenemos el siguiente resultado:

Tabla 19.  
Ponderación de criterios de evaluación del módulo 3

<i>Criterio</i>	<i>Costo</i>	<i>Funcionamiento</i>	<i>Control</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Costo</i>	-	1	1	3	0,5
<i>Funcionamiento</i>	0	-	1	2	0,33
<i>Modularidad</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Donde:

- Solución A: Puente H con transistores
- Solución B: Puente H con circuito integrado
- Solución C: Control con optoacopladores

Tabla 20.  
Ponderación de costo del módulo 3

<i>Costo</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	1	3	0,50
<i>Solución B</i>	0	-	1	2	0,33
<i>Solución C</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 21.  
Ponderación de funcionamiento del módulo 3

<i>Funcionamiento</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0	0	1	0,17
<i>Solución B</i>	1	-	0,5	2,5	0,42
<i>Solución C</i>	1	0,5	-	2,5	0,42
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 22.  
Ponderación de modularidad del módulo 3

<i>Modularidad</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0	0	1	0,17
<i>Solución B</i>	1	-	1	3	0,50
<i>Solución C</i>	1	0	-	2	0,33
			<b>Suma</b>	6	1

**Tabla 23.**  
**Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 3**

	<i>Costo</i>	<i>Funcionamiento</i>	<i>Modularidad</i>	$\Sigma$	<i>Orden de selección</i>
<i>Solución A</i>	0,25	0,06	0,03	0,33	2
<i>Solución B</i>	0,17	0,14	0,08	0,39	1
<i>Solución C</i>	0,08	0,14	0,06	0,28	3
			<b>Suma</b>	1,0	

### 3.5.3. Definición del diseño

El circuito de control es un puente H con circuito integrado según la evaluación previa que se realizó. Al tener en el mercado sistemas embebidos con estas características, se reduce el tiempo de manufactura de los circuitos y a su vez son más robustos al momento de ponerlos en marcha. Por este motivo se incorpora en la plataforma de péndulo invertido, un circuito integrado basado en el control por puente H para el mando de los motores DC.

Para dimensionar este tipo de componentes se debe conocer las características operativas de cada motor. En la tabla 18 se indican este tipo de parámetros de los motores DC seleccionados según los requerimientos. Se debe considerar también las condiciones de temperatura y de humedad a las que va a ser sometido este controlador.

El motor seleccionado cuenta con 400 RPM lo que representa hasta 1200 mA en consumo de corriente si se lo alimenta con 12 voltios. Una vez que se consideraron los valores técnicos necesarios, la disponibilidad en el mercado y los costos del dispositivo se optó por elegir el controlador L298N. La tabla 24 muestra las principales características del controlador seleccionado.

Tabla 24.

Características del controlador L298N

Fuente: GEEETECH, 2015

<i>Característica</i>	<i>Magnitud (Unidad)</i>
<i>Voltaje de alimentación mínimo</i>	5 V
<i>Corriente de operación máxima</i>	2 A
<i>Entradas de control</i>	6
<i>Dimensiones</i>	43 x 23.9 x 43 mm

### 3.6. Módulo 4. Energía

En el módulo energía se encuentra el suministro de energía eléctrica a los diferentes componentes de la plataforma para su funcionamiento.

#### 3.6.1. Alternativas para diseño

##### 3.6.1.1. Celda solar

Utilizar las celdas solares representa un método de obtención de energía novedoso en la actualidad para la robótica móvil. Este método se basa en la captación de energía luminosa para convertirla en energía eléctrica.



Figura 52. Celda solar  
Fuente: Costellium (2013)

#### Ventajas

- Fácil de implementar
- Usa tecnología nueva
- Usa energía limpia

#### Desventajas

- Alto costo y baja eficiencia

- Gran tamaño para el uso en la plataforma
- Gran utilidad en ambientes de alta luminosidad

### 3.6.1.2.Alternador

Un alternador es una máquina eléctrica que puede transformar energía mecánica en energía eléctrica generando corriente alterna mediante inducción electromagnética.



Figura 53. Mini alternador  
Fuente: Banggood (2016)

#### Ventajas

- Menor espacio y peso
- Mayor vida útil
- Mayor gama de velocidad de giro

#### Desventajas

- Alto costo
- Genera contaminación
- Genera un aumento de temperatura

### 3.6.1.3.Batería LiPo

Este método es uno de los más utilizados para suministrar energía continua a dispositivos robóticos móviles. Consiste en un dispositivo que genera una corriente eléctrica a partir de una reacción química producida en su interior.



Figura 54. Batería LiPo  
Fuente: Crónicas de vuelo-Aeromodelismo (2012)

### Ventajas

- Representan poco espacio
- Fácil de montar
- Tienen una tasa de descarga alta

### Desventajas

- Tienen un electrolito volátil
- Requieren un cuidado único y adecuado

### 3.6.2. Evaluación y selección de alternativas

Utilizando el método de ponderaciones anterior, tenemos el siguiente resultado:

Tabla 25.  
Ponderación de criterios de evaluación del módulo 4

<i>Criterio</i>	<i>Costo</i>	<i>Implementación</i>	<i>Tamaño</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Costo</i>	-	1	1	3	0,5
<i>Implementación</i>	0	-	0	1	0,17
<i>Tamaño</i>	0	1	-	2	0,33
			<b>Suma</b>	6	1

Donde:

- Solución A: Celda solar
- Solución B: Alternador

- Solución C: Batería LiPo

Tabla 26.  
Ponderación de costo del módulo 4

<i>Costo</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0	0	1	0,17
<i>Solución B</i>	1	-	0	2	0,33
<i>Solución C</i>	1	1	-	3	0,50
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 27.  
Ponderación de implementación del módulo 4

<i>Implementación</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0,5	0	1,5	0,25
<i>Solución B</i>	0,5	-	0	1,5	0,25
<i>Solución C</i>	1	1	-	3	0,50
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 28.  
Ponderación de tamaño del módulo 4

<i>Tamaño</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0	0	1	0,17
<i>Solución B</i>	1	-	0,5	2,5	0,42
<i>Solución C</i>	1	0,5	-	2,5	0,42
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 29.  
Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 4

	<i>Costo</i>	<i>Funcionamiento</i>	<i>Modularidad</i>	$\Sigma$	<i>Orden de selección</i>
<i>Solución A</i>	0,08	0,04	0,06	0,18	3
<i>Solución B</i>	0,17	0,04	0,14	0,35	2
<i>Solución C</i>	0,25	0,08	0,14	0,47	1
			<b>Suma</b>	1,0	

### 3.6.3. Definición del diseño

Como alternativa de diseño seleccionada para este módulo se manifestó que la mejor opción es la implementación de una batería LiPo. De este modo se realiza el

dimensionamiento adecuado de las baterías que se van a utilizar en la plataforma de péndulo invertido.

Para la selección de las baterías se establece una relación entre la potencia mecánica del motor en su caso más exigente y la potencia eléctrica establecida entre el controlador y el motor como se indica en la ecuación 3.11.

$$T \times \omega = I \times V \quad (3.11)$$

Donde  $T$  es el torque,  $\omega$  es la velocidad angular,  $I$  es la intensidad de corriente y  $V$  es el voltaje de operación en voltios. Considerando como torque máximo del motor el valor de  $0.21 \text{ Nm}$ , la velocidad angular es de  $41.78 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  y el voltaje de operación de los controladores es de  $12 \text{ V}$ . En la ecuación 3.11 el único valor desconocido es la corriente de operación que se requiere para que la plataforma de péndulo invertido se desplace de manera correcta.

$$I = \frac{T \times \omega}{V} = \frac{0.21 \times 41.78}{12} = 0.73 \text{ [A]} \quad (3.12)$$

La ecuación 3.12 muestra que la corriente que necesita un motor es aproximadamente  $0.73 \text{ A}$ , a este valor se debe multiplicar el número de motores que se va a utilizar. Por lo tanto la corriente que debe suministrar la fuente es de  $1.46 \text{ A}$  y este valor está de acuerdo con el valor de corriente que soportan los motores y los controladores. Para la plataforma se usará una suministro de corriente de  $1.5 \text{ A}$  con la finalidad de que exista la suficiente corriente para todos los elementos que se utilizarán.

Para conocer la capacidad de una batería LiPo se debe conocer la cantidad de corriente que suministra en un tiempo establecido. En la ecuación 3.13 se muestra la capacidad que debe tener la batería que se va a utilizar en la plataforma.

$$c = I \times t = 1.5 \times 1 = 1.5 \text{ Ah} \quad (3.13)$$

Donde  $c$  es la capacidad de la batería,  $I$  la intensidad de corriente y  $t$  el tiempo de operación que en este caso será de 1 hora. El valor obtenido en la ecuación 3.13 debe ser multiplicado por los siguientes valores:

El factor de carga  $f_c$  indica que la capacidad de una batería debe ser 1.2 veces el valor dimensionado para evitar que las caídas de tensión, propias de las descargas de las baterías, no afecten el funcionamiento.

Y el factor de seguridad  $f_z$ , que permite descartar errores en el proceso de dimensionamiento. En el caso de las baterías se recomienda un valor de 1.1 veces al dimensionado. Por lo tanto la ecuación 3.13 tiene que ser modificada y nos entregará el valor de corriente por hora que se requiere de la fuente para el funcionamiento de la plataforma de péndulo invertido.

$$c_{final} = c \times f_c \times f_z = 1.5 \times 1,1 \times 1,2 = 1.98 Ah \quad (3.14)$$

Además se deben considerar el voltaje nominal que debe tener la batería al momento de realizar la selección. Generalmente las baterías LiPo que se encuentran en el mercado son de 3.7 voltios por celda y de 4.2 voltios cuando están cargadas por lo que se disponen de menos celdas para crear una batería. Este tipo de clasificación se conoce como clasificación “S”. La letra S representa el número de celdas conectadas en serie que contiene la batería.

En la tabla 30 se muestran varios tipos de baterías LiPo según la clasificación “S”.

**Tabla 30.**

**Clasificación S de las baterías LiPo**

Fuente: Erle Robotics., 2014

<i>Voltaje de batería</i>	<i>Número de celdas</i>	<i>Clasificación S</i>
3.7	1	1S
7.4	2	2S
11.1	3	3S
14.8	4	4S
18.5	5	5S
22.2	6	6S

La tasa de descarga de una batería es la rapidez con que una batería puede ser descargada de forma segura. Mientras más rápido los iones fluyen del ánodo al cátodo entonces más rápido se realizará la descarga. Por lo tanto una tasa de descarga 10C se

descarga a un ritmo de 10 más que la capacidad de la batería, 15C= 15 veces, 20C= veces, y así sucesivamente.

En la tabla 31 podemos observar las características de la batería LiPo utilizada en este proyecto.

**Tabla 31.**

**Características de la batería LiPo usada en la plataforma**

**Fuente: Zippy, 2015**

<i>Característica</i>	<i>Magnitud (Unidad)</i>
<i>Voltaje</i>	11.1 V
<i>Capacidad de corriente</i>	2200 mAh
<i>Descarga</i>	25C
<i>Tipo de batería</i>	3S

La batería usadas en la plataforma no solamente nos sirve para energizar los motores y sus controladores, sino que también alimentan los sensores y demás componentes del circuito ya que estos usan una corriente no mayor a 0,1 A. De esta manera el dimensionamiento de las baterías no es afectado por pérdidas de corriente.

## **3.7. Módulo 5. Posicionamiento angular**

El posicionamiento angular consiste en identificar la posición de la plataforma de péndulo invertido a lo largo del tiempo.

### **3.7.1. Alternativas para diseño**

#### **3.7.1.1. Acelerómetro/Giroscopio**

Con la finalidad de controlar la velocidad y la aceleración del motor que se va a utilizar en la plataforma, se usan este tipo de dispositivos. Estos dispositivos envían los valores obtenidos al controlador para realizar una acción de control conveniente.

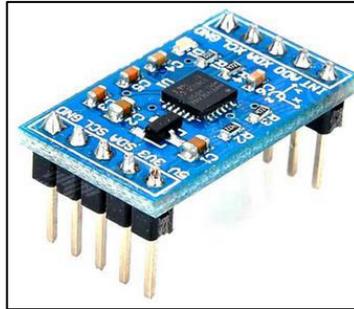


Figura 55. Acelerómetro micromecánico  
Fuente: Arduino (2015)

### Ventajas

- Operan de 3.7 a 5 voltios
- Fácil de montar
- Bajo costo

### Desventajas

- Tiene solo una disposición de ángulos

### 3.7.1.2.Sensores magnéticos de posicionamiento angular

Este tipo de elementos mide la posición angular mediante el magnetismo, donde cuenta con un detector y un emisor. El emisor es un imán que cambia sus polos y el receptor interpreta la posición del emisor y calcula el ángulo de manera absoluta.



Figura 56. Sensores magnéticos de posición angular  
Fuente: Sensing (2016)

### Ventajas

- Alta precisión

- Amplia gama de temperatura de funcionamiento
- Fácil de calibrar

### Desventajas

- Producen ruido
- Gran tamaño
- Desgaste mecánico

### 3.7.1.3.Encoder

Es un dispositivo que convierte información de un formato a otro con el propósito de medir dio tipo de información. Los encoders pueden utilizarse en aplicaciones que requieran controlar la dirección, la aceleración, la velocidad y el grado de rotación de un eje o elemento giratorio.

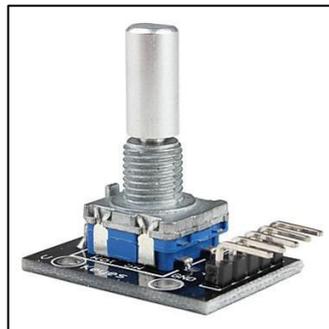


Figura 57. Encoder rotativo  
Fuente: Arduino (2015)

### Ventajas

- Señal de fácil manejo
- Fácil montaje
- Bajo costo

### Desventajas

- Especifica un solo código de ángulo
- Dependen de la posición espacial
- Su señal de salida rebota

### 3.7.2. Evaluación y selección de alternativas

Utilizando el método de ponderaciones anterior, tenemos el siguiente resultado:

Tabla 32.  
Ponderación de criterios de evaluación del módulo 5

<i>Criterio</i>	<i>Costo</i>	<i>Precisión</i>	<i>Robustez</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Costo</i>	-	1	1	3	0,5
<i>Precisión</i>	0	-	1	2	0,33
<i>Robustez</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Donde:

- Solución A: Acelerómetro/Giroscopio
- Solución B: Sensores magnéticos de posicionamiento angular
- Solución C: Encoder

Tabla 33.  
Ponderación de costo del módulo 5

<i>Costo</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	0	2	0,33
<i>Solución B</i>	0	-	0	1	0,17
<i>Solución C</i>	1	1	-	3	0,50
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 34.  
Ponderación de precisión del módulo 5

<i>Precisión</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	1	3	0,50
<i>Solución B</i>	0	-	1	2	0,33
<i>Solución C</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 35.  
Ponderación de robustez del módulo 5

<i>Robustez</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0	1	2	0,33
<i>Solución B</i>	1	-	1	3	0,50
<i>Solución C</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 36.  
Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 5

	<i>Costo</i>	<i>Precisión</i>	<i>Robustez</i>	$\Sigma$	<i>Orden de selección</i>
<i>Solución A</i>	0,17	0,17	0,06	0,39	1
<i>Solución B</i>	0,08	0,11	0,08	0,28	3
<i>Solución C</i>	0,25	0,06	0,03	0,33	2
			<b>Suma</b>	1,0	

### 3.7.3. Definición del diseño

Para realizar una plataforma de péndulo invertido es necesario un acelerómetro para medir la variación de la aceleración y un giroscopio para medir la velocidad angular de la plataforma con la finalidad que esta medición pueda ser manipulada según la necesidad de control. El circuito integrado que se va a utilizar será el MPU-6050 que cuenta con un acelerómetro y un giroscopio MEMS en el mismo empaque. En la tabla 37 se muestran las características más importantes del elemento.

Tabla 37.  
Características del acelerómetro/giroscopio MPU-6050  
Fuente: Arduino (2015)

<i>Característica</i>	<i>Magnitud (Unidad)</i>
<i>Salida digital</i>	6 ejes (3 Ac. y 3Gir.)
<i>Voltaje de alimentación</i>	2.37 a 3,46 V
<i>Acelerómetro de sensibilidad</i>	+/- 2, 4, 8 y 16 g
<i>Giroscopio de sensibilidad</i>	+/- 250, 500, 1000 y 2000 dps
<i>Protocolo de operación</i>	I2C

La disposición del acelerómetro/giroscopio en la plataforma va a ser en el cuerpo de la misma. De esta manera cuando esté en posición vertical y exista un movimiento a cualquier lado se va a realizar la medición y se va a ejecutar la acción de control correspondiente. La comunicación con la que se realizará la adquisición de datos del acelerómetro/giroscopio hacia la tarjeta de programación será el protocolo I2C, que cuenta con dos hilos de control, uno para transmitir los datos (SDA) y otro, el reloj asíncrono que indica cuando leer los datos (SCL).

## 3.8. Módulo 6. Adquisición y mando

En el módulo de adquisición y mando se realiza la recolección de datos del módulo de posicionamiento angular. También envía y recibe información del módulo de control para realizar las operaciones requeridas. Estas acciones consisten en generar las señales de control que darán el equilibrio a la plataforma.

### 3.8.1. Alternativas para diseño

#### 3.8.1.1. Arduino

Arduino es una plataforma de prototipos de código abierto basada en hardware y software flexibles y fáciles de usar.



Figura 58. Arduino UNO  
Fuente: Arduino, (2015)

#### Ventajas

- Bajo costo
- Alimentación de 5 a 12 voltios
- Programación sencilla
- Multiplataforma

#### Desventajas

- Tiene 16 MHz de velocidad de procesamiento
- Tiene hasta 256 Kb de memoria

### 3.8.1.2.Raspberry

Raspberry es un sistema embebido que integra una computadora funcional la cual se puede conectar a diferentes periféricos.



**Figura 59. Raspberry Pi 2**  
Fuente: Raspberry (2015)

#### Ventajas

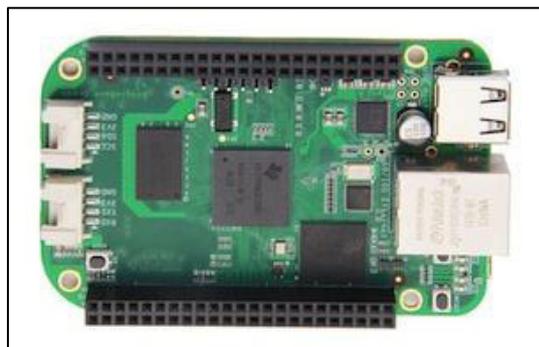
- Cuenta con 1 Gb de RAM
- Tiene 900 MHz de velocidad de procesamiento
- Alimentación de 5 voltios
- Bajo costo

#### Desventajas

- Funciona sobre un sistema operativo
- No tiene sistema de refrigeración

### 3.8.1.3.BeagleBone

El BeagleBone es una tarjeta creada por Texas Instruments la cual maneja código abierto y posee un bajo consumo energético.



**Figura 60. Beaglebone Green**  
Fuente: BeagleBoard (2016)

### Ventajas

- Soporta Linux y Android
- Se alimenta con 5 voltios
- Tiene 256 Mb de memoria
- Procesador de 700 MHz

### Desventajas

- Difícil de conseguir en el mercado
- Alto costo
- Funciona sobre un sistema operativo

### 3.8.2. Evaluación y selección de alternativas

Utilizando el método de ponderaciones anterior, tenemos el siguiente resultado:

**Tabla 38.**  
Ponderación de criterios de evaluación del módulo 6

<i>Criterio</i>	<i>Costo</i>	<i>Robustez</i>	<i>Programación</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Costo</i>	-	0	1	2	0,33
<i>Robustez</i>	1	-	1	3	0,50
<i>Programación</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Donde:

- Solución A: Arduino
- Solución B: Raspberry
- Solución C: BeagleBone.

**Tabla 39.**  
Ponderación de costo del módulo 6

<i>Costo</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0	1	2	0,33
<i>Solución B</i>	1	-	1	3	0,50
<i>Solución C</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 40.  
Ponderación de robustez del módulo 6

<i>Robustez</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	1	3	0,50
<i>Solución B</i>	0	-	1	2	0,33
<i>Solución C</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 41.  
Ponderación de programación del módulo 6

<i>Programación</i>	<i>Solución A</i>	<i>Solución B</i>	<i>Solución C</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	0,5	1	2,5	0,42
<i>Solución B</i>	0,5	-	1	2,5	0,42
<i>Solución C</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Tabla 42.  
Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 6

	<i>Costo</i>	<i>Robustez</i>	<i>Programación</i>	$\Sigma$	<i>Orden de selección</i>
<i>Solución A</i>	0,11	0,25	0,07	0,43	1
<i>Solución B</i>	0,17	0,17	0,07	0,40	2
<i>Solución C</i>	0,06	0,08	0,03	0,17	3
			<b>Suma</b>	1,0	

### 3.8.3. Definición del diseño

En la selección de las alternativas de diseño para este módulo se obtuvo como resultado el uso del sistema Arduino. Con este hardware electrónico podemos recolectar información obtenida de los sensores y controlar el posicionamiento angular de la plataforma. En la tabla 43 se muestran los modelos más utilizados de arduino.

Tabla 43.

Comparación de los principales sistemas arduino

Fuente: Arduino (2015)

Modelo	Voltaje	E/S Digitales	E/S Análogas	Memoria	Tipo USB
Uno	5-12 V	14	6	32 KB	USB B
Nano	5-9 V	14	8	32 KB	Micro USB
Micro	5-9 V	20	12	32 KB	Micro USB
Leonardo	5-12 V	20	12	32 KB	Micro USB
Mega 2560	5-12 V	54	16	256 KB	USB B

Según las características de los diferentes sistemas Arduino y en base a los sensores que se van a utilizar en la plataforma, la mejor opción es el Arduino UNO. Cuenta con 14 entradas/salidas digitales, 6 entradas/salidas análogas y además puede intercambiar información entre el módulo de control y el mando de actuadores. En la tabla 44 se indican las principales características del Arduino UNO.

Tabla 44. Características del Arduino UNO

Fuente: Arduino (2015)

Característica	Magnitud (Unidad)
Microcontrolador	ATMega 328
Tensión de alimentación	5 V
Tensión de entrada recomendada	7-12 V
Pines digitales	4 (6 con PWM)
Entradas analógicas	6
Corriente máxima por pin	40 mA
Corriente máxima para el pin 3.3 V	50 mA
Memoria flash	32 KB
SRAM	2 KB
EEPROM	1 KB
Velocidad de reloj	16 MHz

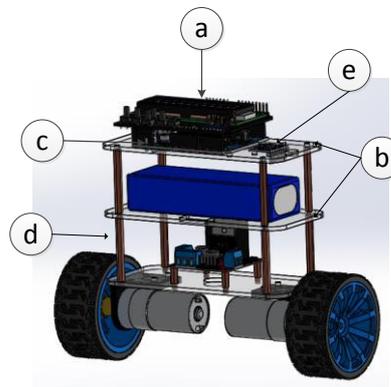


Figura 61. Ubicación de elementos en la parte superior.

a) Shield LCD, b) Bases superiores de acrílico, c) Arduino UNO, d) Soportes metálicos hexagonales, e) Acelerómetro/giroscopio MPU-6050

### 3.9. Módulo 7. Control

En el módulo de control se realizan los diferentes controladores que regirán sobre la plataforma de péndulo invertido para mantenerlo en equilibrio. Los controladores son desarrollados en el módulo de adquisición y mando, donde reciben las señales del módulo de posicionamiento angular y envía la señal de control a los actuadores.

#### 3.9.1. Alternativas para diseño

##### 3.9.1.1. Controlador PID

El controlador PID es un algoritmo de control que consiste en 3 parámetros proporcional, derivativo e integral. Los cuales dependen del error actual, error pasado y la predicción de errores futuros, respectivamente.

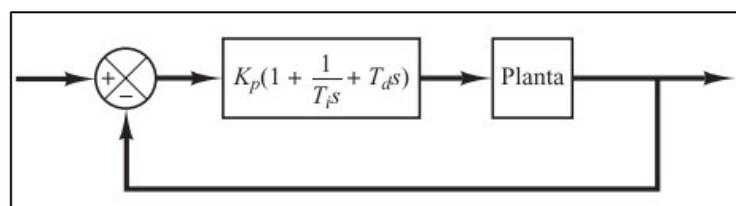


Figura 62. Control PID de una planta

Fuente: Ogata, 2010

### Ventajas

- Fácil de implementar
- Usado en sistemas de control industrial
- Programación sencilla

### Desventajas

- Falta de inmunidad al ruido
- Imposibilidad de corregir algunos errores en régimen permanente

### 3.9.1.2. Controlador Difuso

Un control difuso se lo puede representar como un control mediante palabras que representan el sentido común en lugar de palabras y ecuaciones. Estas palabras van asignadas a variables de control.

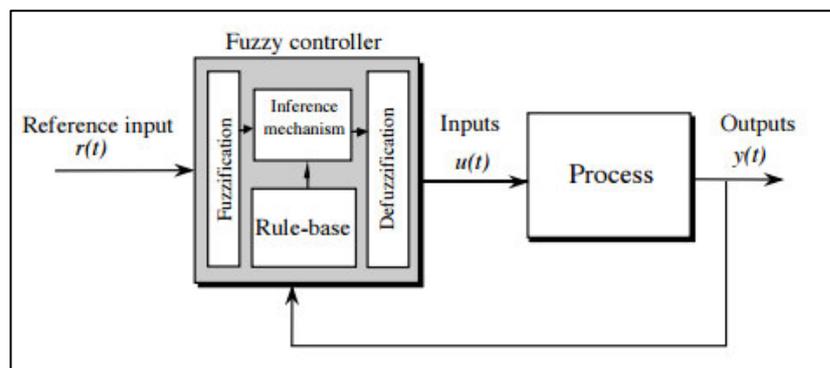


Figura 63. Arquitectura de un controlador difuso

Fuente: Passino, K. y Yurkovich, S. (1997)

### Ventajas

- Buenos resultados en sistemas no lineales
- Son bastante intuitivos
- Tienen gran estabilidad
- No necesita un modelo matemático exacto

### Desventajas

- Malos resultados en sistemas con un modelo matemático
- Necesitas un tiempo de aprendizaje para mejores resultados

### 3.9.1.3. Controlador PID-Difuso

El controlador PID-Difuso combina las 2 técnicas de control considerando la salida del PID para realizar el proceso de fusificación y posterior control.

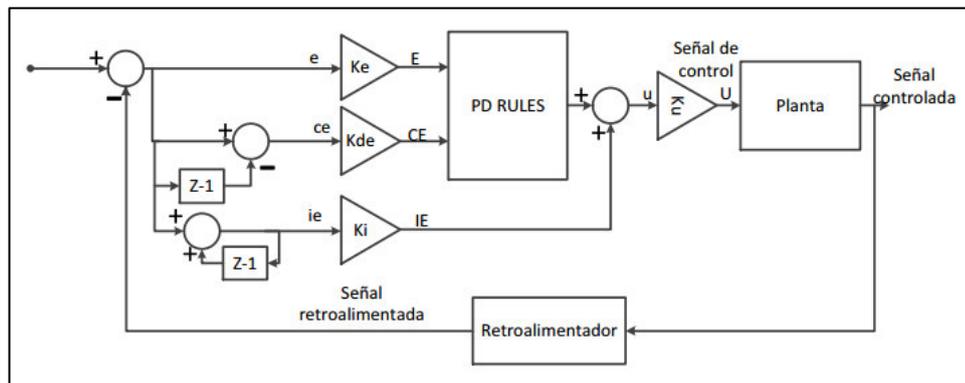


Figura 64. Diagrama de un controlador PID-Difuso con una planta

Fuente: Pantoja, W. (2013)

#### Ventajas

- Mayor estabilidad
- Controlador más robusto
- Mejor velocidad de respuesta

#### Desventajas

- Falta de inmunidad al ruido
- Imposibilidad de corregir algunos errores en régimen permanente

### 3.9.1.4. Controlador por Redes neuronales

El controlador mediante redes neuronales tiene la capacidad de auto organizar su estructura interna (neuronas) con la finalidad de realizar funciones complejas.

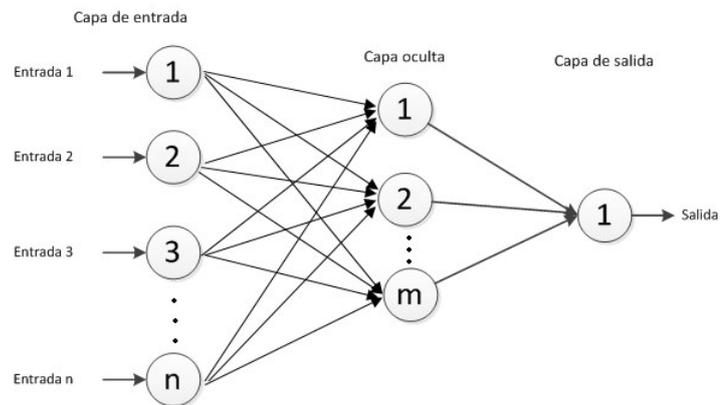


Figura 65. Modelo de una red neuronal

### Ventajas

- Sistema altamente complejo y no lineal
- Procesa información de forma paralela
- Tiene gran tolerancia a fallos

### Desventajas

- En un principio no se conoce cuáles son los parámetros adecuados de control
- Velocidad de convergencia lenta

### 3.9.1.5.Regulador Lineal Cuadrático (LQR)

El controlador LQR (linear quadratic regulator) es un problema de regulación, que se resuelve a partir de la optimización de un índice de comportamiento cuadrático, dando como resultado a una solución lineal.

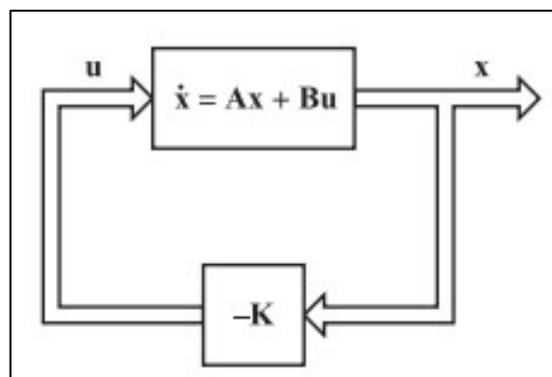


Figura 66. Sistema regulador óptimo  
Fuente: Ogata, 2010

### Ventajas

- Sencillo de diseñar en espacio de estados
- Usa fundamentos matemáticos básicos
- Es uno de los controladores más exactos

### Desventajas

- No se lo puede implementar en todas las tarjetas de programación
- En algunos casos necesita un observador

## 3.9.2. Evaluación y selección de alternativas

Utilizando el método de ponderaciones anterior, tenemos el siguiente resultado:

Tabla 45.  
Ponderación de criterios de evaluación del módulo 7

<i>Criterio</i>	<i>Sencillez</i>	<i>Robustez</i>	<i>Facilidad de implementación</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Sencillez</i>	-	0	1	2	0,33
<i>Robustez</i>	1	-	1	3	0,50
<i>Implementación</i>	0	0	-	1	0,17
			<b>Suma</b>	6	1

Donde:

- Solución A: PID
- Solución B: Fuzzy
- Solución C: PID-Fuzzy
- Solución D: Redes Neuronales
- Solución E: Regulador Lineal Cuadrático (LQR)

Tabla 46.  
Ponderación de sencillez del módulo 7

<i>Sencillez</i>	<i>Sol. A</i>	<i>Sol. B</i>	<i>Sol. C</i>	<i>Sol. D</i>	<i>Sol. E</i>	$\Sigma+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	1	1	1	5	0,33
<i>Solución B</i>	0	-	1	1	1	4	0,27
<i>Solución C</i>	0	0	-	1	1	3	0,2
<i>Solución D</i>	0	0	0	-	0	1	0,07
<i>Solución E</i>	0	0	0	1	-	2	0,13
				<b>Suma</b>		15	1

Tabla 47.  
Ponderación de robustez del módulo 7

<i>Robustez</i>	<i>Sol. A</i>	<i>Sol. B</i>	<i>Sol. C</i>	<i>Sol D</i>	<i>Sol. E</i>	$\sum+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	1	1	0	4	0,27
<i>Solución B</i>	0	-	0	1	0	2	0,13
<i>Solución C</i>	0	1	-	1	0	3	0,2
<i>Solución D</i>	0	0	0	-	0	1	0.07
<i>Solución E</i>	1	1	1	1	-	5	0.33
					<b>Suma</b>	15	1

Tabla 48.  
Ponderación de implementación del módulo 7

<i>Implementación</i>	<i>Sol. A</i>	<i>Sol. B</i>	<i>Sol. C</i>	<i>Sol D</i>	<i>Sol. E</i>	$\sum+1$	<i>Ponderación</i>
<i>Solución A</i>	-	1	1	1	1	5	0,33
<i>Solución B</i>	0	-	1	1	1	4	0,27
<i>Solución C</i>	0	0	-	1	1	3	0,2
<i>Solución D</i>	0	0	0	-	0	1	0.07
<i>Solución E</i>	0	0	0	1	-	2	0.13
					<b>Suma</b>	15	1

Tabla 49.  
Conclusión en la selección de alternativas de diseño del módulo 7

	<i>Sencillez</i>	<i>Robustez</i>	<i>Implementación</i>	$\sum$	<i>Orden de selección</i>
<i>Solución A</i>	0,11	0,14	0,06	0,3	1
<i>Solución B</i>	0,09	0,07	0,05	0,2	3
<i>Solución C</i>	0,07	0,1	0,03	0,2	4
<i>Solución D</i>	0.02	0.04	0.01	0,07	5
<i>Solución E</i>	0.04	0.17	0.02	0,23	2
			<b>Suma</b>	1,0	

### 3.9.3. Definición del diseño

En vista que se deben seleccionar 4 diferentes tipos de controladores, en la selección de las alternativas de diseño para este módulo se obtuvo como resultado el uso de los controladores PID, Fuzzy, PID-Fuzzy y LQR.

#### 3.9.3.1. Controlador PID

El objetivo de este controlador es determinar los valores de las constantes  $kp$ ,  $ki$  y  $kd$  para que la plataforma sea controlada según lo esperado.

Según la ecuación 2.47 el modelo matemático de un péndulo invertido tiene la siguiente expresión como función de transferencia:

$$\frac{\phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q} s}{s^3 + \frac{b(I + ml^2)}{q} s^2 - \frac{(M + m)mgl}{q} s - \frac{bmg l}{q}}$$

Donde:

$$M = 0.5$$

$$m = 0.3$$

$$b = 0.1$$

$$i = 3.0250e^{-4}$$

$$g = 9.8$$

$$l = 0.110$$

Por lo que la función de transferencia de la plataforma de péndulo invertido implementada para este proyecto es la siguiente:

$$\frac{\phi(s)}{U(s)} = \frac{9.772 s}{s^3 + 0.1106s^2 - 167.6 s - 9.577}$$

La señal de control que se calcula mediante un controlador PID viene dado por la siguiente expresión:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int e(t) dt + k_d \frac{de(t)}{dt}$$

La acción proporcional determina la reacción del error actual, la acción integral corrige el error estacionario y la acción derivativa determina la reacción del tiempo en el que el error se produce.

Los valores obtenidos para las constantes del control PID fueron los siguientes:

$$Kp = 45$$

$$Kd = 623$$

$$K_i = 0.001$$

Donde la función de transferencia del controlador es la siguiente:

$$G(s) = \frac{623s^2 + 45s + 0.001}{s}$$

### 3.9.3.2. Controlador Fuzzy

El objetivo de esta evaluación es plantear como variables lingüísticas de entrada al error y la derivada del error, mientras que como variable lingüística de salida tenemos la acción de control. Con estas variables se procede a crear las reglas que llevarán a cabo la acción de control deseada.

Tabla 50.  
Variables de entrada del controlador Fuzzy.

Variables de entrada			
Error	Nomenclatura	Derivada Error	Nomenclatura
Error grande negativo	egn	Derivada grande negativa	dgn
Error pequeño negativo	epn	Derivada pequeño negativa	dpn
Error cero	e0	Derivada cero	d0
Error pequeño positivo	epp	Derivada pequeño positiva	dpp
Error grande positivo	egp	Derivada grande positiva	dgp

Tabla 51.  
Variable de salida del controlador Fuzzy

Variable De Salida	
Acción De Control	Nomenclatura
A.C. grande grande negativa	uggn
A.C grande negativa	ugn
A.C grande media negativa	ugmn
A.C media negativa	umn
A.C media pequeña negativa	umpn
A.C pequeña negativa	upn
A.C cero	u0
A.C pequeña positiva	upp
A.C pequeña media positiva	upmp

A.C media positiva	ump
A.C grande media positiva	ugmp
A.C grande positiva	ugp
A.C grande grande positiva	uggp

Una vez identificadas las variables de entrada y salida se proceden a plantear las reglas que permitirán tener la acción de control deseada para la estabilización del péndulo invertido como se observa en la tabla 52.

Tabla 52.  
Reglas de control Fuzzy

<i>Reglas de control</i>						
<b>1</b>	<i>Si</i>	<b>egn</b>	<i>y</i>	<b>dgn</b>	<i>entonces</i>	<b>uggp</b>
<b>2</b>	<i>Si</i>	<b>egn</b>	<i>y</i>	<b>dpn</b>	<i>entonces</i>	<b>ugp</b>
<b>3</b>	<i>Si</i>	<b>egn</b>	<i>y</i>	<b>d0</b>	<i>entonces</i>	<b>ugmp</b>
<b>4</b>	<i>Si</i>	<b>egn</b>	<i>y</i>	<b>dpp</b>	<i>entonces</i>	<b>ump</b>
<b>5</b>	<i>Si</i>	<b>egn</b>	<i>y</i>	<b>dgp</b>	<i>entonces</i>	<b>upmp</b>
<b>6</b>	<i>Si</i>	<b>epn</b>	<i>y</i>	<b>dgn</b>	<i>entonces</i>	<b>ugp</b>
<b>7</b>	<i>Si</i>	<b>epn</b>	<i>y</i>	<b>dpn</b>	<i>entonces</i>	<b>ump</b>
<b>8</b>	<i>Si</i>	<b>epn</b>	<i>y</i>	<b>d0</b>	<i>entonces</i>	<b>upmp</b>
<b>9</b>	<i>Si</i>	<b>epn</b>	<i>y</i>	<b>dpp</b>	<i>entonces</i>	<b>upp</b>
<b>10</b>	<i>Si</i>	<b>epn</b>	<i>y</i>	<b>dgp</b>	<i>entonces</i>	<b>u0</b>
<b>11</b>	<i>Si</i>	<b>e0</b>	<i>y</i>	<b>dgn</b>	<i>entonces</i>	<b>u0</b>
<b>12</b>	<i>Si</i>	<b>e1</b>	<i>y</i>	<b>dpn</b>	<i>entonces</i>	<b>u0</b>
<b>13</b>	<i>Si</i>	<b>e2</b>	<i>y</i>	<b>d0</b>	<i>entonces</i>	<b>u0</b>
<b>14</b>	<i>Si</i>	<b>e3</b>	<i>y</i>	<b>dpp</b>	<i>entonces</i>	<b>u0</b>
<b>15</b>	<i>Si</i>	<b>e4</b>	<i>y</i>	<b>dgp</b>	<i>entonces</i>	<b>u0</b>
<b>16</b>	<i>Si</i>	<b>epp</b>	<i>y</i>	<b>dgn</b>	<i>entonces</i>	<b>ugn</b>
<b>17</b>	<i>Si</i>	<b>epp</b>	<i>y</i>	<b>dpn</b>	<i>entonces</i>	<b>umn</b>
<b>18</b>	<i>Si</i>	<b>epp</b>	<i>y</i>	<b>d0</b>	<i>entonces</i>	<b>umpn</b>
<b>19</b>	<i>Si</i>	<b>epp</b>	<i>y</i>	<b>dpp</b>	<i>entonces</i>	<b>upn</b>
<b>20</b>	<i>Si</i>	<b>epp</b>	<i>y</i>	<b>dgp</b>	<i>entonces</i>	<b>u0</b>
<b>21</b>	<i>Si</i>	<b>egp</b>	<i>y</i>	<b>dgn</b>	<i>entonces</i>	<b>uggn</b>
<b>22</b>	<i>Si</i>	<b>egp</b>	<i>y</i>	<b>dpn</b>	<i>entonces</i>	<b>ugn</b>
<b>23</b>	<i>Si</i>	<b>egp</b>	<i>y</i>	<b>d0</b>	<i>entonces</i>	<b>ugmn</b>
<b>24</b>	<i>Si</i>	<b>egp</b>	<i>y</i>	<b>dpp</b>	<i>entonces</i>	<b>umn</b>
<b>25</b>	<i>Si</i>	<b>egp</b>	<i>y</i>	<b>dgp</b>	<i>entonces</i>	<b>umpn</b>

Dichas reglas las aplicamos a la planta de nuestra plataforma donde obtenemos los siguientes resultados expresados gráficamente en las figuras 67 y 68.

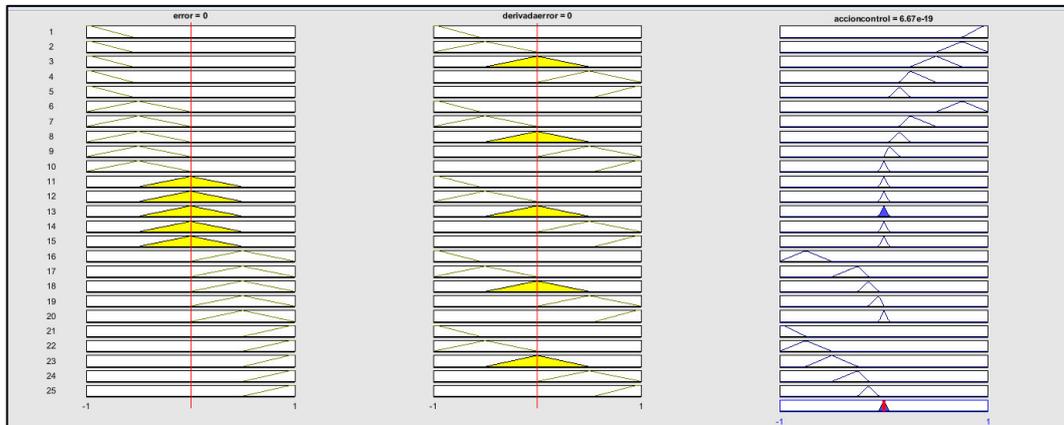


Figura 67. Reglas de control Fuzzy

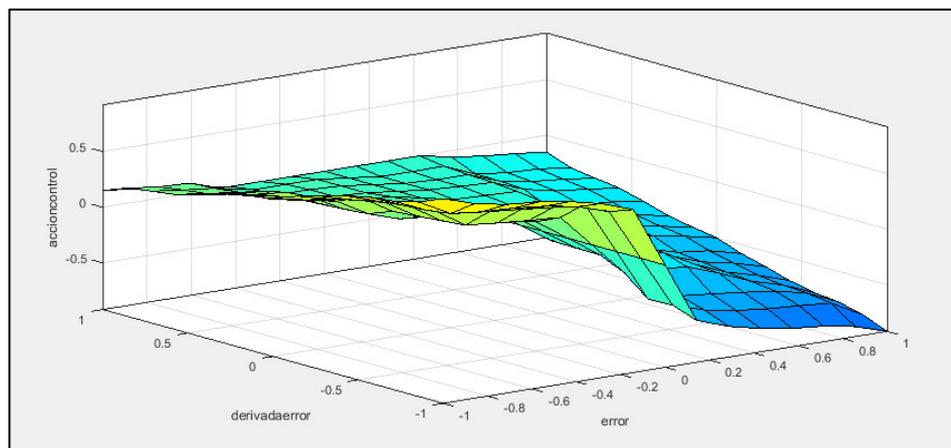


Figura 68. Representación gráfica de las reglas de control

### 3.9.3.3. Controlador PID-Fuzzy

Al igual que en los apartados anteriores se debe determinar los valores de las constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  para el controlador PID y la salida de este controlador será utilizada como variable lingüística de entrada para el controlador difuso. La acción de control será determinada por una variable lingüística de salida de los motores mediante reglas de control.

Según el apartado 3.9.3.1 la función de transferencia de la plataforma de péndulo invertido tiene la siguiente forma:

$$\frac{\emptyset(s)}{U(s)} = \frac{9.772 s}{s^3 + 0.1106s^2 - 167.6 - 9.577}$$

En este caso se realizará un controlador PD por lo que las constantes son las siguientes:

$$Kp = 45$$

$$Kd = 623$$

Donde la función de transferencia del controlador es

$$G(s) = 623 s + 45$$

A partir de este controlador se realizan las variables lingüísticas de control para el controlador Fuzzy.

**Tabla 53.**

**Variables de entrada del controlador Fuzzy.**

<b>Variables de entrada</b>	
<b>Error</b>	<b>Nomenclatura</b>
Error grande negativo	gdneg
Error pequeño negativo	pqneg
Error cero	cero
Error pequeño positivo	pqpos
Error grande positivo	gdpos

**Tabla 54.**

**Variable de salida del controlador Fuzzy**

<b>Variable De Salida</b>	
<b>Acción De Control</b>	<b>Nomenclatura</b>
A.C grande negativa	ugn
A.C pequeña negativa	upn
A.C cero	u0
A.C pequeña positiva	upp
A.C grande positiva	ugp

Una vez identificadas las variables de entrada y salida se proceden a plantear las reglas que permitirán tener la acción de control deseada para la estabilización del péndulo invertido como se observa en la tabla 55.

Tabla 55.  
Reglas de control Fuzzy

<i>Reglas de control</i>				
<b>1</b>	<i>Si</i>	<b>gdneg</b>	<i>entonces</i>	<b>ugp</b>
<b>2</b>	<i>Si</i>	<b>pqneg</b>	<i>entonces</i>	<b>upp</b>
<b>3</b>	<i>Si</i>	<b>cero</b>	<i>entonces</i>	<b>u0</b>
<b>4</b>	<i>Si</i>	<b>pqpos</b>	<i>entonces</i>	<b>ugn</b>
<b>5</b>	<i>Si</i>	<b>gdpos</b>	<i>entonces</i>	<b>upn</b>

Dichas reglas las aplicamos a la planta de nuestra plataforma donde obtenemos los siguientes resultados expresados gráficamente en las figuras 60 y 61.

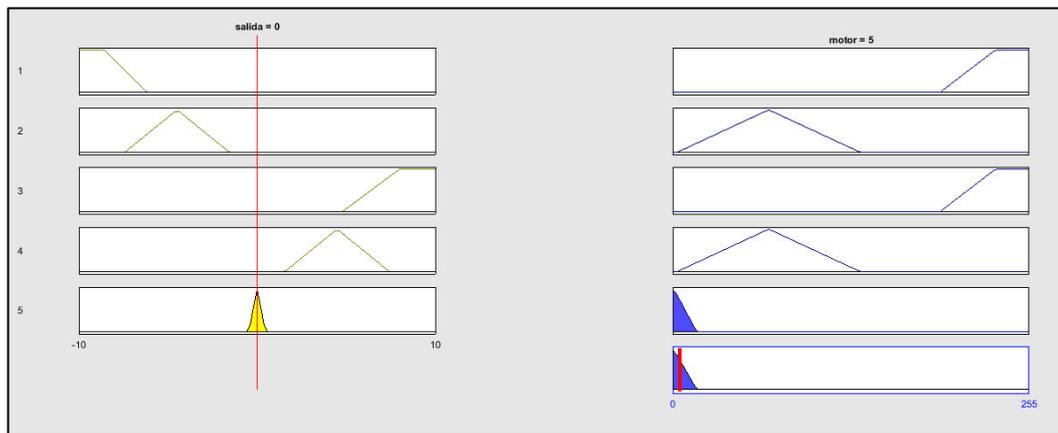


Figura 69. Reglas de control Fuzzy

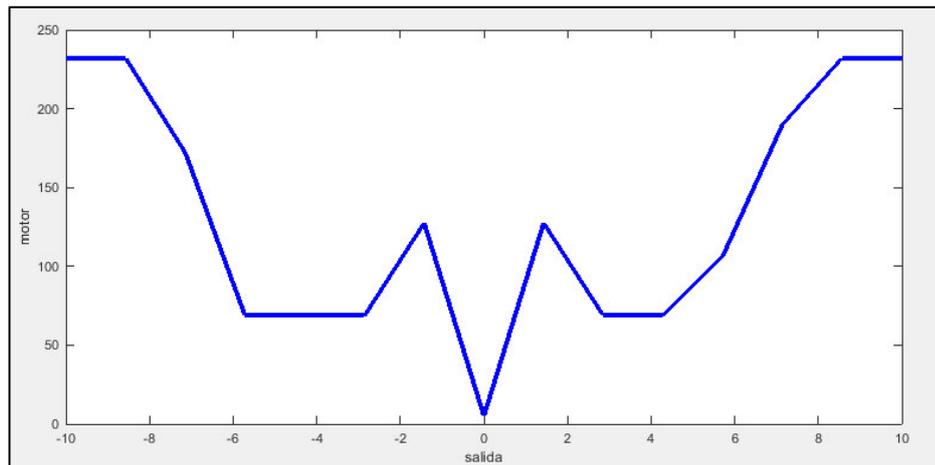


Figura 70. Representación gráfica de las reglas de control

### 3.9.3.4. Controlador LQR

Para realizar el controlador LQR primero se deben tener en cuenta cuales son las matrices A, B, C y D lo cual se presenta a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + ml^2)b}{I((M + m) + Mml^2)} & \frac{m^2gl^2}{I((M + m) + Mml^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I((M + m) + Mml^2)} & \frac{mgl(M + m)}{I((M + m) + Mml^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I + ml^2)}{I((M + m) + Mml^2)} \\ 0 \\ \frac{ml}{I((M + m) + Mml^2)} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$M = 0.2$$

$$m = 0.5$$

$$b = 0.1$$

$$i = 0.006$$

$$g = 9.8$$

$$l = 0.210$$

Por lo tanto los valores de las matrices para este caso serán los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0989 & 7.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4262 & 73.0957 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9889 \\ 0 \\ 4.2621 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El valor de R es 1, mientras que el de la matriz Q corresponde a  $Q = C' * C$ , por lo que su valor es:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con todos estos valores calculamos la matriz J, la cual corresponde a los valores de la acción de control mediante la ecuación 2-17.

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{x}(k)Q x(k) + \hat{u}(k)Ru(k)]$$

Los valores obtenidos son:

$$J = [-1 \quad -2.183 \quad 38.3625 \quad 4.0840]$$

### 3.10. Definición de concepto final

Uno de las principales características que se debe analizar en la construcción de la plataforma de péndulo invertido es la facilidad de manufactura de los elementos a utilizar, especialmente las bases. Estas bases están hechas en acrílico y consisten en piezas rectangulares redondeadas cuyas dimensiones constan en el plano mecánico. Además el posicionamiento de los demás elementos debe ser equilibrado sobre las bases de modo que la plataforma no pierda estabilidad al momento de moverse.

Los mecanismos de sujeción de los elementos deben ser estandarizados a fin de ahorrar tiempo y recursos en el ensamblaje. En la tabla 56 se detallan todos los elementos de la plataforma de péndulo invertido.

Todos los componentes van sujetos a las bases de acrílico incluidos el sensor, el controlador y la batería. En vista a que el péndulo invertido debe conservar el equilibrio su ensamble fue realizado en forma vertical para facilitar la medición de los datos.

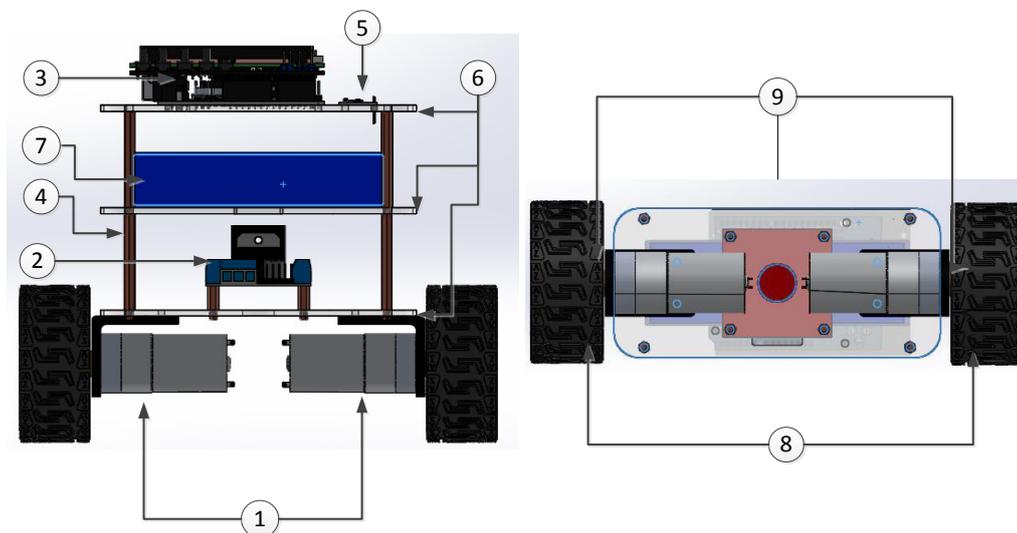


Figura 71. Modelo CAD de la plataforma de péndulo invertido

(Detalle números en Tabla 56)

Tabla 56.

Detalle de componentes de la plataforma de péndulo invertido

Número	Descripción del componente	Módulo
1	Motores	Tracción
2	Driver motores	Potencia
3	Tarjeta Arduino UNO y Shield LCD	Adquisición y mando
4	Soportes metálicos Hexagonales	Base
5	Acelerómetro/Giroscopio MPU-6050	Posicionamiento angular
6	Bases acrílico	Base
7	Batería Lipo	Energía
8	Ruedas	Base
9	Acoples ruedas	Base

### 3.11. Resumen

Para obtener las necesidades de diseño primero se debe tener una relación entre los requerimientos y deseos de los usuarios y diseñadores. De esto se obtiene que los aspectos más importantes a tomar en cuenta en el desarrollo de la plataforma de

péndulo invertido son: diseño robusto, bajo tiempo de respuesta, uso de tecnología de código abierto, bajo costo, etc.

Una vez conocidas las especificaciones y requerimientos se procede a darle un valor medible a cada una de ellas. Las métricas más importantes vienen de las necesidades más influyentes. Las especificaciones más influyentes corresponden a: tamaño de la plataforma, peso de la misma, cantidad de elementos a usar, la inversión económica que se va a realizar, entre otros.

Ya que la plataforma de péndulo invertido tiene muchos requerimientos se analiza independientemente cada uno de ellos con la creación de módulos. Estos módulos deben cumplir las especificaciones previamente establecidas. En este proyecto se han desarrollado los siguientes módulos: 1) Base, 2) Tracción, 3) Potencia, 4) Energía, 5) Posicionamiento angular, 6) Adquisición y mando y 7) Control.

Utilizando el método ordinal corregido de criterios ponderados se generan soluciones para cada módulo presentado anteriormente. Las soluciones obtenidas para cada módulo son las siguientes: 1) Base - Base móvil con ruedas, 2) Tracción – Motor DC, 3) Potencia - Puente H con circuito integrado, 4) Energía – Batería LiPo, 5) Posicionamiento angular – Acelerómetro/Giroscopio, 6) Adquisición y mando – Arduino UNO y 7) Control – PID, Fuzzy, PID-Fuzzy, LQR.

# Capítulo 4

## Construcción y funcionamiento

El capítulo muestra el proceso de construcción de los elementos mecánicos y la instalación de los componentes electrónicos y eléctricos. Este ensamblaje constituye la estructura física y operativa de la plataforma de péndulo invertido. Además en el capítulo se detallan los resultados obtenidos en las pruebas de funcionamiento del proyecto.

### 4.1. Construcción de la plataforma

La construcción de la plataforma de péndulo invertido debe cumplir con una secuencia de ensamblaje, la cual inicia con la manufactura de las bases en acrílico y su posterior acople con los motores. Con la estructura ensamblada se procede a instalar los demás elementos previamente determinados en el capítulo de diseño, para luego de eso realizar las conexiones correspondientes.

#### 4.1.1. Manufactura de las bases acrílicas

Las bases fueron realizadas en acrílico de 4 mm de espesor, realizado en un cortador láser según las medidas correspondientes. Posteriormente se realizarán en las bases de acrílico los agujeros necesarios para la sujeción de los demás elementos necesarios en la plataforma.



Figura 72. Bases en acrílico.

#### 4.1.2. Instalación de motores

Una vez conocida la posición de los demás elementos que conforman la plataforma, procedemos a ubicar primeramente los motores con sus respectivos acoples y ruedas que serán las que den equilibrio a la plataforma. Se debe tener mucho cuidado al momento de colocar los motores ya que deben quedar lo más simétricos posibles al centro de la base de acrílico para que tenga un mejor equilibrio ya que esto es fundamental en un péndulo invertido.



Figura 73. Colocación de motores y sus respectivos acoples y ruedas

#### 4.1.3. Instalación de elementos operativos

En la parte superior de la base de acrílico donde se ubicaron los motores se debe colocar el driver para los mismos. Este elemento está sujeto sobre 4 soportes metálicos hexagonales para mejorar su sujeción.

Al colocar estos elementos se debe tener cuidado de colocarlos lo más centrados posibles para que no interfieran en el equilibrio de la plataforma.



Figura 74. Colocación de elementos operativos.

#### 4.1.4. Instalación shield LCD en Arduino UNO

El conjunto del shield LCD con la tarjeta Arduino UNO se ubica en la placa superior de acrílico de manera centrada para que no afecte al equilibrio de la plataforma.

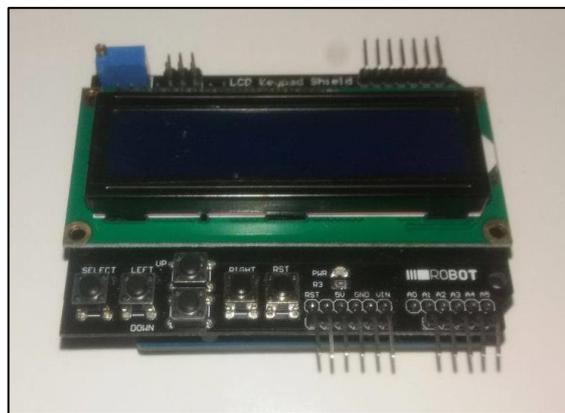


Figura 75. Colocación shield LCD en arduino UNO

#### 4.1.5. Instalación de soportes metálicos hexagonales

Las placas de acrílico de la plataforma son unidas entre sí con 8 soportes metálicos que le dan una buena sujeción y equilibrio a las bases de acrílico.

Estos soportes son unos soportes hexagonales metálicos de 40 mm de longitud.



Figura 76. Colocación soportes metálicos hexagonales.

#### 4.1.6. Instalación del sensor

Se coloca el sensor en la placa superior de acrílico considerando que se encuentre centrado para que la medición sea la deseada.



Figura 77. Colocación de sensor en placa acrílico

#### 4.1.7. Conexión de componentes operativos

Una vez que todos los elementos están en su lugar se procede a realizar el cableado de los mismos según como corresponda.

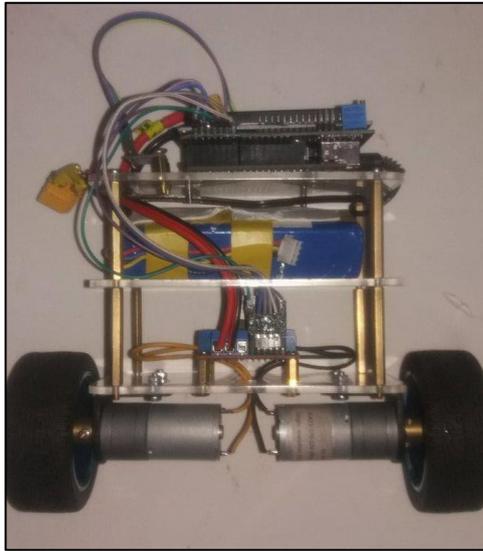


Figura 78. Conexión de componentes operativos

## 4.2. Pruebas y funcionamiento

La implementación de la plataforma de péndulo invertido requiere realizar pruebas para cada controlador que se realice. De esta manera se evaluará su funcionamiento en 4 etapas, correspondientes a cada controlador. Todas estas pruebas se llevarán a cabo una vez finalizada la instalación de los componentes operativos.

### 4.2.1. Evaluación y resultados PID

En la figura 79 podemos ver el comportamiento de la señal de salida de la plataforma. Los valores obtenidos los podemos observar a detalle en la figura 80, donde se observa que tiene un máximo sobrepico del 38.5%, el cual alcanza en un tiempo de 0.0124 segundos; y un tiempo de establecimiento de 0.066 segundos.

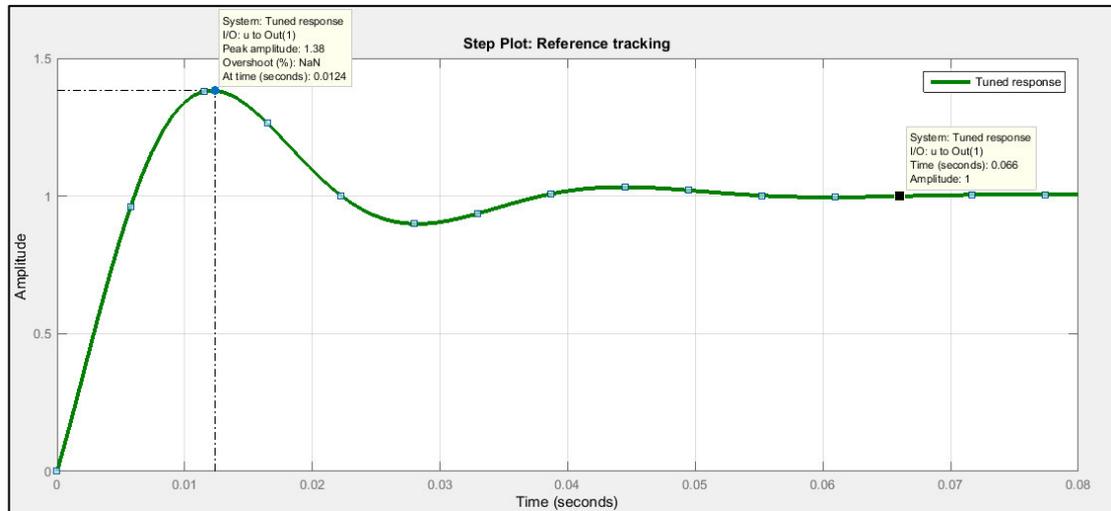


Figura 79. Respuesta del controlador PID

Este comportamiento es evidenciado en la plataforma física ya que su respuesta es sumamente rápida y cuenta con una buena estabilidad, además que responde bien a las perturbaciones.

Tabla 57.

Resultados del Controlador PID

<b>Tiempo de subida (s)</b>	0.00489
<b>Tiempo de establecimiento (s)</b>	0.066
<b>Sobrepico</b>	1.385
<b>Tiempo sobrepico (s)</b>	0.0124
<b>Estabilidad en lazo cerrado</b>	Estable

#### 4.2.1.1. Evaluación ante perturbaciones

Se realizó un circuito en lazo cerrado del controlador donde se agregó una perturbación de 1 grado sexagesimal. En la Figura 80 se puede observar que a pesar de que existe la perturbación la señal de salida responde de manera rápida y se estabiliza en 0.15 segundos.

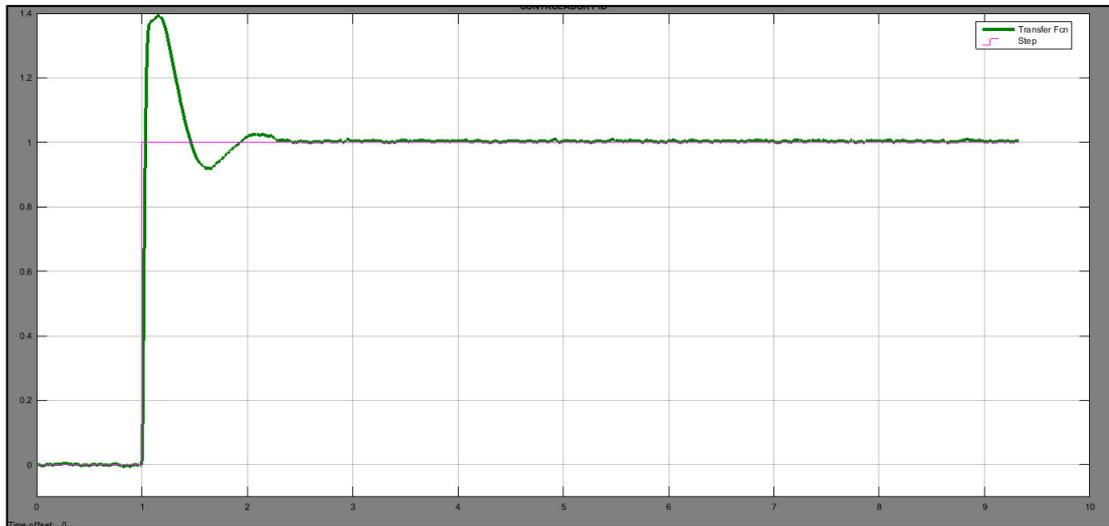


Figura 80. Respuesta ante perturbaciones control PID

#### 4.2.2. Evaluación y resultados Fuzzy

El controlador difuso implementado en la plataforma tiene una respuesta más lenta si lo comparamos con el controlador PID, ya que como vemos en la figura 81 tiene un sobrepico más grande y un tiempo de establecimiento mayor (Ver Tabla 60).

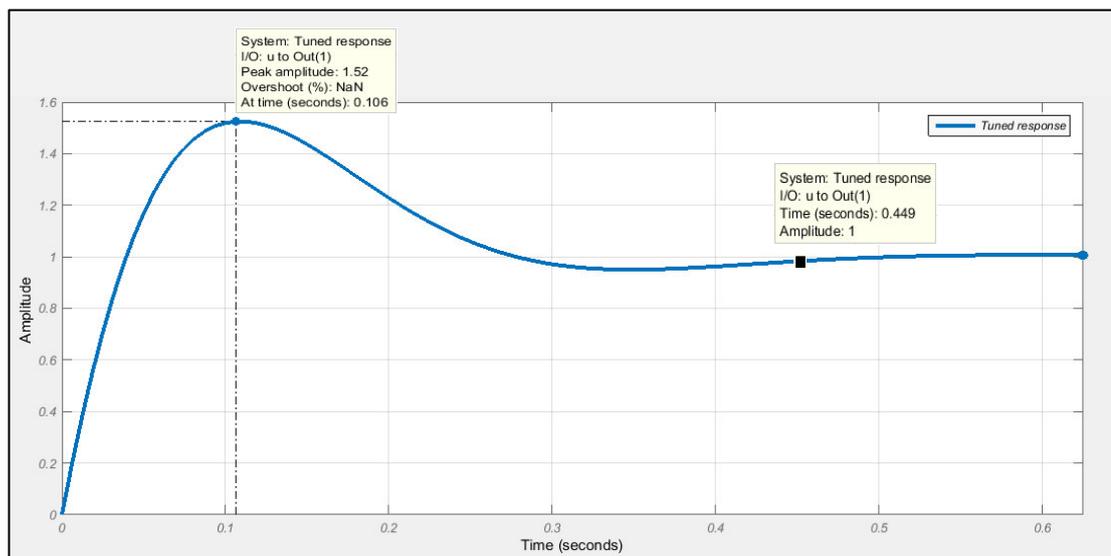


Figura 81. Respuesta del controlador FUZZY

En la Tabla 58 se muestra el resumen de resultados donde se observa que el sobrepico máximo es del 52.1%, alcanzado en 0.106 segundos y su tiempo de establecimiento es de 0.449 segundos. Estos valores hacen que el comportamiento de la plataforma sea estable aunque de una manera más lenta que el PID.

Tabla 58.

Resultados del Controlador Fuzzy

<b>Tiempo de subida (s)</b>	0.0478
<b>Tiempo de establecimiento (s)</b>	0.449
<b>Sobrepico</b>	1.521
<b>Tiempo sobrepico (s)</b>	0.106
<b>Estabilidad en lazo cerrado</b>	Estable

#### 4.2.2.1. Evaluación ante perturbaciones

En el caso del controlador Fuzzy, al realizar la prueba ante perturbaciones la onda tiene un sobrepico inicial que la plataforma se tarde en estabilizar 0.25 segundos (Ver Figura 82). Este ligero sobrepico se produce por la lentitud al momento de procesar la señal de entrada debido a la cantidad de recursos que consume la tarjeta de programación.

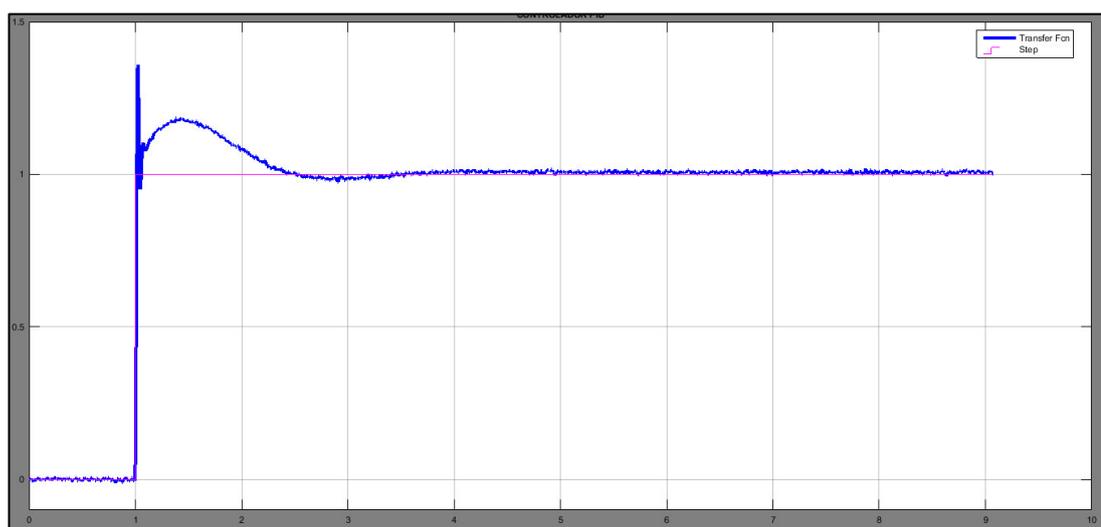


Figura 82. Respuesta ante perturbaciones control Fuzzy

### 4.2.3. Evaluación y resultados PID-Fuzzy

El controlador PID-Fuzzy es un controlador con una mejor respuesta que el Fuzzy pero no tan buena como el PID. Tiene un máximo sobrepico del 17% alcanzado en 0.0225 segundos y un tiempo de establecimiento de 0.085 segundos como se observa en la figura 81.

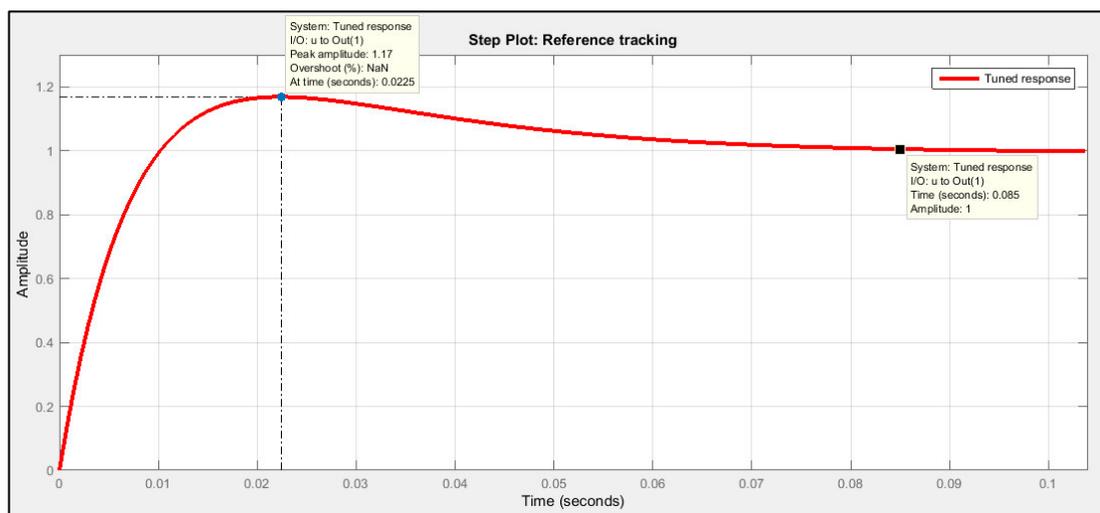


Figura 83. Respuesta del controlador PID-Fuzzy

Con estos valores implementados en la plataforma, se observa que su comportamiento es estable y responde de manera rápida, lo que cumple con los requerimientos de que el tiempo de establecimiento sea menor a 2 segundos, (Tabla 59).

Tabla 59.

Resultados del Controlador PID-Fuzzy

<b>Tiempo de subida (s)</b>	0.00866
<b>Tiempo de establecimiento (s)</b>	0.085
<b>Sobrepico</b>	1.17
<b>Tiempo sobrepico (s)</b>	0.031
<b>Estabilidad en lazo cerrado</b>	Estable

#### 4.2.3.1. Evaluación ante perturbaciones

Al aplicar una perturbación de 1 grado sexagesimal al controlador PID-Fuzzy se observa un tiempo de establecimiento de 0.2 segundos (Ver Figura 84). Al igual que

el controlador Fuzzy, tiene un ligero sobrepico inicial debido a los recursos consumidos por la tarjeta de programación en la parte difusa del controlador.

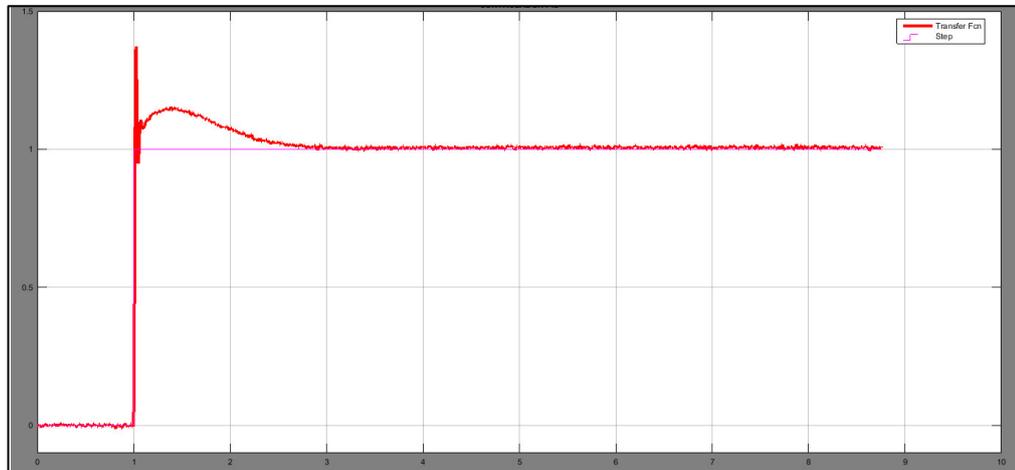


Figura 84. Respuesta ante perturbaciones control PID-Fuzzy

#### 4.2.4. Evaluación y resultados LQR

Como se puede ver en la figura 85, el controlador LQR es un controlador con un máximo sobrepico del 0.081% y un tiempo de establecimiento de 0.0076 segundos (Ver Tabla 60). Lo que hace que sea un controlador robusto y que cumpla con los requerimientos de estabilidad al momento de implementarlo en la plataforma.

Este controlador tiene el segundo mejor comportamiento entre los 4 controladores analizados, después del PID; y su respuesta es más rápida que el controlador Fuzzy y PID-Fuzzy. (Ver Tabla 61)

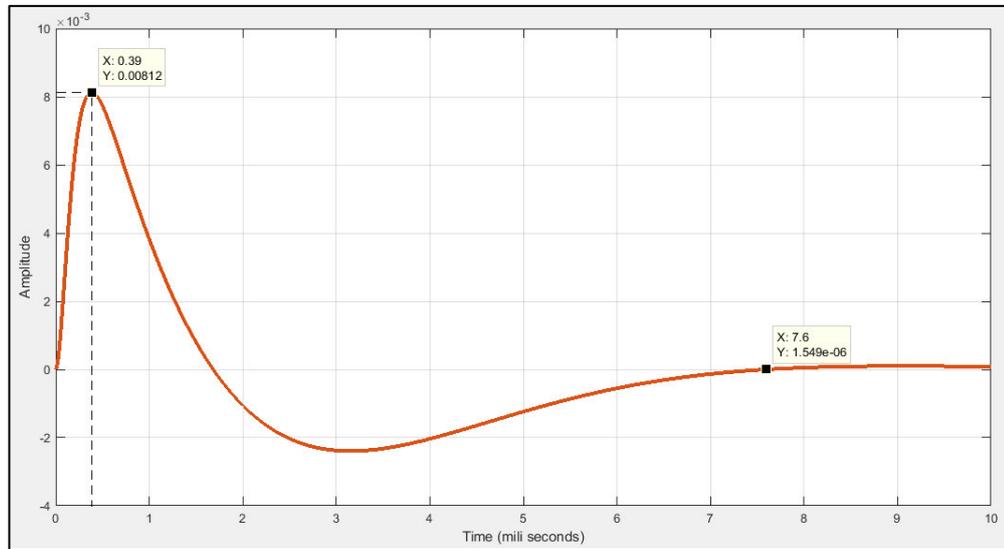


Figura 85. Respuesta del controlador LQR

Tabla 60.

Resultados del Controlador LQR

<b>Tiempo de subida (s)</b>	0.0029
<b>Tiempo de establecimiento (s)</b>	0.0076
<b>Sobrepico</b>	1.00812
<b>Tiempo sobrepico (s)</b>	0.0039
<b>Estabilidad en lazo cerrado</b>	Estable

#### 4.2.4.1. Evaluación ante perturbaciones

Al aplicar una perturbación el controlador LQR se observa que el tiempo de establecimiento es de 0.12 segundos. A pesar de que el controlador tiene una perturbación, la forma de onda es similar y no existe una gran variación en el comportamiento del controlador.

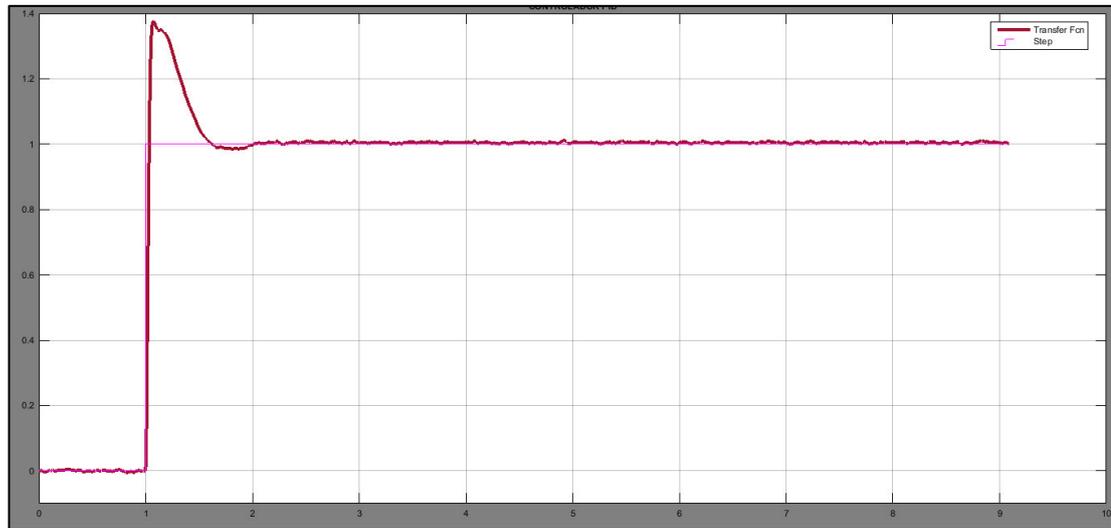


Figura 86. Respuesta ante perturbaciones control LQR

### 4.3. Comparación de resultados

Una vez realizada la implementación de los controladores en la plataforma de péndulo invertido, y conocidos sus comportamientos individuales, se deben comparar entre sí para analizar cuál es la mejor opción (Tabla 61).

Tabla 61.

Comparación de resultados controladores

	<b>PID</b>	<b>FUZZY</b>	<b>PID-FUZZY</b>	<b>LQR</b>
<b>Tiempo de subida (s)</b>	0.00489	0.0478	0.00866	0.0029
<b>Tiempo de establecimiento (s)</b>	0.066	0.449	0.085	0.0076
<b>Sobrepico</b>	1.385	1.521	1.17	1.0081
<b>Tiempo sobrepico (s)</b>	0.0124	0.106	0.031	0.0039
<b>Estabilidad en lazo cerrado</b>	ESTABLE	ESTABLE	ESTABLE	ESTABLE

Analizando el tiempo de establecimiento de cada controlador se puede observar que en ningún caso sobrepasa de 1 segundo, por lo que cumple con las características

técnicas mostradas en el Capítulo 3 donde se requería que fuera menor a 2 segundos (Ver Figura 86).

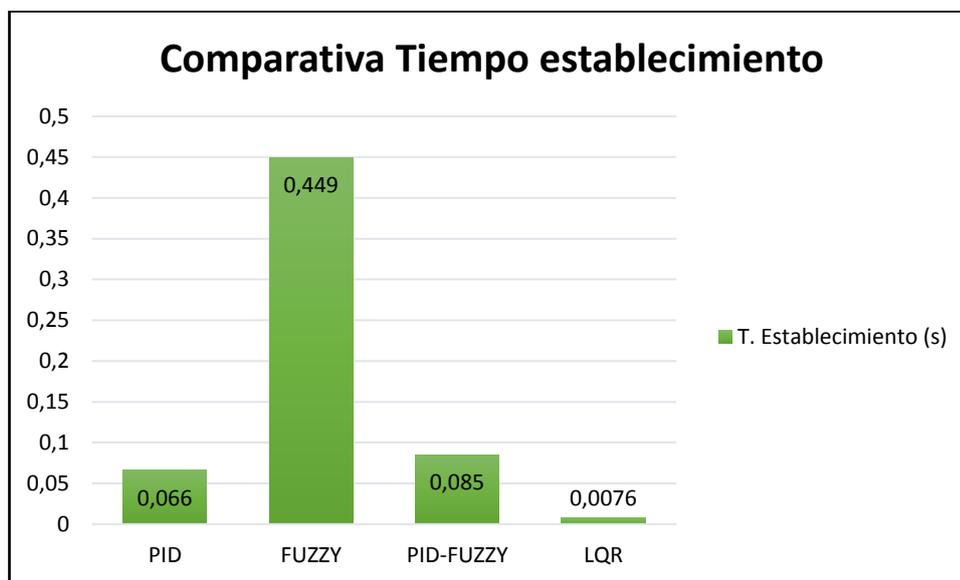


Figura 87. Comparativa Tiempo establecimiento

En la Figura 83 se observa que el controlador con un menor tiempo de establecimiento es el LQR, seguido del PID y PID-Fuzzy. A pesar de que el controlador Fuzzy tenga un tiempo de establecimiento mucho mayor a los otros 3 controladores, este no excede los 0.5 segundos, por lo que también es un controlador robusto.

#### 4.4. Resumen

La construcción de la plataforma de péndulo invertido es desarrollada en varias etapas. En primer lugar, se debe fabricar las bases en acrílico donde se acoplarán los demás elementos. Segundo, se deben acoplar los motores a una de las bases de acrílico y procurar conservar la simetría en los mismos. A continuación se deben instalar los componentes operativos y sensores. Finalmente se colocan los soportes metálicos a las bases de acrílico y se realiza el respectivo cableado.

Las pruebas de funcionamiento se las realizan en 4 etapas diferentes. Cada etapa representa un controlador que se va a implementar en la plataforma de péndulo invertido, como son: PID, Fuzzy, PID-Fuzzy y LQR. Se analiza y compara el comportamiento de cada controlador implementado en la plataforma.

## Capítulo 5

### Conclusiones y Recomendaciones

El capítulo expone las conclusiones y recomendaciones obtenidas a partir de la culminación del proyecto. Además se plantean las posibles investigaciones que se pueden realizar en un futuro, según las posibles necesidades que han aparecido a lo largo de la elaboración del trabajo.

#### 5.1. Conclusiones

Se diseñó y construyó un prototipo de plataforma de péndulo invertido para su uso en el laboratorio de manufactura de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE. La plataforma es capaz de mantener el equilibrio mediante el uso de motores de corriente directa los cuales responden a los estímulos de un acelerómetro/giroscopio que sensará y enviará los datos a una placa de programación donde se realizarán 4 diferentes tipos de controladores. El control de la plataforma de péndulo invertido fue desarrollado en el hardware de programación Arduino UNO y los controladores utilizados son PID, Difuso, PID difuso y LQR, realizados en software de tecnología abierta.

Analizando las plataformas de péndulo invertido móvil existentes, se realizó una distribución de las características funcionales de la plataforma en 7 módulos: base, tracción, potencia, energía, posicionamiento angular, adquisición y mando y control. El proceso realizado dio como resultado una plataforma de péndulo invertido móvil de dimensiones  $196 \times 170 \times 70 \text{ mm}$  y cuyo peso completo es de  $1.75 \text{ kg}$ . El ángulo máximo de inclinación que soporta la plataforma para alcanzar su equilibrio es de  $3 \text{ grados}$  por lado.

El controlador PID implementado muestra un buen comportamiento y otorga a la plataforma una buena estabilidad como se observa en la figura 79, donde se aprecia que tiene un sobrepico de 1.38 y un tiempo de establecimiento de 0.047 segundos, lo

que hace que la plataforma cumpla los requerimientos establecidos en el capítulo 3 de este documento.

El realizar las reglas de control y la asignación de variables del controlador difuso representa un consumo elevado de recursos y líneas de programación lo que hace que el controlador sea más lento que el PID. Esto lo convierte en el controlador más lento de los 4 pero con una buena estabilidad al implementarlo en la plataforma.

En el controlador PID-Fuzzy solo se realizó un controlador proporcional derivativo (PD) debido a que un controlador integral haría más lento al sistema. Además la parte del controlador difuso hace que la plataforma tenga una respuesta más lenta debido al consumo de recursos y el tiempo de ejecución de cada línea de programación.

El controlador LQR es desarrollado mediante espacio de estados donde se obtuvo una matriz de control  $J$  que representa la acción de control sobre la planta. A partir de esta matriz se obtuvo una respuesta con un sobrepico de 0.0081 y un tiempo de establecimiento de 0.0076 segundos, lo que lo convierte en el controlador más robusto implementado en la plataforma.

## **5.2. Recomendaciones**

La construcción de una plataforma de péndulo invertido en módulos permite la innovación en varios de los elementos para variar su funcionamiento. De esta manera en trabajos futuros se puede considerar cambiar el módulo de control para que se lo realice de manera remota con módulos bluetooth. Esto permitirá que la plataforma sea teleoperada a larga distancia desde una estación fija.

En el caso de que se quiera realizar otro tipo de controlador, como por ejemplo un controlador mediante redes neuronales, se debe usar una tarjeta con una mayor capacidad; ya que la tarjeta utilizada en este proyecto no tiene el procesador necesario para soportar controladores más robustos.

Se recomienda tener mucho cuidado con la batería LiPo, ya que cada una de sus celdas es muy delicada a las variaciones de voltaje y a la manipulación. Al momento de cargar la batería se debe balancear las cargas de cada celda para evitar posibles daños.

Se debe considerar que la adquisición de datos del acelerómetro/giroscopio sea de manera adecuada, ya que los acelerómetros/giroscopios micromecánicos tienen varios rangos de operación según sus diferentes aplicaciones.

## Fuentes de consulta

- Alessio Salerno and Jorge Angeles (2003). On the nonlinear controllability of a quasiholonomic mobile robot. In ICRA, volumen 3 (pp: 3379–3384). DOI: 10.1109/ROBOT.2003.1242112.
- Arduino (2015). Obtenido de: <https://www.arduino.cc/>
- Banggood (2016). Mini three-phase alternator generator wind turbine hand generator dynamo. Obtenido de: <http://www.banggood.com/es/3V-24V-Mini-Three-phase-Alternator-Generator-Wind-Turbine-Hand-Generator-Dynamo-p-1022349.html>
- BeagleBoard (2016). Obtenido de: <http://beagleboard.org/green>
- Beltrán, J. (2010). Simulación de un péndulo invertido. Obtenido de: <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/10296/Memoria.pdf>
- Castro, A. (2012). Modeling and dynamic analysis of a two-wheeled inverted-pendulum. Estados Unidos: Instituto de tecnología de Georgia.
- Constellium (2013). Solar energy solutions. Obtenido de: <http://www.constellium.com/markets/renewable-energy/solar>
- Crónicas de vuelo-Aerodelismo (2012). A revisar las lipos. Obtenido de : <http://aerodelismiramar.blogspot.com/2012/02/revisar-las-lipos.html>
- Cruz, M., Márquez, C., Silva R. y Merlo C. (2014). Sistemas mecánicos subactuados: péndulos invertidos. México: Instituto Politécnico Nacional. Obtenido de: <http://www.boletin.upiita.ipn.mx/index.php/ciencia/553-cyt-numero-41/840-sistemas-mecanicos-subactuados-pendulos-invertidos1>
- Dean L Kamen, Robert R Ambrogio, Robert J Duggan, Richard Kurt Heinzmann, Brian R Key, Andrzej Skoskiewicz, and Phyllis K Kristal (1999). Transportation vehicles and methods.
- Diseño integrado, (2014). Sensor medidor de aceleración. Acelerómetro (pp. 39-54). Sevilla: Universidad de Sevilla. Obtenido de: <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/11638/fichero/Capitulo+4.pdf>
- Educarchile (2014). Neurona y conducción nerviosa. Obtenido de: <http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=137486>

- ElectroSome (2016). Interfaz con el servomotor 8051 usando keil C. obtenido de: <https://electrosome.com/interfacing-servo-motor-with-8051-using-keil-c/>
- Erle Robotics (2014). Erle-Copter Gitbook. Obtenido de: <https://erlerobotics.gitbooks.io/erle-robotics-erle-copter/content/es/>
- Felix Grasser, Aldo D'Arrigo, Silvio Colombi, and Alfred Rufer (2002). JOE: A mobile, inverted pendulum. Industrial Electronics, IEEE Transactions on (pp: 107 – 114).
- García, A. 2013). ROS: Robot Operating System. Colombia: Universidad Politécnica de Cartagena.
- Dijk van, H. (1997). Modeling and control of an inverted pendulum on a cart. Holanda: Universidad de Tecnología de Eindhoven.
- Electrónica 5 Hertz (2014). Introducción al giroscopio. Obtenido de: <http://5hertz.com/tutoriales/?p=431>
- Hansen, C., Svensson, C. (2000). Construction and control of an inverted pendulum.
- Haykin, S. (1994). Neural Networks, A Comprehensive Foundation, MacMillan Collage Publishing Company.
- Honda. (2015). The Honda humanoid Robot ASIMO. Obtenido de [http://world.honda.com/ASIMO/history/p1\\_p2\\_p3.html](http://world.honda.com/ASIMO/history/p1_p2_p3.html)
- Kuo, B. (1996). Sistemas de control automático (7ma ed.). México: Prentice-Hall.
- Kuoro, S., y Musalem, R. (2012). Técnicas modernas en automática. Control mediante lógica difusa.
- Mantz, R. (2003). Introducción al control óptimo. Argentina: Universidad Nacional de la Plata. Obtenido de: [http://www.ing.unlp.edu.ar/controlm/electronica/archivos/apuntes/c\\_optimo.pdf](http://www.ing.unlp.edu.ar/controlm/electronica/archivos/apuntes/c_optimo.pdf)
- Moreno, G. (2005). Diseño e implementación de un sistema basado en una red neuronal no supervisada para el control de movimiento de un robot móvil. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. Obtenido de: <http://repositorio.espe.edu.ec/bitstream/21000/437/1/T-ESPE-012620.pdf>

- Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderna (7ma ed.). España: Pearson Educación S.A.
- Pantoja, W. (2013). Análisis y comparación de sistemas de control PID y PID difuso en lógica reconfigurable. México: Universidad de Istmo, Campos Tehuantepec, Oaxaca. Obtenido de: [http://www.unistmo.edu.mx/~computacion/tesis/Tesis\\_Williams\\_Antonio\\_Pantoja\\_Laces.pdf](http://www.unistmo.edu.mx/~computacion/tesis/Tesis_Williams_Antonio_Pantoja_Laces.pdf)
- Passino, K. y Yurkovich, S. (1997). Fuzzy control. Estados Unidos de América: Universidad del Estado de Ohio. Editorial Addison Wesley Longman, Inc. Obtenido de: <http://www2.ece.ohio-state.edu/~passino/FCbook.pdf>
- Pérez, H. (2012). Diseño e implementación de un controlador difuso para el sistema carro-péndulo del laboratorio de Servomecanismos. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. Obtenido de: <http://repositorio.espe.edu.ec/handle/21000/5730>
- Pérez, M., Hidalgo, A. y Berenguer, E. (2008). Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo. Argentina: Universidad nacional de San Juan. Obtenido de: <http://dea.unsj.edu.ar/control1b/teoria/unidad1y2.pdf>
- Raspberry Pi (2015). Obtenido de: <https://www.raspberrypi.org/>
- Robomart (2015). Motor DC alto torque de torsión 12 voltios para arduino. Obtenido de : <https://www.robomart.com/150-rpm-high-torque-dc-geared-motor-12-volt>
- Rodríguez, D. y Bordóns, C. (2005). Análisis y control de sistemas en espacio de estado, identificación de sistemas, control adaptativo, control predictivo. Obtenido de: <http://www.esi2.us.es/~danirr/apuntesIC4.pdf>
- Rodríguez, L. (2011). Diseño del Sistema de control difuso de una máquina secadora de café que emplea energía solar. México: Instituto Politécnico Nacional. Obtenido de: <http://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/14477/SEPI-ESIME%20UA.pdf?sequence=1>.

- Salerno and J. Angeles. A new family of two-wheeled mobile robots: Modeling and controllability. *Robotics, IEEE Transactions on*, 23(1) (pp: 169–173), February 2007. ISSN 1552-3098. DOI: 10.1109/TRO.2006.886277.
- Sapuan, A y Mujtaba, I. (2010). *Composite Materials Technology. Neural network Applications*. Estados Unidos de América: Taylor & Francis Group.
- Segway (2012). Obtenido de: <http://www.segway.com/>.
- Sensing (2016). Sensores de posición angular. Obtenido de: [http://www.sensores-de-medida.es/sensing\\_sl/SENSORES-Y-TRANSDUCTORES\\_35/Sensores-de-%C3%A1ngulo-y-rotaci%C3%B3n\\_39/Sensores-de-posici%C3%B3n-angular\\_175/](http://www.sensores-de-medida.es/sensing_sl/SENSORES-Y-TRANSDUCTORES_35/Sensores-de-%C3%A1ngulo-y-rotaci%C3%B3n_39/Sensores-de-posici%C3%B3n-angular_175/)
- Scientific Electronic Library Online (2006). Análisis de la Pérdida de Precisión en Codificadores Ópticos Lineales por Deformación de la Retícula Grabada. Obtenido de: [http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-07642006000600003&script=sci\\_arttext](http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-07642006000600003&script=sci_arttext)
- Suzuki, K. (2013). *Artificial neural networks architectures and applications*. Croacia: Editorial Iva Lipovic
- Techmake (2016). Motor a pasos con cable. Obtenido de: <http://www.techmake.com/00011.html>
- The NXT step (2012). Segway in NXT-G. Obtenido de: <http://www.thenxtstep.com/2010/05/segway-in-nxt-g.html>
- Torrubia, S. (2010). *Redes neuronales multimodelo aplicadas al control de sistemas*. España: Universidad autónoma de Barcelona. Obtenido de: [http://ddd.uab.cat/pub/trerecpro/2013/hdl\\_2072\\_207064/TorrubiaCaravacaSergioR-ETISa2009-10.pdf](http://ddd.uab.cat/pub/trerecpro/2013/hdl_2072_207064/TorrubiaCaravacaSergioR-ETISa2009-10.pdf)
- Velasco, V. y Pilicita, E. (2014). Artículo Científico - Diseño y construcción de un vehículo eléctrico autobalanceado personal (VEAP) de dos ruedas en paralelo estilo SEGWAY. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Extensión Latacunga. Obtenido de: <http://repositorio.espe.edu.ec/handle/21000/9181>
- White, W., Wagner J., Blankenau B., Wang Z., y Salazar V. (2013). *Design, Build, and Test of an Autonomous Inverted Pendulum Cart*.

# **Apéndice A**

## **Planos de construcción de la plataforma de péndulo invertido**

**A.1. Planos de ensamble**

**A.2. Vista explosionada**

**A.3. Base inferior**

**A.4. Base media**

**A.5. Base superior**

**A.6. Acople motor**

**A.7. Diagrama eléctrico/electrónico**

## **A.1. Planos de ensamble**

## **A.2. Vista explosionada**

### **A.3. Base inferior**

## **A.4. Base media**

## **A.5. Base superior**

## **A.6. Acople motor**

## **A.7. Diagrama eléctrico/electrónico**