



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN INNOVACIÓN
Y TRANSFERENCIA TECNOLÓGICA

TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MAGISTER EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PROMOCIÓN: PRIMERA



DESARROLLO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CLÁSICAS

Autor: Fabián Ordóñez Moreno
Director: PhD. Nelson Subía

SANGOLQUÍ, 2015

1

OBJETIVO GENERAL

- 1 Resolver las ecuaciones diferenciales parciales clásicas, aplicando los métodos analíticos y numéricos, determinando su grado de confiabilidad y, presentados en forma didáctica como un material científico, útil para el aprendizaje de las EDP's.

2

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1 Desarrollar las metodologías clásicas de solución analítica de las EDP's.
- 2 Desarrollar las metodologías de solución aproximada de las EDP clásicas.
- 3 Determinar la validez de las soluciones numéricas de las EDP's contrastando con las soluciones analíticas en donde sea posible.
- 4 Presentar un material didáctico para la enseñanza de las EDP's a nivel superior.

2

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1 Desarrollar las metodologías clásicas de solución analítica de las EDP's.
- 2 Desarrollar las metodologías de solución aproximada de las EDP clásicas.
- 3 Determinar la validez de las soluciones numéricas de las EDP's contrastando con las soluciones analíticas en donde sea posible.
- 4 Presentar un material didáctico para la enseñanza de las EDP's a nivel superior.

2

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1 Desarrollar las metodologías clásicas de solución analítica de las EDP's.
- 2 Desarrollar las metodologías de solución aproximada de las EDP clásicas.
- 3 Determinar la validez de las soluciones numéricas de las EDP's contrastando con las soluciones analíticas en donde sea posible.
- 4 Presentar un material didáctico para la enseñanza de las EDP's a nivel superior.

2

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1 Desarrollar las metodologías clásicas de solución analítica de las EDP's.
- 2 Desarrollar las metodologías de solución aproximada de las EDP clásicas.
- 3 Determinar la validez de las soluciones numéricas de las EDP's contrastando con las soluciones analíticas en donde sea posible.
- 4 Presentar un material didáctico para la enseñanza de las EDP's a nivel superior.

- 1 Una EDP es una ecuación diferencial cuya incógnita es una función que depende de más de una variable, en donde el orden de la ecuación se considera el de la derivada parcial más alta y se representa de la siguiente manera

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\right) = 0$$

- 2 Se usa en muchos campos de la física y la ingeniería, como por ejemplo: acústica, aerodinámica, elasticidad, transferencia de calor, meteorología, mecánica cuántica, electrostática, es ampliamente difundida y de ahí el interés y necesidad por su estudio y conocimiento. Se abordará los tres tipos que más se utilizan y que son la base para formulaciones más complejas y reales. Las EDP's clásicas que vamos a tratar son:

3

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

- 1 Una EDP es una ecuación diferencial cuya incógnita es una función que depende de más de una variable, en donde el orden de la ecuación se considera el de la derivada parcial más alta y se representa de la siguiente manera

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\right) = 0$$

- 2 Se usa en muchos campos de la física y la ingeniería, como por ejemplo: acústica, aerodinámica, elasticidad, transferencia de calor, meteorología, mecánica cuántica, electrostática, es ampliamente difundida y de ahí el interés y necesidad por su estudio y conocimiento. Se abordará los tres tipos que más se utilizan y que son la base para formulaciones más complejas y reales. Las EDP's clásicas que vamos a tratar son: 

- 1 Parabólicas**, corresponden a problemas que se presentan al estudiar los procesos como conductibilidad térmica, difusión, aplicaciones financieras. Como ejemplo se tiene el modelo unidimensional del flujo de calor en un alambre aislado.
- 2 Hiperbólicas**, corresponden a problemas que refieren a fenómenos oscilatorios: vibraciones de cuerda, membranas, oscilaciones electromagnéticas. Un ejemplo es el modelo unidimensional de la cuerda vibrante.
- 3 Elípticas**, son problemas que aparecen al estudiar procesos estacionarios, es decir que no cambian con el tiempo. Como ejemplo es la función potencial que podría representar el régimen permanente de un potencial electrostático o de la distribución de la temperatura en una región rectangular del plano.

4

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

- 1 Parabólicas**, corresponden a problemas que se presentan al estudiar los procesos como conductibilidad térmica, difusión, aplicaciones financieras. Como ejemplo se tiene el modelo unidimensional del flujo de calor en un alambre aislado.
- 2 Hiperbólicas**, corresponden a problemas que refieren a fenómenos oscilatorios: vibraciones de cuerda, membranas, oscilaciones electromagnéticas. Un ejemplo es el modelo unidimensional de la cuerda vibrante.
- 3 Elípticas**, son problemas que aparecen al estudiar procesos estacionarios, es decir que no cambian con el tiempo. Como ejemplo es la función potencial que podría representar el régimen permanente de un potencial electrostático o de la distribución de la temperatura en una región rectangular del plano.



- 1 **Parabólicas**, corresponden a problemas que se presentan al estudiar los procesos como conductibilidad térmica, difusión, aplicaciones financieras. Como ejemplo se tiene el modelo unidimensional del flujo de calor en un alambre aislado.
- 2 **Hiperbólicas**, corresponden a problemas que refieren a fenómenos oscilatorios: vibraciones de cuerda, membranas, oscilaciones electromagnéticas. Un ejemplo es el modelo unidimensional de la cuerda vibrante.
- 3 **Elípticas**, son problemas que aparecen al estudiar procesos estacionarios, es decir que no cambian con el tiempo. Como ejemplo es la función potencial que podría representar el régimen permanente de un potencial electrostático o de la distribución de la temperatura en una región rectangular del plano.

5

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

- 1 Para resolver una EDP se considera dos formas una desde el punto de vista analítico el método de separación de variables y, desde el punto de vista numérico el método de las diferencias finitas.
- 2 El **método de separación de variables** se utiliza cuando la ecuación diferencial parcial y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas.
- 3 Las condiciones de contorno que se tratan en los problemas planteados, son:

5

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

- 1 Para resolver una EDP se considera dos formas una desde el punto de vista analítico el método de separación de variables y, desde el punto de vista numérico el método de las diferencias finitas.
- 2 El **método de separación de variables** se utiliza cuando la ecuación diferencial parcial y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas.
- 3 Las condiciones de contorno que se tratan en los problemas planteados, son:

5

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

- 1 Para resolver una EDP se considera dos formas una desde el punto de vista analítico el método de separación de variables y, desde el punto de vista numérico el método de las diferencias finitas.
- 2 El **método de separación de variables** se utiliza cuando la ecuación diferencial parcial y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas.
- 3 Las condiciones de contorno que se tratan en los problemas planteados, son:

- 1 Dirichlet, donde la función se describe para cada punto de el contorno de la región;
- 2 Neumann, donde se prefijan los valores de la derivada de la función sobre el contorno.
- 3 Algunos problemas plantean condiciones mixtas, es decir sus datos son referidos a las fronteras de la función y a la derivada de la función.

El método de **Diferencias Finitas**, se basa en la utilización de fórmulas para aproximar las derivadas de una función. Estas fórmulas de aproximación de las derivadas de una función pueden ser centradas, progresivas o regresivas, con un orden de la aproximación $O(h^n)$.

- 1 Dirichlet, donde la función se describe para cada punto de el contorno de la región;
- 2 Neumann, donde se prefijan los valores de la derivada de la función sobre el contorno.
- 3 Algunos problemas plantean condiciones mixtas, es decir sus datos son referidos a las fronteras de la función y a la derivada de la función.

El método de **Diferencias Finitas**, se basa en la utilización de fórmulas para aproximar las derivadas de una función. Estas fórmulas de aproximación de las derivadas de una función pueden ser centradas, progresivas o regresivas, con un orden de la aproximación $O(h^n)$.

- 1 Dirichlet, donde la función se describe para cada punto de el contorno de la región;
- 2 Neumann, donde se prefijan los valores de la derivada de la función sobre el contorno.
- 3 Algunos problemas plantean condiciones mixtas, es decir sus datos son referidos a las fronteras de la función y a la derivada de la función.

El método de **Diferencias Finitas**, se basa en la utilización de fórmulas para aproximar las derivadas de una función. Estas fórmulas de aproximación de las derivadas de una función pueden ser centradas, progresivas o regresivas, con un orden de la aproximación $O(h^n)$.

- 1 Diferencias finitas es un método general que permite la solución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales definidas en dominios finitos. Para ello, se discretiza la ecuación con una malla rectangular con puntos de una distancia h y k para los ejes x e y , respectivamente.
- 2 Un mallado sobre el intervalo $[a, b]$ es un conjunto de puntos x_0, x_1, \dots, x_N , tales que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

La distribución de puntos realizada tiene como objetivo reducir el error cometido, en las aproximaciones, al discretizar una ecuación diferencial.

- 1 Diferencias finitas es un método general que permite la solución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales definidas en dominios finitos. Para ello, se discretiza la ecuación con una malla rectangular con puntos de una distancia h y k para los ejes x e y , respectivamente.
- 2 Un mallado sobre el intervalo $[a, b]$ es un conjunto de puntos x_0, x_1, \dots, x_N , tales que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

La distribución de puntos realizada tiene como objetivo reducir el error cometido, en las aproximaciones, al discretizar una ecuación diferencial.

Deducción de las soluciones para la ecuación del calor: condición de Dirichlet

- 1 Las condiciones inicial y de contorno, son

$$\text{C.I. } U(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$\text{C.C. } U(0, t) = U(L, t) = 0, \quad t > 0$$

Las EDO's que resultan son:

2

$$T' + c^2 \lambda T = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

Deducción de las soluciones para la ecuación del calor: condición de Dirichlet

- 1 Las condiciones inicial y de contorno, son

$$\text{C.I. } U(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$\text{C.C. } U(0, t) = U(L, t) = 0, \quad t > 0$$

Las EDO's que resultan son:

- 2

$$T' + c^2 \lambda T = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES PARABÓLICAS. CONDICIÓN DE DIRICHLET

- 1 La ecuación temporal T se consigue integrando, siendo una función exponencial $T(t) = ke^{\lambda c^2 t}$.
- 2 La ecuación espacial $X'' + \lambda X = 0$, genera dos soluciones de tipo exponencial $X(x) = e^{\pm\sqrt{-\lambda}x}$ en donde λ puede ser real e inclusive imaginario, en donde sólo hay solución cuando $\lambda > 0$. Al aplicar las condiciones de contorno, se consigue el valor de $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ y $X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. La combinación lineal de la solución conformada por el producto de las funciones $X(\lambda > 0)$ y T con $(B = c_2 * k)$; será también solución de la ecuación del calor al aplicar el principio de superposición, formándose así una serie infinita.

- 1 La ecuación temporal T se consigue integrando, siendo una función exponencial $T(t) = ke^{\lambda c^2 t}$.
- 2 La ecuación espacial $X'' + \lambda X = 0$, genera dos soluciones de tipo exponencial $X(x) = e^{\pm\sqrt{-\lambda}x}$ en donde λ puede ser real e inclusive imaginario, en donde sólo hay solución cuando $\lambda > 0$. Al aplicar las condiciones de contorno, se consigue el valor de $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ y $X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. La combinación lineal de la solución conformada por el producto de las funciones $X(\lambda > 0)$ y T con $(B = c_2 * k)$; será también solución de la ecuación del calor al aplicar el principio de superposición, formándose así una serie infinita.

1

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} \right) t} \right]$$

La condición inicial $U(x, 0) = f(x)$, permite encontrar el coeficiente de Fourier B_n , para ello utiliza la propiedad de ortogonalidad de los senos.

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Deducción de las soluciones para la ecuación del calor: condición de Neumann

- 1 Para este caso, las condiciones de contorno e iniciales, son

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}(0, t) &= \frac{\partial U}{\partial t}(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ U(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L\end{aligned}$$

- 2 Cuando $\lambda > 0$ y al reemplazar las condiciones de contorno, se obtiene $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ y la ecuación espacial $X(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Deducción de las soluciones para la ecuación del calor: condición de Neumann

- 1 Para este caso, las condiciones de contorno e iniciales, son

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}(0, t) &= \frac{\partial U}{\partial t}(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ U(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L\end{aligned}$$

- 2 Cuando $\lambda > 0$ y al reemplazar las condiciones de contorno, se obtiene $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ y la ecuación espacial $X(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

12

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES PARABÓLICAS. CONDICIÓN DE NEUMANN

- 1 La solución de la ecuación del calor al aplicar el principio de superposición de igual forma que el proceso anterior, con $A = c_1 k$, se obtiene

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}$$

- 2 Pero, cuando $\lambda = 0$, se obtiene una función constante para $U(x, t) = A$. Entonces, la solución viene dada por

$$U(x, t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}$$

- 1 La solución de la ecuación del calor al aplicar el principio de superposición de igual forma que el proceso anterior, con $A = c_1 k$, se obtiene

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}$$

- 2 Pero, cuando $\lambda = 0$, se obtiene una función constante para $U(x, t) = A$. Entonces, la solución viene dada por

$$U(x, t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}$$

- 1 La condición inicial $f(x) = U(x, 0)$ al reemplazar en la solución permite calcular los coeficientes A y A_n , para ello se utiliza la propiedad de ortogonalidad de los cosenos.

$$A = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$
$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Deducción de las soluciones de la ecuación del calor bidimensional

- 1 Sea la EDP y las condiciones de contorno e iniciales siguientes

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right], \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$\text{C.I.} \quad U(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < H$$

$$\text{C.C.} \quad \begin{cases} U(x, 0, t) = U(x, H, t) = 0, & 0 < x < L; \quad t > 0 \\ U(0, y, t) = U(L, y, t) = 0, & 0 < y < H; \quad t > 0 \end{cases}$$

- 2 Utilizando el método de separación de variables, en el que se substituye $U(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ y se plantea la siguiente ecuación.

Deducción de las soluciones de la ecuación del calor bidimensional

- 1 Sea la EDP y las condiciones de contorno e iniciales siguientes

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right], \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$\text{C.I.} \quad U(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < H$$

$$\text{C.C.} \quad \begin{cases} U(x, 0, t) = U(x, H, t) = 0, & 0 < x < L; \quad t > 0 \\ U(0, y, t) = U(L, y, t) = 0, & 0 < y < H; \quad t > 0 \end{cases}$$

- 2 Utilizando el método de separación de variables, en el que se substituye $U(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ y se plantea la siguiente ecuación.

1

$$\frac{T'}{c^2 T} - \frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y} = 0$$

Se asigna $-\frac{X''}{X} = \alpha$, $-\frac{Y''}{Y} = \beta$ e integrando, se consigue

$$\frac{T'}{T} = -c^2(\alpha + \beta)$$

$$T(t) = c_1 e^{-c^2(\alpha + \beta)t}$$

Como $\frac{X''}{X} = -\alpha$, con $\alpha > 0$, tenemos la EDO $X'' + \alpha X = 0$,
cuya solución viene dada por: $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\alpha}x) + c_3 \sin(\sqrt{\alpha}x)$.

1 Al reemplazar las condiciones de contorno, se determina $\alpha = \frac{m^2\pi^2}{L^2}$ y la solución particular $X(x) = c_3 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

2 La ecuación $\frac{Y''}{Y} = -\beta$, con $\beta > 0$, genera la EDO $Y'' + \beta Y = 0$, cuya solución general es $Y(y) = c_4 \cos(\sqrt{\beta}y) + c_5 \sin(\sqrt{\beta}y)$, al aplicar las condiciones de contorno se obtiene $\beta = \frac{n^2\pi^2}{H^2}$ y la solución particular $Y(y) = c_5 \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right)$.

Reemplazando α y β obtenemos $T(t) = c_1 e^{-c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}\right)t}$. La solución producto se exhibe a continuación.

$$U(x, y, t) = \sum_{m,n} B_{m,n} e^{-c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}\right)t} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right)$$

- 1** Al reemplazar las condiciones de contorno, se determina $\alpha = \frac{m^2\pi^2}{L^2}$ y la solución particular $X(x) = c_3 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$
- 2** La ecuación $\frac{Y''}{Y} = -\beta$, con $\beta > 0$, genera la EDO $Y'' + \beta Y = 0$, cuya solución general es $Y(y) = c_4 \cos(\sqrt{\beta}y) + c_5 \sin(\sqrt{\beta}y)$, al aplicar las condiciones de contorno se obtiene $\beta = \frac{n^2\pi^2}{H^2}$ y la solución particular $Y(y) = c_5 \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right)$.

Reemplazando α y β obtenemos $T(t) = c_1 e^{-c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}\right)t}$. La solución producto se exhibe a continuación.

$$U(x, y, t) = \sum_{m,n}^{\infty} B_{m,n} e^{-c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}\right)t} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right)$$

- 1 $B_{m,n} = B_m \cdot B_n$. Al substituir la condición inicial $U(x, y, 0)$, obtenemos las ecuaciones que nos permitirán descubrir los coeficientes B_m y B_n

$$U(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right)$$

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{H} \int_0^H f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy$$

- 1 Considérese una varilla unidimensional cuya constante de difusividad térmica $c^2 = 1,45$ y cumple las condiciones siguientes. Encontrar una expresión para la función temperatura U , que cumpla las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 1,45 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.I.} \quad U(x, 0) = x, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.C.} \quad U(0, t) = U(L, t), \quad t > 0$$

- 2 El coeficiente de Fourier B_n , viene dado por

$$B_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

- 1** Considérese una varilla unidimensional cuya constante de difusividad térmica $c^2 = 1,45$ y cumple las condiciones siguientes. Encontrar una expresión para la función temperatura U , que cumpla las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 1,45 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.I. } U(x, 0) = x, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{C.C. } U(0, t) = U(L, t), \quad t > 0$$

- 2** El coeficiente de Fourier B_n , viene dado por

$$B_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

- 1 Integrando por partes y reemplazando, se logra determinar U .

$$B_n = \frac{4}{n\pi}(-1)^{(n+1)}$$
$$U(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{(n+1)}}{n} e^{-1.45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \sin \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right]$$

- 2 A través de un programa desarrollado en MATLAB, se calcula la matriz de resultados y la grafica.

- 1** Integrando por partes y reemplazando, se logra determinar U .

$$B_n = \frac{4}{n\pi} (-1)^{(n+1)}$$
$$U(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{(n+1)}}{n} e^{-1.45 \left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \right) t} \sin \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right]$$

- 2** A través de un programa desarrollado en MATLAB, se calcula la matriz de resultados y la grafica.

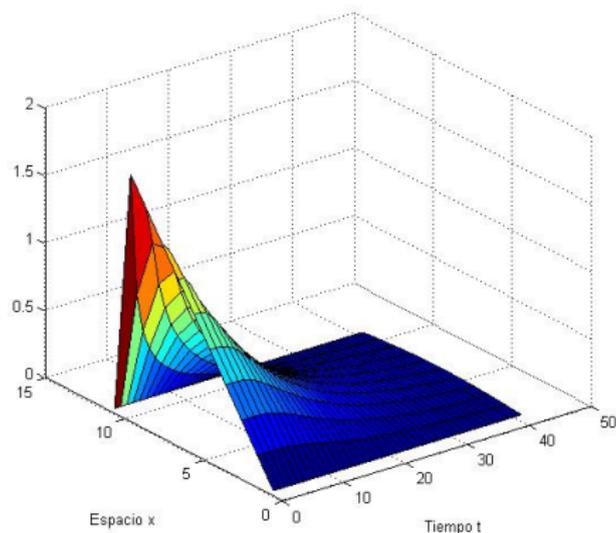


Figure: Gráfica de la función temperatura U

- 1 El método de Crank-Nicholson es un método implícito, utilizado para aproximar la ecuación del calor, consiste en encontrar una aproximación numérica en un punto situado entre dos filas de la malla, punto medio.
- 2 Determinemos ahora cada una de las expresiones de la ecuación del calor, utilizando diferencias finitas centradas, para $(x, t + \frac{k}{2})$, a partir de las derivada progresiva y regresiva de la función.

3

$$U_t(x, t) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \quad \text{Progresiva}$$

$$U_t(x, t + k) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \quad \text{Regresiva}$$



- 1 El método de Crank-Nicholson es un método implícito, utilizado para aproximar la ecuación del calor, consiste en encontrar una aproximación numérica en un punto situado entre dos filas de la malla, punto medio.
- 2 Determinemos ahora cada una de las expresiones de la ecuación del calor, utilizando diferencias finitas centradas, para $(x, t + \frac{k}{2})$, a partir de las derivada progresiva y regresiva de la función.

3

$$U_t(x, t) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \quad \text{Progresiva}$$

$$U_t(x, t + k) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \quad \text{Regresiva}$$



- 1 El método de Crank-Nicholson es un método implícito, utilizado para aproximar la ecuación del calor, consiste en encontrar una aproximación numérica en un punto situado entre dos filas de la malla, punto medio.
- 2 Determinemos ahora cada una de las expresiones de la ecuación del calor, utilizando diferencias finitas centradas, para $(x, t + \frac{k}{2})$, a partir de las derivada progresiva y regresiva de la función.

3

$$U_t(x, t) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \quad \text{Progresiva}$$

$$U_t(x, t + k) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \quad \text{Regresiva}$$



1 Sumando las ecuaciones planteadas, obtenemos

$$U_t(x, t) + U_t(x, t + k) = 2 \left[\frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \right]$$

$$U_t(x, t + \frac{k}{2}) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k}$$

$$U_t(x, t) = \frac{U_{i, j+1} - U_{i, j}}{k}$$

2 Ahora, para $U_{xx}(x, t + \frac{k}{2})$ con diferencias centradas.

$$U_{xx}(x, t) = \frac{U(x + h, t) - 2U(x, t) + U(x - h, t)}{h^2}$$

$$U_{xx}(x, t + \frac{k}{2}) = \frac{U(x + h, t + \frac{k}{2}) - 2U(x, t + \frac{k}{2}) + U(x - h, t + \frac{k}{2})}{h^2}$$

1 Sumando las ecuaciones planteadas, obtenemos

$$U_t(x, t) + U_t(x, t + k) = 2 \left[\frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k} \right]$$

$$U_t(x, t + \frac{k}{2}) = \frac{U(x, t + k) - U(x, t)}{k}$$

$$U_t(x, t) = \frac{U_{i, j+1} - U_{i, j}}{k}$$

2 Ahora, para $U_{xx}(x, t + \frac{k}{2})$ con diferencias centradas.

$$U_{xx}(x, t) = \frac{U(x + h, t) - 2U(x, t) + U(x - h, t)}{h^2}$$

$$U_{xx}(x, t + k) = \frac{U(x + h, t + k) - 2U(x, t + k) + U(x - h, t + k)}{h^2}$$

1

$$\frac{U_{xx}(x, t) + U_{xx}(x, t + k)}{2} = \frac{U(x + h, t) - 2U(x, t) + U(x - h, t) + U(x + h, t + k) - 2U(x, t + k) + U(x - h, t + k)}{2h^2}$$

$$U_{xx}(x, t + \frac{k}{2}) = \frac{U_{i+1, j} - 2U_{i, j} + U_{i-1, j} + U_{i+1, j+1} - 2U_{i, j+1} + U_{i-1, j+1}}{2h^2}$$

2 Reemplazando en la EDP, con $r = \frac{c^2 k}{h^2}$ y ordenando, se obtiene la ecuación en diferencias finitas para $i = 2, \dots, n - 1$.

$$\frac{U_{i, j+1} - U_{i, j}}{k} = c^2 \frac{U_{i-1, j+1} - 2U_{i, j+1} + U_{i+1, j+1} + U_{i-1, j} - 2U_{i, j} + U_{i+1, j}}{2h^2}$$

$$-rU_{i-1, j+1} + (2 + 2r)U_{i, j+1} - rU_{i+1, j+1} = (2 - 2r)U_{i, j} + r(U_{i-1, j} + U_{i+1, j})$$

1

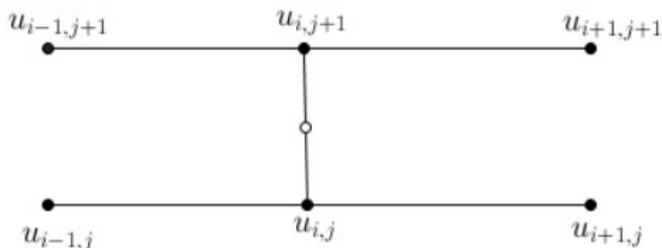
$$\frac{U_{xx}(x, t) + U_{xx}(x, t + k)}{2} = \frac{U(x + h, t) - 2U(x, t) + U(x - h, t) + U(x + h, t + k) - 2U(x, t + k) + U(x - h, t + k)}{2h^2}$$

$$U_{xx}(x, t + \frac{k}{2}) = \frac{U_{i+1, j} - 2U_{i, j} + U_{i-1, j} + U_{i+1, j+1} - 2U_{i, j+1} + U_{i-1, j+1}}{2h^2}$$

2 Reemplazando en la EDP, con $r = \frac{c^2 k}{h^2}$ y ordenando, se obtiene la ecuación en diferencias finitas para $i = 2, \dots, n - 1$.

$$\frac{U_{i, j+1} - U_{i, j}}{k} = c^2 \frac{U_{i-1, j+1} - 2U_{i, j+1} + U_{i+1, j+1} + U_{i-1, j} - 2U_{i, j} + U_{i+1, j}}{2h^2}$$

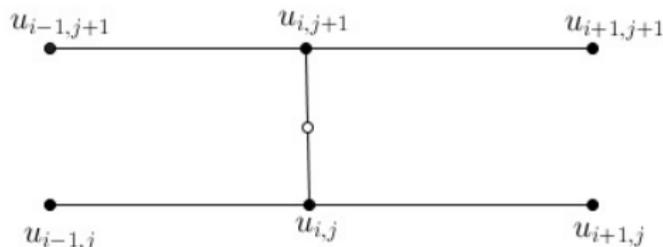
$$-rU_{i-1, j+1} + (2 + 2r)U_{i, j+1} - rU_{i+1, j+1} = (2 - 2r)U_{i, j} + r(U_{i-1, j} + U_{i+1, j})$$



1

Figure: Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecuación del calor

- 2 Encontremos ahora algunas ecuaciones para $i = 2, \dots, n - 1$, considerando las condiciones de contorno siguientes: $U_{1,j} = U_{1,j+1}$ y $U_{n,j} = U_{n,j+1}$



1

Figure: Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecuación del calor

- 2 Encontremos ahora algunas ecuaciones para $i = 2, \dots, n - 1$, considerando las condiciones de contorno siguientes: $U_{1,j} = U_{1,j+1}$ y $U_{n,j} = U_{n,j+1}$

$$i = 2$$

$$\begin{aligned} -rU_{1,j+1} + (2 + 2r)U_{2,j+1} - rU_{3,j+1} &= (2 - 2r)U_{2,j} + rU_{1,j} + rU_{3,j} \\ (2 + 2r)U_{2,j+1} - rU_{3,j+1} &= 2rU_{1,j} + (2 - 2r)U_{2,j} + rU_{3,j} \end{aligned}$$

$$i = 3$$

$$\begin{aligned} -rU_{2,j+1} + (2 + 2r)U_{3,j+1} - rU_{4,j+1} &= (2 - 2r)U_{3,j} + rU_{2,j} + rU_{4,j} \\ (2 + 2r)U_{3,j+1} - rU_{4,j+1} &= rU_{2,j} + (2 - 2r)U_{3,j} + rU_{4,j} \end{aligned}$$

$$i = p$$

$$\begin{aligned} -rU_{p-1,j+1} + (2 + 2r)U_{p,j+1} - rU_{p+1,j+1} &= (2 - 2r)U_{p,j} + rU_{p-1,j} + rU_{p+1,j} \\ (2 + 2r)U_{p,j+1} - rU_{p+1,j+1} &= rU_{p-1,j} + (2 - 2r)U_{p,j} + rU_{p+1,j} \end{aligned}$$

$$i = n - 2$$

$$\begin{aligned} -rU_{n-3,j+1} + (2 + 2r)U_{n-2,j+1} - rU_{n-1,j+1} &= (2 - 2r)U_{n-2,j} + rU_{n-3,j} + rU_{n-1,j} \\ (2 + 2r)U_{n-2,j+1} - rU_{n-1,j+1} &= rU_{n-3,j} + (2 - 2r)U_{n-2,j} + rU_{n-1,j} \end{aligned}$$

$$i = n - 1$$

$$\begin{aligned} -rU_{n-2,j+1} + (2 + 2r)U_{n-1,j+1} - rU_{n,j+1} &= (2 - 2r)U_{n-1,j} + rU_{n-2,j} + rU_{n,j} \\ (2 + 2r)U_{n-1,j+1} - rU_{n,j+1} &= rU_{n-2,j} + (2 - 2r)U_{n-1,j} + rU_{n,j} \end{aligned}$$



- 1** Ahora, las ecuaciones encontradas se presentan como matrices, generando un sistema tridiagonal.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{2} \\
 \left[\begin{array}{ccccccc}
 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -r & 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \ddots & & & & \\
 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & 0 \\
 & & & & \ddots & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r & -r \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r & \\
 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ \vdots \\ U_{i,j+1} \\ \vdots \\ U_{n-2,j+1} \\ U_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \\
 \left[\begin{array}{c}
 2rU_{1,j} + (2-2r)U_{2,j} + rU_{3,j} \\
 rU_{2,j} + (2-2r)U_{3,j} + rU_{4,j} \\
 \vdots \\
 rU_{p-1,j} + (2-2r)U_{p,j} + rU_{p+1,j} \\
 \vdots \\
 rU_{n-3,j} + (2-2r)U_{n-2,j} + rU_{n-1,j} \\
 rU_{n-2,j} + (2-2r)U_{n-1,j} + 2rU_{n,j}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

- 1** Ahora, las ecuaciones encontradas se presentan como matrices, generando un sistema tridiagonal.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{2} \\
 \left[\begin{array}{ccccccc}
 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -r & 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \ddots & & & & \\
 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & 0 \\
 & & & & \ddots & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r & -r \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r
 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ \vdots \\ U_{i,j+1} \\ \vdots \\ U_{n-2,j+1} \\ U_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \\
 \left[\begin{array}{c}
 2rU_{1,j} + (2-2r)U_{2,j} + rU_{3,j} \\
 rU_{2,j} + (2-2r)U_{3,j} + rU_{4,j} \\
 \vdots \\
 rU_{p-1,j} + (2-2r)U_{p,j} + rU_{p+1,j} \\
 \vdots \\
 rU_{n-3,j} + (2-2r)U_{n-2,j} + rU_{n-1,j} \\
 rU_{n-2,j} + (2-2r)U_{n-1,j} + 2rU_{n,j}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

- 1 Con un algoritmo construido en MATLAB, se calcula los errores absoluto y relativo promedio existente entre la solución analítica y la aproximada de la EDP, cuyos resultados son ilustrados en la siguiente tabla.

2

Error/Tiempo	$t = 0.025$	$0.3 \leq t \leq 0.35$	$t = 0.025$	$t = 0.325$
Error máx. abs.	0.013			
Error mín. abs.		0.0003		
Error máx. rel.			0.033	
Error mín. rel.				0.0014

Table: Error absoluto y relativo Problema 2.5.1.

- 3 La evolución del error absoluto y relativo promedio, conforme transcurre el tiempo, se representa en la siguiente figura.

- 1 Con un algoritmo construido en MATLAB, se calcula los errores absoluto y relativo promedio existente entre la solución analítica y la aproximada de la EDP, cuyos resultados son ilustrados en la siguiente tabla.

2

Error/Tiempo	$t = 0.025$	$0.3 \leq t \leq 0.35$	$t = 0.025$	$t = 0.325$
Error máx. abs.	0.013			
Error mín. abs.		0.0003		
Error máx. rel.			0.033	
Error mín. rel.				0.0014

Table: Error absoluto y relativo Problema 2.5.1.

- 3 La evolución del error absoluto y relativo promedio, conforme transcurre el tiempo, se representa en la siguiente figura.

- 1 Con un algoritmo construido en MATLAB, se calcula los errores absoluto y relativo promedio existente entre la solución analítica y la aproximada de la EDP, cuyos resultados son ilustrados en la siguiente tabla.

2

Error/Tiempo	$t = 0.025$	$0.3 \leq t \leq 0.35$	$t = 0.025$	$t = 0.325$
Error máx. abs.	0.013			
Error mín. abs.		0.0003		
Error máx. rel.			0.033	
Error mín. rel.				0.0014

Table: Error absoluto y relativo Problema 2.5.1.

- 3 La evolución del error absoluto y relativo promedio, conforme transcurre el tiempo, se representa en la siguiente figura.

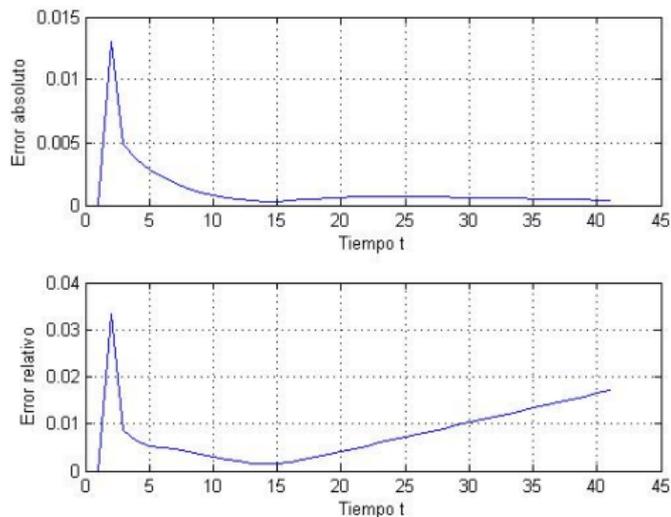


Figure: Evolución del error absoluto y relativo Problema 2.5.1.

- 1 Supongamos una cuerda vibrante uniforme sin fuerzas externas y con extremos fijos, modelado a través de una EDP homogénea con las condiciones de contorno e iniciales dadas a continuación.

2

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$C.I. \begin{cases} y(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad 0 < x < L$$

- 1 Supongamos una cuerda vibrante uniforme sin fuerzas externas y con extremos fijos, modelado a través de una EDP homogénea con las condiciones de contorno e iniciales dadas a continuación.

2

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$C.I. \begin{cases} y(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad 0 < x < L$$

- 1 Aplicamos el método de separación de variables, substituyendo $y(x, t) = X(x)T(t)$, para obtener las EDO's siguientes e igualando a una constante $-\lambda$, tenemos

$$T'' + c^2\lambda T = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

- 2 Reemplazando las condiciones de contorno, se obtiene $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$ y la solución para la ecuación espacial $X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. La solución general de la ecuación temporal, es $T(t) = c_3 \cos(c\sqrt{\lambda}t) + c_4 \sin(c\sqrt{\lambda}t)$.

- 1 Aplicamos el método de separación de variables, substituyendo $y(x, t) = X(x)T(t)$, para obtener las EDO's siguientes e igualando a una constante $-\lambda$, tenemos

$$T'' + c^2\lambda T = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

- 2 Reemplazando las condiciones de contorno, se obtiene $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$ y la solución para la ecuación espacial $X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. La solución general de la ecuación temporal, es $T(t) = c_3 \cos(c\sqrt{\lambda}t) + c_4 \sin(c\sqrt{\lambda}t)$.

- 1 Se asigna $A = c_2 \cdot c_3$ y $B = c_2 \cdot c_4$, entonces la solución y por el principio de superposición, se obtiene

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \right]$$

- 2 Al reemplazar las condiciones iniciales, tenemos

$$y(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

- 3 Los coeficientes A_n y B_n vienen dados por

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx$$

- 1 Se asigna $A = c_2 \cdot c_3$ y $B = c_2 \cdot c_4$, entonces la solución y por el principio de superposición, se obtiene

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \right]$$

- 2 Al reemplazar las condiciones iniciales, tenemos

$$y(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

- 3 Los coeficientes A_n y B_n vienen dados por

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx$$

- 1** Se asigna $A = c_2 \cdot c_3$ y $B = c_2 \cdot c_4$, entonces la solución y por el principio de superposición, se obtiene

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \right]$$

- 2** Al reemplazar las condiciones iniciales, tenemos

$$y(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

- 3** Los coeficientes A_n y B_n vienen dados por

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx$$

1

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \left[g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx$$

2 Una cuerda elástica de longitud π , fija en sus extremos con las condiciones dadas, determinar la función desplazamiento y si $c^2 = 4$.

3

$$C.C. \quad y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

4

$$C.I. \quad \begin{cases} y(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \pi x - x^2 \end{cases} \quad 0 < x < \pi$$

1

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \left[g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx$$

- 2 Una cuerda elástica de longitud π , fija en sus extremos con las condiciones dadas, determinar la función desplazamiento y si $c^2 = 4$.

3

$$C.C. \quad y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

4

$$C.I. \quad \begin{cases} y(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \pi x - x^2 \end{cases} \quad 0 < x < \pi$$

1

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \left[g(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx$$

2 Una cuerda elástica de longitud π , fija en sus extremos con las condiciones dadas, determinar la función desplazamiento y si $c^2 = 4$.

3

$$C.C. \quad y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

4

$$C.I. \quad \begin{cases} y(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \pi x - x^2 \end{cases} \quad 0 < x < \pi$$

1

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \left[g(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx$$

- 2 Una cuerda elástica de longitud π , fija en sus extremos con las condiciones dadas, determinar la función desplazamiento y si $c^2 = 4$.

3

$$C.C. \quad y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

4

$$C.I. \quad \begin{cases} y(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \pi x - x^2 \end{cases} \quad 0 < x < \pi$$

- 1 Reemplazando en B_n los datos del problema, se tiene

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi (\pi x - x^2) \sin(nx) dx$$

- 2 Integrando por partes, se encuentra el valor de B_n .

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{\pi n^4} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- 3 La solución y y la gráfica de la función analizada se presenta a continuación.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^4} \sin[(2n-1)x] \sin[(4n-2)t]$$

- 1 Reemplazando en B_n los datos del problema, se tiene

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi (\pi x - x^2) \sin(nx) dx$$

- 2 Integrando por partes, se encuentra el valor de B_n .

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{\pi n^4} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- 3 La solución y y la gráfica de la función analizada se presenta a continuación.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^4} \sin[(2n-1)x] \sin[(4n-2)t]$$

- 1 Reemplazando en B_n los datos del problema, se tiene

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi (\pi x - x^2) \sin(nx) dx$$

- 2 Integrando por partes, se encuentra el valor de B_n .

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{\pi n^4} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- 3 La solución y y la gráfica de la función analizada se presenta a continuación.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^4} \sin[(2n-1)x] \sin[(4n-2)t]$$

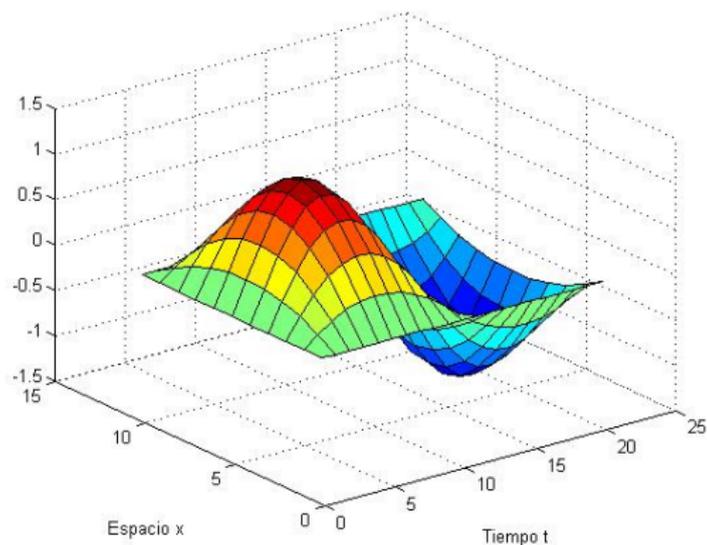


Figure: Gráfica de la función desplazamiento y 

- 1 La ecuación de ondas y sus condiciones de contorno e iniciales, modelado por la siguiente EDP.

2

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \quad y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad 0 < t < \infty$$

$$C.I. \begin{cases} y(x, 0) = f(x), \\ y_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq a$$

- 3 Se construye una malla formada por un rectángulo cuyo largo es a subdividido en $n - 1$ partes y ancho b subdividido en $(m - 1)$ partes, lo que genera $(n - 1)(m - 1)$ rectángulos, con lados $h = \frac{a}{n - 1}$ y $k = \frac{b}{m - 1}$, como indica la Figura.

- 1 La ecuación de ondas y sus condiciones de contorno e iniciales, modelado por la siguiente EDP.

2

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \quad 0 < x < a, t > 0 \quad y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad 0 < t < \infty$$

$$C.I. \begin{cases} y(x, 0) = f(x), \\ y_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq a$$

- 3 Se construye una malla formada por un rectángulo cuyo largo es a subdividido en $n - 1$ partes y ancho b subdividido en $(m - 1)$ partes, lo que genera $(n - 1)(m - 1)$ rectángulos, con lados $h = \frac{a}{n - 1}$ y $k = \frac{b}{m - 1}$, como indica la Figura.

- 1 La ecuación de ondas y sus condiciones de contorno e iniciales, modelado por la siguiente EDP.

2

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \quad y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad 0 < t <$$

$$C.I. \begin{cases} y(x, 0) = f(x), \\ y_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq a$$

- 3 Se construye una malla formada por un rectángulo cuyo largo es a subdividido en $n - 1$ partes y ancho b subdividido en $(m - 1)$ partes, lo que genera $(n - 1)(m - 1)$ rectángulos, con lados $h = \frac{a}{n - 1}$ y $k = \frac{b}{m - 1}$, como indica la Figura.

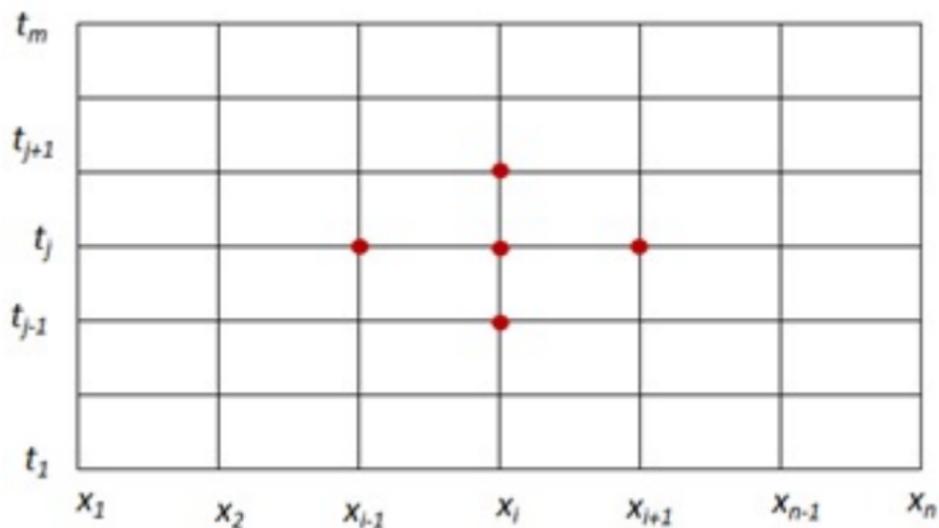


Figure: Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecuación de onda

- 1 El proceso se inicia en la primera fila, en donde la solución viene dado por $y(x_i, t_1) = f(x_i)$. Para determinar las aproximaciones en las filas sucesivas, se aplica la ecuación en diferencias finitas, es decir para cada $j = 2, 3, \dots, m$, se calcula $y_{i,j} \approx y(x_i, t_j)$: con $i = 1, 2, \dots, n$.

2

$$y_{tt}(x, t) = \frac{y(x, t+k) - 2y(x, t) + y(x, t-k)}{k^2}$$

$$y_{xx}(x, t) = \frac{y(x+h, t) - 2y(x, t) + y(x-h, t)}{h^2}$$

Ahora, podemos plantear la ecuación de onda aplicando las aproximaciones.

- 1 El proceso se inicia en la primera fila, en donde la solución viene dado por $y(x_i, t_1) = f(x_i)$. Para determinar las aproximaciones en las filas sucesivas, se aplica la ecuación en diferencias finitas, es decir para cada $j = 2, 3, \dots, m$, se calcula $y_{i,j} \approx y(x_i, t_j)$: con $i = 1, 2, \dots, n$.

2

$$y_{tt}(x, t) = \frac{y(x, t + k) - 2y(x, t) + y(x, t - k)}{k^2}$$

$$y_{xx}(x, t) = \frac{y(x + h, t) - 2y(x, t) + y(x - h, t)}{h^2}$$

Ahora, podemos plantear la ecuación de onda aplicando las aproximaciones.

1

$$\frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h^2}$$

- 2 Se asigna $r^2 = \frac{c^2 k^2}{h^2}$, y ordenando la ecuación planteada para $i = 2, 3, \dots, n - 1$, se consigue

$$y_{i,j+1} = (2 - 2r^2)y_{i,j} + r^2(y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) - y_{i-1,j}$$

- 3 Para garantizar la estabilidad de la ecuación, es necesario $r \leq 1$.

1

$$\frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h^2}$$

- 2 Se asigna $r^2 = \frac{c^2 k^2}{h^2}$, y ordenando la ecuación planteada para $i = 2, 3, \dots, n - 1$, se consigue

$$y_{i,j+1} = (2 - 2r^2)y_{i,j} + r^2(y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) - y_{i-1,j}$$

- 3 Para garantizar la estabilidad de la ecuación, es necesario $r \leq 1$.

1

$$\frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h^2}$$

- 2 Se asigna $r^2 = \frac{c^2 k^2}{h^2}$, y ordenando la ecuación planteada para $i = 2, 3, \dots, n - 1$, se consigue

$$y_{i,j+1} = (2 - 2r^2)y_{i,j} + r^2(y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) - y_{i-1,j}$$

- 3 Para garantizar la estabilidad de la ecuación, es necesario $r \leq 1$.

- 1 Para calcular la tercera fila y las siguientes, se necesita conocer las aproximaciones en los puntos de la primera fila, que viene dada por la función f y de segunda fila, que se determina a través de la segunda condición inicial g . Para ello, se emplea el desarrollo de Taylor que permite llegar a la siguiente aproximación mejorada.

$$y_{i,2} = (1 - r^2)f_i + kg_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} - f_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n - 1$$

- 2 Estas funciones deducidas, son utilizadas para construir el algoritmo que permite determinar las aproximaciones.

- 1 Para calcular la tercera fila y las siguientes, se necesita conocer las aproximaciones en los puntos de la primera fila, que viene dada por la función f y de segunda fila, que se determina a través de la segunda condición inicial g . Para ello, se emplea el desarrollo de Taylor que permite llegar a la siguiente aproximación mejorada.

$$y_{i,2} = (1 - r^2)f_i + kg_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} - f_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n - 1$$

- 2 Estas funciones deducidas, son utilizadas para construir el algoritmo que permite determinar las aproximaciones.

- 1 Con un algoritmo construido en MATLAB, se calcula los errores absoluto y relativo promedio existente entre la solución analítica y la aproximada de la EDP, cuyos resultados son ilustrados en la siguiente tabla.

2

Error/Tiempo	$t = 2.4$	$t = 1.65$	$t = 1.5$	$t = 1.65$
Error máximo absoluto	0.011			
Error mínimo absoluto		0.0010		
Error máximo relativo			0.0328	
Error mínimo relativo				0.0095

Table: Error absoluto y relativo Problema 3.3.1.

- 3 La evolución del error absoluto y relativo promedio, conforme transcurre el tiempo, se representa en la siguiente figura.

- 1 Con un algoritmo construido en MATLAB, se calcula los errores absoluto y relativo promedio existente entre la solución analítica y la aproximada de la EDP, cuyos resultados son ilustrados en la siguiente tabla.

2

Error/Tiempo	$t = 2.4$	$t = 1.65$	$t = 1.5$	$t = 1.65$
Error máximo absoluto	0.011			
Error mínimo absoluto		0.0010		
Error máximo relativo			0.0328	
Error mínimo relativo				0.0095

Table: Error absoluto y relativo Problema 3.3.1.

- 3 La evolución del error absoluto y relativo promedio, conforme transcurre el tiempo, se representa en la siguiente figura.

- 1 Con un algoritmo construido en MATLAB, se calcula los errores absoluto y relativo promedio existente entre la solución analítica y la aproximada de la EDP, cuyos resultados son ilustrados en la siguiente tabla.

2

Error/Tiempo	$t = 2.4$	$t = 1.65$	$t = 1.5$	$t = 1.65$
Error máximo absoluto	0.011			
Error mínimo absoluto		0.0010		
Error máximo relativo			0.0328	
Error mínimo relativo				0.0095

Table: Error absoluto y relativo Problema 3.3.1.

- 3 La evolución del error absoluto y relativo promedio, conforme transcurre el tiempo, se representa en la siguiente figura.

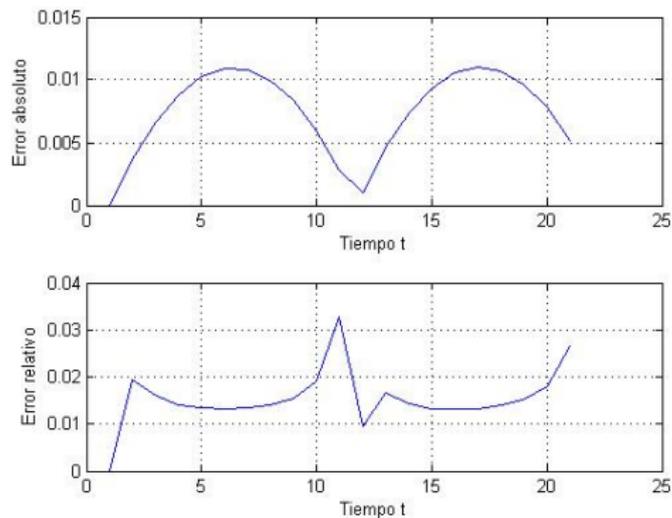


Figure: Evolución del error absoluto y relativo Problema 3.3.1.

- 1 La función temperatura U es analizada en un rectángulo, con las condiciones de contorno siguientes.

2

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

3

$$C.C. \begin{cases} U(0, y) = g_1(y), & 0 < y < H \\ U(L, y) = g_2(y), & 0 < y < H \\ U(x, 0) = f_1(x), & 0 < x < L \\ U(x, H) = f_2(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

- 4 Para determinar la solución general U , se resuelve cada una de las condiciones de contorno no homogéneas con las otras tres condiciones considerando como homogéneas.



- 1 La función temperatura U es analizada en un rectángulo, con las condiciones de contorno siguientes.

2

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

3

$$C.C. \begin{cases} U(0, y) = g_1(y), & 0 < y < H \\ U(L, y) = g_2(y), & 0 < y < H \\ U(x, 0) = f_1(x), & 0 < x < L \\ U(x, H) = f_2(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

- 4 Para determinar la solución general U , se resuelve cada una de las condiciones de contorno no homogéneas con las otras tres condiciones considerando como homogéneas.

- 1 La función temperatura U es analizada en un rectángulo, con las condiciones de contorno siguientes.

2

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

3

$$C.C. \begin{cases} U(0, y) = g_1(y), & 0 < y < H \\ U(L, y) = g_2(y), & 0 < y < H \\ U(x, 0) = f_1(x), & 0 < x < L \\ U(x, H) = f_2(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

- 4 Para determinar la solución general U , se resuelve cada una de las condiciones de contorno no homogéneas con las otras tres condiciones considerando como homogéneas.

- 1 La función temperatura U es analizada en un rectángulo, con las condiciones de contorno siguientes.

2

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

3

$$C.C. \begin{cases} U(0, y) = g_1(y), & 0 < y < H \\ U(L, y) = g_2(y), & 0 < y < H \\ U(x, 0) = f_1(x), & 0 < x < L \\ U(x, H) = f_2(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

- 4 Para determinar la solución general U , se resuelve cada una de las condiciones de contorno no homogéneas con las otras tres condiciones considerando como homogéneas.

- 1 La solución general aplicando el principio de superposición, es

$$U(x, y) = S_1(x, y) + S_2(x, y) + S_3(x, y) + S_4(x, y)$$

- 2 Deducción de las soluciones para U en una placa rectangular: condición de Dirichlet

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L \text{ y } 0 < y < H$$

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$U(x, H) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$U(0, y) = U(L, y) = 0, \quad 0 < y < H$$

- 3 Aplicando el método de separación de variables e igualando a la constante de separación $-\lambda$, se obtiene las EDO's



- 1 La solución general aplicando el principio de superposición, es

$$U(x, y) = S_1(x, y) + S_2(x, y) + S_3(x, y) + S_4(x, y)$$

- 2 **Deducción de las soluciones para U en una placa rectangular: condición de Dirichlet**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L \text{ y } 0 < y < H$$

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$U(x, H) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$U(0, y) = U(L, y) = 0, \quad 0 < y < H$$

- 3 Aplicando el método de separación de variables e igualando a la constante de separación $-\lambda$, se obtiene las EDO's



- 1 La solución general aplicando el principio de superposición, es

$$U(x, y) = S_1(x, y) + S_2(x, y) + S_3(x, y) + S_4(x, y)$$

- 2 **Deducción de las soluciones para U en una placa rectangular: condición de Dirichlet**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L \text{ y } 0 < y < H$$

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$U(x, H) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$U(0, y) = U(L, y) = 0, \quad 0 < y < H$$

- 3 Aplicando el método de separación de variables e igualando a la constante de separación $-\lambda$, se obtiene las EDO's

1

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

2 X viene dada por $X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$. Al reemplazar las condiciones de contorno, se consigue $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ y

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

3 Y viene dado por $Y(y) = c_3 \cosh \sqrt{\lambda}y + c_4 \sinh \sqrt{\lambda}y$. Al reemplazar la condición de contorno y el valor de λ , se obtiene $Y(y) = c_4 \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$, con $n \in \mathbb{N}$. La función solución U , está dada por

1

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

2 X viene dada por $X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$. Al reemplazar las condiciones de contorno, se consigue $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ y $X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, con $n \in \mathbb{N}$

3 Y viene dado por $Y(y) = c_3 \cosh \sqrt{\lambda}y + c_4 \sinh \sqrt{\lambda}y$. Al reemplazar la condición de contorno y el valor de λ , se obtiene $Y(y) = c_4 \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$, con $n \in \mathbb{N}$. La función solución U , está dada por



1

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

- 2 X viene dada por $X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$. Al reemplazar las condiciones de contorno, se consigue $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ y

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

- 3 Y viene dado por $Y(y) = c_3 \cosh \sqrt{\lambda}y + c_4 \sinh \sqrt{\lambda}y$. Al reemplazar la condición de contorno y el valor de λ , se obtiene $Y(y) = c_4 \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$, con $n \in \mathbb{N}$. La función solución U , está dada por



1

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sinh \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \right]$$

2 Ahora, empleando la condición $U(x, H) = f(x)$, se obtiene

$$U(x, H) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sinh \left(\frac{n\pi H}{L} \right) \right]$$

3 El coeficiente B_n , es

$$B_n = \frac{2}{L \sinh \left(\frac{n\pi H}{L} \right)} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

1

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sinh \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \right]$$

2 Ahora, empleando la condición $U(x, H) = f(x)$, se obtiene

$$U(x, H) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sinh \left(\frac{n\pi H}{L} \right) \right]$$

3 El coeficiente B_n , es

$$B_n = \frac{2}{L \sinh \left(\frac{n\pi H}{L} \right)} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

1

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sinh \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \right]$$

2 Ahora, empleando la condición $U(x, H) = f(x)$, se obtiene

$$U(x, H) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sinh \left(\frac{n\pi H}{L} \right) \right]$$

3 El coeficiente B_n , es

$$B_n = \frac{2}{L \sinh \left(\frac{n\pi H}{L} \right)} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

- 1 Encontrar la serie que representa la distribución de temperatura U en una placa rectangular que cumple las siguientes condiciones.

2

$$C.C. \begin{cases} U(x, 0) = U(x, 1) & 0 < x < 1 \\ U(0, y) = 0 & 0 < y < 1 \\ U(1, y) = y(1 - y) & 0 < y < 1 \end{cases}$$

- 3 Reemplazando la información proporcionada en B_n , se encuentra la siguiente integral.

$$B_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 y(1 - y) \sin(n\pi y) dy$$

- 1 Encontrar la serie que representa la distribución de temperatura U en una placa rectangular que cumple las siguientes condiciones.

2

$$C.C. \begin{cases} U(x, 0) = U(x, 1) & 0 < x < 1 \\ U(0, y) = 0 & 0 < y < 1 \\ U(1, y) = y(1 - y) & 0 < y < 1 \end{cases}$$

- 3 Reemplazando la información proporcionada en B_n , se encuentra la siguiente integral.

$$B_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 y(1 - y) \sin(n\pi y) dy$$

- 1 Encontrar la serie que representa la distribución de temperatura U en una placa rectangular que cumple las siguientes condiciones.

2

$$C.C. \begin{cases} U(x, 0) = U(x, 1) & 0 < x < 1 \\ U(0, y) = 0 & 0 < y < 1 \\ U(1, y) = y(1 - y) & 0 < y < 1 \end{cases}$$

- 3 Reemplazando la información proporcionada en B_n , se encuentra la siguiente integral.

$$B_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 y(1 - y) \sin(n\pi y) dy$$

1 Resolviendo dicha integral, se determina el coeficiente B_n .

2

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{8}{\pi^3 n^3 \sin(n\pi)} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La solución está representada por

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8 \sinh[(2n-1)\pi x] \sin[(2n-1)\pi y]}{\pi^3 (2n-1)^3 \sinh[(2n-1)\pi]} \right\}$$

1 Resolviendo dicha integral, se determina el coeficiente B_n .

2

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{8}{\pi^3 n^3 \sin(n\pi)} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La solución está representada por

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8 \sinh[(2n-1)\pi x] \sin[(2n-1)\pi y]}{\pi^3 (2n-1)^3 \sinh[(2n-1)\pi]} \right\}$$

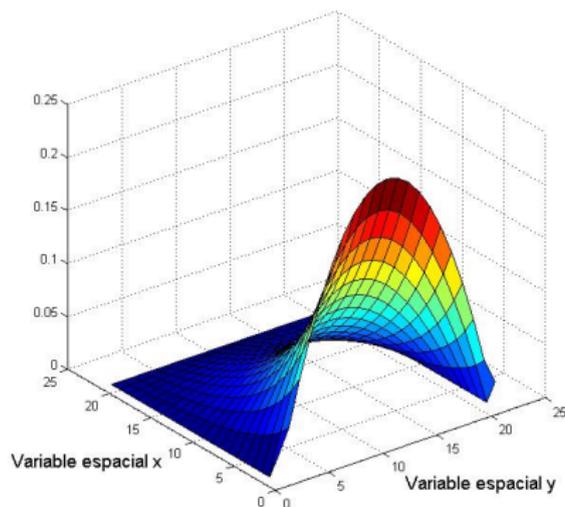


Figure: Gráfico de la función temperatura U



- 1 La ecuación de diferencias finitas a los términos de la ecuación de Laplace, son

$$U_{xx} = \frac{U(x+h, y) + U(x-h, y) - 2U(x, y)}{h^2}$$

$$U_{yy} = \frac{U(x, y+h) + U(x, y-h) - 2U(x, y)}{h^2}$$

- 2 Reemplazando en la ecuación de Laplace, tenemos

$$U_{xx} + U_{yy} = \frac{U(x+h, y) + U(x-h, y) + U(x, y+h) + U(x, y-h) - 4U(x, y)}{h^2}$$

Si formamos un rectángulo con $0 < x < L$, $0 < y < H$ y subdivido en $(n-1)(m-1)$ cuadrados de lado h , con $L = nh$ y $H = mh$, como se muestra en la siguiente figura.



- 1** La ecuación de diferencias finitas a los términos de la ecuación de Laplace, son

$$U_{xx} = \frac{U(x+h, y) + U(x-h, y) - 2U(x, y)}{h^2}$$

$$U_{yy} = \frac{U(x, y+h) + U(x, y-h) - 2U(x, y)}{h^2}$$

- 2** Reemplazando en la ecuación de Laplace, tenemos

$$U_{xx} + U_{yy} = \frac{U(x+h, y) + U(x-h, y) + U(x, y+h) + U(x, y-h) - 4U(x, y)}{h^2}$$

Si formamos un rectángulo con $0 < x < L$, $0 < y < H$ y subdivido en $(n-1)(m-1)$ cuadrados de lado h , con $L = nh$ y $H = mh$, como se muestra en la siguiente figura.



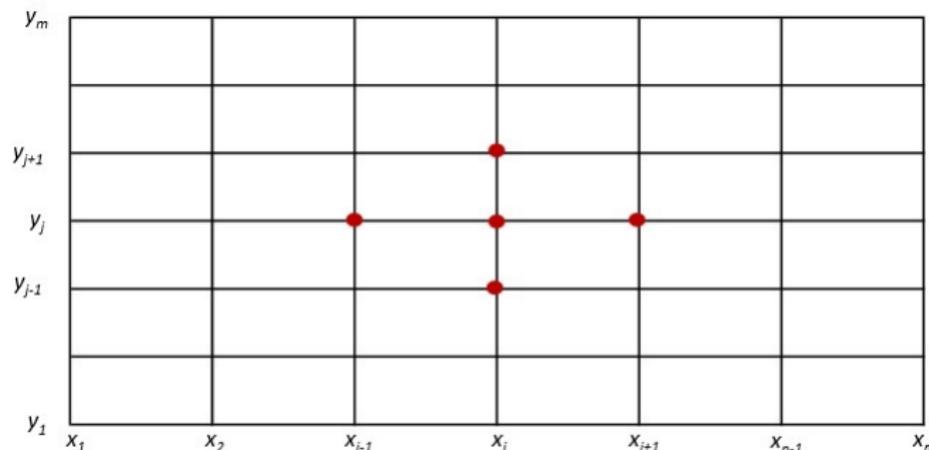


Figure: Puntos utilizados para construir las aproximaciones numéricas en la ecuación de Laplace

- 1 La ecuación de Laplace en diferencias finitas, para $i = 2, 3, \dots, n-1$ y $j = 2, 3, \dots, m-1$, viene dada por la siguiente expresión

$$\frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} = 0$$

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

- 2 Las condiciones de contorno planteadas, son

$$u(x_1, y_j) = u_{1,j} \quad 2 \leq j \leq m-1$$

$$u(x_i, y_1) = u_{i,1} \quad 2 \leq i \leq n-1$$

$$u(x_n, y_j) = u_{n,j} \quad 2 \leq j \leq m-1$$

$$u(x_i, y_m) = u_{i,m} \quad 2 \leq i \leq n-1$$

- 1** La ecuación de Laplace en diferencias finitas, para $i = 2, 3, \dots, n-1$ y $j = 2, 3, \dots, m-1$, viene dada por la siguiente expresión

$$\frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} = 0$$

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

- 2** Las condiciones de contorno planteadas, son

$$u(x_1, y_j) = u_{1,j} \quad 2 \leq j \leq m-1$$

$$u(x_i, y_1) = u_{i,1} \quad 2 \leq i \leq n-1$$

$$u(x_n, y_j) = u_{n,j} \quad 2 \leq j \leq m-1$$

$$u(x_i, y_m) = u_{i,m} \quad 2 \leq i \leq n-1$$

- 1 Al aplicar la ecuación deducida a cada uno de los puntos de la malla, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$U_{3,2} + U_{1,2} + U_{2,3} + U_{2,1} - 4U_{2,2} = 0$$

$$U_{4,2} + U_{2,2} + U_{3,3} + U_{3,1} - 4U_{3,2} = 0$$

$$U_{5,2} + U_{3,2} + U_{4,3} + U_{4,1} - 4U_{4,2} = 0$$

$$U_{3,3} + U_{1,3} + U_{2,4} + U_{2,2} - 4U_{2,3} = 0$$

$$U_{4,3} + U_{2,3} + U_{3,4} + U_{3,2} - 4U_{3,3} = 0$$

$$U_{5,3} + U_{3,3} + U_{4,4} + U_{4,2} - 4U_{4,3} = 0$$

$$U_{3,4} + U_{1,4} + U_{2,5} + U_{2,3} - 4U_{2,4} = 0$$

$$U_{4,4} + U_{2,4} + U_{3,5} + U_{3,3} - 4U_{3,4} = 0$$

$$U_{5,4} + U_{3,4} + U_{4,5} + U_{4,3} - 4U_{4,4} = 0$$

- 1 Expresado como matrices, obtenemos el sistema diagonal por bloques.

$$\begin{array}{c} 2 \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} U_{2,2} \\ U_{3,2} \\ U_{4,2} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \\ U_{4,3} \\ U_{2,4} \\ U_{3,4} \\ U_{4,4} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -2U_{2,1} - U_{1,2} \\ -U_{3,1} \\ -U_{4,1} - U_{5,1} \\ -U_{1,3} \\ 0 \\ -U_{5,3} \\ -U_{2,5} - U_{1,4} \\ -U_{3,5} \\ -U_{4,5} - U_{5,4} \end{array} \right] \end{array}$$

- 1 Expresado como matrices, obtenemos el sistema diagonal por bloques.

$$\begin{array}{c} \mathbf{2} \end{array}
 \begin{bmatrix}
 -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_{2,2} \\
 U_{3,2} \\
 U_{4,2} \\
 U_{2,3} \\
 U_{3,3} \\
 U_{4,3} \\
 U_{2,4} \\
 U_{3,4} \\
 U_{4,4}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -2U_{2,1} - U_{1,2} \\
 -U_{3,1} \\
 -U_{4,1} - U_{5,1} \\
 -U_{1,3} \\
 0 \\
 -U_{5,3} \\
 -U_{2,5} - U_{1,4} \\
 -U_{3,5} \\
 -U_{4,5} - U_{5,4}
 \end{bmatrix}$$

- 1** Con un algoritmo construido en MATLAB, se calcula los errores absoluto y relativo promedio existente entre la solución analítica y la aproximada de la EDP, cuyos resultados son ilustrados en la siguiente tabla.

2

Error/Variable espacial y	$y = 0.75$	$0.05 \leq y \leq 0.10$
Error máximo absoluto	$0.1181 \cdot 10^{-4}$	
Error máximo relativo		0.0040

Table: Error absoluto y relativo Problema 4.3.2.

La evolución del error absoluto y relativo promedio, se representa en la siguiente figura.

- 1 Con un algoritmo construido en MATLAB, se calcula los errores absoluto y relativo promedio existente entre la solución analítica y la aproximada de la EDP, cuyos resultados son ilustrados en la siguiente tabla.

2

Error/Variable espacial y	$y = 0.75$	$0.05 \leq y \leq 0.10$
Error máximo absoluto	$0.1181 \cdot 10^{-4}$	
Error máximo relativo		0.0040

Table: Error absoluto y relativo Problema 4.3.2.

La evolución del error absoluto y relativo promedio, se representa en la siguiente figura.

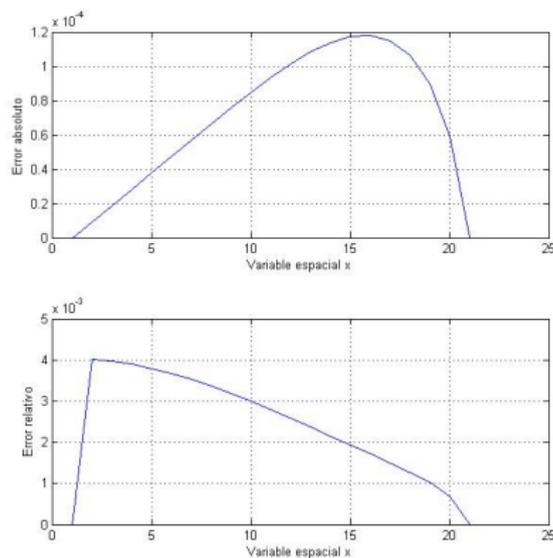


Figure: Evolución del error absoluto y relativo Problema 4.3.2. ▶

- 1 El método analítico más utilizado para resolver EDP's es el método de separación de variables. Permite encontrar las soluciones generales y particulares. Si se trata de casos no homogéneos, se resuelve como homogéneo y se suma una solución particular no homogénea.
- 2 La gran mayoría de las EDP's son posibles de resolver por aproximaciones numéricas, aún aquellas que no tienen solución analítica. El método de diferencias finitas logra resolver reemplazando las funciones que tienen derivadas por las fórmulas deducidas, transformando un problema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones.

- 1 El método analítico más utilizado para resolver EDP's es el método de separación de variables. Permite encontrar las soluciones generales y particulares. Si se trata de casos no homogéneos, se resuelve como homogéneo y se suma una solución particular no homogénea.
- 2 La gran mayoría de las EDP's son posibles de resolver por aproximaciones numéricas, aún aquellas que no tienen solución analítica. El método de diferencias finitas logra resolver reemplazando las funciones que tienen derivadas por las fórmulas deducidas, transformando un problema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones.

- 1 El método aproximado por diferencias finitas, se constituye en un método alternativo de solución y de comprobación para las soluciones de las EDP's.
- 2 El cuadro 5.1 resume los errores absolutos y relativos promedios encontrados al comparar las soluciones analíticas con las aproximadas, en donde se precisa lo siguiente:

Problema/Errores	Error abs. máx.	Error abs. mín.	Error rel. máx.	Error rel. mín.
Problema 251	0.0130	0.0003	0.033	0.0014
Problema 252	0.0840	0.0000	↗	0.0000
Problema 254	0.1061	0.0000	0.1038	0.0004
Problema 331	0.0110	0.0010	0.0328	0.0095
Problema 332	0.0230	0.0006	0.9450	0.0072
Problema 431	0.00043	0.0000	0.0040	0.0000
Problema 432	0.000012	0.0000	0.0040	0.0000

Table: Resumen de errores absolutos y relativos

- 1 El método aproximado por diferencias finitas, se constituye en un método alternativo de solución y de comprobación para las soluciones de las EDP's.
- 2 El cuadro 5.1 resume los errores absolutos y relativos promedios encontrados al comparar las soluciones analíticas con las aproximadas, en donde se precisa lo siguiente:

Problema/Errores	Error abs. máx.	Error abs. mín.	Error rel. máx.	Error rel. mín.
Problema 251	0.0130	0.0003	0.033	0.0014
Problema 252	0.0840	0.0000	↗	0.0000
Problema 254	0.1061	0.0000	0.1038	0.0004
Problema 331	0.0110	0.0010	0.0328	0.0095
Problema 332	0.0230	0.0006	0.9450	0.0072
Problema 431	0.00043	0.0000	0.0040	0.0000
Problema 432	0.000012	0.0000	0.0040	0.0000

Table: Resumen de errores absolutos y relativos

- 1 El error promedio absoluto máximo en los problemas analizados es de 0.1061; el mínimo es cero, pues existen tiempos o posiciones en que las soluciones coinciden.
- 2 El error promedio relativo máximo es de 0.1038; el mínimo es 0.
- 3 Los errores obtenidos al comparar entre las soluciones analíticas y aproximadas se pueden considerar dentro de un margen de error aceptable, por lo que los métodos numéricos propuestos son altamente confiables.

- 1 El error promedio absoluto máximo en los problemas analizados es de 0.1061; el mínimo es cero, pues existen tiempos o posiciones en que las soluciones coinciden.
- 2 El error promedio relativo máximo es de 0.1038; el mínimo es 0.
- 3 Los errores obtenidos al comparar entre las soluciones analíticas y aproximadas se pueden considerar dentro de un margen de error aceptable, por lo que los métodos numéricos propuestos son altamente confiables.

- 1 El error promedio absoluto máximo en los problemas analizados es de 0.1061; el mínimo es cero, pues existen tiempos o posiciones en que las soluciones coinciden.
- 2 El error promedio relativo máximo es de 0.1038; el mínimo es 0.
- 3 Los errores obtenidos al comparar entre las soluciones analíticas y aproximadas se pueden considerar dentro de un margen de error aceptable, por lo que los métodos numéricos propuestos son altamente confiables.

- 1 El cálculo de las soluciones aproximadas a través de los diferentes métodos planteados en los problemas resueltos son estables, éstas no dependen del número de nodos o de intervalos que subdividimos a las variables, con excepción de las hiperbólicas en las que $r \leq 1$.
- 2 Para resolver EDP's por el método de diferencias finitas se reemplaza por sus respectivas fórmulas, cuyo orden de aproximación es de $O(h)$ o $O(h^2)$, lo que permite construir un sistema tridiagonal simple o por bloques y con él elaborar el algoritmo que calcula las soluciones aproximadas.

- 1 El cálculo de las soluciones aproximadas a través de los diferentes métodos planteados en los problemas resueltos son estables, éstas no dependen del número de nodos o de intervalos que subdividimos a las variables, con excepción de las hiperbólicas en las que $r \leq 1$.
- 2 Para resolver EDP's por el método de diferencias finitas se reemplaza por sus respectivas fórmulas, cuyo orden de aproximación es de $O(h)$ o $O(h^2)$, lo que permite construir un sistema tridiagonal simple o por bloques y con él elaborar el algoritmo que calcula las soluciones aproximadas.

Muchas Gracias