



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y
MECÁNICA**

CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO**

**TEMA: MODELAMIENTO MATEMÁTICO POR EL MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS DEL COMPORTAMIENTO DE UN
PÓRTICO CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO Y
CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO A ESCALA**

AUTOR:

Paredes Gordillo Marco Antonio

DIRECTOR:

Ing. Olmedo Salazar José Fernando

SANGOLQUÍ - ECUADOR

2017



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

ii

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA Y MECÁNICA**

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación, "MODELAMIENTO MATEMÁTICO POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DEL COMPORTAMIENTO DE UN PÓRTICO CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO A ESCALA" realizado por el señor MARCO ANTONIO PAREDES GORDILLO, ha sido revisado en su totalidad y analizado por el software anti-plagio, el mismo cumple con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, por lo tanto me permito acreditarlo y autorizar al señor MARCO ANTONIO PAREDES GORDILLO para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 15 de mayo del 2017

ING. JOSÉ FERNANDO OLMEDO SALAZAR
DIRECTOR



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA Y MECÁNICA**

AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD

Yo, MARCO ANTONIO PAREDES GORDILLO, con cédula de identidad N°1724925589, declaro que este trabajo de titulación "MODELAMIENTO MATEMÁTICO POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DEL COMPORTAMIENTO DE UN PÓRTICO CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO A ESCALA" ha sido desarrollado considerando los métodos de investigación existentes, así como también se ha respetado los derechos intelectuales de terceros considerándose en las citas bibliográficas.

Consecuentemente declaro que este trabajo es de mi autoría, en virtud de ello me declaro responsable del contenido, veracidad y alcance de la investigación mencionada.

Sangolquí, 15 de mayo del 2017

A handwritten signature in blue ink, which appears to read 'Marco Paredes', is written over a horizontal dashed line.

Sr. MARCO ANTONIO PAREDES GORDILLO

CI: 1724925589



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

iv

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA Y MECÁNICA**

AUTORIZACIÓN

Yo, MARCO ANTONIO PAREDES GORDILLO, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar en la biblioteca Virtual de la institución el presente trabajo de titulación "MODELAMIENTO MATEMÁTICO POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DEL COMPORTAMIENTO DE UN PÓRTICO CON AMORTIGUAMIENTO VISCOZO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO A ESCALA" cuyo contenido, ideas y criterios son de mi autoría y responsabilidad.

Sangolquí, 15 de mayo del 2017

Sr. MARCO ANTONIO PAREDES GORDILLO

CI: 1724925589

DEDICATORIA

A mi madre Irene, la persona más importante en mi vida, la que siempre ha estado conmigo de forma incondicional siendo el motor que me da la fuerza para seguir adelante y cumplir mis metas a pesar de cualquier adversidad. A mi padre Ramón y a mi abuelo José, quienes me hacen mucha falta, pero sé que desde el cielo me acompañan. A mis hermanos Cristian y Verónica que con sus consejos y enseñanzas buscan cada día hacer de mí una mejor persona. A mi abuelita María muy querida con todas sus virtudes; y finalmente a esas personitas tan especiales que están en lo profundo de mi alma, que forman parte de mi vida y por quienes espero luchar de aquí en adelante.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, quiero agradecer a Dios, el amigo y padre creador por darme la oportunidad de vivir. A mi familia quienes me motivan, me ayudan y han sido parte de toda mi etapa estudiantil. A mis amigos y personas allegadas que de una u otra manera estuvieron presentes a lo largo de este camino. También quiero agradecer a mi director de proyecto, el Ing. Fernando Olmedo quien me ha acompañado y guiado con sus enseñanzas durante el proceso y desarrollo del presente trabajo.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CARÁTULA	
CERTIFICADO	ii
AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD	iii
AUTORIZACIÓN	iv
DEDICATORIA	v
AGRADECIMIENTO	vi
ÍNDICE DE CONTENIDO	vii
ÍNDICE DE FIGURAS	xi
RESUMEN	xvii
ABSTRACT	xviii
CAPÍTULO I	
GENERALIDADES	
1.1. Antecedentes	1
1.2. Definición del problema	3
1.3. Justificación e importancia	3
1.4. Objetivos	4
1.4.1. Objetivo general	4
1.4.2. Objetivos específicos	5
1.5. Alcance	5
CAPÍTULO II	
MARCO TEÓRICO	
2.1. Fundamentos de las vibraciones	6
2.1.1. Vibración	8
2.1.2. Tipos de vibraciones	10
2.1.2.1. Vibraciones libres	10
2.1.2.2. Vibraciones forzadas	10
2.2. Sistemas de amortiguamiento en estructuras	11
2.2.1. Tipos de sistemas de amortiguamiento utilizados en estructuras ..	13

	viii
2.3. Sistemas de amortiguamiento viscoso	17
2.3.1. Tipos de amortiguadores viscosos.....	18
2.3.1.1. Amortiguador viscoso de Taylor.....	18
2.3.1.2. Amortiguador tipo HIDAM	19
2.3.1.3. Amortiguador Viscoelástico.....	19
2.3.1.4. Amortiguador Save	20
2.4. Método de los elementos finitos aplicado al análisis vibratorio	20
2.5. Aplicación de la segunda ley de newton para obtener la ecuación diferencial de movimiento	23

CAPÍTULO III

MODELAMIENTO MATEMÁTICO

3.1. Grados de libertad en un pórtico plano.....	27
3.2. Transformación de coordenadas	28
3.2.1. Matriz de transformación para un elemento de pórtico	31
3.3. Ensamble de matrices	32
3.4. Planteamiento de matrices	33
3.4.1. Matriz de masa	33
3.4.2. Matriz de rigidez.....	38
3.4.3. Matriz de amortiguación.....	41
3.5. Modelamiento matemático del pórtico	43
3.5.1. Características de pórtico a estudiar.....	43
3.5.2. Discretización del pórtico	43
3.5.3. Elemento de amortiguación	45
3.5.3.1. Obtención del coeficiente de amortiguamiento (c)	45
3.6. Obtención de las matrices por el MEF	49
3.6.1. Matriz de masa	49
3.6.2. Matriz de rigidez.....	52
3.6.3. Matriz de amortiguamiento	56

CAPÍTULO IV

SOLUCIÓN DEL SISTEMA, ANÁLISIS Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Método de Cranck-Nicolson (o Trapezoidal)	60
4.1.1. Aplicación del método de Cranck Nicolson al sistema a resolver ..	61
4.1.2. Implementación del código en Matlab.....	65
4.2. Solución al sistema de ecuaciones	66
4.2.1. Solución de sistemas en vibración libre - Fuerza Impulso	66
4.2.1.1. Sistema sin amortiguamiento.....	67
4.2.1.2. Sistema con amortiguamiento viscoso.....	71
4.2.1.3. Análisis	75
4.2.2. Solución de sistemas en vibración forzada – Fuerza Armónica.....	76
4.2.2.1. Sistema sin amortiguamiento.....	76
4.2.2.2. Sistema con amortiguamiento viscoso.....	80
4.2.2.3. Análisis	84
4.3. Simulación en software de elementos finitos.....	85
4.3.1. Simulación del pórtico en vibración libre - Fuerza impulso	85
4.3.1.1. Sistema sin amortiguamiento.....	85
4.3.1.2. Sistema con amortiguamiento viscoso.....	89
4.3.2. Simulación del pórtico en vibración Forzada – Fuerza armónica... ..	93
4.3.2.1. Sistema sin amortiguamiento.....	93
4.3.2.2. Sistema con amortiguamiento viscoso.....	97
4.4. Validación.....	101
4.4.1. Vibración libre	101
4.4.1.1. Sistema sin amortiguamiento.....	101
4.4.1.2. Sistema con amortiguamiento viscoso.....	102
4.4.2. Vibración Forzada.....	102
4.4.2.1. Sistema sin amortiguamiento.....	103
4.4.2.2. Sistema con amortiguamiento viscoso.....	103

CAPÍTULO V

CONSTRUCCIÓN DEL PROTOTIPO A ESCALA

5.1. Mecanismo para la generación de movimiento	105
---	-----

	x
5.2. Fabricación de la mesa de Vibración	107
5.2.1. Mecanismo.....	107
5.2.1.1. Diagrama Cinemático del mecanismo	114
5.2.2. Bastidor.....	114
5.2.3. Fuente variable	119
5.2.4. Base para empotramiento de los pórticos.....	119
5.2.5. Montaje	120
5.3. Fabricación del pórtico a escala	121
5.3.1. Características	122
5.3.2. Proceso de ensamble	122
5.3.3. Amortiguador	123
5.3.3.1. Montaje	124
5.4. Instrumentación al prototipo	125
5.4.1. Instrumentación para adquisición de datos.....	125
5.4.2. Interfaz gráfica	128
5.4.2.1. Programación de una GUIDE en MATLAB	128
5.4.2.2. Interfaz gráfica de ARDUINO.....	129
5.4.2.3. Graficación en EXCEL.....	130
5.4.3. Montaje	131
5.5. Pruebas de funcionamiento.....	132
5.5.1. Resultados.....	133
5.5.2. Análisis	136

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. Conclusiones.....	137
6.2. Recomendaciones.....	139
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	141

ANEXOS

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Ejemplo de estudios vibracionales, realizados por la empresa PREDITEC E IK4-TEKNIKER (Fuente: tekniker.es, 2017)	6
Figura 2 Fotografía del colapso del puente Tacoma Narrows producido por las vibraciones inducidas por el viento (Fuente: Rao, 2012).....	8
Figura 3 Ejemplo de un sistema vibratorio – Péndulo simple	8
Figura 4 Representación de las variables inmersas en un sistema vibratorio (Fuente: Legrá & Quiza, 2012)	9
Figura 5 Amortiguamiento en estructuras y edificaciones.....	12
Figura 6 Clasificación de los sistemas de reducción de vibraciones.....	14
Figura 7 Disipadores histeréticos (Fuente: Oviedo & Duque, 2006)	15
Figura 8 Amortiguador viscoso utilizado en estructuras.....	16
Figura 9 Amortiguador de masa sintonizada	16
Figura 10 Esquema de un amortiguador viscoso.....	17
Figura 11 Configuraciones del amortiguador viscoso de Taylor en una estructura (Fuente: Gatica, 2012)	18
Figura 12 Amortiguador tipo HIDAM (Fuente: Gatica, 2012)	19
Figura 13 Amortiguador viscoelástico (Fuente: Oviedo & Duque, 2006)	20
Figura 14 Amortiguador tipo Save (Fuente: Oviedo & Duque, 2006).....	20
Figura 15 Representación del método de los elementos finitos.....	21
Figura 16 Diagrama de fuerzas que actúan en un pórtico	23
Figura 17 Componentes dinámicos del sistema	25
Figura 18 Grados de libertad en un pórtico plano (Fuente: Creación propia)	28
Figura 19 Grados de libertad en un elemento de pórtico	28
Figura 20 Representación de un elemento de barra en coordenadas locales y globales (Fuente: Rao, 2012).....	29
Figura 21 Representación de un elemento en coordenadas locales y globales (Fuente: Creación propia)	30
Figura 22 Representación de un elemento de pórtico en coordenadas locales y globales (Fuente: Creación propia)	31
Figura 23 Elemento de barra uniforme (Fuente: Rao, 2012)	34

	xii
Figura 24 Elemento de viga uniforme (Fuente: Rao, 2012)	36
Figura 25 Diagrama de la orientación de amortiguamiento	41
Figura 26 Dimensiones del pórtico a estudiar (Fuente: Creación propia)	43
Figura 27 Área transversal de cada elemento del pórtico.....	43
Figura 28 Esquema de discretización - Pórtico sin amortiguamiento.....	44
Figura 29 Esquema de discretización – Pórtico con amortiguamiento.....	44
Figura 30 Elemento de amortiguación	45
Figura 31 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo	68
Figura 32 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo	69
Figura 33 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo	69
Figura 34 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo	70
Figura 35 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo	70
Figura 36 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo	71
Figura 37 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo	72
Figura 38 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo	73
Figura 39 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo	73
Figura 40 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo	74
Figura 41 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo	74
Figura 42 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo	75
Figura 43 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo	77
Figura 44 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo	78
Figura 45 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo	78

Figura 46 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo	79
Figura 47 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo	79
Figura 48 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo	80
Figura 49 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo	81
Figura 50 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo	82
Figura 51 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo	82
Figura 52 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo	83
Figura 53 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo	83
Figura 54 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo	84
Figura 55 Menú de graficación Nodo 2	85
Figura 56 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X"(m) en función del tiempo (s).....	86
Figura 57 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s).....	86
Figura 58 Solución del análisis Transient - Rotación (Rad) en función del tiempo (s).....	87
Figura 59 Menú de graficación Nodo 3	87
Figura 60 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s).....	88
Figura 61 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s).....	88
Figura 62 Solución del análisis Transient - Rotación (Rad) en función del tiempo (s).....	89
Figura 63 Menú de graficación Nodo 2	89
Figura 64 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s).....	90

Figura 65 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s).....	90
Figura 66 Solución del análisis Transient - Rotación (Rad) en función del tiempo (s).....	91
Figura 67 Menú de graficación Nodo 3	91
Figura 68 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s).....	92
Figura 69 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s).....	92
Figura 70 Solución del análisis Transient - Rotación (Rad) en función del tiempo (s).....	93
Figura 71 Menú de graficación Nodo 2	93
Figura 72 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s).....	94
Figura 73 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s).....	94
Figura 74 Solución del análisis Transient - Rotación (Rad) en función del tiempo (s).....	95
Figura 75 Menú de graficación Nodo 3	95
Figura 76 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s).....	96
Figura 77 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s).....	96
Figura 78 Solución del análisis Transient - Rotación (Rad) en función del tiempo (s).....	97
Figura 79 Menú de graficación Nodo 2	97
Figura 80 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s).....	98
Figura 81 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s).....	98
Figura 82 Solución del análisis Transient - Rotación (Rad) en función del tiempo (s).....	99
Figura 83 Menú de graficación Nodo 3	99

Figura 84 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s).....	100
Figura 85 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s).....	100
Figura 86 Solución del análisis Transient - Rotación (Rad) en función del tiempo (s).....	101
Figura 87 Validación de resultados- Solución Nodo 3:	101
Figura 88 Validación de resultados- Solución Nodo 3:	102
Figura 89 Validación de resultados- Solución Nodo 3:	103
Figura 90 Validación de resultados- Solución Nodo 3:	103
Figura 91 Mecanismo manivela - corredera (Fuente: ebah.com, s.f.).....	106
Figura 92 Esquema alternativo de construcción (Fuente: Creación propia)	107
Figura 93 Guías de acero inoxidable	108
Figura 94 Marco metálico	108
Figura 95 Sistema para el deslizamiento de la corredera	109
Figura 96 Montaje del sistema de deslizamiento	109
Figura 97 Moto-reductor adquirido.....	111
Figura 98 Conjunto motor - discos	112
Figura 99 Disco con la excéntrica que cumple la función de manivela	112
Figura 100 Barra de unión	112
Figura 101 Elementos de acople ubicados en los extremos de la barra....	113
Figura 102 Mecanismo para la generación del movimiento en la mesa de vibración.....	113
Figura 103 Nomenclatura de elementos	114
Figura 104 Diagrama cinemático	114
Figura 105 Madera utilizada como bastidor	115
Figura 106 Sistema para acoplamiento del motor al bastidor	115
Figura 107 Fabricación de las patas para el bastidor	116
Figura 108 Elaboración de compartimentos en el bastidor	117
Figura 109 Elementos para sujeción de guías.....	117
Figura 110 Montaje de los elementos de sujeción	118
Figura 111 Acabados finales del bastidor	118

	xvi
Figura 112 Fuente variable	119
Figura 113 Base con las adecuaciones para los empotramientos	120
Figura 114 Fase 1 de ensamble de la mesa de vibración.....	120
Figura 115 Fase 2 de ensamble de la mesa de vibración.....	121
Figura 116 Mesa de vibración ensamblada	121
Figura 117 Pórtico a escala	122
Figura 118 Juntas de unión para los elementos del pórtico.....	123
Figura 119 Pórticos ensamblados.....	123
Figura 120 Amortiguador viscoso adquirido.....	123
Figura 121 Elementos de acople en los extremos del amortiguador	124
Figura 122 Montaje del amortiguador en el pórtico.....	125
Figura 123 Ensamble del pórtico amortiguado	125
Figura 124 Módulo MPU – 6050	126
Figura 125 Tarjeta de adquisición de datos - ARDUINO MEGA.....	126
Figura 126 Esquema de conexión Modulo-Tarjeta	127
Figura 127 Interfaz gráfica en MATLAB.....	129
Figura 128 Interfaz gráfica en ARDUINO.....	130
Figura 129 Compilador de datos "RS232 Data Logger"	130
Figura 130 Interfaz gráfica en EXCEL	131
Figura 131 Conexión empernada para el montaje del modulo	131
Figura 132 Montaje de instrumentación en el prototipo	132
Figura 133 Ubicación del módulo en el nodo 2 - Pórtico sin amortiguamiento	133
Figura 134 Gráfica obtenida del ensayo – Nodo 2.....	133
Figura 135 Ubicación del módulo en el nodo 2 - Pórtico con amortiguamiento	134
Figura 136 Gráfica obtenida del ensayo – Nodo 2.....	134
Figura 137 Ubicación del módulo en el nodo 3 - Pórtico sin amortiguamiento	134
Figura 138 Gráfica obtenida del ensayo – Nodo 3.....	135
Figura 139 Ubicación del módulo en el nodo 3 - Pórtico con amortiguamiento	135
Figura 140 Gráfica obtenida del ensayo – Nodo 3.....	135

RESUMEN

El método de los elementos finitos es aplicado en varios campos de la industria como el diseño estructural, en el que por medio de análisis se busca obtener la mayor cantidad de información que permita mejorar y optimizar las características de las estructuras y con esto evitar cualquier riesgo de falla. En el presente proyecto se modela matemáticamente el comportamiento de un pórtico con amortiguamiento viscoso a través del método de los elementos finitos enfocado al análisis vibracional planteado mediante la ecuación dinámica que define el movimiento del sistema. En la primera parte aplicando el método de elementos finitos, se formula y obtienen las distintas matrices que representan los elementos de masa, rigidez y amortiguación, presentes en la ecuación vibracional, en la que dependiendo del tipo de movimiento analizado se varían los términos de amortiguación y fuerza externa. La resolución del sistema de ecuaciones se la realiza con el uso de métodos numéricos que proporcionan las soluciones gráficas que caracterizan el movimiento del pórtico analizado bajo distintas condiciones. Esto permite establecer el aporte que brinda el amortiguador configurado como un elemento de la estructura. Los resultados son validados con los que se tienen al realizar la simulación en un software de elementos finitos, adquiriendo un juicio de veracidad sobre la modelación implementada. Finalmente, se construye un prototipo a escala en el cual, mediante instrumentación se obtienen las gráficas del movimiento vibracional, generado por la acción de las fuerzas inducidas mediante una mesa de vibración previamente fabricada.

PÓRTICO

AMORTIGUAMIENTO

MODELACIÓN

VIBRACIONAL

PROTOTIPO

ABSTRACT

The finite element method is applied in several fields of industry such as structural design, in which through of analysis seeks to obtain the greatest amount of information to improve and optimize the characteristics of the structures, and with this to avoid any Risk of failure. In the present project, is modeled mathematically the behavior of a frame with viscous damping through the finite element method focused to the vibrational analysis raised by the dynamic equation that defines the movement of the system. In the first part, applying the finite element method, is formulate and obtain the different matrices that represent the elements of mass, rigidity and damping, present in the vibrational equation, in which depending on the type of movement analyzed, is varied the terms of damping and external force . The resolution of the system of equations is done using numerical methods that provide the graphic solutions that characterize the movement of the analyzed frame under different conditions. This allows to establish the contribution provided by the damper configured as an element of the structure. The results are validated with those that obtain when performing the simulation in a finite element software, acquiring a veracity judgment about the implemented modeling. Finally, Is built a prototype to scale, in which by means of instrumentation, the graphs of the vibrational movement are obtained, generated by the action of the forces induced by a previously manufactured vibration table.

FRAME

DAMPING

MODELING

VIBRATIONAL

PROTOTYPE

CAPÍTULO I

GENERALIDADES

1.1. Antecedentes

En el desarrollo de las civilizaciones a través de la historia, se han dado diferentes sucesos muchas de las veces con consecuencias negativas, debido a la falla o al colapso de los diferentes sistemas que el ser humano ha creado para auto brindarse una ayuda en fin de conseguir un mejor estilo de vida y facilitar las cosas. Al hablar de sistemas se hace referencia a las maquinarias, construcciones, edificaciones, elementos mecánicos, medios de transporte, etc. implementados en los distintos campos.

Estos sistemas y en especial las estructuras sobre las que se crean las edificaciones, se han visto expuestas a la aplicación de fuerzas tanto estáticas como dinámicas, propias del medio al que se exponen. Estas fuerzas, tienen distintas características y formas de actuar sobre una estructura, es por esto que se busca estudiar este tipo de fenómenos con el objetivo de minimizar los efectos que puedan causar y a su vez optimizar el desarrollo de los sistemas.

Los estudios que se realizan plantean la formulación de ecuaciones matemáticas que modelan el comportamiento de las estructuras y permiten realizar análisis a partir de los resultados obtenidos. Bajo esta óptica se crearon los diferentes métodos que ayudan a cumplir estos objetivos, como es el caso del método de los elementos finitos propuesto hace varias décadas que con el pasar de los años y los aportes de muchos autores se lo ha adaptado para hoy en día ser uno de los más utilizados en el análisis estructural.

En la actualidad el método de los elementos finitos se usa en los diseños para caracterizar el comportamiento de los sistemas en estudio, es decir obtener información importante acerca de esfuerzos, desplazamientos, vibraciones, y demás variables que interactúan en dicho sistema, permitiendo mejorar sus características y a su vez evitando que falle de manera irreversible.

A continuación, se presentan algunos de los trabajos realizados que tienen relación al tema propuesto:

Fernanda M. Candanedo y Carlos E. Miranda pertenecientes a la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Tecnológica de Panamá desarrollaron en 2015 una investigación titulada: “Diseño de estructuras con sistema de amortiguamiento viscoso lineal”; este trabajo investigativo se lo analiza bajo la perspectiva del uso de herramientas computacionales en el cual se examina un edificio de concreto reforzado de seis pisos con un sistema estructural a base de pórticos de momento especiales, diseñado con una resistencia a cortante V . Luego se propone una estructura con resistencia reducida a cortante de $0.75V$, a la cual se le incorpora un sistema de amortiguadores viscosos lineales. Los análisis estructurales, para establecer las propiedades dinámicas de los modelos, han sido llevados a cabo a partir de un modelo tridimensional de la estructura, utilizando el programa SAP-2000 V15.0. Ambos modelos son dimensionados y diseñados para satisfacer el mismo nivel de desempeño, donde finalmente se compara el costo del sistema lateral de ambos modelos.

En la Universidad de las fuerzas armadas Diego Calero y David Salazar, desarrollaron en 2008 el trabajo titulado: “Análisis y simulación del comportamiento mecánico de un amortiguador telescópico hidráulico como elemento de un pórtico sometido a cargas sísmicas”; este estudio se enfatiza al análisis del amortiguador del tipo telescópico hidráulico, donde se caracteriza su comportamiento mecánico y se determinan las propiedades que presenta, para luego analizarlo como elemento de un pórtico expuesto a cargas sísmicas que mediante el uso del software SAP 2000, se realizó la simulación respectiva obteniendo resultados para el posterior análisis.

Aclarando un poco en cuanto a este trabajo, se puede decir que no posee un análisis matemático con ecuaciones numéricas que validen el comportamiento del pórtico amortiguado, esto puede ser debido a que en la época cuando se desarrolló esta investigación, en la carrera aún no se profundizaba en el campo de los elementos finitos, que es el adecuado para brindar la parte de la sustentación y el modelamiento matemático al estudio del pórtico, esenciales para obtener mayor información acerca del sistema, que es lo que se pretende realizar.

1.2. Definición del problema

La modelación matemática de estructuras no es tomada muy en cuenta como una herramienta de análisis debido a que con la ayuda de la tecnología lo que se hace es simulaciones por software que permiten realizar estas tareas, pero que no permiten visualizar el sustento matemático sobre el que se basa el estudio, mismo que siempre será importante desarrollarlo para tener ecuaciones que fundamenten el comportamiento de una estructura y proporcionen información que sea de ayuda para cualquier análisis.

El amortiguamiento viscoso como elemento en un pórtico, se puede decir que es uno de los sistemas al que no se le ha prestado la atención debida en cuanto a la búsqueda de un modelo matemático que caracterice el sistema e incluya el aporte que brinda el amortiguador a través de la constante "c" incluida en la ecuación dinámica correspondiente, como el elemento que disminuye el efecto de las vibraciones sobre el sistema.

En base a esto se puede plantear la siguiente hipótesis: La obtención de ecuaciones matemáticas por el método de elementos finitos, es capaz de modelar el comportamiento de un pórtico con amortiguamiento viscoso de manera acertada, permitiendo analizar y mostrar el aporte que brinda el amortiguador a la estructura.

1.3. Justificación e importancia

Hoy en día es importante hablar de edificaciones modernas y preventivas ante cualquier eventualidad que se presenta en la naturaleza como es el caso de sismos, temblores y demás; en vista de esto se realizan implementaciones de sistemas de amortiguamiento en las estructuras. No obstante, otro elemento fundamental dentro de las estructuras en las edificaciones, son los pórticos en los cuales se suele colocar dichos dispositivos de amortiguación; por lo tanto, es de vital importancia realizar un buen análisis y modelación del comportamiento de la estructura para obtener la mayor cantidad de información en cuanto a su funcionamiento.

El modelamiento matemático dentro del diseño, es trascendental desarrollarlo ya que es el argumento el cual, mediante la aplicación de leyes físicas, sustenta el sistema y caracteriza su funcionamiento para luego a partir de esto, poder hacer los diferentes estudios y análisis del comportamiento del

mismo, así como predecir fallas y buscar posibles soluciones si fuese necesarias en un rediseño.

Varios estudios y trabajos realizados referentes al tema de estructuras con amortiguación, presentan distintos puntos de vista y variaciones en cuanto a las configuraciones de los elementos que entran en juego en la estructura, pero al momento de realizar los análisis respectivos, se lo realiza desde el punto de vista de las simulaciones con el uso de herramientas computacionales como software para el análisis de elementos finitos, pero falta ese complemento matemático que si lo puede proporcionar el área de los elementos finitos y que caracterice el comportamiento de las estructuras mediante ecuaciones matemáticas que permiten fundamentar el estudio y con ello obtener mayor información.

Esta es la principal razón, por la que se pretende realizar el tema planteado, a fin de brindar el estudio necesario a la estructura propuesta bajo el punto de vista del modelamiento matemático por elementos finitos, que caracterice de la manera más acertada posible el comportamiento de este sistema y permita realizar un análisis más amplio de lo que ocurre al incorporarle al pórtico plano simple un amortiguador viscoso; y a su vez construir un modelo a escala en el cual se pueda visualizar la diferencia entre un pórtico simple y otro con amortiguamiento.

Este trabajo es importante desarrollarlo ya que brindará a la Universidad de las Fuerzas Armadas y específicamente al laboratorio de mecanismos del DECEM en la parte de vibraciones, un apoyo en cuanto al conocimiento y análisis de este tipo de estructuras, así como la posibilidad de utilizar el prototipo construido para la enseñanza a través de las prácticas de laboratorio.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Determinar mediante la modelación matemática por el método de elementos finitos el comportamiento de un pórtico con amortiguamiento viscoso, apoyado de la construcción de un prototipo a escala.

1.4.2. Objetivos específicos

- Plantear las ecuaciones que modelen el comportamiento de un pórtico con y sin amortiguamiento viscoso.
- Elaborar una plantilla en Mathcad, que contenga la modelación matemática de los sistemas.
- Solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales derivadas de la modelación.
- Analizar y comparar, el comportamiento de los pórticos amortiguado y no amortiguado a partir de los resultados obtenidos en la modelación por elementos finitos.
- Establecer la proximidad de los resultados obtenidos en la modelación matemática, a los otorgados por una simulación del sistema en software de elementos finitos.
- Construir un prototipo a escala que muestre el comportamiento de los pórticos con y sin amortiguamiento, además del aporte que le brinda a la estructura la inclusión del elemento amortiguador.

1.5. Alcance

El actual proyecto tiene como principal alcance modelar matemáticamente el comportamiento un pórtico con y sin amortiguamiento viscoso, por el método de los elementos finitos. Para el desarrollo de la modelación, se implementará una plantilla en Mathcad, que contenga el proceso; mientras que, para dar solución al sistema de ecuaciones obtenido, se lo hará con el uso de herramientas matemáticas adecuadas para el caso. A continuación a manera de validación se establecerá la aproximación de los resultados encontrados, comparados con una simulación realizada en un software de elementos finitos.

Posteriormente con la construcción de un prototipo a escala se busca mostrar de manera práctica el funcionamiento de ambos pórticos frente a cargas externas que se inducirán mediante vibración forzada. Adicionalmente en el prototipo, se implementará instrumentación básica para la obtención de datos que mediante gráficas muestren el aporte que brinda el amortiguador viscoso al pórtico en comparación a otro simple.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Fundamentos de las vibraciones

Las vibraciones como tal se fueron haciendo importantes conforme el ser humano se ha ido desarrollando a través de la historia, por ende, ha visto la necesidad de estudiar ciertos fenómenos que ocurren a diario, a fin de encontrarles una explicación, tratar de entender sus comportamientos y a su vez aprovechar las ventajas que pueden ofrecer estos fenómenos al obtener algún beneficio. Se puede decir entonces que los primeros estudios que se hicieron acerca de las vibraciones se dio en el ámbito musical, debido a que muchos de los instrumentos producían una serie de ondas que se propagaban para generar el sonido como flautas, tambores, etc. a los que se pretendía mejorar y optimizar, mediante la aplicación de los primeros conceptos que se lograban obtener.

Luego estos estudios con el pasar del tiempo se fueron extendiendo y aplicando a muchos otros campos de la ciencia como ingeniería, la medicina, la industria etc. como se lo hace hasta hoy en día, con los nuevos aportes de conocimiento que se generan, con el único fin de dar mayor precisión con resultados más cercanos a la realidad. Las vibraciones se encuentran presentes en la mayoría de ámbitos de la vida cotidiana, desde el respirar de una persona que genera vibraciones en los pulmones, hasta los grandes movimientos terrestres que causan vibraciones que se propagan por los cuerpos sobre la superficie del suelo.



Figura 1 Ejemplo de estudios vibracionales, realizados por la empresa PREDITEC E IK4-TEKNIKER (Fuente: tekniker.es, 2017)

Dentro del diseño y análisis de cuerpos, estructuras, maquinarias y elementos, las vibraciones se convierten en un fenómeno no deseado pero inevitable, que pueden producir serios daños o fallas hasta el punto de desembocar en la avería total o el colapso del sistema, por consiguiente, lo que se busca es tratar de disminuir lo mayoritariamente posible este efecto y con ello evitar sus consecuencias. Todo esto se lo realiza mediante la aplicación de los conceptos del análisis vibratorio y de ahí es donde nace la importancia de su estudio en los diferentes campos.

Las vibraciones se miden para verificar que las amplitudes no excedan determinados límites, para evitar resonancias, para poder amortiguar o aislar las fuentes de vibraciones, para establecer programas de mantenimiento según condición y para construir o verificar modelos de las estructuras. (Legrá & Quiza, 2012, p. 2)

En los motores de las maquinarias se presentan problemas vibratorios originados por el descentramiento de los mismos. En los automóviles, la excesiva producción de vibraciones a causa del motor a combustión hace efectos sobre la vía a través de las ruedas. En la maquinaria pesada y equipo de construcción el exceso de vibraciones se propaga hacia el terreno causando debilitamiento y agrietamientos indeseados. En las estructuras las vibraciones excedentes se propagan a través de los elementos ocasionando fallas o el colapso de la misma. En estos ejemplos mencionados se puede entender que las vibraciones generan fatiga en los materiales de los elementos o componentes del sistema que ocasiona que fallen debido al esfuerzo cíclico generado por los desplazamientos repetitivos característicos de este fenómeno, dependiendo del tipo de carga inducida.

“Ninguna estructura es absolutamente rígida por lo que toda fuerza actuante dará lugar a pequeños desplazamientos, siendo la vibración la reacción de un sistema a una excitación o una fuerza externa o interna aplicada al mismo” (Legrá & Quiza, 2012, p. 2).

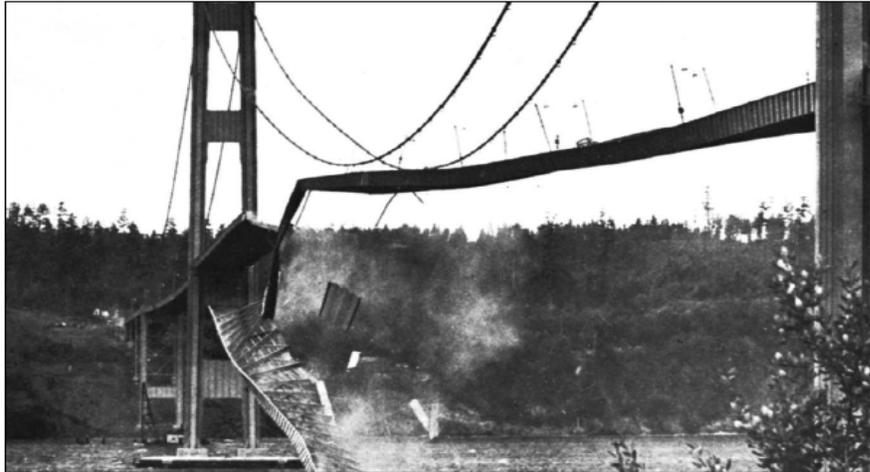


Figura 2 Fotografía del colapso del puente Tacoma Narrows producido por las vibraciones inducidas por el viento (Fuente: Rao, 2012)

2.1.1. Vibración

Una vibración es un movimiento repetitivo que se da alrededor de una posición de referencia conocida como posición de equilibrio, tras sufrir una perturbación o estímulo que de origen al movimiento. La característica de este movimiento es que se repite después de un intervalo de tiempo, y que se detiene en la posición de equilibrio cuando ya no haya ninguna perturbación, es decir que la fuerza aplicada sea igual a cero.

Cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo se llama vibración u oscilación. El vaivén de un péndulo y el movimiento de una cuerda pulsada son ejemplos comunes de vibración. La teoría de la vibración tiene que ver con el estudio de los movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas con ellos. (Rao, 2012, p. 13)

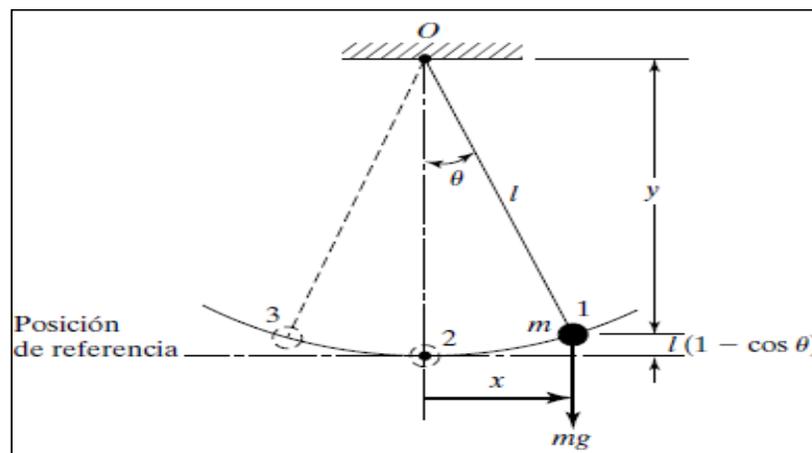


Figura 3 Ejemplo de un sistema vibratorio – Péndulo simple (Fuente: Rao, 2012)

Dentro de las vibraciones, se consideran algunos elementos importantes que son los que permiten que se de este movimiento. Estos elementos son la inercia, la elasticidad y dependiendo el tipo de sistema se considera el amortiguamiento para atenuar los excesos de desplazamiento. Estos elementos actúan entre sí para dar origen a la interacción entre energías cinética y potencial, que son las que caracterizan al movimiento.

“Por lo común un sistema vibratorio incluye un medio para almacenar energía potencial (resorte o elasticidad), un medio para conservar energía cinética (masa o inercia) y un medio por el cual la energía se pierde gradualmente (amortiguador)” (Rao, 2012, p. 13).

En la teoría de vibraciones lo que se busca es estudiar y encontrar las curvas de movimiento que describan las variables inmersas como el desplazamiento, velocidad y aceleración. Para la obtención de estas curvas normalmente se usa la teoría y las ecuaciones del movimiento armónico, el cual es un tipo de vibración que engloba todos los conceptos y elementos que implica el fenómeno vibratorio, por lo que generalmente se obtienen gráficas sinusoidales.

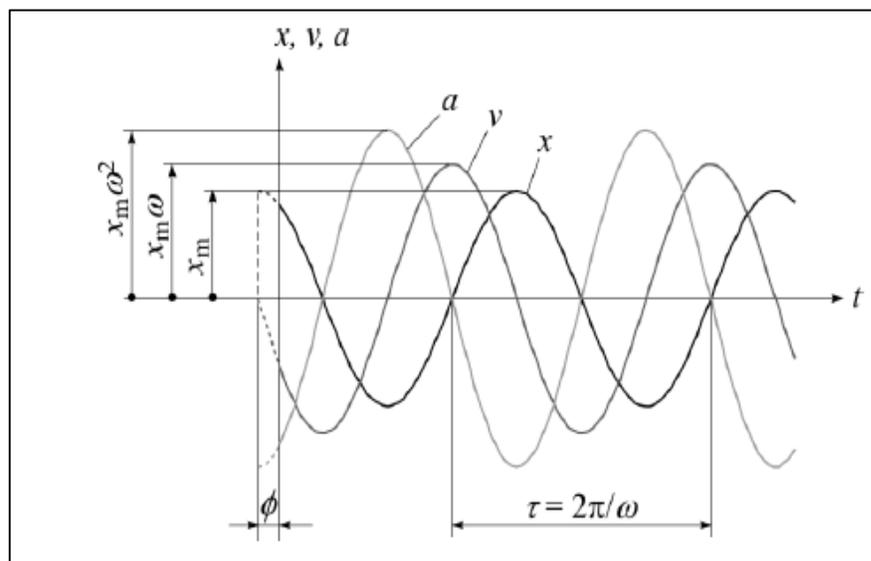


Figura 4 Representación de las variables inmersas en un sistema vibratorio (Fuente: Legrá & Quiza, 2012)

2.1.2. Tipos de vibraciones

Las vibraciones independientemente de si se trata de sistemas con un solo grado de libertad o sistemas con varios grados de libertad, según la causa del movimiento pueden ser catalogadas de dos tipos, libres o forzadas.

2.1.2.1. Vibraciones libres

Las vibraciones libres son aquellas en las que el sistema vibra por si solo a causa de una perturbación o estímulo inicial que desaparece luego de iniciar el movimiento, es decir que ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema durante la vibración.

(a) Vibración libre sin amortiguamiento: Es el tipo de vibración más sencilla, y se caracterizan porque no posee elementos de amortiguación que disipen la energía. La ecuación diferencial general que describe el movimiento es:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2.1)$$

(b) Vibración libre con amortiguamiento: Este tipo de vibración si posee elementos de amortiguación, que absorben la energía del movimiento para atenuar las vibraciones. La ecuación diferencial general que caracteriza este movimiento es:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.2)$$

La constante "c", dependerá del tipo de amortiguamiento que se implemente en el sistema, de acuerdo a las necesidades y el grado de atenuación que se requiera implementar.

2.1.2.2. Vibraciones forzadas

Las vibraciones forzadas son aquellas en las que la fuerza de perturbación permanece todo el tiempo, es decir que la fuerza externa actúa sobre el sistema durante la vibración. Se mantienen los conceptos de vibraciones sin amortiguamiento y con amortiguamiento, con la implementación de la fuerza externa.

(a) Vibración forzada sin amortiguamiento: La ecuación diferencial general que describe este tipo de vibración tiene la forma:

$$m\ddot{u} + ku = f(t) \quad (2.3)$$

(b) Vibración forzada con amortiguamiento: La ecuación diferencial general que describe el movimiento es:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (2.4)$$

Donde la función $f(t)$ es la representación general de la fuerza externa que se aplica, misma que puede ser de diferentes tipos.

2.2. Sistemas de amortiguamiento en estructuras

Las edificaciones y concretamente las estructuras clásicas, han encauzado sus diseños tomando como primer punto las cargas que influyen sobre las mismas para que la estructura se comporte estáticamente de manera óptima, luego teniendo en cuenta los factores básicos de diseño se hacen variaciones en dichos parámetros con el fin de obtener un buen comportamiento dinámico, es decir que la estructura resista y no presente inconvenientes frente a las cargas dinámicas que aparecen durante la vida útil de la estructura.

Convencionalmente para lograr este objetivo, los diseñadores han enfocado su trabajo en factores como la masa y la rigidez de los elementos de la estructura. Al hacer estas variaciones lo que se busca es minimizar la masa y maximizar la rigidez de los elementos utilizados, por lo que entra en juego los materiales que se eligen para la construcción. Con todas estas variaciones se ha logrado tener un mejor comportamiento dinámico de las estructuras con un mayor aporte en cuanto a las propiedades de cada elemento que las conforman.

Sin embargo, con el pasar de los años, se han presentado diferentes sucesos a través de la historia a causa de los sismos y el colapso de las estructuras por factores dinámicos es decir por motivos vibratoriales, que al actuar sobre los elementos, estos no fueron capaces de soportar y terminaron fallando, ocasionando grandes pérdidas tanto económicas como humanas. Esto ha hecho que se busquen nuevas soluciones que ayuden a minimizar esta gran problemática en pro de conseguir estructuras que funcionen adecuadamente bajo los efectos de las fuerzas dinámicas vibratoriales.

Dentro de esta línea existe un parámetro que no ha sido tomado tan en cuenta, pero que de a poco desde hace unos cuantos años se ha ido introduciendo en las estructuras; este parámetro en mención es el amortiguamiento, el cual es de vital importancia dentro del comportamiento dinámico de una estructura, ya que genera un aporte considerable en cuanto a propiedades de absorción del movimiento oscilatorio que puede presentar la estructura. Entonces si se tiene el amortiguamiento necesario, se puede conseguir una disminución del factor de amplificación dinámica y por ende mayor precisión en la limitación del movimiento de la estructura, obteniendo una buena atenuación de las vibraciones reduciendo su efecto sobre la estructura y el grado de falla que causa sobre cada elemento.



Figura 5 Amortiguamiento en estructuras y edificaciones
(Fuente: blog.360gradosenconcreto.com, 2016)

En la actualidad debido a la necesidad de optimizar el espacio, las construcciones modernas especialmente los edificios son cada vez más altos, por consiguiente, para mejorar la capacidad de las mismas los diseños deben ser más livianos y delgados, por lo tanto, su amortiguamiento natural es muy reducido y estas estructuras son más propensas a fallas vibracionales, causadas por diferentes motivos como las oscilaciones por el viento o sismos. Una de las soluciones para la seguridad estructural y absorción de vibraciones en estructuras y construcciones es el uso de elementos mecánicos que apliquen el concepto del control pasivo de vibraciones, es decir que ayuden a absorber y reducir las vibraciones generadas sobre la estructura siendo estos los elementos que actúen como protectores dinámicos.

Los elementos mecánicos propios para ejercer estas funciones son los amortiguadores, que justamente son los que trabajan como atenuadores de

las vibraciones que estén actuando además sobre las estructuras. Las configuraciones en las que se utilizan estos elementos varían de acuerdo a la necesidad y a la característica del elemento amortiguador a utilizar; otra parte importante a tomar en cuenta son las condiciones de trabajo a las que va a estar sometido, que en base a esto se escoge el tipo de amortiguador adecuado, de acuerdo a la naturaleza de la fuerza disipadora que genera.

Hoy en día la importancia de incluir el elemento de amortiguación dentro del análisis dinámico estructural es muy grande y necesario, porque la exigencia de mejorar la seguridad cada día es mayor, ya que considerando este factor se pueden tener mejores resultados en cuanto al comportamiento dinámico de una estructura.

2.2.1. Tipos de sistemas de amortiguamiento utilizados en estructuras

Los sistemas de amortiguación o sistemas de reducción de vibraciones brindan las características necesarias para que las edificaciones no sufran daños por efectos que inducen las vibraciones al actuar sobre la misma. Las respuestas dinámicas que tienen las estructuras con elementos anti vibratorios, están marcadas por las propiedades mecánicas de estos sistemas de reducción de vibraciones y de la naturaleza de la excitación que produce el efecto vibratorio sobre la estructura. Cada tipo de sistema posee la capacidad de disipar energía a fin de controlar los desplazamientos y optimizar el comportamiento estructural, para lo cual existe un mecanismo adecuado para cada aplicación en específico que se necesite.

Dentro de las opciones que se tienen para brindar a la estructura la posibilidad de obtener un buen comportamiento dinámico, son dos grupos de sistemas los que se han definido:

1. Los sistemas de aislación: Su característica principal es que se instalan en la base y columnas de la estructura generando como su nombre lo indica un aislamiento de movimiento entre el piso y la base de la estructura ayudando así a disminuir las vibraciones aplicadas sobre la estructura.

2. Los sistemas de control de vibraciones: Este tipo de sistemas son los que se colocan en la estructura misma formando parte de ella, es decir son un elemento más de la estructura. Estos sistemas en comparación con los de aislación, no se los coloca en la base.

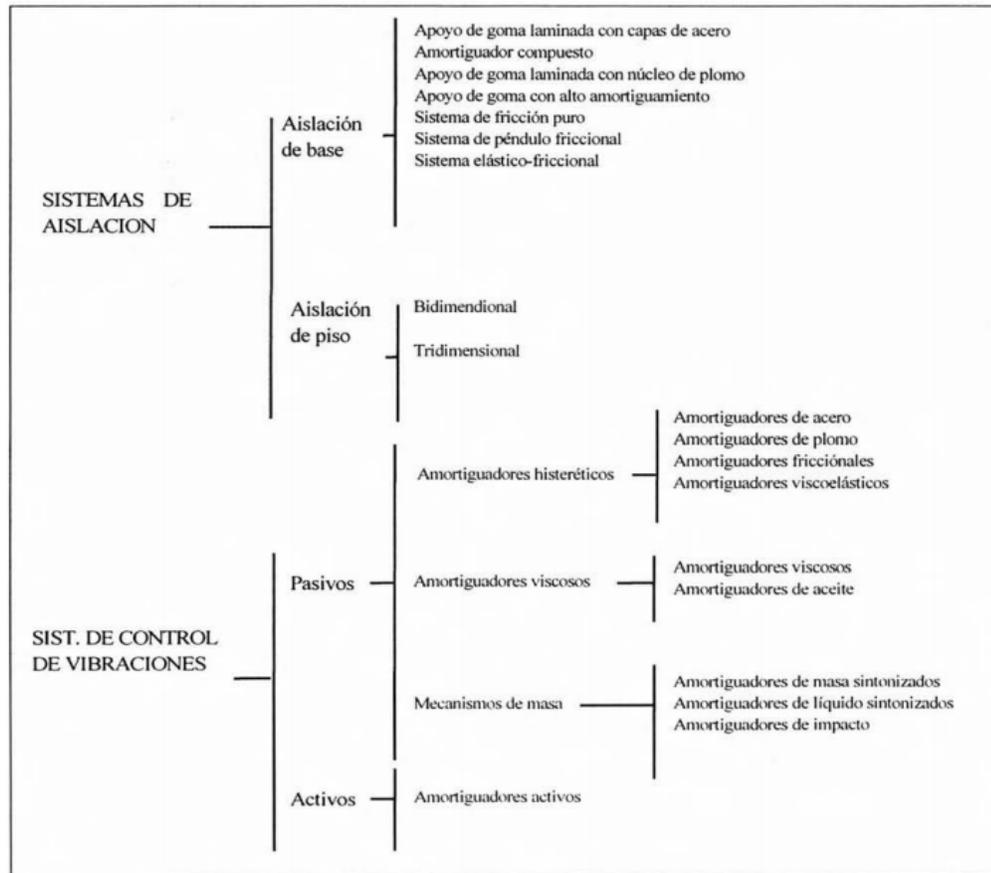


Figura 6 Clasificación de los sistemas de reducción de vibraciones
(Fuente: Montanaro, 2002)

En cuanto a los sistemas de control de vibraciones que son los más utilizados en las estructuras, se tienen dos subdivisiones, los sistemas pasivos y los activos.

Los sistemas activos son los que necesitan de energía eléctrica externa para funcionar, es decir estos sistemas aplican las fuerzas que se oponen al movimiento dándole la estabilidad necesaria utilizando energía externa que active su accionamiento, lo cual lo convierte en una desventaja.

En cambio, los sistemas pasivos brindan su aporte y funcionan utilizando la energía excitadora de la fuerza aplicada, es decir que no necesitan de fuentes de energía externa para funcionar, ya que son elementos mecánicos que reaccionan al estímulo aplicado en esos instantes, lo cual que es una ventaja y los convierte en los sistemas de mayor utilidad y aplicación.

En el grupo de los pasivos se tiene a los amortiguadores histeréticos, que como su nombre lo indica, usan las características de amortiguamiento

histerético que poseen los materiales y sistemas; se basan en la utilización de la plasticidad del acero y del cobre, además poseen gran capacidad de amortiguamiento respecto al volumen del dispositivo, además de durabilidad y confiabilidad. Estos elementos se basan en el concepto en que uno de los mecanismos más efectivos para la disipación de energía en una estructura metálica es a través de la deformación inelástica de sus componentes.



Figura 7 Disipadores histeréticos (Fuente: Oviedo & Duque, 2006)

Los amortiguadores viscosos utilizan como mecanismo principal de amortiguación a un fluido viscoso, es decir la disipación de la energía se produce en el fluido que contiene el recipiente donde se desplaza y cumple su trabajo el pistón. Uno de los fluidos más utilizados en este tipo de amortiguadores es el aceite, el cual gracias a su viscosidad ofrece la resistencia necesaria para la amortiguación frente a la acción del pistón. Este tipo de amortiguamiento es uno de los más comunes y recomendables para ser utilizados en estructuras en forma de arriostramientos diagonales, en arriostramientos en forma de V, o como aisladores de base.



Figura 8 Amortiguador viscoso utilizado en estructuras
(Fuente: liebherr.com, 2017)

Dentro del grupo de los mecanismos de masa, se tiene el amortiguador de masa sintonizado (AMS), el cual es un mecanismo ingenieril que consiste en una masa, un resorte y un amortiguador viscoso adecuados cuya configuración va colocada en el sistema vibrante principal con el objetivo de disminuir y absorber la vibración no deseada, a una frecuencia determinada, es decir que actúa cuando este sistema está sintonizado con la frecuencia de la estructura principal. Esta es una herramienta muy eficaz que disminuye la probabilidad de falla de los elementos de una estructura, absorbiendo la mayor cantidad de vibración evitando así el colapso. Su funcionamiento es posible gracias a la sintonización de las frecuencias naturales tanto del amortiguador como de la estructura haciendo que el amortiguador vibre en resonancia y con esto se disipe la energía absorbida a través de los mecanismos de este sistema.



Figura 9 Amortiguador de masa sintonizada
(Fuente: sirve.cl/archivos/5192/imagen-3d-ams, 2011)

2.3. Sistemas de amortiguamiento viscoso

Este tipo de sistemas como ya se mencionó antes, utilizan materiales viscosos para proporcionar mediante su deformación, la amortiguación a estructuras. Esta amortiguación se da a través de la absorción de la energía por medio de sus elementos constitutivos que logran reducir las vibraciones aplicadas sobre la estructura evitando la falla de los elementos. El comportamiento de estos materiales viscosos depende mucho de la temperatura y la velocidad de vibración a la que se expongan, debido a que dependiendo los ciclos de carga que se apliquen sobre ellos, provoca que su temperatura se eleve y con esto se vea afectado el efecto de amortiguación. Es por ello que en este tipo de sistemas es importante el diseño con el que se los realiza de acuerdo a las condiciones y la aplicación para la que se los utilizará, así como también de la configuración en que se los ubique en la estructura.

Un concepto importante dentro de este tipo de amortiguadores es la resistencia viscosa, que es una función de la velocidad, la cual ofrece la propiedad amortiguamiento al sistema, ya que se trabaja con fluidos en los que de acuerdo a la viscosidad que poseen, dan un mayor o menor grado de presión para soportar. Esto puede resumirse brevemente en el siguiente concepto: “Cuando un líquido viscoso fluye alrededor de un émbolo en un cilindro, la fuerza de amortiguamiento que se genera es proporcional a la velocidad relativa entre los dos límites que confinan al líquido” (Tornello & Sarrazin, 2008, p. 847).

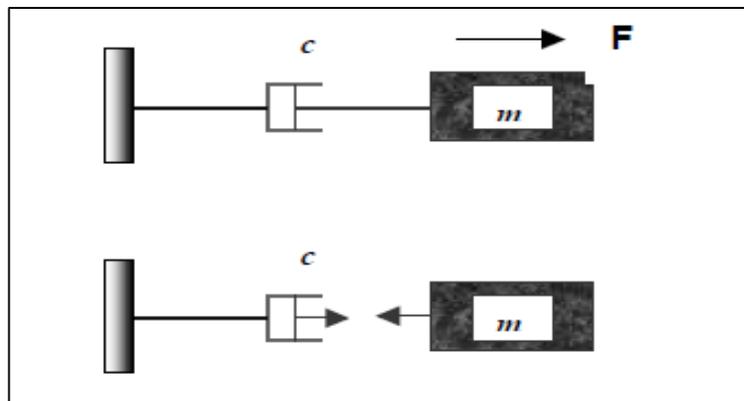


Figura 10 Esquema de un amortiguador viscoso
(Fuente: Tornello & Sarrazin, 2008)

2.3.1. Tipos de amortiguadores viscosos

2.3.1.1. Amortiguador viscoso de Taylor

Este tipo de amortiguador viscoso posee una configuración de tres cámaras de presión las cuales alojan el fluido a medida que se va generando el movimiento del pistón, dándose el efecto de amortiguación por la resistencia del fluido viscoso en interacción con las cámaras.

El fluido se encuentra alojado en la cámara central, el cual es comprimido por la acción del pistón mediante la carga, lo que genera que el fluido ingrese a la segunda cámara con el fin de absorber la carga mediante la resistencia que se genera, a su vez el fluido ingresa a la tercera cámara para evitar que el pistón regrese de manera brusca y que, al contrario de esto, el movimiento sea paulatino.

Los amortiguadores viscosos de Taylor en las construcciones suelen ser ocupados en varias configuraciones dentro de una estructura. Pueden ser ubicados en arriostramientos diagonales, teniendo sus puntos de apoyo en los vértices de los marcos en donde se aplica el efecto de amortiguamiento. También dependiendo las necesidades pueden ser ubicados en arriostramientos en forma de "V" invertida, teniendo como puntos de apoyo los vértices inferiores del marco y el punto medio central de la viga.

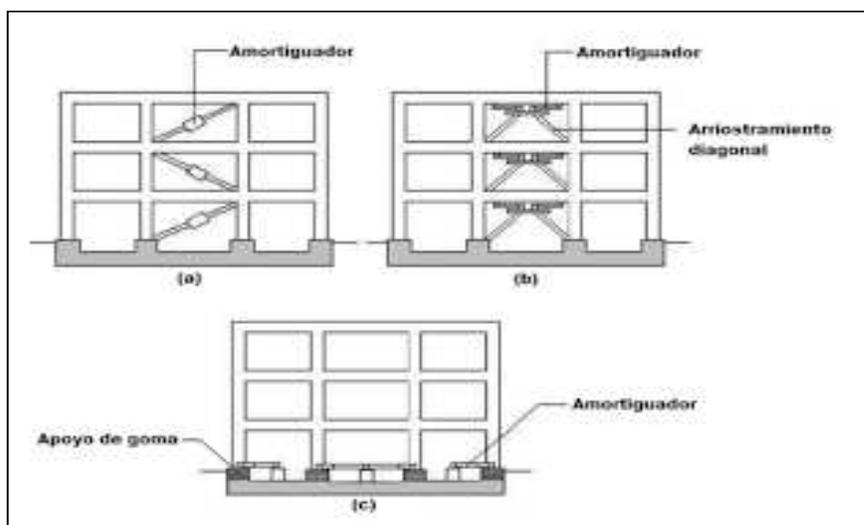


Figura 11 Configuraciones del amortiguador viscoso de Taylor en una estructura (Fuente: Gatica, 2012)

2.3.1.2. Amortiguador tipo HIDAM

Estos amortiguadores viscosos son similares a los de Taylor; para brindar el efecto de amortiguamiento utilizan la resistencia del aceite alojado en una cámara de presión la cual se opone al movimiento del pistón.

Suelen ser ocupados como parte de la configuración de una estructura entre la viga y el arriostramiento de la misma, que puede ser en forma de "V" normal o invertida, de tal manera que pueda proporcionar la propiedad de absorber y atenuar las vibraciones excedentes sobre la estructura.

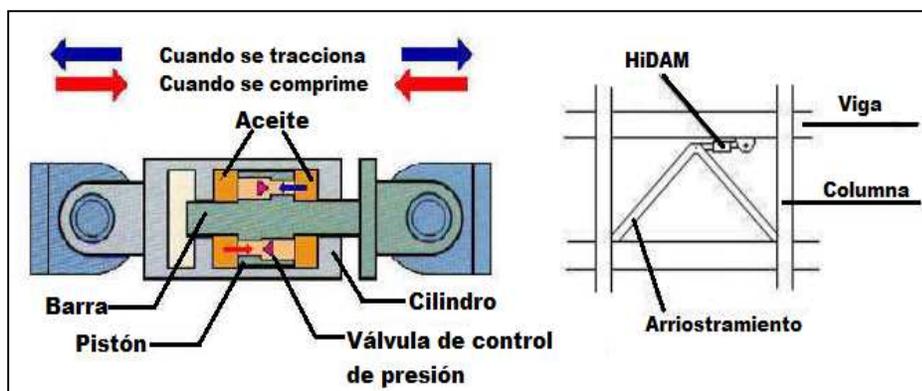


Figura 12 Amortiguador tipo HIDAM (Fuente: Gatica, 2012)

2.3.1.3. Amortiguador Viscoelástico

Su propio nombre lo dice, estos amortiguadores utilizan materiales que presentan comportamiento viscoelástico como los polímeros, que poseen características altamente disipativas, y son los que brindan la capacidad de amortiguamiento al sistema. En su configuración se usa dos o más capas de estos materiales, es decir que van colocados en forma de láminas haciendo una especie de sánduche, que es la parte que realiza la atenuación del movimiento.

Los amortiguadores viscoelásticos normalmente son colocados en los arriostramientos diagonales simples, con el fin de absorber la energía de vibración que se produce por el movimiento entre el arriostramiento y la viga, consiguiendo reducir el movimiento de toda la estructura, que es uno de los principales motivos que ocasionan la falla de los elementos y con ello el colapso general.

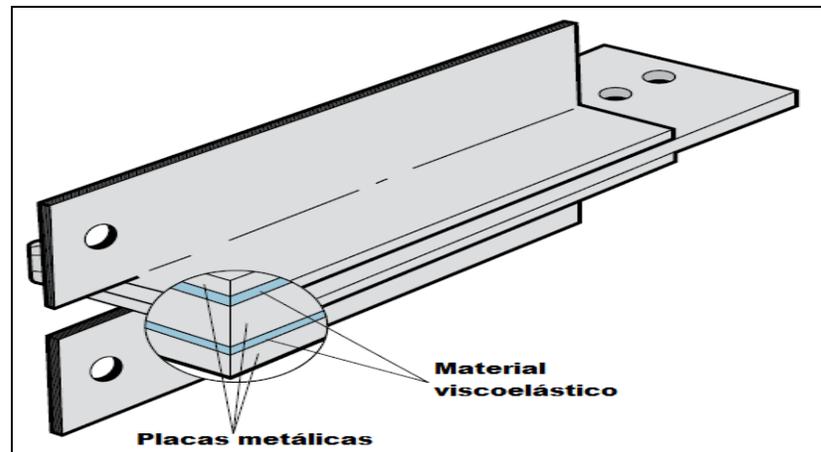


Figura 13 Amortiguador viscoelástico (Fuente: Oviedo & Duque, 2006)

2.3.1.4. Amortiguador Save

Similar al amortiguador viscoelástico; adicionalmente en sus capas se añaden placas de acero alternando con el material viscoelástico para conseguir el efecto de amortiguación, que por medio de su distorsión absorbe la energía de los desplazamientos generados en las paredes de la estructura, ya que actúan dentro de las mismas donde son ubicados para estos efectos. Estos amortiguadores son ocupados para cargas dinámicas pequeñas y para situaciones de sismos de baja magnitud.

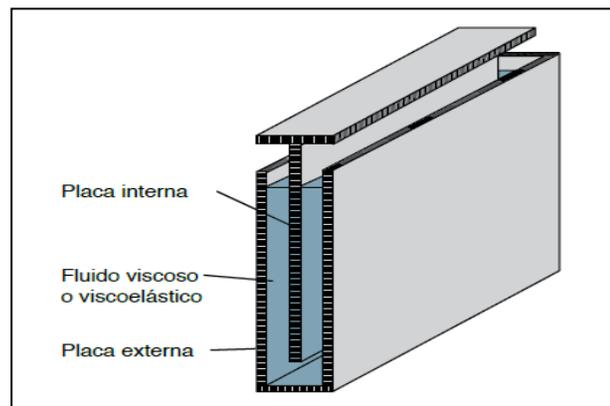


Figura 14 Amortiguador tipo Save (Fuente: Oviedo & Duque, 2006)

2.4. Método de los elementos finitos aplicado al análisis vibratorio

El método de los elementos finitos se basa en la discretización de un cuerpo o medio continuo, que permite caracterizarlo mediante la obtención de soluciones numéricas que son muy cercanas a la realidad. El término elemento finito hace referencia a la idea fundamental de este método, que

consiste en subdividir en un número finito de partes con geometría más sencilla a un dominio total. Estos subelementos van conectados entre sí por puntos llamados nodos, que son los que permiten ensamblar el elemento en general, obteniendo una mayor precisión en cuanto a resultados.

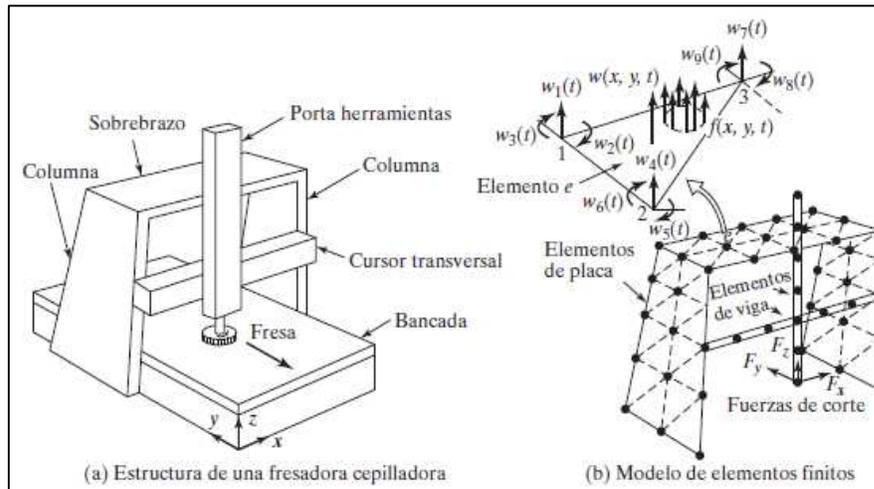


Figura 15 Representación del método de los elementos finitos
(Fuente: Rao, 2012)

Actualmente es una de las herramientas más importantes para realizar el estudio y análisis del comportamiento de cualquier cuerpo durante su funcionamiento, así como la respuesta que ofrece frente a las cargas estáticas y dinámicas que se aplican sobre el dominio. Este estudio permite determinar muchos aspectos importantes que se consideran dentro del diseño de cualquier elemento, como los desplazamientos en los nodos, los esfuerzos a los que está sometido, las deformaciones, respuestas ante cargas dinámicas que generan efectos vibracionales, con lo que se puede optimizar los diseños en pos de predecir posibles fallas y evitar las mismas.

Este método es aplicable a muchos campos de la industria y en especial el de la ingeniería, como la mecánica de fluidos, la transferencia de calor, diseño de elementos y mecánica de materiales, el análisis estructural, siendo este uno de los campos que más utiliza los elementos finitos para el diseño y estudio en lo que tiene que ver a la dinámica estructural.

El último punto en mención es de suma importancia tomarlo en cuenta dentro del diseño estructural, ya que entra en juego uno de los factores más importantes, como lo son las vibraciones que se propagan en los elementos

estructurales por efecto del trabajo y el medio externo en el que se encuentra. Las vibraciones por defecto tienen consecuencias negativas sobre cualquier máquina, elemento o estructura, por lo tanto, es necesario obtener una buena precisión al realizar el estudio de este fenómeno.

Los elementos finitos son uno de los métodos más adecuados y utilizados para analizar este tipo de problemas vibratorios. “El método de los elementos finitos es un método numérico que se puede utilizar para la solución precisa de problemas de vibración estructural y mecánicos complejos” (Rao, 2012, p. 12-2). Al aplicar el método, los sistemas de ecuaciones que se obtienen son del tipo diferencial, que mediante integraciones matemáticas se establecen los parámetros de solución.

“El método de elementos finitos es una técnica numérica de solución aproximada de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que resulta especialmente conveniente para la solución de este tipo de sistemas definidos sobre dominios especiales complejos” (Legrá & Quiza, 2012, pp. 9-10).

Aparte de la información que se obtiene, una de las ventajas de aplicar este método al análisis vibratorio, es que se puede determinar otras respuestas importantes acerca de cada elemento de la estructura, como las gráficas armónicas propias del movimiento que describen los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en pro de buscar los puntos y zonas más críticas propensas a fallas.

El modelamiento matemático por elementos finitos aplicado al análisis vibratorio conlleva a emplear los conceptos de vibraciones de sistemas de múltiples grados de libertad sometidos a cargas externas dinámicas, debido a que al subdividir un cuerpo en “n” elementos, estos en cada uno de sus nodos poseen grados de libertad propios, característicos del cuerpo o tipo de estructura que se analice.

Bajo este enfoque se llega al planteamiento de la ecuación dinámica que representa a este tipo de movimiento, la cual tiene la forma:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F(t) \quad (2.5)$$

En esta expresión se encuentra inmerso un sistema de ecuaciones diferenciales, debido a los múltiples grados de libertad, que están determinadas por la forma matricial expresada en sus matrices globales (ensamble) de masa, rigidez y amortiguación, esta última en el caso que el sistema sea amortiguado. Son llamadas matrices globales o matrices de ensamble precisamente porque son obtenidas por el método de elementos finitos, con el que se ensambla cada una de las matrices individuales de masa y rigidez que pertenecen a los subelementos en los que se dividió el cuerpo total, así como las matrices de amortiguación de cada elemento encargado de la atenuación de vibraciones.

Las soluciones a este sistema de ecuaciones diferenciales no son fáciles de obtener ni están predeterminadas como en el caso de los sistemas de un solo grado de libertad, al contrario, son complicadas; por lo que se deben aplicar otros métodos de solución como lo numéricos o iterativos.

2.5. Aplicación de la segunda ley de newton para obtener la ecuación diferencial de movimiento

La aplicación de la segunda ley de newton es uno de los métodos que se usa para obtener la ecuación diferencial que caracteriza el movimiento vibratorio de un cuerpo. Por consiguiente para el planteamiento de la ecuación que rige el movimiento, se toma en cuenta el elemento pórico que es la estructura que se busca caracterizar mediante el modelamiento matemático.

Entonces para aplicar la segunda ley de newton, en primer lugar, se necesita ubicar las fuerzas que actúan sobre el pórico y realizar la sumatoria de las mismas como se lo hace en un diagrama de cuerpo libre. Estas fuerzas son las características que aparecen en un movimiento vibratorio; las cuales son: la fuerza restauradora elástica f_s , la fuerza de amortiguamiento f_D y fuerza externa $f(t)$.

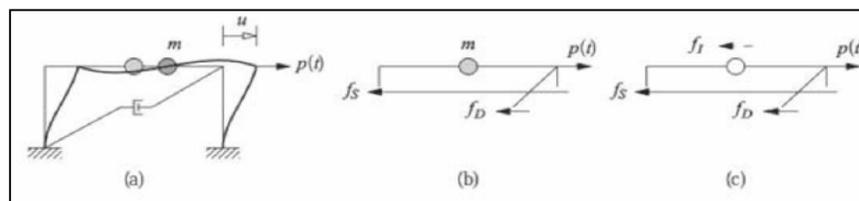


Figura 16 Diagrama de fuerzas que actúan en un pórico
(Fuente: Chopra, 2014)

En esta parte se debe considerar la dirección del movimiento de acuerdo al grado de libertad en el que se va a analizar. Para esta deducción se usa el movimiento del pórtico en la dirección del eje x. Por consiguiente, se toma en cuenta el sentido que tiene cada una de las fuerzas; asumiendo así que la fuerza externa es positiva; mientras que las fuerzas elásticas y de amortiguamiento al ubicarse en sentido contrario son negativas, ya que son las fuerzas que resisten y se oponen al movimiento.

Entonces de acuerdo a esta consideración las fuerzas a lo largo de eje x son $-f_s - f_D + f(t)$, que al realizar la sumatoria de fuerzas según la segunda ley de newton, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum \text{Fuerzas} &= m\ddot{u} \\ f(t) - f_s - f_D &= m\ddot{u} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Finalmente ordenando los términos:

$$m\ddot{u} + f_D + f_s = f(t) \quad (2.7)$$

Se obtiene la ecuación que gobierna el movimiento, en la cual se observan los tres tipos de fuerzas que actúan en un movimiento vibratorio, las fuerzas inerciales, las de amortiguamiento y las elásticas.

○ Fuerza elástica

Esta fuerza relaciona el componente de rigidez k del sistema con el desplazamiento unitario u de acuerdo al grado de libertad analizado. Viene expresada por:

$$f_s = k * u \quad (2.8)$$

○ Fuerza de amortiguamiento

Por lo general en los sistemas se ocupan mecanismos que ayuden a disipar la energía y con esto disminuir las vibraciones; estos mecanismos se pueden idealizar para incluir en las ecuaciones mediante un coeficiente de amortiguamiento.

Por lo tanto, se puede decir que la fuerza de amortiguamiento relaciona el componente de amortiguamiento “c” del sistema con la velocidad “ \dot{u} ” de acuerdo al grado de libertad analizado.

Esta fuerza viene dada por:

$$f_D = c * \dot{u} \quad (2.9)$$

o Fuerza inercial

Esta fuerza relaciona los componentes de masa m del sistema con la aceleración, de acuerdo al grado de libertad analizado.

Se expresa como:

$$f_I = m * \ddot{u} \quad (2.10)$$

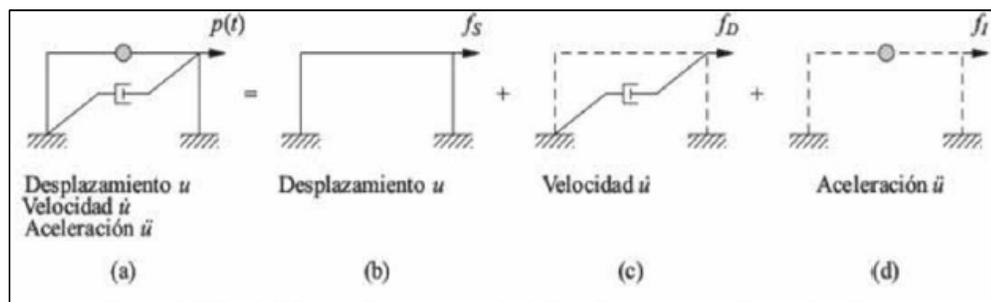


Figura 17 Componentes dinámicos del sistema
(Fuente: Chopra, 2014)

Entonces de acuerdo segunda ley de Newton estas tres fuerzas son las que interactúan en la estructura sometida a la acción de las fuerzas dinámicas externas $f(t)$, las cuales aparecen al realizar la sumatoria de fuerzas, es decir la ecuación (2.7) expresada bajo este concepto tiene la forma:

$$f_I + f_D + f_s = f(t) \quad (2.11)$$

Que, al reemplazar las igualdades que corresponden a cada una de las fuerzas, ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10), nos da la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que caracteriza el movimiento vibratorio del sistema pórico:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (2.12)$$

Donde “ u ” es el desplazamiento, “ m ” la masa, “ c ” la constante de amortiguamiento, “ k ” la rigidez, “ t ” el tiempo y “ $f(t)$ ” la fuerza de excitación externa.

No obstante, hay que tomar en cuenta que al aplicar el método de los elementos finitos a la estructura del pórtico, se lo trata bajo el enfoque de un sistema con varios grados de libertad, por lo que la ecuación anterior (2.12) se convierte en un sistema de múltiples ecuaciones diferenciales expresadas de manera matricial, que tiene la forma:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = F(t) \quad (2.13)$$

Donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, las cuales son cuadradas y su dimensión coincide con los grados de libertad del sistema; $\{U\}$ es el vector de desplazamientos y $F(t)$ es el vector de fuerzas externas.

Esta ecuación está planteada de forma general para un sistema de vibración forzada con amortiguamiento, a la cual se le puede omitir las variables de amortiguación y fuerza de excitación, dependiendo del tipo de movimiento vibratorio que se requiera analizar.

Como se mencionó anteriormente las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento se las obtiene por el método de los elementos finitos, y las soluciones al sistema de ecuaciones se las determina por medio de herramientas como los métodos numéricos.

CAPÍTULO III

MODELAMIENTO MATEMÁTICO

3.1. Grados de libertad en un pórtico plano

Una parte que es importante revisar antes de realizar la modelación matemática, es los grados de libertad que tiene un pórtico, que es la estructura utilizada para esta aplicación. Estos grados de libertad son los que van a determinar el tamaño de las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, ya que, al considerar un elemento finito, se analiza los grados de libertad que presenta en sus dos nodos extremos que delimitan al elemento, y que van definidos por el tipo de estructura que se analiza.

Por otra parte, delimitan el tamaño de los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración, en los que cada término representa un grado de libertad, lo que da origen a un sistema de ecuaciones representado de forma matricial, es decir que por cada grado de libertad se genera una ecuación dentro del sistema.

Se entiende como grado de libertad a cada sentido independiente de movimiento que puede tomar un cuerpo o elemento, con el cual se define el estado cinemático del sistema; para el caso de los elementos finitos se refiere a los movimientos que puede presentar cada nodo del elemento en las distintas direcciones.

En la estructura del pórtico plano, los grados de libertad vienen determinados por la combinación de los movimientos independientes que presenta el elemento de viga y el elemento de barra en sus nodos. Es decir, se combinan por parte del elemento viga los grados de libertad que presentan movimiento normal o en el eje "y" y rotación, con los grados de libertad del elemento barra que posee movimiento axial generalmente eje "X".

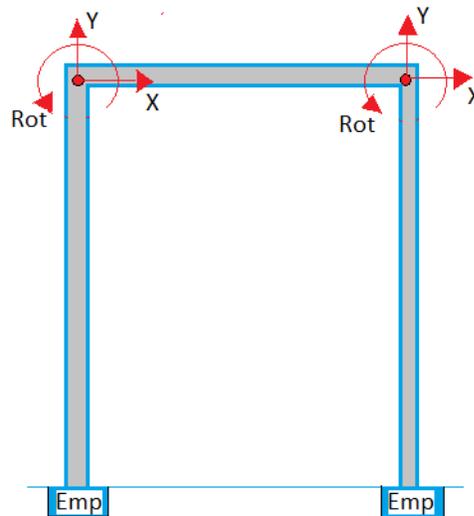


Figura 18 Grados de libertad en un pórtico plano (Fuente: Creación propia)

A partir de esto, se tiene que el elemento de un pórtico como grados de libertad presenta en cada nodo dos desplazamientos y una deformación rotacional, como se muestra en la siguiente figura.

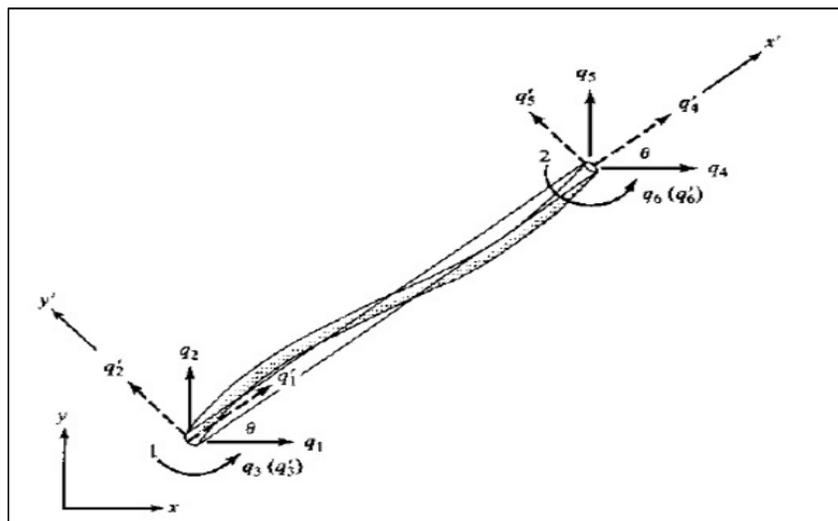


Figura 19 Grados de libertad en un elemento de pórtico (Fuente: Chandrupatla & Belegundu, 1999)

3.2. Transformación de coordenadas

Los grados de libertad que se plantean para un elemento normalmente vienen referidos al plano, pero en el caso de muchas estructuras, estos elementos tienen distintas orientaciones, es decir presentan inclinaciones respecto al plano. Para tomar en cuenta estas inclinaciones lo que se hace es introducir los sistemas de coordenadas locales y globales. Esto es con el fin

de obtener un nuevo sistema de coordenadas que, con el uso de una matriz de transformación, se logre una equivalencia entre ambos sistemas. Esta matriz de transformación es un concepto, que se aplica en la obtención de las matrices de masa, rigidez y amortiguación por elementos finitos, para unificar el sistema de coordenadas al que estarán referidas cada una de ellas.

La figura 20 muestra un elemento de barra con una orientación definida mediante ángulo θ respecto al plano, en la cual se define el concepto de las coordenadas locales y globales. Para ejemplificar la transformación de coordenadas, se toma en cuenta los desplazamientos locales en los nodos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ que son axiales, propios de un elemento de barra.

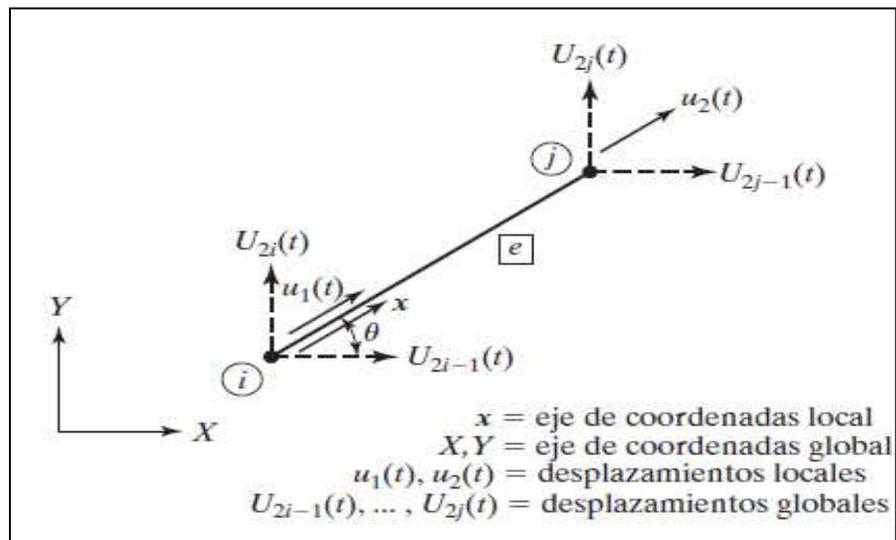


Figura 20 Representación de un elemento de barra en coordenadas locales y globales (Fuente: Rao, 2012)

Al proyectar los desplazamientos globales sobre los locales se obtiene la relación entre ambos sistemas, los cuales vienen definidos por:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_{2i-1}(t) \cos(\theta) + U_{2i}(t) \text{sen}(\theta) \\ u_2(t) &= U_{2j-1}(t) \cos(\theta) + U_{2j}(t) \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Que expresando de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2i-1}(t) \\ U_{2i}(t) \\ U_{2j-1}(t) \\ U_{2j}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Se puede escribir como:

$$\vec{u}(t) = [T]\vec{U}(t) \quad (3.3)$$

Donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Es la matriz de transformación para el elemento barra.

De la misma forma, considerando el caso en el que, en un elemento se presentan desplazamientos locales tanto axiales como normales (eje "x" y eje "y"):

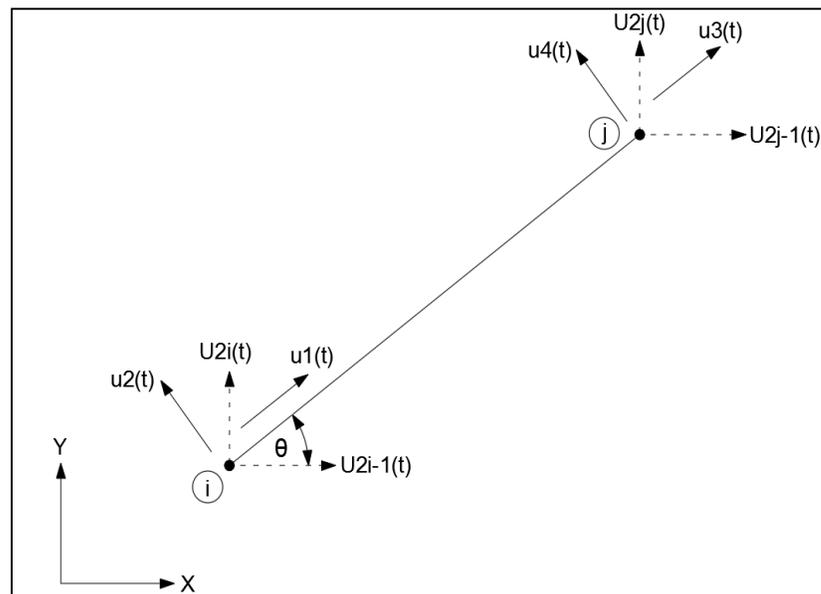


Figura 21 Representación de un elemento en coordenadas locales y globales (Fuente: Creación propia)

El sistema de ecuaciones queda determinado como:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_{2i-1}(t) \cos(\theta) + U_{2i}(t) \text{sen}(\theta) \\ u_2(t) &= U_{2i}(t) \cos(\theta) - U_{2i-1}(t) \text{sen}(\theta) \\ u_3(t) &= U_{2j-1}(t) \cos(\theta) + U_{2j}(t) \text{sen}(\theta) \\ u_4(t) &= U_{2j}(t) \cos(\theta) - U_{2j-1}(t) \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Al expresarlo de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2i-1}(t) \\ U_{2i}(t) \\ U_{2j-1}(t) \\ U_{2j}(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Se tiene que la matriz de transformación para este caso es:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2.1. Matriz de transformación para un elemento de pórtico

Una vez revisado el proceso de transformación de coordenadas en el que se presentan desplazamientos axiales y normales, siguiendo la misma línea, se aplica de manera similar para el caso del elemento de un pórtico plano, que presenta tres grados de libertad en cada nodo (dos de desplazamiento y uno de rotación).

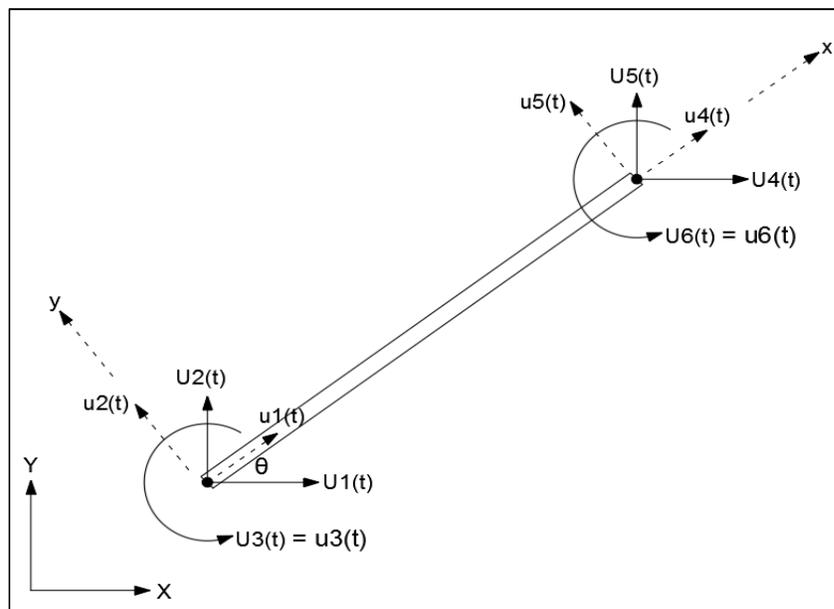


Figura 22 Representación de un elemento de pórtico en coordenadas locales y globales (Fuente: Creación propia)

Aquí se puede observar que $u_2(t), u_3(t), u_5(t), u_6(t)$ son los grados de libertad que presenta el elemento viga, mientras que $u_1(t), u_4(t)$ son los del

elemento barra, pero que al combinarse dan origen a los grados de libertad del elemento de un pórtico.

Entonces el vector de desplazamiento esta dado por el vector transpuesto:

$$\vec{U}(t) = [U_1(t), U_2(t), U_3(t), U_4(t), U_5(t), U_6(t)]^T \quad (3.8)$$

Y en el sistema de coordenadas locales:

$$\vec{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t), u_6(t)]^T \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta que, para ambos sistemas de coordenadas, los grados de libertad de rotación son iguales $U_3(t) = u_3(t)$ y $U_6(t) = u_6(t)$. Se plantea el sistema de transformación de coordenadas expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \\ U_4(t) \\ U_5(t) \\ U_6(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Que se escribe como

$$\vec{u}(t) = [T]\vec{U}(t) \quad (3.11)$$

Donde T es la matriz de transformación para un elemento de pórtico.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.3. Ensamble de matrices

Para la obtención de las matrices generales de masa, rigidez y amortiguación, que representen a toda la estructura del pórtico, se utiliza uno de los métodos más sencillos y apropiados, como es el de expansión directa o llenado directo, de acuerdo a la posición definida por un indicador dado por los grados de libertad definidos en cada nodo, lo cuales van numerados de forma secuencial, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$k_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$k_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.13)$$

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Es decir, la matriz de ensamble se obtiene al llenar las filas y columnas con los valores ubicados en la posición correspondiente, determinada por la numeración que se da a las filas y columnas de cada matriz con anterioridad. Estos valores resultantes de acuerdo a la posición que tienen en las sub matrices pueden ser el resultado de la suma de las cantidades que coinciden en la misma posición.

3.4. Planteamiento de matrices

Para la obtención de las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento que se ocupará en la modelación matemática del pórtico, es importante en un principio revisar la fundamentación en la que se basa la formulación de estas matrices.

3.4.1. Matriz de masa

En cuanto a la matriz de masa se tienen dos tipos de matrices, la de masa concentrada y la de masa consistente. La de masa concentrada como su propio nombre lo dice, concentra la masa de todo el cuerpo, en este caso de cada elemento barra o viga en sus nodos extremos, considerando así al elemento como un cuerpo simplificado, omitiendo las características y propiedades que puede presentar a lo largo del mismo.

En cambio, la de masa consistente lo que hace es considerar una masa distribuida a lo largo de cada uno de los elementos del pórtico, repartiendo de manera equitativa las propiedades inerciales, e induciendo a una mayor

precisión en la obtención de datos para un correcto y mejor análisis del sistema. Esta matriz es la más adecuada para utilizar ya que se ajusta de buena forma al concepto de los elementos finitos, el cual divide en subelementos a la estructura con el fin de caracterizar de manera óptima su comportamiento.

Para el planteamiento de la matriz de masa bajo el enfoque de los elementos finitos, se usa el método de la ecuación de la energía cinética que es práctico y sencillo de entender. Es importante recalcar que, para poder formular la matriz de masa de un elemento de pórtico, primero se necesita conocer las matrices de masa del elemento barra y del elemento viga.

o Barra

Se considera un elemento de barra uniforme, figura 23, al cual se le aplica cargas axiales en sus nodos extremos $f_1(t)$ y $f_2(t)$; se asume que el desplazamiento axial en “x” generado dentro del elemento es lineal, por lo que se expresa la siguiente relación:

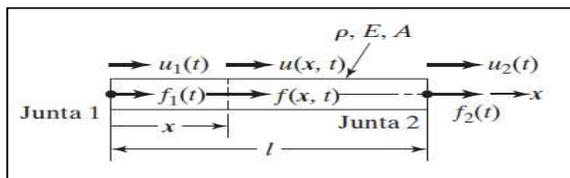


Figura 23 Elemento de barra uniforme (Fuente: Rao, 2012)

$$u(x, t) = a(t) + b(t)x \quad (3.14)$$

Dadas las condiciones de frontera:

$$u(0, t) = u_1(t) \text{ y } u(l, t) = u_2(t) \quad (3.15)$$

Evaluando las condiciones de frontera en la ecuación (3.14), se tiene que:

$$\begin{aligned} a(t) &= u_1(t) \\ b(t) &= \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Reemplazando estas igualdades en la ecuación (3.14):

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1(t) + \frac{x}{l} u_2(t) \quad (3.17)$$

Donde N_1 y N_2 son las funciones de forma:

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \text{ y } N_2(x) = \frac{x}{l} \quad (3.18)$$

Entonces:

$$u(x, t) = N_1(x)u_1(t) + N_2(x)u_2(t) \quad (3.19)$$

Al plantear la ecuación de la energía cinética del elemento barra se tiene:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (3.20)$$

Luego reemplazando los términos correspondientes e integrando:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{x}{l} \frac{du_2(t)}{dt} \right]^2 dx \quad (3.21)$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \frac{\rho A l}{3} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{u}_2^2)$$

Que en la forma matricial se expresa como:

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{\vec{u}}(t)^T [m] \dot{\vec{u}}(t) \quad (3.22)$$

Donde el vector $\dot{\vec{u}}(t)$:

$$\dot{\vec{u}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du_1/dt \\ du_2/dt \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Entonces la matriz m , viene dada por:

$$[m] = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

o Viga

Ahora se considera un elemento de viga, al cual se le aplica una distribución de cargas transversales de dos tipos denotadas por $f(x, t)$, que en los nodos extremos están definidas como $f_1(t)$ y $f_3(t)$ correspondientes a fuerzas del tipo lineal, por lo que se generan desplazamientos traslacionales lineales

expresados por $w_1(t)$ y $w_3(t)$; mientras que a las fuerzas rotacionales (momentos de flexión) se las denomina como $f_2(t)$ y $f_4(t)$, mismas que generan desplazamientos rotacionales, definidos como $w_2(t)$ y $w_4(t)$ respectivamente.

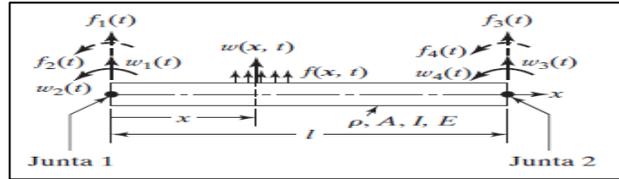


Figura 24 Elemento de viga uniforme (Fuente: Rao, 2012)

Estos desplazamientos transversales, se los asume formulando la siguiente expresión, que es similar a la deflexión de una viga:

$$w(x, t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 + d(t)x^3 \quad (3.25)$$

Se determina las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w_1(t) & \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) &= w_2(t) \\ w(l, t) &= w_3(t) & \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) &= w_4(t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Evaluando estas condiciones en la ecuación (3.25), se tiene:

$$\begin{aligned} a(t) &= w_1(t) \\ b(t) &= w_2(t) \\ c(t) &= \frac{1}{l^2} [-3w_1(t) - 2lw_2(t) + 3w_3(t) - lw_4(t)] \\ d(t) &= \frac{1}{l^3} [2w_1(t) + lw_2(t) - 2w_3(t) + lw_4(t)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Que, reemplazando en la ecuación (3.25), se puede expresar como:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right)w_1(t) + \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)lw_2(t) \\ &+ \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right)w_3(t) + \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)lw_4(t) \\ w(x, t) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x)w_i(t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde N_1, N_2, N_3, N_4 , son las funciones de forma:

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
 N_2(x) &= x - 2l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
 N_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
 N_4(x) &= -l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Planteando la ecuación de energía cinética para un elemento de viga se tiene:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \tag{3.30}$$

Que reemplazando los términos correspondientes e integrando, se puede expresar la solución en la forma matricial:

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{\vec{w}}(t)^T [m] \dot{\vec{w}}(t) \tag{3.31}$$

Teniendo como vector w :

$$\dot{\vec{w}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \dot{w}_3(t) \\ \dot{w}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dw_1/dt \\ dw_2/dt \\ dw_3/dt \\ dw_4/dt \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Entonces la matriz m , viene dada por:

$$[m] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

- Matriz de masa del elemento pórico

Para obtener la matriz general que representa la masa consistente de un elemento de pórico, lo que se hace es combinar y sumar en las posiciones adecuadas las dos matrices anteriormente obtenidas, para lo cual se

expanden los espacios que ocupan las posiciones de los grados de libertad del elemento pórtico, tanto en la matriz del elemento barra como la del elemento viga, unificando los coeficientes en el denominador.

Para el elemento barra:

$$[m] = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Para el elemento viga:

$$[m] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Finalmente superponiendo las contribuciones (sumando matrices), se obtiene la matriz de masa consistente de un elemento de pórtico.

$$[m'] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

3.4.2. Matriz de rigidez

Para plantear esta matriz dentro del enfoque de los elementos finitos, se usa el método de la ecuación de la energía de deformación, misma que forma parte de la expresión general de la energía potencial y equilibrio propuesta por Rayleigh – Ritz. Es importante recalcar nuevamente que, para formular la matriz de rigidez de un elemento de pórtico, primero se necesita conocer las matrices de rigidez del elemento barra y del elemento viga.

○ Barra

Para esta matriz se usa el mismo planteamiento de condiciones y ecuaciones que se hizo en la matriz de masa del elemento barra, refiriéndose hasta la parte de las funciones de forma Ecuación (3.18), para luego partiendo de este punto, formular la ecuación de la energía de deformación unitaria del elemento:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (3.37)$$

Reemplazando los términos e integrando se tiene:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left[-\frac{1}{l} u_1(t) + \frac{1}{l} u_2(t) \right]^2 dx \quad (3.38)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (u_1(t)^2 - 2u_1(t)u_2(t) + u_2(t)^2)$$

En la forma matricial se expresa como:

$$V(t) = \frac{1}{2} \vec{u}(t)^T [k] \dot{\vec{u}}(t) \quad (3.39)$$

El vector $\dot{\vec{u}}(t)$:

$$\dot{\vec{u}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Entonces la matriz k, viene dada por:

$$[k] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

○ Viga

De igual manera, se usa el planteamiento revisado anteriormente en la matriz de masa para un elemento de viga, tomando hasta la parte de las funciones de forma ecuación (3.29). A partir de este punto, se formula la ecuación de energía de deformación unitaria para un elemento de viga:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (3.42)$$

Que reemplazando e integrando, se puede expresar la solución de forma matricial:

$$V(t) = \frac{1}{2} \vec{w}(t)^T [m] \vec{w}(t) \quad (3.43)$$

Teniendo como vector w:

$$\vec{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Entonces la matriz k, viene dada por:

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

- Matriz de Rigidez para un elemento de pórtico

Para obtener la matriz general que representa la rigidez de un elemento de pórtico, se combina y suma en las posiciones adecuadas las dos matrices anteriormente obtenidas, siguiendo el proceso utilizado anteriormente en la matriz general de masa:

Para el elemento barra:

$$[k] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2/I & 0 & 0 & -Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Al^2/I & 0 & 0 & Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Para el elemento viga:

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Finalmente superponiendo las contribuciones (sumando matrices), se obtiene la matriz de rigidez de un elemento de pórtico.

$$[k'] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2/I & 0 & 0 & -Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -Al^2/I & 0 & 0 & Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

3.4.3. Matriz de amortiguación

Para plantear esta matriz dentro del enfoque de los elementos finitos, no se usa un método en específico. Sin embargo, se la puede formular asumiendo que todos los elementos de la estructura presentan un coeficiente de amortiguamiento aparte del elemento amortiguador, y a partir de esto construir la matriz por medio de una sumatoria de índices determinados por medio de los coeficientes.

Este método es poco práctico, ya que en primer lugar si se considera un coeficiente de amortiguamiento en cada elemento, cada uno de estos sería tan pequeño al punto de considerarse insignificante en cuanto al aporte a la estructura; en segundo lugar al tratarse de un sistema vibratorio, cada elemento cumple una función específica, es decir que los elementos propiamente constituyentes de la estructura aportan con las propiedades inerciales y elásticas, mientras que los elementos de amortiguamiento brindan las propiedades de amortiguación.

Tomando en cuenta estas consideraciones, otro método y el más indicado es plantear la matriz de acuerdo al sentido u orientación en la que brinda la amortiguación el elemento. Para este caso, el amortiguador viscoso de Taylor aporta esta propiedad en el sentido axial.

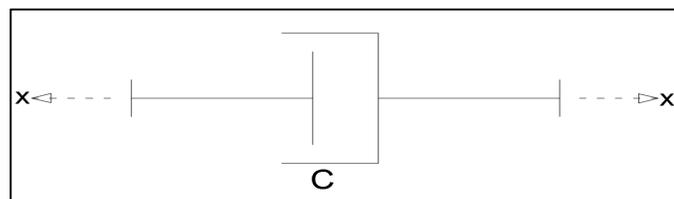


Figura 25 Diagrama de la orientación de amortiguamiento
(Fuente: Creación propia)

No obstante, como el amortiguador va en la configuración tipo arriostramiento formando parte de la estructura del pórtico, esta matriz se plantea bajo el mismo concepto al tomar en cuenta las posiciones que ocupan los valores, dependiendo de los grados de libertad, que para este caso son los mismos considerados para un elemento de pórtico, el cual presenta en cada nodo tres grados de libertad.

En la matriz, el coeficiente de amortiguamiento se ubica solo en las posiciones que representan los grados de libertad de tipo axial bajo el principio de acción y reacción, manteniendo la propiedad de simetría en la matriz.

Entonces la matriz de amortiguamiento para el elemento amortiguador queda planteada como:

$$[c'] = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & 0 & 0 & -\mathbf{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{c} & 0 & 0 & \mathbf{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Las matrices de masa, rigidez y amortiguación, están denotadas como $[m']$, $[k']$ y $[c']$ respectivamente, porque están determinadas en coordenadas locales, por lo tanto, es importante formularlas en coordenadas globales con el fin de unificar el sistema al que están referidas. Para esto se usa la transformación de coordenadas a través de la matriz de transformación. Entonces las matrices generales de masa consistente, rigidez y amortiguación quedan determinadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} [m] &= [T]^T [m'] [T] \\ [k] &= [T]^T [k'] [T] \\ [c] &= [T]^T [c'] [T] \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.5. Modelamiento matemático del pórtico

3.5.1. Características del pórtico

El pórtico que se va a utilizar para realizar la modelación matemática es el mismo construido como prototipo a escala, que tiene las siguientes características:

- Material: *Acero templado*
- Coeficiente de elasticidad: $E = 200000 \text{ Mpa}$
- Coeficiente de Poisson: $\nu_{xy} = 0.29$
- Dimensiones:

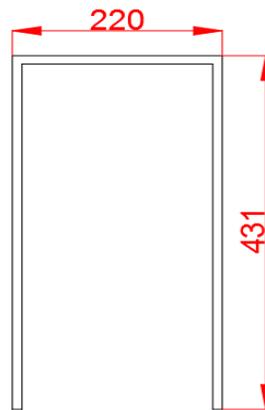


Figura 26 Dimensiones del pórtico a estudiar (Fuente: Creación propia)

Longitud de las columnas: 43.1 *cm*

Longitud de la viga: 22 *cm*

Área transversal de cada elemento: 33.5 *mm* x 0.9 *mm*

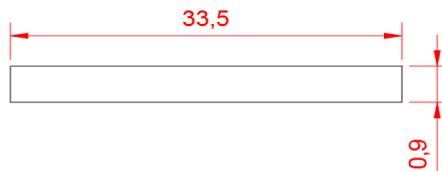


Figura 27 Área transversal de cada elemento del pórtico (Fuente: Creación propia)

3.5.2. Discretización del pórtico

Al emplear el método de los elementos finitos, se debe discretizar el dominio del pórtico en el número de sub elementos convenientes, a fin de obtener una buena aproximación de resultados. Esta discretización debe tomar en cuenta el número de ecuaciones a generarse por motivo del

incremento de nodos, así como la factibilidad de disminuir la complejidad de resolver estos sistemas con herramientas computacionales.

Para este caso del pórtico plano, por fines didácticos y de dimensión de las matrices, se lo va a dividir en 3 elementos finitos que para el caso del pórtico con amortiguamiento son 4, obteniendo para los dos tipos de sistemas 4 nodos, que como se mencionó anteriormente cada uno tiene tres grados de libertad, como se muestra en las siguientes figuras:

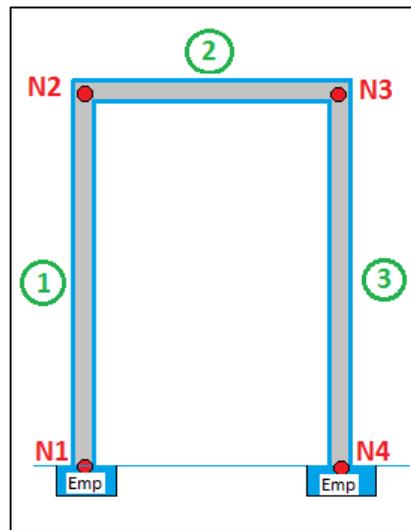


Figura 28 Esquema de discretización - Pórtico sin amortiguamiento
(Fuente: Creación Propia)

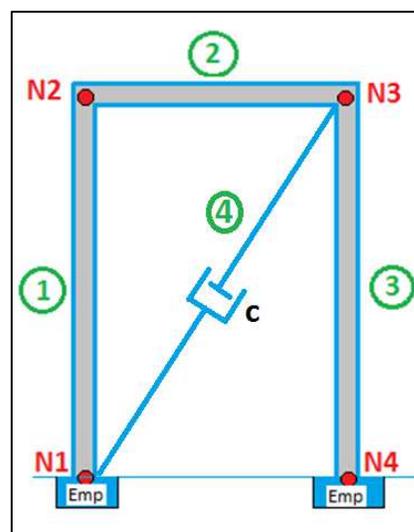


Figura 29 Esquema de discretización – Pórtico con amortiguamiento
(Fuente: Creación Propia)

3.5.3. Elemento de amortiguación

Otro de los elementos importantes dentro de la modelación es el amortiguador, el cual es incluido dependiendo del tipo de sistema vibratorio a analizar. Por lo tanto, es importante determinar el valor del coeficiente de amortiguamiento.

El amortiguador que se emplea en el prototipo está considerado como un amortiguador viscoso de Taylor. El cual para esta aplicación debe tener un coeficiente de amortiguamiento pequeño con el fin de adaptarse a las características del pórtico que como se menciona anteriormente es a escala.



Figura 30 Elemento de amortiguación

3.5.3.1. Obtención del coeficiente de amortiguamiento (c)

Para la obtención del coeficiente se usa el siguiente procedimiento.

De la ecuación de la fuerza de amortiguamiento se tiene que:

$$F = cv \quad (3.51)$$

Donde c : coeficiente de amortiguamiento

v : Velocidad

Para lo cual en primer lugar se ubica un peso predeterminado (Fuerza externa) colocado en el extremo del amortiguador en posición vertical. Luego para hallar la velocidad v , se toma el tiempo que se demora desplazarse en una distancia determinada.

Aplicando la ecuación de la velocidad se tiene:

$$v = \frac{d}{t} \quad (3.52)$$

Una vez determinada la velocidad, y el peso que en la ecuación representa la fuerza aplicada, al despejar se puede hallar el coeficiente de amortiguamiento:

$$c = \frac{F}{v} \quad (3.53)$$

El proceso para la determinación del coeficiente de amortiguamiento se lo hace de forma experimental, por lo que se realiza algunas pruebas y con esto sacar un promedio de los coeficientes.

- Prueba 1:

$$\text{Peso} = 1 \text{ kg} = 9.8 \text{ N}$$

$$\text{Distancia} = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}$$

Tiempos obtenidos (s):

0.69

0.76

0.73

0.75

0.70

$$\text{Promedio tiempo} = 0.726 \text{ s}$$

$$v = \frac{0.15 \text{ m}}{0.726 \text{ s}}$$

$$v = 0.207 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = \frac{9.8 \text{ N}}{0.207 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$c_1 = 47.432 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$$

- Prueba 2:

$$\text{Peso} = 1.1 \text{ kg} = 10.78 \text{ N}$$

$$\text{Distancia} = 20 \text{ cm} = 0.20 \text{ m}$$

Tiempos obtenidos (s):

0.64

0.66

0.67

0.65

0.64

Promedio tiempo = 0.652 s

$$v = \frac{0.20 \text{ m}}{0.652 \text{ s}}$$

$$v = 0.307 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = \frac{10.78 \text{ N}}{0.307 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$c_2 = 35.143 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$$

- Prueba 3:

*Peso = 1.2 kg = 11.76 N**Distancia = 20 cm = 0.20 m**Tiempos obtenidos (s):*

0.38

0.45

0.39

0.40

0.44

0.43

0.50

0.44

0.50

Promedio tiempo = 0.44 s

$$v = \frac{0.20 \text{ m}}{0.44 \text{ s}}$$

$$v = 0.458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = \frac{11.76 \text{ N}}{0.458 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$c_3 = 25.676 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$$

Prueba 4:

$$\text{Peso} = 1.1 \text{ kg} = 10.78 \text{ N}$$

$$\text{Distancia} = 20 \text{ cm} = 0.20 \text{ m}$$

Tiempos obtenidos (s):

$$0.51$$

$$0.55$$

$$0.53$$

$$0.48$$

$$0.53$$

Promedio tiempo = 0.52 s

$$v = \frac{0.20 \text{ m}}{0.52 \text{ s}}$$

$$v = 0.385 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = \frac{10.78 \text{ N}}{0.385 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$c_4 = 28.028 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$$

Calculando el promedio entre los coeficientes determinados en las diferentes pruebas, se tiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$c = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)/4$$

$$c = (47.432 + 35.143 + 25.676 + 28.028)/4$$

$$c = 34.06 \approx 34$$

$$\therefore c = 34 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$$

Este coeficiente es el que se utilizará para la obtención de la matriz de amortiguamiento.

3.6. Obtención de las matrices por el MEF

Para la obtención de las matrices se utiliza el software matemático MathCad como ayuda para realizar los cálculos. A continuación, se presenta el desarrollo realizado de forma detallada en Mathcad, para la obtención de las matrices:

3.6.1. Matriz de masa

MATHCAD PARA LA MATRIZ DE MASA DEL ELEMENTO PÓRTICO

Propiedades del acero:

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad E := 2 \times 10^{11} \text{ pa} \quad A := 3.015 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

Matriz general de masa consistente para un elemento de pórtico:

$$m_l := \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420} \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$T := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se aplica la ecuación para formular la matriz en coordenadas globales.

$$M := T^T \cdot m_l \cdot T$$

Asignación de propiedades y valores de cada elemento en forma vectorial.

$$\rho := \begin{pmatrix} 7850 \\ 7850 \\ 7850 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad L := \begin{pmatrix} 0.431 \\ 0.22 \\ 0.431 \end{pmatrix} \text{ m} \quad \theta := \begin{pmatrix} 90 \cdot \frac{\pi}{180} \\ 0 \cdot \frac{\pi}{180} \\ 270 \cdot \frac{\pi}{180} \end{pmatrix} \text{ Rad}$$

Se expresa la matriz de masa como función de las propiedades y valores.

$$M(\rho, L, \theta)$$

Se evalúa los valores y propiedades en la función $M(\rho, L, \theta)$, para obtener las matrices de masa de cada elemento.

$$M1 := M(\rho_1, L_1, \theta_1)$$

$$M1 = \begin{pmatrix} 0.038 & 0 & -2.303 \times 10^{-3} & 0.013 & 0 & 1.361 \times 10^{-3} \\ 0 & 0.034 & 0 & 0 & 0.017 & 0 \\ -2.303 \times 10^{-3} & 0 & 1.805 \times 10^{-4} & -1.361 \times 10^{-3} & 0 & -1.354 \times 10^{-4} \\ 0.013 & 0 & -1.361 \times 10^{-3} & 0.038 & 0 & 2.303 \times 10^{-3} \\ 0 & 0.017 & 0 & 0 & 0.034 & 0 \\ 1.361 \times 10^{-3} & 0 & -1.354 \times 10^{-4} & 2.303 \times 10^{-3} & 0 & 1.805 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$M2 := M(\rho_2, L_2, \theta_2)$$

$$M2 = \begin{pmatrix} 0.017 & 0 & 0 & 8.678 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.019 & 6 \times 10^{-4} & 0 & 6.695 \times 10^{-3} & -3.546 \times 10^{-4} \\ 0 & 6 \times 10^{-4} & 2.4 \times 10^{-5} & 0 & 3.546 \times 10^{-4} & -1.8 \times 10^{-5} \\ 8.678 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0.017 & 0 & 0 \\ 0 & 6.695 \times 10^{-3} & 3.546 \times 10^{-4} & 0 & 0.019 & -6 \times 10^{-4} \\ 0 & -3.546 \times 10^{-4} & -1.8 \times 10^{-5} & 0 & -6 \times 10^{-4} & 2.4 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$M3 := M(\rho_3, L_3, \theta_3)$$

$$M3 = \begin{pmatrix} 0.038 & 0 & 2.303 \times 10^{-3} & 0.013 & 0 & -1.361 \times 10^{-3} \\ 0 & 0.034 & 0 & 0 & 0.017 & 0 \\ 2.303 \times 10^{-3} & 0 & 1.805 \times 10^{-4} & 1.361 \times 10^{-3} & 0 & -1.354 \times 10^{-4} \\ 0.013 & 0 & 1.361 \times 10^{-3} & 0.038 & 0 & -2.303 \times 10^{-3} \\ 0 & 0.017 & 0 & 0 & 0.034 & 0 \\ -1.361 \times 10^{-3} & 0 & -1.354 \times 10^{-4} & -2.303 \times 10^{-3} & 0 & 1.805 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Se crea una matriz de ceros, para separar los espacios a llenar al realizar el ensamble de matrices. Siendo n el número de elementos finitos.

$$n := 3$$

$$\text{nodos} := 4$$

$$Mt_{1,3\text{-nodos}} := 0 \quad Mt_{3\text{-nodos},1} := 0$$

Mt =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Se realiza una subrutina, para obtener la matriz de ensamble del pórtico.

$$Me := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \begin{cases} \text{for } m \in 1..6 \\ \quad \begin{cases} \text{for } p \in 1..6 \\ \quad Mt_{3\cdot i-3+m, 3\cdot i-3+p} \leftarrow Mt_{3\cdot i-3+m, 3\cdot i-3+p} + \left(M(\rho_i, L_i, \theta_i) \right)_{m,p} \\ \quad Mt \\ \quad Mt \\ \quad Mt \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Matriz de masa consistente del pórtico (Matriz de ensamble).

Me =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.038	0	2.303·10 ⁻³	0.013	0	1.361·10 ⁻³	0	0	0	0	0	0
2	0	0.034	0	0	0.017	0	0	0	0	0	0	0
3	2.303·10 ⁻³	0	1.805·10 ⁻⁴	-1.361·10 ⁻³	0	-1.354·10 ⁻⁴	0	0	0	0	0	0
4	0.013	0	-1.361·10 ⁻³	0.055	0	2.303·10 ⁻³	8.678·10 ⁻³	0	0	0	0	0
5	0	0.017	0	0	0.053	6·10 ⁻⁴	0	6.695·10 ⁻³	-3.546·10 ⁻⁴	0	0	0
6	1.361·10 ⁻³	0	-1.354·10 ⁻⁴	2.303·10 ⁻³	6·10 ⁻⁴	2.045·10 ⁻⁴	0	3.546·10 ⁻⁴	-1.8·10 ⁻⁵	0	0	0
7	0	0	0	8.678·10 ⁻³	0	0	0.055	0	2.303·10 ⁻³	0.013	0	-1.361·10 ⁻³
8	0	0	0	0	6.695·10 ⁻³	3.546·10 ⁻⁴	0	0.053	-6·10 ⁻⁴	0	0.017	0
9	0	0	0	0	-3.546·10 ⁻⁴	-1.8·10 ⁻⁵	2.303·10 ⁻³	-6·10 ⁻⁴	2.045·10 ⁻⁴	1.361·10 ⁻³	0	-1.354·10 ⁻⁴
10	0	0	0	0	0	0	0.013	0	1.361·10 ⁻³	0.038	0	-2.303·10 ⁻³
11	0	0	0	0	0	0	0	0.017	0	0	0.034	0
12	0	0	0	0	0	0	-1.361·10 ⁻³	0	-1.354·10 ⁻⁴	2.303·10 ⁻³	0	1.805·10 ⁻⁴

Aplicación de condiciones en los EMPOTRAMIENTOS

$$\begin{aligned} a1x &:= 0 & a1y &:= 0 & \alpha1 &:= 0 \\ a4x &:= 0 & a4y &:= 0 & \alpha4 &:= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, con la función SUBMATRIX, se anulan las filas y columnas 1,2,3 y 10,11,12 de la matriz de ensamble, obteniendo la matriz de masa consistente a utilizar.

$M_p := \text{submatrix}(M_e, 4, 9, 4, 9)$

$$M_p = \begin{pmatrix} 0.055 & 0 & 2.303 \times 10^{-3} & 8.678 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.053 & 6 \times 10^{-4} & 0 & 6.695 \times 10^{-3} & -3.546 \times 10^{-4} \\ 2.303 \times 10^{-3} & 6 \times 10^{-4} & 2.045 \times 10^{-4} & 0 & 3.546 \times 10^{-4} & -1.8 \times 10^{-5} \\ 8.678 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0.055 & 0 & 2.303 \times 10^{-3} \\ 0 & 6.695 \times 10^{-3} & 3.546 \times 10^{-4} & 0 & 0.053 & -6 \times 10^{-4} \\ 0 & -3.546 \times 10^{-4} & -1.8 \times 10^{-5} & 2.303 \times 10^{-3} & -6 \times 10^{-4} & 2.045 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

En la resolución del sistema de ecuaciones, para conseguir una mayor precisión en los resultados, es importante ocupar los valores de la matriz con una cantidad de 7 dígitos como base, sobre todo en las cantidades altas con valores exponenciales positivos.

Por lo tanto, expandiendo la matriz anterior, se considera la Matriz de Masa Consistente a utilizar (M_p), con un mínimo de 7 dígitos.

$$M_p := \begin{pmatrix} 0.05524504 & 0 & 2.303 \times 10^{-3} & 8.678 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.05334260 & 6 \times 10^{-4} & 0 & 6.695 \times 10^{-3} & -3.546 \times 10^{-4} \\ 2.303 \times 10^{-3} & 6 \times 10^{-4} & 2.045 \times 10^{-4} & 0 & 3.546 \times 10^{-4} & -1.8 \times 10^{-5} \\ 8.678 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0.05524504 & 0 & 2.303 \times 10^{-3} \\ 0 & 6.695 \times 10^{-3} & 3.546 \times 10^{-4} & 0 & 0.05334260 & -6 \times 10^{-4} \\ 0 & -3.546 \times 10^{-4} & -1.8 \times 10^{-5} & 2.303 \times 10^{-3} & -6 \times 10^{-4} & 2.045 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

3.6.2. Matriz de rigidez

MATHCAD PARA LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO PÓRTICO

Propiedades del acero:

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad E := 2 \times 10^{11} \text{ pa} \quad A := 3.015 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

Matriz general de rigidez para un elemento de pórtico:

$$k := \frac{E \cdot I}{L^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{A \cdot L^2}{I} & 0 & 0 & \frac{-A \cdot L^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \cdot L & 0 & -12 & 6 \cdot L \\ 0 & 6 \cdot L & 4 \cdot L^2 & 0 & -6 \cdot L & 2 \cdot L^2 \\ \frac{-A \cdot L^2}{I} & 0 & 0 & \frac{A \cdot L^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 \cdot L & 0 & 12 & -6 \cdot L \\ 0 & 6 \cdot L & 2 \cdot L^2 & 0 & -6 \cdot L & 4 \cdot L^2 \end{pmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$T := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se aplica la ecuación para formular la matriz en coordenadas globales.

$$K := T^T \cdot k \cdot T$$

Asignación de propiedades y valores de cada elemento en forma vectorial.

$$I := \begin{pmatrix} 2.035 \times 10^{-12} \\ 2.035 \times 10^{-12} \\ 2.035 \times 10^{-12} \end{pmatrix} m^4 \quad L := \begin{pmatrix} 0.431 \\ 0.22 \\ 0.431 \end{pmatrix} m \quad \theta := \begin{pmatrix} 90 \cdot \frac{\pi}{180} \\ 0 \cdot \frac{\pi}{180} \\ 270 \cdot \frac{\pi}{180} \end{pmatrix} \text{Rad}$$

Se expresa la matriz de rigidez como función de las propiedades y valores.

$$K(I, L, \theta)$$

Se evalúa los valores y propiedades en la función $K(I, L, \theta)$, para obtener las matrices de rigidez de cada elemento.

$$K1 := K(I_1, L_1, \theta_1)$$

Se realiza una subrutina, para obtener la matriz de ensamble del pórtico.

$$K_e := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \begin{cases} \text{for } m \in 1..6 \\ \quad \begin{cases} \text{for } p \in 1..6 \\ \quad K_{t_{3 \cdot i - 3 + m, 3 \cdot i - 3 + p}} \leftarrow K_{t_{3 \cdot i - 3 + m, 3 \cdot i - 3 + p}} + \left(K(I_i, L_i, \theta_i) \right)_{m,p} \\ \quad K_t \\ \quad K_t \\ K_t \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Matriz de rigidez del pórtico (Matriz de ensamble).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	61.002	8.567·10 ⁻¹⁰	-13.146	-61.002	-8.567·10 ⁻¹⁰	-13.146	0	0	0	0	0	0
2	8.567·10 ⁻¹⁰	1.399·10 ⁷	0	-8.567·10 ⁻¹⁰	-1.399·10 ⁷	0	0	0	0	0	0	0
3	-13.146	0	3.777	13.146	0	1.889	0	0	0	0	0	0
4	-61.002	-8.567·10 ⁻¹⁰	13.146	2.741·10 ⁷	8.567·10 ⁻¹⁰	13.146	-2.741·10 ⁷	0	0	0	0	0
5	-8.567·10 ⁻¹⁰	-1.399·10 ⁷	0	8.567·10 ⁻¹⁰	1.399·10 ⁷	50.455	0	-458.678	50.455	0	0	0
6	-13.146	0	1.889	13.146	50.455	11.177	0	-50.455	3.7	0	0	0
7	0	0	0	-2.741·10 ⁷	0	0	2.741·10 ⁷	2.57·10 ⁻⁹	13.146	-61.002	-2.57·10 ⁻⁹	13.146
8	0	0	0	0	-458.678	-50.455	2.57·10 ⁻⁹	1.399·10 ⁷	-50.455	-2.57·10 ⁻⁹	-1.399·10 ⁷	-2.415·10 ⁻¹⁵
9	0	0	0	0	50.455	3.7	13.146	-50.455	11.177	-13.146	2.415·10 ⁻¹⁵	1.889
10	0	0	0	0	0	0	-61.002	-2.57·10 ⁻⁹	-13.146	61.002	2.57·10 ⁻⁹	-13.146
11	0	0	0	0	0	0	-2.57·10 ⁻⁹	-1.399·10 ⁷	2.415·10 ⁻¹⁵	2.57·10 ⁻⁹	1.399·10 ⁷	2.415·10 ⁻¹⁵
12	0	0	0	0	0	0	13.146	-2.415·10 ⁻¹⁵	1.889	-13.146	2.415·10 ⁻¹⁵	3.777

Aplicación de condiciones en los EMPOTRAMIENTOS

$$\begin{aligned} d1x &:= 0 & d1y &:= 0 & \phi1 &:= 0 \\ d4x &:= 0 & d4y &:= 0 & \phi4 &:= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, con la función SUBMATRIX, se anulan las filas y columnas 1,2,3 y 10,11,12 de la matriz de ensamble, obteniendo la matriz de rigidez a utilizar.

$$K_p := \text{submatrix}(K_e, 4, 9, 4, 9)$$

$$K_p = \begin{pmatrix} 2.741 \times 10^7 & 8.567 \times 10^{-10} & 13.146 & -2.741 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 8.567 \times 10^{-10} & 1.399 \times 10^7 & 50.455 & 0 & -458.678 & 50.455 \\ 13.146 & 50.455 & 11.177 & 0 & -50.455 & 3.7 \\ -2.741 \times 10^7 & 0 & 0 & 2.741 \times 10^7 & 2.57 \times 10^{-9} & 13.146 \\ 0 & -458.678 & -50.455 & 2.57 \times 10^{-9} & 1.399 \times 10^7 & -50.455 \\ 0 & 50.455 & 3.7 & 13.146 & -50.455 & 11.177 \end{pmatrix}$$

En la resolución del sistema de ecuaciones, para conseguir una mayor precisión en los resultados, es importante ocupar los valores de la matriz con una cantidad de 7 dígitos como base, sobre todo en las cantidades altas con valores exponenciales positivos.

Por lo tanto, expandiendo la matriz anterior, se considera la Matriz de Rigidez a utilizar (K_p), con un mínimo de 8 dígitos.

$$K_p := \begin{pmatrix} 2.7409151 \times 10^7 & 8.567 \times 10^{-10} & 13.14592406 & -2.7409090 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 8.567 \times 10^{-10} & 1.3991177 \times 10^7 & 50.45454545 & 0 & -458.67768595 & 50.45454545 \\ 13.14592406 & 50.45454545 & 11.17726218 & 0 & -50.45454545 & 3.7 \\ -2.7409090 \times 10^7 & 0 & 0 & 2.7409151 \times 10^7 & 2.57 \times 10^{-9} & 13.14592406 \\ 0 & -458.67768595 & -50.45454545 & 2.57 \times 10^{-9} & 1.3991177 \times 10^7 & -50.45454545 \\ 0 & 50.45454545 & 3.7 & 13.14592406 & -50.45454545 & 11.17726218 \end{pmatrix}$$

3.6.3. Matriz de amortiguamiento

MATHCAD PARA LA MATRIZ DE MASA DEL ELEMENTO PÓRTICO

ORIGIN:= 1

Matriz general de amortiguación para el elemento amortiguador:

$$c_l := \begin{pmatrix} ca & 0 & 0 & -ca & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ca & 0 & 0 & ca & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$T := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se aplica la ecuación para formular la matriz en coordenadas globales.

$$C := T^T \cdot c_l \cdot T$$

$$C \text{ simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} ca \cdot \cos(\theta)^2 & \frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & 0 & ca \cdot (\sin(\theta)^2 - 1) & -\frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & 0 \\ \frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & ca \cdot \sin(\theta)^2 & 0 & -\frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & ca \cdot (\cos(\theta)^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ca \cdot (\sin(\theta)^2 - 1) & -\frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & 0 & ca \cdot \cos(\theta)^2 & \frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & 0 \\ -\frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & ca \cdot (\cos(\theta)^2 - 1) & 0 & \frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & ca \cdot \sin(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Asignación de propiedades del amortiguador.

$$\theta_4 := 45 \cdot \frac{\pi}{180} \quad ca_4 := 34 \frac{N \cdot s}{m}$$

Se expresa la matriz de amortiguamiento como función de las propiedades.

$$C(ca, \theta) := \begin{bmatrix} ca \cdot \cos(\theta)^2 & \frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & 0 & ca \cdot (\sin(\theta)^2 - 1) & -\frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & 0 \\ \frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & ca \cdot \sin(\theta)^2 & 0 & -\frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & ca \cdot (\cos(\theta)^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ca \cdot (\sin(\theta)^2 - 1) & -\frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & 0 & ca \cdot \cos(\theta)^2 & \frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & 0 \\ -\frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & ca \cdot (\cos(\theta)^2 - 1) & 0 & \frac{ca \cdot \sin(2 \cdot \theta)}{2} & ca \cdot \sin(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se evalúa las propiedades en la función $C(ca, \theta)$, para obtener la matriz de amortiguamiento del elemento amortiguador.

$$C(ca_4, \theta_4) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 17 & 17 & 0 & -17 & -17 & 0 \\ 17 & 17 & 0 & -17 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & -17 & 0 & 17 & 17 & 0 \\ -17 & -17 & 0 & 17 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

El ensamble se lo realiza llenado en una matriz de ceros (misma dimensión que la de masa y rigidez 12x12), los valores correspondientes a la matriz del elemento amortiguador, de acuerdo a las posiciones que estos ocupan.

Matriz de amortiguamiento del pórtico (Matriz de ensamble).

$$C_e := \begin{pmatrix} 17 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17 & -17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17 & -17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & -17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & -17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicación de condiciones en los EMPOTRAMIENTOS

$$\begin{aligned} v_{1x} &:= 0 & v_{1y} &:= 0 & \omega_1 &:= 0 \\ v_{4x} &:= 0 & v_{4y} &:= 0 & \omega_4 &:= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, con la función SUBMATRIX, se anulan las filas y columnas 1,2,3 y 10,11,12 de la matriz de ensamble, obteniendo la matriz de amortiguamiento a utilizar.

$$C_p := \text{submatrix}(C_e, 4, 9, 4, 9)$$

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, luego de realizar el desarrollo, en la ecuación que representa el movimiento vibratorio de la estructura pórtico, planteada anteriormente de forma matricial:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = F(t) \quad (3.54)$$

Se tienen los términos correspondientes a las matrices, definidas como:

$$M_p := \begin{pmatrix} 0.05524504 & 0 & 2.303 \times 10^{-3} & 8.678 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.05334260 & 6 \times 10^{-4} & 0 & 6.695 \times 10^{-3} & -3.546 \times 10^{-4} \\ 2.303 \times 10^{-3} & 6 \times 10^{-4} & 2.045 \times 10^{-4} & 0 & 3.546 \times 10^{-4} & -1.8 \times 10^{-5} \\ 8.678 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0.05524504 & 0 & 2.303 \times 10^{-3} \\ 0 & 6.695 \times 10^{-3} & 3.546 \times 10^{-4} & 0 & 0.05334260 & -6 \times 10^{-4} \\ 0 & -3.546 \times 10^{-4} & -1.8 \times 10^{-5} & 2.303 \times 10^{-3} & -6 \times 10^{-4} & 2.045 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_p := \begin{pmatrix} 2.74091518 \times 10^7 & 8.567 \times 10^{-10} & 13.14592406 & -2.74090908 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 8.567 \times 10^{-10} & 1.39911778 \times 10^7 & 50.45454545 & 0 & -458.67768595 & 50.45454545 \\ 13.14592406 & 50.45454545 & 11.17726218 & 0 & -50.45454545 & 3.7 \\ -2.74090908 \times 10^7 & 0 & 0 & 2.74091518 \times 10^7 & 2.57 \times 10^{-9} & 13.14592406 \\ 0 & -458.67768595 & -50.45454545 & 2.57 \times 10^{-9} & 1.39911778 \times 10^7 & -50.45454545 \\ 0 & 50.45454545 & 3.7 & 13.14592406 & -50.45454545 & 11.17726218 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son las que determinan el sistema de ecuaciones a resolver que, para el caso de la matriz de amortiguamiento es incluida dependiendo del tipo de movimiento a analizar, lo mismo que sucede con el término correspondiente a la fuerza.

CAPÍTULO IV

SOLUCIÓN DEL SISTEMA, ANÁLISIS Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS

Planteado el sistema que define el movimiento vibratorio de la estructura, se tienen ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, debido a las características propias de este tipo de movimiento, que implica términos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones; esto hace que se vuelva de una complejidad mayor resolver el sistema, por lo tanto, se torna una tarea importante el buscar y utilizar otras alternativas de solución al problema.

Para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones, es necesario recurrir a herramientas matemáticas como los métodos numéricos, que permitan encontrar las soluciones de manera iterativa, que mediante graficas caractericen las variables inmersas en el movimiento; por ende, es importante utilizar el método más adecuado con el que se asevere una buena precisión en los resultados que se ajusten lo más cercano a la realidad.

Dentro del análisis matemático existen varios métodos numéricos con los que se puede resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, entre los cuales está el método de Crank Nicholson, que por la formulación que plantea es uno de los que asegura una mejor precisión, y a su vez se adapta de buena manera a lo que se pretende resolver en esta modelación.

4.1. Método de Crank-Nicolson (o Trapezoidal)

El Método de Crank Nicholson junto con el método de Euler son formulaciones numéricas de aproximación que se crearon con el fin de dar solución al problema de Cauchy, asociado a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden expresadas como:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Donde $u(t_0)$ es la condición inicial evaluada en el tiempo t_0 .
Las soluciones al sistema se expresan mediante la integral:

$$u(t) - u_0 = \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau \quad (4.2)$$

El método de Cranck Nicolson en comparación al de Euler es el que presenta un mejor planteamiento numérico para resolver el problema de Cauchy. Se lo obtiene aproximando la integral del lado derecho de la ecuación (4.2) por la regla de cuadratura trapezoidal (Regla del trapecio).

Este método viene expresado de forma general como:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f_n + f_{n+1}] \quad (4.3)$$

El término n representa la variable que se evalúa en cada iteración, que para el problema de Cauchy es el tiempo t . Redefiniendo la expresión anterior:

$$u_{t+1} = u_t + \frac{h}{2} [f_t + f_{t+1}] \quad (4.4)$$

El término h , se define como el incremento que se da a la variable que se evalúa en cada iteración. Se escribe como:

$$h = \frac{t_{\text{máx}} - t_{\text{min}}}{m} \quad (4.5)$$

Donde m es el número de divisiones que se le da al intervalo de tiempo.

4.1.1. Aplicación del método de Cranck Nicolson al sistema a resolver

En el sistema de ecuaciones planteado para la modelación del pórtico, se tiene la ecuación diferencial expresada de forma matricial general:

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [C]\{\dot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = F(t)$$

o

$$M \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + C \frac{dU(t)}{dt} + KU(t) = F(t) \quad (4.6)$$

Para aplicar el método de Cranck Nicolson en primer lugar se necesita bajar el orden a la ecuación. Para transformar el problema de segundo orden a uno de primer orden se usa la expresión de la velocidad $V = \frac{dU(t)}{dt}$, quedando un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 M \frac{dV(t)}{dt} + CV(t) + KU(t) &= F(t) \\
 \frac{dU(t)}{dt} - V(t) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

o

$$\begin{aligned}
 MV'(t) + CV(t) + KU(t) &= F(t) \\
 U'(t) - V(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Al expresar cada ecuación del sistema haciendo un símil con el problema de Cauchy, se tiene:

$$\begin{cases}
 MV'(t) = F(t) - CV(t) - KU(t) \\
 U'(t) = V(t)
 \end{cases}
 \tag{4.8}$$

Por definición de la derivada:

$$\begin{aligned}
 V'(t) &= \frac{V_{t+1} - V_t}{h} \\
 U'(t) &= \frac{U_{t+1} - U_t}{h}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Entonces:

$$\begin{cases}
 M \left(\frac{V_{t+1} - V_t}{h} \right) = F(t) - CV(t) - KU(t) \\
 \frac{U_{t+1} - U_t}{h} = V(t)
 \end{cases}
 \tag{4.10}$$

Para fines de desarrollo del método y evitar confusiones, solo se ocupará la letra mayúscula que representa los términos teniendo en cuenta que son funciones del tiempo, así: $U(t) = U$; $V(t) = V$ y $F(t) = F$.

Al despejar la expresión de Cranck Nicolson a fin de hacer una similitud se tiene:

$$\frac{u_{t+1} - u_t}{h} = \frac{1}{2} [f_t + f_{t+1}]
 \tag{4.11}$$

Aplicando la expresión (4.11), a las ecuaciones del sistema (4.10):

$$M \left(\frac{V_{t+1} - V_t}{h} \right) = \frac{1}{2} [F - CV_t - KU_t + F - CV_{t+1} - KU_{t+1}]$$

$$\frac{U_{t+1} - U_t}{h} = \frac{1}{2} [V_t + V_{t+1}]$$
(4.12)

Finalmente despejando, se tiene cada ecuación expresada en la forma del método de Cranck Nicolson, formando un sistema de dos ecuaciones:

$$MV_{t+1} = MV_t + \frac{h}{2} [F - CV_t - KU_t + F - CV_{t+1} - KU_{t+1}]$$

$$U_{t+1} = U_t + \frac{h}{2} [V_t + V_{t+1}]$$
(4.13)

Este sistema se aplica de forma iterativa para obtener las soluciones de cada ecuación diferencial. Para ello es necesario plantearlo de forma matricial, como sigue:

Separando valores en cada ecuación

$$MV_{t+1} = MV_t + \frac{h}{2} [F - CV_t - KU_t] + \frac{h}{2} [F - CV_{t+1} - KU_{t+1}]$$

$$U_{t+1} = U_t + \frac{h}{2} V_t + \frac{h}{2} V_{t+1}$$
(4.14)

Donde se denomina:

$$A = MV_t + \frac{h}{2} [F - CV_t - KU_t]$$

y

(4.15)

$$B = U_t + \frac{h}{2} V_t$$

Que son matrices de 6x1, formadas por los valores obtenidos de la anterior iteración, o a su vez al comienzo por los valores iniciales evaluados en t_0 .

Las ecuaciones quedan expresadas como:

$$MV_{t+1} = A + \frac{h}{2}[F - CV_{t+1} - KU_{t+1}] \quad (4.16)$$

$$U_{t+1} = B + \frac{h}{2}V_{t+1}$$

Planteando este sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} MV_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{h}{2}F \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -C & -K \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} MV_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -C & -K \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} MV_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -C & -K \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -C & -K \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -C & -K \\ I & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} V_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde se denomina a la matriz de 12x12:

$$\phi = \left[\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -C & -K \\ I & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Siendo:

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} -C & -K \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Para quedar finalmente expresado como:

$$\begin{pmatrix} V_{t+1} \\ U_{t+1} \end{pmatrix} = \phi^{-1} * \left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (4.19)$$

Esta expresión contiene las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales, que se obtienen al realizar el proceso de forma iterativa. Para ello se utiliza el software Matlab, con el fin de ejecutar el proceso planteado y obtener las soluciones al modelamiento del sistema.

4.1.2. Implementación del código en Matlab

Una vez obtenida la deducción matricial que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, se la traslada al lenguaje de programación mediante la codificación de un programa hecho en Matlab, tomando en cuenta las condiciones iniciales en las que se considera que el sistema parte del reposo. Es decir que los vectores de movimiento en condición inicial son iguales a cero: $U_0 = 0$, $V_0 = 0$

La codificación del programa en Matlab planteada de forma general, queda de la siguiente manera:

```

%%Programa para Resolución del sistema de EDOS de segundo orden:
MU'' + CU' + KU = F
%%Método de Cranck-Nicolson
%Pórtico - Tres elementos finitos - 4 nodos
clear all
t_max= ; %Definir el tiempo máximo
t_min= ; %Definir el tiempo mínimo
n= ; %Definir el número de divisiones del intervalo de tiempo
h=(t_max-t_min)/n;
V=sparse(6,n);
U=sparse(6,n);
t=sparse(n,1);
t(1)=0;
V(:,1)=sparse(6,1);
U(:,1)=sparse(6,1);
%Definir las matrices
M=[ ];
K=[ ];
C=[ ];
%Definir el vector fuerza, dependiendo el caso
F=[ ];
for i=2:n
    t(i)=t(i-1)+h;
    A=M*V(:,i-1)+(h/2)*(F-C*V(:,i-1)-K*U(:,i-1));
    B=U(:,i-1)+(h/2)*(V(:,i-1));
    Phi1=[M sparse(6,6);sparse(6,6) speye(6,6)];
    Phi2=[-C -K; speye(6,6) sparse(6,6)];
    Phi= Phi1-(h/2)*(Phi2);
    Vec1=[A;B];
    Vec2=[F; sparse(6,1)];
    R=Phi\(Vec1+ (h/2)* Vec2);
    V(:,i)=R(1:6);
    U(:,i)=R(7:12);
end

```

Al final de la programación se tiene el vector solución R , al cual se subdivide sus valores, expresándolos en los vectores de desplazamiento U y velocidad V .

Luego de iniciar el programa, en la pantalla principal (Command Window) se procede a ejecutar la acción a realizar, que, para el caso de las soluciones, lo que se hace es mandar a graficar toda una fila del vector correspondiente de desplazamiento o velocidad, dependiendo del grado de libertad del que se requiera obtener la solución. Es decir, en los vectores solución las filas representan cada uno de los grados de libertad que se tiene, que para este caso en el análisis hecho previamente son seis, debido a que los grados de libertad en los nodos 1 y 4 se anulan por el empotramiento.

4.2. Solución al sistema de ecuaciones

En primer lugar, antes de dar solución al sistema de ecuaciones obtenido y aplicar el programa realizado a la modelación del pórtico, se debe completar todos los términos de la ecuación matricial, para lo cual se debe plantear el vector fuerza, el mismo que se lo determina dependiendo del tipo de vibración a estudiar. Para estos efectos se analiza los dos tipos de vibraciones, libre y forzada, ambas para los casos de sistemas sin amortiguamiento y con amortiguamiento.

Al resolver los diferentes sistemas que se tienen de acuerdo a cada tipo de movimiento con las herramientas implementadas anteriormente, se pueden obtener las soluciones correspondientes a los desplazamientos, velocidades y aceleraciones que caracterizan un sistema vibratorio, en cualquier nodo de la estructura. Sin embargo, para fines didácticos de análisis y una mejor comprensión en los resultados, solo se obtendrán las soluciones correspondientes los desplazamientos de cada grado de libertad en los nodos.

4.2.1. Solución de sistemas en vibración libre - Fuerza Impulso

Planteamiento del vector fuerza

Para este tipo de movimiento, el vector fuerza debe ser aplicado solo para dar inicio al movimiento (Impulso), y luego desaparecer durante el movimiento, es decir ser un valor igual a cero. Para esto se plantea en dos instancias; en la primera se propone la aplicación de una fuerza de 500 N para comenzar el

movimiento expresada en forma de vector, que es una matriz de 6x1. Esta fuerza se la ubica en el sentido horizontal positivo del pórtico en el nodo número 3, con el fin de inducir el mayor desplazamiento en el sentido del eje x. En la segunda instancia el vector toma el valor de cero durante el resto movimiento.

Los vectores de fuerza para ambas instancias vienen determinados de la siguiente manera:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una vez definidos los vectores de fuerza para este movimiento, se completan todos los términos para aplicar el programa de solución al sistema en Matlab; los cuales son considerados en una sentencia de condición *If*, para ubicarlas en las dos instancias según corresponda.

Para analizar y comparar las soluciones obtenidas en los casos de sistemas no amortiguados y amortiguados, se plantea la solución en el intervalo de cero a dos segundos con un número de subdivisiones $n=2000$, a fin de obtener la evaluación iterativa con un incremento de 0.001s.

4.2.1.1. Sistema sin amortiguamiento

- Programa:

```

%%Programa para Resolución del sistema de EDOS de segundo orden:
MU'' + CU' + KU = F
%%Método de Cranck-Nicolson
%Tres elementos finitos - 4 nodos
%Vibración Libre - Fuerza Impulso - Sin Amortiguamiento
clear all
t_max=2;
t_min=0;
n=2000;
h=(t_max-t_min)/n;
V=sparse(6,n);
U=sparse(6,n);
%t=sparse(n,1);
t(1)=0;
V(:,1)=sparse(6,1);
U(:,1)=sparse(6,1);

M=[0.05524504 0 2.303e-3 8.678e-3 0 0; 0 0.05334260 6e-4 0 6.695e-
3 -3.546e-4; 2.303e-3 6e-4 2.045e-4 0 3.546e-4 -1.8e-5; 8.678e-3 0
0 0.05524504 0 2.303e-3; 0 6.695e-3 3.546e-4 0 0.05334260 -6e-4; 0
-3.546e-4 -1.8e-5 2.303e-3 -6e-4 2.045e-4];

```

```
K=[2.74091519e7 8.567e-10 13.14592406 -2.74090909e7 0 0; 8.567e-10
1.39911779e7 50.45454545 0 -458.67768595 50.45454545; 13.14592406
50.45454545 11.17726218 0 -50.45454545 3.7; -2.74090909e7 0 0
2.74091519e7 2.57e-9 13.14592406; 0 -458.67768595 -50.45454545
2.57e-9 1.39911779e7 -50.45454545; 0 50.45454545 3.7 13.14592406 -
50.45454545 11.17726218];
```

```
C=sparse(6,6);
```

```
for i=2:n
    t(i)=t(i-1)+h;

    if i==2 %o puedo poner t(i)==0.001
        F=[0; 0; 0; 500; 0; 0];
    else
        F=[0; 0; 0; 0; 0; 0];
    end

    A=M*V(:,i-1)+(h/2)*(F-C*V(:,i-1)-K*U(:,i-1));
    B=U(:,i-1)+(h/2)*V(:,i-1);
    Phi1=[M sparse(6,6);sparse(6,6) speye(6,6)];
    Phi2=[-C -K; speye(6,6) sparse(6,6)];
    Phi= Phi1-(h/2)*(Phi2);
    Vec1=[A;B];
    Vec2=[F; sparse(6,1)];
    R=Phi\((Vec1+ (h/2)* Vec2);
    V(:,i)=R(1:6);
    U(:,i)=R(7:12);
End
```

- Resultados:

Nodo2:

```
>> Sistema_EDOS_Fimpulso_SinAmortiguamiento
>> plot(t,U(1,:))
```

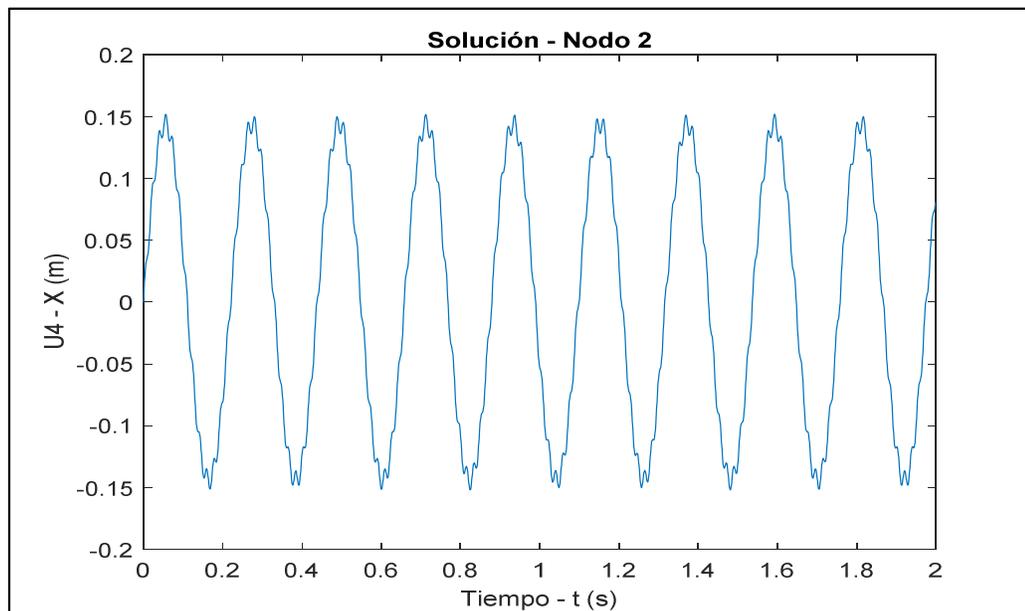


Figura 31 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(2,:))
```

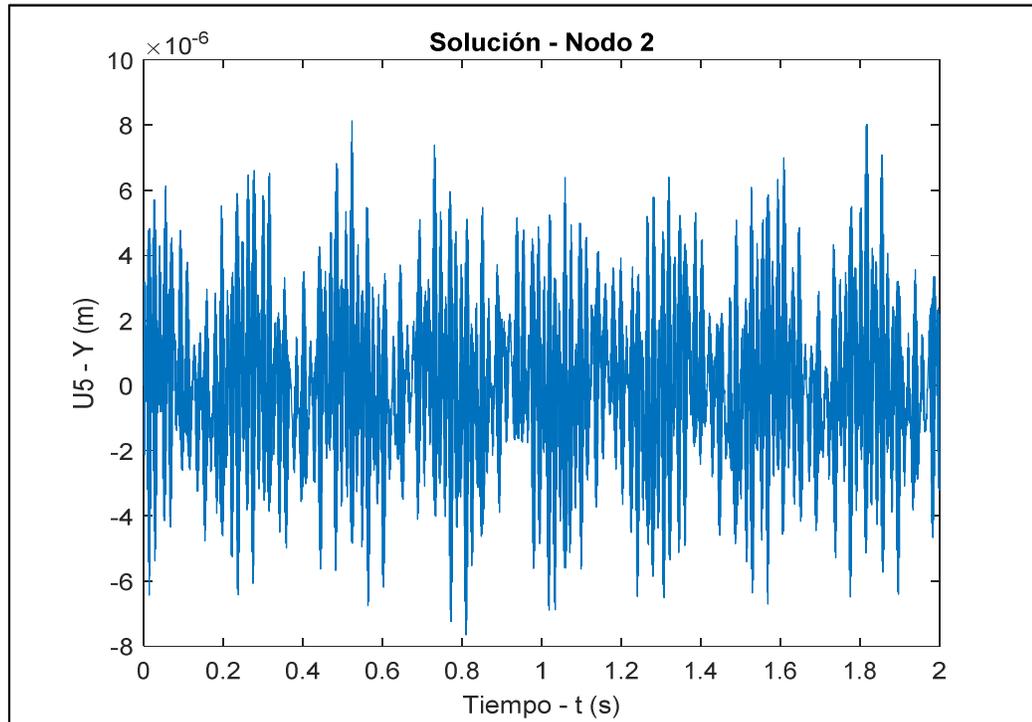


Figura 32 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(3,:))
```

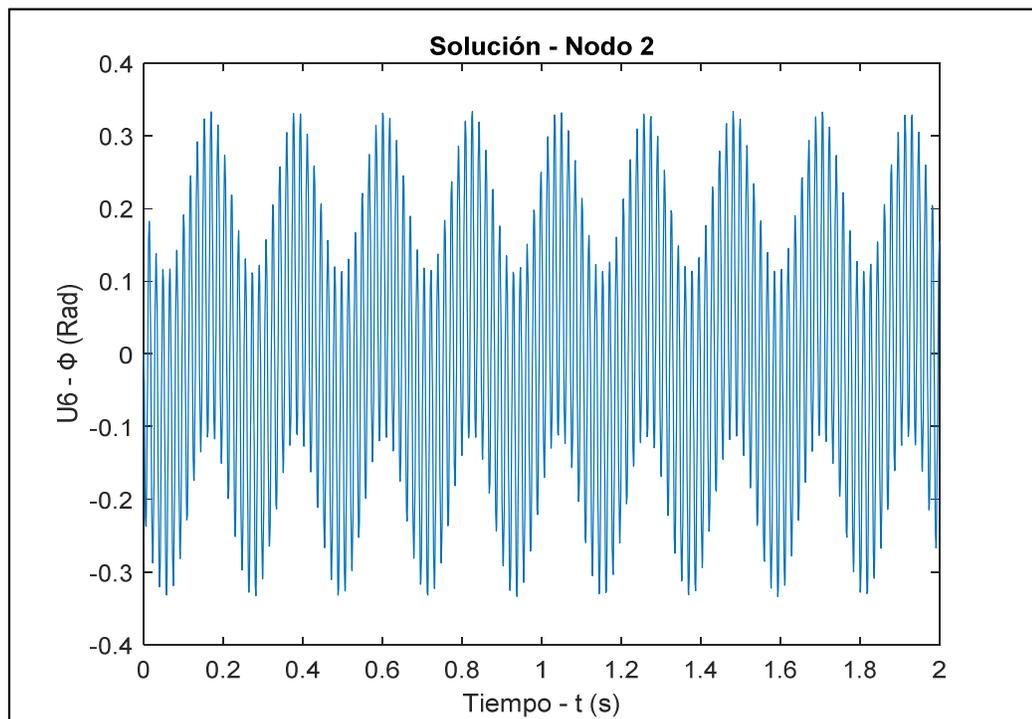


Figura 33 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo

Nodo 3:

```
>> plot(t,U(4,:))
```

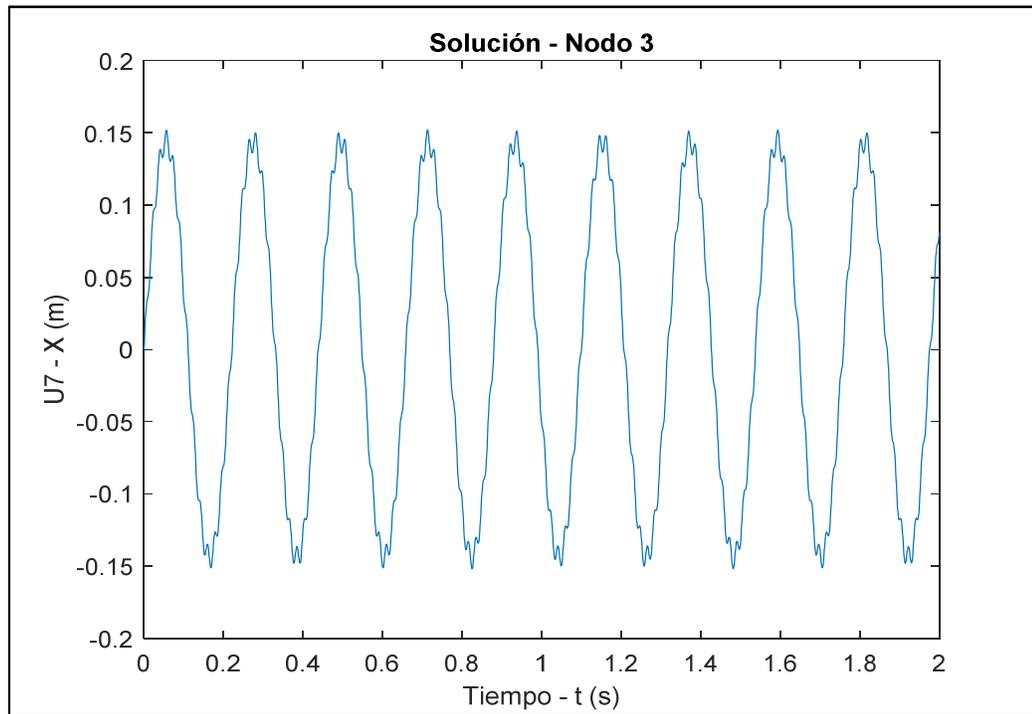


Figura 34 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(5,:))
```

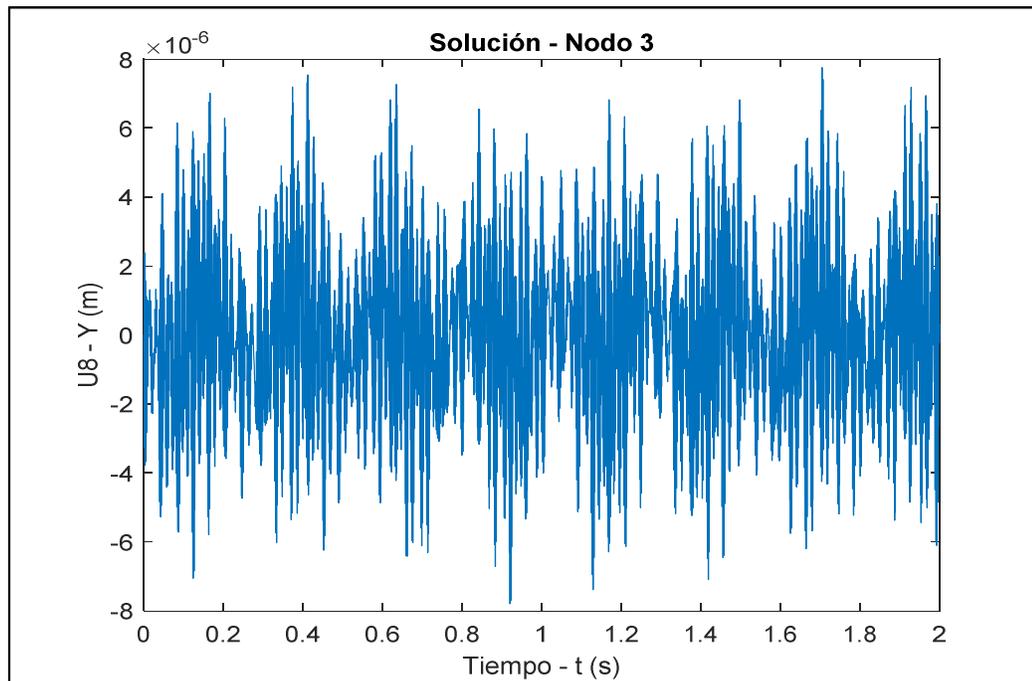


Figura 35 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(6,:))
```

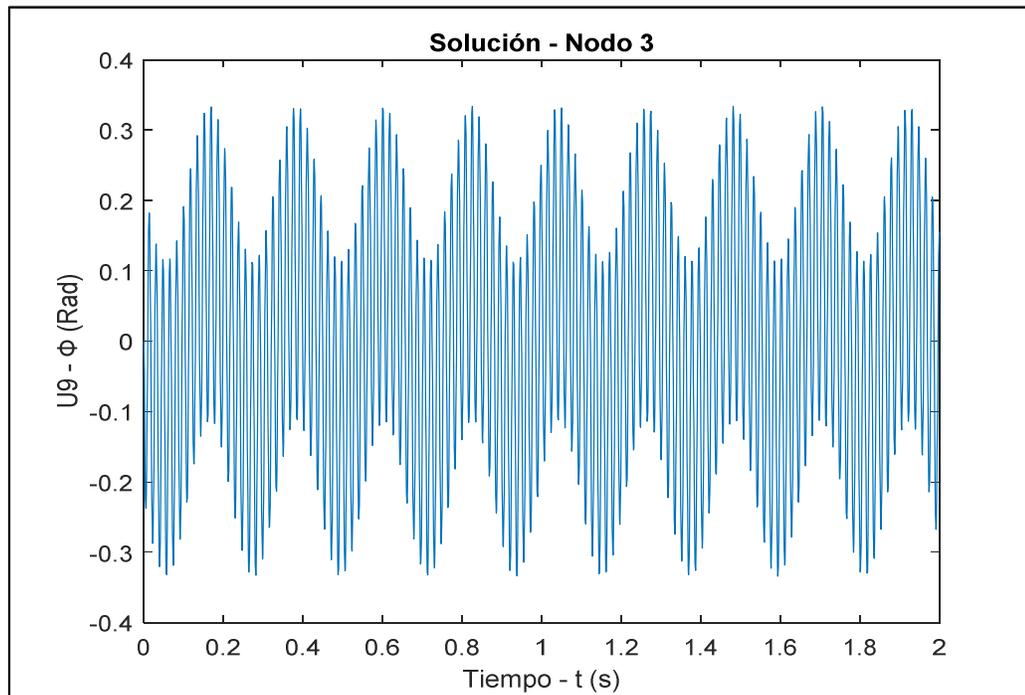


Figura 36 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo

4.2.1.2. Sistema con amortiguamiento viscoso

- Programa:

```
%Programa para Resolución del sistema de EDOS de segundo orden:
MU'' + CU' + KU = F
%Método de Cranck-Nicolson
%Tres elementos finitos - 4 nodos
%Vibración Libre - Fuerza Impulso - Con Amortiguamiento
clear all
t_max=2;
t_min=0;
n=1000;
h=(t_max-t_min)/n;
V=sparse(6,n);
U=sparse(6,n);
%t=sparse(n,1);
t(1)=0;
V(:,1)=sparse(6,1);
U(:,1)=sparse(6,1);

M=[0.05524504 0 2.303e-3 8.678e-3 0 0; 0 0.05334260 6e-4 0 6.695e-
3 -3.546e-4; 2.303e-3 6e-4 2.045e-4 0 3.546e-4 -1.8e-5; 8.678e-3 0
0 0.05524504 0 2.303e-3; 0 6.695e-3 3.546e-4 0 0.05334260 -6e-4; 0
-3.546e-4 -1.8e-5 2.303e-3 -6e-4 2.045e-4];

K=[2.74091519e7 8.567e-10 13.14592406 -2.74090909e7 0 0; 8.567e-10
1.39911779e7 50.45454545 0 -458.67768595 50.45454545; 13.14592406
50.45454545 11.17726218 0 -50.45454545 3.7; -2.74090909e7 0 0
2.74091519e7 2.57e-9 13.14592406; 0 -458.67768595 -50.45454545
```

```

2.57e-9 1.39911779e7 -50.45454545; 0 50.45454545 3.7 13.14592406 -
50.45454545 11.17726218];
C=sparse(6,6);
C(4,4)=17;
C(4,5)=17;
C(5,4)=17;
C(5,5)=17;

for i=2:n
    t(i)=t(i-1)+h;

    if i==2 %o puedo poner t(i)==0.001
        F=[0; 0; 0; 500; 0; 0];
    else
        F=[0; 0; 0; 0; 0; 0];
    end

    A=M*V(:,i-1)+(h/2)*(F-C*V(:,i-1)-K*U(:,i-1));
    B=U(:,i-1)+(h/2)*(V(:,i-1));
    Phi1=[M sparse(6,6);sparse(6,6) speye(6,6)];
    Phi2=[-C -K; speye(6,6) sparse(6,6)];
    Phi= Phi1-(h/2)*(Phi2);
    Vec1=[A;B];
    Vec2=[F; sparse(6,1)];
    R=Phi\(Vec1+ (h/2)* Vec2);
    V(:,i)=R(1:6);
    U(:,i)=R(7:12);
end

```

- Resultados:

Nodo 2:

```

>> Sistema_EDOS_Fimpulso_ConAmortiguamiento
>> plot(t,U(1,:))

```

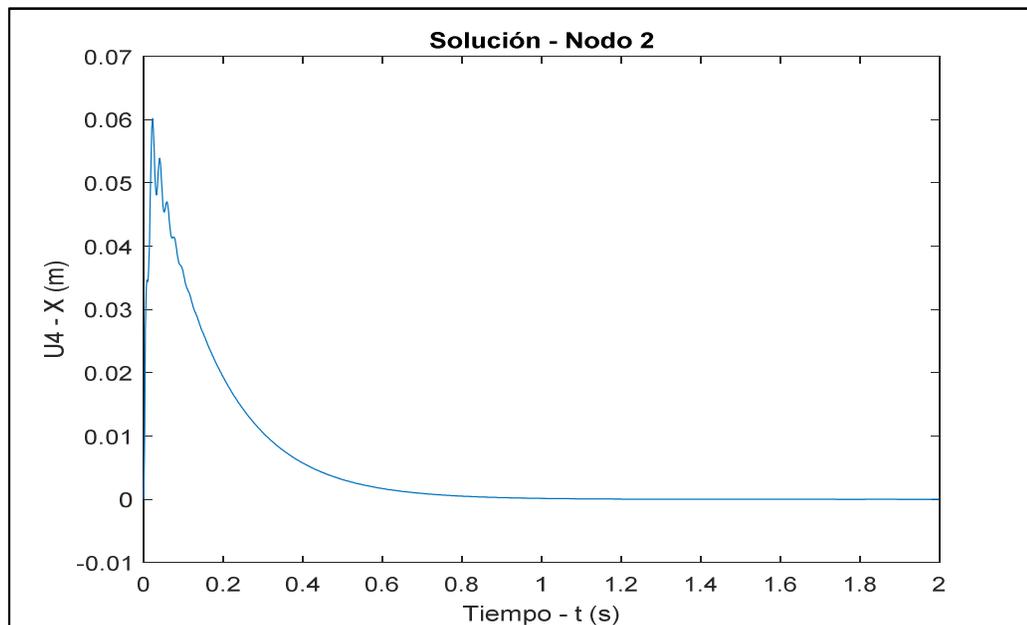


Figura 37 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(2,:))
```

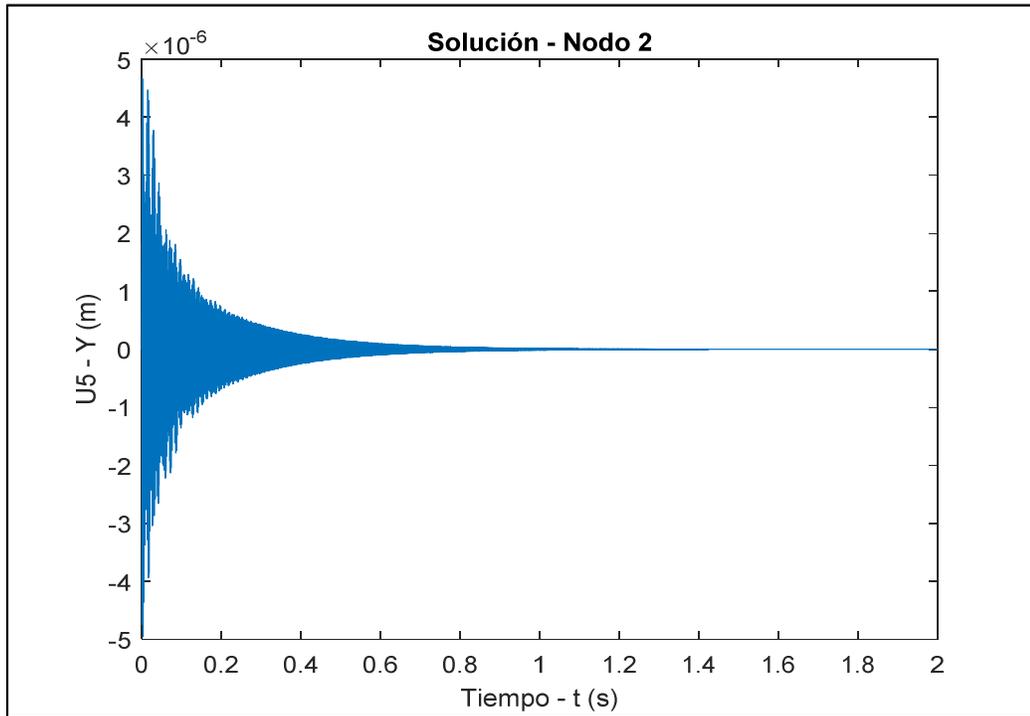


Figura 38 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(3,:))
```

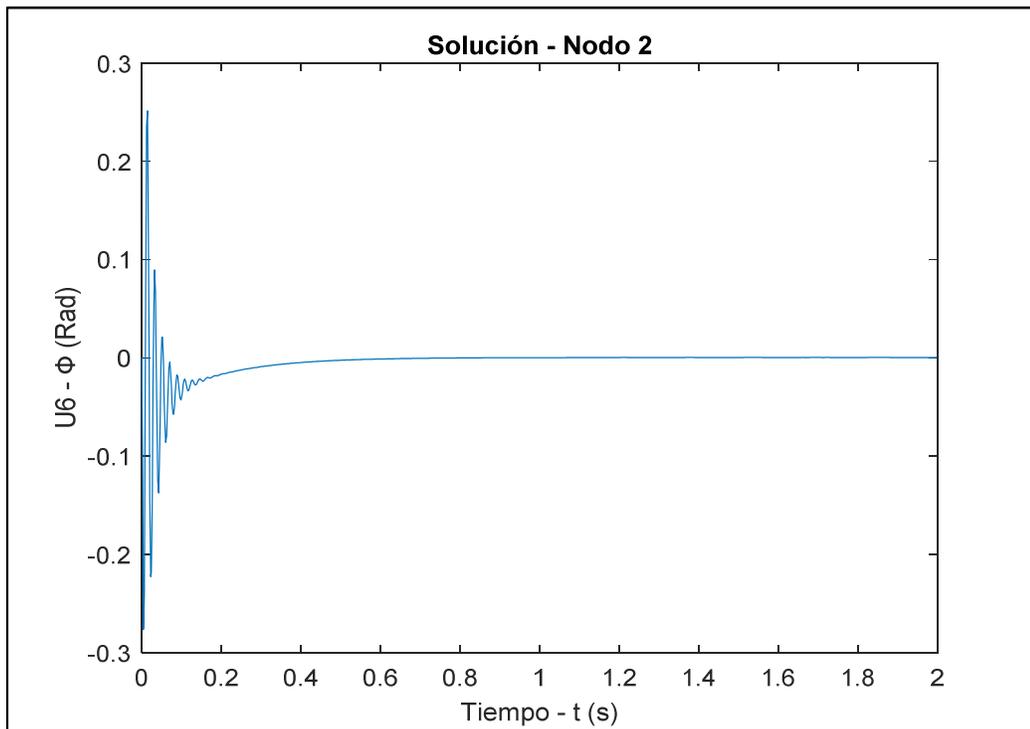


Figura 39 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo

Nodo 3:

```
>> plot(t,U(4,:))
```

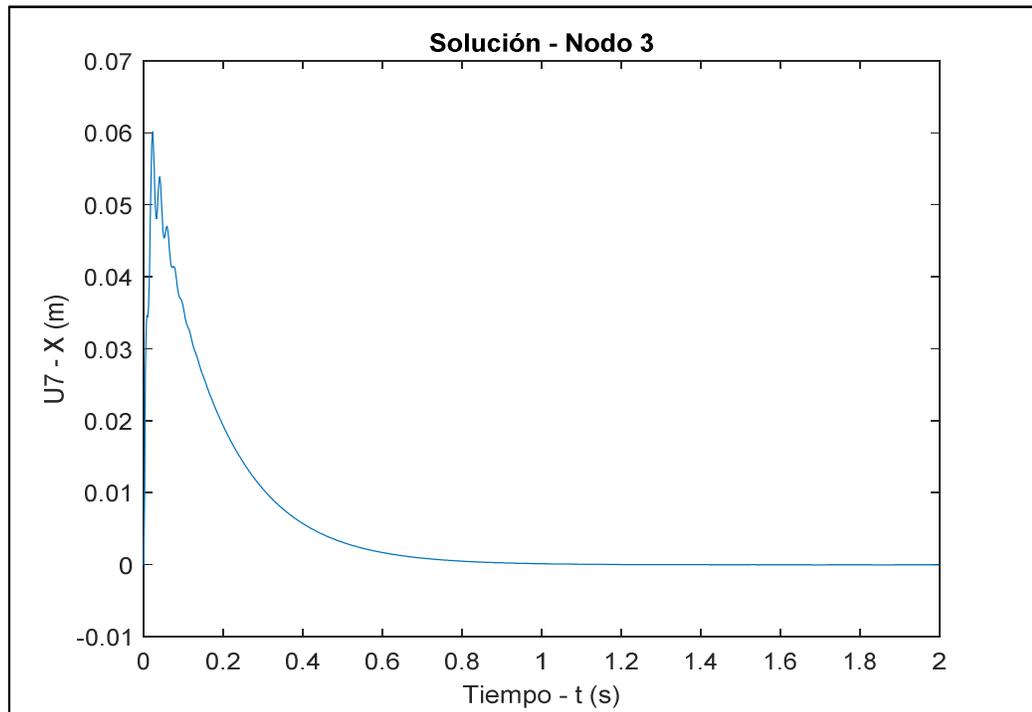


Figura 40 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(5,:))
```

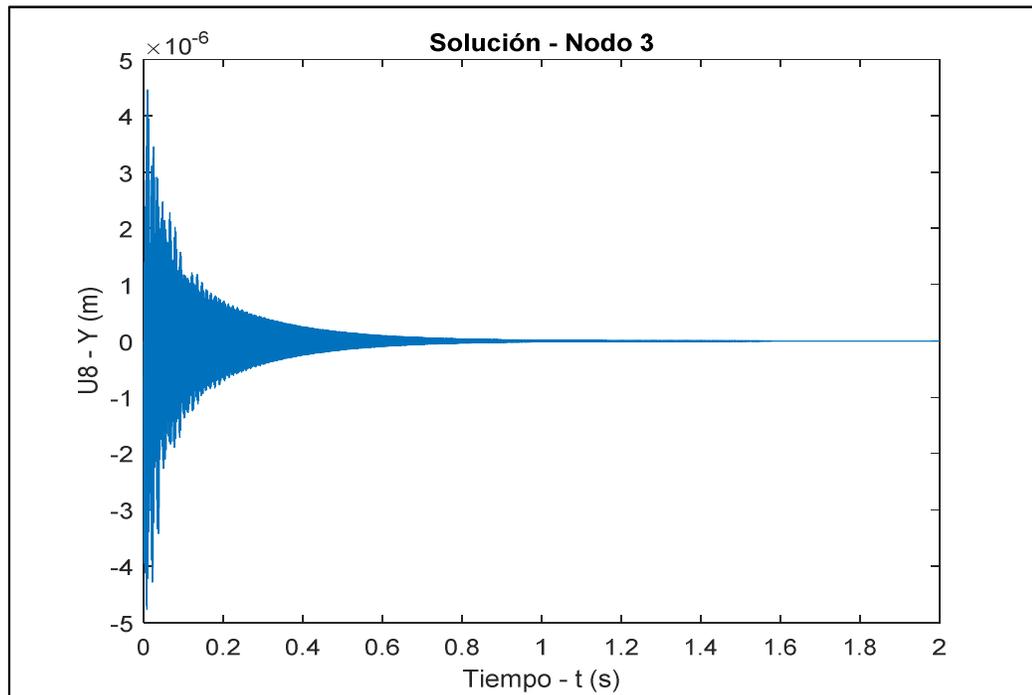


Figura 41 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(6,:))
```

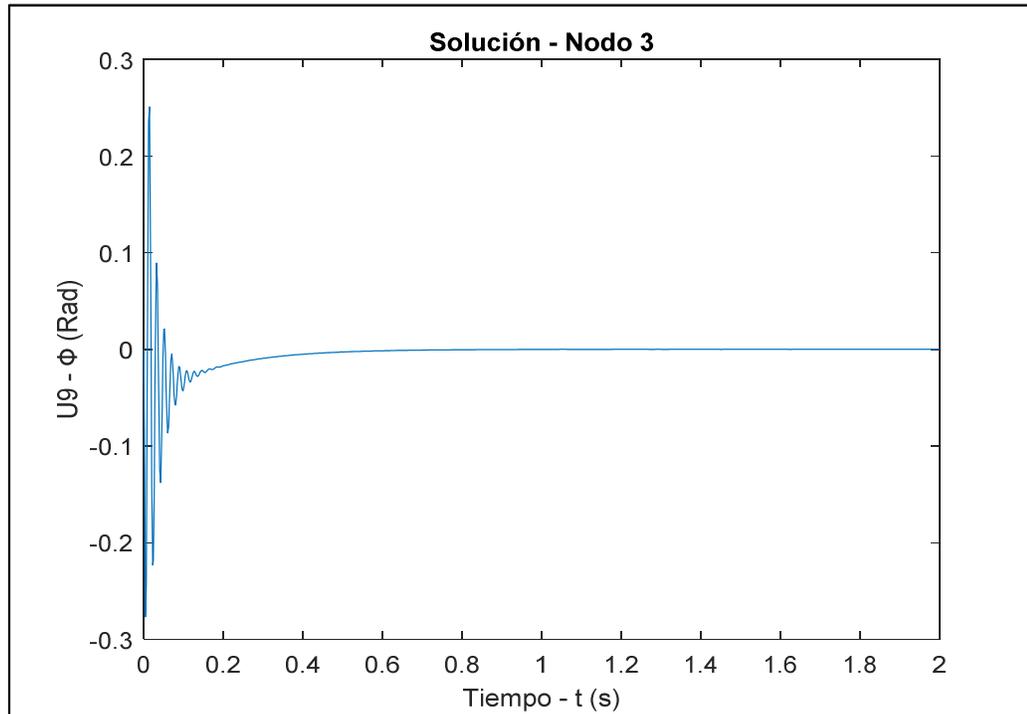


Figura 42 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo

4.2.1.3. Análisis

Al analizar las soluciones del movimiento en vibración libre, inducido por una fuerza de impulso, se puede observar que el amortiguador brinda un aporte considerable a la estructura del pórtico, atenuando en gran parte los desplazamientos que se generan en los nodos 2 y 3, donde se considera el movimiento más crítico. Por lo tanto, las soluciones gráficas para el caso amortiguado en todos los grados de libertad, muestran una disminución en su amplitud de forma considerable, en comparación al caso sin amortiguamiento.

Esto se puede verificar, analizando el movimiento horizontal del pórtico en el sentido del eje x donde se provoca el mayor desplazamiento al aplicar la fuerza de impulso. Entonces al comparar las soluciones tanto del caso amortiguado como no amortiguado, se observa claramente que la vibración es atenuada por el elemento amortiguador en un 100%, a tal punto que el movimiento desciende rápidamente hasta detenerse sobre la línea de referencia o de equilibrio, mientras que, en el caso no amortiguado, en la gráfica se visualiza que la vibración continúa con la misma amplitud, como es característico en este tipo de movimiento.

4.2.2. Solución de sistemas en vibración forzada – Fuerza Armónica

Planteamiento vector fuerza

El vector fuerza, como se conoce es una matriz de 6x1, en el cual dependiendo de la dirección o el grado de libertad se aplicará la fuerza en la posición correspondiente, misma que es de tipo armónica, es decir que presenta periodicidad y está en función del tiempo. Para estos efectos se propone aplicar la fuerza de $20\sin(\pi t) N$ en el sentido horizontal positivo del pórtico, en el nodo número 3, a fin de provocar el mayor desplazamiento en el sentido del eje x.

El vector fuerza viene definido de la siguiente manera:

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 * \sin(\pi * t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una vez definido el vector fuerza, se completan todos los términos para aplicar el programa de solución al sistema, en Matlab. Con el fin de analizar y comparar las soluciones obtenidas en los casos de sistemas no amortiguados y amortiguados, se plantea la solución en el intervalo de cero a cinco segundos con un número de subdivisiones $n=5000$, para obtener la evaluación iterativa con un incremento de 0.001s.

4.2.2.1. Sistema sin amortiguamiento

- Programa:

```

%%Programa para Resolución del sistema de EDOS de segundo orden:
MU'' + CU' + KU = F
%%Método de Cranck-Nicolson
%Tres elementos finitos - 4 nodos
%Vibración Forzada - Fuerza Armónica - Sin Amortiguamiento
clear all
t_max=5;
t_min=0;
n=5000;
h=(t_max-t_min)/n;
V=sparse(6,n);
U=sparse(6,n);
%t=sparse(n,1);
t(1)=0;
V(:,1)=sparse(6,1);
U(:,1)=sparse(6,1);

M=[0.05524504 0 2.303e-3 8.678e-3 0 0; 0 0.05334260 6e-4 0 6.695e-
3 -3.546e-4; 2.303e-3 6e-4 2.045e-4 0 3.546e-4 -1.8e-5; 8.678e-3 0

```

```
0 0.05524504 0 2.303e-3; 0 6.695e-3 3.546e-4 0 0.05334260 -6e-4; 0
-3.546e-4 -1.8e-5 2.303e-3 -6e-4 2.045e-4];
```

```
K=[2.74091519e7 8.567e-10 13.14592406 -2.74090909e7 0 0; 8.567e-10
1.39911779e7 50.45454545 0 -458.67768595 50.45454545; 13.14592406
50.45454545 11.17726218 0 -50.45454545 3.7; -2.74090909e7 0 0
2.74091519e7 2.57e-9 13.14592406; 0 -458.67768595 -50.45454545
2.57e-9 1.39911779e7 -50.45454545; 0 50.45454545 3.7 13.14592406 -
50.45454545 11.17726218];
```

```
C=sparse(6,6);
```

```
F=[0; 0; 0; 20*sin(pi*t); 0; 0];
```

```
for i=2:n
```

```
    t(i)=t(i-1)+h;
```

```
    F=[0; 0; 0; 20*sin(pi*t(i)); 0; 0];
```

```
    A=M*V(:,i-1)+(h/2)*(F-C*V(:,i-1)-K*U(:,i-1));
```

```
    B=U(:,i-1)+(h/2)*(V(:,i-1));
```

```
    Phi1=[M sparse(6,6);sparse(6,6) speye(6,6)];
```

```
    Phi2=[-C -K; speye(6,6) sparse(6,6)];
```

```
    Phi= Phi1-(h/2)*(Phi2);
```

```
    Vec1=[A;B];
```

```
    Vec2=[F; sparse(6,1)];
```

```
    R=Phi\((Vec1+ (h/2)* Vec2);
```

```
    V(:,i)=R(1:6);
```

```
    U(:,i)=R(7:12);
```

```
end
```

- Resultados:

Nodo 2:

```
>> Sistema_EDOS_Farmonica_SinAmortiguamiento
>> plot(t,U(1,:))
```

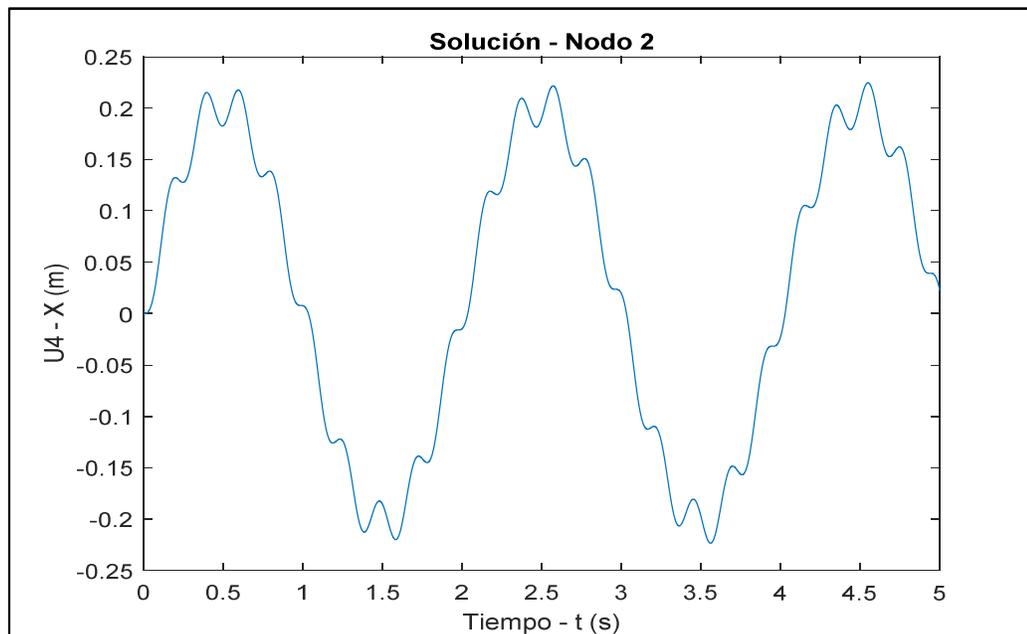


Figura 43 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(2,:))
```

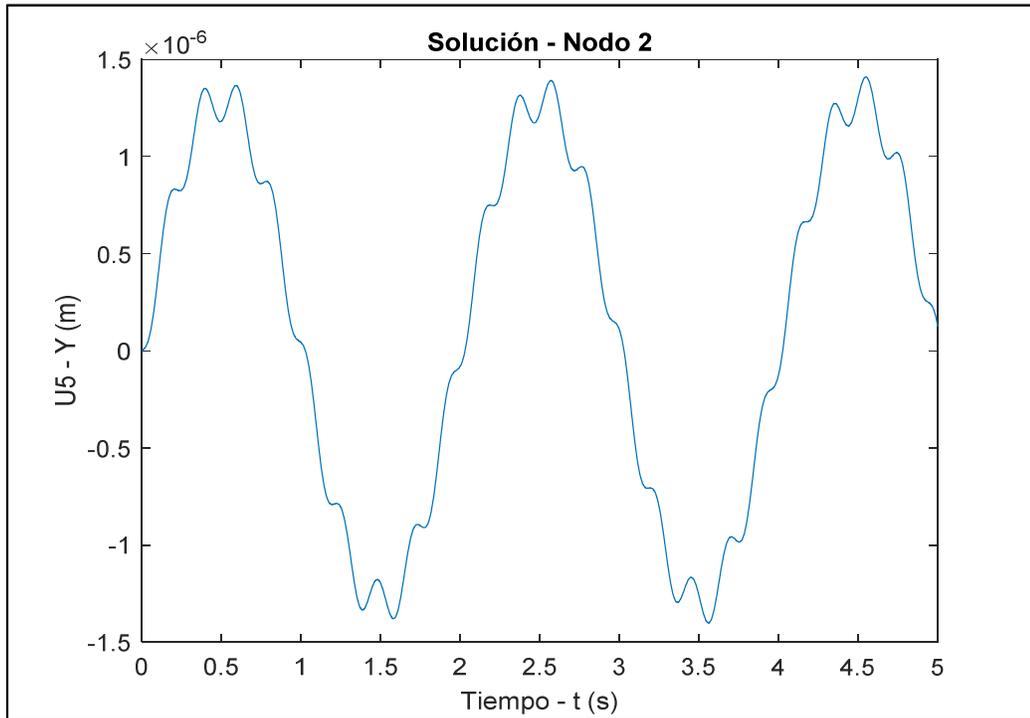


Figura 44 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(3,:))
```

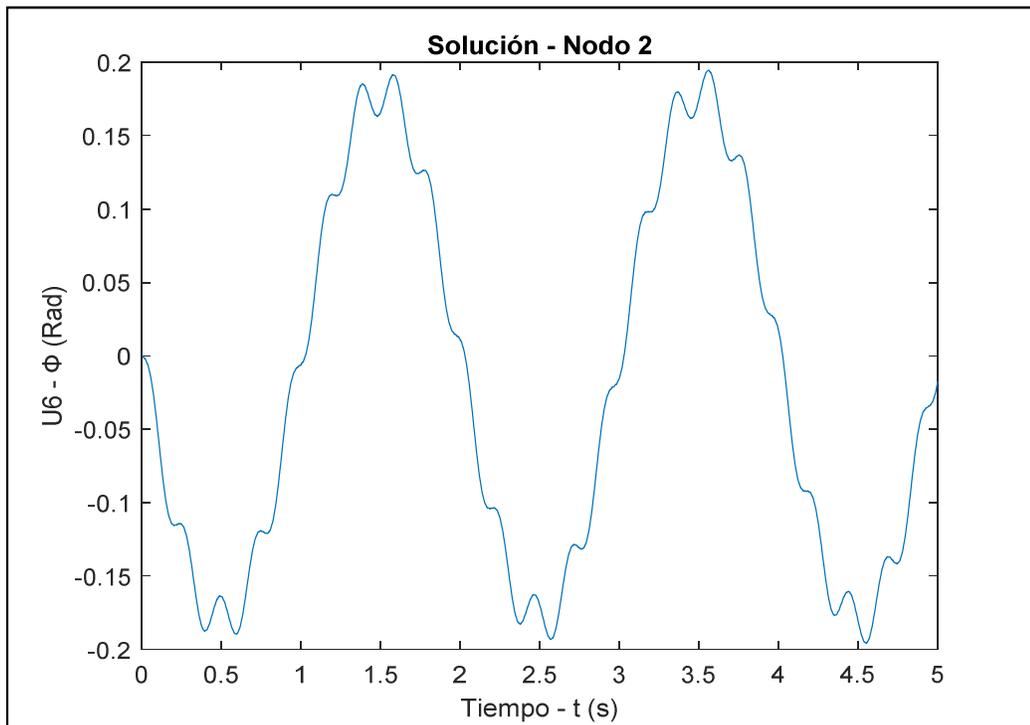


Figura 45 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo

Nodo 3:

```
>> plot(t,U(4,:))
```

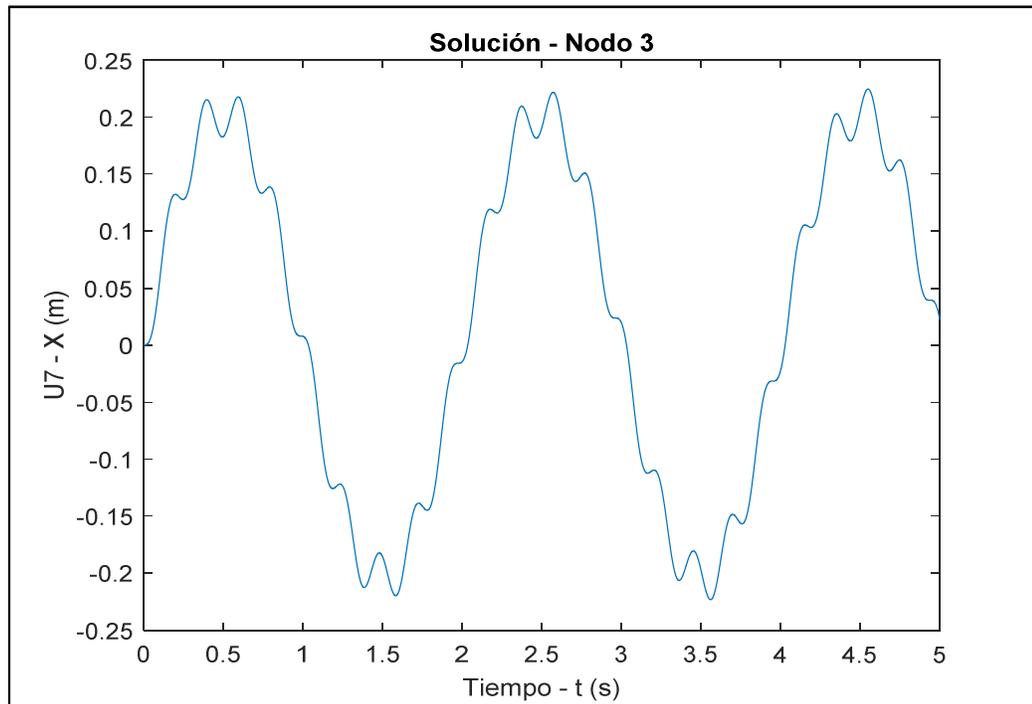


Figura 46 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(5,:))
```

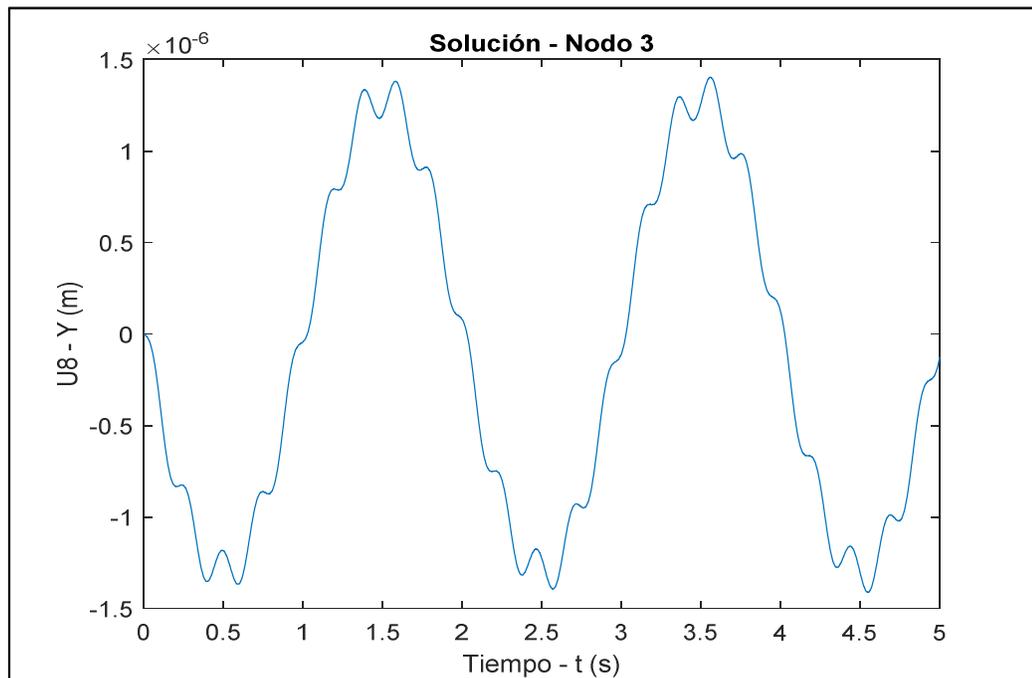


Figura 47 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(6,:))
```

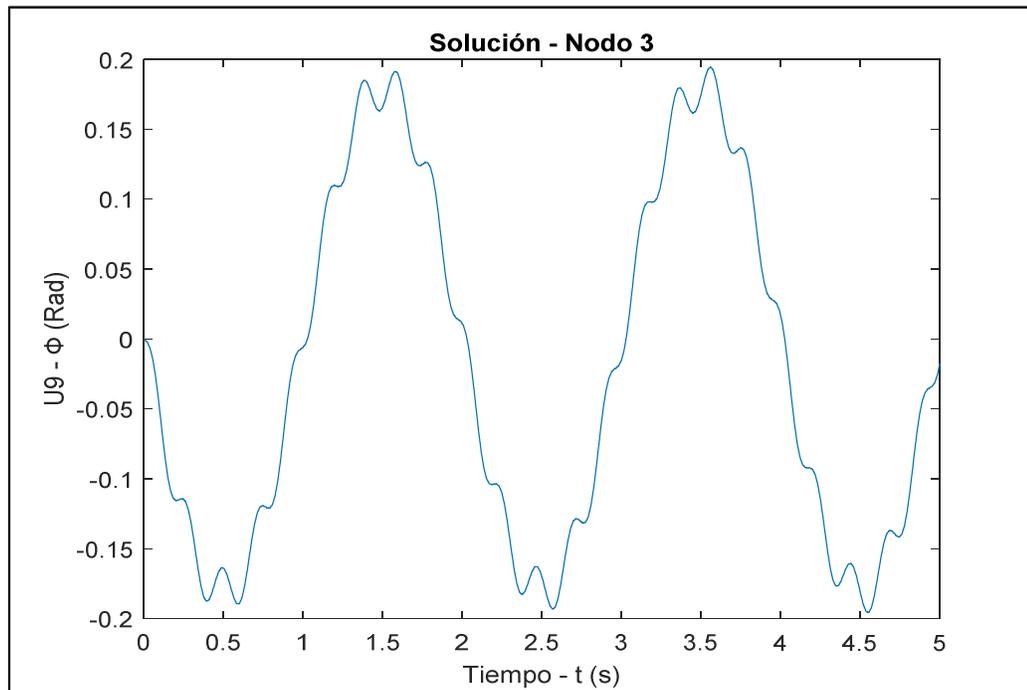


Figura 48 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo

4.2.2.2. Sistema con amortiguamiento viscoso

- Programa:

```

%%Programa para Resolución del sistema de EDOS de segundo orden:
MU'' + CU' + KU = F
%%Método de Cranck-Nicolson
%%Tres elementos finitos - 4 nodos
%%Vibración Forzada - Fuerza Armónica - Con Amortiguamiento
clear all
t_max=5;
t_min=0;
n=5000;
h=(t_max-t_min)/n;
V=sparse(6,n);
U=sparse(6,n);
%t=sparse(n,1);
t(1)=0;
V(:,1)=sparse(6,1);
U(:,1)=sparse(6,1);

M=[0.05524504 0 2.303e-3 8.678e-3 0 0; 0 0.05334260 6e-4 0 6.695e-
3 -3.546e-4; 2.303e-3 6e-4 2.045e-4 0 3.546e-4 -1.8e-5; 8.678e-3 0
0 0.05524504 0 2.303e-3; 0 6.695e-3 3.546e-4 0 0.05334260 -6e-4; 0
-3.546e-4 -1.8e-5 2.303e-3 -6e-4 2.045e-4];

K=[2.74091519e7 8.567e-10 13.14592406 -2.74090909e7 0 0; 8.567e-10
1.39911779e7 50.45454545 0 -458.67768595 50.45454545; 13.14592406
50.45454545 11.17726218 0 -50.45454545 3.7; -2.74090909e7 0 0
2.74091519e7 2.57e-9 13.14592406; 0 -458.67768595 -50.45454545

```

```
2.57e-9 1.39911779e7 -50.45454545; 0 50.45454545 3.7 13.14592406 -
50.45454545 11.17726218];
```

```
C=sparse(6,6);
C(4,4)=17;
C(4,5)=17;
C(5,4)=17;
C(5,5)=17;
F=[0; 0; 0; 20*sin(pi*t); 0; 0];

for i=2:n
    t(i)=t(i-1)+h;

    F=[0; 0; 0; 20*sin(pi*t(i)); 0; 0];

    A=M*V(:,i-1)+(h/2)*(F-C*V(:,i-1))-K*U(:,i-1));
    B=U(:,i-1)+(h/2)*(V(:,i-1));
    Phi1=[M sparse(6,6);sparse(6,6) speye(6,6)];
    Phi2=[-C -K; speye(6,6) sparse(6,6)];
    Phi= Phi1-(h/2)*(Phi2);
    Vec1=[A;B];
    Vec2=[F; sparse(6,1)];
    R=Phi\(Vec1+ (h/2)* Vec2);
    V(:,i)=R(1:6);
    U(:,i)=R(7:12);
end
```

- Resultados:

Nodo 2:

```
>> Sistema_EDOS_Farmonica_ConAmortiguamiento
>> plot(t,U(1,:))
```

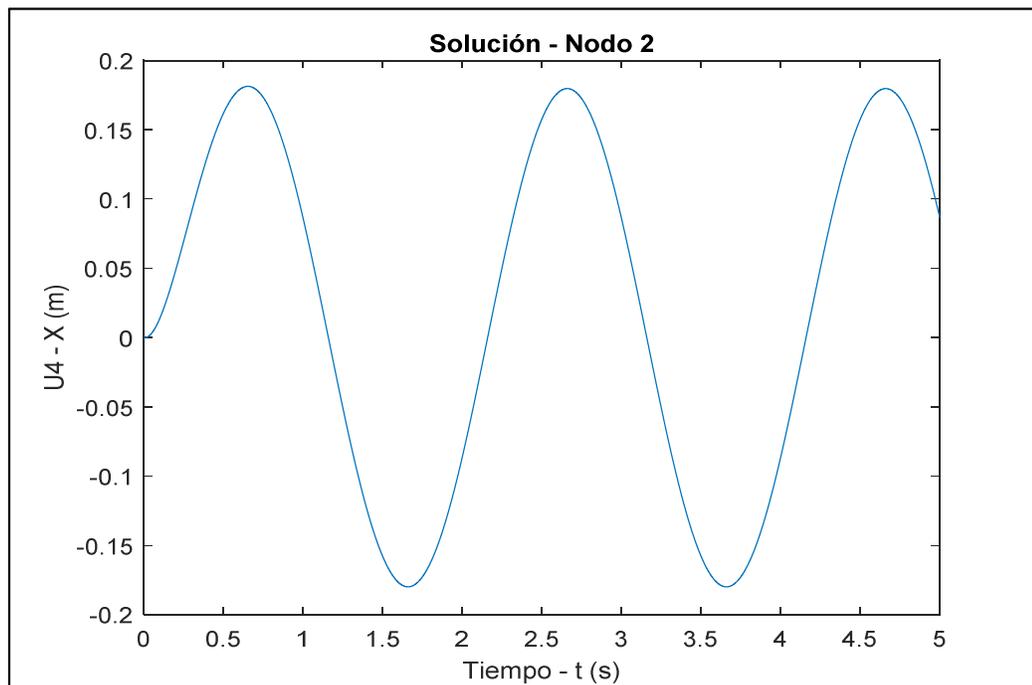


Figura 49 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(2,:))
```

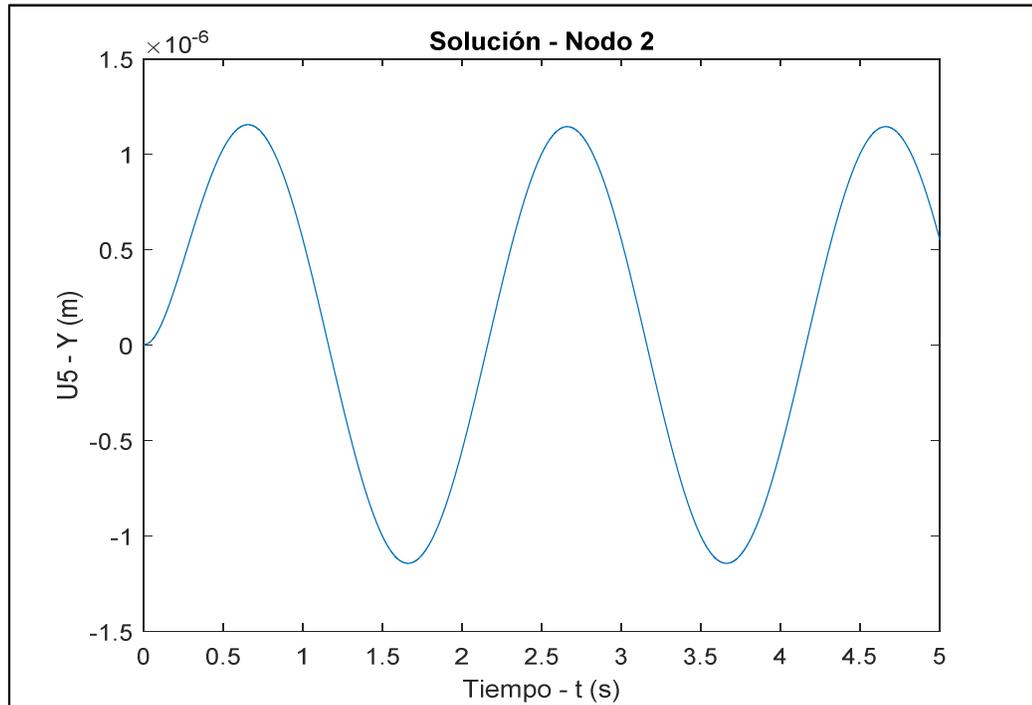


Figura 50 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(3,:))
```

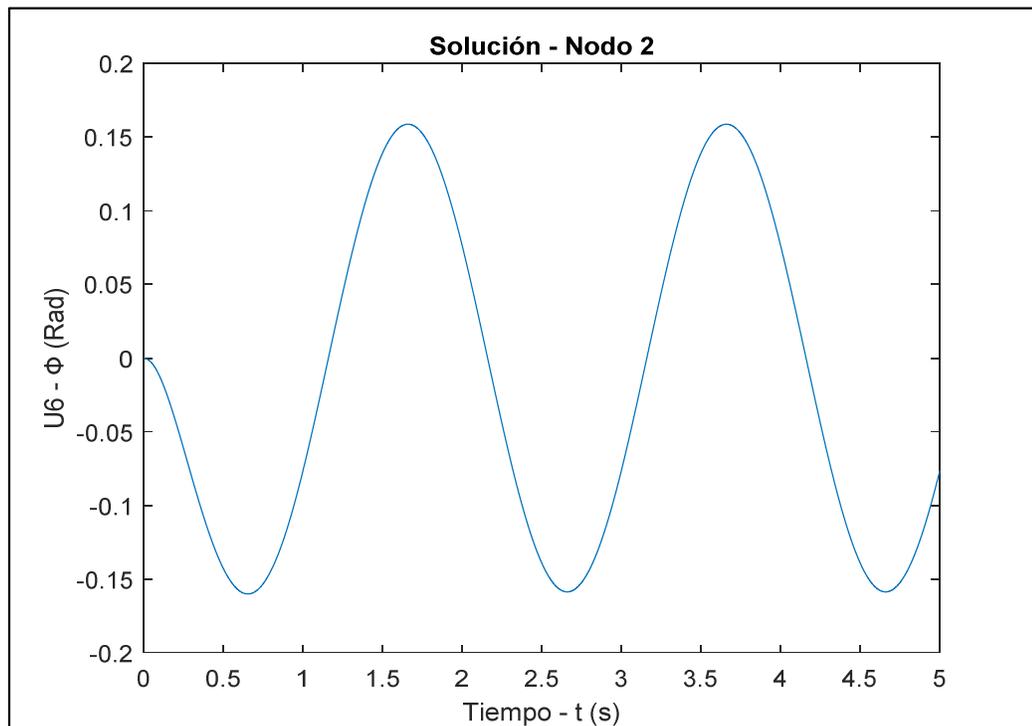


Figura 51 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(4,:))
```

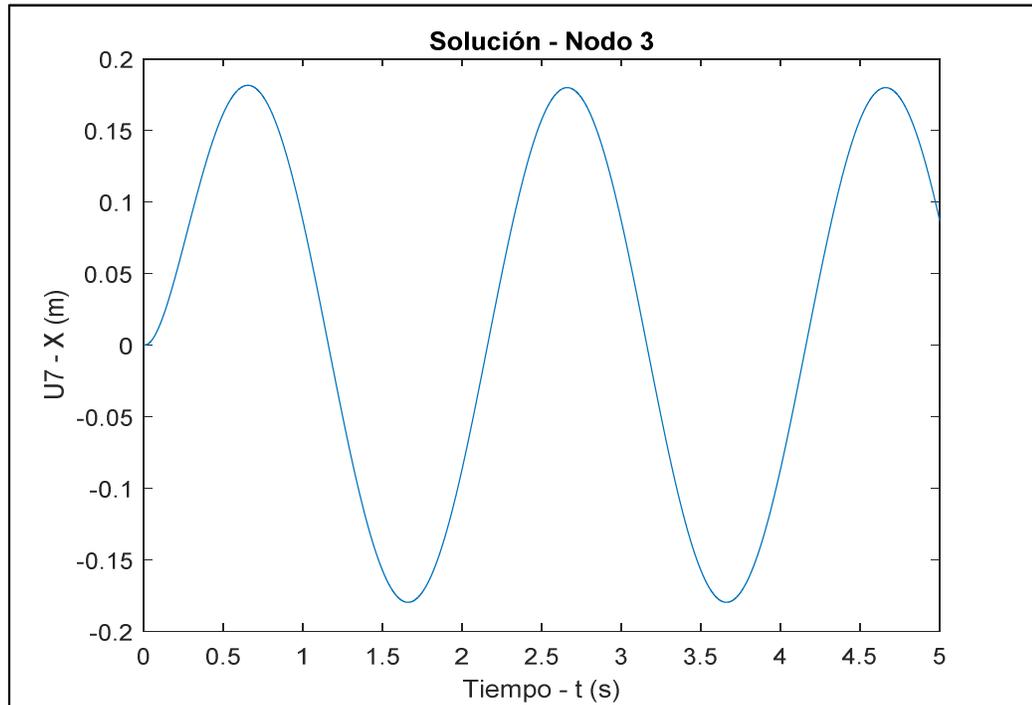


Figura 52 Gráfica del desplazamiento en "X" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(5,:))
```

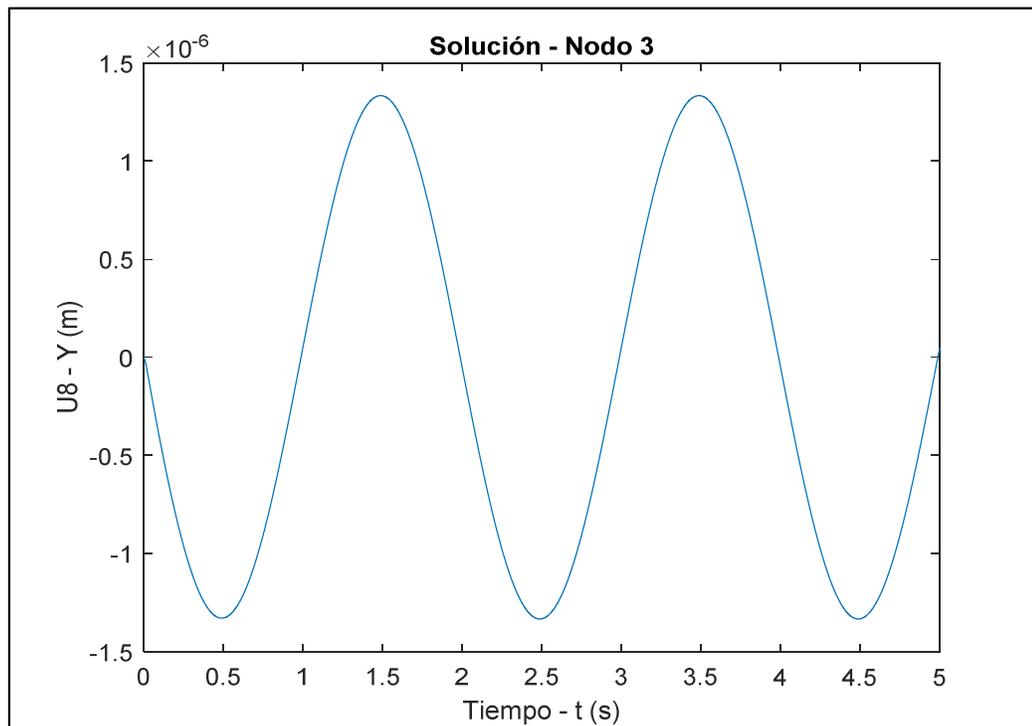


Figura 53 Gráfica del desplazamiento en "Y" del nodo en función del tiempo

```
>> plot(t,U(6,:))
```

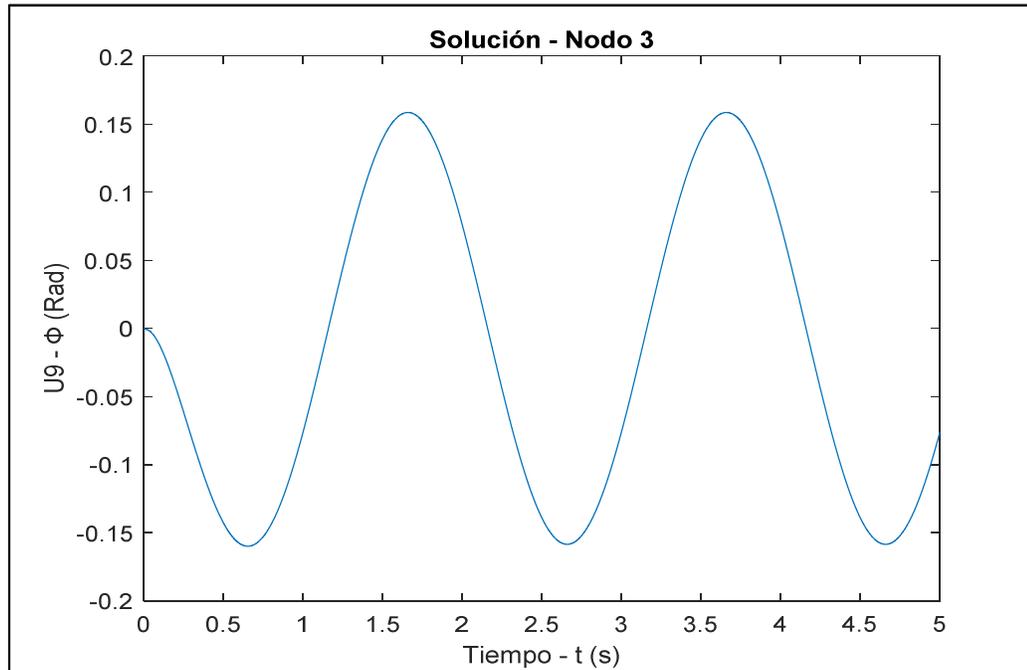


Figura 54 Gráfica de la rotación del nodo en función del tiempo

4.2.2.3. Análisis

Al analizar las gráficas de las soluciones que caracterizan los movimientos de los sistemas sin amortiguamiento y con amortiguamiento, se observa claramente el aporte que brinda el amortiguador viscoso como elemento del pórtico, ya que en primer lugar disminuye el desplazamiento de cada punto de la estructura en todos los grados de libertad, minorando el riesgo a que se produzca una falla; en segundo lugar al comparar las gráficas se nota como se estabilizan y desaparecen los picos de amplitud al amortiguar la estructura, lo que significa un movimiento más equilibrado, similar al movimiento de tipo armónico. Esto se puede ejemplificar analizando las soluciones del movimiento en la dirección del eje "X" de la estructura, que es el más crítico ya que es donde se da el mayor desplazamiento debido a la aplicación de la fuerza armónica en este sentido. Al comparar los puntos más altos de desplazamiento para ambos casos, se detecta una disminución en la amplitud desde los 24 cm que se obtiene en la estructura sin amortiguamiento hasta los 18 cm que muestra la amortiguada, lo que significa una reducción de 6 cm (25%) de amplitud, obteniendo una buena atenuación de las vibraciones excedentes, así como la eliminación de los picos que se tienen.

4.3. Simulación en software de elementos finitos

A fin de validar los resultados obtenidos en la modelación matemática, se realiza la simulación del pórtico en un software de elementos finitos, aplicada para los dos tipos de vibración (libre y forzada) tanto para sistemas amortiguados como no amortiguados, que son lo que se estudió previamente.

El análisis que se ejecuta en las simulaciones corresponde al TRANSIENT, que trata a los sistemas bajo la óptica del estudio vibracional, mostrando las soluciones gráficas de las variables dinámicas (desplazamientos, velocidades y aceleraciones), que se tienen en los distintos nodos.

El procedimiento que se sigue para realizar las simulaciones correspondientes a vibración libre y forzada de los casos amortiguados, se encuentra detallado a manera de tutoriales, adjuntados en los ANEXOS A y B, esto debido a que para los casos no amortiguados es el mismo proceso solo que se omite el paso de la implementación del elemento amortiguador. A continuación, se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones.

4.3.1. Simulación del pórtico en vibración libre - Fuerza impulso

4.3.1.1. Sistema sin amortiguamiento

Soluciones del análisis transient:

Nodo2:

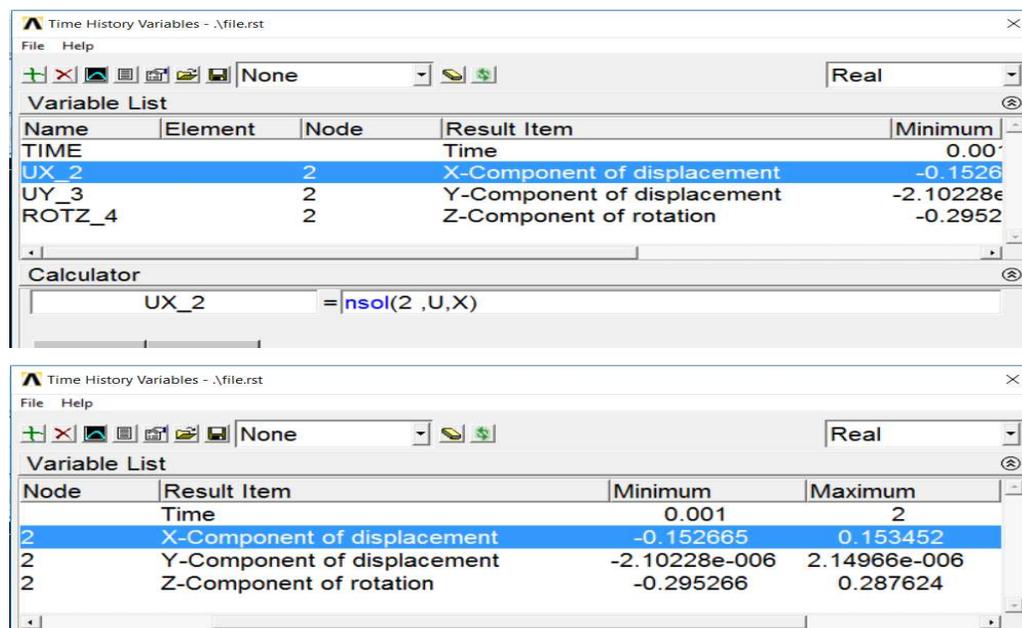


Figura 55 Menú de graficación Nodo 2

o Eje X:

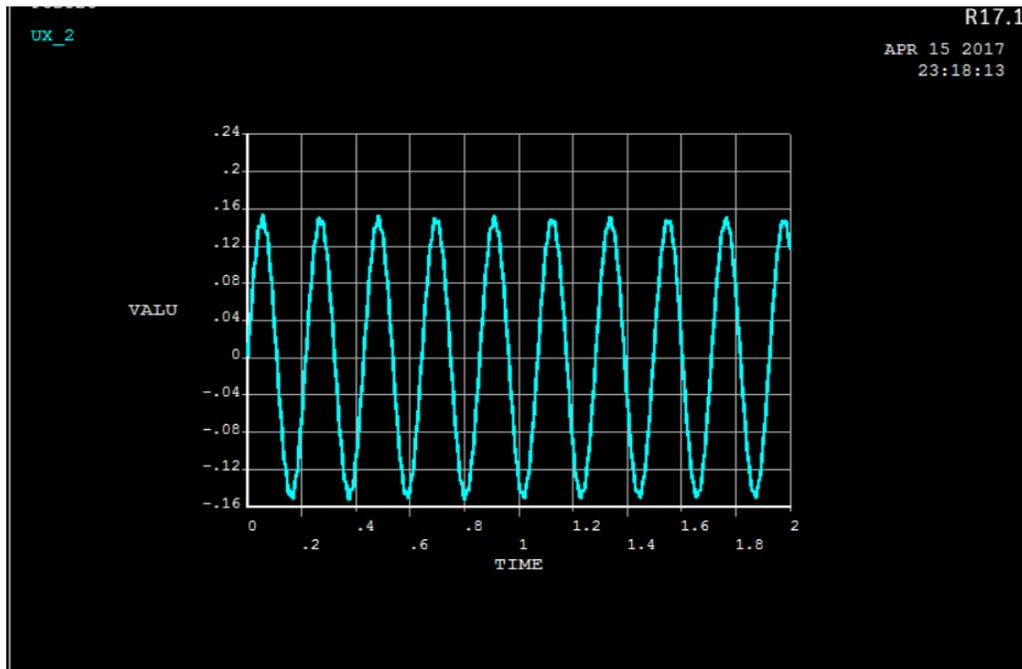


Figura 56 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X"(m) en función del tiempo (s)

o Eje Y:

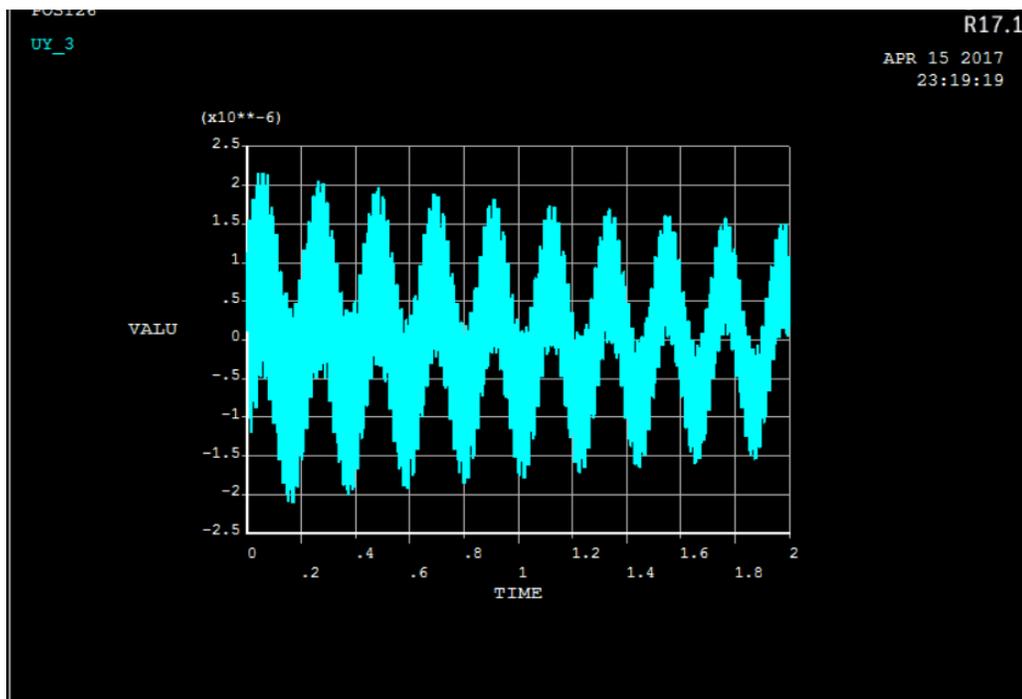


Figura 57 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s)

- o Rotación:

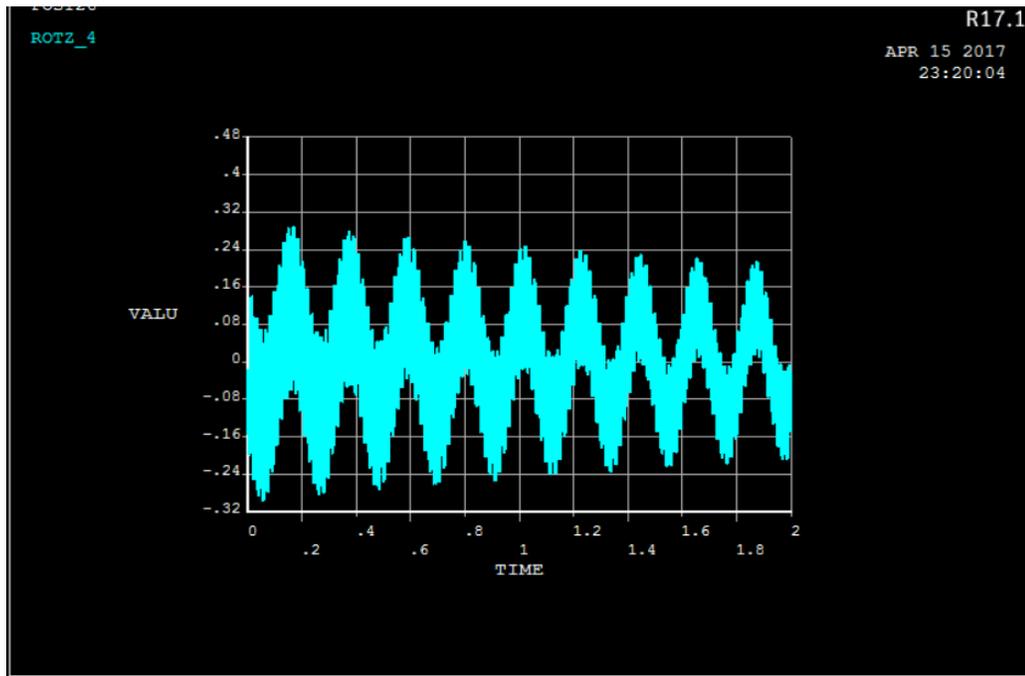


Figura 58 Solución del análisis Transient – Rotación (Rad) en función del tiempo (s)

Nodo3:

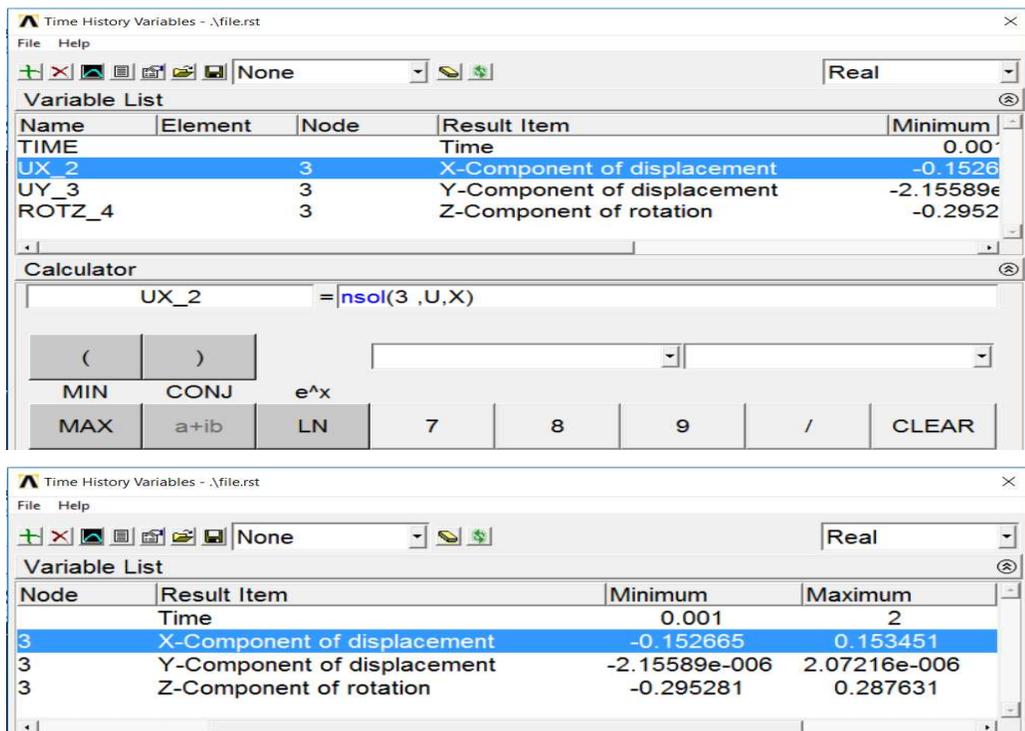


Figura 59 Menú de graficación Nodo 3

o Eje X:

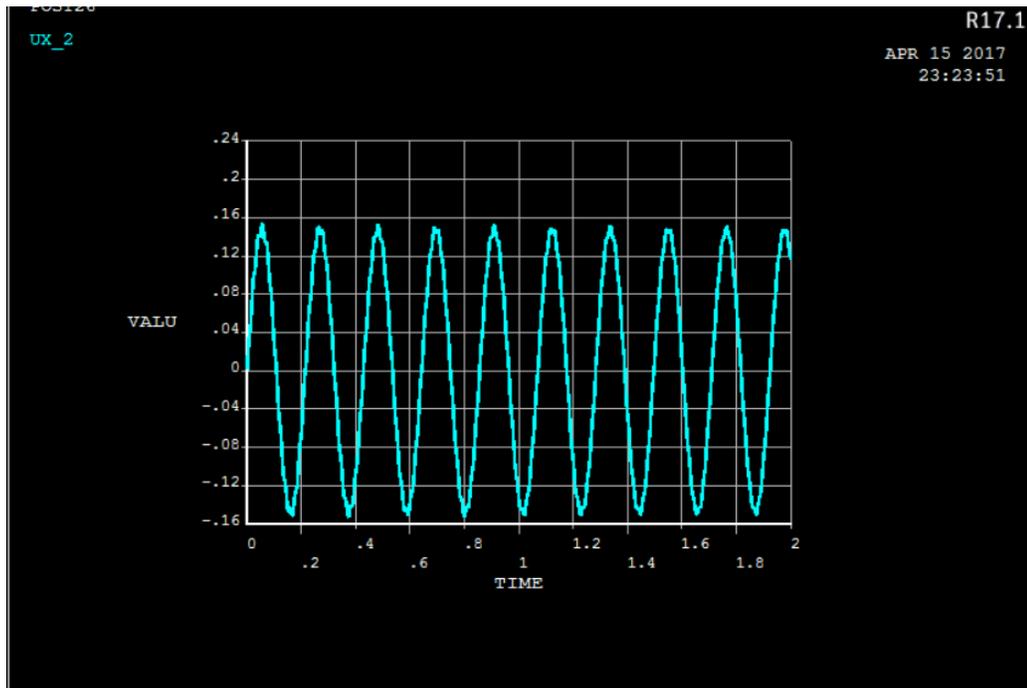


Figura 60 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s)

o Eje Y:

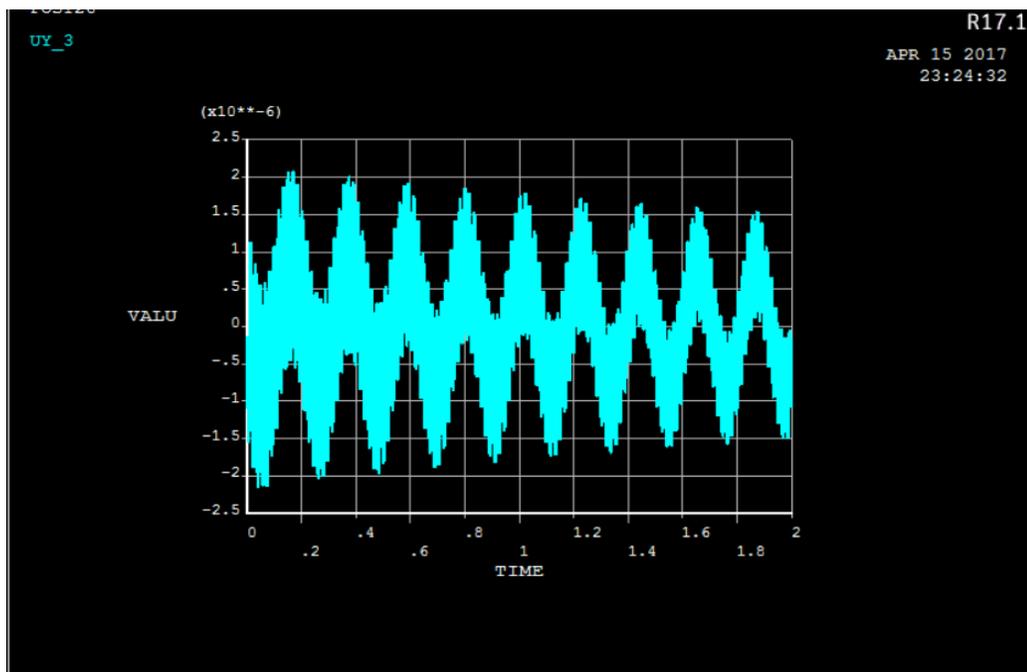


Figura 61 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s)

- Rotación:

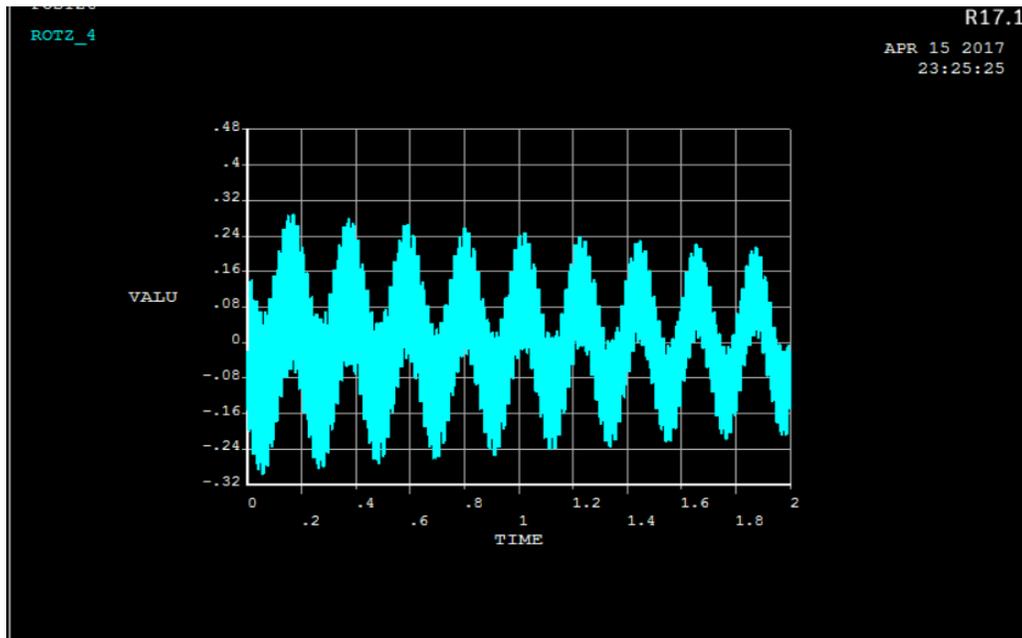


Figura 62 Solución del análisis Transient – Rotación (Rad) en función del tiempo (s)

4.3.1.2. Sistema con amortiguamiento viscoso

Soluciones del análisis transient:

Nodo2:

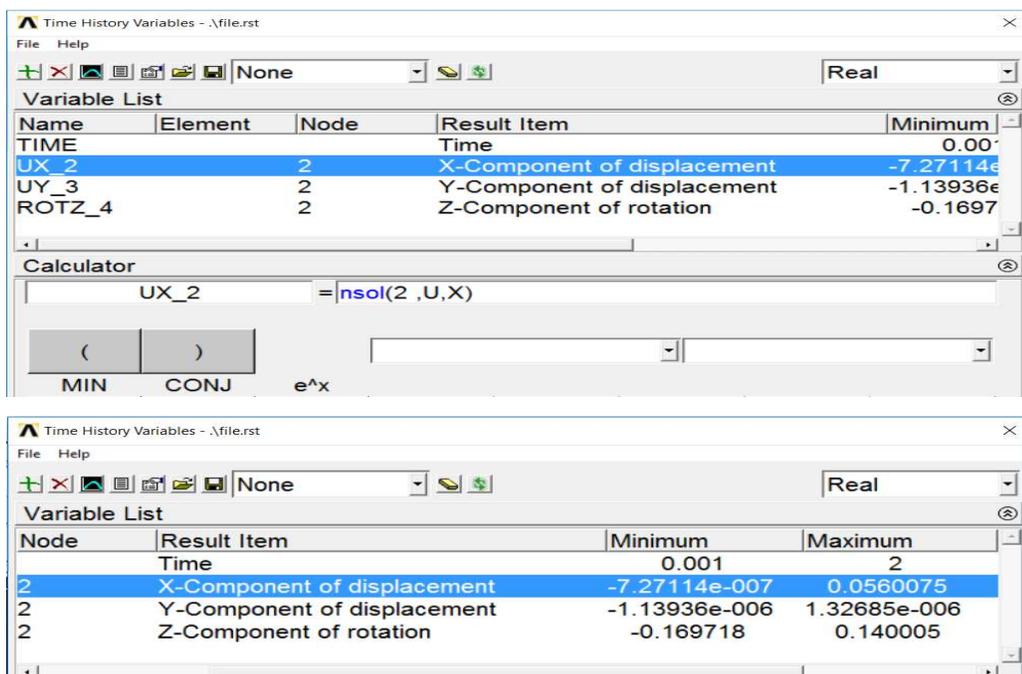


Figura 63 Menú de graficación Nodo 2

○ Eje X:

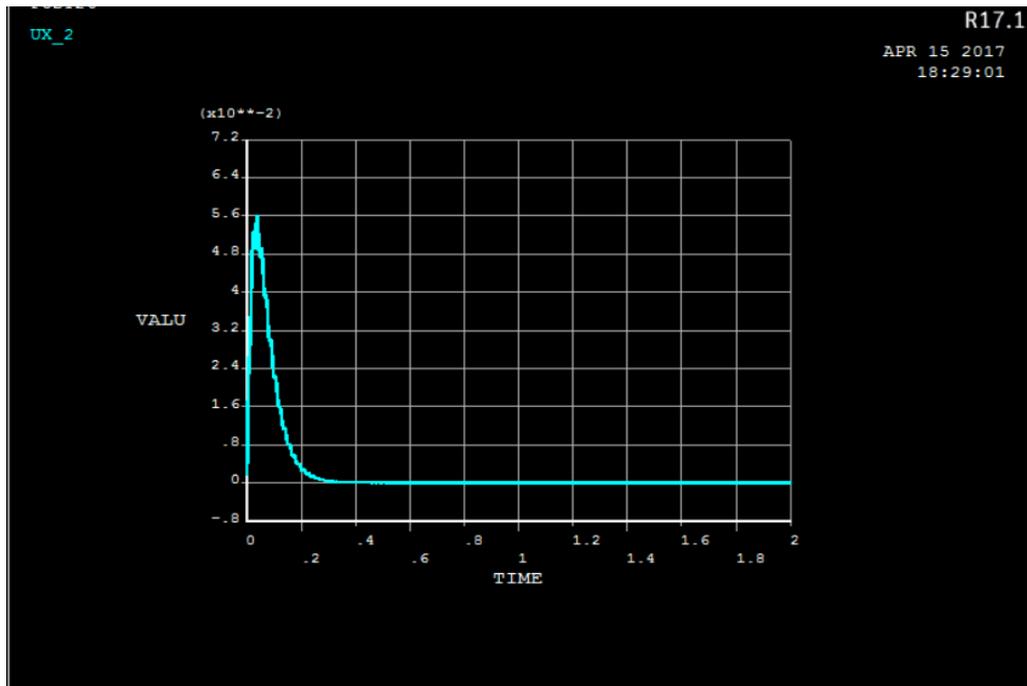


Figura 64 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s)

○ Eje Y:

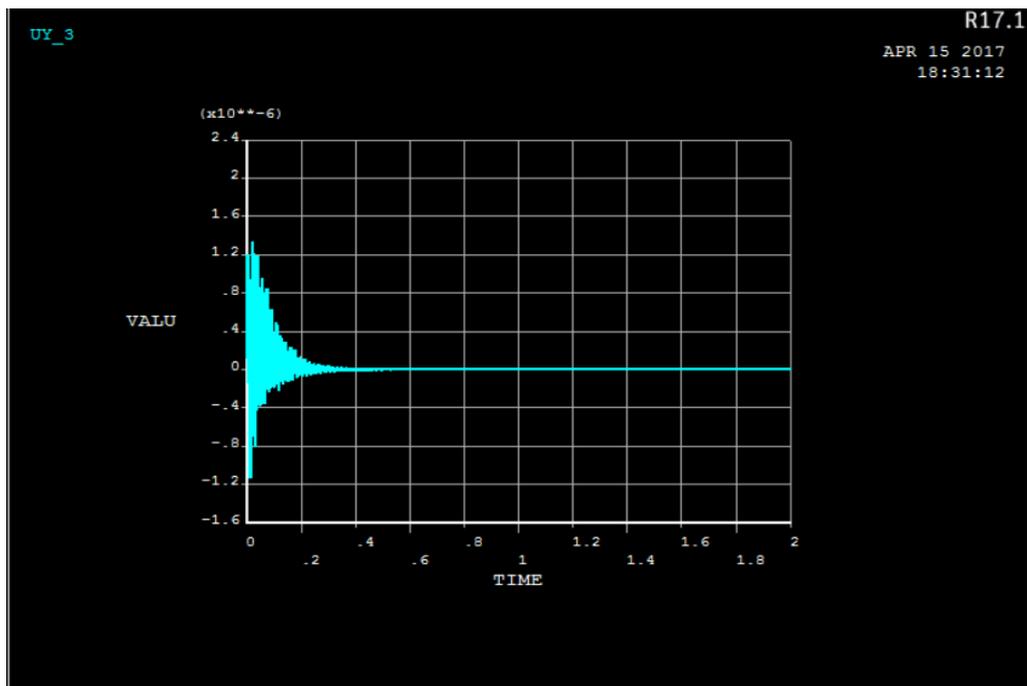


Figura 65 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s)

- o Rotación:

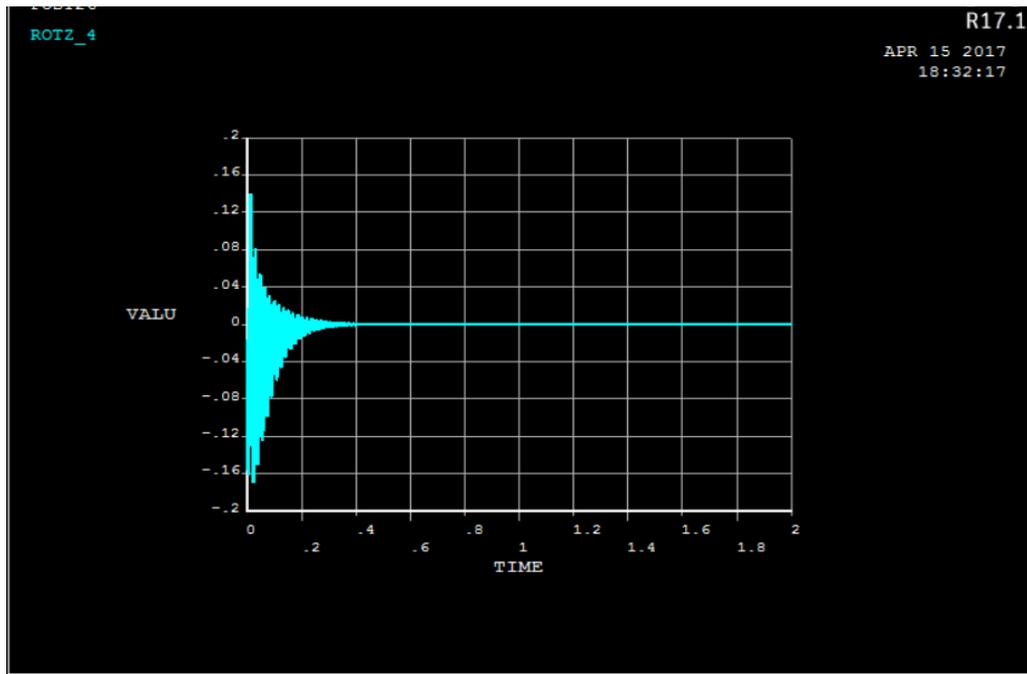


Figura 66 Solución del análisis Transient – Rotación (Rad) en función del tiempo (s)

Nodo3:

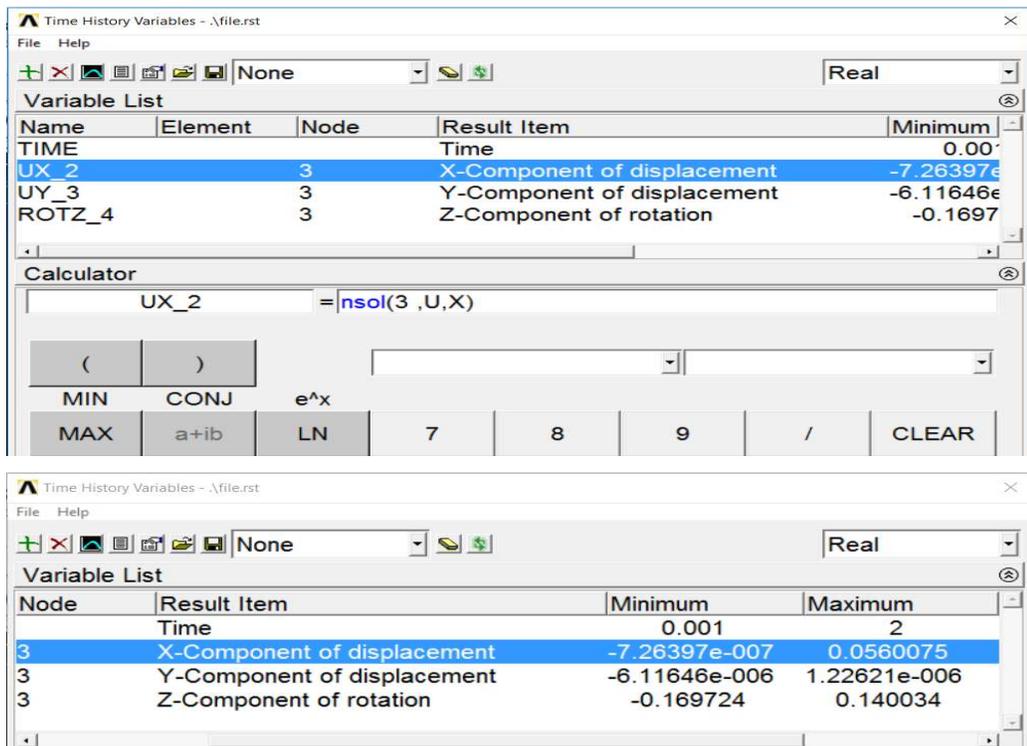


Figura 67 Menú de graficación Nodo 3

o Eje X:

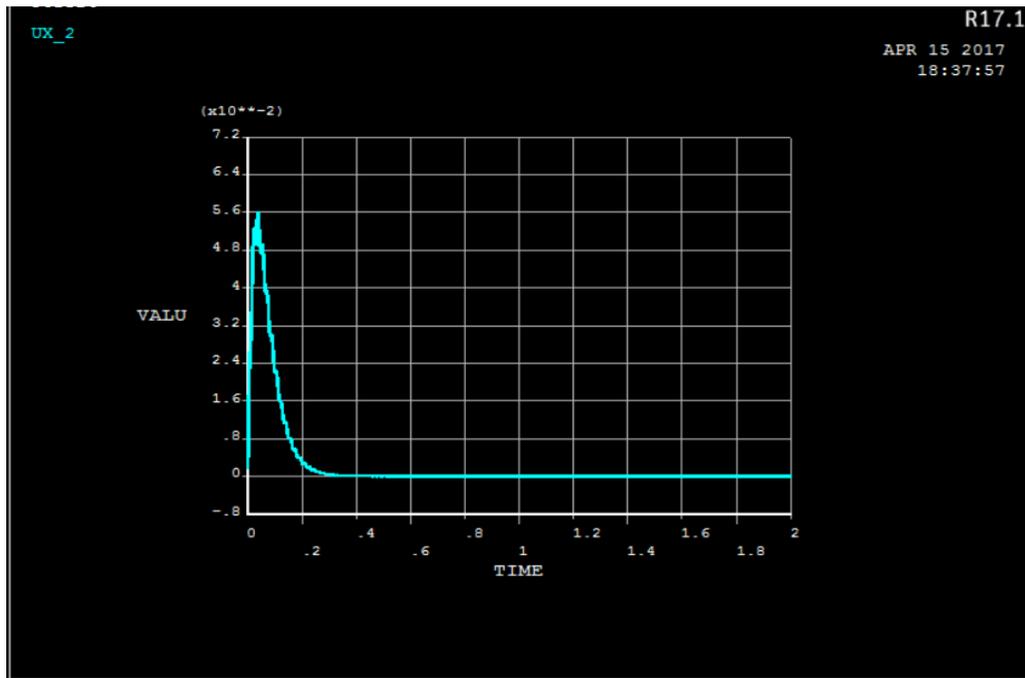


Figura 68 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s)

o Eje Y:

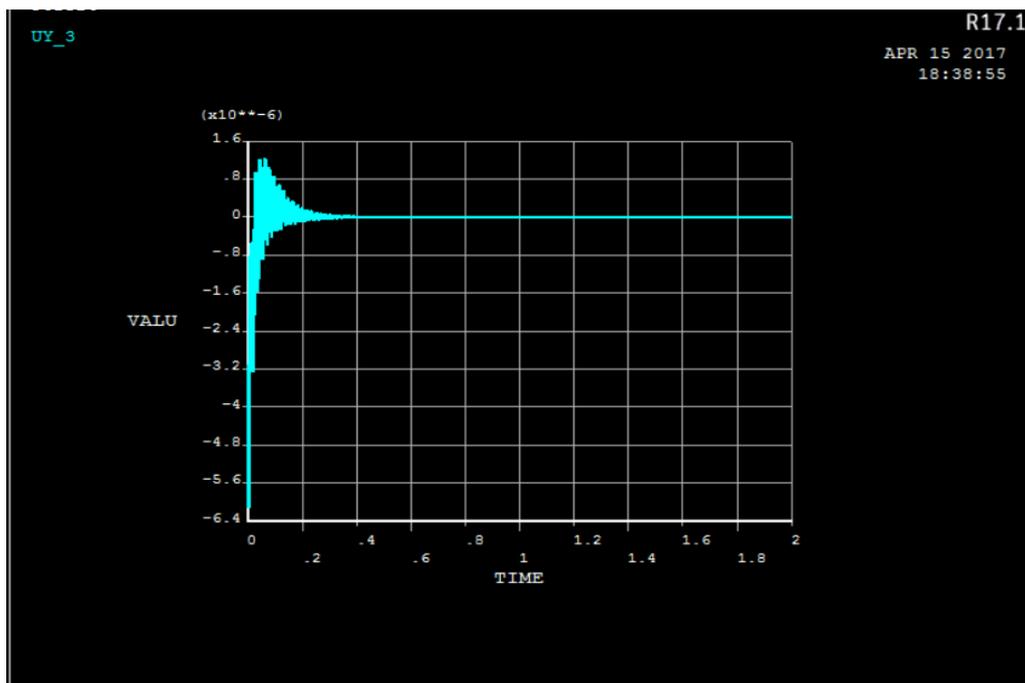


Figura 69 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s)

- Rotación:

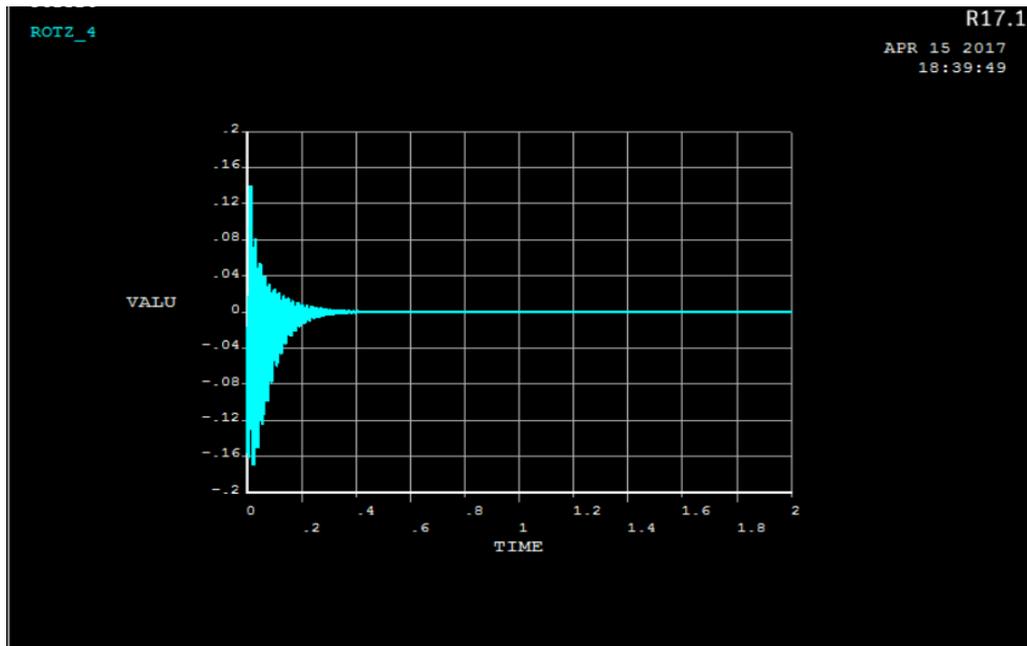


Figura 70 Solución del análisis Transient – Rotación (Rad) en función del tiempo (s)

4.3.2. Simulación del pórtico en vibración Forzada – Fuerza armónica

4.3.2.1. Sistema sin amortiguamiento

Soluciones del análisis transient:

Nodo2:

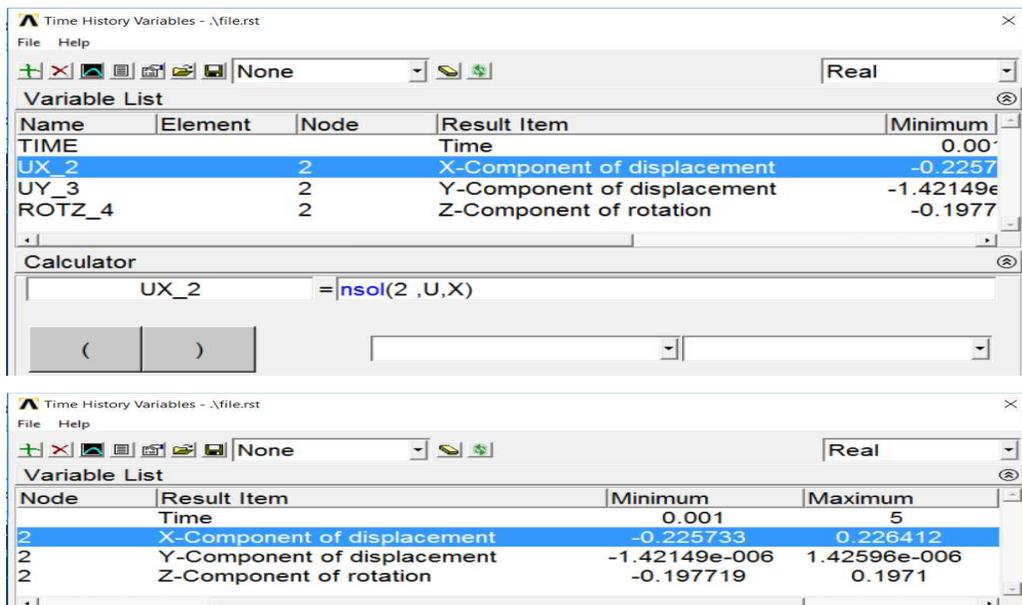


Figura 71 Menú de graficación Nodo 2

○ Eje X:

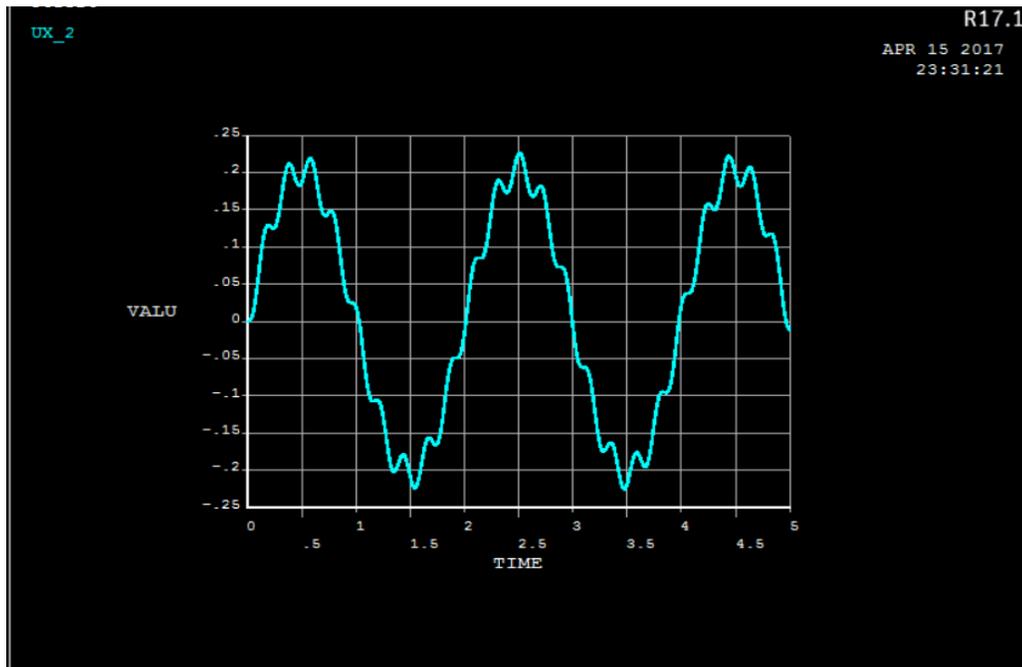


Figura 72 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s)

○ Eje Y:

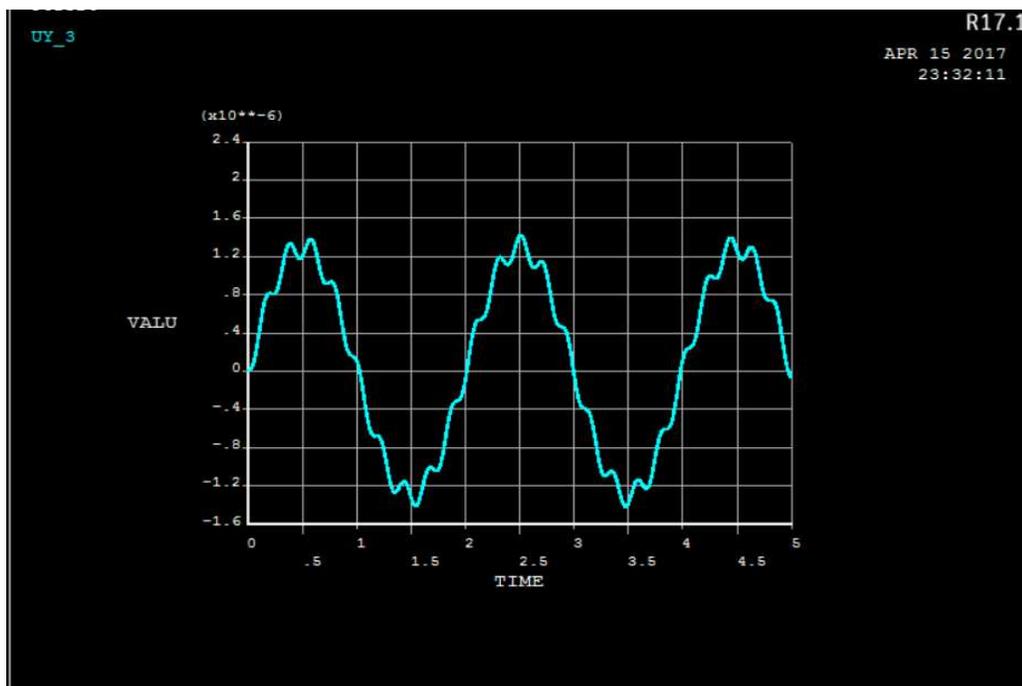


Figura 73 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s)

- o Rotación:

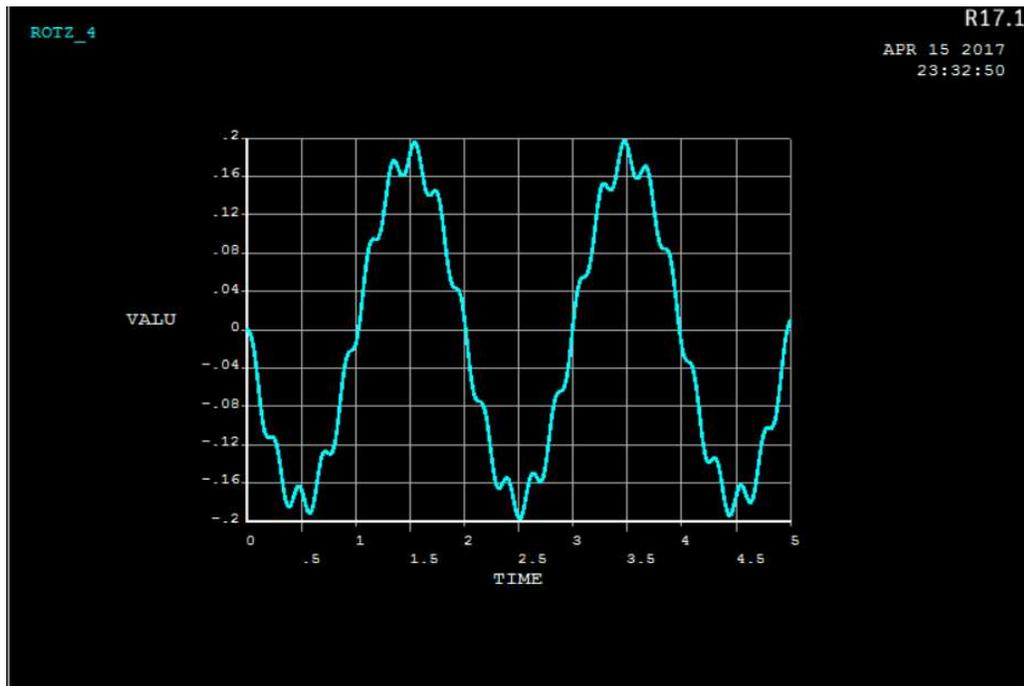


Figura 74 Solución del análisis Transient – Rotación (Rad) en función del tiempo (s)

Nodo3:

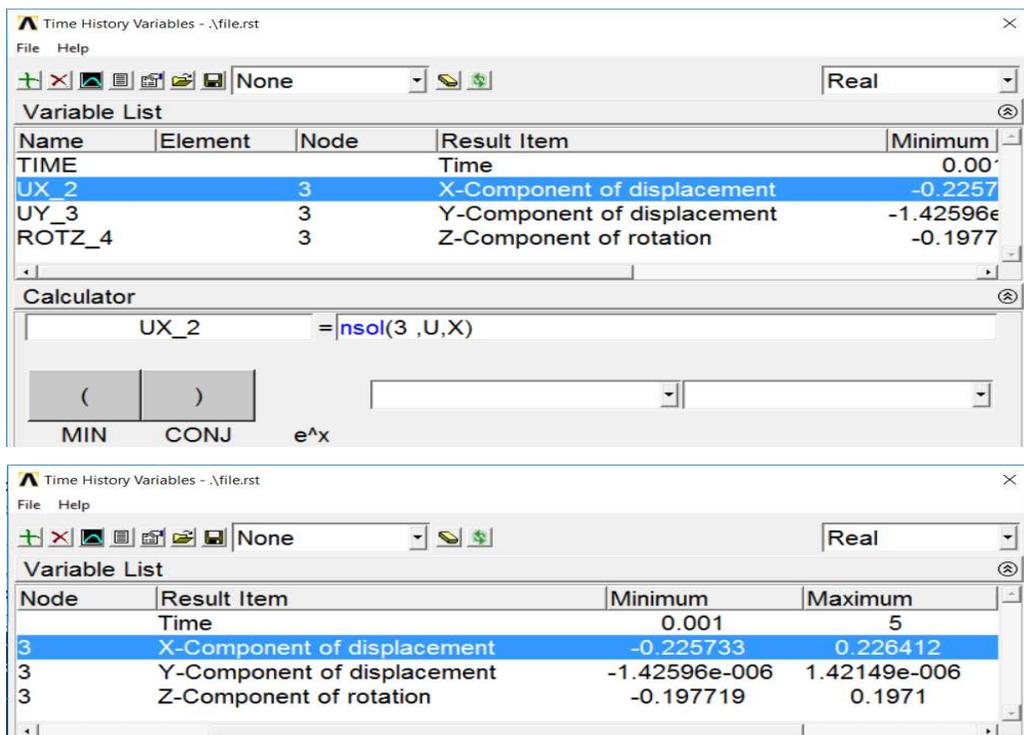


Figura 75 Menú de graficación Nodo 3

o Eje X:

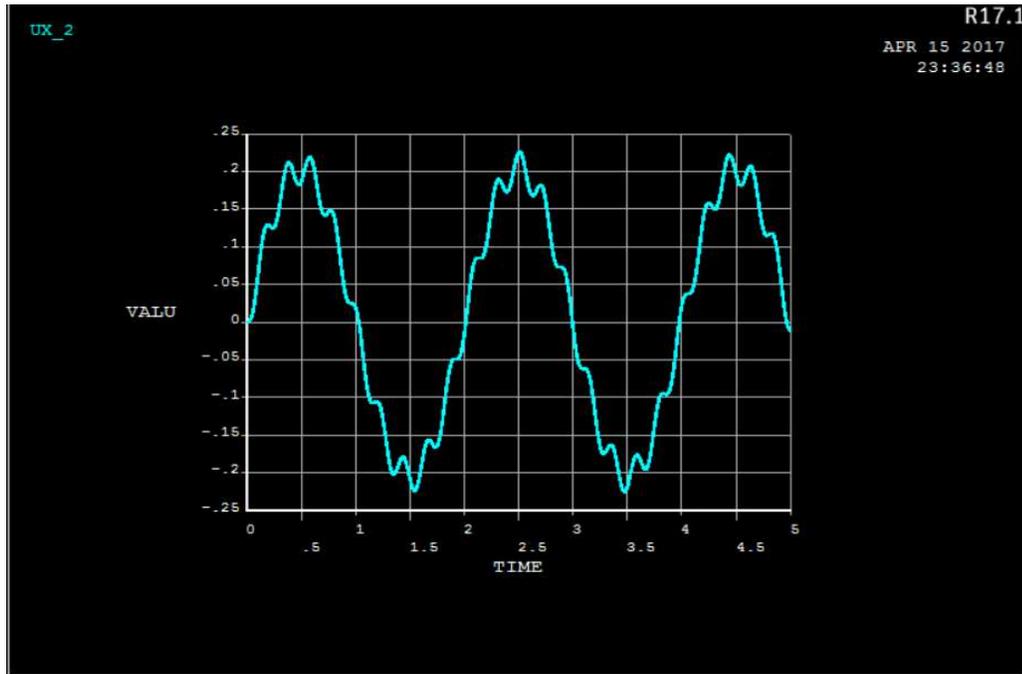


Figura 76 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s)

o Eje Y:

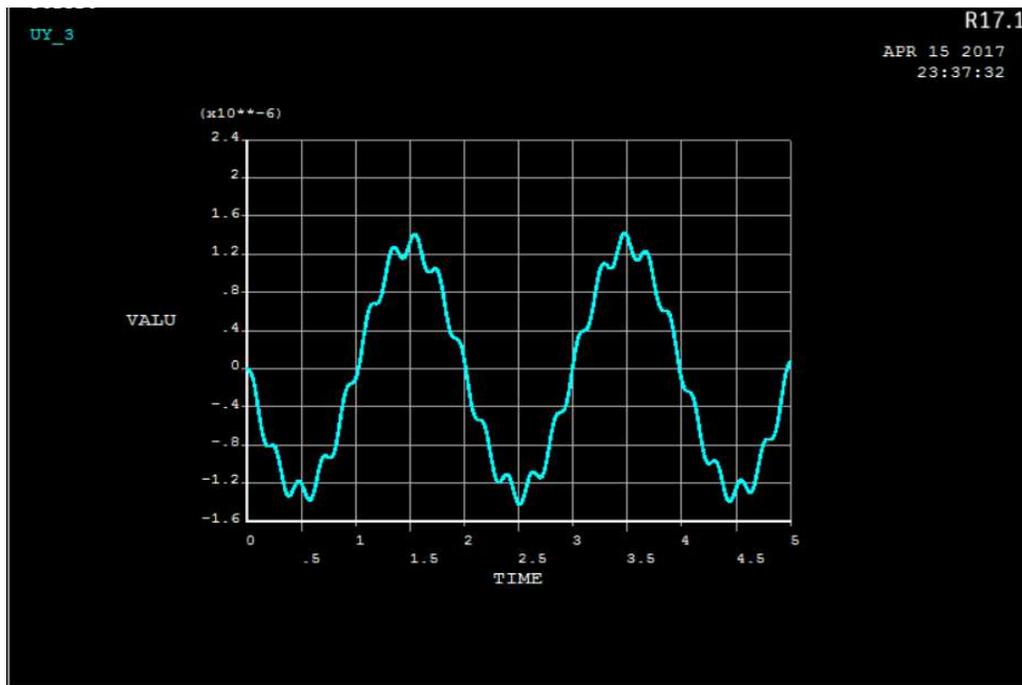


Figura 77 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s)

- o Rotación:

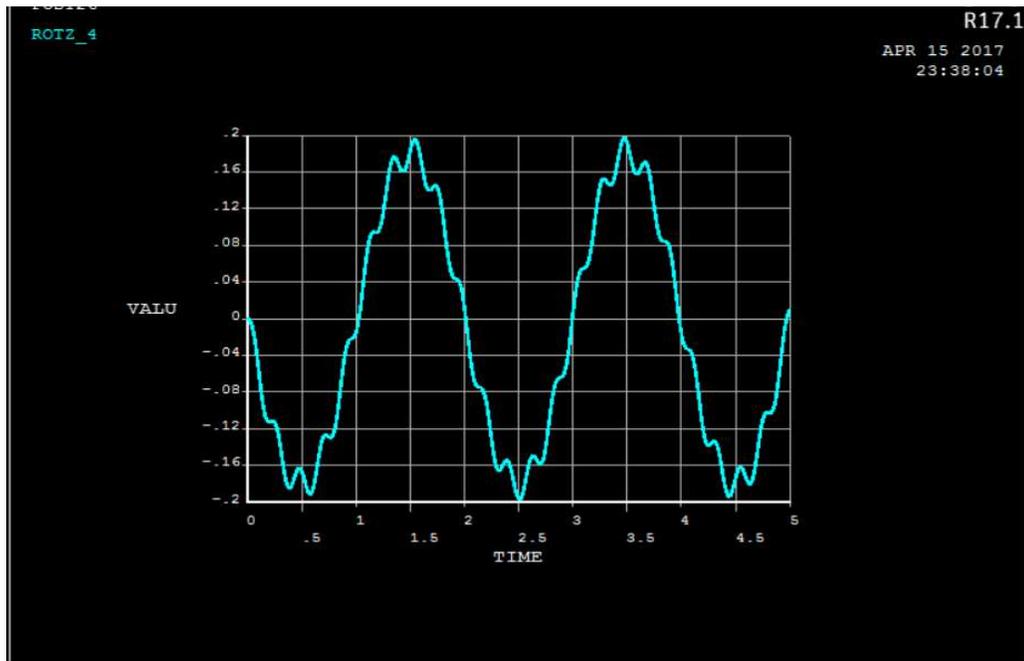


Figura 78 Solución del análisis Transient – Rotación (Rad) en función del tiempo (s)

4.3.2.2. Sistema con amortiguamiento viscoso

Soluciones del análisis transient:

Nodo2:

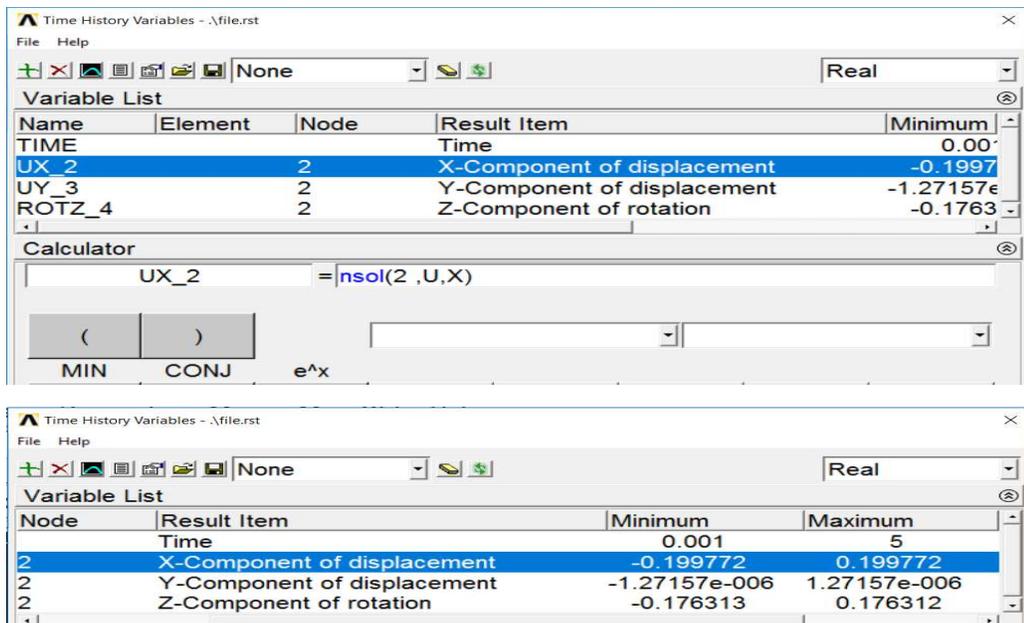


Figura 79 Menú de graficación Nodo 2

o Eje X:

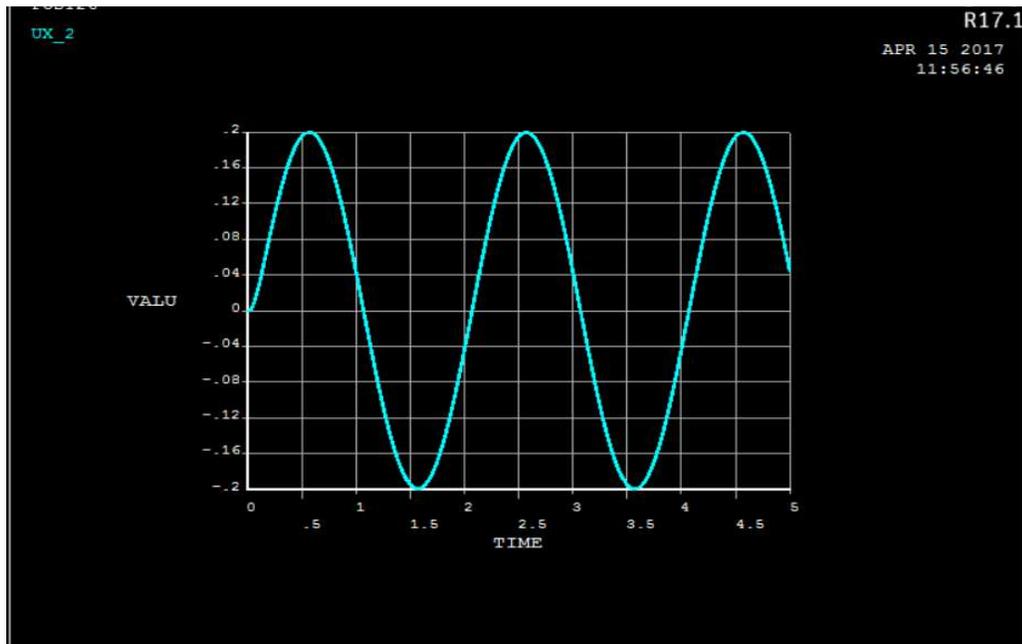


Figura 80 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s)

o Eje Y:

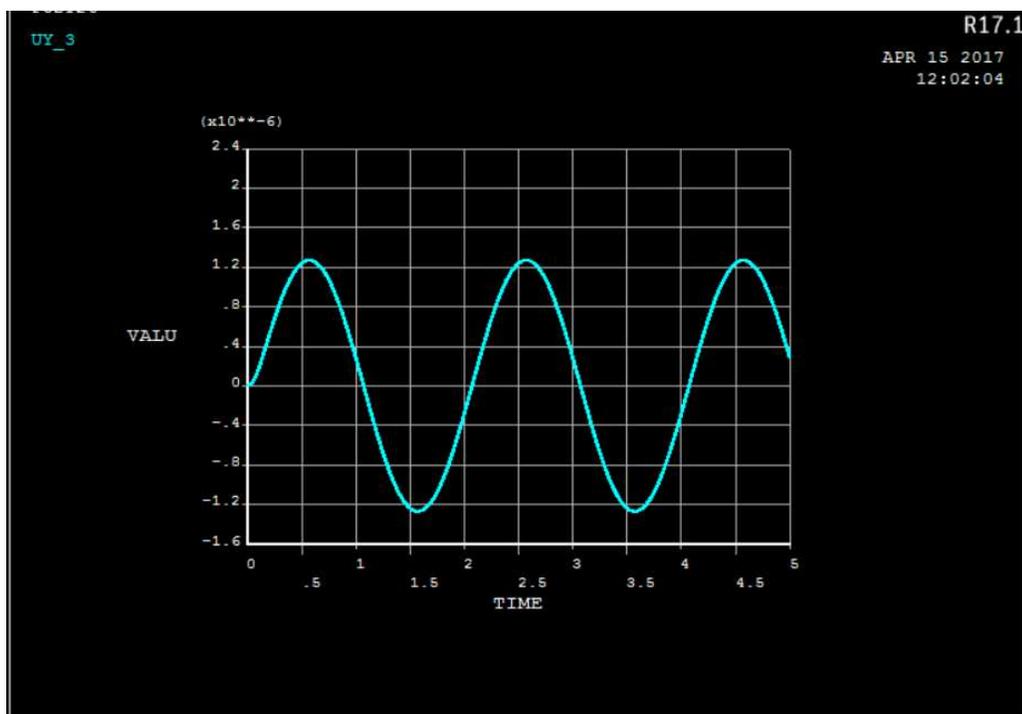


Figura 81 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s)

- o Rotación:

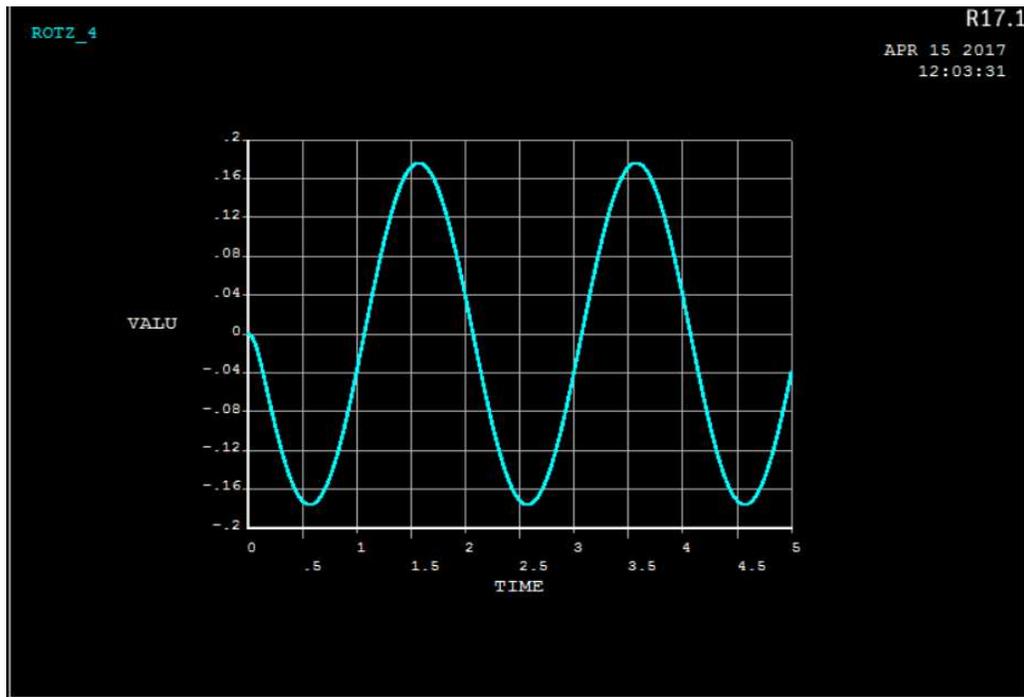


Figura 82 Solución del análisis Transient – Rotación (Rad) en función del tiempo (s)

Nodo 3:

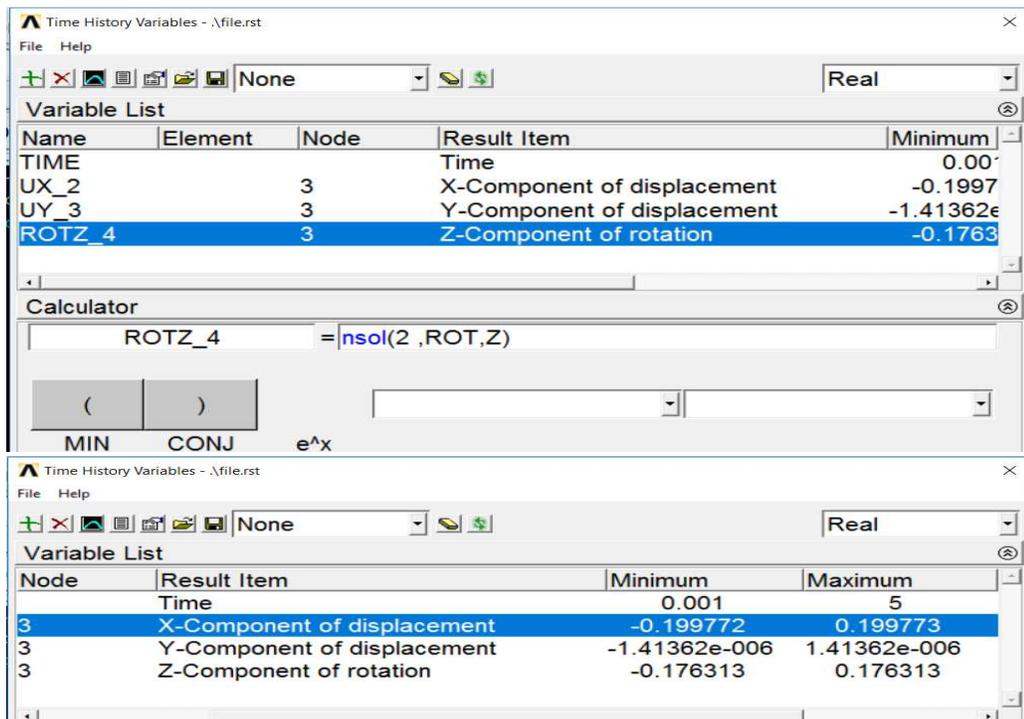


Figura 83 Menú de graficación Nodo 3

o Eje X:

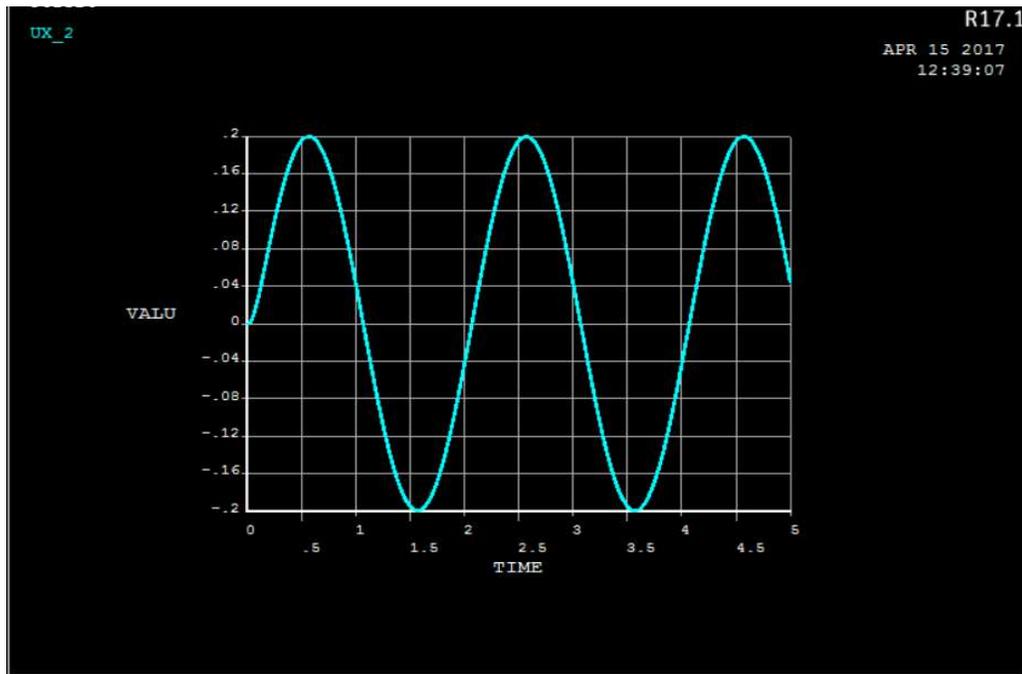


Figura 84 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "X" (m) en función del tiempo (s)

o Eje Y:

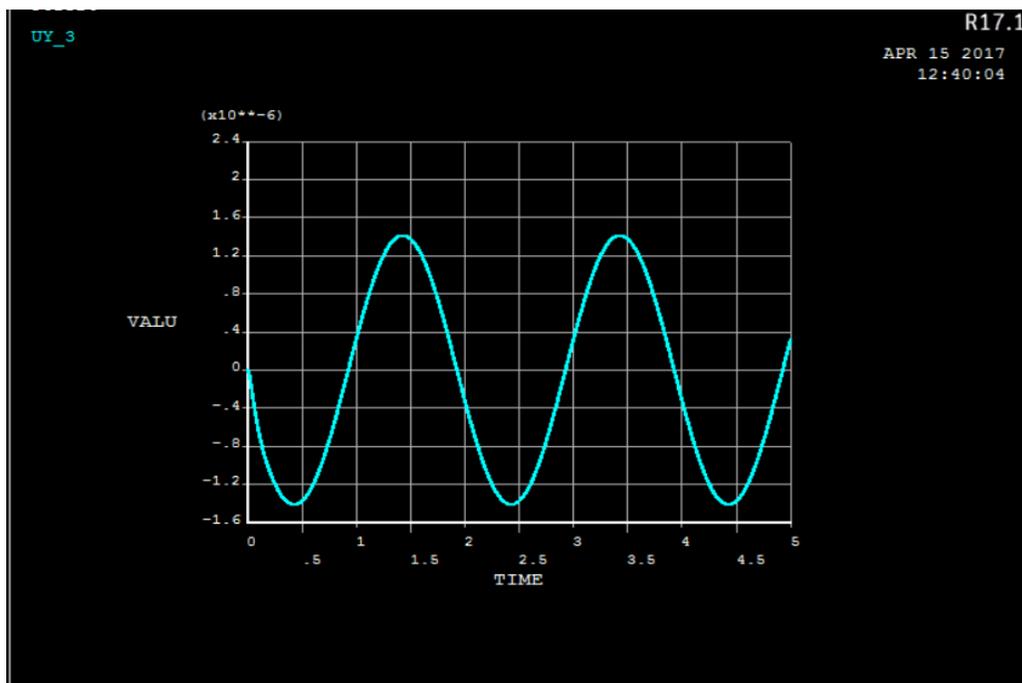


Figura 85 Solución del análisis Transient - Desplazamiento "Y" (m) en función del tiempo (s)

- Rotación:

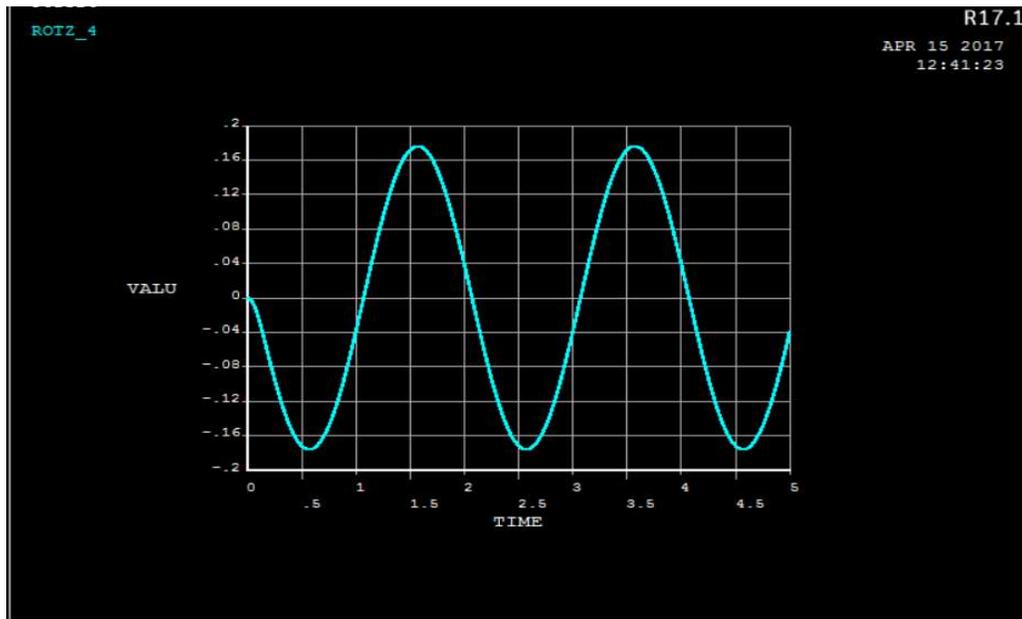


Figura 86 Solución del análisis Transient – Rotación (Rad) en función del tiempo (s)

4.4. Validación

4.4.1. Vibración libre

Con el objetivo de establecer la validación y comparar los resultados obtenidos en la modelación matemática con la simulación, se considera la solución en el eje X del nodo 3, para cada tipo de sistema.

4.4.1.1. Sistema sin amortiguamiento

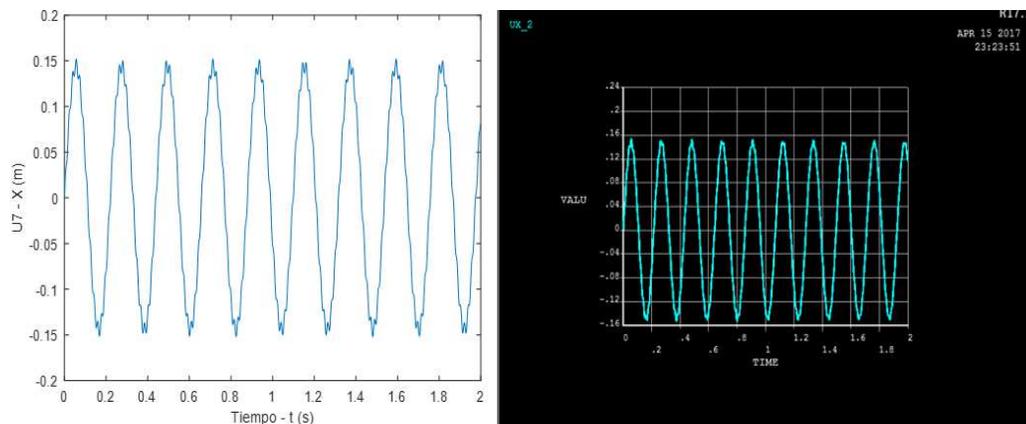


Figura 87 Validación de resultados- Solución Nodo 3: Desplazamiento en “X”

Al comparar las gráficas se puede determinar que son muy similares, ya que presentan las mismas características y forma en cada punto analizado, y centrándose en la amplitud máxima, se determina que es la misma para ambas gráficas de aproximadamente 15 cm; por lo tanto, no se tiene error.

4.4.1.2. Sistema con amortiguamiento viscoso

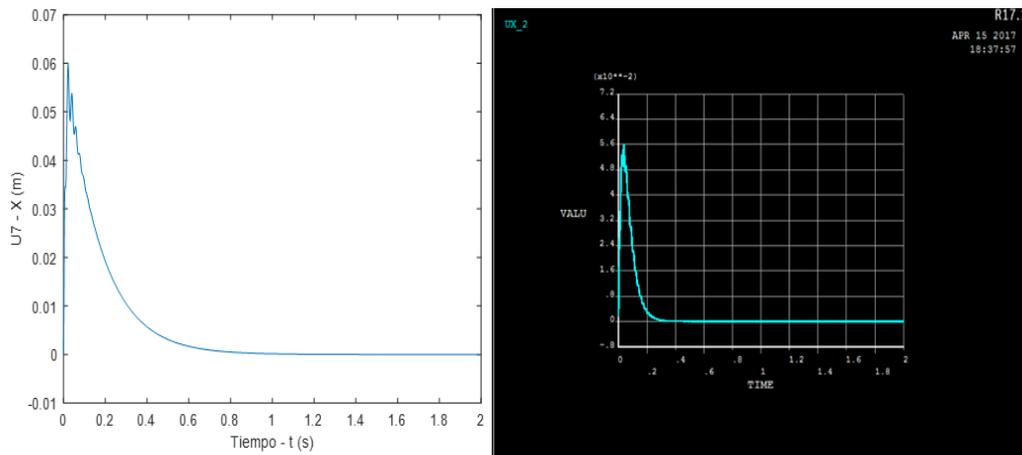


Figura 88 Validación de resultados- Solución Nodo 3:
Desplazamiento en “X”

Analizando las gráficas, se puede determinar que son casi idénticas en sus características, y que poseen igual forma en la mayoría de puntos, a excepción del punto más alto, que para la gráfica obtenida en la modelación es de 6 cm, mientras que en la gráfica de la simulación es de 5.6 cm, teniendo una diferencia de 4 mm, considerada muy pequeña y despreciable al tratarse de un solo punto dentro de toda la gráfica; es decir, no existe un error apreciable.

4.4.2. Vibración Forzada

De igual manera con el fin de establecer la validación y comparar los resultados obtenidos en la modelación matemática con la simulación, se considera en este caso la solución en el eje X del nodo 2, para cada tipo de sistema.

4.4.2.1. Sistema sin amortiguamiento

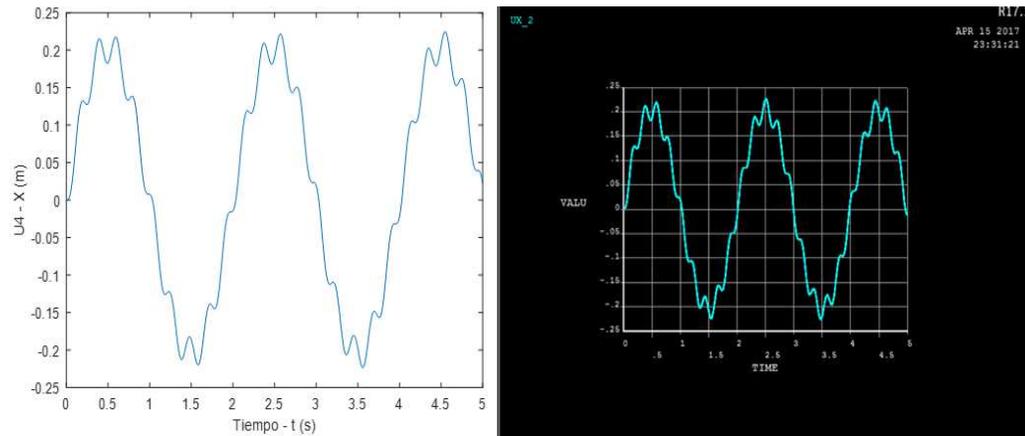


Figura 89 Validación de resultados- Solución Nodo 3:
Desplazamiento en “X”

Comparando las gráficas de las soluciones, se puede determinar que son similares en todas sus características, a su vez presentan la misma forma y amplitud (de aproximadamente 22 cm), lo que quiere decir que los puntos que determinan las gráficas son iguales, por lo tanto, no se tiene error.

4.4.2.2. Sistema con amortiguamiento viscoso

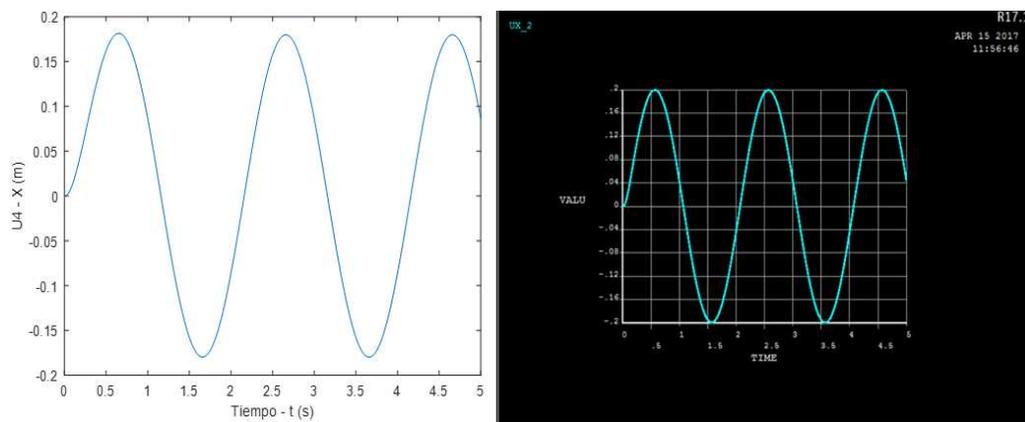


Figura 90 Validación de resultados- Solución Nodo 3:
Desplazamiento en “X”

Analizando las gráficas se determina que poseen la misma forma y características similares, pero que, al comparar las amplitudes, en la gráfica de la modelación matemática se tiene el valor de 19 cm, mientras que en la gráfica correspondiente a la simulación el valor es de 19.5 cm, teniendo una

diferencia de 5 mm (error del 2.5%), que no es un valor representativo considerando que el resto de puntos son iguales en ambas graficas.

Finalmente, luego de haber realizado los análisis y comparaciones correspondientes a la validación, se puede apreciar que no se obtuvieron resultados erróneos ya que, de manera general al sacar un promedio entre los errores alcanzados en los cuatro análisis, el porcentaje total de error es del 0.7% que es un valor muy pequeño considerándolo un valor casi nulo; por lo tanto, se tiene una proximidad del 99.3% entre las soluciones de ambos métodos. Esto da como exitoso al desarrollo de la modelación matemática por el método de elementos finitos propuesta, siendo válida como un aporte y un método alternativo dentro del análisis vibracional de estructuras que presenta resultados muy confiables y cercanos a la realidad.

CAPÍTULO V

CONSTRUCCIÓN DEL PROTOTIPO A ESCALA

El prototipo es una representación de la estructura analizada pórtico, que para fines didácticos está realizada a escala, esto quiere decir que sus dimensiones son pequeñas en comparación a las grandes estructuras que se emplean en las edificaciones; no obstante independientemente del tamaño, este prototipo es de gran aporte para lo que se busca estudiar, porque simula de manera práctica el comportamiento del pórtico frente a la acción de cargas externas, así como el aporte que brinda el amortiguador a la estructura.

Las cargas a las que se exponen las estructuras, como se sabe, pueden ser de distinta naturaleza; entre las que más efectos ocasionan y que están presentes en la mayoría de ocasiones, son las dinámicas inducidas por movimientos de tipo telúrico, es decir ocasionadas por desplazamientos de la corteza terrestre.

Bajo esta perspectiva, en una primera instancia se busca asemejar este tipo de cargas para aplicarlas al prototipo. Entonces la idea es simular mediante un mecanismo la generación de cargas dinámicas, inducidas por el movimiento horizontal del piso al que está empotrado el pórtico, creando en el mismo, el efecto vibracional requerido, que es la base del presente estudio. Con esto se puede analizar el comportamiento que presenta el prototipo al exponerse a dichas circunstancias.

Entonces en un principio se fabricará una mesa de vibración que contenga el mecanismo y todos los elementos necesarios para inducir el movimiento al pórtico. Para esto como primer punto, se requiere definir el mecanismo necesario para la generación del movimiento, el mismo que es de tipo horizontal repetitivo, característico del movimiento vibratorio.

5.1. Mecanismo para la generación de movimiento

Entre las alternativas que se tienen en base al tipo de movimiento que se pretende implementar, la más factible y acorde para esta aplicación, es el mecanismo manivela-corredera.

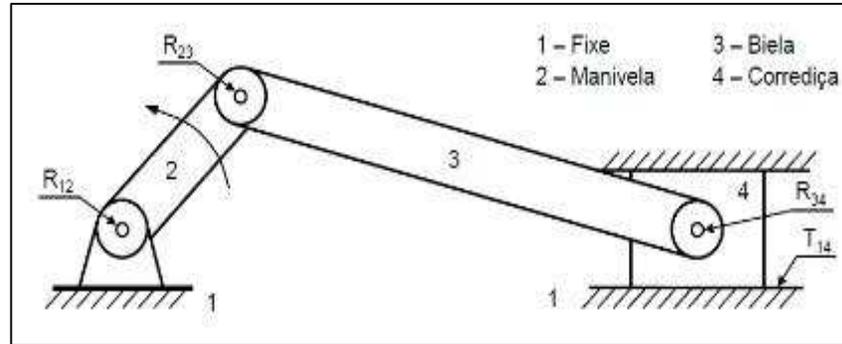


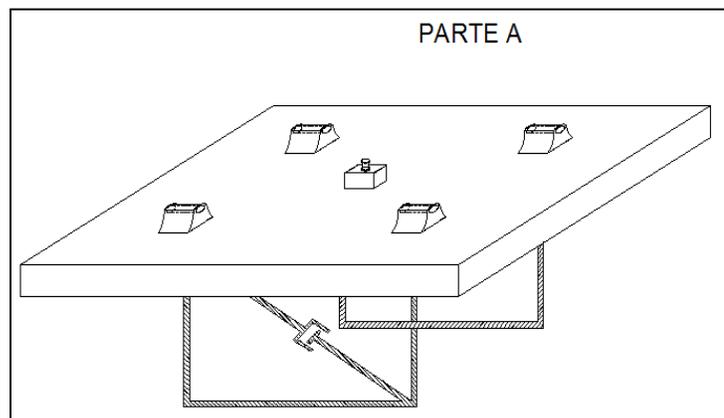
Figura 91 Mecanismo manivela - corredera (Fuente: ebah.com, s.f.)

Este mecanismo es uno de los más sencillos en su composición, debido a que en su forma general requiere de dos barras (la manivela y la barra de unión o biela), y un elemento deslizable llamado corredera, aparte de un elemento que impulse el movimiento como un motor, mismo que se acopla a la manivela.

Como ventajas que aporta el mecanismo a la aplicación requerida se tiene:

- Simplicidad en el diseño
- Menor cantidad de elementos a emplear
- Similitud al tipo de movimiento que se pretende implementar
- Fácil mantenimiento de los elementos
- Capacidad de montaje y desmontaje

Entonces adaptando este concepto a la mesa de vibración, el mecanismo debe deslizarse de manera repetitiva una base sobre la que se empotrará el pórtico, la misma que deberá estar sujeta al sistema de la corredera formando parte del mismo.



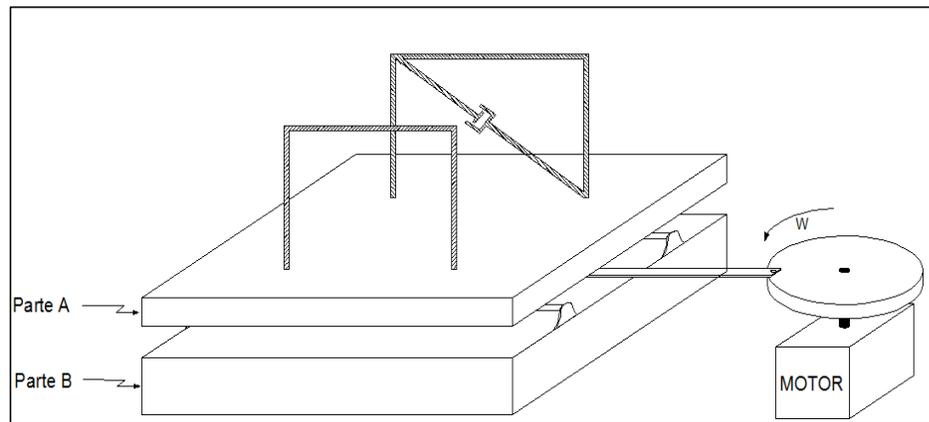
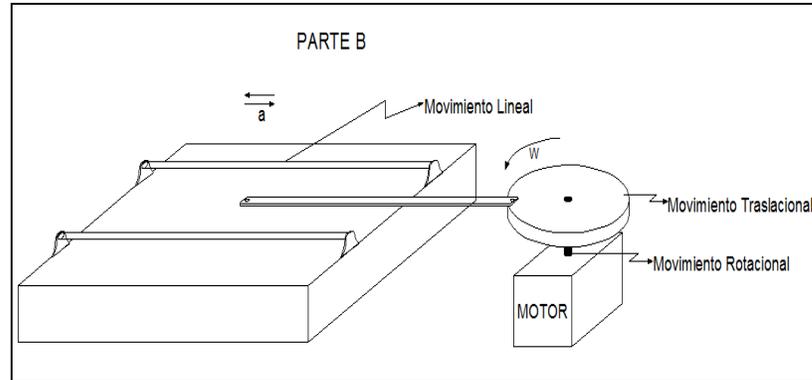


Figura 92 Esquema alternativo de construcción (Fuente: Creación propia)

Las figura es una representación esquemática de la idea a implementar, para lo cual se requiere de ejes que sirvan como guías, un disco con una excéntrica que asemeje las veces de manivela, un motor que genere el movimiento, una mesa con un sistema de deslizamiento que permitan hacer los desplazamientos de la corredera y un bastidor.

A continuación, se presenta el proceso detallado de la elaboración de la mesa de vibración.

5.2. Fabricación de la mesa de Vibración

5.2.1. Mecanismo

En la elaboración del mecanismo para la generación de movimiento, primeramente, se considera la compra de dos ejes de acero inoxidable de diámetro $\frac{3}{4}$, que son utilizados como guías donde se desplaza la corredera, a la vez que soporta el peso que esto implica. Por consiguiente, el diámetro que se considera es para evitar pandeos y el material es por el buen acabado superficial que presenta.



Figura 93 Guías de acero inoxidable

Se fabrica un marco de tubo cuadrado de acero de 45 X 55 cm, con un espesor de 1 mm, el cual sirve como soporte de la base a la que se empotran las estructuras. A este marco metálico también se acopla el sistema que ayuda en la labor del desplazamiento.



Figura 94 Marco metálico

Este sistema, se compone de dos ruedas colocadas a los costados de los ejes, las cuales permiten realizar un óptimo desplazamiento al disminuir la influencia de la resistencia que se opone al movimiento. Estas ruedas están fabricadas de duralon para evitar el mayor desgaste posible entre elementos debido a la fricción. Se sujetan al marco de aluminio a través de platinas previamente soldadas por medio de pernos y bocines los cuales le dan la altura de separación necesaria para evitar rozamientos con los ejes. En total se usan 8 ruedas ubicadas en 4 pares distribuidos 2 a cada lado del marco.



Figura 95 Sistema para el deslizamiento de la corredera



Figura 96 Montaje del sistema de deslizamiento

Se adquiere un motor que impulse el movimiento, el cual se elige dando prioridad a la característica del torque, que es lo esencial para hacer mover a la mesa acoplada al marco de tubo cuadrado y la estructura ubicada sobre ella. Para ello tomando en cuenta este criterio, se busca un moto-reductor eléctrico, pequeño que no represente mucho peso para la maquina en general.

Para la selección, se lo hace en base al torque, el cual se obtiene al hacer los cálculos:

$$T = F * d \quad (5.1)$$

Donde

F: es la fuerza que se pretende mover

d: es el brazo de palanca (Longitud manivela)

Como datos se plantea la carga máxima que va a mover el motor y la mayor longitud de manivela que se tiene, esto es con el objeto de calcular el torque mínimo necesario para generar el movimiento en las condiciones más críticas:

$$F_{m\acute{a}x} = 5Kg$$

$$d_{m\acute{a}x} = 6\text{ cm} = 0.06\text{ m}$$

$$T = 5 * 0.06$$

$$T = 0.3\text{ Kg.m}$$

Luego para determinar el torque del motor eléctrico a elegir se usan las siguientes fórmulas:

Potencia eléctrica:

$$P = V * I \quad (5.2)$$

Potencia mecánica:

$$P = T * v \quad (5.3)$$

Hay que tener en cuenta que: $1HP = 745.7\text{ W}$

Al aplicar la siguiente fórmula, se puede obtener directamente el torque en $Kg.m$:

$$T = \frac{P\text{ (HP)} * 716}{v\text{ (RPM)}}\text{ Kg.m} \quad (5.4)$$

Para elegir el motor adecuado, se lo puede hacer por dos caminos:

- EL primero, es comparando este valor de torque obtenido de las características del motor, el cual debe ser mayor al torque calculado bajo las condiciones más críticas.
- El segundo, es aplicando la fórmula del torque, en la que se divide el valor calculado en las características del motor para el brazo de palanca, obteniendo la fuerza que soporta el motor, misma que debe ser mayor a la fuerza planteada bajo las condiciones más críticas.

Luego en base a estos criterios se adquirió el siguiente moto-reductor:

- Tipo: *GMX - 7MP008A*
- Voltaje: 20 V
- Corriente: 1A
- RPM: 465



Figura 97 Moto-reductor adquirido

En el eje del motor se acoplan dos discos de aluminio, el primero para hacer sujeción directa con eje mediante una manzana que ingresa a presión, y el segundo que se une a continuación mediante unos pilares pequeños a una altura determinada, este disco posee orificios realizados excéntricamente donde se acopla la barra de unión que transmite el movimiento al marco de metal (corredera). El disco con los agujeros excéntricos hace la función de la manivela, el cual recibe el movimiento directo del motor. Estos orificios son 4 separados cada 1.5 cm a fin de ofrecer variación en las amplitudes del desplazamiento, dependiendo las necesidades, por lo tanto, la barra de unión se une al disco por medio de un perno que le da el ajuste necesario. Bajo este tipo de diseño, el sistema es fácilmente desmontable.



Figura 98 Conjunto motor - discos



Figura 99 Disco con la excéntrica que cumple la función de manivela

Para la barra de unión (biela) entre la corredera y la manivela, se adquiere un eje pequeño de acero inoxidable de longitud 56 cm , con un diámetro de 9.5 mm , para que no ejerza demasiado peso, pero que cumpla la función requerida. Para esto en los extremos de la barra se realiza un roscado para empinar dos elementos que sirven para acoplar la barra al disco y al marco.



Figura 100 Barra de unión

Los elementos de acople unidos mediante conexiones empernadas tanto al disco como al marco, se los conoce como rotulas, las cuales ofrecen grados de libertad rotatorios que son necesarios para facilitar el movimiento evitando que se trabe y a su vez absorbiendo los pequeños giros que sufre de la barra ocasionados por el propio movimiento y velocidad de trabajo.



Figura 101 Elementos de acople ubicados en los extremos de la barra Finalmente se ensamblan todos los elementos y se obtiene el mecanismo para la generación de movimiento.



Figura 102 Mecanismo para la generación del movimiento en la mesa de vibración

5.2.1.1. Diagrama Cinemático del mecanismo

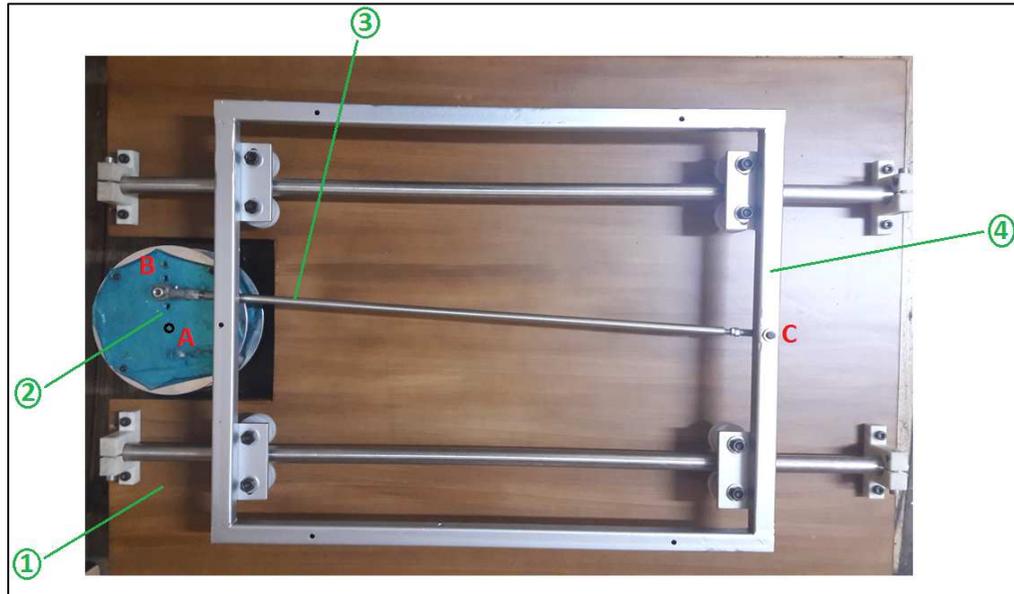


Figura 103 Nomenclatura de elementos

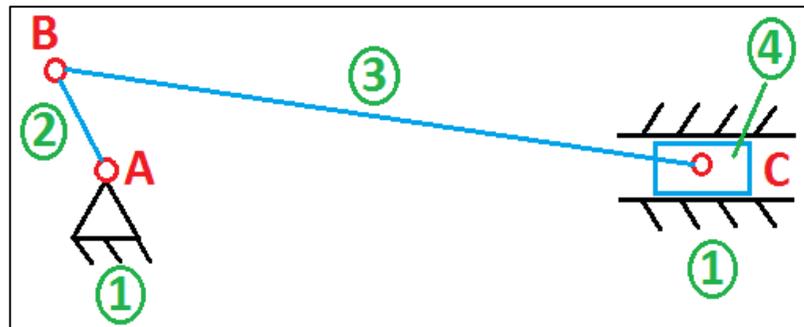


Figura 104 Diagrama cinemático

5.2.2. Bastidor

El bastidor es el soporte donde se ubican los distintos elementos que conforman la máquina, y sobre el cual se ensambla todo el conjunto. Para la fabricación del bastidor se considera varios aspectos como el material, el cual se escogió que sea de madera para dar un toque estético a la mesa y a su vez que sea capaz de soportar las cargas.

Por lo tanto, la madera de soporte utilizada tiene un espesor de 3 cm para evitar pandeos, y a su vez acoger los elementos para permitir que funcionen de manera óptima. Como el caso del motor, para el cual tiene ensamblado en su parte inferior un sistema de acople de madera que le brinde la sujeción correcta evitando movimientos innecesarios o descentramientos.



Figura 105 Madera utilizada como bastidor



Figura 106 Sistema para acoplamiento del motor al bastidor

Una vez adecuada la madera de soporte, se realiza el ensamblaje de las cuatro patas previamente elaboradas, unidas por medio de lo que se conoce como zócalo, con el fin de brindar firmeza y estabilidad a la máquina, también para brindar la altura necesaria a fin evitar que el motor roce con la superficie donde se ubique la mesa de vibración.



Figura 107 Fabricación de las patas para el bastidor

Se adecua el bastidor generando compartimentos para el alojamiento de la fuente variable que permite el paso de la energía hacia el motor, también para facilitar el desmontaje de cada elemento y sistema.



Figura 108 Elaboración de compartimentos en el bastidor

Para la sujeción de los ejes (guías), se fabrica cuatro elementos diseñados para alojar y mantener fijos a los ejes permitiendo el movimiento fluido de la corredera. Estos soportes están fabricados de duralon y van empotrados al bastidor por medio de uniones empernadas.



Figura 109 Elementos para sujeción de guías



Figura 110 Montaje de los elementos de sujeción

Finalmente dando los acabados respectivos como la pintura y demás, se tiene el bastidor.



Figura 111 Acabados finales del bastidor

5.2.3. Fuente variable

Como se mencionó anteriormente, el motor es de tipo eléctrico de corriente continua con un voltaje máximo de 20V, por lo que se requiere una fuente que provea este tipo de energía. Para esto se adquiere una fuente de poder considerando aspectos importantes como el que permita transformar la corriente de alterna a continua, además de ofrecer la característica de variabilidad en el voltaje de salida, para brindar la opción de modificar la velocidad a la que opere el motor. Bajo estos criterios la fuente escogida tiene las siguientes características:

- Fuente: Variable AC/DC
- Corriente: 1A
- Voltaje de entrada: 110V
- Voltaje de salida: 3-20 V



Figura 112 Fuente variable

5.2.4. Base para empotramiento de los pórticos

Para fabricar la base de soporte de los pórticos, se toma en cuenta la idea de disminuir peso a toda la máquina y por ende la carga al motor. En base a esto se la hace de acrílico con las adecuaciones necesarias para acoplarse al marco de acero y a su vez con perforaciones que permitan el empotramiento de los pórticos a la misma.



Figura 113 Base con las adecuaciones para los empotramientos

5.2.5. Montaje

En la primera parte del montaje se unen los elementos que van instalados en el bastidor, que son la fuente variable, el motor, los soportes para los ejes. Esto se presenta en la siguiente figura:



Figura 114 Fase 1 de ensamble de la mesa de vibración

En la segunda parte, se acoplan los elementos que complementan el mecanismo para la generación de movimiento, que son los ejes, el marco de acero con el sistema de deslizamiento (ruedas), y la barra que transmite el movimiento. Como se aprecia en la siguiente figura:



Figura 115 Fase 2 de ensamble de la mesa de vibración

Finalmente se une la base de acrílico al marco de metal mediante uniones emperradas. Como se muestra en la siguiente figura:



Figura 116 Mesa de vibración ensamblada

5.3. Fabricación del pórtico a escala

En total son dos prototipos fabricados de idéntica manera, por lo cual la fabricación se refiere de manera general solo para uno. El prototipo de la estructura analizada es un pórtico hecho a escala, el cual necesariamente debe ser elaborado con materiales y secciones transversales que le brinden la flexibilidad necesaria para asemejar el movimiento de un pórtico real debido a que las cargas a inducir provienen en base al movimiento de la mesa vibradora, ya que si se lo hace muy rígido no se lograría este cometido.

Para esto dentro de los posibles materiales que se tienen, se utiliza un perfil rectangular de acero templado, de sección transversal sumamente delgada que le permita pandearse con la aplicación de poca carga y luego volver a su posición original, simulando el comportamiento de la estructura frente a las cargas dinámicas.



Figura 117 Pórtico a escala

5.3.1. Características

- Material: *Acero templado*
- Coeficiente de elasticidad: $E = 2e11 Pa$
- Coeficiente de Poisson: $\nu_{xy} = 0.3$
- Densidad del acero: $7850 kg/m^3$

Los elementos del pórtico tienen las siguientes dimensiones:

- Longitud de las columnas: $43.1 cm$
- Longitud de la viga: $22 cm$
- Área transversal: $33.5 mm \times 0.9 mm$

5.3.2. Proceso de ensamble

Para construir el pórtico, es decir ensamblar sus elementos, la alternativa más adecuada es utilizar uniones empernadas a través de ángulos, para brindar la sujeción necesaria en los nodos; así mismo en los empotramientos se usa una sujeción con doble ángulo con lo que se consigue dar justamente la condición de empotramiento y privar en estos nodos los desplazamientos

en todos los grados de libertad. Al realizar uniones empernadas se busca que el prototipo sea fácilmente desmontable dando la posibilidad de probar distintos tipos de configuraciones de estructura dentro de la aplicación académica que se le puede dar a la mesa de vibración.



Figura 118 Juntas de unión para los elementos del pórtico

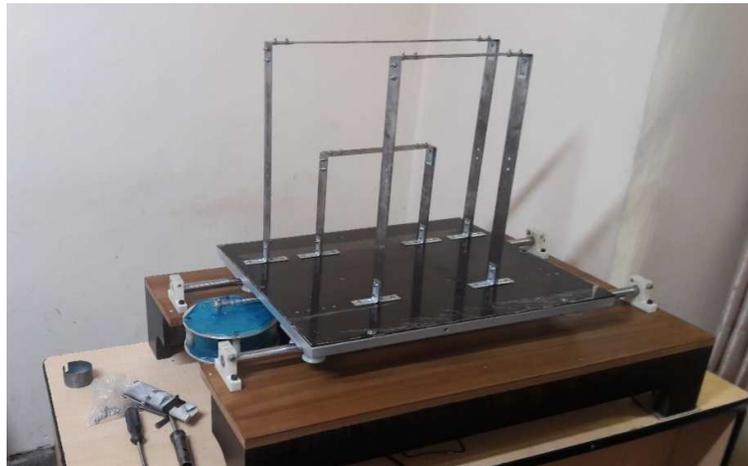


Figura 119 Pórticos ensamblados

5.3.3. Amortiguador

El amortiguador es un elemento adquirido, de acuerdo a las necesidades planteadas en el capítulo 3, en la parte donde se determinó el coeficiente de amortiguamiento.



Figura 120 Amortiguador viscoso adquirido

El amortiguador en mención tiene las siguientes características:

- Material: *Acero*
- Tipo: *Viscoso de Taylor*
- Fluido: *Aceite hidráulico numero 10*
- Longitud total: *55 cm*
- Longitud del vástago: *23 cm*
- Longitud del cilindro: *32 cm*
- Carrera: *20 cm*
- Coeficiente de amortiguamiento: *34 Ns/m* (Determinado en el cap. 3)

5.3.3.1. Montaje

Para el montaje del amortiguador en el pórtico, se utilizan dos acoples fabricados justamente para brindar la sujeción a la estructura, unidos al amortiguador en sus extremos mediante pasadores. En cada extremo, el amortiguador posee una vincha donde se pueden unir estos dispositivos, como se muestra en la figura:



Figura 121 Elementos de acople en los extremos del amortiguador

Finalmente, al ensamblar el amortiguador se necesita contraer su vástago para brindar el deslizamiento y la amortiguación en ambos sentidos (positivo y negativo) del movimiento de la estructura. El montaje queda representado en la siguiente figura:



Figura 122 Montaje del amortiguador en el pórtico

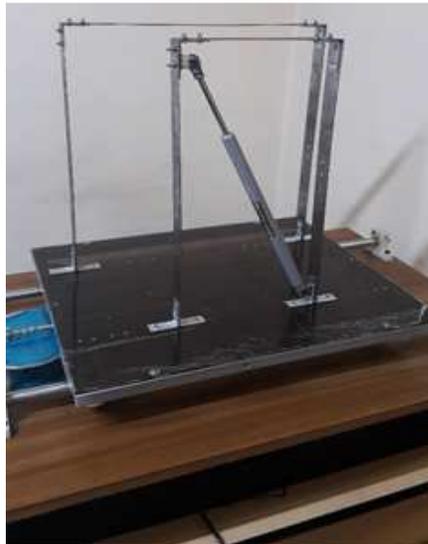


Figura 123 Ensamble del pórtico amortiguado

5.4. Instrumentación al prototipo

Con el fin de presentar el aporte que brinda el amortiguador al pórtico, se implementa el uso de instrumentación básica para obtener la representación gráfica del tipo de movimiento que se analice, por medio de una interfaz que permita cumplir esta acción.

5.4.1. Instrumentación para adquisición de datos

Como instrumentación para la adquisición, se usa un sensor acelerómetro, que permite trabajar en el análisis de varios grados de libertad, dependiendo de su conexión; aparte se usa un ARDUINO, como una tarjeta de adquisición

y manejo de datos de entrada y salida, la misma que previamente es programada para la interacción con el sensor donde se obtiene la información que luego es enviada hacia el software que grafica el movimiento a través la interfaz gráfica.

El acelerómetro utilizado es el módulo MPU-6050:

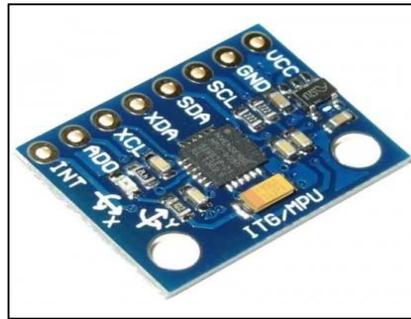


Figura 124 Módulo MPU – 6050
(Fuente: prometec.net, 2017)

Características:

- Material de fabricación: Silicio
- El módulo MPU-6050 posee un acelerómetro de 3 ejes y un giroscopio de 3 ejes.
- Combina una tarjeta de procesador de movimiento digital con el acelerómetro y el giroscopio.
- Dimensiones: 25.5x15.2x2.48 mm
- Alimentación: 3.3 V (otras versiones mediante un regulador permiten hasta 5V)
- Protocolo de comunicación: I2C.

La tarjeta que se utiliza es la ARDUINO MEGA:

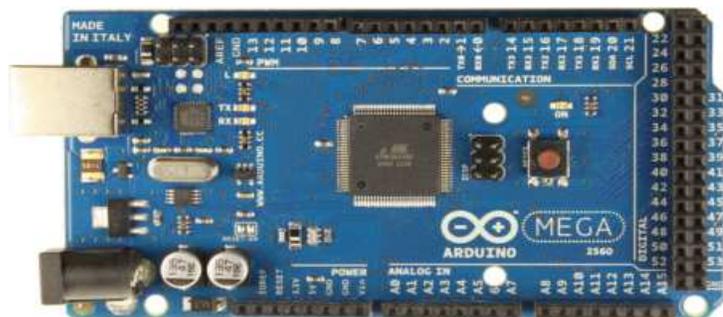


Figura 125 Tarjeta de adquisición de datos - ARDUINO MEGA
(Fuente: arduino.cl, 2017)

Características:

- Microcontrolador: ATmega2560.
- Voltaje de entrada: 7-12V.
- Memoria flash: 256k
- Velocidad: 16Mhz
- Entradas análogas: 16
- Pines digitales de Entrada/Salida: 54 (14 de ellos son salidas PWM)

Esquema de conexión:

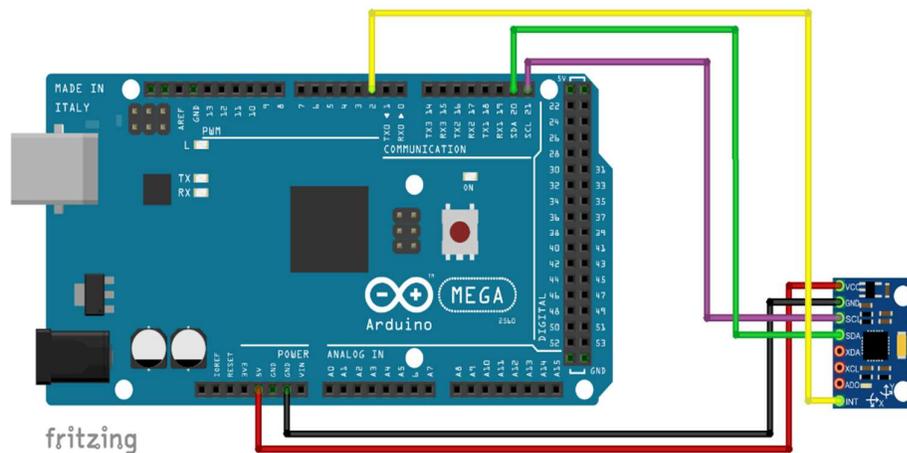


Figura 126 Esquema de conexión Modulo-Tarjeta
(Fuente: promotec.net, 2017)

Programación en Arduino:

La codificación del programa en arduino para la adquisición de datos, a través del módulo MPU-6050, se la obtiene descargando las librerías que son propias del módulo y vienen incluidas como complementos del sensor, luego se copian en la carpeta de instalación de arduino en la carpeta "librerías"; a continuación en el programa arduino, se despliega la pestaña inicio, y en la parte de ejemplos se obtiene el código del programa principal elaborado para el MPU-6050, al que se lo modifica dependiendo de la aplicación y la medición que se quiera realizar.

La modificación al código, realizada para esta aplicación se la puede revisar remitiéndose al ANEXO C.

5.4.2. Interfaz gráfica

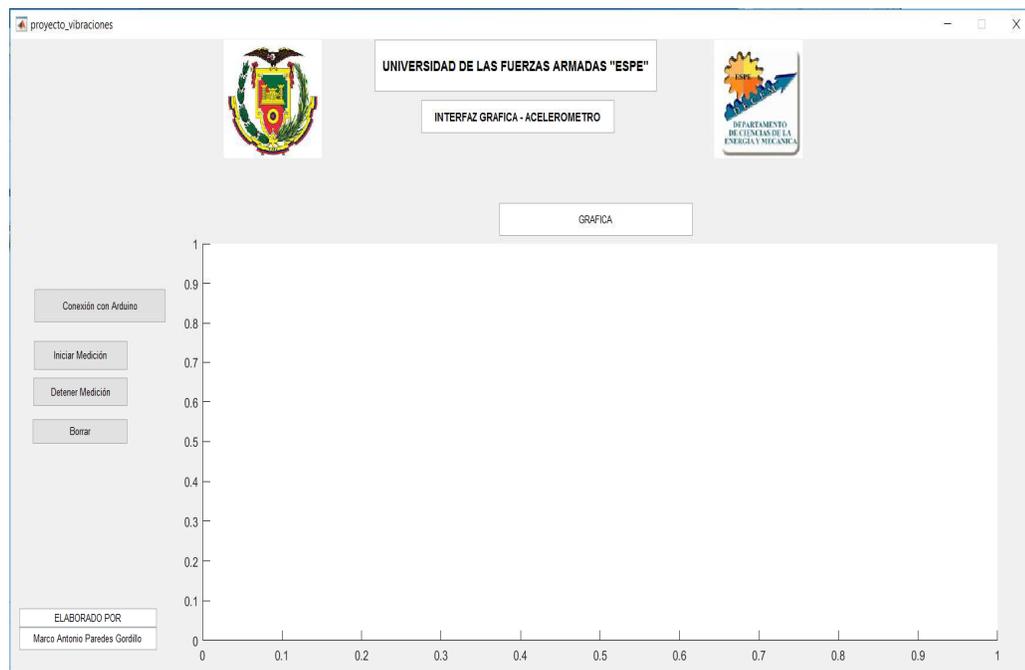
Para la obtención de las gráficas del movimiento mediante la instrumentación y la conexión al computador por medio del cable USB, se plantea tres posibilidades para implementar la interfaz gráfica.

5.4.2.1. Programación de una GUIDE en MATLAB

La primera es la utilización del software MATLAB que, a través de la programación de una GUIDE, se colecta los datos y se los presenta mediante una gráfica que se construye conforme transcurre el tiempo.

Para ejecutar esta interfaz se necesitan los dos archivos con las extensiones “.fig” y “.m”, creados al programar la GUIDE dentro de la misma carpeta; se procede a abrir el archivo “Interfaz_Grafica.m” en Matlab; a continuación se conecta el USB proveniente del Arduino al computador y se verifica el puerto en el que está conectado para cambiarlo en la línea de programación número 205 del archivo abierto, que por default tiene ‘COM6’; finalmente se da “play” al archivo y este se ejecuta.

La interfaz gráfica obtenida luego de realizar la GUIDE se muestra a continuación:



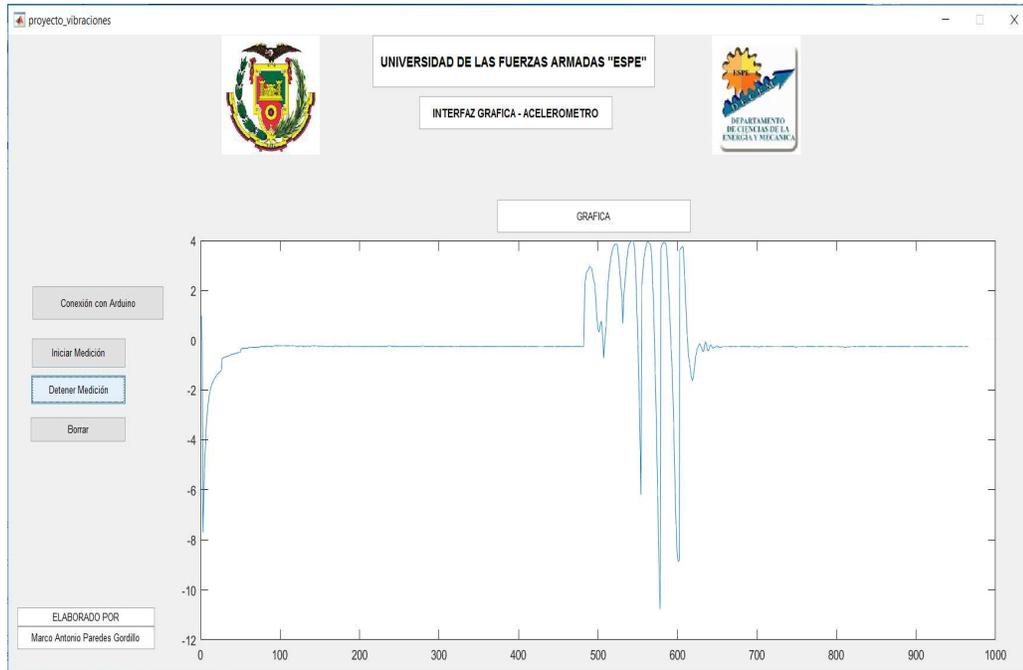


Figura 127 Interfaz gráfica en MATLAB

El problema de esta implementación, es que la comunicación entre MATLAB y ARDUINO es lenta, es decir que tiene un tiempo de retraso hasta coleccionar los datos y graficarlos a tiempo real.

5.4.2.2. Interfaz gráfica de ARDUINO

La segunda posibilidad es obtener las gráficas del movimiento a través de la propia interfaz del programa de arduino, a través del comando “*Serial Plotter*”, ubicado en la pestaña de herramientas. En la ventana que se abre es importante seleccionar la velocidad de transmisión de datos propia del sensor la cual es 115200, en la pestaña ubicada en la parte inferior izquierda.

En esta interfaz, la gráfica si presenta el movimiento a tiempo real sin retrasos, pero de forma simple, como se muestra a continuación:

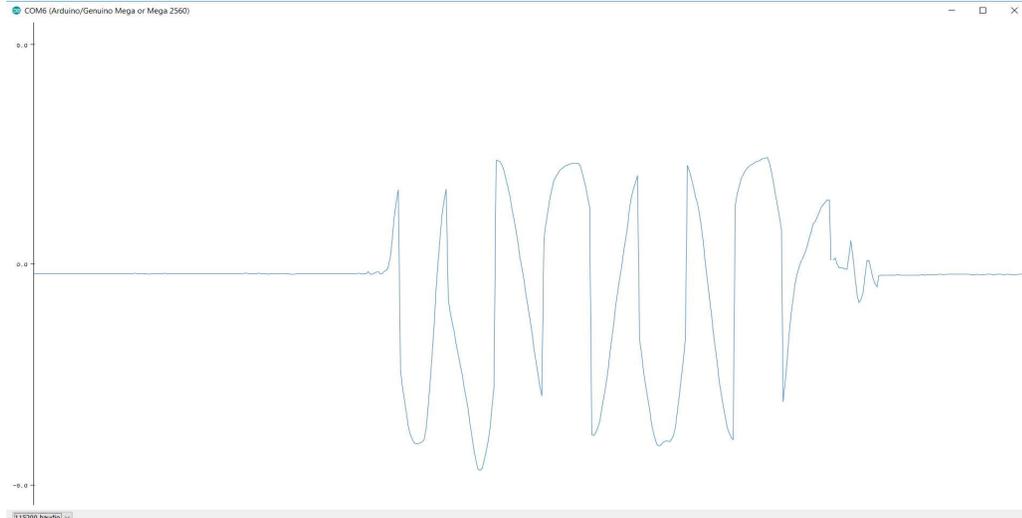


Figura 128 Interfaz gráfica en ARDUINO

5.4.2.3. Graficación en EXCEL

La tercera posibilidad que se plantea, es a través de la extracción de datos a tiempo real por medio de un compilador como el “RS232 Data Logger”, que permite generarlos en un archivo “.TXT”, para luego copiarlos a EXCEL donde se obtiene la gráfica del movimiento. Aquí es importante tomar en cuenta la velocidad de transmisión de datos propia del sensor la cual es 115200 la misma que se selecciona en el compilador de datos. Esto se ejemplifica en la siguiente figura:

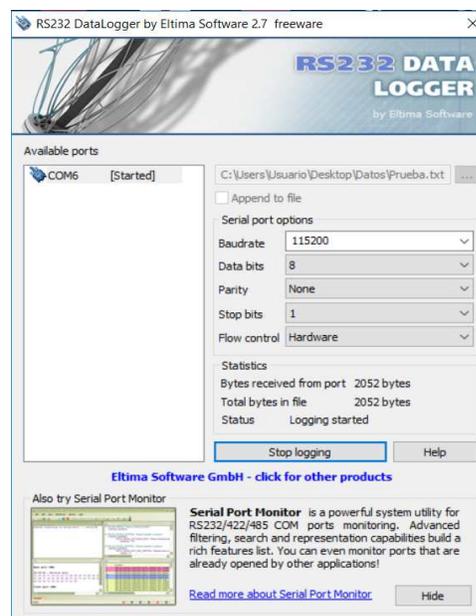


Figura 129 Compilador de datos "RS232 Data Logger"

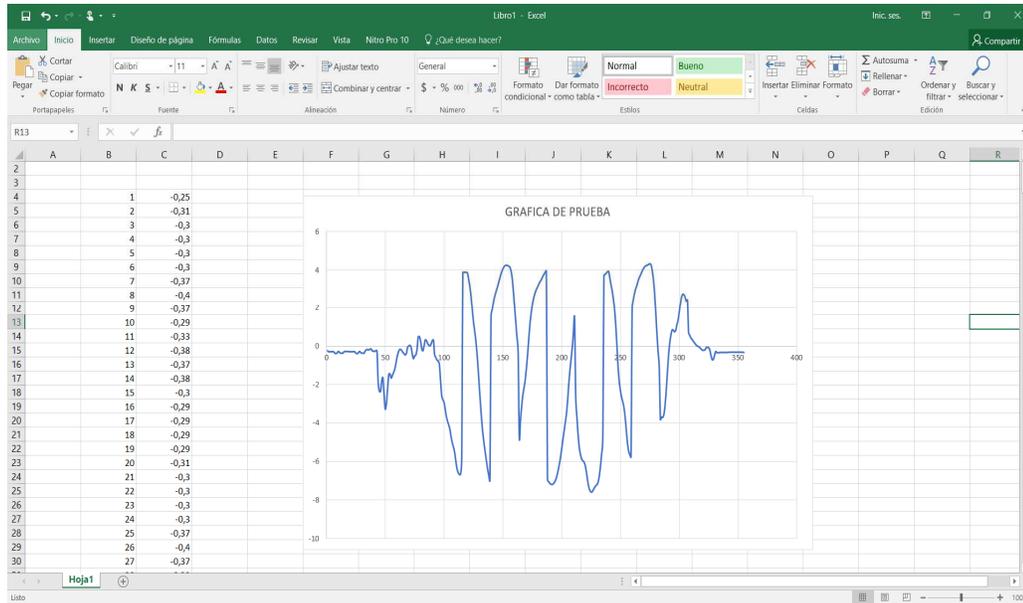


Figura 130 Interfaz gráfica en EXCEL

Este método es el más eficaz de los tres, por lo tanto, se lo utilizará para realizar las pruebas de funcionamiento aplicadas al prototipo.

5.4.3. Montaje

El montaje de la instrumentación en el prototipo es muy sencilla, ya que solo se debe ubicar mediante uniones emperradas el sensor en el elemento o en el nodo de la estructura que se requiera analizar y se procede a ejecutar el procedimiento para la toma de datos. Esto se muestra en la siguiente figura:

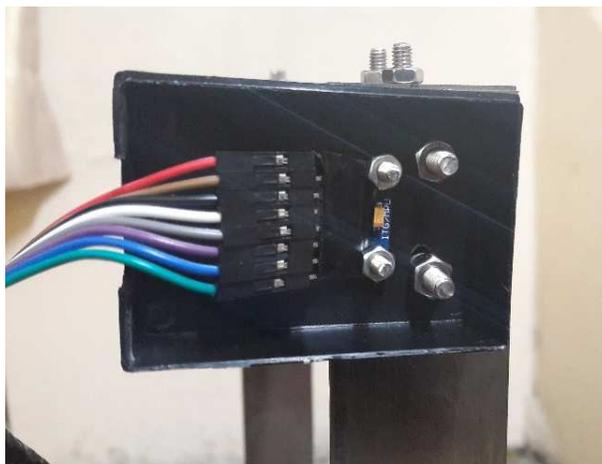


Figura 131 Conexión emperrada para el montaje del módulo



Figura 132 Montaje de instrumentación en el prototipo

5.5. Pruebas de funcionamiento

En esta parte, para efectuar la demostración y pruebas de funcionamiento del prototipo, se procede a realizar el análisis del movimiento en el sentido horizontal del pórtico, con el uso de la metodología propuesta y de la instrumentación implementada con el acelerómetro a través de módulo MPU-6050, que se lo ubicará en los nodos extremos (considerados los más críticos). Es decir que solo se tomarán datos del movimiento en el grado de libertad a lo largo del eje x, debido a que en este eje se presenta el mayor desplazamiento de la estructura.

Como interfaz de graficación se utiliza el tercer método planteado, en el que primero se realiza la compilación de datos correspondientes a cada uno de los nodos, para luego al exportarlos a una hoja de cálculo de EXCEL se obtienen las gráficas, las cuales se muestran a continuación en la parte de resultados.

Vale recalcar que, para un mejor análisis en los resultados, al momento de graficar en Excel se puede modificar el eje de las abscisas e incluir el tiempo en el que se realizó la prueba subdividido en intervalos de acuerdo al número de puntos adquiridos.

Las pruebas se realizan para los dos casos de sistemas amortiguado y no amortiguado, con el objetivo de obtener una comparación del comportamiento

que presentan bajo las cargas inducidas por la mesa de vibración, misma que es adecuada dependiendo las condiciones en las que se quiera analizar, que para este caso se han escogido las siguientes:

- Voltaje: 3 V
- Longitud de manivela: 3 cm
- Desplazamiento total lineal de la corredera: 6 cm
- Tiempo de prueba: 10 s

5.5.1. Resultados

Nodo 2:

- Sin Amortiguamiento



Figura 133 Ubicación del módulo en el nodo 2 - Pórtico sin amortiguamiento

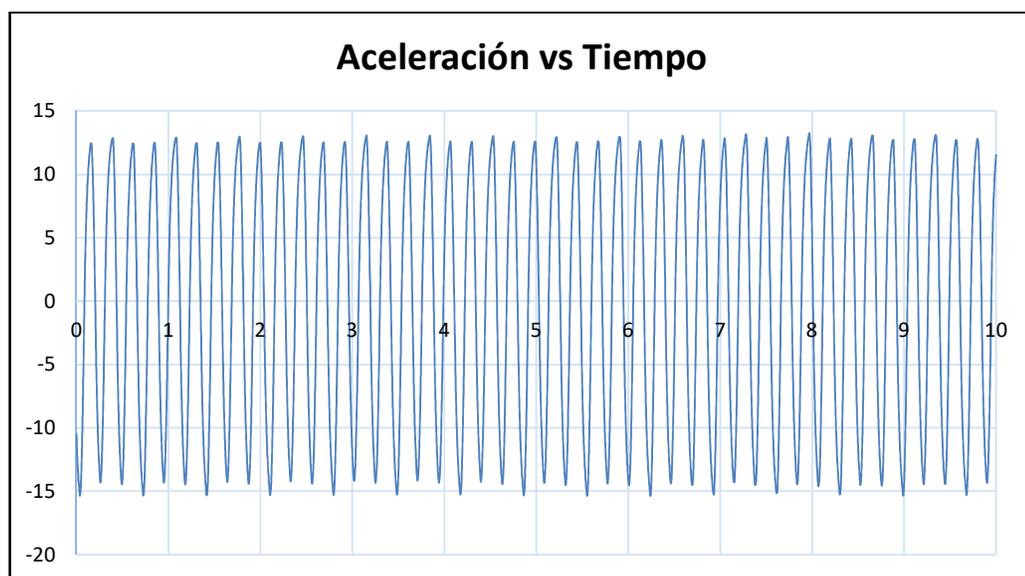


Figura 134 Gráfica obtenida del ensayo – Nodo 2

- Con Amortiguamiento



Figura 135 Ubicación del módulo en el nodo 2 - Pórtico con amortiguamiento

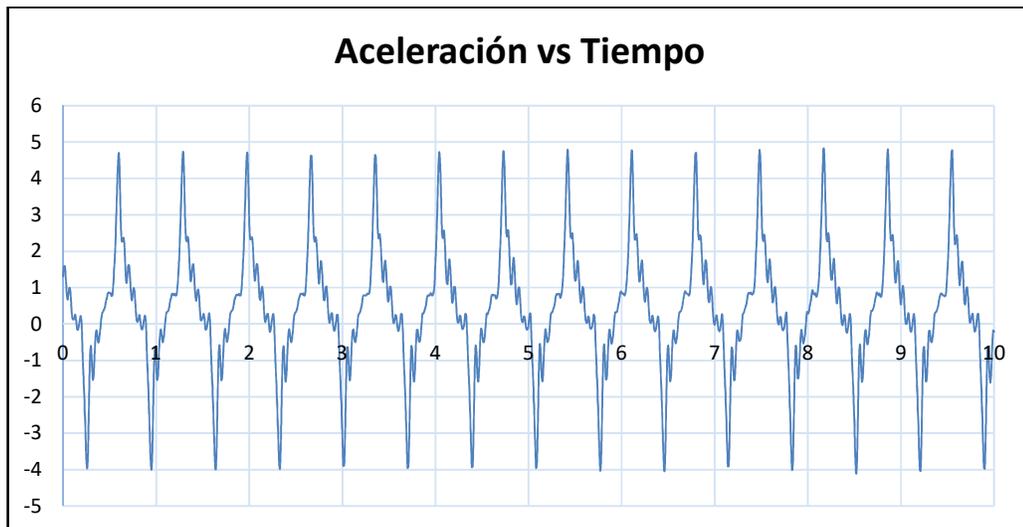


Figura 136 Gráfica obtenida del ensayo – Nodo 2

Nodo 3:

- Sin Amortiguamiento



Figura 137 Ubicación del módulo en el nodo 3 - Pórtico sin amortiguamiento

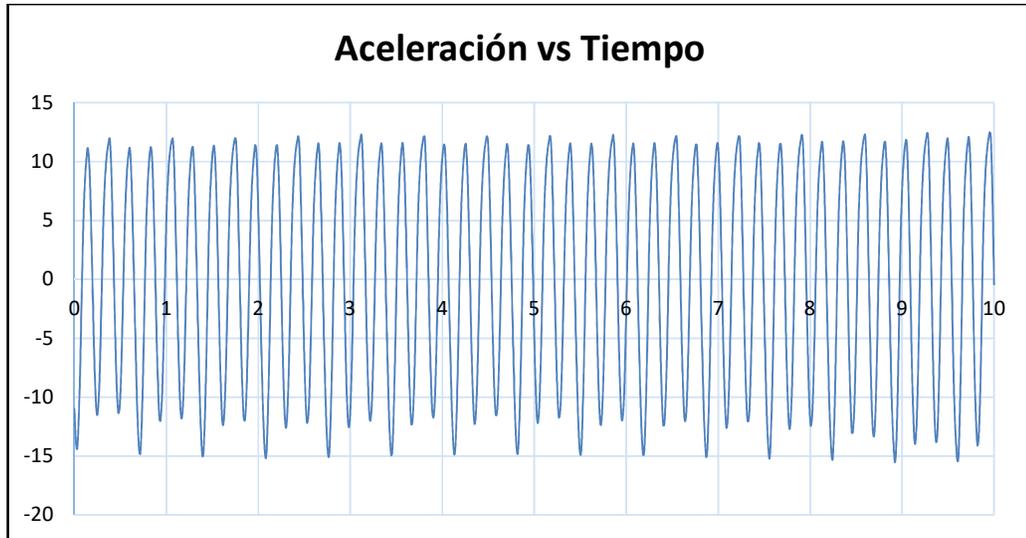


Figura 138 Gráfica obtenida del ensayo – Nodo 3

- Con Amortiguamiento:



Figura 139 Ubicación del módulo en el nodo 3 - Pórtico con amortiguamiento

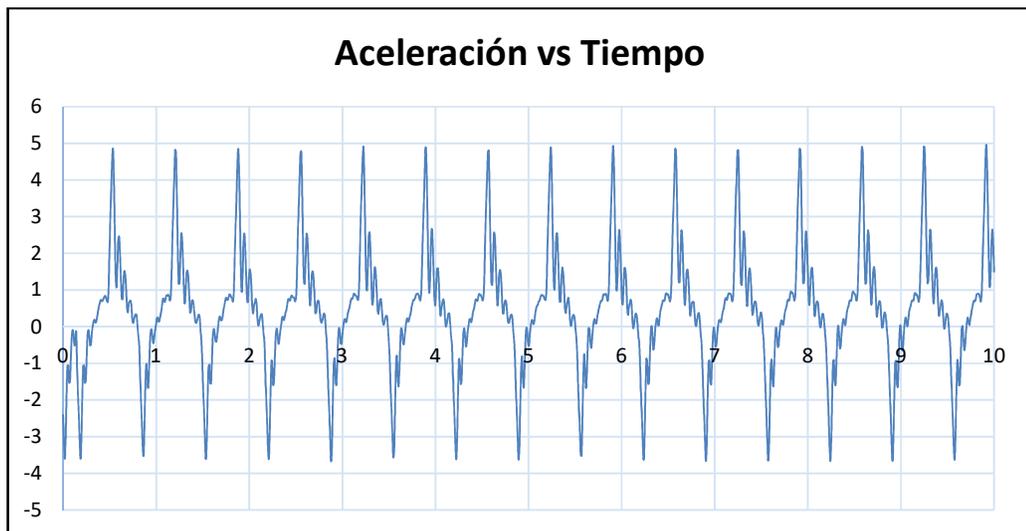


Figura 140 Gráfica obtenida del ensayo – Nodo 3

5.5.2. Análisis

Analizando los resultados obtenidos en la aplicación práctica del prototipo bajo las condiciones establecidas previamente, se puede determinar que existe una reducción notable en cuanto a las amplitudes de los puntos de aceleración tomados con el módulo MPU-6050 en la gráfica que corresponde al sistema amortiguado en comparación al sistema no amortiguado, evaluadas en el mismo nodo. Esto se verifica referenciando los puntos más altos en cada gráfica donde se tiene que la diferencia oscila entre 7 y 9 puntos que aproximadamente equivale al 45%, siendo un aporte positivo el que le da el amortiguador al pórtico.

A su vez, se puede apreciar que, al amortiguar a la estructura, la gráfica disminuye en cuanto al número de oscilaciones que se dan en el mismo tiempo de evaluación, lo que significa que la estructura se ha desplazado un menor número de veces a una baja aceleración, consiguiendo minimizar los picos altos que se observan en la gráfica del sistema no amortiguado.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. Conclusiones

1. El método de los elementos finitos aplicado a través de la modelación matemática, es adaptable al campo de la dinámica estructural en la parte del análisis vibracional que es importante para el diseño de las construcciones. Por consiguiente, al ser una simulación numérica, se tiene información importante acerca de la estructura, que permite conocer las características de cada elemento que la conforma, teniendo la posibilidad de realizar pruebas de variación de ciertos valores que mejoren el funcionamiento del sistema.
2. La modelación matemática es un medio que facilita conocer y comprender los elementos y variables, que son el fundamento en el que se basan los diferentes software de elementos finitos para realizar los cálculos y obtener resultados en una simulación, como las matrices que conforman las ecuaciones, el funcionamiento del mallado, los métodos de iteración para solución de ecuaciones y otros aspectos más, a los que normalmente no se tiene acceso.
3. El planteamiento realizado de las ecuaciones dinámicas que sustentan la estructura de acuerdo al tipo de movimiento a analizar fue óptimo; esto se logró a partir del estudio previo de las variables que entran en juego, así como de los factores que influyen en el sistema, que sirvió posteriormente para la formulación de las alternativas más adecuadas que conducen a la solución del problema.
4. Es importante recalcar que cuando se trabaja matemáticamente con este tipo de modelaciones en las que los valores resultan ser altos, es adecuado realizarlo con una cantidad apreciable de dígitos ya que, al hacer iteraciones numéricas para resolver los sistemas, los resultados pueden variar significativamente al punto de ser erróneos.
5. El éxito del desarrollo de la modelación matemática y el método de solución planteado para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales se ven reflejados con los resultados obtenidos al final, los

cuales son muy acertados y caracterizan de manera precisa el comportamiento de los pórticos tanto amortiguado como no amortiguado, frente a las cargas que se plantearon para estos fines.

6. Se puede determinar claramente que el amortiguador viscoso brinda un aporte considerable a la estructura del pórtico, ayudando con la absorción y atenuación (100% en vibración libre y un 25% en vibración forzada) de las vibraciones excedentes que se generan producto de la naturaleza de las cargas de tipo dinámico, lo cual se ve reflejado en el análisis realizado a las soluciones de las variables inmersas en el movimiento, que se pueden obtener en cada nodo gracias a la aplicación de los elementos finitos.
7. La configuración en la que se ubica el amortiguador dentro de una estructura es otra parte fundamental en el análisis estructural, la cual depende de la aplicación que se requiera en cuanto al sentido en el que se pretende brindar la atenuación de vibraciones. Entonces en base a estos dos parámetros se selecciona el amortiguador que posea las características y propiedades que se ajusten a los requerimientos.
8. Al realizar la validación de la modelación matemática mediante la simulación por el software de elementos finitos, se determinó que existe una proximidad del 99.3% en las soluciones obtenidas por ambos métodos, lo que quiere decir que es loable el procedimiento propuesto y desarrollado con la aplicación de los elementos finitos.
9. El prototipo construido que incluye a la mesa de vibración y a la implementación de la instrumentación para adquisición de datos y graficación de resultados, son un conjunto de herramientas importantes que permiten aplicar conocimientos y realizar análisis en base a pruebas de distintos tipos de configuraciones y elementos que puede tener una estructura, generando un gran aporte aplicado a la parte académica.
10. En los resultados obtenidos en el prototipo a escala, se puede verificar cómo se comportan los dos tipos de estructuras bajo la influencia de cargas dinámicas de tipo telúrica generadas por la mesa, donde se representa la idea de lo que sucede cuando existe este tipo de

fenómenos en la naturaleza y como empiezan a fallar las construcciones, por lo tanto, se buscan métodos alternativos con los que se minimicen estos riesgos, como es el uso de atenuadores sísmicos; esto se verifica al observar el trabajo hecho por el amortiguador, plasmado en las gráficas resultantes de las pruebas de funcionamiento, donde se logró disminuir aproximadamente en un 45% la influencia de las vibraciones sobre el pórtico, evitando una posible falla.

6.2. Recomendaciones

1. Antes de abordar una caracterización o modelación por el método de elementos finitos en cualquier aplicación, se recomienda adentrarse bien en este campo con el fin de tener buenas bases, para luego con el panorama más claro analizar correctamente lo concerniente al problema y poder plantear el camino a seguir con las alternativas de solución.
2. Al momento de trabajar con matrices que definen a un elemento, es importante asegurarse de plantearla bien, verificando que se ajuste a las necesidades de la aplicación, y sobre todo tener claro la formulación de las mismas para hacer los cambios que se requieran; a su vez en el caso específico de la matriz de masa que se tienen dos posibilidades, se recomienda tratar de utilizar la matriz de masa consistente que a diferencia de la de masa concentrada, esta toma en cuenta el análisis de todo el elemento, proponiendo una utilización más adecuada y equilibrada de las características y propiedades.
3. Cuando se trabaja con software de simulación es recomendable conocer los principios sobre el uso de las herramientas que presenta, y los tipos de análisis que se pueden realizar, ya que son de gran aporte si se los utiliza de manera correcta a la vez que se asegura una obtención de resultados verídicos.
4. Al trabajar en la implementación de un sistema de atenuación de vibraciones, es importante elegir correctamente el tipo de aislador a utilizar, ya que hoy en día en el mercado existe una gran variedad de

dispositivos creados para cada tipo de necesidad, por lo que es responsabilidad del diseñador analizar previamente todos los requerimientos y condiciones de trabajo.

5. Se recomienda familiarizarse con el funcionamiento de todo el equipo que comprende el prototipo a escala, para que, al momento de realizar las pruebas o ensayos, se lo haga de manera correcta, teniendo claro la forma de utilizar cada uno de sus elementos. También es importante conocer todas las piezas y partes que conforman el conjunto, para brindarles el mantenimiento necesario y oportuno, a fin de alargar su vida útil.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arduino.cl. (2017). *Arduino Mega 2560 R3*. Obtenido de <http://arduino.cl/arduino-mega-2560/>
- Brandelero, D. (2017). *Proyecto de mecanismos*. Obtenido de Ebah: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAABM6YAJ/aula2-2010-projeto-mecanismos>
- Chandrupatla, T., & Belegundu, A. (1999). *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. Naucalpan de Juárez - México: Prentice Hall.
- Chopra, A. (2014). *Dinámica de estructuras*. Naucalpan de Juárez - México: Pearson.
- Gatica, V. (Septiembre de 2012). *Respuesta sísmica de un edificio de estructura metálica con aisladores. Alternativas de diseño*. Obtenido de Archivo digital UPM: http://oa.upm.es/13787/1/Tesis_master_Victor_Gatica_Lagos.pdf
- IK4-TEKNIKER. (17 de Enero de 2017). *PREDITEC E IK4-TEKNIKER se alían para ofrecer servicios de análisis vibracional*. Obtenido de <http://www.tekniker.es/es/Preditec-e-ik4-tekniker-se-alian-para-ofrecer-servicios-de-formacion-en-el-ambito-de-la-lubricacion-industrial>
- Legrá, I., & Quiza, R. (2012). *Solución de problemas de vibraciones mecánicas utilizando el método de elementos finitos*. Obtenido de Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos" : <http://monografias.umcc.cu/monos/2012/Facultad%20de%20Ingenierias/mo12124.pdf>
- Liebherr. (17 de Febrero de 2017). *Robustos amortiguadores de Liebherr*. Obtenido de <https://www.liebherr.com/es/col/productos/componentes/sistema-hidraulico/cilindros-hidraulicos/amortiguadores/amortiguadores.html>
- Montanaro, M. I. (30 de Enero de 2002). *Sistemas de control de vibraciones en estructuras de gran altura*. Obtenido de Infomes de la Construcción:

<http://informesdelaconstruccion.revistas.csic.es/index.php/informesdelaconstruccion/article/viewFile/640/722>

Oviedo, J. A., & Duque, M. (16 de Noviembre de 2006). *Sistemas de control de respuesta sísmica en edificaciones*. Obtenido de Scielo: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-12372006000200010

Prometec. (2017). *Usando el MPU6050*. Obtenido de <http://www.prometec.net/usando-el-mpu6050/#>

Rao, S. (2012). *Vibraciones Mecánicas*. Naucalpan de Juárez - México: Pearson.

Silva, O. J. (13 de Abril de 2016). *Alternativas de rehabilitación para reducir la vulnerabilidad sísmica en edificaciones de concreto reforzado*. Obtenido de Blog 360° en concreto: <http://blog.360gradosenconcreto.com/alternativas-de-rehabilitacion-para-reducir-la-vulnerabilidad-sismica-en-edificaciones-de-concreto-reforzado/>

Sirve. (15 de Septiembre de 2011). *Amortiguador de masa sintonizada*. Obtenido de <http://sirve.cl/archivos/5192/imagen-3d-ams>

Tornello, M., & Sarrazin, M. (10 de Noviembre de 2008). *Influencia del amortiguamiento en la respuesta de estructuras con aislamiento sísmico de base*. Obtenido de Asociación Argentina de Mecánica Computacional:

<http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/1456/1421>