

## CAPITULO IV

### Diseño de la Estructura Metálica Súper Luz Tipo Elipse

#### 4.1. Historia de las Alcantarillas.

Las alcantarillas cubiertas más antiguas fueron destapadas por los arqueólogos, están en las ciudades regularmente previstas de la civilización de los Valles Indus.

En la Roma antigua, la denominaban cloaca y la consideraban una maravilla de la ingeniería.

En ciudades europeas medievales, los canales naturales pequeños usados para llevar las aguas residuales fueron cubiertos eventualmente encima y funcionaron como alcantarillas. La flota del río de Londres es tal sistema

#### 4.2. Membrana o placa (estructura)

<sup>1</sup> En el libro de la referencia dice que una membrana es un elemento estructural bidimensional sin rigidez flexional que soporta tensiones y esfuerzos normales, además nos da las siguientes consideraciones para placas sometidas a flexión con las siguientes teorías:

---

<sup>1</sup> Bruhn, E. F. Analysis and Design of Flight Vehicle Structures. Jacobs Publishing: Indianapolis, 1973.

### 4.2.1. Teoría de Prandtl

La teoría de Prandtl describe cómo una membrana estirada inicialmente plana se curva bajo el efecto de fuerzas perpendiculares a la misma, como el viento o la presión de un fluido. Las velas de los barcos son un ejemplo de membranas de este tipo.

La teoría de Prandtl se basa en determinar la forma de la membrana  $\Phi(x,y)$  tomando como referencia las coordenadas XY sobre el plano en el que originalmente estaba la membrana. La aplicación de las ecuaciones de equilibrio al caso de un lámina lleva a que cuando sobre ésta actúa una presión  $p$  [fuerza/superficie] y el contorno está sujeto mediante una tracción uniformemente distribuida a lo largo del contorno  $t$  [fuerza/longitud] la forma adoptada viene dada por la ecuación de Poisson con condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{p(x,y)}{t}, & \text{en } \Sigma \\ \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla\Phi = 0, & \text{en } \partial\Sigma \end{cases}$$

### 4.2.2. Teoría de placas y láminas

En ingeniería estructural, las **placas** y las **láminas** son elementos estructurales que geoméricamente se pueden aproximar por una superficie bidimensional y que trabajan predominantemente a flexión. Estructuralmente la diferencia entre placas y láminas está en la curvatura.

Las placas son elementos cuya superficie media es plana, mientras que las láminas son superficies curvadas en el espacio tridimensional (como las cúpulas, las conchas o las paredes de depósitos).

Constructivamente son sólidos deformables en los que existe una superficie media (que es la que se considera aproximada a la placa o lámina), a la que se añade un cierto espesor constante por encima y por debajo del plano medio. El hecho de que este espesor es pequeño comparado con las dimensiones de la lámina y a su vez pequeña comparada con los radios de curvatura de la superficie, es lo que permite reducir el cálculo de placas y láminas reales a elementos idealizados bidimensionales.

#### 4.2.3. Hipótesis de Reissner-Mindlin

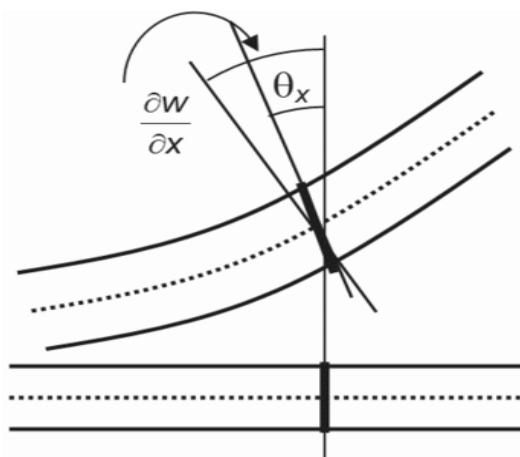


Figura 4.1: (Deformación transversal de una placa en la hipótesis de Reissner-Mindlin donde  $\theta_i$  y  $dw/dx_i$  no tienen necesariamente que coincidir.)

Las hipótesis de Reissner-Mindlin son un conjunto de hipótesis cinemáticas sobre como se deforma una placa o lámina bajo flexión que permiten relacionar los desplazamientos con las deformaciones. Una vez obtenidas las deformaciones la aplicación rutinaria de las ecuaciones de la elasticidad permite encontrar las tensiones, y encontrar la ecuación de gobierno que relaciona desplazamientos con las fuerzas exteriores.

Las hipótesis de Reissner-Mindlin para el cálculo elástico de placas y láminas son:

1. El material de la placa es elástico lineal.
2. El desplazamiento vertical para los puntos del plano medio no depende de  $z$ :  $u_z(x, y, z) = w(x, y)$ .
3. Los puntos del plano medio sólo sufren desplazamiento vertical:  $u_x(x, y, 0) = 0$ ,  $u_y(x, y, 0) = 0$ .
4. La tensión perpendicular al plano medio se anula:  $\sigma_{zz} = 0$ .

Como consecuencia los desplazamientos horizontales sólo se dan fuera del plano medio y sólo se producen por giro del segmento perpendicular al plano medio. Como consecuencia de las hipótesis de Reissner-Mindlin los desplazamientos pueden escribirse como:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) = w(x, y) \end{cases}$$

#### 4.2.4. Hipótesis de Love-Kirchhoff

En las placas en que se desprecia la deformación por cortante, puede suponerse adecuadamente una hipótesis adicional conocida como hipótesis de Love-Kirchhoff. Esta hipótesis dice que:

$$\theta_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_y(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Esta hipótesis es análoga a la hipótesis de Navier-Bernoulli para vigas. De hecho existe un paralelo entre los modelos de vigas y de placas. El modelo de placa de Reissner-Mindlin es el equivalente de la viga de Timoshenko, mientras que el modelo de placa de Love-Kirchhoff es el equivalente de la viga de Euler-Bernoulli.

Las hipótesis de Reissner-Mindlin combinada con la hipótesis de Love-Kirchhoff proporcionan una hipótesis cinemática para los desplazamientos. A partir de esos desplazamientos pueden calcularse fácilmente las deformaciones para una placa delgada:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

En función de esas deformaciones las tensiones se calculan trivialmente a

partir de las ecuaciones de Lamé-Hooke que generalizan la ley de Hooke para sólidos deformables:

#### 4.2.5. Ecuación de Lagrange para placas delgadas

Para una placa plana de espesor constante en la que sean válidas las hipótesis de Reissner-Mindlin y Love-Kirchhoff el descenso vertical en cada punto bajo la acción de las cargas apoyadas sobre ella viene dada por:

$$\Delta\Delta w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

Donde  $w(x, y)$  es la flecha vertical o descenso vertical de la placa en el punto de coordenadas  $(x, y)$ ,  $q(x, y)$  es la carga por unidad de área en el mismo punto, el **operador laplaciano** se define por la siguiente suma de operadores:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Y finalmente la constante  $D$  es la rigidez flexional de placas y viene dada en función del espesor de la placa ( $h$ ), el módulo de Young ( $E$ ), el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ):

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Es interesante notar que la ecuación (1) es el análogo de la ecuación de la elástica para vigas. Para placas de espesor no constante, análogamente al caso de la ecuación de la elástica para vigas, la flecha y la carga aplicada están relacionadas por la ecuación:

$$\Delta (D\Delta w(x, y)) = q(x, y) \quad (2)$$

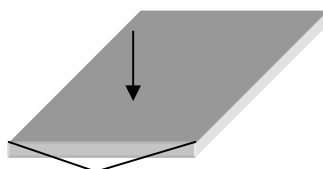
Donde ahora la rigidez flexional D es función una  $D(x, y)$  que depende del punto concreto de placa.

#### 4.2.6. Cálculo de láminas

<sup>2</sup> En el libro de la referencia dice que una lámina es un elemento estructural bidimensional curvado. Si las placas se tratan análogamente a las vigas rectas, las láminas son el análogo bidimensional de los arcos.

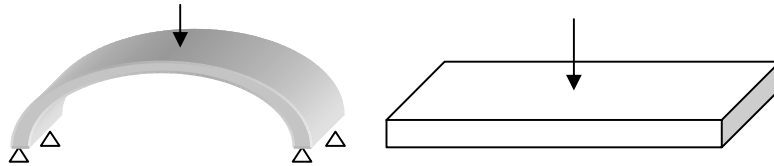
**Elementos tipo cascaron:** Pueden ser flexibles, en este caso se denominan membranas; o rígidos y se denominan placas.

Membrana: no soporta esfuerzos de flexión, es como si fueran cables pegados. Trabaja por tracción netamente



<sup>2</sup> Den Hartog Jacob P., Strength of Materials, Dover Publications, Inc 1961

Cascarón o placa: tiene rigidez a flexión es decir trabaja principalmente por compresión, pero se asocia con esfuerzos cortantes y flectores mínimos.



#### 4.2.7. Esfuerzos de los elementos tipo membrana

<sup>3</sup>En el libro de la referencia dice que el esfuerzo normal  $\sigma$  y el esfuerzo cortante  $\tau$  que actúan en planos oblicuos como resultado de la aplicación de cargas directas son

$$\sigma = \sigma_y \text{sen}^2 \theta \quad \text{y} \quad \tau = \frac{1}{2} \sigma_y \text{sen} 2\theta$$

Los esfuerzos que se generan en planos oblicuos debido a un sistema complejo de esfuerzos son:

$$\begin{aligned} \text{esfuerzo normal} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{sen} 2\theta \\ \text{esfuerzo cortante} &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \text{sen} 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$

Entonces, los esfuerzos principales (esto es, los esfuerzos directos máximo y mínimo) son:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]} \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Resistencia de Materiales Diseño de Estructuras y Máquinas , E.J. Hearn



Estos se presentan en planos a un ángulo  $\theta$  con respecto al plano en el cual actúa  $\sigma_x$ , y está dado por:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad \text{o} \quad \tan \theta = \frac{\sigma_p - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

donde  $\sigma_p = \sigma_1$ , o  $\sigma_2$ , y los planos se denominan planos principales. Los planos principales siempre se encuentran a  $90^\circ$  entre si, por lo que los planos de esfuerzo cortante máximo se localizan a  $45^\circ$  respecto a ellos.

El esfuerzo cortante máximo es:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

En los problemas en los que se sabe o se puede suponer que el esfuerzo principal  $\sigma_3$  en la tercera dimensión es nulo, el esfuerzo cortante máximo real es:

$1/2$  (esfuerzo principal máximo - esfuerzo principal mínimo)

Esfuerzo normal en el plano de esfuerzo cortante máximo =  $1/2(\sigma_x + \sigma_y)$

Esfuerzo cortante en el plano de esfuerzo directo máximo = 0

La mayoría de los problemas pueden resolverse gráficamente empleando el círculo de esfuerzos de Mohr. Todos los problemas que pueden resolverse mediante este método se han resuelto tanto analítica como gráficamente.

#### 4.2.8. Esfuerzos en planos oblicuos

Considere el caso general, mostrado en la figura 13-1, de una barra sometida a una fuerza directa  $F$  que origina un esfuerzo  $\sigma_y$ , en el sentido vertical.

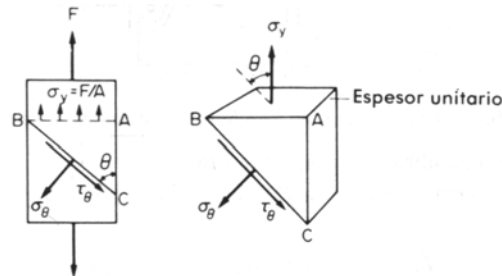


Fig. 13-1. Barra sometida a esfuerzo directo; se muestran los esfuerzos que actúan en cualquier plano inclinado.

Suponga que el bloque tiene profundidad unitaria; entonces considerando el equilibrio de fuerzas en la sección triangular ABC:

Determinando las fuerzas perpendiculares a BC,

$$\sigma_{\theta} \times BC \times 1 = \sigma_y \times AB \times 1 \times \text{sen } \theta$$

Pero  $AB = BC \text{sen } \theta$ ,

$$\sigma_{\theta} = \sigma_y \text{sen}^2 \theta \quad (13.1)$$

Ahora, determinando las fuerzas paralelas a BC,

$$\tau_{\theta} \times BC \times 1 = \sigma_y \times AB \times 1 \times \text{cos } \theta$$

Una vez más, como  $AB = BC \text{sen } \theta$ ,

$$\begin{aligned} \tau_{\theta} &= \sigma_y \text{sen } \theta \text{cos } \theta \\ &= \frac{1}{2} \sigma_y \text{sen } 2\theta \end{aligned} \quad (13.2)$$

Por consiguiente, los esfuerzos generados en el plano inclinado no son simplemente las componentes de  $\sigma_y$ , perpendicular y tangencialmente a

ese plano. El esfuerzo directo  $\sigma_\theta$  tiene un valor máximo de  $\sigma_y$ , cuando  $\theta = 0$ , mientras que el esfuerzo cortante  $\tau_\theta$  tiene un valor máximo de  $1/2 \sigma_y$ , cuando  $\theta = 45^\circ$ .

De este modo, cualquier material cuyo esfuerzo de fluencia al corte sea menor que la mitad del que se genera en tensión o compresión, primeramente fluirá por corte bajo la acción de fuerzas directas de tensión o compresión.

Esto queda demostrado por la falla típica de copa y como en las pruebas de tensión de muestras dúctiles como las que se hacen al acero de bajo carbono, en las cuales la falla se presenta inicialmente en planos a  $45^\circ$  respecto al eje de la muestra. Se tienen efectos semejantes en las pruebas de compresión de, por ejemplo, la madera, en la cual la falla se debe también a la creación de esfuerzos cortantes críticos en los planos a  $45^\circ$ .

#### **4.2.9. Material sometido a esfuerzo cortante puro**

Considere el elemento que se muestra en la figura 13-2, al que se le han aplicado esfuerzos cortantes en los lados AB y DC. Entonces, se tienen esfuerzos cortantes complementarios de igual valor pero de efecto contrario en los lados AD y BC, los cuales evitan que el elemento gire. Como los esfuerzos cortantes aplicados y complementarios tienen igual valor sobre los planos x y y, los dos se representan mediante el símbolo

$\tau_{xy}$ .

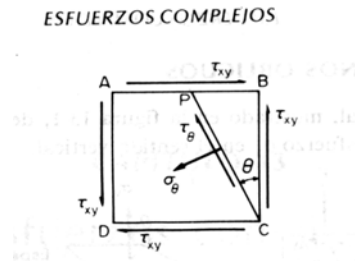


Fig. 13-2. Esfuerzos que actúan en un elemento sometido a esfuerzo cortante puro.

Considere ahora el equilibrio de la sección PBC.

Determinando las fuerzas normales a PC, hecha la suposición de que el elemento tiene profundidad unitaria,

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} \times PC &= \tau_{xy} \times BC \operatorname{sen} \theta + \tau_{xy} \times PB \cos \theta \\ &= \tau_{xy} \times PC \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \tau_{xy} \times PC \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \sigma_{\theta} &= \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \end{aligned} \quad (13.3)$$

Cuando  $\theta = 45^\circ$ , el valor máximo de  $\sigma_{\theta}$  es  $\tau_{xy}$

De modo similar, determinando las fuerzas paralelas a PC,

$$\begin{aligned} \tau_{\theta} \times PC &= \tau_{xy} \times PB \operatorname{sen} \theta - \tau_{xy} BC \cos \theta \\ &= \tau_{xy} \times PC \operatorname{sen}^2 \theta - \tau_{xy} \times PC \cos^2 \theta \\ \tau_{\theta} &= -\tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (13.4)$$

El signo negativo significa que el sentido de  $\tau_{\theta}$  es contrario al que se supone en la figura 13-2.

Cuando  $\theta = 0^\circ$  o  $90^\circ$  el valor máximo de  $\tau_{\theta}$  es  $\tau_{xy}$ , y ese valor es cero cuando  $\theta = 45^\circ$ ; esto es, en los planos de esfuerzo directo máximo.

Una consideración adicional de las ecuaciones (13.3) y (13.4) muestra que el sistema de esfuerzos cortantes puros produce un sistema de esfuerzos directos equivalente, como el que se muestra en la figura 13-3, donde se tiene una serie de compresión y otra de tensión, cada una a  $45^\circ$  con respecto a las direcciones originales del esfuerzo cortante, y de igual magnitud al esfuerzo cortante aplicado.

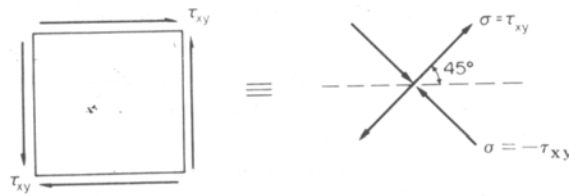


Fig. 13-3. Esfuerzos directos debidos a esfuerzo cortante.

Esto resulta de gran importancia al medir esfuerzos cortantes o momentos de torsión empleando calibradores de deformación, cuando estas barras están adaptadas para registrar deformaciones directas a  $45^\circ$  con respecto al eje de la varilla.

La falla de materiales frágiles sometidos a esfuerzo cortante también proporciona una evidencia práctica de la teoría. Una barra de material frágil sometida a torsión fallará por acción de esfuerzos directos en planos a  $45^\circ$  con respecto al eje de la barra.

El desgarramiento de una prenda de vestir húmeda cuando se le exprime también se atribuye a los esfuerzos directos que se generan al aplicarse una torsión.

**4.2.10. Material sometido a dos esfuerzos directos mutuamente perpendiculares.**

Considere el elemento rectangular de espesor unitario que se muestra en la figura 13-4, sometido a un sistema de dos esfuerzos directos  $\sigma_x, \sigma_y$ , ambos de tensión a ángulos rectos.

Determinando las fuerzas perpendiculares a AC para el equilibrio de la sección ABC,

$$\begin{aligned} \sigma_\theta \times AC \times 1 &= \sigma_x \times BC \times 1 \times \cos \theta + \sigma_y \times AB \times 1 \times \operatorname{sen} \theta \\ &= \sigma_x \times AC \cos^2 \theta + \sigma_y \times AC \operatorname{sen}^2 \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2} \sigma_x (1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{2} \sigma_y (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta \end{aligned}$$

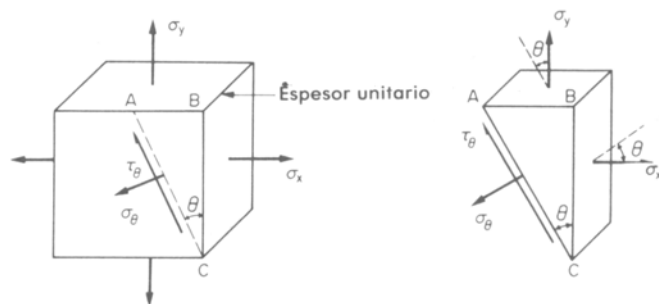


Fig. 13-4. Elemento de un material sometido a dos esfuerzos directos perpendiculares entre si.

Determinando las fuerzas paralelas a AC se tiene:

$$\begin{aligned} \tau_\theta \times AC \times 1 &= \sigma_x \times BC \times 1 \times \operatorname{sen} \theta - \sigma_y \times AB \times 1 \times \cos \theta \\ \tau_\theta &= \sigma_x \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \sigma_y \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ \tau &= \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\theta \end{aligned} \tag{13.6}$$

El esfuerzo directo máximo será igual a  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , cualquiera que sea mayor, cuando  $\theta = 0^\circ$  o  $90^\circ$

El esfuerzo cortante máximo en el plano de los esfuerzos aplicados (véase la sección 13.7) se presenta cuando  $\theta = 45^\circ$ ,

es decir, (13.7)

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$$

#### 4.2.6.3. Material sometido a esfuerzos cortante y directo combinados

Considere el sistema complejo de esfuerzos que se muestra en la figura 13-5, el cual actúa sobre un elemento del material.

Los esfuerzos  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , pueden ser de compresión o de tensión y pueden resultar de fuerzas directas o de flexión. Los esfuerzos cortantes pueden presentarse como se muestra en la figura o de un modo totalmente distinto, y ser el resultado de fuerzas cortantes o de torsión.

Así, el diagrama representa un sistema completo de esfuerzos para cualquier circunstancia de carga aplicada en dos dimensiones, y representa una adición de los sistemas de esfuerzo que se analizaron anteriormente en las secciones 13.2 y 13.3.

Por lo tanto, las fórmulas obtenidas en esas secciones pueden combinarse para obtener:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (13.8)$$

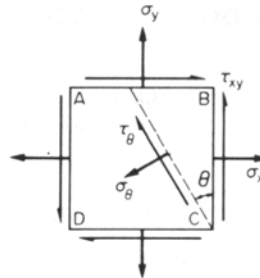


Fig. 13-5. Sistema complejo bidimensional de esfuerzos.

$$\tau_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (13.9)$$

Los esfuerzos máximo y mínimo que se presentan en cualquier plano del material pueden calcularse ahora del modo siguiente:

Para cuando  $\sigma_{\theta}$  sea máximo o mínimo  $\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0$

Ahora  $\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$

$$\therefore \frac{d\sigma_{\theta}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

o

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$\therefore$  Con base en la figura 13.6,

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]}}$$

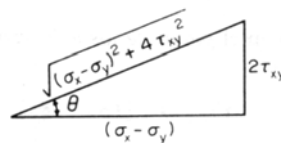


Fig. 13-6.



Así, substituyendo en la ecuación (13.8), los esfuerzos directos máximo y mínimo están dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \quad \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \frac{(\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]}} + \frac{\tau_{xy} \times 2\tau_{xy}}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]}} \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]} \end{aligned} \quad (13.11)$$

Estos se denominan entonces esfuerzos principales del sistema.

La solución de la ecuación (13.10) proporciona dos valores de  $2\theta$  distintos por  $180^\circ$ ; es decir, dos valores para  $\theta$  distintos por  $90^\circ$ ; De este modo, los dos esfuerzos principales se presentan en planos mutuamente perpendiculares que se denominan planos principales, y substituyendo  $\theta$  de la ecuación (13.10) en la expresión para el esfuerzo cortante de la ecuación (13.9) se demuestra que  $\tau_\theta = 0$  en los planos principales.

El sistema complejo de esfuerzos de la figura 13-5 puede reducirse ahora al sistema equivalente de esfuerzos principales mostrado en la figura 13-7.

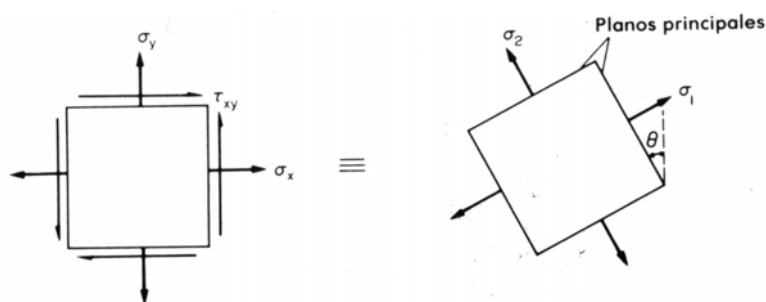


Fig. 13-7. Planos y esfuerzos principales.

Con base en la ecuación (13.7), el esfuerzo cortante máximo que se tiene en el sistema esta dado por:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (13.12)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]} \quad (13.13)$$

y éste se presenta en planos a 45° con respecto a los planos principales. Este resultado podría haberse obtenido empleando un procedimiento similar al que se empleó para calcular los esfuerzos principales; es decir, diferenciando la expresión (13.9), igualándola a 0 y substituyendo la expresión resultante para  $\theta$ .

#### 4.2.6.3. Esfuerzos tridimensionales: Representación gráfica.

En la figura 13-11 se muestra el estado tridimensional general de esfuerzo en cualquier punto de un cuerpo; es decir, el cuerpo estará sometido a tres esfuerzos directos perpendiculares entre si y a tres esfuerzos cortantes.

En la figura 13-12 se muestra un elemento principal en el mismo punto; es decir, un elemento que se ha girado en general con respecto al primero hasta que los esfuerzos generados en las superficies se hacen esfuerzos principales sin esfuerzo cortante asociado.

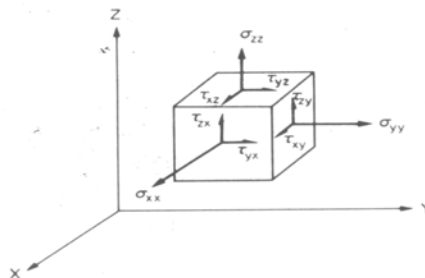


Fig. 13-11. Sistema tridimensional de esfuerzos.

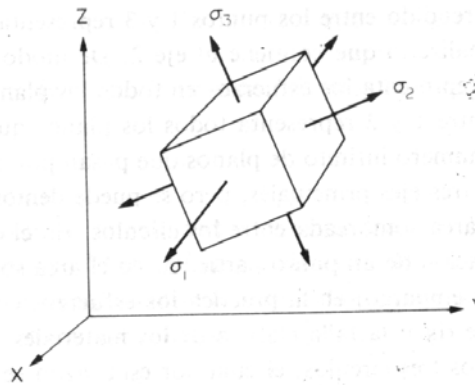


Fig. 13-12. Elemento principal.

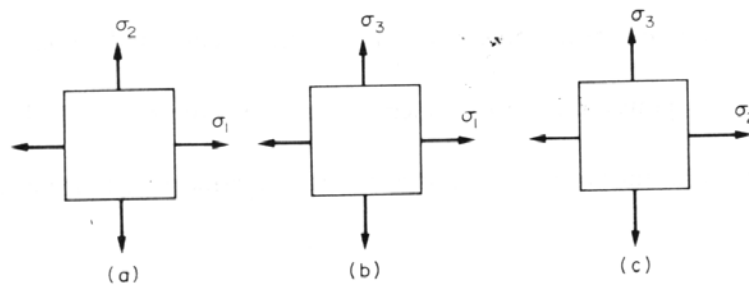


Fig. 13-13. Vistas bidimensionales de varias superficies del elemento principal.

Entonces, en la figura 13-13 se representan las vistas reales de algunas superficies del elemento principal, y puede dibujarse un círculo de Mohr para cada condición de esfuerzo bidimensional que se obtiene. Así, estos círculos pueden combinarse para producir la representación completa del círculo tridimensional de Mohr que se muestra en la figura 13-14.

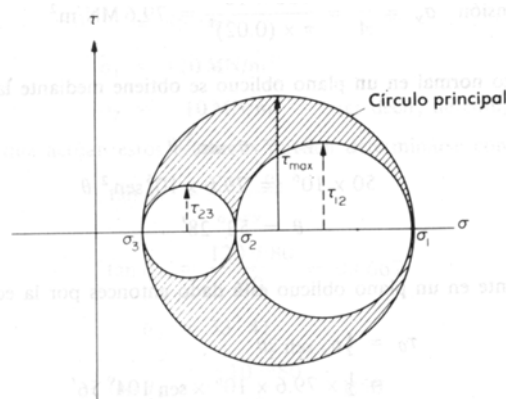


Fig. 13-14. Representación del círculo de Mohr de un estado de esfuerzo tridimensional. Se muestra el círculo principal, cuyo radio es igual al mayor esfuerzo cortante que se tiene en el sistema.

El círculo grande comprendido entre los puntos 1 y 3 representa esfuerzos en todos los planos a través del punto analizado que contiene al eje 2. De modo similar, el círculo pequeño comprendido entre 2 y 3 representa los esfuerzos en todos los planos que contienen al eje 1, y el círculo comprendido entre 1 y 2 representa todos los planos que contiene al eje 3.

Desde luego, existe un número infinito de planos que pasan por el punto y que no están contenidos en ninguno de los tres ejes principales, pero se puede demostrar que todos estos planos están representados en el área sombreada entre los círculos. En la práctica los esfuerzos cortantes y directos máximos con frecuencia son los que rigen la falla elástica de los materiales. Estos esfuerzos se calculan con base en el mayor de los tres círculos, el cual por esta razón se denomina círculo principal ( $\tau_{\max} =$  radio).

Ahora quizá resulte evidente que en muchos casos bidimensionales, el valor máximo (mayor) del esfuerzo cortante será equivocado al no considerar  $\sigma_3 = 0$  para construir el círculo principal.

El valor máximo de  $\tau$  puede obtenerse analíticamente empleando el enunciado.

$$\tau_{\max} = 1/2(\text{mayor esfuerzo principal} - \text{menor esfuerzo principal})$$

Y considerando aisladamente las condiciones de esfuerzo principal que se ilustraron en la figura 13-13.

#### **4.3. Estructura metálica o alcantarilla**

Las estructuras metálicas o alcantarillas pueden conceptuarse como un tipo de puente.

Es un tubo de acero corrugado galvanizado circular o elipsoidal, el cual da la solución mas rápida, precisa y duradera a cualquier problema de drenaje pluvial, y en nuestro caso como paso deprimido para el paso de vehículos y peatones.

Las alcantarillas tienen como principal objetivo el encauzamiento de aguas pluviales, ríos para que no erosionen el terreno, camino, carretera y autopistas. Generalmente se utilizan como pasos a través de terraplenes, por lo cual quedan enterradas, detectándose su presencia por (cabezales que asoman en cada extremo por una cierta prolongación de la misma alcantarilla).

Las alcantarillas se las puede clasificar como un tipo de puente y pueden ser de cuatro tipos:

#### **4.3.1. Alcantarillas de cajón.**

Son formadas por dos paredes laterales, tapa y fondo, generalmente de sección constante y cartelas en las esquinas. Algunas veces no tienen relleno encima por lo cual las cargas rodantes estarán en contacto con la losa de tapa; otras veces tienen relleno encima, no mayor de unos 8 mts.

A menor tamaño del cajón, el relleno puede ser mayor.

#### **4.3.2. Alcantarillas circulares.**

Son tubos enterrados, de diámetros no menores de 90 cm, son tubos de diámetros grandes y por ende muy costosos.

#### **4.3.3. Bóvedas de concreto armado.**

Son estructuras que resisten grandes rellenos encima de su techo. Casi siempre formadas por secciones de espesores variables y con geometría de arcos circulares parabólicos.

#### **4.3.4. Alcantarillas metálicas.**

Son formadas por chapas acanaladas, de acero galvanizado, premoldeadas para formar tubos de diámetro, previsto. Funcionan como estructuras elásticas ó flexibles, por lo cual se adaptan a las presiones del relleno que soportan.

El relleno mínimo sobre las alcantarillas metálicas será de 60 cm. y pueden soportar el paso de grandes cargas rodantes sobre la calzada.

#### **4.3.5. Ventajas:**

- Son mas ligeras que el tubo de concreto
- Mayor resistencia a vibraciones e impactos
- Mayor duración por su proceso de galvanizado
- Menor volumen de almacenamiento
- Gran facilidad de instalación

#### **4.4. Análisis de cargas que soportarán las estructuras**

Los conductos de acero corrugado, reconocidos desde hace mucho tiempo por su gran resistencia estructural ante la acción de las cargas más pesadas, son el resultado de una compleja interacción entre el suelo de relleno que rodea al conducto, y el conducto propiamente dicho; es decir el suelo y el acero interactúan para soportar las cargas de servicio. La estructura subterránea ideal sería aquella que permita que las cargas de servicio sean en su totalidad absorbidas por el relleno que las rodea y las cubre; en este sentido, las estructuras de acero corrugado se aproximan a esta condición ideal. Como ejemplo: se han visto casos en los que los revestimientos de acero sin galvanizar se han destruido total o parcialmente por el tiempo y otros factores, pero el relleno sigue funcionando y mantiene su forma.

#### **4.4.1. Cargas sobre estructuras enterradas**

Las estructuras enterradas, están sometidas a 2 principales tipos de carga que son:

- Cargas muertas causadas por el relleno, más las cargas de superficie uniformes o puntuales.
- Cargas vivas, incluidos impactos y cargas en movimiento.

Las cargas vivas a tomarse en cuenta para el diseño de estructuras enterradas, son en la práctica el tránsito vial y en nuestro caso el tráfico de aviones; aparte de estas, otros tipos de carga viva resulta insignificante en la mayoría de los casos. Las cargas muertas vienen dadas por el efecto del relleno que rodea y cubre la estructura, es decir están en función del peso del suelo y la altura de relleno.

#### **4.5. Predimensionamiento de los elementos de la estructura**

La estructura se prediseñó tomando en cuenta la necesidad de obtener una luz y flecha adecuadas para el paso de personal y vehículos militares que circularán por el paso deprimido, se realizó un modelo en Sap2000 ayudándonos de la geometría que dibujamos en autocad y paint respectivamente partiendo de una esfera como podemos observar en el siguiente gráfico:



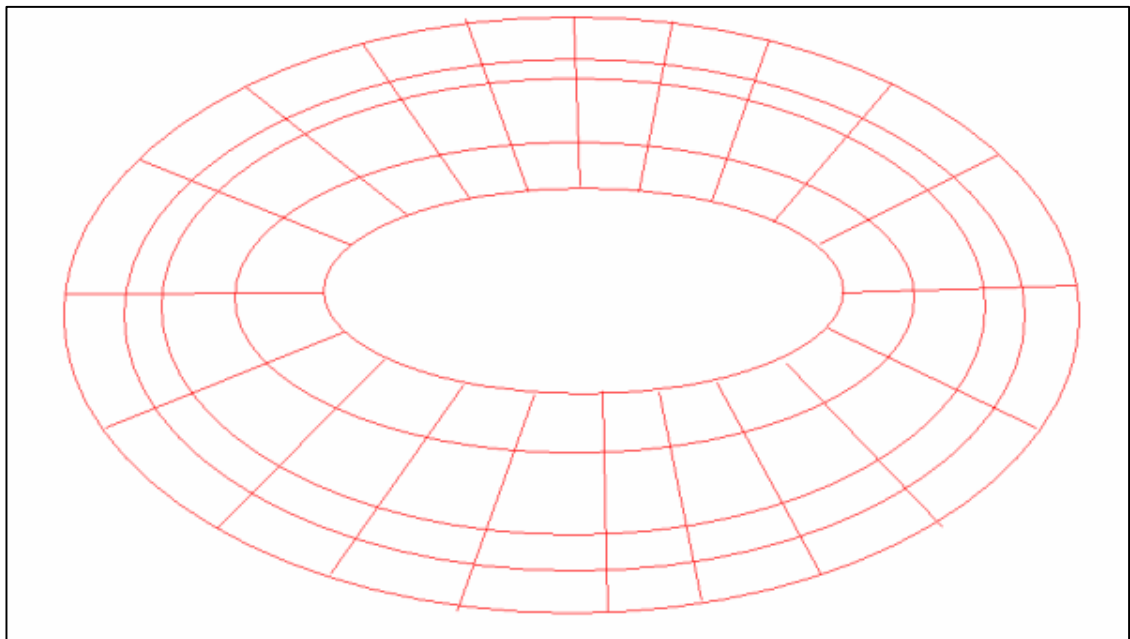


Figura 4.2: (Esfera base para nuestro modelo)

Mejoramos nuestro modelo haciendo un bosquejo en el cual representamos el suelo en forma de sólidos con las secciones distribuidas y con el hueco de la alcantarilla como se observa a continuación:

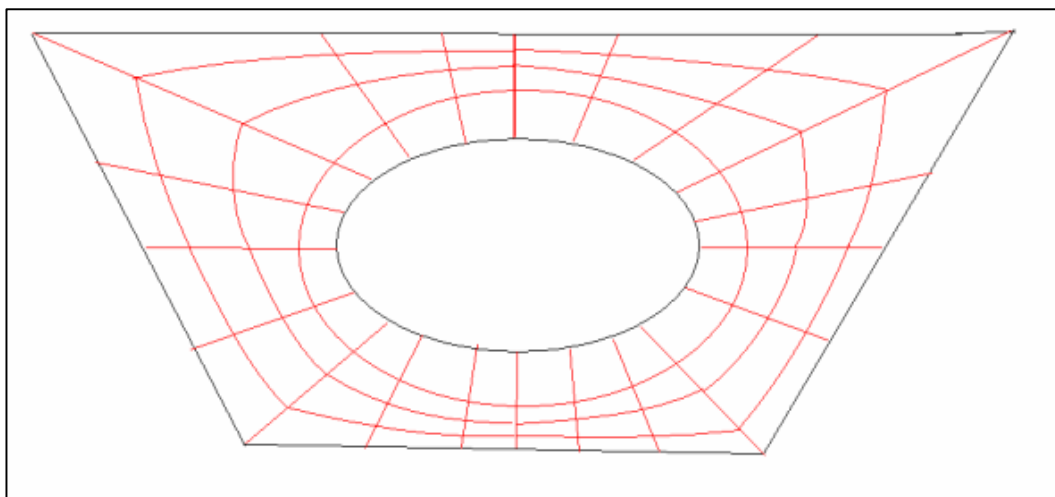


Figura 4.3: (Modelo inicial en paint)

Después de tener nuestro modelo inicial en paint dibujamos un bloque en el programa Sap 2000 desde la ventana solid model (modelo de un sólido) y escojemos el tipo block como se indica en la siguiente ventana:

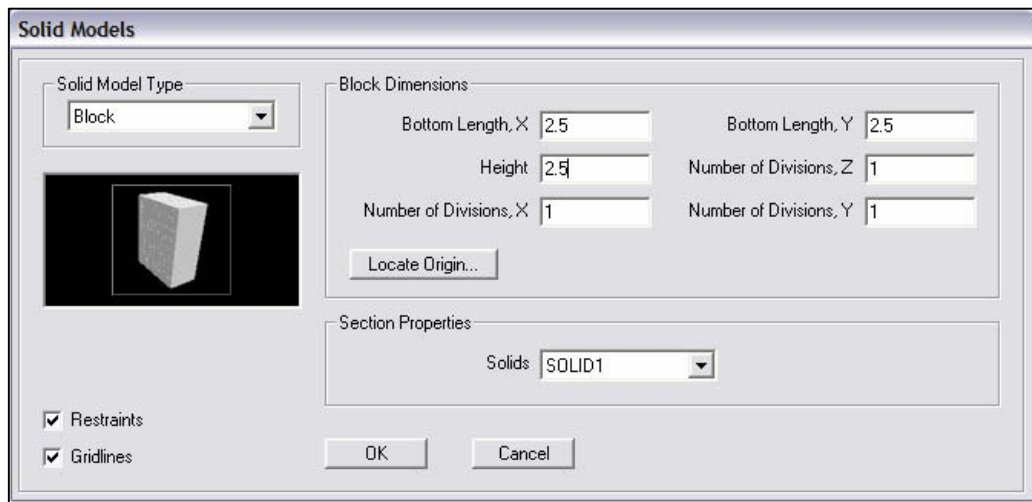


Figura 4.4: (Solid Models)

El resultado es la obtención de un cubo del cual partimos para crear la geometría de nuestro paso deprimido, a este bloque se lo replicó corrigiendo coordenadas hasta obtener bloques uno por uno acordes con el modelo que necesitamos:

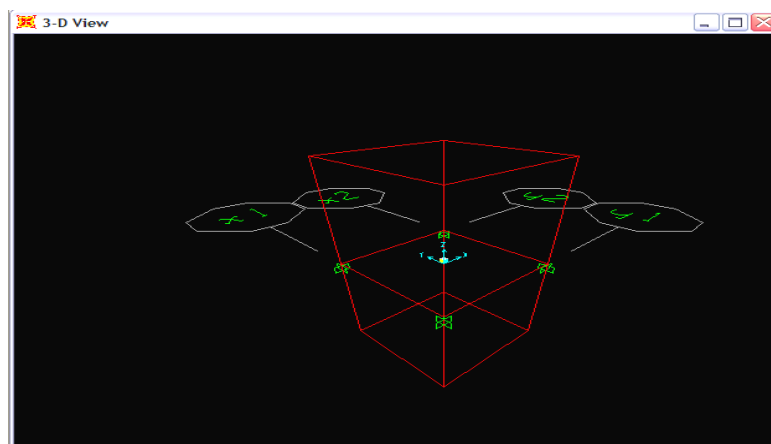


Figura 4.5: (Replicación de un cubo)

A partir de estos bloques y generando uno por uno los bloques se modeló el suelo y como resultado se obtuvo lo siguiente:

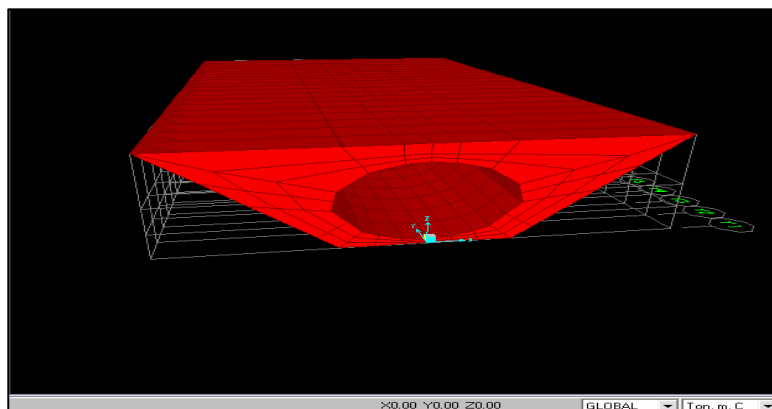


Figura 4.6: (Modelo inicial en Sap 2000)

Luego de asignar materiales y demás características como el módulo de elasticidad que para nuestro caso es de  $30000 \text{ Kg./cm}^2$ , que corresponde a un suelo bien compactado.

Dibujamos placas con el elemento área en todo el interior del modelo para simular el comportamiento de la estructura corrugada de acero (alcantarilla).

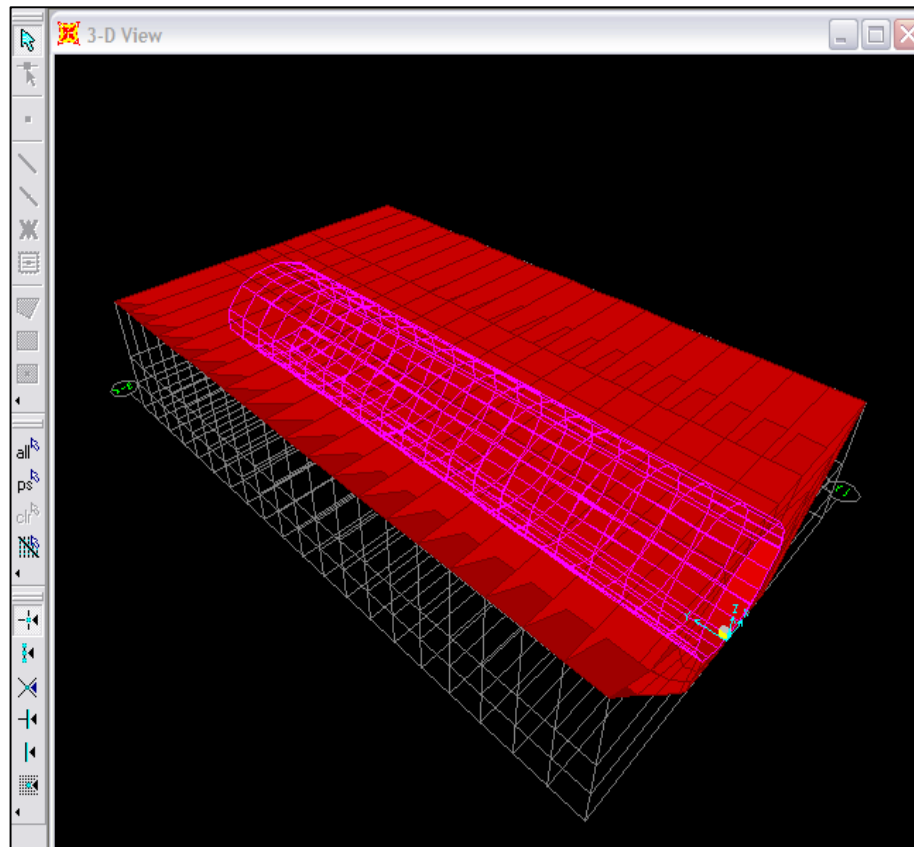


Figura 4.7: (Modelo en Sap 2000 versión 10.0)

Se asignó cargas puntuales de un avión tipo C-130 (anexo “F”) en un estado de carga que lo denominamos AVIÓN, luego asignamos las mismas cargas en un estado al que denominamos AVIÓN 2 y otras cargas en un estado de carga AVIÓN 3, para de esta forma hacer una combinación de una envolvente la cual genere los máximos esfuerzos y simule el paso del avión por la pista como se muestra en la siguiente ventana:

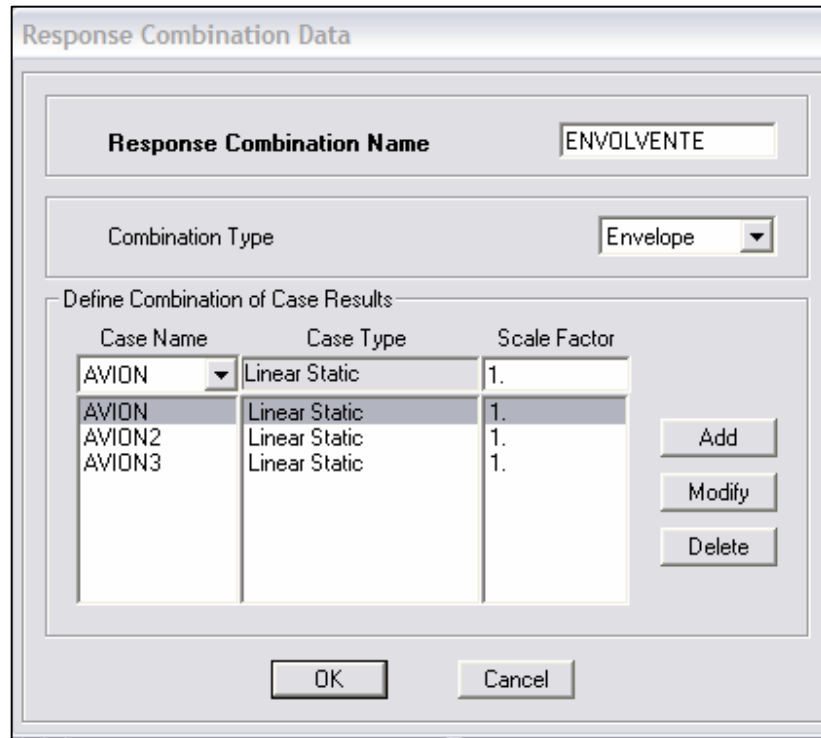


Figura 4.8: (Envolvente con cargas del avión )

Luego se realizó una combinación con carga muerta y la envolvente creada en una combinación que la llamamos PPAVION que es la más crítica para nuestro modelo ya que simula el peso de todo el relleno del suelo y las cargas vivas que se generan a lo largo del paso del avión por la pista como se observa en la siguiente ventana:

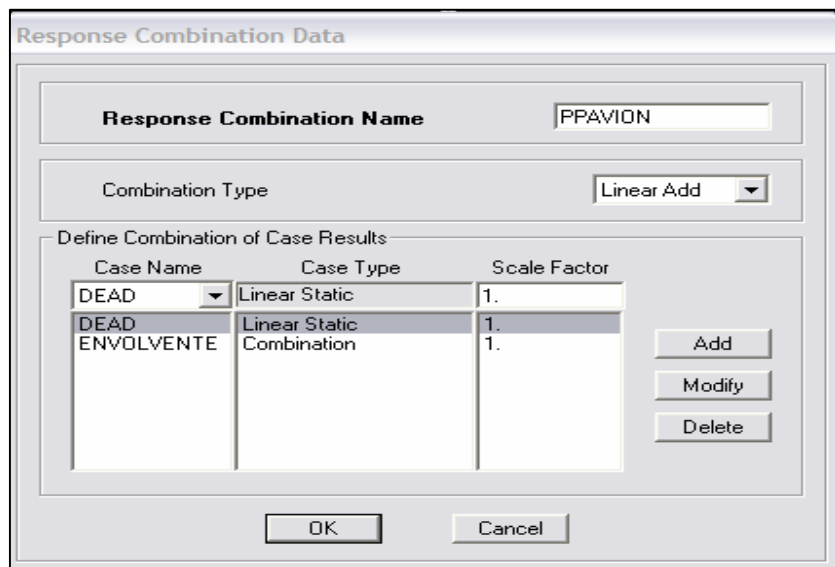


Figura 4.9: (Combinación carga viva y muerta)

Se realizaron algunas corridas del modelo en Sap2000 corrigiendo la altura de relleno para que las deformaciones no sean superiores a las permitidas por las especificaciones de Novacero.

Adicionalmente para mejorar el modelo se pusieron resortes en los costados y abajo para asegurar el buen comportamiento de la estructura, y considerar la presencia del suelo circundante, para lo cual fue necesario colocar una constante por nudo que se calcula con la siguiente fórmula:

$$k = K * A$$

Donde:

k= Constante del resorte por nudo

K= Coeficiente de balasto

A= Área

---

El coeficiente de balasto se lo calculó con los datos obtenidos en el estudio de suelos del capítulo II y es igual a:

$$K = 120 * q_a \text{ (Empíricamente FOUNDATIONS BOWLES)}$$

$$K = 120 * 20 = 2400 \frac{t}{m^3}$$

Este valor es conservador ya que el estudio se lo realizó a una profundidad de 7.45 metros y en las dos perforaciones que se hizo el número de golpes oscila entre 25 y 30 golpes.

Las áreas se determinan con la geometría del modelo de tal forma que quedan determinadas de la siguiente manera:

$$A1 = 2.5 * 1.5 = 3.75m^2$$

$$A2 = 2.5 * (2 + 1.5) / 2 = 4.375m^2$$

$$A3 = 2.5 * (1) = 2.5m^2$$

$$A4 = 2.5 * (5) = 12.5m^2$$

$$k1 = 2400t / m^3 * 3.75m^2 = 9000t / m$$

$$k2 = 2400t / m^3 * 4.375m^2 = 10500t / m$$

$$k3 = 2400t / m^3 * 2.5m^2 = 6000t / m$$

$$k4 = 2400t / m^3 * 12.5m^2 = 30000t / m$$

Para facilitar la marcación cuando vamos asignar springs (elásticos) a nuestro modelo utilizamos esta pantalla:

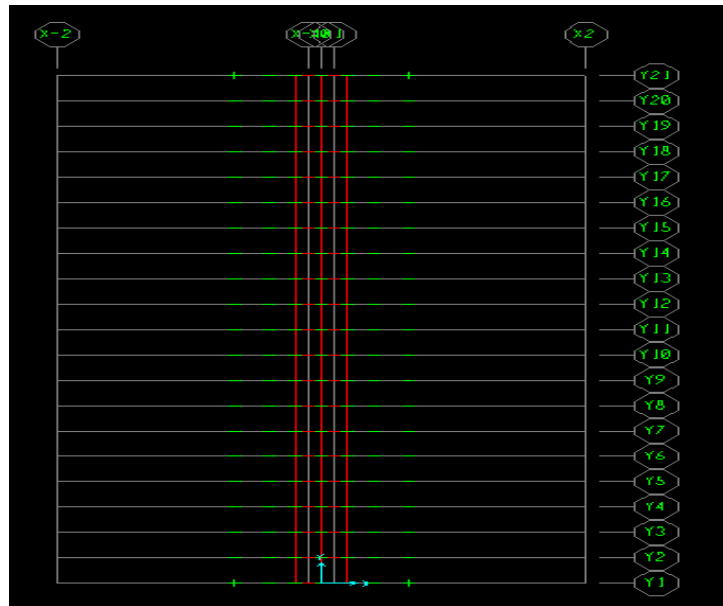


Figura 4.10: (Grilla donde se asignan las constantes por nudo)

Después de asignar todas las constantes en los nudos procedemos a insertar todas las constantes en la siguiente pantalla:

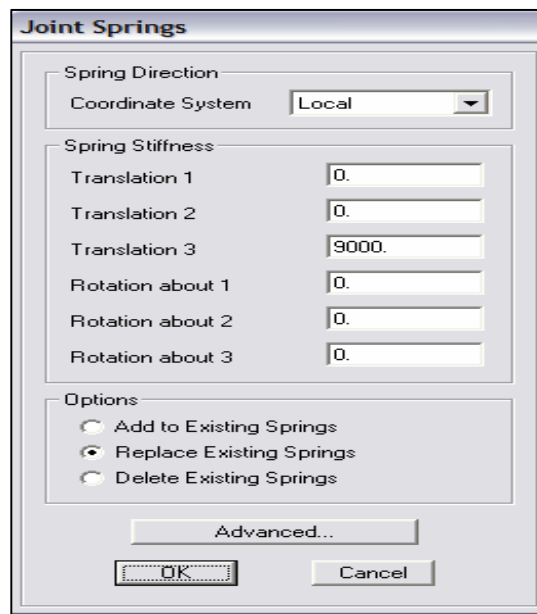


Figura 4.11: (Asignación de constantes por nudos)



El modelo queda con los springs de la siguiente manera:

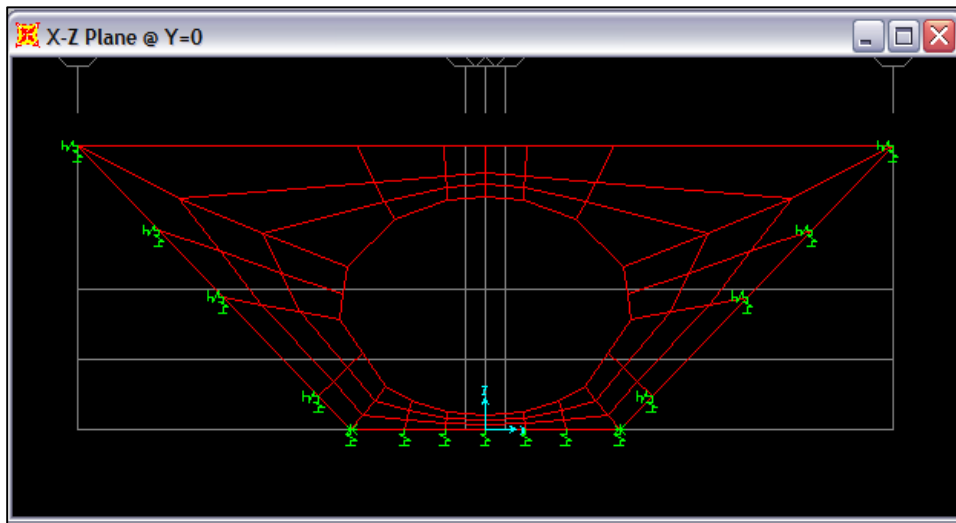


Figura 4.12: (Modelo con springs asignados)

#### 4.6. Resolución de la estructura (SAP2000)

Luego de corrido el modelo final nuestra estructura sufre deformaciones mínimas ( $U3=-2.2505\text{mm}$ ) como lo podemos determinar a continuación:

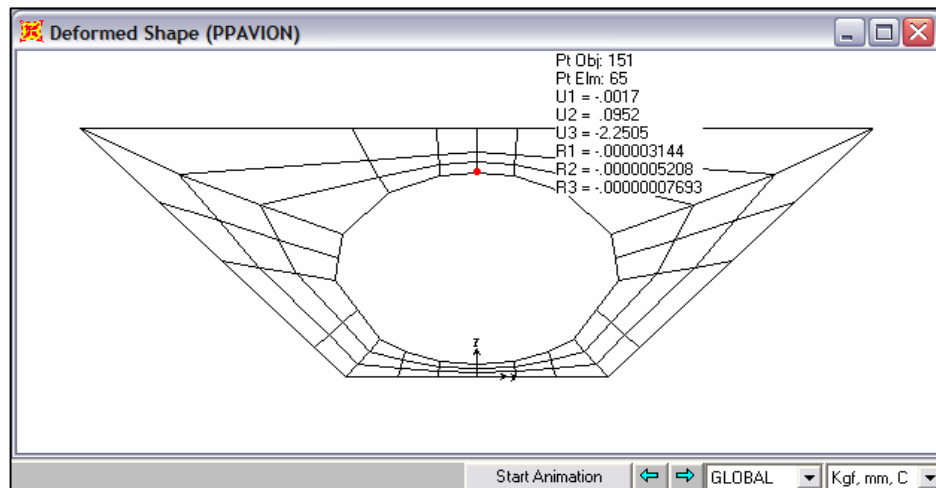


Figura 4.13: (Deformaciones en la parte superior de la estructura)

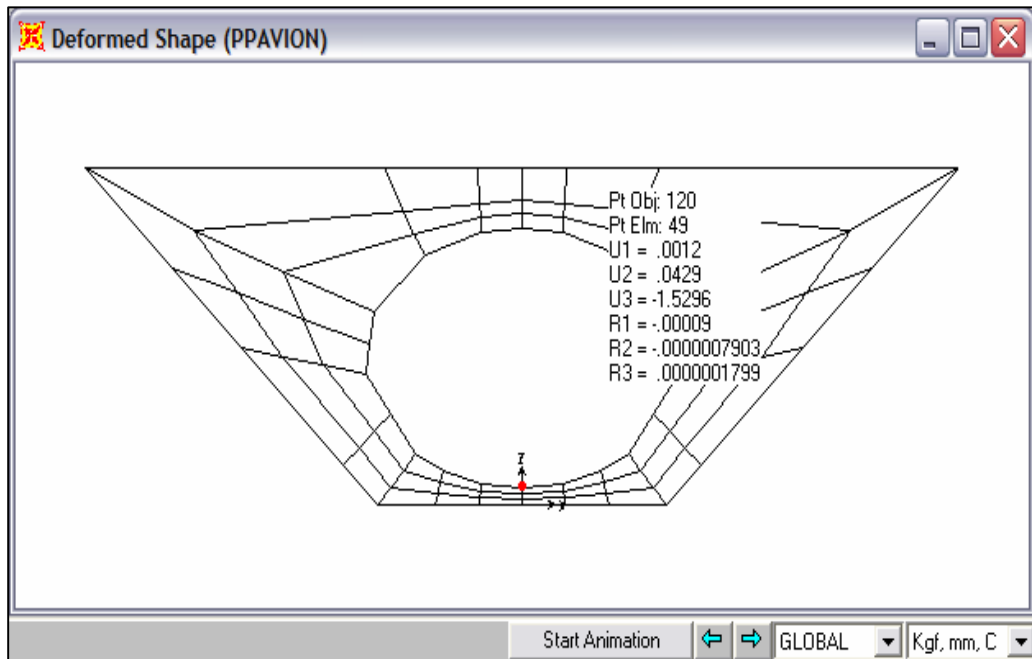


Figura 4.14: (Deformaciones en el inferior de la estructura)

En cuanto a los esfuerzos máximos y mínimos hemos tomado valores conservadores en referencia a nuestro proveedor Novacero , con valores de esfuerzos admisibles del acero de  $960 \text{ Kg/cm}^2$  y observamos que nuestra estructura cumple con todos estos esfuerzos ya que tanto en axial transversal y cortante no supera los valores permitidos como podemos observar en los diagramas resultantes de F11, F22 y F12 respectivamente en el modelo en  $\text{Kg/cm}^2$  :

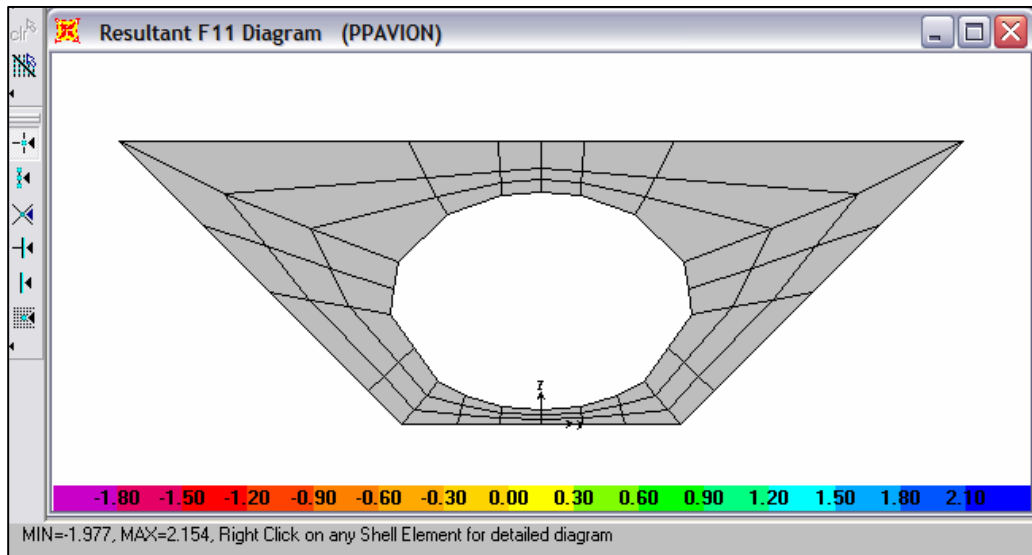


Figura 4.15: (Esfuerzo F11 )

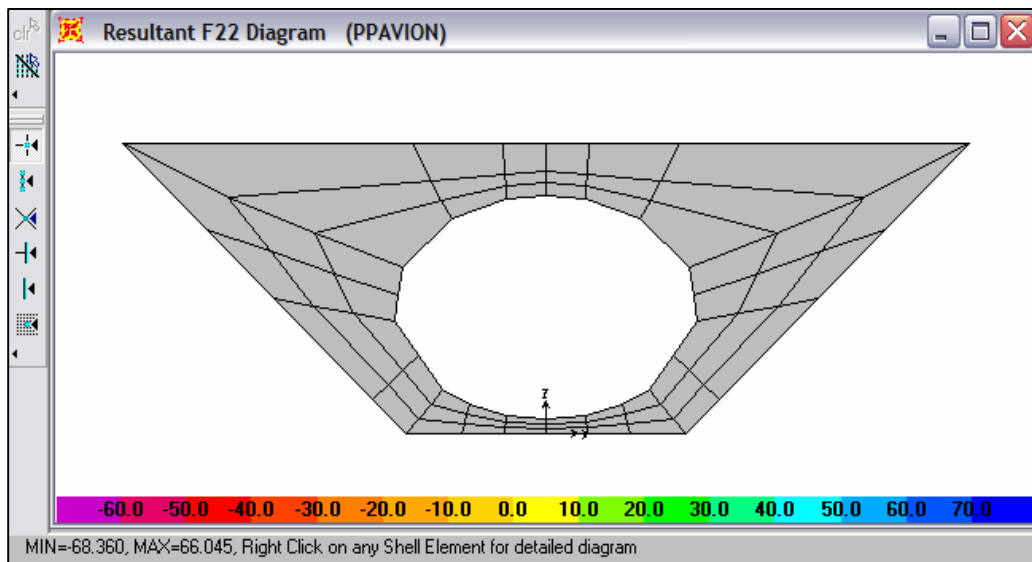


Figura 4.16: (Esfuerzo F22 )

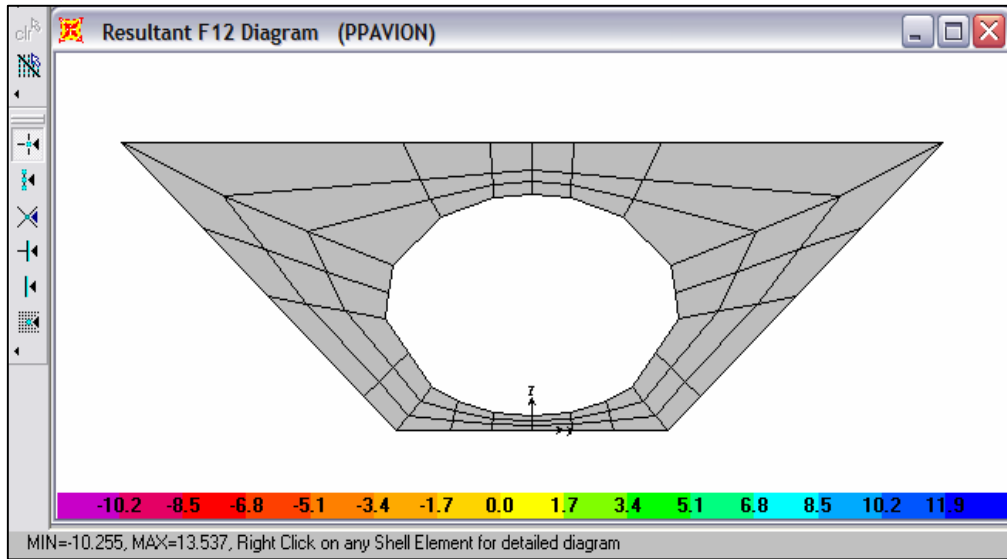


Figura 4.17: (Esfuerzo F12 )

En cuanto a los momentos que se obtienen son bajísimos y por ende queda comprobado que las alcantarillas trabajan como membranas y nuestros resultados los confirman en los diagramas de momentos M11 y M22 en T/m:

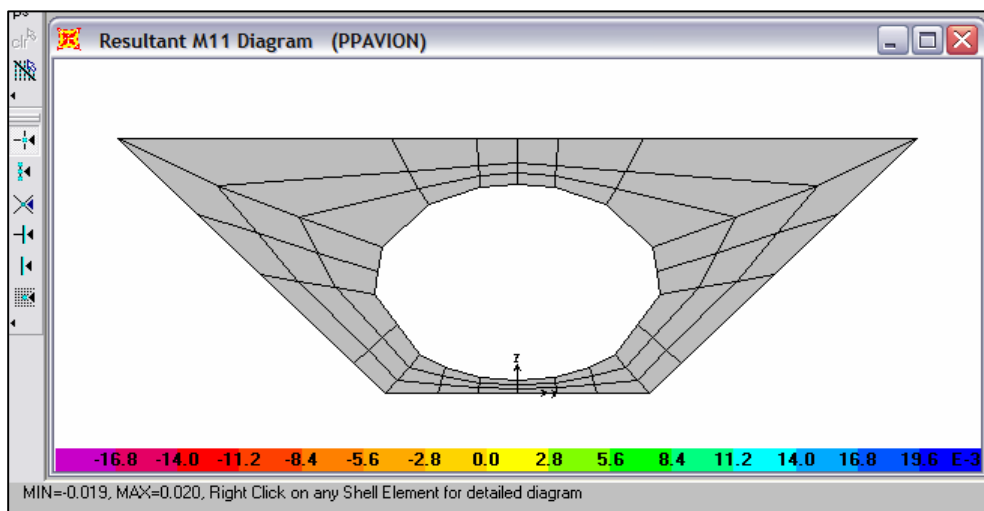


Figura 4.18: (Momento M11 )

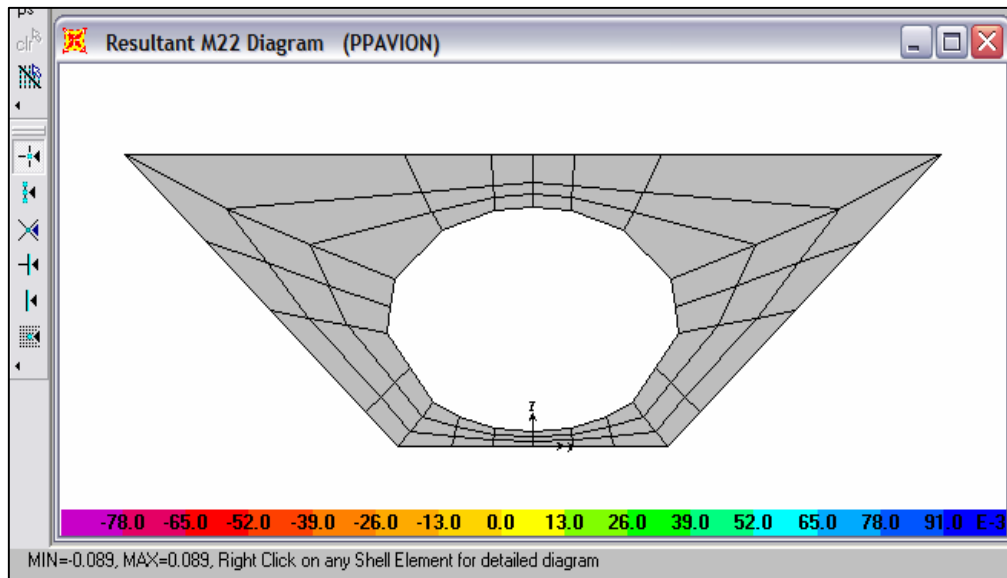


Figura 4.19: (Momento M22 )

En cuanto a los sólidos podemos anotar que nuestro modelo genera esfuerzos bajos en la parte superior de la alcantarilla, mientras que en la parte inferior obtenemos esfuerzos mayores debido a que el modelo presenta poco suelo, por lo tanto en la parte inferior existe una concentración de esfuerzos y es necesario compactar bien ese suelo, además como ese suelo va a tener mejores características porque va a ser reemplazado garantiza nuestro modelo.

Es aconsejable modelar mas suelo en la parte inferior para obtener mejores resultados, además el modelo comprueba la compactación debajo de la alcantarilla, ya que nuestro estudio de suelos nos da una resistencia de  $80 \text{ T/m}^2$  en la parte mas baja y nuestro modelo genera

valores de  $33.86 \text{ T/m}^2$  garantizando el modelo y confirmando el reemplazo el suelo debajo de la alcantarilla.

A continuación presentamos los valores de nuestros resultados con lo que garantizamos nuestro modelo:

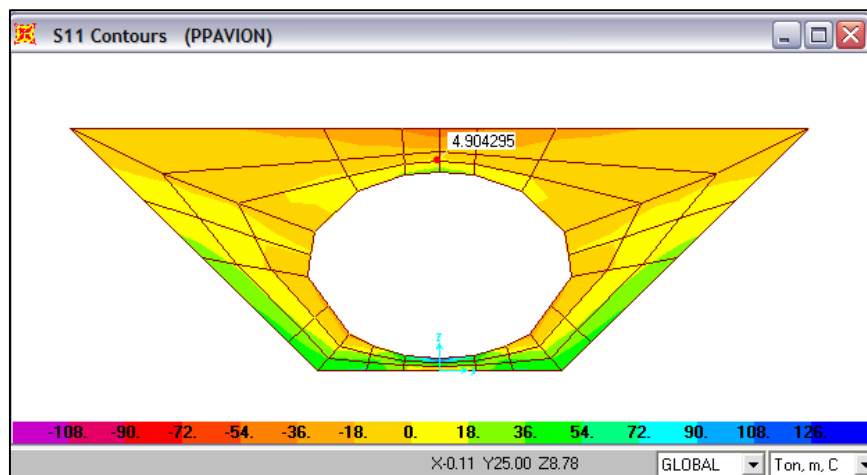


Figura 4.20: (Esfuerzo en la parte superior debido a S11)

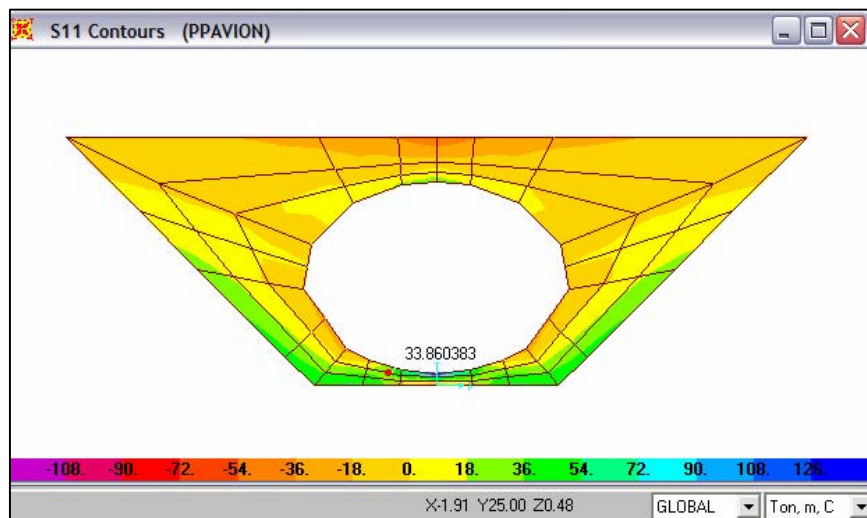


Figura 4.21: (Esfuerzo en la parte inferior debido a S11)

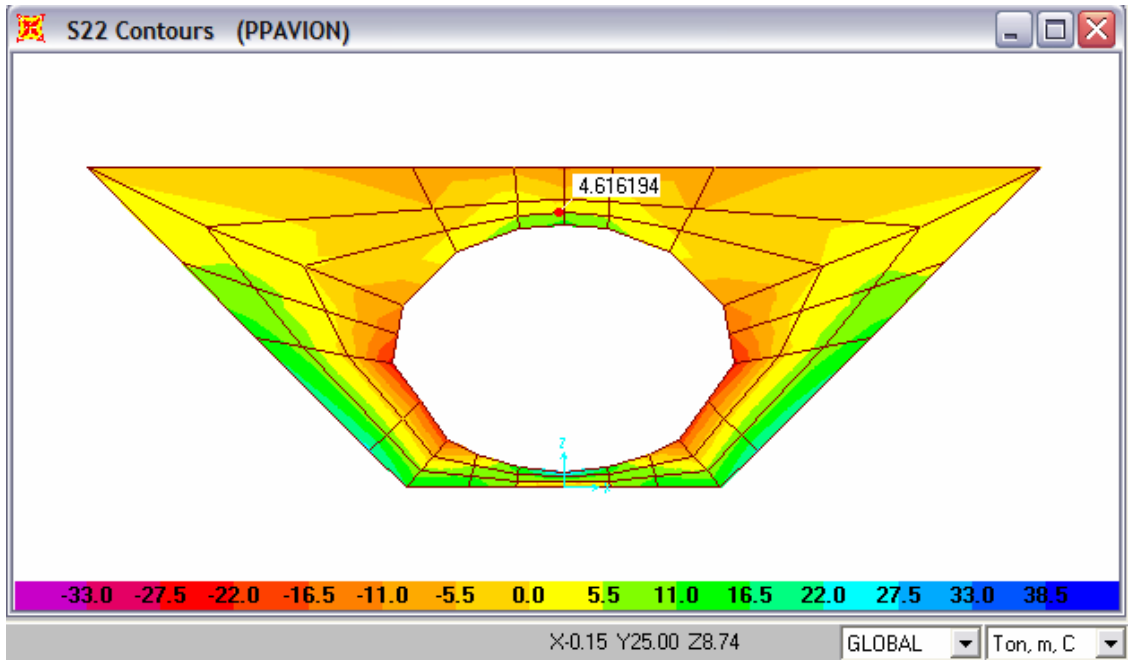


Figura 4.22: (Esfuerzo en la parte superior debido a S22)

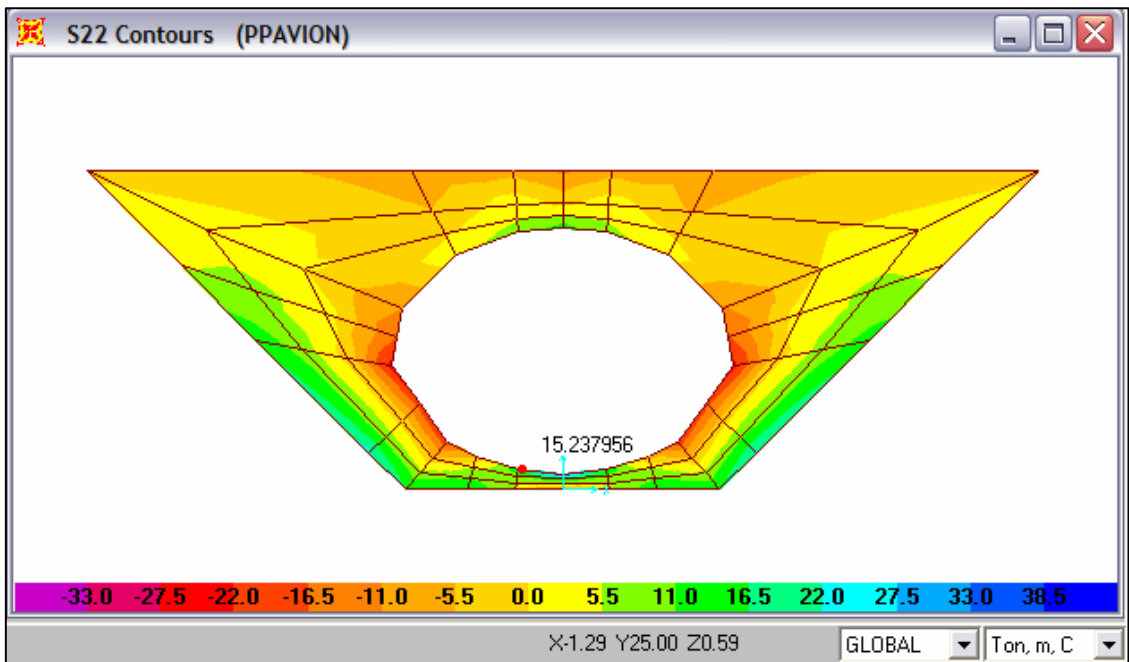


Figura 4.23: (Esfuerzo en la parte inferior debido a S22)

En el proceso constructivo de la estructura súper luz tipo elipse es necesario adherir dos vigas de empuje que son elementos que se las ubica a una altura predeterminada.

Las vigas se las coloca a ambos lados de la estructura y recorren todo el largo de la estructura Súper luz con el objeto de mejorar la rigidez, eliminar el pandeo y posibles deformaciones en el momento de compactar el material de relleno en capas previamente establecidas en el estudio de suelos del presente proyecto.

El fabricante proporciona además de la estructura metálica, tornillos turcas y los estribos que sirven para colocar el acero longitudinal de las vigas de empuje como se muestra en la fotografía:



Figura 4.24: (Estructura metálica súper luz tipo elipse)



#### 4.7. Análisis y comparación de resultados

Luego de analizar los reportes y haber determinado los resultados debido a nuestras cargas, concluimos que la estructura Súper luz tipo elipse tiene unas deformaciones mínimas y que en estructuras enterradas las cargas se disipan y se generan esfuerzos importantes en la alcantarilla.

Además el asentamiento viene dado por la diferencia de deformaciones existentes en la parte superior 2.2505 mm e inferior 1.5296 mm de la alcantarilla que en nuestro caso es 0.7209 mm, es decir ni un centímetro

A continuación hacemos una comparación de las deformaciones máximas que sugiere Novacero con nuestros resultados en la siguiente tabla:

Tabla 4.1: (Comparación de deformaciones)

DEFORMACIÓN	MODELO	MODELO
	SAP2000(mm)	NOVACERO(mm)
Parte superior	2.2505	6
Parte inferior	1.5296	6