Propuesta Didáctica para la enseñanza del Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería

Servio Íñiguez Pineda
Director: Dr. Juan Mayorga Zambrano

Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE)

seryser1984@gmail.com

April 8, 2019

Contenidos

¿Qué es una serie de Fourier?: Algunas Ideas

- Una serie infinita que “aproxima” una función periódica y continua a trozos

¿Qué es una serie de Fourier?: Algunas Ideas

- Una serie infinita que “aproxima” una función periódica y continua a trozos
- ¿Cómo surgen?.

¿Qué es una serie de Fourier?: Algunas Ideas

- Una serie infinita que "aproxima" una función periódica y continua a trozos

- ¿Cómo surgen?.

Joseph Fourier (1768 - 1830)

Fourier estaba interesado en estudiar los problemas de flujo de calor. Dada la temperatura inicial en todos los puntos de una región, determinar la distribución de temperatura a través del tiempo

- Lo interesante es que el trabajo de Fourier tiene aplicaciones a la ingeniería. Ejm: El análisis de una señal eléctrica periódica, pero no senoidal

El Problema

Lo habitual en cursos de Ingeniería (de una vertiente intuitiva) es empezar por:

Serie de Fourier

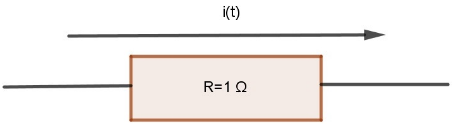
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t),$$

con $f(t) = f(t+T)$ y $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Y ocupar gran parte del curso en el cálculo de coeficientes a partir de las fórmulas, propiedades ....

Nuestra propuesta es abordar el AFAI desde la caracterización del espacio de las funciones cuadrado integrables $L^2(I)$.

¿Por qué el espacio de las funciones cuadrado integrables $L^2(I)$?.
La energía es finita



Energía en un resistor de 1 Ohm

$$E = \int_{I\subset\mathbb{R}} i^2(t)dt = \int_{I\subset\mathbb{R}} v^2(t)dt < \infty$$

¿Cuál es el espacio de las funciones cuadrado integrables?

$$L^2(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} : \int_I |f(t)|^2 dt < \infty\}$$

El Problema

$L^2(I)$ viene a ser un espacio vectorial de dimensión infinita y espacio de Hilbert que cumple con ciertas condiciones para escribir cualquier vector $v \in L^2(I)$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n,$$

donde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base Hilbertiana de V. Así tenemos algunas bases hilbertiana que generan el espacio $L^2(I)$:

1. Sistema trigonométrico clásico(Serie clásica de Fourier)
2. Series de Legendre
3. Series de Hermite
4. Series de Laguerre
5. Wavelets

El Problema

Objetivo General:
Diseñar una propuesta didáctica para enseñar el Análisis de Fourier a estudiantes de Ingeniería (AFAI).

El Problema

Objetivo General:
Diseñar una propuesta didáctica para enseñar el Análisis de Fourier a estudiantes de Ingeniería (AFAI).

Objetivos Específicos:

1. Aplicar criterios de la Didáctica de la Matemática para el diseño de la propuesta.

El Problema

Objetivo General:
Diseñar una propuesta didáctica para enseñar el Análisis de Fourier a estudiantes de Ingeniería (AFAI).

Objetivos Específicos:

1. Aplicar criterios de la Didáctica de la Matemática para el diseño de la propuesta.

2. Realizar una selección de los contenidos que aborda la propuesta en base de tres ejes directrices: ingenieril, matemático y didáctico.

El Problema

Objetivo General:
Diseñar una propuesta didáctica para enseñar el Análisis de Fourier a estudiantes de Ingeniería (AFAI).

Objetivos Específicos:

1. Aplicar criterios de la Didáctica de la Matemática para el diseño de la propuesta.
2. Realizar una selección de los contenidos que aborda la propuesta en base de tres ejes directrices: ingenieril, matemático y didáctico.
3. Diseñar situaciones-problema como los elementos principales de la propuesta.

Directrices de la Propuesta

1. ¿A quiénes está destinada la propuesta didáctica?: **Eje Ingenieril**

Directrices de la Propuesta

1. ¿A quiénes está destinada la propuesta didáctica?: **Eje Ingenieril**

   "La profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquirido mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se aplica con buen juicio a fin de desarrollar las formas en que se pueden utilizar de manera económica, los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad."

Directrices de la Propuesta

1. ¿A quiénes está destinada la propuesta didáctica?: **Eje Ingenieril**

   "La profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquirido mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se aplica con buen juicio a fin de desarrollar las formas en que se pueden utilizar de manera económica, los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad."

2. ¿Qué se busca enseñar con la propuesta?: **Eje Matemático**

Directrices de la Propuesta

1. ¿A quiénes está destinada la propuesta didáctica?: **Eje Ingenieril**

   "La profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquirido mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se aplica con buen juicio a fin de desarrollar las formas en que se pueden utilizar de manera económica, los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad."

2. ¿Qué se busca enseñar con la propuesta?: **Eje Matemático**

   "Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones".

Directrices de la Propuesta

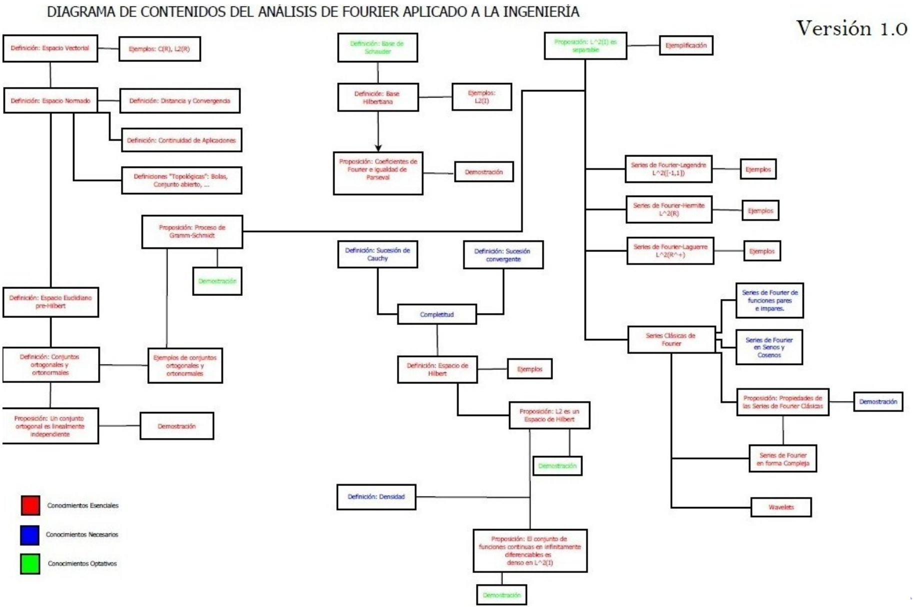
1. ¿Cómo se abordará el contenido matemático en la propuesta?: **Eje Didáctico**

Directrices de la Propuesta

1. ¿Cómo se abordará el contenido matemático en la propuesta?: **Eje Didáctico**

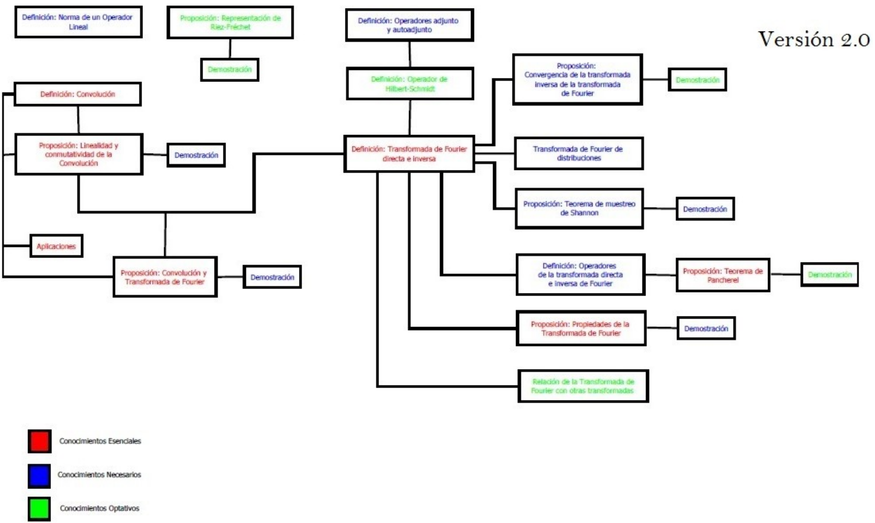
“La Didáctica de la Matemática es el arte de enseñar la Ciencia más exacta.”

¿Cuál es el contenido a didactizar?



¿Cuál es el contenido a didactizar?

DIAGRAMA DE CONTENIDOS DEL ANÁLISIS DE FOURIER APLICADO A LA INGENIERÍA



Educación Matemática basada en la Resolución de Problemas

1. La Resolución de Problemas, saca a los estudiantes de la pasividad que en su mayoría no genera el desarrollo de las competencias matemáticas y menos un gusto por matematizar situaciones en la medida de su nivel de formación; y, provoca más bien una invitación al estudiante a formularse preguntas que les permita atacar cierto problema.

Diferencias entre Ejercicio y Problema

1. Comportamiento del estudiante

Educación Matemática basada en la Resolución de Problemas

1. La Resolución de Problemas, saca a los estudiantes de la pasividad que en su mayoría no genera el desarrollo de las competencias matemáticas y menos un gusto por matematizar situaciones en la medida de su nivel de formación; y, provoca más bien una invitación al estudiante a formularse preguntas que les permita atacar cierto problema.

Diferencias entre Ejercicio y Problema

1. Comportamiento del estudiante
2. Objetivo del profesor

Educación Matemática basada en la Resolución de Problemas

1. La Resolución de Problemas, saca a los estudiantes de la pasividad que en su mayoría no genera el desarrollo de las competencias matemáticas y menos un gusto por matematizar situaciones en la medida de su nivel de formación; y, provoca más bien una invitación al estudiante a formularse preguntas que les permita atacar cierto problema.

Diferencias entre Ejercicio y Problema

1. Comportamiento del estudiante
2. Objetivo del profesor
3. Tiempo destinado

Educación Matemática basada en la Resolución de Problemas

1. La Resolución de Problemas, saca a los estudiantes de la pasividad que en su mayoría no genera el desarrollo de las competencias matemáticas y menos un gusto por matematizar situaciones en la medida de su nivel de formación; y, provoca más bien una invitación al estudiante a formularse preguntas que les permita atacar cierto problema.

Diferencias entre Ejercicio y Problema

1. Comportamiento del estudiante
2. Objetivo del profesor
3. Tiempo destinado
4. Dimensión afectiva

Educación Matemática basada en la Resolución de Problemas

1. La Resolución de Problemas, saca a los estudiantes de la pasividad que en su mayoría no genera el desarrollo de las competencias matemáticas y menos un gusto por matematizar situaciones en la medida de su nivel de formación; y, provoca más bien una invitación al estudiante a formularse preguntas que les permita atacar cierto problema.

Diferencias entre Ejercicio y Problema

1. Comportamiento del estudiante
2. Objetivo del profesor
3. Tiempo destinado
4. Dimensión afectiva

Polya en su libro *How to Solve it* (1949), establece cuatro etapas en resolución de problemas:

1. Comprender el problema.

Visión de Polya a la Resolución de Problemas

Polya en su libro *How to Solve it* (1949), establece cuatro etapas en resolución de problemas:

1. Comprender el problema.

2. Concebir un plan.

Visión de Polya a la Resolución de Problemas

Polya en su libro *How to Solve it* (1949), establece cuatro etapas en resolución de problemas:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.

Visión de Polya a la Resolución de Problemas

Polya en su libro *How to Solve it* (1949), establece cuatro etapas en resolución de problemas:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Visión de Polya a la Resolución de Problemas

Polya en su libro *How to Solve it* (1949), establece cuatro etapas en resolución de problemas:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Teoría de Situaciones Didácticas

1. Desarrollada por Guy Brousseau.

Teoría de Situaciones Didácticas

1. Desarrollada por Guy Brousseau.
2. Trata de crear las condiciones para la "génesis artificial" de los conocimientos matemáticos.

Teoría de Situaciones Didácticas

1. Desarrollada por Guy Brousseau.
2. Trata de crear las condiciones para la "génesis artificial" de los conocimientos matemáticos.
3. Por situación didáctica se entiende como una situación fabricada de manera adecuada para que se logre en el estudiante la construcción del saber.

Teoría de Situaciones Didácticas

1. Desarrollada por Guy Brousseau.
2. Trata de crear las condiciones para la "génesis artificial" de los conocimientos matemáticos.
3. Por situación didáctica se entiende como una situación fabricada de manera adecuada para que se logre en el estudiante la construcción del saber.
4. Situación a-didáctica: el docente la gestiona y esta por sí, hace que el estudiante en el camino de solución por ejemplo, perciba los errores conceptuales en los que incurre.

Ingeniería Didáctica

1. La ingeniería didáctica utiliza el símil del trabajo de Ingeniería. Trabaja bajo el paraguas de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Ingeniería Didáctica

1. La ingeniería didáctica utiliza el símil del trabajo de Ingeniería. Trabaja bajo el paraguas de la Teoría de Situaciones Didácticas.

2. Dos dimensiones: como metodología de Investigación y por otra, como metodología para el diseño de las situaciones didácticas.

Ingeniería Didáctica

1. La ingeniería didáctica utiliza el símil del trabajo de Ingeniería. Trabaja bajo el paraguas de la Teoría de Situaciones Didácticas.
2. Dos dimensiones: como metodología de Investigación y por otra, como metodología para el diseño de las situaciones didácticas.

FASES:

1. Análisis preliminar.

Ingeniería Didáctica

1. La ingeniería didáctica utiliza el símil del trabajo de Ingeniería. Trabaja bajo el paraguas de la Teoría de Situaciones Didácticas.
2. Dos dimensiones: como metodología de Investigación y por otra, como metodología para el diseño de las situaciones didácticas.

FASES:

1. Análisis preliminar.
2. Concepción y análisis a priori

Ingeniería Didáctica

1. La ingeniería didáctica utiliza el símil del trabajo de Ingeniería. Trabaja bajo el paraguas de la Teoría de Situaciones Didácticas.
2. Dos dimensiones: como metodología de Investigación y por otra, como metodología para el diseño de las situaciones didácticas.

FASES:

1. Análisis preliminar.
2. Concepción y análisis a priori
3. Experimentación

Ingeniería Didáctica

1. La ingeniería didáctica utiliza el símil del trabajo de Ingeniería. Trabaja bajo el paraguas de la Teoría de Situaciones Didácticas.
2. Dos dimensiones: como metodología de Investigación y por otra, como metodología para el diseño de las situaciones didácticas.

FASES:

1. Análisis preliminar.
2. Concepción y análisis a priori
3. Experimentación
4. Análisis a posteriori y evaluación

Ingeniería Didáctica

1. La ingeniería didáctica utiliza el símil del trabajo de Ingeniería. Trabaja bajo el paraguas de la Teoría de Situaciones Didácticas.
2. Dos dimensiones: como metodología de Investigación y por otra, como metodología para el diseño de las situaciones didácticas.

FASES:

1. Análisis preliminar.
2. Concepción y análisis a priori
3. Experimentación
4. Análisis a posteriori y evaluación

Recurso Software: Maxima

¿Por qué decantarnos por el uso de Maxima?

1. Maxima un software publicado bajo la licencia GNU GPL, le otorga ventajas por sobre otras opciones propietarias, que sobretodo se acentúan en el contexto educativo y en la enseñanza de una disciplina de servicio, tal es el caso de la Matemática para Ingeniería.

Recurso Software: Maxima

¿Por qué decantarnos por el uso de Maxima?

1. Maxima un software publicado bajo la licencia GNU GPL, le otorga ventajas por sobre otras opciones propietarias, que sobretodo se acentúan en el contexto educativo y en la enseñanza de una disciplina de servicio, tal es el caso de la Matemática para Ingeniería.

2. Al ser propietarios del software, tanto docente como estudiantes, estos pueden desarrollar trabajos con mayor autonomía.

Recurso Software: Maxima

¿Por qué decantarnos por el uso de Maxima?

1. Maxima un software publicado bajo la licencia GNU GPL, le otorga ventajas por sobre otras opciones propietarias, que sobretodo se acentúan en el contexto educativo y en la enseñanza de una disciplina de servicio, tal es el caso de la Matemática para Ingeniería.

2. Al ser propietarios del software, tanto docente como estudiantes, estos pueden desarrollar trabajos con mayor autonomía.

3. Maxima es un Sistema de Álgebra Computacional, CAS por sus siglas en inglés; es decir, un software que permite el cálculo simbólico.

Recurso Software: Maxima

¿Por qué decantarnos por el uso de Maxima?

1. Maxima un software publicado bajo la licencia GNU GPL, le otorga ventajas por sobre otras opciones propietarias, que sobretodo se acentúan en el contexto educativo y en la enseñanza de una disciplina de servicio, tal es el caso de la Matemática para Ingeniería.

2. Al ser propietarios del software, tanto docente como estudiantes, estos pueden desarrollar trabajos con mayor autonomía.

3. Maxima es un Sistema de Álgebra Computacional, CAS por sus siglas en inglés; es decir, un software que permite el cálculo simbólico.

4. Un punto adicional es que la interfaz wxMaxima y la sintaxis de programación son muy amigables para ser abordadas por noveles usuarios

Recurso Software: Maxima

¿Por qué decantarnos por el uso de Maxima?

1. Maxima un software publicado bajo la licencia GNU GPL, le otorga ventajas por sobre otras opciones propietarias, que sobretodo se acentúan en el contexto educativo y en la enseñanza de una disciplina de servicio, tal es el caso de la Matemática para Ingeniería.
2. Al ser propietarios del software, tanto docente como estudiantes, estos pueden desarrollar trabajos con mayor autonomía.
3. Maxima es un Sistema de Álgebra Computacional, CAS por sus siglas en inglés; es decir, un software que permite el cálculo simbólico.
4. Un punto adicional es que la interfaz wxMaxima y la sintaxis de programación son muy amigables para ser abordadas por noveles usuarios

Propuesta Didáctica

Tenemos cinco situaciones-problemas

1. Series Clásicas de Fourier

Propuesta Didáctica

Tenemos cinco situaciones-problemas

1. Series Clásicas de Fourier

2. Serie generalizada de Fourier

Tenemos cinco situaciones-problemas

1. Series Clásicas de Fourier

2. Serie generalizada de Fourier

3. Series no-clásicas de Fourier

Propuesta Didáctica

Tenemos cinco situaciones-problemas

1. Series Clásicas de Fourier
2. Serie generalizada de Fourier
3. Series no-clásicas de Fourier
4. Transformada de Fourier

Propuesta Didáctica

Tenemos cinco situaciones-problemas

1. Series Clásicas de Fourier
2. Serie generalizada de Fourier
3. Series no-clásicas de Fourier
4. Transformada de Fourier
5. Convolución

Propuesta Didáctica

Tenemos cinco situaciones-problemas

1. Series Clásicas de Fourier
2. Serie generalizada de Fourier
3. Series no-clásicas de Fourier
4. Transformada de Fourier
5. Convolución

Ejemplo de situación-problema: Serie clásica de Fourier

1. Suscitar el interés y crear la necesidad en el estudiante de las Series de Fourier.

Ejemplo de situación-problema: Serie clásica de Fourier

1. Suscitar el interés y crear la necesidad en el estudiante de las Series de Fourier.
2. Preparar al estudiante para el estudio del tema en cuestión.

Ejemplo de situación-problema: Serie clásica de Fourier

1. Suscitar el interés y crear la necesidad en el estudiante de las Series de Fourier.
2. Preparar al estudiante para el estudio del tema en cuestión.
3. Un INTENTO de diseñar una situación a-didáctica que permita que los estudiantes por sí mismos corrijan sus errores, al desarrollar la misma.

Ejemplo de situación-problema: Serie clásica de Fourier

1. Suscitar el interés y crear la necesidad en el estudiante de las Series de Fourier.
2. Preparar al estudiante para el estudio del tema en cuestión.
3. Un INTENTO de diseñar una situación a-didáctica que permita que los estudiantes por sí mismos corrijan sus errores, al desarrollar la misma.
4. Llegar de manera intuitiva a las Series de Fourier clásicas.

Planteamiento de la situación-problema

1. Consideremos una cuerda elástica estirada en sus extremos, colocada a lo largo del eje x de 0 a L. La cuerda al ser sometida a un pequeño desplazamiento vértical, vibra verticalmente en el plano xy y su desplazamiento es modelizado por una función, $u = u(x,t)$, en dos variables x y t, donde

Planteamiento de la situación-problema

1. Consideremos una cuerda elástica estirada en sus extremos, colocada a lo largo del eje x de 0 a L. La cuerda al ser sometida a un pequeño desplazamiento vértical, vibra verticalmente en el plano xy y su desplazamiento es modelizado por una función, $u = u(x, t)$, en dos variables x y t, donde
   1. x representa la posición horizontal de un punto de la cuerda y

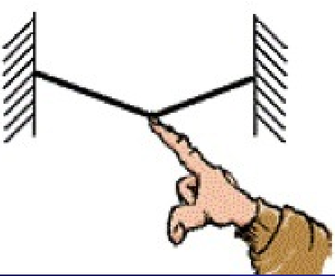
Planteamiento de la situación-problema

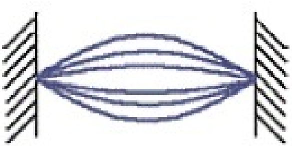
1. Consideremos una cuerda elástica estirada en sus extremos, colocada a lo largo del eje x de 0 a L. La cuerda al ser sometida a un pequeño desplazamiento vértical, vibra verticalmente en el plano xy y su desplazamiento es modelizado por una función, $u = u(x, t)$, en dos variables x y t, donde

    1. x representa la posición horizontal de un punto de la cuerda y
    2. t representa el tiempo.

Planteamiento de la situación-problema

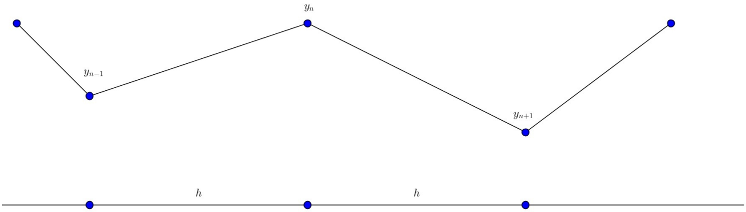
1. Consideremos una cuerda elástica estirada en sus extremos, colocada a lo largo del eje x de 0 a L. La cuerda al ser sometida a un pequeño desplazamiento vértical, vibra verticalmente en el plano xy y su desplazamiento es modelizado por una función, $u = u(x, t)$, en dos variables x y t, donde
    1. x representa la posición horizontal de un punto de la cuerda y
    2. t representa el tiempo.





1. Vamos a dividir la cuerda en N masas, de manera que la masa n-ésima se ubica en la posición $x_n = \frac{nL}{N}$. Consideremos así, para cada masa un movimiento armónico simple, con la diferencia que cada masa interactúa con las masas vecinas. La posición en y de la n-ésima masa es

$$y_n(t) = u(x_n, t)$$



Primera pregunta

1. Supongamos que la separación entre x_{n-1} y x_n, para todo $n = 1, \cdots, n$, es $h > 0$ y sea la densidad de la cuerda constante, $\rho > 0$, de manera que la masa de la partícula n-ésima es

$$m = \rho h.$$

Pregunta: Aplicando la segunda Ley de Newton escribe una expresión para la tensión de la n-ésima partícula

Segunda pregunta

1. Por otro lado la tensión de la n-ésima partícula es provocada por la $(n-1)$-ésima y $(n+1)$-ésima partículas. Puesto que la tensión de la n-ésima partícula es directamente proporcional a la separación con respecto a la altura de las partículas vecinas e inversamente proporcional a la separación horizontal de las mismas. Considerando que la constante de proporcionalidad es $\tau > 0$ que a la vez representa el coeficiente de tensión de la cuerda:
   Pregunta:
   1. **¿Cuál es la expresión para la tensión de la n-ésima partícula provocada por la partícula ubicada a la izquierda $(n-1)$-ésima?**
   2. **¿Cuál es la expresión para la tensión de la n-ésima partícula provocada por la partícula ubicada a la derecha $(n+1)$-ésima?**
   3. **¿Cuál es la expresión para la tensión de la n-ésima partícula provocada por ambas partículas vecinas?**

Tercera pregunta

1. Gracias a los dos literales anteriores se llega a la siguiente expresión

$$\rho h y_n''(t) = \frac{\tau}{h}[y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)].$$

Utiliza los siguientes hechos:

   1. Parte del miembro derecho de la última igualdad se puede escribir así

$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t) = u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t).$$

   2. Para una función F, doblemente derivable,

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \to F''(x)$$

cuando $h \to 0$.

Pregunta: Y encuentra la ecuación diferencial parcial que relaciona u,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, conocida como la ecuación de onda.

Pregunta: Sean las funciones u y v soluciones de la ecuación diferencial obtenida. Prueba que

1. **La ponderación αu con $\alpha \in \mathbb{R}$, también lo es.**
2. **La superposición $u + v$ es solución de la ecuación diferencial.**

Quinta pregunta

Hagamos la conjetura que la función en dos variables u resuelve la ecuación de onda y que la podemos escribir así

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t).$$

Si $c = 1$, al sustituir u en la ecuación de onda se obtiene que

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

y puesto que $\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}$ depende sólo de t y a la vez $\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$ depende sólo de x, quiere decir que ambas razones son constantes, por lo que se puede escribir:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda,$$

con $\lambda \in R$. De donde tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \psi''(t) - \lambda\psi(t) = 0 \\ \\ \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Preguntas:

1. **Encuentra las funciones ψ y φ que resuelvan el sistema.**
2. **Recordemos que la cuerda se ubica sobre el eje x de 0 a L. Hagamos que $L = \pi$, de manera que la cuerda se encuentra sujeta en 0 y en π. Así, consideramos las condiciones de frontera**

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0.$$

Encuentra que una solución a la ecuación de onda es

$$u_m(x,t) = [a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)] \sin(mx)$$

3. **Consideremos también que la forma de onda inicial de la cuerda está dada por la función f sobre el intervalo $[0, \pi]$, esto es,**

$$u(x,0) = f(x),$$

y que la velocidad inicial es cero, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$. Si $f(x) = 3sen(4x)$. Encuentra una solución para este caso.

1. Si u_1, u_2 y u_3 son soluciones a la ecuación de onda. ¿Puedes afirmar que $u_1 + u_2 + u_3$ es solución de la ecuación de onda y que u, evaluada en x y t, dada así:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{N} [a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)] \sin(mx)$$

también lo es?

Sexta pregunta

1. Por el literal anterior, intuimos que para una cuerda colocada en el eje x, de 0 a π, la función u,

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)] \sin(mx),$$

es solución a la ecuación de onda. Ahora queremos encontrar la solución a la ecuación de onda, suponiendo que la forma inicial de la cuerda está dada por f, $f(x) = x(\pi - x)$ y que su velocidad inicial es cero $(\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0)$. Para ello desarrolla los siguientes literales:

Sexta pregunta

1. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Considera los casos en que $n = m$ y $n \neq m$ y encuentra:
$$\int_0^{\pi} sen(mx)sen(nx)dx.$$
2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Con base en el literal anterior y para un n fijo, encuentra:
$$\int_0^{\pi} [\sum_{m=1}^{N} a_m sen(mx)sen(nx)]dx.$$
3. Del literal anterior vamos a intuir que
$$\int_0^{\pi} [\sum_{m=1}^{\infty} a_m sen(mx)sen(nx)]dx = \frac{\pi}{2} a_n.$$
A partir de ahí, retomemos el problema planteado de encontrar la ecuación de la forma de la cuerda en el tiempo, si esta se coloca en el eje x, de 0 a π, tiene una forma inicial dada por f, donde $f(x) = x(\pi - x)$ y parte el movimiento vértical con velocidad inicial

Ejemplo de situación-problema: Serie generalizada de Fourier

De la primera situación se ha visto que para una función f cuadrado integrable en el intervalo $[-\pi, \pi]$, esto es $f \in L^2([-\pi, \pi])$, existen las sucesiones de funciones $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n S_n$$

donde, para $t \in [-\pi, \pi]$ y $n \in \mathbb{N}$, $C_n(t) = \cos(nt)$ y $S_n(t) = sen(nt)$

Ejemplo de situación-problema: Serie generalizada de Fourier

y los llamados coeficientes de Fourier se calculan así:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sen(t)dt.$$

Lo que constituyen las Series clásicas de Fourier, [**?**]. Ahora supongamos que para una función cuadrado integrable en I, $f \in L^2(I)$, existe una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que hace el papel de las sucesiones de funciones sinusoidales en la Serie clásica de Fourier, tal que podamos escribir

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n.$$

Ejemplo de situación-problema: Serie generalizada de Fourier

Es decir para $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(t),$$

donde

$$\alpha_n = \int_I f(t) f_n(t) dt. \tag{1}$$

Ejemplo de situación-problema: Serie generalizada de Fourier. Primera pregunta

A partir del procedimiento para el cálculo de los coeficientes de Fourier de la situación anterior, averigua cuál debe ser la naturaleza de la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para que el cálculo de los coeficientes de Fourier α_n sea como el que se establece en 1 y prueba dicha expresión.

Ejemplo de situación-problema: Serie generalizada de Fourier. Segunda pregunta

Se define el producto escalar entre dos funciones cuadrado integrables $f, g \in L^2(I)$, así

$$(f, g) = \int_I f(t)g(t)dt$$

Prueba que el producto escalar entre funciones cuadrado integrables es tal que para toda $f, g, h \in L^2(I)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que:

- $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$
- $(f, g) = (g, f)$
- $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$
- $(f, f) \geq 0$
- $(f, f) = 0$ ssi $f = 0$

Ejemplo de situación-problema: Serie generalizada de Fourier. Tercera pregunta

El producto escalar lo extendemos a elementos de un Espacio Vectorial. Sea V un espacio vectorial. El producto escalar es la aplicación

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R},$$

tal que para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumplen las mismas condiciones que en el caso particular de funciones cuadrado integrables.

- $(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$
- $(u, v) = (v, u)$
- $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$
- $(u, u) \geq 0$
- $(u, u) = 0$ ssi $u = 0$.

Ejemplo de situación-problema: Serie generalizada de Fourier. Tercera pregunta

Ahora extendamos las Series de Fourier para poder expandir cualquier elemento, $v \in V$ de un espacio vectorial provisto con producto escalar, en términos de una sucesión de vectores $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$, así,

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n,$$

donde

$$\alpha_n = (v, u_n). \tag{2}$$

Averigua cuál debe ser la naturaleza de la sucesión de vectores $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para que el cálculo de los coeficientes de Fourier α_n sea como el que se establece en 2 y prueba dicha expresión.

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier

En esta situación, nos interesa encontrar la serie de Fourier de una señal que no cumple con la condición de periodicidad. Analicemos la posibilidad de encontrar la serie de Fourier de la señal rectangular, definida por la fórmula,

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < \frac{1}{2} \\ \\ 0 & \text{si} \quad |t| \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Primera pregunta

Orden: Grafica en Maxima la señal rectangular.

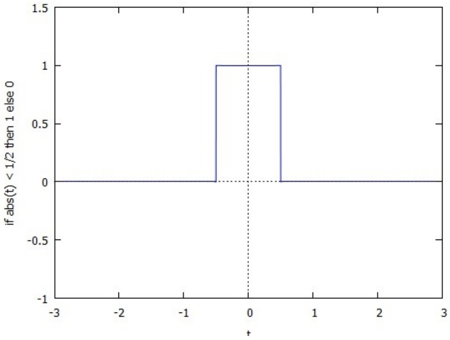


Figure: Gráfica del pulso rctangular Π.

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Segunda pregunta

Dado que la señal rectangular $\Pi(t)$ no es periódica. Hagamos que este pulso rectangular se repita cada 2 unidades de tiempo, $t = 2j$ para $j \in \mathbb{Z}$, para así tener un "tren de pulsos", modelizados por

$$T_2\Pi(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Pi(t + 2j).$$

$T_2\Pi(t)$ tiene periodo 2 y en la grafica se observan cinco de estos pulsos. Encuentra la serie de Fourier en forma compleja de este "tren de pulsos".

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Segunda pregunta

Respuesta: La serie de Fourier en forma compleja del tren de pulsos está dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 nt},$$

donde ω_0 es la frecuencia angular de $T_2\Pi(t)$ y en este caso dado que su periodo es 2,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Segunda pregunta

Así tenemos que c_n es:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\int_{-2/2}^{2/2} T_2\Pi(t)e^{-i\pi nt}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} T_2\Pi(t)e^{-i\pi nt}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \Pi(t)e^{-i\pi nt}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\pi nt}dt \\
&= \frac{i\,e^{-\frac{i\,\pi\,n}{2}}}{2\pi\,n} - \frac{i\,e^{\frac{i\,\pi\,n}{2}}}{2\pi\,n}.
\end{aligned}$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Segunda pregunta

De ahí, que los coeficientes c_n para $n \in \mathbb{Z}$ son:

$$c_n = \frac{1}{\pi n} sen(\frac{\pi n}{2}).$$

Por lo que, tenemos que la serie de Fourier de $T_2\Pi(t)$ queda así:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{sen(\pi n/2)}{\pi n} e^{i\pi nt}.$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Tercera pregunta

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se obtienen valores reales para los coeficientes c_n, debido al hecho de que el tren de pulsos se modeliza por una función par. Esto facilita graficar el espectro de $T_2\Pi(t)$.
Grafica en Maxima la amplitud de los armónicos que hacen parte del tren de pulsos, esto es, c_n vs n.

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Tercera pregunta

(% i18)

```
c[0]:1;
```

$$1 \qquad (\%\ o18)$$

(% i21)

```
define(c[n], (1/(%pi*n))*sin(%pi*n/2));
```

$$c_n := \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} \qquad (\%\ o21)$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Tercera pregunta

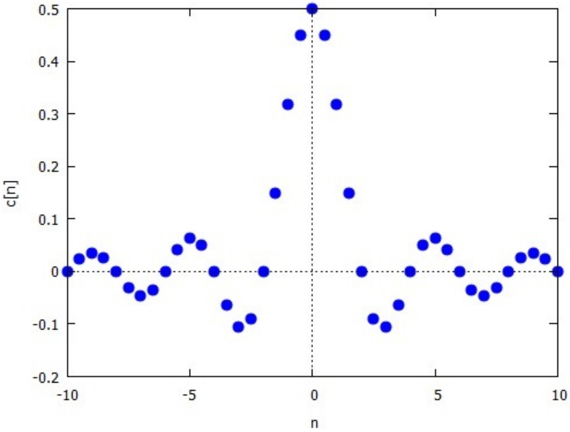


Figure: Gráfica de las componentes espectrales del tren de pulsos para un periodo $T = 2$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Cuarta pregunta

Si consideramos ahora un tren de pulsos con periodo T, modelizado por

$$T_T\Pi(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Pi(t + jT),$$

para $j \in \mathbb{Z}$. Encuentra los coeficientes de Fourier, c_n, para dicha señal y grafica en máxima su espectro para cuando la señal tiene periodos de 3, 4 y 6.

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Cuarta pregunta

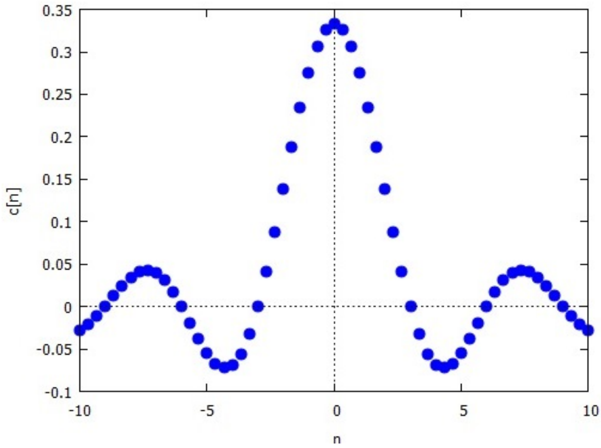
Respuesta: Tenemos que los coeficientes de Fourier para el tren de pulsos de periodo T, con $|T| > \frac{1}{2}$ y para $n \in \mathbb{Z}$ son:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} T_T\Pi(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-1/2}^{1/2} \Pi(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt \\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{i\,T\,e^{-\frac{i\,\pi\,n}{T}}}{2\,\pi\,n} - \frac{i\,T\,e^{\frac{i\,\pi\,n}{T}}}{2\,\pi\,n}\right]. \end{aligned}$$

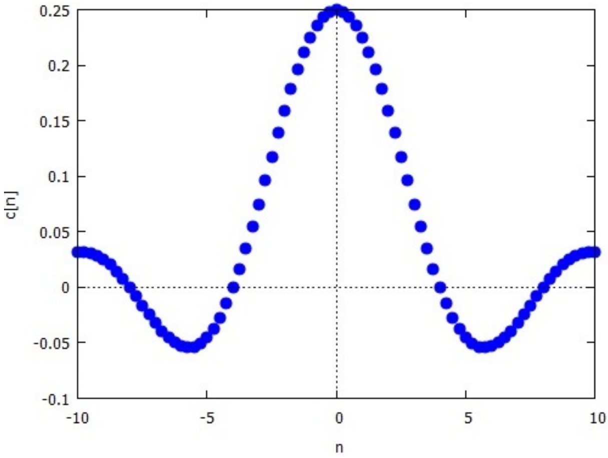
De ahí, que los coeficientes c_n son:

$$c_n = \frac{1}{\pi n} sen\left(\frac{\pi n}{T}\right).$$

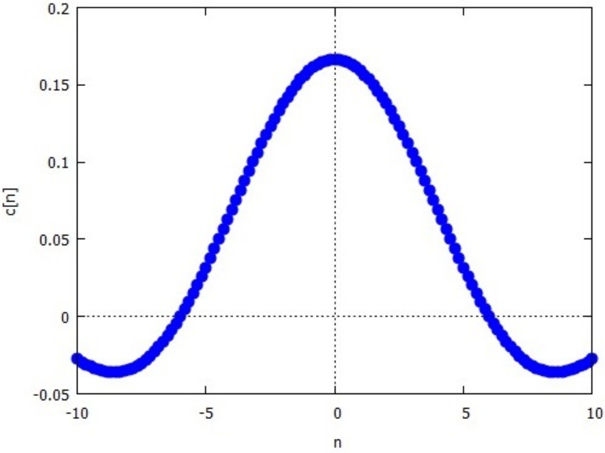
Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Cuarta pregunta



Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Cuarta pregunta



Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Cuarta pregunta



Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Quinta pregunta

En los literales anteriores hemos encontrado que los coeficientes de Fourier para el tren de pulsos de periodo T están dados por:

$$c_n = \frac{1}{\pi n} sen\left(\frac{\pi n}{T}\right).$$

Por lo que, la serie de Fourier se escribe así,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi n} sen\left(\frac{\pi n}{T}\right) e^{2\pi i \frac{n}{T} t}.$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Quinta pregunta

De ahí podemos observar que los distintos armónicos que hacen parte del tren de pulsos tienen frecuencias de $\frac{n}{T}$, para $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, la separación de armónico a armónico es $\frac{1}{T}$. Es decir, a medida que crece el valor de T esta separación se acorta, como se pudo constatar en las gráficas del literal anterior.

Además, se pudo constatar que para valores mayores de periodo del tren de pulsos, la amplitud de c_n disminuye.

Analiza qué sucede con la amplitud de c_n y la separación entre armónicos en el límite, si $T \to \infty$.

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Quinta pregunta

Respuesta: Como se conoce que la separación entre armónicos es $\frac{n}{T}$, es claro que si $T \to \infty$, dicha separación es cero. Es decir, el espectro del tren de pulsos cuando $T \to \infty$ pasaría de ser discreto a ser continuo. Por otro lado la amplitud de c_n,

$$c_n = \frac{1}{\pi n} sen\left(\frac{\pi n}{T}\right) = \frac{1}{\pi n}\left(\frac{\pi n}{T}\right) = \frac{1}{T},$$

cuando $T \to \infty$,

$$c_n \to \frac{1}{T} \to 0,$$

puesto que $sen(\theta) \approx \theta$ en tal situación. Por lo tanto, tenemos que la amplitud sería cero si $T \to \infty$.

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Sexta pregunta

Intuitivamente afirmamos que para una señal en $L^2(I)$, cualquiera, que posea serie de Fourier, esta tiene una relación uno a uno con los coeficientes de Fourier. Por otro lado, como vemos que los coeficientes c_n nos otorgan información espectral de la señal, es decir información para estudiar a la señal en otro dominio. Podemos así, interpretar a los coeficientes c_n como una transformación de la señal. Para el caso particular de la señal rectangular $\Pi(t)$, escribamos c_n como una transformación de la señal(*Transfor*).

$$Transfor[T_T\Pi(t)](\frac{n}{T}) = \frac{1}{\pi n} sen\left(\frac{\pi n}{T}\right).$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Sexta pregunta

Del literal anterior hemos visto que si $T \to \infty$ entonces $c_n \to 0$, de manera que para compensar, multiplicamos a los coeficientes c_n por T y tenemos la transformación escalada(*Transfor_escalada*).

$$Transfor\_escalada[T_T \Pi(t)](\frac{n}{T}) = T \frac{1}{\pi n} sen\left(\frac{\pi n}{T}\right),$$

que la podemos escribir así:

$$Transfor\_escalada[T_T \Pi(t)](\frac{n}{T}) = \frac{sen\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\frac{\pi n}{T}}.$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Sexta pregunta

Si $T \to \infty$, el tren de pulsos deviene en un sólo pulso rectangular, $\Pi(t)$; y, la separación entre armónicos, $\frac{n}{T}$ para $n \in \mathbb{Z}$, deviene en una variable continua, s $(\frac{n}{T} \to s)$. De manera que la transformada escalada del pulso rectangular es:

$$Transfor\_escalada[\Pi(t)](s) = \frac{sen(\pi s)}{\pi s},$$

o también a través de la función *senc* de amplio uso en Ingeniería Electrónica y que se define así:

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Sexta pregunta

Seno cardinal

La función seno cardinal, *senc*, se define así:

$$
\begin{aligned}
senc \quad &: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
& x \longmapsto senc(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{sen(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Sexta pregunta

Podemos escribir la transformada escalada del pulso rectangular así:

$$Transfor\_escalada[\Pi(t)](s) = senc(\pi s).$$

Grafica en Maxima la transformada escalada del pulso rectangular (s es la variable independiente) y encuentra una expresión para la transformada del pulso rectangular en términos de una integral.

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Sexta pregunta

Respuesta: Encontremos la transformada escalada del pulso rectangular partiendo de que la transformada escalada del tren de pulsos es

$$\begin{aligned} Transfor\_escalada[T_T\Pi(t)](\frac{n}{T}) &= Tc_n \\ &= T\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\Pi(t)e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2}\Pi(t)e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt. \end{aligned}$$

Si $T \to \infty$ entonces tenemos que la transformada del pulso rectangular está dada así:

$$Transfor\_escalada[\Pi(t)](s) = \int_{-\infty}^{\infty}\Pi(t)e^{-i2\pi st}dt.$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Sexta pregunta

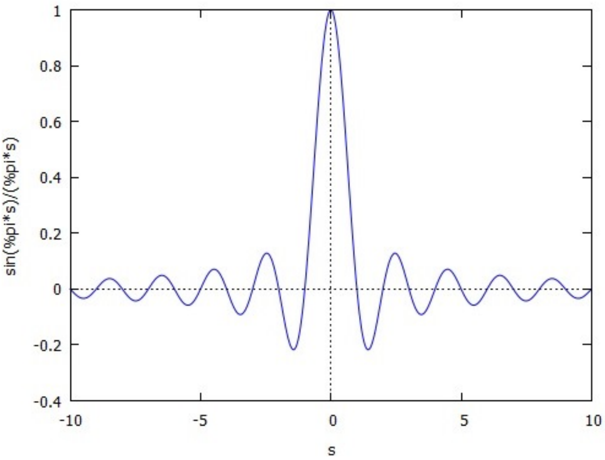


Figure: Gráfica de la transformada "escalada" del pulso rectangular

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Sexta pregunta

Generaliza los resultados anteriores para una función f tal que

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f(t)| dt < \infty$$

y que se anule para valores de t fuera del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$f(t) = 0 \quad para \quad |t| > \frac{1}{2}.$$

Encuentra los coeficientes de Fourier complejos c_n, para una periodización de f, con periodo T y, lleva esos resultados al límite cuando el periodo $T \to \infty$.

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Séptima pregunta

Generaliza los resultados anteriores para una función f tal que

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f(t)| dt < \infty$$

y que se anule para valores de t fuera del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$f(t) = 0 \quad para \quad |t| > \frac{1}{2}.$$

Encuentra los coeficientes de Fourier complejos c_n, para una periodización de f, con periodo T y, lleva esos resultados al límite cuando el periodo $T \to \infty$.

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Séptima pregunta

Respuesta: A partir de f, definimos la función periódica con periodo T,

$$P_T f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(t + jT),$$

cuyos coeficientes c_n para $n \in \mathbb{Z}$ son:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Séptima pregunta

Veamos cómo se acotan los coeficientes c_n,

$$
\begin{aligned}
|c_n| &= \left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t}| dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)||e^{-i2\pi \frac{n}{T} t}| dt.
\end{aligned}
$$

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Séptima pregunta

Puesto que $|e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}| = 1$, tenemos que

$$c_n \leq \frac{1}{T} A,$$

donde

$$A = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt$$

que es finito. Por lo que si $T \to \infty$ entonces $c_n \to 0$. Nuevamente vamos a compensar multiplicando por T a c_n o a la transformada de $P_t f(t)$ como la interpretamos en los literales anteriores. Tenemos así,

Ejemplo de situación-problema: Transformada de Fourier. Séptima pregunta

$$\begin{aligned} Transfor\_escalada[P_t f](\frac{n}{T}) &= Tc_n \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt. \end{aligned}$$

Si $T \to \infty$ entonces la periodización de f deviene en f y $\frac{n}{T}$ en la variable continua s. Por lo tanto, tenemos que la transformada escalonada de f es:

$$Transfor\_escalada[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt.$$

Conclusiones

- Hemos encontrado el equilibrio entre lo intuitivo y lo formal, siendo intuitivos al principio de cada tema con las situaciones-problemas; para luego presentar los contenidos con cierto nivel de abstracción coherente con los estudios en Ingeniería.

Conclusiones

- Hemos encontrado el equilibrio entre lo intuitivo y lo formal, siendo intuitivos al principio de cada tema con las situaciones-problemas; para luego presentar los contenidos con cierto nivel de abstracción coherente con los estudios en Ingeniería.
- El CAS Maxima ciertamente ayudó a la ejemplificación de ciertos proposiciones.

Conclusiones

- Hemos encontrado el equilibrio entre lo intuitivo y lo formal, siendo intuitivos al principio de cada tema con las situaciones-problemas; para luego presentar los contenidos con cierto nivel de abstracción coherente con los estudios en Ingeniería.
- El CAS Maxima ciertamente ayudó a la ejemplificación de ciertos proposiciones.
- Nuestra propuesta didáctica no llega a ser una Ingeniería didáctica como la metodología establecida por la Teoría de situaciones didácticas. Para que sea así, deberíamos de profundizar más en los estudios preliminares.

Conclusiones

- Hemos encontrado el equilibrio entre lo intuitivo y lo formal, siendo intuitivos al principio de cada tema con las situaciones-problemas; para luego presentar los contenidos con cierto nivel de abstracción coherente con los estudios en Ingeniería.
- El CAS Maxima ciertamente ayudó a la ejemplificación de ciertos proposiciones.
- Nuestra propuesta didáctica no llega a ser una Ingeniería didáctica como la metodología establecida por la Teoría de situaciones didácticas. Para que sea así, deberíamos de profundizar más en los estudios preliminares.
- Al finalizar la propuesta estamos convencidos que esta podría generar más impacto en lo didáctico, si hubiésemos profundizado en los estudios histórico-epistemológicos de los conocimientos matemáticos referidos.

Recomendaciones

- Para abordar conceptos que de principio se muestran descontextualizados, como es el de convolución, recomendamos que para estudios a nivel de Ingeniería se sacrifique un poco lo formal, con fines didácticos.

Recomendaciones

- Para abordar conceptos que de principio se muestran descontextualizados, como es el de convolución, recomendamos que para estudios a nivel de Ingeniería se sacrifique un poco lo formal, con fines didácticos.
- La Ingeniería didáctica como metodología de Investigación nos parece sugerente. Para futuros trabajos recomendaríamos que se tome dicha metodología, pero para su correcto y exhaustivo desarrollo; que se haga Ingenierías por temas puntuales.

Recomendaciones

- Para abordar conceptos que de principio se muestran descontextualizados, como es el de convolución, recomendamos que para estudios a nivel de Ingeniería se sacrifique un poco lo formal, con fines didácticos.
- La Ingeniería didáctica como metodología de Investigación nos parece sugerente. Para futuros trabajos recomendaríamos que se tome dicha metodología, pero para su correcto y exhaustivo desarrollo; que se haga Ingenierías por temas puntuales.
- Para futuros trabajos se tome bien en cuenta el profundizar en estudios histórico-epistemológicos.

Recomendaciones

- Para abordar conceptos que de principio se muestran descontextualizados, como es el de convolución, recomendamos que para estudios a nivel de Ingeniería se sacrifique un poco lo formal, con fines didácticos.
- La Ingeniería didáctica como metodología de Investigación nos parece sugerente. Para futuros trabajos recomendaríamos que se tome dicha metodología, pero para su correcto y exhaustivo desarrollo; que se haga Ingenierías por temas puntuales.
- Para futuros trabajos se tome bien en cuenta el profundizar en estudios histórico-epistemológicos.
- Una recomendación un poco más general es acerca de la formación matemática a nivel de Ingeniería. Estamos conscientes de que en las actuales condiciones es una quimera pretender tener Departamentos de Matemáticas en todas las Universidades del país; sin embargo, nos parece que en las Universidades calificadas como de investigación y

¡GRACIAS!