



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y

TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL

TÍTULO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

TEMA: “UNA PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN PROBLEMAS PARA

LA ENSEÑANZA DEL ANÁLISIS DE FOURIER APLICADO A LA

INGENIERÍA CON APOYO DE MAXIMA”

AUTOR: ÍÑIGUEZ PINEDA, SERVIO MAURICIO

DIRECTOR: DR. MAYORGA ZAMBRANO, JUAN RICARDO

SANGOLQUÍ

2019



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y

TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación, **“UNA PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DEL ANÁLISIS DE FOURIER APLICADO A LA INGENIERÍA CON APOYO DE MAXIMA”** fue realizado por el señor **Íñiguez Pineda, Servio Mauricio**; el mismo que ha sido revisado en su totalidad, analizado por la herramienta de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 8 de abril de 2019

Firma:

Juan Ricardo Mayorga Zambrano Ph.D

C.C.: 1802377406



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA
CENTRO DE POSGRADOS
AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD

Yo, **Íñiguez Pineda, Servio Mauricio**, con cédula de ciudadanía n°: 1104166986 declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **Una propuesta Didáctica basada en problemas para la Enseñanza del Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería con apoyo de Maxima**, es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Consecuentemente el contenido de la investigación mencionada es veraz.

Sangolquí, 8 de abril de 2019

Firma:

A handwritten signature in blue ink, which appears to read 'Servio Íñiguez Pineda', is written over a horizontal dotted line.

Servio Mauricio Íñiguez Pineda

C.C.: 1104166986



**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA
CENTRO DE POSGRADOS**

AUTORIZACIÓN

Yo, **Íñiguez Pineda, Servio Mauricio**, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ES-PE publicar el trabajo de titulación: **Una propuesta Didáctica basada en problemas para la Enseñanza del Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería con apoyo de Maxima**; en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 8 de abril de 2019

Firma:

Servio Mauricio Íñiguez Pineda

C.C.: 1104166986

DEDICATORIA

A mis dos abuelitas, Enmita y Celita.

AGRADECIMIENTO

A mi director de tesis, el Dr. Juan Mayorga Zambrano, por haber confiado en mí y darme el apoyo en todos los sentidos. Por haber hecho de cada sesión un espacio enriquecedor de discusión y aprendizaje. Por haber compartido con toda generosidad su conocimiento en Matemáticas y a la vez su tiempo.

Al revisor de mi trabajo de grado, el Dr. Paúl Medina Vásquez, por haber hecho que este trabajo se pule y por haber compartido conocimientos y experiencias en estos años de estudio.

A la Cooperación Técnica Belga, por haber financiado mis estudios a través de una de sus Becas para el impulso de temas de Desarrollo.

A Margarita Kostikova, por haber compartido sus reflexiones en cuanto a la humanidad que subyace de las Matemáticas y por convencerme que el espíritu matemático se lleva en el corazón.

A mis padres, por brindarme su aliento en todo momento.

A mis hermanos, César, Andrés y Kamilita; por su cariño.

A mis dos profesores de secundaria, Vicente Matamoros Paz y Constante Ramírez Romero. Por haber sembrado en mí el gusto por la enseñanza de la Matemática con la belleza que tiene.

Índice general

| | |
|-----------------------------------|-------------|
| CARÁTULA | I |
| CERTIFICADO DEL DIRECTOR | I |
| AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD | II |
| AUTORIZACIÓN | III |
| DEDICATORIA | IV |
| AGRADECIMIENTO | V |
| ÍNDICE DE CONTENIDOS | VI |
| ÍNDICE DE FIGURAS | X |
| RESUMEN | XII |
| ABSTRACT | XIII |
| 1. Introducción | 1 |

| | |
|--|-----------|
| 1.1. Resumen | 1 |
| 1.2. Problema a abordar y justificación | 3 |
| 1.3. Objetivos | 5 |
| 1.3.1. Objetivo General | 5 |
| 1.3.2. Objetivos Específicos | 5 |
| 1.4. Directrices de la Propuesta Didáctica | 6 |
| 1.5. Maxima como software de apoyo de la propuesta didáctica | 12 |
| 1.6. Mapa de Contenidos | 15 |
| 2. Antecedentes | 22 |
| 2.1. Estado del Arte | 22 |
| 2.2. Lugar que ocupa el Análisis de Fourier en la formación Ingenieros | 27 |
| 2.3. Diagnóstico y análisis situacional de la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería | 29 |
| 3. Fundamentos Matemáticos | 33 |
| 3.1. Introducción | 33 |
| 3.2. El Espacio $L^2(I)$ | 40 |
| 3.3. Series de Fourier | 48 |
| 3.3.1. Series de Fourier-Legendre | 49 |
| 3.3.2. Series Clásicas de Fourier | 50 |
| 3.3.3. Series de Fourier complejas | 53 |
| 3.4. Transformada de Fourier | 54 |

| | |
|--|-----------|
| 4. Criterios Didácticos en la Matemática | 61 |
| 4.1. Aproximación a la Educación Matemática basada en la Resolución de Problemas | 61 |
| 4.1.1. Investigación en la Resolución de Problemas Matemáticos | 64 |
| 4.1.2. Metodología de la Resolución de Problemas Matemáticos | 71 |
| 4.2. Aproximación a la Teoría de las Situaciones Didácticas | 72 |
| 4.2.1. Nociones de la Teoría de las Situaciones Didácticas | 74 |
| 4.2.2. Ingeniería Didáctica | 75 |
| 5. Propuesta didáctica referida al AFAI | 80 |
| 5.1. Series clásicas de Fourier | 81 |
| 5.1.1. Situación-problema | 81 |
| 5.1.2. Tópicos de clase | 99 |
| 5.2. Serie generalizada de Fourier | 120 |
| 5.2.1. Situación-problema | 120 |
| 5.2.2. Tópicos de clase | 129 |
| 5.3. Series no-clásicas de Fourier | 154 |
| 5.3.1. Situación-problema | 154 |
| 5.3.2. Tópicos de clase | 167 |
| 5.4. Transformada de Fourier | 187 |
| 5.4.1. Situación-problema | 187 |
| 5.4.2. Tópicos de clase | 201 |
| 5.5. Convolución | 217 |

ÍNDICE GENERAL

ix

5.5.1. Situación-problema 217

5.5.2. Tópicos de clase 221

6. Conclusiones y Recomendaciones **237**

Bibliografía **241**

Índice de figuras

| | | |
|-----|---|-----|
| 1. | Diagrama de contenidos del Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería. Versión 1.0. | 18 |
| 2. | Diagrama de contenidos del Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería. Versión 2.0. | 21 |
| 3. | Vibración de la cuerda como un sistema de masas discretas. | 82 |
| 4. | Gráfica de la solución a la ecuación de onda en los instantes $t = 0$, $t = 0,2$, $t = 0,4$, $t = 0,6$, $t = 0,8$ y $t = 1$ | 93 |
| 5. | Suma parcial de la serie de Fourier con 10 términos de $f(x) = -x$ en $[-1,1]$. . . | 107 |
| 6. | Suma parcial de la serie de Fourier con 20 términos de $f(x) = -x$ en $[-1,1]$. . . | 107 |
| 7. | Suma parcial de la serie de Fourier con 50 términos de $f(x) = -x$ en $[-1,1]$. . . | 108 |
| 8. | Gráfica de la función h con su serie de Fourier(Ejemplo 5.2) | 115 |
| 9. | Gráfica de la función h y su serie de Fourier con 50 términos en las sumas parciales(Ejemplo 5.2) | 119 |
| 10. | Gráfica de la función h y su serie de Fourier con 100 términos en las sumas parciales(Ejemplo 5.2) | 120 |

| | |
|--|-----|
| 11. Gráfica de los cuatro primeros polinomios $e_n(t)$ | 163 |
| 12. Gráfica de la suma parcial de la serie S y la función f | 166 |
| 13. Gráfica de los primeros cinco polinomios de Legendre | 172 |
| 14. Gráfica del pulso rctangular Π | 188 |
| 15. Gráfica del tren de pulsos $T = 2$ | 189 |
| 16. Gráfica de las componentes espectrales del tren de pulsos para un periodo $T = 2$ | 191 |
| 17. Gráficas de las componentes espectrales de la serie de Fourier del pulso rec- tangular para $T = 3, 4, 6$ | 194 |
| 18. Gráfica de la transformada "escalada" del pulso rectangular | 198 |
| 19. Gráfica de Distribuciones gaussianas con $\sigma = 1/2, 1, 2$ | 213 |
| 20. Respuesta al impulso para un filtro pasa bajo $\omega_c = 100$ | 225 |
| 21. Respuesta al impulso para un filtro pasa banda $\omega_c = 50$ y $\omega_0 = 100$ | 226 |
| 22. Regiones de Integración | 229 |

RESUMEN

El presente trabajo de Tesis presenta una propuesta didáctica para la enseñanza del Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería. Dicha propuesta está diseñada para ser implementada mediante un curso opcional en carreras de Ingeniería y el contenido se presenta no de la manera habitual que se hace en los libros de texto de Ingeniería, más bien se eleva un poco la abstracción con nociones del álgebra lineal como los espacios vectoriales, pero llevados a dimensión infinita. La parte medular de la propuesta es el diseño de situaciones-problema como instrumentos didácticos que motiven en el estudiante la necesidad y el interés por adquirir el conocimiento referido. Dichas situaciones-problema se diseñaron para abordar cinco temas: series clásicas de Fourier, series generalizadas de Fourier, transformada de Fourier y convolución. La propuesta aborda estas temáticas caracterizando el espacio $L^2(I)$ de forma general, para así tener la versatilidad de estudiar las distintas bases que lo generan. Para balancear tal nivel de abstracción la propuesta hace uso del Sistema de Álgebra Computacional (CAS por sus siglas en inglés), Maxima; como soporte para la ejemplificación de ciertos conceptos referentes al tema. Adicionalmente, la propuesta busca encontrar un equilibrio entre dos modelos de enseñar las Matemáticas que son: el formal y el intuitivo.

PALABRAS CLAVES:

- **ANÁLISIS DE FOURIER**
- **INGENIERÍA**
- **SITUACIONES-PROBLEMA**

ABSTRACT

The present Thesis presents a didactic proposal for the teaching of Fourier Analysis applied to Engineering. This proposal is designed to be implemented through an optional course in Engineering careers and the content is presented not in the usual way that is done in engineering textbooks, rather the abstraction rises a bit with notions of linear algebra as vector spaces, but taken to infinite dimension. The core part of the proposal is the design of problem situations as didactic instruments that motivate the student the need and interest to acquire the referred knowledge. These problem situations were designed to address five themes: classic Fourier series, generalized Fourier series, Fourier transform and convolution. The proposal addresses these issues by characterizing the $L^2(I)$ space in a general way, in order to have the versatility to study the different bases that generate it. To balance this level of abstraction, the proposal makes use of the Computational Algebra System (CAS), Maxima; as a support for the exemplification of certain concepts related to the subject. Additionally, the proposal seeks to find a balance between two models of teaching mathematics that are: formal and intuitive.

KEYWORDS:

- **FOURIER ANALYSIS**
- **ENGINEERING**
- **PROBLEM-SITUATIONS**

Capítulo 1

Introducción

1.1. Resumen

La necesidad de fortalecer la investigación en la Universidad ecuatoriana tiene un acuerdo generalizado y, para ello, es necesario potenciar la otra dimensión de la Universidad, la docencia, que en su mayoría ha sido el foco central de la actividad universitaria en nuestro medio y en donde se ha puesto los mayores esfuerzos. Sin embargo, con el propósito de articular la docencia y la investigación se requiere replantear la práctica docente en general y de la Matemática en particular. En el terreno de la Ingeniería, la Enseñanza de la Matemática, ha sido limitada y no aporta, por regla general, en aprendizajes significativos de la Matemática necesaria para el desempeño profesional y para la Investigación dentro de la Ingeniería. Por lo que es importante, analizar las maneras de enseñar-aprender matemáticas introduciendo situaciones que den contexto a los conceptos matemáticos sin desvirtuarlos. En [6] se confirma

las bondades de dar vida a los conceptos matemáticos a través de situaciones contextualizadas. El presente trabajo consiste en la elaboración de una propuesta didáctica basada en problemas, encaminada al aprendizaje del Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería (AFAI). Parte del trabajo de tesis yace en aprovechar problemas dentro de la ingeniería que hagan referencia al análisis de Fourier, para, con la intervención del fundamento técnico Matemático y la Didáctica de las Matemáticas, incorporarlos a la enseñanza-aprendizaje del AFAI. A dichos problemas se les ha dado un tratamiento adecuado que permita la adecuada inserción en el sistema didáctico de manera tal que se conviertan en situaciones-problemas que propicien en los estudiantes la necesidad de adquirir los conocimientos matemáticos para enfrentarlos y de esa manera conseguir la construcción de su conocimiento. Además, por la naturaleza del conocimiento y el enfoque a la Ingeniería que se hace, se recurre a la ayuda del software matemático Maxima, con la finalidad de acercar en contexto el AFAI y hacerlo más atractivo. El camino hacia el diseño de la propuesta didáctica considera tres etapas:

1. Búsqueda de problemas de Ingeniería que hagan referencia al AFAI.
2. La conversión de los problemas en situaciones-problemas (Categoría introducida por la Teoría de Situaciones Didácticas) que permitan su incorporación al sistema didáctico.
3. Incorporación del software matemático Maxima en la estrategia didáctica.

1.2. Problema a abordar y justificación

Son conocidas, en términos generales, las dificultades que manifiestan los estudiantes de Ingeniería al aprender Matemáticas. Reconociendo que, su enseñanza hace poca referencia a los problemas referidos al tema, limitándose a aspectos mecánicos o presentando dichos problemas al término del estudio de una serie de conceptos.

En ese sentido, se coartan las capacidades críticas que deben desarrollar los estudiantes para enfrentar los retos de la sociedad del conocimiento. Tal como se menciona en [25], lo que los alumnos aprenden en su aula, se queda allí. Es decir, que la matemática enseñada no aporta más tarde, al estudiante, tanto en su desempeño profesional como en el estudio e investigación de disciplinas experimentales. En el intento de encontrar las causas de dicho problema, en [25] se considera que las dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas entre los estudiantes universitarios, no pasan por aspectos pedagógicos o técnicos al momento de transmitir conocimientos, sino más bien son producidas, por la manera en que se selecciona, articula y organiza el saber matemático con fines didácticos.

De ahí que consideramos de suma importancia para nuestros fines, no solo plantearnos el cómo enseñar el AFAI, sino tratar los tópicos específicos a enseñar, esto es, creemos necesario hacer una discusión del Discurso Matemático Escolar (dME) ¹ que nos compete; basados

¹ Concepto desarrollado por matemáticos educativos mexicanos, que hace referencia al conocimiento transformado de la matemática desarrollada por los matemáticos, conocida como erudita, en la matemática que pueda ser expuesta en un ambiente escolar con el fin de buscar la transmisión de tal conocimiento. Una parte del trabajo del matemático educativo consiste en llevar a cabo tal modificación de la matemática, la creación de puentes que hagan posible la conexión entre el saber erudito y el saber didáctico.

en los problemas que en buena parte originan el AFAI.

En cuanto tiene que ver al Sistema Universitario Ecuatoriano, la opinión pública ha manifestado preocupación y acuerdo sobre los cambios urgentes a los que debe someterse. Se ha generado de esa manera un debate al interior de la Universidad, a partir de la política implementada en el Sistema de Educación Superior. Sin embargo, hay temas que no se someten a discusión, porque se justifican por sí solos; entre ellos, la necesidad urgente de que la Universidad cubra las tres dimensiones que dan vida a las Instituciones de Educación Superior, siendo estas, la docencia, la investigación y la vinculación; cosa que en términos generales en el caso particular de la investigación no se ha hecho.

Por otro lado, por el afán que tiene el país de abandonar posiciones pasivas en la división internacional del trabajo, siendo un país primario exportador, se hace necesario el esfuerzo de varias instituciones, entre la más importante, la Universidad. Puesto que de esta, es donde deberían nacer las ideas que configuren una sociedad y una economía basada en el conocimiento, sin decir que sea la producción y la empresa el único punto de mira de la Universidad, claro está.

En consecuencia, pensar en cambios a nivel de la docencia y en particular de la docencia en Matemática para Ingeniería, que permita hacer una enseñanza significativa, contextualizada y atada a la investigación, constituye un aporte en la dirección de los cambios que requiere el sistema universitario.

En lo que tiene que ver con la Enseñanza de la Matemática, es conocido el hecho del alto índice de reprobación en las asignaturas de matemáticas, así como el deficiente aprendizaje

de las Matemáticas en áreas de la Ingeniería. En éste problema inciden muchos factores, entre ellos los vinculados a la didáctica, la manera de presentar el contenido y sobre todo la falta de conocimiento de los profesores, que no permite una enseñanza renovada y crítica. Lo último ha sido constatado in situ por los participantes de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la ESPE.

En particular, el AFAI requiere de un abordaje en contexto incorporando a la vez software matemático, que dé vida a los conceptos y haga que el estudiante de Ingeniería se apropie del conocimiento. A la vez el contenido abordado en clases del AFAI exige renovarse, considerando la dinámica investigativa que está muy cercano a las áreas de Ingeniería, tal es el caso de las Wavelets.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza del Análisis de Fourier Aplicado a la Ingeniería.

1.3.2. Objetivos Específicos

1. Aplicar criterios de la Didáctica de la Matemática para el diseño de la propuesta.
2. Realizar una selección de los contenidos que aborda la propuesta en base de tres ejes

directrices: ingenieril, matemático y didáctico.

3. Diseñar situaciones-problema como los elementos principales de la propuesta.

1.4. Directrices de la Propuesta Didáctica

La necesidad de fortalecer las Instituciones de Educación Superior, nos lleva a replantear la tarea docente de la Universidad, haciendo entre otras cosas que, la docencia esté articulada a la investigación.

En tal empeño, nuestra propuesta didáctica para la enseñanza del AFAI procura que los estudiantes de ingeniería con potencial para investigación adquieran autonomía en sus estudios de Matemáticas Avanzadas. La propuesta se inscribe como una asignatura opcional de la malla de Matemáticas de la Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE).

La investigación en Ingeniería, a diferencia de la investigación en Ciencias Básicas, debe estar vinculada a empresas de alta tecnología que demandan investigación y desarrollo, cosa que por el momento es incipiente en el país. Por otro lado se siente un retraso en hacer que la economía ecuatoriana sea sostenida por exportaciones de alto valor agregado, así que estamos obligados a hacer algo para romper este círculo vicioso, siendo este: el de no tener investigación en ingeniería por no contar con la industria que la demande y a la vez no contar con dicha industria por no tener investigación en ingeniería.¹ Así, es necesario fortalecer la

¹ Está claro que la Investigación y Desarrollo de Tecnología no viene tan sólo de las Ciencias de la Ingeniería. También los resultados de investigación en Ciencias Básicas y de las Ciencias Básicas dirigidas al desarrollo de tecnología se extienden a la Ingeniería. Se hace mención únicamente a la ingeniería por ser de exclusivo interés de la propuesta didáctica.

formación en matemática de los ingenieros, que consolide una masa crítica de ingenieros con competencias de investigación.

Por otro lado, el hecho de no contar al momento con investigaciones robustas dentro de la Didáctica de la Matemática en el contexto ecuatoriano, hace que para el desarrollo de la propuesta didáctica, nos enfrentemos ineludiblemente a la discusión de dos modelos en la formación de ingenieros y en particular a su educación en matemáticas: el modelo estadounidense y el modelo francés¹.

Determinar particularidades que configuran la formación en ingeniería de estos dos países y en particular su enseñanza de matemáticas, conlleva una complejidad muy alta, dado que se debería tomar en cuenta variables de tipo económico, político, histórico, etc. Para nuestros fines una caracterización somera, pero práctica, proviene del hecho que el sistema universitario de los Estados Unidos en toda su diversidad no difiere tanto en cuanto al financiamiento entre Universidad pública y privada, siendo alto el aporte privado. Existen incluso Universidades con ánimo de lucro. Eso a la larga empuja a un pragmatismo en el sistema Universitario y en la formación de ingenieros, [37]. Por el lado de la Universidad europea, y francesa en particular, esta se caracteriza por tener una fuerte financiación del Estado. Su origen en lo que es el sistema universitario actual tiene sus raíces en el humanismo. Además en particular la formación matemática de los ingenieros se ve nutrida por la tradición de la escuela francesa

¹ La formación reglada en Ingeniería nace con la Industrialización y la Ilustración. En el inicio dicha formación era práctica y artística, esta formación se ubicó principalmente en Inglaterra. Llega la Revolución francesa y la formación en Ingeniería tiene un punto de inflexión con la creación de la Ecole Polytechnique en París a cargo de importantes matemáticos y científicos de la época, formación ingenieril que lleva la impronta de una formación fuerte en Ciencias Básicas, [51]. De manera que estos dos modelos en la formación de Ingenieros los ubicamos como representantes de dos visiones en la formación de Ingenieros (anglosajón y francés); existiendo matices, claro está.

de matemática, que se remonta a matemáticos como Cauchy, Lagrange, etc; que aportaron en la formalización del análisis matemático como en lo que tiene que ser la formación matemática de los ingenieros en la naciente Ecole Polytechnique, [37].

En algunas entrevistas a matemáticos europeos que hiciera el grupo Amarun¹ se obtienen algunas luces al respecto. El matemático ganador de la medalla Fields, Cédric Villani, manifiesta que las escuelas de ingeniería en Francia no siempre tienen contacto con el exterior, llevando a no tener ingenieros innovadores, [43]. Así mismo el matemático Yves Meyer, en [28], sostiene en cuanto a la escuela francesa de matemática, que su característica es la abstracción antes que lo experimental, y esta se remonta a Descartes, cuando se mantenía que el concepto antecede a la experiencia. Meyer manifiesta que antes de la segunda guerra mundial, los Estados Unidos veían a Europa (Alemania principalmente con la Universidad de Gotinga) como los centros donde se hacía matemática, mientras que Estados Unidos triunfaba más en los sectores industriales (Empirismo anglosajón).

De la misma manera en una entrevista al ingeniero alemán Joachim Knebel al referirse a la forma de trabajar de los ingenieros alemanes, formación ingenieril que tiene ciertas similitudes con la francesa; sostiene que en Alemania la forma de atacar los problemas es desde diferentes disciplinas y desde lo fundamental, haciendo notar la importancia de una sólida formación en ciencias básicas, [18].

A grosso modo la discusión por los modelos estadounidense y el francés es equivalente

¹ AMARUN es una asociación de científicos ecuatorianos, en su mayoría matemáticos, con presencia en 16 países (principalmente Francia), incluido Ecuador; que promueven el desarrollo de las Ciencias exactas en el país.

a llevar la confrontación entre la intuición y el rigor en el contexto de la enseñanza de la matemática. A lo largo de la propuesta se fue reflexionando desde un punto de vista didáctico entre estas dos visiones, de manera que, se logre un equilibrio en la propuesta.

Para el diseño de nuestra propuesta didáctica, surgen las siguientes interrogantes:

1. ¿A quiénes está destinada la propuesta didáctica?

Es decir, nos interesa el público objetivo. La propuesta está pensada como un curso opcional en carreras de Ingeniería, por lo que se dirige a estudiantes de Ingeniería que se ubican en la mitad de su formación.

2. ¿Qué se busca enseñar con la propuesta?

Es decir, nos interesa el contenido matemático que será llevado al aula. El contenido matemático a ser tratado por la propuesta es el Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería.

3. ¿Cómo se abordará el contenido matemático en la propuesta?

Es decir, nos interesa la manera en la que se enseñará el contenido matemático. Hemos tomado como recursos didácticos: la situación-problema y la resolución de problemas para didactizar el contenido.

Lo anterior nos lleva a establecer tres ejes directrices a la propuesta didáctica: Eje Inge-

nieril, Eje Matemático y Eje Didáctico.

Inicialmente se consideró incluir un cuarto eje directriz, que es el Eje Cultural, siendo determinante la consideración de los modos de comportamiento de los estudiantes frente al proceso educativo. Vastas experiencias de profesores que tienen recorrido tanto por universidades nacionales como extranjeras, recalcan en la necesidad de enfrentar el proceso educativo con distintas estrategias acorde a la especificidad cultural del destinatario. Sin embargo, hemos considerado que el Eje Didáctico abarca el hecho cultural e incluso el de política educativa para la búsqueda de las maneras de transformar un contenido matemático a ser abordado en el aula.

1. Eje Ingenieril.-

Si bien es cierto que existen múltiples definiciones para Ingeniería, para efectos de la propuesta didáctica, se presenta la definición de Ingeniería dada por El Consejo de Acreditación para la Ingeniería y la Tecnología de Argentina:

“La profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquirido mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se aplica con buen juicio a fin de desarrollar las formas en que se pueden utilizar de manera económica, los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad.”

Es claro que en términos generales el Ingeniero no hace matemática. Para el Ingeniero la Matemática es una disciplina de servicio para sus labores prácticas. En tal sentido, nuestra propuesta didáctica dirigida a los estudiantes de Ingeniería trata de aprovechar investigaciones en torno a la enseñanza de la Matemática como Ciencia en servicio a

otra disciplina, tal es este caso de la Ingeniería.

2. Eje Matemático.-

La Matemática como Ciencia inserta en el ambiente educativo será lo que se enseñe. Resulta una tarea filosóficamente grande el dar una caracterización de Matemáticas, así que, con fines del diseño de la presente propuesta, buscaremos luces sobre esta Ciencia, tomando la definición del Diccionario de la Real Academia Española. Esto es lo que dice la referida fuente sobre la Matemática: *“Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones”*, [33].

Hay que subrayar que la Axiomática es el método de la Matemática y que dependiendo de los destinatarios de su enseñanza, el nivel de exposición de su método es diferente, pero siempre este deberá estar presente.

3. Eje Didáctico.-

La didáctica es la disciplina que nos responderá el cómo afrontar la tarea educativa, con los recursos o técnicas adecuadas para lograr aprendizajes. Tomando una de las acepciones que da [33], para la Didáctica y, tomando en consideración el carácter de las Matemáticas, bien podemos tomar prestada una consideración al respecto, del Dr. Juan Mayorga Zambrano: *“La Didáctica de la Matemática es el arte de enseñar la Ciencia más exacta.”*

1.5. **Maxima como software de apoyo de la propuesta didáctica**

La computadora es el instrumento tecnológico que ha configurado la sociedad del conocimiento; tal como, la máquina de vapor configuró la industrialización. El acelerado desarrollo tecnológico y en particular de los microprocesadores, predicho hasta ahora por la Ley de Moore¹, ha permitido que los computadores con sus mejores prestaciones, acompañen las tareas cotidianas.

El escenario educativo no ha estado exento de tal dinámica. Los problemas que conlleva el proceso educativo en nuestro tiempo, ha impulsado por un lado, las investigaciones teóricas que permiten comprenderlo y por otro, las acciones que toman los profesores que estando en el aula, experimentan con distintas metodologías y recursos. Así, tanto por la acción como por la teoría, la computadora y el uso del software en particular, ha llegado al ambiente educativo de forma natural. De manera que su pertinencia en la enseñanza, casi parece una verdad evidente. Anotemos algunas de sus ventajas en la enseñanza de las Matemáticas:

- El software ayuda a construir conocimiento matemático, no tan sólo conocer acerca de matemáticas sino recrearlas. El software le permite tanto al estudiante como al profesor explorar y hacer cambios en las condiciones de problemas, lo cual provoca una recreación del conocimiento matemático. Buena parte del trabajo del matemático se podría

¹ La Ley de Moore se refiere a una ley experimental que advirtió Gordon Moore, ingeniero de Intel, y que afirma que cada dos años se duplica el número de transistores en un microprocesador.

considerar como un trabajo de experimentación, lo cual se puede llevar al ambiente educativo a manera de metáfora, haciendo que los estudiantes acompañados del software, experimenten y recreen las Matemáticas.

- Permite la elaboración de conjeturas derivadas de situaciones-problema y verificarlas. En la etapa en que los estudiantes arman estrategias intuitivas para atacar un problema, el software ayuda de forma eficiente en ese desarrollo, a través de la experimentación y exploración a generalizar resultados por la verificación de patrones. Así mismo, permite elaborar contraejemplos de conjeturas con la misma experimentación que es potenciada por el software.
- La enseñanza de las Matemáticas contiene componentes de trabajo rutinario, que tanto el estudiante como el profesor, podrían relegarlo al software y poner la atención en el aspecto conceptual.

Estas ventajas, claro está que, están condicionadas a la manera en la que el software se inserta en el aula, por lo que la Didáctica de las Matemáticas en una de sus líneas de investigación, que es acerca de los entornos virtuales y software educativo en aula, se plantea la pregunta del cómo llevar la tecnología al aula de manera que el proceso educativo sea eficiente. De tal manera, que debemos estar prevenidos en el buen uso de la tecnología para evitar utilizar la computadora como simple calculador, sino que sea un complemento del proceso y fortalezca la clase magistral a fin de construir las competencias matemáticas en los estudiantes. Anotemos algunas de estas consideraciones que de ninguna manera son exhaustivas, pero que dan luces en el diseño de la propuesta:

- En muchas experiencias reportadas, donde a través de la implementación de políticas educativas se introduce la computadora en el aula sin una apropiación por parte de los actores educativos, se tiene una subutilización del recurso tecnológico, como un mero medio de presentación de resultados obtenidos de forma tradicional. Por lo que, tomaremos en cuenta el criterio de los especialistas de no introducir el software para hacer las mismas cosas tradicionales, sólo que ahora con un elemento novedoso, [34].
- El software al ser introducido al ambiente educativo y ser parte de un sistema de recursos adecuadamente pensados en una propuesta didáctica, toma una identidad propia de un software educativo, de manera que, debemos pensar el software como parte de un sistema de recursos que tiene la propuesta didáctica, haciendo que los demás recursos como el software se acoplen.
- No debemos pensar en el software como remplazo a los recursos tradicionales de enseñanza que aportan al estudiante en su aprendizaje, como el lápiz y el papel; y la clase magistral. Añadido a eso, el software no es una panacea para resolver los problemas de aprendizaje de las Matemáticas, pero sí aporta en la solución en el caso de su adecuado uso.

¿Por qué decantarnos por el uso de Maxima? Por el hecho de ser Maxima un software publicado bajo la licencia GNU GPL, le otorga ventajas por sobre otras opciones propietarias, que sobretodo se acentúan en el contexto educativo y en la enseñanza de una disciplina de servicio, tal es el caso de la Matemática para Ingeniería. Así tenemos que, por un lado, al ser Maxima un software libre y a la vez gratuito, facilita la adquisición del software por parte de los

estudiantes sin incurrir en piratería y, a la vez evita el dilema de gestionar el proceso educativo en un marco de ilegalidad, [48]. Y por otro lado, al ser propietarios del software, tanto docente como estudiantes, estos pueden desarrollar trabajos con mayor autonomía.

Además otra ventaja de Maxima por sobre otros software en el ámbito educativo es la de ser un Sistema de Álgebra Computacional, CAS por sus siglas en inglés; es decir, un software que permite el cálculo simbólico. Lo último debe ser subrayado, dado que nos permite tener soluciones analíticas a problemas, siendo estas un insumo para la construcción de conocimiento matemático. Para fines educativos, la prioridad no está en la capacidad de cálculo del software, sino que la herramienta tecnológica nos permita comprender conceptos matemáticos desde distintas representaciones y, esto se logra en particular con las opciones que brinda Maxima.

Un punto adicional es que la interfaz wxMaxima y la sintaxis de programación son muy amigables para ser abordadas por noveles usuarios, permitiendo el rápido aprendizaje de los estudiantes del mismo y apartando la concentración al estudio de los conceptos matemáticos.

Tenemos dos guías de referencia como introducción a Maxima, para los estudiantes como para cualquier lector del presente trabajo: [44] y [47].

1.6. Mapa de Contenidos

En atención a las restricciones que se manifiestan en el aula, hemos diseñado un mapa de contenidos del AFAI y a la vez separado los conceptos en: esenciales, necesarios y optativos,

entendiendo por cada uno de ellos lo siguiente:

1. Conceptos esenciales.- Son los conceptos que, sin su abordaje, no se puede dar por terminado el proceso educativo y a la vez son imprescindibles en la comprensión de todo el cuerpo de conocimiento.
2. Conceptos necesarios.- Son aquellos conceptos que frente a las restricciones en el proceso educativo pueden ser omitidos sin perder una consistencia lógica a nivel de ingeniería, pero que su presencia otorga una mayor consistencia a nivel matemático.
3. Conceptos optativos.- Son aquellos conceptos que su no presencia no afecta el cierre del proceso educativo, pero que complementaría de manera satisfactoria el proceso.

Nuestra propuesta didáctica se proyecta como un curso opcional dentro de la malla de Matemáticas para la formación de Ingenieros, por lo que hemos procurado que los contenidos y su enfoque vayan acorde a los últimos peldaños de formación matemática en un pregrado de Ingeniería.

Primeramente deberemos respondernos: ¿Por qué la presentación del AFAI con un mayor nivel de abstracción que el habitual? La presentación del AFAI a través de elementos del Análisis Funcional y los Espacios de Hilbert, ayuda a establecer un marco general, que dota de versatilidad la caracterización del Espacio $L^2(I)$, espacio fundamental para la Ingeniería. Esto conlleva una economía de recursos para abordar algunas bases de dicho espacio vectorial, además de las clásicas, de mucha utilidad para la Ingeniería, tal es el caso de las wavelets.

Desde el punto de vista matemático, este enfoque moderno del Análisis de Fourier refleja

el último estado de sistematización y rigor en este campo, de forma que su presentación en este sentido para la Ingeniería, permite ser lo más fiel a los conceptos matemáticos buscando un equilibrio entre los tres ejes directrices.

Además, subir el nivel de abstracción en comparación a los cursos que se habitúan en nuestro medio, genera en el estudiante de ingeniería las destrezas que lo llevan a la autonomía en el aprendizaje de matemática superior para la ingeniería o temas cercanos.

En conversaciones con profesores con experiencia en la formación matemática para Ingeniería en nuestro medio, tal es el caso de los Doctores: Paúl Medina (UFA-ESPE), Juan Mayorga Zambrano y Antonio Acosta (Yachay-Tech); nos han ratificado que este es el contenido y el nivel de abstracción adecuados para la educación de un estudiante de Ingeniería. Lo central del contenido matemático que abordamos en la propuesta es la caracterización del espacio L^2 , el estudio de las distintas bases que lo generan y el estudio de la Transformada de Fourier como un operador.

Para abordar dichos tópicos, hemos diseñado un primer mapa de contenidos en el cual se refleja una preocupación por el cuidado de la consistencia matemática per sé, esto es, pesó más el Eje Matemático que los otros dos. El primer mapa de contenidos es el siguiente:

DIAGRAMA DE CONTENIDOS DEL ANÁLISIS DE FOURIER APLICADO A LA INGENIERÍA

Versión 1.0



Figura 1. Diagrama de contenidos del Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería. Versión 1.0.

Tomando en consideración el Eje Ingenieril, hemos ajustado el primer mapa de contenidos, cambiando algunos de los conceptos del AFAI de las categorías establecidas.

Un concepto central en el estudio del AFAI es el de Espacio de Hilbert, por lo que, es necesario que el concepto de espacio vectorial sea muy bien administrado por los estudiantes. Para ello se considera hacer un repaso a tal concepto, con la incorporación de ejemplos que den el salto a espacios de dimensión infinita, acercando de a poco al Espacio $L^2(I)$.

Alrededor del concepto de Espacio Normado se estudia otro que en principio se consideró como optativo, que es el de continuidad de aplicaciones lineales y al darle un tratamiento intuitivo se convierte en un concepto esencial desde el punto de vista de la Ingeniería.

El Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt se incorpora antes de la definición de los espacios euclidianos con la intención de poder ejemplificar a los conjuntos ortogonales y ortonormales, que desde el punto de vista didáctico es la mejor vía para exponerlos.

El concepto de Espacio de Banach, se pasó de considerar de esencial a optativo, dado que lo central es el concepto de Espacio de Hilbert que se lo puede abordar directamente, evitando la secuencia matemática completa. De manera que se abordarán los Espacios de Hilbert por medio de la definición de Espacio Euclidiano y añadiendo el concepto necesario, que es el de Completitud, al cual se lo ejemplificará en su mayor parte.

Hay dos teoremas importantes que advierten la existencia de bases hilbertianas para el Espacio $L^2(I)$. El primero es el que nos dice que un espacio de Hilbert es separable si y sólo si posee una base hilbertiana y, el segundo que nos indica la separabilidad de $L^2(I)$.

Ambos quedan fuera del alcance de las Matemáticas del Ingeniero; por lo que, pasaron a ser optativos.

Las Series de Fourier no clásicas que en un principio fueron consideradas como necesarias, se las colocó como esenciales, al tener presente las distintas aplicaciones para la Ingeniería. Lo propio, aquí serán los ejemplos y el software máxima los que permitan didacticizar.

Para el estudio de la transformada directa e inversa de Fourier y su estabilidad, concepto de importancia desde el punto de vista de la Ingeniería; será necesario abordar el concepto de operador lineal y algunos conceptos alrededor de este. En este caso se han considerado dos conceptos como necesarios: norma de un operador lineal y operadores adjunto y autoadjunto. El concepto de operador de Hilbert-Schmidt se ha colocado como optativo, puesto que va más dirigida a ecuaciones de la física matemática.

Desde el punto de vista de la ingeniería es importante el estudio de las propiedades de la Transformada de Fourier, por lo que se considera como un concepto esencial. Las demostraciones de cada una de ellas se han considerado como necesarias, pues podríamos obviarlas en el aula por su facilidad. Así, el segundo mapa de contenidos es el siguiente:

DIAGRAMA DE CONTENIDOS DEL ANÁLISIS DE FOURIER APLICADO A LA INGENIERÍA

Versión 2.0

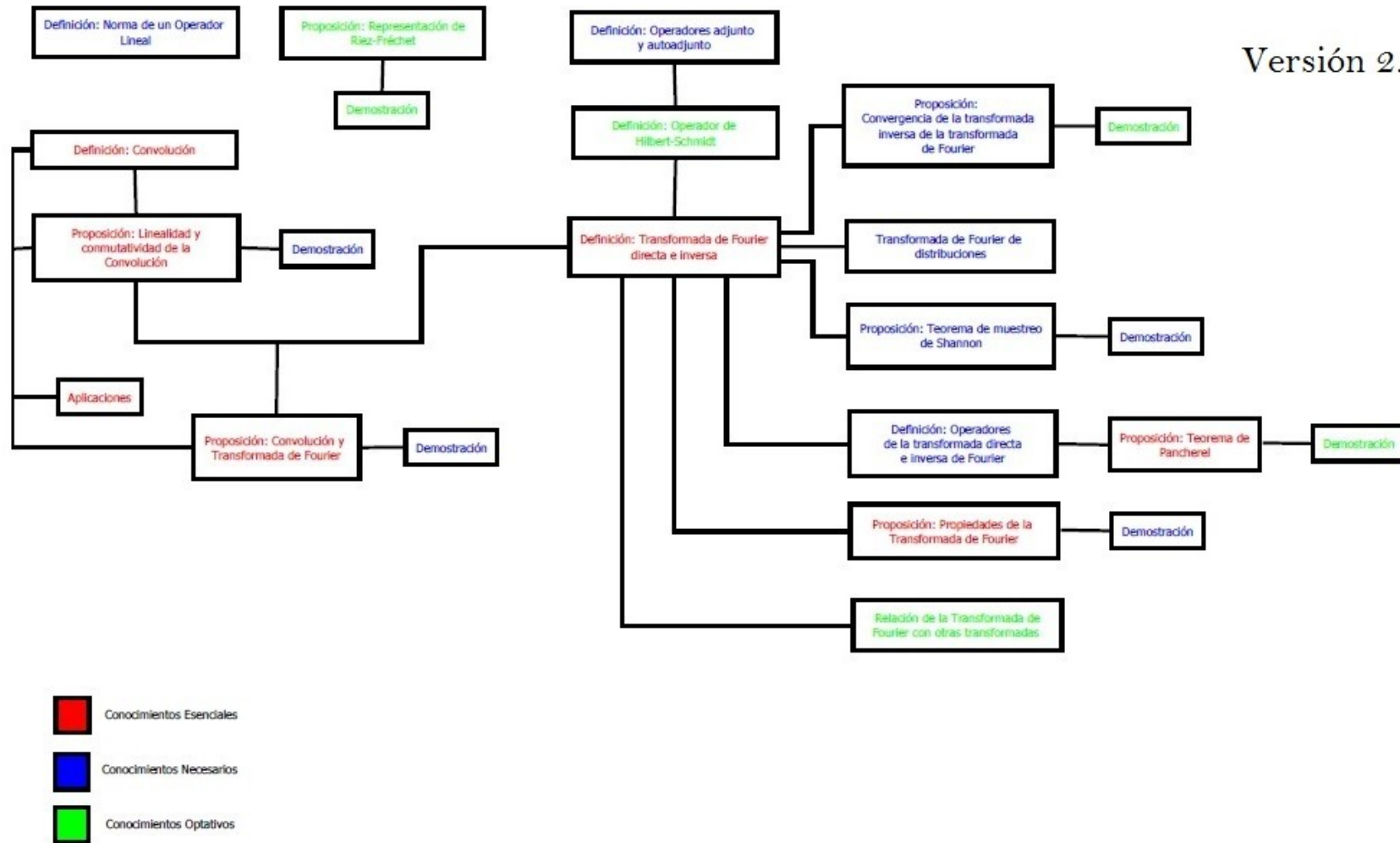


Figura 2. Diagrama de contenidos del Análisis de Fourier aplicado a la Ingeniería. Versión 2.0.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Estado del Arte

Trabajos de propuestas didácticas dirigidas a la enseñanza de las matemáticas a estudiantes de ingeniería podemos citar aquellos donde hacen intervenir la modelación matemática para así hacer surgir los conceptos matemáticos en cuestión. En [41] se plantea vincular el curso de Ecuaciones Diferenciales con una aplicación propia de Ingeniería, basada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En éste trabajo el problema que motiva el modelo matemático a transformarlo en uno que pueda insertarse en la secuencia didáctica es, el problema de digitalización de voz, el cual es modelado y simulado a través de la librería Simulink de MATLAB. Se concluye que sigue persistiendo la ruptura entre las aplicaciones y la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales y por otro lado se observa que el uso de MATLAB provoca el interés en los estudiantes para buscar soluciones a distintos problemas.

En [8] se trabaja en la misma dirección. En el contexto del fenómeno de enfriamiento se crea una secuencia didáctica que al final a través de la interacción entre los estudiantes de ingeniería, motive en ellos los conceptos del conocimiento matemático escolar, en éste caso, de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Éste trabajo de tesis se sustenta en el marco teórico de la Socioepistemología¹. Entre las conclusiones a las que se llega en el momento de poner en escena la propuesta didáctica, es de que, pese a que, el grupo de estudiantes a los que se sometió a ensayo ya habían tomado el curso de EDO y sabían plantear y resolver problemas tipo, mostraban incapacidad para trasladar esos mismos conceptos a otros contextos, mostrando de nuevo la ruptura entre lo estudiado en aula y los problemas reales, por lo que, se hace presente la necesidad de concebir la enseñanza de las matemáticas a nivel de ingeniería situada en un contexto, favoreciendo el aprendizaje propio de las matemáticas y a la vez el desarrollo de las competencias profesionales propias de la ingeniería.

Dentro de las reflexiones acerca de la matemática en servicio, destinada a profesionales extra-matemáticos, hace parte el trabajo de Tesis [23], que se propone la elaboración de una propuesta didáctica dentro de un contexto de la Ingeniería Biomédica, utilizando para ello modelos matemáticos en uso en el área en cuestión, del cual se puede rescatar la propuesta de cuatro fases para la elaboración de secuencias didácticas de éste tipo, siendo estas:

1. Elección del contexto extra-matemático o matemático.
2. Estudiar el contexto de la actividad, problema o ejercicio.

¹ Socioepistemología es la principal teoría de la educación-matemática sobre la que se basa la Investigación de la disciplina llamada, Matemática Educativa. El principal centro académico de creación es el CINVESTAV (México).

3. Elegir y describir el modelo matemático en uso.
4. Describir los conocimientos y técnicas matemáticas necesarias para resolver la actividad.

Se hace intervenir de manera colaborativa ingenieros y matemáticos educativos. A la vez se recurre a GEOGEBRA como software que ayuda a dar contexto a la propuesta.

Una Tesis desarrollada en Francia y por ello enriquecida por la larga historia en la formación de Ingenieros de éste país como por el hecho de que, de su comunidad de Didáctica de la Matemática, aparece la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que son los fundamentos para que la autora de la Tesis Doctoral [36], proponga reflexiones acerca del lugar que debe darse a las matemáticas en la formación de ingenieros para responder a las necesidades profesionales. En dicha tesis doctoral se hace un estudio histórico de la formación matemática de Ingenieros en Francia, centrándose en la historia de la Escuela Politécnica (Ecole Polytechnique), lo que le permite situar la problemática de hoy. Así mismo la autora realiza un seguimiento por dos años a un proyecto de profesionalización de ingenieros en el Instituto Universitario Profesional de Evry, llevando a comprender las necesidades matemáticas encontradas por los estudiantes y cómo ellos las enfrentan.

En cuanto a propuestas para la enseñanza del Análisis de Fourier, citamos las siguientes.

De los trabajos referentes a la enseñanza del Análisis de Fourier, en Latinoamérica, en [6] se encuentran los de la Matemática en Contexto para la Ciencia y la Ingeniería. Aquí se diseña un modelo de abordar el Análisis de Fourier en el tratamiento de señales eléctricas.

Un trabajo que se dirige a la enseñanza del Análisis de Fourier a estudiantes de Ingeniería se encuentra en [29], en el cual hace un estudio en torno de la serie de Fourier en el ámbito de un fenómeno de transferencia de masa, en el que se introduce un escenario físico para acercar de mejor manera conceptos con obstáculos para el aprendizaje de los estudiantes, como son: el infinito, convergencia de series, suma de funciones trigonométricas, etc. Este trabajo de Tesis comprende dos componentes: i) integración de las Series de Fourier a un fenómeno extraído de la Ingeniería Química, como lo es el secado de una sustancia, a fin de derivar los conceptos referentes al tema matemático, a partir de cuatro situaciones, y ii) comprende el análisis de los esquemas en los estudiantes al interactuar con el campo conceptual elaborado.

En [11] se analiza epistemológicamente la obra de Fourier, [12] (*Théorie Analytique de la Chaleur*), para así mismo dar sentido a la convergencia de series trigonométricas infinitas a través del estado estacionario de la conducción de calor, estudio que le permite plantear situaciones didácticas dirigidas al abordaje de las series trigonométricas infinitas con el fenómeno físico que justamente propició el apareamiento del Análisis de Fourier.

Hay trabajos de corte muy práctico como en [14] donde se propone un diseño de módulo de enseñanza para el análisis espectral de Fourier con aplicaciones biomédicas, en base de los principios del HPL (*How People Learn*). Aquí el legado tradicional, de exposición y trabajo en el laboratorio se combina con un tutorial web y demostración interactiva. Con el fin de comparación, se crea una rúbrica que permite discriminar los resultados entre el método planteado y el tradicional y se concluye tener mejores resultados con lo planteado.

En la misma dirección de trabajos prácticos y como ejemplo de una exposición didáctica,

tenemos a [4], en el cual se expone los conceptos principales que subyacen a la transformada de Fourier, apoyados en gráficos y utilización de ejemplos prácticos planteados en forma clara y ordenada.

Así mismo de práctico es el artículo [16], donde se expone una propuesta para introducir a estudiantes de Ingeniería Civil en la Teoría de Wavelets, la cual está basada en problemas. Se aclara que el trabajo no va dirigido a reemplazar los métodos clásicos, sino como un suplemento.

Un trabajo más teórico se encuentra en [35] donde se pone en escena una propuesta didáctica para la construcción de la noción de Serie de Fourier Trigonométrica en estudiantes de Ingeniería, desde la perspectiva de la construcción social del conocimiento Matemático. El trabajo hace parte del pensamiento visual y del pensamiento matemático avanzado.

Por otro lado tenemos, libros-texto donde constatamos las bondades del uso de MAXIMA en la exposición matemática. Por ejemplo en [44] se aprovecha del CAS para hacer una presentación atractiva de los Sistemas Dinámicos. En el mismo sentido [27] constituye un referente para la exposición de los conceptos del AFAI con apoyo de Maxima, lo cual lo hace en parte de su obra. Además en este último libro, se estudia el AFAI desde una visión moderna que da cuenta de las herramientas matemáticas contemporáneas en torno al tema, como son las wavelets.

2.2. Lugar que ocupa el Análisis de Fourier en la formación Ingenieros

El análisis de Fourier dentro de la Matemática forma parte de una vasta área que es el Análisis Funcional con interconexiones a otras áreas dentro de la Matemática pura y aplicada. Las series de Fourier nacen dentro de la Matemática Aplicada y a partir de ahí han propiciado investigaciones tanto dentro de la Matemática misma como en las aplicaciones que tienen. Intentos por dar rigor a los planteamientos de Fourier han llevado a matemáticos a investigar sobre la convergencia de las series, provocando otras creaciones o descubrimientos matemáticos como son los trabajos de Cantor sobre el infinito o la Teoría de la Medida.

Nuestra propuesta restringe su preocupación para el diseño didáctico, a lo que es el Análisis de Fourier para aplicación a la Ingeniería. Dicho cuerpo de conocimiento no forma parte de la Matemática Aplicada, sino de las aplicaciones de la Matemática, en este caso para la Ingeniería¹.

La génesis del Análisis de Fourier son las Series de Fourier que son el resultado de los esfuerzos de matemáticos de los siglos XVII y XVIII por entender la naturaleza física de dos problemas: la cuerda vibrante y la transferencia de calor. Buena parte de las aplicaciones para la Ingeniería viene por el lado de aproximar funciones que en este contexto vienen a ser

¹ Hay que distinguir entre Matemáticas Aplicadas y aplicaciones de las Matemáticas. Las Matemáticas Aplicadas son un cuerpo teórico que dan fundamento a áreas fuera de las Matemáticas en cambio que lo segundo hace referencia a las aplicaciones de las invenciones o descubrimientos matemáticos a cierta disciplina (por ejemplo Ingeniería), sin haber creación de conocimiento matemático en lo último.

señales. Las aplicaciones clásicas en este caso son el modelizar fenómenos oscilantes como podrían ser las series temporales económicas, señales eléctricas, señales acústicas, etc.

En las Ingenierías con especialización en Química, Mecánica, Alimentos, etc; donde se llevan cursos de Termodinámica son fundamentales las series de Fourier en la resolución de las ecuaciones diferenciales que modelizan la transferencia de calor. Podemos decir que es justamente ir a las aplicaciones por las cuales surgen las series de Fourier.

Dentro de la Ingeniería Eléctrica es donde más aplicaciones tienen las series y la transformada de Fourier. Concebidas como un aparato matemático que actúe como soporte para el estudio de otras áreas, como ejemplo podemos citar el estudio de circuitos eléctricos con elementos lineales. Aquí la propiedad de superposición de las Series de Fourier nos permite trabajar con circuitos con señales sinusoidales por separado.

Dentro de esta misma área es vasta la aplicación sobretodo de la transformada de Fourier al procesamiento de señales, que es una rama dentro de las Ciencias de la Ingeniería, potenciada por la capacidad de cómputo de los ordenadores actuales. Ejemplos de esto lo tenemos en la compresión de datos y el filtrado de señales. Aquí es notable rescatar el fértil diálogo entre las Ciencias de la Ingeniería y la Matemática Aplicada, donde ambas se nutren; siendo la Teoría y aplicación de las wavelets un ejemplo de esto. Las wavelets en el procesamiento de señales, presentan mejores bondades en ciertos escenarios que sus antecesoras, series y transformada de Fourier.

En teoría de Comunicaciones Eléctricas son fundamentales las series y transformada de Fourier, permitiendo fundamentalmente el análisis de señales en los dominios del tiempo y de

la frecuencia. Ejemplos en este campo tenemos la comprensión de procesos como modulación, demodulación y filtrado de señales, donde se deben combinar apropiadamente señales en el dominio del tiempo para lograr que una señal por ejemplo pueda ser portadora de otra para hacer posible la transmisión de la última señal por radiofrecuencia o para encontrar el ancho de banda donde una señal concentra su mayor nivel de energía.

Dentro de la misma área ubicamos las aplicaciones en la Teoría del muestreo. La transformada de Fourier nos permite determinar la frecuencia de muestreo con la que podemos digitalizar una señal analógica para que esta pueda ser recuperada de manera unívoca, luego de por ejemplo, ser almacenada o transmitida por un canal de información en forma digital.

2.3. Diagnóstico y análisis situacional de la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería

No pretendemos ser exhaustivos en la comprensión de la situación de la Enseñanza de la Matemática en las Escuelas de Ingeniería del país, entendemos la dimensión que involucra dicha tarea. Para tener una idea de este estado intentaremos contestarnos:

- ¿Qué formación tiene el docente de Matemáticas en las Escuelas de Ingeniería?
- ¿En las Universidades Ecuatorianas existen Departamentos de Matemáticas que se encarguen de su enseñanza?
- ¿Cuál es la percepción de la Matemática en las Escuelas de Ingeniería del país?

Un punto que desata el debate, es acerca de la formación que debería tener el docente que enseña Matemáticas a nivel de Ingeniería. ¿Debería ser un matemático de formación o un Ingeniero investigador?; dejando claro que, dicha pregunta no pretende desentenderse de la calidad de la formación, si no, de encaminar una formación matemática en Ingeniería como disciplina científica de servicio.

Al interno de nuestro país en el contexto actual, todavía no se entiende que es imperativo romper con el círculo vicioso: de que Ingenieros mal formados en Matemáticas formen a los futuros profesionales del ramo, algunos de los cuales serán docentes¹.

Podemos separar a las Escuelas de Ingeniería en aquellas que tienen un Departamento de Ciencias Exactas o Matemáticas que articulan su enseñanza y, otras que no llegan a tenerlo. Revisando las páginas web de las principales Universidades de Ingeniería, como son las Politécnicas; podemos constatar que estas forman parte del primer tipo. En dichos departamentos la planta de docentes en su mayoría tienen formación de pregrado como Ingenieros con grados de cuarto nivel, en su mayoría, maestrías en Ciencias de la Ingeniería. Si bien las Ciencias de la Ingeniería hacen mucha aplicación de la Matemática, eso no involucra que quienes posean dichos dominios de conocimiento, también lo tengan en los conceptos básicos de Matemáticas que permita enseñarlos adecuadamente.

En Escuelas de Ingeniería más pequeñas no se llega a tener un Departamento que ges-

¹ De ninguna manera desconocemos los esfuerzos silenciosos que han hecho las Escuelas y Facultades de Ingeniería, en formar a los profesionales que dan soporte a la infraestructura y producción del país; sin embargo, reconocemos la necesidad de hacer cambios encaminados a consolidarlas a dichas Escuelas y Facultades y en particular en lo referente a las Matemáticas para la Ingeniería, que haga entre otras cosas aparecer la opción del perfil de Ingeniero Investigador.

tiene la enseñanza de las Ciencias Exactas; en estas, existe una suerte de subestimación a la buena formación en Matemáticas. Son Ingenieros los docentes que la imparten, pero no tienen exclusividad en dictar dichas materias, sino que lo hacen de forma accidental, no produciendo en estos al menos cierta acumulación de experticia ganada en la enseñanza de la Matemática, menos pensar en Investigación referente al tema. Por otro lado debemos recordar que están obligadas las Universidades a cambiar esta situación, por la exigencia de la normativa pertinente. La Ley Orgánica de Educación Superior menciona al respecto que: *“Los profesores titulares agregados o auxiliares deberán contar como mínimo con título de maestría afín al área en que ejercerán la cátedra, los demás requisitos se establecerán en el reglamento respectivo”*¹.

Debemos tomar en consideración que al momento el país cuenta con cinco Universidades donde existe el pregrado de Matemáticas, lo que hace pequeño aún el número de especialista en la rama y menos los que hagan aplicación de esta Ciencia a la Ingeniería; por lo que, no podemos buscar soluciones forzadas, sino ir dando pasos pequeños pero firmes en la mejora del nivel académico de la Universidad; siendo parte de esto, la diversificación a nivel regional del país de las opciones de estudio de las Ciencias Exactas. Aquí se debe hacer mención a Yachay Tech, pues es la única universidad ecuatoriana donde la totalidad de profesores de matemáticas son matemáticos.

Por el momento, por los rasgos marcadamente profesionalizantes de los pregrados en

¹ En procura de elevar el nivel académico de las Escuelas y Facultades de Ingeniería, anhelamos que la norma en este punto particular se mantenga por parte de las autoridades y sea respetado el espíritu de esta por parte de las Universidades. Con respecto a lo último no puede ser que por el mero cumplimiento de la norma, la planta docente de las Escuelas de Ingeniería busque doctorar a sus miembros en programas de dudoso nivel académico o crear programas ad-hoc para sus profesores, así también sin respaldo académico.

Ingeniería, hace que se perciba a la Matemática, sí como una Ciencia que desarrolla capacidades útiles en el desempeño profesional de la Ingeniería como son; la capacidad analítica y de abstracción. Sin embargo, en términos generales, la Matemática aún no se la concibe en las Escuelas de Ingeniería como una Ciencia de soporte real a la Investigación en Ingeniería¹.

Visto el panorama así, de manera muy general, podemos decir que cambios al sistema Universitario y en particular en las escuelas de Ingeniería son necesarios. Uno de estos cambios necesarios es ciertamente fortalecer la Investigación; teniendo muy claro que esto no puede llevar a menoscabar la docencia, sino, así mismo como la Investigación, mejorarla. En tal sentido nuestra propuesta didáctica se adscribe en esta última preocupación. Queremos hacer un aporte en la mejora de la docencia Matemática en la formación de Ingenieros².

¹ Este aspecto no es exclusivo de la Ingeniería en nuestro país, es generalizado a todo nivel educativo el hecho de que estamos habituados a trabajar con las cajas negras sin conocer su funcionamiento interno y es la Matemática la que permite conocerlo.

² Estamos conscientes que a nivel Universitario no se pueden separar las dos dimensiones que le dan vida y que son la Investigación y la Docencia, en particular, en el dictado de clases. Por lo que, somos conscientes también que no basta con hacer buena docencia, sino que ambas dimensiones se nutren entre sí y lo óptimo es en el menor tiempo tener docentes-investigadores con al menos Maestría de Investigación.

Capítulo 3

Fundamentos Matemáticos

3.1. Introducción

En esta primera parte vamos a revisar el contenido matemático sobre el cual se hará la propuesta didáctica. Queremos caracterizar el espacio L^2 , es decir, el espacio de las funciones cuadrado integrables o de energía finita. Para ello vamos hacer un recuento de las principales definiciones y teoremas en un sentido restringido a la Ingeniería, tomando como referencia principal a [1] y [27].

En una primera parte revisamos los conjuntos sobre los se caracterizará el espacio L^2 , que es donde ponemos la mayor atención. Empecemos recordando la definición de espacio vectorial, que a grandes rasgos viene a ser un conjunto donde podemos sumar sus elementos y multiplicar los mismos por un escalar perteneciente a un cuerpo. A la vez revisemos el conjunto donde podemos medir la distancia entre sus elementos, conjunto que se denomina

espacio métrico.

La definición de Espacio Vectorial pasa a la vez por las definiciones de operación interna, operación externa, grupo, anillo y cuerpo. Las revisaremos a continuación.

Definición 3.1. *Sea A un conjunto no vacío. Se define una operación interna sobre A a la función*

$$\oplus : A \times A \longrightarrow A$$

Definición 3.2 (Grupo). *La estructura algebraica (Z, \oplus) es un grupo, si \oplus es una operación interna sobre el conjunto de operandos Z y cumple con lo siguiente*

1. *Para todo $a, b, c \in Z$ se tiene que*

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

2. *Existe un elemento neutro en Z ($0 \in Z$) tal que para todo $a \in Z$ se tiene que*

$$a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$$

y

3. *Para todo $a \in Z$ existe un elemento inverso $b \in Z$ tal que*

$$a \oplus b = 0$$

Definición 3.3 (Grupo Abeliانو). *El grupo (Z, \oplus) es abeliano si cumple la conmutatividad aditiva, esto es, para todo $a, b \in Z$ se tiene que*

$$a \oplus b = b \oplus a$$

Definición 3.4 (Anillo). *Se dice que la estructura algebraica (P, \oplus, \odot) es un anillo, si \oplus y \odot son operaciones binarias sobre el conjunto de operandos P , (P, \oplus) es un grupo abeliano y se cumple que*

1. *Asociatividad multiplicativa.- Para todo $a, b, c \in P$ se tiene que*

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$$

2. *Propiedad distributiva.- Para todo $a, b, c \in P$ se tiene que*

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

Definición 3.5 (Cuerpo). *Se dice que el anillo (R, \oplus, \odot) es un cuerpo si se cumple que*

1. *Existe un elemento neutro en R , $(1 \in R)$, tal que para todo $a \in R$ que verifica que*

$$a \odot 1 = 1 \odot a = a$$

2. Para todo $a \in R \setminus \{0\}$, existe un elemento inverso $b \in R$ tal que

$$a \odot b = b \odot a = 1$$

y

3. Para todo $a, b \in R$ se tiene que

$$a \odot b = b \odot a$$

Definición 3.6 (Operación externa). Sean A y K conjuntos no vacíos. Se define una operación externa sobre A , con ayuda de K a la función

$$\otimes : K \times A \longrightarrow A$$

Definición 3.7 (Espacio Vectorial). Sean $(V, +)$ un grupo Abeliáno, \mathbb{K} un cuerpo y $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, una operación externa. $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial si para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u, v \in V$ se cumple que

$$1. (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$$

$$2. \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$$

$$3. (\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta u)$$

$$4. 1 \cdot u = u$$

Definición 3.8 (Espacio Métrico). Un espacio métrico (V, d) es la estructura algebraica donde

se define la función

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

llamada métrica o distancia, tal que para todo $u, v, w \in V$ se cumplen las condiciones:

1. $d(u, v) \geq 0$
2. $d(u, u) = 0$
3. $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$
4. $d(u, v) = d(v, u)$
5. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Debemos de observar que la definición de espacio métrico es independiente de la de espacio vectorial, pues únicamente necesita el primero que sobre un conjunto se defina una métrica. Un conjunto que junta las dos definiciones anteriores es el denominado espacio normado, revisémoslo.

Definición 3.9 (Espacio Normado). *Un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial, donde se define la función*

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

llamada norma y que para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que:

1. $\|u\| \geq 0$
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

$$3. \|u\| = 0 \text{ si y sólo si } u = 0$$

$$4. \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Como ya se hizo referencia, todo espacio normado es métrico, pues se puede definir una métrica así:

$$d(u, v) = \|u - v\|. \quad (3.1)$$

De manera que si $\|\cdot\|$ cumple las cuatro condiciones para ser norma, entonces, $d(\cdot, \cdot)$ como se define en 3.1, cumplirá las cinco condiciones de métrica.

Si a un espacio vectorial le añadimos el concepto de producto interno, llegamos a tener los denominados espacios euclidianos. Dicho producto interno nos permitirá analizar a estos conjuntos con conceptos geométricos, como ángulos y longitudes vectoriales. Revisemos esta definición, tomada de [27].

Definición 3.10 (Espacio Euclidiano). *La estructura algebraica $(V, (\cdot, \cdot))$ es un Espacio Euclidiano, si V es un espacio vectorial y sobre éste se define la función*

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

llamada producto interno o producto escalar, tal que para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$1. (u + v, w) = (u, w) + (v, w)$$

$$2. (u, v) = (v, u)$$

$$3. (\alpha u, v) = \alpha(u, v)$$

$$4. (u, u) \geq 0$$

$$5. (u, u) = 0 \text{ si y sólo si } u = 0$$

Se puede probar que todo espacio euclidiano es normado, definiendo la norma así:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

y verificando que las cuatro condiciones que debe cumplir un espacio normado se cumplen a partir de las cinco de un espacio euclidiano.

Espacios de Banach y de Hilbert

Los espacios normados y euclidianos devienen en espacios de Banach y de Hilbert, respectivamente, al ser completos. El concepto de completitud se define a continuación y para ello se anticipa lo que es una sucesión de Cauchy.

Definición 3.11 (Sucesión de Cauchy). *La sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$, V espacio normado, es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

para todo $m, n > N$

Mencionamos como proposición que en un espacio normado, toda sucesión convergente es de Cauchy. La proposición recíproca no siempre es cierta, en caso de serlo se tiene un espacio de Banach, que se define así:

Definición 3.12 (Espacio de Banach). *Un espacio normado es de Banach si es completo respecto a la norma, esto es, si toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio.*

Es decir, que cualquier sucesión de Cauchy de elementos del espacio normado, converge a un elemento del mismo espacio, [1].

Ahora si juntamos las definiciones de espacio euclidiano y espacio de Banach, llegamos a la definición de espacio de Hilbert.

Definición 3.13 (Espacio de Hilbert). *Un espacio euclidiano que es de Banach es de Hilbert, esto es, un espacio euclidiano que es completo.*

Lo que quiere decir que, en un espacio euclidiano, cualquier sucesión de Cauchy que converja a un elemento del mismo espacio, dicho espacio viene a ser un espacio de Hilbert.

Lo que se entiende por ser completo con respecto a la norma, definida a través del producto interno. Será en el marco de los espacios de Hilbert donde trabajaremos ciertas aplicaciones lineales como la transformada de Fourier, [1].

3.2. El Espacio $L^2(I)$

En esta sección revisamos lo referente al espacio $L^2(I)$, que es el espacio de las funciones cuadrado integrables o de energía finita en un contexto ingenieril. Justamente lo último nos lleva, a prestar mucha atención a dicho espacio, dado que es el marco para el estudio matemático de conceptos de Ingeniería. Tomamos la definición del espacio L^2 de [27], donde se hace una buena explicación a nivel de ingeniería.

Definición 3.14 (El Espacio $L^2(I)$). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Se define el espacio de las funciones cuadrado integrables sobre I así:

$$\Lambda^2(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \int_I |f(t)|^2 dt < \infty\}$$

Se define una relación de equivalencia sobre $\Lambda^2(I)$ así

$$u \sim v \Leftrightarrow \int_I |u(t) - v(t)|^2 dt = 0$$

y el espacio $L^2(I)$ queda definido como

$$L^2(I) = \{[u] : u \in \Lambda^2(I)\},$$

con $[u]$ como la clase de equivalencia de $u \in \Lambda^2(I)$. Si se define un producto escalar para el espacio $L^2(I)$ así

$$(u, v) = \int_I u(t)v(t)dt,$$

llegando a ser $L^2(I)$ un espacio euclidiano. Así mismo la norma queda como

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_I |u(t)|^2 dt}.$$

Para la expansión de una función perteneciente a $L^2(I)$ en términos de una base, que es lo que nos interesa con las series de Fourier, requerimos el cálculo de las componentes de la función en dicha base. Para ello, el considerar bases ortogonales facilita dicho cálculo.

Revisemos el concepto de ortogonalidad y base de Schauder.

Definición 3.15 (Conjuntos Ortogonales y Ortonormales). *Un conjunto A dentro de un espacio euclidiano es ortogonal si para todo $u, v \in A$ con $u \neq v$ se cumple que*

$$(u, v) = 0$$

y si además para todo $u \in A$ se tiene que

$$\|u\| = 1,$$

A es ortonormal.

Definición 3.16 (Base de Schauder). *Sea V un espacio de Banach. Se define una base de Schauder a la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ tal que existen únicos escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para escribir*

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$$

para todo $v \in V$.

La siguiente proposición, cuya demostración se encuentra en [27], nos dice que una base de Schauder dentro de un espacio Normado lo genera al mismo.

Proposición 3.1. *Sea V un espacio normado y $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ una base de Schauder. Se tiene que*

$$V = \overline{\langle \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle}.$$

La siguiente definición de base ortogonal que nos será de utilidad para caracterizar el espacio L^2 , supondrá que la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es linealmente independiente, ortogonal y ortonormal si $B = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ es linealmente independiente, ortogonal y ortonormal, respectivamente.

Definición 3.17 (Base Ortogonal). *Una sucesión $B = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$, V espacio euclidiano, se llama base ortogonal si se cumple que es una base de Schauder para V y es ortogonal.*

Y se dirá que B es una base Hilbertiana de V si además B es ortonormal, [27].

De manera que para todo $v \in V$ se puede escribir

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$$

que es la denominada Serie de Fourier generalizada de v y la sucesión de α_n son los coeficientes de Fourier. El siguiente teorema, tomado de [27], establece la fórmula para el cálculo de dichos coeficientes y constituye la serie de Fourier en forma general.

Teorema 3.1 (Coeficientes de Fourier. Igualdad de Parseval). *Sea V un espacio euclidiano y $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base Hilbertiana de V . Para todo $v \in V$ se tiene que*

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \tag{3.2}$$

donde para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = (v, u_n). \tag{3.3}$$

Además

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$$

denominada igualdad de Parseval.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} (v, u_n) &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m, u_n \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m u_m, u_n) \\ &= \alpha_n (u_n, u_n) \\ &= \alpha_n \end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (v, v) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (u_n, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (u_n, \alpha_n u_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \end{aligned}$$

□

Este último teorema nos establece que si conocemos que un conjunto es euclidiano y

posee alguna base hilbertina, entonces sus elementos se pueden escribir como en 3.2, estando los coeficientes α_n dados por la expresión 3.3. Ahora lo que nos interesa es expandir los elementos del espacio L^2 de esa manera. Para ello, deberemos conocer únicamente que L^2 posee bases hilbertinas, ya que conocemos que L^2 es un espacio euclidiano. Los cuatro teoremas que los revisamos a continuación nos encamina en tal propósito, [27]. El primer teorema que revisamos alude a la completitud de L^2 .

Teorema 3.2 (Completitud de $L^2(I)$). *El espacio $L^2(I)$ es de Hilbert.*

La prueba de este Teorema se puede encontrar en [5], la que según [27] hace uso de la Integral de Lebesgue y Teoría de la Medida, lo que queda fuera de la formación del Ingeniero. En un contexto de Enseñanza de la Matemática como disciplina de servicio, la prueba de Teoremas ayuda a evidenciar un resultado, sin embargo en este contexto existen restricciones como: tiempo y conocimientos propios de la Matemática, tal es el caso de este Teorema. Por lo que deberíamos jerarquizar los contenidos encaminados a cumplir los objetivos en la formación Ingenieril. Dicha jerarquización se hizo en el mapa de contenidos al separar estos en esenciales, necesarios y optativos en el Capítulo 1; por ese análisis previo, algunos teoremas se probarán y otros no.

El siguiente teorema ya nos da un indicio de aproximación de una función perteneciente a L^2 ; nos encamina así, a las series de Fourier clásicas. Antes de ello presentamos tres definiciones que alude dicho teorema.

Definición 3.18 (Densidad). *Sean V un espacio normado y $B \subseteq V$. Se considera que B es*

denso en V si para cualesquier, $v \in V$ y $\varepsilon > 0$, existe $u \in B$ tal que

$$\|v - u\| < \varepsilon.$$

Ejemplificando podemos considerar el hecho de que el conjunto \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , dado que cualquier número real se puede aproximar lo que se quiera por un racional.

El par de definiciones que sigue a continuación, nos serán útiles en Ingeniería en la consideración del ancho de banda de una señal, por ejemplo. Estas son las de soporte de una función y funciones de soporte compacto.

Definición 3.19 (Soporte de una Función). *El soporte de una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto*

$$\text{supp}(f) = \overline{\{t \in D : f(t) \neq 0\}},$$

esto es, el conjunto más pequeño que contiene a $\{t \in D : f(t) \neq 0\}$.

Definición 3.20 (Funciones continuas a soporte compacto). *$f \in C(I)$ es una función continua a soporte compacto si $\text{supp}(f)$ es un conjunto acotado y se denotará $f \in C_0(I)$.*

El siguiente teorema establece que una función continua a soporte compacto puede aproximar a una función cuadrado integrable.

Teorema 3.3 (Densidad en $L^2(I)$). *El espacio $C_0(I)$ es denso en $L^2(I)$, esto es, para $v \in L^2(I)$ y $\varepsilon > 0$, existe $u \in C_0(I)$, tal que*

$$\|v - u\|_2 < \varepsilon.$$

Los dos siguientes teoremas nos permiten conocer la existencia de bases Hilbertianas para el espacio $L^2(I)$, previo a estos presentamos la definición de separabilidad.

Definición 3.21 (Separabilidad). *El espacio normado V es separable si existe una sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ que es densa en V , esto es, para $v \in V$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|v - u_{n_0}\| < \varepsilon.$$

Teorema 3.4 (Existencia de bases Hilbertianas). *Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si tiene una base Hilbertiana.*

Cerramos esta sección con el siguiente teorema que nos establece la existencia de bases Hilbertianas para el espacio $L^2(I)$.

Teorema 3.5 (Separabilidad de $L^2(I)$). *El espacio $L^2(I)$ es separable.*

Los últimos dos teoremas tienen una potencia tal que, nos aseguran que el espacio L^2 al ser separable posee bases hilbertianas y en consecuencia podemos buscarlas para poder expresar cualquier función de L^2 como una superposición infinita ponderada, como lo establece 3.2. A continuación revisemos una de estas bases hilbertianas para L^2 , que nos lleva a hablar de las series de Fourier.

3.3. Series de Fourier

En esta sección vamos a revisar la expansión de funciones cuadrado integrables o de energía finita en series de Fourier, con bases trigonométricas y polinomiales. En algunos casos partiremos de un conjunto linealmente independiente y a través del proceso de Gram-Schmidt se ortonormalizará dicho conjunto. Se podrá comprobar que cada uno de estos conjuntos ortonormales es una base Hilbertiana para $L^2(I)$. De manera que recordemos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a través del siguiente teorema.

Teorema 3.6 (Proceso de Gram-Schmidt). *Sea V un espacio Euclidiano y $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots\} \subseteq V$. El conjunto $C = \{u_1, u_2, u_3, \dots\} \subseteq V$, que para $k \in \mathbb{N}$ se define así:*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^k (u_j, v_{k+1}) u_j \\ u_{k+1} = \frac{1}{\|w_{k+1}\|} w_{k+1} \end{array} \right.$$

cumple que

$$\langle \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \rangle$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Además

$$\langle B \rangle = \langle C \rangle .$$

A continuación revisemos dos bases que generan el espacio $L^2(I)$, configurando las series de Fourier-Legendre y las series de Fourier clásicas.

3.3.1. Series de Fourier-Legendre

Para encontrar una base para $L^2([-1; 1])$, partimos de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_*} \subseteq L^2([-1; 1])$, definida así:

$$x_n(t) = t^n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}_*$ y $t \in [-1, 1]$, conocidos como los polinomios canónicos. A partir del proceso de Gram-Schmidt obtenemos una base ortonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$, denominados los polinomios de Legendre y dados así:

$$e_n(t) = \left(\frac{2n+1}{2} \right)^{1/2} P_n(t),$$

para $t \in [-1, 1]$ y donde

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n],$$

así mismo para $t \in [-1, 1]$ y $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$. La sucesión de polinomios $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ forma una base hilbertiana para $L^2([-1, 1])$, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 3.7 (Series de Fourier-Legendre). *Los polinomios de Legendre forman una base Hilbertiana para el espacio $L^2([-1, 1])$, es decir para $u \in L^2([-1, 1])$ y $t \in [-1, 1]$ donde u es continua, se tiene que*

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n(t),$$

donde para $n \in \mathbb{N}_*$, el coeficiente n -ésimo de Fourier-Legendre es

$$\alpha_n = \int_{-1}^1 u(t)e_n(t)dt.$$

A continuación, recordemos las series clásicas de Fourier, siendo estas las que precisamente encontró Fourier en su trabajo de propagación de calor.

3.3.2. Series Clásicas de Fourier

Tomando como referencia a [27]. El sistema trigonométrico clásico es el conjunto

$$F = \{C_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{S_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1_f\},$$

donde para $t \in [-\pi, \pi]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n(t) = \cos(nt)$$

$$S_n(t) = \sin(nt)$$

$$1_f(t) = 1$$

que es ortogonal. Ortonormalizando el conjunto F tenemos,

$$F_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}C_n : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}S_n : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}1_f \right\}.$$

El siguiente teorema exhibe al sistema trigonométrico F_1 como una base hilbertiana para el espacio L^2 , lo que Fourier lo estableció de forma intuitiva.

Teorema 3.8 (Series Clásicas de Fourier). *El sistema trigonométrico F_1 es una base Hilbertiana para el espacio $L^2([-\pi, \pi])$, es decir para $u \in L^2([-\pi, \pi])$ y $t \in [-\pi, \pi]$ donde u es continua, se tiene que*

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n S_n$$

o también

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt).$$

donde para $n \in \mathbb{N}$, el coeficiente n -ésimo de Fourier es

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(nt) dt$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin(nt) dt$$

La igualdad de Parseval estaría dada así,

$$\begin{aligned}
 (u, u) &= \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n S_n, \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n S_n \right) \\
 &= \frac{a_0^2}{2} (1_f, 1_f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (C_n, C_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 (S_n, S_n) \\
 &= \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] \right],
 \end{aligned}$$

o también

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2].$$

La convergencia de la serie de Fourier queda establecida en el siguiente teorema:

Teorema 3.9 (Convergencia puntual de la serie de Fourier clásica). *Sea $u \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que u y u' sean continuas en $[-\pi, \pi]$ excepto en t_1, t_2, \dots, t_k donde existen discontinuidades de salto. Para todo $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ se tiene que*

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

y para $i = 1, 2, \dots, k$

$$\frac{u(t_i^+) + u(t_i^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt).$$

Revisemos la representación de la serie de Fourier en forma compleja, que nos será útil para el análisis espectral de una señal, esto en un contexto ingenieril.

3.3.3. Series de Fourier complejas

Definamos el espacio

$$\Lambda_{\mathbb{C}}(-L, L) = \left\{ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-L}^L |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

y sobre este espacio la relación de equivalencia,

$$f \sim g \Leftrightarrow \int_{-L}^L |f(t) - g(t)|^2 dt = 0.$$

$\Lambda_{\mathbb{C}}(-L, L)$ es de Hilbert si se define sobre este un producto escalar dado así

$$(f, g) = \int_{-L}^L f(t)g^*(t)dt.$$

Otra base hilbertiana para el espacio $L^2([-L, L])$ está dada por una sucesión de funciones exponenciales complejas, que tiene periodicidad al igual que las funciones trigonométricas de la serie clásica, revisada anteriormente; esto lo establece el siguiente teorema.

Teorema 3.10 (Series de Fourier complejas). *La sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq L^2([-L, L])$, que para $t \in [-L, L]$ y $n \in \mathbb{Z}$ se define así,*

$$E_n(t) = e^{in\pi t/L}$$

es una base Hilbertiana para $L^2([-L, L], \mathbb{C})$, así para $u \in L^2([-L, L], \mathbb{C})$

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n E_n,$$

donde para $n \in \mathbb{Z}$ el coeficiente de Fourier complejo n -ésimo es

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(t) e^{-in\pi t/L} dt.$$

La serie de Fourier clásica por estar dada en términos de funciones trigonométricas periódicas, permite por una parte, aproximar funciones así mismo periódicas y por otro, analizar las componentes espectrales de señales periódicas. El mismo análisis de señales no periódicas, lo podemos hacer a través de la transformada de Fourier. De forma breve revisemos las definiciones de las transformadas directa e inversa de Fourier.

3.4. Transformada de Fourier

Establezcamos el espacio sobre el cual se definirá la transformada de Fourier, este será el espacio de las funciones integrables. Revisemos la definición de dicho espacio tomada de [27].

Definición 3.22 (Espacio $L^1(I)$). *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. El espacio de funciones integrables se define como el conjunto*

$$\{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \int_I |f(t)| dt < \infty\}.$$

Con esta definición, repasemos las definiciones de las transformadas directa e inversa de Fourier.

Definición 3.23 (Transformada de Fourier). *Se define la Transformada de Fourier de $f \in L^1(I)$ como la función $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Definición 3.24 (Transformada inversa de Fourier). *La transformada inversa de $g \in L^1(I)$, se define como la función $\check{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada así:*

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Para finalizar el resumen sobre la transformada de Fourier, recordemos sus propiedades, que nos serán de utilidad en ciertos casos para el cálculo de transformadas de funciones que de forma directa por la definición se tornan complejas; o también para interpretaciones ingenieriles en términos de señales eléctricas. Presentamos el siguiente resumen de propiedades, pudiendo remitirnos a [1] para sus demostraciones.

Propiedades de la Transformada de Fourier

- Linealidad

Sean $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2](\omega).$$

- Simetría

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y tiene simetría par, $f(t) = f(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt.$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y tiene simetría impar, $f(t) = -f(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}[f](\omega) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt.$$

- Simetría Hermítica de la Transformada de Fourier

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $f(t) \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}^*[f](-\omega).$$

- Dualidad

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}[f](t) = 2\pi f(-\omega).$$

- Desplazamiento temporal

Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\tau \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[f(t - \tau)](\omega) = e^{-i\omega\tau} \mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

- Desplazamiento en frecuencia

Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\omega_0 \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0).$$

- Modulación

Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\omega_0 \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t) f(t)](\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t)](\omega + \omega_0).$$

- Inversión en el tiempo

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](-\omega).$$

- Escalamiento en el tiempo

Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t)](\omega/a).$$

- Diferenciación

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

y

$$\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

Esta breve revisión de los fundamentos matemáticos la concluimos con la revisión de un concepto de utilidad en el filtrado de señales, resolución de ecuaciones diferenciales parciales e incluso para demostración de ciertos teoremas como el teorema de límite central. Nos referimos a la convolución.

Convolución

Definición 3.25 (Convolución). Sean dos funciones integrables sobre \mathbb{R} , $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, se define la convolución entre f y g a la función

$$f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

dada así

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

Las principales propiedades de la convolución las presentamos a continuación. En [1] encontramos más detalles al respecto.

Propiedades de la Convolución

- Conmutatividad: Si $f * g$ está definida entonces también lo está $g * f$ y se cumple:

$$f * g = g * f.$$

- Para $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h).$$

- Convolución en el tiempo: Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = [\hat{f}\hat{g}](\omega).$$

- Convolución en la frecuencia: Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}[fg](\omega) = \frac{1}{2\pi}[\hat{f} * \hat{g}](\omega).$$

Capítulo 4

Criterios Didácticos en la Matemática

En este capítulo hacemos una breve revisión de dos referentes teóricos en cuanto a la educación matemática. La Educación Matemática basada en la resolución de problemas y la Teoría de Situaciones didácticas. Dos referentes que guían la propuesta, más no amparan.

4.1. Aproximación a la Educación Matemática basada en la Resolución de Problemas

La Educación Matemática Basada en la Resolución de Problemas, en adelante EMBRP, es un campo de investigación activo dentro de la Didáctica de la Matemática, en tal virtud, existen diversos criterios de lo que significa la resolución de problemas dentro del ambiente educativo. Lo que busca EMBRP es el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas en

los estudiantes, a través como lo menciona [39], desarrollar en los estudiantes su capacidad inquisitiva.

En [39], se caracteriza la resolución de problemas como una forma de pensar de una comunidad de aprendizaje, entendida esta última como: estudiantes y profesor; donde buscan distintas maneras de resolver una situación. A la vez en [40] citado por [39] se establece que la resolución de problemas lleva a los estudiantes a pensar matemáticamente, sin priorizar el dominio de la materia, sino el manejo del conocimiento eficientemente.

¿Por qué aprovecharse de la propuesta de EMBRP para la formación de Ingenieros? Diversos marcos teóricos dentro de la Didáctica de la Matemática, subrayan la importancia de la práctica social como mediadora del aprendizaje. La Resolución de Problemas, saca a los estudiantes de la pasividad que en su mayoría no genera el desarrollo de las competencias matemáticas y menos un gusto por matematizar situaciones en la medida de su nivel de formación; y, provoca más bien una invitación al estudiante a formularse preguntas que les permita atacar cierto problema. Aspecto, este último, muy importante en tanto se alinea con los propósitos de una buena formación en cualquier nivel y profesión.

En [38] se sugiere que el estudiante debe tener la oportunidad de problematizar¹ su aprendizaje, en el sentido que debe de cuestionarse el por qué cierta situación es de tal o cual manera, cómo dar solución a esta y derivar de una situación planteada por el profesor nuevos problemas. Incluso se recomienda que se convierta al aula en un "microcosmos", en el sentido de que se lleve a manera de metáfora las practicas del quehacer matemático al ambiente

¹ Se entiende como problematizar el hecho de cuestionarse un asunto con el objeto de conocerlo a profundidad.

educativo, con lo que se logra que se muestre a la Matemática como una actividad intelectual justificada por sí misma. Nos preguntamos, si una formación profesionalizante, como la de Ingeniero, se concilia con una enseñanza que promueva la recreación del conocimiento matemático, a través de asemejar la construcción de los conocimientos matemáticos con la investigación propia en Matemáticas. Es posible que requiramos buscar un equilibrio entre el tipo de problema que esté destinado al desarrollo del pensamiento matemático con otro tipo, que muestre a la Matemática como una Ciencia de servicio, como es para el caso de la Ingeniería.

Para evitar confusión entre otro recurso en la enseñanza de la Matemática, que es el ejercicio, debemos distinguir la diferencia entre ambos. Ejercicio y problema como actividades en la enseñanza de la Matemática, marcan su diferencia al considerar estas cuatro categorías, según [26]:

- Comportamiento del estudiante.- En un ejercicio es suficiente que el estudiante aplique rutinariamente un conocimiento aprendido, mientras que un problema demanda otros procesos más complejos.
- Objetivo del profesor.- El profesor propone un ejercicio con la finalidad de que el estudiante aplique un conocimiento y en el caso del problema lo que busca es que el estudiante investigue.
- Tiempo destinado.- Un ejercicio demanda de un tiempo previsible, al contrario de un problema.

- Dimensión afectiva.- El estudiante con un ejercicio no manifiesta mayor emotividad, mientras que con un problema se desencadenan cargas afectivas más fuertes.

En [38], se recalca la falta de un cuerpo teórico unificado que explique desde los distintos aspectos la dinámica en la que se desarrolla la educación matemática basada en la resolución de problemas, lo que implica la inexistencia de caminos fijados para la experimentación con esta perspectiva educativa. Este mismo hecho nos brinda la posibilidad de explorar distintas formas desde la Resolución de Problemas, para ayudar a construir conocimiento matemático en los estudiantes. De manera que será necesario tomar lo pertinente de algunas propuestas teóricas acerca del tema y para ello revisémoslas.

4.1.1. Investigación en la Resolución de Problemas Matemáticos

Dado que la Matemática como Ciencia ha sido siempre objeto de enseñanza y puesto que su desarrollo está marcado por la resolución de problemas; tanto de aquellos dentro de la Matemática, como de fuera de ella, hace que la Resolución de Problemas como apoyo a la enseñanza de la Matemática tenga larga data. Sin embargo las mayores preocupaciones por sistematizar y estudiar el fenómeno educativo que se presenta al experimentar con la resolución de problemas surgen en el siglo pasado. En [26] se resumen estas distintas visiones desde lo matemático acerca del tema.

Visión de Wallas a la Resolución de Problemas

El libro *El arte del pensamiento* escrito por Wallace en 1926, hace un quiebre en los estu-

dios de la creatividad en la resolución de problemas, operacionalizando y sistematizando los pasos involucrados en la resolución de problemas, los cuales quedan establecidos así:

1. Información o preparación.- Es la etapa donde el resolutor se familiariza con el problema, pudiendo ensayar con casos particulares, casos límites o análogos.
2. Incubación.- Según Wallace, en esta etapa es donde el inconsciente sigue trabajando con la información incubada en la etapa anterior y es donde surge la creatividad.
3. Inspiración.- Es donde surge una estrategia de resolución.
4. Verificación.- Esta es la etapa donde a través de razonamientos se confirma o no la inspiración.

Visión de Polya a la Resolución de Problemas

La inquietud de Polya fue si se podría generar una regla a seguir para la resolución de problemas, lo que constató que es imposible. Lo que sí era factible fue el tener ciertas indicaciones que podrían servir. Polya en su libro *How to Solve it* (1949), establece cuatro etapas en resolución de problemas, [22]:

1. Comprender el problema.
 - Se debería entender el problema.
 - ¿Qué es lo desconocido? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones?
 - ¿Es posible satisfacer la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar lo desconocido? ¿Es la condición insuficiente, redundante, contradictoria?

- Se debería hacer un dibujo. Introducir notación alternativa.
- Se debería separar las partes de la condición.

2. Concebir un plan.

- Se debería encontrar la conexión entre los datos y lo desconocido. Si no se encuentra dicha conexión, se debería considerar problemas alternativos similares.
- Se debería preguntar si un problema similar se ha visto antes.
- Se debería preguntar si un teorema puede ser usado.
- Se debería ver hacia lo desconocido y preguntarse si se conoce de algún problema familiar que tenga la misma o similar incógnita.
- Teniendo un problema similar al planteado, se debería preguntar, si de este es posible usar sus resultados, sus métodos de resolución, o si es factible añadir elementos para que esto sea posible.
- Se debería imaginar un problema similar accesible. ¿Es posible cambiar los datos y lo desconocido?
- Se debería preguntar si se ha usado todos los datos y condiciones.

3. Ejecutar el plan.

- Ejecutar el plan, verificando cada paso. ¿Se puede probar que el paso es correcto?

4. Examinar la solución obtenida.

Se debería preguntar si:

- ¿Se puede verificar el resultado? ¿Se puede verificar el argumento?
- ¿Se podría encontrar la solución de forma diferente?
- ¿Se puede usar los resultados o métodos para algunos otros problemas?

Visión de Poincaré a la Resolución de Problemas

Poincaré establece dos tipos de espíritu matemático:

1. El lógico.- Que es el que avanza paso a paso y nada deja al azar. Conocido como analista, y
2. El intuitivo.- Lamado por Poincaré, geómetras. El que utiliza más la intuición.

Visión de Hadamard a la Resolución de Problemas

A diferencia de Poincaré, Hadamard establece que el espíritu lógico viene después del intuitivo. Las distintas representaciones para un problema son las que marcan la prevalencia de un espíritu sobre otro. Diferencia estos dos perfiles de resolutor, estableciendo que el espíritu lógico tiene ideas más dirigidas y sus representaciones auxiliares son palabras, mientras que en el espíritu intuitivo la dispersión de las ideas es grande y sus representaciones auxiliares son imágenes.

Visión de Halmos a la Resolución de Problemas

Halmos pone su atención en la dimensión afectiva, pues para él, son decisivos estos senti-

mientos para bloquear o impulsar la solución del problema. El resolutor se puede ver afectado por lo afectivo en las distintas etapas. En la familiarización el problema puede provocar interés o ansiedad, hasta llegar a la verificación donde se puede tener satisfacción o frustración en caso de haber resuelto o no el problema.

Visión de Miguel de Guzmán a la Resolución de Problemas

Miguel de Guzmán creía que en la educación matemática debe haber un proceso de inculturación, entendido este último término como la incorporación del “espíritu” matemático en los estudiantes. En cierta medida transferir la labor del matemático experto al estudiante, guardando las proporciones, [49].

La resolución de problemas, en las reflexiones de Miguel de Guzmán, constituye una experiencia dentro de aula que persigue dicho propósito; pues trabajando con los estudiantes en heurísticas para la resolución de problemas se transfiere en parte una forma de trabajar en Matemáticas. También, era crítico de la llamada “matemática moderna” con su exceso de formalismo y más bien propugnaba un equilibrio entre la formalización y la intuición, acen- tuando la importancia en los procesos de pensamiento desencadenados con la matemática, antes que los contenidos per sé. Dichos procesos de pensamiento los desarrolla el alumnado cuando se pone frente a problemas diseñados por el didacta matemático. En palabras de Miguel de Guzmán: “En el aprendizaje del pensar sólo la práctica del pensar es verdaderamente útil”, [50].

Por su experiencia y reflexiones de distintos matemáticos como el propio Polya, Miguel

de Guzmán plantea una metodología que guía los pasos del alumnado en la resolución de problemas:

1. Familiarizarse con el Problema

Esta fase consiste en buscar información, identificar los elementos que intervienen y las conexiones que existen entre estos. Miguel de Guzmán aconseja lo siguiente: analizar el problema pausadamente, identificar los elementos que intervienen y las conexiones entre estos, identificar la situación de salida y la situación de llegada, manipular el problema, etc; [50].

2. Búsqueda de estrategias

Miguel de Guzmán sugiere en esta fase averiguar varias estrategias, no pasar a dar la solución con la primera estrategia que aparezca, sino tener varias para luego escoger la mejor. Plantea algunas sugerencias para construir las estrategias:

- a) Empezar por lo más fácil.- Para enfrentar un problema, puede ser que resulte mejor reducir su complejidad, resolviendo un problema parecido con menor grado de complejidad e ir incorporando nuevos elementos hasta dar solución al problema original. Así también sugiere de Guzmán simplificar el problema añadiendo condiciones.
- b) Experimentar.- Para poder encontrar propiedades comunes en varios elementos, de Guzmán sugiere experimentar en casos particulares.
- c) Hacer un esquema, una figura, un diagrama.- Si los elementos que intervienen en

- un problema se pueden esquematizar se facilita la solución del problema, porque pensamos mejor de forma gráfica como sugiere de Guzmán.
- d) Escoger un lenguaje adecuado.- Para que el pensamiento sea el adecuado se debe utilizar un lenguaje correcto, como podría ser lenguaje geométrico, algebraico, analítico, probabilístico, etc.
 - e) Buscar un problema semejante.- El trabajar en una variedad de problemas otorga experiencia y confianza en sí mismo para hacer frente a nuevos problemas.
 - f) Suponer que el problema está resuelto.- Si suponemos resuelto el problema veremos las relaciones de sus elementos y estará más claro el camino desde la situación de partida a la de llegada, [50].

3. Desarrollar la estrategia

En caso de que el problema no quede resuelto con una de las estrategias construidas se debe recurrir a la incubación, según de Guzmán. La incubación forma parte del proceso creativo en Matemáticas, estas son: preparación, incubación, iluminación y verificación. La preparación y la verificación pueden adaptarse a secuencias sistemáticas, no así la incubación y la iluminación que resultan de la actividad subconsciente. También puede ser posible que aparezca la iluminación repentina que para de Guzmán todos tenemos accesos a esta experiencia, [50].

4. Revisar el proceso y sacar consecuencias

Independiente de haber sido resuelto o no el problema, de Guzmán sugiere esta última

fase que es el reflexionar sobre el camino llevado y sobretodo poner atención en los bloqueos, aptitudes, tendencias, etc. Aquí deberíamos contestarnos: ¿Cuáles han sido las variantes en el proceso de resolución del problema?, ¿Cuáles han sido las motivaciones para seguir trabajando el problema?, ¿Las estrategias fueron las adecuadas?, ¿Por qué no se acertó con las estrategias construidas?, ¿Cómo surgieron las nuevas ideas?, etc; [50]. Por el lado de la reflexión propia del problema, de Guzmán sugiere preguntarse: ¿Cómo los elementos del problema se entrelazan para llegar a la solución? y si habría un camino más simple de llegar a la solución.

4.1.2. Metodología de la Resolución de Problemas Matemáticos

En [26] podemos desprender un modelo a seguir para la aplicación de la resolución de Problemas, que lo resume en estas cuatro etapas:

1. Que el profesor proponga una serie de problemas con distitinto grado de dificultad que permita a los estudiantes trabajar con hechos particulares encaminados a la generalización.
2. Que los estudiantes registren su proceso de resolución.
3. Que los estudiantes reflexionen sobre el proceso seguido para llegar a la solución.
4. Que se sociabilicen las distintas soluciones para que se hagan explícitas las heurísticas.

4.2. Aproximación a la Teoría de las Situaciones Didácticas

Vamos a tomar para nuestra propuesta didáctica algunos elementos de la Teoría de situaciones didácticas, algunos elementos por dos motivos. Por un lado, se trata de una teoría muy sofisticada¹ que toma tiempo su comprensión y por otro, estamos conscientes que la Didáctica de la Matemática al no tener el mismo estatus que la Matemática en cuanto a su rigor y exactitud, convierte en desacertado el hecho de importar en su totalidad marcos teóricos desarrollados para otros contextos².

La Teoría de Situaciones Didácticas forma parte de la producción teórica de la Didáctica de la Matemática de la escuela francesa. Es muy importante subrayar este hecho porque dicha escuela nace con las inquietudes de matemáticos hacia el fenómeno educativo de la Matemática³. Lo cual nos permite entender la dirección que toman sus investigaciones que como lo recalca en [32] son dos aspectos medulares que la guían:

- La necesidad de teorizar el fenómeno de la educación matemática, y
- Que dicha Teoría debe venir desde las particularidades de la Matemática y no de cuer-

¹ La Teoría pertenece a los marcos teóricos de la Didactique des mathématiques de Francia, lo que le hace heredar un rasgo muy sofisticado, característico del mundo académico francés.

² Además hay que tener en cuenta que el padre de esta Teoría, Guy Brousseau, a nivel personal; luego de graduarse como matemático puro en Francia, toma la decisión de ir a enseñar en la escuela Jules Michélet de Burdeos, donde suponemos que saca las preguntas de investigación que luego las desarrollará. Por lo que su genesis es a partir de la inquietud por enseñar Matemática a niños, luego se amplía a otros niveles educativos; pero debemos tomar en cuenta aquello

³ En México la escuela de Matemática Educativa presenta el mismo paralelismo, puesto que nace por inquietudes de matemáticos puros del CINVESTAV, que frente al encargo de su Gobierno de redactar libros de textos para secundaria en la década de los 70, se enfrentan a preguntas que rebasan a las disciplinas como la psicología, pedagogía, etc. Emerge así la disciplina para entender el fenómeno educativo de la Matemática desde la Matemática misma, problematizándola.

pos teóricos ajenos.

Dentro de esta escuela se inscribe dicha Teoría de aprendizaje, que fue desarrollada por Guy Brousseau y, que como lo sintetiza [32], trata de crear las condiciones para la “génesis artificial” de los conocimientos matemáticos. Se inscribe así, en Teorías Didácticas de corte constructivista. [32] cita al propio Brousseau al respecto:

“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.”

Los instrumentos que propone la Teoría para la construcción del conocimiento matemático en el estudiante son la situación didáctica y la situación a-didáctica. ¿Qué se entiende por situación? Brousseau, citado por [32] la define así:

“Hemos llamado “situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”.

Por situación didáctica se entiende como una situación fabricada de manera adecuada para que se logre en el estudiante la construcción del saber. Brousseau la define así, citado

por [32].

“Un conjunto de relaciones establecidas implícita y/o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.”

La Teoría intenta centrar en el estudiante la mayor parte de actividades que propicien el aprendizaje en estos. Teniendo así, la posibilidad de construcción de situaciones donde el docente la gestiona y esta por sí, hace que el estudiante en el camino de solución por ejemplo, perciba los errores conceptuales en los que incurre. A esta situación, Brousseau la llama situación a-didáctica, definiéndola así:

“El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.”

4.2.1. Nociones de la Teoría de las Situaciones Didácticas

Definidas así a las situaciones a-didácticas, nos es sugerente comprenderlas mejor, pues con ellas aportamos en los estudiantes a adquirir autonomía en su aprendizaje. Revisemos algunas nociones que caracterizan a este tipo de situaciones.

- **Noción de Necesidad**

La situación debe ser tal que haga surgir la necesidad de cierto conocimiento que se pretende que construya el estudiante.

- **Noción de sanción o retroacción**

Se entiende que la situación debe advertir al estudiante si comete algún error en su resolución, sin la intervención del profesor. [32] menciona en este punto que es este aspecto lo que le da a la situación los rasgos de un instrumento de aprendizaje antes que de enseñanza.

- **Noción de no intervención**

Al ser la situación la que conduzca a que el estudiante establezca las relaciones entre sus planteamientos de solución y lo que obtiene de ellos, se pensaría que el docente está ausente; sin embargo, la no intervención se la entiende a la manera adecuada de intervenir del docente en el desarrollo de la situación. El docente será el que guíe a la solución, no el que dé con la solución. [32] cita a Margolinas respecto al comportamiento del docente en la fase de desarrollo de una situación a-didáctica:

“En efecto, no es el silencio del maestro lo que caracteriza las fases a-didácticas, sino lo que él dice.”

4.2.2. Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica es creada en la década de los 80 como parte de la Didáctica de la Matemática francesa. Se constituye en un instrumento que permite llevar a la acción las

propuestas teóricas tanto de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), como la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), con dos finalidades: por una parte, como metodología de Investigación y por otra, como metodología para el diseño de las situaciones didácticas.

La ingeniería didáctica utiliza el símil del trabajo de Ingeniería; pues esta realiza diseño de dispositivos artificiales amparándose en las Ciencias y en las Matemáticas. Así mismo, la ingeniería didáctica plantea el cómo hacer las realizaciones didácticas bajo el paraguas de los trabajos teóricos en la disciplina, de manera particular la Teoría de Situaciones Didácticas.

En Francia prácticamente esta ha sido la metodología de Investigación en didáctica de las matemáticas. Al respecto, [3] menciona lo siguiente: *“Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.”*

Se delimitan en el proceso temporal de una ingeniería didáctica, cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, experimentación y, análisis a posteriori y evaluación.

1. Análisis preliminar

La primera fase de concepción de las situaciones, comprende la preparación de las mismas. Por ejemplo en esta etapa se podrían llevar análisis de los contenidos que se pretende didactizar con la ingeniería desde las dimensiones histórico-epistemológicas, los obstáculos epistemológicos que los estudiantes enfrentan al abordar ciertasocio-

nes y conceptos matemáticos, etc. [3] enumera los siguientes estudios preliminares a desarrollar:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza. Buscar los orígenes y la génesis de los conocimientos en juego.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización de la ingeniería didáctica.

2. Concepción y análisis a priori

Esta fase comprende el diseño de una situación a-didáctica que será destinada a los estudiantes. [3] menciona al respecto: *“ Por lo tanto, el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. ”*

La principal investigadora en el campo que es Michele Artigue anota que esta fase es tanto descriptiva como predictiva y se debería tomar en cuenta lo siguiente:

- Se debería analizar sobre lo que podría aprender el estudiante con la situación, en

el momento en que trabaja independientemente.

- Se deberían prever los comportamientos posibles de los estudiantes frente a la situación y demostrar que el análisis realizado permite controlarlos.

3. Experimentación

En esta fase se ponen las situaciones que se diseñaron en escena. Aquí habrá que constatar, que si lo que se previó en la etapa a priori efectivamente ocurre, a través del contacto del investigador/profesor con la población de estudiantes. La experimentación comprende lo siguiente:

- Establecer los objetivos y las condiciones de la investigación con los estudiantes que participarán en la experimentación.
- Establecer el contrato didáctico.
- Aplicar los instrumentos de investigación.
- Registrar las observaciones derivadas de la experimentación.

4. Análisis a posteriori y evaluación

Esta fase se basa en los datos recolectados en la fase de experimentación. Datos que abarcan las observaciones hechas por el investigador/profesor; material producido por los estudiantes como: cuestionarios, entrevistas, videos de clase, etc.

La prueba de hipótesis queda establecida por la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, [3]. La metodología de análisis es más profunda que las prue-

bas habituales de confrontación por grupo de control y experimental. Al respecto, [3] menciona:

“El proceso de validación interna que se encuentra en juego aquí no cae en las trampas de los esquemas usuales de validación estadística asociados con las experimentaciones en clase, que consisten en fundamentarse implícitamente en el principio de que las diferencias mesurables constatadas se relacionan con las variables de comando sobre las cuales se ha influido para diferenciar clases experimentales y clases de control. Esto no deja de ser problemático.”

Capítulo 5

Propuesta didáctica referida al AFAI

En este capítulo presentamos nuestra propuesta didáctica para cinco temas, los cuales están en concordancia con el mapa de contenidos. Revisamos así los siguientes temas: series clásicas de Fourier, serie generalizada de Fourier, series no clásicas de Fourier, transformada de Fourier y convolución. Cada uno de estos cinco temas los abordamos en dos fases: la situación-problema diseñada apuntando a crear en el estudiante el interés y la necesidad del conocimiento en juego. A partir de esta, pasamos al desarrollo de algunos de los temas estudiados en clase¹, fase que la hemos denominado, tópicos de clase. Debemos aclarar que los tópicos de clase repetirán algunas definiciones y teoremas del capítulo 3, esto, para no romper la línea del discurso del contenido abordado en clase.

En cuanto a las situaciones-problema, luego de planteada para el trabajo autónomo del

¹ Presentamos algunos de los temas que revisaremos en el curso donde se pondrá en escena nuestra propuesta didáctica. Algunos, pues el objetivo es ejemplificar como abordaremos los contenidos planteados y no anotar todos los apuntes de clase, dado que es conocimiento clásico.

estudiante, se desarrolla en recuadros las soluciones a las mismas, las cuales se discutirán luego que el estudiante las resuelve por su cuenta.

En el mapa de contenidos clasificamos a los contenidos en esenciales, necesarios y optativos. Las pruebas a los teoremas que forman parte del contenido, en su mayoría no son esenciales; dado que es claro que no es el objetivo en la formación del Ingeniero extender el estudio por el lado axiomático, sino más bien estudiar las Matemáticas como una disciplina de servicio a la Ingeniería. Por tal motivo no se presentan pruebas de algunos teoremas.

5.1. Series clásicas de Fourier

5.1.1. Situación-problema

Para la siguiente situación-problema hemos tomado como referencia a [42].

Consideremos una cuerda elástica estirada en sus extremos, colocada a lo largo del eje x de 0 a L . A la vez, supongamos que son despreciables las fuerzas de amortiguamiento como la resistencia del aire. La cuerda al ser sometida a un pequeño desplazamiento vertical, vibra verticalmente en el plano xy y su desplazamiento es modelizado por una función, $u = u(x, t)$, en dos variables x y t , donde

1. x representa la posición horizontal de un punto de la cuerda y
2. t representa el tiempo.

De manera que para un instante de tiempo ($t > 0$), $u(x, t)$ representa la posición vertical del punto de la cuerda con coordenada horizontal x y en el instante t . $u(\cdot, t)$ representa la forma de la cuerda en el instante de tiempo t y la forma de la cuerda para el instante inicial, $t = 0$, se representará con la función de una variable f , con lo que $f(\cdot) = u(\cdot, 0)$.

1. Vamos a dividir la cuerda en N masas, de manera que la masa n -ésima se ubica en la posición $x_n = \frac{nL}{N}$. Consideremos así, para cada masa un movimiento armónico simple¹, con la diferencia que cada masa interactúa con las masas vecinas. La posición en y de la n -ésima masa es

$$y_n(t) = u(x_n, t)$$

Supongamos que la separación entre x_{n-1} y x_n , para todo $n = 1, \dots, n$, es $h > 0$ y sea la

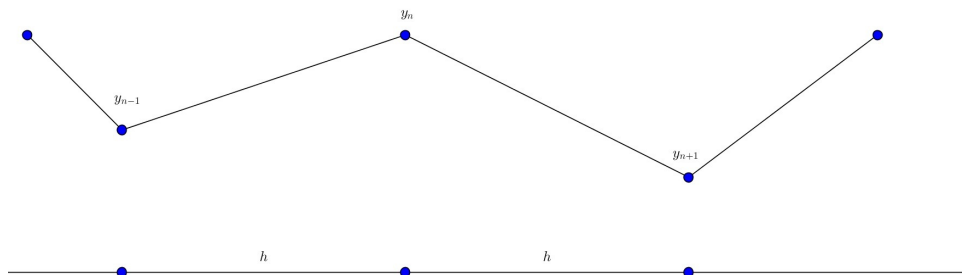


Figura 3. Vibración de la cuerda como un sistema de masas discretas.

densidad de la cuerda constante, $\rho > 0$, de manera que la masa de la partícula n -ésima es

$$m = \rho h.$$

Aplicando la segunda Ley de Newton escribe una expresión para la tensión de la n -ésima

¹ El tema del MAS (Movimiento Armónico Simple) es estudiado en la materia de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, curso previo al curso destino de la propuesta didáctica.

partícula

Considerando que la masa de cada partícula es ρh , y puesto que el movimiento de cada partícula es vertical se tiene que la aceleración de cada una de estas es la segunda derivada de la posición vertical respecto al tiempo, $y_n''(t)$. Por lo que al aplicar la segunda Ley de Newton, tenemos que la tensión de la n -ésima partícula es

$$\rho h y_n''(t)$$

2. Por otro lado la tensión de la n -ésima partícula es provocada por la $(n - 1)$ -ésima y $(n + 1)$ -ésima partículas. Puesto que la tensión de la n -ésima partícula es directamente proporcional a la separación con respecto a la altura de las partículas vecinas e inversamente proporcional a la separación horizontal de las mismas. Considerando que la constante de proporcionalidad es $\tau > 0$ que a la vez representa el coeficiente de tensión de la cuerda:

- a) ¿Cuál es la expresión para la tensión de la n -ésima partícula provocada por la partícula ubicada a la izquierda $(n - 1)$ -ésima?

La separación vertical de la n -ésima partícula, respecto a la posición de la partícula vecina izquierda es $y_{n-1} - y_n$ y hemos establecido como la separación horizontal, h . Por medio de la constante de proporcionalidad τ se establece que la tensión que experimenta la n -ésima partícula provocada por la $(n - 1)$ -ésima partícula es:

$$\frac{\tau}{h}(y_{n-1} - y_n)$$

- b) ¿Cuál es la expresión para la tensión de la n -ésima partícula provocada por la partícula ubicada a la derecha $(n + 1)$ -ésima?

De la misma manera que el literal anterior se establece que la tensión de la n -ésima partícula provocada por la $(n + 1)$ -ésima partícula es:

$$\frac{\tau}{h}(y_{n+1} - y_n)$$

- c) ¿Cuál es la expresión para la tensión de la n -ésima partícula provocada por ambas partículas vecinas?

La tensión provocada por ambas partículas vecinas es la suma de las tensiones de cada una, establecidas en los dos primeros literales. Por lo que dicha tensión es:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tau}{h}(y_{n-1} - y_n) + \frac{\tau}{h}(y_{n+1} - y_n) \\
 &= \frac{\tau}{h}[y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n].
 \end{aligned}$$

Para el instante de tiempo t , la tensión para la n -ésima partícula es:

$$\frac{\tau}{h}[y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)]$$

3. Gracias a los dos literales anteriores se llega a la siguiente expresión

$$\rho h y_n''(t) = \frac{\tau}{h}[y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)].$$

Utiliza los siguientes hechos:

a) Parte del miembro derecho de la última igualdad se puede escribir así

$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t) = u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t).$$

b) Para una función F , doblemente derivable,

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \rightarrow F''(x)$$

cuando $h \rightarrow 0$.

Y encuentra la ecuación diferencial parcial que relaciona u ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, conocida como la ecuación de onda.

Gracias a los literales $a)$ y $b)$ se establece la igualdad

$$\rho h y_n''(t) = \frac{\tau}{h} [y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)]$$

que se puede escribir también así:

$$\rho h y_n''(t) = \frac{\tau}{h} [u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t)].$$

Si dividimos por h y hacemos que $h \rightarrow 0$ tenemos que

$$\rho y_n''(t) = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

De ahí, llegamos a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$.

4. Sean las funciones u y v soluciones de la ecuación diferencial obtenida. Prueba que

a) La ponderación αu con $\alpha \in \mathbb{R}$, también lo es.

Supongamos que u es solución de la ecuación de onda y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Averigüemos si αu también lo es. Si $w = \alpha u$ y suponemos que cumple la ecuación de onda entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \alpha u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \alpha u}{\partial x^2} \\ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

lo cual es cierto. Por lo tanto αu es solución de la ecuación de onda.

b) La superposición $u + v$ es solución de la ecuación diferencial.

Si u y v son soluciones de la ecuación de onda entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Si sumamos las dos igualdades, tenemos que

$$\frac{\partial^2(u+v)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Con lo que hemos demostrado que la ecuación de onda cumple con la linealidad.

5. Hagamos la conjetura que la función en dos variables u resuelve la ecuación de onda y que la podemos escribir así

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t).$$

Si $c = 1$, al sustituir u en la ecuación de onda se obtiene que

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

y puesto que $\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}$ depende sólo de t y a la vez $\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$ depende sólo de x , quiere decir que ambas razones son constantes, por lo que se puede escribir:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. De donde tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \psi''(t) - \lambda \psi(t) = 0 \\ \varphi''(x) - \lambda \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

a) Encuentra las funciones ψ y φ que resuelvan el sistema.

Para ambas ecuaciones se desprende la ecuación característica

$$s^2 - \lambda = 0,$$

de la cual extraemos soluciones no triviales, si $\lambda < 0$. Supongamos que $\lambda = -m^2$, $m \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que las soluciones a las dos ecuaciones diferenciales ordinarias son

$$\psi(t) = A \cos(mt) + B \operatorname{sen}(mt)$$

y

$$\varphi(x) = C \cos(mx) + D \operatorname{sen}(mx)$$

b) Recordemos que la cuerda se ubica sobre el eje x de 0 a L . Hagamos que $L = \pi$, de manera que la cuerda se encuentra sujeta en 0 y en π . Así, consideramos las

condiciones de frontera

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0.$$

Encuentra que una solución a la ecuación de onda es

$$u_m(x, t) = [a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)] \sin(mx)$$

De la solución para φ , la evaluación en 0 y π se anulan, por lo que obtenemos que

$$\varphi(0) = C \cos(m0) + D \operatorname{sen}(m0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\varphi(\pi) = D \operatorname{sen}(m\pi) = 0 \Rightarrow D = 0 \vee \operatorname{sen}(m\pi) = 0$$

Para evitar que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in [0, \pi]$, se debe cumplir que $D \neq 0$; entonces se debería cumplir que $\operatorname{sen}(m\pi) = 0$. En consecuencia $m \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, tenemos que una solución a la ecuación de onda es

$$[A \cos(mt) + B \operatorname{sen}(mt)] D \operatorname{sen}(mx).$$

Si $a_m = AD$ y $b_m = BD$, una solución para un valor de $m \in \mathbb{N}$ es

$$u_m(x, t) = [a_m \cos(mt) + b_m \operatorname{sen}(mt)] \operatorname{sen}(mx).$$

c) Consideremos también que la forma de onda inicial de la cuerda está dada por la

función f sobre el intervalo $[0, \pi]$, esto es,

$$u(x, 0) = f(x),$$

y que la velocidad inicial es cero, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$. Si $f(x) = 3\text{sen}(4x)$. Encuentra una solución para este caso.

Para encontrar una solución a la ecuación de onda, considerando la forma de la cuerda inicial, dada por la función f ,

$$f(x) = 3\text{sen}(4x),$$

y $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, deberemos encontrar los coeficientes a_m y b_m . Por una parte, tenemos que

$$\begin{aligned}u_m(x, 0) &= [a_m \cos(m0) + b_m \text{sen}(m0)] \text{sen}(mx) \\ &= a_m \text{sen}(mx).\end{aligned}$$

Por lo que

$$a_m \text{sen}(mx) = 3\text{sen}(4x).$$

De ahí, podemos decir que

$$m = 4$$

y

$$a_4 = 3.$$

Considerando la velocidad inicial de la cuerda, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= [-a_m m \operatorname{sen}(m0) + b_m m \cos(m0)] \operatorname{sen}(mx) \\ &= m b_m \operatorname{sen}(mx) = 0. \end{aligned}$$

Para evitar la solución trivial, $b_m = 0$. Entonces la solución a la ecuación de onda es:

$$u_4(x,t) = 3 \cos(4t) \operatorname{sen}(4x).$$

d) Grafica en el software Maxima la solución a la ecuación de onda en los instantes

$t = 0, t = 0,2, t = 0,4, t = 0,6, t = 0,8$ y $t = 1$.

```
(% i2) u(x,t):=3*cos(4*t)*sin(4*x);
plot2d([u(x,0),u(x,0.2),u(x,0.4),u(x,0.6),u(x,0.8)
,u(x,1)], [x,0,%pi]);
```

```

u(x,t) := 3 cos(4t) sin(4x)           (% o1)
    
```

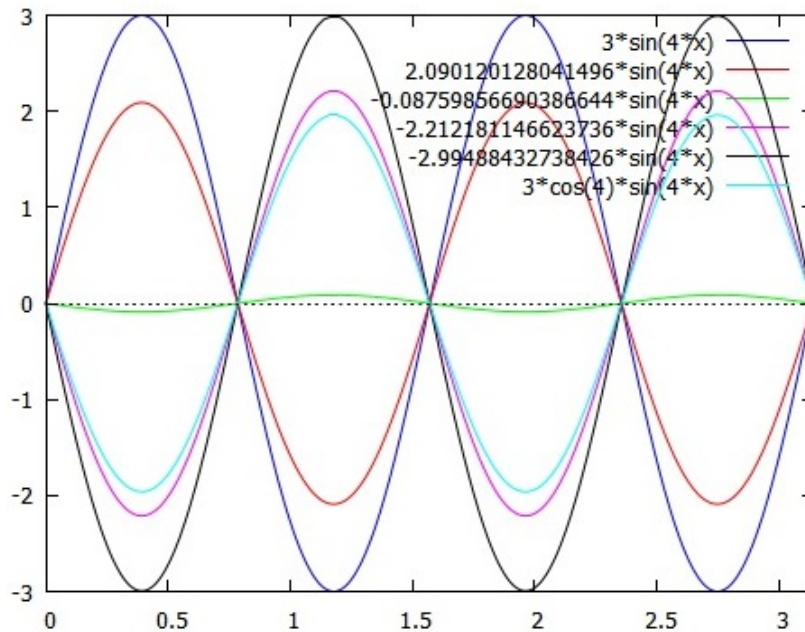


Figura 4. Gráfica de la solución a la ecuación de onda en los instantes $t = 0$, $t = 0,2$, $t = 0,4$, $t = 0,6$, $t = 0,8$ y $t = 1$.

e) Si u_1 , u_2 y u_3 son soluciones a la ecuación de onda. ¿Puedes afirmar que $u_1 + u_2 + u_3$ es solución de la ecuación de onda y que u , evaluada en x y t , dada así:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^N [a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)] \sin(mx)$$

también lo es?

En literales anteriores se demostró la linealidad de la ecuación de onda, esto es, si u y v son soluciones a la ecuación de onda y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $u + \alpha v$ también lo es. Por lo tanto, $u_1 + u_2 + u_3$ es solución a la ecuación de onda.

A la vez se ha demostrado que para una cuerda colocada en el eje x , de 0 a π , la función u_m ,

$$u_m(x, t) = [a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)] \sin(mx),$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$, resuelve la ecuación de onda. De ahí y en virtud de la linealidad, tenemos que

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^N [a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)] \sin(mx)$$

resuelve la ecuación de onda.

6. Por el literal anterior, intuimos que para una cuerda colocada en el eje x , de 0 a π , la función u ,

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)] \sin(mx),$$

es solución a la ecuación de onda. Ahora queremos encontrar la solución a la ecuación de onda, suponiendo que la forma inicial de la cuerda está dada por f , $f(x) = x(\pi - x)$ y que su velocidad inicial es cero ($\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$). Para ello desarrolla los siguientes literales:

a) Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Considera los casos en que $n = m$ y $n \neq m$ y encuentra:

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx)dx.$$

Consideremos el caso en que $m = n$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx)dx &= \int_0^{\pi} \text{sen}^2(nx)dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2nx)}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ahora consideremos el caso en que $n \neq m$,

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx)dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]}{2} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos[(m-n)x]}{2} dx - \int_0^{\pi} \frac{\cos[(m+n)x]}{2} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Con base en el literal anterior y para un n fijo, encuentra:

$$\int_0^{\pi} \left[\sum_{m=1}^N a_m \text{sen}(mx)\text{sen}(nx) \right] dx.$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \left[\sum_{m=1}^N a_m \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) \right] dx \\
 = & \underbrace{\int_0^\pi a_1 \operatorname{sen}(1x) \operatorname{sen}(nx) dx}_0 + \underbrace{\int_0^\pi a_2 \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen}(nx) dx}_0 + \dots + \\
 & \underbrace{\int_0^\pi a_n \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(nx) dx}_{a_n \frac{\pi}{2}} + \dots + \underbrace{\int_0^\pi a_N \operatorname{sen}(Nx) \operatorname{sen}(nx) dx}_0.
 \end{aligned}$$

De ahí, tenemos que

$$\int_0^\pi \left[\sum_{m=1}^N a_m \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) \right] dx = \frac{\pi}{2} a_n.$$

c) Del literal anterior vamos a intuir que

$$\int_0^\pi \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_m \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) \right] dx = \frac{\pi}{2} a_n.$$

A partir de ahí, retomemos el problema planteado de encontrar la ecuación de la forma de la cuerda en el tiempo, si esta se coloca en el eje x , de 0 a π , tiene una forma inicial dada por f , donde $f(x) = x(\pi - x)$ y parte el movimiento vertical con velocidad inicial cero.

Encuentra la solución a la ecuación de onda partiendo de su solución general al

problema,

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)] \text{sen}(mx).$$

De la primera condición inicial,

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{sen}(mx) = x(\pi - x).$$

Así, deberíamos buscar coeficientes a_m , $m \in \mathbb{N}$, tal que la superposición de funciones sinusoidales converja a $x(\pi - x)$. Es decir,

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{sen}(mx) = x(\pi - x).$$

Multiplicaremos la última igualdad por $\text{sen}(nx)$, con $n \in \mathbb{N}$, e integramos sobre $[0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) &= x(\pi - x) \text{sen}(nx) \\ \int_0^{\pi} \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) \right] dx &= \int_0^{\pi} x(\pi - x) \text{sen}(nx) dx \\ a_m \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi} x(\pi - x) \text{sen}(nx) dx \\ a_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \text{sen}(nx) dx \end{aligned}$$

$$a_m = \frac{2}{\pi n^3} [1 - (-1)^n]$$

$$a_m = \frac{4}{\pi n^3} [1 - (-1)^n].$$

Ahora encontramos los coeficientes b_m a través de la segunda condición inicial, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} [-ma_m \text{sen}(mt) + mb \cos(mt)] \text{sen}(mx)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} mb_m \text{sen}(mx) = 0$$

Para evitar la solución trivial tenemos que

$$b_m = 0.$$

De ahí, tenemos que

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3} [1 - (-1)^n] \cos(mt) \text{sen}(mx).$$

5.1.2. Tópicos de clase

Para dar solución al problema de la forma de onda de la cuerda en el tiempo, partiendo de una forma determinada en el inicio y modelizada con una función f , con $f(x) = x(\pi - x)$, no sinusoidal, hemos tenido que a través de una superposición infinita de funciones sinusoidales lograr que

$$x(\pi - x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{sen}(mx).$$

Para lo que tuvimos que determinar los coeficientes a_m para $m = 1, 2, 3, \dots$, valiéndonos del procedimiento, de multiplicar el sumatorio de infinitos términos por $\text{sen}(nx)$. De manera que el único elemento del sumatorio distinto a cero, se da cuando $m = n$. Este es el procedimiento al que llegó Fourier para poder dar solución al problema de la propagación del calor y matemáticos como Euler para resolver el problema de la cuerda.

Joseph Fourier encontró que, una función f definida para $-L \leq x \leq L$ y periódica con periodo $2L$, se puede igualar con la superposición

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\omega_0 x), \quad (5.1)$$

donde ω_0 es la frecuencia angular de f , $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$. Para ciertas condiciones de f , entre las cuales que, $\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx < \infty$, existen los coeficientes

$$a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$$

Precisamente lo que necesitaremos para encontrar dichos coeficientes son las siguientes

condiciones, llamadas condiciones de ortogonalidad, [30].

Teorema 5.1 (Condiciones de Ortogonalidad). *Sean n y m enteros no negativos, entonces se cumple lo siguiente:*

1.

$$\int_{-L}^L \cos(n\omega_0 x) \operatorname{sen}(m\omega_0 x) dx = 0.$$

2. Si $n \neq m$,

$$\int_{-L}^L \cos(n\omega_0 x) \cos(m\omega_0 x) dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \operatorname{sen}(m\omega_0 x) dx = 0.$$

3. Si $n \neq 0$,

$$\int_{-L}^L \cos^2(n\omega_0 x) dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2(n\omega_0 x) dx = L.$$

La demostración se efectúa a través de la integración, lo cual lo podemos efectuar en Maxima.

```
(% i1) declare(n, integer);
```

```
(% i2) declare(m,integer);
```

done

(% o2)

```
(% i3) integrate(cos(n*%pi/L*x)*sin(n*%pi/L*x),x,-L,L);
```

0

(% o3)

```
(% i4) integrate(cos(n*%pi/L*x)*cos(m*%pi/L*x), x, -L, L);
```

0

(% o4)

```
(% i5) integrate(sin(n*%pi/L*x)*sin(m*%pi/L*x), x, -L, L);
```

0

(% o5)

```
(% i6) integrate((cos(n*%pi/L*x))^2, x, -L, L);
```

```
L (% o6)
```

```
(% i7) integrate((sin(n*%pi/L*x))^2, x, -L, L);
```

```
L (% o7)
```

Vamos a empezar determinando el coeficiente a_0 y para ello integraremos la igualdad 5.1 sobre el intervalo $[-L, L]$. Consideremos que la serie converge para hacer lo siguiente:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L a_n \cos(n\omega_0 x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x) dx.$$

Por las condiciones de ortogonalidad tenemos que únicamente el primer término del lado derecho de la igualdad es distinto de cero. Por lo que,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = La_0,$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Determinemos ahora, los coeficientes a_m para $m \in \mathbb{N}$, para lo cual multipliquemos la igualdad 5.1 por $\cos(m\omega_0x)$ e integremos sobre el intervalo $[-L, L]$ para obtener que

$$\int_{-L}^L f(x) \cos(m\omega_0x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} a_0 \cos(m\omega_0x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L a_n \cos(n\omega_0x) \cos(m\omega_0x) dx \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L b_n \text{sen}(n\omega_0x) \cos(m\omega_0x) dx.$$

Del miembro derecho de la igualdad, la primera integral y el segundo sumatorio son cero. En el caso del primer sumatorio, todos los términos son cero exceptuando el caso en que $m = n$ y así obtenemos,

$$\int_{-L}^L f(x) \cos(m\omega_0x) dx = a_m L$$

y de ahí

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(m\omega_0x) dx.$$

Determinamos los coeficientes b_m para $m \in \mathbb{N}$ de manera similar, multiplicando 5.1 por $\text{sen}(m\omega_0x)$ e integrando,

$$\int_{-L}^L f(x) \text{sen}(m\omega_0x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} a_0 \text{sen}(m\omega_0x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L a_n \cos(n\omega_0x) \text{sen}(m\omega_0x) dx \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L b_n \text{sen}(n\omega_0x) \text{sen}(m\omega_0x) dx.$$

Del lado derecho, el primer término y la primera sumatoria son cero para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y la segunda sumatoria tiene sus términos iguales a cero exceptuando el caso en que $m = n$,

por lo que tenemos,

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}(m\omega_0 x) dx = b_m L$$

y finalmente

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}(m\omega_0 x) dx.$$

Llegamos así a la definición.

Definición 5.1 (Serie Clásica de Fourier). *Sea f una función tal que*

$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx < \infty$. Se define la serie de Fourier de f en $[-L, L]$, así

$$S_f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x),$$

donde $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$. Y sus coeficientes de Fourier en $[-L, L]$ son:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\omega_0 x) dx$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ y

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}(n\omega_0 x) dx.$$

para $n = 1, 2, \dots$

Hemos considerado para la definición de la serie de Fourier, la variable independiente x , por el contexto de la situación. Esta también podría ser t , que es habitual para designar el tiempo. En la segunda situación se hace así.

Consideremos un ejemplo para familiarizarnos.

Ejemplo 5.1. *Determinemos la serie de Fourier de la función f definida en el intervalo $[-1, 1]$ a través de la fórmula $f(x) = -x$.*

Tenemos que

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 (-x)^2 dx = 0 < \infty.$$

Por lo que podríamos encontrar su serie de Fourier. Determinemos los coeficientes de Fourier de f , teniendo en cuenta que $\omega_0 = \frac{\pi}{L} = \pi$. Tenemos que

$$a_0 = \int_{-1}^1 (-x) dx = 0,$$

$$a_n = \int_{-1}^1 (-x) \cos(n\pi x) dx = 0$$

y

$$b_n = \int_{-1}^1 (-x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^n}{\pi n}.$$

Por lo tanto la serie de Fourier de f es

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Veamos si en efecto la serie encontrada converge a la función f en $[-1, 1]$. Veámoslo intuitivamente a través de Maxima. Grafiquemos una suma parcial de la serie y a la vez la función f en $[-1, 1]$. Definamos en Maxima la función $S(c, x)$ que representará una suma parcial de

la serie de Fourier de f en $[-1,1]$, donde x es la variable independiente de f y c es el límite superior del sumatorio.

(% i1) S(c,x):=(2/%pi)*sum((-1)^n*n*sin(n*%pi*x),n,1,c) ;

$$S(c,x) := \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^c \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi x) \quad (\% o1)$$

Grafiquemos la serie de Fourier junto a la función f en el intervalo $[-1,1]$. En las figuras: 5, 6 y 7 se ven ambas para sumas parciales de la Serie de Fourier con 10, 20 y 50 términos.

La instrucción para los 10 términos es la que sigue, para 20 y 50 términos cambiaremos c por el valor correspondiente.

→ plot2d([-x,S(10,x)], [x,-1,1])\$

En este ejemplo podemos verificar intuitivamente que la serie de Fourier de f , converge a esta. Nos preguntamos en qué condiciones pasa esto. Dada la utilidad de las series de Fourier para la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales en el siglo XIX, propició indagaciones acerca de la convergencia de las series. El matemático Peter Gustav Lejeune-Dirichlet encontró las condiciones suficientes de f para la convergencia de su serie. Para enunciar los teoremas de convergencia, vamos a revisar dos definiciones: función continua a pedazos y función suave a pedazos, tomando como referencia [30].

Definición 5.2 (Función continua a pedazos). Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$ por $f(x)$. Se dice que f es continua a pedazos si

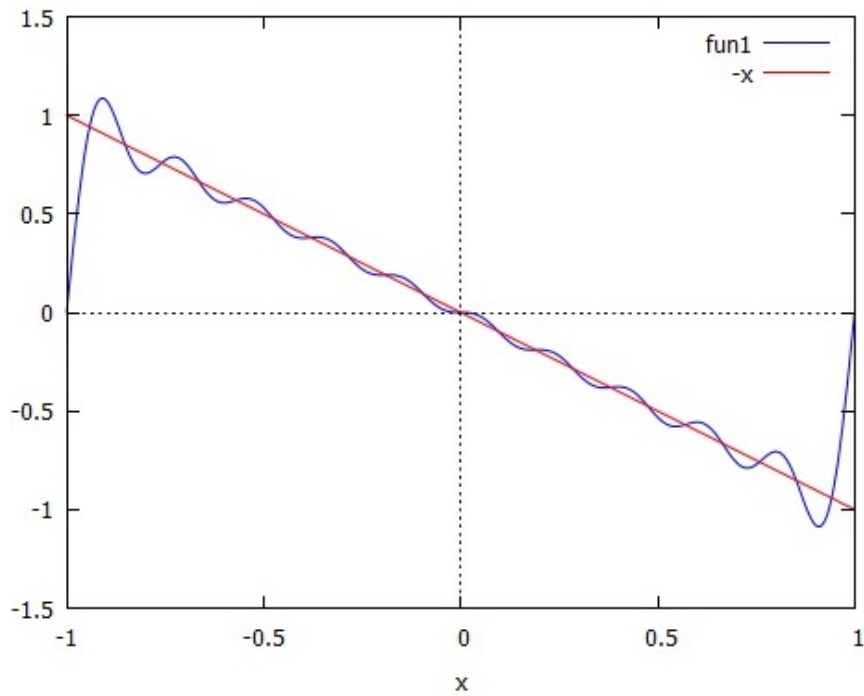


Figura 5. Suma parcial de la serie de Fourier con 10 términos de $f(x) = -x$ en $[-1,1]$.

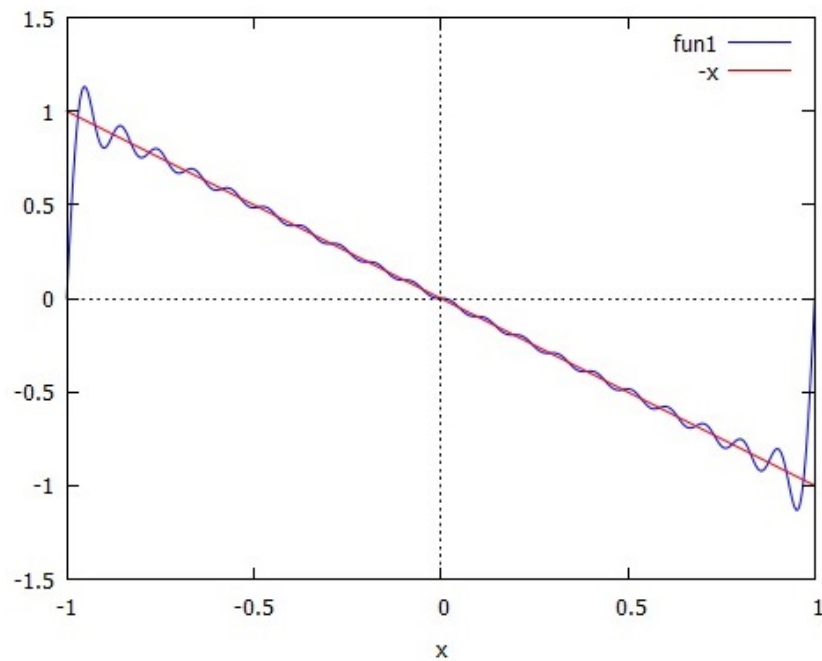


Figura 6. Suma parcial de la serie de Fourier con 20 términos de $f(x) = -x$ en $[-1,1]$.

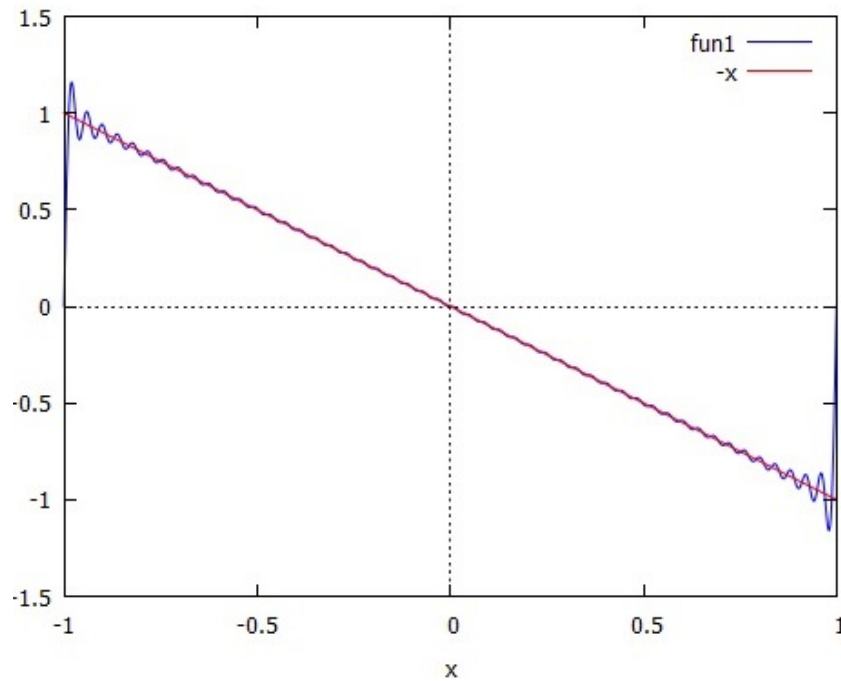


Figura 7. Suma parcial de la serie de Fourier con 50 términos de $f(x) = -x$ en $[-1, 1]$.

1. f es continua en $[a, b]$ exepcto en un número finito de puntos.
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) < \infty$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) < \infty$.
3. Si $x_0 \in (a, b)$ y $f(x)$ muestra una discontinuidad en x_0 , entonces $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \infty$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) < \infty$.

Un ejemplo de una función continua a pedazos es g , definida en $[-6, 3]$, por la fórmula

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -6 \leq x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \cos(x) & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

Definición 5.3 (Función suave a pedazos). *La función f es suave a pedazos en $[a, b]$ si esta y su derivada en $[a, b]$ son continuas a pedazos.*

Un ejemplo de una función suave a pedazos (tomado de [30]) es h , definida en $[-3, 4]$, por la fórmula

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ 1/x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Esto es así, puesto que h y h' son continuas a pedazos,

$$h'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -3 < x < 2 \\ -1/x^2 & \text{si } 2 < x < 4. \end{cases}$$

Usemos la siguiente notación para los límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} = f(x_0+)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} = f(x_0-)$$

Enunciemos el primer teorema de convergencia

Teorema 5.2 (Convergencia de series de Fourier). *Sea f una función suave a pedazos en el intervalo $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier de f en dicho intervalo para un $x \in [-L, L]$ converge a*

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

Es decir, que si en cierto valor en $[-L, L]$ se presenta una discontinuidad finita, la serie de Fourier converge al promedio de los límites laterales de la función. Y en caso de ser continua en un valor determinado, la serie converge a la evaluación de la función en dicho valor.

Hemos partido que la función a la cual se expandirá en una serie de Fourier es periódica, siendo su periodo $2L$ y su frecuencia angular, $\omega_0 = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$. Esto lo consideramos dado que la serie de Fourier de f , en caso de converger a f .

$$S_f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen(n\omega_0 x)$$

es periódica, con periodo $2L$. ¿Cómo la serie de Fourier converge en los extremos? Revisemos

dos definiciones, acerca de derivadas laterales, para presentar un teorema de convergencia en los extremos.

Definición 5.4 (Derivada derecha). *Sea f una función definida en al menos $c < x < c + r$, con $r \in \mathbb{R}^+$. Si $f(c+) < \infty$, se define la derivada derecha de f en c así*

$$f'_R(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c+)}{h}$$

Definición 5.5 (Derivada izquierda). *Sea f una función definida en al menos $c - r < x < c$, con $r \in \mathbb{R}^+$. Si $f(c-) < \infty$, se define la derivada izquierda de f en c así*

$$f'_L(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c-)}{h}$$

En caso de que f presente una discontinuidad en x_0 . La derivada derecha representa la tangente de la pendiente a la curva dada por f , en la cercanía por la derecha de x_0 y la derivada izquierda, la tangente de la pendiente a la curva dada por f , en la cercanía por la izquierda de x_0 .

El segundo teorema de convergencia referido a lo que pasará en los extremos es:

Teorema 5.3 (Teorema de convergencia). *Sea f una función continua a pedazos en $[-L, L]$.*

Se cumple que:

1. *Si f posee derivadas derecha e izquierda en $x \in [-L, L]$, entonces la serie de Fourier en*

$[-L, L]$ converge a

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

2. Si $f'_R(-L)$ y $f'_L(L)$ existen entonces la serie de Fourier de f en $[-L, L]$, converge tanto en $-L$ como en L a

$$\frac{1}{2}[f(-L+) + f(L+)].$$

Ejemplo 5.2. Consideremos la función f , definida en $[-3, 3]$ a través de la fórmula

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ 0 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Encontremos los coeficientes de Fourier para h en $[-3, 3]$ en Maxima

```
(% i12) declare(n,integer);
```

```
done
```

```
(% o12)
```

(% i13) a_0:1/3*(integrate(2*x,x,-3,-2)+integrate(x^2,x,1,3));

$$\frac{11}{9} \quad (a_0)$$

(% i14) a_n:1/3*(integrate(2*x*cos(n*pi*x/3),x,-3,-2)+integrate(x^2*cos(n*pi*x/3),x,1,3));

$$\frac{2 \left(\frac{6\pi n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 9 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{9(-1)^n}{\pi^2 n^2} \right) - \frac{(3\pi^2 n^2 - 54) \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 18\pi n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi^3 n^3} + \frac{54(-1)^n}{\pi^2 n^2}}{3} \quad (a_n)$$

(% i15) b_n:1/3*(integrate(2*x*sin(n*pi*x/3),x,-3,-2)+integrate(x^2*sin(n*pi*x/3),x,1,3));

$$\frac{2 \left(-\frac{9 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 6\pi n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{9(-1)^n}{\pi n} \right) - \frac{18\pi n \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + (54 - 3\pi^2 n^2) \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi^3 n^3}}{3} - \frac{(27\pi^2 n^2 - 54)(-1)^n}{\pi^3 n^3}$$

```
(% i16) S_h(x,c):=1/2*a_0+sum(a_n*cos(n*%pi*x/3),n,1,c)
+sum(b_n*sin(n*%pi*x/3),n,1,c);
```

$$S_h(x, c) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^c a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \sum_{n=1}^c b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \quad (\% \text{ o16})$$

Tenemos que $a_0 = 11/9$ y los coeficientes a_n, b_n tienen expresiones simbólicas más extensas. Definamos la función $S_h(x, c)$ que nos representa la Serie de Fourier de h , con x la variable independiente y c el límite superior del sumatorio.

```
(% i17) S_h(x,c):=1/2*a_0+sum(a_n*cos(n*%pi*x/3),n,1,c)
+sum(b_n*sin(n*%pi*x/3),n,1,c);
```

$$S_h(x, c) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^c a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \sum_{n=1}^c b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \quad (\% \text{ o17})$$

Grafiquemos tanto la función h como la serie de Fourier de h , tomando sumas parciales de 20 términos (Figura 8).

```
(% i18) wxplot2d([h(x),S_h(x,10)],[x,-3,3]);
```

Veamos a qué valores converge la serie de Fourier de h en los dos puntos de discontinuidad: -2 y 1 . Dado que h presenta un número finito de discontinuidades que son a la vez finitas, tenemos que:

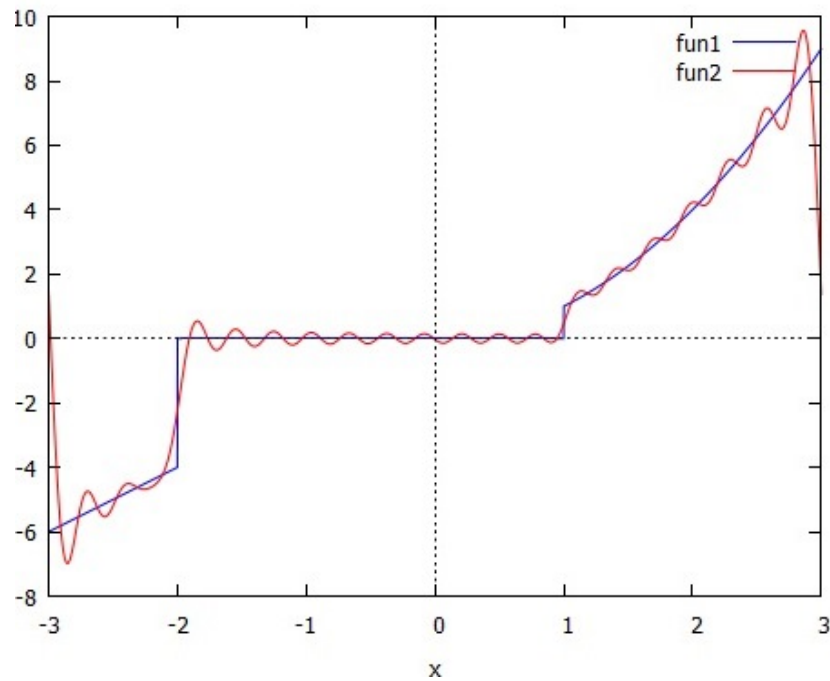


Figura 8. Gráfica de la función h con su serie de Fourier (Ejemplo 5.2)

La serie de Fourier de h en $[-3, 3]$ converge en $x = -2$ a

$$\frac{1}{2}[h(-2+) + h(-2-)] = \frac{1}{2}[0 + (2)(-2)] = -2$$

y en $x = 1$ a

$$\frac{1}{2}[h(1+) + h(1-)] = \frac{1}{2}[1 + 0] = \frac{1}{2}.$$

Verifiquemósllo en Maxima, evaluando $S_h(x, c)$ en $x = -2$ y $x = 1$, con un número de términos de los sumatorios de $c = 10$, $c = 100$ y $c = 1000$. Tenemos para $x = -2$:

```
(% i22) float(S_h(-2,10));  
float(S_h(-2,100));  
float(S_h(-2,1000));  
  
-2,106853628041945      (% o20)  
  
-2,006608529680503     (% o21)  
  
-2,000613272341714     (% o22)
```

Y para $x = 1$

```
(% i25) float(S_h(1,10));  
float(S_h(1,100));  
  
0,8222162071585952     (% o23)  
  
0,5335073044450652     (% o24)
```

```
(% i25) float(S_h(1,1000));
```

```
0,5033631926660322
```

```
(% o25)
```

Por último tenemos que tanto en $x = -3$ y $x = 3$, la serie de Fourier de h en $[-3, 3]$ converge

a

$$\frac{1}{2}[h(-3+) + h(3-)] = \frac{1}{2}[-6 + 9] = \frac{3}{2}.$$

Verifiquemóslo con Maxima, para $x = -3$

```
(% i28) float(S_h(-3,100));
```

```
float(S_h(-3,1000));
```

```
float(S_h(-3,10000));
```

```
1,489560795450111
```

```
(% o26)
```

```
1,49896672849746
```

```
(% o27)
```

```
1,499896780264959      (% o28)
```

y para $x = 3$

```
(% i31) float(S_h(3,100)); float(S_h(3,1000)); float(S_h(3,10000));
```

```
1,489560795450111      (% o29)
```

```
1,49896672849746      (% o30)
```

```
1,499896780264959      (% o31)
```

Concluimos este repaso, advirtiendo del fenómeno de Gibbs a partir del ejemplo anterior. Podemos observar en la figura 8 que existe un leve levantamiento en los extremos, esto es, en $x = -3$ y $x = 3$, donde se presentan las discontinuidades de salto. Esperaríamos que estos levantamientos o picos disminuyan conforme hagamos crecer el número de términos de los sumatorios. Veamos a través de las siguientes dos figuras de la misma serie de Fourier de h ,

con 50 y 100 términos en sus sumatorios, si efectivamente sucede esto.

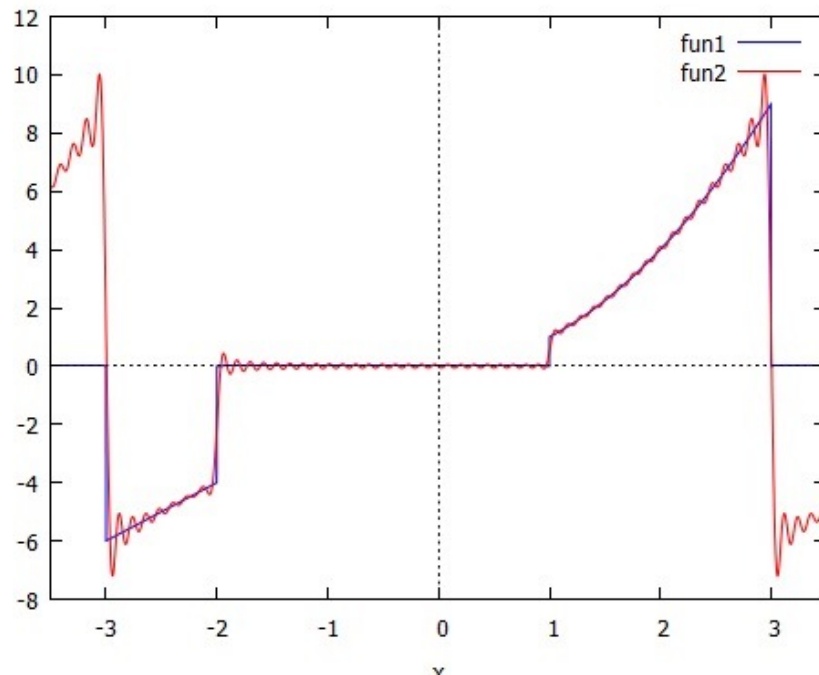


Figura 9. Gráfica de la función h y su serie de Fourier con 50 términos en las sumas parciales(Ejemplo 5.2)

Vemos que la serie de Fourier de h converge a la función en los sitios con continuidad, sin embargo, los picos se mantienen e incluso se pronuncian más en las discontinuidades de salto. Este comportamiento es conocido como el fenómeno de Gibbs en honor a Josiah Willard Gibbs quién fue el matemático quien lo explicó.

Una de las condiciones para encontrar la serie de Fourier en un intervalo I , es que sea cuadrado integrable en I o de energía finita(Definición 3.14); es decir, $\int_I |f(t)|^2 < \infty$ para $t \in I$. En la siguiente situación vamos estudiar la Serie de Fourier en forma general, que es posible que un espacio euclidiano sea generado por cierta base hilbertiana. Visto así en forma general, para llegar a lo particular que vienen a ser las mismas series de Fourier clásicas y otras.

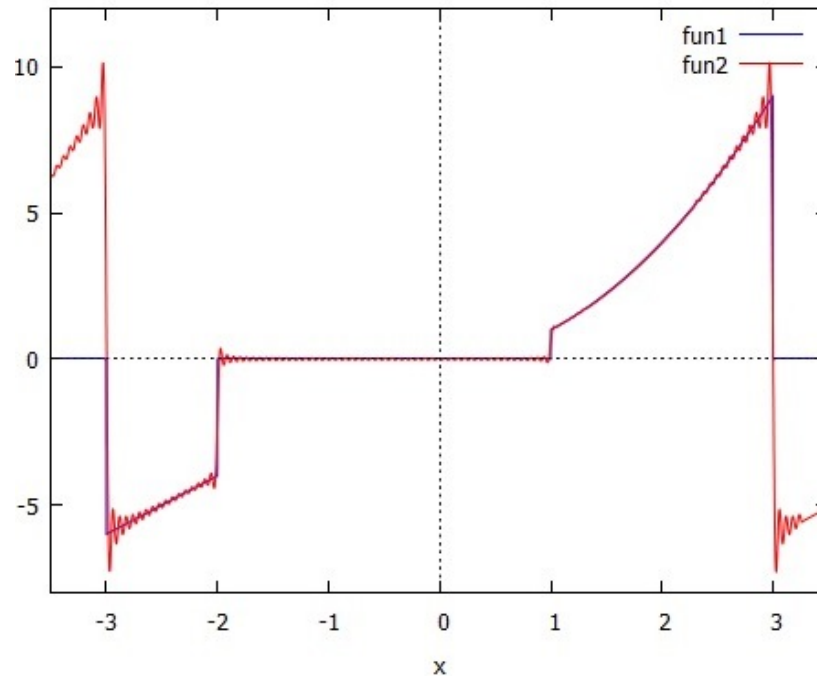


Figura 10. Gráfica de la función h y su serie de Fourier con 100 términos en las sumas parciales (Ejemplo 5.2)

5.2. Serie generalizada de Fourier

5.2.1. Situación-problema

De la primera situación se ha visto que para una función f cuadrado integrable en el intervalo $[-\pi, \pi]$, esto es $f \in L^2([-\pi, \pi])$, existen las sucesiones de funciones $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n S_n$$

donde, para $t \in [-\pi, \pi]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n(t) = \cos(nt)$$

y

$$S_n(t) = \text{sen}(nt)$$

y los llamados coeficientes de Fourier se calculan así:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(t) dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(t) dt.$$

Lo que constituyen las Series clásicas de Fourier, [27]. Ahora supongamos que para una función cuadrado integrable en I , $f \in L^2(I)$, existe una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que hace el papel de las sucesiones de funciones sinusoidales en la Serie clásica de Fourier, tal que podamos escribir

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n.$$

Es decir para $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(t),$$

donde

$$\alpha_n = \int_I f(t) f_n(t) dt. \quad (5.2)$$

1. A partir del procedimiento para el cálculo de los coeficientes de Fourier de la situación anterior, averigua cuál debe ser la naturaleza de la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para

que el cálculo de los coeficientes de Fourier α_n sea como el que se establece en 5.2 y prueba dicha expresión.

Para averiguar sobre la naturaleza de la sucesión de funciones

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que permita escribir una función $f \in L^2(I)$, así:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$$

y a la vez encontrar la expresión para los coeficientes de Fourier α_n , vamos a proceder de la misma forma que para los coeficientes en la Serie clásica de Fourier. Partimos que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(t),$$

para $t \in I$. Multiplicamos en ambos lados de la igualdad por el elemento m -ésimo de la sucesión evaluado en t , $f_m(t)$

$$f(t)f_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(t)f_m(t).$$

Si suponemos que la serie converge, integramos sobre el intervalo I

$$\int_I f(t)f_m(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I \alpha_n f_n(t)f_m(t)dt.$$

Nuestro propósito es reducir la sumatoria del lado derecho a un término como se hizo en las Series clásicas de Fourier, gracias a la ortogonalidad de las funciones sinusoidales. Por lo que, es conveniente que la naturaleza de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sea tal que

$$\int_I f_n(t)f_m(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

esto es, la sucesión deberá ser ortonormal para facilitar el cálculo de los coeficientes de Fourier.

Así, el coeficiente n -ésimo de Fourier depende únicamente de la función f y el elemento n -ésimo de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que es lo que muestra la expresión,

$$\alpha_n = \int_I f(t)f_n(t)dt.$$

2. Se define el producto escalar entre dos funciones cuadrado integrables $f, g \in L^2(I)$, así

$$(f, g) = \int_I f(t)g(t)dt$$

Prueba que el producto escalar entre funciones cuadrado integrables es tal que para

toda $f, g, h \in L^2(I)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que:

- $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$
- $(f, g) = (g, f)$
- $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$
- $(f, f) \geq 0$
- $(f, f) = 0$ ssi $f = 0$

Queremos acercar las condiciones que tiene un producto escalar, partiendo del caso específico de Espacios Funcionales. Por lo que, definido el producto escalar entre funciones cuadrado integrables y aplicando las propiedades de la integral de Riemann, probaremos:

- $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$

$$\begin{aligned} (f + g, h)(t) &= \int_I [f(t) + g(t)]h(t)dt \\ &= \int_I f(t)h(t)dt + \int_I g(t)h(t)dt \\ &= (f, h)(t) + (g, h)(t) \end{aligned}$$

- $(f, g) = (g, f)$

$$(f, g)(t) = \int_I f(t)g(t)dt$$

■

$$\begin{aligned} &= \int_I g(t)f(t)dt \\ &= (g, f)(t) \end{aligned}$$

■ $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$

$$\begin{aligned} (\alpha f, g) &= \int_I \alpha f(t)g(t)dt \\ &= \alpha \int_I f(t)g(t)dt \\ &= \alpha(f, g)(t) \end{aligned}$$

■ $(f, f) \geq 0$.

Como estamos considerando funciones cuadrado integrables de variable real, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $f^2(t) \geq 0$. Por lo que se tiene

$$\begin{aligned} (f, f)(t) &= \int_I f(t)f(t)dt \\ &= \int_I f^2(t)dt \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\blacksquare (f, f) = 0 \text{ ssi } f = 0$$

Probaremos que si $(f, f) = 0$ entonces $f = 0$, la cual quedará demostrada a través de la proposición contrarrecíproca, esto es, si $f \neq 0$ entonces $(f, f) \neq 0$. Si $f \neq 0$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ entonces para $t \in I$ se tiene que $f^2(t) > 0$ y en consecuencia $\int_I f^2(t) dt > 0$, es decir,

$$\int_I f^2(t) dt \neq 0,$$

lo cual demuestra lo que queríamos.

Por último es de demostración inmediata que si $f = 0$ entonces $(f, f) = 0$.

3. El producto escalar lo extendemos a elementos de un Espacio Vectorial.

Sea V un espacio vectorial. El producto escalar es la aplicación

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumplen las mismas condiciones que en el caso particular de funciones cuadrado integrables.

$$\blacksquare (u + v, w) = (u, w) + (v, w)$$

- $(u, v) = (v, u)$
- $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$
- $(u, u) \geq 0$
- $(u, u) = 0$ ssi $u = 0$.

Ahora extendamos las Series de Fourier para poder expandir cualquier elemento, $v \in V$ de un espacio vectorial provisto con producto escalar, en términos de una sucesión de vectores $(u_n)_{n \in \mathbb{R}}$, así,

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n,$$

donde

$$\alpha_n = (v, u_n). \quad (5.3)$$

Averigua cuál debe ser la naturaleza de la sucesión de vectores $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para que el cálculo de los coeficientes de Fourier α_n sea como el que se establece en 5.3 y prueba dicha expresión.

Finalmente, para averiguar la naturaleza de la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vamos a determinar el producto escalar entre el vector v y el elemento m -ésimo de la sucesión, u_m . Gracias a las condiciones que cumple el producto escalar se tiene:

$$\begin{aligned}
 (v, u_m) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, u_m \right) \\
 &= (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \dots, u_m) \\
 &= (\alpha_1 u_1, u_m) + (\alpha_2 u_2, u_m) + (\alpha_3 u_3, u_m) + \\
 &\quad \dots (\alpha_m u_m, u_m) + \dots \\
 &= \alpha_1 (u_1, u_m) + \alpha_2 (u_2, u_m) + \alpha_3 (u_3, u_m) + \\
 &\quad \dots \alpha_m (u_m, u_m) + \dots
 \end{aligned}$$

Nuevamente por facilidad para el cálculo de los coeficientes de Fourier, conviene que la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sea tal que

$$(u_n, u_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

De esa manera tenemos que el coeficiente n -ésimo de Fourier se calcula efectivamente así,

$$\alpha_n = (v, u_n).$$

5.2.2. Tópicos de clase

En la situación-problema se ha hecho notar, en el caso de las funciones cuadrado integrables como en los vectores en general, la importancia de que el producto escalar de un conjunto de vectores sea distinto de cero, únicamente en el caso en que $n = m$, condición que cumplen los conjuntos ortogonales. Este concepto es atribuible a Espacios Euclidianos y su caracterización comprende el estudio de una estructura anterior que es la de espacio normado, revisémoslas.

Recordemos la definición 3.9. Un espacio normado es un conjunto con la estructura de espacio vectorial y donde es posible "medir" sus elementos, a través de una aplicación que se define para los elementos de dicho conjunto.

Algunos ejemplos de espacios normados, tomados de [19]:

- \mathbb{R} .

El cuerpo de los números reales tiene la estructura de un espacio vectorial, donde podemos medir sus elementos con alguna norma, que podría ser el valor absoluto. Se puede probar que la norma al ser el valor absoluto cumple con las cuatro condiciones anotadas.

Por lo tanto, \mathbb{R} es un espacio normado.

- \mathbb{R}^3 .

Los elementos de \mathbb{R}^3 que vienen a ser vectores cumplen las condiciones para ser un espacio vectorial. La norma inmediata es la que mide cada vector a través de sus componentes por medio del Teorema de Pitágoras y que en efecto es norma al cumplir las

cuatro condiciones.

- El espacio de funciones continuas en $I \subseteq \mathbb{R}$, $C(I)$. Si sobre este se define la norma para $f \in C(I)$,

$$\|f\| := \max_{t \in I} |f(t)|,$$

$C(I)$ es un espacio normado.

- El espacio $L^2(I)$. El espacio $L^2(I)$ es un espacio vectorial sobre el cual podemos definir una norma para $f \in L^2(I)$ así:

$$\|f\| := \int_I |f(t)|^2 dt.$$

En esta situación estudiada pudimos constatar que la naturaleza de la base que genera un conjunto determinado debe de cumplir cierta condición. Dicha condición se definió por medio de una aplicación, llamada producto interno o escalar, propia de un espacio vectorial denominado euclidiano, lo que se definió en 3.10. Algunos ejemplos de estos espacios son:

- \mathbb{R}^3 . Como se revisó, \mathbb{R}^3 es un espacio vectorial. Se puede definir el producto escalar acostumbrado para vectores en el espacio; esto es, el producto definido como la suma del producto de las componentes de dos vectores. Se podría probar que dicho producto es en efecto producto escalar.
- El espacio $L^2(I)$. Así mismo, hemos revisado que $L^2(I)$ es un espacio vectorial, sobre el

cual podemos definir el producto interno entre $f, g \in L^2(I)$

$$(f, g) := \int_I f^*(t)g(t)dt, \quad (5.4)$$

para cualquier $t \in I$. Dicho producto interno cumple efectivamente con las cinco propiedades requeridas para serlo. En caso de que f, g sean funciones de variable real, tenemos que $f^*(t) = f(t)$ y el producto interno que da así:

$$(f, g) := \int_I f(t)g(t)dt. \quad (5.5)$$

Se podría a través del producto interno de un espacio euclidiano V , definir una norma para todo $f \in V$, así

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)},$$

tal que, por medio de las cinco condiciones de producto interno se pruebe que se verifican las cuatro de norma. Lo que equivale a decir que, todo espacio euclidiano es normado. O también podemos colegir que existen espacios que son normados, pero cuyas normas no provienen de productos internos. Un ejemplo de ese caso, es el espacio de funciones continuas en $I \subseteq \mathbb{R}$, $C(I)$ que no es euclidiano.

En la primera situación, verificamos que la base trigonométrica para el espacio $L^2(I)$, es tal que, para expresar una función $f \in \mathbb{R}$, el cálculo del coeficiente n -ésimo de Fourier de f , depende únicamente de la n -ésima componente de la base trigonométrica y de la función

f . Esta cierta “comodidad” para el cálculo de los coeficientes de Fourier es debido a estar dotada dicha base de la condición de ortogonalidad que nos será de utilidad. La definición de Conjuntos Ortogonales y Ortonormales está dada en 3.15.

La sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto cuyos elementos al superponerse construyen cada uno de los vectores v del espacio vectorial provisto con producto interno. Este concepto comprende lo que es una base de Schauder (definido en 3.16) y base hilbertiana.

Definición 5.6 (Base Hilbertiana). *Si V es un espacio euclidiano. La sucesión $B = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ es una base ortogonal, si B es una base de Schauder de V y B es ortogonal. Si a la vez B es ortonormal, se dice que B es una base Hilbertiana, [27].*

De manera que en la situación-problema, la sucesión de vectores $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debería ser una base hilbertiana para “facilitar” el cálculo de los coeficientes de Fourier y garantizar que podamos escribir un vector como una superposición de elementos de una base. Por lo que, la ortonormalidad de una base es de importancia. Recordemos un método para construir un conjunto ortonormal a partir de un conjunto linealmente independiente, que es el proceso de Gram-Schmidt. Dicho Teorema se establece en 3.6

Vistos estos conceptos, estudiaremos un teorema que aborda las Series de Fourier en forma general y la manera de calcular los coeficientes de Fourier.

Teorema 5.4 (Serie de Fourier General). *Sea V un espacio euclidiano y $B = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base Hilbertiana de V . Se tiene que para $v \in V$, existe la sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que*

v se escribe en una expansión en Serie de Fourier, así:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \quad (5.6)$$

donde para todo $n \in \mathbb{N}$ el coeficiente n -ésimo de Fourier está dado por:

$$\alpha_n = (v, u_n). \quad (5.7)$$

Y también se cumple la igualdad de Parseval

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2.$$

La igualdad 5.6 se conoce como ecuación de síntesis, en tanto que 5.7 como ecuación de análisis.

Vamos a revisar dos demostraciones para este teorema, tomadas de [1] y [27]. En la primera destacamos a la serie de Fourier como una forma de aproximar una función a través de un espacio funcional que viene a ser un espacio de Hilbert y la otra es una derivación más abstracta.

Demostración. Vamos a suponer en particular que V es un espacio euclidiano funcional y B es una base hilbertiana para V . Supongamos que $v \in V$ es aproximado por $v_m \in V$ para $t \in I \subseteq \mathbb{R}$,

a través de la superposición ponderada de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$v_m = \sum_{i=n_1}^{n_2} \alpha_i u_i. \quad (5.8)$$

Queremos que la distancia entre v y v_m , $\|v - v_m\|_2^2$, sea mínima. Si definimos la función de error entre v y v_m como E que depende de los coeficientes $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2-1}, \alpha_{n_2}$ entonces lo que trataremos de minimizar es E , dada así:

$$E(\alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2-1}, \alpha_{n_2}) = \|v(t) - v_m(t)\|_2^2 = \int_I |v(t) - v_m(t)|^2 dt \quad (5.9)$$

Sustituyamos 5.8 en 5.9

$$E(\alpha) = \int_I \left| v(t) - \sum_{i=n_1}^{n_2} \alpha_i u_i(t) \right|^2 dt, \quad (5.10)$$

donde el vector $\alpha = [\alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2-1}, \alpha_{n_2}]^T$.

Para minimizar la función de error es necesario que el gradiente de la función de error sea cero, es decir,

$$\nabla E(\alpha) = \mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]^T.$$

Por lo tanto, para $n = n_1, \dots, n_2$ se debe cumplir que,

$$\frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha_n} = 0.$$

Así, es necesario que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_n} \int_I \left| v(t) - \sum_{i=n_1}^{n_2} \alpha_i u_i(t) \right|^2 dt = 0.$$

Teniendo presente que $\frac{d|x|}{dx} = 2x$, el siguiente desarrollo nos permite averiguar la condición para que se cumpla lo requerido

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \int_I \left| v(t) - \sum_{i=n_1}^{n_2} \alpha_i u_i(t) \right|^2 dt &= \int_I 2 \left[v(t) - \sum_{i=n_1}^{n_2} \alpha_i u_i(t) \right] [-u_n(t)] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

De ahí, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_I v(t) u_n(t) dt &= \int_I \sum_{i=n_1}^{n_2} \alpha_i u_i(t) u_n(t) dt \\ &= \sum_{i=n_1}^{n_2} \int_I \alpha_i u_i(t) u_n(t) dt. \end{aligned}$$

Puesto que para $i, n \in \{n_1, \dots, n_2\}$, $u_i, u_n \in B$, B base hilbertiana de V ; se cumple que $u_i u_n = \delta_{in}^1$ y por lo tanto,

$$\alpha_n = \int_I v(t) u_n(t) dt.$$

Por la definición de producto interno, para $n \in \{n_1, \dots, n_2\}$, se cumple que

$$\alpha_n = (v, u_n). \quad (5.11)$$

¹ La función delta de Kronecker se define así: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Falta por probar que el resultado que hemos obtenido en efecto minimiza la distancia entre v y v_m . Para ello, deberemos constatar que la matriz hessiana es definida positiva, es decir, que sus valores propios son positivos. La matriz hessiana de la función E está dada así:

$$H(E(\alpha)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial^2 \alpha_{n_1}} & \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_{n_1} \partial \alpha_{n_1+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_{n_1} \partial \alpha_{n_2}} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_{n_1+1} \partial \alpha_{n_1}} & \frac{\partial^2 E}{\partial^2 \alpha_{n_1+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_{n_1+1} \partial \alpha_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_{n_2} \partial \alpha_{n_1}} & \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_{n_2} \partial \alpha_{n_1+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial^2 \alpha_{n_2}} \end{pmatrix}$$

Retomando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha_n} &= -2 \left[\int_I v(t)u_n(t)dt - \int_I \sum_{i=n_1}^{n_2} \alpha_i u_i(t)u_n(t)dt \right] \\ &= -2 \int_I v(t)u_n(t)dt + \sum_{i=n_1}^{n_2} 2\alpha_i \int_I u_i(t)u_n(t)dt \\ &= -2 \int_I v(t)u_n(t)dt + 2\alpha_n \end{aligned}$$

Tenemos que para $k \in \{n_1, \dots, n_2\}$,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_n \partial \alpha_k} = \begin{cases} 2 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Por lo tanto, la matriz hessiana queda así:

$$H(E(\alpha)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Como los elementos de la diagonal son todos positivos, se infiere así, que los coeficientes α_n se determinan por 5.11 y de esa manera se garantiza que la aproximación de v por v_m sea la mejor.

Otra demostración consiste en considerar las propiedades del producto interno aplicada a la base ortonormal B . El siguiente desarrollo demuestra también lo que se quiere.

$$\begin{aligned} (v, u_n) &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m, u_n \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m u_m, u_n) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (u_m, u_n) \\ &= \alpha_n (u_n, u_n) \\ &= \alpha_n. \end{aligned}$$

Y la igualdad de Parseval quedaría demostrada así:

$$\begin{aligned}
 \|v\|^2 &= (v, v) \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n u_n, \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (u_n, \alpha_n u_n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2.
 \end{aligned}$$

□

Este último teorema nos establece que si conocemos que un conjunto es euclidiano y posee alguna base hilbertina, entonces sus elementos se pueden escribir como una superposición ponderada infinita como lo revisado anteriormente. Ahora lo que nos interesa es expandir los elementos del espacio L^2 de esa manera. Para ello, deberemos conocer únicamente que L^2 posee bases hilbertinas, ya que conocemos que es un espacio euclidiano. Los dos teoremas que los revisamos a continuación nos encamina en tal propósito, conociendo la existencia de bases Hilbertianas para el espacio $L^2(I)$, [27]. Estos dos teoremas son 3.4 y 3.5.

Los últimos dos teoremas tienen una potencia tal que, nos aseguran que el espacio L^2 al ser separable posee bases hilbertianas y en consecuencia podemos buscarlas para poder expresar cualquier función de L^2 como una superposición infinita ponderada, como lo establece 5.6. A continuación revisemos una de estas bases hilbertianas para L^2 .

Series de Fourier clásicas

Revisada la serie de Fourier generalizada, nos interesa escribir una función $f \in L^2(I)$ como una superposición como la ecuación de síntesis 5.6. Postulemos la siguiente sucesión como una posible base hilbertiana, $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$s_n(t) = e^{in\omega_0 t}, \quad (5.12)$$

las cuales están armónicamente relacionadas con el periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Averigüemos si esta sucesión es ortogonal, por medio de la definición de producto interno dada en la igualdad 5.4.

Sean $m, l \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (s_l(t), s_m(t)) &= \int_T^{t_0+T} s_l^*(t) s_m(t) dt \\ &= \int_T^{t_0+T} (e^{il\omega_0 t})^* e^{im\omega_0 t} dt \\ &= \int_T^{t_0+T} e^{-il\omega_0 t} e^{im\omega_0 t} dt, \end{aligned}$$

de donde

$$(s_l(t), s_m(t)) = \int_T^{t_0+T} e^{i(n-l)\omega_0 t} dt. \quad (5.13)$$

Si $l = m$ entonces

$$(s_l(t), s_m(t)) = \int_T^{t_0+T} e^{i(0)\omega_0 t} dt = T. \quad (5.14)$$

Con lo que tenemos que la norma

$$\|s_m(t)\|^2 = (s_m(t), s_m(t)) = T. \quad (5.15)$$

Si $l \neq m$ tenemos

$$\begin{aligned} (s_l(t), s_m(t)) &= \int_T^{t_0+T} e^{i(m-l)\omega_0 t} dt \\ &= \frac{e^{i(m-l)\omega_0 t}}{i(m-l)\omega_0} \Big|_{t_0}^{t_0+T} \\ &= \frac{e^{i(m-l)\omega_0 t_0} [e^{i(m-l)\omega_0 T} - 1]}{i\omega_0(m-l)} \end{aligned}$$

Puesto que $\omega_0 T = 2\pi$ tenemos que

$$(s_l(t), s_m(t)) = \frac{e^{i(m-l)\omega_0 t_0} [e^{i(m-l)2\pi} - 1]}{i\omega_0(m-l)} = 0.$$

Así queda demostrada que la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es ortogonal. Faltaría demostrar que esta engendra un espacio de Hilbert; es decir, que resulta una base hilbertiana. Dicha prueba queda fuera del alcance de la propuesta. Con lo anterior escribimos el teorema siguiente:

Teorema 5.5 (Series de Fourier en forma compleja). *La sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ definida por*

$$s_n(t) = e^{in\omega_0 t},$$

representa una base hilbertiana para el espacio $L^2([t_0, t_0 + T], \mathbb{C})$. Por lo tanto, para $f \in L^2([t_0, t_0 +$

$T], \mathbb{C})$ se tiene que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad (5.16)$$

donde $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y los coeficientes de Fourier c_n quedan así:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-in\omega_0 t} f(t) dt. \quad (5.17)$$

Tenemos de la misma forma que en la serie generalizada de Fourier que, 5.16 representa la ecuación de síntesis, mientras que 5.17 la ecuación de análisis.

Revisemos una propiedad para c_n que nos será útil para escribir la serie de Fourier de forma armónica.

Proposición 5.1 (Simetría conjugada para c_n). *Para los coeficientes de Fourier complejos, c_n , de la función $f \in L^2([t_0, t_0 + T], \mathbb{R})$ se cumple la simetría conjugada o hermítica, dada así:*

$$c_{-n} = c_n^*$$

Demostración. Considerando que para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$az_1^* = (az_1)^*$$

y

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

Retomando 5.17 y suponiendo que $f \in L^2([t_0, t_0 + T], \mathbb{R})$, desarrollamos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 c_{-n} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{in\omega_0 t} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [e^{-in\omega_0 t} f(t)]^* dt \\
 &= \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-in\omega_0 t} f(t) dt \right]^* \\
 &= c_n^*.
 \end{aligned}$$

□

Otra manera de representar las series de Fourier es la que se obtiene con el siguiente desarrollo, teniendo presente que para $z \in \mathbb{C}$ se cumple $z + z^* = 2\Re[z]$ y los coeficientes complejos $c_n = |c_n|e^{i\theta_n}$.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [[c_n e^{in\omega_0 t}]^* + c_n e^{in\omega_0 t}] \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\Re[c_n e^{in\omega_0 t}] \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n),
 \end{aligned}$$

donde $\bar{c}_n = 2|c_n|$ posee valores reales. A c_0 se le conoce en ingeniería como la componente

de CD (Corriente Directa) de la señal al ser modelizada por f , [1]. Se puede escribir también la serie de Fourier así:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad (5.18)$$

que es la representación que permite encontrar las componentes armónicas de f , las cuales tienen una frecuencia de $k\omega_0$, para $k \in \mathbb{R}$; magnitud \bar{c}_n y fase θ_n .

Para llegar a la serie de Fourier en la forma en la que llegamos en la primera situación, retomemos 5.16, recordemos la identidad de Euler $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$ y para f considerada en el mismo contexto, tenemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} [\cos(n\omega_0 t) - i\text{sen}(n\omega_0 t)] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\cos(n\omega_0 t) + i\text{sen}(n\omega_0 t)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n + c_{-n}] \cos(n\omega_0 t) + i \sum_{n=1}^{\infty} [c_n - c_{-n}] \text{sen}(n\omega_0 t). \end{aligned}$$

En virtud de la simetría conjugada para c_n ,

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n + c_n^*] \cos(n\omega_0 t) + i \sum_{n=1}^{\infty} [c_n - c_n^*] \text{sen}(n\omega_0 t) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\Re[c_n] \cos(n\omega_0 t) - \sum_{n=1}^{\infty} 2\Im[c_n] \text{sen}(n\omega_0 t). \end{aligned}$$

Si hacemos que $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $a_n = 2\Re[c_n]$ y $b_n = 2\Im[c_n]$; llegamos a la representación de la serie de Fourier en forma trigonométrica, lo revisado en la primera situación¹.

¹ En la primera situación hemos considerado a la variable independiente de la serie de Fourier, x , por su contexto; mientras que ahora ocupamos t . Podemos ocupar las dos variables, pues podemos tener periodicidad espacial o temporal.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t),$$

donde los coeficientes de Fourier a_n y b_n , para $n = 0, 1, 2, \dots$ quedan determinados así:

$$a_n = \frac{(\cos(n\omega_0 t), f(t))}{\|\cos(n\omega_0 t)\|^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

y

$$b_n = \frac{(\operatorname{sen}(n\omega_0 t), f(t))}{\|\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\|^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt.$$

Además,

$$a_n = c_n + c_n^*$$

$$b_n = i[c_n - c_n^*].$$

Anotamos las siguientes propiedades que cumple la serie de Fourier, y presentamos sus pruebas.

Proposición 5.2. Propiedades de la Serie de Fourier

Sean las funciones $f, f_1, f_2 \in L^2([-T, T])$, periódicas con periodo T y con coeficientes de Fourier complejos asociados c_n, c_{1n}, c_{2n} para $n \in \mathbb{Z}$, respectivamente. Se cumple lo siguiente:

■ *Linealidad:*

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Los coeficientes de Fourier asociados a $[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2](t)$ son $\alpha_1 c_{1n} + \alpha_2 c_{2n}$.

Demostración. Supongamos que $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, de manera que sus coeficientes de Fourier complejos, gracias a 5.17, están dados así:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-in\omega_0 t} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-in\omega_0 t} \alpha_1 f_1(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-in\omega_0 t} \alpha_2 f_2(t) dt \\ &= \alpha_1 \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-in\omega_0 t} f_1(t) dt + \alpha_2 \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-in\omega_0 t} f_2(t) dt \end{aligned}$$

y de ahí tenemos que

$$c_n = \alpha_1 c_{1n} + \alpha_2 c_{2n}$$

□

■ *Simetría par:*

Si $f(t) = f(-t)$ para $t \in [-T, T]$ entonces los coeficientes de Fourier complejos de f , $c_n \in \mathbb{R}$ y están dados por:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt.$$

Demostración. Por 5.17 y considerando que $t_0 = -\frac{T}{2}$,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-in\omega_0 t} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{-in\omega_0 t} f(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-in\omega_0 t} f(t) dt \right] \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} e^{in\omega_0 t} f(-t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-in\omega_0 t} f(t) dt \right] \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [e^{in\omega_0 t} f(-t) + e^{-in\omega_0 t} f(t)] dt
 \end{aligned}$$

y dado que la función es par,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) [e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}] dt \\
 c_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt.
 \end{aligned}$$

□

■ *Simetría impar:*

Si $f(t) = -f(-t)$ para $t \in [-T, T]$ entonces los coeficientes de Fourier complejos de f ,

$c_n \in i\mathbb{R}$ y están dados por:

$$c_n = \frac{-2i}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt.$$

Demostración. A partir de la prueba anterior, teníamos que

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [e^{in\omega_0 t} f(-t) + e^{-in\omega_0 t} f(t)] dt$$

y considerando que la función es impar,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) [-e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}] dt \\ c_n &= \frac{-2i}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

□

■ *Desplazamiento temporal:*

Sea $\tau \in \mathbb{R}$. Los coeficientes de Fourier complejos asociados a $f(t - \tau)$ son

$$e^{-in\omega_0 \tau} c_n$$

Demostración. Sea c'_n los coeficientes complejos de Fourier de $f(t - \tau)$ y al hacer el cambio de variable, $u = t - \tau$, tenemos que

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-in\omega_0 t} f(t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0-\tau}^{t_0-\tau+T} e^{-in\omega_0(u+\tau)} f(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_{t_0-\tau}^{t_0-\tau+T} e^{-in\omega_0 u} e^{-in\omega_0 \tau} f(u) du \\
&= e^{-in\omega_0 \tau} \frac{1}{T} \int_{t_0-\tau}^{t_0-\tau+T} e^{-in\omega_0 u} f(u) du \\
&= e^{-in\omega_0 \tau} c_n.
\end{aligned}$$

□

■ *Inversión en el tiempo:*

Los coeficientes de Fourier complejos asociados a $f(-t)$ son c_{-n}

Demostración. Supongamos que la serie de Fourier de $f(t)$ es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}.$$

si hacemos que $n' = -n$, tenemos

$$\begin{aligned}
f(-t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_0 t} \\
&= \sum_{n'=\infty}^{-\infty} c_{-n'} e^{in'\omega_0 t} \\
&= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} c_{-n'} e^{in'\omega_0 t},
\end{aligned}$$

de manera que los coeficientes de Fourier complejos asociados a $f(-t)$ son c_{-n} . □

- *Escalamiento en el tiempo:*

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Los coeficientes de Fourier complejos asociados a $f(\alpha t)$ son c_n .

Demostración. Determinemos la serie de Fourier de la función f escalada α en t , $f(\alpha t)$,

$$\begin{aligned} f(\alpha t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0\alpha t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\alpha\omega_0)t}. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que los coeficientes de Fourier de $f(t)$ y $f(\alpha t)$ son los mismos; c_n , $n \in \mathbb{N}$. Lo que existe es un escalamiento en la frecuencia fundamental, $\alpha\omega_0$. \square

- *Multiplicación:*

Los coeficientes de Fourier complejos asociados a $[f_1 f_2](t)$ son

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{1j} c_{2p-j}$$

Demostración. Sean las funciones f_1 y f_2 periódicas, ambas con periodo T . Encuentre-

mos la serie de Fourier del producto $f_1(t)f_2(t)$,

$$\begin{aligned} f_1(t)f_2(t) &= \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{1j} e^{ij\omega_0 t} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{in\omega_0 t} \right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{1j} c_{2n} e^{i\omega_0(j+n)t} \end{aligned}$$

Si hacemos que $p = j + n$ e intercambiamos los sumatorios,

$$f_1(t)f_2(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{1j} c_{2(p-j)} \right)}_{c_p} e^{i\omega_0 p t}.$$

De manera que,

$$c_p = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{1j} c_{2(p-j)},$$

que viene a ser los coeficientes de Fourier complejos del producto entre $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y a la vez se denomina convolución discreta entre c_{1j} y c_{2j} , [1]. □

■ *Diferenciación:*

Los coeficientes de Fourier complejos asociados a $[\frac{d}{dt}f](t)$ son

$$in\omega_0 c_n,$$

Demostración. Partamos de que $f \in L^2(I)$ y que su desarrollo en serie de Fourier es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t},$$

encontremos la Serie de Fourier de $[\frac{d}{dt}f](t)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{d}{dt} e^{in\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in\omega_0 c_n) e^{in\omega_0 t}\end{aligned}$$

De manera que la derivación de una función equivale a multiplicar sus coeficientes c_n por $in\omega_0$, [1]. □

■ *Integración:*

Los coeficientes de Fourier complejos asociados a $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ son

$$\frac{c_n}{in\omega_0}$$

Demostración. Debemos considerar que para la función f , el coeficiente $c_0 = 0$, esto para garantizar que la integral converja. Tenemos así,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 \tau} \right) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{t_0}^t e^{in\omega_0 \tau} d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{in\omega_0 \tau}}{in\omega_0 n} \Big|_{\tau=t_0}^t\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{i\omega_0 n} e^{i\omega_0 n t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{i\omega_0 n} e^{i\omega_0 n t_0}.$$

Si $t_0 \rightarrow -\infty$ tenemos:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{i\omega_0 n} e^{i\omega_0 n t},$$

y de ahí probamos los que queríamos. □

De la serie de Fourier generalizada estudiamos la igualdad de Parseval. Revisemos para el caso particular de la serie de Fourier clásica dicha igualdad.

Teorema 5.6 (La igualdad de Parseval para la serie de Fourier clásica). *Sea la función $f \in L^2([-T/2, T/2])$ periódica con periodo T y que tiene asociados los coeficientes de Fourier complejos, c_n para $n \in \mathbb{Z}$. Se cumple que,*

$$\frac{1}{T} \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Demostración. El siguiente desarrollo la prueba a la igualdad, considerando 5.16, 5.17, la simetría conjugada y que $c_n c_n^* = |c_n|^2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \|f\|^2 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \overline{f(t)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{in\omega_0 t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.
\end{aligned}$$

□

De la igualdad de Parseval desprendemos que para una señal periódica representada por f ; su potencia promedio, representada a la vez por $\frac{1}{T} \|f\|^2$; es equivalente a la suma de las potencias medias de las componentes frecuenciales o también armónicos, c_n ; [1].

La gráfica de $|c_n|^2$ versus $n\omega_0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, se denomina densidad espectral de potencia o espectro de potencia. Y a las gráficas $|c_n|$, $\angle c_n$ versus $n\omega_0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$; se denominan espectro de amplitud y de fase, respectivamente, de la señal correspondiente. Dado que para funciones de variable real, $|c_{-n}| = |c_n^*| = |c_n|$, tenemos que es el espectro de amplitud es una función par mientras que el espectro de fase es impar.

En la siguiente situación veremos que es posible generar el espacio $L^2(I)$ con otras bases a parte de las sinusoidales. Veremos un ejemplo de aquello.

5.3. Series no-clásicas de Fourier

5.3.1. Situación-problema

Para la siguiente situación tomamos como referencia [27].

Nos interesa aproximar una señal definida para el tiempo $t \in [-1, 1]$ por la fórmula,

$$f(t) = e^{-|t|} - e^{-1},$$

por medio de polinomios ortogonales. Esto es, requerimos expandir la función $f \in L^2([-1, 1])$ en términos de polinomios que forman parte de una base hilbertiana.

1. Para buscar dicha base, empieza considerando la sucesión de polinomios canónicos

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_*} \subseteq L^2([-1, 1])$, dada así

$$x_n(t) := t^n$$

y prueba que es linealmente independiente.

Para demostrar que la sucesión $B = (x_n)_{n \in \mathbb{N}_*} \subseteq L^2([-1, 1])$ es linealmente independiente, tomaremos cualquier $A \subseteq B$,

$$A = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}\}$$

y probemos que es linealmente independiente. Supongamos que

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j x_{n_j}(t) = 0,$$

esto es

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j t^{n_j} = 0. \quad (5.19)$$

Siendo $t \neq 0$ y $n_p \neq n_q$ para $p \neq q$ y $p, q = 1, 2, 3, \dots, k$, entonces la única manera para que se cumpla 5.19 es que

$$\alpha_1 t^{n_1} = 0$$

$$\alpha_2 t^{n_2} = 0$$

$$\alpha_3 t^{n_3} = 0$$

$$\vdots \alpha_k t^{n_k} = 0$$

Por lo tanto tenemos que $\alpha_j = 0$, $\forall j = 1, 2, 3, \dots, k$. De ahí concluimos que A es linealmente independiente. Puesto que $A \subseteq B = (x_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ fue tomada arbitrariamente entonces podemos colegir que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ es linealmente independiente.

2. A través de Maxima aplica el proceso de ortonormalización de Gramm-Shmidt a la sucesión de polinomios canónicos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$.

Definamos el producto interno entre dos funciones u y v , la norma de u y la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$:

```
(% i32) Pint(u,v):= integrate(u*v,t,-1,1);
```

$$\text{Pint}(u,v) := \int_{-1}^1 uv dt \quad (\% \text{ o32})$$

```
(% i33) Norm(u):= sqrt(Pint(u,u));
```

$$\text{Norm}(u) := \sqrt{\text{Pint}(u,u)} \quad (\% \text{ o33})$$

```
(% i34) x(t,n):= t^n;
```

$$x(t,n) := t^n \quad (\% \text{ o34})$$

Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt, rectificando y normalizando los resultados:

(% i35) define(e0(t),x(t,0)/Norm(x(t,0))),fullratsimp;

$$e0(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\% o35)$$

(% i36) w1:x(t,1)-Pint(e0(t),x(t,1))*e0(t);

$$t \quad (\% w1)$$

(% i37) define(e1(t),w1/Norm(w1)), fullratsimp;

$$e1(t) := \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{2}} \quad (\% o37)$$

(% i38) w2:x(t,2)-Pint(e0(t),x(t,2))*e0(t)-Pint(e1(t),x(t,2))*e1(t);

$$t^2 - \frac{1}{3} \quad (\% w2)$$

(% i39) define(e2(t),w2/Norm(w2)), fullratsimp;

$$e2(t) := \frac{3\sqrt{5}t^2 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \quad (\% \text{ o39})$$

(% i40) w3:x(t,3)-Pint(e0(t),x(t,3))*e0(t)-Pint(e1(t),x(t,3))*e1(t)

Pint(e2(t),x(t,3))*e2(t);

$$t^3 - \frac{3t}{5} \quad (\text{w3})$$

(% i41) define(e3(t),w3/Norm(w3)), fullratsimp;

$$e3(t) := \frac{5\sqrt{7}t^3 - 3\sqrt{7}t}{2\sqrt{2}} \quad (\% \text{ o41})$$

(% i42) w4:x(t,4)-Pint(e0(t),x(t,4))*e0(t)-Pint(e1(t),x(t,4))*e1(t)

Pint(e2(t),x(t,4))*e2(t)-Pint(e3(t),x(t,4))*e3(t),expand;

$$t^4 - \frac{6t^2}{7} + \frac{3}{35} \quad (\text{w4})$$

```
(% i43) define(e4(t),w4/Norm(w4)), fullratsimp;
```

$$e4(t) := \frac{105t^4 - 90t^2 + 9}{8\sqrt{2}} \quad (\% o43)$$

```
(% i44) w5:x(t,5)-Pint(e0(t),x(t,5))*e0(t)-Pint(e1(t),x(t,5))*e1(t)
```

```
-Pint(e2(t),x(t,5))*e2(t)-Pint(e3(t),x(t,5))*e3(t)
```

```
Pint(e4(t),x(t,5))*e4(t),expand;
```

$$t^5 - \frac{10t^3}{9} + \frac{5t}{21} \quad (w5)$$

```
(% i45) define(e5(t),w5/Norm(w5)), fullratsimp;
```

$$e5(t) := \frac{63\sqrt{11}t^5 - 70\sqrt{11}t^3 + 15\sqrt{11}t}{8\sqrt{2}} \quad (\% o45)$$

3. A través de Maxima verifica que los elementos encontrados con el proceso de Gram-Schmidt son en efecto ortogonales.

De las seis funciones, e_n para $n = 0, 1, \dots, 5$, vamos a tomar cinco de los treinta pares que se pueden formar entre estas, para verificar que son ortogonales.

(% i46) Pint(e1(t),e2(t));

0

(% o46)

(% i51) Pint(e0(t),e1(t));

Pint(e0(t),e4(t));

Pint(e2(t),e5(t));

Pint(e3(t),e4(t));

Pint(e4(t),e5(t));

0

(% o47)

0

(% o48)

0

(% o49)

| | |
|---|---------|
| 0 | (% o50) |
| 0 | (% o51) |

Y además verificamos que las normas son uno. De manera que verificamos que e_n para $n = 0, 1, \dots, 5$; forman un conjunto ortonormal.

(% i52) Norm(e0(t));

| | |
|---|---------|
| 1 | (% o52) |
|---|---------|

(% i53) Norm(e5(t));

| | |
|---|---------|
| 1 | (% o53) |
|---|---------|

4. A través de Maxima verifica que el elemento n -ésimo del conjunto resultante del proceso

de Gram-Schmidt coincide con los que predice la fórmula

$$e_n(t) = \left[\frac{2n+1}{2} \right]^{1/2} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] \quad (5.20)$$

Definimos la función que representará al polinomio n -ésimo que depende de t y generaremos los seis primeros

```
(% i54) e(t,n):=expand(((2*n+1)/2)^(1/2)*1/(2^n*factorial(n))*diff((t^2-1)^n,t,n));
```

$$e(t, n) := \text{expand} \left(\frac{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^n n!} \left(\frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \right) \right) \quad (\% \text{ o54})$$

```
(% i2) for i:0 thru 5 step 1 do display(e(t,i));
```

$$\begin{aligned} e(t,0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e(t,1) &= \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{2}} \\ e(t,2) &= \frac{3\sqrt{5}t^2}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ e(t,3) &= \frac{5\sqrt{7}t^3}{2\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{7}t}{2\sqrt{2}} \\ e(t,4) &= \frac{105t^4}{8\sqrt{2}} - \frac{45t^2}{4\sqrt{2}} + 92^{-\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

$$e(t,5) = \frac{63\sqrt{11}t^5}{8\sqrt{2}} - \frac{35\sqrt{11}t^3}{4\sqrt{2}} + \frac{15\sqrt{11}t}{8\sqrt{2}}$$

5. En Maxima grafica los cuatro primeros polinomios.

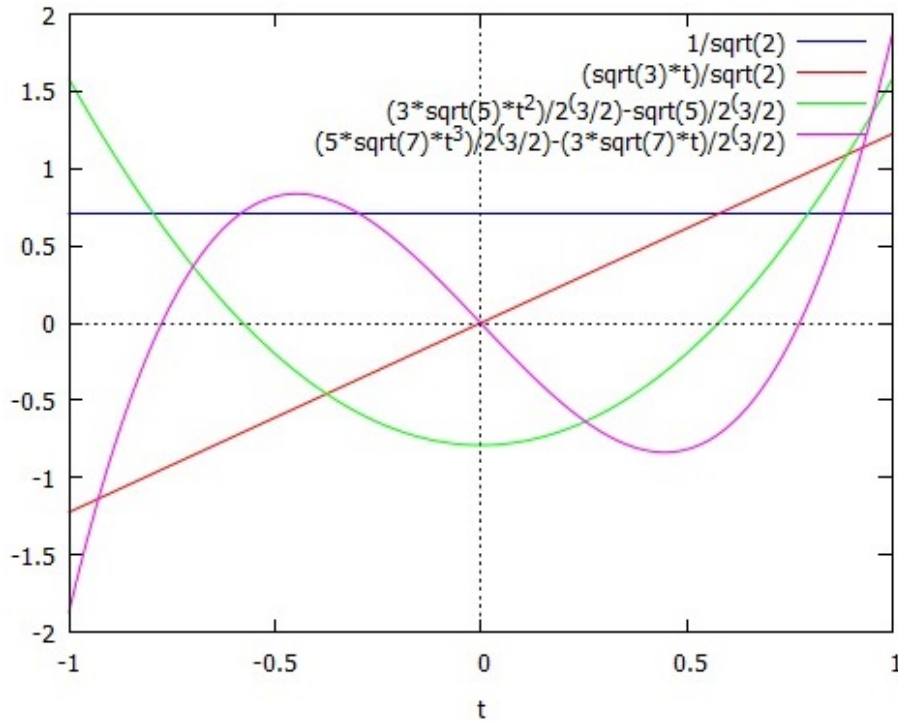


Figura 11. Gráfica de los cuatro primeros polinomios $e_n(t)$

6. Gracias a los dos literales anteriores podemos escribir que la sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ es ortogonal. Ahora nos interesa verificar si es posible expandir la función f en términos de dicha sucesión, Lo que quiere decir que sea posible escribir

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n(t),$$

donde la sucesión de coeficientes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ sea determinada por:

$$\alpha_n = \int_{-1}^1 f(t) e_n(t). \quad (5.21)$$

Encuentra por medio de Maxima los diez primeros coeficientes de la serie a través de 5.21 y con ello la suma parcial que aproxima a f .

A través de 5.21 y 5.20, encontraremos los primeros diez coeficientes. Anticipamos que los coeficientes α_n , si n es impar son ceros, dado que f es par y del literal anterior hemos constatado que los polinomios $e_n(t)$ son pares e impares, dependiendo de que n sea par e impar, respectivamente.

```
(% i3) for i:0 thru 10 step 1 do
      define(a[i](t),romberg(e(t,i)*(%e^(-abs(t))-1/%e), t, -1, 1));
      done                                     (% o3)
```

```
(% i4) for i:0 thru 10 step 1 do display(a[i](t));
```

$$a_0(t) = 0,37369337232733$$

$$a_1(t) = 0,0$$

$$a_2(t) = -0,23766441873618$$

$$a_3(t) = 0,0$$

$$a_4(t) = 0,080901423534747$$

$$a_5(t) = 0,0$$

$$a_6(t) = -0,038587937375138$$

$$a_7(t) = 0,0$$

$$a_8(t) = 0,022406152026311$$

$$a_9(t) = 0,0$$

$$a_{10}(t) = -0,01461847596916$$

Con estos coeficientes calculados, vamos a formar la suma

$$S(t) = \sum_{n=0}^{10} \alpha_n e_n(t).$$

```
(% i5) S(t):=sum(a[n](t)*e(t,n),n,0,10);
```

$$S(t) := \sum_{n=0}^{10} a_n(t) e(t, n) \quad (\% o5)$$

7. Grafica la suma parcial encontrada en el literal anterior junto a la función f en el intervalo $[-1, 1]$.

```
(% i6) plot2d([S(t), %e^(-abs(t))-1/%e],[t,-1,1]);
```

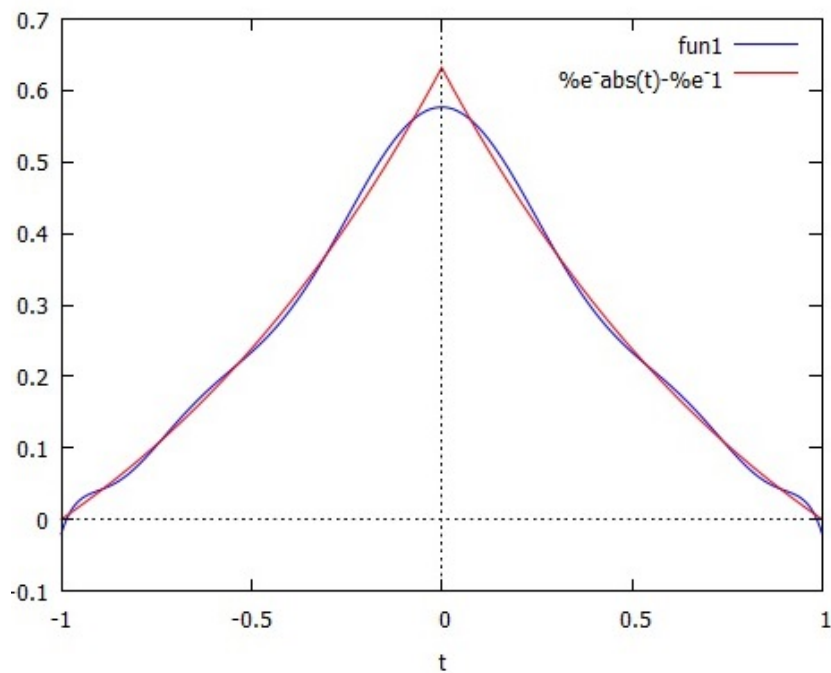


Figura 12. Gráfica de la suma parcial de la serie S y la función f

5.3.2. Tópicos de clase

A continuación veremos el tema que suscita la situación, que es sobre los polinomios de Legendre; a manera de ejemplo de lo que son las series no clásicas de Fourier. En el curso donde se pondrá en acción la propuesta sí se hará constar las demás series no clásicas. Tomamos como referencia [27] y [30].

En la presente situación hemos encontrado a partir de la ortonormalización de los polinomios canónicos, la sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ que nos resultó útil para aproximar la función f a través de la superposición de algunos elementos de dicha sucesión. Ahora queremos estudiar con más rigor algunos conceptos que los hemos verificado por medio de Maxima.

La sucesión de polinomios $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ proviene de normalizar otros, denominados los polinomios de Legendre. Existen distintas maneras de obtener los últimos y esas distintas formas nos permitirán probar finalmente que una función $f \in L^2([-1, 1])$ se puede escribir como una superposición ponderada de dichos polinomios.

Una de las maneras de llegar a los polinomios de Legendre es a través de la solución de la ecuación diferencial

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' + \lambda y = 0, \quad (5.22)$$

la cual la resolveremos por serie de potencias.

Como cero es un punto ordinario de 5.22 podemos suponer que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

la resuelve. Si es así entonces retomando 5.22 tenemos:

$$\begin{aligned} (1-t^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n t^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n t^n &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2a_2 + 6a_3 t - 2a_1 t + \lambda a_0 + \lambda a_1 t \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2 + n - \lambda)a_n] t^n = 0. \end{aligned}$$

Para que la expresión polinomial sea cero, exige que cada uno de los coeficientes de t lo sean.

Por lo que,

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0$$

$$6a_3 - 2a_1 + \lambda a_1 = 0$$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - [n(n+1) - \lambda]a_n = 0.$$

Y de ahí podemos encontrar los coeficientes

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2}a_0$$

$$a_3 = \frac{2-\lambda}{3!}a_1.$$

De estas igualdades y de la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)}a_n, \quad (5.23)$$

obtenemos:

$$a_4 = \frac{6-\lambda}{(3)(4)}a_2 = \frac{6-\lambda}{(3)(4)}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)a_0 = -\frac{\lambda(6-\lambda)}{4!}a_0$$

$$a_5 = \frac{12-\lambda}{(4)(5)}a_3 = \frac{12-\lambda}{(4)(5)}\frac{2-\lambda}{3!}a_1 = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!}a_1$$

$$a_6 = \frac{20-\lambda}{(5)(6)}a_4 = \frac{-\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!}a_0$$

$$a_7 = \frac{30-\lambda}{(6)(7)}a_5 = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!}a_1.$$

Por lo que la solución a la ecuación de Legendre en serie de potencias quedaría así:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= a_0 + a_1 t - \frac{\lambda}{2} a_0 t^2 + \frac{2-\lambda}{3!} a_1 t^3 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{4!} a_0 t^4 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!} a_1 t^5 \\
&\quad - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!} a_0 t^6 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!} a_1 t^7 - \dots \\
y(t) &= a_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2} t^2 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{4!} t^4 - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!} t^6 - \dots \right] \\
&\quad + a_1 \left[t + \frac{2-\lambda}{3!} t^3 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!} t^5 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!} t^7 \right. \\
&\quad \left. + \dots \right]
\end{aligned}$$

Podemos escribir la solución en términos de una solución par $y_p(t)$ y una impar $y_i(t)$, $y(t) = a_0 y_p(t) + a_1 y_i(t)$, donde

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= 1 - \frac{\lambda}{2} t^2 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{4!} t^4 - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!} t^6 - \dots \\
y_i(t) &= t + \frac{2-\lambda}{3!} t^3 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!} t^5 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!} t^7 + \dots
\end{aligned}$$

Para tener una solución polinomial, considerando la relación de recurrencia 5.23 haremos que λ tenga la forma $n(n+1)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. De manera que los coeficientes de uno de los polinomios $y_p(t)$ ó $y_i(t)$ sean cero a partir de cierto valor de n . Así tenemos:

Para $a_1 = 0$ y $n = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$$y(t) = a_0.$$

Para $a_0 = 0$ y $n = 1 \Rightarrow \lambda = 2$

$$y(t) = a_1 t.$$

Para $a_1 = 0$ y $n = 2 \Rightarrow \lambda = 6$

$$y(t) = a_0 [1 - 3t^2].$$

Para $a_0 = 0$ y $n = 3 \Rightarrow \lambda = 12$

$$y(t) = a_1 \left[t - \frac{5}{3} t^3 \right].$$

Para $a_1 = 0$ y $n = 4 \Rightarrow \lambda = 20$

$$y(t) = a_0 \left[1 - 10t^2 + \frac{35}{3} t^4 \right].$$

Para $a_0 = 0$ y $n = 5 \Rightarrow \lambda = 30$

$$y(t) = a_1 \left[t - \frac{14}{3} t^3 + \frac{21}{5} t^5 \right].$$

Si tomamos a_0 y a_1 de manera que estas distintas soluciones de 5.22, sean tales que $y(1) = 1$, iremos obteniendo algunos de los denominados polinomios de Legendre, $P_n(t)$. De manera que los cinco primeros polinomios de Legendre son los siguientes y en la figura 13 se

los grafica.

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}[3t^2 - 1]$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t]$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}[35t^4 - 30t^2 + 3]$$

$$P_5(t) = \frac{1}{8}[63t^5 - 70t^3 + 15t].$$

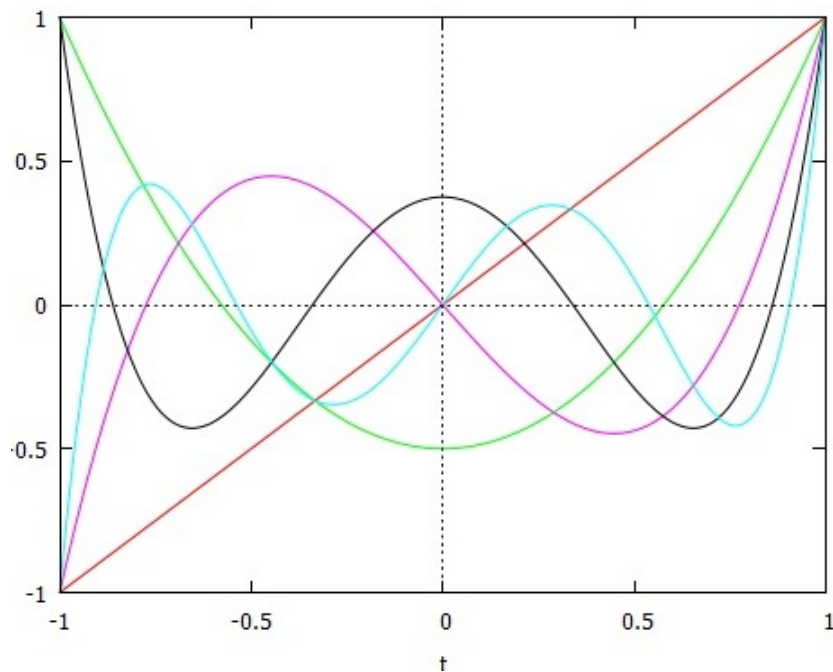


Figura 13. Gráfica de los primeros cinco polinomios de Legendre

En la presente situación hemos encontrado a través del proceso de Gram-Schmidt la sucesión ortonormal, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$. Veamos que esta sucesión se obtiene normalizando los polinomios

de Legendre. Verifiquemos con algunos de estos en Maxima.

Definamos los seis primeros polinomios de Legendre:

```
(% i12) P[0](t):=1; P[1](t):=t; P[2](t):=1/2*(3*t^2-1);
        P[3](t):=1/2*(5*t^3-3*t);
        P[4](t):=1/8*(35*t^4-30*t^2+3);
        P[5](t):=1/8*(63*t^5-70*t^3+15*t);
```

$$P_0(t) := 1$$

$$P_1(t) := t$$

$$P_2(t) := \frac{1}{2} (3t^2 - 1)$$

$$P_3(t) := \frac{1}{2} (5t^3 - 3t)$$

$$P_4(t) := \frac{1}{8} (35t^4 - 30t^2 + 3)$$

$$P_5(t) := \frac{1}{8} (63t^5 - 70t^3 + 15t)$$

Y normalicémoslos:

```
(% i13) for i:0 thru 5 step 1 do define(e[i](t),P[i](t)/Norm(P[i](t)));
```

```
done (% o13)
```

```
(% i14) for i:0 thru 5 step 1 do display(e[i](t));
```

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e_1(t) = \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{2}}$$

$$e_2(t) = \frac{\sqrt{5}(3t^2 - 1)}{2\sqrt{2}}$$

$$e_3(t) = \frac{\sqrt{7}(5t^3 - 3t)}{2\sqrt{2}}$$

$$e_4(t) = \frac{3(35t^4 - 30t^2 + 3)}{8\sqrt{2}}$$

$$e_5(t) = \frac{\sqrt{11}(63t^5 - 70t^3 + 15t)}{8\sqrt{2}}$$

En efecto estos polinomios coinciden con los encontrados en la presente situación, lo que haría pensar que los polinomios de Legendre son ortonormales.

Teorema 5.7 (Los polinomios de Legendre son ortonormales). *La sucesión de polinomios de*

Legendre $(P_n(t))_{n \in \mathbb{N}_*}$ forma un conjunto ortogonal.

Demostración. La siguiente demostración se encuentra en [30].

Probaremos que dados dos polinomios distintos $P_n(t)$ y $P_m(t)$, cualesquiera; estos son ortogonales.

Puesto que $P_n(t)$ y $P_m(t)$ son soluciones de la ecuación de Legendre, 5.22, se cumple para el caso de $P_n(t)$ que

$$(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0$$

la cual se puede escribir también,

$$[(1-t^2)P_n'(t)]' + n(n+1)P_n(t) = 0. \quad (5.24)$$

Lo propio para $P_m(t)$

$$[(1-t^2)P_m'(t)]' + m(m+1)P_m(t) = 0. \quad (5.25)$$

Multipliquemos 5.24 por $P_m(t)$ y 5.25 por $P_n(t)$, para obtener

$$[(1-t^2)P_n'(t)]'P_m(t) + n(n+1)P_n(t)P_m(t) = 0$$

y

$$[(1-t^2)P_m'(t)]'P_n(t) + m(m+1)P_m(t)P_n(t) = 0.$$

Restando una de la otra, tenemos que

$$[(1-t^2)P_n'(t)]'P_m(t) - [(1-t^2)P_m'(t)]'P_n(t) + [n(n+1) - m(m+1)]P_n(t)P_m(t) = 0$$

y si integramos sobre $[-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [n(n+1) - m(m+1)]P_n(t)P_m(t)dt &= \int_{-1}^1 [(1-t^2)P_m'(t)]'P_n(t)dt \\ &\quad - \int_{-1}^1 [(1-t^2)P_n'(t)]'P_m(t)dt. \end{aligned}$$

Como $n \neq m$, para que $P_n(t)$ y $P_m(t)$ sean ortogonales se exige que la parte derecha de la última igualdad sea cero. Veamos si en efecto es así,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 [(1-t^2)P_m'(t)]'P_n(t)dt - \int_{-1}^1 [(1-t^2)P_n'(t)]'P_m(t)dt \\ &= [(1-t^2)P_m'(t)]P_n(t)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-t^2)P_m'(t)P_n'(t)dt \\ &\quad - [(1-t^2)P_n'(t)]P_m(t)\Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (1-t^2)P_n'(t)P_m'(t)dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Ahora que conocemos que la sucesión de polinomios de Legendre, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ es ortogonal, podemos escribir la señal f como una superposición ponderada de dichos polinomios y

podemos derivar los siguiente:

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n \\
 f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t) \\
 f(t)P_m(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t)P_m(t) \\
 \int_{-1}^1 f(t)P_m(t)dt &= \int_{-1}^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t)P_m(t) \right] dt,
 \end{aligned}$$

con $m \neq n$ y si suponemos que converge $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t)P_m(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(t)P_m(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 c_n P_n(t)P_m(t)dt \\
 \int_{-1}^1 f(t)P_n(t)dt &= c_n \int_{-1}^1 P_n^2(t)dt.
 \end{aligned}$$

Y de ahí tenemos que el coeficiente c_n se determina así,

$$c_n = \frac{\int_{-1}^1 f(t)P_n(t)dt}{\int_{-1}^1 P_n^2(t)dt}.$$

Por lo que, para expandir una función $f \in L^2([-1, 1])$ en términos de una serie de Fourier-Legendre; deberemos conocer, para determinar la forma de ponderar la serie, la norma de los polinomios de Legendre y para ello veremos una manera alternativa de generar los polinomios

junto a un teorema.

FUNCIÓN DE GENERACIÓN DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

Consideremos la función en dos variables L ,

$$L(t, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tz + z^2}}.$$

Si expandimos en su serie de Taylor alrededor de $z = 0$, encontraremos que el coeficiente de z^n es $P_n(t)$. Veámoslo como un teorema.

Teorema 5.8 (Función de generación de los polinomios de Legendre).

$$L(t, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n. \quad (5.26)$$

En [30] se encuentra una demostración que pasa por desarrollar el polinomio de Taylor de L . Encontremos en Maxima el desarrollo de Taylor de L alrededor de $z = 0$.

(%i1)

taylor(1/sqrt(1-2*t*z+z^2), z, 0, 10);

$$\begin{aligned} L(t, z) = & 1 + tz + \frac{(3t^2 - 1) z^2}{2} + \frac{(5t^3 - 3t) z^3}{2} + \frac{(35t^4 - 30t^2 + 3) z^4}{8} \\ & + \frac{(63t^5 - 70t^3 + 15t) z^5}{8} + \frac{(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5) z^6}{16} \\ & + \frac{(429t^7 - 693t^5 + 315t^3 - 35t) z^7}{16} + \dots \end{aligned}$$

El CAS Maxima nos permite con estos 10 términos, verificar que los coeficientes de z^n en efecto coinciden con $P_n(t)$.

La función 5.26 nos permite probar que $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$, que es lo que anticipamos en la gráfica 13. El siguiente razonamiento lo corrobora,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2tz+z^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n \\ \frac{1}{\sqrt{1-2z+z^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)z^n \\ \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)z^n.\end{aligned}$$

La parte izquierda de la última igualdad es la suma de una serie geométrica con razón z , así

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}.$$

Por lo que, $P_n(1) = 1$. También se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+2z+z^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)z^n \\ \frac{1}{1+z} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)z^n.\end{aligned}$$

Lo propio

$$1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 \dots = \frac{1}{1+z}.$$

Por lo que se colige que $P_n(-1) = (-1)^n$.

Teorema 5.9 (Relación de Recurrencia de los Polinomios de Legendre). *Sea $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0. \quad (5.27)$$

Demostración. Vamos a partir de la función de generación de los polinomios de Legendre, 5.26 y la derivaremos respecto a z ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{t-z}{(1-2tz+z^2)^{3/2}} \\ (1-2tz+z^2) \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{t-z}{(1-2tz+z^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Como $L(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (1-2tz+z^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1} - (t-z) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2tnP_n(t)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} tP_n(t)z^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^{n+1} \\ 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(t)z^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2tnP_n(t)z^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(t)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} tP_n(t)z^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(t)z^n \end{aligned}$$

$$0 = P_1(t) + 2P_2(t)z - 2tP_1(t)z - tP_0(t) - tP_1(t)z + P_0(t)z \\ + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(t) - 2tnP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t) - tP_n(t) + P_{n-1}(t)]t^n.$$

De ahí, desprendemos lo que nos interesa y esto es que el coeficiente de t^n en el sumatorio debe ser necesariamente cero, es decir,

$$(n+1)P_{n+1}(t) - 2tnP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t) - tP_n(t) + P_{n-1}(t)$$

o lo que es lo mismo

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0,$$

que es lo que queríamos. □

A partir de este teorema derivamos un corolario.

Corolario 5.1. *El coeficiente de t^n en el polinomio de Legendre $P_n(t)$ es*

$$A_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!}$$

Demostración. El máximo grado de 5.27 es t^{n+1} y su coeficiente es $(n+1)A_{n+1} - (2n+1)A_n$,

el cual debe ser cero, así tenemos

$$(n+1)A_{n+1} - (2n+1)A_n = 0$$

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}A_n$$

Si sustituimos hacia atrás la última igualdad, tenemos

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{2(n-1)+1}{(n-1)+1} A_{n-1} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} A_{n-1}$$

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} \frac{2(n-2)+1}{(n-2)+1} A_{n-2} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} \frac{2n-3}{n-1} A_{n-2}$$

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} \frac{2n-3}{n-1} \cdots \frac{3}{2} A_0$$

Y como $A_0 = 1$, tenemos que

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} \frac{2n-3}{n-1} \cdots \frac{3}{2}$$

o lo que es lo mismo para A_n ,

$$A_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!}.$$

□

Ahora estamos en capacidad de probar que una señal $f \in L^2([-1, 1])$ se puede expandir en términos de los polinomios de Legendre y determinar los coeficientes que ponderan la serie.

Teorema 5.10 (Serie de Fourier Legendre). *La sucesión de polinomios de Legendre, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$,*

es una base Hilbertiana del espacio $L^2([-1, 1])$, es decir, cualquier función $f \in L^2([-1, 1])$, para valores de $t \in [-1, 1]$ donde exista continuidad, se puede escribir así,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t), \quad (5.28)$$

donde los coeficientes de Fourier-Legendre se determinan así:

$$c_n = \frac{\int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt}{\int_{-1}^1 P_n^2(t) dt} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt \quad (5.29)$$

Demostración. La demostración de que, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ forma una base Hilbertiana para $L^2([-1, 1])$ la hallamos en [27] y se basa en que cualquier función de $L^2([-1, 1])$ se puede aproximar lo que se quiera con una función continua de $C([-1, 1])$ y a la vez esta última se puede escribir en términos de los polinomios de Legendre.

Una vez que se tiene demostrado que los polinomios de Legendre forman una base Hilbertiana para $L^2([-1, 1])$ se puede escribir 5.28 en forma general.

$$c_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|_2}.$$

Por lo que, faltaría determinar $\|P_n\|_2$.

Definamos $q(t)$ así, [30].

$$q(t) = P_n(t) - \frac{A_n}{A_{n-1}} t P_{n-1}(t).$$

Se colige que $q(t)$ tiene a lo sumo la potencia t^{n-1} . De la última igualdad se obtiene

$$P_n(t) = q(t) + \frac{A_n}{A_{n-1}}tP_{n-1}(t).$$

Desarrollamos la norma de P_n así,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= \int_{-1}^1 P_n(t)P_n(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 P_n(t) \left[q(t) + \frac{A_n}{A_{n-1}}tP_{n-1}(t) \right] dt \\ &= \int_{-1}^1 P_n(t)q(t) dt + \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^1 tP_n(t)P_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Puesto que $q(t)$ tiene grado a lo sumo de $n-1$, se puede escribir como una combinación lineal de polinomios de Legendre de grado menores o iguales a $n-1$ y, en virtud de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, se desprende que $\int_{-1}^1 P_n(t)q(t) dt = 0$. Por lo tanto,

$$\int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^1 tP_n(t)P_{n-1}(t) dt.$$

Por otro lado, retomando la relación de recurrencia 5.27, tenemos que

$$tP_n(t) = \frac{(n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t)}{2n+1}$$

y multiplicando por $P_{n-1}(t)$,

$$tP_n(t)P_{n-1}(t) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(t)P_{n-1}(t) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}^2(t).$$

Volvemos a la norma de P_n ,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^1 \left[\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(t)P_{n-1}(t) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}^2(t) \right] dt \\ &= \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{n}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(t) dt \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \frac{(n-1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)} \frac{n}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(t) dt \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(t) dt. \end{aligned}$$

Con la misma expresión reemplazamos hacia atrás y tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)+1} \int_{-1}^1 P_{n-2}^2(t) dt \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2n-3}{2n-1} \int_{-1}^1 P_{n-2}^2(t) dt \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2n-3}{2n-1} \frac{2(n-2)-1}{2(n-2)+1} \int_{-1}^1 P_{n-3}^2(t) dt \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2n-3}{2n-1} \frac{2n-5}{2n-3} \int_{-1}^1 P_{n-3}^2(t) dt \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2n-3}{2n-1} \frac{2n-5}{2n-3} \cdots \frac{3}{5} \frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_0^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_0^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2n+1} \int_{-1}^1 1(t) dt \\ &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Puesto que $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 P_n^2(t) dt}$, tenemos que la expresión para determinar los coeficientes de Fourier-Legendre,

$$c_n = \frac{\int_{-1}^1 f(t)P_n(t)dt}{\sqrt{\int_{-1}^1 P_n^2(t)dt}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^1 f(t)P_n(t)dt.$$

□

Podríamos escribir la serie de Fourier-Legendre en términos de la base ortonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ que encontramos por el proceso de Gram-Schmidt. Conociendo que

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t),$$

tendríamos que la serie de Fourier-Legendre se escribe así,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n(t)$$

donde los coeficientes de Fourier-Legendre, para $n \in \mathbb{N}_*$ son:

$$c_n = \int_{-1}^1 f(t)e_n(t)dt,$$

que es lo que obtuvimos de forma experimental en la presente situación.

5.4. Transformada de Fourier

5.4.1. Situación-problema

La siguiente situación toma como referencia principal a [31].

La fórmula de síntesis de la serie de Fourier clásica, por tener involucradas funciones sinusoidales, nos permite aproximar señales periódicas. A la vez la fórmula de síntesis nos permite hacer un análisis espectral de una señal periódica.

En esta situación, nos interesa encontrar la serie de Fourier de una señal que no cumple con la condición de periodicidad. Analicemos la posibilidad de encontrar la serie de Fourier de la señal rectangular, definida por la fórmula,

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

1. Grafica en Maxima la señal rectangular.

```
(% i15) Pi(t):= if abs(t)<1/2 then 1 else 0;
```

$$\Pi(t) := \text{if } |t| < \frac{1}{2} \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

```
(% i16) plot2d(Pi(t),[t,-3,3],[y,-1,1.5]);
```

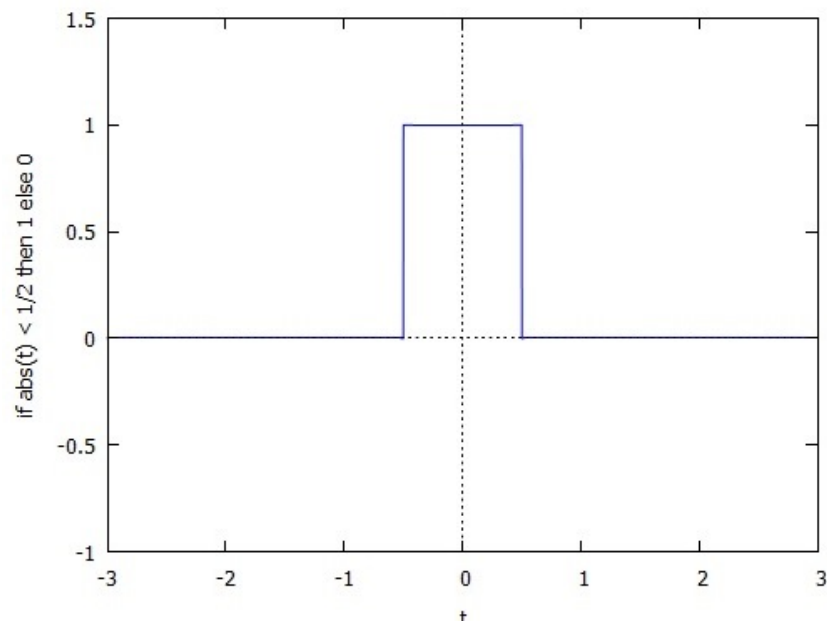


Figura 14. Gráfica del pulso rectangular Π .

2. Dado que la señal rectangular $\Pi(t)$ no es periódica. Hagamos que este pulso rectangular se repita cada 2 unidades de tiempo, $t = 2j$ para $j \in \mathbb{Z}$, para así tener un "tren de pulsos", modelizados por

$$T_2\Pi(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Pi(t + 2j).$$

$T_2\Pi(t)$ tiene periodo 2 y en la grafica se observan cinco de estos pulsos.

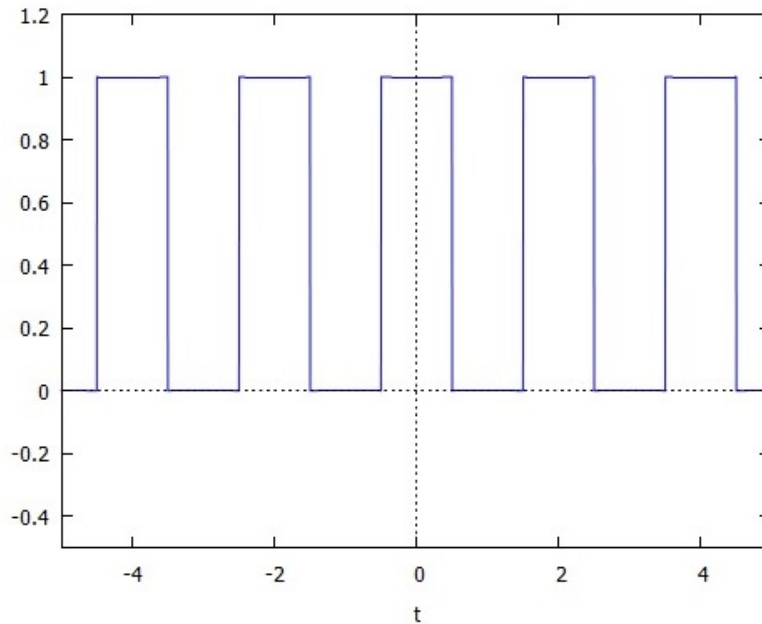


Figura 15. Gráfica del tren de pulsos $T = 2$.

Encuentra la serie de Fourier en forma compleja de este "tren de pulsos".

La serie de Fourier en forma compleja del tren de pulsos está dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 n t},$$

donde ω_0 es la frecuencia angular de $T_2\Pi(t)$ y en este caso dado que su periodo es 2,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Así tenemos que c_n es:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2} \int_{-2/2}^{2/2} T_2\Pi(t)e^{-i\pi nt} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T_2\Pi(t)e^{-i\pi nt} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \Pi(t)e^{-i\pi nt} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\pi nt} dt \\
 &= \frac{ie^{-\frac{i\pi n}{2}}}{2\pi n} - \frac{ie^{\frac{i\pi n}{2}}}{2\pi n}.
 \end{aligned}$$

De ahí, que los coeficientes c_n para $n \in \mathbb{Z}$ son:

$$c_n = \frac{1}{\pi n} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Por lo que, tenemos que la serie de Fourier de $T_2\Pi(t)$ queda así:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n} e^{i\pi nt}.$$

3. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se obtienen valores reales para los coeficientes c_n , debido al hecho de que el tren de pulsos se modeliza por una función par. Esto facilita graficar el espectro de $T_2\Pi(t)$.

Grafica en Maxima la amplitud de los armónicos que hacen parte del tren de pulsos, esto es, c_n vs n .

```
(% i18) c[0]:1;

1 (% o18)

(% i21) define(c[n], (1/(%pi*n))*sin(%pi*n/2));


$$c_n := \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} \quad (\% o21)$$

```

En la Figura 16 podemos ver las componentes espectrales del tren de pulsos.

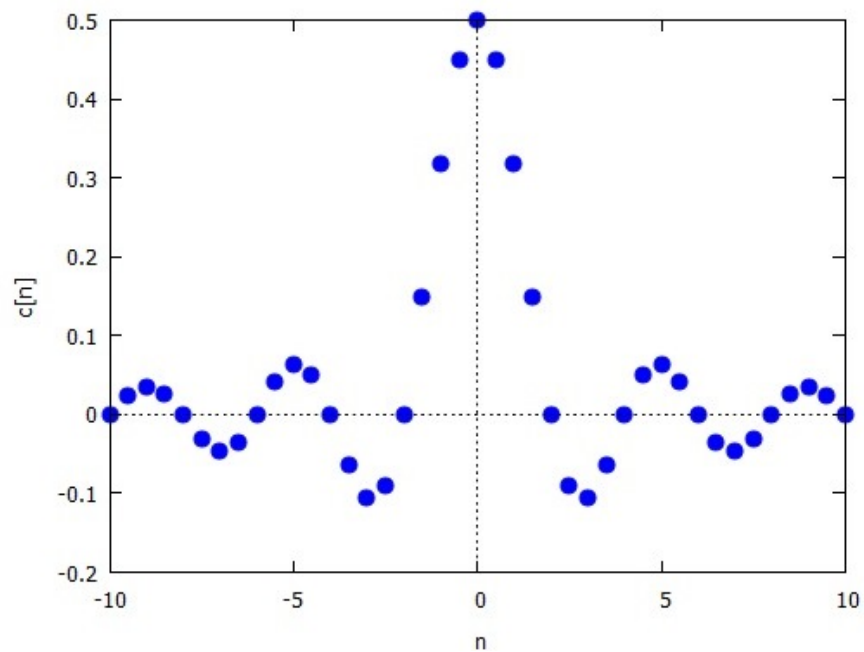


Figura 16. Gráfica de las componentes espectrales del tren de pulsos para un periodo $T = 2$

4. Si consideramos ahora un tren de pulsos con periodo T , modelizado por

$$T_T \Pi(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Pi(t + jT),$$

para $j \in \mathbb{Z}$. Encuentra los coeficientes de Fourier, c_n , para dicha señal y grafica en máxima su espectro para cuando la señal tiene periodos de 3, 4 y 6.

Tenemos que los coeficientes de Fourier para el tren de pulsos de periodo T , con $|T| > \frac{1}{2}$ y para $n \in \mathbb{Z}$ son:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} T_T \Pi(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} \Pi(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{iT e^{-i\frac{\pi n}{T}}}{2\pi n} - \frac{iT e^{\frac{i\pi n}{T}}}{2\pi n} \right]. \end{aligned}$$

De ahí, que los coeficientes c_n son:

$$c_n = \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n}{T} \right).$$

En la Figura 17 vemos las gráficas del espectro para $T = 3$, $T = 4$ y $T = 6$.

```
(% i23) T:3; c[0]:1/T;
```

$$3 \quad (T)$$

$$\frac{1}{3} \quad (% o23)$$

```
(% i24) define(c[n], (1/(%pi*n))*sin(%pi*n/T));
```

$$c_n := \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n} \quad (% o24)$$

```
(% i26) plot2d([discrete, create_list([-10+1/T*n,c[-10+1/T*n]],  
n,0,20*T)], [style, points],[xlabel,"n"],[ylabel,c[n] "]);
```

5. En los literales anteriores hemos encontrado que los coeficientes de Fourier para el tren de pulsos de periodo T están dados por:

$$c_n = \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right).$$

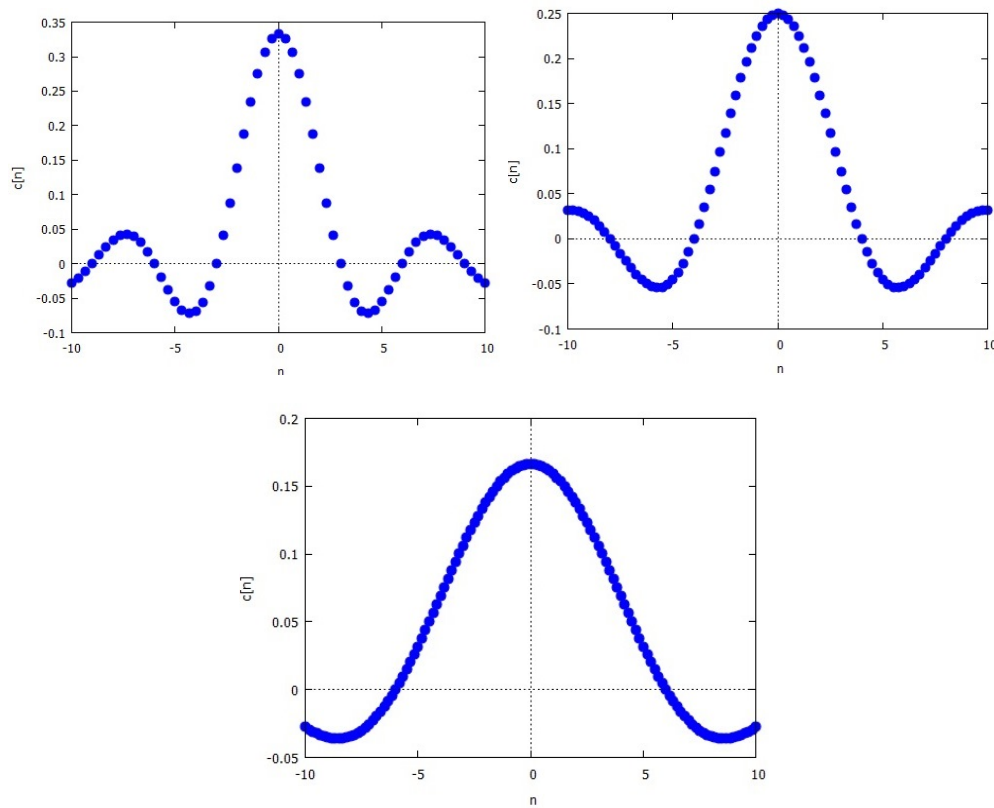


Figura 17. Gráficas de las componentes espectrales de la serie de Fourier del pulso rectangular para $T = 3, 4, 6$

Por lo que, la serie de Fourier se escribe así,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right) e^{2\pi i \frac{n}{T} t}.$$

De ahí podemos observar que los distintos armónicos que hacen parte del tren de pulsos tienen frecuencias de $\frac{n}{T}$, para $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, la separación de armónico a armónico es $\frac{1}{T}$. Es decir, a medida que crece el valor de T esta separación se acorta, como se pudo constatar en las gráficas del literal anterior.

Además, se pudo constatar que para valores mayores de periodo del tren de pulsos, la amplitud de c_n disminuye.

Analiza qué sucede con la amplitud de c_n y la separación entre armónicos en el límite, si $T \rightarrow \infty$.

Como se conoce que la separación entre armónicos es $\frac{n}{T}$, es claro que si $T \rightarrow \infty$, dicha separación es cero. Es decir, el espectro del tren de pulsos cuando $T \rightarrow \infty$ pasaría de ser discreto a ser continuo.

Por otro lado la amplitud de c_n ,

$$c_n = \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right) = \frac{1}{\pi n} \left(\frac{\pi n}{T}\right) = \frac{1}{T},$$

cuando $T \rightarrow \infty$,

$$c_n \rightarrow \frac{1}{T} \rightarrow 0,$$

puesto que $\operatorname{sen}(\theta) \approx \theta$ en tal situación. Por lo tanto, tenemos que la amplitud sería cero si $T \rightarrow \infty$.

6. Intuitivamente afirmamos que para una señal en $L^2(I)$, cualquiera, que posea serie de Fourier, esta tiene una relación uno a uno con los coeficientes de Fourier. Por otro lado, como vemos que los coeficientes c_n nos otorgan información espectral de la señal, es decir información para estudiar a la señal en otro dominio. Podemos así, interpretar a los coeficientes c_n como una transformación de la señal. Para el caso particular de la señal

rectangular $\Pi(t)$, escribamos c_n como una transformación de la señal (*Transfor*), [31].

$$Transfor[T_T\Pi(t)]\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{\pi n} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right).$$

Del literal anterior hemos visto que si $T \rightarrow \infty$ entonces $c_n \rightarrow 0$, de manera que para compensar, multiplicamos a los coeficientes c_n por T y tenemos la transformación escalada (*Transfor_escalada*), [31].

$$Transfor_escalada[T_T\Pi(t)]\left(\frac{n}{T}\right) = T \frac{1}{\pi n} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right),$$

que la podemos escribir así:

$$Transfor_escalada[T_T\Pi(t)]\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\frac{\pi n}{T}}.$$

Si $T \rightarrow \infty$, el tren de pulsos deviene en un sólo pulso rectangular, $\Pi(t)$; y, la separación entre armónicos, $\frac{n}{T}$ para $n \in \mathbb{Z}$, deviene en una variable continua, s ($\frac{n}{T} \rightarrow s$). De manera que la transformada escalada del pulso rectangular es:

$$Transfor_escalada[\Pi(t)](s) = \frac{\text{sen}(\pi s)}{\pi s},$$

o también a través de la función *senc* de amplio uso en Ingeniería Electrónica y que se define así:

Definición 5.7 (Seno cardinal). *La función seno cardinal, $senc$, se define así:*

$$senc : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto senc(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Podemos escribir la transformada escalada del pulso rectangular así:

$$Transfor_escalada[\Pi(t)](s) = senc(\pi s).$$

Grafica en Maxima la transformada escalada del pulso rectangular (s es la variable independiente) y encuentra una expresión para la transformada del pulso rectangular en términos de una integral.

Encontremos la transformada escalada del pulso rectangular partiendo de que la transformada escalada del tren de pulsos es

$$\begin{aligned} Transfor_escalada[T_T \Pi(t)]\left(\frac{n}{T}\right) &= T c_n \\ &= T \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Pi(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt \end{aligned}$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \Pi(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt.$$

Si $T \rightarrow \infty$ entonces tenemos que la transformada del pulso rectangular está dada así:

$$\text{Transfor_escalada}[\Pi(t)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-i2\pi s t} dt.$$

La gráfica de la transformada escalada del pulso rectangular la vemos en la Figura 18.

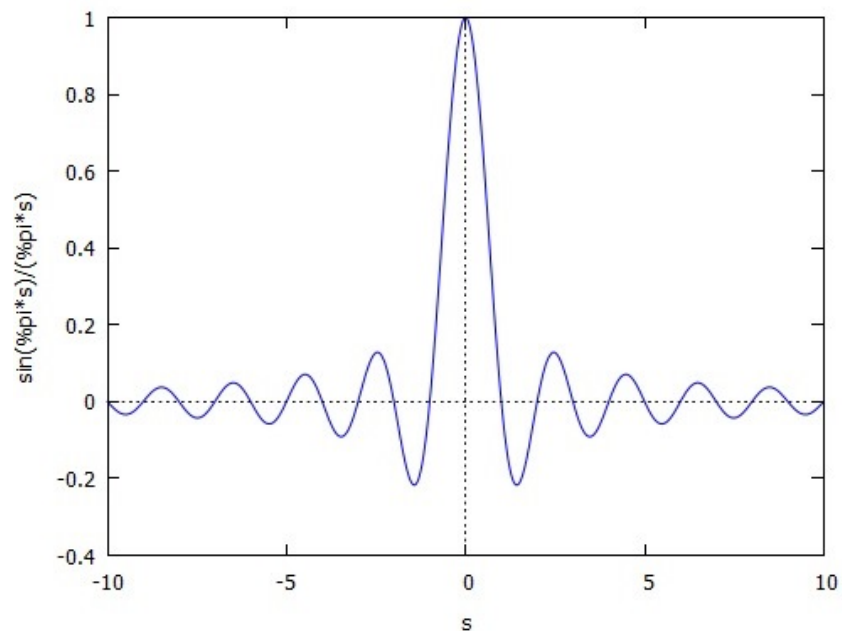


Figura 18. Gráfica de la transformada “escalada” del pulso rectangular

7. Generaliza los resultados anteriores para una función f tal que

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f(t)| dt < \infty$$

y que se anule para valores de t fuera del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$f(t) = 0 \quad \text{para } |t| > \frac{1}{2}.$$

Encuentra los coeficientes de Fourier complejos c_n , para una periodización de f , con periodo T y, lleva esos resultados al límite cuando el periodo $T \rightarrow \infty$.

A partir de f , definimos la función periódica con periodo T ,

$$P_T f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(t + jT),$$

cuyos coeficientes c_n para $n \in \mathbb{Z}$ son:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt$$

Veamos cómo se acotan los coeficientes c_n ,

$$\begin{aligned}
 |c_n| &= \left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t}| dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| |e^{-i2\pi \frac{n}{T} t}| dt.
 \end{aligned}$$

Puesto que $|e^{-i2\pi \frac{n}{T} t}| = 1$, tenemos que

$$c_n \leq \frac{1}{T} A,$$

donde

$$A = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt$$

que es finito. Por lo que si $T \rightarrow \infty$ entonces $c_n \rightarrow 0$. Nuevamente vamos a compensar multiplicando por T a c_n o a la transformada de $P_t f(t)$ como la interpretamos en los literales anteriores. Tenemos así,

$$\begin{aligned}
 \text{Transfor_escalada}[P_t f]\left(\frac{n}{T}\right) &= T c_n \\
 &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt.
 \end{aligned}$$

Si $T \rightarrow \infty$ entonces la periodización de f deviene en f y $\frac{n}{T}$ en la variable continua s . Por lo tanto, tenemos que la transformada escalonada de f es:

$$\text{Transfor_escalada}[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st} dt.$$

5.4.2. Tópicos de clase

En la presente situación hemos encontrado una función, que hemos llamado transformada escalada, de una señal o función no periódica (el pulso rectangular). Dicha transformada, se denomina transformada de Fourier y nos permitirá hacer un análisis de la señal en el dominio de la frecuencia como se puede hacer para una señal periódica por medio de la serie de Fourier.

Veamos de manera más general, cómo la llegamos a definir a dicha transformada para cualquier función que cumpla con los requisitos para ello. Tomamos como referencia en esta primera parte a [13].

Partamos de una función no periódica $f \in L^2(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ y definamos la función periódica h , “recortando” la función f en una ventana de tiempo con medida T y replicándola con un perio-

do de T . De manera que h está dada por la fórmula,

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } |t| < \frac{1}{2}T \\ f(t - nT) & \text{si } \frac{1}{2}(2n - 1)T < |t| < \frac{1}{2}(2n + 1)T. \end{cases}$$

De manera que la serie de Fourier de h es

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 n t} \quad (5.31)$$

y

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(t) e^{-i\omega_0 n t} dt. \quad (5.32)$$

La frecuencia angular de h es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

y ω_n la frecuencia angular del n -ésimo armónico es

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n.$$

Así, la separación entre armónicos es:

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_{n+1} - \omega_n \\ &= \frac{2\pi}{T}(n+1) - \frac{2\pi}{T}n \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi}{T} = \omega_0.$$

Con lo último y recuperando 5.31 y 5.32 podemos escribir,

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-T/2}^{T/2} h(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega.$$

Definamos la función c_n ,

$$c_n(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} h(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau.$$

Por lo que, tenemos

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} [c_n(\omega_n)] e^{i\omega_n t} \Delta\omega.$$

Si $T \rightarrow \infty$ se deriva por una parte que, f deviene en h y la variable discreta ω_n en la variable continua ω ; y la separación entre armónicos $\Delta\omega \rightarrow 0$. Así,

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} h(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} [c_n(\omega_n)] e^{i\omega_n t} \Delta\omega.$$

La última igualdad alude a la definición de integral de Riemann. Entonces,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.33)$$

La integral interna

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, \quad (5.34)$$

hace referencia a la transformada que se derivó en la presente situación, con la diferencia que la transformada de la situación tiene el exponente $2\pi s$ en cambio en esta integral tenemos ω .

Son distintas formas de definir la transformada de Fourier.

Debemos garantizar que 5.34 esté acotada. Para lo cual,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)||e^{-i\omega\tau}|d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Así, se hace necesario definir el espacio de funciones integrables y con ello definir a la Transformada de Fourier

Definición 5.8 (Espacio $L^1(I)$). *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. El espacio de funciones integrables se define como el conjunto*

$$\{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \int_I |f(t)|dt < \infty\}.$$

Definición 5.9 (Transformada de Fourier). *Se define la Transformada de Fourier de $f \in L^1(I)$ como la función $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

En términos ingenieriles se concibe la transformada de Fourier como un operador lineal , \mathcal{F} , así:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega).$$

La transformada de Fourier nos permite estudiar una función o una señal, en el dominio de la frecuencia. La manera de recuperar la función en el dominio del tiempo nos lo da 5.33, de tal forma que tenemos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega.$$

De esa manera definamos la transformada inversa de Fourier.

Definición 5.10 (Transformada inversa de Fourier). *La transformada inversa de $g \in L^1(I)$, se define como la función $\check{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada así:*

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

En un contexto ingenieril, si consideramos una señal eléctrica como la tensión o la corriente, $v(t)$ o $i(t)$, respectivamente; tenemos que la potencia instantánea que cae sobre un resistor de $R = 1\Omega$ es $v^2(t)$ e $i^2(t)$. Por lo que, es habitual relacionar a la expresión de la forma $|x(\tau)|^2$ con la potencia instantánea y $\int_{t_0}^t |x(\tau)|^2 d\tau$ con la energía, [1].

Así, decimos que una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ modeliza una señal de energía finita y que su valor es, [27]:

$$E[f] \|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Un teorema que relaciona la energía de una señal con la energía de su espectro de amplitud es el siguiente, [27].

Teorema 5.11 (Teorema de Plancharel-Relación de Parseval). *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ y se cumple la relación:*

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2.$$

Así, se infiere que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ y

$$\|\mathcal{F}\| = \sqrt{2\pi}.$$

Demostración. Consideremos el caso general de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $f(t) \in \mathbb{C}$. Debemos recordar que para $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $zz^* = |z|^2$, donde z^* representa el conjugado del número complejo z .

En el siguiente desarrollo calculamos $\|f\|_2^2$.

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \right]^* dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega)\hat{f}(\omega)d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2.
 \end{aligned}$$

De ahí, tenemos que

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2.$$

□

Ejemplo 5.3. *Calculemos la transformada de Fourier del pulso rectangular planteado en la presente situación y su energía en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.*

Recordemos cómo se define el pulso rectangular,

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\Pi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{2} \right) \\
 &= \operatorname{senc} \left(\frac{\omega}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Es claro que $\|\Pi\|_2^2 = 1$. Determinemos en Maxima $\|\hat{\Pi}\|_2^2$,

```
(% i27) define(F(w),sin(w/2)/(w/2));
```

$$F(w) := \frac{2 \sin\left(\frac{w}{2}\right)}{w} \quad (\% o27)$$

```
(% i28) integrate((F(w))^2,w,minf,inf);
```

$$2\pi \quad (\% o28)$$

Podemos verificar que la energía del espectro en amplitud de una señal es 2π veces la energía de la señal en el tiempo como establece el teorema de Plancherel.

Revisemos las propiedades de la Transformada de Fourier en la siguiente proposición.

Proposición 5.3. Propiedades de la transformada de Fourier

- *Linealidad*

Sean $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2](\omega).$$

- *Simetría*

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y tiene simetría par, $f(t) = f(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt.$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y tiene simetría impar, $f(t) = -f(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}[f](\omega) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt.$$

- *Simetría Hermítica de la Transformada de Fourier*

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $f(t) \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}^*[f](-\omega).$$

- *Dualidad*

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}[f](t) = 2\pi f(-\omega).$$

- *Desplazamiento temporal*

Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\tau \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[f(t - \tau)](\omega) = e^{-i\omega\tau} \mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

- *Desplazamiento en frecuencia*

Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\omega_0 \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0).$$

- *Modulación*

Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\omega_0 \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t) f(t)](\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t)](\omega + \omega_0).$$

- *Inversión en el tiempo*

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](-\omega).$$

- *Escalamiento en el tiempo*

Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t)](\omega/a).$$

- *Diferenciación*

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

y

$$\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

Ejemplo 5.4. *Un ejemplo interesante de aplicación de algunas de las propiedades de la Transformada de Fourier lo tomamos de [1].*

Encontremos la transformada de Fourier de la distribución gaussiana g , dada así:

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}. \quad (5.35)$$

La extensión de g depende de la varianza σ^2 . Podemos constatar en Maxima que la integral de la distribución gaussiana sobre los reales es uno.¹

¹ Una demostración de que la integral del impulso gaussiano es uno la puede encontrar en [31]. Hace uso de

```
(% i29) g(t):=(1)/(sqrt(2*%pi)*s)*%e^(-((1)/(2))*((t)/(s))^2);
```

$$g(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{(-\frac{1}{2})\left(\frac{t}{s}\right)^2} \quad (\% o29)$$

```
(% i30) integrate(g(t),t,minf,inf);
```

Is

s

positive or negative?

p ;

1

(% o30)

Veamos algunas gráficas para el impulso gaussiano con valores de σ de 1/2, 1 y 2.

Partamos de 5.35 y derivémosla con respecto a t ,

$$\frac{d}{dt}g(t) = -\left(\frac{t}{\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$$

$$\frac{d}{dt}g(t) = -\frac{t}{\sigma^2}g(t).$$

integrales dobles.

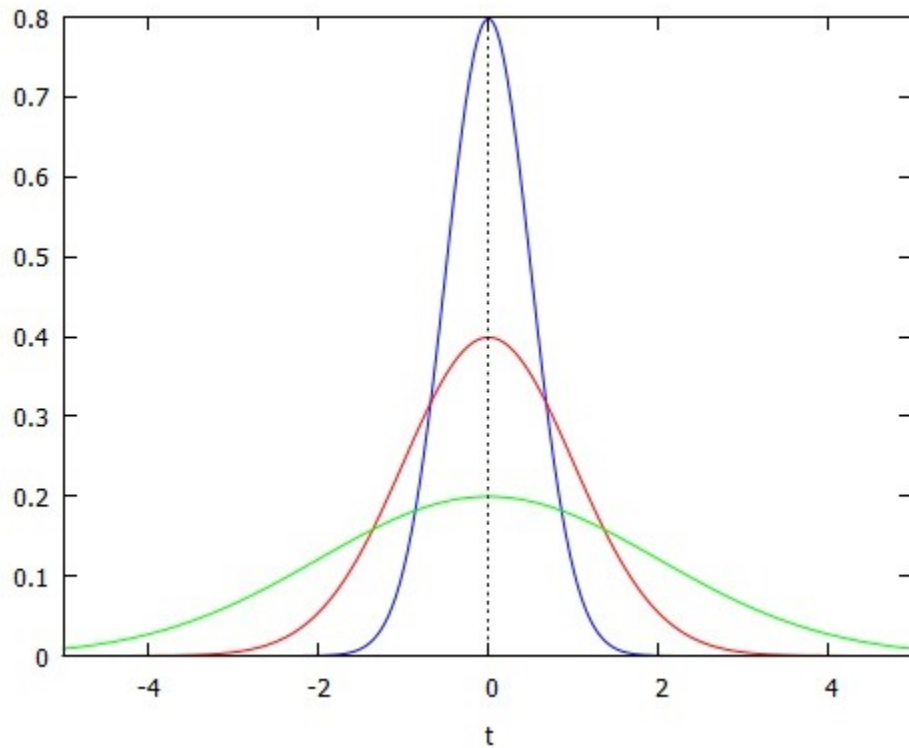


Figura 19. Gráfica de Distribuciones gaussianas con $\sigma = 1/2, 1, 2$.

Aplicando la Transforma de Fourier junto a las propiedades de derivación,

$$i\omega \hat{g}(\omega) = -\frac{i}{\sigma^2} \frac{d}{d\omega} \hat{g}(\omega)$$

$$i\omega \hat{g}(\omega) = \frac{1}{i\sigma^2} \frac{d}{d\omega} \hat{g}(\omega)$$

$$\frac{\frac{d}{d\omega} \hat{g}(\omega)}{\hat{g}(\omega)} = -\omega\sigma^2.$$

Integrando, tenemos

$$\int_0^\omega \frac{\frac{d}{d\omega'} \hat{g}(\omega')}{\hat{g}(\omega')} d\omega' = -\int_0^\omega \omega' \sigma^2 d\omega'$$

$$\begin{aligned}\ln[\hat{g}(\omega)] - \ln[\hat{g}(0)] &= -\frac{\omega^2\sigma^2}{2} \\ \frac{e^{\ln[\hat{g}(\omega)]}}{e^{\ln[\hat{g}(0)]}} &= e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} \\ \hat{g}(\omega) &= \hat{g}(0)e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}.\end{aligned}$$

Puesto que

$$\hat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\cdot 0t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1,$$

tenemos que

$$\hat{g}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}.$$

El detalle que se subraya en [1], es que la transformada del impulso gaussiano sigue conservando la distribución normal y su varianza ahora es $1/\sigma^2$. Lo que quiere decir que, cuando la señal en el tiempo está concentrada, en el dominio del tiempo se encuentra esparcida. Esto hace referencia al principio de incertidumbre para señales que dice que, un evento ubicado puntualmente en el dominio de la frecuencia no se puede ubicar con precisión en el dominio del tiempo y, a la vez, un evento en el dominio del tiempo, como una discontinuidad se esparce en el dominio de la frecuencia. Este ejemplo ilustra dicho principio para el caso de la distribución gaussiana, el cual se hace extensivo para cualquier señal o función.

Concluimos con esta sección, estudiando de [27] y [30] un teorema de importancia para el muestreo de señales, que es el Teorema de Shannon. Previo a ello, revisemos la definición

de señal de banda limitada.

Definición 5.11 (Señal de banda limitada). *La señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ es de banda limitada si*

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ : |w| > L \Rightarrow \hat{f}(w) = 0. \quad (5.36)$$

Al valor mínimo de L se denomina ancho de banda de f .

Teorema 5.12 (Teorema de muestreo de Shannon). *Sea f una señal de banda limitada con ancho de banda $L \in \mathbb{R}^+$, se cumple que*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \operatorname{senc}(Lt - n\pi).$$

Demostración. Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R})$ representa una señal de banda limitada con ancho de banda $L \in \mathbb{R}^+$. Recuperemos f a través de su transformada de Fourier \hat{f} ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

que al ser de banda limitada quedaría

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.37)$$

Ahora, escribamos \hat{f} por medio de su serie de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\frac{\pi}{L}\omega} \quad (5.38)$$

donde

$$g_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \hat{f}(\omega) e^{-in\frac{\pi}{L}\omega} d\omega. \quad (5.39)$$

Tomemos 5.37 y evaluemos $t = -n\frac{\pi}{L}$ para $n \in \mathbb{Z}$,

$$f\left(-n\frac{\pi}{L}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \hat{f}(\omega) e^{-in\frac{\pi}{L}\omega} d\omega. \quad (5.40)$$

Combinando 5.39 y 5.40,

$$g_n = \frac{\pi}{L} f\left(-n\frac{\pi}{L}\right),$$

la cual la sustituimos en 5.38 y considerando que $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{L} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(-n\frac{\pi}{L}\right) e^{in\frac{\pi}{L}\omega} = \frac{\pi}{L} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\pi}{L}\right) e^{-in\frac{\pi}{L}\omega}.$$

Sustituyendo la última igualdad en 5.37, tenemos el siguiente desarrollo,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\pi}{L}\right) e^{-in\frac{\pi}{L}\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \int_{-L}^L e^{i\omega(t - \frac{n\pi}{L})} d\omega \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{1}{i(t - n\pi/L)} e^{i\omega(t - \frac{n\pi}{L})} \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{1}{i(t - n\pi/L)} [2isen(Lt - n\pi)] \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\pi}{L}\right) \frac{sen(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi}. \end{aligned}$$

De ahí y teniendo en cuenta la definición 5.7, de la función seno cardinal, tenemos

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{n\pi}{L}\right) \text{senc}(Lt - n\pi).$$

□

5.5. Convolución

5.5.1. Situación-problema

Deseamos procesar una señal eléctrica que proviene de una señal de sonido. Supongamos que dicha señal se modeliza por la función $f \in L^2(\mathbb{R})$ y posee transformada de Fourier, \hat{f} . Lo que queremos es realizar alguna operación con la señal f de forma que el espectro de esta nueva señal modificada sea de una forma requerida. Por ejemplo, puede ser que de esta señal nos moleste cierto ruido y que lo intentemos eliminar con una simple resta de un espectro de una señal adecuado o queramos amplificar todas las componentes de frecuencia.

Busquemos la operación adecuada para f en el dominio del tiempo, de manera de obtener otra señal cuya transformada de Fourier nos represente cierto espectro requerido. Para ello, puede ser que necesitemos otra señal, $g \in L^2(\mathbb{R})$ que tenga como transformada de Fourier \hat{g} .

Consideremos tres tipos de modificaciones al espectro de esta señal:

1. Queremos que el espectro de la señal f , \hat{f} ; se superponga con el espectro de la señal

g, \hat{g} . Busca la operación que deberemos realizar en el dominio del tiempo a la señal f para lograr aquello.

Si queremos que el nuevo espectro resulte de la superposición del de f y del de g , de forma que esté representado por:

$$[\hat{f} + \hat{g}](\omega). \quad (5.41)$$

Deberemos de sumar las señales f y g en el dominio del tiempo y; en virtud de la propiedad de linealidad, la transformada de Fourier de la superposición,

$$[f + g](t)$$

sería en efecto 5.41.

2. Queremos amplificar el espectro de la señal, es decir, que todas las componentes de frecuencia se vean multiplicadas por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Busca la operación que deberíamos realizar a la señal f en el dominio del tiempo para que su espectro se vea modificado como se mencionó.

Para obtener a partir del espectro \hat{f} , otro, que se encuentre amplificado por α . En virtud de la linealidad de la transformada de Fourier deberemos de multiplicar la señal f en el dominio del tiempo por α . De manera que obtenemos el nuevo espectro así:

$$\alpha \hat{f}(\omega).$$

3. Ahora queremos del espectro de f , resaltar unas frecuencias y atenuar otras de la señal.

Es decir, buscamos de manera selectiva multiplicar las componentes de frecuencia del espectro de f . Esto lo haremos a través de la ponderación de \hat{f} por la transformada de Fourier de g , \hat{g} . De manera que el espectro modificado quede así:

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \quad (5.42)$$

Busca la operación que se debe realizar en el dominio del tiempo entre las señales f y g para que su transformada de Fourier quede ponderada como en 5.42.

Buscamos que la transformada de Fourier de g , pondere a la transformada de f , de manera selectiva para cada componente de frecuencia. Entonces, el nuevo espectro debería estar dado así:

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Partamos de la definición de la transformada de Fourier y desarrollemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x)e^{-i\omega t} e^{-i\omega x} dt dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x)e^{-i\omega(t+x)} dt dx.
 \end{aligned}$$

Si hacemos que $u = t + x$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u-x)g(x)e^{-i\omega u} du dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} \int_{-\infty}^{\infty} f(u-x)g(x) dx du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-x)g(x) dx \right] e^{-i\omega u} du.
 \end{aligned}$$

De la integral interna obtenemos una función que depende de u . Si la nombramos como h ,

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-x)g(x) dx.$$

Entonces tenemos que

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-i\omega u} du.$$

Como el nuevo espectro modificado será la representación de la transformada de Fourier de cierta operación entre f y g . Dicha operación entre estas dos operaciones es precisamente la dada por h .

Si cambiamos la variable u por t , tendremos que entre f y g es necesario realizar la operación:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx,$$

para obtener un espectro como ponderación del espectro de f por g .

5.5.2. Tópicos de clase

En la presente situación hemos visto tres operaciones a desarrollar en el dominio del tiempo para obtener un espectro determinado. Dos de ellas fáciles y la última una operación basada en la integral de dos funciones, que se refiere a la convolución de dos funciones.

Definición 5.12 (Convolución). Sean dos funciones integrables sobre \mathbb{R} , $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, se define la convolución entre f y g a la función

$$f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

dada así

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

Algunas de las propiedades de la convolución son las siguientes, [30]:

- Conmutatividad: Si $f * g$ está definida entonces también lo está $g * f$ y se cumple:

$$f * g = g * f.$$

- Para $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h).$$

- Convolución en el tiempo: Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = [\hat{f}\hat{g}](\omega).$$

- Convolución en la frecuencia: Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}[fg](\omega) = \frac{1}{2\pi}[\hat{f} * \hat{g}](\omega).$$

Aplicaciones de la Convolución

Revisamos dos aplicaciones de la convolución de importancia para estudios de Ingeniería,

estas son: filtrado de señales y teorema del límite central. Aplicaciones tomadas de [31].

Filtrado de señales

Las últimas propiedades, en particular la referente a la convolución en el tiempo; nos permitirá revisar el filtrado de una señal. La idea es resaltar o eliminar algunas componentes de frecuencia de una señal, a través de una multiplicación entre la transformada de Fourier de la señal con una función apropiada. Todo esto en el dominio de la frecuencia, lo que significa que el problema del filtrado pasa por convolucionar dos funciones en el dominio del tiempo.

Si consideramos $v(t)$ como la señal de entrada a un filtro y $w(t)$ la señal de salida. El filtro basado en convolución, convolucionará dos funciones; una función h , llamada respuesta al impulso y v . De forma que

$$w(t) = (h * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)v(\tau)d\tau.$$

Con lo que tenemos que en el dominio de la frecuencia

$$\hat{w}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{v}(\omega),$$

donde \hat{h} se denomina función de transferencia.

Filtro Pasa bajo

Un filtro pasa bajo ideal es aquel que permite el paso de frecuencias por debajo de cierta valor, $\omega_c \in \mathbb{R}^+$, llamada frecuencia de corte, y corta las que están por encima de este valor, [31]. Lo que nos lleva a considerar que su función de transferencia sería la siguiente:

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

La transformada de Fourier inversa de \hat{h} , que viene a ser la respuesta al impulso, está dada así:¹:

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{senc}(\omega_c t).$$

En la Figura 20 vemos la respuesta al impulso para el filtro pasa bajo con $\omega_c = 100$.

Filtro Pasa banda

Otra clase de filtro es el pasa banda ideal, cuya función de transferencia la podemos obtener combinando la del filtro pasa bajo, \hat{h} . Dicha función de transferencia hace que el filtro deje pasar frecuencias que pertenecen a cierto intervalo y corta las de fuera del intervalo. La

¹ Este resultado lo podemos obtener considerando que la transformada de Fourier del pulso rectangular de amplitud A y de duración $2T$, $\Pi(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{si } |t| \geq T \end{cases}$, es $\hat{\Pi}(\omega) = 2AT \text{senc}(\omega T)$; y gracias a la propiedad de simetría, $\mathcal{F}[\hat{f}](\omega) = 2\pi f(-\omega)$.

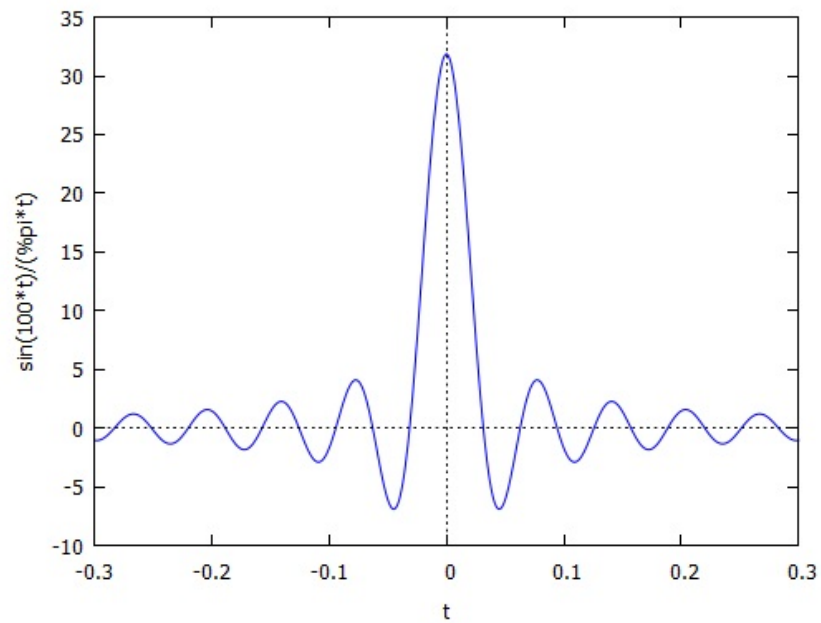


Figura 20. Respuesta al impulso para un filtro pasa bajo $\omega_c = 100$

función de transferencia del filtro pasa banda se define así:

$$\hat{b}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_0 - \omega_c < |\omega| < \omega_0 + \omega_c \\ 0 & \text{si caso contrario.} \end{cases}$$

También podemos escribir en términos de \hat{h} ,

$$\hat{b}(\omega) = \hat{h}(\omega - \omega_c) + \hat{h}(\omega + \omega_c),$$

de manera que la respuesta al impulso, b , la calculamos a través de h y la propiedad de

modulación. Por lo que, tenemos

$$b(t) = h(t)e^{i\omega_0 t} + h(t)e^{-i\omega_0 t}$$

$$b(t) = h(t) \cos(\omega_0 t)$$

$$b(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \cos(\omega_0 t) \text{senc}(\omega_c t).$$

En la Figura 21 vemos la respuesta al impulso para este filtro.

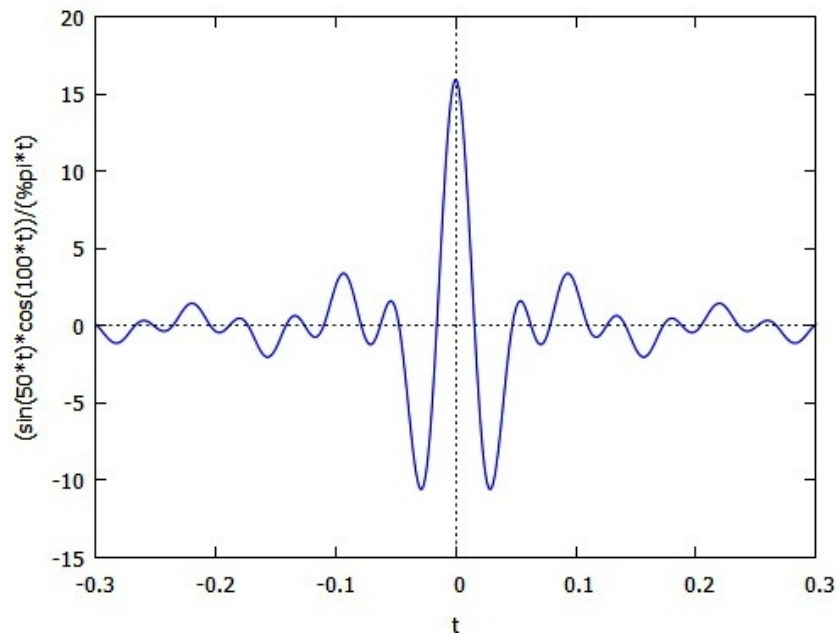


Figura 21. Respuesta al impulso para un filtro pasa banda $\omega_c = 50$ y $\omega_0 = 100$.

Teorema del Límite Central

Como segunda aplicación a la convolución, consideramos un Teorema dentro de la Teoría de probabilidades¹, que es el Teorema del Límite Central. En términos generales menciona que la suma de n variables aleatorias independientes posee una función de distribución de probabilidades aproximada a una distribución gaussiana. Para su demostración consideremos antes dos proposiciones.

Teorema 5.13 (Distribución de probabilidades para la suma de variables independientes). Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes con funciones de distribución de probabilidad p_1, p_2, \dots, p_n , respectivamente. Entonces la función de distribución de probabilidades de la suma

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

está dada por

$$p^{*n}(x) = (p_1 * p_2 * \dots * p_n)$$

Demostración. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes y con funciones de distribución de probabilidad p_1 y p_2 , respectivamente. Determinemos la probabilidad de que $a \leq X_1 \leq b$ y $c \leq X_2 \leq d$. Bajo los supuestos considerados tenemos que

$$\text{Prob}(a \leq X_1 \leq b \wedge c \leq X_2 \leq d) = \int_a^b p_1(x_1) dx_1 \cdot \int_c^d p_2(x_2) dx_2,$$

¹ Los cursos de Estadística y Probabilidades son requisitos para tomar el curso opcional al cual se destina la presente propuesta.

lo cual se podría escribir también así,

$$Prob(a \leq X_1 \leq b \wedge c \leq X_2 \leq d) = \int_a^b \int_c^d p_1(x_1)p_2(x_2)dx_1dx_2$$

y si $a, c \rightarrow \infty, t = b + d$;

$$Prob(X_1 \leq b \wedge X_2 \leq d) = Prob(X_1 + X_2 \leq t) = \iint_{x_1+x_2 \leq t} p_1(x_1)p_2(x_2)dx_1dx_2.$$

Es decir, debemos determinar la integral doble sobre la región $x_1 + x_2 \leq t$. Si hacemos un cambio de variable así

$$x_1 = u$$

$$x_2 = v - u,$$

tenemos que $x_1 + x_2 = v = t$ y $dx_1 = du, dx_2 = dv$. De manera que tenemos que

$$\begin{aligned} Prob(X_1 + X_2 \leq t) &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} p_1(u)p_2(v-u)dudv \\ &= \int_{-\infty}^t (p_1 * p_2)(v)dv \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que la función de distribución de probabilidad de $X_1 + X_2$ es $(p_1 * p_2)(x)$.

Haciendo extensivo lo último, tenemos que la función de distribución de probabilidad de S_n está dada por

$$p^{*n}(x) = (p_1 * p_2 * \dots * p_n)(x). \quad (5.43)$$

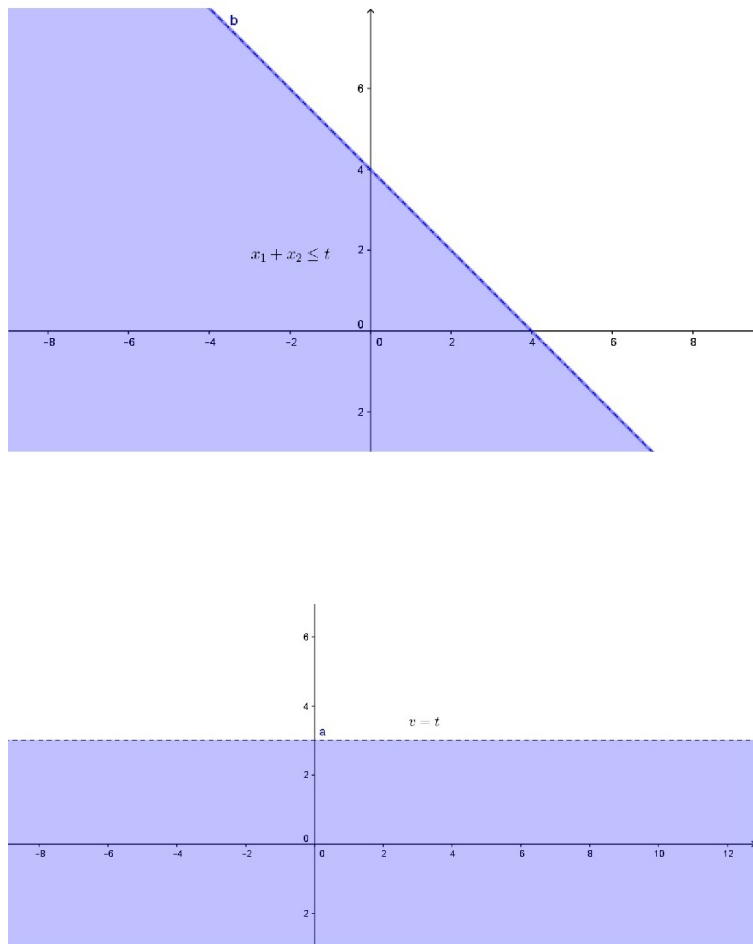


Figura 22. Regiones de Integración

Esto es, la función de distribución de probabilidad de la suma de n variables aleatorias independientes, es la convolución de las n funciones de distribución de probabilidad de cada variable aleatoria. □

Revisemos esta segunda proposición que nos llevará a la demostración del Teorema del Límite Central.

Teorema 5.14. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente dis-

tribuidas, con función de distribución p ; todas con media $\mu = 0$ y desviación estándar σ . La media de $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ es

$$\mu(S_n) = n\mu$$

y su desviación estándar

$$\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma$$

Demostración. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con función de distribución de probabilidad p y media

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

y si $\mu = 0$ su varianza es

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx.$$

Sea $S_2 = X_1 + X_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(S_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(p * p)(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} p(x-z)p(z)dzdx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x-z)dxp(z)dz \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x - z = y$,

$$\mu(S_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y+z)p(y)dy p(z)dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy + z \int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy \right] p(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\mu + z]p(z)dz \\
&= \mu + \mu \\
&= 2\mu.
\end{aligned}$$

Por inducción tenemos que

$$\mu(S_n) = n\mu. \quad (5.44)$$

Para obtener la varianza de S_n recordemos los supuestos que consideramos,

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = 0 \\
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx = 1 \\
&\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.
\end{aligned}$$

En el siguiente desarrollo encontramos la varianza para S_2 . En el proceso haremos la misma sustitución $x - z = y$.

$$\begin{aligned}
\sigma^2(S_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(p * p)(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x-z)p(z)dzdx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x-z) dx p(z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \int_{-\infty}^{\infty} (y+z)^2 p(y) dy p(z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y) dy + 2z \int_{-\infty}^{\infty} y p(y) dy + z^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy \right] p(z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma^2 + z^2] p(z) dz \\
&= \sigma^2 + \sigma^2 \\
&= 2\sigma^2.
\end{aligned}$$

A partir de lo último se puede inducir que

$$\sigma^2(S_n) = n\sigma^2 \Rightarrow \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma. \quad (5.45)$$

□

Con estas dos demostraciones probaremos el Teorema del Límite Central

Teorema 5.15 (Teorema del Límite Central). *Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas por la función p , con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Considerando que la suma normalizada de S_n es*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

y tiene por función de distribución de probabilidad p_n . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Demostración. Consideremos las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas por p ,

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

cuya media

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) = 0$$

y su desviación estándar

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = 1.$$

La normalización de S_n para que tenga una media de 0 y desviación estándar 1 en virtud del Teorema 5.14 debe ser,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Como la función de distribución de probabilidad de las variables aleatorias $X_i, i = 1, 2, \dots, n$; es p y del Teorema 5.13, tenemos que la función de distribución de probabilidad de S_n es

$$p^{*n}(x) = \underbrace{(p * p * \dots * p)}_{n \text{ veces}}(x).$$

Es decir para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(a < S_n < b) &= \int_a^b p^{*n}(x) dx \\ \text{Prob}(a\sqrt{n} < S_n < b\sqrt{n}) &= \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} p^{*n}(x) dx. \end{aligned}$$

Si hacemos que $x = \sqrt{n}z$, tenemos

$$\text{Prob}\left(a < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < b\right) = \int_a^b \sqrt{n} p^{*n}(\sqrt{n}z) dz. \quad (5.46)$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad de S_n/\sqrt{n} es p_n ,

$$p_n(z) = \sqrt{n} p^{*n}(\sqrt{n}z). \quad (5.47)$$

Tomaremos la Transformada de Fourier de 5.47 y en virtud de la propiedad de convolución en el tiempo y la propiedad de escalamiento de la transformada de Fourier, desarrollamos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[p_n](\omega) &= \sqrt{n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{F}[p]\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathcal{F}[p]\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \left\{ \mathcal{F}[p]\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right) \right\}^n. \end{aligned}$$

Por otro lado la transformada de Fourier de p es

$$\mathcal{F}[p]\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-i\frac{\omega}{\sqrt{n}}x} dx,$$

que por el desarrollo de Taylor de la función exponencial,

$$\mathcal{F}[p]\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left[1 - \frac{i\omega x}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \left[\frac{i\omega x}{\sqrt{n}} \right]^2 [1 + \varepsilon_n(x)] \right] dx,$$

donde $\varepsilon_n(x)$ está acotado y $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[p]\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx - \frac{i\omega}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varepsilon_n(x) p(x) dx. \end{aligned}$$

Como se conoce que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = 1$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varepsilon_n(x) p(x) dx = o(1),$$

donde $o(1) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[p]\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{n} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{n} o(1) \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{n}$$

En virtud de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

tenemos que si $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \mathcal{F}[p] \left(\frac{\omega}{\sqrt{n}} \right) \right\}^n \approx \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{n} \right)^n \approx e^{-\frac{1}{2} \omega^2}.$$

Como

$$\mathcal{F}[p_n](\omega) = \left\{ \mathcal{F}[p] \left(\frac{\omega}{\sqrt{n}} \right) \right\}^n$$

y del Ejemplo 5.4, obtenemos la transformada inversa de Fourier de $\mathcal{F}[p_n]$ y llegamos a la función de distribución de probabilidad para la suma de las n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

□

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

- Sobre el equilibrio entre lo formal y lo intuitivo. Podemos decir que, hemos encontrado dicho equilibrio a nuestro parecer, siendo intuitivos al principio de cada tema con las situaciones-problemas; para luego presentar los contenidos con cierto nivel de abstracción coherente con los estudios en Ingeniería. Dicho equilibrio al finalizar la propuesta podemos ubicarlo más cercano de la intuición que de lo formal; pues, creemos que esto lo dio la naturaleza propia de la Ingeniería y el instrumento en que se basa la propuesta, que es la situación-problema.
- El CAS Maxima ciertamente ayudó a la ejemplificación de ciertas proposiciones, cuya demostración quedan fuera del alcance de los estudios en Ingeniería. Sin embargo,

con la herramienta tecnológica, de manera a priori podemos decir que hemos logrado acercarnos de forma intuitiva.

- Nuestra propuesta didáctica no llega a ser una Ingeniería didáctica como la metodología establecida por la Teoría de situaciones didácticas. Para que sea así, deberíamos de profundizar más en los estudios preliminares que llevan al diseño de una situación a-didáctica, tal es el caso de los estudios epistemológicos e históricos. Y por otro lado deberíamos someter las situaciones-problema a experimentación, completando así las dos últimas fases de la Ingeniería junto al análisis a posteriori.
- Al finalizar la propuesta estamos convencidos que esta podría generar más impacto en lo didáctico, si hubiésemos profundizado en los estudios histórico-epistemológicos de los conocimientos matemáticos referidos. Estamos convencidos que dichos estudios nos permiten ir a la raíz y génesis de las matemáticas, dando muchos elementos para el diseño didáctico.

Recomendaciones

- Para abordar conceptos que de principio se muestran descontextualizados, como es el de convolución, recomendamos que para estudios a nivel de Ingeniería se sacrifique un poco lo formal, con fines didácticos; con la condición de que luego sí se formalice con el grado adecuado para el nivel.
- La Ingeniería didáctica como metodología de Investigación nos parece sugerente. Para

futuros trabajos recomendaríamos que se tome dicha metodología, pero para su correcto y exhaustivo desarrollo; que se haga Ingenierías por temas puntuales, dado que la tarea es grande. Por ejemplo, hacer una Ingeniería didáctica sólo para abordar el concepto de Base Hilbertiana.

- En el mismo sentido recomendamos que para futuros trabajos se tome bien en cuenta el profundizar en estudios histórico-epistemológicos, para un diseño didáctico de impacto. Por ejemplo, una noción que la aplicamos en los estudios matemáticos en Ingeniería es la de límite. Rastrear la evolución de dicha noción en el tiempo sería un trabajo con real impacto.
- Una recomendación un poco más general es acerca de la formación matemática a nivel de Ingeniería. Estamos conscientes de que en las actuales condiciones es una quimera pretender tener Departamentos de Matemáticas en todas las Universidades del país¹; sin embargo, nos parece que en las Universidades calificadas como de investigación y docencia sí deberían existir y en las demás Universidades un Departamento que gestione correctamente su enseñanza.
- Refiriéndose a lo anterior que ciertamente es un problema grande de las Universidades; problema que consiste en no poder constituir Departamentos que al menos gestionen la enseñanza de las Matemáticas. Las mismas Universidades deberían de apoyar las propuestas que vayan encaminadas a contribuir en la solución de dicho problema, en

¹ Lo anotamos como quimera, pero esa debería ser la realidad de la Universidad. La contradicción viene en el hecho de pretender tener tantos Departamentos de Matemáticas como Universidades en el país, lo cual nos lleva a decir que existen muchas Universidades en el país.

particular, apoyar a los programas de postgrado con potencial de crecimiento y en vías de constituirse en programas de investigación, que alimentarían a los Departamentos por crearse, tal es el caso de la MEMAT.

Bibliografía

- [1] ALVARADO MOYA, P. Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, Primera edición, 2008.
- [2] ARACIL, J. Reflexiones sobre la identidad del Ingeniero Ingenio Num 12, pp.12-21, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, 2000.
- [3] ARTIGUE, M. DOUADY, R. MORENO, L. GÓMEZ, P. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, Primera Edición, 1995.
- [4] BOBADILLA, J, et al. La Transformada de Fourier. Una visión pedagógica. Madrid, 2000.
- [5] BRÉZIS, H. Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones. Masson, París, 1983.
- [6] CAMARENA, P. Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas. México: Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del IPN, 1993.
- [7] CANADA VILLAR, A. Una perspectiva histórica de las series de Fourier. Seminario de Historia de la Matemática, 2000.

- [8] CORDÓVA, F. La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en Ingeniería. IPN, México, 2011.
- [9] Criterios de Evaluación para carreras de Ingeniería. Comité Técnico de Ingeniería, Comisión Nacional de Acreditación (Chile).
- [10] EVANS, L. Partial Differential Equations, vol 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [11] FARFÁN, R. Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.
- [12] FOURIER, J. Théorie Analytique de la Chaleur. Chez Firmin Didot, París, 1822.
- [13] GLYN, J, et al. Advanced modern Engineering Mathematics. Pearson Education, England, Fourth edition, 2011.
- [14] GREENBERG, J, et al. Instructional Module in Fourier Spectral Analysis, Based on Principles of How People Learn. Journal of Engineering Education, April, 2003.
- [15] HALMOS, P. El problema de aprender a enseñar: la enseñanza de la solución de problemas. The American Mathematical Monthly 82, No. 5, 466-470, 1975.
- [16] PESCHRLEI, J. An Instructional Framework for Introducing Wavelet-Based Problem Solving Techniques to Advanced Civil Engineering Students. Proceedings of the 2005 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition.

- [17] KAHANE, JP. LEMARIÉ, P. Fourier Series and Wavelets I. University of Paris-Sud Orsay, France, 2010.
- [18] KNEBEL JOACHIM. Entrevista realizada el 23 de Mayo del 2010 en Karlsruhe, Alemania.
Entrevistador: Paul D. Toasa C.
- [19] KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, USA, 1989.
- [20] KREYSZIG, E, et al. Advanced Engineering Mathematics. Wiley, 10th Edition, 2011.
- [21] L. LAMPORT. \LaTeX . Addison-Wesley. 1996.
- [22] LILJEDAHN, P. SANTOS-TRIGO, M. MALASPINA, U. BRUDER, R. Problem Solving in Mathematics Education. Springer Open, ICME13, Hamburg 2016.
- [23] MACIAS, M. Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de Ingenieros. IPN, México, 2012.
- [24] MALLAT, S. A Wavelet Tour of Signal Processing. The Sparse Way. Academic Press, Third Edition, 2009.
- [25] MARCOLINI, M. y PERALES. La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, México, 2005.
- [26] MARTÍNEZ MERINO, ME. Aprendizaje Basado en Problemas aplicado a un curso de Matemáticas de 2do. de Telesecundaria. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla , México, 2014.

- [27] MAYORGA-ZAMBRANO, J. Matemática Superior para Ingeniería con ayuda de Maxima. Ecuador, preprint 2016.
- [28] MEYER YVES. Entrevista realizada el 20 de Enero del 2007 en París. Entrevistador: Diego Chamorro.
- [29] MURO, C. Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa. Cinvestav, México, 2004.
- [30] OÑEIL, PETER V. Advanced Engineering Mathematics. Cengage Learning, Seventh Edition, 2012.
- [31] OSGOOD, B. Lecture Notes for EE 261. The Fourier Transform and its Applications. Electrical Engineering Department Stanford University.
- [32] PANIZZA, M. Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas.
- [33] R.A ESPANOLA, Diccionario de la Lengua Espanola Vigésima tercera edición, Espana, 2014.
- [34] ROJANO CEBALLOS, M. Enseñanza de la Física y Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula. CINVESTAV-IPN. Departamento de Matemática Educativa, 2006
- [35] RODRÍGUEZ, M, POPOCA, M. The Trigonometrical Series of Fourier: A Visual Approximation. International Conference on Mathematics Education Research, 2010.

- [36] ROMO-VASQUEZ, A. Les mathématiques dans la formation dingénieurs. Paris: Irem de Paris. Paris: Irem de Paris, 2009.
- [37] SALABURU, P, MEES, L, PÉREZ, J. Sistemas Universitarios en Europa y EEUU, Academia Europea de Ciencias y Artes Academia Europea de Ciencias y Artes, 2003.
- [38] SANTOS TRIGO, M. Problematizar el estudio de las Matemáticas: Un aspecto esencial en la organización del curriculum y en el aprendizaje de los estudiantes. Investigaciones en Matemática Educativa II, Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.
- [39] SANTOS TRIGO, M. La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Cinvestav, México.
- [40] SHOENFELD, A. Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press, 1985.
- [41] SOTO, J. Una secuencia didáctica basada en modelación matemática. IPN, México, 2013.
- [42] STEIN, E. SHAKARCHI, R. Fourier Analysis. An Introduction. Princeton University Press, 2003.
- [43] VILLANI CÉDRIC. Entrevista realizada el 14 de Junio del 2011 en París. Entrevistador: Diego Chamorro.
- [44] VILLATE, J. Introducao aos Sistemas Dinamicos: uma abordagem prática com Maxima. Universidade do Porto, Brasil, 2007.

- [45] WAWRZYNCZYK, A. Introducción al Análisis Funcional. Universidad Autónoma Metropolitana, México, Primera Edición, 1993.
- [46] ZILL, D. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 1. Ecuaciones Diferenciales. MCGRAW-HILL, Tercera Edición, México, 2008.
- [47] ALONSO, J. Introducción a Maxima Universidad de Sevilla, España, 2010.
- [48] SANTOS, J. DOS SANTOS, L. BONIFAZ, R. TIC en la educación: ¿neutralidad o políticas pedagógicas? Un abordaje desde la Pedagogía de Paulo Freire Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 2018.
- [49] DE GUZMÁN M. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática Revista Iberoamericana de Educación, 2007.
- [50] ASENSIO, C. Adaptación del modelo de Miguel de Guzmán para la resolución cooperativa de problemas para alumnos de 1º de la ESO. Universidad Internacional de la Rioja, España, 2013.
- [51] CAPOTE, G. RIZO, N. BRAVO, G. La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria. Revista Universidad y Sociedad, 2016.