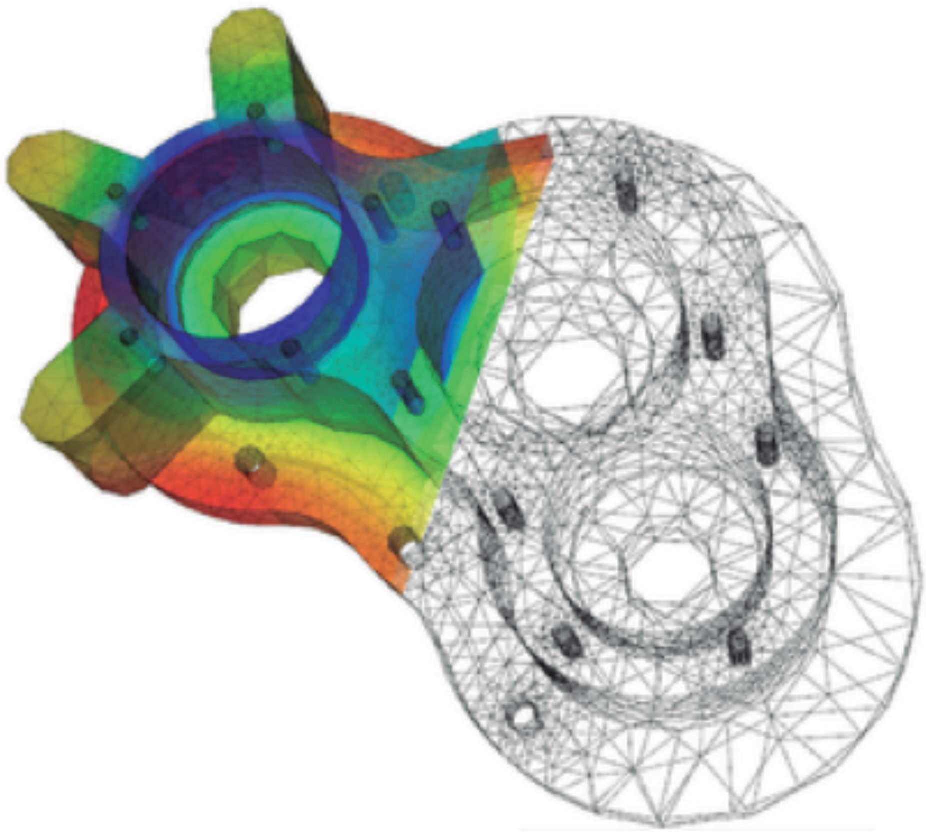
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

UNA PERSPECTIVA DIDÁCTICA CON LA UTILIZACIÓN DE SOFTWARE LIBRE



Ing. Norma Barreno, Mg.
Dra. Lourdes Zuñiga, Mg.
Dr. Antonio Meneses, PhD.
Dr. Wilson Román V., MSc.

1922 ECUADOR
ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden
Ing. Norma Barreno, Mg; Dra. Lourdes Zuñiga, Mg; Dr. Antonio Meneses, PhD.
Dr. Wilson Román V., MSc.

Primera edición electrónica. Noviembre del 2019
ISBN: 978-9942-765-51-2
Revisión científica: Miguel Alberto Vilañez Tobar Msc; Dra. Silvia Mariana Haro Rivera Msc.

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE
Tcrn. Humberto Aníbal Parra Cárdenas, Ph. D.
Rector

Publicación autorizada por:
Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE
Tcrn. Oswaldo Mauricio González, Ph. D.
Presidente

Edición
Lcdo. Xavier Chinga

Diseño
Pablo Zavala A.

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE
Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador.
htpp//www.espe.edu.ec

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

UNA PERSPECTIVA DIDÁCTICA CON LA UTILIZACIÓN DE SOFTWARE LIBRE

Ing. Norma Barreno, Mg.
Dra. Lourdes Zuñiga, Mg.
Dr. Antonio Meneses, PhD.
Dr. Wilson Román V., MSc.

Contenido

Autores

Barreno Layedra Norma del Pilar
Docente Departamento de Ciencias Exactas de la ESPE extensión Latacunga

- Magíster en Matemática Básica, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
- Diplomado en Docencia Matemática, Universidad San Francisco de Quito.
- Diplomado Internacional en Competencias Docentes Tec de Monterrey – Cambridge, Tecnológico de Monterrey.
- Ingeniero en Sistemas, Universidad Tecnológica Indoámerica.
- Tecnóloga en Informática Aplicada, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Meneses Freire Manuel Antonio
Docente Universidad Nacional de Chimborazo

- Doctorado en Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Coruña – España.
- Master Universitario en Técnicas Estadística, Universidad de Coruña – España.
- Magister en Gestión Ambiental, Universidad Nacional de Chimborazo.
- Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, Universidad Nacional de Chimborazo.
- Doctor en Matemáticas, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Román Vargas Wilson Marcelo
Docente Departamento de Ciencias Exactas de la ESPE extensión Latacunga

- Master en Informática Aplicada, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.
- Magister En Matemática Aplicada Mención Modelación Matemática Y Simulación Numérica, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.
- Diploma Superior en Gestión para El Aprendizaje Universitario, Escuela Politécnica del Ejército-Espe.
- Diplomado en Estadística Informática Aplicada a la Educación, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.
- Diplomado Internacional en Competencias Docentes Tec de Monterrey – Cambridge en el Tecnológico de Monterrey.
- Doctor en Matemáticas, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Zuñiga Lema Lourdes del Carmen
Docente Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

- Magister en Ciencias de la Educación aprendizaje de la Matemática, Universidad Nacional de Chimborazo.
- Diploma superior en investigacion educativa y planificacion curricular, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.
- Doctor en matematica, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Prólogo

El texto de ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN, UNA PERSPECTIVA DIDÁCTICA CON LA UTILIZACIÓN DE SOFTWARE LIBRE aborda la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en su etapa inicial, por lo que, se promueve la utilización de software matemático como una estrategia didáctica que permita vincular el desarrollo analítico con la exploración y experimentación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, la variación en las condiciones del problema permite visualizar y analizar diferentes escenarios de solución de una ecuación diferencial ordinaria, de esta forma el estudiante da consistencia a los resultados que obtiene logrando una visión global, integradora y holística que articula sus campos del conocimiento.

Este libro presenta en cada una de las secciones multitud de ejercicios resueltos de ecuaciones diferenciales ordinarias así como también ejercicios planteados de tal manera que el estudiante esté en la capacidad de dominar todos los métodos y herramientas para resolver los problemas de forma clara y concisa. La obra contiene cuatro unidades didácticas formadas por: Unidad I, en la que se aborda los fundamentos teóricos sobre el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La Unidad II, se presentan los métodos clásicos de la solución. La Unidad III, presenta una variedad de ejercicios de aplicación en diferentes campos de la ingeniería y la Unidad IV, presenta una Guía didáctica sobre las principales funciones para resolver ecuaciones diferenciales con la utilización del software matemático.

El ideal de los autores del presente libro, es compartir una nueva metodología para la solución gráfica y analítica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Esta metodología consiste en la utilización del software libre “Maxima y Geogebra” y el software comercial “MATLAB”, que con la ayuda de estas herramientas informáticas se ve claramente que el estudiante ha podido mejorar su capacidad de reflexión, criticidad y creatividad de tal manera de alcanzar aprendizajes significativos en estos contenidos que tiene una variedad de aplicaciones en diferentes campos de la ingeniería.

Capítulo 1

DEFINICIONES BÁSICAS Y TERMINOLOGÍA

UNIDAD I

1.1. DEFINICIONES BÁSICAS Y TERMINOLOGÍA

En los cursos de Cálculo Diferencial se analizó las condiciones para que una función real y continua $y = f(x)$, tenga su correspondiente función derivada, la misma que es representada por

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (1.1)$$

Por ejemplo:

si $y = e^{x^2}$ entonces

$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$ o bien $\frac{dy}{dx} = 2xy$

El problema que enfrentamos en este curso no es: dada una función $y = f(x)$, encontrar su derivada; más bien, el problema es: si se da una ecuación tal como $\frac{dy}{dx} = 2xy$, encontrar de alguna manera una función $y = f(x)$ que satisfaga la ecuación. En una palabra, se desea **resolver ecuaciones diferenciales**.

Definición 1.1.	**ECUACIÓN DIFERENCIAL**
Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial**. (Zill Dennis, 2006)	

1.2. CLASIFICACIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con las tres propiedades siguientes.

1.2.1. CLASIFICACIÓN SEGÚN EL TIPO

- Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a **una sola variable independiente**, entonces se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**. Por ejemplo:

a) $\frac{dy}{dx} - 5y = 1$

b) $(x + y)dx - 4y\,dy = 0$

c) $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$

d) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

e) $y' + xy = 5$

Representan ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes, se llama **ecuación diferencial parcial**. Por ejemplo:

  a) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

  b) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

  c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$

  d) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dy} + 6y = 0$

  e) $y' + xy + x' = 0$

  Representan ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales.

1.2.2. CLASIFICACIÓN SEGÚN EL ORDEN

La máxima derivada de la función incógnita se denomina **orden de la ecuación diferencial**. Por ejemplo:

	Ecuación diferencial	Tipo de ecuación	Orden de la ecuación
a)	$\frac{d^4y}{dx^4} + 8\frac{dy}{dx} - 2y = 0$	Ordinaria	Cuarto orden
b)	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$	Ordinaria	Segundo orden
c)	$\frac{d^3y}{dx^3} - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 4y = x$	Ordinaria	Tercer orden
d)	$y''' + x(y'')^4 + y' = 0$	Ordinaria	Tercer orden
e)	$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$	Parcial	Tercer orden

Ejemplos

Aunque las ecuaciones diferenciales parciales son muy importantes, su estudio exige una buena base en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. En consecuencia, en la discusión que sigue, así como en las próximas unidades de este módulo, limitaremos nuestra atención a ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 1.2.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

Una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* está dada mediante la ecuación

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1.2)$$

Donde:

- x representa la variable independiente de la ecuación diferencial,
- y representa la función incógnita de la ecuación diferencial,
- $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ representan las n-primeras derivadas de la función incógnita.

(Edwards, 2009)

1.2.3. CLASIFICACIÓN SEGÚN LA LINEALIDAD O NO LINEALIDAD

Definición 1.2.3. ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL (EDO)

Una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (1.3)$$

Se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria lineal**, si cumple:

- Los coeficientes $a_i(x) \quad \forall\, i = 1,2, \dots n$ son constantes o dependen únicamente de la variable independiente x.
- La función incógnita y junto con sus n-primeras derivadas son de grado uno.

Donde $g(x)$ es una función continua, si $g(x) = 0$, entonces la ecuación (1.3) se denomina ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea, caso contrario no homogénea.

Nota:

- Si la ecuación (1.3) no cumple con las condiciones de linealidad descritas en la definición anterior, entonces representará una ecuación diferencial ordinaria no lineal.

	Ecuación diferencial	Tipo de ecuación
a)	$xdy + ydx = 0$	EDO Lineal de primer orden
b)	$y" - 2y' + y = 0$	EDO Lineal de segundo orden
c)	$x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^x$	EDO Lineal de tercer orden
d)	$(x-1)y''' + y' = 0$	EDO Lineal de tercer orden
e)	$x^2\dfrac{d^5y}{dx^5} - \dfrac{1}{x}\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} = sen(x)$	EDO Lineal de quinto orden

A continuación explicamos ejemplos de **ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales**.

El coeficiente depende de y

El exponente no es 1

$$yy" - 2y' = x \quad \text{y} \quad \frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$$

Por lo tanto, representan ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo y tercer orden, respectivamente.

Ejercicios 1.1

Describa las siguientes ecuaciones diferenciales dadas, según su tipo, orden, grado y linealidad.

1. $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \dfrac{dy}{dx} = 0$

2. $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

3. $\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{Q}{C} = 0$

4. $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$

5. $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} + sen(x)y = x^2$

6. $y\dfrac{dy}{dx} + 6x = \ln(x)$

7. $xy^2\dfrac{dy}{dx} - x = 2$

8. $x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + \dfrac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$

9. $x^3\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + \dfrac{d^2y}{dx^2} + xy^3 = 0$

10. $\sqrt{2y'} + y - 1 = x$

1.3. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

La solución de una ecuación diferencial también se denomina como el arco integral de la ecuación diferencial, en el presente texto se analiza e identifica la forma de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, y se procede aplicar el método adecuado que conlleve a su solución.

Definición 1.3. SOLUCIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

Se dice que una función f cualquiera, definida en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, es **solución** de una ecuación diferencial en el intervalo, si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial (1.2) es una función $y = f(x)$ que tiene por lo menos n derivadas y *satisface* la ecuación. Es decir,

$$F\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$

Para todo $x \epsilon I \subset \mathbb{R}$.

Ejemplo 1

La función $y = \frac{x^4}{16}$ es una solución de la ecuación no lineal

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$$

en $-\infty < x < \infty$. Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$$

vemos que $\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$
para todo número real.

Ejemplo 2

La función $y = xe^x$ es una solución de la ecuación no lineal

$$y'' - 2y' + y = 0$$

en $-\infty < x < \infty$. Para comprender esto se evalúan

$$y' = xe^x + e^x \qquad \text{y} \qquad y'' = xe^x + 2e^x$$

Obsérvese que

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

para todo número real.

Nótese también que en los Ejemplos 1 y 2, la función constante $y = 0$, en la recta real $-\infty < x < \infty$, también satisface la ecuación diferencial dada. A una solución de una ecuación diferencial que es idéntica a cero en un intervalo I, se le denomina a menudo **solución trivial**.

No toda ecuación diferencial tiene necesariamente una solución, como vemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3

(a) Las ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad (y')^2 + y^2 + 4 = 0$$

No tiene soluciones reales. ¿Por qué?

(b) La ecuación de segundo orden $(y")^2 + 10y^4 = 0$ tiene solamente una solución real ¿Cuál es?

Soluciones explícitas e implícitas

La solución de una ecuación diferencial también puede ser diferenciada entre **soluciones explícitas o implícitas**. Ya vimos en nuestra discusión inicial que $y = e^{x^2}$ es una solución explícita de $\frac{dy}{dx} = 2xy$; así como las funciones, $y = \frac{x^4}{16}$ y $y = xe^x$ son soluciones explícitas de $\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$ y $y" - 2y' + y = 0$ respectivamente. Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ define implícitamente una ecuación diferencial en un intervalo I, si define una o más soluciones explícitas en I.

Ejemplo 4

Para $-2 < x < 2$ la relación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Derivando implícitamente se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

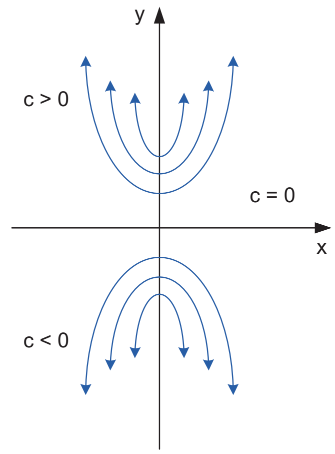


Figura 1. Familia de curvas, solución de la EDO
Fuente: Autores

La relación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ del ejemplo anterior define dos funciones en el intervalo $-2 < x < 2$; dadas por $y = \sqrt{4 - x^2}$ y $y = -\sqrt{4 - x^2}$. También obsérvese que cualquier relación de la forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisface *formalmente* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ para cualquier constante c. Sin embargo, naturalmente se sobreentiende que la relación debe siempre tener sentido en el sistema de los números reales; por lo tanto, no podemos decir que la expresión $x^2 + y^2 + 1 = 0$ determina una solución de la ecuación diferencial.

Dado que la diferencia entre solución explícita e implícita debería ser intuitivamente clara, no insistiremos en repetir la expresión "aquí se tiene una solución explícita (implícita)"

El estudiante debe saber que una ecuación diferencial dada tiene generalmente una familia de curvas que representa su solución. Por sustitución directa, podemos demostrar que cualquier curva, esto es, función, de la familia uniparamétrica $y = ce^{x^2}$, donde c es cualquier constante arbitraria, también satisface la ecuación (1). Tal como se indica en la figura 1, la solución trivial es un miembro de esta familia de soluciones correspondiente a $c = 0$.

Ejemplo 5

Para cualquier valor de c, la función $y = \frac{c}{x} + 1$ es una solución de la ecuación diferencial de primer orden. Se observa en la figura 2.

$$x\frac{dy}{dx} + y = 1$$

En el intervalo $0 < x < \infty$. Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{d}{dx}(x^{-1}) + \frac{d}{dx}(1) = -cx^{-2} = -\frac{c}{x^2}$$

de modo que $x\frac{dy}{dx} + y = x\left(-\frac{c}{x^2}\right) + \left(\frac{c}{x} + 1\right) = 1$

Dando a c distintos valores reales es posible generar un número infinito de soluciones. En particular, para $c = 0$ se obtiene una solución constante $y = 1$.

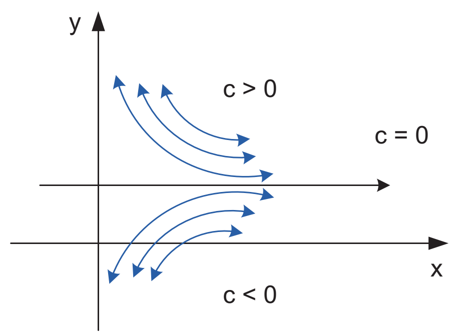


Figura 2. Curvas uni-paramétricas de la EDO
Fuente: Autores

En el ejemplo anterior, $y = \frac{c}{x} + 1$ es una solución de la ecuación diferencial en cualquier intervalo que no contenga el origen. La función no es diferenciable en $x = 0$.

Ejemplo 6

(a) Las funciones $y = c_1\,cos(4x)$ y $y = c_2\,sen(4x)$, en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, resultan ser soluciones de la ecuación diferencial

$$y" + 16y = 0$$

Para $y = c_1\,cos(4x)$, las derivadas primera y segunda son

$$y' = -4c_1\,sen(4x) \quad \text{y} \quad y" = -16c_1\,cos(4x)$$

y por lo tanto $y" + 16y = -16c_1\,cos(4x) + 16(c_1\,cos\;(4x)) = 0$

Análogamente, para $y = c_2\,sen\,(4x)$

$$y" + 16y = -16c_2\,sen(4x) + 16(c_2\,sen\;(4x)) = 0$$

(b) También puede demostrarse que la figura $y = c_1\,cos(4x) + c_2\,sen(4x)$ es una solución de la ecuación dada.

Ejercicios 1.2

En los problemas 1 -10, diga si las ecuaciones diferenciales dadas son lineales o no lineales. Indique el orden de cada ecuación.

1. $(1-x)y" - 4xy' + 5y = \cos(x)$

2. $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

3. $yy' + 2y = 1 + x^2$

4. $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0$

5. $x^3y^{(4)} - x^2y" + 4xy' - 3y = 0$

6. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = sen\,(y)$

7. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

8. $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2}$

9. $sen\,(x)\,y''' - \cos(x)\;y' = 2$

10. $(1-y^2)dx + xdy = 0$

En los problemas del 11 – 20, verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Donde sea apropiado, c_1 y c_2 son constantes.

11. $y' + 4y = 32; \quad y = 8$

12. $2y' + y = 0; \quad y = e^{-x/2}$

13. $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x};\; y = e^{3x} + 10e^{2x}$

14. $\frac{dy}{dt} + 20y = 24;\; y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

15. $y' = 25 + y^2;\; y = 5\tan(5x)$

16. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}; \quad y = \left(\sqrt{x} + c_1\right)^2, \quad x > 0$

17. $y' + y = sen(x); \quad y = \frac{1}{2}sen(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + 10e^{-x}$

18. $2xy\,dx + (x^2 + 2y)dy = 0; \quad x^2y + y^2 = c_1$

19. $x^2dy + 2xydx = 0; \quad y = -\frac{1}{x^2}$

20. $(y')^3 + xy' = y; \quad y = x + 1$

Capítulo 2

TEORÍA PRELIMINAR

UNIDAD II

2.1.TEORÍA PRELIMINAR

Problema del valor inicial

A menudo nos interesa resolver una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2.1)$$

Sujeta a la condición adicional $y(x_0) = y_0$, donde x_0 es un número en un intervalo I y y_0 es un número real arbitrario. El problema

$$\begin{aligned} &\textit{Resuelva:} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\textit{Sujeta a:} \quad y(x_0) = y_0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

se llama **problema de valor inicial**. A la condición adicional se la conoce como **condición inicial**.

Ejemplo 7

Hemos visto que $y = ce^x$ es una familia uniparamétrica de soluciones de $y' = y$ en el intervalo $-\infty < x < \infty$. Si por ejemplo especificamos que $y(0) = 3$, entonces, sustituyendo $x = 0$ e $y = 3$ en la solución general de la ecuación diferencial resulta $3 = ce^0 = c$. Por consiguiente, como se muestra en la Figura 3,

$$y = 3e^x$$

es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y$$

$$y(0) = 3$$

Si se hubiese pedido que una solución de $y' = y$ pase por el punto $P_2(1, 3)$ en lugar de $P_1(0, 3)$, se tendría $y(1) = 3$ donde $c = 3e^{-1}$ y por lo tanto $y = 3e^{x-1}$. La gráfica de esta función se visualiza a continuación en la Figura 3

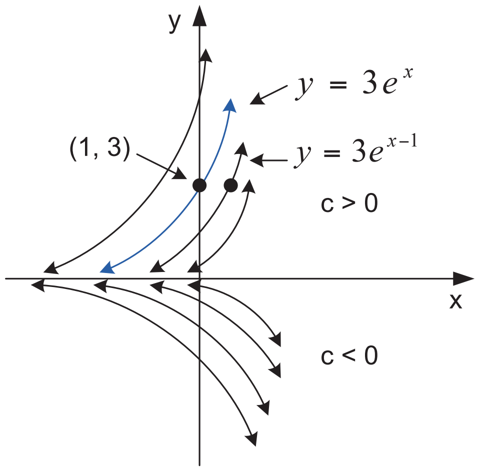


Figura 3. Familia de curvas de una ecuación diferencial
Fuente: Autores

Al considerar un problema de valor inicial expresada mediante la ecuación (2.2), surgen dos preguntas fundamentales:

1. **¿*Existe* una solución del problema?, y si ésta existe**
2. **¿Es la única solución?**

Geométricamente, la segunda pregunta es: De todas las soluciones de una ecuación diferencial (2.1) que existen en un intervalo I, ¿hay alguna cuya gráfica pase por (x_0, y_0)?. Véase la Figura 4.

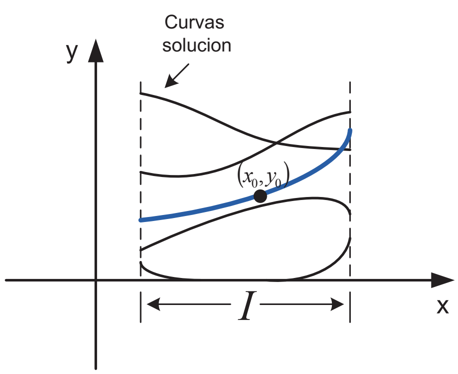


Figura 4. Condición inicial del problema
Fuente: Autores

El próximo ejemplo muestra que la respuesta a la segunda pregunta a veces es negativa.

Ejemplo 8

La Figura 5 muestra que el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$ tiene al menos *dos* soluciones en el intervalo $-\infty < x < \infty$.
Las funciones

$$y = 0 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{x^4}{16}$$

satisfacen la ecuación diferencial y tienen gráficas que pasan por $P(0, 0)$.

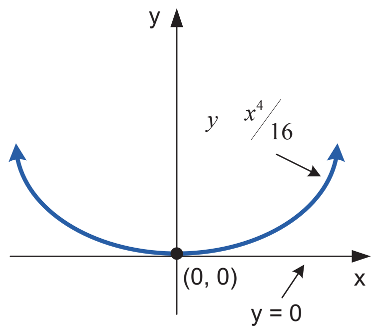


Figura 5. Análisis de la solución de una ecuación diferencial
Fuente. Autores

> **Nota al estudiante:** Al resolver una ecuación diferencial, a menudo se tendrá que utilizar, por ejemplo, integración por partes, fracciones parciales, o posiblemente sustitución. Valdrá la pena dedicar unos minutos a repasar algunas técnicas de integración.

2.2. CAMPOS DIRECCIONALES

El estudio de las ecuaciones diferenciales se fundamenta en el análisis sobre la existencia y unicidad de sus soluciones, pero éste aspecto está directamente relacionado con el hecho de poder analizar el comportamiento de la solución alrededor de un punto o cuando la variable independiente tiende al infinito.
Para poder explicar éste hecho recurriremos a un repaso de la derivada de una función real $\boldsymbol{y = f(x)}$.
Recordemos que si $f(x)$ es una función continua y derivable en algún $I \subset \mathbb{R}$, entonces su función derivada también es una función continua en $I \subset \mathbb{R}$; es decir, no tiene cortes y se puede determinar rectas tangentes en cada punto $P(x, f(x))$, formalicemos esta explicación en la siguiente definición.

Definición 2.2.1. FUNCIÓN PENDIENTE

Si $\boldsymbol{f(x,y)=0}$ es una función real, continua y derivable en algún $I \subset \mathbb{R}$, entonces su ***PENDIENTE*** está dado por

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (2.3)$$

A la ecuación (2.3) se le denomina ***FUNCIÓN PENDIENTE*** o FUNCIÓN RAZÓN, mediante la cual podemos determinar rectas tangentes a la curva $f(x,y)$, en cada punto $P(x,f(x))$. (Dennis, 2009)

Entones si podemos determinar rectas tangentes a una curva en cada punto de ella, y sí en estas rectas tangentes consideramos un módulo o segmento pequeño de ellas, entonces el conjunto de todos estos segmentos describirán el campo direccional de la ecuación diferencial, formalizando tendremos.

Definición 2.2.2 CAMPO DIRECCIONAL DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Si evaluamos sistemáticamente a la función $\boldsymbol{f(x,y)=0}$ en cada punto $P(x,f(x))$, entonces al conjunto de todos estos elementos lineales se le llama **campo direccional o campo de pendientes** de la ecuación diferencial dada por $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=f(x,y)}$

Visualmente, la dirección del campo indica el aspecto o forma de una familia de curvas solución de la ecuación diferencial dada y, en consecuencia, se pueden ver a simple vista aspectos cualitativos de la solución.

Ejemplo 9

Determinar el campo direccional para la ecuación diferencial sujeta a una condición dada.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

En la tabla 1, se determina el valor de las pendientes en diferentes puntos del plano cartesiano, con la finalidad de poder determinar el campo de direccional.

Tabla 1

Valor de la pendiente

x	y	$\frac{dy}{dx}$	Interpretación
1	1	-1	En el punto $A(1,1)$ la pendiente es negativa
-1	1	1	En el punto $B(-1,1)$ la pendiente es positiva
-1	-1	-1	En el punto $C(-1,-1)$ la pendiente es negativa
1	-1	1	En el punto $D(1,-1)$ la pendiente es negativa

Nota: Elaboración propia

En la figura 6 tenemos la siguiente representación.

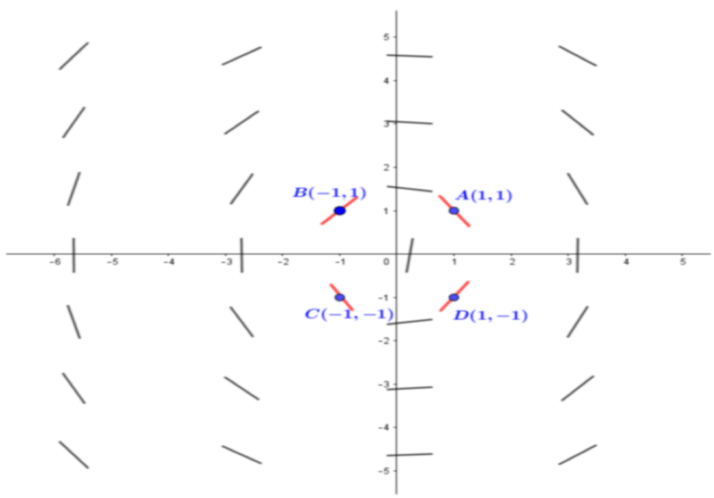


Figura 6. Campo direccional de una ecuación diferencial
Fuente: Autores

Ejemplo 10

Determinar el campo direccional para la ecuación diferencial sujeta a una condición dada.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2 \\ y(-2) = 1 \end{cases}$$

Se realiza la práctica utilizando un CAS como es el software Maxima.

Para esto procedemos a activar el módulo de gráficas en Maxima de la siguiente manera

```
-->      load(plot);
```

Luego definimos el lado derecho de la ecuación diferencial; es decir

```
(%i4)    plotdf(x^2-y^2,[trajectory_at,-2,1])
```

En la figura 7 verificamos el resultado, en la cual se especifica la curva que pasa por el punto $P(-2,1)$.

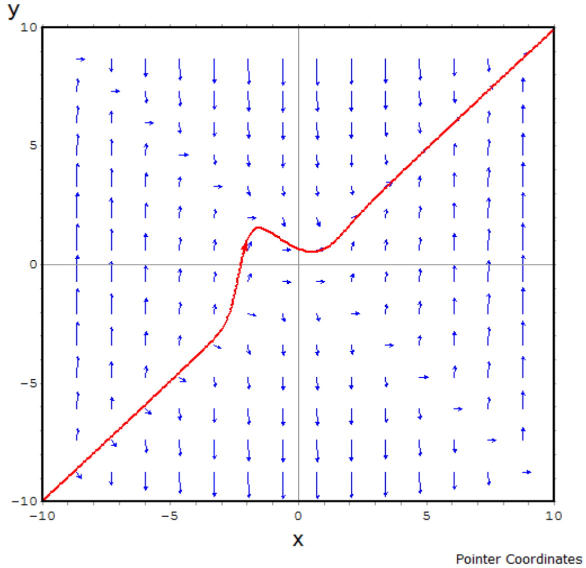


Figura 7. Solución de una ecuación diferencial y su campo direccional
Fuente: Autores

2.3.MÉTODOS CLÁSICOS DE SOLUCIÓN DE UNA EDO

2.3.1. VARIABLES SEPARABLES

Se puede mencionar que el método de separación de variables constituye el método analítico más elemental dentro de la solución de una ecuación diferencial, pero algunos de los métodos que estudiaremos posteriormente tendrán como objetivo conseguir la separación de variables.

Definición 2.3.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL A VARIABLE SEPARABLE

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se dice que es a Variable Separable si la podemos expresar de la siguiente forma:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2.4)$$

Donde:

$M(x)$ y $N(y)$ dependen únicamente de x e y respectivamente, siendo funciones continuas en algún $I \subset R$.

La integración de una ecuación diferencial a variable separable está dada por la expresión

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \qquad (2.5)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

Ejemplo 11

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{y^2}$$

Desarrollo:

De acuerdo a las ecuaciones (2.4) y (2.5) se tiene

$y^2dy = (1 - x^2)dx$ Separación de variables

$\int y^2dy = \int dx - \int x^2dx$ Integración

$y^3 = -x^3 + 3x + C$ Solución general

Ejemplo 12

$$(1 + x)dy - ydx = 0$$

Desarrollo:

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1 + x}$ Separación de variables

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1 + x}$ Aplicando las técnicas de integración

$\ln(y) = \ln(1 + x) + C$ Solución general

$y = (1 + x)k$ Donde $k = e^C$

Ejemplo 13

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \textit{sujeta a} \quad y(4) = 3$$

Desarrollo:

$ydy = -xdx$	Separación de variables
$\int y\, dy = -\int x\, dx$	
$x^2 + y^2 = C$	Solución general
$4^2 + 3^2 = C \quad \Longrightarrow C = 25$	Aplicando condiciones del problema
$x^2 + y^2 = 5^2$	Solución particular

El problema de valores iníciales determina que de la familia de curvas $x^2 + y^2 = C$ la curva dada por $x^2 + y^2 = 25$ es la única circunferencia que pasa por el punto $P(4,3)$. Véase la Figura 8.

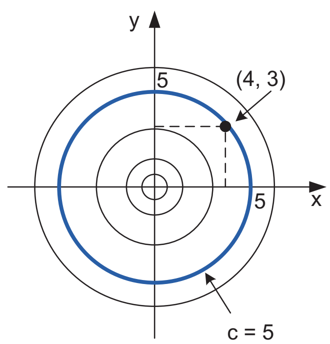


Figura 8. Curvas solución de una ecuación diferencial
Fuente: Autores

Ejemplo 14

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y+1} \qquad sujeta\ a \quad y(3) = 0}$$

Desarrollo:

$(y+1)dy = (2-x)dx$	Separación de variables
$\int (y+1)dy = \int (2-x)dx$	Aplicando las técnicas de integración
$\frac{1}{2}y^2 + y = 2x - \frac{1}{2}x^2 + C$	Solución general
$\frac{1}{2}(0)^2 + 0 = 2(3) - \frac{1}{2}(3)^2 + C$	Aplicando problema de valor inicial

$C = -\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}y^2 + y = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ Solución particular dada en forma implícita

Ejemplo 15

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(y)}{1 - x^2}$$

Desarrollo:

$\frac{dy}{\sec^2(y)} = \frac{dx}{1 - x^2}$ Separación de variables

$\int \frac{dy}{\sec^2(y)} = \int \frac{dx}{1 - x^2}$ Aplicando las técnicas de integración

$\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}sen(2y) = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$ Solución general en forma implícita

Ejemplo 16

$$xsen(x)e^{-y}dx - y\,dy = 0 \qquad sujeta\ a\ \ y(\pi) = 0$$

Desarrollo:

$\int ye^y dy = \int x\,sen(x)dx$ Separación de variables e integrando

$e^y(y - 1) = -x\,cos(x) + sen(x) + C$ Solución general

$e^0(0 - 1) = -\pi\,cos(\pi) + sen(\pi) + C$ Aplicando las condiciones del problema

$C = \pi - 1$

$e^y(y - 1) = -x\,cos(x) + sen(x) - \pi - 1$ Solución particular

2.3.2. REDUCCIÓN A VARIABLES SEPARABLES

Definición 2.3.2 Ecuación diferencial REDUCIBLE A VARIABLE SEPARABLE

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \qquad (2.6)$$

Se dice que es reducible a la forma de variable separable
Donde:
a, b y c son constantes con a y b no nulos a la vez.

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Para resolver la ecuación diferencial (2.6) se realiza la siguiente sustitución

$$\boldsymbol{z = ax + by + c} \qquad \mathbf{(2.7)}$$

Derivamos con respecto a la variable independiente x

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}$$

reemplazando en la ec. (2.6) tenemos la forma de la ecuación diferencial

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f(z)$$

$$\frac{dz}{b\,f(z) + a} = dx \quad (*)$$

La ecuación $(*)$ representa una ecuación diferencial a variable separable.

Presentamos algunos ejercicios que permitan una mejor comprensión de la solución de las ecuaciones diferenciales que se puedan reducir a una ecuación diferencial a variable separable.

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

Ejemplo 17

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 2y - 31)^2$$

Solución

$z = 3x + 2y - 31$	Sustitución por ecuación (5)
$\frac{dz}{dx} = 3 + 2\frac{dy}{dx}$	Derivamos con respecto a la variable x
$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$	Despejando $\frac{dy}{dx}$ y reemplazando en la ecuación original
$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} = z^2$	Realizando la separación de variables
$\frac{dz}{dx} = 2z^2 + 3$	Ecuación diferencial a variable separable
$(*) \int \frac{dz}{2z^2 + 3} = \int dx$	Integrando obtenemos la solución
$\frac{\sqrt{6}}{6} arc\ tg\left(\frac{\sqrt{2}(3x + 2y - 31)}{\sqrt{3}}\right) = x + C$	Solución general de la ecuación

Presentamos el desarrollo de la integral (*)

Realizamos sustitución trigonométrico	Desarrollo de la integral
$z = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{tg}(\theta)$	$\int \frac{dz}{2z^2 + 3} = \int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}sec^2(\theta)}{3(tg^2(\theta) + 1)} d\theta$
$dz = \sqrt{\frac{3}{2}}sec^2(\theta)d\theta$	$= \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{sec^2(\theta)}{sec^2(\theta)} d\theta$
	$= \frac{\sqrt{6}}{6}\int d\theta = \frac{\sqrt{6}}{6}\theta = \frac{\sqrt{6}}{6} arc\ tg\left(\frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{3}}\right)$

Ejemplo 18

$$\frac{dy}{dx} = sen(x + y + 1)$$

Solución

$z = x + y + 1$ Sustitución

$\frac{dz}{dx} = sen(z) + 1$ Despejando $\frac{dy}{dx}$ y reemplazando en la ecuación original

$\frac{dz}{sen(z) + 1} = dx$ Realizando la separación de variables

$(*) \int \frac{dz}{sen(z) + 1} = \int dx$ Integrando obtenemos la solución

$tg(x + y + 1) - sec^2(x + y + 1) = x + C$ Solución general en forma implícita

Presentamos el desarrollo de la integral (*)

$$(*) \int \frac{dz}{sen(z) + 1} = \int \left(\frac{1}{sen(z) + 1}\right)\left(\frac{sen(z) - 1}{sen(z) - 1}\right) dz = -\int \frac{1 - sen(z)}{cos^2(z)} dz$$

$$= -\int \frac{1}{cos^2(z)} dz + \int \frac{sen(z)}{cos^2(z)} dz \rightarrow$$

Primera integral	Segunda integral
$\int sec^2(z)dz$	sustitución $u = cos(z)$ $-\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} = \frac{1}{cos^2(z)}$

$$\therefore \int \frac{dz}{sen(z) + 1} = -tg(z) + sec^2(z)$$

Ejemplo 19

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = e^{(x+y)}}$$

Solución

$z = x + y$ Sustitución

$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ derivamos con respecto a la variable x

$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{dz}{dx}$ Despejando $\frac{dy}{dx}$ y reemplazando en la ecuación original

$-1 + \frac{dz}{dx} = e^z$ Realizando la separación de variables

$\frac{dz}{dx} = e^z + 1$ Ecuación diferencial a variable separable

$(*) \int \frac{dz}{e^z + 1} = \int dx$ Integrando obtenemos la solución

$-ln\left(e^{(x+y)} + 1\right) + x + y = \text{x} + \text{C}$ Solución general

Presentamos el desarrollo de la integral (*)

$$\int \frac{dz}{e^z + 1} = \int \frac{e^{-z} dz}{e^{-z} + 1}$$

sustitución

$\text{u} = e^{-z} + 1$

$\text{du} = -e^{-z} dz$

Entonces

$$\int \frac{e^{-z} dz}{e^{-z} + 1} = -\int \frac{du}{u} = -\ln(u) = -\ln(e^{-z} + 1)$$

$$= -ln\left(\frac{e^z + 1}{e^z}\right) = -\ln(e^z + 1) + z$$

$$= -ln\left(e^{(x+y)} + 1\right) + (x + y)$$

Ejercicios 2.3

En los problemas del 1 -10, resuelva la ecuación diferencial dada, por separación de variables.

1. $\frac{dy}{dx} = \cos(2x)$

2. $\frac{dy}{dx} = (x + 1)^2$

3. $dx - x^2 dy = 0$

4. $dx + e^{3x} dy = 0$

5. $(x + 1)\frac{dy}{dx} = x$

6. $e^x \frac{dy}{dx} = 2x$

7. $xy' = 4y$

8. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^2}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x}$

En los problemas del 11 – 18 resuelva las ecuaciones diferenciales dadas sujetas a la condición inicial que se indica

11 $sen(x)(e^{-y}+1)dx = (1+\cos(x))dy,\ y(0)=0.$

12. $(1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0,\ ,\ y(1)=0$

13. $ydy = 4x(y^2+1)^{1/2}dx,\ ,\ y(0)=1$

14. $\frac{dy}{dt} + ty = y,\ ,\ y(1)=3$

15. $\frac{dy}{dx} = 4(x^2+1),\ \ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2-1},\ \ y(2)=2$

17. $x^2y' = y - xy,\ \ y(-1) = -1$

18. $y' + 2y = 1,\ \ y(0) = \frac{5}{2}$

En los problemas 19 y 20 halle una solución de la ecuación diferencial dada que pase por los puntos que se indican

19. $\frac{dy}{dx} - y^2 = -9$

(a) $(0,0)$ **(b)** $(0,3)$ **(c)** $\left(\frac{1}{3},1\right)$

20. $x\frac{dy}{dx} = y^2 - y$

(a) $(0,1)$ **(b)** $(0,0)$ **(c)** $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

En los problemas 21 y 25 halle una solución de la ecuación diferencial dada

21. $\frac{dy}{dx} = ln(x+y+1)$

22. $\frac{dy}{dx} = (3-x+5y)^2$

23. $y' = \sec(x-y)$

24. $y' = \exp(5y-x+2)$

25. $y' = \cos(y+1)$

2.4. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

2.4.1. FUNCIONES HOMOGÉNEAS

Definición 2.4.1	**FUNCIÓN HOMOGÉNEA**

Sea $f(x,y)=0$ una función real. Se dice que $f(x,y)$ es una función homogénea de grado n.
Si $\forall\, t \in R\setminus\{0\}$ se cumple que $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ con $n \in R$
Donde:
n Determina el grado de Homogeneidad de la función real. (RAMOS, 2004)

EJERCICIOS RESUELTOS

Verificar la homogeneidad de funciones reales.

Ejemplo 20

$f(x,y) = x + 5\sqrt{xy} + y$ es una función homogénea de grado 1.

Comprobación

$f(tx,ty) = t\,x + 5\sqrt{txty} + ty$

$f(tx,ty) = t\left(x + 5\sqrt{xy} + y\right)$

$f(tx,ty) = t\,f(x,y)$ se verifica que t tiene exponente 1, que representa el grado.

Ejemplo 21

$f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ es una función homogénea de grado $\frac{3}{2}$.

Comprobación

$f(tx,ty) = \sqrt{(tx)^3 + (ty)^3}$

$f(tx,ty) = \sqrt{t^3x^3 + t^3y^3}$

$f(tx,ty) = t^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^3 + y^3}$

$f(tx,ty) = t^{\frac{3}{2}} f(x,y)$ se verifica que t tiene exponente $\frac{3}{2}$, que representa el grado.

Ejemplo 22

$f(x,y) = \dfrac{x}{2y} + 4$ es una función homogénea de grado 0.

Comprobación

$f(tx,ty) = \dfrac{tx}{2ty} + 4$

$f(x,y) = t^0\left(\dfrac{x}{2y} + 4\right)$ se verifica que t tiene exponente 0, y representa el grado.

Ejemplo 23

$\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2 + 1}$

No es una función homogénea porque todos los términos no tienen el mismo grado.

NOTA:

- Para verificar la homogeneidad de una función real se observa cada término tenga el mismo grado (exponente).
- *Si* $f(x, y)$ es una función homogénea de grado n, entonces
  - $f(x, y) = x^n \left(1 + \frac{y}{x}\right)$
  - $f(x, y) = y^n \left(\frac{x}{y} + 1\right)$

Ejercicios 2.4.1

Verificar si las siguientes funciones son homogéneas, en el caso de serlas identificar su grado.

1. $f(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)^3$
2. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y} + 1}$
3. $f(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$
4. $f(x, y) = \frac{y}{x} + sen\left(\frac{x}{y}\right)$
5. $f(x, y) = x^{-2}y^2 + 3$

2.4.2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Definición 2.4.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (2.8)$$

Se dice que es una ecuación diferencial homogénea sí, $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Integración de una EDO homogénea

Una ecuación diferencial homogénea puede expresarse siempre en la forma alternativa

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para ver esto, supóngase que escribimos la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ como $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, en donde

$$f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Cuando M y N son homogéneos de grado n, la función $f(x,y)$ debe ser necesariamente homogénea de grado cero.

$$f(x,y) = -\frac{x^n M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{x^n N\left(1,\frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}$$

Se ve que el último cociente es una función de la forma $F(y/x)$. Se deja como ejercicio demostrar que una ecuación diferencial homogénea también puede escribirse como $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right)$.

Es decir, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ puede ser expresada como $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ con la finalidad de utilizar una función incógnita u que liga las variables de la ecuación diferencial de la siguiente manera:

sustitución	$y = ux$		
derivando	$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$		
reemplazando en	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	se tiene	$u + x\frac{du}{dx} = f(u)$
donde	$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}$		

representando una ecuación diferencial a variables separables, donde f constituye una función continua en algún intervalo de R.

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

Ejemplo 24

$$\boldsymbol{2(x^2 + y^2)dx - xydy = 0}$$

$\boldsymbol{M(x,y) = 2(x^2 + y^2)}$ y $\boldsymbol{N(x,y) = -xy}$ son funciones homogéneas de grado 2, de acuerdo a la ecuación (2.8).

Desarrollo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x^2 + y^2)}{xy}$$ Dividimos por x^2

Sustitución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + 2\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}$$

$$y = ux \quad \rightarrow \quad u = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$\int \frac{u}{2 + u^2}\, du = \int \frac{1}{x} dx$$ Por separación de variables

$$\frac{1}{2} ln(2 + u^2) = \ln(x) + C$$ Integrando

$$\frac{1}{2} ln\left(\frac{2x^2 + y^2}{x^2}\right) = \ln(x) + C$$ Por propiedades de los logaritmos

$$2x^2 + y^2 = kx^4 \qquad con \quad k = e^{2C}$$ Solución general en forma implícita

Ejemplo 25

$$4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$$

$M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas de grado 1.

Desarrollo:

sustitución $y = ux \quad \Rightarrow \quad u = \frac{y}{x}$

derivando $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3y}{3x - 2y} \quad dividimos\ para\ x, luego\ \frac{dy}{dx} = \frac{4 - 3\frac{y}{x}}{3 - 2\frac{y}{x}}$

reemplazando $u + x\frac{du}{dx} = \frac{4 - 3u}{3 - 2u} \quad agrupando \quad x\frac{du}{dx} = \frac{2u^2 - 6u + 4}{3 - 2u}$

separando $\frac{(3 - 2u)}{2u^2 - 6u + 4}du = \frac{dx}{x} \quad para\ primera\ integral\ p = 2u^2 - 6u + 4$

integrando $-\frac{1}{2}\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{dx}{x}$

$-\frac{1}{2}ln|p| = ln|x| + C \quad como\ p = 2u^2 - 6u + 4 \ \ y \quad u = \frac{y}{x}$

Solución $-\frac{1}{2}ln\left|2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{y}{x}\right) + 4\right| = ln|x| + C$

Ejemplo 25

$$\boldsymbol{(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0}$$

$M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas de grado 2.
Realizando la sustitución $y = ux$, y derivando se obtiene $dy = x\,du + u\,dx$, que reemplazando en la ecuación dada permite la solución.

Desarrollo:

$(x^2 + u^2x^2)dx + (x^2 - ux^2)[u\,dx + x\,du] = 0$

$x^2(1 + u)dx + x^3(1 - u)du = 0$

$\frac{1 - u}{1 + u}du + \frac{dx}{x} = 0$

$\left[-1 + \frac{2}{1 + u}\right]du + \frac{dx}{x} = 0$

$-u + 2ln|1 + u| + ln|x| = ln|c|$

$-\frac{y}{x} + 2ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + ln|x| = ln|c|$

Usando las propiedades de los logaritmos, la solución de arriba puede escribirse en la forma alterna $c(x+y)^2 = xe^{y/x}$

Ejemplo 26

$$\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx - xdy = 0$$

$M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas de grado 1.

Desarrollo:

Los coeficientes $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son a homogéneos de grado 1. Si hacemos $y = ux$, la ecuación diferencial se transforma, luego de simplificar, en

$$\frac{du}{2u - 2u^{1/2}} + \frac{dx}{x} = 0$$

La integral del primer término puede calcularse mediante la sustitución adicional $t = u^{1/2}$.
El resultado es

$$\frac{dt}{t-1} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$ln|t-1| + ln|x| = ln|c|$$

$$ln\left|\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right| + ln|x| = ln|c|$$

$$x\left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right) = c$$

$$\sqrt{xy} - x = c$$

Ejemplo 27

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x} \quad \text{sujeta a } y(1) = 1$$

Desarrollo:

Escribiendo la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}$$

es claro que la función en el segundo miembro de la igualdad es homogénea de grado cero. La forma de esta ecuación sugiere utilizar $u = \frac{y}{x}$. Derivando $y = ux$ mediante la regla del producto y sustituyendo obtenemos

$$u + x\frac{du}{dx} = u + e^{u}$$

$$e^{-u}du = \frac{dx}{x}$$

Por lo tanto $$-e^{-u} + c = ln|x|$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} + c = ln|x|$$

Como $y = 1$ cuando $x = 1$, se obtiene $-e^{-1} + c = 0$ o bien $c = e^{-1}$. Por consiguiente, la solución del problema de valor inicial es

$$e^{-1} - e^{-\frac{y}{x}} = ln|x|$$

Ejercicios 2.4.2

En los problemas del 1-10 determine si la función dada es homogénea. Si lo es, indique su grado de homogeneidad.

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy - \frac{y^3}{x}$

2. $f(x,y) = \sqrt{x+y}(4x+3y)$

3. $f(x,y) = \frac{x^3y - x^2y^2}{x+8y}$

4. $f(x,y) = \frac{x}{y^2 + \sqrt{x^4+y^4}}$

5. $cos\left(\frac{x^2}{x+y}\right)$

6. $f(x,y) = sen\left(\frac{x}{x+y}\right)$

7. $f(x,y) = ln(x)^2 - 2\ln y$

8. $f(x,y) = ln(x)^3/ln(y)^3$

9. $f(x,y) = (x^{-1} + y^{-1})^2$

10. $(x+y+1)^2$

En los problemas del 11 – 15 resuelva la ecuación diferencial dada usando una sustitución apropiada

11. $(x-y)dx + xdy = 0$

12. $(x+y)dx + xdy = 0$

13. $xdx + (y-2x)dy = 0$

14. $ydx = 2(x+y)dy$

15. $(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$

En los problemas del 16 – 20 resuelva la ecuación diferencial dada, sujeta a la condición inicial que se indica.

16. $xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3,\qquad y(1) = 2$

17. $(x^2 + 2y^2)dx = xy\,dy,\qquad y(-1) = 1$

18. $2x^2\frac{dy}{dx} = 3xy + y^2,\qquad y(1) = -2$

19. $xydx - x^2dy = y\sqrt{x^2 + y^2}dy,\qquad y(0) = 1$

20. $\left(x + ye^{y/x}\right)dx - xe^{y/x}dy = 0,\qquad y(1) = 0$

2.4.3. REDUCCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS A HOMOGÉNEAS

Definición 2.4.3 Ecuación diferencial REDUCIBLE A HOMOGÉNEA

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \qquad (2.9)$$

Se dice que una ecuación diferencial es reducible a homogénea.

Donde:

a, b, c, a´, b´, y c´ son constantes con a y b; a´y b´ no nulos a la vez.

INTEGRACIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA REDUCIBLE A HOMOGÉNEA.

Análisis de la función $f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ en términos de sus coeficientes, para lo cual tenemos los siguientes casos:

a. **Si $c = c' = 0$** la ecuación diferencial es la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by}{a'x + b'y}\right) = f\left(\frac{a + b\left(\frac{y}{x}\right)}{a' + b'\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ es decir, es una E.D.O. homogénea; la misma que es resuelta mediante la sustitución

$$u = \frac{y}{x}$$

Representan los ejemplos realizados en el apartado 2.4.2

b. Si $c \neq 0$ o $c' \neq 0$ con $c \neq c'$

Las rectas se intersecan

En la figura 9 tenemos dos funciones lineales que se intersecan en un único punto $P(h,k)$; es decir, sean

L_1: $ax + by + c = 0$

L_2: $a'x + b'y + c' = 0$

Si realizamos una **traslación de ejes** al punto $P(h,k)$ donde se intersecan las rectas L_1 y L_2, estaremos consiguiendo que la ecuación diferencial se pueda reducir a una EDO homogénea mediante las siguientes sustituciones.

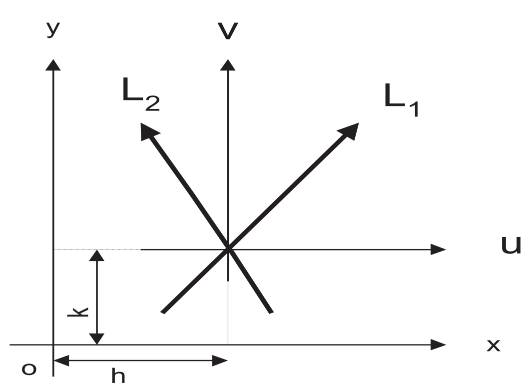


Figura 9. Traslación de ejes para la homogeneidad
Fuente. Autores

Realizando las sustituciones

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases}$$

Tenemos que

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{du}=f\left(\frac{au+bv}{a'u+b'v}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad v' = f\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{a'+b'\frac{v}{u}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad v' = g\left(\frac{v}{u}\right) \qquad (*)$$

La expresión (*) representa una ecuación diferencial ordinaria homogénea y es resuelta por la técnica descrita en el apartado 2.4.2

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales reduciéndoles a homogéneas.

Ejemplo 28

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-\frac{4x+3y+15}{2x+y+7}}$$

Al considerar la ecuación (7), se tiene que $\boldsymbol{M(x,y)}$ y $\boldsymbol{N(x,y)}$ no son funciones homogéneas porque todos sus elementos no tienen el mismo grado.

Desarrollo:

Sean $\begin{cases} L_1: \boldsymbol{4x+3y+15=0} \\ L_2: \boldsymbol{2x+y+7=0} \end{cases}$

Verificamos en la figura 10 que las rectas son intersecantes

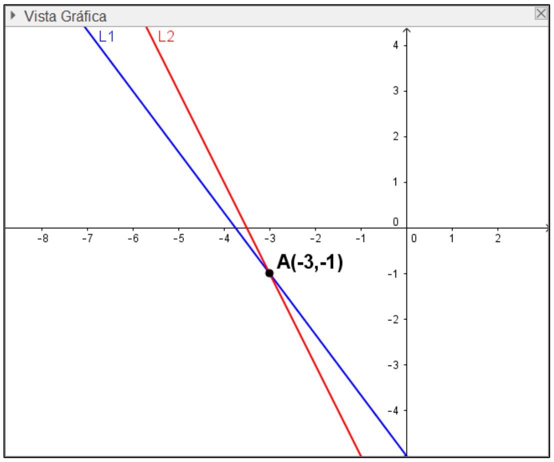


Figura 10. Intersección de las funciones lineales de la EDO
Fuente. Autores

Como se intersecan en el punto $A(-3,-1)$, entonces las sustituciones están dadas por:

$$\begin{cases} x = -3 + u \\ y = -1 + v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases}$$

Reemplazando tenemos

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y + 15}{2x + y + 7}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{dv}{du}} = -\frac{4u + 3v}{2u + v} \quad (*)$$

Luego (*) representa una ecuación diferencial homogénea, que al realizar la sustitución

$$v = w.u$$

$$\frac{dv}{du} = w + u\frac{dw}{du}$$

Tenemos la ecuación

$$w + u\frac{dw}{du} = -\frac{4 + 3w}{2 + w} \quad \text{siendo} \quad w = \frac{v}{u}$$

$$u\frac{dw}{du} = -\frac{w^2 + 5w + 4}{2 + w}$$

Separando las variables e integrando

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{2 + w}{w^2 + 5w + 4} dw$$

$$\ln|u| + c = -\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{2}{3}\left(w+\frac{5}{2}\right)\right) + \frac{4}{3}\ln(w+4) - \frac{1}{3}$$

Expresando en las variables originales, tenemos

$$\boldsymbol{ln\,|x+3| + c = -\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{2}{3}\left(\frac{y+1}{x+3}+\frac{5}{2}\right)\right) + \frac{4}{3}\ln\left(\frac{y+1}{x+3}+4\right) - \frac{1}{3}}$$

Obteniendo la solución general de la ecuación diferencial.

Ejemplo 29

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-y-1}}$$

Al considerar la ecuación (2.9), se tiene que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ no son funciones homogéneas porque todos sus elementos no tienen el mismo grado.

Desarrollo:

Sean $\begin{cases} \boldsymbol{L_1}: & \boldsymbol{x+y-1=0} \\ \boldsymbol{L_2}: & \boldsymbol{x-y-1=0} \end{cases}$

Verificamos en la figura 11 que las rectas se intersecan

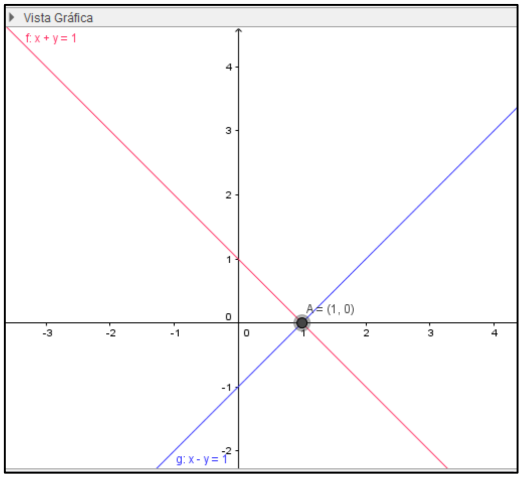


Figura 11. Intersección de funciones lineales de la EDO
Fuente. Autores

Como se intersecan en el punto $A(1,0)$, entonces las sustituciones están dadas por

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 0 + v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases}$$

Reemplazando tenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x-y-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dv}{du}=\frac{u+v}{u-v} \qquad (*)$$

Luego (*) representa una ecuación diferencial homogénea, que al realizar la sustitución

$$v=w.u$$

$$\frac{dv}{du}=w+u\frac{dw}{du}$$

Tenemos la ecuación

$$w+u\frac{dw}{du}=\frac{1+w}{1-w} \quad donde \quad w=\frac{v}{u}$$

$$u\frac{dw}{du}=\frac{w^2+1}{1-w}$$

Separando las variables e integrando

$$\int\frac{1-w}{w^2+1}dw=\int\frac{du}{u}$$

$$\arctan(w)-\frac{1}{2}\ln(w^2+1)=\ln(u)+C$$

Expresando en las variables originales, tenemos

$$\mathbf{arctan}\left(\frac{y}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x-1}\right)^2+1\right)=\ln|x-1|+c$$

c. Las rectas no se intersecan

Entonces las funciones lineales no se intersecan. Véase la figura 12

Sean

L_1: $ax+by+c=0$

L_2: $a'x+b'y+c'=0$

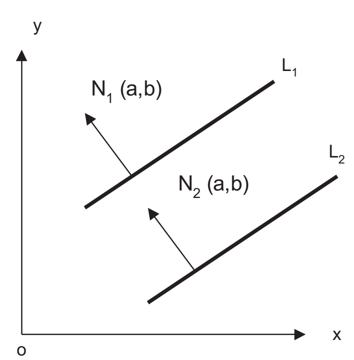


Figura 12. Funciones lineales paralelas. Fuente. Autores

$Como\ L_1 \cap L_2 = \emptyset$

Entonces los vectores $N_1(a,b)$ y $N_2(a',b')$ $son\ normales\ a\ L_1\ y\ L_2$

Es decir, son paralelos o colineales, entonces $N_1 = \alpha N_2 \Leftrightarrow a' = \alpha a \quad y \quad b' = \alpha b$
Luego, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha\, ax + \alpha\, by + c'}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha\,(ax+by)+c'}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = g(ax+by) \quad (*)$$

Por lo tanto, la sustitución $z = ax + by$, transforma a la ecuación (*) en una ecuación diferencial a variable separable.

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales reduciéndoles a homogéneas.

Ejemplo 30

$$(\boldsymbol{x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0}$$

$M(x,y)$ y $N(x,y)$ no son funciones homogéneas.

Desarrollo:

Sean $\begin{cases} L_1: & \boldsymbol{x - 2y - 1 = 0} \\ L_2: & \boldsymbol{3x - 6y + 2 = 0} \end{cases}$

Verificamos en la figura 13 que las rectas no se intersecan.

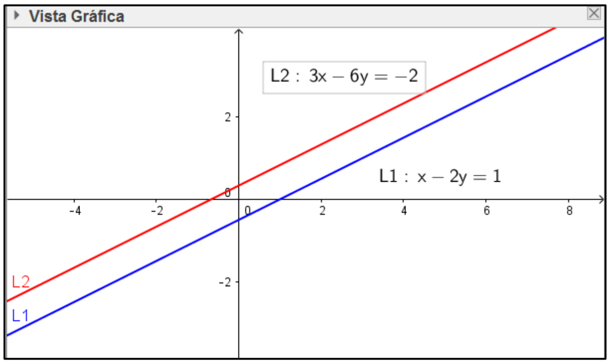


Figura 13. Funciones lineales paralelas de la EDO
Fuente. Autores

Entonces a la ecuación diferencial lo podemos expresar de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}-\mathbf{1})}{\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{6}\boldsymbol{y}+\mathbf{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-(\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y})+\mathbf{1}}{\mathbf{3}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y})+\mathbf{2}}$$

Realizando la sustitución $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}$, lo transformamos a una ecuación diferencial homogénea, donde $\frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dx}}=\mathbf{1}-\mathbf{2}\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}$, así tenemos

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}=\frac{-\boldsymbol{z}+\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{z}+\mathbf{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{5z}{3z+2}$$

Separando las variables e integrando

$$\int\frac{3z+2}{5z}dz=\int dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3}{5}\int dz+\frac{2}{5}\int\frac{dz}{z}=\int dx$$

Expresando en las variables originales, determinamos la solución general.

$$\frac{3}{5}(x-2y)+\frac{2}{5}\,ln(x-2y)=\mathrm{x}+C$$

Ejemplo 31

$$(\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}+\mathbf{1})\boldsymbol{dx}+(\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}+\mathbf{3})\boldsymbol{dy}=\mathbf{0}$$

$M(x,y)$ y $N(x,y)$ no son funciones homogéneas.

Desarrollo:

$$\text{Sean}\begin{cases}L_1: & \mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}+\mathbf{1}=\mathbf{0}\\ L_2: & \mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}+\mathbf{3}=\mathbf{0}\end{cases}$$

Verificamos en la figura 14 que las rectas no se intersecan.

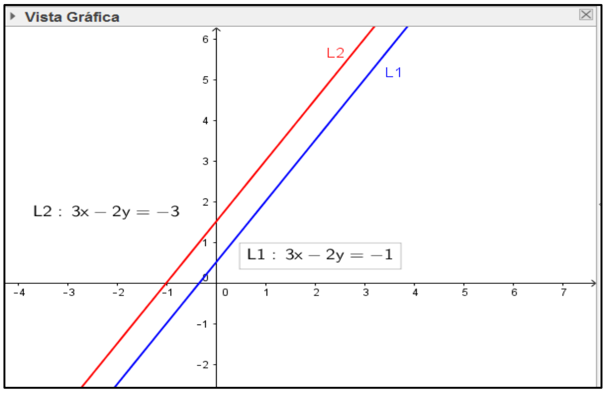


Figura 14. Funciones lineales paralelas de la EDO
Fuente. Autores

Entonces a la ecuación diferencial lo podemos expresar de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}+\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}+\mathbf{3}}$$

Realizando la sustitución $\boldsymbol{z = 3x - 2y}$, lo transformamos a una ecuación diferencial homogénea, donde $\boldsymbol{\frac{dz}{dx} = 3 - 2\frac{dy}{dx}}$, así tenemos

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} = \frac{z+1}{z+3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z+7}{z+3}$$

Separando las variables e integrando

$$\int \frac{z+3}{z+7}dz = \int dx \Leftrightarrow \int dz - 4\int \frac{dz}{z+7} = \int dx$$

Expresando en las variables originales, determinamos la solución general.

$$\boldsymbol{3x - 2y - 4\,ln(3x - 2y + 7) = x + C}$$

FORMA ALTERNATIVA DE REDUCIR A ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Una forma alternativa de reducir ecuaciones diferenciales no lineales a ecuaciones diferenciales homogéneas, es mediante la sustitución

$\boldsymbol{y = z^{\alpha}} \qquad \boldsymbol{(8)} \qquad \boldsymbol{con} \qquad \boldsymbol{\alpha \in R},$

Donde

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \alpha z^{\alpha-1}\frac{dz}{dx}}$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales reduciéndoles a homogéneas.

Ejemplo 32

$$\boldsymbol{4xy^2dx + (3x^2y - 1)dy = 0}$$

Se puede evidenciar que se trata de una ecuación diferencial no lineal.

Desarrollo:

Al utilizar la sustitución dada en (8), se tiene

Sustitución	$\boldsymbol{y = z^{\alpha}}$
Derivamos con respecto a x	$\boldsymbol{dy = \propto z^{\propto-1}dz}$
Reemplazamos en la ecuación	$4xz^{2\propto}dx + (3x^2z^{\propto} - 1) \propto z^{\propto-1}dz = 0$

Agrupando	$4xz^{2\propto}dx + (3x^2z^{2\propto-1} - z^{\propto-1}) \propto dz = 0$ (*)
Igualando los exponentes	$2 \propto +1 = 2 \propto +1 =\propto -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2$
Reemplazamos α en (*)	$4xz^{-4}dx + (3x^2z^{-5} - z^{-3})(-2)dz = 0$
Obtenemos una ecuación homogénea	$2xz\,dx - (3x^2 - z^2)dz = 0$
Ahora $z = ux$	$2ux^2dx - (3x^2 - (ux)^2)(udx + xdu) = 0$
$dz = udx + x\,du \;\Rightarrow$	
Separando las variables e integrando	$\int \frac{3-u^2}{u^3-u}du = \int \frac{dx}{x}$
	$-3\ln\left(\frac{1}{xy^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{xy^2} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{xy^2} + 1\right) = \ln(x) + C$
Solución general	$\boldsymbol{y^2 + x^2y^6 = 0}$

Ejemplo 33

$$(x + y^3) + (6xy^2)y' = 0$$

Se puede evidenciar que se trata de una ecuación diferencial no lineal.

Desarrollo:

Sustitución	$\boldsymbol{y = z^{\alpha}}$
Derivamos con respecto a x	$\boldsymbol{dy = \propto z^{\propto-1}dz}$
Reemplazamos en la ecuación	$(x + z^{3\alpha})dx + (6xz^{2\propto}) \propto z^{\propto-1}dz = 0$
Agrupando	$(x + z^{3\alpha})dx + 6\alpha(xz^{3\propto-1})dz = 0$ (*)
Igualando los exponentes	$1 = 3 \propto = 3 \propto \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3}$
Reemplazamos α en (*)	$(x + z)dx + 2(x)dz = 0$
Ahora $z = ux$	$\frac{dz}{dx} = -\frac{x+z}{2x} \;\Rightarrow\; u + x\frac{du}{dx} = -\frac{1+u}{2} \quad con \quad u = \frac{z}{x}$
$\frac{dz}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \;\Rightarrow$	

Separando las variables e integrando	$\int \frac{2}{1+3u} du = -\int \frac{dx}{x}$
	$\frac{2}{3}\ln\lvert 1+3u\rvert = -\ln\lvert x\rvert + C$
Solución general	$\frac{2}{3}\ln\left\lvert 1+3\frac{y^3}{x}\right\rvert = -\ln\lvert x\rvert + C$

2.5. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

2.5.1. DIFERENCIAL TOTAL

Definición 2.5.1 — DIFERENCIAL TOTAL

Si $f: R^2 \to R$, es una función diferenciable en $(x,y) \in R^2$, entonces la diferencial total de f es la función ∂f, está dado por:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \qquad (2.10)$$

Observamos que la ecuación simple

$$\boldsymbol{y\,dx + x\,dy = 0}$$

es separable y homogénea; también debe notarse que además es equivalente a la diferencial del producto de x y y. Esto es,

$$y\,dx + x\,dy = d(xy) = 0$$

Integrando se obtiene de inmediato la solución implícita $xy = c$.

Recuérdese que si $z = f(x,y)$ es una función con derivadas parciales de primer orden continuas en una región R del plano xy, entonces su *diferencial total* es

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad (2.11)$$

Ahora bien, $f(x,y) = c$, de (10) se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \qquad (2.12)$$

En otras palabras, dada una familia de curvas $f(x,y) = c$, es posible generar una ecuación diferencial de primer orden calculando la diferencial total

Ejemplo 34

Si $x^2 - 5xy + y^3 = c$, entonces de (2.12) resulta que

$$(2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0 \quad \text{o bien}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}$$

Es más importante para los fines de este curso invertir el problema, esto es, dada una ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y-2x}{-5x+3y^2} \qquad (2.13)$$

Puede identificarse la ecuación como equivalente a
$$d(x^2 - 5xy + y^3) = 0?$$

Nótese que la ecuación (2.13) no es ni separable ni homogénea.

2.5.2. DIFERENCIAL EXACTA

Definición 2.5.2 DIFERENCIAL EXACTA

Una expresión diferencial de la forma
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$
Se denomina **diferencial exacta** en una región R del plano xy si existe una función continua $f: D \subset R^2 \to R$ tal que $df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ (2.14)
es decir, toda expresión que es la diferencial total de alguna función de x e y se llama diferencial exacta. (Cornejo Serrano, 2012)

Se presentan algunos ejemplos para explicar la diferencial exacta dada en la ecuación (2.14).

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 35

$$\boldsymbol{x^2y^3dx + x^3y^2dy}$$

Es una diferencial exacta, pues se verifica que

$$d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3dx + x^3y^2dy$$

Ejemplo 36

$$\boldsymbol{\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0}$$

Es una diferencial exacta, pues se verifica que

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

Ejemplo 37

$$\boldsymbol{\frac{x\,dy + y\,dx}{xy} = 0}$$

Es una diferencial exacta, pues se verifica que

$$d(\ln(xy)) = \frac{x\,dy + y\,dx}{xy}$$

El siguiente teorema constituye un criterio para determinar si una diferencial es exacta

Teorema 2.5.2 ***ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA***

Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden continuas en una región R del plano xy. Entonces una condición necesaria y suficiente para que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy=0$$

sea una diferencial exacta es que cumpla con

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Método de solución

Dada la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2.15)$$

Como (14) es una diferencial exacta, entonces existe una $f(x,y) = 0$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad (2.16)$$

Reemplazando (2.16) en la ecuación (2.15) se tiene

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = 0 \qquad (2.17)$$

Como existe una función continua $z = f(x,y)$ entonces su diferencial total está dado por

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = dz \qquad (2.18)$$

Igualando las ecuaciones (2.17) y (2.16) se tiene que $dz = 0 \Rightarrow z = c$ es decir $f(x,y) = c$ que representa la solución de la ecuación diferencial.
Ahora como

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad (2.19)$$

Así es posible encontrar f integrando $M(x,y)$ con respecto a x mientras se mantiene y constante.

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \qquad (2.20)$$

donde la función arbitraria $g(y)$ es la "constante" de integración. Derivando (2.20) con respecto a y, además considerando que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$$N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$$

De esto resultan $g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ integrando obtenemos $g(y)$ la misma que es reemplazada en (2.20) para obtener la solución de la ecuación diferencial exacta.

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas.

Ejemplo 38

$$\mathbf{2xy\,dx + (x^2 - 1)dy = 0}$$

Desarrollo:

Con $M(x,y) = 2xy$ y $N(x,y) = x^2 - 1$ tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La integración de la diferencial exacta está dada por

$$f(x,y) = \int 2xy\, dx + g(y)$$
$$f(x,y) = x^2y + g(y)$$

Derivando parcialmente la última expresión con respecto a y e igualando el resultado a $N(x,y)$ resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = (x^2 - 1)$$

Se deduce que

$$g'(y) = -1 \qquad \rightarrow \qquad g(y) = -y$$

No es necesario incluir la constante de integración en el renglón precedente ya que la solución es $f(x,y) = c$. Algunas curvas de la familia $x^2y - y = c$ se dan en la Figura 15.

Nota

La solución de la ecuación *no es* $f(x,y) = x^2y - y$. Más bien es $f(x,y) = c$ o bien $f(x,y) = 0$ si se usa una constante al integrar $g'(y)$. Obsérvese que la ecuación podría haberse resuelto también por separación de variables.

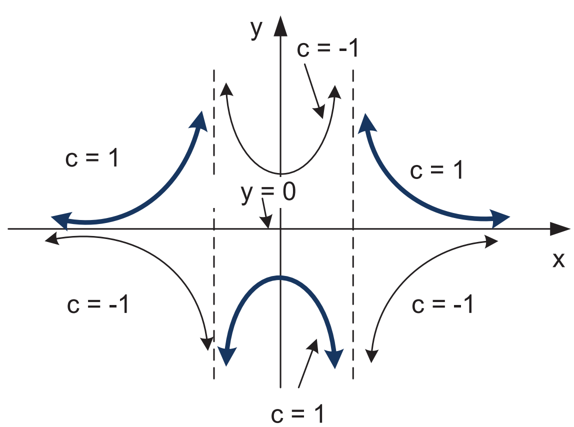


Figura 15. Representación geométrica de la solución de la ecuación diferencial
Fuente. Autores

Ejemplo 39

$$\left(e^{2y} - y\cos(xy)\right)dx + \left(2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right)dy = 0$$

Desarrollo:
La ecuación no es ni separable ni homogénea pero sí es exacta, puesto que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2e^{2y} + xy\,sen(xy) - cos(xy) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Por lo tanto, existe una función $f(x,y)$ tal que

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$
$$f(x,y) = \int \left(e^{2y} - y\cos(xy)\right)dx$$
$$f(x,y) = xe^{2y} - sen(xy) + g(y) \qquad (*)$$

Derivando con respecto a y, además $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ entonces se tiene

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\,cos(xy) + 2y = 2xe^{2y} - x\,cos(xy) + g'(y)$$

$$g'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad g(y) = y^2$$

Reemplazando en (*) se tiene

$$xe^{2y} - sen(xy) + y^2 = C$$

Ejemplo 40

$$\left(cos(x)sen(x) - xy^2\right)dx + y\left(1 - x^2\right)dy = 0 \ \ \text{sujeta a} \quad y(0) = 2$$

Desarrollo:
La ecuación es exacta puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ahora bien,

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$
$$f(x,y) = \int \left(cos(x)sen(x) - xy^2\right)dx + g(y)$$
$$f(x,y) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y) \qquad (*)$$

Derivando con respecto a y, además $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y(1-x^2) = N(x,y)$ se tiene

$$y(1-x^2) = -x^2 y + g'(y)$$

$$g'(y) = y \quad \Rightarrow \quad g(y) = \frac{1}{2}y^2$$

Reemplazando en (*) se tiene

$$\frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 = C \qquad (**)$$

La expresión (**) representa la solución general de la ecuación diferencial, ahora aplicaremos las condiciones iniciales del problema para determinar su solución general.

La condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$ exige que $\frac{1}{4}\cos(0) - 0 + \frac{1}{2}(2)^2 = C$ o bien que $c = \frac{9}{4}$. De esta manera, una solución del problema es:

$$\boldsymbol{-2y^2(1-x^2) + \cos(2x) = 9}$$

Ejemplo 41

$$\boldsymbol{\left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln(x) - 2)\, dy = 0}$$

Desarrollo:

$$M(x,y) = \left(\frac{y}{x} + 6x\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$\therefore$ EDO Exacta

$$N(x,y) = \left(\ln|x| - 2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

La solución de la ecuación diferencial está dada por

$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$ donde $g(y)$ es una función por determinar

$$f(x,y) = \int\left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + g(y)$$

$$f(x,y) = y\ln x + 3x^2 + g(y)$$

Derivamos con respecto a y consideramos que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ tenemos

$$\ln|x| - 2 = \ln|x| + g'(y)$$

Integrando con respecto a y

$$\int -2dy = \int g'(y)$$

$-2y = g(y)$

$\therefore c = y \ln|x| + 3x^2 - 2y$

Ejemplo 42

$$(e^x sen(y) - 2y\, sen(x))\, dx + (e^x \cos(y) + 2\cos(x))dy = 0$$

Desarrollo:

$M(x,y) = \left(e^x sen(y) - 2y\, sen(x)\right) \Rightarrow \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x \cos(y) - 2\, sen(x)$

$\therefore$ EDO Exacta

$N(x,y) = \left(e^x \cos(y) + 2\cos(x)\right) \Rightarrow \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x \cos(y) - 2\, sen(x)$

La solución de la ecuación diferencial está dada por

$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$ donde $g(y)$ es una función por determinar

$f(x,y) = \int \left(e^x sen(y) - 2y\, sen(x)\right) dx + g(y)$

$f(x,y) = e^x sen(y) + 2y\cos(x) + g(y)$

Derivando con respecto a $\boldsymbol{y}$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x \cos(y) + 2\cos(x) + g'(y)$

Como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$; reemplazamos

$e^x \cos(y) + 2\cos(x) = e^x \cos(y) + 2\cos(x) + g'(y)$

luego $g'(y) = 0$ integrando con respecto a y

$g(y) = k$ donde $k = \text{cte}$

$c = e^x seny + 2y\cos x + k$ k y c son constantes

$\therefore$ $c = e^x seny + 2y\cos x$ **Solución general**

Ejemplo 43

$$\left(\boldsymbol{sen(y) - y\,sen(x) + \frac{1}{x}}\right)\boldsymbol{dx} + \left(\boldsymbol{x\cos(y) + \cos(x) + \frac{1}{y}}\right)\boldsymbol{dy = 0}$$

Desarrollo:

$$M(x,y) = \left(sen(y) - ysen(x) + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos(y) - sen(x)$$

$\therefore$ EDO Exacta

$$N(x,y) = \left(x\cos(y) + \cos(x) + \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos(y) - sen(x)$$

La solución de la ecuación diferencial está dada por

$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$ donde $g(y)$ es una función por determinar

$$f(x,y) = \int\left(sen(y) - ysen(x) + \frac{1}{x}\right)dx + g(y)$$

$$f(x,y) = xsen(y) + y\cos(x) + \ln|x| + g(y) \qquad (***)$$

Derivando con respecto a $\boldsymbol{y}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\cos(y) + \cos(x) + g'(y)$$

Como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$; reemplazamos

$$x\cos(y) + \cos(x) + \frac{1}{y} = x\cos(y) + \cos(x) + g'(y)$$

Integrando con respecto a $\boldsymbol{y}$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int g'(y)$$

$\ln|y| = g(y)$ Se ha determinado la función desconocida que remplazamos en $(***)$

$\therefore$ $c = xsen(y) + y\cos(x) + \ln|x| + \ln|y|$ **Solución general**

Ejercicios 2.5

En los problemas del 1-10 determine si la función dada es exacta. Si lo es, resuélvala

1. $(2x+4)dx+(3y-1)dy=0$
2. $(2x+y)dx-(x+6y)dy=0$
3. $(5x+4y)dx-(4x-8y^3)dy=0$
4. $(sen(y)-ysen(x))dx+(cos(x)+xcos(y)-y)dy=0$
5. $(2y^2x-3)dx+(2yx^2+4)dy=0$
6. $\left(2y-\frac{1}{x}+cos(3x)\right)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\,sen(3x)=0$
7. $(x+y)(x-y)dx+x(x-2y)dy=0$
8. $\left(1+ln(x)+\frac{y}{x}\right)dx=\left(1-ln(x)\right)dy$
9. $(y^3-y^2sen(x)-x)dx+(3xy^2+2y\cos(x))dy=0$
10. $(x^3+y^3)dx+3xy^2\,dy=0$

En los problemas del 11 – 15 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica

11. $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0,\;\; y(1)=1$
12. $(e^x+y)dx+(2+x+ye^y)dy=0,\;\; y(0)=1$
13. $(4y+2x-5)dx+(6y+4x-1)dy=0,\;\; y(-1)=2$
14. $\left(\frac{3y^2-x^2}{y^5}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{x}{2y^4}=0,\;\; y(1)=1$
15. $(y^2\cos(x)-3x^2y-2x)\,dx+\left(2y\,sen(x)-x^3+ln(y)\right)dy=0,\;\; y(0)=e$

En los problemas del 16 – 19 halle el valor de k de modo que la ecuación diferencial dada sea exacta.

16. $(y^3+kxy^4-2x)dx+(3xy^2+20x^2y^3)dy=0,$
17. $(2x-y\,sen(xy)+ky^4)dx-(20xy^3+x\,sen(xy))dy=0,$
18. $(2xy^2+ye^x)dx+(2x^2y+ke^x-1)dy=0$
19. $(6xy^3+\cos(y))dx+(kx^2y^2-x\,sen(y))dy=0,$

2.6.FACTOR INTEGRANTE

De acuerdo al desarrollo de la temática en lo relacionado a los métodos clásicos de solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, hemos estudiado el cómo identificar y resolver una ecuación diferencial exacta, pero ¿qué sucede cuando no se cumple la condición de diferencial exacta de una función?, ante este cuestionamiento surge lo que se denomina **factor integrante**, que representa una función real continua y diferenciable en alguna región de R, tal que permite resolver la ecuación diferencial.

Nota:

No siempre es fácil determinar el factor integrante, pero en los casos prácticos este factor generalmente depende de las variables independientes como se verá al resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden.

Lo mencionado anteriormente ilustramos en el siguiente ejemplo.

Resolver la ecuación diferencial dada por

$$(1-x^2y)\,dx + x^2(y-x)dy = 0 \qquad (*)$$

Donde

$$\begin{cases} M(x,y) = 1 - x^2y \\ N(x,y) = x^2(y-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -x^2 \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -3x^2 + 2xy \end{cases}$$

Determina diferenciales parciales distintas

$$\therefore \ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Por lo tanto, no representa una ecuación diferencial exacta, pero si a la ecuación (*) lo multiplicamos por $\frac{1}{x^2}$

Conseguiremos transformarlo es una ecuación diferencial exacta; es decir, tendríamos la ecuación dada por

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y-x)dy = 0 \qquad (**)$$

Donde

$$\begin{cases} M(x,y) = \dfrac{1}{x^2} - y \\ N(x,y) = y - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -1 \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Es decir, representa una ecuación diferencial exacta la misma que puede ser resuelta aplicando la técnica estudiada en el párrafo 2.5.

Como hemos evidenciado se podrá tratar de conseguir una función $u(x) = 0$ que convierta una ecuación diferencial no exacta en una exacta, donde al término $u(x)$ se denomina *FACTOR INTEGRANTE*.

Definición 2.6.1	**FACTOR INTEGRANTE**

Dada una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (21)$$

Donde $M(x,y) \wedge N(x,y)$ son funciones continuas en algún $I \subset \mathbb{R}^2$, siendo (2.21) una ecuación diferencial no exacta, entonces existe una función $u(x,y) = 0$ continua y sin ceros en $I \subset \mathbb{R}^2$, tal que

$$u(x,y)[M(x,y)dx + N(x,y)dy] = 0 \qquad (22)$$

Constituye una ecuación diferencial exacta.

Demostración.-

Si la función $u(x,y) = 0$ es un factor integrante de la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2.21)$$

entonces

$$u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (2.22)$$

representa una ecuación diferencial ordinaria exacta; es decir, se cumple

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(u(x,y)M(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(u(x,y)N(x,y)\big)$$

De donde se deduce que

$$M(x,y)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + u(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + u(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{M(x,y)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - N(x,y)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + u(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = 0 \qquad (2.23)}$$

Nota:

Para determinar un factor integrante para la ecuación diferencial (2.21), es necesario determinar una solución particular de la ecuación (2.23).

Examinemos algunos casos mediante los cuales podremos determinar un factor integrante para una ecuación diferencial no exacta.

Ejemplo 44

Si $\boldsymbol{u(x,y)=0}$ depende únicamente de la variable independiente $\boldsymbol{x}$; es decir,

$$\boldsymbol{u(x,y)=f(x)}$$

Entonces la ecuación (22)

$$\boldsymbol{M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+u(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=0}$$

Se transforma en

$$-Nf'(x)+f(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0$$

Que es equivalente a

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

De donde

$$u(x)=f(x)=exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx\right)\qquad(\beta)$$

Representa el factor integrante de la ecuación diferencial (2.21), tomando en cuenta que el lado derecho de la ecuación (β) depende únicamente de x.

Ejemplo 45

Resolver $(xy-1)dx+(x^2-xy)dy=0$ $(*)$

Solución:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2x-y$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ debemos determinar un factor integrante para poder resolver la ecuación diferencial dada.

Determinamos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{x-2x+y}{x^2-xy}=\frac{-(x-y)}{x(x-y)}$$

Reduciendo términos semejantes

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\frac{1}{x}$$

Podemos ver que el factor integrante depende únicamente de x, entonces

$$u(x)=f(x)=exp\left(\int -\frac{1}{x}dx\right)$$

De donde obtenemos el factor integrante

$$u(x)=-\frac{1}{x}$$

Ahora multiplicamos el factor integrante en la ecuación original $(*)$ y tenemos

$$-\frac{1}{x}(xy-1)dx-\frac{1}{x}(x^2-xy)dy=0$$

equivalente a

$$\left(\frac{1}{x}-y\right)dx+(y-x)dy=0 \qquad (**)$$

donde

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-1$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial (**) es exacta, aplicando el procedimiento estudiado anteriormente, se tiene

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx \ + \ g(y)$$

$$f(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}-y\right)dx \ + \ g(y)$$

$$f(x,y)=\ln(x)-yx+g(y) \qquad (***)$$

Ésta última expresión la derivamos con respecto a y; además consideramos que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

Entonces tenemos

$$y-x=-x+g'(y)$$

De donde

$$g'(y) = y \qquad \ggg \qquad g(y) = \frac{1}{2}y^2$$

Reemplazando en la ecuación (***), obtemos la solución general dado por

$$\ln(x) - yx + \frac{1}{2}y^2 = C$$

Ejemplo 46

Si $u(x,y) = 0$ depende únicamente de la función incógnita y; es decir,

$$u(x,y) = f(y)$$

Entonces la ecuación (2.23)

$$M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + u(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = 0$$

Se transforma en

$$Mf'(y) + f(y)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0$$

Que es equivalente a

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

De donde

$$u(y) = f(y) = \exp\left(\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\,dy\right) \qquad (\beta)$$

Representa el factor integrante de la ecuación diferencial (2.21), tomando en cuenta que el lado derecho de la ecuación (β) depende únicamente de y.

Ejemplo 47

Resolver $(2xy^2 + 2xy + 3x^2y)dx + (3x^2y + 2x^2 + 2x^3)dy = 0 \qquad (*)$

Solución:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy + 2x + 3x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy + 4x + 6x^2$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ debemos determinar un factor integrante para poder resolver la ecuación diferencial dada.

Determinamos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{(4xy + 2x + 3x^2) - (6xy + 4x + 6x^2)}{-(2xy^2 + 2xy + 3x^2y)} = \frac{x\,(2y + 2 + 3x)}{y[x(2y + 2 + 3x)]}$$

Reduciendo términos semejantes

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{1}{y}$$

Podemos ver que el factor integrante depende únicamente de y, entonces

$$u(y) = f(y) = \exp\left(\int \frac{1}{y} dy\right)$$

De donde obtenemos el factor integrante

$$u(y) = y$$

Ahora multiplicamos el factor integrante en la ecuación original $(*)$ y tenemos

$$y(2xy^2 + 2xy + 3x^2y)dx + y(3x^2y + 2x^2 + 2x^3)dy = 0$$

equivalente a

$$(2xy^3 + 2xy^2 + 3x^2y^2)dx + (3x^2y^2 + 2x^2y + 2x^3y)dy = 0 \qquad (**)$$

donde

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 + 4xy + 6x^2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 + 4xy + 6x^2y$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial (**) es exacta, aplicando el procedimiento estudiado anteriormente, se tiene

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx \; + \; g(y)$$

$$f(x,y) = \int (2xy^3 + 2xy^2 + 3x^2y^2)dx \; + \; g(y)$$

$$f(x,y) = x^2y^3 + x^2y^2 + x^3y^2 + g(y) \qquad (***)$$

Ésta última expresión la derivamos con respecto a y; además consideramos que

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Entonces tenemos

$$3x^2y^2 + 2x^2y + 2x^3y = 3x^2y^2 + 2x^2y + 2x^3y + g´(y)$$

De donde

$g´(y) = 0 \quad \ggg \quad g(y) = k$ con $k \in \mathbb{R}$

Reemplazando en la ecuación $(***)$, obtemos la solución general dado por

$$x^2y^3 + x^2y^2 + x^3y^2 = C$$

Ejemplo 48

Si $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ depende del producto de dos funciones, una que depende de $\boldsymbol{x}$, y otra que depende de $\boldsymbol{y}$; es decir,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) * \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$$

Entonces la ecuación (23)

$$M(x,y)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - N(x,y)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + u(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = 0$$

Se transforma en

$$Mf(x)\,g´(y) - Nf'(x)g(y) + f(x)\,g(y)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0$$

Que es equivalente a

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}} - \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{f}´(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{\boldsymbol{g}´(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad (\boldsymbol{\beta})$$

De donde el factor integrante será determinado a partir de la ecuación $(\boldsymbol{\beta})$, donde debemos identificar a las funciones $f(x)$ y $g(y)$ que en la mayoría de los casos resultan fáciles determinar.

Ejemplo 49

Resolver $\left(\frac{sen(y)}{y} - 2e^{-x}sen(x)\right)dx + \left(\frac{cos\,(y)+2\,e^{-x}\cos(x)}{y}\right)dy = 0 \qquad (*)$

Solución:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}} = -\frac{sen(y)}{y^2} + \frac{cos(y)}{y}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\frac{2}{y}e^{-x}\cos(x) - \frac{2}{y}e^{-x}\,\mathrm{sen}(x)$$

Como $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}} \neq \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}}$ debemos determinar un factor integrante para poder resolver la ecuación diferencial dada.

Determinamos el factor integrante de la forma

$$\boldsymbol{u(x,y) = f(x) * g(y)}$$

De donde se tiene

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}} - \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{f(x)}}\boldsymbol{N(x,y)} - \frac{\boldsymbol{g'(y)}}{\boldsymbol{g(y)}}\boldsymbol{M(x,y)} \qquad (\boldsymbol{\beta})$$

Reemplazando en $(\boldsymbol{\beta})$ tenemos

$$\left(-\frac{sen(y)}{y^2}+\frac{cos(y)}{y}\right)-\left(-\frac{2}{y}e^{-x}\cos(x)-\frac{2}{y}e^{-x}\operatorname{sen}(x)\right)$$
$$=\frac{f'(x)}{f(x)}\left(\frac{cos\ (y)+2\ e^{-x}\cos(x)}{y}\right)-\frac{g'(y)}{g(y)}\left(\frac{sen(y)}{y}-2e^{-x}sen(x)\right)$$

Que es equivalente a

$$\left(\frac{cos\ (y)+2\ e^{-x}\cos(x)}{y}\right)-\frac{1}{y}\left(\frac{sen(y)}{y}-2e^{-x}sen(x)\right)$$
$$=\frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{f(x)}}\left(\frac{cos\ (y)+2\ e^{-x}\cos(x)}{y}\right)-\frac{\boldsymbol{g'(y)}}{\boldsymbol{g(y)}}\left(\frac{sen(y)}{y}-2e^{-x}sen(x)\right)$$

De esta última ecuación se puede deducir que

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1 \qquad y \qquad \frac{g'(y)}{g(y)}=\frac{1}{y}$$

De donde

$$f(x)=c_1e^x \qquad y \qquad g(y)=c_2y$$

Asignando a $c_1 = c_2 = 1$ tenemos el factor integrante $\boldsymbol{u(x,y) = ye^x}$

Ahora multiplicamos el factor integrante en la ecuación original $(*)$ y tenemos

$$\boldsymbol{ye^x}\left(\frac{sen(y)}{y}-2e^{-x}sen(x)\right)dx+\boldsymbol{ye^x}\left(\frac{cos\ (y)+2\ e^{-x}\cos(x)}{y}\right)dy=0$$

equivalente a

$$(\boldsymbol{e^x}sen(y)-2y\ sen(x))dx+(\boldsymbol{e^x}cos(y)+2\cos(x))dy=0 \qquad (**)$$

donde

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}}=\boldsymbol{e^x}cos(y)-2\ sen(x)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{e^x}cos(y)-2\ sen(x)$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial (**) es exacta, aplicando el procedimiento estudiado anteriormente, se tiene

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \int (\boldsymbol{e^x} sen(y) - 2y\, sen(x))dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \boldsymbol{e^x} sen(y) + 2y\, cos(x) + g(y) \qquad (***)$$

Ésta última expresión la derivamos con respecto a y; además consideramos que

$$\boldsymbol{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)}$$

Entonces tenemos

$$\boldsymbol{e^x} cos(y) + 2\cos(x) = \boldsymbol{e^x} cos(y) + 2\cos(x) + g'(y)$$

De donde simplificando tenemos

$g'(y) = 0 \quad \ggg \quad g(y) = c$ con $c \in \mathbb{R}$

Reemplazando en la ecuación $(***)$, obtemos la solución general dado por

$$\boldsymbol{e^x} sen(y) + 2y\, cos(x) = C$$

FORMA ALTERNATIVA DE RESOLVER UNA EDO CON FACTOR INTEGRANTE
$\boldsymbol{u(x,y) = f(x) * g(y)}$

La forma alternativa al método presentado anteriormente consiste en considerar al factor integrante como $u(x,y) = x^m y^n$ con $m,n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 49

Resolver $(3xy^2 - 4y)dx + (3x - 4x^2y)dy = 0 \qquad (*)$

Solución:

$$\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y}} = 6xy - 4$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N}{\partial x}} = 3 - 8xy$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ debemos determinar un factor integrante para poder resolver la ecuación diferencial dada.

Determinamos el factor integrante de la forma $\boldsymbol{u(x,y) = x^m y^n}$

Ahora multiplicamos el factor integrante en la ecuación original $(*)$ y tenemos

$$x^m y^n(3xy^2 - 4y)dx + x^m y^n(3x - 4x^2y)dy = 0 \qquad (**)$$

De donde

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (3n + 6)x^{m+1}y^{n+1} - (4n + 4)x^m y^n$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = (3m + 3)x^m y^n - (4m + 8)x^{m+1}y^{n+1}$$

Luego $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ para que la ecuación diferencial dada sea exacta, es decir igualando las derivadas parciales se obtiene

$$\begin{cases} 3n + 6 = -4m - 8 \\ -4n - 4 = 3m + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n + 4m = -14 \\ 4n + 3m = -7 \end{cases}$$

Resolviendo se tiene que $n = 2$ y $m = -5$ por lo tanto el factor integrante está dado por

$$u(x, y) = x^{-5}y^2$$

Reemplazando $u(x, y)$ en la ecuación **(**)**, entonces tenemos

$$x^{-5}y^2(3xy^2 - 4y)dx + x^{-5}y^2(3x - 4x^2y)dy = 0$$

Luego

$$(3x^{-4}y^4 - 4x^{-5}y^3)dx + (3x^{-4}y^2 - 4x^{-3}y^3)dy = 0 \quad (***)$$

donde

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^{-4}y^3 - 12x^{-5}y^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 12x^{-4}y^3 - 12x^{-5}y^2$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial (***) es exacta, aplicando el procedimiento estudiado anteriormente, se tiene

$$f(x, y) = \int M(x, y)\, dx + g(y)$$

$$f(x, y) = \int (3x^{-4}y^4 - 4x^{-5}y^3)dx + g(y)$$

$$f(x, y) = -x^{-3}y^4 + x^{-4}y^3 + g(y) \qquad (\alpha)$$

Ésta última expresión la derivamos con respecto a y; además consideramos que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

Entonces tenemos

$$3x^{-4}y^2 - 4x^{-3}y^3 = 3x^{-4}y^2 - 4x^{-3}y^3 + g'(y)$$

De donde simplificando tenemos

$g'(y) = 0 \quad \gg\gg \quad g(y) = k$ con $k \in \mathbb{R}$

Reemplazando en la ecuación (α), obtemos la solución general dado por

$$-x^{-3}y^4 + x^{-4}y^3 = C$$

Ejemplo 50

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{(6y + x^2y^2)dx + (8x + x^3y)dy = 0} \qquad \textbf{(1)}$$

Solución:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}} = 6 + 2x^2y$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}} = 8 + 3x^2y$$

Se plantea para verificar si el factor integrante se encuentra con respecto a “x” o “y”

Dependiente de “x”

$$\frac{\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}} - \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{N}} = \frac{6 + 2x^2y - 8 - 3x^2y}{(8x + x^3y)}$$

$$= -\frac{2 + x^2y}{(8x + x^3y)}$$

Dependiente de “y”

$$\frac{\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}}}{\boldsymbol{M}} = \frac{8 + 3x^2y - 6 - 2x^2y}{(6y + x^2y^2)}$$

$$= \frac{2 + x^2y}{(6y + x^2y^2)}$$

Como el factor integrante no se encuentra con respecto ni a “x” ni a “y” entonces aplicamos el factor integrante: $\boldsymbol{x^n y^m}$ la cual multiplicamos en la ecuación diferencial **(1).**

$$x^n y^m\,(6y + x^2y^2)dx + x^n y^m\,(8x + x^3y)dy = 0$$

Cuyas derivadas parciales son:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = mx^n y^{m-1}(6y + x^2y^2) + x^n y^m(6 + 2x^2y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6mx^n y^m + mx^{n+2}y^{m+1} + 6x^n y^m + 2x^{n+2}y^{m+1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (6m + 6)x^n y^m + (m + 2)x^{n+2}y^{m+1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = nx^{n-1}y^m(8x + x^3y) + x^n y^m(8 + 3x^2y)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 8nx^n y^m + nx^{n+2}y^{m+1} + 8x^n y^m + 3x^{n+2}y^{m+1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = (8n + 8)x^n y^m + (n+3)x^{n+2}y^{m+1}$$

Igualando las derivadas parciales

$$(6m + 6)x^n y^m + (m + 2)x^{n+2}y^{m+1} = (8n + 8)x^n y^m + (n+3)x^{n+2}y^{m+1}$$

Se deduce

$$\begin{cases} 6m + 6 = 8n + 8 \\ -m + 2 = n + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6m - 8n = 2 \\ m - n = 1 \end{cases}$$

Resolviendo se tiene que $n = 2$ y $m = 3$ por lo tanto el factor integrante está dado por

$$u(x, y) = x^2y^3$$

Reemplazando el factor integrante en la ecuación (1).

$$x^2y^3\,(6y + x^2y^2)dx + x^2y^3\,(8x + x^3y)dy = 0$$

$$(6x^2y^4 + x^4y^5)dx + (8x^3y^3 + x^5y^4)dy = 0$$

Obteniendo sus derivadas parciales

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 24x^2y^3 + 5x^4y^4$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 24x^2y^3 + 5x^4y^4$$

Se tiene una ecuación diferencial exacta y su resolución está dado por

$$f(x, y) = \int M(x, y)\, dx + g(y)$$

$$f(x,y)=\int(6x^2y^4+x^4y^5)dx\ +\ \ g(y)$$

$$f(x,y)=2x^3y^4+\tfrac{1}{5}x^5y^5+g(y)\qquad(\alpha)$$

Ésta última expresión la derivamos con respecto a y; además consideramos que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

Entonces tenemos

$$8x^3y^3+x^5y^4=8x^3y^3+x^5y^4+g'(y)$$

De donde simplificando tenemos

$g'(y)=0\quad\ggg\quad g(y)=k\quad$ con $\quad k\in\mathbb{R}$

Reemplazando en la ecuación (α), obtemos la solución general dado por

$$2x^3y^4+\frac{1}{5}x^5y^5=C$$

Ejemplo 51

Si $u(x,y)=0$ es una función de $(x+y)$; es decir,

$$\boldsymbol{u(x,y)=f(x+y)}$$

Recordemos que la ecuación diferencial multiplicada por el factor integrante tiene la forma

$$M(x,y)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-N(x,y)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+u(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=0\qquad(*)$$

Ahora para resolver utilizamos la sustitución $\boldsymbol{z=x+y}$**,** entonces la ecuación (*) está expresada por

$$M\,\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}-N\,\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+u(x,y)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0$$

De acuerdo a la sustitución lo podemos expresar como

$$M\,f'(z)-N\,f'(z)+f(z)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0$$

De donde

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}$$

Por lo tanto, se ha determinado el factor integrante que está en función de la suma de las variables x e y

Ejemplo 52

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(x^2-y^2+1)dx+(x^2-y^2-1)dy=0\qquad(*)$$

Solución:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}} = -2y$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}} = 2x$$

Como $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}} \neq \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}}$ debemos determinar un factor integrante para poder resolver la ecuación diferencial dada.

Consideramos el factor integrante de la forma $\boldsymbol{u(x,y) = f(x+y)}$ con $\boldsymbol{z = x+y}$
Para integrar una ecuación diferencial que tenga esta forma de factor integrante, utilizamos la expresión

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}$$

Donde

$$\frac{\boldsymbol{f'(z)}}{\boldsymbol{f(z)}} = \frac{\boldsymbol{-2y - 2x}}{(\boldsymbol{x^2 - y^2 - 1}) - (\boldsymbol{x^2 - y^2 + 1})} = \frac{-2(x+y)}{-2} = x + y = z$$

Es decir,

$$\frac{\boldsymbol{f'(z)}}{\boldsymbol{f(z)}} = z \qquad \Rightarrow \qquad f(z) = \exp\left(\frac{1}{2}z^2\right)$$

Que es equivalente a

$$u = \exp\left(\frac{1}{2}(x+y)^2\right)$$

De esta manera se ha determinado el factor integrante, ahora procedemos a la solución de la ecuación diferencial, para lo cual multiplicamos la ecuación con el factor integrante.

Ejercicios 2.6

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $(xy^2 + x^2y^2 + 3)\,dx + x^2y\,dy = 0$

2) $(2x^2y + y^2)\,dx + (2x^3 - xy)dy = 0$

3) $3x + 2y + y^2 + (2x + 2xy + 5y^2)y' = 0$

6) $x\frac{dy}{dx} + y(x\,ctg(x) + 1) = 0$

7) $dx + \left(\frac{x}{y} - sen(y)\right)dy = 0$

8) $(x - x^2y)\,dy + y\,dx = 0$

4) $2xy + y^3 + (x^2 + 3xy^2)y' = 0$

5) $y\,dx + (2x - ye^y)dy = 0$

9) $y(1 + xy)\,dx - xdy = 0$

10) $dx + (x\,tg(y) - 2\sec(y))dy = 0$

2.7. ECUACIONES LINEALES

En la unidad I se definió la forma general de una ecuación diferencial *lineal* de orden n como

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Se recuerda al lector que la linealidad significa que todos los coeficientes son solamente funciones de x y que la función incógnita y junto con sus n-primeras derivadas son de grado uno. Ahora bien, cuando $n = 1$, se obtiene la **ecuación lineal de primer orden** dada por:

$$\boldsymbol{a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)}$$

Dividiendo entre $a_1(x)$ resulta la forma más útil

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = g(x)} \qquad (2.24)$$

Se busca la solución de (2.24) en un intervalo I en el cual $P(x)$ y $g(x)$ son continuas. En la discusión que sigue se supone tácitamente que (2.24) tiene solución

Un factor integrante

Supóngase que la ecuación (2.24) se escribe en la forma diferencial

$$dy + [P(x)y - g(x)]dx = 0 \qquad (2.25)$$

Las ecuaciones lineales tienen la conveniente propiedad de que siempre es posible encontrar una función

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - g(x)]dx = 0 \qquad (2.26)$$

es una ecuación diferencial exacta. Por el Teorema anteriormente citado se sabe que el primer miembro de la ecuación (3) será una diferencial exacta si

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - g(x)] \qquad (2.27)$$

o bien $$\frac{d\mu}{dx} = \mu\,P(x)$$

Esta es una ecuación separable a partir de la cual puede determinarse $\mu(x)$. Se tiene

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)\,dx$$

$$ln|\mu| = \int P(x)\,dx \tag{2.28}$$

de modo que

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \tag{2.29}$$

A la función $\mu(x)$ definida en (2.29) se la llama **factor integrante** de la ecuación lineal. Nótese que no es necesario usar una constante de integración en (2.28) ya que (2.26) no es afectada si se la multiplica por una constante. Además, $\mu(x) \neq 0$ para todo x de I y es continua y diferenciable.
Es interesante observar que la ecuación (27) sigue siendo una ecuación diferencial exacta incluso cuando $g(x) = 0$. De hecho, $f(x)$ no desempeña ningún papel en la determinación de $\mu(x)$ puesto que por (28) vemos que $\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)g(x) = 0$. Así,

$$e^{\int P(x)\,dx}dy + e^{\int P(x)\,dx}[P(x)y - g(x)]dx$$

y

$$e^{\int P(x)\,dx}dy + e^{\int P(x)\,dx}P(x)ydx$$

son, ambas, diferenciales exactas. Ahora se escribe (2.26) en la forma

$$e^{\int P(x)\,dx}dy + e^{\int P(x)\,dx}p(x)ydx = e^{\int P(x)\,dx}g(x)dx$$

y se advierte que la ecuación puede escribirse como

$$d\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] = e^{\int P(x)\,dx}g(x)dx$$

Integrando la última ecuación resulta

$$e^{\int P(x)\,dx}y = \int e^{\int P(x)\,dx}g(x)dx + c$$

o bien

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}g(x)dx + c\,e^{-\int P(x)\,dx} \tag{2.30}$$

En otras palabras, si (2.25) tiene solución, ésta debe ser de la forma (2.30). Recíprocamente, se puede verificar que (30) constituye una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (2.25). Sin embargo, no se debe tratar de memorizar la fórmula (2.30). El procedimiento debe seguirse cada vez, por eso es conveniente resumir los resultados.

Método de solución

Para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden, primero escríbala en la forma (2.25); o sea, haga el coeficiente de y' igual a la unidad. Multiplique después toda la ecuación por el factor integrante $e^{\int P(x)\,dx}$.

El primer miembro de

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+P(x)e^{\int P(x)\,dx}y=e^{\int P(x)\,dx}g(x) \qquad (2.31)$$

es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente, es decir la ecuación (8) lo podemos escribir como:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right]=e^{\int P(x)\,dx}g(x) \qquad (2.32)$$

Por último, integrando ambos miembros de la ec. (2.32) se tiene la solución general de la ecuación diferencial dada por:

$$\boldsymbol{y=e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}g(x)dx+c\,e^{-\int P(x)\,dx}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 53

$$\boldsymbol{x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x}$$

Solución

Escriba la ecuación como

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x \qquad (*)$$

y determine el factor integrante

$$e^{-4\int dx/x}=e^{-4ln|x|}=e^{lnx^{-4}}=x^{-4}$$

Aquí se usa la identidad básica $b^{\log_b N} = N$. Ahora multiplique (*) por éste término

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^{x} \qquad (**)$$

y obtenga $$\frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^{x} \qquad (***)$$

Por integración por partes queda

$$x^{-4}y = xe^{x} - e^{x} + c$$

o bien… $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$

Ejemplo 54

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} - 3y = 0}$$

Solución

La ecuación ya está en la forma (1). Por consiguiente, el factor integrante es

$$e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$$

En consecuencia $$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 0$$

$$e^{-3x}y = c$$

y por lo tanto $$y = ce^{3x}$$

Ejemplo 55

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + 2xy = x \qquad sujeta\ a \qquad y(0) = -3}$$

Solución

Las funciones $P(x) = 2x$ y $g(x) = x$ son continuas en $-\infty < x < \infty$

El factor integrante es

$$e^{2\int x\,dx} = e^{x^2}$$

de modo que $$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}y\right] = xe^{x^2}$$
$$e^{x^2}y = \int xe^{x^2}\,dx$$
$$e^{x^2}y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$$

De la condición $y(0) = -3$ se obtiene $c = {}^{-7}/_{2}$ por ello la solución del problema de valor inicial en el intervalo es

$$y = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}e^{-x^2}$$

Véase la Figura 16

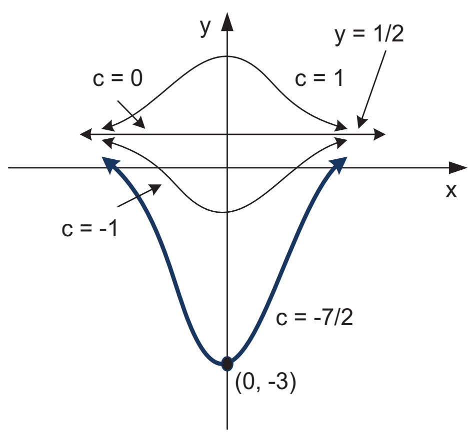


Figura 16. Solución del problema de valor inicial
Fuente. Autores

Ejemplo 56

$$\boldsymbol{x\frac{dy}{dx} + y = 2x \qquad sujeta\ a \qquad y(1) = 0}$$

Solución

Escribir la ecuación dada como

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2$$

y observe que $P(x) = \frac{1}{x}$ es continua en cualquier intervalo que no contiene al origen.
En vista de la condición inicial, se resuelve el problema en el intervalo $0 < x < \infty$.
El factor integrante es

$$e^{\int dx/x} = e^{ln|x|} = x$$

y por consiguiente $\frac{d}{dx}[xy] = 2x$ da lugar a $xy = x^2 + c$

La solución general de la ecuación es

$$y = x + \frac{c}{x} \qquad (*)$$

Pero $y(1) = 0$ implica $c = -1$. Por lo tanto se obtiene

$$y = x - \frac{1}{x}, \qquad 0 < x < \infty \qquad (**)$$

La gráfica de la ecuación (*), considerada como una familia uniparamétrica de curvas, se presenta en la Figura 17. La solución de la ecuación (*) del problema de valor inicial está indicada por la porción en color de la grafica

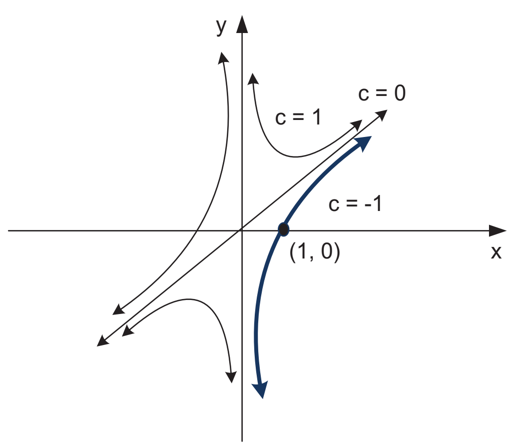


Figura 17. Representación geométrica de la solución particular de la EDO
Fuente. Autores

Ejercicios 2.7

En los problemas del 1-10, halle la solución general de la ecuación diferencial. De un intervalo en el cual la solución general esté definida

1. $\frac{dy}{dx} = 4y$

2. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $2\frac{dy}{dx} + 10y = 1$

4.$x\frac{dy}{dx} + 2y = 3$

5. $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

6.$\frac{dy}{dx} = y + e^{x}$

7. $y' + 3x^2y = x^2$

8. $y' + 2xy = x^3$

9.$x^2y' + xy = 1$

10. $y' = 2y + x^2 + 5$

En los problemas del 11 – 19 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica

11. $\frac{dy}{dx} + 5y = 20, \quad y(0) = 2$

12.$y' = 2y + x(e^{3x} - e^{2x}), \quad y(0) = 2$

13. $L\frac{di}{dt} + Ri = E; \quad L, R,$ y E son constantes; $i(0) = i_0$

14. □ $\frac{dy}{dx} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5$

15. $y' + (\tan x)y = cos^2x, \quad y(0) = -1$

16. $\frac{dQ}{dx} = 5x^4Q, \qquad Q(0) = -7$

17.$\frac{dT}{dt} = k(T - 50), \qquad k$ constante, $T(0) = 200$

18. $(x + 1)\frac{dy}{dx} + y = ln(x), \qquad y(1) = 10$

19. $xy' + y = e^{x}, \qquad y(1) = 2$

2.8. ECUACIÓN DE BERNOULLI

Definición 2.8. ECUACIÓN DE BERNOULLI
Definición. Una ecuación diferencial de la forma $$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n \qquad (*)$$ Se denomina ecuación diferencial de Bernoulli, Donde: $p(x)$ y $q(x)$ funciones reales continuas en algún $I \subset R$, y n es un número real.

Para la integración de la ecuación de Bernoulli se deben considerar los siguientes casos:

- Si $\boldsymbol{n = 0}$ o $\boldsymbol{n = 1}$, se tiene que la ecuación de Bernoulli representa una ecuación diferencial a variable separable.
- Si $n \neq 1$ entonces a la ecuación de Bernoulli (*) lo procedemos a dividir por el término y^n, con lo que se obtiene

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} - p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x) \qquad (**)$$

De donde

Realizando la sustitución $$z = \frac{1}{y^{n-1}}$$

Derivando con respecto a x $$\frac{dz}{dx} = (-n+1)\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}$$

Remplazando en (**) $$\left(\frac{1}{1-n}\right)\frac{dz}{dx} - p(x)z = q(x) \qquad (***)$$

Obteniendo una ecuación diferencial lineal (***), que lo podemos resolver mediante el factor integrante.

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

Ejemplo 57

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3y^2}$$

Desarrollo

Dividimos la ecuación por y^2	$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x+1}\right)\frac{1}{y}=-\frac{1}{2}(x+1)^3 \quad (*)$
Realizando la sustitución	$z=\frac{1}{y}$
Derivando con respecto a x	$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$
Reemplazando en (*)	$-\frac{dz}{dx}+\left(\frac{1}{x+1}\right)z=-\frac{1}{2}(x+1)^3$
Ecuación diferencial lineal	$\frac{dz}{dx}-\left(\frac{1}{x+1}\right)z=\frac{1}{2}(x+1)^3 \quad (**)$

Como la ecuación (**) representa una EDO lineal, entonces para su solución aplicamos el factor integrante dado por

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

$$\mu(x)=e^{-\int\left(\frac{1}{x+1}\right)dx}=\frac{1}{x+1}$$

Luego multiplicando $\mu(x)$ en (**) tenemos

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)dz-\left(\frac{z}{(x+1)^2}\right)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$\left(\frac{z}{x+1}\right)'=\frac{1}{2}(x+1)^2dx$$

Integrando esta última expresión

$$\frac{z}{x+1}=\frac{1}{2}\int(x+1)^2\ dx$$

Escribiendo en términos de las variables originales tenemos

$$\frac{1}{y(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)$$

Ejemplo 58

$$\mathbf{3\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=2x^4y^4}$$

Desarrollo

Dividimos la ecuación por y^4 $$\frac{3}{y^4}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{3}{x}\right)\frac{1}{y^3}=2x^4 \qquad (*)$$

Realizando la sustitución $$z=\frac{1}{y^3}$$

Derivando con respecto a x $$\frac{dz}{dx}=-\frac{3}{y^4}\frac{dy}{dx}$$

Reemplazando en (*) $$-\frac{dz}{dx}+\left(\frac{3}{x}\right)z=2x^4$$

Ecuación diferencial lineal $$\frac{dz}{dx}-\left(\frac{3}{x}\right)z=-2x^4 \qquad (**)$$

Como la ecuación (**) representa una EDO lineal, entonces para su solución aplicamos el factor integrante dado por

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$
$$\mu(x)=e^{-\int\left(\frac{3}{x}\right)dx}=\frac{1}{x^3}$$

Luego multiplicando $\mu(x)$ en (**) tenemos

$$\frac{1}{x^3}dz-\left(\frac{3z}{(x)^4}\right)dx=-2x\,dx$$

$$\left(\frac{z}{x^3}\right)'=-2x\,dx$$

Integrando esta última expresión
$$\int\left(\frac{z}{x^3}\right)'=-2\int x\,dx$$
Escribiendo en términos de las variables originales tenemos
$$\frac{1}{x^3y^3}=-x^2+C$$

Ejemplo 59

$$y' = 5x^2y^5 + \frac{y}{2x}$$

Desarrollo

La ecuación diferencial dada es equivalente a

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$$

Dividiendo por y^5

$$\frac{1}{y^5}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2xy^4} = 5x^2 \qquad (*)$$

Realizando la sustitución $z = y^{1-n}$

n mayor grado de y

$$z = \frac{1}{y^4}$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{dz}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

Reemplazando en (*)

$$-\frac{1}{4}\frac{dz}{dx} - \frac{z}{2x} = 5x^2$$

Ecuación diferencial lineal

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = -20x^2 \qquad (**)$$

Como la ecuación (**) representa una EDO lineal, entonces para su solución aplicamos el factor integrante dado por

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int\left(\frac{2}{x}\right)dx} = x^2$$

Luego multiplicando $\mu(x)$ en (**) tenemos

$$x^2\,dz + 2x\,z\,dx = -20x^4\,dx$$

$$(x^2\;z)' = -20x^4\;dx$$

Integrando esta última expresión

$$\int (x^2\;z)' = -20\int x^4\,dx$$

Escribiendo en términos de las variables originales tenemos

$$\frac{x^2}{y^4} = -4x^5 + C$$

Ejemplo 60

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x-2}y=5(x-2)\sqrt{y}$$

Desarrollo

La ecuación diferencial dada es equivalente a

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x-2}y=5(x-2)\sqrt{y}$$

Dividiendo (*) por $\sqrt{y}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{y}}{(x-2)}=5(x-2) \qquad (*)$

Realizando la sustitución $\quad z=y^{1-n}$

n mayor grado de y

$z=\sqrt{y}$

Derivando con respecto a x $\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{dy}{dx}$

Reemplazando en (*) $\quad 2\frac{dz}{dx}+\frac{z}{x-2}=5(x-2)$

Ecuación diferencial lineal $\quad \frac{dz}{dx}++\frac{z}{2(x-2)}=\frac{5}{2}(x-2) \qquad (**)$

Como la ecuación (**) representa una EDO lineal, entonces para su solución aplicamos el factor integrante dado por

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

$$\mu(x)=e^{\int\left(\frac{1}{2(x-2)}\right)dx}=\sqrt{x-2}$$

Luego multiplicando $\mu(x)$ en (**) tenemos

$$\sqrt{x-2}dz+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}zdx=\frac{5}{2}(x-2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$\left(\sqrt{x-2}\ z\right)'=\frac{5}{2}(x-2)^{\frac{3}{2}}dx$$

Integrando esta última expresión

$$\int\left(\sqrt{x-2}\ z\right)'=\frac{5}{2}\int(x-2)^{\frac{3}{2}}dx$$

Escribiendo en términos de las variables originales tenemos

$$\sqrt{x-2}\,\sqrt{y} = (x-2)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\sqrt{y} = C(x-2)^{-\frac{1}{2}} + (x-2)^2$$

Obtenemos la solución general dada en forma implícita.

Ejercicios 2.8

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y\,' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2y}$
2. $6y^2\,dx - x\,(3x^3 + y)\,dy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^2y^3}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3\square^2}{x^3 + y + 1}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3y}{x^4 + y^2}$

2.9. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN DADAS EN FORMA NO NORMAL.

2.9.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA FORMA $x = f(y')$

Para integrar este tipo de ecuaciones diferenciales se utiliza la sustitución $\boldsymbol{y' = p}$.
Donde $\boldsymbol{p}$ es una función continua en el intervalo que $\boldsymbol{f(y')}$ es continua y diferenciable.

Luego la ecuación diferencial lo podemos expresar como

$$x = f(p) \qquad (*)$$

Si a la ecuación (1) la derivamos con respecto a x, se tiene

$$1 = f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$1 = f'(p)\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$1 = pf'(p)\frac{dp}{dy}$$

De donde

$$\frac{dy}{dp} = pf'(p)$$

Integrando tenemos

$$y = \int p\, f'(p)dp + C$$

Es decir, la solución general de la ecuación (1) está dada en forma paramétrica de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p\, f'(p)dp + C \end{cases}$$

Ejemplo 61

Resolver la ecuación la siguiente ecuación diferencial

$$x = (y\,')^3 - 4(y\,')^2 - 2y\,' \qquad (*)$$

Solución

Sustitución $\quad \boldsymbol{y' = p}$

La ecuación (*) es equivalente a $\quad x = (p)^3 - 4(p)^2 - 2p$

Derivamos con respecto a x $\quad 1 = 3p^2\frac{dp}{dx} - 8p\frac{dp}{dx} - 2\frac{dp}{dx}$

Aplicando la regla de la cadena $\quad 1 = 3p^2\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} - 8p\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} - 2\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}$

Como $p = \frac{dy}{dx}$ entonces $\quad 1 = 3p^3\frac{dp}{dy} - 8p^2\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy}$

De donde tenemos $\quad \int dy = \int (3p^3 - 8p^2 - 2p)\, dp$

Integrando resulta $\quad y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{8}{3}p^3 - p + C$

Por lo tanto, se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = (p)^3 - 4(p)^2 - 2p \\ y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{8}{3}p^3 - p + C \end{cases}$$

2.9.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA FORMA $y = f(y')$

Para integrar este tipo de ecuaciones diferenciales se utiliza la sustitución $\boldsymbol{y' = p}$. Luego la ecuación diferencial lo podemos expresar como

$$y = f(p) \tag{2.33}$$

Si a la ecuación (2.33) la derivamos con respecto a x, se tiene

$$y' = f'(p)\frac{dp}{dx}$$

De donde

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p}$$

Integrando tenemos

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C$$

Es decir, la solución general de la ecuación (1) está dada en forma paramétrica de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C \\ y = f(p) \end{cases}$$

Ejemplo 62

Resolver la ecuación la siguiente ecuación diferencial

$$y = y'\ln|y'| \qquad (*)$$

Solución

Sustitución $\boldsymbol{y' = p}$

La ecuación (*) es equivalente a $y = p\ln|p|$

Derivamos con respecto a x
$$\frac{dy}{dx} = \ln|p|\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

Como $p = \frac{dy}{dx}$ entonces
$$p = \ln|p|\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$
$$p = (\ln|p| + 1)\frac{dp}{dx}$$

De donde tenemos
$$\int dx = \int \left(\frac{ln|p| + 1}{p}\right) dp$$

Integrando resulta $$x = \frac{(ln|p| + 1)^2}{2} + C$$

Por lo tanto, se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = \dfrac{(ln|p| + 1)^2}{2} + C \\ \\ y = p \ln|p| \end{cases}$$

Ejercicios 2.9

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $x(y')^2 - 2y\,y' + x = 0$
2. $x^2(y')^2 + xy\,y' - 6y^2 = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx}\left(1 + \dfrac{dy}{dx}cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right) = y$
4. $y = (y' - 1)e^y$
5. $x = \dfrac{dy}{dx} + sen\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

2.10. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CLAIRAUT

La importancia del estudio del tipo de ecuaciones diferenciales que vamos analizar radica en el hecho de que tiene como solución a una familia de rectas. Además, la envolvente, es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia, también es solución, en este caso una solución singular, de la ecuación de Clairaut.

Definición 2.10. ECUACIÓN DE CLAIRAUT

Una ecuación diferencial de la forma

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad (*)$$

Se denomina ecuación de Clairaut, donde f tiene derivadas primeras y segundas continuas en algún $I \subset \mathbb{R}$.

La integral de la ecuación diferencial de Clairaut se lo realiza mediante la sustitución $\boldsymbol{y' = p}$, Entonces la ecuación (*) la podemos expresar como

$$y = xp + f(p)$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

Como $y' = p$, entonces tenemos

$$p = p + \ x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

De donde

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (**) \qquad \vee \qquad x + f'(p) = 0 \quad (***)$$

- De (2) se sigue que $p = C$ que al sustituir en $y = p\,x + f(p)$ se obtiene la ***solución general***

$$\boldsymbol{y = Cx + f(C)}$$

- De (3) se elimina p del sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = px + f(p)} \\ \boldsymbol{0 = x + f'(p)} \end{cases}$$

  y se obtiene una ***solución singular***, la misma que representa la envolvente de la familia de curvas $\boldsymbol{y = Cx + f(C)}$.

EJRCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

Ejemplo 63

$$\boldsymbol{y = x\,y' + (y')^2} \qquad (*)$$

Solución

Sustitución $\boldsymbol{y' = p}$

La ecuación (*) es equivalente a $y = x\,p + p^2$

Derivamos con respecto a x $\dfrac{dy}{dx} = p + x\dfrac{dp}{dx} + 2\,p\dfrac{dp}{dx}$

Como $p = \frac{dy}{dx}$ entonces $p = p + x\dfrac{dp}{dx} + 2\,p\dfrac{dp}{dx}$

De donde tenemos $0 = (x + 2p)\dfrac{dp}{dx}$

Si $\frac{dp}{dx} = 0$, entonces $p = -\dfrac{1}{2}x \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}x \quad (**)$

Reemplazando (**) en (*) $y = x\left(-\dfrac{1}{2}x\right) + \left(-\dfrac{1}{2}x\right)^2$

Solución singular $y = -\dfrac{1}{4}x^2$

Ejemplo 64

$$\boldsymbol{8x^2 + 2y\,(y\,')^{\,2} \; - \; x\,(y\,')^{\,3} = 0} \qquad (*)$$

Solución

Sustitución $\boldsymbol{y' = p}$

La ecuación (*) es equivalente a $8x^2 + 2yp^2 - x\,p^3 = 0$

Despejamos y $2y = p\,x - 8\dfrac{x^2}{p^2} \qquad (*)$

Derivamos con respecto a x $2\dfrac{dy}{dx} = p + \; x\dfrac{dp}{dx} - 16\dfrac{x}{p^2} + 16\dfrac{x^2}{p^3}\dfrac{dp}{dx}$

Como $p = \frac{dy}{dx}$ entonces $2p = p + x\dfrac{dp}{dx} - 16\dfrac{x}{p^2} + 16\dfrac{x^2}{p^3}\dfrac{dp}{dx}$

De donde tenemos $p = x\dfrac{dp}{dx} - 16\dfrac{x}{p^2} + 16\dfrac{x^2}{p^3}\dfrac{dp}{dx}$

Multiplicamos por p^3 $$p^4 = p^3 x\frac{dp}{dx} - 16px + 16x^2\frac{dp}{dx}$$

Agrupando los términos tenemos $$(p^3 + 16x)\left(p - x\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

De donde $$(p^3 + 16x) = 0 \quad o \quad \left(p - x\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

Si $\left(p - x\frac{dp}{dx}\right) = 0$ se tiene $$p = x\frac{dp}{dx} \quad \Longrightarrow \quad p = Cx \quad (**)$$

Reemplazando (**) en (*) tenemos $$\mathbf{2y = Cx^2 - 8C}$$

Ahora, si $(p^3 + 16x) = 0$ se tiene $$p^3 + 16x = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = \sqrt[3]{-16x} \quad (**)$$

Reemplazando (**) en (*) tenemos $$\boldsymbol{y = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}x^{4/3}}$$

Ejercicios 2.10

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y = xy' - cos(y')$
2. $y = xy' - (y')^3$
3. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$
4. $y = (y')^{-3} - y'$
5. $x = y'e^{2y'}$

Capítulo 3

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

UNIDAD III

3.1. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

3.1.1. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Dado una curva suave $C \subset \mathbb{R}$ descrita por $y = f(x)$, al considerar un punto de la curva $P_0(x_0, y_0) \in f(x)$, en la figura 18 se puede determinar los siguientes elementos geométricos.

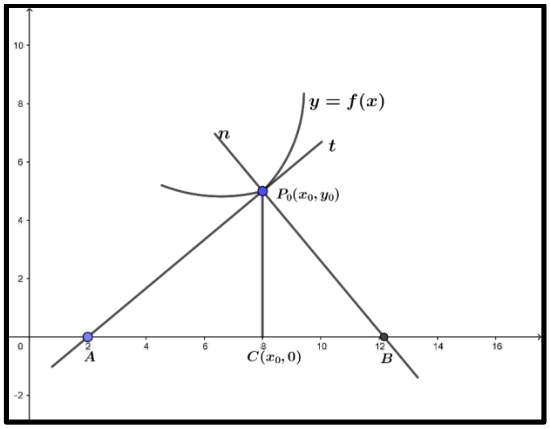


Figura 18. Aplicaciones geométricas de las EDOs
Fuente. Autores

- ✓ **La pendiente de la recta tangente (t)**

$$m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{P_0} = y'(x_0)$$

- ✓ La **ecuación de la recta tangente** se determina al aplicar punto $P_0(x_0, y_0)$ y pendiente m_t

$$t: \qquad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \tag{3.1}$$

- ✓ **La pendiente de la recta normal (n)**, por la condición de perpendicularidad entre la tangente y la normal se tiene

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{y'(x_0)}$$

✓ **La ecuación de la recta normal**

$$n: \qquad y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \tag{3.2}$$

Ahora se determina el punto A que es la intersección entre la recta tangente (t) y el eje x.

$$A = t \cap eje\ x \;\Rightarrow\; \begin{cases} y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 - \dfrac{y_0}{y'(x_0)} \\ y = 0 \end{cases}$$

Es decir, las coordenadas del punto A están dadas por

$$A\left(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}, 0\right)$$

Ahora se determina el punto B que es la intersección entre la recta normal (n) y el eje x.

$$B = n \cap eje\ x \;\Rightarrow\; \begin{cases} y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + y_0 y'(x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$

Es decir, las coordenadas del punto B están dadas por

$$B(x_0 + y_0 y'(x_0), 0)$$

Para determinar las diferentes longitudes, se procede a calcular la distancia entre dos puntos.

❖ **Longitud de la tangente $\left|\overline{P_0A}\right|$ denota con L_T**

$$\boldsymbol{L_T} = \left|\overline{\boldsymbol{P_0A}}\right| = \sqrt{\left(\boldsymbol{x_0} - x_0 + \frac{y_0}{y'(x_0)}\right)^2 - (\boldsymbol{y_0} - 0)^2}$$

$$\boldsymbol{L_T} = \frac{y_0}{y'(x_0)}\sqrt{\boldsymbol{1} + (y'(x_0))^2}$$

❖ **Longitud de la normal $\left|\overline{P_0B}\right|$ denota con L_N**

$$\boldsymbol{L_N} = \left|\overline{\boldsymbol{P_0B}}\right| = \sqrt{\left(\boldsymbol{x_0} - x_0 - y_0 y'(x_0)\right)^2 - (\boldsymbol{y_0} - 0)^2}$$

$$L_N = y_0\sqrt{1 + (y'(x_0))^2}$$

❖ **Longitud de la subtangente $|\overline{AC}|$ denota con L_{ST}**

$$L_{ST} = |\overline{AC}| = \sqrt{\left(x_0 - x_0 + \frac{y_0}{y'(x_0)}\right)^2 - (0-0)^2}$$

$$L_{ST} = \frac{y_0}{y'(x_0)}$$

Longitud de la subnormal $|\overline{BC}|$ denota con L_{SN}

$$L_{SN} = |\overline{BC}| = \sqrt{\left(x_0 - x_0 - y_0 y'(x_0)\right)^2 - (0-0)^2}$$

$$L_{SN} = y_0 * y'(x_0)$$

Generalizando estas longitudes en cualquier punto $P_0(x_0, y_0) \in f(x)$, de la curva C, se tiene

❖ **Longitud de la tangente $|\overline{P_0A}|$ denota con L_T**

$$L_T = \frac{y_0}{y'}\sqrt{1 + (y')^2} \qquad (3.3)$$

❖ **Longitud de la normal $|\overline{P_0B}|$**

$$L_N = y_0\sqrt{1 + (y')^2} \qquad (3.4)$$

❖ **Longitud de la subtangente $|\overline{AC}|$**

$$L_{ST} = \frac{y_0}{y'} \qquad (3.5)$$

❖ **Longitud de la subnormal $|\overline{BC}|$ denota con L_{SN}**

$$L_{SN} = y_0 * y' \qquad (3.6)$$

Ejemplo 65

La normal en el punto $P(x, y)$ de una curva corta el eje de las x en un punto M y al eje de las y en un punto N, como se muestra en la figura 19. Hallar la ecuación de las curvas para las cuales punto $P(x, y)$ es el punto medio del segmento $\overline{MN}$.

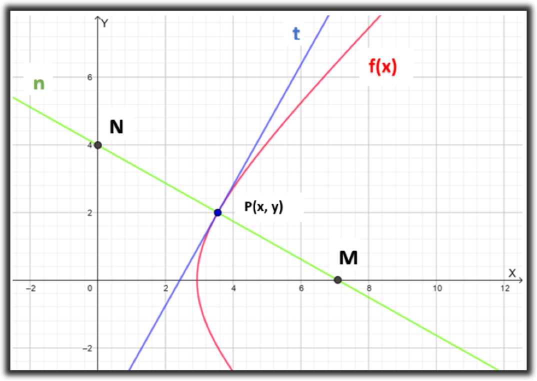


Figura 19. Interpretación geométrica del problema. Fuente. Autores

Solución

Condiciones del problema se tiene que $\overline{NP} = \overline{PM}$

✓ La ecuación de la recta normal está dado por

$$n: \quad y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

Para determinar los puntos M y N debemos intersecar la recta normal con los ejes coordenados,

Para determinar el punto N

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0) \end{cases} \quad \text{entonces} \quad N\left(0, \frac{x}{y'} + y\right)$$

Para determinar el punto M

$$\begin{cases} y = 0 \\ y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0) \end{cases} \quad \text{entonces} \quad M\,(x + yy', 0)$$

Como $P(x, y)$ es punto medio, se tiene

$$P(x, y) = \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right)$$

Se considera la coordenada en x

$$x = \frac{M}{2}$$
$$x = \frac{x + yy'}{2}$$
$$2x = x + yy'$$
$$x = yy'$$

Separar variables

$$x = y\frac{dy}{dx}$$

Al integrar

$$\int x\,dx = \int y\,dy$$
$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c$$

De donde se tiene que la curva está dada por

$$x^2 - y^2 = c$$

Ahora se resuelve considerando la coordenada en y.

$$P(x,y) = \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right)$$

Entonces

$$y = \frac{N}{2}$$
$$y = \frac{\frac{x}{y'} + y}{2}$$
$$2yy' = x + yy'$$
$$yy' = x$$
$$y\frac{dy}{dx} = x$$

Al integrar

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

De donde se tiene que la curva está dada por

$$y^2 - x^2 = c$$

Ejemplo 66

Determinar la curva que pasa por el punto A(0,2) tal que la proyección de la tangente sobre el eje x siempre tenga una longitud de 2. (Figura 20)

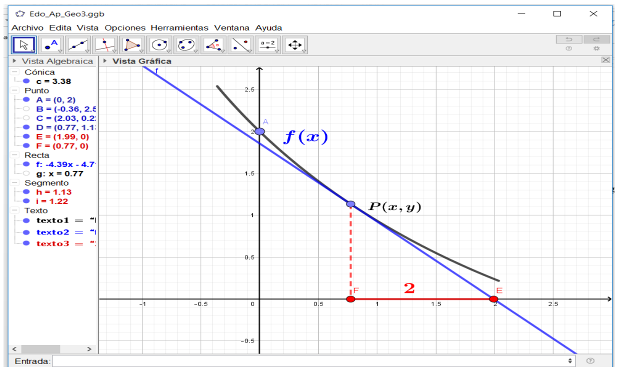


Figura 20. Visualización del problema en Geogebra
Fuente. Autores

Solución

Por condición de problema se tiene que $\overline{FE} = 2$

Pero el segmento $\overline{FE}$ representa la longitud de la recta subtangente; es decir,

$$\boldsymbol{L_{ST} = \frac{y}{y'} = 2} \qquad \textbf{(1)}$$

Se tiene

$$2\frac{dy}{y} = dx \quad \Rightarrow \quad 2\int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad 2\ln(y) = x + C$$

Como la curva pasa por el punto $A(0,2)$ entonces $2\ln(2) = 0 + C$ de donde

$$C = 2\ln(2)$$

Por lo tanto, la solución del problema está dada por la ecuación

$$2\ln(y) = x + 2\ln(2)$$
$$y^2 = e^{x+\ln(4)}$$
$$y^2 = 4e^x$$

Ejemplo 67

Hallar la curva, para la cual, la normal a cualquiera de sus puntos es igual a la distancia desde este punto hasta el origen de coordenadas.

De acuerdo al enunciado del problema, se realiza un bosquejo del problema para identificar elementos geométricos y plantear las correspondientes relaciones. (Figura21)

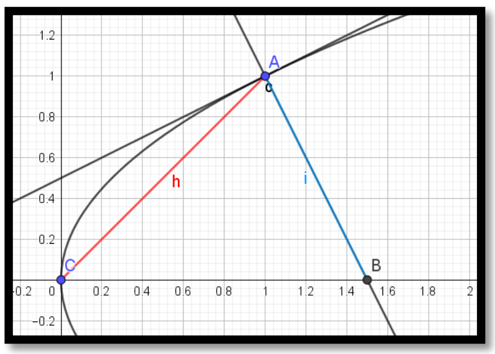


Figura 21. Interpretación gráfica del problema en Geogebra
Fuente. Autores

Solución

Tomando el segmento $\overline{AB}$ como la normal, se infiere que este segmento es igual al segmento $\overline{AC}$, que comprende el punto A(x,y) y el origen O(0,0).

En este sentido se requiere determinar la distancia $|\overline{AB}|$ y $|\overline{AC}|$ para posteriormente igualarlas.

Distancia $|\overline{AB}|$

Ecuación de la normal:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0) \qquad (1)$$

Tomando al punto B en el eje x como B(x,0), se procede a determinar la abscisa x, despejándola de (1), con y=0.

$$0 - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0)$$
$$y_0(y') = x - x_0$$
$$x = y_0 y' + x_0$$

Entonces las coordenadas son $B(y_0 y' + x_0, 0)$

Se procede a determinar la distancia entre los puntos $A(x, y)$ y $B(y_0 y' + x_0, 0)$

$$AB = \sqrt{(x - (x + yy'))^2 + (y - 0)^2}$$
$$AB = \sqrt{(y^2 (y')^2) + y^2}$$

Distancia $|\overline{AC}|$

Se determina la distancia entre los puntos $A(x, y)$ y $C(0,0)$

$$AB = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$
$$AB = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Al igualar las distancias $|\overline{AB}|$ y $|\overline{AC}|$:

$$AB = AC$$
$$y^2 (y')^2 + y^2 = x^2 + y^2$$
$$y^2 (y')^2 = x^2$$
$$\sqrt{y^2 (y')^2} = \sqrt{x^2}$$

$$yy' = x \qquad (2)$$

$$yy' = -x \qquad (3)$$

Al resolver la ecuación (2) se tiene la siguiente solución

$$yy' = x$$
$$ydy = xdx$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

Solución 1: $y^2 - x^2 = C$

Al resolver la ecuación (3) se tiene la siguiente solución

$$yy' = -x$$
$$ydy = -xdx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

Solución 2: $x^2 + y^2 = C$

Ejemplo 68

Una curva que se halla en el primer cuadrante pasa por el punto $A(0,1)$, si la longitud del arco comprendido entre $A(0,1)$ y un punto de la curva $P(x,y)$ es numéricamente igual al área limitada por la curva, el eje "X", el eje "Y" y la coordenada del punto $P(x,y)$, como se muestra en la figura 22. Encontrar la ecuación de la curva.

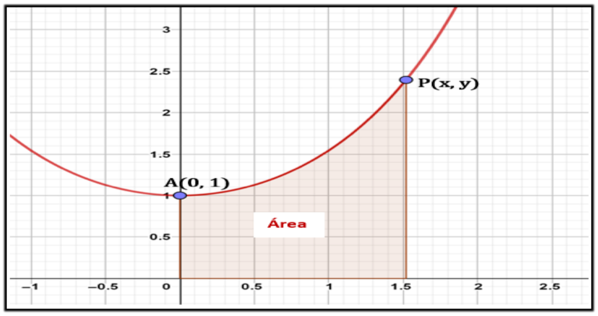


Figura 22. Animación del problema mediante Geogebra
Fuente. Autores

Solución
Datos:

$$L_{AP} = Área$$

$$A(0,1) \quad \wedge \quad P(x,y) \quad \in f(x)$$

$$L_{AP} = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (1)$$

$$Área = \int_0^{x_0} y\, dx \qquad (2)$$

Igualamos las ecuaciones (1) y (2)

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1+(y')^2}\ dx = \int_0^{x_0} y\ dx$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = y$$

$$1+(y')^2 = y^2$$

$$(y')^2 = y^2 - 1$$

$$y' = \sqrt{y^2-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2-1}$$

Separando variables

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = dx$$

Al integrar

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \int dx$$

Se aplica el método de integración por sustitución trigonométrica

Sea:

$$y = \sec(\theta)$$
$$dy = \sec(\theta)\ \tan(\theta)\ d\theta$$

Entonces

$$\int \sec(\theta)\ d\theta = \int dx$$

$$\ln[\sec(\theta) + \tan(\theta)] = x + c \qquad (3)$$

Sustituir θ en (3)

$$\ln\left[y + \sqrt{y^2-1}\right] = x + c \qquad (4)$$

$Como\ A(0,1)\ entonces\ \ x = 0\ \wedge\ y = 1$

Reemplazar "x" e "y" en (4), se tiene

$$\ln(1) = c$$

$$c = 0$$

Sustituir c en (4)

$$\ln\left[y + \sqrt{y^2 - 1}\right] = x$$

Por propiedades del logaritmo

$$e^{\ln\left[y+\sqrt{y^2-1}\right]} = e^x$$

Se despeja "y"

$$y + \sqrt{y^2 - 1} = e^x$$

$$y^2 - 1 = (e^x - y)^2$$

$$y^2 - 1 = e^{2x} - 2ye^x + y^2$$

$$-1 = e^{2x} - 2ye^x$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Por lo tanto, la curva que satisface las condiciones del problema está dado por:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Ejemplo 69

Hallar la línea que pase por el punto $A(2,0)$ y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de la tangente entre el punto de contacto N y el eje de las ordenadas tiene longitud constante e igual a 2. (Figura 23)

Datos:

Pasa por el punto $A(2,0)$

$P(x_0, y_0) \equiv \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

$|\overline{NP}| = 2$

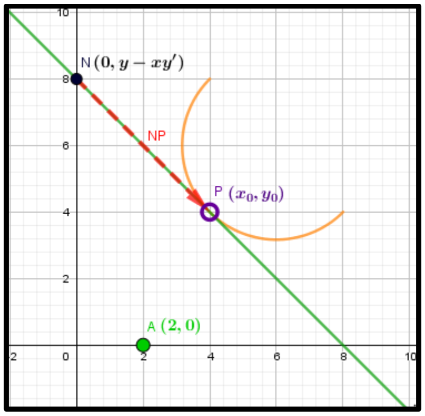


Figura 23. Planteamiento del problema en Geogebra
Fuente. Autores

Solución

Las coordenadas del punto ***N*** están dadas por

$$\text{Punto } N \begin{cases} x = 0 \\ y - y_0 = y'(x - x_0) \end{cases}$$

Donde $N(0, y - xy')$

La longitud del segmento $|\overline{NP}|$ esta dada por la distancia

$$|\overline{NP}| = \sqrt{(0 - x)^2 + (y - xy' - y)^2}$$

Por la condición del problema se tiene

$$2 = |\overline{NP}|$$

$$2 = \sqrt{x^2 + (xy')^2}$$

$$4 = x^2 + (xy')^2$$

$$4 - x^2 = (xy')^2$$

$$\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} = y'$$

$$\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx = dy$$

$$\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx = \int dy$$

$$y + C = \ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} - 1\right] - \ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} + 1\right] + \sqrt{4 - x^2}$$

La curva buscada pasa por el punto $A(2,0)$, entonces satisface su ecuación

$$0 + C = \ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{4-4} - 1\right] - \ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{4-4} + 1\right] + \sqrt{4-0}$$

$$C = 0$$

Al determinar la constante de integración se reemplaza en la solución

$$y + 0 = \ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} - 1\right] - \ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + 1\right] + \sqrt{4-x^2}$$

De donde se tiene

$$y = \sqrt{4-x^2}\left(2\ln\left[\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right]\right)$$

Que representa la solución de la ecuación buscada sujeta a las condiciones dadas en el problema.

3.2. TRAYECTORIAS ORTOGONALES

3.2.1. Curvas ortogonales

De sus estudios de geometría analítica recuerde que dos rectas L_1 y L_2, que no son paralelas a los ejes coordenados, son perpendiculares si y solo sí sus pendientes respectivas satisfacen la relación $m_1 m_2 = -1$. Por esta razón, las gráficas de
$y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 1$ e $y = 2x + 4$ son obviamente perpendiculares. En general, dos curvas C_1 y C_2 se dice que son **ortogonales** en un punto, si y solo si sus tangentes T_1 y T_2 son perpendiculares en el punto de intersección. Véase la Figura 24. Excepto en el caso en que T_1 y T_2 son paralelos a los ejes coordenados, esto significa que la pendiente de una tangente es la recíproca negativa de la otra.

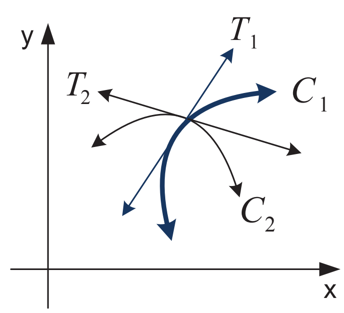


Figura 24. Curvas ortogonales
Fuente. Autores

Ejemplo 70

Demuestre que las curvas C_1 y C_2 definidas por $y = x^3$ y $x^2 + 3y^2 = 4$ son ortogonales en su (s) punto (s) de intersección

Solución

En la Figura 25 se ve que los puntos de intersección de las gráficas son $(1,1)$ y $(-1,-1)$. Ahora bien, la pendiente de la recta tangente a $y = x^3$ en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

de modo que
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 3$$

Para obtener $\frac{dy}{dx}$ de la segunda curva se utilizara derivación implícita:
$$2x + 6y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{o sea que} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$$

y por consiguiente $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)} = -\frac{1}{3}$

Así tanto en $(1,1)$ como en $(-1,-1)$ se tiene que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2} = -1$$

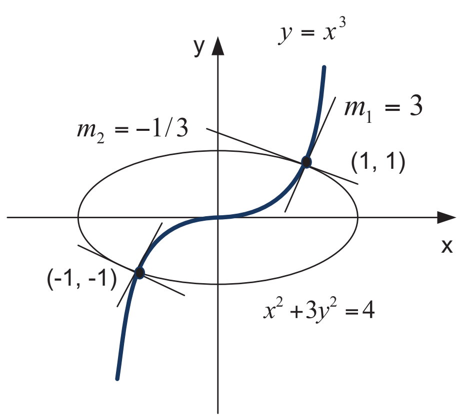


Figura 25. Trayectoria ortogonal
Fuente. Autores

Es fácil demostrar que cualquier curva C_1 de la familia $y = c_1x^3$, $c_1 \neq 0$, es ortogonal a cada curva C_2 de la familia $x^2 + 3y^2 = c_2$, $c_2 > 0$. La ecuación diferencial de la primera familia es:
$$\frac{dy}{dx} = 3c_1x^2 \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$$

ya que $c_1 = \frac{y}{x^3}$. Ahora bien, derivar implícitamente $x^2 + 3y^2 = c_2$ conduce exactamente a la misma ecuación diferencial que la obtenida para $x^2 + 3y^2 = 4$; a saber,
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$$

Consecuentemente, en el punto (x, y) sobre ambas curvas

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2} = \left(\frac{3y}{x}\right)\left(-\frac{x}{3y}\right) = -1$$

Como las pendientes de las tangentes son, cada una, la recíproca negativa de la otra de las curvas C_1 y C_2 se intersecan de manera ortogonal.

Esta discusión lleva a la siguiente definición.

Definición 3.2 TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Cuando *todas* las curvas de una familia de curvas $G(x, y, c_1) = 0$ cortan ortogonalmente a *todas* las curvas de otra familia $H(x, y, c_2) = 0$, se dice que las familias son, cada una, **trayectorias ortogonales** de la otra. (Dullius, 2011)

Ejemplo 71

(a) La gráfica de $y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 1$ es una trayectoria ortogonal de $y = 2x + c_1$.

Las familias $y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + c_2$ y $y = 2x + c_1$ son trayectorias ortogonales.

(b) La gráfica de $y = 4x^3$ es una trayectoria ortogonal de $x^2 + 3y^2 = c_2$.

Las familia $y = c_1x^3$ y $x^2 + 3y^2 = c_2$ son trayectorias ortogonales.

(c) En la Figura 26 se ve que la familia de rectas por el origen $y = c_1x$ y la familia de círculos concéntricos con centro en el origen $x^2 + y^2 = c_2$ son trayectorias ortogonales.

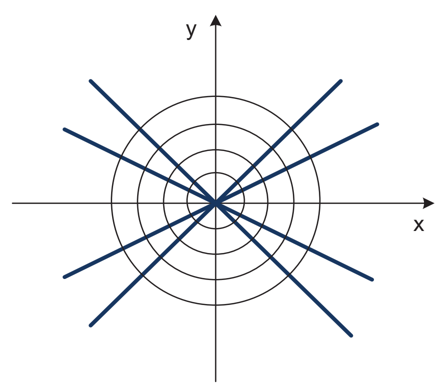


Figura 26. Familia de curvas ortogonales
Fuente. Autores

Las trayectorias ortogonales aparecen naturalmente en la elaboración de cartas meteorológicas y en el estudio de electricidad y magnetismo. Por ejemplo, en el campo eléctrico que rodea a dos cuerpos da carga opuesta, las líneas de fuerza son perpendiculares a las curvas equipotenciales (esto es, líneas a lo largo de las cuales el potencial es constante). En la figura 27 las líneas de fuerza se indican mediante líneas punteadas.

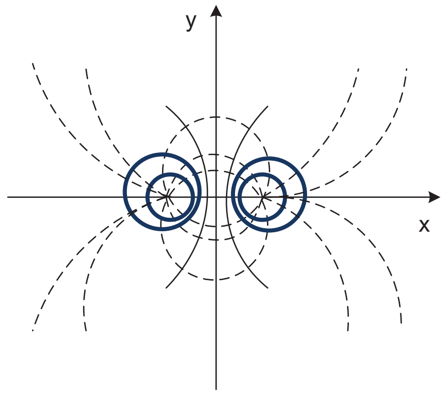


Figura 27. Líneas de Fuerza
Fuente. Autores

Método general

Para encontrara las trayectorias ortogonales de una familia de curvas dada, se halla en primer lugar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

que describe a la familia. La ecuación diferencial de la segunda familia, ortogonal a la familia dada, es pues

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x, y)}$$

Ejemplo 72

Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de hipérbolas rectangulares.

$$y = \frac{c_1}{x}$$

Solución

La derivada de $y = \frac{c_1}{x}$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c_1}{x^2}$$

Reemplazando c_1 por $c_1 = xy$ se obtiene la ecuación diferencial de la familia dada:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

En tal caso, la ecuación diferencial de la familia ortogonal es

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{(-y/x)}=\frac{x}{y}$$

Se resuelve esta última ecuación por separación de variables:

$$y\,dy=x\,dx$$

$$\int y\,dy=\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c'_2 \quad \text{o bien} \quad y^2-x^2=c_2$$

en donde, por conveniencia, se ha reemplazado $2c'_2$ por c_2. Las gráficas de las dos familias se dan en la Figura 28 para diferentes valores de c_1 y c_2.

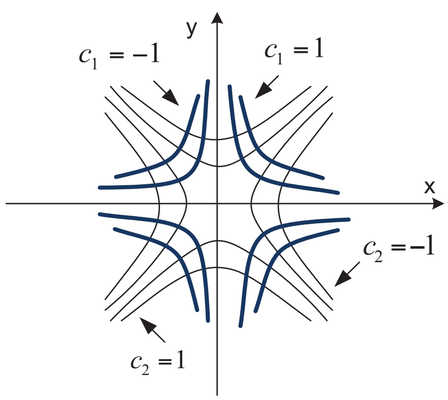


Figura 28. Curvas ortogonales
Fuente. Autores

Ejemplo 73

Obtener las trayectorias ortogonales de

$$y=\frac{c_1x}{1+x}$$

Solución

Por la regla del cociente se tiene

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{(1+x)^2} \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x(1+x)}$$

ya que $c_1 = y(1+x)/x$. La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es pues

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+x)}{y}$$

Nuevamente por separación de variables se tiene

$$y\,dy = -x(1+x)dx$$
$$\int y\,dy = -\int (x+x^2)\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c'_2 \quad \text{o bien} \quad 3y^2 + 3x^2 + 2x^3 = c_2$$

Ejemplo 74

Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia

$$y = x\tan\left(\frac{1}{2}(y+k)\right)$$

Solución

Despejar la constante k

$$y = x\tan\left(\frac{1}{2}(y+k)\right)$$
$$\frac{y}{x} = \tan\left(\frac{1}{2}(y+k)\right)$$
$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}(y+k)$$
$$2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = y+k$$
$$2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y = k$$

Derivar con respecto a la variable independiente x y despejar $\frac{dy}{dx}$

$$2\left(\frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)-y'=0$$

$$2\left(\frac{\frac{xy'-y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\right)-y'=0$$

$$2\left(\frac{xy'-y}{x^2+y^2}\right)-y'=0$$

$$2xy'-2y-y'(x^2+y^2)=0$$

$$2xy'-(x^2+y^2)y'=2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{2x-x^2-y^2}$$

Aplicar el criterio de ortogonalidad

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2-2x}{2y}$$

Resolver la EDO

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-2x}{2y}+\frac{y}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2}=\frac{x^2-2x}{2y}$$

$$y\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}y^2=\frac{x^2-2x}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Aplicar la sustitución:

$$z=y^2 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{dz}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}\frac{dz}{dx} \tag{3}$$

Reemplazar **(2) y (3)** en **(1)**

$$y\left(\frac{1}{2y}\frac{dz}{dx}\right)-\frac{1}{2}z=\frac{x^2-2x}{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{2}z=\frac{x^2-2x}{2}$$

$$\frac{dz}{dx}-z=x^2-2x$$

$$\frac{dz}{dx}+(-1)z=x^2-2x$$

$$\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$

Es una EDO Lineal, por lo que se procede a encontrar el factor integrante:

$$u(x)=e^{\int p(x)dx}$$

$$u(x)=e^{\int(-1)dx}$$

$$u(x)=e^{-x}$$

Aplicar el método alternativo de resolución:

$$u(x)z=\int u(x)q(x)dx$$

$$e^{-x}z=\int e^{-x}(x^2-2x)dx$$

$$e^{-x}z=\int e^{-x}x^2dx-2\int e^{-x}xdx$$

$$\int e^{-x}x^2dx$$

Derivar		Integrar
x^2	+	e^{-x}
$2x$	-	$-e^{-x}$
2	+	e^{-x}
0		$-e^{-x}$

$$\int e^{-x}xdx$$

Derivar		Integrar
x	+	e^{-x}
1	-	$-e^{-x}$
0		e^{-x}

$$= -e^{-x}x^2 - 2e^{-x}x - 2e^{-x} \qquad\qquad = -e^{-x}x - e^{-x}$$

$$e^{-x}z = -e^{-x}x^2 - 2e^{-x}x - 2e^{-x} - 2\left(-e^{-x}x - e^{-x}\right) + c$$

$$e^{-x}z = -e^{-x}x^2 - 2e^{-x}x - 2e^{-x} + 2e^{-x}x + 2e^{-x} + c$$

$$e^{-x}z = -e^{-x}x^2 + c$$

Reemplazar z en términos de " y "

$$z = y^2$$

$$e^{-x}y^2 = -e^{-x}x^2 + c$$

$$y^2 = -\frac{e^{-x}x^2}{e^{-x}} + \frac{c}{e^{-x}}$$

Conjunto de trayectorias ortogonales

- **Solución:** $y^2 = e^x c - x^2$

Ejemplo 75

Encontrar la trayectoria ortogonal que pase por $P(1,2)$, de la familia $x^2 + 3y^2 = cy$

Solución

Despejar la constante de la ecuación

$$\frac{x^2 + 3y^2}{y} = c$$

Derivar respecto a "x"

$$\frac{y\left(2x + 6y\frac{dy}{dx}\right) - (x^2 + 3y^2)\frac{dy}{dx}}{y^2} = 0$$

$$2xy + (3y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{3y^2 - x^2}$$

Como la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es:

$$\frac{df}{dx} = \frac{-1}{\frac{dg}{dx}}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy} \tag{1}$$

Como $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas de grado 2, entonces la ecuación (1) representa una EDO homogénea

$$y = ux \tag{2}$$

$$dy = udx + xdu \tag{3}$$

Sustituir (2) y (3) en (1)

$$\frac{udx+xdu}{dx}=\frac{3(ux)^2-x^2}{2x(ux)}$$

$$2ux^2(udx+xdu)=(3u^2x^2-x^2)dx$$

Separando variables

$$\frac{dx}{x}=\frac{2u\,du}{u^2-1}$$

Integrando

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2u\,du}{u^2-1}$$

$$\ln(x)=\ln(u^2-1)+c$$

$$\ln(x)-\ln(u^2-1)=c$$

$$\ln\left(\frac{x}{u^2-1}\right)=c$$

Por propiedades del logaritmo se tiene

$$e^{\ln\left(\frac{x}{u^2-1}\right)}=e^c$$

$$\frac{x}{u^2-1}=k \tag{4}$$

Sustituir (2) en (4)

$$\frac{x}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}=k$$

$$k=\frac{x^3}{y^2-x^2} \tag{5}$$

Una de las condiciones del problema es que pasa por el punto $P(1,2)$ entonces sustituir $x = 1$ ^ $y = 2$ en (5)

$$k = \frac{(1)^3}{(2)^2 - (1)^2}$$

$$k = \frac{1}{3}$$

Sustituir (k) en (5)

$$\frac{1}{3} = \frac{x^3}{y^2 - x^2}$$

$$3x^3 = y^2 - x^2$$

$$y^2 = x^2(3x + 1)$$

Por lo tanto, la curva que satisface las condiciones del problema está dada por

$$y^2 = x^2(3x + 1)$$

Ejercicios 3.2

En los problemas del 1-20, obtenga las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dada

1. $y = c_1 x$

2. $3x + 4y = c_1$

3. $y = c_1 x^2$

4.$y = (x - c_1)^2$

5. $c_1 x^2 + y^2 = 1$

6.$2x^2 + y^2 = c_1^2$

7. $y = c_1 e^{-x}$

8. $y = e^{c_1 x}$

11.$y = \frac{x}{1+c_1 x}$

12. $y = \frac{1+c_1 x}{1-c_1 x}$

13$2x^2 + y^2 = 4c_1 x.$

14.$x^2 + y^2 = 2c_1 x$

15. $y^3 + 3x^2 y = c_1$

16.$y^2 - x^2 = c_1 x^3$

17. $y = \frac{c_1}{1+x^2}$

18. $y = \frac{1}{c_1 + x}$

9. $y^2 = c_1 x^3$

10. $y^a = c_1 x^b$, a y b constantes

19. $4y + x^2 + 1 + c_1 e^{2y} = 0$

20. $y = -x - 1 + c_1 e^x$

3.3. APLICACIONES FÍSICAS DE LAS ECUACIONES LINEALES

3.3.1. CRECIMIENTO Y DECRECIMINETO

El problema del valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad (1)$$

$$x(t_0) = x_0$$

en donde k es una constante, aparece en muchas teorías físicas que involucran crecimiento, o bien, decrecimiento. Por ejemplo, en biología a menudo se observa que la rapidez con que, en cada instante, ciertas bacterias se multiplican, es proporcional al número de bacterias presentes en dicho instante. Para intervalos de tiempo cortos, la magnitud de una población de animales pequeños, como de roedores, puede predecirse con bastante exactitud mediante la solución de (1). La constante k se puede determinar a partir de la solución de la ecuación diferencial usando una medida posterior de la población en el instante $t_1 > t_0$.

En física, un problema de valores iníciales como (1) proporciona un modelo para aproximar la cantidad restante de una substancia que se desintegra radiactivamente. La ecuación diferencial en (1) también podría determinar la temperatura de un cuerpo que se enfría. En química, la cantidad restante de una sustancia durante ciertas reacciones también se describe mediante (1).

Ejemplo 76

Un cultivo tiene inicialmente una cantidad N_0 de bacterias. Para $t = 1$ hora, el número de bacterias medido es $\left(\frac{3}{2}\right) N_0$. Si la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determine el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique

Solución

Primero se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = kN \qquad (2)$$

Sujeta a $N(0) = N_0$.

Una vez que se ha resuelto este problema, se emplea la condición empírica $N(1) = \left(\frac{3}{2}\right) N_0$ para determinar la constante de proporcionalidad k.

Ahora bien, (2) es a la vez separable y lineal. Cuando se la lleva a la forma

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

es posible ver, mediante un simple examen, que el factor integrante es e^{-kt}. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por esté término, de inmediato resulta

$$\frac{d}{dt}[\,e^{-kt}N] = 0$$

Integrando ambos miembros de la última ecuación

$$e^{-kt}N = c \qquad \text{o bien} \qquad N(t) = ce^{kt}$$

Para $t = 0$ se deduce que $N_0 = ce^0 = c$ y por lo tanto $N(t) = N_0e^{kt}$. Para $t = 1$ se tiene

$$\tfrac{3}{2}N_0 = N_0e^k \qquad \text{o bien} \qquad e^k = \tfrac{3}{2}$$

de donde se obtiene con cuatro cifras decimales,

$$k = ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0.4055$$

En consecuencia, $N(t) = N_0e^{0.4055t}$

Para determinar el valor de t para el que las bacterias se triplican, despejamos t de

$$3\,N_0 = N_0e^{0.4055t}$$

Se deduce que

$$0.4055t = \ln(3)$$

$$t = \tfrac{\ln(3)}{0.4055} \approx 2.71 \quad \text{horas.}$$

Véase la Figura 29

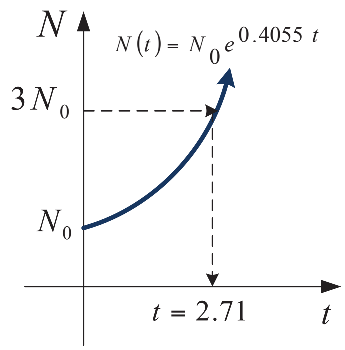


Figura 29. Solución particular de la EDO
Fuente. Autores

3.1.2. Semivida

En física se llama *semivida* (o impropiamente "vida media") a una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La semivida es simplemente el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los átomos en una cantidad inicial A_0. Cuanto más larga es la semivida de una sustancia, es más estable. Por ejemplo, la semivida del radio altamente radiactivo es aproximadamente de 1700 años, mientras que el isótopo de uranio que más comúnmente aparece, el U-238, tiene una semivida de cerca de 4 500 000 000 años

Ejemplo 77

Un reactor transforma el uranio 238, que es relativamente estable, en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años se determina que 0.043% de la cantidad inicial A_0 de plutonio se ha desintegrado. Determine la semivida de esté isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.

Solución

Sean $A(t)$ la cantidad de plutonio que queda en un instante cualquiera.
Como en el Ejemplo 1, la solución del problema del valor inicial

$$\frac{dA}{dt} = kA$$
$$A(0) = A_0$$

es, por consiguiente $$A(t) = A_0 e^{kt}$$

Si 0.043% de los átomos en A_0 se han desintegrado, queda 99.957% de la sustancia.
Para evaluar k se debe resolver

$$0.99957\,A_0 = A_0 e^{15k}$$

Por lo tanto, $$0.99957 = e^{15k}$$

$$15k = ln(0.99957)$$

$$k = \frac{ln(0.99957)}{15} = -0.00002867$$

De modo que $$A(t) = A_0 e^{-0.00002867t}$$

Ahora bien, la semivida es el valor de t para el cual $A(t) = \frac{A_0}{2}$. Despejando t resulta

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-0.00002867t} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{2} = e^{-0.00002867t}$$

$$-0.00002867t = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln(2)$$

$$t = \frac{ln(2)}{0.00002867} \approx 24.180 \text{ años}$$

3.1.3. Determinación de edades por el método del carbono 14

Alrededor de 1950, el químico Willard Libby ideó un método en el cual se usa carbono radiactivo para determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. El cociente de la cantidad de C-14 y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atmósfera es constante, y en consecuencia, la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C-14 cesa. Así, comparando la proporción de C-14 que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método se basa en que la semivida del C-14 radiactivo es de aproximadamente 5600 años. Por su trabajo, Libby ganó en 1960 el premio Nobel de química. El método de Libby ha sido utilizado para determinar la antigüedad del mobiliario de madera hallado en las tumbas egipcias, así como la de las envolturas de lienzo de los manuscritos del Mar Muerto.

Ejemplo 78

Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene $1/1000$ de la cantidad original de C-14. Determinar la edad del fósil.

Solución

Nuevamente el punto de partida es

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

Cuando $t = 5600$ años, $A(t) = \frac{A_0}{2}$, de lo cual es posible determinar el valor de k, como sigue:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{5600k}$$

$$5600k = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln(2)$$

$$k = -\frac{ln(2)}{5600} = -0.00012378$$

Por lo tanto $$A(t) = A_0 e^{-0.00012378t}$$

Cuando $A(t) = \frac{A_0}{1000}$ se tiene que

$$\frac{A_0}{1000} = A_0 e^{-0.00012378t}$$

consecuentemente, $-0.00012378t = ln\left(\frac{1}{1000}\right) = -ln(1000)$

$$t = \frac{ln(1000)}{0.00012378} \approx 55\,800 \quad \text{años}$$

3.1.4. Enfriamiento, circuitos eléctricos y mezclas químicas

Enfriamiento

La ley de Newton del enfriamiento dice que en un cuerpo que se está enfriando, la rapidez con que la temperatura $T(t)$ cambia es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante T_0 del medio que lo rodea. Esto es,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0) \tag{3}$$

en donde k es una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 79

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300^0F. Tres minutos después, su temperatura es de 200^0F. ¿Cuánto demorara en enfriarse hasta una temperatura ambiente de 70^0F? (Figura 30)

Solución

Se debe resolver el problema de valores iníciales

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70) \tag{4}$$

$$T(0) = 300$$

Y determinar el valor de k de modo que $T(3) = 200$
La ecuación (3) es lineal y separable; usando este último procedimiento resulta

$$\frac{dT}{(T-70)} = k\,dt$$
$$\ln|T-70| = kt + c_1$$
$$T - 70 = c_2 e^{kt}$$
$$T = 70 + c_2 e^{kt}$$

Cuando $t = 0$ se tiene que $T = 300$, de modo que $300 = 70 + c_2$ da $c_2 = 230$ y, por lo tanto,

$$T = 70 + 230e^{kt}$$

De $T(3) = 200$ se obtiene

$e^{3k} = \frac{13}{23}$ o bien $k = \frac{1}{3} ln\left(\frac{13}{23}\right) = -0.19018$

En consecuencia, $$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t} \qquad (5)$$

Por desgracia, (5) no da una solución finita para $T(t) = 70$ puesto que $\lim_{t\to\infty} T(t) = 70$. No obstante, de modo intuitivo se sabe que el pastel alcanzara la temperatura ambiente después de un periodo razonablemente largo de tiempo. ¿Cuánto tiempo significa esto? De todos modos, no debería preocuparnos en lo más mínimo que el modelo (4) no corresponda del todo a nuestra intuición Física. En la tabla 2 se muestra con claridad que el pastel estará casi a la temperatura ambiente después de media hora.

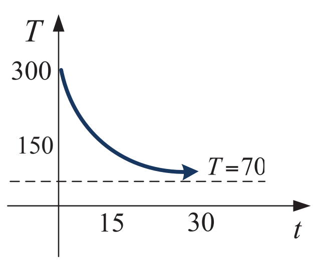


Figura 30. Variación de Temperatura
Fuente. Autores

Tabla 2.
Variación de Temperatura

$T(t)$	$t\ (minutos)$
75^o	20.1
74^o	21.3
73^o	22.8
72^o	24.9
71^o	28.6
70.5^o	32.3

Nota: Elaboración propia

Ejemplo 80

Un químico desea enfriar desde 80°C hasta 60°C una sustancia contenida en un matraz, se coloca el dispositivo en un recipiente amplio por el que circula agua a 15°C. Se observa que después de 2 minutos la temperatura ha descendido a 70°C. Estimar el tiempo total de enfriamiento.

Datos

Se considera a t como el tiempo de enfriamiento, y a x como la temperatura, entonces las condiciones del problema son:

- En t = 0 min se tiene   x=80ºC
- En t = 2 min se tiene   x=70ºC

Solución

Aplicando la Ley de enfriamiento de Newton tenemos

$$\frac{dx}{dt} = k(x - 15)$$

Integrando la ecuación diferencial en función de las condiciones se determina la constante de proporcionalidad.

$$\int_{80}^{70} \frac{dx}{x - 15} = k \int_{0}^{2} dt$$

$$ln(x - 15)|_{80}^{70} = k(t)|_{0}^{2}$$

$$ln\left(\frac{55}{65}\right) = 2k \qquad \Rightarrow \qquad k = -0.083527$$

Para estimar el tiempo total de enfriamiento, se evalúa

$$\int_{80}^{60} \frac{dx}{x - 15} = -0.08 \int_{0}^{t} dt$$

$$ln(x - 15)|_{80}^{60} = -0.083527\ (t)|_{0}^{t}$$

$$ln\left(\frac{45}{65}\right) = -0.083527\, t \qquad \Rightarrow \qquad t = 4.40\, minutos$$

Conclusión

El tiempo necesario para que la temperatura descienda de 80°C hasta 60°C, es de 4.40 minutos.

Ejemplo 81

Un termómetro que marca 75°F se lleva fuera donde la temperatura es de 20°F. Cuatro minutos después el termómetro marca 30°F. Encontrar:

a) La lectura del termómetro siete minutos después de que este ha sido llevado al exterior y,
b) El tiempo que le toma el termómetro caer desde 75°F hasta más o menos medio grado con respecto a la temperatura del aire.

Datos

Se considera a t como el tiempo de enfriamiento, y a x como la temperatura, entonces las condiciones del problema son:

- En t = 0 min se tiene x=75ºC
- En t = 4 min se tiene x=30ºC

Solución

Aplicando la Ley de enfriamiento de Newton tenemos

$$\frac{dx}{dt} = k(x-20)$$

Integrando la ecuación diferencial en función de las condiciones se determina la constante de proporcionalidad.

$$\int_{75}^{30} \frac{dx}{x-20} = k\int_{0}^{4} dt$$

$$ln(x-20)|_{75}^{30} = k(t)|_{0}^{4}$$

$$ln\left(\frac{10}{55}\right) = 4k \qquad \Rightarrow \qquad k = -0.4262$$

a) La lectura del termómetro siete minutos después de que este ha sido llevado al exterior,

$$\int_{75}^{x} \frac{dx}{x-20} = -0.4262\int_{0}^{7} dt$$

$$ln(x-20)|_{75}^{x} = -0.4262\,(t)|_{0}^{7}$$

$$ln\left(\frac{x-20}{55}\right) = -0.4262\,(7) \qquad \Rightarrow \qquad x = 22.78\,°C$$

b) El tiempo que le toma el termómetro caer desde 75°F hasta más o menos medio grado con respecto a la temperatura del aire.

$$\int_{75}^{20.5} \frac{dx}{x-20} = -0.4262 \int_{0}^{t} dt$$

$$ln(x-20)|_{75}^{20.5} = -0.4262\ (t)|_{0}^{t}$$

$$ln\left(\frac{0.5}{55}\right) = -0.4262\, t \qquad \Rightarrow \qquad t = 11.03\, minutos$$

Conclusión

El tiempo necesario para que la temperatura descienda desde 75°F hasta más o menos medio grado con respecto a la temperatura del aire, es de 11.03 minutos.

Circuito eléctrico L-R en serie

La segunda Ley de Kirchoff dice que en un circuito en serie que contiene sólo una resistencia y una inductancia, la suma de las caídas de voltaje a través del inductor $\big(L(di/dt)\big)$ y del resistor (iR) es igual a la tensión $\big(E(t)\big)$ aplicada al circuito, Véase la Figura 31.

Se obtiene así la ecuación diferencial lineal para la corriente $i(t)$.

$$L\frac{di}{dt} + R_i = E(t), \qquad (6)$$

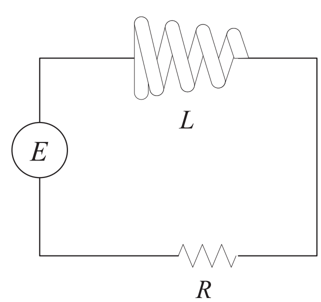


Figura 31. Circuito L-R en serie
Fuente. Autores

en donde L y R son constantes conocidas como inductancia y resistencia, respectivamente. A veces, a la corriente $i(t)$ se la llama **respuesta** del sistema

Circuito eléctrico R-C en serie

La caída del voltaje a través de un capacitador con capacitancia C esta dada por $q(t)/C$, en donde q es la carga en el capacitador (o condensador). Por consiguiente, para el circuito en serie mostrado en la Figura 32, la segunda ley de Kirchoff da:

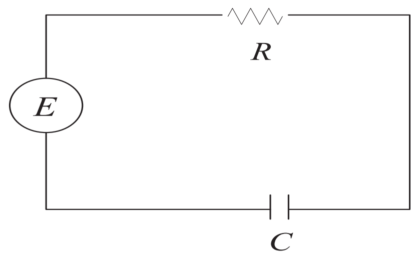


Figura 32. Circuito R-C en serie
Fuente. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Dennis Zill

$$R_i + \frac{1}{C}q = E(t) \qquad (7)$$

Pero la corriente i y la carga q están relacionados por $i = dq/dt$; por lo tanto, (7) se transforma en la ecuación diferencial lineal.

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \qquad (8)$$

Ejemplo 82

Una batería de 12 V (volts) se conecta a un circuito simple en serie en la cual la inductancia es $1/2$ H (henrys), y la resistencia, de 10 Ω (ohms). Determinar la corriente i si la intensidad inicial es cero.

Solución

De (6) vemos que se debe resolver

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12$$

sujeta a $i(0) = 0$. Primero multiplíquese la ecuación diferencial por 2 y dedúzcase que el factor integrante es e^{20t}. Luego se obtiene así

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t}$$

$$e^{20t}i = \frac{24}{20}e^{20t} + c$$

$$i = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$$

Ahora bien, $i(0) = 0$ implica $0 = 6/5 + c$, o bien $c = -6/5$. Por lo tanto, la respuesta es

$$i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$$

que resulta en amperes (A).

Términos transitorios y estacionarios

La ecuación (7) en la sección 2.4 permite escribir de inmediato una solución general de (6)

$$i(t) = \frac{e^{-(R/L)t}}{L} \int e^{(R/L)t} E(t) dt + ce^{-(R/L)t} \tag{9}$$

En particular, cuando $E(t) = E_0$ es una constante, (9) se transforma en

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-(R/L)t} \tag{10}$$

Nótese que cuando $t \to \infty$, el segundo término de la ecuación (10) tiende a cero. A un término como este se le llama usualmente **término transitorio**; al término (o a los términos) que resta (n) se le (s) llama parte **estacionaria** de la solución. En este caso, a E_0/R también se le denomina **corriente estacionaria**; para valores grandes de la variable tiempo, la corriente en el circuito se comporta como si estuviese gobernada simplemente por la ley de Ohm $(E = iR)$.

Ejemplo 83

Un circuito en serie tiene un resistor y un inductor como se muestra en la figura 33. Determine una ecuación diferencial para la corriente $\mathbf{i(t)}$ si la resistencia es R, la inductancia es L y el voltaje aplicado es $\mathbf{E(t)}$.

Solución
Datos:

$$\mathrm{L} = \mathrm{L} * \frac{di}{dt}$$

$$\mathrm{R} = \mathrm{R} * \mathrm{i}$$

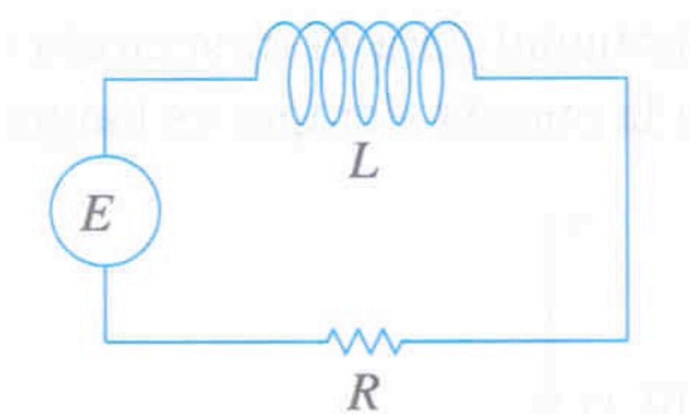


Figura 33. Circuito L-R
Fuente. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Dennis Zill

Desarrollo:

$$Voltajes\ en:$$

$$En\ inductor\ \ Ei = L * \frac{di}{dt} = L * \frac{d^2q}{dt^2} \qquad (1)$$

$$En\ resistor\ \ Er = R * i(t) = R * \frac{dq}{dt} \qquad (2)$$

Se sabe que en un circuito en serie la suma de los voltajes individuales nos da el voltaje total o equivalente

$$E(t) = Ei + Er \qquad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3)

$$E(t) = L * \frac{d^2q}{dt^2} + R * \frac{dq}{dt}$$

Equivalente a

$$E(t) = L * \frac{di}{dt} + R * i$$

Respuesta:

Ecuación diferencial para la corriente $\mathbf{i(t)}$:

$$i(t) = \frac{1}{R} * E + e^{-\frac{R}{L}t}$$

Ejemplo 84

Un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor como se muestra en la figura 34. Determine una ecuación diferencial que exprese la carga $\mathbf{q(t)}$ en el capacitor si la resistencia es R, la capacitancia es C y el voltaje aplicado es $\mathbf{E(t)}$.

Solución
Datos:

$$E(t) = R * \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

Desarrollo:

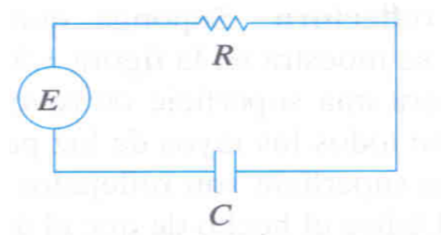


Figura 34. Circuito eléctrico
Fuente. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Dennis Zill

Se sabe que en un circuito en serie la suma de los voltajes individuales nos da el voltaje total o equivalente

$$E(t) = Eq + Er \qquad (1)$$

$$Voltajes\ en:$$

$$En\ el\ capacitor\ \ Eq = \frac{1}{C}q \qquad (2)$$

$$En\ resistor\ \ Er = R * i(t) = R * \frac{dq}{dt} \qquad (3)$$

Reemplazando (3) y (2) en (1)

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1q}{C} = V$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1q}{RC} = \frac{V}{R} \qquad (4)$$

Para integrar buscamos el factor de integración:

$$p(t) = \frac{1}{RC}$$

$$u(t) = e^{\int \frac{1}{RC}dt} = e^{\frac{1}{RC}t}$$

Luego multiplicamos por (4)

$$e^{\frac{1}{RC}t}\frac{dq}{dt} + e^{\frac{1}{RC}t}q = \frac{V}{R}e^{\frac{1}{RC}t}$$

$$\int (e^{\frac{1}{RC}t}q)' = \int \frac{V}{R}e^{\frac{1}{RC}t}dt$$

$$qe^{\frac{1}{RC}t} = \frac{VRC}{R}e^{\frac{1}{RC}t} + K$$

$$q = VC + Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

Respuesta:

Determine una ecuación diferencial que exprese la carga $\mathbf{q(t)}$

$$q = VC + Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

Problema de mezclas

A veces, el mezclar dos líquidos da lugar a una ecuación diferencial lineal de primer orden. En el próximo ejemplo se considera la mezcla de dos soluciones salinas de concentraciones diferentes.

Ejemplo 85

Se disuelven inicialmente 50 libras (lb) de salen un gran tanque que contiene 300 galones (gal) de agua. Se bombea salmuera al tanque a razón de 3 galones por minuto; y luego la solución adecuadamente mezclada se bombea fuera del tanque también a razón de 3 gal/min. Véase la Figura 35. Si la concentración de la solución que entra es de 2 lb/gal, determine la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 50 min? ¿Cuánta después de un tiempo largo?

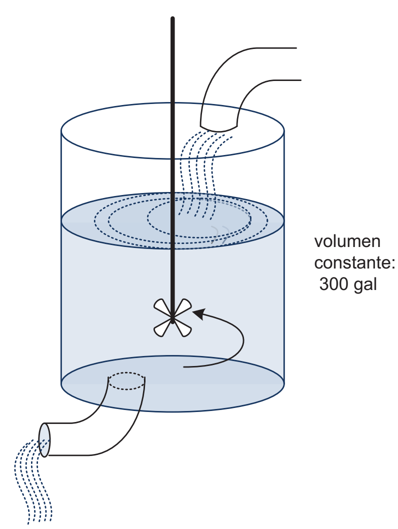


Figura 35. Problema de mezclas
Fuente. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Dennis Zill

Solución

Sea $A(t)$ la cantidad de sal (en libras) que hay en el tanque en un instante cualquiera. En problemas de esta clase, la rapidez neta con que $A(t)$ cambia está dada por

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} rapidez\ con\ que \\ la\ sustancia\ entra \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} rapidez\ con\ que \\ la\ sustancia\ sale \end{pmatrix} = R_1 - R_2 \tag{11}$$

Ahora bien, la rapidez con que la sal entra al tanque es, en libras por minuto,

$$R_1 = (3\ gal/min).(2\ lb/gl) = 6\ \ lb/min$$

en tanto que la rapidez con que la sal sale es

$$R_2 = (3\ gal/min).\left(\frac{A}{300}\ lb/gal\right) = \frac{A}{100} lb/min$$

En consecuencia, la ecuación (11) se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \tag{12}$$

la que resolveremos sujeta a la condición inicial $A(0) = 50$
Puesto que el factor integrante es $e^{t/100}$, puede escribirse (12) como

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t/100}A\right] = 6e^{t/100}$$

Y por lo tanto $$e^{t/100}A = 600e^{t/100} + c$$

$$A = 600 + ce^{-t/100} \tag{13}$$

Cuando $t = 0$ se tiene que $A = 50$; se halla así que $c = -550$. Finalmente, se obtiene

$$A(t) = 600 - 550e^{-t/100} \tag{14}$$

En la Tabla 2 tenemos para $t = 50$ se tiene que $A(50) = 266.41$lb. Además, cuando $t \to \infty$, de (14) y de la Figura 36 se puede ver que $A \to 600$. Por supuesto, esto es lo que se esperaría; después de un periodo largo, el número de libras de sal presente en la solución debe ser

$$(300\ gal)(2\ \ lb/gal) = 600\ lb$$

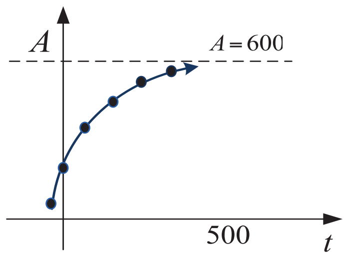


Figura 36. Variación de la concentración de la sustancia
Fuente. Autores

Tabla 3.
Concentración de la sustancia

$t\ (minutos)$	$A(libras)$
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572,62
400	589.93

Nota: Elaboración propia

En el Ejemplo 85 se supuso que la rapidez con que la solución se bombea al tanque es igual a la rapidez con que la solución se bombeó hacia afuera. Sin embargo, esto no tiene por qué ser así; la salmuera mezclada podría ser bombeada hacia afuera con una rapidez mayor o menor que la rapidez con que la otra solución se bombea hacia el interior. La ecuación diferencial que resulta en este último caso es lineal con un coeficiente variable.

En el ejemplo anterior, sí la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera con una rapidez menor de 2 gal/min, entonces la solución se *acumula* con una rapidez de

$$(3-2)\ gal/min\ = 1\ gal/min$$

Después de t minutos hay $300+t$ galones de salmuera en el tanque. En tal caso, la rapidez con que la sal sale es

$$R_2 = (2\ gal/min).\left(\frac{A}{300+t}\ lb/gal\right) = \frac{2A}{300+t}\,lb/min$$

Por consiguiente, la ecuación (11) se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{2A}{300+t} \quad \text{o bien} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{2A}{300+t} = 6$$

Encontrando el factor integrante y resolviendo la última ecuación resulta

$$A(t) = 2(300+t) + c(300+t)^{-2}$$

La condición inicial $A(0) = 50$ da $c = -4.95\text{ X }10^7$; luego

$$A(t) = 2(300+t) - (4.95\text{ X }10^7)(300+t)^{-2}$$

Drenado de un tanque

Ejemplo 86

Suponga que está saliendo agua de un tanque a través de un agujero circular de área $\mathbf{A_h}$ que está en el fondo. Cuando el agua sale a través del agujero, la fricción y la contracción de la corriente cerca de agujero reducen el volumen de agua que sale del tanque por segundo a "$\boldsymbol{C.Ah.\sqrt{2gh}}$, donde $\boldsymbol{c(0 < c < 1)}$ es una constante empírica. Determine una ecuación diferencial para la altura $\mathbf{h}$ del agua al tiempo $\mathbf{t}$ para el tanque cúbico que se muestra en la figura 3.20. El radio del agujero es de $\boldsymbol{2\ pulg}$ y $\boldsymbol{g = 32\frac{pies}{seg}}$.

Solución

Datos:

$Ah.\sqrt{2gh}$, donde $c(0 < c < 1)$

El radio del agujero es de $2\ pulg$

$g = 32\ pies/seg.$

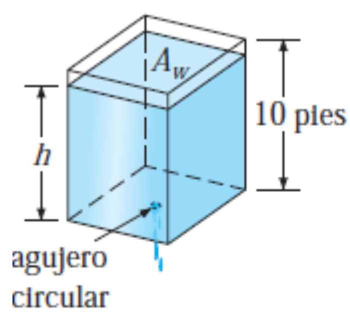


Figura 37. Drenado de un tanque. Zill (s. f.)

Solución

La ecuación diferencial es:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh} \quad (Ley\ de\ Torriceli) \quad (1)$$

$$Volumen\ del\ Agua\ del\ tanque$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_h\sqrt{2gh}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -C.A_h\sqrt{2gh} \quad C \rightarrow cte$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{A_w}.\frac{\partial v}{dt}$$

$$Reemplazando\ \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{A_w}.\left(-C.A_h\sqrt{2gh}\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -C.\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}$$

$$En\ donde, sabemos\ que:$$

$$radio\ agujero\ = 2pulg.\frac{1\ pie}{12\ pulg} = \frac{1}{6}\ pies$$

Área del agujero:

$$A_h = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{6}pies\right)^2 = \frac{\pi}{36}\ pies^2 \qquad (2)$$

Área del cubo contenedor:

$$A_w = l^2 = (10)^2 = 100\ pies^2 \qquad (3)$$

$$reemplazando\ \ (2)\ y\ (3)\ en\ (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -C.\frac{\frac{\pi}{36}\ pies^2}{100\ pies^2}\sqrt{2\left(32\frac{pies}{seg^2}\right)h}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -C.\frac{\pi}{3600}\sqrt{64h}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -C.\frac{\pi}{3600}.8\sqrt{h}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{C.\pi}{450}\sqrt{h}$$

Respuesta:

La ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t para el tanque cúbico es: $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{C.\pi}{450}\sqrt{h}$

Ejemplo 87

Del tanque cónico rectangular recto que se muestra en la figura 38 sale el agua por un agujero circular que está en el fondo. Determine una ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo $\boldsymbol{t}$. El radio del agujero es $\mathbf{r = 2\ pulg}$, $\mathbf{g = 32\ \frac{pies}{s^2}}$ y el factor de fricción/contracción es $\boldsymbol{c = 0,6}$

Solución:

DATOS

$\mathrm{r} = 2\ \mathrm{pulg}\ = \frac{1}{6}\mathrm{pies}$

$\mathrm{g} = 32\ \frac{\mathrm{pies}}{\mathrm{s}^2}$

$c = 0{,}6$

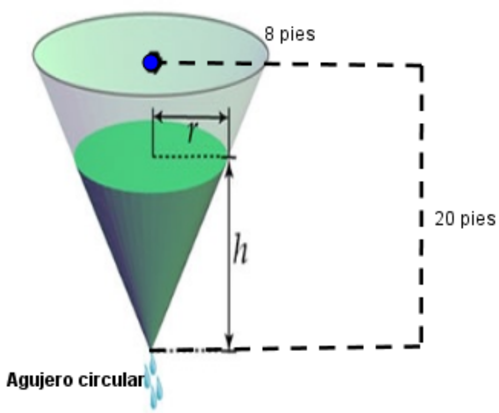


Figura 38. Drenado de un cono invertido. Zill (s.f.)

La ecuación diferencial es:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh} \quad (Ley\ de\ Torriceli) \qquad (1)$$

Relacionamos los radios:

$$\frac{h}{r} = \frac{20}{8} => r = \frac{2}{5}h$$

El volumen del cono es:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{5}h\right)^2 h$$

$$V_{cono} = \frac{4}{75}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{75}3h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25}{4\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -A_h\sqrt{2gh}$$

$$A_h = r^2\pi ==> \; A_h = \left(\frac{1}{6}\right)^2\pi ==> \; A_h = \frac{1}{36}\pi$$

Reemplazando en (1) tenemos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25}{4\pi h^2}\left(-cA_h\sqrt{2gh}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25}{4\pi h^2}\left(-(0,6) * \left(\frac{1\pi}{36}\right)\sqrt{64h}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{6h^{\frac{3}{2}}}$$

Respuesta:

Ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t:

$$\boldsymbol{\frac{dh}{dt} = \frac{5}{6h^{\frac{3}{2}}}}$$

Modelos matemáticos adicionales

Ejemplo 88

Teoría del aprendizaje. En la teoría del aprendizaje, se supone que la rapidez con que se memoriza algo es proporcional a la cantidad que queda por memoriza. Suponga que M denota la cantidad total de un tema que se debe memorizada y que $A(t)$ es la cantidad memorizada al tiempo t. Determine una ecuación diferencial para determinar la cantidad $A(t)$.

Solución
Datos

$M =$ Cantidad total que se debe memorizar.

$A(t)$ Es la cantidad memorizada al tiempo t

Desarrollo

La propagación de una enfermedad se da mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$

Donde

$$N + A = M$$

$$M - A = N$$

La ecuación diferencial es:

$$\frac{dA}{dt} = K(MN)$$

Respuesta:

La ecuación diferencial es:

$$\frac{dA}{dt} = K(M\mathrm{N})$$

Ejemplo 89

Falta de memoria con los datos del problema anterior suponga que la razón con la cual el material es olvidado es proporcional a la cantidad memorizada al tiempo t. Determine una ecuación diferencial para$\mathrm{A(t)}$, cuando se considera la falta de memoria.

Solución:

Datos

Partiendo del ejercicio anterior tenemos:

$$\frac{dA}{dt} = k(M - A(t))$$

Tomando en cuenta el enunciado del ejercicio podemos encontrar una pérdida de memoria la cual plantea lo siguiente

$\mathrm{P}_m =$ Pérdida de memoria.

Tomando en cuenta que q va a ser una constante de la falta de memoria.

Donde

$$\mathrm{P}_m = qA(t)$$

Desarrollo

Con estos datos concluimos que

$$\frac{dA}{dt} = k\big(M - A(t)\big) - \mathrm{P}_m \qquad (*)$$

Remplazando P_m en *

$$\frac{dA}{dt} = k\big(M - A(t)\big) - qA(t)$$

Respuesta:

La ecuación diferencial es:

$$\frac{dA}{dt} = k\big(M - A(t)\big) - qA(t)$$

Ejemplo 90

Suministro de un medicamento. Se inyecta un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente a una razón constante de r gramos por segundo. Simultáneamente, se elimina el medicamento a una razón proporcional a la cantidad $\mathrm{x(t)}$ presente al tiempo t. Determine una ecuación diferencial que describa la cantidad $\mathrm{x(t)}$.

Solución
Datos:

Razón constante de r gramos por segundo

Elimina el medicamento a una razón $\mathrm{x(t)}$ presente al tiempo t

Desarrollo:

La propagación de una enfermedad se da mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = k.x(t).y(t) \quad (Ley\ de\ Propagación)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = r - k.x(t) \qquad (k > 0)$$

Respuesta:

La ecuación diferencial es:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = r - k.x(t) \qquad (k > 0)$$

Modelos físicos

Ejemplo 91

Un hombre y un bote pesan juntos 320 lb. Si el empuje del motor es equivalente a 10 lb, en la dirección de movimiento que, si la resistencia del agua al movimiento es numéricamente igual a dos veces la velocidad en, y si el bote está inicialmente en reposo. Encontrar:

a) La velocidad del bote al tiempo t
b) La velocidad límite

Solución
Datos:

$$W = peso = 320lb$$

$$m = masa = \frac{W}{g} = \frac{320lb}{32,2\dfrac{ft}{seg^2}} = 10lb$$

$$Ra = resistencia_{agua} = 2v$$

$$v_o = Velocidad_{inicial} = 0\frac{Ps}{seg}$$

$$F = 10lb$$

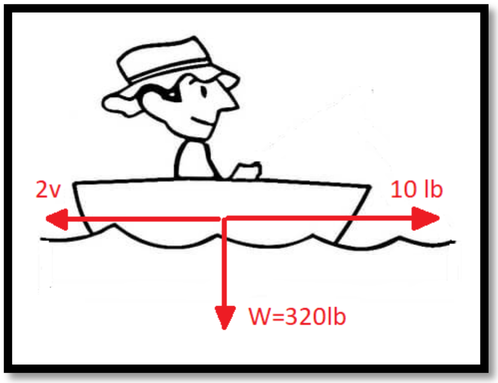


Figura 39. Diagrama de cuerpo libre
Fuente. Autores

Desarrollo:

- El bote está en movimiento, por lo que se procede a aplicar la segunda Ley de Newton para cuerpos en movimiento con aceleración producida por una fuerza externa:

$$\sum F_x = ma$$
$$F - R_{agua} = m\frac{dv}{dt}$$
$$10 - 2v = 10\frac{dv}{dt}$$
$$5\frac{dv}{dt} = 5 - v$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{5-v}{5}$$

La última expresión representa una **EDO de variable separable**, cuya solución está dada por

$$\frac{dv}{5-v} = \frac{dt}{5}$$
$$\int_0^v \frac{dv}{5-v} = \int_o^t \frac{dt}{5}$$
$$-Ln|5-v| \Big|_0^v = \frac{t}{5}\Big|_0^t$$
$$-Ln|5-v| - [-Ln|5-0|] = \frac{(t-0)}{5}$$
$$Ln|5| - Ln|5-v| = \frac{t}{5}$$
$$Ln\left[\frac{5}{5-v}\right] = \frac{t}{5}$$
$$e^{Ln\left[\frac{5}{5-v}\right]} = e^{\frac{t}{5}}$$
$$\frac{5}{5-v} = e^{0.2t}$$
$$5 - v = \frac{5}{e^{0.2t}}$$
$$v = 5 - 5e^{-0.2t}$$
$$v(t) = 5(1-e^{-0.2t})\frac{Ps}{seg}$$

Que representa la respuesta del inciso **a)**

- Para determinar el valor límite de la velocidad procedemos a calcular el límite de $v(t)$ cuando t tiende al infinito

$$v_{\lim} = \lim_{t\to\infty}\left[v(t)\right]$$
$$v_{\lim} = \lim_{t\to\infty}\left[5(1-e^{-0.2t})\right]$$
$$v_{\lim} = 5\lim_{t\to\infty}(1-e^{-0.2t})$$
$$v_{\lim} = 5\left[\lim_{t\to\infty}(1) - \lim_{t\to\infty}\left(e^{-0.2t}\right)\right]$$
$$v_{\lim} = 5\left[1-e^{-0.2(\infty)}\right]$$
$$v_{\lim} = 5\left[1-e^{-\infty}\right]$$

De donde se sabe que la función e^{t} tiende a cero cuando se aproxima al infinito negativo, entonces:

$$v_{\lim} = 5\left[1-0\right]$$
$$v_{\lim} = 5\left[1\right]$$
$$v_{\lim} = 5$$

Por lo tanto, la velocidad límite del bote es de $5\dfrac{Ps}{seg}$, respuesta del inciso **b)**

Ejercicios 3.3

1. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en 5 años, ¿Cuánto demorará en triplicarse? ¿Cuánto demorará en cuadruplicarse?

2. Suponga que se sabe que la población de la comunidad en el Problema 1 es de 10 000 habitantes después de 3 años. ¿Cuál era la población inicial? ¿Cuál será la población en 10 años?

3. La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial es de 500 aumenta 15 % en 10 años. ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

4. La cantidad de bacterias de un cultivo crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de ellas que haya en dicho instante. Después de 3 horas se observa que se tienen 400 bacterias, y que al cabo de 10 horas hay 2000. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

5. El isótopo radiactivo de plomo, Pb-209, se desintegra, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad presente en dicho instante, y tiene una semivida (o periodo medial) de 3.3. horas. Si inicialmente hay 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que se desintegre el 90% de dicho elemento?

6. Inicialmente había 100 miligramos (mg) de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó en 3%. Si la rapidez de desintegración es, en un instante cualquiera, proporcional a la cantidad de sustancia en dicho instante, halle la cantidad que queda después de 24 horas.

7. Determine la semivida de la sustancia radiactiva descrita en el problema 6.

8. Demuestre en forma general que la semivida de una sustancia radiactiva es

$$t = \frac{(t_2 - t_1)ln2}{ln(A_1/A_2)}$$

En donde $A_1 = A(t_1)$ y $A_2 = A(t_2)$, $t_1 < t_2$

9. Cuando un rayo vertical de luz pasa a través de una sustancia transparente, el grado con que su intensidad I disminuye es proporcional a $I(t)$, en donde t representa el espesor del medio, expresado en pies. En agua de mar límpida, la intensidad a 3 pie bajo la superficie es 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuánta es la intensidad del rayo a 15 pie bajo la superficie?

10. Interés compuesto capitalizado continuamente significa que en un instante cualquiera la cantidad S de dinero aumenta con una rapidez proporcional a la cantidad presente en dicho instante: $dS/dt = rS$, en donde r es la tasa de interés anual.

(a) En una cuenta de ahorros se depositan $5000 a un interés compuesto, que se capitaliza continuamente, del $5\,{}^{3}/_{4}$ % anual. Calcule la cantidad de dinero acumulada después de 5 años.

(b) ¿En cuántos años se duplicará la suma depositada inicialmente?

(c) Use una calculadora para comparar el número obtenido en la parte (a) con el valor

$$S = 5000\left(1 + \frac{0.0575}{4}\right)^{5(4)}$$

Este valor representa la cantidad que se acumularía si el interés se capitalizara trimestralmente

11. En un trozo de madera quemada se encontró que 85.5% del C-14 se había desintegrado. Utilice la información del ejemplo 3 para determinar la edad aproximada de la madera. (Es precisamente este dato el que los arqueólogos usaron para determinar la edad de las pinturas prehistóricas encontradas en una caverna de Lascaux, Francia)

12. Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior, en donde la temperatura del aire es de 5^{o}F. Después de 1 minuto el termómetro marca 55^{o}F y después de 5 minutos marca 30^{o}F. ¿Cuál es la temperatura inicial de la habitación?

13. Un termómetro se saca de una habitación, en donde la temperatura del aire es de 70^{o}F, al exterior, en donde la temperatura es de 10^{o}F. después de $1/_2$ minuto el termómetro marca 50^{o}F. ¿Cuánto marca el termómetro cuando $t = 1$ minutos? ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar 15^{o}F?

14. Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea, se obtiene también la formula (3). Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20^{o}C, se deja caer un recipiente con agua hirviendo. Calcule el tiempo que dicha barra demorará en alcanzar los 90^{o}C si se sabe que su temperatura aumentó 2^{o} en 1 segundo. ¿Cuánto demorará la barra en alcanzar los 98^{o}C?

15. A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 H y la resistencia es de 50 **Ω**, se le aplica una tensión de 30 V. Evalué la corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$. Determine también la corriente cuando $t \to \infty$.

16. Resuelva la ecuación general (6) suponiendo que $E(t) = E_0\, sen\, wt$ y $i(0) = i_0$.

17. A un circuito en serie, en el cual la resistencia es de 200 **Ω** y la capacitancia es de 10^{-4}F, se le aplica una tensión de 100 V. Calcule la carga $q(t)$ en el capacitor si $q(0) = 0$, y obtenga la corriente $i(t)$.

18. A un circuito en serie, en el cual la resistencia es de 1000 **Ω** y la capacitancia, de $5\ X\ 10^{-6}$F, se le aplica una tensión de 200 V. Encuentre la carga $q(t)$ en el capacitor si $i(0) = 0.4$. Determine la carga y la corriente para $t = 0.005$ s; y la carga, cuando $t \to \infty$.

19. Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el cual se disuelven 30 gramos (g) de sal. Una salmuera que contiene 1 g de sal por litro se bombea al tanque con una intensidad de 4 litros por minuto; la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera con la misma rapidez. Encuentre el número de gramos $A(t)$ de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.

20. Resuelva el problema 19 suponiendo que se bombea agua pura al tanque.

Capítulo 4

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON EL SOFTWARE MAXIMA

UNIDAD IV

4.1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON EL SOFTWARE MAXIMA

Maxima es un sistema de cálculo simbólico y numérico escrito en Lisp, de libre acceso y que cuenta con una comunidad de usuarios que aportan sus experiencias a través de los diferentes foros y chats; además existe abundante información con respecto a manuales y tutoriales, que se podrían acceder en los siguientes links:

- http://maxima.sourceforge.net
- https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/

La notación que usa Maxima es:

- **(%in)** para indicar la entrada (inchar o input) n-ésima, y
- **(%om)** para indicar la salida (outchar u output) m-ésima.

NOTA:

Para ejecutar una sentencia en Maxima se lo realiza digitando **Shift+Enter**

- **/* comentario */** para poner comentarios.

Dado que Maxima es un programa de cálculo simbólico, trabaja con variables definidas por letras, por ejemplo al digitar

- **float(%e)** maxima entrega **2.718281828459045**,
- **float(%e^7)** maxima entrega **1096.633158428459.**

Funciones usuales en Máxima

`Sintaxis`	**Descripción**
`sqrt(x)`	raíz cuadrada de *x*
`exp(x)`	exponencial de *x*
`log(x)`	logaritmo neperiano de *x*
`sin(x), cos(x), tan(x)`	seno, coseno y tangente *en radianes*
`csc(x), sec(x), cot(x)`	cosecante, secante y cotangente *en radianes*
`asin(x), acos(x), atan(x)`	arcoseno, arcocoseno y arcotangente
`sinh(x), cosh(x), tanh(x)`	seno, coseno y tangente hiperbólicos

`asinh(x), acosh(x), atanh(x)`	arcoseno, arcocoseno y arcotangente
`n!`	`factorial de n`
`entier(x)`	`parte entera de x`
`abs(x)`	`valor absoluto o módulo de x`
`random(x)`	`devuelve un número aleatorio`
`signum(x)`	`signo de x`
`max(x1,x2,...)`	`máximo de x1,x2,...`
`min(x1,x2,...)`	`mínimo de x1,x2,...`

4.2.DEFINICIÓN DE FUNCIONES EN MAXIMA

Para definir funciones en Maxima existen varias posibilidades, presentamos la más habitual,

f(x):= x^2 -5x + 6, define la función en Maxima.
f(-3), evaluó la función en un valor dado,
wxplot2d([f(x)], [x,-5,5]), en la figura 41 tenemos la función en el intervalo de -5 a 5,

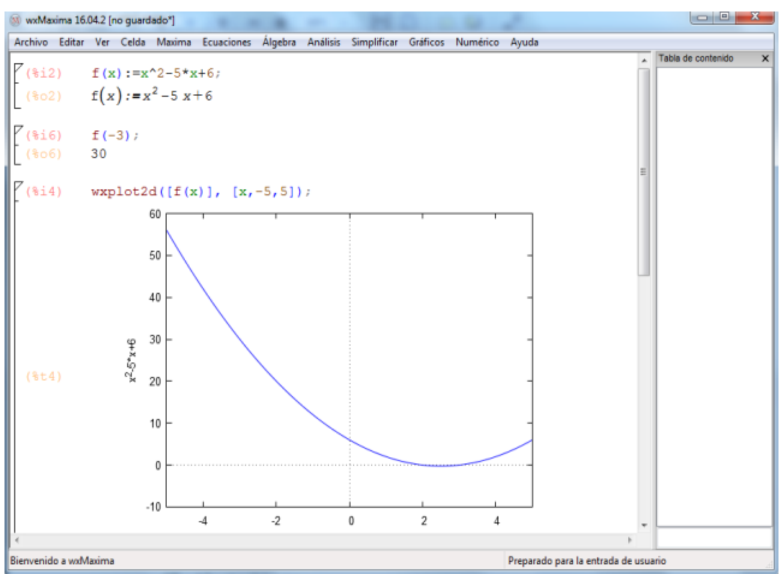


Figura 40. Gráfica de una función utilizando el software Maxima
Fuente. Autores

4.3.PRINCIPALES COMANDO DE MAXIMA

En Maxima podemos aplicar algunos comandos para simplificar las diferentes operaciones entre expresiones y lo podemos apreciar en el cuadro 1.

Función	Sintaxis	Ejemplo
(":") para asignar un valor a una variable	Variable : asignación	X:53
(":") para asignar funciones	Nombre_función(variable):=expresión	f(x):=x^2-5*x+6
Borrar variables	kill (variable)	Kill(x)
"is" intenta comprobar si una expresión es cierta	is(expresión)	is(x^2+1=0) is(x^2+1<0)
Descomponer un valor numérico en producto de factores primos	factor(número)	factor(20!)
Descomponer una expresión algebraica en factores	factor(expresión)	factor(x^5 - 1)
Multiplicar los factores de una expresión algebraica	expand(factores)	Expand((x-2)*(x+4)) expand ((a + b)^4)
Xpandir	expand (expresión)	expand ((a + b)^4);
Simplifica expresiones racionales, expresándolas de una forma canónica	ratsimp(expr)	ratsimp((x^5-1)/(x^2-x+3))
Resolver ecuación algebraica	solve(polinomio) solve(ecuación)	solve(x^2-5*x+6) solve(2*x+1=0)
Raíces de un polinomio	allroots(polinomio) realroots(polinomio)	allroots(x^3-x^2+x-1) realroots(x^3-x^2+x-1)

Cuadro 1. Principales comandos del software Maxima
Fuente. Autores

4.4.LÍMITES DE UNA FUNCIÓN REAL CON MAXIMA

Para el tratamiento de los principales tópicos del cálculo diferencial e integral se tiene las siguientes sintaxis en el cuadro2.

Cálculo de límites

Sintaxis	Ejemplo	Observación
limit(f(x),x,x0)	**limit(f(x),x,2)** **limit(f(x),x,inf)**	Límite en un punto Límite al infinito
limit(f(x),x,x0,dirección)	**limit(f(x),x,2,plus)** **limit(f(x),x,2,minus)**	Límite por derecha Límite por izquierda

Cuadro 2. Comandos del software para cálculo de límites
Fuente. Autores

4.5.DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL CON MAXIMA (cuadro 3)

Cálculo de derivadas

Sintaxis	Ejemplo	Observación
diff(f(x),x)	**diff(f(x),x)**	Deriva una función
diff(f(x),x,k)	**diff(f(x),x,2)**	Deriva una función, de orden 2.
	df(x):=diff(x/(x-3), x)	Función derivada de una variable
	wxplot2d([df(x)], [x,0,8])	Gráfico la función integral en un intervalo.

Cuadro 3. Comandos del software para cálculo de Derivadas
Fuente. Autores

4.6.INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN REAL CON MAXIMA

Para el cálculo de integrales presentamos en el cuadro 4

Sintaxis	Ejemplo	Observación
integrate(f(x),x)	**integrate(x/(x-3), x)** **integrate (x^a*exp(-x), x, 0, inf)**	Integral indefinida Integral definida
	int(x):=integrate(x/(x-3), x)	Función integral a una variable
	wxplot2d([int(x)], [x,2,7])	Gráfico la función integral en un intervalo.

Cuadro 4. Comandos del software para cálculo de Integrales
Fuente. Autores

4.7.SOLUCIONES ANALÍTICAS DE UNA EDO CON MAXIMA

Maxima cuenta con varios comandos para resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (EDOs).

Se debe considerar que Maxima reconoce la variación de la función como se detalla en el cuadro 5:

Diferencial	Expresión en Maxima	Observación
$\frac{dy}{dx}$	'diff(y,x)	Función incógnita, variable
$\frac{d^2y}{dx^2}$	'diff(y,x,2)	Función incógnita, variable, orden

Cuadro 5. Comandos del sogtware Maxima para resolver EDOs
Fuente. Autores

Los principales comando que utiliza Maxima para la resolución analítica de las ecuaciones diferenciales ordinarias son presentadas en el cuadro 6.

Función	Sintaxis	Observación
ode2	**ode2(ecuación diferencial,y,x)**	Resuelve una ecuación diferencial de primero y segundo orden previamente definida, identificando función incógnita y variable independiente.

desolve	**desolve([eq1,eq2,...,eqn],[y1,y2,...,yn])** Donde: eq1, eq2, etc denota las ecuaciones diferenciales (lineales), $y_1,...,y_n$ las funciones desconocidas.	Resuelve sistemas de EDOs mediante la transformada de Laplace

Figura 41. Comando que utiliza Maxima para la resolución de ecuaciones diferentes
Fuente. Autores

EJEMPLOS

Para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando Maxima, se debe considerar que existen varias formas, dependiendo de la experiencia y conocimiento que tenga el usuario sobre la herramienta informática.

Por ejemplo, en primera instancia vamos a utilizar las opciones que tiene Maxima previamente definidas para facilitar su utilización.

RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

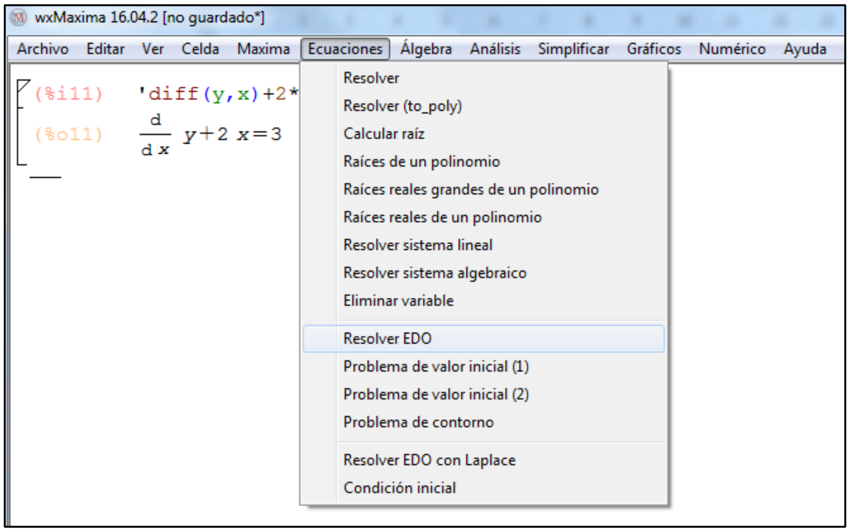
1	$\frac{dy}{dx} + 2x = 3$

Ingresamos la ecuación diferencial en Maxima

```
(%i11)  'diff(y,x)+2*x=3;
```

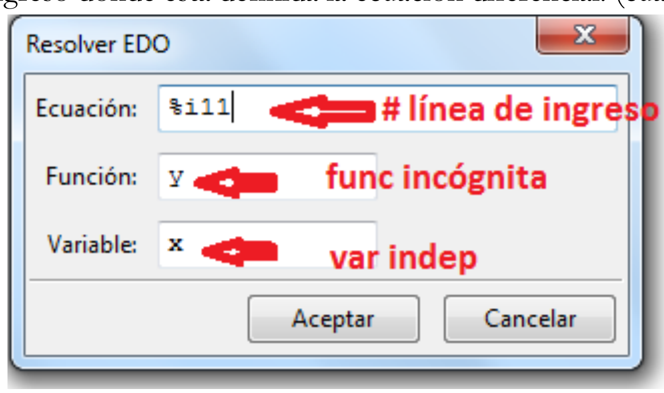
$$(\%o11) \quad \frac{d}{d\,x}\,y+2\,x=3$$

En el cuadro 6 tenemos la vista con la utilización de las >>pestañas<< para resolver



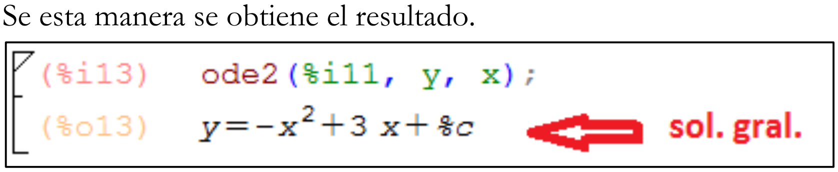
Cuadro 6. Vista del panel de ecuaciones en el software Maxima
Fuente. Autores

Indicamos la línea de ingreso donde está definida la ecuación diferencial. (cuadro 7)



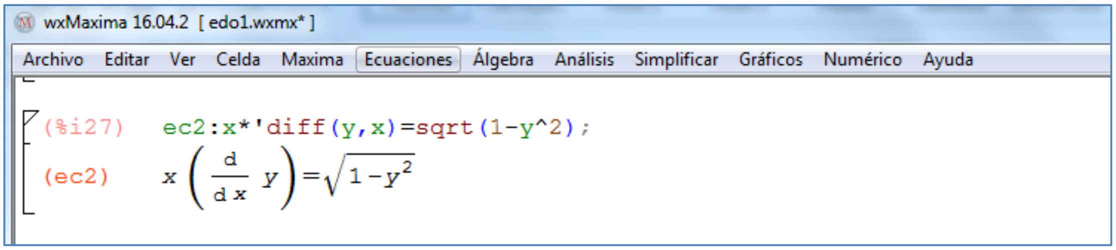
Cuadro 7. Proceso de ingreso de una EDO en el software Maxima
Fuente. Autores

Se esta manera se obtiene el resultado.



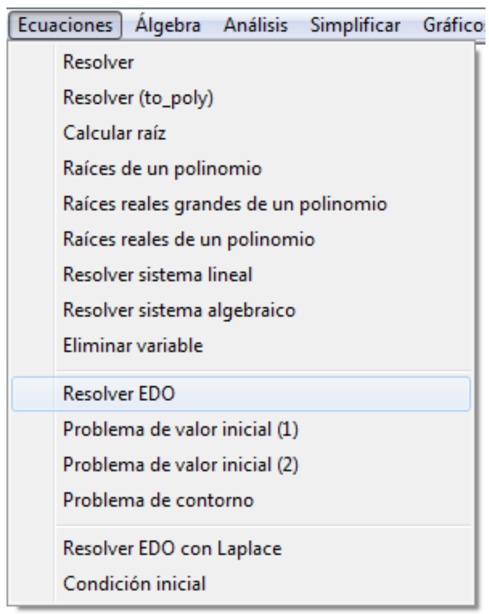
2	$x\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$

Ingreso de la ecuación diferencial, asignándole el nombre de **ec2**, como se muestra en el cuadro 8.



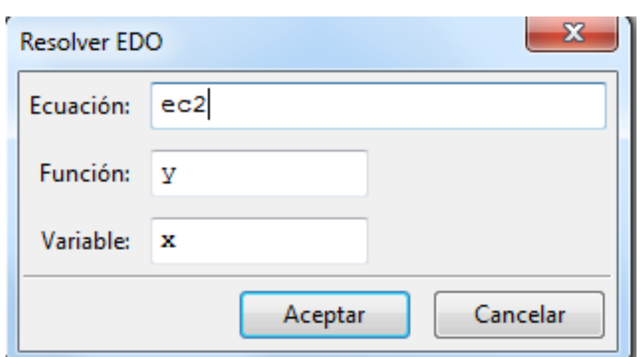
Cuadro 8. Ingreso de una ecuación diferencial
Fuente. Autores

En el cuadro 9 tenemos la vista con las pestañas, seleccionamos **Ecuaciones → Resolver EDO**, e ingresamos la ecuación identificando sus variables.



Cuadro 9. Vista de la utilización de las pestañas de maxima
Fuente. Autores

Se nos presenta la siguiente ventana. (cuadro 10)



Cuadro 10. Vista resultante
Fuente. Autores

Tenemos el cuadro 11 con la solución.

```
wxMaxima 16.04.2 [ edo1.wxmx ]
Archivo  Editar  Ver  Celda  Maxima  Ecuaciones  Álgebra  Análisis  Simplificar  Gráficos  Numérico  Ayuda

-->     ec2:x*'diff(y,x)=sqrt(1-y^2);   /* Ecuación diferencial  */
(ec2)   x (d/dx y) = sqrt(1-y^2)

-->     ode2(ec2, y, x);                /* Solución de la EDO   */
(%o8)   asin(y)=log(x)+%c

-->     solve(%,y);             /* Despejamos y de la sol obtenida  */
(%o9)   [y=sin(log(x)+%c)]
```

Cuadro 11. Solución de la EDO
Fuente. Autores

La solución dada por máxima es equivalente a
$y = sen(ln|x| + C)$

3	$\frac{dy}{dx} + 5y = 3$

Para resolver este ejercicio, asignamos la ecuación diferencial con el nombre **ec1**, y luego utilizamos el comando **ode2** para su solución. (Cuadro 12)

```
(%i18)  ec1:'diff(y,x)+5*y=3;   /* Definimos la EDO */;
(ec1)   d/dx y+5 y=3

(%i19)  ode2(ec1, y, x);        /* Resolvemos la EDO */;
(%o19)  y=%e^(-5 x) ((3 %e^(5 x))/5 + %c)
```

Cuadro 12. Ingreso de la EDO
Fuente. Autores

4	$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy - x + y}{xy - y^2}$

Resolución del ejercicio 4 lo mostramos en el cuadro 13.

```
wxMaxima 16.04.2 [ edo2.wxmx* ]
Archivo Editar Ver Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

-->      assume ( y > 0);  /* definimos los valores de y */
(%o7)    [y>0]

-->      ec3:diff(y(x),x,1)=(x^2-x*y-x+y)/(x*y-y^2); /* ingreso EDO */
```

$$\text{(ec3)}\quad \frac{d}{d\,x}\,y(x)=\frac{-x\,y+y+x^2-x}{x\,y-y^2}$$

```
-->      desolve(ec3,y(x));                    /* solución de la EDO */
```

$$\text{(\%o9)}\quad y(x)=\frac{x^2}{2\,y}-\frac{x}{y}+y(0)$$

Cuadro 13. Resolución de una EDO
Fuente. Autores

La solución dada por máxima es equivalente a
$y^2 = (x-1)^2 + C$

5	$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{dx}+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}=\mathbf{0}$

Para resolver ecuaciones diferenciales dadas de esta forma es necesario que se identifique el término de variación; es decir,

$$\frac{dy}{dx} \quad o \quad \frac{dx}{dy}$$

así tenemos la ecuación diferencial dada en la forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

La resolución en máxima está dado por:

```
(%i22)   ec2:'diff(y,x)=(x+y)/(x-y); /* Definimos la EDO */;
```

$$\text{(ec2)}\quad \frac{d}{d\,x}\,y=\frac{y+x}{x-y}$$

```
(%i23)   ode2(ec2,y,x);               /* Resolvemos la EDO */;
```

$$\text{(\%o23)}\quad \frac{\log\left(y^2+x^2\right)+2\,\operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right)}{4}=\%c$$

4.8. CONDICIONES INICIALES O DE CONTORNO

Para obtener las soluciones particulares de una ecuación diferencial, de deben aplicar las condiciones iniciales o condiciones de contorno del problema, los mismos que son ingresado en Maxima bajo la siguiente sintaxis.

Sintaxis	Comentario
ic1(ecuación,x=a,y=b)	resuelve problema de valores iniciales de primer orden
ic2(ecuación,x=a,y=b,diff(y,x)=c)	resuelve problema de valores iniciales de segundo orden
bc2(ecuación,x=a,y=b,x=c,y=d)	resuelve problema de contorno

EJEMPLOS

Resolver los siguientes problemas de valor inicial.

6 $(x+1)\dfrac{dy}{dx}+(3x+2)y=0 \qquad \textit{sujeta a} \;\; y(2)=2$

Ingreso de la ecuación diferencial ordinaria asignándole con el nombre de **edo1**

```
(%i9)    edo1:(x+1)*'diff(y,x)+y*(3*x+2)=0;
```

(edo1) $(x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+(3\,x+2)\,y=0$

Solución de la ecuación diferencial ordinaria utilizando el comando **ode2**, indicando función incógnita y, variable independiente x.

```
(%i12)   ode2(edo1,y,x);
```

(%o12) $y=\%c\,(x+1)\,\%e^{-3\,x}$

Obtenido la solución general, aplicamos las condiciones iniciales del problema. $y(2) = 0$ para obtener la solución paricular.

```
(%i14)  ic1(%o12, x=2, y=2);
```

(%o14) $y=\dfrac{\left(2\,\%e^{6}\,x+2\,\%e^{6}\right)\%e^{-3\,x}}{3}$

7	$\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2x^3 \quad con \quad y(0) = 1$

Resolución del ejercicio 4 lo mostramos en el cuadro 14.

wxMaxima 16.04.2 [edo4.wxmx*]

Archivo Editar Ver Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

```
-->      /* EDO DE PRIMER ORDEN */;
(%i21)   ec1:'diff(y,x)+2*x*y=2*x^3;  /* ingresamos la EDO */;
```

(ec1) $\dfrac{d}{d\,x}\,y+2\,x\,y=2\,x^{3}$

```
(%i22)   ode2(ec1,y,x)                  /* Resolvemos EDO  */;
```

(%o22) $y=\%e^{-x^2}\left(\left(x^2-1\right)\%e^{x^2}+\%c\right)$

```
(%i23)   ic1(%,x=0,y=1);     /* Aplicamos condiciones del Problema */;
```

(%o23) $y=\%e^{-x^2}\left(\left(x^2-1\right)\%e^{x^2}+2\right)$

Cuadro 14 . Resolución de la EDO
Fuente. Autores

8	$y' = y + x + 1 \qquad con \qquad y(2) = 3$

Resolución del ejercicio 4 lo mostramos en el cuadro 15.

```
wxMaxima 16.04.2 [ edo4.wxmx ]
Archivo  Editar  Ver  Celda  Maxima  Ecuaciones  Álgebra  Análisis  Simplificar  Gráficos  Numérico  Ayuda

(%i62)  ec2:'diff(y,x)=y+x+1;     /* Ingreso EDO  */;
(ec2)   d/dx y=y+x+1

(%i63)  ode2(ec2, y, x);          /* Solución EDO  */;
(%o63)  y=((-x-1) %e^-x-%e^-x+%c) %e^x

(%i64)  ic1(%o59, x=2, y=3);     /* Condiciones de Problema */;
(%o64)  y=%e^-2 (7 %e^x-%e^2 x-2 %e^2)
```

Cuadro 15. Resolución de la EDO
Fuente. Autores

4.9. CAMPOS DIRECCIONALES Y CURVAS INTEGRALES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL.

El objetivo parte de tener una idea sobre cuál sería la forma de la solución de una ecuación diferencial de primer orden dado por $y' = f(x,y)$. Lo que hacemos es dibujar en cada punto del plano (x,y), un segmento que nos indique la pendiente en ese punto, dada por $f(x,y)$.

Entonces, teniendo las pendientes dibujadas, la curva solución de la ecuación diferencial estará representada por cada punto que sigue las direcciones marcadas, de donde se puede obtener información sobre las soluciones de una ecuación diferencial.
Maxima utiliza el siguiente modulo, el mismo que debe ser cargado previamente.

Sintaxis	Observación
plotdf(*func,opciones*)	dibuja el campo de direcciones dado por **func**

EJEMPLOS

9	$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ $\quad$ ***sujeta a*** $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

```
(%i1)    load(plotdf)    /* CARGAMOS EL MODULO PLOTDF  */;
(%o1)
C:\maxima-5.38.1\share\maxima\5.38.1_5_gdf93b7b_dirty\share\dynamics\plotdf.lisp

(%i2)    plotdf(-x/y);   /* INGRESAMOS LA f(x,y)  */
```

En Maxima se grafica $f(x,y) = -\frac{x}{y}$, y se obtiene el campo direccional de la ecuación diferencial dada como se muestra en la figura 42.

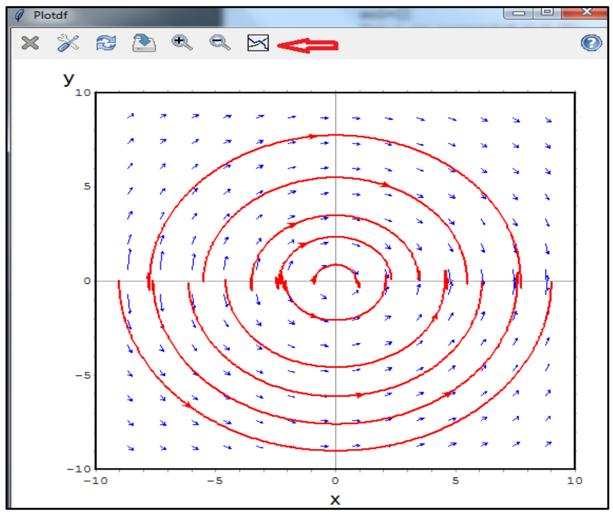


Figura 42. Campo direccional de una EDO utilizando el software Maxima
Fuente. Autores

Que es equivalente a tener la familia de curvas uni-paramétricas $x^2 + y^2 = C$.

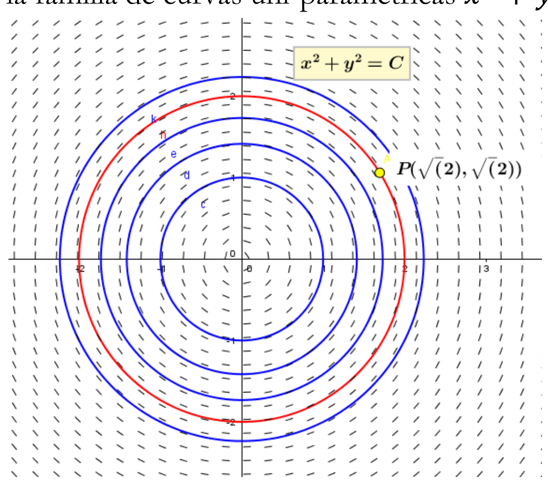


Figura 43. Familia de curvas uni- paramétricas utilizando el software Geogebra
Fuente. Autores

10	$\frac{dy}{dx} = x - y$ $\quad$ ***sujeta a*** $y(1) = 2$

Resolvamos la EDO con Maxima

```
(%i11)  ec1:'diff(y,x)=x-y          /* INGRESAMOS EDO */;
(ec1)   d/dx y=x-y
```

```
(%i10)  ode2(ec1,y,x);            /* solucion gral EDO */;
(%o10)  y=%e^-x((x-1)%e^x+%c)
```

Ingresamos la función $f(x,y) = x - y$, y solicitamos que se nos presente la trayectoria que pasa por el punto $P(1,2)$ que representa las condiciones iniciales del problema.

```
(%i6)   plotdf(x-y)   /* INGRESAMOS LA f(x,y)  */;
(%o6)   C:/Users/wmroman/maxout6796.xmaxima

(%i8)   plotdf(x-y,[trajectory_at,1,2]); /* Trayectoria en P(1,2) */;
```

La representación obtenida lo tenemos en la figura 44 y en la figura 45

La trayectoria que pasa por $P(1,2)$

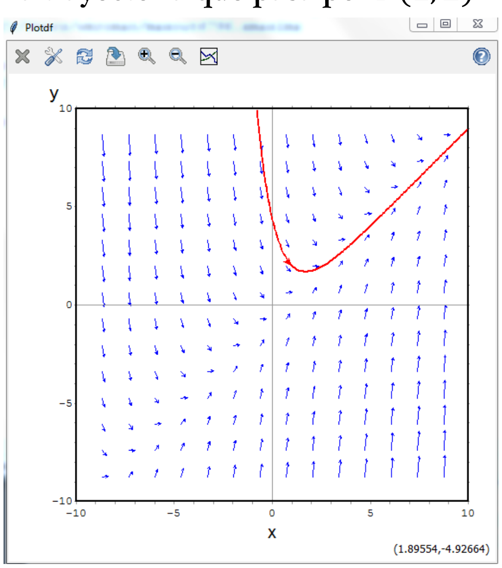


Figura 44. Campo direccional de una EDO mediante el software Maxima
Fuente. Autores

Y la familia de curvas

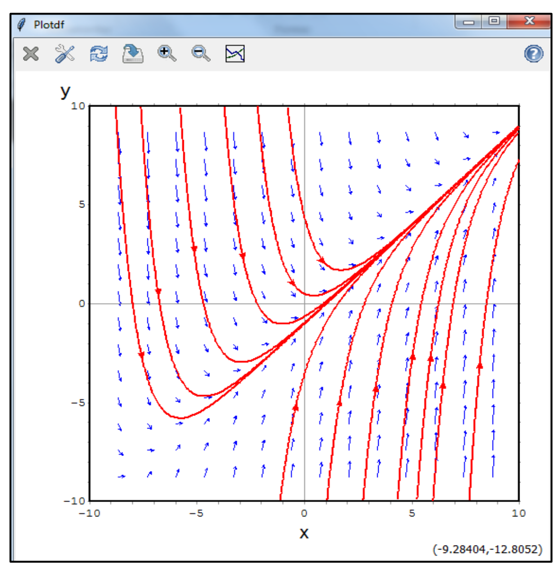


Figura 45. Familia de curvas mediante el software Máxima.
Fuente. Autores

EJERCICIO RESUELTO EN MATLAB

Diferencial	Expresión en Matlab	Observación
$\frac{dy}{dx}$	Dy	Diferencial-Función incógnita
$\frac{d^2y}{dx^2}$	D2y	Diferencial-Orden-Función incógnita

11	$\frac{dy}{dx} = y + x + 1 \qquad sujeta\ \ a\ \ y(2) = 3$

En MatLab utilizamos el comando **dsolve** para resolver analíticamente una ecuación diferencial ordinaria, la sintaxis está expresada en los siguientes ejemplos.

Sintaxis	Observación
>> syms x y	Definición de variables
>> sol=dsolve('Dy=y+x+1','x')	Resolver EDO con función incógnita y, variable independiente x.
>> sol1=dsolve('Dy=y+x+1', 'y(2)=3','x')	Resolver EDO con problemas de valor inicial, es decir, la curva que pasa por el punto $P(2,3)$.
>> ezplot(sol1, [-5,5])	Graficamos la solución particular en el intervalo $-5 \leq x \leq 5$.

En la figura 46 presentamos la solución particular que pasa por el punto $P(2,3)$.

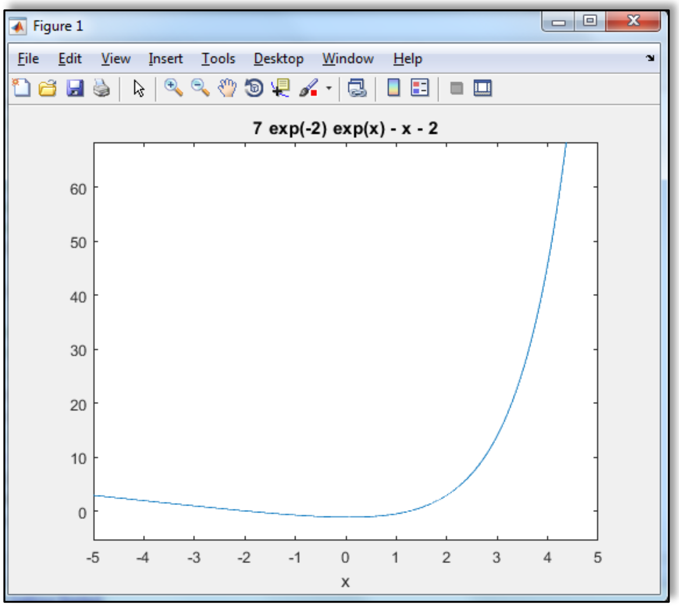


Figura 46. Solución particular EDO utilizando el software Matlab
Fuente. Autores

12	$\frac{dy}{dx} = x - y \qquad sujeta\ \ a\ \ y(2) = 2$

Sintaxis	Observación
>> syms x y	Definición de variables
>> ec=dsolve('Dy=x-y','x')	Resolver EDO con función incógnita y, variable independiente x.
>> ec1=dsolve('Dy=x-y', 'y(2)=2','x')	Resolver EDO con problemas de valor inicial, es decir, la curva que pasa por el punto $P(2,2)$.
>> ezplot(ec1, [-5,5])	Graficamos la solución particular en el intervalo $-5 \leq x \leq 5$.

En la figura 47 presentamos la solución particular que pasa por el punto $P(2,2)$.

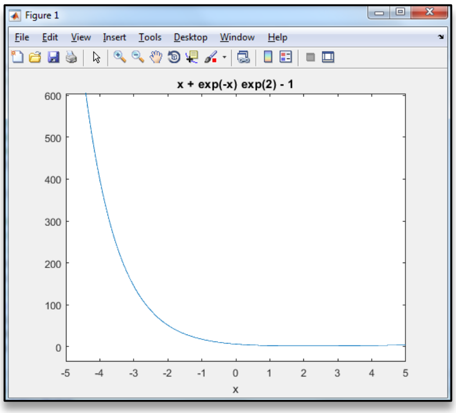


Figura 47. Solución particular que pasa por el punto P(2,2).
Fuente. Autores

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y determinar sus campos direccionales.

1) $(2x+3)y' + xy = 0$
2) $y' - tg(x)y = 4\,sen^2(x)$
3) $(x^2+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$
4) $(x+y+1)\,dx - (x-y+1)dy = 0$
5) $y' + 2y = e^{-x}; \qquad y(3) = 0$
6) $2x^2\dfrac{dy}{dx} = 3xy + y^2; \quad y(1) = -2$
7) $3y' - y = x; \quad y(0) = 0$
8) $\dfrac{1}{x}y' + x = 5; \quad y(-2) = 4$

TRABAJOS CITADOS

Bronson R., C. G. (2008). *Ecuaciones Diferenciales.* México: McGraw-Hill Interamericana.

C. Henry E., P. D. (2001). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Pearson Education.

Cornejo Serrano, M. d. (2012). *Métodos de solución de ecuaciones diferenciales y aplicaciones (1 ed.).* España: Editorial Reverté.

Dennis, Z. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado.* Chicago: Cengage Learming.

Dullius, M. M. (2011). *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico.* . Universidad de Burgos.

Edwards, C. H. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera.* . Pearson Educación.

Frank, A. (1991). *Ecuaciones Diferenciales.* México: McGraw-Hill/Interamericana.

G., D. G. ((2015).). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores a la frontera.* Chicago: CENGAGE Learning.

K. Kent, E. R. (2005). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera.* México: Pearson Education.

RAMOS, E. E. (2004). *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. 6ta. Edición.* Perú.: Servicios Gráficos JJ.

Zill Dennis, C. M. (2006). *Ecuaciones Diferenciales.* México: McGraw-Hill Interamericana.

Bibliografía

Bronson R., C. G. (2008). *Ecuaciones Diferenciales.* México: McGraw-Hill Interamericana.

C. Henry E., P. D. (2001). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Pearson Education.

Cornejo Serrano, M. d. (2012). *Métodos de solución de ecuaciones diferenciales y aplicaciones (1 ed.).* España: Editorial Reverté.

Dennis, Z. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado.* Chicago: Cengage Learming.

Dullius, M. M. (2011). *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico.* . Universidad de Burgos.

Edwards, C. H. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera.* . Pearson Educación.

Frank, A. (1991). *Ecuaciones Diferenciales.* México: McGraw-Hill/Interamericana.

G., D. G. ((2015).). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores a la frontera.* Chicago: CENGAGE Learning.

K. Kent, E. R. (2005). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera.* México: Pearson Education.

RAMOS, E. E. (2004). *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. 6ta. Edición.* Perú.: Servicios Gráficos JJ.

Zill Dennis, C. M. (2006). *Ecuaciones Diferenciales.* México: McGraw-Hill Interamericana.

Páginas web

(2019, January 22). Maxima, a Computer Algebra System.. Mensaje publicado en http:// http://maxima.sourceforge.net/

(2019, January 22). https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/

Publicaciones Científicas

ISBN: 978-9942-765-51-2

ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS

INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA