



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Vicerrectorado de Investigación, Innovación
y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

Maestría en Enseñanza de la Matemática

El problema del alunizaje, resolución numérica y aplicaciones didácticas

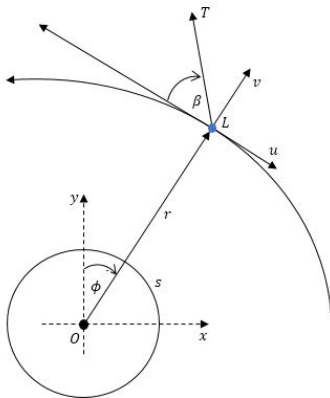
AUTORES: Ing. Aguirre Portilla Freddy Antonio
Ing. Vásquez Rodríguez Jacobo Sebastián

DIRECTOR: Juan Ricardo Mayorga Zambrano, Ph.D.

Sangolquí, 2019

Introducción

El planteamiento del problema determinado por el sistema de coordenadas que se aprecia en la siguiente figura, donde O es el centro lunar, L es la posición del módulo de aterrizaje, s es la superficie de la luna y se presenta la siguiente notación:



Introducción

Se presenta a continuación la descripción del sistema de ecuaciones que describen el comportamiento del problema del alunizaje.

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{\phi} = \frac{u}{r} \\ \dot{u} = -\frac{uv}{r} + \frac{T}{M} \cos(\beta) \\ \dot{v} = \frac{u^2}{r} - \frac{u}{r^2} + \frac{T}{M} \sin(\beta) \end{cases} \quad (1)$$

donde $\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_u} \right)$,

r = distancia radial desde el centro de la luna,

ϕ = ángulo de rango o anomalía verdadera de vuelo,

u = velocidad horizontal,

v = velocidad vertical,

T = empuje (fuerza) que actúa sobre la sonda,

M = masa instantánea de la sonda,

β = ángulo de control,

μ = parámetro gravitacional estándar.

Descripción del Problema

- El problema del alunizaje lunar que se describe en la presente investigación tiene como objetivo minimizar el consumo de combustible durante el aterrizaje suave controlando la dirección del empuje $\beta(\cdot)$.
- Cabe mencionar que el problema ignora la fase de desorbita y minimiza el consumo de combustible sólo durante la fase de descenso motorizado.
- Tenga en cuenta que optimizar el control $\beta(\cdot)$ es equivalente a optimizar la distancia de recorrido; es decir, el tiempo que el motor está encendido.
- La función de costo debe depender del control, y dado que solo las velocidades dependen de la dirección del empuje, el problema de control óptimo se establece como

$$\text{mín } J(\beta(\cdot)) = (u(t_f) - u_f)^2 + (v(t_f) - v_f)^2, \quad (2)$$

sujeto a las ecuaciones de estado dadas en (1) con condiciones de contorno y terminales que se presentan a continuación:

Descripción del Problema

Condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = 1737,4 \times 10^3 + 20000 \text{ (m)}, \\ v_0 = -100 \text{ (m/s)}, \\ \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \\ u_0 = 100 \text{ (m/s)}, \\ T = 500 \text{ (N)}, \\ M = 224 \text{ (kg)}, \\ \beta_0 = \tan^{-1} \left(-\frac{1,2}{0,01} \right), \\ \lambda_{r_0} = 0,02, \\ \lambda_{\theta_0} = 0,8, \\ \lambda_{u_0} = 0,01, \\ \lambda_{v_0} = -1,2. \end{array} \right. \quad (3)$$

Condiciones terminales

$$\left\{ \begin{array}{l} r_f = 1737,4 \times 10^3 \text{ (m)}, \\ t_f = \text{libre}, \\ u(t_f) = 0 \text{ (m/s)}, \\ v(t_f) = 0 \text{ (m/s)}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Descripción del Problema

A partir del sistema de ecuaciones planteadas en, se tiene que el hamiltoniano de este sistema es

$$\begin{aligned} H(x, \lambda, u) &= f \cdot \lambda + L \\ &= v(t)\lambda_r - \frac{u(t)}{r(t)}\lambda_\theta + \left(\frac{T}{M} \cos(\beta) - \frac{u(t)v(t)}{r(t)} \right) \lambda_u \\ &\quad + \left(\frac{T}{M} \sin(\beta) - \frac{\mu}{r^2(t)} + \frac{u^2(t)}{r(t)} \right) \lambda_v \end{aligned}$$

En vista de la aplicación del hamiltoniano, se puede que una de las condiciones que expresa el Principio de Pontryagin, expresado como

$$\dot{x}^*(t) = H_\lambda(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t))$$

se satisface con las ecuaciones de estado de (1). Las ecuaciones de costo

$$\dot{\lambda}^*(t) = -H_x(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t))$$

expresadas en forma detallada son:

Descripción del Problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial H}{\partial r} = \dot{\lambda}_r = -\frac{u}{r^2}\lambda_\theta - \frac{uv}{r^2}\lambda_u + \frac{u^2}{r^2}\lambda_v - 2\frac{\mu}{r^3}\lambda_v, \\ -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \dot{\lambda}_\theta = 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial u} = \dot{\lambda}_u = \frac{1}{r}\lambda_\theta + \frac{v}{r}\lambda_u - \frac{2u}{r}\lambda_v, \\ -\frac{\partial H}{\partial v} = \dot{\lambda}_v = -\lambda_r + \frac{u}{r}\lambda_u, \end{array} \right. \quad (5)$$

donde $\mu = G \times$ masa del cuerpo celeste;

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg};$$

masa de la luna = $7,349 \times 10^{22}$ kg.

Solución numérica del problema de control óptimo

En el presente trabajo se plantean dos métodos de solución por aproximación numérica, los mismos que son:

- El método de Runge-Kutta de 4to. orden.

La solución numérica le sistema completo conformdo por sistemas (1) y (5) se propone que sea encontrada mediante el método de Runge-Kutta de orden 4, ya que es posible ajustar esta metodología en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

- El método meshless con funciones de base radial (FBR).

En el método sin mallado básicamente se intentará interpolar las funciones de todas las variables con ayuda de 4 Funciones de Base Rradial (FBR), que son la función Gaussiana, Multicudrática, Multi-cudrática Inversa y TPS.

A continuación se detalla el algoritmo de cálculo usado en cada método y su respectiva estructura en pseudocódigo.

Método de Runge-Kutta de 4to. orden

Algoritmo del Método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas de ecuaciones diferenciales

ENTRADA: Los extremos del intervalo a y b ; número de ecuaciones m ; entero N ; condiciones iniciales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

SALIDA: Aproximaciones y_j a $u_j(x)$ en los $N + 1$ valores de x .

1. Hacer $h = \frac{b-a}{N}$; $x = a$
2. Para $j = 1, \dots, m$, hacer $y_{j,0} = \alpha_j$
3. Para $i = 0, 1, \dots, N - 1$, hacer los pasos de la a hasta g
 - a. Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer $k_{i,j} = hf_i(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{m,j})$
 - b. Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer
$$k_{2,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m})$$
 - c. Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer
$$k_{3,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m})$$
 - d. Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer
$$k_{4,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{3,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{3,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{3,m})$$
 - e. Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer
$$k_{4,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{3,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{3,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{3,m})$$
 - f. Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer
$$k_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,j} + k_{2,j} + k_{3,j} + k_{4,j})$$
 - g. Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer $x_i = a + ih$
4. Salida $(x_i, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{m,j})$
5. Parar.

Simulación Problema del Alunizaje

Junto al sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de la sonda lunar propuesto en 1 se tiene las variables colaterales 5, lo que hace que se forme un sistema de 8 ecuaciones, adicionalmente con la variable de control β .

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = v \\ \dot{\theta} = -\frac{u}{r} \\ \dot{u} = \frac{T^r}{M} \cos \beta - \frac{uv}{r} \\ \dot{v} = \frac{T}{M} \sin \beta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{u^2}{r} \\ \dot{\lambda}_r = -\frac{u}{r^2} \lambda_\theta - \frac{uv}{r^2} \lambda_u - 2\frac{\mu}{r^3} \lambda_v + \frac{u^2}{r^2} \lambda_v \\ \dot{\lambda}_\theta = 0 \\ \dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} \lambda_\theta + \frac{v}{r} \lambda_u - 2\frac{u}{r} \lambda_v \\ \dot{\lambda}_v = -\lambda_r + \frac{u}{r} \lambda_u \\ \beta = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_u} \right) \end{array} \right. \quad (6)$$

Simulación Problema del Alunizaje

Sujeto a: (Valores para las condiciones de frontera y constantes para el método de Runge-Kutta)

Condiciones iniciales	Condiciones terminales	Valores iniciales para variables de co-estado
$r_0 = 1757,4 \times 10^3 m$	$r_f = 1737,4 \times 10^3 m$	$t_f = libre$
$M = 224 s$	$u_f = 0 m/s$	$\lambda_{r,0} = 0,02$
$T = 500 N$	$v_f = 0 m/s$	$\lambda_{\theta,0} = 0,8$
$y_0 = 20000 m$		$\lambda_{u,0} = 0,01$
$\theta_0 = \pi/2$		$\lambda_{v,0} = -1,2$
$u_0 = 100 m/s$		
$v_0 = -100 m/s$		

Es importante considerar que las condiciones de frontera utilizadas en esta solución se tomaron del Trabajo de L. OCAMPO, puesto que para iniciar las iteraciones se necesita de los valores iniciales de cada incógnita.

- L. OCAMPO, *Solving the optimization control problem for lunar soft landing using minimization technique*, Master's thesis, The University of Texas at Arlington, Texas, Aug 2013.

Solución con el método sin mallado

Se denomina habitualmente métodos sin mallas a una serie de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, que trabajan directamente en el espacio físico y que obtienen su marco de representación espacial a través de un método de aproximación sin malla, mediante la interpolación de funciones que involucra de 4 Funciones de Base Radial (FBR), a las se les denotará como las funciones φ :

- $\varphi(r) = e^{-cr^2}$ (Gaussiana)
- $\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ (Multicuadrática)
- $\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$ (Multicuadrática inversa)
- $\varphi(r) = r^2 \ln(r)$ (TPS)

Simulación Problema del Alunizaje

ENTRADA: Los extremos del intervalo t_0 y t_f ; número de intervalos n ; condiciones de frontera $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, con m ecuaciones del sistema.

SALIDA: Coeficientes de la combinación lineal de los n $\varphi(r)$ que forman cada función.

1. Hacer $h = \frac{t_f - t_0}{N+1}$
2. Construir los valores de $\varphi(t_i - t_j)$ para las funciones (FBR) aproximadas de las variables del sistema de ecuaciones. Donde $i = j = 1, 2, \dots, n$
3. Construir la matriz de incógnitas $X_{m \times n}$
4. Usando las FBR de cada variable:
 - a. Construir las m ecuaciones con las condiciones de frontera del sistema
 - b. Construir las m ecuaciones del sistema
5. Construir la matriz de ecuaciones A y la matriz de términos independientes B
6. Resolver el sistema matricial $A \cdot X = B$ ó $A \cdot X = 0$ si el sistema es homogéneo
7. Salida $(a_i, b_i, c_i, \dots, a_n, b_n, c_n)$, que son los coeficientes buscados para que junto con las FBR $\varphi(t_i - t_j)$ se puedan construir las funciones aproximadas de las distintas variables del sistema
8. Parar.

Simulación Problema del Alunizaje

Consideramos nuevamente el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = v \\ \dot{\theta} = -\frac{u}{r} \\ \dot{u} = \frac{T^r}{M} \cos \beta - \frac{uv}{r} \\ \dot{v} = \frac{T^r}{M} \sin \beta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{u^2}{r} \\ \dot{\lambda}_r = -\frac{u}{r^2} \lambda_\theta - \frac{uv}{r^2} \lambda_u - 2\frac{\mu}{r^3} \lambda_v + \frac{u^2}{r^2} \lambda_v \\ \dot{\lambda}_\theta = 0 \\ \dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} \lambda_\theta + \frac{v}{r} \lambda_u - 2\frac{u}{r} \lambda_v \\ \dot{\lambda}_v = -\lambda_r + \frac{u}{r} \lambda_u \\ \beta = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_u} \right) \end{array} \right. \quad (7)$$

Simulación Problema del Alunizaje

y las condiciones de frontera del Trabajo de L. OCAMPO (Valores para las condiciones inicial y termial de frontera)

Condiciones iniciales	Condiciones terminales
$r_0 = 1757,4 \times 10^3 \text{ m}$	$r_f = 1737,4 \times 10^3 \text{ m}$
$M = 224 \text{ kg}$	$u_f = 0 \text{ m/s}$
$T = 500 \text{ N}$	$v_f = 0 \text{ m/s}$
$y_0 = 20000 \text{ m}$	$t_f = \text{libre}$
$\theta_0 = \pi/2$	$\theta_f = 0$
$u_0 = 100 \text{ m/s}$	
$v_0 = -100 \text{ m/s}$	

Es importante aclarar que para este método no es necesario conocer las condiciones iniciales y finales de las variables λ_r , λ_θ , λ_u y λ_v , lo cual representa, para este método, una gran ventaja con respecto a otras técnicas utilizadas para resolver el problema del alunizaje suave de módulos lunares.

Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 1

- Con el **Programa N° 1** se realiza una primera experimentación con los datos mostrados en (3) tomados del trabajo de L. OCAMPO.
- No se considera las condiciones finales del problema pero si se considera un tiempo total de descenso de 500 s y una discretización de 12 intervalos de tiempo, además de una masa de 224 kg para el módulo lunar y 500 N para el empuje generado por el propulsor.
- Con estos valores se obtiene una matriz donde cada fila representa a cada variable incógnita y las columnas representan los intervalos en que se partió el tiempo.
- La matriz de resultados presenta en la primera fila son los valores en cada instante de la distancia radial, y como se ve en el último instante el valor de esta variable es de 277990 m el mismo que es muy inferior al radio de la superficie lunar, lo cual indica el impacto inevitable de la nave.

Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 2

- Con el mismo programa del primer intento (Programa N° 1) se realiza un segundo experimentación con los datos tomados de S. PARSLEY. Las condiciones de frontera mencionadas son:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = 1752100 (m), \\ v_0 = 0 (m/s), \\ \theta_0 = 1,85362(rad), \\ u_0 = 1673 (m/s), \\ \lambda_{r_0} = 2, \\ \lambda_{\theta_0} = 1,9, \\ \lambda_{u_0} = 2, \\ \lambda_{v_0} = -0,3 \\ r_f = 1737000 (m), \\ t_f = 660 (s), \\ u(t_f) = 0 (m/s), \\ v(t_f) = 0 (m/s). \\ \theta_f = \frac{\pi}{2}(rad) \end{array} \right. \quad (8)$$

- S. PARSLEY, *Near-optimal feedback guidance for an accurate lunar landing*, Master's thesis, University of Alabama, TUSCALOOSA, ALABAMA, 2012. Thesis, Dept. Aerospace Engineering.

Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 2

- Además los valores de masa de la sonda lunar, con $M = 16430 \text{ kg}$, y, la fuerza de empuje del propulsor con $T = 56317 \text{ N}$.
- En la matriz de resultados obtenidos se muestran una distancia radial final de 14230000 m . Lo cual indica que la sonda se aleja más de la superficie lunar.

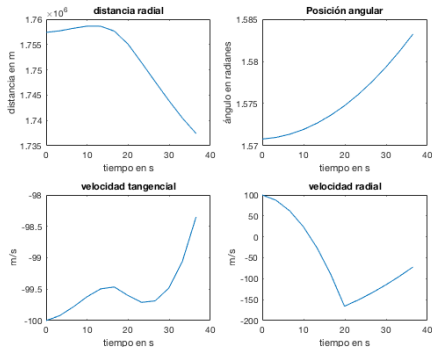
Experimentación 3

- Dado que en las experimentaciones anteriores no se obtienen valores coherentes para el valor de la distancia radial, se realiza un nueva experimentación en el cual se considera que el tiempo final es libre, como se observa en (4).
- Se usa entonces el **Programa N° 2** donde se diseñó un bucle “while” que recurre al algoritmo Programa N° 1 para ir aumentando progresivamente el tiempo en $0,5 \text{ (s)}$ hasta conseguir la distancia radial correcta de la superficie lineal.
- El algoritmo comienza con un tiempo de 20 (s) y con los mismos datos del Experimentación 1.

Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 3

- Los resultados se muestran indican que con este algoritmo se alcanza un tiempo total de 36,5 (s) para llegar a la superficie lunar correcta, sin embargo la velocidad radial y tangencial no se anulan.
- A continuación se muestran las gráficas obtenidas de los resultados de la Experimentación 3:

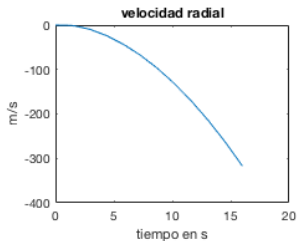
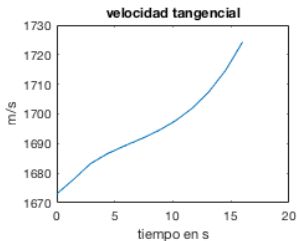
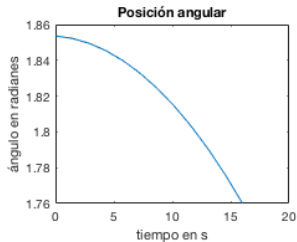
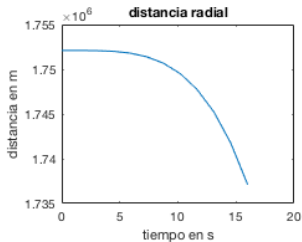


Experimentación 4

- Aquí se ensaya con la misma idea que el anterior experimentación, pero usando los datos de S. PARSLEY que se muestran también en el Experimentación 2.
- El algoritmo del Programa N° 2 comienza con un tiempo de 10 (s) y con los mismos datos del Experimentación 2.
- Los resultados se muestran a continuación presentan el valor de la distancia radial es muy similar al valor del radio de la superficie lunar, sin embargo las componentes de velocidad no lo son.

Simulación Problema del Alunizaje

A continuación se muestran las gráficas obtenidas de los resultados de la Experimentación 4:



Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 5: con la función multicuadrática

- Se realiza un programa usando la FBR multicuadrática (Programa N° 5), usando los datos mostrados en (3) tomados de L. OCAMPO, también se considera un tiempo total de descenso de 500 (s) y una discretización de 6 intervalos de tiempo, además de una masa de 224 (kg) para el módulo lunar y 500 (N) para el empuje generado por el propulsor.
- Con este programa las iteraciones no convergen a una solución, formándose matrices singulares.
- Se concluyó que el sistema de ecuaciones formado era linealmente dependiente, por lo que fue necesario identificar la o las ecuaciones que provocaban este defecto.
- Se descubrió que dicha ecuación era la que formaba la condición final de $v(tf) = 0$, por lo que ésta fue descartada del programa, además se discretizó el tiempo en puntos diferentes para cada variable y disminuir así el riesgo de obtener nuevamente matrices singulares.

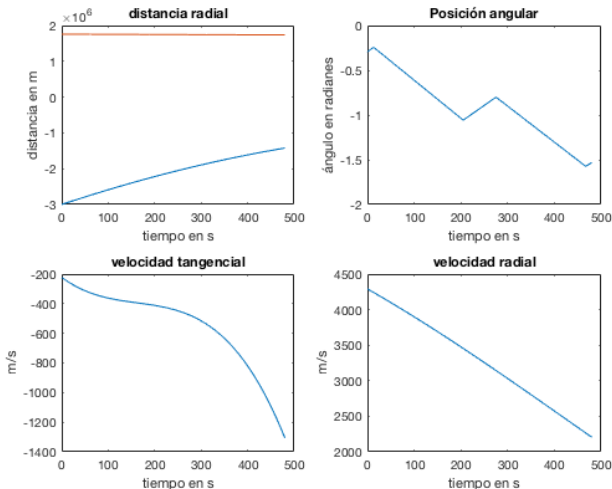
Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 5: con la función multicuadrática

- Además se discretizó el tiempo en puntos diferentes para cada variable y disminuir así el riesgo de obtener nuevamente matrices singulares.
- Arreglar este inconveniente permite enfocarse en buscar la solución aproximada que se basa en realizar iteraciones con valores de R estimados, que de hecho son arbitrarios, pues como se vió en el ejemplo formulado en (9) el valor de R se pudo encontrar dado que se cuenta con la solución exacta y mediante la gráfica pudimos llegar al valor de R que mejor se ajuste.
- Es así que se intento con diversos valores para R , R_1 , R_2 , R_3 , R_5 , R_6 y el programa siempre arrojaba un resultado que nos indica que la solución no converge debido a que los valores de R no son los adecuados, o bien, que son errados los valores estimados de la solución, con los que inicia el método de Newton para resolver el sistema no lineal resultante.

Simulación Problema del Alunizaje

Aunque ya fue posible encontrar una solución, ésta no concuerda con los valores de frontera dados para el problema. Como se puede observar en la gráfica de los resultados obtenidos por la Experimentación 5:



Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 6: con la función Gaussiana y Multicuadrática inversa

- Se realiza un programa tanto para la FBR Gaussiana como para la Multicudrática Inversa, con el objetivo de encontrar una mejor solución que en la experimentación anterior.
- Con estas funciones no fue posible ajustar, ni con la ayuda de Geogebra, un valor de R que permita encontrar alguna solución.
- Trabajar con estas funciones fue más difícil en relación a la función Multicudrática.

Experimentación 7: con la función TPS

- En este caso la función a utilizar presenta una ventaja frente a las demás FBR, pues en su estructura no necesita de un valor de ajuste R , pues este se realiza de forma automática por la función dependiendo de los valores de la función a interpolar.
- Para mostrar esta ventaja se realizó un algoritmo, con la función TPS, para resolver el problema el siguiente problema: Buscaremos la solución aproximada de una ecuación diferencial, planteada de la siguiente manera, en donde la solución exacta es $y = 1 - x^2$.

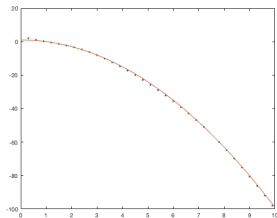
$$\begin{cases} y' = 2x, & x \in [0, 10] \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

En este punto se menciona que el programa sólo cambia en la forma de la función que era multicuadrática (Programa N° 4).

Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 7: con la función TPS

- El resultado obtenido mediante una sola iteración se puede ver en la siguiente gráfica (la curva punteada es la aproximación):



- La versatilidad de esta función se proyectaba como una acertada elección en la búsqueda de una solución óptima para el problema de esta tesis. Sin embargo también presenta desventajas y es que para valores iniciales en cero, la función no existe, pues es bien sabido que el $\log_a(0)$ no existe para ninguna base a , lo cual trae problemas en la programación.

Experimentación 8: con la función multicuadrática Parte II

- Dado que la única FBR que arrojó resultados fue la multicuadrática, se realiza nuevos intentos para encontrar una solución al problema del alunizaje.
- Con la ayuda de GeoGebra se intentará buscar la solución, variando los valores de R en al menos la función de distancia radial, donde cada valor tomará la forma $R(j) = m \cdot j + b$ como se explica en J. PANIAGUA.
- J. PANIAGUA, *Métodos libres de malla para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias*, in Conference Paper, Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, 2012.

Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 8.1

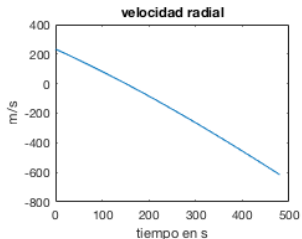
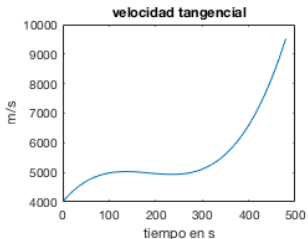
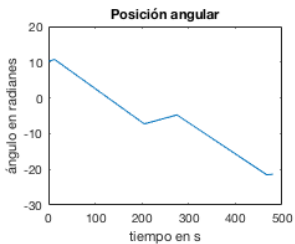
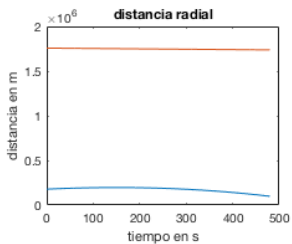
- Después de varias experimentaciones y combinando los datos de (3) y (8) se obtuvo:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = 1757400 \text{ (m)}, \\ v_0 = -117 \text{ (m/s)}, \\ \theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}, \\ u_0 = 1673 \text{ (m/s)}, \\ r_f = 1737400 \text{ (m)}, \\ t_f = 480 \text{ (s)}, \\ u(t_f) = 0 \text{ (m/s)}, \\ v(t_f) = 0 \text{ (m/s)}. \\ \theta_f = \text{libre} \end{array} \right. \quad (10)$$

- Con los valores de ajuste: $R = 0,94685 \cdot i + 2171,21$, $R_\theta = 0,01$, $R_u = 10000$, $R_{\lambda_r} = 0,11$, $R_{\lambda_u} = 0,3$, $R_{\lambda_v} = 0,1$, para $i = 1, 2, \dots, 6$ en el algoritmo del Programa N° 6 se observa la siguiente gráfica.

Simulación Problema del Alunizaje

Resultados obtenidos con la experimentación 8.1.



Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 8.1

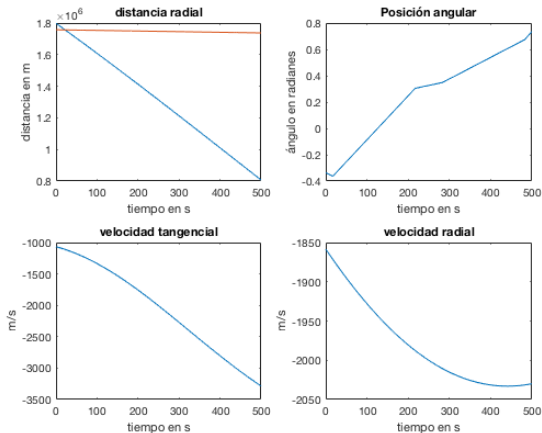
- Como se puede observar la aproximación obtenida para la distancia radial es una función que tiende a ser una recta paralela a la referencia real, sin embargo se encuentra muy separada.

Experimentación 8.2

- En este caso se intenta nuevas iteraciones con el mismo Programa N° 5, usando los datos de 3 y modificando los valores de ajuste de la siguiente manera: $R = 0,94685 \cdot i + 2171,21$, $R_\theta = 0,01$, $R_u = 1000$, $R_{\lambda_r} = 2171$, $R_{\lambda_u} = 1000$, $R_{\lambda_v} = 2171$, para $i = 1, 2, \dots, 6$, de donde se observan los siguientes resultados gráficas.

Simulación Problema del Alunizaje

Resultados obtenidos con la experimentación 8.2.

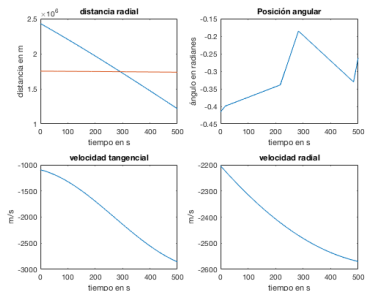


En este caso la función aproximada de la distancia radial se acerca mucho al radio inicial pero se aleja demasiado de la distancia final real.

Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 8.3

- Para esta ocasión, en el Programa N° 5, usamos los datos de (8) (con $t = 500$ (s)) y los valores de ajuste de la simulación anterior, cuyo resultados y gráfica son:

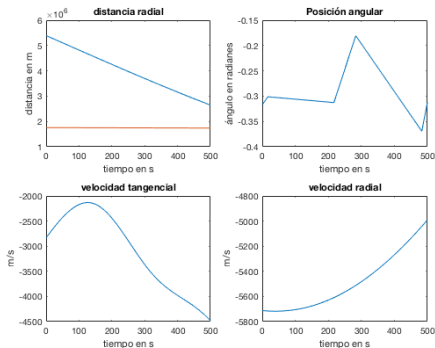


- La función aproximada obtenida tiende a acercarse a la recta de referencia que une las distancias inicial y final, el inconveniente es que la nueva función está muy inclinada.

Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 8.4

- Nuevamente con el Programa N° 5, usamos los datos de (3) pero con el valor $R_u = 100$, se obtiene los siguientes resultados:

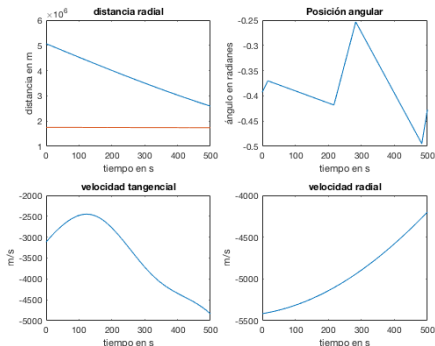


- En esta ocasión la aproximación de la función de distancia radial esta muy inclinada y se aleja más de los valores reales.

Simulación Problema del Alunizaje

Experimentación 8.5

- En un nuevo intento con el mismo Programa N° 5, usamos los datos de (8) (con $t = 500$ (s)) y los mismos valores de ajuste de la simulación anterior. Así obtenemos:



- Esta experimentación arrojó resultados muy parecidos a la anterior aún cuando se usaron valores de frontera diferentes.

Conclusiones

- El Método de Runge-Kutta presenta menor dificultad en el código de programación comparado con el método sin mallado. Sin embargo en el primer método no es posible encontrar funciones incógnitas que son constantes, pues su derivada es cero, y en ese método la partición será siempre cero. Por ejemplo λ_θ no fue posible encontrar con runge kutta.
- El método de Runge Kutta de 4to orden tiene la desventaja de no permitir el ingreso de condiciones finales, lo cuál lleva a que el algoritmo de la solución se ejecute de forma desorientada, provocando además inestabilidad en los resultados.
- El método sin mallado es un método muy versátil que se puede aplicar a cualquier problema, sin embargo la desventaja es el valor de ajuste (nominado R en este proyecto), pues éste es elegido por el usuario de forma empírica, sin un criterio claro.
- Para el problema del alunizaje, dentro del método sin mallado la mejor función de base radial que se ajustó fue la multicuadrática puesto que esta es la única que obtuvo una solución.

Conclusiones

- Usar GeoGebra como ayuda para el método sin mallado resultó muy útil para guiar en la elección de un valor de ajuste R , que permita encontrar la solución del sistema de ecuaciones formado con el algoritmo de programación.
- La función de base radial que resulta interesante es la TPS, debido a que ésta no necesita de un valor de ajuste, pues se adapta a la función incógnita de forma automática con las condiciones de frontera de la función. Sin embargo, parece más útil en la solución de una sola ecuación diferencial que al trabajar sobre un sistema de ecuaciones diferenciales.
- Usar valores diferentes del ajuste R para una misma función también resulta en una mejor interpolación de la función objetivo por medio de una función de base radial, como se observó en los últimos experimentaciones. Por ejemplo en la experimentación 8.1 la función de la distancia radial mejoró mucho, en vista de que se acercó más a los valores reales.

Conclusiones

- Los últimas experimentaciones demostraron que al igualar el valor de ajuste R con su correspondiente función de coestado tiene una mejor solución. Además las soluciones obtenidas usando los datos de L. OCAMPO y J. PARSLEY, son muy parecidas, tal como se puede observar en las Experimentaciones 8.4 y 8.5.
- El objetivo del proyecto se cumple parcialmente puesto que por una parte el sistema de ecuaciones si se pudo resolver, sin embargo, por otra parte las soluciones halladas son muchas debido a los diferentes valores posibles de ajuste (R). Esto indica que hace falta investigar una técnica que permita encontrar la solución óptima.
- La dificultad de encontrar una solución óptima se debe sobretodo a que el valor de ajuste para cada función es diferente y es necesario manipular todos al mismo tiempo.
- Las ecuaciones descritas en los artículos publicados difieren entre sí, fue necesario entonces analizar la correcta deducción de las ecuaciones del modelo, para lo cual usamos el apéndice de J. PARSLEY.

Recomendaciones

- En documentación referente a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, se sugiere que se incluya al menos un ejemplo de solución por métodos numéricos como el caso de esta tesis, aunque no de la misma complejidad.
- Se recomienda realizar mayor investigación sobre la interpolación de funciones mediante el método sin mallado, pues es un método que tiene un gran potencial como una opción de resolución de problemas complejos en ingeniería y ciencias.
- En esta tesis todas las simulaciones se intentaron con un sólo tipo de FBR para todas las funciones incógnita, y por los resultados obtenidos, se sugiere que a futuro se experimente con la combinación de dos o más FBR en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de este proyecto.
- Se recomienda además a la universidad, que en futuras programaciones de la maestría, incluya asignaturas referentes a la modelación matemática con ecuaciones diferenciales.

¡ GRACIAS !