

## **CAPÍTULO 2**

### **MICROMECAÁNICA Y MACROMECAÁNICA DE LOS COMPUESTOS LAMINADOS**

El presente capítulo expondrá en primer lugar un resumen de los modelos matemáticos existentes en la actualidad para entender teóricamente las propiedades de los materiales compuestos. A continuación se obtendrá el comportamiento de estos materiales fabricados a través de láminas, y su comportamiento cuando se somete a cargas en diferentes direcciones. Se conoce como lámina a la unidad fundamental estructural de material compuesto de geometría plana o curva, mientras que un laminado corresponde a la secuencia de láminas estratificadas o apiladas una sobre otra. Finalmente se ejemplificará el análisis de una lámina, tanto en forma manual como con el software Ansys para efectuar un análisis comparativo. Conocer el fundamento teórico de la mecánica de láminas y laminados servirá tanto para sustentar todo el desarrollo matemático que conducirá luego al análisis de su composición utilizando el método de los elementos finitos, como también permitirá generar apropiadamente los datos que deben ser ingresados al software especificado.

#### **2.1 CLASIFICACIÓN DE LAS LÁMINAS**

Los materiales compuestos están formados por un material de fase uniforme continua, llamado matriz, que rodea a la fase discontinua. Según la fase discontinua, los compuestos pueden ser:

##### **2.1.1 COMPUESTO REFORZADO CON PARTÍCULAS:**

Se caracteriza porque se compone de partículas suspendidas en una matriz. Las partículas pueden tener virtualmente cualquier forma, tamaño o configuración, con esto se logran propiedades uniformes en toda la masa del compuesto.

Ejemplo: Caucho en poliestireno para cámaras fotográficas.

### **2.1.2 COMPUESTO REFORZADO CON FIBRAS CORTAS:**

Las fibras cortas pueden estar orientadas aleatoriamente o en forma unidireccional. El reforzamiento aleatorio produce compuestos aproximadamente isotrópicos. Se habla de isotropía cuando un elemento presenta propiedades iguales en todas las direcciones y posiciones.

Ejemplo: Poliéster reforzado con fibra de vidrio utilizado en paneles de automóviles.

### **2.1.3 COMPUESTO REFORZADO CON FIBRAS LARGAS:**

Estas fibras pueden ser unidireccionales o tejidas y los composites multicapas se refieren a los laminados. La respuesta del material es generalmente ortotrópica y su comportamiento depende de la dirección de las cargas respecto a las fibras. Las propiedades de un material ortotrópico son diferentes en tres planos mutuamente perpendiculares.

Ejemplo: Epóxico reforzado con fibra de carbono utilizado en alas de aviación.

El presente estudio se centrará únicamente en los compuestos reforzados con fibras largas unidireccionales o tejidas, debido a que el elemento a ser analizado es un elemento estructural sometido a cargas significativas.

## **2.2 MICROMECAÍNICA DE LOS COMPUESTOS**

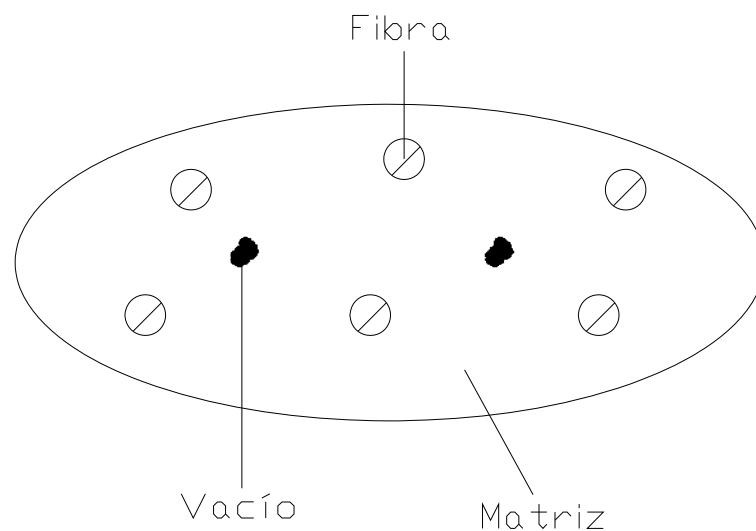
Debido a que por cada diseño realizado, comprende un gran número y variedad de parámetros, lo que propone la adopción de una metodología de cálculo que pueda brindar la flexibilidad para sintonizar un diseño de acuerdo a cada aplicación, significa que el diseño y el análisis para materiales compuestos son más complejos que los correspondientes para materiales tradicionales. En orden

de que podamos beneficiarnos de las ventajas que ofrece la utilización de los materiales compuestos requiere una comprensión de la mecánica de estos materiales bajo diversos puntos de vista. El estudio de la mecánica de los materiales compuestos ofrece una aproximación analítica, cuyo objetivo es la caracterización de los materiales compuestos en los niveles micro y macromecánico.

La micromecánica analiza la relación entre las propiedades de un material compuesto además de sus componentes, con lo que se puede analizar las proporciones de los mismos, que determinarán las propiedades del compuesto final. Aquí se analiza en detalle la interacción de los componentes.

Dentro de la micromecánica se emplean dos modelos de mecánica de materiales, denominados la “regla de las mezclas” y la “regla modificada de las mezclas”.

La regla de las mezclas es el modelo más simple e intuitivo. Un volumen representativo de una lámina consta de tres regiones distintas: fibra (f), matriz (m) y vacíos (v) (figura 2.1).



**Figura 2.1 Estructura de un material compuesto al nivel micro** <sup>[2.1]</sup>

---

<sup>2.1</sup> Staab, G. H. *Laminar Composites*. 1ra ed. E.E.U.U. Butterworth-Heinemann 1999.

La masa total (M) y el volumen (V) son  $M = M_f + M_m$  y  $V = V_f + V_m + V_v$ , respectivamente, donde los subíndices f, m, v se refieren a las fibras, la matriz y los vacíos. Dividiendo las masas y volúmenes individuales por la masa y volúmenes totales se obtienen las fracciones másicas y volumétricas, definidas por:

$$m_m + m_f = 1 \quad \text{y} \quad v_m + v_f + v_v = 1 \quad (2.1)$$

donde  $m_f = M_f / M$ ,  $m_m = M_m / M$ ,  $v_f = V_f / V$ ,  $v_m = V_m / V$ ,  $v_v = V_v / V$ , representan las fracciones indicadas. La fracción volumétrica de la fibra satisface la relación  $0 < v_f < 1$  y es usualmente 0.5 o mayor. Igual característica cumple la fracción volumétrica de la matriz.

Cuando la fracción de vacíos es despreciable, se obtiene (2.2):

$$v_m = 1 - v_f \quad (2.2)$$

Adicionalmente la masa total es (2.3):

$$M = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m \quad (2.3)$$

La densidad de la lámina se calcula mediante (2.4):

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m}{V} = \rho_f \cdot v_f + \rho_m \cdot v_m \quad (2.4)$$

La fracción volumétrica se relaciona con la másica mediante (2.5):

$$v_f = \frac{V_f}{V} = \frac{\frac{M_f}{\rho_f}}{\frac{M}{\rho}} = \frac{\rho}{\rho_f} \cdot m_f \quad v_m = \frac{\rho}{\rho_m} \cdot m_m \quad (2.5)$$

A continuación se detalla la manera de calcular las constantes elásticas de un compuesto reforzado con fibras continuas unidireccionales, las cuales se utilizan para elementos estructurales. Este cálculo se usará para caracterizar el comportamiento estructural de la lámina y dar pautas para el diseño de compuestos.

### 2.2.1 DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL $E_1$

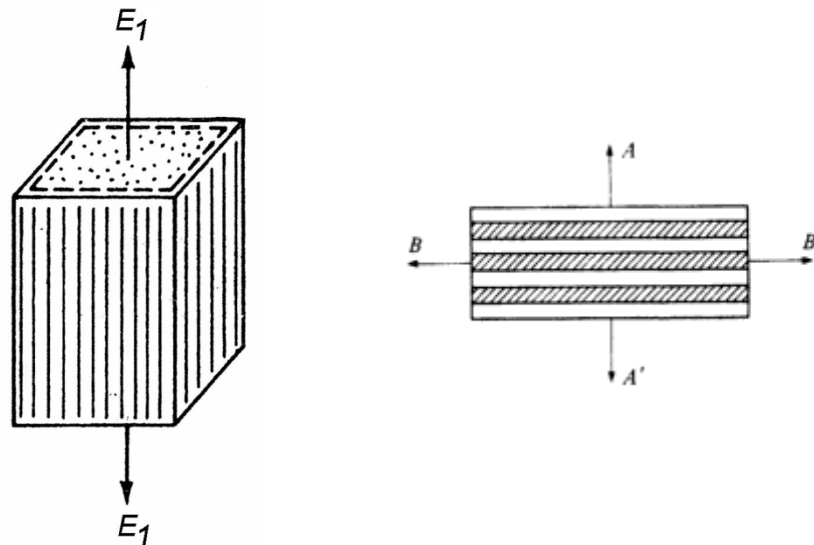


Figura 2.2 Interpretación gráfica de la propiedad que describe el comportamiento elástico de un material al ser sometido a las fuerzas mostradas con flechas (izq.) y el esquema de las capas que ilustra la resistencia de la unión en el compuesto(der.)

El modelo de la figura 2.2 se denomina modelo de deformación constante y sirve para determinar el módulo longitudinal del compuesto a lo largo de las fibras. El eje 1 corresponde a la dirección longitudinal, el eje 2 a la dirección transversal y el 3 a la dirección a través del espesor. Se supone que ambos materiales son isotrópicos, homogéneos y linealmente elásticos, con constantes  $E_f$ ,  $\nu_f$ ,  $G_f$  y  $E_m$ ,  $\nu_m$ ,  $G_m$ . El elemento está sometido a la fuerza  $F_1$  en la dirección de las fibras, a lo largo del eje longitudinal. La fuerza se distribuye en la superficie como:

$$F_1 = \sigma_1 A \quad (2.6)$$

$A$  es la sección total. Parte de la fuerza es absorbida por las fibras y parte por la matriz.

$$\sigma_1 A = A_f \sigma_{f1} + A_m \sigma_{m1} \quad (2.7)$$

donde los subíndices  $f1$  corresponden a la fibra en la dirección 1 y los  $m1$  corresponden a la matriz en la dirección 1.

Los esfuerzos normales obedecen la ley de Hooke y son iguales a:

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 E_1 \quad \sigma_{f1} = \varepsilon_{f1} E_f \quad \sigma_{m1} = \varepsilon_{m1} E_m \quad (2.8)$$

Reemplazando (2.8) en (2.7) y dividiendo para  $A$ :

$$\varepsilon_1 \cdot E_1 = \frac{A_f}{A} \cdot \varepsilon_{f1} \cdot E_f + \frac{A_m}{A} \cdot \varepsilon_{m1} \cdot E_m \quad (2.9)$$

La elongación  $\Delta L$  y las deformaciones unitarias son iguales:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{f1} = \varepsilon_{m1} \quad (2.10)$$

Las fracciones volumétricas, puesto que la longitud  $L$  es igual para ambos componentes (matriz y fibra), son:

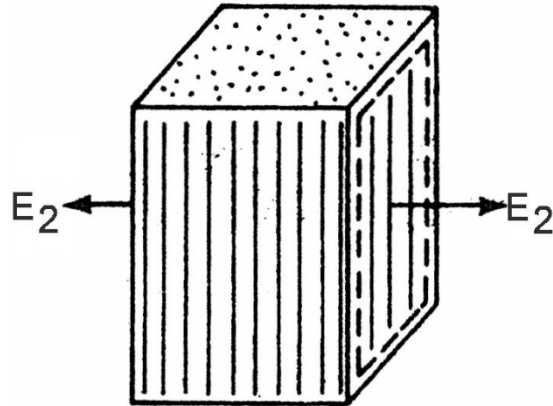
$$\nu_f = A_f / A \quad \nu_m = A_m / A \quad (2.11)$$

Y se obtiene por tanto la siguiente expresión para el módulo de Young longitudinal en términos de los módulos de la fibra y la matriz. Esta expresión representa la regla de las mezclas para el cálculo del módulo de elasticidad.

$$E_1 := \nu_f \cdot E_f + \nu_m \cdot E_m \quad (2.12)$$

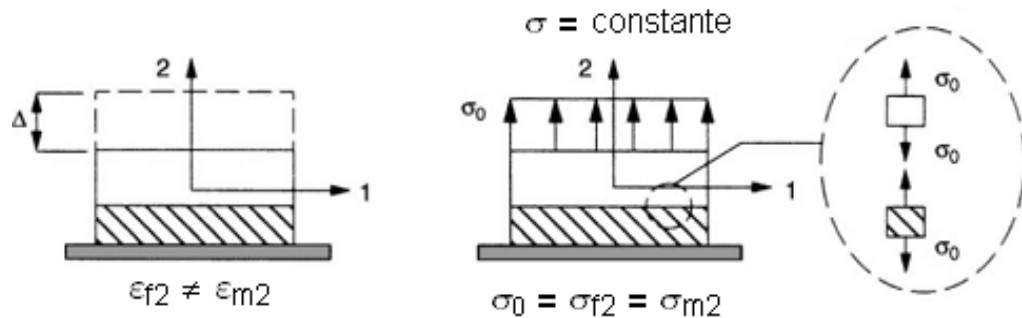
$$E_1 := \nu_f \cdot E_f + (1 - \nu_f) \cdot E_m$$

## 2.2.2 DETERMINACIÓN DEL MÓDULO TRANSVERSAL $E_2$



**Figura 2.3** *Volumen representativo para determinar el módulo  $E_2$*

El modelo de la figura 2.3 se utiliza para obtener el módulo transversal  $E_2$ . En este caso los esfuerzos tanto en la fibra como en la matriz son los mismos (figura 2.4), esto sucede cuando el volumen representativo es cargado transversalmente con una fuerza en la dirección 2. Las pobres propiedades de las fibras en su dirección transversal, junto con las débiles propiedades del material que constituye la matriz, conducen a la obtención de un material compuesto de bajas propiedades en dirección transversal a sus fibras.

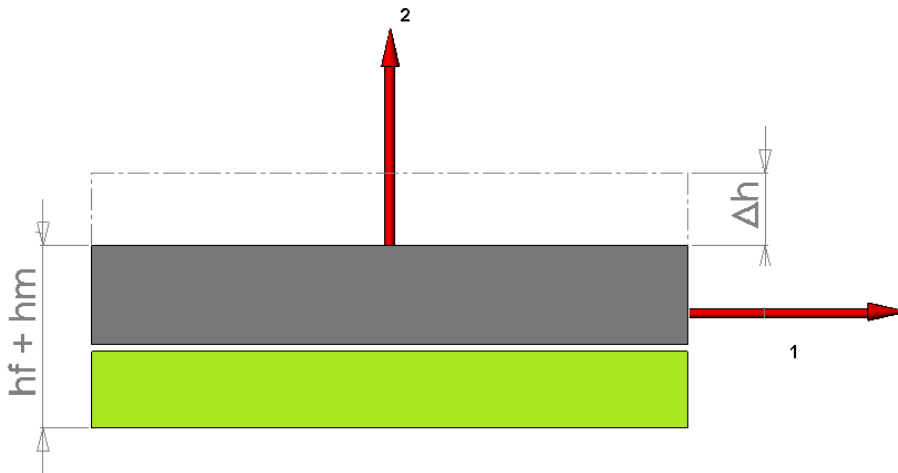


**Figura 2.4** *Modelo de esfuerzo constante para determinar el módulo  $E_2$* <sup>[2.2]</sup>

<sup>2.2</sup> Staab, G. H. *Laminar Composites*. 1ra ed. E.E.U.U. Butterworth-Heinemann 1999.

Puesto que el módulo de cada constituyente es diferente, la deformación unitaria no será igual en la fibra y la matriz. El esfuerzo y deformación en la dirección 2 están relacionadas mediante:

$$\varepsilon_{f2} = \frac{\sigma_{f2}}{E_f} \quad \varepsilon_{m2} = \frac{\sigma_{m2}}{E_m} \quad (2.13)$$



**Figura 2.5 Deformación del volumen representativo, bajo condiciones de esfuerzo constante**

Las condiciones de deformación (ver figura 2.5) se expresan mediante:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta h}{h_f + h_m} \quad (2.14)$$

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m = \varepsilon_{f2} \cdot h_f + \varepsilon_{m2} \cdot h_m = \frac{h_f}{E_f} \cdot \sigma_0 + \frac{h_m}{E_m} \cdot \sigma_0 = \left( \frac{h_f}{E_f} + \frac{h_m}{E_m} \right) \cdot \sigma_0 \quad (2.15)$$

La deformación en la dirección 2 es por tanto:



$$\epsilon_2 = \frac{\Delta h}{h} = \left( \frac{h_f}{E_f} + \frac{h_m}{E_m} \right) \cdot \frac{\sigma_0}{h} = \left( \frac{h_f}{E_f} + \frac{h_m}{E_m} \right) \cdot \frac{\sigma_0}{h_f + h_m} = \left( \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} \right) \cdot \sigma_0 \quad (2.16)$$

Puesto que:  $E_2 = \sigma_0 / \epsilon_2$

$$E_2 = \frac{1}{\left( \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} \right)} = \frac{E_f \cdot E_m}{E_m \cdot v_f + E_f \cdot v_m} \quad (2.17)$$

### 2.2.3 DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE CIZALLAMIENTO $G_{12}$

El módulo cortante puede ser determinado al considerar el diagrama de cuerpo libre, mostrado en la figura 2.6. La deformación cortante para fibras y matrices son una función del módulo cortante para cada constituyente,

$$\gamma_{f12} = \frac{\tau_{f12}}{G_f} \quad \gamma_{m12} = \frac{\tau_{m12}}{G_m} \quad (2.18)$$

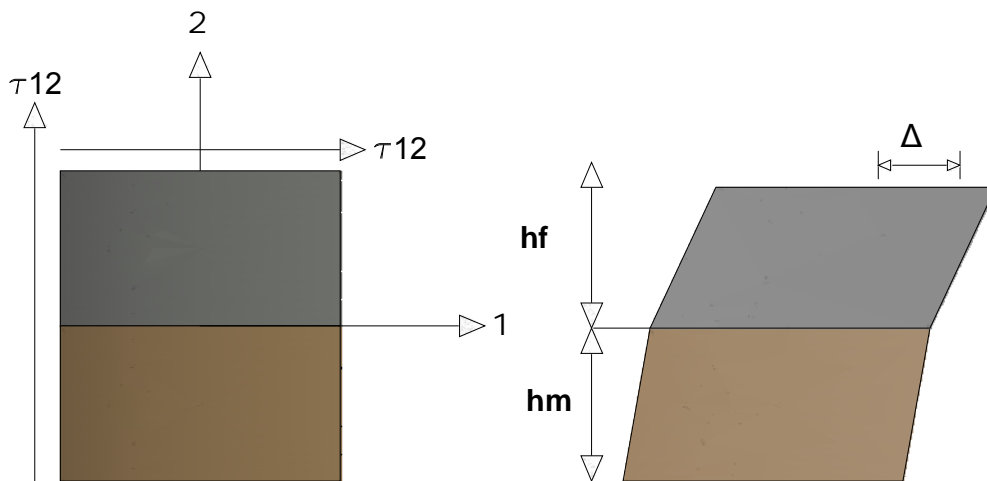


Figura 2.6 Diagrama de cuerpo libre y deformaciones para determinar  $G_{12}$ .

Partiendo de:

$$\tau_{f12} = \tau_{m12} = \tau_{12} \quad (2.19)$$

donde los subíndices  $_{12}$  indican que el cortante esta en el plano paralelo al eje 1 y en la dirección del eje 2.

La deformación por cortante según la figura 2.6 es:

$$\gamma_{12} = \frac{\Delta}{h_f + h_m} \quad (2.20)$$

donde:

$$\Delta = h_f \cdot \gamma_{f12} + h_m \cdot \gamma_{m12} \quad (2.21)$$

$$\gamma_{12} = \frac{h_f \cdot \gamma_{f12} + h_m \cdot \gamma_{m12}}{h_f + h_m} = v_f \cdot \gamma_{f12} + v_m \cdot \gamma_{m12} = v_f \cdot \frac{\tau_{f12}}{G_f} + v_m \cdot \frac{\tau_{m12}}{G_m} = \left( \frac{v_f}{G_f} + \frac{v_m}{G_m} \right) \cdot \tau_{12} \quad (2.22)$$

Puesto que:

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (2.23)$$

Se obtiene finalmente el módulo de elasticidad a corte en el plano. <sup>[2.2]</sup>

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{v_f}{G_f} + \frac{v_m}{G_m}} = \frac{G_f \cdot G_m}{v_f \cdot G_m + v_m \cdot G_f} \quad (2.24)$$

## 2.2.4 DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE POISSON $\nu_{12}$

La denominada relación de Poisson principal,  $\nu_{12}$ , se obtiene mediante una aproximación similar para el análisis de  $E_1$ . En primer lugar, la relación de Poisson principal es:

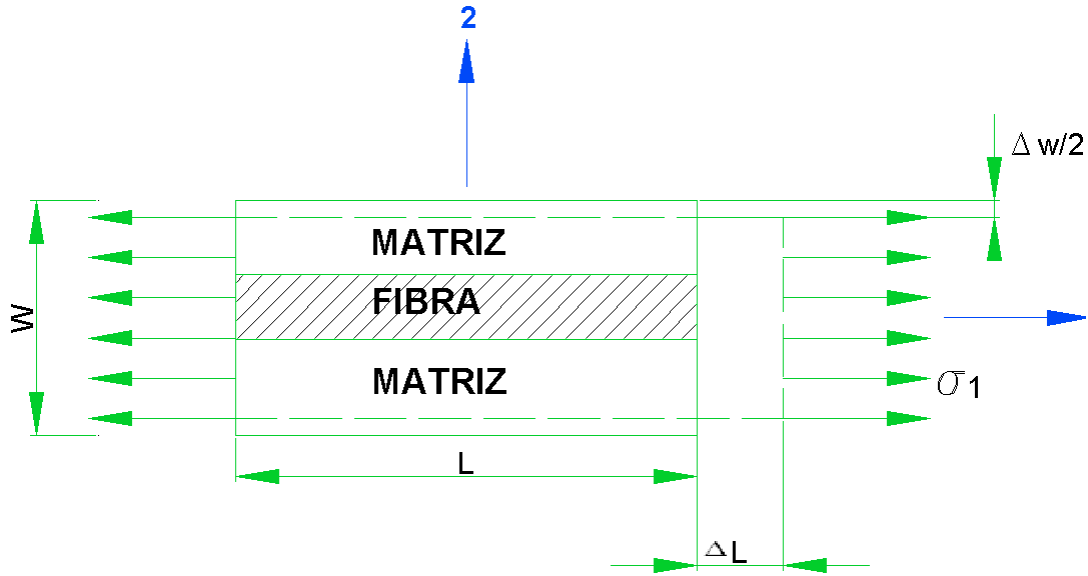
$$\nu_{12} = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.25)$$

Para el estado de esfuerzos  $\sigma_1 = \sigma$  y siendo todos los otros esfuerzos cero, las deformaciones son representadas en el volumen característico de la figura 2.7. La simplificación fundamental es que la deformación de la fibra es idéntica a la deformación de la matriz en la dirección de la fibra, La deformación transversal  $\Delta_w$  es:

$$\Delta_w = -W \cdot \varepsilon_2 = W \cdot \nu_{12} \cdot \varepsilon_1 \quad (2.26)$$

Pero macroscópicamente también es igual a:

$$\Delta_w = \Delta_{mw} + \Delta_{fw} \quad (2.27)$$



**Figura 2.7 Volumen representativo para determinar  $v_{12}$**

El desplazamiento lateral de la matriz es:

$$\Delta m_w = h_m \cdot \varepsilon_{mw} = -h_m \cdot v_m \cdot \varepsilon_1 \quad (2.28)$$

$$\Delta f_w = h_f \cdot \varepsilon_{fw} = -h_f \cdot v_f \cdot \varepsilon_1$$

Pero adicionalmente:

$$h_m = v_m \cdot (h_f + h_m) = v_m \cdot W \quad (2.29)$$

Por lo tanto, reemplazando (2.29) en (2.28) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta m_w &= -(v_m \cdot W) \cdot (v_m \cdot \varepsilon_1) \\ \Delta m_f &= -(v_f \cdot W) \cdot (v_f \cdot \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Finalmente, reemplazando las dos expresiones de (2.30) en (2.27) se obtiene:

$$\Delta w = -(v_m \cdot W) \cdot (v_m \cdot \varepsilon_1) - (v_f \cdot W) \cdot (v_f \cdot \varepsilon_1) = -W \cdot \varepsilon_1 \cdot (v_m \cdot v_m + v_f \cdot v_f) \quad (2.31)$$

Y se consigue el módulo de Poisson principal

$$v_{12} = (v_m \cdot v_m + v_f \cdot v_f) \quad (2.32)$$

Mientras los modelos que usan la regla de las mezclas simplificada dan resultados adecuados para  $E_1$  y  $v_{12}$ , los resultados para  $E_2$  y  $G_{12}$  no concuerdan bien con los resultados provenientes del análisis de elementos finitos y de la teoría de la elasticidad. Por lo tanto, se necesita modificar los modelos simplificados<sup>[2.3]</sup>, para lo cual se cuenta para  $E_2$  con la siguiente relación:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\frac{v_f}{E_f} + \eta \cdot \frac{v_m}{E_m}}{v_f + \eta \cdot v_m} \quad (2.33)$$

donde  $\eta$  es el factor de esfuerzo particionado que usualmente toma un valor entre 0.4 y 0.6<sup>[2.3]</sup>.

La regla de las mezclas modificadas para  $G_{12}$ , está dada por la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\frac{v_f}{G_f} + \eta_i \cdot \frac{v_m}{G_m}}{v_f + \eta_i \cdot v_m} \quad (2.34)$$

donde  $\eta_i$  es el factor de cizallamiento – cortante particionado y es igual a 0.6<sup>[2.3]</sup>.

## 2.3 MACROMECAÁNICA DE LOS COMPUESTOS

Las propiedades de los materiales de composites unidireccionales (UDC) son algo diferentes de aquellos para materiales de metales convencionales. La diferencia principal, desde un punto de vista analítico, resulta de que los materiales con UDC tienen propiedades excelentes en la dirección de las fibras de refuerzo, pero son muy pobres en una dirección perpendicular a las fibras, por lo que estos materiales deben ser cargados unidireccionalmente para que su desempeño sea bueno.

Para contrarrestar esta deficiencia, se emplea una técnica de fabricación similar a la utilizada en las planchas de madera tipo Plywood, en la cual cada capa de madera dispuesta a manera de lámina, la cual se caracteriza en que cada una de estas tiene las fibras dispuestas en sentido contrario a las de sus capas adyacentes respectivamente, creando así propiedades más elevadas de resistencia del conjunto final.

La macromecánica es el estudio del comportamiento del material compuesto en donde el material es asumido completamente homogéneo y los efectos de los constituyentes (fibra, matriz) son detectados únicamente como propiedades aparentes promedio del material.

Como se indicó, un laminado no es más que láminas apiladas y perfectamente adheridas entre sí. Una diferencia entre los compuestos laminados y los materiales isotrópicos tradicionales es que la respuesta a las cargas en los materiales compuestos depende de la dirección en que se aplique la carga. Para analizar la respuesta de un compuesto laminado, se debe analizar en primer lugar una lámina simple, la cual se caracteriza por tener todas las fibras orientadas en la misma dirección. Este modelo permite tratar a la lámina como un material ortotrópico, asumiendo que las fibras se encuentran perfectamente rectas y uniformemente orientadas dentro de la lámina.

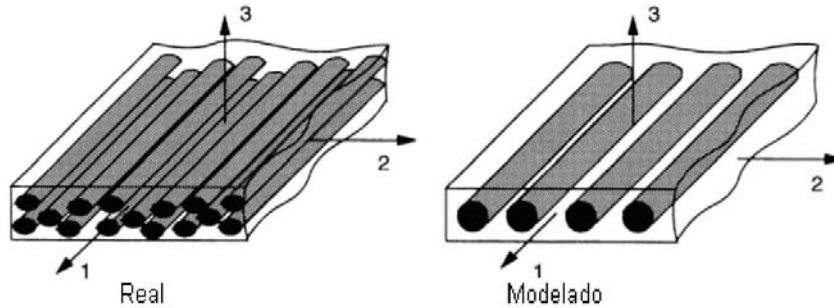
Para modelar matemáticamente la respuesta de una lámina, cada componente de la matriz de rigidez  $[S]$  debe ser determinada, para lo cual se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

Se considera que existe una fila única de fibras a lo largo de esta. Un esquema del modelo referido se puede observar en la figura 2.8.

Los ejes 1, 2 y 3 son las direcciones principales del material, el cual es conocido como ortotrópico por tener dos planos ortogonales de propiedades simétricas y es definido de la siguiente manera:

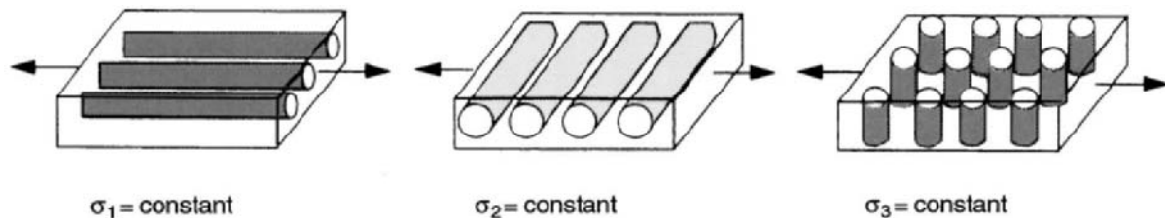
- 1: Dirección principal de la fibra.
- 2: Dirección perpendicular a la fibra en el plano de la lámina.
- 3: Dirección perpendicular a la fibra fuera del plano de la lámina.

Este sistema 1, 2, 3 se denomina el sistema principal coordinado del material.



**Figura 2.8 Representación esquemática de la lámina real y modelada.** <sup>[3]</sup>

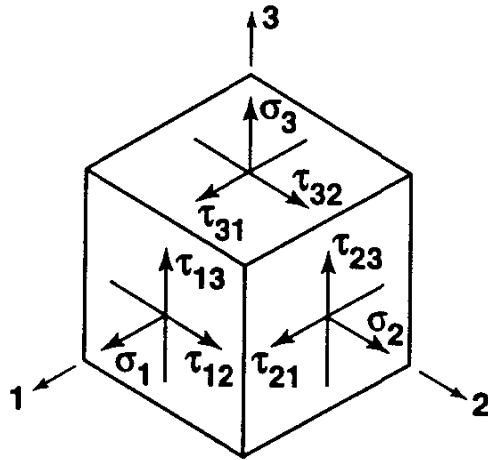
Para evaluar la respuesta de una lámina a las cargas externas, cada componente de la matriz de flexibilidad debe ser determinada, el resultado del siguiente cálculo será el siguiente:



**Figura 2.9 Esquema del esfuerzo aplicado para determinar el cumplimiento de la matriz utilizando los parámetros ortotrópicos.** <sup>[2,3]</sup>

<sup>2,3</sup> Staab, G. H. *Laminar Composites*. 1ra ed. E.E.U.U. Butterworth-Heinemann 1999.

Como resultado al ejercer un esfuerzo sobre un elemento en superficie compuesta se obtendrán los elementos de la figura 2.10.



**Figura 2.10 Detalle de las componentes generadas en un elemento compuesto**

### 2.3.1 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD

Las relaciones deformación- esfuerzo para un material ortotrópico están dadas por la ecuación (2.35):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

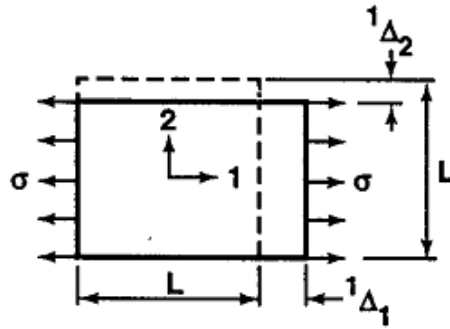
O en forma compacta.

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (2.36)$$

Esta matriz considera que los únicos esfuerzos inducidos en una lámina ortotrópica son los esfuerzos directos de tracción  $\sigma_1$ , producidos por una carga



que actúa en la dirección 1 en un sistema ortogonal de ejes 1-2. La aplicación de esta carga deformará al elemento como se muestra en la figura 2.11.



**Figura 2.11 Representación de la deformación de una lámina sometida a carga en la dirección 1** <sup>[2.4]</sup>.

Esto dará como resultado las deformaciones unitarias siguientes:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \varepsilon_2 = \frac{-\nu_{12} \cdot \sigma_1}{E_1} \quad \varepsilon_3 = \frac{-\nu_{13} \cdot \sigma_1}{E_1} \quad (2.37)$$

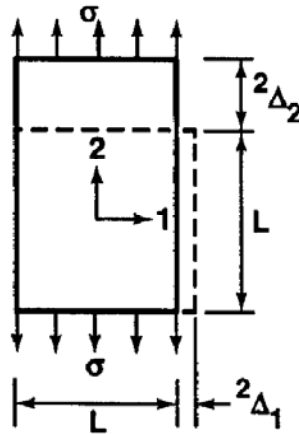
Ahora, si se considera que se le aplica al elemento una carga que produce un esfuerzo de tracción  $\sigma_2$  en la dirección 2, el elemento se deformará como se muestra en la figura 2.12 y las deformaciones resultantes son:

$$\varepsilon_1 = \frac{-\nu_{21} \cdot \sigma_2}{E_2} \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \varepsilon_3 = \frac{-\nu_{23} \cdot \sigma_2}{E_2} \quad (2.38)$$

igual sucede con un esfuerzo de tracción  $\sigma_3$  en el eje 3.

<sup>2.4</sup> Jones, R.M. *Mechanics of Composite Materials*, 2da ed. Estados Unidos, Taylor & Francis, 1999.

$$\varepsilon_1 = \frac{-\nu_{31} \cdot \sigma_3}{E_3} \quad \varepsilon_2 = \frac{-\nu_{32} \cdot \sigma_3}{E_3} \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (2.39)$$



**Figura 2.12** Representación de la deformación de una lámina sometida a carga en la dirección 2.

Por lo que los parámetros  $S_{ij}$ , se definen mediante:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_2} & S_{13} &= \frac{-\nu_{31}}{E_3} \\ S_{21} &= \frac{-\nu_{12}}{E_1} & S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{23} &= \frac{-\nu_{32}}{E_3} \\ S_{31} &= \frac{-\nu_{13}}{E_1} & S_{32} &= \frac{-\nu_{23}}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Puesto que la matriz de flexibilidad es simétrica<sup>[2.2]</sup>, se cumple que:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (2.41)$$

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (2.42)$$

Las ecuaciones (2.41) y (2.42) se denominan relaciones recíprocas. Además de los componentes normales de la matriz de flexibilidad, se deben determinar los términos cortantes  $S_{44}$ ,  $S_{55}$  y  $S_{66}$ , que complementan las ecuaciones constitutivas del sólido elástico ortotrópico para formar la matriz (2.35). Por inducción de corte puro en los planos 2-3, 1-3, y 1-2, la relación entre corte y deformación es:

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.43)$$

donde  $G_{ij}$  es el módulo cortante aplicado al plano  $ij$ . Por lo tanto, la matriz de flexibilidad se la define mediante:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

### 2.3.2 MATRIZ DE RIGIDEZ

La matriz de rigidez [C] proporciona la relación entre los esfuerzos y deformaciones en un material. Esta se conoce como la ley de Hooke generalizada para materiales anisotrópicos y puede ser expresada en forma matricial como:

$$\{ \} \sigma = [ C ] \{ \} \epsilon \quad (2.45)$$

donde [ C ] es la matriz de las constantes del material, las cuales son normalmente obtenidas mediante ensayos.

Las ecuaciones constitutivas para un material anisotrópico pueden ser escritas explícitamente como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

donde [ C ] es la matriz de rigidez del elemento tridimensional.

En el caso de un material ortotrópico, la matriz [C] se simplifica y se denota como [Q]. Esta matriz de rigidez del material ortotrópico se obtiene explícitamente invirtiendo la matriz de flexibilidad:

$$[ Q ] = [ S ]^{-1} \quad (2.47)$$

La relación esfuerzo-deformación para la lámina ortotrópica es por lo tanto:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

Los componentes individuales de la matriz de rigidez son expresados en términos de las constantes elásticas como <sup>[2.1]</sup>:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 \cdot \frac{(1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32})}{\Delta} & Q_{22} &= E_2 \cdot \frac{(1 - \nu_{31} \cdot \nu_{13})}{\Delta} & Q_{33} &= E_3 \cdot \frac{(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}{\Delta} \\ Q_{12} &= E_1 \cdot \frac{(\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23})}{\Delta} = E_2 \cdot \frac{(\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13})}{\Delta} \\ Q_{13} &= E_1 \cdot \frac{(\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32})}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{(\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23})}{\Delta} \\ Q_{23} &= E_2 \cdot \frac{(\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31})}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{(\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13})}{\Delta} \end{aligned}$$

donde:

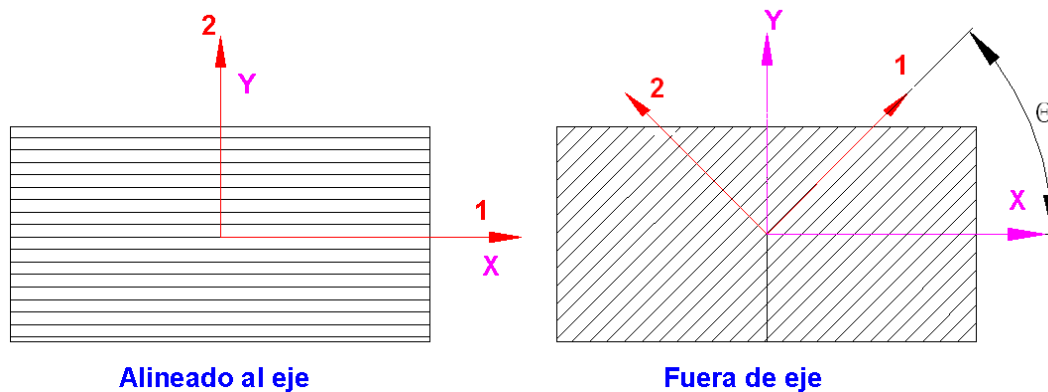
$$\Delta = 1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2 \cdot \nu_{13} \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32} \quad (2.49)$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

Bajo condiciones apropiadas, estas expresiones pueden ser simplificadas. Generalmente se asume que el módulo de flexibilidad en las direcciones 2 y 3 es el mismo ( $E_2 = E_3$ ), lo cual implica que  $\nu_{23} = \nu_{32}$ ,  $\nu_{21} = \nu_{12}$  y  $\nu_{13} = \nu_{31}$ . Se considera que  $E_2 \neq E_3$  cuando la lámina es compactada en el proceso de curado.

### 2.3.3 TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZOS PARA UNA LÁMINA DE ORIENTACIÓN ARBITRARIA

Las ecuaciones (2.35) y (2.46) corresponden al caso particular en que el eje x del sistema de coordenadas coincide con el eje 1 del material (dirección de las fibras). Este es el caso del material conocido como especialmente ortotrópico [2.4]. En realidad, el eje del material no siempre coincide con el eje x, este caso se denomina: configuración fuera de eje, o material generalmente ortotrópico (figura 2.13).



**Figura 2.13 Configuraciones alineadas con el eje, y, fuera de eje.**

Relacionar esfuerzos y deformaciones en el sistema x-y, en base de las relaciones constitutivas desarrolladas para el sistema 1-2, (2-35) y (2-46), requiere el uso de las ecuaciones de transformación siguientes, La transformación de las deformaciones se escribe en forma simplificada como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [ T_\varepsilon ] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \vdots \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

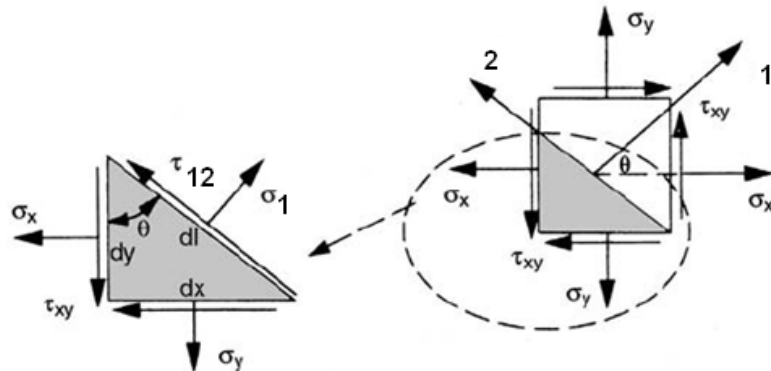
donde la matriz  $[ T_\varepsilon ]$  se define según (2.51)<sup>[2.1]</sup>, siendo  $m = \cos(\theta) = dy/dl$  y  $n = \sin(\theta) = dx/dl$ .

$$[T_\epsilon] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & m \cdot n \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -m \cdot n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2 \cdot m \cdot n & 2 \cdot m \cdot n & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

La transformación de los esfuerzos se escribe en forma simplificada como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [T_\sigma] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \vdots \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

donde la matriz de transformación  $[T_\sigma]$  se obtiene al analizar el equilibrio de esfuerzos en el volumen representativo siguiente (figura 2.14):



**Figura 2.14** Transformación de esfuerzos desde un sistema x-y a un sistema 1-2. <sup>[2.5]</sup>

<sup>2.5</sup> Staab, G. H. *Laminar Composites*. 1ra ed. E.E.U.U. Butterworth-Heinemann 1999.

$$\sum F_1 = \sigma_1 \cdot (t \cdot dl) - \sigma_x \cdot (t \cdot dy) \cdot \cos(\theta) - \sigma_y \cdot (t \cdot dx) \cdot \sin(\theta) - \tau_{xy} \cdot (t \cdot dx) \cdot \cos(\theta) - \tau_{xy} \cdot (t \cdot dy) \cdot \sin(\theta) = 0$$

Despejando  $\sigma_1$  y usando la notación indicada se simplifica a:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cdot m^2 - \sigma_y \cdot n^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot m \cdot n \quad (2.53)$$

Similar procedimiento se sigue para el resto de ejes, de tal forma que la matriz de transformación  $[T_\sigma]$  para tres dimensiones se representa como:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot m \cdot n \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot m \cdot n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -m \cdot n & m \cdot n & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

El vector de esfuerzos se obtiene mediante el vector de desplazamientos mediante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [Q] \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

Entonces se puede reemplazar (2.50) y (2.52) en (2.55), obteniéndose:

$$[T_\sigma] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \vdots \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [Q] \cdot [T_\epsilon] \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \vdots \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$



Despejando los esfuerzos se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \cdot \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\sigma]^{-1} \cdot [Q] \cdot [T_\epsilon] \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \cdot \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Entonces la matriz de rigidez reducida transformada  $[\bar{Q}]$  se obtiene al multiplicar las siguientes matrices:

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot m \cdot n \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot m \cdot n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -m \cdot n & m \cdot n & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & m \cdot n \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -m \cdot n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2m \cdot n & 2m \cdot n & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

El resultado de esta operación es la ecuación constitutiva (2.59):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

donde cada elemento de  $\begin{bmatrix} \bar{Q} \end{bmatrix}$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot m^4 + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{22} \cdot n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4 \cdot Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{12} \cdot n^4 \\ \bar{Q}_{13} &= Q_{13} \cdot m^2 + Q_{23} \cdot n^2 \\ \bar{Q}_{16} &= -Q_{22} \cdot m \cdot n^3 + Q_{11} \cdot m^3 \cdot n - (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot m \cdot n \cdot (m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \cdot n^4 + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{22} \cdot m^4 \\ \bar{Q}_{23} &= Q_{13} \cdot n^2 + Q_{23} \cdot m^2 \\ \bar{Q}_{26} &= -Q_{22} \cdot m^3 \cdot n + Q_{11} \cdot m \cdot n^3 + (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot m \cdot n \cdot (m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\ \bar{Q}_{36} &= (Q_{13} - Q_{23}) \cdot m \cdot n \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cdot m^2 + Q_{55} \cdot n^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cdot m \cdot n \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cdot m^2 + Q_{44} \cdot n^2 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{66} \cdot (m^2 - n^2)^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

### 2.3.4 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA ESTADO DE ESFUERZOS PLANOS EN UN MATERIAL ORTOTRÓPICO

La mayoría de estructuras construidas mediante materiales compuestos son diseñadas para aplicaciones que obedecen a un estado de esfuerzos planos. El estado de esfuerzos planos no es una idealización de la realidad, más bien es la forma natural de esfuerzos a los que se someten las piezas hechas de materiales compuestos. Este es la forma correcta de utilizar un laminado puesto que este no puede asumir altas cargas en otra dirección que no sea a lo largo de las fibras. En el estado de esfuerzos planos se asume que:  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ . Por lo tanto, la ecuación constitutiva en la forma general ortotrópica se reduce a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

La matriz de rigidez para esfuerzo plano también se denomina **matriz de rigidez reducida**. La forma especialmente ortotrópica es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

donde los términos  $Q_{ij}$  son:

$$Q_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad Q_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \quad (2.63) \quad [2.4]$$

La forma generalmente ortotrópica se formula usando las transformaciones de esfuerzos y deformaciones:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

La variación de cada componente  $\bar{Q}$  en función de  $\theta$  se ilustra en la figura 2.12, para una lámina de fibra de carbono y resina epoxy se utilizan las expresiones de (2.60).

### 2.3.5 FORMA INVARIANTE DE $\bar{Q}$

Los componentes de  $\bar{Q}$  pueden ser expresados de una manera alternativa, conocida como la forma invariante de  $\bar{Q}$  [2.5], con el objetivo de determinar rápidamente los términos que modifican la rigidez con respecto al ángulo de orientación de la lámina, para lo cual se utilizan las identidades trigonométricas siguientes.

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) &= \frac{1 + \cos(2\cdot\theta)}{2} \\ \cos^4(\theta) &= \frac{3 + 4\cdot\cos(2\cdot\theta) + \cos(4\cdot\theta)}{8} \\ \sin^4(\theta) &= \frac{3 - 4\cdot\cos(2\cdot\theta) + \cos(4\cdot\theta)}{8} \\ \sin(\theta)\cdot\cos^3(\theta) &= \frac{2\cdot\sin(2\cdot\theta) + \sin(4\cdot\theta)}{8} \\ \sin^3(\theta)\cdot\cos(\theta) &= \frac{2\cdot\sin(2\cdot\theta) - \sin(4\cdot\theta)}{8} \\ \sin^2(\theta)\cdot\cos^2(\theta) &= \frac{1 - \cos(4\cdot\theta)}{8} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Evaluando  $Q_{11}$  usando estas funciones, se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot m^4 + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{22} \cdot n^4 \\ \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot \frac{(3 + 4 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \cos(4 \cdot \theta))}{8} + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot \frac{(1 + \cos(2 \cdot \theta))}{2} \cdot \frac{(1 - \cos(2 \cdot \theta))}{2} + Q_{22} \cdot \frac{(3 - 4 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \cos(4 \cdot \theta))}{8} \\ \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot \frac{(3 + 4 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \cos(4 \cdot \theta))}{8} + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot \frac{(1 - \cos(4 \cdot \theta))}{8} + Q_{22} \cdot \frac{(3 - 4 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \cos(4 \cdot \theta))}{8} \\ \bar{Q}_{11} &= \frac{3 \cdot Q_{11} + 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66} + 3 \cdot Q_{22}}{8} + \left( \frac{4 \cdot Q_{11} - 4 \cdot Q_{22}}{8} \right) \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \left( \frac{Q_{11} - 2 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66} + Q_{22}}{8} \right) \cdot \cos(4 \cdot \theta)\end{aligned}\tag{2.66}$$

Simplificando las ecuaciones, se consigue:

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)\tag{2.67}$$

Las otras expresiones de (2.60), también pueden ser simplificadas con las siguientes definiciones, denominadas invariantes de Q:

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot Q_{11} + 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66} + 3 \cdot Q_{22}) \\ U_2 &= \frac{1}{2} \cdot (Q_{11} - Q_{22}) \\ U_3 &= \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) \\ U_4 &= \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} + 6 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) \\ U_5 &= \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66})\end{aligned}\tag{2.68}$$

La forma explícita de  $\bar{Q}$  puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & \cos(2\cdot\theta) & \cos(4\cdot\theta) \\ U_1 & -\cos(2\cdot\theta) & \cos(4\cdot\theta) \\ U_4 & 0 & -\cos(4\cdot\theta) \\ U_5 & 0 & -\cos(4\cdot\theta) \\ 0 & \frac{\sin(2\cdot\theta)}{2} & \sin(4\cdot\theta) \\ 0 & \frac{\sin(2\cdot\theta)}{2} & \sin(4\cdot\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

### 2.3.6 FORMA INVARIANTE DE LA MATRIZ DE FLEXIBILIDAD PARA EL ESTADO DE ESFUERZOS PLANOS

La matriz de flexibilidad reducida para casos de esfuerzos planos es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_X \\ \epsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Cada componente es expresado en término de las constantes elásticas como:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_2} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Utilizando los mismos procedimientos de transformación, se puede demostrar que las relaciones para una lámina generalmente ortotrópica en el caso de esfuerzo plano es:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= S_{11} \cdot m^4 + (2 \cdot S_{12} + S_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + S_{22} \cdot n^4 \\ \bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + S_{12} \cdot (n^4 + m^4) \\ \bar{S}_{16} &= (2 \cdot S_{11} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m^3 \cdot n - (2 \cdot S_{22} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m \cdot n^3 \\ \bar{S}_{22} &= S_{11} \cdot n^4 + (2 \cdot S_{12} + S_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + S_{22} \cdot m^4 \\ \bar{S}_{26} &= -(2 \cdot S_{22} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m^3 \cdot n + (2 \cdot S_{11} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m \cdot n^3 \\ \bar{S}_{66} &= 2 \cdot (2 \cdot S_{11} + 2 \cdot S_{22} - 4 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + S_{66} \cdot (m^4 + n^4) \end{aligned} \quad (2.73)$$

La matriz de flexibilidad también se puede expresar en términos de invariantes, y para ello se definen constantes  $V_i$ .

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot S_{11} + 2 \cdot S_{12} + S_{66} + 3 \cdot S_{22}) \\ V_2 &= \frac{1}{2} \cdot (S_{11} - S_{22}) \\ V_3 &= \frac{1}{8} \cdot (S_{11} + S_{22} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \\ V_4 &= \frac{1}{8} \cdot (S_{11} + S_{22} + 6 \cdot S_{12} - S_{66}) \\ V_5 &= \frac{1}{2} \cdot (S_{11} + S_{22} - 2 \cdot S_{12} + S_{66}) \end{aligned} \quad (2.74)$$

La expresión matricial para  $\{S\}$  en términos de  $V_i$  es por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{66} \\ S_{16} \\ S_{26} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \cos(2\cdot\theta) & \cos(4\cdot\theta) \\ V_1 -\cos(2\cdot\theta) & \cos(4\cdot\theta) \\ V_4 & 0 & -\cos(4\cdot\theta) \\ V_5 & 0 & -4\cdot\cos(4\cdot\theta) \\ 0 & \sin(2\cdot\theta) & 2\cdot\sin(4\cdot\theta) \\ 0 & \sin(2\cdot\theta) & -2\cdot\sin(4\cdot\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

## 2.4 MECÁNICA DE LAS ESTRUCTURAS TIPO SANDWICH

Las estructuras tipo sándwich comprenden la composición de varios materiales compuestos dispuestos a manera de capas las cuales se forman al pegar dos o más frentes a un material de núcleo relativamente más denso. En este tipo de construcción los frentes resisten casi todas las fuerzas sobre el plano y también los momentos flexionantes fuera del plano dispuesto.

Estos frentes delgados poseen esta resistencia gracias a que su material generalmente está provisto de un módulo de elasticidad mucho más alto y se encuentran localizados a una distancia muy alta del eje neutral del elemento.

El material del núcleo provee el espaciamiento deseado y transmite la carga cortante entre toda la superficie de la capa delgada, para que su resistencia a estas cargas sea efectiva ante un eje neutral común. Este núcleo también provee la mayoría de la rigidez necesaria en su interior a través del componente de la construcción tipo sándwich lo que permite a las capas externas resistir esfuerzos mayores a los límites impuestos por el pandeo que normalmente se presenta en las láminas delgadas.

Los materiales de núcleo generalmente se seleccionan por su peso ligero y compatibilidad con el material de las otras caras del conjunto y la metodología de adhesión de estos dos elementos.



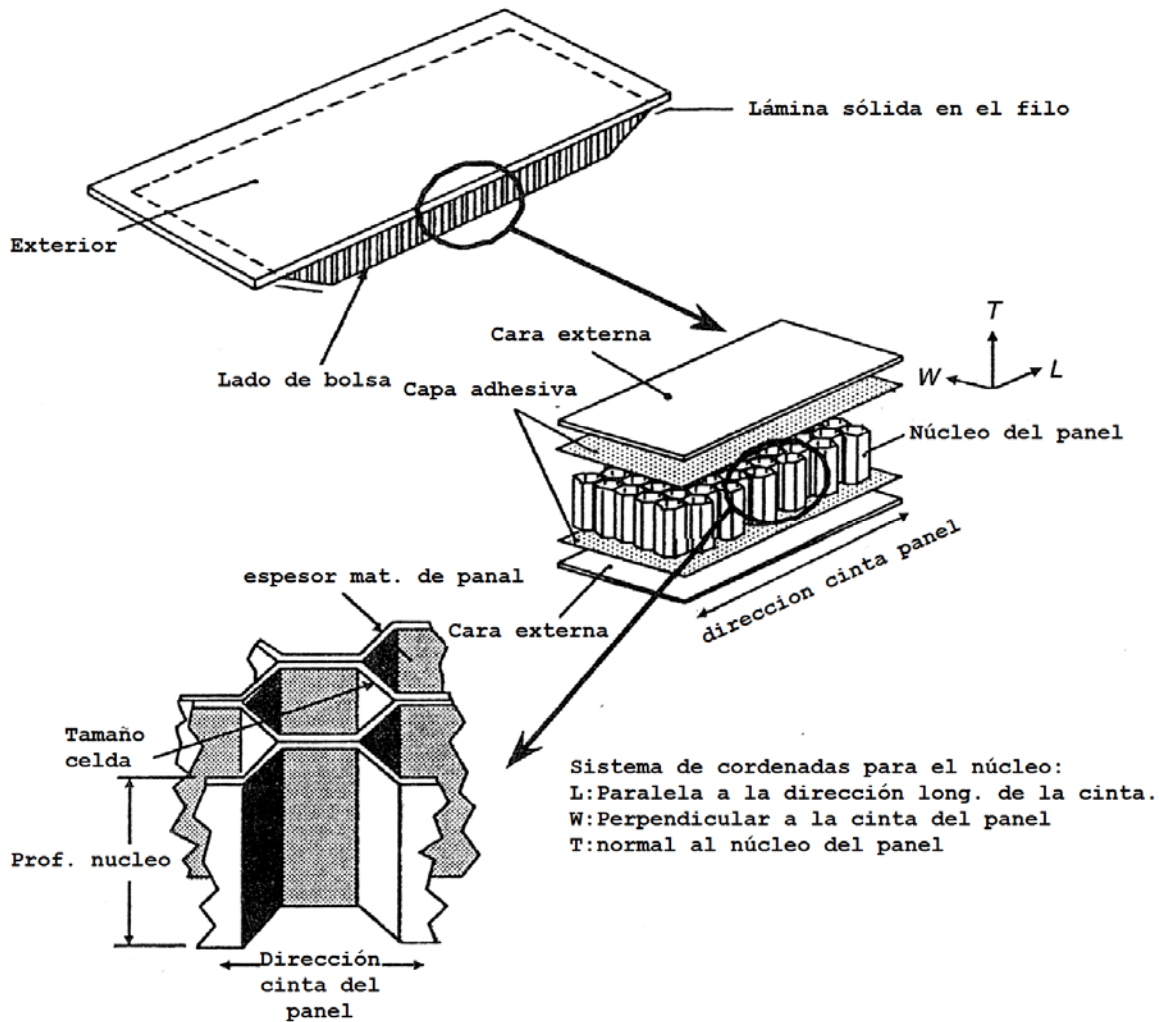


Figura 2.15 Disposición y Construcción del panel de abejas formando una estructura tipo sándwich <sup>[2.6]</sup>

## 2.4.1 MODOS DE FALLA EN LOS PANELES TIPO PANAL DE MIEL:

### 2.4.1.1 Resistencia Insuficiente:

#### A. En el sentido de la falla:

Se caracteriza simplemente por resquebrajamientos en las caras externas de los paneles. Ocurre cuando la resistencia en estas es excedida.

<sup>2.6</sup> Miracle D.B. y Donaldson S.L. *ASM Handbook: Volume 21: Composites. 1ra ed. Estados Unidos*, ASM International, 2001.

**B. Falla por corte transversal:**

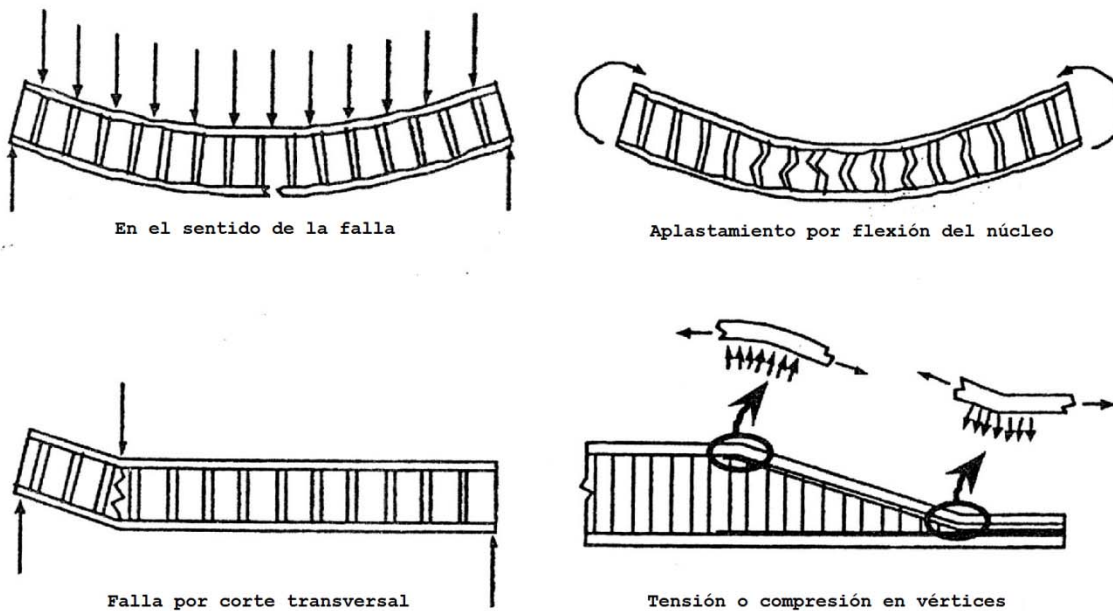
Se puede manifestar como un despegado en la unión del material externo con el núcleo o una falla de corte en el núcleo mismo. Esto ocurre cuando este adhesivo tiene una resistencia al corte insuficiente.

**C. Aplastamiento por flexión en el núcleo:**

Esto ocurre cuando las capas externas tienden a moverse una a la otra bajo flexión. Común en casos donde el núcleo tiene una baja resistencia.

**D. Tensión o compresión en vértices:**

Ocurre en el área de una rampa en donde la porción dispuesta como vértice en la capa final en la cual cambia de dirección, esto induce esfuerzos de tensión en el radio de la rampa, lo cual puede causar despegamiento de la cara con el núcleo o aplastamiento en éste.



**Figura 2.16 Tipos de falla causados por una resistencia insuficiente [2.7]**

<sup>2.7</sup> Miracle D.B. y Donaldson S.L. *ASM Handbook: Volume 21: Composites. 1ra ed. Estados Unidos*, ASM International, 2001.

### 2.4.1.2 Inestabilidad Local:

#### A. Pandeo en hoyos intracelulares

Caracterizado por el pandeo de una cara externa del panel dentro o fuera de los confines de una celda. Puede ocurrir cuando las caras del panel son muy delgadas.

#### B. Arruga en las caras:

Caracterizado por el pandeo interno o externo de la cara externa, acompañado por un daño en el núcleo, rasgamiento del mismo o despegamiento. Común en núcleos de baja densidad.

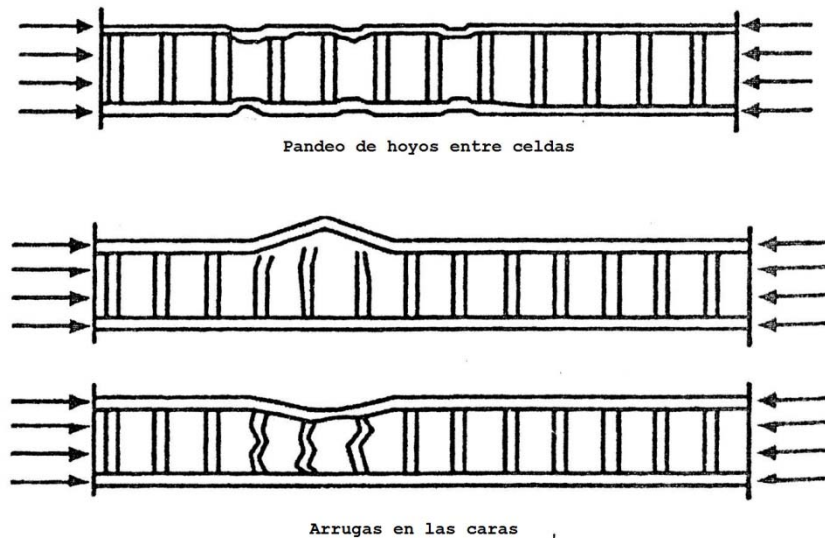


Figura 2.17 Tipos de falla causados por una inestabilidad local <sup>[2.8]</sup>

### 2.4.1.3 Inestabilidad General:

#### A. Pandeo General

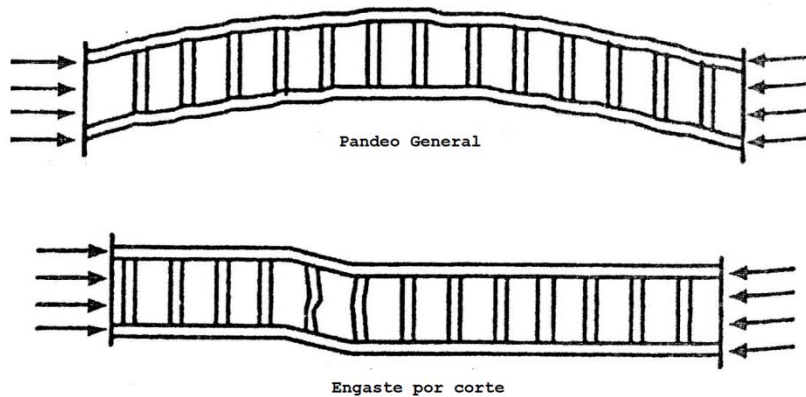
Similar al pandeo clásico de placas y columnas. Ambas partes del compuesto permanecen intactas durante la falla.

#### B. Engaste por corte:

Caracterizado por la falla local del núcleo por corte y la dislocación puntual de las caras externas, ya que la longitud de la falla es muy corta, estos engastes pueden

<sup>2.8</sup> Miracle D.B. y Donaldson S.L. *ASM Handbook: Volume 21: Composites. 1ra ed. Estados Unidos*, ASM International, 2001.

parecer una falla de inestabilidad local, pero en realidad comprende una falla general y ocurre cuando el módulo de corte del núcleo es muy bajo.



**Figura 2.18 Tipos de falla causados por una inestabilidad general** <sup>[2.9]</sup>

#### 2.4.2 DATOS Y DEFINICIONES A ASUMIR:

- La rigidez en el plano en el núcleo del panel es insignificante con respecto al mismo presentado en las caras externas:

$$(E_{x\text{nucleo}} = E_{y\text{nucleo}} = G_{xy\text{nucleo}} = 0$$

- El centroide de todo el elemento de sandwich coincide con el mismo de las caras externas (implicado en el paso previo).
- Las caras externas son muy delgadas por lo que los momentos de inercia entre sus propios centroides son despreciables.
- Las fuerzas de corte normales al plano son transmitidas al núcleo y se distribuyen proporcionalmente a través del espesor del núcleo.
- El punto en el cual la carga es aplicada al extremo es considerada en la mitad de los centroides de las caras.
- El plano medio del elemento sandwich está ubicado en la mitad entre las caras superficiales.

<sup>2.9</sup> Miracle D.B. y Donaldson S.L. *ASM Handbook: Volume 21: Composites. 1ra ed. Estados Unidos*, ASM International, 2001.

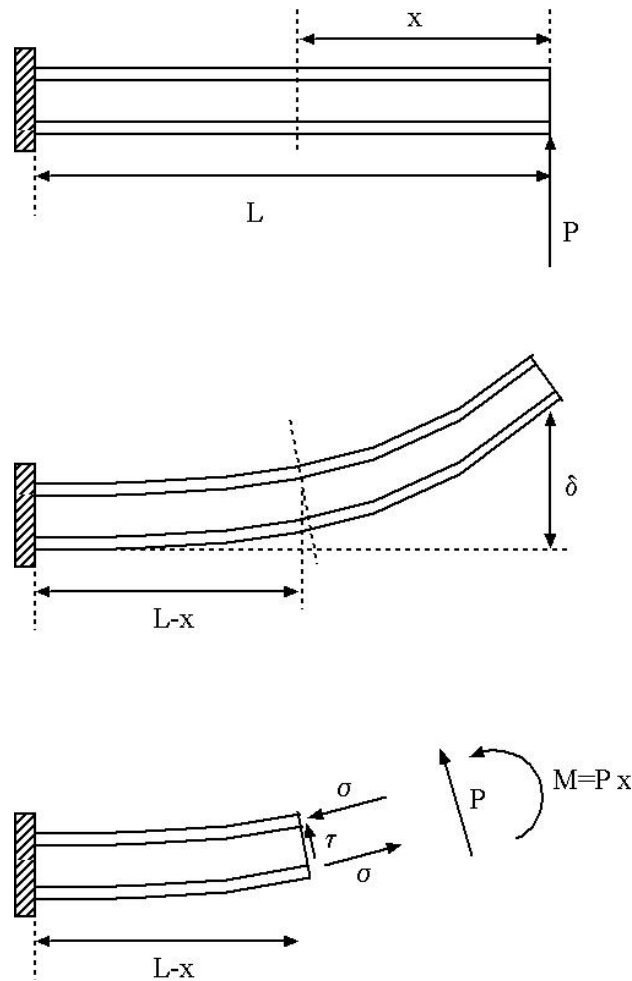
El centroide de todo el elemento sándwich está localizado en un punto donde no ocurre ningún esfuerzo por momento en un panel plano. Cuando la cara en contacto no tiene espesores iguales el centroide no coincide con el plano medio.

$$y_{\text{centroide}} = \frac{\sum_{i=1}^2 (t_i \cdot y_i)}{\sum_{i=1}^2 (t_i)} \quad (2.76)$$

El eje neutral de un elemento sándwich equivale al centroide localizado en el punto donde no existe ningún esfuerzo de momento, esto solo para paneles planos en otro caso no es aplicable.

### 2.4.3 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE ESTRUCTURAS TIPO SANDWICH

Para entender la forma de trabajo de un panel tipo sándwich es necesario diferenciar las formas de trabajo de los paneles y el núcleo. Los paneles soportan las cargas inducidas por la flexión y el núcleo el esfuerzo cortante que actúa sobre el panel. Es decir, los paneles trabajan como laminados solicitados por cargas en su plano, soportando el momento flector que aparece sobre el panel. Para comprender mejor el comportamiento de un panel sándwich, considérese una viga en voladizo, como la indicada en la figura, sometida a una carga por unidad de longitud perpendicular al plano del papel de valor  $P$ . Como se observa en la figura, en una sección genérica de la viga, el momento flector será  $P \cdot x$  y el esfuerzo cortante  $P$ .

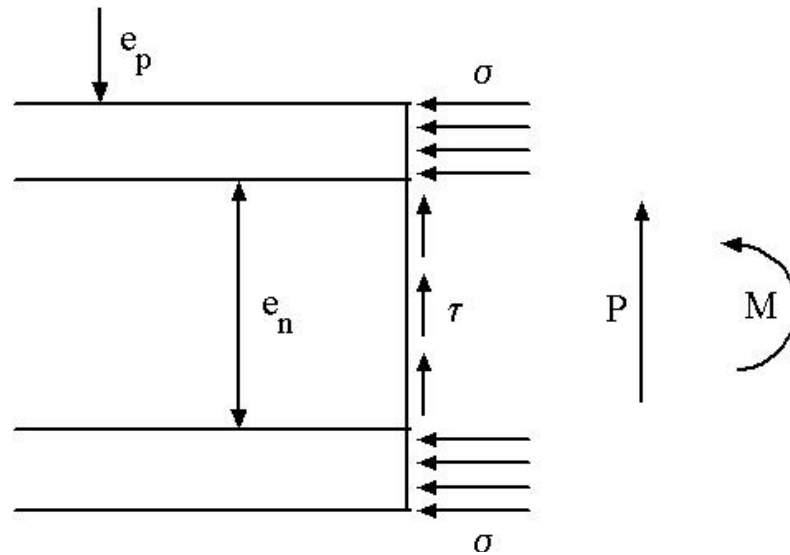


**Figura 2.19 Comportamiento de los paneles sándwich a manera de una viga en voladizo** <sup>[2.10]</sup>

Las placas trabajan en su plano sometidas a compresión (la placa superior) y a tracción (la placa inferior). La tensión  $\sigma$  se considera constante a través del espesor de la placa y no se producen estados de cizalladura fuera del plano de la misma (Figura 2.20). El núcleo trabaja a cortante: no sufre ninguna deformación por flexión. Adicionalmente se supone que, la tensión tangencial  $\tau$ , es constante a

<sup>2.10</sup> <http://ocw.uc3m.es/mecanica-de-medios-continuos-y-teoria-de-estructuras/elasticidad-resistencia-de-materialesii/material-de-clase-1/materiales-compuestos/capitulo7.pdf>, MATERIALES COMPUESTOS TIPO SANDWICH, ESPAÑOL, 2008.

través del espesor del núcleo. Los valores de los esfuerzos de tensión  $\sigma$  y de corte  $\tau$  pueden calcularse, en función de los esfuerzos que parecen, como:



**Figura 2.20 Comportamiento de del esquema sándwich** <sup>[2.10]</sup>

Por lo que el esfuerzo de tensión  $\sigma$  puede calcularse como:

$$\sigma = \frac{M}{e_p \cdot e_n} \quad (2.77)$$

Asi mismo el esfuerzo de corte  $\tau$  puede calcularse como:

$$\tau = \frac{P}{e_n} \quad (2.78)$$

El cálculo de  $\delta$  (flecha de la viga en ménsula) se puede hacer utilizando las fórmulas de Resistencia de Materiales haciendo las siguientes equivalencias:

$$E \cdot I \Leftrightarrow E_p \cdot e_p \cdot \frac{(e_n + e_p)^2}{2} \quad (2.79)$$

$$G \cdot \Omega \Leftrightarrow G_n \cdot (e_n + 2 \cdot e_p) \quad (2.80)$$

Donde:

$E_p$  = Módulo de elasticidad de los paneles externos.

$G_n$  = Módulo de elasticidad de corte del núcleo.

$\tau$  = Esfuerzo de corte en el núcleo.

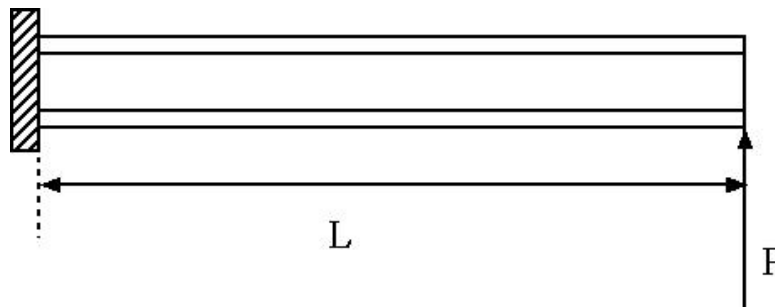
$M$  = Momento flector

$P$  = Carga aplicada

$E.I$  = Rigidez a flexión equivalente de la viga.

$G.\Omega$  = Rigidez a cortante equivalente.

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación que ilustra todo lo anterior:



**Figura 2.21 Esquema sánduche tipo** <sup>[2.10]</sup>

DATOS:

Paneles externos (pieles):

Material: Aluminio

$e_p = 2.15 \text{ mm}$ ,  $E_p = 65200 \text{ MPa}$ ,  $G_p = 24\ 890 \text{ Mpa}$ .

Núcleo:

Material: Espuma de poliuretano



$e_n = 80 \text{ mm}$ ,  $E_n = 21.5 \text{ MPa}$ ,  $G_n = 7.71 \text{ Mpa}$ .

$E.I = 475.10^2$  (Flecha en mm y carga en N)

$G.\Omega = 650.10^2$

$$\delta(\text{mm}) = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{P \cdot L}{G \cdot \Omega} = (0.7 \cdot 10^{-2} + 1.54 \cdot 10^{-2}) P(\text{N})$$

(carga a flexión + cortante)  
(2.81)

#### 2.4.4 CARACTERIZACIÓN DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE UN PANEL SANDWICH.

La caracterización mecánica de un panel sándwich se realiza mediante el ensayo de flexión en cuatro puntos, tal como se indica en la figura. Como resultados de este ensayo se pueden obtener: la máxima tensión en las pieles, la tensión tangencial y el módulo de rigidez (G) del núcleo como se muestra en figura.

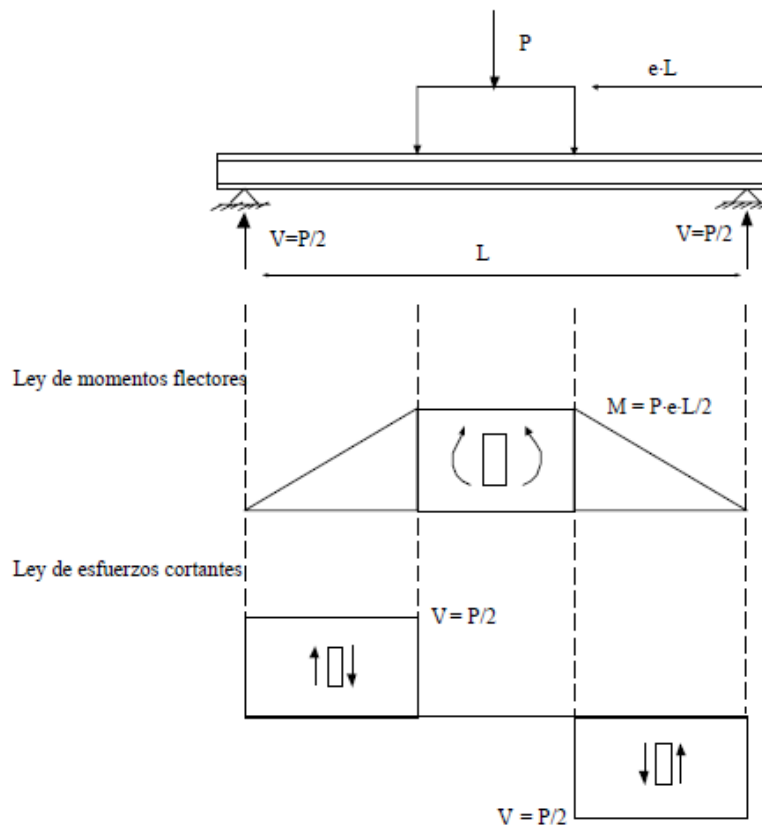


Figura 2.22 Comportamiento de la estructura tipo sándwich [2.10]

Los datos de este ensayo son:

B = Ancho de la viga.

e = Espesor total del panel sándwich ( $e = 2 \cdot e_p + e_n$ )

$\nu$  = Coeficiente de Poisson de la piel.

E = Módulo de elasticidad de la piel.

$A_n$  = área a cortante:

$$A_n = B \cdot \frac{e + e_p}{2} \quad (2.82)$$

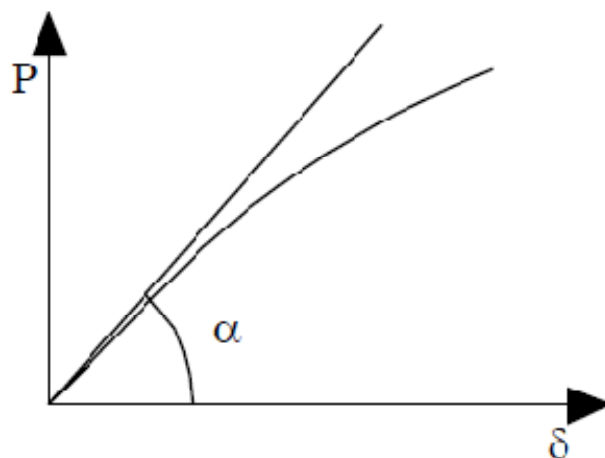
D = Rigidez a flexión:

$$D = \frac{E \cdot I}{1 - \nu^2} \quad (2.83)$$

I = Momento de inercia respecto al eje neutro:

$$I = \frac{B \cdot (e - e_n)}{4} \cdot \left( \frac{e + e_n}{2} \right)^2 \quad (2.84)$$

De este ensayo se obtiene un registro de la carga aplicada frente al desplazamiento del punto medio de la viga, a partir del cual es posible construir la curva de la Figura 2.23.



**Figura 2.23 Registro fuerza-desplazamiento obtenido de un ensayo de flexión**

A partir de esta curva y considerando los diagramas de esfuerzos y además se ha utilizado las ecuaciones de la resistencia de materiales para vigas en las que se ha hecho la sustitución de las ecuaciones (2.79) y (2.80).se posible determinar las diferentes variables:

**Tensión en las pieles:**

$$\sigma = \frac{M \cdot \frac{e}{2}}{I} \quad (2.85)$$

**Tensión cortante en el núcleo:**

$$\tau = \frac{V}{A_n} \quad (2.86)$$

**Máxima deflexión:**

$$\delta = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot D} \cdot (3 \cdot e - 4 \cdot e^3) + \frac{V \cdot e \cdot L}{A_n \cdot G_n} \cdot k \quad (2.87)$$

**Módulo de rigidez:**

$$G = \frac{\left(\frac{P}{\delta}\right)_0 \cdot e \cdot L}{B \cdot (e + e_n) \cdot \left[1 - \left(\frac{P}{\delta}\right)_0 \cdot \frac{L^3 \cdot (3 \cdot e - 4 \cdot e^3)}{48 \cdot D}\right]} \quad (2.88)$$

Donde  $\left(\frac{P}{\delta}\right)_0$  es la pendiente de la curva fuerza-desplazamiento en el origen.

## **2.4.5 NÚCLEO EN NIDO DE ABEJA <sup>[2.10]</sup>**

Dentro de los diferentes núcleos para paneles sándwich se suele emplear con profusión el denominado "nido de abeja", que consisten en láminas muy delgadas unidas unas a otras de manera que forman un conjunto de células interconectadas. Este tipo de configuración del núcleo tiene su origen en China (hace 2000 años) y se ha utilizado ampliamente en la Industria Aeronáutica (desde 1940).

### **2.4.5.1 TIPOS DE NIDO DE ABEJA**

Los nidos de abeja pueden ser fabricados utilizando un material base metálico u otro no metálico. A continuación se resumen los materiales más utilizados.

A. *Metálicos.* Se pueden emplear diferentes aceros y aleaciones ligeras, principalmente de aluminio. Entre ellas se encuentran:

- Al 5052 Aleación muy utilizada en la industria aeronáutica debido a que es resistente a la corrosión.

- Al 5056 Esta aleación presenta también una buena resistencia a la corrosión, con unas propiedades mecánicas mejores que la Al5052.

- Al 2024 Posee unas buenas propiedades mecánicas a temperaturas elevadas.

B. *No metálicos.*

- Tejidos de fibra de vidrio impregnados con resina. Presentan un excelente comportamiento a altas temperaturas y unas bajas constantes dieléctricas.

- NOMEX® (Fibra de aramida/resina fenólica). Se caracterizan por su alta resistencia y tenacidad.

- Cartón Kraft con resina fenólica. Este material es muy utilizado por su bajo costo y alta resistencia.

- Fibra de carbono/resina epoxi.

- Tejido Kevlar/resina epoxi.

Los nidos de abeja metálicos resultan baratos y resistentes, mientras que los no metálicos son insensibles a la corrosión y resultan buenos aislantes térmicos.