



Fundamentos de análisis cinemático y dinámico de mecanismos planos

Jaime F. Echeverría y José F. Olmedo



Fundamentos de análisis cinemático y dinámico de mecanismos planos

Jaime Echeverría y José Olmedo

Primera edición electrónica: agosto, 2021

ISBN: 978-9942-765-67-3

Revisión científica:

Mtr. Segundo Rosalino Chicaiza Tayupanta

Dr. Gustavo López Paredes

Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE

Crnl. E.M.C. Roberto Jiménez Villareal, Dr.

Rector

Publicación autorizada por:

Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE

Tcm. I. GEO. Xavier Molina Ph. D.

Presidente

Corrección de estilo y diseño

Lcdo. Xavier Chinga

Imagen de cubierta: <https://acortar.link/jw0Jwb>

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico. El contenido, uso de fotografía, gráficos, cuadros, tablas, y referencias es de exclusiva responsabilidad de los autores.

Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE
Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador
www.espe.edu.ec

Los derechos de esta edición electrónica son de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en www.repositorio.espe.edu.ec.



Fundamentos de análisis cinemático y dinámico de mecanismos planos

Jaime F. Echeverría
José F. Olmedo



... A nuestras familias
... a nuestros alumnos

Jaime Echeverría

jfecheverria@espe.edu.ec

Ingeniero mecánico, Escuela Politécnica Nacional EPN. Magister en Diseño, Producción y Automatización Industrial, Escuela Politécnica Nacional EPN. Investiga en temas: Diseño y análisis de mecanismos, Teoría de vibraciones, Diseño de máquinas, Simulación de sistemas mecánicos y Mecánica Computacional.

José Olmedo

jfolmedo@espe.edu.ec

Ingeniero mecánico, Escuela Politécnica del Ejército ESPE. Magister en Materiales, Diseño y Producción, Escuela Politécnica Nacional EPN. Investiga en temas: Análisis y síntesis de mecanismos, Vibraciones, Elementos finitos y sus aplicaciones y Diseño de máquinas.

Índice

Dedicatoria.....	3
Presentación.....	17
Capítulo I - Introducción.....	19
1.1 Conceptos básicos.....	21
1.2 Mecanismos planos y espaciales.....	23
1.3 Cadenas cinemáticas.....	23
1.4 Pares cinemáticos.....	24
1.5 Representación esquemática de los pares cinemáticos.....	26
1.6 Diagramas de esqueleto o cinemáticos.....	27
1.7 Movilidad o grados de libertad de un mecanismo.....	28
1.7.1 Fórmula o ecuación de Gruebler.....	29
1.8 Mecanismo de cuatro barras - Criterio de Grashof.....	32
1.9 Equivalencia cinemática.....	37
1.10 Inversión cinemática.....	39
1.11 Sistemas de referencia.....	41
Capítulo II - Cinemática en mecanismos planos.....	43
2.1 Introducción.....	45
2.2 Cinemática del sólido rígido.....	45
2.2.1 Traslación pura.....	46
2.2.2 Rotación pura.....	46
2.2.3 Movimiento plano general.....	48

2.2.4 Aceleración de Coriolis.....	51
2.3 Método de lazos vectoriales cerrados independientes con el uso de números complejos - Método de Raven.....	53
2.3.1 Análisis cinemático del mecanismo manivela corredera por el método de Raven.....	56
2.3.2 Análisis cinemático del mecanismo de cuatro barras por el método de Raven.....	67
2.3.3 Análisis cinemático del mecanismo manivela corredera invertido por el método de Raven.....	81
2.4 Análisis cinemático de mecanismos planos de un grado de libertad usando el método general.....	86
2.4.1 Análisis cinemático mediante el método general de los mecanismos manivela-corredera, cuatro barras y manivela-corredera invertido.....	89
2.5 Mecanismos de un grado de libertad con múltiples lazos.....	116
2.6 Análisis cinemático de puntos de interés en mecanismos planos.....	141
2.7 Curvas de acoplador.....	147
2.8 Ángulo de transmisión.....	151
2.9 Ventaja mecánica.....	155
2.10 Mecanismos de varios grados de libertad.....	157
2.11 Problemas propuestos.....	176
Capítulo III - Fuerzas dinámicas en mecanismos planos.....	183
3.1 Introducción.....	185
3.2 Cinética del cuerpo rígido.....	186
3.3 Análisis de fuerzas dinámicas - Método matricial.....	188

3.3.1 Análisis de fuerzas dinámicas para un mecanismo manivela-corredera.....	188
3.3.2 Análisis de fuerzas dinámicas para un mecanismo de cuatro barras.....	201
3.3.3 Análisis de fuerzas dinámicas para un mecanismo manivela corredera invertido.....	216
3.4 Problemas propuestos.....	242
Referencias	248
Apéndices	251
Apéndice A.....	253
Apéndice B.....	255

Índice de figuras

Figura 1 Mecanismo elevador de automóviles.....	21
Figura 2 Junta simple y junta múltiple.....	22
Figura 3 Tipos de eslabones.....	23
Figura 4 Tipos de cadenas.....	24
Figura 5 Pares cinemáticos inferiores.....	25
Figura 6 Pares cinemáticos superiores.....	26
Figura 7 Mecanismo real y su diagrama cinemático.....	27
Figura 8 Mecanismo de (a) prensa (b) retorno rápido (c) elevación.....	28
Figura 9 Grados de libertad de un sólido rígido (a) en el espacio (b) en el plano.....	29
Figura 10 Mecanismos para el cálculo de su movilidad: (a) Mecanismo de elevación de automóviles (b) Cizalladora (c) Mecanismo triturador de rocas (d) Pala mecánica.....	30
Figura 11 Mecanismos para el ejemplo 3.....	32
Figura 12 Mecanismos de cuatro barras o cuadrilátero articulado.....	33
Figura 13 Categorías de mecanismos de acuerdo al criterio de Grashof.....	35
Figura 14 Inversiones geométricas de un mecanismo de cuatro barras.....	35
Figura 15 Mecanismo de cuatro barras para el ejemplo 4.....	36
Figura 16 Mecanismo para el ejemplo 5.....	37
Figura 17 Mecanismo cinemáticamente equivalente al de la Figura 16.....	38

Figura 18 <i>Mecanismos y sus equivalentes cinemáticos</i>	38
Figura 19 <i>Inversiones cinemáticas de un mecanismo de cuatro barras</i>	40
Figura 20 <i>Esquema del ejemplo 6</i>	40
Figura 21 <i>Sistemas de referencia en un mecanismo de cuatro barras</i>	42
Figura 22 <i>Representación de un vector como complejo</i>	45
Figura 23 <i>Movimiento de traslación: (a) Rectilíneo, y (b) Curvilíneo</i>	46
Figura 24 <i>Sólido rígido en rotación pura</i>	47
Figura 25 <i>Velocidad de un punto A en un cuerpo en rotación pura</i>	47
Figura 26 <i>Aceleración de un punto A en un cuerpo en rotación pura</i>	48
Figura 27 <i>Movimiento plano general de un cuerpo rígido desde la posición 1 a la posición 2</i>	48
Figura 28 <i>Descomposición de un movimiento plano general en traslación y rotación pura sucesiva</i>	49
Figura 29 <i>Movimiento de rodamiento sin deslizamiento</i>	50
Figura 30 <i>Movimiento de rotación y de rotación y traslación simultáneas</i>	52
Figura 31 <i>Mecanismos para el ejemplo 1</i>	55
Figura 32 <i>Mecanismo manivela corredera</i>	56
Figura 33 <i>Lazo vectorial cerrado para el mecanismo manivela corredera</i>	56
Figura 34 <i>Configuraciones geométricas del mecanismo manivela corredera - ángulos θ_3 y θ^*_3</i>	58

Figura 35 <i>Polígono vectorial de velocidades del mecanismo manivela corredera en un instante dado.....</i>	59
Figura 36 <i>Polígono vectorial de aceleraciones del mecanismo manivela corredera en un instante dado.....</i>	61
Figura 37 <i>Mecanismo manivela corredera para análisis cinemático de ciclo completo del ejemplo 2.....</i>	61
Figura 38 <i>Análisis gráfico de posiciones para las configuraciones geométricas de un mecanismo manivela corredera para un ciclo completo.....</i>	63
Figura 39 <i>Mecanismo de cuatro barras.....</i>	68
Figura 40 <i>Lazo vectorial cerrado para el mecanismo de cuatro barras.....</i>	68
Figura 41 <i>Inversiones geométricas del mecanismo de cuatro barras - ángulos θ_3 , θ_4, θ_3_ y θ_4_.....</i>	71
Figura 42 <i>Polígono vectorial de velocidades del mecanismo de cuatro barras en un instante dado.....</i>	72
Figura 43 <i>Polígono vectorial de aceleraciones del mecanismo de cuatro barras en un instante dado.....</i>	73
Figura 44 <i>Mecanismo de cuatro barras para análisis cinemático de ciclo completo del ejemplo 3.....</i>	74
Figura 45 <i>Análisis gráfico de posiciones para las configuraciones geométricas de un mecanismo de cuatro barras para un ciclo completo.....</i>	76
Figura 46 <i>Mecanismo manivela corredera invertido.....</i>	81
Figura 47 <i>Lazo vectorial cerrado para el mecanismo manivela corredera invertido.....</i>	82
Figura 48 <i>Polígono vectorial de aceleraciones del mecanismo manivela corredera invertido para el instante mostrado.....</i>	84
Figura 49 <i>Polígono vectorial de aceleraciones del mecanismo manivela corredera invertido en un instante dado.....</i>	85

Figura 50 Mecanismo manivela corredera y su correspondiente lazo vectorial cerrado.....	89
Figura 51 Mecanismo de cuatro barras y su correspondiente lazo vectorial cerrado.....	92
Figura 52 Mecanismo manivela corredera invertido y su correspondiente lazo vectorial cerrado.....	96
Figura 53 Mecanismo del ejemplo 4 y su correspondiente lazo vectorial cerrado.....	99
Figura 54 Mecanismo del ejemplo 5 y su correspondiente lazo vectorial cerrado.....	106
Figura 55 Mecanismo de una estación de bombeo de petróleo y su correspondiente lazo vectorial cerrado.....	111
Figura 56 Mecanismo de una sierra de corte y su correspondiente lazo vectorial cerrado.....	114
Figura 57 Mecanismo de retorno rápido y sus correspondientes lazos vectoriales cerrados.....	117
Figura 58 Mecanismo del ejemplo 9 y sus correspondientes lazos vectoriales cerrados.....	124
Figura 59 Mecanismo del ejemplo 10.....	131
Figura 60 Contornos independientes o lazos cerrados del ejemplo 10.....	132
Figura 61 Contornos independientes o lazos cerrados del ejemplo 10.....	136
Figura 62 Mecanismo del ejemplo 11 y el lazo vectorial empleado.....	141
Figura 63 Mecanismo manivela corredera invertido del ejemplo 12 y sus correspondientes lazos vectoriales cerrados.....	144
Figura 64 Mecanismo manivela corredera del ejemplo 13.....	148
Figura 65 Lazo vectorial cerrado para la determinación de la curva de acoplador.....	148

Figura 66 <i>Curva de acoplador para el punto P del mecanismo del ejemplo 13.....</i>	149
Figura 67 <i>Mecanismo de cuatro barras del ejemplo 14 y su correspondiente lazo vectorial cerrado para la determinación de la curva de acoplador.....</i>	150
Figura 68 <i>Curva de acoplador para el punto Q del mecanismo empujador de una cinta de película del ejemplo 14.....</i>	151
Figura 69 <i>Ángulo de transmisión para un mecanismo de cuatro barras.....</i>	152
Figura 70 <i>Ángulo de transmisión para un mecanismo manivela corredera descentrado y su geometría.....</i>	152
Figura 71 <i>Ángulos de transmisión mínimo y máximo para un mecanismo manivela corredera descentrado.....</i>	153
Figura 72 <i>Ángulo de transmisión para un mecanismo de cuatro barras y la geometría de su mecanismo.....</i>	154
Figura 73 <i>Geometría de un mecanismo de cuatro barras.....</i>	156
Figura 74 <i>Mecanismo de cuatro barras con acoplador telescópico del ejemplo 17 y su correspondiente diagrama cinemático.....</i>	160
Figura 75 <i>Contorno vectorial cerrado del mecanismo de cuatro barras con acoplador telescópico del ejemplo 17.....</i>	161
Figura 76 <i>Mecanismo eslabonado del ejemplo 18.....</i>	165
Figura 77 <i>Contorno vectorial cerrado del mecanismo eslabonado del ejemplo 18.....</i>	165
Figura 78 <i>Mecanismo el ejemplo 19.....</i>	169
Figura 79 <i>Lazos vectoriales cerrados del mecanismo del ejemplo 19.....</i>	170
Figura 80 <i>Mecanismo para análisis de fuerzas estáticas.....</i>	185
Figura 81 <i>Sólido rígido en movimiento plano general.....</i>	186

Figura 82 Geometría del mecanismo manivela corredera para el análisis de fuerzas dinámicas.....	188
Figura 83 Lazos vectoriales para el cálculo de las aceleraciones de los centros de masa.....	189
Figura 84 Diagrama de fuerzas para la manivela.....	190
Figura 85 Regiones laminar y turbulenta de la capa límite durante el flujo sobre una placa plana.....	191
Figura 86 Diagrama de fuerzas para la corredera.....	192
Figura 87 Diagrama de fuerzas para el bastidor del mecanismo.....	194
Figura 88 Mecanismo del ejemplo 1.....	196
Figura 89 Lazos para el análisis cinemático de los centros de masa del mecanismo del ejemplo 1.....	196
Figura 90 Diagramas cinéticos de los eslabones móviles del mecanismo.....	197
Figura 91 Geometría del mecanismo de cuatro barras para el análisis de fuerzas dinámicas.....	202
Figura 92 Lazos vectoriales para el cálculo de las aceleraciones de los centros de masa.....	202
Figura 93 Diagrama de fuerzas para el eslabón manivela.....	204
Figura 94 Diagrama de fuerzas para el eslabón de salida.....	205
Figura 95 Diagrama de fuerzas para el bastidor del mecanismo.....	206
Figura 96 Diagrama de fuerzas para el bastidor del mecanismo.....	208
Figura 97 Mecanismo del ejemplo 2.....	210
Figura 98 Lazos para el análisis cinemático de los centros de masa del mecanismo del ejemplo 2.....	211
Figura 99 Diagramas cinéticos de los eslabones móviles del mecanismo.....	212

Figura 100 Diagramas cinéticos de los eslabones móviles del mecanismo.....	217
Figura 101 Diagramas cinéticos de los eslabones móviles del mecanismo.....	219
Figura 102 Lazos vectoriales para el cálculo de las aceleraciones de los centros de masa.....	220
Figura 103 Diagrama de fuerzas para la manivela.....	221
Figura 104 Diagrama de fuerzas para el acoplador.....	222
Figura 105 Diagrama de fuerzas para el collarín.....	223
Figura 106 Diagrama de fuerzas para el bastidor del mecanismo.....	225
Figura 107 Mecanismo del ejemplo 3.....	226
Figura 108 Lazos para el análisis cinemático de los centros de masa del mecanismo del ejemplo	227
Figura 109 Diagramas cinéticos de los eslabones móviles del mecanismo.....	228
Figura 110 Lazo vectorial cerrado OAB del mecanismo del ejemplo 4.....	233
Figura 111 Esquema vectorial para el análisis de la cinemática de los centros de masa del mecanismo del ejemplo 4.....	236
Figura 112 Fuerzas dinámicas en los eslabones móviles del mecanismo del ejemplo 4.....	238

Presentación

El presente texto tiene como objetivo esencial volcar nuestra experiencia en una de las temáticas más interesantes de la Teoría de Mecanismos y Máquinas, como es el *Análisis Cinemático y Cinetostático de Mecanismos*, y plasmarlo en un trabajo dedicado a los estudiantes de asignaturas como Teoría de Máquinas, Mecanismos, Cinemática y Dinámica de Máquinas, Análisis de Mecanismos y otras afines, así como a los lectores interesados en el tema.

Durante los largos años que hemos dictado la asignatura de Mecanismos en las carreras de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Mecatrónica de Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, hemos creído adecuado y pertinente actualizar el currículo de esta asignatura explicando procedimientos analíticos del Análisis Cinemático y Cinetostático de la Teoría de Mecanismos y Máquinas que, a la luz del actual avance en el ámbito computacional, es evidente que proveen a los ingenieros una estrategia más global y general en el tratamiento de los mecanismos, filosofía que se ha reflejado en este texto.

Acompañan a la metodología explicada un número suficiente, a nuestro parecer, de ejemplos que explican detalladamente su utilización y una serie de problemas propuestos para que el estudiante o lector interesados puedan aplicar los conocimientos adquiridos. Estos métodos y sus aplicaciones pueden ser implementados en varios paquetes de software como Mathematica, MathCAD, Matlab, Maple, algo que ya hemos hecho en un texto anteriormente publicado por los autores¹, e inclusive sugerimos a los estudiantes y/o lectores verificar los resultados a través del uso de simuladores computacionales como Working Model, ArtasSAM ó ADAMS; en dicho sentido, pensamos ampliar la presente edición con dichas añadiduras y pronto publicaremos la resolución de todos los ejercicios propuestos en el texto con implementaciones computacionales y simulaciones.

El Capítulo 1 cubre los conceptos básicos necesarios para comprender las metodologías aplicadas en la Cinemática y Dinámica de Mecanismos Planos.

El Capítulo 2 trata la metodología analítica del estudio de los mecanismos planos y su aplicación en mecanismos de uno o más lazos vectoriales, así como de uno o más grados de libertad; adicionalmente, se explican temáticas conexas como curvas de acoplador, cinemática de puntos importantes de un mecanismo, ángulo de transmisión y ventaja mecánica.

¹ Máquinas y Mecanismos – Implementación con Wolfram Mathematica – Primera Edición Electrónica - Octubre 2018 – ISBN 978-9942-765-41-3. Comisión Editorial Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

El Capítulo 3 finalmente trata del análisis cinetostático de un mecanismo plano donde se utiliza un procedimiento analítico para encontrar las fuerzas en pares cinemáticos, así como la fuerza o par motor, la fuerza de sacudimiento y el par de sacudimiento.

En dos apéndices adicionados al final del texto el estudiante encontrará las formulaciones cinemáticas ampliadas para los mecanismos de manivela corredera y cuatro barras para diversas geometrías de dichos mecanismos.

Esperamos que el presente texto sea de gran ayuda para estudiantes y lectores interesados en el estudio de la Teoría de Mecanismos y Máquinas.

A futuro esperamos ampliar el presente texto con más metodologías analíticas usadas en la actualidad al analizar mecanismos y máquinas, e incluso ampliar el ámbito del texto involucrando otros aspectos como el Balanceo de Mecanismos Planos o la Síntesis de Mecanismos.

Esperamos que el presente trabajo sea de utilidad y apoyo, estamos prestos de recibir sus sugerencias para mejorar las posteriores ediciones, así como nos informen de cualquier error presente en el texto porque, aunque hayamos puesto el máximo de cuidado en evitarlos, de seguro los habrá.

Los autores



<https://acortar.link/fZJvll>

CAPÍTULO I

Introducción

1.1 Conceptos básicos

Es importante, en primera instancia, definir algunos términos que van a ser de uso frecuente en el estudio y comprensión de la cinemática y dinámica de los mecanismos planos.

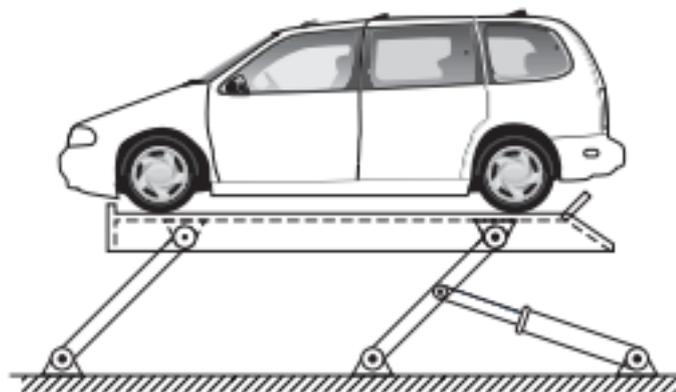
Máquina, es un dispositivo capaz de transformar y transmitir energía a través de sus componentes con el objetivo de generar una tarea específica, el ejemplo más común en nuestra vida cotidiana es el automóvil, máquina capaz de transformar la energía química de la combustión en el motor para generar energía cinética debido al movimiento del mismo, existiendo en esencia la conversión de energía química a cinética.

Mecanismo, es una unión de elementos rígidos, denominados usualmente eslabones, capaces de transformar un tipo de movimiento en otro, con la generación y transmisión de fuerzas y/o momentos en el proceso (Figura 1).

Usualmente, una máquina es la conexión de varios mecanismos, como en el caso del automóvil, sin embargo, en el caso de las máquinas más simples, estas pueden conformarse de un solo mecanismo y en tal situación, los términos *máquina* y *mecanismo* se utilizan como sinónimos

Figura 1

Mecanismo elevador de automóviles



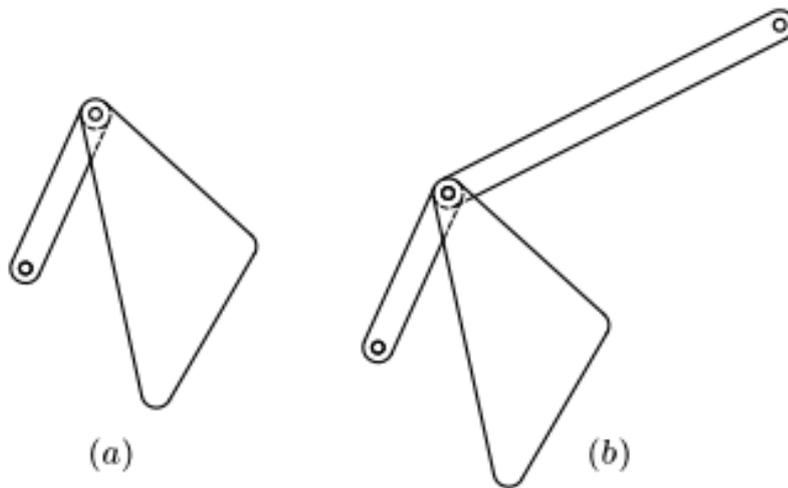
Es obvio que el funcionamiento de un mecanismo produce y transmite movimientos y cargas (fuerzas y momentos), por lo que el análisis del mismo requiere del estudio de su cinemática y su dinámica. La cinemática de los mecanismos es el estudio del movimiento de los mismos sin importar los factores que lo producen, mientras que la dinámica consiste en el análisis de las cargas a las que se ve sometido cada uno de los eslabones en un mecanismo.

Una cadena cinemática es un conjunto de eslabones unidos entre sí; sin embargo, para que esta pueda ser considerada como mecanismo, es necesario que al menos uno de los eslabones se encuentre fijo y sirva como referencia al movimiento de los demás. Este eslabón fijo de un mecanismo se conoce con el nombre de bancada o bastidor. Un mecanismo adicionalmente puede tener partes flexibles (por ejemplo resortes) como elementos del mismo, sin embargo, estos elementos no son catalogados formalmente como eslabones en sí mismos para el análisis cinemático, dado que no son elementos rígidos, aunque en el estudio de las fuerzas actuantes en el mecanismo sí se deben tomar en cuenta.

Una junta o par cinemático es la unión de dos más eslabones mediante un elemento de conexión o no, que provoca un movimiento relativo entre ellos. Una junta que conecta dos eslabones, se denomina junta simple (Figura 2-a), mientras que si conecta tres o más eslabones se llama junta múltiple (Figura 2-b).

Figura 2

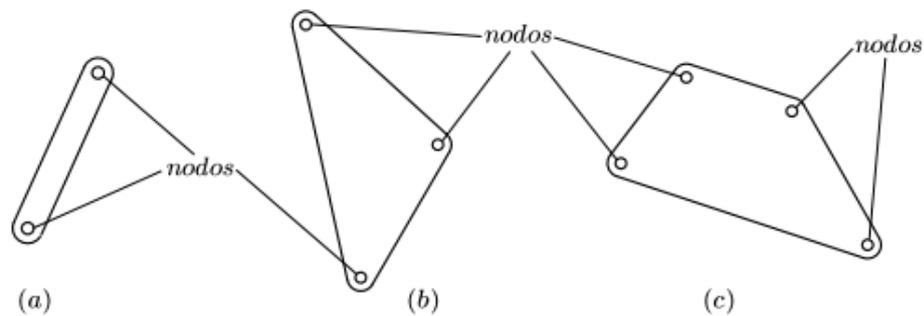
Junta simple y junta múltiple



Un eslabón es un sólido rígido que, al poseer al menos un punto (nodo) de enlace se conecta a través de este a otro u otros eslabones, formando sendos pares cinemáticos. Si el eslabón posee dos nodos de enlace se denomina binario (Figura 3-a), si tiene tres se denomina ternario (Figura 3-b) y si tiene cuatro, cuaternario (Figura 3-c).

Figura 3

Tipos de eslabones



1.2 Mecanismos planos y espaciales

Un mecanismo se denomina plano, si los movimientos del mismo se ejecutan en un mismo plano o en planos paralelos y el presente texto está dedicado exclusivamente al análisis de dichos mecanismos.

Por otro lado, si los movimientos de un mecanismo ocurren de forma general en el espacio y no en planos paralelos entonces el mecanismo es tridimensional o espacial. Muchos campos de estudio de la maquinaria industrial se enmarcan dentro del análisis de mecanismos planos, mientras que otros, como la Robótica por ejemplo, involucra el estudio de mecanismos espaciales.

1.3 Cadenas cinemáticas

Como se mencionó anteriormente una cadena cinemática se considera a la unión de varios eslabones entre sí. Las cadenas cinemáticas existen de tres tipos: abiertas, cerradas y mixtas.

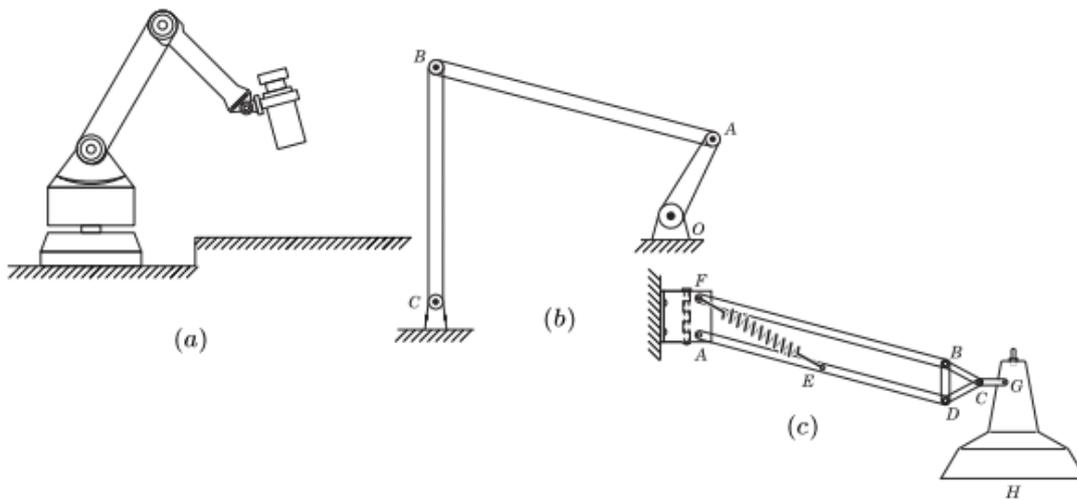
Una cadena cinemática abierta posee eslabones que forman un contorno abierto, es decir, la cadena no forma un camino cerrado, pues principia pero no acaba en el mismo eslabón, ejemplo de este tipo de cadena lo constituye un brazo robótico como el mostrado en la Figura 4-a.

Una cadena cinemática cerrada, por otro lado, es aquella en la cual sus eslabones forman uno o más contornos cerrados, tal como se muestra en el mecanismo de cuatro barras de la Figura 4-b.

Una cadena mixta está conformada de una combinación de cadenas abiertas y cerradas como se observa en la Figura 4-c, donde ADBF y BCD son cadenas cinemáticas cerradas, mientras ADCGH es una cadena cinemática abierta.

Figura 4

Tipos de cadenas



1.4 Pares cinemáticos

En general, según Reuleaux (1876), los pares cinemáticos se subdividen en pares cinemáticos inferiores y pares cinemáticos superiores. Los primeros, son aquellos en los cuales la unión entre eslabones se realiza mediante un elemento de unión que tiene contacto superficial con los mismos, mientras que en los segundos la conexión es directa entre eslabones, generándose un contacto lineal o puntual.

Los pares cinemáticos inferiores más importantes son:

Par giratorio o de rotación (R), aquel en el cual está permitida únicamente la rotación relativa entre los eslabones que conforman el par (Figura 5-a).

Par prismático o de traslación (T), aquel en el cual está permitido un movimiento lineal o de traslación relativa entre los eslabones conformantes del par (Figura 5-b).

Par helicoidal o de tornillo (H), aquel en el cual los eslabones están facultados a moverse de forma relativa tanto en traslación como en rotación simultáneos, pero relacionados entre sí a través del perfil de hélice o tornillo que los conecta (Figura 5-c).

Par cilíndrico (C), aquel en el cual los eslabones poseen movimientos relativos independientes de traslación y rotación (Figura 5-d).

Par de rótula o esférico (S), aquel en el cual se conectan dos eslabones permitiéndoseles giros relativos en cualquier dirección en el espacio (Figura 5-e)

Par plano (P), aquel en el cual los eslabones poseen movimientos relativos independientes de traslación en cualquier dirección a lo largo de un plano y rotación perpendicular a dicho plano (Figura 5-f).

Usualmente los dos primeros son los más empleados en los mecanismos analizados en esta obra.

Los pares cinemáticos superiores más significativos son:

Par de rodadura sin deslizamiento, es la conexión entre un eslabón que rueda sin deslizarse sobre una superficie, generalmente plana, cuyo contacto es puntual o lineal (si se considera la tridimensionalidad del par). En este caso la rotación y el desplazamiento están relacionados entre sí (Figura 6-a).

Par de leva, es la conexión entre un eslabón giratorio o con oscilación traslacional denominado leva y otro de movimiento giratorio o traslacional oscilante denominado seguidor con la particularidad de que el contacto entre ambos eslabones es puntual en dos dimensiones y lineal en el espacio (Figura 6-b).

Par de engranaje, es la conexión entre dos eslabones generalmente rotatorios con un perfil especial de involuta que permite un contacto puntual (2D) o lineal (3D) entre los mismos (Figura 6-c).

Figura 5

Pares cinemáticos inferiores

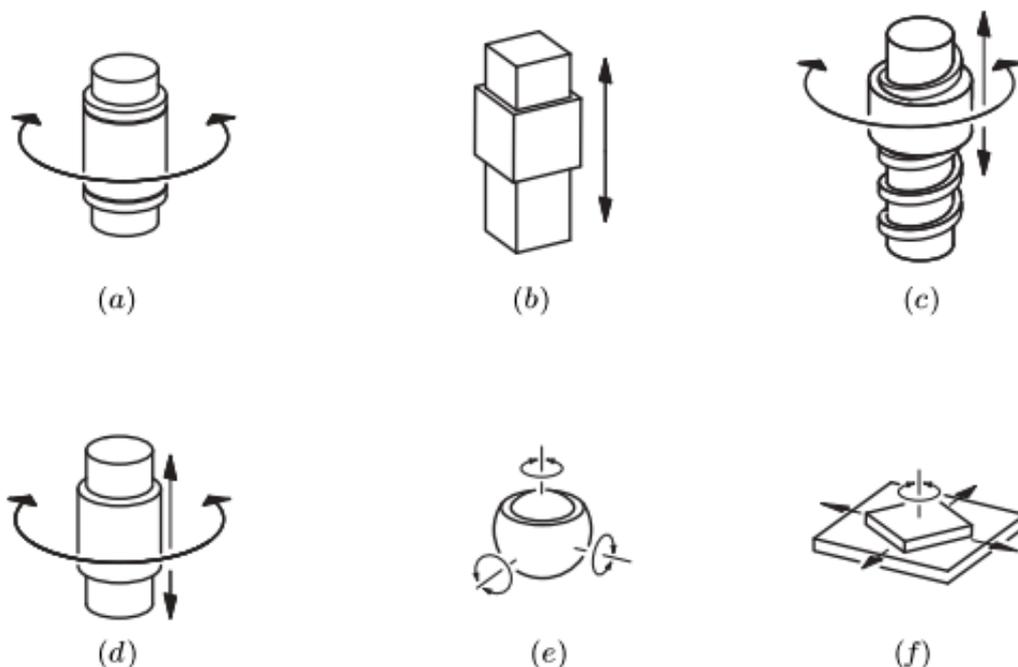
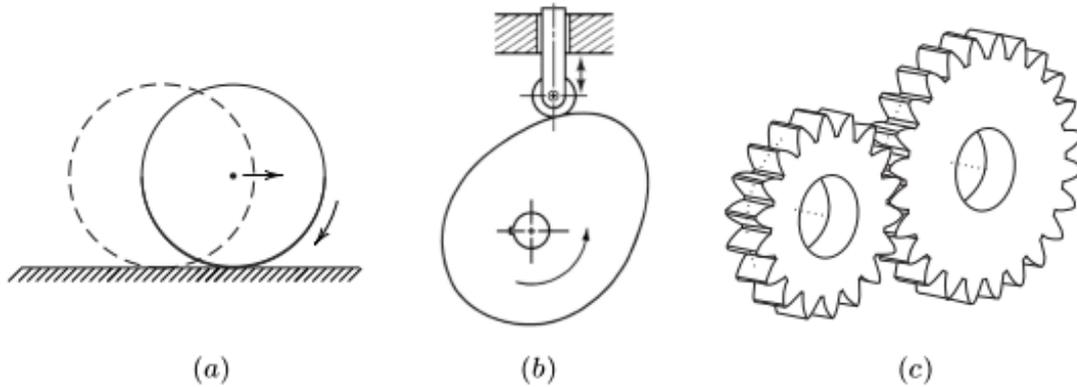


Figura 6

Pares cinemáticos superiores



Los mecanismos planos formados exclusivamente de pares cinemáticos inferiores: de rotación, de traslación o helicoidal se denominan comúnmente *eslabonamientos planos* o *mecanismos articulados planos* y serán esencialmente el objeto de análisis en este texto.

1.5 Representación esquemática de los pares cinemáticos

El siguiente cuadro presenta la representación esquemática simplificada de los pares cinemáticos de los mecanismos planos:

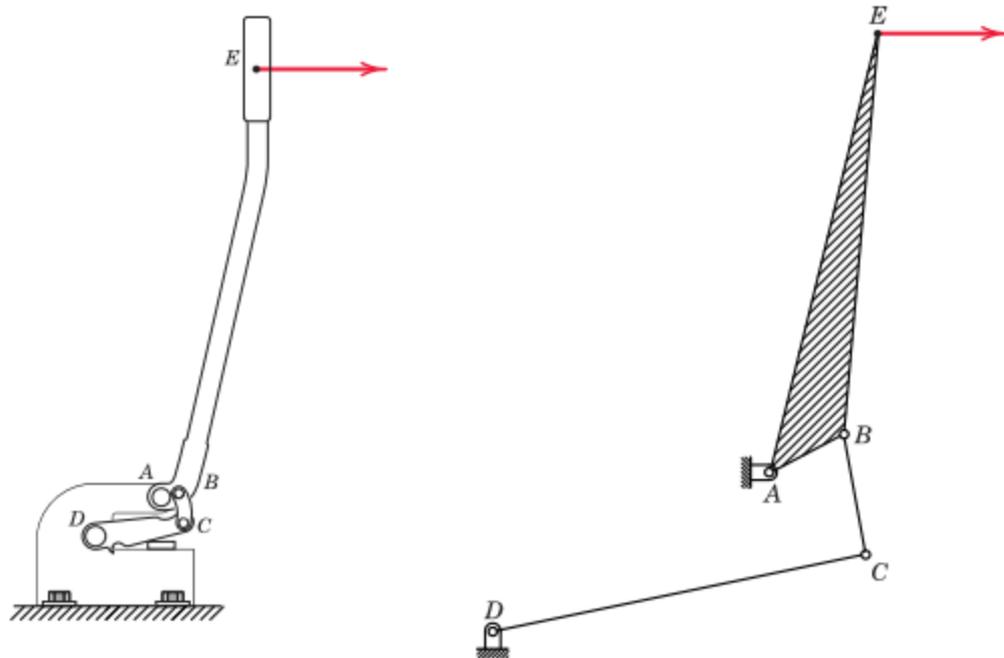
Tipo de par cinemático	Representación esquemática
Bastidor (Nodo) / Eslabón fijo	
Par giratorio o de rotación	
Par de rotación conectado a bastidor	
Par de rotación entre un eslabón	
Par prismático o de traslación	

1.6 Diagramas de esqueleto o cinemáticos

Un diagrama de esqueleto, también denominado cinemático, se define como un esquema simplificado de un mecanismo real en el que solamente se representan las dimensiones significativas² que influyen en la cinemática y la dinámica del mecanismo como se ejemplifica en la Figura 7:

Figura 7

Mecanismo real y su diagrama cinemático



Antes de iniciar un análisis cinemático o dinámico de un mecanismo eslabonado, es necesario construir el diagrama de esqueleto del mismo con el objetivo de abstraerse de la forma real de los eslabones y tener en cuenta únicamente la geometría esencial en el estudio del mecanismo.

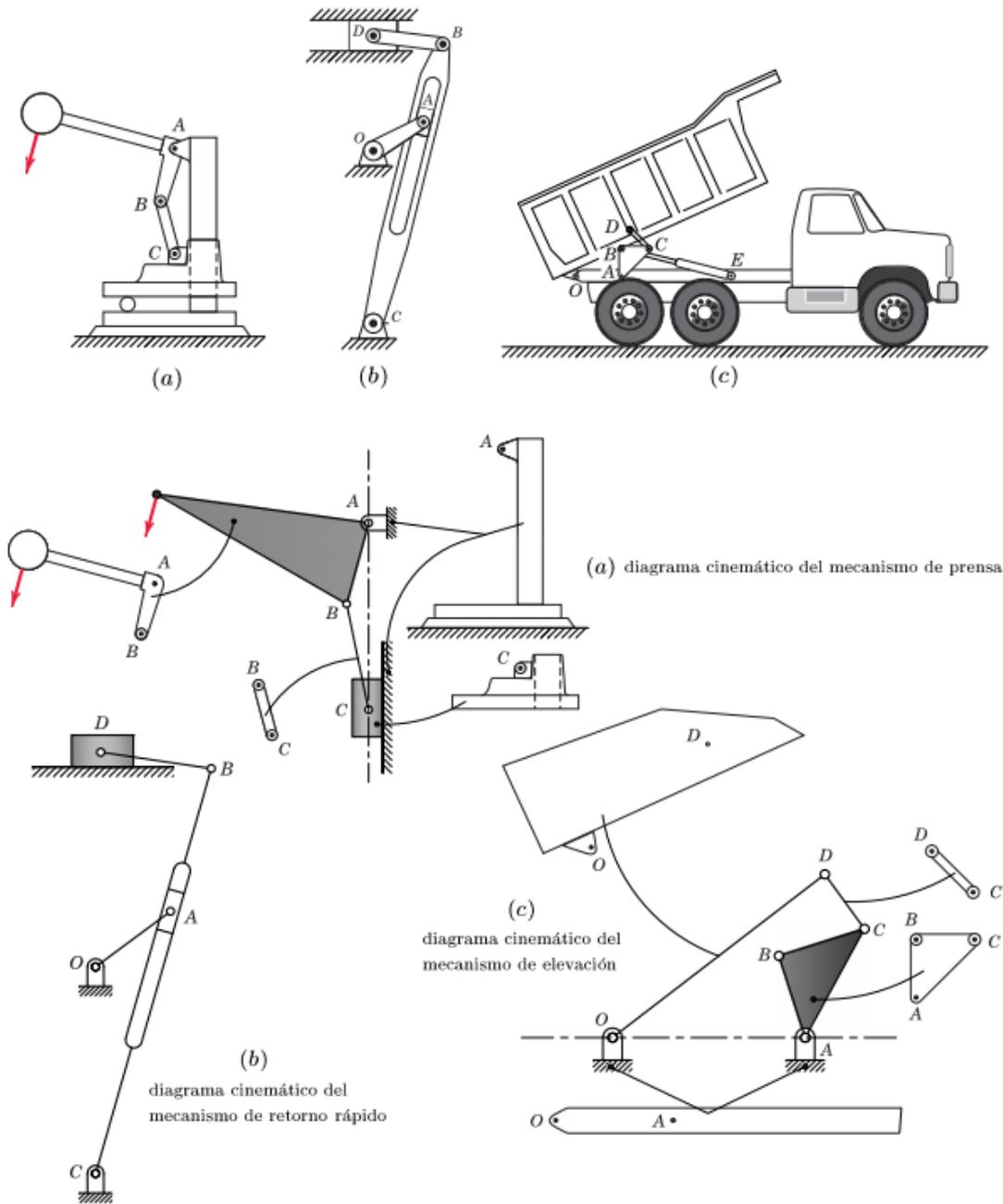
Ejemplo 1

Dibuje los diagramas de esqueleto para los mecanismos mostrados en la Figura 8 de la página siguiente.

² Sin embargo, para el análisis debe tenerse en cuenta que cada eslabón es un plano ilimitado

Figura 8

Mecanismo de (a) prensa (b) retorno rápido (c) elevación



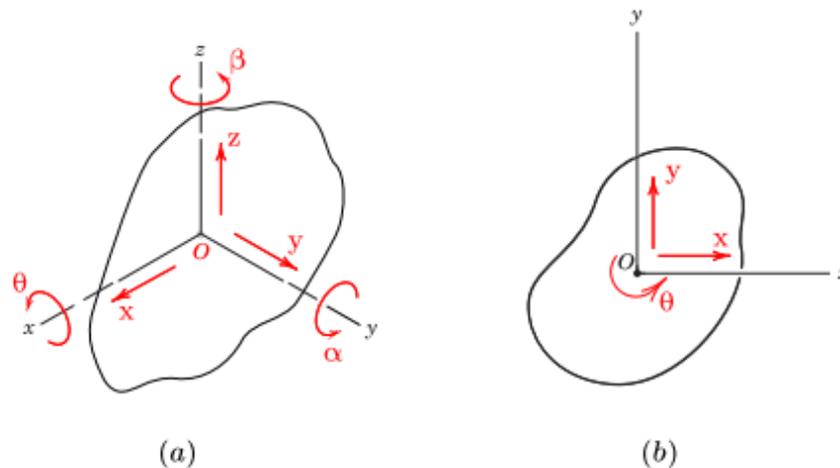
1.7 Movilidad o grados de libertad de un mecanismo

Un concepto muy importante es el de grado de libertad, definiéndose a este como el número de coordenadas independientes que se necesitan para describir con exactitud la posición de un cuerpo o sólido rígido. Así entonces un cuerpo libre en el espacio posee seis grados de libertad ya que para definir su

posición exacta es necesario describir seis coordenadas: x , y , z , β , α y θ (Figura 9-a); de igual modo un cuerpo en el plano tiene tres grados de libertad dado que son necesarias tres coordenadas para identificar su posición de manera única e inequívoca: x , y , θ (Figura 9-b).

Figura 9

Grados de libertad de un sólido rígido (a) en el espacio (b) en el plano



1.7.1 Fórmula o ecuación de Gruebler

Un solo cuerpo libre ubicado en el plano tiene tres grados de libertad, por lo que si se tiene n cuerpos libres en el plano todos ellos poseerán de forma global $3n$ grados de libertad; si uno de ellos se fija entonces para todos los n cuerpos, incluidos el fijo, se tendrá $3n - 3$ o $3(n-1)$ grados de libertad. Si ahora se empiezan a conectar entre si los n eslabones mediante pares cinemáticos, entonces cada junta provocará una pérdida de grados de libertad del conjunto de n eslabones unidos, de acuerdo al siguiente cuadro:

Tipo de par cinemático	Grados de libertad perdidos
Par giratorio o de rotación	2 (j_1)
Par prismático o de traslación	2 (j_1)
Par helicoidal o de tornillo	2 (j_1)
Par de rodadura sin deslizamiento	2 (j_1)
Par de leva, engrane (par de rodadura con deslizamiento)	1 (j_2)

Una vez unidos todos los eslabones entre sí, incluido el eslabón de bancada o fijo, se ha formado un mecanismo cuyo número de grados de libertad está dado por la fórmula:

$$m = 3(n - 1) - 2j_1 - j_2 \quad (1)$$

Donde:

m = número de grados de libertad del mecanismo, también llamada movilidad.

n = número total de eslabones que forman el mecanismo, incluido el bastidor.

j_1 = número de pares cinemáticos que pierden dos grados de libertad y mantienen uno activo (pares giratorios, de traslación, de tornillo o de rodadura sin deslizamiento).

j_2 = número de pares cinemáticos que pierden un grado de libertad y mantienen dos activos (pares de leva y engrane).

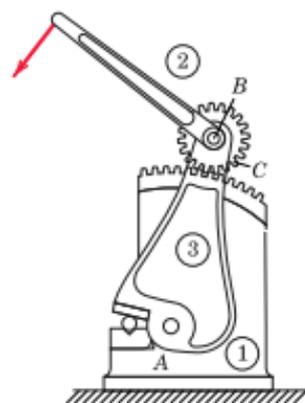
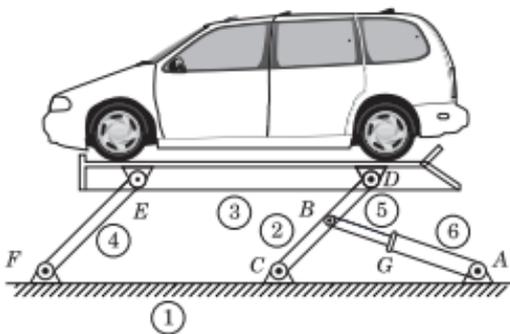
La anterior ecuación se denomina fórmula o ecuación de Gruebler y es válida en la forma establecida para mecanismos planos.

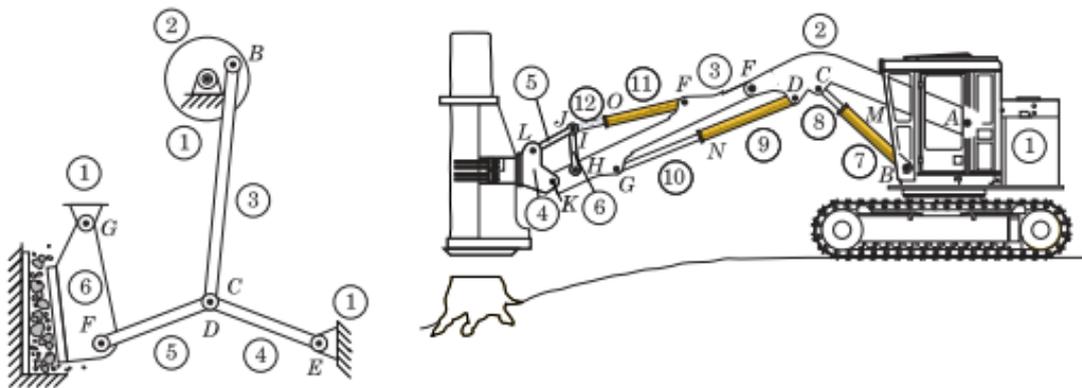
Ejemplo 2

Calcule, mediante la fórmula de Gruebler, la movilidad de los mecanismos indicados en la Figura 10.

Figura 10

Mecanismos para el cálculo de su movilidad: (a) Mecanismo de elevación de automóviles (b) Cizalladora (c) Mecanismo triturador de rocas (d) Pala mecánica





Para el mecanismo de elevación de automóviles:

$$m = 3(n-1) - 2j_1 - j_2$$

$$m = 3(6-1) - 2(7) = 1$$

Para la cizalladora:

$$m = 3(n-1) - 2j_1 - j_2$$

$$m = 3(3-1) - 2(2) - 1 = 1$$

Para el mecanismo triturador de rocas:

$$m = 3(n-1) - 2j_1 - j_2$$

$$m = 3(6-1) - 2(7) = 1$$

Para la pala mecánica:

$$m = 3(n-1) - 2j_1 - j_2$$

$$m = 3(12-1) - 2(15) = 3$$

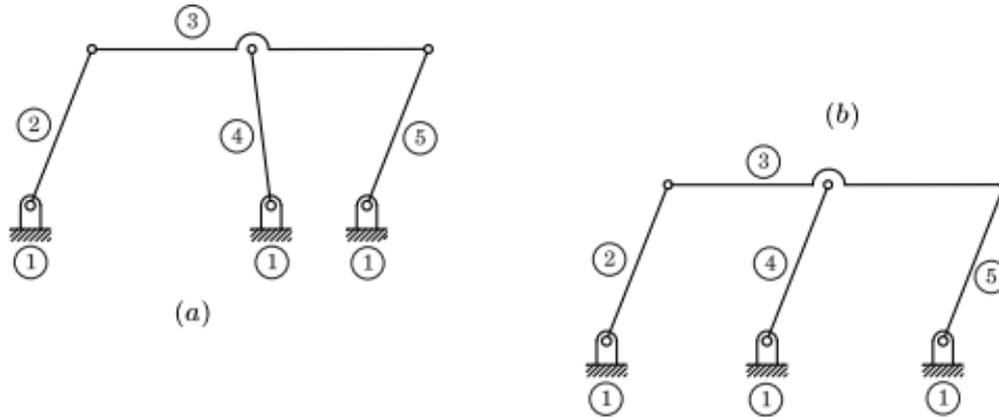
La fórmula de Gruebler solo considera el número y tipo de pares cinemáticos que forman un mecanismo, pero no la disposición geométrica en la que se conectan los mismos, por lo que existen mecanismos en los que esta característica puede llevar a un resultado erróneo en la aplicación de la fórmula de Gruebler tal como se expone en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Calcule, mediante la fórmula de Gruebler, la movilidad de los mecanismos indicados en la Figura 11.

Figura 11

Mecanismos para el ejemplo 3



Para el mecanismo (a):

$$m = 3(n-1) - 2j_1$$

$$m = 3(5-1) - 2(6) = 0$$

Para el mecanismo (b):

$$m = 3(n-1) - 2j_1$$

$$m = 3(5-1) - 2(6) = 0$$

Según la fórmula de Gruebler ambos mecanismos que tienen 5 eslabones, incluido el bastidor, y 6 pares cinemáticos de rotación no deberían moverse, sin embargo el mecanismo (b) por la disposición geométrica particular del mecanismo si se mueve y tiene 1 grado de libertad por lo que falla en el cálculo de la movilidad del mismo. Al ser paralelos los eslabones 2, 3 y 4 ello permite físicamente que el mecanismo (b) se mueva y al no serlo, como en el caso (a), dicha disposición geométrica traba el mecanismo en cuyo caso la fórmula de Gruebler es correcta.

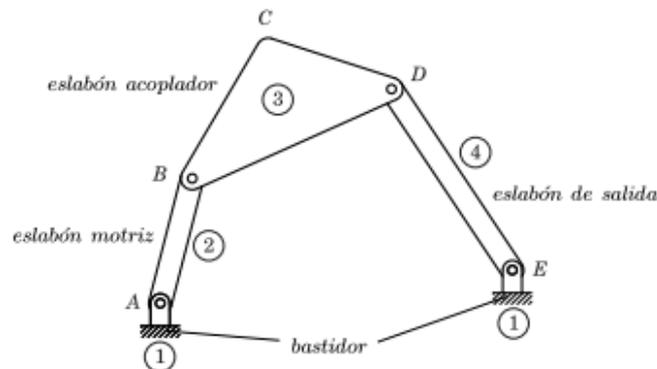
1.8 Mecanismo de cuatro barras - Criterio de Grashof

Es el mecanismo eslabonado de lazo cerrado más simple que existe, pero su simplicidad, al contrario de lo que se piensa, lo hace el más útil y versátil de los mecanismos, pues no requiere de demasiado mantenimiento, es sencillo de construir, barato y por ello, el más empleado. Este eslabonamiento tiene tres elementos móviles: un bastidor y cuatro juntas de revolución, la fórmula

de Gruebler le confiere a este mecanismo una movilidad de 1, es decir, solo es necesario darle movimiento a uno de los eslabones móviles para poder definir el movimiento de los otros dos y por ende de todo el mecanismo. Un esquema del mecanismo de cuatro barras se muestra en la Figura 12:

Figura 12

Mecanismos de cuatro barras o cuadrilátero articulado



El eslabón al que se le imparte movimiento se denomina *eslabón motriz*, de *entrada* o *conductor*; el otro eslabón conectado al bastidor es el eslabón de salida, seguidor o conducido mientras que el eslabón que “acopla” los eslabones de entrada y salida se llama eslabón *acoplador*, *flotante*, *transmisor* o *biela*.

Como es sencillo de observar, el eslabón motriz y el de salida, al tener conexión a bastidor, están obligados a tener un movimiento de rotación pura, mientras que el eslabón acoplador posee un movimiento más complejo de rotación y traslación combinados o movimiento plano general. Un punto cualquiera del eslabón acoplador, llamado punto o nodo trazador de trayectoria, genera una curva denominada *acopladora* que es de sexto orden³.

En un mecanismo de cuatro barras sus eslabones móviles podrían dar un giro completo o simplemente oscilar, ello depende de las dimensiones de los eslabones. El criterio de Grashof confirma este hecho estableciendo que “en un mecanismo plano de cuatro barras para que al menos un eslabón del mecanismo dé un giro completo es necesario que la suma de los eslabones más corto y más largo no pueda ser mayor que la suma de los dos eslabones restantes”, con base en esta afirmación se puede categorizar de forma general a los mecanismos de cuatro barras como mecanismos Grashof, aquellos que cumplen con el criterio anterior, y mecanismos no-Grashof a los que no lo hacen.

³ Wunderlich(1963) dedujo que el máximo orden de una curva de acoplador, q , para un mecanismo con n eslabones conectados con juntas de revolución únicamente, esta dado por: $q=3\left(\frac{n-1}{2}\right)$

Suponga que las longitudes de los eslabones de un mecanismo de cuatro barras se nominan como: s al eslabón más corto, l al más largo, p y q a los eslabones restantes, entonces los mecanismos Grashof, se pueden dividir en cinco categorías:

Si: $s + l < p + q$:

Mecanismo manivela-balancín, cuando el eslabón más corto está conectado al bastidor y será el eslabón de entrada; en este mecanismo el eslabón de entrada da un giro completo mientras que el de salida ejecuta una oscilación.

Mecanismo doble manivela o eslabonamiento de arrastre, cuando el eslabón más corto es el bastidor; en este caso tanto el eslabón de entrada como el de salida realizan giro completo.

Mecanismo doble balancín, cuando el eslabón más corto es el acoplador, y en esta categoría de mecanismo eslabón de entrada y salida ejecutan una oscilación. Es fácil inferir que dado que dos de los tres eslabones móviles no realizan giro completo y al cumplir con el criterio de Grashof al menos uno debe hacerlo entonces el eslabón acoplador efectuará el giro completo.

Mecanismo balancín-manivela, es cuando el eslabón más corto lo constituye el eslabón de salida y se halla pivotado al bastidor, en cuyo caso el eslabón de entrada efectúa una oscilación mientras que el de salida realiza giro completo.

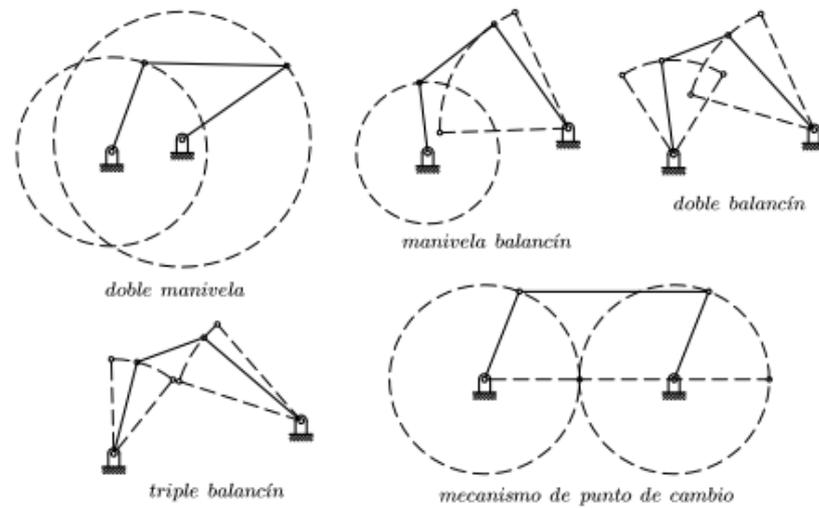
Si: $s + l = p + q$:

Es posible las cuatro categorías anteriores, pero ellas sufren de la condición denominada punto de cambio, en la cual, las líneas centrales de todos los eslabones se vuelven colineales. El movimiento del eslabonamiento luego de haber alcanzado esta condición es indeterminado presentando un estado de singularidad.

Un mecanismo no-Grashof, llamado usualmente triple balancín, al no cumplir con el criterio de Grashof, es decir $s + l > p + q$, provoca que ninguno de los eslabones móviles pueda dar un giro completo. La Figura 13 de la página siguiente muestra la categorización de los mecanismos de cuatro barras de acuerdo al cumplimiento o no del criterio de Grashof.

Figura 13

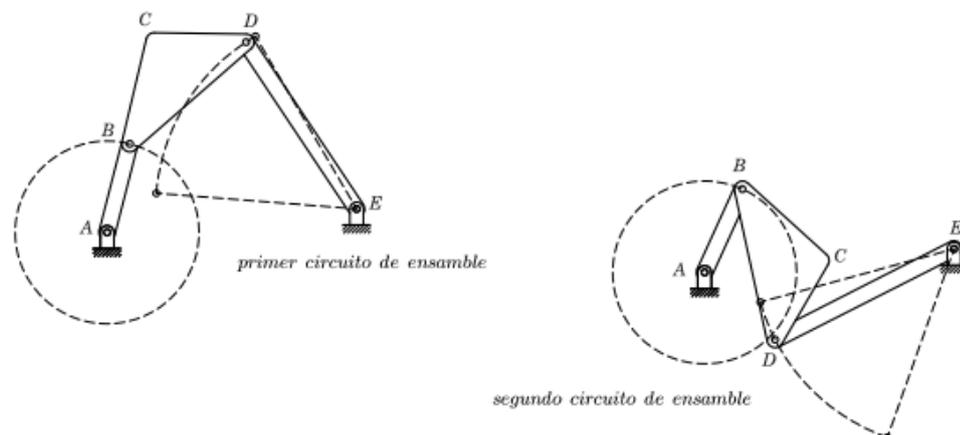
Categorías de mecanismos de acuerdo al criterio de Grashof



Para los mecanismos de cuatro barras existen dos configuraciones posibles de movimiento, ejemplificados para la categoría manivela-balancín en la Figura 14:

Figura 14

Inversiones geométricas de un mecanismo de cuatro barras



Estas configuraciones se denominan circuitos de ensamblaje⁴, configuraciones geométricas o inversiones geométricas, y un mecanismo de cuatro barras no puede pasar de la primera configuración a la segunda sin haberse desarmado previamente, excepto en los mecanismos con configuración de punto de cambio, donde luego de alcanzar el mecanismo, puede pasar de una inversión geométrica a otra sin desarmarse.

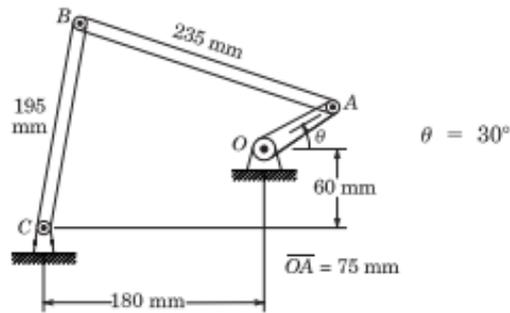
³ En el caso de un mecanismo de cuatro barras estas dos configuraciones geométricas se denominan configuración abierta y configuración cruzada.

Ejemplo 4

Para el siguiente mecanismo de cuatro barras, determínese su categoría de acuerdo al criterio de Grashof.

Figura 15

Mecanismo de cuatro barras para el ejemplo 4



La longitud para el eslabón bastidor es:

$$\sqrt{180^2 + 60^2} = 189.74 \text{ mm}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} s &= 75 \text{ mm} & p &= 195 \text{ mm} \\ l &= 235 \text{ mm} & q &= 189.74 \text{ mm} \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} s + l &< p + q \\ 235 + 75 &< 195 + 189.74 \\ 310 \text{ mm} &< 384.74 \text{ mm} \end{aligned}$$

Por lo tanto, es un mecanismo de *Grashof*.

Dado que el eslabón más corto (de 75 mm) está conectado al bastidor OC, entonces corresponde a la categoría manivela-balancín, siendo la manivela o eslabón que da un giro completo, justamente el más corto (eslabón OA), mientras que el otro eslabón, conectado al bastidor (eslabón CB), será el balancín y no dará un giro completo.

1.9 Equivalencia cinemática

Dos mecanismos se denominan *cinemáticamente equivalentes*, cuando poseen el mismo comportamiento cinemático para una determinada posición, a pesar de no tener el mismo número de eslabones y diferir en el tipo de pares cinemáticos; se puede obtener un mecanismo cinemáticamente equivalente a partir de otro mediante la transformación equivalente de un par cinemático. Obviamente, todos los mecanismos cinemáticamente equivalentes poseen la misma movilidad.

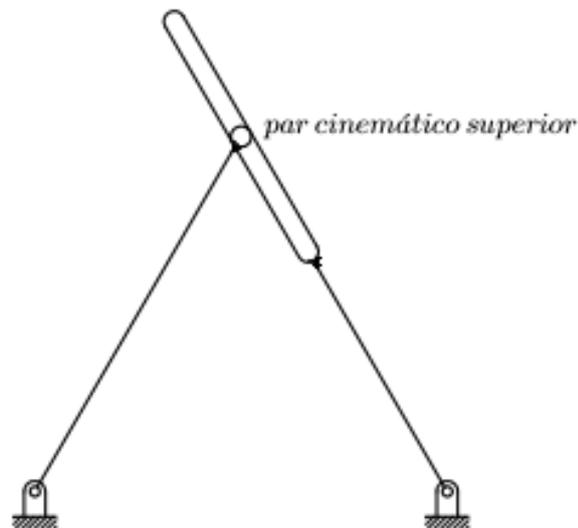
El siguiente ejemplo muestra la transformación de un mecanismo a otro cinemáticamente equivalente.

Ejemplo 5

Halle el mecanismo cinemáticamente equivalente al mostrado en la Figura 16.

Figura 16

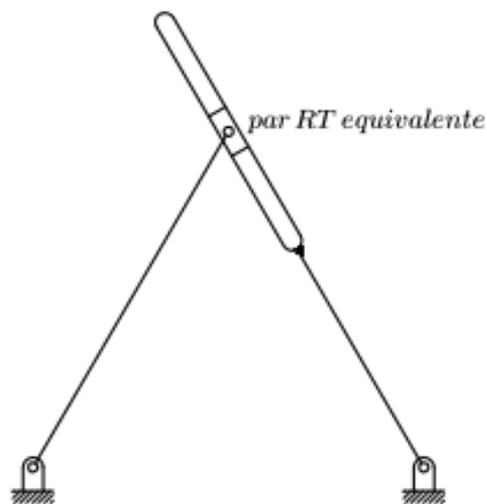
Mecanismo para el ejemplo 5



El par cinemático superior (contacto puntual entre los eslabones) y que puede tanto rotar como trasladarse dentro de la ranura se puede transformar en dos pares de movimientos específicos: uno de rotación y otro de traslación (dentro de la ranura), por lo tanto el mecanismo cinemático equivalente se puede dibujar como se aprecia en la Figura 17 de la página siguiente.

Figura 17

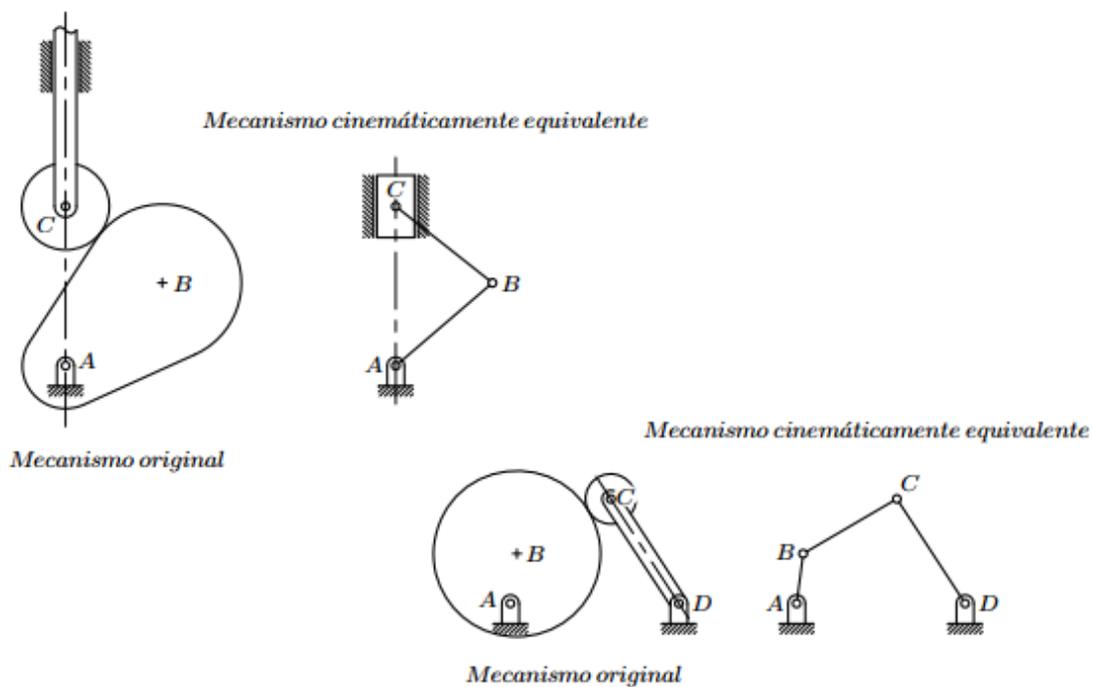
Mecanismo cinemáticamente equivalente al de la Figura 16

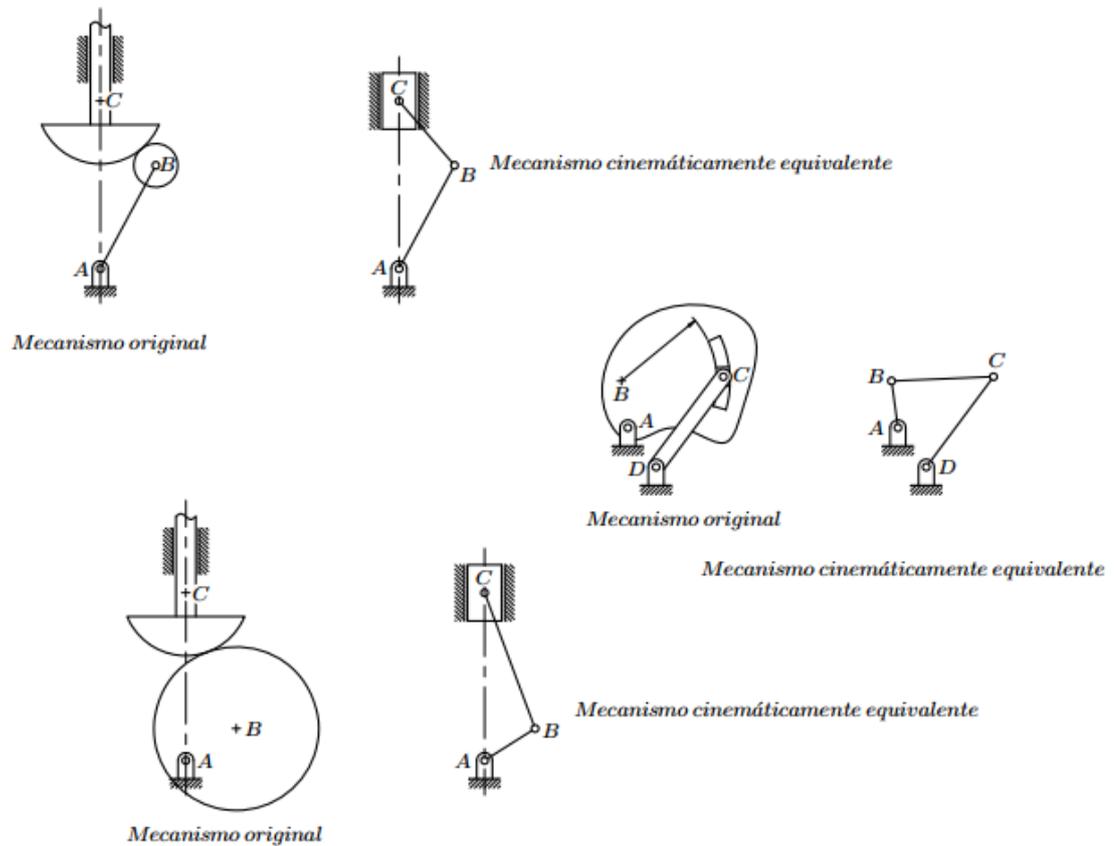


La siguiente figura muestra algunos mecanismos y sus equivalentes cinemáticos:

Figura 18

Mecanismos y sus equivalentes cinemáticos





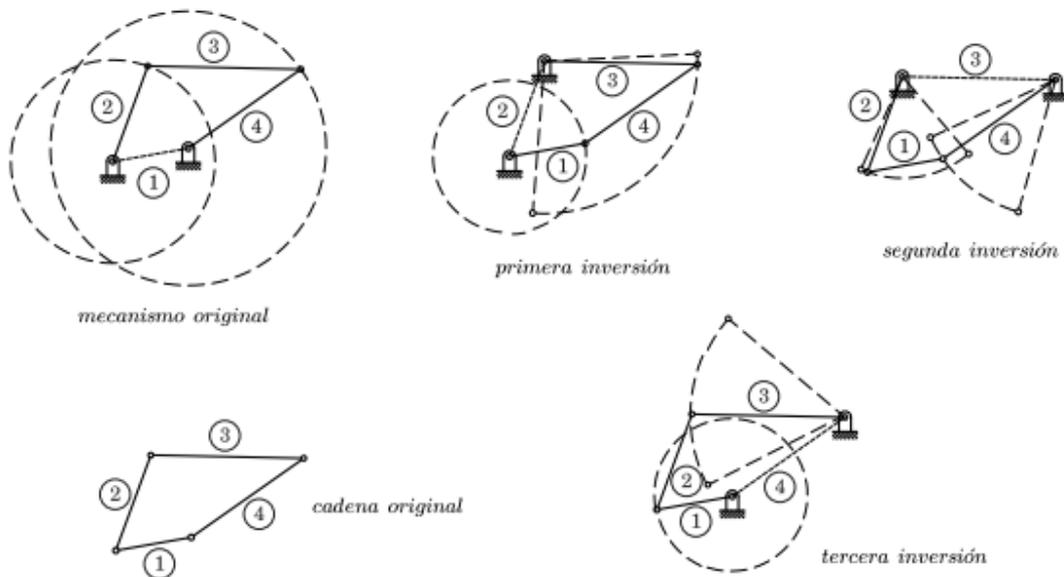
1.10 Inversión cinemática

Un procedimiento muy útil tanto en el análisis como en el diseño de mecanismos lo constituye la denominada inversión cinemática, la cual consiste en la generación de varios mecanismos cambiando únicamente el eslabón bastidor. Si se generan todas las inversiones cinemáticas de una cadena de cuatro barras, todos los mecanismos obtenidos serán cuadriláteros articulados. Al generar las inversiones cinemáticas de una cadena, no se altera el movimiento relativo entre los eslabones, aunque el movimiento absoluto puede ser distinto.

En base a lo mencionado en el anterior párrafo se puede inferir que un mecanismo de cuatro barras tiene cuatro inversiones cinemáticas posibles; a cada inversión cinemática le puede corresponder un mecanismo de categoría diferente a la de los demás. En la Figura 19 de la página siguiente se muestran las inversiones cinemáticas de un mecanismo de cuatro barras.

Figura 19

Inversiones cinemáticas de un mecanismo de cuatro barras



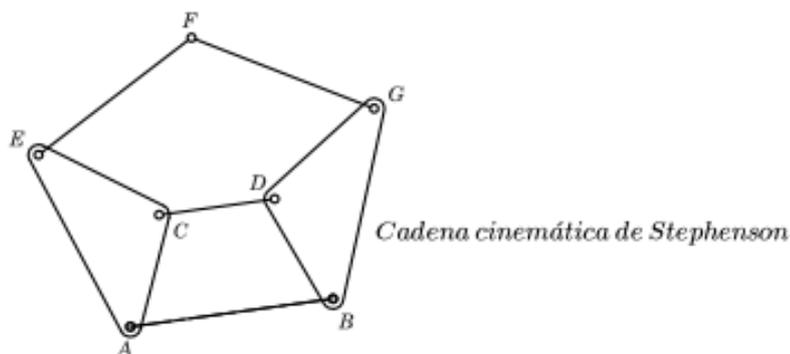
Como se puede observar, todas las inversiones cinemáticas de un mecanismo de cuatro barras son también mecanismos de cuatro barras pero de categoría diferente al original.

Ejemplo 6

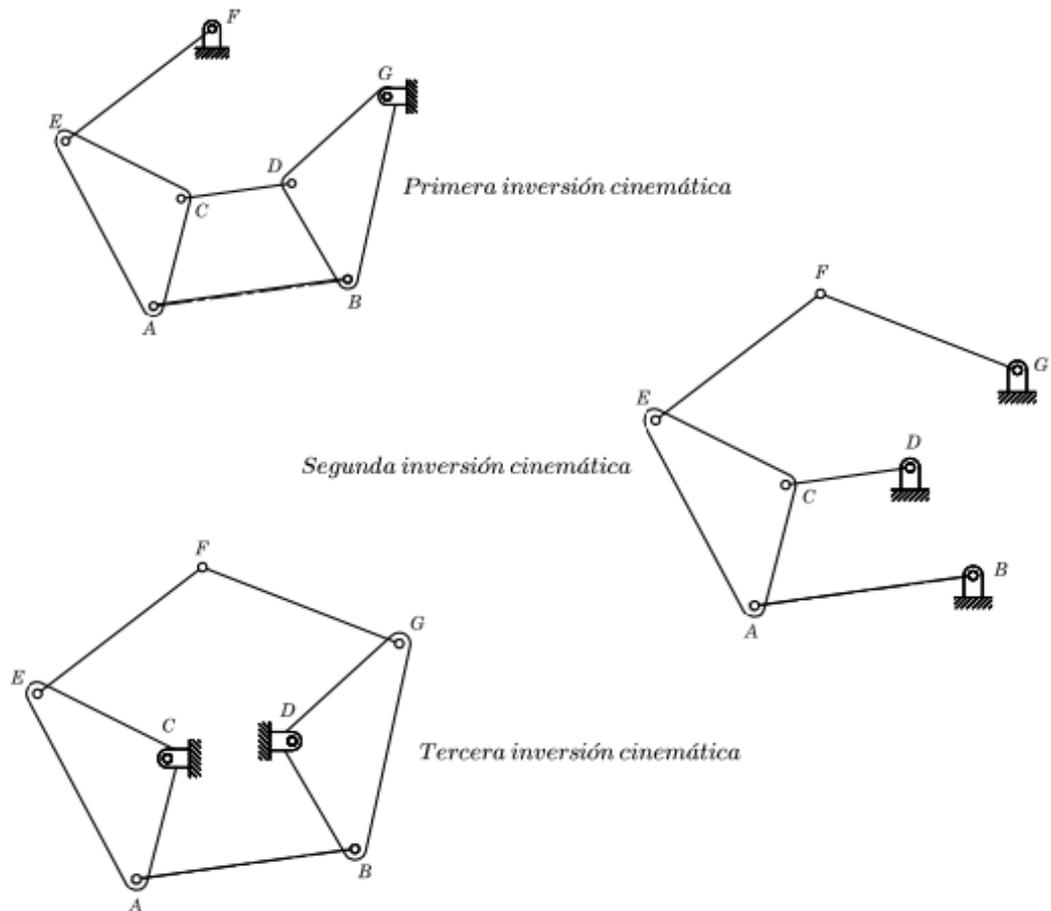
Halle todas las inversiones cinemáticas de la cadena cinemática de Stephenson mostrada en la figura siguiente:

Figura 20

Esquema del ejemplo 6



Las inversiones cinemáticas de la cadena de Stephenson son:



1.11 Sistemas de referencia

Durante el estudio cinemático y dinámico de un mecanismo es necesario referenciar los parámetros de estudio como posiciones, velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc. Por lo que es indispensable contar con un sistema cartesiano de referencia.

En el estudio de mecanismos planos se identifican dos tipos de sistemas de referencia:

- Sistemas de referencia global
- Sistemas de referencia local

Un sistema de referencia global es aquél que se halla ligado a un punto de bastidor en el mecanismo y respecto del cual se miden las magnitudes cinemáticas absolutas de cualquier punto o eslabón del mecanismo. Este sistema se nomina con letras mayúsculas cursivas.

Un *sistema de referencia local* es aquel que se halla ligado a un punto en movimiento del mecanismo, y son de dos tipos: sistema de referencia local no

rotatorio y sistema de referencia local rotatorio. Este sistema se nomina con letras minúsculas cursivas.

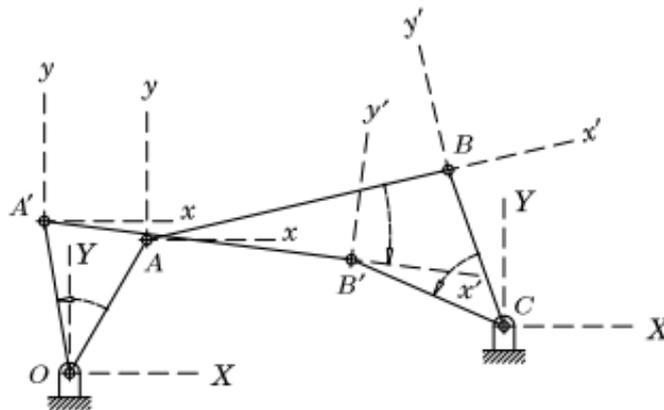
El *sistema de referencia local no rotatorio* se liga a un punto en el mecanismo y se mueve con él permaneciendo paralelo al sistema de referencia global en cualquier instante del ciclo de movimiento del mecanismo.

El *sistema de referencia local rotatorio* se liga a un punto del mecanismo moviéndose con él no de forma únicamente traslacional sino que puede rotar usualmente adjunto a un eslabón del mecanismo.

En la Figura 21 se muestra el diagrama cinemático de un mecanismo de cuatro barras acompañado de tres sistemas de referencia.

Figura 21

Sistemas de referencia en un mecanismo de cuatro barras



Los dos sistemas de referencia X-Y que están ligados a los puntos de bastidor corresponden a sistemas de referencia globales.

Considerando la trayectoria circular del par de rotación A y si se liga a dicho par un sistema de referencia x-y que permanezca siempre paralelo conforme rota el nodo A respecto al nodo O, se tiene un sistema de referencia local no rotatorio.

Finalmente, se liga un sistema de referencia x'-y' al nodo B del mecanismo pero conforme se mueve éste el eje x' se alinea al acoplador del mecanismo, lo cual como se observa provoca la rotación del sistema referencial x'-y' conforme se mueve el par cinemático B, se tendrá entonces un sistema de referencia local rotatorio.



<https://acortar.link/s5vfBE>

CAPÍTULO II

Cinemática en mecanismos planos
Análisis cinemático de mecanismos planos

2.1 Introducción

La cinemática de mecanismos planos consiste en el cálculo de posición, velocidad y aceleración de los eslabones de un mecanismo o de puntos de interés de los mismos. Para afrontar esta actividad el presente texto va a exponer métodos analíticos que tratan al problema de forma genérica y de ellos se pueden obtener implementaciones computacionales para mostrar el funcionamiento del mecanismo en un instante determinado o durante un ciclo completo de su movimiento.

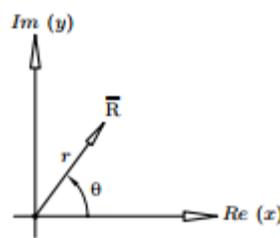
Los métodos analíticos estudiados son: (a) *método de lazos vectoriales cerrados independientes con el uso de números complejos, denominado método de Raven[1]* y (b) *el método general para el análisis cinemático de mecanismos planos.*

2.2 Cinemática del sólido rígido

Los eslabones de un mecanismo se caracterizan para su estudio cinemático como sólidos rígidos, por lo que es necesario revisar la cinemática del sólido rígido. La forma más compacta y eficiente para abordar la cinemática de un sólido rígido es tratar a los vectores con notación de números complejos, así entonces, un vector se ve como el representado en la Figura 22.

Figura 22

Representación de un vector como complejo



Se puede escribir como un número complejo en forma polar $\bar{R} = r e^{i\theta}$, donde r es la magnitud y θ es el ángulo subtendido por el vector con respecto al eje x (real), o en su forma trigonométrica mediante la ecuación de Euler:

$$\bar{R} = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

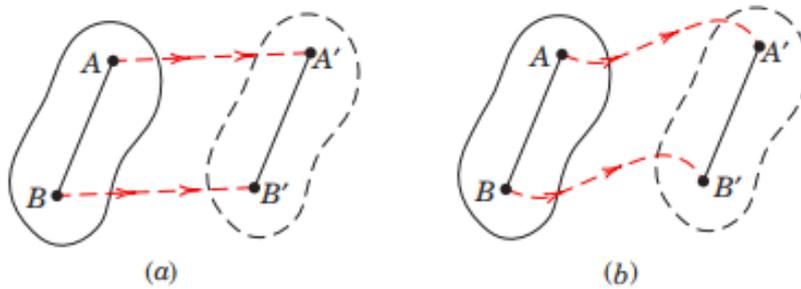
Un sólido rígido puede presentar tres tipos de movimientos en el plano: (a) Traslación pura, (b) Rotación pura, y (c) Movimiento plano general.

2.2.1 Traslación pura

Es el movimiento de un sólido rígido mediante el cual dos puntos diferentes del mismo siguen trayectorias paralelas, ya sean estas rectilíneas o curvilíneas, tal como se muestran en la Figura 23.

Figura 23

Movimiento de traslación: (a) Rectilíneo, y (b) Curvilíneo



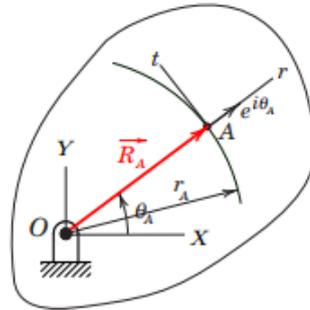
En este caso, dos puntos A y B del mismo sólido, en un determinado instante, deberán tener una velocidad tangente a la trayectoria de igual magnitud, caso contrario se esperaría que el segmento AB del sólido rígido tenga un giro y por ende haya rotación a más de traslación; igual situación acontece con las aceleraciones, pues para un instante en particular, son las mismas para los puntos A y B del sólido. En general para una traslación pura cualquier punto del cuerpo, en un instante definido, tiene las mismas velocidad y aceleración vectoriales.

2.2.2 Rotación pura

Es el giro de un sólido rígido con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento que en su intersección genera un punto definido llamado pivote; en este movimiento cada punto del sólido, distinto al pivote, tiene una trayectoria circular. Considérese el sólido mostrado en la Figura 24 de la página siguiente, que rota respecto al punto pivote O .

Figura 24

Sólido rígido en rotación pura



Tomando el sistema de referencia global X-Y mostrado y en base a la geometría definida en la figura 24, se tiene que el vector posición absoluta de A es:

$$\vec{R}_A = r_A e^{i\theta_A}$$

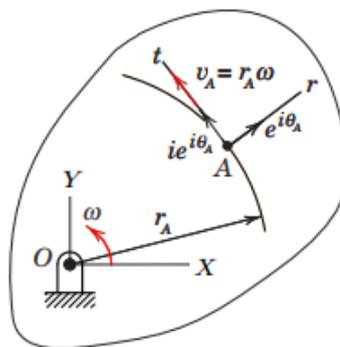
donde r_A es la distancia de O a A, mientras que $e^{i\theta_A}$ representa el vector unitario en la dirección OA; derivando con respecto al tiempo y considerando que r_A es un valor constante debido a que se trata de un cuerpo rígido, entonces:

$$\vec{v}_A = r_A \frac{d\theta_A}{dt} i e^{i\theta_A} = r_A \omega (i e^{i\theta_A})$$

en esta expresión $r_A \omega$ representa la magnitud de la velocidad absoluta de A, mientras que el vector $i e^{i\theta_A}$ representa el vector unitario de \vec{v}_A ; es importante indicar que cada multiplicación sucesiva de $e^{i\theta_A}$ por i rotará al vector unitario 90° en sentido antihorario, por lo que $i e^{i\theta_A}$ habrá girado 90° con respecto a $e^{i\theta_A}$ en sentido antihorario, mientras que $i^2 e^{i\theta_A} = -e^{i\theta_A}$ lo hará 180° con respecto a la dirección de $e^{i\theta_A}$. En la figura 25 se muestra la velocidad del punto A y su geometría vectorial.

Figura 25

Velocidad de un punto A en un cuerpo en rotación pura



Ahora, derivando con respecto al tiempo la expresión de la velocidad se tiene:

$$\bar{a}_A = r_A \frac{d\omega}{dt} i e^{i\theta_A} + r_A \omega \frac{d\theta_A}{dt} i^2 e^{i\theta_A} = r_A \alpha (i e^{i\theta_A}) + r_A \omega^2 (-e^{i\theta_A})$$

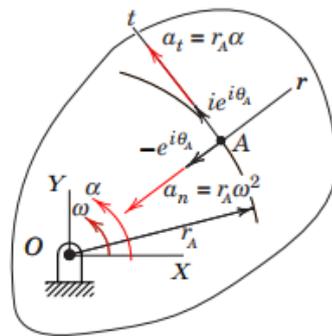
Donde:

$r_A \alpha (i e^{i\theta_A})$ es la aceleración tangencial del punto A con su unitario $i e^{i\theta_A}$, y $r_A \omega^2 (-e^{i\theta_A})$ es la aceleración normal del punto A con su unitario $-e^{i\theta_A}$.

La aceleración del punto A y su geometría vectorial se representa en la Figura 26.

Figura 26

Aceleración de un punto A en un cuerpo en rotación pura

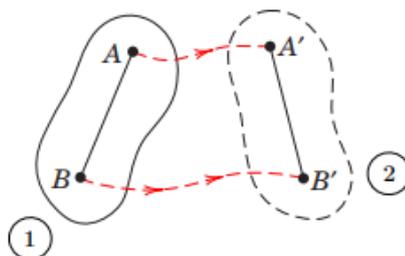


2.2.3 Movimiento plano general

Es la combinación del movimiento de traslación pura con el de rotación pura, que se puede analizar por la superposición de movimientos mediante el concepto de movimiento relativo. Considérese un cuerpo rígido donde se representan los puntos A y B del mismo, como se muestra en la Figura 27.

Figura 27

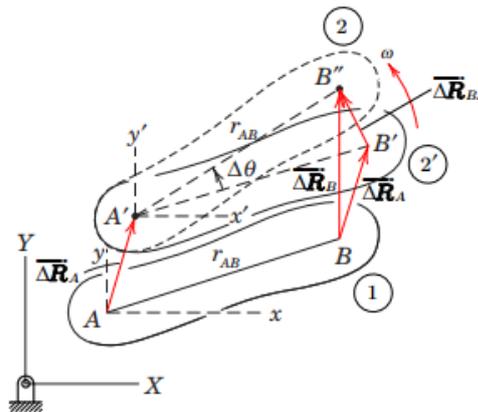
Movimiento plano general de un cuerpo rígido desde la posición 1 a la posición 2.



Si el cuerpo rígido se mueve desde la posición 1 a la 2 con movimiento plano general, como se muestra en la misma figura, dicho movimiento se puede pensar como el obtenido al mover, por traslación pura, el cuerpo desde la posición 1 a la posición 2' y luego mediante rotación pura desde la posición 2' a la posición final 2, como se grafica en la Figura 28.

Figura 28

Descomposición de un movimiento plano general en traslación y rotación pura sucesivas.



Como se observa de los vectores desplazamiento graficados en la Figura 28, se puede escribir:

$$\overline{\Delta R}_B = \overline{\Delta R}_A + \overline{\Delta R}_{BA}$$

Dividiendo la expresión anterior para el intervalo de tiempo Δt en el que ocurre el movimiento y considerando que dicho intervalo tiende a cero, en el límite se obtiene:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (2.2.3-1)$$

Expresión que se denomina ecuación de velocidades relativas.

Los puntos A y B al moverse de las posiciones 1 a la 2' tienen un movimiento de traslación pura por lo que sus velocidades serán tangentes a la trayectoria descrita por el cuerpo en dichas posiciones e idénticas, mientras que la rotación del punto B respecto al A siendo una rotación pura desde la posición 2' a la 2, genera una velocidad, dada por:

$$\vec{v}_{BA} = r_{AB} \frac{d\theta_{AB}}{dt} i e^{i\theta_{AB}} = r_{AB} \omega (i e^{i\theta_{AB}})$$

por lo que la expresión de las velocidades relativas es:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + r_{AB}\omega(i e^{i\theta_{AB}}) \quad (2.2.3-2)$$

Si se deriva en el tiempo la expresión (2.2.3-1), se obtiene:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \quad (2.2.3-3)$$

Denominada ecuación de aceleraciones relativas, donde nuevamente los puntos A y B al moverse de las posiciones 1 a la 2' tienen un movimiento de traslación pura en cuyo caso sus aceleraciones serán tangentes a la trayectoria descrita por el cuerpo entre dichas posiciones e iguales, mientras que la rotación del punto B respecto al A siendo una rotación pura desde la posición 2' a la 2, genera una aceleración, escrita como:

$$\vec{a}_{BA} = r_{AB} \frac{d\omega}{dt} i e^{i\theta_{AB}} + r_{AB}\omega \frac{d\theta_{AB}}{dt} i^2 e^{i\theta_{AB}} = r_{AB}\alpha(i e^{i\theta_{AB}}) + r_{AB}\omega^2(-e^{i\theta_{AB}})$$

Por lo que la expresión (2.2.3-3) se convierte en:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + r_{AB}\alpha(i e^{i\theta_{AB}}) + r_{AB}\omega^2(-e^{i\theta_{AB}}) \quad (2.2.3-4)$$

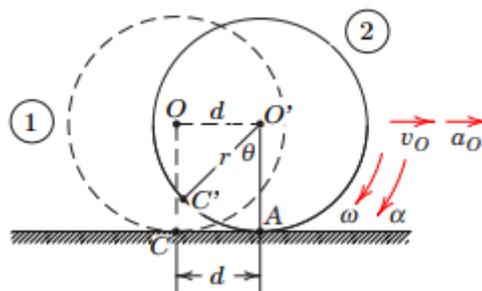
Un caso particular del movimiento plano general es el movimiento de rodadura sin deslizamiento, expuesto a continuación:

Movimiento de rodadura sin deslizamiento

Es el movimiento que se produce cuando un disco cilíndrico de radio r rueda sin deslizar sobre una superficie plana como se muestra en la Figura 29.

Figura 29

Movimiento de rodamiento sin deslizamiento



En la figura se puede observar que el disco rueda hacia la derecha desde la posición 1 a la posición 2 en este movimiento se considera que el disco no des-

liza. El desplazamiento lineal del centro O del disco es d , el cual es idéntico a la longitud del arco $C'A$ a lo largo de la periferia del disco sobre la cual rueda el disco. El radio CO en la posición 1 pasa a ocupar la posición $C'O'$ en la posición 2 donde forma un ángulo θ con la vertical. Si la rueda no desliza la longitud del arco $C'A$ debe ser igual a d , es decir:

$$d = r \theta$$

Derivando en el tiempo, se tiene para la velocidad:

$$v_O = r\omega$$

Y derivando nuevamente para la aceleración resulta:

$$a_O = r\alpha$$

La aceleración a_O tendrá el sentido opuesto si la rueda se desacelera, en cuyo caso α tendrá el sentido opuesto a ω .

2.2.4 Aceleración de Coriolis

La aceleración de Coriolis se presenta en un sólido rígido que posee simultáneamente movimientos de traslación y rotación.

Considérese el caso mostrado en la Figura 30, donde el cuerpo 2 se mueve traslacionalmente al mismo tiempo que se ve afectado por la rotación del cuerpo 1. El punto A perteneciente a los dos cuerpos coincide posicionalmente en un instante determinado. La velocidad del punto A perteneciente al cuerpo 1 se denota $\vec{v}_{A1'}$ mientras que la velocidad del punto A correspondiente al cuerpo 2 es simbolizada como $\vec{v}_{A2'}$ entonces la diferencia de velocidades se escribe como:

$$\vec{v}_{A_2A_1} = \vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1}$$

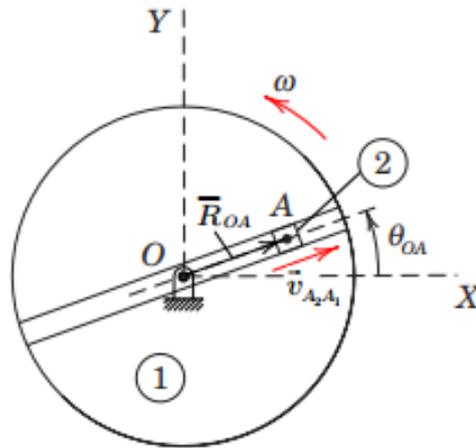
$$\vec{v}_{A_2} = \vec{v}_{A_1} + \vec{v}_{A_2A_1}$$

Dado que las velocidades pertenecen a cuerpos distintos la anterior expresión corresponde a la ecuación de velocidades relativas para un mismo punto en dos cuerpos diferentes.

Supóngase que el cuerpo 1 gira con respecto al punto fijo O , donde se ubica un sistema de referencia global $X - Y$, mientras el cuerpo 2 se desplaza a lo largo de la recta OA en donde está confinado su movimiento, como lo muestra la Figura 30.

Figura 30

Movimiento de rotación y de rotación y traslación simultáneas



Entonces, en notación de álgebra compleja se tiene:

$$\vec{R}_{OA} = r_{OA} e^{i\theta_{OA}}$$

Por lo que la velocidad absoluta del punto A perteneciente a 2, está dada por:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A_2} &= \frac{d\vec{R}_{OA}}{dt} = \frac{dr_{OA}}{dt} (e^{i\theta_{OA}}) + r_{OA} \frac{d\theta_{OA}}{dt} (ie^{i\theta_{OA}}) \\ \vec{v}_{A_2} &= v_A^r (e^{i\theta_{OA}}) + r_{OA} \omega (ie^{i\theta_{OA}}) \end{aligned}$$

Donde:

$v_A^r = \frac{dr_{OA}}{dt}$ es la magnitud de la velocidad radial del punto A, con su unitario $e^{i\theta_{OA}}$

y, $r_{OA} \omega$ es el módulo de la velocidad tangencial del punto A, con su unitario $ie^{i\theta_{OA}}$.

La velocidad tangencial es la que tiene el punto A, debido a la rotación del cuerpo 1, y es \vec{v}_{A1} , mientras que la velocidad radial es la generada por el cuerpo 2 al moverse dentro de la ranura respecto a 1 y es \vec{v}_{A2A1} , entonces la ecuación de velocidades relativas se expresa como:

$$\vec{v}_{A_2} = \underbrace{r_{OA} \omega (ie^{i\theta_{OA}})}_{\vec{v}_A} + \underbrace{v_A^r (e^{i\theta_{OA}})}_{\vec{v}_{A_2}}$$

Si se deriva la ecuación anterior, con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{A_2} = \frac{d\vec{v}_{A_2}}{dt} &= \left(\frac{dr_{OA}}{dt} \omega + r_{OA} \frac{d\omega}{dt} \right) (ie^{i\theta_{OA}}) + r_{OA} \omega \frac{d\theta_{OA}}{dt} (i^2 e^{i\theta_{OA}}) + \frac{dv_A^r}{dt} (e^{i\theta_{OA}}) + v_A^r \frac{d\theta_{OA}}{dt} (ie^{i\theta_{OA}}) \\ \vec{a}_A &= r_{OA} \alpha (ie^{i\theta_{OA}}) + r_{OA} \omega^2 (-e^{i\theta_{OA}}) + a_A^r (e^{i\theta_{OA}}) + 2v_A^r \omega (ie^{i\theta_{OA}}) \end{aligned}$$

Donde:

a_A^r es la aceleración radial, con vector unitario $e^{i\theta_{OA}}$,

$r_{OA} \omega^2$ es la aceleración normal, de vector unitario $-e^{i\theta_{OA}}$,

$r_{OA} \alpha$ es la aceleración tangencial con vector unitario $ie^{i\theta_{OA}}$, y

$2v_A^r \omega$ es la aceleración de Coriolis, de vector unitario $ie^{i\theta_{OA}}$.

2.3 Método de lazos vectoriales cerrados independientes con el uso de números complejos - Método de Raven

Uno de los métodos más compactos y eficientes es el uso de lazos vectoriales o polígonos vectoriales cerrados con el empleo de números complejos, propuesto por Raven[1].

El procedimiento de análisis en este método es el siguiente:

(a) Se calcula el número de grados de libertad del mecanismo, es decir su movilidad, mediante la fórmula de Gruebler.

(b) Se determina el número de contornos independientes del mecanismo.

(c) Se construyen los lazos vectoriales correspondientes a cada contorno.

(d) A partir de los lazos vectoriales de cada contorno se genera una tabla en la que se detallan: los datos geométricos conocidos (dimensiones del mecanismo y magnitudes geométricas invariables), las variables cinemáticas conocidas (tantas como grados de libertad posea el mecanismo) y las variables cinemáticas que se desean determinar en el análisis, llamadas variables desconocidas o incógnita.

(e) Se escribe la ecuación vectorial de posición para cada lazo vectorial en forma polar compleja, y a partir de ella se derivan las ecuaciones escalares de posición en forma trigonométrica. Una vez obtenidas las ecuaciones escalares de posición se resuelven las variables lineales o angulares desconocidas con lo cual se concluye el análisis de posición.

Usualmente el análisis de posición involucra la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales, que en algunos casos se puede resolver por métodos geométrico-trigonométricos o algebraico-trigonométricos en cuyo caso dicha solución se denomina de “forma cerrada” mientras en otros casos es necesario recurrir a métodos numéricos, o solución de “forma abierta”.

(f) Se toman las ecuaciones escalares de posición y se derivan con respecto al tiempo, discriminando las variables que varían con el tiempo de aquellas que no lo hacen, produciendo un grupo de ecuaciones denominadas ecuaciones escalares de velocidad, las cuales al resolverse arrojarán las variables desconocidas para las velocidades lineales y/o angulares deseadas. Este procedimiento se denomina análisis de velocidad y usualmente conlleva la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Alternativamente, se puede derivar con respecto al tiempo directamente las variables desconocidas determinadas en el análisis de posición.

(g) Finalmente, a partir de las ecuaciones escalares de velocidad y por derivación respecto al tiempo de las mismas se generan las ecuaciones escalares de aceleración que al resolverse producen las variables desconocidas para las aceleraciones lineales y/o angulares buscadas. Dicho procedimiento lleva el nombre de análisis de aceleración y al igual que el análisis de velocidad lleva a la solución de un sistema de ecuaciones lineales. De nuevo, de forma alternativa, se puede derivar en el tiempo de forma directa las variables desconocidas halladas en el análisis de velocidad.

Para efectuar el planteamiento de las ecuaciones vectoriales de posición es necesario partir del diagrama cinemático del mecanismo, y de este se obtiene uno o más lazos o contornos vectoriales cerrados también denominados polígonos vectoriales cerrados.

Un mecanismo que posea un solo lazo se llama mecanismo de lazo simple, mientras que aquél que contiene dos o más contornos cerrados se denomina mecanismo de múltiples lazos; cada contorno en un mecanismo de lazos múltiples debe ser independiente de los demás, es decir será necesario que

contenga al menos un vector no común. El número de lazos o contornos independientes se puede obtener a partir de la fórmula siguiente:

$$N = j - c \quad (2.3-1)$$

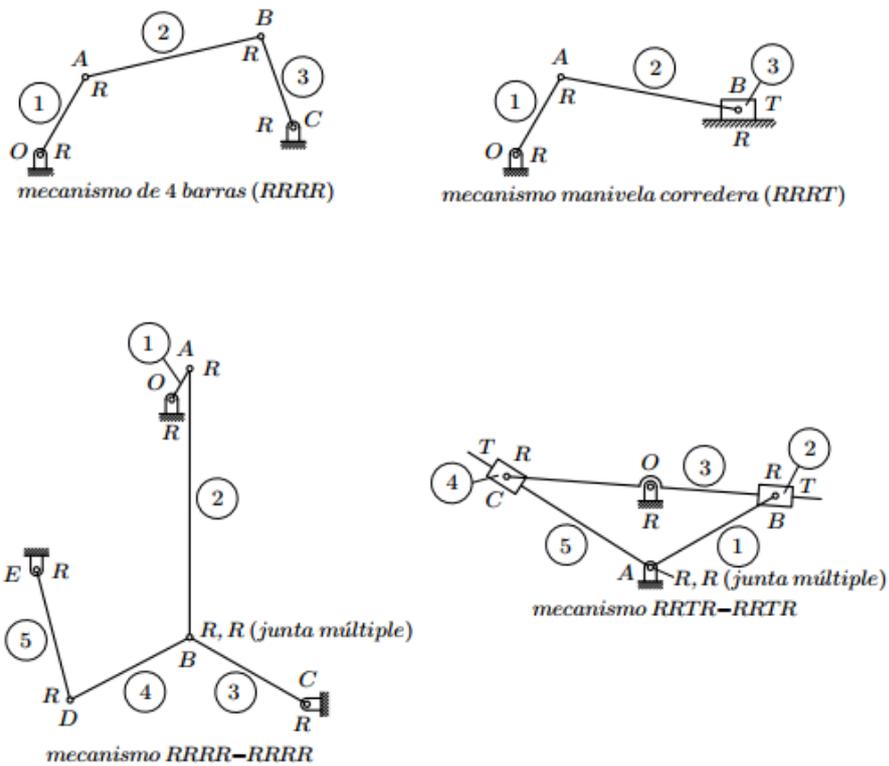
Donde, N es el número de lazos independientes, j es el número de juntas o pares cinemáticos y c es el número de eslabones móviles.

Ejemplo 1

Considérense los mecanismos mostrados en la figura 2.10. Hállese el número de contornos independientes de los mismos.

Figura 31

Mecanismos para el ejemplo 1



Para el mecanismo de 4 barras: $N = 4 - 3 = 1$

Para el mecanismo manivela corredera: $N = 4 - 3 = 1$

Para el mecanismo: RRRR-RRRR: $N = 7 - 5 = 2$

Para el mecanismo: RRTR-RRTR: $N = 7 - 5 = 2$

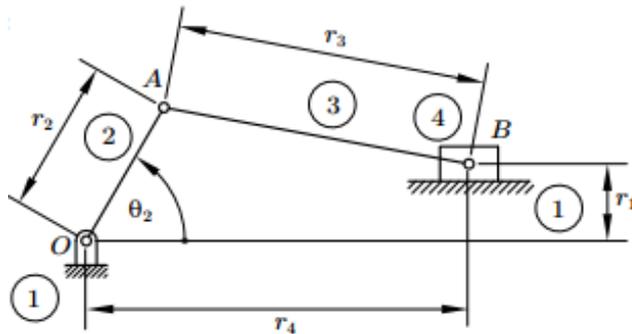
Posteriormente, se ejemplifica el método en el análisis de tres mecanismos clásicos, para luego ejemplificar el procedimiento en diversos casos de mecanismos, tanto para una posición determinada como para un ciclo completo de movimiento.

2.3.1 Análisis cinemático del mecanismo manivela corredera por el método de Raven

Considérese el mecanismo manivela corredera descentrado mostrado en la Figura 32, donde la manivela OA gira a velocidad angular ω_2 y una aceleración angular α_2 ambas en sentido antihorario:

Figura 32

Mecanismo manivela corredera

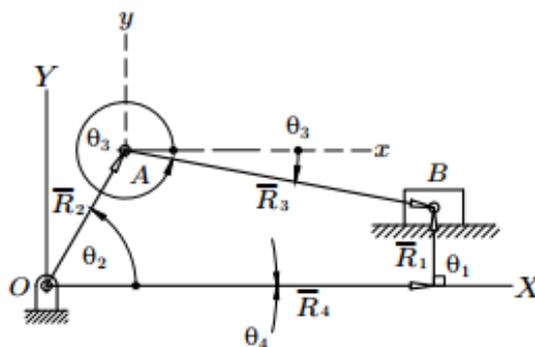


Su movilidad es 1 como se puede deducir fácilmente de la fórmula de Gruebler, y el número de contornos independientes es 1, como se determino en el ejemplo 1 del presente capítulo.

El único lazo vectorial cerrado existente para el mecanismo se muestra en la Figura 33.

Figura 33

Lazo vectorial cerrado para el mecanismo manivela corredera



El sentido de cada vector en el origen se ha elegido de forma que el ángulo se mide desde el eje X (x) del sistema de referencia global X-Y (local x - y), en sentido antihorario como positivo dado que genera un vector en el eje z positivo y en sentido horario como negativo puesto que produce un vector en el eje z negativo.

Considerando que en el mecanismo la entrada de movimiento se produce en el eslabón manivela OA, la siguiente tabla muestra los valores constantes de la geometría del mecanismo, así como las variables conocidas e incógnitas de la cinemática del mismo:

Valores y variables del mecanismo

<i>Datos geométricos del mecanismo</i>		Constantes	
		$r_1, r_2, r_3, \theta_1 = 90^\circ, \theta_4 = 0^\circ$	
		Variables conocidas	Variables desconocidas
<i>Variables cinemáticas</i>	<i>Posición</i>	θ_2	θ_3, r_4
	<i>Velocidad</i>	ω_2	ω_3, v_4
	<i>Aceleración</i>	α_2	α_3, a_4

Análisis de posición

A partir del lazo vectorial mostrado en la Figura 33, la ecuación vectorial de posición es:

$$\bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 + \bar{R}_4 = \bar{0} \quad (2.3.1-1)$$

Y en su forma polar:

$$r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2} - r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0 + i0$$

Dado que $\theta_1 = 90^\circ$ y $\theta_4 = 0$, entonces:

$$r_1 e^{i90^\circ} - r_2 e^{i\theta_2} - r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i0^\circ} = 0 + i0$$

$$ir_1 - r_2 e^{i\theta_2} - r_3 e^{i\theta_3} + r_4 = 0 + i0 \quad (2.3.1-2)$$

Escribiendo la ecuación (2.3.1-2) en su forma trigonométrica, se tiene:

$$ir_1 - r_2 \cos\theta_2 - ir_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 - ir_3 \operatorname{sen}\theta_3 + r_4 = 0 + i0$$

Separando partes real e imaginaria y simplificando resulta:

$$\begin{aligned} r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 - r_4 &= 0 \\ r_2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_3 \operatorname{sen}\theta_3 - r_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.1-3)$$

Que son las ecuaciones escalares de posición para el mecanismo manivela corredera descentrado, éstas forman un sistema no lineal en las variables desconocidas de posición.

Despejando θ_3 de la segunda ecuación del sistema (2.3.1-3), se obtiene:

$$\theta_3 = \begin{cases} \text{arc sen} \left(\frac{r_1 - r_2 \text{ sen} \theta_2}{r_3} \right) \\ 180^\circ - \text{arc sen} \left(\frac{r_1 - r_2 \text{ sen} \theta_2}{r_3} \right) \end{cases} \quad (2.3.1-4)$$

Para la configuración geométrica de la figura 2.11 y su lazo vectorial de la Figura 33, el valor adecuado para θ_3 es:

$$\theta_3 = \text{arc sen} \left(\frac{r_1 - r_2 \text{ sen} \theta_2}{r_3} \right) \quad (2.3.1-5)$$

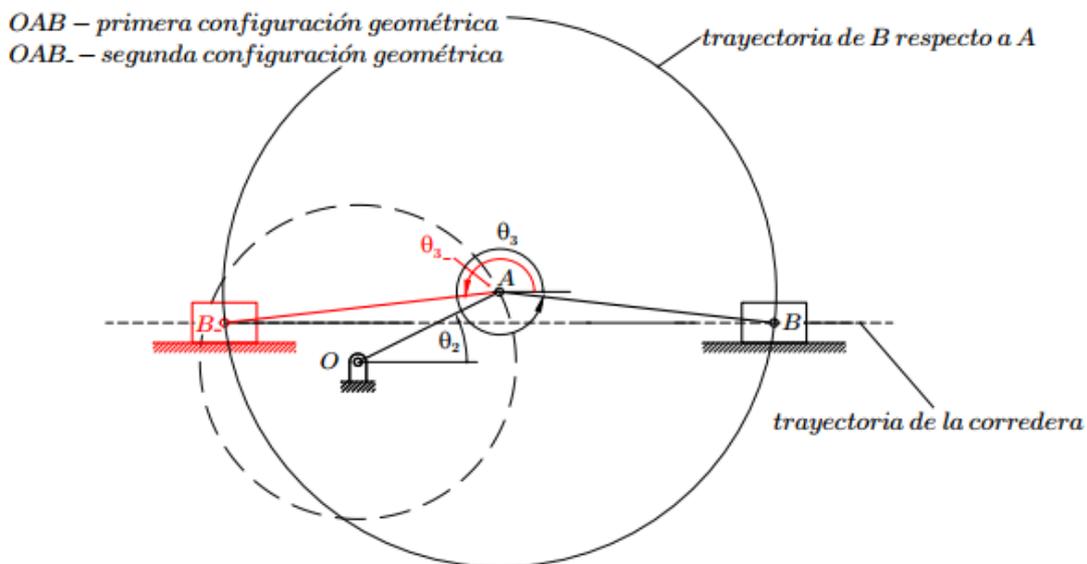
Mientras que la expresión:

$$\theta_3^* = 180^\circ - \text{arc sen} \left(\frac{r_1 - r_2 \text{ sen} \theta_2}{r_3} \right) \quad (2.3.1-6)$$

Entrega el valor para θ_3^* correspondientes a la segunda configuración geométrica del mecanismo manivela corredera mostrada en la Figura 34:

Figura 34

Configuraciones geométricas del mecanismo manivela corredera - ángulos θ_3 y θ_3^*



De la primera ecuación del sistema (2.3.1-3) se despeja r_4 y se obtiene:

$$r_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 \quad (2.3.1-7)$$

Análisis de velocidad. Derivando en el tiempo el sistema de ecuaciones (2.3.1-3) bajo la consideración de que r_1 , r_2 y r_3 son constantes, se tiene:

$$\begin{aligned} -r_2\omega_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_3\omega_3 \operatorname{sen}\theta_3 - v_4 &= 0 \\ r_2\omega_2 \cos\theta_2 + r_3\omega_3 \cos\theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.1-8)$$

Que corresponden a las ecuaciones escalares de velocidad: éstas conforman, a diferencia de las ecuaciones escalares de posición, un sistema lineal de ecuaciones en las variables desconocidas de la velocidad.

Interpretación cinemática. Al derivar en el tiempo la expresión (2.3.1-2), se obtiene:

$$r_2 \frac{d\theta_2}{dt} i e^{i\theta_2} + r_3 \frac{d\theta_3}{dt} i e^{i\theta_3} - \frac{dr_4}{dt} = 0 + i0$$

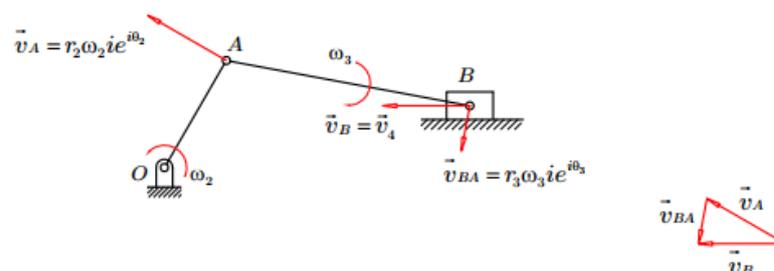
$$r_2 \omega_2 i e^{i\theta_2} + r_3 \omega_3 i e^{i\theta_3} - \vec{v}_4 = 0 + i0$$

$$\vec{v}_4 = r_2 \omega_2 i e^{i\theta_2} + r_3 \omega_3 i e^{i\theta_3} \quad (2.3.1-9)$$

La ecuación (2.3.1-9) se muestra interpretada gráficamente en la Figura 35, donde el término $r_2\omega_2 i e^{i\theta_2}$ representa la velocidad absoluta del punto A perteneciente al eslabón 2 (debido a la rotación pura del vector \vec{R}_2 en sentido antihorario), $r_3\omega_3 i e^{i\theta_3}$ es la velocidad del punto B perteneciente al eslabón 3 con respecto al punto A (debido a la rotación pura del vector \vec{R}_3 con pivote en A y de sentido horario para el instante cinemático mostrado en la Figura 35; finalmente \vec{v}_4 es la velocidad absoluta de la corredera (o del punto B). Los tres vectores forman un polígono vectorial cerrado ($\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$) que se observa en la Figura 35:

Figura 35

Polígono vectorial de velocidades del mecanismo manivela corredera en un instante dado



Despejando ω_3 de la segunda ecuación del sistema (2.3.1-8) se obtiene:

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \quad (2.3.1-10)$$

Al sustituir (2.3.1-10) en la primera ecuación del sistema (2.3.1-8) para luego despejar v_4 y simplificar dicho resultado, resulta:

$$v_4 = \frac{r_2 \omega_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)}{\cos \theta_3} \quad (2.3.1-11)$$

Análisis de aceleración. Derivando en el tiempo el sistema de ecuaciones (2.3.1-8), da:

$$\begin{aligned} -r_2 \alpha_2 \sin \theta_2 - r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - r_3 \alpha_3 \sin \theta_3 - r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 - a_4 &= 0 \\ r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 - r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 - r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3 &= 0 \end{aligned}$$

Que corresponden a las ecuaciones escalares de aceleración. Si éstas se reorganizan resulta:

$$\begin{aligned} -r_3 \alpha_3 \sin \theta_3 - a_4 &= r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + r_2 \alpha_2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 \\ r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 &= -r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 + r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (2.3.1-12)$$

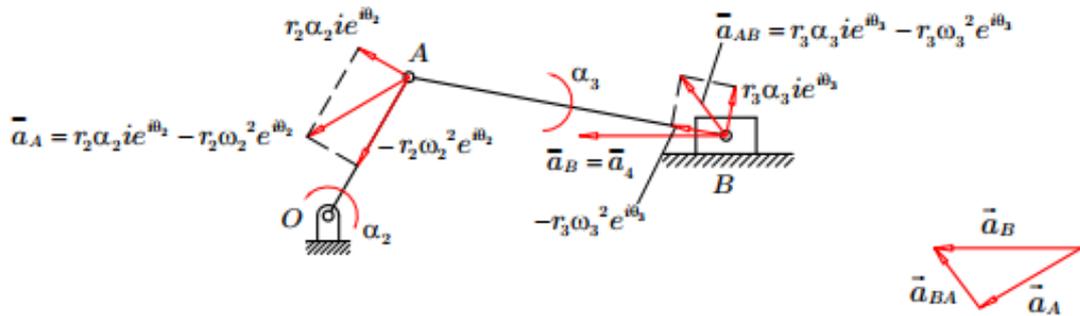
Interpretación cinemática. Derivando en el tiempo la expresión (2.3.1-9), se obtiene:

$$\vec{a}_4 = r_2 \alpha_2 i e^{i\theta_2} - r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} + r_3 \alpha_3 i e^{i\theta_3} - r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3} \quad (2.3.1-13)$$

la ecuación (2.3.1-13) se muestra interpretada gráficamente en la Figura 36, donde el término $r_2 \alpha_2 i e^{i\theta_2} - r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2}$ representa la aceleración absoluta del punto A perteneciente al eslabón 2 (debido a la rotación pura del vector \vec{R}_2 en sentido antihorario y constituida por la aceleración tangencial $r_2 \alpha_2 i e^{i\theta_2}$ y la aceleración normal $-r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2}$), $r_3 \alpha_3 i e^{i\theta_3} - r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3}$ es la aceleración del punto B perteneciente al eslabón 3 con respecto al punto A (debido a la rotación pura del vector \vec{R}_3 con pivote en A y de sentido antihorario para el momento cinemático mostrado, constituida por la aceleración tangencial $r_3 \alpha_3 i e^{i\theta_3}$ y la aceleración normal $-r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3}$); finalmente a_4 es la aceleración absoluta de la corredera (o del punto B). Los tres vectores forman un polígono vectorial cerrado ($\vec{a}_B \vec{a}_A \vec{a}_{BA}$) como se observa en la Figura 36 de la página siguiente:

Figura 36

Polígono vectorial de aceleraciones del mecanismo manivela corredera en un instante dado



Si se despeja α_3 de la segunda ecuación del sistema (2.3.1-12):

$$\alpha_3 = \frac{-r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 + r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \quad (2.3.1-14)$$

Despejando a_4 de la primera ecuación del sistema (2.3.1-12) y reemplazando (2.3.1-14) y luego de simplificar a su mínima expresión se tiene:

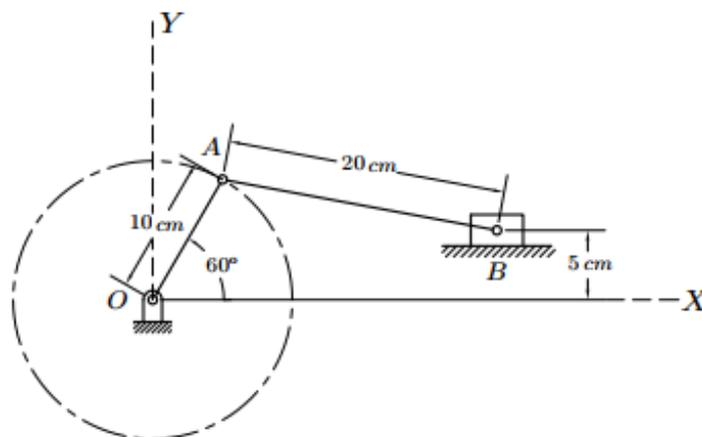
$$a_4 = \frac{r_2 \alpha_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) - r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - r_3 \omega_3^2}{\cos \theta_3} \quad (2.3.1-15)$$

Ejemplo 2

Para el mecanismo manivela corredera, mostrado en la Figura 37, realícese el análisis cinemático de ciclo completo, comprobando gráficamente la posición y obténgase las curvas del análisis de posición, velocidad y aceleración del mecanismo versus el ángulo de giro de la manivela. Supóngase que la manivela OA gira a una velocidad angular constante antihoraria de 500 rpm.

Figura 37

Mecanismo manivela corredera para análisis cinemático de ciclo completo del ejemplo 2



Considerando que, en el mecanismo, la entrada de movimiento se produce en el eslabón manivela OA, la siguiente tabla muestra los valores constantes derivados de la geometría del mecanismo, así como las variables conocidas y desconocidas de la cinemática del mismo:

<i>Datos geométricos del mecanismo</i>		Constantes	
		$r_1 = 5 \text{ cm}, r_2 = 10 \text{ cm}, r_3 = 20 \text{ cm}, \theta_1 = 90^\circ, \theta_4 = 0^\circ$	
		Variables conocidas	Variables desconocidas
<i>Variables cinemáticas</i>	<i>Posición</i>	$60^\circ \leq \theta_2 \leq 420^\circ$	θ_3, r_4
	<i>Velocidad</i>	$\omega_2 = 500 \text{ rpm}$ $= \frac{50\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	ω_3, v_4
	<i>Aceleración</i>	$\alpha_2 = 0$	α_3, a_4

Análisis de posición:

Variables desconocidas - expresión general

$$\theta_3(\theta_2) = \arcsen\left(\frac{r_1 - r_2 \text{sen}\theta_2}{r_3}\right)$$

De acuerdo a las ecuaciones (2.3.1- 5) y (2.3.1-7)

$$\theta_3(\theta_2) = \arcsen\left(\frac{5 - 10 \text{sen}\theta_2}{20}\right)$$

$$r_4(\theta_2) = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3$$

$$r_4(\theta_2) = 10 \cos\theta_2 + 20 \cos\theta_3(\theta_2)$$

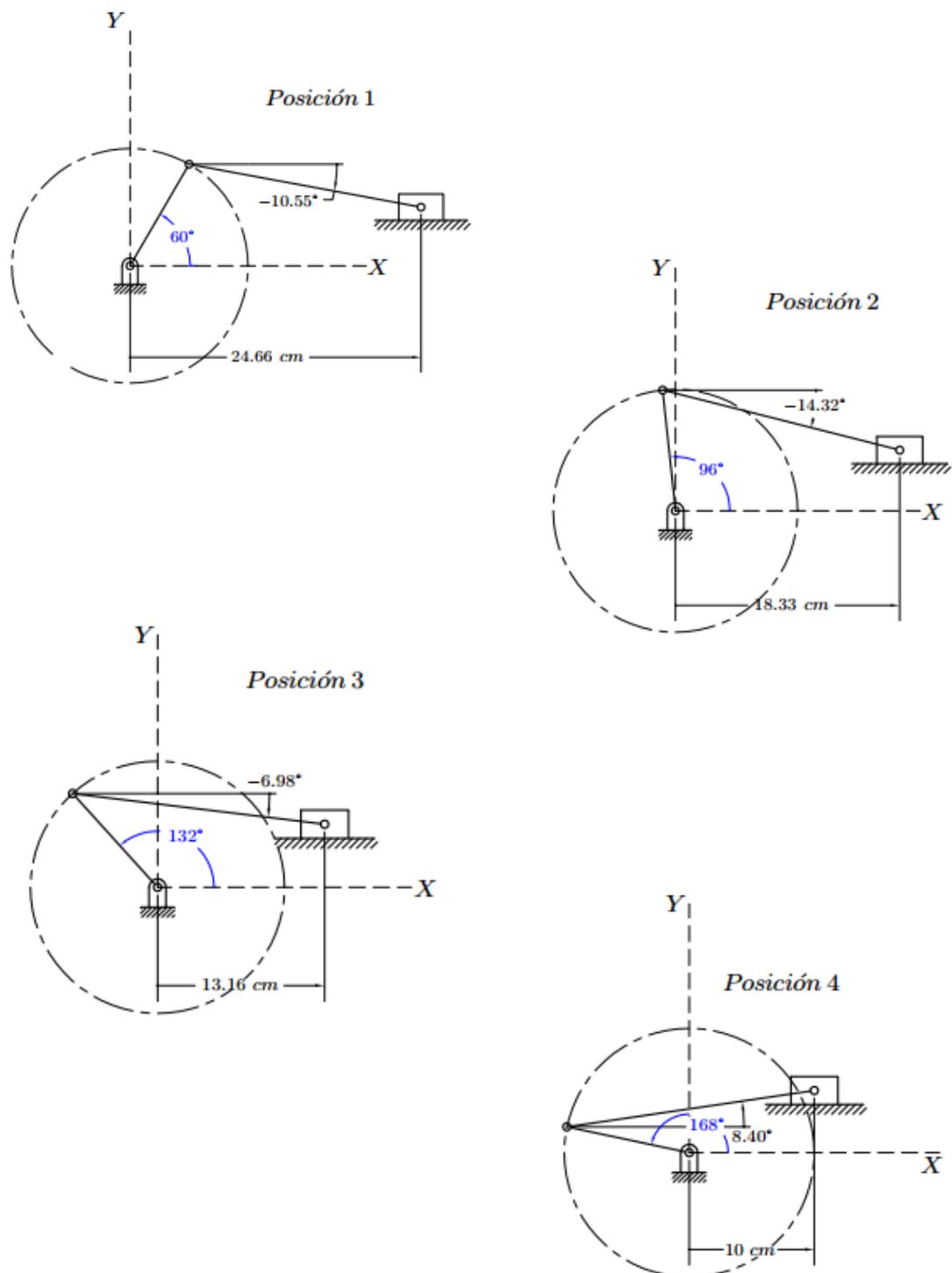
Si se computan las expresiones anteriores para 10 posiciones de la manivela OA iniciando con $\theta_2 60^\circ$, en sentido antihorario ($\theta_2 = 60^\circ, 96^\circ, 132^\circ, 168^\circ, 204^\circ, 240^\circ, 276^\circ, 312^\circ, 348^\circ$ y 384°) se obtienen los siguientes resultados:

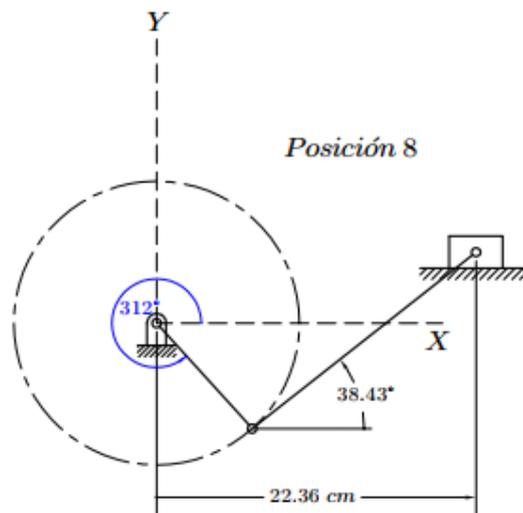
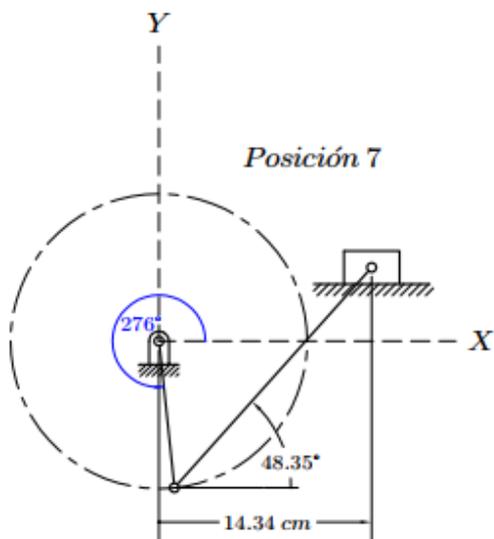
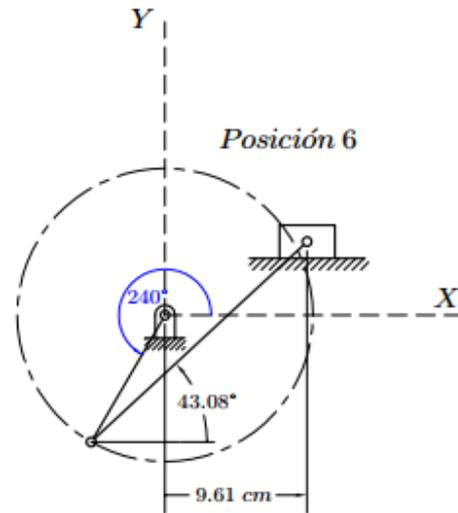
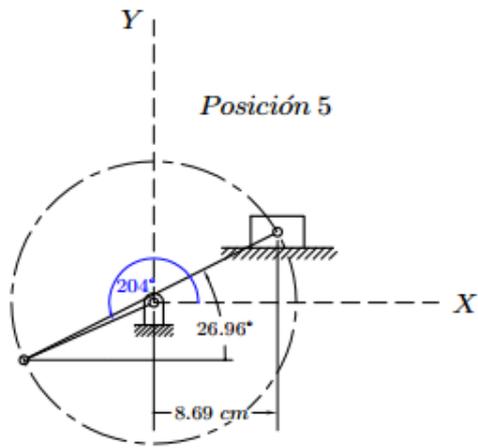
<i>Posición</i>	<i>Ángulo de la manivela</i>	<i>Variables desconocidas - resultados numéricos</i>	
	$\theta_2 (^\circ)$	$\theta_3 (^\circ)$	$r_4 (cm)$
1	60°	- 10.55°	24.66
2	96°	- 14.32°	18.33
3	132°	- 6.98°	13.16
4	168°	8.40°	10
5	204°	26.96°	8.69
6	240°	43.08°	9.61
7	276°	48.35°	14.34
8	312°	38.43°	22.36
9	348°	20.73°	28.49
10	384°	2.67°	29.11

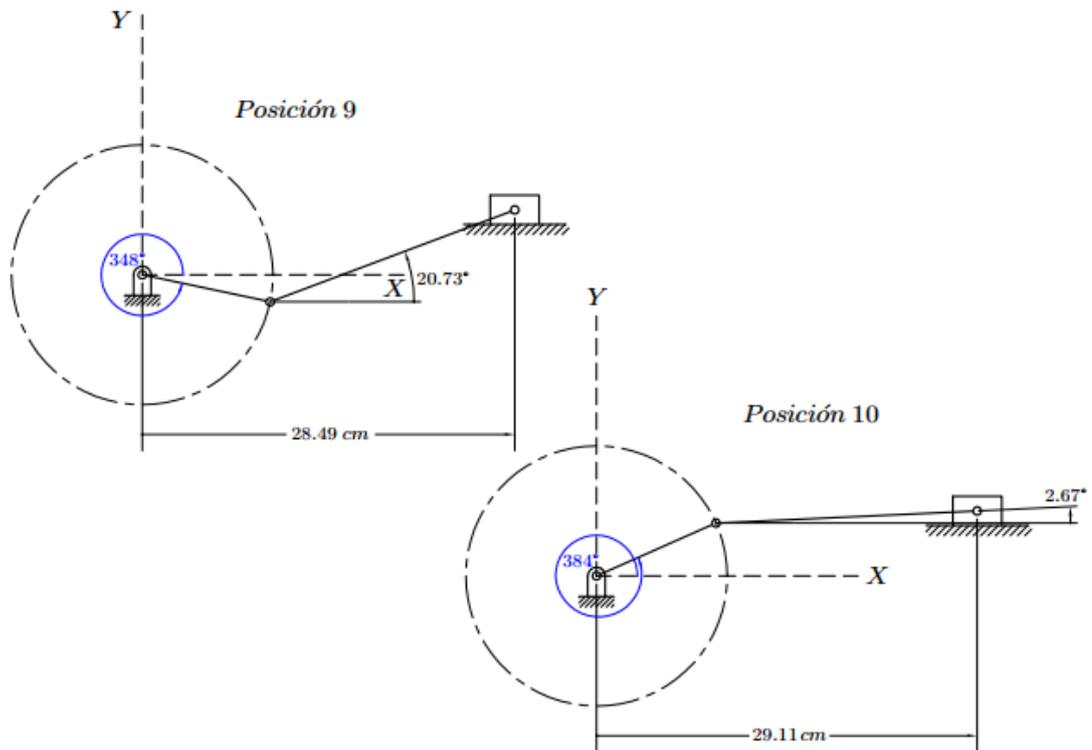
A continuación, con la ayuda de un software CAD, se grafican cada una de las 10 posiciones del mecanismo y se dimensionan las variables desconocidas.

Figura 38

Análisis gráfico de posiciones para las configuraciones geométricas de un mecanismo manivela corredera para un ciclo completo

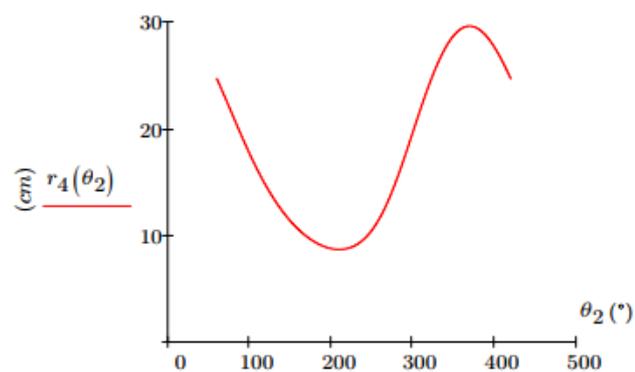
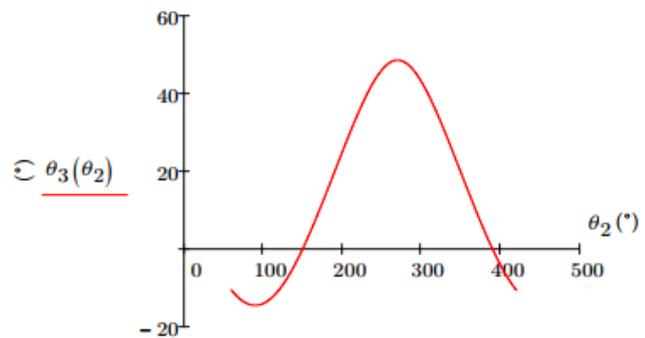






Es evidente la correspondencia entre los datos calculados y el estudio gráfico de las posiciones del mecanismo.

Seguidamente, se grafican las variables incógnita versus el ángulo de giro de la manivela para una vuelta completa:



Análisis de velocidad:

Variables desconocidas - expresión general

$$\omega_3(\theta_2) = -\frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3}$$

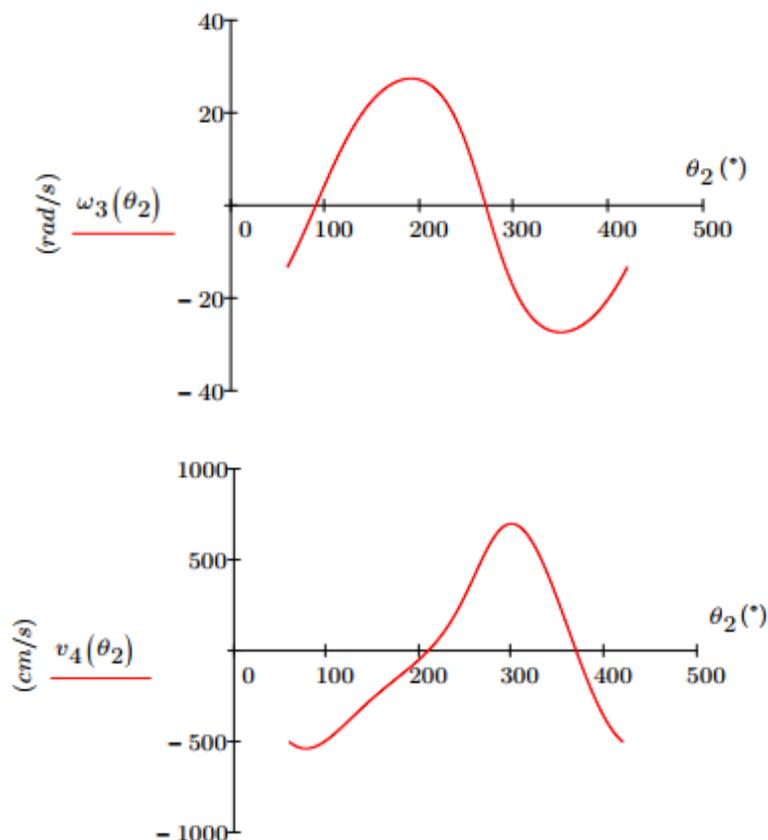
$$\omega_3(\theta_2) = -\frac{10\left(\frac{50\pi}{3}\right) \cos \theta_2}{20 \cos(\theta_3(\theta_2))} = -\frac{5\pi \cos \theta_2}{6 \cos(\theta_3(\theta_2))}$$

Con base en las ecuaciones (2.3.1-7) y (2.3.1-8):

$$v_4(\theta_2) = \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_2)}{\cos(\theta_3(\theta_2))}$$

$$v_4(\theta_2) = \frac{500\pi \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_2)}{3 \cos(\theta_3(\theta_2))}$$

Se grafican las variables incógnita versus el ángulo de giro de la manivela para una vuelta completa:



Análisis de velocidad:

Variables desconocidas - expresión general

$$\alpha_3(\theta_2) = \frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3}{r_3 \cos \theta_3}$$

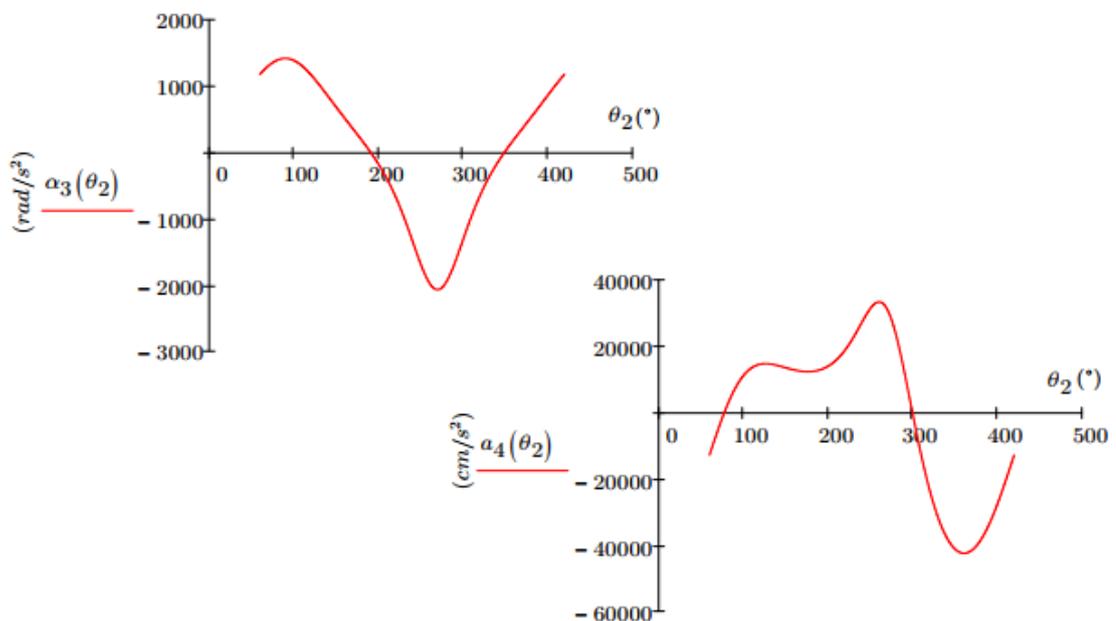
$$\alpha_3(\theta_2) = \frac{10 \left(\frac{50\pi}{3} \right)^2 \operatorname{sen} \theta_2 + 20 \omega_3^2(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2))}{20 \cos \theta_3}$$

Con base en las ecuaciones (2.3.1-14) y (2.3.1-15):

$$a_4(\theta_2) = \frac{-r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - r_3 \omega_3^2}{\cos \theta_3}$$

$$a_4(\theta_2) = \frac{-10 \left(\frac{50\pi}{3} \right)^2 \cos(\theta_2 - \theta_3(\theta_2)) - 20 \omega_3^2(\theta_2)}{\cos(\theta_3(\theta_2))}$$

Entonces se grafican las variables desconocidas versus el ángulo de giro de la manivela para una vuelta completa:



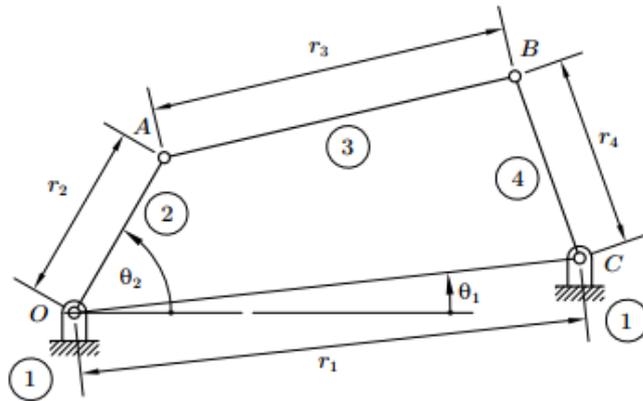
2.3.2 Análisis cinemático del mecanismo de cuatro barras por el método de Raven

Las figuras 39 y 40 muestran un mecanismo de cuatro barras cuya velocidad rotacional o angular de la manivela OA es ω_2 y su aceleración angular es α_2 , ambas en sentido antihorario. Las longitudes de los eslabones de entrada,

acoplador y de salida son r_2 , r_3 y r_4 respectivamente, formando ángulos θ_2 (para el eslabón de entrada), θ_3 (para el acoplador) y θ_4 (para el eslabón de salida) con respecto a sus ejes horizontales positivos y tomados en sentido antihorario; finalmente la longitud y el ángulo del bastidor son r_1 y θ_1 , respectivamente.

Figura 39

Mecanismo de cuatro barras

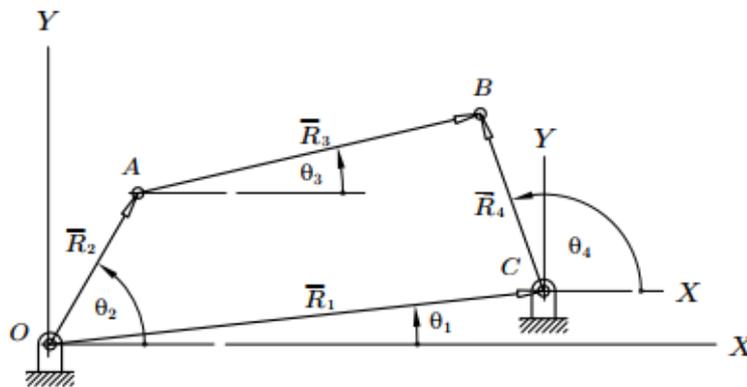


Su movilidad es 1, y el número de contornos independientes es 1 como se mostró en el ejemplo 1.

El único lazo vectorial cerrado existente para el mecanismo se muestra en la Figura 40.

Figura 40

Lazo vectorial cerrado para el mecanismo de cuatro barras



Considerando que en el mecanismo la entrada de movimiento se produce en el eslabón manivela OA , la siguiente tabla muestra las constantes derivadas de la geometría del mecanismo así como las variables conocidas y desconocidas de la cinemática del mismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		r_1, r_2, r_3, r_4 y θ_1	
		VARIABLES CONOCIDAS	VARIABLES DESCONOCIDAS
Variables cinemáticas	Posición	θ_2	θ_3, θ_4
	Velocidad	ω_2	ω_3, ω_4
	Aceleración	α_2	α_3, α_4

Análisis de posición: A partir del lazo vectorial mostrado en la Figura 40, la ecuación vectorial de posición es:

$$\vec{R}_1 - \vec{R}_2 - \vec{R}_3 + \vec{R}_4 = \vec{0}$$

$$r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2} - r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0 + i0 \quad (2.3.2-1)$$

Escribiendo en su forma trigonométrica,

$$r_1 \cos\theta_1 + ir_1 \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 \cos\theta_2 - ir_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 - ir_3 \operatorname{sen}\theta_3 + r_4 \cos\theta_4 + ir_4 \operatorname{sen}\theta_4 = 0 + i0$$

De donde separando partes real e imaginaria, se tiene:

$$\begin{aligned} r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 + r_4 \cos\theta_4 &= 0 \\ r_1 \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_3 \operatorname{sen}\theta_3 + r_4 \operatorname{sen}\theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.2-2)$$

Que constituyen las *ecuaciones escalares* de posición.

Reescribiendo el sistema de ecuaciones (2.3.2-2) de acuerdo a las variables desconocidas de posición:

$$\begin{aligned} r_3 \cos\theta_3 - r_4 \cos\theta_4 &= r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2 \\ r_3 \operatorname{sen}\theta_3 - r_4 \operatorname{sen}\theta_4 &= r_1 \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \end{aligned} \quad (2.3.2-3)$$

El anterior grupo de expresiones constituye un sistema no lineal de ecuaciones en θ_3 y θ_4 , que puede resolverse por algunos procedimientos, entre ellos:

- Un método numérico (forma abierta).
- Un procedimiento algébrico-trigonométrico (forma cerrada).

Se va a describir la forma cerrada.

Método algébrico-trigonométrico

En el sistema de ecuaciones (2.3.2-3) se sustituye:

$$\begin{aligned} K_1 &= r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2 \\ K_2 &= r_1 \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \end{aligned}$$

Entonces, reescribiendo las ecuaciones (2.3.2-3):

$$\begin{aligned} r_3 \cos\theta_3 - r_4 \cos\theta_4 &= K_1 \\ r_3 \operatorname{sen}\theta_3 - r_4 \operatorname{sen}\theta_4 &= K_2 \end{aligned}$$

Reacomodándolas:

$$\begin{aligned}r_4 \cos \theta_4 &= r_3 \cos \theta_3 - K_1 \\r_4 \sin \theta_4 &= r_3 \sin \theta_3 - K_2\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado las expresiones anteriores para luego sumarlas y mediante simplificaciones se tiene:

$$K_1 \cos \theta_3 + K_2 \sin \theta_3 = \frac{r_3^2 - r_4^2 + K_1^2 + K_2^2}{2r_3}$$

Renombrando:

$$K_3 = \frac{r_3^2 - r_4^2 + K_1^2 + K_2^2}{2r_3}$$

Se obtiene:

$$K_1 \cos \theta_3 + K_2 \sin \theta_3 = K_3$$

Sustituyendo las identidades trigonométricas $\sin \theta_3 = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right)}$ y

$$\cos \theta_3 = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right)}$$

la ecuación anterior, y luego de simplificar e igualar a cero, resulta:

$$(K_1 + K_3) \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) - 2K_2 \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) - (K_1 - K_3) = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática en $\tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right)$ y despejar θ_3 , produce:

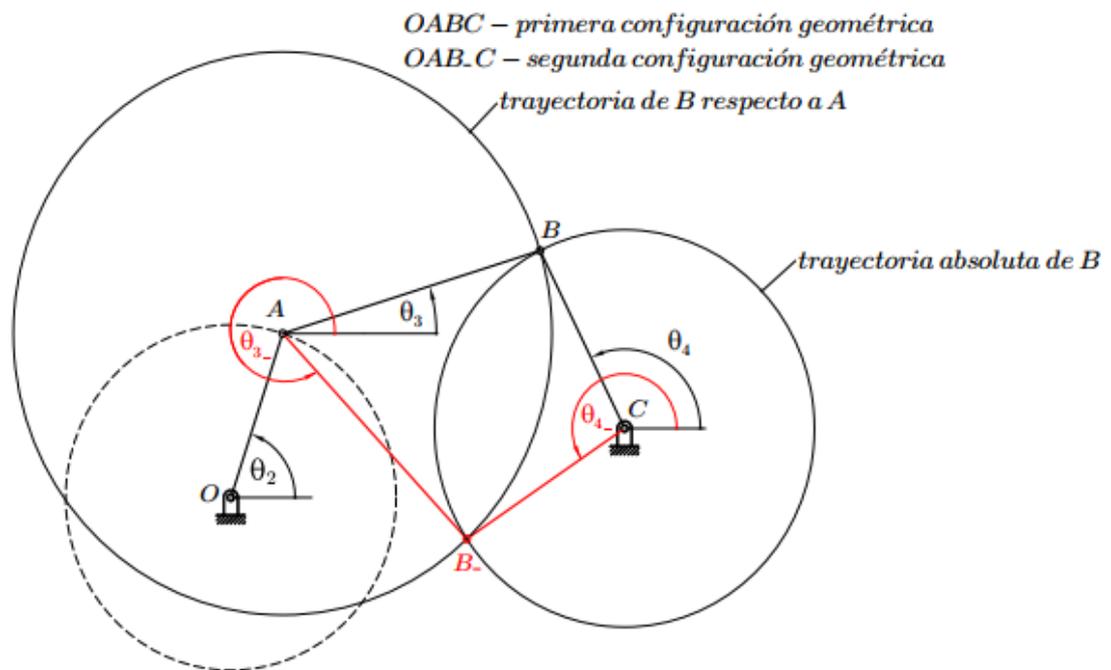
$$\theta_3 = 2 \arctan\left(\frac{K_2 \pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right) \quad (2.3.2-4)$$

Expresiones que corresponden a las configuraciones geométricas del mecanismo de cuatro barras y que dependen de su geometría; para las geometrías de ambas configuraciones del mecanismo mostradas en la Figura 41, se tiene:

$$\theta_3 = 2 \arctan\left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right) \quad (2.3.2-5) \quad \theta_{3-} = 360^\circ + 2 \arctan\left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right) \quad (2.3.2-6)$$

Figura 41

Inversiones geométricas del mecanismo de cuatro barras - ángulos θ_3 , θ_4 , θ_{3-} y θ_{4-}



Por otro lado, partiendo de las ecuaciones (2.3.2-3) y reacomodándolas como:

$$\begin{aligned} r_3 \cos \theta_3 &= K_1 + r_4 \cos \theta_4 \\ r_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= K_2 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \end{aligned}$$

Y a partir de estas expresiones, si se sigue el mismo procedimiento anterior, se obtienen dos valores para θ_4 :

$$\theta_4 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}} \right) \quad (2.3.2-7)$$

$$\theta_{4-} = 360^\circ + 2 \arctan \left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}} \right) \quad (2.3.2-8)$$

Donde:

$$K_{3-} = \frac{r_3^2 - r_4^2 - K_1^2 - K_2^2}{2r_4}.$$

Análisis de velocidad: Si se derivan en el tiempo las ecuaciones (2.3.2-3) y de acuerdo a las variables desconocidas de velocidad:

$$\begin{aligned} -r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 &= r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ r_3 \omega_3 \cos \theta_3 - r_4 \omega_4 \cos \theta_4 &= -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2.3.2-9)$$

Que constituyen las ecuaciones escalares de velocidad.

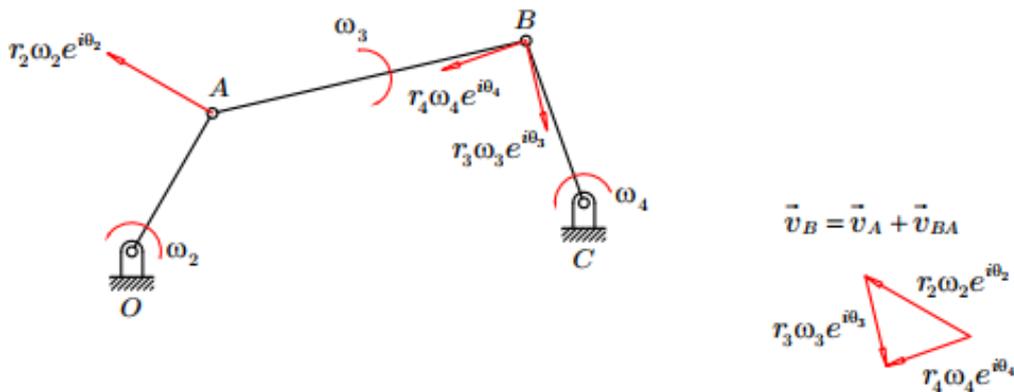
Interpretación cinemática: Considerando que el vector $r_1 e^{i\theta_1}$ es fijo y derivando en el tiempo la expresión (2.3.2-1), se tiene:

$$\begin{aligned}
 -r_2 \frac{d\theta_2}{dt} i e^{i\theta_2} - r_3 \frac{d\theta_3}{dt} i e^{i\theta_3} + r_4 \frac{d\theta_4}{dt} i e^{i\theta_4} &= 0 + i0 \\
 -r_2 \omega_2 i e^{i\theta_2} - r_3 \omega_3 i e^{i\theta_3} + r_4 \omega_4 i e^{i\theta_4} &= 0 + i0 \\
 r_4 \omega_4 i e^{i\theta_4} &= r_2 \omega_2 i e^{i\theta_2} + r_3 \omega_3 i e^{i\theta_3} \quad (2.3.2-10)
 \end{aligned}$$

La ecuación (2.3.2-10) se muestra gráficamente en la Figura 42, donde el término $r_2 \omega_2 e^{i\theta_2}$ representa la velocidad absoluta del punto A del eslabón 2 (debido a la rotación pura del vector \bar{R}_2 en sentido antihorario), $r_3 \omega_3 e^{i\theta_3}$ es la velocidad del punto B con respecto al punto A en el eslabón 3 (debido a la rotación pura del vector \bar{R}_3 con pivote en A y de sentido horario para el instante mostrado en la Figura 40); por último $r_4 \omega_4 e^{i\theta_4}$ es la velocidad absoluta del punto B del eslabón 4 (debido a la rotación pura del vector \bar{R}_4 en sentido antihorario). Los tres vectores forman un polígono vectorial cerrado ($\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$) como lo muestra la expresión (2.3.2-10) y que se observa en la Figura 42:

Figura 42

Polígono vectorial de velocidades del mecanismo de cuatro barras en un instante dado



Resolviendo por Cramer el sistema lineal (2.3.2-9) en ω_3 y ω_4 se obtienen:

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2.3.2-11)$$

$$\omega_4 = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2.3.2-12)$$

Análisis de aceleración: Derivando en el tiempo las ecuaciones (2.3.2-9) y luego de simplificar y reacomodar por las variables desconocidas de aceleración, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -r_3\alpha_3 \operatorname{sen}\theta_3 + r_4\alpha_4 \operatorname{sen}\theta_4 &= r_2\omega_2^2 \cos\theta_2 + r_3\omega_3^2 \cos\theta_3 - r_4\omega_4^2 \cos\theta_4 + r_2\alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\
 r_3\alpha_3 \cos\theta_3 - r_4\alpha_4 \cos\theta_4 &= r_2\omega_2^2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_3\omega_3^2 \operatorname{sen}\theta_3 - r_4\omega_4^2 \operatorname{sen}\theta_4 - r_2\alpha_2 \cos\theta_2
 \end{aligned}$$

Que son las ecuaciones escalares de aceleración.

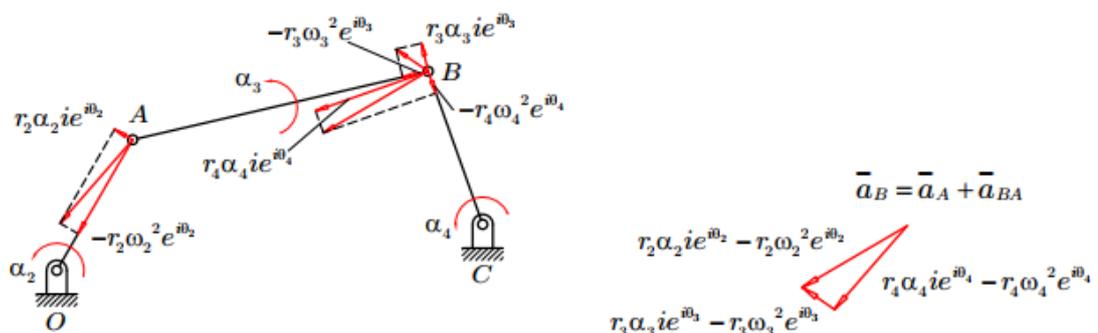
Interpretación cinemática: Derivando en el tiempo la expresión (2.3.2-10),

$$r_2\alpha_2 ie^{i\theta_2} - r_2\omega_2^2 e^{i\theta_2} + r_3\alpha_3 ie^{i\theta_3} - r_3\omega_3^2 e^{i\theta_3} = r_4\alpha_4 ie^{i\theta_4} - r_4\omega_4^2 e^{i\theta_4} \quad (2.3.2-13)$$

La ecuación (2.3.2-13) se muestra gráficamente en la Figura 43, donde el término $r_2\alpha_2 ie^{i\theta_2} - r_2\omega_2^2 e^{i\theta_2}$ representa la *aceleración absoluta del punto A del eslabón 2* (debido a la rotación pura del vector \bar{R}_2 en sentido horario y constituida por la *aceleración tangencial* $r_2\alpha_2 ie^{i\theta_2}$ y la *aceleración normal* $-r_2\omega_2^2 e^{i\theta_2}$), $r_3\alpha_3 ie^{i\theta_3} - r_3\omega_3^2 e^{i\theta_3}$ es la *aceleración del punto B con respecto al punto A en el eslabón 3* (debido a la rotación pura del vector \bar{R}_3 con pivote en A y de sentido antihorario para el momento mostrado, constituida por la *aceleración tangencial* $r_3\alpha_3 ie^{i\theta_3}$ y la *aceleración normal* $-r_3\omega_3^2 e^{i\theta_3}$); finalmente, $r_4\alpha_4 ie^{i\theta_4} - r_4\omega_4^2 e^{i\theta_4}$ es *aceleración absoluta del punto B del eslabón 4* (debido a la rotación pura del vector \bar{R}_4 y de sentido antihorario para el momento mostrado, constituida por la *aceleración tangencial* $r_4\alpha_4 ie^{i\theta_4}$ y la *aceleración normal* $-r_4\omega_4^2 e^{i\theta_4}$). Los tres vectores forman un polígono vectorial cerrado ($\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$) como lo muestra la expresión (2.3.2-13) y se observa en la Figura 43:

Figura 43

Polígono vectorial de aceleraciones del mecanismo de cuatro barras en un instante dado



Al resolverse por Cramer las ecuaciones escalares de aceleración para α_3 y α_4 , generan:

$$\alpha_3 = -\frac{r_2\alpha_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) - r_4\omega_4^2 + r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2.3.2-14)$$

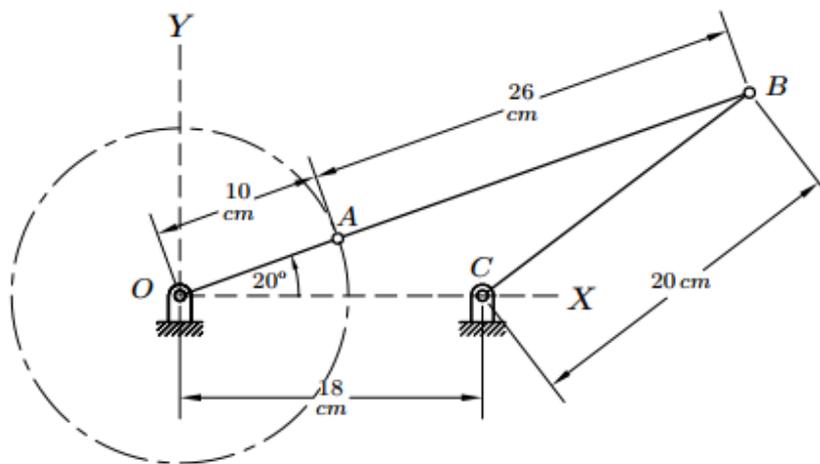
$$\alpha_4 = -\frac{r_2\alpha_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) - r_4\omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_3\omega_3^2 + r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2.3.2-15)$$

Ejemplo 3

Para el mecanismo de cuatro barras mostrado en la Figura 44 efectúese el análisis cinemático de ciclo completo, comprobando gráficamente la posición y obténgase las curvas del análisis de posición, velocidad y aceleración del mecanismo contra el ángulo de giro de la manivela. Supóngase que la manivela OA gira a una velocidad angular constante antihoraria de 800 rpm .

Figura 44

Mecanismo de cuatro barras para análisis cinemático de ciclo completo del ejemplo 3



Considerando que en el mecanismo la entrada de movimiento se produce en el eslabón manivela OA , la siguiente tabla muestra los valores constantes derivados de la geometría del mecanismo, así como las variables conocidas y desconocidas de la cinemática del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1 = 18 \text{ cm}, r_2 = 10 \text{ cm}, r_3 = 26 \text{ cm}, \theta_1 = 0^\circ, r_4 = 20 \text{ cm}$	
		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	$20^\circ \leq \theta_2 \leq 380^\circ$	θ_3, θ_4
	Velocidad	$\omega_2 = 800 \text{ rpm}$ $= \frac{80\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	ω_3, ω_4
	Aceleración	$\alpha_2 = 0$	α_3, α_4

Análisis de posición:

Variables desconocidas - expresiones generales

$$K_1(\theta_2) = r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2$$

$$K_2(\theta_2) = r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2$$

$$K_3(\theta_2) = \frac{r_3^2 - r_4^2 + K_1^2 + K_2^2}{2r_3}$$

$$K_{3-}(\theta_2) = \frac{r_3^2 - r_4^2 - K_1^2 - K_2^2}{2r_4}$$

$$K_1(\theta_2) = 18\cos(0) - 10\cos(\theta_2)$$

$$K_2(\theta_2) = 18\sin(0) - 10\sin(\theta_2)$$

Por las expresiones (2.3.2-5) y (2.3.2-7):

$$K_3(\theta_2) = \frac{(26)^2 - (20)^2 + K_1(\theta_2)^2 + K_2(\theta_2)^2}{2(26)}$$

$$K_{3-}(\theta_2) = \frac{(26)^2 - (20)^2 - K_1(\theta_2)^2 - K_2(\theta_2)^2}{2(20)}$$

$$\theta_3(\theta_2) = 2 \arctan \left(\frac{K_2(\theta_2) + \sqrt{K_1(\theta_2)^2 + K_2(\theta_2)^2 - K_3(\theta_2)^2}}{K_1(\theta_2) + K_3(\theta_2)} \right)$$

$$\theta_4(\theta_2) = 2 \arctan \left(\frac{K_2(\theta_2) + \sqrt{K_1(\theta_2)^2 + K_2(\theta_2)^2 - K_{3-}(\theta_2)^2}}{K_1(\theta_2) + K_{3-}(\theta_2)} \right)$$

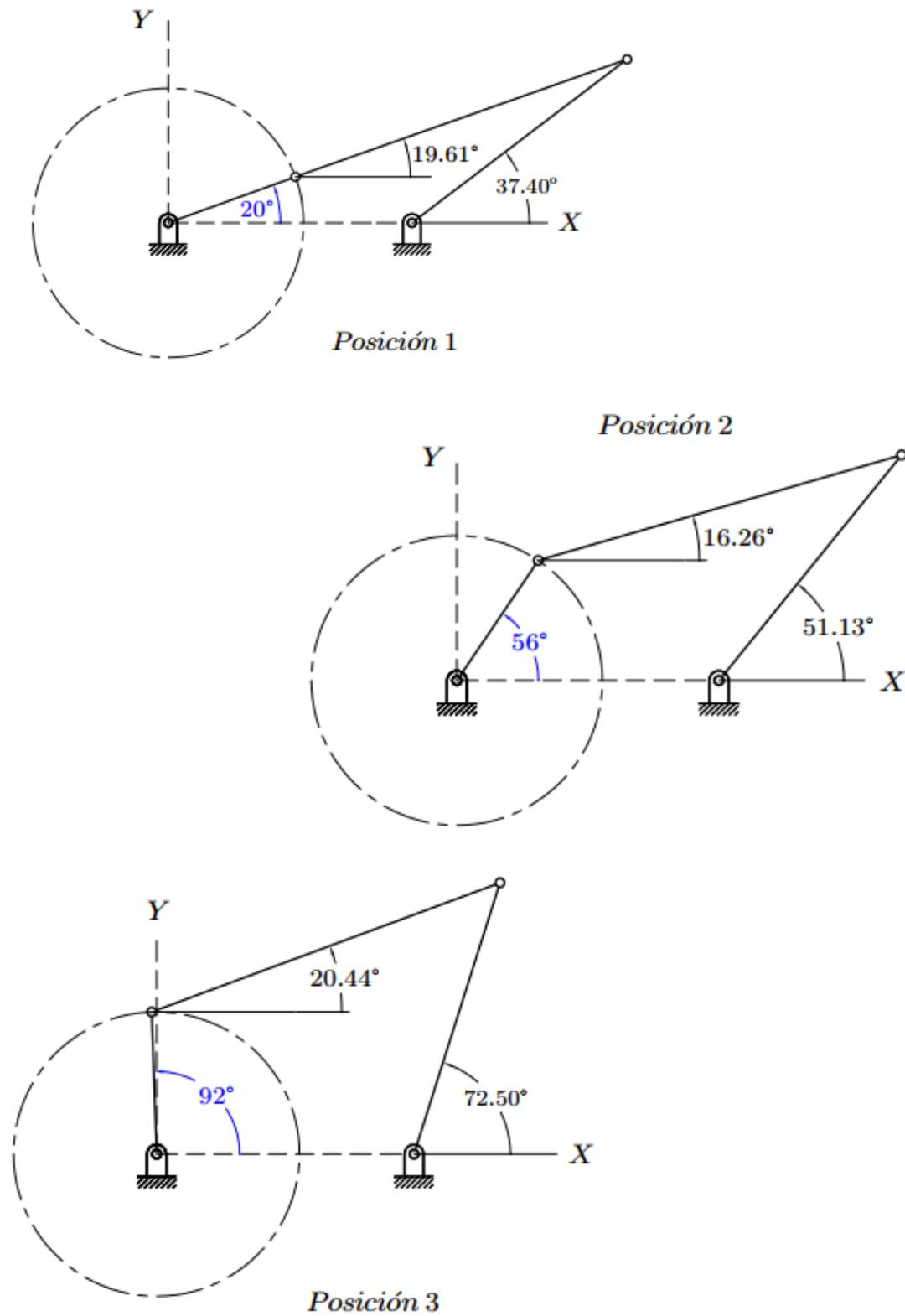
Si se computan las expresiones anteriores para 10 posiciones de la manivela OA iniciando con $\theta_2 = 20^\circ$, en sentido antihorario ($\theta_2 = 20^\circ, 56^\circ, 92^\circ, 128^\circ, 164^\circ, 200^\circ, 236^\circ, 272^\circ, 308^\circ$ y 344°) se obtienen los siguientes resultados:

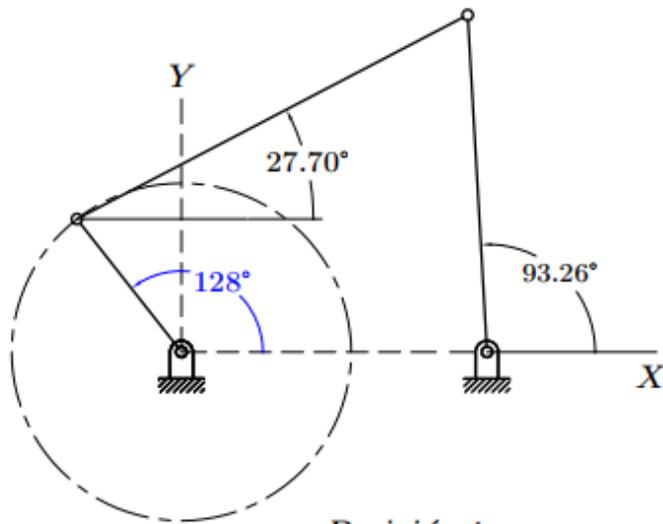
Posición	Ángulo de la manivela	Variables desconocidas - resultados numéricos	
	$\theta_2 (^\circ)$	$\theta_3 (^\circ)$	$\theta_4 (^\circ)$
1	20°	19.61°	37.40°
2	56°	16.26°	51.13°
3	92°	20.44°	72.50°
4	128°	27.70°	93.26°
5	164°	37.84°	110.73°
6	200°	50.80°	123.24°
7	236°	65.48°	129.80°
8	272°	78.85°	129.13°
9	308°	83.35°	116.20°
10	344°	57.75°	74.08°

A continuación, con la ayuda de un software CAD, se grafican cada una de las 10 posiciones y se dimensionan las variables desconocidas.

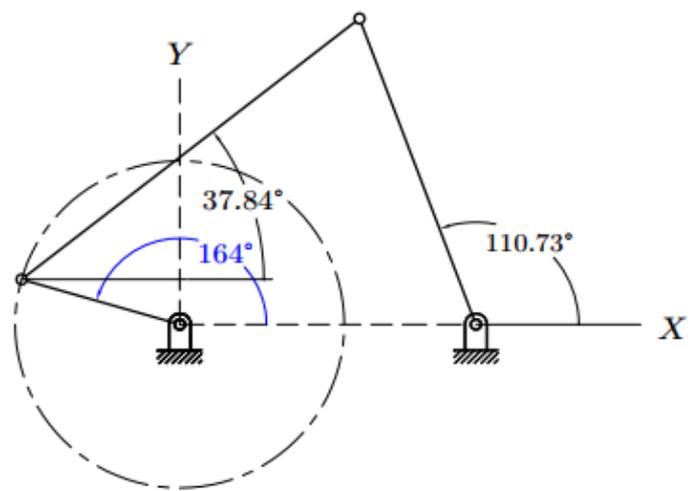
Figura 45

Análisis gráfico de posiciones para las configuraciones geométricas de un mecanismo de cuatro barras para un ciclo completo

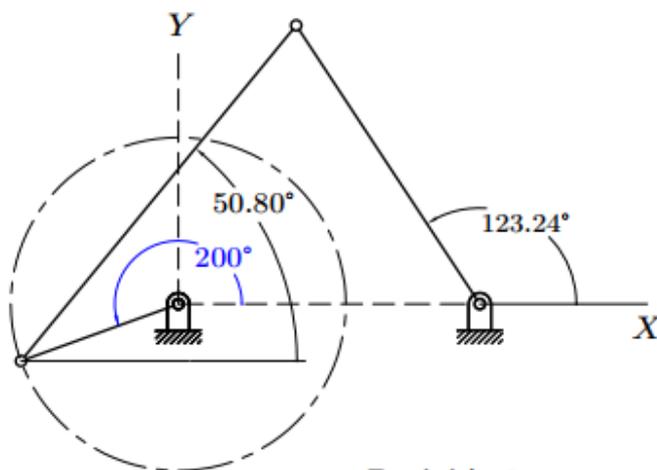




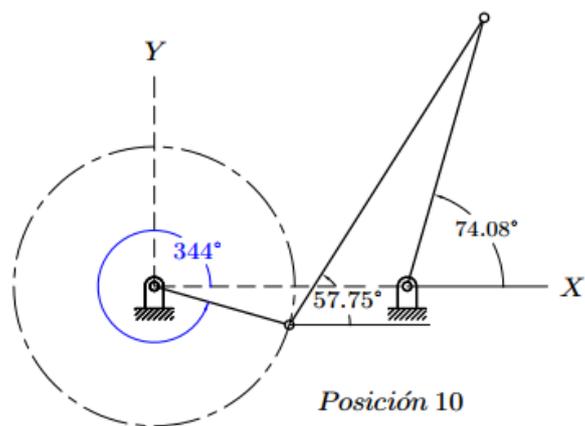
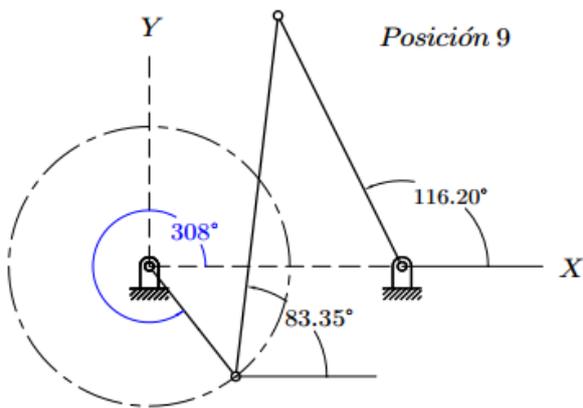
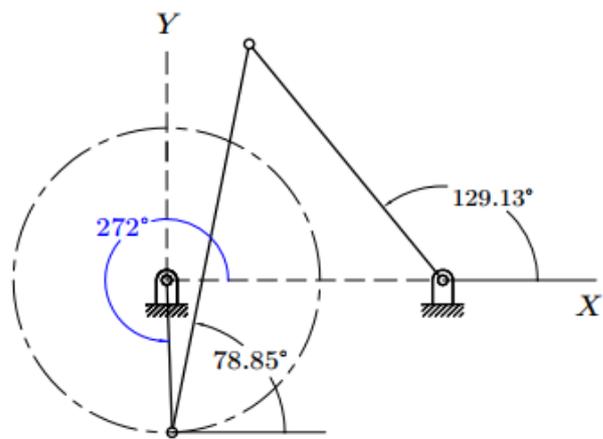
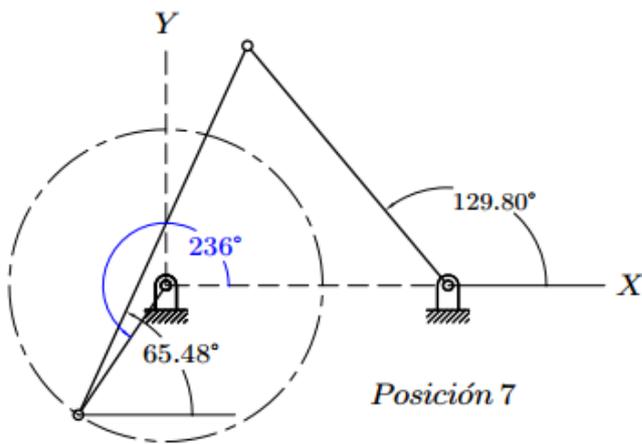
Posición 4



Posición 5

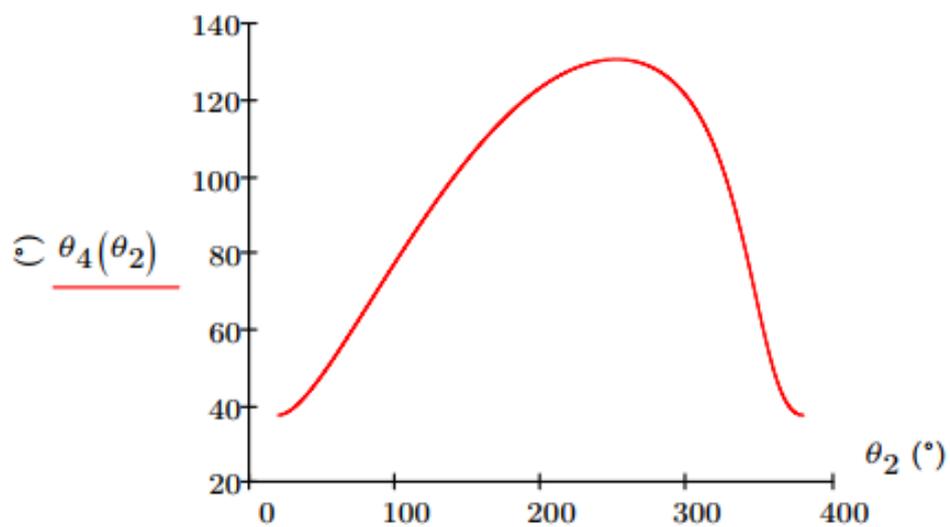
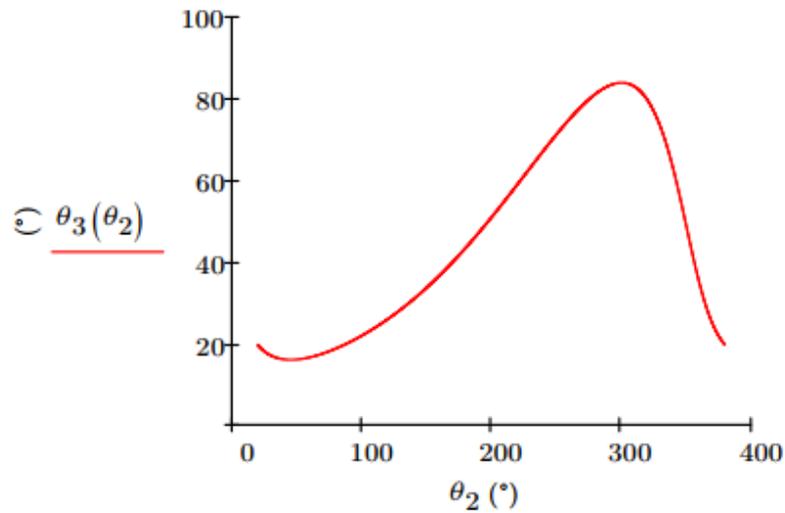


Posición 6



Es muy evidente la correspondencia entre los datos calculados y el estudio gráfico de las posiciones del mecanismo.

Seguidamente se grafican las variables desconocidas versus el ángulo de giro de la manivela para una vuelta completa y se tiene:



Análisis de velocidad:

Variables desconocidas - expresiones generales

$$\omega_3(\theta_2) = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4(\theta_2))}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))}$$

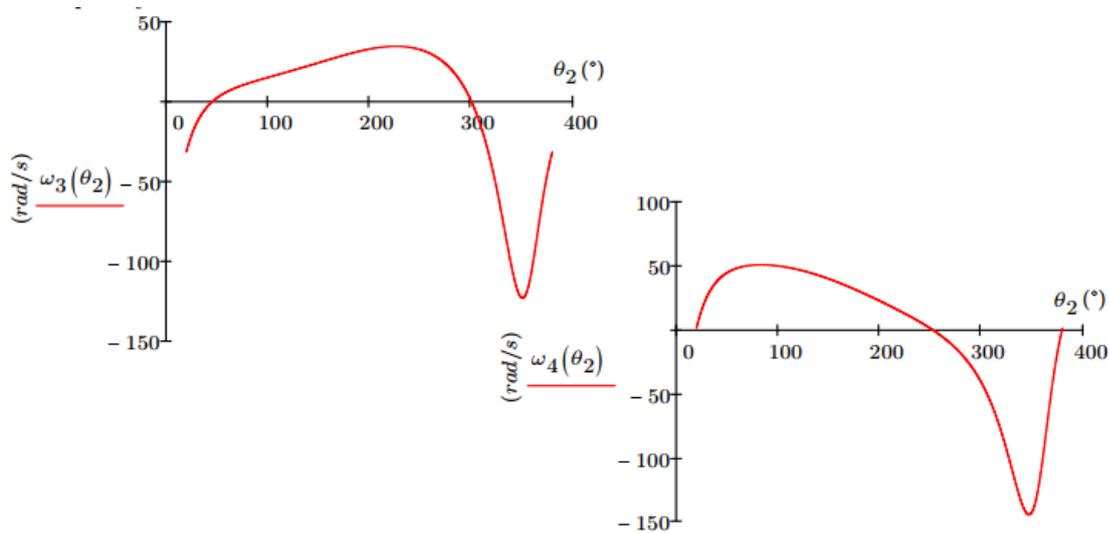
$$\omega_3(\theta_2) = -\frac{10 \left(\frac{80\pi}{3} \right) \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4(\theta_2))}{26 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))}$$

Con base en las ecuaciones (2.3.2-9) y (2.3.2-10):

$$\omega_4(\theta_2) = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3(\theta_2))}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))}$$

$$\omega_4(\theta_2) = -\frac{10\left(\frac{80\pi}{3}\right) \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3(\theta_2))}{20 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))}$$

Se grafican las variables incógnita versus el ángulo de giro de la manivela para una vuelta completa y se tiene:



Análisis de aceleración:

Variables desconocidas - expresiones generales

$$\alpha_3(\theta_2) = -\frac{r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) - r_4 \omega_4^2}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$\alpha_3(\theta_2) = -\frac{10\left(\frac{80\pi}{3}\right)^2 \cos(\theta_2 - \theta_4(\theta_2)) + \dots}{26 \operatorname{sen}(\dots)} \dots$$

$$\dots \frac{26 \omega_3^2(\theta_2) \cos(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2)) - 20 \omega_4^2(\theta_2)}{\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2)}$$

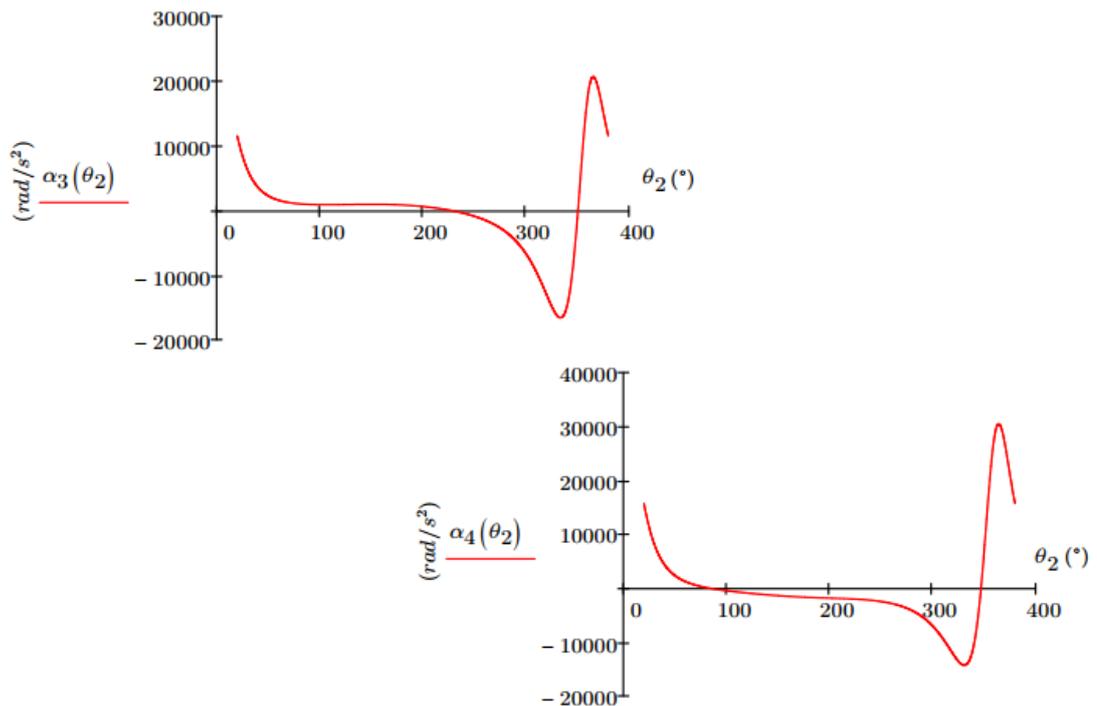
Con base a las ecuaciones (2.3.2-11) y (2.3.2-12):

$$\alpha_4(\theta_2) = -\frac{r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_3 \omega_3^2 - r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$\alpha_4(\theta_2) = -\frac{10\left(\frac{80\pi}{3}\right)^2 \cos(\theta_2 - \theta_3(\theta_2)) + 26\omega_3^2(\theta_2) - \dots}{20 \operatorname{sen}(\dots)} \dots$$

$$\dots \frac{20\omega_4^2(\theta_2) \cos(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))}{\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2)}$$

Entonces, se grafican las variables desconocidas versus el ángulo de giro de la manivela para una vuelta completa y se tiene:

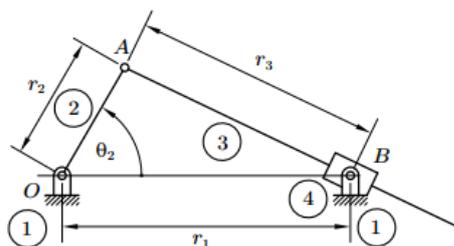


2.3.3 Análisis cinemático del mecanismo manivela corredera invertido por el método de Raven

Considérese el mecanismo manivela corredera invertido, mostrado en la Figura 46, donde la manivela OA gira a una velocidad angular ω_2 y a una aceleración angular α_2 ambas en sentido antihorario:

Figura 46

Mecanismo manivela corredera invertido



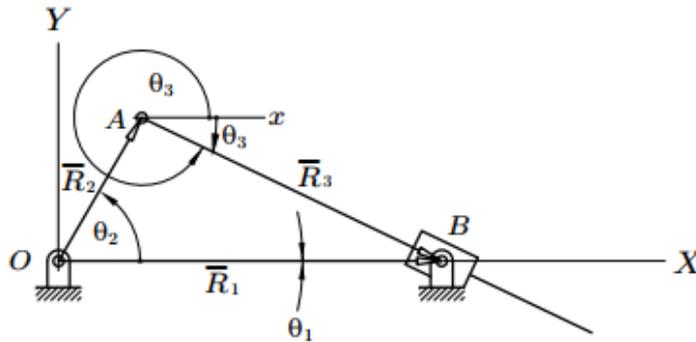
Su movilidad es 1, y el número de contornos independientes es:

$$N = 4 - 3 = 1$$

El único lazo vectorial cerrado existente para el mecanismo se muestra en la Figura 47:

Figura 47

Lazo vectorial cerrado para el mecanismo manivela corredera invertido



Considerando que en el mecanismo la entrada de movimiento se produce en el eslabón manivela OA, la siguiente tabla muestra las constantes derivadas de la geometría del mecanismo así como las variables conocidas y desconocidas de la cinemática del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1, r_2, \theta_1 = 0$	
		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	θ_2	θ_3, r_3
	Velocidad	ω_2	ω_3, v_3
	Aceleración	α_2	α_3, a_3

Análisis de posición: A partir del lazo vectorial mostrado en la Figura 47, la ecuación vectorial de posición es:

$$-\bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \bar{0} \quad (2.3.3-1)$$

Y en su forma polar:

$$-r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = 0 + i0$$

Dado que $\theta_1 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} -r_1 e^{i0} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} &= 0 + i0 \\ -r_1 + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} &= 0 + i0 \end{aligned} \quad (2.3.3-2)$$

Escribiendo esta última ecuación en su forma trigonométrica, se tiene:

$$-r_1 + r_2 \cos \theta_2 + ir_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 + ir_3 \operatorname{sen} \theta_3 = 0 + i0$$

De donde, separando partes real e imaginaria y despejando las expresiones resultantes de acuerdo a las variables incógnita de posición, se tiene:

$$\begin{aligned} r_3 \cos \theta_3 &= r_1 - r_2 \cos \theta_2 \\ r_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= -r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \end{aligned} \quad (2.3.3-3)$$

¿Qué son las ecuaciones escalares de posición?

Dividiendo la segunda ecuación del sistema (2.3.3-3) para la primera y despejando θ_3 resulta:

$$\theta_3 = \arctan \left(\frac{r_2 \operatorname{sen} \theta_2}{-r_1 + r_2 \cos \theta_2} \right) \quad (2.3.3-5)$$

Elevando al cuadrado cada término del sistema (2.3.3-3) y sumándolos, para luego despejar r_3 , produce:

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2} \quad (2.3.3-6)$$

Expresión que también se puede lograr al aplicar la ley de cosenos al triángulo OAB.

Análisis de velocidad: Derivando en el tiempo el sistema de ecuaciones (2.3.3-3) bajo la consideración de que r_1 y r_2 son constantes, se tiene:

$$\begin{aligned} v_3 \cos \theta_3 - r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ v_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \omega_3 \cos \theta_3 &= -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2.3.3-7)$$

Que corresponden a las ecuaciones escalares de velocidad.

Interpretación cinemática: Si se deriva en el tiempo la expresión (2.3.3-2), considerando que r_1 es constante y r_3 varía en el tiempo se tiene:

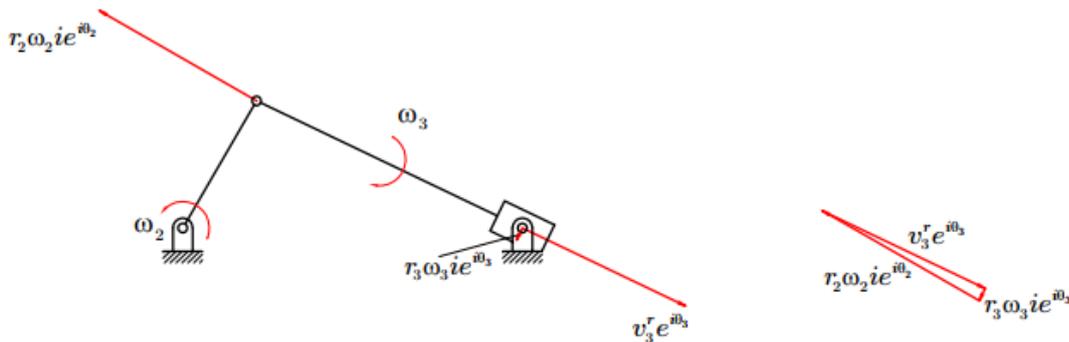
$$\begin{aligned} r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} &= 0 + i0 \\ r_2 \frac{d\theta_2}{dt} i e^{i\theta_2} + \frac{dr_3}{dt} e^{i\theta_3} + r_3 \frac{d\theta_3}{dt} i e^{i\theta_3} &= 0 + i0 \\ r_2 \omega_2 i e^{i\theta_2} + v_3^r e^{i\theta_3} + r_3 \omega_3 i e^{i\theta_3} &= 0 + i0 \end{aligned} \quad (2.3.3-8)$$

La ecuación (2.3.3-8) se muestra gráficamente en la Figura 48, donde el término $r_2 \omega_2 i e^{i\theta_2}$ representa la velocidad absoluta del punto A del eslabón 2 (debi-

do a la rotación pura del vector R_2 en sentido), $v_3^r e^{i\theta_3}$ es la velocidad de deslizamiento o relativa del punto B perteneciente al eslabón 4 con respecto al punto B del eslabón 3 (debido a la tasa de cambio del vector R_3 mientras se desliza el eslabón 3 en la corredera 4), finalmente, $r_3 \omega_3 i e^{i\theta_3}$ es la velocidad relativa del punto B perteneciente al eslabón 3 con respecto al punto A del mismo eslabón (debido a la rotación pura del vector R_3 y de sentido horario para el momento mostrado con respecto al punto A). Los tres vectores forman un polígono vectorial cerrado como lo muestra la expresión (2.3.3-8) y se observa en la Figura 48:

Figura 48

Polígono vectorial de aceleraciones del mecanismo manivela corredera invertido para el instante mostrado



Resolviendo por Cramer el sistema lineal (2.3.3-7) en v_3 y ω_3 , y luego de simplificar da:

$$v_3 = -r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \quad (2.3.3-9)$$

$$\omega_3 = \frac{r_2 \omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \quad (2.3.3-10)$$

Análisis de aceleración: Al derivar en el tiempo el sistema de ecuaciones (2.3.3-7) se obtiene:

$$\begin{aligned} a_3 \cos \theta_3 - v_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 - \left[v_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 (\alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \omega_3^2 \cos \theta_3) \right] &= -r_2 (\alpha_2 \operatorname{sen} \theta_2 + \omega_2^2 \cos \theta_2) \\ a_3 \operatorname{sen} \theta_3 + v_3 \omega_3 \cos \theta_3 + \left[v_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_3 (\alpha_3 \cos \theta_3 - \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3) \right] &= r_2 (\alpha_2 \cos \theta_2 - \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2) \end{aligned}$$

Y reorganizando las anteriores ecuaciones, de acuerdo a las variables incógnita de aceleración, resulta:

$$\begin{aligned} a_3 \cos \theta_3 - r_3 \alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= -r_2 \alpha_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + 2v_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 \\ a_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 &= r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 - r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 - 2v_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 \end{aligned} \quad (2.3.3-11)$$

Que son las ecuaciones escalares de aceleración.

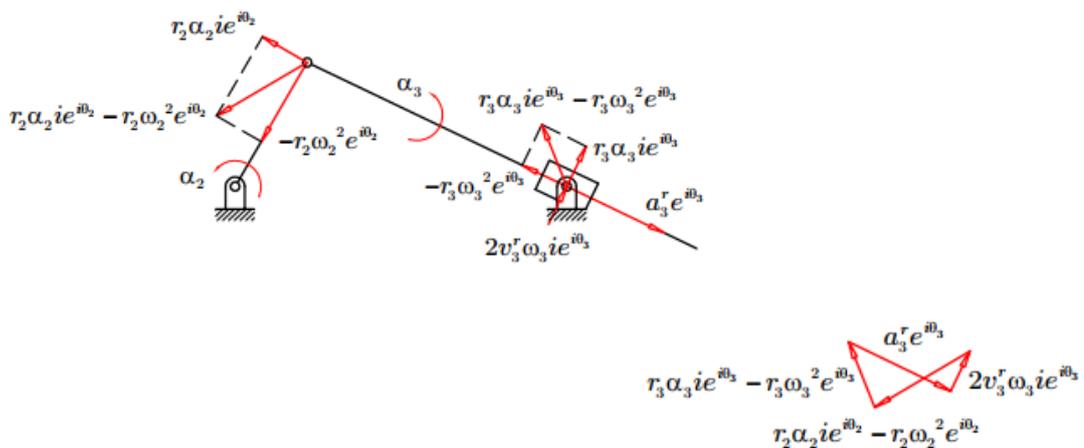
Interpretación cinemática: Derivando en el tiempo la expresión (2.3.3-8),

$$r_2 \alpha_2 i e^{i\theta_2} - r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} + a_3^r e^{i\theta_3} + 2v_3^r \omega_3 i e^{i\theta_3} + r_3 \alpha_3 i e^{i\theta_3} - r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3} = 0 + i0 \quad (2.3.3-12)$$

La ecuación (2.3.3-12) se muestra gráficamente en la Figura 49, donde el término $r_2 \alpha_2 i e^{i\theta_2} - r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2}$ representa la aceleración absoluta del punto A del eslabón 2 (debido a la rotación pura del vector \bar{R}_2 en sentido antihorario y constituida por la aceleración tangencial $r_2 \alpha_2 i e^{i\theta_2}$ y la aceleración normal $-r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2}$), $a_3^r e^{i\theta_3}$ es la aceleración de deslizamiento o relativa del punto B perteneciente al eslabón 4 con respecto al punto B del eslabón 3 (debido al tasa de cambio del vector \bar{R}_3 mientras se desliza el eslabón 3 en la corredera 4) $2v_3^r \omega_3 i e^{i\theta_3}$ es la aceleración de Coriolis del punto B perteneciente al eslabón 3 dado que dicho punto sufre traslación y rotación simultáneas, finalmente, $r_3 \alpha_3 i e^{i\theta_3} - r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3}$ es la aceleración relativa del punto B del eslabón 3 con respecto al punto A del mismo eslabón (debido a la rotación pura del vector \bar{R}_3 con pivote en A y de sentido antihorario para el momento mostrado, constituida por la aceleración tangencial $r_3 \alpha_3 i e^{i\theta_3}$ y la aceleración normal $-r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3}$). Los tres vectores forman un polígono vectorial cerrado como lo muestra la expresión (2.3.3-12) y se observa en la Figura 49:

Figura 49

Polígono vectorial de aceleraciones del mecanismo manivela corredera invertido en un instante dado



Si se resuelve el sistema lineal (2.3.3-11) en a_3 y α_3 , da:

$$\alpha_3 = r_3 \omega_3^2 - r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - r_2 \alpha_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) \quad (2.3.3-13)$$

$$a_3 = -\frac{r_2 \omega_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_3) + 2v_3 \omega_3 - r_2 \alpha_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \quad (2.3.3-14)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{ds_1}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} \\ \cdot \\ \frac{ds_n}{dt} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial p} \end{Bmatrix} \frac{dp}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.4-3)$$

En notación simplificada de matrices, resulta:

$$[\mathbf{J}_s]\{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\}\dot{p} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.4-4)$$

Donde:

$$\{\mathbf{J}_p\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial p} \end{Bmatrix} \quad (2.4-5)$$

Es la matriz (vector) jacobiana para la variable primaria, y

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad (2.4-6)$$

Es la matriz jacobiana para las variables secundarias.

Además, $\frac{dp}{dt} = \dot{p}$ es la velocidad primaria y $\{\dot{\mathbf{s}}\} = \begin{Bmatrix} \frac{ds_1}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} \\ \cdot \\ \frac{ds_n}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \cdot \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix}$ es el vector de las velocidades secundarias.

Resolviendo la expresión (2.4-4) para las velocidades secundarias:

$$\{\dot{\mathbf{s}}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1} \{\mathbf{J}_p\} \dot{p} \quad (2.4-7)$$

O en su forma explícita:

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial p} \end{Bmatrix} \dot{p} \quad (2.4-8)$$

Por otro lado, las ecuaciones escalares de aceleración se pueden obtener al derivar con respecto al tiempo la expresión (2.4-4):

$$[\mathbf{J}_s]\{\ddot{\mathbf{s}}\} + [\dot{\mathbf{J}}_s]\{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\}\ddot{p} + \{\dot{\mathbf{J}}_p\}\dot{p} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.4-9)$$

O en su forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \cdot \\ \ddot{s}_n \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \cdot \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial p} \end{Bmatrix} \ddot{p} + \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial p} \end{Bmatrix} \dot{p} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.4-10)$$

Resolviendo la ecuación vectorial (2.4-9) para las aceleraciones secundarias, se tiene:

$$\{\ddot{\mathbf{s}}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1} \left([\dot{\mathbf{J}}_s]\{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\}\ddot{p} + \{\dot{\mathbf{J}}_p\}\dot{p} \right) \quad (2.4-11)$$

Que en su forma explícita se escribe:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \cdot \\ \ddot{s}_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix}^{-1} \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \cdot \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial p} \end{Bmatrix} \ddot{p} + \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial p} \end{Bmatrix} \dot{p} \right) \quad (2.4-12)$$

Las expresiones (2.4-7) y (2.4-11) conforman el análisis cinemático de velocidades y aceleraciones para el mecanismo representado por las ecuaciones

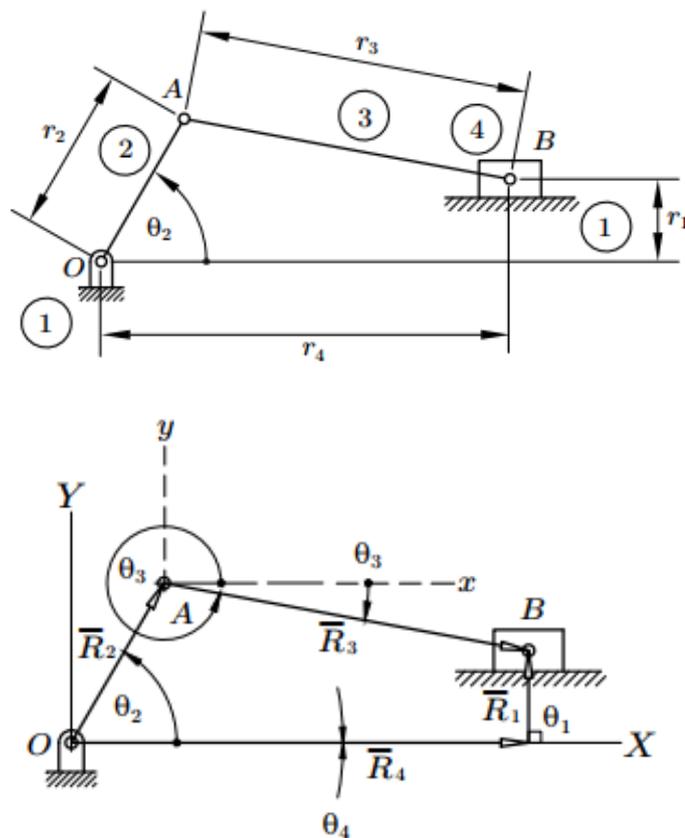
de restricción geométrica (2.4-1). A continuación, en los mismos mecanismos analizados por el método de Raven se emplea el método general.

2.4.1 Análisis cinemático mediante el método general de los mecanismos manivela-corredera, cuatro barras y manivela-corredera invertido

En el presente apartado se van a desarrollar las ecuaciones de velocidad y aceleración de los mecanismos manivela corredera, cuatro barras y manivela corredera invertido a partir de las expresiones (2.4-7) y (2.4-11) anteriormente expuestas. Se repite aquí el diagrama cinemático y el lazo vectorial único del mecanismo manivela corredera:

Figura 50

Mecanismo manivela corredera y su correspondiente lazo vectorial cerrado



Para el lazo vectorial cerrado:

$$\bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 + \bar{R}_4 = \bar{0}$$

De donde,

$$r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 = 0$$

$$r_1 \operatorname{sen} \theta_1 - r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 = 0$$

Y dado que $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_4 = 0^\circ$, entonces:

$$-r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 + r_4 = 0$$

$$r_1 - r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 = 0$$

Es decir, las ecuaciones de restricción cinemática son:

$$f_1(\theta_2, \theta_3, r_4) = -r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 + r_4 = 0$$

$$f_2(\theta_2, \theta_3, r_4) = r_1 - r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 = 0$$

Análisis de posición. Es el mismo que el tratado en el método de Raven para el mecanismo manivela corredera, por lo que se supone θ_3 y r_4 conocidos.

Análisis de velocidad y aceleración. Considerando la variable primaria, $p = \theta_2$ y las variables secundarias, $s_1 = \theta_3$ y $s_2 = r_4$, las matrices jacobianas y sus derivadas temporales están dadas por:

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial r_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial r_4} \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{J}_p\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_2} \end{array} \right\}$$

$$[\dot{\mathbf{J}}_s] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial r_4} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial r_4} \right) \end{bmatrix} \quad \{\dot{\mathbf{J}}_p\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_2} \right) \end{array} \right\}$$

De donde:

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & 1 \\ -r_3 \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{J}_p\} = \begin{bmatrix} r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ -r_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$[\dot{\mathbf{J}}_s] = \begin{bmatrix} r_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 & 0 \\ r_3 \operatorname{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \{\dot{\mathbf{J}}_p\} = \begin{bmatrix} r_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

La ecuación de velocidades es:

$$[\mathbf{J}_s]\{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\}\dot{p} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial r_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial r_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_3 \text{sen} \theta_3 & 1 \\ -r_3 \text{cos} \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_2 \text{sen} \theta_2 \\ -r_2 \text{cos} \theta_2 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Y las velocidades secundarias están dadas por:

$$\{\dot{\mathbf{s}}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1} \{\mathbf{J}_p\} \dot{p}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_3 \text{sen} \theta_3 & 1 \\ -r_3 \text{cos} \theta_3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_2 \text{sen} \theta_2 \\ -r_2 \text{cos} \theta_2 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-r_2 \text{cos} \theta_2}{r_3 \text{cos} \theta_3} \\ \frac{r_2 \text{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\text{cos} \theta_3} \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2$$

Es decir,

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \text{cos} \theta_2}{r_3 \text{cos} \theta_3} \quad (2.4.1-1)$$

$$v_4 = \frac{r_2 \omega_2 \text{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\text{cos} \theta_3} \quad (2.4.1-2)$$

La ecuación de aceleraciones es:

$$[\mathbf{J}_s] \{\ddot{\mathbf{s}}\} + [\dot{\mathbf{J}}_s] \{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\} \ddot{p} + \{\dot{\mathbf{J}}_p\} \dot{p} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial r_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial r_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{r}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial r_4} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial r_4} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \ddot{\theta}_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4)}{\partial \theta_2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_2} \right) \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_3 \text{sen} \theta_3 & 1 \\ -r_3 \text{cos} \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{r}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_3 \text{cos} \theta_3 \dot{\theta}_3 & 0 \\ r_3 \text{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_2 \text{sen} \theta_2 \\ -r_2 \text{cos} \theta_2 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} r_2 \text{cos} \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ r_2 \text{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Y las aceleraciones secundarias están dadas por,

$$\{\ddot{\mathbf{s}}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1} \left([\dot{\mathbf{J}}_s] \{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\} \ddot{\mathbf{p}} + \{\dot{\mathbf{J}}_p\} \dot{\mathbf{p}} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{r}_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_3 \sin \theta_3 & 1 \\ -r_3 \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} r_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 & 0 \\ r_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_2 \sin \theta_2 \\ -r_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{Bmatrix} r_2 \cos \theta_2 \\ r_2 \sin \theta_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \right)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \\ \frac{r_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) - r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - r_3 \dot{\theta}_3^2}{\cos \theta_3} \end{Bmatrix}$$

O sea,

$$\alpha_3 = \frac{-r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 + r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \quad (2.4.1-3)$$

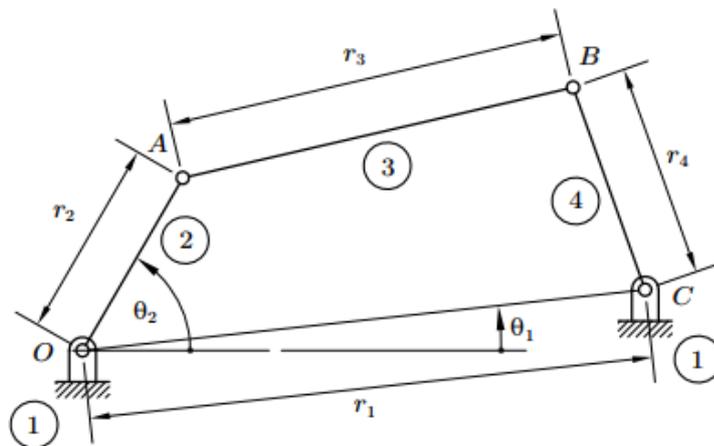
$$a_4 = \frac{r_2 \alpha_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) - r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - r_3 \omega_3^2}{\cos \theta_3} \quad (2.4.1-4)$$

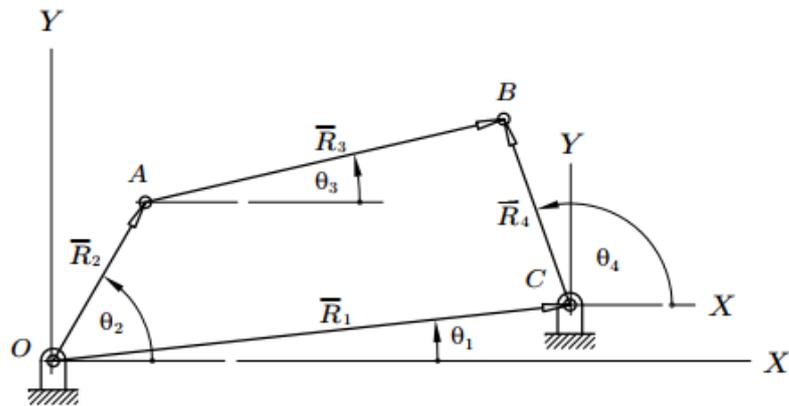
Las expresiones (2.4.1-1), (2.4.1-2), (2.4.1-3) y (2.4.1-4) coinciden con las expresiones (2.3.1-10), (2.3.1-11), (2.3.1-14) y (2.3.1-15) obtenidas mediante el método de Raven.

De igual forma, se repite el diagrama cinemático y el lazo cerrado para el mecanismo de cuatro barras.

Figura 51

Mecanismo de cuatro barras y su correspondiente lazo vectorial cerrado





Para el lazo vectorial cerrado, se tiene:

$$\bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 + \bar{R}_4 = \vec{0}$$

De donde,

$$\begin{aligned} r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 &= 0 \\ r_1 \operatorname{sen} \theta_1 - r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, las ecuaciones de restricción cinemática son:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4) &= r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 = 0 \\ f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4) &= r_1 \operatorname{sen} \theta_1 - r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 = 0 \end{aligned}$$

Análisis de posición. Es el mismo que el tratado en el método de Raven para el mecanismo de cuatro barras, por lo que se supone θ_3 y θ_4 conocidos.

Análisis de velocidad y aceleración. Considerando la variable primaria, $p = \theta_2$ y las variables secundarias, $s_1 = \theta_3$ y $s_2 = \theta_4$ las matrices jacobianas y sus derivadas temporales están dadas por:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_s] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} & \{\mathbf{J}_p\} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \end{Bmatrix} \\ [\dot{\mathbf{J}}_s] &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \right) \end{bmatrix} & \{\dot{\mathbf{J}}_p\} &= \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \right) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

De donde,

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & -r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ -r_3 \cos \theta_3 & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{J}_p\} = \begin{Bmatrix} r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ -r_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} r_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 & -r_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \\ r_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 & -r_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{J}_p\} = \begin{Bmatrix} r_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ r_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

La ecuación de velocidades es:

$$[\mathbf{J}_s]\{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\}\dot{p} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_3 \sin \theta_3 & -r_4 \sin \theta_4 \\ -r_3 \cos \theta_3 & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_2 \sin \theta_2 \\ -r_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Y las velocidades secundarias están dadas por,

$$\{\dot{\mathbf{s}}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1} \{\mathbf{J}_p\} \dot{p}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_3 \sin \theta_3 & -r_4 \sin \theta_4 \\ -r_3 \cos \theta_3 & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} r_2 \sin \theta_2 \\ -r_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \\ \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2$$

Es decir,

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2.4.1-5)$$

$$\omega_4 = -\frac{r_2 \omega_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2.4.1-6)$$

La ecuación de aceleraciones es:

$$[\mathbf{J}_s]\{\ddot{\mathbf{s}}\} + [\dot{\mathbf{J}}_s]\{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\}\ddot{p} + \{\dot{\mathbf{J}}_p\}\dot{p} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_4} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \end{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\
& + \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)}{\partial \theta_2} \right) \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} r_3 \text{sen} \theta_3 & -r_4 \text{sen} \theta_4 \\ -r_3 \text{cos} \theta_3 & r_4 \text{cos} \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_3 \text{cos} \theta_3 \dot{\theta}_3 & -r_4 \text{cos} \theta_4 \dot{\theta}_4 \\ r_3 \text{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 & -r_4 \text{sen} \theta_4 \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_2 \text{sen} \theta_2 \\ -r_2 \text{cos} \theta_2 \end{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{Bmatrix} r_2 \text{cos} \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ r_2 \text{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Y las aceleraciones secundarias están dadas por,

$$\{\ddot{\theta}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1} \left([\dot{\mathbf{J}}_s] \{\dot{\theta}\} + \{\mathbf{J}_p\} \ddot{p} + \{\dot{\mathbf{J}}_p\} \dot{p} \right)$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} r_3 \text{sen} \theta_3 & -r_4 \text{sen} \theta_4 \\ -r_3 \text{cos} \theta_3 & r_4 \text{cos} \theta_4 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} r_3 \text{cos} \theta_3 \dot{\theta}_3 & -r_4 \text{cos} \theta_4 \dot{\theta}_4 \\ r_3 \text{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 & -r_4 \text{sen} \theta_4 \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_2 \text{sen} \theta_2 \\ -r_2 \text{cos} \theta_2 \end{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{Bmatrix} r_2 \text{cos} \theta_2 \\ r_2 \text{sen} \theta_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \right) \\
\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{r_2 \ddot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_4) - r_4 \dot{\theta}_4^2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \text{cos}(\theta_2 - \theta_4) + r_3 \dot{\theta}_3^2 \text{cos}(\theta_3 - \theta_4)}{r_3 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \\ \frac{r_2 \ddot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) - r_4 \dot{\theta}_4^2 \text{cos}(\theta_3 - \theta_4) + r_3 \dot{\theta}_3^2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \text{cos}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

O sea,

$$\alpha_3 = - \frac{r_2 \alpha_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_4) - r_4 \omega_4^2 + r_2 \omega_2^2 \text{cos}(\theta_2 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2 \text{cos}(\theta_3 - \theta_4)}{r_3 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2.4.1-7)$$

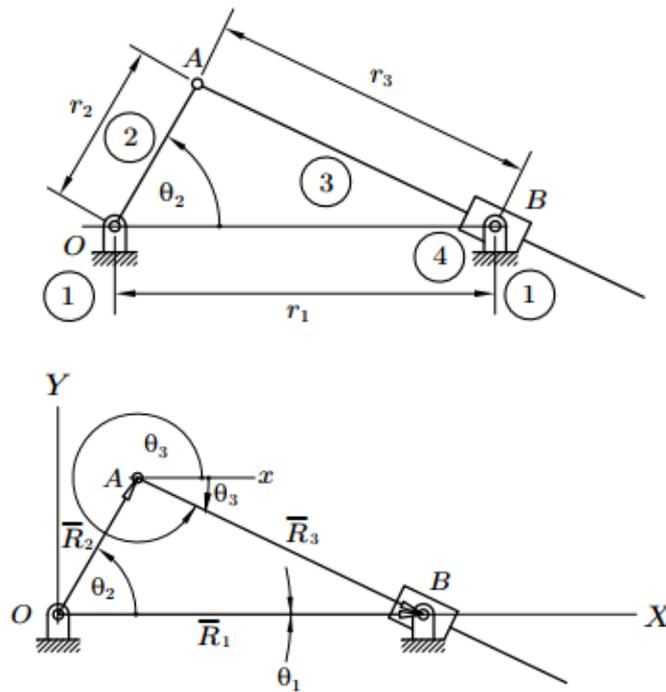
$$\alpha_4 = - \frac{r_2 \alpha_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) - r_4 \omega_4^2 \text{cos}(\theta_3 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2 + r_2 \omega_2^2 \text{cos}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2.4.1-8)$$

Las expresiones (2.4.1-5), (2.4.1-6), (2.4.1-7) y (2.4.1-8) coinciden con las expresiones (2.3.2-11), (2.3.2-12), (2.3.2-14) y (2.3.2-15) obtenidas mediante el método de Raven.

Finalmente, se repite aquí el diagrama cinemático y el lazo vectorial cerrado para el mecanismo manivela corredera invertido que se muestra en la Figura 52 de la página siguiente:

Figura 52

Mecanismo manivela corredera invertido y su correspondiente lazo vectorial cerrado



Para el lazo vectorial cerrado, se tiene:

$$\bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 = \vec{0}$$

De donde,

$$r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 = 0$$

$$r_1 \text{sen}\theta_1 - r_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \text{sen}\theta_3 = 0$$

Y dado que $\theta_1 = 0^\circ$, entonces:

$$r_1 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 = 0$$

$$-r_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \text{sen}\theta_3 = 0$$

Es decir, las ecuaciones de restricción cinemática están dadas por:

$$f_1(\theta_2, r_3, \theta_3) = r_1 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 = 0$$

$$f_2(\theta_2, r_3, \theta_3) = -r_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \text{sen}\theta_3 = 0$$

Análisis de posición: Es el mismo que el tratado en el método de Raven para el mecanismo manivela corredera invertido, por lo que se supone r_3 y θ_3 conocidos.

Análisis de velocidad y aceleración. Considerando la variable primaria, $p = \theta_2$ y las variables secundarias, $s_1 = r_3$ y $s_2 = \theta_3$, las matrices jacobianas y sus derivadas temporales están dadas por:

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{J}_p\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \end{Bmatrix}$$

$$[\dot{\mathbf{J}}_s] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \right) \end{bmatrix} \quad \{\dot{\mathbf{J}}_p\} = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \right) \end{Bmatrix}$$

De donde,

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} -\cos\theta_3 & r_3 \operatorname{sen}\theta_3 \\ -\operatorname{sen}\theta_3 & -r_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{J}_p\} = \begin{Bmatrix} r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ -r_2 \cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$[\dot{\mathbf{J}}_s] = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta_3 \dot{\theta}_3 & \operatorname{sen}\theta_3 \dot{r}_3 + r_3 \cos\theta_3 \dot{\theta}_3 \\ -\cos\theta_3 \dot{\theta}_3 & -\cos\theta_3 \dot{r}_3 + r_3 \operatorname{sen}\theta_3 \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad \{\dot{\mathbf{J}}_p\} = \begin{Bmatrix} r_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

La ecuación de velocidades es:

$$[\mathbf{J}_s] \{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\dot{\mathbf{J}}_p\} \dot{p} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\cos\theta_3 & r_3 \operatorname{sen}\theta_3 \\ -\operatorname{sen}\theta_3 & -r_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ -r_2 \cos\theta_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Y las velocidades secundarias están dadas por,

$$\{\dot{\mathbf{s}}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1} \{\mathbf{J}_p\} \dot{p}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\cos\theta_3 & r_3 \operatorname{sen}\theta_3 \\ -\operatorname{sen}\theta_3 & -r_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ -r_2 \cos\theta_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \\ \frac{r_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2$$

Es decir,

$$v_3 = -r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \quad (2.4.1-9)$$

$$\omega_3 = \frac{r_2 \omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \quad (2.4.1-10)$$

La ecuación de aceleraciones es:

$$[\mathbf{J}_s] \{\ddot{\mathbf{s}}\} + [\dot{\mathbf{J}}_s] \{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\} \ddot{p} + \{\dot{\mathbf{J}}_p\} \dot{p} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \end{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \\ & + \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \right) \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -\cos \theta_3 & r_3 \operatorname{sen} \theta_3 \\ -\operatorname{sen} \theta_3 & -r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 & \operatorname{sen} \theta_3 \dot{r}_3 + r_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \\ -\cos \theta_3 \dot{\theta}_3 & -\cos \theta_3 \dot{r}_3 + r_3 \operatorname{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ -r_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{Bmatrix} r_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Y las aceleraciones secundarias están dadas por,

$$\{\ddot{\mathbf{s}}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1} \left([\dot{\mathbf{J}}_s] \{\dot{\mathbf{s}}\} + \{\mathbf{J}_p\} \ddot{p} + \{\dot{\mathbf{J}}_p\} \dot{p} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\cos \theta_3 & r_3 \operatorname{sen} \theta_3 \\ -\operatorname{sen} \theta_3 & -r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 & \operatorname{sen} \theta_3 \dot{r}_3 + r_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \\ -\cos \theta_3 \dot{\theta}_3 & -\cos \theta_3 \dot{r}_3 + r_3 \operatorname{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ -r_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{Bmatrix} r_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \right)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_3 \dot{\theta}_3^2 - r_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 - r_2 \ddot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \\ \frac{r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{r}_3 \dot{\theta}_3 - r_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \end{Bmatrix}$$

O sea,

$$\alpha_3 = r_3 \omega_3^2 - r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - r_2 \alpha_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \quad (2.4.1-11)$$

$$\alpha_3 = - \frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) + 2v_3 \omega_3 - r_2 \alpha_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \quad (2.4.1-12)$$

Coincidiendo las expresiones (2.4.1-9), (2.4.1-10), (2.4.1-11) y (2.4.1-12) con las expresiones (2.3.3-9), (2.3.3-10), (2.3.3-13) y (2.3.3-14) obtenidas mediante el método de Raven.

A continuación, se exponen otros ejemplos con el uso de las metodologías estudiadas para mecanismos de 1 grado de libertad y un lazo vectorial.

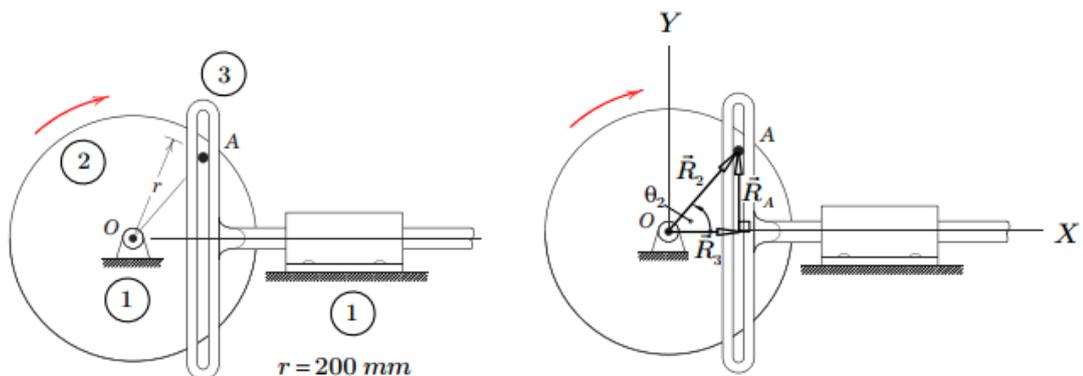
Ejemplo 4

Para el mecanismo de yugo escocés mostrado en la Figura 53, el eslabón motriz OA gira a una velocidad angular constante de 600 rpm en sentido horario.

- (a) Para el momento en que $\theta = 25^\circ$, efectúese el análisis cinemático de mecanismo.
- (b) Realícese el análisis cinemático del mecanismo para un ciclo completo de movimiento, suponiendo que inicia el mismo cuando $\theta = 30^\circ$.
- (c) Describese en detalle la cinemática del eslabón 3 del mecanismo

Figura 53

Mecanismo del ejemplo 4 y su correspondiente lazo vectorial cerrado



Se calcula en primer lugar la movilidad y el número de lazos cerrados a ser empleados en el análisis cinemático del mecanismo,

$$m = 3(3 - 1) - 2(2) = 1$$

$$N = 3 - 2 = 1$$

La tabla de la página siguiente presenta las variables conocidas e incógnitas de la cinemática del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_2 = 0.2 \text{ m}, \theta_A = 90^\circ, \theta_3 = 0^\circ$	
		Variable conocida – primaria	Variabes desconocidas – secundarias
Variables cinemáticas	Posición	θ_2	r_A, r_3
	Velocidad	$\omega_2 = -20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	v_A, v_3
	Aceleración	$\alpha_2 = 0$	a_A, a_3

Es usual que no se le proporcione aceleración angular a los eslabones motrices de los mecanismos para no aumentar el efecto de la aceleración en los demás eslabones móviles de un mecanismo y con ello hacer menos voluminoso el tamaño de los mismos.

Análisis de posición: Para el lazo vectorial de la Figura 52.

$$\vec{R}_A - \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = \vec{0}$$

De donde:

$$r_A \cos \theta_A - r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = 0$$

$$r_A \text{sen} \theta_A - r_2 \text{sen} \theta_2 + r_3 \text{sen} \theta_3 = 0$$

Dado que: $\theta_A = 90^\circ$ y $\theta_3 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} -r_2 \cos \theta_2 + r_3 &= 0 \\ r_A - r_2 \text{sen} \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej4-1})$$

Que son las ecuaciones escalares de posición y se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} r_A &= r_2 \text{sen} \theta_2 \\ r_3 &= r_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej4-2})$$

Análisis de velocidad.

Método de Raven

Derivando en el tiempo las ecuaciones escalares de posición (ej4-1):

$$\begin{aligned} r_2 \omega_2 \text{sen} \theta_2 + v_3 &= 0 \\ v_A - r_2 \omega_2 \cos \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej4-3})$$

Que constituyen las ecuaciones escalares de velocidad.

Despejando v_A y v_3 del sistema (ej4-3) da:

$$\begin{aligned} v_A &= r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \\ v_3 &= -r_2 \omega_2 \text{sen} \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej4-4})$$

Método general

Considérese la variable primaria $p = \theta_2$, las variables secundarias: $s_1 = r_A$ y $s_2 = r_3$ así como las ecuaciones de restricción cinemática:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2, r_A, r_3) &= -r_2 \cos \theta_2 + r_3 = 0 \\ f_2(\theta_2, r_A, r_3) &= r_A - r_2 \sin \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ej4-5})$$

De donde:

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial r_A} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial r_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial r_A} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial r_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{J}_p] = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{J}_p\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ r_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\{\dot{\mathbf{J}}_p\} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_A, r_3)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 \omega_2 \sin \theta_2 \\ r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, las *velocidades secundarias* están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} v_A \\ v_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ r_2 \sin \theta_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2$$

$$\begin{Bmatrix} v_A \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \omega_2 \sin \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{ej4-6})$$

Análisis de aceleración.

Método de Raven

Finalmente derivando en el tiempo las ecuaciones escalares de velocidad (ej4-3):

$$\begin{aligned} r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + a_3 &= 0 \\ a_A + r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej4-7})$$

Que conforman las ecuaciones escalares de aceleración.

Despejando a_A y a_3 del sistema (ej4-7) resulta:

$$\begin{aligned} a_A &= -r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 \\ a_3 &= -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej4-8})$$

Método general

Las aceleraciones secundarias están dadas por:

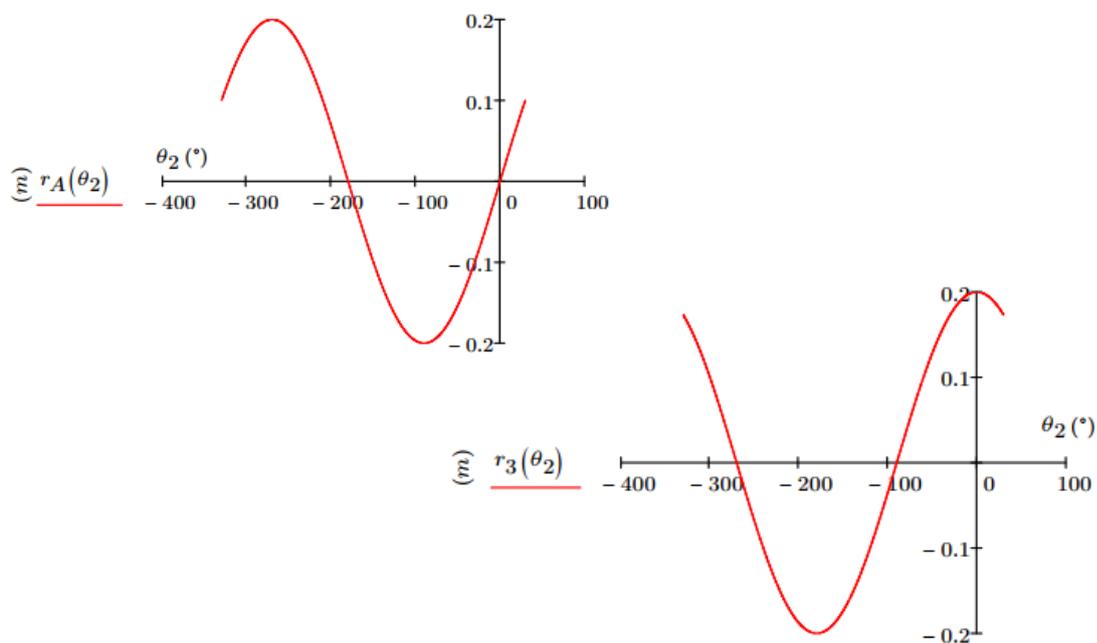
$$\begin{Bmatrix} a_A \\ a_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_A \\ v_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ r_2 \omega_2 \operatorname{cos} \theta_2 \end{Bmatrix} \omega_2 \right)$$

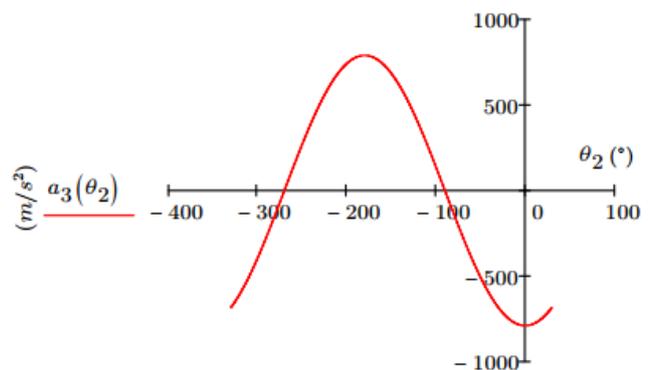
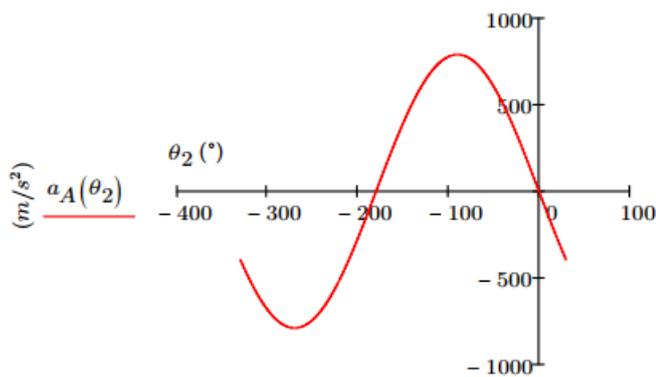
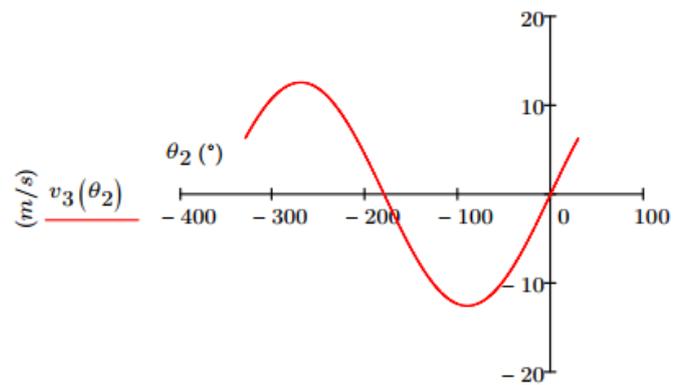
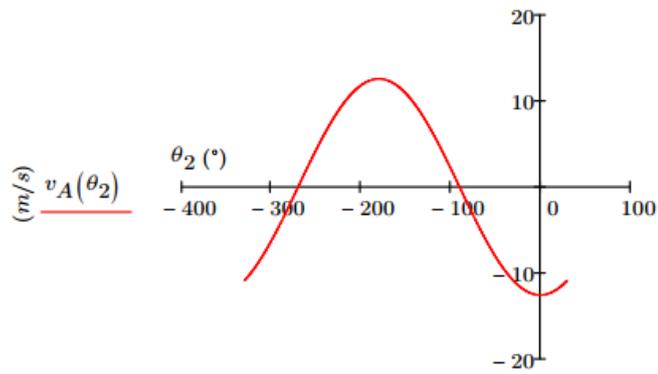
$$\begin{Bmatrix} a_A \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ -r_2 \omega_2^2 \operatorname{cos} \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{ej4-9})$$

Para el ítem (a), sustituyendo $r_2 = 0.2 \text{ m}$, $\theta_2 = 25^\circ$ y $\omega_2 = -20\pi \text{ rad/s}$, en los conjuntos de ecuaciones (ej4-2), (ej4-4) y (ej4-8) se obtiene:

$$\begin{aligned} r_A &= 0.085 \text{ m} \\ r_3 &= 0.18 \text{ m} \\ v_A &= -11.39 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_3 &= 5.31 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a_A &= -333.69 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a_3 &= -715.59 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

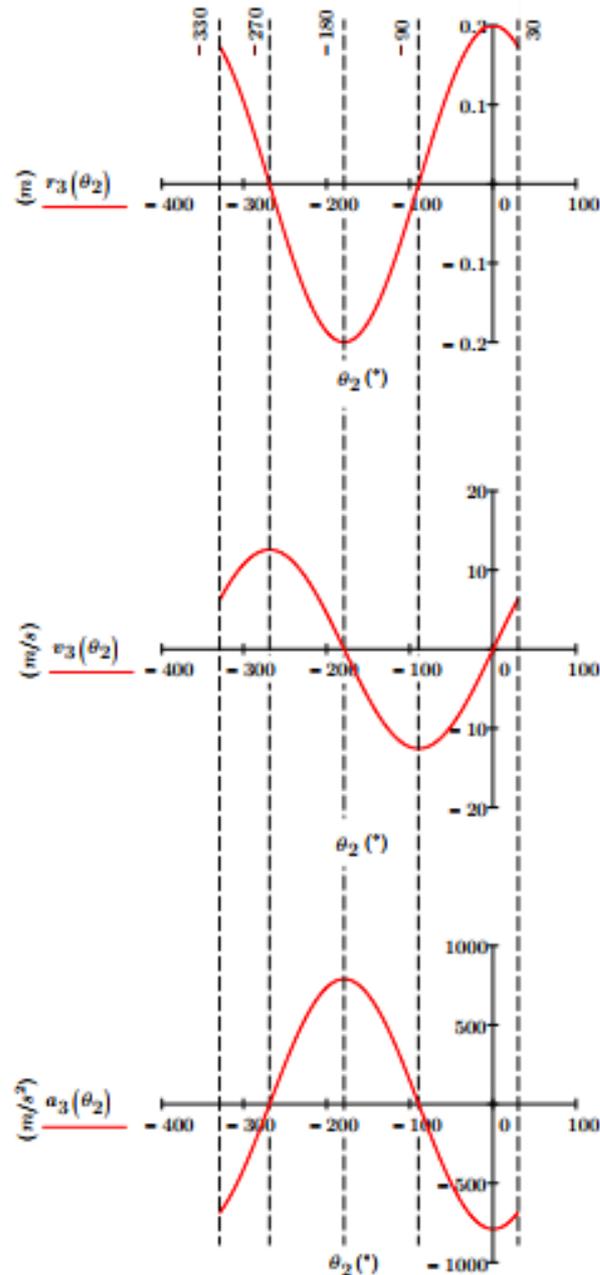
Para cuantificar el ítem (b) se grafican las variables cinemáticas desconocidas contra el ángulo de giro del eslabón manivela ($30^\circ \leq \theta_2 \leq -330^\circ$) las cuales se muestran a continuación:





Los valores positivos indican que la posición está a la derecha del punto O y que la velocidad y aceleración están dirigidas hacia la derecha de dicho punto, mientras que valores negativos indicarían lo contrario.

Para interpretar el comportamiento cinemático de ciclo completo de movimiento del eslabón 3 como se pide en el ítem (c) se toman las gráficas de las variables cinemáticas desconocidas del eslabón 3 (r_3 , v_3 y a_3).



De las gráficas previas se puede observar que el movimiento del eslabón 3 se puede descomponer en 5 fases:

Fase 1: movimiento del eslabón 3 cuando el motriz gira de 30° a 0° .

Fase 2: movimiento del eslabón 3 cuando el motriz gira de 0° a -90° .

Fase 3: movimiento del eslabón 3 cuando el motriz gira de -90° a -180° .

Fase 4: movimiento del eslabón 3 cuando el motriz gira de -180° a -270° .

Fase 5: movimiento del eslabón 3 cuando el motriz gira de -270° a -330° .

El comportamiento cinemático de cada variable cinemática desconocida en cada fase se resume en la siguiente tabla:

Fase	Variación de r_3	Variación de v_3	Variación de a_3
1	$0.17\text{ m} \rightarrow 0.2\text{ m}$	$6.28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$-683.79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow -789.57 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
2	$0.2\text{ m} \rightarrow 0\text{ m}$	$0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow -12.57 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$-789.57 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
3	$0\text{ m} \rightarrow -0.2\text{ m}$	$-12.57 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow 789.57 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
4	$-0.2\text{ m} \rightarrow 0\text{ m}$	$0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow 12.57 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$789.57 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
5	$0\text{ m} \rightarrow 0.17\text{ m}$	$12.57 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow 6.28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow -683.79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

De la tabla de valores anterior se puede interpretar lo siguiente:

1. Durante la *fase* 1 el eslabón 3 (que está a 0.17 m a la derecha del punto O , o punto correspondiente a $r_3 = 0\text{ m}$) se mueve a la derecha desacelerándose (signo de la aceleración contrario al de la velocidad) hasta detenerse a 0.2 m del punto O .
2. Durante la *fase* 2 el eslabón 3 invierte su movimiento hacia la izquierda (velocidad negativa) y empieza un movimiento acelerado (signo de la aceleración idéntico al de la velocidad) en esa dirección hasta llegar al punto O .
3. Durante la *fase* 3 el eslabón 3 se sigue moviendo hacia la izquierda pero esta vez con desaceleración (signo de la aceleración contrario al de la velocidad) hasta detenerse a 0.2 m a la izquierda del punto O .
4. Durante la *fase* 4 el eslabón 3 vuelve a invertir su movimiento esta vez dirigiéndose hacia la derecha con un movimiento acelerado (signo de la aceleración idéntico al de la velocidad) hasta llegar nuevamente al punto O .
5. Finalmente, durante la *fase* 5 el eslabón 3 sigue moviéndose hacia la derecha con un movimiento desacelerado (signo de la aceleración contrario al de la velocidad) hasta llegar a ubicarse a 0.17 m a la derecha del punto O .

Es de observar que en la continuidad del movimiento del eslabón 3 se pueden combinar las fases 1 y 5 dado que reflejan un mismo comportamiento cinemático.

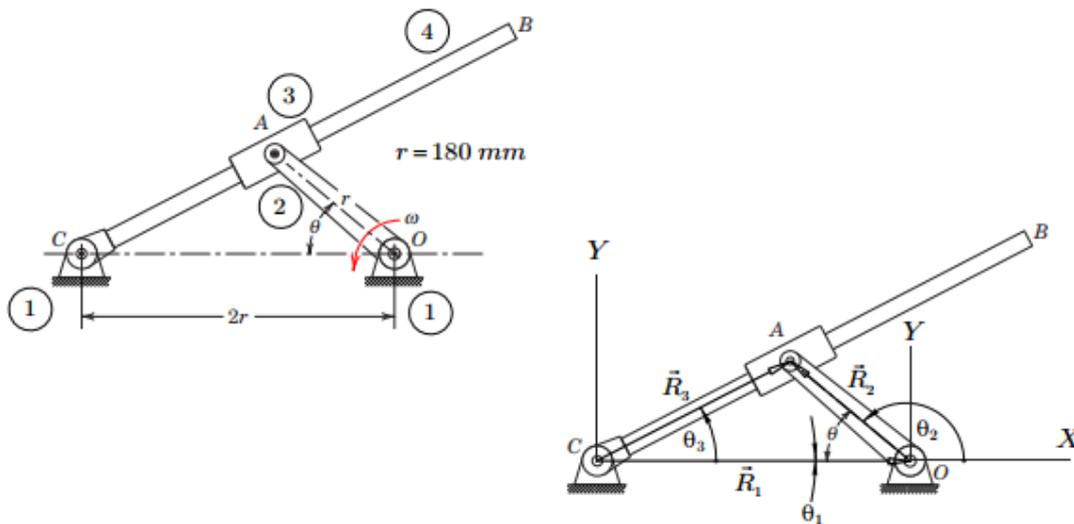
A continuación otro mecanismo de aplicación común:

Ejemplo 5

Para el mecanismo manivela corredera invertido indicado en la Figura 54 efectúese el análisis cinemático de ciclo completo, considerando al eslabón OA como motriz, que gira a una velocidad angular antihoraria constante de 150 rpm partiendo de $\theta = 120^\circ$. Grafíquense todas las variables cinemáticas desconocidas contra el ángulo de rotación del eslabón motriz.

Figura 54

Mecanismo del ejemplo 5 y su correspondiente lazo vectorial cerrado



Se procede a calcular la movilidad del mecanismo y el número de contornos independientes que posee:

$$m = 3(4 - 1) - 2(4) = 1$$

$$N = 4 - 3 = 1$$

La siguiente tabla presenta las variables conocidas e incógnitas de la cinemática del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1 = 0.36 \text{ m}, r_2 = 0.18 \text{ m}, \theta_1 = 0^\circ$	
		Variable conocida - primaria	Variables desconocidas - secundarias
Variables cinemáticas	Posición	$60^\circ \leq \theta_2 \leq 420^\circ$	r_3, θ_3
	Velocidad	$\omega_2 = 5\pi \text{ rad/s}$	v_3, ω_3
	Aceleración	$\alpha_2 = 0$	a_3, α_3

Análisis de posición. Para el lazo vectorial de la Figura 53:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 - \vec{R}_3 = \vec{0}$$

De donde:

$$r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 = 0$$

$$r_1 \operatorname{sen} \theta_1 + r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 = 0$$

Dado que: $\theta_1 = 0^\circ$, entonces:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 &= 0 \\ r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej5-1})$$

Reacomodando las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} r_3 \cos \theta_3 &= r_1 + r_2 \cos \theta_2 \\ r_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej5-2})$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones del sistema (ej5-2) y sumando término a términos, luego de simplificar se tiene:

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta_2 + r_2^2} \quad (\text{ej5-3})$$

Y sustituyendo (ej5-3) en la segunda ecuación del sistema (ej7-2) para posteriormente despejar θ_3 , resulta:

$$\theta_3 = \arcsen \left(\frac{r_2 \operatorname{sen} \theta_2}{\sqrt{r_1^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta_2 + r_2^2}} \right) \quad (\text{ej5-4})$$

Análisis de velocidad.

Método de Raven

Derivando en el tiempo las ecuaciones escalares de posición (ej5-1):

$$\begin{aligned} -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 - v_3 \cos \theta_3 + r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= 0 \\ r_2 \omega_2 \cos \theta_2 - v_3 \operatorname{sen} \theta_3 - r_3 \omega_3 \cos \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej5-5})$$

Reacomodando las expresiones (ej5-5) se tiene:

$$\begin{aligned} -v_3 \cos \theta_3 + r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ -v_3 \operatorname{sen} \theta_3 - r_3 \omega_3 \cos \theta_3 &= -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej5-6})$$

Sistema que al resolverse genera:

$$v_3 = r_2 \omega_2 \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta_3) \quad (\text{ej5-7})$$

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos (\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \quad (\text{ej5-8})$$

Método general

Considérese la variable primaria $p = \theta_2$, las variables secundarias: $s_1 = r_3$ y $s_2 = \theta_3$ así como las ecuaciones de restricción cinemática:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2, r_3, \theta_3) &= r_1 + r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 = 0 \\ f_2(\theta_2, r_3, \theta_3) &= r_2 \sin \theta_2 - r_3 \sin \theta_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ej5-9})$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_3 & r_3 \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_3 & -r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{J}}_s = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_3 \sin \theta_3 & v_3 \sin \theta_3 + r_3 \omega_3 \cos \theta_3 \\ -\omega_3 \cos \theta_3 & -v_3 \cos \theta_3 + r_3 \omega_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 \\ r_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{J}}_p = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_3)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \omega_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, las velocidades secundarias están dadas por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} v_3 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -\cos \theta_3 & r_3 \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_3 & -r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 \\ r_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \omega_2 \\ \begin{Bmatrix} v_3 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} r_2 \omega_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ r_2 \omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ -\frac{r_2 \omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{ej5-10})$$

Análisis de aceleración.

Método de Raven

Derivando en el tiempo las ecuaciones escalares de la velocidad:

$$\begin{aligned} -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - a_3 \cos \theta_3 + v_3 \omega_3 \sin \theta_3 + v_3 \omega_3 \sin \theta_3 + r_3 \alpha_3 \sin \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 &= 0 \\ -r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 - a_3 \sin \theta_3 - v_3 \omega_3 \cos \theta_3 - v_3 \omega_3 \cos \theta_3 - r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej5-11})$$

Simplificando y reacomodando:

$$\begin{aligned} -a_3 \cos \theta_3 + r_3 \alpha_3 \sin \theta_3 &= r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - 2v_3 \omega_3 \sin \theta_3 - r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 \\ -a_3 \sin \theta_3 - r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 &= r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + 2v_3 \omega_3 \cos \theta_3 - r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (\text{ej5-12})$$

Resolviendo el sistema anterior para a_3 y α_3 , da:

$$a_3 = -r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_3 \omega_3^2 \quad (\text{ej5-13})$$

$$\alpha_3 = -\frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) + 2v_3 \omega_3}{r_3} \quad (\text{ej5-14})$$

Método general

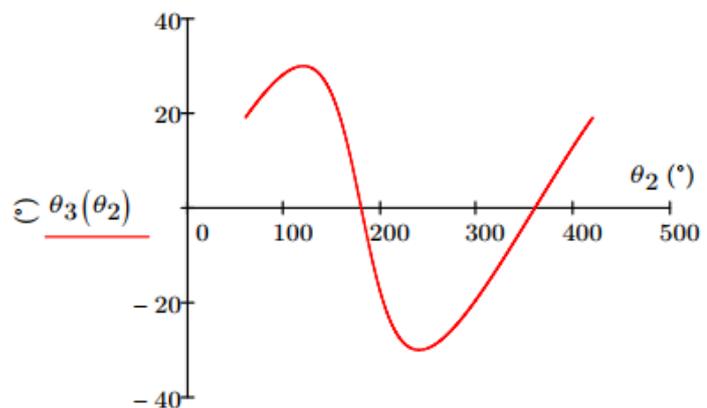
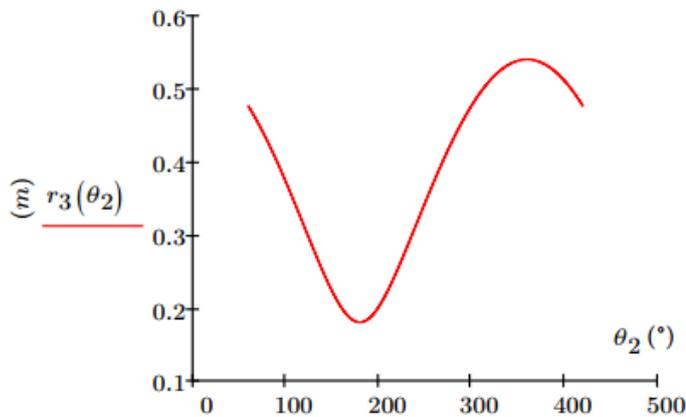
Las aceleraciones secundarias están dadas por:

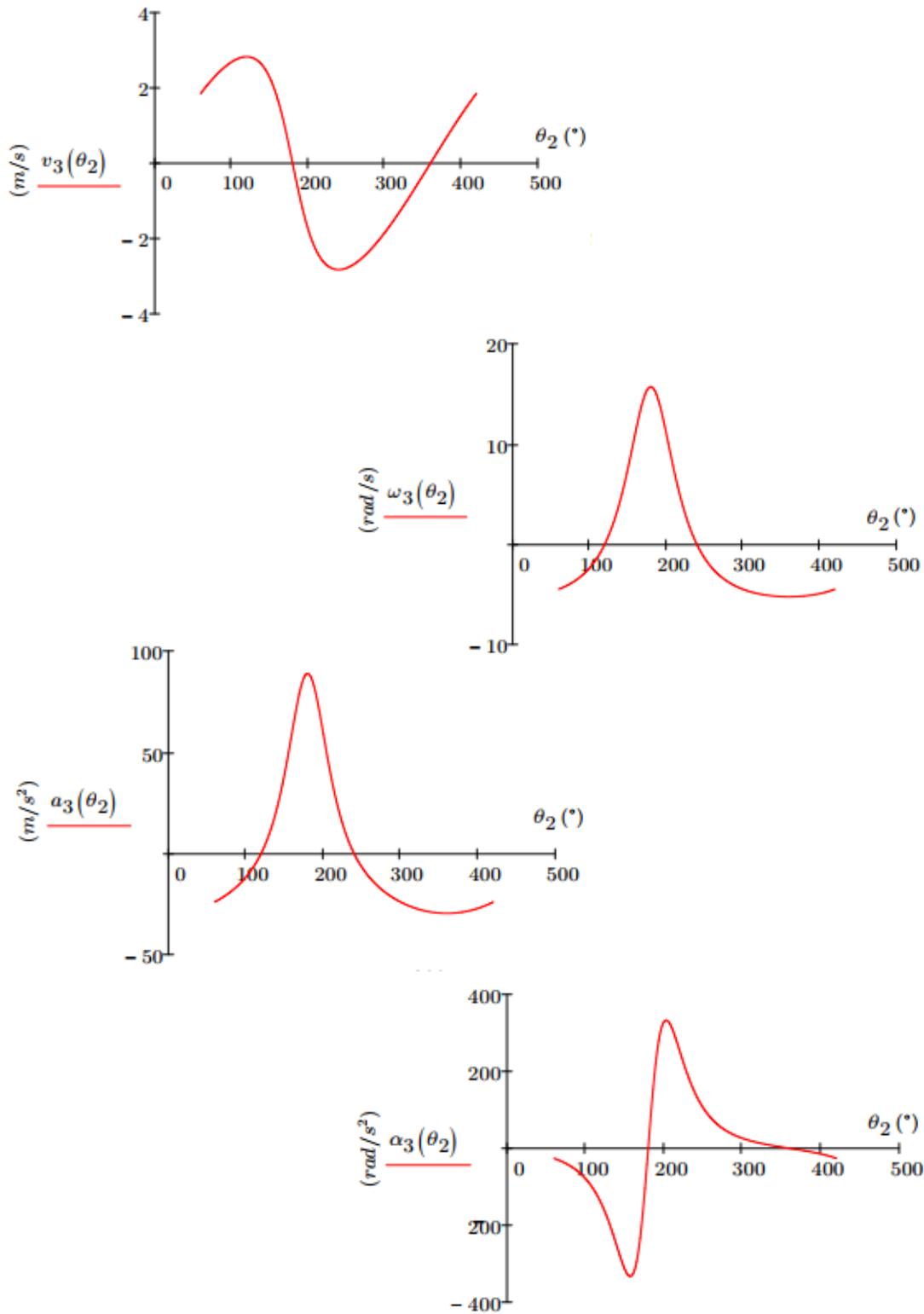
$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\cos\theta_3 & r_3 \operatorname{sen}\theta_3 \\ -\operatorname{sen}\theta_3 & -r_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \omega_3 \operatorname{sen}\theta_3 & v_3 \operatorname{sen}\theta_3 + r_3 \omega_3 \cos\theta_3 \\ -\omega_3 \cos\theta_3 & -v_3 \cos\theta_3 + r_3 \omega_3 \operatorname{sen}\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -r_2 \omega_2 \cos\theta_2 \\ -r_2 \omega_2 \operatorname{sen}\theta_2 \end{Bmatrix} \omega_2 \right)$$

Simplificando:

$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_3 \omega_3^2 \\ -\frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) + 2v_3 \omega_3}{r_3} \end{Bmatrix} \quad (\text{ej5-15})$$

A continuación, se muestran las gráficas de las variables cinemáticas desconocidas contra el ángulo de giro del eslabón motriz.





A continuación, se realiza el análisis cinemático de una típica estación de bombeo de petróleo.

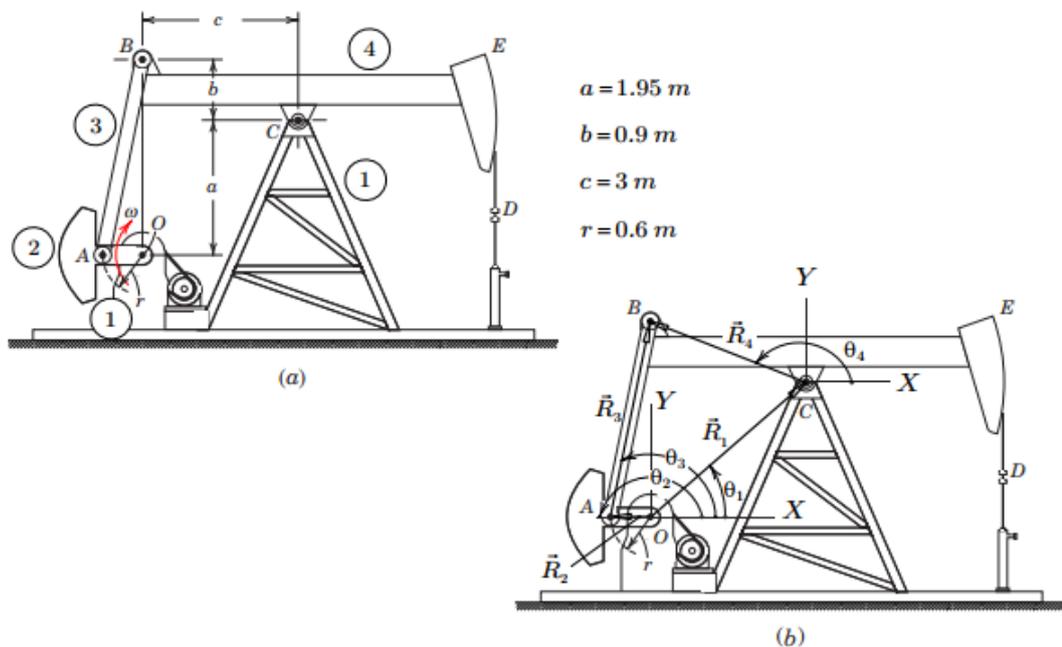
Ejemplo 6

Para el mecanismo de una estación de bombeo de petróleo indicado en la Figura 55 efectúese el análisis cinemático de ciclo completo considerando al eslabón OA como motriz y conociendo que gira a una velocidad angular constante de 30 rpm en sentido horario empezando desde la posición horizontal mostrada.

Como se puede observar muy fácilmente, la estación de bombeo corresponde a un mecanismo de cuatro barras, por lo que $m = 1$ y $N = 1$.

Figura 55

Mecanismo de una estación de bombeo de petróleo y su correspondiente lazo vectorial cerrado



De la Figura 55(b) se observa un mecanismo de cuatro barras $OABC$ de configuración abierta, entonces los resultados del análisis cinemático son los revisados en el apartado 2.3.2, dado que el lazo vectorial empleado es el mismo, por lo que:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$, $r_2 = r$, $r_3 = \sqrt{r^2 + (a+b)^2}$, $r_4 = \sqrt{b^2 + c^2}$ y $\theta_1 = \arctan\left(\frac{a}{c}\right)$	
		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	$-180^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$	θ_3, θ_4
	Velocidad	$\omega_2 = -\pi \text{ rad/s}$	ω_3, ω_4
	Aceleración	$\alpha_2 = 0$	α_3, α_4

Análisis de posición, velocidad y aceleración.

$$\theta_3 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right) \quad (\text{ej6-1})$$

Donde:

$$K_1 = r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2$$

$$K_2 = r_1 \operatorname{sen} \theta_1 - r_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

$$K_3 = \frac{r_3^2 - r_4^2 + K_1^2 + K_2^2}{2r_3}$$

$$\theta_4 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right) \quad (\text{ej6-2})$$

Las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4, están dadas por:

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (\text{ej6-3})$$

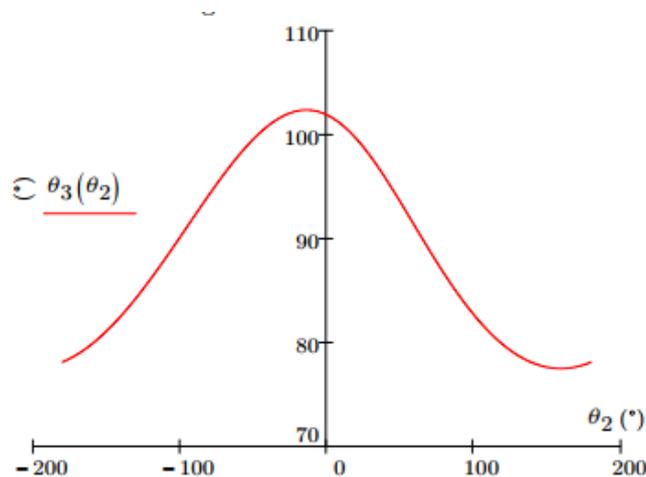
$$\omega_4 = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (\text{ej6-4})$$

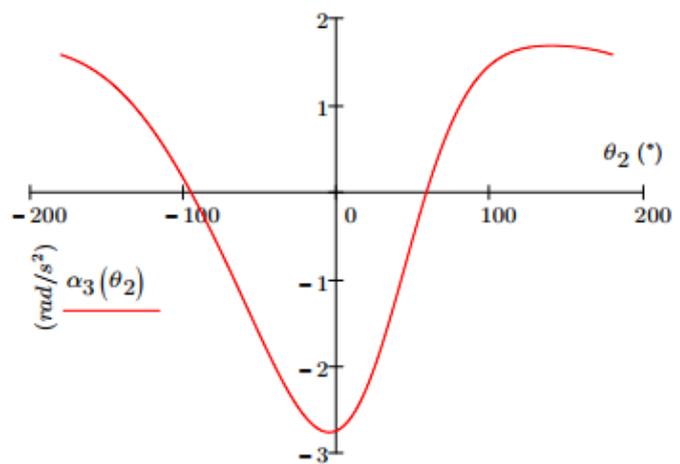
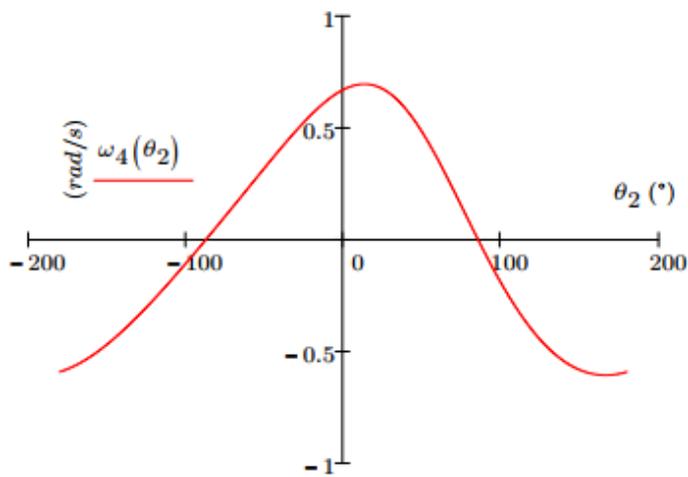
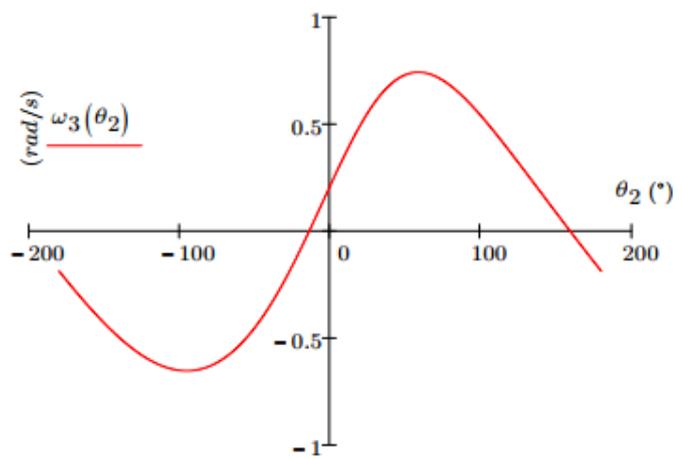
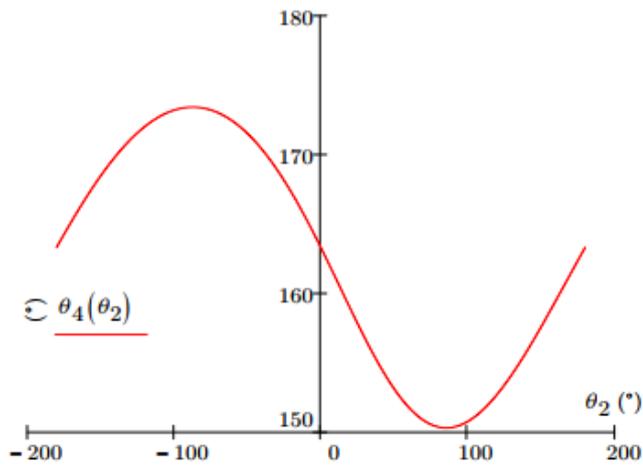
Y las aceleraciones angulares de los mismos eslabones son:

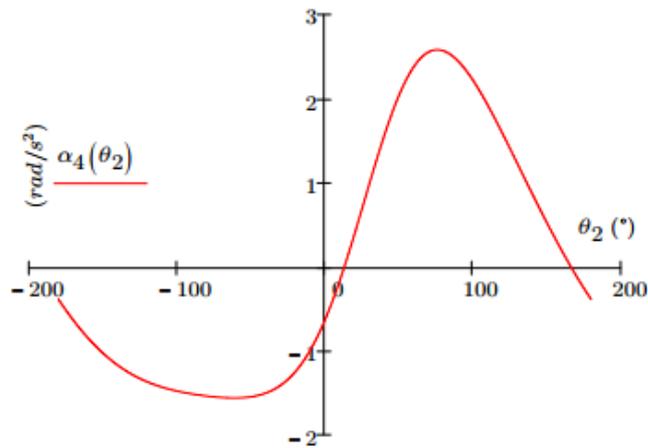
$$\alpha_3 = \frac{-r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - r_3 \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4 \omega_4^2}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (\text{ej6-5})$$

$$\alpha_4 = \frac{-r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - r_3 \omega_3^2 + r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (\text{ej6-6})$$

Las gráficas de las variables cinemáticas desconocidas contra el ángulo de giro del eslabón motriz son las siguientes:







Finalmente el análisis cinemático de una sierra mecánica para corte de metales.

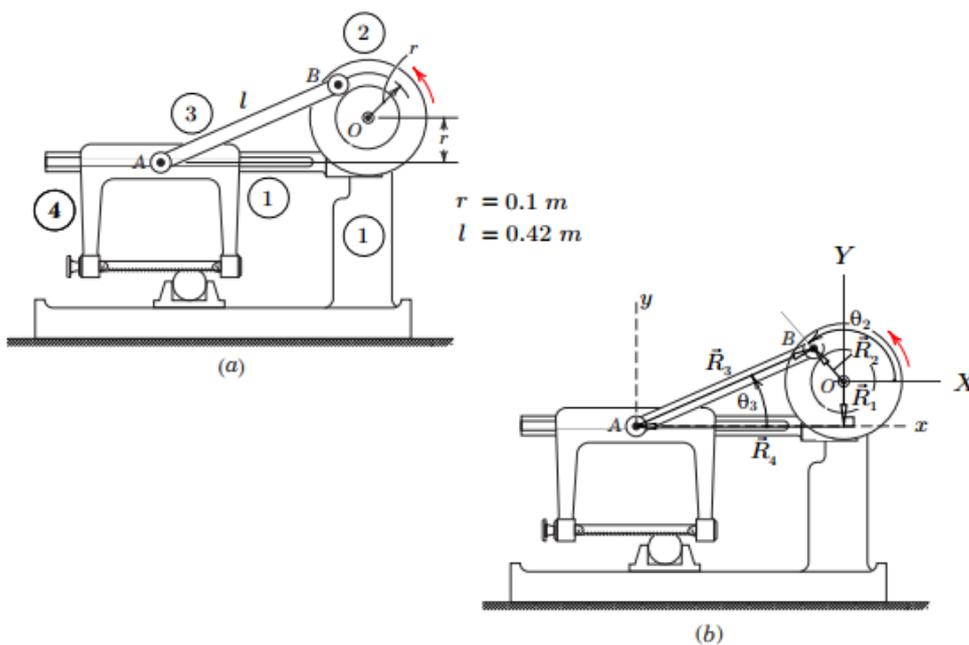
Ejemplo 7

Para el mecanismo de sierra de corte de metales indicado en la Figura 56 realícese el análisis cinemático de ciclo completo considerando que el eslabón motriz OB rota a una velocidad angular constante 80 rpm en sentido antihorario iniciándose cuando B esta verticalmente encima de O .

Es fácil identificar que la sierra de corte de metales corresponde a un mecanismo manivela corredera, por lo que $m = 1$ y $N = 1$.

Figura 56

Mecanismo de una sierra de corte y su correspondiente lazo vectorial cerrado



De la Figura 56(b) se identifica un mecanismo manivela corredera, entonces los resultados del análisis cinemático son los tratados en el apartado 2.3.1, correspondiendo la configuración de la sierra a la segunda configuración geométrica del mecanismo indicada en el análisis en dicho apartado. Es de notar que en lazo vectorial mostrado en la Figura 55(b) el vector \overline{R}_1 es contrario al del apartado 2.3.1, por lo que r_1 deberá ser negativo. Así entonces:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1 = -r, r_2 = r, r_3 = l$	
		VARIABLES CONOCIDAS	VARIABLES DESCONOCIDAS
Variables cinemáticas	Posición	$90^\circ \leq \theta_2 \leq 450^\circ$	θ_3, r_4
	Velocidad	$\omega_2 = \frac{8\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	ω_3, v_4
	Aceleración	$\alpha_2 = 0$	α_3, a_4

Análisis de posición, velocidad y aceleración

$$\theta_3 = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{r_1 - r_2 \sin\theta_2}{r_3}\right) \quad (\text{ej7-1})$$

$$r_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 \quad (\text{ej7-2})$$

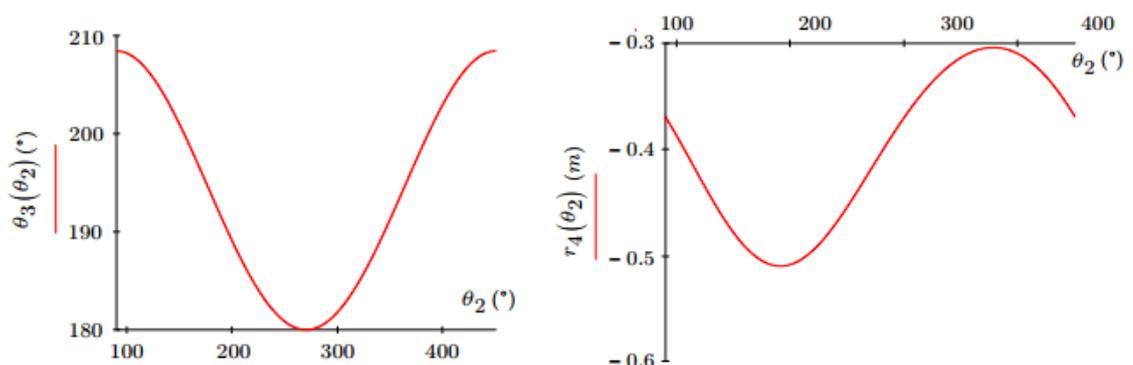
$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos\theta_2}{r_3 \cos\theta_3} \quad (\text{ej7-3})$$

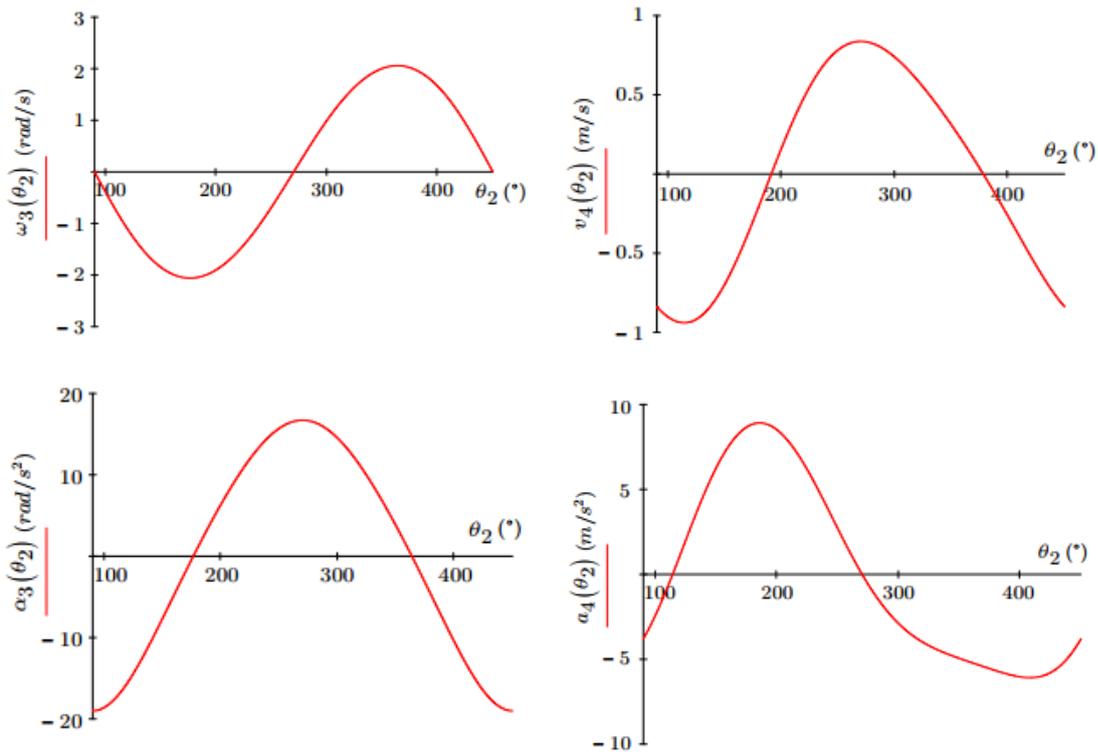
$$v_4 = \frac{r_2 \omega_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)}{\cos\theta_3} \quad (\text{ej7-4})$$

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \sin\theta_2 + r_3 \omega_3^2 \sin\theta_3}{r_3 \cos\theta_3} \quad (\text{ej7-5})$$

$$a_4 = \frac{-r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - r_3 \omega_3^2}{\cos\theta_3} \quad (\text{ej7-6})$$

Entonces las gráficas de las variables cinemáticas desconocidas contra el ángulo de giro del eslabón motriz son las siguientes:





2.5 Mecanismos de un grado de libertad con múltiples lazos

Los métodos analíticos revisados en los apartados 2.3 y 2.4 se pueden aplicar a mecanismos de movilidad uno con varios contornos independientes, siempre y cuando cada lazo del mecanismo no posea más de dos variables incógnita en el análisis.

Los ejemplos siguientes muestran la aplicación de las metodologías estudiadas en mecanismos específicos de un grado de libertad con lazos múltiples.

Ejemplo 8

Considérense el mecanismo de retorno rápido mostrado en la Figura 56. Efectúese el análisis cinemático de dicho mecanismo, considerando al eslabón OA como motriz y que gira a una velocidad angular constante de 700 rpm en sentido antihorario, iniciándose con $\theta = 20^\circ$.

La movilidad del mecanismo es:

$$m = 3(6 - 1) - 2(7) = 1$$

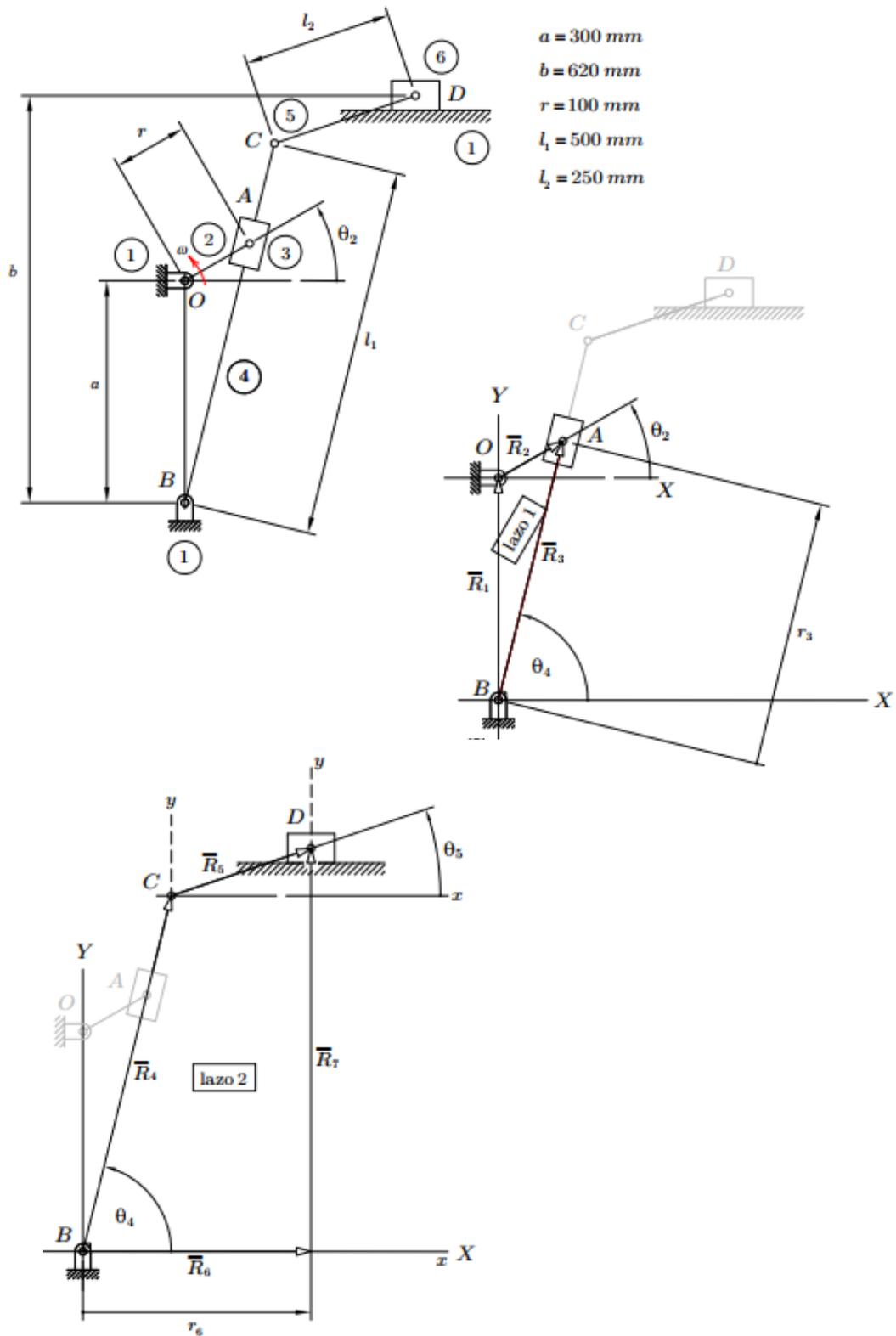
Y el número de contornos independientes o lazos vectoriales a ser analizados son:

$$N = 7 - 5 = 2$$

Los cuales se muestran en la figura siguiente:

Figura 57

Mecanismo de retorno rápido y sus correspondientes lazos vectoriales cerrados



Método de Raven

Para el primer lazo vectorial y considerando que en el mismo la entrada de movimiento se produce en el eslabón manivela OA , la siguiente tabla muestra las constantes derivadas de la geometría del mecanismo así como las variables conocidas e incógnitas de la cinemática:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1 = a, r_2 = r, \theta_1 = 90^\circ$	
Primer lazo		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	$20^\circ \leq \theta_2 \leq 380^\circ$	r_3, θ_4
	Velocidad	$\omega_2 = 70\pi/3 \text{ rad/s}$	v_3, ω_4
	Aceleración	$\alpha_2 = 0$	a_3, α_4

Análisis de posición. El lazo vectorial 1, genera la siguiente ecuación:

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_2 - \bar{R}_3 = \vec{0} \quad (\text{ej8-1})$$

Que escribiendo en su forma trigonométrica y simplificando produce:

$$\begin{aligned} r \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_4 &= 0 \\ a + r \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej8-2})$$

Reacomodando las expresiones (ej8-2):

$$\begin{aligned} r_3 \cos \theta_4 &= r \cos \theta_2 \\ r_3 \operatorname{sen} \theta_4 &= a + r \operatorname{sen} \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej8-3})$$

Elevando al cuadrado y sumando término a término las ecuaciones (ej8-3) y luego de simplificar, resulta:

$$r_3 = \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \operatorname{sen} \theta_2} \quad (\text{ej8-4})$$

Despejando θ_4 , de la segunda ecuación del sistema (ej8-3) da:

$$\theta_4 = \arcsen\left(\frac{a + r \operatorname{sen} \theta_2}{r_3}\right)$$

Sin embargo, en el mecanismo del primer lazo como el eslabón motriz da una vuelta completa, el ángulo θ_2 en el rango de 90° a 270° provoca que el ángulo θ_4 supere los 90° , en cuyo caso el ángulo θ_4 correcto, al aplicar la función arcoseno, se obtendrá al calcular su ángulo suplementario, así entonces la anterior ecuación se redefine como:

$$\theta_4 = \begin{cases} \arcsen\left(\frac{a+r\text{sen}\theta_2}{r_3}\right) & \text{si } 20^\circ \leq \theta_2 \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \arcsen\left(\frac{a+r\text{sen}\theta_2}{r_3}\right) & \text{si } 90^\circ \leq \theta_2 \leq 270^\circ \\ \arcsen\left(\frac{a+r\text{sen}\theta_2}{r_3}\right) & \text{si } 270^\circ \leq \theta_2 \leq 380^\circ \end{cases} \quad (\text{ej8-5})$$

Análisis de velocidad. Derivando en el tiempo las ecuaciones (ej8-2)

$$\begin{aligned} -r\omega_2 \text{sen}\theta_2 - v_3 \cos\theta_4 + r_3\omega_4 \text{sen}\theta_4 &= 0 \\ r\omega_2 \cos\theta_2 - v_3 \text{sen}\theta_4 - r_3\omega_4 \cos\theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej8-6})$$

Reacomodando el sistema (ej8-6) se tiene:

$$\begin{aligned} v_3 \cos\theta_4 - r_3\omega_4 \text{sen}\theta_4 &= -r\omega_2 \text{sen}\theta_2 \\ v_3 \text{sen}\theta_4 + r_3\omega_4 \cos\theta_4 &= r\omega_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej8-7})$$

Que resolviendo y simplificando produce:

$$v_3 = -r\omega_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_4) \quad (\text{ej8-8})$$

$$\omega_4 = \frac{r\omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_4)}{r_3} \quad (\text{ej8-9})$$

Análisis de aceleración. Volviendo a derivar en el tiempo las ecuaciones (ej8-7) y reacomodando las mismas se obtiene:

$$\begin{aligned} a_3 \cos\theta_4 - r_3\alpha_4 \text{sen}\theta_4 &= 2v_3\omega_4 \text{sen}\theta_4 + r_3\omega_4^2 \cos\theta_4 - r\omega_2^2 \cos\theta_2 \\ a_3 \text{sen}\theta_4 + r_3\alpha_4 \cos\theta_4 &= -2v_3\omega_4 \cos\theta_4 + r_3\omega_4^2 \text{sen}\theta_4 - r\omega_2^2 \text{sen}\theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej8-10})$$

Resolviendo y simplificando da:

$$a_3 = r_3\omega_4^2 - r\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) \quad (\text{ej8-11})$$

$$\alpha_4 = -\frac{2v_3\omega_4 + r\omega_2^2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3} \quad (\text{ej8-12})$$

El segundo lazo vectorial corresponde al de un mecanismo manivela corredera descentrado cuyo análisis ya se trató en el apartado 2.3.1; la tabla de la página siguiente muestra las constantes derivadas de la geometría del mecanismo así como las variables conocidas e incógnitas de la cinemática:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_4 = l_1, r_5 = l_2, r_7 = b, \theta_6 = 0^\circ, \theta_7 = 90^\circ$	
Segundo lazo		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	$\theta_4 = \begin{cases} \arcsen\left(\frac{a+r\text{sen}\theta_2}{r_3}\right) & \text{si } 20^\circ \leq \theta_2 \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \arcsen\left(\frac{a+r\text{sen}\theta_2}{r_3}\right) & \text{si } 90^\circ \leq \theta_2 \leq 270^\circ \\ \arcsen\left(\frac{a+r\text{sen}\theta_2}{r_3}\right) & \text{si } 270^\circ \leq \theta_2 \leq 380^\circ \end{cases}$	θ_5, r_6
	Velocidad	$\omega_4 = \frac{r\omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_4)}{r_3}$	ω_5, v_6
	Aceleración	$\alpha_4 = -\frac{2v_3 \omega_4 + r\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4)}{r_3}$	α_5, a_6

Análisis de posición, velocidad y aceleración. Del apartado 2.3.1 se infiere:

$$\theta_5 = \arcsen\left(\frac{r_7 - r_4 \text{sen}\theta_4}{r_5}\right) = \arcsen\left(\frac{b - l_1 \text{sen}\theta_4}{l_2}\right) \quad (\text{ej8-13})$$

$$r_6 = r_4 \cos\theta_4 + r_5 \cos\theta_5 = l_1 \cos\theta_4 + l_2 \cos\theta_5 \quad (\text{ej8-14})$$

$$\omega_5 = -\frac{r_4 \omega_4 \cos\theta_4}{r_5 \cos\theta_5} = -\frac{l_1 \omega_4 \cos\theta_4}{l_2 \cos\theta_5} \quad (\text{ej8-15})$$

$$v_6 = \frac{r_4 \omega_4 \text{sen}(\theta_5 - \theta_4)}{\cos\theta_5} = \frac{l_1 \omega_4 \text{sen}(\theta_5 - \theta_4)}{\cos\theta_5} \quad (\text{ej8-16})$$

$$\alpha_5 = \frac{-r_4 \alpha_4 \cos\theta_4 + r_4 \omega_4^2 \text{sen}\theta_4 + r_5 \omega_5^2 \text{sen}\theta_5}{r_5 \cos\theta_5} = \frac{-l_1 \alpha_4 \cos\theta_4 + l_1 \omega_4^2 \text{sen}\theta_4 + l_2 \omega_5^2 \text{sen}\theta_5}{l_2 \cos\theta_5} \quad (\text{ej8-17})$$

$$a_6 = \frac{r_4 \alpha_4 \text{sen}(\theta_5 - \theta_4) - r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \theta_5) - r_5 \omega_5^2}{\cos\theta_5} = \frac{l_1 \alpha_4 \text{sen}(\theta_5 - \theta_4) - l_1 \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \theta_5) - l_2 \omega_5^2}{\cos\theta_5} \quad (\text{ej8-18})$$

Método general

Las ecuaciones de restricción cinemática son:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6) &= r \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_4 = 0 \\ f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6) &= a + r \text{sen}\theta_2 - r_3 \text{sen}\theta_4 = 0 \\ f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6) &= l_1 \cos\theta_4 + l_2 \cos\theta_5 - r_6 = 0 \\ f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6) &= l_1 \text{sen}\theta_4 + l_2 \text{sen}\theta_5 - b = 0 \end{aligned} \quad (\text{ej8-19})$$

Donde la variable primaria es $p = \theta_2$ y las variables secundarias son: $s_1 = r_3$, $s_2 = \theta_4$, $s_3 = \theta_5$, y $s_4 = r_6$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{J}_s\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_6} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_6} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_6} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_6} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\cos\theta_4 & r_3 \operatorname{sen}\theta_4 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_4 & -r_3 \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \operatorname{sen}\theta_4 & -l_2 \operatorname{sen}\theta_5 & -1 \\ 0 & l_1 \cos\theta_4 & l_2 \cos\theta_5 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{\dot{\mathbf{J}}_s\} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_6} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_6} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_6} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_3} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial r_6} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \omega_4 \operatorname{sen}\theta_4 & v_3 \operatorname{sen}\theta_4 + r_3 \omega_4 \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ -\omega_4 \cos\theta_4 & -v_3 \cos\theta_4 + r_3 \omega_4 \operatorname{sen}\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \omega_4 \cos\theta_4 & -l_2 \omega_5 \cos\theta_5 & 0 \\ 0 & -l_1 \omega_4 \operatorname{sen}\theta_4 & -l_2 \omega_5 \operatorname{sen}\theta_5 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{J}_p\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \operatorname{sen}\theta_2 \\ r \cos\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \quad \{\dot{\mathbf{J}}_p\} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5, r_6)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega_2 \cos\theta_2 \\ -r\omega_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Análisis de velocidad y aceleración.

Las velocidades secundarias están dadas por:

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\cos\theta_4 & r_3 \operatorname{sen}\theta_4 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_4 & -r_3 \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \operatorname{sen}\theta_4 & -l_2 \operatorname{sen}\theta_5 & -1 \\ 0 & l_1 \cos\theta_4 & l_2 \cos\theta_5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -r \operatorname{sen}\theta_2 \\ r \cos\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_2 \quad (\text{ej8-20})$$

Que luego de resolverse y simplificarse produce:

$$\begin{Bmatrix} v_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-r\omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3} \\ \frac{r\omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_4)}{r_3} \\ \frac{r\omega_2 l_1 [\cos(\theta_2 - 2\theta_4) + \cos\theta_2]}{2r_3 l_2 \cos\theta_5} \\ \frac{r\omega_2 l_1 [\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_5) - \operatorname{sen}(\theta_2 - 2\theta_4 + \theta_5)]}{2r_3 \left[2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_5}{2}\right) - 1 \right]} \end{Bmatrix} \quad (\text{ej8-21})^1$$

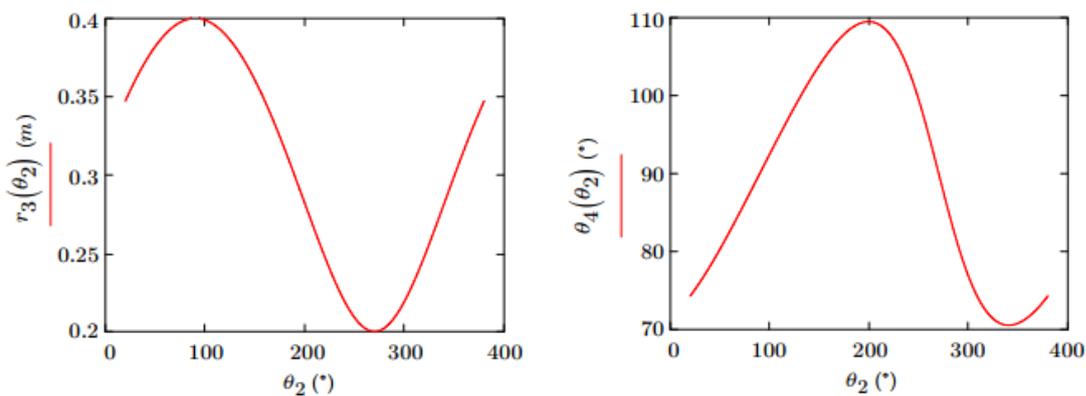
Para las aceleraciones secundarias, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_4 & r_3 \operatorname{sen}\theta_4 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_4 & -r_3 \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \operatorname{sen}\theta_4 & -l_2 \operatorname{sen}\theta_5 & -1 \\ 0 & l_1 \cos\theta_4 & l_2 \cos\theta_5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \omega_4 \operatorname{sen}\theta_4 & v_3 \operatorname{sen}\theta_4 + r_3 \omega_4 \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ -\omega_4 \cos\theta_4 & -v_3 \cos\theta_4 + r_3 \omega_4 \operatorname{sen}\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \omega_4 \cos\theta_4 & -l_2 \omega_5 \cos\theta_5 & 0 \\ 0 & -l_1 \omega_4 \operatorname{sen}\theta_4 & -l_2 \omega_5 \operatorname{sen}\theta_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -r\omega_2 \cos\theta_2 \\ -r\omega_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \omega_2 \right)$$

De donde:

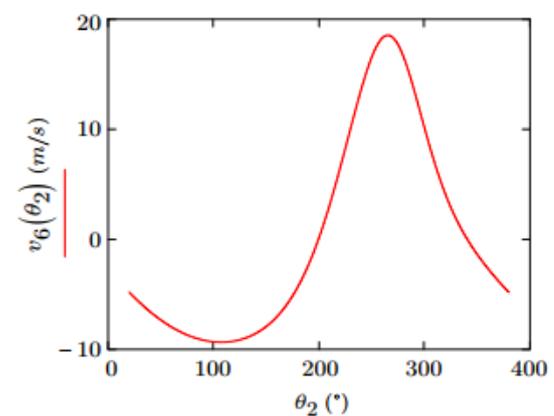
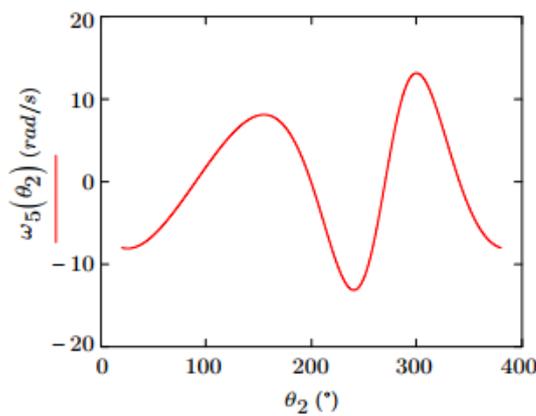
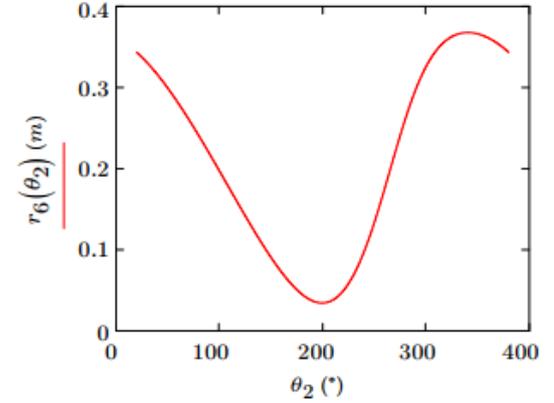
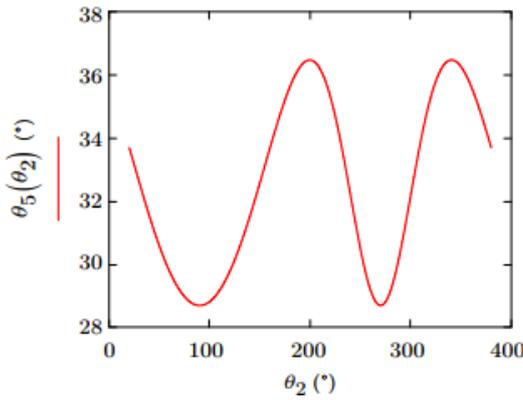
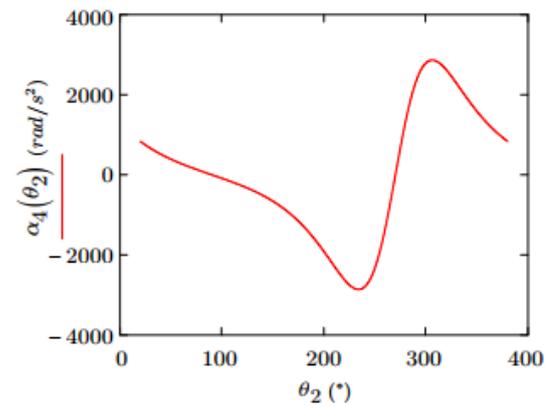
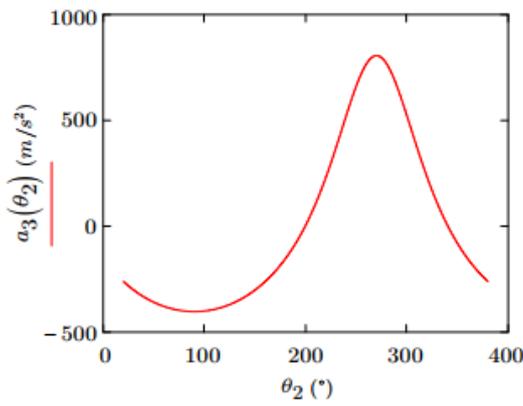
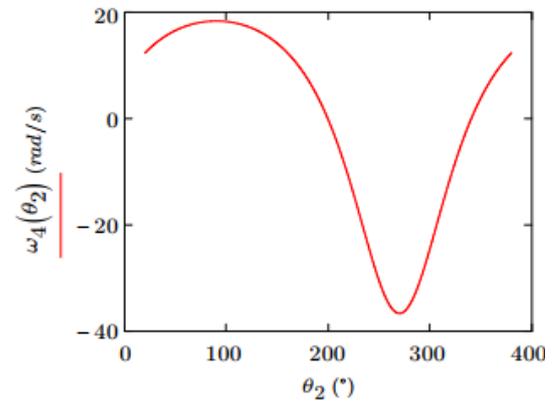
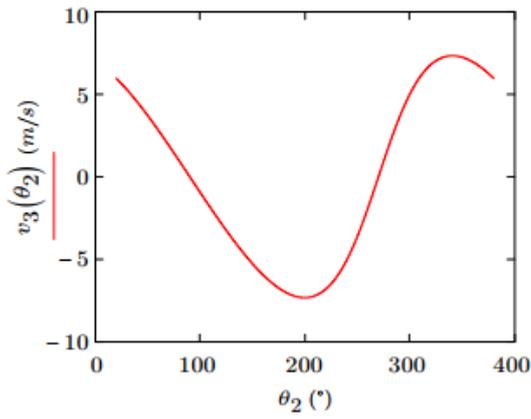
$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{r_3 \omega_4^2 - r\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4)}{2v_3 \omega_4 + r\omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)} \\ \frac{r_3}{r_3} \\ \frac{r\omega_2^2 l_1 \operatorname{sen}\theta_2 + 2r_3 l_1 \omega_4^2 \operatorname{sen}\theta_4 + 2r_3 l_2 \omega_5^2 \operatorname{sen}\theta_5 + l_1 r\omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - 2\theta_4) + 4l_1 v_3 \omega_4 \cos\theta_4}{2r_3 l_2 \cos\theta_5} \\ \frac{2r_3 l_2 \omega_5^2 - r\omega_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - 2\theta_4 + \theta_5) - 4l_1 v_3 \omega_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5) + r l_1 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_5) + 2r_3 l_1 \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \theta_5)}{2r_3 \cos\theta_5} \end{Bmatrix} \quad (\text{ej8-22})^2$$

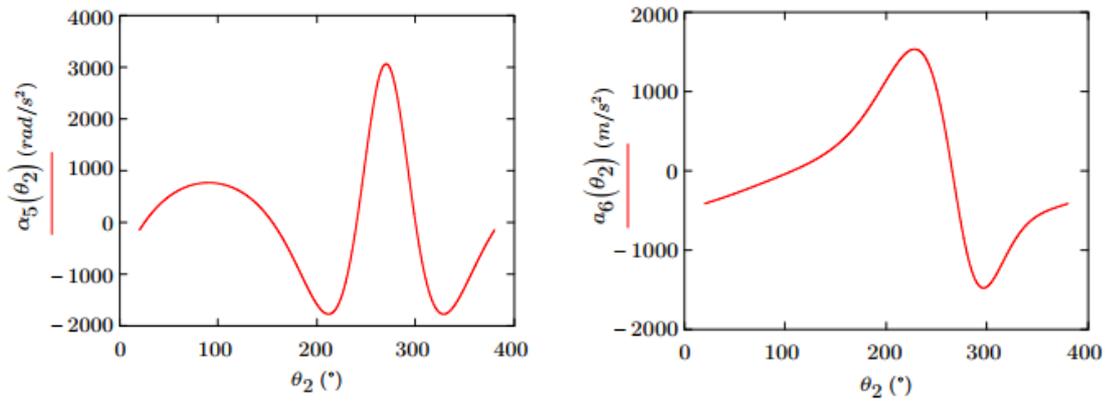
Al graficar las variables cinemáticas incógnita vs el ángulo de giro del eslabón motriz se obtienen las siguientes gráficas:



¹ Si bien las expresiones para ω_5 y v_6 se ven distintas en el método general y el método de Raven, el lector puede verificar que ambas son equivalentes.

² Ídem a la nota al pie 1 para a_5 y a_6





Ejemplo 9

Considérese el mecanismo mostrado en la Figura 58. Realícese el análisis cinemático de ciclo completo de dicho mecanismo si el eslabón motriz OA gira a una velocidad angular constante de 400 rpm en sentido antihorario, empezando en $\theta = 45^\circ$.

La movilidad del mecanismo es:

$$m = 3(6 - 1) - 2(7) = 1$$

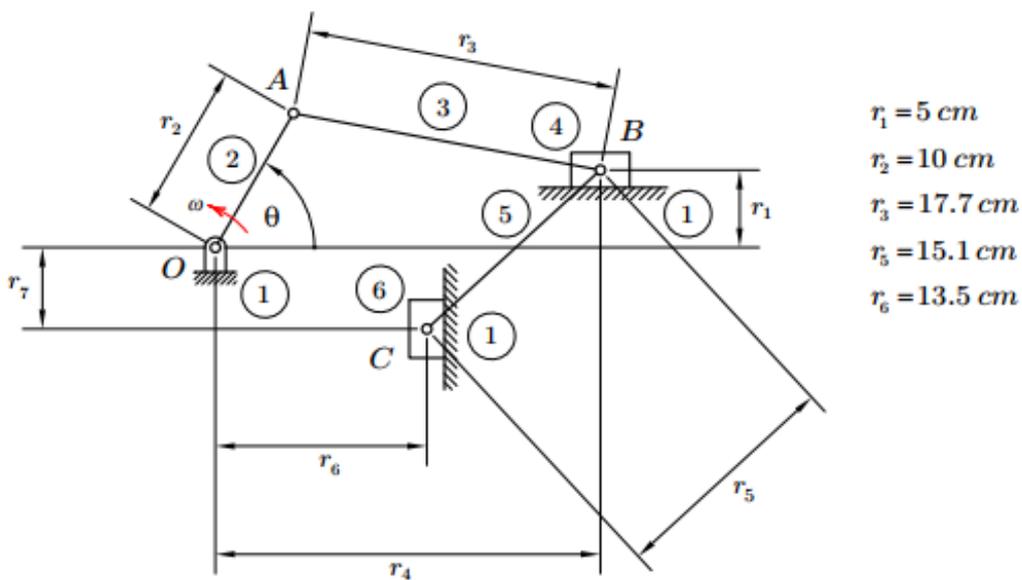
Y el número de contornos independientes o lazos vectoriales a ser analizados son:

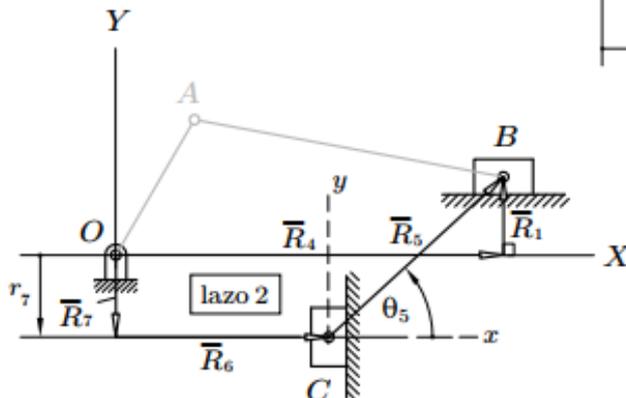
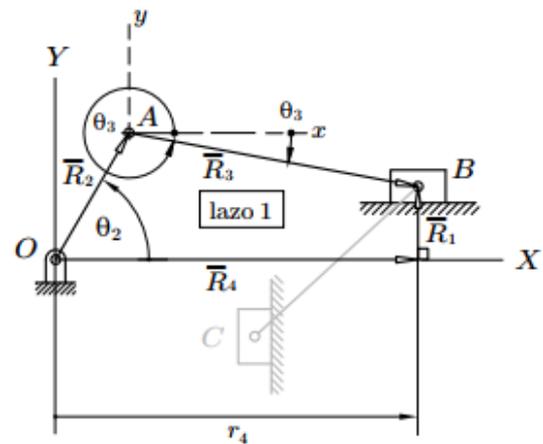
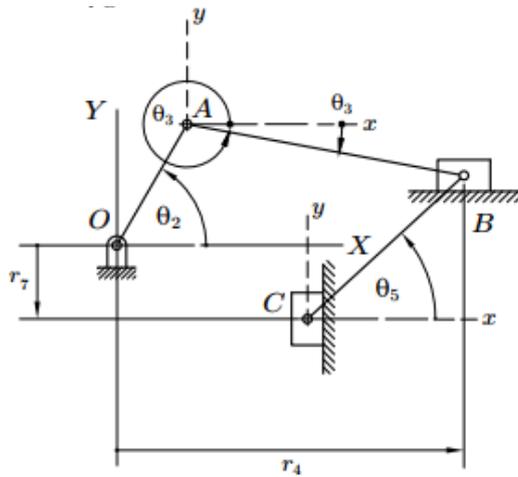
$$N = 7 - 5 = 2$$

Los cuales se muestran en la figura siguiente:

Figura 58

Mecanismo del ejemplo 9 y sus correspondientes lazos vectoriales cerrados





Método de Raven

Como se puede observar fácilmente el primer lazo corresponde al de un mecanismo manivela corredera descentrado.

Dado que en el mecanismo se inicia el movimiento en el eslabón OA, la siguiente tabla muestra las constantes obtenidas de la geometría del mecanismo así como las variables conocidas y desconocidas en el primer lazo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1, r_2, r_3, \theta_1 = 90^\circ, \theta_4 = 0^\circ$	
Primer lazo		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	$45^\circ \leq \theta_2 \leq 405^\circ$	θ_3, r_4
	Velocidad	$\omega_2 = 40\pi/3 \text{ rpm}$	ω_3, v_4
	Aceleración	$\alpha_2 = 0$	α_3, a_4

Análisis de posición, velocidad y aceleración. Del apartado 2.3.1 se tiene:

$$\theta_3 = \arcsen\left(\frac{r_1 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_3}\right) \quad (\text{ej9-1})$$

$$r_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 \quad (\text{ej9-2})$$

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos\theta_2}{r_3 \cos\theta_3} \quad (\text{ej9-3})$$

$$v_4 = \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\cos\theta_3} \quad (\text{ej9-4})$$

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen}\theta_3}{r_3 \cos\theta_3} \quad (\text{ej9-5})$$

$$a_4 = \frac{-r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - r_3 \omega_3^2}{\cos\theta_3} \quad (\text{ej9-6})$$

Para el *segundo lazo* del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1, r_5, r_6, \theta_1 = 90^\circ, \theta_4 = 0, \theta_6 = 0, \theta_7 = 270^\circ$	
Segundo lazo		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	r_4	θ_5, r_7
	Velocidad	v_4	ω_5, v_7
	Aceleración	a_4	α_5, a_7

Análisis de posición. Por lo tanto:

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_4 - \bar{R}_5 - \bar{R}_6 - \bar{R}_7 = \vec{0} \quad (\text{ej9-7})$$

De donde:

$$\begin{aligned} r_4 - r_5 \cos\theta_5 - r_6 &= 0 \\ r_1 - r_5 \operatorname{sen}\theta_5 - r_7 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej9-8})$$

De la primera ecuación:

$$\theta_5 = \arccos\left(\frac{r_4 - r_6}{r_5}\right) \quad (\text{ej9-9})$$

Y de la segunda ecuación:

$$r_7 = r_1 - r_5 \operatorname{sen}\theta_5 \quad (\text{ej9-10})$$

Análisis de velocidad. Derivando en el tiempo las ecuaciones (ej9-8):

$$\begin{aligned} v_4 + r_5 \omega_5 \operatorname{sen}\theta_5 &= 0 \\ -r_5 \omega_5 \cos\theta_5 - v_7 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej9-11})$$

Entonces:

$$\omega_5 = -\frac{v_4}{r_5 \operatorname{sen}\theta_5} \quad (\text{ej9-12})$$

Y,

$$v_7 = -r_5 \omega_5 \cos\theta_5 \quad (\text{ej9-13})$$

Análisis de aceleración. Finalmente derivando las ecuaciones (ej9-11) en el tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_4 + r_5 \alpha_5 \operatorname{sen}\theta_5 + r_5 \omega_5^2 \cos\theta_5 &= 0 \\ -r_5 \alpha_5 \cos\theta_5 + r_5 \omega_5^2 \operatorname{sen}\theta_5 - a_7 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej9-14})$$

De donde:

$$\alpha_5 = -\frac{\alpha_4 + r_5 \omega_5^2 \cos\theta_5}{r_5 \operatorname{sen}\theta_5} \quad (\text{ej9-15})$$

$$\alpha_7 = -r_5 \alpha_5 \cos\theta_5 + r_5 \omega_5^2 \operatorname{sen}\theta_5 \quad (\text{ej9-16})$$

Método general

Las ecuaciones de restricción cinemática son:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7) &= r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 - r_4 = 0 \\ f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7) &= -r_1 + r_2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_3 \operatorname{sen}\theta_3 = 0 \\ f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7) &= r_4 - r_5 \cos\theta_5 - r_6 = 0 \\ f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7) &= r_1 - r_5 \operatorname{sen}\theta_5 - r_7 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ej9-17})$$

Donde la variable primaria es $p = \theta_2$ y las variables secundarias son: $s_1 = \theta_3$, $s_2 = r_4$, $s_3 = \theta_5$ y $s_4 = r_7$, entonces:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_s] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_7} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -r_3 \operatorname{sen}\theta_3 & -1 & 0 & 0 \\ r_3 \cos\theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_5 \operatorname{sen}\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -r_5 \cos\theta_5 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{J}_s] &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial r_7} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -r_3 \omega_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_5 \omega_5 \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & r_5 \omega_5 \operatorname{sen} \theta_5 & 0 \end{bmatrix} \\
 \{\mathbf{J}_p\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ r_2 \cos \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{J}_p\} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, \theta_3, r_4, \theta_5, r_7)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Análisis de velocidad y aceleración.

Las velocidades secundarias están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \omega_3 \\ v_4 \\ \omega_5 \\ v_7 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & -1 & 0 & 0 \\ r_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_5 \operatorname{sen} \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -r_5 \cos \theta_5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ r_2 \cos \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_2 \quad (\text{ej9-18})$$

Que luego de resolverse y simplificarse produce:

$$\begin{bmatrix} \omega_3 \\ v_4 \\ \omega_5 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \\ \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\cos \theta_3} \\ \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_5 \cos \theta_3 \operatorname{sen} \theta_5} \\ \frac{-r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \cot \theta_5}{\cos \theta_3} \end{bmatrix} \quad (\text{ej9-19})^3$$

³ Ídem a la nota al pie 1 para ω_5 y v_7 .

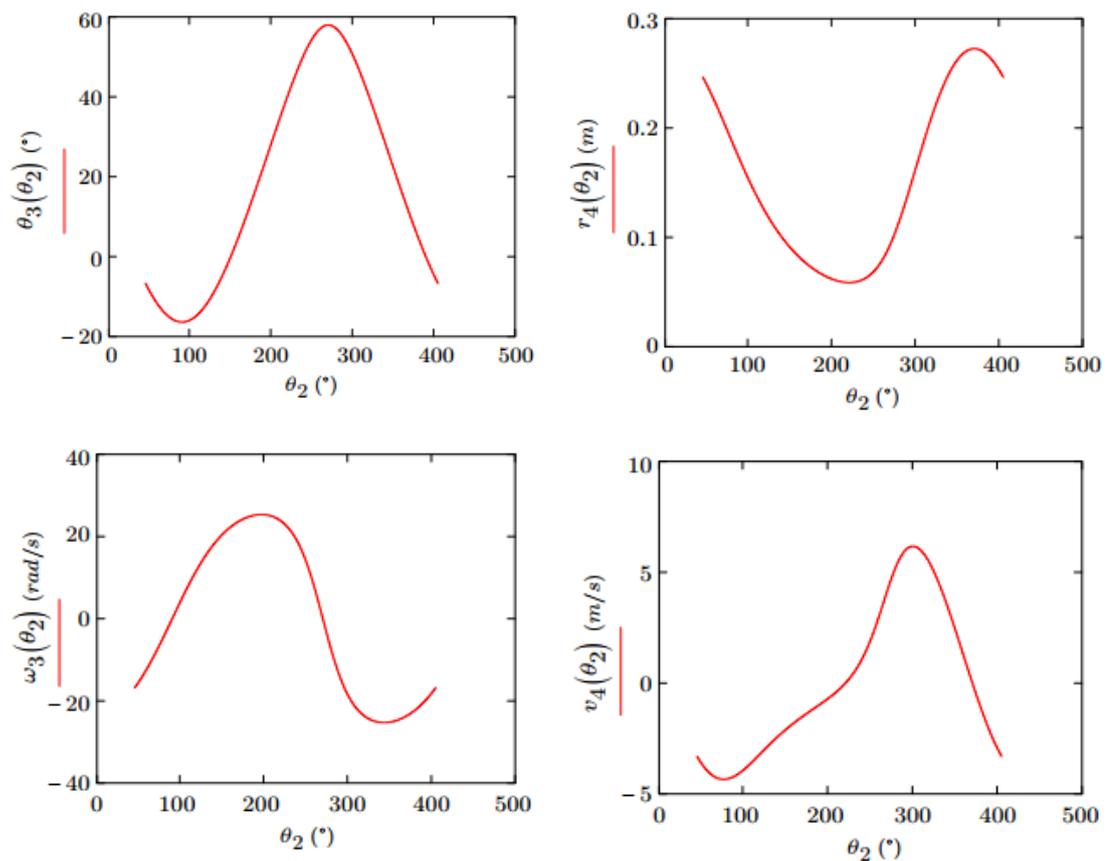
Para las *aceleraciones secundarias*, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ a_4 \\ \alpha_5 \\ a_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & -1 & 0 & 0 \\ r_3 \operatorname{cos} \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_5 \operatorname{sen} \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -r_5 \operatorname{cos} \theta_5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -r_3 \omega_3 \operatorname{cos} \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_5 \omega_5 \operatorname{cos} \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & r_5 \omega_5 \operatorname{sen} \theta_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_4 \\ \omega_5 \\ v_7 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -r_2 \omega_2 \operatorname{cos} \theta_2 \\ -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \omega_2 \right) \quad (\text{ej9-20})$$

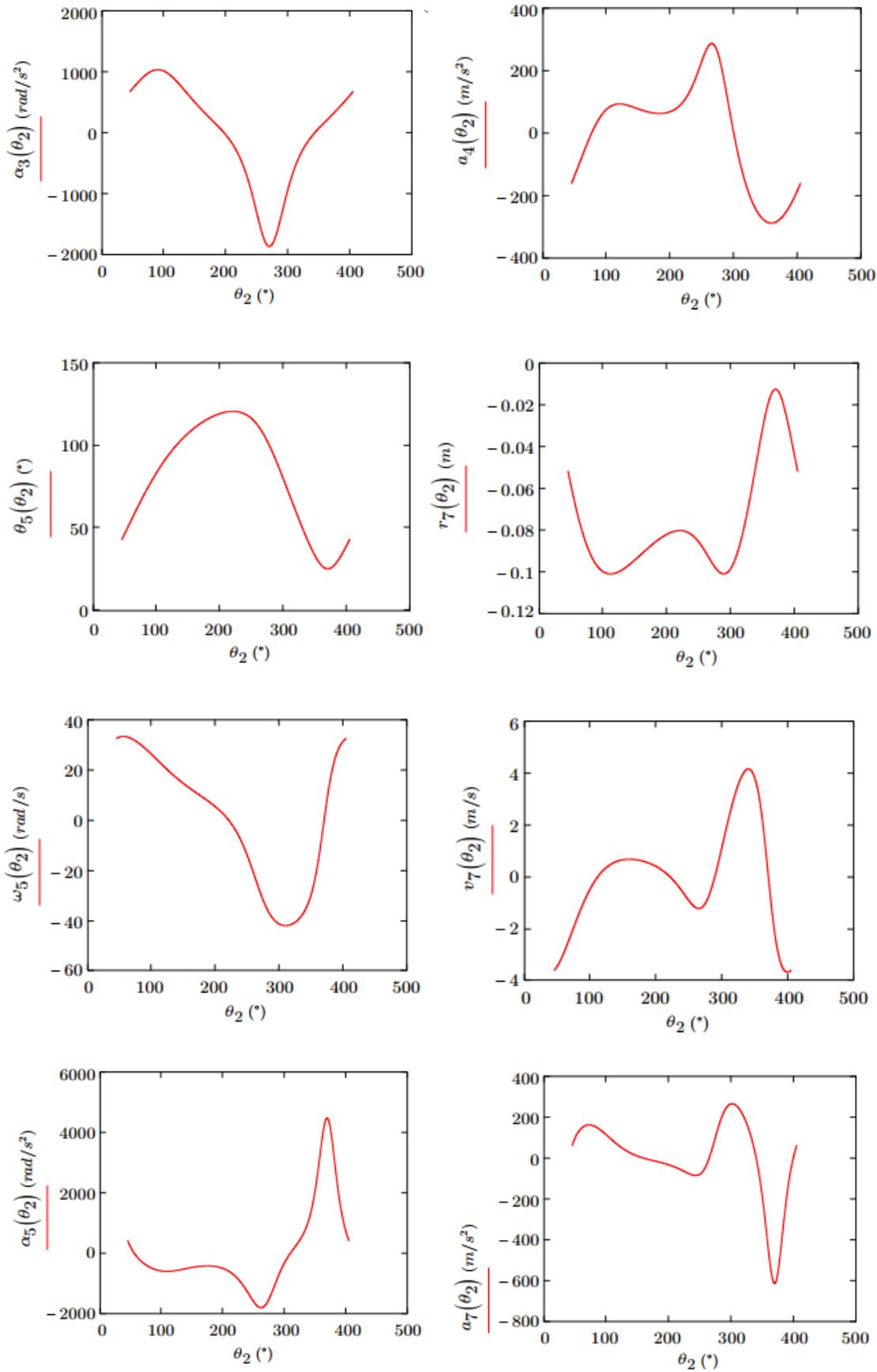
De donde:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ a_4 \\ \alpha_5 \\ a_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3}{r_3 \operatorname{cos} \theta_3} \\ \frac{-r_3 \omega_3^2 - r_2 \omega_2^2 \operatorname{cos}(\theta_2 - \theta_3)}{\operatorname{cos} \theta_3} \\ \frac{r_3 \omega_3^2 + r_2 \omega_2^2 \operatorname{cos} \theta_2 \operatorname{cos} \theta_3 + r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 - r_5 \omega_5^2 \operatorname{cos} \theta_3 \operatorname{cos} \theta_5}{r_5 \operatorname{cos} \theta_3 \operatorname{sen} \theta_5} \\ \frac{r_3 \omega_3^2 \operatorname{cos} \theta_5 - r_5 \omega_5^2 \operatorname{cos} \theta_3 + r_2 \omega_2^2 \operatorname{cos} \theta_2 \operatorname{cos} \theta_3 \operatorname{cos} \theta_5 + r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \operatorname{cos} \theta_5}{\operatorname{sen} \theta_5 \left(2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_3}{2} \right) - 1 \right)} \end{Bmatrix} \quad (\text{ej9-21})^4$$

Las gráficas de las variables cinemáticas desconocidas contra el ángulo de rotación del eslabón motriz se muestran a continuación:



⁴ Ídem a la nota al pie 1 para α_5 y a_7 .

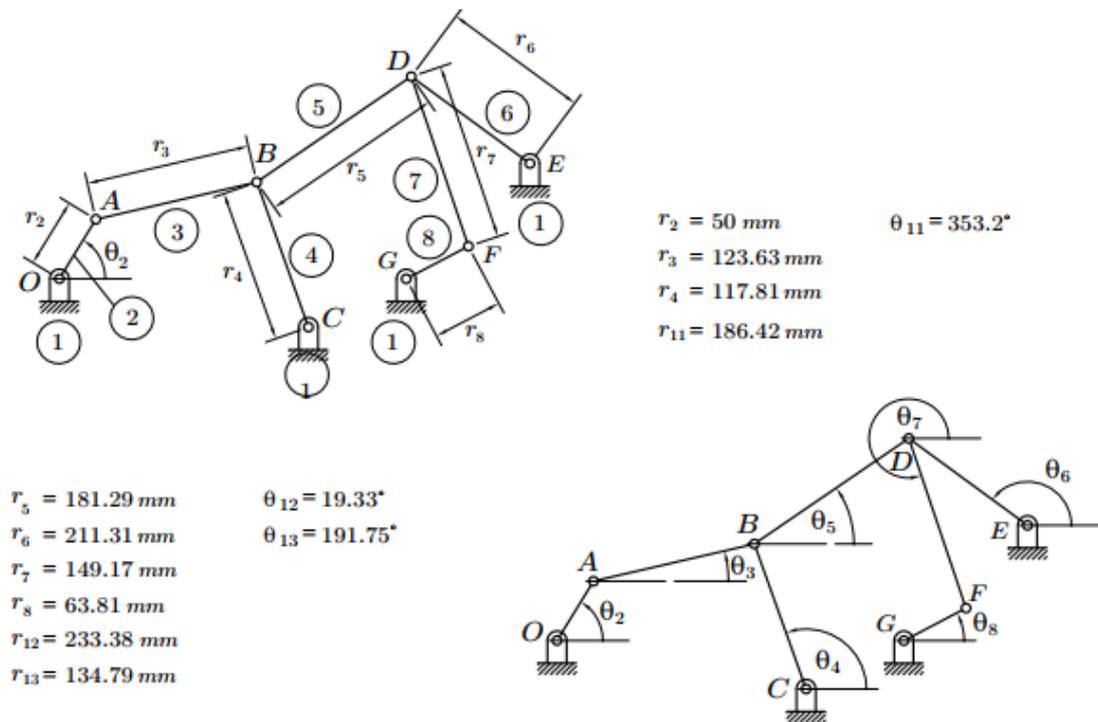


Ejemplo 10

Considérese el mecanismo mostrado en la Figura 59. Realícese el análisis cinemático de ciclo completo de dicho mecanismo si el eslabón motriz OA gira a una velocidad angular constante de 900 rpm en sentido horario, empezando en $\theta = 60^\circ$.

Figura 59

Mecanismo del ejemplo 10



La movilidad del mecanismo es:

$$m = 3(8 - 1) - 2(10) = 1$$

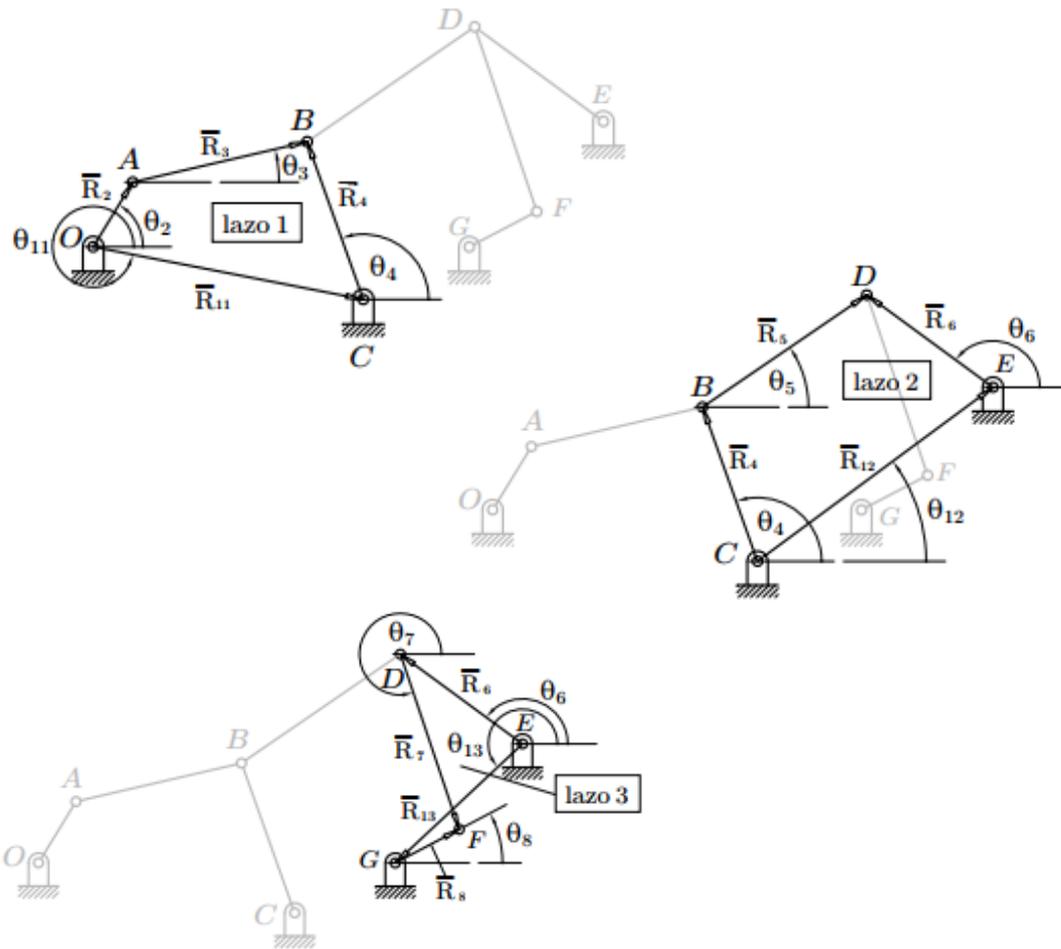
Y el número de contornos independientes o lazos vectoriales a ser analizados son:

$$N = 10 - 7 = 3$$

Los lazos cerrados del mecanismo se muestran en la figura de la página siguiente.

Figura 60

Contornos independientes o lazos cerrados del ejemplo 10



Método de Raven

Como se puede observar fácilmente todos los lazos del mecanismo corresponden a mecanismos de cuatro barras.

La siguiente tabla muestra las constantes obtenidas de la geometría del mecanismo así como las variables conocidas y desconocidas en el primer lazo:

<i>Datos geométricos del mecanismo</i>		Constantes	
		$r_{11}, r_2, r_3, r_4, \theta_{11}$	
Primer lazo		Variables conocidas	Variables desconocidas
<i>Variables cinemáticas</i>	<i>Posición</i>	θ_2	θ_3, θ_4
	<i>Velocidad</i>	$\omega_2 = -30\pi \text{ rpm}$	ω_3, ω_4
	<i>Aceleración</i>	$\alpha_2 = 0$	α_3, α_4

Análisis de posición, velocidad y aceleración. Del apartado 2.3.2 se tiene:

$$\theta_3 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right) \quad (\text{ej10-1})$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_1 &= r_{11} \cos \theta_{11} - r_2 \cos \theta_2 \\ K_2 &= r_{11} \operatorname{sen} \theta_{11} - r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ K_3 &= \frac{r_3^2 - r_4^2 + K_1^2 + K_2^2}{2r_3} \end{aligned}$$

Y,

$$\theta_4 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}} \right) \quad (\text{ej10-2})$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_1 &= r_{11} \cos \theta_{11} - r_2 \cos \theta_2 \\ K_2 &= r_{11} \operatorname{sen} \theta_{11} - r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ K_{3-} &= \frac{r_3^2 - r_4^2 - K_1^2 - K_2^2}{2r_4} \end{aligned}$$

$$\omega_3 = \frac{r_2 \omega \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (\text{ej10-3})$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 \omega \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (\text{ej10-4})$$

$$\alpha_3 = \frac{r_4 \omega_4^2 - r_2 \omega^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - r_3 \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (\text{ej10-5})$$

$$\alpha_4 = \frac{r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) - r_3 \omega_3^2 - r_2 \omega^2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (\text{ej10-6})$$

Para el segundo lazo del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_{12}, r_4, r_5, r_6, \theta_{12}$	
Segundo lazo		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	$\theta_4 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}} \right)$	θ_5, θ_6
	Velocidad	$\omega_4 = \frac{r_2 \omega \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$	ω_5, ω_6
	Aceleración	$\alpha_4 = \frac{r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) - r_3 \omega_3^2 - r_2 \omega^2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$	α_5, α_6

Análisis de posición, velocidad y aceleración. Del apartado 2.3.2 se tiene:

$$\theta_5 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right) \quad (\text{ej10-7})$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_1 &= r_{12} \cos \theta_{12} - r_4 \cos \theta_4 \\ K_2 &= r_{12} \operatorname{sen} \theta_{12} - r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ K_3 &= \frac{r_5^2 - r_6^2 + K_1^2 + K_2^2}{2r_5} \end{aligned}$$

Y,

$$\theta_6 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right) \quad (\text{ej10-8})$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_1 &= r_{12} \cos \theta_{12} - r_4 \cos \theta_4 \\ K_2 &= r_{12} \operatorname{sen} \theta_{12} - r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ K_{3-} &= \frac{r_5^2 - r_6^2 - K_1^2 - K_2^2}{2r_6} \end{aligned}$$

$$\omega_5 = -\frac{r_4 \omega_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6)}{r_5 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)} \quad (\text{ej10-9})$$

$$\omega_6 = -\frac{r_4 \omega_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5)}{r_6 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)} \quad (\text{ej10-10})$$

$$\alpha_5 = -\frac{r_4 \alpha_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6) - r_6 \omega_6^2 + r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \theta_6) + r_5 \omega_5^2 \cos(\theta_5 - \theta_6)}{r_5 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)} \quad (\text{ej10-11})$$

$$\alpha_6 = -\frac{r_4 \alpha_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5) - r_6 \omega_6^2 \cos(\theta_5 - \theta_6) + r_5 \omega_5^2 + r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \theta_5)}{r_6 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)} \quad (\text{ej10-12})$$

Para el tercer lazo del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_{13}, r_6, r_7, r_8, \theta_{13}$	
Tercer lazo		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	$\theta_6 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right)$	θ_7, θ_8
	Velocidad	$\omega_6 = -\frac{r_4 \omega_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5)}{r_6 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)}$	ω_7, ω_8
	Aceleración	$\alpha_6 = -\frac{r_4 \alpha_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5) - r_6 \omega_6^2 \cos(\theta_5 - \theta_6) + r_5 \omega_5^2 + r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \theta_5)}{r_6 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)}$	α_7, α_8

Análisis de posición, velocidad y aceleración. Del apartado 2.3.2 se tiene:

$$\theta_7 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right) \quad (\text{ej10-13})$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_1 &= r_{13} \cos \theta_{13} - r_6 \cos \theta_6 \\ K_2 &= r_{13} \operatorname{sen} \theta_{13} - r_6 \operatorname{sen} \theta_6 \\ K_3 &= \frac{r_7^2 - r_8^2 + K_1^2 + K_2^2}{2r_7} \end{aligned}$$

Y,

$$\theta_8 = 2 \arctan \left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3_}}}{K_1 + K_{3_}} \right) \quad (\text{ej10-14})$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_1 &= r_{13} \cos \theta_{13} - r_6 \cos \theta_6 \\ K_2 &= r_{13} \operatorname{sen} \theta_{13} - r_6 \operatorname{sen} \theta_6 \\ K_{3_} &= \frac{r_7^2 - r_8^2 - K_1^2 - K_2^2}{2r_8} \end{aligned}$$

$$\omega_7 = -\frac{r_6 \omega_6 \operatorname{sen}(\theta_6 - \theta_8)}{r_7 \operatorname{sen}(\theta_7 - \theta_8)} \quad (\text{ej10-15})$$

$$\omega_8 = -\frac{r_6 \omega_6 \operatorname{sen}(\theta_6 - \theta_7)}{r_8 \operatorname{sen}(\theta_7 - \theta_8)} \quad (\text{ej10-16})$$

$$\alpha_7 = -\frac{r_6 \alpha_6 \operatorname{sen}(\theta_6 - \theta_8) - r_8 \omega_8^2 + r_6 \omega_6^2 \cos(\theta_6 - \theta_8) + r_7 \omega_7^2 \cos(\theta_7 - \theta_8)}{r_7 \operatorname{sen}(\theta_7 - \theta_8)} \quad (\text{ej10-17})$$

$$\alpha_8 = -\frac{r_6 \alpha_6 \operatorname{sen}(\theta_6 - \theta_7) - r_8 \omega_8^2 \cos(\theta_7 - \theta_8) + r_7 \omega_7^2 + r_6 \omega_6^2 \cos(\theta_6 - \theta_7)}{r_8 \operatorname{sen}(\theta_7 - \theta_8)} \quad (\text{ej10-18})$$

Método general

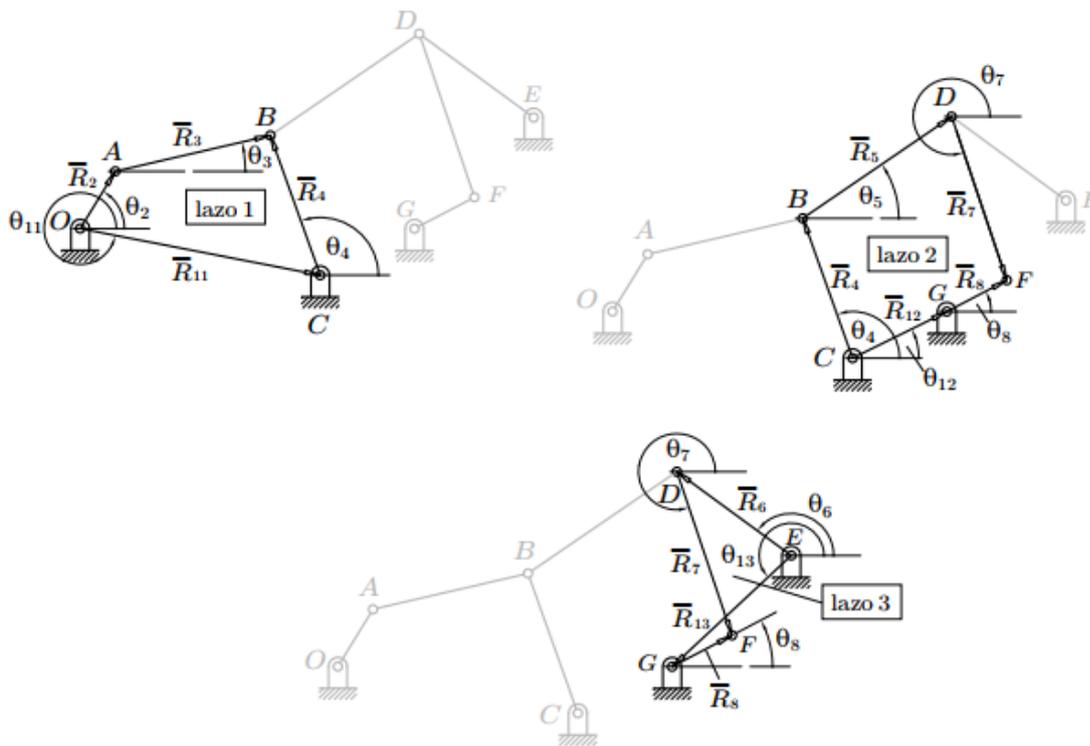
Debido a la dimensión del problema y para facilitar el cálculo de la inversa de la matriz jacobiana de las variables secundarias, se va a subdividir su solución en dos partes:

1. Solución con el uso de la matriz jacobiana para el *primer lazo*, y
2. Solución con el uso de la matriz jacobiana para el *segundo y tercer lazos*.

Se pueden apreciar los lazos cerrados en la figura de la página siguiente.

Figura 61

Contornos independientes o lazos cerrados del ejemplo 10



Análisis de velocidad y aceleración. Para el primer lazo, mostrado en la Figura 61, las ecuaciones de restricción cinemática corresponden a la de un mecanismo de cuatro barras, tratadas, en el apartado 2.4.1 y sus resultados son los mismos de dicho apartado.

Los contornos vectoriales 2 y 3 para ser analizados por el uso de la matriz jacobiana se muestran en la Figura 61 y como se observa no todos necesariamente corresponden a los empleados en el método de Raven.

Para los lazos cerrados 2 y 3 las ecuaciones de restricción cinemática son:

$$\begin{aligned}
 f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8) &= -r_{12} \cos \theta_{12} + r_4 \cos \theta_4 + r_5 \cos \theta_5 + r_7 \cos \theta_7 - r_8 \cos \theta_8 = 0 \\
 f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8) &= -r_{12} \operatorname{sen} \theta_{12} + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 + r_5 \operatorname{sen} \theta_5 + r_7 \operatorname{sen} \theta_7 - r_8 \operatorname{sen} \theta_8 = 0 \\
 f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8) &= -r_{13} \cos \theta_{13} + r_6 \cos \theta_6 + r_7 \cos \theta_7 - r_8 \cos \theta_8 = 0 \\
 f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8) &= -r_{13} \operatorname{sen} \theta_{13} + r_6 \operatorname{sen} \theta_6 + r_7 \operatorname{sen} \theta_7 - r_8 \operatorname{sen} \theta_8 = 0
 \end{aligned}
 \tag{ej10-19}$$

Donde la variable primaria es $p = \theta_4$ y las variables secundarias son: $s_1 = \theta_5$, $s_2 = \theta_6$, $s_3 = \theta_7$ y $s_4 = \theta_8$, entonces:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{J}_s] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_8} \\ \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_8} \\ \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_8} \\ \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_8} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -r_5 \operatorname{sen} \theta_5 & 0 & -r_7 \operatorname{sen} \theta_7 & r_8 \operatorname{sen} \theta_8 \\ r_5 \operatorname{cos} \theta_5 & 0 & r_7 \operatorname{cos} \theta_7 & -r_8 \operatorname{cos} \theta_8 \\ 0 & -r_6 \operatorname{sen} \theta_6 & -r_7 \operatorname{sen} \theta_7 & r_8 \operatorname{sen} \theta_8 \\ 0 & r_6 \operatorname{cos} \theta_6 & r_7 \operatorname{cos} \theta_7 & -r_8 \operatorname{cos} \theta_8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\dot{\mathbf{J}}_s] &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_8} \\ \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_8} \\ \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_8} \\ \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_5} & \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_8} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -r_5 \omega_5 \operatorname{cos} \theta_5 & 0 & -r_7 \omega_7 \operatorname{cos} \theta_7 & r_8 \omega_8 \operatorname{cos} \theta_8 \\ -r_5 \omega_5 \operatorname{sen} \theta_5 & 0 & -r_7 \omega_7 \operatorname{sen} \theta_7 & r_8 \omega_8 \operatorname{sen} \theta_8 \\ 0 & -r_6 \omega_6 \operatorname{cos} \theta_6 & -r_7 \omega_7 \operatorname{cos} \theta_7 & r_8 \omega_8 \operatorname{cos} \theta_8 \\ 0 & -r_6 \omega_6 \operatorname{sen} \theta_6 & -r_7 \omega_7 \operatorname{sen} \theta_7 & r_8 \omega_8 \operatorname{sen} \theta_8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{J}_p\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ r_4 \operatorname{cos} \theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \quad \{\dot{\mathbf{J}}_p\} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_3(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_4(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_4 \omega_4 \operatorname{cos} \theta_4 \\ -r_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Análisis de velocidad y aceleración. Las velocidades secundarias están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -r_5 \operatorname{sen} \theta_5 & 0 & -r_7 \operatorname{sen} \theta_7 & r_8 \operatorname{sen} \theta_8 \\ r_5 \operatorname{cos} \theta_5 & 0 & r_7 \operatorname{cos} \theta_7 & -r_8 \operatorname{cos} \theta_8 \\ 0 & -r_6 \operatorname{sen} \theta_6 & -r_7 \operatorname{sen} \theta_7 & r_8 \operatorname{sen} \theta_8 \\ 0 & r_6 \operatorname{cos} \theta_6 & r_7 \operatorname{cos} \theta_7 & -r_8 \operatorname{cos} \theta_8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ r_4 \operatorname{cos} \theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_4 \quad (\text{ej10-20})$$

Que luego de resolverse y simplificarse produce:

$$\begin{Bmatrix} \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-r_4 \omega_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6)}{r_5 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)} \\ \frac{-r_4 \omega_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5)}{r_6 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)} \\ r_4 \omega_4 \left[\frac{\cos(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_8) - \cos(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_8)}{r_7 [\cos(\theta_5 - \theta_6 + \theta_7 - \theta_8) - \cos(\theta_5 - \theta_6 - \theta_7 + \theta_8)]} \right] \\ r_4 \omega_4 \left[\frac{\cos(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \cos(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7)}{r_8 [\cos(\theta_5 - \theta_6 + \theta_7 - \theta_8) - \cos(\theta_5 - \theta_6 - \theta_7 + \theta_8)]} \right] \end{Bmatrix} \quad (\text{ej10-21})$$

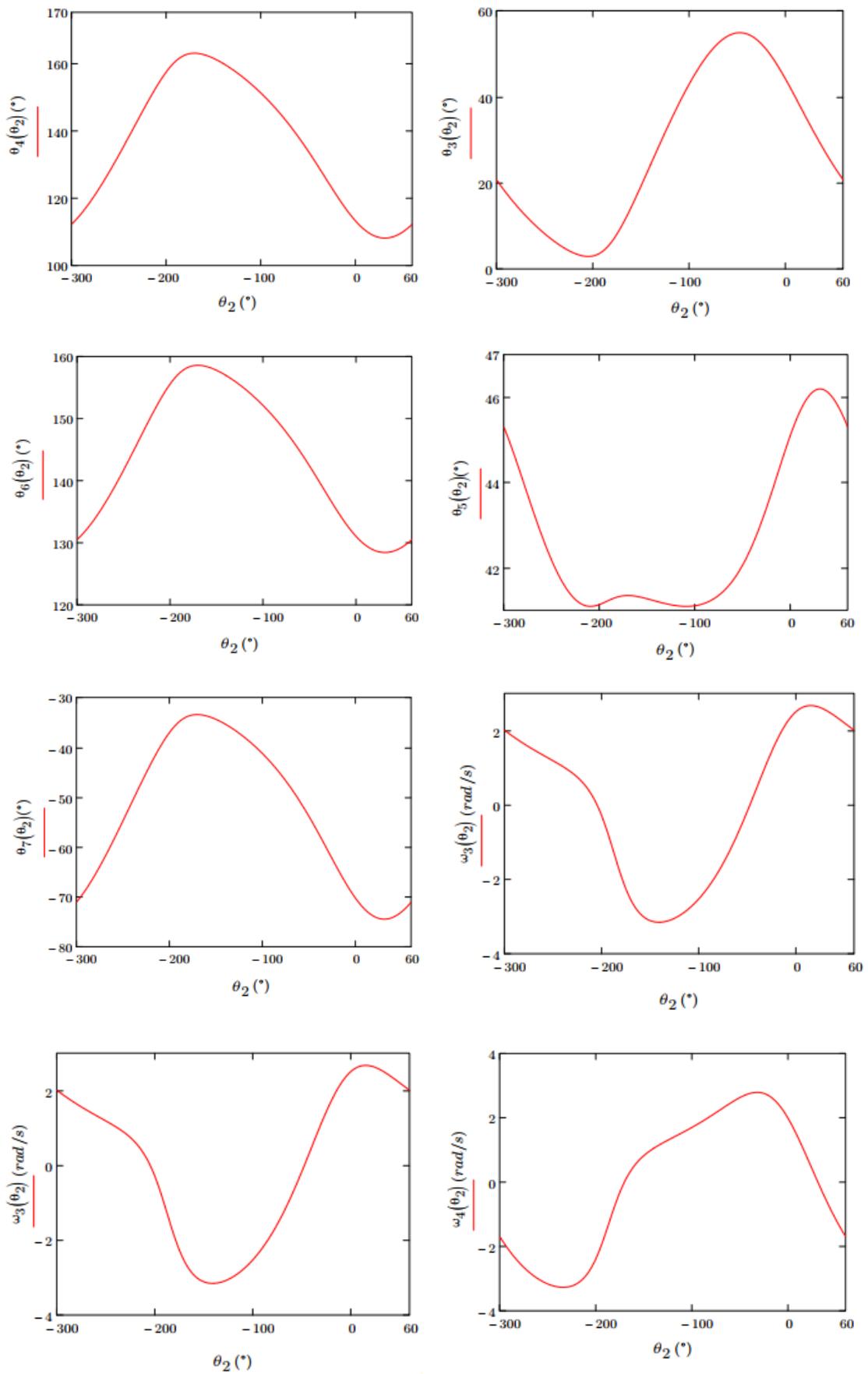
Para las *aceleraciones secundarias*, se tiene:

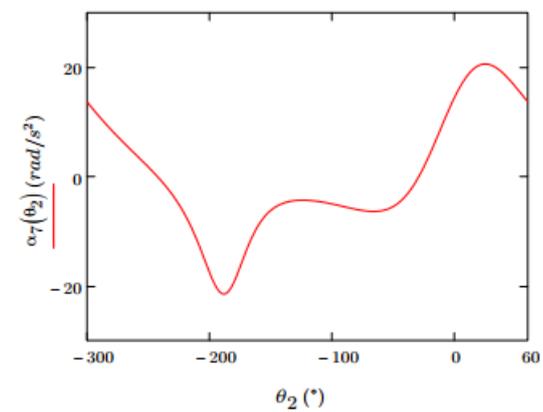
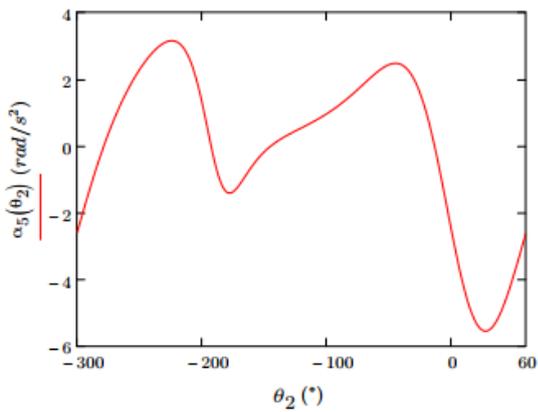
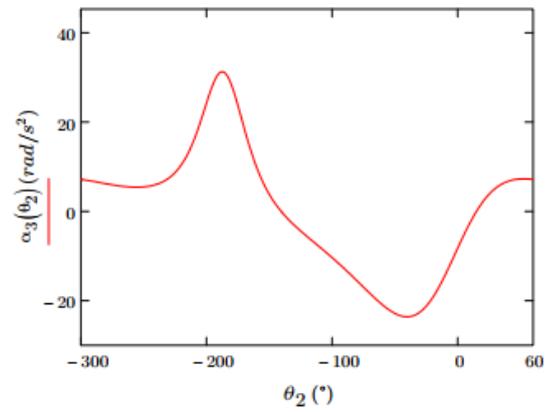
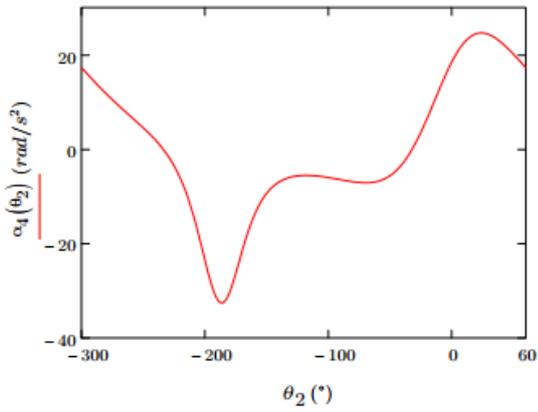
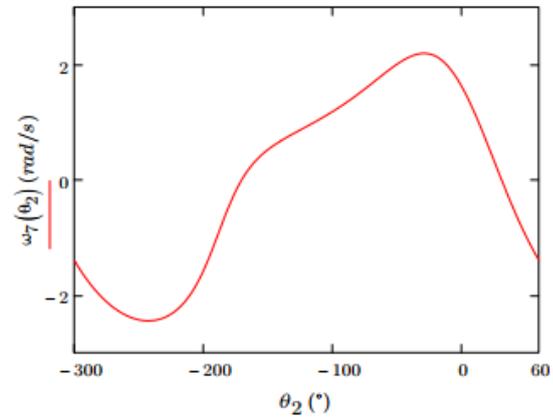
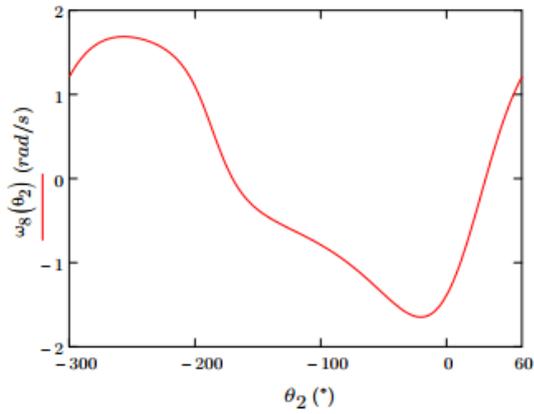
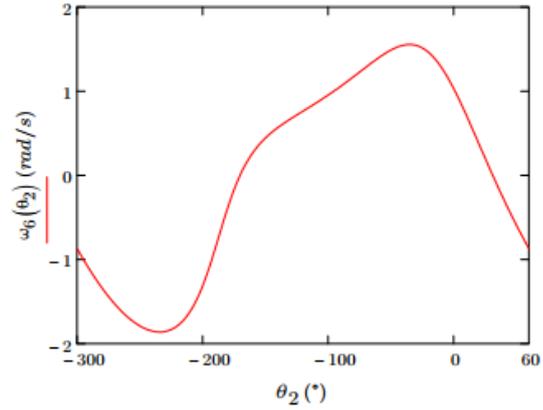
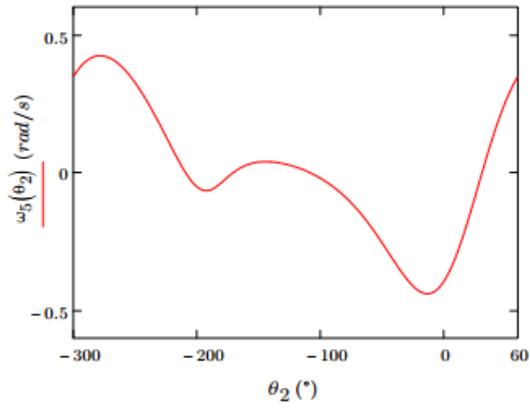
$$\begin{Bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -r_5 \operatorname{sen} \theta_5 & 0 & -r_7 \operatorname{sen} \theta_7 & r_8 \operatorname{sen} \theta_8 \\ r_5 \cos \theta_5 & 0 & r_7 \cos \theta_7 & -r_8 \cos \theta_8 \\ 0 & -r_6 \operatorname{sen} \theta_6 & -r_7 \operatorname{sen} \theta_7 & r_8 \operatorname{sen} \theta_8 \\ 0 & r_6 \cos \theta_6 & r_7 \cos \theta_7 & -r_8 \cos \theta_8 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -r_5 \omega_5 \cos \theta_5 & 0 & -r_7 \omega_7 \cos \theta_7 \\ -r_5 \omega_5 \operatorname{sen} \theta_5 & 0 & -r_7 \omega_7 \operatorname{sen} \theta_7 \\ 0 & -r_6 \omega_6 \cos \theta_6 & -r_7 \omega_7 \cos \theta_7 \\ 0 & -r_6 \omega_6 \operatorname{sen} \theta_6 & -r_7 \omega_7 \operatorname{sen} \theta_7 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} r_8 \omega_8 \cos \theta_8 \\ r_8 \omega_8 \operatorname{sen} \theta_8 \\ r_8 \omega_8 \cos \theta_8 \\ r_8 \omega_8 \operatorname{sen} \theta_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ r_4 \cos \theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha_4 + \begin{bmatrix} -r_4 \omega_4 \cos \theta_4 \\ -r_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_4 \right)$$

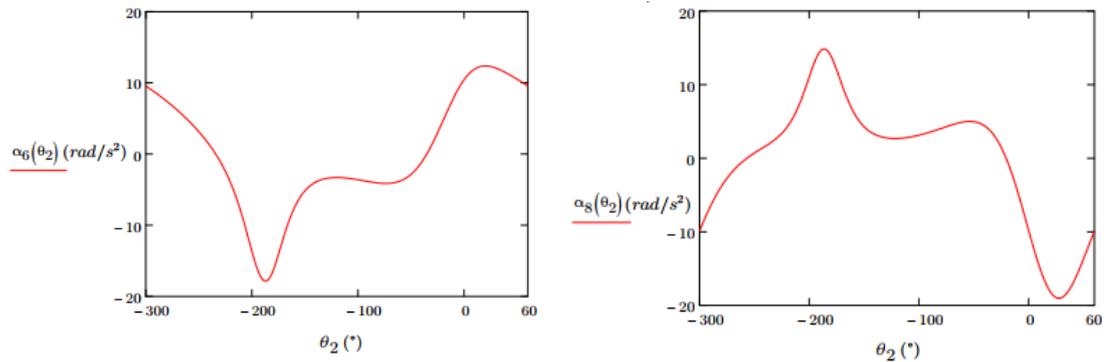
De donde:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-r_4 \alpha_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6) - r_6 \omega_6^2 + r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \theta_6) + r_5 \omega_5^2 \cos(\theta_5 - \theta_6)}{r_5 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)} \\ \frac{-r_4 \alpha_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5) - r_6 \omega_6^2 \cos(\theta_5 - \theta_6) + r_5 \omega_5^2 + r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \theta_5)}{r_6 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6)} \\ r_4 \alpha_4 \left[\frac{\cos(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_8) - \cos(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_8)}{r_7 [\cos(\theta_5 - \theta_6 + \theta_7 - \theta_8) - \cos(\theta_5 - \theta_6 - \theta_7 + \theta_8)]} \right] - 2r_5 \omega_5^2 \operatorname{sen}(\theta_6 - \theta_8) + 2r_6 \omega_6^2 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_8) - 2r_7 \omega_7^2 \dots \\ r_4 \alpha_4 \left[\frac{\cos(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - \cos(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7)}{r_8 [\cos(\theta_5 - \theta_6 + \theta_7 - \theta_8) - \cos(\theta_5 - \theta_6 - \theta_7 + \theta_8)]} \right] + 2r_5 \omega_5^2 \operatorname{sen}(\theta_6 - \theta_7) - 2r_6 \omega_6^2 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_7) - 2r_7 \omega_7^2 \dots \\ \frac{\operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6) + r_4 \omega_4^2 [\operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_8) - \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_8)]}{\dots} \\ \frac{\operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6) + r_4 \omega_4^2 [\operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7)]}{\dots} \\ \dots + r_7 \omega_7^2 [\operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6 + \theta_7 - \theta_8) + \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6 - \theta_7 + \theta_8)] \\ \dots + r_8 \omega_8^2 [\operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6 + \theta_7 - \theta_8) + \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_6 - \theta_7 + \theta_8)] \end{Bmatrix} \quad (\text{ej10-22})$$

A continuación se grafican las variables cinemáticas incógnitas para todos los lazos vectoriales:







2.6 Análisis cinemático de puntos de interés en mecanismos planos

Existen situaciones en las cuales es necesario determinar las características cinemáticas de ciertos puntos de interés en un mecanismo, por ejemplo centros de masa, puntos de aplicación de fuerzas o momentos o puntos de un eslabón que cumplen alguna tarea específica, en cuyo caso se puede construir un lazo vectorial específico para dichos puntos con el objetivo de efectuar el análisis cinemático mediante el empleo del método de Raven para obtener las variables cinemáticas requeridas.

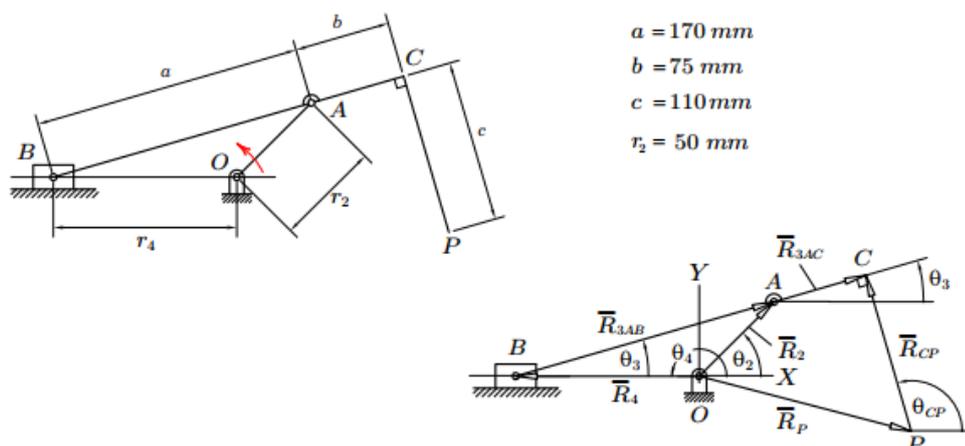
Los siguientes ejemplos, desarrollan varios ejemplos del análisis cinemático de puntos de interés en mecanismos específicos.

Ejemplo 11

Para el mecanismo mostrado en la Figura 62, encontrar la velocidad y aceleración del punto P , considerando que el eslabón motriz OA gira a una velocidad angular constante de 300 rpm en sentido antihorario.

Figura 62

Mecanismo del ejemplo 11 y el lazo vectorial empleado



Para el lazo vectorial OAB , se tiene:

$$\bar{R}_2 - \bar{R}_{3AB} - \bar{R}_4 = \bar{0} \quad (\text{ej11-1})$$

De donde se obtienen las siguientes ecuaciones de restricción cinemática:

$$\begin{aligned} r_2 \cos \theta_2 - a \cos \theta_3 - r_4 \cos 180^\circ &= 0 \\ r_2 \sin \theta_2 - a \sin \theta_3 - r_4 \sin 180^\circ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej11-2})$$

Que, simplificando, producen:

$$\begin{aligned} r_2 \cos \theta_2 - a \cos \theta_3 + r_4 &= 0 \\ r_2 \sin \theta_2 - a \sin \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej11-3})$$

De la segunda ecuación del sistema (ej11-3) se deriva θ_3 ,

$$\theta_3 = \arcsen\left(\frac{r_2 \sin \theta_2}{a}\right) \quad (\text{ej11-4})$$

Derivando en el tiempo el sistema (ej11-3) se tiene,

$$\begin{aligned} -r_2 \omega_2 \sin \theta_2 + a \omega_3 \sin \theta_3 + v_4 &= 0 \\ r_2 \omega_2 \cos \theta_2 - a \omega_3 \cos \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej11-5})$$

De la segunda ecuación del sistema (ej11-5):

$$\omega_3 = \frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{a \cos \theta_3} \quad (\text{ej11-6})$$

Derivando en el tiempo el sistema (ej11-5) resulta:

$$\begin{aligned} -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + a \alpha_3 \sin \theta_3 + a \omega_3^2 \cos \theta_3 + a_4 &= 0 \\ -r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 - a \alpha_3 \cos \theta_3 + a \omega_3^2 \sin \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej11-7})$$

Despejando, entonces, α_3 de la segunda ecuación del sistema (ej11-7), da:

$$\alpha_3 = \frac{-r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + a \omega_3^2 \sin \theta_3}{a \cos \theta_3} \quad (\text{ej11-8})$$

Para el punto P , se tiene:

$$\bar{R}_P = \bar{R}_2 + \bar{R}_{3AC} - \bar{R}_{CP} \quad (\text{ej11-9})$$

De donde:

$$\begin{aligned} r_{Px} &= r_2 \cos \theta_2 + b \cos \theta_3 - c \cos \theta_{CP} \\ r_{Py} &= r_2 \sin \theta_2 + b \sin \theta_3 - c \sin \theta_{CP} \end{aligned} \quad (\text{ej11-10})$$

Pero, $\theta_{CP} = 90^\circ + \theta_3$, entonces:

$$\begin{aligned} r_{Px} &= r_2 \cos \theta_2 + b \cos \theta_3 + c \operatorname{sen} \theta_3 \\ r_{Py} &= r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + b \operatorname{sen} \theta_3 - c \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (\text{ej11-11})$$

Derivando en el tiempo las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} v_{Px} &= -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 - b \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 + c \omega_3 \cos \theta_3 \\ v_{Py} &= r_2 \omega_2 \cos \theta_2 + b \omega_3 \cos \theta_3 + c \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 \end{aligned} \quad (\text{ej11-12})$$

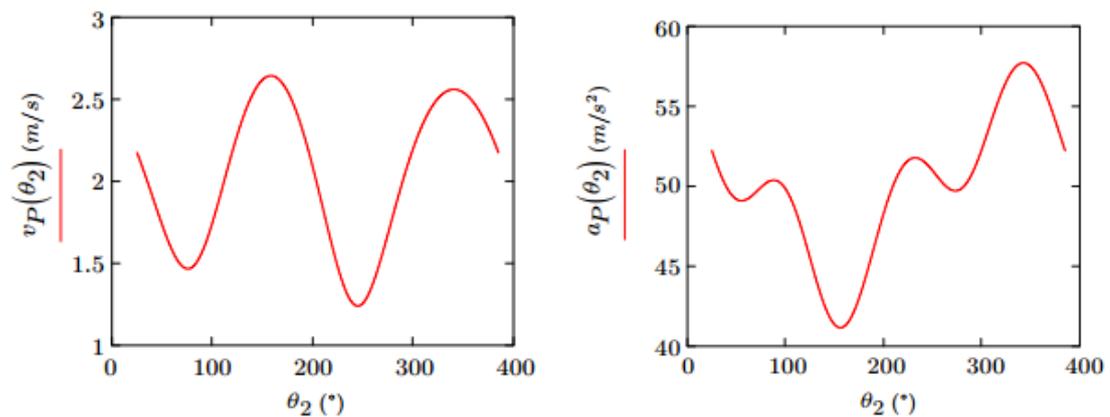
Derivando en el tiempo las ecuaciones (ej11-12), se obtiene:

$$\begin{aligned} a_{Px} &= -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - b \alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 - b \omega_3^2 \cos \theta_3 + c \alpha_3 \cos \theta_3 - c \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 = \\ &= -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + \alpha_3 (c \cos \theta_3 - b \operatorname{sen} \theta_3) - \omega_3^2 (b \cos \theta_3 + c \operatorname{sen} \theta_3) \\ a_{Py} &= -r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + b \alpha_3 \cos \theta_3 - b \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 + c \alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 + c \omega_3^2 \cos \theta_3 = \\ &= -r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + \alpha_3 (b \cos \theta_3 + c \operatorname{sen} \theta_3) + \omega_3^2 (c \cos \theta_3 - b \operatorname{sen} \theta_3) \end{aligned} \quad (\text{ej11-13})$$

Entonces la magnitud de la velocidad y aceleración del punto P están dadas por:

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{v_{Px}^2 + v_{Py}^2} \\ a_P &= \sqrt{a_{Px}^2 + a_{Py}^2} \end{aligned}$$

Si se grafican la velocidad y aceleración del punto P en función del ángulo de giro del eslabón motriz iniciando en $\theta = 25^\circ$ se obtiene lo siguiente:



Es imprescindible además hallar la cinemática de puntos de interés en el estudio de las fuerzas dinámicas como los centros de masa, como se muestra en el siguiente ejemplo.

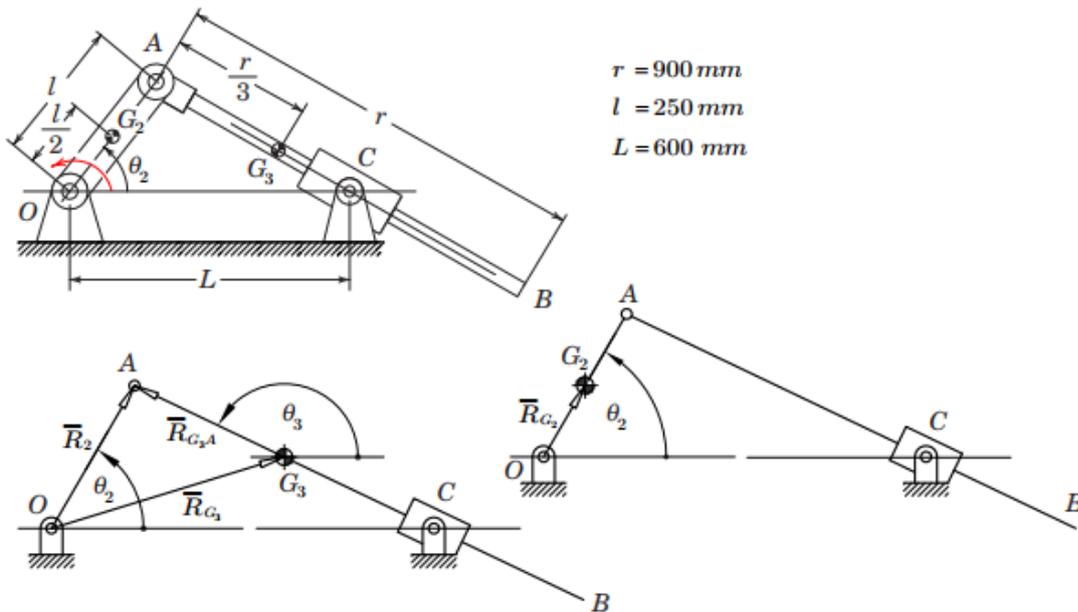
Ejemplo 12

Para el mecanismo *manivela corredera invertido* mostrado en la Figura 63, encontrar la cinemática de los centros de masa G_2 y G_3 , de los eslabones motriz

y acoplador, respectivamente, considerando que el eslabón motriz OA gira a una velocidad angular constante de 180 rpm en sentido horario.

Figura 63

Mecanismo manivela corredera invertido del ejemplo 12 y sus correspondientes lazos vectoriales cerrados



Aceleración del centro de masa G_2 :

$$\bar{R}_{G_2} = \frac{l}{2} e^{i\theta_2}$$

$$\bar{R}_{G_2} = \frac{l}{2} (\cos\theta_2 + i \text{sen}\theta_2) \quad (\text{ej12-1})$$

Con:

$$r_{G_2x} = \frac{l}{2} \cos\theta_2 \quad (\text{ej12-2})$$

$$r_{G_2y} = \frac{l}{2} \text{sen}\theta_2 \quad (\text{ej12-3})$$

Derivando en el tiempo, se tiene:

$$\bar{v}_{G_2} = \frac{l}{2} (-\omega_2 \text{sen}\theta_2 + i\omega_2 \cos\theta_2) \quad (\text{ej12-4})$$

Con:

$$v_{G_2x} = \frac{l}{2} -\omega_2 \text{sen}\theta_2 \quad (\text{ej12-5})$$

$$v_{G_2y} = \frac{l}{2} \omega_2 \cos\theta_2 \quad (\text{ej12-6})$$

Y derivando por segunda vez en el tiempo da finalmente:

$$\bar{a}_{G_2} = \frac{l}{2}(-\omega_2^2 \cos \theta_2 - i\omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2) \quad (\text{ej12-7})$$

Con:

$$a_{G_{2x}} = -\frac{l}{2}\omega_2^2 \cos \theta_2 \quad (\text{ej12-8})$$

$$a_{G_{2y}} = -\frac{l}{2}\omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 \quad (\text{ej12-9})$$

Aceleración del centro de masa G_3 :

$$\bar{R}_{G_3} = \bar{R}_2 - \bar{R}_{G_3A} \quad (\text{ej12-10})$$

$$\bar{R}_{G_3} = l e^{i\theta_2} - \frac{r}{3} e^{i\theta_3} \quad (\text{ej12-11})$$

Entonces,

$$\bar{R}_{G_3} = \left[l \cos \theta_2 - \frac{r}{3} \cos \theta_3 \right] + i \left[l \operatorname{sen} \theta_2 - \frac{r}{3} \operatorname{sen} \theta_3 \right] \quad (\text{ej12-12})$$

Con:

$$r_{G_{3x}} = l \cos \theta_2 - \frac{r}{3} \cos \theta_3 \quad (\text{ej12-13})$$

$$r_{G_{3y}} = l \operatorname{sen} \theta_2 - \frac{r}{3} \operatorname{sen} \theta_3 \quad (\text{ej12-14})$$

Derivando en el tiempo:

$$\bar{v}_{G_3} = \left[-l\omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 - \frac{r}{3}\omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 \right] + i \left[l\omega_2 \cos \theta_2 - \frac{r}{3}\omega_3 \cos \theta_3 \right] \quad (\text{ej12-15})$$

Con:

$$v_{G_{3x}} = -l\omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 - \frac{r}{3}\omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 \quad (\text{ej12-16})$$

$$v_{G_{3y}} = l\omega_2 \cos \theta_2 - \frac{r}{3}\omega_3 \cos \theta_3 \quad (\text{ej12-17})$$

Derivando nuevamente en el tiempo y simplificando:

$$\bar{a}_{G_3} = \left[-l\omega_2^2 \cos \theta_2 - \frac{r}{3}(\alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \omega_3^2 \cos \theta_3) \right] + i \left[-l\omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 - \frac{r}{3}(\alpha_3 \cos \theta_3 - \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3) \right] \quad (\text{ej12-18})$$

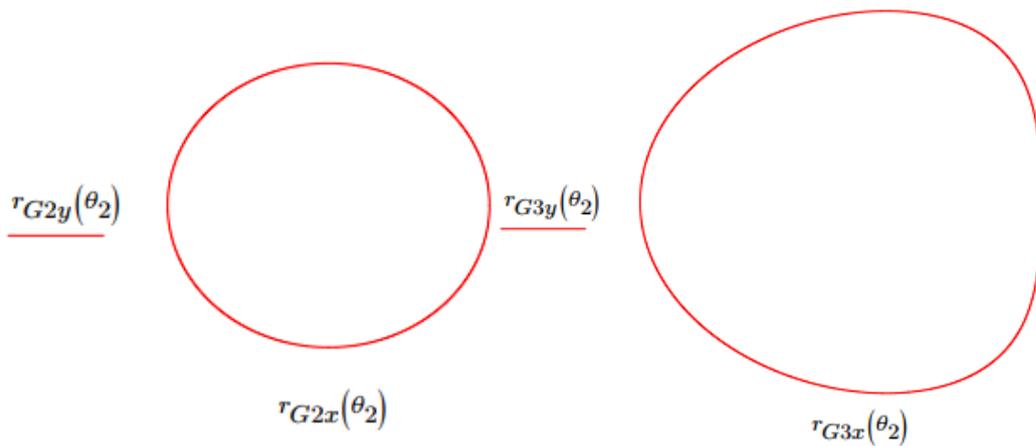
Entonces,

$$a_{G_{3x}} = -l\omega_2^2 \cos \theta_2 - \frac{r}{3}(\alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \omega_3^2 \cos \theta_3) \quad (\text{ej12-19})$$

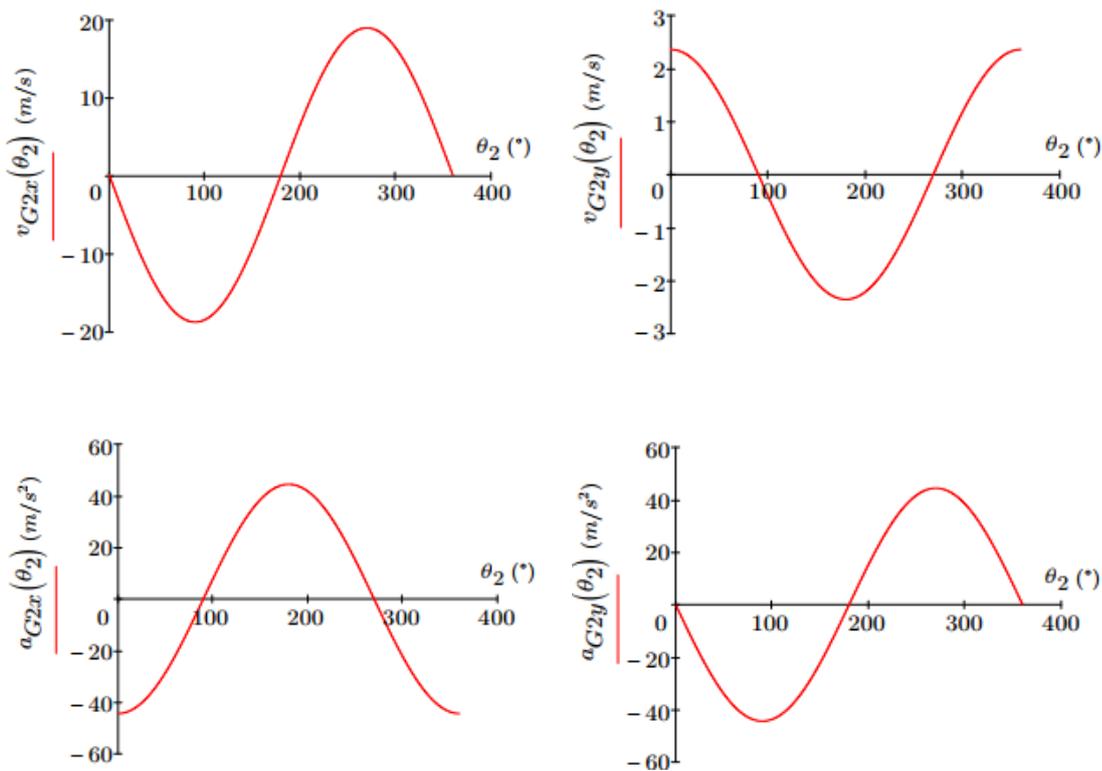
$$a_{G_2} = -l\omega_2^2 \text{sen } \theta_2 - \frac{r}{3}(\alpha_3 \cos \theta_3 - \omega_3^2 \text{sen } \theta_3) \quad (\text{ej12-20})$$

Donde, θ_3 , ω_3 y α_3 están dados por las expresiones (2.3.3-5), (2.3.3-9), (2.3.3-10) y (2.3.3-14) con $r_1 = L$, $r_2 = l$ y $r_3 = r/2$.

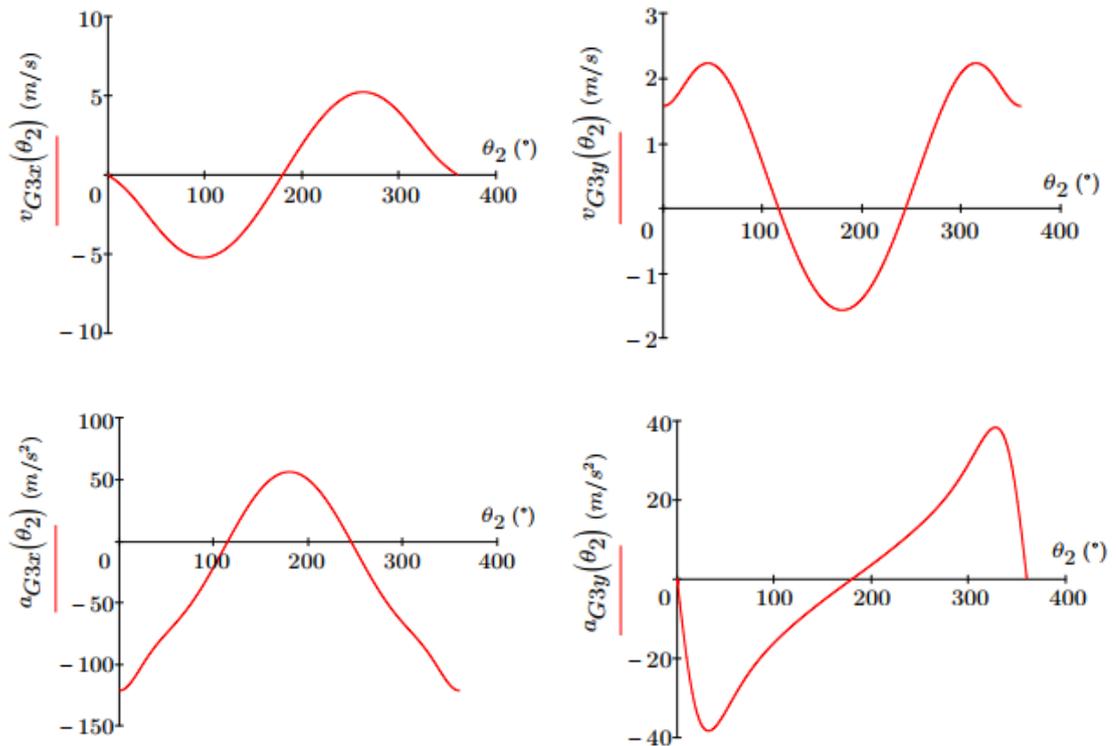
Las trayectorias de los centros de masa:



Gráficas cinemáticas de las componentes de G_2 contra el ángulo de giro del eslabón motriz:



Gráficas cinemáticas de las componentes de G_3 contra el ángulo de giro del eslabón motriz:



2.7 Curvas de acoplador

Como se mencionó en el capítulo 1, en mecanismos como el *manivela corredera* o el de *cuatro barras*, los eslabones acopladores poseen movimiento plano general, por lo que la trayectoria de cualquier punto de los mismos tiene una forma muy compleja. La resolución de las ecuaciones de posición para un punto de un eslabón acoplador puede generar dichas trayectorias, denominadas *curvas de acoplador*.

Los siguientes ejemplos muestran la generación de las curvas de acoplador para un mecanismo manivela corredera y otro de cuatro barras.

Ejemplo 13

Para el mecanismo manivela corredera mostrado en la Figura 64 de la página siguiente, genérese la curva de acoplador del punto P , si se sabe que $r_2 = 7.62$ cm, $r_3 = 11.4$ cm, $r_4 = 10.3$ cm, $\beta = 6.55^\circ$, y $\gamma = 7.25^\circ$.

Figura 64

Mecanismo manivela corredera del ejemplo 13

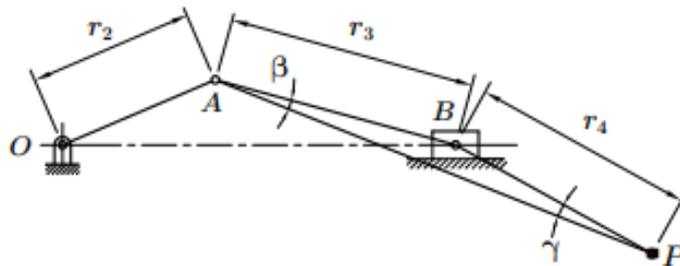
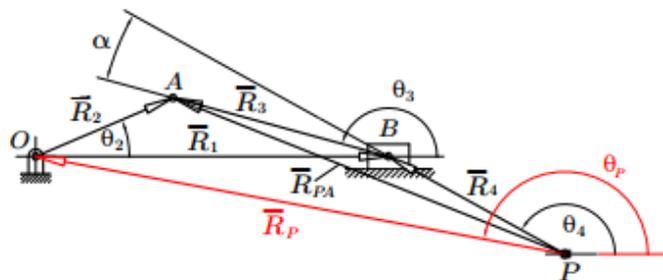


Figura 65

Lazo vectorial cerrado para la determinación de la curva de acoplador



Para el lazo vectorial mostrado se tiene:

$$\bar{R}_P = -\bar{R}_2 + \bar{R}_{PA} \quad (\text{ej13-1})$$

Pero se puede observar en el eslabón acoplador que,

$$\bar{R}_{PA} - \bar{R}_3 - \bar{R}_4 = \vec{0}$$

$$\bar{R}_{PA} = \bar{R}_3 + \bar{R}_4 \quad (\text{ej13-2})$$

Entonces,

$$\bar{R}_P = -\bar{R}_2 + \bar{R}_3 + \bar{R}_4$$

$$\bar{R}_P = -r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} \quad (\text{ej13-3})$$

De donde:

$$\begin{aligned} r_{Px}(\theta_2) &= r_P \cos \theta_P = -r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 \\ r_{Py}(\theta_2) &= r_P \sin \theta_P = -r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 + r_4 \sin \theta_4 \end{aligned} \quad (\text{ej13-4})$$

Ya que,

$$\theta_3(\theta_2) = \arcsen\left(\frac{r_2 \sin \theta_2}{r_3}\right)$$

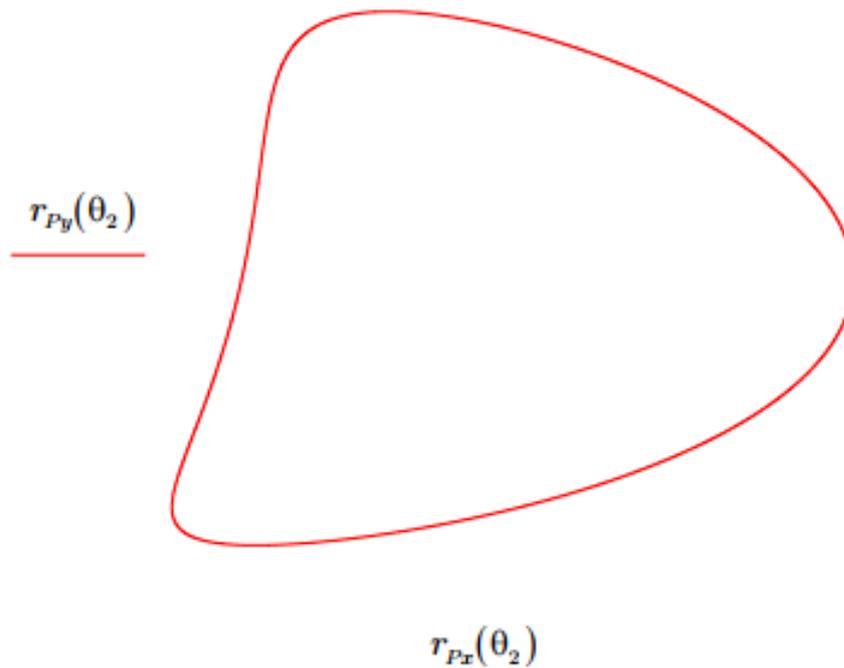
$$\alpha = \gamma + \beta$$

$$\theta_4(\theta_2) = \theta_3(\theta_2) - \beta - \gamma$$

Si para los datos establecidos en el enunciado se grafica $r_{Py}(\theta_2)$ versus $r_{Px}(\theta_2)$ se obtiene la curva de acoplador para el punto P , y que se muestra en la Figura 66.

Figura 66

Curva de acoplador para el punto P del mecanismo del ejemplo 13



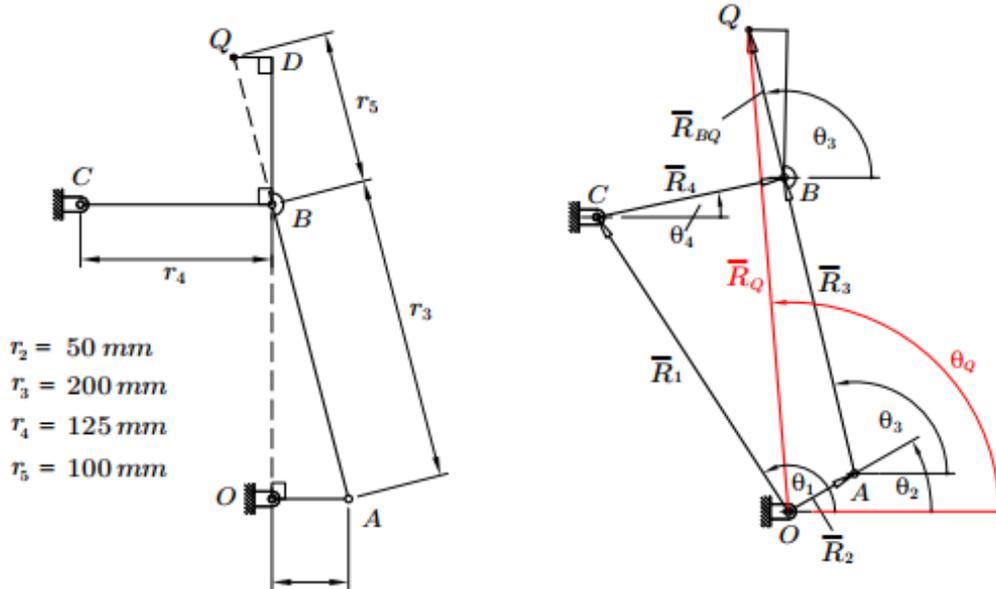
Otro ejemplo de curva de acoplador:

Ejemplo 14

El mecanismo de cuatro barras mostrado en la Figura 66 de la página siguiente, es utilizado para mover la cinta de película en un aparato reproductor, genérese la curva de acoplador del punto Q si se sabe que $r_2 = 50$ mm, $r_3 = 200$ mm, $r_4 = 125$ mm, y $r_5 = 100$ mm para la posición referencial mostrada en la misma figura, donde los eslabones OA y CB se hallan horizontales.

Figura 67

Mecanismo de cuatro barras del ejemplo 14 y su correspondiente lazo vectorial cerrado para la determinación de la curva de acoplador



Para el lazo vectorial de la figura anterior se tiene:

$$\bar{R}_Q = \bar{R}_2 + \bar{R}_3 + \bar{R}_{BQ} \quad (\text{ej16-1})$$

Entonces,

$$\bar{R}_Q = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_5 e^{i\theta_5} \quad (\text{ej16-2})$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} r_{Qx}(\theta_2) &= r_Q \cos \theta_Q = r_2 \cos \theta_2 + (r_3 + r_5) \cos \theta_3 \\ r_{Qy}(\theta_2) &= r_Q \sin \theta_Q = r_2 \sin \theta_2 + (r_3 + r_5) \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (\text{ej16-3})$$

Pero del apéndice B se puede escribir:

$$\theta_3(\theta_2) = 2 \arctan \left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right) \quad (\text{ej16-4})$$

Donde,

$$\begin{aligned} K_1(\theta_2) &= r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2 \\ K_2(\theta_2) &= r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2 \\ K_3(\theta_2) &= \frac{r_3^2 - r_4^2 + K_1^2(\theta_2) + K_2^2(\theta_2)}{2r_3} \end{aligned}$$

Y de la geometría de referencia del mecanismo:

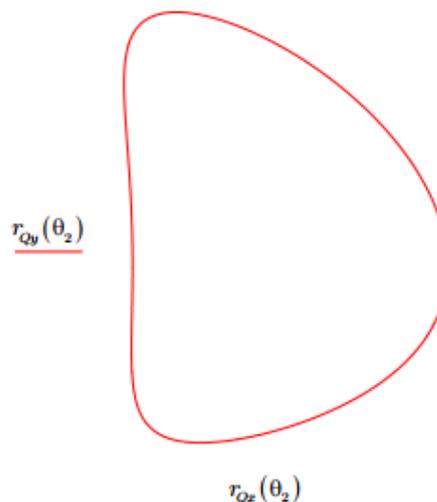
$$\theta_1 = 90^\circ + \arctan\left(\frac{r_4}{\sqrt{r_3^2 - r_2^2}}\right) \quad (\text{ej16-5})$$

$$r_1 = \sqrt{r_3^2 + r_4^2 - r_2^2} \quad (\text{ej16-6})$$

Si para los datos establecidos en el enunciado se grafica $r_{Qy}(\theta_2)$ versus $r_{Qx}(\theta_2)$ se obtiene la curva de acoplador para el punto Q , y que se muestra en la Figura 68:

Figura 68

Curva de acoplador para el punto Q del mecanismo empujador de una cinta de película del ejemplo 14

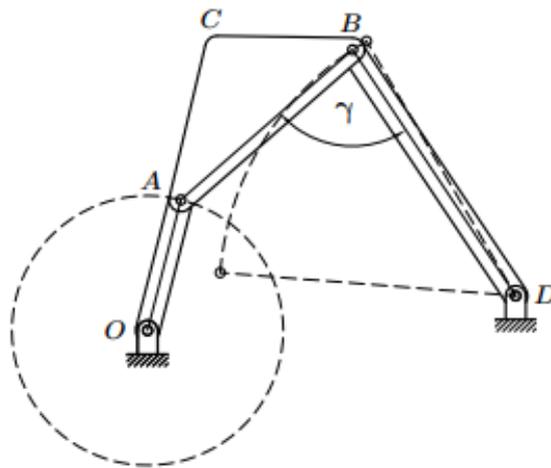


2.8 Ángulo de transmisión

Un índice de mérito importante para valorar la calidad del diseño de un mecanismo es la medición del ángulo de transmisión γ . Este se define como el ángulo formado entre el eslabón acoplador y el eslabón de salida, como se muestra en la Figura 69 para el caso de un mecanismo de cuatro barras, y mide la calidad de la transmisión de la fuerza en el mecanismo. El ángulo de transmisión no es un valor constante y varía de un valor mínimo a un máximo conforme el mecanismo se mueve; cuando el ángulo de transmisión es pequeño, se necesitará una fuerza grande para impulsar el eslabón de salida mientras que el ángulo de transmisión óptimo es de 90° , pues en dicho caso la fuerza transmitida del acoplador al seguidor es la mayor posible. Como norma general se recomienda que el ángulo de transmisión este entre los 45° hasta los 135°

Figura 69

Ángulo de transmisión para un mecanismo de cuatro barras

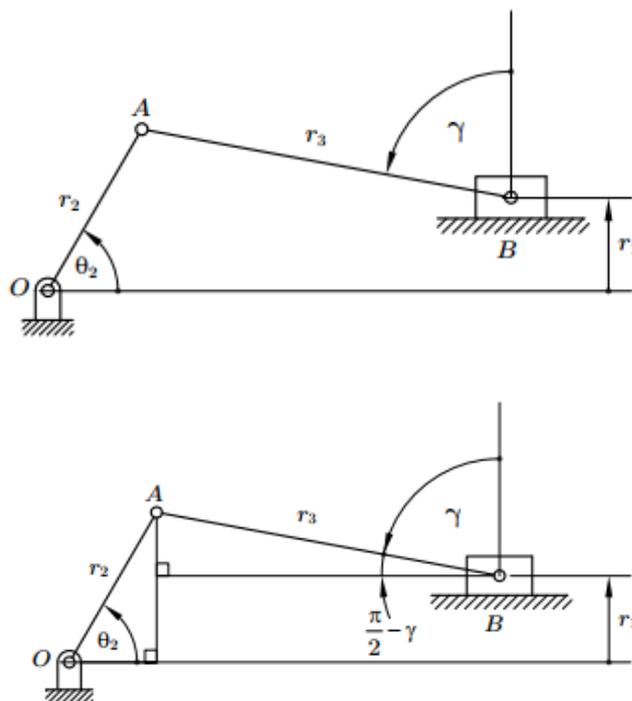


Ejemplo 15

Considérese el mecanismo manivela corredera descentrado, mostrado en la Figura 70, hállese el ángulo de transmisión en función de la θ_2 y de θ_2 , encuentrense además los valores máximo y mínimo del mismo.

Figura 70

Ángulo de transmisión para un mecanismo manivela corredera descentrado y su geometría



Se puede escribir lo siguiente:

$$r_3 \operatorname{sen}(90^\circ - \gamma) = r_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_1$$

Dado que: $\operatorname{sen}(90^\circ - \gamma) = \cos \gamma$, se tiene:

$$r_3 \cos \gamma = r_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_1$$

Y,

$$\gamma = \arccos\left(\frac{r_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_1}{r_3}\right)$$

Los valores máximo y mínimo se obtienen cuando $\operatorname{sen}\theta_2$ son 1 y -1, respectivamente es decir para $\theta_2 = 90^\circ$ y $\theta_2 = -90^\circ$, respectivamente en cuyo caso resulta:

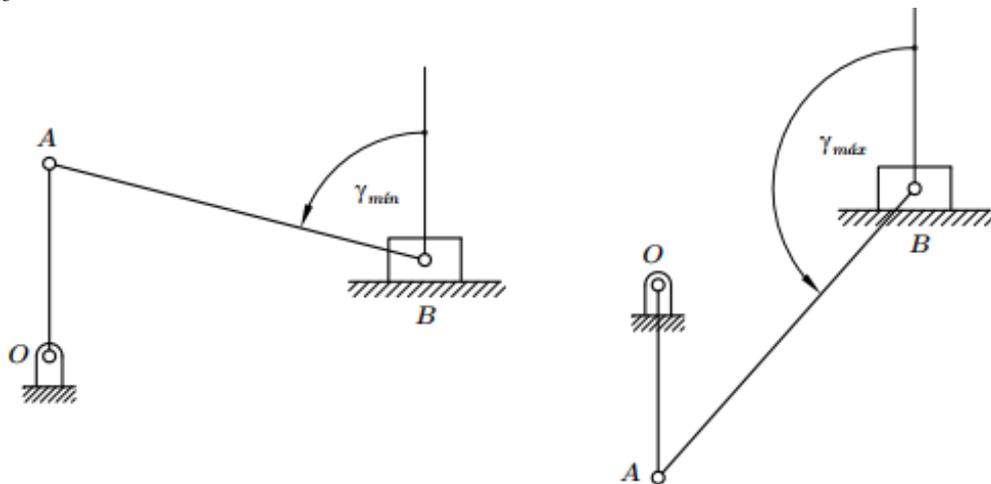
$$\gamma_{\min} = \arccos\left(\frac{r_2 - r_1}{r_3}\right) \quad (\text{ej17-1})$$

$$\gamma_{\max} = \arccos\left(\frac{r_1 + r_2}{r_3}\right) \quad (\text{ej17-2})$$

La construcción gráfica de dichos ángulos se muestra en la Figura 71:

Figura 71

Ángulos de transmisión mínimo y máximo para un mecanismo manivela corredera descentrado



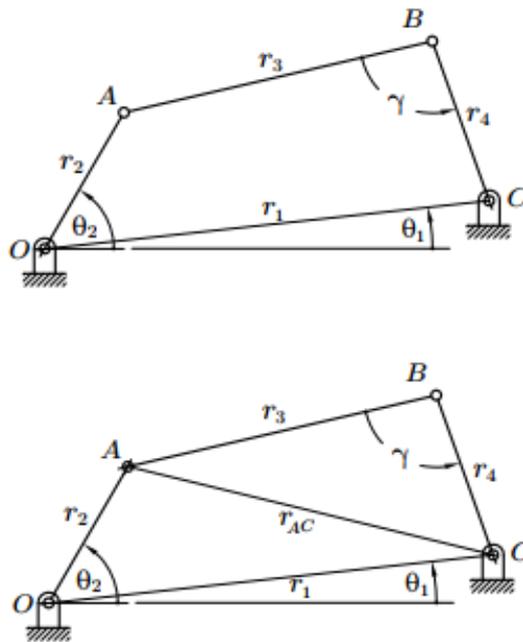
Para el mecanismo de cuatro barras, se tiene:

Ejemplo 16

Considérese el mecanismo de cuatro barras mostrado en la Figura 72, hállese el ángulo de transmisión en función de la geometría del mecanismo y de θ_2 , grafíquese además el ángulo de transmisión en función de θ_2 para el ejemplo 3.

Figura 72

Ángulo de transmisión para un mecanismo de cuatro barras y la geometría de su mecanismo



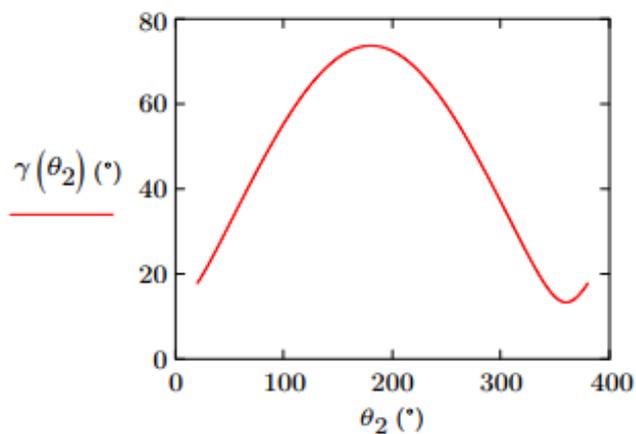
Se puede escribir:

$$r_{AC}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) = r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4 \cos \gamma$$

De donde despejando el ángulo de transmisión, γ se tiene:

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{r_3^2 + r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{2r_3r_4} \right)$$

La gráfica para el ejemplo 3 es,



2.9 Ventaja mecánica

Otro índice de mérito fundamental a considerarse en el diseño de un mecanismo es la denominada ventaja mecánica, que está dada por la expresión:

$$v_m = \frac{F_{sal}}{F_{ent}} \quad (2.9-1)$$

Donde,

v_m es la ventaja mecánica

F_{ent} es la fuerza aplicada al eslabón de entrada del mecanismo, y

F_{sal} es la fuerza producida por el eslabón de salida del mecanismo.

Si se supone eficiencia ideal en un eslabonamiento, la potencia ingresada al mecanismo se transfiere íntegramente a la salida, es decir:

$$P_{ent} = P_{sal} \quad (2.9-2)$$

Pero la potencia es el producto del momento por la velocidad angular, por lo que:

$$M_{ent}\omega_{ent} = M_{sal}\omega_{sal} \quad (2.9-3)$$

Por otro lado, $M = Fd$, siendo F la fuerza que produce el momento y d su brazo, entonces:

$$F_{ent}d_{ent}\omega_{ent} = F_{sal}d_{sal}\omega_{sal} \quad (2.9-4)$$

De aquí se deduce que:

$$\frac{F_{sal}}{F_{ent}} = \frac{\omega_{ent} d_{ent}}{\omega_{sal} d_{sal}} \quad (2.9-5)$$

Sustituyendo (2.9-5) en (2.9-1) se tiene,

$$v_m = \frac{\omega_{ent} d_{ent}}{\omega_{sal} d_{sal}} \quad (2.9-6)$$

Considérese un mecanismo de cuatro barras con eficiencia ideal, para el cual por la expresión (2.3.2-9) se tiene,

$$\omega_4 = -\frac{r_2\omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$$

De donde,

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = -\frac{r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2.9-7)$$

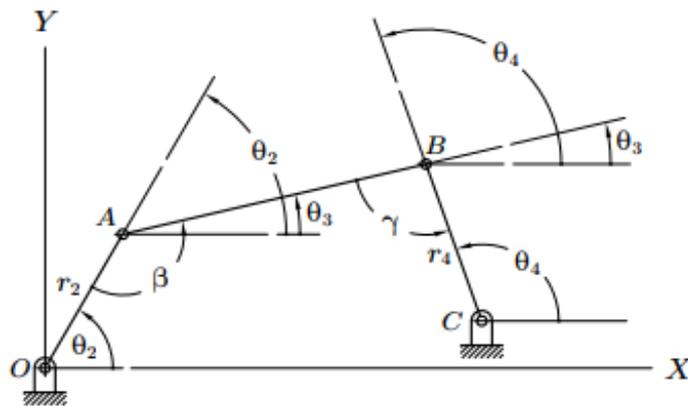
A partir de la Figura 73 de la geometría del mecanismo se deduce:

Figura 73

Geometría de un mecanismo de cuatro barras

$$\theta_2 - \theta_3 = 180^\circ - \beta$$

$$\theta_4 - \theta_3 = \gamma$$



Por lo que, $\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) = \operatorname{sen}(180^\circ - \beta)$ y $\operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4) = \operatorname{sen}(-\gamma) = -\operatorname{sen}(\gamma)$ que, sustituyendo en (2.9-7), produce:

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{r_2 \operatorname{sen}(\beta)}{r_4 \operatorname{sen}(\gamma)} \quad (2.9-8)$$

Y entonces, a partir de la expresión (2.9-6), la ventaja mecánica de un mecanismo de cuatro barras está dado por:

$$v_m = \frac{r_4 \operatorname{sen}(\gamma) d_{\text{ent}}}{r_2 \operatorname{sen}(\beta) d_{\text{sat}}} \quad (2.9-9)$$

O:

$$v_m = -\frac{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4) d_{\text{ent}}}{r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) d_{\text{sat}}} \quad (2.9-10)$$

Escribiendo la expresión (2.10-3) en notación matricial simplificada:

$$[\mathbf{J}_p]\{\dot{\mathbf{p}}\} + [\mathbf{J}_s]\{\dot{\mathbf{s}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.10-4)$$

Donde:

$$[\mathbf{J}_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial p_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_q}{\partial p_1} & \frac{\partial f_q}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial p_m} \end{bmatrix} \quad (2.10-5)$$

Es la matriz jacobiana para las variables primarias,

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_q}{\partial s_1} & \frac{\partial f_q}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad (2.10-6)$$

Es la matriz jacobiana para las *variables secundarias*.

Adicionalmente, $\{\dot{\mathbf{p}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \\ \cdot \\ \frac{dp_m}{dt} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \cdot \\ \dot{p}_m \end{array} \right\}$ es el vector de *velocidades primarias* y

$$\{\dot{\mathbf{s}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_1}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} \\ \cdot \\ \frac{ds_n}{dt} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \cdot \\ \dot{s}_n \end{array} \right\} \text{ el vector de las } \textit{velocidades secundarias}.$$

Resolviendo la expresión (2.10-4) para las *velocidades secundarias*, produce:

$$\{\dot{\mathbf{s}}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1}[\mathbf{J}_p]\{\dot{\mathbf{p}}\} \quad (2.10-7)$$

O en su forma explícita:

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial s_1} & \frac{\partial f_q}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial s_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial p_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial p_1} & \frac{\partial f_q}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial p_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \vdots \\ \dot{p}_m \end{Bmatrix} \quad (2.10-8)$$

Por otro lado, las ecuaciones de aceleración se pueden obtener al derivar con respecto al tiempo la expresión (2.10-4), lo que al reacomodar términos da como resultado:

$$[\mathbf{J}_s]\{\ddot{\mathbf{s}}\} + [\dot{\mathbf{J}}_s]\{\dot{\mathbf{s}}\} + [\mathbf{J}_p]\{\ddot{\mathbf{p}}\} + [\dot{\mathbf{J}}_p]\{\dot{\mathbf{p}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.10-9)$$

O en su forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial s_1} & \frac{\partial f_q}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \vdots \\ \ddot{s}_n \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial s_1} & \frac{\partial f_q}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial p_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial p_1} & \frac{\partial f_q}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial p_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \vdots \\ \ddot{p}_m \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial p_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial p_1} & \frac{\partial f_q}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial p_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \vdots \\ \dot{p}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.10-10)$$

Resolviendo la ecuación vectorial (2.10-9) para las *aceleraciones secundarias*, se tiene:

$$\{\ddot{\mathbf{s}}\} = -[\mathbf{J}_s]^{-1} \left([\dot{\mathbf{J}}_s]\{\dot{\mathbf{s}}\} + [\mathbf{J}_p]\{\ddot{\mathbf{p}}\} + [\dot{\mathbf{J}}_p]\{\dot{\mathbf{p}}\} \right) \quad (2.10-11)$$

Que, en su forma explícita se escribe:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \vdots \\ \ddot{s}_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial s_1} & \frac{\partial f_q}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial s_n} \end{bmatrix}^{-1} \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial s_1} & \frac{\partial f_q}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial p_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial p_1} & \frac{\partial f_q}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial p_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \vdots \\ \ddot{p}_m \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial p_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial p_1} & \frac{\partial f_q}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial p_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \vdots \\ \dot{p}_m \end{Bmatrix} \right) \quad (2.10-12)$$

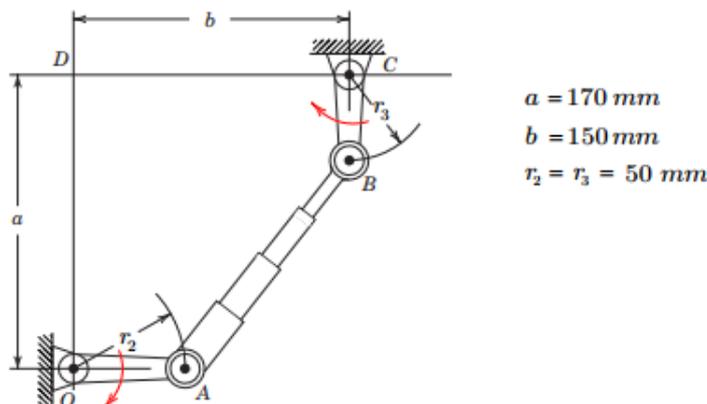
Las expresiones (2.10-7) y (2.10-11) constituyen el análisis cinemático de velocidades y aceleraciones de un mecanismo de varios grados de libertad representado por las ecuaciones de restricción cinemática (2.10-1).

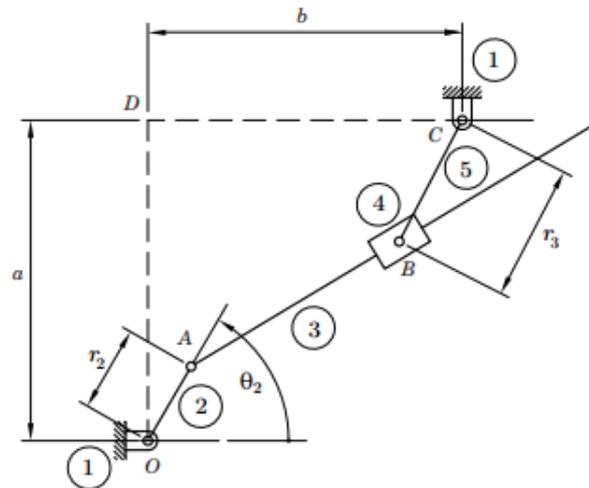
Ejemplo 17

Realizar el análisis cinemático del mecanismo de cuatro barras con eslabón telescópico *AB* mostrado en la Figura 74 para el instante representado si los eslabones motrices tienen ambos velocidades angulares horarias constantes de 100 rpm durante su funcionamiento. En la posición mostrada el eslabón *OA* se encuentra en posición vertical mientras el eslabón *BC* se halla vertical.

Figura 74

Mecanismo de cuatro barras con acoplador telescópico del ejemplo 17 y su correspondiente diagrama cinemático





La movilidad del mecanismo es:

$$m = 3(5 - 1) - 2(5) = 2$$

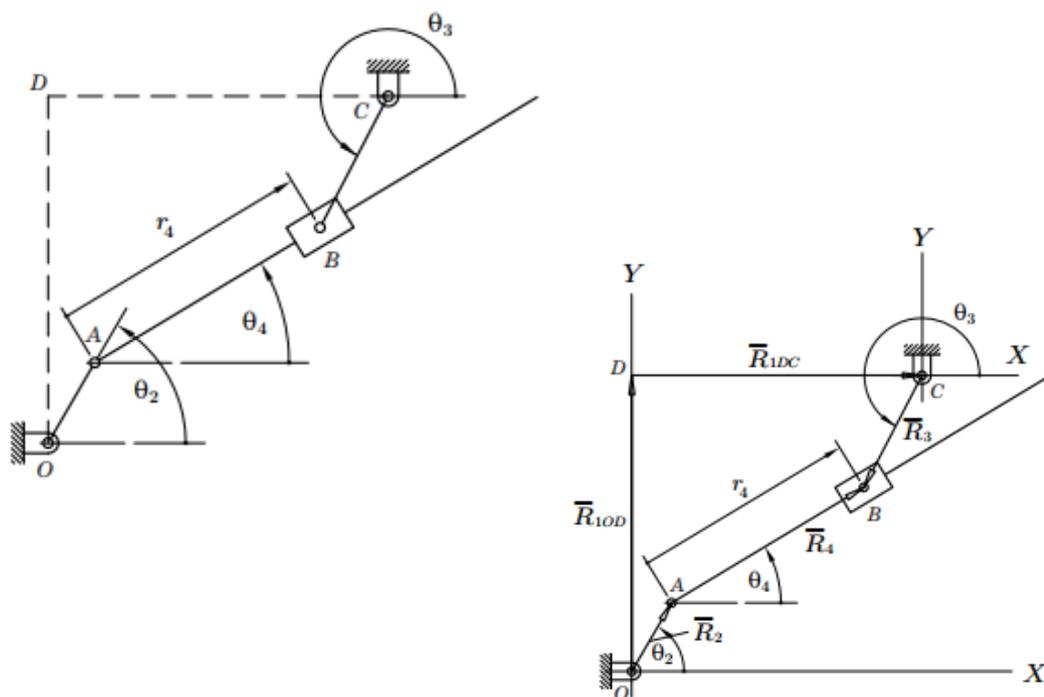
Y el número de contornos independientes o lazos vectoriales a ser analizados son:

$$N = 5 - 4 = 1$$

El lazo cerrado del mecanismo se muestra en la siguiente figura:

Figura 75

Contorno vectorial cerrado del mecanismo de cuatro barras con acoplador telescópico del ejemplo 17



La siguiente tabla presenta las variables conocidas e incógnitas de la cinemática del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_2, r_3, r_{1OD} = a, r_{1CD} = b, \theta_{1OD} = 90^\circ, \theta_{1CD} = 0$	
		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	$\theta_2 = 0^\circ, \theta_3 = 270^\circ$	θ_4, r_4
	Velocidad	$\omega_2 = \omega_3 = -10\pi/3 \text{ rad/s}$	ω_4, v_4
	Aceleración	$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$	α_4, a_4

Método de Raven

Análisis de posición. Para el lazo vectorial de la Figura 75.

$$-\vec{R}_{1CD} - \vec{R}_{1OD} + \vec{R}_2 - \vec{R}_3 + \vec{R}_4 = \vec{0}$$

De donde:

$$-r_{1CD} + r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 + r_4 \cos\theta_4 = 0$$

$$-r_{1OD} + r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 + r_4 \sin\theta_4 = 0$$

Dado que: $r_{1OD} = a$ y $r_{1CD} = b$, entonces:

$$\begin{aligned} -b + r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 + r_4 \cos\theta_4 &= 0 \\ -a + r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 + r_4 \sin\theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej17-1})$$

Que son las ecuaciones escalares de posición, y se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} r_4 \cos\theta_4 &= b - r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 \\ r_4 \sin\theta_4 &= a - r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 \end{aligned} \quad (\text{ej17-2})$$

Dividiendo la segunda ecuación para la primera en el sistema anterior,

$$\theta_4 = \arctan\left(\frac{a - r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3}{b - r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3}\right) \quad (\text{ej17-3})$$

levando al cuadrado cada ecuación del sistema (ej17-2) y sumándolas término a término, luego de simplificar y despejar r_4 , se obtiene:

$$r_4 = \sqrt{a^2 + b^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2a(r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3) - 2b(r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3) - 2r_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)} \quad (\text{ej17-4})$$

Análisis de velocidad. Derivando en el tiempo las ecuaciones del sistema (ej17-2) se tiene:

$$\begin{aligned} v_4 \cos\theta_4 - r_4 \omega_4 \sin\theta_4 &= r_2 \omega_2 \sin\theta_2 - r_3 \omega_3 \sin\theta_3 \\ v_4 \sin\theta_4 + r_4 \omega_4 \cos\theta_4 &= -r_2 \omega_2 \cos\theta_2 + r_3 \omega_3 \cos\theta_3 \end{aligned} \quad (\text{ej17-5})$$

Resolviendo el sistema (ej17-5) para v_4 y ω_4 da,

$$\begin{aligned} v_4 &= r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) - r_3 \omega_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4) \\ \omega_4 &= -\frac{r_2 \omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - r_3 \omega_3 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_4} \end{aligned} \quad (\text{ej17-6})$$

Análisis de aceleración. Volviendo a derivar en el tiempo las ecuaciones del sistema (ej17-5):

$$\begin{aligned} a_4 \cos \theta_4 - v_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 - v_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 - r_4 \alpha_4 \operatorname{sen} \theta_4 - r_4 \omega_4^2 \cos \theta_4 &= r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 \\ a_4 \operatorname{sen} \theta_4 + v_4 \omega_4 \cos \theta_4 + v_4 \omega_4 \cos \theta_4 + r_4 \alpha_4 \cos \theta_4 - r_4 \omega_4^2 \operatorname{sen} \theta_4 &= r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 \end{aligned} \quad (\text{ej17-7})$$

Reorganizando el sistema (ej17-7):

$$\begin{aligned} a_4 \cos \theta_4 - r_4 \alpha_4 \operatorname{sen} \theta_4 &= r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 + 2v_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 + r_4 \omega_4^2 \cos \theta_4 \\ a_4 \operatorname{sen} \theta_4 + r_4 \alpha_4 \cos \theta_4 &= r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 - 2v_4 \omega_4 \cos \theta_4 + r_4 \omega_4^2 \operatorname{sen} \theta_4 \end{aligned} \quad (\text{ej17-8})$$

Y resolviendo para a_4 y α_4 :

$$\begin{aligned} a_4 &= r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - r_3 \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4 \omega_4^2 \\ \alpha_4 &= -\frac{-r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4) + 2v_4 \omega_4}{r_4} \end{aligned} \quad (\text{ej17-9})$$

Método general

Considérese las variables primarias $p_1 = \theta_2$ y $p_2 = \theta_3$, las variables secundarias $s_1 = \theta_4$ y $s_2 = r_4$ así como las ecuaciones de restricción cinemática:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4) &= -b + r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 = 0 \\ f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4) &= -a + r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ej17-10})$$

De donde:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_s] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial r_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial r_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_4 \operatorname{sen} \theta_4 & \cos \theta_4 \\ r_4 \cos \theta_4 & \operatorname{sen} \theta_4 \end{bmatrix} \\ [\dot{\mathbf{J}}_s] &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial r_4} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial r_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_4 \operatorname{sen} \theta_4 - r_4 \omega_4 \cos \theta_4 & -\omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ v_4 \cos \theta_4 - r_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 & \omega_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{J}_p] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \operatorname{sen} \theta_2 & r_3 \operatorname{sen} \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & -r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[\mathbf{J}_p] = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4, r_4)}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 & r_3 \omega_3 \cos \theta_3 \\ -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 & r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 \end{bmatrix}$$

Entonces, las *velocidades secundarias* están dadas por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \omega_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -r_4 \operatorname{sen} \theta_4 & \cos \theta_4 \\ r_4 \cos \theta_4 & \operatorname{sen} \theta_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -r_2 \operatorname{sen} \theta_2 & r_3 \operatorname{sen} \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & -r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \omega_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{r_2 \omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - r_3 \omega_3 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_4} \\ \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) - r_3 \omega_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)}{r_4} \end{Bmatrix} \quad (\text{ej17-11}) \end{aligned}$$

Las *aceleraciones secundarias* están dadas por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ a_4 \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -r_4 \operatorname{sen} \theta_4 & \cos \theta_4 \\ r_4 \cos \theta_4 & \operatorname{sen} \theta_4 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -v_4 \operatorname{sen} \theta_4 - r_4 \omega_4 \cos \theta_4 & -\omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ v_4 \cos \theta_4 - r_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 & \omega_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 & r_3 \omega_3 \cos \theta_3 \\ -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 & r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \right) \\ \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ a_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{-r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4) + 2v_4 \omega_4}{r_4} \\ \frac{r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - r_3 \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4 \omega_4^2}{r_4} \end{Bmatrix} \quad (\text{ej17-12}) \end{aligned}$$

Sustituyendo los parámetros conocidos y calculados para las variables cinemáticas incógnitas del mecanismo se obtienen:

$$\theta_4 = 50.19^\circ$$

$$r_4 = 0.16 \text{ m}$$

$$\omega_4 = 4.72 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_4 = 0.07 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\alpha_4 = -8.55 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$a_4 = 11.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A continuación, otro ejemplo de un mecanismo de varios grados de libertad, con un lazo vectorial.

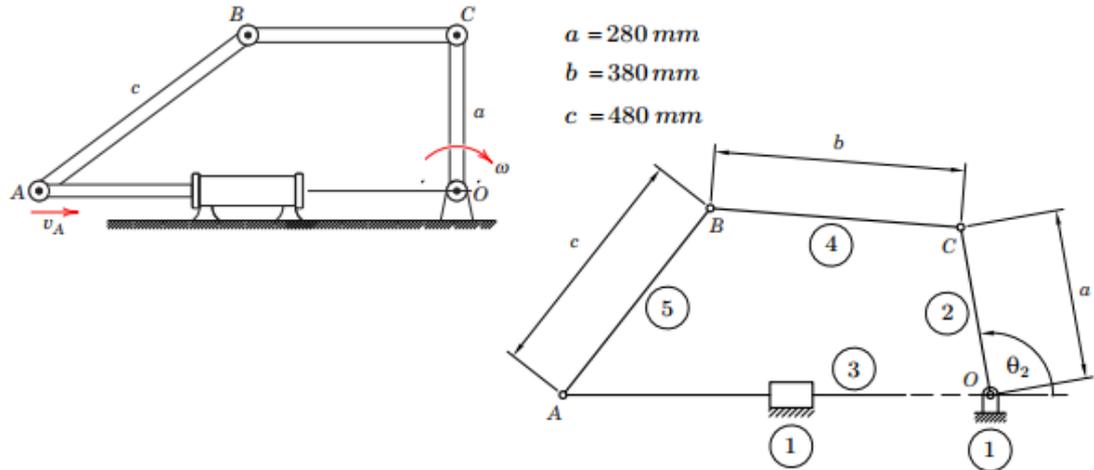
Ejemplo 18

En el mecanismo eslabonado mostrado en la Figura 76, el eslabón OC tiene una velocidad angular horaria constante de 60 rpm durante su movimiento, mientras el cilindro hidráulico le proporciona al pasador A una velocidad constante 3 m/s, hacia la derecha.

Efectúese un análisis cinemático del mecanismo para la posición mostrada, en la cual el eslabón OC se encuentra vertical mientras el eslabón CB se halla en posición horizontal.

Figura 76

Mecanismo eslabonado del ejemplo 18



La movilidad del mecanismo es:

$$m = 3(5 - 1) - 2(5) = 2$$

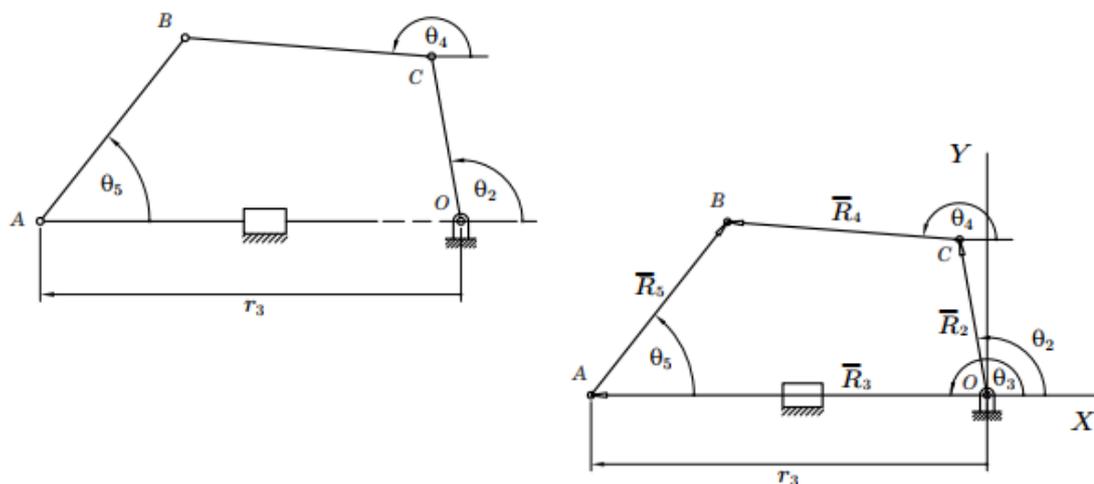
Y el número de contornos independientes o lazos vectoriales a ser analizados son:

$$N = 5 - 4 = 1$$

El lazo cerrado del mecanismo se muestra en la siguiente figura:

Figura 77

Contorno vectorial cerrado del mecanismo eslabonado del ejemplo 18



La siguiente tabla presenta las variables conocidas e incógnitas de la cinemática del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_2 = a, r_4 = b, r_5 = c, \theta_3 = 180^\circ$	
		VARIABLES CONOCIDAS	VARIABLES DESCONOCIDAS
Variables cinemáticas	Posición	$\theta_2 = 90^\circ, r_3$	θ_4, θ_5
	Velocidad	$\omega_2 = -2\pi \text{ rad/s}, v_3 = -3 \text{ m/s}$	ω_4, ω_5
	Aceleración	$\alpha_2 = 0, a_3 = 0$	α_4, α_5

Análisis de posición. Para el lazo vectorial de la Figura 76,

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_3 + \vec{R}_4 - \vec{R}_5 = \vec{0}$$

De donde:

$$r_2 \cos \theta_2 - r_3 + r_4 \cos \theta_4 - r_5 \cos \theta_5 = 0$$

$$r_2 \text{sen} \theta_2 + r_4 \text{sen} \theta_4 - r_5 \text{sen} \theta_5 = 0$$

Dado que: $r_2 = a, r_4 = b$ y $r_5 = c$, entonces:

$$\begin{aligned} a \cos \theta_2 - r_3 + b \cos \theta_4 - c \cos \theta_5 &= 0 \\ a \text{sen} \theta_2 + b \text{sen} \theta_4 - c \text{sen} \theta_5 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej18-1})$$

Que son las ecuaciones escalares de posición, y se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} b \cos \theta_4 - c \cos \theta_5 &= r_3 - a \cos \theta_2 \\ b \text{sen} \theta_4 - c \text{sen} \theta_5 &= -a \text{sen} \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej18-2})$$

Las variables desconocidas de posición se pueden resolver del sistema anterior con un procedimiento similar al del apartado 2.3.2 o mediante fórmulas geométricotrigonométricas que, para la posición mostrada, son:

$$\begin{aligned} \theta_4 &= 180^\circ \\ \theta_5 &= \text{arc sen} \left(\frac{r_2}{r_5} \right) = \text{arc sen} \left(\frac{a}{c} \right) \end{aligned}$$

Método de Raven

Análisis de velocidad. Derivando en el tiempo las ecuaciones escalares de posiciones dadas por el sistema (ej18-1):

$$\begin{aligned} a\omega_2 \text{sen} \theta_2 + v_3 - b\omega_4 \text{sen} \theta_4 + c\omega_5 \text{sen} \theta_5 &= 0 \\ -a\omega_2 \cos \theta_2 + b\omega_4 \cos \theta_4 - c\omega_5 \cos \theta_5 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej18-3})$$

Reordenando el sistema (ej18-3) resulta:

$$\begin{aligned} b\omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 - c\omega_5 \operatorname{sen} \theta_5 &= v_3 + a\omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ b\omega_4 \operatorname{cos} \theta_4 - c\omega_5 \operatorname{cos} \theta_5 &= a\omega_2 \operatorname{cos} \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej18-4})$$

Y resolviendo para ω_4 y ω_5 , se tiene:

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \frac{v_3 \operatorname{cos} \theta_5 + a\omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_5)}{b \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5)} \\ \omega_5 &= \frac{v_3 \operatorname{cos} \theta_4 + a\omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{c \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5)} \end{aligned} \quad (\text{ej18-5})$$

Análisis de aceleración. Derivando de nuevo en el tiempo las ecuaciones del sistema (ej18-3):

$$\begin{aligned} -a\omega_2^2 \operatorname{cos} \theta_2 - b\alpha_4 \operatorname{sen} \theta_4 - b\omega_4^2 \operatorname{cos} \theta_4 + c\alpha_5 \operatorname{sen} \theta_5 + c\omega_5^2 \operatorname{cos} \theta_5 &= 0 \\ -a\omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + b\alpha_4 \operatorname{cos} \theta_4 - b\omega_4^2 \operatorname{sen} \theta_4 - c\alpha_5 \operatorname{cos} \theta_5 + c\omega_5^2 \operatorname{sen} \theta_5 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej18-6})$$

Reorganizando el sistema (ej18-6):

$$\begin{aligned} b\alpha_4 \operatorname{sen} \theta_4 - c\alpha_5 \operatorname{sen} \theta_5 &= -a\omega_2^2 \operatorname{cos} \theta_2 - b\omega_4^2 \operatorname{cos} \theta_4 + c\omega_5^2 \operatorname{cos} \theta_5 \\ b\alpha_4 \operatorname{cos} \theta_4 - c\alpha_5 \operatorname{cos} \theta_5 &= a\omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + b\omega_4^2 \operatorname{sen} \theta_4 - c\omega_5^2 \operatorname{sen} \theta_5 \end{aligned} \quad (\text{ej18-7})$$

Y resolviendo para α_4 y α_5 :

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= -\frac{a\omega_2^2 \operatorname{cos}(\theta_2 - \theta_5) + b\omega_4^2 \operatorname{cos}(\theta_4 - \theta_5) - c\omega_5^2}{b \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5)} \\ \alpha_5 &= -\frac{a\omega_2^2 \operatorname{cos}(\theta_2 - \theta_4) + b\omega_4^2 - c\omega_5^2 \operatorname{cos}(\theta_4 - \theta_5)}{c \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5)} \end{aligned} \quad (\text{ej18-8})$$

Método general

Considérese las variables primarias $p_1 = \theta_2$ y $p_2 = r_3$, las variables secundarias $s_1 = \theta_4$ y $s_2 = \theta_5$, así como las ecuaciones de restricción cinemática:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5) &= a \operatorname{cos} \theta_2 - r_3 + b \operatorname{cos} \theta_4 - c \operatorname{cos} \theta_5 = 0 \\ f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5) &= a \operatorname{sen} \theta_2 + b \operatorname{sen} \theta_4 - c \operatorname{sen} \theta_5 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ej18-9})$$

De donde:

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \operatorname{sen} \theta_4 & c \operatorname{sen} \theta_5 \\ b \operatorname{cos} \theta_4 & -c \operatorname{cos} \theta_5 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_s] = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b\omega_4 \cos \theta_4 & c\omega_5 \cos \theta_5 \\ -b\omega_4 \sin \theta_4 & c\omega_5 \sin \theta_5 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial r_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial r_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin \theta_2 & -1 \\ a \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\dot{\mathbf{J}}_p] = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial r_3} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_3, \theta_4, \theta_5)}{\partial r_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\omega_2 \cos \theta_2 & 0 \\ a\omega_2 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, las *velocidades secundarias* están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \omega_4 \\ \omega_5 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -b \sin \theta_4 & c \sin \theta_5 \\ b \cos \theta_4 & -c \cos \theta_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a \sin \theta_2 & -1 \\ a \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_4 \\ \omega_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{v_3 \cos \theta_5 + a\omega_2 \sin(\theta_2 - \theta_5)}{b \sin(\theta_4 - \theta_5)} \\ \frac{v_3 \cos \theta_4 + a\omega_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{c \sin(\theta_4 - \theta_5)} \end{Bmatrix} \quad (\text{ej18-10})$$

Las *aceleraciones secundarias* están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -b \sin \theta_4 & c \sin \theta_5 \\ b \cos \theta_4 & -c \cos \theta_5 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -b\omega_4 \cos \theta_4 & c\omega_5 \cos \theta_5 \\ -b\omega_4 \sin \theta_4 & c\omega_5 \sin \theta_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_4 \\ \omega_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a\omega_2 \cos \theta_2 & 0 \\ a\omega_2 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{a\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_5) + b\omega_4^2 \cos(\theta_4 - \theta_5) - c\omega_5^2}{b \sin(\theta_4 - \theta_5)} \\ -\frac{a\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + b\omega_4^2 - c\omega_5^2 \cos(\theta_4 - \theta_5)}{c \sin(\theta_4 - \theta_5)} \end{Bmatrix} \quad (\text{ej18-11})$$

Sustituyendo los parámetros conocidos y calculados para las variables cinemáticas incógnitas del mecanismo se obtienen:

$$\theta_4 = 180^\circ$$

$$\theta_5 = 36.87^\circ$$

$$\omega_4 = -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_5 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\alpha_4 = 10.67 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\alpha_5 = -10.67 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

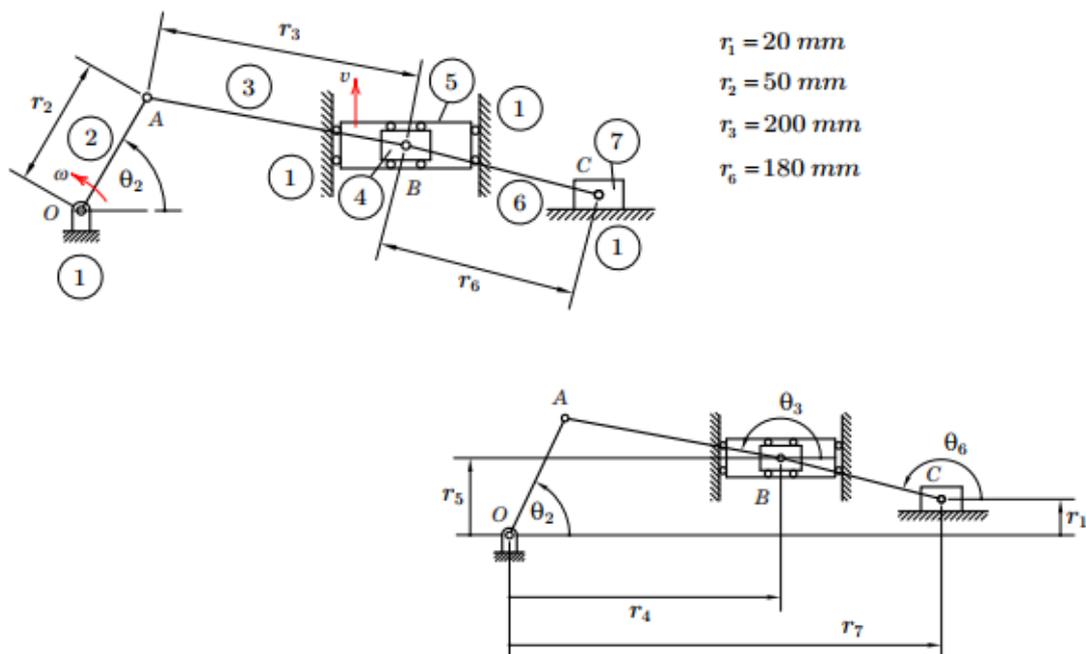
Finalmente, para un mecanismo de varios grados de libertad y más de una lazo vectorial se muestra un ejemplo.

Ejemplo 18

Para el mecanismo mostrado en la Figura 78, realizar el análisis cinemático completo para el instante indicado, considerando que el eslabón OA gira con una velocidad angular constante de 180 rpm en sentido antihorario, mientras la corredera 5 se desplaza a una velocidad constante de 8 m/s hacia arriba. Considérese para el instante mostrado que $\theta_2 = 60^\circ$ y $r_5 = 100 \text{ mm}$.

Figura 78

Mecanismo el ejemplo 19



La movilidad del mecanismo es:

$$m = 3(7 - 1) - 2(8) = 2$$

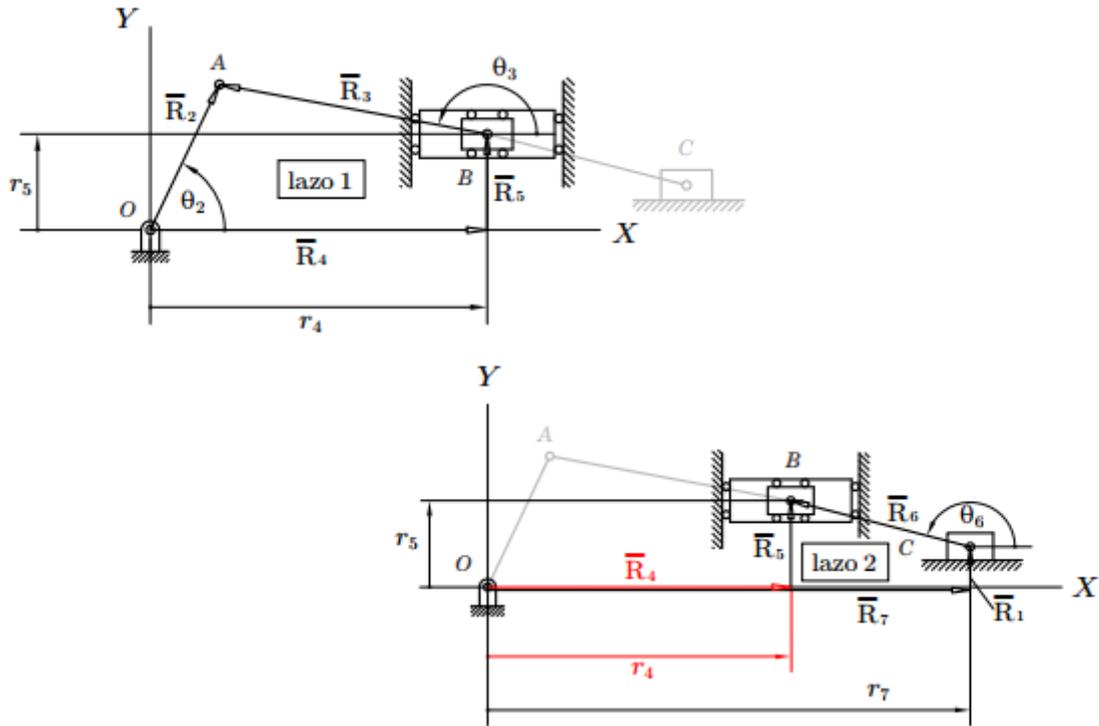
Y el número de contornos independientes o lazos vectoriales a ser analizados son:

$$N = 8 - 6 = 2$$

Los lazos cerrados del mecanismo se muestran en la Figura 79:

Figura 79

Lazos vectoriales cerrados del mecanismo del ejemplo 19



La siguiente tabla presenta las variables conocidas e incógnitas de la cinemática del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1, r_2, r_3, r_6, \theta_1 = 90^\circ, \theta_4 = 0^\circ, \theta_5 = 90^\circ, \theta_7 = 0^\circ$	
Primer lazo		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	θ_2, r_5	θ_3, r_4
	Velocidad	$\omega_2 = 6\pi \text{ rad/s}, v_5 = 8 \text{ m/s}$	ω_3, v_4
	Aceleración	$\alpha_2 = 0, a_5 = 0$	α_3, a_4
Segundo lazo		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	r_4, r_5	θ_6, r_7
	Velocidad	$v_4, v_5 = 8 \text{ m/s}$	ω_6, v_7
	Aceleración	$a_4, a_5 = 0$	α_6, a_7

Para el primer lazo vectorial:

Análisis de posición. Para el lazo vectorial 1 de la Figura 78,

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_3 - \vec{R}_4 - \vec{R}_5 = \vec{0}$$

De donde:

$$r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 - r_4 = 0$$

$$r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 - r_5 = 0$$

Que son las *ecuaciones escalares de posición*, y se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} r_4 &= r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 \\ r_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_5 \end{aligned} \quad (\text{ej19-1})$$

Que determina las variables incógnitas para el análisis de posición, una vez corregido el ángulo θ_3 , se tiene:

$$\begin{aligned} \theta_3 &= 180^\circ + \arcsen\left(\frac{r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_5}{r_3}\right) \\ r_4 &= r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (\text{ej19-2})$$

Método de Raven

Análisis de velocidad. Derivando en el tiempo las ecuaciones escalares de posición:

$$\begin{aligned} -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 - v_4 &= 0 \\ r_2 \omega_2 \cos \theta_2 - r_3 \omega_3 \cos \theta_3 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej19-3})$$

Despejando ω_3 de la segunda ecuación del sistema (ej19-3) produce:

$$\omega_3 = \frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2 - v_5}{r_3 \cos \theta_3} \quad (\text{ej19-4})$$

Y de la primera ecuación del sistema (ej19-3),

$$v_4 = -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 \quad (\text{ej19-5})$$

Análisis de aceleración. Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones escalares de velocidad:

$$\begin{aligned} -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 - a_4 &= 0 \\ -r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej19-6})$$

Despejando α_3 de la segunda ecuación del sistema anterior:

$$\alpha_3 = \frac{-r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \quad (\text{ej19-7})$$

Mientras que despejando a_4 de la primera ecuación del sistema (ej19-6):

$$a_4 = -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 \quad (\text{ej19-8})$$

Para el segundo lazo *vectorial*:

Análisis de posición. De la figura 78,

$$-\vec{R}_1 + \vec{R}_4 + \vec{R}_5 - \vec{R}_6 - \vec{R}_7 = \vec{0}$$

De donde,

$$r_4 - r_6 \cos \theta_6 - r_7 = 0$$

$$r_5 - r_6 \operatorname{sen} \theta_6 - r_1 = 0$$

Despejando θ_6 de la segunda ecuación, y corrigiendo el ángulo, se tiene:

$$\theta_6 = 180^\circ - \arcsen\left(\frac{r_5 - r_1}{r_6}\right) \quad (\text{ej19-9})$$

Y despejando r_7 de la primera ecuación se obtiene:

$$r_7 = r_4 - r_6 \cos \theta_6 \quad (\text{ej19-10})$$

Método de Raven

Análisis de velocidad. Derivando en el tiempo las ecuaciones escalares de posición:

$$\begin{aligned} v_4 + r_6 \omega_6 \operatorname{sen} \theta_6 - v_7 &= 0 \\ v_5 - r_6 \omega_6 \cos \theta_6 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej19-11})$$

Despejando ω_6 de la segunda ecuación del sistema (ej19-11) produce:

$$\omega_6 = \frac{v_5}{r_6 \cos \theta_6} \quad (\text{ej19-12})$$

Y, de la primera ecuación del sistema (ej19-11):

$$v_7 = v_4 + r_6 \omega_6 \operatorname{sen} \theta_6 \quad (\text{ej19-13})$$

Análisis de aceleración. Volviendo a derivar en el tiempo las ecuaciones escalares de velocidad:

$$\begin{aligned} a_4 + r_6 \alpha_6 \operatorname{sen} \theta_6 + r_6 \omega_6^2 \cos \theta_6 - a_7 &= 0 \\ -r_6 \alpha_6 \cos \theta_6 + r_6 \omega_6^2 \operatorname{sen} \theta_6 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej19-14})$$

Despejando α_6 de la segunda ecuación del sistema anterior:

$$\alpha_6 = \frac{\omega_6^2 \operatorname{sen} \theta_6}{\cos \theta_6} = \omega_6^2 \tan \theta_6 \quad (\text{ej19-15})$$

Y despejando a_7 de la primera ecuación del sistema (ej19-14) se tiene:

$$a_7 = a_4 + r_6 \alpha_6 \operatorname{sen} \theta_6 + r_6 \omega_6^2 \cos \theta_6 \quad (\text{ej19-16})$$

Método general

Considérese las variables primarias $p_1 = \theta_2$ y $p_2 = r_5$, así como las variables secundarias: $s_1 = \theta_3$, $s_2 = r_4$, $s_3 = \theta_6$ y $s_4 = r_7$. Las ecuaciones de restricción cinemática son:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7) &= r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 - r_4 = 0 \\ f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7) &= r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 - r_5 = 0 \\ f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7) &= r_4 - r_6 \cos \theta_6 - r_7 = 0 \\ f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7) &= r_5 - r_6 \operatorname{sen} \theta_6 - r_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ej19-17})$$

El análisis de posición es el mismo que el del método de Raven.

Las matrices jacobianas y sus derivadas en el tiempo son:

$$[\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & -1 & 0 & 0 \\ -r_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_6 \operatorname{sen} \theta_6 & -1 \\ 0 & 0 & -r_6 \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\dot{\mathbf{J}}_s] = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_7} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_4} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_6} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_3 \omega_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \omega_6 \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \omega_6 \operatorname{sen} \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_5} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_5} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_5} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \\ r_2 \cos \theta_2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{j}_p] = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_5} \\ \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_5} \\ \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_5} \\ \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_4(\theta_2, r_5, \theta_3, r_4, \theta_6, r_7)}{\partial r_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 & 0 \\ -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, las *velocidades secundarias* están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_4 \\ \omega_6 \\ v_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & -1 & 0 & 0 \\ -r_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_6 \operatorname{sen} \theta_6 & -1 \\ 0 & 0 & -r_6 \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -r_2 \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \\ r_2 \cos \theta_2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_4 \\ \omega_6 \\ v_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2 - v_5}{r_3 \cos \theta_3} \\ \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) - v_5 \operatorname{sen} \theta_3}{\cos \theta_3} \\ \frac{v_5}{r_6 \cos \theta_6} \\ v_5 (\tan \theta_6 - \tan \theta_3) + r_2 \omega_2 (\cos \theta_2 \tan \theta_3 - \operatorname{sen} \theta_2) \end{Bmatrix} \quad (\text{ej19-18})$$

A pesar de que las expresiones para v_4 y v_7 se ven distintas a las determinadas por el método de Raven, al reemplazarse los valores numéricos se obtendrán los mismos resultados, como lo puede verificar el lector.

Las *aceleraciones secundarias* están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & -1 & 0 & 0 \\ -r_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_6 \operatorname{sen} \theta_6 & -1 \\ 0 & 0 & -r_6 \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} r_3 \omega_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \omega_6 \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \omega_6 \operatorname{sen} \theta_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_4 \\ \omega_6 \\ v_7 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_2 \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \\ r_2 \cos \theta_2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ a_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 & 0 \\ -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ v_5 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & -1 & 0 & 0 \\ -r_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_6 \operatorname{sen} \theta_6 & -1 \\ 0 & 0 & -r_6 \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} r_3 \omega_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \omega_6 \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \omega_6 \operatorname{sen} \theta_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_4 \\ \omega_6 \\ v_7 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_2 \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \\ r_2 \cos \theta_2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 & 0 \\ -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ v_5 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_6 \\ a_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_3 \sin \theta_3 & -1 & 0 & 0 \\ -r_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_6 \sin \theta_6 & -1 \\ 0 & 0 & -r_6 \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} r_3 \omega_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ r_3 \omega_3 \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \omega_6 \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \omega_6 \sin \theta_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_4 \\ \omega_6 \\ v_7 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 & 0 \\ -r_2 \omega_2 \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ v_5 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_6 \\ a_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \\ \frac{-r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_3 \omega_3^2}{\cos \theta_3} \\ \omega_6^2 \tan \theta_6 \\ \frac{-r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_3 \omega_3^2}{\cos \theta_3} + \frac{r_6 \omega_6^2}{\cos \theta_6} \end{Bmatrix} \quad (\text{ej19-19})$$

A pesar de que las expresiones para a_4 y a_7 halladas por el método de Raven son aparentemente diferentes a las del método general, ambas producen los mismos resultados numéricos, lo que se puede comprobar muy fácilmente.

Sustituyendo los parámetros conocidos y calculados para las variables cinemáticas incógnitas del mecanismo se obtienen:

$$\theta_3 = 163.53^\circ$$

$$r_4 = 0.22 \text{ m}$$

$$\omega_3 = 39.25 \text{ rad/s}$$

$$v_4 = 1.41 \text{ m/s}$$

$$\alpha_3 = -375.31 \text{ rad/s}^2$$

$$a_4 = -325.7 \text{ m/s}^2$$

$$\theta_6 = 153.61^\circ$$

$$r_7 = 0.38 \text{ m}$$

$$\omega_6 = -49.61 \text{ rad/s}$$

$$v_7 = -2.56 \text{ m/s}$$

$$\alpha_6 = -1221.27 \text{ rad/s}^2$$

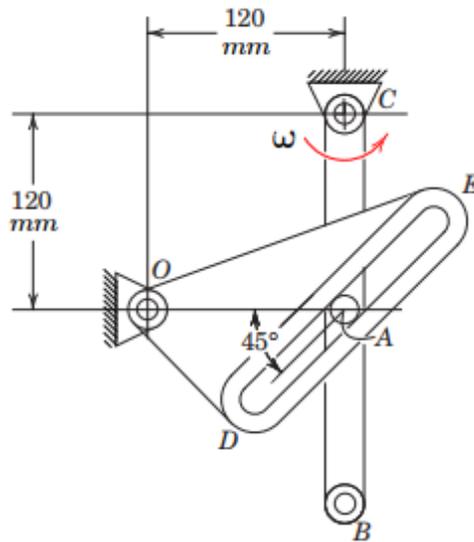
$$a_7 = -820.31 \text{ m/s}^2$$

2.11 Problemas propuestos

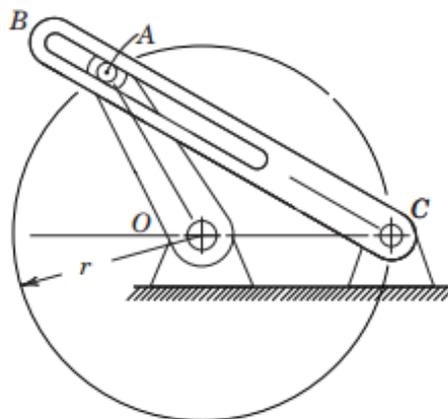
*En los problemas propuestos utilícese tanto el método de Raven como el método general.

1. En el mecanismo mostrado en la figura, el eslabón motriz CB rota a una velocidad angular constante 60 rpm en sentido antihorario. El pasador A está soldado al eslabón CB.

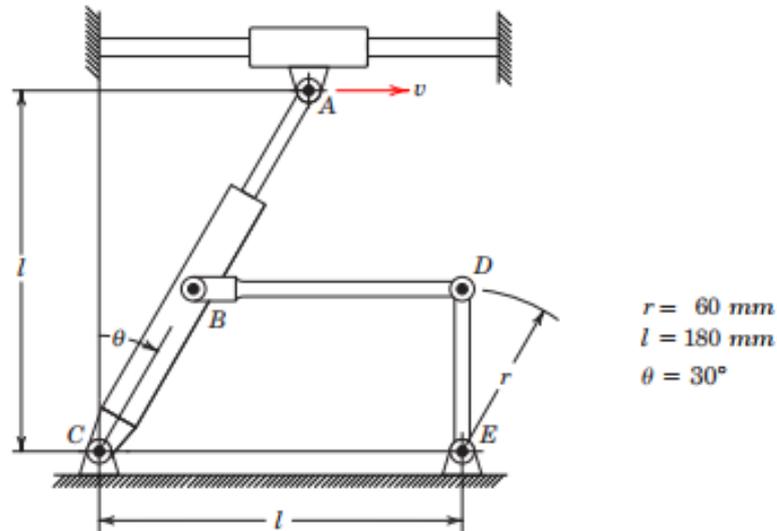
Efectúese el análisis cinemático completo y escríbase una implementación computacional para graficar todas las variables cinemáticas respecto a la variación del ángulo del eslabón CB que va desde -90° a 90° .



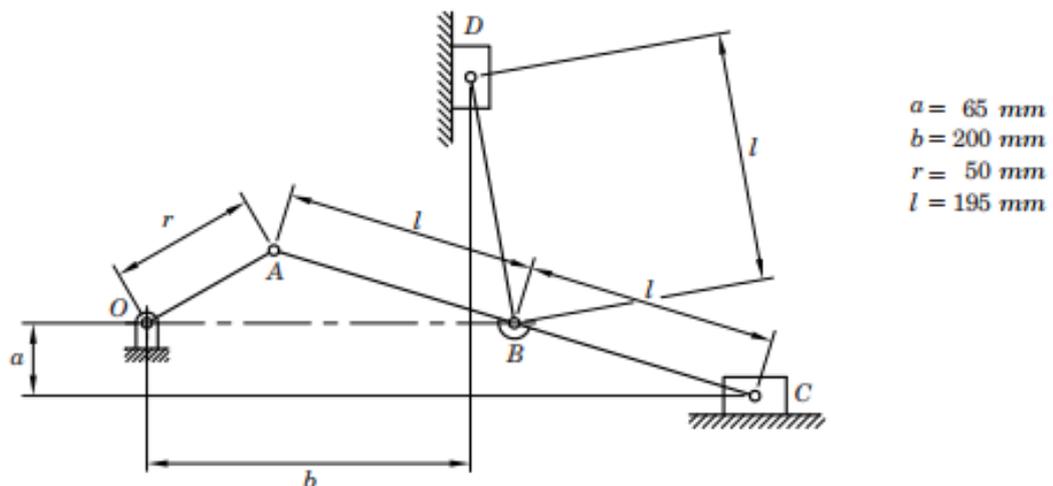
2. La manivela OA gira en sentido horario con una velocidad angular constante de 250 rpm. Realícese el análisis cinemático de ciclo completo del mecanismo, si $r = 180$ mm.



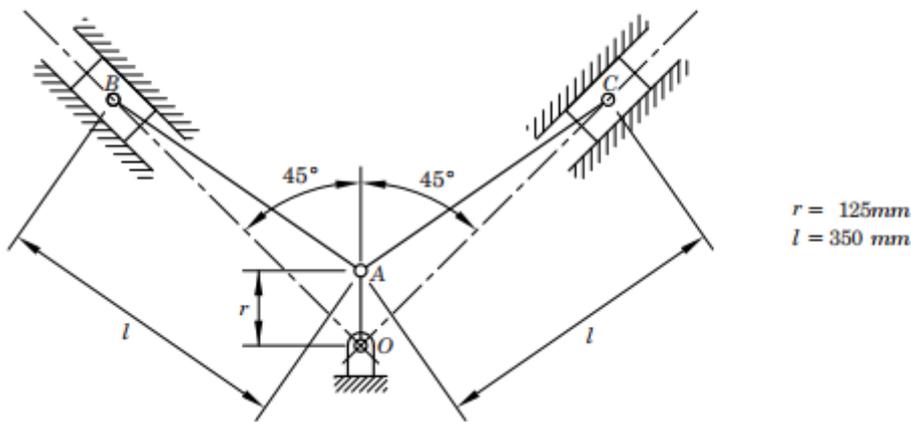
3. Para el mecanismo mostrado en la figura, la corredera tiene en el momento indicado una velocidad constante de 4 m/s hacia la derecha, hágase el análisis cinemático completo del mismo en el instante mostrado.



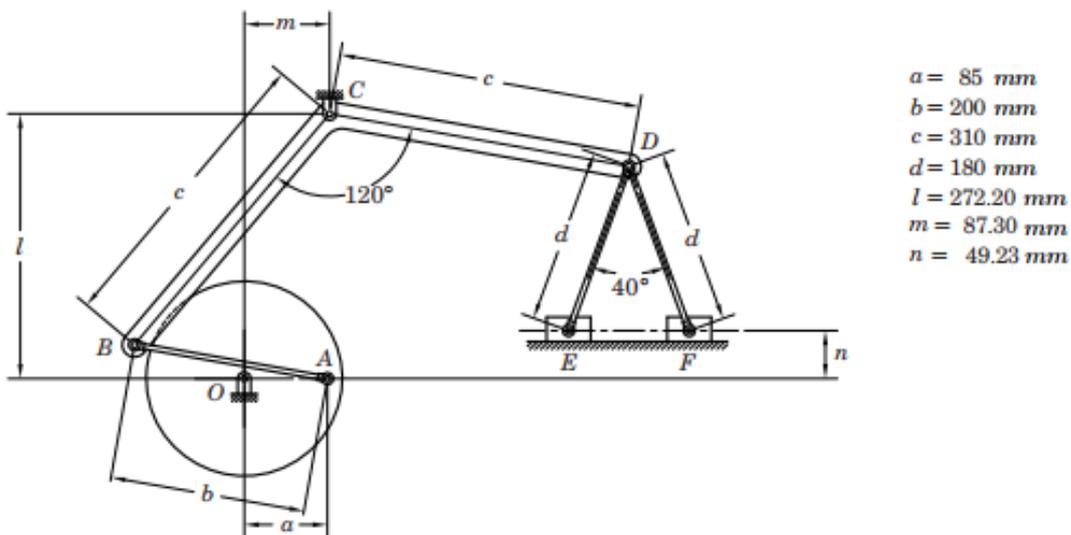
4. Para el mecanismo mostrado en la figura y considerando que el eslabón motriz OA gira a una velocidad angular constante de 1000 rpm en sentido horario, realizar el análisis cinemático de ciclo completo del mecanismo. Adicionalmente gráfiquese todas las variables cinemáticas desconocidas versus el ángulo de giro del eslabón motriz, considerando que este comienza a girar desde los 25° .



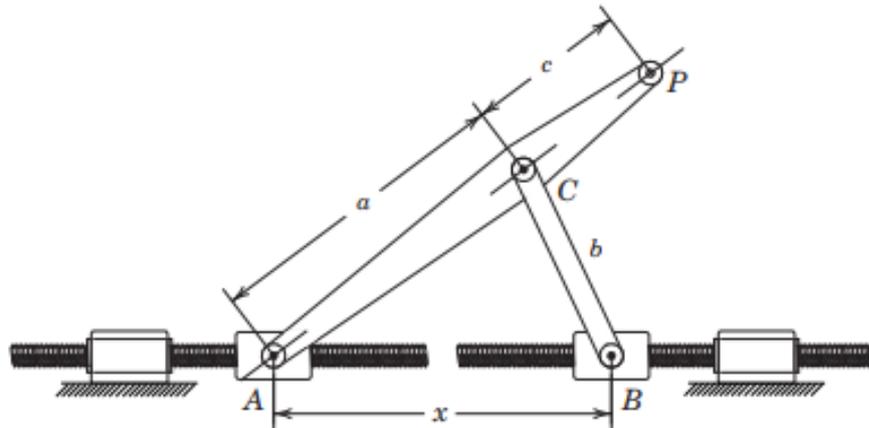
5. Para el mecanismo mostrado a continuación efectuar el análisis cinemático de ciclo completo considerando que el eslabón motriz OA gira a una velocidad angular constante de 2000 rpm en sentido antihorario. Adicionalmente grafíquese todas las variables cinemáticas desconocidas versus el ángulo de giro del eslabón motriz, considerando que este comienza a girar desde los 90° .



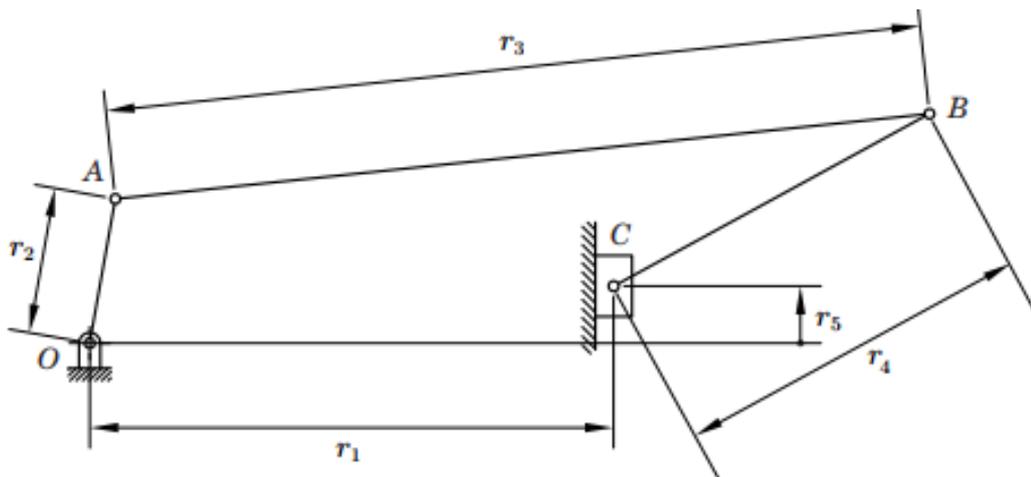
6. El mecanismo mostrado en la figura tiene algunas aplicaciones industriales, como por ejemplo, el sellado de las solapas superiores de cajas de cartón. Realícese el análisis cinemático de ciclo completo si el disco motriz OA gira a una velocidad angular constante 90 rpm en sentido horario. Para los datos mostrados crear una implementación computacional que permita graficar todas las variables cinemáticas respecto a la variación del ángulo del eslabón OA desde 0° a 360° . En la configuración mostrada OA esta horizontal.



7. En el mecanismo mostrado en la figura las correderas roscadas A y B están controladas por la rotación de sus respectivos husillos; si en el instante indicado la corredera A tiene una velocidad constante hacia la derecha de 2.5 m/s mientras que la corredera B tiene una velocidad hacia la izquierda de 1.75 m/s constante, efectúe el análisis cinemático completo del mecanismo y la cinemática del punto P del mismo para el momento mostrado.

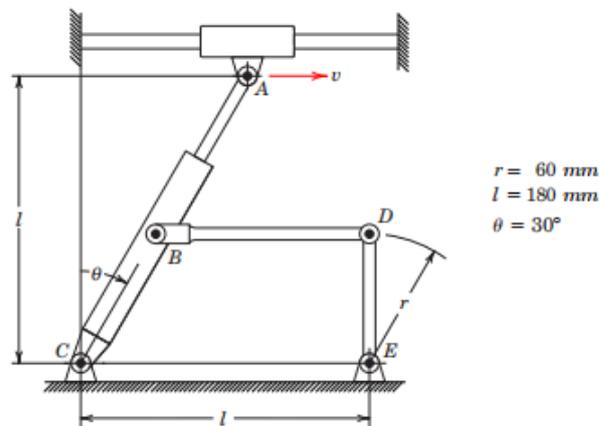


8. Para el mecanismo de cuatro barras con deslizadera mostrado en la figura y en el instante indicado efectuar el análisis cinemático completo si el eslabón OA gira a una velocidad angular constante de 300 rpm en sentido antihorario, mientras la corredera se desliza a una velocidad constante de 3 m/s hacia arriba.



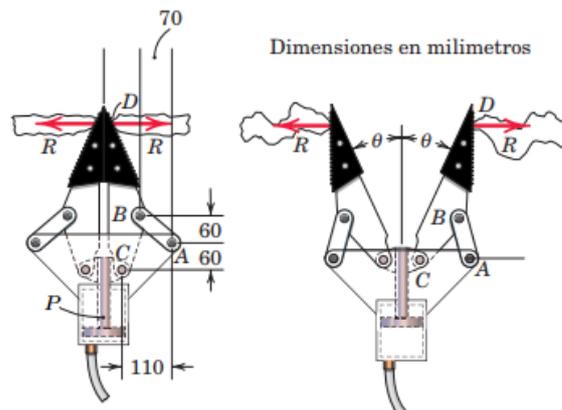
9. En el mecanismo del problema 8, para el instante en que $\theta_2 = 160^\circ$ y $r_5 = 195$ mm., calcúlese todas las variables cinemáticas del mismo considerando que el eslabón OA gira a una velocidad angular constante de 200 rpm en sentido horario, mientras la corredera 5 se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 2 m/s.

10. Para el mecanismo del ejercicio 3 y mostrado nuevamente en la figura siguiente, calcúlese todas las variables cinemáticas del mismo, considerando que la corredera se mueve hacia la derecha con una velocidad constante de 3.4 m/s en el instante mostrado cuando el eslabón BD es horizontal mientras que el eslabón DE se halla vertical.

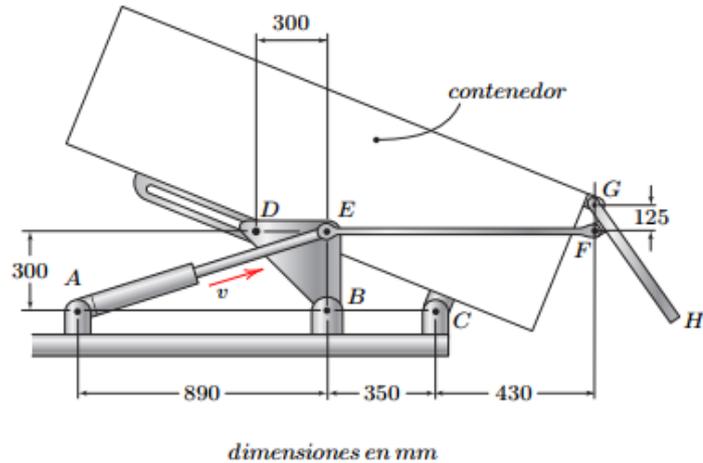


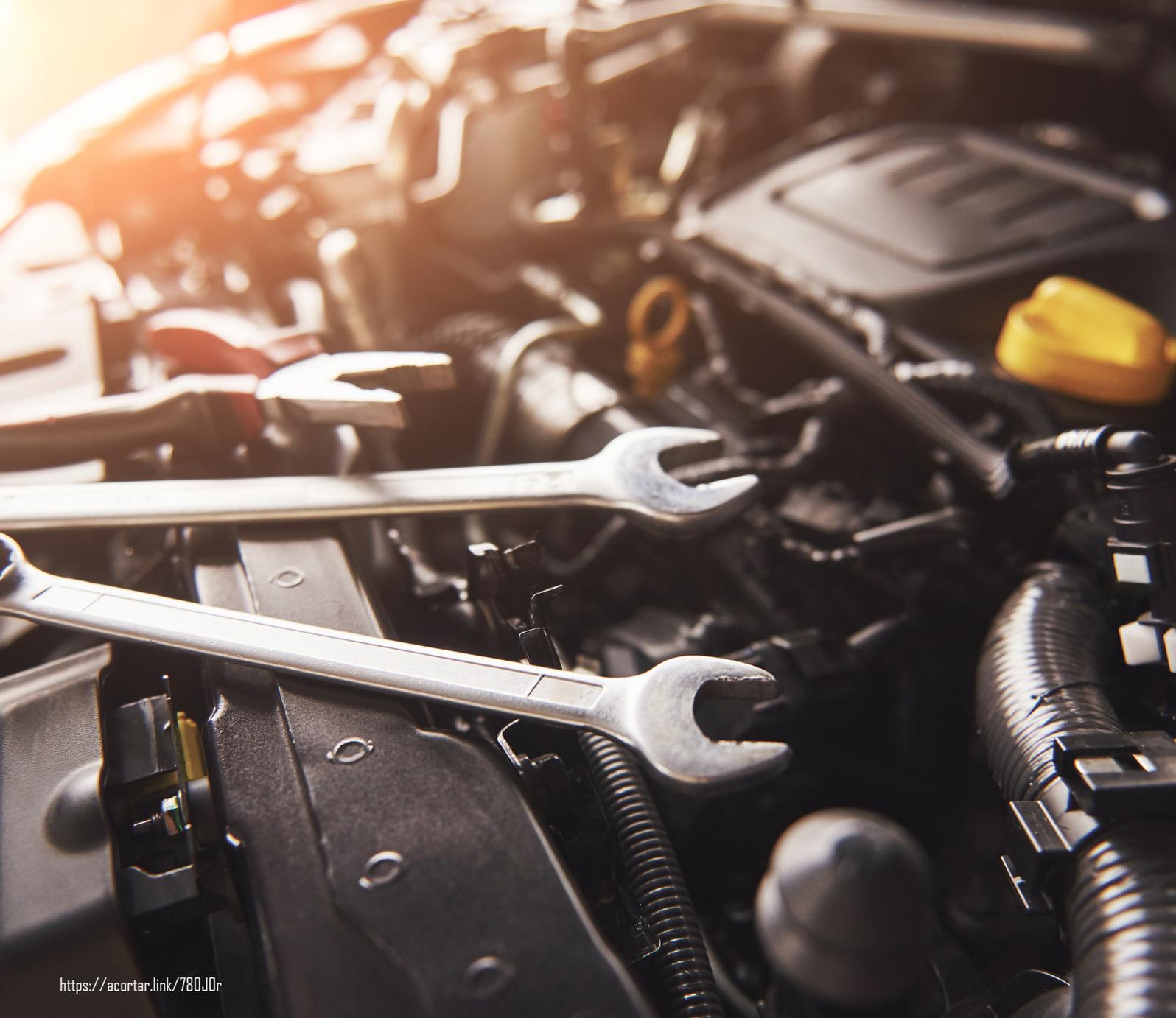
11. El mecanismo mostrado en la figura se denomina “mandíbulas de la vida” y es un aparato con accionamiento hidráulico utilizado para hacer palanca y abrirse espacio entre los restos de vehículos accidentados con el fin de liberar personas atrapadas en el interior. Si las mandíbulas se abren un ángulo $\theta = 30^\circ$, cuando el pistón P se mueve hacia arriba a una velocidad constante de 8 mm/s, calcular:

- El desplazamiento sufrido por el pistón P ,
- La velocidad angular del eslabón AB , y
- La aceleración angular del eslabón AB .



12. En la figura se muestra el mecanismo que permite la descarga del material de un contenedor. En la posición mostrada el eslabón EF y el lado DE del eslabón ternario BED se hallan horizontales; el eslabón BED es un triángulo recto. Si el cilindro hidráulico tiene la velocidad constante 10 mm/s mostrada, calcular, en el instante indicado, las velocidades y aceleraciones angulares del contenedor y la compuerta de descarga GH .





<https://acortar.link/780J0r>

CAPÍTULO III

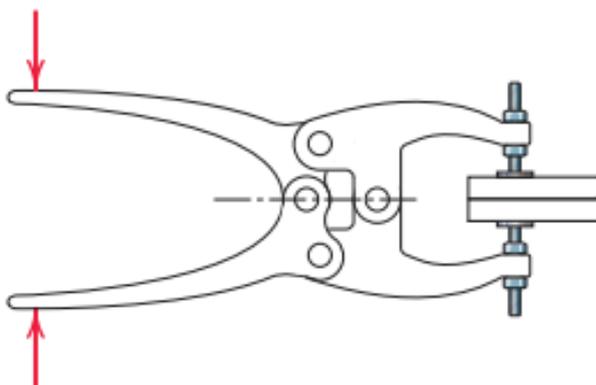
Fuerzas dinámicas en
mecanismos planos
Análisis cinetostático de
mecanismos planos

3.1 Introducción

Para el diseño de tamaño y forma de los eslabones de un mecanismo, basado en su resistencia, se requiere el cálculo de las fuerzas y momentos que actúan en los mismos, por lo que es necesario efectuar un análisis de fuerzas en un mecanismo. Este análisis puede ser estático o dinámico, dependiendo de si el mecanismo tiene bajas o altas velocidades de rotación y/o traslación. Si el mecanismo trabaja a bajas velocidades o en condiciones en las cuales prácticamente permanece estático, como el mostrado en la Figura 80, entonces, es viable un análisis de fuerzas estáticas (bajo la aplicación de la primera y tercera leyes de Newton).

Figura 80

Mecanismo para análisis de fuerzas estáticas



En la situación de un mecanismo sometido a altas velocidades de rotación, aparecen las fuerzas debidas a la aceleración, denominadas usualmente fuerzas efectivas, y estas son las que dominarán las condiciones del diseño de los eslabones, en cuyo caso se aplicará el análisis de fuerzas dinámicas o análisis cinetostático (mediante el uso de la segunda y tercera leyes de Newton).

El presente texto revisará únicamente el análisis de los mecanismos sometidos a velocidades de rotación apreciables, es decir, el análisis de las fuerzas dinámicas o cinetostático.

El análisis de fuerzas en un mecanismo se fundamenta en dos categorías diferentes:

- a. *La Dinámica inversa*, consistente en el análisis de las fuerzas provocadas en los pares cinemáticos, esencialmente, si se conoce la cinemática del mecanismo, y

- b. La *Dinámica directa*, que calcula la cinemática del mecanismo si se conocen las fuerzas intervinientes en el movimiento del mecanismo.

En este texto se tratará el problema de la *dinámica inversa*, que conlleva la resolución de *sistemas de ecuaciones lineales*, a través de un *procedimiento matricial*.

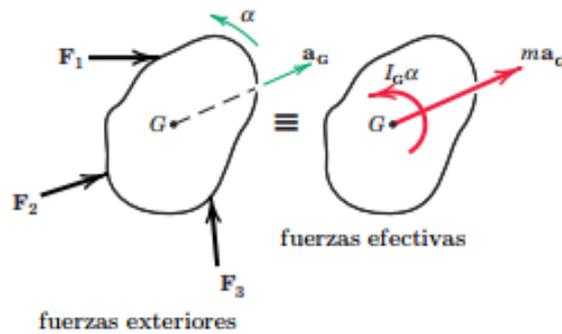
3.2 Cinética del cuerpo rígido

Esta sección presenta un resumen breve de la cinética de un cuerpo rígido, como preámbulo para el correcto análisis de las fuerzas dinámicas que afectan a los eslabones de un mecanismo.

Considérese un cuerpo rígido, de masa m , que se mueve en movimiento plano general, como lo muestra la Figura 81:

Figura 81

Sólido rígido en movimiento plano general



Entonces, las ecuaciones que gobiernan su movimiento son:

$$\sum \bar{\mathbf{F}} = m \bar{\mathbf{a}}_G \quad (3.2-1)$$

$$\sum \bar{M}_G = I_G \bar{\alpha} \quad (3.2-2)$$

Donde,

$\sum \bar{\mathbf{F}}$ = Fuerza exterior resultante aplicado al cuerpo rígido.

m = masa del cuerpo rígido.

$\bar{\mathbf{a}}_G$ = aceleración del centro de masa del sólido rígido.

$\sum \bar{M}_G$ = Momento exterior resultante aplicado al cuerpo rígido con respecto a G.

I_G = Momento de inercia másico del cuerpo rígido con respecto a un eje paralelo a z que pase por el centro de masa G .

$\bar{\alpha}$ = aceleración angular del cuerpo rígido.

Para un movimiento plano en x - y , la ecuación (3.2-1) es vectorial mientras que la ecuación (3.2-2) que ocurre en el eje z es escalar. Se puede entonces escribir las ecuaciones escalares para el movimiento plano general como:

$$\sum F_x = ma_{Gx} \quad (3.2-3)$$

$$\sum F_y = ma_{Gy} \quad (3.2-4)$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad (3.2-5)$$

Si el cuerpo tiene rotación pura alrededor de un punto O , distinto al centro de masa G , entonces la ecuación 3.2-5, se transforma en:

$$\sum M_O = I_O \alpha \quad (3.2-6)$$

Donde,

$\sum M_O$ = Momento exterior resultante aplicado al cuerpo rígido, con respecto a O .

I_O = Momento de inercia másico del cuerpo rígido con respecto a un eje paralelo a z que pase por O .

α = aceleración angular del cuerpo rígido.

Y,

$$I_O = I_G + md^2 \quad (3.2-7)$$

Siendo,

I_O = Momento de inercia másico del cuerpo rígido con respecto a un eje paralelo a z que pase por O .

I_G = Momento de inercia másico del cuerpo rígido con respecto a un eje paralelo a z que pase por el centro de masa G .

m = masa del cuerpo rígido.

d = distancia entre los ejes, paralelos al eje z , que pasan por O y G .

Las expresiones 3.2-3 a 3.2-6 se pueden reescribir en la forma siguiente:

$$\sum F_x - ma_{Gx} = 0 \quad (3.2-8)$$

$$\sum F_y - ma_{Gy} = 0 \quad (3.2-9)$$

$$\sum M_G - I_G \alpha = 0 \quad (3.2-10)$$

$$\sum M_O - I_O \alpha = 0 \quad (3.2-11)$$

Llamadas ecuaciones del equilibrio dinámico o Principio de D'Alembert.

En dichas expresiones los términos $-ma_{G_x}$, $-ma_{G_y}$, $-I_G a$ e $-I_O a$ son las denominadas fuerzas inerciales.

A continuación, se utilizan las ecuaciones de la cinética de un cuerpo rígido expuestas anteriormente para analizar el comportamiento de las fuerzas dinámicas en un mecanismo manivela-corredera y en un mecanismo de cuatro barras, este método genera una expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales, de ahí su denominación de método matricial. El método matricial es un procedimiento analítico que se puede generalizar para cualquier mecanismo de un grado de libertad o más, con la ventaja de que puede ser implementado computacionalmente.

3.3 Análisis de fuerzas dinámicas - Método matricial

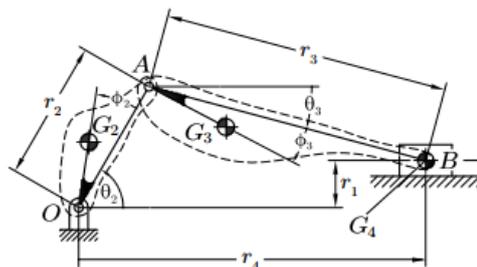
3.3.1 Análisis de fuerzas dinámicas para un mecanismo manivela - corredera

La Figura 80 muestra el diagrama cinemático (con la forma real de los eslabones en líneas entrecortadas) de un mecanismo manivela corredera con sus centros de masa ubicados en las posiciones G_2 , G_3 y G_4 . La velocidad rotacional de la manivela ω_2 es antihoraria así como su aceleración angular α_2 . Las distancias de los centros de masa con respecto a sus pares cinemáticos O y B se nombran como $r_{OG_2} = r_{G_2} = b_2$ y $r_{AG_3} = b_3$. Los ángulos, tomados en sentido antihorario con respecto a OA y AB , que ubican los centros de masa son ϕ_2 y ϕ_3 .

Las longitudes de los eslabones manivela y acoplador son r_2 y r_3 formando ángulos θ_2 (para la manivela) y θ_3 (para el acoplador) como lo muestra la Figura 82; finalmente, la distancia de descentrado se nomina r_1 y la longitud a la que se encuentra la corredera r_4 .

Figura 82

Geometría del mecanismo manivela corredera para el análisis de fuerzas dinámicas

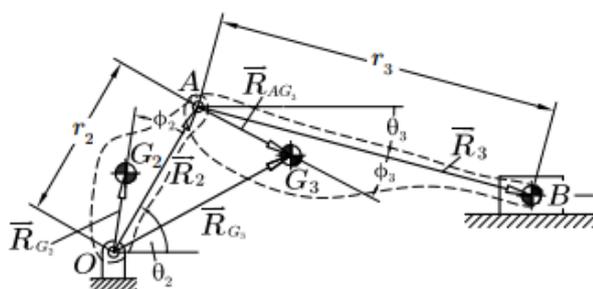


En el análisis de *fuerzas dinámicas* se va a considerar que el *efecto de los pesos de los eslabones* es despreciable en comparación a las *fuerzas efectivas producidas* y que la *fricción en los pares cinemáticos* es despreciable.

El primer paso a efectuarse en el análisis de fuerzas dinámicas es el cálculo de las aceleraciones de los centros de masa, para lo cual considérese la Figura 83:

Figura 83

Lazos vectoriales para el cálculo de las aceleraciones de los centros de masa



Para el centro de masa G_2 , entonces:

$$\bar{R}_{G_2} = b_2 e^{i(\theta_2 + \phi_2)}$$

$$\bar{R}_{G_2} = b_2 \cos(\theta_2 + \phi_2) + i b_2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2)$$

De donde,

$$r_{G_2x} = b_2 \cos(\theta_2 + \phi_2)$$

$$r_{G_2y} = b_2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2)$$

Derivando las anteriores expresiones dos veces con respecto al tiempo, considerando que b_2 y ϕ_2 no cambian con el tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned} a_{G_2x} &= -b_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 + \phi_2) \\ a_{G_2y} &= -b_2 \omega_2^2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2) \end{aligned} \quad (3.3.1-1)$$

Ahora, para el centro de masa G_3 se tiene:

$$\bar{R}_{G_3} = \bar{R}_2 + \bar{R}_{AG_3} = r_2 e^{i\theta_2} + b_3 e^{i(\theta_3 + \phi_3)}$$

$$\bar{R}_{G_3} = r_2 \cos(\theta_2) + b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) + i(r_2 \text{sen}(\theta_2) + b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3))$$

Es decir,

$$\begin{aligned} r_{G_2x} &= r_2 \cos(\theta_2) + b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\ r_{G_2y} &= r_2 \sin(\theta_2) + b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3) \end{aligned}$$

Y como antes, derivando dos veces con respecto al tiempo bajo la consideración de que r_2 , r_3 , b_3 y ϕ_3 no dependen del mismo, se obtiene:

$$\begin{aligned} a_{G_2x} &= -r_2 [\alpha_2 \sin(\theta_2) + \omega_2^2 \cos(\theta_2)] - b_3 [\alpha_3 \sin(\theta_3 + \phi_3) + \omega_3^2 \cos(\theta_3 + \phi_3)] \\ a_{G_2y} &= r_2 [\alpha_2 \cos(\theta_2) - \omega_2^2 \sin(\theta_2)] + b_3 [\alpha_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) - \omega_3^2 \sin(\theta_3 + \phi_3)] \end{aligned} \quad (3.3.1-2)$$

La corredera se puede considerar una partícula con aceleración a_4 dada por:

$$a_4 = \frac{r_2 \alpha_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) - r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + r_3 \omega_3^2}{\cos \theta_3} \quad (3.3.1-3)$$

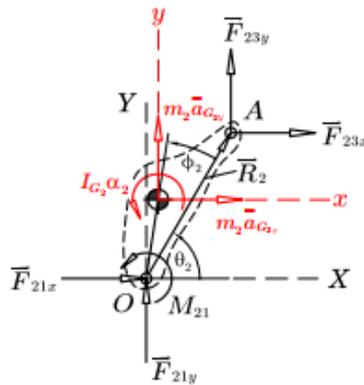
A continuación, se desarrolla las ecuaciones de la cinética del sólido rígido para cada eslabón en el mecanismo.

De aquí en adelante la fuerza exterior \overline{F}_{ij} es la fuerza exterior actuante en el eslabón i debido a la acción del eslabón j .

Para el eslabón manivela, se tiene el siguiente diagrama de fuerzas exteriores y fuerzas efectivas,

Figura 84

Diagrama de fuerzas para la manivela



Considerando que la manivela tiene una masa m_2 y un momento de inercia másico I_{G_2} , y que el eslabón manivela tiene rotación pura con respecto a O entonces, en base a la expresión (3.2-6), las ecuaciones para las fuerzas dinámicas son:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{21} + \bar{F}_{23} &= m_2 \bar{a}_{G_2} & (\sum \bar{F}_{ext} &= m_2 \bar{a}_{G_2}) \\ \bar{R}_2 \times \bar{F}_{23} + \bar{M}_{21} &= I_O \bar{\alpha}_2 & (\sum \bar{M}_O &= I_O \bar{\alpha}_2) \end{aligned} \quad (3.3.1-4)$$

Donde:

$$I_O = I_G + m r_{21}^2 = I_G + m b_2^2 \quad (3.3.1-5)$$

Si se descomponen las ecuaciones (3.3.1-4) en componentes escalares expresadas en el sistema local $x-y$ que se ubica en G_2 , se tiene:

$$\begin{aligned} F_{21x} + F_{23x} &= m_2 a_{G_{2x}} & (\sum F_x &= m_2 a_{G_{2x}}) \\ F_{21y} + F_{23y} &= m_2 a_{G_{2y}} & (\sum F_y &= m_2 a_{G_{2y}}) \\ -r_{2y} F_{23x} + r_{2x} F_{23y} + M_{21} &= I_O \alpha_2 & (\sum M_O &= I_O \alpha_2) \end{aligned} \quad (3.3.1-6)$$

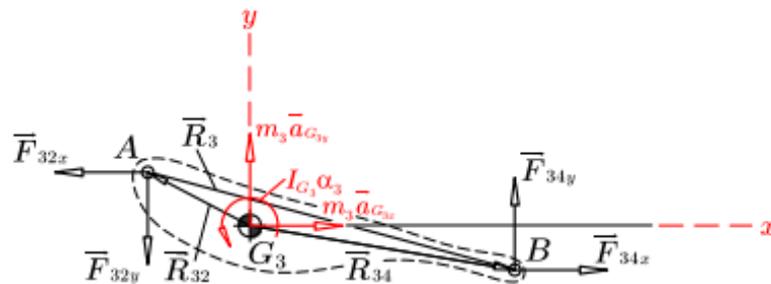
Donde:

$$\begin{aligned} r_{2x} &= r_2 \cos(\theta_2) \\ r_{2y} &= r_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (3.3.1-7)$$

Para el eslabón acoplador, se tiene el siguiente diagrama de *fuerzas exteriores* y *fuerzas efectivas*:

Figura 85

Regiones laminar y turbulenta de la capa límite durante el flujo sobre una placa plana



Tomando en cuenta que el acoplador tiene una masa m_3 y un momento de inercia másico I_{G_3} , entonces las ecuaciones para las fuerzas dinámicas son:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{32} + \bar{F}_{34} &= m_3 \bar{a}_{G_3} & (\sum \bar{F}_{ext} &= m_3 \bar{a}_{G_3}) \\ \bar{R}_{32} \times \bar{F}_{32} + \bar{R}_{34} \times \bar{F}_{34} &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3 & (\sum \bar{M}_G &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3) \end{aligned} \quad (3.3.1-8)$$

Por la tercera ley de Newton, $\overline{F}_{32} = -\overline{F}_{23}$, entonces:

$$\begin{aligned} -\overline{F}_{23} + \overline{F}_{34} &= m_3 \overline{a}_{G_3} & (\sum \overline{F}_{ext} &= m_3 \overline{a}_{G_3}) \\ \overline{R}_{32} \times (-\overline{F}_{23}) + \overline{R}_{34} \times \overline{F}_{34} &= I_{G_3} \overline{\alpha}_3 & (\sum \overline{M}_G &= I_{G_3} \overline{\alpha}_3) \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} -\overline{F}_{23} + \overline{F}_{34} &= m_3 \overline{a}_{G_3} & (\sum \overline{F}_{ext} &= m_3 \overline{a}_{G_3}) \\ -\overline{R}_{32} \times \overline{F}_{23} + \overline{R}_{34} \times \overline{F}_{34} &= I_{G_3} \overline{\alpha}_3 & (\sum \overline{M}_G &= I_{G_3} \overline{\alpha}_3) \end{aligned} \quad (3.3.1-9)$$

Descomponiéndose las ecuaciones (3.3.1-9) en sus componentes escalares expresadas en el sistema local x - y que se ubica en G_3 , se tiene:

$$\begin{aligned} -F_{23x} + F_{34x} &= m_3 a_{G_{3x}} & (\sum F_x &= m_3 a_{G_{3x}}) \\ -F_{23y} + F_{34y} &= m_3 a_{G_{3y}} & (\sum F_y &= m_3 a_{G_{3y}}) \\ r_{32y} F_{23x} - r_{32x} F_{23y} - r_{34y} F_{34x} + r_{34x} F_{34y} &= I_{G_3} \alpha_3 & (\sum M_G &= I_{G_3} \alpha_3) \end{aligned} \quad (3.3.1-10)$$

donde,

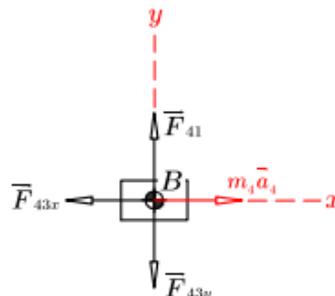
$$\begin{aligned} \overline{R}_{32} &= -\overline{R}_{AG_3} = -b_3 e^{i(\theta_3 + \phi_3)} = -b_3 (\cos(\theta_3 + \phi_3) + i \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)) \\ r_{32x} &= -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\ r_{32y} &= -b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3) \end{aligned} \quad (3.3.1-11)$$

$$\begin{aligned} \overline{R}_{34} &= \overline{R}_{32} + \overline{R}_3 \\ \overline{R}_{34} &= -b_3 (\cos(\theta_3 + \phi_3) + i \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)) + r_3 (\cos(\theta_3) + i \text{sen}(\theta_3)) \\ r_{34x} &= -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) + r_3 \cos(\theta_3) \\ r_{34y} &= -b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3) + r_3 \text{sen}(\theta_3) \end{aligned} \quad (3.3.1-12)$$

Para la corredera, se tiene el siguiente diagrama de fuerzas exteriores y fuerzas efectivas:

Figura 86

Diagrama de fuerzas para la corredera



Dado que la corredera tiene una masa m_4 y puede ser tratada como una partícula al tener solo traslación rectilínea sin rotación, entonces las ecuaciones para las fuerzas dinámicas son:

$$F_{43x} = m_4 a_4 \quad (\sum F_x = m_4 a_4) \quad (3.3.1-13)$$

Por la tercera ley de Newton, $F_{43x} = -F_{34x}$, entonces:

$$-F_{34x} = m_4 a_4 \quad (\sum F_x = m_4 a_4) \quad (3.3.1-14)$$

Y,

$$F_{41} - F_{43y} = 0 \quad (\sum F_y = 0)$$

Y dado que, por tercera ley de Newton, $F_{43x} = -F_{34x}$, entonces:

$$F_{41} + F_{34y} = 0 \quad (\sum F_y = 0) \quad (3.3.1-15)$$

Agrupando las ecuaciones (3.3.1-6), (3.3.1-10), (3.3.1-14) y (3.3.1-15) se tiene:

$$\begin{aligned} F_{21x} + F_{23x} &= m_2 a_{G_2x} \\ F_{21y} + F_{23y} &= m_2 a_{G_2y} \\ -r_{2y} F_{23x} + r_{2x} F_{23y} + M_{21} &= I_O \alpha_2 \\ -F_{23x} + F_{34x} &= m_3 a_{G_3x} \\ -F_{23y} + F_{34y} &= m_3 a_{G_3y} \\ r_{32y} F_{23x} - r_{32x} F_{23y} - r_{34y} F_{34x} + r_{34x} F_{34y} &= I_{G_3} \alpha_3 \\ -F_{34x} &= m_4 a_4 \\ F_{34y} + F_{41} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.1-16)$$

donde,

$$\begin{aligned} r_{2x} &= r_2 \cos(\theta_2) \\ r_{2y} &= r_2 \sin(\theta_2) \\ r_{32x} &= -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\ r_{32y} &= -b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3) \\ r_{34x} &= -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) + r_3 \cos(\theta_3) \\ r_{34y} &= -b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3) + r_3 \sin(\theta_3) \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial el sistema (3.3.1-16), resulta:

$$[\mathbf{G}] \cdot \{\mathbf{F}_{ext}\} = \{\mathbf{F}_{ef}\}$$

Donde,

$[G]$ es la matriz de la geometría del mecanismo.

$\{F\}$ es el vector de las fuerzas en los pares cinemáticos, que son las incógnitas a determinarse.

$\{F_{ef}\}$ es el vector de las fuerzas efectivas, con:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 \sin(\theta_2) & r_2 \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3) & b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) & b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3) - r_3 \sin(\theta_3) & -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) + r_3 \cos(\theta_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{F_{ef}\} = \begin{Bmatrix} m_2 a_{G_{2x}} \\ m_2 a_{G_{2y}} \\ I_O \alpha_2 \\ m_3 a_{G_{3x}} \\ m_3 a_{G_{3y}} \\ I_{G_3} \alpha_3 \\ m_4 a_4 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad y \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{21x} \\ F_{21y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{34x} \\ F_{34y} \\ F_{41} \\ M_{21} \end{Bmatrix}$$

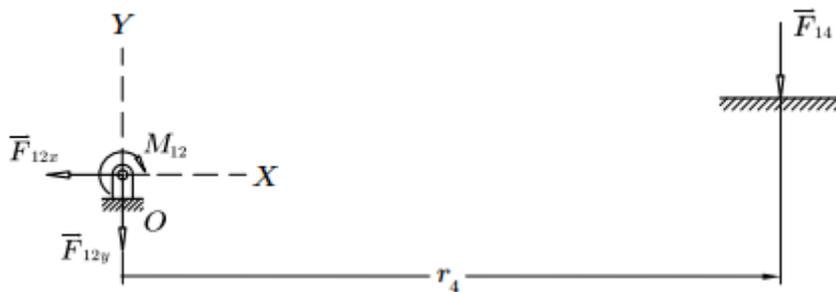
entonces,

$$\{F\} = [G]^{-1} \{F_{ef}\} \quad (3.3.1-17)$$

Finalmente, en el bastidor del mecanismo se tiene el siguiente diagrama de fuerzas exteriores y fuerzas efectivas:

Figura 87

Diagrama de fuerzas para el bastidor del mecanismo



A partir de la figura anterior se calcula la fuerza de sacudimiento (fuerza que afecta al bastidor del mecanismo) F_s como:

$$\bar{F}_s = \bar{F}_{12} + \bar{F}_{14}$$

Pero dado que, $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ y $\bar{F}_{14} = -\bar{F}_{41}$ por la tercera ley de Newton, entonces:

$$\bar{F}_s = -\bar{F}_{21} - \bar{F}_{41}$$

y descomponiendo en sus componentes escalares x - y :

$$\begin{aligned} F_{sx} &= -F_{21x} \\ F_{sy} &= -F_{21y} - F_{41} \end{aligned} \quad (3.3.1-18)$$

de donde,

$$F_s = \sqrt{F_{21x}^2 + (F_{21y} + F_{41})^2} \quad (3.3.1-19)$$

y el momento de sacudimiento (momento que afecta al bastidor del mecanismo) M_s con respecto al punto O :

$$M_s = r_4 F_{14} + M_{12} = -r_4 F_{41} - M_{21}$$

de la expresión (2.3.1-7), entonces:

$$M_s = -F_{41}[r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3)] - M_{21} \quad (3.3.1-20)$$

Es necesaria una implementación computacional para observar el comportamiento de las fuerzas dinámicas en el mecanismo para un giro completo de la manivela del mecanismo.

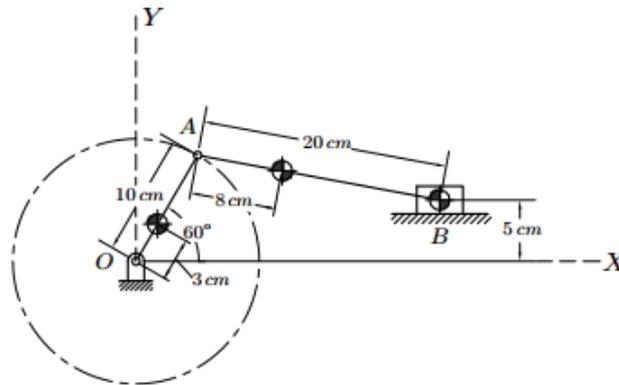
Ejemplo 1

Para el mecanismo manivela corredera mostrado en la Figura 85 de la página siguiente, cuya manivela OA gira a una velocidad angular constante de 500 rpm en sentido antihorario, grafíquese para un ciclo completo de funcionamiento del mismo las fuerzas en los pares cinemáticos, así como la fuerza de sacudimiento y el momento de sacudimiento.

Además, grafíquense los componentes y vs componentes x , de todas las fuerzas en el mecanismo. Supóngase que no existe fricción en los pares y desprecíese el peso de los eslabones; considérese la siguiente información: $b_2 = 3$ cm, $b_3 = 8$ cm, $m_2 = 0.1$ kg, $m_3 = 0.3$ kg, $m_4 = 0.05$ kg, $I_{G2} = 0.00008$ kg - m², $I_{G3} = 0.0002$ kg - m².

Figura 88

Mecanismo del ejemplo 1



Análisis cinemático del mecanismo

Del análisis cinemático visto en el apartado 2.3.1 y para el mecanismo de la Figura 88, se tiene:

$$\theta_3(\theta_2) = \arcsen\left(\frac{r_1 - r_2 \text{sen}\theta_2}{r_3}\right) \quad (\text{ej1-1})$$

$$r_4(\theta_2) = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3(\theta_2) \quad (\text{ej1-2})$$

$$\omega_3(\theta_2) = -\frac{r_2 \omega_2 \cos\theta_2}{r_3 \cos(\theta_3(\theta_2))} \quad (\text{ej1-3})$$

$$\alpha_3(\theta_2) = \frac{r_2 \omega_2^2 \text{sen}\theta_2 + r_3 \omega_3(\theta_2)^2 \text{sen}(\theta_3(\theta_2))}{r_3 \cos(\theta_3(\theta_2))} \quad (\text{ej1-4})$$

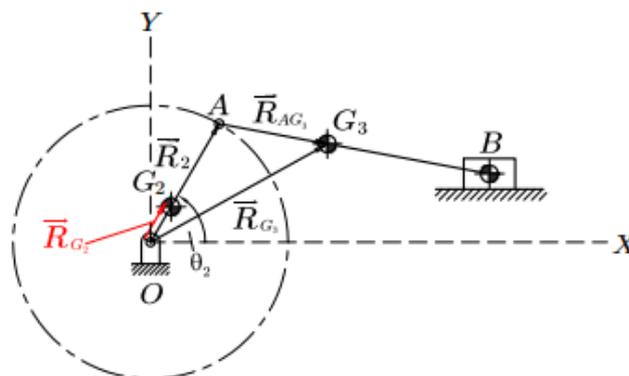
$$a_4(\theta_2) = \frac{-r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3(\theta_2)) - r_3 \omega_3(\theta_2)^2}{\cos(\theta_3(\theta_2))} \quad (\text{ej1-5})$$

Análisis cinemático de los centros de masa

Para los lazos O_{G_2} y O_{AG_3} mostrados en la Figura 89:

Figura 89

Lazos para el análisis cinemático de los centros de masa del mecanismo del ejemplo 1



Del apartado 3.3.1, para el centro de masa G_2 :

$$\begin{aligned} a_{G_2x}(\theta_2) &= -b_2\omega_2^2 \cos(\theta_2) \\ a_{G_2y}(\theta_2) &= -b_2\omega_2^2 \text{sen}(\theta_2) \end{aligned} \quad (\text{ej1-6})$$

Del mismo apartado, para el centro de masa G_3 :

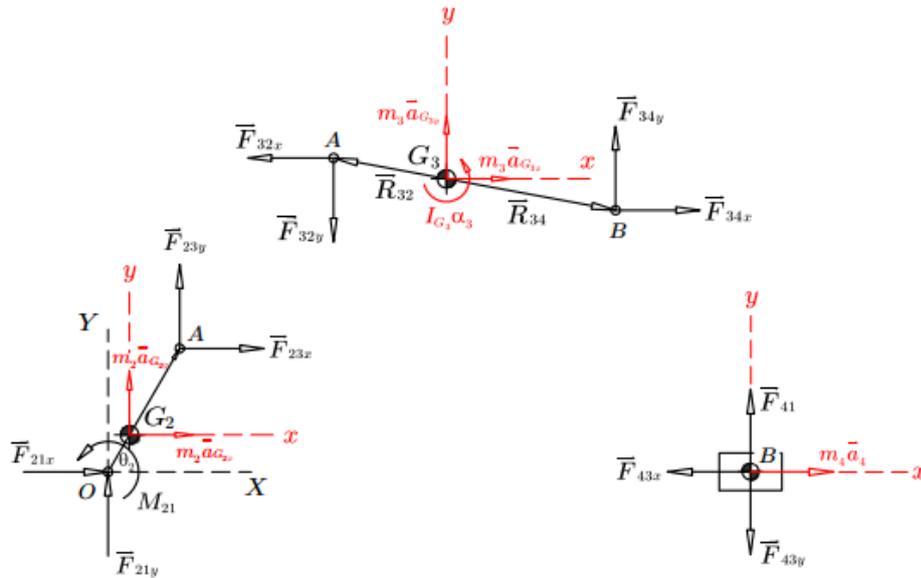
$$\begin{aligned} a_{G_3x}(\theta_2) &= -r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2) - b_3[\alpha_3(\theta_2) \text{sen}(\theta_3(\theta_2)) + \omega_3^2(\theta_2) \cos(\theta_3(\theta_2))] \\ a_{G_3y}(\theta_2) &= -r_2\omega_2^2 \text{sen}(\theta_2) + b_3[\alpha_3(\theta_2) \cos(\theta_3(\theta_2)) - \omega_3^2(\theta_2) \text{sen}(\theta_3(\theta_2))] \end{aligned} \quad (\text{ej1-7})$$

Análisis cinetostático o de fuerzas dinámicas.

Los diagramas cinéticos de cada eslabón móvil del mecanismo se muestran a continuación:

Figura 90

Diagramas cinéticos de los eslabones móviles del mecanismo



Del apartado 3.3.1 para las ecuaciones de las fuerzas dinámicas se tiene:

$$\begin{aligned} F_{21x} + F_{23x} &= m_2 a_{G_2x} \\ F_{21y} + F_{23y} &= m_2 a_{G_2y} \\ -r_{2y} F_{23x} + r_{2x} F_{23y} + M_{21} &= 0 \\ -F_{23x} + F_{34x} &= m_3 a_{G_3x} \\ -F_{23y} + F_{34y} &= m_3 a_{G_3y} \\ r_{32y} F_{23x} - r_{32x} F_{23y} - r_{34y} F_{34x} + r_{34x} F_{34y} &= I_{G_3} \alpha_3 \\ -F_{34x} &= m_4 a_4 \\ F_{34y} + F_{41} &= 0 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}r_{2x} &= r_2 \cos(\theta_2) \\r_{2y} &= r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \\r_{32x} &= -b_3 \cos(\theta_3) \\r_{32y} &= -b_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\r_{34x} &= -b_3 \cos(\theta_3) + r_3 \cos(\theta_3) \\r_{34y} &= -b_3 \operatorname{sen}(\theta_3) + r_3 \operatorname{sen}(\theta_3)\end{aligned}$$

El sistema a resolverse en forma matricial es:

$$\{\mathbf{F}(\theta_2)\} = [\mathbf{G}(\theta_2)]^{-1} \{\mathbf{F}_{ef}(\theta_2)\} \quad (\text{ej1-8})$$

Con:

$$[\mathbf{G}(\theta_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) & r_2 \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2)) & b_3 \cos(\theta_3(\theta_2)) & (b_3 - r_3) \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2)) & (r_3 - b_3) \cos(\theta_3(\theta_2)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y,

$$\{\mathbf{F}_{ef}(\theta_2)\} = \begin{Bmatrix} m_2(a_{G_{2x}}(\theta_2)) \\ m_2(a_{G_{2y}}(\theta_2)) \\ 0 \\ m_3(a_{G_{3x}}(\theta_2)) \\ m_3(a_{G_{3y}}(\theta_2)) \\ I_{G_3}(\alpha_3(\theta_2)) \\ m_4(a_4(\theta_2)) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se utiliza entonces un software matemático para hallar el vector:

$$\{\mathbf{F}(\theta_2)\} = \begin{Bmatrix} F_{21x}(\theta_2) \\ F_{21y}(\theta_2) \\ F_{23x}(\theta_2) \\ F_{23y}(\theta_2) \\ F_{34x}(\theta_2) \\ F_{34y}(\theta_2) \\ F_{41}(\theta_2) \\ M_{21}(\theta_2) \end{Bmatrix},$$

Mediante la resolución de la expresión (ej1-8) para la matriz $[G(\theta_2)]$ y el vector $\{F_{ef}(\theta_2)\}$ anteriores.

Finalmente, la fuerza y momento de sacudimiento están dados por:

$$F_s(\theta_2) = \sqrt{F_{21x}(\theta_2)^2 + (F_{21y}(\theta_2) + F_{41}(\theta_2))^2} \quad (\text{ej1-9})$$

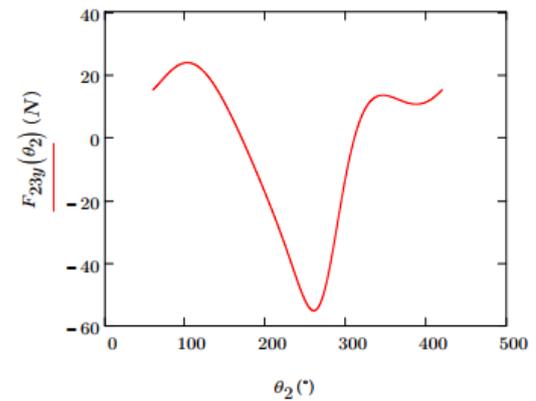
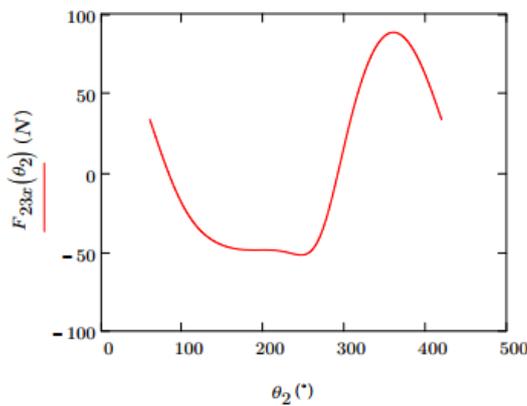
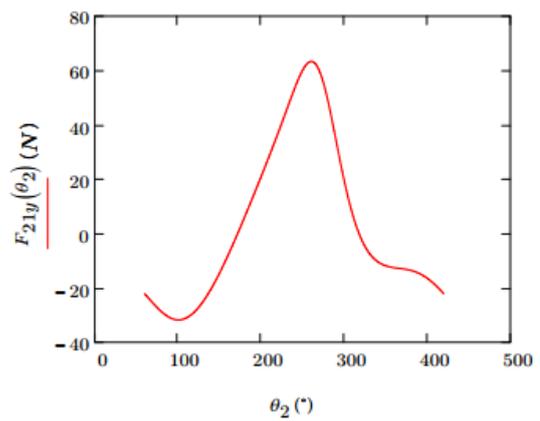
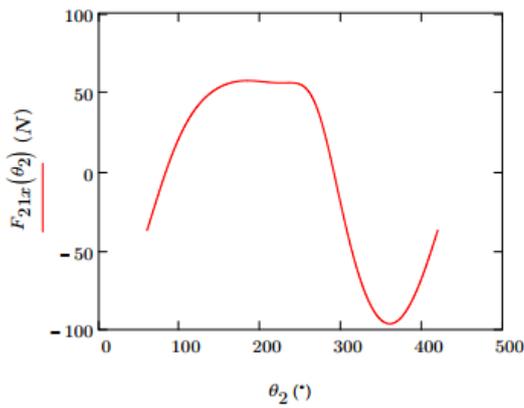
$$M_s(\theta_2) = -F_{41}(\theta_2)[r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3(\theta_2))] - M_{21}(\theta_2) \quad (\text{ej1-10})$$

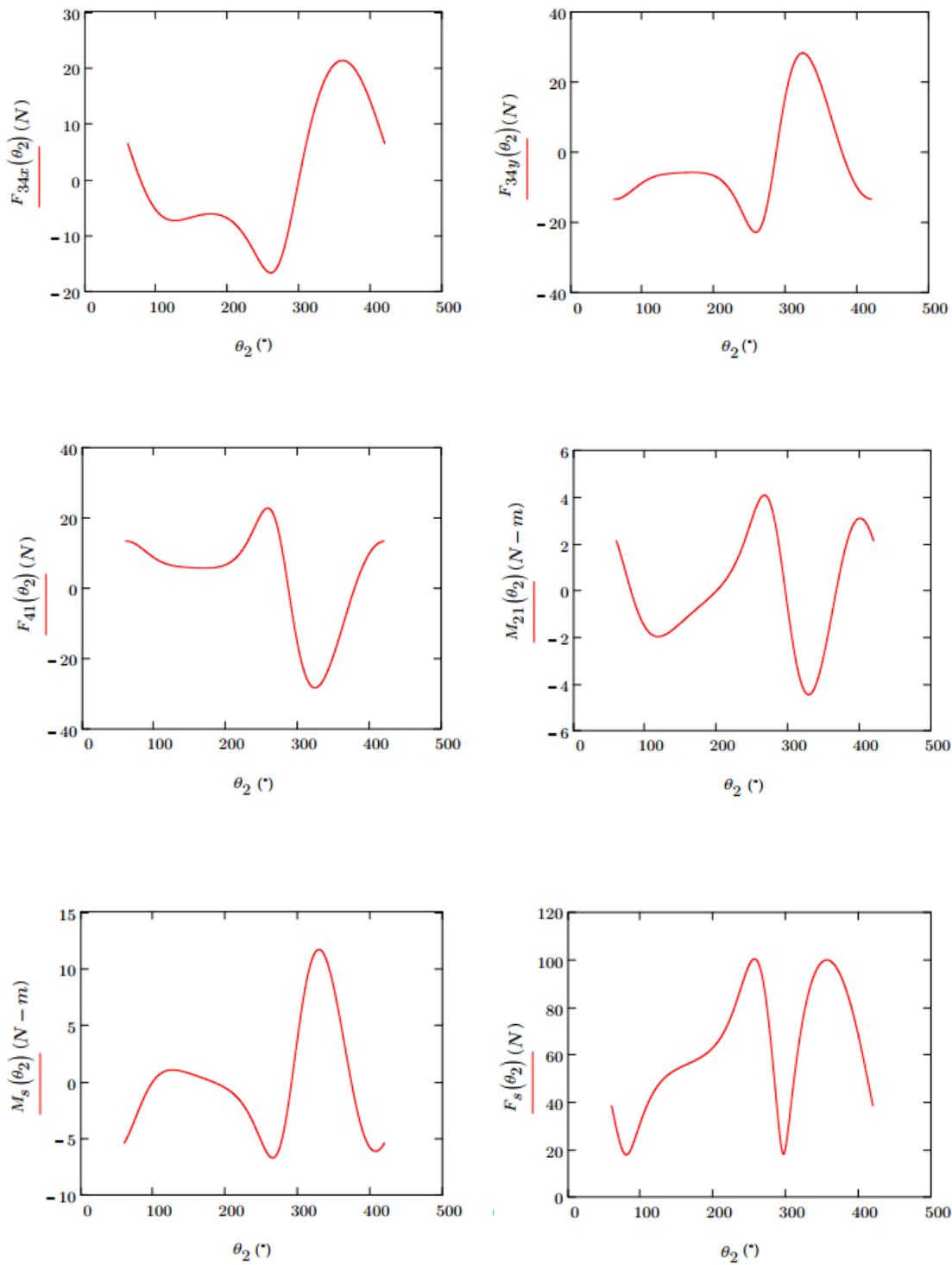
Además,

$$F_{sx}(\theta_2) = -F_{21x}(\theta_2) \quad (\text{ej1-11})$$

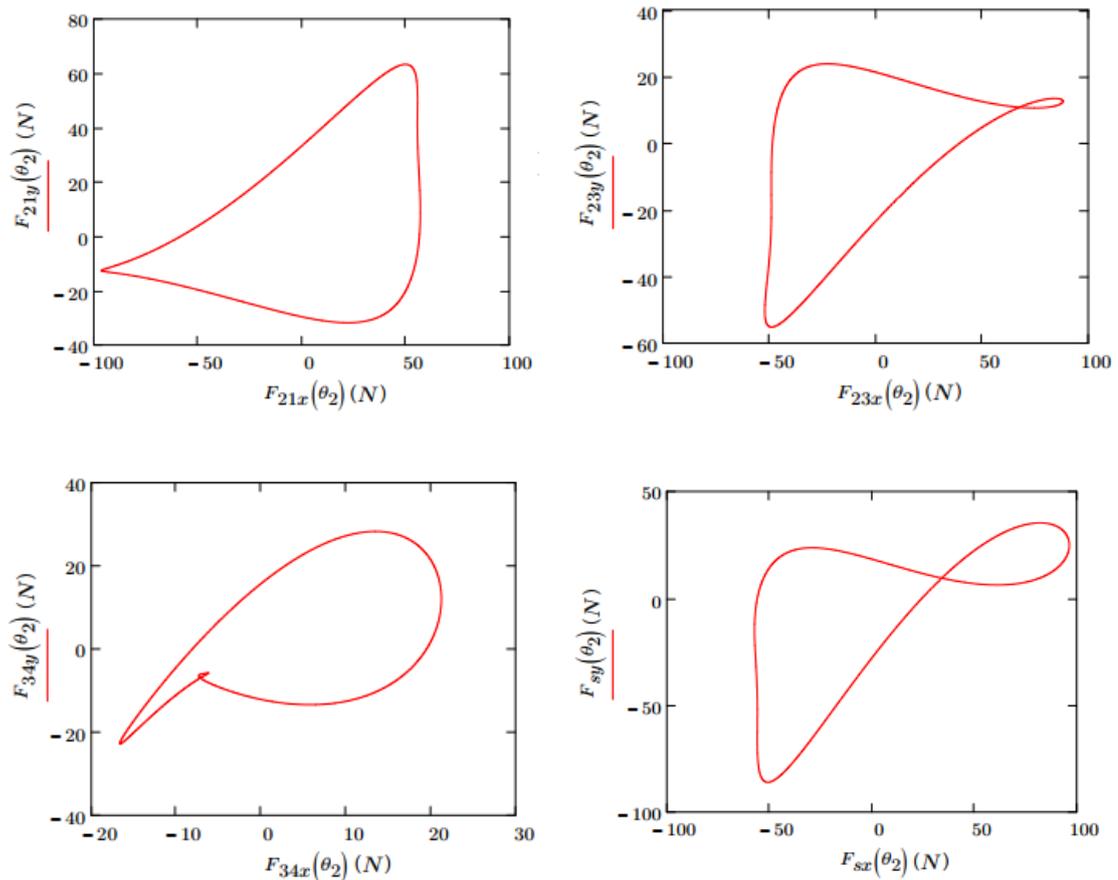
$$F_{sy}(\theta_2) = -F_{21y}(\theta_2) - F_{41}(\theta_2) \quad (\text{ej1-12})$$

A continuación, se grafican cada entrada de $\{F(\theta_2)\}$ con respecto a θ_2 para un ciclo completo ($60^\circ \leq \theta_2 \leq 420^\circ$), obteniéndose las siguientes gráficas:





Las gráficas de las componentes y vs componentes x para las fuerzas en el mecanismo se muestran en la página siguiente:



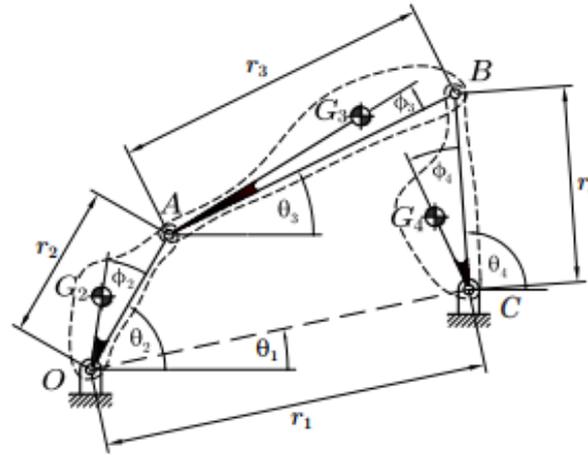
3.3.2 Análisis de fuerzas dinámicas para un mecanismo de cuatro barras

La Figura 91 muestra el diagrama cinemático (con la forma real de los eslabones en líneas entrecortadas) de un mecanismo de cuatro barras con sus centros de masa ubicados en las posiciones G_2 , G_3 y G_4 . La velocidad rotacional de la manivela ω_2 es antihoraria y su aceleración angular α_2 tiene también la misma dirección. Las distancias de los centros de masa referidas a sus pares cinemáticos O , A y C son $r_{G2} = r_{OG2} = b_2$, $r_{AG3} = b_3$ y $r_{G4} = r_{CG4} = b_4$.

Los ángulos, tomados en sentido antihorario con respecto a OA , AB y CB , que ubican los centros de masa son ϕ_2 , ϕ_3 y ϕ_4 , respectivamente. Las longitudes de los eslabones de entrada, acoplador y de salida son r_2 , r_3 y r_4 respectivamente, formando ángulos θ_2 (para el eslabón de entrada), θ_3 (para el acoplador) y θ_4 (para el de salida) con sus ejes horizontales positivos y tomados en sentido antihorario; finalmente la distancia entre los puntos fijos del bastidor es r_1 y forma un ángulo θ_1 con el eje horizontal positivo.

Figura 91

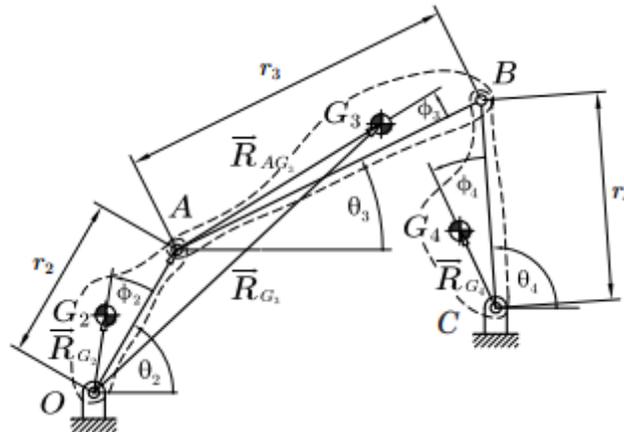
Geometría del mecanismo de cuatro barras para el análisis de fuerzas dinámicas



Como en el apartado anterior, se va a considerar que el efecto de los pesos de los eslabones es despreciable en comparación a las fuerzas efectivas producidas y que la fricción en los pares cinemáticos es despreciable y se principia calculado las aceleraciones de los centros de masa de cada eslabón móvil, para lo cual tómesese en cuenta los lazos vectoriales mostrados en la Figura 92:

Figura 92

Lazos vectoriales para el cálculo de las aceleraciones de los centros de masa



Para el centro de masa G_2 , se tiene:

$$\bar{R}_{G_2} = b_2 e^{j(\theta_2 + \phi_2)}$$

$$\bar{R}_{G_2} = b_2 \cos(\theta_2 + \phi_2) + j b_2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2)$$

De donde,

$$\begin{aligned}R_{G_2x} &= b_2 \cos(\theta_2 + \phi_2) \\ R_{G_2y} &= b_2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2)\end{aligned}$$

Derivando las anteriores expresiones dos veces con respecto al tiempo, considerando que b_2 y ϕ_2 no cambian con el tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned}a_{G_2x} &= -b_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 + \phi_2) \\ a_{G_2y} &= -b_2 \omega_2^2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2)\end{aligned} \quad (3.3.2-1)$$

Para el centro de masa G_3 :

$$\begin{aligned}\bar{R}_{G_3} &= \bar{R}_2 + \bar{R}_{AG_3} = r_2 e^{i(\theta_2)} + b_3 e^{i(\theta_3 + \phi_3)} \\ \bar{R}_{G_3} &= r_2 \cos(\theta_2) + b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) + i(r_2 \text{sen}(\theta_2) + b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3))\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}R_{G_3x} &= r_2 \cos(\theta_2) + b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\ R_{G_3y} &= r_2 \text{sen}(\theta_2) + b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)\end{aligned}$$

Y, derivando dos veces con respecto al tiempo bajo la consideración de que r_2 , b_3 y ϕ_3 no dependen del mismo, se obtienen:

$$\begin{aligned}a_{G_3x} &= -r_2 \alpha_2 \text{sen}(\theta_2) - r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2) - \omega_3^2 [b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3)] - \alpha_3 [b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)] \\ a_{G_3y} &= r_2 \alpha_2 \cos(\theta_2) - r_2 \omega_2^2 \text{sen}(\theta_2) - \omega_3^2 [b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)] + \alpha_3 [b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3)]\end{aligned} \quad (3.3.2-2)$$

Finalmente, para el centro de masa G_4 , se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{G_4} &= \bar{R}_{CG_4} = b_4 e^{i(\theta_4 + \phi_4)} = b_4 \cos(\theta_4 + \phi_4) + i b_4 \text{sen}(\theta_4 + \phi_4) \\ R_{G_4x} &= b_4 \cos(\theta_4 + \phi_4) \\ R_{G_4y} &= b_4 \text{sen}(\theta_4 + \phi_4)\end{aligned}$$

De donde, al derivar dos veces con respecto al tiempo resulta:

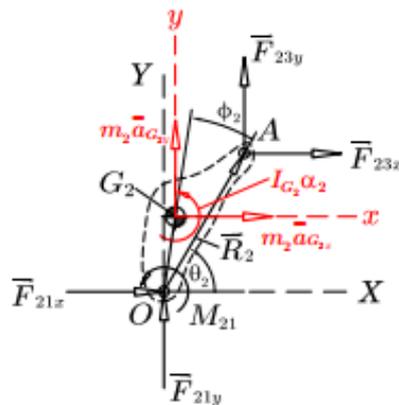
$$\begin{aligned}a_{G_4x} &= -b_4 \omega_4^2 \cos(\theta_4 + \phi_4) - b_4 \alpha_4 \text{sen}(\theta_4 + \phi_4) \\ a_{G_4y} &= -b_4 \omega_4^2 \text{sen}(\theta_4 + \phi_4) + b_4 \alpha_4 \cos(\theta_4 + \phi_4)\end{aligned} \quad (3.3.2-3)$$

A continuación, se desarrolla las ecuaciones de la cinética del sólido rígido para cada eslabón en el mecanismo.

Para el eslabón manivela, se tiene el siguiente diagrama de fuerzas exteriores y fuerzas efectivas:

Figura 93

Diagrama de fuerzas para el eslabón manivela



Considerando que la manivela tiene rotación pura con respecto a O , entonces se puede escribir, con base en la expresión (3.2-6):

$$\begin{aligned} \bar{F}_{21} + \bar{F}_{23} &= m_2 \bar{a}_{G_2} & \left(\sum \bar{F}_{ext} = m_2 \bar{a}_{G_2} \right) \\ \bar{R}_2 \times \bar{F}_{23} + \bar{M}_{12} &= I_O \bar{\alpha}_2 & \left(\sum \bar{M}_O = I_O \bar{\alpha}_2 \right) \end{aligned} \quad (3.3.2-4)$$

Donde:

$$I_O = I_G + m r_{21}^2 = I_G + m b_2^2 \quad (3.3.2-5)$$

Si se descomponen las ecuaciones (3.3.2-4) en componentes escalares expresadas en el sistema local x - y que se ubica en G_2 , se tiene:

$$\begin{aligned} F_{21x} + F_{23x} &= m_2 a_{G_{2x}} & \left(\sum F_x = m_2 a_{G_{2x}} \right) \\ F_{21y} + F_{23y} &= m_2 a_{G_{2y}} & \left(\sum F_y = m_2 a_{G_{2y}} \right) \\ (r_{2x} F_{23y} - r_{2y} F_{23x}) + M_{21} &= I_O \alpha_2 & \left(\sum M_O = I_O \alpha_2 \right) \end{aligned} \quad (3.3.2-6)$$

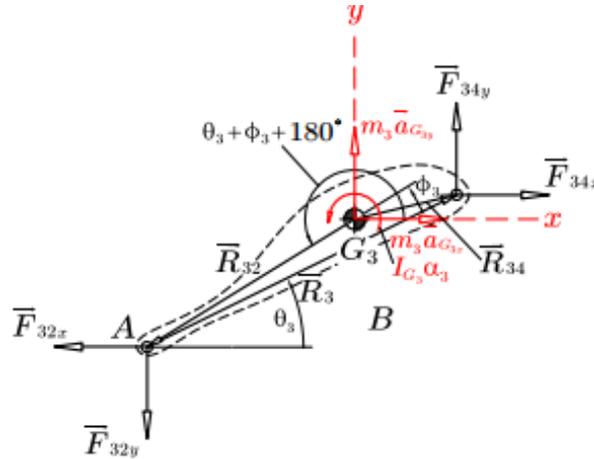
Donde:

$$\begin{aligned} r_{2x} &= r_2 \cos(\theta_2) \\ r_{2y} &= r_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (3.3.2-7)$$

Para el eslabón acoplador, se tiene el diagrama de *fuerzas exteriores y efectivas* en la Figura 94 de la página siguiente.

Figura 94

Diagrama de fuerzas para el eslabón acoplador



Tomando en cuenta que el acoplador tiene una masa m_3 y un momento de inercia másico I_{G_3} , entonces las ecuaciones para las fuerzas dinámicas son:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{32} + \bar{F}_{34} &= m_3 \bar{a}_{G_3} & (\sum \bar{F}_{ext} &= m_3 \bar{a}_{G_3}) \\ \bar{R}_{32} \times \bar{F}_{32} + \bar{R}_{34} \times \bar{F}_{34} &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3 & (\sum \bar{M}_G &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3) \end{aligned} \quad (3.3.2-8)$$

Por la tercera ley de Newton, $\bar{F}_{32} = -\bar{F}_{23}$, entonces:

$$\begin{aligned} -\bar{F}_{23} + \bar{F}_{34} &= m_3 \bar{a}_{G_3} & (\sum \bar{F}_{ext} &= m_3 \bar{a}_{G_3}) \\ \bar{R}_{32} \times (-\bar{F}_{23}) + \bar{R}_{34} \times \bar{F}_{34} &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3 & (\sum \bar{M}_G &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3) \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} -\bar{F}_{23} + \bar{F}_{34} &= m_3 \bar{a}_{G_3} & (\sum \bar{F}_{ext} &= m_3 \bar{a}_{G_3}) \\ -\bar{R}_{32} \times \bar{F}_{23} + \bar{R}_{34} \times \bar{F}_{34} &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3 & (\sum \bar{M}_G &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3) \end{aligned} \quad (3.3.2-9)$$

Descomponiéndose las ecuaciones (3.3.1-9) en sus componentes escalares expresadas en el sistema local x - y que se ubica en G_3 , se tiene:

$$\begin{aligned} -F_{23x} + F_{34x} &= m_3 a_{G_3x} & (\sum F_x &= m_3 a_{G_3x}) \\ -F_{23y} + F_{34y} &= m_3 a_{G_3y} & (\sum F_y &= m_3 a_{G_3y}) \\ (r_{32y} F_{23x} - r_{32x} F_{23y}) + (r_{34x} F_{34y} - r_{34y} F_{34x}) &= I_{G_3} \alpha_3 & (\sum M_G &= I_{G_3} \alpha_3) \end{aligned} \quad (3.3.2-10)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \bar{R}_{32} &= r_{32} e^{i(\theta_3 + \phi_3 + 180^\circ)} = r_{AG_3} e^{i(\theta_3 + \phi_3 + 180^\circ)} = b_3 (\cos(\theta_3 + \phi_3 + 180^\circ) + i \operatorname{sen}(\theta_3 + \phi_3 + 180^\circ)) \\ r_{32x} &= b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3 + 180^\circ) = -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \end{aligned}$$

$$r_{32y} = b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3 + 180^\circ) = -b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3) \quad (3.3.2-11)$$

$$\bar{R}_{34} = \bar{R}_{32} + \bar{R}_3$$

$$\bar{R}_{34} = -b_3 (\cos(\theta_3 + \phi_3) + i \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)) + r_3 (\cos(\theta_3) + i \text{sen}(\theta_3))$$

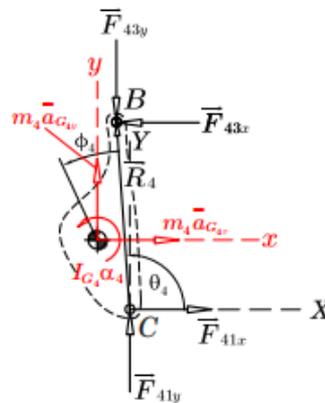
$$r_{34x} = -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) + r_3 \cos(\theta_3)$$

$$r_{34y} = -b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3) + r_3 \text{sen}(\theta_3) \quad (3.3.2-12)$$

Para el eslabón de salida, se tiene el siguiente diagrama de fuerzas exteriores y fuerzas efectivas.

Figura 95

Diagrama de fuerzas para el eslabón de salida



Considerando que el eslabón de salida tiene rotación pura alrededor de C, una masa m_4 y un momento de inercia másico I_{G4} , entonces las ecuaciones para las fuerzas dinámicas son:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{43} + \bar{F}_{41} &= m_4 \bar{a}_{G_4} \quad (\sum \bar{F}_{ext} = m_4 \bar{a}_{G_4}) \\ \bar{R}_4 \times \bar{F}_{43} &= I_C \bar{\alpha}_4 \quad (\sum \bar{M}_C = I_C \bar{\alpha}_4) \end{aligned} \quad (3.3.2-13)$$

Por la tercera ley de Newton, $\bar{F}_{43} = -\bar{F}_{34}$ entonces:

$$\begin{aligned} -\bar{F}_{34} + \bar{F}_{41} &= m_4 \bar{a}_{G_4} \quad (\sum \bar{F}_{ext} = m_4 \bar{a}_{G_4}) \\ \bar{R}_4 \times (-\bar{F}_{34}) &= I_C \bar{\alpha}_4 \quad (\sum \bar{M}_C = I_C \bar{\alpha}_4) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} -\bar{F}_{34} + \bar{F}_{41} &= m_4 \bar{a}_{G_4} \quad (\sum \bar{F}_{ext} = m_4 \bar{a}_{G_4}) \\ -\bar{R}_4 \times \bar{F}_{34} &= I_C \bar{\alpha}_4 \quad (\sum \bar{M}_C = I_C \bar{\alpha}_4) \end{aligned} \quad (3.3.2-14)$$

Descomponiéndose las ecuaciones (3.3.2-14) en sus componentes escalares expresadas en el sistema local $x-y$ que se ubica en G_4 , se tiene:

$$\begin{aligned} -F_{34x} + F_{41x} &= m_4 a_{G_{4x}} & (\sum F_x = m_4 a_{G_{4x}}) \\ -F_{34y} + F_{41y} &= m_4 a_{G_{4y}} & (\sum F_y = m_4 a_{G_{4y}}) \\ r_{4y} F_{34x} - r_{4x} F_{34y} &= I_C \alpha_4 & (\sum M_C = I_C \alpha_4) \end{aligned} \quad (3.3.2-15)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \bar{R}_4 &= r_4 e^{i(\theta_4)} = r_4 e^{i(\theta_4)} = r_4 (\cos(\theta_4) + i \operatorname{sen}(\theta_4)) \\ r_{4x} &= r_4 \cos(\theta_4) \\ r_{4y} &= r_4 \operatorname{sen}(\theta_4) \\ I_C &= I_{G_4} + m_4 b_4^2 \end{aligned} \quad (3.3.2-16)$$

Agrupando las ecuaciones 3.3.2-6, 3.3.2-10 y 3.3.2-15 se tiene:

$$\begin{aligned} F_{21x} + F_{23x} &= m_2 a_{G_{2x}} \\ F_{21y} + F_{23y} &= m_2 a_{G_{2y}} \\ -r_{2y} F_{23x} + r_{2x} F_{23y} + M_{21} &= I_O \alpha_2 \\ -F_{23x} + F_{34x} &= m_3 a_{G_{3x}} \\ -F_{23y} + F_{34y} &= m_3 a_{G_{3y}} \\ r_{32y} F_{23x} - r_{32x} F_{23y} - r_{34y} F_{34x} + r_{34x} F_{34y} &= I_{G_3} \alpha_3 \\ -F_{34x} + F_{41x} &= m_4 a_{G_{4x}} \\ -F_{34y} + F_{41y} &= m_4 a_{G_{4y}} \\ r_{4y} F_{34x} - r_{4x} F_{34y} &= (I_{G_4} + m_4 b_4^2) \alpha_4 \end{aligned} \quad (3.3.2-17)$$

Donde:

$$\begin{aligned} r_{2x} &= r_2 \cos(\theta_2) \\ r_{2y} &= r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \\ r_{32x} &= b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3 + 180^\circ) = -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\ r_{32y} &= b_3 \operatorname{sen}(\theta_3 + \phi_3 + 180^\circ) = -b_3 \operatorname{sen}(\theta_3 + \phi_3) \\ r_{34x} &= -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) + r_3 \cos(\theta_3) \\ r_{34y} &= -b_3 \operatorname{sen}(\theta_3 + \phi_3) + r_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\ r_{4x} &= r_4 \cos(\theta_4) \\ r_{4y} &= r_4 \operatorname{sen}(\theta_4) \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial el sistema (3.3.2-17):

$$[G] \cdot \{F_{ext}\} = \{F_{ef}\}$$

Donde:

$[G]$ es la matriz de la geometría del mecanismo.

$\{F\}$ es el vector de las fuerzas en los pares cinemáticos, que son las incógnitas a determinarse.

$\{F_{ef}\}$ es el vector de las fuerzas efectivas.

con:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 \sin(\theta_2) & r_2 \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3) & b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) & b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3) & -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 \sin(\theta_4) & -r_4 \cos(\theta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{F_{ef}\} = \begin{Bmatrix} m_2 a_{G_{2x}} \\ m_2 a_{G_{2y}} \\ I_O \alpha_2 \\ m_3 a_{G_{3x}} \\ m_3 a_{G_{3y}} \\ I_{G_3} \alpha_3 \\ m_4 a_{G_{4x}} \\ m_4 a_{G_{4y}} \\ (I_{G_4} + m_4 b_4^2) \alpha_4 \end{Bmatrix}, \quad y \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{21x} \\ F_{21y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{34x} \\ F_{34y} \\ F_{41x} \\ F_{41y} \\ M_{21} \end{Bmatrix}$$

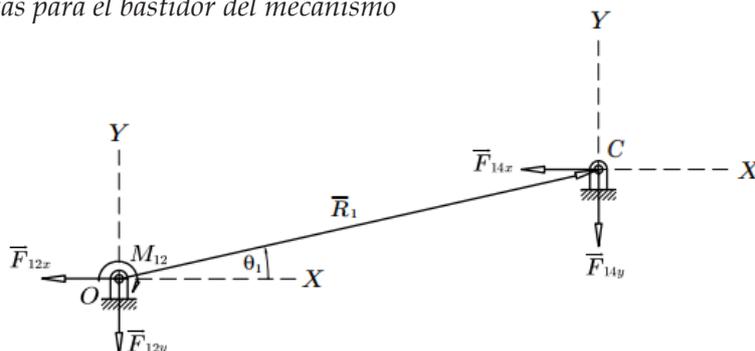
Entonces:

$$\{F\} = [G]^{-1} \{F_{ef}\} \quad (3.3.2-18)$$

Finalmente, en el bastidor del mecanismo, se tiene el siguiente diagrama de fuerzas exteriores y efectivas:

Figura 96

Diagrama de fuerzas para el bastidor del mecanismo



A partir de la figura anterior se calcula la fuerza de sacudimiento F_s como:

$$\bar{F}_s = \bar{F}_{12} + \bar{F}_{14}$$

Pero, dado que, $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ y $\bar{F}_{14} = -\bar{F}_{41}$ por la tercera ley de Newton, entonces:

$$\bar{F}_s = -\bar{F}_{21} - \bar{F}_{41}$$

y descomponiendo en sus componentes escalares x - y :

$$\begin{aligned} F_{sx} &= -F_{21x} - F_{41x} \\ F_{sy} &= -F_{21y} - F_{41y} \end{aligned} \quad (3.3.1-19)$$

de donde:

$$F_s = \sqrt{(F_{21x} + F_{41x})^2 + (F_{21y} + F_{41y})^2} \quad (3.3.1-20)$$

y el momento de sacudimiento M_s con respecto al punto O :

$$M_s = r_{1x}F_{14y} - r_{1y}F_{14x} + M_{12} = r_{1y}F_{41x} - r_{1x}F_{41y} - M_{21} \quad (3.3.2-21)$$

donde:

$$\begin{aligned} r_{1x} &= r_1 \cos(\theta_1) \\ r_{1y} &= r_1 \text{sen}(\theta_1) \end{aligned}$$

Como en el mecanismo manivela corredera, sería necesaria una implementación computacional para observar el comportamiento de las fuerzas dinámicas en el mecanismo para un giro completo de la manivela del mecanismo.

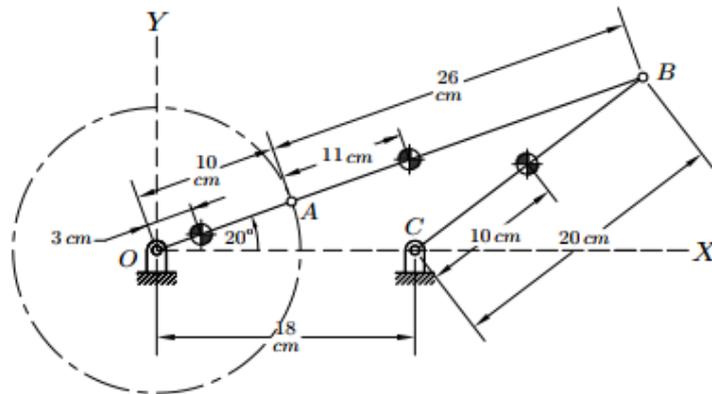
Ejemplo 2

Para el mecanismo de cuatro barras mostrado en la Figura 97, cuya manivela OA gira a una velocidad angular constante de 800 rpm en sentido antihorario, gráfiquese para un ciclo completo de funcionamiento del mismo las fuerzas en los pares cinemáticos, así como la fuerza de sacudimiento y el momento de sacudimiento.

Además, gráfiquese las componentes x y y de todas las fuerzas en el mecanismo. Supóngase que no existe fricción en los pares cinemáticos y despréciase el peso de los eslabones; considérese la siguiente información: $b_2 = 3 \text{ cm}$, $b_3 = 11 \text{ cm}$, $b_4 = 10 \text{ cm}$, $m_2 = 0.1 \text{ kg}$, $m_3 = 0.3 \text{ kg}$, $m_4 = 0.25 \text{ kg}$, $I_{G2} = 0.00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_{G3} = 0.0002 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_{G4} = 0.00015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Figura 97

Mecanismo del ejemplo 2



Análisis cinemático del mecanismo

Del análisis cinemático visto en el apartado 2.3.2 y para la Figura 97, resulta:

$$\theta_3(\theta_2) = 2 \arctan \left(\frac{K_2(\theta_2) + \sqrt{K_1(\theta_2)^2 + K_2(\theta_2)^2 - K_3(\theta_2)^2}}{K_1(\theta_2) + K_3(\theta_2)} \right) \quad (\text{ej2-1})$$

$$\theta_4(\theta_2) = 2 \arctan \left(\frac{K_2(\theta_2) + \sqrt{K_1(\theta_2)^2 + K_2(\theta_2)^2 - K_{3-}(\theta_2)^2}}{K_1(\theta_2) + K_{3-}(\theta_2)} \right) \quad (\text{ej2-2})$$

Con:

$$K_1(\theta_2) = r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2$$

$$K_2(\theta_2) = r_1 \operatorname{sen} \theta_1 - r_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

$$K_3(\theta_2) = \frac{r_3^2 - r_4^2 + K_1^2 + K_2^2}{2r_3}$$

$$K_{3-}(\theta_2) = \frac{r_3^2 - r_4^2 - K_1^2 - K_2^2}{2r_4}$$

$$\omega_3(\theta_2) = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4(\theta_2))}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))} \quad (\text{ej2-3})$$

$$\omega_4(\theta_2) = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3(\theta_2))}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))} \quad (\text{ej2-4})$$

$$\alpha_3(\theta_2) = \frac{r_4 \omega_4^2(\theta_2) - r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4(\theta_2)) - r_3 \omega_3(\theta_2)^2 \cos(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))} \quad (\text{ej2-5})$$

$$\alpha_4(\theta_2) = \frac{r_4 \omega_4^2(\theta_2) \cos(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2)) - r_3 \omega_3(\theta_2)^2 - r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3(\theta_2))}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))} \quad (\text{ej2-6})$$

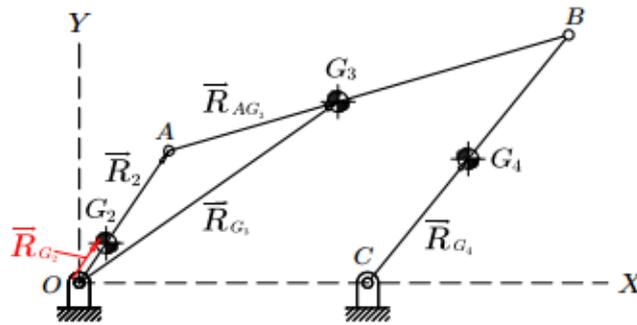
Donde,

Análisis cinemático de los centros de masa

Para los lazos OG_2 , OAG_3 y CG_4 mostrados en la Figura 98:

Figura 98

Lazos para el análisis cinemático de los centros de masa del mecanismo del ejemplo 2



Para el centro de masa G_2 :

$$\begin{aligned} a_{G_2,x}(\theta_2) &= -b_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2) \\ a_{G_2,y}(\theta_2) &= -b_2 \omega_2^2 \text{sen}(\theta_2) \end{aligned} \quad (\text{ej2-7})$$

Para el centro de masa G_3 :

$$\begin{aligned} a_{G_3,x}(\theta_2) &= -r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2) - b_3 \left[\omega_3^2(\theta_2) \cos(\theta_3(\theta_2)) + \alpha_3(\theta_2) \text{sen}(\theta_3(\theta_2)) \right] \\ a_{G_3,y}(\theta_2) &= -r_2 \omega_2^2 \text{sen}(\theta_2) - b_3 \left[\omega_3^2(\theta_2) \text{sen}(\theta_3(\theta_2)) - \alpha_3(\theta_2) \cos(\theta_3(\theta_2)) \right] \end{aligned} \quad (\text{ej2-8})$$

Para el centro de masa G_4 :

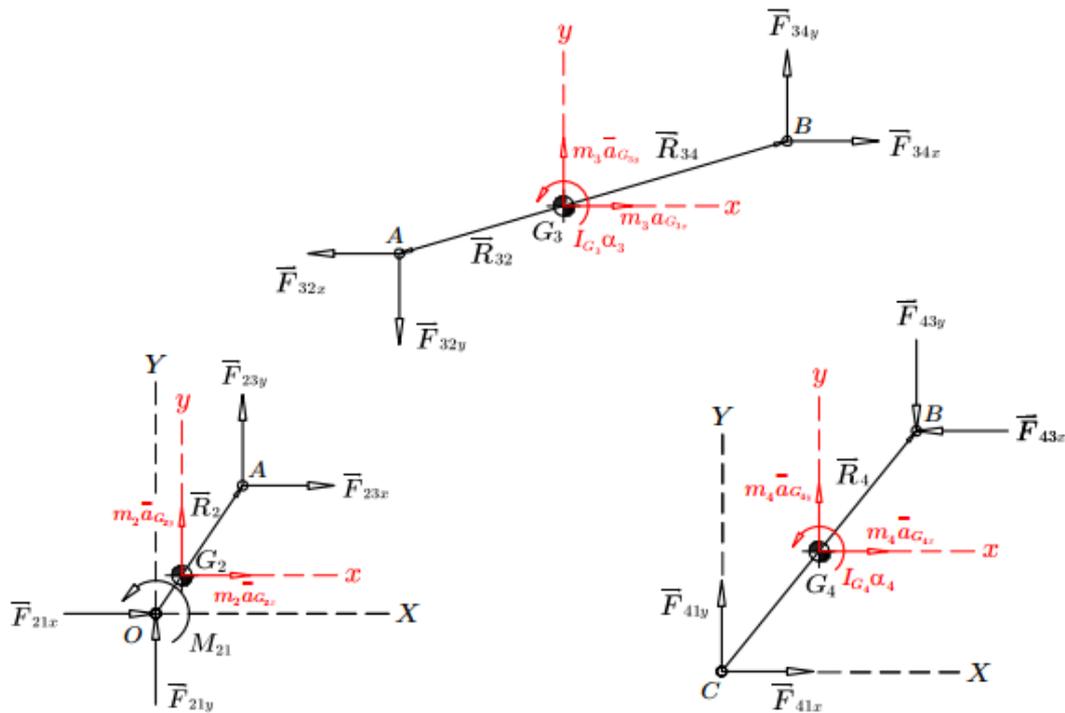
$$\begin{aligned} a_{G_4,x}(\theta_2) &= -b_4 \left[\omega_4^2(\theta_2) \cos(\theta_4(\theta_2)) + \alpha_4(\theta_2) \text{sen}(\theta_4(\theta_2)) \right] \\ a_{G_4,y}(\theta_2) &= -b_4 \left[\omega_4^2(\theta_2) \text{sen}(\theta_4(\theta_2)) - \alpha_4(\theta_2) \cos(\theta_4(\theta_2)) \right] \end{aligned} \quad (\text{ej2-9})$$

Análisis de fuerzas dinámicas.

Los diagramas cinéticos de cada eslabón móvil del mecanismo se muestran a continuación: en la figura de la siguiente página

Figura 99

Diagramas cinéticos de los eslabones móviles del mecanismo



Del apartado 3.3.2 para las ecuaciones de las fuerzas dinámicas se tiene:

$$\begin{aligned}
 F_{21x} + F_{23x} &= m_2 a_{G_{2x}} \\
 F_{21y} + F_{23y} &= m_2 a_{G_{2y}} \\
 -r_{2y} F_{23x} + r_{2x} F_{23y} + M_{21} &= 0 \\
 -F_{23x} + F_{34x} &= m_3 a_{G_{3x}} \\
 -F_{23y} + F_{34y} &= m_3 a_{G_{3y}} \\
 r_{32y} F_{23x} - r_{32x} F_{23y} - r_{34y} F_{34x} + r_{34x} F_{34y} &= I_{G_3} \alpha_3 \\
 -F_{34x} + F_{41x} &= m_4 a_{G_{4x}} \\
 -F_{34y} + F_{41y} &= m_4 a_{G_{4y}} \\
 r_{4y} F_{34x} - r_{4x} F_{34y} &= (I_{G_4} + m_4 b_4^2) \alpha_4
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 r_{2x} &= r_2 \cos(\theta_2) \\
 r_{2y} &= r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \\
 r_{32x} &= -b_3 \cos(\theta_3) \\
 r_{32y} &= -b_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\
 r_{34x} &= (r_3 - b_3) \cos(\theta_3) \\
 r_{34y} &= (r_3 - b_3) \operatorname{sen}(\theta_3) \\
 r_{4x} &= r_4 \cos(\theta_4) \\
 r_{4y} &= r_4 \operatorname{sen}(\theta_4)
 \end{aligned}$$

El sistema a resolverse en forma matricial es:

$$\{\mathbf{F}(\theta_2)\} = [\mathbf{G}(\theta_2)]^{-1} \{\mathbf{F}_{ef}(\theta_2)\} \quad (\text{ej2-10})$$

con:

$$[\mathbf{G}(\theta_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 \sin(\theta_2) & r_2 \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \sin(\theta_3(\theta_2)) & b_3 \cos(\theta_3(\theta_2)) & (b_3 - r_3) \sin(\theta_3(\theta_2)) & (r_3 - b_3) \cos(\theta_3(\theta_2)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 \sin(\theta_4(\theta_2)) & -r_4 \cos(\theta_4(\theta_2)) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y,

$$\{\mathbf{F}_{ef}(\theta_2)\} = \begin{Bmatrix} m_2 a_{G_{2x}}(\theta_2) \\ m_2 a_{G_{2y}}(\theta_2) \\ 0 \\ m_3 a_{G_{3x}}(\theta_2) \\ m_3 a_{G_{3y}}(\theta_2) \\ I_{G_3} \alpha_3(\theta_2) \\ m_4 a_{G_{4x}}(\theta_2) \\ m_4 a_{G_{4y}}(\theta_2) \\ (I_{G_4} + m_4 b_4^2) \alpha_4(\theta_2) \end{Bmatrix}$$

Se utiliza entonces un software matemático para hallar el vector:

$$\{\mathbf{F}(\theta_2)\} = \begin{Bmatrix} F_{21x}(\theta_2) \\ F_{21y}(\theta_2) \\ F_{23x}(\theta_2) \\ F_{23y}(\theta_2) \\ F_{34x}(\theta_2) \\ F_{34y}(\theta_2) \\ F_{41x}(\theta_2) \\ F_{41y}(\theta_2) \\ M_{21}(\theta_2) \end{Bmatrix}$$

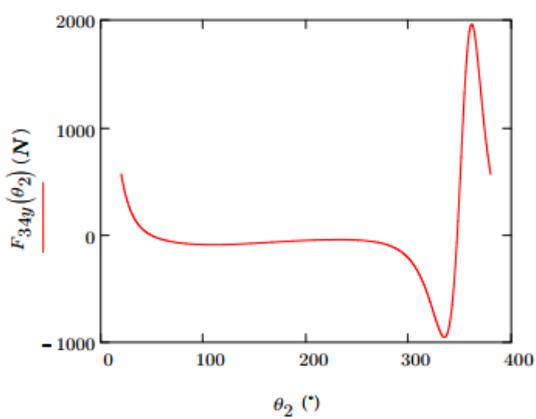
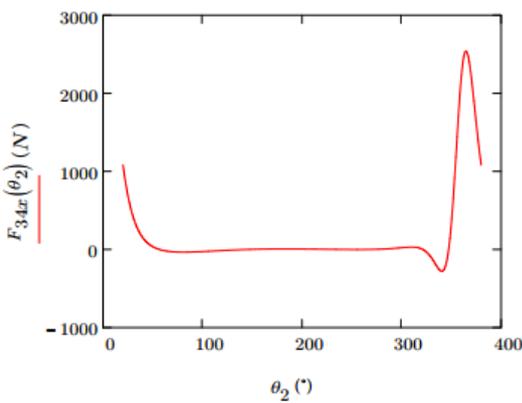
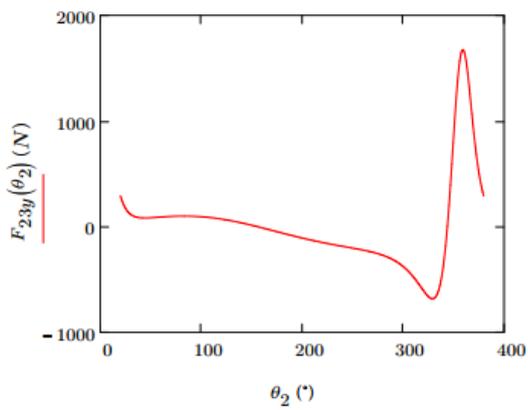
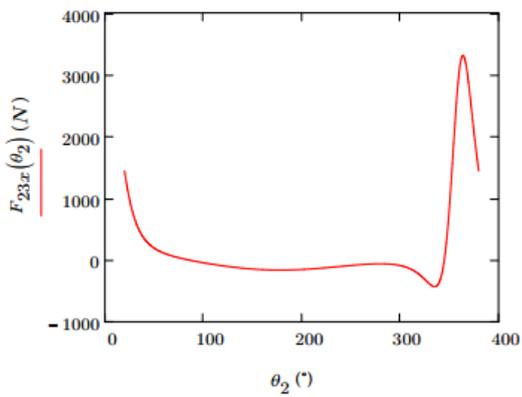
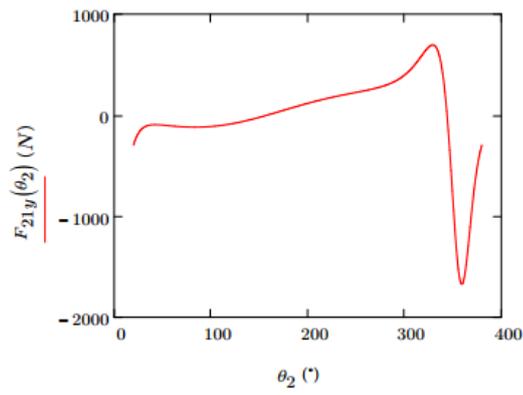
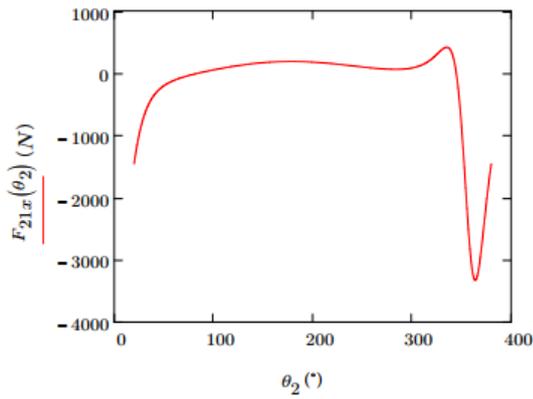
Mediante la resolución de la expresión (ej2-10) para la matriz $[G(\theta_2)]$ y el vector $\{F_{ef}(\theta_2)\}$ anteriores.

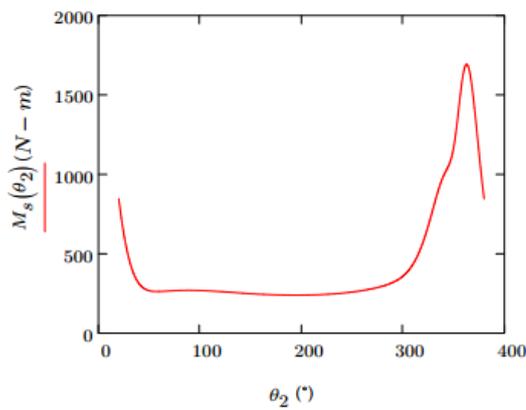
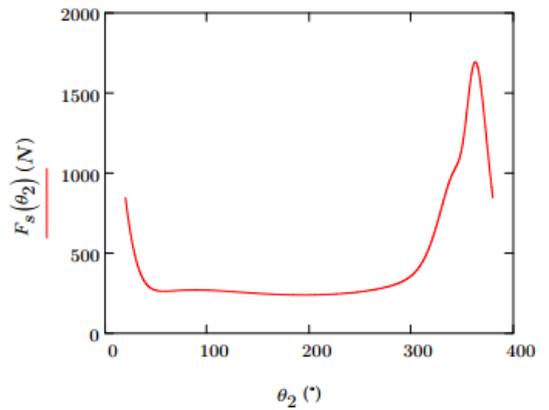
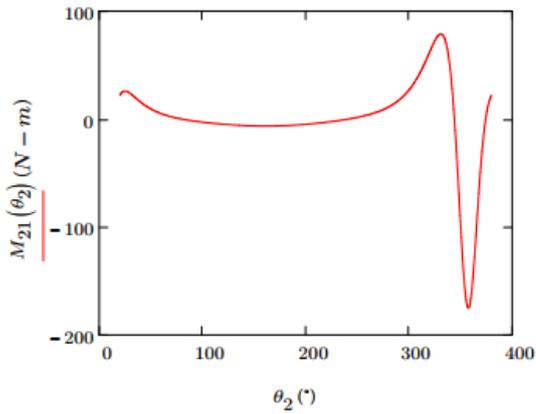
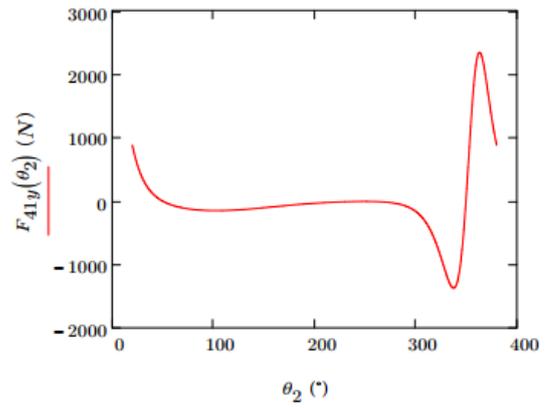
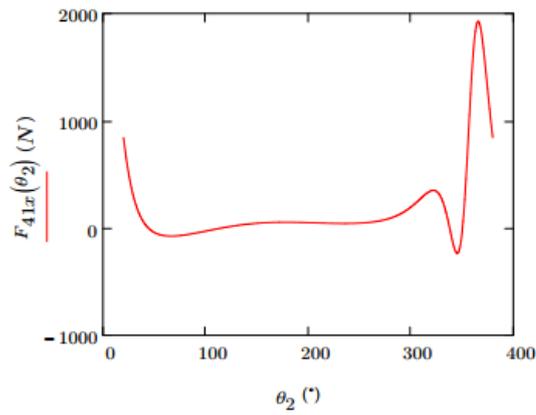
Finalmente, la fuerza y momento de sacudimiento están dados por:

$$F_s(\theta_2) = \sqrt{(F_{21x}(\theta_2) + F_{41x}(\theta_2))^2 + (F_{21y}(\theta_2) + F_{41y}(\theta_2))^2} \quad (\text{ej2-11})$$

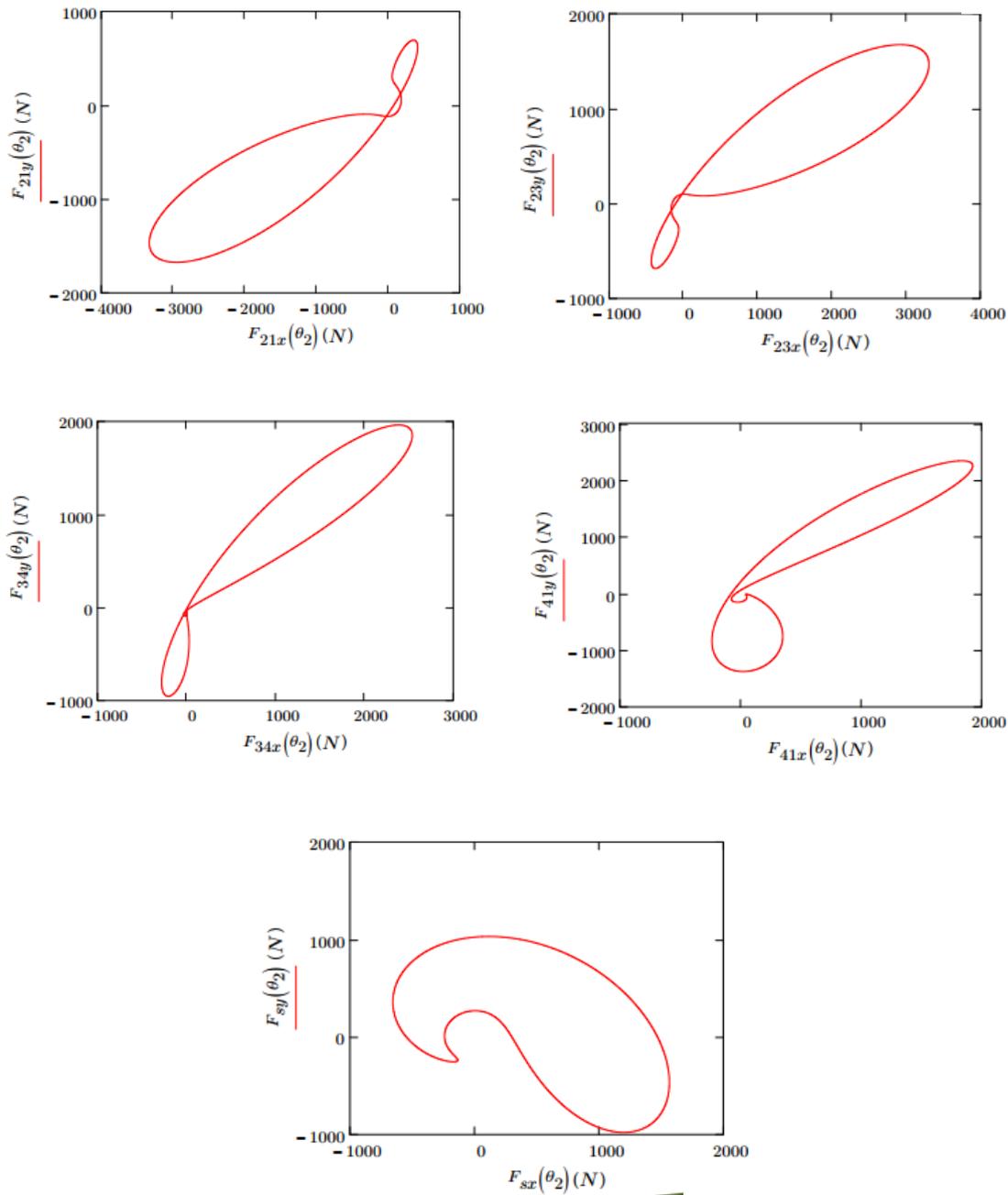
$$M_s(\theta_2) = r_1 \sin(\theta_1) F_{41x}(\theta_2) - r_1 \cos(\theta_1) F_{41y}(\theta_2) - M_{21}(\theta_2) \quad (\text{ej2-12})$$

A continuación se grafican cada entrada de $\{F(\theta_2)\}$ con respecto a θ_2 para un ciclo completo ($20^\circ \leq \theta_2 \leq 380^\circ$), obteniéndose las siguientes gráficas:





Las gráficas de las componentes y vs componentes x para las fuerzas y momentos en el mecanismo, se muestran a continuación:

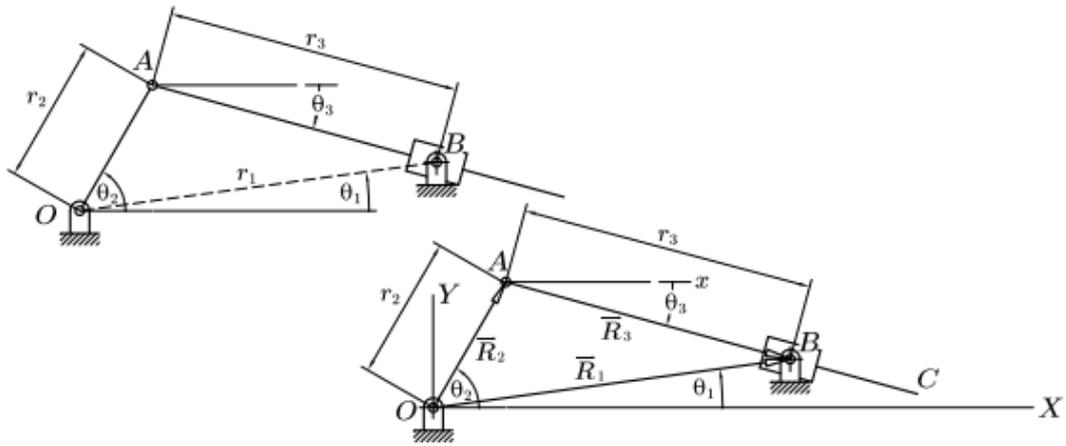


3.3.3 Análisis de fuerzas dinámicas para un mecanismo manivela corredera invertido

La Figura 100 muestra el diagrama cinemático y su correspondiente lazo vectorial cerrado para un mecanismo manivela corredera invertido (RRTR) del cual se va a realizar la deducción de las ecuaciones de su cinemática, considerando que el eslabón manivela OA gira a una velocidad angular ω_2 y a una aceleración angular α_2 , ambas en sentido antihorario:

Figura 100

Diagramas cinéticos de los eslabones móviles del mecanismo



La siguiente tabla muestra las constantes derivadas de la geometría del mecanismo, así como las variables conocidas y desconocidas de la cinemática del mecanismo.

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		r_1, r_2, θ_1	
		Variables conocidas	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	θ_2	θ_3, r_3
	Velocidad	ω_2	ω_3, v_3
	Aceleración	α_2	α_3, a_3

Análisis de posición. A partir del lazo vectorial mostrado en la Figura 96, la ecuación vectorial de posición es:

$$-\bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \vec{0} \quad (3.3.3-1)$$

Y su forma polar:

$$-r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = 0 + i0$$

Escribiendo esta última ecuación en su forma trigonométrica, se tiene:

$$-r_1 \cos\theta_1 - ir_1 \sin\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 + ir_2 \sin\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 + ir_3 \sin\theta_3 = 0 + i0$$

De donde, separando partes reales e imaginarias y despejando las expresiones resultantes de acuerdo a las variables incógnita de posición, se tiene:

$$\begin{aligned} r_3 \cos\theta_3 &= r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2 \\ r_3 \sin\theta_3 &= r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2 \end{aligned} \quad (3.3.3-2)$$

Que son las ecuaciones escalares de posición.

Dividiendo la segunda ecuación del sistema (3.3.3-2) para la primera y despejando θ_3 , resulta:

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{r_1 \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_1 \operatorname{cos}\theta_1 - r_2 \operatorname{cos}\theta_2}\right) \quad (3.3.3-3)$$

Elevando al cuadrado cada término del sistema (3.3.3-2) y sumándolos, para luego despejar r_3 , produce:

$$\begin{aligned} r_3 &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \operatorname{cos}\theta_1 \operatorname{cos}\theta_2 - 2r_1 r_2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2} \\ r_3 &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 (\operatorname{cos}\theta_1 \operatorname{cos}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)} \\ r_3 &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \operatorname{cos}(\theta_2 - \theta_1)} \end{aligned} \quad (3.3.3-4)$$

Expresión que también se puede lograr al aplicar la ley de cosenos al triángulo OAB .

Análisis de velocidad. Derivando en el tiempo el sistema de ecuaciones (3.3.3-2) bajo la consideración de que r_1 , θ_1 y r_2 son constantes, se tiene:

$$\begin{aligned} v_3 \operatorname{cos}\theta_3 - r_3 \omega_3 \operatorname{sen}\theta_3 &= r_2 \omega_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ v_3 \operatorname{sen}\theta_3 + r_3 \omega_3 \operatorname{cos}\theta_3 &= -r_2 \omega_2 \operatorname{cos}\theta_2 \end{aligned} \quad (3.3.3-5)$$

Que corresponden a las ecuaciones escalares de velocidad.

Resolviendo por Cramer el sistema lineal (3.3.3-5) en v_3 , ω_3 , y luego de simplificar da:

$$v_3 = r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \quad (3.3.3-6)$$

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{cos}(\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \quad (3.3.3-7)$$

Análisis de aceleración. Al derivar en el tiempo el sistema de ecuaciones (3.3.3-5) se obtiene:

$$\begin{aligned} a_3 \operatorname{cos}\theta_3 - v_3 \omega_3 \operatorname{sen}\theta_3 - \left[v_3 \omega_3 \operatorname{sen}\theta_3 + r_3 (\alpha_3 \operatorname{sen}\theta_3 + \omega_3^2 \operatorname{cos}\theta_3) \right] &= r_2 (\alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 + \omega_2^2 \operatorname{cos}\theta_2) \\ a_3 \operatorname{sen}\theta_3 + v_3 \omega_3 \operatorname{cos}\theta_3 + \left[v_3 \omega_3 \operatorname{cos}\theta_3 + r_3 (\alpha_3 \operatorname{cos}\theta_3 - \omega_3^2 \operatorname{sen}\theta_3) \right] &= -r_2 (\alpha_2 \operatorname{cos}\theta_2 - \omega_2^2 \operatorname{sen}\theta_2) \end{aligned}$$

Y, reorganizando las anteriores ecuaciones, de acuerdo a las variables incógnita de aceleración, resulta:

$$\begin{aligned} a_3 \cos \theta_3 - r_3 \alpha_3 \sin \theta_3 &= r_2 \alpha_2 \sin \theta_2 + r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + 2v_3 \omega_3 \sin \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 \\ a_3 \sin \theta_3 + r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 &= -r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 + r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 - 2v_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (3.3.3-8)$$

Que son las ecuaciones escalares de aceleración.

Si se resuelve el sistema lineal (3.3.3-8) en a_3 y α_3 , da:

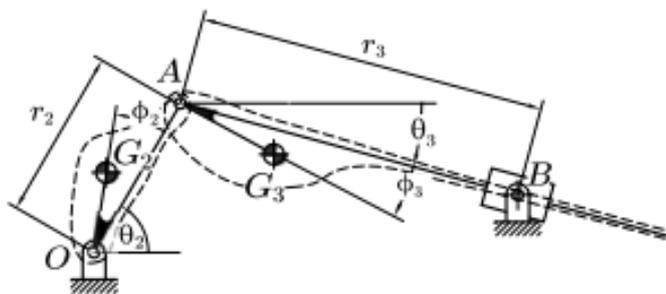
$$a_3 = r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_3 \omega_3^2 + r_2 \alpha_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) \quad (3.3.3-9)$$

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_3) - r_2 \alpha_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - 2v_3 \omega_3}{r_3} \quad (3.3.3-10)$$

A continuación, la Figura 101 muestra el diagrama cinemático (con forma real de los eslabones en líneas entrecortadas) de un mecanismo manivela corredera invertido con sus centros de masa ubicados en las posiciones G_2 y G_3 . La velocidad rotacional de la manivela ω_2 es antihoraria, así como su aceleración angular α_2 , también antihoraria. Las distancias de los centros de masa con respecto a sus pares cinemáticos O y A se nominan como $r_{OG_2} = r_{G_2} = b_2$ y $r_{AG_3} = b_3$. Los ángulos con respecto a OA y AB , que ubican los centros de masa son ϕ_2 y ϕ_3 .

Figura 101

Geometría del mecanismo manivela corredera invertido para el análisis de fuerzas dinámicas

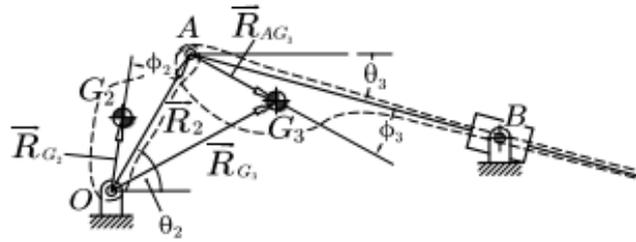


En el análisis de fuerzas dinámicas, como antes, se va a considerar que el efecto de los pesos de los eslabones es despreciable en comparación a las fuerzas efectivas producidas y que la fricción en los pares cinemáticos es despreciable.

El primer paso a efectuarse en el análisis de fuerzas dinámicas es el cálculo de las aceleraciones de los centros de masa, para lo cual, considérese a la Figura 102 de de la página siguiente.

Figura 102

Lazos vectoriales para el cálculo de las aceleraciones de los centros de masa

Para el centro de masa G_2 , entonces:

$$\bar{R}_{G_2} = b_2 e^{i(\theta_2 + \phi_2)}$$

$$\bar{R}_{G_2} = b_2 \cos(\theta_2 + \phi_2) + i b_2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2)$$

De donde,

$$r_{G_2,x} = b_2 \cos(\theta_2 + \phi_2)$$

$$r_{G_2,y} = b_2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2)$$

Derivando las anteriores expresiones dos veces con respecto al tiempo, considerando que b_2 y ϕ_2 no cambian con el tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned} a_{G_2,x} &= -b_2 [\alpha_2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2) + \omega_2^2 \cos(\theta_2 + \phi_2)] \\ a_{G_2,y} &= b_2 [\alpha_2 \cos(\theta_2 + \phi_2) - \omega_2^2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2)] \end{aligned} \quad (3.3.3-11)$$

Ahora, para el centro de masa G_3 se tiene:

$$\bar{R}_{G_3} = \bar{R}_2 + \bar{R}_{AG_3} = r_2 e^{i\theta_2} + b_3 e^{i(\theta_3 + \phi_3)}$$

$$\bar{R}_{G_3} = r_2 \cos(\theta_2) + b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) + i(r_2 \text{sen}(\theta_2) + b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3))$$

Es decir,

$$r_{G_3,x} = r_2 \cos(\theta_2) + b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3)$$

$$r_{G_3,y} = r_2 \text{sen}(\theta_2) + b_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)$$

Y como antes, derivando dos veces con respecto al tiempo bajo la consideración de que r_2 , b_3 y ϕ_3 no dependen del mismo, se obtiene:

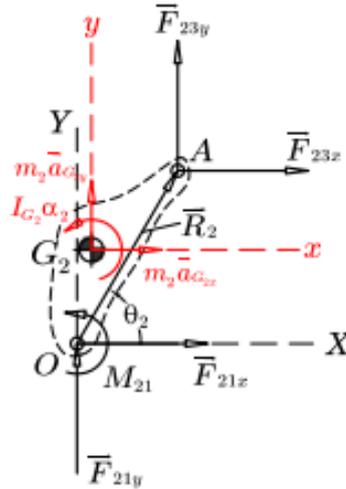
$$\begin{aligned} a_{G_3,x} &= -r_2 [\alpha_2 \text{sen}(\theta_2) + \omega_2^2 \cos(\theta_2)] - b_3 [\alpha_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3) + \omega_3^2 \cos(\theta_3 + \phi_3)] \\ a_{G_3,y} &= r_2 [\alpha_2 \cos(\theta_2) - \omega_2^2 \text{sen}(\theta_2)] + b_3 [\alpha_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) - \omega_3^2 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)] \end{aligned} \quad (3.3.3-12)$$

A continuación, se desarrollan las ecuaciones de la cinética del sólido rígido para cada eslabón del mecanismo.

Para el eslabón manivela se tiene el siguiente diagrama de *fuerzas exteriores* y *fuerzas efectivas*:

Figura 103

Diagrama de fuerzas para la manivela



Considerando que la manivela tiene una masa m_2 y un momento de inercia másico I_{G_2} , y que el eslabón manivela tiene rotación pura con respecto a O , entonces, con base en la expresión (3.2-6), las ecuaciones para las *fuerzas dinámicas* son:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{21} + \bar{F}_{23} &= m_2 \bar{a}_{G_2} & \left(\sum \bar{F}_{ext} = m_2 \bar{a}_{G_2} \right) \\ \bar{R}_2 \times \bar{F}_{23} + \bar{M}_{21} &= I_O \bar{\alpha}_2 & \left(\sum \bar{M}_O = I_O \bar{\alpha}_2 \right) \end{aligned} \quad (3.3.3-13)$$

Donde,

$$I_O = I_{G_2} + m_2 b_2^2 \quad (3.3.3-14)$$

Si se descomponen las ecuaciones (3.3.3-13) en componentes escalares expresadas en el sistema local x-y que se ubica en G_2 , se tiene:

$$\begin{aligned} F_{21x} + F_{23x} &= m_2 a_{G_{2x}} & \left(\sum F_x = m_2 a_{G_{2x}} \right) \\ F_{21y} + F_{23y} &= m_2 a_{G_{2y}} & \left(\sum F_y = m_2 a_{G_{2y}} \right) \\ -r_{2y} F_{23x} + r_{2x} F_{23y} + M_{21} &= I_O \alpha_2 & \left(\sum M_O = I_O \alpha_2 \right) \end{aligned} \quad (3.3.3-15)$$

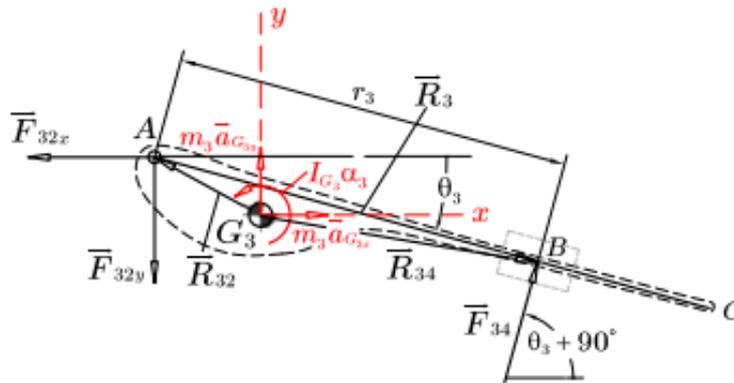
Donde,

$$\begin{aligned} r_{2x} &= r_2 \cos(\theta_2) \\ r_{2y} &= r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \end{aligned} \quad (3.3.3-16)$$

Para el eslabón acoplador, se tiene el siguiente diagrama de *fuerzas exteriores* y *fuerzas efectivas*:

Figura 104

Diagrama de fuerzas para el acoplador



Tomando en cuenta que el acoplador tiene una masa m_3 y un momento de inercia másico I_{G_3} , entonces, las ecuaciones para las fuerzas dinámicas son:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{32} + \bar{F}_{34} &= m_3 \bar{a}_{G_3} & (\sum \bar{F}_{ext} &= m_3 \bar{a}_{G_3}) \\ \bar{R}_{32} \times \bar{F}_{32} + \bar{R}_{34} \times \bar{F}_{34} &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3 & (\sum \bar{M}_G &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3) \end{aligned} \quad (3.3.3-17)$$

Por la tercera ley de Newton, $\bar{F}_{32} = -\bar{F}_{23}$, entonces:

$$\begin{aligned} -\bar{F}_{23} + \bar{F}_{34} &= m_3 \bar{a}_{G_3} & (\sum \bar{F}_{ext} &= m_3 \bar{a}_{G_3}) \\ \bar{R}_{32} \times (-\bar{F}_{23}) + \bar{R}_{34} \times \bar{F}_{34} &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3 & (\sum \bar{M}_G &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3) \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} -\bar{F}_{23} + \bar{F}_{34} &= m_3 \bar{a}_{G_3} & (\sum \bar{F}_{ext} &= m_3 \bar{a}_{G_3}) \\ -\bar{R}_{32} \times \bar{F}_{23} + \bar{R}_{34} \times \bar{F}_{34} &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3 & (\sum \bar{M}_G &= I_{G_3} \bar{\alpha}_3) \end{aligned} \quad (3.3.3-18)$$

Descomponiéndose las ecuaciones (3.3.1-9) en sus componentes escalares expresadas en el sistema local x-y que se ubica en G_3 , se tiene:

$$\begin{aligned}
 -F_{23x} + F_{34} \cos(\theta_3 + 90^\circ) &= m_3 a_{G_{3x}} & (\sum F_x = m_3 a_{G_{3x}}) \\
 -F_{23y} + F_{34} \sin(\theta_3 + 90^\circ) &= m_3 a_{G_{3y}} & (\sum F_y = m_3 a_{G_{3y}}) \\
 r_{32y} F_{23x} - r_{32x} F_{23y} - [r_{34y} \cos(\theta_3 + 90^\circ) - r_{34x} \sin(\theta_3 + 90^\circ)] F_{34} &= I_{G_3} \alpha_3 & (\sum M_G = I_{G_3} \alpha_3)
 \end{aligned}$$

donde,

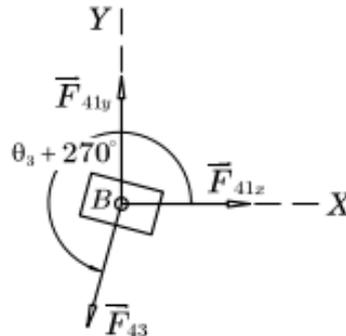
$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{32} &= -\bar{R}_{AG_3} = -b_3 e^{i(\theta_3 + \phi_3)} = -b_3 (\cos(\theta_3 + \phi_3) + i \sin(\theta_3 + \phi_3)) \\
 r_{32x} &= -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\
 r_{32y} &= -b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3)
 \end{aligned} \tag{3.3.3-20}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{34} &= \bar{R}_{32} + \bar{R}_3 = -\bar{R}_{AG_3} + \bar{R}_3 = -b_3 e^{i(\theta_3 + \phi_3)} + r_3 e^{i\theta_3} \\
 \bar{R}_{34} &= r_3 \cos \theta_3 - b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) + i [r_3 \sin \theta_3 - b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3)] \\
 r_{34x} &= r_3 \cos \theta_3 - b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\
 r_{34y} &= r_3 \sin \theta_3 - b_3 \sin(\theta_3 + \phi_3)
 \end{aligned} \tag{3.3.3-21}$$

Para el collarín se tiene el siguiente diagrama de fuerzas exteriores y fuerzas efectivas: (3.3.3-19).

Figura 105

Diagrama de fuerzas para el collarín



Dado que el collarín puede ser tratado como una partícula, y al tener solo rotación pura con respecto a B, entonces se puede considerar un elemento en equilibrio estático y considerando sus componentes escalares se tiene:

$$\begin{aligned}
 F_{41x} + F_{43} \cos(\theta_3 + 270^\circ) &= 0 & (\sum F_x = 0) \\
 F_{41y} + F_{43} \sin(\theta_3 + 270^\circ) &= 0 & (\sum F_y = 0)
 \end{aligned} \tag{3.3.3-22}$$

Por la tercera ley de Newton, $\bar{F}_{43} = -\bar{F}_{34}$ entonces:

$$\begin{aligned} F_{41x} - F_{34} \cos(\theta_3 + 270^\circ) &= 0 \quad (\sum F_x = 0) \\ F_{41y} - F_{34} \sen(\theta_3 + 270^\circ) &= 0 \quad (\sum F_y = 0) \end{aligned} \quad (3.3.3-22)$$

Agrupando las ecuaciones (3.3.3-15), (3.3.3-19) y (3.3.3-22) se tiene:

$$\begin{aligned} F_{21x} + F_{23x} &= m_2 a_{G_{2x}} \\ F_{21y} + F_{23y} &= m_2 a_{G_{2y}} \\ -r_{2y} F_{23x} + r_{2x} F_{23y} + M_{21} &= I_O \alpha_2 \\ -F_{23x} + F_{34} \cos(\theta_3 + 90^\circ) &= m_3 a_{G_{3x}} \\ -F_{23y} + F_{34} \sen(\theta_3 + 90^\circ) &= m_3 a_{G_{3y}} \\ r_{32y} F_{23x} - r_{32x} F_{23y} - [r_{34y} \cos(\theta_3 + 90^\circ) - r_{34x} \sen(\theta_3 + 90^\circ)] F_{34} &= I_{G_3} \alpha_3 \\ F_{41x} - F_{34} \cos(\theta_3 + 270^\circ) &= 0 \\ F_{41y} - F_{34} \sen(\theta_3 + 270^\circ) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.3-23)$$

Donde,

$$\begin{aligned} r_{2x} &= r_2 \cos(\theta_2) \\ r_{2y} &= r_2 \sen(\theta_2) \\ r_{32x} &= -b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\ r_{32y} &= -b_3 \sen(\theta_3 + \phi_3) \\ r_{34x} &= r_3 \cos \theta_3 - b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\ r_{34y} &= r_3 \sen \theta_3 - b_3 \sen(\theta_3 + \phi_3) \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial el sistema (3.3.3-23), resulta:

$$[\mathbf{G}] \cdot \{\mathbf{F}_{ext}\} = \{\mathbf{F}_{ef}\}$$

Donde:

$[G]$ es la matriz de la geometría del mecanismo.

$\{F\}$ es el vector de las fuerzas en los pares cinemáticos, que son las incógnitas a determinarse.

$\{F_{ef}\}$ es el vector de las fuerzas efectivas, con:

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 \sen(\theta_2) & r_2 \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cos(\theta_3 + 90^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sen(\theta_3 + 90^\circ) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \sen(\theta_3 + \phi_3) & b_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) & r_3 - b_3 [\sen \theta_3 \sen(\theta_3 + \phi_3) + \cos \theta_3 \cos(\theta_3 + \phi_3)] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta_3 + 270^\circ) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sen(\theta_3 + 270^\circ) & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{F}_{ef}\} = \begin{Bmatrix} m_2 a_{G_{2x}} \\ m_2 a_{G_{2y}} \\ I_O \alpha_2 \\ m_3 a_{G_{3x}} \\ m_3 a_{G_{3y}} \\ I_{G_3} \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad y \quad \{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} F_{21x} \\ F_{21y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{34} \\ F_{41x} \\ F_{41y} \\ M_{21} \end{Bmatrix}$$

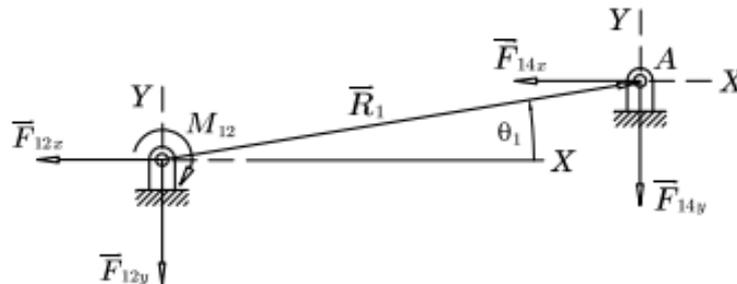
Entonces,

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{G}]^{-1} \{\mathbf{F}_{ef}\} \quad (3.3.3-24)$$

Finalmente, en el bastidor del mecanismo se tiene el siguiente diagrama de fuerzas exteriores y fuerzas efectivas:

Figura 106

Diagrama de fuerzas para el bastidor del mecanismo



A partir de la figura anterior, se calcula la fuerza de sacudimiento (fuerza que afecta al bastidor del mecanismo) F_s , como:

$$\bar{F}_s = \bar{F}_{12} + \bar{F}_{14}$$

Pero dado que, $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ y $\bar{F}_{14} = -\bar{F}_{41}$ por la tercera ley de Newton, entonces:

$$\bar{F}_s = -\bar{F}_{21} - \bar{F}_{41}$$

Y descomponiendo en sus componentes escalares x - y :

$$\begin{aligned} F_{sx} &= -F_{21x} - F_{41x} \\ F_{sy} &= -F_{21y} - F_{41y} \end{aligned} \quad (3.3.3-25)$$

De donde,

$$F_s = \sqrt{(F_{21x} + F_{41x})^2 + (F_{21y} + F_{41y})^2} \quad (3.3.3-26)$$

Y el momento de sacudimiento (momento que afecta al bastidor del mecanismo) M_s con respecto al punto O :

$$M_s = \bar{R}_1 \times (-\bar{F}_{41}) - M_{21}$$

Entonces:

$$M_s = r_1 \sin(\theta_1) F_{41x} - r_1 \cos(\theta_1) F_{41y} - M_{21} \quad (3.3.3-27)$$

Es necesaria una implementación computacional para observar el comportamiento de las fuerzas dinámicas en el mecanismo para un giro completo de la manivela del mecanismo.

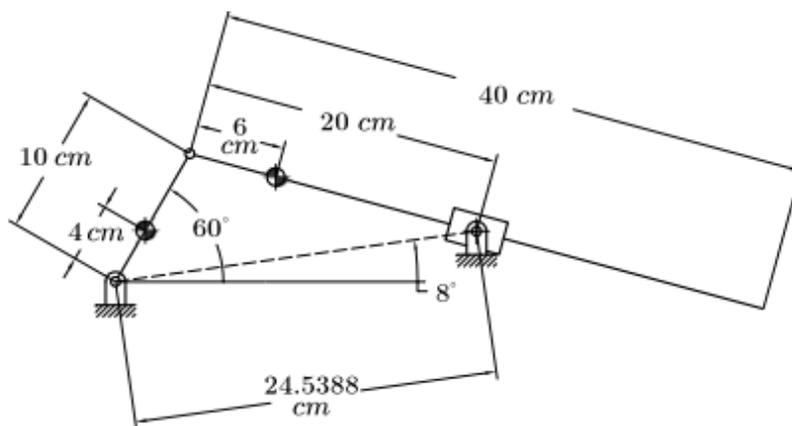
Ejemplo 3

Para el mecanismo manivela corredera invertido, mostrado en la Figura 107, cuya manivela OA gira a una velocidad angular constante de 500 rpm , gráfiquese para un ciclo completo de funcionamiento del mismo que las fuerzas en los pares cinemáticos, así como la fuerza de sacudimiento y el momento de sacudimiento.

Además, gráfiquese los componentes y vs componentes x de todas las fuerzas y momentos en el mecanismo. Supóngase que no existe fricción en los pares y considérese la siguiente información: $b_2 = 4 \text{ cm}$, $b_3 = 6 \text{ cm}$, $m_2 = 0.1 \text{ kg}$, $m_3 = 0.3 \text{ kg}$, $I_{G_2} = 0.00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_{G_3} = 0.0002 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Figura 107

Mecanismo del ejemplo 3



Análisis cinemático del mecanismo

Del análisis cinemático visto en el apartado 3.3.3 y para el mecanismo de la Figura 107, se tiene:

$$\theta_3(\theta_2) = \arctan\left(\frac{r_1 \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_1 \operatorname{cos}\theta_1 - r_2 \operatorname{cos}\theta_2}\right) \quad (\text{ej3-1})$$

$$r_3(\theta_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \operatorname{cos}(\theta_2 - \theta_1)} \quad (\text{ej3-2})$$

$$v_3(\theta_2) = r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3(\theta_2)) \quad (\text{ej3-3})$$

$$\omega_3(\theta_2) = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{cos}(\theta_2 - \theta_3(\theta_2))}{r_3(\theta_2)} \quad (\text{ej3-4})$$

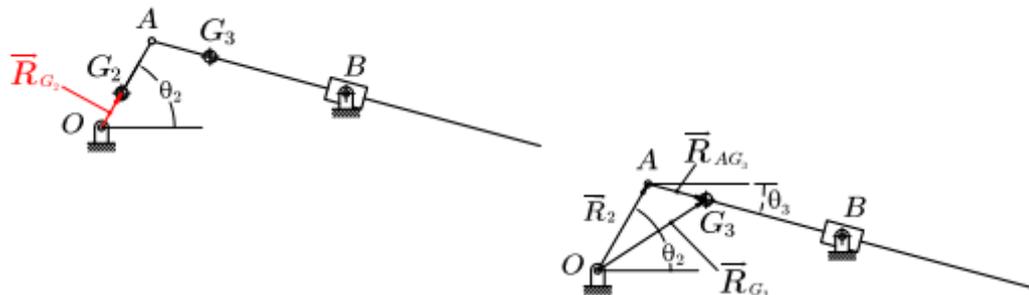
$$\alpha_3(\theta_2) = \frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3(\theta_2)) - 2v_3(\theta_2)\omega_3(\theta_2)}{r_3(\theta_2)} \quad (\text{ej3-5})$$

Análisis cinemático de los centros de masa

Para los lazos OG_2 y OAG_3 mostrados en la Figura 108:

Figura 108

Lazos para el análisis cinemático de los centros de masa del mecanismo del ejemplo 3



Del apartado 3.3.3 para el centro de masa G_2 , tomando en cuenta $\alpha_2 = 0$ y $\phi_2 = 0^\circ$:

$$\begin{aligned} a_{G_2,x}(\theta_2) &= -b_2 \omega_2^2 \operatorname{cos}(\theta_2) \\ a_{G_2,y}(\theta_2) &= -b_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2) \end{aligned} \quad (\text{ej3-6})$$

Del mismo apartado, para el centro de masa G_3 , considerando $\alpha_2 = 0$ y $\phi_3 = 0^\circ$:

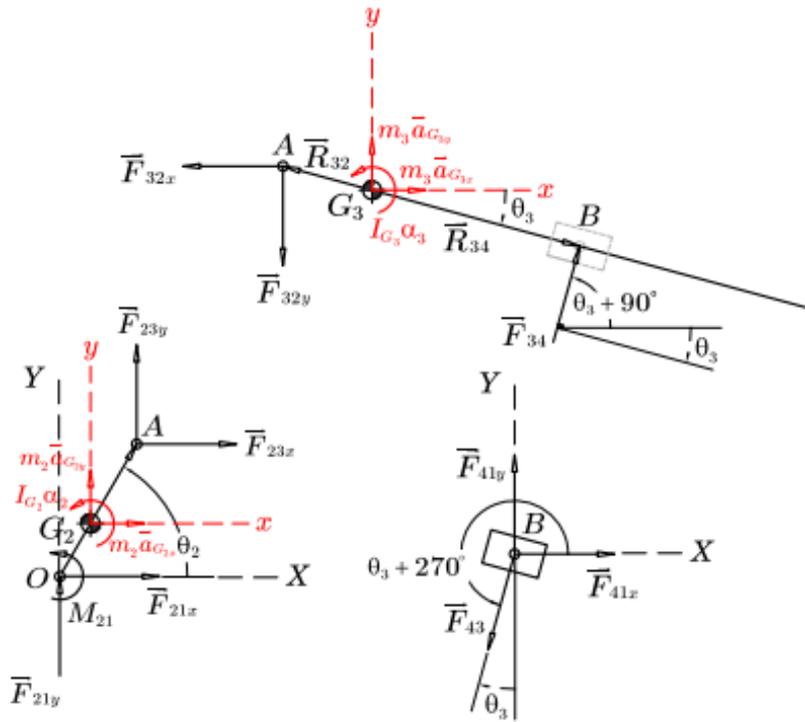
$$\begin{aligned} a_{G_3,x}(\theta_2) &= -r_2 \omega_2^2 \operatorname{cos}(\theta_2) - b_3 [\alpha_3(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2)) + \omega_3^2(\theta_2) \operatorname{cos}(\theta_3(\theta_2))] \\ a_{G_3,y}(\theta_2) &= -r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2) + b_3 [\alpha_3(\theta_2) \operatorname{cos}(\theta_3(\theta_2)) - \omega_3^2(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2))] \end{aligned} \quad (\text{ej3-7})$$

Análisis cinetostático o de fuerzas dinámicas

Los diagramas cinéticos de cada eslabón móvil del mecanismo se muestran a continuación:

Figura 109

Diagramas cinéticos de los eslabones móviles del mecanismo



Del apartado 3.3.3 para las ecuaciones de las *fuerzas dinámicas* se tiene:

$$\begin{aligned}
 F_{21x} + F_{23x} &= m_2 a_{G_2x} \\
 F_{21y} + F_{23y} &= m_2 a_{G_2y} \\
 -r_{2y} F_{23x} + r_{2x} F_{23y} + M_{21} &= I_O \alpha_2 \\
 -F_{23x} + F_{34} \cos(\theta_3 + 90^\circ) &= m_3 a_{G_3x} \\
 -F_{23y} + F_{34} \sin(\theta_3 + 90^\circ) &= m_3 a_{G_3y} \\
 r_{32y} F_{23x} - r_{32x} F_{23y} - [r_{34y} \cos(\theta_3 + 90^\circ) - r_{34x} \sin(\theta_3 + 90^\circ)] F_{34} &= I_{G_3} \alpha_3 \\
 F_{41x} - F_{34} \cos(\theta_3 + 270^\circ) &= 0 \\
 F_{41y} - F_{34} \sin(\theta_3 + 270^\circ) &= 0
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 r_{2x} &= r_2 \cos(\theta_2) \\
 r_{2y} &= r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \\
 r_{32x}(\theta_2) &= -b_3 \cos(\theta_3(\theta_2)) \\
 r_{32y}(\theta_2) &= -b_3 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2)) \\
 r_{34x}(\theta_2) &= r_3(\theta_2) \cos(\theta_3(\theta_2)) - b_3 \cos(\theta_3(\theta_2)) \\
 r_{34y}(\theta_2) &= r_3(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2)) - b_3 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2))
 \end{aligned}$$

El sistema a resolverse en forma matricial es:

$$\{\mathbf{F}(\theta_2)\} = [\mathbf{G}(\theta_2)]^{-1} \{\mathbf{F}_{ef}(\theta_2)\} \quad (\text{ej3-8})$$

Con:

$$[\mathbf{G}(\theta_2)] = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) & r_2 \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & \cos(\theta_3(\theta_2) + 90^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) + 90^\circ) & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -b_3 \operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2)) & b_3 \cos(\theta_3(\theta_2)) & r_3(\theta_2) - b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta_3(\theta_2) + 270^\circ) & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\theta_3(\theta_2) + 270^\circ) & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Y:

$$\{\mathbf{F}_{ef}(\theta_2)\} = \begin{bmatrix}
 m_2(a_{G_{2x}}(\theta_2)) \\
 m_2(a_{G_{2y}}(\theta_2)) \\
 0 \\
 m_3(a_{G_{3x}}(\theta_2)) \\
 m_3(a_{G_{3y}}(\theta_2)) \\
 I_{G_3}(\alpha_3(\theta_2)) \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Se utiliza entonces un software matemático para hallar el vector:

$$\{\mathbf{F}(\theta_2)\} = \begin{Bmatrix} F_{21x}(\theta_2) \\ F_{21y}(\theta_2) \\ F_{23x}(\theta_2) \\ F_{23y}(\theta_2) \\ F_{34}(\theta_2) \\ F_{41x}(\theta_2) \\ F_{41y}(\theta_2) \\ M_{21}(\theta_2) \end{Bmatrix},$$

Mediante la resolución de la expresión (ej3-8) para la matriz $[G(\theta_2)]$ y el vector $\{F_{ef}(\theta_2)\}$ anteriores.

Finalmente, la fuerza y momento de sacudimiento están dados por:

$$F_s(\theta_2) = \sqrt{(F_{21x}(\theta_2) + F_{41x}(\theta_2))^2 + (F_{21y}(\theta_2) + F_{41y}(\theta_2))^2} \quad (\text{ej3-9})$$

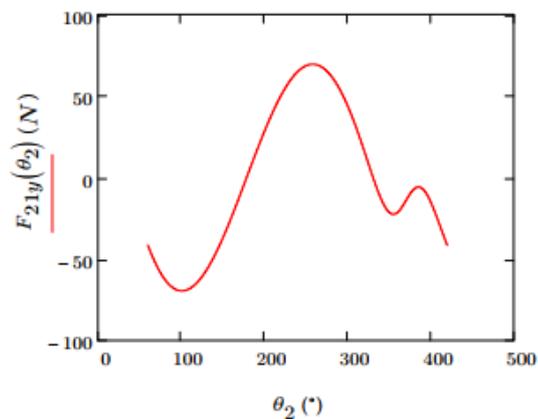
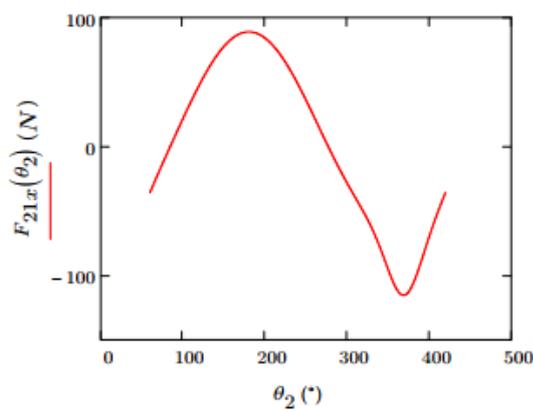
$$M_s(\theta_2) = r_1 \sin(\theta_1) F_{41x}(\theta_2) - r_1 \cos(\theta_1) F_{41y}(\theta_2) - M_{21}(\theta_2) \quad (\text{ej3-10})$$

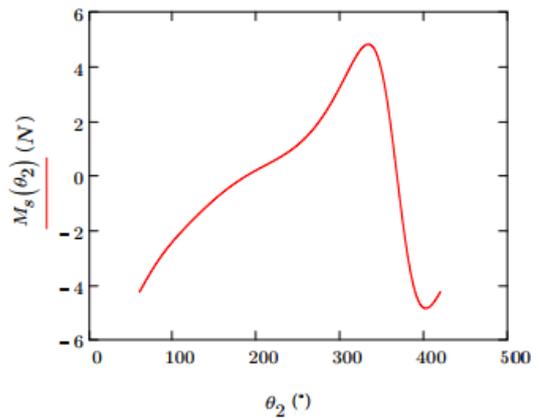
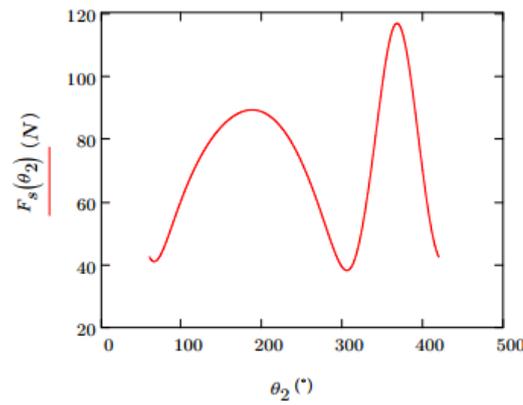
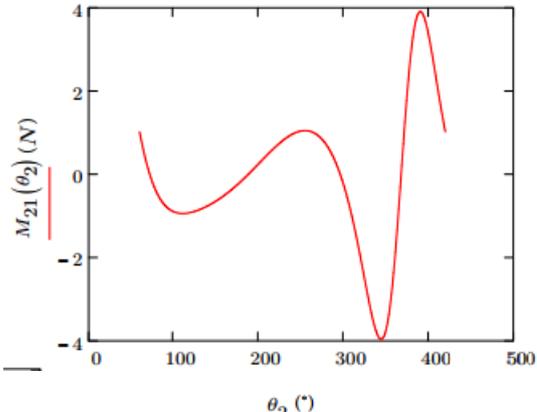
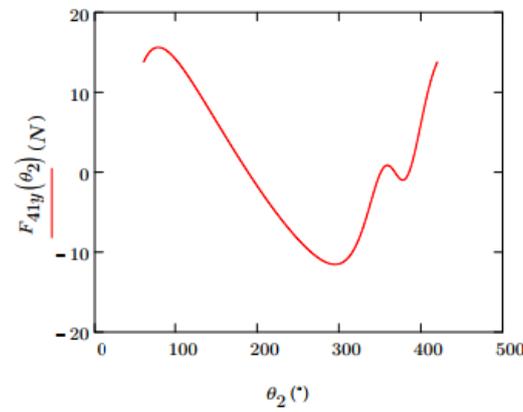
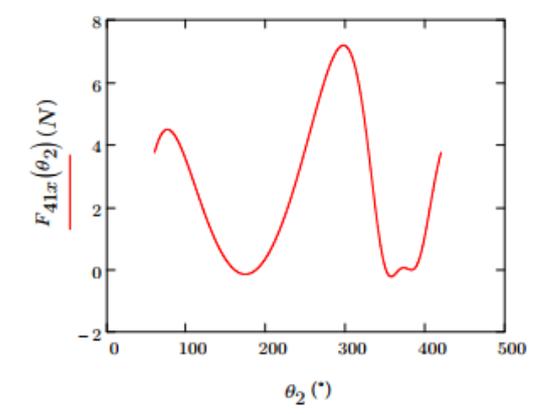
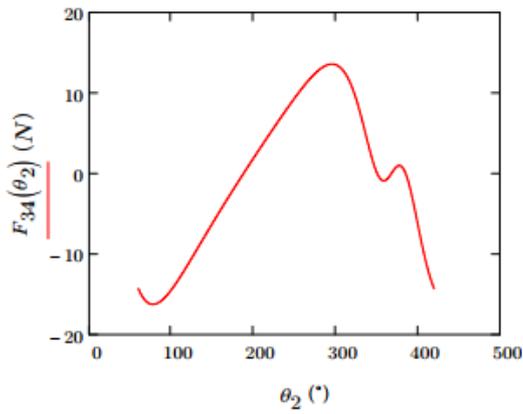
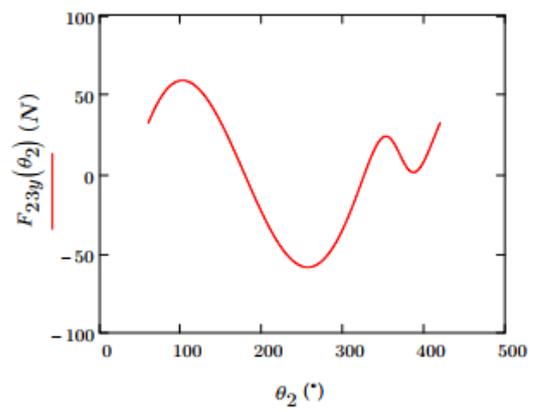
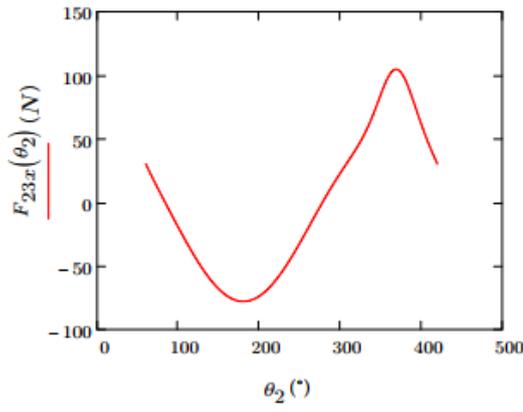
Además,

$$F_{sx}(\theta_2) = -F_{21x}(\theta_2) - F_{41x}(\theta_2) \quad (\text{ej3-11})$$

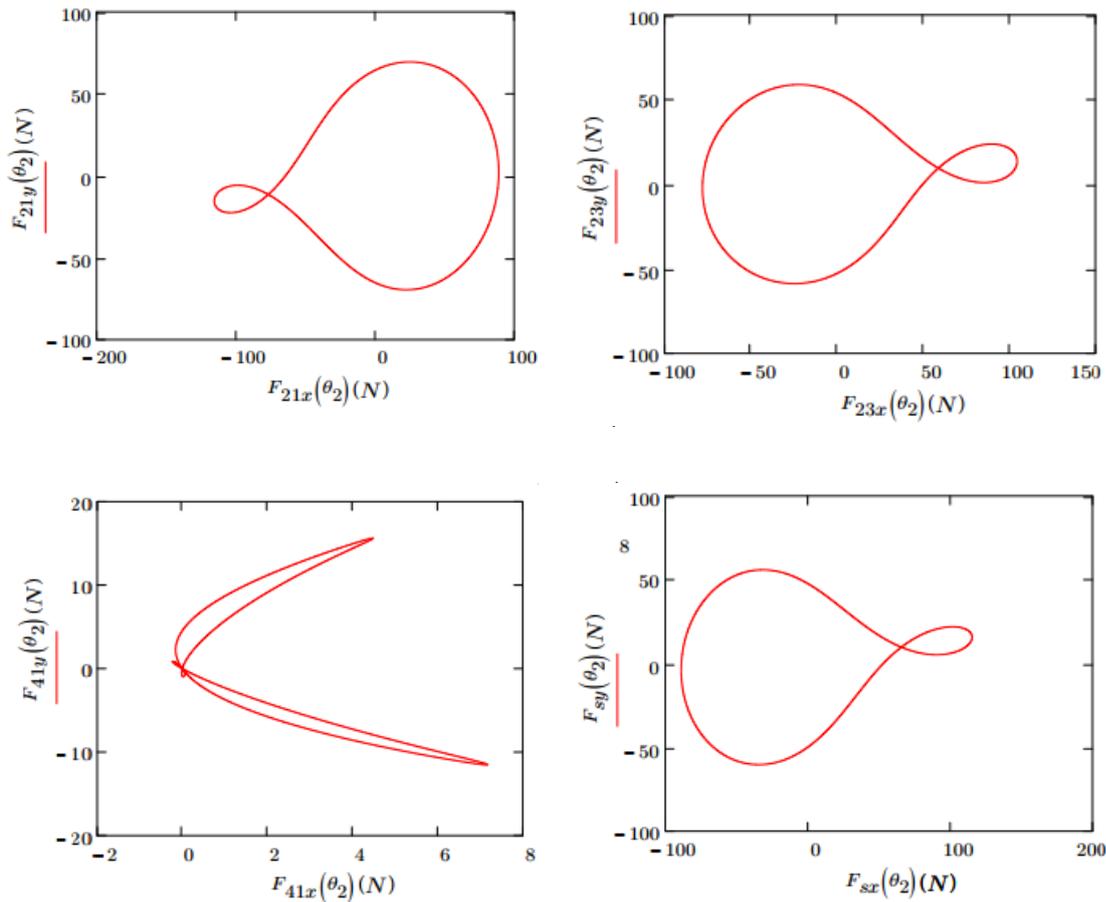
$$F_{sy}(\theta_2) = -F_{21y}(\theta_2) - F_{41y}(\theta_2) \quad (\text{ej3-12})$$

A continuación, se grafica cada entrada de $\{F(\theta_2)\}$ con respecto a θ_2 para un ciclo completo ($60^\circ \leq \theta_2 \leq 420^\circ$), obteniéndose las siguientes gráficas:





Las gráficas de los *componentes y* vs *componentes x* para las fuerzas en el mecanismo se muestran a continuación.



Finalmente, cabe recalcar que este procedimiento aplicado a los mecanismos manivela corredera, cuatro barras o manivela corredera invertido, se puede utilizar en cualquier mecanismo eslabonado de un grado de libertad, lo que conlleva la aplicación de todo lo revisado en el texto hasta este momento.

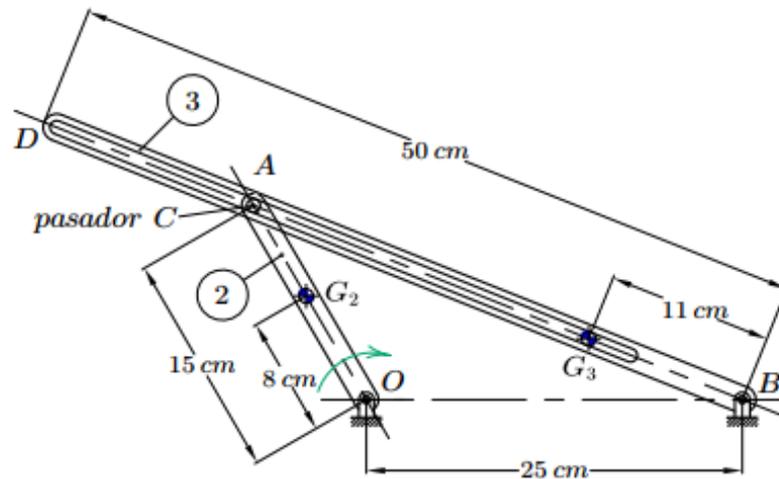
Ejemplo 4

En el mecanismo mostrado en la Figura 110 de la página siguiente, el eslabón manivela OA gira en sentido horario a una velocidad angular constante de 900 rpm.

1. Realícese el análisis cinemático de ciclo completo del mecanismo (empezando en 30°), incluyendo la *cinemática de los centros de masa*.
2. Efectúese el análisis de *fuerzas dinámicas o cinetostático* del mecanismo para un ciclo completo de movimiento (empezando en 30°).
3. Grafíquese contra la *variación del ángulo del eslabón manivela todas las magnitudes cinemáticas y dinámicas* de los ítems 1 y 2.

4. Grafíquese contra la variación del ángulo del *eslabón manivela* la fuerza y el momento de sacudimento.

Despréciase la fricción en todos los pares cinemáticos y el peso de los eslabones.



Datos para el análisis cinetostático

Eslabón No.	m (kg)	I_G (kg-mm ²)
2	0.2	0.05
3	0.4	1.2

Análisis cinemático del mecanismo.

1. Análisis preliminar

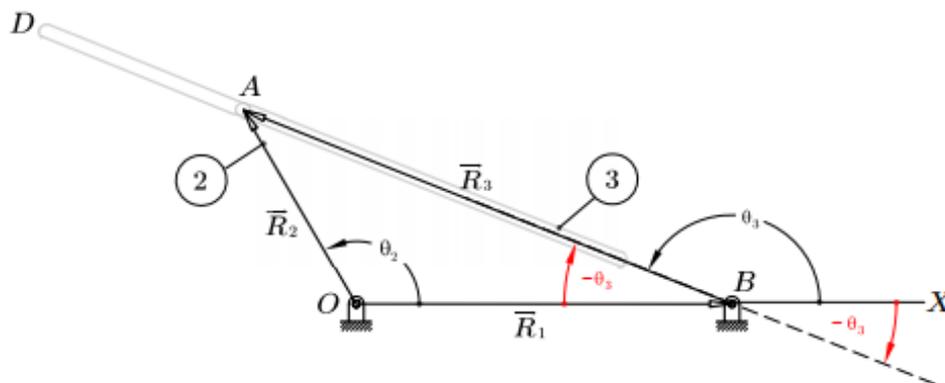
La movilidad del mecanismo es: $m = 3(3-1) - 2(2) - 1 = 1$

El número de lazos vectoriales independientes es: $N = 3 - 2 = 1$

El lazo vectorial cerrado para el análisis cinemático es:

Figura 110

Lazo vectorial cerrado OAB del mecanismo del ejemplo 4



La siguiente tabla presenta las variables conocidas e incógnitas de la cinemática del mecanismo:

Datos geométricos del mecanismo		Constantes	
		$r_1 = 0.25 \text{ m}, \theta_1 = 0^\circ, r_2 = 0.15 \text{ m}.$	
		Variable conocida	Variables desconocidas
Variables cinemáticas	Posición	θ_2	r_3, θ_3
	Velocidad	$\omega_2 = -30\pi$	v_3, ω_3
	Aceleración	$\alpha_2 = 0$	a_3, α_3

2. Cinemática del lazo vectorial OAB

Análisis de posición. Para el lazo vectorial de la Figura 106,

$$\vec{R}_1 - \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = 0 + i0$$

De donde:

$$r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = 0$$

$$r_1 \text{sen} \theta_1 - r_2 \text{sen} \theta_2 + r_3 \text{sen} \theta_3 = 0$$

Dado que $\theta_1 = 0^\circ$, entonces:

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 &= 0 \\ -r_2 \text{sen} \theta_2 + r_3 \text{sen} \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej4-1})$$

Que son las ecuaciones escalares de posición y se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} r_3 \cos \theta_3 &= r_2 \cos \theta_2 - r_1 \\ r_3 \text{sen} \theta_3 &= r_2 \text{sen} \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej4-2})$$

Dividiendo la segunda expresión para la primera, término a término:

$$\tan \theta_3 = \frac{r_2 \text{sen} \theta_2}{r_2 \cos \theta_2 - r_1} \quad (\text{ej4-3})$$

De donde,

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{r_2 \text{sen} \theta_2}{r_2 \cos \theta_2 - r_1} \right) \quad (\text{ej4-4})$$

Sin embargo, el ángulo expresado en la ecuación (ej-4) es el menor ángulo (*negativo*) medido desde el eje X hasta el vector \vec{R}_3 y, mostrado en color rojo en la Figura 106; el ángulo corregido y utilizado en nuestro convencionalismo usual (*ángulo positivo antihorario*) es:

$$\theta_3 = 180^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{r_2 \operatorname{sen} \theta_2}{r_2 \cos \theta_2 - r_1} \right) \quad (\text{ej4-5})$$

Elevando al cuadrado cada término de las (ej4-2) y sumándolas para luego despejar r_3 , resulta:

$$r_3 = \sqrt{(r_2 \cos \theta_2 - r_1)^2 + (r_2 \operatorname{sen} \theta_2)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2} \quad (\text{ej4-6})$$

Análisis de velocidad

Método de Raven

Derivando en el tiempo las ecuaciones escalares de posición (ej4-1):

$$\begin{aligned} r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 + v_3 \cos \theta_3 - r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= 0 \\ -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 + v_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \omega_3 \cos \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej4-7})$$

Que constituyen las ecuaciones escalares de velocidad.

Las ecuaciones (ej4-7) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} v_3 \cos \theta_3 - r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ v_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \omega_3 \cos \theta_3 &= r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{ej4-8})$$

Sistema lineal de ecuaciones en v_3 y ω_3 , que al resolverse da:

$$\begin{aligned} v_3 &= -r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \\ \omega_3 &= \frac{r_2 \omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3} \end{aligned} \quad (\text{ej4-9})$$

Análisis de aceleración

Método de Raven

Volviendo a derivar en el tiempo las ecuaciones escalares de velocidad:

$$\begin{aligned} r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3 - 2v_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 - r_3 \alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 - r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 &= 0 \\ r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + a_3 \operatorname{sen} \theta_3 + 2v_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 - r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ej4-10})$$

Que conforman las ecuaciones escalares de aceleración.

Al reescribirse las ecuaciones (ej4-10),

$$\begin{aligned} a_3 \cos \theta_3 - r_3 \alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 &= -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + 2v_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 \\ a_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 &= -r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 - 2v_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 \end{aligned} \quad (\text{ej4-11})$$

Sistema de ecuaciones lineales en a_3 y α_3 , que al resolverse producen:

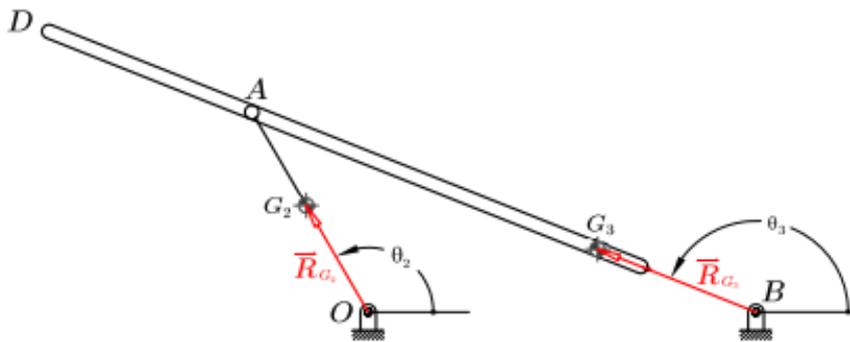
$$\begin{aligned} a_3 &= -r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_3 \omega_3^2 \\ \alpha_3 &= -\frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) + 2v_3 \omega_3}{r_3} \quad (\text{ej4-12}) \end{aligned}$$

3. Cinemática de los centros de masa

La Figura 111 muestra el esquema vectorial requerido para analizar la cinemática de los centros de masa G_2 y G_3 :

Figura 111

Esquema vectorial para el análisis de la cinemática de los centros de masa del mecanismo del ejemplo 4



Para el centro de masa G_2 se tiene:

$$\bar{R}_{G_2} = r_{G_2} e^{i\theta_2}$$

Componente x

$$r_{G_{2x}} = r_{G_2} \cos \theta_2$$

Derivando en el tiempo para la velocidad:

$$v_{G_{2x}} = -r_{G_2} \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

Y derivando nuevamente respecto al tiempo para la aceleración:

$$a_{G_{2x}} = -r_{G_2} \omega_2^2 \cos \theta_2 \quad (\text{ej4-13})$$

Componente y :

$$r_{G_2y} = r_{G_2} \text{sen } \theta_2$$

Derivando en el tiempo para la velocidad

$$v_{G_2y} = r_{G_2} \omega_2 \text{cos } \theta_2$$

Y derivando nuevamente respecto al tiempo para la aceleración:

$$a_{G_2y} = -r_{G_2} \omega_2^2 \text{sen } \theta_2 \quad (\text{ej4-14})$$

Para el centro de masa G_3 se tiene:

$$\bar{R}_{G_3} = r_{G_3} e^{i\theta_3}$$

Componente x :

$$r_{G_3x} = r_{G_3} \text{cos } \theta_3$$

Derivando en el tiempo para la velocidad:

$$v_{G_3x} = -r_{G_3} \omega_3 \text{sen } \theta_3$$

Y, derivando nuevamente respecto al tiempo para la aceleración:

$$a_{G_3x} = -r_{G_3} \alpha_3 \text{sen } \theta_3 - r_{G_3} \omega_3^2 \text{cos } \theta_3 \quad (\text{ej4-15})$$

Componente y :

$$r_{G_3y} = r_{G_3} \text{sen } \theta_3$$

Derivando en el tiempo para la velocidad:

$$v_{G_3y} = r_{G_3} \omega_3 \text{cos } \theta_3$$

Y, derivando nuevamente respecto al tiempo para la aceleración:

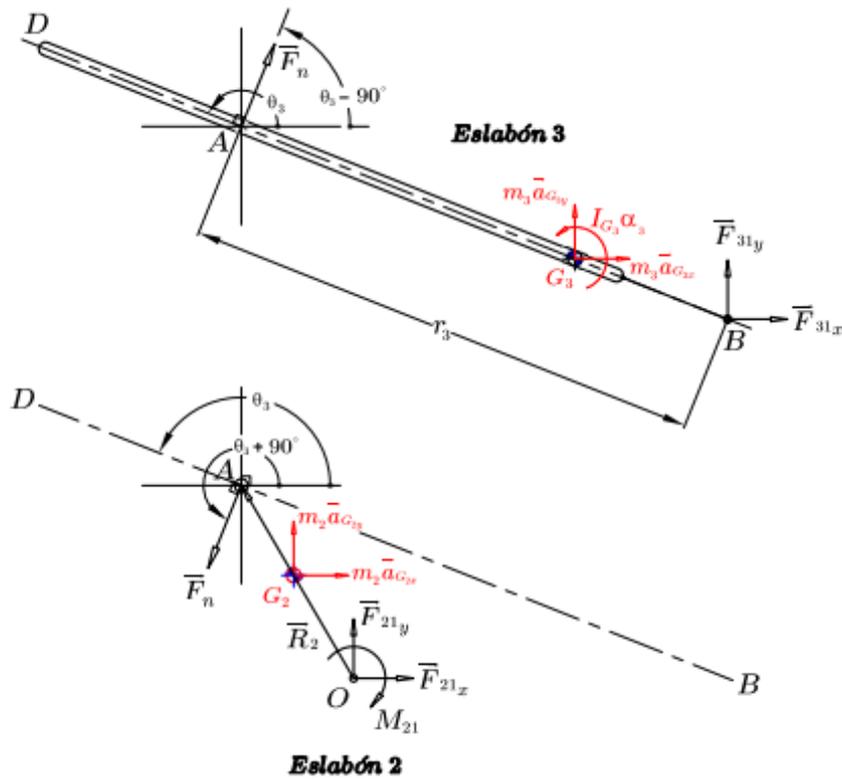
$$a_{G_3y} = r_{G_3} \alpha_3 \text{cos } \theta_3 - r_{G_3} \omega_3^2 \text{sen } \theta_3 \quad (\text{ej4-16})$$

Análisis cinetostático del mecanismo.

Los esquemas de las fuerzas dinámicas de los eslabones 2 y 3 del mecanismo se presentan en la Figura 112:

Figura 112

Fuerzas dinámicas en los eslabones móviles del mecanismo del ejemplo 4



Las ecuaciones para el eslabón 2 son:

$$F_{21x} + F_n \cos(90^\circ + \theta_3) = m_2 a_{G_{2x}} \quad (\text{ej4-17})$$

$$F_{21y} + F_n \sin(90^\circ + \theta_3) = m_2 a_{G_{2y}} \quad (\text{ej4-18})$$

$$-M_{21} + [r_{2x} \sin(90^\circ + \theta_3) - r_{2y} \cos(90^\circ + \theta_3)] F_n = 0 \quad (\text{ej4-19})$$

Las ecuaciones para el eslabón 3 son:

$$F_{31x} + F_n \cos(\theta_3 - 90^\circ) = m_3 a_{G_{3x}} \quad (\text{ej4-20})$$

$$F_{31y} + F_n \sin(\theta_3 - 90^\circ) = m_3 a_{G_{3y}} \quad (\text{ej4-21})$$

$$-F_n r_3 = (I_{G_3} + m_3 r_{G_3}^2) \alpha_3 \quad (\text{ej4-22})$$

Donde:

$$\begin{aligned} r_{2x} &= r_2 \cos \theta_2 \\ r_{2y} &= r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \end{aligned}$$

Entonces:

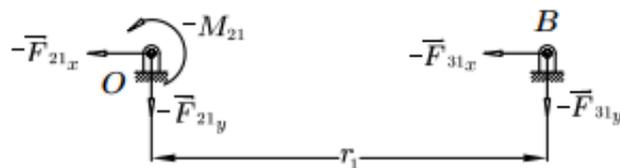
$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cos(90^\circ + \theta_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \operatorname{sen}(90^\circ + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{2x} \operatorname{sen}(90^\circ + \theta_3) - r_{2y} \cos(90^\circ + \theta_3) & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cos(\theta_3 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \operatorname{sen}(\theta_3 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{F_{ef}\} = \begin{Bmatrix} m_2 a_{G_2x} \\ m_2 a_{G_2y} \\ 0 \\ m_3 a_{G_3x} \\ m_3 a_{G_3y} \\ (I_{G_3} + m_3 r_{G_3}^2) \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Y,

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{21x} \\ F_{21y} \\ F_{31x} \\ F_{31y} \\ F_n \\ M_{21} \end{Bmatrix} = [G]^{-1} \{F_{ef}\} \quad (\text{ej4-23})$$

Para el bastidor, las fuerzas actuantes se muestran en el siguiente esquema:



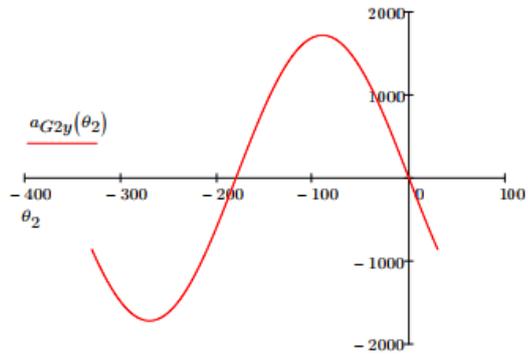
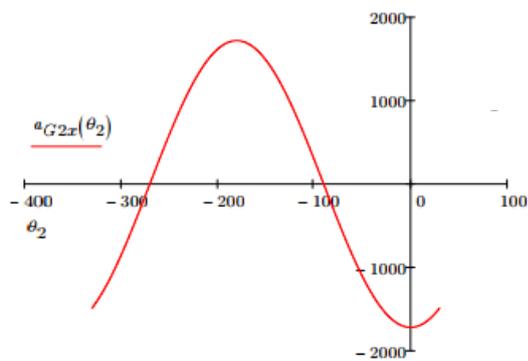
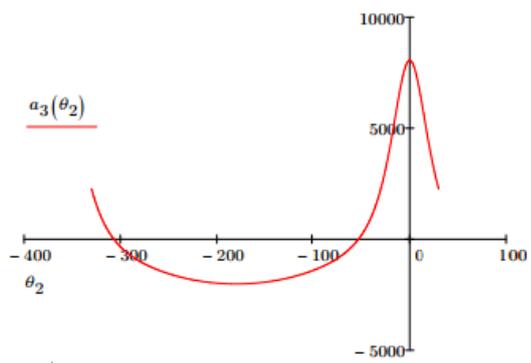
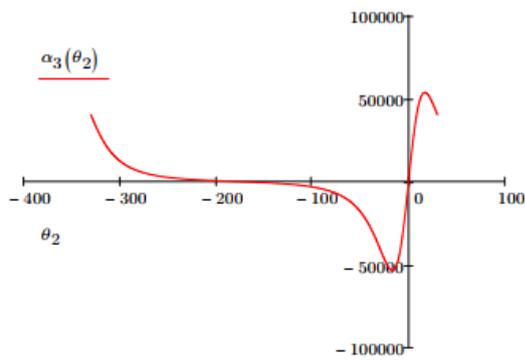
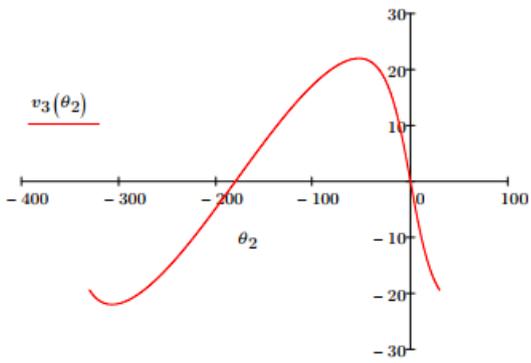
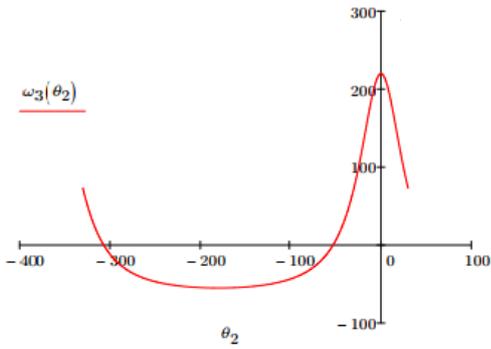
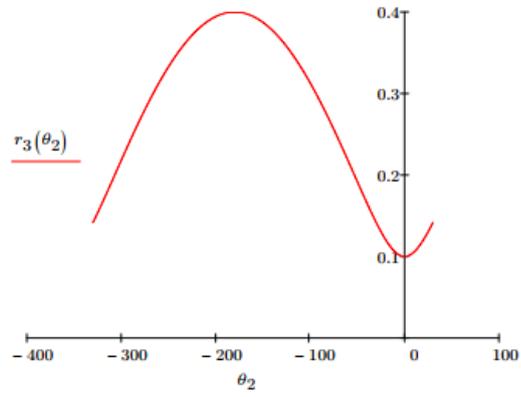
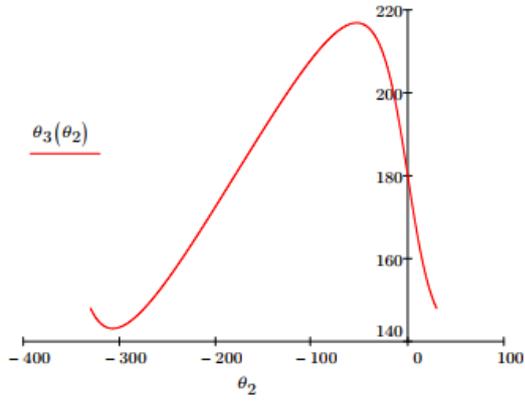
Eslabón 1

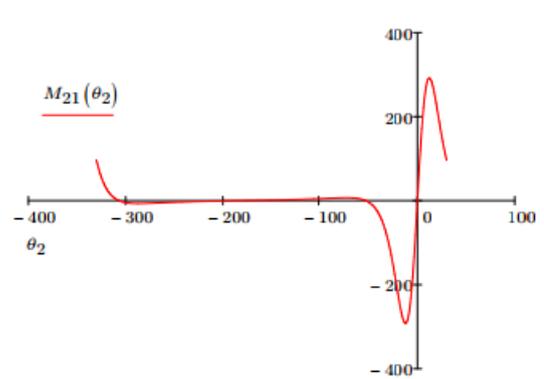
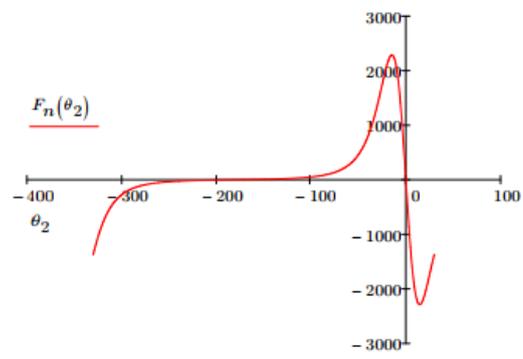
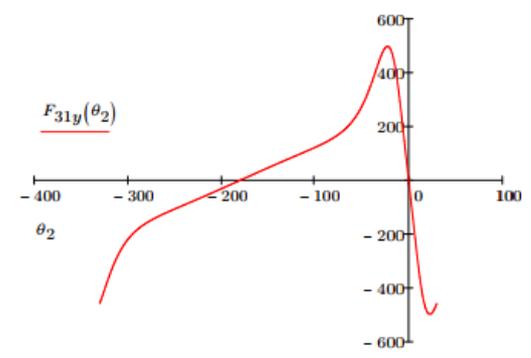
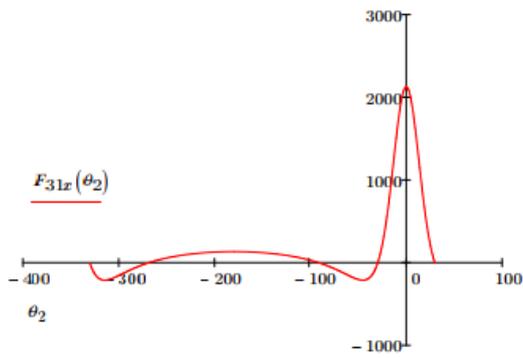
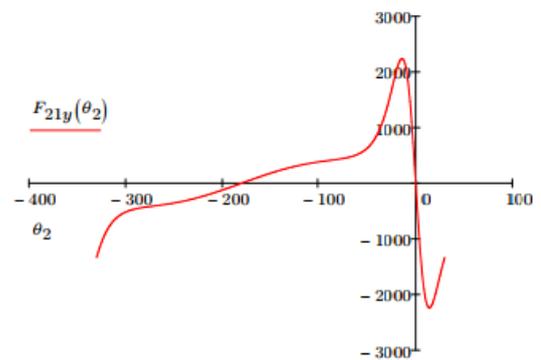
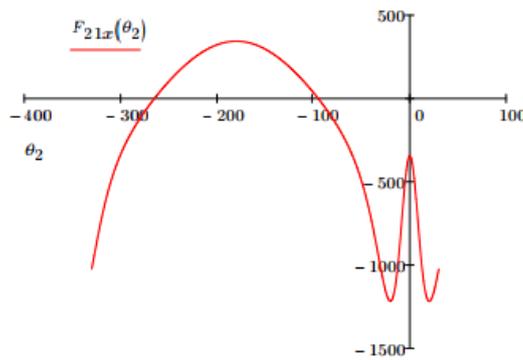
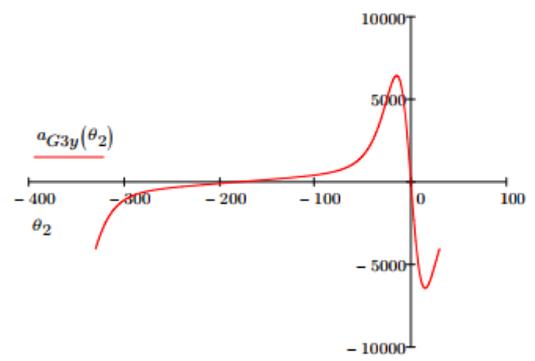
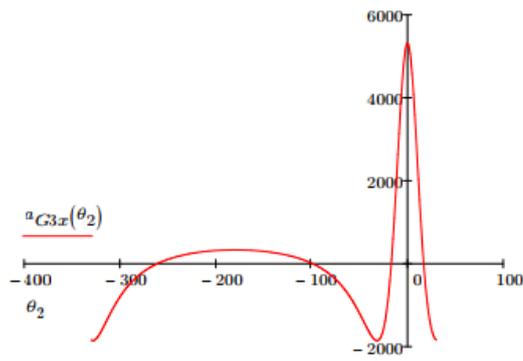
Por lo cual, la fuerza de sacudimiento y el momento de sacudimiento respecto a O están dados por:

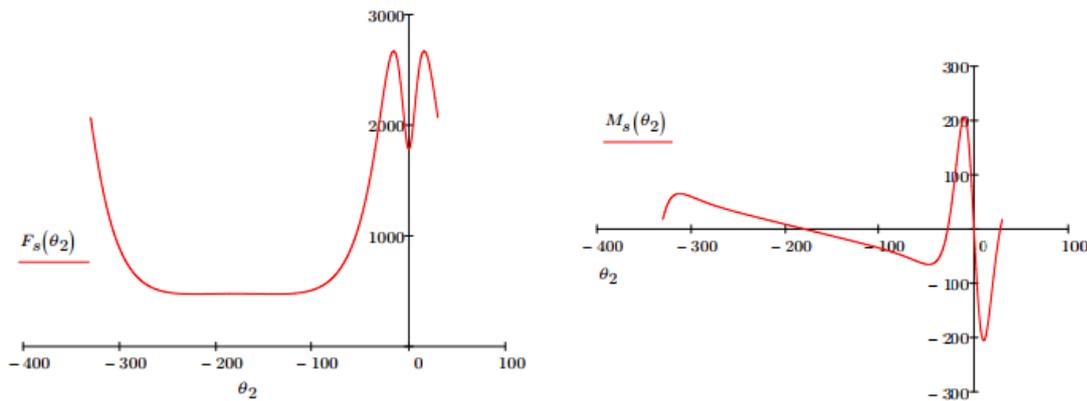
$$F_s = \sqrt{(F_{21x} + F_{31x})^2 + (F_{21y} + F_{31y})^2} \quad (\text{ej4-24})$$

$$M_s = -M_{21} - r_1 F_{31y} \quad (\text{ej4-25})$$

A continuación, se muestran las gráficas pedidas:



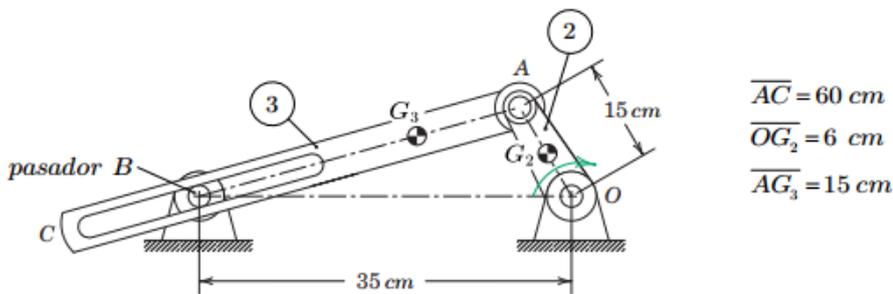




3.4 Problemas propuestos

1. En el mecanismo mostrado en la figura, el eslabón motriz OA gira en sentido horario a una velocidad angular constante de 1000 rpm.
 - a. Realícese el análisis cinemático de ciclo completo del mecanismo (empezando en 60°), incluyendo la cinemática de los centros de masa.
 - b. Efectúese el análisis de fuerzas dinámicas o cinetostático del mecanismo para un ciclo completo de movimiento (empezando en 60°).
 - c. Grafíquense contra la variación del ángulo del eslabón manivela todas las magnitudes cinemáticas y dinámicas de los ítems (a) y (b).
 - d. Grafíquense contra la variación del ángulo del eslabón manivela la fuerza y el momento de sacudimiento con respecto a O.

Despréciase la fricción en todos los pares cinemáticos y el peso de los eslabones.



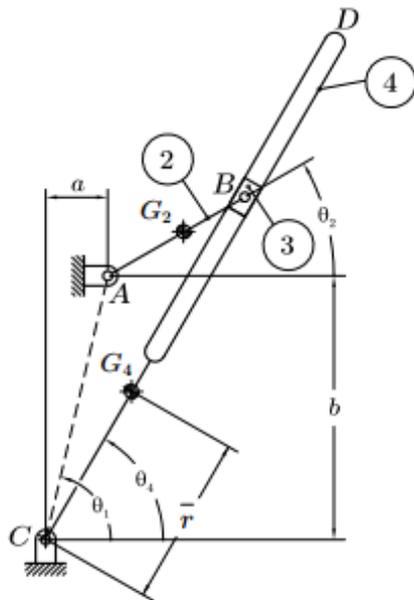
$$\begin{aligned} \overline{AC} &= 60 \text{ cm} \\ \overline{OG_2} &= 6 \text{ cm} \\ \overline{AG_3} &= 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

Datos para el análisis cinetostático

Eslabón No.	m (kg)	I_G (kg-mm ²)
2	0.3	0.08
3	0.5	1.5

2. En el mecanismo mostrado en la figura, el eslabón motriz AB gira en sentido antihorario a una velocidad angular constante de 1200 rpm.
 - a. Realícese el análisis cinemático de ciclo completo del mecanismo (empezando en 20°), incluyendo la cinemática de los centros de masa.
 - b. Efectúese el análisis de fuerzas dinámicas o cinetostático del mecanismo para un ciclo completo de movimiento (empezando en 20°).
 - c. Gráfiquense contra la variación del ángulo del eslabón manivela todas las magnitudes cinemáticas y dinámicas de los ítems (a) y (b).
 - d. Gráfiquense contra la variación del ángulo del eslabón manivela la fuerza y el momento de sacudimiento con respecto a A.

El centro de masa del eslabón AB se encuentra en el medio del mismo. Desprecíese la fricción en todos los pares cinemáticos y el peso de los eslabones.

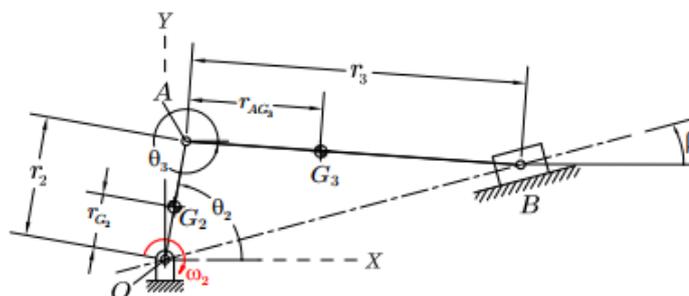


Datos para el análisis cinetostático

Eslabón No.	m (kg)	I_G (kg-mm ²)
2	0.3	1
3	0.1	—
4	0.4	1.2

$$r_1 = \overline{AC} \quad r_2 = \overline{AB} = 10 \text{ cm} \quad r_3 = \overline{CB} \quad \overline{CD} = 40 \text{ cm} \quad a = 2 \text{ cm} \quad b = 15 \text{ cm} \quad \bar{r} = 12 \text{ cm}$$

3. Para el mecanismo manivela-corredera mostrado en la figura, efectúese el análisis cinemático total y el análisis de fuerzas dinámicas o cinetostático de un ciclo completo de movimiento, para los datos dados:



CINEMÁTICA DEL CENTRO DE MASA	Constantes
Datos geométricos del mecanismo	$r_{G_2} = 40 \text{ mm}$ $r_{AG_3} = 100 \text{ mm}$

DINÁMICA	Constantes	CINEMÁTICA	Constantes
Datos del mecanismo	$I_{G_2} = 250 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ $I_{G_3} = 800 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ $m_2 = 0.35 \text{ kg}$ $m_3 = 0.15 \text{ kg}$ $m_4 = 0.21 \text{ kg}$	Datos geométricos del mecanismo	$r_2 = 90 \text{ mm}$ $r_3 = 250 \text{ mm}$ $\beta = 15^\circ$
			Variables conocidas
		Variables cinemáticas	Posición $\theta_2 = 80^\circ$ (inicial). Velocidad $\omega_2 = 120 \text{ rpm}$ Aceleración $\alpha_2 = 0$

Despréciase la fricción en todos los pares cinemáticos y el peso de los eslabones.

4. En el mecanismo mostrado en la figura (a), el eslabón motriz OA gira a una velocidad angular constante de 1300 rpm. Todos los eslabones son fabricados en acero de densidad $\rho_{ac} = 8100 \text{ kg/m}^3$ y sus medidas se muestran en la figura (b). Considerándose que todos los eslabones tienen un espesor de 5 mm y la corredera tiene una masa de 0.06 kg.

A. Dedúzcase:

- Toda la *cinemática desconocida del mecanismo* durante un ciclo de funcionamiento del mismo (empezando en la posición mostrada en la figura a).
- La *cinemática de los centros de masa* de todos los eslabones del mecanismo durante el ciclo de funcionamiento del mecanismo.
- Las *fuerzas en los pares cinemáticos* y el *par motor* del mecanismo durante su ciclo de funcionamiento.
- La *fuerza de sacudimiento* y todos los *momentos de sacudimiento* durante el ciclo de funcionamiento del mecanismo.

B. Grafíquese contra el *ángulo de giro del eslabón motriz* y contra el tiempo, para el ciclo de funcionamiento del mecanismo:

- Todas las *variables cinemáticas desconocidas* del mecanismo incluyendo las de sus centros de masa.
- Las *fuerzas en los pares cinemáticos* y el *par motor* del mecanismo.
- La *fuerza y los momentos de sacudimiento* en el bastidor del mecanismo.

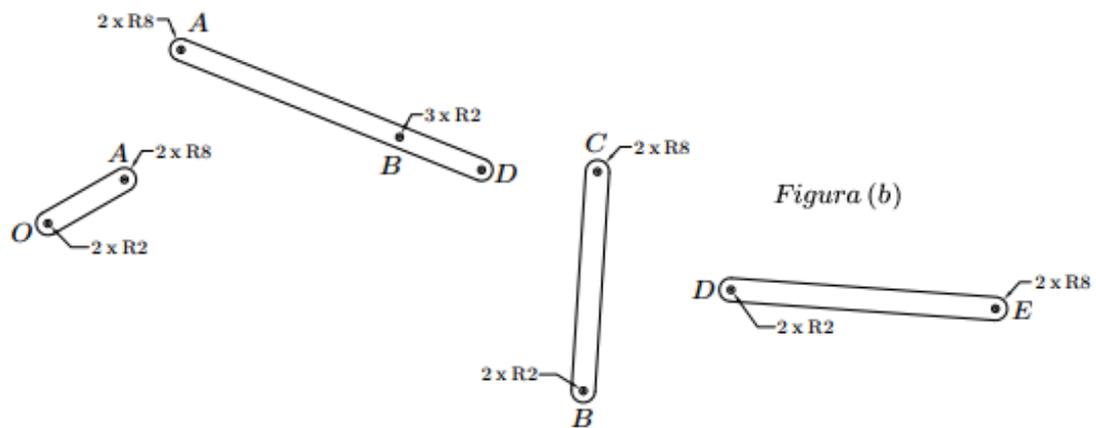
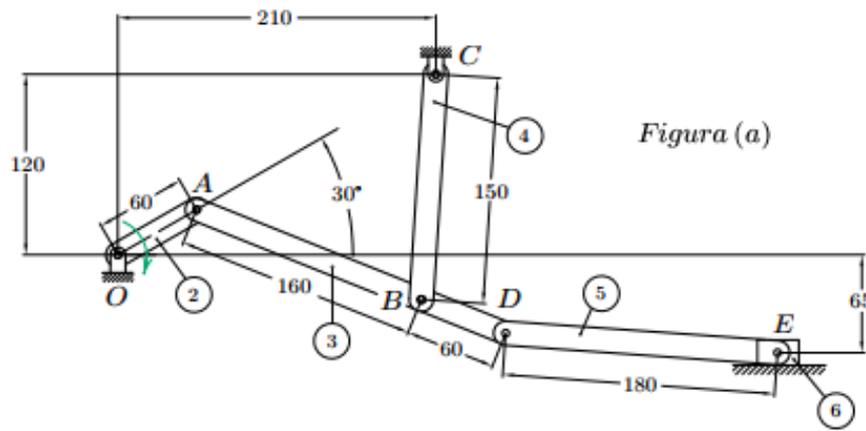
C. Además, grafíquese:

- Los *componentes y vs componentes x* de todas las *fuerzas en los pares cinemáticos* del mecanismo, incluyendo la *fuerza de sacudimiento*.

- b. La *curva de acoplador del par cinemático D* del mecanismo durante el ciclo de funcionamiento del mismo.

Todas las dimensiones en el mecanismo están expresadas en mm, sin embargo, deben utilizarse en la resolución del problema en las unidades *m*, *rad*, *kg*, *s*, *N* y sus unidades derivadas. Expresese las fráficas en *grados sexagesimales* en lugar de *radianes* para los ángulos.

Despréciase la fricción en todos los pares cinemáticos y el peso de los eslabones.



5. En el mecanismo mostrado en la figura (a), el eslabón motriz OB gira a una velocidad angular constante de 900 rpm. Todos los eslabones son fabricados en acero de densidad $\rho_{ac} = 8100 \text{ kg/m}^3$ y sus medidas se muestran en la figura (b). Considerándose que todos los eslabones tienen un espesor de 5 mm y la corredera tiene una masa de 0.05 kg.

A. Dedúzcase:

- Toda la *cinemática desconocida del mecanismo* durante un ciclo de funcionamiento del mismo (empezando en la posición mostrada en la figura a).
- La *cinemática de los centros de masa* de todos los eslabones del mecanismo durante el ciclo de funcionamiento del mecanismo.
- Las *fuerzas en los pares cinemáticos* y el *par motor* del mecanismo durante su ciclo de funcionamiento.
- La *fuerza de sacudimiento* y todos los *momentos de sacudimiento* durante el ciclo de funcionamiento del mecanismo.

B. Grafíquese contra el *ángulo de giro del eslabón motriz* y contra el *tiempo*, para el ciclo de funcionamiento del mecanismo:

- Todas las *variables cinemáticas desconocidas* del mecanismo, incluyendo las de sus centros de masa.
- Las *fuerzas en los pares cinemáticos* y el *par motor* del mecanismo.
- La *fuerza* y los *momentos de sacudimiento* en el bastidor del mecanismo.

C. Además, grafíquese:

- Los *componentes y vs componentes x* de todas las fuerzas en los pares cinemáticos del mecanismo, incluyendo la fuerza de sacudimiento.

Todas las dimensiones en el mecanismo están expresadas en mm, sin embargo, deben utilizarse en la resolución del problema, las unidades *m, rad, kg, s, N* y sus unidades derivadas. Expresese las gráficas en grados sexagesimales en lugar de radianes para los ángulos.

Despréciase la fricción en todos los pares cinemáticos y el peso de los eslabones.

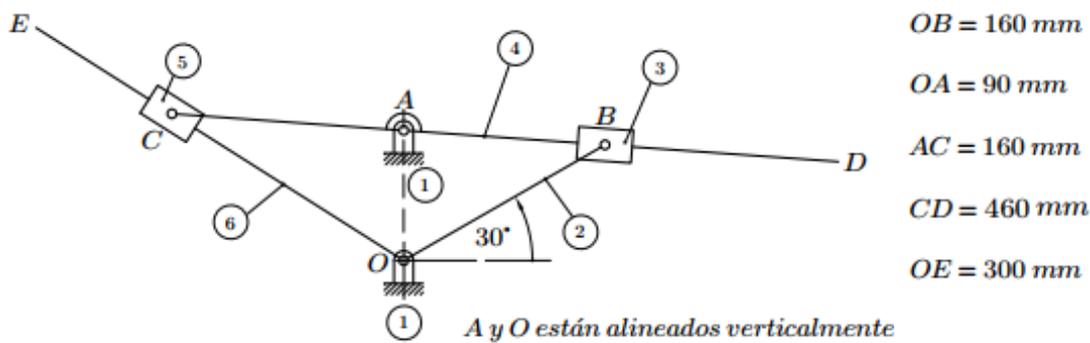


Figura (a)

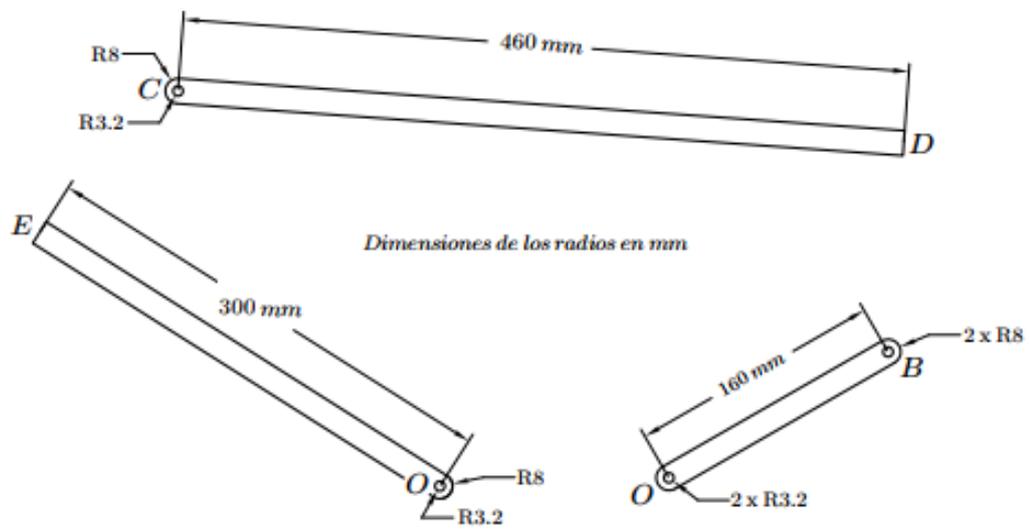


Figura (b)

Referencias

- Ambekar, A. G. (2011). Mechanism and Machine Theory. PHI Learning Private Limited. Caps. 2, 3, 4.
- Barton, L. O. (1993) Mechanism Analysis: Simplified graphical and analytical techniques. Marcel Dekker Inc, New York, USA, 2nd Edition, Cap. 12
- Bear, F. P. et al. (2017). Mecánica Vectorial para Ingenieros - Dinámica. McGrawHill Interamericana, México, MÉXICO, 11va Edición, Cap. 15.
- Burton, P. (1979). Kinematics and Dynamics of Planar Machinery. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J, USA, Caps. 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10
- Chamorro, R. et al. (2015). Teoría de Máquinas y Mecanismos. Universidad de Sevilla, Sevilla, ESPAÑA, Cap. 3.
- Childs, D. W. y Conkey, A. P. (2015). Dynamics in Engineering Practice. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 11nd Edition, Cap. 4.
- Dechev, N. y Cleghorn, W. L. (2015). Mechanic of Machines. Oxford University Press, New York, USA, 2nd Edition, Caps. 2, 3, 4
- Doane, J. (2016). Machine Analysis with Computer Applications for Mechanical Engineers. John Wiley & Sons, Chichester, U.K, Caps. 2, 3, 4.
- Doughty, S. (1988). Mechanics of Machines. John Wiley & Sons, Inc, USA, Caps. 2, 3.
- Erdman, A. G. y Sandor, G. N. (1998). Diseño de Mecanismos-Análisis y Síntesis. Pearson-Prentice Hall, México, MEXICO, 3ra Edición, Caps. 3, 4.
- Gross, D. et al. (2014). Engineering Mechanics 3 - Dynamics. (2nd ed.). Verlag. Cap. 3.
- Hibbeler, R.C. (2016). Ingeniería Mecánica - Dinámica. Pearson Educación, México, MÉXICO, 14ta Edición, Cap. 16.
- Mabie, H. H. y Reinholtz, C. F. (1987). Mechanisms and Dynamics of Machinery. John Wiley & Sons, New York, USA, Caps. 2, 8.

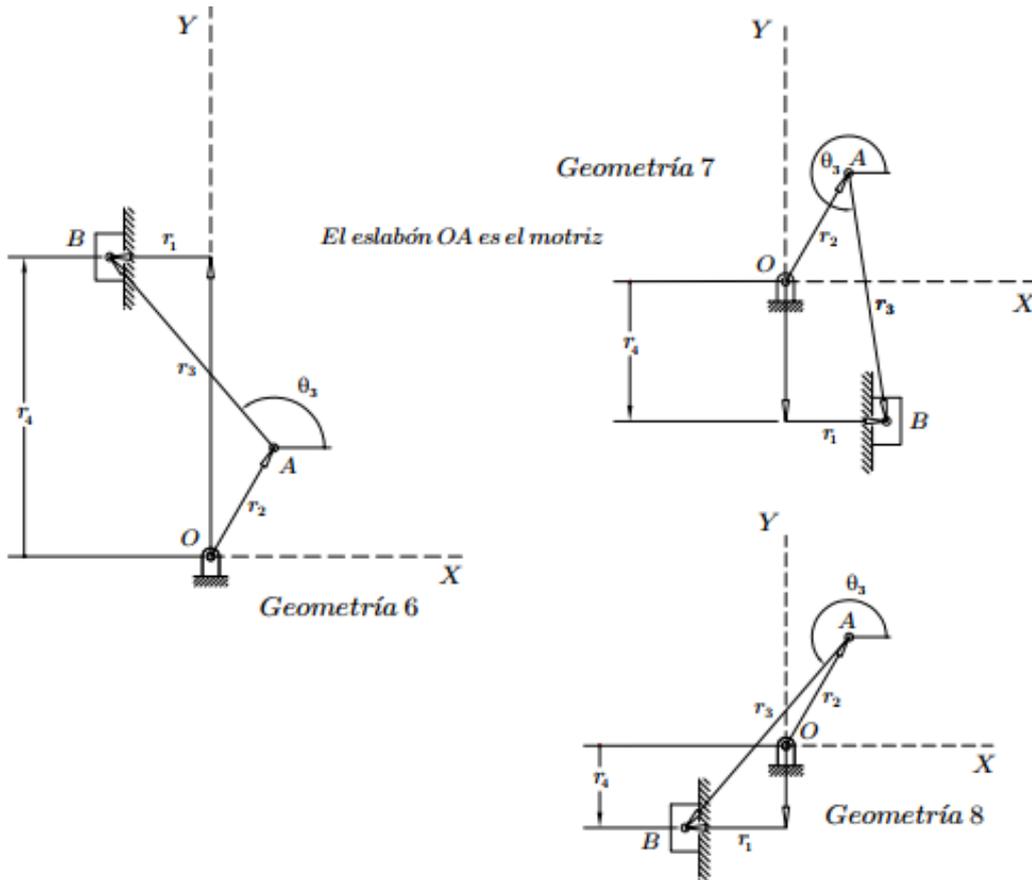
- Marghitu, D.B. (2009). *Mechanisms and Robot Analysis with MATLAB*, Springer, London, U.K., 1st Edition, Caps. 1, 2, 3.
- Martin, G. H. (1982). *Kinematics and Dynamics of Machines* (2nd Edition). McGraw-Hill. Caps. 2, 3, 6, 7, 9.
- McCarthy, J. M. y Song, S. G. (2010). *Geometric Design of Linkages*. Springer, USA, 2nd. Edition, Cap. 2.
- Meriam, J. L., Kraige, L. G. y Bolton J. N. (2018). *Engineering Mechanics - Dynamics*, John Wiley & Sons, Hoboken, N.J, USA, 9th Edition, Cap. 5.
- Mostafa, M. A. (2013). *Mechanics of Machinery*. CRC Press, Cap. 2.
- Myszka, D. H. (2012) *Máquinas y Mecanismos*. Pearson, México, MEXICO, 4ta Edición, Caps. 4, 6, 7.
- Norton R. L. (2013). *Diseño de Maquinaria-Síntesis y Análisis de Máquinas y Mecanismos*. McGraw-Hill, México, MÉXICO, 5ta Edición, Caps. 4, 6, 7.
- Pytel, A. y Kiusalaas, J. (2012). *Ingeniería Mecánica - Dinámica*. Cengage Learning, México, MÉXICO, 3ra. Edición, Cap. 16.
- Raven, F. H. (1958). "Velocity and Acceleration Analysis of Plane and Space Mechanisms by Means of Independent Position Equations". *Trans. ASME*, Vol. 25, pp. 1-6
- Rider, M. J. (2015). *Design and Analysis of Mechanisms-A Planar Approach*, Wiley & Sons, Chichester, U.K, 1st Edition, Caps. 2, 5, 6.
- Russell, K., Shen Q., Sodhi R. S. (2019). *Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems - Implementation in MATLAB and SimMechanics*. CRC Press, USA, 2nd Edition, Caps. 2, 3, 4.
- Sharma, C. S. y Purohit, K. (2011). *Theory of Mechanisms and Machines*. PHI Learning Private Limited. Cap. 2.
- Simón Mata, A. et al. (2016). *Fundamentals of Machine Theory and Mechanisms*. Springer International Publishing, SWITZERLAND, 1st Edition, Caps. 2, 3

- Soutas-Little, R. W. et al. (2009). *Ingeniería Mecánica - Dinámica - Edición Computacional*. Cengage Learning, México, MÉXICO, Cap. 5.
- Stanisic, M. (2015). *Mechanics and Machines-Kinematics, Dynamics and Synthesis* (2nd. ed.). Cengage Learning. Caps. 2, 3.
- Suh, Ch. H. y Radcliffe, Ch. W. (1983). *Kinematics and Mechanisms Design*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, USA, Cap. 2.
- Uicker, J. J. et al. (2017). *Theory of Machines and Mechanisms*. Oxford University Press, New York, USA, 5th. Edition, Caps. 2, 3, 4, 5.
- Vinogradov, O. (2000). *Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms*. CRC Press LLC. Cap. 2.
- Waldron, K. J., Kinzel, G. L. y Agrawal S. K. (2016). *Kinematics, Dynamics and Design of Machinery*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK, 3rd. Edition, Cap. 7.
- Wilson, Ch. E. y Sadler P. J. (2014). *Kinematics and Dynamics of Machinery*. Pearson Education Limited, U.K., 3rd Edition, Caps. 2, 3, 4.



<https://acortar.link/KCNu5m>

APÉNDICES



<i>Dados: r_1, r_2, r_3</i>	
Geometría 1	
$\theta_3 = \arcsen\left(\frac{r_1 - r_2 \text{ sen}\theta_2}{r_3}\right)$	
$r_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3$	
Geometría 2	
$\theta_3 = \arcsen\left(\frac{-r_1 - r_2 \text{ sen}\theta_2}{r_3}\right)$	
$r_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3$	
Geometría 3	
$\theta_3 = \pi - \arcsen\left(\frac{r_1 - r_2 \text{ sen}\theta_2}{r_3}\right)$	
$r_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3$	
Geometría 4	
$\theta_3 = \pi - \arcsen\left(\frac{-r_1 - r_2 \text{ sen}\theta_2}{r_3}\right)$	
$r_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3$	
Geometría 5*	
$\theta_3 = \arccos\left(\frac{r_1 - r_2 \cos\theta_2}{r_3}\right)$	
$r_4 = r_2 \text{ sen}\theta_2 + r_3 \text{ sen}\theta_3$	

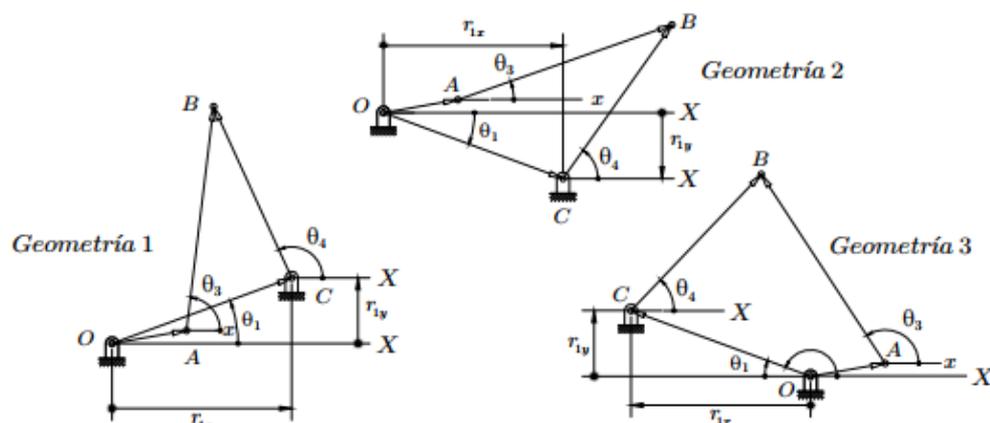
Geometría 6*
$\theta_3 = \arccos\left(\frac{-r_1 - r_2 \cos\theta_2}{r_3}\right)$
$r_4 = r_2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_3 \operatorname{sen}\theta_3$
Geometría 7*
$\theta_{3-} = 2\pi - \arccos\left(\frac{r_1 - r_2 \cos\theta_2}{r_3}\right)$
$r_4 = r_2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_3 \operatorname{sen}\theta_3$
Geometría 8*
$\theta_{3-} = 2\pi - \arccos\left(\frac{-r_1 - r_2 \cos\theta_2}{r_3}\right)$
$r_4 = r_2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_3 \operatorname{sen}\theta_3$
<p>* Para las geometrías 5, 6, 7 y 8 el resto del <i>análisis cinemático de velocidad y aceleración</i> produce:</p> $\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_3 \operatorname{sen}\theta_3} \quad v_4 = \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\operatorname{sen}\theta_3} \quad \alpha_3 = \frac{-r_2 \alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_2 \omega_2^2 \cos\theta_2 - r_3 \omega_3^2 \cos\theta_3}{r_3 \operatorname{sen}\theta_3}$ $\alpha_4 = \frac{r_2 \alpha_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) - r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_3 - \theta_2) - r_3 \omega_3^2}{\operatorname{sen}\theta_3}$ <p>Para el resto de geometrías son válidas las fórmulas deducidas en el apartado 2.3.1</p>

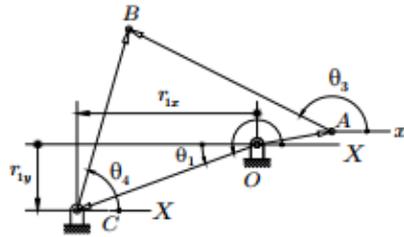
Apéndice B: Fórmulas del análisis cinemático para diferentes geometrías del mecanismo de cuatro barras

Para distintas geometrías del mecanismo de cuatro barras, indicadas en la Figura B1, se escriben las fórmulas correspondientes de los análisis de posición, velocidad y aceleración.

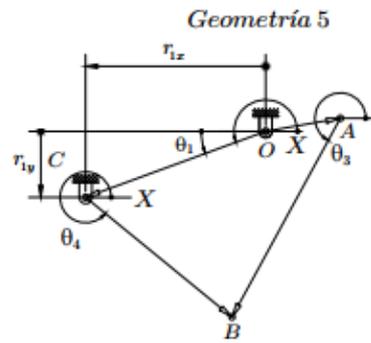
Figura B1

Geometrías para el mecanismo de cuatro barras

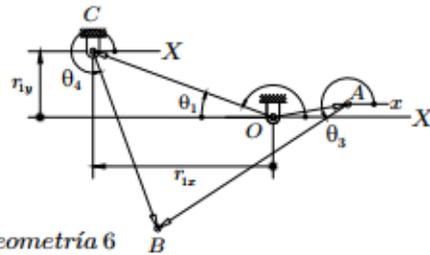




Geometría 4

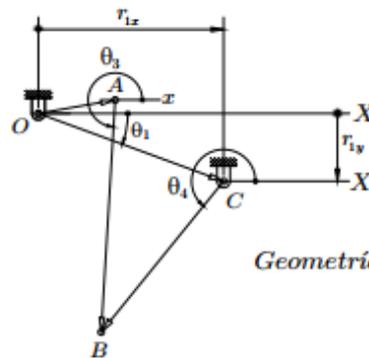
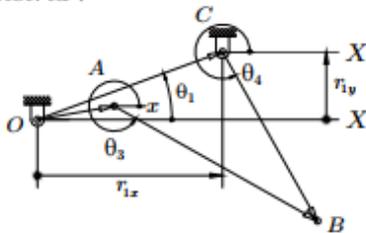


Geometría 5



Geometría 6

Geometría 7



Geometría 8

<i>Conocidos:</i>		
$K_1 = r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2$	$K_3 = \frac{r_3^2 - r_4^2 + K_1^2 + K_2^2}{2r_3}$	$K_{3-} = \frac{r_3^2 - r_4^2 - K_1^2 - K_2^2}{2r_4}$
$K_2 = r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2$		
Geometría 1		
$\theta_1 = \arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right)$		
$\theta_3 = 2\arctan\left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right)$		
$\theta_4 = 2\arctan\left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}}\right)$		
Geometría 2		
$\theta_1 = -\arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right)$		
$\theta_3 = 2\arctan\left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right)$		
$\theta_4 = 2\arctan\left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}}\right)$		

Geometría 3
$\theta_1 = \pi - \arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right)$
$\theta_3 = 2\arctan\left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right)$
$\theta_4 = 2\arctan\left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}}\right)$
Geometría 4
$\theta_1 = \pi + \arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right)$
$\theta_3 = 2\arctan\left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right)$
$\theta_4 = 2\arctan\left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}}\right)$
Geometría 5
$\theta_1 = \pi + \arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right)$
$\theta_3 = 2\pi + 2\arctan\left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right)$
$\theta_4 = 2\pi + 2\arctan\left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}}\right)$
Geometría 6
$\theta_1 = \pi - \arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right)$
$\theta_3 = 2\pi + 2\arctan\left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right)$
$\theta_4 = 2\pi + 2\arctan\left(\frac{K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}}\right)$
Geometría 7
$\theta_1 = \arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right)$
$\theta_3 = 2\pi + 2\arctan\left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right)$
$\theta_4 = 2\pi + 2\arctan\left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_{3-}^2}}{K_1 + K_{3-}}\right)$
Geometría 8
$\theta_1 = -\arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right)$
$\theta_3 = 2\pi + 2\arctan\left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right)$

$\theta_4 = 2\pi + 2 \arctan \left(\frac{K_2 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right)$	
$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)}$	$\omega_4 = -\frac{r_2 \omega_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)}$
$\alpha_3 = -\frac{r_2 \alpha_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) - r_4 \omega_4^2 + r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)}$	
$\alpha_4 = -\frac{r_2 \alpha_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) - r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2 + r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)}$	

Fundamentos de análisis cinemático y dinámico de mecanismos planos

El presente texto trata esencialmente del estudio cinemático y dinámico de mecanismos planos eslabonados, uno de los temas más importantes e imprescindibles del estudio de la Teoría de Máquinas y Mecanismos que se revisan en los primeros años de todas las Escuelas de Ingeniería a nivel mundial.

El libro hace hincapié en el tratamiento analítico de la temática, lo cual favorece a la implementación computacional de los casos en estudio y, evidentemente, permite un tratamiento muy general de la cinemática y la dinámica durante el ciclo de movimiento de un mecanismo plano, a diferencia de la mayoría de los textos convencionales que dan preferencia a los análisis gráficos.

El lector que revise y estudie detenidamente nuestro texto adquirirá las siguientes capacidades:

- Determinar la movilidad de un mecanismo plano eslabonado e identificar las variables cinemáticas conocidas y desconocidas involucradas en el mismo.
- Generar las ecuaciones cinemáticas para un ciclo completo del mecanismo.
- Utilizar las anteriores ecuaciones en una implementación computacional para estudiar su comportamiento cinemático en un ciclo de movimiento.
- Desarrollar las ecuaciones generales de movimiento para la dinámica de los eslabones del mecanismo.
- Utilizar las ecuaciones de movimiento en una implementación computacional para estudiar su comportamiento dinámico en un ciclo de movimiento.

El libro es adecuado para cursos de Mecanismos, Teoría de Mecanismos y Máquinas, Cinemática y Dinámica de Maquinaria, Análisis de Mecanismos, entre otros.

ISBN: 978-9942-765-67-3



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA