



CÁLCULO DE LA PRESIÓN HIDRODINÁMICA CON ELEMENTOS FINITOS. MODELO DE FLUIDO INCOMPRESIBLE

Roberto Aguiar ⁽¹⁾, Diego Sosa ⁽¹⁾ y Javier Mroginski ⁽²⁾

⁽¹⁾Centro de Investigaciones Científicas
Escuela Politécnica del Ejército
raquiar@espe.edu.ec

⁽²⁾Departamento de Mecánica Aplicada
Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)
Resistencia, Chaco-Argentina
javierm@ing.unne.edu.ar

RESUMEN

Se presenta un modelo para el cálculo de la Presión Hidrodinámica en una Presa, empleando elementos finitos rectangulares de cuatro nodos el mismo que considera que el fluido es incompresible y la Presa es rígida. Se detalla el cálculo de la matriz de rigidez para un elemento de agua y se presenta un programa de computación en MATLAB, lo propio se realiza con el cálculo de la matriz de rigidez del agua de la Presa.

El modelo de elementos finitos se aplica al cálculo de la Presión Hidrodinámica de la Presa del Proyecto Hidroeléctrico Minas-La Unión-Pitahuiña y se comparan los resultados con los que se obtienen al aplicar los Métodos de Zangar y Housner.

ABSTRACT

We present a model for calculating the hydrodynamic pressure on a dam, using rectangular finite elements of four nodes it considers that the fluid is incompressible and the dam is rigid. This paper details the calculation of the stiffness matrix for a water element and provides a computer program in MATLAB, the same is made with the calculation of the stiffness matrix of water from the dam.

The finite element model is applied to the calculation of the hydrodynamic pressure Dam Hydroelectric Project Minas-La Union-Pitahuiña and compared the results with those obtained by applying the methods and Housner Zangar.

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos clásicos para el cálculo de las presiones hidrodinámicas de un fluido en movimiento por un sismo, son los desarrollados por Zangar (1952), Housner (1978) que fueron tratados con detenimiento en Aguiar y Sosa (2011), Aguiar y Tarambís (2011). Ahora se inicia el estudio con elementos finitos rectangulares para modelar el agua.

En la figura 1 se presenta la nomenclatura que se va a utilizar y se denomina Ω_s al dominio de la Presa; Ω_f al dominio del reservorio; Γ_1 a la interfaz del fluido con la Presa, en

este dominio se considera la continuidad de los esfuerzos de la presa σ_{ij} con las presiones hidrodinámicas p ; Γ_s es el dominio de la base de la Presa; Γ_2 es el dominio de la base del reservorio; Γ_3 es el dominio del borde libre del reservorio.

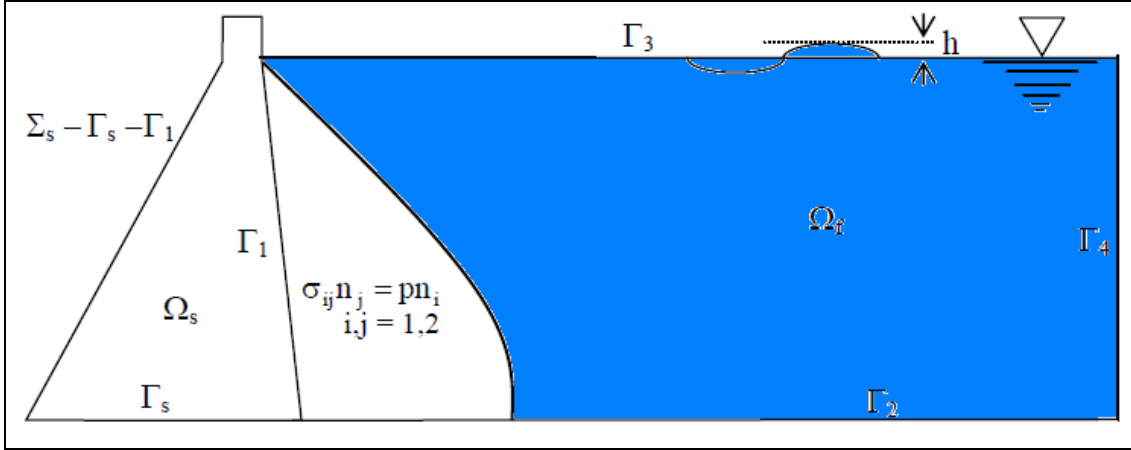


Figura 1 Descripción de la nomenclatura utilizada para la Presa con el agua.

En el modelo que se presenta en este artículo se realiza el análisis sísmico en dos subsistemas, el uno es la presa y el otro es el agua. La ecuación diferencial de gobierno de estos dos subsistemas, es la siguiente:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_s \mathbf{U} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_p \quad (1)$$

Donde \mathbf{M}_s , \mathbf{C}_s , \mathbf{K}_s son las matrices de masas, amortiguamiento y rigidez de la Presa; \mathbf{F}_g es el vector de cargas generalizadas debido a la acción sísmica; \mathbf{F}_p es el vector de fuerzas debido a la Presión Hidrodinámica que actúan en el borde de la Presa. En este artículo se presenta el cálculo de este vector de fuerzas \mathbf{F}_p , siguiendo el modelo propuesto por Tiliouine y Seghir (1998), que se presenta a continuación para un reservorio en el cual el fluido se considera incompresible.

La discretización del sistema de elementos finitos responde a la ecuación siguiente:

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{K}_F \mathbf{P} = \mathbf{q} \quad (2)$$

Donde \mathbf{M}_F , \mathbf{K}_F son las matrices de masa y rigidez del fluido; \mathbf{P} , es el vector de presiones y \mathbf{q} es el vector de cargas que actúa en los bordes de la presa en contacto con el agua, en el dominio Γ_1 . Para una Presa rígida y considerando el fluido incompresible la ecuación (2) se transforma en:

$$\mathbf{K}_F \mathbf{P} = \mathbf{q} \quad (3)$$

El vector de cargas \mathbf{q} se obtiene, con la siguiente expresión:

$$\mathbf{q} = - \int_{\Gamma_1} \rho_f \ddot{\mathbf{U}}_n^g \mathbf{N}_p^t d\Gamma \quad (4)$$

Donde ρ_f es la densidad del agua; \ddot{U}_n^g es la aceleración normal a la presa, debido a la aceleración del suelo (sismo); N_p^t es un vector que contiene las funciones de forma, definidas para el borde de la presa, de las presiones.

Una vez que se halla el vector de presiones P se encuentran las fuerzas estáticas que actúan en el borde de la Presa F_p , por intermedio de la matriz de paso Q

$$F_p = Q P \quad (5)$$

$$Q = -\int_{\Gamma_1} N_u^t n N_p d\Gamma$$

La matriz de paso Q es una matriz de transformación de las presiones perpendiculares a la cara de la presa en componentes en dirección de los grados de libertad de los desplazamientos de la presa; N_u vector que contiene a las funciones de forma utilizadas en la Presa; n es la componente normal superficial.

2. MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTO FINITO PARA EL AGUA

En Aguiar y Mroginski (2010) se presenta la deducción que conduce al cálculo de la matriz de rigidez de un elemento finito para el agua, H_{ww} y es la siguiente:

$$H_{ww} = \int_{\Omega_f} (\nabla N_p)^T \frac{k^{rw}}{\mu^w} \nabla N_p d\Omega_f$$

Donde k^{rw} es la permeabilidad relativa del agua; μ^w es la viscosidad cinemática que depende de la temperatura y presión; N_p son las funciones de forma consideradas para modelar el agua como un fluido incompresible; ∇N_p es una matriz que contiene a las derivadas de las funciones de forma con respecto a los ejes reales X, Y . Se recuerda que la capacidad de un material para que un fluido lo atravesase sin alterar su estructura interna. Para el agua k^{rw} / μ^w vale la unidad. Luego la matriz de rigidez de un elemento finito de agua se halla con la siguiente expresión.

$$H_{ww} = \int_{\Omega_f} (\nabla N_p)^T \nabla N_p d\Omega_f \quad (6)$$

2.1 Funciones de forma

En la figura 2 se indica el elemento finito considerado para modelar el agua, tiene 4 grados de libertad que son las presiones en los nodos, las mismas que se han denominado con la letra P para mantener la misma nomenclatura del apartado anterior. Las funciones de forma con las que se va a trabajar son las siguientes:

$$N_p = \{\phi_1^w(s, t) \quad \phi_2^w(s, t) \quad \phi_3^w(s, t) \quad \phi_4^w(s, t)\} \quad (7)$$

$$\phi_1^w(s, t) = \frac{1}{4} (1-s)(1-t) \quad \phi_2^w(s, t) = \frac{1}{4} (1+s)(1-t)$$

$$\phi_3^w(s, t) = \frac{1}{4} (1+s)(1+t) \quad \phi_4^w(s, t) = \frac{1}{4} (1-s)(1+t) \quad (8)$$

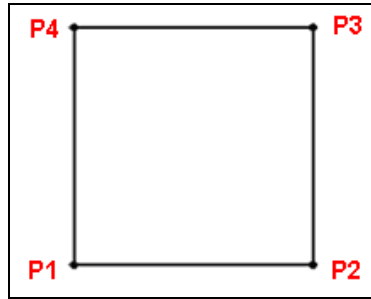


Figura 2 Descripción de elemento finito para el agua.

En la parte superior de la figura 3 se indican las funciones de forma asociadas a las presiones P1 y P2. En la parte inferior se muestran las funciones de forma relacionadas con los nodos P3 y P4.

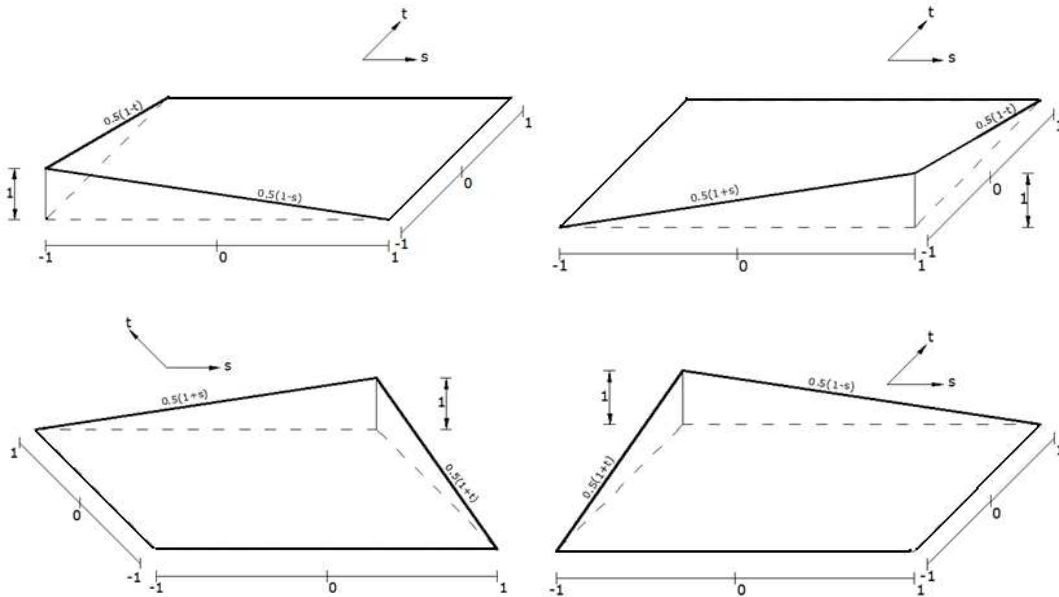


Figura 3 Funciones de forma para la fase líquida.

2.2 Matriz Jacobiana

Para pasar de coordenadas naturales (s, t) a coordenadas reales (x, y) se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= 0.25[(1-s)(1-t)x_1 + (1+s)(1-t)x_2 + (1+s)(1+t)x_3 + (1-s)(1+t)x_4] \\ y &= 0.25[(1-s)(1-t)y_1 + (1+s)(1-t)y_2 + (1+s)(1+t)y_3 + (1-s)(1+t)y_4] \end{aligned} \quad (9)$$

Donde $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$, son las coordenadas de los vértices del elemento finito. Se define la matriz Jacobiana \mathbf{J} de la siguiente manera:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(s,t)}{\partial s} & \frac{\partial y(s,t)}{\partial s} \\ \frac{\partial x(s,t)}{\partial t} & \frac{\partial y(s,t)}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (10)$$

El determinante de la matriz Jacobiana es el área de influencia del punto de integración en la cuadratura de Gauss. Pero a más de esto la inversa de la matriz Jacobiana sirve para encontrar el gradiente de las funciones de forma.

2.3 Gradiente de las Funciones de Forma

El gradiente de las funciones de forma ∇N_p se calcula de la siguiente manera:

$$\nabla N_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1^w(s,t)}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2^w(s,t)}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3^w(s,t)}{\partial x} & \frac{\partial \phi_4^w(s,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1^w(s,t)}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2^w(s,t)}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3^w(s,t)}{\partial y} & \frac{\partial \phi_4^w(s,t)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

En forma compacta, se tiene:

$$\nabla N_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i^w(s,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i^w(s,t)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{Para } i = 1,2,3,4$$

Ahora bien, por la regla de la cadena, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i^w(s,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i^w(s,t)}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i^w(s,t)}{\partial s} \\ \frac{\partial \phi_i^w(s,t)}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.4 Programa que obtiene la matriz de rigidez de un elemento finito

Con el propósito de complementar la explicación sobre el cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito agua se presenta a continuación un programa en Matlab.

```
function [Hww]=rigidez_elemento_finito_agua(espesor,XE,YE)
%
% Programa que determina la matriz de rigidez de un elemento
% finito para el agua. Los grados de libertad son las presiones
% en los nodos. Se trabaja con un modelo que tiene 4 gdl, que
% son las presiones en cada nodo
%
%-----
% Por: Roberto Aguiar Falconi, Javier Mroginsky y Diego Sosa
%      CEINCI-ESPE
%      Enero de 2011
%-----
% ESPESOR   Espesor del agua que se considera
% XE, YE    Vectores que contienen las coordenadas del elemento finito
% Hww       Matriz de rigidez del elemento finito del agua
%-----
%[Hww]=rigidez_elemento_finito_agua(espesor,XE,YE)
%-----
```

```

% Coordinadas globales de los nudos del elemento finito
X1=XE(1); X2=XE(2); X3=XE(3); X4=XE(4); Y1=YE(1); Y2=YE(2); Y3=YE(3); Y4=YE(4);
fx=1;fy=1; % Psos de la cuadratura de Gauss para cuando se consideran 2 puntos
s(1)=-0.5773502692*fx; t(1)=-0.5773502692*fy; P(1)=(1*fx)*(1*fy); % Se consideran dos puntos
en integracion
s(2)=0.5773502692*fx; t(2)=-0.5773502692*fy; P(2)=(1*fx)*(1*fy);
s(3)=0.5773502692*fx; t(3)=0.5773502692*fy; P(3)=(1*fx)*(1*fy);
s(4)=-0.5773502692*fx; t(4)=0.5773502692*fy; P(4)=(1*fx)*(1*fy);
% Encera matriz de rigidez de elemento finito de 4 x 4
Hww=zeros(4);
for i=1:4
% Matriz Jacobiana en cada punto de integracion
JCB(1, 1)=0.25*(-(1 - t(i))* X1 + (1 - t(i))*X2 + (1 + t(i))*X3 - (1 + t(i))*X4);
JCB(1, 2)=0.25*(-(1 - t(i))* Y1 + (1 - t(i))*Y2 + (1 + t(i))*Y3 - (1 + t(i))*Y4);
JCB(2, 1)=0.25*(-(1 - s(i))* X1 - (1 + s(i))*X2 + (1 + s(i))*X3 + (1 - s(i))*X4);
JCB(2, 2)=0.25*(-(1 - s(i))* Y1 - (1 + s(i))*Y2 + (1 + s(i))*Y3 + (1 - s(i))*Y4);
% Determinante de la Matriz Jacobiana para las cuatro funciones de forma principales
DET=JCB(1,1)*JCB(2,2)-JCB(1,2)*JCB(2,1); %Determinante de Jacobiano
% Calculo de la matriz inversa Jacobiana para las dos funciones auxiliares
JIAUX(1,1)=JCB(2,2)/DET;
JIAUX(1,2)=-JCB(2,1)/DET;
JIAUX(2,1)=-JCB(1,2)/DET;
JIAUX(2,2)=JCB(1,1)/DET;
% Derivadas de las funciones de forma en coordenadas naturales
deriv(1, 1) = -0.25*(1-t(i));
deriv(2, 1) = 0.25*(1-t(i));
deriv(3, 1) = 0.25*(1+t(i));
deriv(4, 1) = -0.25*(1+t(i));
deriv(1, 2) = -0.25*(1-s(i));
deriv(2, 2) = -0.25*(1+s(i));
deriv(3, 2) = 0.25*(1+s(i));
deriv(4, 2) = 0.25*(1-s(i)) ;
% Derivads de la sfunciones de forma en coordenadas globales
DerCa(1, 1)=JIAUX(1, 1)*deriv(1, 1)+JIAUX(1, 2)*deriv(1, 2);
DerCa(2, 1)=JIAUX(1, 1)*deriv(2, 1)+JIAUX(1, 2)*deriv(2, 2);
DerCa(3, 1)=JIAUX(1, 1)*deriv(3, 1)+JIAUX(1, 2)*deriv(3, 2);
DerCa(4, 1)=JIAUX(1, 1)*deriv(4, 1)+JIAUX(1, 2)*deriv(4, 2);
DerCa(1, 2)=JIAUX(2, 1)*deriv(1, 1)+JIAUX(2, 2)*deriv(1, 2);
DerCa(2, 2)=JIAUX(2, 1)*deriv(2, 1)+JIAUX(2, 2)*deriv(2, 2);
DerCa(3, 2)=JIAUX(2, 1)*deriv(3, 1)+JIAUX(2, 2)*deriv(3, 2);
DerCa(4, 2)=JIAUX(2, 1)*deriv(4, 1)+JIAUX(2, 2)*deriv(4, 2);
% Matriz de transformacion B del punto de integracion
difV4=DET*P(i)*espesor;
Hww=Hww+DerCa*DerCa'.*difV4;
end
%---fin---

```

3. MATRIZ DE RIGIDEZ DEL AGUA

En la ecuación (3) se denominó K_F a la matriz de rigidez del agua. En este apartado se explica como se obtiene esta matriz por ensamblaje directo. Aguiar (2004). La explicación se realiza en base a la Presa indicada en la figura 4.

El ancho de la franja de agua que interviene en el cálculo se ha denominado $b(y)$, mas adelante se explicará como se determina esta variable, por ahora se consideran dos divisiones en sentido X y dos divisiones en sentido Y, es decir se trabaja con cuatro elementos finitos para el agua. En los nodos se tienen las presiones.

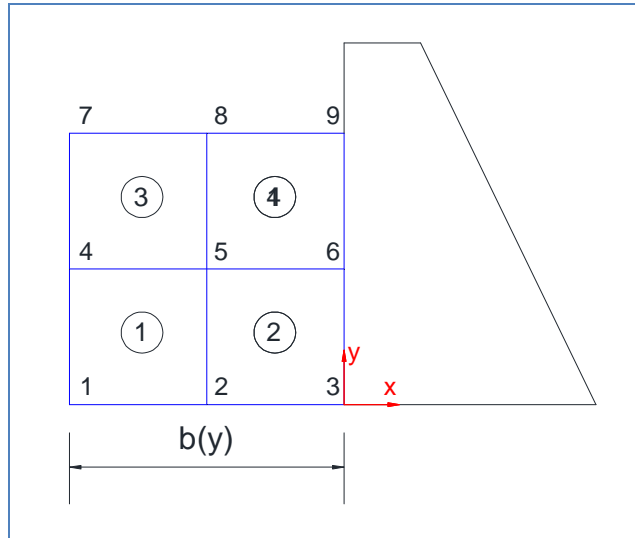


Figura 4 Discretización del dominio del agua.

3.1 Grados de libertad del dominio agua

Los grados de libertad de las Presiones se empieza numerando en el borde de la Presa que está en contacto con el agua, de abajo hacia arriba, como se indica en la figura 5. Se destaca que la Presión en la superficie libre de la Presa es nula por ese motivo no hay grado de libertad en ese punto, lo propio se tiene al extremo al extremo de la franja $b(y)$.

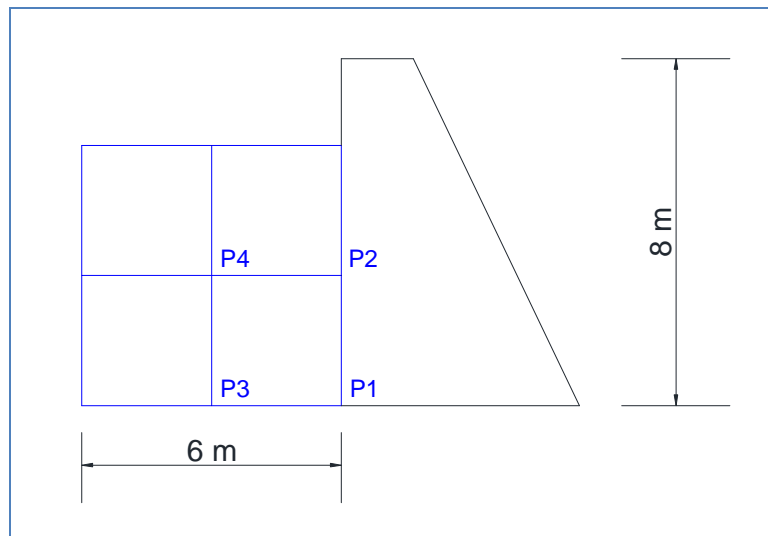


Figura 5 Grados de libertad del dominio del agua.

3.2 Vectores de Colocación

El programa *vc_represa* encuentra la matriz que contiene a los vectores de colocación de la Presa. Para la estructura de la figura 5, estos vectores de colocación son:

$$VC = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El programa calcula también las coordenadas XE, YE de cada elemento finito. Considerando la numeración de los nodos indicada en la figura 2; se empieza en el nodo inferior izquierdo; la primera fila de cada una de estas matrices corresponde al elemento 1 y así sucesivamente.

3.3 Uso de programa *vc_represa*

Se indica la forma de ejecutar *vc_represa* con los datos de la Presa mostrados en la figura 5, se presenta además lo que reporta el programa.

```
>> divx=2;divy=2;base=[6.0;6.0;6.0];altura=6.0;b=0.0;
>> [XE,YE,VC]=vc_represa(divx,divy,base,altura,b)
XE =
    -6    -3    -3    -6
    -3     0     0    -3
    -6    -3    -3    -6
    -3     0     0    -3
YE =
     0     0     3     3
     0     0     3     3
     3     3     6     6
     3     3     6     6
VC =
     0     3     4     0
     3     1     2     4
     0     4     0     0
     4     2     0     0
```

3.4 Uso de programa *rigidez_represa*

Una vez que se ejecuta el programa *vc_represa* se debe ejecutar el programa *rigidez_represa* que encuentra la matriz de rigidez del Agua por ensamblaje directo. Este programa a su vez llama al programa *rigidez_elemento_finito_agua*. Para el ejemplo la matriz de rigidez es la siguiente.

```
>> [SSw]=rigidez_represa(VC,divx,divy,XE,YE,1,4)
SSw =
    0.6667   -0.1667   -0.1667   -0.3333
   -0.1667    1.3333   -0.3333   -0.3333
   -0.1667   -0.3333    1.3333   -0.3333
   -0.3333   -0.3333   -0.3333    2.6667
```

Los dos últimos datos corresponde al espesor que es de 1 m., ya que se calcula por metro de ancho y los grados de libertad, para el ejemplo es 4.

Se encuentra la matriz de rigidez asociada a todos los grados de libertad y posteriormente se condensa esta matriz para tener la matriz de rigidez asociada a los grados de libertad del borde de la presa, para el ejemplo sería pasar a una matriz de 2 por 2.

```
>> KAA=SSw(1:2,1:2);KAB=SSw(1:2,3:4);KBB=SSw(3:4,3:4);
>> KF=KAA-KAB*inv(KBB)*KAB'
KF =
    0.5914   -0.2688
   -0.2688    1.1828
```


4. VECTOR DE CARGAS

El vector de cargas q puede evaluarse utilizando la ecuación (9) pero se lo va a realizar de una manera similar a la empleada en las propuestas de: Zangar (1952) y Housner (1978) ya que se desea comparar las presiones hidrodinámicas que se encuentran al trabajar con elementos finitos cuadriláteros con las que se obtienen con las propuestas de los autores mencionadas.

En las propuestas de Zangar (1952) y Housner (1978) la presión hidrodinámica se halla en función del coeficiente sísmico α , el mismo que se obtiene del análisis sísmico de la Presa sin considerar el agua. En base a este coeficiente sísmico se halla la aceleración $\ddot{U}_n^g = \alpha g$. Siendo g la aceleración de la gravedad.

Esta aceleración se la considera constante a lo largo del borde de la Presa en contacto con el agua, únicamente depende del ángulo de inclinación del borde de la presa con respecto al eje X, que se denomina θ . Con esto se tiene que:

$$\begin{aligned}\ddot{U}_n^g &= \alpha g \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \\ \beta &= \cot g \theta\end{aligned}\quad (13)$$

La deducción de la ecuación (13) se halla en Aguiar y Sosa (2011). Para una Presa con borde vertical, el ángulo $\theta = 90^0$. Luego $\beta = 0$ y la aceleración $\ddot{U}_n^g = \alpha g$

La fuerza que actúa en cada nodo que está en la frontera entre el agua y la presa se la obtiene multiplicando la masa por la aceleración. Pero la masa es igual al peso sobre la gravedad y el peso a su vez es igual al peso específico del agua por el Volumen. Al reemplazar todo esto y considerando un elemento finito de un metro de ancho se halla que la fuerza en cada nodo que se denomina q_i es igual a:

$$q_i = \gamma \alpha \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} L_i \quad (14)$$

Las variables no identificadas son: γ que es el peso específico del agua; L_i es la longitud del elemento finito en el borde de la Presa en contacto con el agua y q_i es un elemento del vector de cargas q .

5. FRANJA DE AGUA

En la figura 4, a la franja de agua que interviene en el cálculo de la Presión Hidrodinámica, se denominó $b(y)$. Ahora en este apartado se va a indicar como se obtiene el ancho de la franja de agua siguiendo el modelo de Housner (1978) que por cierto se encuentra en Chwang y Housner (1978). La ecuación diferencial del Método de Housner (1978) es la siguiente:

$$A(y) \frac{dA(y)}{dy} - \beta A(y) = -2y \quad (15)$$

Donde la variable y se mide a partir del fondo de la Presa (ver figura 4) y como se indicó $\beta = \cot g \theta$. La condición de contorno para resolver la ecuación (15) es $A(y = h) = \beta h$. Una vez que se resuelve la ecuación diferencial (15) el ancho $b(y)$ se halla con la ecuación (16). En Aguiar y Sosa (2011) se deduce la ecuación diferencial (15) y se resuelve la misma empleando Diferencias Finitas. Se destaca que en Chwang y Housner (1978) se presenta la solución analítica exacta de la ecuación diferencial (15) pero es bastante compleja.

$$b(y) = \frac{A(y) + \beta y}{2} \quad (16)$$

6. APLICACIÓN A LA PRESA MINAS-LA UNIÓN-PITAHUIÑA

En la figura 6 se muestra la geometría de la Presa Minas-La Unión Pitahuiña, que será construida en el Sur Oriente del Ecuador y que aprovechará las aguas del río Jubones para la generación de energía. La Presa tiene una altura de 68.88 m y un ancho en la base de 72.50 m., el ancho en la parte superior es de 8.96 m.

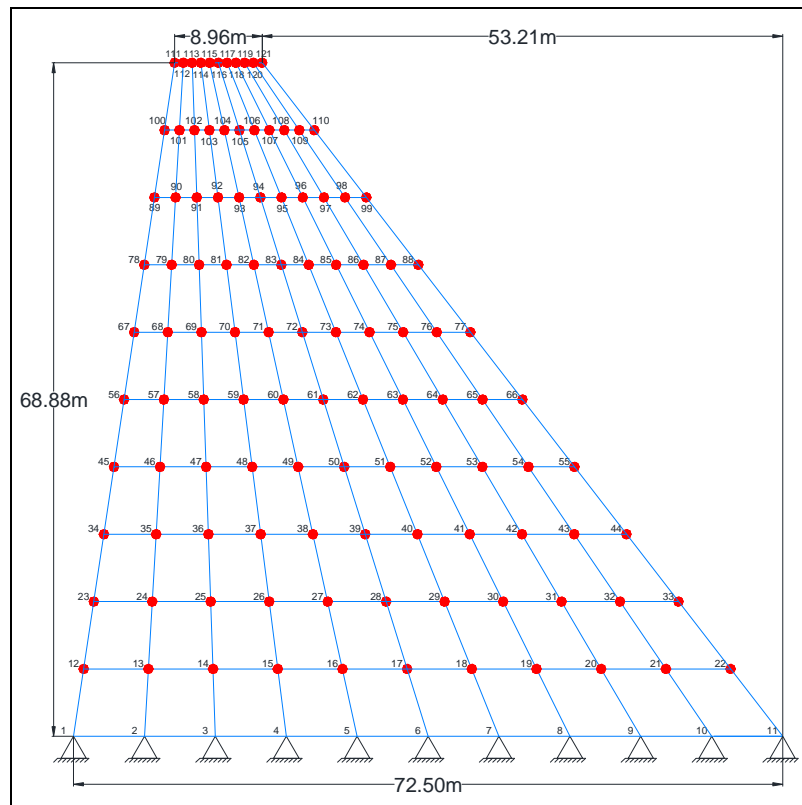


Figura 6 Modelo de masas concentradas en Presa Minas-La Unión- Pitahuiña

La figura 6 corresponde a una sección transversal en el centro de la Presa. En el modelo las masas se han concentrado en cada uno de los nodos. En Aguiar y Sosa (2011) se realizó el análisis sísmico para el espectro inelástico indicado en la figura 7., el mismo que fue obtenido de un estudio de Peligrosidad Sísmica para el sismo MCE (Maximum Credible Earthquake) que tiene un período de retorno de 970 años. Aguiar (2010).

En el análisis sísmico se obtuvo que el coeficiente sísmico que relaciona el cortante basal con el peso de la estructura, es: $\alpha = 0.57$. Con este valor se obtiene el vector de cargas q utilizando la ecuación (14).

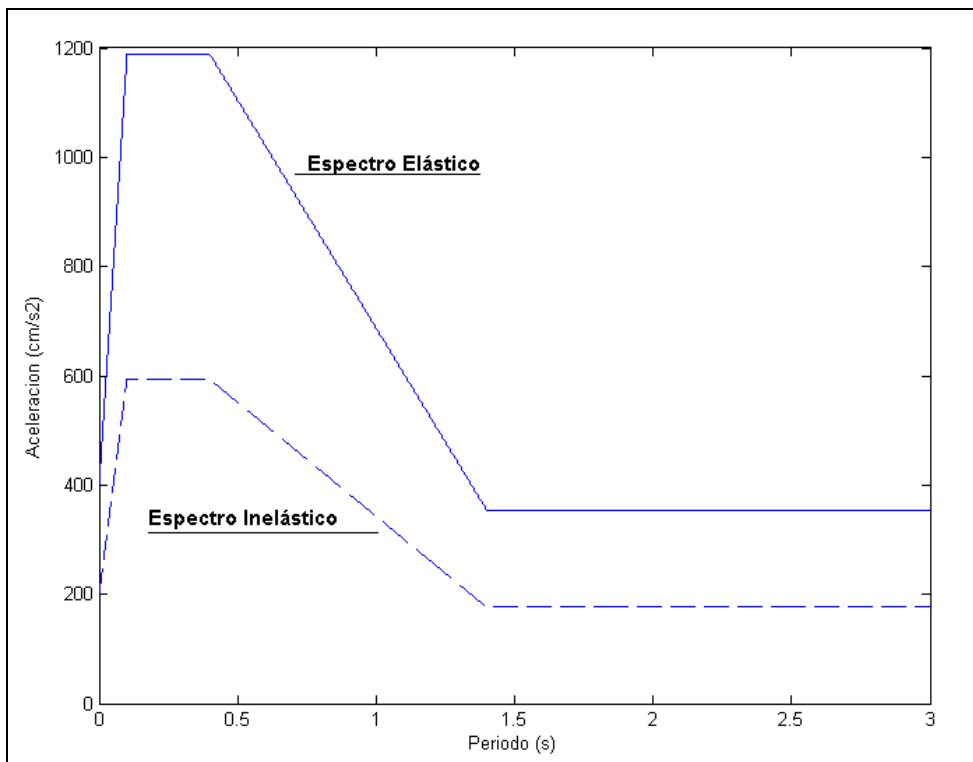


Figura 7 Espectro Elástico e Inelástico obtenido de estudio de Peligrosidad Sísmica. Aguiar (2010)

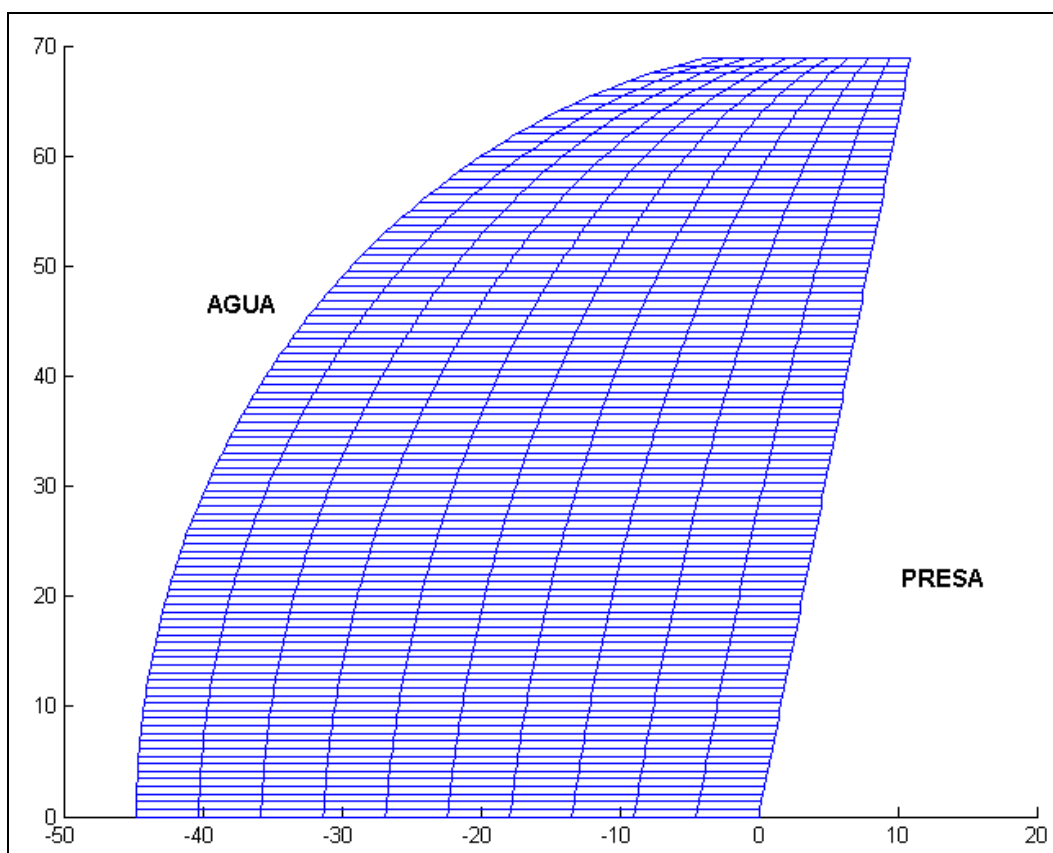


Figura 8 Malla de elementos finitos considerada para el agua.

En la figura 8 se presenta la malla de elementos finitos con la cual se obtuvo la Presión Hidrodinámica. Se consideró 10 divisiones en sentido X y 100 divisiones en sentido Y, con lo que se tiene 1000 elementos finitos. La franja de agua que contribuye al cálculo de la Presión se encontró con la ecuación (16).

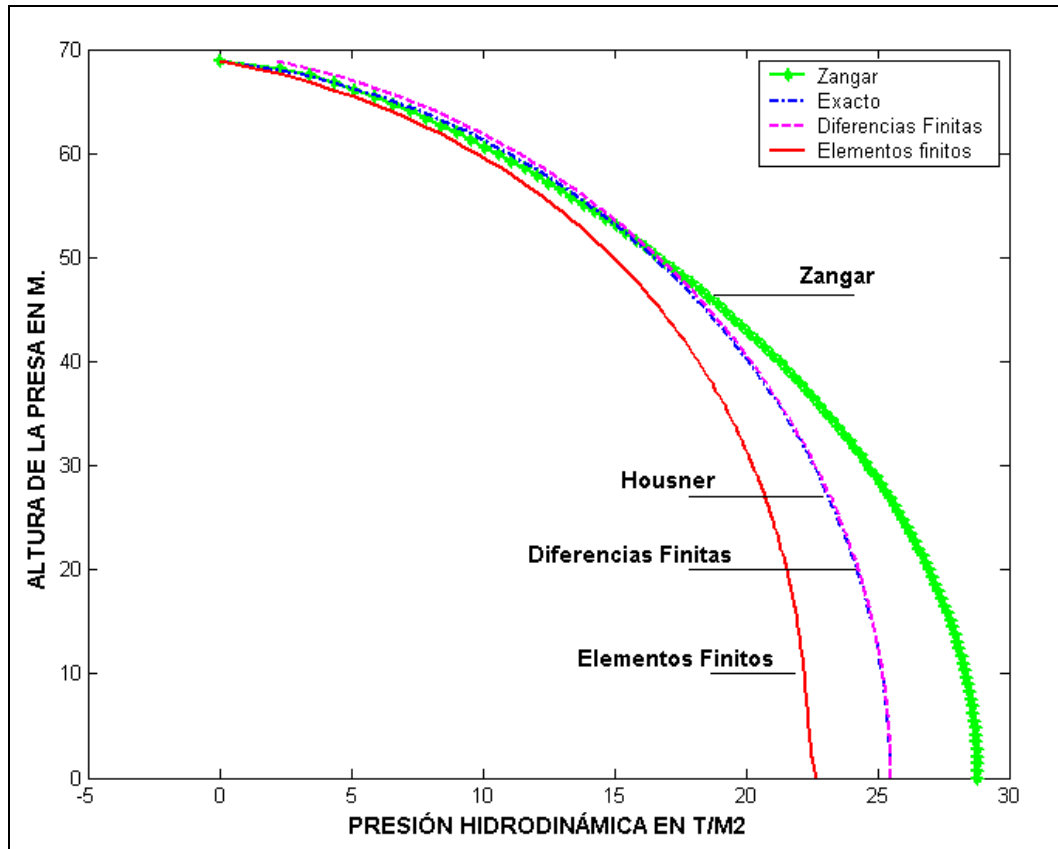


Figura 9 Presiones Hidrodinámicas encontradas en el borde de la Presa.

En la figura 9 se muestran las presiones hidrodinámicas halladas con Elementos Finitos, en la forma expuesta en este artículo y se compara con las halladas con los Métodos de Zangar (1952) y Housner (1978), que están detalladas en Aguiar y Sosa (2011). En el Método de Housner la solución de la ecuación diferencial se realizó con Diferencias Finitas y también en forma exacta, a esta última se la identifica en la figura 9, como Housner.

Se aprecia que todos los métodos tienen resultados parecidos pero las Presiones Hidrodinámicas halladas con el modelo de elementos finitos reporta menores valores.

7. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Se presentado un modelo para el cálculo de la Presión Hidrodinámica en una Presa, empleando elementos finitos rectangulares de cuatro nodos el mismo que considera que el fluido es incompresible y la Presa es rígida. Por ser muy poco conocido el tema de los elementos finitos en el agua se ha detallado el cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito y de toda el agua de la Presa. La franja de agua que influye en el cálculo de la Presión Hidrodinámica se la realizó con la propuesta de Housner.

Con el propósito de comparar los resultados que se obtienen al aplicar elementos finitos al agua se obtuvo la Presión Hidrodinámica en la Presa del Proyecto Hidroeléctrico Minas-La Unión-Pitahuiña y estos resultados fueron comparados con los que obtuvieron Aguiar y Sosa (2011) al emplear los métodos de Zangar y Housner. Se encontró que los resultados son muy parecidos con lo que se valida la forma de cálculo de las Presiones Hidrodinámicas

con elementos finitos, que es muy conocido por especialistas que trabajan en esta temática pero que no lo es para la gran mayoría de estudiantes de Ingeniería Civil, por esta razón el artículo fue presentado en forma muy didáctica.

REFERENCIAS

1. Aguiar R., (2010), "Estudio de Peligrosidad sísmica y espectro de diseño de la Presa: Minas-La Unión-Pitahuiña", ASTEC, 32 p., Quito.
2. Aguiar R., Mroginski (2010), "Matriz de rigidez para un elemento finito saturado en dos dimensiones", *Revista Ciencia, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército*, **13 (2)**, 119-140, Quito.
3. Aguiar R., Tarambis J. P., (2011), "Introducción a la interacción fluido estructura en el análisis sísmico de la Presa Chontal", *VI Congreso de Ciencia y Tecnología. ESPE 2011*, 16 p., Quito.
4. Aguiar R., Sosa D., (2011), "Estudio comparativo de dos modelos para calcular la Presión Hidrodinámica. Aplicación a la Presa Minas-La Unión-Pitahuiña", *Revista Ciencia, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército*, **14 (1)**, 1-20, Quito.
5. Chwang A., and Housner G., (1978), "Hydrodynamic pressures on sloping dams Turing earthquakes. Part 1. Momentum method", *Journal Fluid. Mechanics*, **87 (2)**, 335-341, Gret Britain.
6. Tiliouine y Seghir (1998), "Fluid-structure models for dynamic Studies of dam-water Systems". Este artículo se encuentra en Internet.
7. Zangar C. N., (1952), "Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquake", *Engineering Monographs* **11**, United States Department of the Interior Bureau of Reclamation, Colorado.