

ESTUDIO COMPARATIVO DE DOS MODELOS PARA CALCULAR LA PRESIÓN HIDRODINÁMICA. APLICACIÓN A LA PRESA MINAS-LA UNIÓN-PITAHUIÑA

Roberto Aguiar Falconí y Diego Sosa Caiza

Centro de Investigaciones Científicas
Escuela Politécnica del Ejército
raguiar@espe.edu.ec

RESUMEN

Se presentan dos modelos para el cálculo de las Presiones Hidrodinámicas, el uno propuesto por Zangar y el otro por Housner. Ahora bien en el Método de Housner se demuestra que la solución de la ecuación diferencial mediante Diferencias Finitas es mucho más fácil que la solución analítica propuesta por el autor del método y los resultados que se obtienen son muy similares en presas con diferentes ángulos de inclinación de la cara que está en contacto con el agua.

Por otra parte, se presenta la variación de los coeficientes con los cuales se obtiene la fuerza total: horizontal, vertical y normal a la cara de la Presa en contacto con el agua, para ángulos de Presas variando de 0 a 90. También se ha incluido en el estudio la curva de los coeficientes de presión hidrodinámica, máximos.

Finalmente, se realiza un análisis sísmico, mediante Elementos Finitos, de la Presa Minas-La Unión-Pitahuiña, para un espectro inelástico que está asociado a un período de retorno de 970 años y se encuentra el coeficiente sísmico en base al cual se encuentran las Presiones Hidrodinámicas con los dos modelos. Además se encuentra el ancho de la franja de agua que influye en el cálculo de las presiones.

ABSTRACT

Two models are presented for the calculation of Hydrodynamic Pressures, one of them proposed by Zangar and the other one proposed by Housner. Now in Housner Method it is demonstrated that the solution for the differential equation using Finite Differences is easier than the analytic solution proposed by the author of the method and the obtained results are very similar for dams with different inclination angles of the side that is in contact with water.

On the other hand, we present the variation of the coefficients with which the total force is obtained: horizontal, vertical and normal to the side of the Dam in contact with water, for angles of Dams varying from 0 to 90. In this study, the curve of the maximum coefficients of hydrodynamic pressure has also been included.

Finally, a seismic analysis is carried out, by means of Finite Elements, of Minas-La Unión-Pitahuiña Dam, for an inelastic spectrum that is related to a period of return of 970 years and the seismic coefficient is found out with which the Hydrodynamic Pressures are obtained with both models. In addition, the width of the water fringe that influences in the calculation of pressures is found out.

Recibido: Noviembre de 2010
Aceptado: Enero de 2010

1. INTRODUCCIÓN

Existen varios modelos para evaluar las presiones hidrodinámicas en una Presa sometida a acciones sísmicas. Dos de ellos, son los modelos propuestos por Zangar y el de Housner los mismos que se presentan en este artículo y se aplican a la Presa del Proyecto Hidroeléctrico: Minas-La Unión-Pitahuiña.

1.1 Modelo de Zangar

Zangar (1952) mediante una analogía eléctrica y ondas de fluido estudió el movimiento de una cortina rígida con paramento inclinado en un vaso de longitud infinita suponiendo que el líquido es incompresible e inviscido. Un sistema es inviscido cuando las fuerzas viscosas existentes en el sistema son despreciables frente a las fuerzas inerciales.

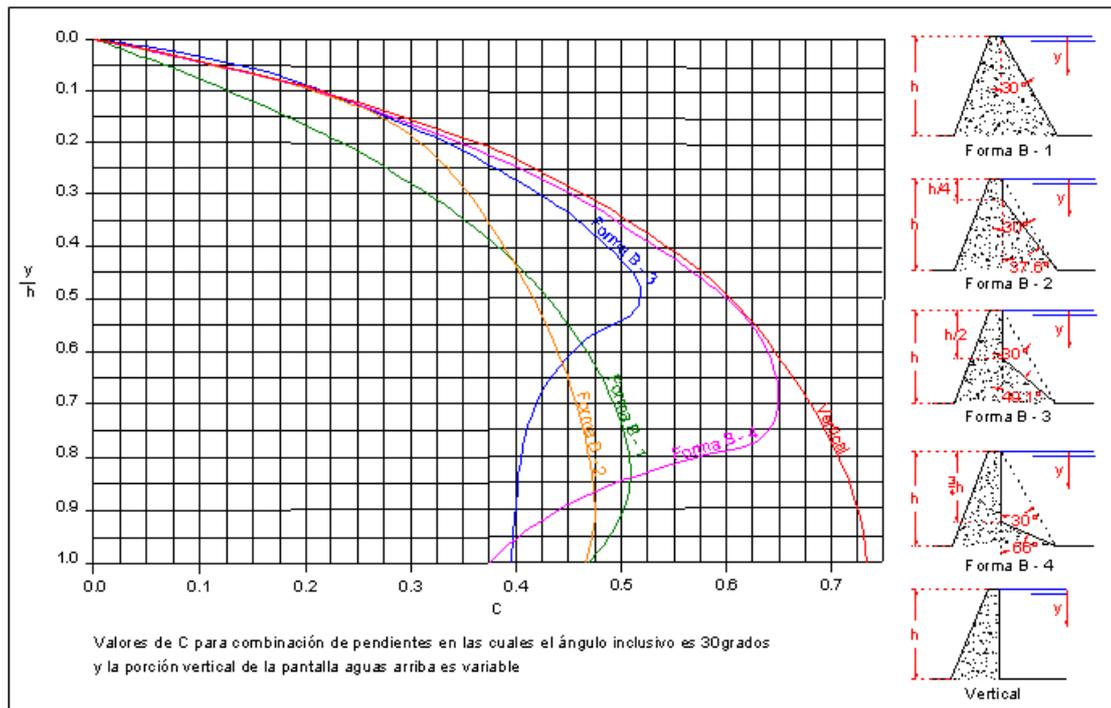


Figura 2 Valores de C para un ángulo inclusivo de 30°.

Además de ello, utilizando una analogía eléctrica y redes de flujo, amplió el trabajo para dos planos de paramento de las cortinas. Los resultados obtenidos en forma analítica fueron comparados con ensayos experimentales, encontrando una muy buena aproximación. La forma de encontrar la presión hidrodinámica horizontal es la siguiente:

$$P_e = C \alpha w h$$

$$C = \frac{C_m}{2} \left[\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) + \sqrt{\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right)} \right] \quad (1)$$

Donde C se halla con la ecuación 1; α es el coeficiente sísmico; w es el peso específico del agua; h es la altura total de agua almacenada; y es la distancia en la cual se desea calcular la presión hidrodinámica, medida a partir de la superficie de agua; C_m es el mayor valor de las gráficas en las figuras 2 a 4. Nótese que la variable y se mide a partir del nivel de agua.

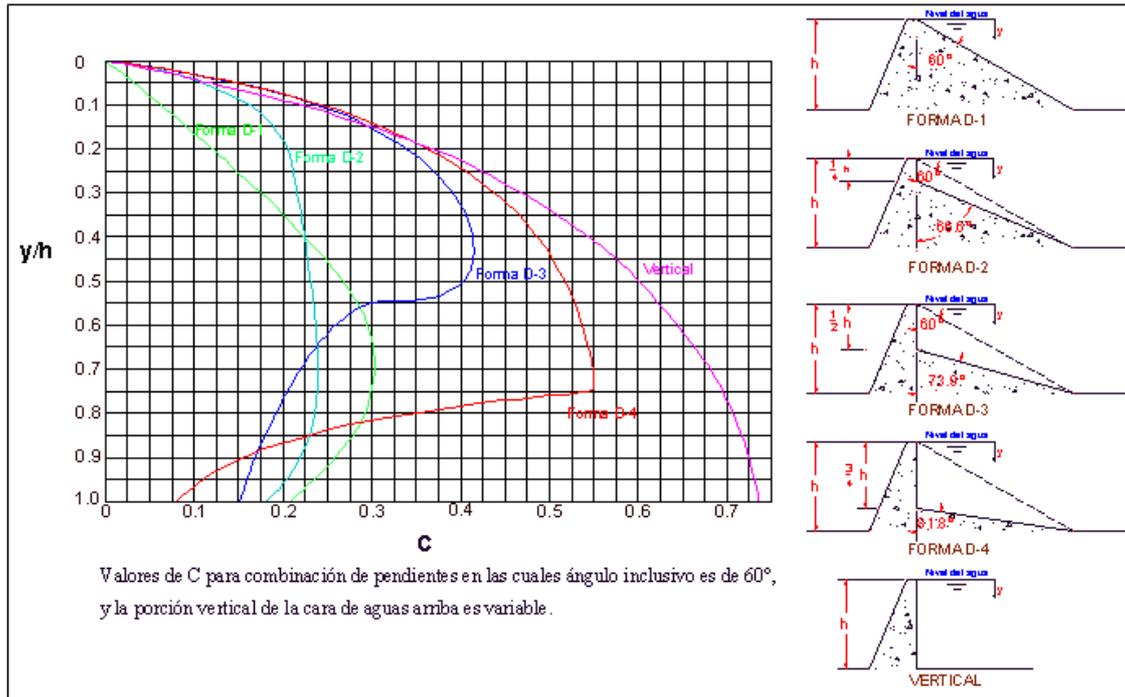


Figura 3 Valores de C para un ángulo inclusivo de 60° .

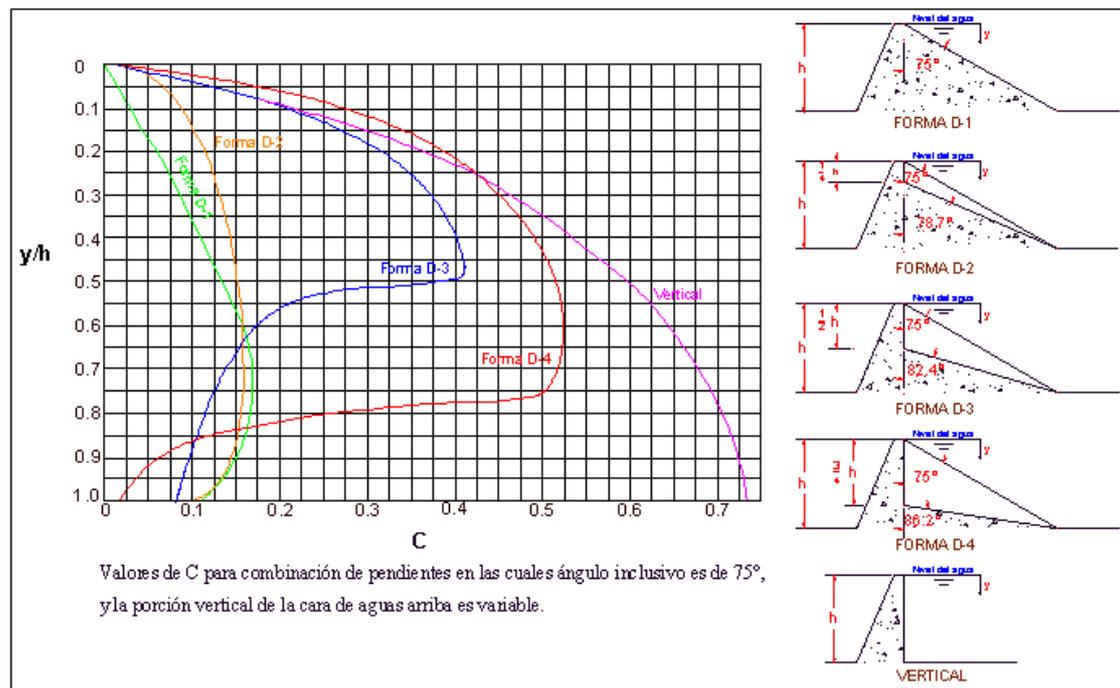


Figura 4 Valores de C para un ángulo inclusivo de 75° .

En Aguiar y Tarambis (2010) se presentan otras tablas de variación de C para otro tipo de geometría de Presas.

1.2 Modelo de Housner

El desarrollo del modelo de Housner está descrito en Chwang y Housner (1978) y considera que el fluido es incompresible, irrotacional e inviscido. En la figura 5 se presentan la

nomenclatura considerada para las variables. La cara de la Presa en contacto con el agua tiene un ángulo θ como se aprecia en la figura 5 y se denomina β a la cotangente del ángulo θ .

$$\beta = \cot \theta \quad (2)$$

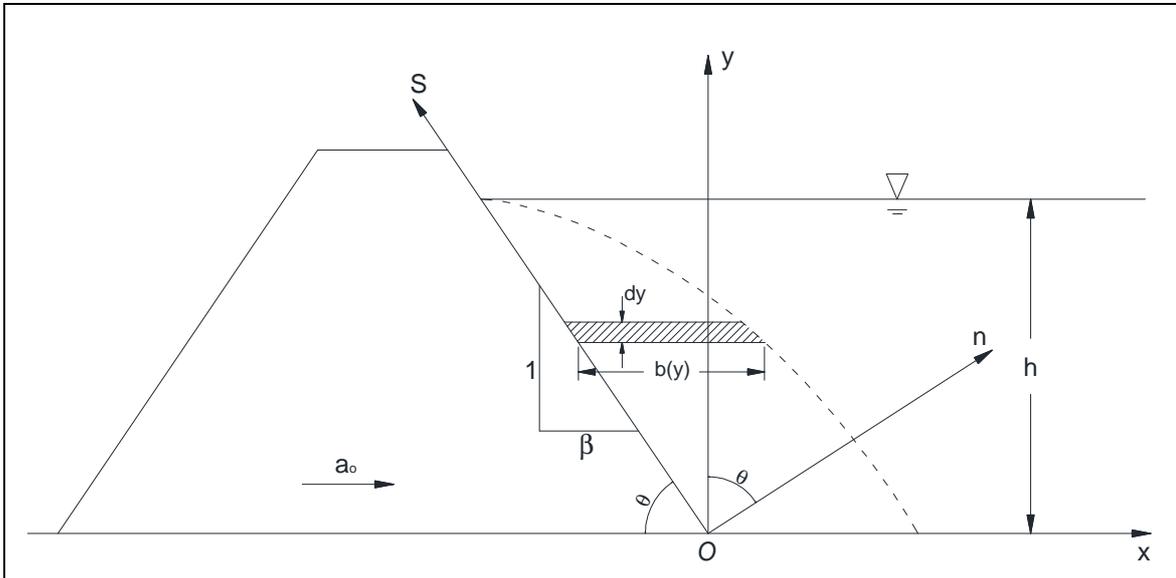


Figura 5 Descripción de las variables para el modelo de Housner.

Nótese que ahora la variable y se mide a partir del fondo del embalse, así en $y = h$ se tiene el nivel de agua. Sea a_0 la aceleración horizontal de la Presa debida a sismo en un instante de tiempo cualquiera, el mismo que permanece constante en el intervalo Δt ; $b(y)$ es el ancho de influencia del agua en la cual se considera que actúa la presión hidrodinámica. n es el eje normal a la cara exterior a la Presa en contacto con el agua y la variable s es la dirección paralela.

La aceleración a_0 debido a sismo, genera una Presión Hidrodinámica en el agua la misma que debe añadirse a la Presión Hidrostática. Este efecto se denomina de “masa añadida” y es valido para fluidos incompresibles. Se denomina a_{0n} a la componente normal de la aceleración a_0 la misma que vale:

$$a_{0n} = a_0 \operatorname{sen} \theta = a_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (3)$$

En el borde de la Presa en contacto con el agua se cumple que la aceleración en la Presa, a_{0n} es igual a la aceleración en ese punto, que se denomina, $a_n(x, y)$, debido a la presión hidrodinámica.

$$a_n(x, y) = a_{0n} \quad \text{Para } x = -\beta y \quad (4)$$

Se considera que la aceleración a_n actúa únicamente en una franja de longitud $b(y)$. Luego, se tiene:

$$\int_{-\beta y}^{\infty} a_n(x, y) dx = b(y) * a_{0n} \quad \text{Para } 0 \leq y \leq h \quad (5)$$

Es muy fácil demostrar que las componentes de la aceleración del fluido en las direcciones x , y valen:

$$\begin{aligned} a_x(x, y) &= a_{0n} \operatorname{sen} \theta - a_s(x, y) \cos \theta \\ a_y(x, y) &= a_{0n} \cos \theta + a_s(x, y) \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (6)$$

Siendo a_s la aceleración en la dirección s . Ahora aplicando el principio de la continuidad de la masa de fluido desplazada, se considera que la masa que se desplaza en sentido horizontal entre $y = 0$ y un punto arbitrario de y , es igual a masa que atraviesa la franja de longitud $b(y)$. Esto implica lo siguiente:

$$y a_0 = b(y) a_{0n} \cos \theta + f(y) \operatorname{sen} \theta \quad (7)$$

$$f(y) = \int_{-\beta y}^{b-\beta y} a_s(x, y) dx \quad (8)$$

Del equilibrio de momentos, de las fuerzas en sentido x se obtiene:

$$\begin{aligned} F_y &= a_x m y \\ p &= \frac{F}{dy \cdot 1} \rightarrow F = p dy \\ m &= \delta V = \rho b(y) dy \cdot 1 \end{aligned}$$

Donde p es la presión hidrodinámica; ρ es la densidad del agua. El análisis se realiza por unidad de profundidad. Luego de reemplazar y simplificar algunos términos se obtiene:

$$p = \rho (b(y) a_{0n} \operatorname{sen} \theta - f(y) \cos \theta)$$

En lo que sigue, por facilidad de escritura se colocará b en lugar de $b(y)$ y f en lugar de $f(y)$. Con esta notación la ecuación resultante del equilibrio de momentos con fuerzas horizontales, es:

$$p = \rho (b a_{0n} \operatorname{sen} \theta - f \cos \theta) \quad (9)$$

Al proceder en forma similar pero con las fuerzas verticales, se halla el momento con respecto al eje y , obteniendo lo siguiente. Chwan y Housner (1978).

$$p \cot \theta - \frac{d(p b)}{dy} = \rho (b a_{0n} \cos \theta + f \operatorname{sen} \theta) \quad (10)$$

➤ Cálculo de la Presión

La ecuación (7) se multiplica por $\cos \theta$, y la ecuación (9) por $\operatorname{sen} \theta$. Al sumar estas dos ecuaciones se tiene:

$$y a_0 \cos \theta + \frac{p}{\rho} \operatorname{sen} \theta = b a_{0n}$$

$$y a_0 \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} + \frac{p}{\rho} \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} = b \frac{a_0}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

Luego de simplificar términos y al despejar la presión p se halla:

$$p = \rho a_0 (b - \beta y) \quad (11)$$

En función del peso específico w y del coeficiente sísmico α . Se tiene que:

$$\rho = \frac{w}{g} \quad \alpha = \frac{a_0}{g}$$

$$p = w \alpha (b - \beta y) \quad (12)$$

➤ Ecuación diferencial

Al reemplazar en la ecuación (10) la ecuación (7) se tiene:

$$p \cot \theta - \frac{d(p b)}{dy} = \rho (y a_0)$$

Ahora al reemplazar en esta última expresión, la ecuación (11) se obtiene:

$$\rho a_0 (b - \beta y) \cot \theta - \frac{d(\rho a_0 (b - \beta y) b)}{dy} = \rho (y a_0)$$

Considerando que a_0 es constante en el intervalo de tiempo Δt y que la densidad es constante; estas dos variables salen de la derivada y se simplifican, con lo que se obtiene la ecuación diferencial que gobierna el problema de la presión hidrodinámica para el modelo de Housner.

$$(b - \beta y) \beta - \frac{d((b - \beta y) b)}{dy} = y \quad (13)$$

La presión en la superficie vale cero. Luego en $y = h$, se tiene que $p = 0$. Al reemplazar esta condición en la ecuación (11) se tiene la condición de contorno de la ecuación (13). Esta es:

$$b = \beta h \quad \text{Para } y = h \quad (14)$$

Chwang y Housner (1978) realizan el siguiente cambio de variable:

$$A(y) = 2 b - \beta y \quad (15)$$

De la ecuación (15) se halla:

$$b = \frac{A(y) + \beta y}{2} \quad (16)$$

Al reemplazar (16) en (13) se tiene:

$$\left[\frac{A(y) + \beta y}{2} - \beta y \right] \beta - \frac{d}{dy} \left(\left(\frac{A(y) + \beta y}{2} - \beta y \right) \left\{ \frac{A(y) + \beta y}{2} \right\} \right) = y$$

$$\beta [A(y) - \beta y] - \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \{ [A(y) - \beta y][A(y) + \beta y] \} = 2y$$

$$\beta A(y) - \beta^2 y - \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \{ A^2(y) - \beta^2 y^2 \} = 2y$$

$$\beta A(y) - \beta^2 y - \frac{1}{2} 2A(y) \frac{dA(y)}{dy} + \frac{1}{2} \beta^2 2y = 2y$$

Finalmente, luego de simplificar términos y cambiar de signo se halla:

$$A(y) \frac{dA(y)}{dy} - \beta A(y) = -2y \quad (17)$$

Al reemplazar (14) en (15) se tiene la nueva condición de borde asociada a la ecuación diferencial (17), esta resulta.

$$A(y = h) = \beta h \quad (18)$$

2. SOLUCIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL

La solución de la ecuación diferencial (17) con la condición de borde indicada en la ecuación (18) está resuelta en Chwan y Housner (1978) y es la siguiente:

$$\ln \left(\frac{A^2 - \beta A y + 2 y^2}{2 h^2} \right)$$

$$= \frac{2\beta}{\sqrt{(8 - \beta^2)}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{(8 - \beta^2)}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{2A - \beta y}{y \sqrt{(8 - \beta^2)}} \right) \right] \quad (\beta^2 < 8) \quad (19)$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{(\beta^2 - 8)}} \left[\ln \left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 8}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 8}} \right) - \ln \left(\frac{2A - \beta y - \sqrt{\beta^2 - 8} y}{2A - \beta y + \sqrt{\beta^2 - 8} y} \right) \right] \quad (\beta^2 > 8) \quad (20)$$

La solución depende del valor de β . En efecto, si $\beta^2 < 8$, la solución está dada por la ecuación (19) y si $\beta^2 > 8$ la solución es la presentada en la ecuación (20). Para los dos casos la solución es difícil y más que ello para encontrar el valor de $A(y)$ se debe utilizar algún método numérico como es el de Newton Raphson.

La solución de la ecuación diferencial (17) es muy sencilla si se utilizan diferencias finitas y es de esa forma como se resuelve en este apartado. Se puede emplear la diferencia regresiva para la primera derivada y hallar las respuestas desde $y = h$, hasta $y = 0$. Para $y = h$ se tiene la ecuación (18), esta es la condición inicial.

Otra forma de resolver es con las diferencia progresiva para la primera derivada pero para ello se necesita conocer la condición de borde en $y = 0$. De esta manera es como se va a resolver, por este motivo se reemplaza $y = 0$ en las ecuaciones (19) y (20) con lo que se obtiene:

$$\frac{b_0}{h} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[-\frac{\beta}{\sqrt{8-\beta^2}} \left\langle \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{8-\beta^2}} \right) \right\rangle \right] & (\beta^2 < 8) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 8}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 8}} \right]^{\frac{\beta}{2\sqrt{\beta^2 - 8}}} & (\beta^2 > 8) \end{cases} \quad (21)$$

Donde b_0 es el ancho de agua cooperante en $y = 0$. Al sustituir este valor en la ecuación (15) se tiene la condición inicial $A(y = 0) = 2 b_0$

2.1 Diferencias Finitas

En la tabla 1 se ha denominado $U_Y = \frac{dU}{dY}$; $U_{YY} = \frac{d^2U}{dY^2}$, U_{YYY} es la tercera derivada de una variable cualquiera U con respecto a Y ; U_{YYYY} es la cuarta derivada. Para la solución de la ecuación diferencial identificada por la ecuación (17) únicamente se utilizará la primera derivada; por cierto en lugar de tener la variable U se tendrá la variable A . Todas las aproximaciones de las derivadas indicadas en la tabla 1 son fórmulas progresivas ordinarias debido a que involucran a puntos que se encuentran en la parte superior del punto pivote. En la segunda columna de la tabla 1, se tiene el factor, el mismo que es función del paso k . Luego se tienen los puntos que se involucran en el cálculo de la derivada y finalmente se ha presentado el primer término del error. Aguiar (1991).

Tabla 1 Fórmulas progresivas ordinarias

Derivada	Factor	U_i	U_{i+1}	U_{i+2}	U_{i+3}	U_{i+4}	Error
U_Y	$\frac{1}{k}$	-1	1				$\frac{-k U_{YY}}{2}$
U_{YY}	$\frac{1}{k^2}$	1	-2	1			$-k U_{YYY}$
U_{YYY}	$\frac{1}{k^3}$	-1	3	-3	1		$\frac{-3kU_{YYYY}}{2}$
U_{YYYY}	$\frac{1}{k^4}$	1	-4	6	-4	1	$-2k U_{YYYY}$

Al reemplazar la aproximación de la primera derivada en la ecuación (17) se halla, la ecuación en diferencias finitas, esta resulta:

$$A_j \left[\frac{A_{j+1} - A_j}{k} \right] - \beta A_j = -2 * y_j$$

$$A_{j+1} = \beta k - 2 * k * \frac{y_j}{A_j} + A_j \quad (23)$$

La solución con diferencias finitas (ecuación 23) es extremadamente sencilla en comparación con la solución analítica exacta, ecuaciones (19) y (20). La condición inicial para la ecuación (23) es $A(y = 0) = 2 b_0$.

2.2 Presión Hidrodinámica

Al remplazar la ecuación (16) en la ecuación (12) se halla que la presión hidrodinámica horizontal vale:

$$p = w \alpha \left(\frac{A(y) - \beta y}{2} \right) h \quad (24)$$

Si se compara la ecuación (24) con la ecuación (1) se encuentra que el coeficiente de la presión hidrodinámica C_p , vale:

$$C_p = \frac{A(y) - \beta y}{2 h} \quad (25)$$

En la figura 6 se presentan valores de C_p para ángulos θ que varían desde 15° hasta 90° hallados resolviendo la ecuación diferencial con diferencias finitas. En las ordenadas se tiene la relación y/h .

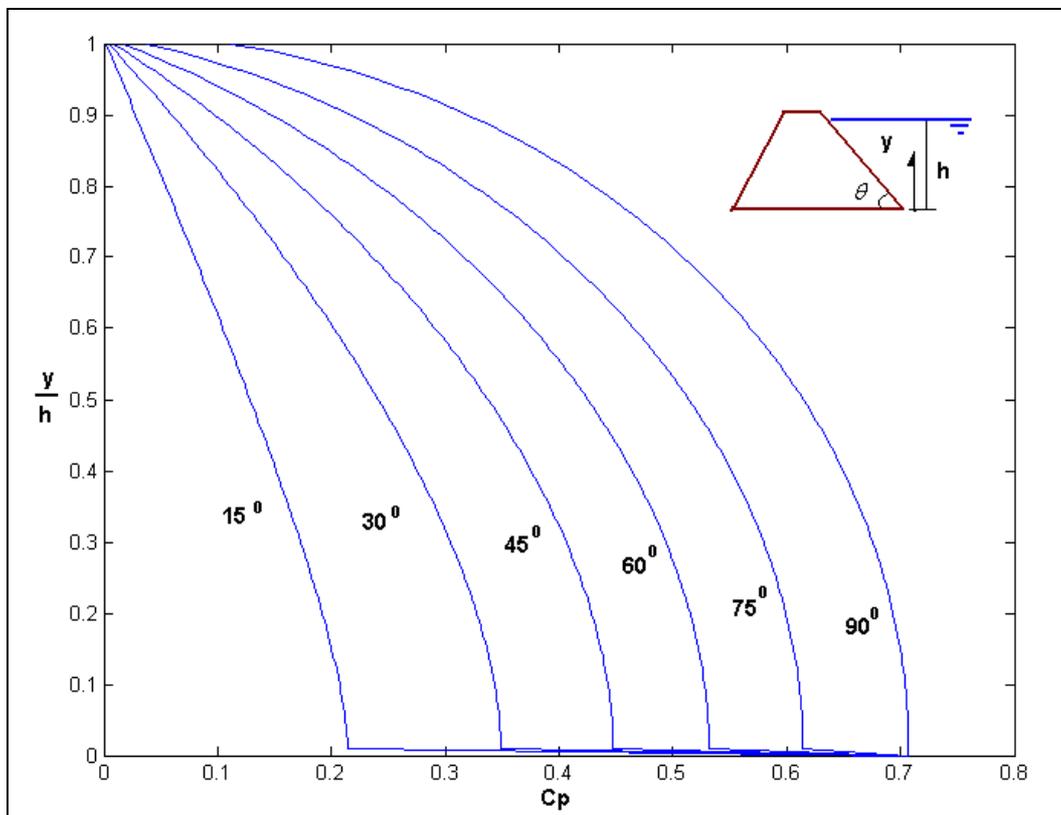


Figura 6 Valores de C_p para algunos valores de θ empleando Diferencias Finitas.

En la figura 7 se presenta la variación de C_p hallada con la solución de la ecuación diferencial en forma exacta, ecuación (19) y la que se obtiene mediante Diferencias Finitas; para valores de θ que varían de 30° a 90° . No se colocó para $\theta = 15^\circ$ debido que para este valor se debe encontrar la solución exacta con la ecuación (20) y parece ser que esta solución está mal escrita.

Para los valores de θ presentados se aprecia que los valores de C_p hallados mediante diferencias finitas son muy parecidos a los que se encuentran con la solución exacta, especialmente para valores de $y/h < 0.5$. Para valores de $0.5 < y/h < 0.9$ la aproximación entre las dos soluciones también es bastante buena pero para valores de $y/h > 0.9$ la solución es considerable especialmente para valores de $\theta > 60^\circ$.

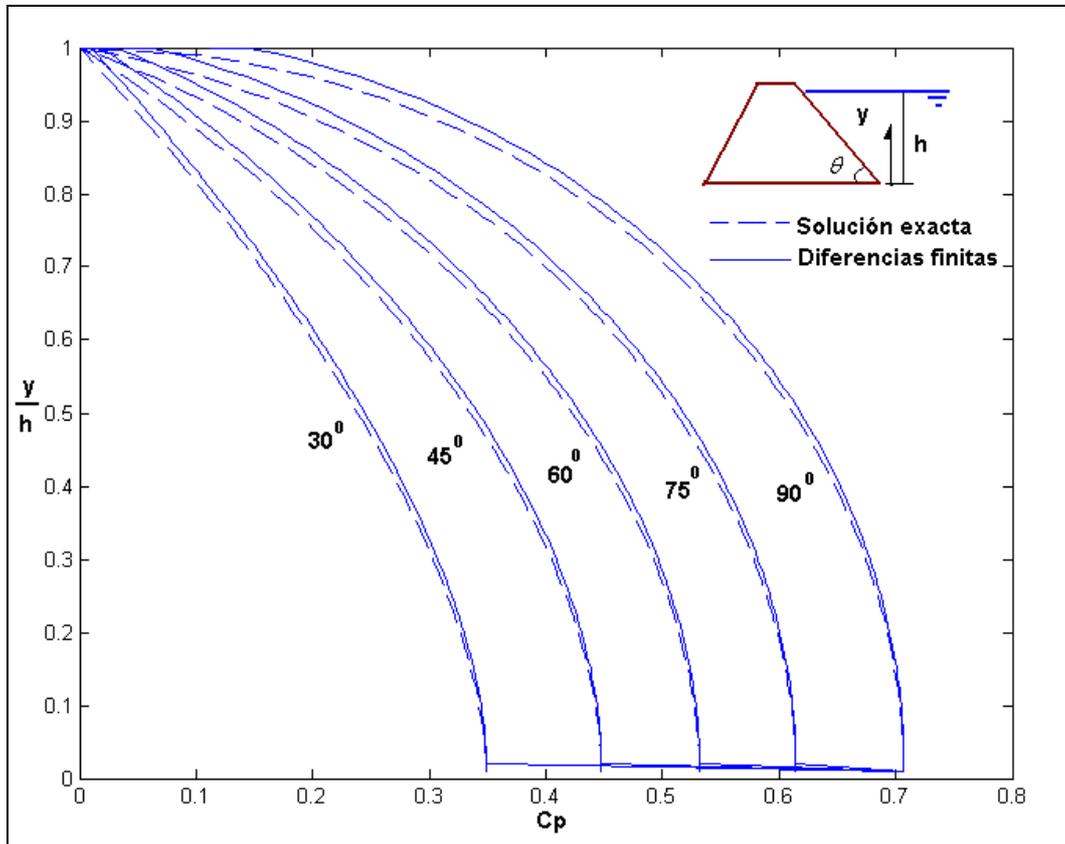


Figura 7 Solución analítica exacta y solución mediante Diferencias Finitas.

Pero desde el punto de vista práctico tener valores más altos de la presión hidrodinámica, hallados con Diferencias Finitas, en lugar que con la solución Analítica Exacta no influye mayormente debido a que en los puntos que se encuentran cerca del borde libre de agua son bajos.

2.3 Comparación con modelo de Zangar

Solamente para el caso de $\theta = 90^\circ$ se comparan los valores de C_p que se obtienen al aplicar la ecuación propuesta por Zangar (ecuación 1); y las de Housner halladas con Diferencias Finitas y mediante la solución analítica exacta; los resultados se muestran en la figura 8. La impresión general es que las tres curvas son bastante parecidas, de tal manera que el Método del Momento es bastante confiable.

Luego se aprecia que el modelo de Zangar presenta valores menores para el rango comprendido entre: $0.3 < y/h < 1$. Para valores de $y/h < 0.3$ los valores hallados con la ecuación de Zangar son mayores.

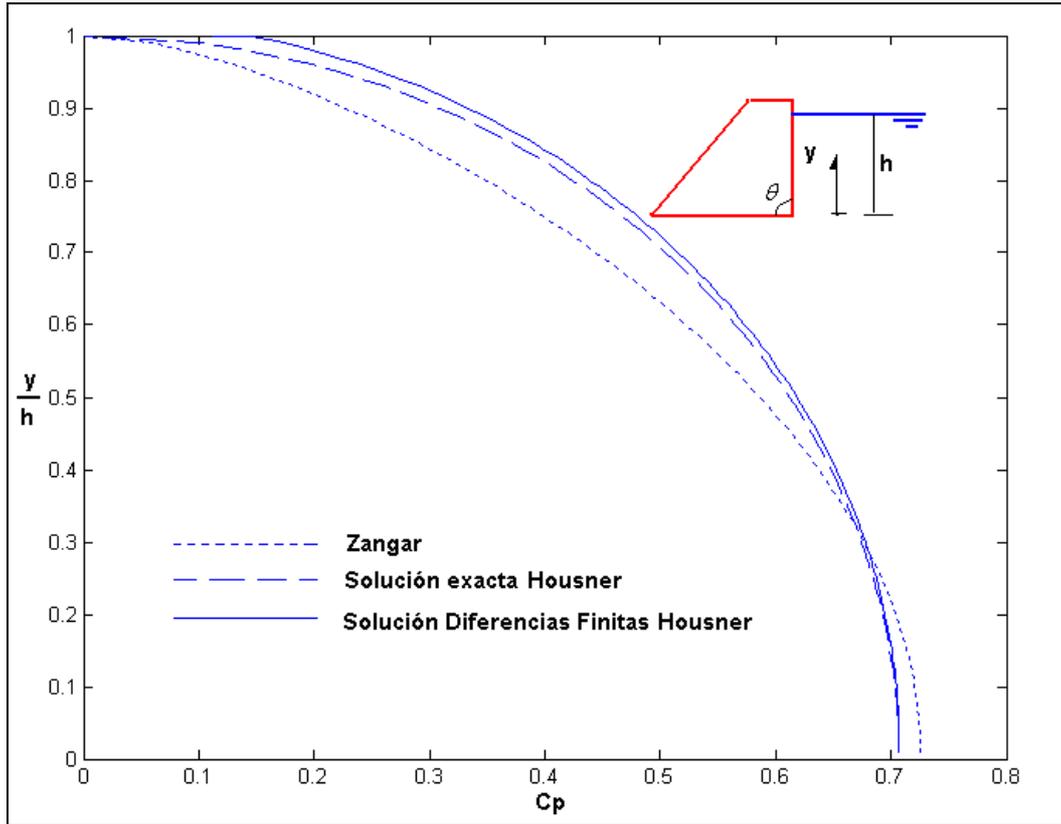


Figura 8 Valores de C_p hallados con: Zangar; Solución Exacta y Diferencias Finitas.

3. FUERZA HORIZONTAL, VERTICAL Y NORMAL

Estrictamente, la presión hidrodinámica p actúa en sentido perpendicular a la cara de la presa que está en contacto con el agua. Luego la fuerza $F_z = p (dz * 1)$ (ver figura 9). Pero el diferencial $dz = \frac{dy}{\text{sen } \theta}$. Con estas acotaciones, al observar la figura 9 se aprecia que la fuerza vertical F_y vale:

$$F_y = \int_0^h p \left(\frac{dy}{\text{sen } \theta} \right) \cos \theta = \int_0^h p \, dy \cot g \theta = \beta \int_0^h p \, dy \quad (26)$$

Al sustituir la ecuación (12) que determina la presión p en la ecuación (21), se halla:

$$F_y = \beta w \alpha \int_0^h (b - \beta y) dy \quad (27)$$

De la ecuación (13) se halla al integrar los dos lados:

$$\int_0^h (b - \beta y) \beta \, dy - \int_0^h y \, dy = [b(b - \beta y)]_0^h$$

De donde:

$$\int_0^h (b - \beta y) \beta dy = \left[b(b - \beta y) + \frac{y^2}{2} \right]_0^h$$

Se conoce que en $b(h) = \beta h$ (en $y = h$) y que en ($y = 0$) el ancho vale b_0 . Con estas acotaciones la integral vale:

$$\int_0^h (b - \beta y) \beta dy = \frac{h^2}{2} - b_0^2$$

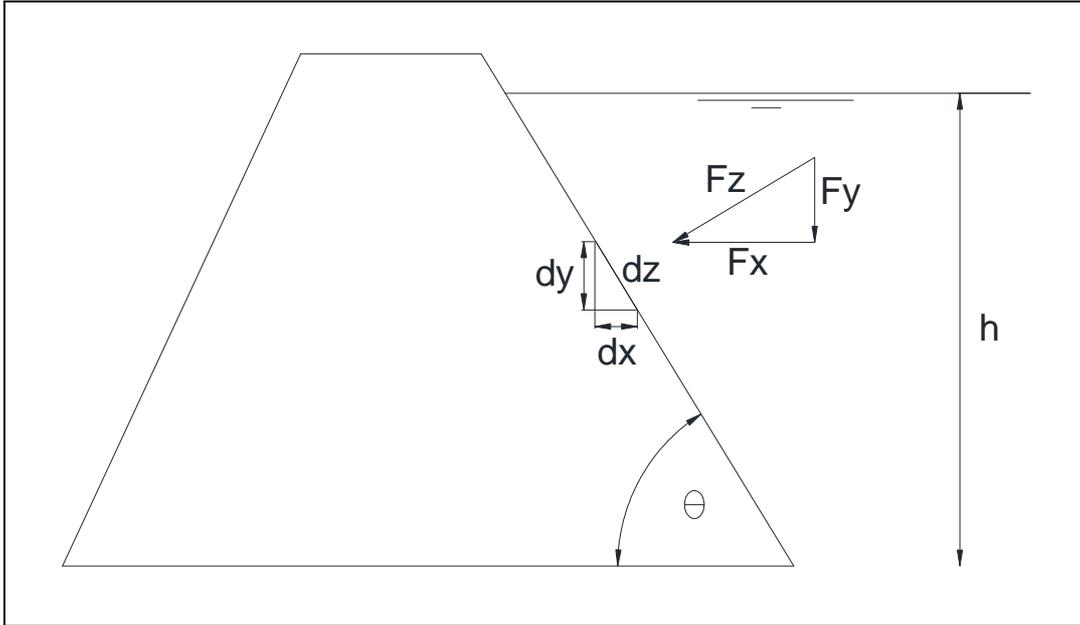


Figura 9 Fuerza horizontal, vertical y normal que actúan en borde de Presa en contacto con el agua.

Luego la fuerza total F_Y vale:

$$F_Y = w \alpha \left(\frac{h^2}{2} - b_0^2 \right) = w \alpha h^2 \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{b_0}{h} \right)^2 \right]$$

$$F_Y = w \alpha h^2 C_Y \quad C_Y = \left[0.5 - \left(\frac{b_0}{h} \right)^2 \right] \quad (28)$$

En forma similar se halla la fuerza horizontal total F_X debida a la presión hidrodinámica.

$$F_X = w \alpha h^2 C_X \quad C_X = C_Y / \beta \quad (29)$$

Finalmente, la fuerza normal total F_n se halla con la siguiente expresión.

$$F_n = w \alpha h^2 C_n \quad C_n = \sqrt{C_X^2 + C_Y^2} \quad (30)$$

En la figura 10 se ha dibujado los coeficientes C_Y que se halla con la ecuación (28); C_X que se encuentra con la ecuación (29); C_n que se determina con la ecuación (30) y los

valores máximos del coeficiente de la presión hidrodinámica C_p que se ha denominado C_{p0} los mismos que se hallan con la ecuación (25).

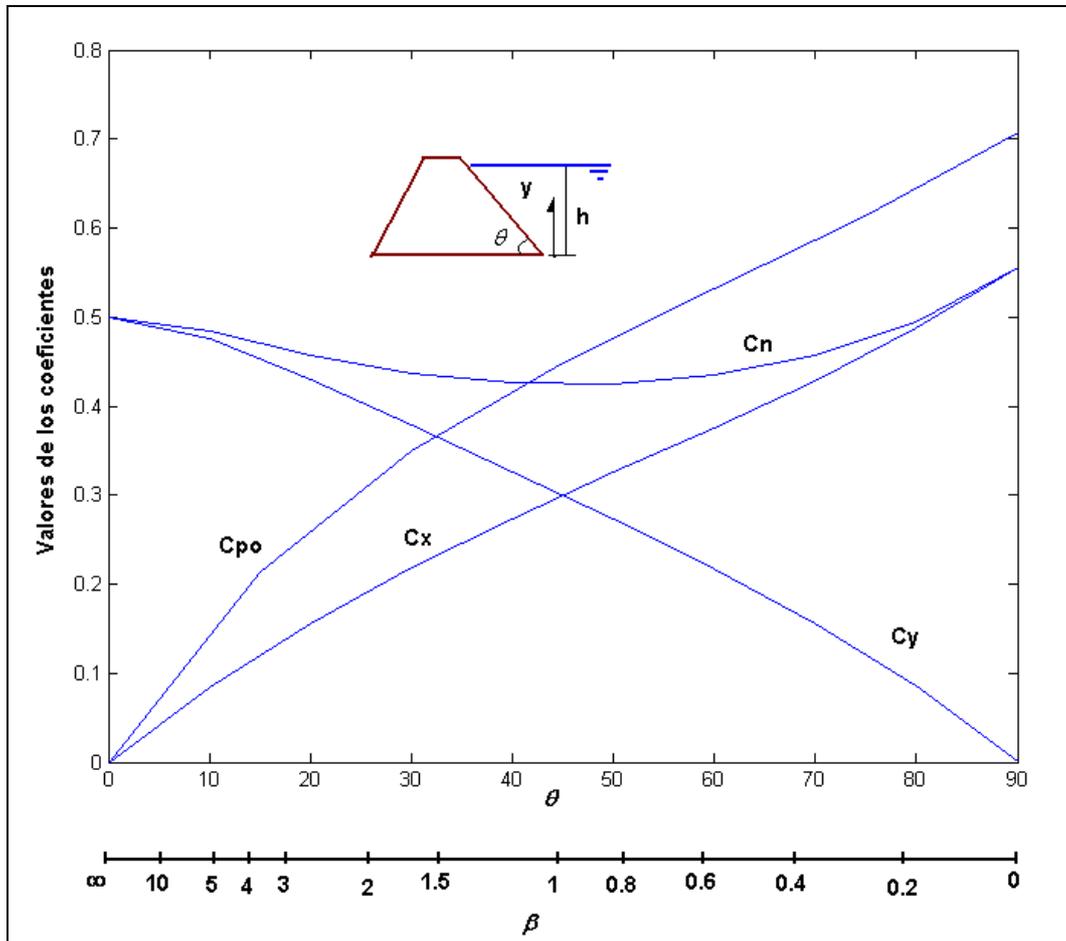


Figura 10 Coeficientes para determinar la fuerza total: vertical C_y , horizontal C_x , normal C_n y valores máximos de la presión C_{p0} para diferentes ángulos de inclinación θ y $\beta = \cot g \theta$.

3.1 Casos particulares

En la determinación de los valores con los cuales se construye la figura 10 se debe tener en cuenta los siguientes casos particulares.

$$C_x = C_n = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = 0.555 \quad C_y = 0 \quad (\beta = 0) \quad (31)$$

$$C_x = 0 \quad C_y = C_n = \frac{1}{2} \quad (\beta \rightarrow \infty) \quad (32)$$

Las ecuaciones (31) y (32) se hallan a partir de las ecuaciones (28), (29) y (30).

3.2 Comentarios

En la figura 10 se aprecia que el coeficiente $C_n \approx 0.5$ para cualquier valor del ángulo θ . Luego como una muy buena aproximación se puede encontrar la fuerza total normal de la siguiente manera:

$$F_n = 0.5 w \alpha h^2 \quad (0 \leq \theta \leq 90) \quad (33)$$

4. APLICACIÓN A LA PRESA MINAS-LA UNIÓN-PITAHUIÑA

La Presa del Proyecto Hidroeléctrico Minas-La Unión-Pitahuiña, se encuentra ubicada en las siguientes coordenadas geográficas: Latitud $3^{\circ} 18' 58''$ S., y Longitud $79^{\circ} 28' 54''$ W., aprovechará las aguas del río Jubones para la generación de energía eléctrica. En la figura 11 se muestra la ubicación de la Presa.

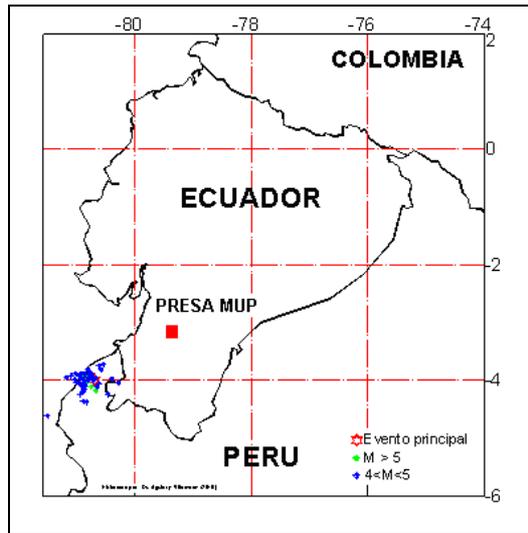


Figura 11 Ubicación de la Presa Minas-La Unión-Pitahuiña. Aguiar (2010,1)

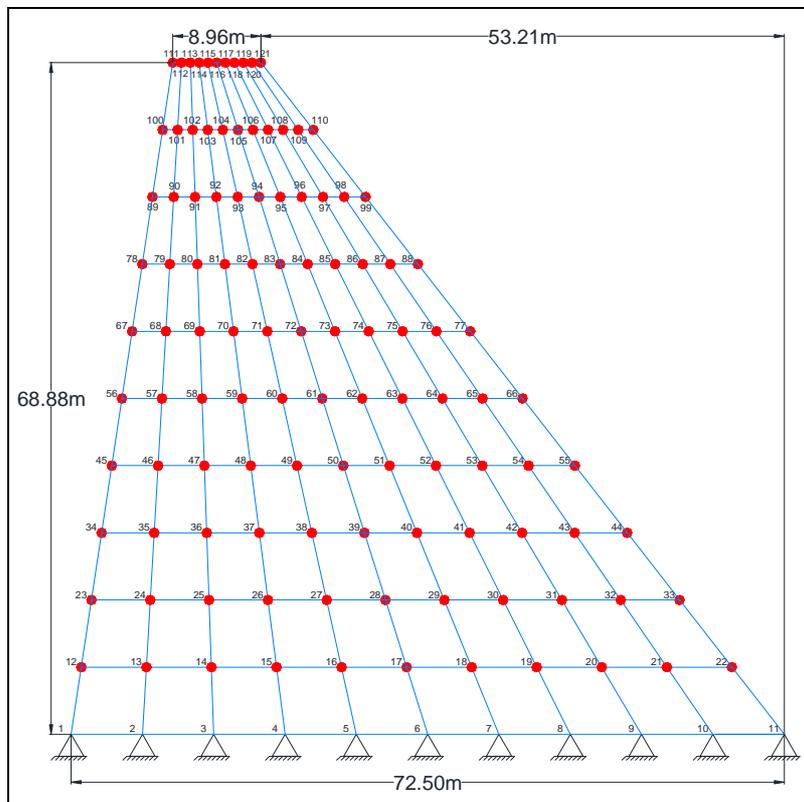


Figura 12 Modelo de masas concentradas en Presa Minas-La Unión- Pitahuiña

La Presa Minas-La Unión-Pitahuiña se construirá con hormigón rodillado, que tiene una resistencia a la compresión de 140 kg/cm^2 . En Aguiar (2010,2) se presentan más detalles de la Presa. En la figura 12 se muestra un corte de la Presa en el centro, se aprecia que tiene una altura de 68.88 m., una base de 72.50 m., en la parte superior la base es de 8.96 m. La cara de la Presa que está en contacto con el agua se encuentra a la izquierda en la figura 12.

Para el análisis sísmico se han considerado 10 divisiones en el sentido y 10 divisiones en el sentido Y, de tal manera que se tienen 100 elementos finitos tipo Q4, suavizados por flexión. Las masas se han concentrado en todos los nudos como se observa en la figura 12. Se realiza el análisis sísmico utilizando el espectro inelástico indicado en la figura 12, el mismo que fue hallado de un estudio de Peligrosidad Sísmica para el sitio del Proyecto de la Presa, para un período de retorno de 970 años. Aguiar (2010,1).

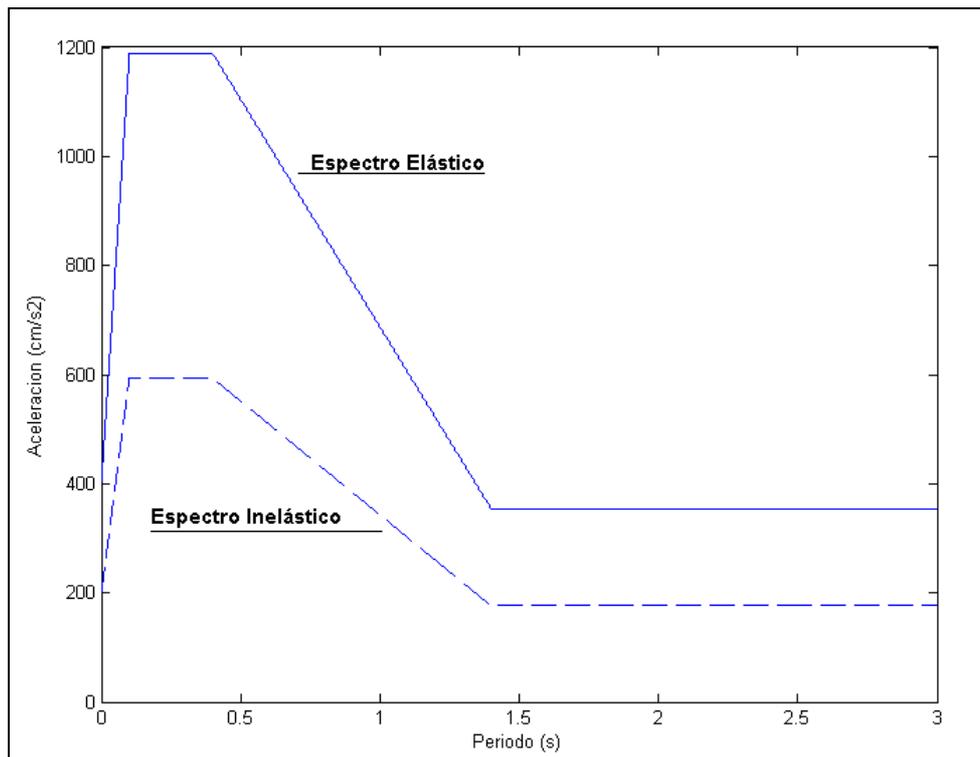


Figura 12 Espectro Elástico e Inelástico obtenido de estudio de Peligrosidad Sísmica. Aguiar (2010,1)

Las ecuaciones que definen la rama del espectro inelástico son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 T < 0.10 & \quad A_d = \frac{396}{R} + \frac{792}{0.10 * R} * T \\
 0.10 < T < 0.40 & \quad A_d = \frac{1188}{R} \\
 0.40 < T < 1.40 & \quad A_d = \frac{1521.8 - 834.43 T}{R} \\
 T > 1.40 & \quad A_d = \frac{353.37}{R}
 \end{aligned} \tag{34}$$

Donde T es el período de la estructura; A_d es la aceleración espectral en cm/seg^2 ; R es el factor de reducción de las fuerzas sísmicas, se considera $R = 2$ debido a la sobre resistencia de la estructura.

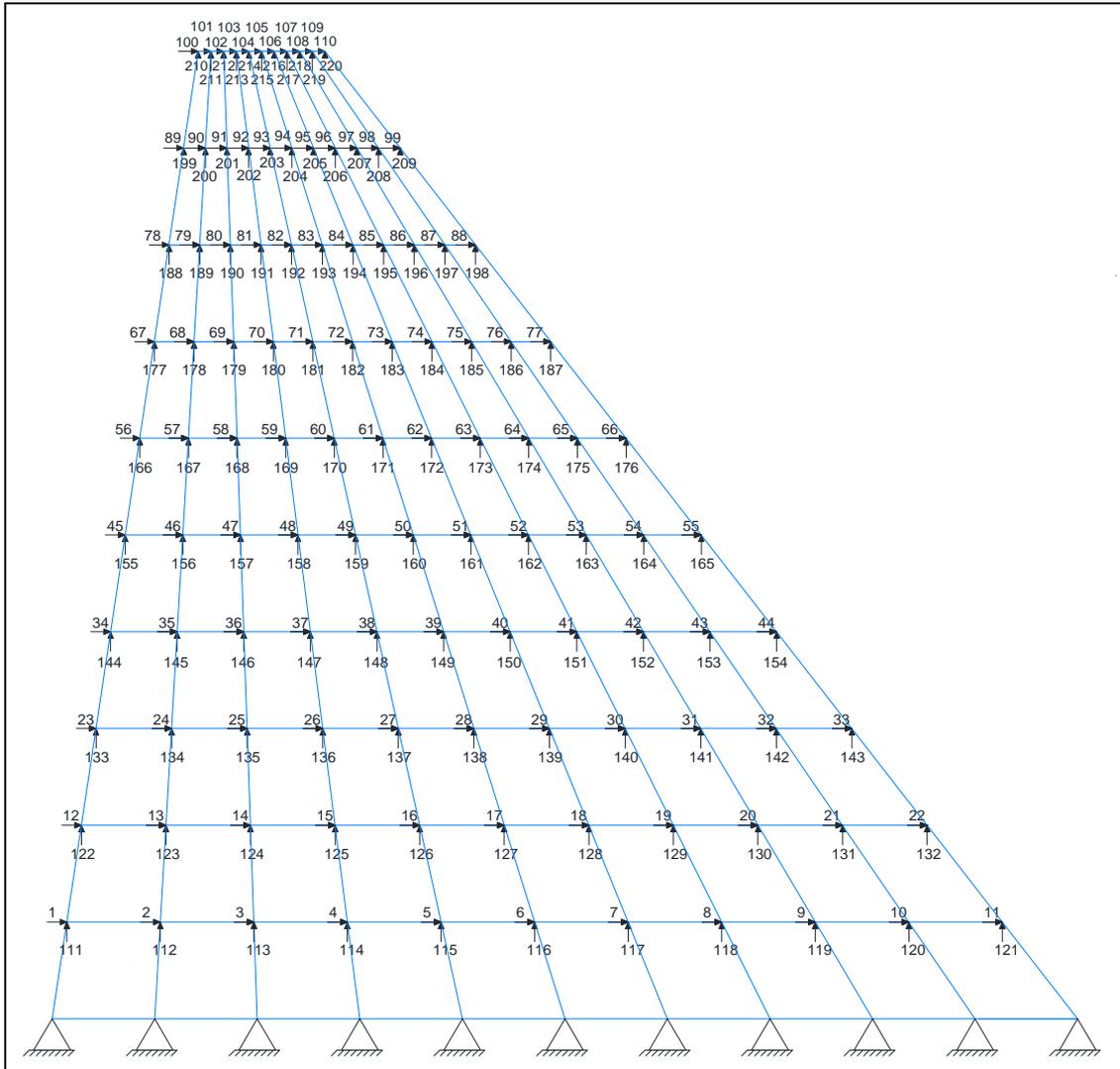


Figura 13 Grados de libertad considerados en el Análisis Sísmico.

El análisis sísmico se realiza con el elemento finito Q4, que considera dos grados de libertad por nodo, el marco teórico de este elemento finito está descrito en Aguiar (2010,3). Es un elemento finito suavizado por flexión.

Para el análisis sísmico en sentido horizontal se han numerado en primer lugar todos los grados de libertad horizontal de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, como se observa en la figura 13. Luego se han numerado todos los grados de libertad verticales. Se tiene 110 coordenadas principales (grados de libertad horizontal) y 110 coordenadas secundarias (grados de libertad verticales).

Se realizó un análisis sísmico modal espectral empleando el espectro inelástico indicado en la figura 12, utilizando los programas de **CEINCI-LAB** para Presas. Aguiar (2010,2). Los resultados a nivel de fuerzas estáticas equivalentes en cada uno de los nodos se indican en la figura 14.

De acuerdo al modelo considerado, la estructura tiene 110 modos de vibración, se trabajó con todos los modos. Los períodos de vibración para los cinco primeros modos se indican en la tabla 2.

La suma de las fuerzas horizontales, reporta el Cortante Basal $V = 3836.1 T$. El Peso total de la Presa (en la sección analizada de un metro de espesor) vale $W = 6733.2 T$. Por lo tanto el coeficiente sísmico que se ha denominado α (ecuación 12) resulta $\alpha = 0.57$

Tabla 2 Períodos de vibración en los cinco primeros modos.

Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
0.172 seg.	0.074 seg.	0.042 seg.	0.032 seg.	0.031 seg.

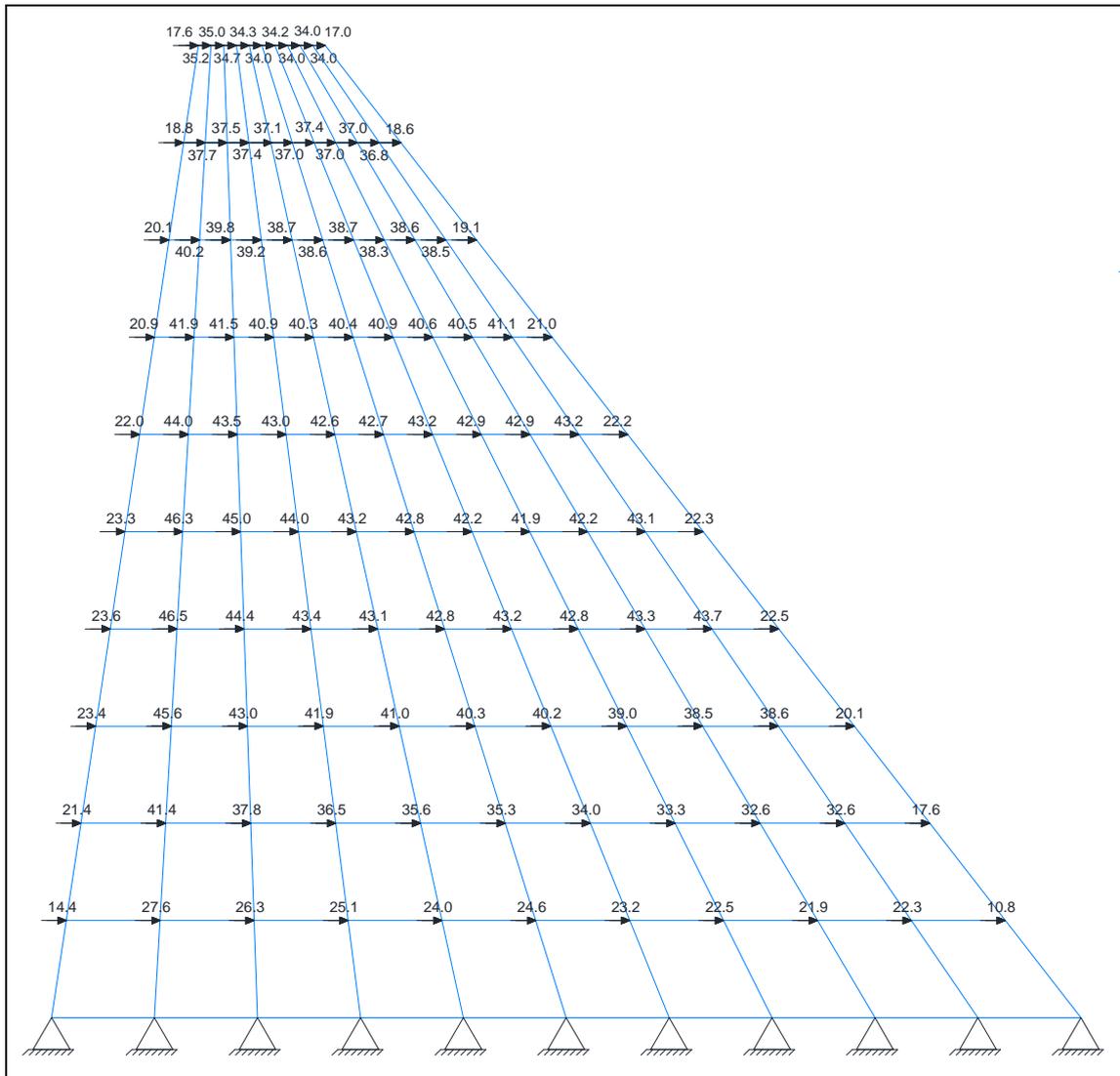


Figura 14 Fuerzas estáticas equivalentes debidas a sismo.

En base al coeficiente sísmico $\alpha = 0.57$ se halló el coeficiente de la Presión Hidrodinámica C_p y la presión hidrodinámica p , en la Presa Minas-La Unión Pitahuña, aplicando el Método de Zangar, el de Housner resolviendo en forma exacta la ecuación diferencial y resolviendo con diferencias finitas. Los resultados se muestran en las figuras 15 y 16 respectivamente.

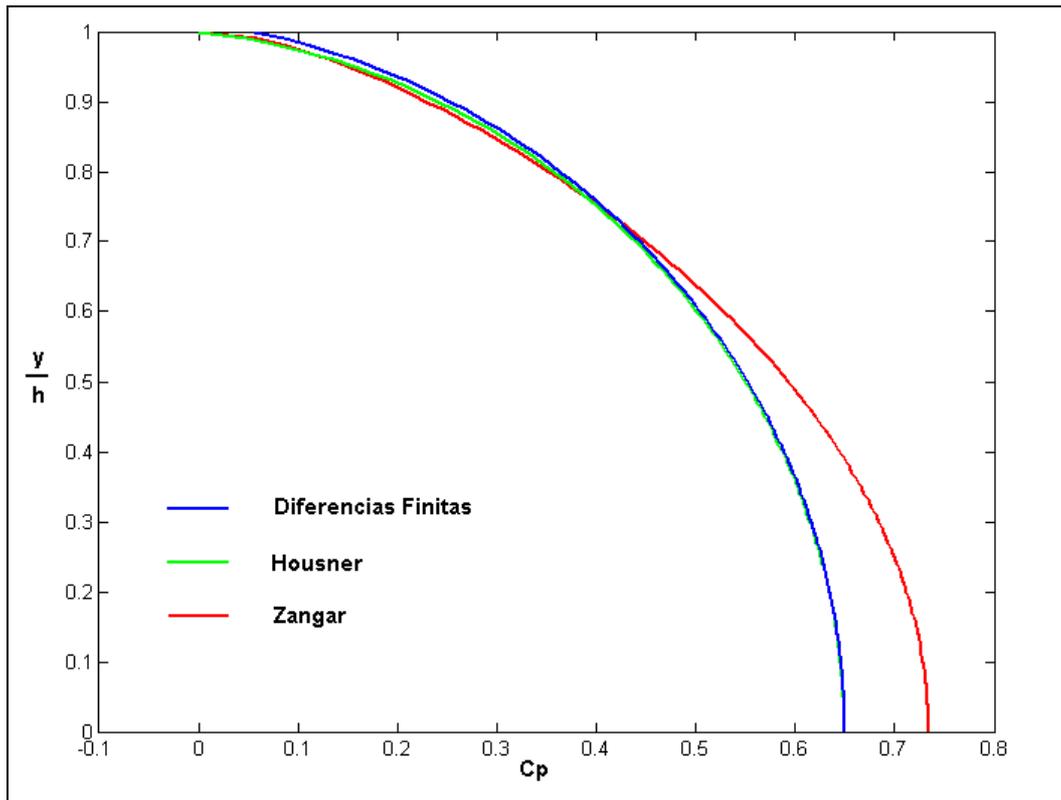


Figura 15 Coeficiente C_p encontrado con tres métodos en la Presa Minas-La Unión-Pitahuña.

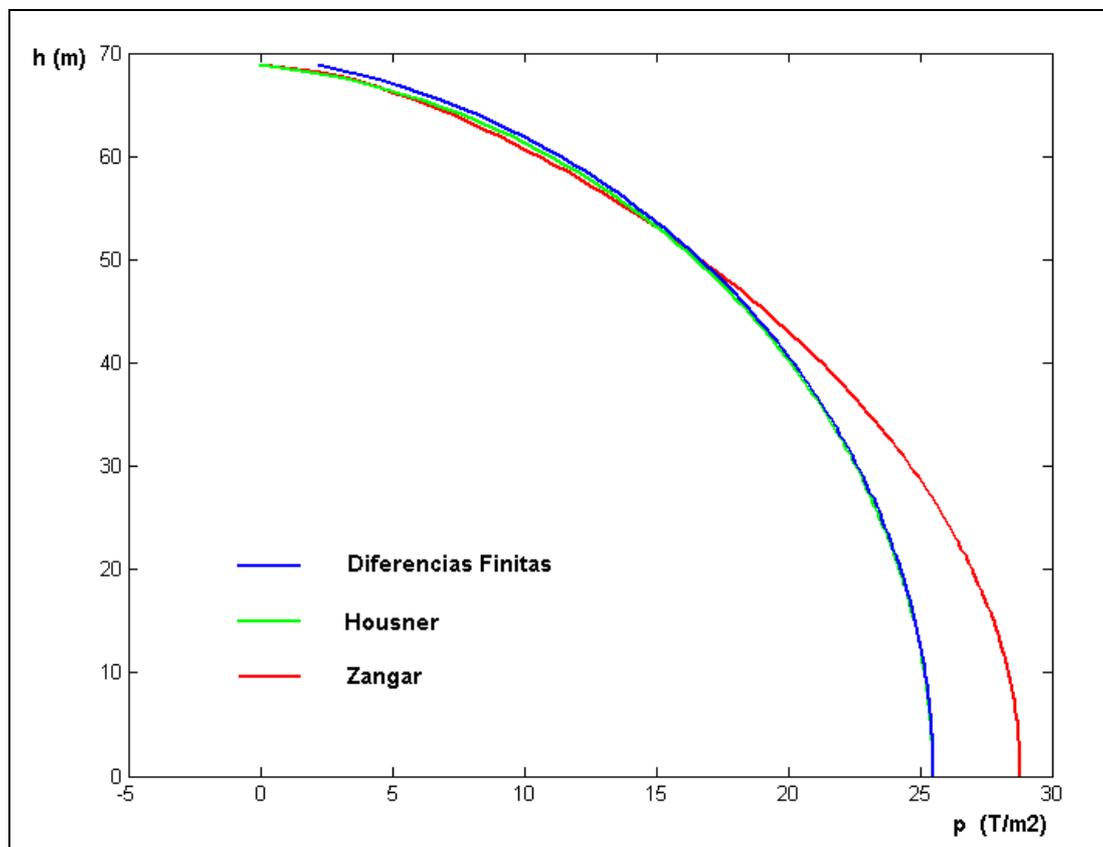


Figura 16 Presión hidrodinámica encontrada con tres métodos en la Presa Minas-La Unión-Pitahuña.

Con relación al coeficiente C_p , se puede decir que el Método de Zangar, reporta valores mayores para valores $y/h < 0.6$, en el fondo de la presa. Los valores de C_p hallados a partir del Método de Housner, solución analítica y solución mediante diferencias finitas, reportan valores similares.

El comportamiento de la variación de las presiones hidrodinámicas es similar al comportamiento de la variación de C_p . Lo interesante es notar que en el fondo la presión hidrodinámica es menor a las 30 T./m². La presión hidrostática en el fondo es de 68.88 T./m². Es decir es más crítica la Presión Hidrostática que la Presión Hidrodinámica, para la Presa analizada. Esto se debe a la peligrosidad sísmica. Si la presa estaría ubicada en otro lugar, con mayor peligrosidad sísmica, es probable que las dos presiones sean más parecidas.

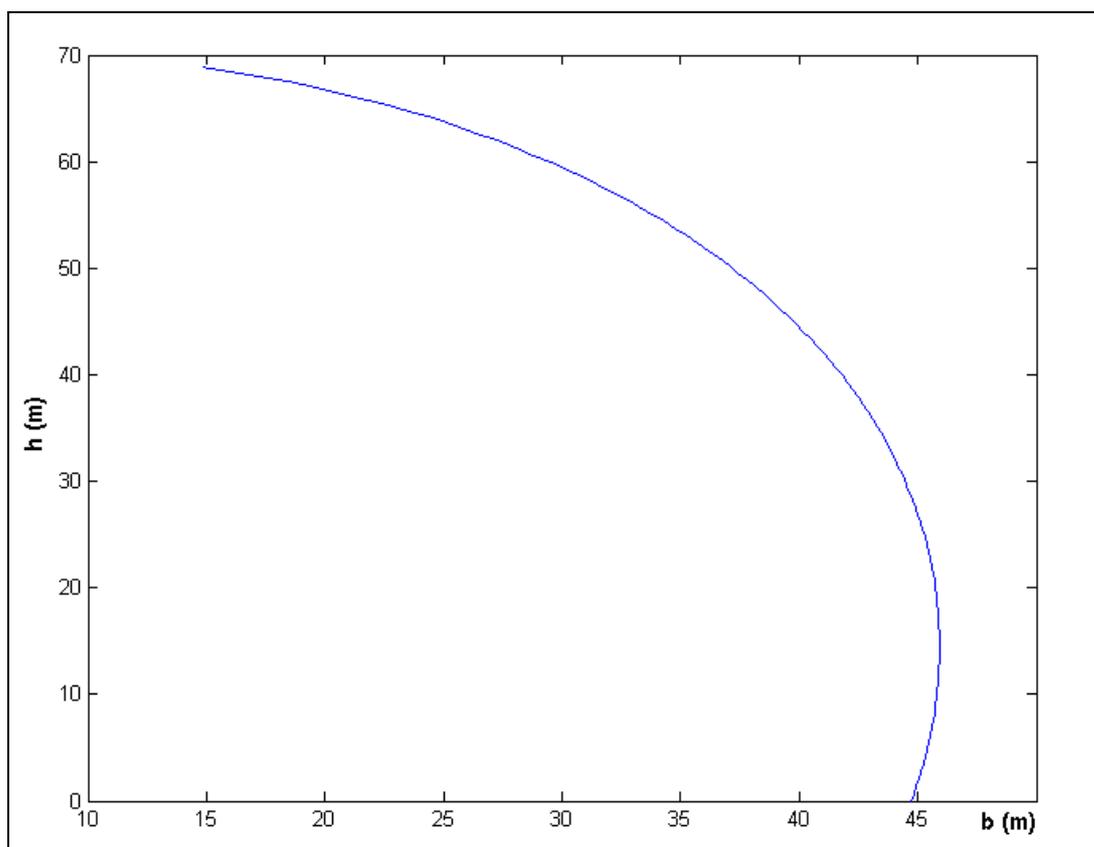


Figura 17 Ancho de agua que influye en el cálculo de la Presión Hidrodinámica.

En la figura 17 se presenta la franja $b(y)$ que aporta al cálculo de la Presión Hidrodinámica de la Presa Minas-La Unión-Pitahuiña. Como era de esperarse en la parte superior el ancho de la franja es pequeña y en el fondo es mayor. Si se desea considerar un ancho constante se puede pensar que este ancho es $b = 0.6 h$. Siendo h la altura de la Presa, para el presente caso estaría alrededor de los 42 m.

5. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Se han presentado dos modelos clásicos para el cálculo de las presiones hidrodinámicas, el uno propuesto por Zangar mediante una analogía de redes eléctricas y el otro propuesto por Housner en base a los momentos que se genera por el movimiento del agua durante un sismo.

La solución analítica propuesta por Housner es bastante complicada de ahí que se decidió resolver la ecuación diferencial que gobierna el modelo de Housner, empleando Diferencias Finitas encontrando una solución extremadamente sencilla. Para ver la bondad de la solución, se obtuvo el coeficiente de la presión hidrodinámica para presas con diferentes ángulos de inclinación del borde la presa en contacto con el agua, encontrando resultados muy parecidos a los que se hallan con la solución analítica y estos a su vez son parecidos a los que se hallan con el modelo de Zangar.

Se obtuvo una ecuación para encontrar la fuerza vertical total debida a la presión hidrodinámica, la misma que está en función de un coeficiente C_y y se encontró una curva que relaciona este coeficiente con el ángulo de inclinación θ de la presa. Pero además se graficó también el coeficiente C_x con el cual se obtiene la fuerza total horizontal; el coeficiente C_n con el que se halla la fuerza normal a la presa y el coeficiente C_{p0} que se halla con los valores máximos de C_p . Se graficó estos cuatro coeficientes para valores de $0 \leq \theta \leq 90$. Lo importante de este estudio fue encontrar que el valor de C_n es aproximadamente 0.5 para cualquier ángulo de inclinación de la presa, este resultado facilita el cálculo rápido de las presiones hidrodinámicas de una presa con cualquier ángulo de inclinación.

Finalmente, se realizó un análisis sísmico, mediante elementos finitos, de la Presa Minas-La Unión-Pitahuiña, para un espectro inelástico que está asociado a un período de retorno de 970 años y se encontró el coeficiente sísmico; con este valor se realizó el cálculo de la Presión Hidrodinámica en la mencionada presa con los dos modelos, encontrando valores de las presiones muy similares. Además se halló el ancho de la franja de agua que influye en el cálculo de las presiones.

REFERENCIAS

1. Aguiar R., (1991), *Diferencias Finitas*, Quinto Curso Nacional de Estructuras. Nivel de Post Grado, Escuela Politécnica del Ejército, Capítulo II, 8-17, Quito.
2. Aguiar R., (2010,1), "Estudio de Peligrosidad sísmica y espectro de diseño de la Presa: Minas-La Unión-Pitahuiña", ASTEC, 32 p., Quito.
3. Aguiar R., (2010,2), "Estudio de Peligrosidad y Análisis Sísmico de Presa de Proyecto Hidroeléctrico Minas-La Unión-Pitahuiña", *Congreso Internacional Gestión de Riesgos, Ambiente y Energías Renovables. Colegio de Ingenieros Geólogos, Minas y Petróleos*, 18 p., Quito.
4. Aguiar R., (2010,3), *Análisis Sísmico de Puentes con CEINCI-LAB*, Segundo Encuentro Académico de Puentes Siglo XXI. Escuela Politécnica del Ejército, 60 p., Quito.
5. Aguiar R., Tarambis J. P., (2010), "Introducción a la interacción fluido estructura en el análisis sísmico de la Presa Chontal", *VI Congreso de Ciencia y Tecnología. ESPE 2011*, 16 p., Quito.
6. Chwang A., and Housner G., (1978), "Hydrodynamic pressures on sloping dams Turing earthquakes. Part 1. Momentum method", *Journal Fluid. Mechanics*, **87 (2)**, 335-341, Gret Britain.
7. Zangar C. N., (1952), "Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquake", *Engineering Monographs* **11**, United States Department of the Interior Bureau of Reclamation, Colorado.