

# **ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO**

## **CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**ANÁLISIS DE TENSIONES TÉRMICAS DENTRO DEL RANGO ELÁSTICO PARA SÓLIDOS CON COMPORTAMIENTO LINEAL E ISOTRÓPICO MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
INGENIERO MECÁNICO**

**CHRISTIAN PATRICIO NARVÁEZ MUÑOZ**

**DIRECTOR: ING. EDGARDO FERNÁNDEZ**

**CODIRECTOR: ING. JOSÉ PÉREZ**

**Sangolquí, Junio del 2011**

## **CERTIFICADO DE ELABORACIÓN DEL PROYECTO**

EL Proyecto de grado titulado “ANÁLISIS DE TENSIONES TÉRMICAS DENTRO DEL RANGO ELÁSTICO PARA SÓLIDOS CON COMPORTAMIENTO LINEAL E ISOTRÓPICO MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS”, fue realizado en su totalidad por el señor NARVÁEZ MUÑOZ CHRISTIAN PATRICIO, como requerimiento parcial para la obtención del título de Ingeniero Mecánico.

---

Ing. Edgardo Fernández  
Director

---

Ing. José Pérez  
Codirector

Sangolquí, 30 de junio de 2011

## LEGALIZACIÓN DEL PROYECTO

“ANÁLISIS DE TENSIONES TÉRMICAS DENTRO DEL RANGO ELÁSTICO  
PARA SÓLIDOS CON COMPORTAMIENTO LINEAL E ISOTRÓPICO  
MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS”

**Elaborado por:**

---

Christian Narváez

---

Ing. Xavier Sánchez

Director de la Carrera

## **DEDICATORIA**

Quiero dedicar este trabajo, a mis Padres, que sin impórtales nada me han dado todo con su gran paciencia y sabiduría supieron guiarme, y soportar las decepciones que les he causado.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco al Ing. Edgardo Fernández, porque me incentivo en el campo de la investigación y a los Ingenieros José Pérez y Francisco Navas que me ayudaron mucho en la parte experimental de este trabajo.

Finalmente quisiera agradecer a mi hermano Juan Carlos, porqué, el sacrificio muchas cosas para que yo pudiera tener todo.

# INDICE DE CONTENIDOS

CERTIFICADO DE ELABORACIÓN DEL PROYECTO.....	ii
LEGALIZACIÓN DEL PROYECTO.....	iii
DEDICATORIA.....	iv
AGRADECIMIENTOS.....	v
INDICE DE CONTENIDOS.....	vi
LISTA DE ECUACIONES.....	ix
LISTA DE FIGURAS.....	xiii
LISTA DE ILUSTRACIONES.....	xiv
LISTA DE TABLAS.....	xv
NOMENCLATURA.....	xvi
RESUMEN.....	xvii
<b>CAPITULO 1.</b> .....	<b>1</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	2
1.2. OBJETIVOS.....	4
1.2.1. GENERAL.....	5
1.2.2. ESPECÍFICOS.....	5
1.3. TEORÍA DE TENSIONES TÉRMICAS LEY DE DUHAMEL-NEUMANN.....	5
1.3.1. ANALOGÍA DE DUHAMEL.....	14
<b>CAPITULO 2.</b> .....	<b>17</b>
<b>MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS</b> .....	<b>17</b>
2.1. FORMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO.....	18
2.2. GALERKIN-MÉTODO RESIDUOS PONDERADOS.....	18
2.3. FUNCIONES DE FORMA.....	19
2.3.1. ELEMENTO DE UNIDIMENSIONAL.....	21

2.3.2. ELEMENTO TRIANGULAR _____	22
<b>CAPITULO 3.</b> _____	<b>23</b>
<b>ANÁLISIS TÉRMICO</b> _____	<b>23</b>
3.1. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES _____	24
3.1.1. CONDUCCIÓN _____	24
3.1.2. CONVECCIÓN _____	25
3.2. ECUACIÓN CONDUCCIÓN DE CALOR _____	26
3.3. CONDICIONES DE CONTORNO _____	27
3.4. APLICACIÓN DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA TRANSFERENCIA DE CALOR _____	28
3.4.1. FORMULACIÓN UNIDIMENSIONAL _____	28
3.4.2. FORMULACIÓN BIDIMENSIONAL _____	31
3.4.3. MÉTODO EXPLÍCITO _____	34
<b>CAPITULO 4.</b> _____	<b>35</b>
<b>ANÁLISIS MECÁNICO</b> _____	<b>35</b>
4.1. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES _____	36
4.1.1. EQUILIBRIO EN EL CONTORNO _____	36
4.1.2. COMPATIBILIDAD _____	36
4.1.3. CONDICIONES DE CONTORNO _____	38
4.2. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO INTERNO _____	38
4.3. LEY DE HOOKE PARA ELASTICIDAD LINEAL _____	39
4.4. TERMOELASTICIDAD LINEAL. TENSIONES Y DEFORMACIONES TÉRMICAS _____	43
4.5. APLICACIÓN DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA MECÁNICA DE SÓLIDOS _____	45
4.5.1. FORMULACIÓN UNIDIMENSIONAL _____	45
4.5.2. FORMULACIÓN UNIDIMENSIONAL PROBLEMA TERMOMECÁNICO _____	47
4.5.3. FORMULACIÓN BIDIMENSIONAL DEL PROBLEMA TERMOMECÁNICO _____	49
<b>CAPITULO 5.</b> _____	<b>52</b>
<b>VALIDACIÓN DE RESULTADOS</b> _____	<b>52</b>
5.1. EJEMPLO UNIDIMENSIONAL _____	52

5.1.1. SOLUCIÓN MEDIANTE PRUEBA EXPERIMENTAL Y SIMULACIÓN NUMÉRICA _____	53
5.2. EJEMPLO BIDIMENSIONAL _____	58
5.2.1. ANÁLISIS DE DILATACIÓN LIBRE _____	61
5.2.2. SOLUCIÓN MEDIANTE PRUEBA DE EXPERIMENTAL _____	63
5.2.3. SOLUCIÓN MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS _____	65
5.2.4. RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN _____	69
5.3. ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS EXPERIMENTALES _____	70
<b>CAPITULO 6.</b> _____	72
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b> _____	72
6.1. CONCLUSIONES _____	72
6.2. RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS _____	74
<b>BIBLIOGRAFIA</b> _____	75
<b>ANEXO A: EJEMPLO MÉTODO DE GALERKIN</b> _____	76
<b>ANEXO B: PRUEBA UNIDIMENSIONAL</b> _____	78
<b>ANEXO C: PRUEBA BIDIMENSIONAL</b> _____	91



## LISTA DE ECUACIONES

Ecuación 1-1	2
Ecuación 1-2	3
Ecuación 1-3	3
Ecuación 1-4	5
Ecuación 1-5	5
Ecuación 1-6	6
Ecuación 1-7	6
Ecuación 1-8	6
Ecuación 1-9	6
Ecuación 1-10	8
Ecuación 1-11	8
Ecuación 1-12	8
Ecuación 1-13	8
Ecuación 1-14	9
Ecuación 1-15	9
Ecuación 1-16	10
Ecuación 1-17	10
Ecuación 1-18	11
Ecuación 1-19	11
Ecuación 1-20	12
Ecuación 1-21	14
Ecuación 1-22	14
Ecuación 1-23	14
Ecuación 1-24	15
Ecuación 1-25	15
Ecuación 1-26	15
Ecuación 1-27	15
Ecuación 1-28	15
Ecuación 1-29	15
Ecuación 1-30	15
Ecuación 2-1	18
Ecuación 2-2	18
Ecuación 2-3	19
Ecuación 2-4	19
Ecuación 2-5	19
Ecuación 2-6	21
Ecuación 2-7	21
Ecuación 2-8	22
Ecuación 2-9	22
Ecuación 2-10	22
Ecuación 2-11	22
Ecuación 2-12	22
Ecuación 3-1	24
Ecuación 3-2	24
Ecuación 3-3	25
Ecuación 3-4	26
Ecuación 3-5	26

Ecuación 3-6	27
Ecuación 3-7	27
Ecuación 3-8	27
Ecuación 3-9	27
Ecuación 3-10	27
Ecuación 3-11	27
Ecuación 3-12	27
Ecuación 3-13	27
Ecuación 3-14	28
Ecuación 3-15	28
Ecuación 3-16	28
Ecuación 3-17	28
Ecuación 3-18	28
Ecuación 3-19	29
Ecuación 3-20	29
Ecuación 3-21	29
Ecuación 3-22	30
Ecuación 3-23	30
Ecuación 3-24	30
Ecuación 3-25	30
Ecuación 3-26	30
Ecuación 3-27	31
Ecuación 3-28	31
Ecuación 3-29	31
Ecuación 3-30	32
Ecuación 3-31	32
Ecuación 3-32	32
Ecuación 3-33	32
Ecuación 3-34	32
Ecuación 3-35	32
Ecuación 3-36	32
Ecuación 3-37	32
Ecuación 3-38	32
Ecuación 3-39	33
Ecuación 3-40	33
Ecuación 3-41	33
Ecuación 3-42	33
Ecuación 3-43	33
Ecuación 3-44	33
Ecuación 3-45	34
Ecuación 3-46	34
Ecuación 3-47	34
Ecuación 3-48	34
Ecuación 3-49	34
Ecuación 4-1	36
Ecuación 4-2	38
Ecuación 4-3	39
Ecuación 4-4	39
Ecuación 4-5	39
Ecuación 4-6	39
Ecuación 4-7	40
Ecuación 4-8	40

Ecuación 4-9	40
Ecuación 4-10	41
Ecuación 4-11	41
Ecuación 4-12	41
Ecuación 4-13	41
Ecuación 4-14	41
Ecuación 4-15	41
Ecuación 4-16	41
Ecuación 4-17	41
Ecuación 4-18	41
Ecuación 4-19	41
Ecuación 4-20	42
Ecuación 4-21	42
Ecuación 4-22	42
Ecuación 4-23	42
Ecuación 4-24	42
Ecuación 4-25	42
Ecuación 4-26	42
Ecuación 4-27	42
Ecuación 4-28	42
Ecuación 4-29	42
Ecuación 4-30	43
Ecuación 4-31	43
Ecuación 4-32	43
Ecuación 4-33	43
Ecuación 4-34	44
Ecuación 4-35	44
Ecuación 4-36	44
Ecuación 4-37	44
Ecuación 4-38	44
Ecuación 4-39	44
Ecuación 4-40	44
Ecuación 4-41	44
Ecuación 4-42	44
Ecuación 4-43	45
Ecuación 4-44	45
Ecuación 4-45	46
Ecuación 4-46	47
Ecuación 4-47	48
Ecuación 4-48	48
Ecuación 4-49	48
Ecuación 4-50	48
Ecuación 4-51	48
Ecuación 4-52	49
Ecuación 4-53	49
Ecuación 4-54	49
Ecuación 4-55	49
Ecuación 4-56	49
Ecuación 4-57	49
Ecuación 4-58	49
Ecuación 4-59	50
Ecuación 4-60	51

Ecuación 5-1	63
Ecuación 5-2	64
Ecuación 5-3	64
Ecuación 5-4	64
Ecuación 5-5	64
Ecuación 5-6	64
Ecuación 5-7	64

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 Esquema del problema desacoplado	4
Figura 1-2 Superposición de las deformaciones	6
Figura 1-3 Distribución Lineal de Temperaturas	9
Figura 1-4 Distribución no lineal simétrica de temperaturas	9
Figura 1-5 Distribución no lineal no simétrica	10
Figura 1-6 Dilatación libre placa de acero	11
Figura 1-7 Distribución de Temperatura con $500Wm^3$	12
Figura 1-8 Distribución de Temperatura con $5x10^5Wm^3$	13
Figura 1-9 Analogía de Duhamel	14
Figura 2-1 Representación del sistema	18
Figura 2-2 Sólido bidimensional discretizado	20
Figura 2-3 Aproximación de $u(x)$	20
Figura 2-4 Elemento unidimensional	21
Figura 2-5 Elemento triangular	22
Figura 3-1 Mecanismos de transferencia de calor	23
Figura 3-2 Conducción de calor	24
Figura 3-3 Convección de calor	25
Figura 3-4 Volumen elemental en coordenadas cartesianas	26
Figura 3-5 Primera ley de la termodinámica	26
Figura 3-6 Borde convectivo sobre un elemento triangular	33
Figura 4-1 Condición de equilibrio en el contorno	36
Figura 4-2 Condición de compatibilidad	37
Figura 4-3 Condiciones de contorno	38
Figura 4-4 Volumen elemental	39
Figura 4-5 Diagrama esfuerzo - deformación	40
Figura 4-6 Relación esfuerzo deformación	47
Figura 5-1 Maquina para validar los resultados térmicos	52
Figura 5-2 Temperaturas de barra unidimensional con resorte N.-1	54
Figura 5-3 Deformaciones de barra unidimensional con resorte N.-1	54
Figura 5-4 Comparación de Esfuerzos Térmicos resorte N.-1	55
Figura 5-5 Temperaturas de barra unidimensional con resorte N.-2	56
Figura 5-6 Deformaciones de barra unidimensional con resorte N.-2	57
Figura 5-7 Comparación de Esfuerzos Térmicos resorte N.-2	57
Figura 5-8 Chapa de Aluminio	59
Figura 5-9 Ubicación Strain Gages	60
Figura 5-10 Conexión a medio puente	60
Figura 5-11 Fuente de calor situada en el centro para dilatación libre	62
Figura 5-12 Dilatación Libre	62
Figura 5-13 Simulación de la transferencia de calor empleando 1242 elementos	65
Figura 5-14 Simulación de la transferencia de calor empleando 1848 elementos	66
Figura 5-15 Sólido deformado empleando 1242 elementos	66
Figura 5-16 Sólido deformado empleando 1848 elementos	67
Figura 5-17 Simulación Numérica Esfuerzos Térmicos empleando 1242	67
Figura 5-18 Simulación Numérica Esfuerzos Térmicos empleando 1848	68
Figura 5-19 Comparación Esfuerzos Térmicos	69

## LISTA DE ILUSTRACIONES

- Ilustración 1 Validación de esfuerzos térmicos \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 2 Sistema de medida para deformación unidimensional térmica ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 3 Validación del campo de temperaturas \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 4 Dilatación libre unidimensional \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 5 Equipo DMD-22 \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 6 Conexión en medio puente para el equipo DMD-22 ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 7 Conexión en el equipo DMD-22 \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 8 Chapa de Aluminio \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 9 Ubicación de Strain Gages en chapa de aluminio \_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 10 Chapa de Prueba y Chapa de referencia \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 11 Conexión a medio puente \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 12 Empotramiento chapa de aluminio \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.
- Ilustración 13 Validación de resultados \_\_\_\_\_ ¡Error! Marcador no definido.

## LISTA DE TABLAS

Tabla 5-1 Equipo utilizado	53
Tabla 5-2 Equipo utilizado	60
Tabla 5-3 Datos experimentales dilatación libre	61
Tabla 5-4 Datos experimentales de esfuerzos térmicos	63
Tabla 5-5 Comparación de Resultados Prueba Unidimensional	70
Tabla 5-6 Comparación de Resultados Prueba Bidimensional	70

## NOMENCLATURA

$\alpha$	Dilatación Térmica
$E$	Módulo de Elasticidad
$\sigma$	Esfuerzo
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Esfuerzos Normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Esfuerzos Cortantes
$\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z'$	Esfuerzos Térmicos Normales
$\tau_{xy}', \tau_{xz}', \tau_{yz}'$	Esfuerzos Térmicos Cortantes
$Q$	Calor
$k$	Conductividad Térmica
$h$	Coefficiente De Convección
$\rho$	Densidad
$c$	Calor Específico
$T_\infty$	Temperatura De Fluido
$T_s$	Temperatura De Superficie
$t$	Tiempo
$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}$	Deformaciones Mecánicas
$\varepsilon$	Deformación Térmica
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Deformaciones Térmicas
$G$	Módulo De Elasticidad Transversal
$\nu$	Módulo De Poisson
$\lambda$	Coefficiente De Lamé



## RESUMEN

Este trabajo presenta una formulación del Método de los Elementos Finitos, para la solución de problemas termoelásticos, en un dominio unidimensional y bidimensional. Se plantea una formulación desacoplada del problema térmico y mecánico, para poder reducir el número de incógnitas. El análisis térmico se fundamenta en la transferencia de calor por conducción y convección suponiendo que el flujo de calor es constante, en tanto que al análisis mecánico se desarrollará de acuerdo al teorema de Duhamel-Neumann. Para la validación de los resultados, se presentan ejemplos con su solución analítica y pruebas experimentales.

# CAPITULO 1.

*Pienso en Galileo, jadeando hasta lo más alto de la torre inclinada de Pisa y dejando caer dos pesos desiguales sobre un tablero de madera, a ver si oía dos impactos o uno.*

*La Partícula Divina, Leon Lederman*

## INTRODUCCIÓN

La variación de temperatura en un sólido produce la dilatación o contracción del mismo en función de la carga térmica suministrada. Esta dilatación o contracción constituye, evidentemente, una deformación del sólido, pero esta deformación no tiene necesariamente que venir acompañada de una modificación de la distribución de tensiones. De hecho, si el cuerpo no tiene impedimentos para su deformación y la variación del campo de temperatura es uniforme, las tensiones permanecerán constantes. Sin embargo, en el caso de que la dilatación o contracción del material se vea impedida por las condiciones de apoyo del sólido, o si la variación del campo de temperatura no es uniforme, aparecerán tensiones de origen térmico. El estudio de los efectos térmicos en el comportamiento de los sólidos elásticos recibe el nombre de termoelasticidad.

En este trabajo se van a estudiar varios problemas termoelásticos para probar la validez de las hipótesis de los modelos teóricos, y para comprobar cómo afectan las variaciones de temperatura a los estados de deformación y tensión de sistemas isostáticos e hiperestáticos.

## 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es importante entender que en sólidos en cuyo interior exista un gradiente de temperatura, se presentaran variaciones en el estado de *tensión – deformación*, debido a la tendencia de los materiales a dilatarse al aumentar la temperatura. Por esta razón es conveniente distinguir entre dos posibles efectos por dicha influencia:

- Por una parte, está el hecho de que el propio proceso de deformación lleva asociados fenómenos térmicos (efecto Gough-Joule). Este problema acoplado es en general muy complejo. Puesto que la deformación debería verse como un proceso termodinámico en su conjunto, donde el trabajo de las fuerzas aplicadas es solo un término más en las ecuaciones energéticas.

$$K\Delta^2\theta = 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha T_0\dot{\epsilon}_{kk} + \rho c\dot{\theta} - \rho R^1 \quad 1-1$$

Dónde:

$T$  es la variación de temperatura a partir de una referencia,  $K$  es la conductividad térmica,  $G$  es el módulo de elasticidad transversal,  $\nu$  es el módulo Poisson,  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica,  $T_0$  es la temperatura de referencia,  $\dot{\epsilon}_{kk}$  es la tasa de reformación,  $\rho$  es la densidad,  $c$  es el calor específico del material,  $\dot{\theta}$  es el flujo de calor, y  $R$  es el calor generado (representa la entropía),

- Por otra parte, tenemos la posible concurrencia de fenómenos térmicos producidos por causas externas a la deformación, como calentamiento por irradiación solar, cercanía de calderas o motores de combustión, ambientes de invierno o verano, etc. Estos efectos son de mucha mayor magnitud que los efectos térmicos asociados a la deformación.

---

<sup>1</sup> Ecuación tomada del Artículo –ESTUDIO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE IMPACTO ENTRE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS LEVANDO EM CONSIDERAÇÃO EFEITOS TÉRMICOS

El modelo de comportamiento termoelástico lineal, puede resumirse en dos ecuaciones, una fundamentalmente térmica (expresa la entropía) pero que contiene un término elástico (ver ecuación 1-1), y otra fundamentalmente elástica (expresa la tensión) pero que contiene un término térmico. El despreciar los términos térmicos asociados a la deformación, se traduce en despreciar la generación de entropía relacionada a la deformación frente a la asociada a las variaciones de temperatura en la primera ecuación, que queda solo con variables térmicas. Como se presenta en la ecuación 1-2 en su forma más sencilla y para régimen estacionario.

$$K\nabla^2 T = 0 \quad 1-2$$

Esta ecuación puede resolverse en primer lugar, y permite manejar la segunda ecuación con el término térmico ya conocido.

$$\sigma_{ij}' = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2G)\alpha \Delta T \delta_{ij} \quad 1-3$$

Dado que las ecuaciones 1-2 y 1-3 pueden resolverse en forma desacoplada es lo que hace que este modelo se identifique como *termoelasticidad desacoplada*.

Estos problemas físicos involucran un alto costo computacional, es por ello que se acogió el modelo de análisis desacoplado. En la figura 1-1, se indica el esquema del problema desacoplado



**Figura 1-1 Esquema del problema desacoplado**

Así el problema queda definido, en un sistema de ecuaciones diferenciales, que gobiernan el comportamiento del sólido, el mismo que va ser discretizado y analizado computacionalmente para obtener una solución aproximada de su comportamiento.

## **1.2. OBJETIVOS**

En este trabajo se desarrolla un análisis térmico para luego, usando las temperaturas obtenidas como carga para el modelo mecánico, se pretende determinar el campo de tensiones que actúan en el cuerpo estudiado. Para lograr los objetivos es necesario tener información que permita comprender mejor el comportamiento de sólidos sometidos a una variación de temperaturas.

### 1.2.1. GENERAL

Desarrollar un modelo consistente de elemento finito para el análisis de tensiones térmicas dentro del rango elástico para sólidos con comportamiento lineal e isotrópico.

### 1.2.2. ESPECÍFICOS

- Desarrollar una formulación del problema térmico, para determinar el campo de temperaturas del sólido.
- Desarrollar una formulación del problema mecánico, para determinar las tensiones teniendo conocido el campo de temperaturas.
- Realizar una formulación mediante el método de los elementos finitos, para el problema termomecánico desacoplado.
- Validar los resultados experimentales dentro de un rango de error admisible, para comprobar la eficacia del análisis realizado.

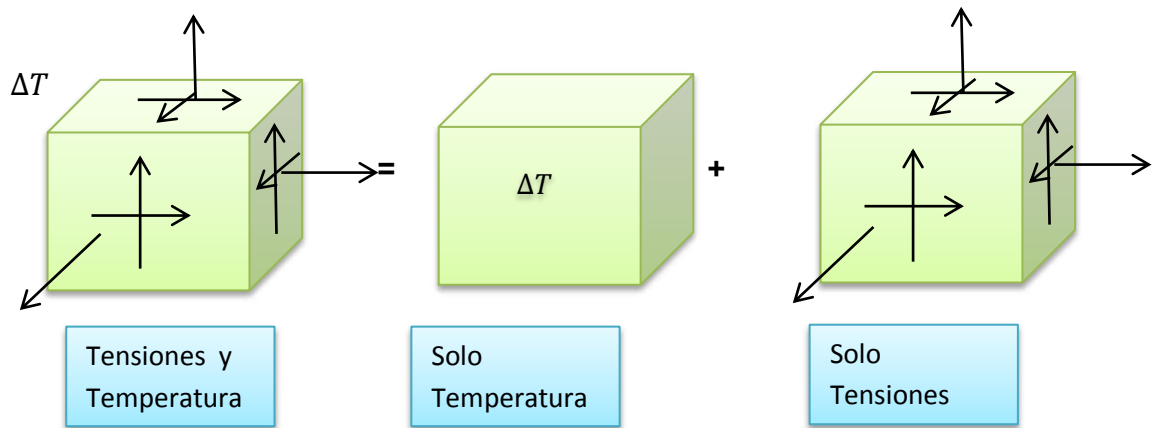
## 1.3. TEORÍA DE TENSIONES TÉRMICAS LEY DE DUHAMEL-NEUMANN

Consideremos un cubo diferencial del material, sometido a un incremento de temperatura  $\Delta T$ , que siempre podremos considerar constante en ese pequeño volumen. El cubo se dilatara libremente, por igual en las tres direcciones, por lo que el tensor de deformación  $\varepsilon_{ij}^T$  será:

$$\begin{bmatrix} \alpha\Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Delta T \end{bmatrix} \quad 1-4$$

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha\Delta T\delta_{ij} \quad 1-5$$

Donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación lineal, que una propiedad térmica de cada material.



**Figura 1-2 Superposición de las deformaciones**

En realidad el cubo diferencial no está aislado de todo el material, sino en el seno del mismo, por lo que sobre sus caras se ejercen unas ciertas tensiones  $\sigma_{ij}$  que producirán deformaciones adicionales. Si se aplica el principio de superposición como sugiere la figura 1-2, se obtiene la ley de comportamiento termoelástico de Duhamel - Neumann.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^m + \varepsilon_{ij}^T \quad 1-6$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 - \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] + \alpha\Delta T\delta_{ij} \quad 1-7$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \quad 1-8$$

Siendo E el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson del material.

Planteando el mismo problema pero a nivel macroscópico. De igual manera consideramos un sólido homogéneo e isótropo que no tiene impedida su dilatación y no se ejercen fuerzas exteriores sobre él. Se somete el sólido a una cierta distribución del campo de temperaturas. La pregunta que nos hacemos es si será nula la tensión en el interior del sólido.

Para poder responder la pregunta anterior, vamos a suponer que la tensión es cero por tal razón, el tensor de deformación es:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha\Delta T\delta_{ij} \quad 1-9$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = f_x$$

$$\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = f_y$$

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = f_z$$

Las ecuaciones de equilibrio (ver sección 4.1.1) se satisfacen idénticamente, dado que tanto las tensiones como las fuerzas externas son nulas por hipótesis. Las ecuaciones de compatibilidad (ver sección 4.1.2.) permiten obtener:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

Teniendo en cuenta que las tensiones de origen térmico, no generan componentes en los planos cortantes, porque la variación de temperatura se genera solo en los ejes normales.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \Delta T \end{bmatrix}$$

$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , por esta razón las deformaciones:  $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$



Remplazando la ecuación 1-9

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\
 2 \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\
 2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{1-10}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Efectuadas las condiciones anteriores podemos proponer la siguiente analogía:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} = 0
 \tag{1-11}$$

Remplazando la ecuación 1-9 en la ecuación 1-11, tenemos:

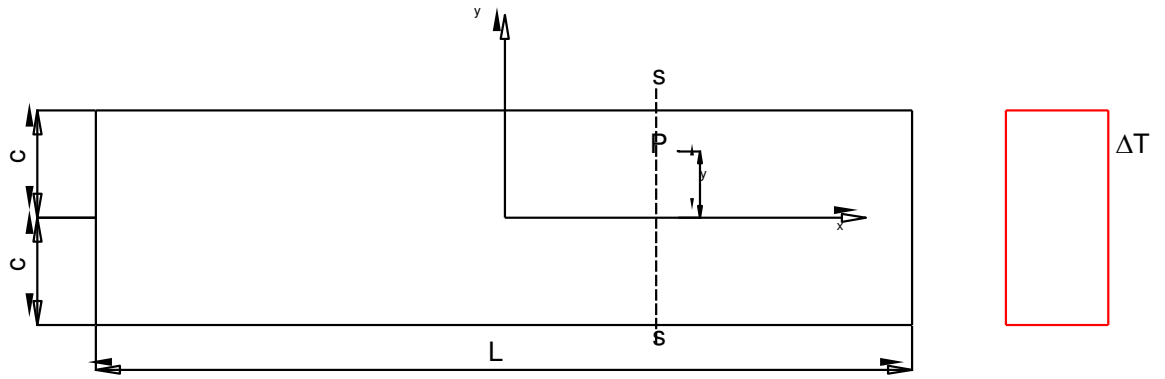
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0
 \tag{1-12}$$

Si observamos la ecuación diferencial 1-12 es igual que la ecuación 1-2. Resolviendo la ecuación diferencial tenemos:

$$T = C_1 x + C_2 y + C_3 z + C_4
 \tag{1-13}$$

Por lo tanto, si el campo de temperaturas es lineal y no existen restricciones exteriores a la dilatación, habrá deformación sin tensión. Pero si el campo de temperaturas no es lineal, en general la función propuesta (ecuación 1-13) no se satisfará, indicando que la deformación será distinta de la dada en ecuación 1-9, por lo que debe existir tensión distinta a cero.

Para entender mejor este tema, tenemos que plantear los siguientes ejemplos; el primero representa a un sistema con una distribución de temperatura lineal, en tanto que el segundo representa una distribución no lineal.



**Figura 1-3 Distribución Lineal de Temperaturas**

La fuerza resultante por la expansión térmica en la sección s-s es:

$$R = - \int_{-c}^c E\alpha\Delta T dy \quad 1-14$$

Presumiendo que a la chapa de la figura 1-3 se le aplica una restricción por el otro lado de la sección s-s, que tendría la misma fuerza \$R\$ pero se signo contrario, tendríamos:

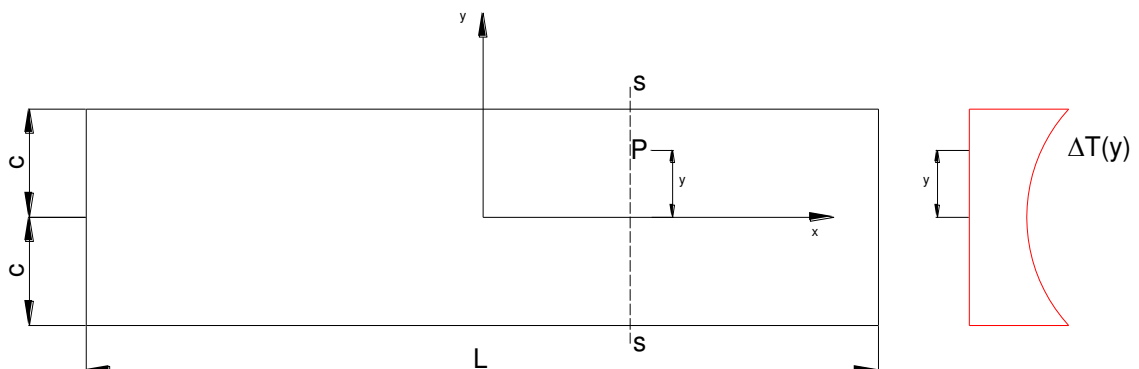
$$\sigma' = -E\alpha\Delta T(y) + \frac{1}{2c} \int_{-c}^c E\alpha\Delta T dy \quad 1-15$$

Si integramos la ecuación 1-15, tenemos:

$$\sigma' = 0$$

Se cumple con lo que se predijo en la ecuación 1-13.

Para el caso de la distribución no lineal de temperaturas, se representan dos posibilidades; la primera es una distribución no lineal pero simétrica y la segunda es una distribución no lineal por ende no simétrica.



**Figura 1-4 Distribución no lineal simétrica de temperaturas**

Dónde:

$$\Delta T(y) = \Delta T(-y)$$

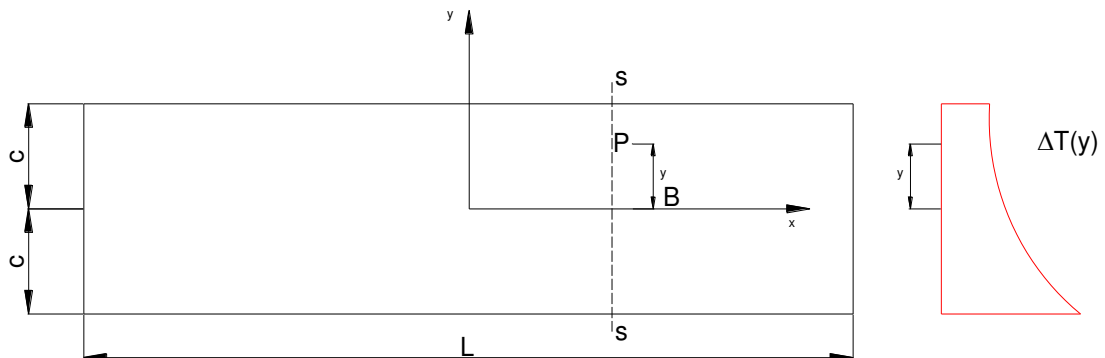
De igual forma la fuerza resultante por la expansión térmica en la sección s-s es:

$$R = - \int_{-c}^c E\alpha\Delta T(y)dy$$

Donde el esfuerzo estaría dado por la ecuación:

$$\sigma' = -E\alpha\Delta T(y) + \frac{1}{2c} \int_{-c}^c E\alpha\Delta T(y)dy \quad 1-16$$

La otra posibilidad sería:



**Figura 1-5 Distribución no lineal no simétrica**

En este ejemplo además de la fuerza resultante por la expansión térmica en la sección s-s aparecerá un momento en el punto B.

$$R = - \int_{-c}^c E\alpha\Delta T(y)dy$$

$$M = - \int_{-c}^c E\alpha\Delta T(y)ydy$$

En esfuerzo estaría dado por la ecuación:

$$\sigma' = -E\alpha\Delta T(y) + \frac{1}{2c} \int_{-c}^c E\alpha\Delta T(y)dy + \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^c E\alpha\Delta T(y)ydy \quad 1-17$$

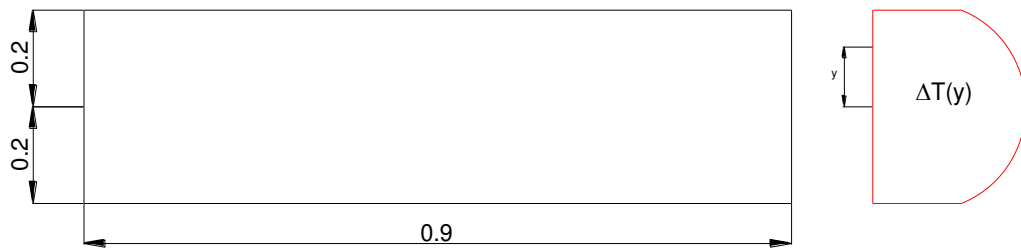
En las ecuaciones 1-16 y 1-17, se representa la posibilidad de tener un estado de tensiones distinto a cero, en dilatación sin ninguna restricción exterior del

sólido. Para validar los ejemplos anteriores vamos a relacionar con un ejemplo real:

Considerando una placa de acero libres en sus extremos (ver figura 1-6), en la cual se genera calor uniforme a razón de  $5 \times 10^2 \frac{W}{m^3}$ , y la temperatura en uno de sus extremos es  $26 \text{ }^\circ\text{C}$ , teniendo en cuenta que la temperatura inicial fue de  $22 \text{ }^\circ\text{C}$ . Calcular los esfuerzos térmico inducido por la variación de temperatura considerando las siguientes condiciones de borde:

$$T(y_1) = T_s = 26 \quad 1-18$$

$$\frac{dT(0)}{dy} = 0 \quad 1-19$$



**Figura 1-6 Dilatación libre placa de acero**

La ecuación de conducción de calor para la placa:

$$K \nabla^2 T + \dot{q} = 0$$

$$\frac{d^2 T(y)}{dy^2} = -\frac{\dot{q}}{K}$$

Empleado la primea integral:

$$\frac{dT}{dy} = -\frac{\dot{q}}{K} y + C_1$$

Aplicando ecuación 1-19:

$$0 = -\frac{\dot{q}}{K} (0) + C_1$$

$$C_1 = 0$$

Empleando la segunda integral:

$$T(y) = -\frac{\dot{q}}{2K}y^2 + C_2$$

Aplicando la ecuación 1-18:

$$T_s = -\frac{\dot{q}}{2K}y_1^2 + C_2$$

$$C_2 = T_s + \frac{\dot{q}}{2K}y_1^2$$

La ecuación de conducción de calor sería:

$$T(y) = T_s + \frac{\dot{q}}{2K}(y_1^2 - y^2) \quad 1-20$$

Comparando la ecuación 1-20 con la ecuación 1-13, podemos afirmar que no van a generar la misma distribución de temperaturas por tal razón no se cumple con la ecuación 1-9, y tenemos que aplicar cualquiera de la ecuaciones que cumpla con la distribución de temperatura.

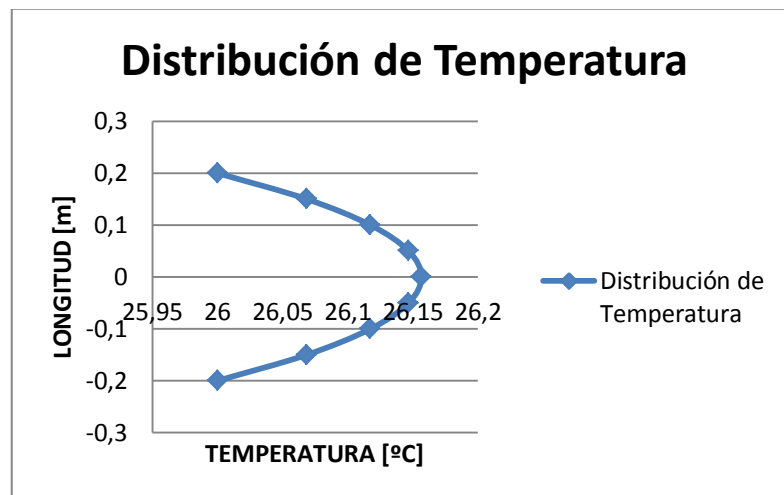


Figura 1-7 Distribución de Temperatura con  $500 \frac{W}{m^3}$

Como se observa en la figura 1-7, la distribución de temperatura es no lineal pero simétrica.

Aplicando la ecuación 1-16:

$$\Delta T(y) = (T(y) - T_{am})$$

$$\sigma' = -E\alpha\Delta T(y) + \frac{1}{2 \times 0.2} \int_{-0.2}^{0.2} E\alpha \left( T_s + \frac{\dot{q}}{2K} (y_1^2 - y^2) - T_{am} \right) dy$$

$$\sigma' = -E\alpha\Delta T(y) + \frac{1}{2 \times 0.2} \sum_{y=-0.2}^{0.2} E\alpha \left( T_s y + \frac{\dot{q}}{2K} y_1^2 y - \frac{\dot{q}}{6K} y^3 - T_{am} y \right)$$

$$\sigma' = -(200 \times 10^9)(12 \times 10^{-6})(4.15) + \frac{1}{2 \times 0.2} (200 \times 10^9)(12 \times 10^{-6})(1.6400)$$

$$\sigma' = -0.1 \text{ MPa}$$

El esfuerzo obtenido es muy bajo el cual puede ser despreciado. Esto ocurre porque la variación de temperatura entre el extremo y el centro es casi nulo.

Pero si variamos las condiciones iniciales del problema podemos tener:

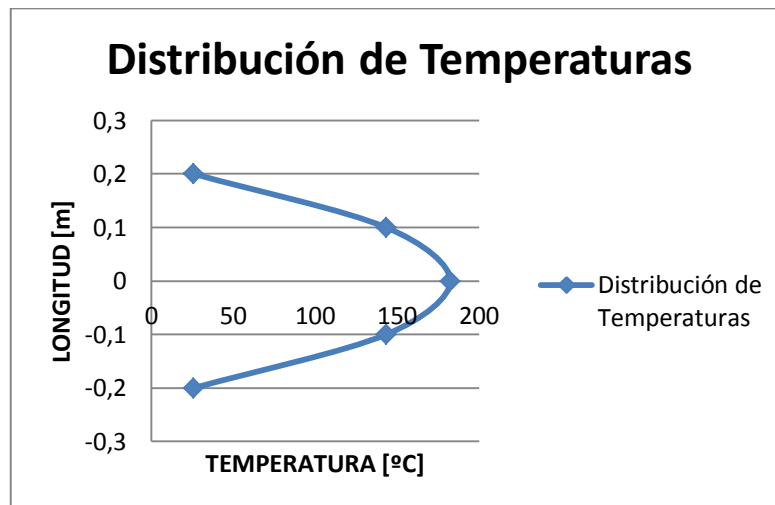


Figura 1-8 Distribución de Temperatura con  $5 \times 10^5 \frac{W}{m^3}$

$$\sigma' = -(200 \times 10^9)(12 \times 10^{-6})(138) + \frac{1}{2 \times 0.2} (200 \times 10^9)(12 \times 10^{-6})(-43.33188)$$

$$\sigma' = -71 \text{ MPa}$$

El esfuerzo que se obtuvo es representativo, esto nos conlleva a una conclusión. Si la variación de temperatura es baja como se indica en la figura 1-8 podemos despreciarla, pero si la distribución de temperatura es alta

se debe tomar en cuenta porque el esfuerzo generado es muy alto como se observó en los cálculos, que pueden llegar a sobrepasar el límite de fluencia del material.

### 1.3.1. ANALOGÍA DE DUHAMEL

Para analizar la influencia de la temperatura en los problemas elásticos lineales, Duhamel propuso una analogía entre el problema termoelástico y un problema elástico con las variables estáticas (fuerzas externas y tensiones) modificadas en la función de la distribución de temperaturas, de manera tal que el campo de desplazamientos de ambos fuese el mismo.

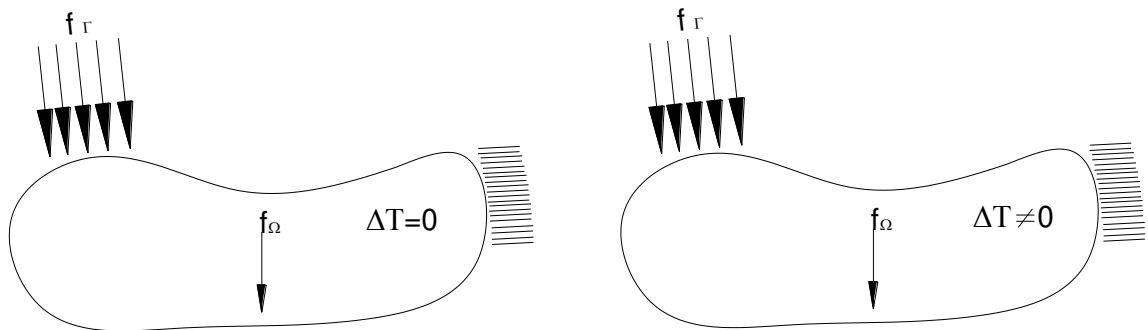


Figura 1-9 Analogía de Duhamel

desplazamientos, se tiene:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^m + \varepsilon_{ij}^T \quad 1-21$$

Haciendo lo mismo con el problema elástico análogo:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^m \quad 1-22$$

Dado que los desplazamientos de ambos problemas son iguales, las deformaciones también deben serlo, de forma que el tensor de tensiones en el problema análogo será:

$$\sigma' = \lambda \varepsilon_{kk}^m \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}^m = \lambda (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^T) \delta_{ij} + 2G (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) \quad 1-23$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la deformación térmica en función de la variación de temperatura:

$$\sigma'_{ij} = \lambda(\varepsilon_{kk} - \alpha\Delta T\delta_{kk})\delta_{ij} + 2G(\varepsilon_{ij} - \alpha\Delta T\delta_{ij}) \quad 1-24$$

$$= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2G)\alpha\Delta T\delta_{ij} \quad 1-25$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad 1-26$$

En tensor de tensiones del problema análogo es:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (3\lambda + 2G)\alpha\Delta T\delta_{ij} \quad 1-27$$

$$= \sigma_{ij} - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\Delta T\delta_{ij} \quad 1-28$$

La modificación de las tensiones en el problema elástico análogo implica, a su vez la modificación de las fuerzas externas para que cumplan con las ecuaciones de equilibrio interno y en el contorno:

$$f_{\Gamma} = -\frac{E}{1-2\nu}\alpha\nabla(\Delta T) \quad 1-29$$

$$f_{\Omega} = \frac{E}{1-2\nu}\alpha\Delta Tn \quad 1-30$$

De esta forma llega a formularse un problema sin efectos térmicos, cuya solución en desplazamientos coincide con el problema termoelástico que se pretendía resolver. Para mayor entendimiento el análisis completo de las ecuaciones transferencia de calor y la ley de Hooke generaliza se realizara en los capítulos 3 y 4 respectivamente.

Hasta ahora se ha considerado de modo analítico el problema de la termoelasticidad lineal. Pero los problemas que se encuentran en la práctica comprenden configuraciones geométricas complicadas, con condiciones de frontera complejas, y no se pueden resolver analíticamente. En este caso se debe obtener soluciones aproximadas suficientemente exactas por medio de computadoras utilizando un método numérico.

Existen varias maneras de obtener la formulación numérica de un problema de termoelasticidad desacoplada, como los métodos de las diferencias finitas, de



elementos finitos y de elementos de contorno. Cada uno tiene sus propias ventajas y desventajas, por ejemplo, el método de las diferencias finitas es muy popular en la transferencia de calor, pero esto no sucede en los problemas de elasticidad.

El método de elementos de contorno se puede decir que es una extensión del método de los elementos finitos ya que se discretiza solo el borde del sólido estudiado. Por esta razón se utilizaría el método de los elementos finitos, ya que la discretización se realiza en todo el sólido, lo que nos da una mejor aproximación a la realidad.

## CAPITULO 2.

*La visión ingenua de la realidad no es compatible  
con las ciencias modernas  
El Gran Diseño, Stephen Hawking*

### MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El *Método de los Elementos Finitos* (MEF) es un método numérico para la resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. Su desarrollo desde los años cincuenta hasta la actualidad ha sido constante y actualmente puede considerarse como el método de análisis numérico más extendido en la mayoría de los ámbitos de la ingeniería.

La resolución de un problema diferencial sobre un dominio mediante el método de los elementos finitos se puede dividir en dos etapas:

1. Establecimiento de la formulación variacional del problema.
2. Búsqueda de una solución aproximada mediante la discretización del dominio en número finito de subdominios en los que se establece la aproximación de la función incógnita.

Mediante la aplicación de estos conceptos, el problema diferencial original se transforma en un problema algebraico dando lugar a un sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas son los valores de la función en una serie de puntos de cada uno de los subdominios en los que se ha discretizado el dominio inicial, y que es fácil resolver por métodos numéricos. Los subdominios en los que se divide el dominio del problema se denominan elementos, y los puntos que los delimitan, y en los que se calcula el valor de la solución, se denominan nodos.

## 2.1. FORMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO

La formulación de elementos finitos puede deducirse para ciertos problemas, como por ejemplo el análisis de estructuras, como una extensión del método matricial. Sin embargo, dicha deducción encuentra serias limitaciones cuando se quiere extender a problemas no estructurales, como por ejemplo la transferencia de calor. Por ello se realizara una formulación variacional<sup>2</sup> (forma débil) del método de los elementos finitos que pueden aplicarse a una gran variedad de problemas. Para ello usaremos el método de los residuos ponderados.

## 2.2. GALERKIN-MÉTODO RESIDUOS PONDERADOS

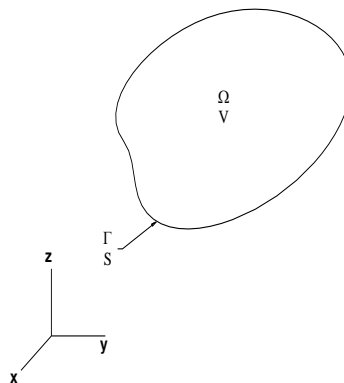


Figura 2-1 Representación del sistema

Con este método es posible obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales. Considerando una ecuación diferencial definida sobre el dominio  $\Omega$  como se ve en la figura 2-1

$$A(u) = 0 \quad 2-1$$

También existen condiciones naturales de contorno sobre la parte  $\Gamma_N$

$$C(u) = 0 \quad 2-2$$

Donde  $A(u)$  y  $C(u)$  es un operador diferencial.

---

<sup>2</sup> Formulación variacional del Método de los Elementos Finitos Dr. Ing. Claudio E. Jouglard

Si se reemplaza la solución exacta  $u$  por una solución aproximada  $\tilde{u}$  en las ecuaciones 2-1 y 2-2, estas no estarán satisfechas exactamente, generando un residuo  $R_\Omega$  en el dominio y un residuo  $R_\Gamma$  en el contorno.

Siendo este un método aproximado, busca una expresión aproximada de la forma

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i N_i \quad 2-3$$

En donde  $N_i$  representa las funciones de forma expresada en función de variables independientes (como las coordenadas  $[x y]$ ),  $a_i$  son las incógnitas.

$$\int_{\Omega} W_i R_\Omega(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i R_\Gamma(\tilde{u}) d\Gamma = 0 \quad 2-4$$

Las funciones  $W_i, \bar{W}_i$  son las funciones *de ponderación*.

En el método de Galerkin se adoptan las funciones de ponderación iguales a las funciones de prueba resultando

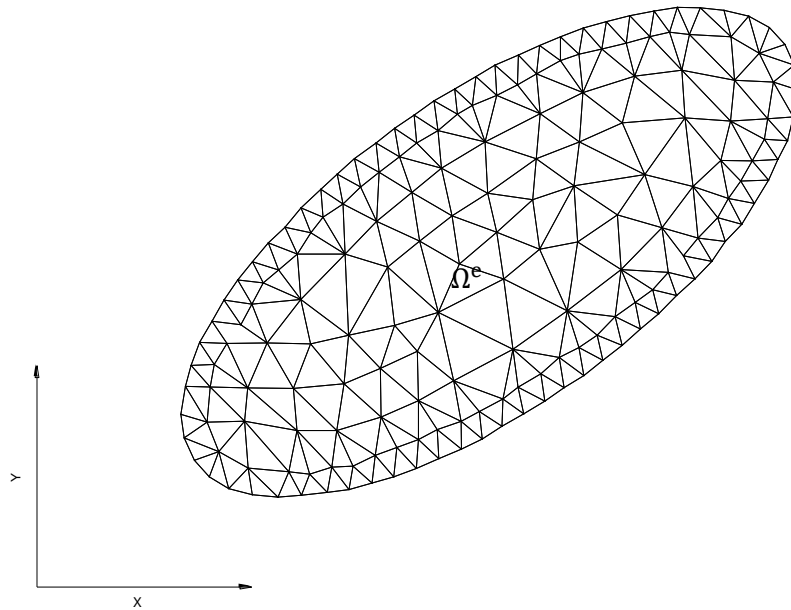
$$\int_{\Omega} N_i R_\Omega(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} N_i R_\Gamma(\tilde{u}) d\Gamma = 0 \quad 2-5$$

### 2.3. FUNCIONES DE FORMA

Hasta ahora se ha expresado a las soluciones aproximadas como:

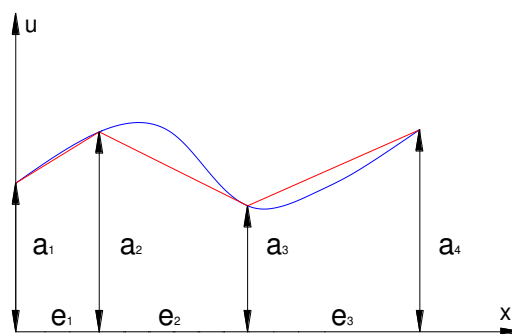
$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i N_i$$

Una forma alternativa de definir las funciones de prueba, consiste en subdividir el dominio  $\Omega$  en una serie de subdominios ó elementos  $\Omega^e$  que no se superpongan como se distingue en la figura 2-2, inmediatamente las aproximaciones  $\tilde{u}$  se construyen por trozos usando definiciones simples de las funciones de prueba sobre estos subdominios. Esta es la idea básica del método de los elementos finitos el cual puede interpretarse como un método de aproximación donde las funciones de prueba se definen en forma local en cada elemento y son llamadas *funciones de forma*, estas funciones de forma se combinan para dar lugar a una aproximación.



**Figura 2-2 Sólido bidimensional discretizado**

Para entender mejor lo que es una aproximación, por funciones de forma. Consideremos un dominio unidimensional, sobre el cual queremos aproximar una función arbitraria  $u(x)$ , como se indica en la figura 2-3.



**Figura 2-3 Aproximación de  $u(x)$**

Para mayor facilidad de entendimiento las funciones de forma, las vamos a plantear en conjunto con el desarrollo de los problemas.

### 2.3.1. ELEMENTO DE UNIDIMENSIONAL

Considerando un elemento finito típico  $e$  como en la figura 2-3 En el esquema de numeración local del primer nodo será 1 y el segundo nodo será 2. Se usa la notación  $x_1$  para el nodo 1 y  $x_2$  para el nodo 2

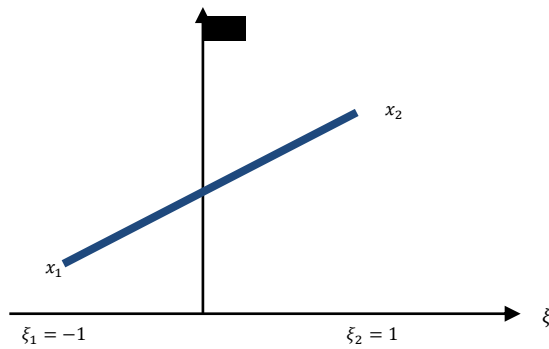
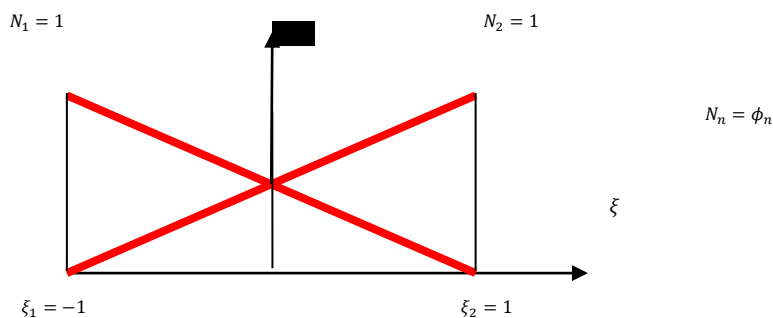


Figura 2-4 Elemento unidimensional

$$(x - x_1) = \frac{(x_2 - x_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} (\xi - \xi_1) \quad 2-6$$

$$\xi = \frac{2}{(x_2 - x_1)} (x - x_1) - 1 \quad 2-7$$

Las funciones de forma  $N_1$   $N_2$  se muestran en la figura 2-4



Planteando la ecuación para la recta  $\xi_n - N_{n+1}$

$$(\phi_n - 0) = \frac{(N_2 - 0)}{(\xi_2 - \xi_1)} (\xi - \xi_1)$$

$$\phi_2 = \frac{1 + \xi}{2}$$

De esta forma definimos las funciones de forma  $\phi_1 \phi_2$

$$\phi_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad \phi_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad 2-8$$

### 2.3.2. ELEMENTO TRIANGULAR

Considerando un dominio bidimensional, se va a formular un elemento triangular. Su numeración se realiza en forma antihoraria.

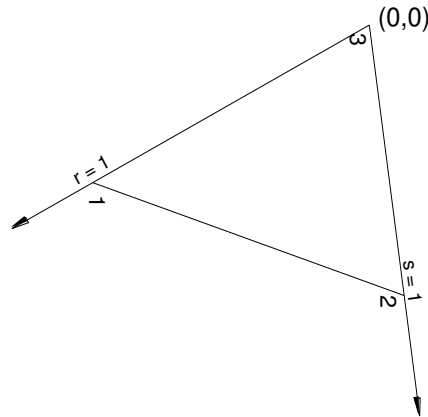


Figura 2-5 Elemento triangular

$$\phi_1 = \frac{(r-0)}{(1-0)} \quad 2-9$$

$$\phi_2 = \frac{(s-0)}{(1-0)} \quad 2-10$$

$$\phi_3 = 1 - N_1 - N_2 \quad 2-11$$

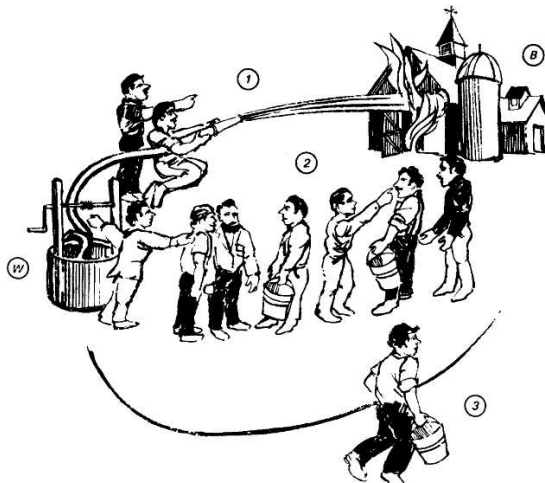
$$\phi_3 = 1 - r - s \quad 2-12$$

## CAPITULO 3.

*The effects of heat are subject to constant laws  
which cannot be discovered without the aid of mathematical analysis  
The Analytical Theory of Heat, J. Fourier*

### ANÁLISIS TÉRMICO

Para el análisis térmico es necesario tener presente los mecanismos de transferencia de calor que existen.



**Figura 3-1 Mecanismos de transferencia de calor**

Creando analogía de la figura 3-1<sup>3</sup> con la transferencia de calor, podemos suponer que el agua es el calor y que las personas son los mecanismos de transferencia de calor donde:

Caso 1.- Para apagar el fuego en B, el agua viene directo desde W independiente del medio. Esto es análogo a la *radiación térmica*.

Caso 2.- En este caso una brigada de personas transporta el agua desde W hasta B. Esto es análogo a la *conducción*

<sup>3</sup> Figura tomada del libro *A HEAT TRANSFER TEXTBOOK*



Caso 3.- Por ultimo una persona solitaria corre desde W hasta B llevando agua. Esto es análogo a la *convección*

### 3.1. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

En contraste con los mecanismos de conducción y convección, en donde estos procesos están ligados a una transferencia de calor a través de un medio material, el calor también puede ocurrir donde existe un vacío en forma de radiación electromagnética, que es propagada como resultado de una diferencia de temperaturas, a esto llamaremos *radiación térmica*.

$$Q = \sigma A(T_1^4 - T_2^4) \quad 3-1$$

En la ecuación 3-1, representa la radiación térmica, como se observa es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta, lo que ocasiona que el problema sea no lineal. Esto genera un alto costo matemático y computacional, para tratar su solución. Esta es la razón principal porque este mecanismo de transferencia de calor no será considerado para su análisis.

#### 3.1.1. CONDUCCIÓN

Fue propuesto por el físico y matemático Joseph Fourier en su trabajo *THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR* en 1822. Esta ley permite relacionar el vector flujo de calor con el gradiente de temperatura según:

$$\dot{q} = -K\nabla T \quad 3-2$$

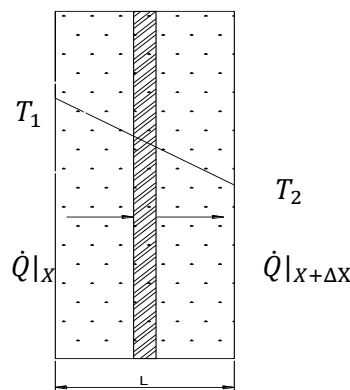


Figura 3-2 Conducción de calor

Donde K es el tensor de conductividad del material:

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

### 3.1.2. CONVECCIÓN

Un caso típico de transferencia de calor por convección es el que se describe en la figura 3-2, donde un fluido en movimiento con temperatura  $T_e$  pasa por un cuerpo a temperatura  $T_s$ . En 1701, Isaac Newton considero el proceso de convección y sugirió la ley de enfriamiento que lleva su nombre.

Como el objetivo de esta tesis es encontrar las deformaciones inducidas por la variación de temperatura, por esta razón solo nos interesa conocer la transferencia de calor desde una superficie y no es de nuestro interés la variación de flujo de calor. Para este caso, es conveniente definir un coeficiente de transferencia de calor  $h$  para una superficie isotérmica de área A por medio de la ecuación 3-5.

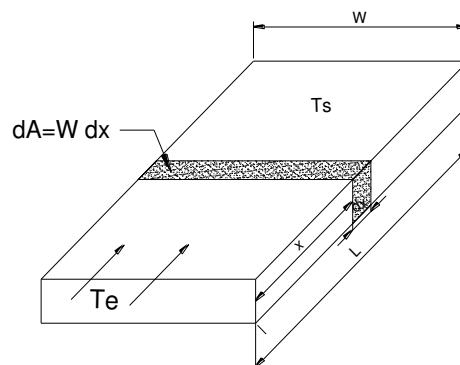
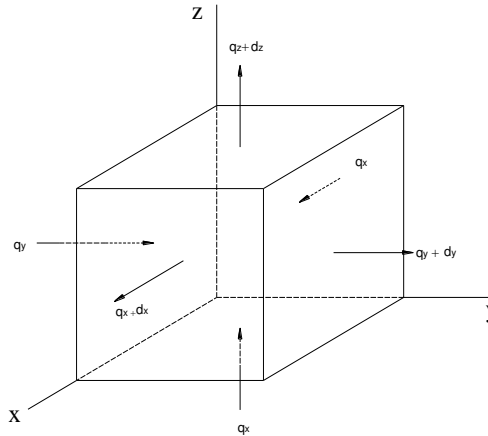


Figura 3-3 Convección de calor

$$q_s = h A (T_s - T_e) \quad 3-3$$

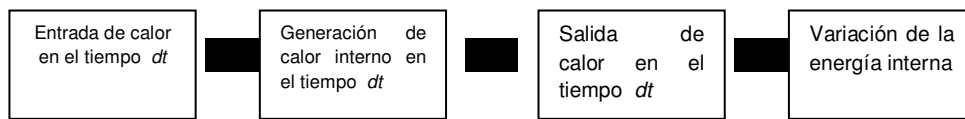
### 3.2. ECUACIÓN CONDUCCIÓN DE CALOR

Para la deducción de la ecuación de conducción calor, partimos de un elemento volumétrico elemental al que le aplicamos la primera ley de la termodinámica.



**Figura 3-4 Volumen elemental en coordenadas cartesianas**

Aplicando el principio de conservación de la energía



**Figura 3-5 Primera ley de la termodinámica**

Aplicando la conservación de la energía mostrada en la figura 3.7 podemos expresar la siguiente ecuación:

$$(q_x + q_y + q_z)dt + \dot{q} dx dy dz dt = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})dt + \rho c dT dx dy dz \quad 3-4$$

Dónde:

$$q_x = \text{Flujo de entrada de calor a través de la cara en } x.$$

$$q_{x+dx} = \text{Flujo de salida de calor a través de la cara en } x + dx$$

La entrada de calor a través de la cara en  $dx$  es:

$$q_{x+dx} dx dy dz \quad 3-5$$

Donde la entrada neta de calor en la dirección  $x$  es:

$$(q_x - q_{x+dx})dydz \quad 3-6$$

El flujo de calor saliente en el eje  $x$ , se puede desarrollar mediante una serie de Taylor.

$$q_x|_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad 3-7$$

Sustituyendo obtenemos el flujo neto de entrada de calor

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz \quad 3-8$$

Análogamente, aplicamos para los dos ejes restantes.

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx dz - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz dx dy + \dot{q} dx dy dz = + \rho c \frac{dT}{dt} dx dy dz \quad 3-9$$

Aplicando la condición de Neuman y dividiendo todo para  $dx dy dz$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{dT}{dt} \quad 3-10$$

$$\rho c \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \dot{q} \quad 3-11$$

### 3.3. CONDICIONES DE CONTORNO

Para poder resolver la ecuación 3-11 es necesario imponer las condiciones de contorno esenciales y naturales del problema:

$$T|_{x=L} = T_s \quad 3-12$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=L} = q_s \quad 3-13$$

La primera es una condición de primer tipo o de Dirichlet, en tanto, la segunda es una condición de segundo tipo o de Neumann.

### 3.4. APLICACIÓN DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA TRANSFERENCIA DE CALOR

#### 3.4.1. FORMULACIÓN UNIDIMENSIONAL

El procedimiento es el mismo para los problemas bidimensionales y tridimensionales, lo único que varían son las funciones de forma para cada elemento y se debería integrar de acuerdo a las dimensiones del problema. En este problema se desarrollara todo el procedimiento, para poder tener una idea de cómo se obtienen las matrices que representan, la ecuación que gobiernan el problema térmico.

Partiendo de la ecuación 3-11. Como es un análisis unidimensional en dirección del eje  $x$ , la ecuación se simplifica notablemente.

$$\left( k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Aplicando el enfoque de Galerkin.

$$T = \phi_1 T_1 + \phi_2 T_2 \quad 3-14$$

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 \quad 3-15$$

Donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son las funciones de forma definidas en la ecuación 2-14.

Remplazando  $\frac{\partial T}{\partial t} = \dot{T}$

$$\int_0^L \phi k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \phi q - \phi \rho c \dot{T} = 0 \quad 3-16$$

Aplicando la integración por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\phi \frac{dT}{dx}\right) = \frac{d\phi}{dx} \frac{dT}{dx} + \phi \frac{d^2 T}{dx^2} \quad 3-17$$

$$\phi k \frac{dT}{dx} \Big|_0^L - k \int_0^L \frac{d\phi}{dx} \frac{dT}{dx} dx + \int_0^L \phi q dx - \int_0^L \rho c \dot{T} dx = 0 \quad 3-18$$

Teniendo en cuenta que  $q_m = -k \frac{\partial T}{\partial m}$  y aplicando las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann en la ecuación 3-18

$$\phi(0) = 0 \quad y \quad q = -k(L) \left( \frac{dT(L)}{dx} \right) = h(T_L - T_\infty)$$

$$-\phi(L)h(T_L - T_\infty) - k \int_0^L \frac{d\phi}{dx} \frac{dT}{dx} dx + \int_0^L \phi Q dx - \int_0^L \rho c \dot{T} dx = 0 \quad 3-19$$

La matriz de rigidez del elemento está representada por el siguiente término de la ecuación 3-19

$$k \int_0^L \frac{d\phi}{dx} \frac{dT}{dx} dx \quad 3-20$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{dT}{d\xi} = \frac{dT}{d\phi} \frac{d\phi}{d\xi}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}$$

Partiendo de la ecuación 2-7 tenemos

$$dx = \frac{l_e}{2} d\xi$$

Teniendo en cuenta que estamos usando elementos isoperimétricos la matriz K es cuadrada igual al número de nodos del elemento.

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

Para calcular  $K_{11}$ , la ecuación 3-32 queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{kl_e}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\phi_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dT}{d\phi_1} \frac{d\phi_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} d\xi \quad 3-21$$

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l_e}$$

Remplazando y operando en la ecuación 3-21

$$\frac{k}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{l_e} d\xi$$

$$K_{11} = \frac{k}{l_e}$$

Analogamente calculamos para  $K_{12}, K_{21}, K_{22}$ . De esta forma se obtiene la matriz de rigidez  $K$ .

$$K = \frac{k}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} T$$

Como es un análisis unidimensional, los cálculos de cierta manera son fáciles. Pero para elementos con un mayor número de nodos los cálculos se vuelven tediosos. Para simplificar los cálculos aplicamos el siguiente algoritmo.

$$K = \frac{kl_e}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} T d\xi \quad 3-22$$

$$K = \frac{k}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} T$$

El siguiente término de la ecuación 3-19 representa el flujo de entrada de calor

$$P = \frac{Q_e l_e}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix}^T d\xi \quad 3-23$$

$$P = \frac{Q_e l_e}{2} [1 \quad 1]^T \quad 3-24$$

Finalmente el último término de la ecuación 3-21 representa la variación de energía interna en el tiempo.

$$K_3 = \rho c \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \dot{T} d\xi \quad 3-25$$

$$K_3 = \frac{\rho c l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dot{T} \quad 3-26$$

Finalmente la ecuación 3-23 queda representada de la siguiente forma matricial de la ecuación.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K_{3\ 22} & K_{3\ 23} & \dots & K_{3\ 2L} \\ K_{3\ 32} & K_{3\ 33} & \dots & K_{3\ 3L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{3\ L2} & K_{3\ L3} & \dots & K_{3\ LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \vdots \\ \dot{T}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{1\ 22} & K_{1\ 23} & \dots & K_{1\ 2L} \\ K_{1\ 32} & K_{1\ 33} & \dots & K_{1\ 3L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{1\ L2} & K_{1\ L3} & \dots & (K_{1\ LL} + h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_L \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ (P_L + hT_\infty) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{21}T_1 \\ K_{31}T_1 \\ \vdots \\ K_{L1}T_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Forma compacta de la ecuación

$$\mathbf{K}_3 \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}_1 \mathbf{T} = \mathbf{P} \quad 3-27$$

### 3.4.2. FORMULACIÓN BIDIMENSIONAL

Partiendo de la ecuación 3-18, aplicando el enfoque de Galerkin

$$\begin{aligned} & \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - k \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - k \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right\} dA + \dots \\ & \dots + \iint_A \phi Q dA - \iint_A \phi \rho c \frac{dT}{dt} dA = 0 \end{aligned} \quad 3-28$$

Teniendo en cuenta que  $q_m = -k \frac{\partial T}{\partial m}$  y aplicando el teorema de la divergencia a la primera parte de la ecuación 3-40

$$\begin{aligned} & \iint_A \nabla \cdot q_n dA = \int_s q_n ds \\ & - \int_s \phi q_n ds - \iint_a k \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} dA + \iint_A \phi Q dA - \iint_A \phi \rho c \frac{dT}{dt} dA = 0 \end{aligned}$$

Remplazando la condiciones de Dirichlet y Neumann

$$\begin{aligned} & - \int_s \phi q_o ds - \int_s \phi h(T - T_\infty) ds - \iint_a k \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} dA + \iint_A \phi Q dA - \\ & - \iint_A \phi \rho c \frac{dT}{dt} dA = 0 \end{aligned} \quad 3-29$$

Utilizando las funciones de forma especificadas en las ecuaciones 2-15-16-17.



$$T = \phi_1 T_1 + \phi_2 T_2 + \phi_3 T_3 \quad 3-30$$

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 \quad 3-31$$

$$y = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 \quad 3-32$$

De esta manera hallamos el Jacobiano de transformación

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad 3-33$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad 3-34$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix}$$

En notación matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad 3-35$$

Operando en la ecuación 3-37

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}(J)} \begin{bmatrix} x_{13} & -y_{13} \\ -x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{\partial s} \end{bmatrix} \quad 3-36$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}(J)} \begin{bmatrix} x_{13} & -y_{13} \\ -x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} T^e \quad 3-37$$

$$B = \frac{1}{\text{Det}(J)} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & y_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \quad 3-38$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = BT^e$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = B^T$$

$$K = kA_e B^T B \quad 3-39$$

Suponiendo que el borde 2-3 es convectivo

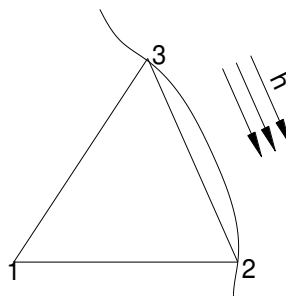


Figura 3-6 Borde convectivo sobre un elemento triangular

$$K_2 = \frac{hl_{2-3}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 3-40$$

$$K_3 = \frac{\rho cl_{2-3}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 3-41$$

$$P_2 = \frac{hT_{\infty}l_{2-3}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3-42$$

$$P_3 = \frac{Q_e A_e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3-43$$

De esta forma el conjunto de ecuaciones que gobiernan el sólido son:

$$K_3 \dot{T} + (K_1 + K_2)T = P_3 + P_2 \quad 3-44$$

### 3.4.3. MÉTODO EXPLÍCITO

Empleando el método de las diferencias finitas en la ecuación  $K_3 \dot{T} + KT = P$

Donde

$$\dot{T} = \frac{(T_{n+1} - T_n)}{\Delta t} \quad 3-45$$

$\dot{T}$  Está evaluado en el punto medio del tiempo  $t$ , por esta razón  $T$  queda expresado de la siguiente forma:

$$T = \frac{1}{2}(T_{n+1} + T_n) \quad 3-46$$

Remplazando las ecuaciones 3-49 y 3-50

$$K_3 \frac{(T_{n+1} - T_n)}{\Delta t} + K \left( \frac{1}{2}(T_{n+1} + T_n) \right) = P \quad 3-47$$

$$\left( \frac{K_3}{\Delta t} + \frac{K}{2} \right) T_{n+1} = P + \left( \frac{K_3}{\Delta t} - \frac{K}{2} \right) T_n \quad 3-48$$

Volviendo a remplazar la ecuación 3-41

$$\left( \frac{2K_3}{\Delta t} + K \right) T = P + \left( \frac{2K_3}{\Delta t} \right) T_n \quad 3-49$$

Para la resolución mediante el método de las diferencias finitas, se utilizara el método explícito.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Este método parte de una temperatura inicial, su debilidad es: el elemento más pequeño proporciona el intervalo de tiempo, para poder obtener estabilidad y convergencia en los resultados.

## CAPITULO 4.

*Explicar toda la naturaleza es una tarea demasiado difícil para cualquier hombre e incluso para cualquier era. Es mucho mejor hacer un poco con seguridad, y dejar el resto a los que vengan después de ti, que explicar todas las cosas conjeturando sin estar seguros de nada.*

*Isaac Newton*

### ANÁLISIS MECÁNICO

El mundo que percibimos a través de nuestros sentidos se compone de objetos que son macroscópicos. Este mundo es extraordinariamente fascinante por que la materia y la energía no están dispuestas al azar, sino según una compleja organización jerárquica. A cualquier lugar que miremos, desde los más recónditos rincones del núcleo atómico, hasta las más lejanas galaxias encontramos orden. Por ejemplo, Para nuestro interés vamos a considerar que un cuerpo está constituido solo por átomos y vamos a descartar a las demás partículas elementales. Los átomos se encuentran unidos por fuerzas, las mismas que se oponen a los cambios de forma del cuerpo, cuando sobre él actúan fuerzas exteriores. Este sistema de fuerzas exteriores, genera desplazamientos mutuos de los componentes internos del cuerpo, hasta establecer una condición de equilibrio entre el sistema exterior de fuerzas y el sistema interior de fuerzas, que están interactuando sobre el mismo cuerpo. A este estado que llega el cuerpo al estar en equilibrio se lo conoce como estado de deformación.

Mediante experimentos se puede comprobar que entre ciertos límites la deformación es proporcional a la fuerza ejercida. Esta relación entre fuerza y deformación fue enunciada por primera vez por el investigador ingles Robert Hooke en su artículo *DE POTENTIA RESTITUTIVA* en 1678.

## 4.1. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

### 4.1.1. EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

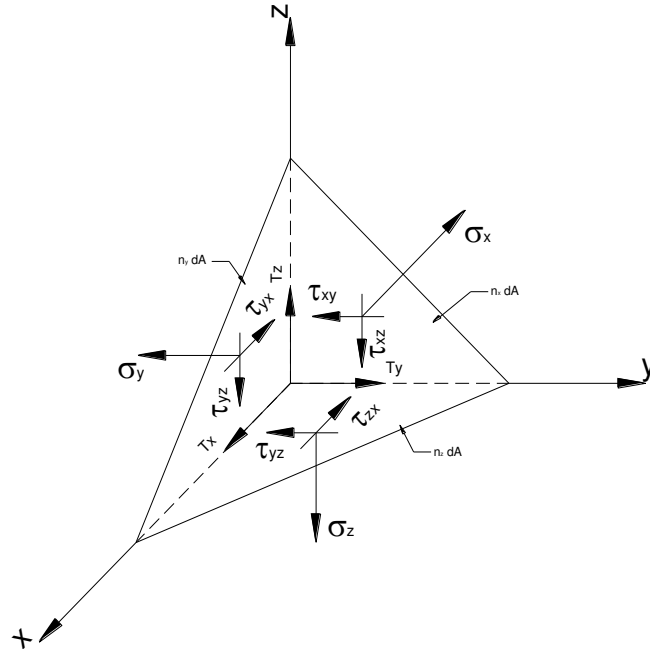


Figura 4-1 Condición de equilibrio en el contorno

Planteando las condiciones de equilibrio en el tetraedro se tiene:

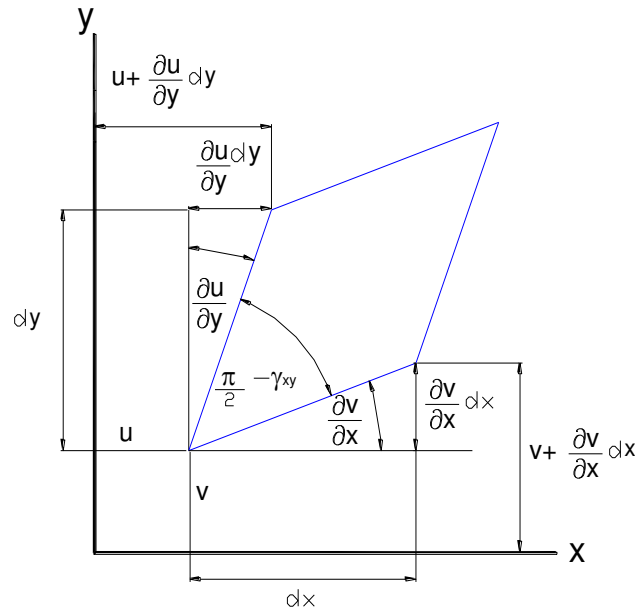
$$\begin{aligned}\sigma_x n_x dA + \tau_{xy} n_x dA + \tau_{xz} n_x dA &= F_x dA \\ \tau_{yx} n_y dA + \sigma_y n_y dA + \tau_{zz} n_y dA &= F_y dA \\ \tau_{zx} n_z dA + \tau_{zy} n_z dA + \sigma_z n_z dA &= F_z dA\end{aligned}$$

Dividiendo para  $dA$ :

$$\begin{aligned}\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_x + \tau_{xz} n_x &= F_x \\ \tau_{yx} n_y + \sigma_y n_y + \tau_{zz} n_y &= F_y \\ \tau_{zx} n_z + \tau_{zy} n_z + \sigma_z n_z &= F_z\end{aligned}\tag{4-1}$$

### 4.1.2. COMPATIBILIDAD

Este principio supone que la deformación y consecuentemente el desplazamiento, de cualquier punto particular del sólido es continuo y tiene un solo valor. Normalmente esta condición se emplea, al igual que las condiciones de equilibrio, para satisfacer que los desplazamientos sean únicos.



**Figura 4-2 Condición de compatibilidad**

Las funciones  $u$  y  $v$ , representan el corrimiento de los puntos del cuerpo. Al estudiar la forma en la que estas varían respecto de la dirección  $x$  e  $y$ , se logran determinar las deformaciones y distorsiones unitarias.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Si realizamos el mismo procedimiento para todas las direcciones, obtenemos el tensor  $D$  que representa todas las deformaciones y distorsiones del sistema.

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Es evidente que los componentes del tensor  $D$  no pueden ser arbitrarios, aplicando las condiciones que se tienen que cumplir para que el sistema sea compatible y, por lo tanto integrable. Podemos definir la condición de compatibilidad:

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

4-2

### 4.1.3. CONDICIONES DE CONTORNO

Ciertamente los problemas de la mecánica, como muchos otros problemas físicos, sin introducir ciertas condiciones de contorno, no se consideran enteramente definidos. Estas condiciones se expresan en función de la fuerza o del desplazamiento.

Específicamente las condiciones de contorno de los problemas de mecánica se reducen a las condiciones de apoyo que está sometido en cuerpo.

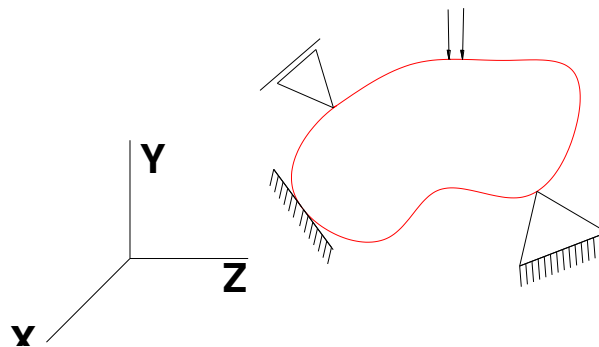


Figura 4-3 Condiciones de contorno

## 4.2. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO INTERNO

Para plantear las condiciones de equilibrio, es necesario recurrir al cubo elemental de deformaciones

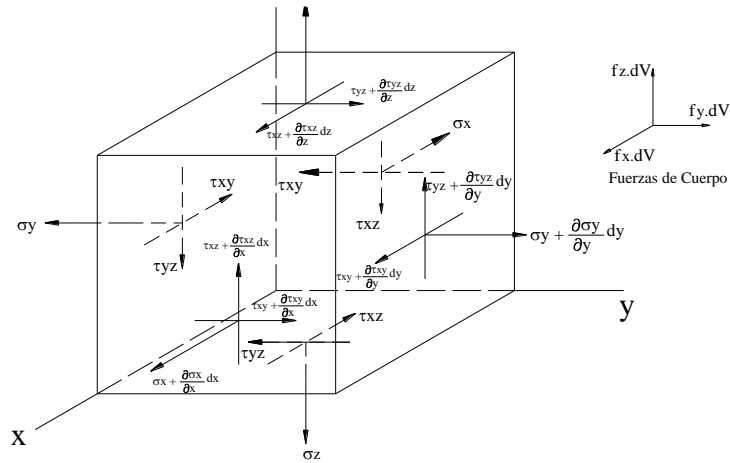


Figura 4-4 Volumen elemental

Para este caso solo tomaremos en cuenta solo aquellas fuerzas que dan Las proyecciones sobre el eje X.

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \dots \\ & \dots + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + f_x dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad 4-3$$

Reduciendo términos semejantes en la ecuación 4-1 y dividiéndola para  $dx dy dz$ , tendremos finalmente

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad 4-4$$

Del mismo modo se desarrolla para las dos ecuaciones restantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad 4-5$$

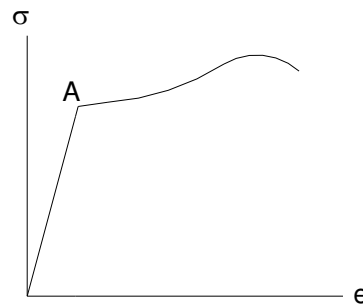
$$\nabla \sigma + f = 0 \quad 4-6$$

### 4.3. LEY DE HOOKE PARA ELASTICIDAD LINEAL

Los cuerpos físicos se clasifican por su estructura, ante todo, en homogéneos y heterogéneos. Se llama homogéneos aquél cuya estructura y composición son



iguales en todos sus puntos. De este grupo sobresalen los cuerpos isotropicos que son el tema de estudio de este trabajo.



**Figura 4-5 Diagrama esfuerzo - deformación**

En la figura 4-5 se muestra el diagrama esfuerzo-deformación, que expresa el alargamiento relativo  $\epsilon_{xx}$  en función del esfuerzo. En el tramo rectilíneo del diagrama revela, la relación

$$\sigma_x = E \epsilon_{xx} \quad 4-7$$

La ecuación 4-5 representa la ley de elasticidad de Hooke. El punto final A del tramo corresponde a la tensión  $\sigma_p$  llamada *límite de proporcional*. El alargamiento  $\epsilon_{xx}$ , es acompañado por deformaciones transversales de igual magnitud  $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$  pero de signo contrario, siendo estas deformaciones proporcionales al alargamiento fundamental  $\epsilon_{xx}$ :

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu \epsilon_{xx} \quad 4-8$$

De este modo la ley de Hooke es formulada por dos relaciones 4-7 y 4-8 con números que caracterizan las propiedades elásticas del material: módulo de elasticidad de Young  $E$  y el número adimensional  $\nu$  llamado *coeficiente de Poisson*. Con estas relaciones se formula la ley de Hooke para los esfuerzos transversales, donde el coeficiente de proporcionalidad  $G$  recibe el nombre *módulo de elasticidad transversal*.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad 4-9$$

Partiendo de la figura 4-4, tomaremos inicialmente solo la tensión  $\sigma_x$  que desarrollara una deformación  $\epsilon_{xx}$ , según la ley de Hooke,

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} \quad 4-10$$

Bajo la tensión en  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , tenemos

$$\varepsilon''_{xx} = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad 4-11$$

$$\varepsilon'''_{xx} = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad 4-12$$

Asumimos el alargamiento total a lo largo del eje X

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xx} + \varepsilon'''_{xx} \quad 4-13$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad 4-14$$

Análogamente para los desplazamientos en los otros dos ejes

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad 4-15$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad 4-16$$

Expresamos las relaciones con las tensiones tangenciales

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad 4-17$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad 4-18$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad 4-19$$

De esta forma podemos expresar la *ley generalizada de Hooke en función de los esfuerzos*.

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij}$$

Las ecuaciones 4-14 hasta 4-19, representa la ley generalizada de Hooke, en función de las deformaciones. Es necesario disponer de su relación inversa, es decir, la ley de Hooke en función de los esfuerzos.

$$\frac{1}{E}(v\sigma_x - v\sigma_x) \quad 4-20$$

Si a la ecuación 4-14, le sumamos la ecuación 4-20 tenemos:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[(1+v)\sigma_x - v\Theta] \quad 4-21$$

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad 4-22$$

Sumando las deformaciones normales tendremos

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \theta \quad 4-23$$

$$\theta = \frac{1}{E}[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2v(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\theta = \frac{(1-2v)\Theta}{E} \quad 4-24$$

Remplazando la ecuación 4-24 en la ecuación 4-21, obtenemos la relación inversa.

$$\sigma_x = \frac{E\varepsilon_{xx}}{(1+v)} + \frac{Ev\theta}{(1-2v)(1+v)} \quad 4-25$$

Donde  $\lambda$  representa el coeficiente de Lamé

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \quad 4-26$$

$$G = \frac{E}{2(1+v)} = \mu \quad 4-27$$

La ecuación 4-21 queda expresada de la siguiente forma

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx} \quad 4-28$$

En forma análoga para las direcciones, tenemos la *ley generalizada de Hooke en función de los desplazamientos*

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}$$

La Ley de Hooke también se le representa por la relación

$$\sigma = D\varepsilon \quad 4-29$$

Donde es el tensor de constantes elásticas para un material isotrópico D

$$D = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix}$$

#### 4.4. TERMOELASTICIDAD LINEAL. TENSIONES Y DEFORMACIONES TÉRMICAS

Experimentalmente se puede obtener que la variación de la longitud con la temperatura sea una función lineal, por esta razón los alargamientos son directamente proporcionales a los incrementos de la temperatura  $T$ .

$$l_f = l_o(1 + \alpha \Delta T) \quad 4-30$$

$$\Delta l = \alpha l \Delta T \quad 4-31$$

Donde  $\alpha$ , es el coeficiente de dilatación lineal, una propiedad térmica del material.

De la ecuación 4-31 se obtiene el alargamiento unitario.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T \quad 4-32$$

Si el sólido tiene una restricción, el fenómeno es equivalente a una compresión. Mediante la *Ley de Hooke* se puede obtener la tensión normal.

$$\sigma = -E\varepsilon = -E\alpha\Delta T \quad 4-33$$

De la teoría de la elasticidad se sabe que para materiales elásticos lineales, la relación esfuerzo deformación unitaria proviene de la Ley de Hooke generalizada.

Por lo tanto,  $\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z$  son las tensiones de origen térmico, llamadas *tensiones térmicas*, las deformaciones en cada punto se obtendrán mediante el método de superposición ver Capítulo 1.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 - \nu)\sigma'_{ij} - \nu\sigma'_{kk}\delta_{ij}] + \alpha\Delta T\delta_{ij} \quad 4-34$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma'_x - \nu(\sigma'_y + \sigma'_z)] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma'_y - \nu(\sigma'_x + \sigma'_z)] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma'_z - \nu(\sigma'_x + \sigma'_y)] + \alpha\Delta T \end{aligned} \quad 4-35$$

Ya que las deformaciones son de origen térmico, al ser un cuerpo isotrópico, no produce variaciones angulares.

Desarrollando los mismos pasos que en la ecuación 4-28, se obtiene los esfuerzos en función de las deformaciones térmicas.

$$\sigma'_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}^m\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^m - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\Delta T\delta_{ij} \quad 4-36$$

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x - \frac{\alpha E\Delta T}{(1-2\nu)} \\ \sigma'_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y - \frac{\alpha E\Delta T}{(1-2\nu)} \\ \sigma'_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z - \frac{\alpha E\Delta T}{(1-2\nu)} \end{aligned} \quad 4-37$$

Estas tensiones para ser solución del problema elástico tienen que cumplir con las ecuaciones de equilibrio interno y las de equilibrio en el contorno

$$\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad 4-38$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x} + G\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + G\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \quad 4-39$$

Ordenando y obteniendo en forma análoga las dos restantes ecuaciones.

$$X = -\frac{\alpha E}{(1-2\nu)}\frac{\partial T}{\partial x}; Y = -\frac{\alpha E}{(1-2\nu)}\frac{\partial T}{\partial y}; Z = -\frac{\alpha E}{(1-2\nu)}\frac{\partial T}{\partial z} \quad 4-40$$

Aplicando las ecuaciones de contorno tenemos

$$(\lambda\theta + 2G\varepsilon_x)\Pi + \tau'_{xy}P + \tau'_{xz}\Sigma = \frac{\alpha E\Delta T}{(1-2\nu)}\Pi \quad 4-41$$

Ordenando y obteniendo en forma análoga las dos restantes ecuaciones.

$$\bar{X} = \frac{\alpha E\Delta T}{(1-2\nu)}\Pi; \bar{Y} = \frac{\alpha E\Delta T}{(1-2\nu)}P; \bar{Z} = \frac{\alpha E\Delta T}{(1-2\nu)}\Sigma \quad 4-42$$

El sistema elástico en el que existe el estado térmico definido por la variación de  $T$  de temperatura es equivalente a un estado no térmico en el que las fuerzas de superficie  $f_{\Gamma} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  y de masa  $f_{\Omega}(X, Y, Z)$ . Donde  $(\Pi, P, \Sigma)$  son los cosenos directores de la normal a un plano

De esta forma hemos obtenido el llamado *teorema de Duhamel*, lo que se puede comprobar con las ecuaciones 1-29 y 1-30 del Capítulo I: los desplazamientos debidos a variaciones térmicas y a tensiones termoelásticas son los mismos que se producirán en el sólido elástico actuando simultáneamente los sistemas de fuerzas de masa y de superficie dados por las ecuaciones 4-40 y 4-41, sin que exista variación alguna de temperatura.

Resulta que las tensiones térmicas serian:

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \sigma_x - \frac{\alpha E \Delta T}{(1-2\nu)} \\ \sigma'_y &= \sigma_y - \frac{\alpha E \Delta T}{(1-2\nu)} \\ \sigma'_z &= \sigma_z - \frac{\alpha E \Delta T}{(1-2\nu)} \\ \tau'_{xy} &= \tau_{xy} \\ \tau'_{xz} &= \tau_{xz} \\ \tau'_{yz} &= \tau_{yz}\end{aligned}\tag{4-43}$$

## 4.5. APLICACIÓN DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA MECÁNICA DE SÓLIDOS

### 4.5.1. FORMULACIÓN UNIDIMENSIONAL

Partiendo de la ecuación de equilibrio 4-4, la ecuación se reduce a una dimensión quedando de la siguiente forma.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + f_x = 0\tag{4-44}$$

Donde

$$\sigma = Ee$$

Empleando las funciones de forma para un elemento unidimensional tenemos

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2$$

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2$$

$$e = \frac{du}{dx} \frac{d\xi}{d\xi}$$

Usando el enfoque de Galerkin, para discretizar la ecuación 4-44

$$-\int_L \frac{d\phi_i}{dx} E \frac{d\hat{u}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} A dx + \int_L \phi_i f A dx = 0 \quad 4-45$$

La matriz de rigidez del elemento parte de la primera parte de la ecuación 4-44

$$\frac{2EA}{l_e} \int_{-1}^1 \frac{du_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} u_i d\xi$$

Para  $\phi_1$

$$\frac{2EA}{l_e} \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$\frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Para  $\phi_2$

$$\frac{EA}{l_e} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$\frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

De esta forma se define la matriz de rigidez  $k_e$

$$k_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Los términos de fuerza están relacionados con el último término de la ecuación 4-44.

$$\int_L \phi_i f A dx$$

Para  $\phi_1$

$$\frac{Alef}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-\xi}{2} d\xi$$

Para  $\phi_2$

$$\frac{Alef}{2} \int_{-1}^1 \frac{1+\xi}{2} d\xi$$

$$f_e = \frac{Alef}{2} [1 \quad 1]^T$$

Forma matricial de la ecuación 4-44

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2L} \\ K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{L2} & K_{L3} & \dots & K_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{21}u_1 \\ K_{31}u_1 \\ \vdots \\ K_{L1}u_1 \end{bmatrix}$$

Forma compacta de la ecuación 4-44

$$KQ = F \quad 4-46$$

#### 4.5.2. FORMULACIÓN UNIDIMENSIONAL PROBLEMA TERMOMECAÁNICO

Representando la ecuación 4-40 en la figura 4-6, obtenemos la energía de deformación unitaria por unidad de volumen.

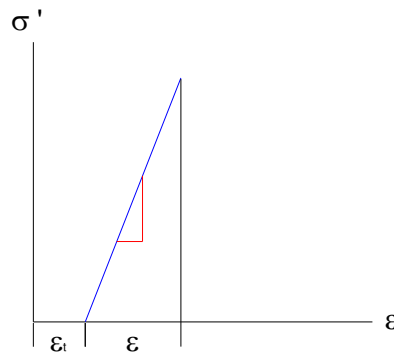


Figura 4-6 Relación esfuerzo deformación



$$U = \frac{1}{2} \int_L \sigma(e - \varepsilon') Adx \quad 4-47$$

$$U = \int_L E(e - \varepsilon')(e - \varepsilon')Adx \quad 4-48$$

Operando la ecuación 4-48 obtenemos tres términos. El primero  $\int_0^L eeAdx$ , representa la matriz de rigidez que fue calculada en la ecuación 4-45. El tercero  $\int_0^L \varepsilon'^2 Adx$ , es un término constante. El segundo término  $\int_0^L e\varepsilon'Adx$ , representa las cargas por variación de temperatura

$$\Phi_e = A_e \frac{l_e}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} E\alpha\Delta T d\xi \quad 4-49$$

Realizando el mismo procedimiento que la ecuación 4-49, llegamos a obtener la siguiente relación por cargas térmicas.

$$\Phi_e = EA\alpha\Delta T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El campo de temperaturas  $\Delta T$  se halla mediante la formulación de la sección de transferencia de calor. De esta forma la formulación termomecánica para casos bidimensionales queda de la siguiente forma:

Forma matricial de la ecuación 4-48

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2L} \\ K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{L2} & K_{L3} & \dots & K_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \vdots \\ \Phi_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{21}u_1 \\ K_{31}u_1 \\ \vdots \\ K_{L1}u_1 \end{bmatrix} \quad 4-50$$

Forma compacta de la ecuación 4-48

$$KQ = F' \quad 4-51$$

Después de resolver la ecuación 4-50, el esfuerzo en cada elemento puede obtenerse mediante la ecuación 4-37

$$\sigma'_x = \sigma_x - \psi$$

$$\sigma'_x = Ee - E\alpha\Delta T$$

Donde

$$e = \frac{du}{dx} = \frac{1}{l_e} [-1 \quad 1]u$$

La ecuación 4-45 que da expresada de la siguiente forma

$$\sigma'_x = \frac{E}{l_e} [-1 \quad 1]u - E\alpha\Delta T \quad 4-52$$

### 4.5.3. FORMULACIÓN BIDIMENSIONAL DEL PROBLEMA TERMOMECAÁNICO

Esta formulación del elemento finito sigue los pasos usados en la formulación unidimensional. Donde los desplazamientos son funciones de la posición indicada por  $[x \ y]$  que representadas en el sistema global  $[u \ v]$

$$-\int_A \sigma_x \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right] t dA - \int_A \sigma_y \left[ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] t dA - \int_A \tau_{xy} \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] t dA + \int_A \phi_i f_i t dA = 0$$

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 \quad 4-53$$

$$v = \phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 + \phi_3 v_3 \quad 4-54$$

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 \quad 4-55$$

$$y = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 \quad 4-56$$

El Jacobiano de transformación queda definido por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{Det(J)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix} \quad 4-57$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{Det(J)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix} \quad 4-58$$

Utilizando la ley de Hooke para problemas bidimensionales, poseemos la relación.

Remplazando las ecuaciones 4-57 y 4-58.

$$e = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial s} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Expresando en forma matricial las ecuaciones 4-55 y 4-56.

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial s} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix}$$

Utilizando las expresiones 4-53, 4-54, 4-55, 4-56. Obtenemos la matriz  $B$

$$B = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & -y_{13} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & x_{13} & 0 & x_{12} \\ -x_{23} & y_{23} & x_{13} & -y_{13} & x_{12} & y_{12} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez para elemento finito triangular es:

$$k_e = tA_e B^T D B$$

Para el caso bidimensional la matriz  $D$  está dada por la relación

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Para el problema termomecánico, se debe encontrar la carga de temperatura que está dada por la expresión.

$$\Phi = tA_e B^T D \varepsilon' \quad 4-59$$

$$\varepsilon' = (1+\nu) \begin{bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^e = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4 \quad \Phi_5 \quad \Phi_6]^T$$

La forma matricial y compacta es igual a las ecuaciones 4-50 y 4-51 respectivamente.

Para el cálculo de los esfuerzos en cada elemento utilizamos la relación 4-51.

$$\sigma = D(Bu - \varepsilon') \quad 4-60$$

## CAPITULO 5.

### VALIDACIÓN DE RESULTADOS

#### 5.1. EJEMPLO UNIDIMENSIONAL

Consideramos una varilla de aluminio de longitud  $L=590$  mm y diámetro 6,45 mm, con los extremos expuestos al medio ambiente, como se observa en la figura 5.1. La carga térmica va estar proporcionada por vapor de agua, que circulara dentro de un recipiente cilíndrico, que cubre a la varilla. Determinar los esfuerzos inducidos por la acción de los resortes de  $146 \frac{KN}{m}$  y  $63 \frac{KN}{m}$ , ubicado en el extremo de la varilla. En los anexos se tiene todos los detalles de la máquina para validar los esfuerzos térmicos.

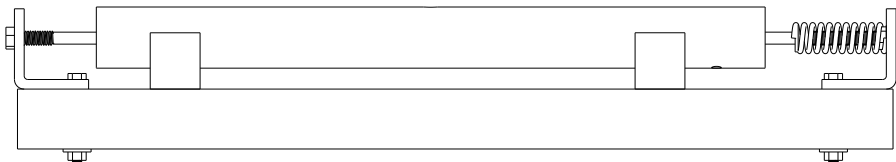


Figura 5-1 Máquina para validar los resultados térmicos

#### RESOLUCION

Se empleara el método de los elementos finitos, dividiendo la longitud de la barra en 14 y 20 elementos de la misma longitud

### Datos

$$T1_{ambiente} = 20,46 \text{ } ^\circ C$$

$$T2_{ambiente} = 20 \text{ } ^\circ C$$

$$L_{inicial} = 59 \text{ mm}$$

$$\alpha = 22.4 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ C}$$

$$K1_{resorte} = 63 \times 10^3 \frac{N}{m}$$

$$K2_{resorte} = 146 \times 10^3 \frac{N}{m}$$

### Solución:

#### Suposición

Tomando como referencia la temperatura a la que el agua hierve en Sangolquí (2550 m), Podemos facilitar las condiciones de frontera en el problema térmico creyendo que el flujo de calor va ser  $Q = 560 \text{ W}$  y el coeficiente de convección es de  $h = 37 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$ , también supondremos que una región específica de la barra va estar sometida a una  $T=91.33$ .

#### 5.1.1. SOLUCIÓN MEDIANTE PRUEBA EXPERIMENTAL Y SIMULACIÓN NUMÉRICA

Para tomar las mediciones se utilizaron los siguientes equipos

Equipo	Marca	Apreciación
Comparador de reloj	Mitutoyo	0.01 mm
Termocupla	Fluke	0.1 °C
Flexo metro	Stanley	1 mm

Tabla 5-1 Equipo utilizado

## Resorte N.- 1

### Distribución de Temperaturas

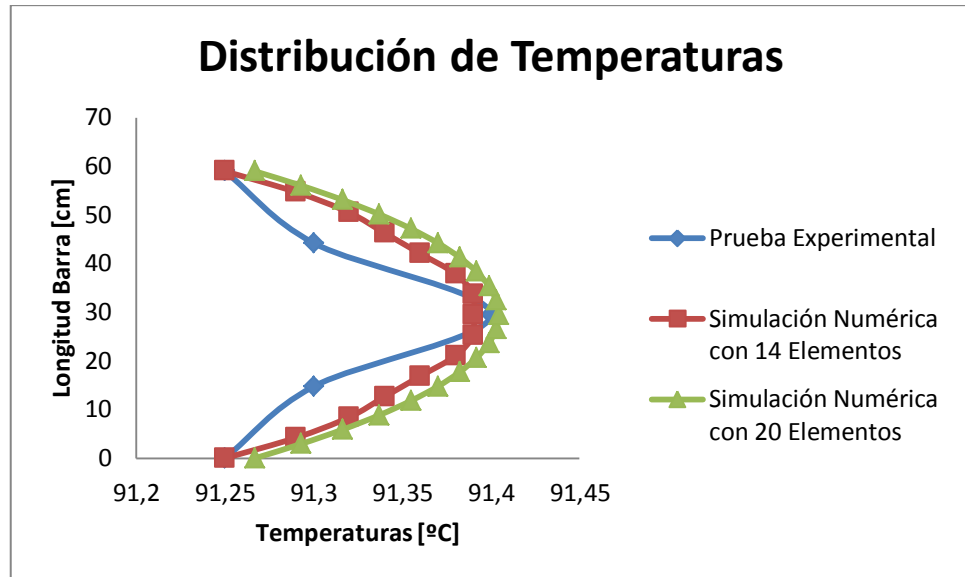


Figura 5-2 Temperaturas de barra unidimensional con resorte N.-1

### Deformación de la varilla

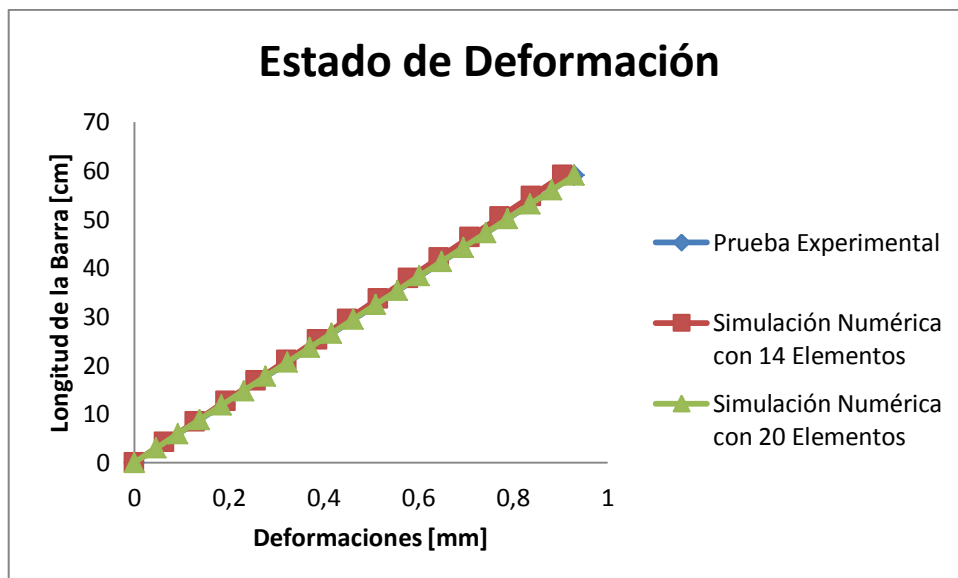


Figura 5-3 Deformaciones de barra unidimensional con resorte N.-1

## Relación esfuerzo deformación der resorte N.-1

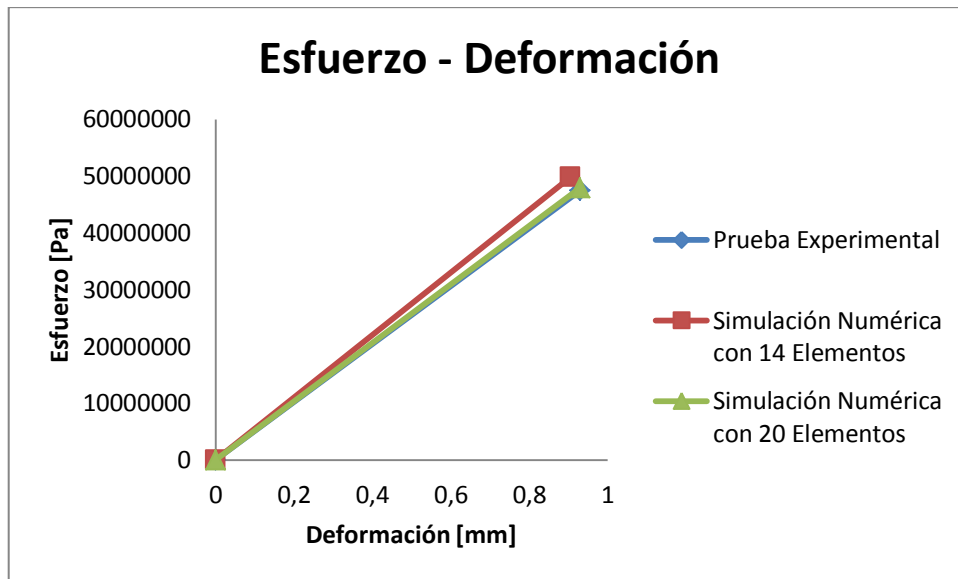


Figura 5-4 Comparación de Esfuerzos Térmicos resorte N.-1

### Calculo de Esfuerzo Termoelástico

Prueba Experimental:

Deformación registrada  $\varepsilon = 0.93$  [mm]

$$\sigma'_x = E(\varepsilon - \alpha\Delta T)$$

$$\sigma'_x = -4.75 \times 10^7$$

Simulación Numérica con 14 Elementos:

$$\sigma'_x = -4.9786 \times 10^7$$

Simulación Numérica con 20 Elementos:

$$\sigma'_x = -4.7948 \times 10^7$$



## Análisis de resultados

Calculo de error obtenido en la simulación numérica con 14 elementos

$$\varepsilon = \left| \frac{-4.75 \times 10^7 + 4.9786 \times 10^7}{-4.75 \times 10^7} \right| 100\%$$

$$\varepsilon = 4.81\%$$

Calculo de error obtenido en la simulación numérica con 20 elementos

$$\varepsilon = \left| \frac{-4.75 \times 10^7 + 4.7948 \times 10^7}{-4.75 \times 10^7} \right| 100\%$$

$$\varepsilon = 0.94\%$$

## Resorte N.- 2

### Distribución de Temperaturas

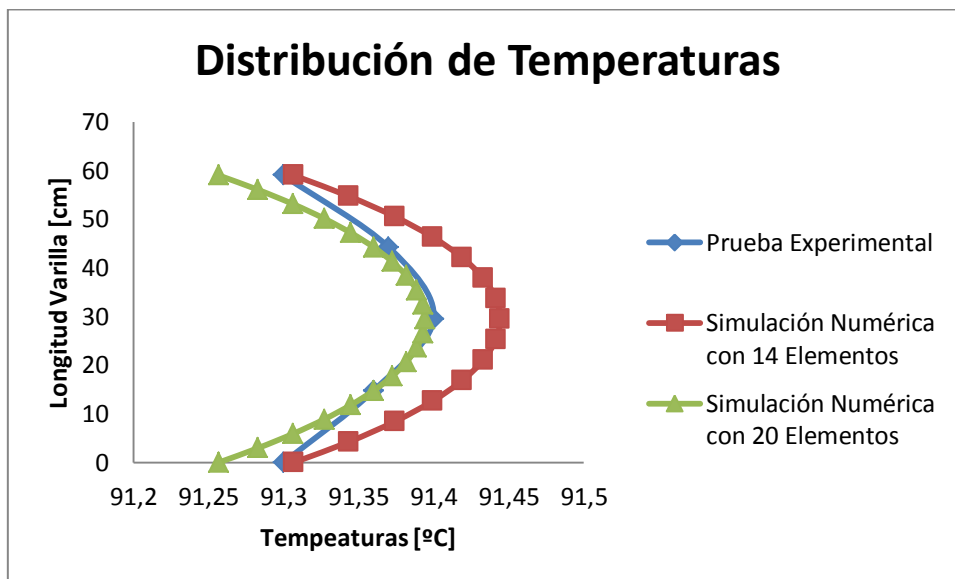


Figura 5-5 Temperaturas de barra unidimensional con resorte N.-2

## Deformación de la varilla

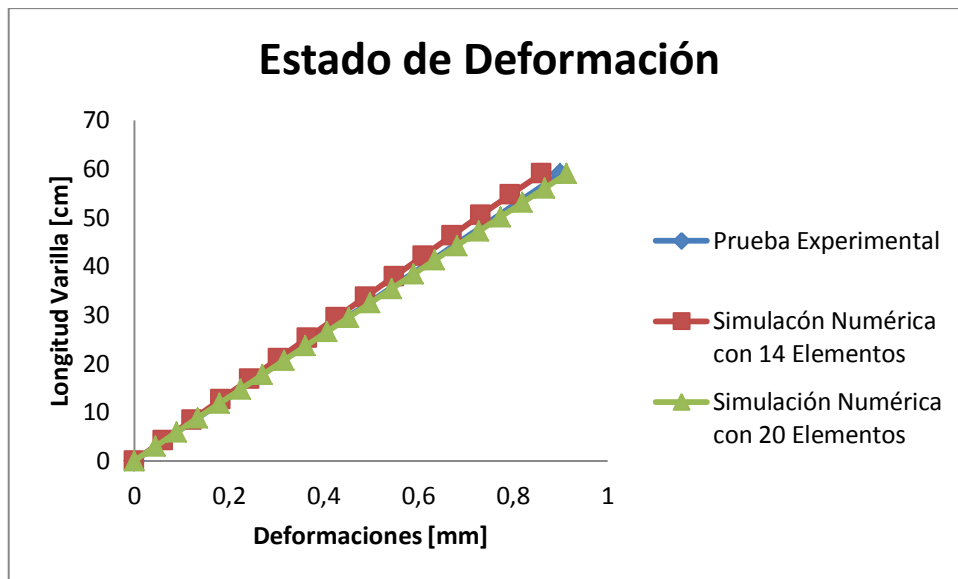


Figura 5-6 Deformaciones de barra unidimensional con resorte N.-2

## Relación esfuerzo deformación del resorte N.-2

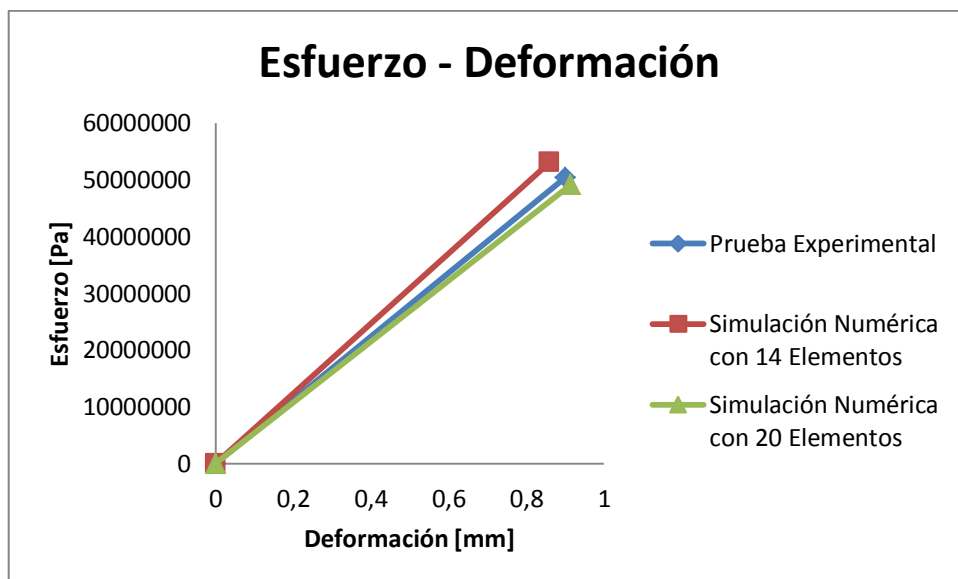


Figura 5-7 Comparación de Esfuerzos Térmicos resorte N.-2

## Calculo de Esfuerzo Termoelástico

Prueba Experimental:

Deformación registrada  $\varepsilon = 0.90$  [mm]

$$\sigma'_x = E(\varepsilon - \alpha\Delta T)$$

$$\sigma'_x = -5.035x10^7$$

Simulación Numérica con 14 Elementos:

$$\sigma'_x = -5.3051x10^7$$

Simulación Numérica con 20 Elementos:

$$\sigma'_x = -4.9099x10^7$$

### **Análisis de resultados**

Calculo de error obtenido en la simulación numérica con 14 elementos

$$\varepsilon = \left| \frac{-5.035x10^7 + 5.3051x10^7}{-5.035x10^7} \right| 100\%$$
$$\varepsilon = 5.36\%$$

Calculo de error obtenido en la simulación numérica con 20 elementos

$$\varepsilon = \left| \frac{-5.035x10^7 + 4.9099x10^7}{-5.035x10^7} \right| 100\%$$
$$\varepsilon = 2.48\%$$

## **5.2. EJEMPLO BIDIMENSIONAL**

Una chapa de aluminio, esta empotrada en ambos extremos, con 4 pernos en cada lado, como se muestra en la figura 5-14. La carga térmica va estar proporcionada por vapor de agua. El empotramiento de la placa se realizara en material LAMIGAMID 100 (DURALON). Determinar los esfuerzos térmicos que se generan en la placa.

Solución:

En la figura 5-12, se observa las medidas en milímetros de la chapa de aluminio con las siguientes propiedades térmicas y mecánicas:

$$K = 200 \frac{W}{m C^{\circ}}$$

$$E = 72 GPa$$

$$\nu = 0.33$$

$$\alpha = 24 \times 10^{-6} \frac{1}{C^{\circ}}$$

### Suposición

Para facilitar las condiciones de frontera en el problema térmico supondremos que el flujo de calor va ser constante  $Q = 560 W$  y el coeficiente de convección es de  $h = 37 \frac{W}{m^2 C^{\circ}}$ , también supondremos que una región específica de la chapa va estar sometida a una  $T=91.33$ . En tanto que para la parte mecánica, no se tomará en cuenta el LAMIGAMID 100, porque al tratarse de un polímero este no tiene un comportamiento lineal, como el que se está simulando

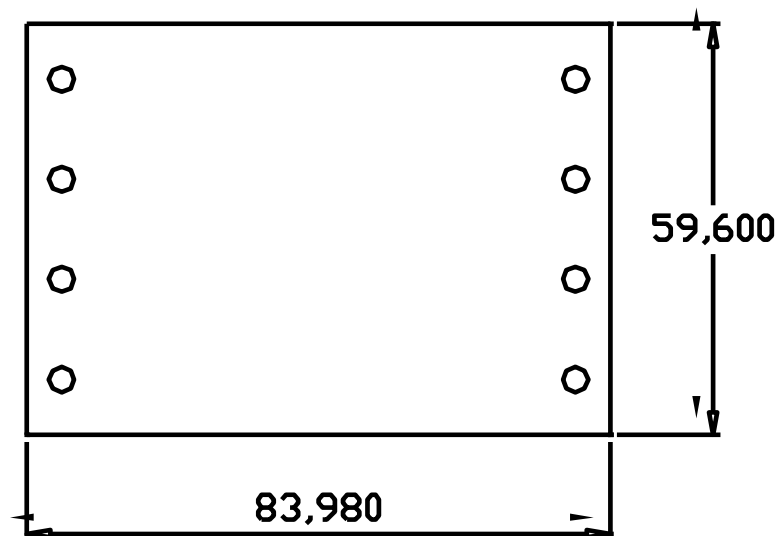
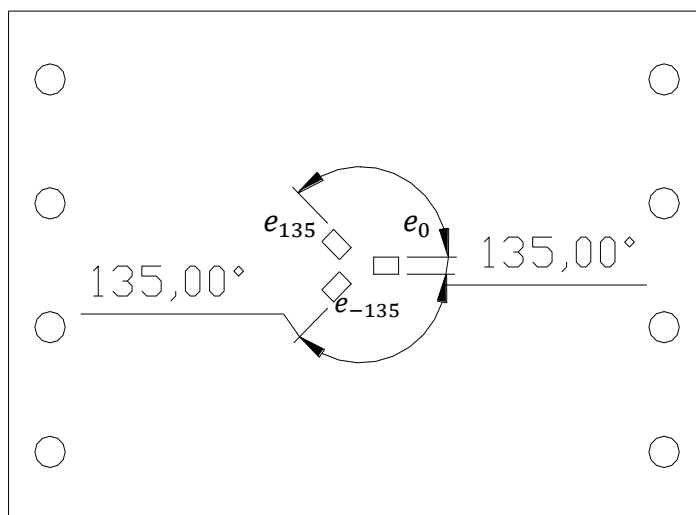


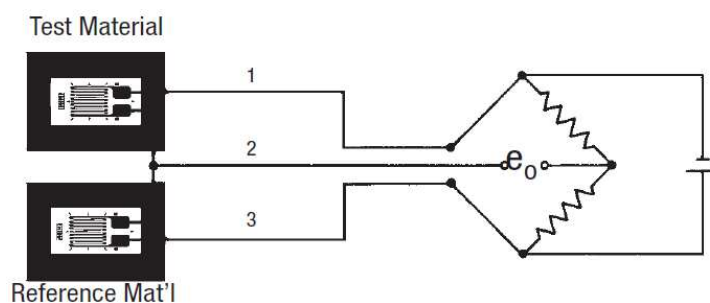
Figura 5-8 Chapa de Aluminio

Para poder registrar los desplazamientos en la chapa de aluminio, fue necesario instalar una roseta de deformación en el centro de la chapa. La instalación de los Strain Gages y la descripción del equipo utilizado para la medición se pueden ver en el anexo C



**Figura 5-9 Ubicación Strain Gages**

Para una obtención de datos sin errores causados por la propia dilatación térmica de la roseta, es obligatorio realizar una conexión a medio puente con otra roseta que se encuentra pegada en una chapa del mismo material, a la que llamaremos referencia y estará expuesta a temperatura ambiente.



**Figura 5-10 Conexión a medio puente<sup>5</sup>**

Para las mediciones se utilizó el siguiente equipo:

<b>Equipo</b>	<b>Marca</b>	<b>Apreciación</b>
DMD-22	Omega	0.000001
Termocupla	Fluke	0.1 °C

**Tabla 5-2 Equipo utilizado**

<sup>5</sup> Figura tomada del artículo: MEASUREMENT OF THERMAL EXPANSION COEFFICIENT USING STRAIN GAGES

### 5.2.1. ANÁLISIS DE DILATACIÓN LIBRE

Este análisis se realiza para verificar el funcionamiento correcto de los Strain Gages, esto nos da una idea del comportamiento que tendrán al ser expuestos a un gradiente de temperatura.

#### Prueba experimental

To	20	24,2	24	24,3	24,2	23,34
Medidas	1	2	3	4	5	Promedio
$e_0$	0,000144	0,000158	0,000163	0,00017	0,000169	0,0001608
$e_{135}$	0,000138	0,00014	0,000152	0,000163	0,00016	0,0001506
$e_{-135}$	0,000142	0,000155	0,000168	0,000169	0,000165	0,0001598
Tf	29,1	32,4	32,1	33	32,9	31,9

Tabla 5-3 Datos experimentales dilatación libre

$$e_0 = 160.8 \times 10^{-6}$$

$$e_{135} = 150.6 \times 10^{-6}$$

$$e_{225} = 159.8 \times 10^{-6}$$

Aplicando la matriz de giro

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160.8 \times 10^{-6} \\ 149.6 \times 10^{-6} \\ 92 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \frac{mm}{mm}$$

#### Prueba analítica

$$\Delta T = (31.9 - 23.5)$$

Aplicando la ecuación 4-30 tenemos

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 185.6 \times 10^{-6} \\ 185.6 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{mm}{mm}$$

#### Calculo de error

$$Er = \left| \frac{185.6 - 160.8}{185.6} \right| 100\%$$

$$Er = 13.3\%$$

## Simulación numérica

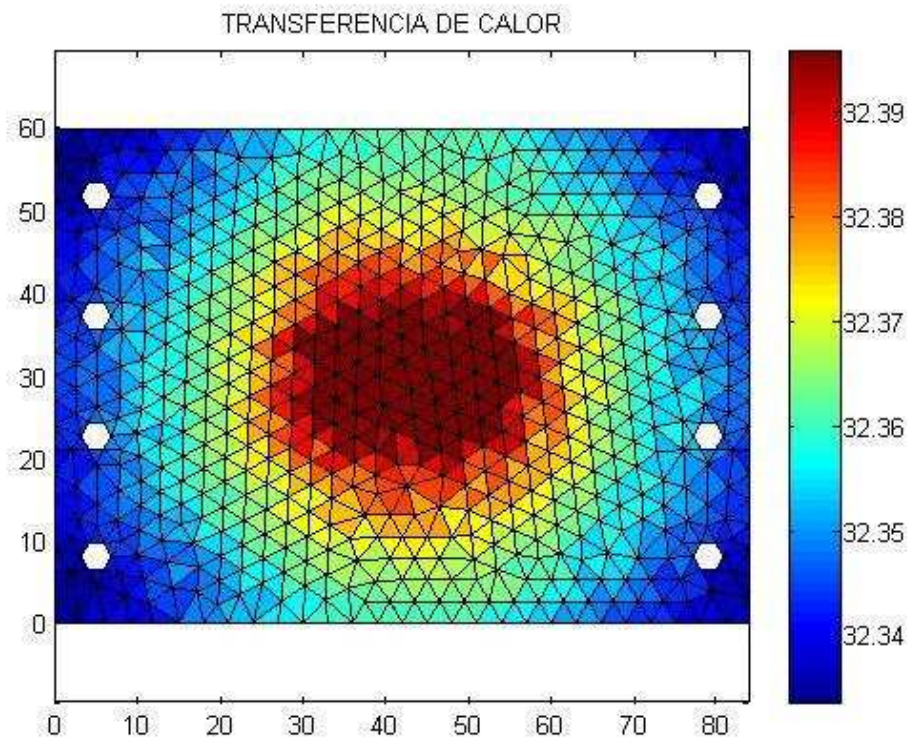


Figura 5-11 Fuente de calor situada en el centro para dilatación libre

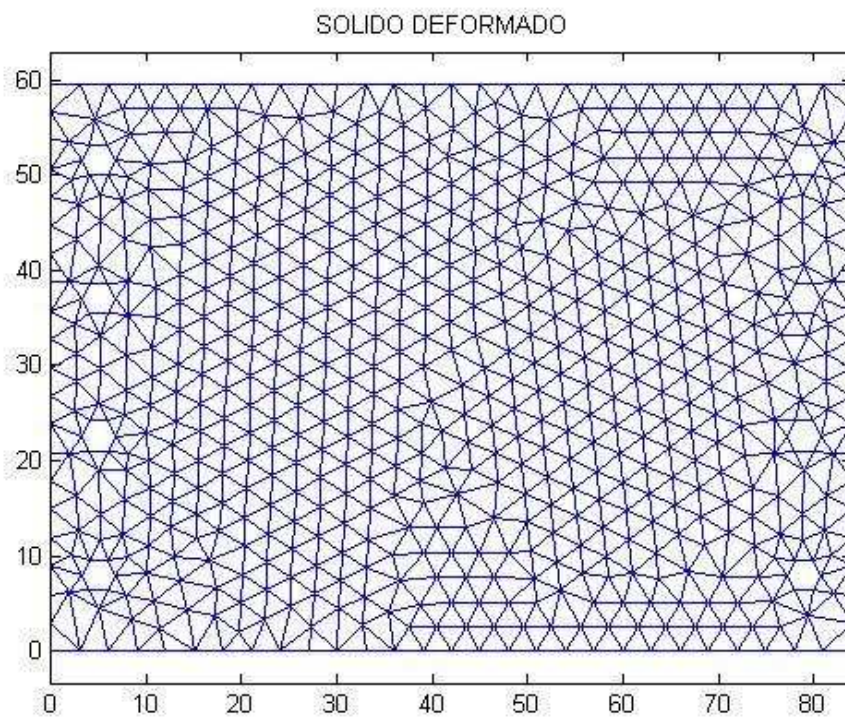


Figura 5-12 Dilatación Libre

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 162.8 \times 10^{-6} \\ 182.3 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{mm}{mm}$$

### Calculo de error

$$Er = \left| \frac{162.8 - 160.8}{162.8} \right| 100\%$$

$$Er = 1.22\%$$

### 5.2.2. SOLUCIÓN MEDIANTE PRUEBA DE EXPERIMENTAL

Para el cálculo de las tensiones térmicas, se recurre a medir con una roseta de deformación que está ubicada en la mitad de la chapa, de la que se obtiene los siguientes datos.

Medidas	1	2	3	4	5	Promedio
$e_0$	0,000357	0,000333	0,000342	0,000351	0,000353	0,0003472
$e_{135}$	0,000373	0,000365	0,000370	0,000372	0,000368	0,0003696
$e_{-135}$	0,000331	0,000350	0,000343	0,000347	0,000350	0,0003442

Tabla 5-4 Datos experimentales de esfuerzos térmicos

$$e_0 = -347.2 \times 10^{-6}$$

$$e_{135} = -369.6 \times 10^{-6}$$

$$e_{-135} = -344.2 \times 10^{-6}$$

Las deformaciones se calculan mediante la fórmula:

$$e_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sen 2\theta \quad 5-1$$

Si la ecuación 5-1 le aplicamos para el resto de direcciones llegamos a obtener la matriz de giro



$$\begin{bmatrix} e_0 \\ e_{135} \\ e_{-135} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \cos^2\beta & \sin^2\beta & \frac{\sin 2\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Finalmente las ecuaciones térmicas se calculan con la Ley de Hooke

Partiendo de la ecuación 4-34, modificándole para un estado de tensión térmica bidimensional tenemos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x' - \nu\sigma_y'] + \alpha\Delta T \quad 5-2$$

Sumando y restando  $\mp \sigma_x'$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_x' - \nu(\sigma_y' + \sigma_x')] + \alpha\Delta T \quad 5-3$$

Donde  $\sigma_y' + \sigma_x' = \Theta$ , aplicando el mismo procedimiento para  $\varepsilon_y$  y sumando a  $\varepsilon_x$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\Theta - \nu\Theta] + 2\alpha\Delta \quad 5-4$$

Donde  $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \phi$

$$\Theta = \frac{E(\phi - 2\alpha\Delta T)}{(1 - \nu)} \quad 5-5$$

Remplazando 5-5 en 5-3

$$\sigma_x' = \frac{E}{(1 - \nu^2)} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] - \frac{E\alpha\Delta T}{(1 - \nu)} \quad 5-6$$

Del mismo modo se obtienen las deformaciones para las otras direcciones. Para conocer los esfuerzos térmicos principales aplicamos la ecuación;

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x' + \sigma_y'}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2}\right)^2 + \tau_{xy}'^2} \quad 5-7$$

Aplicando la matriz de giro

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00034 \\ -0.00036 \\ 0.0000025 \end{bmatrix} \frac{mm}{mm}$$

Como se puede observar la deformación unitaria  $\gamma_{xy} \approx 0$ , esto se cumple con lo anterior dicho, que no existe tensión por cortante en esfuerzos térmicos, por tal razón no va ser tomado en cuenta.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0805 \times 10^8 \\ -2.0910 \times 10^8 \end{bmatrix} Pa$$

Empleando la ecuación 5-7

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0577 \times 10^8 \\ -2.1137 \times 10^8 \end{bmatrix} Pa$$

### 5.2.3. SOLUCIÓN MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

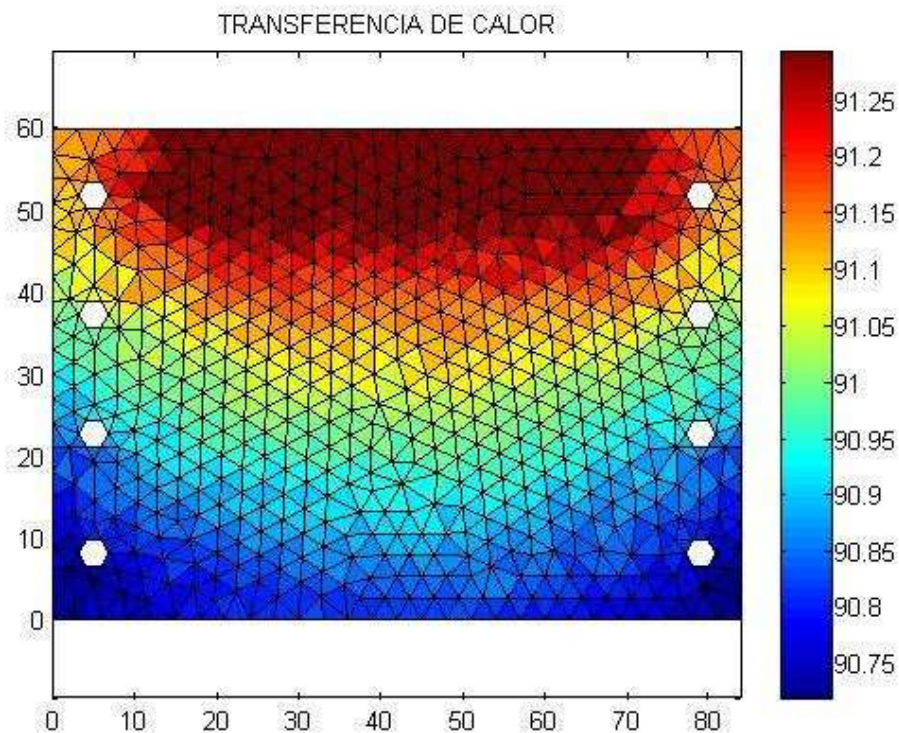
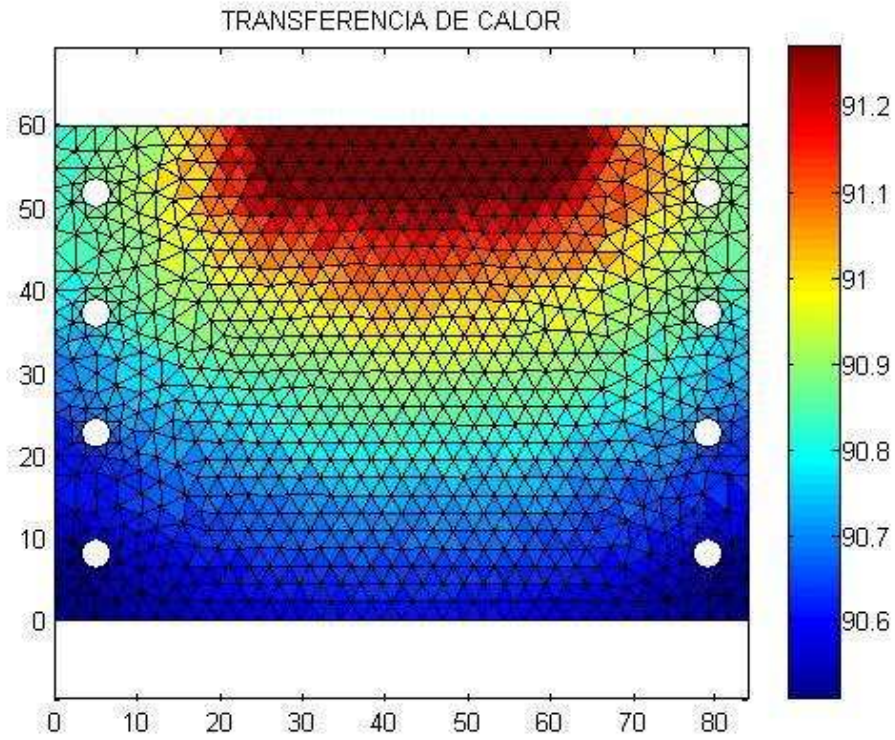
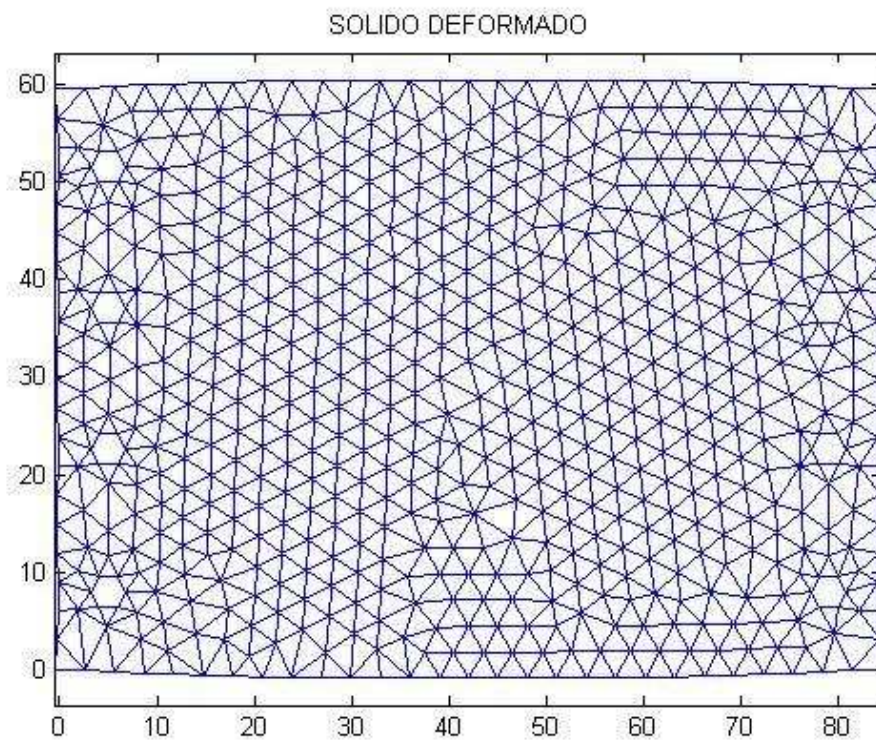


Figura 5-13 Simulación de la transferencia de calor empleando 1242 elementos

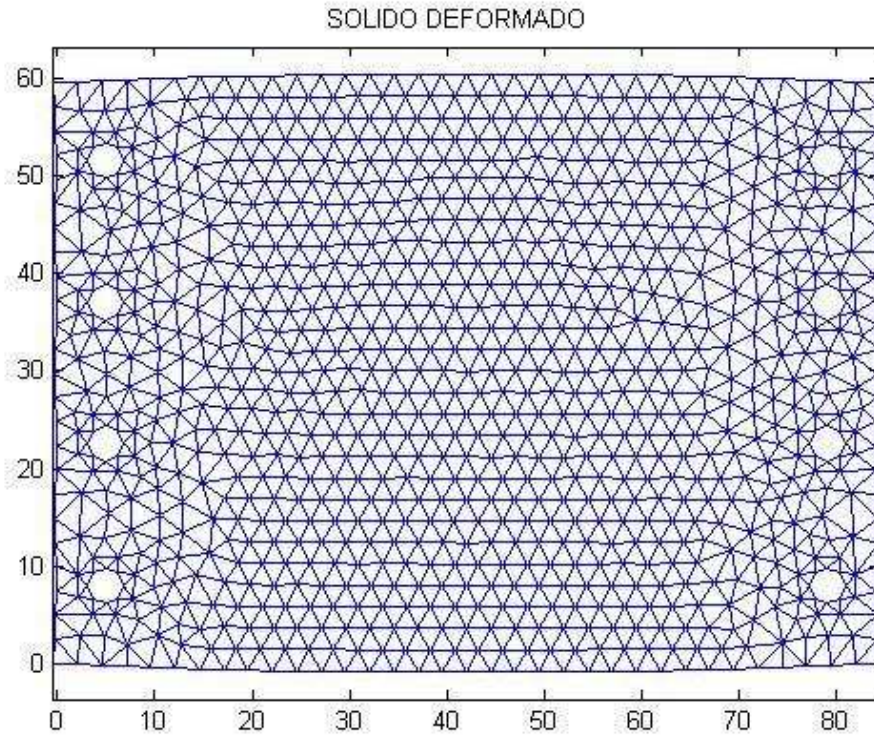


**Figura 5-14 Simulación de la transferencia de calor empleando 1848 elementos**

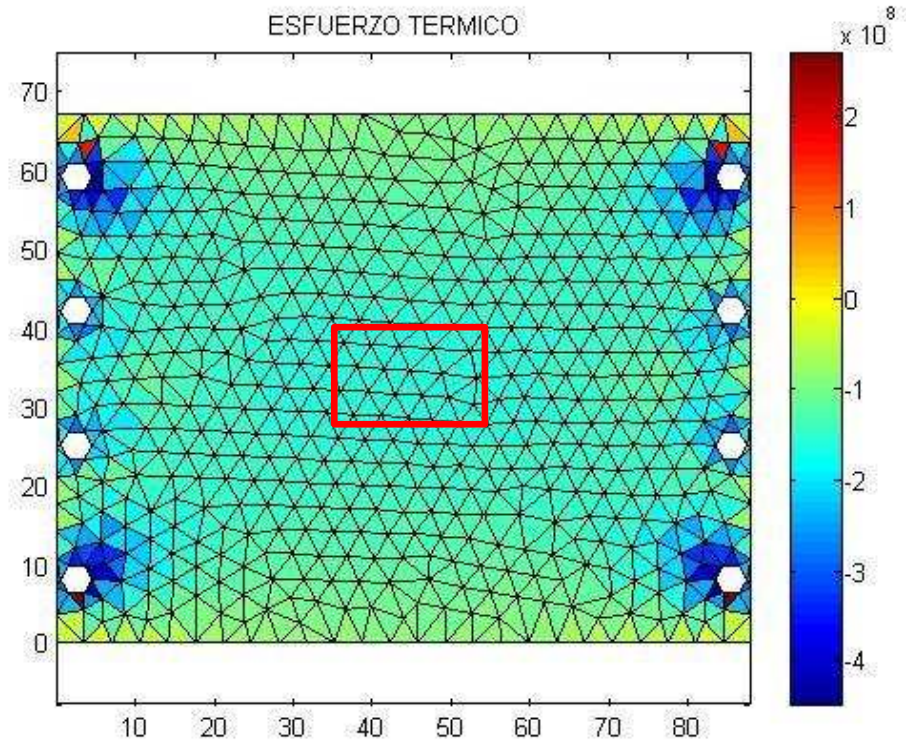


**Figura 5-15 Solido deformado empleando 1242 elementos**

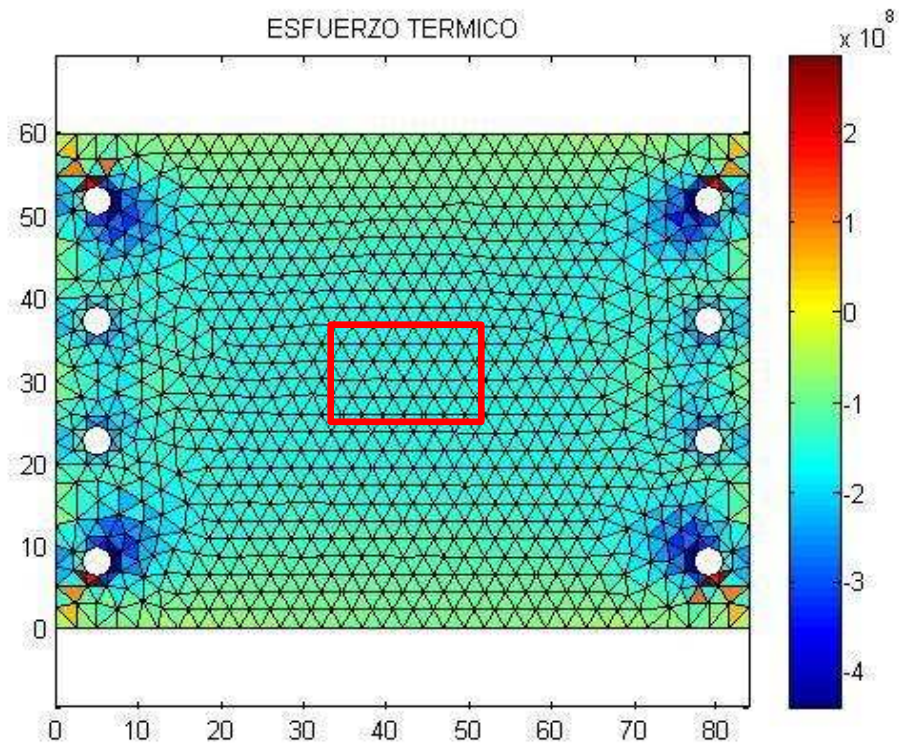




**Figura 5-16 Solido deformado empleando 1848 elementos**



**Figura 5-17 Simulación Numérica Esfuerzos Térmicos empleando 1242**



**Figura 5-18 Simulación Numérica Esfuerzos Térmicos empleando 1848**

El recuadro rojo representa la ubicación de la roseta de deformación. Tomando como referencia todos los elementos que se encuentran dentro del recuadro, se observa que los mismos están dentro del orden de  $[1 \times 10^8 \text{ a } 2 \times 10^8] Pa$ .

Donde los esfuerzos térmicos obtenidos mediante simulación numérica con 1242 elementos son:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.8768 \times 10^8 \\ -2.2917 \times 10^8 \end{bmatrix} Pa$$

Los esfuerzos principales son:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.8765 \times 10^8 \\ -2.2917 \times 10^8 \end{bmatrix} Pa$$

De igual manera los esfuerzos térmicos obtenidos mediante simulación numérica con 1848 elementos son:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0392 \times 10^8 \\ -1.9649 \times 10^8 \end{bmatrix} Pa$$

Los esfuerzos principales son:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.9649 \times 10^8 \\ -2.0392 \times 10^8 \end{bmatrix} Pa$$

Calculo de error

$$Er = \left| \frac{-1.9649 \times 10^8 + 2.0577 \times 10^8}{-2.0577 \times 10^8} \right| 100\%$$

$$Er = 4.5\%$$

#### 5.2.4. RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN

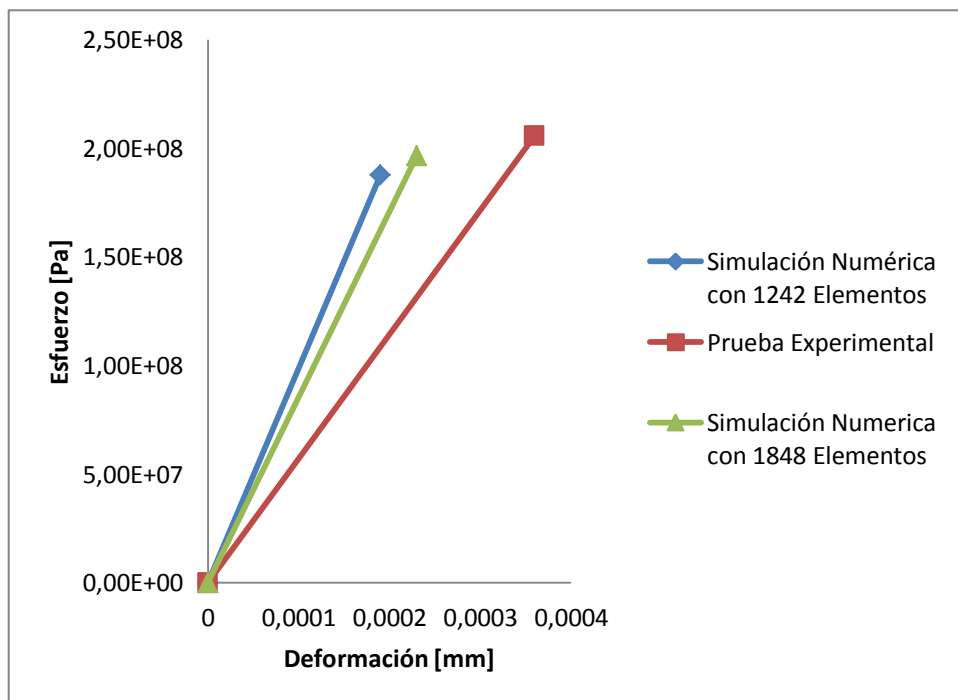


Figura 5-19 Comparación Esfuerzos Térmicos

### 5.3. ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS EXPERIMENTALES

	DEFORMACIÓN [mm]			TENSIÓN TÉRMICA [Mpa]		
	Prueba Experi	Simulación Numé	Error %	Prueba Experi	Simulación Numé	Error %
<b>Prueba unidimensional</b>						
Resorte 1 14_E	0,93	0,9051	2,68	-47,45	-49,78	4,91
Resorte 1 20_E		0,9304	0,04		-47,94	1,03
Resorte 2 14_E	0,9	0,8603	4,41	-50,35	-53,05	5,36
Resorte 2 20_E		0,9144	1,60		-49,1	2,48

Tabla 5-5 Comparación de Resultados Prueba Unidimensional













	DEFORMACIÓN [mm]			TENSIÓN TÉRMICA [Mpa]				
	Prueba Experi	Simulación N	Error %	Prueba Experi	Simulación N	Error %		
<b>Prueba bidimensional</b>								
Dilatación libre		0,00016	0,000162	1,25		0	0	0
		0,00014	0,000182	30		0	0	0
Emprotramiento 1242 Elementos		-0,00034	-0,00021	38,24		-205,77	-187,68	8,79
		-0,00036	-0,00025	30,56		-211,37	-229,17	8,42
Emprotramiento 1848 Elementos		-0,00034	-0,00023	32,35		-205,77	-196,49	4,51
		-0,00036	-0,00026	27,78		-211,37	-203,92	3,52

Tabla 5-6 Comparación de Resultados Prueba Bidimensional

Comparando los errores obtenidos de las pruebas experimentales frente a la simulación numérica, se observa una tendencia progresiva del error en las pruebas de validación de esfuerzos térmicos. En comparación de la prueba de dilatación libre donde el error es relativamente bajo.

La generación de este error se debe a que en el cálculo de los esfuerzos térmicos intervienen más variables tanto numéricas como físicas. Las variables numéricas generan un error que se origina en el cálculo computacional debido a que la computadora emplea un número determinado de cifras significativas. En tanto que las variables físicas, se originan en el análisis determinista que está presente en los fenómenos físicos representados, es decir, no tenemos en cuenta la incertidumbre que se genera al insertar componentes que pueden alterar las mediciones, como; comparador de reloj, roseta de deformación. Para la instalación de estos mecanismos de medición intervienen unidades que distorsionan las medidas reales, en el caso del comparador de reloj se utilizó una platina de acero como referencia para la medición de la deformación unidimensional, en la roseta de deformación para su instalación se empleó un



pegamento que sea resistente a la temperatura, este pegamento puede estar causando dos efectos; el primero puede ser que actúa como aislante térmico que no permite la transmisión total de calor y finalmente puede estar actuando como una fuerza que impide la deformación de la chapa de aluminio en la zona que está aplicado, por esta razón la roseta no puede censar los valores reales. Si tenemos en cuenta que las deformaciones están en el orden de  $10^{-1}mm$  en el caso unidimensional y de  $10^{-3}mm$  en el caso bidimensional, cualquier variable no tomada en cuenta perturbará el sistema analizado lo que generaría un error.



## **CAPITULO 6.**

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

#### **6.1. CONCLUSIONES**

1. A lo largo de este trabajo, se fueron presentando los conceptos necesarios para la descripción completa del Análisis desacoplado de las tensiones térmicas dentro del rango elástico en sólidos con comportamiento lineal e isotrópico, basándose en las leyes de la termodinámica y en los principios de la elasticidad. Estos conceptos fueron utilizados para el desarrollo de un código computacional, fueron propuestos diversos ejemplos para comprobar la precisión y validando la formulación tanto matemática como computacional.
2. En este trabajo se realizó, primero la caracterización experimental del comportamiento mecánico, a través de los ensayos propuestos en ALUMINIO. En la obtención de los datos se observó que al aumentar el número de elementos los errores se van reduciendo, esto se debe básicamente que la interpolación que realizamos se va ajustando de mayor manera a la curva real ver figuras 5-7 y 5-19. En general podemos decir que las predicciones dadas por la simulación numérica reprodujeron de manera satisfactoria el comportamiento del material.

3. La distribución de temperaturas y de esfuerzos térmicos de un sólido está gobernada por ecuaciones diferenciales que se pueden resolver utilizando los métodos clásicos o mediante una simulación numérica. Para la simulación numérica, es necesario tener en cuenta todas las condiciones de borde que están presentes en el sólido estudiado, así podemos discretizar al continuo acorde a la realidad que está expuesto y simular su comportamiento. Este fue el problema principal que surgió en este trabajo, puesto que no existe en el laboratorio un equipo destinado a la medición de Esfuerzos Térmicos, por tal razón fue necesario construir uno y tratar de establecer las condiciones de borde lo más cercanas a la realidad.
  
4. Los errores (ver tabla 5-5 y 5-6) más notables son los que se produjeron en las mediciones de las tensiones térmicas que son: 2.48% en la prueba unidimensional y 4.51% en la prueba bidimensional. Esto se debe a la dificultad presente en la convección, hace que sea imposible tener una simulación completa de este proceso de transferencia de calor, por esta razón solo nos centramos en conocer la transferencia de calor desde una superficie y no fue de nuestro interés la variación de flujo de calor, esto nos conlleva a utilizar formulas empíricas para calcular el coeficiente de convección, también teniendo en cuenta que el empotramiento de la prueba bidimensional se realizó sobre LAMIGAMID 100 que es un material con comportamiento no lineal y por esta razón no fue tomado en cuenta en la simulación numérica.
  
5. Los errores se generan, porque al influir mecanismos externos estos distorsionen las medidas reales, en el caso del comparador de reloj se utilizó una platina de acero como referencia para la medición de la deformación unidimensional, en la roseta de deformación para su instalación se empleó un pegamento que sea resistente a la temperatura, este pegamento puede estar causando dos efectos; el primero puede ser que actúa como aislante térmico que no permite la

transferencia total de calor y finalmente puede estar actuando como una fuerza que impide la deformación de la chapa de aluminio en la zona que se aplicó, por esta razón la roseta no puede censar los valores reales. Estos procedimientos de medición nos arrastran un error en los cálculos, al que debemos sumarlo el error que genera el cálculo computacional debido a que la computadora ocupa un número determinado de cifras significativas.

## **6.2. RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS**

1. Para próximos trabajos se recomienda la utilización de elementos bidimensionales más complejos que puedan registrar la convección en una de sus caras y la formulación del borde convectivo teniendo en cuenta la variación del flujo de calor, de esta manera se tendrá una mejor aproximación al problema real.
2. También se puede realizar una extensión a la formulación no lineal, teniendo en cuenta la transferencia de calor por radiación térmica y aumentando la carga térmica que conlleve a la termoplasticidad.
3. A partir de eso tópicos de ingeniería más avanzados podrán ser estudiados problemas más complejos, como, generación de calor en materiales expuestos a fatiga.

## BIBLIOGRAFÍA

Mills A. F., Transferencia de Calor: 82-88. España: Irwin.

Çengel Yunus. Transferencia de calor y masa. México: McGraw-Hill.

Ortiz Berrocal Luis. Elasticidad: 162-169. España: McGraw-Hill.

Ortiz Berrocal Luis. Resistencia de materiales. España: McGraw-Hill.

Lienhard IV J. & Lienhard V J. A Heat Transfer Textbook. USA: Phlogiston Press.

Chandrupatla T. & Belegundu A., Introducción al Método de Elemento Finito en Ingeniería. México: Pearson.

Rao Singiresu. The Finite Element Method in Engineering. USA: Elsevier

Zienkiewicz, O.C, El Método de los Elementos Finitos, Reverté, Madrid 1980.

Nakamura, Shoichiro, Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab, Prentice-Hall, primera edición, México, 1996.

Chapra Steven & Canale Raymond, Métodos Numéricos Para ingenieros. México: McGraw-Hill.

Thomas Hughes, The finite element method. USA: Dover Publications.

Enrico Fermi, Thermodynamics. USA: Dover Publications.

Olivella O. Xavier & Agelet de Saracíba C., Mecánica de los medios continuos para ingenieros. España: UPC.

