



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y
MECÁNICA**

CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERO MECÁNICO**

AUTOR: DAVID ALEJANDRO NARVÁEZ MEJÍA

**TEMA: “APLICACIÓN DE LA DINÁMICA DE LOS
FLUIDOS COMPUTACIONALES A FLUIDOS
NEWTONIANOS DE VISCOSIDAD CONSTANTE,
INCOMPRESIBLES EN RÉGIMEN LAMINAR”**

DIRECTOR: ING. EDGARDO FERNÁNDEZ

CODIRECTOR: DIRECTOR: MARCO FLORES PhD

SANGOLQUÍ, 2013-DICIEMBRE

CERTIFICACIÓN DE LA ELABORACIÓN DEL PROYECTO

El proyecto “**APLICACIÓN DE LA DINÁMICA DE LOS FLUIDOS COMPUTACIONALES A FLUIDOS NEWTONIANOS DE VISCOSIDAD CONSTANTE, INCOMPRESIBLES EN RÉGIMEN LAMINAR**”, fue realizado en su totalidad por David Alejandro Narváez Mejía, como requerimiento parcial para la obtención del título de Ingeniero Mecánico.

Ing. Edgardo Fernández
DIRECTOR

Marco Flores Ph.D
CODIRECTOR

LEGALIZACIÓN DEL PROYECTO

**“APLICACIÓN DE LA DINÁMICA DE LOS FLUIDOS
COMPUTACIONALES A FLUIDOS NEWTONIANOS DE VISCOSIDAD
CONSTANTE, INCOMPRESIBLES EN RÉGIMEN LAMINAR”**

ELABORADO POR:

Alejandro Narváez

CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

Ing. Ángelo Villavicencio
DIRECTOR DE CARRERA

AUTORIZACIÓN

Yo, DAVID ALEJANDRO NARVÁEZ MEJÍA

Autorizó a la UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE la publicación, en la biblioteca virtual de la Institución del proyecto de grado titulado **“APLICACIÓN DE LA DINÁMICA DE LOS FLUIDOS COMPUTACIONALES A FLUIDOS NEWTONIANOS DE VISCOSIDAD CONSTANTE, INCOMPRESIBLES EN RÉGIMEN LAMINAR”**, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi exclusiva responsabilidad y autoría.

Sangolquí, 12 de Diciembre de 2013.

Alejandro Narváez

DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD

Yo, **DAVID ALEJANDRO NARVÁEZ MEJÍA**

DECLARO QUE:

El proyecto de grado titulado “**APLICACIÓN DE LA DINÁMICA DE LOS FLUIDOS COMPUTACIONALES A FLUIDOS NEWTONIANOS DE VISCOSIDAD CONSTANTE, INCOMPRESIBLES EN RÉGIMEN LAMINAR**”, ha sido desarrollado con base a una investigación exhaustiva, respetando derechos intelectuales de terceros, conforme las citas que constan al pie de las páginas correspondientes, cuyas fuentes se incorporan en la bibliografía. Consecuentemente este trabajo es completamente de mi autoría.

En virtud de esta declaración me responsabilizo del contenido total, veracidad y alcance científico del presente proyecto de grado.

Alejandro Narváez

DEDICATORIA

A Mariana,

Quien me permitió crecer mirando
al mundo desde mi ventana.

A Nilo,

Quien me heredo la necesidad.

AGRADECIMIENTOS

Un infinito agradecimiento a mi director de tesis Edgardo Fernández y a mi codirector Marco Flores por su paciencia y guía en el desarrollo del presente trabajo.

A cada uno de los profesores que han sabido impartir los conocimientos en mi formación académica.

Alejandro Narvéez

INDICE DE CONTENIDOS

CERTIFICACIÓN DE LA ELABORACIÓN DEL PROYECTO	i
LEGALIZACIÓN DEL PROYECTO	ii
AUTORIZACIÓN	iii
DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD	iv
DEDICATORIA	v
AGRADECIMIENTO	vi
INDICE DE CONTENIDOS	vii
INDICE DE FIGURAS	xi
INDICE DE ANEXOS	xiii
SIMBOLOGÍA	xiv
RESUMEN EJECUTIVO	xv
CAPÍTULO 1. GENERALIDADES	1
1.1 INTRODUCCION	1
1.2 ANTECEDENTES	3
1.3 JUSTIFICACION E IMPORTANCIA	4
1.4 OBJETIVOS	5
1.4.1 GENERAL	5
1.4.2 ESPECIFICOS	5
CAPÍTULO 2. MECÁNICA DE FLUIDOS	6
2.1 ENFOQUES PARA LA DESCRIPCIÓN DE LOS MEDIOS CONTINUOS	8
2.2 LEYES DE CONSERVACION DE LA MECÁNICA DEL CONTINUO	9

2.2.1	ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD	9
2.2.2	CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO	11
2.3	FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS	13
2.3.1	DINÁMICA DE LA PARTÍCULA FLUIDA DESDE EL ENFOQUE EULERIANO	13
2.3.2	TIPOS DE FUERZAS QUE ACTUAN EN UNA PARTÍCULA FLUIDA	15
2.4	LEY DE VISCOSIDAD DE STOKES	18
2.5	ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DE FLUIDOS NEWTONIANOS, ISOTRÓPICOS E INCOMPRESIBLES	21
	CAPÍTULO 3. MÉTODOS DE LOS ELEMENTOS FINITOS	23
3.1	LOS FEM COMO UN SISTEMA MATEMÁTICO	25
3.2	PSEUDOCÓDIGO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS -MECANISMO MATEMÁTICO-	28
3.2.1	ESPACIOS DE FUNCIONES	30
3.2.2	MÉTODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS	31
3.2.3	TEOREMA DE GREEN	31
3.3	SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES E IRREDUCIBLES	32
3.3.1	FORMULACIÓN MIXTA	34
3.3.2	FUNCIONES DE FORMA DE LOS ELEMENTOS FINITOS TAYLOR - HOOD	35
3.4	TRANSFORMACIONES ISOPARAMÉTRICAS	37
3.5	CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA	38
3.6	MÉTODOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO	40

3.6.1 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN ESTADO ESTACIONARIO LINEALES	40
3.6.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN ESTADO ESTACIONARIO NO LINEALES	42
3.6.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN ESTADO TRANSITORIO	44
CAPÍTULO 4. DINÁMICA DE LOS FLUIDOS APLICANDO HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES	47
4.1 FORMULACIÓN FUERTE DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DE UN FLUIDO ISOTRÓPICO	48
4.2 FORMULACIÓN DÉBIL DE LA ECUACIONES DE NAVIER- STOKES	49
4.3 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER- STOKES	50
4.3.1 GENERACIÓN DE MATRICES BASE	51
4.3.2 TRANSFORMACIÓN ISOPARAMÉTRICAS	53
4.4 ENSAMBLE DE MATRICES BASE EN FUNCIÓN DE DOS ELEMENTOS FINITOS	56
CAPÍTULO 5. RESULTADOS NUMÉRICOS Y CASOS DE ESTUDIO	57
5.1 PROBLEMA DE BENCHMARK II: CAVIDAD CUADRADA CON FUERZAS DE CUERPO	58
5.1.1 RESULTADOS NUMÉRICOS BENCHMARK I	58
5.1.2 CURVAS COMPARATIVAS ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS ANALÍTICOS	59

5.2 PROBLEMA DE BENCHMARK II: CAVIDAD CUADRADA CON FUNCIONES DE FUERZAS DE CUERPO	61
5.2.1 RESULTADOS NUMÉRICOS BENCHMARK II	62
5.2.2 CURVAS COMPARATIVAS ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS ANALÍTICOS	63
5.3 PROBLEMA DE BENCHMARK III: CAVIDAD CUADRADA CON SENTIDOS DE FLUJO DIRECCIONADOS	65
5.3.1 RESULTADOS NUMÉRICOS BENCHMARK III	66
5.3.2 PERFIL DE VELOCIDADES BENCHMARK III	67
5.4 CASOS DE ESTUDIO MEDIANTE BasicCFD	69
5.5 TÚNEL DE VIENTO COMPUTACIONAL	69
5.5.1 RESULTADOS NUMÉRICOS CASO A	72
5.5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS CASO B	73
5.5.3 RESULTADOS NUMÉRICOS CASO C	74
5.5.4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	75
5.6 ESTUDIO AERODINÁMICO DE CAMIONETA	76
5.6.1 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	77
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	79
6.1 CONCLUSIONES	79
6.2 RECOMENDACIONES	80
BIBLIOGRAFÍA	81

INDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Volumen de control infinitesimal	10
Figura 2.2: Esfuerzos sobre el cubo infinitesimal	15
Figura 2.3: Esfuerzo vs tasa de deformación	19
Figura 3.1: Modelo matemático del perfil de aleta para intercambiadores de calor	25
Figura 3.2: Analogía entre sistema mecánico y matemático	26
Figura 3.3: Simulación del perfil de aleta	27
Figura 3.4: Diagrama de flujo del mecanismo matemático del FEM	28
Figura 3.5: Elemento finito triangular de Taylor - Hood	35
Figura 3.6: Transformaciones isoparamétricas	37
Figura 3.7: Representación de las condiciones de Dirichlet y Neuman	39
Figura 3.8: Esquema de la factorización de Doolittle	41
Figura 3.9: Análisis transitorio	44
Figura 4.1: Dominio de dos elementos triangulares Taylor - Hood	56
Figura 5.1: Dominio del problema de Benchmarck I	58
Figura 5.2: Simulación del campo de presión, Benchmarck I	58
Figura 5.3: Simulación del campo de velocidad, Benchmarck I	59
Figura 5.4: Simulación numérica vs solución analítico del campo de velocidad U, Benchmarck I	60
Figura 5.5: Simulación numérica vs solución analítico del campo de velocidad V, Benchmarck I	60
Figura 5.6: Dominio del problema de Benchmarck II	61
Figura 5.7: Simulación del campo de presión, Benchmarck II	62
Figura 5.8: Simulación del campo de velocidad, Benchmarck II	62
Figura 5.9: Simulación numérica vs analítico del campo de velocidad U, Benchmarck II	63
Figura 5.10: Simulación numérica vs analítico del campo de velocidad V, benchmarck II	63
Figura 5.11: Sominio del problema de Benchmarck III	65
Figura 5.12: Simulación del campo de presión, Benchmarck III	66
Figura 5.13: Simulación del campo de velocidad, Benchmarck III	66

Figura 5.14: Perfil de velocidades del campo de velocidad U, Benchmarck III	67
Figura 5.15: Perfil de velocidades del campo de velocidad V, Benchmarck III	68
Figura 5.16: Túnel de viento	70
Figura 5.17: Posición del cilindro en el túnel de viento	70
Figura 5.18: Vista lateral del túnel de viento	71
Figura 5.19: Dominio y condiciones de frontera del caso A	72
Figura 5.20: Simulación del campo de presión, caso A	72
Figura 5.21: Simulación del campo de velocidad, caso A	72
Figura 5.22: Sominio y condiciones de frontera del caso A	73
Figura 5.23: Simulación del campo de presión, caso B	73
Figura 5.24: Simulación del campo de velocidad, caso B	73
Figura 5.25: Dominio y condiciones de frontera del caso A	74
Figura 5.26: Simulación del campo de presión, caso B	74
Figura 5.27: Simulación del campo de velocidad, caso B	74
Figura 5.28: Dominio del perfil de camioneta comercial	76
Figura 5.29: Discretizacion del dominio	76
Figura 5.30: Campo de velocidad	77
Figura 5.31: Campo de presiones	77
Figura A.1: Perfil de velocidad	92

INDICE DE ANEXOS

Anexo A Deducción de las ecuaciones constitutivas de los fluidos Newtonianos.	83
---	----

SIMBOLOGÍA

$\vec{V} = f [x(t) \quad y(t) \quad z(t)]$	Campo vectorial de velocidad	\hat{n}_x	Normal en dirección x
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$	Vector nabla	\hat{n}_y	Normal en dirección y
$\vec{V} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$	Vector de velocidad	Γ	Frontera de un dominio Ω
$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}$	Vector de fuerzas de cuerpo	Ω	Dominio matemático
$\vec{S} = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$	Tensor de esfuerzos de Cauchy	$g()$	Función
C_{ij}	Matriz de Amortiguamiento del Término Temporal	x	Variables independiente
K_{ij}	Matriz de Rigidez	n	Iteración actual – variables a ser calculadas-
f_j	Vector de Carga	n – 1	Iteración pasada – variables conocidas-
T_j	Variable Dependiente	μ	Viscosidad
t	Variable Temporal	ρ	Densidad
$H^1 (\Omega)$	Espacio funcional de Sobolev		
$L^2 (\Omega)$	Espacio funcional escalar		
$\inf_{w_h \in V_h} \sup_{v_h \in V_h}$	Condición matemática Inf-Sup		

RESUMEN EJECUTIVO

La vida cotidiana se desenvuelve en medio de un sin número de fenómenos físicos, los cuales describen el comportamiento de la naturaleza. A lo largo de la historia, el hombre ha concentrado un enorme esfuerzo en estudiar a los fenómenos naturales, representándoles en modelos matemáticos, dicho modelo permite describir y predecir el comportamiento del fenómeno físico en un periodo de tiempo. El presente trabajo estudia la compleja física de los fluidos, el conjunto de ecuaciones diferenciales que representan a los fluidos Newtonianos, isotrópicos de viscosidad constante se denominan las Ecuaciones de Navier - Stokes, las mismas que son denominadas como uno de los siete problemas del milenio por no poseer una solución analítica, ante tal problema, los métodos numéricos ofrecen una vía para solucionar numéricamente dichas ecuaciones. Las ecuaciones de Navier - Stokes son resueltas mediante el Método de los Elementos Finitos, utilizando una formulación Mixta debido a irresolubilidad del modelo matemático, se discretizar el continuo con el Elemento Finito de Taylor – Hood. Sin embargo, la no linealidad y la inestabilidad en la convergencia de resultados presentado por la dinámica de los fluidos exige aplicar un Método de estabilización denominado el Método de Cuasi compresión. Finalmente, en base de la teoría abordada y axiomas correspondientes se genera el programa independiente de código abierto BasicCFD, programado en la plataforma de Matlab®.

PALABRAS CLAVE:

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES
METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS
BASICCFD
MÉTODOS NUMÉRICOS
MECÁNICA DE FLUIDOS

CAPÍTULO 1. GENERALIDADES

1.1 INTRODUCCION

Los problemas tecnológicos de la ingeniería actual, exigen soluciones exactas y eficientes, las cuales dependen en gran medida de la capacidad para describir de manera precisa la evolución de las variables físicas involucradas en los fenómenos que gobiernan los procesos industriales y tecnológicos.

Los fenómenos físicos se representan satisfactoriamente a partir de un conjunto de leyes físicas consistentes y modelos matemáticos, los cuales son deducidos a través de los principios de conservación y de restricciones termodinámicas.

La solución del modelo matemático representa la descripción del fenómeno físico a través del tiempo. Las matemáticas utilizadas para resolver modelos complejos son técnicas numéricas.

El presente trabajo tiene como finalidad, mediante el Método de los Elementos Finitos, solucionar las Ecuaciones de Navier-Stokes enfocadas al flujo de fluidos Newtonianos de viscosidad constante, incompresibles en régimen laminar, además, aplicar un método de estabilización numérica para la convergencia de los resultados.

El capítulo actual presenta los antecedentes, justificación e importancia del estudio de la Dinámica de los Fluidos Computacionales, más adelante, el

segundo capítulo muestra la deducción de las ecuaciones constitutivas de un fluido isotrópico y las Ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles en régimen laminar.

Posteriormente, el método de los Elementos Finitos y el método de estabilización son estudiados en el tercer capítulo. La Dinámica de los Fluidos Computacionales (CFD por sus siglas en inglés) es el cuarto capítulo, el cual indica detalladamente la discretización de las Ecuaciones de Navier-Stokes, obteniendo como resultados las matrices base, esenciales para la generación del código fuente para el desarrollo del software BasiCFD¹. Adicionalmente, los casos de estudio son presentados en el quinto y sexto capítulo.

Finalmente, la teoría descrita en el presente documento consolida las bases teóricas del software BasiCFD.

¹ BasiCFD es un software que permite resolver las Ecuaciones de Navier – Stokes para fluidos Newtonianos de viscosidad constante, incompresibles en régimen laminar, desarrollado en la plataforma MATLAB®.

1.2 ANTECEDENTES

Durante la década de los años 60, el término **Método de los Elementos Finitos** (FEM, sus siglas en inglés) surgió por primera vez en un trabajo de estructuras metálicas de R. W. Clough, más adelante los FEM llegan a constituirse como una herramienta fundamental de la Mecánica de Fluidos, que actualmente se denomina **Dinámica de los Fluidos Computacionales** (CFD, por sus siglas en inglés). Los últimos avances tecnológicos dieron a conocer al CFD como una rama nueva e innovadora de la Biomecánica.

En los años 1800 se presenta el primer modelo matemático que describe a la física de los fluidos, tal modelo son las denominadas **Ecuaciones de Navier–Stokes**, llamadas así en honor a C. L. M. H. Navier (1785 - 1836) y Sir George G. Stokes (1819 - 1903), quienes fueron los primeros en deducirlas.

Las ecuaciones de Navier – Stokes son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, no lineales de segundo orden, cuya resolución analítica es desconocida hasta el día de hoy y son consideradas como uno de los seis problemas del milenio por el **Clay Mathematics Institute**², en vista de tal problema, las ecuaciones pueden ser tratadas por conjuntos de técnicas numéricas denominadas CFD, las que permiten resolver y simular una gran variedad de fluidos.

² Clay Mathematics Institute es una fundación sin fines de lucro de Cambridge, Massachusetts, dedicada a incrementar y diseminar el conocimiento matemático.

1.3 JUSTIFICACION E IMPORTANCIA

La importancia del estudio de la **Dinámica de los Fluidos Computacionales** se justifican desde dos puntos de vista: tecnológico y académico.

En el punto de vista tecnológico, el CFD es una herramienta versátil y dinámica para el diseño y optimización de diseños. La existencia actual de paquetes comerciales, tales como el ANSYS y los procesadores de última generación, hacen del departamento de investigación y desarrollo del producto de las empresas, sean un lugar de alto desempeño a bajos costos.

El software comercial posee un elevado índice de confiabilidad frente a un software independiente, debido que detrás del paquete comercial existe una fuerte inversión en investigación y desarrollo. A pesar de la notable diferencia, tanto el paquete comercial como el software independiente poseen el **Criterio Ingenieril de Interpretación de Resultados**, el mismo que cabe dentro del punto de vista académico, de tal manera, el criterio que forma el ingeniero para manejar e interpretar los resultados del software comercial es cultivado y formado mediante la generación de programas propios e independientes, por lo tanto que se tendrá ingenieros con la suficiente capacidad para hacer del software comercial una herramienta versátil, evitando convertirse en usuario dependiente del paquete comercial.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 GENERAL

- Resolver numéricamente las ecuaciones de Navier - Stokes mediante el Método de los Elementos Finitos, para los casos de fluidos isotrópicos Newtonianos de viscosidad constante e incompresible.

1.4.2 ESPECIFICOS

- Deducir las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones constitutivas para fluidos isotrópicos Newtonianos de viscosidad constante e incompresible.
- Discretizar las ecuaciones que representan la física de fluidos isotrópicos Newtonianos de viscosidad constante, incompresibles en régimen laminar, mediante el Método de los Elementos Finitos, utilizando formulación mixta y un método de estabilización.
- Desarrollar un programa independiente para la discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos isotrópicos Newtonianos de viscosidad constante, incompresibles en régimen laminar.

CAPÍTULO 2. MECÁNICA DE FLUIDOS

Las actividades diarias han estado desde siempre interactuando con los fluidos, tal interacción puede ser tanto micro como macro, por ejemplo: el flujo de la sangre en las venas, la distribución hidráulica de la ciudad, el vuelo de las aves, una tormenta en el mar, han sido condicionantes para establecer las leyes que desarrollan la vida como tal. Así, el aire y el agua son fluidos habituales e indispensables, con el primero podemos volar una cometa hasta elevar un avión, con el segundo, se puede generar la energía eléctrica mediante una central hidroeléctrica, indispensable en el desarrollo de vida moderna.

Las Leyes Básicas de la Mecánica de los Medios Continuos, sección 2.2, se conjugan en dos importantes ecuaciones: Ecuación de Continuidad, ecuación 2-6 y Ecuación de la Conservación de la Cantidad de Movimiento, ecuación 2-10. Es importante resaltar que el flujo de un fluido es estudiado comúnmente desde el enfoque Euleriano, sección 2.1, sin embargo la sección 2.3 contiene los argumentos teóricos para la justificación de cada término de la dinámica de los fluidos, además, en tal sección se identifica la incompatibilidad del número de variables con el número de ecuaciones, la misma que se resuelve con las ecuaciones constitutivas anunciadas en la sección 2.4 y deducidas paso a paso en el Anexo A.

Finalmente, la Ecuación de Continuidad en forma indicial, ecuación 2-27, y la Ecuación de la Conservación de Cantidad de Movimiento, ecuación 2-

26, con las ecuaciones constitutivas de la Ley de Viscosidad para Fluidos Isotrópicos Incompresibles definen las Ecuaciones de Navier-Stokes, ecuaciones 2-43 y 2-44.

Las Ecuaciones de Navier-Stokes son consideradas como uno de los seis problemas del milenio por el Instituto Clay de matemáticas. Indiferentemente del galardón ofrecido por el instituto, el lograr resolver las ecuaciones permitiría abrir una puerta más del conocimiento humano y descubrir una huella de un Dios perfecto y bellissimo.

2.1 ENFOQUES PARA LA DESCRIPCIÓN DE LOS MEDIOS CONTINUOS

La hipótesis del Medio Continuo permite dar validez a las leyes de conservación de la mecánica, se considera a un fluido continuo a lo largo del espacio que ocupa despreciando discontinuidades moleculares siempre y cuando cumpla con el número adimensional de Knudsen³. El caso que el número de Knudsen es mucho menor que la unidad, la sustancia puede considerarse un fluido, caso contrario, los efectos debido a la naturaleza molecular de la materia no pueden ser despreciados y debe utilizarse la mecánica estadística para predecir el comportamiento de la materia.

Existen dos puntos de vista posibles para analizar los problemas de la mecánica: Lagrangiano y Euleriano. El primer enfoque se concentra en seguir la trayectoria de la partícula sin fijar las coordenadas, el enfoque Lagrangiano genera una masa de control y cuya representación matemática es:

$$\vec{V} = f [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] \quad (\text{EC. 2-1})$$

El segundo enfoque es el Euleriano, muy apropiado para estudiar el flujo de un fluido, se basa en fijar el sistema de coordenadas en el espacio, el presente enfoque genera un volumen de control y su representación matemática es:

$$\vec{V} = f [x \quad y \quad z \quad t] \quad (\text{EC. 2-2})$$

³ Llamado número de Knudsen en honor al profesor Martin Knudsen, tal número define con la proporción entre la longitud camino libre promedio molecular λ y una escala de longitud física representativa L .

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$

2.2 LEYES DE CONSERVACION DE LA MECÁNICA DEL CONTINUO

El estudio fluidodinámico exige satisfacer tres importantes leyes de conservación de la mecánica, las cuales son:

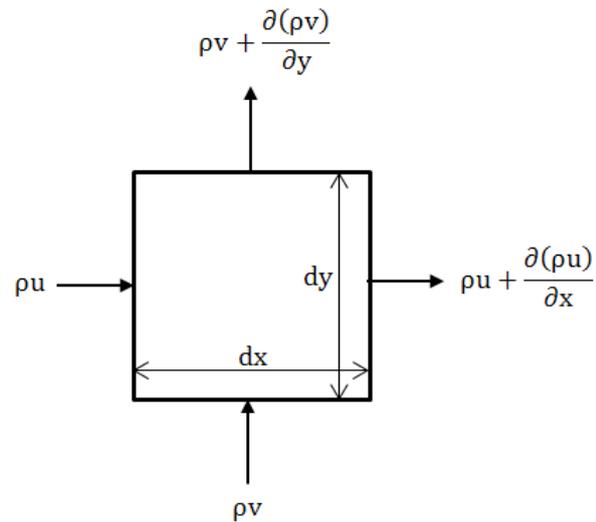
- Conservación de la continuidad.
- Conservación de la cantidad de movimiento.
- Conservación de la energía.

Las secciones 2.2.1 y 2.2.2 derivan la ecuación de continuidad y la ecuación de la cantidad de movimiento, respectivamente. El presente trabajo no aborda el fenómeno de transferencia de calor, es por tal razón que no se aborda la relación de la conservación de la energía en fluidos.

2.2.1 ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad representa la ley de la conservación de la masa, su función principal es garantizar la conservación de masa en el volumen de control. Se considera un volumen infinitesimal de control de fluido de lado dx por dy , de profundidad unitario, en la figura 2.1 se representan las velocidades en las direcciones (x, y) que son (u, v) , respectivamente.

Figura 2.1: Volumen de control infinitesimal



La ley de conservación de masa en la figura 2.1, determina:

$$[\dot{m}_{\text{ACUMULADA}}]_{\text{V.C.I.}} = [\dot{m}_{\text{INGRESA}}]_{\text{V.C.I.}} - [\dot{m}_{\text{SALE}}]_{\text{V.C.I.}} \quad (\text{EC. 2-3})$$

Siendo \dot{m} = tasa de masa

El balance de masa desarrollado en la figura 2.1 se reemplaza en la ecuación

2-3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \, dx \, dy)}{\partial t} &= \rho u \, dy + \rho v \, dx - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \, dx \right) dy \\ &\quad - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \, dy \right) dx \end{aligned} \quad (\text{EC. 2-4})$$

Reagrupando la ecuación 2-4, se tiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (\text{EC. 2-5})$$

siendo

ρ Densidad

La ecuación 2-5 representa la ecuación de Conservación de Continuidad, un fluido incompresible considera a la densidad constante, en consecuencia la representación de la Ecuación de la Continuidad para un Fluido Incompresible es:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{EC. 2-6})$$

siendo

$$\nabla \quad \text{Vector nabla} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{V} \quad \text{Vector Velocidad} \quad \vec{V} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$$

2.2.2 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La Segunda Ley de Newton respalda la dinámica de los fluidos, es decir, el momentum lineal de la partícula fluida, en la figura 1 se puede aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento, cuyo balance es:

$$[\dot{m}\vec{V}_{ACUMULA}]_{V.C.I.} = [\dot{m}\vec{V}_{INGRESA}]_{V.C.I.} - [\dot{m}\vec{V}_{SALE}]_{V.C.I.} + \left[\sum \vec{F} \right]_{V.C.I.} \quad (\text{EC. 2-7})$$

El balance de conservación de movimiento generado en la figura 2.1 se reemplaza en la ecuación 2-7:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} &= (\rho u \vec{V} \, dy + \rho v \vec{V} \, dx) \\ &- \left[\left(\rho u \vec{V} + \frac{\partial(\rho u \vec{V})}{\partial x} dx \right) dy + \left(\rho v \vec{V} + \frac{\partial(\rho v \vec{V})}{\partial y} dy \right) dx \right] \\ &+ \sum \vec{F} \, dx \, dy \end{aligned} \quad (\text{EC. 2-8})$$

Al identificar y ordenar los términos de la ecuación 2-8, se obtiene:

$$\vec{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \right) = \sum \vec{F} \quad (\text{EC. 2-9})$$

En la ecuación 2-9 se reemplaza la ecuación de conservación de continuidad 2-5, además la derivada sustancial, por lo tanto se obtiene:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \right) = \sum \vec{F} \quad (\text{EC. 2-10})$$

siendo

\vec{V}	Vector Velocidad
$\sum F$	Sumatorio de Fuerzas

La ecuación 2-10 representa la segunda ley de Newton para fluidos, las secciones contiguas detallan cada uno de los términos de la ecuación de la dinámica de los fluidos.

2.3 FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Para entender cada uno de los términos que componen a la ecuación de momentum, ecuación 2-10, es necesario deducir cada uno de los términos y manifestar que enfoque y fenómeno físico representa.

2.3.1 DINÁMICA DE LA PARTÍCULA FLUIDA DESDE EL ENFOQUE EULERIANO

El enfoque Euleriano, ecuación 2-2, es muy útil para estudiar el flujo de un fluido, este enfoque consiste en fijar coordenadas en el espacio y con el paso del tiempo, lo cual puede pensar la velocidad de cualquier partícula fluida al pasar por el punto fijo, la representación matemática es la ecuación 2.11.

$$\vec{V} = u(x, y, z, t) \hat{i} + v(x, y, z, t) \hat{j} + w(x, y, z, t) \hat{k} \quad (\text{EC. 2-11})$$

La derivación temporal mediante la regla de la cadena de la 2-11 permite establecer la dinámica de la partícula fluida para cada dirección (x y z).

La derivada total de la velocidad u

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{EC. 2-12})$$

La derivada total de la velocidad v

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{EC. 2-13})$$

La derivada total de la velocidad w

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{EC. 2-14})$$

Las ecuaciones 2-12, 2-13 y 2-14 representan la Derivada Sustancia de la Velocidad, cuya forma simplificada es:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{V} \quad (\text{EC. 2-15})$$

Representando:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad \text{Aceleración Local}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \quad \text{Aceleración Convectiva}$$

La velocidad de la partícula fluida puede cambiar en magnitud y en dirección, esta aceleración se denomina aceleración total, la aceleración que varía de posición en el espacio se denomina aceleración local, el cambio de velocidad por efecto del viaje de la partícula fluida en la región de flujo se conoce como la aceleración convectiva. La sumatoria de las dos aceleraciones permite formar la aceleración total. La ecuación 2-15 justifica el lado izquierdo de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, ecuación 2-10.

2.3.2 TIPOS DE FUERZAS QUE ACTUAN EN UNA PARTÍCULA FLUIDA

Un cuerpo puede estar sometido a dos clases de fuerzas: Fuerzas de Cuerpo \vec{C} y Fuerzas de Superficie \vec{S} . Las primeras fuerzas actúan directamente sobre la masa y pueden ser: campos gravitacionales, campos magnéticos o campos electromagnéticos. Considerando el campo gravitacional como fuerza de cuerpo cuya representación es:

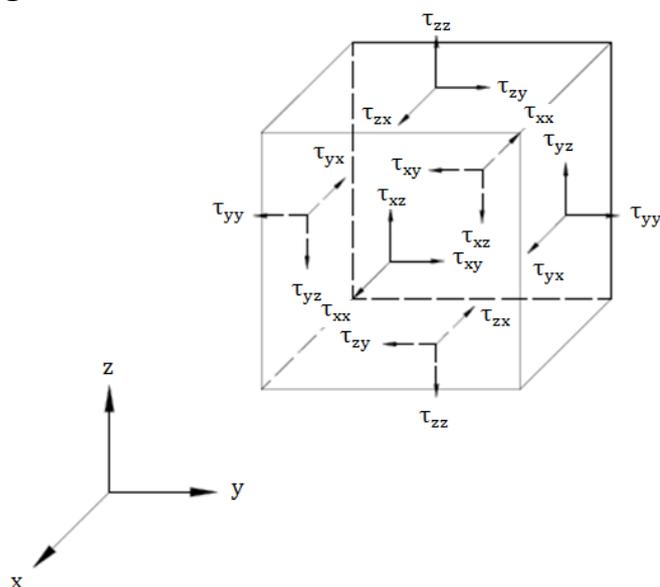
$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k} \quad (\text{EC. 2-16})$$

Siendo $C_y = -g \rho dV$, los términos adicionales son nulos.

En cuanto a las fuerzas de superficie, ecuación 2-17, denominadas las fuerzas viscosas, constituidas por esfuerzos cortantes y normales, se las define en un elemento infinitesimal de partícula fluida, el cual permite determinar dichas fuerzas, figura 2.3.

$$\vec{S} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k} \quad (\text{EC. 2-17})$$

Figura 2.2: Esfuerzos sobre el cubo infinitesimal



El balance de esfuerzos sobre las caras del elemento que causen incremento de esfuerzos, en dirección x establece que:

$$\begin{aligned}
 & \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{xx} dy dz \\
 & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\
 & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy \\
 & = S_x dx dy dz
 \end{aligned} \tag{EC. 2-18}$$

Al identificar y ordenar los términos de la ecuación 2-18, se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = S_x \tag{EC. 2-19}$$

Al aplicar el mismo procedimiento se deduce la relación de las ecuaciones 2-20 y 2-21

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = S_y \tag{EC. 2-20}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = S_z \tag{EC. 2-21}$$

Las ecuaciones 2-19, 2-20 y 2-21 representan la divergencia del tensor de esfuerzos de Cauchy.

$$\vec{S} = \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (\text{EC. 2-22})$$

Representando:

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{Tensor de Esfuerzos de Cauchy}$$

La derivada sustancial de la velocidad es representada por la ecuación 2-15, mientras que la ecuación 2-16 y 2-22 representan las fuerzas de cuerpo y superficie respectivamente, que actúan sobre un cuerpo. Por lo tanto, al sustituir las ecuaciones mencionadas en la ecuación 2-10 se consolida el modelo matemático que representa satisfactoriamente la física de los fluidos:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho a_x \quad (\text{EC. 2-23})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho a_y \quad (\text{EC. 2-24})$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho a_z \quad (\text{EC. 2-25})$$

El modelo conformado por las ecuaciones: 2-6, 2-23, 2-24 y 2-25 describe la física de los fluidos, el cual posee la inconsistencia entre el

número de variables (u v w τ_{xx} τ_{yy} τ_{zz} τ_{yx} τ_{yz} τ_{zx}) y número de ecuaciones, el mismo que es superado mediante las ecuaciones constitutivas, la representación indicial del modelo matemático se representa a continuación:

$$\rho \left[V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_i}{\partial t} \right] = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho a_i \quad (\text{EC. 2-26})$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_i} [V_i] = 0 \quad (\text{EC. 2-27})$$

2.4 LEY DE VISCOSIDAD DE STOKES

La ley de viscosidad de Stokes es la ley general, la cual se aplica al flujo de fluidos Newtonianos, además, la ley de viscosidad de Newton es un caso particular de la ley general.

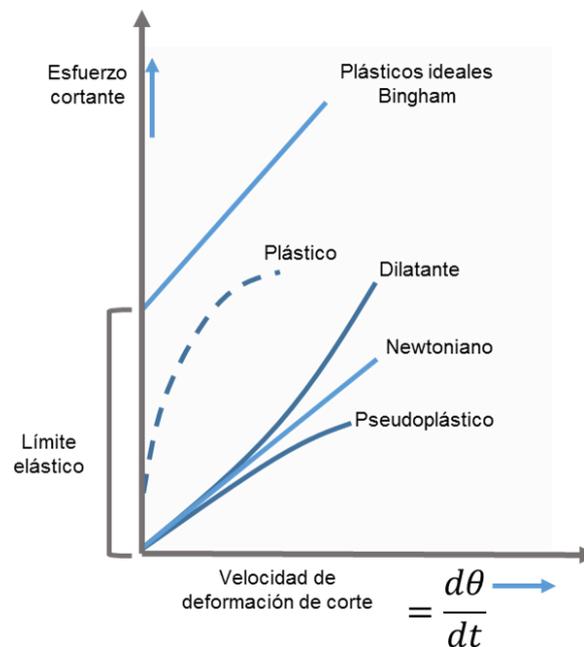
Es importante recordar que la viscosidad es una medida cuantitativa de la resistencia de un fluido al movimiento, es decir, la viscosidad es la fricción molecular la cual se encuentra inversamente proporcional a la temperatura, sin embargo, la relación entre el esfuerzo y la tasa de deformación se determina por medio de la viscosidad.

En base al fundamento de viscosidad se pueden clasificar los fluidos en Newtonianos y No Newtonianos, figura 2.3, el trabajo presente se concentra en fluidos Newtonianos, es decir, fluidos cuya relación esfuerzo – tasa de deformación en un fluido en movimiento es lineal, para fluidos No-Newtonianos se puede consultar las referencias:

Las características de los fluidos Newtonianos son:

- La viscosidad puede considerarse constante en el tiempo y solo depende de la temperatura.
- Los fluidos Newtonianos poseen propiedades elásticas, son incompresibles e isotrópicos.

Figura 2.3: Esfuerzo vs tasa de deformación



Fuente: White, F., Mecánica De Fluidos. España. 2008.

La ley de viscosidad de Stokes representa a todos los Fluidos Newtonianos, la cual es la relación lineal entre los seis tipos de deformaciones, indicadas a continuación:

$$\tau_{xx} = -p + C_{11}\dot{\epsilon}_{xx} + C_{12}\dot{\epsilon}_{yy} + C_{13}\dot{\epsilon}_{zz} + C_{14}\dot{\epsilon}_{xy} + C_{15}\dot{\epsilon}_{yz} + C_{16}\dot{\epsilon}_{xz} \quad (\text{EC. 2-28})$$

$$\tau_{yy} = -p + C_{21}\dot{\epsilon}_{xx} + C_{22}\dot{\epsilon}_{yy} + C_{23}\dot{\epsilon}_{zz} + C_{24}\dot{\epsilon}_{xy} + C_{25}\dot{\epsilon}_{yz} + C_{26}\dot{\epsilon}_{xz} \quad (\text{EC. 2-29})$$

$$\tau_{zz} = -p + C_{31}\dot{\epsilon}_{xx} + C_{32}\dot{\epsilon}_{yy} + C_{33}\dot{\epsilon}_{zz} + C_{34}\dot{\epsilon}_{xy} + C_{35}\dot{\epsilon}_{yz} + C_{36}\dot{\epsilon}_{xz} \quad (\text{EC. 2-30})$$

$$\tau_{xy} = C_{41}\dot{\epsilon}_{xx} + C_{42}\dot{\epsilon}_{yy} + C_{43}\dot{\epsilon}_{zz} + C_{44}\dot{\epsilon}_{xy} + C_{45}\dot{\epsilon}_{yz} + C_{46}\dot{\epsilon}_{xz} \quad (\text{EC. 2-31})$$

$$\tau_{yz} = C_{51}\dot{\epsilon}_{xx} + C_{52}\dot{\epsilon}_{yy} + C_{53}\dot{\epsilon}_{zz} + C_{54}\dot{\epsilon}_{xy} + C_{55}\dot{\epsilon}_{yz} + C_{56}\dot{\epsilon}_{xz} \quad (\text{EC. 2-32})$$

$$\tau_{xz} = C_{61}\dot{\epsilon}_{xx} + C_{62}\dot{\epsilon}_{yy} + C_{63}\dot{\epsilon}_{zz} + C_{64}\dot{\epsilon}_{xy} + C_{65}\dot{\epsilon}_{yz} + C_{66}\dot{\epsilon}_{xz} \quad (\text{EC. 2-33})$$

Los treinta y seis términos C_{ij} son denominados como coeficientes de viscosidad, los fluidos que se comportan de acuerdo a las ecuaciones 2-28 a 2-33 son denominados Fluidos Newtonianos.

La propiedad de isotropía determina que únicamente se tiene dos coeficientes de viscosidad, el primer y segundo término de viscosidad son: C_{44}, C_{12} , por lo tanto, las ecuaciones constitutivas para fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles son:

Para esfuerzos normales

$$\tau_{xx} = -p + \mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad (\text{EC. 2-34})$$

$$\tau_{yy} = -p + \mu \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad (\text{EC. 2-35})$$

$$\tau_{zz} = -p + \mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{EC. 2-36})$$

Para esfuerzos cortantes

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (\text{EC. 2-37})$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \quad (\text{EC. 2-38})$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \quad (\text{EC. 2-39})$$

El Anexo A muestra los conceptos base para la deducción de la Ley de Viscosidad de Stokes y las deducciones de las ecuaciones constitutivas de fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles.

2.5 ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DE FLUIDOS NEWTONIANOS, ISOTRÓPICOS E INCOMPRESIBLES

Las ecuaciones de Navier-Stokes de un fluido Newtoniano, isotrópico e incompresible se deducen al remplazar las ecuaciones constitutivas 2-34 a 2-39 en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento 2-26, obteniendo:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{EC. 2-40})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -g \rho - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{EC. 2-41})$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{EC. 2-42})$$

Una ecuación de suma importancia adicional a las ecuaciones 2-40, 2-41 y 2-42 que describen la conservación de la cantidad de movimiento de un fluido isotrópico e incompresible es la ecuación de continuidad, ecuación 2-27.

La representación condensada del modelo matemático que representa la física de los fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles es:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{C} - \nabla \cdot p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{EC. 2-43})$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{EC. 2-44})$$

Las ecuaciones 2-43 y 2-44 son las Ecuaciones de Navier-Stokes, las mismas que reciben su nombre en honor a Claude-Louis Navier (1785-1836) y Sir George G. Stokes (1819-1903). Se trata de un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, no lineales, de segundo orden que describen el movimiento de un fluido Newtoniano, isotrópico e incompresible, sin embargo no se dispone de una solución analítica, por tal razón, las ecuaciones 2-43 y 2-44 son consideradas como uno de los seis problemas del milenio por el Instituto Clay de matemáticas.

CAPÍTULO 3. MÉTODOS DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Los modelos matemáticos están destinados a representar los fenómenos físicos, tales fenómenos están compuestos por un conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales en su mayoría no poseen una solución analítica. Además, la descripción del fenómeno físico puede variar en el tiempo, por lo tanto la solución exige un modelo más complejo.

El mayor afán de los hombres a lo largo de la historia ha sido tratar de solucionar los modelos matemáticos, dando como resultado un sin número de soluciones genéricas, a pesar de no cumplir con la descripción total del problema, tales soluciones son muy adecuadas en un gran rango del dominio, finalmente a estas soluciones genéricas se las denomina soluciones numéricas.

En la actualidad existen varios métodos numéricos con ventajas y desventajas, cada uno tiene una funcionalidad limitada a las características del problema. El método numérico de los Elementos Finitos (FEM por sus siglas en inglés) es en la actualidad el método pionero dentro de la Mecánica Computacional.

El capítulo presente tiene como enfoque, exponer detalladamente el procedimiento para tratar mediante los FEM a ecuaciones diferenciales irreducibles, sección 3.3. El mecanismo matemático de los Elementos Finitos, sección 3.2, permite transformar la ecuación diferencial en un

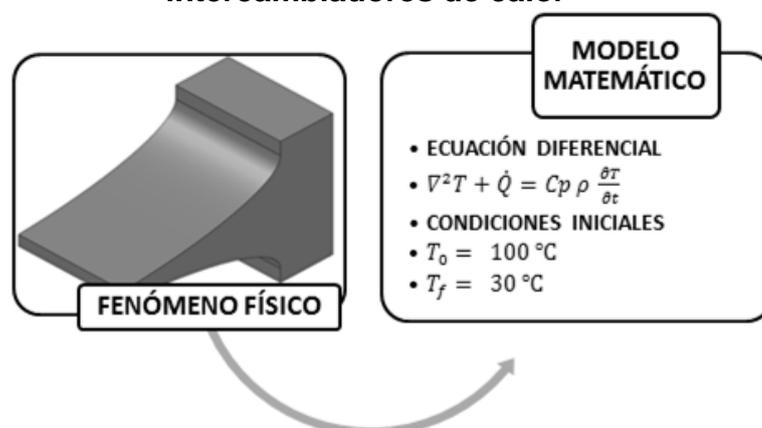
conjunto de ecuaciones lineales, tal transformación se realiza mediante los espacios funcionales de Sobolev $H^1(\Omega)$ para el dominio y los espacios de Lipschitz-continua para la frontera, sección 3.2.1. Obteniendo la formulación débil de la ecuación diferencial, sección 3.2. Por otro lado, la sección correspondiente para la solución del conjunto de ecuaciones de equilibrio en estado estacionario lineal, estacionario no lineal y dinámico, son: las secciones 3.6.1, 3.6.2 y 3.6.3 respectivamente.

3.1 LOS FEM COMO UN SISTEMA MATEMÁTICO

Los problemas prácticos de ingeniería son retos diarios que involucran fenómenos físicos, los cuales son representados por modelos matemáticos, cuya solución describe el comportamiento de estos en un intervalo de tiempo. Es importante reconocer que los problemas ingenieriles deben poseer indispensablemente condiciones iniciales y de frontera que permiten obtener una única solución, caso contrario, se obtendrá una familia de soluciones.

Como problema ingenieril se tiene, por ejemplo, el **Diseño y Análisis del Perfil de Aletas para Intercambiadores de Calor**, Figura 3.1. El problema está gobernado por el fenómeno físico de la Transferencia de Calor y se representa por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de orden superior. El modelo matemático que representa el fenómeno físico no posee una solución analítica y la solución numérica debe cumplir las condiciones iniciales y condiciones de frontera.

Figura 3.1: Modelo matemático del perfil de aleta para intercambiadores de calor

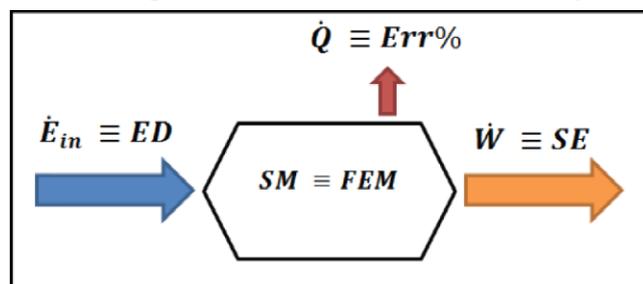


Fuente: Narváez, Alejandro D., Cumbal, Luis, Análisis De La Transferencia De Calor Mediante El Método De Los Elementos Finitos, Ecuador. 2011.

El método numérico seleccionado para la solución del modelo matemático de la figura 3.1 son los FEM, los mismos que tiene que cumplir las condiciones de frontera e iniciales para ser considerados una solución válida.

Los Elementos Finitos son considerados un sistema matemático que cumple análogamente la estructura funcional de un sistema mecánico, Figura 3.2. En un Sistema Mecánico se transforma la energía a trabajo y calor mediante un mecanismo mecánico, análogamente al Sistema Matemático, se transforma una ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones algebraicas y un error porcentual mediante un mecanismo matemático.

Figura 3.2: Analogía entre sistema mecánico y matemático

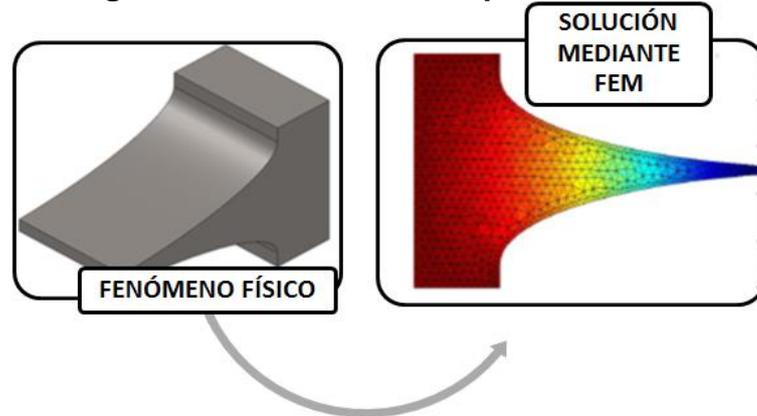


Fuente: Narváez, Alejandro D., Cumbal, Luis, Análisis De La Transferencia De Calor Mediante El Método De Los Elementos Finitos, Ecuador. 2011.

La solución generada mediante el software BasicHEAT⁴ del problema ingenieril que muestra la Figura 3.1, posee un error porcentual del 0,001 %, lo que sugiere que el Método de los Elementos Finitos es bastante apropiado para tal aplicación, la Figura 3.3, muestra la simulación de la transferencia de calor en la aleta sujeta a las condiciones de frontera de la figura 3.1.

⁴ BasicHEAT versión 0.1, programa independiente generado en plataforma MATLAB®

Figura 3.3: Simulación del perfil de aleta



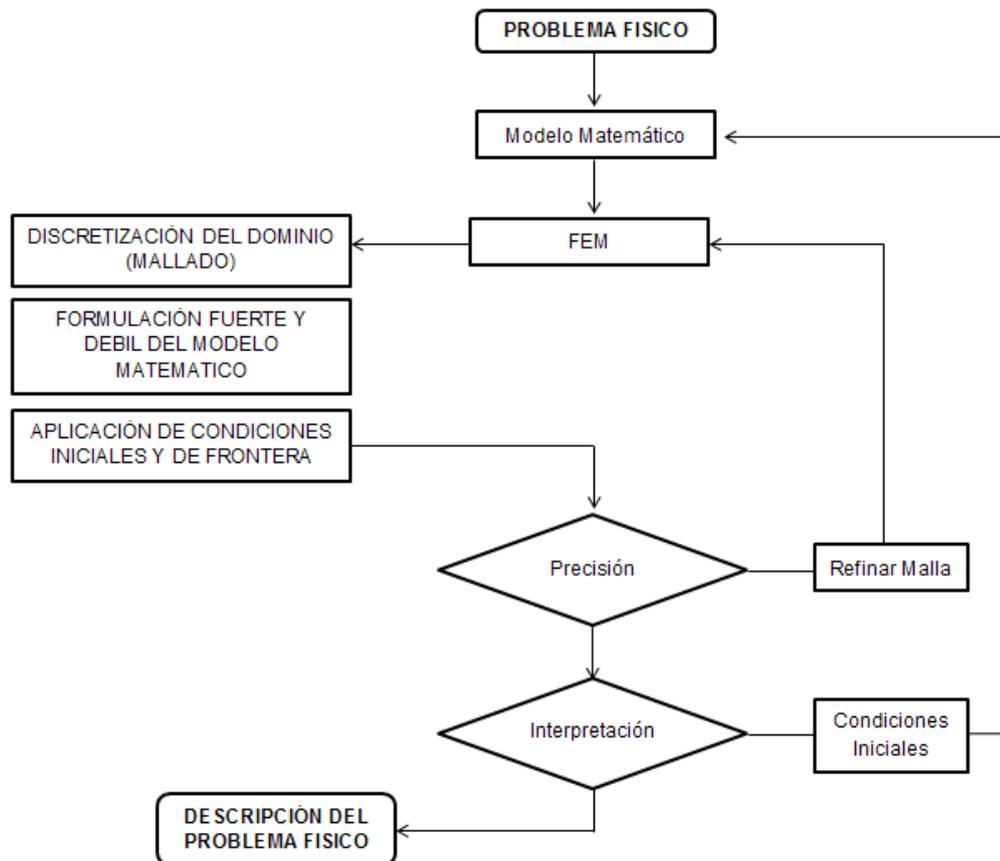
Fuente: Narváez, Alejandro D., Cumbal, Luis, Análisis De La Transferencia De Calor Mediante El Método De Los Elementos Finitos, Ecuador. 2011.

En consecuencia el Método de los Elementos Finitos es una herramienta de gran utilidad en la industria por su versatilidad para el diseño y optimización de diseños mecánicos, logrando altos beneficios a muy bajos costos en el desarrollo de productos.

3.2 PSEUDOCÓDIGO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS -MECANISMO MATEMÁTICO-

El mecanismo matemático que permite la transformación de la ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones algebraicas es descrito por el diagrama de flujo que muestra la Figura 3.4

Figura 3.4: Diagrama de flujo del mecanismo matemático del método de los elementos finitos



Fuente: BATHE, Klaus J., Finite Element Procedures. United States. 2006.

La transformación de la Formulación Fuerte a Débil se logra mediante la aplicación de Método de los Residuos Ponderados, sección 3.2.2, tal fundamento teórico se sustenta en los espacios de funciones que trabajan los FEM, espacios de Sobolov y Lipschitz, sección 3.2.1. Además, una herramienta de gran utilidad para la discretización de dominios de

geometrías curvas es la Transformación Isoparamétrica, sección 3.4, finalmente, la aplicación de las condiciones de frontera se lleva a cabo con la aplicación del Teorema de Green – Gauss, sección 3.2.3 y 3.5

Independientemente del modelo matemático que se desee resolver mediante El Método de los Elementos Finitos, el diagrama de flujo de la Figura 3.4 genera el conjunto de matrices base que se muestra en la ecuación 3-1

$$C_{ij} \frac{\partial T_j}{\partial t} + K_{ij} T_j = f_j \quad (\text{EC. 3-1})$$

Representando cada termino:

C_{ij}	Matriz de Amortiguamiento del Término Temporal
K_{ij}	Matriz de Rigidez
f_j	Vector de Carga
T_j	Variable Dependiente
t	Variable Temporal

La matriz de Rigidez K_{ij} es considerada la matriz de mayor importancia dentro de los FEM por sus características las cuales son:

- **Singularidad.** La matriz de rigidez posee soluciones infinitas y es indispensable las condiciones de frontera e iniciales para eliminar la singularidad y permitir la convergencia de resultados.

- **Simetría.** La matriz de rigidez es simétrica y en banda, características matriciales que son condiciones para la selección de un método apropiado para la solución del conjunto de ecuaciones lineales 12.

La matriz de Amortiguamiento del Término Temporal es resuelta mediante los Métodos: implícito, explícito y el método de Cranck-Nicolson, sección 3.8.2.

El vector de carga debe contener las fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie que estén interactuando con la masa del dominio o en la superficie del dominio, respectivamente.

3.2.1 ESPACIOS DE FUNCIONES

Los espacios de funciones permiten generar la Formulación Débil de las ecuaciones diferenciales que se resolverán mediante los FEM, por lo tanto, es necesario definir espacios de funciones 1, para lo cual se considera que el dominio Ω es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , $n = 2$ o 3 , conexo y acotado, cuya frontera es Lipschitz-continua, es decir, que admite un vector tangente en cada punto límite de Ω .

Al espacio lineal que consiste de todas las funciones $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales $\partial^\alpha v$ de ordenes $0 < \alpha < m$ sean continuas en Ω se le denota por $C^m(\Omega)$ que está formado por las funciones escalares.

$$v \in C^m(\Omega) \quad (\text{EC. 3-2})$$

El espacio constituido por funciones escalares sobre Ω es denotado por $L^2(\Omega)$ y se define como:

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\} \quad (\text{EC. 3-3})$$

El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ está formado por todas las funciones que pertenecen a $L^2(\Omega)$ y que su primera derivada en el sentido de distribuciones también pertenece a $L^2(\Omega)$.

3.2.2 MÉTODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS

El Método de los residuos ponderados es determinar la Formulación Débil de la ecuación diferencial, para tal propósito es indispensable multiplicar los espacios de funciones, ecuaciones 3-4 y 3-5 por los términos de la ecuación diferencial e integrar sobre el dominio Ω

$$v \in \mathbf{C}_c^1(\Omega) \quad (\text{EC. 3-4})$$

$$q \in L_0^2(\Omega) \quad (\text{EC. 3-5})$$

3.2.3 TEOREMA DE GREEN

El teorema de Green cumple dos propósitos dentro del Métodos de los Elementos Finitos, los cuales son:

- Disminuir el orden de las derivadas parciales $\partial^\alpha v$
- Implementar las Condiciones de Frontera tipo Newman en la superficie del dominio Γ

La formulación de Green es:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \cdot \hat{n} \right) v \, d\Gamma \quad (\text{EC. 3-6})$$

3.3 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES E IRREDUCIBLES

Un conjunto de ecuaciones diferenciales en donde existen dos o más variables pueden ser: reducibles o irreducibles.

Se llaman **Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Reducibles** cuando las variables son despejadas y reemplazadas para dejar todo el modelo matemático representado en una única ecuación diferencial y en función de una sola variable dependiente. Las ecuaciones 3-7 y 3-8 representan un sistema irreducible.

Sea el conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = A \quad (\text{EC. 3-7})$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} + \alpha = 0 \quad (\text{EC. 3-8})$$

Considerando:

α	Variable Dependiente
β	Variable Dependiente
A	Función Independiente
x	Variable Independiente

Sustituyendo la ecuación 3-7 en 3-8, se obtiene:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha = A \quad (\text{EC. 3-9})$$

La ecuación diferencial 3-9 que está en función de x . Las variables $(\alpha \ \beta)$ originalmente acopladas en 3-7 y 3-8, son desacopladas en 3-9, por lo tanto, el problema es resolver una sola ecuación diferencial con una variable dependiente. Por lo tanto, el FEM ofrece una gran gama de tipos de elementos finitos.

Por otro lado, los **Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Irreducibles** es el conjunto de ecuaciones que no permite desacoplar las variables dependientes. Las ecuaciones 3-10 y 3-11 es un conjunto de ecuaciones irreducibles:

$$\alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} = A \quad (\text{EC. 3-10})$$

$$\beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} = B \quad (\text{EC. 3-11})$$

El procedimiento de despejar y sustituir variables no es posible en las ecuaciones 3-10 y 3-11, por lo tanto, las variables $(\alpha \ \beta)$ deben ser resueltas simultáneamente. El método de los elementos finitos para tales casos utiliza la **Formulación Mixta**, los elementos finitos ofrecidos por los FEM son limitados.

3.3.1 FORMULACIÓN MIXTA

La formulación mixta es utilizada para la discretización de sistemas de ecuaciones diferenciales irreducibles, la principal ventaja de la formulación mixta es el cálculo simultáneo de las variables dependientes que interactúan en el fenómeno físico, en el caso de la mecánica de fluidos es posible resolver instantáneamente las variables del campo vectorial de velocidad y el campo escalar de presión, ecuaciones 2-158 y 2-159, denominándolas la formulación presión - velocidad. La desventaja de la formulación, es la rigurosidad matemática que deben cumplir los elementos finitos aplicados, la condición artesanal del método anuncia que el grado de interpolación para el campo escalar de la presión debe ser menor en un grado de la interpolación del campo vectorial de velocidad. La condición sofisticada de la formulación mixta exige el cumplimiento de la condición de continuidad, existencia e unicidad del elemento finito, de esta manera se determina un grupo limitado de elementos finitos capaces a ser utilizados en la formulación presión - velocidad. Fueron los profesores F. Brezzi y M. Forti quienes crearon la condición matemática Inf-Sup, 3-12, para validar los elementos finitos aptos para la formulación mixta.

$$\text{Inf}_{\mathbf{w}_h \in V_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} = \frac{\int_{\text{Vol}} P_h(\nabla \cdot \mathbf{w}_h) \nabla \cdot \mathbf{v}_h d\text{Vol}}{\|P_h(\nabla \cdot \mathbf{w}_h)\| \|\mathbf{v}_h\|} > 0 \quad (\text{EC. 3-12})$$

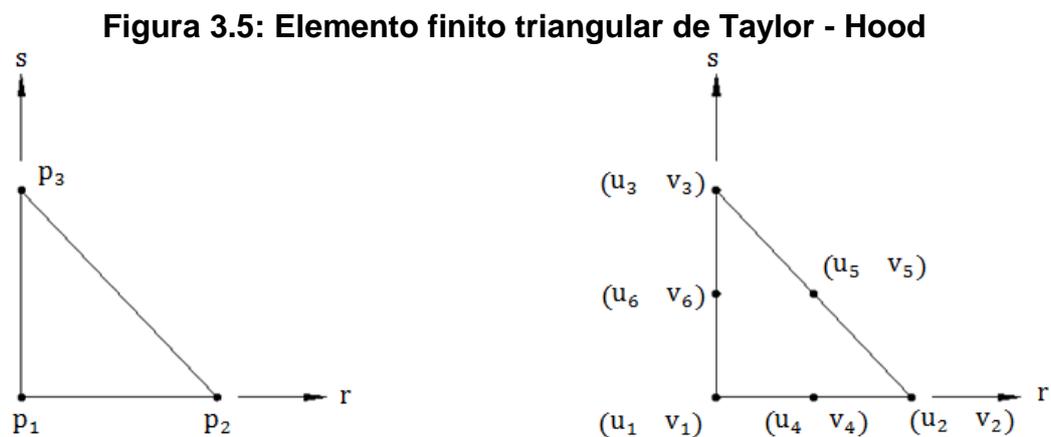
Dentro del grupo limitado de elementos finitos que se utilizan para la formulación mixta los más usuales son los Elementos Taylor-Hood⁵, denominados así en honor a P. Hood y C. Taylor.

⁵ La demostración Inf-Sup del Elemento Taylor-Hood es un tema abordado por la matemática pura.

3.3.2 FUNCIONES DE FORMA DE LOS ELEMENTOS FINITOS TAYLOR - HOOD

Los elementos finitos son polinomios lineales que permiten la aproximación a una función, considerando que la función a ser reemplazada tiene un grado de dificultad considerado tanto para su integración como para su representación gráfica. Elemento finito se denomina al conjunto de polinomios, mientras que a una sola función polinomial se denomina función de forma.

El elemento Taylor-Hood permite representar polinomialmente dos campos, el campo escalar de presión y el campo vectorial de velocidad. La figura 3.5 muestra el elemento finito de seis nodos de Taylor-Hood:



Fuente: BATHE, Klaus J., Finite Element Procedures. United States. 2006.

De la figura 3.5 se puede determinar que los nodos 1, 2, 3 serán las funciones de forma que interpolan el campo escalar de presión, mientras que los nodos 1, 2, 3, 4, 5, 6 serán las funciones de forma que interpolan el campo vectorial de velocidad, el mismo campo que posee dos grados de

libertad, el primer grado que representará la velocidad en dirección en x mientras que el segundo grado de libertad representará la velocidad en y

La interpolación del campo de presión es:

$$P_j = \sum W_j P_j \quad (\text{EC. 3-13})$$

El campo vectorial de velocidad es interpolado por la ecuación 3-14 y 3-15:

$$u_i = \sum H_i u_i \quad (\text{EC. 3-14})$$

$$v_i = \sum H_i v_i \quad (\text{EC. 3-15})$$

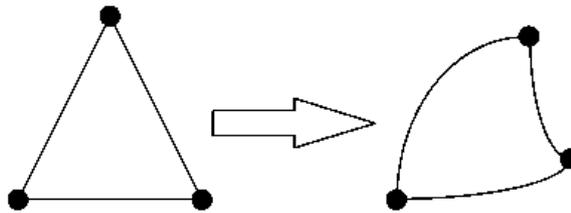
La matriz indica las funciones de forma de cada nodo del elemento finito triangular de Taylor-Hood:

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{h}_1 = \\ \mathbf{h}_2 = \\ \mathbf{h}_3 = \\ \mathbf{h}_4 = \\ \mathbf{h}_5 = \\ \mathbf{h}_6 = \end{array} \begin{array}{l} 1 - r - s \\ r \\ s \\ 4 r (1 - r - s) \\ 4 r s \\ 4 s (1 - r - s) \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{i} = 4 \\ -\frac{1}{2} h_4 \\ -\frac{1}{2} h_4 \\ -\frac{1}{2} h_5 \\ -\frac{1}{2} h_5 \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{i} = 5 \\ \\ -\frac{1}{2} h_5 \\ -\frac{1}{2} h_5 \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{i} = 6 \\ -\frac{1}{2} h_6 \\ -\frac{1}{2} h_6 \\ -\frac{1}{2} h_6 \end{array} \right]$$

3.4 TRANSFORMACIONES ISOPARAMÉTRICAS

Se considera un dominio Ω de geometría irregular, un dominio curvo, el cual obliga a deformar el elemento finito. El objetivo de las Transformaciones Isoparamétricas es permitir a los elementos finitos adaptarse a geometrías irregulares, Figura 3.6.

Figura 3.6: Transformaciones isoparamétricas



Fuente: Zienkiewicz, O., Morgan K., Finite Elements and Approximation. London, 1980.

Se considera la siguiente función:

$$f = f(x(r, s), y(r, s)) \quad (\text{EC. 3-16})$$

Derivando la ecuación 3-16 mediante la Regla de la Cadena se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (\text{EC. 3-17})$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (\text{EC. 3-18})$$

La representación matricial de las ecuaciones 3-17 y 3-18 describe en la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 3-19})$$

La Transformación Isoparamétrica se genera al despejar las variables que se encuentran en función de (x, y) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 3-20})$$

Representando

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s}$$

3.5 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

Las condiciones iniciales describen el estado de un sistema al inicio de un intervalo de tiempo, un conjunto inicial de datos permite a las leyes naturales establecer la evolución del sistema a lo largo del tiempo, la representación es:

$$(u, v) = (u_0, v_0) \quad (\text{EC. 3-21})$$

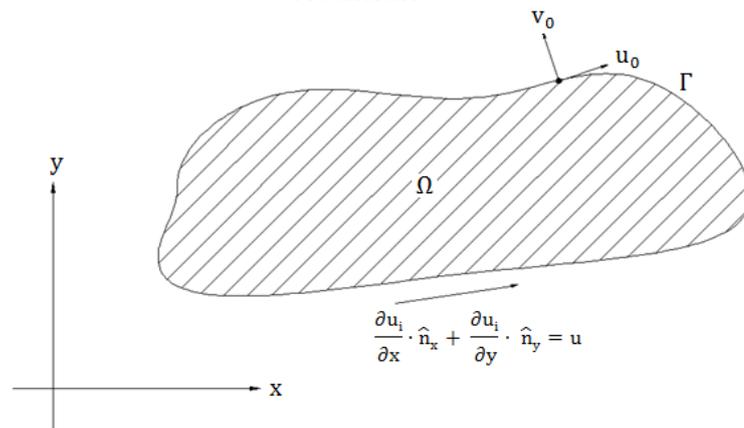
Por otro lado, las condiciones de frontera son valores conocidos en el borde del sistema, son tantas las condiciones de frontera conocidos como nodos existentes, solo de esta manera se elimina la singularidad de la matriz

de rigidez, los tipos de condiciones son: Dirichlet y Neuman, los cuales se representan en Figura 3.7

Las condiciones de Dirichlet, 3-22, es la representación de un valor conocido de las variable dependientes ubicadas en el borde del continuo.

$$\begin{cases} u_D = f(\Gamma) \\ v_D = f(\Gamma) \end{cases} \quad (\text{EC. 3-22})$$

Figura 3.7: Representación de las condiciones de Dirichlet y Neuman



Fuente: Zienkiewicz, O., Morgan K., Finite Elements and Approximation. London, 1980.

Las condiciones de Neuman, 3-23, son vectores de carga, los mismos que actúan sobre la derivada de las funciones en la frontera del continuo.

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} \cdot \hat{n}_x + \frac{\partial u_i}{\partial y} \cdot \hat{n}_y \right] = u \\ \left[\frac{\partial v_i}{\partial x} \cdot \hat{n}_x + \frac{\partial v_i}{\partial y} \cdot \hat{n}_y \right] = v \end{cases} \quad (\text{EC. 3-23})$$

3.6 MÉTODOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Es importante recordar que el sistema matemático de los Elementos Finitos, Figura 3.4 y Ecuación 3-1, genera un conjunto de ecuaciones algebraicas que deben ser resueltas mediante un Método Numérico. En la presente sección se explicarán los métodos que permiten solucionar sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Adicionalmente, se presentará la resolución de las ecuaciones de equilibrio en estado estacionario y transitorio.

3.6.1 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN ESTADO ESTACIONARIO LINEALES

El método numérico seleccionado para la resolución del conjunto de sistemas de ecuaciones estacionario lineal es la Factorización de Doolittle, el mismo que se basa en la Eliminación de Gauss usando la descomposición LU.

El sistema de ecuaciones de equilibrio algebraicas es representado en la ecuación 3-24

$$[A_{kk}]\{x_k\} = \{B_k\} \quad (\text{EC. 3-24})$$

Siendo:

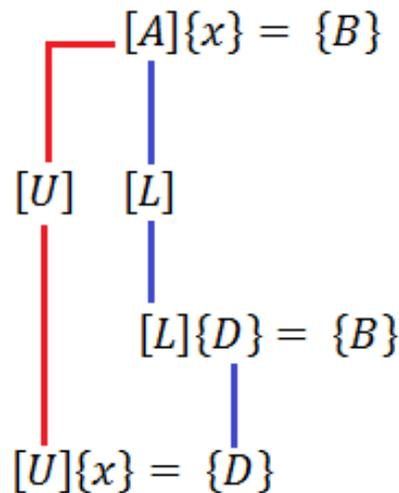
$[A_{kk}]$ Matriz no singular y simétrica de orden $k \times k$

$\{x_k\}$ Vector de variable de orden k

$\{B_k\}$ Vector de carga de orden k

El procedimiento de cálculo se muestra en la Figura 3.8. La Factorización de Doolittle se basa en construir una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior mediante la descomposición LU, la solución del sistema consta de dos etapas, es importante notar que la inversa de una matriz triangular superior como inferior son relativamente fáciles de obtener y el ahorro del costo computacional es significativo, ofreciendo un tiempo de cálculo inmediato.

Figura 3.8: Esquema de la factorización de Doolittle



Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALES, Raymond P., Métodos numéricos para ingenieros. México. 2004.

Siendo:

- $[U]$ Matriz no singular, triangular superior
- $[L]$ Matriz no singular, triangular inferior
- $\{D\}$ Vector enlace

El análisis en estado estacionario de la ecuación 3-1 es la ecuación 3-25. La matriz de rigidez es tratada mediante el esquema de Factorización de Doolittle, Figura 3.8

$$K_{ij} T_j = f_j \quad (\text{EC. 3-25})$$

Donde:

K_{ij}	Matriz de Rigidez
f_j	Vector de Carga
T_j	Variable Dependiente

3.6.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN ESTADO ESTACIONARIO NO LINEALES

Los métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones de equilibrio no lineales tiene un costo computacional muy elevado, al igual que el tiempo de cálculo, ventajosamente, un método alternativo a la solución de sistemas no lineales es el Método Iterativo de Punto Fijo, el mismo que resuelve los sistemas de ecuaciones de equilibrio no necesariamente lineales de la forma:

$$g(x) = x \quad (\text{EC. 3-26})$$

Siendo:

$g()$	Función
x	Variable Independiente

El principio teórico del Método Iterativo de Punto Fijo es evaluar el término no lineal con el término lineal, calculado en la iteración $n - 1$. El análisis en estado estacionario de la ecuación 3-1 no lineal es la ecuación 3-27.

$$K_{ij}^n T_j = f_j - K_{ij}^{n-1} \cdot T_j^{n-1} \quad (\text{EC. 3-27})$$

Donde:

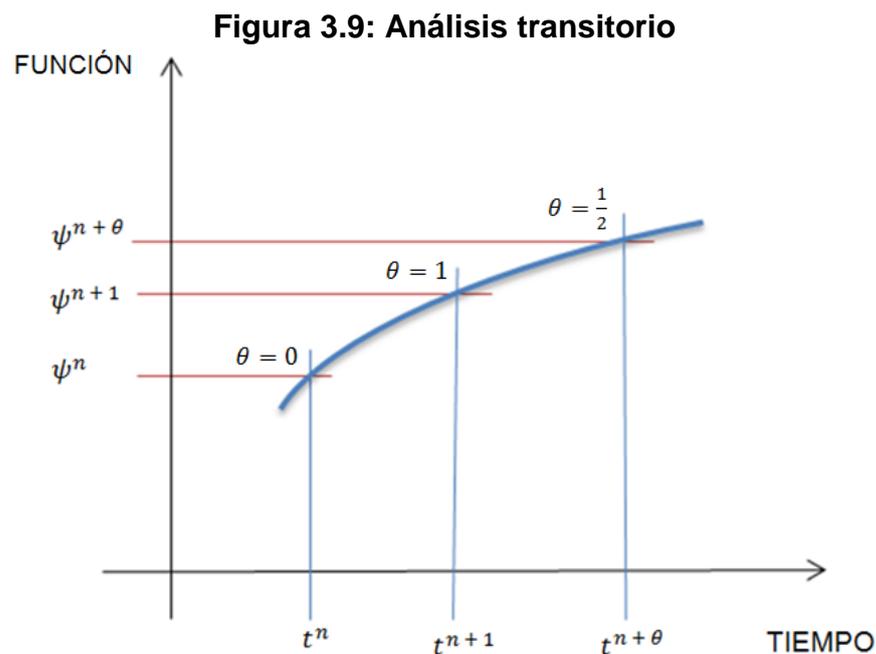
K_{ij}	Matriz de Rigidez
f_j	Vector de Carga
T_j	Variable Dependiente
n	Iteración actual –variables a ser calculadas-
$n - 1$	Iteración pasada –variables conocidas-

Lo interesante del Método Iterativo de Punto Fijo es el sistema de ecuaciones que debe ser resuelto, ecuación 3-27, es lineal y se lo puede hacer mediante la sección 3.6.1, esquema de Doolittle, mientras se actualizan los valores del lado derecho de la ecuación 3-27 con cada iteración posterior.

3.6.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN ESTADO TRANSITORIO

Resolver el modelo matemático de un fenómeno físico en estado transitorio es el equivalente de resolver un conjunto de estados estacionarios en pequeños intervalos de tiempo, siendo los valores anteriores las condiciones iniciales del fenómeno para el siguiente paso de tiempo, finalmente, se llega al estado equilibrio general.

El estudio del estado transitorio permite analizar la evolución del fenómeno físico a través del tiempo. Tal análisis se genera al estudiar la función y su evolución en cada instante, figura 3.9



Representando:

ψ	Función
n	Intervalo
t	Variable de Tiempo

La razón θ es determinada mediante la Figura 3.9 es:

$$\theta = \frac{\psi^{n+\theta} - \psi^n}{\psi^{n+1} - \psi^n}$$

De la razón es despejada $\psi^{n+\theta}$:

$$\psi^{n+\theta} = \theta \psi^{n+1} + \psi^n (1 - \theta) \quad (\text{EC. 3-28})$$

El método generalizado para el estudio en estado transitorio es representado mediante la ecuación 3-28, mientras que los métodos transitorios se originan al considerar los siguientes valores:

$\theta = 0$	Método explícito
$\theta = \frac{1}{2}$	Método Crank-Nicolson
$\theta = 1$	Método implícito

El análisis transitorio de la ecuación 3-1 muestra la evolución del fenómeno físico a través del tiempo. El término transitorio es tratado mediante diferencias finitas.

$$C_{ij} \left\{ \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} \right\} + K_{ij} T_j^{n+\theta} = f_j \quad (\text{EC. 3-29})$$

El término temporal en el paso $n + 1$ es despejado de la ecuación 3-29:

$$(C_{ij} + \theta \Delta t K_{ij}) \{ T_j^{n+1} \} = (C_{ij} - \Delta t (1 - \theta) K_{ij}) \{ T_j^n \} + \Delta t f_j$$

Finalmente, organizando y renombrando los términos se obtiene:

$$\widehat{\mathbf{M}}_{ij} \{T_j^{n+1}\} = \widehat{\mathbf{N}}_{ij} \{T_j^n\} + \widehat{\mathbf{f}}_j \quad (\text{EC. 3-30})$$

La ecuación 3-30 permite el estudio de los fenómenos físicos en estado transitorio, siendo:

$$\widehat{\mathbf{M}}_{ij} \quad (C_{ij} + \theta \Delta t K_{ij})$$

$$\widehat{\mathbf{N}}_{ij} \quad (C_{ij} - \Delta t (1 - \theta) K_{ij})$$

$$\widehat{\mathbf{f}}_j \quad \Delta t f_j$$

CAPÍTULO 4. DINÁMICA DE LOS FLUIDOS APLICANDO HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES

La Dinámica de los Fluidos Computacionales (CFD, siglas en inglés) es un conjunto de técnicas numéricas que se enfocan en resolver las ecuaciones diferenciales que gobiernan la Mecánica de Fluidos. Los FEM resuelven problemas sin superficies libres, actualmente, el Método de las Partículas Finitas (MPF, siglas en inglés), aún en estudio, simula fluidos que rompen y generar el continuo.

El presente capítulo indica la aplicación de todos los conceptos descritos en los capítulos previos, las Ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles se deducen en el capítulo dos, mientras que el método de los FEM se estudia en el capítulo 3.

El estudio de la cinemática de los fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles en régimen laminar inicia con la formulación fuerte de las ecuaciones, sección 4.1. El origen de las matrices base, esenciales para la generación del código informático, se origina de la formulación débil, sección 4.2, el procedimiento detallado de la formulación débil se ofrece en la sección 4.3. Finalmente, la resolución de la no linealidad principal característica de las Ecuaciones de Navier-Stokes es estudia con la relación 4-7.

4.1 FORMULACIÓN FUERTE DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DE UN FLUIDO INCOMPRESIBLE E ISOTRÓPICO

La deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad de un fluido Newtonianos, incompresible e isotrópico se presenta en el capítulo dos. La formulación fuerte del modelo matemático que representa la cinemática de los fluidos Newtonianos isotrópicos es:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla \cdot p + \nabla^2 \vec{V} + \vec{C} \quad (\text{EC. 4-1})$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{EC. 4-2})$$

Siendo

ρ	Densidad
$\frac{D}{Dt}$	Derivada Sustancial
\vec{V}	Campo Vectorial de Velocidad
\vec{C}	Fuerzas de cuerpo
∇	Operador Nabla
p	Campo Escalar de Presión

La ecuación de conservación de movimiento 4-1 representa la segunda Ley de Newton dentro del enfoque de la Mecánica de los Fluidos, La incompresibilidad del fluido se garantiza mediante la ecuación 4-2.

El procedimiento de la sección 3.2 permite la discretización de las ecuaciones 4-1 y 4-2 mediante el Método de los Elementos Finitos.

4.2 FORMULACIÓN DÉBIL DE LA ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

La formulación débil, sección 3.2.1, es multiplicar los espacios funcionales de Sobolev, ecuación 3.4, y el espacio funcional de Lipschitz-continua, ecuación 3.5 por las ecuaciones diferenciales 4.1 y 4.2 e integrar sobre el dominio Ω , por lo tanto se obtiene:

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \nabla^2 \vec{V} + \nabla \cdot p \right) \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{C} \cdot v \, d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{EC. 4-3})$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{V}) \cdot q \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \quad (\text{EC. 4-4})$$

Simplificando y reorganizando los términos de la ecuación 4-3, se determina:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot v \, d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \cdot v \, d\Omega - \frac{\mu}{\rho} \int_{\Omega} (\nabla^2 \vec{V}) \cdot v \, d\Omega \\ + \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} (\nabla \cdot p) \cdot v \, d\Omega = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} (\vec{C}) \cdot v \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{EC. 4-5})$$

El procedimiento sometido a la ecuación 4.3 y 4.4 se denomina el Método de los Residuos Ponderados, sección 3.2.2, por otro lado, uno de los conceptos fundamentales dentro de los Elementos Finitos es el Teorema de Green, sección 3.2.3. Aplicando la relación 3-6 sobre la ecuación 4-5, organizando y simplificando se determina, la formulación débil de la ecuación de Navier-Stokes, ecuación 4-6 y 4-4:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \frac{\mu}{\rho} \int_{\Omega} \nabla \vec{V} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \\
& \quad - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \\
& = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \vec{C} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \frac{\mu}{\rho} \int_{\Gamma} (\nabla \vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \\
& \quad - \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} (\mathbf{p} \cdot \vec{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{EC. 4-6}$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$$

4.3 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

La principal característica de las ecuaciones de la dinámica de los fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles, ecuaciones 4-4 y 4-6, es la no linealidad existente. El CFD ofrece un sin número de métodos para resolverlos en función de la aplicabilidad del fluido.

El presente trabajo aplica el método de Fluido Cuasi - Incompresible, para garantizar la convergencia de resultados y el Método Iterativo de Punto Fijo, sección 3.6.3, para resolver la no linealidad.

El principio del Método Iterativo de Punto Fijo es evaluar el término no lineal con el término lineal, calculando en la iteración $n - 1$, como se indica en la siguiente ecuación:

$$K_{ij}^n T_j = f_j - K_{ij}^{n-1} \cdot T_j^{n-1} \tag{EC. 4-7}$$

Donde:

K_{ij}	Matriz de Rigidez
f_j	Vector de Carga
T_j	Variable Dependiente
n	Iteración actual –variables a ser calculadas-
$n - 1$	Iteración pasada –variables conocidas-

Lo interesante del Método Iterativo de Punto Fijo es el sistema de ecuaciones que debe ser resuelto, ecuación 4-7, es lineal. Por lo tanto la ecuación 4-7 se resuelve mediante esquema de Doolittle, sección 3.6.1. El parámetro de compresibilidad c actúa directamente sobre la ecuación de conservación de masa.

4.3.1 GENERACIÓN DE MATRICES BASE

El conjunto de matrices base son indispensables para la generación del código computacional, las cuales se originan de la formulación débil. Considerando la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dirección x :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \quad (\text{EC. 4-8})$$

La formulación débil se obtiene al aplicar el Método de Residuos Ponderados a la ecuación 4-8, y las interpolaciones de los campos de velocidad y presión:

$$\begin{aligned}
 & -\mu \int_{\Omega} H_i \left(\frac{\partial^2(H_i u_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(H_i u_i)}{\partial y^2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} H_i \frac{\partial(W_j p_j)}{\partial x} d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} H_i f_x d\Omega
 \end{aligned} \tag{EC. 4-9}$$

A continuación, se aplica en el Teorema de Green-Gauss en la ecuación 4-9 y se obtiene la ecuación en formulación débil en dirección x :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu}{\rho} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x} \frac{\partial H_i}{\partial x} + \frac{\partial H_i}{\partial y} \frac{\partial H_i}{\partial y} \right) \{u_i\} d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial H_i}{\partial x} W_j \{P_j\} d\Omega \\
 & = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} H_i f_x d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} H_i W_j \cdot \hat{n}_x \{P_j\} d\Gamma \\
 & + \frac{\mu}{\rho} \int_{\Gamma} H_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} \cdot \hat{n}_x + \frac{\partial u_i}{\partial y} \cdot \hat{n}_y \right] d\Gamma
 \end{aligned} \tag{EC. 4-10}$$

El procedimiento anterior debe ser repetido para obtener la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dirección y , ecuación 4-11:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu}{\rho} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x} \frac{\partial H_i}{\partial x} + \frac{\partial H_i}{\partial y} \frac{\partial H_i}{\partial y} \right) \{v_i\} d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial H_i}{\partial y} W_j \{P_j\} d\Omega \\
 & = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} H_i f_y d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} H_i W_j \cdot \hat{n}_y \{P_j\} d\Gamma \\
 & + \frac{\mu}{\rho} \int_{\Gamma} H_i \left[\frac{\partial v_i}{\partial x} \cdot \hat{n}_x + \frac{\partial v_i}{\partial y} \cdot \hat{n}_y \right] d\Gamma
 \end{aligned} \tag{EC. 4-11}$$

Sin Embargo, la Ecuación de Continuidad con el Método de Estabilización en Formulación Fuerte es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - c = 0 \quad (\text{EC. 4-12})$$

Aplicando en la ecuación 4-12 el Método de Residuos Ponderados y los Campos de Interpolación se determina la Formulación Débil de la Ecuación de Continuidad:

$$\int_{\Omega} \left(W_j \frac{\partial H_i}{\partial x_1} \{u_i\} + W_j \frac{\partial H_i}{\partial x_2} \{v_i\} \right) d\Omega - \int_{\Omega} W_j c d\Omega = 0 \quad (\text{EC. 4-13})$$

4.3.2 TRANSFORMACIÓN ISOPARAMÉTRICAS

La implementación computacional se realiza mediante las Matrices Base, la cuales son generadas mediante la Transformación Isoparamétrica, sección 3.4, tal procedimiento aplicado en las ecuaciones: 4-10, 4-11 y 4-13 se genera un conjunto de matrices:

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{f} \quad (\text{EC. 4-14})$$

Siendo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 0 & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 4-15})$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ p_j \\ c_j \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 4-16})$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 4-17})$$

La ecuación 4-15 adquiere la forma de la ecuación 3-1 y con ello el significado de cada término. La matriz 4-15 representa la Matriz de Rigidez, el vector de variables es representado por la ecuación 4-16, finalmente, el vector de carga es representado por la ecuación 4-17.

La matriz de rigidez, ecuación 4-15, está constituida por sub matrices menores cuya discretización es:

$$\mathbf{K}_{11} = \mu \int_{r,s} \left[\frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{bmatrix} \right]^T \left[\frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{bmatrix} \right] |\det J| \quad (\text{EC. 4-18})$$

$$\mathbf{K}_{13} = - \int_{r,s} \left[\frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{bmatrix} \right]^T w_j |\det J| dr ds \quad (\text{EC. 4-19})$$

$$+ \int_{\Gamma} [H_i]^T [W_j] \cdot \hat{n}_x |\det J| d\Gamma$$

$$\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{11} \quad (\text{EC. 4-20})$$

$$\mathbf{K}_{23} = - \int_{r,s} \left[\frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{bmatrix} \right]^T W_j |\det J| dr ds \quad (\text{EC. 4-21})$$

$$+ \int_{\Gamma} [H_i]^T [W_j] \cdot \hat{n}_Y |\det J| d\Gamma$$

$$\mathbf{K}_{31} = [\mathbf{K}_{13}]^T \quad (\text{EC. 4-22})$$

$$\mathbf{K}_{32} = [\mathbf{K}_{23}]^T \quad (\text{EC. 4-23})$$

$$\mathbf{K}_{34} = - \int_{r,s} [W_j]^T |\det J| dr ds \quad (\text{EC. 4-24})$$

$$\mathbf{K}_{43} = [\mathbf{K}_{34}]^T \quad (\text{EC. 4-25})$$

El vector de carga, ecuación 4-17, es discretizado por sub vectores menores a continuación expresados:

$$\mathbf{f}_X = f_X \int_{r,s} [H_i]^T |\det J| dr ds + u \int_{\Gamma} [H_i]^T |\det J| d\Gamma \quad (\text{EC. 4-26})$$

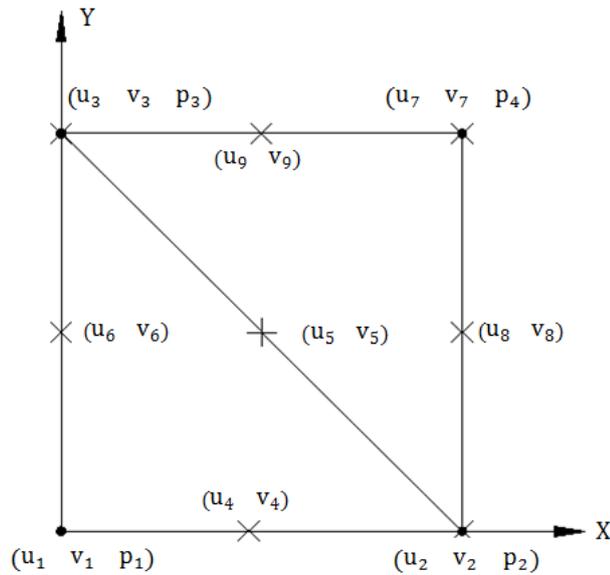
$$\mathbf{f}_Y = f_Y \int_{r,s} [H_i]^T |\det J| dr ds + v \int_{\Gamma} [H_i]^T |\det J| d\Gamma \quad (\text{EC. 4-27})$$

Las ecuaciones del 4-18 al 4-27 permiten la implementación computacional, sin embargo, tales ecuaciones constituyen un Sistema de Ecuaciones Algébricas Lineales, las mismas que deben ser resueltas por el Método Doolittle.

4.4 ENSAMBLE DE MATRICES BASE EN FUNCIÓN DE DOS ELEMENTOS FINITOS

El ensamble de la matriz global se realiza mediante la figura 4.1, mediante la cual se describe el listado de coordenadas y conectividades.

Figura 4.1: Dominio de dos elementos triangulares de Taylor-Hood



La matriz global es de dimensión 26×26 , ecuación 4-28, siendo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ y $j = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 0 & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ p_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{iX} \\ f_{iY} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 4-28})$$

El campo vectorial de velocidad es representado por seis nodos con dos grados de libertad cada uno, mientras que el campo escalar de presión es representado por tres nodos en cada elemento.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS NUMÉRICOS Y CASOS DE ESTUDIO

Los capítulos anteriores presentan las bases teóricas suficientes para la generación de un algoritmo independiente, enfocado a resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales cuyas variables independientes sean irreducibles. Como resultado se generó el programa BasicCFD cuyas siglas son: Dinámica de los Fluidos Computacionales Básico (siglas en ingles).

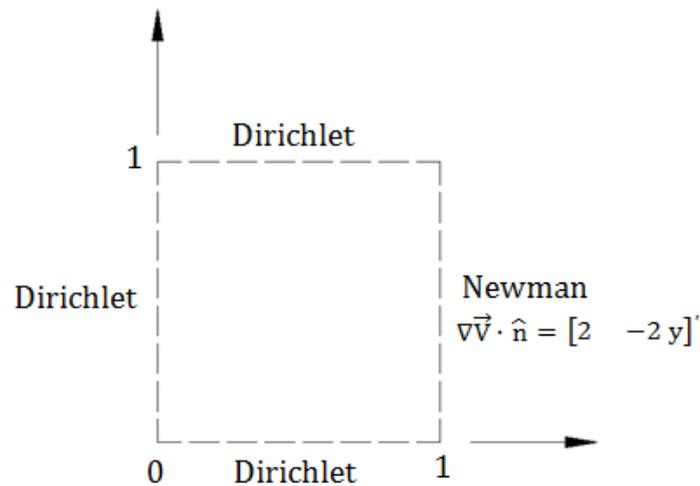
El BasicCFD es un software de código independiente desarrollado en plataforma MATLAB®, enfocado en resolver mediante el Métodos de los Elementos Finitos las ecuaciones de Navier-Stokes de fluidos isotrópicos Newtonianos de viscosidad constante e incompresibles. La información de discretización del dominio se obtiene mediante el Software comercial GID 11 en versión estudiantil.

El presente capítulo tiene como finalidad presentar los resultados numéricos, convergencia y análisis de exactitud del BasicCFD, finalmente, se tomaran casos de estudio que representaran aplicaciones ingenieriles reales que serán resueltas mediante el software.

5.1 PROBLEMA DE BENCHMARK II: CAVIDAD CUADRADA CON FUERZAS DE CUERPO

Siendo el dominio: $\Omega = (0,1)^2$, Figura 5.1, las condiciones de Dirichlet $\mathbf{f} = (-1, 0)'$ y viscosidad $\nu = 1$.

Figura 5.1: Dominio del problema de Benchmark I



5.1.1 RESULTADOS NUMÉRICOS BENCHMARK I

La simulación numérica mediante el BasicCFD genera las gráficas: Campo de presión, Figura 5.2 y Campo de velocidad, Figura 5.3.

Figura 5.2: Simulación del campo de presión, Benchmark I

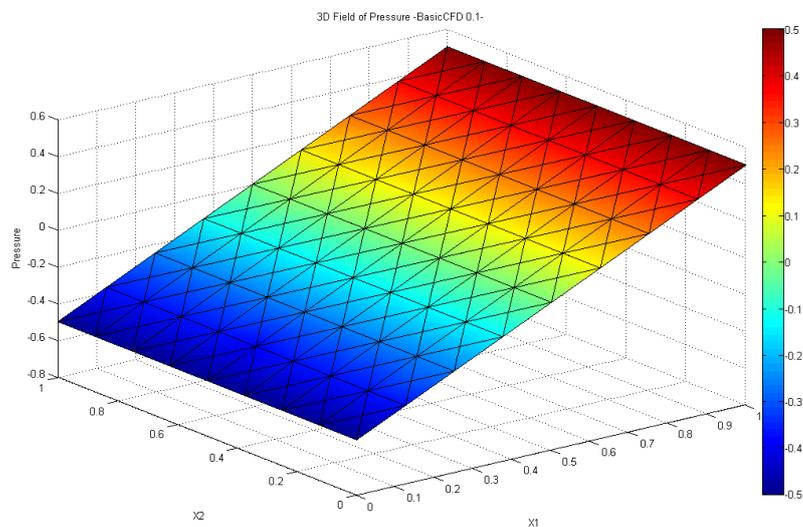
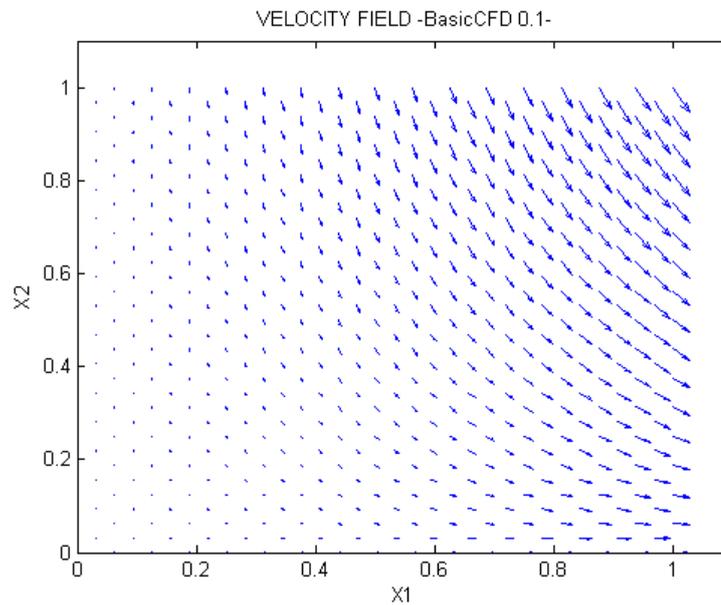


Figura 5.3: Simulación del campo de velocidad, Benchmark I



5.1.2 CURVAS COMPARATIVAS ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS ANALÍTICOS

Los resultados analíticos para el problema de Benchmark I para el campo de presión y campo de velocidad son:

$$\mathbf{u}(x, y) = [x^2 \quad -2xy]'$$
 (EC. 5-1)

$$p(x, y) = x - 0.5$$
 (EC. 5-2)

Las curvas comparativas entre la solución analítica, ecuaciones 5-1 y 5-2, y el resultado numérico se indica en las figuras: 5.4 y 5.5.

Es importante resaltar, que en esta primera evaluación del algoritmo del BasicCFD se tiene un error porcentual de la simulación y el resultado analítico del cero por ciento, demostrando un código de programación apropiado y una convergencia óptima.

Figura 5.4: Simulación numérica vs solución analítico del campo de velocidad U, Benchmark I

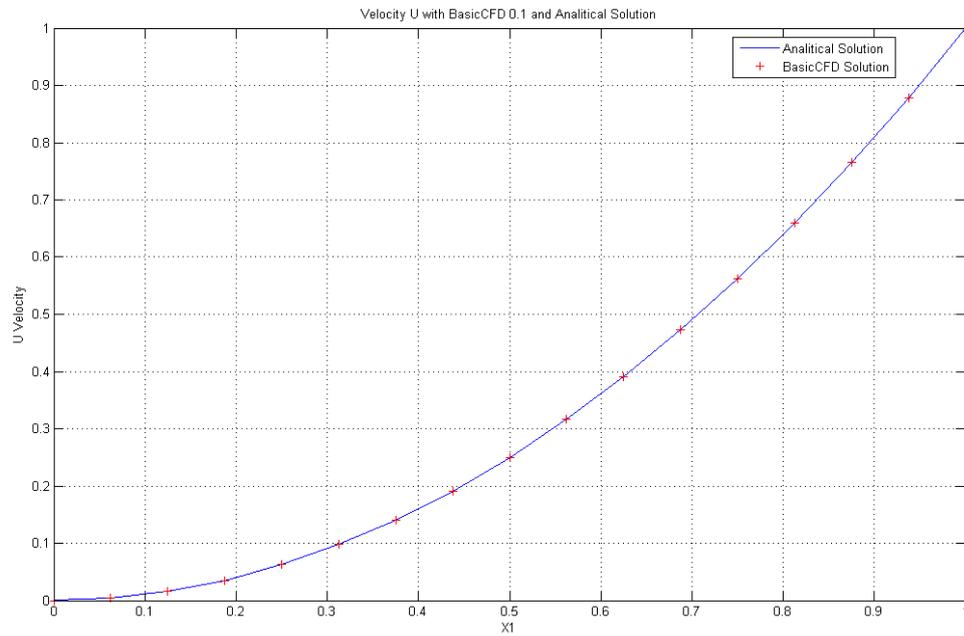
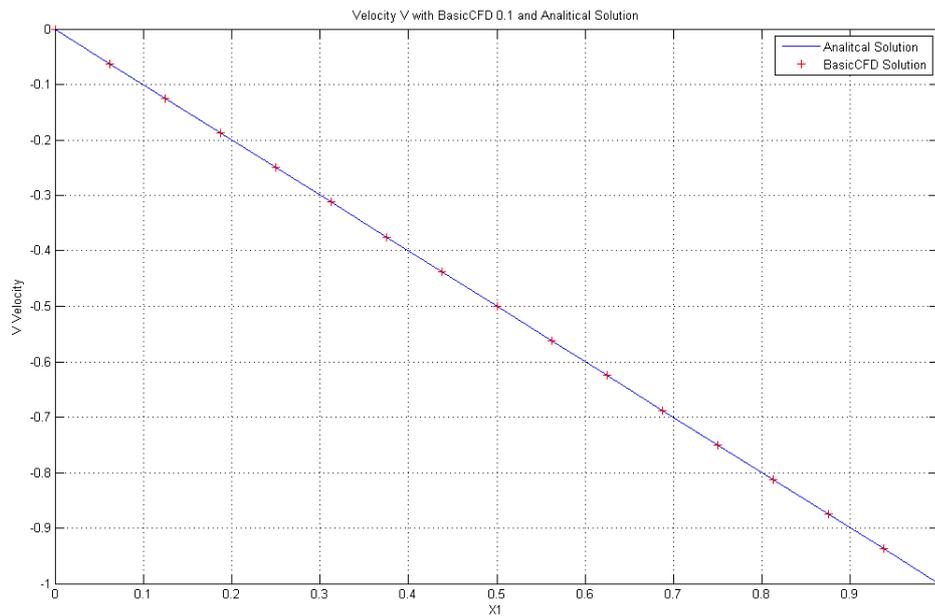


Figura 5.5: Simulación numérica vs solución analítico del campo de velocidad V, Benchmark I



5.2 PROBLEMA DE BENCHMARK II: CAVIDAD CUADRADA CON FUNCIONES DE FUERZAS DE CUERPO

El ejercicio de análisis numérico No. 2 de tipo cavidad cuadrada en dos dimensiones (x y) definirá la exactitud y las limitaciones del algoritmo del software BasicCFD.

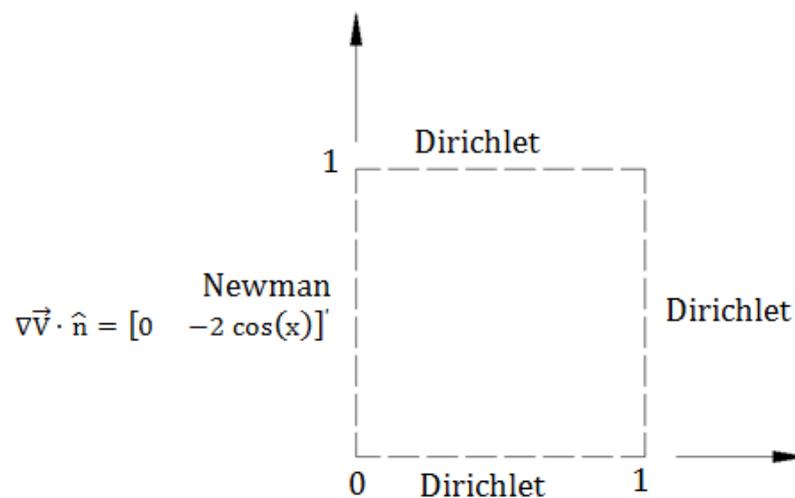
El dominio del problema $\Omega = (0, 1)^2$ se muestra en la Figura 5.6. Las fuerzas de cuerpo son:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} y + \sin(x) \\ x - y \cos(x) \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 5-3})$$

Las condiciones de frontera, las mismas que representan la solución analítica son:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sin(x) \\ -y \cos(x) \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 5-4})$$

Figura 5.6: Dominio del problema de Benchmark II



5.2.1 RESULTADOS NUMÉRICOS BENCHMARK II

La simulación numérica mediante el BasicCFD genera las gráficas:

- Campo de presión, Figura 5.7
- Campo de velocidad, Figura 5.8

Figura 5.7: Simulación del campo de presión, Benchmark II

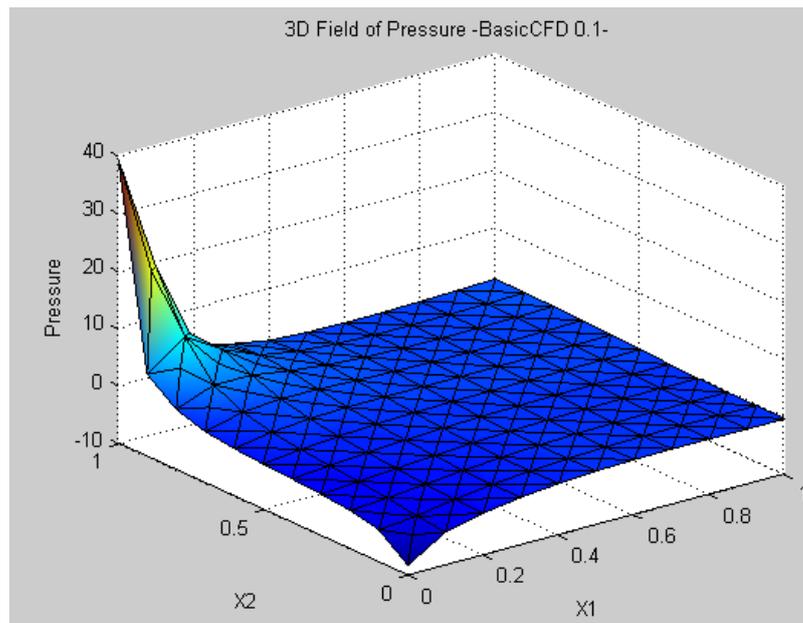
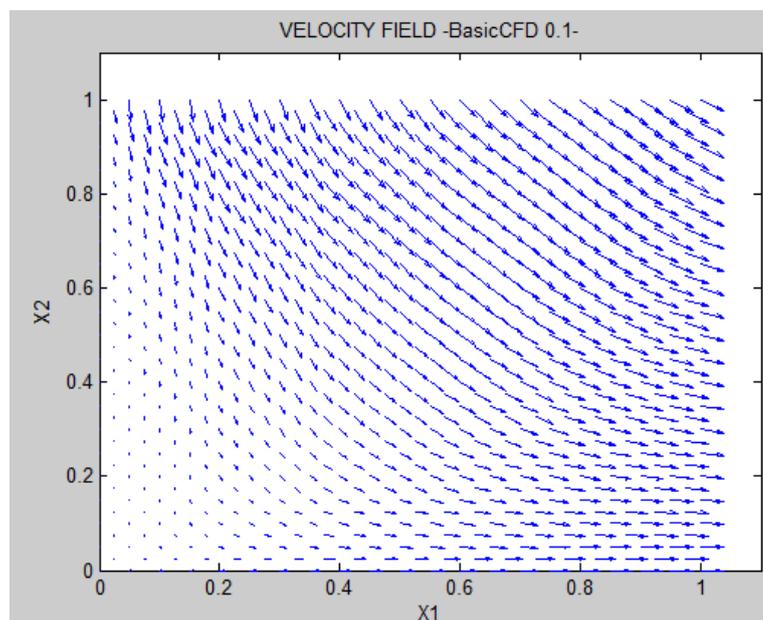


Figura 5.8: Simulación del campo de velocidad, Benchmark II



5.2.2 CURVAS COMPARATIVAS ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS ANALÍTICOS

Las curvas comparativas entre la solución analítica, ecuación 5-4, y el resultado numérico se indica en las figuras: 5.9 y 5.10

Figura 5.9: Simulación numérica vs solución analítico del campo de velocidad U, Benchmark II

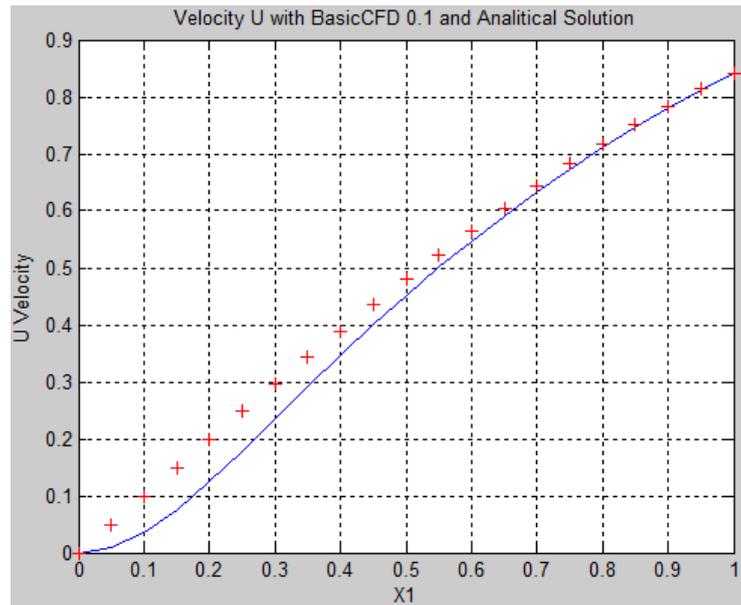
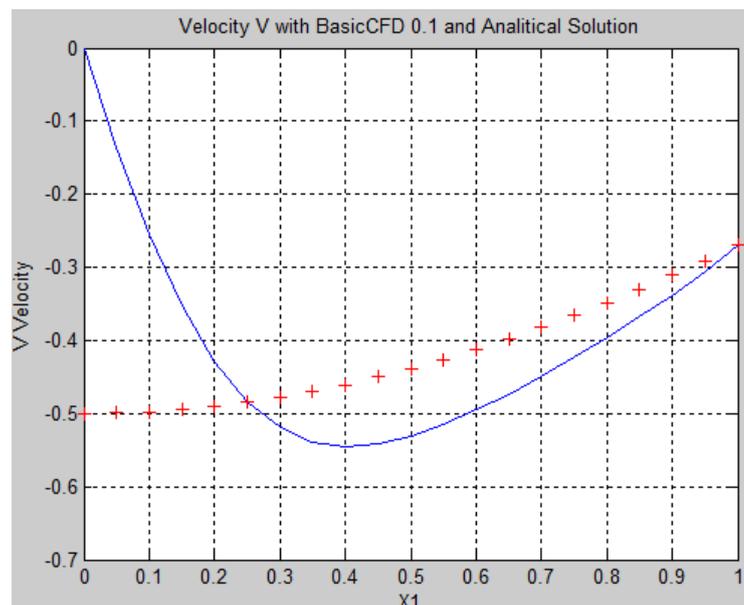


Figura 5.10: Simulación numérica vs solución analítico del campo de velocidad V, Benchmark II



La curva comparativa entre la simulación numérica y la curva de la solución analítica, figura 5.9, indica un error porcentual del 1.2%, mientras que, la comparativa de la figura 5.10, indica que el error porcentual se dispara en el inicio del dominio con un error porcentual 12%.

El presente problema tiene como objetivo conocer la limitación del algoritmo del BasicCFD, debido que el problema de Benchmarck II posee un número de Reynold cerca de 50, por lo tanto, el flujo deja de permanecer de un flujo laminar. Es importante recordar que el BasicCFD es un software independiente enfocado a resolver fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles en régimen laminar.

Para tratar fluidos Newtonianos fuera del régimen laminar es importante modificar el modelo matemático que es descrito en el capítulo 2 y adicionalmente modificar el código fuente del problema y las matrices base mostradas en el capítulo 4, es necesario reconocer que para tal modificación, se ti

ene un recurso que es una base para próximas versiones que muestren tales mejoras.

El objetivo principal del presente trabajo tiene como objetivo mostrar una base teórica y la generación de un algoritmo computacional base lo suficientemente confiable y fuerte para incrementar módulos que permita incluir nuevos casos de estudio, es decir, nuevos problemas de Benchmarck.

5.3 PROBLEMA DE BENCHMARK III: CAVIDAD CUADRADA CON SENTIDOS DE FLUJO DIRECCIONADOS

Además de los ejercicios de Benchmark de soluciones analíticas, existen los problemas de sentidos de flujo direccionados, es decir, se plantea una cavidad cuadrada y las condiciones de Dirichlet necesarias para predecir o intuir el campo de velocidades y el campo de presiones que se van a desarrollar por efecto de un sentido de flujo impuesto.

El dominio de la cavidad cuadrada en dos dimensiones (x, y) , $\Omega = (0, 1)^2$ se muestra en la Figura 5.11.

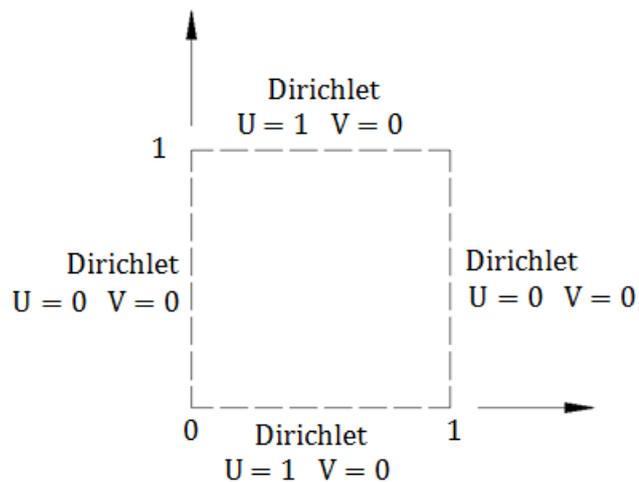
Además, este problema se seleccionó como fuerzas de cuerpo el campo gravitacional, el mismo que se representa:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 5-5})$$

Las condiciones de frontera tipo Dirichlet es:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 5-6})$$

Figura 5.11: Dominio del problema de Benchmark III



5.3.1 RESULTADOS NUMÉRICOS BENCHMARK III

La simulación numérica mediante el BasicCFD genera las gráficas:

Campo de presión, Figura 5.12, Campo de velocidad, Figura 5.13

Figura 5.12: Simulación del campo de presión, Benchmarck III

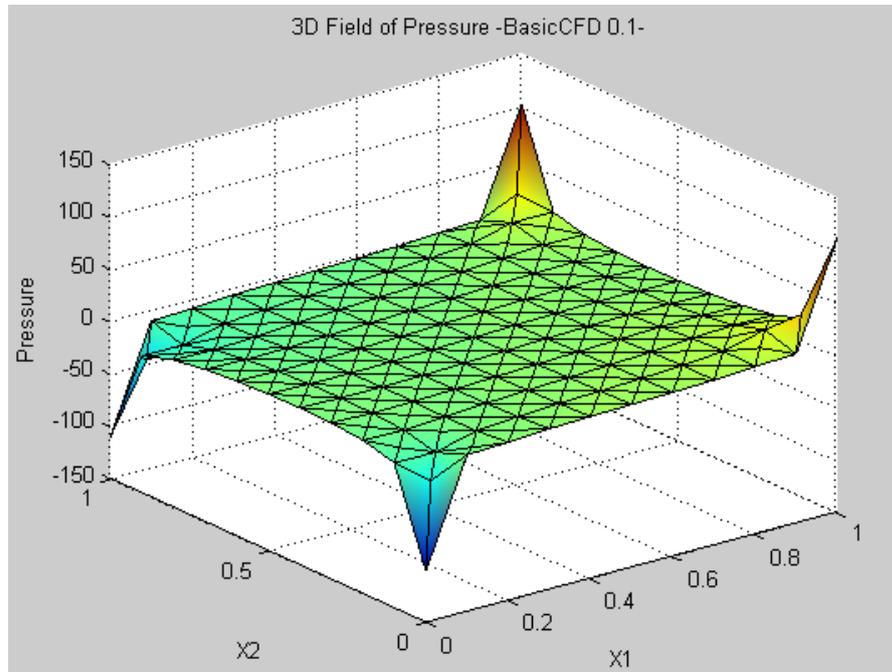


Figura 5.13: Simulación del campo de velocidad, Benchmarck III

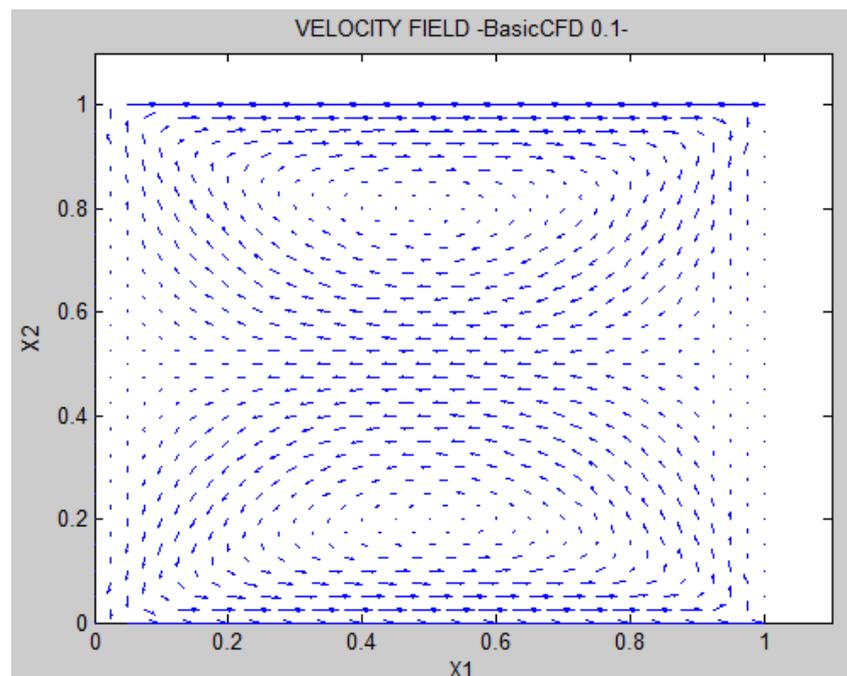
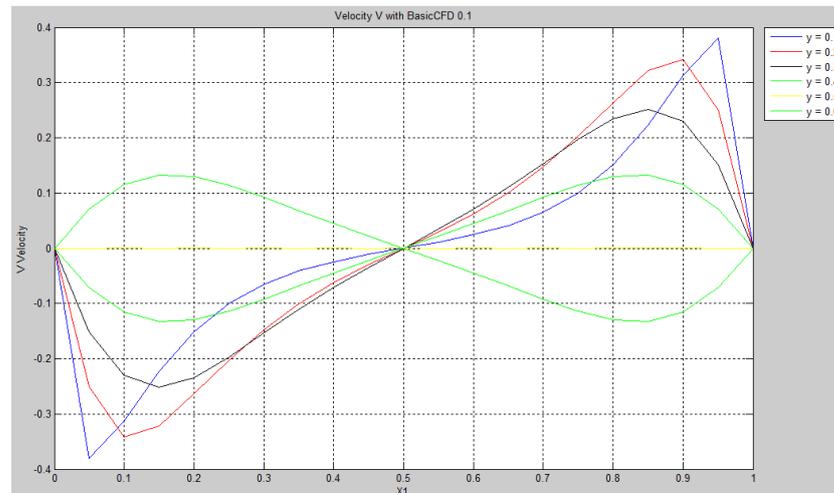


Figura 5.15: Perfil de velocidades del campo de velocidad V, Benchmark III



Los problemas de Benchmark tienen como objetivo principal evaluar y validar el código computacional, tal validación se realiza en función del error porcentual. Es importante entender que la valoración cualitativa y cuantitativa resultante de los problemas de Benchmark.

El problema de Benchmark I, tiene un error porcentual del 0% en el balance de resultados entre la solución analítica y la solución numérica generada por el BasicCFD, es decir, el software es adecuado para fluidos de número de Reynold dentro de un flujo laminar. Sin embargo el problema tipo de Benchmark II tiene un error porcentual de 17%, el incremento sustancial del error es debido a que el flujo tiene un número de Reynold cerca de 50, es decir, está dejando de ser un flujo ordenado y laminar. Finalmente, el problema tipo de Benchmark III valida al BasicCFD debido que los perfiles de velocidad obtenidos de la simulación numérica tienen un gran grado de confiabilidad, por lo tanto, el código computacional es validado para fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles, en régimen laminar cuyo número de Reynold no sea mayor a 37.

5.4 CASOS DE ESTUDIO MEDIANTE BasicCFD

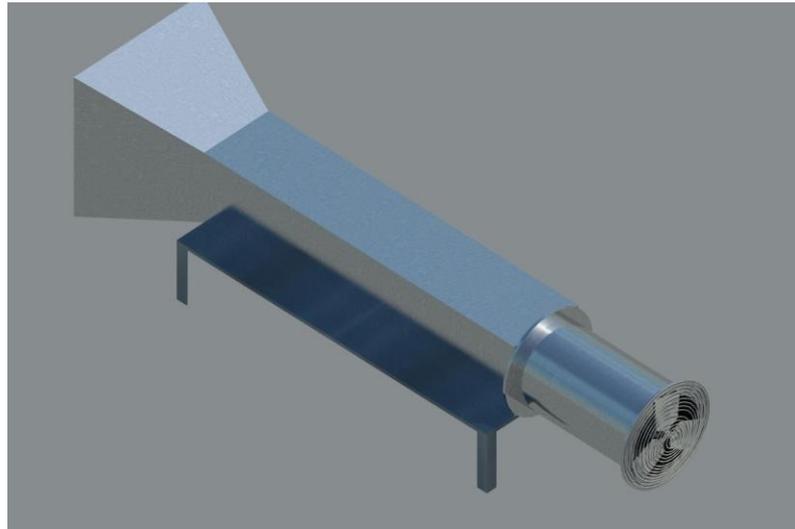
Una vez evaluado el código computacional por las secciones: 5.1, 5.2 y 5.3 se determina que el código fuente del BasicCFD es válido y funciona correctamente para fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles, en régimen laminar cuyo número de Reynold no sea mayor a 37, próximas versiones del software permitirán trabajar fuera de los límites mencionados.

La mayor aportación que puede generar el BasicCFD, es simular casos de estudios, es decir, resolver numéricamente problemas que no tienen una solución analítica y tales soluciones se encuentran mediante análisis de laboratorios complejos y costosos. Es importante establecer que las condiciones de frontera y condiciones iniciales deben estar dentro los parámetros establecidos para que los resultados obtenidos mediante el programa sean válidos.

5.5 TÚNEL DE VIENTO COMPUTACIONAL

Una de las principales herramientas para estudiar experimentalmente la Dinámica de los Fluidos Computacional es el túnel de viento, Figura 5.17, muchos de los investigadores independientes carecen de este recurso; por su complejidad de manejo y por los costosos precios de los ensayos.

BasicCFD al ser una herramienta computacional desarrollada para el estudio básico del CFD ofrece un Túnel de Viento Computacional.

Figura 5.16: Túnel de viento

El modelo matemático que describe el fenómeno físico que puede simular un túnel de viento son las ecuaciones 2.44 y 2.44.

La geometría seleccionada para el estudio aerodinámico es el cilindro, su posición en el túnel de viento se muestra en la figura 5.17, mientras que el dominio del problema se indica en la figura 5.18.

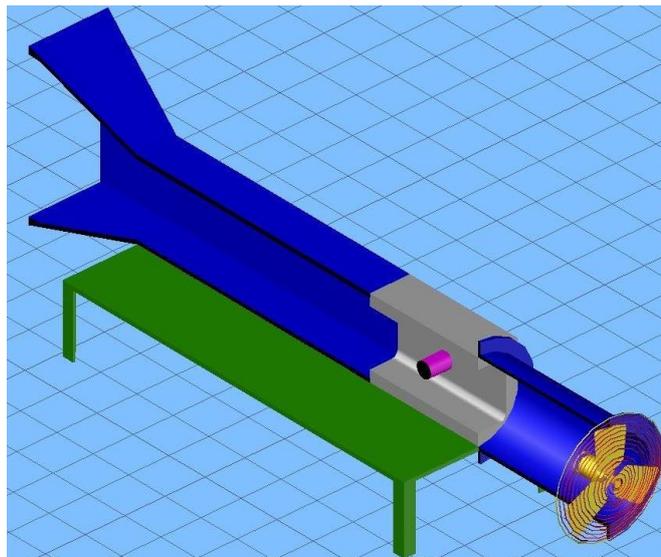
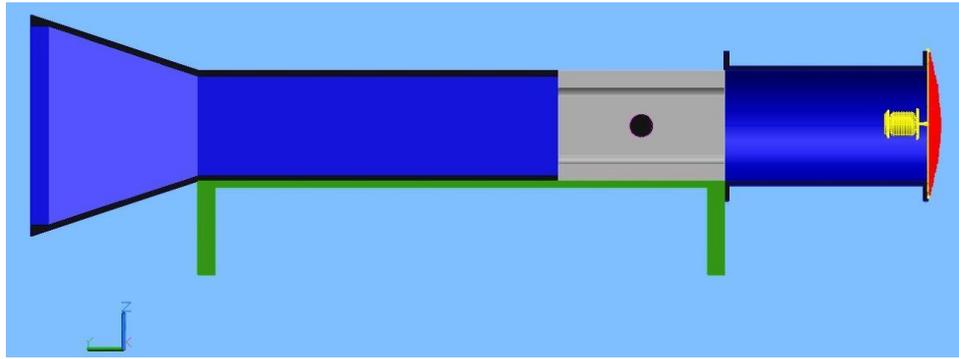
Figura 5.17: Posición del cilindro en el túnel de viento

Figura 5.18: Vista lateral del túnel de viento



El estudio aerodinámico del cilindro se lleva a cabo bajo los siguientes casos:

CASO A: Cilindro sin rotación y sin fuerzas de cuerpo.

CASO B: Cilindro sin rotación y con el campo gravitacional como fuerza de cuerpo.

CASO C: Cilindro con rotación y con el campo gravitacional como fuerza de cuerpo.

Las fuerzas de cuerpo es el campo gravitacional:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 5-7})$$

Las condiciones de frontera tipo Dirichlet son:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 5-8})$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{EC. 5-9})$$

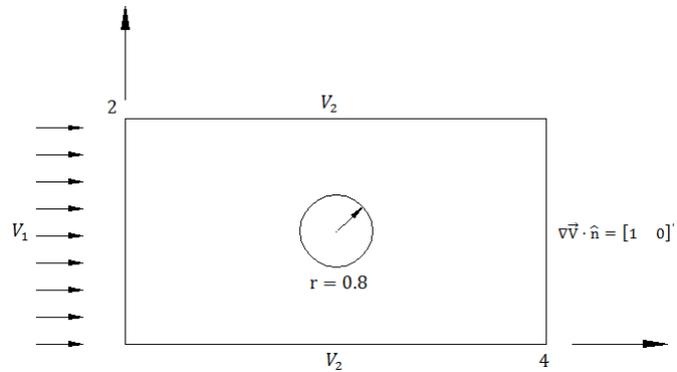
Las condiciones de Newman son:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \hat{n}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \hat{n}_y \right] &= 1 \\ \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \hat{n}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \hat{n}_y \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{EC. 5-10})$$

5.5.1 RESULTADOS NUMÉRICOS CASO A

El dominio del caso de estudio A se muestra en la figura 5.19:

Figura 5.19: Dominio y condiciones del caso A



La simulación numérica mediante el BasicCFD genera las gráficas: Campo de presión, Figura 5.20, Campo de velocidad, Figura 5.21

Figura 5.20: Simulación del campo de presión, caso A

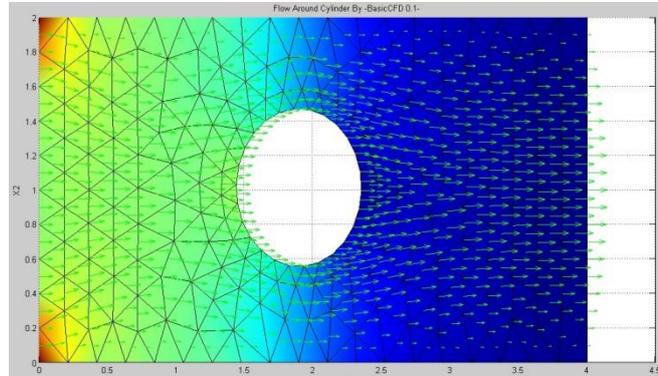
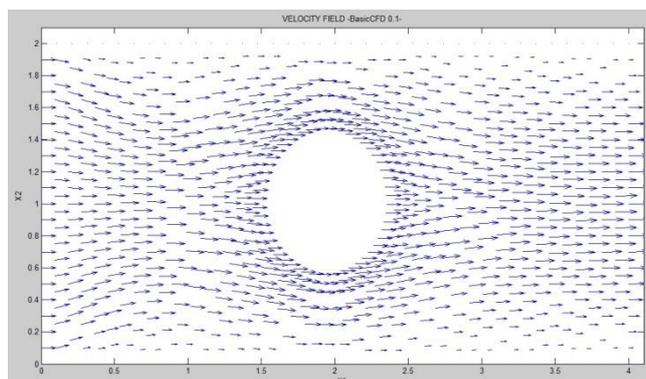


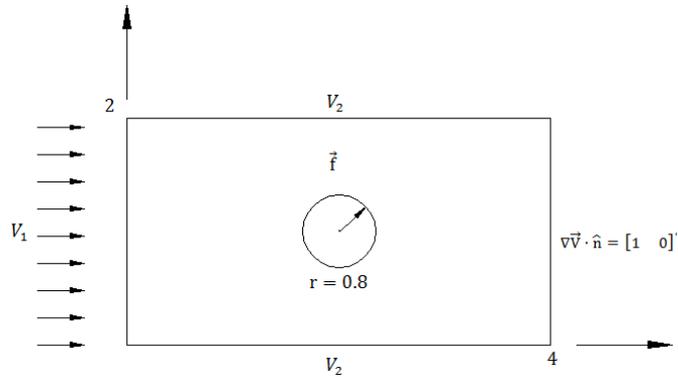
Figura 5.21: Simulación del campo de velocidad, caso A



5.5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS CASO B

El dominio del caso de estudio B se muestra en la figura 5.22:

Figura 5.22: Dominio y condiciones del caso B



La simulación numérica mediante el BasicCFD genera las gráficas:
 Campo de presión, Figura 5.23, Campo de velocidad, Figura 5.24

Figura 5.23: Simulación del campo de presión, caso B

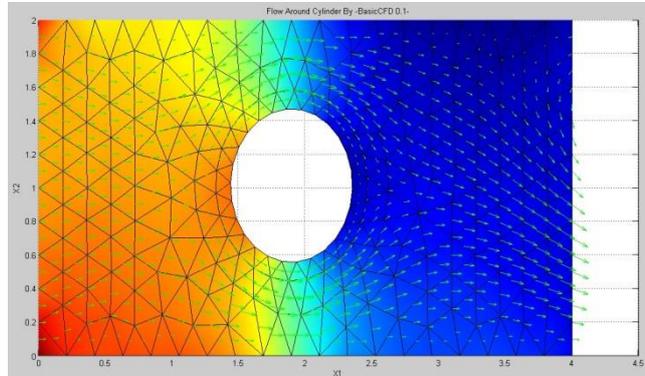
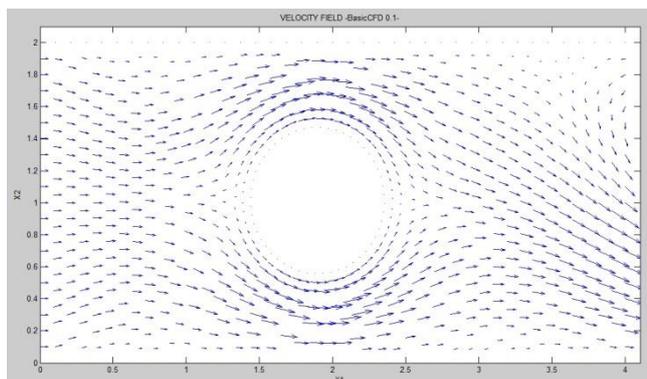


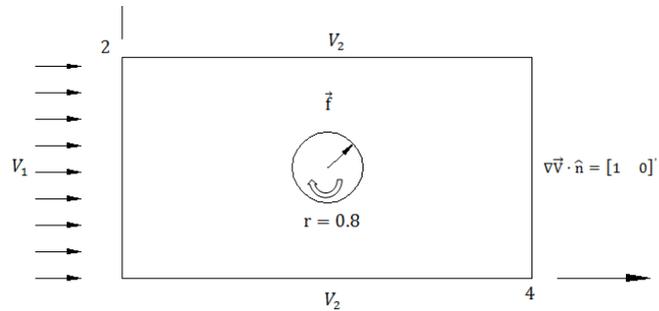
Figura 5.24: Simulación del campo de velocidad, caso B



5.5.3 RESULTADOS NUMÉRICOS CASO C

El dominio del caso de estudio C se muestra en la figura 5.25:

Figura 5.25: Dominio y condiciones del caso C



La simulación numérica mediante el BasicCFD genera las gráficas:
 Campo de presión, Figura 5.26, Campo de velocidad, Figura 5.27

Figura 5.26: Simulación del campo de presión, caso C

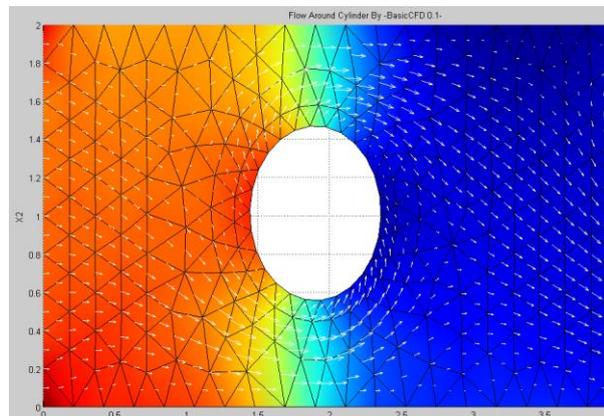
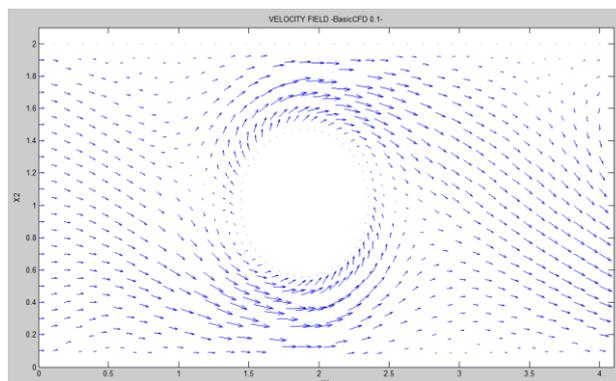


Figura 5.27: Simulación del campo de velocidad, caso C



5.5.4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El ejercicio del flujo de un fluido alrededor de un cilindro es de suma importancia para el entendimiento y estudio de muchos fenómenos físicos.

Al considerar un fluido uniforme, el cilindro sin rotación y la ausencia del campo gravitacional, se puede observar la simétrica en los campos de presión y velocidad, figura 5.21 y 5.22, la principal característica de la simetría de los campos es demostrar que el sector de mayor presión se ubica en la parte frontal del cilindro, el mismo sector que muestra la menor velocidad del fluido, esta relación entre el campo de velocidad y campo de presión es el Principio de Bernoulli.

A considerar el campo gravitacional como fuerza de cuerpo, se retira un fluido ideal y se considera un fluido real, debido a que la gravedad es una de las fuerzas que afectan significativamente al campo de presiones, figura 5.25, tal consideración permite observar el origen del fenómeno de vorticidad, mientras que la simetría del campo de presiones, figura 5.24, tiende a ser simétrico.

Finalmente, la rotación del cilindro y la presencia del campo gravitacional permiten observar uno de los fenómenos más asombrosos dentro del fenómeno de los fluidos que es el Efecto Magnus. La figura 5.27 indica la asimetría del campo de presiones, la parte superior del cilindro está soportando la mayor presión, tal fuerza se denomina fuerza de sustentación, la misma que modifica la trayectoria del cilindro y permite en el aeromodelismo que un avión se eleve

5.6 ESTUDIO AERODINÁMICO DE CAMIONETA

El presente caso de estudio tiene como objetivo establecer los parámetros óptimos para el perfil aerodinámico de una camioneta comercial mediante el software BasicCFD, en primer lugar se establece el dominio del caso de estudio.

Figura 5.28: Dominio del perfil de camioneta comercial



Una vez establecida el dominio del caso de estudio, a continuación se discretiza el dominio:

Figura 5.29: Discretización del dominio



Los resultados aerodinámicos se muestran en la figura 5.30 y 5.31, el campo de velocidad y el campo de presión respectivamente:

Figura 5.30: Campo de velocidad

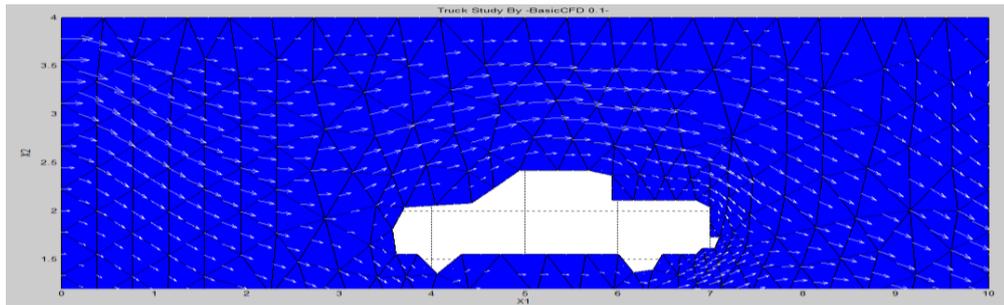
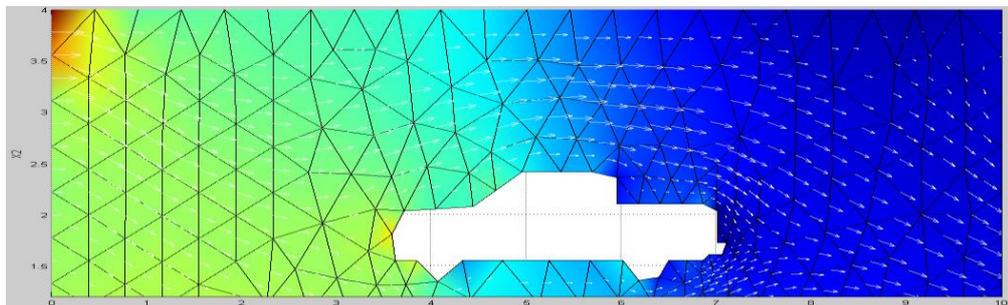


Figura 5.31: Campo de presiones



5.6.1 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El ejercicio del flujo de un fluido alrededor de un perfil de una camioneta comercial muestra un paso importante para el software independiente, desarrollado en el presente trabajo, BasicCFD debido que se indica una aplicación ingenieril industrial.

Los resultados deben ser validados en un laboratorio de aerodinámica con un modelo a escala en un túnel de viento, de esta manera se puede dar fiabilidad del algoritmo utilizado en el desarrollo del código, además de identificar un error porcentual.

Recordando el diagrama de flujo, figura 3.4, es importante identificar que mediante casos de estudios como el presentado se puede mostrar mejorar en la precisión de los resultados con una densificación de la malla, además, si el modelo de estudio es respaldado con un sólido conocimiento intelectual

en el modelamiento matemático y en la ciencia de la mecánica de fluidos se puede encontrar parámetros que modifiquen el conjunto de ecuaciones que representan a la física de los fluidos y el software desarrollado es independiente de código abierto, dicha modificación puede ser incorporado para una versión mejorada del BasicCFD.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 CONCLUSIONES

- Las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos de viscosidad constante e incompresible se discretizó mediante el Método de los Elementos Finitos, el cual se aplicó la Formulación Mixta, velocidad - presión, usando el elemento triangular de Taylor-Hood, el mismo que designa tres nodos para el campo escalar de presión y seis nodos para el campo vectorial de velocidad.
- La no-linealidad generada por el término convectivo y la inestabilidad del modelo matemático fue resuelta con el método numérico de Punto Fijo y el método estabilizador de Cuasi Compresibilidad del fluido aplicado sobre la ecuación de conservación de masa.
- La evaluación del código fuente del BasicCFD se llevó a cabo mediante los problemas de Bechmark, tal evaluación indica que el error porcentual del software independiente es del 0.01%, por lo tanto el código es válido y funciona correctamente para fluidos Newtonianos, isotrópicos e incompresibles, en régimen laminar cuyo número de Reynold no sea mayor a 37.

6.2 RECOMENDACIONES

- En la actualidad existen nuevas técnicas de diseño mecánico, las mismas que han evolucionado con la tecnología de los microprocesadores y la tecnología de las tarjetas gráficas, cuyo objetivo es poder tener la simulación en tiempo real del desarrollo del fenómeno físico y la interacción de múltiples fenómenos, pero es importante entender siempre que sea usuario de tecnología y mas no desarrollador de tecnología, jamás se podrá forjar una cultura verdadera de investigación científica y desarrollo tecnológico.
- Las ecuaciones constitutivas de los fluidos Newtonianos de viscosidad constante, isotrópicos e incompresibles son representados exitosamente con los coeficientes de viscosidad primario C_{44} y secundario C_{12} de la ley general de Stokes, sin embargo, la mayoría de los términos de viscosidad C_{ij} que representan a los fluidos Newtonianos son términos desconocidos, por lo tanto se recomienda generar un área de investigación para el desarrollo de las relaciones de esfuerzos y deformaciones de fluidos enfocados a aplicaciones industriales.
- El BasicCFD tiene un error porcentual de 0.01% para fluidos isotrópicos cuyo número de Reynold sea menor a 37, sin embargo, para fluidos cuyo comportamiento se aproxime a la turbulencia es necesario estudiar un modelo matemático para solucionar la turbulencia y agregarlo al software generado, tal modificación representa una versión actualizada del código fuente.

BIBLIOGRAFÍA

1. Bathe, Klaus J., (2006), *Finite Element Procedures*. Prentice United Stated: Hall, Pearson Education, Inc.
2. Chandrupatla, Tirupathi R., BELEGUNDU, Ashok D., (1999), *Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería*. México: Prentice Hall.
3. Donea Jean, Huerta Antonio, (2003), *Finite Element Methods for Flow Problems.*, England: WILEY.
4. Livesley, R., (1988), *Elementos Finitos Introducción para Ingenieros*. México: LIMUSA.
5. Zienkiewicz, O., Morgan K., (1980), *Finite Elements and Approximation*. London: WILEY.
6. Zienkiewicz, O., Taylor R., (1990), *Finite Elements Methods, Vol. 1*, Barcelona: Mac Graw Hill. CIMNE
7. Biringen, S., Chon, C., (2011), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics by Example*. United Stated of America: WILEY.
8. Shames, I., (1998). *Mecánica De Fluidos*. Colombia: Mcgraw-Hill.
9. Mataix, C., (1982). *Mecánica De Fluidos y Máquinas Hidráulicas*. Oxford: Alfaomega.
10. Streeter, V., Wyle, B., Bedford, F., (2000), *Mecánica de Fluidos*. Colombia: Mac Graw Hill.

11. White, F., (2001), *Mecánica de Fluidos*. España: Mac Graw Hill.
12. Burden, R., Faires, D., (2001), *Análisis Numérico*. México: Cengage Learning.
13. CHAPRA, Steven C., CANALES, Raymond P., (2004), *Métodos Numéricos para Ingenieros*. México: Mac Graw Hill.

PUBLICACIONES CIENTÍFICAS

1. Sandoval S., María Luisa. (1998), *Solución Numérica De Fluidos Viscosos Con Elementos Isoparamétricos*. Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Guatemala.
2. Gutiérrez M., Liana Iveth. (2008), *Método de Elemento Finito para Solución Numérica del Problemas de Stokes con Condición de Frontera Mixta en Dominios Rectangulares*. Universidad De Puerto Rico.
3. Dorvorkin, Eduardo N., Golschmit Marcela B, Storti, Mario A., (2010). *Mecánica Computacional, Vol. XXIX. Compilado de los Trabajos Presentados en el IX Congreso Argentino de Mecánica Computacional MECOM*, Buenos Aires – Argentina.
4. Narváez, Alejandro D., Cumbal, Luis, (2011). *Análisis de la Transferencia De Calor Mediante el Método de los Elementos Finitos*, Ecuador.