

# RESISTENCIA DE MATERIALES TEORÍA Y CÁLCULOS PRÁCTICOS

**Julio Cesar Pino Tarragó**  
**Roberto Félix Beltrán Reyna**  
**Héctor Cochise Terán Herrera**



**ESPE**  
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

# **RESISTENCIA DE MATERIALES**

## **Teoría y cálculos prácticos**

**JULIO CESAR PINO TARRAGÓ  
ROBERTO FÉLIX BELTRÁN REYNA  
HÉCTOR COCHISE TERÁN HERRERA**

**Resistencia de materiales**

Dr.C. Julio Cesar Pino Tarragó; M.Sc. Roberto Félix Beltrán Reyna  
M.Sc. Héctor Cochise Terán Herrera

**Primera edición electrónica.** Junio de 2015

**ISBN:** 978-9978-301-66-1

**Revisión científica:** Dr. Arlys Michel Lastre; Dr. Alexis Cordoves García

**Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE**

Grab. Roque Moreira Cedeño

Rector

**Publicación autorizada por:**

**Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE**

**Edición y producción**

David Andrade Aguirre

**Diseño**

Pablo Zavala A.

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico.

El contenido, uso de fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias es de **exclusiva responsabilidad** del autor.

Los derechos de esta edición electrónica son de la **Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE**, para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en: <http://www.repositorio.espe.edu.ec>.

**Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE**

Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador.

<http://www.espe.edu.ec>

## DEDICATORIA

Los autores dedican la presente obra a:

- A DIOS por ser nuestra fuente de inspiración y fortaleza cada día.
- Nuestros familiares por estar siempre presente apoyándonos en todo momento, por el amor que nos han dado, su dedicación y comprensión en todo instante.
- Nuestros amigos por su apoyo incondicional en todo momento durante el desarrollo de nuestras vidas profesionales y personales.
- Las instituciones que han posibilitado la redacción y publicación de esta obra: Universidad de las fuerzas Armadas ESPE y la honorable Universidad de Holguín donde nos formamos crecimos profesionalmente.
- Todas las personas que brindaron una idea, un consejo y estuvieron pendiente de nuestro trabajo.

A todos muchas gracias de todo corazón.

## AGRADECIMIENTO

Los autores quieren agradecer a:

- A DIOS por brindarnos cada día vida, salud, alegría y fortaleza para alcanzar nuestros objetivos.
- Nuestros familiares, amigos, conocidos y todas esas personas que aportaron su grano de arena en los momentos más difíciles.
- Al personal de la Universidad de Holguín por enriquecer nuestra formación profesional.
- La Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE por abrir las puertas a nuestros conocimientos y servicios.
- Al Teniente Coronel de Estado Mayor Freddy Játiva Coronel, por brindarnos su amistad incondicional y estar siempre pendiente de nuestros problemas y necesidades.


## PRÓLOGO

Los autores, en esta obra muestra su dedicación y esfuerzo, por plasmar su sapiencia de aproximadamente 20 años de experiencia docente, la misma que la ha desarrollado en la Universidad de Holguín en Cuba y actualmente en la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, con la labor en conjunto de grandes docentes que forman parte del grupo de trabajo, se pudo dar realce a esta obra, colaborando para que sea una realidad.

El presente libro, tiene como objetivo principal exponer la teoría y la resolución de problemas prácticos. Se expone de manera amplia la teoría, desde los esfuerzos de tensión y compresión, torsión abordando métodos de determinación de tensiones y deformaciones, para luego adentrarse en cinco teorías fundamentales de resistencias y llegar a los análisis de elementos sometidos a torsión especialmente de las juntas remachas y soldadas, se apasionan en la parte de flexión en barras por último analizan las resistencias combinadas de ciertos elementos. Se complementa esta obra con la presentación de ejercicios resueltos y problemas propuestos de Mecánica de Materiales, se trata de una obra práctica con una diversidad de problemas, estructurados de manera clara, que permiten al estudiante analizar, comprender y desarrollar este tipo de ejercicios de forma sencilla, aplicando los conceptos básicos adquiridos en la materia.

La obra cubre los temas principales de Resistencia de Materiales, tanto en teoría como en la resolución de ejercicios, haciendo énfasis en soluciones de problemas, aplicaciones y diseño de elementos estructurales.

Es importante que los estudiantes aprovechen este libro, ya que proporciona sólidas explicaciones de los principios de Resistencia de Materiales, utilizando enfoques tanto de análisis como de diseño, fundamental para adquirir las competencias y destrezas necesarias que el medio nos obliga en el día a día.



**RESISTENCIA  
DE MATERIALES  
TEORÍA**





# Capítulo

# 1

**GENERALIDADES. TRACCIÓN - COMPRESIÓN**

## 1.1 – Objeto de la resistencia de Materiales.

Los cuerpos sólidos en general poseen resistencia y rigidez, es decir, hasta ciertos límites son capaces de resistir esfuerzos sin romperse y sin sufrir grandes deformaciones.

La Resistencia de materiales es la ciencia que estudia la resistencia y de la rigidez de los cuerpos que pueden formar los elementos de las estructuras, es una rama de la mecánica conocida como Mecánica de los Sólidos deformables y abarca también otras asignaturas como la teoría de la elasticidad, que al estudiar los mismos problemas que la Resistencia de Materiales, pero los enfoca de una manera diferente lo que exige una formulación matemática mucho más compleja, mientras que la Resistencia de Materiales tiene como fin la elaboración de métodos prácticos de cálculo de los elementos más comunes de las estructuras, por lo que es necesario introducir varias hipótesis con el objetivo de simplificar los análisis:

1) Forma de los elementos. Existen infinitas formas de los elementos pero siempre podemos simplificar atendiendo a sus dimensiones de la siguiente forma:

a) **Barra:** Elemento que dos de sus dimensiones son mucho menor que la tercera. Pudiendo ser de secciones constantes o variables, rectas o curvas.



Figura 1. Barra

b) **Bóveda:** Una dimensión es pequeña al compararla con las otras. Consideramos que está limitada por dos superficies curvas mientras que un caso particular son las placas.

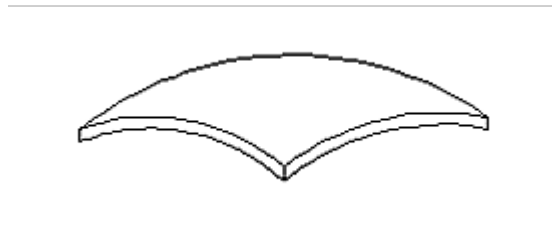


Figura 2. Bóveda

- c) **Bloque:** Sus dimensiones son de magnitudes comparables, es decir son del mismo orden.
- 2) Características de los materiales, y de su interacción con las piezas.
- a) **Homogéneos:** Tienen las mismas características en todos los puntos en una misma dirección. Podemos citar materiales que se alejan un poco de esta suposición tales como: la madera, el hormigón, plásticos con relleno, etc. Pero los experimentos demuestran que aceptando esta suposición los resultados obtenidos son satisfactorios, por lo que podemos aplicarlo, para todos los materiales.
- b) **Isótropos:** Tienen idénticas características en todos los puntos cualquiera que sea la dirección. Cuando el cuerpo no es isótropo se hace necesario recurrir a los métodos de la teoría de la elasticidad.
- Esta propiedad se puede utilizar con cierta aproximación en la madera, el hormigón armado y los plásticos pero al analizar la resistencia de los cristales de cobre se diferencian en más de tres veces.
- c) **Continuos:** consideramos que ocupan todo el volumen que a ellos se le atribuye (sin tener en cuenta la discontinuidad del material). Podemos hacer esta consideración al comparar las dimensiones de la pieza con la distancia intermolecular y por tanto despreciar esta última.
- d) **Las fuerzas interiores originales que preceden a la carga son nulas.** Realmente las fuerzas moleculares existen y se acentúan en casos como el acero debido entre otras razones al proceso de enfriamiento, en la madera se debe en gran medida al secado no uniforme mientras que en el fraguado del hormigón aparecen tensiones

residuales, es conveniente señalar que durante la soldadura aparecen altos valores de la tensión térmica pero se pueden determinar de forma experimental.

- e) **Las deformaciones** son muchísimo menor que las dimensiones de los elementos.
  
- f) **Principio de superposición de las cargas:** El orden en que se apliquen los esfuerzos a un sistema es independiente del efecto que esto origina en el propio sistema, la sumatoria de las mismas son aplicadas en forma sucesiva y en cualquier orden.
  
- g) **Principio de Saint\_Venant.** El carácter de la distribución de las fuerzas internas en una sección transversal, situado suficientemente lejos de los lugares de aplicación de la carga, depende muy poco del modo de aplicación de estas cargas. Basándonos en este enunciado podemos calcular las reacciones en los apoyos cuando estamos en presencia de cargas distribuidas.

## 1.2 Sistema Real y Esquema de análisis.

Es importante en esta ciencia poder determinar cuáles son los factores que realmente influyen en el comportamiento de los cuerpos y cuales su influencia es poca por lo que bajo determinadas condiciones podemos prescindir de estos últimos, esto nos permite esquematizar las estructuras para poder hacer un análisis de forma más sencilla, aunque es importante señalar que la fiabilidad de los cálculos depende en gran medida del correcto análisis de su esquema.

Para simplificar el análisis de generalmente podemos no tener en cuenta de factores de escasa influencia como la resistencia aerodinámica si el cuerpo está en movimiento, la presión barométrica a diferentes alturas, la variación de temperatura en el medio ambiente y otros factores semejantes.

Entonces al cuerpo real, así simplificado, lo podemos llamar esquema de análisis, podemos señalar que para un mismo cuerpo o sistema pueden hacerse varios

esquemas de análisis, esto dependerá de la exactitud requerida de acuerdo a lo que le interese al especialista

### 1.3 Clasificación de las Fuerzas Internas y las tensiones.

Del estudios anteriores se conoce que las cargas externas pueden clasificarse concentradas o distribuidas, estáticas o dinámicas.

Considerando a las fuerzas internas como las resultantes de las fuerzas distribuidas en la sección transversal del elemento, que aparecen en el cuerpo por la acción de las cargas externas.

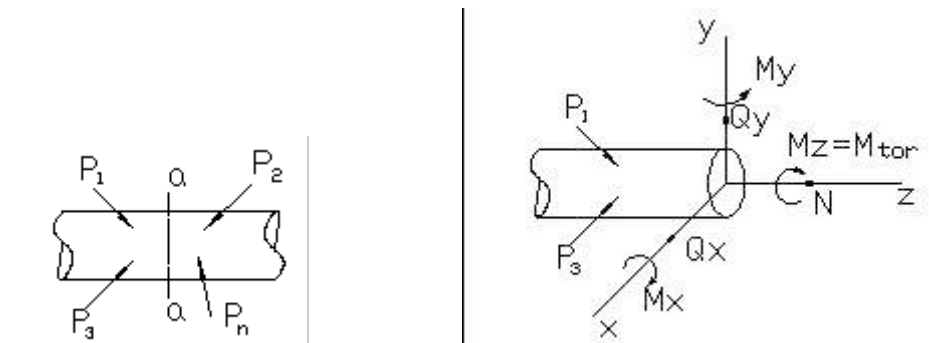


Figura 3. Clasificación de las fuerzas internas

Ejemplo.

°**N**: Fuerza normal (a lo largo del eje Z)

**Qx; Qy**: **Fuerzas** cortantes.

**Mx; My**: Momentos flectores

**Mt** : Momento torsor.

## Tensiones

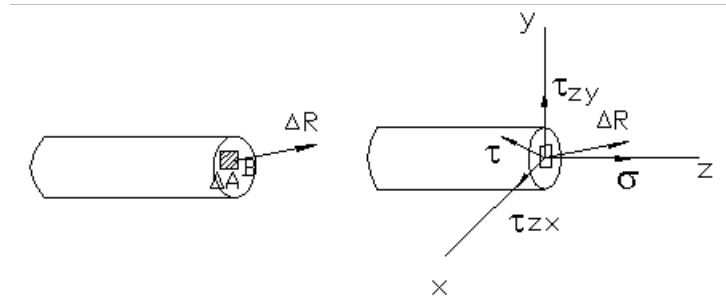


Figura 4. Clasificación de tensiones

Sabemos, que las fuerzas internas son la resultante de las fuerzas distribuidas en el interior de un elemento ¿De qué forma podremos determinar la intensidad de las fuerzas interiores en un punto dado del cuerpo?

Tensión media  $\rho_m = R / A$

Tensión real  $\rho = \lim R / A$

Si llamamos tensión, la fuerza interior que corresponde a la unidad de superficie de dicho punto de una sección.

MKS (Kgf / cm<sup>2</sup>)

SI (N/m<sup>2</sup> = m Kg seg<sup>-2</sup> / m<sup>2</sup>)

1N/m<sup>2</sup> = 1Pa

1Mpa = 1 x 10<sup>6</sup> Pa

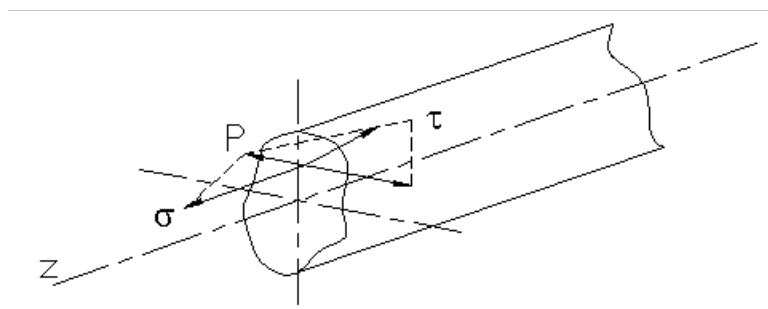


Figura 5. Clasificación de tensiones

La tensión completa ( $p$ ) se puede sustituir por dos componentes:

1. La normal al plano de la sección. La llamaremos tensión normal y se denota por ( $\sigma$ ). Surge cuando las tensiones del elemento tienden a separarse o a acercarse.
2. La que coincide con el plano de la sección. Esta componente la denotaremos por ( $\tau$ ) y la llamaremos tensión tangencial. Teniendo en cuenta los ejes de coordenadas podemos dividirla en dos componentes. Las tensiones tangenciales de forma general están ligadas al deslizamiento de las partículas del material.

### 1.2. Tracción – Compresión axial.

En Mecánica Teórica cuando se hace el estudio de las armaduras, se veía como las barras que conforman una armadura están sometidas a esfuerzos de tracción – compresión; estudiábamos el método de los Nudos y el Método de las Secciones para calcular los esfuerzos a que estaban sometidas las barras producto a la acción de las cargas externas. Pero ¿Qué dimensiones deberían tener esas barras (su sección transversal), para que resistan los esfuerzos externos a que se somete la armadura? ; ¿Qué deformaciones sufrirán?

La tracción o compresión axial es la sollicitación en la que las fuerzas exteriores actúan a lo largo del eje longitudinal de la barra. En este caso las fuerzas interiores que surgen en la sección transversal del elemento estarán dirigidas de forma perpendicular a la sección transversal de la barra, o sea, son fuerzas normales. Para determinar estas se recurre al método de las secciones.

Las tensiones que surgen en las secciones transversales del elemento son tensiones normales que se determinan como la relación entre la fuerza normal y el área de la sección transversal de la barra.

La condición de resistencia a tracción o compresión es:

$$\sigma_{Max} = \frac{N_{Max}}{A} \leq [\sigma] \quad (1)$$

Los desplazamientos que tienen lugar son longitudinales, o sea, la variación de la longitud de la barra. Se determinan mediante la expresión:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \quad (2)$$

La condición de rigidez es:  $\Delta l_{Max} \leq [\Delta l]$

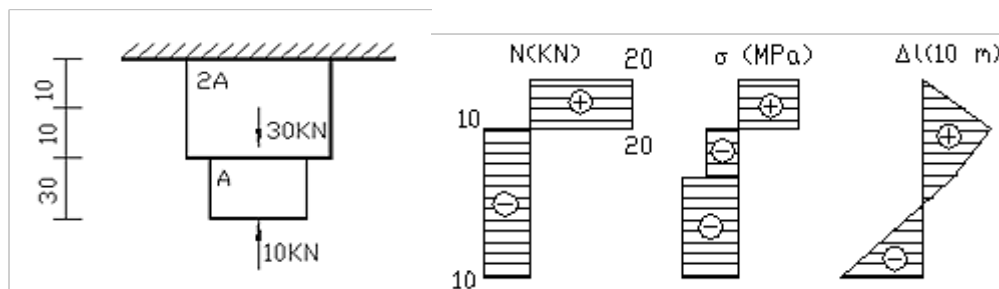
Ambas condiciones, la de resistencia y rigidez permiten resolver tres problemas típicos de la resistencia de materiales:

1. Comprobación de la resistencia de la barra.
2. Cálculo de la carga admisible.
3. Dimensionamiento de la sección transversal.

### 1.2.1 Cálculo de tensiones, desplazamiento y deformaciones en barras sometidas a T-C.

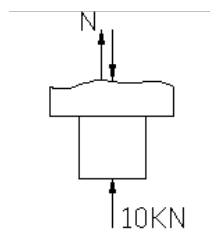
Ejemplo:

Determinar el valor de las fuerzas interiores de la barra.

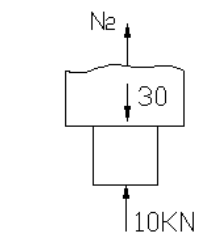


Tramo I (a-a)

Tramo II



$$\sum F_z = 0$$



$$\sum F_z = 0$$



$$N_1 + 10kN = 0$$

$$N_2 - 30 + 10 = 0$$

$$N_1 = -10kN \quad (\text{C})$$

$$N_2 = 20kN \quad (\text{T})$$

Debemos recordar el concepto de tramo como aquella porción del elemento enmarcado desde el punto de aplicación de una fuerza hasta el punto de aplicación de otra fuerza.

El gráfico se construye por la parte (+) a la derecha del eje (a-a).

(Se hará una comparación de su correcta construcción) las fuerzas internas por si solas no nos dan una idea exacta de la resistencia de un elemento, un elemento con menor área de la sección transversal que otro, pero sometido al mismo valor de fuerza externa resistirá menos.

La magnitud que nos mide la resistencia de un elemento es la tensión, o sea, los esfuerzos a que está sometida cada sección infinitesimal del elemento.

### 1.2.2 Cálculo de las tensiones

Si trazamos sobre la superficie de una barra prismática una red de líneas rectas, unas paralelas y otras perpendiculares al eje de la barra, y si sometemos la barra a una fuerza de tracción, observaremos que después de la deformación, las de la red permanecen ortogonalmente entre sí en toda la superficie, excepto una pequeña zona, próxima al punto de aplicación de la fuerza, de la cual se prescinde mientras que las distancias entre las rectas varían.

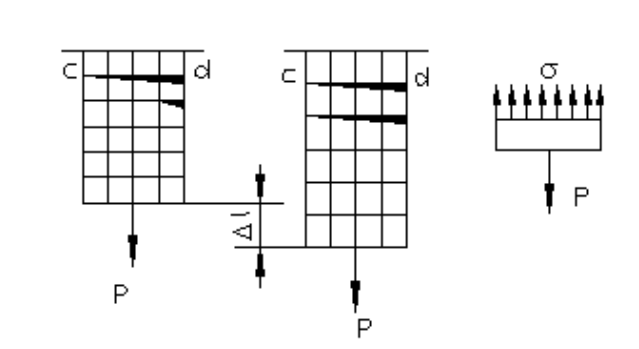


Figura 6. Distribución de tensiones

Todas las rectas horizontales, la recta cd por ejemplo, se desplaza hacia abajo, permaneciendo sin embargo recto y horizontal. Es de suponer que en el interior de la barra tiene lugar el mismo fenómeno, es decir, que las secciones de las barras que eran planas y perpendiculares a su eje antes de la deformación, permanecen planas y normales a este después de ocurrir la deformación. Hipótesis de las Secciones Planas o Hipótesis de Bernoulli.

Los ensayos confirman las fórmulas en que se basan estas hipótesis.

Esto nos permite suponer que en las secciones transversales de la barra actúan solamente tensiones normales, distribuidas uniformemente.

$$\sum F_x = 0; -\sigma \cdot A + P = 0; \sigma = P / A$$

En el caso general, cuando sobre la parte separada actúan varias fuerzas.

$\sigma = N / A$  Estas fórmulas son válidas para el caso de compresión axial.

### 1.2.3 Cálculo de las deformaciones y los desplazamientos.

Los ensayos demuestran que al estirar una barra su longitud aumenta, mientras que las dimensiones transversales disminuyen, en la compresión el fenómeno se invierte.

Hasta el límite de proporcionalidad se establece para muchos materiales que:

$$\epsilon = \sigma / E \qquad \epsilon = \Delta l / l \qquad (3)$$

Ley de Hooke (deformación lineal unitaria)

$l$  = Desplazamiento de la barra.

$E$  = Módulo de elasticidad o de Young

$$l / l = N / A.E \qquad l = N.l / A.E \qquad (4)$$

Para obtener el desplazamiento a lo largo de toda la barra:

$$l = \int_0^l \frac{N \cdot dz}{E \cdot A} \quad \text{donde } l \text{ es la longitud del tramo} \quad (5)$$

Cuando se trata de barras escalonadas

$$l = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} \quad (6)$$

Experimentalmente se establece que entre la deformación lineal unitaria ( $\epsilon$ ) y transversal ( $\epsilon'$ ) existe la correlación siguiente:

$$\epsilon' = -\mu \cdot \epsilon$$

$\mu \rightarrow$  coeficiente de deformación transversal (coef. de Poisson)

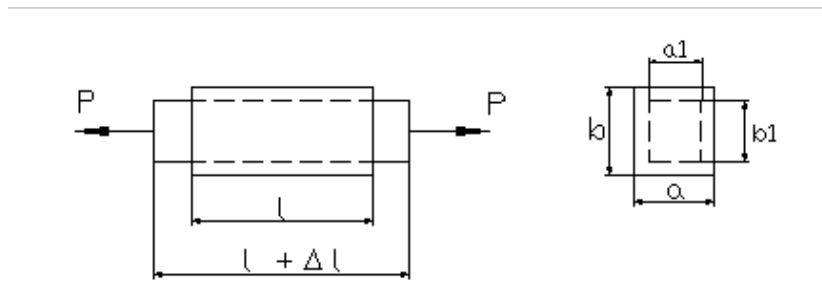


Figura 7. Representación del efecto del coeficiente de poisson

$$a' = a - a_1$$

$$b' = b - b_1$$

$$\epsilon' = a'/a = b'/b$$

$$\epsilon' = -\mu \cdot \epsilon = -\mu \cdot \sigma / E$$

$$\mu = \frac{|\epsilon'|}{|\epsilon|} \quad (7)$$

Calculemos las tensiones y los desplazamientos para el ejemplo anterior.

En el tramo I al existir un cambio en la sección transversal existen dos valores de tensiones

$$\sigma_1 = N_1/A = \frac{-10 \times 10^3 \text{ N}}{10 \times 10^{-2} \text{ m}^2} = -1 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -10 \text{ MPa (C)}$$

$$\sigma_2 = N_1/2A = \frac{-10 \times 10^3 \text{ N}}{10 \times 10^{-2} \text{ m}^2} = -5 \text{ MPa (C)}$$

En el tramo II existirá un solo valor de las tensiones.

$$\sigma_3 = N_2/2A = \frac{20 \times 10^3 \text{ N}}{20 \times 10^{-2} \text{ m}^2} = 10 \text{ MPa (T)}$$

Ver el figura 7.

Calculo de los desplazamientos (Comenzamos por el empotramiento)

$$0 \leq Z_1 \leq 10 \text{ cm}$$

$$l_1 = \frac{N_2 \cdot Z_1}{2A \cdot E} \Big|_{0=0}^{10 \text{ cm}} \quad \text{para } Z_1 = 10 \text{ cm} \quad l_1 = \frac{20 \times 10^3 \text{ N} \times 10 \text{ cm}}{2 \times 10 \text{ cm} \times 2 \times 10^8 \text{ N/cm}^2} = 5 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

$$0 \leq Z_2 \leq 10 \text{ cm}$$

$$l_2 = l_1 + \frac{N_1 \cdot Z_2}{2A \cdot E} \Big|_{0=5 \times 10^{-2} \text{ cm}}^{10 \text{ cm}}$$

para  $Z_2 = 10 \text{ cm}$

$$l_2 = 5 \times 10^{-2} - \frac{10 \times 10^3 \times 10}{2 \times 10 \times 2 \times 10^8} = 2,5 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

$$0 \leq Z_3 \leq 30 \text{ cm}$$

$$l_3 = l_2 + \frac{N_1 \cdot Z_3}{E \cdot A} \Big|_{0=2,5 \times 10^{-2} \text{ cm}}^{30 \text{ cm}}$$

para  $Z_3 = 30 \text{ cm}$

$$I_3 = 2,5 \times 10 - \frac{10 \times 10 \times 30}{2 \times 10 \times 10} = -12,5 \times 10 \text{ cm}$$

#### 1.2.4 Condición de resistencia.

Luego de determinadas las tensiones que actúan a lo largo de la barra, es posible evaluar la resistencia de la misma, para ello se comparan las tensiones admisibles, con las tensiones reales en la sección peligrosa.

Si el material es dúctil( plástico, cobre, aluminio, acero de bajo contenido de carbono)

$$\sigma_{max} = N / A \leq [\sigma] \quad (8)$$

Si el material es frágil (hierro fundido, hormigón, acero instrumental alto en carbono, plásticos con fibras de vidrio)

$$\sigma_{max(T)} = N / A \leq [\sigma_{(t)}]$$

$$\sigma_{max(C)} = -N / A \leq [\sigma_{(c)}]$$

$$[\sigma] = \sigma_{lim} / n \quad \sigma_{lim} = \sigma_f - \text{para materiales dúctiles.}$$

$$\sigma_{lim} = \sigma_r - \text{para materiales frágiles}$$

n – coeficiente de seguridad. ¿Por qué es necesario introducirlo?

Este coeficiente está normado por las normas de diseño de las construcciones. Se introduce para conseguir un funcionamiento fiable y seguro de las estructuras y sus partes, a pesar de las posibles desviaciones desfavorables de las condiciones reales de trabajo, en comparación con las que se consideran en el cálculo.

El valor normativo del coeficiente de seguridad (n), según las normas, se elige teniendo en cuenta la experiencia adquirida en el mantenimiento de las estructuras y máquinas.

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_{10} \quad (9)$$

$n_1$ --- considera el posible error al calcular las cargas y tensiones (1,2;...;1,5) para el cálculo de las cargas que se requiera gran exactitud. (2-3) en caso de no requerirse una gran exactitud.

$n_2$ --- tiene en cuenta la heterogeneidad del material, es necesario para contrarrestar los posibles efectos del maquinado de la pieza.

$n_3$ --- se considera el grado de responsabilidad de la pieza.

Los valores de las tensiones admisibles aparecen en los anexos según varias normas:

A partir de la condición de resistencia podemos resolver tres tipos de problemas:

1. Cálculo de comprobación de la resistencia.
2. Dimensionamiento de la pieza.
3. Cálculo de los esfuerzos admisibles.

Suponiendo que la barra del ejemplo estuviese construida de acero CT-2 para la cual  $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$  podríamos comprobar la resistencia de la misma:

$$\sigma_{\max} = \sigma_3 = 10 \text{ Pa} \leq [\sigma] \longrightarrow \text{Resiste}$$

### Condición de Rigidez.

Consiste en evaluar la deformación y desplazamientos del elemento por la estructura general de manera que estas no sobrepasen los valores pre establecidos por el diseñador en dependencia de la estructura y el trabajo de la misma.

$$l_i = \sum \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} \leq [l] \quad (10)$$

A partir de esta condición se podrán resolver también los tres problemas anteriores.

Si fuéramos a evaluar la rigidez de la barra del ejemplo, y al diseñador le interesara que el extremo inferior de la barra no se desplazara  $[l] = 5 \text{ mm}$  en el sentido traccional entonces:

$$l = -12,5 \times 10 \text{ cm} = -1,25 \times 10^2 \text{ mm} \leq [l] \text{ (además es desplazado negativamente)}$$

$\longrightarrow$  Es rígido

Veamos un ejemplo de aplicación de los problemas a resolver a partir de la condición de resistencia.

### Ejemplo:

Determinar el número de perfil [ que se debe utilizar en la estructura para que soporten una carga de  $P = 810 \text{ KN}$ . Las barras son de acero CT- 3.

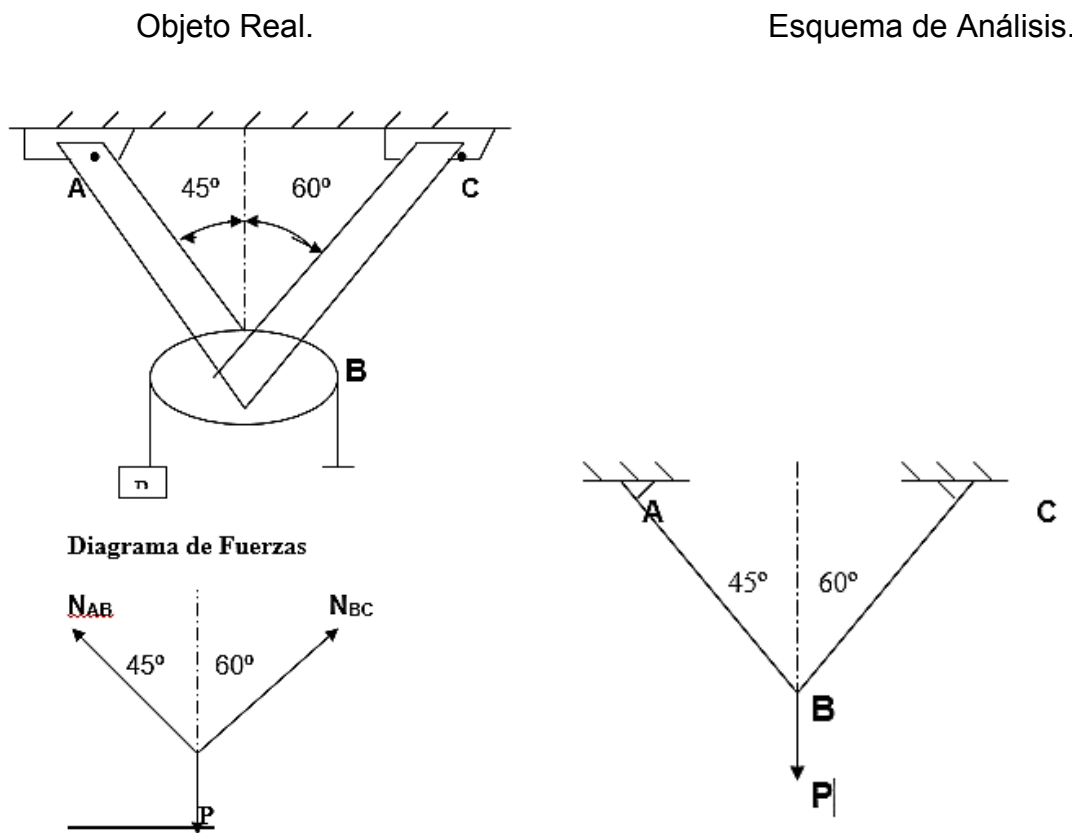


Figura 8. Ecuaciones de Equilibrio.

$$\sum F_x = 0$$

$$- N_{AB} \cdot \cos 45^\circ + N_{BC} \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_{AB} \cdot \sin 45^\circ + N_{BC} \cdot \sin 60^\circ - P = 0 \quad (2)$$

De la ecuación (1) tenemos que:

$$N_{bc} = N_{ab} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = N_{ab} \frac{0.70}{0.86} = N_{ab} \cdot 0.81$$

Sustituyendo en (2)

$$N_{ab} \cdot 0.70 + 0.81 \cdot N_{ab} \cdot 0.50 = P$$

$$N_{ab} = \frac{810 \text{KN}}{1.105} = 733 \text{KN}$$

Sustituyendo en (1)

$$N_{bc} = N_{ab} \cdot 0.81 = 593.73 \text{ KN}$$

Determinación del número de perfil canal de dos barras.

En este caso existen dos variantes:

- Se elige un solo número de perfil para todas las barras. En este caso para la barra más cargada, se gana en unificación pero se pierde en economía.
- Se elige el número de perfil (dos dimensiones) de cada barra en dependencia de las fuerzas internas que en ellas actúan. Desde el punto de vista de unificación y tipificación no es ventajoso, pero si desde el punto de vista económico.

Elegimos este segundo aspecto

Para la barra AB:

$$\sigma = \frac{N_{ab}}{A} \leq [\sigma] \quad [\sigma = 160 \text{MPa}]$$

$$A \geq \frac{N_{ab}}{[\sigma]}$$

$$A \geq \frac{733 \cdot 10}{160 \cdot 10} = 4.58 \cdot 10 \text{ m}^2 = 45,8 \text{ cm}^2$$

por lo tanto el perfil AB, será un perfil [ # 33 ( A = 46.5 cm<sup>2</sup>)

Para la barra BC:



$$\sigma = Nbc/A \leq [\sigma]$$

$$A \geq Nbc/[\sigma]$$

$$A \geq \frac{593 \cdot 10}{160 \cdot 10} = 3.7 \cdot 10 \text{ m}^2 = 37 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto la barra BC, será un perfil [ # 30 ( A = 40.5 cm<sup>2</sup>)

### 1.2.5 Propiedades Mecánicas de los Materiales.

Uno de los parámetros de la condición de resistencia es  $[\sigma]$  y de la condición de rigidez es E.

La  $[\sigma] = \sigma_{lim}/n$ , siendo  $\sigma_{lim} = \sigma_r$  para los materiales frágiles.

### 1.2.6 Sistemas Estáticamente Indeterminados.

Se denominan construcciones estáticamente indeterminadas (hiperestáticos) a aquellos sistemas en los que no se pueden determinar los esfuerzos en todos los elementos, aplicando solamente las ecuaciones de equilibrio.

Veamos algunos ejemplos de sistemas hiperestáticos.

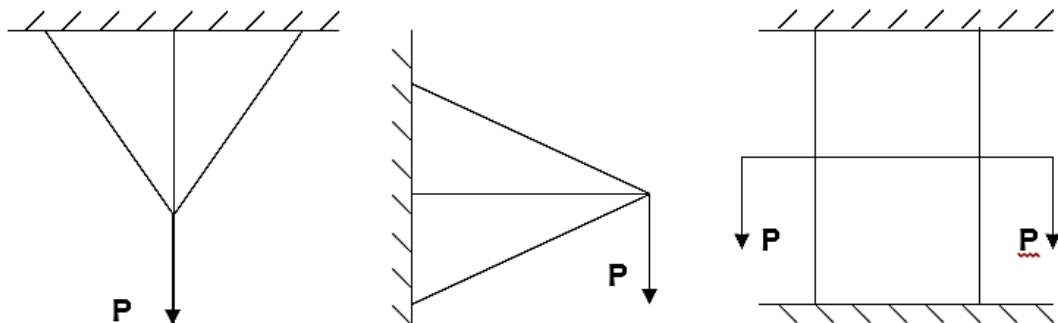


Figura 9. Representación de sistemas hiperestáticos

Para solucionar este sistema es necesario plantear una ecuación adicional, o tantas ecuaciones adicionales como grado de hiperestaticidad tenga el sistema, por ejemplo la ecuación de la compatibilidad de las deformaciones.

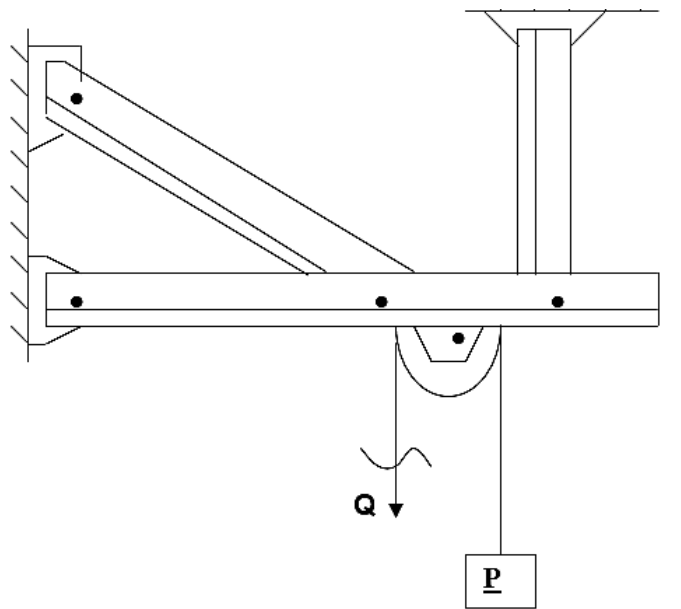
Veamos un ejemplo de cálculo.

Calcular el número de perfil L (a las iguales) necesario para que las barras del sistema resistan. La viga horizontal se considera absolutamente rígida.

Material de las barras de acero CT – 3

**Objeto**

**Datos  $P = 10 \text{ KN}$**



Nº de incógnitas

$N_1, N_2, R_{cy}, R_{cx}$

Nº de ecuaciones en el plano (3)

Grado de hiperestaticidad  $G = 1$

### 1.3 Esquema de Análisis.

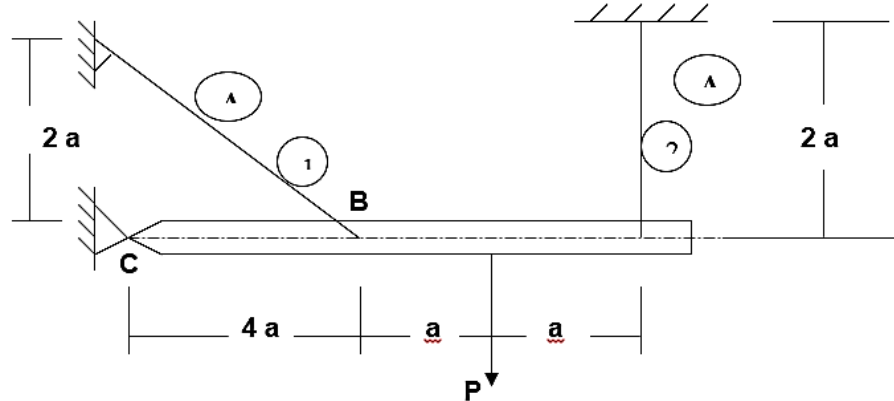


Figura 10. Esquema de deformación del sistema Diagrama de Fuerzas).

Ecuación de equilibrio.

$$\sum M_C = 0$$

$$N_2 \times 6a - P \times 5a + N_1 \times \text{sen} \alpha \times 4a = 0 \quad (1)$$

Se podría plantear la ecuación  $\sum F_y = 0$  pero en ella entraría  $R_{cy}$  y  $\sum F_x = 0 \rightarrow$

Tiende a  $R_{cx}$ . De momento solo nos interesa hallar  $N_1$  y  $N_2$  que son las barras sometidas a tracción. Por lo tanto tenemos dos incógnitas y una sola ecuación. Debemos buscar una ecuación adicional, en este caso, la ecuación de compatibilidad de las deformaciones.

$$\Delta_{12} / 6a = BB' / 4a; \text{sen} \alpha = \Delta_{11} / BB' = 2a / 11$$

$$11 = \sqrt{(2a)^2} + \sqrt{(4a)^2} \approx 4.5a$$

$$BB' = 11 \times 11 / 2a$$

Sustituyendo:

$$\frac{12}{6a} = 11 \times 4.5a / 2a \times 4a$$

$$12 = 3.375 \cdot 11$$

Observando el esquema vemos que:

$$\Delta_{12} = N_2 \cdot 12 / E \cdot A = N_2 \cdot 2 a / E \cdot A$$

$$\Delta_{11} = N_1 \cdot 11 / E \cdot A = N_1 \cdot 4.5 a / E \cdot A$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$7.6 N_1 \cdot 6 a - 5P \cdot a + N_1 \cdot 4 a \cdot 2 a / 4.5 a = 0$$

$$N_1 = 1.06 \text{ KN}$$

Sustituyendo  $N_1$  en (2)

$$N_2 = 8.056 \text{ KN}$$

Cálculo de las dimensiones de las barras.

$$\sigma_1 = N_1 / A_1 \leq [\sigma]$$

$$A_1 \geq N_1 / [\sigma] = 1.06 \times 10^3 / 160 \times 10 = 66.25 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 66.25 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \# L (2.5 / 1.6) [A = 1.16 \text{ cm}^2]$$

$$A_2 \geq N_2 / [\sigma] = 8.05 \times 10^3 / 160 \times 10 = 0.05 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 0.5 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \# L (2.5 / 1.6) [A = 1.16 \text{ cm}^2]$$

Ambas barras se encuentran sobredimensionadas, por lo que podemos asumir que esta subutilizada, o sea, se puede aumentar el peso a cargar por la misma ¿Cuánto?.

## PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

---

- 1) ¿Diga cuál es el objeto de estudio de la Resistencia de los Materiales?
- 2) ¿Por qué es importante saber construir el esquema de análisis a partir de un objeto real?
- 3) ¿Cuándo decimos que un elemento está sometido a tracción compresión axial? Ponga ejemplos.
- 4) ¿Cómo se calculan las fuerzas internas en una barra sometida a tracción-compresión?
- 5) ¿Cómo se calculan las tensiones?
- 6) ¿Cómo las deformaciones?
- 7) ¿Qué problemas podemos resolver a partir de las condiciones de resistencia y rigidez?
- 8) En qué caso estaremos en presencia de una comprobación de la resistencia o la rigidez de un elemento.
- 9) ¿Cuándo en los problemas del diseño?
- 10) ¿Cuándo en el caso de determinación de [P]?
- 11) ¿Por qué es importante conocer los problemas mecánicos de los materiales?
- 12) ¿Qué es un sistema hiperestático?. ¿Cómo resolverlo?

# Capítulo

# 2

**ESTADO TENSIONAL Y DEFORMACIONAL**

## 2.1 INTRODUCCIÓN

Hasta aquí los estudiantes solo conocen las tensiones que se producen en un elemento al someterse a tracción-compresión, así como las deformaciones producto a estas sollicitaciones. Por lo tanto a partir de estas se les presentará el estado tensional de un punto, de una barra sometida a tracción-compresión (ver fig). Se le explicará que ese será el estado tensional del punto en cuestión. Ahora bien a ¿Qué estado tensional estarán sometidos los puntos en una esfera sometida a un cambio de temperatura o una bóveda sometida a la presión interna de un gas?

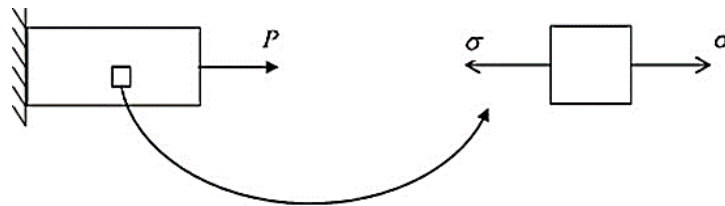


Figura 11. Punto de una barra sometida a tracción

## 2.2 Estado Tensional. Diagrama circular del estado tensional. Tensiones principales.

Se llama estado tensional de un cuerpo, al estado mecánico representado por el conjunto infinito de tensiones provocadas por todas las fuerzas que actúan sobre él. Estado tensional en un punto de un cuerpo es puesto el estado mecánico representado por el conjunto de tensiones que actúan en el punto, en todos los planos que puedan concebiblemente pasar por dicho punto.

En el caso de tracción-compresión visto en la introducción, en el plano perpendicular a las fuerzas, actuarán tensiones normales, mientras que en el plano paralelo a la fuerza las tensiones serán cero, al girar el plano (prisma) un ángulo determinado, aparecerán otras tensiones como se verá más adelante.

Pueden existir tres tipos de estados tensionales:

1. Lineal.
2. Bidimensional o Plano.
3. Tridimensional o Espacial.

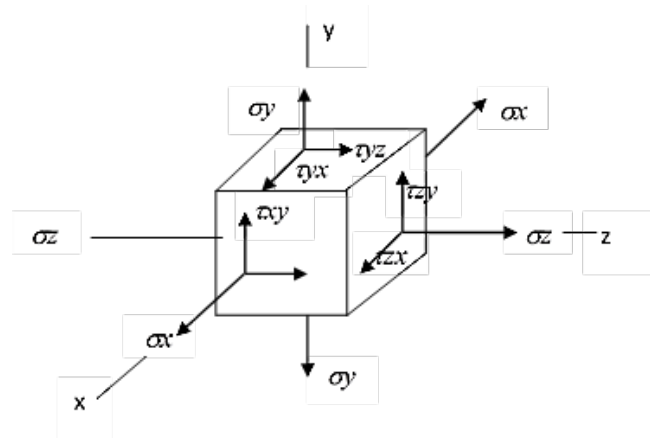


Figura 12. Representación de las tensiones en los diferentes planos

Cuando todas las tensiones en las caras del prisma (tensiones resultantes dadas por la suma vectorial de  $\sigma$  y  $\tau$ ) son desiguales de cero, el estado tensional es tridimensional o espacial.

Cuando las tensiones resultantes en dos caras del prisma son iguales a cero y en las restantes caras desiguales a cero, el estado tensional es bidimensional o plano.

Cuando las tensiones en cuatro caras opuestas dos a dos (del prisma considerado) son nulas, siendo las tensiones en las dos caras opuestas restantes distintas de cero y coincidentes con las tensiones  $\sigma$ , el estado tensional será lineal.

Para valorar correctamente el peligro que amenaza la resistencia de una pieza es necesario conocer bien su estado tensional lo cual requiere en algunos casos que



conozcamos además de las tensiones en las caras del prisma, las tensiones en un plano inclinado arbitrario. Veamos esto.

### Estado Tensional Lineal.

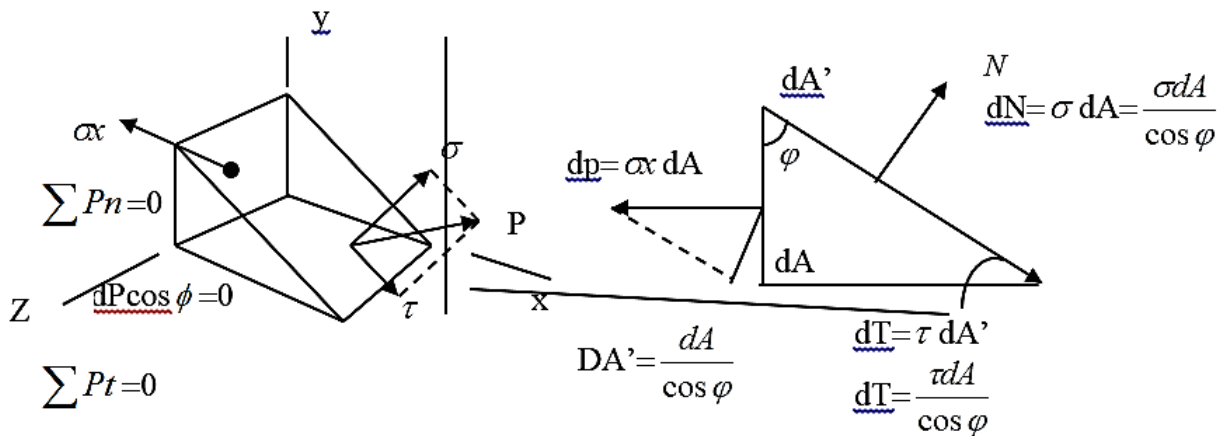


Figura 13. Prisma elemental

$$dN - dP \cos \phi = 0$$

$$\sum P_t = 0$$

$$dT - dP \sin \phi = 0$$

Después de sustituir según figura.

$$\sigma = \alpha \cos 2\phi \quad , \quad \tau = \alpha \sin \phi \cos \phi$$

Sabiendo que:

$$\cos 2\phi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\phi}{2} \quad \text{sen} \phi \cos \phi = \frac{\text{sen} 2\phi}{2}$$

Se obtiene:

$$\sigma = \frac{\alpha x}{2} + \frac{\alpha x}{2} * \cos 2\phi = \frac{\alpha x}{2} (1 + \cos 2\phi)$$

$$\tau\phi = \frac{\sigma_x}{2} * \text{sen}2\phi \quad (12)$$

Ejemplos de estados tensionales lineal o uniaxial lo tenemos en una barra sometida a tracción-compresión axial, y el caso de una barra sometida a flexión pura.

### 2.3 Estado Tensional Bidimensional o Plano.

Se habla de estado tensional Bidimensional (plano) cuando las tensiones en las dos caras paralelas opuestas del prisma elemental son iguales a cero.

$$\sum M_s = 0$$

$$\tau_{yx} * dx * dz * dy / 2 + \tau_{yx} * dx * dz * dy / 2 - \tau_{xy} * dy * dz * dx / 2 - \tau_{xy} * dy * dz * dx / 2 = 0$$

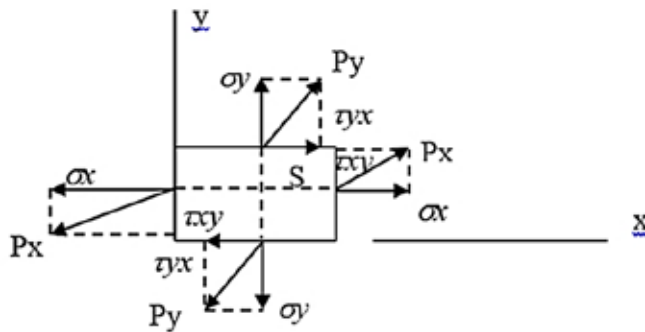


Figura 14. Estado Plano

Y haciendo las transformaciones correspondientes, obtenemos que las tensiones ( $\sigma$ ) y ( $\tau$ ) en el plano ( $\mu$ ) (inclinado un ángulo  $\phi$  respecto al plano  $\epsilon$ ).

$$\sigma\phi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau \text{sen} 2\phi$$

$$\tau_{\phi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi - \tau \cos 2\phi \quad (13)$$

## 2.4 Planos Principales y Tensiones Principales.

Para determinar los planos principales utilizaremos la expresión

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (14)$$

Para obtener la posición del área principal es necesario girar la superficie sobre la que actúa  $\sigma_x$  en sentido horario si en ella ( $\tau$ ) es positiva de lo contrario en sentido anterior.

Los planos principales son aquellos donde actúan las tensiones principales, o sea, aquellos planos donde solo existen tensiones normales  $\sigma$  y las tensiones tangenciales  $\tau = 0$ .

Las tensiones principales se calculan por la siguiente expresión:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (15)$$

Siendo  $\sigma_1$  igual a  $\sigma$  máx y  $\sigma_2$  igual a  $\sigma$  mín

## 2.4 Tensiones Tangenciales Máximas y Mínimas. Áreas de Cortante.

Los planos donde las tensiones cortantes tienen valores extremos (máximos y mínimos), se denominan áreas de cortante, su posición se determina por:

$$\tan \phi_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} \quad (16)$$

donde  $\phi$  representa el ángulo de inclinación de la sección sobre la que actúa la tensión tangencial máxima con respecto a la sección donde actúa la tensión normal  $\sigma_x$ :

$$\tau \text{ máx} = \pm \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

mín

$$\tau \text{ máx} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (17)$$

se puede demostrar fácilmente que:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{const.}$$

## 2.5 Ley de Invariabilidad de las Tensiones Normales.

### 2.5.1 Diagrama Circular del Estado Tensional.

Las tensiones ( $\sigma$ ) y ( $\tau$ ) en función del ángulo  $\phi$  se pueden determinar gráficamente con mucha facilidad por la circunferencia de Mohr.

I.) Dados los valores de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , y  $\tau$  se construye de la manera siguiente.

- 1) Se trazan a escala sobre el eje horizontal las tensiones normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ .
- 2) Se trazan a la misma escala sobre el eje de las ordenadas los valores de ( $\tau$ ) sin tener en cuenta el signo.
- 3) Uniendo los valores de  $(\sigma_x - \tau)$  [A] y  $(\sigma_y - \tau)$  [B] obtenemos el centro de la circunferencia [C], los radios CB ó CA formaran la circunferencia.

Cada punto de la circunferencia corresponde a un plano del prisma elemental.

- 4) Uniendo los valores de  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  obtenemos el plano  $\in$  al cual pertenecen estas tensiones.  $\tau$  será positiva si hace girar cualquier punto interior dentro del prisma elemental en sentido horario, de lo contrario será negativa.
- 5) El punto I y II correspondiente a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  se encuentran en la intersección de la circunferencia y el eje de las abscisas. Recuerdese que  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

El ángulo formado entre el plano  $\in$  y el plano I en la circunferencia corresponde al ángulo  $2\phi$ .

- 6) Para determinar las tensiones en un plano  $\mu$  inclinado un ángulo  $\phi$  con respecto a  $\in$ , trazamos desde  $\in$  en la circunferencia un ángulo  $2\phi$ , en el mismo sentido que se traza el ángulo  $\phi$  en el prisma elemental.

Donde este plano corta a la circunferencia corresponde a los valores de  $\sigma$  y  $\tau$  en el mismo.

II) Dados los valores de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

Interesa determinar las tensiones  $\sigma$  y  $\tau$  en el plano  $\mu$ .

- 1) Se llevan a escalas los valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .
- 2) Se determina el centro C de la circunferencia:

$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (18)$$

y es la circunferencia de radio  $C \sigma_1$  y  $C \sigma_2$

3) A partir del punto I, y en el mismo sentido del prisma se traza un ángulo  $2\phi$  en la circunferencia, donde se intercepte la misma estará el plano  $\mu$  que definirá los valores de  $(\sigma)$  y  $(\tau)$  en el mismo.

Ilustremos todo lo anteriormente planteado mediante un ejemplo:

Un tornillo de una junta, se encuentra sometido a las cargas externas representadas en la figura. Determine:

- El valor de las tensiones principales y la posición de los planos principales.
- Las tensiones normales y tangenciales para un plano inclinado un ángulo de  $30^\circ$  respecto al plano vertical.

El diámetro del tornillo  $D= 4 \text{ cm}$

$$P= 2 \text{ kN}$$

$$Q= 5 \text{ kN}$$

Sacamos un prisma elemental del tornillo y analizamos el estado tensional a que esta sometido el mismo.

Las tensiones normales producto al esfuerzo de tracción se calculan según ha sido visto con anterioridad.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 4}{\pi (4 \cdot 10^{-2})^2} = 1.59 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 = 1.59 \text{ MPa}$$

Las tensiones tangenciales producto al esfuerzo de cortante como será visto posteriormente se calculan según la expresión:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 4}{\pi(4 \cdot 10^2)^2} = 3.98 \text{ MPa}$$

De esta forma el punto A del tornillo estaría sometido a un estado tensional plano con valores de tensiones  $\sigma_x = 1.6 \text{ Mpa}$  y tensiones cortantes  $\tau \approx 4 \text{ Mpa}$ .

Construyamos el círculo de Mohr.

Buscamos un factor escala:

$$4 \text{ MPa} \Rightarrow 5 \text{ cm}$$

$$\mu = \frac{4 \text{ MPa}}{5 \text{ cm}} = 0.8 \text{ Mpa/cm}$$

$$\bar{\tau} = 5 \text{ cm}$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1.6 \text{ MPa}}{\mu} = 2 \text{ cm}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$C = \frac{\bar{\sigma}_x}{2} = 1 \text{ cm}$$

# Capítulo

# 3

**MÉTODOS EXPERIMENTALES PARA  
LA DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES  
Y LAS DEFORMACIONES**



---

### **3.1 Métodos experimentales para la determinación de las tensiones y las deformaciones.**

Considerando que tenemos una pieza que haya sido diseñada y después de construida queremos verificar la veracidad de los cálculos de resistencia realizados en el proceso de diseño surge la interrogante ¿Cómo efectuar esta operación?

Si Ud. tiene una pieza de configuración compleja la cual está sometida a un estado tensional complejo y desea conocer este ¿Qué método utilizaría para ello?

El desarrollo de la tensometría es de gran importancia debido a que permite conocer la distribución de tensiones en las estructuras. Es sabido que a la hora de realizar cálculos de resistencia es necesario asumir determinadas cuestiones referentes a las características del material, las cargas y otros aspectos, y conocer los valores reales de tensiones, permite verificar los resultados obtenidos mediante esas fórmulas. Los métodos analíticos, aunque útiles no brindan siempre toda la información necesaria para la solución de un problema ingenieril, de aquí la importancia de la aplicación de los métodos prácticos a la Resistencia de Materiales.

Se hace necesario medir tensiones y deformaciones de forma experimental por las siguientes causas:

- Para determinar las propiedades mecánicas de los materiales.
- Para verificar la exactitud de los cálculos realizados (verificación experimental).
- Para analizar la distribución de tensiones y deformaciones en piezas de configuración compleja, a las cuales no se adaptan los métodos de cálculo establecidos.

- ✎ Para determinar las cargas cuando existen dificultades en su cálculo analítico, por ejemplo las cargas de impacto.

Las tensiones y deformaciones es preciso determinarlas para las distintas sollicitaciones.

Los ensayos existentes pueden calificarse en tres grandes grupos.

1. Ensayos estáticos. Cuando la velocidad de deformación es baja.
2. Ensayos dinámicos, impactos, cargas cíclicas, vibraciones.
3. Ensayos especiales. Cuando se analiza la influencia de la temperatura, de la velocidad de aplicación de la carga, el efecto del tiempo, relajación, reactividad, etc.

Los ensayos experimentales se realizan por los métodos siguientes: tensometría o extensometría, rayos X, lacas o recubrimientos frágiles, analogías (membrana hidrodinámica, eléctrica), polarización óptica y fotoelasticidad.

En dependencia de si realizamos el ensayo mecánico a materiales o el ensayo a estructuras se hace necesario hacer determinadas diferencias.

El ensayo mecánico a materiales se realiza con el fin de determinar las propiedades mecánicas del material. Al mismo tiempo puede realizarse para evaluar la resistencia ante estados tensionales complejos. El ensayo a materiales se realiza con probetas cuyas dimensiones y formas pueden variar según los aparatos de medición disponibles y según las condiciones de los ensayos.

Cuando se refiere a los ensayos a una estructura, se tiene en cuenta la resistencia de toda una máquina, de algunas de sus piezas o de modelos. Este ensayo se hace por una parte con el propósito de evaluar la exactitud de los cálculos y por otra parte la certeza de los procesos tecnológicos realizados.

Los aparatos que miden deformación en las construcciones deben ser universales para que puedan aplicarse a objetos de cualquier forma. Los métodos experimentales modernos de estudio de las tensiones se reducen de una u otra forma a la

determinación directa de las deformaciones que surgen en el objeto que se ensaya. Las tensiones se determinarán, de forma indirecta, a partir de la ley de Hooke. En el caso de deformaciones plásticas, generalmente no se realiza la determinación de las tensiones durante los ensayos de las construcciones, determinándose solamente la carga de ruptura o el valor de la carga para la cual se observan síntomas de aparición de deformaciones plásticas.

### 3.2 Determinación de las tensiones mediante extensómetros mecánicos.

El principio de trabajo de los extensómetros mecánicos se basa en la medición de la distancia entre dos puntos de la probeta antes y después de la deformación. La distancia inicial  $L$  entre esos dos puntos se denomina base del extensómetro.

La relación entre el incremento de la longitud de la base  $\Delta L$  y  $L$ , da el valor del alargamiento medio en la dirección del extensómetro. Si el estado de la deformación es uniforme, entonces el resultado de la medición corresponde al valor de la deformación, como es el caso de una barra traccionada. Cuando la deformación a lo largo de la base varía, como ocurre en una barra flexionada, el valor medio de la deformación estará tan cerca del valor real cuanto menor sea la base del extensómetro.

### 3.3 Extensómetros eléctricos (Galgas extensométricas).

El extensómetro eléctrico consta de un alambre fijo sobre una pequeña lámina de papel (Figura 1). El diámetro del alambre está entre los 0.015 y 0.030 mm.

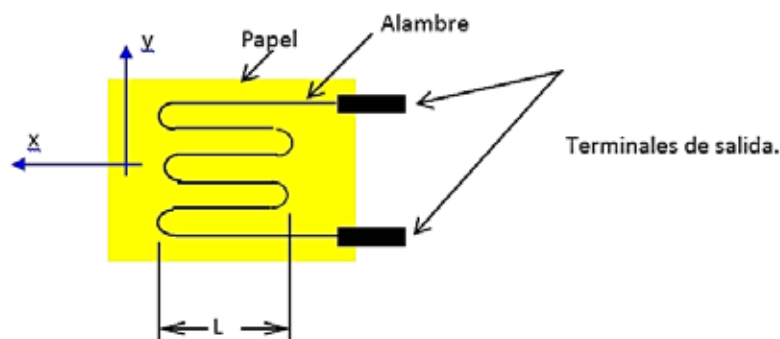


Figura 15. Galga extensométrica.

A los extremos de este alambre se sueldan los cables. La galga se pega sobre la pieza que se ensaya de tal manera que la dirección de la base L coincida con la dirección en la cual se desea medir la deformación. Cuando el extensómetro está bien pegado el alambre se alarga junto con la superficie del objeto que se ensaya y el indicador de la deformación registra la variación de la resistencia eléctrica. Los ensayos demuestran que la variación relativa de la resistencia del alambre es proporcional al alargamiento:

$$\frac{\Delta R}{R} = \gamma_0 \varepsilon \quad (19)$$

$\gamma_0$ : es el coeficiente de sensibilidad tensional, que es una magnitud adimensional y está entre 2 y 3.5 para los materiales usados en los alambres.

Por ejemplo:

Constantán: 2.0 – 2.1

Micrón: 2.1. – 2.3

Hilo de invar: 3.2 – 3.5

Producto a las curvas del alambre la galga reacciona lo mismo a las deformaciones longitudinales y transversales:

$$\frac{\Delta R}{R} = \gamma \varepsilon_x + \delta \varepsilon_y \quad (20)$$

siendo  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$  las deformaciones unitarias en las direcciones de los ejes x e y (Fig. 1) respectivamente y  $\gamma$  y  $\delta$  los coeficientes de sensibilidad tensional longitudinal y transversal de la galga que se determinan experimentalmente.

Cuando se investiga el estado tensional en elementos de construcciones complejas, surge muy a menudo la necesidad de determinar la magnitud y la dirección de las tensiones principales. Para ello se practica la instalación simultánea de tres extensómetros en la zona que interesa y en direcciones que forman 45° (Fig. 2).

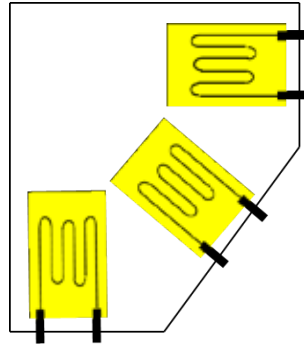


Figura 16. (extensómetros a 45°)

Sobre la base de los tres alargamientos medidos se pueden medir sin dificultad los alargamientos principales y el ángulo que fija la posición de los ejes principales, obteniéndose:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\varepsilon_I - 2\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}}{\varepsilon_I + \varepsilon_{III}} \quad (21)$$

$$\varepsilon_{x,y} = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{III}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_I - \varepsilon_{III})^2 + (\varepsilon_I - 2\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})^2} \quad (22)$$

En la técnica están muy difundidos los extensómetros eléctricos para medir deformaciones. Para la medición de tensiones los extensómetros eléctricos se pegan sobre el elemento elástico deformable (barra, árbol, viga) y por la variación de la resistencia del extensómetro se juzga sobre la tensión actuante.

En el caso de ensayos estáticos el extensómetro eléctrico pegado en la superficie de la pieza objeto de estudio se conecta a través de un puente de Wheastone (Fig. 17) y las lecturas se realizan en el galvanómetro. Una de las resistencias del puente será la resistencia de la galga y las restantes se toman de manera tal que en ausencia de deformaciones el puente este equilibrado y la intensidad de la corriente en el galvanómetro sea cero. Para ello debe cumplirse la relación:

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3} \quad (23)$$

Al actuar las cargas y deformarse el extensómetro la corriente que circulará por el galvanómetro es proporcional a la variación de la resistencia en la galga y por lo tanto de las deformaciones.

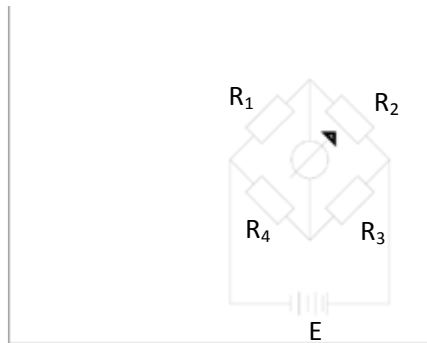


Figura 17. Conexión en puente de Wheastone.

El error fundamental de estos extensómetros es el correspondiente a los cambios de temperatura. Otro error posible es el relacionado con las variaciones en el voltaje de la fuente. Ambos pueden ser solucionados.

### 3.4 Método óptico de determinación de las tensiones.

El método óptico de medición de las tensiones consiste en la iluminación con luz polarizada de un modelo transparente de un material ópticamente activo (generalmente de tipos especiales de cristales orgánicos) solicitado con carga.

La imagen del modelo en la pantalla resulta cubierta por un sistema de franjas cuya forma y posición está determinada por el estado tensional del modelo. Analizando este cuadro existe la posibilidad de calcular las tensiones.

En la figura 4 se muestra el esquema de la instalación para la iluminación de un modelo plano con luz monocromática.

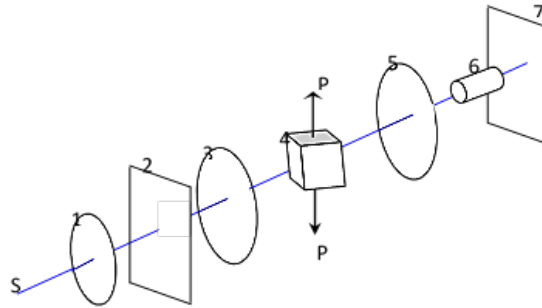


Figura 18. Esquema de la instalación para la iluminación de un modelo plano con luz monocromática.

Las partes componentes del sistema son las siguientes.

S: fuente de luz.

1. Condensador.
2. Filtro.
3. Elemento polarizador.
4. Modelo.
5. Elemento polarizador.
6. Objetivo.
7. Pantalla.

El funcionamiento de la instalación es el siguiente:

El modelo 4 se introduce entre los elementos polarizadores 3 y 5. El primero se llama polarizador y el segundo analizador. Los ejes ópticos de los elementos 3 y 5 se sitúan a  $90^\circ$ , de esta forma, antes de aplicar la carga, la luz que pasa por el polarizador, se polariza en un plano y no pasa a través del analizador, por lo que la pantalla no se verá iluminada. Al solicitar el modelo este se deforma y adquiere la propiedad de girar el plano de polarización de la luz que lo atraviesa en función de la magnitud de las tensiones. Entonces una parte de luz pasa a través del analizador, con el plano de polarización girado, proyectando en la pantalla la imagen del modelo cubierto con un sistema de franjas claras y oscuras, que son función de las tensiones actuantes en el modelo.

### **3.5 Medición de tensiones a través de los Rayos X.**

El método de Roentgen de determinación de las tensiones se basa en la medición de la distancia entre los átomos de la red cristalina del metal. Esta distancia puede variar a través de dos causas, una es producto a un cambio de temperatura o producto a la aplicación de una carga. Cuando en el cuerpo no existen tensiones la distancia entre los átomos es conocida. Comparando esta distancia con la medida después de las deformaciones, calculamos el alargamiento unitario y después de introducir la corrección térmica, se calculan las tensiones.

Este método permite determinar las tensiones en el modelo sin referencia al estado de ausencia de tensiones. En el método común de medición de las tensiones es necesaria la instalación de los extensómetros en la pieza sin solicitar para después comparar estas lecturas con las correspondientes al estado deformado. En este caso, las tensiones iniciales (debidas a diferentes procesos tecnológicos) no son captadas por los extensómetros. La medición a través de los Rayos X da los valores absolutos de tensiones teniendo en cuenta también las tensiones iniciales. Así es posible hallar las tensiones residuales en la zona de una junta soldada después de su enfriamiento.

Sin embargo las líneas del roentgenograma no son del todo claras, lo que constituye la principal fuente de errores que se cometen al realizar las mediciones. Otro aspecto que atenta contra este método es las dimensiones de los aparatos a lo que se suma la complejidad a la hora de la elaboración de los resultados.

### **3.6 Método de recubrimiento con barniz.**

El método consiste en superponer una pequeña capa de barniz sobre la superficie de la construcción. Al secarse esta forma una película fina, fuertemente unida con el metal. Al ser solicitado el cuerpo que se ensaya, en la zona de altas tensiones se forma una red de grietas finas en la película. La experiencia demuestra que la dirección de las grietas es perpendicular a la dirección de las tensiones máximas. Si el material es isótropo esta dirección corresponde a la de las tensiones principales de tracción. Este método tiene gran importancia, pues permite establecer de forma simple la dirección de los ejes



principales en la zona que interesa y determinar aproximadamente el orden de los valores de las tensiones. A partir de aquí se pueden colocar los extensómetros de una manera más racional para establecer el cuadro exacto del estado tensional.

Estos métodos deben ser continuamente perfeccionados para aumentar nuestro nivel de conocimientos en la Resistencia de Materiales.

# Capítulo

# 4

**ANÁLISIS DE ELEMENTOS  
SOMETIDOS A TORSIÓN**

#### 4.1 Tensiones y deformaciones durante la torsión.

El estado tensional de torsión es caracterizado por la presencia de la barra como factor único, el momento torsional  $M_z = M_t$  es decir, el momento que actúa en el plano de la sección transversal de la barra. Los demás componentes de las fuerzas interiores son nulos,  $Q_x = Q_y = N = 0$        $M_x = M_y = 0$ .

Estos momentos torsionales interiores son consecuencias de momentos exteriores.

Los momentos exteriores se transmiten a la barra en los lugares donde se calculan poleas, engranes, embragues, etc. Los árboles son barras que trabajan a torsión.

Cuando la carga transversal se aplica con cierta desviación con respecto al eje de la barra también provocan momentos torsores interiores, pero simultáneamente surgen otros esfuerzos interiores, que estudiaremos más adelante.

Cuando se experimentan una torcedura, unas secciones del árbol giran respecto a las otras, mientras que su longitud se mantiene invariable.

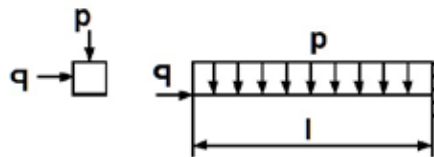


Figura 19. (Deformación de tensiones)

Para ilustrar el carácter de la distribución de los elementos torsores a lo largo de la barra el gráfico o diagrama de momento torsor, utilizando el método de las secciones. Los momentos torsores utilizados en los diagramas, no son más que las resultantes de los esfuerzos interiores que actúan en la sección transversal de una barra torsionada.

### Convenio de signos.

**Momento externo antihorario**

Momento interno (+)

**Momento externo horario**

Momento interno (-)

Cuando hay varios momentos se va realizando por tramos y el signo lo pone el mayor momento externo.

### Diagrama del Momento Torsor

Datos

$$M_1 = 400 \text{ Nm}$$

$$M_2 = 600 \text{ Nm}$$

Aplicando el método de las secciones

**Tramo I**

$$\sum M = 0 = 0 \quad M_1 - M_{t1} = 0$$

$$M_{t1} = M_1$$

$M_{t1}$  – positivo en el convenio

**Tramo II**

$$\sum M = 0$$

$$M_1 - M_2 + M_{t2} = 0$$

$M_{t2}$  negativo

$$M_{t2} = -M_1 + M_2$$

$$M_{t2} = 200 \text{ Nm}$$

## 4.2 Tensiones y deformaciones.

1. La red rectangular se transforma en una red compuesta por paralelogramos.
2. La distancia entre las circunferencias no varía (ausencia de tensiones normales).
3. No varía la longitud ni el diámetro del árbol (ausencia de tensiones normales).
4. El diámetro AB de la sección externa se gira un ángulo  $\varphi$ .
5. La tensión y el desplazamiento son proporcionales a la distancia al centro de gravedad.

El comportamiento del material es similar al estudiado para tracción-compresión. Si el material es dúctil se destacan los puntos; límite de fluencia, límite de proporcionalidad, momento de rotura. Si es frágil solo el momento de rotura.

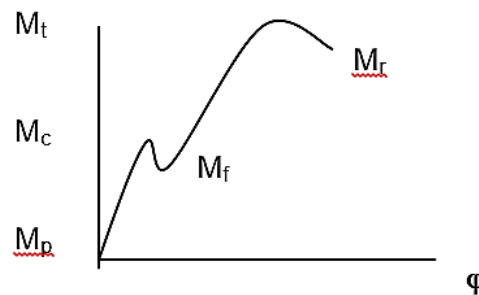


Figura 20. Gráfico de material dúctil

Estudiaremos el comportamiento del material por debajo del límite de fluencia.

Aislemos de la barra mostrada en la fig.17 un elemento de longitud  $d_z$  por medio de cortes transversales.

Del gráfico de tensión contra deformación podemos ver que hay un tramo recto donde el  $M_t$  es proporcional a  $\varphi$  (deformación angular).

Según la ley de Hooke

$$\gamma = G \cdot \Gamma \quad \Gamma \Rightarrow \text{Distorsión de las superficies cilíndricas.}$$

$$\Gamma = P \cdot \theta$$

Sustituyendo ( $\Gamma$ )  $\gamma = G \cdot P \cdot \theta$  (24)

$\theta$ : Ángulo de giro mutuo entre dos secciones. Se denomina ángulo de distorsión unitario.

$$\theta = d\phi / dz \quad (25)$$

$\phi$ : Distancia medida desde el centro de la sección al punto o fibra analizada.

El equilibrio del momento torsor está dado por la suma del momento que se crea por las fuerzas elementales que actúan en el área  $d_A$ .

$$Mt = \int \gamma \cdot p d_A \quad Ip = \int_A P^2 d_A$$

Momento polar de inercia

$$\text{Integrando } Mt = G \cdot \theta \int_A P^2 d_A$$

$$Mt = G \cdot Ip \cdot \theta \Rightarrow \theta = \frac{Mt}{GIp} \quad GIp \text{-- Rigidez de la barra en torsión.}$$

$$\text{Como } \theta = \frac{d\phi}{dz} = \frac{Mt}{GIp} \Rightarrow d\phi = \frac{Mtdz}{GIp}$$

$$\phi = \frac{Mt \cdot l}{G \cdot Ip} \quad \phi: \text{ángulo de torsión} \quad (26)$$

Al igual que en el caso de tracción o compresión, si el momento torsor y la rigidez de la barra varían por tramos la expresión sería:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{Mti \cdot Li}{Gi \cdot Ipi} \quad (27)$$

Según las expresiones  $\gamma = G \cdot P \cdot \theta$  ,  $\theta = \frac{Mt}{GIp}$

Se puede obtener  $\gamma = \frac{Mt \cdot P}{Ip}$   $Wp = \frac{Ip}{P \text{ máx}}$  (módulo de la sección en torsión) (28)

Si se varia la orientación del plano de este elemento un ángulo de 45° aparecerán en sus caras tensiones normales cuyo valor será igual a  $\gamma$  2 de estas tensión

es serán de tracción y 2 de compresión (Tema de cortante).

Esto se puede comprobar al torsionar una probeta de un material frágil, cuya resistencia a la compresión es apreciablemente mayor que a la tracción. Las fallas correspondientes a la tracción aparecerán por lo tanto en la diagonal a 45°.

#### 4.3 Cálculo de elementos circulares sometidos a torsión.

La condición de resistencia estática de un árbol sometido a torsión se puede plantear:

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{Mt}{Wp} \leq [\gamma] \quad [\gamma] \text{ tensión tangencial admisible.} \quad (29)$$

$$[\gamma] = 0.5 \dots 0.7 [\sigma]$$

A partir de esta condición se pueden resolver los problemas de diseño y revisión.

##### 4.3.1 Comprobación de diseño.

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{Mt}{Wp} \leq [\gamma] \quad (30)$$

**4.3.2 Determinación de diámetro de la sección transversal.**

$$W_p \geq \frac{Mt}{[\gamma]} \quad \text{Sección circular Maciza} \quad (31)$$

$$W_p = 0.2 d^3 \quad (32)$$

Sección circular Anular

$$W_p = 0.2 D^3 (1-C^4) \quad C = \frac{d}{D} \quad (33)$$

**4.3.3 Determinación del [Mt]**

$$[Mt] \leq [\gamma] W_p$$

Igualmente se obtienen estos resultados aplicando la condición de rigidez.

$$1. \quad \theta = \frac{Mt}{GI_p} \leq [\theta] \quad \text{Sección circular Maciza}$$

$$I_p = 0.1 d^4 \quad (34)$$

$$2. \quad I_p \geq \frac{Mt}{G[\theta]} \quad \text{Sección circular Anular}$$

$$I_p = 0.1 D^4 (1-C^4) \quad C = \frac{d}{D} \quad (35)$$

$$3. \quad [Mt] \leq [\theta] G \cdot I_p$$

$$\theta = \frac{Mt}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180}{\Pi} \leq [\theta] \quad \text{para obtener el resultado en } ^\circ / \text{m.} \quad (36)$$

Relación entre el momento torsor Mt, el número de revoluciones n la potencia transmitida por el árbol.



Para calcular árboles no suele darse el momento torsor, sino la potencia  $N$  en caballos de fuerza y el número  $n$  de revoluciones del árbol en un minuto. La potencia (en caballos de fuerza) se expresa mediante la relación.

$$N = Pv / 75 \text{ (cv)}$$

$$\text{La velocidad lineal } v = 2\pi rn / 60 = \pi rn / 30 \text{ (m / seg)}$$

$$N = P \pi rn / 30.75 = P rn / 716.2 = Mt n / 716.2$$

El momento torsor es :

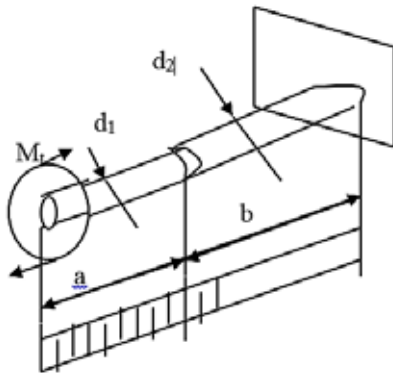
$$Mt = 716.2 N / n \text{ (kpm)} \quad N: \text{ potencia}$$

$N$ : número de revoluciones

$$Mt = 71620 N / n \text{ (kpm)}$$

## EJEMPLO

Determinar la tensión tangencial máxima y el ángulo total de torsión en el extremo libre de la barra sometida a un momento torsor  $M_t$ .



Datos

$$M_t = 200 \text{ KN.m}$$

$$A = 2 \text{ m}$$

$$B = 3 \text{ m}$$

$$D_1 = 5 \text{ cm}$$

$$D_2 = 10 \text{ cm}$$

Material CT-3

El momento torsor es constante como tiene sección variable  $\phi_T = \phi_1 + \phi_2$  y la tensión

Máxima estará en  $d_1$ .

$$\phi_1 = \frac{Mta}{G \cdot Ip} = \frac{200KN \cdot m \cdot 2m}{0,8 \cdot 10KN/m \cdot 625 \cdot 10m}$$

$$\phi_1 = 0,8 \text{ rad } 180^\circ / \pi = 45,85^\circ$$

$$\phi_2 = \frac{Mt \cdot b}{G \cdot Ip2} = \frac{200KN \cdot m \cdot 3m}{0,8 \cdot 10/m \cdot 10000 \cdot 10m}$$

$$\phi_2 = 0,075 \text{ rad } 180^\circ / \pi = 4,29^\circ$$

$$Ip_1 = 0,1 d_1^4 = 625 \cdot 10^{-8} m^4$$

$$G = 0,8 \cdot 10^{11} N / m^2 \cdot 10^{-3} = 0,8 \cdot 10^8 KN / m^2$$

$$Ip_2 = 0,1 d_2^4 = 10000 \cdot 10^8 m^4$$

$$\phi_T = \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi_T = 0,8 + 0,075 = 0,875 \text{ rad}$$

$$\phi_T = 45,84^\circ + 4,29^\circ = 50,14^\circ$$

$$\gamma_{\text{máx.}} = \frac{Mt}{wp} = \frac{200KN.m}{25.10m}$$

$$wp = 0,2 \cdot D_1^3$$

$$wp = 25 \cdot 10^{-6} m^3$$

$$\gamma_{\text{Máx.}} = 8 \cdot 10^6 KN / m^2 \Rightarrow \text{ Si aplicamos la condición Resistencia.}$$

$$\gamma_{\text{Máx.}} \leq [\gamma] \text{ Condición de resistencia } [\gamma] = [\sigma] 0,5$$

$$8000 \cdot 10^3 KN / m^2 > 80 \cdot 10^3 KN / m^2 \quad [\gamma] = 0,5 (160 \text{ Mpa})$$

$$[\gamma] = 80 \text{ Mpa} \cdot 10^3 = 80 \cdot 10^3 KN / m^2.$$

No resiste, no cumple con la condición de resistencia

Epígrafe Figura 17. Torsión en barras de sección no circular y perfiles de paredes delgadas.

#### 4.4 OBJETIVOS

- ¿Qué sucede con una barra de sección no circular sometida a torsión?
- ¿Cómo se calculan estos elementos a torsión?

##### 4.4.1 Torsión en barras de sección no circular.

El análisis de este tipo de elemento es complicado y no se puede utilizar los métodos de la Resistencia de Materiales y por lo que la teoría de la elasticidad nos ofrece la forma para su resolución

Esto se debe a que la hipótesis de la invariabilidad de las secciones transversales planas no se cumple puesto que las secciones de las barras se alabean por lo que varía grandemente la distribución en la sección transversal.

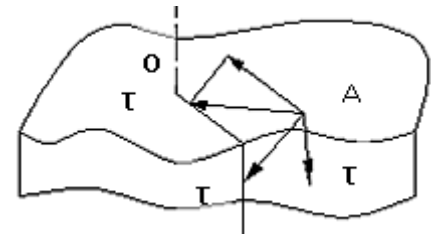


Figura 21. Sección en una barra no circular

Podemos demostrar que las  $\tau$  en las secciones transversales que corresponden a los puntos ubicados próximos a los límites de la sección, están dirigidos según la tangente al contorno. La tensión tangencial cerca del borde de la sección va dirigida con cierto ángulo con respecto al borde. Al descomponerla en dos componentes una según la tangente al borde ( $\tau_t$ ) y otra normal a él ( $\tau_n$ ).

Por la ley de paridad de las tensiones tangenciales en la superficie de la barra debe aparecer una tensión tangencial  $\tau'_{rn} = \tau_n$ . al considerar que la superficie exterior esta libre de carga ya que están aplicadas fuerzas exteriores. Así pues,  $\tau_n = 0$  y por tanto  $\tau_n = 0$ .

Igualmente podemos demostrar que en caso de que en la sección transversal existan ángulos salientes, en ella las tensiones tangenciales serán nulas (sección rectangular).

Las ecuaciones definitivas para el cálculo de las tensiones tangenciales máximas  $\tau_{m\acute{a}x}$ , el ángulo de torsión unitario  $\theta$  y el ángulo total de torsión  $\phi$  de una barra con longitud  $l$  serán:

$$\tau_{max} = \frac{M_{tor}}{w_t} \quad (37)$$

$$\theta = \frac{M_{tor}}{G.It} \quad (38)$$

$$\phi = \frac{M_{tor} \cdot l}{G.It} \quad (39)$$

Estas características geométricas se denominan:

$I_t$ : Momento de rigidez en torsión.

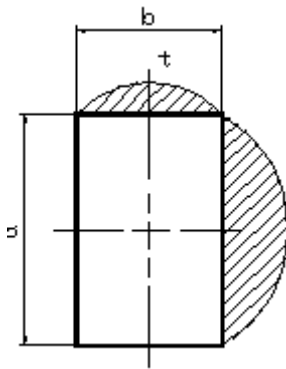
$w_t$ : Módulo de sección en torsión.

Mencionar la teoría membranaral.

- Sección rectangular.

Basándose en lo antes expuesto de las tensiones tangenciales se plantea que las mismas se producen en los planos tangenciales se plantea que en las mismas se

producen en los planos transversales de la barra y en las esquinas o aristas las tensiones  $\tau$  son nulas y la  $\tau_{\text{máx.}}$  ocurren en las mitades de los lados mayores.



$$\tau_{\text{max}} = \frac{Mt}{wt} \quad w_t = \alpha \cdot a \cdot b^2$$

$$I_t = \beta \cdot a \cdot b^3$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Mt}{\alpha \cdot \beta \cdot b^2} \quad (\text{ec40})$$

Figura 22. Sección rectangular

Donde (a) y (b): son los lados mayor y menor respectivamente del rectángulo.

( $\alpha$ ) y ( $\beta$ ): depende de la relación a/b y viene dado en la tabla 1

Tabla 1. Ángulos con respecto a la relación a/b del rectángulo

$\frac{a}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta_1$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\eta$	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Las condiciones de resistencia y rigidez durante el cálculo a torsión de una barra de sección rectangular son:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Mt}{\alpha \cdot a \cdot b^2} \leq [\tau]b \quad (41)$$

$$\theta_{\text{máx}} \frac{Mt}{G \cdot \beta ab^3} \leq [\theta] \quad (42)$$

Durante la torsión de las barras cuyas secciones no son sino trapecios isósceles los valores aproximados de  $\tau_{\text{máx}}$  y  $\theta$  puede deducirse determinando las magnitudes señaladas para una barra con sección de rectángulo equivalente que se construye según el esquema dado.

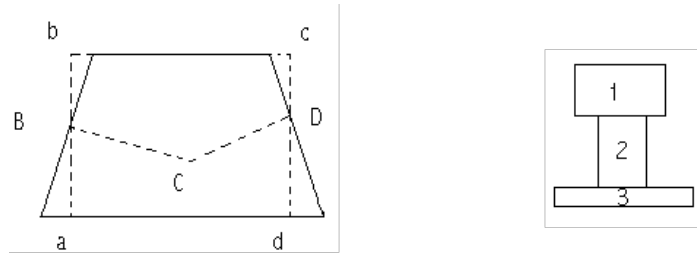


Figura 23. Sección de barras de trapecios Isósceles

Durante la torsión de la barra de sección cerrada compuesta que consta de elementos rectangulares, el momento de inercia es igual a

$$It = It_1 + It_2 + It_3 + \dots = \sum It_n \quad (43)$$

Siendo  $n=1,2,3,4,5,\dots$  los números de las partes simples integrantes de la sección examinada.

$$\theta = \frac{M}{G.It} = \frac{Mt_1}{GIt_1} = \frac{Mt_2}{GIt_2} = \dots = \frac{Mt_n}{GIt_n} \quad (44)$$

#### 4.5 Torsión en barras de paredes delgadas.

(Perfiles delgados)

En muchas construcciones se usan barras que tienen secciones con un espesor muy inferior al resto de las dimensiones, estos tipos de perfiles se dividen en abiertos y cerrados.

##### 4.5.1 Perfiles Cerrados

En la práctica se encuentran casos de perfiles de paredes delgadas sometidas a torsión en diversas formas. En estos casos, la excepción del perfil circular de paredes delgadas de espesor uniforme, las secciones transversales que antes permanecían planas (sección angular) ahora no permanecen en planos después de la deformación, sino que se alabean.

En la torsión simple, en la sección transversal surgen solamente tensiones tangenciales que en esta solución aproximada se supone uniformemente distribuida en el espesor de dichas paredes cuando este es pequeño en comparación con otras dimensiones. Esto sería estrictamente válido solo para una pared infinitamente delgada, pero como  $\tau$  cambia muy poco en el espesor de la pared se supone constante y se adapta un valor promedio que se designa por  $\tau_s$ .

Considerándose un perfil de forma arbitraria y un elemento aislado de este sobre el cual actúan las tensiones  $\tau_s$  y  $\tau_s'$ . Para que no se produzca un desplazamiento del elemento en la dirección del eje X debe cumplirse la condición de equilibrio:

$$\sum P_x = 0 \quad \tau_s' t' dx - \tau_s t dx = 0 \quad t \text{ ó } \delta: \text{ espesor.} \quad (45)$$

Si  $\tau_s' t' = \tau_s t = \text{constante}$  (ecuación de continuidad)

Las tensiones tangenciales  $\tau$  en los perfiles cerrados de paredes delgadas son inversamente proporcionales al espesor de la pared.

Para determinar la tensión tangencial en sección perpendicular al eje X, se divide el perfil y se toma una parte. (las tensiones se dirigen según la tangente a la línea media).

La Condición de Equilibrio de los momentos respecto a un punto cualquiera es:

$$\sum M = 0 \quad -Mt + \int_s \tau_s \delta ds d = 0 \quad (46)$$

Ver ecuación 46

Donde:  $\int_s \tau_s \delta ds d$ , es el momento de las fuerzas internas respecto al punto 0

Dado que  $\tau_s \delta = \text{constante}$   $Mt = \tau_s \delta \int_s ds d$

La integral  $\int_s ds d$ , es el doble del área delimitada por la curva central. (W)

$$Mt = \tau_s \delta 2w \quad \text{Primera fórmula de Bredt.} \quad (47)$$

De donde ( $\tau_s = \frac{Mt}{2w.\delta}$ ) para tubos

El ángulo de torsión se determina por medio del trabajo de deformación.

$$d_t = \frac{1}{2} \int_s \tau_s \frac{2}{G} \frac{\delta \cdot ds \cdot d}{dv} = \frac{dx}{2G} \int_s \tau_s^2 \delta \cdot ds \quad (48)$$

Dado  $\tau_s \cdot \delta = \text{constante}$   $d_t = \frac{\tau_s^2 \delta^2}{2G} dx \int \frac{ds}{t}$

A través del trabajo de deformación llegamos a:

$$d\theta = \frac{Mt}{4.w^2.G} \int_s \frac{ds}{\delta} \quad \text{Segunda fórmula de Bredt} \quad (49)$$

$$\theta = \frac{d\theta}{dx} = \frac{Mt}{4.w^2.G} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

Cuando la sección tiene una forma arbitraria la curva central se divide en pequeñas

longitudes  $S_i$  y la integral pasa a ser una suma  $\int_s \frac{ds}{\delta} = \sum \frac{S_i}{\delta_i}$

$S$ : longitud o perímetro de la sección.

Espesor constante ( $\delta$ ).

Espesor variable

$$\tau = \frac{Mt}{2w\delta}$$

$$\theta = \frac{Mt \cdot 1 \cdot S}{4G \cdot w^2 \cdot \delta}$$

$$\theta = \frac{Mt \cdot S}{4G \cdot w^2 \cdot \delta}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Mt}{2w \cdot \delta_{\text{mín}}}$$

$$\theta = \frac{Mt_1}{4 \cdot w^2 \cdot G} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

$$\theta = \frac{Mt}{4w^2 \cdot G} \int_s \frac{ds}{\delta}$$



#### 4.5.2 Perfiles abiertos.

Si el perfil es abierto las tensiones tangenciales varían, según una ley lineal con el espesor del perfil paralelamente al contorno de la sección y le dan la vuelta al contorno del perfil formando a su vez pares de fuerzas distribuidas en la sección. Los bravos de estos pares de fuerzas son pequeños, lo que provoca que las tensiones puedan alcanzar considerablemente grandes aun cuando los momentos torsores sean pequeños.

Estos perfiles se pueden considerar como un rectángulo de relación a/b grande. Para esta condición pueden determinarse en la tabla 8.1 pag. 278 Gilda Fernández, el valor de esta relación y  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$A=1 / 3$$

$$\beta=1 / 3$$

$\delta$ : Espesor del perfil.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3Mt}{S.\delta^2}$$

$$\theta = \frac{3Mt}{G.\delta^3.S}$$

$$w_t = S.\delta^2 \quad (50)$$

$$I_t = \delta^3.S$$

S: longitud del perfil rectificado.

Estas fórmulas son generales, independientemente de la forma del perfil y siempre que este último pueda ser rectificado para convertir en un rectángulo.

En caso contrario:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3Mt.\delta_{\text{máx}}}{\sum \delta_i^3.S_i} \quad \theta = \frac{3.Mt.1}{G.\sum(\delta_i^3.S_i)} \quad (51)$$

Calcular la tensión máxima y el ángulo de torsión unitaria de la barra rectangular tubular siguiente:

$$Mt=1500 \text{ N.m, } G=8 \cdot 10^4 \text{ Mpa (acero)}$$

$$w = 3,5. (7)$$

$$w = 24,5 \text{ cm}^2 = 24,5 \text{ cm}^2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\tau_{m'x} = \frac{Mt}{\delta_{\min} \cdot 2w} = \frac{1500}{(0,5 \cdot 10^{-2})(24,5 \cdot 10^{-4})2}$$

$$\tau_{\text{máx}} = 612 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\theta = \frac{Mt}{4G \cdot w^2} \int_s \frac{ds}{\delta} = \frac{1500}{4(8 \cdot 10^{10})(24,5)^2 \cdot 10^{-4}} \left( \frac{2,3,5 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^2} + \frac{2,7 \cdot 10^{-2}}{0,5 \cdot 10^{-2}} \right)$$

$$\theta = 0,27 \text{ rad/m}$$

Para casos este se puede plantear de otra forma como aparece en el texto Resistencia de los Materiales de K. Silovsky.

Donde queda:  $\frac{Mt}{2G \cdot w^2} \left( \frac{h}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} \right)$  a través de simplificaciones.

$$\theta = \frac{Mt}{2G \cdot w^2} \left( \frac{h}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} \right)$$

$$\theta = \frac{1500}{2(8 \cdot 10^{10})(24,5 \cdot 10^{-4})^2} \left( \frac{7 \cdot 10^{-2}}{0,5 \cdot 10^{-2}} + \frac{3,5 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-2}} \right)$$

$$\theta = 1,56 \cdot 10^{-3} (17,5)$$

$$\theta = 0,027 \text{ rad}$$

# PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

---

- ¿ Que estado tensional se presenta en la torsión?
- ¿ Que tipo de tensión surgen en torsión?
- ¿ Como puede plantearse la condición de resistencia?
- ¿ Que desplazamientos surgen en torsión?
  
- ¿ Como puede plantearse la condición de Rigidez?
- ¿ Que problemas se pueden resolver con las condiciones de Resistencia y Rigidez?
- ¿Cómo son las características de la torsión en barras no circulares?
- ¿Influyen las dimensiones de la sección transversal en las características torcionales?
- ¿Por que diferenciamos los perfiles delgados en abiertos y cerrados?.

# Capítulo

# 5

**TEORÍAS FUNDAMENTALES DE RESISTENCIAS**

## 5.1 Introducción

En estados tensionales bidimensionales o tridimensionales, puede aparecer un estado peligroso capaz de provocar un fallo como resultado de la combinación de tensiones, aunque las tensiones  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ó  $\sigma_3$  se apliquen en intensidades inferiores al límite de resistencia. Determinar los valores peligrosos de tensiones combinadas resulta prácticamente imposible por dos razones:

- 1) El equipamiento para poder realizar ensayos de probetas, que queden sometidas a estados tensionales compuestos, es de mucha mayor complejidad, que las máquinas ideadas para realizar los ensayos a tracción-compresión axial.
- 2) Cada experimento que reproduce el estado tensional compuesto debe realizar inevitablemente con una relación constante entre  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ . Por eso los resultados de ese experimento pertenecerían a un caso determinado de relación entre las tensiones principales. Pero puede existir un número finito de tales relaciones, por lo tanto se necesitaría una cantidad infinita de experimentos para caracterizar completamente tal estado tensional.

Por lo tanto, es necesario buscar un modo más simple para determinar los valores límites utilizando valores obtenidos en las pruebas para el estado tensional lineal.

En la determinación de la resistencia de materiales bajo cargas combinadas se utilizan diversas hipótesis sobre las causas del fallo del material. Las mismas están basadas en la comparación del peligro del estado tensional compuesto con el peligro del estado tensional lineal, y han sido enunciadas sobre la base de investigaciones teóricas y experimentales.

## 5.2 Teorías de Resistencia.

### 5.2.1 Primera Teoría.

La alteración de la resistencia (paso al estado límite del material) empieza cuando la tensión normal máxima para un estado tensional compuesto alcanza el valor peligroso de la tensión normal para un estado tensional simple o uniaxial.

Condición de resistencia

$$a) \sigma_{eq} = \sigma_1 \leq [\sigma]_t \qquad b) \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_3} \leq [\sigma]_c$$

El caso en el material sea dúctil, la resistencia se comprueba según la condición

$$a) \sqrt{\sigma_1} > \sqrt{\sigma_3} \text{ y según la condición b) si } \sqrt{\sigma_3} > \sqrt{\sigma_1}$$

Si el material es frágil, la resistencia se comprueba de la forma siguiente:  $\sigma_1 \leq [\sigma]_t$ ; y  $\sqrt{\sigma_3} \leq [\sigma]_c$

Esta teoría solo es aplicable para materiales frágiles y siempre que por lo menos una de las tensiones principales sea positiva,  $\sigma_1 > 0$ .

#### 1. Segunda Teoría.

La alteración de la resistencia (paso al estado límite del material) empieza cuando la deformación lineal unitaria máxima para un estado tensional compuesto alcanza el valor peligroso de la deformación lineal unitaria al límite para un estado tensional simple o uniaxial.

$$\epsilon_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{lim}}$$

Condición de Resistencia

$$\sqrt{\epsilon_{\text{máx}}} \leq [\epsilon] \qquad \epsilon = \frac{\epsilon_{\text{lim}}}{n}$$

Aplicando la Ley de Hooke Generalizada, si  $\epsilon_1$  es la deformación lineal unitaria máxima:

$$\epsilon_1 = 1/\epsilon [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$[\epsilon] = \frac{[\sigma]}{\epsilon}$$

Sustituyendo en la condición de resistencia:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

Debe tenerse en cuenta que  $[\sigma] = \sigma_{lim}/n$  si se trata de un estado tensional biaxial de tracción, es decir  $\sigma_3=0$ .

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 \leq [\sigma] \quad (52)$$

Esta teoría no se comprueba experimentalmente, y por lo tanto, está en desuso.

### 5.2.2 Tercera Teoría.

La alteración de la resistencia comienza cuando la tensión tangencial máxima para el estado tensional compuesto alcanza el valor de la tensión tangencial límite para el estado tensional uniaxial.

Condición de Resistencia.

$$\tau_{\text{máx}} \leq [\tau]$$

Teniendo en cuenta que:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

Y que para un estado tensional triaxial

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

La condición de resistencia podrá escribirse:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_t \quad (53)$$

Los experimentos han demostrado la aplicabilidad de esta teoría para aquellos materiales en los que las fallas ocurren por fluencia.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (54)$$

### 5.2.3 Cuarta Teoría.

La alteración de la resistencia comienza cuando la energía potencial de deformación unitaria máxima para un estado tensional compuesto, alcanza el valor peligroso de la energía unitaria máxima para un estado tensional simple.

Condición de Resistencia.

$$U_f \text{ máx} \leq U \text{ lim}$$

Donde:

$$U_f = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

$$U \text{ lim} = \frac{\sigma_{lim}^2}{2E}$$

Por lo tanto la condición de resistencia podrá escribirse de la forma siguiente:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \leq [\sigma]$$

Esta teoría concuerda muy bien con los resultados experimentales para los materiales dúctiles. Es más exacta que la tercera teoría.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (55)$$

### 5.2.4 Teoría de Mohr.

Esta teoría consiste en ir construyendo gráficamente diferentes estados tensionales de un punto y se traza una envolvente (los gráficos a partir de resultados experimentales).

La suposición principal de esta teoría consiste en afirmar que: “La forma de la envolvente de los círculos de Mohr de los estados límites dependen de la profundidad del material y es una característica mecánica del material, como lo es por ejemplo el diagrama de tracción”.



Si se conoce la envolvente de los círculos límites de un material, será posible determinar el coeficiente de seguridad de cualquier estado tensional dado. Para ello se construye el mayor de los tres círculos de Mohr correspondientes a un estado tensional dado (por ejemplo triaxial) y después se determina gráficamente cuantas veces se debe aumentar  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  para que el círculo sea tangente a la envolvente.

Condición de Resistencia.

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_t}{[\sigma]_c} \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (56)$$

Para materiales dúctiles esta hipótesis coincide con la fórmula obtenida en la tercera hipótesis.

Se usa, fundamentalmente para materiales frágiles.

### 5.3 Conclusiones

TEORÍA PARA	COND. RESIST	SE RECOMIENDA
1 <sup>ra</sup>	$\sigma_{eq} = \sigma_1 \leq [\sigma]_t$ $\sigma_{eq} =  \sigma_3  \leq [\sigma]_c$	Materiales frágiles.
2 <sup>da</sup>	$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$	No.
3 <sup>ra</sup>	$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_t$	Materiales frágiles.
4 <sup>ta</sup>	$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \leq [\sigma]$	Mats. Dúctiles.
5 <sup>ta</sup>	$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_t}{[\sigma]_c} \sigma_3 \leq [\sigma]$	Materiales frágiles.

# Capítulo

# 6

**ANÁLISIS DE ELEMENTOS  
SOMETIDOS A TORSIÓN**

## Condición de resistencia. Cálculo de juntas remachadas y soldadas.

### 6.1 Tensiones y deformaciones en elementos sometidos a cortante.

El estado tensional de cortante puro es aquel en el cual, en los lados del elemento ocurren o aparecen solamente tensiones tangenciales. Ejemplo:

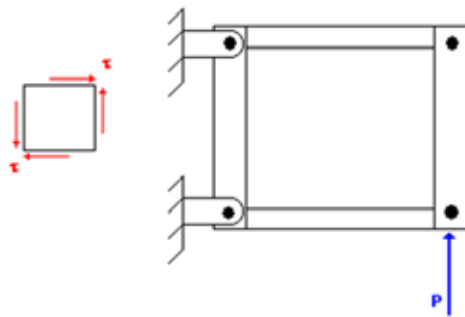


Figura 24. Elementos de unión de una estructura

Tomando un esquema de un elemento donde se produzca un estado tensional de cortante puro y utilizando el método de las secciones, se puede observar que en la sección transversal de la barra solo aparecen una fuerza cortante  $Q = P$ . Esta fuerza cortante es la resultante de las tensiones tangenciales que actúan en la sección transversal, por lo que:

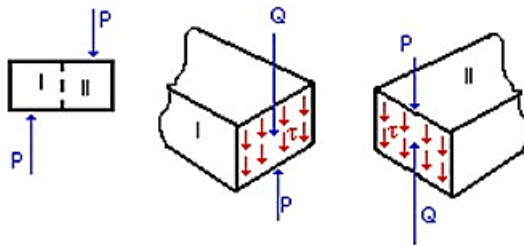


Figura 25. Fuerzas cortantes en un elemento

$$\int_A \tau dA = Q$$

$$Q = P = \tau A$$

La condición de resistencia quedará:

$$\tau = \frac{P}{A} \leq [\tau] \quad (57)$$

## 6.2 Estado tensional de cortante puro.

Se analizará un elemento abcd que antes de la deformación era rectangular y después de la deformación adquirirá la forma a'b'c'd'.

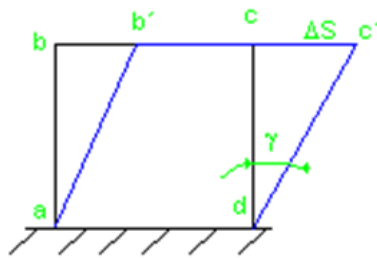


Figura 26. Elemento antes y después de deformarse

Para este estado tensional  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  construyendo el círculo de Mohr es posible determinar las tensiones principales.

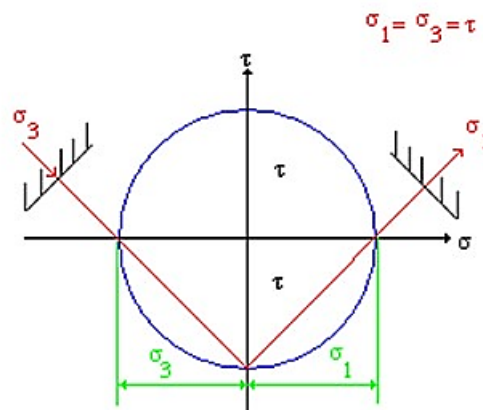


Figura 27. Círculo de Morh

Si se considera fijo un lado del elemento abcd se denominará distorsión absoluta a la magnitud  $cc' = \Delta s$  y la fracción  $\Delta s/a = \text{tg} \gamma$  distorsión unitaria.

Puesto que las deformaciones son pequeñas se puede admitir que  $\text{tg} \gamma = \gamma$ . Este ángulo se denomina ángulo de distorsión.

### Ley de Hooke para el cortante puro.

$$\tau = G\gamma \quad (58)$$

G: Módulo de elasticidad de segundo orden o módulo de distorsión.

$$G = \frac{E}{1 + \mu} \quad (59)$$

### Condición de resistencia. Juntas soldadas y remachadas.

Condición de resistencia.

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau] \quad (60)$$

A partir de los resultados experimentales se acepta que:  $[\tau] = 0.6 \dots 0.8 [\sigma]$ .

Veamos el cálculo de una junta remachada.

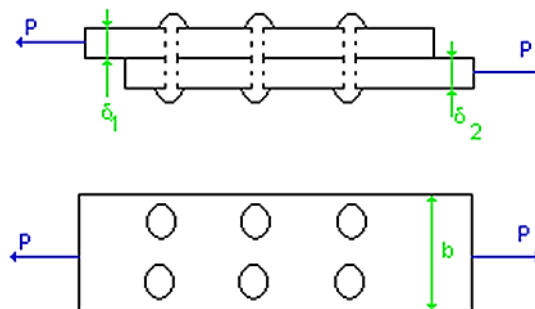


Figura 28. Junta remachada

La junta falla cuando se cortan los remaches en el plano de contacto de las láminas.

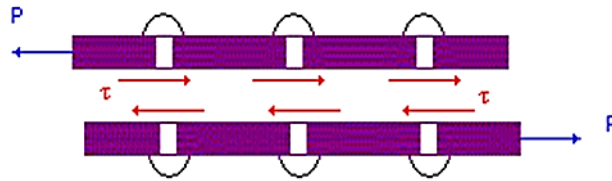


Figura 29. Tensiones en junta remachada

Si la rotura de cada remache ocurre por un plano de cizallamiento se dice que la junta es de un hilo, si ocurre por dos planos de dos hilos, etc.

Se admite que en los planos de cizallamiento actúan solo tensiones tangenciales.

¿Cómo se distribuye la fuerza  $P$  entre los remaches? ¿Están cargados los remaches por igual?

Al aumentar las hileras transversales el trabajo de los remaches en cada hilera se hará menos uniforme. Sin embargo los ensayos demuestran que cuando actúan cargas estáticas los remaches se destruyen simultáneamente.

Cuando actúan cargas de percusión y vibratorias resulta indispensable contar con la diversidad de trabajo de los remaches.

En el caso de cargas estáticas se puede considerar que el esfuerzo cortante en cada remache es igual a:

$$Q = P/n, \quad (61)$$

Siendo  $P$  la fuerza que actúa en la junta y  $n$  el número de remaches.

Planteando la ecuación de equilibrio de la parte separada de la junta:

$$\sum F = 0 \quad -P + n\tau Az = 0$$

de donde se obtiene:

$$\tau = \frac{P}{nAz}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$z$  = número de hilos de corte.

n: número de remaches.

La condición de resistencia de los remaches al cizallamiento:

$$\tau = \frac{P}{nAz} \leq [\tau_{CIZ}] \quad (62)$$

$$[\tau_{CIZ}] = 0.6[\sigma]$$

Aparte del cálculo por cortante la junta remachada se calcula también al aplastamiento. Se comprueban las tensiones de aplastamiento sobre el área de contacto de las planchas unidas y los remaches.

La condición de resistencia al aplastamiento se expresa por la fórmula:

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{n_2 A_{ap}} \leq [\sigma_{ap}] \quad (62)$$

$$A_{ap} = d\delta$$

$d$  : diámetro del remache.

$\delta$  : espesor de la plancha.

$$[\sigma_{ap}] = 2[\sigma]$$

Debe hacerse el cálculo de comprobación de la plancha la cual ha sido debilitada por los agujeros realizados a la misma. Las planchas están sometidas a esfuerzos de tracción – compresión.

$$\sigma = \frac{P}{An} \leq [\sigma] \quad (63)$$

$$An = (b - n'd) * \delta$$

$n'$ : número de remaches en una hilera.

A partir de las condiciones de resistencia de los remaches a cortante y al aplastamiento se resolverán los siguientes problemas:

1. Cálculo de comprobación de la junta.
2. Cálculo de dimensionamiento.

Comúnmente consiste en determinar el número de remaches necesarios a utilizar para que la junta resista a cortante y al aplastamiento o determinar el diámetro de los remaches a utilizar.

3. Cálculo de los esfuerzos que admite la junta para su normal funcionamiento.

Ejemplo:

Determinar el número de remaches necesarios para que la junta remachada resista los esfuerzos a que está sometida.

Datos.

Remache de aluminio duro.

$$[\sigma] = 100 \text{ MPa}$$

Planchas: Acero CT3

$$[\sigma] = 160 \text{ MPa}$$

$$\delta = 2 \text{ mm}$$

$$d = 5 \text{ mm}$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

$$[\tau_{Clz}] = 0.6[\sigma]$$

$$[\sigma_{ap}] = 2[\sigma]$$

$$P = 10 \text{ kN}$$

1. Cálculo a cortante.

$$n_1 \geq \frac{4P}{z\pi d^2 [\tau_{Clz}]}$$

$$n_1 \geq \frac{4 \times 10 \times 10^3}{1 \times 3.14 \times (5 \times 10^{-3})^2 \times 0.6 \times 100 \times 10^6}$$

$$n_1 \geq 8.49$$



Se necesitan 9 remaches.

2. Cálculo al aplastamiento.

$$n_2 \geq \frac{P}{\delta d [\sigma_{ap}]}$$

$$n_2 \geq \frac{10 \times 10^3}{2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^6}$$

$$n_2 \geq 5$$

Resulta decisivo el cálculo por resistencia, por lo que se escogen 9 remaches que se distribuyen en tres filas por tres columnas.

3. Cálculo de comprobación de la plancha.

$$\sigma = \frac{P}{Aneta} = \frac{P}{(b - n'd)\delta} \leq [\sigma]$$

$$\sigma = \frac{10 \times 10^3}{[5 \times 10^{-2} - 3(5 \times 10^{-3})] \times 2 \times 10^{-3}}$$

$$\sigma = 143 \text{ MPa}$$

Por lo que esta garantizada la resistencia de la plancha.

Distancia entre remaches:  $c = 3d = 15 \text{ mm}$

Distancia entre remache y el borde de la plancha  $c' = 2d = 10 \text{ mm}$ .

### 6.3 Algunas consideraciones sobre las juntas remachadas.

1. La distancia entre los agujeros de los remaches  $c$  es igual a tres veces el diámetro de los remaches (medida desde el centro del agujero) y del centro del agujero al borde de dos veces el diámetro. De esta forma se garantiza que no ocurra el desgarramiento de las planchas.
2. Tanto en el cálculo a cortante como al aplastamiento debe realizarse para el material más débil (comúnmente es el remache).

3. En el cálculo al aplastamiento debe prestarse atención a lo siguiente:
  - a) Cuando el espesor de las planchas sea diferentes y ambas están sometidas al mismo valor de carga las tensiones máximas ocurrirán en la plancha de menor espesor.
  - b) Si los esfuerzos son diferentes y el espesor es diferente en las planchas deberá hacerse un análisis de la relación carga/espesor a que esta sometida cada plancha. Las tensiones máximas ocurrirán donde la relación sea máxima.
4. A los efectos prácticos no es recomendable colocar un número elevado de hileras transversales. Para cinco o más hileras la diferencia entre los esfuerzos que soporta la hilera central y la de los extremos supera el 80 %.

#### 6.4 Cálculo de juntas soldadas.

Por la expresión antes vista para el cálculo de las tensiones en elementos sometidos a cortante se calculan también las juntas soldadas, que en los últimos tiempos sustituyen a las remachadas.

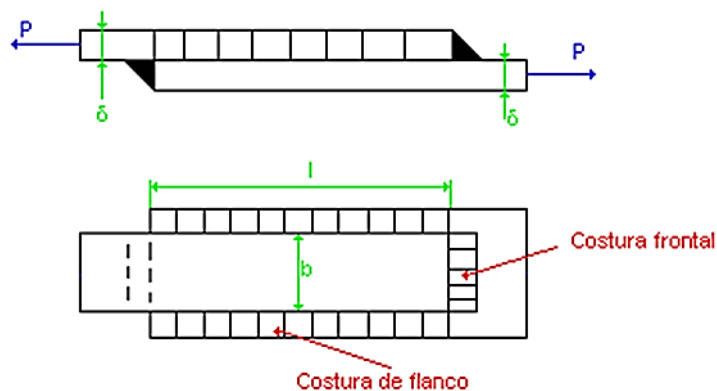


Figura. 30 Unión soldada

Al calcular las costuras frontales y de flanco, se considera que la sección peligrosa de la costura coincide con el plano que pasa por la bisectriz  $mn$  del ángulo recto  $ABC$ . El área de la sección peligrosa de una costura frontal es  $b \cdot 0.7k$  y el de una costura de flanco  $l \cdot 0.7k$ , siendo  $k$  el cateto de la costura.

El cateto  $k$  puede ser igual o no al espesor de una de las planchas, en la de menor espesor. Para la costura frontal:

$$\tau = \frac{P}{b0.7k} \leq [\tau_s] \quad (64)$$

Costura de flanco:

$$\tau = \frac{P}{l0.7k} \leq [\tau_s]$$

es la tensión admisible por cortadura para la costura.

En el caso de la costura representada que esta formada por dos cordones de flanco y dos frontales la condición de resistencia será:

$$\tau = \frac{P}{2b0.7k + 2l0.7k} \leq [\tau_s]$$

La expresión general será:

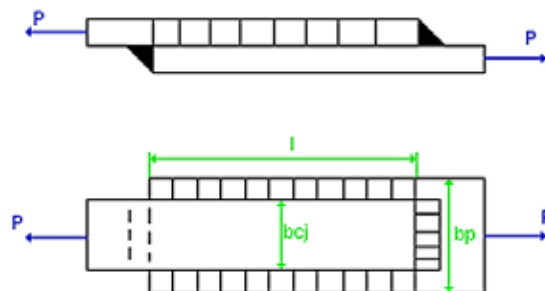
$$\tau = \frac{P}{n_{fr}b0.7k + n_{fl}l0.7k} \leq [\tau_s] \quad (65)$$

$n_{fr}$  y  $n_{fl}$ : número de cordones frontales y laterales respectivamente.

A partir de esta condición se resuelven los tres problemas ya estudiados.

Ejemplo:

Unir dos planchas de acero CT3 mediante dos cordones de soldadura de flanco y dos frontales.



Datos:

$$[\tau_s] = 100 \text{ MPa}$$

$$k = 3 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$\delta p = \delta c j = 3 \text{ mm}$$

$$b p = 200 \text{ mm}$$

En este caso, como se observa:

$$b = bp - bcj$$

$$b = 200 - 2 \times 3$$

$$b = 194 \text{ mm}$$

$$\tau = \frac{P}{n_{fr} b 0.7k + n_{fl} l 0.7k} \leq [\tau_s]$$

$$l \geq \left( \frac{P}{[\tau_s]} - n_{fr} b 0.7k \right) * \frac{1}{n_{fl} 0.7k}$$

$$l \geq \left( \frac{10 \times 10^3}{100 \times 10^6} - 2 \times 194 \times 10^{-3} \times 0.7 \times 3 \times 10^{-3} \right) * \frac{1}{2 \times 0.7 \times 3 \times 10^{-3}}$$

$$l \geq 44 \text{ mm}$$

### 6.5 Conclusiones.

Resumen del contenido. Hacer énfasis en el hecho de que tanto en las juntas soldadas como remachadas las planchas están sometidas a tracción – compresión (Tema II) pero los remaches y los cordones están sometidos a cortante. Existen juntas remachas y soldadas sometidas a otras solicitaciones para las cuales el análisis es diferentes.

# PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

---

¿Cuándo un elemento se encuentra sometido a cortante puro? Ponga ejemplos.

1. Campo de utilización de ambas uniones.
2. ¿Qué cálculos son necesarios realizar a una junta soldada?

# Capítulo

# 7

**FLEXIÓN**

## 7.1 INTRODUCCIÓN.

Llamaremos FLEXIÓN a la deformación que produce una curvatura si analizamos el eje de una barra recta o la variación de una curvatura en el eje en caso de una barra curva.

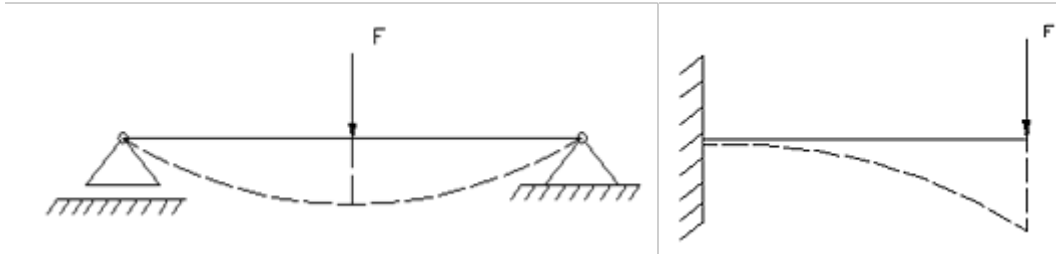


Figura 31. Flexión en barras simplemente apoyadas y empotradas

La flexión puede ser:

1. *Plana*: - Pura  
- Transversal
2. *Oblicua*.

### 7.1.1 Flexión plana:

Los momentos flectores que surgen en las secciones transversales de la viga actúan en el plano que pasan a través de uno de los ejes centroidales principales de inercia

#### Flexión pura:

Cuando en la sección transversal solo aparecen momentos flectores.

### 7.1.2 Flexión Transversal:

En la sección transversal simultáneamente al momento flector actúan fuerzas constantes.

### 7.1.3 Flexión Oblicua:

El plano de acción de las fuerzas no coincide con ninguno de los ejes centroidales principales de inercia y como consecuencia pueden aparecer torsión conjuntamente con Flexión.

### 7.2 Hipótesis.

Teniendo en cuenta los valores que arrojan los experimentos al analizar elementos sometidos a flexión pura tenemos:

1. Después de la deformación las secciones transversales siguen siendo según la
2. Hipótesis de las secciones planas o de Bernoulli.
3. Algunas de las fibras incrementan su longitud y otra parte se contraen.
4. Hay una fibra que no varía su dimensión por lo que se deduce que no está sometida ni a tracción ni a compresión. Surgiendo dos zonas: una de compresión y otra de tracción mientras que entre ellas hay una zona que no varía sus dimensiones llamada: Capa neutra, por lo que a la línea que corta al plano de la sección transversal de la viga se denomina: Línea Neutra o Eje Neutro.

Las barras que están sometidas a flexión se denominan vigas

Recordamos que en el caso de la flexión plana transversal en la sección surgen dos esfuerzos internos:

- El momento flector  $M_x$  ,  $M_y$
- La fuerza cortante  $Q_x$  ,  $Q_y$

Para calcularlos se emplea el método de las secciones



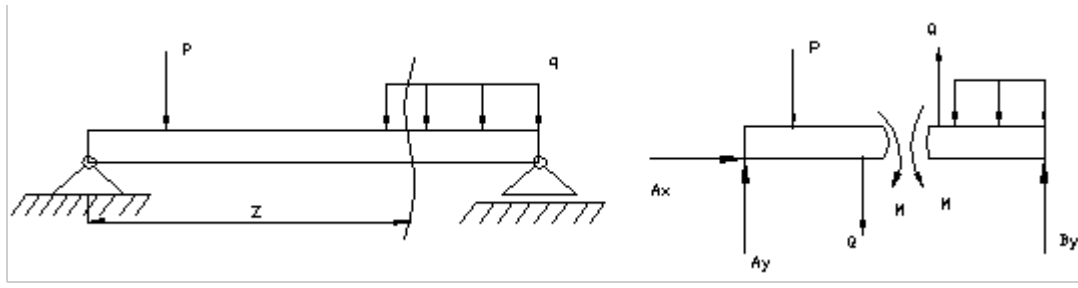


Figura 32. Convenio de signos.

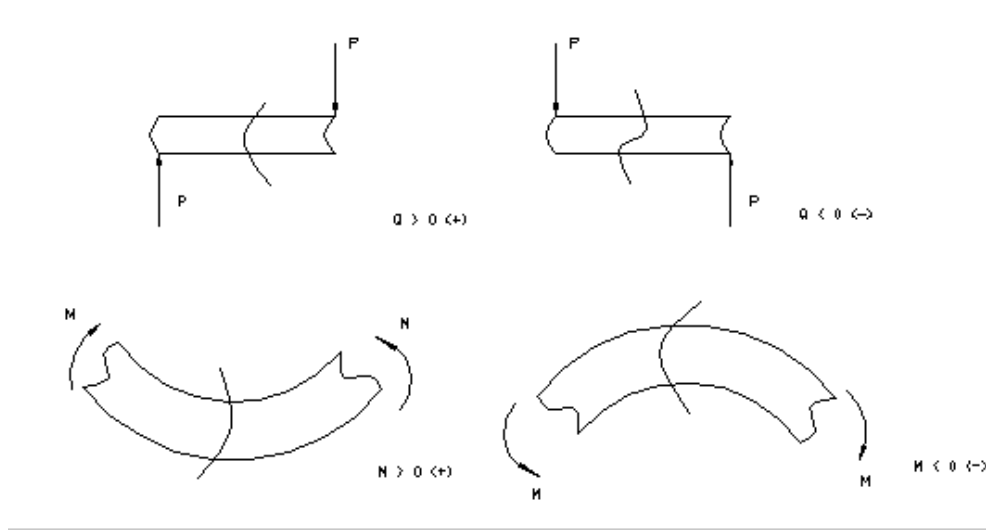


Figura 33. Convenio de signos curvos.

## 7.2 Diagrama de fuerzas cortantes y momentos flectores.

Recordemos con un ejemplo como se construyen los gráficos de momento flector y fuerzas cortante, aspecto este tratado en asignaturas anteriores.

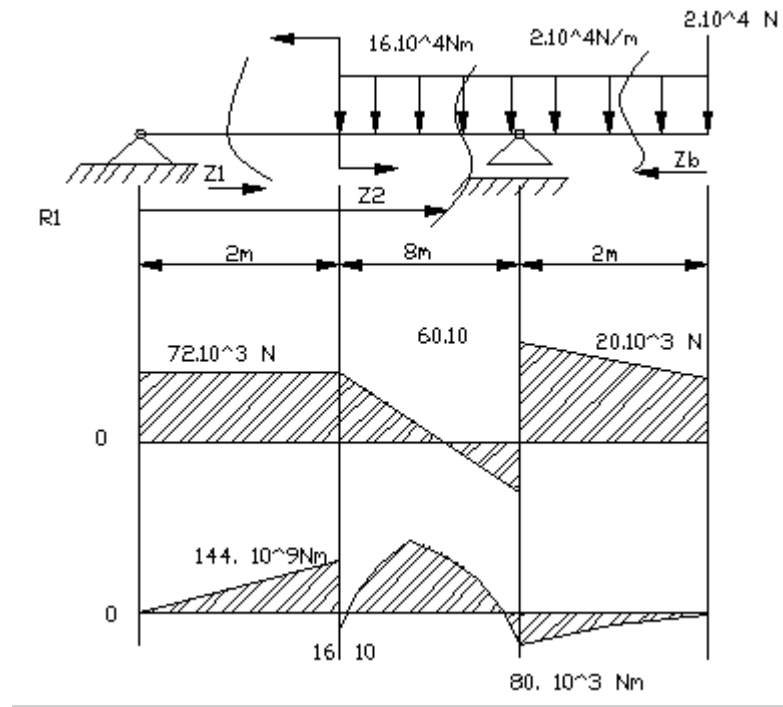


Figura 34. Convenio de signos.

1) Determinación de reacciones en los apoyos:

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow R_2 = 148 \cdot 10 \text{ N}$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow R_1 = 72 \cdot 10 \text{ N}$$

2) Determinación de Q y Mf

### SECCIÓN 1

$$Z=1$$

$$Q_1 = R_1 = 72 \cdot 10 \text{ N}$$

$$M_1 = R_1(Z_1) \Big|_{0=0}^{2m=144 \cdot 10 \text{ N/m}}$$

### SECCIÓN 2.

$$Q_2 = R_1 - q(Z_2 - 2)_{2m}^{10m}$$

$$Q_2 = 72.10 - 20.10(Z_2 - 2)_{2m=72.10N.m}^{10m=-88.10N.m}$$

$$M_2 = R_1.Z_2 - M - q(Z_2 - 2)^2 / 2_{2m}^{10m}$$

$$10m = -80.10Nm$$

$$M_2 = 72.10(Z_2) - 160.10 - 20.10(Z_2 - 2)^2 / 2 \quad 5,6m = 113,6.10Nm$$

$$2m = -16.10Nm$$

Como  $Q=0$

$$72.10 - 20.10(Z_2 - 2) = 0$$

$$Z = 5,6m$$

### SECCIÓN 3

$$Q_3 = 20.10 + q(Z_3) \quad 2m$$

$$Q_3 = 20.10 + 20.10(23)^2 / 2 \quad 2m = -80.10Nm$$

$$0 = 0$$

Análisis de la relación que existe entre la carga distribuida, la fuerza cortante y el momento flector en una viga

Cuando la viga es cargada por la fuerza distribuida. Estudiemos el tramo de la viga cargada que imaginariamente hemos separado por los cortes (m – n) y (m1 – n1) separados a una distancia (dx).

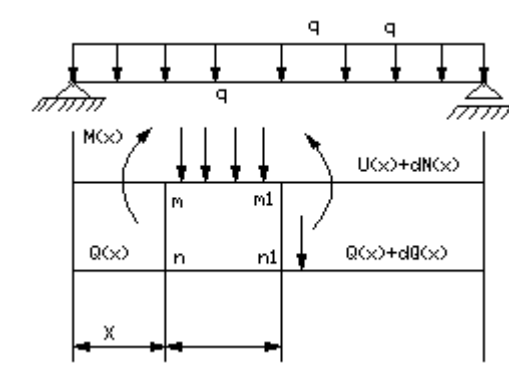


Figura 35. Viga cargada con fuerza distribuida

Al tener presente el convenio de signos podemos deducir que en el tramo  $(m - n)$ , está presente el momento flector  $M(x)$  positivo y la fuerza cortante también positiva  $Q(x)$  y en la sección  $(m1 - n1)$ ,  $M(x) + dM(x)$  y  $Q(x)$ . Al estar la viga en equilibrio cada sección en la que la separamos de forma ficticia permanecerá en equilibrio. Al no tener en cuenta propio peso de la viga, la ecuación de equilibrio de las fuerzas en la dirección del eje  $(y)$  y las ecuaciones de equilibrio de los momentos respecto al punto  $(x + dx)$  son:

$$\sum P_y = 0 \quad Q(x) - qdx - [Q(x) + dQ(x)] = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum M = 0 \quad Q(x)dx + M(x) - qdx \cdot dx/2 - [M(x) + dM(x)] = 0 \dots\dots\dots(2)$$

La carga  $qdx$  actúa en el medio de la longitud  $(dx)$ .

De la primera ecuación:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q \dots\dots\dots(3)$$

Sin tener en cuenta los infinitesimales de orden superior  $(Qdx^2 / 2)$  de la ecuación dos obtenemos:

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \dots\dots\dots(4)$$

Es decir, la fuerza cortante en un punto dado es la derivada del momento flector con respecto a  $(x)$ .

Al Sustituir los parametros de la ecuación (3) en la ecuación (4), podemos definir:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q \quad (66)$$

de la ecuación (3) tenemos que en el punto donde la carga unitaria  $q=0$  se cumple  $Q(x)=Q_{max}$  ó  $Q(x)=Q_{min}$ . De la ecuación (4) concluimos que el momento flector tiene su valor modular máximo en la sección donde  $q(x)=dM(x) / dM(x)=0$ , que coincide donde la fuerza cortante es tiene como valor cero.

#### 7.4 Cálculo de tensiones ( $\sigma$ ) y ( $\tau$ ).

En el caso de la flexión pura existirán solamente tensiones normales y en la flexión transversal tendremos tensiones normales y tangenciales. Las tensiones normales generan el momento flector ( $M_f$ ) y las tensiones tangenciales provocan la fuerza cortante ( $Q$ ).

$$\sigma = f(M_f) \quad \text{y} \quad \tau = f(Q) \quad (67)$$

Como los valores de  $\sigma$  y  $\tau$  dependen de la fuerza cortante y el momento flector; para determinar los valores máximos de estas tensiones es necesario construir los gráficos de  $M_f$  y  $Q$ .

La Ecuación para calcular las tensiones normales en cualquier plano de la sección de la viga a la distancia  $y$  del eje  $x$  (línea neutra) se conoce como Formula de Navier.

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot Y \quad (68)$$

Donde :

$I_x$ : momento de inercia de la sección.

$Y$ : distancia desde la línea neutra a la capa

Al analizar esta fórmula nos percatamos que las tensiones dependen de la longitud ( $Y$ ), por lo que esta será máxima donde ( $Y$ ) sea máxima ( $Y_{\text{máx.}}$ ), siendo mínimas (iguales a cero) cuando  $Y=0$ , que es la línea neutra.

Por lo tanto las tensiones máximas aparecerán en los bordes superiores e inferiores de la sección, independientemente de la forma que ella tenga

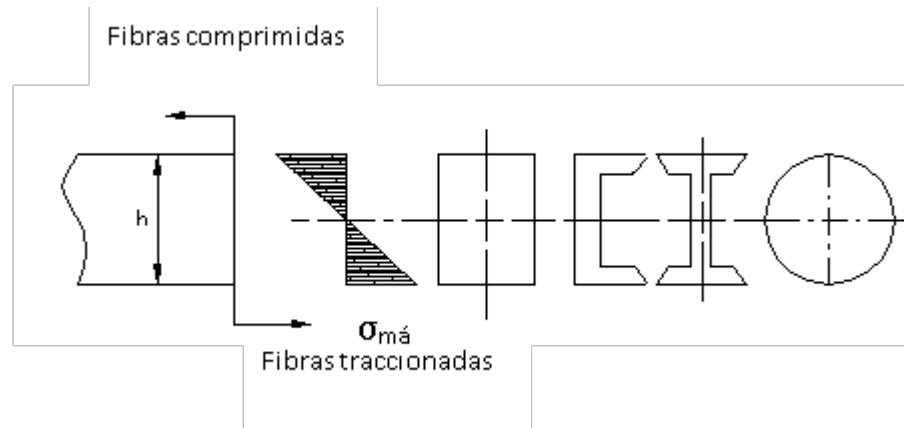


Figura 36. Distribución de las tensiones

La aparición de la fuerza cortante está vinculada con el surgimiento de tensiones tangenciales y estas con las deformaciones angulares, por eso a parte de los desplazamientos propios de la flexión pura, cada área elemental sufre cierto desplazamiento angular, debido a la distorsión.

Las tensiones tangenciales hacen que aparezca un cierto alabeo, por lo que podemos plantear que en la flexión transversal las secciones transversales de la viga no permanecen planas. Pero cuando  $Q$  es constante el alabeo en las secciones también será constante y las variaciones de longitud en las fibras no dependerán del alabeo de las secciones. Cuando  $Q$  varía las ecuaciones aplicadas para la flexión conllevan a errores del orden  $(h / l)$ . Este error es relativamente pequeño ya que las dimensiones de la sección son mucho menores a la longitud, por tanto se puede utilizar las ecuaciones conocidas.

$h$ : es la dimensión de la sección transversal.

$l$ : es la longitud de la viga.

Las tensiones tangenciales se calculan a través de la fórmula de Zhuravski.

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x}{I_x \cdot b} \quad (69)$$

$Q$ : Fuerza cortante.

$S_x$ : Momento estático.

$b$ : Ancho de la sección.

Sección rectangular.

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2A}$$

Sección angular.

$$\tau_{max} = \frac{2Q}{A} \quad (70)$$

Sección Circular.

$$\tau_{max} = \frac{4Q}{3a} \quad (71)$$

A: Área de la sección transversal

### 7.5 Comprobación de la Resistencia de una viga. Condición de Resistencia.

Al comprobar la resistencia de una viga tendremos en cuenta la sección peligrosa es decir dónde el momento flector es máximo

Recordando además que las tensiones serán máximas en los puntos más lejanos de la fibra neutra entonces:

$$\sigma_{max} = \frac{Mx}{Ix} Y_{max}$$

donde :  $\frac{Ix}{Y_{max}} = wx$  wx: Módulo de la sección.

$$\sigma_{max} = \frac{Mx}{Ix/Y_{max}}$$

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{Mx}{wx} \leq [\sigma]} \text{=====> Condición de Resistencia.} \quad (72)$$

Utilizando esta expresión podemos resolver diferentes tipos de problemas ya que podemos dimensionar la sección transversal, comprobar la resistencia además de elegir materiales.

Donde  $W_x$  está condicionada por del tipo de sección transversal por lo que mostramos algunos casos.

- Sección Circular  $w_x=0,1 d$
  - Sección Anular  $w_x=0,1 D (1-C) C= d / D$
  - Sección Rectangular  $w_x= b h^2 / 6$
- Cuando trabajamos con perfiles laminados utilizaremos los valores que aparecen en las tablas de acuerdo al perfil.

Cuando las secciones de las vigas son macizas, establecemos la condición de resistencia apoyándonos en las tensiones normales porque tensiones tangenciales máximas muy inferiores al compararlas con las primeras y recordemos también que ellas están presentes donde aquellas son cero

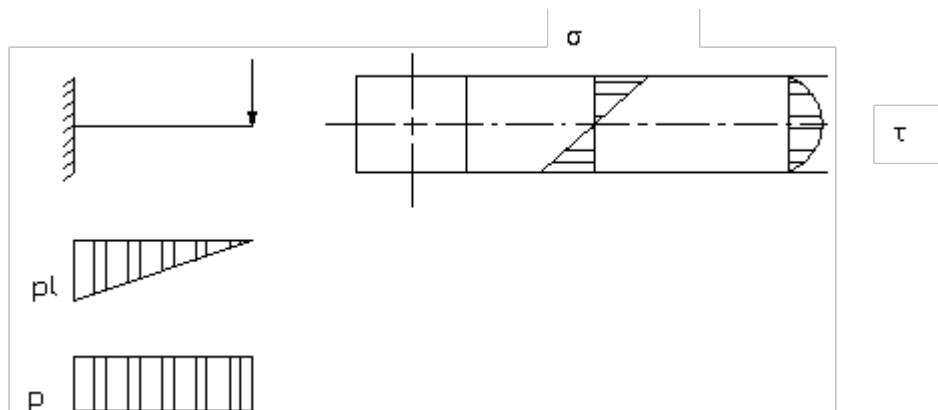


Figura 37. Relación entre las tensiones en una viga

$$\tau_{max} \ll \sigma_{max} \text{ para este caso dividiendo } \frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{h}{4.1} \quad (73)$$

Como podemos apreciar la relación entre  $\tau_{m\acute{a}x.}$  y  $\sigma_{m\acute{a}x.}$  es del orden de la relación entre  $h$  y  $l$ .

Es bueno tener en cuenta desde el punto de vista cualitativo que las tensiones tangenciales que actúan en las secciones transversales y longitudinales (Ley de paridad) a pesar de ser relativamente pequeña pueden en algunos casos influir seriamente al determinar la resistencia de una viga por ejemplo: el caso de flexión



transversal de una viga corta, es posible la falla a cortante de la sección longitudinal correspondiente a la capa neutra donde actúa  $T_{\text{máx}}$ .

La comprobación de resistencia de un perfil laminado no puede realizarse solo teniendo en cuenta las tensiones normales máximas ya que la distribución de las tensiones tangenciales no es igual que para las vigas macizas.

Generalmente estos esfuerzos cortantes ni son problemas en las vigas de acero, porque las almas de los perfiles laminados tienen una amplia capacidad de absorberlos. A pesar de esto es conveniente enlistar las situaciones que más frecuentemente se presentan y en las que los esfuerzos cortantes pueden resultar excesivos.

- Cuando se aplican cargas concentradas intensas en los apoyos de las vigas que ocasionan fuerzas cortantes sin los correspondientes incrementos en los momentos flexionantes.
- Cuando dos o más miembros como vigas y columnas se conectan rígidamente de manera tal que sus almas queden en el mismo plano.
- Teóricamente ocurren grandes esfuerzos cortantes en vigas cortas y fuertemente cargadas.
- El esfuerzo cortante puede ser problema aún para los casos ordinarios de carga, cuando se trata de perfiles de alma muy delgada o cuando son perfiles doblados en frío hechas con láminas de calibre delgado.

Siempre que los esfuerzos cortantes calculados exceden los admisibles, deben reforzarse las zonas sobrecargadas con placas que aumentan el espesor de las almas de los perfiles.

## 7.6 Vigas Armadas

Es común que los perfiles y/o las formas de secciones que se dispongan no se ajustan a los requerimientos necesarios por lo que tendríamos que construir la viga con elementos que pueden ser de diferentes perfiles o planchas. Al determinar el momento de inercia se utilizan los procedimientos vistos en estática para las áreas compuestas. La comprobación de la resistencia se efectuara como se ha explicado, teniendo en cuenta que existirán tensiones normales y tangenciales en los lugares de variación de

la sección que se encuentran cerca de los apoyos. Debido a que la combinación de esas tensiones provoca un estado de tensión complejo es necesario comprobar teniendo en cuenta las tensiones máximas, pudiendo utilizarse las ecuaciones ya estudiadas:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Siendo  $\sigma$  y  $\tau$  las tensiones normales y tangenciales en el alma de la viga al nivel de la costura de los cordones o de los remaches.

## 7.7 Epígrafe:

Cálculo de los desplazamientos (Flecha) en flexión (Método de los parámetros de origen). Condición de rigidez.

### 7.7.1 Deformaciones en la flexión.

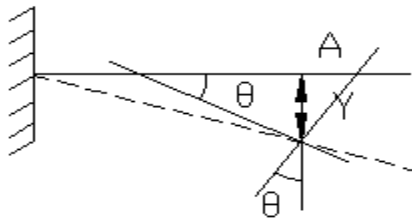


Figura 38. Deformación en la flexión

Debido a la acción de las cargas exteriores la viga se deforma, las secciones transversales se desplazan (verticalmente) perpendiculares al eje inicial recto y al mismo tiempo se produce una rotación de la sección según puede verse en la figura.

El desplazamiento del centroide de la sección en la dirección perpendicular al eje inicial recto se le denomina “deflexión de la viga” o flecha de la viga y se designa “Y”.

El ángulo de la sección transversal ( $\theta$ ) respecto a su posición inicial se denomina ángulo de rotación o ángulo de giro. El ángulo de giro en los cálculos prácticos se determina por el ángulo que forma la tangente en el punto dado y el eje inicial recto;

esto se debe a que la sección transversal, después de la rotación se mantiene plana y perpendicular al deflectado de la viga (hipótesis de las secciones planas).

El conocimiento de las deformaciones en las vigas (la flecha) es necesario así como el ángulo de giro ( $\theta$ ) ya que en la práctica ingenieril se tiene que efectuar el cálculo de vigas sometidas a flexión no solo por resistencia sino también a la rigidez o deformabilidad.

Para lograr el funcionamiento adecuado se define una flecha permisible. El valor de esta flecha permisible en los elementos de máquinas varía en un amplio rango en dependencia de la utilización del elemento.

$$[Y] = \left[ \frac{1}{100} \div \frac{1}{300} \right] l \quad l: \text{longitud entre apoyos.}$$

Las deformaciones deben conocerse además para poder resolver los problemas estáticamente indeterminados.

Los valores de los ángulos de giro en los apoyos deben ser inferiores a 0,001 radian  $[\theta]$ .

Para conocer exactamente la deformación de la viga es necesario calcular para cada sección la deflexión ( $Y$ ) y ( $\theta$ ).

Existen diferentes métodos para calcular los desplazamientos:

- ➔ Ecuación diferencial de la elástica de la viga (EDEV)
- ➔ Ecuación de los parámetros de origen.
- ➔ Método de Mohr.
- ➔ Método de Vereshiaguin.

De los métodos mencionados estudiaremos en este tomo el segundo método, los métodos de Mohr y Vereshiaguin se analizarán en el segundo tomo de esta edición.

El método a través de la ecuación diferencial de la línea elástica, permite la determinación de los desplazamientos por el método de la integración directa de la ecuación diferencial de la línea elástica (curva plana, cuya forma toma el eje de la viga

en la flexión plana). Cuando la viga tiene un número grande de tramos, ofrece grandes dificultades relacionadas con la obtención de las constantes arbitrarias de integración. Durante la integración de las ecuaciones diferenciales para el número ( $n$ ) de tramos se tiene que emplear el número doble de las constantes de integración.

El problema se torna bastante voluminoso. La técnica de la determinación de las constantes de integración puede simplificarse sensiblemente al reducirla a la obtención de solo dos incógnitas, la fecha y el ángulo de giro en el origen de coordenadas elegido.

### 7.8 Método de los Parámetros de Origen.

Este método se funda de las siguientes tesis de partida.

- El origen de coordenadas se escoge en el último punto izquierdo de la viga en cuestión y es común para todos los tramos.
- La expresión para el momento flector  $M(z)$  se compone mediante el cálculo de los momentos de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección examinada, a una distancia  $z$  desde el origen de coordenadas.
- Al incluir en las ecuaciones el momento exterior concentrado  $M$ , aplicado a cierta distancia  $a$  desde el origen de coordenadas, aquel se multiplica por el factor  $(z - a)^0$  igual a 1.
- En el caso de la ruptura de la carga distribuida, esta se prologa hasta el final del tramo en cuestión, introduciendo, para establecer la carga compensadora de dirección contraria.
- La interpretación en todos los tramos se efectúa sin abrir el paréntesis.
- Con este enfoque, la expresión para el momento flector en cualquier tramo se representa por medio de todos los factores de fuerza que actúan a la izquierda de la sección examinada.

Como limitante tiene el que se puede aplicar solamente a vigas de igual rigidez en toda su longitud.

Veamos el método

$$EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} = M(z) \quad \text{----- Ecuación diferencial aproximada del eje}$$

Flexionado de la viga.

$$EI_x d^2 = M(z) dz \quad \text{Siendo } = \frac{dy}{dz}$$

Integrando los dos miembros entre  $\theta_0$  y  $\theta$  (considerando  $EI_x$  constante)

$$EI_x \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^z Mz dz$$

$$\text{de donde: } EI_x(\theta - \theta_0) = \int_0^z Mz dz$$

$$EI_x \theta = EI_x \theta_0 + \int_0^z Mz dz \quad (74)$$

de donde  $\theta_0$ : es el ángulo de giro en el origen de coordenadas ( $z = 0$ ) y es el primer parámetro de origen.

Escribiendo la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$EI_x \frac{dy}{dz} = EI_x \theta_0 + \int_0^z Mz dz$$

Integrando:

$$EI_x \int_{y_0}^y dy = EI_x \theta_0 \int_0^z dz + \int_0^z dz \int_0^z Mz dz$$

De aquí obtenemos:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \int_0^z dz \int_0^z Mz dz \quad (75)$$

siendo  $y_0$ : la flecha en el origen de coordenadas. (Segundo Parámetro de Origen).

Las ecuaciones (74) y (75) se pueden considerar como ecuaciones universales para determinar las flechas y ángulos de giro, escritas de forma general.

Analicemos una viga sometida a los 3 tipos de cargas que pueden actuar:

- I.  $M = 0 \quad (z \leq a)$
- II.  $M = Mf \quad (a \leq z \leq b)$
- III.  $M = Mf + P(z - b) \quad (b \leq z \leq c)$
- IV.  $M = Mf + P(z - b) + \frac{q(z - c)^2}{2} \quad (c \leq z \leq l)$

El sentido que tienen aquí los momentos, la carga concentrada y la carga distribuida le da el signo positivo (+) en la ecuación.

Cuando simultáneamente actúan varias fuerzas exteriores de los tipos analizados, las ecuaciones para determinar el ángulo de giro ( $\theta$ ) y la flecha ( $y$ ) serán:

Para el ángulo de giro: (76)

Para la flecha:

$$EIxy = EIxy_0 + EIx\theta_0 z + \sum \frac{Mf(z-a)^2}{2} + \sum \frac{P(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24} \quad (77)$$

Donde:

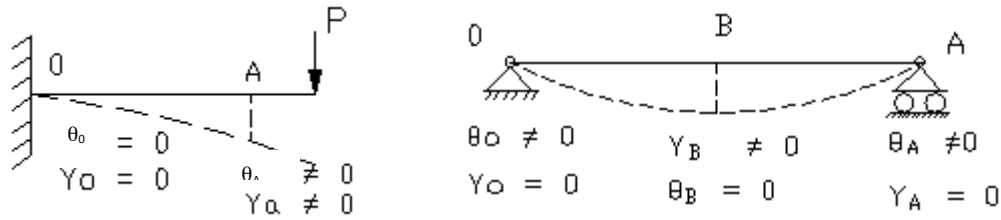
(a, b, c): Distancia desde donde está aplicado el  $Mf$ ,  $P$  y  $q$  al origen de coordenadas respectivamente.

Estas ecuaciones se denominan: **Ecuaciones Universales de la Línea Elástica de una Viga**; en ellas se introducen, con el signo correspondiente, todas las fuerzas exteriores, (incluyendo las reacciones) situadas entre el origen y la distancia ( $z$ ) donde se calcula el desplazamiento ( $z$ ): Distancia para la cual se determina la flecha y el ángulo de giro.

Veamos las condiciones de apoyo y su relación con ( $y_0$  y  $\theta_0$ )

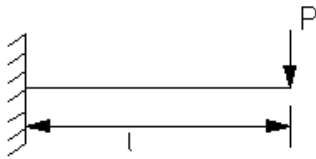
Viga empotrada o en voladizo

Viga simplemente apoyada



Considerando  $Y_B$ , como deformación máxima

Ejemplo:



- 1) El origen se ubica en el empotramiento.

$$\theta_0 = 0 \quad \text{y} \quad Y_0 = 0$$

- 2) Cálculo de las reacciones en el empotramiento.

$$\sum F_y = 0 \quad -P + R = 0 \quad \sum M_{to(A)} = 0$$

$$R = P \quad Pl - M = 0$$

$$M = Pl$$

Para calcular  $Y_{max}$  esta será en ( $z = l$ ).

$$ElxY = ElxY_0 + Elx\theta_0 z + \sum \frac{Mf(z-a)^2}{2} + \sum \frac{P(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24}$$

$$ElxY = -\frac{Pl(z-0)^2}{2} + \frac{P(z-0)^3}{6} - \frac{P(z-l)}{6}$$

Sustituyendo ( $z = l$ )

$$ElxY = \frac{-Pl(l)^2}{2} + \frac{P(l)^3}{6} - \frac{P(l-l)}{6}$$

$$ElxY = \frac{-Pl^3}{2} + \frac{P(l)^3}{6} = P.l(1/6 - 1/2)$$

$$EIxY = \frac{-2Pl}{6} \quad Y = \frac{-Pl}{3EI}$$

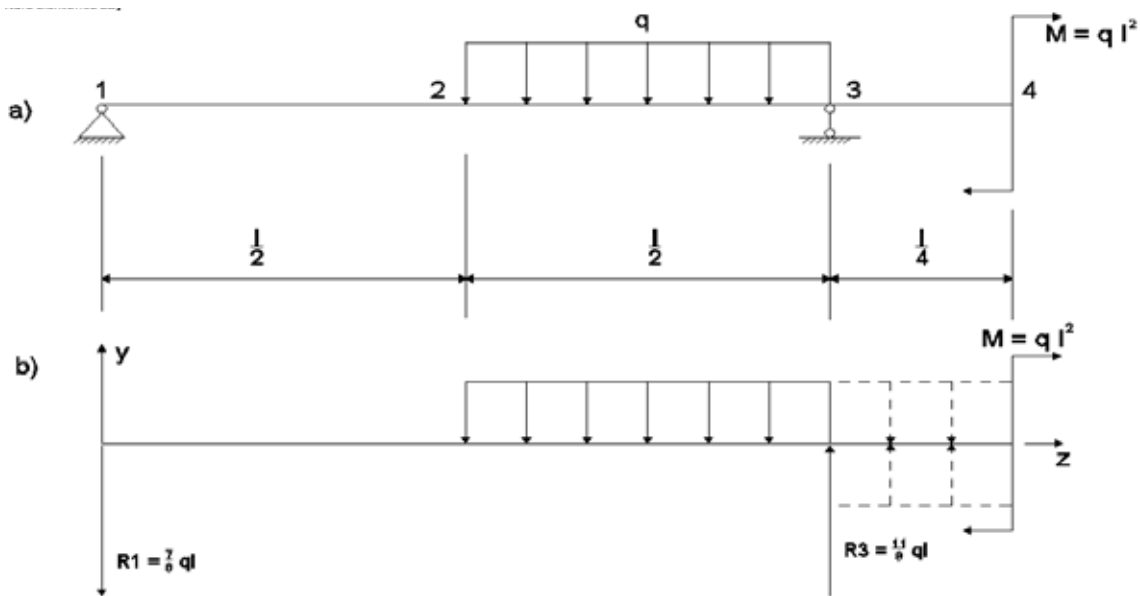
El signo negativo (-) significa que el desplazamiento es hacia abajo. El signo positivo (+) será lo contrario.

$$Y_{\max} \leq [Y]$$

Para el ángulo de giro, el signo (+) significa sentido de giro antihorario y el signo (-) significa sentido de giro horario.

Ejemplo:

Calcule las deformaciones lineales y angulares en los puntos 2 y 4 de la figura siguiente, si  $EI = \text{constante}$



Solución:

Se determinan las reacciones en los apoyos 1 y 3 utilizando las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M_1 = 0, \quad R_B = \frac{11}{8} ql;$$

$$\sum M_3 = 0, \quad R_A = \frac{7}{8} ql.$$



Se toma el origen en la articulación extrema izquierda; así sus parámetros serán:

$$Q_0 = R_1 = -\frac{7}{8} ql; M_0 = 0; y_0 = 0; \theta_0 \neq 0. \quad (78)$$

Para determinar  $\theta$  es preciso plantear la condición de deformación de la viga siguiente:

$$y_3 = 0 \quad z = l \quad (79)$$

Utilizando la ecuación (78) se obtiene:

$$0 = \theta_0 l + \frac{1}{EI_x} \left[ -\frac{7}{8} \times ql \times \frac{l^3}{3!} - \frac{q \left( l - \frac{l}{2} \right)^4}{4!} \right] \Rightarrow \theta_0 = \frac{57}{384} \times \frac{ql^3}{EI_x}$$

Para determinar  $y_2$  y  $\theta_2$  se utilizan las ecuaciones (78 y (79) para  $z = \frac{l}{2}$  :

$$\theta_2 = \frac{57}{384} \times \frac{ql^3}{EI_x} + \frac{1}{EI_x} \left[ -\frac{7}{8} \times \frac{ql \left( \frac{l}{2} \right)^2}{2!} \right] = 0,039 \frac{ql^3}{EI_x}; \quad (80)$$

$$y_2 = \frac{57}{384} \times \frac{ql^3}{EI_x} \times \frac{l}{2} + \frac{1}{EI_x} \left[ -\frac{7}{8} \times \frac{ql \left( \frac{l}{2} \right)^3}{3!} \right] = 0,056 \frac{ql^4}{EI_x}; \quad (81)$$

Para calcular  $y_4$  y  $\theta_4$  se considera prolongar la carga distribuida hasta la sección analizada.

$$\theta_4 = \frac{57}{384} \times \frac{ql^3}{EI_x} + \frac{1}{EI_x} \left[ -\frac{7}{8} \times \frac{ql \left( \frac{5l}{4} \right)^2}{2!} + \frac{11}{8} \times \frac{ql \left( \frac{5l}{4} - l \right)^2}{2!} + \frac{q \left( \frac{5l}{4} - l \right)^3}{3!} - \frac{q \left( \frac{5l}{4} - \frac{l}{2} \right)^3}{3!} \right] = -0,56 \frac{ql^3}{EI_x}; \quad (82)$$

$$y_4 = \frac{57}{384} \times \frac{ql^3}{EI_x} \times \frac{5l}{4} + \frac{1}{EI_x} \left[ -\frac{7}{8} \times \frac{ql \left( \frac{5l}{4} \right)^3}{3!} + \frac{11}{8} \times \frac{ql \left( \frac{5l}{4} - l \right)^3}{3!} + \frac{q \left( \frac{5l}{4} - l \right)^4}{4!} - \frac{q \left( \frac{5l}{4} - \frac{l}{2} \right)^4}{4!} \right] = -0,11 \frac{ql^4}{EI_x}; \quad (83)$$

- $y_4$  con signo (-) es porque el desplazamiento es hacia abajo.
- $\theta_4$  con signo (-) es porque la rotación de esa sección es en sentido horario.

# PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

---

\_¿Cómo se plantea la condición de resistencia?

\_¿Que problemas podemos resolver a partir de ella?

\_¿Cómo calcular un perfil de paredes delgadas?. Ejemplo un doble T

\_¿Cómo calcularíamos los desplazamientos y que tipos de desplazamientos surgen en la flexión?

- ¿Que métodos se conocen?

- ¿Que limitaciones hay para aplicar el método de los parámetros de origen?

- ¿Que significa que el ángulo de giro sea negativo?

# Capítulo

# 8

**RESISTENCIA COMPUESTA**

### 8.1 Aplicaciones de la condición de resistencia en cargas combinadas.

En la práctica, a menudo, en las secciones transversales de una barra, actúan simultáneamente varios esfuerzos interiores que se consideran conjuntamente en los cálculos por resistencia, por ejemplo: la fuerza axial (N) y el momento torsor (Mt) la combinación de estos o más esfuerzos interiores se denominan Resistencia Compuesta.

Podemos tener:

- Flexión en dos planos (flexión oblicua)  $M_x$ ,  $M_y$ .
- Flexión tracción – compresión  $M$ ,  $N$ .
- Flexión torsión  $M$ ,  $M_t$ ,  $Q$ .
- Flexión tracción – compresión – torsión  $M$ ,  $M_t$ ,  $N$ ,  $Q$ .
- Torsión – tracción – Compresión  $M_t$ ,  $N$ .

Para trabajar:

- Determine los esfuerzos internos.
- Construir los gráficos.
- Calcular las tensiones equivalentes y aplicar la condición de resistencia.

### 8.2 Flexión oblicua o desviada (flexión compuesta)

La flexión compuesta o no plana es originada por las fuerzas exteriores que actúan en diferentes planos pasados a través del eje de la viga.

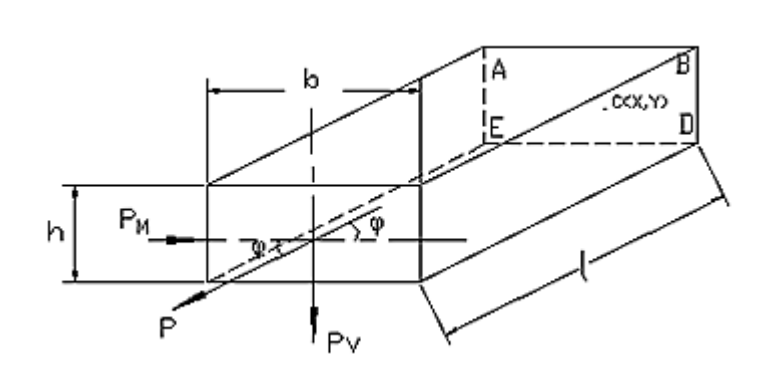


Fig.39. Flexión oblicua

$$P_V = P \sin \varphi \quad (84)$$

$$P_M = P \cos \varphi \quad (85)$$

$$M_R = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2} \quad (86)$$

$$\sigma = \pm \frac{M_{x_{max}}}{I_x} y \pm \frac{M_{y_{max}}}{I_y} x \quad (87)$$

Los desplazamientos se determinan de acuerdo con el principio de independencia de acción de la fuerza. Si  $Y_y$  es la flecha en la dirección del eje principal(y) y  $Y_x$  es la flecha en la dirección del eje principal(x). La magnitud de la flecha total:

$$Y_t = \sqrt{Y_y^2 + Y_x^2} \quad (88)$$

$$\theta_t = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_x^2} \quad (89)$$

### 8.3 Flexión Oblicua o Desviada:

La flexión desviada aparece cuando las fuerzas exteriores, que son perpendiculares al eje de la barra, no se encuentran en un plano que pase por un eje principal de inercia de su sección transversal.

$$P_v = P \operatorname{sen} \theta \quad (90)$$

$$P_h = P \operatorname{cos} \theta \quad (91)$$

Se descompone la fuerza inclinada en  $P_h$  y  $P_v$  las cuales producen momentos flectores en dos planos ( $x$ ) y ( $y$ ),  $M_x$  y  $M_y$ .

$$M_x = P_v \cdot l = P \cdot l \cdot \operatorname{sen} \phi \quad (92)$$

$$M_y = P_h \cdot l = P \cdot l \cdot \operatorname{cos} \phi \quad (93)$$

Para analizar los puntos A, B, E, D tenemos que:

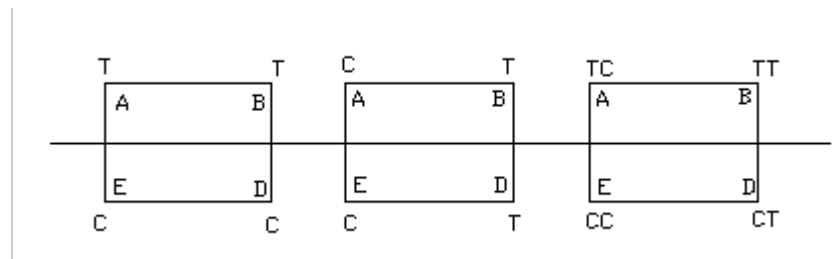


Fig. 40. Flexión oblicua

Los puntos peligrosos serán: los E y B, el B a tracción y el E a compresión (las tensiones se suman).

Las tensiones normales en cualquier punto de cualquier sección transversal serán iguales a la suma algebraica de las tensiones originadas por los ( $M_f$ ) que actúan en los dos planos.

Para el punto C el valor de  $\sigma$  será:

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{J_x} Y \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \frac{M_y}{J_y} X \quad (94)$$

Y: Distancia del eje neutro ( $x$ ) al punto C.

X: Distancia del eje neutro (y) al punto C.

Jx: momento de inercia respecto a (x).

Jy: momento de inercia respecto a (y).

La tensión total será:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \qquad \sigma = \frac{M_x}{J_x} Y + \frac{M_y}{J_y} X \qquad (95)$$

Esta fórmula es independiente de la forma de la sección transversal.

Si la sección tiene puntos angulares o salientes donde tiene (Xmax) e (Ymax) [rectángulo, doble T...]. Es decir los puntos más alejados de la línea neutra (donde  $\sigma = 0$ ) entonces en estos puntos las tensiones serán:

$$\sigma(\text{max min}) = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \qquad (96)$$

Siendo:

Para una sección rectangular:

$$W_x = \frac{2I_x}{n} ; \quad W_y = \frac{2I_y}{n} ; \quad I_x = \frac{bh^3}{12} ; \quad I_y = \frac{hb^3}{12} ; \quad \text{entonces: } ; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}$$

$$W_x = \frac{I_x}{X_{max}} \qquad W_y = \frac{I_y}{Y_{max}} \qquad (97)$$

La ecuación de la línea neutra se obtiene igualando a cero la ecuación de  $\sigma$ .

$$\frac{M_x}{I_x} Y_0 + \frac{M_y}{I_y} X_0 = 0 \qquad Y_0 ; X_0 : \text{coordenadas de los puntos de la línea neutra.}$$

$$\frac{Y_0}{I_x} + \frac{KX_0}{I_y} \longrightarrow \text{Ecuación de la línea neutra.} \quad (98)$$

$$K = \frac{M_y}{M_x} = \cot \phi \quad (99)$$

$$\beta = \tan \left( -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \right) \quad \beta : \text{ángulo de inclinación de la línea neutra respecto al eje X.}$$

$$\tan \beta = \frac{Y_0}{X_0} \quad (100)$$

Dada la siguiente barra compruebe si resiste o no y determine la posición de la línea neutra.

CT – 3

Doble T # 50

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

$$M_x = P v . Z \Big|_{0=0}^{l=P \cos 30^\circ (2)=16856 \text{ Nm}}$$

$$M_y = P h . Z \Big|_{0=0}^{l=P \sin 30^\circ (2)=9800 \text{ Nm}}$$

#### 8.4 Análisis de la sección transversal peligrosa.

Como puede observarse las fuerzas internas son máximas en la sección del empotramiento.

Los puntos más peligrosos son el 1 y el 3 pues en ellos las tensiones se suman.



Como el material de la barra es plástico.

$$\sigma = \frac{Mx}{Wx} + \frac{My}{Wy} \leq [\sigma]$$

$$\sigma = \frac{16856}{1570 \cdot 10} + \frac{9800}{122 \cdot 10}$$

$$\sigma = 91,07 \cdot 10 Pa \leq 160 \cdot 10 Pa \longrightarrow \text{LA BARRA RESISTE.}$$

#### 8.4.1 Determinación de la línea neutra.

$$\sigma = \frac{Mx}{Ix} Y_0 + \frac{My}{Iy} X_0 = 0$$

$$\frac{Mx}{Ix} Y_0 = -\frac{My}{Iy} X_0$$

$$\frac{Y_0}{X_0} = -\frac{My}{Mx} \cdot \frac{Ix}{Iy}$$

$$\frac{Y_0}{X_0} = -\frac{9800}{16856} \cdot \frac{39290 \cdot 10}{1040 \cdot 10}$$

$$\frac{Y_0}{X_0} = -21,81$$

$$\tan \beta = \frac{Y_0}{X_0} = -21,81$$

$$\beta = -87^{\circ} 22'$$

#### 8.4.2 Para el dimensionamiento en el caso de flexión compuesta.

$$W_x \geq \frac{M_x + C \cdot M_y}{[\sigma]}$$

$$C = \frac{W_x}{W_y}$$

Se realiza por tanteos seguidos de la

correspondiente comprobación.

En un rectángulo (h.b)  $C = \frac{h}{b} = \frac{W_x}{W_y}$

la diferencia entre  $\sigma_{\max}$  y  $[\sigma]$  no debe ser superior a 5... 10 %.

En un perfil doble T  $C = 8 \quad \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\%$

En un perfil canal  $C = 6$

Ejemplo: Compruebe si la siguiente barra resiste los esfuerzos actuantes.

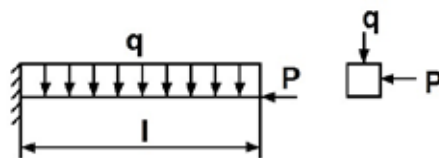
Doble T # 16

$q = 10 \text{ KN/m}$

$l = 2 \text{ m}$

$P = 10 \text{ KN}$

CT - 2



$$M_x = \frac{qz^2}{2} \Big|_{0=0}^{2=20\text{KN}\cdot\text{m}}$$

$$M_y = P \cdot Z \Big|_{0=0}^{2=20\text{KN}\cdot\text{m}}$$

$$\sigma = \pm \sigma_x \pm \sigma_y$$

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

$$\sigma = \frac{20}{14,5 \cdot 10} + \frac{20}{109 \cdot 10}$$

$$\sigma = 137 \cdot 10 + 18 \cdot 10$$

$$\sigma = 155 \cdot 10 Pa < 140 \cdot 10 Pa \longrightarrow \text{RESISTE}$$

### 8.5 Flexión – Tracción – Compresión.

Para analizar la carga axial

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \quad (101)$$

Las tensiones debidas al momento flector:

$$\sigma = \frac{Mx}{Ix} Y \quad \text{ó} \quad \sigma = \frac{My}{Iy} X$$

La tensión total cuando solo hay momento flector en un plano:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{Ix} Y \quad \text{ó} \quad \sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{My}{Iy} X$$

y cuando hay flexión en dos planos y tracción – compresión:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{Ix} Y \pm \frac{My}{Iy} X \quad (102)$$

Para calcular la línea neutra se iguala a cero la ecuación de  $\sigma$ .

En este caso no pasa por el origen de coordenadas.

En los punto más peligrosos, mas alejados.

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{Wx} \pm \frac{My}{Wy}$$

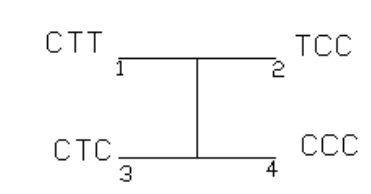
La condición de resistencia:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{Ix} \pm \frac{My}{Iy} \leq [\sigma] \quad (103)$$

### 8.6 Flexión – tracción – Compresión.

Veamos el ejemplo anterior si le agregamos una fuerza axial.

Ahora se producirá además de la flexión en dos planos una compresión en la barra.



$$\sigma = \pm \sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 \quad (104)$$

Como puede observarse el punto 3 es el más peligroso y se encuentra totalmente comprimido.

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{Mx}{Wx} - \frac{My}{Wy}$$

$$\sigma = -\frac{17,20}{20,2 \cdot 10^6} - 155 \cdot 10^6$$

$$\sigma = -0,99 \cdot 10^6 - 155 \cdot 10^6$$

$$\sigma = -155,99 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_T \leq [\sigma]_c$$

$$-155,99 \cdot 10^6 \text{ Pa} < 140 \cdot 10^6 \text{ Pa} \longrightarrow \text{La barra resiste.}$$

Si la flexión es plana entonces:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \quad (105)$$

La línea neutra en este caso no pasa por el centro de la sección, sino que se encuentra desplazada.

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} Y_x \pm \frac{M_y}{I_y} X_y = 0 \quad (106)$$

### 8.7 Flexión – Torsión

Este es uno de los casos más frecuentes en la práctica, se pone de manifiesto en los arboles de reductores, los cuales se estudian en los cálculos para el diseño de árboles en los reductores, los arboles cigüeñales.

Al comprobar la resistencia de un eje, al hacer los cálculos preliminares de diseño para determinar el diámetro del mismo, se tiene que considerar la flexión y la torsión combinada.

Analizando un elemento sometido a flexión y torsión:

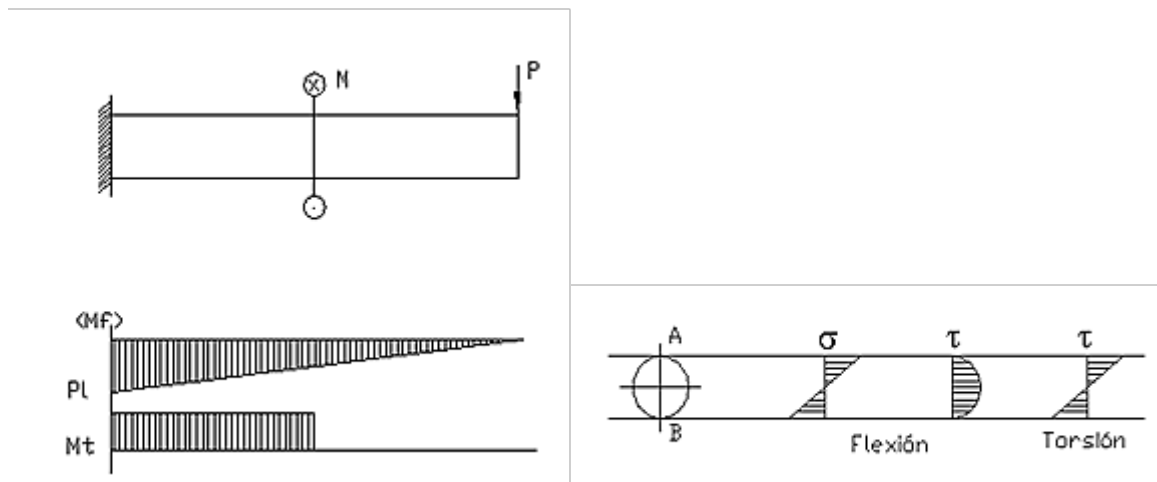


Figura 41. Flexión – Torsión

Para  $\sigma = \frac{Mt}{W_x}$

Para torsión  $\tau = \frac{Mt}{wp}$        $wp=2wx$

Pero no se puede evaluar la resistencia por separado.

Aplicando la 3ra o 4ta hipótesis.

$$\sigma_{1,3} = \sigma(max) = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma] \longrightarrow \text{3ra hipótesis.}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \longrightarrow \sigma_{eq} = \frac{\sqrt{Mf^2 + Mt^2}}{wx} \leq [\sigma] \quad (107)$$

Según la 4ta Teoría.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{Mf^2 + 0,75Mt^2}}{wx} \leq [\sigma] \quad (108)$$

Cuando hay dos momentos flectores, en planos perpendiculares  $M_x$  y  $M_y$  se calculan un momento resultante

$$M_r = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (109)$$

y con este se calcula la tensión equivalente.

### 8.8 Tracción – Compresión - Torsión.

a) Según 3ra teoría.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{Mt}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (110)$$

b) Según la 4ta teoría.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{Mt}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (111)$$

Cuando no resiste igual a tracción y compresión los materiales se utiliza la teoría de Morh.

Para el caso general:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left[\left(\frac{N}{A} + \frac{Mf}{wx}\right)^2 + 3\left(\frac{Mt}{wp}\right)^2\right]} \leq [\sigma] \quad (112)$$

### Caso general de tensiones

También podemos tener Tracción – Compresión – Torsión, en este caso se procede de igual forma y se determina por la 3<sup>ra</sup> y 4<sup>ta</sup> Teoría de Resistencia.

a) Según la 3<sup>ra</sup> Teoría:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{Mt}{wp}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (113)$$

b) Según la 4<sup>ta</sup> Teoría:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{Mt}{wp}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (114)$$

y cuando los materiales no tienen igual resistencia a la tracción y a la compresión se utiliza la Teoría de Morh.

Cuando se trata de Flexión, Torsión y Tracción – Compresión combinada, por el mismo procedimiento se obtiene la fórmula para el cálculo.

(Según la 4<sup>ta</sup> Teoría tenemos)

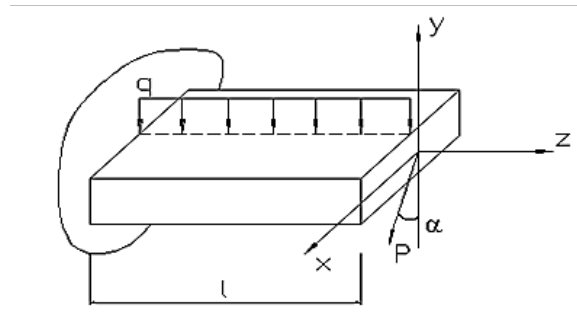
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{Mf}{wx}\right)^2 + 3\left(\frac{Mt}{wp}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (115)$$

Se puede recomendar que al calcular las secciones se debe emplear el Método de aproximaciones Sucesivas, es decir, fijar algún valor del diámetro y comprobar después, si se cumplen las Condiciones de Resistencia.

Ahora bien esto puede ser calculado también por medio de un proceso de iteraciones sucesivas donde se puede buscar el menor valor posible de diámetro donde cumpla con las condiciones establecidas por medio de una estrategia de optimización matemática y cuando podamos lograr el menor diámetro (un mínimo) esto llevara también a ahorrar materiales lo cual es fundamental para la economía de nuestro país.

### Problema

Dado  $P = 240 \text{ Kgf}$ ,  $q = 400 \text{ Kgf/m}$ ,  $l = 2\text{m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ Mpa}$ .  
Calcular el número de perfil (doble T), así como la posición de la línea neutra.



Los momentos máximos en el empotramiento serán:

$$M_x = \frac{qZ^2}{2} + P \cos \alpha \cdot Z \Big|_{0=0}^{l=216 \text{Kgf}\cdot\text{m}}$$

$$M_y = P \sin \alpha \cdot Z \Big|_{0=0}^{l=240 \text{Kgf}\cdot\text{m}}$$

Determinando  $I$  a sección transversal:

$$w_x = \frac{M_x + C \cdot M_y}{[\sigma]}$$

$$w_x \geq \frac{12160 + 8(2400)}{160 \cdot 10}$$

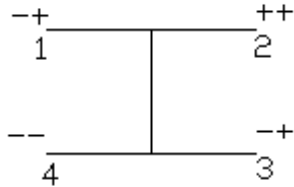


$$w_x \geq 196.10m \geq 196cm$$

El perfil doble (T) superior mas próximo es el # 20<sup>a</sup>

$$w_x = 203cm ; w_y = 28,2cm$$

Analizando la sección más peligrosa:



los puntos (2) y (4) de la sección empotrada son los mas cargados

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \frac{Mx_{max}}{w_x} + \frac{My_{max}}{w_y}$$

$$\sigma_{max} = \frac{12160}{203.10} + \frac{2400}{28,2.10}$$

$$\sigma_{max} \approx 1450.10Pa$$

$$\text{Veamos la diferencia: } \frac{[\sigma] - \sigma_{max}}{[\sigma]} \cdot 100$$

$$= \frac{160.10^6 - 145.10^6}{160.10^6}$$

$$\approx 9,4\%$$

Para el perfil #20a  $I_y = 155cm$ ,  $I_x=2030 cm$  y por lo tanto en la sección empotrada tendremos:

$$\tan\beta = -\frac{I_x My_{max}}{I_y Mx_{max}} = -\frac{2030 \cdot 240}{155 \cdot 1216} \approx -2,58$$

$$\beta = \arctan - 2,58$$

$$\beta = 68^{\circ}50'$$

# PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

---

- 1) ¿Qué tensiones surgen en flexión – torsión?
- 2) ¿Cómo se resuelve el caso de la flexión oblicua?
- 3) ¿Cómo procedemos en un caso general de tensiones?



**RESISTENCIA  
DE MATERIALES  
CÁLCULOS  
PRÁCTICOS**



# Capítulo

# 1

**TRACCIÓN- COMPRESIÓN**

Estamos en presencia de tracción o compresión axial cuando las fuerzas exteriores están aplicadas a lo largo del eje longitudinal del cuerpo por lo que las fuerzas interiores que aparecen estarán dirigidas a 90 grados de la sección transversal de la barra, por lo que son fuerzas normales. Para calcularlas utilizamos la forma conocida como método de las secciones que se conocen desde la asignatura de Mecánica Teórica.

Las tensiones normales se determinan como la relación entre las fuerzas normales actuantes en cada sección y el área de dicha sección, recordando que consideraremos secciones desde el punto de aplicación de una fuerza hasta el otro, teniendo presente la variación del área de la sección transversal. Por lo que podemos plantear:

$$\sigma_{Max} = \frac{N_{Max}}{A} \leq [\sigma]$$

Las deformaciones se dan en el eje longitudinal y se calculan utilizando la siguiente ecuación:

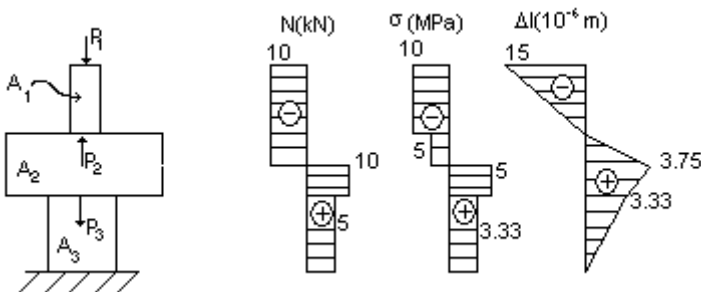
$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

Donde al comparar la deformación calculada y la recomendada o admisible ( $\Delta l_{Max} \leq [\Delta l]$ ) comprobamos si el elemento es o no rígido.

Las dos condiciones, tanto la de resistencia como la de rigidez sirven para comprobar la resistencia del cuerpo, calcular las fuerzas admisibles y dimensionar la sección transversal de los elementos, resolviendo de esta forma los problemas en que se enfoca la resistencia de los materiales

### Ejercicios Resueltos.

1. Construir los gráficos de fuerzas internas, tensiones normales y desplazamientos en la siguiente barra:



Datos:

$$P_1 = 10 \text{ kN}$$

$$P_2 = 2 P_1$$

$$P_3 = 1.5 P_1$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$A_1 = 10 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 2A_1$$

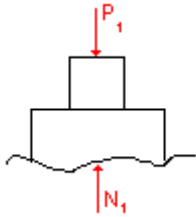
$$A_3 = 1.5A_1$$

- **Cálculo de las fuerzas internas.**

Para calcular las fuerzas internas debemos aplicar el método de las secciones. Para ello se realizan cortes a la barra entre el punto de aplicación de una fuerza y el punto donde se aplica la siguiente.

### **Sección 1.**

La primera sección será entre el punto de aplicación de la fuerza  $P_1$  y el punto donde actúa  $P_2$ .



Aplicando suma de fuerzas:

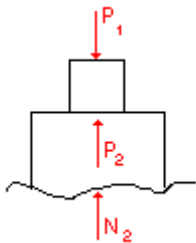
$$\begin{aligned}\sum F_Y &= 0 \\ N_1 - P_1 &= 0 \\ N_1 &= P_1 \\ N_1 &= 10kN\end{aligned}$$

Como la fuerza normal está entrando a la sección transversal de la barra esta sección está trabajando a compresión.

En este problema se asume que las fuerzas internas, las tensiones y los desplazamientos de compresión se graficarán a la izquierda del gráfico correspondiente.

### **Sección 2.**

La segunda sección será entre el punto de aplicación de la fuerza  $P_2$  y el punto donde actúa  $P_3$ .



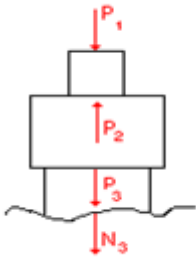
Aplicando suma de fuerzas:

$$\begin{aligned}\sum F_Y &= 0 \\ N_2 - P_1 + P_2 &= 0 \\ N_2 &= P_1 - P_2 \\ N_2 &= P_1 - 2P_1 \\ N_2 &= -10kN\end{aligned}$$

El signo negativo indica que el sentido asumido inicialmente para  $N_2$  está incorrecto, por lo tanto este debe cambiarse. Entonces esta fuerza estará dirigida hacia abajo, o sea saliendo de la sección transversal por lo que esta sección está trabajando a tracción. Esta fuerza se grafica en la parte derecha del gráfico.

### **Sección 3.**

La tercera sección será entre el punto de aplicación de la fuerza  $P_3$  y el empotramiento que es donde actúa la reacción en el apoyo.



Aplicando suma de fuerzas:

$$\sum F_Y = 0$$

$$-N_3 - P_1 + P_2 - P_3 = 0$$

$$N_3 = P_1 - P_2 + P_3$$

$$N_3 = P_1 - 2P_1 + 1.5P_1$$

$$N_3 = 5kN$$

El signo positivo indica que el sentido asumido inicialmente para  $N_3$  es correcto. Entonces esta fuerza estará dirigida hacia abajo, o sea saliendo de la sección transversal por lo que esta sección está trabajando a tracción. Esta fuerza se grafica en la parte derecha del gráfico.

- **Cálculo de las tensiones.**

El cálculo de las tensiones se realiza para las secciones donde haya un cambio de las fuerzas normales de la sección transversal (o sea del área de la sección transversal de la barra).

**Sección 1.**

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}$$

$$\sigma_1 = \frac{-10kN}{10cm^2}$$

$$\sigma_1 = -10MPa$$

El signo negativo indica que la sección trabaja a compresión.

**Sección 2.**

$$\sigma_2 = \frac{N_1}{A_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{-10kN}{20cm^2}$$

$$\sigma_2 = -5MPa$$

El signo negativo indica que la sección trabaja a compresión.

**Sección 3.**

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2}$$

$$\sigma_3 = \frac{10kN}{20cm^2}$$

$$\sigma_3 = 5MPa$$

El signo positivo indica que la sección trabaja a tracción.

**Sección 4.**



$$\sigma_4 = \frac{N_3}{A_3}$$

$$\sigma_4 = \frac{5kN}{15cm^2}$$

$$\sigma_4 = 3.33MPa$$

El signo positivo indica que la sección trabaja a tracción.

• **Cálculo de los desplazamientos.**

Para calcular los desplazamientos en la barra se parte del empotramiento debido a que en esa posición la barra no puede desplazarse y por lo tanto  $\Delta l = 0$ .

Debe realizarse un nuevo cálculo para cada cambio de fuerza normal, sección transversal, longitud o material.

**Sección 1.**

$$0 \leq z \leq 0.2 \text{ m}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_3 z_1}{EA_3} \Big|_0^{0.2m}$$

$$\Delta l_1 = \frac{5x10^3 x z_1}{2x10^{11} x 15x10^{-4}} \Big|_{0=0}^{0.2m=3.33x10^{-6} m}$$

**Sección 2.**

$$0 \leq z \leq 0.15 \text{ m}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \frac{N_2 z_2}{EA_2} \Big|_0^{0.15m}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \frac{10x10^3 x z_2}{2x10^{11} x 20x10^{-4}} \Big|_{0=3.33x10^{-6} m}^{0.15m=3.75x10^{-6} m}$$

**Sección 3.**

$$0 \leq z \leq 0.15 \text{ m}$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \frac{N_1 z_3}{EA_2} \Big|_0^{0.15m}$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \frac{-10x10^3 x z_3}{2x10^{11} x 20x10^{-4}} \Big|_{0=3.75x10^{-6} m}^{0.15m=0}$$

**Sección 4.**

$$0 \leq z \leq 0.3 \text{ m}$$

$$\Delta l_4 = \Delta l_3 + \frac{N_1 z_4}{EA_1} \Big|_0^{0.3m}$$

$$\Delta l_4 = \Delta l_3 + \frac{-10x10^3 x z_4}{2x10^{11} x 10x10^{-4}} \Big|_{0=0}^{0.3m=-15x10^{-6} m}$$

Los gráficos correspondientes se muestran al lado de la figura de análisis del problema.

Algunas características de estos gráficos son las siguientes:

1. El gráfico de fuerzas normales presenta saltos en las secciones donde hay aplicadas fuerzas externas.
2. El gráfico de tensiones tendrá el mismo signo que el de fuerzas normales. Los saltos de este gráfico ocurrirán en las secciones con cambios de sección y donde hay saltos en las fuerzas internas.
3. El gráfico de desplazamientos nunca puede tener saltos, ya que esto significaría que una misma sección tiene dos desplazamientos a la vez, lo que solo puede ocurrir si la barra se rompe por esta sección.
4. Por otro lado, también los saltos de los gráficos de normales y tensiones significarían que la misma sección tiene dos fuerzas o tensiones a la vez, lo que no es posible. Esto nos indica que el gráfico en las zonas de los saltos no están mostrando lo que en realidad está ocurriendo en esas secciones. En efecto, según el principio de Saint - Venánt, por los métodos de la Resistencia de Materiales no es posible conocer en puntos donde están aplicadas las fuerzas externas, por lo que siempre se trataría de analizar secciones alejadas de los puntos de aplicación de las cargas. Es por esto que la información de los gráficos en las secciones donde presentan saltos debe ser tomada con reservas. Lo que sucede en estos puntos depende del modo de aplicación de las cargas, cuyo análisis cae fuera de los objetivos de la Resistencia de Materiales.

2. La barra de acero que se muestra en la figura se encuentra soportada de la forma que se aprecia. Su peso es de 5000 kgf. Determinar las reacciones en A, B y C. El soporte en C es de cobre y el de B es de acero.

Datos.

$$L = 1\text{ m}$$

$$P = 5000\text{ kgf}$$

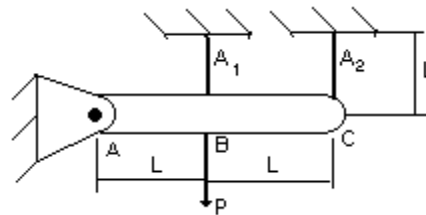
$$E_1 = E_{\text{ACERO}} = 210\text{ GPa}$$

$$E_2 = E_{\text{COBRE}} = 127\text{ GPa}$$

$$A_1 = 2\text{ cm}^2$$

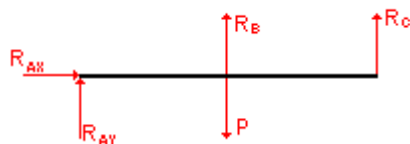
$$A_2 = 1\text{ cm}^2$$

$$A_2 = 2A_1$$



Se trata de un sistema hiperestático, pues existe un número mayor de reacciones incógnitas que ecuaciones de la estática para determinarlas.

**Diagrama de cuerpo libre.**



$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} + R_B + R_C - P = 0 \quad (I)$$

$$\sum F_X = 0$$

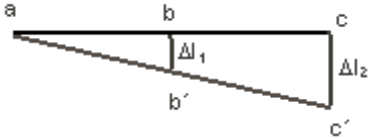
$$R_{AX} = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_{AY}L - R_C L = 0 \quad (II)$$

De las ecuaciones planteadas se observa que hay 2 ecuaciones y 3 incógnitas por lo tanto se hace necesario buscar una tercera ecuación que nos permita relacionar las reacciones desconocidas. Esta se busca en el esquema deformado. Para ello se hace uso del método de compatibilidad de las deformaciones. Este consiste en buscar en el sistema deformado la relación (o relaciones) entre los acortamientos o alargamientos  $\Delta l$  que existen entre las partes del sistema.

En la siguiente figura en la posición abc es posible ver la barra antes de aplicar la carga externa P y en la posición ab'c' como quedará el sistema después de aplicada la carga (se muestra de forma exagerada para que se pueda apreciar bien).



Como se aprecia en la figura las barras 1 y 2 sufren alargamientos. De las condiciones geométricas se ve que los triángulos  $abb'$  y  $acc'$  son semejantes, por lo que se puede plantear que sus lados son proporcionales:

$$ab = L$$

$$ac = 2L$$

$$bb' = \Delta l_1$$

$$cc' = \Delta l_2$$

$$\frac{\Delta l_1}{L} = \frac{\Delta l_2}{2L}$$

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

Esta expresión es la relación entre los alargamientos de las barras 1 y 2.

Aplicando la ley de Hooke:

$$\Delta l_1 = \frac{R_B L}{E_1 A_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{R_C L}{E_2 A_2}$$

Luego:

$$\frac{R_C L}{E_2 A_2} = 2 * \frac{R_B L}{E_1 A_1}$$

$$\frac{R_C L}{E_2 2A_1} = 2 * \frac{R_B L}{E_1 A_1}$$

$$R_C = 4R_B \quad (III)$$

Con las ecuaciones I, II y III ya es posible determinar las reacciones en las barras.

$$R_{AY} + R_B + R_C - P = 0 \quad (I)$$

$$R_{AY} - R_C = 0 \quad (II)$$

$$R_C = 4R_B \quad (III)$$

Simultaneando las tres ecuaciones se obtiene,

$$R_{AY} = 2222.22 \text{ kgf}$$

$$R_{AX} = 0$$

$$R_B = 555 \text{ kgf}$$

$$R_C = 2222.22 \text{ kgf}$$

3. La barra de acero que se muestra en la figura está sujeta a una carga axial de compresión de 320 kN. Si el módulo de elasticidad del acero es 210 GPa y la razón de Poisson es 0.3, ¿Cuál es el espesor (t) final de la barra?

Datos.

$$L = 0.45 \text{ m}$$

$$P = 320 \text{ kN}$$

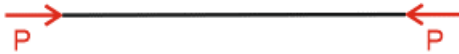
$$E_{\text{ACERO}} = 210 \text{ GPa}$$

$$h = 100 \text{ mm}$$

$$t = 40 \text{ mm}$$



### Diagrama de cuerpo libre.



El esfuerzo normal por compresión es negativo, aplicando la Ley de Hooke:

$$\delta_{axial} = -\frac{P L}{A E}$$

$$\delta_{axial} = -\frac{320 \text{ kN} \cdot 0.45 \text{ m}}{0.1 \text{ m} \cdot 0.04 \text{ m} \cdot 210 \cdot \text{GPa}}$$

$$\delta_{axial} = -0.00171 \text{ m}$$

La deformación unitaria axial de la barra es:

$$\epsilon_{axial} = \frac{\delta_{axial}}{L}$$

$$\epsilon_{axial} = \frac{-0.00171 \text{ m}}{0.45 \text{ m}}$$

$$\epsilon_{axial} = -0.00038 \text{ m/m}$$

A partir de la ecuación de la razón de Poisson:

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lateral}}{\epsilon_{axial}}$$

$$\epsilon_{lateral} = -\nu \cdot \epsilon_{axial}$$

$$\epsilon_{lateral} = -0.3(-0.00038 \text{ m/m})$$

$$\epsilon_{lateral} = 0.000114 \text{ m/m}$$

El incremento en el espesor de la barra viene dado por la ecuación:

$$\Delta t = \epsilon_{lateral} \cdot t$$

$$\Delta t = 0.000114 \text{ m/m} \cdot 0.04 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0.00000457 \text{ m} (0.00457 \text{ mm})$$

Entonces, el espesor final de la barra es:

$$t = 40 \text{ mm} + 0.00457 \text{ mm}$$

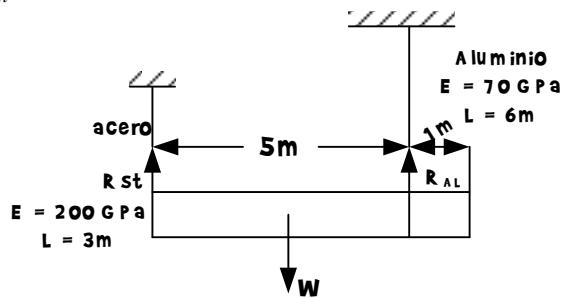
$$t = 40.0046 \text{ mm}$$

4. Un bloque prismático de concreto de masa ( $m$ ) es suspendido de dos varillas cuyos extremos inferiores están al mismo nivel como se indica en la figura. Determinar la relación de las secciones de las varillas de manera que el bloque no se desnivele (permanezca horizontal).

Datos.

$$\frac{A_{st}}{A_{AL}} = ?$$

$$\delta_{st} =$$



$$\sum F_y = 0$$

$$R_{st} + R_{AL} = W \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$2R_{AL} - 3R_{st} = 0$$

$$R_{AL} = \frac{3R_{st}}{2} \quad (2)$$

$$\delta_{st} = \frac{FL}{AE}$$

$$\delta_{st} = \frac{R_{st}(3)\text{mm}^2}{A_{st}(200\text{GN})}$$

$$\delta_{AL} = \frac{R_{AL}(6)\text{m.m}^2}{A_{AL}(70\text{GPa})} \quad (4)$$

$$\delta_{st} = \delta_{AL}$$

$$\frac{3R_{st}}{200A_{st}} = \frac{6R_{AL}}{70A_{AL}}$$

$$\frac{\Delta_{\Delta L}}{\Delta_{st}} = \frac{6R_{AL} \cdot 200}{3R_{st} \cdot 70}$$

$$\frac{\Delta_{\Delta L}}{\Delta_{st}} = \frac{40R_{AL}}{7R_{st}}$$

$$\frac{\Delta_{\Delta L}}{\Delta_{st}} = \frac{403R_{st}}{72R_{st}}$$

$$\frac{\Delta_{\Delta L}}{\Delta_{st}} = \frac{60}{7}$$

5. Dos varillas de aluminio AB y BC están articuladas en A y en C a soportes rígidos como indica la figura. Las barras están unidas en B mediante un pasador y soportan la carga  $P = 1500 \text{ kg}$ . Si las varillas tienen una sección de  $2 \text{ cm}^2$  y un módulo de elasticidad de  $2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ , determinar las deformaciones totales de cada una y el desplazamiento horizontal y vertical del punto B considere  $\alpha = 45^\circ$  y  $\beta = 30^\circ$ .

Datos.

$$A = 2 \text{ cm}^2$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

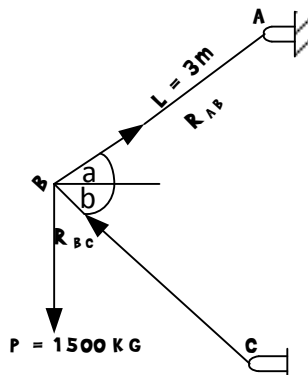
$$\delta_{AB} = ?$$

$$\delta_{BC} = ?$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$\delta_p = ?$$



$$\sum F_y = 0$$

$$R_{AB} (\text{sen } \alpha) + R_{BC} (\text{sen } \beta) = P \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{AB} (\text{cos } \alpha) + R_{BC} \cdot \text{cos } \beta = 0 \quad (2)$$

$$R_{AB} = \frac{R_{BC} \text{cos } \beta}{\text{cos } \alpha}$$

Reemplazo 2 en 1

$$R_{BC} \text{tg } \alpha \cdot \text{cos } \beta - R_{BC} (\text{sen } \beta) = P$$

$$R_{BC} (\text{tg } \alpha \cdot \text{cos } \beta - \text{sen } \beta) = P$$

$$R_{BC} = \frac{1500}{\text{tg } 45^\circ \text{cos } 30^\circ + \text{sen } 30^\circ}$$

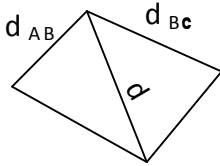
$$R_{BC} = 1098 \text{ Kgf}$$

En (2)

$$R_{BC} = \frac{1098 \text{ Kgf} \cdot \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$R_{AB} = 1344 \text{ Kgf}$$

Diagrama alargamientos



$$\delta_{BC} = \frac{1098 \text{ Kgf} (2 \text{ m}) (cm^2) | 1000 \text{ mm} |}{2 \text{ cm}^2 \cdot 2 \times 10^6 \text{ Kgf} | 1 \text{ m} |}$$

$$\delta_{BC} = 549 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\delta_{AB} = \frac{1344 \text{ Kgf} \cdot 3 \text{ m} \cdot cm^2 | 1000 \text{ mm} |}{2 \text{ cm}^2 \cdot 2 \times 10^6 \text{ Kgf} | 1 \text{ m} |}$$

$$\delta_{AB} = 1008 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

6. Una barra de aluminio con sección constante de  $160 \text{ mm}^2$  soporta las fuerzas axiales aplicadas en los puntos que indica la figura. Si  $E = 70 \text{ GPa}$ , determinar el alargamiento o acortamiento total de la barra (No hay pandeo de este elemento).

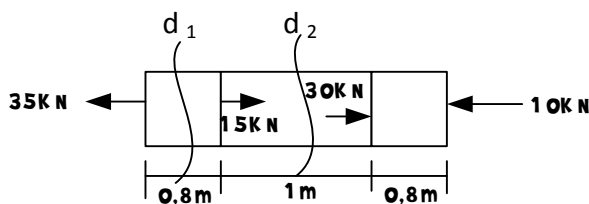
Datos.

Aluminio

$$A = 160 \text{ mm}^2$$

$$E = 70 \text{ GPa}$$

$$\delta = ?$$



$$\delta_T = \sum_{i=1}^n \delta_i$$

$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$



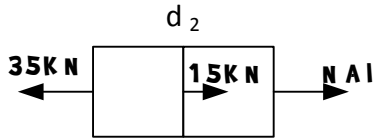
$$\sum F_x = 0 \quad \delta_1 = \frac{N_{AL} \cdot L}{\Delta \cdot E}$$

$$-35 + N_{AP} = 0$$

$$N_{AP} = 35 \text{ KN}$$

$$\delta_1 = \frac{35 \text{ KN} \cdot 0,8 \text{ m}}{160 \text{ mm}^2 \cdot 70 \text{ GPa}} \left| \frac{(1000 \text{ mm})^3}{1 \text{ m}^3} \right| \frac{1 \text{ GPa}}{10^9 \text{ Pa}} \frac{1 \text{ Pa}}{\text{N}} \left| \frac{10^3 \text{ N}}{1 \text{ KN}} \right|$$

$$\delta_1 = 2,5 \text{ mm}$$



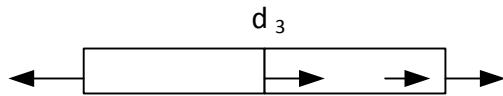
$$\sum F_x = 0$$

$$N_{AL} = +35 - 15$$

$$N_{AL} = +20 \text{ KN}$$

$$\delta_2 = \frac{(20 \times 10^3) \text{ N} (1) \text{ mm}^2}{1,6 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 70 \times 10^3 \text{ N}} \left| \frac{1000 \text{ mm}}{1 \text{ m}} \right|$$

$$\delta = 1,785 \text{ mm}$$



$$\delta_3 = \frac{N_{AL} L}{\Delta E}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-35 \text{ KN} + 15 \text{ KN} + 30 \text{ KN} + N_{AI} = 0$$

$$\delta_3 = -10 \text{ KN} \times 0,6 \times 10^3 \quad 10 \text{ KN} + N_{AL} = 0$$

$$\delta_3 = -0,53 \text{ mm} \quad N_{AL} = -1012 \text{ N}$$

### Ejercicios Propuestos.

- Determine el número de perfil necesario que garantice la resistencia de la barra AB.

Datos.

$$P = 10 \text{ kN}, a = 0,2 \text{ m}, b = 0,4 \text{ m}, [\sigma] = 1600 \text{ kgf/cm}^2$$

- Construya los gráficos de fuerzas internas, tensiones y desplazamientos.

Datos:

$$P_1 = 1 \text{ ton}$$

$$P_2 = 2 \text{ ton}$$

$$d_1 = 4 \text{ cm}$$

$$d_2 = 2 \text{ cm}$$

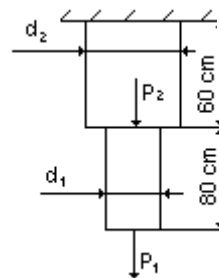
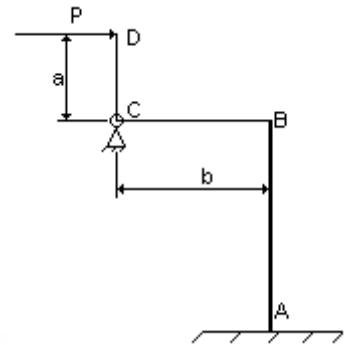
$$E = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

- ¿Dónde debe ser aplicada la fuerza P, para que el desplazamiento de la viga rígida AB, sea horizontal?

Datos:

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$l = 2 \text{ m}$$



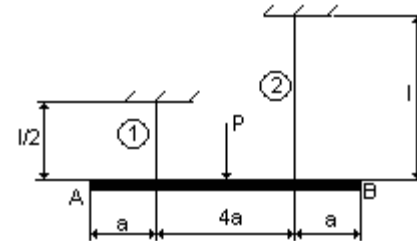


$a = 1\text{ m}$   
 $A_1 = 4\text{ cm}^2$   
 $A_2 = 2\text{ cm}^2$   
 $E_1 = E_2 = 2 \times 10^6\text{ kgf/cm}^2$

4. Determinar las fuerzas axiales de las barras 1.

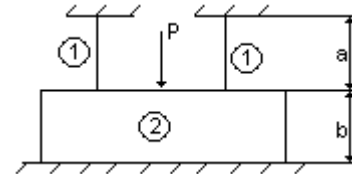
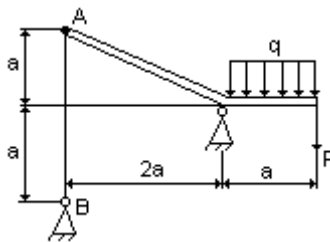
Datos:

$P = 10\text{ kN}$   
 $a = 1.5\text{ m}$   
 $c = 2.4\text{ m}$   
 $A_1 = 0.2\text{ m}^2$   
 $A_2 = 0.27\text{ m}^2$   
 $E_1 = 1 \times 10^6\text{ kgf/cm}^2$   
 $E_2 = 2 \times 10^6\text{ kgf/cm}^2$

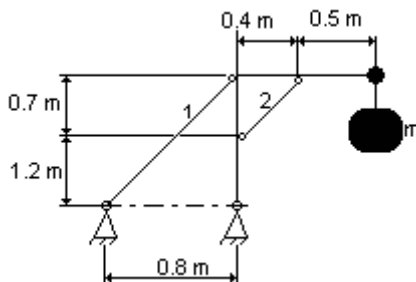


5. Determinar las tensiones en la barra AB. Se conoce que:

$P = 30\text{ kN}$   
 $q = 15\text{ kN/m}$   
 $a = 0.1\text{ m}$   
 Sección transversal rectangular de  $30\text{ mm} \times 30\text{ mm}$



6. Determinar el área de la sección transversal de las barras 1 y 2 en la siguiente estructura.



Datos:

Valor máximo para la masa  $m$ :  $1200\text{ kg}$   
 Tensión admisible de la barra 1:  $200\text{ MPa}$   
 Tensión admisible de la barra 2:  $160\text{ MPa}$

# Capítulo

# 2

**ESTADOS TENSIONALES**

El estado tensional de un elemento viene dado por el conjunto de todas las tensiones que actúan sobre el mismo. Es de suma importancia conocer este estado tensional para juzgar sobre la resistencia del material.

Para conocer el estado tensional del elemento en un punto determinado se utilizan dos métodos. Uno es el método analítico y el otro es el método gráfico mediante la construcción del círculo de Mohr.

Para construir el círculo:

I.) Dados los valores de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , y  $\tau$  se construye de la manera siguiente.

- 1) Se grafican sobre el eje horizontal las tensiones normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , para lo que se escoge una escala que se respetara en todo el ejercicio.
- 2) En el eje de las ordenadas se grafican los valores de  $(\tau)$  con su valor modular.
- 3) Al trazar una línea entre los valores de  $(\sigma_x - \tau)$  [A] y  $(\sigma_y - \tau)$  [B] se obtiene un punto que es el centro de la circunferencia [C], donde los radios CB ó CA determinaran dicha circunferencia.

Los puntos de la circunferencia se relacionan a un plano del prisma elemental.

- 4) Al unir los puntos con los valores de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  representamos el plano  $\epsilon$  al cual pertenecen estas tensiones. Consideraremos  $\tau$  negativa si hace girar cualquier punto interior dentro del prisma de forma anti horaria, de lo contrario será positiva.
- 5) El punto I y II correspondiente a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  se encuentran en la intersección del eje de las abscisas con la circunferencia. Es importante que memorice que  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

El ángulo que se forma entre los planos I y  $\epsilon$  corresponden al ángulo  $2\phi$ .

- 6) Para calcular las tensiones en un plano inclinado  $\mu$  un ángulo  $\phi$  con respecto al plano  $\epsilon$ , trazamos partiendo de  $\epsilon$  en la circunferencia un ángulo con valor  $2\phi$ , en el mismo sentido del ángulo  $\phi$  en el prisma elemental.

Donde se interceptan el plano y la circunferencia existen los valores de  $\sigma$  y  $\tau$ .

II.) Si contamos con los valores de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Podríamos calcular las tensiones  $\sigma$  y  $\tau$  en el plano  $\mu$ . con los siguientes pasos

- 1) Se grafican los valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  utilizando una escala que escogeríamos pero que se utilizara en todo el ejercicio.
- 2) Se busca el centro C de la circunferencia como el medio de la línea:

$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Y se obtienen los radios C  $\sigma_1$  y C  $\sigma_2$

- 3) Tomando como partida el punto I, y en el mismo sentido del prisma construimos un ángulo  $2\phi$  en la circunferencia, en la intersección definimos el plano  $\mu$  que nos indicara los valores de  $(\sigma)$  y  $(\tau)$ .

### Ejercicios resueltos.

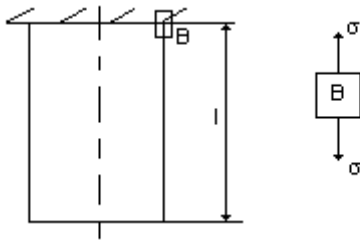
1. Determinar las tensiones normales y tangenciales en el punto B para un corte realizado en el punto a un ángulo de  $30^\circ$  con respecto a la horizontal. La barra se encuentra sometida a la acción de su peso propio.

Datos:

$$l = 100 \text{ cm}$$

$$A = 10 \text{ cm}^2$$

$$\gamma = 0.005 \text{ kg/cm}^3$$



Como primer paso se deben determinar las tensiones que surgen en el punto B, que serán esfuerzos normales tracción.

La fuerza de tracción que actúa sobre la barra producto a la acción de su peso esta en función del peso específico, el área y la longitud de la misma, como los dos primeros son constantes, entonces la carga varía con la longitud siendo nula en el extremo libre y máxima en el empotramiento.

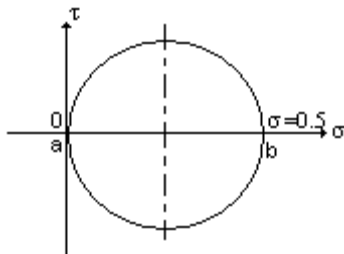
$$N = \gamma A z \Big|_{z=0}^{l=5 \text{ kgf}}$$

Las tensiones normales serán nulas en el extremo inferior y máximas en el empotramiento.

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A}$$

$$\sigma_{\max} = 0.5 \text{ kgf/cm}^2$$

Como se aprecia en la figura en el punto B se produce un estado tensional lineal, en el cual solo actúa una tensión normal y no aparecen tensiones tangenciales. Si se plotea esto en un sistema coordenado  $\sigma - \tau$  se obtiene:



Como se aprecia en la figura para un estado tensional lineal solo surge una tensión principal que es igual a la tensión que actúa sobre el elemento. Para construir el círculo de Mohr se procede de la siguiente forma:

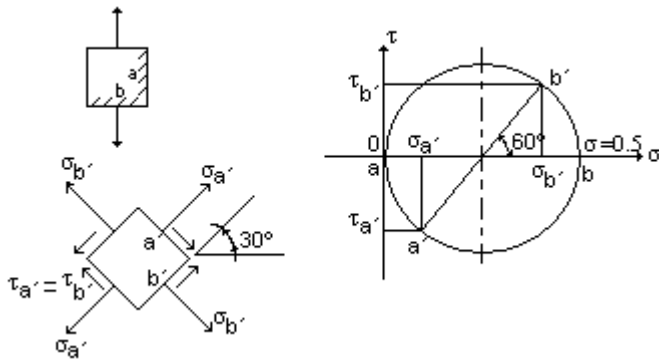
Se determina un factor de escala. En el eje de las  $\sigma$  se plotean los valores de tensiones normales que actúen sobre las caras del elemento y en el eje de las  $\tau$  las tensiones tangenciales (que en este caso son nulas). Se obtienen así dos puntos los cuales al ser unidos determinan el diámetro del círculo. El punto donde este corta al eje horizontal es el centro O del círculo. Entonces es posible trazar la circunferencia. Cada punto de esta determina el valor de las tensiones que actúan en un plano del elemento analizado.

Después de obtenido el Círculo de Mohr es posible conocer los valores de las tensiones principales, las tensiones tangenciales máximas así como las tensiones en cualquier plano inclinado. Para esto último debe rotarse el radio del círculo el doble del ángulo al que se desea determinar las tensiones en el mismo sentido que aparece en el prisma elemental.

Es importante recordar el convenio de signos:

- Las tensiones normales de tracción se consideran positivas.
- Las tensiones tangenciales que tienden a girar el elemento en sentido horario son positivas.

Para conocer las tensiones en un plano inclinado a  $30^\circ$  se gira el diámetro del círculo de Mohr el doble de este ángulo, o sea  $60^\circ$  en sentido anti horario pasando los puntos a y b a ocupar las posiciones a' y b' respectivamente. Las tensiones  $\sigma$  y  $\tau$  correspondientes a estos puntos son entonces las tensiones que actúan en las caras del plano inclinado que interesa.



Se obtiene para las tensiones buscadas:

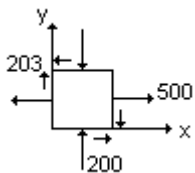
$$\sigma_{a'} = 0.125 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{b'} = 0.37 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\tau_{a'} = \tau_{b'} = 0.21 \text{ kgf/cm}^2$$

2. En la siguiente figura se muestra el estado tensional de un punto. Determine:

- Las tensiones principales.
- Las tensiones tangenciales extremas.



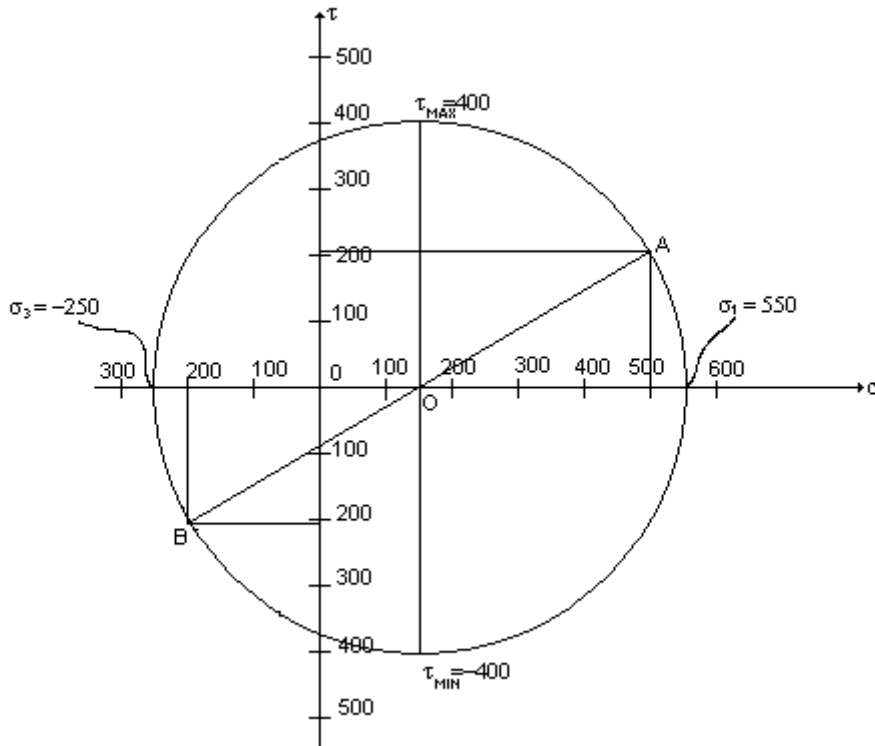
(Las tensiones están dadas en  $\text{kgf/cm}^2$ ).

Para resolver este problema se hará uso del método gráfico.

Se construye un sistema de ejes coordenados  $\sigma - \tau$  y se escoge un factor de escala  $\mu_K$ .

Para construir el círculo se trazan dos puntos. Un punto A ( $\sigma_X, \tau_{XY}$ ), las tensiones  $\sigma_X$  son positivas por ser de tracción, igual sentido tienen las tensiones  $\tau_{XY}$  producto a que tienden a girar el elemento en sentido horario. El segundo punto es B ( $\sigma_Y, \tau_{YX}$ ) en el que las tensiones  $\sigma_Y$  son negativas pues son de compresión, mientras que las  $\tau_{YX}$  son negativas pues giran el elemento en sentido anti horario.

Después de obtenidos estos puntos se unen los mismos mediante un segmento de recta quedando así definido el diámetro del círculo de Mohr. El punto donde este corta al eje de las  $\sigma$  es el centro O del círculo.



Del análisis del círculo construido se aprecia que:

$$\sigma_1 = 550 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 0$$

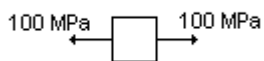
$$\sigma_3 = -250 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\tau_{\text{MAX}} = 400 \text{ kgf/cm}^2$$

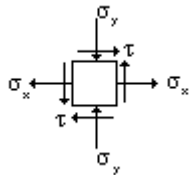
$$\tau_{\text{MIN}} = -400 \text{ kgf/cm}^2$$

### Ejercicios propuestos.

1. Hallar las tensiones que existen en caras giradas un ángulo de  $45^\circ$  respecto a la horizontal.



2. Determinar las tensiones principales y el ángulo necesario para obtenerlos.

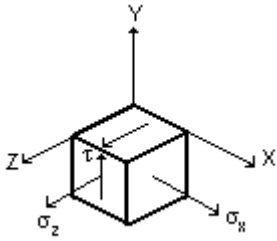


$$\sigma_x = 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 120 \text{ MPa}$$

$$\tau = 70 \text{ MPa}$$

3. Determine las tensiones principales, las tensiones tangenciales máxima y mínima, así como los ángulos de giro necesarios para obtenerlos.



$$\sigma_x = 500 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = 230 \text{ MPa}$$

$$\tau = 100 \text{ MPa}$$

4. Determine la energía potencial almacenada por elemento del problema anterior si:

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$\mu = 0.3$$

5. Calcule las deformaciones longitudinales unitarias a lo largo de los ejes X, Y, Z del elemento mostrado.

$$E = 200 \text{ GPa}$$

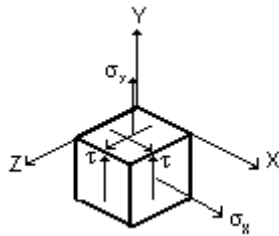
$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$\mu = 0.3$$

$$\sigma_x = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 100 \text{ MPa}$$

$$\tau = 200 \text{ MPa}$$



# Capítulo

# 3

**TORSIÓN**



### Cálculo de barras de sección circular a torsión.

Una barra está sometida a torsión, si en sus secciones transversales surgen momentos torsores, es decir, momentos que actúan de forma paralela a la sección transversal.

En esta sollicitación surgen tensiones tangenciales, cuando se trata de barra de secciones circulares se obtienen de la expresión:

$$\tau = \frac{Mt}{W_p},$$

y la condición de resistencia:

$$\tau_{Max} \leq [\tau]$$

Las deformaciones que tienen lugar son angulares. Se denominan ángulo de torsión.

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{Mt_i l_i}{G_i I_{p_i}}$$

El ángulo de torsión correspondiente a la unidad de longitud se denomina ángulo de torsión unitario y se obtiene a través de:

$$\theta = \frac{Mt}{GI_p}, \text{ y la condición de rigidez: } \theta_{Max} \leq [\theta]$$

### Ejercicio resuelto.

1. El árbol representado en la figura gira a 380 rpm; la polea 3 es la motriz, mientras que la polea 1 transmite hacia otro equipo una potencia de  $N_1 = 60$  HP y la 2 una potencia  $N_2 = 40$  HP. Determinar el diámetro del árbol.

Datos:

$$[\tau] = 800 \text{ kgf/cm}^2$$

$$[\theta] = 0.5 \text{ } ^\circ/\text{m}$$

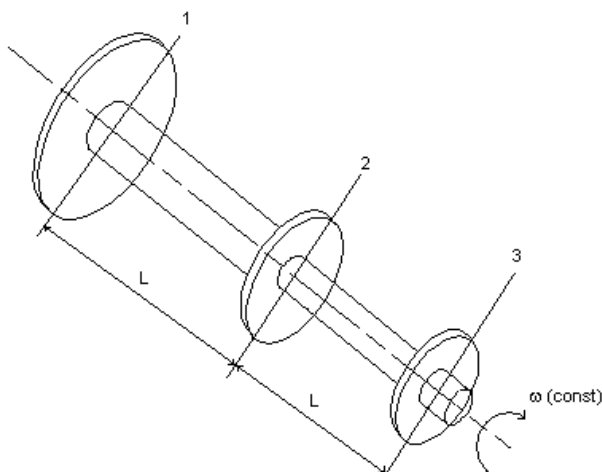
$$G = 8 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$n = 380 \text{ rpm}$$

$$N_1 = 60 \text{ HP}$$

$$N_2 = 40 \text{ HP}$$



El primer paso es construir el esquema de análisis. Para ello es necesario calcular el valor de los momentos torsores aplicados al árbol por la acción de las poleas. La relación que existe entre el momento aplicado a un árbol, la potencia transmitida por él y la frecuencia de rotación es:

$$M = 71.62 \frac{N}{n}$$

donde:

M es el momento torsor en kgf\*cm

N es la potencia en HP.

n es las revoluciones del árbol en rpm.

Aplicando la ecuación anterior se obtiene:

$$M_1 = 11.3 \text{ kgf*cm}$$

$$M_2 = 7.54 \text{ kgf*cm}$$

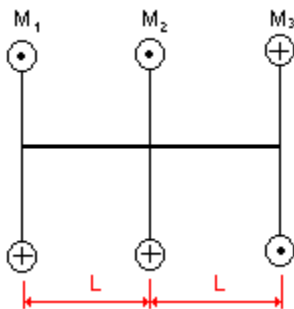
Si por ambas poleas se transmite una potencia de:

$$N_1 + N_2 = 60 + 40 = 100 \text{ HP,}$$

Es necesario que al árbol llegue esa potencia, lo cual ocurre por la polea 3, entonces:

$$M_3 = 18.84 \text{ kgf*cm}$$

Conocidos todos los momentos se construye el esquema de análisis:



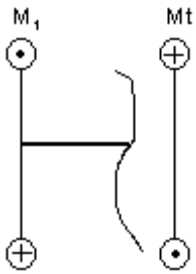
Para el análisis de la barra se divide en dos tramos de igual longitud cada uno.

#### Gráficos de fuerzas internas.

En el punto 1 está aplicado el momento  $M_1$  por lo que en ese punto en el gráfico de momentos torsores habrá un salto igual a ese valor que será constante hasta el punto 2 donde producto a la acción de  $M_2$  habrá un salto igual al valor de este momento. En el último tramo, comprendido entre los puntos 2 y 3 el momento será constante e igual a  $M_3$ . En el punto 3 el salto en el gráfico será de igual valor a este último momento.

Aplicando el método de las secciones:

Sección 1 (entre los puntos 1 y 2)

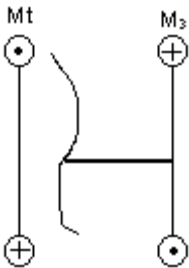


$$Mt - M_1 = 0$$

$$Mt = M_1$$

$$Mt = 11.3 \text{ kgf}$$

Sección 2 (entre los puntos 2 y 3)

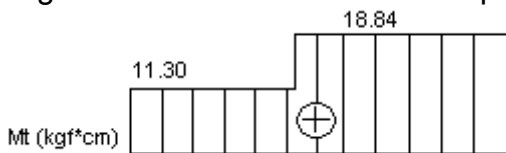


$$Mt - M_3 = 0$$

$$Mt = M_3$$

$$Mt = 18.84 \text{ kgf}$$

El gráfico de momentos torsores queda como sigue:



Del gráfico se aprecia que la sección peligrosa es la 2, comprendida entre los puntos 2 y 3 que es donde actúa el momento torsor máximo.

Cálculo del diámetro por resistencia.

$$\tau_{Max} = \frac{Mt}{Wp} \leq [\tau]$$

$$Wp = 0.2d^3$$

$$\tau_{Max} = \frac{Mt}{0.2d^3} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{Mt}{0.2[\tau]}}$$

$$d \geq 4.74 \text{ cm}$$

Cálculo del diámetro por rigidez.

$$\theta = \frac{Mt}{GIp} \geq [\theta]$$

$$Ip = 0.1d^4$$

$$\theta = \frac{Mt}{G0.1d^4} \geq [\theta]$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{Mt}{0.1G[\theta]}}$$

$$d \geq 7.24 \text{ cm}$$

Nota: el ángulo de giro admisible fue convertido a rad/m.

De los dos diámetros calculados se escoge el mayor pues es el que garantiza las dos condiciones, resistencia y rigidez. Entonces:

$$d = 7.24 \text{ cm}$$

2. Se utilizará una barra de acero con  $D = 15 \text{ mm}$  como resorte de torsión, si el esfuerzo torsional de la barra no debe exceder de  $110 \text{ MPa}$  cuando uno de sus extremos gire en un ángulo de  $30^\circ$ . ¿Cuál debe ser la longitud de la barra?

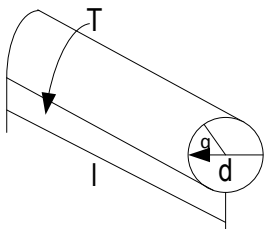
Datos:

$$D_{\text{st}} = 15 \text{ mm}$$

$$\tau \leq 110 \text{ MPa}$$

$$\phi = 30^\circ$$

$$l = ?$$



$$\tau = \frac{T \cdot r}{J}$$

$$1) \gamma = \frac{\phi r}{2}$$

$$2) J = G \gamma$$

$$\gamma = \frac{J}{G}$$

$$\gamma = \frac{110MP\phi}{79,8} \left| \frac{10^6 P\phi}{1MP\phi} \right| \frac{1GP\phi}{10^9 P\phi}$$

$$\gamma = 1,37 \times 10^{-3} rad \left| \frac{360^\circ}{2\pi rad} \right| = 0,078^\circ$$

$$= \frac{\phi \cdot r}{\gamma}$$

$$= \frac{30^\circ \cdot 7,5 \times 10^{-3} m}{0,078^\circ}$$

$$= 2,88 m$$

3. El árbol de transmisión representado en la figura es de acero tiene un diámetro de 4 cm y gira a 252 rpm, está soportada en cojinetes colocados de tal modo que la flexión del eje sea despreciable. Una correa de transmisión (banda) aplica 50 hp a la polea de la izquierda mientras las correas acopladas a las poleas intermedias y de la derecha transmiten desde estos 30 y 20 hp respectivamente. Calcular el máximo esfuerzo cortante producido en el árbol y el ángulo total de torsión. Se supone un módulo de rigidez a torsión  $G = 0,89 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$ .

Datos:

Acero

$D = 4 \text{ cm}$

$\eta = 525 \text{ rpm}$

$P_a = 50$

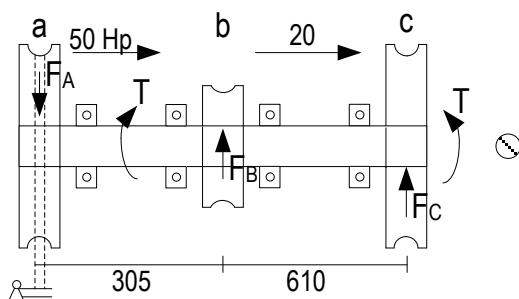
$P_b = 30$

$P_c = 20$

$T = ?$

$\phi = ?$

$G = 0,89 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$



Cargas Flexionantes  $\rightarrow G$  es despreciable

Cargas torcionales  $\rightarrow T$

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J}; T_{AB}; T_{BC}$$

$$\tau_{AB} = \frac{T_{AB} \cdot r}{J} \quad \tau_{BC} = \frac{T_{BC} \cdot r}{J}$$

$P = T \cdot n \Rightarrow \text{Potencia} = \text{torque} \times \# \text{ revoluciones}$

$$Si \rightarrow P = \frac{T.n}{63000} \Rightarrow T [lbpu\lg]$$

$$n [rpm]$$

$$P [Hp]$$

$$T = \frac{P.63000}{n}$$

$$T = \frac{50.63000}{525} \quad T_{BC} = \frac{20.63000}{525}$$

$$T_{AB} = 6000lb.in \quad T_{BC} = 2400lb.in$$

$$\tau_{AB} = \frac{T_{AB}.D.32}{2\pi.D^4}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{16T_{AB}}{\pi D^3}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{16.6000lb.in^3}{\pi.4^2 cm^2} \left| \frac{(2,54cm)^2}{1in^2} \right|$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 7824,27 \frac{lb\dot{f}}{pu\lg^2}$$

$$\phi = \frac{T.L}{G.J} \quad \phi_{AB} + \phi_{BC} = \phi_t$$

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB}.L_{AB}}{G.J}$$

$$\phi_{AB} = \frac{6000lb.in.0,305m}{0,89 \times 10^6 \frac{Kgf}{cm^2} \cdot \frac{\pi.(0,04)^2 m^4}{32}}$$

$$\phi_{AB} = \frac{6000lb.in.0,305m.cm^2.32}{0,89 \times 10^6 Kgf \cdot \pi(0,04)^2 m^4} \left| \frac{1Kgf}{2,2lb\dot{f}} \right| \left| \frac{2,54cm}{1in} \right| \left| \frac{1m^3}{100^3 cm^3} \right| = 9,44 \times 10^{-3} rad$$

$$\phi_{BC} = \frac{T_{BC}.L_{BC}}{GJ}$$

$$\phi_{BC} = \frac{2400lb.in.0,61m.cm^2.32}{0,89 \times 10^6 Kgf \cdot \pi(0,04)^2 m^4} \left| \frac{2,54}{2,2 \times 100^3} \right|$$

$$\phi_{BC} = 7,55 \times 10^{-3} rad$$

$$\phi_t = 1,7 \times 10^{-2} .rad \left| \frac{360^\circ}{\pi rad} \right| = 0,97^\circ$$

Determinar el diámetro correcto para un eje de acero que transmite 300 hp a una velocidad de 3600 rpm si la tensión de trabajo en corte es igual a 420 kgf/cm<sup>2</sup>.

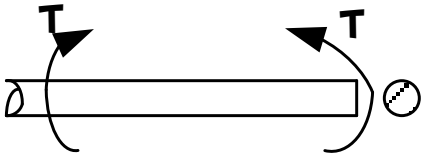
Datos:

$$D_A = ?$$

$$P = 300 Hp$$

$$n = 3600 rpm$$

$$\tau = 420 kgf/cm^2$$



$$\tau = \frac{T.r}{J}$$

$$\tau = \frac{T.r}{\frac{\pi.D^4}{32}}$$

$$\tau = \frac{T.D.32}{2\pi D^4}$$

$$D^3 = \frac{16T}{\pi\tau}$$

$$P = \frac{T.n}{63000}$$

$$\frac{63000P}{n} = T$$

$$T = \frac{63000.300}{3600}$$

$$T = 5250 \text{ lbin}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16.5250 \text{ lbin.cm}^2}{\pi.420 \text{ Kgf}} \left| \frac{1 \text{ Kgf}}{2.2 \text{ lbf}} \right| \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}}}$$

$$D = 4.188 \text{ cm}$$

### Ejercicios propuestos.

1. El acoplamiento de la figura transmite una potencia de 60 kW y una vez acoplado trabajará a 800 rpm. Dimensione el cubo de la transmisión.

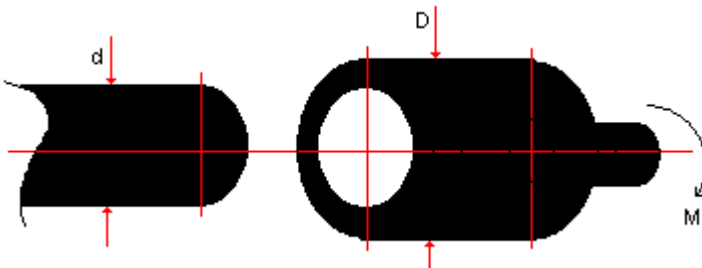
Datos.

$$G = 80 \text{ Gpa}$$

$$d/D = 0.9$$

$$[\tau] = 450 \text{ kgf/cm}^2$$

$$[\theta] = 2 \text{ }^\circ/\text{m}$$



2. Hallar la economía de material que se obtendría en el caso de sustituir una viga de sección maciza por una hueca con una relación  $d/D = 0.6$

3. Comprobar la barra de la siguiente figura si:

$$M = 100 \text{ kNm}$$

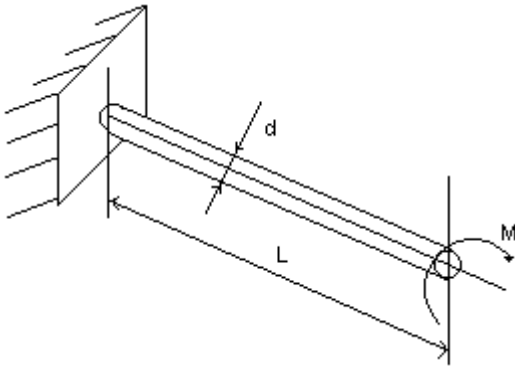
$$[\tau] = 80 \text{ MPa}$$

$$[\theta] = 0.6 \text{ }^\circ/\text{m}$$

$$d = 8 \text{ cm.}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$L = 15 \text{ cm}$$



1. Se quiere conocer cuál es el momento máximo que se le puede aplicar a un árbol sin afectar la resistencia y la rigidez del mismo. Se conoce que:

$$[\tau] = 65 \text{ kgf/cm}^2$$

$$[\theta] = 0.5 \text{ }^\circ/\text{m}$$

$$d = 10 \text{ cm.}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

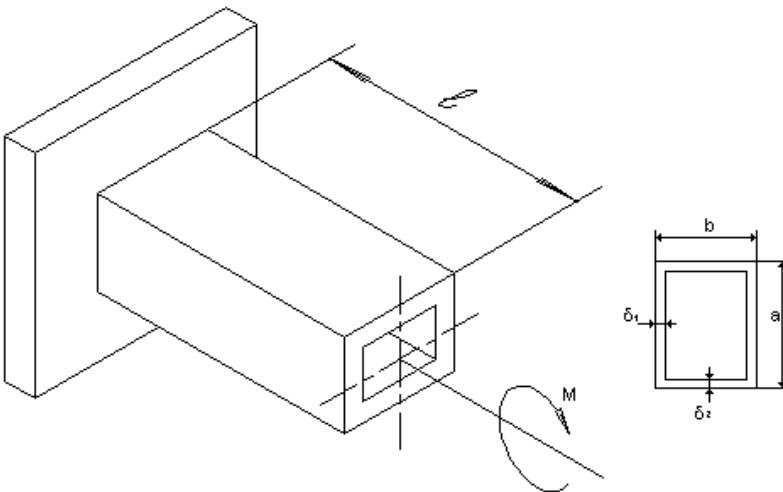
$$L = 32 \text{ cm}$$

### Cálculo de barras de sección no circular a torsión.

#### Ejercicio resuelto.

1. Comprobar la barra de la figura.

a) Comprobarla si le diera un corte a la sección a lo largo de toda la longitud.



Datos.

$$M = 1.5 \text{ kNm}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$



$$[\tau] = 80 \text{ MPa}$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$\delta_1 = 0.5 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = 1.0 \text{ cm}$$

Este es un problema donde se analizará los métodos de cálculo de barras de perfil delgado comparando la resistencia de perfiles abiertos y cerrados.

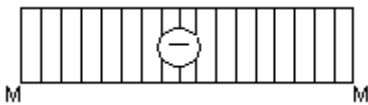
El esquema de análisis puede construirse sustituyendo la barra hueca por una barra.



Gráfico de momentos torsores.

Como sobre la barra hay aplicado un solo momento el momento torsor será constante e igual al momento exterior aplicado sobre la barra.

$$Mt = M$$



Comprobación de la barra.

Del gráfico de momentos torsores se aprecia que todas las secciones son igualmente peligrosas, ya que están cargadas con el mismo momento, de ahí que pueda analizarse cualquier sección. La condición de resistencia viene dada por:

$$\tau_{Max} \leq [\tau]$$

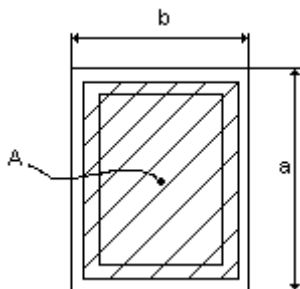
$$\tau_{Max} = \frac{Mt}{W_t} \leq [\tau]$$

En el caso de un perfil de paredes delgadas cerrado sometido a torsión el módulo de la sección es:

$$W_t = 2 * A * \delta_{Min}$$

A: es el área limitada por la línea que pasa por el medio del espesor de la pared de la sección.

En la siguiente figura se muestra esta área que aparece rayada.



$$A = (b - \delta_1)(a - \delta_2)$$

$$A = 25.4 \text{ cm}^2$$

$\delta_{\min}$ : es el espesor mínimo de la pared del perfil.

$$\delta_{\min} = 0.5 \text{ cm}$$

$$W_t = 2 * 25.4 * 0.5$$

$$W_t = 25.4 \text{ cm}^3$$

La tensión tangencial máxima es:

$$\tau_{\text{Max}} = \frac{1.5 * 10^3 \text{ Nm}}{25.4 * 10^{-6} \text{ m}^3}$$

$$\tau_{\text{Max}} = 59 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{Max}} \leq [\tau]$$

Por lo tanto la barra resiste.

a) Suponiendo que a la barra se le ha realizado un corte longitudinal, por lo que será una sección abierta.

En este caso el  $W_t$  viene dado por:

$$W_t = \frac{I_t}{\delta_{\text{Max}}}$$

$$I_t = \frac{1}{3} \sum \delta_i^3 S_i$$

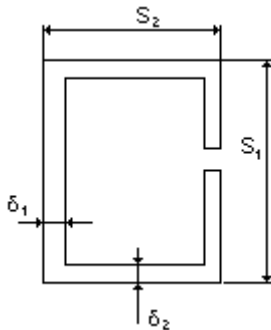
$I_t$ : expresión que hace los efectos del momento polar de inercia, a los efectos del cálculo a torsión.

$\delta_{\text{Max}}$ : espesor máximo de la pared del perfil.

$\delta_i$ : espesor de cada tramo del perfil.

$S_i$ : longitud de espesor  $\delta_i$

Al calcular el  $I_t$  de un perfil delgado abierto, es necesario dividirlo en tramos rectangulares. En este caso esta división se hará como se muestra en la siguiente figura:



En el tramo donde se ha hecho el corte se desprecia la longitud del espacio abierto a los efectos del cálculo de  $I_t$  por ser este muy pequeño.

Se toman cuatro tramos, dos de longitud  $S_1$  y espesor  $\delta_1$  y otros dos de longitud  $S_2$  y espesor  $\delta_2$ .

$$S_1 = a - \delta_1 = 7 \text{ cm}$$

$$S_2 = b - \delta_2 = 3.5 \text{ cm}$$

$$I_t = \frac{1}{3} (\delta_1^3 S_1 + \delta_2^3 S_2)$$

$$I_t = 2.6 \text{ cm}^4$$

$$\delta_{Max} = 1 \text{ cm}$$

$$W_t = \frac{2.6 \text{ cm}^4}{1 \text{ cm}}$$

$$W_t = 2.6 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{Max} = \frac{1.5 \times 10^3 \text{ Nm}}{2.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3}$$

$$\tau_{Max} = 576 \text{ MPa}$$

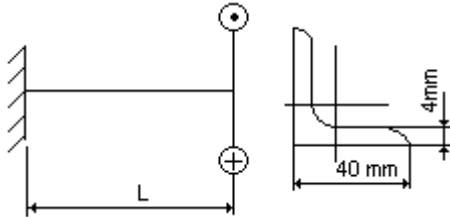
$$\tau_{Max} > [\tau]$$

Por lo tanto la barra no resiste con esta sección transversal.

De los resultados obtenidos se aprecia que los perfiles cerrados tienen mayor resistencia a la torsión que los abiertos. Es decir que realizando un pequeño corte a la sección, los esfuerzos aumentan notablemente. De igual forma sucede con los ángulos de giro, en las secciones abiertas las deformaciones son mucho mayores que en las cerradas, lo que es un argumento más para preferir estos últimos.

### Ejercicios propuestos.

1. Comprobar el angular empotrado mostrado en la figura.



Datos:

$$L = 1 \text{ m}$$

$$G = 8 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$[\tau] = 2000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$[\theta] = 1 \text{ }^\circ/\text{m}$$

$$M = 800 \text{ kgf*cm}$$

2. Determine las tensiones y las deformaciones máximas en la barra mostrada en la figura:

Datos:

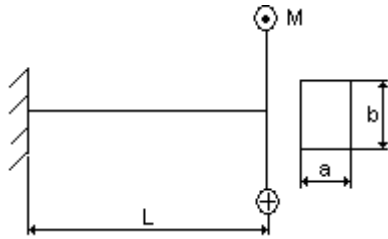
$$M = 120 \text{ kNm}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

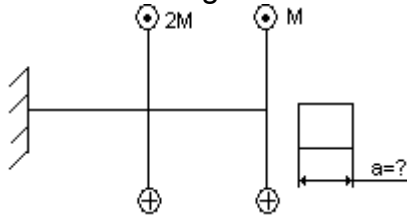
$$G = 8 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$a = 42 \text{ mm}$$

$$b = 21 \text{ mm}$$



3. ¿Qué dimensiones debe tener la sección transversal de la barra cargada como se muestra en la figura?



Datos.

$$M = 125 \text{ kNm}$$

$$[\sigma] = 2000 \text{ kgf/cm}^2$$

# Capítulo

# 4

**CORTANTE**

### Cálculo de juntas soldadas.

Las juntas remachadas se calculan al cizallamiento. La condición de resistencia al cortante tiene la forma:

$$\tau = \frac{4P}{\pi d^2 n z} \leq [\tau_{ciz}]$$

Las juntas remachadas también se calculan al aplastamiento.

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{n_1 d \delta} \leq [\sigma_{ap}]$$

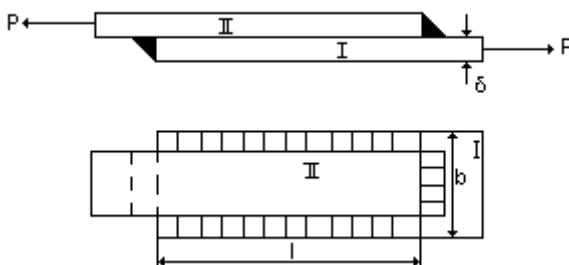
Generalmente a la hora de realizar el cálculo de una de estas juntas el problema consiste en obtener el número de remaches necesarios ( $n$  y  $n_1$ ) que garanticen la resistencia de la unión tanto al cortante como al aplastamiento.

Una vez determinado el número de remaches necesarios aplicando las dos condiciones anteriores se escoge de los valores obtenidos el mayor y se realiza la distribución de los mismos.

También se hace necesario realizar el cálculo de las planchas a tracción o a compresión. La condición de resistencia se plantea considerando el debilitamiento de la plancha, o sea el número de remaches colocados en una hilera en la misma.

### Ejercicios resueltos.

1. Se quiere soldar dos planchas de acero Ct-2 utilizando cordones frontales y de flanco, dos de cada tipo.



Datos:

$$[\tau] = 100 \text{ MPa}$$

$$\delta_p = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$$

$$k = 3 \text{ mm} = 0.003 \text{ m}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

Solución.

Como no se conoce el ancho de la plancha ( $b_1$ ), planteamos:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma]$$

$$\sigma = \frac{P}{b_l \delta_{pl}} \leq [\sigma]$$

$$b_l \geq \frac{P}{\delta_{pl} [\sigma]}$$

$$b_l \geq \frac{100 \times 10^3}{0.005 \times 140 \times 10^6}$$

$$b_l = 0.14 \text{ m}$$

Ahora en función del ancho de la plancha I ( $b_l$ ) es posible determinar el valor del ancho de la plancha II ( $b$ ):

$$b = b_l - 2\delta_{pl}$$

$$b = 0.14 - 2 \times 0.005$$

$$b = 0.13 \text{ m}$$

Ahora es posible determinar el valor de la longitud del cordón lateral (l):

$$l \geq \left( \frac{P}{[\tau]} - n_{fr} 0.7bk \right) * \frac{1}{n_{fl} 0.7k}$$

$$l \geq \left( \frac{100 \times 10^3}{100 \times 10^6} - 2 \times 0.7 \times 0.13 \times 0.003 \right) * \frac{1}{2 \times 0.7 \times 0.003}$$

$$l \geq 0.108 \text{ m}$$

$$l = 10.8 \text{ cm}$$

A la longitud efectiva se le debe sumar 20 mm (10 mm al inicio y 10 mm al final) debido a que la fusión del material en esa zona es incompleta.

2. Diseñar la siguiente junta soldada:

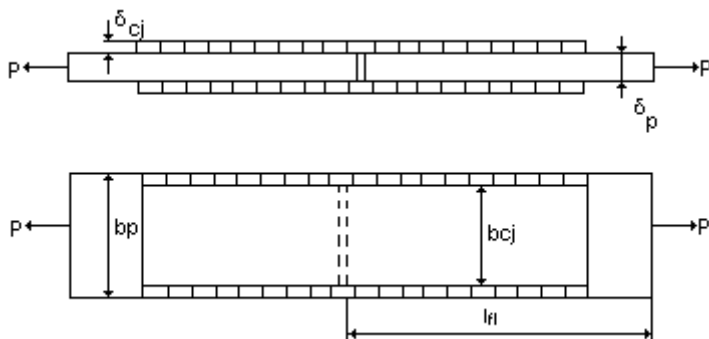
Datos:

$$[\tau_s] = 1100 \text{ N/cm}^2$$

$$\delta_p = 1.6 \text{ cm}$$

$$P = 60 \text{ kN}$$

$$[\sigma_p] = 1833 \text{ N/cm}^2$$



Solución.

Como se observa en la figura la unión no lleva costuras frontales, solo cuatro cordones de flanco, por lo tanto:

$$l \geq \left( \frac{P}{[\tau_s]} \right) * \frac{1}{n_{fl} 0.7k}$$

$$l \geq \left( \frac{60 \times 10^3}{1100} \right) * \frac{1}{4 \times 0.7 \times 1.6}$$

$$l \geq 12.17 \text{ cm}$$

Para completar el diseño:

$$\sigma_p = \frac{P}{b_p \delta_p} \leq [\sigma]$$

$$b_p \geq \frac{P}{\delta_p [\sigma_p]}$$

$$b_p \geq \frac{60 \times 10^3}{1.6 \times 1833}$$

$$b_p \geq 20.45 \text{ cm}$$

$$b_{CJ} = b_p - 2\delta_p$$

$$b_{CJ} = 20.45 - 2 \times 1.6$$

$$b_{CJ} = 17.25 \text{ cm}$$

$$2\delta_{CJ} b_{CJ} = \delta_p b_p$$

$$\delta_{CJ} = \frac{\delta_p b_p}{2b_{CJ}}$$

$$\delta_{CJ} = \frac{1.6 \times 20.45}{2 \times 17.25}$$

$$\delta_{CJ} = 0.95 \text{ cm}$$

### Ejercicios propuestos.

1. Determinar la carga admisible en la siguiente junta remacha.

Datos:

Material de las planchas: Acero CT-2

Material de los remaches: Duroaluminio

Ancho de las planchas (b): 5 cm

Espesor de las planchas:

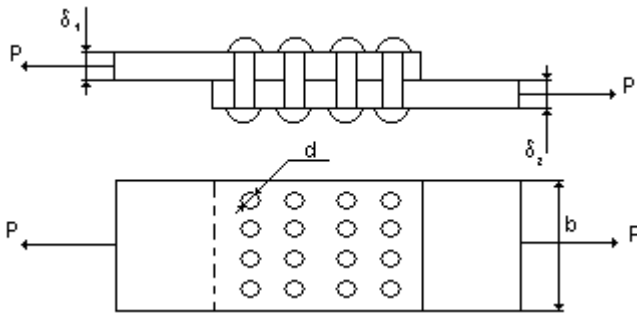
$\delta_1$ : 6 mm

$\delta_2$ : 8 mm

Número de remaches: 16 (Distribuidos en 4 filas por 4 columnas)

Diámetro de los remaches (d): 5 mm



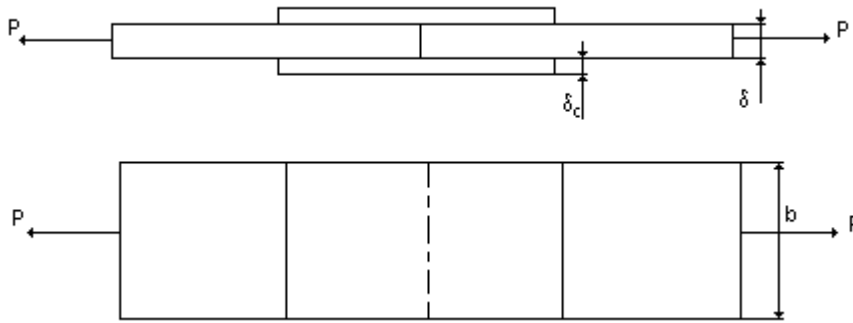


2. Calcular la junta remachada de dos planchas de igual sección y espesor  $\delta = 16$  mm, si están unidas por dos cubrejuntas y la fuerza es  $P = 60$  t. las tensiones admisibles son:

Para la plancha:  $[\sigma_t] = [\sigma_c] = 160$  MPa

Para los remaches:  $[\sigma_t] = 120$  MPa

El diámetro de los remaches es 20 mm.



La condición de resistencia para las uniones soldadas está dada por:

$$\tau = \frac{P}{n_{fr} b 0.7k + n_{fl} 0.7kl} \leq [\tau_s]$$

A partir de esta condición es posible resolver los tres problemas mencionados en la conferencia, no obstante generalmente el cálculo de las uniones soldadas consiste en determinar la longitud de los cordones de soldadura.

$$l \geq \left( \frac{P}{[\tau_s]} - n_{fr} b 0.7k \right) * \frac{1}{n_{fl} 0.7k}$$

Para esto es necesario conocer o calcular el ancho de las planchas en las que se realiza la costura frontal (b). Este parámetro puede obtenerse de la condición de resistencia a la tracción de las planchas a unir.

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma]$$

$$A = b\delta$$

3. Calcular la unión soldada de la siguiente figura, que debe soportar una fuerza de 10 toneladas.

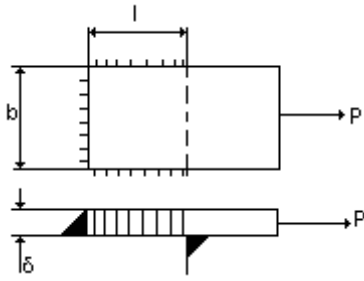
Datos:

$P = 10$  ton

$$\delta = 1 \text{ cm}$$

$$[\sigma_t] = 2000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$[\tau_s] = 1000 \text{ kgf/cm}^2$$



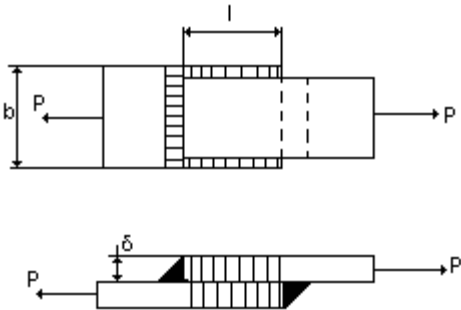
4. Calcular la carga máxima que puede soportar la siguiente junta soldada.

$$l = 20 \text{ cm}$$

$$b = 8 \text{ cm}$$

$$\delta = 0.8 \text{ cm}$$

$$[\tau_s] = 1100 \text{ kgf/cm}^2$$



# Capítulo

# 5

**FLEXIÓN**

## Cálculos de resistencia en vigas.

La flexión ocurre cuando las fuerzas externas actúan de forma perpendicular al eje de la barra y su línea de acción pasa por dicho eje.

Las fuerzas internas que surgen en sus secciones transversales son momentos flectores y fuerzas cortantes, que se determinan mediante el método de las secciones.

Aparejadas a los momentos flectores aparecen tensiones normales, que se calculan mediante la expresión:

$$\sigma = \frac{Mf}{W_x}$$

En las secciones transversales también surgen tensiones normales producto a la acción de las fuerzas cortantes. Se determinan mediante la fórmula siguiente.

$$\tau = \frac{QS_x^{Sep}}{I_x b}$$

Generalmente la comprobación a la resistencia se hace solo a las tensiones normales. Sin embargo, algunos materiales, la madera como ejemplo, resiste mal a la cortadura y por lo tanto se hace necesario realizar la comprobación también a esta sollicitación.

## Ejercicios resueltos.

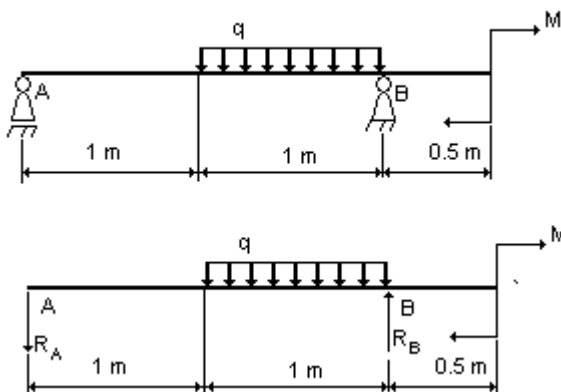
1. La siguiente viga se desea construir de acero CT-2 utilizando un perfil I. Determine el perfil necesario para garantizar la resistencia de la misma.

Datos.

Material CT-2

$q = 10 \text{ kN/m}$

$M = 20 \text{ kN/m}$



Solución.

Cálculo de las reacciones de apoyo.

$$\sum M_A = 0$$

$$-q * 1m * 1,5m + R_B * 2m - M = 0$$

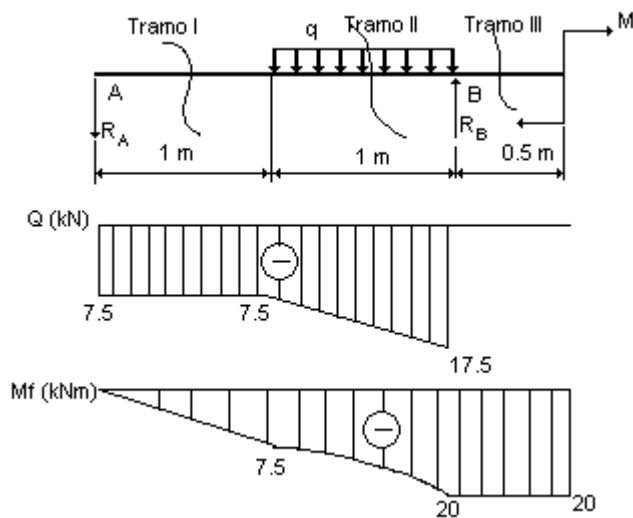
$$R_B = 17.5kN$$

$$\sum F_Y = 0$$

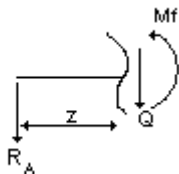
$$R_A - R_B + q * 0.5m = 0$$

$$R_A = 7.5kN$$

Construcción de los gráficos de fuerzas internas.



Tramo I.



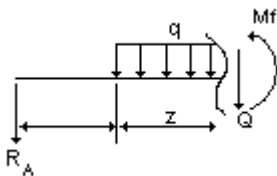
$$0 \leq z \leq 1m$$

$$Q = -R_A$$

$$Q = -7.5kN$$

$$Mf = -R_A z \Big|_{0=0}^{1=-7.5kNm}$$

Tramo II.

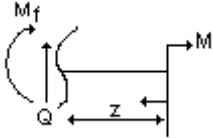


$$0 \leq z \leq 1m$$

$$Q = -R_A - qz \Big|_{0=-7.5kN}^{1=-17.5kN}$$

$$Mf = -R_A(z+1) - q \frac{z^2}{2} \Big|_{0=-7.5kNm}^{1=-20kNm}$$

Tramo III



$$0 \leq z \leq 0.5m$$

$$Q = 0$$

$$Mf = -M$$

$$Mf = -20kNm$$

El momento flector máximo ocurre en el voladizo, por lo tanto esa es la sección peligrosa.

Aplicando la condición de resistencia a flexión:

$$\sigma_{MAX} = \frac{Mf_{MAX}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$W_x \geq \frac{Mf_{MAX}}{[\sigma]}$$

$$W_x \geq \frac{20 \times 10^3}{140 \times 10^6}$$

$$W_x \geq 0.000143m^3$$

$$W_x \geq 143cm^3$$

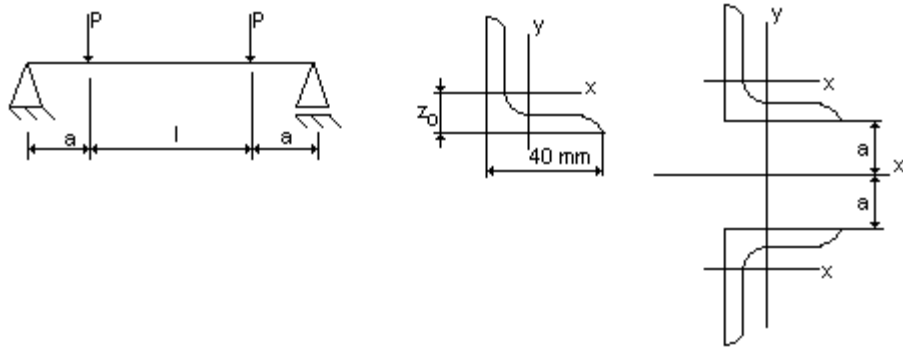
El perfil necesario es el perfil I No.18 con las siguientes características:

$$W_x = 143cm^3$$

$$A = 23.4cm^2$$

$$I_x = 1290cm^4$$

2. Calcular a que distancia deben colocarse los angulares para formar una viga con una sección que resista las cargas mostradas.



Datos:

$P = 2\text{ ton}$

$a = 20\text{ cm}$

$L = 2\text{ m}$

$I_x = 3.55\text{ cm}^4$

$Z_0 = 1.09\text{ cm}$

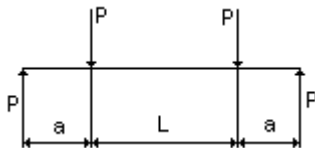
$A = 2.35\text{ cm}^2$

$[\sigma] = 1600\text{ kgf/cm}^2$

En este problema se muestra como calcular vigas compuestas por dos secciones.

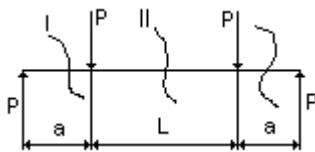
El primer paso es construir los gráficos de fuerzas internas para la viga.

Diagrama de cuerpo libre.



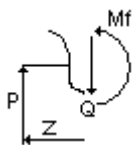
Las reacciones en los apoyos; producto a la simetría de las cargas externas y a la geometría de las barras son iguales a las cargas externas.

La barra se divide en tres tramos definidos entre los puntos de aplicación de cada carga y la siguiente a ella.



Para obtener las cargas internas, se hacen cortes en cada uno de los tramos.

Sección I ( $0 \leq z \leq a$ )



$$\sum M = 0$$

$$Mf - Pz = 0$$

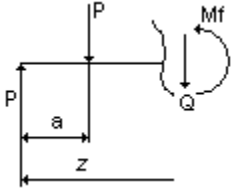
$$Mf = Pz \Big|_{z=0}^{z=Pa}$$

$$\sum F = 0$$

$$Q - P = 0$$

$$Q = P$$

Sección II ( $a \leq z \leq a+l$ )



$$\sum M = 0$$

$$Mf - Pz + P(z - a) = 0$$

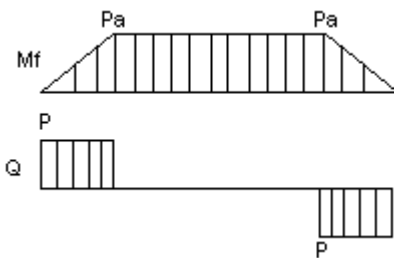
$$Mf = Pz - P(z - a) \Big|_{z=Pa}^{z=a+l=Pa}$$

$$\sum F = 0$$

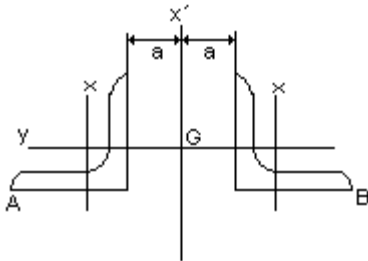
$$Q - P + P = 0$$

$$Q = 0$$

El tercer tramo se construye por la de la simetría de la barra con la diferencia de que la fuerza cortante es negativa. Los gráficos de momento flector y fuerza cortante se muestran a continuación.



Del gráfico de momentos flectores se observa que la sección peligrosa está en el tramo II donde actúa un momento  $Pa$ . Las fibras comprimidas están en la parte superior.



La distancia  $a$  que es la que separa los angulares es la que se desea hallar. Para determinar las tensiones en cualquier punto, se emplea la ecuación:

$$\sigma = \frac{Mx}{Ix} y$$



donde el eje  $x$ , respecto al cual se mide "y" debe ser un eje centroidal y principal. El eje  $x'$  es el que cumple con estos requisitos.

$$\sigma = \frac{Mx'}{Ix'} y$$

Interesan los puntos más cargados de la sección que son los que se corresponden con los puntos designados como A y B en la figura.

Para determinar el momento de inercia de la sección compuesta se emplea el teorema de los ejes paralelos:

$$Ix' = 2 \left[ Ix + A(z_0 + a)^2 \right]$$

$Ix$ : Momento de inercia de cada angular.

$A$ : área de cada angular.

$Z_0$ : distancia del borde del angular al centro de gravedad del angular.

La multiplicación por dos es debido a que son dos angulares.

$$Ix' = 2 \left[ 7.1 + 4.7(1.09 + a)^2 \right]$$

El término "y" es:

$$y_A = y_{\max} = a + 4 \text{ cm y,}$$

$$Mx' = Pa$$

Luego:

$$\sigma_A = \frac{Pa}{7.1 + 4.7(1.09 + a)^2} \leq [\sigma]$$

Despejando a y reduciendo la ecuación:

$$a^2 - 3.13a - 20 = 0$$

$$a = \frac{3.13 \pm \sqrt{9.8 + 80}}{2}$$

$$a_1 = 6.29 \text{ cm}$$

$$a_2 = -6.32 \text{ cm}$$

El valor de  $a_2$  no tiene significado, por lo que:

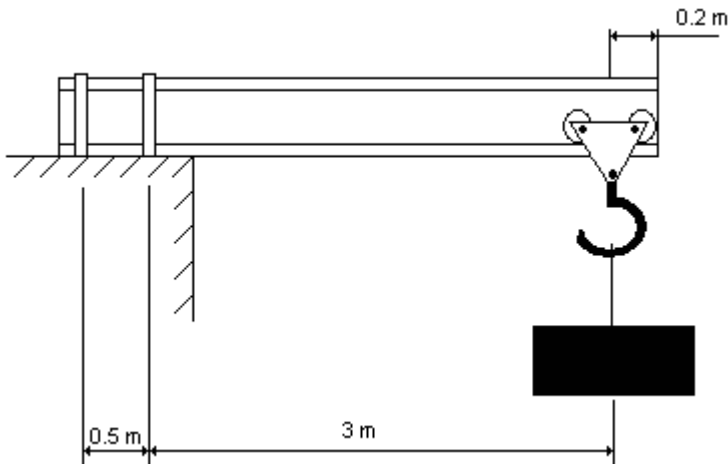
$$a = 6.29 \text{ cm}$$

### Ejercicios propuestos.

1. Una viga canal No. 22 de 10 metros de longitud, llega a un taller y al ser almacenada, se coloca sobre dos apoyos ubicados en los extremos de la viga. El material de la viga es Acero CT-3. Compruebe la resistencia de la viga.

2. En el ejercicio anterior analice la forma más racional de colocar los apoyos.

3. Determinar las tensiones máximas en la viga mostrada si el peso de la carga y el polipasto es de 1020 kgf. Considere el peso propio de la viga. La viga se construye de un perfil I No. 30.



4. Determinar el perfil necesario para garantizar la resistencia de la siguiente viga:

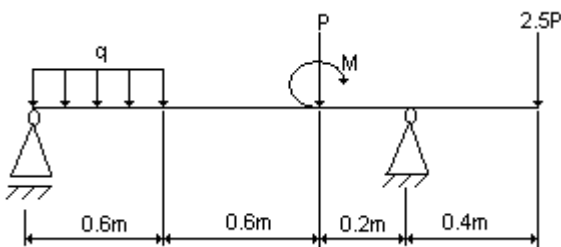
Datos:

$$P = 20 \text{ kN}$$

$$M = 38 \text{ kNm}$$

$$q = 16 \text{ kN/m}$$

Material: Acero CT-3



### Cálculo de deformaciones en vigas.

En los elementos sometidos a flexión surgen deformaciones lineales conocidas como flecha y angulares que son el ángulo de giro de la sección transversal de la viga.

Al calcular las deformaciones en vigas se utilizan varios métodos. Ahora utilizaremos el método de los parámetros de origen.

Para resolver un problema por el mismo, debe seguirse el orden siguiente:

1. Colocar el origen de coordenadas.
2. Cálculo de las reacciones de apoyo.
3. Determinación de la flecha en el origen  $y_0$  y el ángulo de giro en el origen  $\theta_0$ .
4. Determinación de la flecha y el ángulo de giro en los puntos que interesan.

### Ejercicios resueltos.

1. Determinar las deformaciones máximas.

Datos.

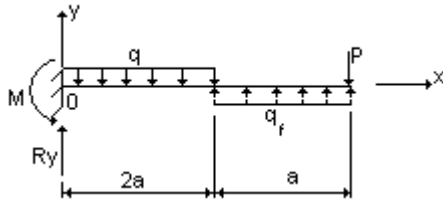
$$P = q \cdot a$$

$$q = 10 \text{ kN/m}$$

$$a = 1 \text{ m}$$

Acero CT-2

Perfil I No. 20



El origen de coordenadas se ubica en el extremo izquierdo (en el empotramiento), donde las deformaciones son iguales a cero.

Las reacciones en los apoyos se obtienen de las ecuaciones de equilibrio de la estática.

$$\begin{aligned}\sum F_Y &= 0 \\ R_Y &= q * 2a + P \\ R_Y &= 3qa \\ \sum M_0 &= 0 \\ M &= q * 2a * a + P * 3a \\ M &= 5qa^2\end{aligned}$$

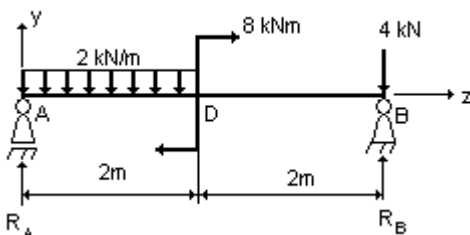
Las deformaciones serán máximas en el extremo libre, donde  $z = 3a$ .

$$\begin{aligned}EI_x \theta &= EI_x \theta_0 + \sum M(z-a) + \frac{\sum P(z-a)^2}{2} + \frac{\sum q(z-a)^3}{6} \\ \text{Para } z &= 3a \\ EI_x \theta_{MAX} &= -M(3a-0) + \frac{Ry(3a-0)}{2} - \frac{P(3a-3a)}{2} - \frac{q(3a-0)^3}{6} + \frac{q(3a-2a)^3}{6} \\ \theta_{MAX} &= -0.0158 \text{ rad} \\ EI_x y &= EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \frac{\sum M(z-a)^2}{2} + \frac{\sum P(z-a)^3}{6} + \frac{\sum q(z-a)^4}{24} \\ \text{Para } z &= 3a \\ EI_x y_{MAX} &= \frac{-M(3a-0)^2}{2} + \frac{Ry(3a-0)^3}{6} - \frac{P(3a-3a)^3}{6} - \frac{q(3a-0)^4}{24} + \frac{q(3a-2a)^4}{24} \\ y_{MAX} &= -0.035 \text{ m}\end{aligned}$$

2. Calcular la deflexión ( $y$ ) en el punto D y el ángulo de giro ( $\theta$ ) en el punto B de la siguiente viga de acero CT-2 que se muestra.

Datos.

Perfil I No. 36



El origen de coordenadas se ubica en el apoyo izquierdo (punto A).

Las reacciones en los apoyos se obtienen de las ecuaciones de equilibrio de la estática.

$$\sum M_A = 0$$

$$4 * R_B - 8kNm - 4kN * 4m - 2kn / m * 2m * 1m = 0$$

$$R_B = 7kN$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_A + 7kN - 4kN - (2kN / m) * 2m = 0$$

$$R_A = 1kN$$

Para determinar el ángulo de giro inicial ( $\theta_0 = \theta_A$ ) se calcula la flecha en el apoyo B aprovechando las condiciones de apoyo de la viga, pues  $y_0 = y_A = y_B = 0$ .

Para  $z = 4m$ .

$$EI_X y_B = EI_X y_A + EI_X \theta_A z + \frac{\sum M(z-a)^2}{2} + \frac{\sum P(z-a)^3}{6} + \frac{\sum q(z-a)^4}{24}$$

$$\theta_0 = \theta_A$$

$$0 = EI_X \theta_0 (4m) + \frac{M(4-2)^2}{2} + \frac{R_A(4-0)^3}{6} + \frac{R_B(4-4)^3}{6} - \frac{q(4-0)^4}{24} + \frac{q_F(4-2)^4}{24}$$

$$\theta_0 = -0.000062rad$$

Flecha en el punto D ( $y_D$ ):

$$EI_X y_D = EI_X y_A + EI_X \theta_0 z + \frac{\sum M(z-a)^2}{2} + \frac{\sum P(z-a)^3}{6} + \frac{\sum q(z-a)^4}{24}$$

$$EI_X y_D = -EI_X \theta_B (2m) + \frac{M(2-2)^2}{2} + \frac{R_A(2-0)^3}{6} - \frac{q(2-0)^4}{24}$$

$$y_D = -0.00012m$$

Angulo de giro en el punto B ( $\theta_B$ ):

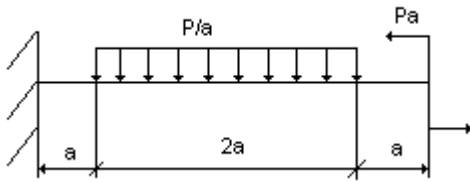
$$EI_X \theta_B = EI_X \theta_A + \sum M(z-a) + \frac{\sum P(z-b)^2}{2} + \frac{\sum q(z-c)^3}{6}$$

$$EI_X \theta_B = EI_X \theta_A + M(4-2) + \frac{R_A(4-0)^2}{2} + \frac{R_B(4-4)^2}{2} - \frac{q(4-0)^3}{6} + \frac{q(4-2)^3}{6}$$

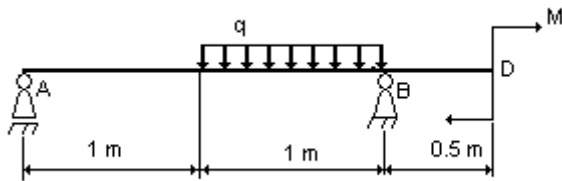
$$\theta_B = 0.00013rad$$

### Ejercicios Propuestos.

1. Determine la flecha máxima.



2. Determine la deformación lineal y angular en el punto D.



Datos.

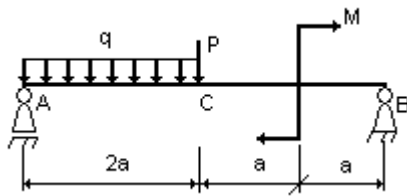
Material CT-2

$q = 10 \text{ kN/m}$

$M = 20 \text{ kN/m}$

Perfil I No. 20

3. Calcule la flecha y el ángulo de giro en el punto C de la siguiente viga. El material es acero CT-3 y está construida utilizando un perfil canal No. 16.



$$M = qa^2$$

$$q = P/a$$

4. Determinar el ángulo de giro y la flecha en el extremo libre de la barra mostrada en la figura.

Datos:

$P = 100 \text{ kN}$

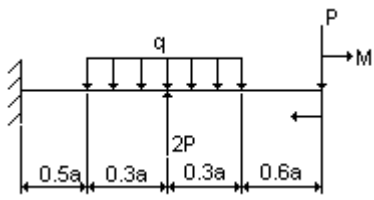
$a = 0.6 \text{ m}$

$M = Pa$

$q = P/2a$

Material: acero al carbono.

Perfil I No. 60



# Capítulo

# 6

**RESISTENCIA COMPUESTA**

### Cálculo de vigas sometidas a flexión oblicua y flexión con Tracción - Compresión.

Se entiende por resistencia compuesta las diferentes combinaciones de estados tensionales simples (tracción, compresión, deslizamiento, torsión, flexión). En el caso general de sollicitación de una barra en sus secciones transversales actúan seis componentes de esfuerzos interiores ( $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) relacionadas con cuatro deformaciones simples de la barra: tracción o compresión, deslizamiento, torsión o flexión.

El estado tensional de una barra se determina, a base de la hipótesis sobre la acción independiente de las fuerzas, sumando los estados tensionales originados por cada tipo de sollicitación simple por separado.

Por analogía, las deformaciones (desplazamientos) pueden determinarse sumando las deformaciones provocadas por cada tipo de sollicitación por separado.

El principio de suma de la acción de las fuerzas o el principio de superposición se aplica en todos los casos que el material obedezca a la ley de Hooke y las deformaciones sean pequeñas. En la práctica son pocos los casos en que en la barra surgen todos los seis componentes de esfuerzos interiores: ordinariamente se trata de sus diferentes combinaciones.

### Ejercicio Resuelto.

Ejercicio 1. Compruebe si la siguiente barra resiste los esfuerzos actuantes.

Datos.

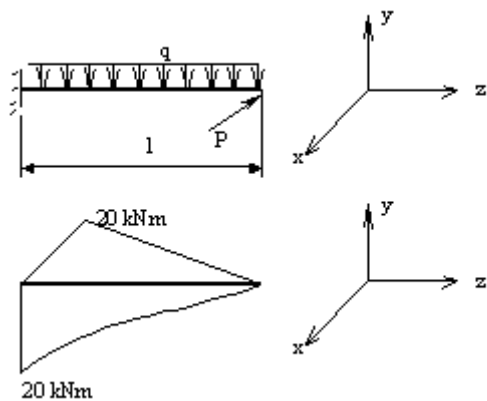
I No. 16

$q = 10 \text{ kN/m}$

$l = 2 \text{ m}$

$P = 10 \text{ kN}$

CT-2



La barra está sometida a flexión en dos planos. La fuerza  $P$  provoca flexión en el eje  $y$  y la carga distribuida provoca flexión respecto al eje  $x$ .

Cálculo de las fuerzas internas.

Momento en el plano  $xz$ .

$$M_x = q \frac{z^2}{2} \Big|_{0=0}^{2=20 \text{ kNm}}$$



Momento en el plano yz.

$$My = Pz \Big|_{0=0}^{z=20kNm}$$

La sección peligrosa es el empotramiento que es donde se hacen máximos los momentos flectores.

Para determinar el (los) punto (s) peligroso (s). La carga distribuida provoca que las fibras superiores trabajen a tracción y las inferiores a compresión, mientras que producto a la acción de la fuerza P las fibras delanteras trabajan a tracción y las traseras a compresión:



Los puntos peligrosos son los números 1 y 3 que es el sitio donde se superponen las tensiones de un mismo signo, por lo tanto la comprobación de la resistencia puede hacerse para cualquiera de ellos atendiendo a que el material de la viga tiene tanto la misma resistencia a la tracción como a compresión.

$$\sigma_{eq} = \pm \sigma_x \pm \sigma_y$$

$$\sigma_{eq} = \frac{Mx}{Wx} + \frac{My}{Wy}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{20 \times 10^3 \text{ Nm}}{Wx} + \frac{20 \times 10^3 \text{ Nm}}{Wy}$$

$$\sigma_{eq} =$$

$$[\sigma] = 140 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eq} < [\sigma]$$

Por lo tanto la viga resiste.

### Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1. Compruebe si la siguiente barra resiste los esfuerzos actuantes.

Datos.

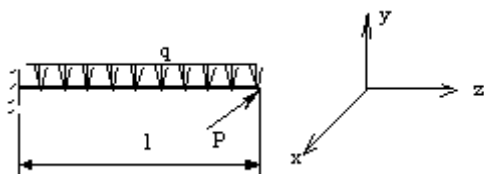
I No. 16

q= 10 kN/m

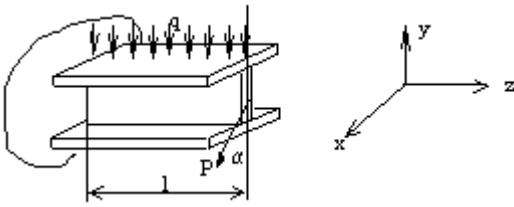
l= 2m

P= 10 kN

CT-2



Ejercicio 2. Dado P=240 kgf, q= 240 kgf/m, l= 2m,  $\alpha=30^\circ$ ,  $E= 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $[\sigma]= 160 \text{ MPa}$ . Calcular el número de perfil I y la posición de la línea neutra.



Ejercicio 3. Compruebe la resistencia de la viga. Se conoce que:  
 $P = 9\,000\text{ N}$ ,  $\alpha = 35^\circ$ ,  $l = 4\text{ m}$ ,  $h = 2b$ ,  $b = 12\text{ cm}$ , Material Acero CT3.



Ejercicio 4. Compruebe la resistencia de la siguiente viga.

Datos:

$$P_1 = 2000\text{ N}$$

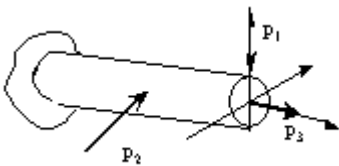
$$P_2 = 3000\text{ N}$$

$$P_3 = 1000\text{ N}$$

$$l = 4\text{ m}$$

$$d = 6\text{ cm}$$

$$[\sigma] = 2000\text{ kgf/cm}^2$$



### Cálculo de árboles (Flexión-Torsión)

Los árboles son elementos de máquina encargados de transmitir potencia mediante el movimiento de rotación alrededor de su eje. En ellos surgen generalmente esfuerzos de flexión y torsión combinados.

La potencia que transmiten estos elementos está en función del momento que transmite y la frecuencia de rotación del mismo.

### Ejercicio Resuelto

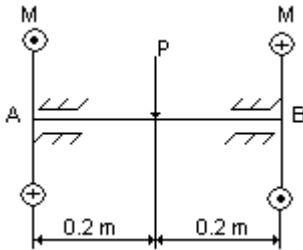
Ejercicio 1. Determine el diámetro mínimo que debe tener la siguiente barra.

Datos:

$$P = 19\,600\text{ N}$$

$$M = 39\,200\text{ Nm}$$

Material Acero CT-3



El primer paso es determinar a qué solicitaciones está sometido el elemento.  
En este caso es a torsión y flexión en un plano.

Posterior a ello se pasa a la construcción de los gráficos de fuerzas internas para cada solicitación por separado.

Gráfico de momentos torsores.

La barra tiene un solo tramo. El momento torsor será constante e igual a los momentos exteriores aplicados en la barra.

$$M_t = 39200 Nm$$

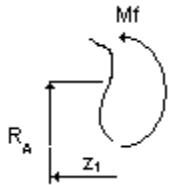
Gráfico de momentos flectores.

Producto a la simetría de la barra las reacciones en los apoyos serán iguales a la mitad de la carga P aplicada a la barra.

$$R_A = R_B = 9800 N$$

La barra tiene dos tramos:

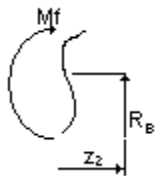
Sección I  $0 \leq z_1 \leq 0.2 m$



$$\sum M = 0$$

$$M_f - R_A z_1 \Big|_{0=0}^{0.2m} = 1960 Nm$$

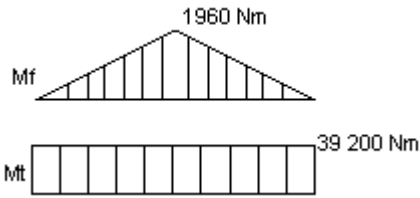
Sección II  $0 \leq z_2 \leq 0.2 m$



$$\sum M = 0$$

$$M_f - R_B z_2 \Big|_{0=0}^{0.2m} = 1960 Nm$$

Los gráficos de fuerzas internas se muestran a continuación:



La sección peligrosa, como se aprecia en los gráficos anteriores es el punto medio de la barra, que es donde surgen los mayores esfuerzos.

Aplicando la tercera teoría de resistencia:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

donde:

$$\sigma = \frac{Mf}{W_x}$$

$$\tau = \frac{Mt}{W_t}$$

Sustituyendo estas expresiones en la expresión de la tercera teoría:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{Mf}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{Mt}{2W_x}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$W_x \geq \frac{\sqrt{Mf^2 + Mt^2}}{[\sigma]}$$

$$W_x = 0.1d^3$$

De donde se obtiene:

$$d \geq 0.131 \text{ m}$$

$$d \geq 13.1 \text{ cm}$$

Aplicando la cuarta teoría de resistencia:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

donde:

$$\sigma = \frac{Mf}{W_x}$$

$$\tau = \frac{Mt}{W_t}$$

Sustituyendo estas expresiones en la expresión de la tercera teoría:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{Mf}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{Mt}{2W_x}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$W_x \geq \frac{\sqrt{Mf^2 + 0.75Mt^2}}{[\sigma]}$$

$$W_x = 0.1d^3$$

De donde se obtiene:

$$d \geq 0.129 \text{ m}$$

$$d \geq 12.9 \text{ cm}$$

### Ejercicios Propuestos.

1. Compruebe la resistencia del siguiente árbol.

Datos.

$$P_1 = 10 \text{ kN}$$

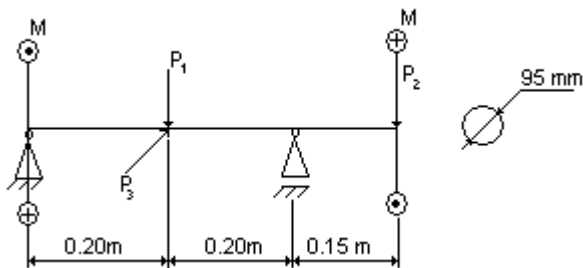
$$P_2 = 12 \text{ kN}$$

$$P_3 = 8.5 \text{ kN}$$

$$M = 5.6 \text{ kNm}$$

Material: Acero aleado de alta resistencia  $[\sigma] = 200 \text{ MPa}$

Nota: Realice la comprobación por la tercera y cuarta teorías de resistencia.



2. Proponga las dimensiones del siguiente árbol:

Datos.

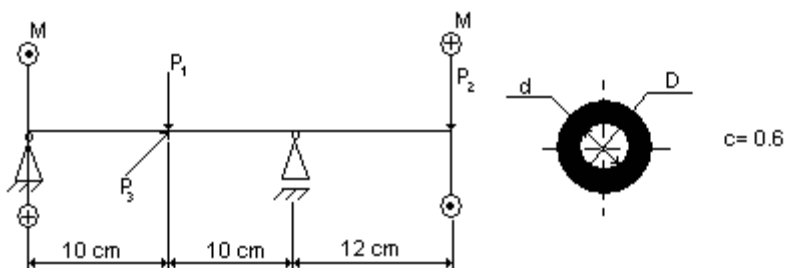
$$P_1 = 8.6 \text{ kN}$$

$$P_2 = 10 \text{ kN}$$

$$P_3 = 6.7 \text{ kN}$$

$$M = 6 \text{ kNm}$$

Material: Acero CT-3



# Capítulo

# 7

**DESPLAZAMIENTOS DE VIGAS  
Y ESTRUCTURAS**

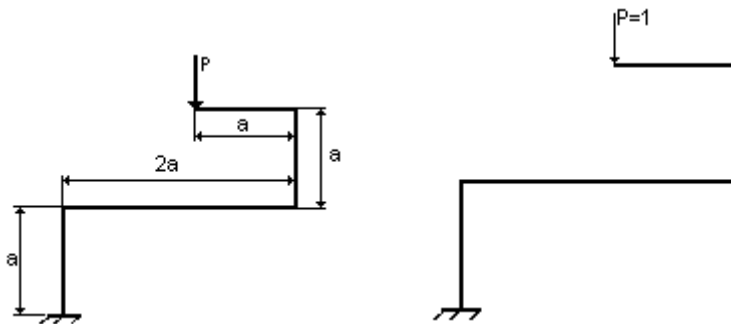
## Desplazamientos en pórticos estáticamente determinados.

Bajo la acción de las fuerzas externas los elementos de máquinas y estructuras sufren deformaciones. Es conveniente disponer de métodos de cálculo que permitan determinar los desplazamientos en sistemas sometidos a un estado cualquiera de cargas.

Es posible mencionar el Método de Mohr y el Método de Vereshiaguin.

### Ejercicios resueltos.

1. Determine el desplazamiento vertical que produce la fuerza  $P$  en el punto donde aplica.



Para determinar el desplazamiento se hará uso del Método de Vereshiaguin. Para ello deben construirse los gráficos de fuerzas internas en el pórtico para la carga real y para una carga ficticia aplicada en el punto donde queremos determinar el desplazamiento. Para construir estos gráficos se utiliza el método de las secciones, teniendo en cuenta que la acción de las fuerzas se va trasladando a cada nudo del pórtico y que el gráfico siempre se hace hacia la parte de la fibra comprimida sin especificar el signo del mismo.

Fuerzas internas para la carga real.

$$M_1 = Pz_1 \Big|_{0=0}^{a=Pa}$$

$$M_2 = Pa$$

$$M_3 = Pa - Pz_3 \Big|_{0=PA}^{2a=-Pa}$$

$$M_4 = Pa$$

Fuerzas internas para la carga ficticia.

$$M_1 = 1z_1 \Big|_{0=0}^{a=a}$$

$$M_2 = 1a$$

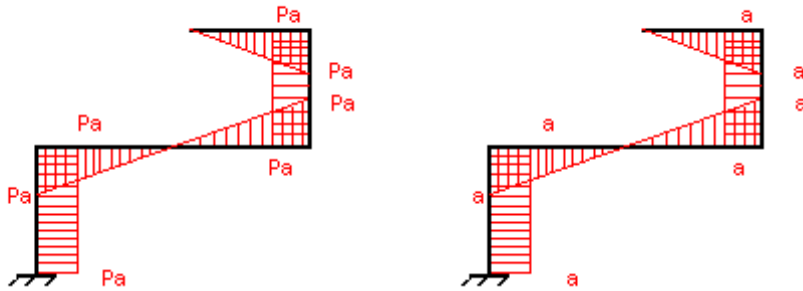
$$M_3 = 1a - 1z_3 \Big|_{0=A}^{2a=-a}$$

$$M_4 = 1a$$

Los gráficos quedan de la siguiente forma:

Para la carga real:

Para la carga ficticia:



Debe tenerse en cuenta al aplicar la multiplicación de gráficos que cuando los mismos se encuentran del mismo lado del eje el producto es positivo, pero cuando se encuentran en lados contrarios entonces el producto es negativo.

Aplicando Vereshiaguin:

En ambos gráficos hay tres triángulos iguales y dos rectángulos por lo que:

$$\delta = 3\Delta\Delta + 2\Box\Box$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \times \left[ 3 \times \frac{1}{2} aPa \frac{2}{3} + aPaa \right]$$

$$\delta = \frac{3Pa^3}{EI}$$

Considerando los siguientes datos compruebe la rigidez.

P= 20 kN.

Perfil I No. 20

I<sub>x</sub>= 1840 cm<sup>4</sup>

[y]= 0.15 m

a= 2 m

Material Acero CT3

E= 200 GPa

$$\delta = y = \frac{Pa^3}{EI}$$

$$y = \frac{20 \times 10^3 \times 2^3}{200 \times 10^9 \times 1840 \times 10^{-8}}$$

$$y = 0.13m$$

$$y < [y]$$

Por lo tanto la rigidez del pórtico está garantizada.

2. Calcular el desplazamiento horizontal del siguiente pórtico en el punto A.

Datos.

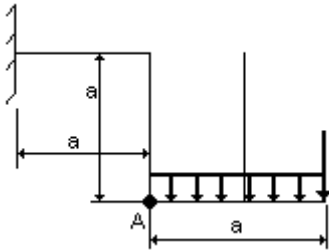
P.

q = p/a

a.

Considere la rigidez del pórtico constante e igual a EI.





Para calcular el desplazamiento se usará el método de Vereshaguin. Para ello se construye el gráfico de momentos flectores para las cargas reales ( $M_k$ ) y otro para las cargas ficticias ( $M_i$ ). Esta carga ficticia es una fuerza adimensional unitaria aplicada en el punto donde se desea determinar el desplazamiento. Para construir estos gráficos se emplea el método de las secciones considerando siempre que la acción de las fuerzas se traslada de nudo a nudo del pórtico.

Gráfico  $M_k$ .

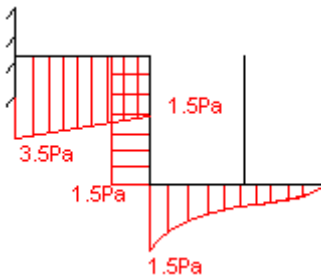
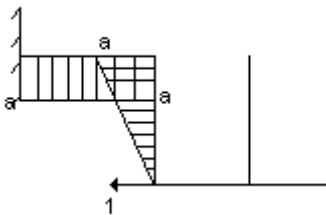


Gráfico  $M_i$ .



Para determinar el desplazamiento se multiplica los gráficos  $M_k$  y  $M_i$ .

$$\delta_{H_A} = \frac{M_k \times M_i}{EI}$$

El desplazamiento será la suma de la multiplicación de un triángulo por un rectángulo y de un rectángulo por un trapecio.

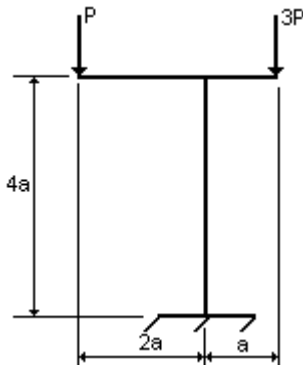
$$\delta_{H_A} = \frac{1}{EI} \times \left( \frac{hSl}{2} + \frac{S(h_1 + h_2)l}{2} \right)$$

$$\delta_{H_A} = \frac{1}{EI} \times \left( \frac{1.5Pa \cdot a \cdot a}{2} + \frac{a(3.5Pa + 1.5Pa)a}{2} \right)$$

$$\delta_{H_A} = \frac{13Pa^3}{EI}$$

**Ejercicios propuestos.**

1. Calcular el desplazamiento vertical y horizontal en el punto A producto a la aplicación de las fuerzas externas aplicadas.



2. Se desea calcular la estructura que se muestra, perteneciente a una nave de acero. Calcule las columnas y el techo.

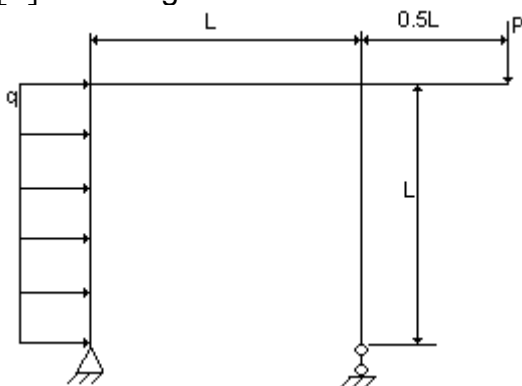
Datos.

$$P = 5 \text{ ton}$$

$$q = 5 \text{ kgf/cm}$$

$$L = 5 \text{ m}$$

$$[\sigma] = 2000 \text{ kgf/cm}^2$$



# Capítulo

# 8

PANDEO

### Cálculo de estabilidad. Método de Euler o Yasinsky.

El equilibrio de una barra comprimida puede ser: estable, inestable e indiferente. El equilibrio indiferente ocurre cuando la fuerza que actúa sobre la barra es igual a cierto valor de carga denominado valor crítico.

Este valor de carga debe ser tomado, en los cálculos prácticos de ingeniería, como el valor de carga límite, o sea la carga por encima de la cual no debe trabajar la barra comprimida.

Sin embargo, debido a determinados factores este valor se afecta por un coeficiente de seguridad, obteniéndose así la carga admisible sobre la columna comprimida.

$$[P] = \frac{P_{crit}}{n_e}$$

Para determinar la fuerza crítica, en dependencia a si la barra trabaja por encima o no del límite de proporcionalidad se emplea la fórmula de Yasinsky o la de Euler.

### Ejercicios resueltos.

1. Diga si la barra mostrada es estable.



Datos.

Material CT-3

Perfil I No. 18

$l = 100 \text{ cm}$

$P = 10\,000 \text{ N}$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} \quad \mu = 2, i_{\min} = i_y = 1.88 \text{ cm}, I_{\min} = I_y = 82.6 \text{ cm}^2$$

$$\lambda = 106.3$$

$$\lambda_{\lim} = 100 \quad \text{Para el CT-3}$$

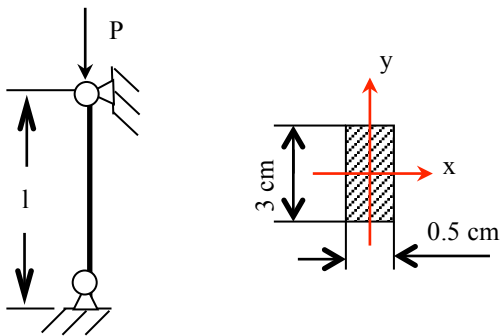
$\lambda > \lambda_{\lim}$  Por tanto Se aplica Euler.

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

$$P_{crit} = 407\,201 \text{ N}$$

$P < P_{crit}$ , entonces la barra es estable.

2. Determinar las magnitudes de la carga crítica y la tensión crítica para la siguiente barra comprimida.



Datos.

Material Acero CT-3

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_p = 2000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_f = 2400 \text{ kgf/cm}^2$$

$$n = 2$$

$$\mu = 1$$

$$I_{\min} = \frac{hb^3}{12} = \frac{(3)(0.5)^3}{12}$$

$$I_{\min} = 0.03125 \text{ cm}^4$$

$$A = bh = 1.5 \text{ cm}^2$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 0.1442 \text{ cm}$$

$$\lambda = 69.34$$

Para el CT-3,  $\lambda_{\text{lim}} = 100$

$\lambda < \lambda_{\text{lim}}$ , Se aplica Yasinsky.

Para el CT-3,  $a = 3100 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $b = 11.4 \times 10^5 \text{ MPa}$

$$\sigma_{\text{crit}} = 3100 - 11.4(69.24)$$

$$\sigma_{\text{crit}} = 2815 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{\text{crit}} = \sigma_{\text{crit}} * A$$

$$P_{\text{crit}} = 42225 \text{ N}$$

3. Determine si el sistema mostrado es estable.

Datos:

Material CT-3

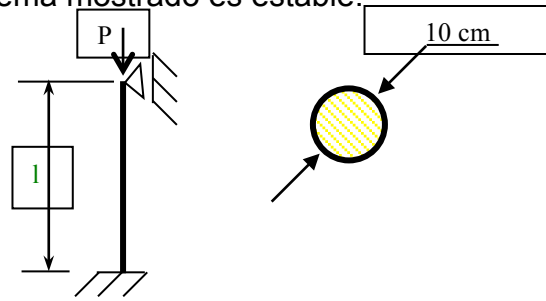
$$E = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_P = 2000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\lambda_{Lim} = 100$$

$$l = 6 \text{ m}$$

$$P = 1 \text{ t}$$



Solución.

Cálculo a estabilidad.

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A = \frac{3.14 \cdot (10)^2}{4}$$

$$A = 78.5 \text{ cm}^2$$

$$I_{min} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{min} = \frac{3.14 \cdot (10)^4}{64}$$

$$I_{min} = 490.6 \text{ cm}^4$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{490.6}{78.5}}$$

$$i_{min} = 2.5 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$$

$$\lambda = \frac{0.7 \cdot 600}{2.5}$$

$$\lambda = 168$$

$$\lambda > \lambda_{Lim} \quad \text{Se aplica Euler.}$$

$$P_{Crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}$$

$$P_{Crit} = \frac{(3.14)^2 * 2 \times 10^6 * 490.6}{(0.7 * 600)^2}$$

$$P_{Crit} = 54842.6 \text{ kgf}$$

$$P_{Crit} = 548426 \text{ N}$$

$$P = 10000 \text{ N}$$

Como  $P < P_{Crit}$  la barra es estable.

La barra también debe calcularse por resistencia.

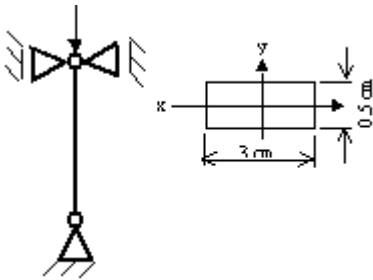
$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma]$$

$$\sigma = \frac{1000 \text{ kgf}}{78.5 \text{ cm}^2}$$

$$\sigma = 12.74 \text{ kgf / cm}^2$$

La tensión admisible a compresión para el acero CT-3 es de  $1600 \text{ kgf/cm}^2$ , como este valor es mucho mayor que las tensiones en la barra esta garantizada la resistencia de la misma.

4. Determinar las magnitudes de la carga crítica y la tensión crítica para la siguiente barra



comprimida.

Datos.

Material CT-3

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_P = 2000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$l = 10 \text{ cm}$$

$$n = 2$$

$$\mu = 1$$

$$\sigma_f = 2400 \text{ kgf/cm}^2$$

$$A = b * h$$

$$A = 3 * 0.5 = 1.5 \text{ cm}^2$$

$$I_{\min} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3 * (0.5)^3}{12} = 0.0312 \text{ cm}^4$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

$$i_{\min} = 0.1442 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

$$\lambda_{\text{Lim}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 3.14 \sqrt{\frac{2 \times 10^6}{2000}} = 100$$

$$\lambda = \frac{1 * 10}{0.1442}$$

$$\lambda = 69.39$$

$\lambda < \lambda_{\text{Lim}}$  Se aplica Yasinsky.

Para el acero CT-3  $a = 3100 \text{ kgf/cm}^2$  y  $b = 11.4 \text{ kgf/cm}^2$ , luego:

$$\sigma_{\text{cirt}} = a - b\lambda$$

$$\sigma_{\text{cirt}} = 3100 - 11.4 * 69.34$$

$$\sigma_{\text{cirt}} = 2309.33 \text{ kgf/cm}^2$$

$$P_{\text{crit}} = \sigma_{\text{cirt}} * A$$

$$P_{\text{crit}} = 3464 \text{ kgf}$$

Cálculo por resistencia.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_f}{n}$$

$$[\sigma] = \frac{2400}{2}$$

$$[\sigma] = 1200 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma]$$

$$P \leq [\sigma] * A$$

$$[P] \leq 1800 \text{ kgf}$$

Como se puede apreciar el valor de carga que puede soportar la barra esta determinado por resistencia.

### Ejercicios propuestos.

1. Calcular la columna del ejercicio resuelto No. 4 considerando que la longitud de la barra es de 24 cm.

2. Comprobar la estabilidad y la resistencia de una columna formada por un perfil I No.14 solicitada por una carga de 15 kN. El coeficiente de seguridad por estabilidad es de 2.5 y por



resistencia es de 2. La barra se encuentra empotrada en un extremo y libre en el otro. El material de la barra es acero CT-2.

### Cálculo de columnas comprimidas por el Método del Coeficiente de Disminución de la Tensión Admisible.

El equilibrio de una barra comprimida puede ser: estable, inestable e indiferente. El equilibrio indiferente ocurre cuando la fuerza que actúa sobre la barra es igual a cierto valor de carga denominado valor crítico.

Este valor de carga debe ser tomado, en los cálculos prácticos de ingeniería, como el valor de carga límite, o sea la carga por encima de la cual no debe trabajar la barra comprimida.

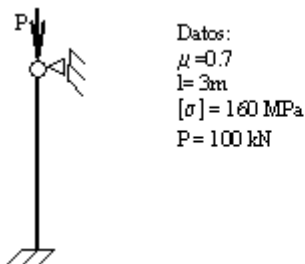
Sin embargo, debido a determinados factores este valor se afecta por un coeficiente de seguridad, obteniéndose así la carga admisible sobre la columna comprimida.

En lugar de usar la fórmula de Euler o la de Yasinsky para determinar la fuerza crítica, cada una es válida en un intervalo de esbeltez determinado, conviene usar una sola que sea lícita para cualquier intervalo de esbeltez de la barra.

En ese caso se emplea el Método del Coeficiente de Disminución de la Tensión Admisible a Compresión.

### Ejercicios Resueltos.

1. Determinar el número de perfil necesario para que la columna representada sea estable.



Para resolver este problema se aplicará el Método del Coeficiente de Disminución de la Tensión Admisible.

Producto a que se desconoce el radio de giro y por lo tanto la esbeltez de la barra se hace necesario asumir un valor para el primer coeficiente, que será de 0.5.

$$A = \frac{P}{\phi[\sigma]}$$

$$A = \frac{100kN}{0.5 * [160 * 10^3 kPa]}$$

$$A = 12.5 \text{ cm}^2$$

Con este valor de área vamos a la tabla de perfiles laminado y escogemos aquel perfil cuyo valor de área se aproxime más al obtenido:

$$A = 12.5 \text{ cm}^2, \text{ Perfil I No. 12, } i_{\min} = 1.38 \text{ cm, } I_{\min} = 27.9 \text{ cm}^4.$$

Cálculo de la esbeltez.

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

$$\lambda = \frac{0.7 * 300 \text{cm}}{1.38 \text{cm}}$$

$$\lambda = 152.17$$

Con este valor de esbeltez buscamos en la tabla de Coeficiente en función de la esbeltez y del material y obtenemos el valor del nuevo coeficiente de disminución de la tensión admisible.

Como el valor de la esbeltez no es valor que aparece en la tabla se hace necesario interpolar para conocer el valor del nuevo coeficiente.

Para ello se aplica la expresión.

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda - \lambda_1$$

donde:

$\varphi$ : es el valor del coeficiente buscado.

$\varphi_1$ : es el valor del coeficiente mayor en el intervalo analizado.

$\varphi_2$ : es el valor del coeficiente menor en el intervalo analizado.

$\lambda_1$ : es el valor de la esbeltez menor en el intervalo analizado.

$\lambda_2$ : es el valor de la esbeltez mayor en el intervalo analizado.

$\lambda$ : es el valor de la esbeltez menor en el intervalo analizado.

$$\varphi = 0.32 + \frac{0.29 - 0.32}{170 - 160} 152.17 - 150$$

$$\varphi = 0.314$$

Ahora se calcula el porcentaje de error, o sea la diferencia entre los valores de los coeficientes trabajados hasta el momento.

$$\%e = \frac{\varphi_{\text{mayor}} - \varphi_{\text{menor}}}{\varphi_{\text{mayor}}} * 100$$

$$\%e = \frac{0.5 - 0.314}{0.5} * 100$$

$$\%e = 37.2\%$$

Como este valor es elevado debemos intentar otra aproximación hasta que se cumpla que este porcentaje de error sea menor o igual al 6 %. Para ello buscamos un nuevo valor del coeficiente.

$$\varphi = \frac{\varphi_{\text{mayor}} + \varphi_{\text{menor}}}{2}$$

$$\varphi = \frac{0.5 + 0.314}{2}$$

$$\varphi = 0.407$$

Con este valor realizamos nuevamente el cálculo del área de la sección transversal repitiendo para ello todo el proceso realizado hasta ahora.

$$A = \frac{P}{\varphi[\sigma]}$$

$$A = \frac{100kN}{0.407 * [160 * 10^3 kPa]}$$

$$A = 15.6 cm^2$$

$A = 15.6 cm^2$ , Perfil I No. 14,  $i_{min} = 1.55 cm$ ,  $I_{min} = 41.9 cm^4$ .

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$$

$$\lambda = \frac{0.7 * 300 cm}{1.55 cm}$$

$$\lambda = 135.4$$

$$\varphi = 0.40 + \frac{0.36 - 0.40}{140 - 130} 135.4 - 130$$

$$\varphi = 0.378$$

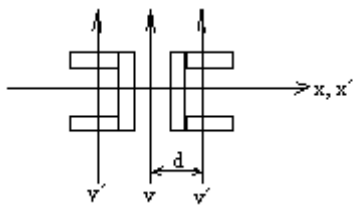
$$\%e = \frac{\varphi_{mayor} - \varphi_{menor}}{\varphi_{mayor}} * 100$$

$$\%e = \frac{0.407 - 0.378}{0.407} * 100$$

$$\%e = 5.5\%$$

Este valor resulta admisible, por lo tanto el perfil necesario es el I No. 14.

2. Calcular la carga admisible y la distancia a la que se deben ubicar los perfiles para garantizar igual estabilidad en los dos ejes para la barra comprimida cuya sección transversal se muestra a continuación:



Datos:  
 $\mu = 0.7$   
 $[\sigma] = 140 MPa$   
 $I_{x'} = 174 cm^4$   
 $I_{y'} = 20.4 cm^4$   
 $A = 10.9 cm^2$   
 $i_x = 3.99 cm$   
 $b = 4.6 cm$

$$A_t = 2 * (10.9 cm^2)$$

$$A_t = 21.8 cm^2$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_x}$$

$$\lambda = \frac{0.7 * 360 cm}{3.99 cm}$$

$$\lambda = 64$$

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda - \lambda_1$$

$$\varphi = 0.86 + \frac{0.81 - 0.86}{70 - 60} 64 - 60$$

$$\varphi = 0.84$$

$$[P] = \varphi[\sigma]A$$

$$[P] = 0.84 * 140 * 10^6 \text{ Pa} * 21.8 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$[P] = 11.76 \text{ kN}$$

Para calcular la distancia necesaria para garantizar igual estabilidad con respecto a los dos ejes recurrimos al teorema de los ejes paralelos.

$$I_y = I_y' + Ad^2$$

Para ello partiremos de la condición de que los momentos de inercia con respecto a los ejes principales deben ser iguales, por lo tanto:  $I_y = I_x$ , donde  $I_x = 2 * I_x'$

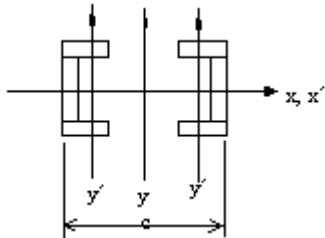
$$2 * 174 \text{ cm}^4 = 2 * 20.4 \text{ cm}^4 + 21.8 \text{ cm}^2 * d^2$$

Despejando d se obtiene:

$$d = 83 \text{ cm.}$$

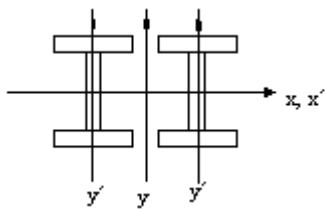
### Ejercicios propuestos.

1. Dimensionar la sección transversal de una columna formada por un perfil I, que soportará una carga de 140 kN, tiene una longitud de 4 m y estará empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro.
2. Se quiere determinar la capacidad de carga de una barra formada por un perfil I No. 40 y el resultado comparativo al sustituir la misma por una columna compuesta por dos perfiles canales colocados según se aprecia en la figura. Justifique desde el punto de vista de ahorro del material cuál de las dos columnas es la más económica.



Datos:  
L= 3m  
CT-2  
 $\mu= 1$

3. Calcular el número de perfil necesario para garantizar la estabilidad de la siguiente columna.



Datos:  
L= 4m  
P= 200 kN  
CT-3  
 $\mu= 1$

# Capítulo

# 9

**BÓVEDAS Y CILINDROS  
DE PAREDES GRUESAS**

### Cálculo de bóvedas simétricas.

Las bóvedas son aquellos cuerpos en los cuales una de las dimensiones es mucho menor que las otras dos. En nuestro caso es el espesor de la pared de la misma.

Las bóvedas son simétricas si la superficie media es un cuerpo en revolución.

Para calcular estos elementos se utiliza la ecuación de Laplace.

$$\frac{\sigma_m}{\delta_m} + \frac{\sigma_t}{\delta_t} = \frac{p_r}{h}$$

donde:

$\sigma_m$ : es la tensión meridional en la bóveda.

$\delta_m$ : es el radio meridional de la bóveda.

$\sigma_t$ : es la tensión circunferencial en la bóveda.

$\delta_t$ : es el radio circunferencial de la bóveda.

$p_r$ : es la presión de trabajo en la bóveda.

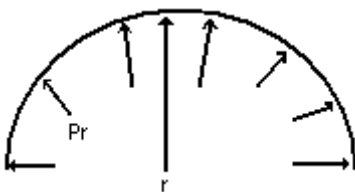
$h$ : es el espesor de la pared de la bóveda.

Se dice que estamos en presencia de un recipiente de paredes delgadas cuando el espesor de la pared no supera la décima parte del radio de curvatura.

### Ejercicios resueltos.

1. ¿Qué ventajas presenta construir un recipiente en forma esférica o cilíndrica, si en ambos casos está sometida a la misma presión  $p_r$ , teniendo el mismo radio  $r$  y espesor de la pared  $h$ ?

Recipiente esférico.



En este caso producto a la simetría del recipiente se cumple que las tensiones radiales y circunferenciales son iguales. Lo mismo sucede con el radio de curvatura de la pared. Por lo tanto:

$$\frac{2\sigma_m}{r} = \frac{p_r}{h}$$

donde:

$$\sigma_m = \frac{p_r r}{2h}$$

Como en estos recipientes se produce un estado tensional plano se hace necesario utilizar una teoría de resistencia. En este caso la tercera teoría.

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{eq}$$

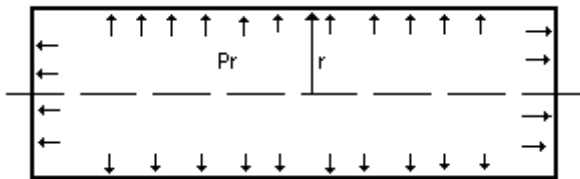
$$\sigma_1 = \sigma_m = \sigma_t$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{p_r r}{2h}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{p_r r}{2h}$$

Recipiente cilíndrico.



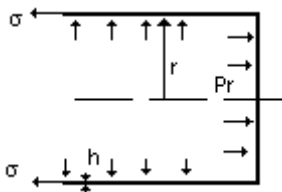
En el recipiente cilíndrico se cumple que el radio de curvatura meridional es el radio de curvatura de una recta por lo tanto el mismo tiende a infinito. Esto provoca que en la ecuación de Laplace el término donde aparece este valor dividiendo a las tensiones meridionales sea cero. Dicha ecuación toma entonces la forma siguiente:

$$\frac{\sigma_t}{\delta_t} = \frac{p_r}{h}$$

Pero el radio de curvatura circunferencial es el radio de la circunferencia.

$$\sigma_t = \frac{p_r r}{h}$$

Para determinar las tensiones meridionales partimos del método de las secciones y analizamos el equilibrio de la parte separada.



Proyectando las fuerzas que actúan en la dirección del eje del cilindro.

$$p_r \times \pi \times r^2 - \sigma_m \times 2\pi \times h \times r = 0$$

Luego:

$$\sigma_m = \frac{p_r r}{2h}$$

Aplicando la tercera teoría de resistencia:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{eq}$$

$$\sigma_1 = \frac{p_r r}{h}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_r r}{2h}$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{eq} = \frac{p_r r}{h}$$

Como se aprecia de los resultados obtenidos en las expresiones anteriores la tensión máxima en las bóvedas esféricas es la mitad de la que tiene lugar en los recipientes esféricos. Aprovechando esto es que los balones de gas se construyen de forma cilíndrica con casquetes esféricos en los extremos, buscando disminuir las fuerzas en las zonas extremas. Sin embargo el problema de la construcción de las bóvedas esféricas radica en su propia configuración geométrica.

1. Se desea construir un tanque de forma esférica o cilíndrica sometido a una presión de 5 atm. El diámetro del tanque debe ser de 1 m. Calcule el espesor mínimo para que resista esta presión.  $[\sigma] = 2000 \text{ kgf/cm}^2$ .

### Cilindros de paredes gruesas.

#### Ejercicios Resueltos.

1. Calcule la presión interior mínima que es capaz de resistir con seguridad un tubo de acero que tiene las especificaciones siguientes:

$$[\sigma] = 1000 \text{ kgf/cm}^2, 2r_1 = 100 \text{ mm}, 2r_2 = 126 \text{ mm y } p_2 = 10 \text{ kgf/cm}^2.$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} * \frac{p_1 - p_2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Para  $r = r_1$

$$\sigma_r = -p_1 \quad \sigma_t = \frac{p_1(r_2^2 - r_1^2) - 2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Para  $r = r_2$

$$\sigma_r = -p_2 \quad \sigma_t = \frac{2p_1 r_1^2 - p_2(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}$$

Las tensiones equivalentes de acuerdo con la tercera teoría serán:



$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Para  $r = r_1$

$$\sigma_{eq_{int}} = \frac{2(p_1 - p_2)r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Para  $r = r_2$

$$\sigma_{eq_{ext}} = \frac{2(p_1 - p_2)r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Es posible observar que las tensiones equivalentes interiores son mayores que las exteriores.

$$\sigma_{eq_{int}} = \frac{2(p_1 - p_2)r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq [\sigma]$$

Despejando la presión interior  $p_1$  y sustituyendo por los valores correspondientes:

$$p_1 \leq \left[ [\sigma] * \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2} \right] + p_2$$

$$p_1 \leq 162 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

$$p_1 = 162 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

2. Calcular la máxima presión interior que soportará un cilindro construido de dos tubos de acero cuya  $[\sigma]$  es de 2000 kgf/cm<sup>2</sup> si el diámetro interior será de 6 cm. Proponga las dimensiones que tendrá el cilindro.

Valore la posibilidad de usar un cilindro simple atendiendo a la resistencia del mismo.

$$\sigma_{eq} = p \frac{r_2}{r_2 - r_1} \leq [\sigma]$$

Para que sea un cilindro de paredes gruesas debe cumplirse que:

$$\frac{e}{D_{int}} \geq \frac{1}{20},$$

$$e = \frac{D_{ext} - D_{int}}{2} = r_{ext} - r_{int}$$

Luego:

$$\frac{D_{ext} - D_{int}}{2D_{int}} \geq \frac{1}{20}, \text{ despejando:}$$

$$D_{ext} = \left(\frac{1}{20}\right) * 2D_{int} + D_{int}$$

$$D_{int} = 6.6 \text{ cm} \quad r_{ext} = 3.3 \text{ cm}$$

Luego:

$$p \leq [\sigma] \frac{r_{ext} - r_{int}}{r_{ext}}$$

$$p \leq 181.82 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

$$r_m = \sqrt{r_{ext} * r_{int}}$$

$$r_m = 3.146 \text{ cm}$$

$$\delta = \frac{p}{2E} r_m$$

$$\delta = 0.000144 \text{ cm}$$

Para un cilindro simple de iguales dimensiones la presión interior admisible será:

$$p \leq [\sigma] \frac{r_{ext}^2 - r_{int}^2}{2r_{ext}^2}$$

Sustituyendo:

$$p \leq 173.5 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

Comparando los resultados obtenidos es posible comprobar que la resistencia del cilindro compuesto es mayor que en el caso del cilindro simple.

### Ejercicios propuestos.

1. Calcule la presión interior máxima que es capaz de soportar con seguridad un cilindro de MCI que tiene las especificaciones siguientes:  $[\sigma] = 1000 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $r_1 = 100 \text{ mm}$  y  $r_2 = 126 \text{ mm}$ . Represente las variaciones de tensiones radiales y circunferenciales del cilindro.

2. Calcule si la tubería que se encuentra en una caldera sometida a presión exterior de  $p = 500 \text{ atm}$ ,  $r_1 = 120 \text{ mm}$  y  $r_2 = 140 \text{ mm}$  resiste esa presión. Obtenga la distribución de tensiones.  $[\sigma] = 4000 \text{ kgf/cm}^2$ .

# Capítulo

# 10

**FATIGA**

Durante el servicio de numerosas piezas y estructuras surgen tensiones que varían periódicamente en el tiempo.

Cuando actúan cargas alternadas repetidas la destrucción ocurre producto al desarrollo progresivo de grietas.

La concentración de transformaciones mecánicas irreversibles en el material al aplicar cargas cíclicas se denomina fatiga y la destrucción producto al desarrollo paulatino de las grietas, se denomina destrucción por fatiga.

La resistencia a la fatiga puede verse afectada por numerosos factores.

### Ejercicio Resuelto.

1. Calcular a fatiga un árbol con un chaflán cóncavo de  $r = 5$  mm. En la sección transversal del árbol actúan un momento flector  $M_f = 0.3$  tf\*m y un momento torsor  $M_t = 0.4$  tf\*m. El material del árbol es acero 45 con las siguientes propiedades mecánicas:

$$\sigma_r = 6\ 100\ \text{kgf/cm}^2$$

$$\sigma_f = 3\ 600\ \text{kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{-1} = 1\ 500\ \text{kgf/cm}^2$$

$$\tau_f = 2\ 100\ \text{kgf/cm}^2$$

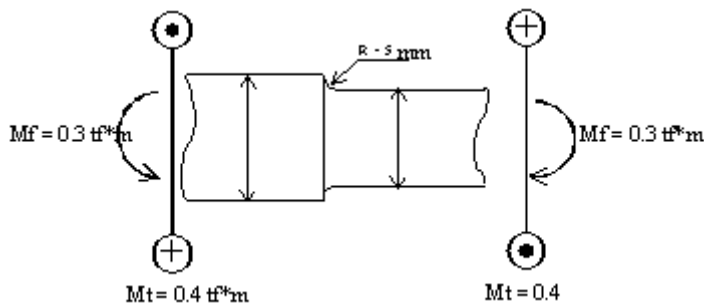
$$\tau_{-1} = 1\ 500\ \text{kgf/cm}^2$$

$$D = 100\ \text{mm}$$

$$d = 90\ \text{mm}$$

La superficie del árbol está pulida.

El coeficiente de seguridad recomendado es 2.5



Las tensiones producto a la flexión varían según un ciclo simétrico y las originadas por la torsión según el ciclo pulsante.

Para resolver este problema debemos calcular primero las tensiones nominales y los parámetros de cada ciclo.

Para la flexión.

$$\sigma_{MAX} = \frac{Mf}{W_x} = 411 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_{MIN} = -\sigma_{MAX} = -411 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_{MED} = 0$$

$$\sigma_a = \sigma_{MAX} = 411 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

$$r = -1$$

Para la torsión.

$$\tau_{MAX} = \frac{Mt}{W_p} = 275 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{MIN} = 0$$

$$\tau_{MED} = \tau_a = \frac{\tau_{MAX}}{2} = 138.5 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

Ahora determinaremos los diferentes coeficientes que consideran los factores que influyen sobre la resistencia a la fatiga:

*Concentración de tensiones.*

- para la flexión.

Según el gráfico de la figura 12.8 página 332 del texto Resistencia de Materiales, de P. A. Stiopin, para  $D/d = 2$  y  $r/d = 5/90 = 0.055$   $(k_\xi)_0 = 1.8$ . Como en nuestro caso  $D/d = 100/90 = 1.11$ , escogemos el valor del coeficiente de corrección  $\xi = 0.7$  del gráfico de la figura 12.11 página 333.

Entonces por la expresión:

$$k_\sigma = 1 + \xi((k_\xi)_0 - 1) \quad (1)$$

Se obtiene que el coeficiente de concentración de tensiones es igual a 1.56 para el caso de la flexión.

- Para la torsión.

Por el gráfico de la figura 12.9 página 332, se obtiene que para  $r/d = 0.055$  y  $D/d = 2$  se obtiene que  $(k_\tau)_0 = 1.4$ . Como en nuestro caso  $D/d = 1.11$  según el gráfico de la figura 12.11 se encuentra el valor del coeficiente de corrección  $\xi = 0.58$ .

$$k_\tau = 1 + \xi((k_\tau)_0 - 1) \quad (1')$$

Por la expresión anterior se obtiene que el coeficiente de concentración de tensiones es igual a 1.23 para el caso de la torsión.

*Influencia de las dimensiones absolutas de la pieza.*

El coeficiente de escala se toma igual para el caso de la torsión y la flexión. Para un eje de diámetro 90 mm,  $\xi = 0.71$ . (Figura 12.12. Curva 1. Página 334).

*Sensibilidad del material a la asimetría del ciclo.*

Para la flexión  $\psi_\sigma = 0.05$  (Tabla 12.1. Página 329).

Para la torsión  $\psi_\tau = 0$  (Tabla 12.1. Página 329).

*Influencia de la calidad de la superficie.*

**Como la superficie está pulida el coeficiente  $\beta = 1$**

**Calculo del coeficiente de seguridad:**

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}\sigma_a}{\varepsilon\beta} + \psi_{\sigma}\sigma_m} = \frac{2500}{\frac{1.56 * 411}{0.71 * 1} + 0} = 2.76$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}\tau_a}{\varepsilon\beta} + \psi_{\tau}\tau_m} = \frac{1500}{\frac{1.23 * 138.5}{0.71 * 1} + 0} = 6.25$$

$$n = \frac{n_{\sigma}n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2.76 * 6.25}{\sqrt{2.76^2 + 6.25^2}} = 2.52$$

El coeficiente calculado resulta ser prácticamente igual al recomendado, por lo tanto es posible afirmar que nuestro árbol resiste a la fatiga.

### Ejercicios Propuestos.

1. Compruebe la resistencia a la fatiga de un árbol escalonado con las siguientes características:

$$\sigma_{-1} = 90 \text{ kgf} / \text{mm}^2$$

$$\tau_{-1} = 60 \text{ kgf} / \text{mm}^2$$

$$\sigma_r = 120 \text{ kgf} / \text{mm}^2$$

$$\sigma_f = 70 \text{ kgf} / \text{mm}^2$$

$$\tau_f = 55 \text{ kgf} / \text{mm}^2$$

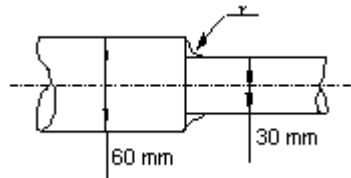
$$M_f = \pm 45 \times 10^4 \text{ kgf} * \text{mm}$$

$$M_t = 0 \text{ hasta } 30 \times 10^4 \text{ kgf} * \text{mm}$$

$$r = 4.5 \text{ mm}$$

$$n_{rec} = 1.5$$

El árbol está elaborado mediante un torneado de desbaste.



# Capítulo

# 11

**CARGAS DINÁMICAS**

A menudo sucede que las cargas que actúan en los elementos de máquinas y estructuras tiene carácter dinámico, o sea que varían en función del tiempo con gran rapidez. La acción de estas cargas va acompañada de vibraciones de las estructuras y sus elementos.

Las tensiones que surgen durante las vibraciones de los elementos pueden ser de valores mucho mayores que las tensiones correspondientes a cargas estáticas.

El método general de cálculo por cargas dinámicas, cuando se conocen las aceleraciones de los elementos es el Principio de D'Alembert.

Cuando se hace dificultosa la determinación de las aceleraciones se recurre a la ley de Conservación de la Energía.

### Ejercicios resueltos.

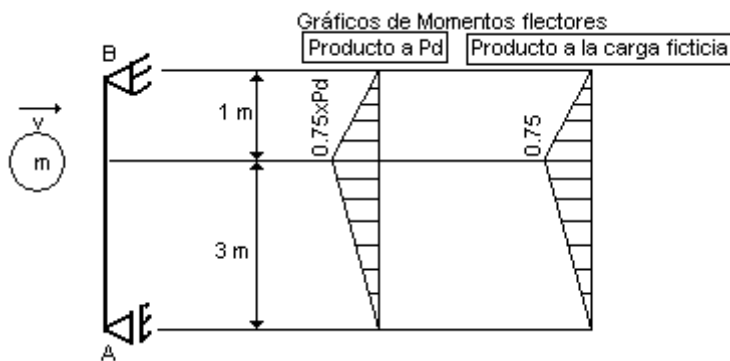
1. Determine las tensiones y las deformaciones que se producen en la barra formada por un perfil I No. 20 al chocar con ella un cuerpo de masa 100 kg que se mueve a una velocidad de 100 m/s.

Datos.

$$[\sigma] = 120 \text{ MPa}$$

$$[\delta] = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$



La viga es sometida a un impacto horizontal que provoca la flexión de la misma.

Para resolver este problema partimos de la ley de conservación de la energía, según la cual la energía cinética del cuerpo que golpea a la viga se convertirá en energía de la deformación de esta al ser golpeada.

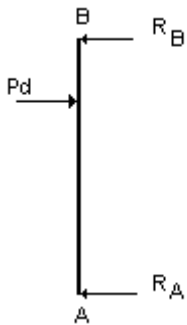
$$T_o = U_d$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Pd \times \delta_d}{2}$$

En la expresión anterior tenemos dos incógnitas, la carga dinámica y el desplazamiento dinámico. Sin embargo es posible obtener una ecuación que relacione estas determinando el desplazamiento en función de la carga. Para ello se aplicará el método de Vereshiaguin por lo que se debe construir los gráficos de momento para la carga dinámica y una carga ficticia aplicada en el mismo punto donde actúa la primera.

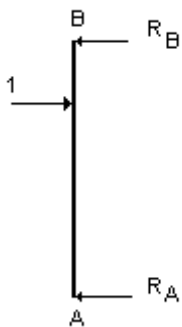


Cálculo de las reacciones en los apoyos y del momento flector producto a la carga dinámica.



$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \\ 4mxR_A - 1mxPd &= 0 \\ R_A &= 0.25Pd \\ \sum F_x &= 0 \\ R_A + R_B - Pd &= 0 \\ R_B &= 0.75Pd \\ Mf &= R_B x Z \Big|_{0=0}^{1=0.75Pd} \\ Mf_A &= 0\end{aligned}$$

Cálculo de las reacciones en los apoyos y del momento flector producto a la carga ficticia.



$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \\ 4mxR_A - 1mx1 &= 0 \\ R_A &= 0.25 \\ \sum F_x &= 0 \\ R_A + R_B - 1 &= 0 \\ R_B &= 0.75 \\ Mf &= R_B x Z \Big|_{0=0}^{1=0.75} \\ Mf_A &= 0\end{aligned}$$

Los gráficos de momento flector se muestran junto al esquema de análisis del problema.

Aplicando el método de Vereshiaguin:

$$\delta_d = \frac{1}{EI} x(\Delta\Delta + \Delta\Delta)$$

$$\delta_d = \frac{1}{EI} x\left(\frac{hSl}{3} + \frac{hSl}{3}\right)$$

$$\delta_d = \frac{1}{EI} x\left(\frac{0.75Pdx0.75x3}{3} + \frac{0.75Pdx0.75x1}{3}\right)$$

$$\delta_d = \frac{0.75Pd}{EI}$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{0.75Pd^2}{2EI}$$

$$Pd = \sqrt{\frac{mv^2 EI}{0.75}}$$

$$Pd = 221.5 \times 10^4 \text{ N}$$

$$Md = 0.75Pd$$

$$Md = 166.125 \times 10^4 \text{ Nm}$$

$$\sigma_d = \frac{Md}{W_x}$$

$$\sigma_d = \frac{166.125 \times 10^4}{184 \times 10^{-6}}$$

$$\sigma_d = 9028.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_d > [\sigma]$$

Por lo tanto la viga no resiste al impacto.

$$\delta_d = \frac{0.75Pd}{EI}$$

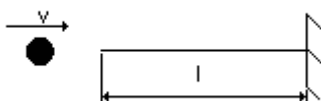
$$\delta_d = \frac{0.75 \times 221.5 \times 10^4}{200 \times 10^9 \times 1840 \times 10^{-8}}$$

$$\delta_d = 0.45 \text{ m}$$

$$\delta_d > [\delta]$$

Por lo tanto la barra no es rígida.

2. Calcule las tensiones máximas y las deformaciones máximas que surgen en la siguiente barra al ser golpeada por un bloque de masa 200 kg que se desplaza a una velocidad de 120 m/s. La barra es de sección circular con diámetro 5 cm. La longitud de la barra es de 1 m. La barra es de acero CT-3



La barra sufre un impacto longitudinal que provoca la compresión de la misma. Para conocer las deformaciones y las tensiones es necesario conocer el valor de la carga dinámica que

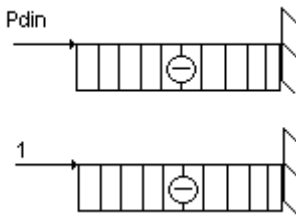
actuará sobre la barra en el impacto. Para conocer la misma se aplica la Ley de Conservación de la Energía considerando que la energía cinética del cuerpo que golpea la barra se transforma en energía potencial de la deformación de la barra al ser golpeada.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}P_{din} * \delta_{din}$$

Atendiendo a que el impacto es longitudinal:

$$\delta_{din} = \Delta l_{din}$$

Para determinar el desplazamiento se utiliza el método de Vereshiaguin, para ello se consideran dos estados, el primero es el momento del impacto con la carga dinámica  $P_{din}$  aplicada sobre la barra y el segundo con una carga ficticia aplicada sobre la barra.



La multiplicación de los gráficos dará como resultado:

$$\Delta l_{din} = \frac{P_{din}l}{EA}$$

Luego:

$$mv^2 = \frac{P_{din}^2 l}{EA}$$

$$P_{din} = \sqrt{\frac{EA m v^2}{l}}$$

$$P_{din} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{11} \times 0.0019625 \times 200 \times 120^2}{1}}$$

$$P_{din} = 336 \times 10^5 \text{ N}$$

$$\sigma_{din} = \frac{P_{din}}{A}$$

$$\sigma_{din} = 17121 \text{ MPa}$$

$$\Delta l_{din} = \frac{P_{din}l}{EA}$$

$$\Delta l_{din} = \frac{336 \times 10^5 \times 1}{2 \times 10^{11} \times 0.0019625}$$

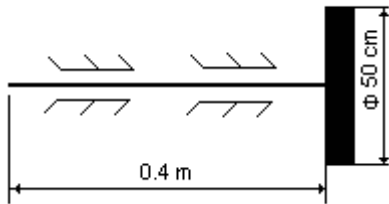
$$\Delta l_{din} = 0.086 \text{ m}$$

$$\Delta l_{din} = 8.6 \text{ cm}$$

De los resultados obtenidos se aprecia la magnitud de las tensiones y las deformaciones que pueden ocurrir en una barra sometida a impacto longitudinal.

3. El árbol mostrado en la figura tiene un diámetro de 8 cm y una longitud de 0.4 m. En el extremo derecho tiene acoplado un volante de masa 100 kg y diámetro 50 cm. La tensión

admisibles del material es 200 MPa. Compruebe la resistencia del árbol durante el frenado brusco del mismo si la frecuencia de rotación del mismo es 3600 rpm.



Durante el frenado brusco del árbol producto a la acción del volante el primero recibirá una carga de impacto torsional. Para determinar las el momento torsor dinámico se considera que la energía cinética del volante en el momento del frenado se transforma en energía potencial de la deformación del árbol.

$$T_o = Ud$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M t_{din} \varphi_{din}$$

El desplazamiento angular se determina por :

$$\varphi_{din} = \frac{M t_{din} l}{G I_p}$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1 M t_{din}^2 l}{2 G I_p}$$

$$M t_{din} = \sqrt{\frac{G I_p I_V \omega^2}{l}}$$

$$\omega = \frac{n \pi}{30}$$

$$\omega = \frac{3.14 \times 3600}{30} = 376.8 \text{ rad / s}$$

$$I_p = 0.1 d^4$$

$$I_p = 0.1 * (0.08)^4 = 4096 \times 10^{-9} \text{ m}^2$$

$$I_V = \frac{1}{2} m_{Volante} * R_{Volante}^2$$

$$I_V = \frac{1}{2} * (100) * (0.25)^2 = 3.125 \text{ kg} * \text{m}^2$$

$$W_p = 0.2 d^3$$

$$W_p = 0.2 * (0.08)^3 = 1024 \times 10^{-7} \text{ m}^3$$

$$M t_{din} = \sqrt{\frac{80 \times 10^{10} \times 4096 \times 10^{-9} \times 3.125 \times 376.8^2}{0.4}}$$

$$M t_{din} = 6028.8 \text{ kNm}$$

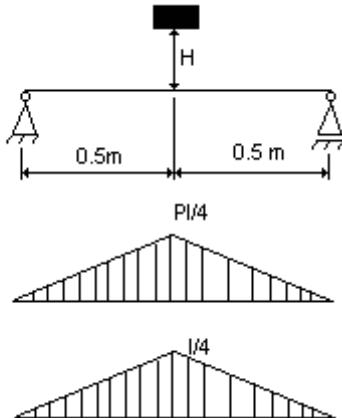
$$\tau_{din} = \frac{M t_{din}}{W_p}$$

$$\tau_{din} = \frac{6028800}{0.0001024}$$

$$\tau_{din} = 5887.5 \text{ MPa}$$

Como las tensiones dinámicas son mayores que las tensiones admisibles el árbol no resiste.

4. Determine las tensiones máximas y las deformaciones máximas en la siguiente viga, al ser golpeada por un cuerpo de masa 100 kg que cae desde una altura de 0.4 m. La viga está construida de un perfil I No. 20. La longitud de la viga es 1 m.



Las tensiones y las deformaciones se determinarán por las siguientes fórmulas respectivamente:

$$\sigma_{din} = K_{din} \sigma_{est}$$

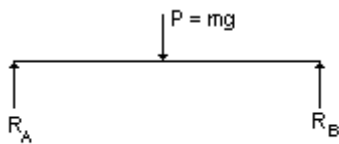
$$y_{din} = K_{din} y_{est}$$

donde  $K_{din}$  es el coeficiente dinámico, que se determina por:

$$K_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_{est}}}$$

La flecha estática se determina mediante el método de Vereshiaguin considerando la carga producto a la acción del impacto aplicada estáticamente y una fuerza ficticia aplicada en el mismo punto donde es golpeada la viga. Para ello deben construirse los gráficos de fuerzas internas producto a la acción de las cargas antes mencionadas.

Cálculo de los momentos flectores producto al cuerpo que golpea.



$$R_A = R_B = P/2$$

$$\sum M_B = 0$$

$$1m \times R_A - 0.5m \times P = 0$$

$$R_A = 0.5P$$

$$\sum F_x = 0$$

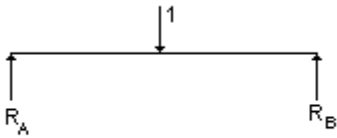
$$R_A + R_B - P = 0$$

$$R_B = 0.5Pd$$

$$Mf = R_B \times Z \Big|_{0=0}^{1/2=Pl/4}$$

$$Mf_A = 0$$

Cálculo de los momentos flectores producto a la carga ficticia.



$$R_A = R_B = 1/2$$

$$\sum M_B = 0$$

$$1m \times R_A - 0.5m \times 1 = 0$$

$$R_A = 0.5$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_A + R_B - P = 0$$

$$R_B = 0.5$$

$$Mf = R_B \cdot x \Big|_{0=0}^{1/2=1/4}$$

$$Mf_A = 0$$

Los gráficos de momentos flectores se muestran en la figura del problema. Aplicando Vereshiaguin:

$$y_{est} = \frac{2}{EI} \Delta \Delta$$

$$y_{est} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

$$y_{est} = \frac{1000 \times 1^3}{48 \times 2 \times 10^{11} \times 1840 \times 10^{-8}}$$

$$y_{est} = 5.67 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$K_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_{est}}}$$

$$K_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.4}{5.67 \times 10^{-6}}}$$

$$K_{din} = 376$$

$$\sigma_{est} = \frac{Mf}{W_x}$$

$$\sigma_{est} = \frac{250}{184 \times 10^{-6}}$$

$$\sigma_{est} = 1.36 \text{ MPa}$$

$$y_{din} = K_{din} y_{est}$$

$$y_{din} = 376 \times 5.67 \times 10^{-6}$$

$$y_{din} = 2.132 \text{ mm}$$

$$\sigma_{din} = K_{din} \sigma_{est}$$

$$\sigma_{din} = 376 \times 1.36$$

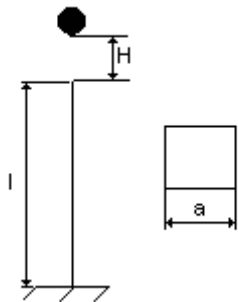
$$\sigma_{din} = 498 \text{ MPa}$$

5. compruebe la resistencia de una barra de sección cuadrada sometida al impacto de un cuerpo de peso 2 kN como se muestra en la figura. La barra es de acero CT-3.

$$H = 0.2 \text{ m}$$

$$a = 4 \text{ cm}$$

$$l = 0.6 \text{ m}$$



Las tensiones se determinan mediante la expresión:

$$\sigma_{din} = K_{din} \sigma_{est}$$

Para determinar las tensiones estáticas se considera el peso del cuerpo aplicado de forma estática sobre la barra.

$$\sigma_{est} = \frac{P}{A}$$

$$A = a^2$$

$$A = (4cm)^2$$

$$\sigma_{est} = \frac{2000}{16 \times 10^{-4}}$$

$$\sigma_{est} = 1.25 MPa$$

El coeficiente dinámico se obtiene a partir de la fórmula:

$$K_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{est}}}$$

Primero debemos determinar el desplazamiento para la carga estática:

$$\Delta l_{est} = \frac{Pl}{EA}$$

$$\Delta l_{est} = \frac{2000 \times 0.6}{2 \times 10^{11} \times 16 \times 10^{-4}}$$

$$\Delta l_{est} = 3.75 \times 10^{-5} m$$

Luego:

$$K_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 * 0.2}{3.75 \times 10^{-5}}}$$

$$K_{din} = 104$$

$$\sigma_{din} = 104 * 1.25$$

$$\sigma_{din} = 130 MPa$$

6. Determinar las tensiones en la barra AB producto al choque del cuerpo de masa 100 kg en el punto C.

Datos.

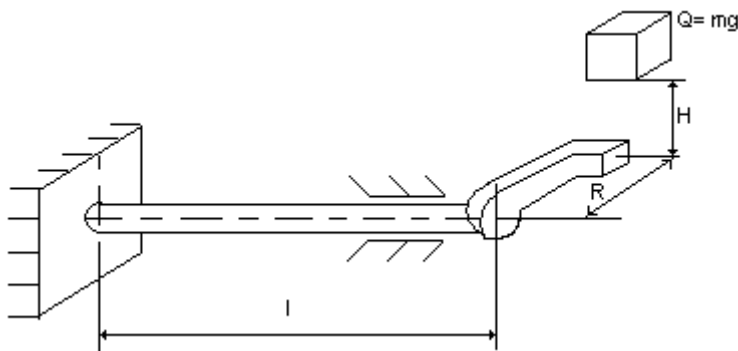
$$R = 10 \text{ cm}$$

$$l = 25 \text{ cm}$$

$$H = 15 \text{ cm}$$

Material: Acero Aleado.

$$D = 7 \text{ cm}$$



En el caso de torsión de impacto como la mostrada en la figura anterior las tensiones dinámicas se calculan a través de la expresión:

$$\tau_{din} = K_{din} \tau_{est}$$

$\begin{matrix} Max & & Max \end{matrix}$

donde:



$$K_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est}}}$$

$$\delta_{est} = \varphi R$$

$$\varphi = \frac{Mt}{GIp}$$

$$\delta_{est} = \frac{Mt}{GIp} R$$

$$Mt = QR = 100 Nm$$

$$Q = mg = 1000 N$$

$$Ip = 0.1D^4 = 0.1 \times 0.07^4 = 2.401 \times 10^{-6} m^4$$

$$\delta_{est} = \frac{QR^2 l}{GIp}$$

$$\delta_{est} = \frac{1000 \times 0.1^2 \times 0.25}{80 \times 10^{10} \times 2.401 \times 10^{-6}}$$

$$\delta_{est} = 1.297 \times 10^{-6} m$$

$$K_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.15}{1.297 \times 10^{-6}}}$$

$$K_{din} = 481$$

$$\tau_{est} = \frac{Mt}{Wp} = \frac{100}{0.2 \times (0.07)^3}$$

$$\tau_{est} = 14600 Pa$$

$$\tau_{din} = 14600 \times 481$$

$$\tau_{din} = 7.023 MPa$$

### Ejercicios propuestos.

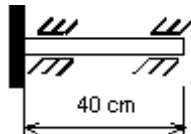
1. Determine el diámetro del árbol motriz para que garantice el frenado brusco. La masa del volante es de 50 kg y tiene un diámetro  $D = 50$  cm.

Datos:

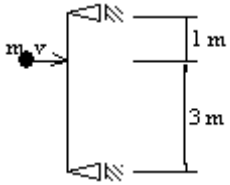
$G = 80$  GPa.

$[\sigma] = 200$  MPa

$w = 30$  rad/s



2. Comprobar la resistencia de una viga construida de un perfil I No. 20 que es golpeada por un cuerpo que se mueve con una velocidad de 100 m/s y tiene un peso de 1000 N.  $[\sigma] = 120$  MPa



3. Determine cuál será la longitud en la cual no se puede colocar un motor de 130 kgf de peso, si el mismo tiene una masa desbalanceada  $m_0 = 6$  kg con una excentricidad  $r = 0.5$  cm y gira a una velocidad  $n = 900$  rpm. Material CT-3. Perfil I No. 12.

**BIBLIOGRAFÍA**

- Amé, R. M. (2011). *Mecánica aplicada al diseño de los elementos de máquinas temas básicos de resistencia de materiales aplicables al diseño de árboles y ejes*. Argentina: Editorial Nobuko. Recuperado de <http://www.ebrary.com>
- Bedford, A. & Fowler, W. (1996). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison-Wesley Longman.
- Bisplinghoff, R. L.; Mar, J. W. & Pian, T.H. (1990). *Statics of deformable solids*. New York: Dover Publications.
- Código Técnico de la Construcción. (2007). *Normativa CTE – DB-SE-A*. Recuperado de [http://www.codigotecnico.org/cte/export/sites/default/web/galerias/archivos/CTE\\_Parte\\_2\\_DB\\_SE-A.pdf](http://www.codigotecnico.org/cte/export/sites/default/web/galerias/archivos/CTE_Parte_2_DB_SE-A.pdf)
- Fernández, S. Á., Lampurlanés, C. J., & Puigdomènech, F. L. (2012). *Problemas de resistencia de materiales*. España: Edicions de la Universitat de Lleida. Recuperado de <http://www.ebrary.com>
- Fitzgerald, R. W. (1996). *Mecánica de Materiales*. México: Editorial Fondo Educativo Interamericano.
- García, C. J. (2010). *Elasticidad y resistencia de materiales: cuestiones y problemas*. España: ECU. Retrieved from <http://www.ebrary.com>
- Hilson, B. (1993). *Basic structural behaviour*. London: Thomas Telford.
- Jackson, J. H., & Wirtz, H. G. (2009). *Estática y resistencia de materiales*. México: McGraw-Hill Interamericana. Retrieved from <http://www.ebrary.com>
- Lardner, T. J., & Archer, R. (1996). *Mecánica de sólidos*. México: McGraw-Hill Interamericana. Recuperado de <http://www.ebrary.com>
- Meriam, J. L., Kraige, L. G. (1999). *Mecánica para ingenieros: estática*. (3a. ed.). España: Editorial Reverté, S.A.
- Ortiz, B. L. (2007). *Resistencia de materiales* (3a. ed.). España: McGraw-Hill España. Recuperado de <http://www.ebrary.com>
- Rodríguez-Avial, L. M., & González-Alberto, G. A. (2010). *Fundamentos de resistencia de materiales*. España: UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia. Recuperado de <http://www.ebrary.com>
- Rodríguez-Avial, L. M., & González-Alberto, G. A. (2012). *Elasticidad y resistencia de materiales I*. España: UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia. Recuperado de <http://www.ebrary.com>
- Rodríguez-Avial, L. M. (2013). *Elasticidad y resistencia de materiales II*. España: UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia. Recuperado de <http://www.ebrary.com>
- Ruiz, G. & Otros. (1982). *Introducción al comportamiento estructural*. Madrid: Seminario de Diseño de Estructuras.
- Schodek, D. L. (1992). *Structures*. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall, Inc.
- Seward, D. (1994). *Understanding Structures. Analysis, materials, design*. Houndmills (Hampshire): The MacMillan Pres Ltd.
- Timoshenko, S. P. (1980). *Resistencia de materiales*. Madrid: Espasa Calpe S.A.; tomo I.
- Timoshenko, S. P. & Gere, J. M. (1974). *Mecánica de materiales*. México: U.T.E.H.A.
- Timoshenko, S. P. & Young, D. H. (1983). *Teoría de las estructuras*. Bilbao: Urmo.
- Torroja, E. (1991). *Razón y ser de los tipos estructurales*. (7a. ed.). Madrid: Editorial CSIC.



# Publicaciones Científicas



ISBN: 978-9978-301-66-1



9 789978 301661