



**ESPE**

**UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA**

**DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y  
ELECTRÓNICA**

**CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN  
DEL TÍTULO DE INGENIERO ELECTRÓNICO,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**TEMA: DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL PARA UN  
PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL**

**AUTOR:**

**ANAGUANO LAMIÑA, CLAUDIA MARICELA**

**DIRECTOR: ING. GORDILLO, RODOLFO MSc.**

**SANGOLQUÍ**

**2016**



**DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

**CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,**  
**AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**CERTIFICACIÓN**

Certifico que el trabajo de titulación, “DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL PARA UN PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL” realizado por la señorita ANAGUANO LAMIÑA CLAUDIA MARICELA, ha sido revisado en su totalidad y analizado por el software anti-plagio, el mismo cumple con los requisitos teóricos, científicos, técnicos, metodológicos y legales establecidos por la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, por lo tanto me permito acreditarlo y autorizar a la señorita ANAGUANO LAMIÑA CLAUDIA MARICELA para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 16 de Agosto de 2016

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'R. X. Gordillo', is positioned above the printed name of the director.

ING. RODOLFO XAVIER GORDILLO MSc.

**DIRECTOR**



**DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

**CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD**

Yo, CLAUDIA MARICELA ANAGUANO LAMIÑA, con cédula de identidad N° 1720164019 declaro que este trabajo de titulación “DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL PARA UN PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL” ha sido desarrollado considerando los métodos de investigación existentes, así como también se ha respetado los derechos intelectuales de terceros considerándose en las citas bibliográficas. Consecuentemente declaro que este trabajo es de mi autoría, en virtud de ello me declaro responsable del contenido, veracidad y alcance de la investigación mencionada.

Sangolquí, 16 de Agosto de 2016

A handwritten signature in blue ink is centered on the page. The signature is cursive and appears to read 'Claudia Maricela Anaguano Lamiña'. The signature is written over a faint, light-colored rectangular stamp or watermark.

CLAUDIA MARICELA ANAGUANO LAMIÑA

C.C: 1720164019



**DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**  
**CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,**  
**AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**AUTORIZACIÓN**

Yo, CLAUDIA MARICELA ANAGUANO LAMIÑA, autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar en la biblioteca Virtual de la institución el presente trabajo de titulación “DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL PARA UN PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL” cuyo contenido, ideas y criterios son de mi autoría y responsabilidad.

Sangolquí, 16 de Agosto del 2016

CLAUDIA MARICELA ANAGUANO LAMIÑA

C.C: 1720164019

## **DEDICATORIA**

Dedico este proyecto de investigación a mi Poder Superior por estar siempre a mi lado, a las personas más importantes de mi vida mis Padres para quienes la educación es el mejor legado que pueden dejar a sus hijos. A mis hermanos mayores por cuidar de mí y hacer de nuestro hogar mi lugar favorito en el mundo. A Francis y a Roberta por la alegría de ser tía. A los amigos y familiares que muestran su estima con pequeños gestos de amor.

**Claudia**

## AGRADECIMIENTO

A Dios por la bendición de despertar cada día y tener la oportunidad de ser feliz.

A mi familia, a Luis y Oliva por el maravilloso hogar y por darme mucho más de lo que ellos recibieron en la vida. A Roberto por siempre ser mi mayor inspiración, a Luis Miguel por cada nueva idea y a Cintia por cuidar siempre de mí.

A las personas que creyeron en mí, que han estado pendientes de mi trabajo, que me han regalado buenos momentos y a las que yo llamo amigos. A los amigos que hicieron la estancia en Alemania una experiencia maravillosa. A Patrick por apoyarme e incentivar me a ir por más.

A la Universidad de las Fuerzas Armadas “ESPE” por todos los conocimientos otorgados y por los amigos que encontré durante la carrera. De manera especial quiero agradecer a la Unidad de Relaciones de Cooperación Interinstitucional por permitirme cruzar fronteras más de una vez en representación de la Universidad.

A la Universidad de Ciencias Aplicadas de Brandeburgo, al Departamento de Mecatrónica y a la Oficina de Estudiantes Internacionales por aceptarme como estudiante de investigación durante un semestre. Al Dr. Ing. Christian Oertel mi tutor académico en Alemania, por incentivar este intercambio de investigación y por la contribución de nuevos conocimientos.

Al Departamento de Eléctrica y Electrónica por la formación académica recibida; al Ing. MSc. Luis Orozco por la dedicación y compromiso como director de la carrera, al MSc. Ing. Rodolfo Gordillo por su confianza y por todos los aportes académicos de teoría de control recibidos desde el inicio en la especialización de Automatización y Control.

**Claudia**

## ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIÓN .....	ii
AUTORÍA DE RESPONSABILIDAD .....	iii
AUTORIZACIÓN .....	iv
DEDICATORIA .....	v
AGRADECIMIENTO.....	vi
ÍNDICE DE CONTENIDO .....	vii
ÍNDICE FIGURAS.....	ix
RESUMEN .....	xii
ABSTRACT .....	xiii
CAPÍTULO I .....	1
INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. Antecedentes .....	1
1.2. Justificación e Importancia .....	1
1.3. Alcance del Proyecto .....	2
1.4. Objetivos.....	4
1.4.1. General .....	4
1.4.2. Específicos .....	4
CAPÍTULO II.....	6
METODOLOGÍA.....	6
2.1. Introducción .....	6
2.2 Caracterización de componentes .....	6
2.2.1 Sensores.....	8
2.2.1.1 Sensor del ángulo del brazo ECN113 SSIO .....	9
2.2.1.2 Sensor del ángulo del péndulo ENA22.....	10

2.2.2	Servomotor ED302U .....	10
2.2.2.1	Servo controlador POSIDRIVE MDS 5000 .....	12
2.2.3	Tarjeta de Adquisición de Datos NI PCI-6221 .....	13
2.6	Plantas lineales y linealizadas .....	17
<b>CAPÍTULO III .....</b>		<b>30</b>
<b>DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL .....</b>		<b>30</b>
<b>3.1. Introducción .....</b>		<b>30</b>
<b>3.2. Principios de control lineal y no lineal .....</b>		<b>30</b>
3.2.1	Control PID .....	30
3.2.3	Control por Retroalimentación de Estados .....	33
3.2.4	Control de Espacio de Estados LQR .....	34
3.2.5	Controladores PID y LQR en MATLAB® .....	35
3.2.5.1	Control PID .....	36
3.2.5.2	Control LQR .....	38
3.3	Control No Lineal y Planta Lineal .....	39
<b>CAPÍTULO IV .....</b>		<b>66</b>
<b>ANÁLISIS EXPERIMENTAL EN LA PLANTA .....</b>		<b>66</b>
<b>4.1. Introducción .....</b>		<b>66</b>
<b>4.2. LabVIEW® .....</b>		<b>66</b>
<b>4.3. Adquisición de las señales de la planta .....</b>		<b>67</b>
<b>4.4. Implementación del control LQR en LabVIEW® .....</b>		<b>71</b>
<b>4.4.1 Otra manera de obtener los ángulos .....</b>		<b>72</b>
<b>4.5. Implementación del control de energía en LabVIEW® .....</b>		<b>73</b>
<b>4.6. Control total en LabVIEW® .....</b>		<b>74</b>
<b>CAPÍTULO V .....</b>		<b>76</b>

<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>76</b>
<b>5.1. Conclusiones.....</b>	<b>76</b>
<b>5.2. Recomendaciones.....</b>	<b>77</b>
<b>5.3. Trabajos Futuros .....</b>	<b>78</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>79</b>

### ÍNDICE TABLAS

<b>Tabla 1 Datos técnicos del sensor ECN113 SSIO .....</b>	<b>9</b>
<b>Tabla 2 Características técnicas del sensor ENA22 .....</b>	<b>10</b>
<b>Tabla 3 Características técnicas Servomotor ED302U .....</b>	<b>11</b>
<b>Tabla 4 Reglas de inferencia para el Controlador Fuzzy de Balanceo.....</b>	<b>42</b>

### ÍNDICE FIGURAS

<b>Figura 1 Péndulo Invertido Rotacional TH-Brandeburgo. ....</b>	<b>6</b>
<b>Figura 2 Sistema de engranajes para transmisión de torque al brazo .....</b>	<b>7</b>
<b>Figura 3 Mecanismo para mover el péndulo a través del brazo .....</b>	<b>8</b>
<b>Figura 4 Estructura interna sensor digital para ángulo del brazo .....</b>	<b>9</b>
<b>Figura 5 Sensor ENA22.....</b>	<b>10</b>
<b>Figura 6 Servomotor ED302U, sobre soporte metálico .....</b>	<b>11</b>
<b>Figura 7 POSIDRIVE MDS 5000 .....</b>	<b>12</b>
<b>Figura 8 Tarjeta de datos NI621 .....</b>	<b>13</b>
<b>Figura 9 Diagrama del péndulo para el modelamiento matemático .....</b>	<b>21</b>
<b>Figura 10 Vista superior del ángulo del péndulo y el brazo .....</b>	<b>22</b>
<b>Figura 11 Valores medidos de las distancias y masas .....</b>	<b>25</b>

<b>Figura 12</b>	<b>Valores para sus centros de masa respectivamente .....</b>	<b>25</b>
<b>Figura 13</b>	<b>Diagrama de bloques controlador PID retroalimentación simple .....</b>	<b>31</b>
<b>Figura 14</b>	<b>Diagrama de realimentación simple con controlador PID .....</b>	<b>32</b>
<b>Figura 15</b>	<b>Diagrama para la configuración óptima con un controlador LQR ..</b>	<b>35</b>
<b>Figura 16</b>	<b>Control PID para planta lineal en SIMULINK .....</b>	<b>36</b>
<b>Figura 17</b>	<b>Respuesta el péndulo vuelve a su posición vertical hacia arriba .....</b>	<b>37</b>
<b>Figura 18</b>	<b>Diagrama en SIMULINK del control LQR.....</b>	<b>38</b>
<b>Figura 19</b>	<b>El péndulo vuelve a la condición inicial en 2.5 segundos.....</b>	<b>39</b>
<b>Figura 20</b>	<b>Estructura del modelo difuso .....</b>	<b>40</b>
<b>Figura 21</b>	<b>Establecimiento de los valores de entrada y salida .....</b>	<b>42</b>
<b>Figura 22</b>	<b>Selección del tipo de función de pertenencia .....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 23</b>	<b>Configuración de las reglas de inferencia .....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 24</b>	<b>Simulación del controlador Fuzzy en Simulink .....</b>	<b>44</b>
<b>Figura 25</b>	<b>Respuesta del sistema no lineal para el Control Fuzzy .....</b>	<b>45</b>
<b>Figura 26</b>	<b>Fricción entre las dos superficies como contacto entre cerdas .....</b>	<b>48</b>
<b>Figura 27</b>	<b>Observador LuGre basado en compensación de la fricciónl .....</b>	<b>51</b>
<b>Figura 28</b>	<b>Observador LuGre basado en la compensación de la fricción .....</b>	<b>52</b>
<b>Figura 29</b>	<b>Observador LuGre implementado en Simulink.....</b>	<b>52</b>
<b>Figura 30</b>	<b>Sistema de control LQR sin fricción .....</b>	<b>53</b>
<b>Figura 31</b>	<b>Sistema de control LQR añadida el modelamiento de la fricción .....</b>	<b>54</b>
<b>Figura 32</b>	<b>Respuesta con compensación de la fricción y control LQR .....</b>	<b>55</b>
<b>Figura 33</b>	<b>Modelo no lineal del péndulo en Simulink.....</b>	<b>56</b>
<b>Figura 34</b>	<b>Respuesta del control LQR en la planta no lineal.....</b>	<b>59</b>
<b>Figura 35</b>	<b>Implementación del control LQR en Simulink .....</b>	<b>59</b>
<b>Figura 36</b>	<b>Control de energía implementado en Simulink.....</b>	<b>62</b>

<b>Figura 37 Sistema de conmutación entre controladores .....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 38 Parámetros del motor .....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 39 Control Total LQR, n .....</b>	<b>64</b>
<b>Figura 40 Respuesta con fricción .....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 41 Respuesta con compensación de la fricción .....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 42 Configuración para obtener las señales de los ángulo .....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 43 Relaciones entre los ángulos y compensación matemática.....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 44 Funciones matemáticas para obtener relaciones lineales.....</b>	<b>69</b>
<b>Figura 45 Valores de los ángulos después de implementar los.....</b>	<b>70</b>
<b>Figura 46 Función lineal para eliminar le dependencia entre los ángulos.....</b>	<b>71</b>
<b>Figura 47 Controlador LQR implementado en LabVIEW .....</b>	<b>71</b>
<b>Figura 48 Comportamiento del controlador al causar perturbación .....</b>	<b>72</b>
<b>Figura 49 Cambio de método para cálculo de ángulos .....</b>	<b>73</b>
<b>Figura 50 Implementación del control de energía, parte 1.....</b>	<b>73</b>
<b>Figura 51 Implementación del control de energía, parte 2.....</b>	<b>74</b>
<b>Figura 52 Controlador total implementado en Simulink .....</b>	<b>74</b>
<b>Figura 53 Panel de Control del Sistema en LabVIEW .....</b>	<b>75</b>

## RESUMEN

La Universidad de Ciencias Aplicadas de Brandeburgo dispone en el laboratorio del Departamento de Mecatrónica un péndulo invertido rotacional. El mecanismo presenta dos tipos de comportamientos diferentes a controlar, el primer objetivo es levantar el péndulo colgante a las proximidades de la posición vertical y el segundo objetivo es estabilizar al péndulo en dicha posición. Para el levantamiento del péndulo se utiliza el concepto de control de energía y en el caso de la estabilización del péndulo la teoría de retroalimentación de estados es implementada. El modelamiento del dispositivo y el diseño del sistema de control fue simulado utilizando MATLAB®. Para la implementación se utilizó LabVIEW® El presente trabajo de investigación consta de tres fases: el modelamiento mecánico, el diseño de los sistemas de control y la simulación del péndulo controlado. El diseño mecánico de la planta no lineal fue modelado matemáticamente en tres distintos tipos de software. La linealización de la planta fue requerida para realizar pruebas con distintos tipos de controladores de los mismos se seleccionan los más óptimos para el control de la planta no lineal. Los controladores diseñados para la planta no lineal se conmutan para controlar el sistema en su totalidad, esto implica dos rangos de trabajo siendo el primero el levantamiento del péndulo, conmutando al segundo cuando se alcance el rango de operación del control estabilizador. Se consideró importante tomar en cuenta el efecto de la fricción y un modelamiento dinámico de esta fuerza es diseñado, para evitar los efectos de la misma se diseña un observador con retroalimentación.. En este trabajo de investigación se implementa los dos tipos de controladores al sistema.

### PALABRAS CLAVE:

- **CONTROL DE ENERGÍA**
- **RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS**
- **PÉNDULO INVERTIDO**
- **SISTEMAS DE CONTROL**
- **MODELAMIENTO MATEMÁTICO**

## **ABSTRACT**

The University of Applied Sciences Brandenburg has in the laboratory of the Department of Mechatronics a rotational inverted pendulum. The mechanism has two different behaviors that have to be controlled. The first objective is to raise the hanging pendulum to the vicinity of the vertical position. The second objective is to stabilize the pendulum in that position. For raising the pendulum, the concept of energy control is used. In the case of stabilizing the pendulum the theory state feedback is implemented. Device modeling and control system design was simulated using MATLAB®. For implementation LabVIEW® was used.

This research consists of three phases: the mechanical modeling, design of control systems and simulation of controlled pendulum. The mechanical design of the nonlinear plant was mathematically modeled in three different kind of software. The linearization of the plant was required for testing different types of controllers. From them are selected the most optimal for controlling the nonlinear plant.

Controllers designed for nonlinear plant are switched to control the entire system. This involves two working ranges. The first range involves lifting the pendulum, and it switches to the second once it gets the operating range of the stabilizer control. It was considered important to notice the effect of friction. A dynamic model of this force is designed. In order to avoid the friction effects, an observer is designed with feedback.

The mechanical connection of the sensors causes a relationship of dependency between them. On the implementation was necessary to develop mathematical relationships that help to obtain the real values of each angle. In this research the two types of controllers to the system.

### **KEYWORDS:**

- **ENERGY CONTROL**
- **STATE FEEDBACK**
- **INVERTED PENDULUM**
- **CONTROL SYSTEMS**
- **MATHEMATICAL MODELLING**

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Antecedentes

Un péndulo invertido rotacional es una barra, conectada a un brazo giratorio, que permanece en posición vertical y cuya estabilidad se da por efecto de una acción de control, este suele ser un problema clásico de la teoría de control como ejemplo de sistemas no lineales. El estudio de sistemas de control para sistemas no lineales ha permitido realizar el análisis de sistemas complejos aplicables a tecnologías aeroespacial y robótica, permitiendo encontrar nuevas soluciones a problemas relacionados con la mejora de estas tecnologías. El péndulo invertido rotacional o también conocido como péndulo de Furuta (Furuta, 1999) fue creado por el Dr. K. Furuta del Instituto de Tecnología de Tokio, Japón, el cual es un sistema de dos grados de libertad rotacional, los mismos se definen como brazo y péndulo.

En el péndulo invertido rotacional, el brazo se sostiene de un eje conectado a un servomotor y se mueve en un plano horizontal alrededor de este eje. El péndulo se encuentra en el extremo exterior del brazo y el movimiento es perpendicular al mismo. Dentro de su investigación Furuta propuso un control robusto de energía conocido en inglés como “swing up controller”, cuya traducción significa controlador para levantar el péndulo. Mediante el cambio en la dirección y la potencia del giro se puede estabilizar en posición vertical hacia arriba. En la actualidad este tipo de péndulo viene siendo usado con fines educativos en muchas universidades del mundo, ya que este tipo de proyectos está orientado a la investigación con fines prácticos y didácticos que permitan al estudiante implementar conceptos teóricos así como aprender nuevas técnicas de control.

### 1.2. Justificación e Importancia

El estudio de las teorías de control brinda un aporte importante para el desarrollo de la ingeniería y la ciencia, ya que estas teorías son encontradas en muchas aplicaciones. La teoría de control moderno sigue en desarrollo en la actualidad

teniendo importantes avances en las ramas de control automático. En la actualidad el campo de control ofrece grandes contribuciones gracias al avance tecnológico en sistemas computacionales y de comunicaciones, es por ello que más investigadores se suman a los grupos de interés en este tipo de teorías.

El estudio de sistemas de control para péndulos invertidos rotacionales es de bastante interés ya que los modelos matemáticos usados en estos péndulos presentan un comportamiento complejo difícil de modelar y controlar. La aceleración del péndulo no puede ser controlada directamente, por tanto se considera a este tipo de péndulo un sistema sub-actuado, ya que estos sistemas poseen menor número de actuadores que de grados de libertad.

Los problemas que se pueden encontrar en este tipo de dispositivo se deben a que este puede presentar dos tipos de comportamientos diferentes. Las versiones de estos sistemas dependen del tipo de mecanismo que mueve el brazo. Este tipo de sistema no lineal permite la ilustración de varios principios de control, unidos con el propósito de obtener un controlador total al sistema

Con el desarrollo creciente de la tecnología ha surgido un gran interés en el control de sistemas mecánicos sub-actuados debido a las ventajas que el estudio de este tipo de sistemas puede derivar como ahorro de energía y esfuerzos de control. Se pretende que este tipo de sistemas actúe igual que un sistema actuado, es decir que actúe como si el sistema tuviese igual número de actuadores que grados de libertad. Pero estos sistemas sub-actuados tienen que hacer frente a los problemas de control con un menor número de actuadores. Por lo tanto el control de los sistemas mecánicos sub-actuados es un campo activo de investigación por su amplia contribución en el desarrollo de sistemas de control que permiten la minimización de energía y el aumento de eficiencia de procesos.

### **1.3. Alcance del Proyecto**

La primera parte de la investigación es realizar la caracterización de los componentes del mecanismo a controlar. El péndulo está en un extremo del brazo rotatorio que se activa a través de un servomotor eléctrico, el mismo que actúa como salida del controlador. El péndulo cuenta con dos señales de sensor disponibles, la señal de rotación del brazo y la señal del ángulo del péndulo, estas dos señales son

tomadas como variables de entrada del controlador. Como el comportamiento de la planta es no lineal se procedió a realizar el modelamiento no lineal de la misma. Para obtener el modelo no lineal se utilizaron las ecuaciones de movimiento de Euler-LaGrange, una vez establecidos los centros de masa del péndulo y del brazo en el modelo, es posible implementar el sistema de ecuaciones diferenciales que representan el modelo matemático no lineal de la planta. Se llevó a cabo el modelamiento mecánico del péndulo en el software ADAMS® y se simuló el comportamiento del sistema en tiempo real

La utilización de modelos linealizados ayudó a realizar diseños sencillos de control que pueden ser aplicados en puntos de equilibrio de la planta a través del modelo en espacio de estados. Los resultados dependerán de las ecuaciones lineales que puedan ser obtenidas del sistema, por tanto se empleó diferentes programas matemáticos para comparar los resultados obtenidos. Luego de realizar un estudio de los principios de control lineal y no lineal, se llevaron a cabo simulaciones con la planta lineal y se estudiaron los resultados de las mismas.

En el caso de la planta no lineal, las herramientas computacionales que se utilizaron son MATLAB® y LabVIEW® para realizar la interfaz gráfica del controlador. Es importante dentro del proceso considerar el efecto de la fricción en este tipo de sistemas, esta debe ser tomada en cuenta para reducir el efecto de la misma en la estabilización del sistema. La fricción es no lineal y puede causar muchos errores. Los efectos de fricción que se pueden presentar en el sistema pueden ser encontrados en el servomotor y en el pivote. Se llevó a cabo la implementación de un modelo de fricción y la compensación del mismo para la planta.

Para llevar el péndulo a la posición deseada se diseñó dos tipos de controladores que accionan el torque del servomotor eléctrico. Si el péndulo se encuentra en una región cercana a su cero o punto de equilibrio, el control por retroalimentación de variables de estado o el método LQR son aplicables para la estabilización del péndulo en posición levantada. Para realizar el control desde la posición de equilibrio natural es decir cuando el péndulo esta hacia abajo, resulta más conveniente diseñar sistemas de control de energía del péndulo en lugar de controlar la posición y la velocidad. Se

diseñó un control “swing up” o control de energía, este tipo de control es conocido por ser aplicable a sistemas donde los rangos de control son más extensos.

El control total implica levantar el péndulo y estabilizarlo en la posición perpendicular al brazo, para que estos controladores trabajen de manera conjunta fue necesario aplicar una técnica de conmutación que habilite los controladores según la posición del ángulo del péndulo. Se tiene entonces que el control de energía levanta el péndulo llevándolo hasta una posición donde el controlador estabilizador toma el mando del sistema. De esta manera, se consigue el objetivo de levantar y estabilizar el péndulo.

Se establecen las funciones matemáticas para obtener los ángulos reales de rotación del brazo y el péndulo ya que los sensores tenían una relación de dependencia no lineal. Esta dependencia es debida a la ubicación física de los sensores que ofrece problemas de medición y fricción, Se implementaron las técnicas de control en el sistema LabVIEW® y se realizaron algunas pruebas con resultados comprobables de los controladores.

## **1.4. Objetivos**

### **1.4.1. General**

Diseñar un sistema de control para un péndulo invertido rotacional de la Universidad de Ciencias Aplicadas de Brandeburgo.

### **1.4.2. Específicos**

- Caracterizar los componentes electrónicos con los que cuenta el péndulo, para definir las necesidades de control que presenta el mismo.
- Conceptualizar el modelamiento de sistemas no lineales y sistemas sub-actuados para realizar el modelado computacional matemático de un péndulo invertido rotacional.
- Diseñar técnicas de control que juntas permitan al sistema la obtención de la estabilidad en posición vertical invertida desde la posición natural del péndulo.
- Implementar la estrategia de control propuesta en Simulink para verificar su funcionamiento.

- Analizar los resultados experimentales para corroborar la validez de los controladores.

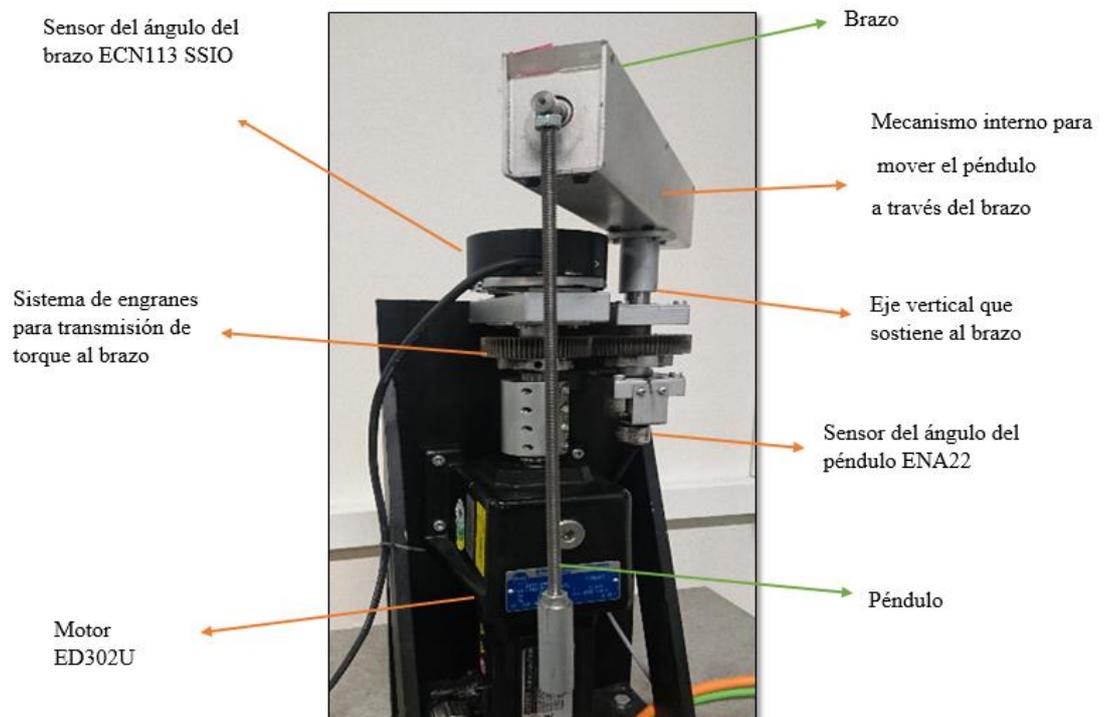
## CAPÍTULO II

### METODOLOGÍA

#### 2.1. Introducción

En el presente capítulo se describe la caracterización de los componentes del sistema. Con el fin de obtener el modelo se realiza la representación matemática del sistema. El modelamiento matemático de este tipo de mecanismos se realiza utilizando las ecuaciones de Euler Lagrange y se obtiene el modelo no lineal. La linealización de estos sistemas ayuda a diseñar controladores de manera más sencilla, y por lo tanto se resuelve la linealización matemática de la planta.

#### 2.2 Caracterización de componentes



**Figura 1 Péndulo Invertido Rotacional TH-Brandeburgo.**

Fuente: (Departamento Mecatrónica TH-Brandenburg, 2016)

En la figura 1, se muestra el péndulo ubicado sobre una base metálica en forma de L la cual sirve como soporte de la estructura. Sobre la base se encuentra el servomotor

que tiene conexiones con un tren de engranajes que permiten el movimiento subactuado del péndulo a través del brazo. Este tren de engranajes es usado para transmitir la energía del servomotor al brazo. El sensor del ángulo del brazo se encuentra ubicado sobre el engranaje conectado al servomotor. Debajo del engranaje conectado al brazo rotatorio se encuentra el sensor del ángulo del péndulo y sobre el mismo engrane se encuentra un eje vertical que sostiene al brazo. En el interior del brazo está un mecanismo basado en un sistema de engranaje más pequeño que permite el movimiento del péndulo a través del brazo.

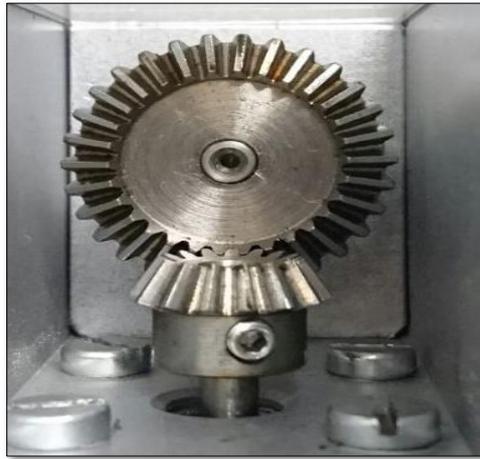


**Figura 2 Sistema de engranajes para transmisión de torque al brazo**

Fuente: (Departamento Mecatrónica TH-Brandenburg, 2016)

En la figura 2, se observa que la conexión del servomotor hacia el brazo es llevada a cabo por un tren de engranajes, cuya relación de transmisión es 1:1. Al alimentar al servomotor estos engranajes permiten mover el brazo del dispositivo. Debajo del engranaje conectado al péndulo está conectado el sensor del ángulo que es un sensor análogo. El eje vertical permite la transferencia de movimiento desde el sistema de engranajes del servomotor al péndulo. Sobre el eje vertical se encuentra el mecanismo interno que permite mover el péndulo a través del brazo.

En la figura 3, se observa el tren de engranajes que conforma el mecanismo interno para mover el péndulo. La relación de transmisión es de 2:1. Esta estructura mecánica y la ubicación física de los sensores hacen que la señal del sensor del péndulo cambie con el movimiento del brazo haciendo necesario trabajar con cálculos matemáticos para poder obtener los valores reales de cada ángulo



**Figura 3 Mecanismo para mover el péndulo a través del brazo**

Fuente: (Departamento Mecatrónica TH-Brandenburg, 2016)

### 2.2.1 Sensores

Un codificador de señales o encoder por su nombre en inglés es un dispositivo usado para medir los valores de ángulos en sistemas mecánicos. Hay diferentes tipos de estos sensores dependiendo del propósito y del sistema donde se vaya a implementar dichos sensores. Un encoder rotacional es usado para medir cuanto se mueve el péndulo a partir de su posición inicial, y de esta manera la señal puede ser convertida en ángulo. Dos tipos de encoder fueron utilizados para entregar la señal de cada ángulo, un encoder digital y un encoder análogo. La señal de los sensores está conectada a una tarjeta de adquisición de datos la cual se encarga de contabilizar los pulsos de cada encoder. La precisión de un ángulo puede ser determinada dependiendo de la resolución de cada encoder y esto a su vez depende del disco ubicado dentro del encoder con un específico número de hoyos que provee la resolución del encoder.

El foto-receptor está ubicado a un lado del disco y cada vez que pase la luz a través de un hoyo el sensor envía una respuesta que es contada como pulso y el ángulo es determinado por el número de pulsos. Para obtener los datos desde el ángulo del brazo

se utilizó el encoder digital ECN114 SSI01. Para el caso del ángulo del péndulo se utilizó el sensor análogo “Encoder de efecto Hall sin contactos ENA22”.

### 2.2.1.1 Sensor del ángulo del brazo ECN113 SSIO

Se observa en la Figura 4 la estructura interna del sensor utilizado para medir el ángulo de rotación del brazo. Este encoder óptico trabaja con el principio fotoeléctrico de escanear el disco graduado sin contacto magnético y de esta manera transforman el movimiento rotatorio en una señal digital. Este encoder tiene un disco graduado firmemente ubicado en el eje. El sensor detecta las líneas graduadas de aun pocos micrómetros y genera una señal de salida en pequeños periodos. En la tabla 1 se muestra los datos técnicos del sensor ECN113.



**Figura 4 Estructura interna sensor digital para ángulo del brazo**

Fuente: (Megatron Products, 2016)

**Tabla 1**  
**Datos técnicos del sensor ECN113 SSIO**

<b>Característica</b>	<b>Valor</b>
<b>Tipo</b>	Absoluto
<b>Posiciones por revolución</b>	8192
<b>Corriente de consumo</b>	Menor a 180 mA
<b>Alimentación</b>	5V
<b>Tiempo de procesamiento</b>	Menor a 0.25 microsegundos

### 2.2.1.2 Sensor del ángulo del péndulo ENA22

En la figura 5 se observa el sensor ENA22, este se encuentra debajo del engranaje que conecta al brazo con el péndulo. Es de tipo magnético y la salida de voltaje es proporcional a la fuerza aplicada sobre un campo magnético. Estos sensores son usados para alta resolución de ángulos cuando se colocan cerca un imán magnetizado diametralmente. Las características técnicas se muestran en la tabla 2.



**Figura 5 Sensor ENA22.**

Fuente: (Megatron Products, 2016)

**Tabla 2**  
**Características técnicas del sensor ENA22**

<b>Característica</b>	<b>Valor</b>
<b>Tipo</b>	Absoluto
<b>Posiciones por revolución</b>	4096
<b>Corriente de consumo</b>	4 a 20mA
<b>Alimentación</b>	5V, 9-30V
<b>Tiempo de procesamiento</b>	1.0 ms

### 2.2.2 Servomotor ED302U

Un servomotor es usado para aplicar torque al brazo rotatorio y consecuentemente al péndulo. El péndulo no es actuado directamente, pero puede moverse sobre el eje perpendicular al brazo. El servomotor consta de un motor DC, un engrane reductor,

un dispositivo sensor de posición y un circuito de control. En este sistema el motor es un Stober ED302U Series Dinámicas ED por sus siglas en inglés. Los servomotores ED son compactos y electrónicamente conmutados, en este motor el rotor y el estator están diseñados para optimizar la energía para proveer un bajo torque y alta densidad de potencia. En la figura 6 se muestra el motor sobre la base metálica en forma de L, se observa los cables de comunicaciones que tiene el motor con el servo controlador. Las características técnicas se muestran en la Tabla 3.



**Figura 6 Servomotor ED302U, sobre soporte metálico**

Fuente: (Departamento Mecatrónica TH-Brandenburg, 2016)

**Tabla 3**  
**Características técnicas Servomotor ED302U**

<b>Característica</b>	<b>Valor</b>
<b>Constante de torque del motor <math>K_t</math></b>	0.006Vmin/1000
<b>Constante de la fuerza electromotriz <math>K_m</math></b>	0.688 Nm/A
<b>Corriente nominal <math>I_n</math></b>	1.3A
<b>Potencia nominal <math>P_n</math></b>	0.55 kW
<b>Momento de inercia J</b>	0.44e-4 kgm <sup>2</sup>
<b>Masa <math>m</math></b>	2.27 Kg
<b>Eficiencia del motor <math>n_m</math></b>	0.88 Nm

### 2.2.2.1 Servo controlador POSIDRIVE MDS 5000

Para controlar la energía que se envía al motor se conecta un servo controlador al motor. El servomotor es el encargado de transmitir todos los datos relevantes para el motor y hace que el control del mismo sea más fácil. La tarea del servo-controlador es tomar la señal desde el sistema de control amplificar la señal y transmitir corriente eléctrica al servomotor entonces el movimiento que se produce es proporcional a la señal de control. En la mayoría de los casos, la señal de control puede ser la velocidad deseada, pero también puede representar la posición o como en este caso el torque.

El servo controlador se divide en dos partes. El área global está formada por las partes de programación y parametrización relacionados con el controlador y el área del eje contiene las configuraciones del motor y aplica las mismas sobre el motor. El área global incluye el dispositivo de control y los componentes de configuración I/O. Esta área es la responsable del manejo del área del eje. Hasta cuatro servomotores pueden ser secuencialmente conectados al servo controlador. En la figura 7 se puede observar el panel de control, este contiene un botón de emergencia, un selector de funciones y las conexiones disponibles hacia las tarjetas de datos.



**Figura 7 POSIDRIVE MDS 5000**

Fuente: (Departamento Mecatrónica TH-Brandenburg, 2016)

### 2.2.3 Tarjeta de Adquisición de Datos NI PCI-6221

La adquisición de datos es el proceso de obtener las señales reales de un sistema físico y convertir las mismas en señales digitales. Estas señales pueden ser usadas en un software específico y por tanto ser manipuladas. Una tarjeta de adquisición de datos es un dispositivo electrónicamente configurado para tomar señales y convertirlas en datos digitales. La tarjeta disponible en el laboratorio es la NI PCI 6221NI. Para utilizar la tarjeta es necesario la configuración de la misma desde NI-DAQmx que permite a configuración de los canales de entrada y salida, para que estos puedan ser utilizados en las ventanas de programación VI.

Las características generales son:

- Dos canales de salidas analógicas de 16 bits, 24 E/S digitales, contadores de 32 bits, rango de  $\pm 10$ .
- 24 E/S digital: nivel lógico alto min 2.2V-max 5.25V; nivel lógico bajo min 0V-max 0.8V
- E/S digital correlacionadas (8 líneas sincronizadas, 1 MHz)
- Rangos de entradas programables de  $\pm 10$ ,  $\pm 5$ ,  $\pm 1$  o  $\pm 0.2V$
- Tasa de muestreo 250000 muestras por segundo (250KS/s)



**Figura 8 Tarjeta de datos NI621**

Fuente: (Departamento Mecatrónica TH-Brandenburg, 2016)

### 2.3 Formulación de un modelo mecánico de planta no lineal

Para sistemas mecánicos el modelado matemático es representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales conocido como ecuaciones de movimiento. Estas ecuaciones indican la aceleración en el tiempo, la posición, la velocidad y los parámetros iniciales del sistema. Un punto importante para obtener un modelo adecuado es el buen entendimiento de la mecánica de sistemas dinámicos y las tareas de control que requiere el sistema. Sin embargo, mientras más adecuado es el modelo, no siempre es lo mejor, ya que el modelamiento de algunos parámetros hace al sistema más complejo y, en algunos casos estos parámetros se pueden omitir debido a que su efecto en el sistema muchas veces es despreciable.

Un sistema mecánico consiste de tres tipos básicos de elementos:

- Elementos de inercia: masa, momento de inercia. Cada elemento con un movimiento independiente tiene su propia ecuación diferencial, los elementos de inercia guardan energía cinética.
- Elementos de rotación: Translación y rotación.
- Elementos de amortiguación: Fuerzas generadas a resistir el movimiento el ejemplo más sencillo la fricción.

### 2.4 Ecuaciones de energía y movimiento

El péndulo invertido es un sistema mecánico que consiste de uniones rígidas conectadas de alguna forma. Estos sistemas tienen una estructura de puntos que en un punto tienen una configuración común. La configuración del conjunto es conocida como espacio  $Q$ . El número de configuraciones variables depende de los grados de libertad del sistema. El grado de libertad de un sistema mecánico es el número de coordenadas independientes requeridas para describir la posición o la configuración del sistema.

Cuando fuerzas externas son añadidas en el sistema son expresadas en términos de componentes junto con las coordenadas generalizadas. Existen algunos métodos de modelamiento de sistemas mecánicos como por ejemplo las leyes de Newton, las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Hamilton basadas en la ecuación

de movimiento. Sin embargo, todas ellas son equivalentes ya que la dinámica es la misma. La ecuación de Euler-Lagrange utiliza la energía total del sistema y se define la ecuación matemática  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ , donde  $\mathcal{L}$  es el Lagrangiano,  $T(q, \dot{q})$  es la energía cinética total almacenada con respecto a las masas y momentos de inercia, y  $V(q)$  es la energía potencial total que se asocia con elementos gravitacionales y amortiguadores. Las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico con la posición y velocidad generalizadas  $(q, \dot{q})$  y la ecuación de Lagrange  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  están representadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i, \quad i = 1, \dots, n \quad 2.1$$

Donde  $F_i$  es la fuerza externa actuante e  $i_n$  es la coordenada generalizada. y  $n$  es el número de uniones. Normalmente, están incluidas las fuerzas de control y torques, y los efectos de la fricción que resultan en disipación de potencia. Este proyecto incluye solo la parte mecánica del sistema es decir el torque del motor. El modelo del motor es modelado fuera del sistema. La fricción se considera despreciable para evitar incluir más no linealidades en el modelo.

## 2.5 Dinámica de sistemas mecánicos sub-actuados

Recientemente, en algunas aplicaciones es posible disminuir el peso o el tamaño de un robot reduciendo el número de actuadores que tiene el sistema. Estos sistemas son considerados sistemas sub-actuados por diseño. Resolver problemas con menos actuadores es una solución de bajo costo y esto puede ser importante para ciertas aplicaciones. Un sistema sub-actuado es aquel que tiene menos entradas que grados de libertad a controlar.

Considere un sistema con  $n$  grados de libertad y  $m$  actuadores. Si  $m < n$  las ecuaciones de Euler LaGrange son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = m + 1, \dots, n \quad 2.2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = u, \quad j = 1, \dots, m \quad 2.3$$

Donde  $u \in R^m = (u_1, \dots, u_m)$  son las entradas de control. Estas ecuaciones sirven para representar las entradas en un sistema sub-actuado.

La ecuación de movimiento de un robot, con  $n$  grados de libertad despreciando la fricción y otras perturbaciones, derivada de la ecuación de Euler-LaGrange es expresada como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F(q)u \quad 2.4$$

Donde  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  son los vectores de posición, velocidad y aceleración,  $M(q)$  es la matriz de inercia del sistema,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  contiene dos tipos de términos que involucran  $\dot{q}_i\dot{q}_j$  llamados centrífugo cuando ( $i = j$ ) y corolisis (causada por la rotación del marco de referencia con respecto a la inercia) cuando ( $i \neq j$ ), y  $G(q)$  es el componente de la gravedad relacionado con la energía. El modelo de Euler-LaGrange ha permitido el desarrollo de una serie de síntesis de controladores. Además el modelo persigue la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio. Con este modelo se ha logrado:

1. La función natural de Lyapunov como función de energía.
2. Estructuras pasivas que permiten obtener resultados robustos.
3. Sintetizar teorías generalizadas para sistemas de control sub-actuados.
4. Separación de la energía cinética y potencial en lazo cerrado, lo cual permite el análisis en espacios de dimensión reducido.

La ecuación de movimiento de un sistema mecánico sub-actuado si se asume que  $F(q) = [0, u]$  en la ecuación (2.4) y dividiendo para el vector de coordenadas generalizadas la siguiente ecuación dinámica es obtenida.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \phi_1(q) \\ \phi_2(q) \end{bmatrix} \\ M(q) &= \begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \\ C(q) &= \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \\ G(q) &= \begin{bmatrix} \phi_1(q) \\ \phi_2(q) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 2.5$$

Las funciones  $h_1(q, \dot{q})$  y  $h_2(q, \dot{q})$  contiene los sistemas Corolisis y Centrifugo. Los términos  $\phi(q, \dot{q})$  representan los efectos gravitacionales y  $u$  son las fuerzas generales producidas por  $m$  actuadores.

## 2.6 Plantas lineales y linealizadas

Un sistema es lineal si a la salida sigue los cambios producidos en la entrada. Este tipo de sistema es representado por ecuaciones diferenciales lineales. La teoría de sistemas lineales tiene ventajas significativas que permiten un análisis y diseño de sistemas de control simple. Un sistema es lineal bajo tres presunciones.

- Aditividad de cero de entrada y respuesta de estado cero,
- Linealidad en relación a las condiciones iniciales,
- Linealidad en relación con las entradas (principio de superposición)

La función  $f(x)$  es lineal con respecto a la variable independiente  $x$ , si y solo si satisface las siguientes dos condiciones.

- Aditividad:  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \forall x_1, x_2$  en el dominio de la función  $f$ .
- Homogeneidad:  $f(\alpha x) = \alpha f(x) \forall x$  en el dominio de la función  $f$  y todos los escalares  $\alpha$

Los sistemas lineales no existen en la realidad. Todos los sistemas físicos son no lineales en algún grado. Si las señales son limitadas en intervalos en los cuales el sistema presenta un comportamiento con características lineales, el sistema puede ser considerado lineal en dicho intervalo. Un punto de equilibrio dinámico de un sistema representa las condiciones variables del sistema, donde puede linealizarse el sistema.

Por ejemplo, en el caso de una partícula si esta se encuentra en reposo sin ninguna fuerza externa representando una entrada entonces la linealización es computada alrededor de este punto de equilibrio. El resultado es una planta lineal más simple y más adecuada para el diseño de sistemas de control. Cuando la magnitud de las señales van más allá de la porción del rango lineal, dependiendo de las condiciones, el sistema deja de ser considerado lineal (Vukic, 2003, pág. 15)

## 2.7 Linealización de ecuaciones no lineales

El modelo de la planta es no lineal, y para mejorar las condiciones de diseño se realiza una aproximación lineal del sistema. La linealización matemática de un sistema no lineal puede ser resuelta a través de las series de expansión de Taylor, de

esta forma se puede obtener una aproximación lineal del modelo. Considerando el sistema no lineal.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad 2.6$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad 2.7$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad 2.8$$

$$y(t) = h(x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau) \quad 2.9$$

En donde  $f$  y  $h$  son funciones que representan la dinámica del sistema y la salida del está dada en términos de la variable de estado  $x$  y la entrada  $u$  (Salinas; 2014, p.1). Se define un punto de equilibrio en las tres constantes  $(X, U, Y)$ ,  $x(t) = x(t_0) = X$ ,  $u(t) = U$ ,  $y(t) = h(X) = Y$ . Considerando que existen perturbaciones en el estado de equilibrio se tiene que  $x(t_0) = x_0 + \delta x_0 = X + \delta x_0$  y  $u(t_0) = U + \delta u(t)$  estas perturbaciones provocan que el estado y la salida cambien con respecto al punto de operación anterior. Se puede obtener el valor del estado perturbado si  $\delta x(t) = x(t) - X$  y si en la salida se tiene  $\delta y(t) = y(t) - Y$ , resultando en:

$$\delta x(t) = \delta x_0 + \int_{t_0}^t f(X + \delta x_0(\tau), U + \delta u(\tau)) d\tau \quad 2.10$$

$$\delta y(t) = h(X + \delta x_0(\tau)) - h(X) \quad 2.11$$

Las aproximaciones lineales a través de las series del teorema de Taylor en el punto de equilibrio  $(X, U)$  las ecuaciones pueden ser aproximadas como se indica a continuación.

$$f(X + \delta x(t)) = f(X, U) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{X,U} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{X,U} \delta u(t) + \mathcal{O}(n \geq 2) \quad 2.12$$

$$h(X + \delta x(t)) = h(X) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_X \delta x(t) + \mathcal{O}(n \geq 2)$$

**2.13**

Donde los términos de las derivadas parciales deben ser evaluados en los puntos de equilibrio  $(X, U)$ , y  $\mathcal{O}$  son los términos de orden mayor a  $(n \geq 2)$ . Los términos de orden mayor de las series de Taylor se truncan y una aproximación lineal de valores es obtenida.

$$\delta x(t) = \delta x_0 + \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x,U} \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x,U} \delta u(t) \right) d\tau \quad 2.14$$

$$\delta y(t) = \left( \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x,U} \delta x(t) \right) \quad 2.15$$

Una vez que el procedimiento es llevado a cabo.

$$\delta x(t) = \delta x_0 + \int_{t_0}^t (A\delta x(t) + B\delta u(t)) d\tau \quad 2.16$$

$$\delta y(t) = C\delta x(t) \quad 2.17$$

El sistema puede ser expresado en espacio de estados como:

$$\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t), \quad x_{t_0} = \delta x_0 \quad 2.18$$

$$\delta y(t) = C\delta x(t) \quad 2.19$$

Donde las matrices están representadas como:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,U)}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x,U)}, \quad C = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_x \quad 2.20$$

Las dimensiones de cada vector dependen de las derivadas parciales que sean requeridas en cada caso. La dinámica de la planta es dada por:

$$\dot{x}_i = f_i(x(t), u(t), t) \quad 2.21$$

El término  $f(x, u)$  es una función no lineal y no es posible obtener una matriz representada como  $[A, B, C, D]$ . Sin embargo, es posible obtener una representación equivalente desde el sistema no lineal. Un punto de equilibrio es representado  $\dot{x} = f(x^0, u^0) = 0$ . Si el sistema está en el punto nominal y se da una pequeña perturbación, las series de Taylor esta expresada como.

$$\dot{x}_i = \frac{d^0}{dt_i} + \delta x_i \approx f_i(x^0, u^0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_0 \delta u(t) + \mathcal{O}(n \geq 2) \quad 2.22$$

Los términos de las derivadas parciales deben ser evaluados en el punto nominal  $(u_0, x_0)$ . La siguiente ecuación es conseguida:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right] \quad 2.23$$

Se conoce que el punto de equilibrio puede ser representado por

$$\frac{d}{dt} x_i^0 = f_i(x^0, u^0) \quad 2.24$$

Y por lo tanto se puede mostrar como

$$\frac{d}{dt} (\delta x_i) \approx \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_0 + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u} \right|_0 \quad 2.25$$

Entonces es posible expresar el sistema linealizado de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \delta x = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x} \right|_0 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u} \right|_0 \end{bmatrix} \delta u = A(t) + B(t) \delta u \quad 2.26$$

Las matrices A y B pueden ser expresadas como:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_0 \end{bmatrix}, \quad 2.27$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \right|_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \right|_0 \end{bmatrix}$$

Si las salidas de la ecuación  $y = g(x, u)$  es no lineal y  $y(t) = y^0 + \partial y$  entonces:

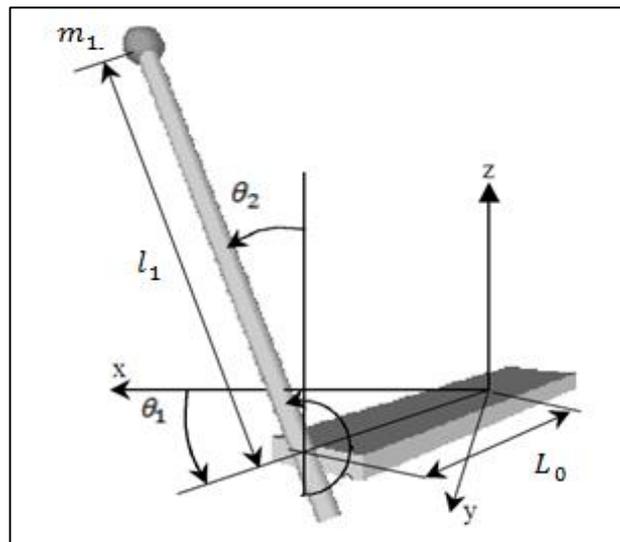
$$\frac{d}{dt} \partial x = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|_0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial g_n}{\partial x} \right|_0 \end{bmatrix} \partial x + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial u} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial u} \right|_0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial g_n}{\partial u} \right|_0 \end{bmatrix} \partial u = C(t) + D(t) \partial u \quad 2.28$$

Por lo tanto el sistema no lineal puede ser expresado como un modelo lineal en la siguiente ecuación.

$$\dot{z} = Az + Bv \quad 2.29$$

## 2.8 Modelado del Péndulo Rotacional

Para poder analizar el sistema es necesario desarrollar un modelo matemático que represente a través de ecuaciones cómo se comporta el sistema. En la figura 9 se define que la rotación angular del brazo es  $\theta_1$  y se mide en el plano horizontal. La rotación angular del péndulo es  $\theta_2$ . Estos ángulos son las señales de entrada para el controlador.



**Figura 9 Diagrama del péndulo para el modelamiento matemático**

Fuente: (Tank Kok Chye, Teo Chun Sang, 1999)

Los elementos importantes que se consideran como parámetros de la planta son:

$J_0$ : Momento de inercia del brazo.

$L_0$ : Distancia física entre el pivote del péndulo y el eje de rotación de la sección del brazo.

$m_1$ : Masa del péndulo.

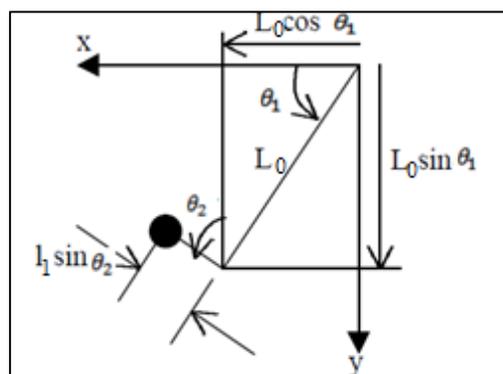
$l_1$ : Distancia del centro de gravedad del péndulo.

$J_1$ : Momento de inercia del péndulo alrededor de su centro de gravedad.

$\theta_1$ : Ángulo de rotación del brazo.

$\theta_2$ : Ángulo del péndulo, tomado desde el eje vertical.

$\tau$ : El torque aplicado al brazo.



**Figura 10 Vista superior del ángulo del péndulo y el brazo**

Fuente: (Tank Kok Chye, Teo Chun Sang, 1999)

A partir de trabajos anteriores de modelamiento (Tank Kok Chye, Teo Chun Sang, 1999) y (Prime, 2011) el sistema puede ser representado como se indica en la figura 10: El movimiento del sistema puede ser representado por las siguientes ecuaciones. Estas ecuaciones indican la posición y la velocidad del péndulo en cada eje.

$$x_1 = L_0 \cos \theta_1 + l_1 \theta_1 \theta_2 \quad 2.30$$

$$y_1 = L_0 \theta_1 - l_1 \theta_1 \cos \theta_1 \theta_2 \quad 2.31$$

$$z_1 = l_1 \cos \theta_2 \quad 2.32$$

$$\dot{x}_1 = -L_0 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad 2.33$$

$$\dot{y}_1 = L_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - l_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad 2.34$$

$$\dot{z}_1 = -l_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad 2.35$$

La magnitud al cuadrado de la velocidad del péndulo descrita en las ecuaciones (2.34), (2.35) y (2.36) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = & L_0^2 \dot{\theta}_1^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin \theta_2)^2 + \\ & l_1^2 \dot{\theta}_2^2 (\cos \theta_2)^2 - 2L_0 l_1 \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + l_1^2 \dot{\theta}_2^2 (\sin \theta_2)^2 \end{aligned} \quad 2.36$$

La energía cinética del péndulo  $T_1$  y la energía potencial  $V_1$  pueden ser escritos como:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) \quad 2.37$$

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{1}{2} m_1 L_0^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (J_1 + m_1 l_1^2) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \theta_2 \\ & - m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad 2.38$$

$$V_1 = m_1 g z_1 = m_1 g l_1 \cos \theta_2 \quad 2.39$$

La ecuación de la energía usada en la ecuación de Lagrange se formula a continuación.

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} (J_0 + m_1 L_0^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (J_1 + m_1 l_1^2) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin \theta_2)^2 \\ & - m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_1 g l_1 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad 2.40$$

Para el eje de rotación  $\theta_1$  puede ser mostrado de la siguiente manera.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad 2.41$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (J_0 + m_1 L_0^2) \dot{\theta}_1 + m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 (\sin \theta_2) - m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad 2.42$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = & (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 (\sin \theta_2)^2 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ & + m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_2^2 (\sin \theta_2) \end{aligned} \quad 2.43$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_{\theta_1} \quad 2.44$$

$$\begin{aligned} (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 (\sin \theta_2)^2 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ + m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_2^2 (\sin \theta_2) = \tau_{\theta_1} \end{aligned} \quad 2.45$$

De forma similar pueden ser escritas las ecuaciones para el eje de rotación de  $\theta_2$

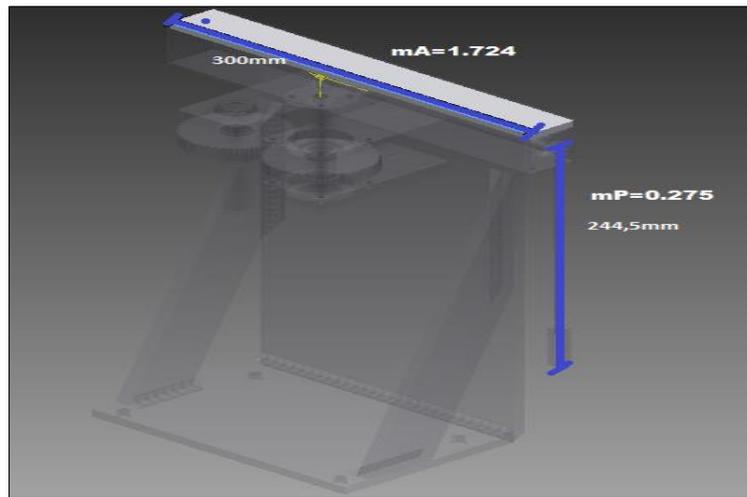
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin 2\theta_2) + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_1 g l_1 \sin \theta_2 \quad 2.46$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta_2} = (J_1 + m_1 L_0^2) \ddot{\theta}_2 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ - \frac{1}{2} m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_1 (\sin 2\theta_2) - m_1 g l_1 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad 2.47$$

Las ecuaciones (2.45) y (2.47) pueden ser agrupadas como se indica a continuación.

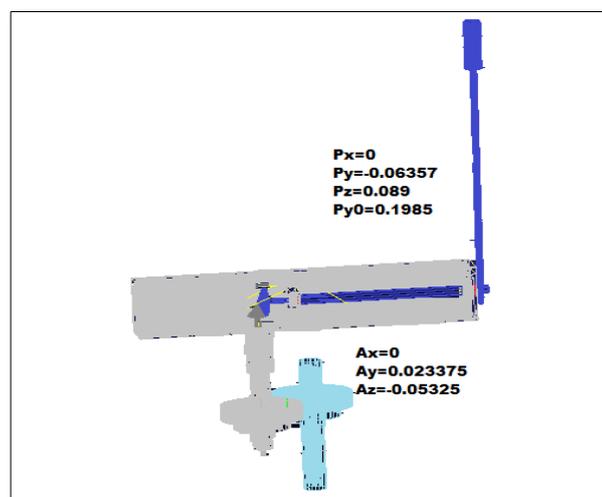
$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (J_0 + m_1(L_0^2 + m_1 l_1^2 (\sin \theta_2)^2) & m_1 L_0 l_1 \cos \theta_2 \\ -m_1 L_0 l_1 \cos \theta_2 & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 l_1^2 (\sin 2\theta_2) \dot{\theta}_2 & \frac{1}{2} m_1 l_1^2 (\sin 2\theta_2) \dot{\theta}_1 + m_1 L_0 l_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 (\sin 2\theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g l_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_m \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 2.48$$

El torque total que en el eje de rotación en la dirección que aumenta  $\dot{\theta}_1$  es  $\tau_m$  y el torque en el eje de rotación de  $\dot{\theta}_2$  es considerado como 0. Después de haber obtenido el modelo matemático el siguiente paso es cambiar los valores matemáticos a valores reales tomados desde el sistema. Los valores que se van a tomar en cuenta primero son la masa y la distancia del brazo y del péndulo. Para los valores de los momentos de inercia se utilizan los valores que son automáticamente calculados del software de modelamiento ADAMS®. Los parámetros del motor no son utilizados en este modelamiento ya que serán tomados en cuenta como parte externa de la planta, que entrega el valor del torque que la planta necesite.



**Figura 11 Valores medidos de las distancias y masas**

Los valores de los momentos de inercia se obtienen de los centros de masa de la ecuación, por tal motivo se recurre al modelo diseñado en ADAMS®, este software ofrece la opción de encontrar en los centros de masa del péndulo y el brazo los momentos de inercia correspondientes.



**Figura 12 Valores del péndulo y el brazo para sus centros de masa respectivamente**

## 2.9 Linealización del modelo matemático

En el trabajo (Tank Kok Chye, Teo Chun Sang, 1999) ara poder realizar la linealización del modelo, se debe primero definir el punto de equilibrio para la posición vertical hacia arriba  $\dot{\theta}_1 = 0, \theta_2 = 0 \dot{\theta}_2 = 0$  .Si  $x_1 = \dot{\theta}_1, x_2 = \theta_2, x_3 = \dot{\theta}_2$  y  $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0$

Reemplazando en la ecuación (2.45) en el eje de rotación  $\theta_1$  tenemos

$$y = (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 (\sin \theta_2)^2 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_2^2 (\sin \theta_2) - \tau \theta_1 \quad 2.49$$

$$f = (\dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) \quad 2.50$$

$$\bar{y} = (J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_2 - \tau_m \quad 2.51$$

$$f = (0,0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 \quad 2.52$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial \theta_2} = 2m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + 2m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos 2\theta_2 + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \quad 2.53$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \sin 2\theta_2 + 2m_1 l_1^2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad 2.54$$

$$y - \bar{y} \approx (\dot{\theta}_2 - 0) \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} \Big|_{\substack{\dot{\theta}_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}} + (\theta_2 - 0) \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \Big|_{\substack{\dot{\theta}_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}} + (\dot{\theta}_1 - 0) \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_1} \Big|_{\substack{\dot{\theta}_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}} \quad 2.55$$

$$y \approx \bar{y} + (\dot{\theta}_2 - 0) \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} \Big|_{\substack{\dot{\theta}_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}} + (\theta_2 - 0) \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \Big|_{\substack{\dot{\theta}_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}} + (\dot{\theta}_1 - 0) \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_1} \Big|_{\substack{\dot{\theta}_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}}$$

$$(J_0 + m_1 L_0^2) \ddot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_2 + \tau_{\dot{\theta}_1} = 0 \quad 2.56$$

Por lo tanto la ecuación (2.56) es la linealización de la ecuación (2.45) con respecto a  $\theta_1$

De forma similar para el eje de rotación  $\theta_2$  partiendo de la ecuación

$$y = (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta}_2 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\sin \theta_2) - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin 2\theta_2) - m_1 g l_1 \sin 2\theta_2 \quad 2.57$$

$$f = (\dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) \quad 2.58$$

$$\bar{y} = (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta}_2 - m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_1 \quad 2.59$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_1} = J_1 + m_1 l_1^2 - m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \sin 2\theta_2 \quad 2.60$$

$$2.61$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial \theta_2} = m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos 2\theta_2 - m_1 g l_1 \cos \theta_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \quad 2.62$$

$$y - \bar{y} \approx (\dot{\theta}_1 - 0) \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_1} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}} + (\theta_2 - 0) \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}} \quad 2.63$$

$$+ (\dot{\theta}_2 - 0) \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}}$$

$$y \approx \bar{y} + (\dot{\theta}_1 - 0) \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_1} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}} + (\theta_2 - 0) \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}}$$

$$+ (\dot{\theta}_2 - 0) \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0 \\ \dot{\theta}_2=0}}$$

La ecuación (2.47) linealizado se representa ahora por la siguiente ecuación

$$m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_1 + (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2 - m_1 g l_1 \theta_2 = 0 \quad 2.64$$

Se agrupan las ecuaciones (2.56) y (2.64) en forma de matriz que representa dos estados del sistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 & -m_1 L_0 l_1 \\ -m_1 L_0 l_1 & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_m \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 g l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \tau_m \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 2.65$$

Para tener una matriz con mayor información de estados se define las siguientes relaciones matemáticas

$$\begin{aligned} a &= J_0 + m_1 L_0^2 & 2.66 \\ b &= m_1 l_1^2 \theta_2 \\ c &= m_1 L_0 l_1 \\ d &= \tau_m \\ f &= J_0 + m_1 L_0^2 \\ h &= m_1 g l_1 \end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones linealizadas (2.56) y (2.64) simplificadas quedan:

$$a\ddot{\theta}_1 - c\ddot{\theta}_2 + d\dot{\theta}_1 - eu = 0 \quad 2.67$$

$$-c\dot{\theta}_1 + f\ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2 - h\theta_2 = 0 \quad 2.68$$

Se multiplica (2.67) x  $c$  y (2.68) x  $a$  y se suman los resultados

$$(af - c^2)\ddot{\theta}_2 + cd\dot{\theta}_1 + a\dot{\theta}_2 - ah\theta_2 - ceu = 0 \quad 2.69$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{(af - c^2)} (-cf\dot{\theta}_1 + a\dot{\theta}_2 + ah\theta_2 + ceu) = 0$$

Se multiplican (2.67) x  $f$  y (2.68) x  $c$  y se suman.

$$(af - c^2)\ddot{\theta}_2 + fd\dot{\theta}_1 + ch\theta_2 - efu = 0 \quad 2.70$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{(af - c^2)} (-df\dot{\theta}_1 + ch\theta_2 + efu) = 0$$

Para formular los cuatro estados del modelo lineal, las variables de estado son:

$$x_4 = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

El modelo lineal de 4 estados es escrito como se muestra a continuación

$$\dot{x}_4 = Ax_4 + Bu$$

2. 71

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(af - c^2)} \begin{bmatrix} 0 & af - c^2 & 0 & 0 \\ 0 & -df & ch & 0 \\ 0 & 0 & 0 & af - c^2 \\ 0 & -cd & ah & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{(af - c^2)} \begin{bmatrix} 0 \\ ef \\ 0 \\ ce \end{bmatrix} u$$

Se linealizó las ecuaciones con los valores reales del péndulo en MATLAB® y en VMaxima® y se obtuvieron los mismos resultados en ambas plataformas. Los valores obtenidos son solo los del modelo mecánico de la planta sin considerar el motor o el torque, que se considerará en los siguientes capítulos.

## **CAPÍTULO III**

### **DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL**

#### **3.1. Introducción**

El propósito de este capítulo es mostrar a detalle los principios de control lineal y no lineal. Se realizan simulaciones diferentes tipos de controladores lineales ya que uno de los requerimientos que debían ser completados al iniciar el proyecto es el estudio de los diferentes controladores y realizar ejemplos con la planta lineal, ya que los sistemas de control tienen una mejor respuesta en este tipo de plantas

Posteriormente, se encuentra información relativa a los sistemas de control no lineal, se indica los resultados de un controlador Fuzzy y las características de diseño que deben ser consideradas. La fricción puede afectar significativamente el comportamiento de la planta por esta razón se realiza el modelamiento de la misma y la manera de compensarla.

Finalmente se muestra el diseño de algoritmos de control mediante la plataforma Simulink de MATLAB® con la planta no lineal y los resultados obtenidos en esta simulación. Los controladores utilizados fueron LQR para estabilizar el péndulo y control de energía para levantar el péndulo. Se indica también el método utilizado para hacer el cambio desde el controlador de energía hacia el controlador estabilizador una vez el péndulo alcanza los límites de operación del control estabilizador.

#### **3.2. Principios de control lineal y no lineal**

##### **3.2.1 Control PID**

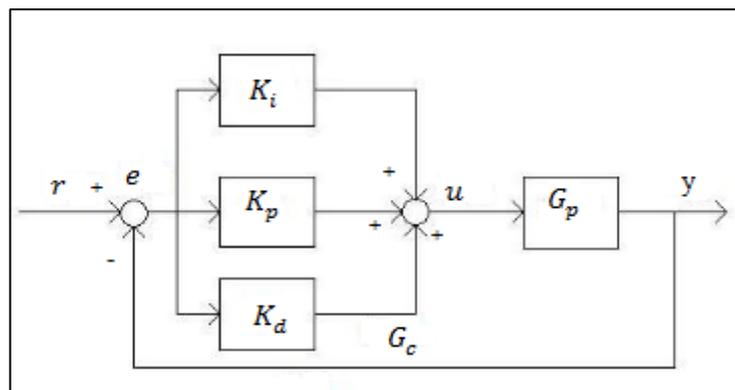
Los controladores PID son un tipo de controlador más usado en aplicaciones reales debido a su facilidad para afinar sus parámetros. El controlador Proporcional Integrador Derivativo es uno de las estrategias más antiguas y más ampliamente usadas de control de retroalimentación. La retroalimentación de señales es el análisis de las señales de los sensores del sistema. En el algoritmo de un controlador PID la señal de control es conocida como “u”, el controlador computa la derivada y la integral del error “e”, la señal de control es enviada a la planta y esto da una nueva salida que

es comparada con la referencia para encontrar la nueva señal de error que será computada su derivada y su integral otra vez.

$$u = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{d}{dt} e(t) y \quad 3.1$$

Donde  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $K_i$  integral, y diferencial  $K_d$ .

- $K_p$  su función es introducir una ganancia que es proporcional al error. Esto produce un decrecimiento en el tiempo de subida, un incremento en el sobre impulso, un pequeño cambio en el tiempo de establecimiento, pero nunca elimina el error de estado estable.
- $K_i$  El área debajo de la curva de la señal de error afecta la señal de salida, y tiene el efecto de reducir del tiempo de subida, produce un incremento en el sobre impulso y tiempo de establecimiento, y va a reducir el error de estado estable.
- $K_d$  La pendiente de la forma de onda de señal de error es introducida en la salida, y tendrá un efecto sobre la estabilidad del sistema reduciendo el exceso del sobre impulso y el tiempo de establecimiento.



**Figura 13 Diagrama de bloques controlador PID retroalimentación simple**

De acuerdo con (Junghare, 2014, pág. 4). Los siguientes pasos definen como realizar un ajuste empírico de controladores PID

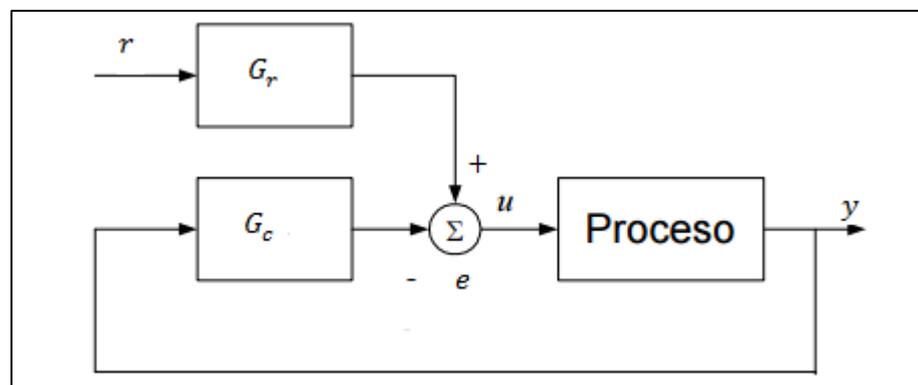
- Obtener la respuesta en lazo abierto y determinar las necesidades del sistema que deben ser mejoradas.

- Añadir el control proporcional para mejorar el tiempo de subida, añadir un control derivativo para mejorar el sobre impulso y añadir el control integral para eliminar el error de estado estable.
- Ajustar las ganancias para obtener una respuesta global deseada, las ganancias pueden ser calculadas con un análisis de la ubicación de los polos o de manera manual donde  $K_i$  y  $K_d$  se configuran como cero,  $K_p$  se incrementa hasta que la salida oscile, para obtener un  $K_p$  óptimo se reduce a la mitad del valor encontrado. Luego se aumenta  $K_i$  hasta que la compensación sea corregida en un buen tiempo y  $K_d$  se aumenta para obtener una rápida respuesta y alcanzar el valor de referencia.

### 3.2.2 Modificaciones al algoritmo PID.

En la figura 13 se muestra como normalmente se conecta el controlador PID a la planta, en este diagrama la señal del controlador se obtiene por el procesamiento del error, que es la diferencia entre la referencia y la salida, y se aplica luego al proceso. Se puede obtener un mejor desempeño del controlador al realizar modificaciones en la conexión del diagrama.

Según (Moreno, 2001) se puede procesar la referencia y la salida de forma separada. Un sistema que procesa el error retroalimentado se conoce como sistema de un grado de libertad, si la señal de referencia y salida tienen diferente trayectoria como se muestra en la figura 14 se los conoce como sistemas de dos grados de libertad.



**Figura 14 Diagrama de realimentación simple con controlador PID de dos grados de libertad**

### 3.2.3 Control por Retroalimentación de Estados

Los sistemas modernos de ingeniería requieren altas precisiones debido a las tareas complejas que se deben resolver. Debido al aumento de la complejidad de los sistemas, la teoría de control de estados se ha estado desarrollando desde 1960. Esta teoría es basada en la descripción de las ecuaciones del sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden combinadas con un vector de ecuaciones diferenciales de primer orden. Un sistema es expresado en variables de estado como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{3.2}$$

La ley del control de espacio de estados es una entrada  $u$  como se indica.

$$u(t) = -K^T x + r = -\sum_{t=1}^n K_t X_t + r\tag{3.3}$$

Donde  $K_t$  es la ganancia constante que debe ser determinada y  $r$  es la entrada de referencia entonces el control es calculado como una combinación lineal de los sistemas de estados. Si se sustituye en la forma de variable de estado, se tiene

$$\dot{x} = (A - BK^T)X + Br\tag{3.4}$$

El objetivo de este tipo de controlador es tratar de obtener una respuesta rápida del sistema sin una acción grande de control. El control es determinado como una combinación lineal de todas las variables del sistema de estados y entonces hay más parámetros de control disponibles que un control PID. Si el sistema es controlable, es posible obtener un mayor rango de polos en lazo cerrado pero escoger el grupo apropiado de polos en lazo cerrado no es tarea sencilla

Para un sistema lineal controlable los polos arbitrarios en lazo cerrado pueden ser conseguidos usando la retroalimentación de estados. Existen muchos algoritmos que pueden ser usados para la determinación de las ecuaciones de ganancia para obtener un grupo de polos deseados. Una forma de conseguir estas ganancias es el método conocido como control LQR. (Murray M. , 2006)

### 3.2.4 Control de Espacio de Estados LQR

Regulación Linear Cuadrática (LQR) por sus siglas en inglés, es un método de control moderno que usa la aproximación de espacio de estados. La teoría de control óptimo tiene por objetivo operar un sistema dinámico al mínimo costo. En la práctica los controladores óptimos son complicados debido a algunos problemas como la no linealidad de los sistemas, pero para ciertas aplicaciones vale la pena el diseño ya que se obtiene el mejoramiento de la respuesta controlada.

En el caso donde los sistemas dinámicos son descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales y el costo es descrito por la función cuadrática llamada LQ. El objetivo de dicho problema es encontrar un control óptimo que minimice el costo cuadrático funcional asociado con el sistema lineal. Tomando la explicación existente en (Boyd, 2008) un sistema es expresado en variables de estado como se indica a continuación.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad 3.5$$

El costo cuadrático de la función es definido como

$$J = \int_0^{\infty} x(t)Q_x(t) + Ru(t)dt \quad 3.6$$

Donde Q es una matriz simétrica positiva que representa el costo dado del estado y R es la matriz de costo de las entradas. El primer término mide la desviación del estado y el segundo mide el tamaño de la entrada. El objetivo del control LQR es encontrar valores de  $u$  que minimicen la función  $J$  Se determina la matriz K para el vector del control óptimo.

$$u(t) = -Kx(t) \quad 3.7$$

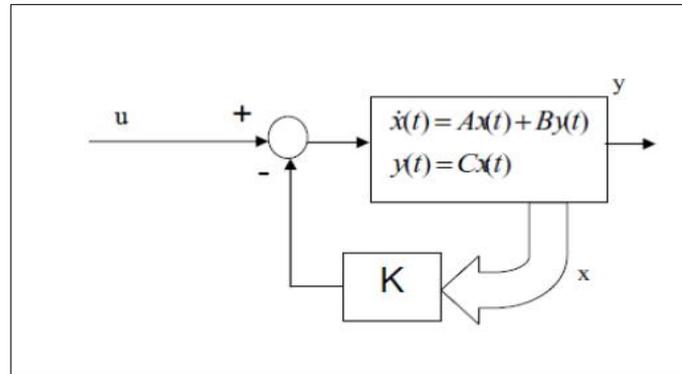
$$K = \frac{1}{R}B^T P \quad 3.8$$

Donde P es la única solución definida positiva de la matriz Ecuación Algebraica de Riccati. Los elementos de la matriz K están determinados para minimizar el índice de rendimiento cuadrático, entonces  $u(t) = -Kx(t)$  es un valor óptimo para cualquier estado inicial  $x(0)$ . La ecuación de costo (3.6) puede ser simplificada de la siguiente forma

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad 3.9$$

La ley de control dada en esta ecuación es conocida como control cuadrático lineal.

Los polos potenciales son encontrados por las matrices Q y R.



**Figura 15 Diagrama para la configuración óptima con un controlador LQR**

Se siguen los siguientes pasos para encontrar los valores de las ganancias.

- Resolver la ecuación simplificada de índice de rendimiento.
- Sustituir la matriz P en la ecuación

$$K = R^{-1}B^T P \quad 3.10$$

La matriz resultante K es la matriz óptima.

### 3.2.5 Controladores PID y LQR en MATLAB® para el sistema linealizado

De acuerdo con los resultados obtenidos en el modelamiento y linealización de la planta, es posible diseñar dos controladores lineales simples para la planta lineal del péndulo invertido rotacional, estos controladores fueron diseñados como parte de la introducción del estudio de las teorías de control. Para mantener la posición vertical hacia arriba es necesario aplicar un torque en el punto del pivote o mover el pivote horizontalmente como parte del sistema de retroalimentación. La condición inicial del sistema es el péndulo levantado y estable, se da un impulso que significa una pequeña perturbación, el controlador trata de volver a la posición inicial en el menor tiempo posible, evitando que la perturbación cause la caída del péndulo. Se trabaja como señal

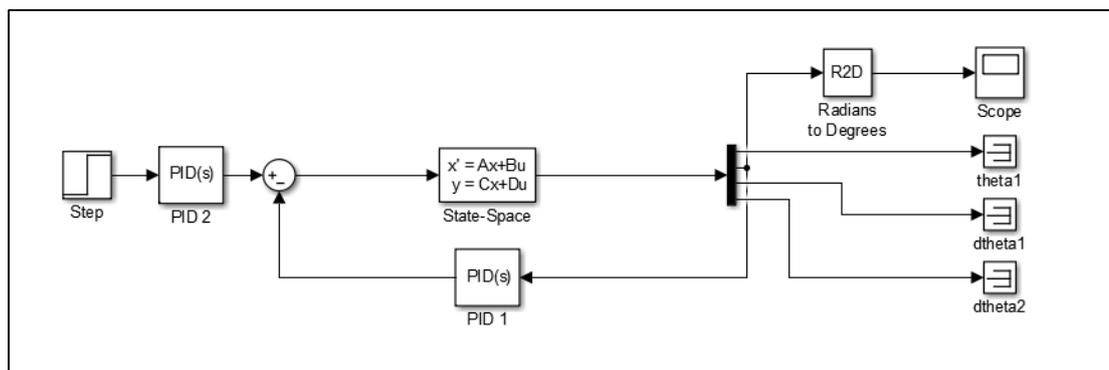
de entrada el ángulo del péndulo. Para el modelo linealizado de la planta se diseñaron las técnicas de control LQR y PID. La ecuación (3.11) representa la matriz de estados linealizada del sistema obtenidos en MATLAB® y VMaxima®, al remplazar los valores reales de la planta.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -38.9843 & 0 & 0 \\ 0 & -70.27 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{3.11}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

### 3.2.5.1 Control PID

El objetivo del controlador será diseñar la posición del péndulo, el cual debe retornar a a posición vertical hacia arriba después de cualquier perturbación. El esquemático del sistema de control simulado en SIMULINK se muestra en la Figura 16



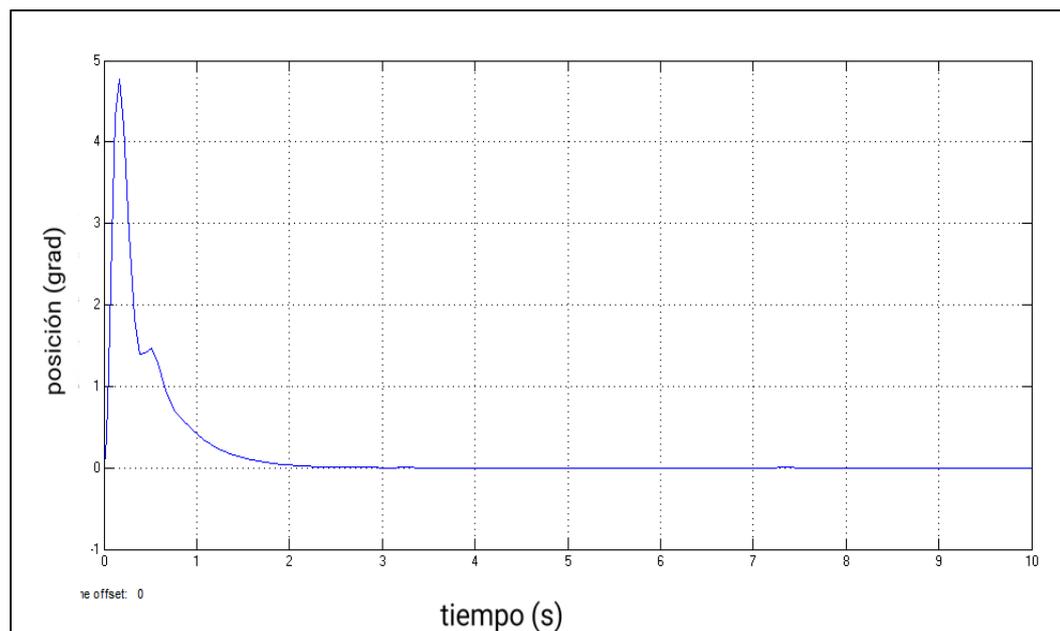
**Figura 16 Control PID para planta lineal en SIMULINK**

En la Figura 16 se observa que un control PID de dos grados de libertad es utilizado para estabilizar el péndulo, después de aplicar una perturbación. La mayoría de técnicas de sintonización de controladores PID son desarrolladas para trabajar sobre los valores de la función de transferencia o polos. Aunque existen técnicas para

obtener las funciones de transferencia a partir de las ecuaciones de estados del sistema, no se utilizan estas técnicas ya que el proceso matemático no es factible para la planta linealizada, en este caso se considera que modificar la estructura del controlador PID resulta más práctica.

Para el controlador regulador que es el que ingresa en la retroalimentación se sintonizan los valores del PID por el método empírico y los valores de K fueron configurados como  $K_p$  es 0.3,  $K_i$  es 1 y  $K_d$  es 1.2. En el modelo presentado por (Moreno, 2001) se indica que el servo-control PID puede tener los mismos valores K del control regulatorio multiplicado por distintos coeficientes para cada ganancia. Se escoge la configuración básica y los valores de K para el controlador en la referencia fueron configurados como  $K_p$  es 1,  $K_i$  es 1 y  $K_d$  es 0.

Entonces el péndulo se estabiliza como se muestra en la figura 17, el sistema parte del estado estable se aplica una perturbación y el controlador vuelve al estado estable en 2 segundos, actuando de manera rápida alejándose de la posición inicial 5 grados, como indican los requerimientos del sistema.



**Figura 17 Respuesta el péndulo vuelve a su posición vertical hacia arriba**

### 3.2.5.2 Control LQR

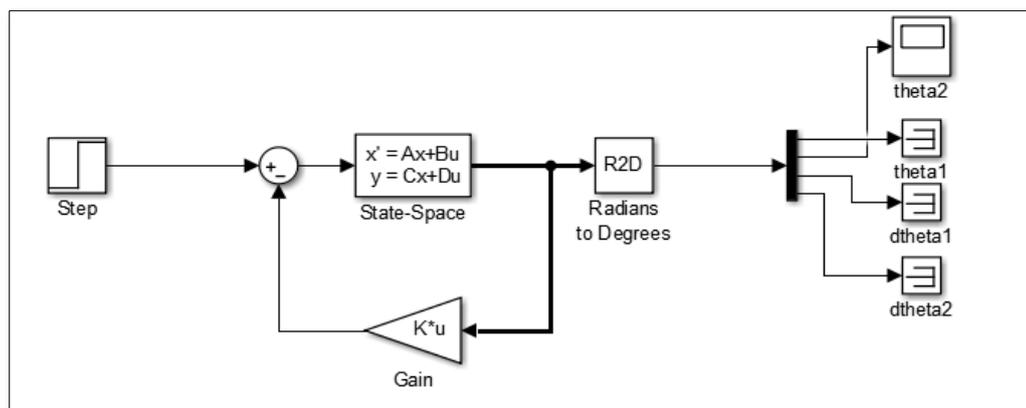
MATLAB® tiene la función LQR implementada que ayuda a conseguir el control óptimo. En este caso Q y R son matrices que deben ser elegidas para equilibrar la importancia relativa de la entrada y el estado de la función, para lograr la optimización. Los pasos a seguir con el fin de encontrar la ganancia de valores son

- Encontrar los valores de A y B, definir las matrices Q y R

- Según (Murray M. , 2006) que  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $R = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

son las matrices más simples, al trabajar el ángulo con radianes en este caso se tiene que el control es óptimo si se considera  $\frac{1}{60} rad$  en el error y  $q_1 = (60)$  o sus múltiplos por lo tanto se tiene que  $q_1 = 6$  y  $\rho = 1$ .

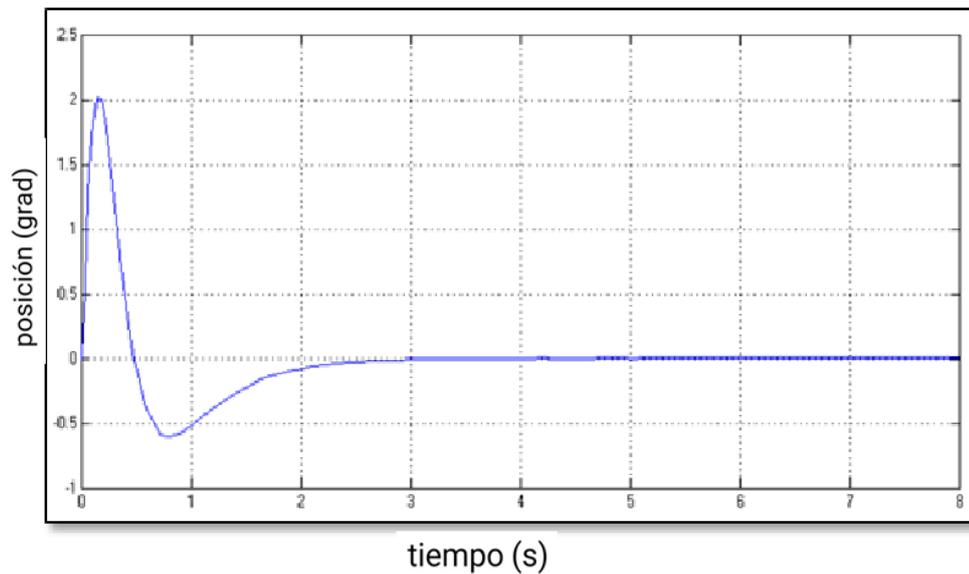
- Usar la función de MATLAB®  $[K, S, E]=lqr(A, B, Q, R)$ . Esta función resuelve la ecuación de Riccati y encuentra los valores de K mostrando la ubicación de los nuevos polos. En la figura 18 se muestra la implementación de la matriz de ganancias.



**Figura 18 Diagrama en SIMULINK del control LQR**

En la figura 19 se muestra el resultado del controlador LQR, el sistema parte del estado estable se aplica una perturbación y el controlador vuelve al estado estable en 2.6 segundos, actuando de manera rápida sin alejarse de la posición inicial, este tiene

un sobre impulso menor al del controlador PID resultando más conveniente a los requerimientos del sistema.



**Figura 19 El péndulo vuelve a la condición inicial en 2.5 segundos**

### 3.3 Control No Lineal y Planta Lineal

Los sistemas de control no lineal son aquellos donde la no linealidad tiene un rol importante en la planta a controlar o en el controlador. Se sabe que el mundo real se comporta de manera no lineal, sin embargo los diseños de control lineal han tenido éxito en muchos sistemas no lineales cuando estos son aproximados a sistemas lineales o linealizados. En la práctica para los sistemas no lineales existe comúnmente un diseño basado en un conjunto de modelos lineales que es válido para un rango representativo. Por lo tanto, la mayoría de los casos el modelo de la planta lineal es usado para el diseño del sistema de control ya que el comportamiento se acerca a las condiciones reales del sistema real.

En los últimos años investigaciones de la teoría de control no lineal ha venido desarrollándose con gran interés por parte de la comunidad científica de ingeniería en control. Ya que en la actualidad son necesarios controladores más eficaces donde se

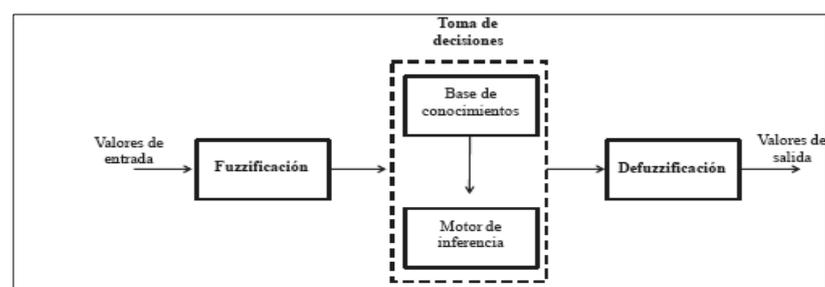
necesitan márgenes de operación mayores o una respuesta más rápida, entonces los efectos no lineales tendrán más importancia en la dinámica del sistema. Una gran diferencia del control no lineal es que no hay un método de diseño general a seguir, ya que cada problema no lineal tiene una técnica aplicable que funciona mejor.

### 3.3.1 Control Fuzzy

El Control Fuzzy es una técnica práctica para una variedad de aplicaciones de control desafiantes ya que provee un método conveniente para construir un controlador no lineal con el uso de información heurística. Este tipo de control proviene de la lógica difusa en donde un valor del conjunto de entrada puede pertenecer a distintos valores del conjunto de salida, la información para este tipo de controladores es considerada variable entre un valor verdadero total o falso total.

Tal información heurística puede venir de un operador que actúa como un humano en el lazo del control de un proceso. En el diseño del Control Fuzzy, se pide al operador escribir un conjunto de reglas de cómo se puede controlar el proceso basado en la experiencia, entonces se incorpora esto en un Controlador Fuzzy que emula el proceso de tomar decisiones que es realizado por el humano. (Kevin M. Passino, 1998)

En otros casos la información heurística viene de la ingeniería de control que ha llevado a cabo extensos modelos matemáticos, análisis y desarrollo de algoritmos de control para ciertos procesos particulares. La experiencia es cargada dentro del Controlador Fuzzy para automatizar los procesos de razonamiento y las acciones del humano experto.



**Figura 20 Estructura del modelo difuso**

Fuente: (Lara-Valencia, Luis Augusto, Valencia-Gonzalez, Yamile, & Vital de Brito, José Luis, 2016)

Los controladores Fuzzy constan de la etapa de Fuzzificación donde los valores son convertidos a valores difusos, es decir se realiza la asignación del valor dentro del conjunto difuso, la siguiente etapa es la toma de decisiones que es la que contiene el conocimiento del comportamiento que deberá tener el sistema y los objetivos de control. El modelo maneja un conjunto de reglas Si- Entonces y cada regla representa la relación con la entrada local lineal y la salida del sistema. La inferencia relaciona los conjuntos de entrada-salida para generar respuestas de acuerdo a las condiciones. Por último, la defuzzificación cambia los valores difusos generados al lenguaje de valores reales.

Independientemente de donde venga el conocimiento heurístico de control, el control difuso proporciona un formalismo fácil de usar para la representación y la implementación de las ideas que tenemos acerca de cómo lograr un control de alto rendimiento.

### **3.3.1.1 Control Fuzzy para la planta lineal del péndulo invertido**

El controlador a realizar es el estabilizador que se encarga de mantener al péndulo en su posición vertical hacia arriba. Las dos variables de entrada son los ángulos  $\theta_2$  y  $\dot{\theta}_2$  y la variable de salida es el torque que deberá tener el servo motor. Cada variable es descompuesta en un conjunto de regiones Fuzzy llamadas etiquetas. Para el caso de estos valores de entrada se consideran los siguientes valores para la posición del ángulo del péndulo y la velocidad del mismo.

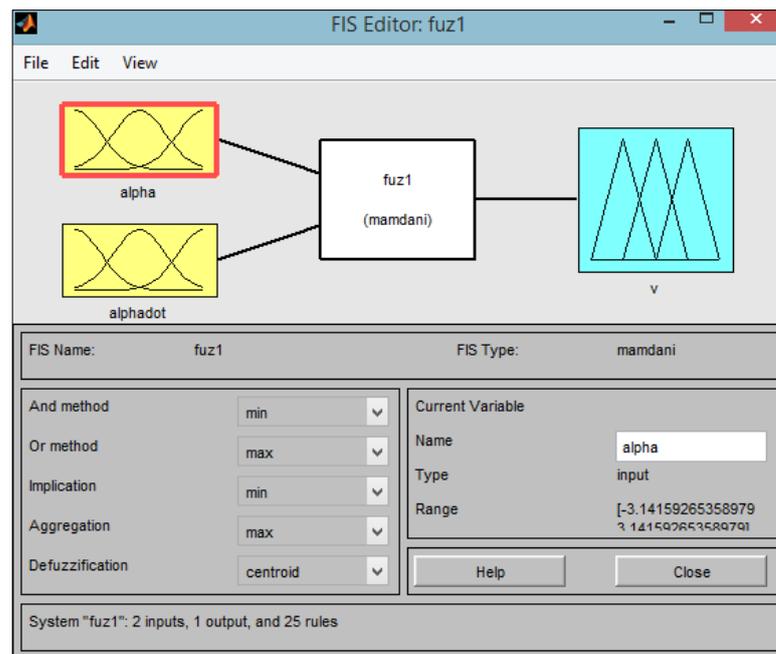
Las etiquetas son las siguientes por sus siglas en inglés Grande Negativo (NB), Negativo Pequeño (NS), Cero (Z), Pequeño Positivo (PS) y Grande Positivo (PB). Basados en la experiencia y entendimiento de las características de comportamiento del sistema, las funciones de pertenencia de la premisa más fácil de aplicar suelen ser triangulares.

Una ley lineal de retroalimentación de estados puede ser mapeada dentro del motor de inferencia para desarrollar el Controlador Fuzzy estabilizador para sistemas como el Péndulo Invertido Rotacional

**Tabla 4**  
**Reglas de inferencia para el Controlador Fuzzy de Balanceo**

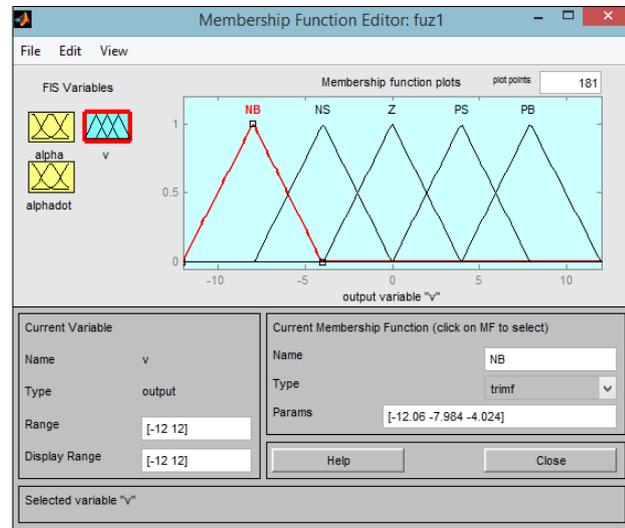
$\theta_2$ / $\dot{\theta}_2$	NB	NS	Z	PS	PB
NB	PB	PB	PB	PS	Z
NS	PB	PB	PS	Z	NB
Z	PB	PS	Z	NS	NB
PS	PS	Z	NS	NB	NB
PB	Z	NS	NB	NB	NB

Para implementar el Control Fuzzy en MATLAB, se escribe desde la ventana de Windows y se abre el editor, se indica las entradas y la salida y las características de estas variables. Ver Figura 22.



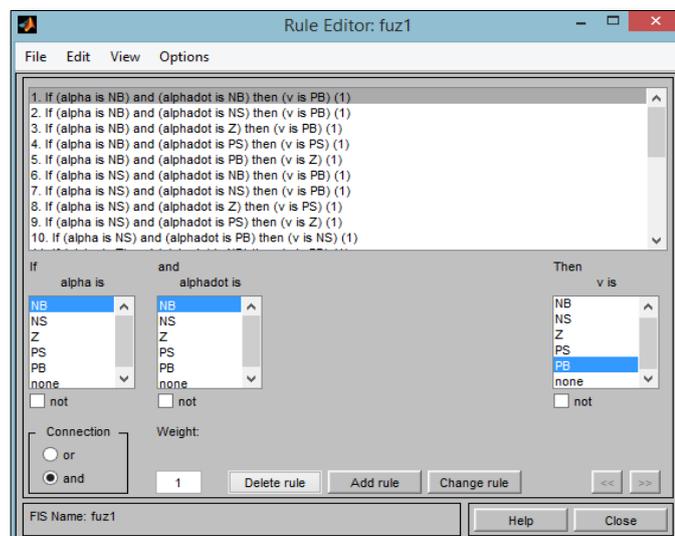
**Figura 21** Establecimiento de los valores de entrada y salida

Se establecen el tipo de función de pertenencia para este caso se utilizó la triangular porque es la de más fácil implementación. Ver Figura 23



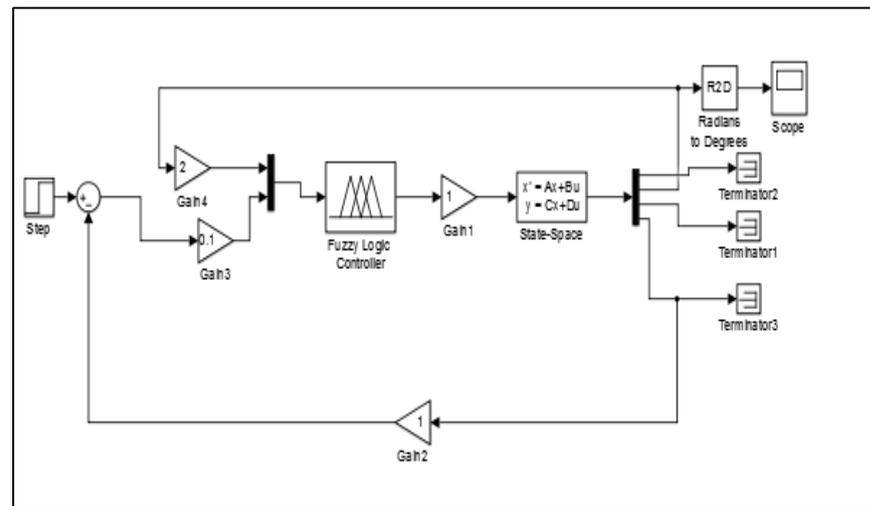
**Figura 22 Selección del tipo de función de pertenencia**

Las reglas de pertenencia tienen que ser configuradas para cada una de las opciones posibles, en este caso son 25 reglas las que cubren el total de probabilidades que puede tener el sistema. Ver Figura 24.



**Figura 23 Configuración de las reglas de inferencia**

Una vez diseñado el controlador, se guarda y se exporta al espacio de trabajo. En la librería de Simulink se selecciona el Controlador Fuzzy y se escribe el nombre del archivo sin la notación “fis” que se vaya a implementar, si el archivo se encuentra en el espacio de trabajo la ventana de configuración del controlador se guardará con éxito. Ver Figura 25.

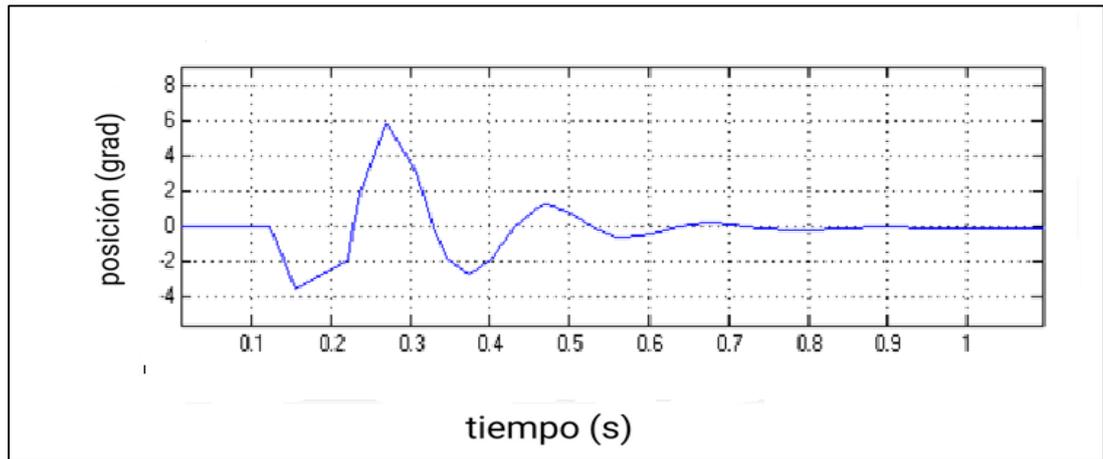


**Figura 24 Simulación del controlador Fuzzy en Simulink**

En la Figura 26 se observa la respuesta del sistema, en este caso el péndulo vuelve a su condición inicial antes de 1 segundo lo que quiere decir que la acción de control es bastante rápida

## 2.10 Tipos de no linealidad

Cuando una estructura rota significativamente las teorías básicas no son útiles para representar la deformación. Las rotaciones en los cuerpos rígidos causan componentes distintos de cero del tensor de deformación. Esto hace que se provoquen tensiones que no deberían aparecer en un cuerpo rígido, este tipo de no linealidad es conocida como rotaciones largas



**Figura 25 Respuesta del sistema no lineal para el Control Fuzzy**

.Otro tipo de no linealidad es la tensión rígida de una estructura que puede algunas veces cambiar significativamente debido a los efectos geométricos no lineales. Las tensiones rígidas son importantes en sistemas rotativos donde las fuerzas centrífugas pueden introducir tensiones de tracción significantes.

Aun cuando puede haber diferentes tipos de no linealidad en sistemas dinámicos, la amortiguación no lineal es la fuente dominante de no linealidades dentro de un sistema práctico. El amortiguamiento no lineal muchas veces es incrementado por el nivel de excitación, por lo tanto la respuesta relativa del sistema comparada con el nivel de excitación es reducida. El contacto también puede afectar a la rigidez. Como una desviación del sistema. Dependiendo de la geometría del sistema el cambio puede ser pequeño (en cuyo caso una aproximación lineal puede ser aceptable) o grande.

La no linealidad que fue considerada fue la fricción que ocurre entre las superficies de los engranajes en contacto estas superficies son naturalmente rugosas y. el contacto da lugar a un número de asperezas que se deforman bajo cargas normales y tangenciales. (Gafvert, 1999)

### 3.4 Control y Fricción

La fricción ocurre en todos los sistemas mecánicos, por ejemplo en cojinetes, transmisiones, cilindros neumáticos e hidráulicos, válvulas, frenos y llantas. La

fricción es altamente no lineal y puede causar errores de estado estable, ciclos límite y un rendimiento pobre. En sistemas de control de posición y velocidad con requerimientos altos de precisión la fricción tiene un fuerte efecto negativo en la calidad del controlador por esta razón cuando se trata de controlar el péndulo real no se puede omitir la fricción.

### 3.5 Modelamiento de la fricción

La fricción es un fenómeno natural que es un poco difícil de modelar, pero contar con un modelo de fricción puede ayudar en diferentes propósitos. En algunos casos se desea tener un modelo que proporcione información sobre el mecanismo físico y la interacción con la fricción. En otros casos basta con un modelo que pueda predecir el comportamiento global cualitativo de un sistema con fricción. Si el modelo es para ser utilizado para la compensación de la fricción se debe considerar que puede haber limitaciones en la complejidad computacional del modelo. Hay muchos propósitos para realizar el modelado de fricción tales como

- Análisis matemático de la fuerza de fricción.
- Simulaciones: Comportamiento global, cualitativo y de alta fidelidad.
- Observación física
- Realizar la compensación de la fricción.

#### 3.5.1 Modelos Estáticos

El modelo estático más conocido es el modelo estático de Coulomb donde se define:

$$F = F_c \operatorname{sgn} \dot{\varphi} \quad 3.12$$

Donde  $F_c$  es proporcional a la carga normal estándar. Esta fórmula describe la fricción como una fuerza libre. Por lo tanto se asume que si la velocidad es cero y la fuerza total sobre el sistema es más pequeña que la fricción estática  $F_s$  entonces no existe movimiento. El movimiento ocurre cuando la fuerza aplicada es mayor que  $F_s$ . Una estimada fuerza de fricción es obtenida a través de este modelo.

$$F = F_c \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}) \text{ si } \dot{\varphi} \neq 0 \quad 3.13$$

$$\hat{F} = F_c \operatorname{sgn}(\bar{F}) \text{ si } \varphi = 0$$

Donde  $(\bar{F})$  es la fuerza resultante sobre la unión del brazo.

### 3.5.2 Modelos Dinámicos

#### 3.5.2.1 Modelo Dahl

Inspirado por las características de tensión-deformación de un mecanismo sólido Dahl propuso el siguiente modelo a partir de la ecuación (3.12).

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left( -\frac{F}{F_c} \operatorname{sgn}(v) \right) \quad 3.14$$

Donde  $x$  es el desplazamiento y la fricción depende solo de la posición. En el dominio del tiempo ( $\alpha = 1$ )

$$F = \sigma z \quad 3.15$$

$$\dot{z} = v - \frac{\sigma |v|}{F_c} z$$

El modelo de Dahl modela el pre desplazamiento y el retardo de la fricción, pero no la fricción estática o el efecto Stribeck.

#### 3.5.2.2 Modelo de la Cerda

Este modelo fue diseñado por Hessig y Friedland y consiste en modelar puntos de contacto microscópicos en las uniones ásperas y para calcular se utiliza el siguiente algoritmo.

$$F = \sum_{\sigma_0(x_i - b_i)}^N i^2 \quad 3.16$$

Donde  $N$  es el número de cerdas,  $\sigma_0$  es la rigidez y  $(x_i - b_i)$  es la desviación. Este modelo es ineficiente debido a la complejidad.

### 3.5.2.3 Modelo de reseteo integral

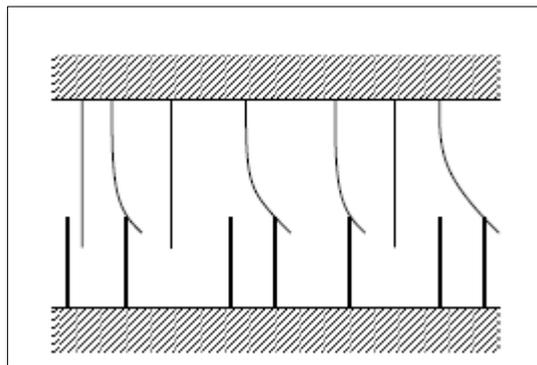
Fue propuesto para hacer el modelo de la cerda computacionalmente factible, en lugar de cortar una cerda, el vínculo se mantiene constante en el punto de ruptura.

$$F = (1 + a(z)\sigma_0(v)z + \sigma_1 \frac{dy}{dx}) \quad 3.17$$

Con este modelo es mucho más fácil simular que el modelo de la cerda.

### 3.5.2.4 Modelo Lu-Gree

El modelo de Lund-Grenoble fue introducido por Canudas de Wit. A partir del trabajo de (Olsson, 1996) se puede indicar que el modelo Lu-Gree es una extensión del modelo de Dahl. Cuando una fuerza tangencial es aplicada a las cerdas estas se desvían como cuerdas. Si la desviación es bastante larga la cerda comienza a deslizarse. El promedio de desviación de la cuerda para un estado estable es determinado por la velocidad. Este es menor a bajas velocidades lo que implica que la desviación en estado estable disminuye al aumentar la velocidad. Este modelo modela el fenómeno donde las superficies se alejan debido a la lubricación y el modelamiento del efecto Stribeck (disminución de la fricción a medida que aumenta la velocidad). El modelo también incluye el fenómeno de la variación de la fuerza de frenado y el retraso de la fricción. El modelo se expresa de la siguiente forma.



**Figura 26 Fricción entre las dos superficies como contacto entre cerdas**

Fuente: (Henrik Olson, 1996)

$$\frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \quad \mathbf{3.18}$$

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-(v/v_s)^2} / \sigma_0$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt}$$

Donde  $z$  es el promedio de la desviación de la cuerda. El parámetro  $\sigma_0$  es la rigidez de la cuerda y  $\sigma_1$  el coeficiente de amortiguamiento. La función  $g(v)$  modela el efecto Stribeck que es cuando la fricción disminuye con el incremento de velocidad. El parámetro  $F_c$  corresponde a la fuerza de fricción de Coulomb y  $F_s$  es la fricción estática. El modelo ofrece algunas propiedades de la fricción como el aumento de la fricción en el torque a bajas velocidades. En el péndulo el estado  $z$  no puede ser medido, por lo tanto se debe usar un observador para estimar la fricción.

### 3.5.3 Compensación de la fricción

Para el control de movimiento de los sistemas electromecánicos la estructura del controlador puede ser un lazo de corriente, un lazo de velocidad o un lazo de posición. Es muy difícil introducir la compensación de la fricción dentro del lazo de corriente porque no es fácilmente accesible. La mayoría de los esquemas de compensación de fricción son implementados en la velocidad. La compensación de la fricción es difícil si existe dinámica entre la señal de control y el punto donde la fuerza de fricción entra al sistema. El modelo basado en los esquemas de compensación de la fricción usa modelos matemáticos de fricción. Una forma directa de reducir los efectos de la fricción es usar una ley de control.

$$u(t) = u_{lin} + \tilde{F}(t) \quad \mathbf{3.19}$$

Para usar esta fórmula para modelar la compensación de la fricción es necesario tener un observador para conocer el estado  $z$ . El valor estimado  $\tilde{z}$  puede ser usado para determinar el estimador de la fuerza de fricción  $\tilde{F}$  en la ley de control.

### 3.5.3.1 Observadores de lazo abierto

La dinámica en este modelo es estable y rápida. La solución más simple es usar un observador de lazo abierto. El parámetro de regularización  $\epsilon$  es introducido para evitar un potencial problema cuando  $v = 0$ .

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{z}}{dt} &= \epsilon - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} \tilde{z} & \mathbf{3.20} \\ \tilde{F} &= \sigma_0 \tilde{z} + \sigma_1 \frac{d\tilde{z}}{dt}\end{aligned}$$

### 3.5.3.2 Observadores con retroalimentación

Un observador más complicado es obtenido por la introducción de la retroalimentación de otras señales en el sistema. Donde la retroalimentación del observador  $e$  está relacionado con la estimación de la señal de error como se muestra en la Figura 28. Se asume que la fricción afecta al sistema de entrada. Se sugiere usar el control del error como observador de retroalimentación pero más opciones son posibles.

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{z}}{dt} &= v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} \tilde{z} - ke & \mathbf{3.21} \\ \tilde{F} &= \sigma_0 \tilde{z} + \sigma_1 \frac{d\tilde{z}}{dt}\end{aligned}$$

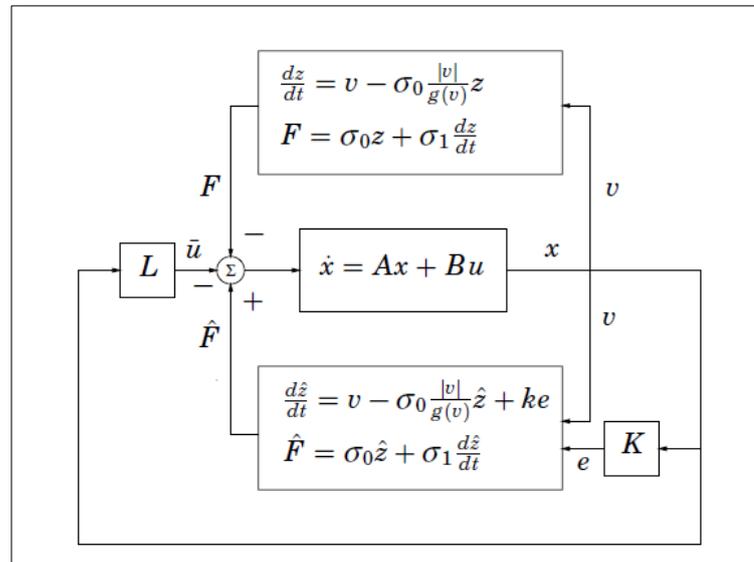
La fricción entra al sistema como entrada. Si el error es  $e = Lx$  y si  $\tilde{F} = F - \tilde{F}$  y  $\tilde{z} = z - \tilde{z}$ . La ecuación del error es:

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} \tilde{z} - kLx \quad \mathbf{3.22}$$

Entonces el sistema en lazo cerrado es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= Ax + B(u - F) & \mathbf{3.23} \\ u &= \tilde{F} + \tilde{u}\end{aligned}$$

$$\tilde{u} = -Kx$$



**Figura 27 Observador LuGre basado en compensación de la fricción y la retroalimentación de estados lineal**

Fuente: (Henrik Olson, 1996)

### 3.5.4 Modelo lineal con fricción y el sistema de control

El péndulo invertido es un ejemplo adecuado para estudiar el fenómeno de la fricción y la compensación de la fricción ya que los efectos de la fricción son notables en estos tipos de ejemplos. En la Figura 29 se muestra el ejemplo de la planta lineal con el controlador LQR. Este controlador asegura la estabilidad del sistema en el punto de equilibrio estable. El modelo de fricción no lineal es añadido al sistema y para mejorar el rendimiento se añade un observador en lazo cerrado con fricción.

En la figura 30 se observa la implementación en Simulink de la fricción, en la parte inferior está la planta lineal con el control LQR, en la mitad se implementa la fricción al sistema y en la parte superior se muestra la fricción con retroalimentación para mejorar la respuesta del sistema a la fricción añadida

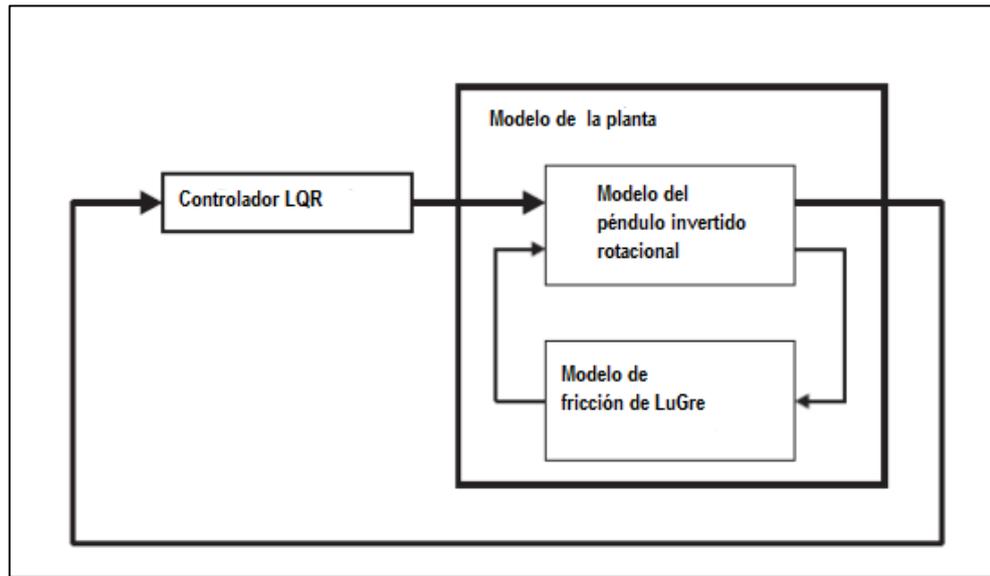


Figura 28 Observador LuGre basado en la compensación de la fricción

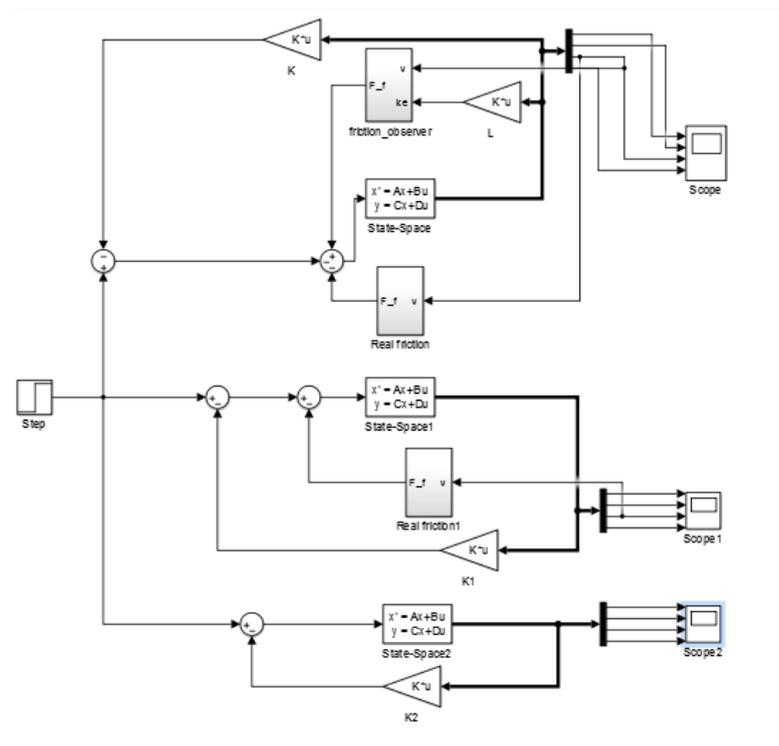
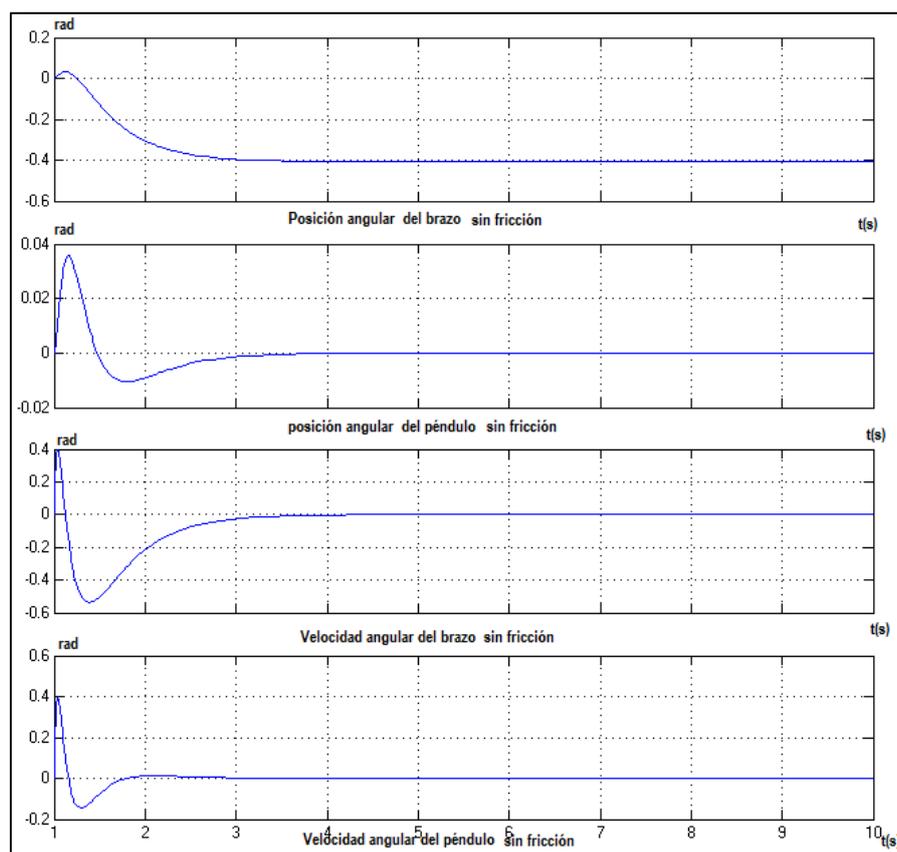


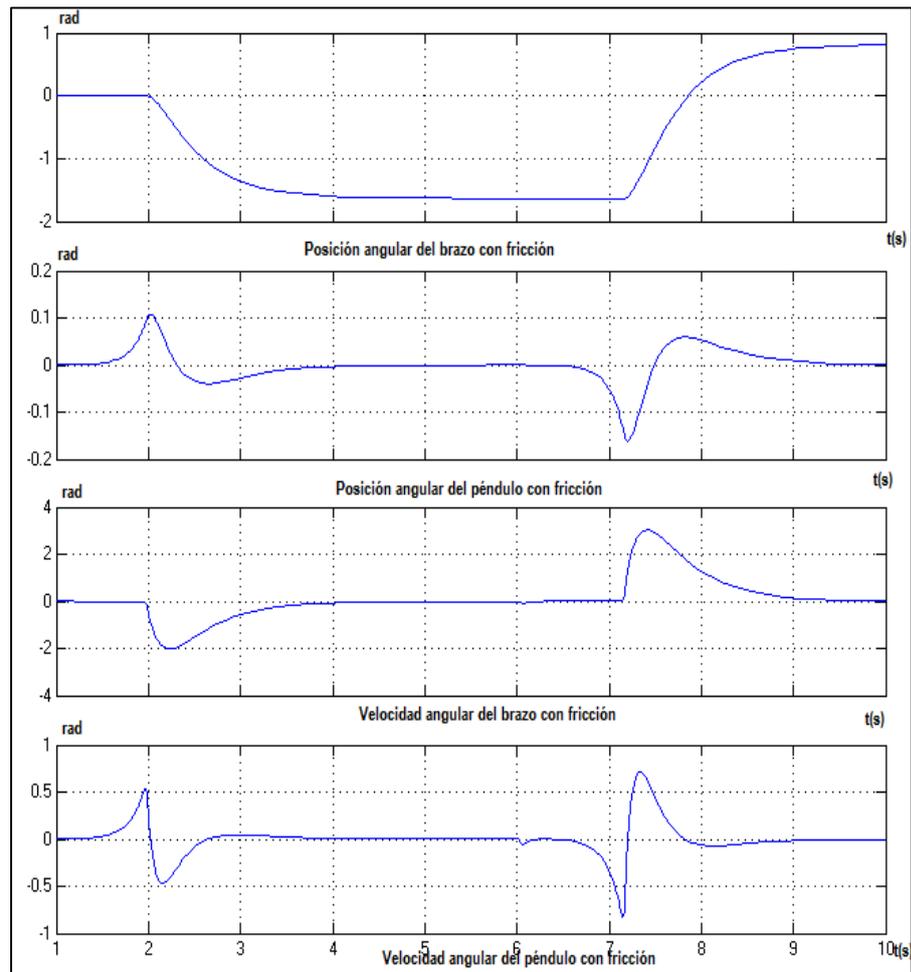
Figura 29 Observador LuGre implementado en Simulink

En la Figura 30 se muestra la respuesta de la planta lineal aplicado el control LQR sin añadir fricción, se analizan las cuatro variables de estado del sistema disponible, si se aplica un impulso la posición angular del brazo se mueve y se estabiliza en 0,4 rad, en el caso del péndulo este vuelve a su posición original a los 2.5 segundos como se había comprobado con anterioridad. Para las velocidades luego de aplicado el impulso, estas vuelven a estabilizarse en cero, indicando que el sistema está controlado.



**Figura 30 Sistema de control LQR sin fricción**

En la figura 31 se muestra el comportamiento de la planta junto con el modelamiento de la fricción, una vez el sistema alcanza su estado estable, la fricción causa oscilaciones en las posiciones del brazo haciendo que el controlador vuelva a actuar para controlar el sistema.

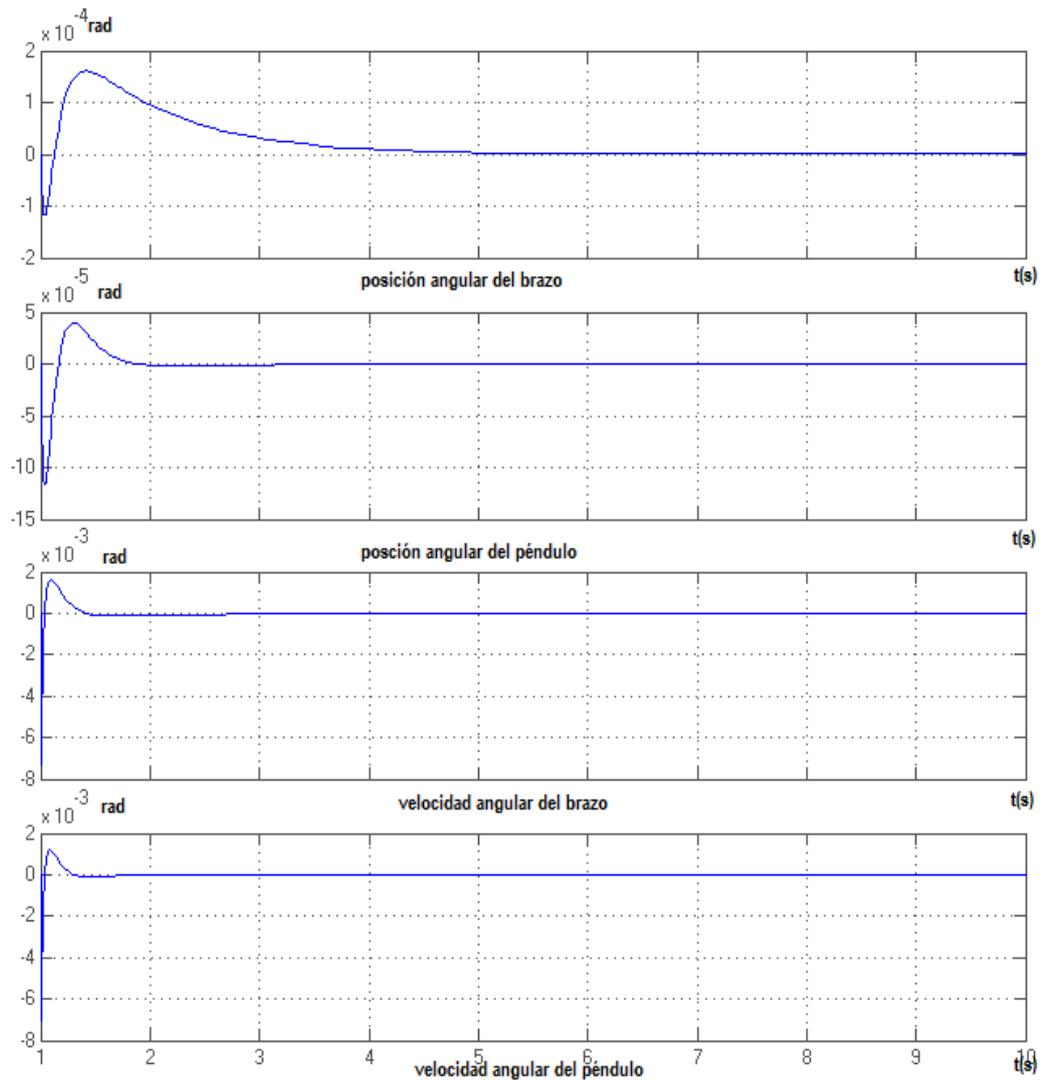


**Figura 31 Sistema de control LQR añadida el modelamiento de la fricción**

Una vez se implementa el observador de la fricción la respuesta mejora a comparación de a respuesta inicial sin el observador y sin la fricción, como se puede verificar en la Figura 32.

### 3.6 Diseño de sistemas de control para el modelo no lineal

Para tener un mejor rendimiento en el diseño de los sistemas de control es necesario implementarlos en la planta no lineal, el diseño de dos controladores trabaja de forma separada al inicio.



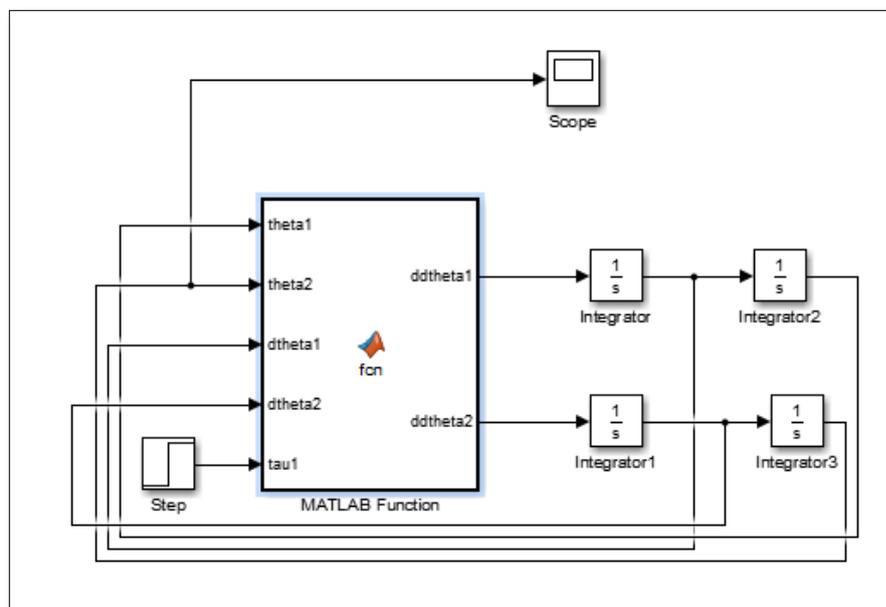
**Figura 32 Respuesta con compensación de la fricción y control LQR**

El primer controlador es el Control Óptimo LQR que actúa como controlador estabilizador, la función de este controlador es tomar el péndulo y estabilizarlo en la posición vertical hacia arriba. Para este controlador el diseño de controlador por retroalimentación de todas las variables de estado fue diseñado asumiendo que todas las variables de estado eran medibles ya que se contaba con las dos señales de los ángulos del brazo y del péndulo.

Para levantar el péndulo de la posición colgante hacia a la posición vertical levantada se realizó el diseño del controlador de energía. Este controlador trata de dar

la energía suficiente para que el péndulo se levante 180 grados, una vez alcanzada una región donde se considera que el péndulo está en la posición vertical hacia arriba, el controlador estabilizador actúa y mantiene el péndulo levantado. Es decir que cuando el péndulo alcance su punto de equilibrio un conmutador es activado para cambiar del controlador de energía al controlador estabilizador.

En la figura 33 se muestra el modelo de la planta no lineal, las ecuaciones de movimiento no lineal representada por la ecuación (2.48) es añadida en código en un bloque de función de MATLAB®, como se muestra en el anexo 3. Esta ecuación ofrece solo dos estados de aceleración de la planta por lo que se integra una vez para obtener la velocidad y una segunda para la posición. En el integrador se establecen también las condiciones iniciales de la planta.



**Figura 33 Modelo no lineal del péndulo en Simulink**

### 3.6.1 Diseño LQR estabilizador en la planta no lineal

El problema de implementar un controlador óptimo LQR es que la ecuación no lineal diferencial de Riccati debe ser resuelta. La principal idea de un controlador LQR es minimizar el costo cuadrático de la función  $J = \int_0^{\infty} x(t) Q_x(t) + Ru(t)dt$ . Independientemente de los valores de Q y R, el costo de la función tiene un único

valor mínimo que puede ser conseguido al resolver la ecuación de Riccati basadas en los pesos de las matrices. Básicamente, cuando se escoge un valor de R más grande significa que el control estabiliza el sistema con menos energía. Esto es conocido como “expensive control”. Entonces, cuando se escoge un menor valor para R se conoce como estrategia “cheap control”. De forma similar, un valor grande de Q significa tratar de estabilizar el sistema con mínimos cambios posibles en los estados. Ajustando el ratio entre Q y R hacia un “cheap control”, la robustez del péndulo a las perturbaciones es mejorada.

El rendimiento del lazo cerrado de control es afectado cuando se cambian los pesos de Q y R. Por ejemplo la entrada del controlador va a trabajar más fuerte y se necesita una ganancia grande K, para generar una matriz grande Q. De forma similar, si el peso de la matriz R es hecho más pequeño, se necesita una ganancia grande. De esta forma se identifica las características que deben tener las matrices dentro del diseño del control LQR.. En general las matrices Q y R son matrices diagonales y determinan la respuesta del controlador LQR. La variación de estas matrices hace que el sistema pueda aumentar el tiempo de estabilización o el tiempo de levantamiento. Lineal.

Para mejorar el rendimiento del controlador, se escogen valores pequeños para tener un “cheap control”. Una forma básica de escoger los valores de las matrices es tomando  $Q=C \times C^T$  y  $R=1$ . Escogidos Q y R es fácil encontrar la ganancia óptima en MATLAB® a través de la función LQR. En el caso del péndulo invertido rotacional el objetivo es mantener el péndulo balanceado aplicando el torque al brazo. El controlador entrega un voltaje al motor que aplica el torque al brazo, la cantidad de voltaje depende de la posición y velocidad angular tanto del brazo como del péndulo. El problema de esta implementación surge al intentar implementar una metodología diseñada para un sistema lineal en un sistema no lineal. Los valores de la matriz Q son

$$Q = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix} R = 1 \quad 3.24$$

Para estabilizar el controlador el controlador debe tener la siguiente estructura a partir de la ecuación (3.5).

$$u = 0 \quad 3.25$$

$$u = -Kx$$

$$K = [k_1 k_2 k_3 k_4]$$

$$A - BK \quad 3.26$$

La matriz K con las ganancias debe determinarse de manera que  $x$  tienda a cero conforme el tiempo crezca. Se debe verificar también la contabilidad de la planta, el sistema es controlable si la matriz (3.26) tiene rango completo, esta propiedad asegura que siempre se pueden encontrar valores de ganancia K que consigan asignar a los eigenvalores de la matriz (3.26) en cualquier valor que se desee, los eigenvalores tienen parte real negativa.

$$[B \ AB \ A^2B \ A^3B] \quad 3.27$$

Se utiliza la función “ctrb” de MATLAB® que indica que el sistema es controlable. Los valores de las matrices encontrados para esta planta fueron. Establecidos los valores de Q y R se utiliza la función “lqr” de MATLAB® para encontrar los valores de K que se indican en (3.28)

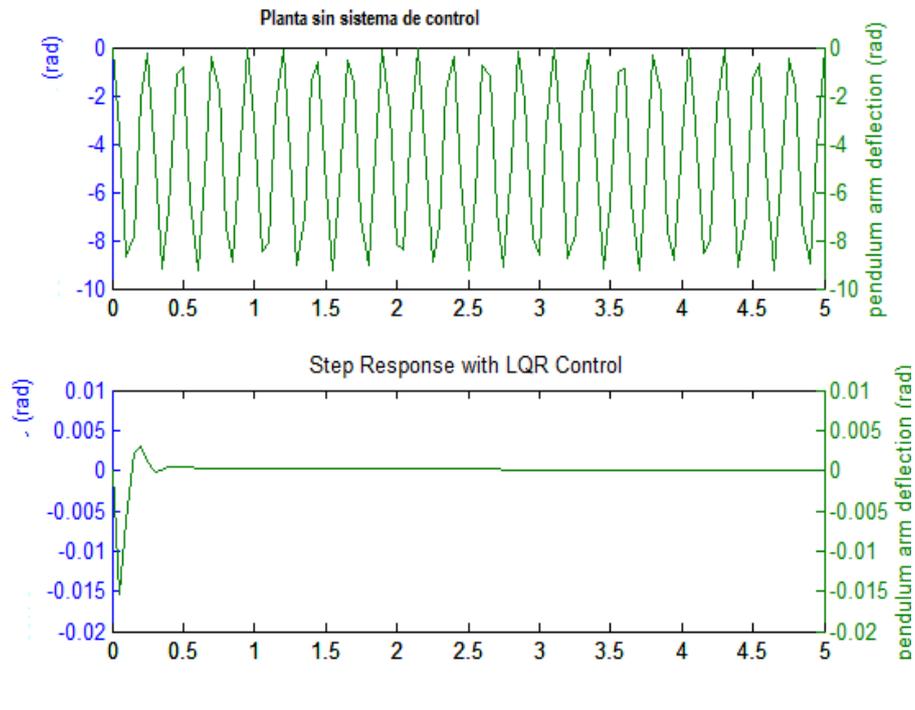
$$K = [0.1000 \ -6.8034 \ 0.2272 \ -0.1195] \quad 3.27$$

En la figura 34 se observa la respuesta del controlador para la planta con los valores de K encontrados, se verifica que el controlador puede ser aplicado a la planta no lineal. Lo siguiente es aplicar las ganancias para la planta no lineal en Simulink como se observa en la figura 35 el controlador LQR es la matriz de ganancias cuya salida va al motor y este entrega el torque que la planta necesita para estabilizar el sistema.

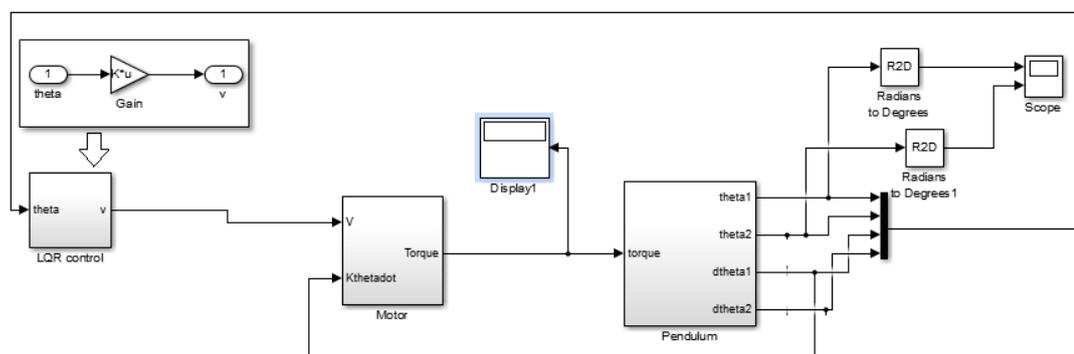
### 3.6.2 Levantamiento del péndulo

Después de obtener el controlador estabilizador para mantener el péndulo levantado, se debe continuar con el diseño de un controlador que sea capaz de levantar el péndulo a una región donde el control estabilizador pueda tomar el mando y estabilizarlo. La estrategia más común para levantar el péndulo es el control de energía

basado en el algoritmo propuesto por (Furuta, 1999) el cual adopta la función de Lyapunov formada por la función de la energía.



**Figura 34** Respuesta del control LQR en la planta no lineal.



**Figura 35** Implementación del control LQR en Simulink

La energía del péndulo invertido rotacional para cualquier ángulo dado es una suma de la energía cinética y la energía potencial. Se intenta dar al brazo un torque que permita al péndulo alcanzar la energía que posee el sistema en la posición vertical

levantada donde la energía potencial máxima es lograda. El método consiste en usar la energía total del sistema como una cualidad de retroalimentación. El controlador trata de regular entonces la energía cinética y potencial del péndulo para alcanzar el nivel de energía buscado.

### 3.6.3 Control de energía para levantar el péndulo

Muchas tareas de control pueden ser conseguidas si se controla la energía en lugar de intentar controlar, la posición o la velocidad. Para entender la teoría detrás del concepto de energía en el trabajo de, (K.J Astrom, 1999) se muestra las ecuaciones matemáticas que explican tal concepto. La ecuación de movimiento del péndulo es

$$J\ddot{\theta}_2 - mgl \sin \theta_2 + mul \cos \theta_2 = 0 \quad 3.28$$

Donde  $J$  es el momento de inercia con respecto al pivote,  $m$  es la masa del péndulo,  $l$  es la distancia desde el pivote al centro de masa, la gravedad es  $g$  y la aceleración del pivote es  $u$ . El sistema tiene dos variables de estado el ángulo  $\theta_2$  y la tasa de cambio de este  $\dot{\theta}_2$ . En este modelo la fricción no es considerada y se asume que no hay limitaciones de velocidad en el pivote. La energía del péndulo sin control cuando  $u = 0$  es

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2 + mgl(\cos \theta_2 - 1) \quad 3.29$$

Para ejecutar el control de energía es necesario entender como la energía influencia el sistema con la aceleración del pivote. La derivada de la energía con respecto al tiempo que se muestra en la anterior ecuación es utilizada en conjunto con la ecuación de movimiento del péndulo para obtener

$$\frac{dE}{dt} = J\dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2 + mgl\dot{\theta}_2\cos\theta_2 = -mul\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \quad 3.30$$

Esta última ecuación implica que el control de energía es una tarea sin mayor complejidad ya que el sistema puede ser considerado como un integrador con ganancia variable. La energía puede ser controlada por un controlador integrador con una pequeña no linealidad y la efectividad del control es mejor cuando el ángulo es cero o  $\pi$  y cuando la velocidad tiene valores altos. Para aumentar la energía la aceleración

del pivote  $u$  debe ser positiva cuando la cantidad  $\dot{\theta}_2 \cos \theta_2$  es negativa. La ley de control es obtenida por la función de Lyapunov.

$$V = \frac{1}{2} (E_{total} - E_{subida})^2 \quad 3.31$$

Para poder cambiar la energía lo más rápido posible la magnitud de la señal de control debe ser lo más grande posible. Y esto se puede lograr si se aplica lo siguiente a la ley de control.

$$u = K_1 (E_{total} - E_{subida}) \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \quad 3.32$$

Esta función lleva a  $v = |E_{total} - E_{subida}|$  a cero y la energía alrededor de los niveles de  $E_0$ . Para evitar estos valores se añade una función de saturación.

$$u = \operatorname{sat}_{ng} K_1 (E_{total} - E_{subida}) \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \quad 3.33$$

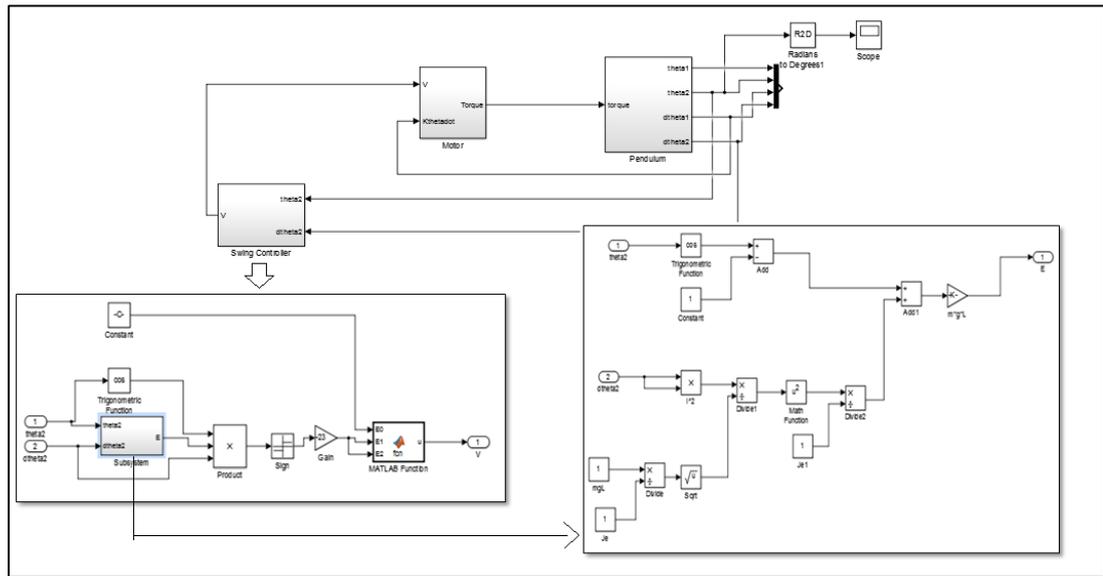
La energía del péndulo es definida como cero en la posición estable hacia arriba y  $-2mgl$  en la posición vertical hacia abajo. De acuerdo con esta convención la aceleración es siempre positiva cuando el péndulo comienza desde el reposo en la posición vertical hacia abajo.

#### 3.6.4 Diseño de control de energía en Simulink

Para la implementación del control de energía se creó un sub-sistema que contiene las ecuaciones básicas mencionadas, otro bloque fue creado para calcular los límites de la energía cuando el controlador es accionado. En la figura 36 se muestra los subsistemas que conforman el control swing up, los valores de los momentos de inercia fueron tomados de la simulación en ADAMS®.

#### 3.6.5 Conmutación de controladores

El objetivo final es mover al péndulo de su posición vertical colgante hacia la posición vertical levantada, la parte del sistema que se mueve por efecto directo del movimiento del motor es el brazo. Para levantar el péndulo es posible dar cierta energía al sistema, el nivel de energía deseado es el nivel que tiene el sistema cuando el péndulo está en posición vertical hacia arriba.



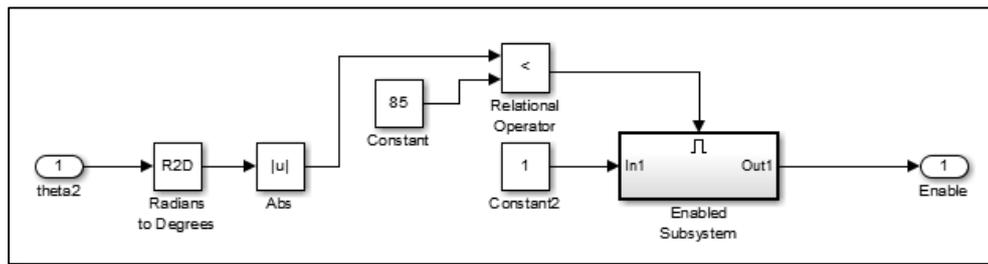
**Figura 36 Control de energía implementado en Simulink**

Una vez diseñados el control de energía y el control estabilizador se hace necesario la conmutación entre estos dos controladores con el objetivo de crear un control total para el péndulo invertido rotacional.

Ahora el diseño se centra en determinar las condiciones donde el controlador estabilizador puede tomar el péndulo durante el lapso que este se está levantando hacia el punto de equilibrio vertical hacia arriba y mantener su posición. La región donde se debe establecer la conmutación es determinada por el tiempo en el cual la estabilización puede exitosamente balancear al péndulo. La región se define entre 5 y 10 grados desde la posición vertical hacia arriba es decir de 170 a 190 grados. La figura 37 muestra la utilización del bloque habilitador del sistema en Simulink que fue utilizado para la conmutación de los controladores.

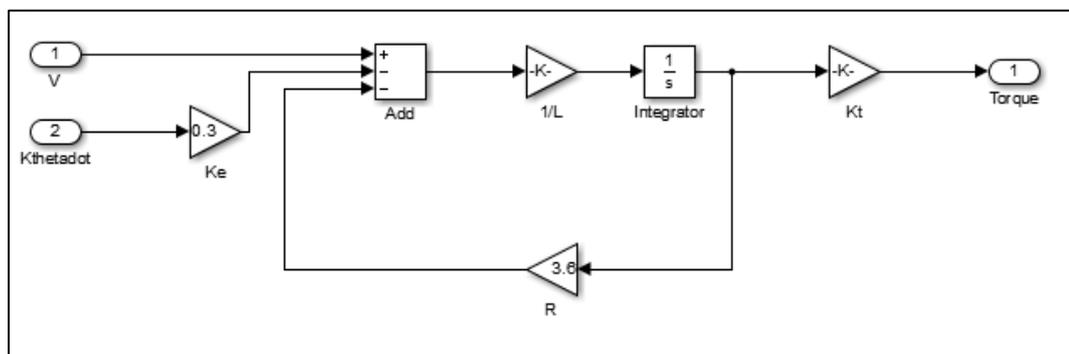
### 3.6.6 Simulación conjunta en Simulink con la planta no lineal

Se observan en las figuras 35 y 36 que la entrada a la planta es el torque ya que no se consideraron los parámetros del motor, por lo tanto el controlador entrega el voltaje necesario a otro bloque que simula la acción del motor y este es el encargado de entregar el torque a la planta.



**Figura 37 Sistema de conmutación entre controladores**

Se muestra en la figura 38 los parámetros eléctricos del motor, los parámetros son los del motor real, estos parámetros estaban disponibles como información del laboratorio.

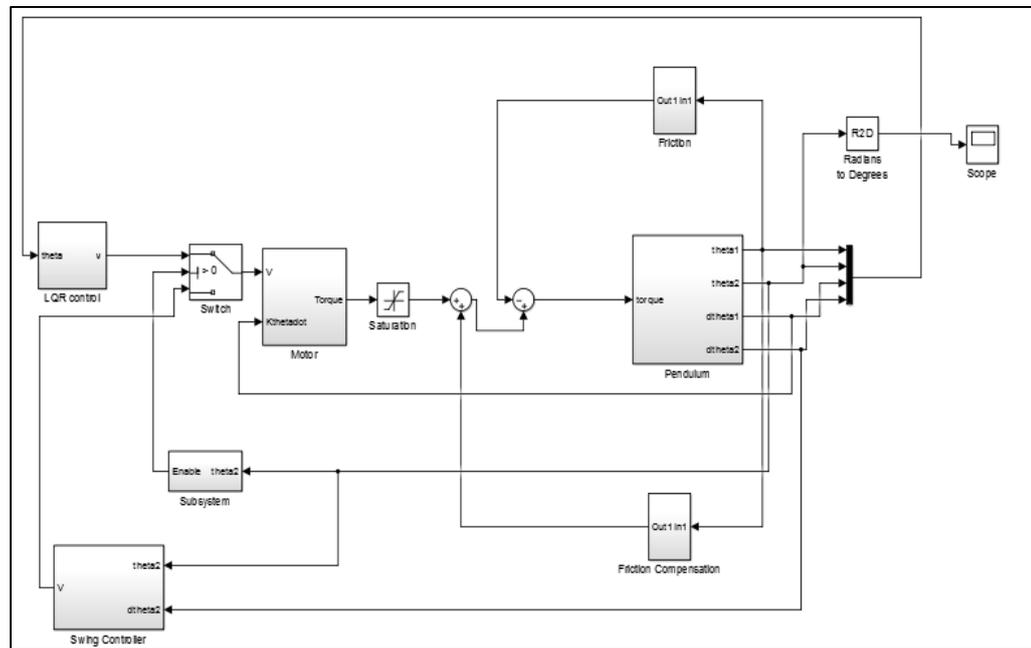


**Figura 38 Parámetros del motor**

Una vez que se realizan las pruebas con cada controlador, se continúa con la simulación de los dos controladores y el conmutador de manera conjunta. Se predetermina el controlador de energía conectado al inicio de la simulación y se configura las condiciones de la planta el ángulo del péndulo entre 0 o 360 grados de acuerdo a las condiciones de diseño. Al iniciarse la simulación el sistema tratara de empujar al péndulo hacia la posición deseada, una vez llega al rango establecido el bloque conmutador se activa y cambia de controlador, el controlador estabilizador es activado y mantiene el péndulo en la posición levantada. El

Para simular un sistema más real se añade una perturbación que simula la fricción. Para mejorar la respuesta del sistema se añade un compensador de fricción.

La figura 39 indica el control total del péndulo en Simulink Después de añadir la compensación de la fricción la salida del controlador tiene una mejor respuesta.



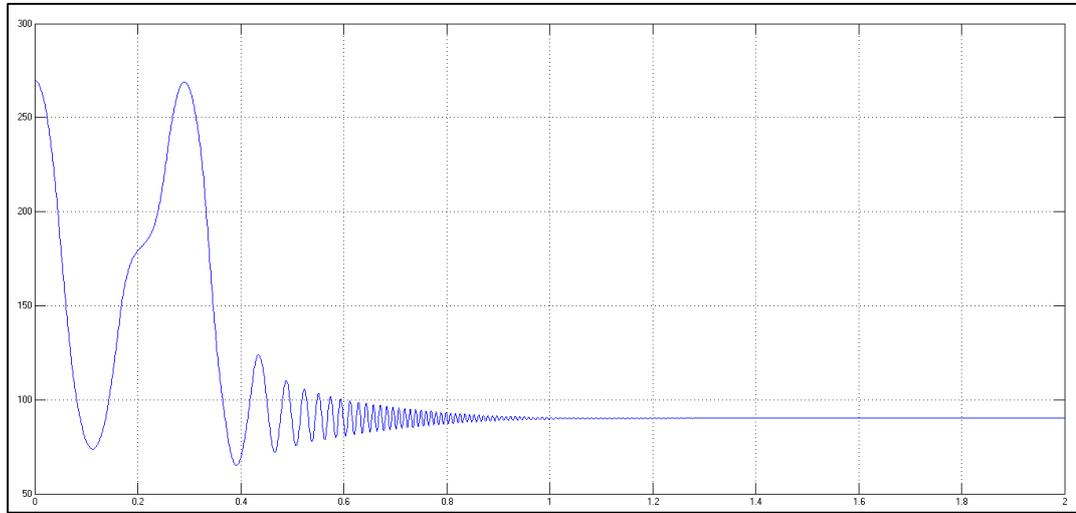
**Figura 39 Control Total LQR, Control de Energía, Conmutación de Controladores y Compensación de la fricción**

### 3.7 Resultados

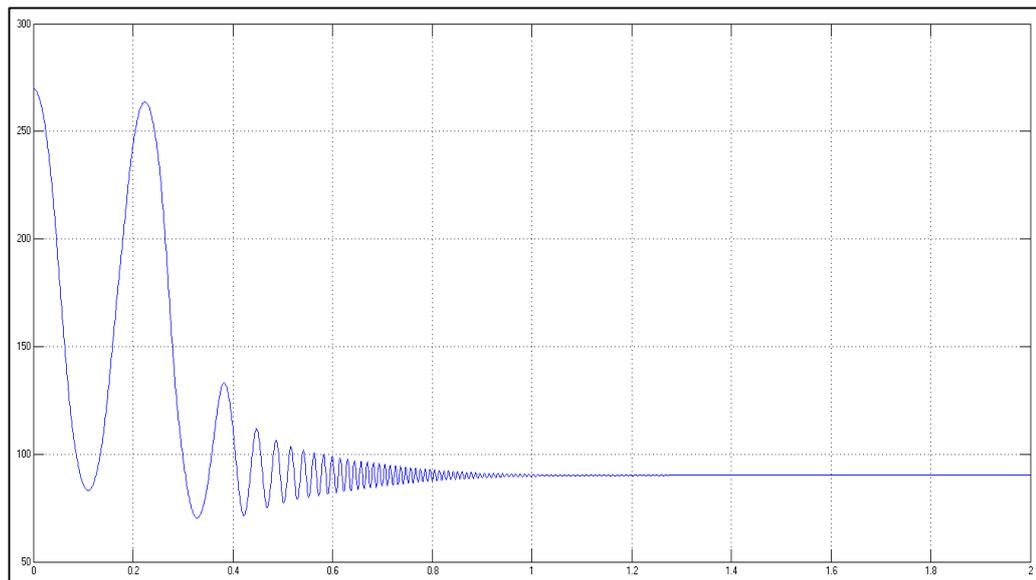
El controlador de energía es una función matemática que trabaja con los ángulos de posición del péndulo. Se establece para esta simulación que el péndulo se mueve de 0 a 360 grados, y el eje de movimiento es el eje z en un plano, los puntos de equilibrio se establecen para la posición vertical hacia arriba y la posición vertical hacia abajo como 90 y 270 grados. Por ende se establece como condición deseada de energía el valor que el péndulo tiene a los 90 grados.

Al iniciar la simulación el péndulo comienza a oscilar de 270 a 100 grados aproximadamente, cuando el péndulo alcanza algún valor entre 100 y 80 grados se realiza la conmutación de los controladores y se estabiliza el controlador. Se observa en la figura 40 que si la fricción es añadida esta genera un cambio en la respuesta, que se podría decir es un cambio en el valor de la medida del ángulo que si sucede este cambio en las regiones de conmutación de los controladores puede afectar su

funcionamiento, con la compensación de la fricción se evita este cambio en la respuesta del sistema. Ver figura41.



**Figura 40 Respuesta con fricción**



**Figura 41 Respuesta con compensación de la fricción**

## **CAPÍTULO IV**

### **ANÁLISIS EXPERIMENTAL EN LA PLANTA**

#### **4.1. Introducción**

En este capítulo se presenta el trabajo hecho en el péndulo del laboratorio. La primera tarea fue conseguir los ángulos reales del péndulo y del brazo. El software LabVIEW® fue utilizado para la interacción con la máquina. Como se menciona con anterioridad los valores de los sensores de los ángulos están conectados a los engranajes que permiten el movimiento del brazo y el movimiento del péndulo.

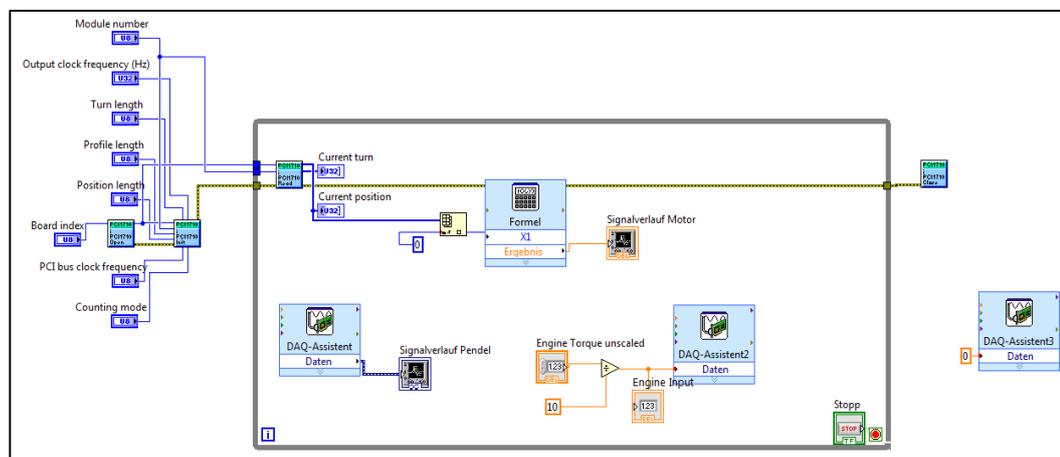
Debido al tipo de conexión mecánica, el valor del sensor del péndulo da un valor que no concuerda con la posición del péndulo. Al mover el brazo, el sensor del péndulo se mueve junto con este provocando valores errados del ángulo del péndulo, por lo tanto se hace necesario quitar esta relación. Además el mayor problema es que al ubicar el sensor en el engrane que no está conectado directamente con el péndulo, se consigue que por cada 180 grados que da el péndulo en la vida real, el sensor da dos vueltas teniéndose entonces en los valores obtenidos del sensor 360 grados con cada media vuelta. Los sensores son absolutos entonces no es fácil obtener la dirección de los ángulos. El trabajo realizado con estos ángulos es presentado a continuación.

#### **4.2. LabVIEW®**

Es el sistema operativo usado para identificar los parámetros de la planta y para implementar los controladores en el péndulo. Este software es recomendado para hacer pruebas con hardware, diseño de sistemas de control y simulaciones en sistemas embebidos. El lenguaje usado es el lenguaje G de lenguaje gráfico. Los programas desarrollados con LabVIEW son llamados Virtual, o “VI instruments” en inglés su origen viene de la palabra instrumentos de control. En LabVIEW se puede combinar de todo tipo de hardware y software, la tarjeta de datos que obtiene los valores del péndulo rotacional es de “NI instruments” y la comunicación entre el péndulo y la computadora se da por medio de un cable paralelo.

### 4.3. Adquisición de las señales de la planta

El primer paso para obtener los valores reales de la planta es conectar los sensores y la computadora. Se utiliza la herramienta MAX (Measurement Automation Explorer) que provee el acceso a la tarjeta DAQ. MAX ayuda a configurar el hardware y software, crear y editar canales, ejecutar sistemas de diagnóstico y ejecutar paneles de prueba. MAX se instala automáticamente con los dispositivos de “National Instruments”. Una vez configurado las entradas y salidas en la tarjeta se crea la interfaz gráfica. El encoder del péndulo se configura a través de la herramienta “DAQ Assistant” ubicado en el panel de entradas y salidas. El torque del motor es configurado de la misma forma. El encoder el brazo es conectado al PCI 1770 Card dentro de la computadora, por lo tanto la configuración es diferente ya que se necesita de la configuración de más parámetros. Ver Figura 42.

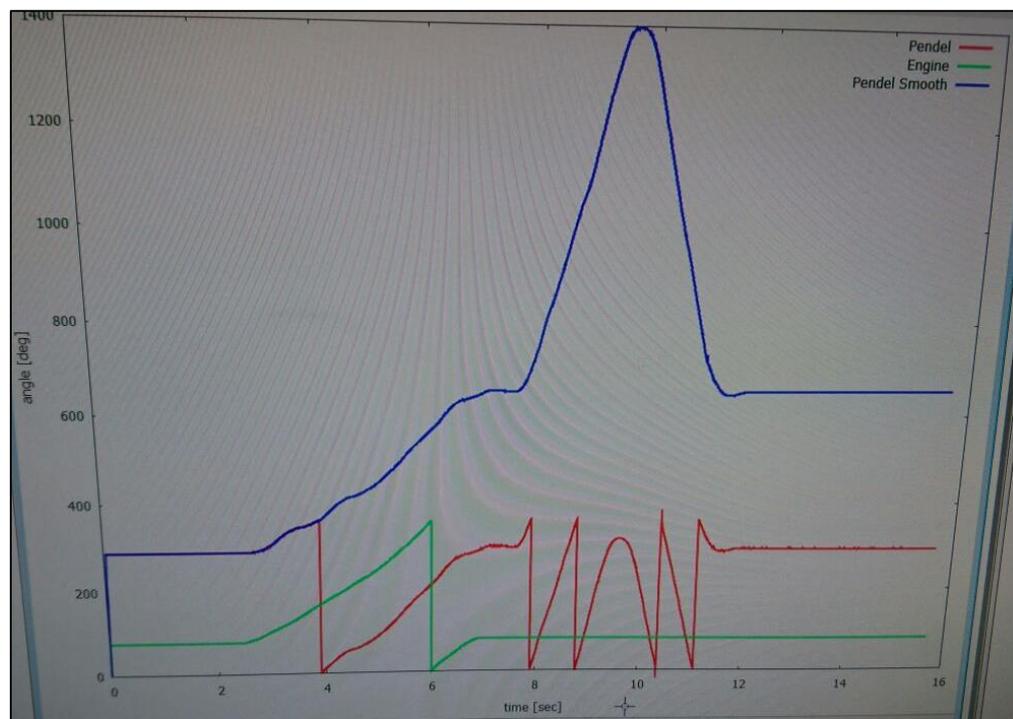


**Figura 42 Configuración para obtener las señales de los ángulos en LabVIEW®**

Para configurar la señal de salida del motor se utiliza la herramienta “DAQ-assistent” para salidas, al estar conectado con el servo- controlador del motor la tarjeta, basta con dar ciertos valores numéricos al torque. Por tanto cuando se da valores positivos el motor se mueve hacia la derecha, y al dar valores numéricos negativos el motor se mueve hacia la izquierda.

#### 4.4 Valores reales de los ángulos

En la figura 43 se muestra el comportamiento de los sensores después de obtener los ángulos en LabVIEW®. La línea verde representa el movimiento del brazo, la línea roja el movimiento del ángulo. Se observa entonces que el movimiento del brazo provoca que el péndulo se mueva aun cuando se mantenga el péndulo en la posición vertical colgante, por las condiciones dinámicas de la planta se espera que al mover el brazo, el péndulo también se mueva pero este movimiento debe estar dentro de un rango de valores cercanos a su valor inicial. Debido al sistema mecánico de conexión el sensor del péndulo entrega valores de 0 a 360 grados cuando el péndulo se encuentra en reposo.

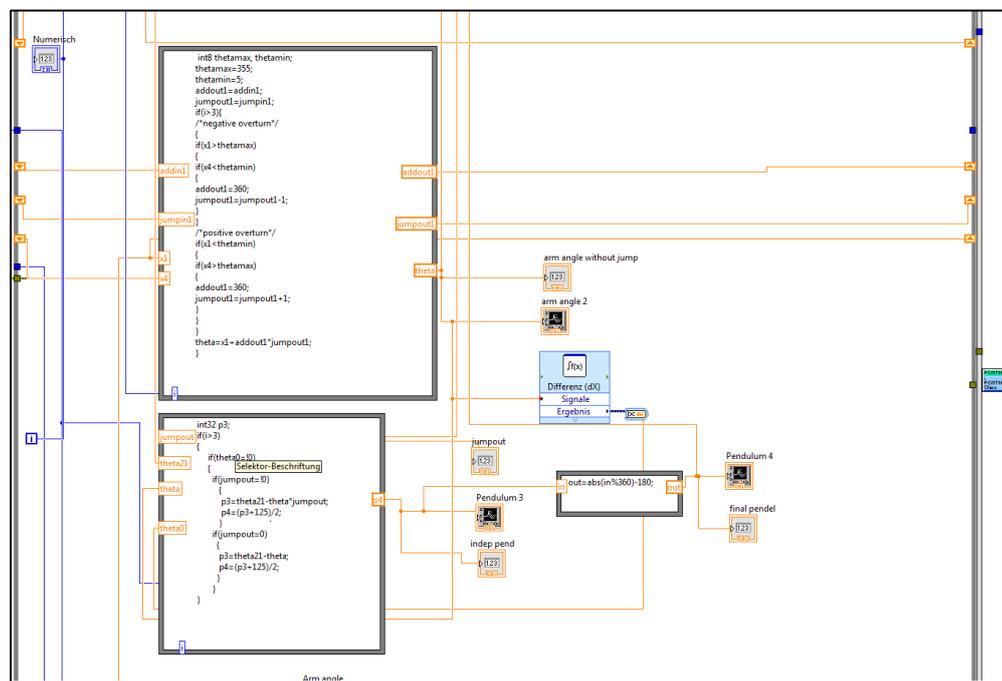


**Figura 43 Relaciones entre los ángulos y compensación matemática**

En la línea verde se puede observar que el péndulo se mueve 360 grados y después el valor va hacia cero generándose un salto. La señal del péndulo que se puede visualizar en el “VI” es de 180 grados, pero en la vida real es 360 grados y también se

generan saltos. Para poder quitar la relación que hay entre el ángulo del brazo y el ángulo del sensor es necesario que exista una relación lineal entre los dos, el salto en la señal que se genera cada vez que el brazo va de 0 a 360 grados imposibilita tener una relación lineal. Por lo tanto se establecen relaciones matemáticas que permita que los valores del ángulo sean mayores o menores a 360 grados contando las vueltas y midiendo la dirección del movimiento tanto para los ángulos del brazo como para los del péndulo. La línea azul muestra como las relaciones matemáticas permiten quitar los saltos de la medición.

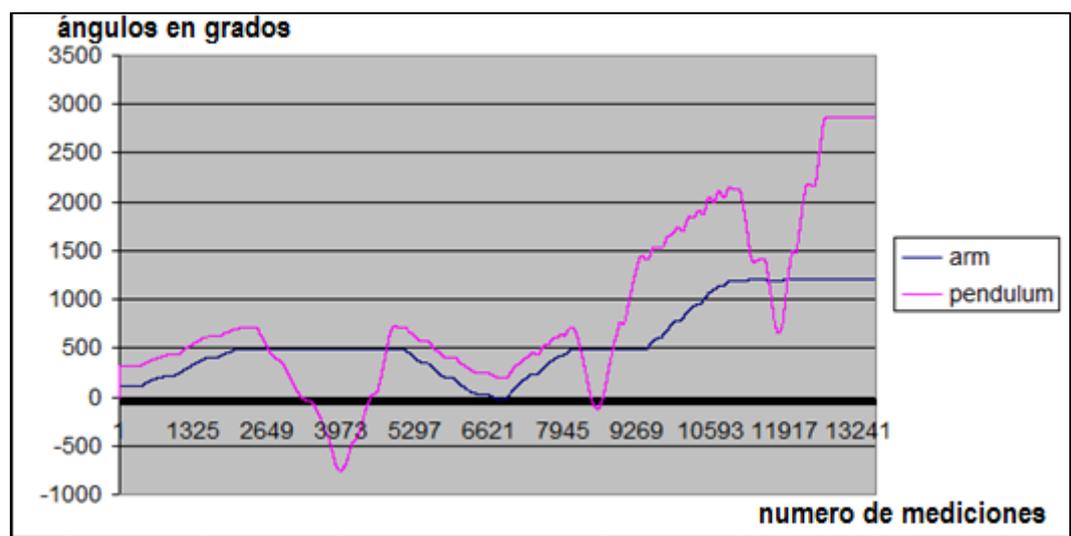
Las funciones matemáticas que sirven para establecer la relación lineal son implementadas en LabVIEW en bloques de funciones matemáticas. Ver Figura 44.



**Figura 44 Funciones matemáticas para obtener relaciones lineales entre los ángulos**

La relación matemática utilizada para medir el ángulo del brazo trabaja con los rangos entre 355 grados y 5 grados, cuando el ángulo pasa de 355 a 5 grados se contará como una vuelta positiva y si el ángulo pasa de 5 a 355 grados se contara como una vuelta negativa, con cada vuelta se deberá ir sumando o restando 360 grados. Para el

caso de los ángulos del péndulo, se trabaja con el mismo principio pero se debe considerar que el sensor da dos vueltas por cada vuelta que da el péndulo. Por lo tanto se tiene que cada 180 grados del péndulo se debe sumar 360 grados en las siguientes vueltas y en la primera se multiplica por dos, evidentemente estos cambios matemáticos afectan la respuesta real de los sensores. En la figura 45 se muestran las medidas de los ángulos una vez los saltos son eliminados de esta forma la relación entre los mismos es lineal.



**Figura 45 Valores de los ángulos después de implementar los cambios en la lectura de las señales**

El siguiente problema a resolver es quitar la relación que existen entre los ángulos. Se toman diferentes medidas de los ángulos para establecer la relación lineal que existe entre ellos. Al inicio de las pruebas se consideró que por la estructura mecánica de los engranajes conectados en el brazo y el péndulo la relación lineal entre estos debería ser de 2 a 1. Sin embargo la fricción y la posición inicial en 0 de los sensores no permiten trabajar con esta consideración. En la figura 46 se ve que la relación de dependencia sigue una ecuación matemática lineal, esta ecuación es utilizada para obtener los valores reales del ángulo del péndulo. Para trabajar con la planta real se establece que la condición de equilibrio inicial es la posición del péndulo en sentido vertical colgante y el ángulo es cero grados, por lo tanto la posición de equilibrio cuando el ángulo se encuentra en posición vertical hacia arriba es 180 grados

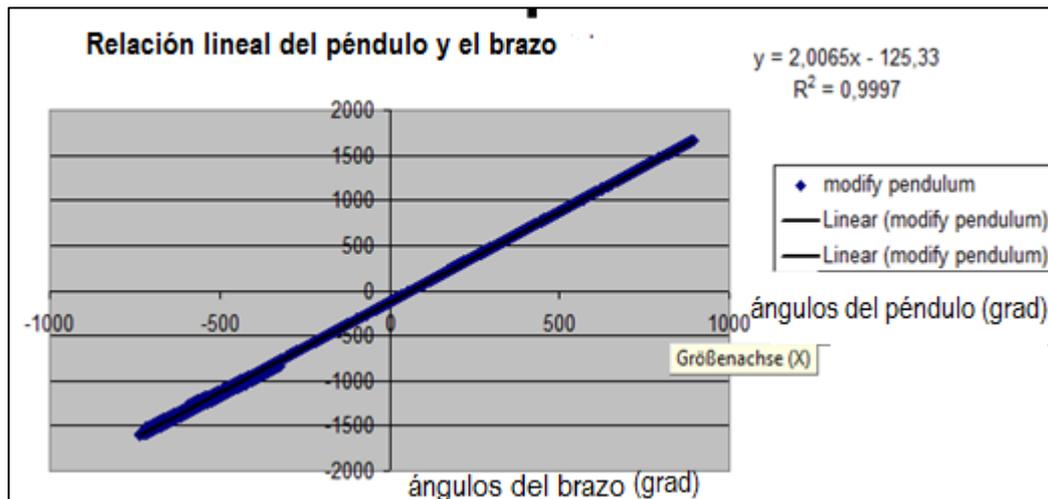


Figura 46 Función lineal para eliminar la dependencia entre los ángulos

#### 4.4. Implementación del control LQR en LabVIEW®

Luego de que los ángulos reales fueron obtenidos fue posible comenzar a realizar algunas pruebas con los controladores simulados en el capítulo anterior. El primer controlador implementado fue el controlador LQR. LabVIEW tiene una herramienta de control que permite implementar y simular una amplia gama de controladores y la versión del laboratorio cuenta con esta herramienta. Como es un control por retroalimentación la señal de los ángulos tiene que ser derivada para obtener las velocidades angulares y obtener los cuatro valores necesarios para la implementación del controlador. El vector de ganancias fue implementado en un bloque de MATLAB® disponible en las herramientas de LabVIEW. Ver Figura 47.

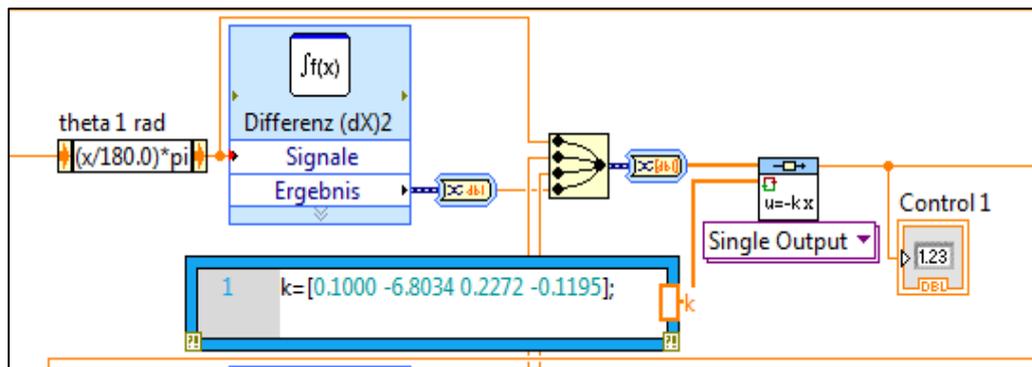
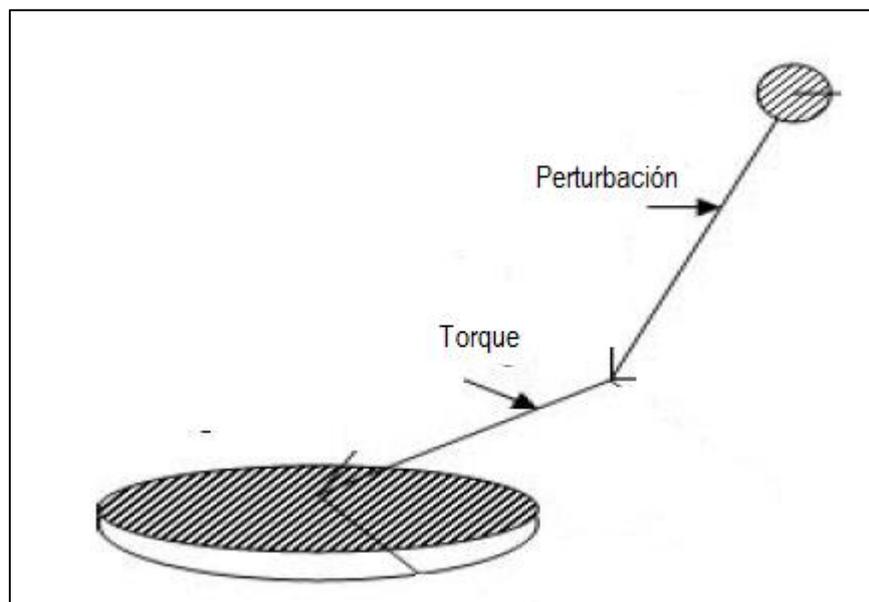


Figura 47 Controlador LQR implementado en LabVIEW

Para verificar el comportamiento del controlador se obtuvo los valores numéricos del torque generados a la salida del controlador, En la figura 48 se muestra que cuando el péndulo es movido hacia la izquierda, simulando una perturbación externa, la salida del motor se mueve en la misma dirección, en este caso el valor numérico es representado como positivo, y cuando el péndulo se mueve hacia la derecha la salida es negativa, de esta manera se verifica que el controlador está funcionando correctamente y trata de estabilizar el péndulo en la posición vertical.



**Figura 48 Comportamiento del controlador al causar perturbación en el estado estable**

#### 4.4.1 Otra manera de obtener los ángulos

Una vez implementado el controlador LQR se pudo comprobar que los valores de salida del controlador eran adecuados y por tanto se configuraron los valores numéricos relacionados con el torque para mover el motor de manera rápida y se evite la caída del péndulo. Al seguir realizando pruebas se verifico que existía un error en la medida de los ángulos. La medida del ángulo presentaba un salto en ciertas ocasiones, por lo tanto era posible obtener en diferentes ocasiones el valor de 0 y 180 grados cuando el péndulo estaba en posición levantada y cuando estaba en posición

colgante. Al ser estos ángulos críticos para el diseño del controlador, la respuesta no era siempre la adecuada. Se verifico al compilar paso a paso que la inserción de bloques para funciones generaba un retardo y por lo tanto se procedió a implementar la función matemática solo con herramientas de LabVIEW. Ver Figura 49.

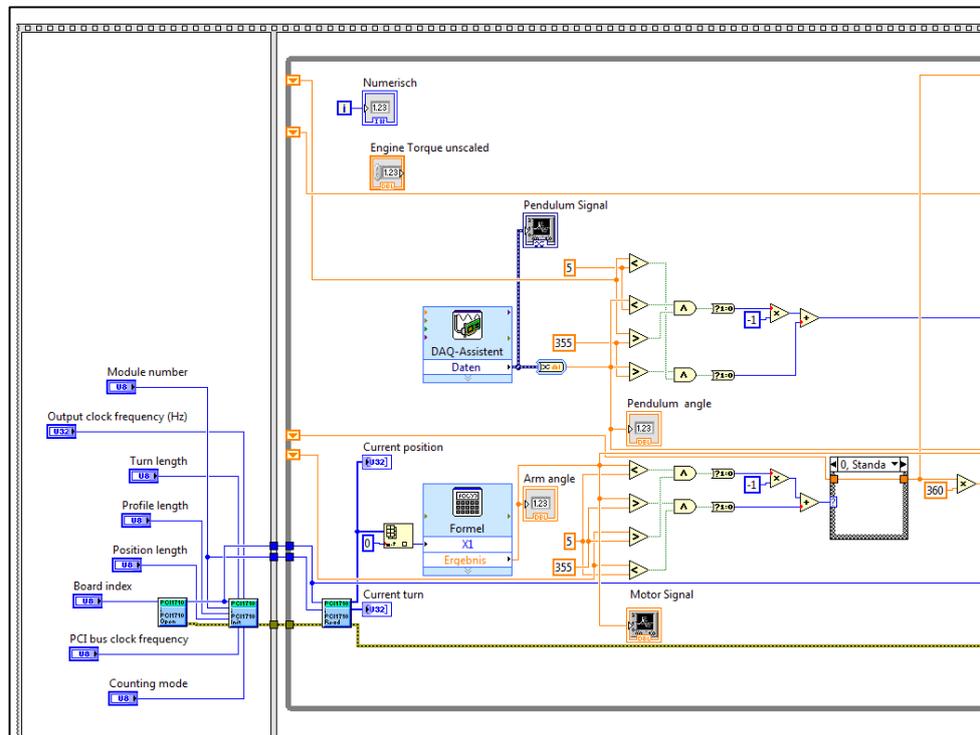


Figura 49 Cambio de método para cálculo de ángulos

#### 4.5. Implementación del control de energía en LabVIEW®

El control de energía se implementó de manera sencilla ya que este tipo de controlador trabaja con funciones matemáticas. Ver figura 50 y Figura 51

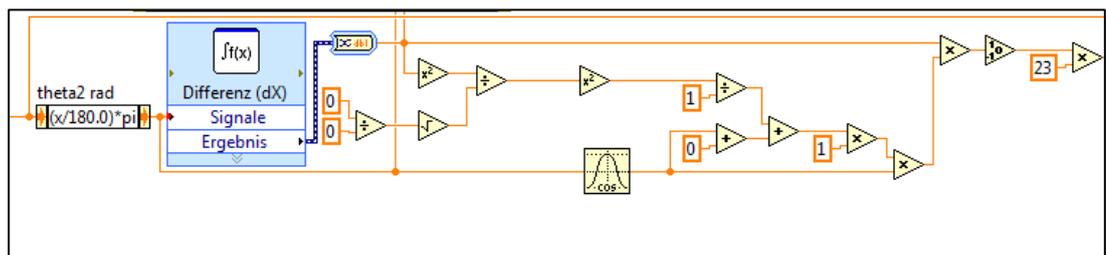
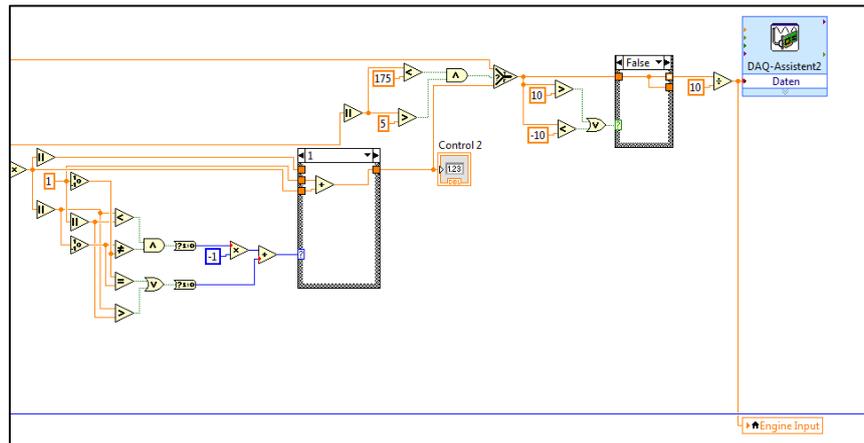


Figura 50 Implementación del control de energía, parte 1

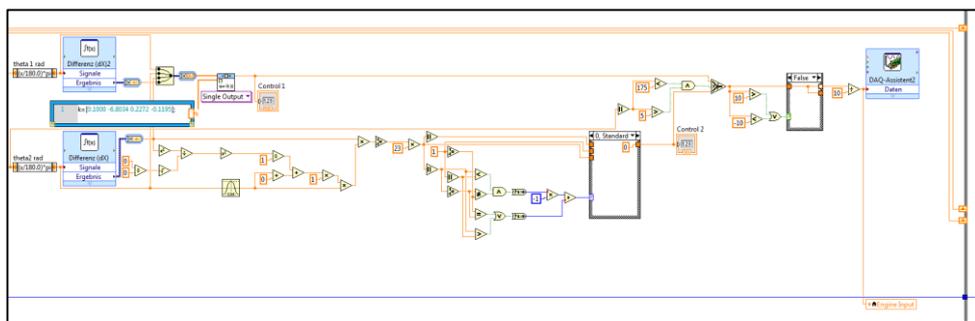


**Figura 51 Implementación del control de energía, parte 2**

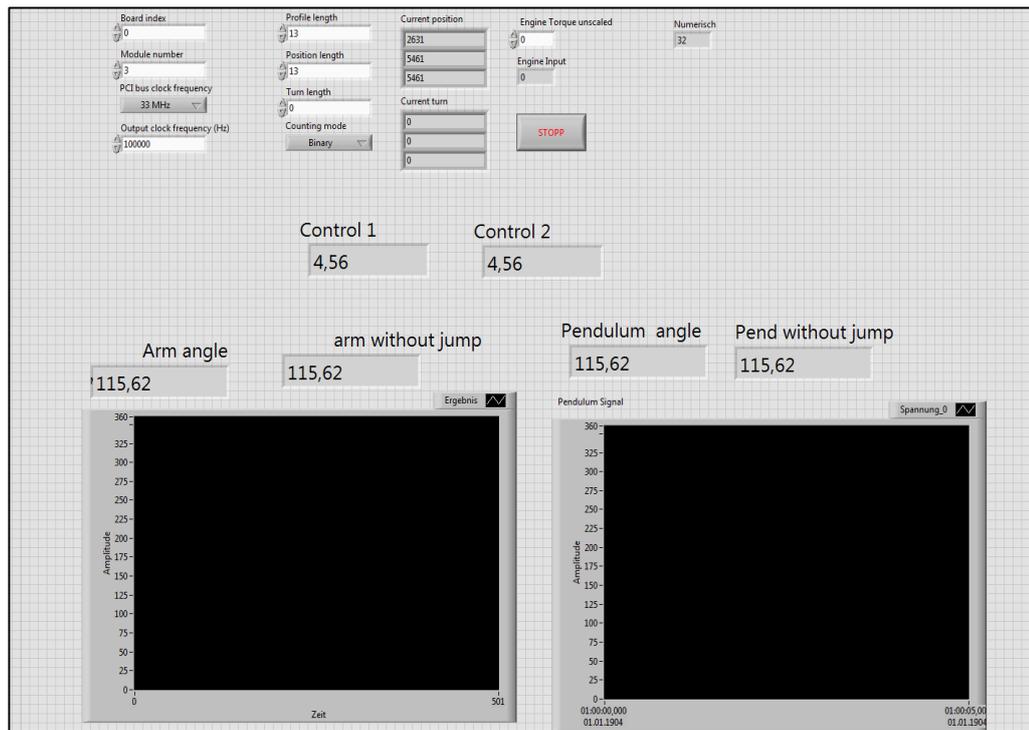
Se verifico que el valor de energía sea el valor calculado en simulación para el ángulo de la posición vertical hacia arriba. Los valores para este controlador fueron obtenidos del motor y de la respectiva simulación en ADAMS®.

#### 4.6. Control total en LabVIEW®

En la figura 52 se muestra la implementación del controlador total y no se presentó mayores dificultades al realizar el cambio de Simulink a LabVIEW®. Una de las consideraciones al escoger los tipos de controladores para la simulación fue que los mismos debían ser implementados en LabVIEW®, por tal razón el control LQR y el control de energía fueron escogidos ya que su implementación en LabVIEW es relativamente sencilla. Los valores fueron comprobados numéricamente.



**Figura 52 Controlador total implementado en Simulink**



**Figura 53 Panel de Control del Sistema en LabVIEW**

En la figura 53 se muestra el panel del control total del péndulo, los resultados numéricos fueron comprobados en este panel, donde se puede observar los valores que tenían los controladores dependiendo de la posición del ángulo del péndulo. Las pruebas realizadas fueron limitadas, al existir el salto de valores de 0 a 180 grados en la posición estable, se consideró que para proteger el motor se realizaran pruebas de valores numéricos a los controladores, sin embargo la computadora dejó de reconocer el ángulo del brazo, por la desconexión interna en la tarjeta de adquisición de datos., No obstante el resultado final fue verificado en dos plataformas de simulación, haciendo falta solo la prueba del control total. El trabajo realizado en el modelamiento mecánico de la planta permitió un diseño adecuado de los controladores, el modelamiento del sistema en ADAMS® que fue llevado a cabo permitió obtener experiencia con un software mecánico del cual actualmente se puede encontrar información muy escasa.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 5.1. Conclusiones

- Mediante el modelamiento mecánico de la planta, la teoría de control por retroalimentación de estados y la del control de energía se diseñó y simuló un sistema de control para el péndulo invertido rotacional de la Universidad de Ciencias Aplicadas de Brandeburgo, siguiendo los lineamientos planteados en la investigación.
- La caracterización de los componentes mecánicos y eléctricos son necesarios para realizar el modelamiento de la planta, cuyo comportamiento puede ser simulado en MATLAB® para observar las señales de salida, y en el software mecánico ADAMS® que permite visualizar el comportamiento real de la planta y ofrece el cálculo automático de ciertos valores de la planta necesarios para el diseño de los controladores.
- Las ecuaciones de movimiento no lineal fueron derivadas por el principio del “virtual work” ya que este principio es usado para definir el estudio de las fuerzas y movimiento de un sistema mecánico y permite un modelamiento completo de la planta, estas ecuaciones no son útiles solo para analizar el comportamiento de la planta sino también el diseño del control de energía.
- Para el control de energía se necesitan los valores que se utilizaron para el modelamiento de la planta, ya que dentro del mismo se analiza las energías cinética y potencial que tiene el péndulo, por tal razón un buen modelamiento ofrece un buen diseño del sistema de control de energía.
- La simulación de controladores lineales y no lineales en la planta lineal permite establecer un punto de comparación de las características de funcionamiento e implementación de los mismos, esta comparación es útil al momento de escoger los controladores que vayan a ser utilizados en la planta no lineal.

- Se verifico que el control lineal aplicado en sistemas no lineales como un péndulo invertido rotacional donde la acción del controlador trabaja en regiones estables ofrece buenos resultados de funcionamiento en la simulación.
- La respuesta del control LQR depende de valores que se seleccionen para las matrices Q y R, ya que de ellos depende los valores del vector de ganancias K. este vector de ganancias es la retroalimentación de estados del controlador.
- La planta real presenta fricción en los engranajes que unen sus partes, por tal razón otra parte importante de estudio fue el modelamiento de la fricción y la respectiva compensación de la misma, esta compensación ofrece una mejora en las respuesta del controlador.
- Las estrategias diseñadas en MATLAB® son de fácil implementación en LabVIEW® y no existieron dificultades en el cambio de lenguajes. Para el control LQR es necesario usar las herramientas de control disponibles en LabVIEW®. Para el control de energía se utilizan bloques para la implementación de las ecuaciones de energía total y energía de subida
- La validez del controlador total fue verificada mediante pruebas manuales en donde se verifica por una pantalla numérica el valor que se espera tener del controlador hacia el motor en las diferentes ubicaciones del péndulo, debido a la no linealidad que presenta la planta no es posible controlar la planta desde la posición vertical colgante.

## **5.2. Recomendaciones**

- El modelamiento de la planta fue llevado a cabo en un software con costo y en un software de acceso libre, y no se encontró mayores dificultades, se puede recomendar de la misma manera realizar los controladores en el software libre de Scilab® y en su herramienta XCos, permitiendo de esta manera un mayor uso de software libre en investigación.
- La ubicación de los sensores fue un problema para la medición de los ángulos, el sistema mecánico no puede implementar un señor directamente con el engrane del péndulo ya que el cable conector podría sufrir desgaste con el movimiento del brazo, buscar otro tipo de sensores podría ser factible.

- Se debe tener cuidado al realizar las pruebas con el motor, debido a que este presentó averías y se reparó antes de comenzar la parte práctica, por tal razón se recomendó habilitarlo siempre con ayuda de otro estudiante.

### **5.3. Trabajos Futuros**

- El siguiente paso es la implementación de los controladores no lineales en la planta no lineal, el control Fuzzy diseñado solo fue implementado en la planta lineal, y se podría comenzar el trabajo futuro con el objetivo de diseñar solo controladores no lineales.
- La implementación del diseño de controladores en ADAMS® es una tarea que quedó pendiente durante el desarrollo de este trabajo, con la planta ya modelada se puede hacer un estudio extensivo o una capacitación en el tema de diseño de controladores en ADAMS®.
- A su vez se puede realizar el diseño de controladores en MATLAB® y realizar la implementación en ADAMS®, existen herramientas disponibles que permiten exportar archivos del modelamiento en el software mecánico hacia el software matemático.
- La idea de resolver los problemas de simulación en software libre es llamativa y se podría considerar para trabajos futuros. Aunque Scilab® es limitado comparado con MATLAB® es posible realizar los diseños de control en los dos programas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Alexander, E. F.-H. (2014). *Nature-Inspired Computation and Machine Learning*. Gelbukh.
- AndreCareaga Houck, Robert Kevin Katzschmann, Joao Luiz Almeida Souza. (2013). *Furuta Pendulum*. Massachusetts, United States: Massachusetts Institute of Technology.
- Boyd, S. P. (2008). *Linear Dynamical Systems*. Palo Alto: Stanford University.
- C. Peel, M. W. (1994). *GLOBALLY LINEARISING CONTROL USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS*. Newcastle. Obtenido de [http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs\\_all.jsp?arnumber=327335&tag=1](http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=327335&tag=1)
- Carolina Albea-Sanchez, M. G. (2006). *Carolina Albea-Sanchez, Manuel G. Ortega, Francisco Salas, Francisco Rubio*. Spain. Obtenido de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00604267/document>
- Cotas Kravaris, C. B. (1997). *Nonlinear State Feedback synthesis by Global Input/Output Linearization*. Michigan. Obtenido de [https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/37396/690330408\\_f tp.pdf?sequence=1](https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/37396/690330408_f tp.pdf?sequence=1)
- Departamento Mecatrónica TH-Brandenburg. (2016). *Rotary Inverted Pendulum*. Brandeburgo.
- Ed.M.D.Binder, N. U. (2009). *No linear Control Systems*. Israel. Obtenido de <http://webee.technion.ac.il/people/shimkin/PAPERS/NonlinearControlSummary08.pdf>
- Frías, O. O. (2009). *Diseño de Controladores para Sistemas Subactuados del Tipo Péndulo Invertido*. Ingeniería. Instituto Politecnico Nacional Mexico-DF. Obtenido de <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/9923/Control>

- Furuta, K. (1999). *Swinging up a pendulum by energy control*. Tokyo: Department of Control and Systems Engineering.
- Gafvert, M. (1999). *Dynamic Model Based Friction Compensation on the Furuta Pendulum*. IEEE International Conference on Control Applications.
- Henrik Olson. (Agosto de 1996). *Control System with Fricción*. Lund. Obtenido de <http://www.lynxmotion.com/c-117-phoenix.aspx>
- IFM. (4 de Agosto de 2016). *Measurement and control*. Obtenido de Photoelectric encoders: [http://www.ifm.com/ifmar/web/pinfo015\\_010\\_040.htm](http://www.ifm.com/ifmar/web/pinfo015_010_040.htm)
- Juan Carlos Milena Moreno, R. M. (2010). *Control Lineal y No Lineal de un Levitador Magnético Estudio Comparativo*. Ingeniería. Universidad Politécnica de Catalunya. Obtenido de <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/9923/Control>
- Junghare, V. S. (2014). India: U. Obtenido de <http://airccse.org/journal/ijccms/papers/3214ijccms01.pdf>
- Junghare, V. S. (2014). *A Comparative study of controllers for stabilizing a*. Nagpur, India: International Journal of Chaos, Control, Modelling and Simulation.
- K.J Astrom, K. (1999). *Swinging up a pendulum by energy control*. Lund Institute of Techbology. Obtenido de <http://www.ece.ucsb.edu/~hespanha/ece229/references/AstromFurutaAUTO M00.pdf>
- Karl Johan Astrom, B. W. (2008). *Adaptative Control*. Lund Institute of Technology.
- Kevin M. Passino, S. Y. (1998). *Fuzzy Control*. Ohio: The Ohio State University.
- Kreuzer, E. J. (1997). *Mathematical Modeling of Complex Mechanical Systems*. University of Stuttgart. Obtenido de [http://ac.els-cdn.com/0270025587905379/1-s2.0-0270025587905379-main.pdf?\\_tid=f96617ba-12d3-11e6-8468-00000aab0f27&acdnat=1462461411\\_31d1b71d60a6c97a6d00ae22cb1323fe](http://ac.els-cdn.com/0270025587905379/1-s2.0-0270025587905379-main.pdf?_tid=f96617ba-12d3-11e6-8468-00000aab0f27&acdnat=1462461411_31d1b71d60a6c97a6d00ae22cb1323fe)

Lara-Valencia, Luis Augusto, Valencia-Gonzalez, Yamile, & Vital de Brito, José Luis. (14 de Septiembre de 2016). *Uso de lógica difusa para la administración de un sistema disipador de energía en estructuras compuesto por amortiguadores magnetoreológicos*. Obtenido de Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia: [http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0120-62302015000100014&lng=en&tlng=es](http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-62302015000100014&lng=en&tlng=es).

*LQR function*. (22 de Abril de 2016). Obtenido de Control tutorial for Matlab and Simulink: <http://www.mathworks.com/>

Mark W.SPONG, S. H. (2006). *Robot Modeling and Control*. USA: International series of monographs on physics.

Megatron Products. (24 de Julio de 2016). *Megatron*. Sangolquí, Ecuador: Universidad de las Fuerzas Armadas. Obtenido de <http://www.megatron.fr/en/products/sensors/rotary-sensors/encoders/item/125-encoder-ena-22>

Michigan University. (4 de Abril de 2016). *Control tutorial for Matlab and Simulink*. Obtenido de [http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=About\\_Tutorials](http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=About_Tutorials)

Moreno, M. A. (2001). *Apuntes de Control PID*. La Paz – Bolivia: Universidad Mayor de San Andres.

Murray, M. (2006). *Lecture 2 – LQR Control*. CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY.

Murray, R. M. (s.f.). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. California Institute of Technology. Obtenido de <http://www.cds.caltech.edu/~murray/books/MLS/pdf/mls94-complete.pdf>

Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall.

Olsson, H. (1996). *Control Systems with Friction*. Lund: The Ohio State University.

- Prilesky, L. (2012). *Robot Virtual Prototype in Adams*. Brno University of Technology. Obtenido de "www3.ntu.edu.sg/eee/urop/LKV/Pendulum/FYP4086Report.pdf"
- Prime, B. S. (2011). *On the Dynamics of the Furuta Pendulum*. Zoltan Szabo. Obtenido de <http://www.hindawi.com/journals/jcse/2011/528341/>
- S. J. Elliott, M. G. (2015). *Nonlinear damping and quasi-linear modelling*. The Royal Society. Obtenido de <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2014.0402>
- STOBER ANTRIEBSTECHNIK. (4 de Agosto de 2016). *POSIDRIVE MDS 5000 Servo Inverters*. Obtenido de [http://www.stoeber.de/en/stoeber\\_global/elektronik/produkt\\_detail\\_seite\\_elektronik\\_3022.html](http://www.stoeber.de/en/stoeber_global/elektronik/produkt_detail_seite_elektronik_3022.html)
- STOBER ANTRIEBSTECHNIK. (4 de Agosto de 2016). *STOBER ANTRIEBSTECHNIK*. Obtenido de [http://stoeber.cn/xiazai/downl\\_mulu\\_pa/441696-gb01.pdf](http://stoeber.cn/xiazai/downl_mulu_pa/441696-gb01.pdf)
- T.W.G.L.Klaassen. (2003). *Controller design for ADAMS models using Matlab/Simulink interaction*. R.J.Pulles. Obtenido de <http://documents.mx/documents/12238882-controller-design-for-adams-using-matlab-simulink-interaction.html>
- Tank Kok Chye, Teo Chun Sang. (1999). *Rotary Inverted Pendulum*. Singapur, Singapur: Nayang Technological University.
- University, M. (22 de Abril de 2016). *Control tutorial for MatLab and Simulink*. Obtenido de [tms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=ControlStateSpace](http://tms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=ControlStateSpace)
- Vukic, Z. (2003). *Nonlinear Control Systems*. Automation and Control Engineering.