



# **Vibraciones Mecánicas**

**Volumen I**

**Ramón Martínez Batista, Julio Cesar Pino Tarragó  
Héctor Cochise Terán Herrera, Oscar Bladimir Arteaga López**

---

**Publicaciones científicas  
Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

## **Créditos**

### **Vibraciones mecánicas**

### **Volumen I**

Ramón Martínez Batista, Julio Cesar Pino Tarragó, Héctor Cochise Terán Herrera,  
Oscar Bladimir Arteaga López

### **ISBN:**

978-9942-765-11-6

### **Pares revisión científica:**

Alexis Cordoves  
Arlys Lastre

### **Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

Crnl. Ramiro Pazmiño (Rector)

### **Publicación autorizada por:**

**Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

### **Edición y producción:**

David Andrade Aguirre  
daa06@yahoo.es

### **Diseño editorial:**

David Cabrera Reinoso  
thedavox@gmail.com

**Derechos reservados.** Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico. El contenido, uso de fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias es de exclusiva responsabilidad del autor.

### **Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador  
www.espe.edu.ec

**Los derechos de esta edición electrónica son de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE,** para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en [www.repositorio.espe.edu.ec](http://www.repositorio.espe.edu.ec).

<b>Índice</b>	<b>Pag.</b>
Prólogo	9
<b>Capítulo I</b>	
<b>Filosofía de las vibraciones mecánicas</b>	11
1. Historia de la teoría de las vibraciones	13
2. Movimiento vibratorio	14
3. Vibraciones libres y forzadas	15
4. Excitación determinista y excitación aleatoria	16
5. Fuerzas conservativas y no conservativas	17
6. Sistemas lineales y no lineales	17
7. Grados de libertad	18
8. Movimientos periódicos y aperiódicos.	19
9. Movimiento armónico	19
10. Respuestas en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia	22
<b>Capítulo II</b>	
<b>Sistemas de un grado de libertad</b>	25
1. Sistema masa-resorte-amortiguador.	27
2. Vibraciones libres no amortiguadas.	29
3. Vibraciones libres amortiguadas	33
3.1 Amortiguamiento superior al crítico.	36
3.2 Amortiguamiento al crítico.	37
3.3 Amortiguamiento inferior al crítico.	38
3.4 Decremento logarítmico.	41
4. Vibraciones forzadas no amortiguadas.	43
5. Vibraciones forzadas amortiguadas.	49
6. Equilibrio de fuerzas en el sistema.	58
7. Transmisibilidad.	60
8. Vibraciones torsionales.	63
9. Vibraciones excitadas desde la base.	67
Problemas resueltos.	72
<b>Capítulo III</b>	
<b>Sistemas de dos y más grados de libertad</b>	97
1. Introducción.	99
2. Vibraciones libres no amortiguadas.	100
3. Vibraciones libres amortiguadas.	107
4. Vibraciones forzadas amortiguadas.	110
5. Sistemas de más de dos grados de libertad.	113
6. Vibraciones libres no amortiguadas para más de dos grados de libertad.	120
7. Vibraciones forzadas amortiguadas para más de dos grados de libertad.	123
8. Análisis modal.	131
9. Ejemplo: modelo dinámico de una zaranda de clasificación de minerales.	140
Problemas resueltos	159
<b>Referencias</b>	164
<b>Bibliografía</b>	165

ESPACIO EN BLANCO

## Dedicatoria

Los autores dedican la presente obra a:

A nuestros familiares quienes han aportado con su paciencia, sacrificio y amor durante el tiempo trabajado para concluir esta obra.

A todos los amigos, alumnos, compañeros, quienes han apoyado y aportado el desarrollo loable, a todos ellos les dedicamos este libro con cariño y un gran agradecimiento.

A todos muchas gracias por su presencia.

ESPACIO EN BLANCO

## Agradecimiento

Los autores quieren agradecer a:

Nuestros familiares, amigos, conocidos y todas esas personas que aportaron su grano de arena en los momentos más difíciles.

Al personal de la Universidad de Holguín por enriquecer nuestra formación profesional.

A la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE por abrir las puertas a nuestros conocimientos y servicios.

ESPACIO EN BLANCO

## Prólogo

La teoría de las vibraciones mecánicas estudia un conjunto de fenómenos que han atraído la atención no sólo del técnico y del científico, sino incluso de cualquier hombre que en su vida corriente haya encontrado alguna de las muy diversas manifestaciones de los mismos.

Los sistemas mecánicos, al sufrir un choque, o al ser sometidos a la acción de fuerzas variables con el tiempo, principalmente periódicas, responden variando sus estados de equilibrio y, consecuentemente, presentan cambios de configuración que perturban su normal funcionamiento, resultan molestos para el personal que se encuentra en su presencia y acortan su vida útil a causa del daño producido al material por efecto de la fatiga y de las sobrecargas.

Una característica muy significativa de dichos fenómenos, cuando la excitación tiene unas frecuencias particulares, para cada sistema dado, son los cambios de configuración que alcanzan amplitudes notables y ocasionan generalmente un fallo estructural del material sometido a esfuerzos de rotura. Este riesgo existe incluso cuando las intensidades de las acciones excitadoras son muy pequeñas.

Sin embargo, no conviene olvidar que estos fenómenos de efectos perniciosos, que suponen una primera preocupación del técnico y son los más conocidos del profano, presentan, por el contrario, un aspecto enormemente positivo, derivado de la posibilidad de obtener con estímulos insignificantes efectos notables, que, canalizados convenientemente por la técnica, han llevado a muchas aplicaciones provechosas, también familiares para el profano, tanto en fenómenos mecánicos, objeto de nuestro estudio, como en otros fenómenos análogos que se presentan en los campos electromagnético, acústico, térmico, etc.

Cualquier proyecto industrial de una estructura, que haya de estar sometida a acciones periódicas de este tipo, debe necesariamente ser elaborado sin prescindir del conocimiento de esta materia, cuyo olvido conduce a fallos lamentables, de los que ha habido muchos y contundentes ejemplos en la historia de las realizaciones técnicas.

ESPACIO EN BLANCO

# Capítulo I



## FILOSOFÍA DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS

## ESPACIO EN BLANCO

## 1. Historia de la Teoría de las Vibraciones

Los orígenes de la **teoría de las vibraciones** se remontan al diseño y desarrollo de instrumentos musicales. Se conoce que en la China y en la India existieron tambores, flautas e instrumentos de cuerdas desde varios milenios antes de nuestra era (ANE). También los antiguos egipcios y griegos estudiaron el sonido desde los puntos de vista práctico y analítico. Los egipcios conocían el arpa desde el año 3000 ANE. El filósofo, matemático y músico griego Pitágoras (conocido por el famoso teorema de la geometría, que lleva su nombre), quien vivió entre los años 582 y 502 ANE, realizó experimentos sobre los sonidos generados por los herreros (forjadores) y los relacionó con la música y la física. Los chinos desarrollaron un sismógrafo mecánico (instrumento para detectar y medir las vibraciones producidas por los terremotos) dos siglos antes de nuestra era.

La teoría moderna de las vibraciones fue probablemente establecida por científicos (matemáticos y físicos) tales como Robert Hooke (conocido por la famosa Ley de Hooke), que vivió entre 1635 y 1703 de nuestra era (DNE), quien experimentó sobre las vibraciones de cuerdas; Issac Newton (1642–1727), quien nos legó el cálculo matemático y las leyes de la mecánica, que permiten analizar las vibraciones; Daniel Bernoulli (1700–1782) y Leonard Euler (1707–1783), quienes estudiaron las vibraciones en vigas y también exploraron la mecánica de fluidos y la dinámica; Joseph Lagrange (1736–1813), quien estudió las vibraciones de cuerdas y también el enfoque energético en la formulación de las ecuaciones de la dinámica; Charles Coulomb (1736–1806), que estudió las vibraciones torsionales y la fricción; Joseph Fourier (1768–1830), quien desarrolló la teoría del análisis de frecuencia de las señales; y Simeon-Dennis Poisson (1781–1840), que analizó las vibraciones en membranas y realizó estudios sobre la elasticidad (conocido por el coeficiente de Poisson).

Como resultado de la revolución industrial y el desarrollo de máquinas con elementos rotatorios, que llevó aparejado, surgió una urgente necesidad de avances en el análisis y diseño de dichas máquinas, y en la medición y el control de las vibraciones. Muchos méritos se deben atribuir a los científicos e ingenieros que continuaron desarrollando esta teoría. Entre los más destacados están: Rankine (1820–1872), quien estudió las velocidades críticas de rotación de los árboles; Kirchhoff (1824–1887), que analizó las vibraciones en láminas; Rayleigh (1842–1919), quien hizo contribuciones a la teoría de las vibraciones y el sonido y desarrolló técnicas

de cálculo de las frecuencias naturales; de Laval (1845–1913), que estudió el problema del balanceo de discos rotatorios; Poincaré (1854–1912), que estudió las vibraciones no lineales; y Stodola (1859–1943), quien estudió las vibraciones de rotores, cojinetes y sistemas continuos.

Notables ingenieros investigadores, que hicieron grandes aportes a la teoría y práctica de las vibraciones, fueron también: Timoshenko, Den Hartog, Clough y Crandall.

A continuación se exponen los conceptos y definiciones más importantes, referentes a la teoría de las vibraciones. Todos ellos aparecerán frecuentemente en el desarrollo del curso y quedarán suficientemente aclarados en las partes correspondientes; sin embargo, parece aconsejable exponerlos aquí, con objeto de familiarizar al lector con el léxico de la materia, al tiempo que se le suministra un esquema de conjunto de las ideas más utilizadas.

## 2. Movimiento vibratorio

Movimiento vibratorio o **vibración**, es la variación de la configuración de un sistema con respecto al tiempo, alrededor de una posición de equilibrio estable. Generalmente supone variaciones relativamente pequeñas de la configuración, porque fuera de ellas dejan de tener validez la mayoría de las hipótesis que se establecen para su estudio; pero esto no implica una restricción importante en su concepto ( Allen y Paine, 1965).

A veces se emplea la palabra **oscilación** como sinónimo de vibración, aunque la frecuencia de su uso es menor cuando se trata de las vibraciones mecánicas, en comparación con el estudio de las de otra naturaleza, como, por ejemplo, las eléctricas, electromagnéticas, acústicas, térmicas, etc. No hay definiciones precisas, y los autores no han llegado a un completo acuerdo sobre qué se debe entender por vibración y qué por oscilación. Al parecer, oscilación debe tener el sentido más amplio de variación de una magnitud, que adquiere alternativamente valores mayores y menores que un determinado valor de referencia, (Butenin, 2003).

Este texto se limita al estudio de las vibraciones mecánicas que se presentan en los sistemas másicos, es decir, en los sistemas que son objeto de estudio de la mecánica y, más concretamente, a sistemas ideales de un número finito de puntos-masa, o bien a sistemas más reales de un número infinito, pero dentro de la consideración de sólido elástico, y prescindiendo, por tanto, de vibraciones en medios fluidos.

### 3. Vibraciones libres y forzadas

Hablaremos de **vibraciones libres**, cuando se producen por algún desequilibrio inicial del sistema, que cesa inmediatamente, y sin la acción de fuerzas o momentos excitadores exteriores a lo largo del tiempo. Las **vibraciones forzadas** se producen bajo la acción de fuerzas o momentos excitadores exteriores variables con el tiempo.

En el primer caso el movimiento tiene su origen solamente en la perturbación inicial (campos vectoriales de desplazamientos y velocidades iniciales), mientras que, en el segundo, se superpone a esta causa un permanente estímulo de fuerzas o momentos claramente determinados, funciones del tiempo y que, generalmente, no dependen del movimiento del sistema, (Thomson, 2002).

**Vibraciones auto excitadas.** Es un caso particularmente interesante, que no encaja rigurosamente en ninguna de las dos clases de vibraciones definidas. Se trata de vibraciones que tienen su origen en el propio movimiento del sistema, es decir, que son funciones de los vectores posición, velocidad, e incluso aceleración del mismo, en cada instante, (Thomson, 2002).

Si no existe perturbación inicial, el sistema permanece en su posición de equilibrio, pero al presentarse alguna perturbación, el movimiento que se inicia origina fuerzas excitadoras de vibraciones. A pesar de la existencia de excitación y debido al especial carácter de la misma, estas vibraciones tienen más afinidad con las vibraciones libres que con las forzadas.

**Choques.** Se debe resaltar la relación que pueden presentar los choques con las vibraciones, que consiste simplemente en el hecho de que aquellos originan una perturbación inicial de la posición de equilibrio del sistema, que generalmente conduce a subsiguientes vibraciones libres, o bien, en algunos casos, forzadas (sí durante el movimiento que sigue al choque actúan fuerzas o momentos directamente aplicados).

En el momento del choque, es decir, al someter el sistema durante un tiempo considerablemente pequeño a fuerzas considerablemente grandes (lo que se entiende por someterlo a percusiones o impulsiones), su posición cambia considerablemente poco, pero su campo de velocidades adquiere altos valores, que hacen que el momento final del choque se presente como momento inicial de un proceso vibratorio.

## 4. Excitación determinista y excitación aleatoria

Se presenta uno u otro caso, según sea que la excitación, función del tiempo, tenga un carácter determinista o aleatorio, en el conocido sentido con que estos conceptos se diferencian en matemática. Las vibraciones que se presentan, por una u otra excitación, tienen, en correspondencia, el correspondiente carácter determinista o aleatorio. Timoshenko (1966).

El primer caso se presenta cuando la excitación, función del tiempo, puede ser perfectamente descrita por medio de una expresión matemática exacta. Es una excitación determinista la fuerza de inercia, que surge en una masa rotatoria desbalanceada, como se muestra en la figura 1.

El segundo caso se presenta cuando la excitación, función del tiempo, aparece al azar. Es una excitación aleatoria la que producen las fuerzas, que surgen en los neumáticos y los resortes y amortiguadores de la suspensión de un automóvil, al desplazarse este sobre una superficie, en la que aparecen irregularidades al azar, como se muestra en la figura 2.

Fig. 1. Fuerza de inercia en una masa rotatoria.

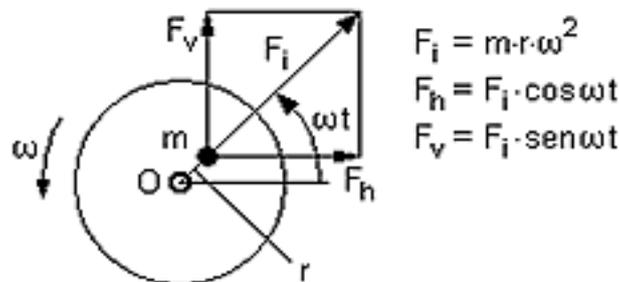


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Fig. 2. Auto que se desplaza sobre una superficie irregular.

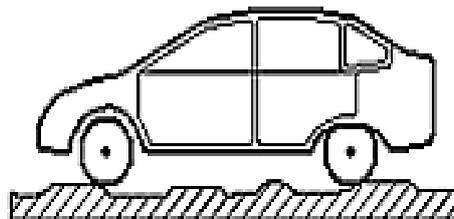


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

## 5. Fuerzas conservativas y no conservativas

El hecho de que las acciones que intervengan, tanto aplicadas como de ligadura, tengan carácter conservativo o no conservativo, tiene gran importancia para el movimiento vibratorio resultante, ya que condicionan en gran manera las características del mismo.

Conocemos como fuerzas **conservativas** aquellas que derivan de un potencial, es decir, aquellas en que el vector fuerza es el gradiente de una función potencial y el trabajo elemental de ellas es una diferencial exacta o diferencial total. Consecuentemente se tiene que el trabajo total entre dos instantes sólo depende de las configuraciones en estos instantes, sin depender de las configuraciones intermedias.

**No conservativas** son aquellas que no cumplen dichos requisitos. En las primeras, la energía que comunican al sistema entre dos posibles pasos sucesivos del sistema por la misma configuración es nula, mientras que en las segundas, generalmente es distinta de cero. Según sea positivo o negativo este valor no nulo, las fuerzas no conservativas se conocen respectivamente por amplificativas o disipativas.

Entre las conservativas son importantes las fuerzas de ligadura de tipo elástico (siempre que las deformaciones se encuentren por debajo del límite elástico) cuyo trabajo se traduce en energía de deformación (flexión, torsión, tracción, etc.), así como algunas másicas, como las fuerzas gravitatorias, aunque estas son generalmente de una importancia relativa muy pequeña.

Entre las no conservativas son muy importantes las fuerzas disipativas de rozamiento. Los rozamientos más importantes son el conocido por viscoso (proporcional a la velocidad), los del tipo Coulomb o rozamientos superficiales en el deslizamiento (más secundarios son los de rodadura y pivotamiento) y los de histéresis o rozamiento interno molecular de los sólidos.

Las fuerzas no conservativas amplificativas son más excepcionales; pero, cuando se presentan, tienen un efecto muy significativo. Las vibraciones autoexcitadas tienen su origen en fuerzas de este tipo.

## 6. Sistemas lineales y no lineales

Los sistemas se conocen por **lineales** cuando la relación entre excitación y respuesta admite el principio de superposición. Esto se traduce en que el modelo matemático que se plantea en su estudio, bien en forma de ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, etcétera, es lineal. Los **no lineales**, por exclusión, son los que no reúnen estas características.

Sin embargo, bien entendida, la linealidad es una hipótesis en la formulación matemática del problema, a la que unos sistemas responden mejor que otros para una cierta bondad de aproximación exigida en los resultados. En todo caso, el estudio lineal siempre constituye una primera aproximación y con satisfactoria validez para un campo limitado de variabilidad de los parámetros que definen el problema.

El estudio de los sistemas no lineales se encuentra poco avanzado, como sucede en otras materias, debido al estancamiento propio de los modelos matemáticos correspondientes.

## 7. Grados de libertad

Este concepto tiene el sentido general que se le da en mecánica. Aunque sobradamente conocidas, conviene que, a título de recordatorio, se puntualicen algunas ideas. Se entienden por parámetros o coordenadas generalizadas, las variables que, en número mínimo, definen la configuración del sistema, teniendo en cuenta las relaciones de ligadura. Sin embargo, **grados de libertad** es el número mínimo de variaciones virtuales independientes de los parámetros, que definen el desplazamiento virtual, más general posible, del sistema, compatible con las ligaduras, (Thomson, 2002).

Si el sistema es *holónimo*, es decir, si todas las ligaduras son holónomas (analíticamente expresables por relaciones finitas entre las coordenadas), el número de coordenadas generalizadas y el de grados de libertad coinciden. Sin embargo, en sistemas no holónomos, es decir, con alguna ligadura no holónoma, el número de parámetros es superior al número de grados de libertad y su diferencia es el número de ligaduras no holónomas que presentan.

Los sistemas que se estudian normalmente son holónomos y la coincidencia anterior evita esta matización, pero pueden estudiarse sistemas no holónomos en los que conviene tener presente la diferencia expuesta. Los grados de libertad de un sistema real son infinitos, pero las idealizaciones del mismo, o hipótesis simplificativas que se le aplican, hacen posible realizar el estudio sobre un sistema de un número finito de grados de libertad y en muchos casos, bastante satisfactoriamente, sobre sistemas de un número muy pequeño de grados de libertad.

Acoplamiento. Se dice que un sistema presenta acoplamiento entre dos parámetros, cuando la variación de uno de ellos produce fuerzas que tienden a modificar el valor del otro. Según la naturaleza de estas fuerzas, se conoce por acoplamiento elástico, másico, disipativo, etc.

## 8. Movimientos periódicos y aperiódicos

Los movimientos se denominan **periódicos** cuando las variaciones de la configuración del sistema se repiten en intervalos iguales de tiempo. El valor de este intervalo se conoce por período; su inverso es llamado frecuencia. Se llaman **aperiódicos**, cuando no tienen aquellas características. En estos últimos, si los valores máximos de todos los parámetros se hacen sucesivamente más pequeños, se dicen amortiguados; y si el valor máximo de algún parámetro aumenta, se denominan amplificados, (Singiresu, 2009).

Intervalos transitorio y estacionario. En la concurrencia de un movimiento periódico y uno aperiódico amortiguado superpuestos, existe un primer intervalo de tiempo, en el cual el movimiento aperiódico tiene valores apreciables, que se conoce por “intervalo transitorio”. Al intervalo que sigue, en el cual el movimiento aperiódico prácticamente ha desaparecido, se le conoce por “intervalo estacionario”.

## 9. Movimiento armónico

Dado que las excitaciones más frecuentes son armónicas, lo cual se traduce en una variación temporal de las vibraciones también de tipo armónico, este movimiento adquiere una singular importancia en el estudio de los fenómenos vibratorios. En la figura 3. se presenta la descripción gráfica del movimiento armónico simple.

Incluso cuando las excitaciones son aleatorias, si el sistema es lineal, con la ayuda de las Series de Fourier y del principio de superposición, que es posible aplicar, podemos concretarnos al estudio de las vibraciones mecánicas con funciones armónicas.

Fig. 3. Representación gráfica del movimiento armónico simple

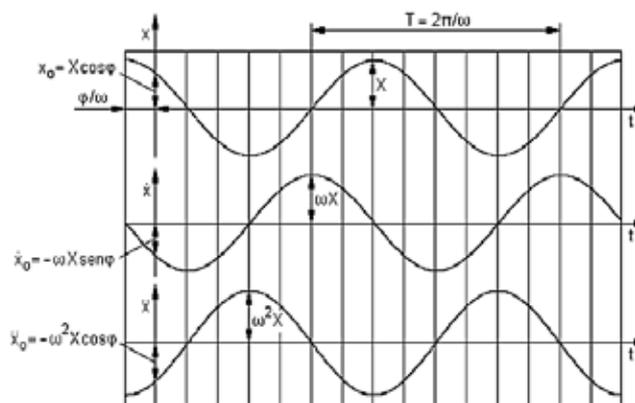


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Fig. 4 Vector asociado al movimiento armónico y sus derivadas

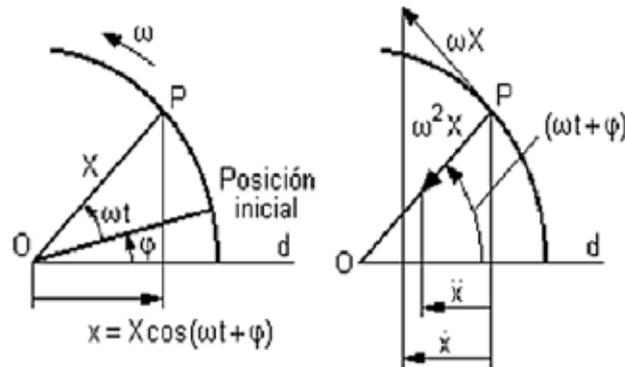


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Este movimiento es sobradamente conocido y no es necesario extenderse en su exposición. En la figura 4. se presenta el vector asociado a dicho movimiento y sus derivadas con respecto al tiempo (velocidad y aceleración).

En la figura se observa que, dado dicho movimiento por una función coseno, por ejemplo:

$$x(t) = -wX \text{sen}(wt + \varphi) = wX \cos(wt + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

La velocidad, que es la primera derivada del desplazamiento, con respecto al tiempo, estará dada por la expresión:

$$x(t) = -w^2 X \cos(wt + \varphi) = w^2 X \cos(wt + \varphi + \pi)$$

De estas expresiones se deduce que la velocidad y la aceleración son funciones armónicas de igual frecuencia que el desplazamiento y estarán adelantadas  $90^\circ$  y  $180^\circ$ , respectivamente, a dicho desplazamiento. Las constantes que intervienen se conocen por:

X, amplitud;

$\omega$ , frecuencia angular o circular;

$\phi$ , fase;

Y las que se derivan de  $\omega$ :

$F = \omega / 2\pi$ : frecuencia;

$T = 2\pi / \omega$ : período.

Es interesante resaltar, por ser muy útil en los desarrollos matemáticos, que:

$$x(t) = -X \cos(\omega t + \varphi) = R [X \omega e^{i(\omega t + \varphi)}]$$

Y así mismo:

$$x(t) = -X \sin(\omega t + \varphi) = R [X \omega e^{i(\omega t + \varphi)}]$$

Donde R e I indican parte real y parte imaginaria del número complejo que comprenden. Expresado el movimiento por la función coseno, es inmediato que su velocidad:

$$x(t) = -X \omega \sin(\omega t + \varphi) = R [-X i \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)}]$$

Y su aceleración:

$$x(t) = -X \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = R [-X \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)}]$$

Se obtienen expresiones análogas, tomando una función seno para representar el movimiento.

Se pueden utilizar otras formas de representar o interpretar el movimiento armónico simple. En la figura 5, se presenta el esquema vectorial cinemático de un movimiento armónico simple. El vector velocidad y el vector aceleración se adelantan 90 grados y 180 grados, respectivamente, al vector desplazamiento.

Fig. 5 Esquema imperial cinemático

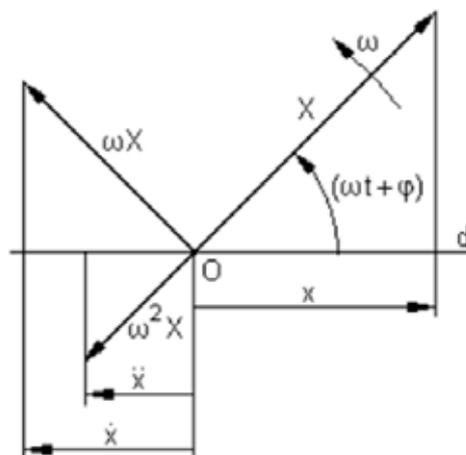


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

## 10. Respuestas en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia

Las vibraciones son las respuestas oscilatorias de los sistemas mecánicos dinámicos. Las vibraciones naturales, en estos sistemas, ocurren debido a las conversiones sucesivas (directas e inversas) entre las dos formas de almacenamiento de la energía mecánica: la energía cinética y la energía potencial.

La **energía cinética** es la energía acumulada en las masas de los elementos, que se mueven a una determinada velocidad. La energía potencial se presenta en dos modos: la energía potencial elástica, que se acumula en los elementos que sufren determinadas deformaciones elásticas (el caso típico es el de los resortes o muelles); y la energía potencial gravitacional, que depende de la altura, a la que se encuentra el cuerpo, con respecto a una referencia dada, (Kelly, 2000).

En una determinada posición, cuando la velocidad es nula, el sistema, deformado al máximo, poseerá solamente **energía potencial**, que luego se irá transformando en energía cinética, a medida que disminuye la deformación y aumenta la velocidad. En una determinada posición intermedia, el sistema sólo poseerá energía cinética, ya que la deformación será nula y la velocidad será máxima. Alcanzada esta posición, el sistema continuará moviéndose por inercia, y la energía cinética se irá transformando en energía potencial, a medida que el sistema se acerca a la deformación máxima. Este ciclo se repite sucesivamente, manteniendo las vibraciones en el sistema.

Se debe notar, sin embargo, que una fuerza variable periódicamente puede obligar a un sistema dinámico a responder con un movimiento vibratorio, usualmente a la misma frecuencia de la fuerza excitadora, aún en ausencia de las dos formas de almacenamiento de energía, mencionadas anteriormente. Tales movimientos se denominan vibraciones forzadas, a diferencia de las vibraciones libres o naturales, que ocurren por las conversiones sucesivas de energía potencial a energía cinética y viceversa, que se producen después de excitar el sistema con determinadas perturbaciones iniciales.

Las vibraciones mecánicas, libres o forzadas, pueden aparecer en una gran cantidad de situaciones prácticas. Varias de estas vibraciones pueden ser útiles o deseables, y otras indeseables, por lo que deben ser disminuidas o eliminadas. Las vibraciones, que ocurren en los instrumentos musicales, producen sonidos generalmente agrada-

bles y deseables; las vibraciones en una zaranda son útiles, aunque no agradables; las vibraciones, que aparecen en un automóvil, cuando este pasa sobre las irregularidades de la carretera, son desagradables y dañinas; etc.

Durante el diseño y desarrollo de un sistema mecánico, independientemente de si este está destinado a generar vibraciones o a operar sin vibraciones, un modelo analítico del sistema puede jugar un importante papel. El modelo representa el sistema dinámico y puede ser analizado y modificado muchas veces, antes de producir el primer prototipo. Un modelo en el dominio del tiempo es un conjunto de ecuaciones diferenciales, que contiene como variable independiente al tiempo ( $t$ ). La respuesta en el dominio del tiempo describe el comportamiento del movimiento del cuerpo a medida que el tiempo transcurre.

En muchos casos, las fuerzas excitadoras de vibraciones varían periódicamente con una determinada frecuencia, teniendo generalmente un carácter sinusoidal (o cosinusoidal). Un ejemplo muy simple es la fuerza de inercia que surge en un elemento rotatorio, que presenta una cierta excentricidad. En términos básicos, la respuesta en el dominio de la frecuencia ( $\omega$ ) de un sistema dinámico es la respuesta a una excitación sinusoidal. A medida que cambian la amplitud y frecuencia de la fuerza excitadora, también varía la respuesta. La variación de la respuesta, en un determinado rango de frecuencia, constituye la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, (Kelly, 2000).

Fig. 6. Respuesta en el dominio del tiempo y en la frecuencia

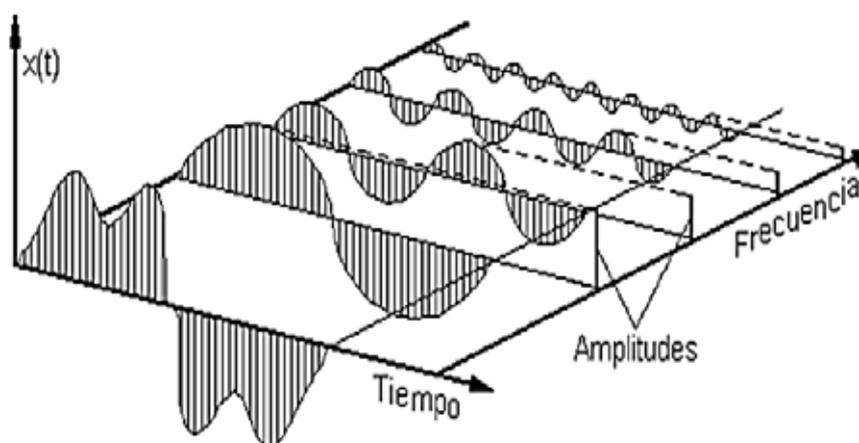


Ilustración: Roberto Beltrán

Lo expuesto en el párrafo anterior es también aplicable para fuerzas excitadoras que no sean sinusoidales. En efecto, una señal arbitraria en el dominio del tiempo puede ser transformada a una suma de señales sinusoidales simples en el dominio de la frecuencia por medio de la transformación de Fourier. Dicha suma (serie) contiene las componentes de diferentes frecuencias de la señal, lo que permite, teniendo en cuenta el principio de superposición, aplicable a los sistemas lineales, obtener la respuesta del sistema a dicha excitación en el estudio de las vibraciones forzadas.

En la figura 6, en la página anterior, se representa una señal compleja (desplazamiento de un cuerpo que vibra) en el dominio del tiempo, y su equivalente (espectro) en el dominio de la frecuencia.

## Capítulo II



## SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

ESPACIO EN BLANCO

## 1. Sistema masa-resorte-amortiguador

Supongamos el sistema, esquematizado en la figura 7, formado por una masa, un elemento recuperador elástico (muelle) y un dispositivo amortiguador, en el que hacemos las siguientes hipótesis:

- La masa tiene una guía vertical, sin rozamiento, que permite únicamente desplazamientos verticales, e impide los otros dos desplazamientos y los tres giros.
- El muelle tiene una masa despreciable frente a la masa principal del sistema y su fuerza recuperadora elástica es proporcional a su deformación.
- El dispositivo amortiguador tiene sus masas móviles despreciables frente a la masa principal del sistema y está basado en un rozamiento tipo viscoso; es decir, con fuerza de rozamiento opuesta a la velocidad y proporcional a ella.
- El sistema se supone situado en el vacío, o lo que es igual, se desprecia la resistencia del aire.

Este sistema necesita un solo parámetro para definir su configuración. Este parámetro será la distancia vertical de la posición del centro de gravedad de la masa, relativa a una posición fija. Esta posición fija puede ser la del equilibrio estático (p. e. e.) que adopta el sistema debido a la tensión inicial del muelle y a la fuerza de la gravedad (supuesta ésta en la dirección de la vertical).

Fig. 7 Sistema masa-resorte amortiguador

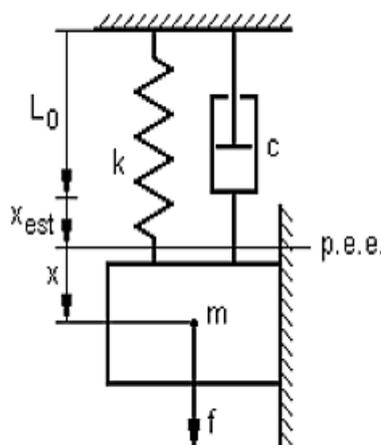


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Estableciendo la notación siguiente:

- $m$ : masa principal.
- $k$ : constante de rigidez elástica del resorte [N/m]. Físicamente representa la fuerza necesaria para una deformación unidad. Esta constante es esencialmente positiva.
- $c$ : constante de amortiguamiento viscoso [N.s/m]. Físicamente representa la fuerza necesaria para mover el amortiguador con velocidad unidad. Esta constante es esencialmente positiva.
- $f$ : componente vertical de la resultante de las fuerzas exteriores directamente aplicadas. Se toma positiva hacia abajo.
- $x$ : desplazamiento del centro de gravedad respecto a la posición de equilibrio estático. Se toma positivo hacia abajo.
- $X_{\text{est}}$ : deformación en la condición de equilibrio estático.
- $L_0$ : longitud del muelle no sometido a ninguna carga.

Las fuerzas que actúan sobre la masa, en dirección vertical (positivas hacia abajo), son:

Fuerza de inercia, .....  $-m\ddot{x}$   
 Fuerza elástica, .....  $-k(x + X_{\text{est}})$   
 Fuerza amortiguadora, .....  $-c\dot{x}$   
 Fuerza exterior directamente aplicada,  $f$ .  
 Fuerza de la gravedad, .....  $m g$ .

La ecuación del equilibrio dinámico permite establecer, por tanto, la expresión:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad (1)$$

Ya que  $m \cdot g = k \cdot X_{\text{est}}$ .

La expresión anterior constituye la forma más general para describir el movimiento vibratorio de sistemas con un grado de libertad.

Por las hipótesis adoptadas, obtenemos una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, la cual resulta particularmente simple para su integración. Refiriendo los desplazamientos a partir de la posición de equilibrio estático, vemos que se puede prescindir del sistema de fuerzas, equivalentes a cero en todo momento, que determinan ese estado de equilibrio.

Sistemas más complejos, pero análogos al anterior, están regidos por una ecuación equivalente. La expresión anterior tiene validez de primera aproximación cuando las características elásticas y amortiguadoras no cumplen la hipótesis de proporcionalidad admitida anteriormente, (Derek, 2003).

Las fuerzas directamente aplicadas, que particularmente nos interesan, son aquellas de variación temporal de carácter periódico, y por tanto, debido al análisis armónico y a la aditividad de soluciones del problema lineal que resulta, podemos, sin pérdida de generalidad, suponer expresiones armónicas para estas fuerzas. La presencia del término constante en el análisis de Fourier se reduce a cambiar la posición de equilibrio de referencia que resulta al considerar esta fuerza constante y prescindir, por tanto, de ella en todo lo sucesivo.

El comportamiento vibratorio es distinto según la ausencia o presencia de algunos términos en la expresión general, por lo que conviene distinguir los siguientes casos:

- Vibraciones forzadas o no forzadas (libres), según haya o no fuerzas exteriores aplicadas. Ecuación diferencial completa (no homogénea) o incompleta (homogénea).
- Vibraciones amortiguadas o no amortiguadas (neutras), según haya o no fuerza disipadora de energía. Ecuación diferencial con término proporcional a la primera derivada o sin él.

En lugar de analizar la expresión general y particularizar las diversas circunstancias, empezaremos estudiando los casos más simples y después continuaremos con los más complejos.

## **2. Vibraciones libres no amortiguadas.**

Es el caso más sencillo de movimiento vibratorio, por suponer la ausencia de amortiguamiento y de fuerzas exteriores aplicadas. Las vibraciones se producirán por alguna acción perturbadora del equilibrio del sistema (desplazamiento inicial, velocidad inicial, choque, etc.), que cesa inmediatamente después de iniciado el movimiento vibratorio. En la figura 8, se presenta un sistema masa - resorte sin amortiguamiento y sin fuerza exterior aplicada.

Fig. 8. Sistema masa-resorte no amortiguado

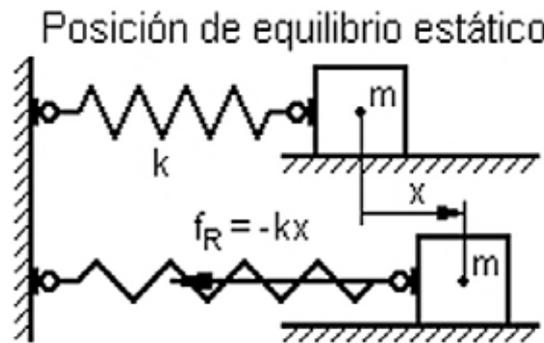


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

La ecuación que rige el movimiento se reduce a la expresión:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2)$$

Esta expresión puede presentarse también como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

O en la forma:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

El parámetro:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (5)$$

Es una constante del sistema, que depende de sus características elásticas y másicas, y es denominada frecuencia natural, frecuencia propia o autofrecuencia.

Aquí se obtienen ya dos importantes conclusiones cualitativas, que generalizaremos después para sistemas más complejos:

Al aumentar (o disminuir) la rigidez elástica del sistema aumenta (o disminuye) su frecuencia natural, (Singiresu, 2009).

Al aumentar (o disminuir) la masa del sistema disminuye (o aumenta) su frecuencia natural.

Solución general. La solución general de la ecuación diferencial anterior puede ser la siguiente:

$$x(t) = X \text{sen}(\omega_n t + \varphi) \quad (6)$$

Donde  $X$  (amplitud) y  $\varphi$  (ángulo de fase) son dos constantes a determinar por las condiciones iniciales.

La velocidad estará dada por la expresión:

$$\dot{x}(t) = \omega_n X \text{cos}(\omega_n t + \varphi) \quad (7)$$

Y la aceleración, por la expresión:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 X \text{sen}(\omega_n t + \varphi) \quad (8)$$

En la figura 9, se representa la solución general de la ecuación diferencial del movimiento vibratorio.

Solución particular. La ecuación diferencial, por si sola, no determina el movimiento particular que se produce en cada caso. Para ello es necesario acompañarla de unas condiciones en los límites, que se darán en la forma habitual en dinámica de condiciones iniciales.

Fig. 9. Gráfico de la solución



Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Así, para  $t=0$ :  $x_0$ , desplazamiento inicial;  $\dot{x}_0$ , velocidad inicial.

Particularizando las expresiones de la solución general y de su derivada, para estos valores, se tiene que:

$$x_0 = X \operatorname{sen} \varphi \quad (9)$$

$$\dot{x}_0 = X \omega_n \operatorname{cos} \varphi \quad (10)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (9) y (10):

$$x_0^2 = X^2 \operatorname{sen}^2 \varphi; \quad \dot{x}_0^2 = X^2 \omega_n^2 \operatorname{cos}^2 \varphi$$

Transformando y sumando ambas ecuaciones anteriores:

$$x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2} = X^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi + \operatorname{cos}^2 \varphi)$$

De donde obtenemos la amplitud:

$$X = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2}} \quad (11)$$

Dividiendo (9) entre (10), obtenemos:

$$\frac{x_0}{\dot{x}_0} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\omega_n \operatorname{cos} \varphi} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0}$$

Despejando el ángulo de fase:

$$\varphi = \arctan \frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \quad (12)$$

La solución particular, en este caso, también podrá estar dada por una expresión de la forma:

$$x(t) = A \operatorname{cos} \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t \quad (13)$$

Y la velocidad será:

$$\dot{x}(t) = -A\omega_n \text{sen}\omega_n t + B\omega_n \text{cos}\omega_n t \quad (14)$$

Para  $t=0$  se tendrá que:

$$x_0 = A \Rightarrow A = x_0 \text{ y } \dot{x}_0 = B\omega_n \Rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

Sustituyendo los valores de A y B en (13), la solución particular correspondiente será:

$$x = x_0 \text{cos}\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \text{sen}\omega_n t \quad (15)$$

Obtenemos así un movimiento armónico con la frecuencia natural del sistema y con amplitud determinada por la magnitud de la perturbación inicial, es decir, por el desplazamiento inicial (o lo que es equivalente, energía de deformación inicial) y por la velocidad inicial (o lo que es equivalente, energía cinética inicial).

En sentido energético el movimiento se desarrolla por medio de conversiones sucesivas (periódicas) de energía cinética en energía potencial (de deformación) y viceversa, de manera que al no existir ningún dispositivo disipador de energía (amortiguador) la suma de ambas energías permanece constante, e igual a la comunicada inicialmente al sistema.

### 3. Vibraciones libres amortiguadas

Suponemos en este caso la ausencia de fuerzas exteriores aplicadas, pero si la presencia de amortiguamiento. En la figura 10, se presenta un sistema masa-resorte-amortiguador sin fuerza exterior aplicada. Las vibraciones se producirán por alguna acción perturbadora del equilibrio del sistema (desplazamiento inicial, velocidad inicial, choque, etc.), que cesa inmediatamente después de iniciado el movimiento vibratorio.

Fig. 10. Sistema de masa-resorte-amortiguador

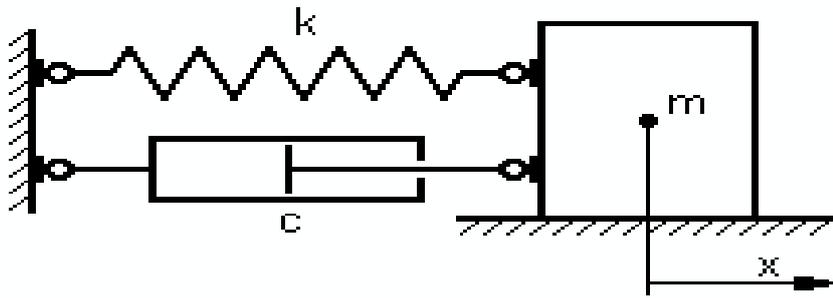


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

La ecuación diferencial toma la forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (16)$$

La solución general se obtiene por combinación lineal de dos soluciones particulares. Para encontrar estas soluciones se ensaya una función exponencial:

$$x(t) = X e^{st} \quad (17)$$

La velocidad estará dada entonces por la expresión:

$$\dot{x}(t) = X s e^{st}$$

Y la aceleración por:

$$\ddot{x}(t) = X s^2 e^{st}$$

Sustituyendo (17) y sus derivadas en (16), se obtiene:

$$mXs^2 e^{st} + cXs e^{st} + kX e^{st} = 0$$

Simplificando la expresión anterior, se obtiene la ecuación característica:

$$ms^2 + cs + k = 0$$

Que se puede expresar también, como:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (18)$$

Cuyas raíces serán:

$$s_1, s_2 = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (19)$$

Según la naturaleza de estas raíces tendremos unos movimientos esencialmente diferentes. Las raíces pueden ser:

Dos raíces reales negativas, si  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$

Una raíz doble, real y negativa, si  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$

Dos raíces imaginarias conjugadas con parte real negativa, si

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$$

Estos diversos casos se presentan según el signo que tome la expresión bajo el radical en la expresión (19). Al valor frontera del amortiguamiento, que hace cero la expresión bajo dicho radical, se le denomina amortiguamiento crítico ( $c_{cr}$ ) y es una propiedad del sistema, que determina uno u otro movimiento. Es decir, cuando el amortiguamiento del sistema es igual al amortiguamiento crítico, la expresión bajo el radical es igual a cero. Esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \frac{c_{cr}^2 - 4km}{4m^2} = 0$$

Para que lo anterior se cumpla, el numerador tiene que ser igual a cero, es decir:

$$c_{cr}^2 - 4km = 0 \Rightarrow c_{cr} = 2\sqrt{km} \quad (20)$$

Partiendo del mismo razonamiento se puede llegar a otra expresión, como se muestra a continuación:

$$\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \frac{c_{cr}^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow c_{cr}^2 = 4m^2 \omega_n^2$$

De donde se obtiene:

$$c_{cr} = 2m\omega_n \quad (21)$$

Tanto la expresión (20), como la (21), corroboran que el amortiguamiento crítico es una propiedad del sistema, que depende de las características másicas y elásticas de este.

De las tres posibilidades de movimiento, sólo el tercero tiene un interés real, dada la fuerte amortiguación de las dos primeras, que hace desaparecer completamente el carácter vibratorio. No obstante, se analizarán primeramente las posibilidades de movimiento no vibratorio.

### 3.1 Amortiguamiento superior al crítico

En este caso,  $c > c_{cr}$  y la solución general será:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (22)$$

La velocidad será entonces:

$$\dot{x}(t) = C_1 s_1 e^{s_1 t} + C_2 s_2 e^{s_2 t} \quad (23)$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se determinan a partir de las condiciones iniciales:

$$x_0 = C_1 + C_2 \quad (24)$$

$$\dot{x}_0 = C_1 s_1 + C_2 s_2 \quad (25)$$

De (24) se obtiene:

$$C_2 = x_0 - C_1 \quad (26)$$

Sustituyendo (26) en (25):

$$\dot{x}_0 = C_1 s_1 + (x_0 - C_1) s_2 \quad \square \quad \dot{x}_0 = C_1 (s_1 - s_2) + x_0 s_2$$

De donde se obtiene:

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0 - x_0 s_2}{s_1 - s_2} \tag{27}$$

Sustituyendo (27) en (26):

$$C_2 = x_0 - \frac{\dot{x}_0 - x_0 s_2}{s_1 - s_2} \Rightarrow C_2 = \frac{x_0 s_1 - x_0 s_2 - \dot{x}_0 + x_0 s_2}{s_1 - s_2}$$

De donde:

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 - x_0 s_1}{s_2 - s_1} \tag{28}$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  determinan la correspondiente solución particular.

Dicha solución puede presentar uno de los distintos aspectos, representados en la figura 11. Todas las curvas tienden a amortiguar rápidamente la perturbación, sin que aparezcan vibraciones, y vuelven a la posición de equilibrio en un tiempo teóricamente infinito, aunque en la práctica alcanzan esta posición en un corto intervalo.

Fig. 11. Soluciones particulares para amortiguamiento superior al crítico.

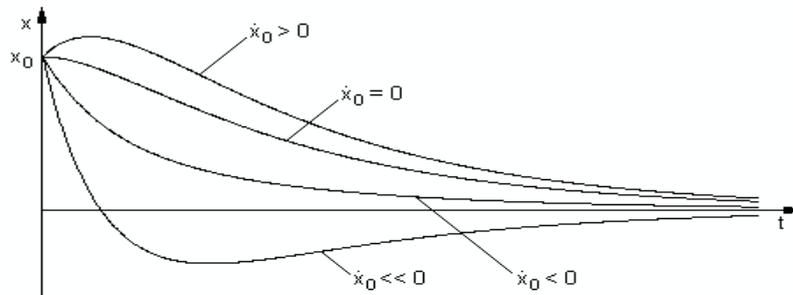


Fig. 2.3.2. Soluciones particulares para amortiguamiento superior al crítico.

Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### 3.2 Amortiguamiento al crítico

La solución general será:

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{s_1 t} \tag{29}$$

Desarrollando (29):

$$x(t) = C_1 t e^{s_1 t} + C_2 e^{s_1 t} \quad (30)$$

La velocidad, entonces será:

$$\dot{x}(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_1 t s_1 e^{s_1 t} + C_2 s_1 e^{s_1 t} \quad (31)$$

A partir de las condiciones iniciales (para  $t=0$ ), se obtiene:

$$x_0 = C_2 ; \quad \dot{x}_0 = C_1 + s_1 C_2 ;$$

De donde:

$$C_2 = x_0 ; \quad C_1 = \dot{x}_0 - s_1 x_0 ; \quad (32)$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  particularizan cada solución. Estas soluciones presentan una disposición análoga a las del caso anterior, como se representan en la ecuación (18), (Thomson 2002).

### 3.3 Amortiguamiento inferior al crítico

En este caso la expresión bajo el radical de la ecuación (19) se hace negativa y se puede transformar de la siguiente forma:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \sqrt{(-1) \left[ \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 \right]} = i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (33)$$

Y si se hace:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_r}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_r}\right)^2} \quad (34)$$

La frecuencia se denomina frecuencia natural con amortiguamiento.

Fig. 12. Soluciones particulares para amortiguamiento igual al crítico

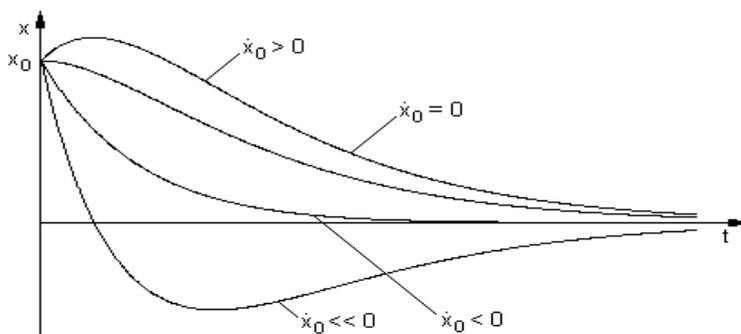


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Recordando la expresión (19), las raíces serán:

$$s_1, s_2 = -\frac{c}{2m} \pm i\omega_r \tag{35}$$

Por tanto, la expresión de la solución general será:

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} X \text{sen}(\omega_r t + \varphi) \tag{36}$$

La velocidad en este caso será:

$$\dot{x}_0 = e^{-\frac{c}{2m}t} X \omega_r \cos(\omega_r t + \varphi) + e^{-\frac{c}{2m}t} \left(-\frac{c}{2m}\right) X \text{sen}(\omega_r t + \varphi)$$

Las constantes ( X y  $\varphi$  ) se determinan, para cada solución particular, a partir de las condiciones iniciales. Para  $t=0$ , el desplazamiento (36) y la velocidad toman las formas:

$$x_0 = X \text{sen}\varphi \tag{37}$$

$$\dot{x}_0 = X \left( \omega_r \cos\varphi - \frac{c}{2m} \text{sen}\varphi \right) \tag{38}$$

De (37):

$$X = \frac{x_0}{\text{sen}\varphi} \quad (39)$$

Sustituyendo (39) en (38):

$$\dot{x}_0 = \frac{x_0}{\text{sen}\varphi} \left( \omega_r \cos\varphi - \frac{c}{2m} \text{sen}\varphi \right) \quad (40)$$

Aplicando la ley distributiva en (40):

$$\dot{x}_0 = \frac{x_0 \omega_r}{\tan\varphi} - \frac{x_0 c}{2m} \Rightarrow \dot{x}_0 + \frac{x_0 c}{2m} = \frac{x_0 \omega_r}{\tan\varphi} \Rightarrow \frac{2m\dot{x}_0 + x_0 c}{2m} = \frac{x_0 \omega_r}{\tan\varphi}$$

De la expresión anterior se obtiene:

$$\varphi = \text{atan} \frac{2m x_0 \omega_r}{2m \dot{x}_0 + x_0 c} \quad (41)$$

Sustituyendo el ángulo  $\varphi$  en la expresión (39), se obtiene la amplitud X.

Fig. 13. Soluciones particulares para amortiguamiento inferior al crítico

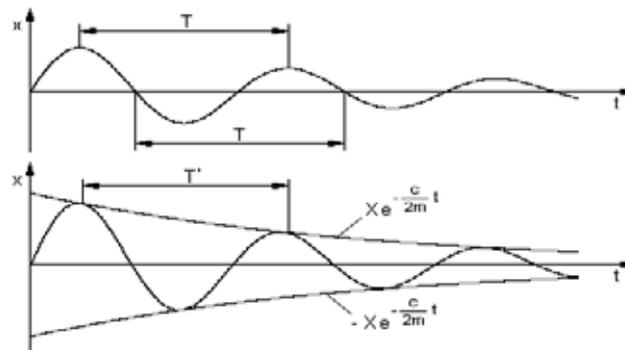


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

La solución particular anterior nos da un movimiento armónico pero con una amplitud que decrece exponencialmente con el tiempo, tanto más cuanto mayor es el amortiguamiento. La curva que representa esta función, como se indica en la figura 13, es tangente a los exponenciales  $(\pm X e^{-\frac{c}{2m} t})$  en los puntos correspondientes a:

$$t_n = \frac{1}{\omega_r} \left[ (2n + 1) \frac{\pi}{2} - \varphi \right] \quad (42)$$

En estos puntos coinciden las ordenadas y las tangentes.

La frecuencia natural con amortiguamiento ( $\omega_\rho$ ) está relacionada, en forma adimensional, con la frecuencia natural sin amortiguamiento ( $\omega_n$ ), por la siguiente ecuación, obtenida de la expresión (34):

$$\left( \frac{\omega_r}{\omega_n} \right)^2 + \left( \frac{c}{c_{cr}} \right)^2 = 1$$

Cuya representación en un sistema cartesiano es una circunferencia.

El valor  $T' = \frac{2\pi}{\omega_r}$  establece una periodicidad en el sentido de que la sucesión de valores  $X_n$  de la amplitud, obtenidos en instantes sucesivos separados por el tiempo  $T'$ , forman una progresión geométrica. En particular los puntos de tangencia con las curvas exponenciales tienen amplitudes en esta progresión. En efecto, sean  $X_n$  y  $X_{n+1}$  dos amplitudes diferidas  $T'$ , en el tiempo. Si:

$$X_n = e^{-\frac{c}{2m}t} X \text{sen}(\omega_r t_n + \varphi)$$

$$X_{n+1} = e^{-\frac{c}{2m}(t_n + T')} X \text{sen}(\omega_r t_n + \varphi + 2\pi) = e^{-\frac{c}{2m}(t_n + T')} X \text{sen}(\omega_r t_n + \varphi)$$

Se tiene que:

$$\frac{X_n}{X_{n+1}} = e^{\frac{c}{2m}T'} = e^{\frac{c\pi}{\omega_r m}} = \text{Const.}$$

### 3.4 Decremento logarítmico.

En la figura 14. Se presenta un movimiento armónico amortiguado y se indican las amplitudes en dos ciclos sucesivos. Los logaritmos de las amplitudes anteriores estarán en una progresión aritmética, y el logaritmo de la razón de éstas, se denomina “decremento logarítmico”.

Fig. 14. Disminución de la amplitud con el tiempo

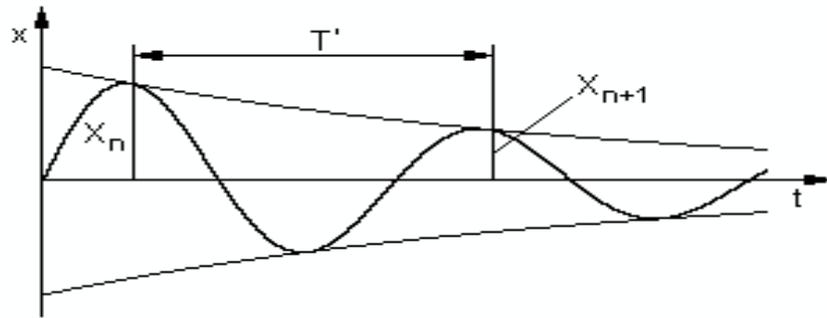


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Su valor será:

$$\delta = \ln \frac{X_n}{X_{n+1}} = \frac{c\pi}{\omega_r m} \quad (43)$$

El decremento logarítmico tiene gran interés práctico, ya que de un registro experimental de las vibraciones podemos fácilmente obtener las amplitudes, y así determinar el coeficiente de amortiguamiento, como se verá a continuación. La expresión (43) también se puede presentar en otra forma, como se muestra a continuación:

$$\delta = \frac{c\pi}{m\omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}} = \frac{2\pi \frac{c}{c_{cr}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}} \quad (44)$$

Para pequeñas relaciones de amortiguamiento ( $c/c_{cr} < 0,3$ ), el radical del denominador de la expresión (44) es aproximadamente igual a la unidad, por lo que se tendrá que:

$$\delta = 2\pi \frac{c}{c_{cr}} \Rightarrow \frac{c}{c_{cr}} = \frac{\delta}{2\pi}$$

Teniendo en cuenta (43), la expresión anterior puede tomar la forma:

$$\frac{c}{c_{cr}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{X_n}{X_{n+1}} \Rightarrow c = \frac{c_{cr}}{2\pi} \cdot \ln \frac{X_n}{X_{n+1}} \quad (45)$$

En la figura 15. se representan movimientos vibratorios con diferentes coeficientes de amortiguamiento. Como se puede notar, a medida que aumenta el coeficiente de amortiguamiento, la amplitud de las vibraciones decrece más rápidamente.

Fig. 15. Efecto del amortiguamiento sobre la amplitud

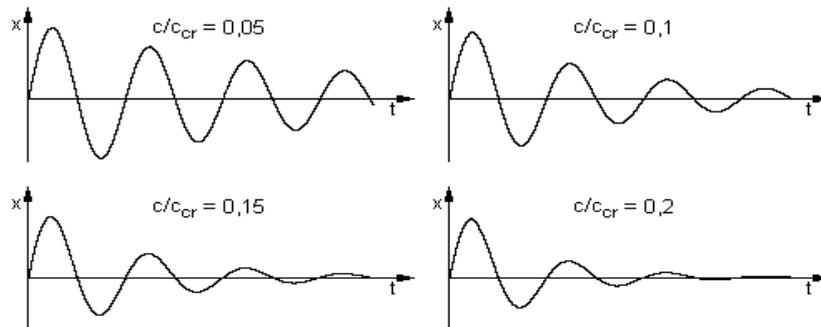


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

#### 4. Vibraciones forzadas no amortiguadas.

En la figura 16, se presenta un sistema vibratorio sin amortiguamiento y con una fuerza exterior variable aplicada ( $f = F \cdot \cos \omega t$ ). Aquí se supone la ausencia de amortiguamiento, pero se excitan vibraciones con una fuerza exterior que, sin perder generalidad, se considera armónica.

Fig. 16. Sistema masa-resorte forzado no amortiguado



Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

La ecuación diferencial adopta la expresión no homogénea siguiente:

$$m\ddot{x} + kx = F \cos \omega t \tag{46}$$

En la expresión anterior, la frecuencia angular ( $\omega$ ) de variación de la fuerza excitadora es independiente de la frecuencia natural del sistema ( $\omega_n$ ).

La solución general se compone de la general de la homogénea más una particular de la no homogénea, así:

$$x(t) = X \cos(\omega_n t + \varphi) + X_p t \quad (47)$$

Siendo  $X$  y  $\varphi$  dos constantes a determinar por las condiciones iniciales y determinada la solución particular arbitraria por una expresión de la forma:

$$X_p(t) = X_p \cos \omega t \quad (48)$$

Para esta solución particular, la velocidad será:

$$\dot{X}_p = -X_p \omega \sin \omega t \quad (49)$$

Y la aceleración:

$$\ddot{X}_p = -X_p \omega^2 \cos \omega t \quad (50)$$

La solución particular debe satisfacer independientemente la ecuación diferencial del movimiento vibratorio. Sustituyendo (48) y (50) en (46):

$$-mX_p \omega^2 + kX_p \cos \omega t = F \cos \omega t$$

Simplificando:

$$-mX_p \omega^2 + kX_p = F \Rightarrow (k - m\omega^2)X_p = F$$

De la expresión anterior, queda completamente determinada  $X_p$  por:

$$X_p = \frac{F}{(k - m\omega^2)} \quad (51)$$

Que se obtiene al hacer que la solución particular cumpla la ecuación (46). Dividiendo entre  $k$  el numerador y el denominador de (51), se obtiene:

$$X_p = \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \tag{52}$$

Sustituyendo (52) en (47), la solución general queda como:

$$x = X \cos(\omega_n t + \varphi) + \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos \omega t \tag{53}$$

Por tanto, en un sistema no amortiguado y forzado armónicamente, el movimiento se compone de la suma de dos armónicos, uno con la frecuencia natural del sistema y otro con la frecuencia de la fuerza excitadora. En la figura 17. se representan tres casos de superposición de movimientos libres y forzados, para tres combinaciones de la frecuencia natural y la frecuencia de la fuerza excitadora.

En el primer caso la frecuencia natural del sistema se diferencia notablemente de la frecuencia de la fuerza excitadora; en el segundo, ambas frecuencias se diferencian poco, presentándose el fenómeno de pulsación; y en el tercero, ambas coinciden, presentándose el fenómeno de resonancia.

Fig. 17. Vibraciones forzadas no amortiguadas

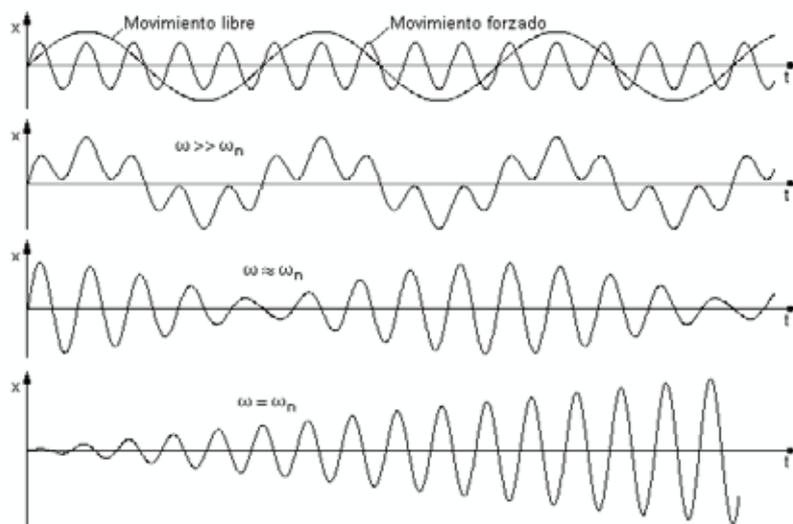


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

La amplitud del primer movimiento, con la frecuencia natural, depende de las condiciones iniciales y sólo se anula para unos valores particulares de éstas. La amplitud del segundo movimiento, que se produce con la frecuencia de la fuerza excitadora, depende de la proximidad de la frecuencia excitadora a la frecuencia natural del sistema y de la deflexión estática.

La proximidad de la frecuencia de la fuerza excitadora a la frecuencia natural se expresa por medio del factor de resonancia, cuya expresión es la siguiente:

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (54)$$

La deflexión estática ( $x_{est} = F/k$ ), es la deflexión del resorte, que provocaría la aplicación de una fuerza constante de módulo igual a la amplitud de la fuerza excitadora.

Al derivar la solución (53), se obtiene la velocidad:

$$\dot{x} = -X\omega_n \text{sen}(\omega_n t + \varphi) - \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \omega \text{sen} \omega t \quad (55)$$

Para  $t=0$ , los valores iniciales  $x_0$  y  $\dot{x}_0$  serán:

$$x_0 = X \cos \varphi + \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}; \quad \dot{x}_0 = -X\omega_n \text{sen} \varphi$$

De donde:

$$X \cos \varphi = x_0 - \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (56)$$

$$X \text{sen} \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (57)$$

Dividiendo (57) entre (56), se obtiene:

$$\tan\varphi = \frac{-\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}}{x_0 - \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

De donde:

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{-\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}}{x_0 - \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\right) \quad (58)$$

Elevando al cuadrado (56) y (57):

$$X^2 \cos^2 \varphi = \left(x_0 - \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)^2 \quad (59)$$

$$X^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2 \quad (60)$$

Sumando (59) y (60):

$$X^2 = \left(x_0 - \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2$$

De donde:

$$X = \sqrt{\left(x_0 - \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (61)$$

De (58) y de (61) se determinan fácilmente  $X$  y  $\varphi$ , que permiten obtener la solución particular.

La solución particular también puede ser escrita como:

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{F/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \quad (62)$$

**Resonancia.** Como caso límite, cuando las frecuencias (excitadora y natural) coinciden exactamente, aparece el fenómeno de la resonancia. Analicemos este fenómeno, acercando la frecuencia excitadora a la frecuencia natural.

El denominador del factor de resonancia es una diferencia de cuadrados, que se puede desarrollar como sigue:

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = \left(1 + \frac{\omega}{\omega_n}\right) \left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right) = \left(\frac{\omega_n + \omega}{\omega_n}\right) \left(\frac{\omega_n - \omega}{\omega_n}\right)$$

Como las frecuencias excitadora y natural están cercanas, se puede plantear que:

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \approx 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \quad (63)$$

Por otro lado, en el tercer término de la derecha de la expresión (62), el factor:

$$(\cos\omega t - \cos\omega_n t) = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\omega + \omega_n}{2} \cdot t \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\omega - \omega_n}{2} \cdot t \right)$$

Teniendo en cuenta la cercanía de las frecuencias excitadora y natural, se puede plantear que:

$$(\cos\omega t - \cos\omega_n t) \approx 2 \operatorname{sen}\omega_n t \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\Delta\omega}{2} \cdot t \right) \quad (64)$$

En la solución general, dada por la expresión (62), en la zona de resonancia los dos primeros términos de la derecha son despreciables ante el tercero, por lo que se puede escribir dicha solución, teniendo en cuenta (63) y (64), de la siguiente forma:

$$x = \frac{F/k}{2\Delta\omega/\omega_n} \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot 2 \operatorname{sen}\omega_n t$$

Cuando la frecuencia de la fuerza excitadora se acerca a la natural, entonces:

$$\Delta\omega \rightarrow 0 \quad \frac{\text{sen} \frac{\Delta\omega}{2}}{\Delta\omega} \rightarrow \frac{t}{2}$$

Y la amplitud del movimiento, tiende a:

$$x = \frac{F}{2.k} \omega_n \cdot t \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t) \tag{65}$$

La expresión (65) muestra que la amplitud crece indefinidamente hasta un valor infinito. En la práctica siempre aparecerá un determinado amortiguamiento, que limita el crecimiento de la amplitud, por lo que se producirá una gran amplitud; pero que no llega a ser infinita.

### 5. Vibraciones forzadas amortiguadas.

En la figura 18. se presenta un sistema vibratorio amortiguado, sobre el que actúa una fuerza exterior variable. Responde al esquema completo, tal como lo presentamos al iniciar el capítulo.

Fig. 18. Sistema masa-resorte amortiguador forzado

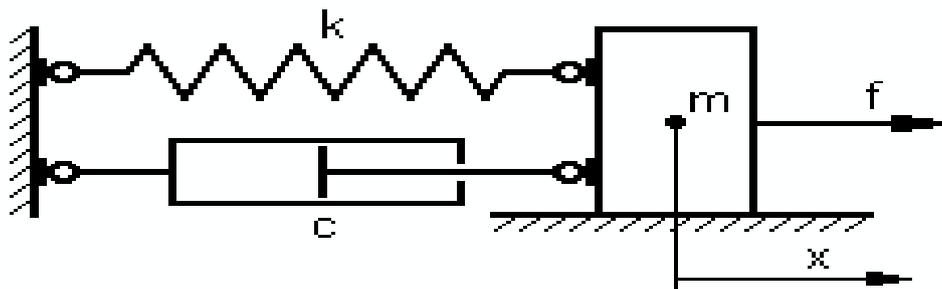


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Este movimiento vibratorio se describe por la ecuación no homogénea siguiente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\text{sen}\omega t \tag{66}$$

La solución general es la suma de la general de la homogénea más una particular de la no homogénea; es decir:

$$x(t) = X e^{-\frac{c}{2m}t} \text{sen}(\omega_r t + \varphi) + x_p(t) \quad (67)$$

La primera de éstas al cabo de un tiempo, generalmente breve, se reduce a un valor despreciable, tanto para el caso de amortiguamiento inferior al crítico, al cual corresponde la expresión anterior, como para los casos de amortiguamiento crítico o superior al crítico.

El segundo sumando, que predomina después de este período transitorio, se obtiene ensayando una solución de la forma:

$$x_p(t) = x_p \text{sen}(\omega t - \theta) \quad (68)$$

“ $\theta$ ” es el ángulo de fase entre el desplazamiento y la fuerza excitadora. Por lo general, el desplazamiento se retrasa con respecto a la fuerza excitadora.

En la figura 19. se representan un movimiento libre amortiguado, un movimiento forzado y la superposición de ambos. Cuando coincide la frecuencia de excitación con la frecuencia natural con amortiguamiento, se produce la resonancia.

Fig. 19 Vibraciones forzadas amortiguadas

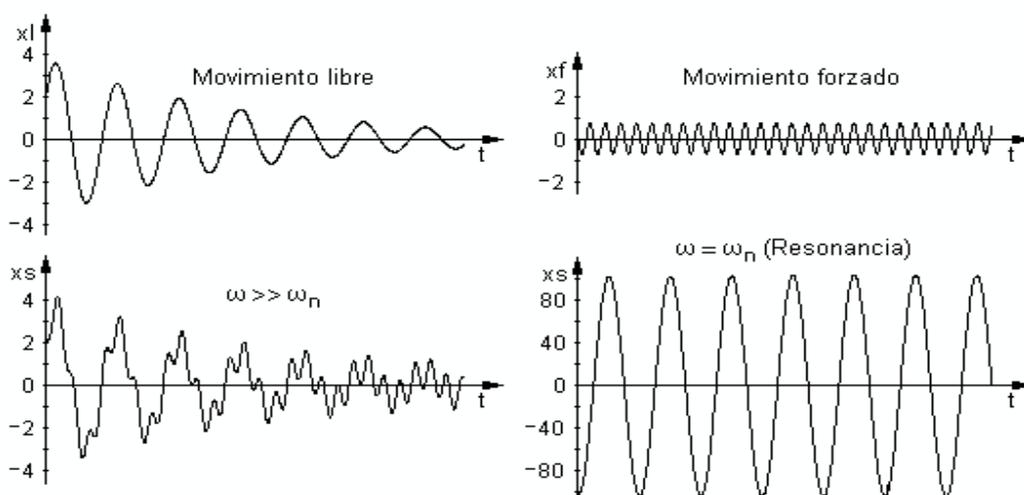


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Derivando (68), se obtiene la velocidad:

$$\dot{x}_p = x_p \omega \cos(\omega t - \theta) \quad (69)$$

Y derivando (69), se obtiene la aceleración:

$$\ddot{x}_p = -X_p \omega^2 \text{sen}(\omega t - \theta) \quad (70)$$

Sustituyendo (68), (69) y (70) en (66), se tiene:

$$-m\omega^2 X_p \text{sen}(\omega t - \theta) + c\omega X_p \cos(\omega t - \theta) + kX_p \text{sen}(\omega t - \theta) = F \text{sen}\omega t$$

Agrupando y transformando:

$$(k - m\omega^2) \text{sen}(\omega t - \theta) + c\omega \cos(\omega t - \theta) = \frac{F}{X_p} \text{sen}\omega t \quad (71)$$

El miembro de la derecha de (71) se puede transformar como:

$$\frac{F}{X_p} \text{sen}(\omega t - \theta + \theta) = \frac{F}{X_p} [\text{sen}(\omega t - \theta) \cdot \cos\theta + \cos(\omega t - \theta) \cdot \text{sen}\theta] \quad (72)$$

Teniendo en cuenta (72), e igualando en los dos miembros de (71) los coeficientes del seno y del cose no de  $(\omega t - \theta)$ , tenemos:

$$(k - m\omega^2) = \frac{F}{X_p} \cos\theta \quad (73)$$

$$c\omega = \frac{F}{X_p} \text{sen}\theta \quad (74)$$

Dividiendo (74) entre (73), se obtiene el ángulo de fase del desplazamiento con respecto a la fuerza excitadora:

$$\tan\theta = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \Rightarrow \theta = \text{atan} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (75)$$

Elevando al cuadrado (73) y (74):

$$(k - m\omega^2)^2 = \frac{F^2}{X_p^2} \cos^2 \theta \quad (76)$$

$$(c\omega^2)^2 = \frac{F^2}{X_p^2} \sin^2 \theta \quad (77)$$

Sumando (76) y (77):

$$(k - m\omega^2)^2 + (c\omega^2)^2 = \frac{F^2}{X_p^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

De donde:

$$X_p = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega^2)^2}} \quad (78)$$

La expresión (75) puede transformarse, como se muestra a continuación:

$$\theta = \operatorname{atan} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \operatorname{atan} \frac{\frac{c\omega}{k}}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} = \operatorname{atan} \frac{\frac{2mc\omega}{2mk}}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} = \operatorname{atan} \frac{\frac{2c\omega}{2m\omega_n^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

De donde se obtiene, para el desfase:

$$\theta = \operatorname{atan} \frac{2 \frac{c}{m} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (79)$$

La representación gráfica del desfase se muestra en la figura 20, para coeficientes de amortiguamiento desde el valor casi nulo al crítico. Para relaciones de frecuencias menores que la unidad, es decir, antes de la resonancia, a valores menores de la relación de amortiguamiento le corresponden menores ángulos de desfase. Después de la resonancia, es decir, para relaciones de frecuencias mayores que

la unidad, a valores menores de la relación de amortiguamiento le corresponden mayores ángulos de desfase. El ángulo de desfase ( $\theta$ ), cualquiera que sea la relación de amortiguamiento, para la relación de frecuencias igual a la unidad, es decir, en la resonancia, toma el valor de 90 grados ( $\pi/2$ ), es decir, que todas las curvas se cortan en el punto  $(1, \pi/2)$ , (Timoshenko, 1966).

Fig. 20. Ángulo de fase del desplazamiento con respecto a la fuerza excitadora

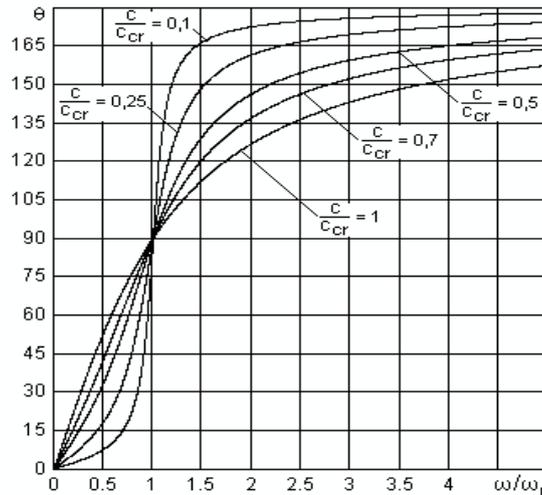


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Si en la expresión (78) se divide numerador y denominador entre k:

$$X_p = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}$$

Transformando dentro del radical del denominador:

$$X_p = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{2mc\omega}{2mk}\right)^2}}$$

Si se hace  $F/k = X_{est}$ , de la expresión anterior se obtiene, para una fuerza excitadora, cuya amplitud (F) es independiente de la frecuencia:

$$\frac{X_p}{X_{est}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (80)$$

A la relación (80) se le denomina coeficiente de magnificación, e indica en que relación está la amplitud de las vibraciones, con respecto a la deflexión estática de los elementos elásticos, bajo la acción de la fuerza excitadora, aplicada como una fuerza estática. Este factor constituye una importante característica del sistema, que depende sólo de los parámetros másicos, elásticos y disipativos de este.

La representación de la amplitud adimensional o coeficiente de magnificación, en el caso de fuerza de amplitud constante, independiente de la frecuencia, se indica en la figura 21.

Fig. 21. Coeficiente de magnificación en función de la relación de frecuencias

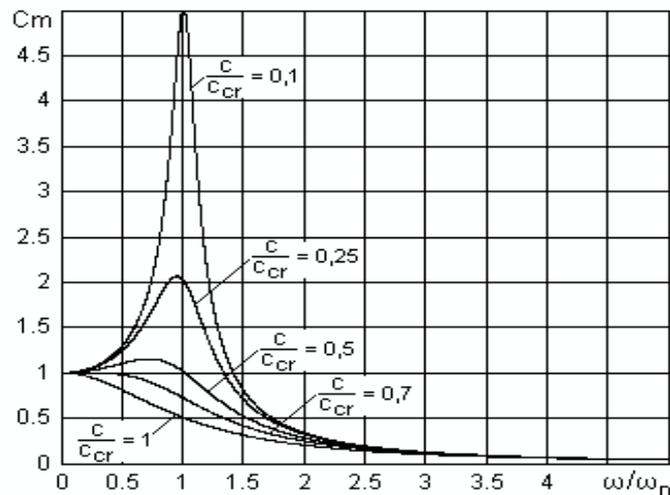


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Para  $c = 0$ :

$$\frac{X_p}{X_{est}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \rightarrow \infty \text{ cuando } \omega \rightarrow \omega_n$$

Para  $c=c_{cr}$

$$\frac{X_p}{X_{est}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Para otro coeficiente de amortiguamiento ( $c$ ) cualquiera, comprendido entre los anteriores, resulta una curva comprendida entre las representativas de esos dos casos extremos. Todas tienden a cero para frecuencias que tienden a infinito.

El máximo se obtiene de

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{X_p}{X_{est}} \right) = 0$$

Derivando la expresión (80) e igualando a cero:

$$\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \frac{\omega}{\omega_n} - 2 \left( \frac{c}{c_{cr}} \right)^2 \frac{\omega}{\omega_n} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{\omega}{\omega_n} \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) - 2 \left( \frac{c}{c_{cr}} \right)^2 \right] = 0$$

Para que se satisfaga la igualdad anterior debe cumplirse que:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 0 \text{ (no tiene sentido); } \text{ ó } \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2 \left( \frac{c}{c_{cr}} \right)^2} \text{ (pico de resonancia)}$$

Este último se va trasladando de uno, para  $c = 0$ , a cero, para  $c=c_{cr}/2$ .

Si la fuerza excitadora es proporcional a una masa desbalanceada y al cuadrado de la frecuencia de trabajo, es decir:  $F=m_d \cdot \omega^2$  (siendo “ $m_d$ ” la masa desbalanceada, y “ $e$ ” una constante con dimensiones de longitud, que puede ser la excentricidad), como en el caso de la fuerza de inercia centrífuga, que surge en una pieza rotatoria, entonces la expresión (80) toma la forma:

$$\frac{x_p}{e} = \frac{m_d}{m} \frac{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (81)$$

Este último caso es el más frecuente en la práctica, en el que las piezas desbalanceadas de una máquina son las que engendran las fuerzas excitadoras, que no son más que las fuerzas de inercia, que surgen con el movimiento de dichas piezas.

El producto de la masa desbalanceada ( $m_d$ ) por la excentricidad ( $e$ ) se denomina desbalance. Este parámetro debe ser inferior a un determinado valor, en dependencia del tipo de máquina y del trabajo que le esté encomendado, para evitar que las amplitudes sean superiores a un determinado límite establecido. La expresión anterior puede ser utilizada en ambos sentidos, es decir, si se conoce el desbalance, se puede obtener la amplitud; y si se conoce la amplitud máxima permisible, se puede obtener el desbalance máximo permisible.

El valor máximo permisible de la amplitud de las vibraciones depende del tamaño y masa del sistema vibratorio, de las características del montaje de dicho sistema, y del uso que se le dé a la máquina. Por lo general, con el aumento del tiempo de uso se notará un aumento de la amplitud de las vibraciones, lo que se debe al desgaste de las piezas y al surgimiento de otros defectos en el sistema mecánico. Por eso, la amplitud permisible inicial debe ser estrictamente controlada.

La representación gráfica del coeficiente de magnificación (expresión 81), en el caso de fuerza excitadora de amplitud proporcional a la masa y al cuadrado de la frecuencia, se indica en la figura 22. En este caso, todas las curvas parten de cero y tienden asintóticamente a la unidad, después de pasar la zona de resonancia.

Fig. 22. Coeficiente de magnificación en caso de excitación por fuerzas de inercia

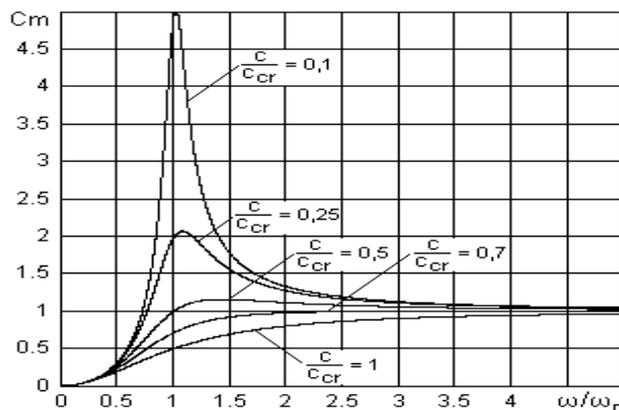


Fig. 2.5.5. Coeficiente de magnificación en caso de excitación por fuerzas de inercia.

Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Para  $c = 0$ :

$$\frac{m \cdot X_p}{m_d \cdot e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \rightarrow \infty \text{ cuando } \omega \rightarrow \omega_n$$

Para  $c=c_{cr}$ :

$$\frac{m \cdot X_p}{m_d \cdot e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para otro coeficiente de amortiguamiento ( $c$ ) cualquiera, comprendido entre los anteriores, resulta una curva comprendida entre las representativas de esos dos casos extremos. El máximo se obtiene de:

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{X_p}{e} \right) = 0$$

Derivando (81) y teniendo en cuenta que las masas son constantes:

$$\frac{\omega}{\omega_n} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + 2 \left( \frac{c}{c_{cr}} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 0$$

Se tiene que cumplir que:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 0 \text{ (no tiene sentido); ó } \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}} \text{ (pico de resonancia)}$$

Este último se va trasladando desde uno, para  $c=0$ , a infinito, para  $c=c_{cr}/\sqrt{2}$

## 6. Equilibrio de fuerzas en el sistema.

Una mejor comprensión del comportamiento de los sistemas vibratorios puede lograrse estudiando el equilibrio de las fuerzas, que actúan en dichos sistemas, en cada región de la relación de frecuencias ( $\omega / \omega_n$ ). En la figura 23. se muestran el esquema vectorial cinemático y las fuerzas que actúan en un sistema vibratorio forzado amortiguado de un grado de libertad.

En todo momento este sistema de fuerzas debe encontrarse en equilibrio dinámico, es decir, que la fuerza exterior aplicada, la fuerza elástica del resorte, la fuerza de amortiguamiento y la fuerza de inercia deben anularse en conjunto. A continuación se analizará como ocurre esta anulación en cada zona de la relación de frecuencias ( $\omega / \omega_n$ ).

Fig. 23. Fuerzas que actúan en un sistema vibratorio.

a) Esquema vectorial cinemático. b) Fuerzas

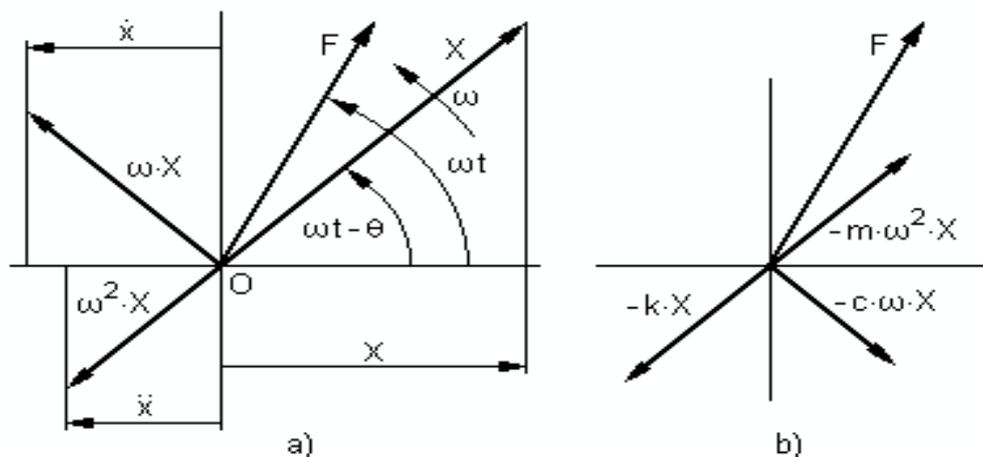


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

**Zona antes de la resonancia ( $\omega/\omega_n < 1$ ).**

En la figura 24. se presenta el polígono de fuerzas para esta zona. Para pequeños valores de la razón de frecuencias, tanto la fuerza de inercia, como la fuerza de amortiguamiento, son pequeñas, lo que trae como consecuencia que el ángulo de fase ( $\theta$ ) sea también pequeño, es decir, que hay poco retraso del desplazamiento con respecto a la fuerza exterior excitadora. En este caso, la fuerza exterior excitadora se equilibra, principalmente, con la fuerza elástica del resorte.

**Zona de resonancia ( $\omega/\omega_n \approx 1$ ).**

En la figura 25. se muestra el polígono de fuerzas para esta zona. Para valores de la relación de frecuencias cercanos a la unidad, tanto la fuerza de inercia, como la fuerza de amortiguamiento, alcanzan grandes valores, lo que trae como consecuencia que el ángulo de fase ( $\theta$ ) sea de 90 grados. En este caso, la fuerza exterior excitadora se equilibra con la fuerza de amortiguamiento, mientras que la fuerza de inercia se equilibra con la fuerza elástica del resorte.

**Zona posterior a la resonancia ( $\omega/\omega_n \gg 1$ ).**

En la figura 26. se muestra el polígono de fuerzas para esta zona. Para valores de la razón de frecuencias mucho mayores que la unidad, tanto la fuerza elástica del resorte, como la fuerza de amortiguamiento, se hacen pequeñas, lo que trae como consecuencia que el ángulo de fase ( $\theta$ ) se acerque a los 180 grados. En este caso, la fuerza exterior excitadora se equilibra, principalmente, con la fuerza de inercia.

Fig. 24. Polígono de fuerzas antes de la resonancia

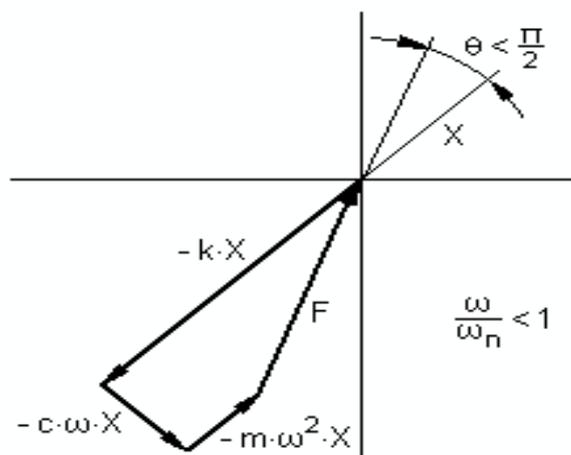


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Fig. 25. Polígono de fuerzas en la resonancia

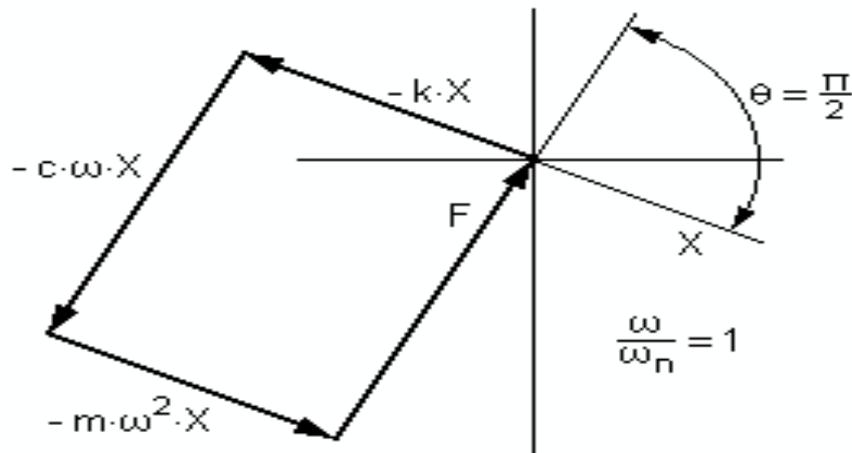


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Fig. 26. Polígono de fuerzas pasada la resonancia

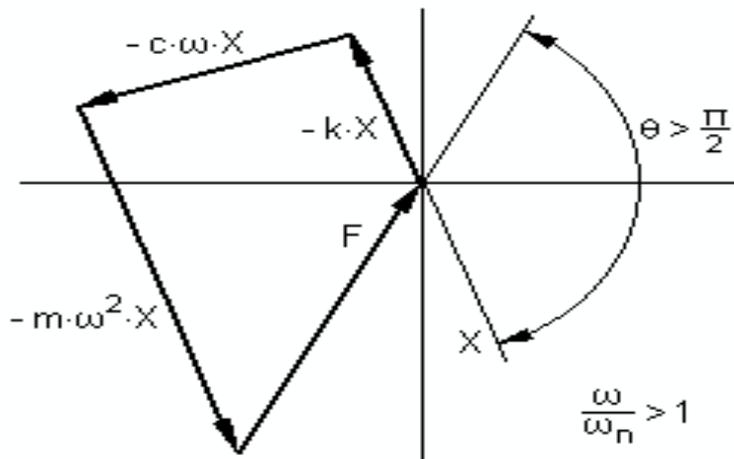


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

## 7. Transmisibilidad.

En muchos casos, en que se tiene un sistema vibratorio montado sobre una determinada estructura, y dicho sistema está sometido a una fuerza excitadora periódica, interesa que la fuerza transmitida a la estructura tenga menor amplitud que la fuerza excitadora. Esto se logra por medio de una suspensión, formada por un elemento elástico y un amortiguador, convenientemente proyectados a tal efecto.

Aunque en las realizaciones particulares se pueden presentar disposiciones bastante complejas, la idea de su fundamento la expondremos con el esquema sencillo de la figura 27., en la que se presentan la fuerza del resorte y la fuerza del amortiguador, que son las fuerzas que se transmiten a la base. En un determinado momento, la suma de estas dos fuerzas será:

$$F_{tr} = kx + c\dot{x} = X_p [K \text{sen}(\omega t - \theta) + c\omega \text{cos}(\omega t - \theta)] \quad (82)$$

Figura 27. Fuerza transmitida a la base

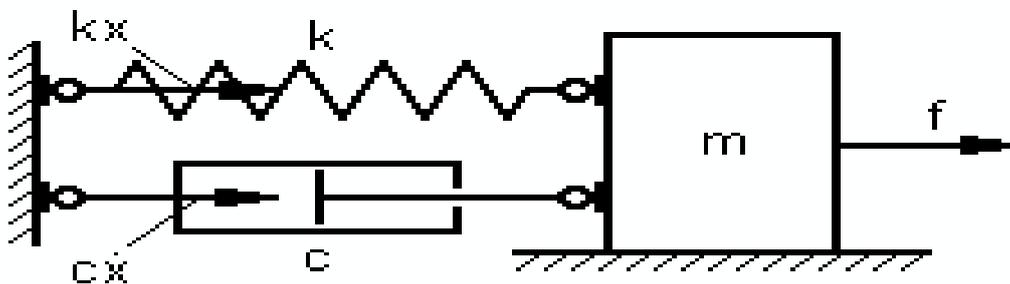


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

La fuerza transmitida ( $F_{tr}$ ) será armónica de igual frecuencia que la fuerza excitadora, con un determinado desfase ( $\theta$ ), que tiene un interés secundario.

La fuerza del resorte y del amortiguador están desfasadas 90 grados, por lo que la amplitud (módulo) de la fuerza transmitida, será:

$$F_{tr} = X_p \sqrt{k^2 + (c\omega)^2} \quad (83)$$

En el epígrafe 2.5 se obtuvo la expresión 78, que relaciona la amplitud ( $X_p$ ) de las vibraciones forzadas amortiguadas con la amplitud (módulo) de la fuerza excitadora ( $F$ ), que recordamos a continuación:

$$X_p = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (78)$$

La expresión (83), teniendo en cuenta (78), toma la forma:

$$F_{tr} = F = \frac{\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (84)$$

La expresión (84) puede ser presentada también como:

$$F_{tr} = F = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (85)$$

Se denomina coeficiente de transmisibilidad a la relación entre las amplitudes máximas de la fuerza transmitida a la base y de la fuerza aplicada (excitadora), y cuya expresión (en forma adimensional, claro está) será:

$$Tr = \frac{F_{tr}}{F} = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (86)$$

La expresión (86) está representada gráficamente en la figura 28 para diferentes relaciones de amortiguamiento. Todas estas curvas pasan por el punto ( , 1). Para valores de la frecuencia excitadora mayores que veces la frecuencia natural, el coeficiente de transmisibilidad es menor que la unidad; por tanto, interesa que el sistema trabaje en esta zona y con una relación de frecuencias ( $\omega/\omega_n$ ) lo más alta posible; es decir, interesan resortes con coeficientes de rigidez pequeños, ya que sobre la masa es difícil de actuar.

Se observa que el amortiguamiento es perjudicial precisamente en la zona antes mencionada; sin embargo, existe una razón que lo hace aconsejable: la mayoría de las veces estas fuerzas armónicas provienen de un mecanismo rotatorio que, aunque trabaja durante su régimen nominal a una velocidad angular muy superior a la de resonancia, durante el período de arranque se hace ineludible su paso por la primera zona, con coeficientes de transmisibilidad mayores que la unidad, y aunque este paso sea rápido, conviene que el pico de la fuerza transmitida no sea muy notable, (Baranov ,1985).

En resumen: resulta preferible un coeficiente de amortiguamiento medio y un coeficiente de rigidez del resorte bajo.

Fig. 28. Coeficiente de transmisibilidad en función de la relación de frecuencias

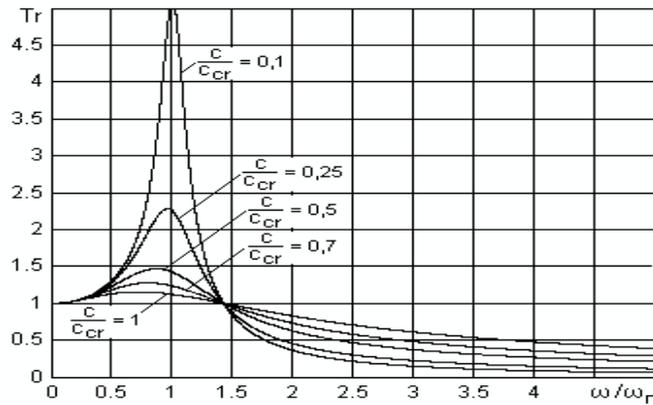


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### 8. Vibraciones torsionales.

Vibración torsional es el movimiento angular periódico de árboles, ejes u otros elementos elásticos, que tienen piezas rígidamente unidos a ellos. Estas piezas, en los casos más frecuentes, son en forma de discos o rotores, como volantes, poleas, ruedas dentadas, etc. Prácticamente todas las máquinas tienen árboles, los que constituyen, en esencia, resortes de torsión, y las piezas montadas sobre ellos completan sistemas vibratorios, torsionales o angulares.

Los momentos variables, que surgen durante la explotación de estas máquinas, excitan vibraciones, que se superponen al movimiento de rotación de los árboles, provocando tensiones variables en el material de dichos árboles y, por tanto, la aparición del conocido proceso de fatiga. El sistema torsional básico se muestra en la figura 29., en la que el árbol se presenta empotrado en un extremo, para simplificar el análisis.

Fig. 29. Sistema vibratorio rotacional

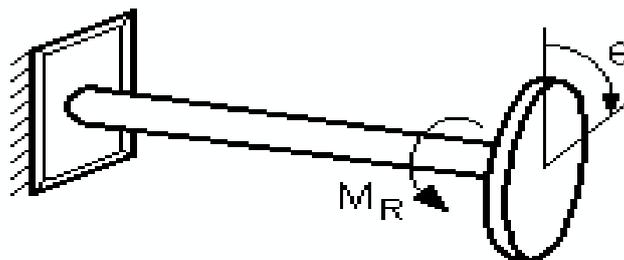


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Este sistema se analiza igual que el de las vibraciones rectilíneas, con las siguientes correspondencias:

Vibraciones lineales		Vibraciones torsionales	
Desplazamiento lineal.....	x	Desplazamiento angular.....	$\Theta$
Masa.....	m	Momento de inercia.....	I
Coefficiente de rigidez lineal.....	k	Coefficiente de rigidez angular.....	K
Coefficiente de amortiguamiento.....	c	Coefficiente de amortiguamiento angular	C
Fuerza.....	f	Momento torsor.....	M
Frecuencia natural	$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Frecuencia natural	$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{I}}$

En la práctica los casos que más se presentan son los de árboles no empotrados, sobre los que están montados elementos con forma de disco.

En la figura 30. se presenta un árbol que puede girar libremente, sobre los extremos del cual están montados dos discos de determinados momentos de inercia  $I_1$  e  $I_2$ .

Cuando se aplican momentos torsionales iguales y de sentido contrario a los dos discos, el árbol se deforma elásticamente acumulando energía potencial.

Si a continuación se liberan los discos estos ejecutarán un movimiento vibratorio libre, con desplazamientos angulares en sentidos opuestos.

Fig. 30. Sistema vibratorio torsional libre para rotar

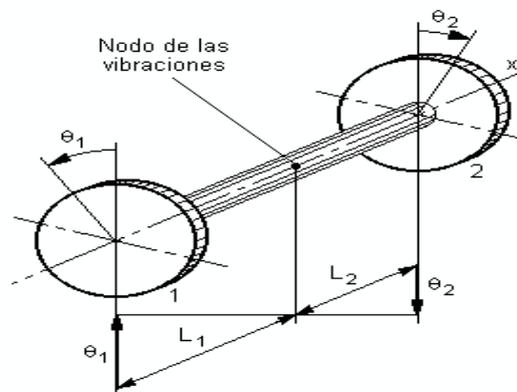


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Puede deducirse que debe haber una sección del árbol que debe mantenerse “estacionaria”, sin participar en los desplazamientos de una u otra parte de este, por lo que, para el análisis, puede considerarse como si esta sección constituyera un empotramiento intermedio. Así se considera el sistema dividido en dos más simples, formados por un disco y la parte del árbol desde este hasta la sección “estacionaria”, (Timoshenko, 1966).

Dado que el movimiento de ambos discos debe ser siempre en sentido contrario, tiene que cumplirse que las frecuencias naturales de ambos sistemas sean iguales. Llamándole  $K_1$  y  $K_2$  a los coeficientes de rigidez angular de los tramos del árbol, se puede plantear que:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{K_2}{I_2}} \quad (87)$$

Si el árbol es macizo y de diámetro constante, el coeficiente de rigidez angular estará dado por la siguiente expresión:

$$K = \frac{J \cdot G}{L}$$

Donde:

J – momento polar de inercia de la sección del árbol  $\left( J = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \right)$

G – módulo de elasticidad a cortante del material.

L – longitud del árbol.

Sustituyendo en la expresión (1.10.1) se tiene que:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{J \cdot G}{L_1 \cdot I_1}} = \sqrt{\frac{J \cdot G}{L_2 \cdot I_2}} \quad (88)$$

De donde se deduce que debe cumplirse que:

$$L_1 I_1 = L_2 I_2 \quad (89)$$

De la expresión anterior se obtiene la relación en que deben estar las longitudes de los tramos del árbol, que definen la posición de la sección “estacionaria”, o lo que es lo mismo, la posición del nodo de las vibraciones, como se conoce a esta sección. Baxter (1978):

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

La longitud total del árbol estará dada por la suma de las longitudes de los tramos, así:

$$L = L_1 + I_2 \quad (90)$$

Despejando de (89)  $L_1$  y sustituyendo en (90), se obtiene:

$$L_1 = \frac{L_2 \cdot I_2}{I_1} \Rightarrow L = \frac{L_2 \cdot I_2}{I_1} + L_2 = L_2 \left( \frac{I_2}{I_1} + 1 \right) = L_2 \left( \frac{I_2 + I_1}{I_1} \right)$$

De la expresión anterior, se obtiene:

$$L_2 = \frac{LI_1}{I_2 + I_1} \quad (91)$$

Sustituyendo  $L_2$  en (88), se obtiene:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{J \cdot G}{\frac{LI_1}{I_2 + I_1} \cdot I_2}} = \sqrt{\frac{J \cdot G}{L \cdot \left( \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right)}}$$

De donde se obtiene:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{\left( \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right)}} \quad (92)$$

Como se puede ver, la frecuencia natural de cada subsistema es igual a la frecuencia natural del sistema como un todo, utilizando en el cálculo la constante de rigidez ( $K$ ) del árbol completo, como si este estuviera empotrado en un extremo, y un momento de inercia equivalente, que contempla los momentos de inercia de ambos discos. Este momento de inercia equivalente, como se observa en la expresión anterior, estará dado por, (Hartman, 1960):

$$I_{eq} = \frac{I_1 \cdot I_2}{I_1 + I_2} \quad (93)$$

Teniendo en cuenta estos últimos razonamientos, finalmente podemos plantear que:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{I_{eq}}} \tag{94}$$

### 9. Vibraciones excitadas desde la base.

En muchos casos el sistema vibratorio es excitado por el movimiento de la base o punto de soporte, como se muestra en la figura 31. Sea “y” el desplazamiento armónico de la base y midamos el desplazamiento “x” de la masa “m” con respecto a una referencia inercial.

Figura 31. Vibraciones excitadas desde la base

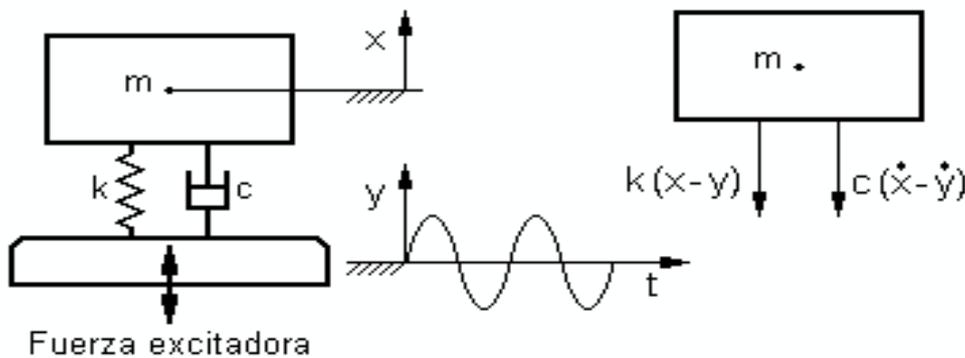


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

En la posición desplazada las fuerzas transmitidas desde la base se deben al amortiguamiento y al resorte, y la ecuación diferencial del movimiento será:

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) \tag{95}$$

Haciendo, para el desplazamiento relativo  $(x-y)$ , la sustitución:

$$z = x - y \tag{96}$$

Teniendo en cuenta la expresión (96), la ecuación (95) se convierte en:

$$m(z'' + y'') + cz' + kz = 0 \tag{97}$$

Que se puede escribir también como:

$$mz'' + cz' + kz = -my'' \quad (97)$$

Supóngase que el desplazamiento de la base responde a un movimiento armónico, dado por la siguiente expresión:

$$y = Y \sin \omega t \quad (98)$$

La velocidad de la base será:

$$y' = Y \omega \cos \omega t \quad (99)$$

Y la aceleración:

$$y'' = -Y \omega^2 \sin \omega t \quad (100)$$

Sustituyendo la expresión (100) en la ecuación (97), se obtendrá:

$$mz'' + cz' + kz = mY\omega^2 \sin \omega t \quad (101)$$

El miembro de la derecha de la ecuación (101), que es el producto de la masa suspendida por la aceleración de la base, no es más que una fuerza de inercia, semejante a las fuerzas de inercia centrífugas ( $m\omega^2 \sin \omega t$ ), que aparecen en los elementos rotatorios desbalanceados. Teniendo esto en cuenta, se puede suponer una solución de la ecuación diferencial (101) de la siguiente forma, (Seto, 2004):

$$z = Z \sin(\omega t - \theta) \quad (102)$$

La primera derivada será:

$$z' = Z \omega \cos(\omega t - \theta)$$

Y la segunda derivada será:

$$z'' = -Z \omega^2 \sin(\omega t - \theta)$$

Sustituyendo la función (z) y sus derivadas en la ecuación (101), se tendrá:

$$-mZ\omega^2 \text{sen}(\omega t - \varphi) + cZ\omega \text{cos}(\omega t - \varphi) + kZ \text{sen}(\omega t - \varphi) = mY\omega^2 \text{sen}\omega t \quad (103)$$

Agrupando y transformando:

$$Z(k - m\omega^2) \text{sen}(\omega t - \varphi) + Zc\omega \text{cos}(\omega t - \varphi) = Ym\omega^2 \text{sen}\omega t \quad (104)$$

El miembro de la derecha se puede transformar como:

$$Ym\omega^2 \text{sen}(\omega t - \varphi + \varphi) = Ym\omega^2 [\text{sen}(\omega t - \varphi) \cdot \text{cos}(\omega t - \varphi) \cdot \text{sen}\varphi] \quad (105)$$

Teniendo en cuenta (105), e igualando en los dos miembros de (104) los coeficientes del seno y del coseno de  $(\omega t - \varphi)$ , tenemos:

$$Z(k - m\omega^2) = Ym\omega^2 \text{cos}\varphi \quad (106)$$

$$Zc\omega = Ym\omega^2 \text{sen}\varphi \quad (107)$$

Dividiendo (107) entre (106), se obtiene el ángulo de fase del desplazamiento relativo (z) con respecto al desplazamiento de la base:

$$\frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan\varphi \Rightarrow \varphi = \text{atan} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (108)$$

Elevando al cuadrado (106) y (107):

$$Z^2 (k - m\omega^2)^2 = Y^2 m^2 \omega^4 \text{cos}^2 \varphi \quad (109)$$

$$Z^2 (c\omega)^2 = Y^2 m^2 \omega^4 \text{sen}^2 \varphi \quad (110)$$

Sumando (109) y (110):

$$Z^2 ((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2) = Y^2 m^2 \omega^4 (\text{cos}^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi) \quad (111)$$

Entonces la amplitud del desplazamiento relativo (Z) estará dada por la expresión:

$$Z = \frac{Ym\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (112)$$

Tanto la amplitud del desplazamiento relativo ( $Z$ ), como el ángulo de fase ( $\varphi$ ), se comportan como la amplitud y el ángulo de fase de un sistema excitado directamente con una fuerza de inercia rotatoria, como se analizó en el epígrafe 2.5, y se ajustan a las curvas de las figuras 30 y 31, con los cambios apropiados de ordenadas. Si se desea obtener el movimiento absoluto de la masa suspendida, se debe hacer la sustitución inversa, (Harker, 2003):

$$x=z+y \quad (113)$$

Utilizando la forma exponencial del movimiento armónico (que es más adecuado en este caso), se tendrá que:

$$y=Ye^{i\omega t} \quad (114)$$

$$z=Ze^{j(\omega t-\varphi)}=Ze^{-i\varphi} e^{i\omega t} \quad (115)$$

Las primeras derivadas proporcionan las velocidades:

$$y' = Yi\omega e^{i\omega t} \quad (116)$$

$$z' = Ze^{-i\varphi} e^{i\omega t} i\omega \quad (117)$$

Las segundas derivadas dan las aceleraciones:

$$y'' = -Y\omega^2 e^{i\omega t} \quad (118)$$

$$z'' = -Ze^{-i\varphi} e^{i\omega t} \omega^2 \quad (119)$$

Sustituyendo las funciones y sus derivadas en la ecuación (97), se obtendrá:

$$m(-Ze^{-i\varphi} e^{i\omega t} \omega^2) + c(Ze^{-i\varphi} e^{i\omega t} i\omega) + k(Ze^{-i\varphi} e^{i\omega t}) = -m(-Y\omega^2 e^{i\omega t}) \quad (120)$$

En un primer paso de simplificación de la ecuación (120), se obtiene:

$$(Ze^{-i\varphi} e^{i\omega t})(-m\omega^2 + ci\omega + k) = mY\omega^2 e^{i\omega t} \quad (121)$$

Simplificando y organizando la ecuación (121), se obtendrá:

$$(Ze^{-i\varphi})(k - m\omega^2 + i\omega c) = m\omega^2 Y \quad (122)$$

Organizando la ecuación (122), se tendrá que:

$$Ze^{-i\varphi} = \frac{m\omega^2 Y}{k - m\omega^2 + i\omega c} \quad (123)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (113), (114) y (115), se puede plantear que:

$$x = (Ze^{-i\varphi} e^{i\omega t}) + Y e^{i\omega t} \Rightarrow x = (Ze^{-i\varphi} + Y) e^{i\omega t} \quad (124)$$

Sustituyendo (123) en (124), se obtiene:

$$x = \left( \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2 + i\omega c} + Y \right) e^{i\omega t} \Rightarrow x = \left( \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2 + i\omega c} + 1 \right) Y e^{i\omega t} \quad (125)$$

Transformando la expresión (125), se obtiene:

$$x = \left( \frac{m\omega^2 + k - m\omega^2 + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c} \right) Y e^{i\omega t} \Rightarrow x = \left( \frac{k + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c} \right) Y e^{i\omega t} \quad (126)$$

Para el estado estacionario, la amplitud del desplazamiento absoluto de la masa suspendida será:

$$X = \left( \frac{k + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c} \right) Y \quad (127)$$

La expresión (127) se puede transformar como:

$$X(k - m\omega^2 + i\omega c) = (k + i\omega c)Y \Rightarrow X(k - m\omega^2) + X(i\omega c) = Yk + Yi\omega c \quad (128)$$

Los sumandos de la expresión (128) representan las fuerzas, que actúan en el sistema. Las fuerzas de inercia, de amortiguamiento y elástica son vectores. La dirección de la fuerza de inercia es la misma que la dirección de la fuerza elástica, pero ambas están en sentido contrario, por lo que sus módulos se pueden sumar algebraicamente. La

dirección de la fuerza de amortiguamiento, vectorialmente, es perpendicular a la dirección de las fuerzas de inercia y elástica, lo que debe ser tenido en cuenta al sumarlas. Así, al sumar las fuerzas, la expresión (128) tomará la forma:

$$X^2(k - m\omega^2)^2 + X^2(\omega c)^2 = Y^2k^2 + Y^2(\omega c)^2 \Rightarrow X^2[(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2] = Y^2[k^2 + (\omega c)^2]$$

Transformando la expresión anterior, se puede obtener:

$$\frac{X^2}{Y^2} = \frac{k^2 + (\omega c)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2}$$

Finalmente, se obtiene la relación, en que estará la amplitud del movimiento de la masa suspendida, con respecto a la amplitud del movimiento de la base:

$$\left| \frac{X}{Y} \right| = \sqrt{\frac{k^2 + (\omega c)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2}} \quad (129)$$

## 10. Problemas resueltos

### Problema 1. Máquina con rotor desbalanceado.

La máquina, cuyo esquema se presenta en la figura 32, pesa 35 kgf y posee una pieza rotatoria desbalanceada, con un peso de 16 kg, y una excentricidad de 2 mm. La máquina está suspendida sobre cuatro resortes iguales, con coeficientes de rigidez de 1400 N/m, y cuatro amortiguadores iguales, con coeficientes de amortiguamiento de 40 N•s/m. La máquina arranca y pasado un breve intervalo de tiempo alcanza la velocidad nominal ( $n = 750$  rpm). El sistema sólo puede desplazarse en la dirección vertical.

Conteste y argumente las siguientes preguntas:

- ¿Se corre el riesgo de que aparezcan grandes amplitudes en el período de arranque?
- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza transmitida a la base en el momento de la resonancia?
- ¿Aparecen grandes amplitudes durante el trabajo a la velocidad nominal?

- d. ¿Se transmite una gran fuerza a la base durante el trabajo a la velocidad nominal?
- e. Obtenga el gráfico de comportamiento del coeficiente de magnificación de cero a 80 rad/s.
- f. Obtenga el gráfico de comportamiento del coeficiente de transmisión de cero a 80rad/s.

Fig. 32. Máquina con rotor desbalanceado

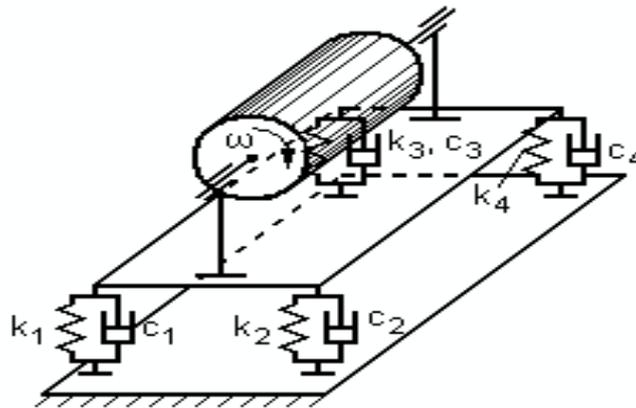


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

**Notas aclaratorias:**

Como los cuatro resortes y amortiguadores son iguales y están distribuidos uniformemente en la base, y como la máquina sólo se desplaza en la dirección vertical, este sistema se puede analizar como un sistema de un grado de libertad, como se muestra en la figura 33.

En este caso, las vibraciones son excitadas por la fuerza de inercia, que surge en la masa desbalanceada.

Fig. 33. Modelo del sistema vibratorio

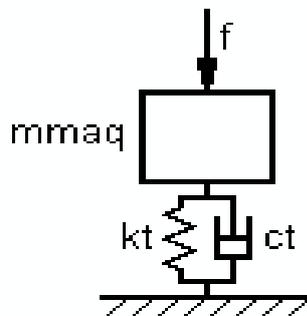


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

## Solución

El primer paso que se debe dar es definir claramente los datos iniciales:

- Peso total de la máquina:  $W_{maq} = 35 \text{ kgf}$ .
- Peso de la pieza rotatoria desbalanceada:  $W_d = 16 \text{ kgf}$ .
- Excentricidad de la pieza desbalanceada:  $exc = 2 \text{ mm} = 0,002 \text{ m}$ .
- Cantidad de soportes:  $C_s = 4$ .
- Número de revoluciones de la pieza desbalanceada:  $n = 750 \text{ rpm}$ .
- Constante de rigidez de cada resorte:  $k = 1400 \text{ N/m}$ .
- Constante de amortiguamiento de cada amortiguador:  $c = 40 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ .

De los datos iniciales, directamente se pueden obtener otros datos necesarios:

- Masa total de la máquina:  $m_{maq} = 35 \text{ kg}$ .
- Masa de la pieza rotatoria desbalanceada:  $m_d = 16 \text{ kg}$ .

A continuación se determinarán otros parámetros, cuyo conocimiento es necesario para responder las preguntas planteadas. Tanto los resortes, como los amortiguadores, se encuentran en paralelo, por lo que será necesario sumar sus coeficientes correspondientes, para obtener los totales. Como son iguales, respectivamente, lo que se hace es multiplicarlos por el número de soportes.

Coeficiente de rigidez total:

$$k_t = C_s \cdot k = 4 \cdot 1400 = 5600 \text{ N/m}$$

Coeficiente de amortiguamiento total:

$$c_t = C_s \cdot c = 4 \cdot 40 = 160 \text{ N}\cdot\text{s/m}$$

Velocidad angular de la pieza desbalanceada:

$$\omega_{tr} = 750 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi}{60} \Rightarrow \omega_{tr} = 78,54 \text{ rad/s}$$

Frecuencia angular natural del sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kt}{mmaq}} = \sqrt{\frac{5600N/m}{35kg}} = 12,649 \text{ rad/s}$$

Coefficiente de amortiguamiento crítico:

$$ccr = 2 \cdot mmaq \cdot \omega_n = 2 \cdot 35kg \cdot 12,649 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 885,438 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

Relación de amortiguamiento:

$$\frac{ct}{ccr} = \frac{160N \cdot s/m}{885,438 \text{ N} \cdot s/m} = 0,18$$

A continuación se comienza a responder las preguntas planteadas.

**a. Riesgo de aparición de grandes amplitudes en el período de arranque.**

En algún momento del período de arranque aparecerá el pico de resonancia, pues la frecuencia angular parte de cero y al final alcanza un valor mucho mayor que la frecuencia natural. Por eso se debe determinar la relación de las frecuencias, para la que aparece dicho pico.

$$\frac{\omega_{res}}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{ct}{ccr}\right)^2}} = 1,034$$

La frecuencia de resonancia será:

$$\omega_{res} = 1,034 \cdot 12,649 = 13,084 \text{ rad/s}$$

Con los datos anteriores, se evalúa el coeficiente de magnificación con respecto a la excentricidad.

$$\frac{ampl1}{exc} = \frac{md}{mmaq} \frac{\left(\frac{\omega_{res}}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{res}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{ct}{ccr} \frac{\omega_{res}}{\omega_n}\right)^2}}$$

Sustituyendo:

$$\frac{ampl1}{exc} = 0,457 \frac{1,07}{\sqrt{(-0,07)^2 + (0,37)^2}} = 1,286$$

Como se puede apreciar el coeficiente de magnificación es pequeño, aunque superior a la unidad. La amplitud que se alcanzará, al pasar el sistema por la zona de resonancia será:

$$ampl1 = 1,286 \cdot exc = 1,286 \cdot 2\text{mm} = 2,572\text{mm}$$

La amplitud de las vibraciones es grande, lo que se debe a la gran excentricidad que presenta la pieza desbalanceada.

**b. Fuerza transmitida a la base en el momento de la resonancia.**

Se calculará primero el módulo de la fuerza de inercia, que actúa en ese momento.

$$Fin1 = md \cdot exc \cdot \omega_{res}^2 = 16 \cdot 0,002 \cdot (13,084)^2 = 5,478\text{N}$$

El coeficiente de transmisibilidad será:

$$Tr1 = \frac{f_{trans1}}{Fin1} = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{ct}{ccr} \frac{\omega_{res}}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{res}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{ct}{ccr} \frac{\omega_{res}}{\omega_n}\right)^2}} \Rightarrow Tr1 = 2,807$$

La fuerza transmitida a la base será:

$$f_{trans1} = Tr1 \cdot Fin1 = 2,807 \cdot 5,478 = 15,378\text{N}$$

Aunque el coeficiente de transmisibilidad es medio, la fuerza que se transmite a la base es pequeña, ya que la fuerza excitadora es pequeña.

**c. Amplitudes durante el trabajo a la velocidad nominal.**

Para el régimen nominal la relación de las frecuencias angulares es:

$$\frac{\omega_{tr}}{exc} = \frac{78,54}{12,649} = 6,209$$

El coeficiente de magnificación se obtendrá por medio de la expresión:

$$\frac{ampl2}{exc} = \frac{mpiez}{mmaq} \frac{\left(\frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{ct}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{ampl2}{exc} = \frac{mpiez}{mmaq} \frac{(6,209)^2}{\sqrt{[1 - (6,209)^2]^2 + [2 \cdot 0,18 \cdot 6,209]^2}} = 0,468$$

El coeficiente de magnificación es pequeño. La amplitud en este régimen será:

$$ampl2 = 0,468 \cdot exc = 0,468 \cdot 2\text{mm} = 0,937\text{mm}$$

Aunque el coeficiente de magnificación es pequeño, la amplitud de las vibraciones es relativamente grande para el régimen nominal, lo que se debe a la gran excentricidad de la pieza desbalanceada.

**d. Fuerza transmitida a la base durante el trabajo a la velocidad nominal.**

El módulo de la fuerza de inercia para el régimen nominal será:

$$Fin2 = mpiez \cdot exc \cdot \omega tr^2 = 16 \cdot 0,002 \cdot (78,54)^2 = 197,392\text{N}$$

La fuerza transmitida a la base se obtiene a partir del coeficiente de transmisibilidad.

$$Tr2 = \frac{ftrans2}{Fin2} = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{ct}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{ct}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}} \Rightarrow Tr2 = 0,065$$

La fuerza transmitida a la base será:

$$ftrans2 = Tr2 \cdot Fin2 = 0,065 \cdot 197,392 = 12,89\text{N}$$

Como demuestra este resultado, la fuerza transmitida a la base en el régimen nominal es pequeña.

#### e. Comportamiento del coeficiente de magnificación.

En la figura 34 se muestra el comportamiento del coeficiente de magnificación, para el intervalo de la frecuencia angular de cero a 80 radianes por segundo. En la curva se nota claramente el pico de resonancia y la caída posterior de los valores, a medida que la frecuencia angular se hace más grande.

Fig. 34. Coeficiente de magnificación en función de la frecuencia de excitación

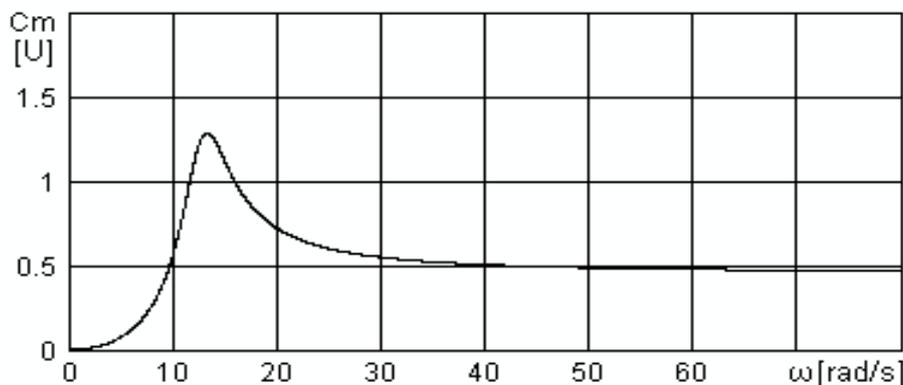


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

#### f. Comportamiento del coeficiente de transmisibilidad.

En la figura 35 se muestra el comportamiento del coeficiente de transmisibilidad. En esta curva también se nota claramente el pico de resonancia y la caída de los valores del coeficiente de transmisibilidad, a medida que aumenta la frecuencia angular.

Analizando los resultados obtenidos, se puede llegar a la conclusión de que la suspensión presenta buenas cualidades para la atenuación de las amplitudes, ya que, tanto en la resonancia, como en el régimen de trabajo nominal, los coeficientes de magnificación son pequeños. Las grandes amplitudes que aparecen en el sistema se deben a la gran excentricidad, que presenta la pieza rotatoria. Para el aislamiento de las fuerzas excitadoras, también el sistema presenta buenas cualidades, si se tiene en cuenta que el paso por la resonancia, donde el coeficiente de transmisibilidad es más alto, es rápido, y la fuerza excitadora es pequeña, lo que hace menos problemática la situación.

Fig. 35. Coeficiente de transmisibilidad en función de la frecuencia de excitación

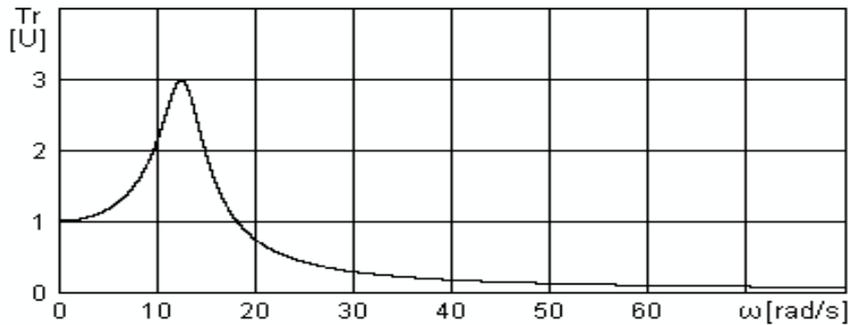


Fig. 2.10.4. Coeficiente de transmisibilidad en función de la frecuencia de excitación.

Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

## Problema 2. Suspensión de una motobomba

Una motobomba de 200 kgf de peso total rota a 900 rpm. El impelente, que está desbalanceado, pesa 30 kgf y presenta una excentricidad de 2 mm. La motobomba debe ser montada sobre cuatro resortes helicoidales de acero iguales, para evitar la transmisión de las vibraciones al piso de la planta, durante su funcionamiento, como se muestra en la figura 36. No se dispone de dispositivos amortiguadores independientes, y la relación de amortiguamiento, que garantizan los resortes, es de 0,005. El coeficiente de transmisibilidad no debe ser superior a 0,15. Determine los siguientes parámetros:

- Coeficiente de rigidez total y de cada resorte. Deflexión estática de los resortes.
- Frecuencia natural y frecuencia natural con amortiguamiento del sistema.
- Coeficiente de transmisibilidad real.
- Amplitud de las vibraciones durante el arranque y parada de la máquina (en la zona de resonancia).
- Fuerza transmitida al piso durante el arranque y parada (en la zona de resonancia).
- Amplitud de las vibraciones durante el funcionamiento a la velocidad de trabajo.
- Fuerza transmitida al piso durante el funcionamiento a la velocidad de trabajo.

Fig. 36. Motobomba

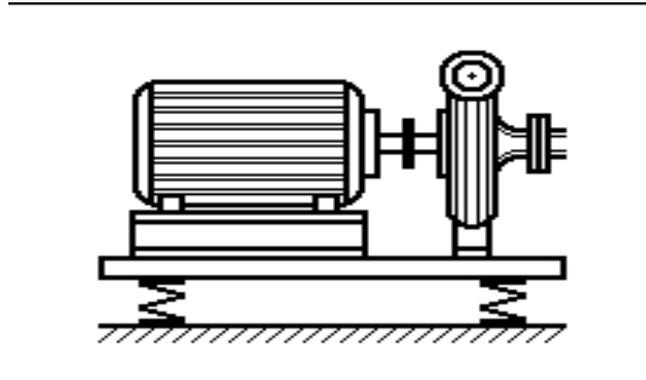


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### Notas aclaratorias:

- Como los cuatro resortes serán iguales y están distribuidos uniformemente en la base, este sistema se puede analizar como un sistema de un grado de libertad, como se muestra en la figura 37, con la consiguiente simplificación de los cálculos.
- Como la relación de amortiguamiento es tan pequeña, en los cálculos preliminares se puede despreciar el amortiguamiento, lo que simplifica significativamente el problema.

Fig. 37. Modelo del sistema vibratorio

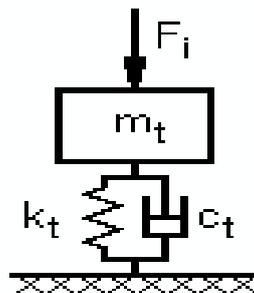


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### Solución

El primer paso es definir claramente los datos iniciales:

- Peso total de la motobomba:  $W_t = 200$  kgf.
- Peso del impulsor desbalanceado:  $W_d = 30$  kgf.
- Excentricidad de la pieza desbalanceada:  $e_x = 2$  mm = 0,002 m.
- Cantidad de resortes:  $C_r = 4$ .

- Relación de amortiguamiento ( $c/c_{cr}$ ):  $Ram = 0,005$ .
- Número de revoluciones de la pieza desbalanceada:  $n = 900$  rpm.
- Coeficiente de transmisibilidad máximo permisible durante el trabajo:  $Tr_{max} = 0,15$ .

De los datos iniciales, se pueden obtener otros datos necesarios:

- Masa total de la motobomba:  $m_t = 200$  kg.
- Masa del impelente desbalanceado:  $m_d = 30$  kg.
- Velocidad angular de trabajo de la pieza desbalanceada:

$$\omega tr = n \cdot \frac{2\pi}{60} \Rightarrow \omega tr = 94,248 \text{ rad/s}$$

## Respuestas

### a. Coeficiente de rigidez total y de cada resorte.

El coeficiente de transmisibilidad se obtiene, en general, por la expresión (86):

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}$$

En el caso de amortiguamiento despreciable, para la zona de aislamiento vibratorio ( $\frac{\omega tr}{\omega_n} > 1,41$ ), y cambiando el signo en el denominador, para evitar los valores negativos, que no tienen sentido, la expresión anterior tomará la forma aproximada:

$$Tr = \frac{1}{\frac{\omega tr^2}{\omega_n^2} - 1}$$

Transformando:

$$\frac{\omega tr^2}{\omega_n^2} - 1 = \frac{1}{Tr} \Rightarrow \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2} = \frac{1}{Tr} + 1 \Rightarrow \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2} = \frac{1 + Tr}{Tr}$$

De la expresión anterior, se puede obtener la frecuencia natural preliminar adecuada, para lograr el aislamiento deseado de las vibraciones. Despejando la frecuencia natural preliminar:

$$\omega_{np}^2 = \frac{Trmax \cdot \omega_{tr}^2}{1 + Trmax} \Rightarrow \omega_{np} = \omega_{tr} \cdot \sqrt{\frac{Trmax}{1 + Trmax}}$$

Introduciendo los datos, se obtiene:

$$\omega_{np} = 94,248 \frac{rad}{s} \cdot \sqrt{\frac{0,15}{1 + 0,15}}$$

Resolviendo:

$$\omega_{np} = 34,038 \text{ rad/s}$$

Se debe determinar la constante de rigidez total preliminar necesaria, para que el sistema posea una frecuencia natural igual a la obtenida en el paso anterior, es decir, se debe cumplir que:

$$\sqrt{\frac{k_{tp}}{m_t}} = \omega_{np}$$

Transformando y despejando:

$$\frac{k_{tp}}{m_t} = \omega_{np}^2 \Rightarrow k_{tp} = \omega_{np}^2 \cdot m_t$$

Introduciendo los datos correspondientes, se obtiene la constante de rigidez total:

$$k_{tp} = (34,038 \text{ rad/s})^2 \cdot 200 \text{ kg} \Rightarrow k_{tp} = 231722,230 \text{ N/m}$$

Para obtener la constante de rigidez preliminar de cada resorte, se divide la constante de rigidez total preliminar entre la cantidad de resortes:

$$k_{rp} = \frac{k_{tp}}{Cr} \Rightarrow k_{rp} = \frac{231722,230 \text{ N/m}}{4} \Rightarrow k_{rp} = 57930,557 \text{ N/m}$$

Con esta constante de rigidez, como referencia, se deben escoger o diseñar los resortes, teniendo en cuenta la condición de que la constante de rigidez real debe ser igual o inferior a ella. Se supone que ya se escogieron o diseñaron los resortes, con una constante de rigidez:

$$k_{rr} = 50000 \text{ N/m}$$

Entonces la constante de rigidez total real será:

$$k_{tr} = Cr \cdot k_{rr} \Rightarrow k_{tr} = 4 \cdot 50000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \Rightarrow k_{tr} = 200000 \text{ N/m}$$

La deflexión estática es la deformación que produce el peso de la máquina sobre los resortes, cuando no está trabajando. Se obtiene por medio de la expresión:

$$\Delta_{est} = \frac{W_t}{k_{tr}} \Rightarrow \Delta_{est} = \frac{200 \text{ kgf}}{200000 \text{ N/m}} \Rightarrow \Delta_{est} = 0,01 \text{ m}$$

#### **b. Frecuencia natural y frecuencia natural con amortiguamiento del sistema.**

La frecuencia natural real será:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{tr}}{m}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{200000 \text{ N/m}}{200 \text{ kgf}}} \Rightarrow \omega_n = 31,622 \text{ rad/s}$$

La relación de frecuencias, para el régimen de trabajo, será:

$$R\omega = \frac{\omega_{tr}}{\omega_n} \Rightarrow R\omega = \frac{92,248 \text{ rad/s}}{31,622 \text{ rad/s}} \Rightarrow R\omega = 2,98$$

La frecuencia natural con amortiguamiento (para un sistema excitado por una fuerza de inercia) se obtiene por medio de la expresión:

$$\frac{\omega_r}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}} \Rightarrow \omega_r = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}}$$

Sustituyendo los datos y resolviendo:

$$\omega_r = \frac{3,1,622 \text{ rad/s}}{\sqrt{1 - 2(0,005)^2}} \Rightarrow \omega_r = 31,623 \text{ rad/s}$$

La frecuencia natural con amortiguamiento prácticamente no se diferencia de la frecuencia natural, lo que se debe al bajo amortiguamiento de los resortes.

### c. Coeficiente de transmisibilidad real a la velocidad de trabajo.

El coeficiente de transmisibilidad real, a la velocidad de trabajo, se obtiene por medio de la expresión (86), (Migulin y Medvedev, 2002):

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0,005 \cdot 2,98)^2}}{\sqrt{(1 - (2,98))^2 + (2 \cdot 0,005 \cdot 2,98)^2}} \Rightarrow Tr = 0,1269$$

El coeficiente de transmisibilidad real es menor que el máximo permisible ( $Tr_{max} = 0,15$ ), por lo que los resortes escogidos o diseñados son adecuados.

### d. Amplitud de las vibraciones durante el arranque y parada de la máquina (en la zona de resonancia).

La máxima amplitud aparecerá cuando la frecuencia de rotación de la motobomba coincida con la frecuencia natural con amortiguamiento del sistema. Para obtener dicha amplitud se utiliza la expresión (81), con las necesarias transformaciones.

$$X_{res} = \frac{m_d \cdot ex}{m_t} \frac{\left(\frac{\omega t}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega t^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega t}{\omega_n}\right)^2}}$$

Como la frecuencia natural y la frecuencia natural con amortiguamiento se diferencian tan poco, debido al bajo amortiguamiento de los resortes, en la expresión (81) se tomará la relación de frecuencias igual a la unidad, lo que simplifica los cálculos. Sustituyendo y resolviendo:

$$X_{res} = \frac{30\text{kgf} \cdot 0,002\text{m}}{200\text{kg}} \frac{(1)^2}{\sqrt{(1 - (1)^2)^2 + (2 \cdot 0,05 \cdot 1)^2}} \Rightarrow X_{res} = 0,03\text{m}$$

La amplitud de las vibraciones, en la resonancia, es alta (30 mm); pero el paso por esta zona es breve.

**e. Fuerza transmitida al piso durante el arranque y parada (en la zona de resonancia). La fuerza excitadora, que es la fuerza de inercia en la pieza desbalanceada, será:**

$$F_{ires} = m_d \cdot \omega_n^2 \cdot ex \Rightarrow F_{ires} = 30\text{kg} \cdot \left(\frac{31,622\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0,002\text{m} \Rightarrow F_{ires} = 59,99\text{N}$$

La fuerza transmitida a la base se obtiene por medio de la expresión del coeficiente de transmisibilidad (86), transformándola adecuadamente.

$$F_{res} = F_{ires} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$F_{res} = 59,99\text{N} \cdot \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0,005 \cdot 1)^2}}{\sqrt{(1 - (1)^2)^2 + (2 \cdot 0,005 \cdot 1)^2}} \Rightarrow F_{res} = 5999,29\text{N}$$

La fuerza transmitida a la base, en la resonancia, es grande; pero el paso por esa zona es breve.

**f. Amplitud de las vibraciones durante el funcionamiento a la velocidad de trabajo.**

La amplitud se obtiene por medio de la expresión (81), utilizando la relación de frecuencias para este caso:

$$X_{tr} = \frac{m_d \cdot ex}{m_t} \frac{\left(\frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$X_{tr} = \frac{30kg \cdot 0,002m}{200kg} \frac{(2,98)^2}{\sqrt{(1 - (2,98)^2)^2 + (2 \cdot 0,005 \cdot 2,98)^2}} \Rightarrow X_{tr} = 0,0003m$$

La amplitud, durante el trabajo, es significativamente pequeña (0,3 mm).

### g. Fuerza transmitida al piso durante el funcionamiento a la velocidad de trabajo.

La fuerza excitadora, que es la fuerza de inercia en la pieza desbalanceada, para la velocidad de trabajo, será:

$$F_{tr} = m_d \cdot \omega tr^2 \cdot ex \Rightarrow F_{tr} = 30kg \cdot \left(04,248 \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 0,002m \Rightarrow F_{tr} = 532,961 N$$

La fuerza transmitida a la base, durante el trabajo, se obtiene por medio de la expresión del coeficiente de transmisibilidad (86), transformándola adecuadamente:

$$F_{tr} = F_{itr} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$F_{tr} = 532,961N \cdot \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0,005 \cdot 2,98)^2}}{\sqrt{(1 - (2,98)^2)^2 + (2 \cdot 0,005 \cdot 2,98)^2}} \Rightarrow F_{tr} = 67,660N$$

La fuerza transmitida a la base, durante el trabajo a la velocidad nominal, es pequeña, lo que permite afirmar que la suspensión cumple perfectamente su objetivo, si se tiene en cuenta que la amplitud también es muy pequeña. No obstante, tanto la amplitud,

como la fuerza transmitida a la base, en la zona de resonancia, son muy altas, lo que se debe al bajo amortiguamiento de los resortes. Esta deficiencia pudiera ser atenuada, añadiendo dispositivos amortiguadores a la suspensión.

#### h. Comportamiento de la relación de amplitudes (coeficiente de magnificación).

Para esto se evalúa el comportamiento de la relación de la amplitud con respecto a la excentricidad (coeficiente de magnificación), en el intervalo de posible variación de la frecuencia angular  $\omega = 0 + 100$  rad / s, como se muestra en la figura 38.

Fig. 38. Coeficiente de magnificación

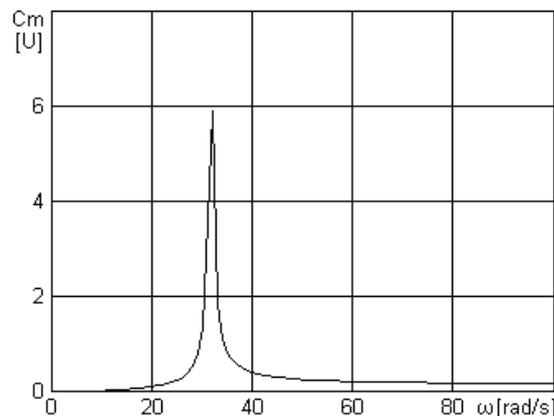


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

$$Cm = \frac{m_d}{m_t} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

#### i. Comportamiento del coeficiente de transmisibilidad.

Para esto se evalúa el comportamiento del coeficiente de transmisibilidad, en el intervalo de posible variación de la frecuencia angular, como se muestra en la figura 39.

Fig. 39. Coeficiente de transmisibilidad

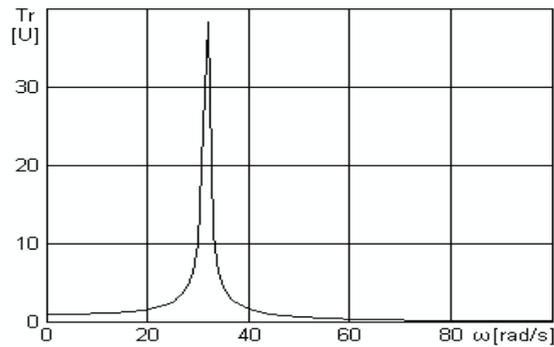


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

### Problema 3. Conjunto motor-ventilador sobre fundamento

En un edificio de oficinas se debe instalar un conjunto motor-ventilador de un sistema de ventilación forzada. La sala del sistema de ventilación se encuentra debajo de las oficinas, por lo que el aislamiento de las vibraciones debe ser igual o mayor al 90 %, es decir, la transmisibilidad debe ser igual o menor a 0,1. La velocidad angular de operación del motor va desde 600 rpm a 3600 rpm. El peso del conjunto motor-ventilador es de 50 kgf y su base cuenta con cuatro puntos de apoyo. Se dispone de cuatro soportes de resortes helicoidales con una rigidez de 10 kgf/cm cada uno. La masa rotatoria desbalanceada es de 5 kg, y presenta una excentricidad de 0,5 mm.

Diseñar un sistema de aislamiento (suspensión), valorando la posibilidad de utilizar un fundamento de concreto, como se muestra en la figura 40, y obtener todos los parámetros de funcionamiento de la suspensión.

- Masa del fundamento.
- Frecuencia natural y frecuencia natural con amortiguamiento del sistema.
- Coeficiente de transmisibilidad real a la frecuencia de trabajo.
- Amplitud de las vibraciones durante el arranque y parada de la máquina (en la zona de resonancia).

- e. Fuerza transmitida al piso durante el arranque y parada (en la zona de resonancia).
- f. Amplitud de las vibraciones durante el funcionamiento a la velocidad de trabajo.
- g. Fuerza transmitida al piso durante el funcionamiento a la velocidad de trabajo.

Fig. 40. Ventilador

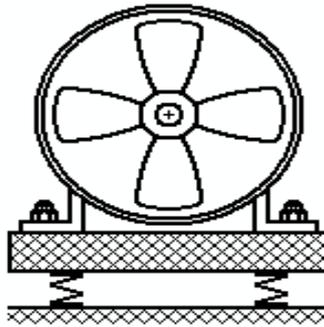


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### Notas aclaratorias

- Los resortes helicoidales, cuando no rozan con otra pieza, poseen una relación de amortiguamiento muy baja ( $c/c_{cr} \approx 0.005$ ), por lo que se puede despreciar en los cálculos preliminares, sabiendo que se cometerán pequeños errores, insignificativos en la práctica.
- Cuando la velocidad de trabajo oscila en un determinado rango, para el diseño de la suspensión se debe tomar como referencia la velocidad más baja.

### Solución

El primer paso que se debe dar es definir claramente los datos iniciales:

- Peso del conjunto motor-ventilador:
- Cantidad de soportes:  $C_{sop} = 4$ .
- Constante de rigidez de cada soporte:
- Relación de amortiguamiento ( $c/c_{cr}$ ):
- Número de revoluciones de trabajo:  $n = 600 - 3600$  rpm.
- Masa rotatoria desbalanceada:  $m_d = 5$  kg.
- Excentricidad:  $e = 0,5$  mm.
- Coeficiente de transmisibilidad máximo permisible durante el trabajo:  $T_{rmax} = 0,1$ .

De los datos iniciales, se pueden obtener otros datos necesarios:

- Masa del conjunto motor - ventilador:  $m = 50 \text{ kg}$
- Constante de rigidez de cada soporte:  $k_r = 10000 \text{ N / m}$
- La constante de rigidez total será:

$$k = C_{sop} \cdot k_r = 4 \cdot 10000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \Rightarrow k = 40000 \text{ N/m}$$

- Velocidad angular de trabajo (inferior):

$$\omega_{tr} = 600 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi}{60} \Rightarrow \omega_{tr} = 62,83 \text{ rad/s}$$

## Respuestas

### Masa del fundamento.

El coeficiente de transmisibilidad se obtiene, en general, por la expresión:

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega_{tr}}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{tr}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega_{tr}}{\omega_n}\right)^2}}$$

En el caso de amortiguamiento despreciable, para la zona de aislamiento vibratorio ( $\frac{\omega_{tr}}{\omega_n} > 1.41$ ), y cambiando el signo en el denominador, para evitar los valores negativos, que no tienen sentido, la expresión anterior tomará la forma aproximada:

$$Tr = \frac{1}{\frac{\omega_{tr}^2}{\omega_n^2} - 1}$$

De la expresión anterior, se puede obtener la frecuencia natural preliminar adecuada, para lograr el aislamiento deseado de las vibraciones. Despejando la frecuencia natural preliminar:

$$\omega_{np}^2 = \frac{Tr \cdot \omega_{tr}^2}{1 + Tr} \Rightarrow \omega_{np} = \omega_{tr} \cdot \sqrt{\frac{Tr}{1 + Tr}}$$

Introduciendo los datos, se obtiene:

$$\omega_{np} = 62,83 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{0,1}{1 + 0,1}}$$

Resolviendo:

$$\omega_{np} = 18,94 \text{ rad/s}$$

El siguiente paso consiste en comprobar si el sistema vibratorio, formado por la masa del conjunto motor-ventilador y los soportes elásticos (resortes helicoidales, en este caso), posee una frecuencia natural igual o menor a la frecuencia natural preliminar, obtenida en el paso anterior. En realidad, lo que se hace es determinar la masa adicional ( $m_{fp}$ ), que se debe añadir a la del conjunto suspendido, para que el sistema posea una frecuencia natural igual o inferior a la obtenida en el paso anterior, es decir, se debe cumplir que:

$$\sqrt{\frac{k}{m + m_{fp}}} = \omega_{np}$$

Transformando y despejando:

$$\frac{k}{m + m_{fp}} = \omega_{np}^2 \Rightarrow m + m_{fp} = \frac{k}{\omega_{np}^2} \Rightarrow m_{fp} = \frac{k}{\omega_{np}^2} - m$$

Introduciendo los datos correspondientes, se obtiene que:

$$m_{fp} = \frac{40000 \text{ N/m}}{(18,24 \text{ rad/s})^2} - 50 \text{ kg} \Rightarrow m_{fp} = 61,45 \text{ kg}$$

El resultado anterior indica que es necesario añadir una masa de 61,45 kg, o más, al conjunto suspendido, para lograr una frecuencia natural igual o menor a la obtenida anteriormente. El aumento de la masa, en la práctica, se puede realizar de dos formas: montar el conjunto motor-ventilador en una plataforma metálica rígida (si es que ya no la tiene), con la masa adecuada, que luego se suspende sobre los soportes; o montar dicho conjunto sobre un fundamento rígido de hormigón, con la masa adecuada, que luego se coloca sobre los soportes. En ambos casos, se deben garantizar los puntos de fijación del conjunto motor-ventilador a la plataforma o fundamento; y de estos últimos a los soportes.

En este caso, se escoge la masa del fundamento:

$$m_f = 70 \text{ kg}$$

### Frecuencia natural y frecuencia natural con amortiguamiento del sistema.

La frecuencia natural real será:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + m_f}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{40000 \text{ N/m}}{50 \text{ kg} + 70 \text{ kg}}} \Rightarrow \omega_n = 18.08 \text{ rad/s}$$

Y la relación de frecuencias, para el régimen de trabajo, será:

$$R_\omega = \frac{\omega_{tr}}{\omega_n} \Rightarrow R_\omega = \frac{62.84 \text{ rad/s}}{18.25 \text{ rad/s}} \Rightarrow R_\omega = 3.47$$

La frecuencia natural con amortiguamiento (para un sistema excitado por una fuerza de inercia) se obtiene por medio de la expresión:

$$\frac{\omega_r}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}} \Rightarrow \omega_r = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}}$$

Sustituyendo los datos y resolviendo:

$$\omega_r = \frac{18.08 \text{ rad/s}}{\sqrt{1 - 2(0.005)^2}} \Rightarrow \omega_r = 18.081 \text{ rad/s}$$

La frecuencia natural con amortiguamiento prácticamente no se diferencia de la frecuencia natural, lo que se debe al bajo amortiguamiento de los resortes.

### Coefficiente de transmisibilidad real a la frecuencia de trabajo.

El coeficiente de transmisibilidad real, para el régimen de trabajo, se obtiene por medio de la expresión (86):

$$Tr_{tr} = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega_{tr}}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{tr}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega_{tr}}{\omega_n}\right)^2}} \Rightarrow Tr_{tr} = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0.005 \cdot 3.47)^2}}{\sqrt{(1 - (3.47)^2)^2 + (2 \cdot 0.005 \cdot 3.47)^2}} \Rightarrow Tr_{tr} = 0.09$$

El coeficiente de transmisibilidad real, para el régimen de trabajo, es menor que el máximo permisible ( $T_{rmax} = 0,1$ ). Si no se cumpliera esta condición, sería necesario aumentar la masa del fundamento, para disminuir la frecuencia natural.

### **Amplitud de las vibraciones durante el arranque y parada de la máquina (en la zona de resonancia)**

La máxima amplitud aparecerá cuando la frecuencia de rotación de la motobomba coincida con la frecuencia natural con amortiguamiento del sistema. Para obtener dicha amplitud se utiliza la expresión (81), con las necesarias transformaciones.

$$X_{res} = \frac{m_d \cdot ex}{m + m_f} \frac{\left(\frac{\omega t}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega t^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{CCR} \frac{\omega t}{\omega_n}\right)^2}}$$

Como la frecuencia natural y la frecuencia natural con amortiguamiento se diferencian tan poco, debido al bajo amortiguamiento de los resortes, en la expresión (81) se tomará la relación de frecuencias igual a la unidad, lo que simplifica los cálculos. Sustituyendo y resolviendo:

$$X_{res} = \frac{5kg \cdot 0,005m}{50kg + 70kg} \frac{(1)^2}{\sqrt{(1 - (1)^2)^2 + (2 \cdot 0,005 \cdot 1)^2}} \Rightarrow x_{res} = 0,00208m$$

La amplitud de las vibraciones, en la resonancia, es media (2,08 mm); pero el paso por esta zona es breve.

### **Fuerza transmitida al piso durante el arranque y parada (en la zona de resonancia)**

La fuerza excitadora, que es la fuerza de inercia en la pieza desbalanceada, será:

$$Tr_{res} = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{CCR} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{CCR} \frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2}} \Rightarrow Tr_{res} = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0,005 \cdot 1)^2}}{\sqrt{(1 - (1)^2)^2 + (2 \cdot 0,005 \cdot 1)^2}} \Rightarrow Tr_{res} = 100,001$$

Como puede observarse, la transmisibilidad, en la resonancia, es sumamente alta, lo que se debe al bajo amortiguamiento de los soportes. Esto pudiera ser mejorado por medio de una de dos posibles soluciones: primero, añadiendo elementos amortiguadores a la suspensión; y segundo, utilizando soportes elastoméricos, que presentan una mayor relación de amortiguamiento. Además, se debe añadir que, en la resonancia, la fuerza de inercia excitadora es pequeña, lo que hace menos problemática la situación, (Castillo, 1977).

La fuerza transmitida a la base se obtiene por medio de la expresión del coeficiente de transmisibilidad (86), transformándola adecuadamente:

$$F_{\text{trres}} = F_{\text{ires}} \cdot T_{\text{res}}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$F_{\text{trres}} = 0,817\text{N} \cdot 100,01 \Rightarrow F_{\text{trres}} = 81,700\text{N}$$

La fuerza transmitida a la base, en la resonancia, es pequeña, y el paso por esa zona es breve.

### **Amplitud de las vibraciones durante el funcionamiento a la velocidad de trabajo**

La amplitud se obtiene por medio de la expresión (81), utilizando la relación de frecuencias para este caso:

$$X_{\text{tr}} = \frac{m_d \cdot ex}{m + m_f} \frac{\left(\frac{\omega_{\text{tr}}}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{\text{tr}}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega_{\text{tr}}}{\omega_n}\right)^2}}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$X_{\text{tr}} = \frac{5\text{kg} \cdot 0,005\text{m}}{50\text{kg} + 70\text{kg}} \frac{(3,47)^2}{\sqrt{(1 - (3,47)^2)^2 + (2 \cdot 0,005 \cdot 3,47)^2}} \Rightarrow X_{\text{tr}} = 0,000023\text{m}$$

La amplitud, durante el trabajo, es significativamente pequeña (0,023 mm).

## Fuerza transmitida al piso durante el funcionamiento a la velocidad de trabajo

La fuerza excitadora, que es la fuerza de inercia en la pieza desbalanceada, para la velocidad de trabajo, será:

$$F_{itr} = m_d \cdot \omega_{tr}^2 \cdot ex \Rightarrow F_{itr} = 5kg \cdot \left(62,83 \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 0,0005m \Rightarrow F_{itr} = 9,869 N$$

La fuerza transmitida a la base, durante el trabajo, se obtiene por medio de la expresión del coeficiente de transmisibilidad (86), transformándola adecuadamente:

$$F_{tr} = F_{itr} \cdot Tr_{tr}$$

Sustituyendo:

$$F_{tr} = 9,869N \cdot 0,09$$

Resolviendo:

$$F_{tr} = 0,984 N$$

La fuerza transmitida a la base, durante el trabajo a la velocidad nominal, es sumamente pequeña, lo que permite afirmar que la suspensión cumple perfectamente su objetivo, si se tiene en cuenta que la amplitud también es muy pequeña, (Meirovitch, 2001).

## Comportamiento de la amplitud en función de la frecuencia de excitación

Para esto se evalúa el comportamiento de la amplitud, en el intervalo de posible variación de la frecuencia angular  $\omega = 0 \text{ a } 400 \text{ rad / s}$ , como se muestra en la figura 41.

$$X = \frac{m_d \cdot ex}{m + m_f} \frac{\left(\frac{\omega_{tr}}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{tr}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega_{tr}}{\omega_n}\right)^2}}$$

Fig. 41. Amplitud en función de la frecuencia

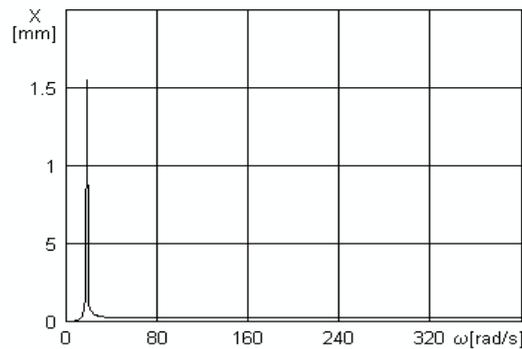


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### Comportamiento del coeficiente de transmisibilidad

Para esto se evalúa el comportamiento del coeficiente de transmisibilidad, en el intervalo de posible variación de la frecuencia angular, como se muestra en la figura 42.

$$\omega = 0 \div 400 \text{ rad/s}$$

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega tr^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{ccr} \frac{\omega tr}{\omega_n}\right)^2}}$$

Fig. 42. Coeficiente de transmisibilidad

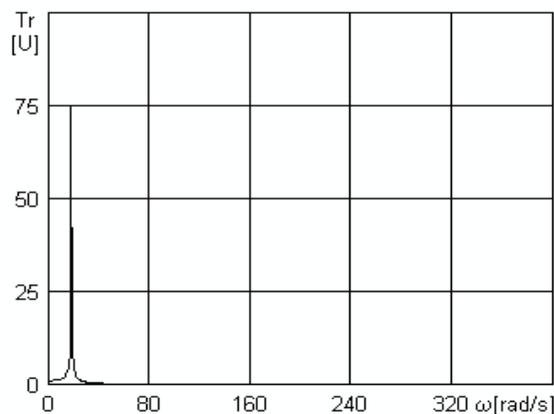


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

## Capítulo III



## SISTEMAS DE DOS Y MÁS GRADOS DE LIBERTAD

ESPACIO EN BLANCO

## 1. Introducción

Dentro de las mismas hipótesis del capítulo anterior, en cuanto a guiado horizontal sin rozamiento de las masas principales; masas despreciables en el resorte y en el amortiguador; y fuerzas elásticas y amortiguadoras proporcionales a los desplazamientos y velocidades respectivamente; en la figura 43 se presenta el esquema general de un sistema con dos grados de libertad.

Fig. 43. Caso general de dos grados de libertad

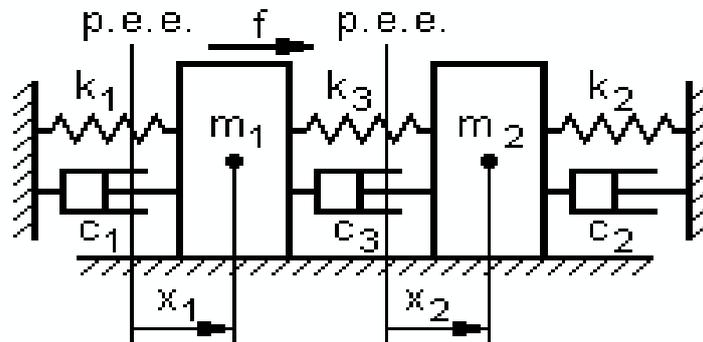


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán.

Aquí se necesitan sólo dos parámetros para definir la configuración del sistema. Estos parámetros pueden ser las distancias horizontales de los centros de gravedad de las masas, respecto a las posiciones de éstas en el equilibrio estático.

La notación y el significado de los componentes del esquema no necesitan ninguna aclaración suplementaria, una vez estudiado el capítulo anterior.

Se supone que forzamos sólo una masa, la primera, ya que esto simplifica la exposición y no quita generalidad a las ideas. Fácilmente, debido al principio de superposición, pueden hacerse extensivos los resultados al caso más completo de aplicar fuerzas en ambas masas.

Al aplicar las ecuaciones de la dinámica a dicho sistema, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_3 (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k_3 (x_1 - x_2) &= F \text{sen} \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 + c_3 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + k_3 (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} (130)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (130) puede presentarse también como:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_3) \dot{x}_1 + (k_1 + k_3) x_1 - c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_2 &= F \operatorname{sen} \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + 3) x_2 - c_3 \dot{x}_1 - k_3 x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

Que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Muchos sistemas reales presentan estas características elásticas y disipativas constantes, sobre todo como primera aproximación en el intervalo del origen, es decir, para deflexiones pequeñas, (Hartman, 1960).

Supondremos armónica la fuerza (F) y seguiremos una exposición análoga a la del capítulo anterior, con distinción entre los sistemas forzados o no y con amortiguamiento o sin él, empezando por los casos más simples, (Migulin y Medvedev, 2002).

## 2. Vibraciones libres no amortiguadas.

En la figura 44 se presenta un sistema libre no amortiguado, con dos grados de libertad. Este caso supone la ausencia de fuerzas excitadoras y de amortiguamiento. Las ecuaciones (131) se reducen a:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_3) x_1 - k_3 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Solución general. La solución general se obtiene buscando dos soluciones particulares fundamentales, y que dada la ausencia de amortiguamiento, podemos encontrar ensayando soluciones armónicas en vez de exponenciales. Así, sean:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \\ x_2 &= a_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Las primeras derivadas serán:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 \omega \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}_2 &= a_2 \omega \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Y las segundas derivadas:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -a_1 \omega^2 \text{sen}(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x}_2 &= -a_2 \omega^2 \text{sen}(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

Sustituyendo (133) y (135) en (132), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} -m_1 a_1 \omega^2 \text{sen}(\omega t + \varphi) + (k_1 + k_3) a_1 \text{sen}(\omega t + \varphi) - k_3 a_2 \text{sen}(\omega t + \varphi) &= 0 \\ -m_2 a_2 \omega^2 \text{sen}(\omega t + \varphi) + (k_2 + k_3) a_2 \text{sen}(\omega t + \varphi) - k_3 a_1 \text{sen}(\omega t + \varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

Simplificando:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen}(\omega t + \varphi) [-m_1 a_1 \omega^2 + (k_1 + k_3) a_1 - k_3 a_2] &= 0 \\ \text{sen}(\omega t + \varphi) [-m_2 a_2 \omega^2 + (k_2 + k_3) a_2 - k_3 a_1] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Como  $\text{sen}(\omega t + \varphi)$  sólo es cero para determinados valores del argumento, se debe cumplir que las expresiones entre corchetes sean cero, como se muestra a continuación:

$$\left. \begin{aligned} (-m_1 \omega^2 + k_1 + k_3) a_1 - k_3 a_2 &= 0 \\ -k_3 a_1 + (-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) a_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Este es un sistema lineal homogéneo en las amplitudes (a), que presentará soluciones (independientes de la trivial), si el determinante de los coeficientes es nulo; es decir, si:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} (-m_1 \omega^2 + k_1 + k_3) & (-k_3) \\ (-k_3) & (-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) \end{vmatrix} = 0 \quad (139)$$

Si se desarrolla el determinante (139), se tendrá que:

$$(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_3)(-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) - k_3^2 = 0$$

La anulaci3n anterior supone una ecuaci3n de segundo grado en  $\omega^2$  (es decir, bicuadrada en  $\omega$ ) cuyas ra3ces positivas son las llamadas frecuencias naturales del sistema (frecuencias propias o auto frecuencias).

Multiplicando y dividiendo por  $(m_1 m_2)$  y cambiando el signo a los dos factores entre par3ntesis:

$$m_1 m_2 \left[ \left( \omega^2 - \frac{k_1 + k_3}{m_1} \right) \left( \omega^2 - \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) - \frac{k_3^2}{m_1 m_2} \right] \quad (140)$$

Definiendo los siguientes valores, que dependen solo de las caracter3sticas inerciales y el3sticas del sistema:

$$\begin{aligned} \omega_a^2 &= \frac{k_1 + k_3}{m_1} \\ \omega_b^2 &= \frac{k_2 + k_3}{m_2} \\ \omega_c^2 &= \frac{k_3}{\sqrt{m_1 m_2}} \end{aligned} \quad (141)$$

El significado f3sico de las frecuencias parciales (141) es el siguiente:

- $\omega_a$  es la frecuencia natural del sistema de un grado de libertad, que resulta al fijar la segunda masa (Figura 44).
- $\omega_b$  es la frecuencia natural del sistema de un grado de libertad, que resulta al fijar la primera masa (Figura 44).
- $\omega_c$  es una frecuencia que da idea del grado de acoplamiento entre los movimientos de ambas masas (Figura 44).

Teniendo en cuenta que el producto de las masas no puede ser cero, e introduciendo las frecuencias caracter3sticas de (141), la expresi3n (140) toma la forma:

$$(\omega^2 - \omega_a^2) (\omega^2 - \omega_b^2) - (\omega_c^2)^2 = 0$$

Desarrollando la expresi3n anterior:

$$(\omega^2)^2 - \omega^2 \omega_b^2 - \omega^2 \omega_a^2 + \omega_a^2 \omega_b^2 - (\omega_c^2)^2 = 0$$

Simplificando y ordenando según las potencias de :

$$(\omega^2)^2 - \omega^2(\omega_a^2 + \omega_b^2) + \omega_a^2\omega_b^2 - (\omega_c^2)^2 = 0 \tag{142}$$

Resolviendo:

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2 \pm \sqrt{(\omega_a^2 + \omega_b^2)^2 - 4(\omega_a^2\omega_b^2 - \omega_c^4)}}{2}$$

Desarrollando dentro del radical:

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2 \pm \sqrt{\omega_a^4 + 2\omega_a^2\omega_b^2 + \omega_b^4 - 4\omega_a^2\omega_b^2 + 4\omega_c^4}}{2}$$

Reduciendo términos semejantes dentro del radical:

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2 \pm \sqrt{\omega_a^4 - 2\omega_a^2\omega_b^2 + \omega_b^4 + 4\omega_c^4}}{2}$$

Simplificando dentro del radical y aplicando la ley distributiva para el denominador, se obtiene:

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2}\right)^2 + \omega_c^4} \tag{143}$$

La existencia de los valores positivos  $\omega_1^2, \omega_2^2$  se prueba viendo el signo del polinomio bicuadrado (142), a través de la siguiente tabla de valores:

$\omega^2$	0	$\omega_a^2$	$\omega_b^2$	$\infty$	Supuesto: $\omega_a^2 < \omega_b^2$
Signo	+	-	-	+	

Con el análisis anterior, se demuestra la presencia de un valor  $\omega_1^2$  entre cero y  $\omega_a^2$ , y otro valor  $\omega_2^2$ , entre  $\omega_b^2$  e infinito. Esto queda también

probado por una determinación gráfica de la solución anterior por el método del círculo de Mohr, como refleja la figura 45.

Fig. 45. Círculo de Mohr para determinar las frecuencias naturales

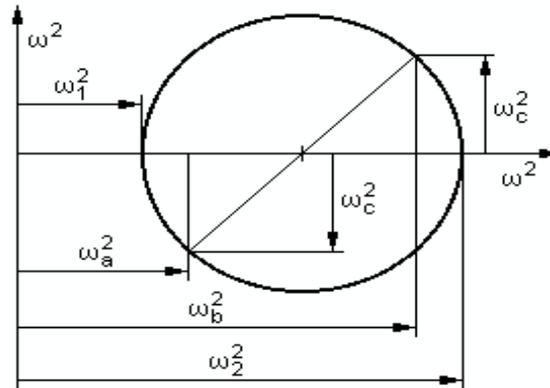


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

A cada movimiento vibratorio “puro”, con una de las frecuencias naturales del sistema, se le denomina modo normal de vibración. A la frecuencia natural más baja se le denomina frecuencia fundamental. En la práctica, muy raras veces los sistemas vibran según un modo normal puro; se observan movimientos, que constituyen una mezcla o superposición de los dos modos normales de vibración

Teniendo en cuenta que un movimiento vibratorio dado será una superposición de los dos modos normales de vibración, la solución general se puede establecer de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x_1 &= (a_1)_1 \text{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + (a_1)_2 \text{sen}(\omega_2 t + \varphi_2) \\x_2 &= (a_2)_1 \text{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + (a_2)_2 \text{sen}(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}\quad (144)$$

La solución anterior establece que el movimiento libre sin amortiguamiento de un sistema de dos grados de libertad se compone, para cada desplazamiento, de la suma de dos funciones armónicas, cuyas frecuencias son características del sistema y se denominan frecuencias naturales.

Para cada frecuencia natural, el sistema presenta una infinidad de soluciones (obtenidas de una cualquiera de las ecuaciones (138)), ya que el valor de una de las amplitudes ( $a$ ) se puede fijar arbitrariamente.

te. El par de amplitudes de cada solución estará en la relación “r”, que se denomina relación modal de vibración. Dicha relación se obtiene a partir de las ecuaciones (138):

$$r(\omega) = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-m_1\omega^2 + k_1 + k_3}{k_3} = \frac{k_3}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3} \quad (145)$$

Para determinadas combinaciones de las perturbaciones iniciales, se obtienen movimientos vibratorios con una sola de las frecuencias naturales (modos normales). Más adelante se obtendrán las condiciones que se deben cumplir, para que se produzcan estos casos.

Introduciendo la relación modal  $r_i=r(\omega_i)$ , (144) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_1)_1 \text{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + (a_1)_2 \text{sen}(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 &= (a_1)_1 r_1 \text{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + (a_1)_2 r_2 \text{sen}(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (146)$$

Las velocidades estarán dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a_1)_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (a_1)_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2 &= (a_1)_1 r_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (a_1)_2 r_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (147)$$

- Soluciones particulares. La solución general anterior implica cuatro constantes
- $(a_1)_1$ ,  $(a_1)_2$ ,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , que se determinan.
- Para cada solución particular, a partir de las condiciones iniciales  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $\dot{x}_{10}$  y  $\dot{x}_{20}$  (para  $t=0$ ). Estableciendo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_{10} &= (a_1)_1 \text{sen}(\varphi_1) + (a_1)_2 \text{sen}(\varphi_2) \\ x_{20} &= (a_1)_1 r_1 \text{sen}(\varphi_1) + (a_1)_2 r_2 \text{sen}(\varphi_2) \\ \dot{x}_{10} &= (a_1)_1 \omega_1 \cos(\varphi_1) + (a_1)_2 \omega_2 \cos(\varphi_2) \\ \dot{x}_{20} &= (a_1)_1 r_1 \omega_1 \cos(\varphi_1) + (a_1)_2 r_2 \omega_2 \cos(\varphi_2) \end{aligned} \quad (148)$$

Si consideramos el caso más común, es decir, si excitamos el sistema solamente con deformaciones iniciales, sin comunicar ninguna energía cinética ( $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ ), tenemos:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (149)$$

Sustituyendo (149) en (148), se tiene:

$$\begin{aligned} x_{10} &= (a_1)_1 + (a_1)_2 \\ x_{20} &= (a_1)_1 r_1 + (a_1)_2 r_2 \end{aligned} \quad (150)$$

Si en (150) se multiplica la primera ecuación por  $r_2$  y se le resta la segunda, queda:

$$x_{10} r_2 - x_{20} = (a_1)_1 (r_2 - r_1) \rightarrow (a_1)_1 = \frac{x_{10} r_2 - x_{20}}{(r_2 - r_1)} \quad (151)$$

Si en (150) se multiplica la primera ecuación por  $r_1$  y se le resta la segunda, queda:

$$x_{10} r_1 - x_{20} = (a_1)_2 (r_1 - r_2) \rightarrow (a_1)_2 = \frac{x_{10} r_1 - x_{20}}{(r_1 - r_2)} \quad (152)$$

Teniendo en cuenta (151) y (152), la solución particular será:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_{10} r_2 - x_{20}}{(r_2 - r_1)} \cos(\omega_1 t) + \frac{x_{10} r_1 - x_{20}}{(r_1 - r_2)} \cos(\omega_2 t) \\ x_2 &= \frac{x_{10} r_2 - x_{20}}{(r_2 - r_1)} r_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{x_{10} r_1 - x_{20}}{(r_1 - r_2)} r_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned} \quad (153)$$

Si la perturbación cumple la relación  $x_{20} = r_1 x_{10}$ , sólo prevalece el primer modo; y si cumple  $x_{20} = r_2 x_{10}$ , sólo prevalece el segundo. En general, siempre se obtiene una combinación lineal de ambos modos, excepto para formas particulares de perturbación, en las cuales puede presentarse uno solo, como en el caso que acabamos de indicar, (Castillo, 1977).

### 3. Vibraciones libres amortiguadas.

En la figura 46 se presenta un sistema de dos grados de libertad, libre amortiguado. En este caso no aparece la fuerza excitadora. Las ecuaciones (130) toman la forma:

Fig. 46. Sistema libre amortiguado

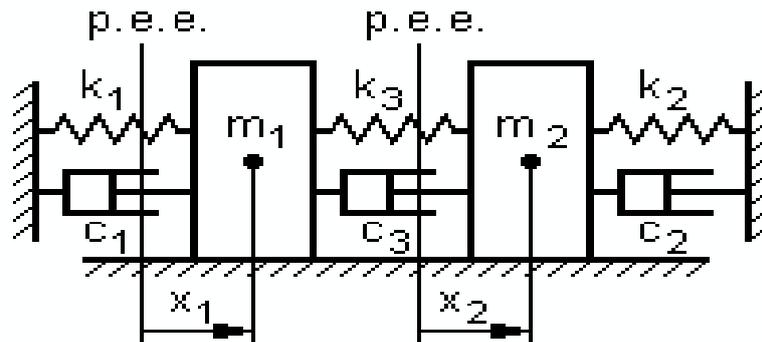


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_3) \dot{x}_1 + (k_1 + k_3)x_1 - c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - c_3 \dot{x}_1 - k_3 x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (154)$$

Dada la presencia de amortiguamiento, para encontrar dos soluciones particulares que constituyan un sistema fundamental, ensayamos exponenciales:

$$x_1 = a_1 e^{st}; \quad x_2 = a_2 e^{st}; \quad (155)$$

Las velocidades serán:

$$\dot{x}_1 = a_1 s e^{st}; \quad \dot{x}_2 = a_2 s e^{st}; \quad (156)$$

Y las aceleraciones:

$$\ddot{x}_1 = a_1 s^2 e^{st}; \quad \ddot{x}_2 = a_2 s^2 e^{st}; \quad (157)$$

Sustituyendo (155), (156) y (157) en (154), se tendrá:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 s^2 e^{st} + (c_1 + c_3) a_1 s e^{st} + (k_1 + k_3) a_1 e^{st} - c_3 a_2 s e^{st} - k_3 a_2 e^{st} &= 0 \\ m_2 a_2 s^2 e^{st} + (c_2 + c_3) a_2 s e^{st} + (k_2 + k_3) a_2 e^{st} - c_3 a_1 s e^{st} - k_3 a_1 e^{st} &= 0 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$e^{st}[m_1 a_1 s^2 + (c_1 + c_3)a_1 s + (k_1 + k_3)a_1 - c_3 a_2 s - k_3 a_2] = 0$$

$$e^{st}[m_2 a_2 s^2 + (c_2 + c_3)a_2 s + (k_2 + k_3)a_2 - c_3 a_1 s - k_3 a_1] = 0$$

Como  $e^{st}$  no será nunca cero, las expresiones entre corchetes deben ser iguales a cero. Por tanto:

$$\begin{aligned} [m_1 s^2 + (c_1 + c_3)s + k_1 + k_3]a_1 - (c_3 s - k_3)a_2 &= 0 \\ - (c_3 s - k_3)a_1 + [m_2 s^2 + (c_2 + c_3)s + k_2 + k_3]a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (158)$$

Para que el sistema de ecuaciones (158) proporcione valores diferentes de cero para las amplitudes  $a_1$  y  $a_2$ , el determinante de los coeficientes debe ser igual a cero, como se muestra a continuación:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} [m_1 s^2 + (c_1 + c_3)s + k_1 + k_3] & - (c_3 s - k_3) \\ - (c_3 s - k_3) & [m_2 s^2 + (c_2 + c_3)s + k_2 + k_3] \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$[m_1 s^2 + (c_1 + c_3)s + k_1 + k_3] * [m_2 s^2 + (c_2 + c_3)s + k_2 + k_3] - (c_3 s - k_3)^2 = 0$$

Se demuestra con alguna laboriosidad, aunque físicamente se intuye, dado el carácter amortiguador de las fuerzas no conservativas, que las cuatro raíces complejas de la ecuación anterior tienen su parte real negativa. Cada par de raíces puede ser:

- Dos raíces negativas diferentes, si  $c > c_{cr}$ .
- Una raíz negativa doble, si  $c = c_{cr}$ .
- Dos raíces complejas conjugadas con parte real negativa, si  $c < c_{cr}$ .

Que aparezca una u otra naturaleza de las raíces depende del carácter de negatividad, nulidad o positividad, que se presente en las relaciones que se obtienen entre los coeficientes de amortiguamiento, de rigidez y másicos del sistema, (Lindley y Paine, 1965).

El caso verdaderamente interesante, es aquél con coeficientes de amortiguamiento pequeños (inferiores al crítico), en el cual los dos pares de soluciones están formados por raíces complejas conjugadas. Los otros casos (con amortiguamiento crítico o superior al crítico) conducen a movimientos no vibratorios, y por tanto carecen de interés, (Cyril, 2002).

Para amortiguamientos inferiores al crítico, se obtendrán raíces de la forma:

$$(s_1)_1, (s_1)_2 = -p_1 \pm q_1 i; \quad (s_2)_1, (s_2)_2 = -p_2 \pm q_2 i \quad (159)$$

La solución general tomara la forma:

$$x_1 = a_{11}e^{-p_1 t + q_1 i} + a_{12}e^{-p_1 t - q_1 i} + a_{13}e^{-p_2 t + q_2 i} + a_{14}e^{-p_2 t - q_2 i}$$

$$x_1 = a_{21}e^{-p_1 t + q_1 i} + a_{22}e^{-p_1 t - q_1 i} + a_{23}e^{-p_2 t + q_2 i} + a_{24}e^{-p_2 t - q_2 i}$$

Las relaciones entre las amplitudes se obtienen de (158), y estarán dadas por:

$$r_j(s) = \frac{a_{2j}}{a_{1j}} = \frac{m_1 s^2 + (c_1 + c_3)s + k_1 + k_2}{c_1 s + k_3} = \frac{c_3 s + k_3}{m_2 s^2 + (c_2 + c_3)s + k_2 + k_2}$$

Al sustituir las raíces imaginarias conjugadas, resulta:

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = r_1 e^{\theta_1 i}; \quad \frac{a_{22}}{a_{12}} = r_1 e^{-\theta_1 i}; \quad \frac{a_{23}}{a_{13}} = r_2 e^{\theta_2 i}; \quad \frac{a_{24}}{a_{14}} = r_2 e^{-\theta_2 i}$$

De donde  $x_2$  queda en la forma:

$$x_2 = a_{11}$$

$$r_1 e^{-p_1 t + (q_1 + \theta_1) i} + a_{12} r_1 e^{-p_1 t - (q_1 + \theta_1) i} + a_{13} r_2 e^{-p_2 t + (q_2 + \theta_2) i} + a_{14} r_2 e^{-p_2 t - (q_2 + \theta_2) i}$$

De esta forma, sólo quedan cuatro constantes a determinar (las amplitudes) en la solución general. Si esta la pasamos de exponencial compleja a exponencial real y trigonométrica, queda en la forma:

$$x_1 = b_{11} r_1 e^{-p_1 t} \cos(q_1 t + \varphi_1) + b_{12} e^{-p_2 t} \cos(q_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2 = b_{11} r_1 e^{-p_1 t} \cos(q_1 t + \theta_1 + \varphi_1) + b_{12} r_2 e^{-p_2 t} \cos(q_2 t + \theta_2 + \varphi_2) \quad (160)$$

Las cuatro constantes  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se determinan, para cada solución particular, a partir de las condiciones iniciales; ya que  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son constantes que dependen de las características generales del sistema. El movimiento, debido a las exponenciales negativas, decrecerá rápidamente en amplitud, quedando, al cabo de un tiempo relativamente pequeño, con valores prácticamente nulos, (Meirovitch, 2001).

#### 4. Vibraciones forzadas amortiguadas.

En la figura 47 se presenta un sistema con dos grados de libertad, forzado amortiguado. El sistema no homogéneo que se establece en este caso es:

Fig. 47. Sistema forzado amortiguado

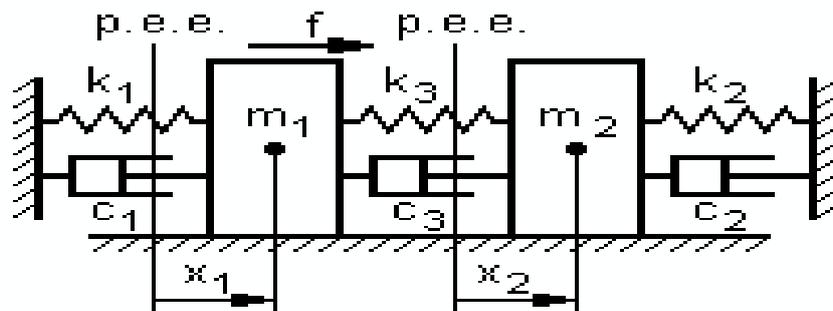


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_3) \dot{x}_1 + (k_1 + k_3)x_1 - c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_2 &= F \text{sen}(\omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - c_3 \dot{x}_1 - k_3 x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (161)$$

La solución general es la suma de la solución general del sistema homogéneo (s.g.h.) más una solución particular de este sistema no homogéneo. Para esta última ensayamos soluciones armónicas de igual frecuencia que la fuerza excitadora, pero desfasadas respecto a ella por la presencia de las derivadas primeras, así, (Taylor, 2011):

$$\begin{aligned} x_{p1} &= x_{p1} \text{sen}(\omega t + \theta_1) \\ x_{p2} &= x_{p2} \text{sen}(\omega t + \theta_2) \end{aligned} \quad (161)$$

Las velocidades estarán dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p1} &= x_{p1} \omega \cos(\omega t + \theta_1) \\ \dot{x}_{p2} &= x_{p2} \omega \cos(\omega t + \theta_2) \end{aligned} \quad (162)$$

Y las aceleraciones por:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{p1} &= -x_{p1} \omega^2 \text{sen}(\omega t + \theta_1) \\ \ddot{x}_{p2} &= -x_{p2} \omega^2 \text{sen}(\omega t + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Sustituyendo (161), (162) y (3.4.4) en el sistema (161), tenemos:

$$\begin{aligned} x_{p1}(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_3) \text{sen}(\omega t + \theta_1) \\ + x_{p1}(c_1 + c_3) \omega \cos(\omega t + \theta_1) + x_{p2} c_3 \omega \cos(\omega t + \theta_2) - x_{p2} k_3 \omega \text{sen}(\omega t + \theta_2) \\ = F \text{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{p2}(-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) \text{sen}(\omega t + \theta_2) \\ + x_{p2}(c_2 + c_3) \omega \cos(\omega t + \theta_2) + x_{p1} c_3 \omega \cos(\omega t + \theta_1) - x_{p1} k_3 \omega \text{sen}(\omega t + \theta_1) \\ = F \text{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

Desarrollando los senos y cosenos de la suma de los ángulos, en los argumentos:

$$\begin{aligned} x_{p1}(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_3) [\text{sen}(\omega t) \cos(\theta_1) + \cos(\omega t) \text{sen}(\theta_1)] + x_{p1}(c_1 + \\ c_3) \omega [\cos(\omega t) \cos(\theta_1) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\theta_1)] + x_{p2} c_3 \omega [\cos(\omega t) \cos(\theta_2) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\theta_2)] - \\ x_{p2} k_3 [\text{sen}(\omega t) \cos(\theta_2) + \cos(\omega t) \text{sen}(\theta_2)] = F \text{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{p2}(-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) (\text{sen}(\omega t) \cos(\theta_2) + \cos(\omega t) \text{sen}(\theta_2)) + x_{p2}(c_2 + \\ c_3) \omega (\cos(\omega t) \cos(\theta_2) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\theta_2)) + x_{p1} c_3 \omega (\cos(\omega t) \cos(\theta_1) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\theta_1)) - \\ x_{p1} k_3 (\text{sen}(\omega t) \cos(\theta_1) + \cos(\omega t) \text{sen}(\theta_1)) = 0 \end{aligned}$$

En la primera ecuación, la suma de los términos que contengan como factor común tiene que ser cero, ya que en el miembro de la derecha no está presente este factor:

$$x_{p1}(-m_1\omega^2 + k_1 + k_3)(\cos(\omega t) \text{sen}(\theta_1)) + x_{p1}(c_1 + c_3)\omega(\cos(\omega t)\cos(\theta_1)) + x_{p2}c_3\omega(\cos(\omega t)\cos(\theta_2)) - x_{p2}k_3(\cos(\omega t)\text{sen}(\theta_2)) = 0 \quad (3.4.5)$$

En la primera ecuación, la suma de los términos que contienen será igual a  $F\text{sen}\omega t$  :

$$x_{p1}(-m_1\omega^2 + k_1 + k_3)(\text{sen}(\omega t) \cos(\theta_1)) - x_{p1}(c_1 + c_3)\omega(\text{sen}(\omega t)\text{sen}(\theta_1)) + x_{p2}c_3\omega(\text{sen}(\omega t)\text{sen}(\theta_2)) - x_{p2}k_3(\text{sen}(\omega t)\cos(\theta_2)) = F\text{sen}(\omega t) \quad (3.4.6)$$

En la segunda ecuación, tanto la suma de los términos que contienen como factor común a  $\cos \omega t$  , como los que contienen a  $\text{sen}\omega t$  , tienen que ser iguales a cero:

$$x_{p2}(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)(\cos(\omega t) \text{sen}(\theta_2)) + x_{p2}(c_2 + c_3)\omega(\cos(\omega t)\cos(\theta_2)) + x_{p1}c_3\omega(\cos(\omega t)\cos(\theta_1)) - x_{p1}k_3(\cos(\omega t)\text{sen}(\theta_1)) = 0 \quad (3.4.7)$$

$$x_{p2}(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)(\text{sen}(\omega t) \cos(\theta_2)) - x_{p2}(c_2 + c_3)\omega(\text{sen}(\omega t)\text{sen}(\theta_2)) + x_{p1}c_3\omega(\text{sen}(\omega t)\text{sen}(\theta_1)) - x_{p1}k_3(\text{sen}(\omega t)\cos(\theta_1)) = 0 \quad (3.4.8)$$

Sacando el factor común correspondiente (  $\cos \omega t$  o  $\text{sen}\omega t$  ) en las ecuaciones (3.4.5), (3.4.6), (3.4.7) y (3.4.8) e igualando al miembro correspondiente de la derecha, se tendrá:

$$x_{p1}[(-m_1\omega^2 + k_1 + k_3)(\text{sen}(\theta_1)) + (c_1 + c_3)\omega(\cos(\theta_1))] - x_{p2}[c_3\omega \cos(\theta_2) + k_3\text{sen}(\theta_2)] = 0 \quad (3.4.9)$$

$$x_{p1}[(-m_1\omega^2 + k_1 + k_3)(\cos(\theta_1)) + (c_1 + c_3)\omega(\text{sen}(\theta_1))] - x_{p2}[c_3\omega \text{sen}(\theta_2) + k_3\cos(\theta_2)] = F \quad (3.4.10)$$

$$x_{p2}[(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)(\text{sen}(\theta_2)) + (c_2 + c_3)\omega(\cos(\theta_2))] - x_{p1}[c_3\omega \cos(\theta_1) + k_3\text{sen}(\theta_1)] = 0 \quad (3.4.11)$$

$$x_{p2}[(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)(\cos(\theta_2)) + (c_2 + c_3)\omega(\text{sen}(\theta_2))] - x_{p1}[c_3\omega \text{sen}(\theta_1) + k_3\cos(\theta_1)] = 0 \quad (3.4.12)$$

Con el sistema de ecuaciones (3.4.9), (3.4.10), (3.4.11) y (3.4.12) se determinan las cuatro constantes  $x_{p1}, x_{p2}, \theta_1, \theta_2$ . Dadas las complicadas expresiones que se obtienen para este caso general, no despejamos las constantes anteriores. En dichas expresiones aparecen las constantes  $x_{p1}$  y  $x_{p2}$  proporcionales a  $F$  y funciones de las características del sistema y de  $\omega$ , y las constantes  $\theta_1$  y  $\theta_2$  independientes de  $F$  y funciones de las características del sistema y de  $\omega$ .

Además, se deben añadir los siguientes detalles importantes:

- Para las frecuencias de resonancia del sistema, la amplitud es finita y tanto menor cuanto mayores son los coeficientes de amortiguamiento, presentando dos máximos situados en las proximidades de aquellas frecuencias, si los amortiguamientos son pequeños.
- Los desfases respecto a la fuerza excitadora no son nulos. Se apartan tanto más de este valor cuanto mayores son los coeficientes de amortiguamiento.

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, la solución general queda como:

$$\begin{aligned}x_1 &= s, g, h, + x_{p1} \text{sen}(\omega t + \theta_1) \\x_2 &= s, g, h, + x_{p2} \text{sen}(\omega t + \theta_2)\end{aligned}\tag{3.4.13}$$

La primera componente (s.g.h.), que tiene cuatro constantes, a determinar por las condiciones iniciales, desaparece prácticamente al cabo de un cierto tiempo que constituye el período transitorio. Por tanto, en la continuación, permanece sólo la segunda componente de igual frecuencia que la fuerza excitadora, (Beards, 1995).

## 5. Sistemas de más de dos grados de libertad.

Tengamos un sistema de un número finito o infinito de puntos masas, cada uno de los cuales está definido en un sistema cartesiano rectangular por sus coordenadas  $x, y, z$ . En la figura 3.5.1. Se representan sistemas sencillos de tres grados de libertad, que permiten ilustrar este caso, (Derek, 2003).

Supongamos  $n$  parámetros independientes  $q_1, q_2, \dots, q_n$  (como los ángulos  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  del ejemplo de la izquierda en la ecuación 3.5.1),

que definen en cada instante la configuración del sistema, al entrar en expresiones finitas de la forma:

$$\begin{aligned}x &= x(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\y &= y(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\z &= z(q_1, q_2, \dots, q_n, t)\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

Este constituye un sistema holónomo de  $n$  grados de libertad. La mayoría de los sistemas de cierto interés son holónomos y por tanto esta suposición no implica una gran limitación.

Si existen ligaduras variables impuestas al sistema, el tiempo aparece en forma explícita en las ecuaciones. Se debe entender aquí por ligadura variable (no fija) aquella que no tiene un movimiento fijo y determinado a priori, que no se altere por las reacciones del sistema sobre la ligadura, (Baranov ,1985).

Los parámetros anteriores ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) se conocen por coordenadas del sistema o coordenadas generalizadas.

Suponemos que las ligaduras impuestas al sistema no presentan rozamientos del tipo Coulomb (entre superficies sólidas) y que las fuerzas que tenemos responden a los tres tipos siguientes:

- Fuerzas conservativas elásticas ( $X_c, Y_c, Z_c$ )
- Fuerzas disipativas viscosas ( $X_d, Y_d, Z_d$ )
- Fuerzas excitadoras ( $X, Y, Z$ )

El trabajo virtual de las fuerzas conservativas elásticas, para todo desplazamiento virtual, compatible con las ligaduras, supuestas fijas en un instante dado, será:

$$\delta T_c = \sum (X_c \delta x + Y_c \delta y + Z_c \delta z) = F_{c1} \delta q_1 + F_{c2} \delta q_2 + \dots + F_{cn} \delta q_n$$

Dónde:

$$F_{ci} = \sum \left( X_c \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y_c \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z_c \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$$

Estos valores  $F$  se llaman fuerzas generalizadas y representan el trabajo que se realiza sobre el sistema en un desplazamiento virtual

compatible con las ligaduras, supuestas fijas en un instante dado, en el cual el parámetro correspondiente tiene una variación unidad y los demás parámetros tienen variación nula. Esta magnitud no ha de tener necesariamente dimensiones de fuerza, sino que basta que su producto por la coordenada generalizada correspondiente tenga dimensiones de energía.

Igualmente tendremos para las fuerzas disipativas:

$$\delta T_d = \sum (X_d \delta x + Y_d \delta y + Z_d \delta z) = F_{d1} \delta q_1 + F_{d2} \delta q_2 + \dots + F_{dn} \delta q_n$$

Dónde:

$$F_{di} = \sum \left( X_d \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y_d \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z_d \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$$

Y para las fuerzas excitadoras:

$$\delta T = \sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + \dots + F_n \delta q_n$$

Dónde:

$$F = \sum \left( X \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$$

Llamando E a la energía cinética:

$$E = \frac{1}{2} \sum (m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2))$$

Se tendrán, aplicando las ecuaciones de Lagrange (2011), las n ecuaciones, que nos permiten determinar los n parámetros  $q_i$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = F_{ci} + F_{di} + F_i$$

Teniendo en cuenta posteriores razonamientos, la expresión anterior se puede escribir en la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i$$

Los sistemas que ofrecen interés para nosotros son aquellos que están sometidos a ligaduras fijas, por lo que el tiempo no aparece explícitamente en las relaciones que ligan las coordenadas de los puntos y los parámetros, y el desplazamiento elemental real será un desplazamiento compatible con las ligaduras.

El trabajo elemental de las fuerzas conservativas es un diferencial exacto o diferencial total, existiendo una función primitiva o función potencial de la cual derivan estas fuerzas. El valor contrario de esta función se llama energía potencial y será una función sólo de las coordenadas  $q_i$ , verificándose:

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

En cuanto a las fuerzas disipativas, dado el tipo de amortiguamiento supuesto, tendremos:

$$\begin{aligned} X_d &= -c\dot{x} = -c \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_n} \dot{q}_n \right) \\ Y_d &= -c\dot{y} = -c \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_n} \dot{q}_n \right) \\ Z_d &= -c\dot{z} = -c \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_n} \dot{q}_n \right) \end{aligned}$$

Que conducen a expresiones para las fuerzas generalizadas, lineales respecto a las velocidades generalizadas, de la forma:

$$F_{di} = -(d_{i1}\dot{q}_1 + d_{i2}\dot{q}_2 + \dots + d_{in}\dot{q}_n)$$

Denominado:

$$d_{ij} = \sum \left[ c \left( \frac{\partial x}{\partial q_j} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_j} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_j} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \right]$$

Coefficientes que cumplen  $d_{ij}=d_{ji}$  y que en general serán funciones de las coordenadas  $q_j$ .

Se define entonces una función “D”, llamada función disipativa, que representa la mitad de la velocidad de disipación de energía del sistema por medio de estas fuerzas, y que valdrá:

$$D = \frac{1}{2}(F_{d1}q_1' + F_{d2}q_2' + \dots + F_{dn}q_n') = \frac{1}{2}(d_{11}q_1'^2 + 2d_{12}q_1'q_2' + \dots + d_{nn}q_n'^2)$$

Por tanto:

$$F_{di} = \frac{\partial D}{\partial q_i}$$

Esta función D es cuadrática homogénea en las  $\dot{q}_i$  y definida no negativa, dada su naturaleza física, en un sistema esencialmente disipativo, (Harker, 2003).

Para la energía cinética, al expresarla como función de los parámetros derivadas, tendremos:

$$E = \frac{1}{2}(e_{11}q_1'^2 + e_{12}q_1'q_2' + e_{21}q_2'q_1' + \dots + e_{nn}q_n'^2);$$

Denominando:

$$e_{ij} = \sum [m(\frac{\partial x}{\partial q_j} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_j} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_j} \frac{\partial z}{\partial q_i})]$$

Coefficientes que cumplen  $e_{ij}=e_{ji}$  y que en general serán funciones de las .

La energía cinética será también una función cuadrática homogénea en las coordenadas  $q_i$  y definida no negativa, por su naturaleza física. Según esto, las condiciones que nos conducen a un problema lineal, es decir, a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, es la existencia de U cuadrática y valores constantes, independientes de las coordenadas  $q_i$ , para los coeficientes  $d_{ij}$  y  $e_{ij}$ .

Estas son las condiciones en que se encuentran las pequeñas perturbaciones de un sistema en torno a las posiciones de equilibrio estable, cuando el sistema es libre no amortiguado (es decir, con  $F_i = 0$  y

$D = 0$ ). Se entiende por posición de equilibrio estable aquella en que, desviado el sistema infinitamente poco de su posición de equilibrio, y al comunicarle una energía cinética infinitamente pequeña, el sistema se mueve desviándose poco de la posición de equilibrio y, consecuentemente, alcanzando energías cinéticas infinitamente pequeñas. El teorema de Lejeune-Dirichlet (1998) demuestra que éste es el caso para un mínimo de la energía potencial ( $U$ ).

Como la energía potencial ( $U$ ) está definida salvo una constante, podemos fijar esta constante para que  $U$  valga cero en la posición de equilibrio, la cual podemos suponer, así mismo, que se encuentra para  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ , sin más que hacer un cambio de coordenadas que tomen por origen este punto. Si  $U$  es cero en un mínimo, será definida no negativa en un entorno pequeño de este punto, (Seto, 2004).

Además por tratarse de un mínimo (en ese punto):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial U}{\partial q_n}\right)_0 = 0$$

Como por la estabilidad se deduce que si  $y$  son suficientemente pequeños,  $y$  son también suficientemente pequeños de un mismo orden, tenemos, desarrollando y despreciando los términos de orden superior al segundo, lo siguiente, (Taylor, 2011):

$$2U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_n^2}\right)_0 q_n^2 = u_{11} q_1^2 + u_{12} q_1 q_2 + u_{21} q_1 q_2 + u_{nn} q_n^2$$

Los coeficientes  $u_{ij} = u_{ji}$  son constantes. Al desarrollar los coeficientes  $d_{ij}$  y  $e_{ij}$  en torno al origen, presentan un valor constante (su valor en el origen) más términos despreciables frente a ellos, por conducir en las expresiones de  $E$  y  $D$  a términos de orden superior al segundo. Conservando para los valores en el origen de los coeficientes anteriores la misma notación dada a éstos,  $d_{ij}$  y  $e_{ij}$ , tenemos:

$$E = \frac{1}{2} (e_{11} \dot{q}_1^2 + e_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + e_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \dots + e_{nn} \dot{q}_n^2)$$

$$D = \frac{1}{2} (d_{11} \dot{q}_1^2 + d_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + d_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \dots + d_{nn} \dot{q}_n^2)$$

$$U = \frac{1}{2} (u_{11} q_1^2 + u_{12} q_1 q_2 + u_{21} q_2 q_1 + \dots + u_{nn} q_n^2)$$

Los términos  $e_{ij}$ ,  $d_{ij}$ ,  $u_{ij}$ , con  $i \neq j$ , se denominan de acoplamiento dinámico, disipativo y elástico, respectivamente.

Dadas las expresiones anteriores, y las ecuaciones de Lagrange (2011), llegamos al siguiente sistema:

$$e_{11}\ddot{q}_1 + e_{12}\ddot{q}_2 + \dots + e_{1n}\ddot{q}_n + d_{11}\dot{q}_1 + d_{12}\dot{q}_2 + \dots + d_{1n}\dot{q}_n + u_{11}q_1 + u_{12}q_2 + \dots + u_{1n}q_n = F_1$$

$$e_{21}\ddot{q}_1 + e_{22}\ddot{q}_2 + \dots + e_{2n}\ddot{q}_n + d_{21}\dot{q}_1 + d_{22}\dot{q}_2 + \dots + d_{2n}\dot{q}_n + u_{21}q_1 + u_{22}q_2 + \dots + u_{2n}q_n = F_2$$

$$e_{n1}\ddot{q}_1 + e_{n2}\ddot{q}_2 + \dots + e_{nn}\ddot{q}_n + d_{n1}\dot{q}_1 + d_{n2}\dot{q}_2 + \dots + d_{nn}\dot{q}_n + u_{n1}q_1 + u_{n2}q_2 + \dots + u_{nn}q_n = F_n$$

Cada ecuación refleja el equilibrio dinámico de uno de los elementos que componen el sistema (una masa o un momento de inercia). Definiendo las siguientes matrices:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & e_{2n} \\ e_{n1} & e_{n2} & e_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz simétrica de inercia}$$

$$[d] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{2n} \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz simétrica de amortiguamiento}$$

$$[u] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{2n} \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz simétrica de rigidez}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_N \end{Bmatrix} \quad \text{Matriz columna de las fuerzas aplicadas.}$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_N \end{Bmatrix} \quad \text{Matriz columna de los desplazamientos.}$$

Podemos expresar el sistema anterior en la forma matricial compacta:

$$[e]\{\ddot{q}\} + [d]\{\dot{q}\} + [u]\{q\} = \{F\} \quad (3.5.2)$$

La expresión (3.5.2) constituye la ecuación matricial, en su forma más completa, para el estudio de un sistema con  $n$  grados de libertad. Recordemos que esta ecuación matricial es una forma de expresar las ecuaciones de Lagrange (2011), para el planteamiento de las cuales, en un sistema dado, no siempre es necesario conocer las expresiones que dan la energía cinética, la energía disipada y la energía potencial en este, es decir, que partiendo del equilibrio dinámico del sistema se pueden escribir dichas ecuaciones y luego escribir la ecuación matricial 3.5.2, que sirve de guía para el análisis posterior del comportamiento del sistema.

En sistemas simples, con pocos grados de libertad, las expresiones de las energías cinética, de disipación y potencial se obtienen fácilmente; pero en sistemas con muchos grados de libertad esto puede constituir una tarea muy compleja. Por eso en estos sistemas es aconsejable la aplicación directa de las ecuaciones del equilibrio dinámico, que conducen a los mismos resultados, dando luego el tratamiento matemático adecuado, (Butenin, 2003).

Escoger una u otra vía de solución depende de la complejidad del problema a resolver y las posibilidades de escribir unas u otras expresiones.

## 6. Vibraciones libres no amortiguadas para más de dos grados de libertad.

Como tales podrán considerarse las vibraciones que surjan en sistemas con amortiguamiento muy pequeño y en ausencia de fuerzas excitadoras aplicadas. En este caso se consideran nulas las matrices de las fuerzas excitadoras  $\{F\}$  y de amortiguamiento  $[d]$ , con lo cual la ecuación (3.5.2) tomara la forma:

$$[e]\{\ddot{q}\} + [u]\{q\} = 0$$

Multiplicando por la inversa de la matriz de inercia, se obtiene:

$$\{\ddot{q}\} + [e]^{-1}[u]\{q\} = \{0\}$$

Haciendo el producto , tenemos:

$$\{\ddot{q}\} + [p]\{q\} = 0 \quad (3.6.1)$$

Para satisfacer la ecuación diferencial matricial (o sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes), se ensaya una solución del tipo:

$$\{q\} = \{Q\}\text{sen}(wt + \varphi) \quad (3.6.2)$$

Las aceleraciones estarán dadas por:

$$\{\ddot{q}\} = -\{Q\}w^2\text{sen}(wt + \varphi) \quad (3.6.3)$$

Sustituyendo (3.6.2) y (3.6.3) en (3.6.1):

$$-w^2\{Q\}\text{sen}(wt + \varphi) + [p]\{Q\}\text{sen}(wt + \varphi) = 0$$

Como la función seno es factor común y sólo será igual a cero en casos particulares, se debe cumplir que:

$$-w^2\{Q\} + [p]\{Q\} = 0 \quad (3.6.4)$$

La ecuación anterior (3.6.4) es equivalente al sistema de ecuaciones algebraicas lineales y homogéneas siguiente:

$$(p_{11} - w^2)Q_1 + p_{12}Q_2 + \dots + p_{1n}Q_n = 0$$

$$(p_{21}Q_1 + (p_{22} - w^2)Q_2 + \dots + p_{2n}Q_n = 0$$

$$p_{n1}Q_1 + p_{n2}Q_2 + \dots + p_{nn}Q_n = 0$$

(3.6.5)

El sistema (3.6.5) presenta soluciones distintas de la trivial  $Q_1=Q_2=\dots=Q_n=0$ , para aquellos valores de  $w^2$  (autovalores), que anulan el determinante de los coeficientes. La ecuación que se obtiene, al igualar el determinante a cero, se denomina ecuación característica de la matriz  $[p]$ .

Llamando  $\Delta(w)$  a dicho determinante, se tiene:

$$\Delta(w) = \begin{vmatrix} p_{11} - w^2 & p_{12} \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - w^2 \dots & p_{2n} \\ p_{n1} & p_{n2} \dots & p_{nn} - w^2 \end{vmatrix} = 0$$

Se demuestra la existencia real y positiva de  $n$  raíces  $w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2$ , cuando las funciones potencial ( $U$ ) y de energía cinética ( $E$ ), a partir de las cuales se obtiene la matriz  $[p]$ , son definidas positivas, como sucede en este caso. Estos valores propios se denominan frecuencias naturales del sistema. Considérese el caso más general en que ninguna de estas raíces es nula ni doble, sino que todas son distintas entre si y distintas de cero. Para cada  $\omega_i$  anterior se puede obtener una columna  $\{Q\}$ , denominada columna modal, a partir de  $n-1$  ecuaciones del sistema anterior (3.6.5), y determinada salvo una constante de proporcionalidad. Tomando las  $n-1$  ecuaciones finales y llamando  $r_i$  a los adjuntos de los términos correspondientes en el determinante  $\Delta$ , tenemos:

$$\frac{Q_1}{\Delta_{11}} = \frac{Q_2}{\Delta_{12}} = \frac{Q_n}{\Delta_{1n}}$$

Denominando:

$$r_j = \frac{Q_{j+1}}{Q_{11}} = \frac{\Delta_{1j+1}}{\Delta_{11}}$$

La columna modal será:

$$\{Q\} = (Q_1)_i \{r\}_i$$

La columna de las relaciones modales estará formada por:

$$\{r\}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ (r_1)_i \\ (r_2)_i \\ \vdots \\ (r_{n-1})_i \end{Bmatrix}$$

Los elementos de la columna modal se obtienen al sustituir el valor de  $i \omega$  en la expresión de los adjuntos anteriores. Por tanto, la solución general será:

$$\{q\} = (Q_1)\{r\}_1 \text{sen}(w_1 t + \varphi_1) + (Q_1)_2 \{r\}_2 \text{sen}(w_2 t + \varphi_2) + \dots + (Q_1)_n \{r\}_n \text{sen}(w_n t + \varphi_n)$$

O, en forma matricial, como:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 \\ (r_1)_1 & (r_1)_2 & \cdot & (r_1)_n \\ (r_2)_1 & (r_2)_2 & \cdot & (r_2)_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (r_{n-1})_1 & (r_{n-1})_2 & \cdot & (r_{n-1})_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (Q_1)_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & (Q_1)_2 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & (Q_1)_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \text{sen}(w_1 t + \varphi_1) \\ \text{sen}(w_2 t + \varphi_2) \\ \text{sen}(w_3 t + \varphi_3) \\ \vdots \\ \text{sen}(w_n t + \varphi_n) \end{Bmatrix}$$

Igualando los elementos de las matrices de ambos miembros de la igualdad, se obtiene:

$$q_1 = (Q_1)_1 \text{sen}(w_1 t + \varphi_1) + (Q_1)_2 \text{sen}(w_2 t + \varphi_2) + \dots + (Q_1)_n \text{sen}(w_n t + \varphi_n)$$

$$q_2 = (Q_1)_1 (r_1)_1 \text{sen}(w_1 t + \varphi_1) + (Q_1)_2 (r_1)_2 \text{sen}(w_2 t + \varphi_2) + \dots + (Q_1)_n (r_1)_n \text{sen}(w_n t + \varphi_n)$$

$$q_n = (Q_1)_1 (r_{n-1})_1 \text{sen}(w_1 t + \varphi_1) + (Q_1)_2 (r_{n-1})_2 \text{sen}(w_2 t + \varphi_2) + \dots + (Q_1)_n (r_{n-1})_n \text{sen}(w_n t + \varphi_n)$$

Es decir, el movimiento del sistema es la suma de n movimientos armónicos, cada uno de los cuales tiene por frecuencia una de las n frecuencias naturales del sistema. La solución general tiene 2n constantes, formadas por las amplitudes  $(Q_1)_i$  y los ángulos de fase  $\varphi_i$ , las cuales, para cada solución particular, se determinan al conocer los 2n valores iniciales  $q_{10}$  y  $\dot{q}_{10}$ .

## 7. Vibraciones forzadas amortiguadas para más de dos grados de libertad.

En este caso se utilizará la ecuación matricial 3.5.1 con todos sus elementos, recordando que las coordenadas “q” pueden ser lineales o angulares, la matriz de inercia puede contener masas o momentos de inercia, las matrices de amortiguamiento y rigidez pueden contener coeficientes lineales o angulares y la matriz columna de las fuerzas excitadoras puede contener fuerzas o momentos de fuerzas. No obstante, partimos de esta ecuación, escrita para el caso general:

$$[e]\{\ddot{q}\} + [d]\{\dot{q}\} + [u]\{q\} = \{F\}$$

Como se señaló anteriormente, en un sistema concreto dado se puede partir de las expresiones de las energías cinética, de disipación y potencial, para después aplicar las ecuaciones de Lagrange (2011), o

se pueden aplicar las ecuaciones del equilibrio dinámico directamente al sistema, con igual objetivo.

Fig.48. Sistema forzado amortiguado con seis grados de libertad

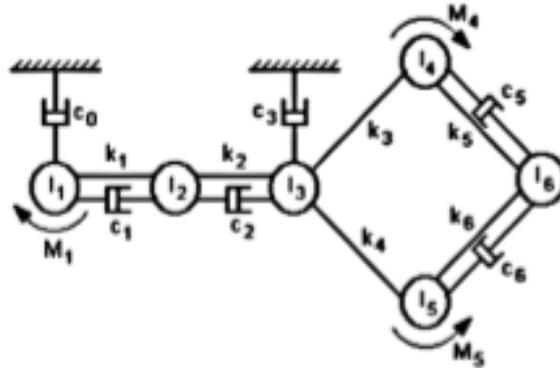


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

En la figura 48. se presenta un sistema forzado amortiguado de seis grados de libertad con elementos que rotan, que se tomará como base para exponer el planteamiento de las ecuaciones del equilibrio dinámico y el análisis posterior de estas. La ecuación de equilibrio dinámico de cada momento de inercia (o masa) del modelo del sistema se escribe de igual forma que para sistemas de uno o dos grados de libertad. Las coordenadas “q” serán sustituidas por los ángulos de rotación “ $\phi$ ”, que nos resultan más familiares. Como se nota, en algunos de los momentos de inercia están aplicados momentos de fuerzas exteriores, que constituyen las acciones excitadoras, mientras que en otros no está aplicado ningún esfuerzo exterior. Se debe aclarar que sólo constituyen esfuerzos excitadores los que sean variables con el tiempo, o la parte variable de los que tengan una parte constante y otra variable. El sistema de ecuaciones quedará como se expone a continuación:

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 \ddot{\phi}_1 + (C_0 + C_1) \dot{\phi}_1 + K_1 \phi_1 - C_1 \dot{\phi}_2 - K_2 \phi_2 &= M_1 \\
 I_2 \ddot{\phi}_2 + (C_1 + C_2) \dot{\phi}_2 + (K_1 + K_2) \phi_2 - C_1 \dot{\phi}_2 - K_1 \phi_1 - C_2 \dot{\phi}_3 - K_2 \phi_3 &= 0 \\
 I_3 \ddot{\phi}_3 + (C_2 + C_3) \dot{\phi}_3 + (K_2 + K_3 + K_4) \phi_3 - C_2 \dot{\phi}_2 - K_2 \phi_2 - K_3 \phi_4 - K_4 \phi_5 &= 0 \\
 I_4 \ddot{\phi}_4 + (C_5) \dot{\phi}_4 + (K_3 + K_5) \phi_4 - K_3 \phi_3 - C_5 \dot{\phi}_6 - K_5 \phi_6 &= M_4 \\
 I_5 \ddot{\phi}_5 + (C_6) \dot{\phi}_5 + (K_4 + K_6) \phi_5 - K_4 \phi_3 - C_6 \dot{\phi}_6 - K_6 \phi_6 &= M_5 \\
 I_6 \ddot{\phi}_6 + (C_5 + C_6) \dot{\phi}_6 + (K_5 + K_6) \phi_6 - C_5 \dot{\phi}_4 - K_5 \phi_4 - C_6 \dot{\phi}_5 - K_6 \phi_5 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.7.1)$$

Las ecuaciones del sistema (3.7.1) se deben reescribir, de forma que las coordenadas queden organizadas según su subíndice, como se muestra a continuación:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + (C_0 + C_1) \dot{\varphi}_1 + K_1 \varphi_1 - C_1 \dot{\varphi}_2 - K_1 \varphi_2 &= M_1 \\ -C_1 \dot{\varphi}_1 - K_1 \varphi_1 + I_2 \ddot{\varphi}_2 + (C_1 + C_2) \dot{\varphi}_2 + (K_1 + K_2) \varphi_2 - C_2 \dot{\varphi}_3 - K_2 \varphi_3 &= 0 \\ -C_2 \dot{\varphi}_2 - K_2 \varphi_2 + I_3 \ddot{\varphi}_3 + (C_2 + C_3) \dot{\varphi}_3 + (K_2 + K_3 + K_4) \varphi_3 - K_3 \varphi_4 - K_4 \varphi_5 &= 0 \\ -K_3 \varphi_3 + I_4 \ddot{\varphi}_4 + C_5 \dot{\varphi}_4 + (K_3 + K_5) \varphi_4 - C_5 \dot{\varphi}_6 - K_5 \varphi_6 &= M_4 \\ -K_4 \varphi_3 + I_5 \ddot{\varphi}_5 + C_6 \dot{\varphi}_5 + (K_4 + K_6) \varphi_5 - C_6 \dot{\varphi}_6 - K_6 \varphi_6 &= M_5 \\ -C_5 \dot{\varphi}_4 - K_5 \varphi_4 - C_6 \dot{\varphi}_5 - K_6 \varphi_5 + I_6 \ddot{\varphi}_6 + (C_5 + C_6) \dot{\varphi}_6 + (K_5 + K_6) \varphi_6 &= 0 \end{aligned} \right\} (3.7.2)$$

Presentando los coeficientes de inercia, de disipación y de rigidez; así como las coordenadas y los esfuerzos exteriores, en forma matricial, se tendrá que:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (C_0 + C_1) & (-C_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-C_1) & (C_1 + C_2) & (-C_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-C_2) & (C_2 + C_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_5) & 0 & (-C_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_6) & (-C_6) \\ 0 & 0 & 0 & (-C_5) & (-C_6) & (C_5 + C_6) \end{bmatrix};$$

$$[K] = \begin{bmatrix} (K_1) & (-K_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-K_1) & (K_1 + K_2) & (-K_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-K_2) & (K_2 + K_3 + K_4) & (-K_3) & (-K_4) & 0 \\ 0 & 0 & (-K_3) & (K_3 + K_5) & 0 & (-K_5) \\ 0 & 0 & (-K_4) & 0 & (K_4 + K_6) & (-K_6) \\ 0 & 0 & 0 & (-K_5) & (-K_6) & (K_5 + K_6) \end{bmatrix};$$

$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{Bmatrix} \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \\ M_4 \\ M_5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (3.7.2) se puede escribir entonces, en forma matricial compacta, como:

$$[I].\{\ddot{\varphi}\} + [C].\{\dot{\varphi}\} + [K].\{\varphi\} = \{M\} \quad (3.7.3)$$

En estos casos, resulta de gran utilidad el uso de la Transformada de Laplace(2013), que permite pasar, de los esfuerzos exteriores y de las coordenadas y sus derivadas en función del tiempo (t), a sus imágenes en el dominio de la variable compleja “s”, que son de más fácil manejo matemático. Las imágenes de las coordenadas angulares  $\varphi_i$  se deben representar como  $\varphi_i(s)$ ; pero por falta de espacio, en este caso, se representan sin especificar que son funciones de la variable compleja “s”. Así se obtendrá el siguiente sistema de ecuaciones, (Hartman, 1960):

$$\left. \begin{aligned} I_1 s^2 \varphi_1 + (C_0 + C_1)s\varphi_1 + K_1\varphi_1 - C_1s\varphi_2 - K_1\varphi_2 &= M_1(s) \\ -C_1s\varphi_1 - K_1\varphi_1 + I_2 s^2 \varphi_2 + (C_1 + C_2)s\varphi_2 + (K_1 + K_2)\varphi_2 - C_2s\varphi_3 - K_2\varphi_3 &= 0 \\ -C_2s\varphi_2 - K_2\varphi_2 + I_3 s^2 \varphi_3 + (C_2 + C_3)s\varphi_3 + (K_2 + K_3 + K_4)\varphi_3 - K_3\varphi_4 - K_4\varphi_5 &= 0 \\ -K_3\varphi_3 + I_4 s^2 \varphi_4 + C_5s\varphi_4 + (K_3 + K_5)\varphi_4 - C_5s\varphi_6 - K_5\varphi_6 &= M_4(s) \\ -K_4\varphi_3 + I_5 s^2 \varphi_5 + C_6s\varphi_5 + (K_4 + K_6)\varphi_5 - C_6s\varphi_6 - K_6\varphi_6 &= M_5(s) \\ -C_5s\varphi_4 - K_5\varphi_4 - C_6s\varphi_5 - K_6\varphi_5 + I_6 s^2 \varphi_6 + (C_5 + C_6)s\varphi_6 + (K_5 + K_6)\varphi_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7.4)$$

Agrupando los coeficientes de cada variable y ordenando según el subíndice de dicha variable, el sistema de ecuaciones (3.7.4) se puede escribir como:

$$\left. \begin{aligned} [I_1 s^2 + (C_0 + C_1)s + K_1]\varphi_1 - [C_1s + K_1]\varphi_2 &= M_1(s) \\ -[C_1s - K_1]\varphi_1 + [I_2 s^2 + (C_1 + C_2)s + (K_1 + K_2)]\varphi_2 - [C_2s - K_2]\varphi_3 &= 0 \\ -[C_2s - K_2]\varphi_2 + [I_3 s^2 + (C_2 + C_3)s + (K_2 + K_3 + K_4)]\varphi_3 - K_3\varphi_4 - K_4\varphi_5 &= 0 \\ -K_3\varphi_3 + [I_4 s^2 + C_5s + (K_3 + K_5)]\varphi_4 - [C_5s - K_5]\varphi_6 &= M_4(s) \\ -K_4\varphi_3 + [I_5 s^2 + C_6s + (K_4 + K_6)]\varphi_5 - [C_6s - K_6]\varphi_6 &= M_5(s) \\ -[C_5s - K_5]\varphi_4 - [C_6s - K_6]\varphi_5 + [I_6 s^2 + (C_5 + C_6)s + (K_5 + K_6)]\varphi_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7.5)$$

El sistema de ecuaciones (3.7.5) se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) & p_{23}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{32}(s) & p_{33}(s) & p_{34}(s) & p_{35}(s) & 0 \\ 0 & 0 & p_{43}(s) & p_{44}(s) & 0 & p_{46}(s) \\ 0 & 0 & p_{53}(s) & 0 & p_{55}(s) & p_{56}(s) \\ 0 & 0 & 0 & p_{64}(s) & p_{65}(s) & p_{66}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \\ \varphi_3(s) \\ \varphi_4(s) \\ \varphi_5(s) \\ \varphi_6(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1(s) \\ 0 \\ 0 \\ M_4(s) \\ M_5(s) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7.6)$$

La ecuación matricial (3.7.6) se puede escribir en forma compacta, como:

$$[p(s)].\{\varphi(s)\} = \{M(s)\} \tag{3.7.7}$$

A la matriz  $[p(s)]$  se le denomina matriz de los operadores propios del sistema.

En la ecuación matricial (3.7.6), los operadores propios del sistema  $p_{mn}(s)$  estarán dados por las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} p_{11}(s) &= [I_1s^2 + (C_0 + C_1)s + K_1] \\ p_{22}(s) &= [I_2s^2 + (C_1 + C_2)s + (K_1 + K_2)] \\ p_{33}(s) &= [I_3s^2 + (C_2 + C_3)s + (K_2 + K_3 + K_4)] \\ p_{44}(s) &= [I_4s^2 + C_5s + (K_3 + K_5)] \\ p_{55}(s) &= [I_5s^2 + C_6s + (K_4 + K_6)] \\ p_{66}(s) &= [I_6s^2 + (C_5 + C_6)s + (K_5 + K_6)] \\ p_{12}(s) &= p_{21}(s) = -[C_1s + K_1] \\ p_{23}(s) &= p_{32}(s) = -[C_2s - K_2] \\ p_{34}(s) &= p_{43}(s) = -K_3 \\ p_{35}(s) &= p_{53}(s) = -K_4 \\ p_{46}(s) &= p_{64}(s) = -[C_5s - K_5] \\ p_{56}(s) &= p_{65}(s) = -[C_6s - K_6] \end{aligned} \right\} \tag{3.7.8}$$

Como se verá posteriormente, la variable compleja “s” puede ser sustituida por la expresión compleja “iω”, con lo que se expresarán las funciones analizadas en el dominio de las frecuencias angulares.

### Frecuencias de resonancia.

Teniendo todos los coeficientes constantes (de inercia, de amortiguamiento y de rigidez) del modelo del sistema vibratorio, se pueden obtener las frecuencias de resonancia de dicho sistema. Para esto, se iguala el determinante de la matriz de los operadores propios del sistema a cero, como se presenta en la siguiente expresión:

$$Det[p(s)] = 0 \tag{3.7.9}$$

Al resolver el determinante, se obtiene la ecuación característica del sistema, de la cual se pueden obtener n pares de raíces  $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, \dots, s_{n1}, s_{n2}$ .

Para amortiguamiento inferior al crítico, que es el caso más frecuente, se obtendrán n pares de raíces complejas conjugadas, con una

parte real negativa, que informa acerca de la estabilidad del sistema, y una parte imaginaria, cuyo módulo es la frecuencia de resonancia. Realizar estos cálculos manualmente es prácticamente imposible, por lo que para obtener estos resultados debemos auxiliarnos de las técnicas de computación.

### Funciones de transferencia. Características de amplitud y frecuencia.

Resolviendo la ecuación (3.7.7) se obtiene:

$$\{\varphi(s)\} = [p(s)]^{-1} \cdot \{M(s)\} \quad (3.7.10)$$

En la expresión (3.7.10), la matriz  $[p(s)]^{-1}$  se denomina matriz de las funciones de transferencia ( $[W(s)]$ ). Como puede observarse, la función de transferencia constituye la principal característica de un sistema vibratorio, con la ayuda de la cual se determina la respuesta de este para cada acción excitadora a cualquier frecuencia. Además, para cada frecuencia fija la función de transferencia actúa como un factor constante.

Si se desarrolla la ecuación matricial (3.7.10), teniendo en cuenta el concepto de funciones de transferencia, se obtendrá:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \\ \varphi_3(s) \\ \varphi_4(s) \\ \varphi_5(s) \\ \varphi_6(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{13}(s) & W_{14}(s) & W_{15}(s) & W_{16}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & W_{23}(s) & W_{24}(s) & W_{25}(s) & W_{26}(s) \\ W_{31}(s) & W_{32}(s) & W_{33}(s) & W_{34}(s) & W_{35}(s) & W_{36}(s) \\ W_{41}(s) & W_{42}(s) & W_{43}(s) & W_{44}(s) & W_{45}(s) & W_{46}(s) \\ W_{51}(s) & W_{52}(s) & W_{53}(s) & W_{54}(s) & W_{55}(s) & W_{56}(s) \\ W_{61}(s) & W_{62}(s) & W_{63}(s) & W_{64}(s) & W_{65}(s) & W_{66}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_1(s) \\ 0 \\ 0 \\ M_4(s) \\ M_5(s) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7.11)$$

La reacción del sistema, en forma de ángulo de rotación del  $m$ -ésimo momento de inercia, para el  $n$ -ésimo momento de fuerza excitador estará dada por:

$$\varphi_{mm}(s) = W_{mm}(s) \cdot M_n(s) \quad (3.7.12)$$

El comportamiento de las funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia angular puede ser representado gráficamente, obteniendo así curvas que se denominan características de amplitud y frecuencia, en las que se pueden notar tantos máximos (picos de resonancia), como grados de libertad tiene el sistema. Para esto se debe sustituir la variable compleja “ $s$ ” por la expresión “ $i\omega$ ”, con lo que se expresarán

las funciones analizadas en el dominio de las frecuencias angulares. Al realizar dicha sustitución, se obtendrá la función de transferencia en forma de un número complejo, por lo que se debe obtener su módulo para poder llevarla a un gráfico bidimensional ( $W_{mn}, \omega$ ).

### Salida en forma de momentos torsores.

Las funciones de transferencia no sólo permiten obtener el comportamiento de las amplitudes de las coordenadas generalizadas en función de la frecuencia angular de excitación ( $\omega$ ). Con la ayuda de dichas funciones, se pueden obtener otras variables de salida. Supóngase que se necesita obtener el comportamiento del momento torsor  $M_{mn}(s)$ , que carga el elemento elástico del sistema que une los momentos de inercia  $I_m$  e  $I_{m+1}$ , como respuesta al momento de fuerza excitador  $M_n(s)$ . En este caso se puede plantear que:

$$M_{mn}(s) = K_m \cdot [\varphi_{mn}(s) - \varphi_{m+1n}(s)] \quad (3.7.13)$$

Donde  $K_m$  es el coeficiente de rigidez del elemento elástico correspondiente. En las máquinas, estos elementos elásticos no son más que árboles, ejes, transmisiones por correa y por cadena, etc.

Teniendo en cuenta la expresión (3.7.12), la expresión (3.7.13) toma la forma:

$$M_{mn}(s) = K_m \cdot [W_{mn}(s) - W_{m+1n}(s)] \cdot M_n(s) \quad (3.7.14)$$

De aquí se deduce que la matriz de las funciones de transferencia, para la respuesta en forma de momentos torsores, consta de los siguientes elementos:

$$W_{mn}^M(s) = K_m \cdot [W_{mn}(s) - W_{m+1n}(s)] \quad (3.7.15)$$

Al igual que en los casos anteriores, estas funciones de transferencia, en el dominio de la frecuencia angular, pueden ser representadas gráficamente, obteniendo así las características de amplitud y frecuencia para salidas en forma de momentos torsores. Aquí también se pueden notar tantos máximos (picos de resonancia), como grados de libertad tiene el sistema. Para esto se debe sustituir la variable compleja “s” por la expresión “i $\omega$ ”, para expresar las funciones analizadas en el dominio de las frecuencias angulares. Al realizar dicha sustitución, al

igual que en el caso anterior, se obtendrá la función de transferencia en forma de un número complejo, por lo que se debe obtener su módulo para poder llevarla a un gráfico bidimensional ( $W_{mn}^M, \omega$ ).

Fig. 49. Ejemplos de características de amplitud y frecuencia.

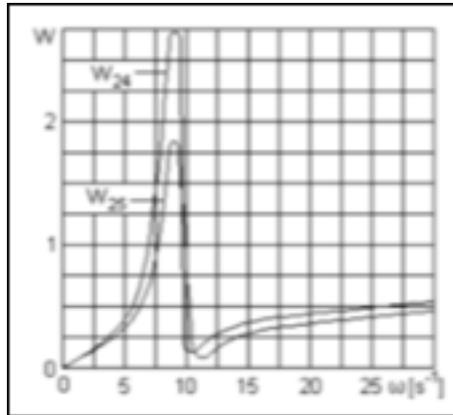


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

En la figura 49. se presentan dos ejemplos de dichas características, para las bajas frecuencias, por lo que sólo se nota el pico de resonancia, correspondiente a la frecuencia fundamental (frecuencia de resonancia más baja).

### Transferencia de las Características Estadísticas.

Ya que las funciones de transferencia transforman todas las componentes de diferentes frecuencias de las fuerzas o momentos de fuerzas excitadores, entonces estos factores pueden utilizarse para obtener las características estadísticas de las respuestas del sistema (por ejemplo, en forma de momentos torsores en los elementos elásticos), si se conocen las características estadísticas de dichos esfuerzos excitadores.

Una de las características estadísticas de gran importancia, en el estudio de los sistemas vibratorios, es la densidad espectral de los esfuerzos que surgen en los elementos de dichos sistemas. Esta función nos proporciona la distribución de las amplitudes de un determinado parámetro en función de las frecuencias angulares, (Beards, 1995).

Si se cuenta con la densidad espectral de las fuerzas o momentos de fuerzas excitadores, aplicados en una de las masas o momentos de inercia del sistema, entonces se pueden obtener las densidades espectrales de los esfuerzos (fuerzas o momentos de fuerzas), que estos agentes ex-

citadores provocan en los elementos de dicho sistema. En el ejemplo que estamos desarrollando basta con utilizar la siguiente expresión:

$$[E_{mn}(i\omega)] = [W_{mn}^M(-i\omega)] \cdot [E_n(i\omega)] \cdot [W_{mn}^M(i\omega)]^T \quad (3.7.16)$$

Donde:

$[E_{mn}(i\omega)]$  matriz de las densidades espectrales de los esfuerzos en los elementos.

$[W_{mn}^M(-i\omega)]$ : matriz de las funciones de transferencia en forma de momentos torsores.

$[E_n(i\omega)]$ : matriz de las densidades espectrales de los momentos excitadores aplicados.

$[W_{mn}^M(i\omega)]^T$ : transpuesta de la matriz de las funciones de transferencia.

A partir de la densidad espectral se puede obtener la dispersión, que es también una importante característica estadística para describir el comportamiento de una variable determinada. La dispersión se obtiene por medio de la expresión, (Erchart, 1972):

$$D_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty E_{mm}(\omega) d\omega \quad (3.7.17)$$

Donde:  $D_m$  : dispersión del momento torsor en el elemento número "m".

$E_{mm}(\omega)$ : elemento correspondiente de la diagonal de la matriz  $[E_{mm}(i\omega)]$ .

Teniendo la densidad espectral y la dispersión de los esfuerzos que actúan en los elementos, se pueden hacer importantes valoraciones de resistencia mecánica de estos elementos. En particular se puede valorar la resistencia a la fatiga, que es la principal causa de los fallos, que surgen durante la explotación de los elementos de las máquinas.

## 8. Análisis modal

Los sistemas vibratorios complejos usualmente consisten en conjuntos de componentes, que poseen características distribuidas de almacenamiento y disipación de energía. En estos sistemas, las propiedades inerciales, de rigidez y de amortiguamiento están distribuidas de forma continua en todo su volumen. Un sistema vibratorio distribuido

(continuo) puede ser aproximado (modelado) por medio de un conjunto apropiado de masas concentradas, interconectadas por medio de elementos elásticos y amortiguadores discretos. Tal modelo es denominado como “un sistema con parámetros concentrados” o “modelo discreto”. Frecuentemente, en estos casos, se utilizan elementos elásticos y amortiguadores lineales, lo que acarrea una ventaja inmediata, consistente en que las ecuaciones, que describen el movimiento vibratorio del sistema, se convierten en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, que pueden ser resueltas por los métodos tradicionales conocidos. Los métodos tradicionales, aplicados a sistemas de muchos grados de libertad, acarrearán un gran volumen de trabajo, ya que habrá que resolver complejos sistemas de ecuaciones diferenciales. Una forma de disminuir el volumen de trabajo consiste en utilizar el “análisis modal”. Este método está basado en el hecho de que estos sistemas idealizados (modelos) poseen variaciones periódicas “preferidas” de su configuración geométrica, denominadas “modos normales de vibración” o “modos naturales de vibración”, con sus respectivas “frecuencias naturales o modales”. En el caso general, una determinada respuesta del sistema puede ser interpretada como una combinación lineal de las vibraciones modales, (Newland, 1993).

El análisis modal es una importante herramienta en el estudio, diagnóstico, diseño y control de las vibraciones. En muchos sistemas, el funcionamiento defectuoso o los fallos pueden ser atribuidos a la excitación de alguno de sus modos normales (naturales) de vibración, por alguna fuerza variable aplicada. Por medio del análisis modal, es posible establecer la extensión (tamaño) y localización de las causas de las vibraciones severas en un sistema, por lo que es una importante herramienta de diagnóstico. Por esa misma razón, el análisis modal es también un método útil para la predicción de futuros fallos u otros problemas mecánicos.

Las modificaciones estructurales en el diseño de sistemas mecánicos, productos del análisis de los fenómenos vibratorios, están basados en el análisis modal, realizados en los modelos, que permite determinar que grados de libertad de un sistema mecánico son más adecuados para la adición o sustracción de elementos inerciales y elásticos, según sea la necesidad. De esta manera, puede ser establecido un método sistemático y conveniente, para hacer modificaciones estructurales, que traigan como consecuencia la eliminación de un determinado problema vibratorio, o para evaluar los efectos de una modificación particular.

Un sistema complejo puede ser dividido en varios subsistemas, que pueden ser analizados independientemente por medio de las técnicas del análisis modal, y así determinar las características dinámicas del sistema completo, a partir de la información al respecto de los subsistemas, que lo componen. Este enfoque posee varias ventajas:

- Los subsistemas pueden ser desarrollados por diferentes métodos: experimentación, método de los elementos finitos (FEM), u otras técnicas de modelación, y después ser ensamblados, para formar el modelo del sistema completo.
- El análisis de un sistema de un alto orden (con muchos grados de libertad) puede ser reducido al análisis de varios subsistemas de bajo orden (con pocos grados de libertad).
- El diseño de un sistema complejo puede ser desarrollado diseñando y analizando sus subsistemas separadamente.

Estas posibilidades de modificaciones estructurales, que posee el método del análisis modal, lo convierten en una herramienta útil en el proceso de desarrollo del diseño de los sistemas mecánicos. Igualmente, el control modal, una técnica que emplea el análisis modal, es muy efectivo en el control de las vibraciones de un sistema mecánico complejo, (Silva, 2000).

### **Acoplamiento y desacoplamiento**

En los sistemas de ecuaciones diferenciales (3.2.1 y 3.7.1), que rigen las vibraciones de sistemas de dos y más grados de libertad, se observa que en cada ecuación se mezclan varias variables (coordenadas), de las que describen el movimiento de las masas (o momentos de inercia), lo que hace imposible la solución de cada ecuación por separado, como si describiera el movimiento vibratorio de un sistema de un grado de libertad. Esta imposibilidad refleja la presencia de un fenómeno denominado acoplamiento. Este fenómeno se refleja también en las matrices de inercia, de amortiguamiento y de rigidez, presentándose términos fuera de la diagonal principal de alguna de ellas, como se nota en las siguientes matrices, obtenidas a partir del sistema de ecuaciones diferenciales (3.7.1), (Silva, 2000):

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (C_0 + C_1) & (-C_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-C_1) & (C_1 + C_2) & (-C_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-C_2) & (C_2 + C_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_5) & 0 & (-C_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_6) & (-C_6) \\ 0 & 0 & 0 & (-C_5) & (-C_6) & (C_5 + C_6) \end{bmatrix};$$

$$[K] = \begin{bmatrix} (K_1) & (-K_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-K_1) & (K_1 + K_2) & (-K_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-K_2) & (K_2 + K_3 + K_4) & (-K_3) & (-K_4) & 0 \\ 0 & 0 & (-K_3) & (K_3 + K_5) & 0 & (-K_5) \\ 0 & 0 & (-K_4) & 0 & (K_4 + K_6) & (-K_6) \\ 0 & 0 & 0 & (-K_5) & (-K_6) & (K_5 + K_6) \end{bmatrix};$$

En este ejemplo, la matriz de inercia  $[I]$  sólo contiene términos en la diagonal principal, por lo que no se presenta acoplamiento dinámico, como se denominaría en este caso. La matriz de rigidez  $[K]$  presenta términos fuera de la diagonal principal, lo que denota la presencia de acoplamiento estático, como así se denomina. La matriz de amortiguamiento  $[C]$  también presenta términos fuera de la diagonal principal, lo que denota la presencia de acoplamiento disipativo. La presencia de uno o más de los posibles acoplamientos depende de la elección del conjunto de coordenadas, para describir las vibraciones del sistema. Es posible elegir un conjunto de coordenadas principales, para expresar las ecuaciones del movimiento vibratorio en la forma no acoplada o desacoplada, (Pain, 2005).

Como vimos anteriormente, el acoplamiento dificulta el análisis del sistema, ya que no permite trabajar con cada ecuación diferencial independientemente, como en un sistema de un grado de libertad. Por eso, lograr el desacoplamiento es sumamente ventajoso, ya que permite analizar las vibraciones para cada modo normal, resolviendo una sola ecuación diferencial, como si se tratara de un sistema de un grado de libertad. En esto último se basa el análisis modal, para proporcionar resultados importantes y fiables, con un volumen de trabajo mínimo, (Pain, 2005).

Las ecuaciones de movimiento de un sistema con n grados de libertad pueden ser desacopladas, siempre que se conozcan previamente los modos normales de vibración de dicho sistema. Cuando se arreglan los n modos normales (o vectores propios) en una matriz cuadrada, con cada modo normal representado por una columna, se denomina matriz modal, y se simboliza con la letra "P". Así, la matriz modal, para un sistema con tres grados de libertad, por ejemplo, puede tomar la forma:

$$P = \begin{bmatrix} \begin{matrix} (X_1)_1 \\ (X_2)_1 \\ (X_3)_1 \end{matrix} & \begin{matrix} (X_1)_2 \\ (X_2)_2 \\ (X_3)_2 \end{matrix} & \begin{matrix} (X_1)_3 \\ (X_2)_3 \\ (X_3)_3 \end{matrix} \end{bmatrix} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3] \quad (3.8.1)$$

La matriz modal hace posible inducir todas las relaciones de ortogonalidad en una ecuación. Para esta operación se necesita también la matriz transpuesta de la matriz modal (P), con cada fila representando un modo normal, como se muestra a continuación:

$$P^T = \begin{bmatrix} (X_1 \quad X_2 \quad X_3)_1 \\ (X_1 \quad X_2 \quad X_3)_2 \\ (X_1 \quad X_2 \quad X_3)_3 \end{bmatrix} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]^T \quad (3.8.2)$$

Si M es la matriz de inercia (o matriz masa), y K, la matriz de rigidez, y se forman los productos  $P^T M P$  o  $P^T K P$ , los resultados serán matrices diagonales, puesto que los términos fuera de la diagonal expresan las relaciones de ortogonalidad, que son nulas, (Lindley y Paine, 1965).

Como ejemplo, se toma un sistema de dos grados de libertad. Realizando la operación indicada con la matriz modal, se tendrá que:

$$\begin{aligned} P^T M P &= [X_1 \quad X_2]^T [M] [X_1 \quad X_2] \Rightarrow P^T M P = \begin{bmatrix} X_1^T M X_1 & X_1^T M X_2 \\ X_2^T M X_1 & X_2^T M X_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P^T M P = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

En la expresión (3.8.3), los términos fuera de la diagonal son nulos por razones de ortogonalidad, y los términos de la diagonal constituyen la masa generalizada  $M_i$ .

Es evidente, que una operación similar se puede aplicar a la matriz de rigidez K, resultando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 P^T K P &= [X_1 \quad X_2]^T [K] [X_1 \quad X_2] \Rightarrow P^T K P = \begin{bmatrix} X_1^T K X_1 & X_1^T K X_2 \\ X_2^T K X_1 & X_2^T K X_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P^T K P = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.8.4}$$

Y en este caso, los términos de la diagonal constituyen la rigidez generalizada  $K_i$ .

Si cada una de las columnas de la matriz modal ( $P$ ) se divide por la raíz cuadrada de la masa generalizada ( $M_i$ ), la nueva matriz obtenida se denomina matriz modal reducida. Se nota que la diagonalización de la matriz de masa, por medio de la matriz modal reducida, da como resultado la matriz unitaria  $[I]$ , como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\tilde{P}^T M \tilde{P} = [I] \tag{3.8.5}$$

Los valores propios (frecuencias naturales elevadas al cuadrado) se obtendrían de multiplicar la matriz inversa de la matriz de masa por la matriz de rigidez, como se muestra en la siguiente expresión:

$$M_i^{-1} K_i = \lambda_i \tag{3.8.6}$$

Entonces, la matriz de rigidez  $[K]$ , diagonalizada por medio de la matriz modal reducida  $[\tilde{P}]$ , se convierte en la matriz diagonal de los valores propios (frecuencias naturales elevadas al cuadrado), que sigue:

$$\tilde{P}^T M \tilde{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \Lambda \tag{3.8.7}$$

Como se conoce, cada frecuencia natural del sistema será la raíz cuadrada positiva del valor propio correspondiente, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \tag{3.8.8}$$

Ejemplo: En la figura 50, se presenta un sistema de dos grados de libertad, en el que, para más simplicidad, las dos masas son iguales, así como los tres elementos elásticos, es decir, que es simétrico. Las ecuaciones diferenciales del movimiento vibratorio serán:

Fig. 50. Sistema de dos grados de libertad

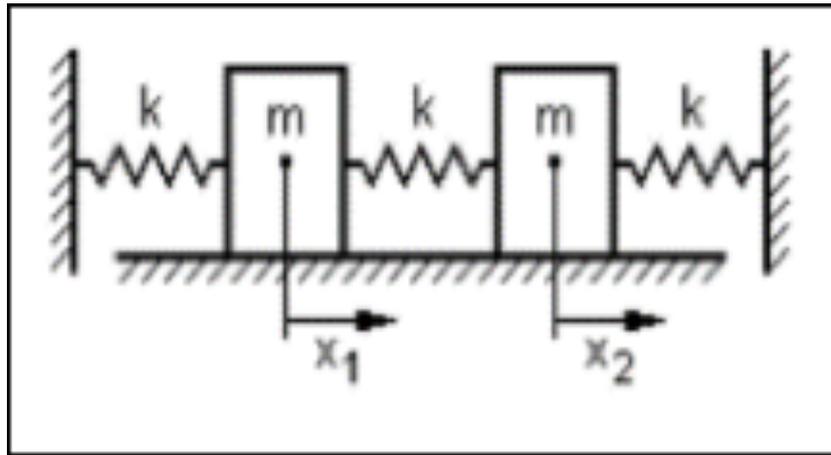


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + (k + k)x_1 - kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k + k)x_2 - kx_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8.9)$$

La mezcla de las dos variables ( $x_1$  y  $x_2$ ), en cada una de las ecuaciones, demuestra la presencia de acoplamiento, en particular, estático. El sistema (3.8.9), para colocar las variables ( $x$ ) en orden según su subíndice, se puede organizar de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0 \\ -kx_1 + m\ddot{x}_2 + 2kx_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8.10)$$

La solución del sistema (3.8.10) ya fue analizado en el epígrafe 3.2. En el presente análisis, se utiliza aquella solución, con las necesarias adaptaciones. Teniendo en cuenta las expresiones (141) y (143), las frecuencias naturales o valores propios se obtendrán de:

$$\lambda_1 = \omega_{n1}^2 = \frac{k}{m} \quad \lambda_2 = \omega_{n2}^2 = 3\frac{k}{m} \quad (3.8.11)$$

Y las relaciones modales, se obtienen de la expresión (145), adaptada para este caso. Para la primera frecuencia natural:

$$r(\omega_{n1}) = \frac{X_2}{X_1} = \frac{-m\omega_{n1}^2 + 2k}{k} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{-m\omega_{n1}^2}{k} + \frac{2k}{k}$$

De donde:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{-m}{k} \cdot \left(\frac{k}{m}\right) + \frac{2k}{k} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 1$$

Y para la segunda:

$$r(\omega_{n2}) = \frac{X_2}{X_1} = \frac{-m\omega_{n2}^2 + 2k}{k} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{-m\omega_{n2}^2}{k} + \frac{2k}{k}$$

De donde:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{-m}{k} \cdot \left(3\frac{k}{m}\right) + \frac{2k}{k} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = -1$$

Los valores de las relaciones modales indican que el primer modo normal de vibración (para la frecuencia natural más baja) se produce con iguales amplitudes y con desplazamientos de las masas en el mismo sentido (en fase); mientras el segundo modo (para la frecuencia natural más alta) se produce con iguales amplitudes, pero con movimientos en sentidos contrarios (en contrafase). La igualdad de las amplitudes se debe a la simetría del sistema. Las relaciones anteriores se pueden expresar, teniendo en cuenta la notación matricial (para los vectores propios), de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_2} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.8.12)$$

En forma matricial, el sistema de ecuaciones (3.8.10) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8.13)$$

La masa generalizada para ambos modos es “2m”; la matriz modal (que reúne las expresiones (3.8.12) y la matriz modal reducida son:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8.14)$$

Para desacoplar las ecuaciones originales (3.8.10), se utilizará, en la transformación, la matriz modal reducida:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (3.8.15)$$

Y premultiplicando por la matriz modal reducida transpuesta, se obtiene:

$$\tilde{P}^T M \tilde{P} \ddot{Y} + \tilde{P}^T K \tilde{P} Y = 0 \quad (3.8.16)$$

La expresión (3.8.16), en forma desplegada, será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.8.17)$$

Así la ecuación (3.8.13) ha sido transformada en la ecuación (3.8.17), en la que no se presenta acoplamiento, gracias a la transformación de coordenadas de la ecuación (3.8.15). Las coordenadas  $y_1$  y  $y_2$  son las coordenadas normales o principales. Las ecuaciones (3.8.17), en términos de coordenadas normales, son similares a las de un sistema de un grado de libertad y pueden ser escritas como:

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0 \quad (3.8.18)$$

Las soluciones, para ecuaciones similares a la (3.8.18), han sido analizadas anteriormente en este curso. Una forma de dicha solución pudiera ser:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0)\cos\omega_{n1}t + \frac{1}{\omega_1}\dot{y}_1(0)\sen\omega_{n1}t \\ y_2(t) &= y_2(0)\cos\omega_{n2}t + \frac{1}{\omega_2}\dot{y}_2(0)\sen\omega_{n2}t \end{aligned} \right\} \quad (3.8.19)$$

La solución del sistema original de dos grados de libertad (en las ordenadas originales), teniendo en cuenta las ecuaciones (3.8.15), estará dado por:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}} [y_1(t) - y_2(t)] \\ x_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}} [y_1(t) + y_2(t)] \end{aligned} \right\} \quad (3.8.20)$$

El procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas (acopladas), que describen el movimiento vibratorio de un sistema de varios grados de libertad, transformándolas en un conjunto de ecuaciones independientes, usando la matriz modal como matriz de transformación, es denominado comúnmente análisis modal.

## 9. Ejemplo: Modelo dinámico de una zaranda de clasificación de minerales

### Introducción.

Las zarandas con vibraciones lineales son equipos ampliamente utilizados en la clasificación de minerales, durante el procesamiento de estos. La frecuencia y la amplitud de las vibraciones de estos equipos constituyen parámetros de vital importancia, para obtener un buen rendimiento y una eficiencia y calidad adecuadas durante el proceso de clasificación. Estos parámetros, además, revisten especial interés para la determinación de las cargas dinámicas que actúan sobre el equipo y, por tanto, para el cálculo de elementos importantes, como los elementos elásticos, cojinetes, elementos estructurales, etc., y para realizar los pronósticos de fiabilidad de dichos elementos. Estos equipos generalmente se diseñan y fabrican en serie por las casas productoras, con rangos de variación de la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones relativamente discretos, entre series consecutivas, y en algunos casos, con posibilidades de regulación de dichos parámetros. En ambos casos no resulta difícil regular o modificar la amplitud y la frecuencia de las vibraciones y si muy necesario, teniendo en cuenta las grandes diferencias que experimentan los procesos de clasificación de minerales, fundamentalmente en cuanto a:

- Tamaño y forma de los fragmentos del mineral.
- Exigencias de calidad del producto obtenido.
- Peso volumétrico del material.
- Humedad, etc.

No obstante, la modificación de estos parámetros, sin realizar un estudio previo del comportamiento dinámico del equipo, puede ser inútil y traer aparejados problemas de funcionamiento anormal del mismo, incluyendo el peligro de sufrir los efectos de la resonancia. Por tanto, resulta obvio que el conocimiento de las herramientas básicas para la modelación de dicho comportamiento reviste una vital importancia, no solo para el diseño de estos equipos, sino también para su adecuada explotación, mantenimiento y mejoramiento u optimización.

En la figura 51. se presenta un esquema de la zaranda de clasificación de minerales, en el que se añaden los parámetros fundamentales, de interés en este caso.

Fig. 51. Esquema de la zaranda.

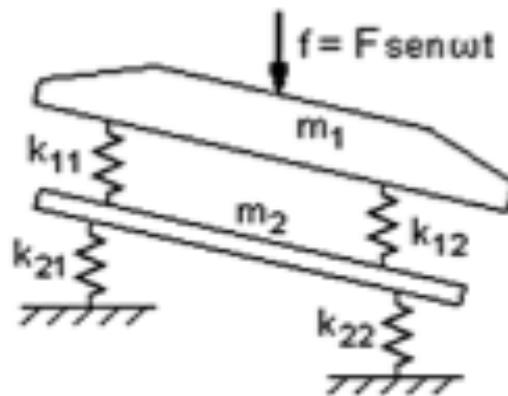


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

La obtención del modelo dinámico de la zaranda con oscilaciones lineales, destinada a la clasificación de minerales, se realiza para valorar la posibilidad de hacer experimentos con diferentes combinaciones de amplitud y frecuencia de excitación, sin que aparezca dependencia de la primera con respecto a la segunda. Inicialmente se piensa que la variación de la frecuencia de trabajo implica una variación de la amplitud, ya que varía el módulo de la fuerza de inercia de las masas desbalanceadas, que constituye la fuerza excitadora de las vibraciones, (Migulin y Medvedev, 2002).

Por medio de los análisis preliminares realizados, se logra definir la siguiente situación:

## Problema

Es necesario hacer experimentos con diferentes combinaciones de amplitud y frecuencia de excitación, sin que aparezca dependencia entre estos dos parámetros, teniendo en cuenta que:

- Las vibraciones se excitarán por medio de masas rotatorias desbalanceadas, cuya velocidad angular y excentricidad se podrán variar.
- Las variaciones de la velocidad angular y de la excentricidad deben mantener estos parámetros dentro de los regímenes de trabajo admisibles.

## Hipótesis

Dentro del rango de posibles variaciones de la velocidad angular, habrá determinados intervalos, en los que la amplitud será independiente de dicha velocidad.

## Objetivo

- Obtener el rango de variación de la frecuencia de excitación, en el que la amplitud no dependa de dicha frecuencia.

## Modelo dinámico vibratorio de la zaranda

La obtención de modelos está siempre acompañada de determinadas hipótesis simplificadoras, que permiten el trabajo con un reducido número de variables, consideradas como las decisivas en el proceso estudiado. En este caso, tales hipótesis son:

- Los elementos elásticos se consideran con un comportamiento lineal.
- Se desprecian las masas de los elementos elásticos, por ser muy inferiores a las masas de los demás elementos del sistema.
- Se desprecian los coeficientes de amortiguamiento de los resortes.
- Se reducen los elementos elásticos, según la disposición en que se encuentren (en serie o paralelo).
- Solo se considera de importancia el movimiento del equipo en la dirección vertical (movimiento de trabajo).

Teniendo en cuenta las hipótesis simplificadoras, anteriormente citadas, y la simetría de la disposición de los elementos elásticos y las masas, el esquema de la figura 3.9.1 se puede sustituir por el modelo dinámico, que se presenta en la figura 52 (Guzmán, 1978).

Fig. 51. Modelo dinámico de la zaranda.

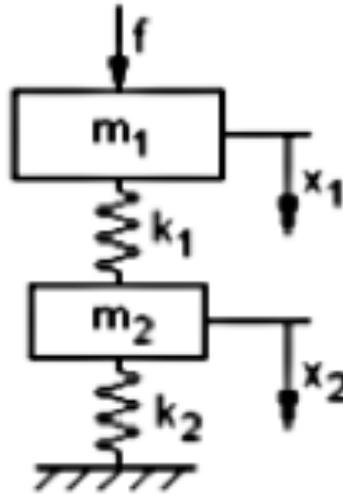


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

En las figuras 51 y 52:

$m_1$ : masa de la criba vibratoria.

$m_2$ : masa del semibastidor.

$k_1$ : Rigidez equivalente de los resortes helicoidales.

$k_2$ : Rigidez equivalente de los elementos elásticos ubicados entre el semibastidor y el chasis.

$f$ : Fuerza excitadora de las vibraciones forzadas de la criba vibratoria.

### Fuerza excitadora.

En el caso de las zarandas auto equilibradas, objeto de estudio, la fuerza excitadora de las vibraciones será una fuerza armónica, proporcionada por dos masas rotatorias desbalanceadas, cuya posición relativa puede ser variada. El módulo de dicha fuerza varía, según la posición recíproca de las masas rotatorias desbalanceadas, desde cero, cuando las masas desbalanceadas están a 180 grados, hasta un valor máximo, cuando las masas desbalanceadas coinciden en la misma posición, (Seto, 2004).

En la figura 53, se muestran las masas rotatorias desbalanceadas y las fuerzas de inercia, que surgen en estas durante la rotación. En dicha figura, se presenta un esquema simple del sistema, sin tener en cuenta los detalles constructivos. Se debe cumplir que las masas rotatorias desbalanceadas roten a la misma velocidad angular, manteniendo su disposición relativa.

Fig. 53. Fuerzas de inercia de las masas desbalanceadas.

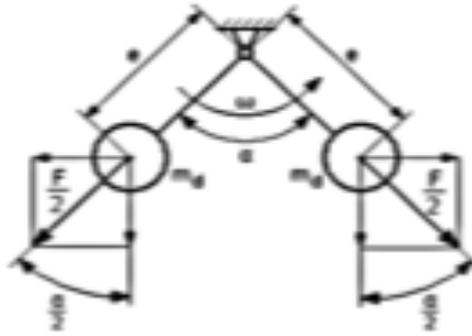


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

El módulo de la fuerza excitadora ( $F$ ), para una posición determinada de las masas rotatorias desbalanceadas, será la suma de las componentes de las fuerzas de inercia, que son paralelas a la bisectriz del ángulo  $\alpha$ , ya que las componentes perpendiculares se anulan en todo momento. Por tanto, el módulo de la fuerza excitadora estará dado por la siguiente expresión:

$$F = 2 \cdot m_d \cdot \omega^2 \cdot e \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

Siendo:

$m_d$  : masa de cada masa desbalanceada.

$\omega$  : frecuencia de rotación.

$e$  : excentricidad del contrapeso.

$\alpha$  : ángulo entre los radios de las masas.

Si se desea variar el módulo de la fuerza excitadora, manteniendo la velocidad angular constante, es necesario variar el ángulo ( $\alpha$ ), que determina la disposición relativa de las masas rotatorias desbalanceadas. Mientras menor sea dicho ángulo, mayor será la suma de las componentes de las fuerzas de inercia, paralelas a su bisectriz.

Como se expresó anteriormente, las masas desbalanceadas rotan, manteniéndose unidas rígidamente en todo momento, por lo que la fuerza excitadora ( $F$ ) rotará también, manifestándose como dos componentes armónicas, desfasadas 90 grados, que estarán dadas por las expresiones:

$$f_h = F \cdot \cos \omega t \quad y \quad f_v = F \cdot \sen \omega t$$

Ambas componentes excitan vibraciones; pero se trabaja sólo con aquella que produce el movimiento de trabajo, que es en la dirección vertical. Para simplificar la notación la simbolizaremos con la letra “f”, sin subíndice. La componente horizontal no se toma en cuenta, ya que las vibraciones en esa dirección no son objeto de estudio en este caso.

### Rigidez de los elementos elásticos.

La rigidez de cada resorte helicoidal se calcula según la fórmula:

$$k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot i}$$

Siendo:

d : diámetro del alambre del resorte.

D : diámetro exterior del resorte.

G : módulo de elasticidad transversal (para el acero,  $G = 7,9 \cdot 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>).

i : número de espiras del resorte.

Los coeficientes de rigidez de los elementos de goma ( $k_2$ ) se determinan experimentalmente o a partir de los datos ofrecidos por el fabricante de los mismos.

El coeficiente de rigidez equivalente de los elementos elásticos, que son iguales y se encuentran en paralelo, se calcula como la suma de los coeficientes de rigidez de los mismos. Teniendo en cuenta la figura 51, se tendrá que:

$$k_1 = k_{11} + k_{12} + k_{13} + k_{14} = 4k_{11}$$

$$k_2 = k_{21} + k_{22} + k_{23} + k_{24} = 4k_{21}$$

Los resultados numéricos, que se presentarán más adelante, se obtienen a partir de los siguientes datos:

- Masa de la criba vibratoria: - - - - -  $m_1 = 2300 \text{ kg}$
- Masa del semibastidor: - - - - -  $m_2 = 204 \text{ kg}$
- Coeficiente de rigidez de los resortes: - - -  $k_{11} = 47920,4 \text{ N/m}$
- Coeficiente de rigidez de los soportes de goma: -  $k_{21} = 571428,57 \text{ N/m}$
- Masa de cada masa rotatoria: - - - - -  $m_d = 108,17 \text{ kg}$
- Excentricidad de los contrapesos: - - - - -  $e = 0.048 \text{ m}$
- Ángulo entre los contrapesos: - - - - -  $\alpha = 30 \text{ grados}$
- Velocidad angular de trabajo: - - - - -  $n = 700 \text{ rpm.}$

Datos: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### Ecuaciones diferenciales del movimiento vibratorio del sistema.

Tomando como base el modelo dinámico, las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema serán:

$$m\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_1x_2 = F; \quad m\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k_1(x_2 - x_1) = 0 \quad (3.9.1)$$

### Análisis de las vibraciones libres.

Según Para el análisis de las vibraciones libres, se utiliza el sistema de ecuaciones diferenciales (3.9.1), sin considerar la fuerza excitadora, (Lindley y Paine, 1965):

$$m\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = F; \quad m\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k_1(x_2 - x_1) = 0 \quad (3.9.2)$$

Proponiendo las soluciones de ambas ecuaciones en la forma:

$$x_1 = a_1 \text{ sen}(\omega t + \varphi); \quad x_2 = a_2 \text{ sen}(\omega t + \varphi)$$

Las primeras derivadas (velocidades) serán:

$$\dot{x}_1 = a_1 \omega \text{ cos}(\omega t + \varphi); \quad \dot{x}_2 = a_2 \omega \text{ cos}(\omega t + \varphi)$$

Y las segundas derivadas (aceleraciones) serán:

$$\ddot{x}_1 = -a_1 \omega^2 \text{ sen}(\omega t + \varphi); \quad \ddot{x}_2 = -a_2 \omega^2 \text{ sen}(\omega t + \varphi)$$

Sustituyendo los desplazamientos y sus derivadas en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.9.2), se tendrá, (Newland, 1993):

$$-m_1 a_1 \omega \sin(\omega t + \varphi) + k_1 a_1 \sin(\omega t + \varphi) - k_1 a_2 \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$-m_2 a_2 \omega \sin(\omega t + \varphi) + k_2 a_2 \sin(\omega t + \varphi) + k_1 (a_2 \sin(\omega t + \varphi) - a_1 \sin(\omega t + \varphi)) = 0$$

Como la función seno sólo es cero para determinados valores del argumento, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-m_1 a_1 \omega + k_1 a_1 - k_1 a_2 = 0; \quad -m_2 a_2 \omega + k_2 a_2 + k_1 a_2 - k_1 a_1 = 0$$

Agrupando los coeficientes según las amplitudes y ordenando, se obtiene:

$$(k_1 - m_1 \omega^2) a_1 - k_1 a_2 = 0; \quad -k_1 a_1 + (k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) a_2 = 0$$

El sistema de ecuaciones (3.9.3) se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} (k_1 - m_1 \omega^2) & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = 0$$

La anulacion anterior sólo es posible, si el determinante de los coeficientes del sistema es nulo, por tanto:

$$(k_1 - m_1 \omega^2)(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) - k_1^2 = 0$$

La anulacion anterior supone una ecuación de segundo grado en la frecuencia angular al cuadrado ( $\omega^2$ ), es decir, bicuadrada en, cuyas raíces positivas son las llamadas frecuencias naturales del sistema (frecuencias propias o autofrecuencias), (Mobley, 1999).

Dividiendo y multiplicando la expresión anterior por ( $m_1 \cdot m_2$ ) y cambiando el signo de los dos factores del primer término:

$$m_1 * m_2 \left[ \left( \omega^2 - \frac{k_1}{m_1} \right) \left( \omega^2 - \frac{k_1 + k_2}{m_2} \right) - \frac{k_1^2}{m_1 \cdot m_2} \right] = 0$$

Teniendo en cuenta que el producto de las masas no puede ser cero, e introduciendo los siguientes valores, que dependen sólo de las características elásticas y másicas del sistema:

$$\omega_a^2 = \frac{k_1}{m_1}; \quad \omega_b^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_2}; \quad \omega_c^2 = \frac{k_1}{\sqrt{m_1 \cdot m_2}}; \quad \omega_d^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

Donde:

$\omega_a$ : Frecuencia natural del sistema de un grado de libertad, al fijar la masa 2.

$\omega_b$ : Frecuencia natural del sistema de un grado de libertad, al fijar la masa 1.

$\omega_c$ : Frecuencia natural del sistema, que se obtiene al liberar la masa 2 del resorte 2.

$\omega_d$ : Frecuencia natural del sistema parcial formado por la masa 2 y el resorte 2.

Teniendo en cuenta que el producto de las masas no puede ser cero, y sustituyendo las frecuencias parciales, se obtiene:

$$(\omega^2 - \omega_a^2)(\omega^2 - \omega_b^2) - \omega_c^2 = 0$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$(\omega^2)^2 - \omega_a^2 \omega^2 - \omega_b^2 \omega^2 + \omega_a^2 \omega_b^2 - \omega_c^4 = 0$$

Simplificando:

$$(\omega^2)^2 - (\omega_a^2 + \omega_b^2) \omega^2 + \omega_a^2 \omega_b^2 - \omega_c^4 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado anterior, se obtiene:

$$\omega_{n1}^2, \omega_{n2}^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2 \pm \sqrt{(\omega_a^2 + \omega_b^2)^2 - 4(\omega_a^2 \omega_b^2 - \omega_c^4)}}{2}$$

Desarrollando y simplificando dentro del radical y aplicando la ley distributiva, finalmente se obtiene:

$$\omega^2_{n1}, \omega^2_{n2} = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a^2 + \omega_b^2}{2}\right)^2 - \omega_c^4}$$

La expresión anterior permite obtener los valores de las frecuencias naturales del sistema, que son los valores positivos de las raíces anteriores, ya que los valores negativos carecen de sentido físico. La frecuencia natural más baja se denomina “frecuencia fundamental”. Se obtienen:

$$\omega^2_{n1} = 8.76 \frac{rad}{s} \quad \omega^2_{n2} = 110.23 \frac{rad}{s}$$

Lo anterior significa que el sistema presenta dos modos de vibración “puros”, que se denominan “modos normales de vibración”, cada uno con una de las frecuencias naturales. Sólo en casos particulares, con determinados valores de las perturbaciones iniciales, el sistema vibrará según un modo normal. El caso más frecuente es que el sistema vibre con una combinación de ambos modos, (Golubev, 1979).

Por tanto, la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales (3.9.2) se puede establecer de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (a_1)_1 \text{sen}(\omega_{n1}t + \varphi_1) + (a_1)_2 \text{sen}(\omega_{n2}t + \varphi_2) \\ x_2 &= (a_2)_1 \text{sen}(\omega_{n1}t + \varphi_1) + (a_2)_2 \text{sen}(\omega_{n2}t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.9.6)$$

A cada frecuencia natural del sistema le corresponde una determinada relación de las amplitudes, que se denomina “relación modal de vibración”, que se obtiene a partir de una de las dos ecuaciones del sistema (3.9.3):

$$r(\omega) = \frac{a_2}{a_1} = \frac{k_1 - m_1\omega^2}{k_1} = \frac{k_1}{k_1 + k_2 - m_2\omega^2} \quad (3.9.7)$$

Introduciendo la relación modal para cada frecuencia natural en el sistema (3.9.6), este toma la forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (a_1)_1 \text{sen}(\omega_{n1}t + \varphi_1) + (a_1)_2 \text{sen}(\omega_{n2}t + \varphi_2) \\ x_2 &= (a_2)_1 r_1 \text{sen}(\omega_{n1}t + \varphi_1) + (a_2)_2 r_2 \text{sen}(\omega_{n2}t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.9.7)$$

Derivando con respecto al tiempo el sistema (3.9.8), se obtienen las expresiones de las velocidades:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a_1)_1 \cos(\omega_{n1}t + \varphi_1) + (a_1)_2 \cos(\omega_{n2}t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2 &= (a_2)_1 r_1 \cos(\omega_{n1}t + \varphi_1) + (a_2)_2 r_2 \cos(\omega_{n2}t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.9.7)$$

En los sistemas (3.9.8) y (3.9.9) aparecen cuatro constantes (dos amplitudes y dos ángulos de fase), que se determinan, para cada solución particular, a partir de las condiciones iniciales (desplazamientos y velocidades iniciales).

### Análisis de las vibraciones forzadas.

En este caso se utiliza el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo (3.9.1). La solución general estará compuesta de la solución general del sistema homogéneo más una solución particular del sistema no homogéneo, en la que las masas vibran con la frecuencia de la fuerza excitadora. No obstante, la solución particular del sistema no homogéneo, independientemente, debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales (3.9.1). En este caso, se ensayan soluciones de la siguiente forma:

$$x_{p1} = x_{p1} \text{sen}(\omega t); \quad x_{p2} = x_{p2} \text{sen}(\omega t) \quad (3.9.10)$$

Las velocidades estarán dadas por:

$$\dot{x}_{p1} = x_{p1} \omega \cos(\omega t); \quad \dot{x}_{p2} = x_{p2} \omega \cos(\omega t) \quad (3.9.11)$$

Y las aceleraciones por:

$$\ddot{x}_{p1} = x_{p1} \omega^2 \text{sen}(\omega t); \quad \ddot{x}_{p2} = x_{p2} \omega^2 \text{sen}(\omega t) \quad (3.9.12)$$

Sustituyendo (3.9.10), (3.9.11) y (3.9.12) en el sistema (3.9.1), tenemos

$$\left. \begin{aligned} x_{p1}(k_1 - m_1 \omega^2) \text{sen}(\omega t) - x_{p2} k_1 \text{sen}(\omega t) &= F \text{sen}(\omega t) \\ x_{p2}(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) \text{sen}(\omega t) - x_{p1} k_1 \text{sen}(\omega t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9.13)$$

Dado que el seno sólo será igual a cero para determinados valores del argumento, del sistema (3.9.13) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_{p1}(k_1 - m_1\omega^2) - x_{p2}k_1 &= F \\ x_{p2}(k_1 + k_2 - m_2\omega^2) - x_{p1}k_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9.14)$$

De la segunda ecuación del sistema (3.9.14) se obtiene:

$$x_{p2} = x_{p1} \frac{k_1}{k_1 + k_2 - m_2\omega^2} \quad (3.9.15)$$

Sustituyendo (3.9.15) en la primera ecuación del sistema (3.9.14), se obtiene:

$$x_{p1}(k_1 - m_1\omega^2) - x_{p1} \frac{k_1^2}{k_1 + k_2 - m_2\omega^2} = F \quad (3.9.16)$$

Simplificando y reorganizando:

$$x_{p1} \left[ (k_1 - m_1\omega^2) - \frac{k_1^2}{k_1 + k_2 - m_2\omega^2} \right] = F \quad (3.9.17)$$

De la expresión (3.9.17), se obtiene:

$$x_{p1} = \frac{F}{(k_1 - m_1\omega^2) - \frac{k_1^2}{k_1 + k_2 - m_2\omega^2}} \quad (3.9.18)$$

Multiplicando y dividiendo el primer término del denominador por la primera masa, y el segundo término por el producto de las dos masas, introduciendo las frecuencias naturales parciales de las expresiones (3.9.4), y sustituyendo la fuerza excitadora de las masas desbalanceadas, la expresión (3.9.18) toma la forma:

$$x_{p1} = \frac{2m_c\omega^2 e \cos(\alpha/2)}{(\omega_a^2 - \omega^2) - \frac{\omega_c^2}{\omega_b^2 - \omega^2}} \quad (3.9.18)$$

Sacando el común denominador del denominador del miembro de la derecha de la expresión (3.9.19) y reorganizando dicha expresión, se obtiene que:

$$x_{p1} = \frac{2m_c \omega^2 e \cos(\alpha/2)}{m_1} * \frac{\omega_b^2 - \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^2} \quad (3.9.18)$$

La curva de comportamiento de la amplitud de las vibraciones de la criba ( $x_{p1}$ ), en el intervalo de cero a 120 radianes por segundo, obtenida a partir de la expresión (3.9.20), se muestra en la figura 54

Fig. 54 Amplitud de las vibraciones de la criba, en función de la frecuencia de excitación

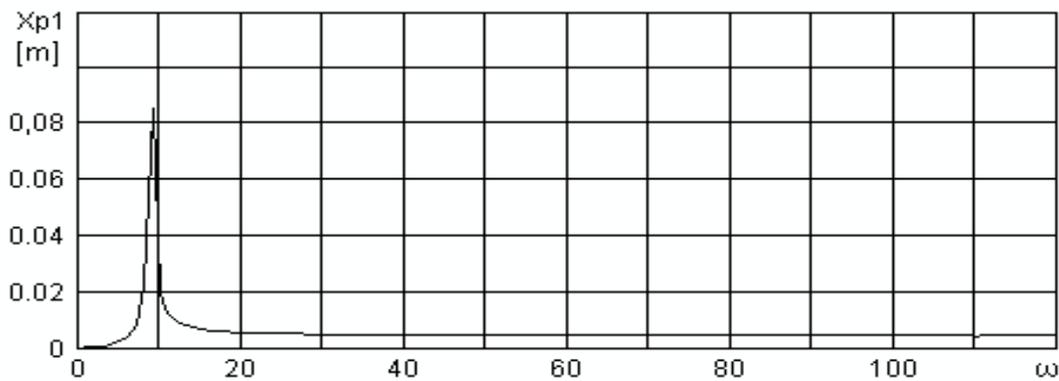


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

La expresión (3.9.20) también puede ser presentada en forma adimensional, introduciendo el concepto de coeficiente de magnificación, que es la relación entre la amplitud de las vibraciones y la excentricidad de los contrapesos, en sistemas excitados por fuerzas de inercia centrífugas. Así, dicha expresión tomará la forma:

$$Cm_1 = \frac{x_{p1}}{e} = \frac{2m_c \omega^2 e \cos(\alpha/2)}{m_1} * \frac{\omega_b^2 - \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^2} \quad (3.9.21)$$

En la figura 55 se muestra la curva de comportamiento del coeficiente de magnificación ( $Cm_1$ ) de la criba, en el intervalo de posibles frecuencias de trabajo, obtenido a partir de la expresión (3.9.21).

Fig. 55. Coeficiente de magnificación de la criba, en función de la frecuencia de excitación.

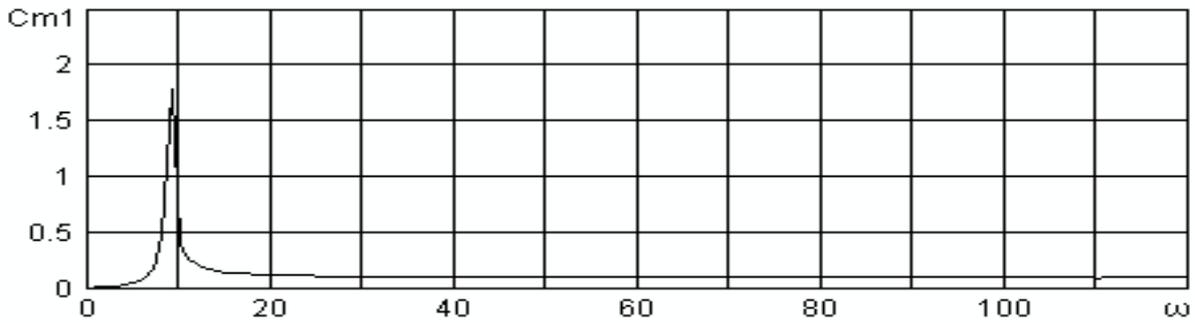


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Después de obtener la amplitud de las vibraciones de la primera masa ( $X_{p1}$ ), se obtiene la amplitud de las vibraciones de la segunda masa ( $X_{p2}$ ), por medio de la expresión (3.9.15). Si se combinan las expresiones (3.9.20) y (3.9.15), se obtiene:

$$x_{p2} = \frac{2m_c \omega^2 e \cos(\alpha/2)}{m_1} * \frac{\omega_b^2 - \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^2} * \frac{k_1}{k_1 + k_2 - m_2 \omega^2} \tag{3.9.22}$$

Dividiendo el numerador y el denominador del tercer factor del miembro de la derecha de la expresión (3.9.22) entre el producto de las masas ( $m_1 \cdot m_2$ ), e introduciendo las frecuencias naturales parciales de las expresiones (3.9.4), la expresión (3.9.22) toma la forma:

$$x_{p2} = \frac{2m_c \omega^2 e \cos(\alpha/2)}{m_1} * \frac{\omega_b^2 - \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^2} * \frac{m_1 \omega_a^2}{m_2 (\omega_b^2 - \omega^2)} \tag{3.9.23}$$

Simplificando la expresión (3.9.23), se obtiene que:

$$x_{p2} = \frac{2m_c \omega^2 e \cos(\alpha/2)}{m_2} * \frac{\omega_a^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^2} \tag{3.9.24}$$

La curva de comportamiento de la amplitud de las vibraciones del semibastidor ( $X_{p2}$ ), en el intervalo analizado, obtenida a partir de la expresión (3.9.24), se muestra en la figura 56, (Erchart, 1972).

En este caso, también se puede obtener el coeficiente de magnificación, como una forma adimensional de la expresión (3.9.24)

$$Cm_2 = \frac{x_{p2}}{e} = \frac{2m_c \cos(\alpha/2)}{m_2} * \frac{\omega_a^2 \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^4} \quad (3.9.25)$$

En la figura 3.9.7 se muestra la curva de comportamiento del coeficiente de magnificación ( $Cm_2$ ) del semibastidor, en el intervalo de posibles frecuencias de trabajo, obtenido a partir de la expresión (3.9.25).

Fig. 56. Amplitud de las vibraciones del semibastidor, en función de la frecuencia de excitación.

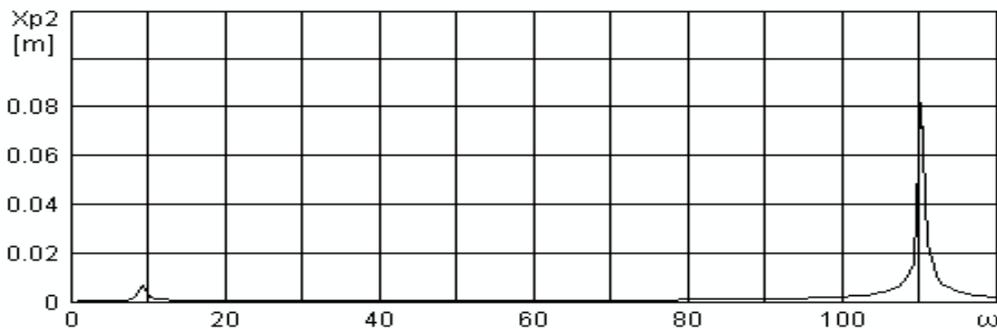


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Ambas amplitudes ( $X_{p1}$  y  $X_{p2}$ ) dependen de la excentricidad ( $e$ ) de los contrapesos, de la frecuencia angular ( $\omega$ ), del ángulo entre los contrapesos ( $\alpha$ ) y de la relación de la masa del contrapeso ( $m_c$ ) con respecto a la masa del elemento correspondiente del sistema ( $m_1$  o  $m_2$ ), (Meirovitch, 2001).

Fig. 57. Coeficiente de magnificación del semibastidor, en función de la frecuencia de excitación.

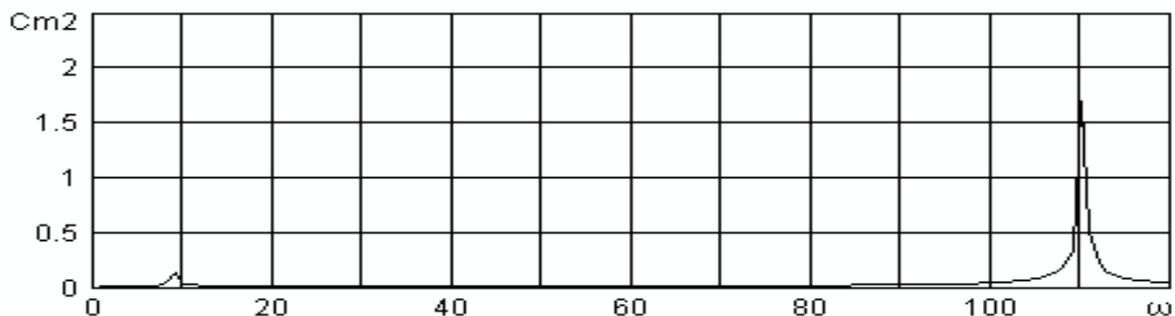


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

**Fuerza transmitida al semibastidor.**

De las fuerzas que actúan en la cuna vibratoria, al semichasis se transmite la fuerza elástica del primer resorte, con variación armónica y de amplitud:

$$F_{1t} = x_{p1}K_1 \tag{3.9.26}$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.9.20), la expresión (3.9.26) toma la forma:

$$F_{1t} = \frac{m_c e \cos(\alpha/2)}{m_1} * \frac{(\omega_b^2 - \omega^2)K_1}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^4}$$

La curva de comportamiento de la fuerza transmitida desde la criba al semibastidor (F1t), en el intervalo de cero a 120 radianes por segundo, obtenida a partir de la expresión (3.9.27), se muestra en la figura 58.

Fig.58. Fuerza trasmitida de la criba al semibastidor, en función de la frecuencia de excitación

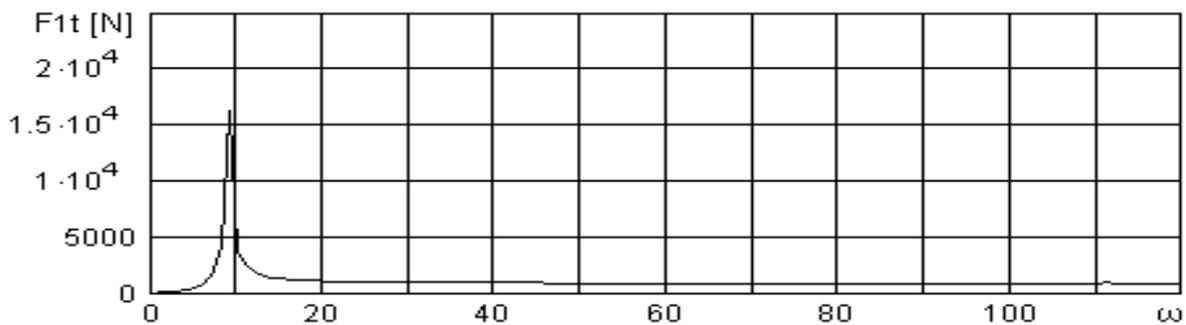


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Reorganizando y teniendo en cuenta las frecuencias naturales parciales (3.9.4), la expresión(3.9.27) tomará la forma adimensional (coeficiente de transmisibilidad):

$$T_{r1} = \frac{F_{1t}}{m_c e \cos(\alpha/2)} * \frac{(\omega_b^2 - \omega^2)\omega_a^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^4} \tag{3.9.28}$$

En la figura 59 se muestra la curva de comportamiento del coeficiente de transmisibilidad ( $Tr_1$ ) de la criba al semibastidor, en el intervalo de posibles frecuencias de trabajo, obtenida a partir de la expresión (3.9.28)

Fig. 59 Coeficiente de transmisibilidad de la criba al semibastidor en función de la frecuencia de excitación.

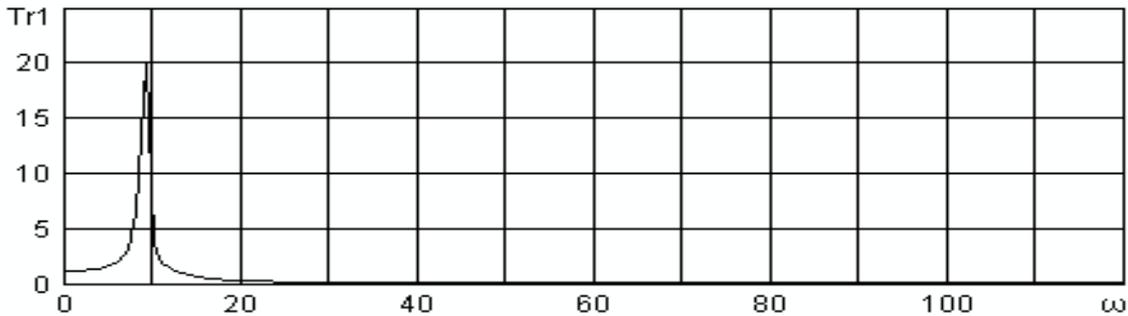


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### Fuerza transmitida al bastidor.

De las fuerzas que actúan en el sistema, al chasis se transmite la fuerza elástica del segundo resorte, con variación armónica y de amplitud:

$$F_{2t} = x_{p2}K_2 \quad (3.9.29)$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.9.24), la expresión (3.9.29) toma la forma:

$$F_{2t} = \frac{m_c e^{2\omega^2 \cos(\alpha/2)}}{m_1} * \frac{\omega_b^2 K_2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^4} \quad (3.9.30)$$

La curva de comportamiento de la fuerza transmitida desde el semibastidor al bastidor ( $F_{2t}$ ), en el intervalo de cero a 120 radianes por segundo, obtenida a partir de la expresión (3.9.30), se muestra en la figura 60.

Fig. 60. Fuerza transmitida del semibastidor al bastidor, en función de la frecuencia de excitación.

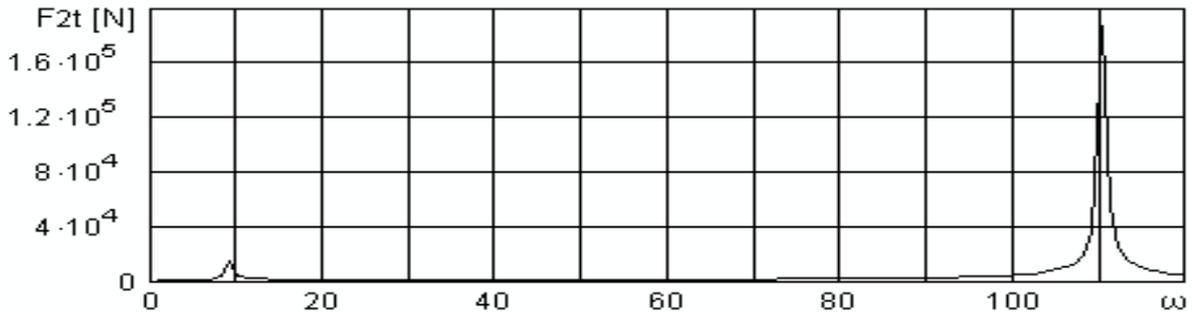


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

Introduciendo las expresiones (3.9.4) y reorganizando, la expresión (3.9.30) tomará la forma adimensional:

$$T_{r2} = \frac{F_{2t}}{m_c e \omega^2 2 \cos(\alpha/2)} * \frac{\omega_a^2 \omega_d^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2) - \omega_c^4} \quad (3.9.31).$$

En la figura 61. se muestra la curva de comportamiento del coeficiente de transmisibilidad( $T_{r2}$ ) del semibastidor al bastidor, en el intervalo de posibles frecuencias de trabajo (cero a 120 radianes por segundo), obtenida a partir de la expresión (3.9.31).

### Conclusiones:

Después de observar los resultados obtenidos, se pueden plantear las siguientes conclusiones:

- En las curvas de comportamiento de los parámetros de la criba vibratoria, los picos de resonancia son notables para la frecuencia natural fundamental. Para la segunda frecuencia natural, estos picos no se notan o son pequeños. En las curvas de comportamiento de los parámetros del semibastidor, los picos de resonancia son notables para la segunda frecuencia natural. Para la frecuencia natural fundamental, estos picos no se notan o son pequeños.
- En todas las curvas de comportamiento, se nota un intervalo de frecuencias de trabajo entre 30 y 80 radianes por segundo, aproximadamente, en el que los parámetros se comportan como lí-

neas rectas, paralelas al eje de las abscisas. En este intervalo, se nota que los parámetros analizados no varían con respecto a la frecuencia de excitación, lo que da la posibilidad de variar dichas frecuencias en ese intervalo, sabiendo que las amplitudes no serán afectadas.

- Si se desea variar las amplitudes, se debe variar el ángulo ( $\alpha$ ), que determina la disposición relativa entre las masas rotatorias desbalanceadas

Fig. 61. Coeficiente de transmisibilidad del semibastidor al bastidor, en función de la frecuencia de excitación.

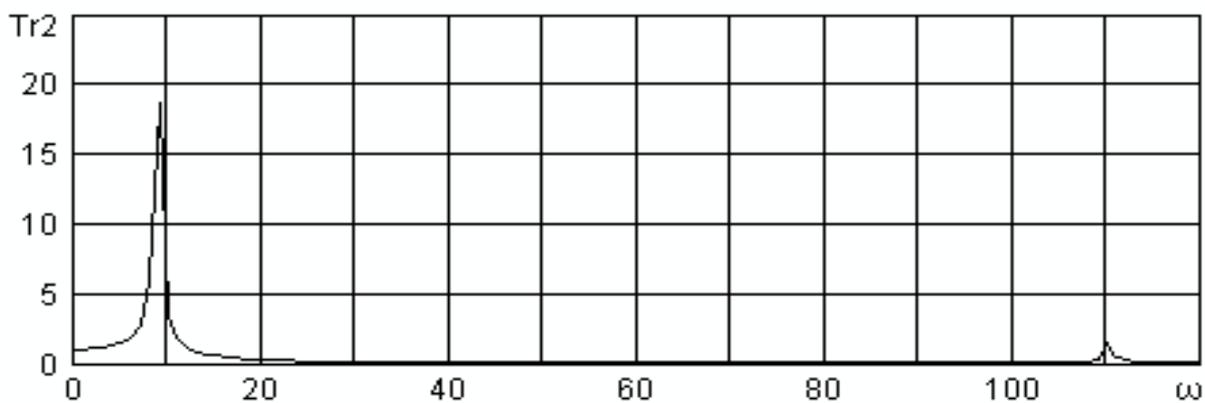


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### Recomendaciones:

Para aplicar los resultados de este trabajo, se debe proceder de la siguiente forma:

- Diseñar la investigación de forma tal que las menores cargas, en los elementos del sistema, actúen en los primeros experimentos. Luego realizar los experimentos que impliquen mayores cargas para los elementos del sistema.
- Se debe tener en cuenta que la masa del material a clasificar no se incluyó en estos cálculos. Se debe valorar su efecto, y si es necesario, incluirla, para obtener resultados más exactos.

## Problemas resueltos.

### Problema 1. Vibraciones del cuerpo de un vehículo de carga.

El cuerpo de un vehículo de carga está suspendido, por medio de elementos elásticos (ballestas), sobre los puentes; y estos, a la vez, descansan sobre los neumáticos. Por eso dicho cuerpo, en realidad, posee seis grados de libertad. Sin embargo, dada la simetría de este, y que para tramos largos, las irregularidades de la superficie, tanto para las ruedas de la derecha, como para las de la izquierda, poseen iguales características estadísticas, se puede utilizar el esquema plano, que se presenta en la figura 62, con la consiguiente simplificación del problema.

Se deben determinar los modos normales de vibración y las frecuencias naturales del cuerpo del vehículo, para los datos, que se dan a continuación:

Fig. 62. Esquema de un vehículo automotor

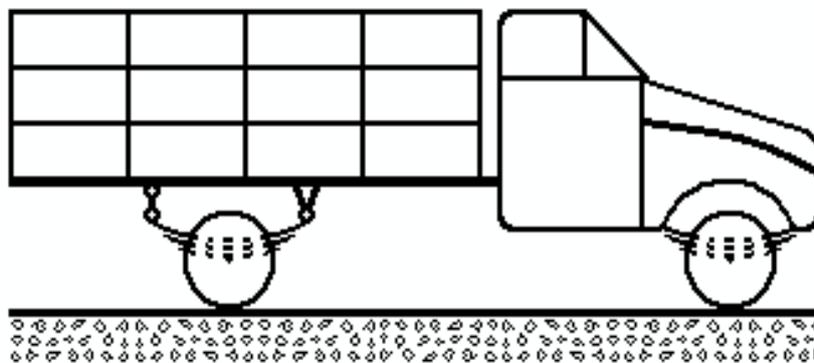


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

- Masa del vehículo:  $m = 8600 \text{ kg}$ .
- Momento de inercia del cuerpo de la máquina:  $I_s = 12800 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .
- Distancia de la rueda delantera al centro de gravedad:  $a = 3 \text{ m}$ .
- Distancia de la rueda trasera al centro de gravedad:  $b = 1 \text{ m}$ .
- Constante de rigidez en el puente delantero:  $k_1 = 30\,000 \text{ N/m}$ .
- Constante de rigidez en el puente trasero:  $k_2 = 80\,000 \text{ N/m}$

### Solución.

El primer paso que se debe dar es interpretar profundamente los datos iniciales y obtener un modelo dinámico vibratorio, como se muestra a continuación.

#### Notas aclaratorias:

En el puente delantero se utilizan dos neumáticos, mientras en el puente trasero se utilizan cuatro neumáticos. Además, los elementos elásticos de la parte trasera poseen una constante de rigidez mayor que la de los delanteros.

- La constante de rigidez de los elementos elásticos de un puente, y de los neumáticos, correspondientes a ese mismo puente, despreciando la masa de este, se encuentran en serie, por lo que su efecto conjunto puede ser sustituido por un solo elemento elástico equivalente.
- Por todo lo antes expuesto, en una primera aproximación, el vehículo se puede analizar como un sistema de dos grados de libertad, cuyo modelo se muestra en la figura 63.

Fig. 63. Modelo dinámico plano del camión de la figura 62.

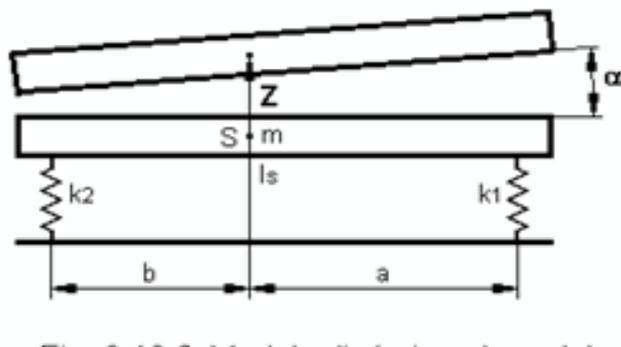


Ilustración: Roberto Beltrán y Héctor Terán

### Respuestas:

#### Modos normales de vibración del cuerpo del vehículo.

En el plano vertical, que contiene el modelo dinámico del vehículo, este puede realizar dos movimientos vibratorios, correspondiente cada uno a un modo normal de vibración:

- Primer modo: desplazamiento lineal vertical del cuerpo (según el eje Z).
- Segundo modo: rotación del cuerpo en el plano vertical, alrededor del punto S (o eje y).

**Ecuaciones diferenciales del equilibrio dinámico del cuerpo del vehículo. Para el estudio que se va a realizar al vehículo, se puede despreciar el amortiguamiento, por lo que las ecuaciones de equilibrio dinámico quedarán de la siguiente forma, (Golubev, 1979):**

Primera ecuación (desplazamiento vertical del cuerpo):

$$m.\ddot{z} + k_1.(z + a.\alpha) + k_2.(z - b.\alpha) = 0 \quad (3.10.1)$$

Segunda ecuación (rotación alrededor del centro de gravedad):

$$I_s.\alpha'' + k_1.(z + a.\alpha).a - k_2.(z - b.\alpha).b = 0 \quad (3.10.2)$$

Como se puede notar, al escribir las ecuaciones de equilibrio dinámico del cuerpo del vehículo, se obtiene un sistema de dos ecuaciones, que relacionan las dos variables ( $z$  y  $\alpha$ ) y sus derivadas.

Para las ecuaciones anteriores, se ensayarán soluciones armónicas de la siguiente forma:

$$\begin{cases} z = Z \text{sen} \omega t \\ \alpha = A \text{sen} \omega t \end{cases} \quad (3.10.3)$$

Entonces las primeras derivadas serán:

$$\begin{cases} \dot{z} = Z.\dot{\omega}.\text{cos} \omega t \\ \dot{\alpha} = A.\dot{\omega}.\text{cos} \omega t \end{cases}$$

Y las segundas derivadas:

$$\begin{cases} \ddot{z} = -Z\omega^2 \text{sen} \omega t \\ \ddot{\alpha} = -A\omega^2 \text{sen} \omega t \end{cases} \quad (3.10.4)$$

Sustituyendo las funciones (3.10.3) y las segundas derivadas (3.10.4) en el sistema de ecuaciones, se tendrá:

$$-m.Z.\omega^2 \text{sen} \omega t + k_1.(Z.\text{sen} \omega t + a.A \text{sen} \omega t) + k_2.(Z.\text{sen} \omega t + b.A \text{sen} \omega t) = 0$$

$$-I_s.A.\omega^2 \text{sen} \omega t + (k_1.A - k_2.b).Z.\text{sen} \omega t + (k_1.a^2 + k_2.b^2) = 0$$

Sacando la función “ $\text{sen}\omega t$ ” como factor común, las ecuaciones anteriores toman la forma:

$$[-m.Z.\omega^2 + (k_1 + k_2).Z + (k_1.a - k_2.b).A] \text{sen}\omega t = 0$$

$$[-I_s.A.\omega^2 + (k_1.a - k_2.b).Z + (k_1.a^2 + k_2.b^2).A] \text{sen}\omega t = 0$$

La función “ $\text{sen}\omega t$ ” sólo se hace cero en casos particulares, por lo que, para que las ecuaciones anteriores sean ciertas en todo momento, se debe cumplir que:

$$-m.Z.\omega^2 + (k_1 + k_2).Z + (k_1.a^2 + k_2.b^2).A = 0 \quad (3.10.6)$$

Sacando la amplitud como factor común, en cada ecuación anterior, estas tomarán la forma:

$$[(k_1 + k_2) - m\omega^2].Z + (k_1.a - k_2.b).A = 0$$

$$(k_1.a - k_2.b).Z + [(k_1.a^2 + k_2.b^2) - I_s.\omega^2].A = 0$$

El sistema de ecuaciones anterior se puede escribir en forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m\omega^2 & (k_1.a - k_2.b) \\ (k_1.a - k_2.b) & k_1.a^2 + k_2.b^2 - I_s.\omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = 0 \quad (3.10.7)$$

### Frecuencias naturales del sistema.

Las frecuencias naturales del sistema se obtienen de igualar a cero el determinante de la matriz de los coeficientes, es decir, de la matriz de los operadores propios del sistema:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m\omega_n^2 & (k_1.a - k_2.b) \\ (k_1.a - k_2.b) & k_1.a^2 + k_2.b^2 - I_s.\omega_n^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10.8)$$

Sustituyendo los valores numéricos de los coeficientes en 3.10.8, se tendrá:

$$\begin{bmatrix} (110000 + 8600.\omega_n^2) & (30000.a - 80000.1) \\ (30000.3 - 8000.1) & (30000.9 + 80000.1 - 12800\omega_n^2) \end{bmatrix} = 0$$

Resolviendo los valores numéricos:

$$\begin{bmatrix} 110000 + 8600 \cdot \omega_n^2 & (10000) \\ (10000) & (350000 - 12800 - \omega_n^2) \end{bmatrix} = 0$$

Resolviendo el determinante, se obtiene la ecuación característica del sistema, que es una ecuación bicuadrada en la frecuencia angular:

$$11080000 \cdot (\omega_n^2)^2 - 4418000000 \cdot \omega_n^2 + 38400000000 = 0$$

Dividiendo entre el primer coeficiente:

$$(\omega_n^2)^2 - 40,13 \cdot \omega_n^2 + 348,837 = 0$$

Entonces, resolviendo para  $\omega_n$ , se tendrá:

$$\omega_{n1}^2, \omega_{n2}^2 = \frac{40,13 \pm \sqrt{(40,13)^2 - 4(348,837)}}{2} = 20,065 \pm 7,33$$

Tomando sólo las raíces positivas, ya que las negativas no tienen sentido, las frecuencias naturales serán:

$$\omega_{n1} = 3,57 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{y} \quad \omega_{n2} = 5,23 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (3.10.10)$$

## Referencias

- Allen; Paine. Use of rubber in Engineering. 1965.
- Baranov, Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas. 1985.
- Butenin; Neimark; Fufaev. Introducción a la teoría de las oscilaciones no lineales. 2003.
- Beards. Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems.1995.
- Castillo, L. Teoría de Mecanismos y Máquinas: dinámica de máquinas.1977.
- Cyril; Harris; Piersol. Harris' shock and vibration handbook. Fifth Edition. 2002.
- Erchart, Charles. Isolating vibration in fundamentals of machine design.1972.
- Golubev, B. Teoría de Máquinas y Mecanismos.1979.
- Guzmán, H. Aplicación de las vibraciones mecánicas en la industria. 1978.
- Harker, J. Generalized methods of vibration analysis. 2003.
- Hartman, R. Dynamics of Machinery. 1960.
- Derek, M. Gear noise and vibrations. 2003.
- Kelly, L.D. Fundamentals of mechanical vibrations. 2000.
- Lagrange, J.K. Analytical Mechanics. 2011.
- Meirovitch, N. Leonard. Fundamentals of vibrations. 2001.
- Migulin; Medvedev; Mustel; Parygin. Basic theory of Oscillations. 2002.
- Mobley, B. Vibration Fundamentals. 1999.
- Newland, M. An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis. 1993.
- Pain, H. J. The physics of vibrations and waves. 2005.
- Seto, R. Vibraciones Mecánicas. 2004.
- Silva, Clarence W. de. Vibration: fundamentals and practice. 2000.
- Singiresu, S. Rao. Mechanical Vibrations. 2009.
- Taylor, G. Infinitesimal calc and equations, 2011.
- Thomson, William T. Teoría de Vibraciones. 2002.
- Timoshenko, S. y D. H. Young. Problemas de Vibraciones en Ingeniería. 1966.

## Bibliografía

- Allen Lindley and Paine. Use of rubber in Engineering. McLaren and Sew. LTD. London. 1965.
- Baranov, G. G. Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas. Segunda Edición. Editorial MIR. Moscú. 1985.
- Baxter, R. L. Y D. L. Bernhard. Vibrations and Indicating Tools in Mechanical Engineering. March. 1978
- Butenin, N. V. ; Neimark, Y. I. ; Fufaev, N. A. Introducción a la teoría de las oscilaciones no lineales. 2003.
- C. F. Beards. Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems. Edward Arnold. London. 1995.
- Castillo, G. Teoría de Mecanismos y Máquinas: dinámica de máquinas. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1977.
- Cyril M. Harris and Allan G. Piersol. Harris' shock an vibration handbook. Fifth Edition. McGraw-Hill. New York. 2002.
- Erchart Robert y Charles M. Salermo. Isolating vibration in fundamentals of machine design. McGraw Hill. 1972.
- Golubev, Yuri. Teoría de Máquinas y Mecanismos. Ed. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1979.
- Guzmán Carmenate, José F. Aplicación de las vibraciones mecánicas en la industria. Universidad de Oriente. Santiago de Cuba. 1978
- Harker, Ralph J. Generalized methods of vibration analysis. 2003.
- Hartman, James B. Dynamics of Machinery. McGraw Hill. 1960.
- J. Derek Smith. Gear noise and vibrations. Second Edition. Marcel Dekker, Inc. New York. 2003.
- Kelly, S. Graham. Fundamentals of mechanical vibrations. Second Edition. McGraw-Hill. New York. 2000.
- Lagrange Joseph-Louis, Analytical Mechanics . Kansas City.2011.
- Lagrange Joseph-Louis, Lectures on Elementary Mathematics . Minessota2011.
- Laplace Pierre Simon, The Laplace Transform, France.2013.
- Lejeune Dirichlet's Werke, relative difference. Paris.1998.
- Meirovitch, Leonard. Fundamentals of vibrations. McGraw-Hill. New York. 2001.
- Migulin, V. V.; Medvedev, V. I.; Mustel, E. R. ; Parygin, V. N. Basic theory of Oscillations. 2002.
- Mobley, R. Keith. Vibration Fundamentals. Butterworth-Heinemann. MA. 1999.
- Newland, D. E. An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis. Third edition. Longman Scientific & Technical. 1993.
- Pain, H. J. The physics of vibrations and waves. Sixth Edition. John Wiley & Sons, Ltd. 2005.
- Paolo L.Gatti and Vittorio Ferrari. Applied Structural and Mechanical Vibrations. Taylor & Francis Group LLC. 2003.
- Seto, William W. Vibraciones Mecánicas. 2004.

- Silva, Clarence W. de. *Vibration: fundamentals and practice*. CRC Press. New York. 2000.
- Singiresu, S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Fourth Edition. Editorial Félix Varela. La Habana. 2009.
- Taylor, *Infinitesimal calc and equations*, Memphis Tenese.2011.
- Thomson, William T. *Teoría de Vibraciones*. 2002.
- Timoshenko, S. y D. H. Young. *Problemas de Vibraciones en Ingeniería*. Edición Revolucionaria. La Habana. 1966.

## **Autores**

### **Ramón Esteban Martínez Batista,**

Ingeniero Mecánico, Centro Universitario de Holguín; Doctor en Ciencias Técnicas, Instituto Superior de Construcción de Máquinas Agrícolas de Rostov del Don, en Rusia. . Investiga en temas: Vibraciones Mecánicas; Diseño Mecánico; Maquinaria Agrícola; Maquinaria Agrícola.

### **Julio Cesar Pino Tarragó,**

Ingeniero Mecánico, Universidad de Holguín “Oscar Lucero Moya”, Holguín, Cuba y Doctor en Ciencias Técnica por la Politécnica de Madrid. Investiga en temas: Evaluaciones de la explotación y mantenimiento de máquinas agrícolas; Energía renovable para comunidades agrícolas; Procesamiento industrial de alimentos, Evaluación de Máquinas y Equipos Agrícolas. Actualmente profesor de la Universidad Estatal del Sur de Manabí.

### **Héctor Cochise Terán Herrera,**

Ingeniero Electromecánico, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Master en Gestión de Energías y Master en Seguridad Industrial y Riesgos del trabajo. Investiga en temas: Mecanizado en Máquinas Herramientas convencionales y de Control Numérico Computarizado, Procesos de soldadura , Metalurgia y Tecnología de la Fundición ,Energías renovables, Automatización Industrial.

### **Oscar Bladimir Arteaga López.**

Ingeniero Mecánico, Escuela Politécnica del Chimborazo ESPOCH. Magister en Tecnología de la Información y Multimedia Educativa. Magister en Gestión de Energía. Investiga en temas: Diseño y Construcción de Bastidores y Carrocerías para Vehículos de competición (FORMULA STUDENT), Diseño y Construcción de vehículos blindados 4X4. Diseño y construcción de prótesis robóticas.



**ESPE**  
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

ISBN: 978-9942-765-11-6

