



Vibraciones Mecánicas

Volumen II

**Ramón Martínez Batista, Julio Cesar Pino Tarragó
Héctor Cochise Terán Herrera, Oscar Bladimir Arteaga López**

**Publicaciones científicas
Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**

Créditos

Vibraciones mecánicas

Volumen II

Ramón Martínez Batista, Julio Cesar Pino Tarragó, Héctor Cochise Terán Herrera,
Oscar Bladimir Arteaga López

ISBN:

978-9942-765-19-2

Pares revisión científica:

Alexis Cordoves

Arlys Lastre

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

CrnI. Ramiro Pazmiño (Rector)

Publicación autorizada por:

Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

Edición y producción:

David Andrade Aguirre

daa06@yahoo.es

Diseño editorial:

David Cabrera Reinoso

thedavox@gmail.com

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico.

El contenido, uso de fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias es de exclusiva responsabilidad del autor.

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador

www.espe.edu.ec

Los derechos de esta edición electrónica son de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en www.repositorio.espe.edu.ec.

| Índice | Pag. |
|---|-------------|
| Capítulo I | |
| Aplicaciones de la teoría de las vibraciones | 13 |
| 1. Introducción. | 15 |
| 2. Aislamiento de las vibraciones. | 16 |
| Suspensión elástica directa. | 17 |
| Suspensión elástica indirecta. | 17 |
| Suspensión semirrígida. | 18 |
| 3. Vibraciones laterales en árboles. | 55 |
| 4. Vibraciones laterales (de flexión) de vigas. | 60 |
| 5. Vibraciones en máquinas móviles. | 70 |
| Problemas resueltos. | 82 |
| Capítulo II | |
| Modelos dinámicos de los sistemas vibratorios. | 103 |
| 1 Modelos dinámicos de los sistemas vibratorios. | 105 |
| Sustitución de masas por masas concentradas equivalentes. | 105 |
| 2. Reducción de masas y momentos de inercia. | 110 |
| 3. Consideración de las masas de los elementos elásticos. | 112 |
| 4. Reducción de fuerzas y momentos de fuerzas. | 116 |
| 5. Parámetros de rigidez. | 119 |
| 6. Coeficientes de amortiguamiento equivalentes. | 130 |
| 7. Parámetros de rigidez torsional en transmisiones mecánicas. | 133 |
| Elasticidad torsional de árboles. | 134 |
| 8. Reducción de los parámetros inerciales, de rigidez y de amortiguamiento. | 142 |
| 9. Simplificación de los modelos dinámicos. | 148 |
| 10. Fuentes excitadoras de vibraciones. | 152 |
| Desbalance estático de piezas rotatorias | 153 |
| Capítulo III | |
| Influencia de las vibraciones en la salud humana | 203 |
| 1. Introducción. | 205 |
| 2. Máquinas que someten el cuerpo humano a la acción de vibraciones. | 205 |
| 3. Riesgos que conlleva la exposición a vibraciones. | 206 |
| 4. Medidas preventivas básicas para atenuar el efecto de las vibraciones | 207 |
| 5. Limitación de la exposición a las vibraciones. | 209 |
| Referencias y bibliografía. | 211 |

- Figura 1 Suspensión Directa
Figura 2 Suspensión Indirecta
Figura 3 Transmisibilidad De Un Sistema De Dos Grados De Libertad
Figura 4 Almohadilla (A) Y Tapón (B)
Figura 5 Soporte De Caja Cilindrada Simple
Figura 6 Soporte De Caja Cilindrada Con Suela Acalanada
Figura 7 Soporte De Equifrecuencia
Figura 8 Soporte De Equifrecuencia
Figura 9 Soporte Especial
Figura 10 Parachoques O Limitadores De Desplazamiento
Figura 11 Soporte De Resortes Helicoidales
Figura 12 Estabilidad Del Resorte Helicoidal
Figura 13 Estabilidad Del Resorte Helicoidal
Figura 14 Estabilidad De Los Resortes Según La Fijación
Figura 15 Maquina Sobre Soportes Elásticos
Figura 16 Asimetría Del Peso
Figura 17 Frecuencias Propias En Función De Las Deflexiones Estáticas
Figura 18 Posibles Zonas De Trabajo Del Sistema Máquina-Soportes
Figura 19 Posibles Zonas De Trabajo Del Sistema Máquina-Soportes
Figura 20 Zona De Aislamiento Vibratorio En El Gráfico De Transmisibilidad
Figura 21 Bloques Elastoméricos De Sección Rectangular (A) Y Circular (B)
Figura 22 Soporte Inclinado
Figura 23 Soluciones Constructivas Para Pegado De Soportes
Figura 24 Fijación De Tornillos En Los Soportes Elastoméricos
Figura 25 Fijación De Casquillos Con Roscado Interior En Los Soportes Elastoméricos
Figura 26 Fijación De Soportes Por Medio De Tornillos Pasantes
Figura 27 Transición Suave Para El Pegado Del Bloque Elastomérico
Figura 28 Pegado Del Bloque Elastomérico Cuando Su Sección Es Igual A La De La Pieza Metálica
Figura 29 Vibraciones Laterales De Un Árbol
Figura 30 Vibraciones Laterales, Pasada La Resonancia
Figura 31 Vibraciones Laterales De Un Árbol Con Varios Grados De Libertad
Figura 32 Viga Sometida A Flexión Alternativa
Figura 33 Elemento De Una Viga Que Vibra
Figura 34 Armónicos De Una Viga Simplemente Apoyada
Figura 35 Esquema De La Suspensión De Un Automóvil
Figura 36 Movimiento Vibratorios De La Carrocería Del Automóvil
Figura 37 Modelo Dinámico De La Suspensión De Un Automóvil
Figura 38 Motobomba
Figura 39 Modelo Del Sistema Vibratorio
Figura 40 Comportamiento Del Coeficiente De Magnificación
Figura 41 Comportamiento Del Coeficiente De Transmisibilidad
Figura 42 Moto-Ventilador
Figura 43 Modelo Del Sistema Vibratorio

| | |
|---|--|
| Figura 44 Gráfico Del Coeficiente De Magnificación | |
| Figura 45 Gráfico Del Coeficiente De Transmisibilidad | |
| Figura 46 Modelo Dinámico De Una Máquina Agrícola | |
| Figura 47 Sustitución De Masas Por Masas Concentradas Equivalentes | |
| Figura 48 Sustitución Dinámica Y Estática | |
| Figura 49 Mecanismo De Manivela-Biela-Corredera | |
| Figura 50 Sistema Masa Resorte | |
| Figura 51 Masa En Viga Empotrada | |
| Figura 52 Viga Simplemente Apoyada | |
| Figura 53 Barra Con Varias Masas | |
| Figura 54 Mecanismo De Cremallera | |
| Figura 55 Mecanismo Con Las Fuerzas Aplicadas | |
| Figura 56 Resorte De Característica Lineal | |
| Figura 57 Resortes Helicoidales | |
| Figura 58 Resortes Semejantes | |
| Figura 59 Resorte De Lámina | |
| Figura 60 Resortes De Lámina Semejantes | |
| Figura 61 Barras De Torsión | |
| Figura 62 Resortes Espirales De Torsión | |
| Figura 63 Esquema De Una Ballesta Semielíptica Simétrica | |
| Figura 64 Resorte A Líquido | |
| Figura 65 Resorte A Líquido Diferencial | |
| Figura 66 Barra Cargada Axialmente | |
| Figura 67 Barra Cónica Con Cargas Axiales | |
| Figura 68 Viga Simplemente Apoyada | |
| Figura 69 Viga Doblemente Empotrada | |
| Figura 70 Resortes En Paralelo | |
| Figura 71 Resortes En Serie | |
| Figura 72 Superficies Paralelas | |
| Figura 73 Émbolo Y Cilindro | |
| Figura 74 Amortiguadores Torsionales | |
| Figura 75 Rozamiento Seco | |
| Figura 76 Árbol Macizo | |
| Figura 77 Árbol Con Agujero Axial | |
| Figura 78 Árbol Con Chavetero | |
| Figura 79 Árbol Con Dos Chaveteros | |
| Figura 80 Árbol Estriado | |
| Figura 81 Árbol De Sección Arbitraria | |
| Figura 82 Trasmisión Por Correa | |
| Figura 83 Trasmisión Dentada De Tres Escalones | |
| Figura 84 Parámetros Másicos De Rigidez Y Amortiguamiento De Trasmisiones | |
| Figura 85 Modelo Dinámico De La Trasmisión | |
| Figura 86 Modelo Dinámico En Forma De Cadena | |
| Figura 87 Modelo Dinámico En Forma De Anillo | |
| Figura 88 Modelo Dinámico Ramificado - Modelo Dinámico Combinado | |
| Figura 89 Sistemas Parciales Del Modelo Dinámico | |
| Figura 90 Conversión De Un Sistema Simple Ha Compuesto | |
| Figura 91 Conversión De Un Sistema Parcial B) En Uno A) | |
| Figura 92 Fuerza De Inercia Debida A Desbalance Estático | |

- Figura 93 Rotor Saliente
Figura 94 Desbalance Dinámico
Figura 95 Balanceo De Un Mecanismo De Manivela Biela Corredera
Figura 96 Mecanismo Manivela Biela Corredera Doble
Figura 97 Mecanismo De Manivela Biela Corredera Triple
Figura 98 Mecanismo De Manivela Biela Corredera Cuádruple
Figura 99 Mecanismo De Manivela Biela Corredera Séxtuple
Figura 100 Mecanismo De Manivela Biela Corredera Doble En V
Figura 101 Cigüeñal De Un Motor De Ocho Cilindros En V
Figura 102 Bomba Con Excéntrico
Figura 103 Desmenuzadora Con Rotor Excéntrico
Figura 104 Polea Excéntrica
Figura 105 Desalineación Angular (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 106 Desalineación En Paralelo (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 107 Elementos De Un Cojinete De Rodamiento
Figura 108 Jaula Deteriorada (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 109 Pista Deteriorada (A) Y Espectro De Las Vibraciones (B)
Figura 110 Pista Exterior Deteriorada (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 111 Elemento Rodante Deteriorado (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 112 Cojinete De Deslizamiento (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 113 Juego En Cojinete Plano (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 114 Remolino De Aceite (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 115 Latigazo De Aceite (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 116 Aflojamiento Del Anclaje (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 117 Fatiga Estructural Del Anclaje (A) Y Espectro De Las Vibraciones
Figura 118 Poleas Desalineadas (A) Y Espectro De Las Vibraciones
Figura 119 Poleas Excéntricas (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 120 Resonancia De La Correa En Una Trasmisión
Figura 121 Diente Defectuoso (A) Y Espectro De (B) De Las Vibraciones
Figura 122 Engranaje Sobrecargado (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 123 Engranaje Desalineado (A) Y Espectro De Las Vibraciones (B)
Figura 124 Rueda Excéntrica (A) Y Espectro De Las Vibraciones (B)
Figura 125 Interferencia (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 126 Soplador (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 127 Turbulencia (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 128 Bomba Centrífuga (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 129 Cavitación (A) Y Espectro (B) De Las Vibraciones
Figura 130 Descomposición Del Momento De Un Motor De Combustión Interna En Armónico
Figura 131 Momento Calculado Para Un Número Finito De Posiciones Obtenido Experimentalmente

Índice De Tablas

Pag.

Tabla 1 Propiedades Relativas De Los Materiales Para Soportes Elastoméricos

Tabla 2 Parámetros Característicos De Los Elastómeros.

Tabla 3 Limitación De La Exposición A Las Vibraciones.

ESPACIO EN BLANCO

Dedicatoria

Los autores dedican la presente obra a:

Nuestros familiares por estar siempre presente apoyándonos en todo momento, por el amor que nos han dado, su dedicación y comprensión en todo instante.

Nuestros amigos por su apoyo incondicional en todo momento durante el desarrollo de nuestras vidas personales y profesionales.

Las instituciones que han posibilitado la redacción y publicación de esta obra: Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE y la honorable Universidad de Holguín donde nos formamos y crecimos profesionalmente.

Todas aquellas personas que brindaron una idea, un consejo y estuvieron pendiente de nuestro trabajo.

A todos muchas gracias.

Agradecimiento

Los autores quieren agradecer a:

Nuestros padres porque nos han brindado todo el apoyo en nuestros momentos más difíciles.

Al personal de la Universidad de Holguín por enriquecer nuestra formación profesional.

La Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE por abrir las puertas a nuestros conocimientos y servicios.

Todos quienes colaboraron en la culminación de este proyecto.

Prólogo

La teoría de las vibraciones mecánicas estudia un conjunto de fenómenos que han atraído la atención no sólo del técnico y del científico, sino incluso de cualquier hombre que en su vida corriente haya encontrado alguna de las muy diversas manifestaciones de los mismos.

Los sistemas mecánicos, al sufrir un choque, o al ser sometidos a la acción de fuerzas variables con el tiempo, principalmente periódicas, responden variando sus estados de equilibrio y, consecuentemente, presentan cambios de configuración que perturban su normal funcionamiento, resultan molestos para el personal que se encuentra en su presencia y acortan su vida útil a causa del daño producido al material por efecto de la fatiga y de las sobrecargas.

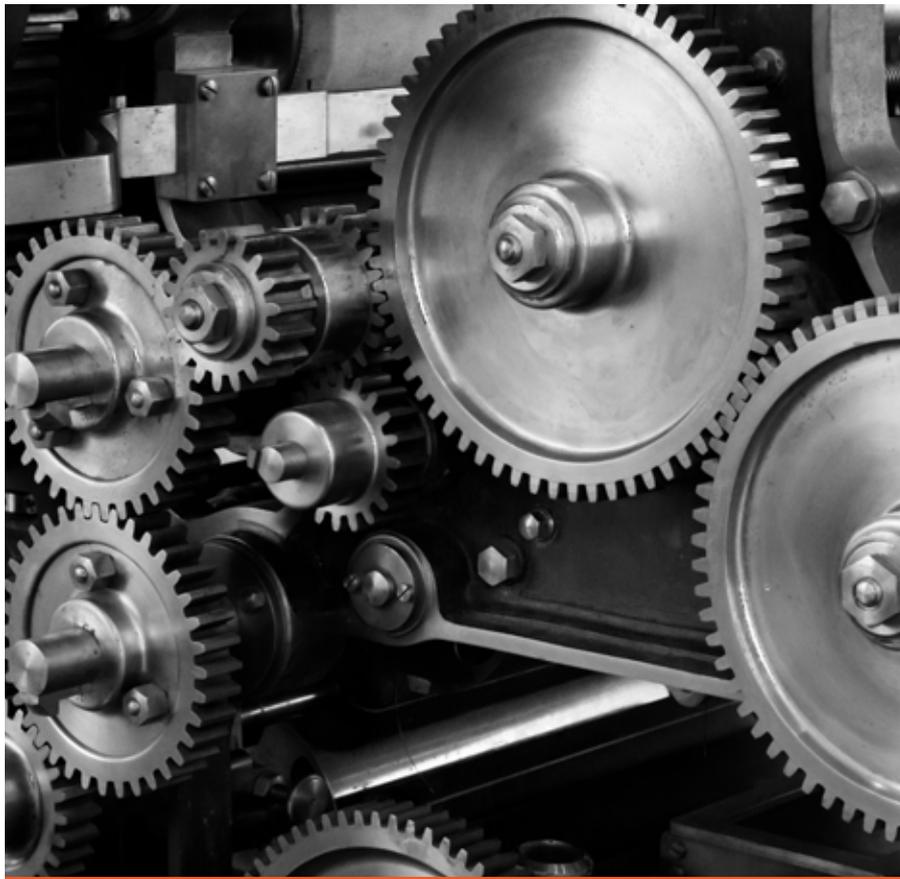
Una característica muy significativa de dichos fenómenos, cuando la excitación tiene unas frecuencias particulares, para cada sistema dado, son los cambios de configuración que alcanzan amplitudes notables y ocasionan generalmente un fallo estructural del material sometido a esfuerzos de rotura. Este riesgo existe incluso cuando las intensidades de las acciones excitadoras son muy pequeñas.

Sin embargo, no conviene olvidar que estos fenómenos de efectos perniciosos, que suponen una primera preocupación del técnico y son los más conocidos del profano, presentan, por el contrario, un aspecto enormemente positivo, derivado de la posibilidad de obtener con estímulos insignificantes efectos notables, que, canalizados convenientemente por la técnica, han llevado a muchas aplicaciones provechosas, también familiares para el profano, tanto en fenómenos mecánicos, objeto de nuestro estudio, como en otros fenómenos análogos que se presentan en los campos electromagnético, acústico, térmico, etc.

Cualquier proyecto industrial de una estructura, que haya de estar sometida a acciones periódicas de este tipo, debe necesariamente ser elaborado sin prescindir del conocimiento de esta materia, cuyo olvido conduce a fallos lamentables, de los que ha habido muchos y contundentes ejemplos en la historia de las realizaciones técnicas.

ESPACIO EN BLANCO

Capítulo I



APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LAS VIBRACIONES

ESPACIO EN BLANCO

1. Introducción.

Son innumerables los ejemplos que se pueden poner acerca de movimientos vibratorios en las máquinas. Las vibraciones mecánicas están presentes en todos los sistemas en los que se produzcan movimientos de elementos, tanto sólidos como fluidos, siendo unas veces perjudiciales y otras beneficiosas. Se acostumbra a considerar las vibraciones mecánicas como fenómenos solamente perjudiciales, por su efecto negativo sobre el trabajo de muchas máquinas, que se desea que funcionen con un ritmo muy regular y equilibrado, como es el caso de máquinas herramientas, sistemas de ventilación forzada, automóviles y otras instalaciones industriales.

Otros aspectos negativos de las vibraciones mecánicas son las cargas variables que producen sobre los elementos de las máquinas, que, como se conoce, hacen aparecer los fallos por fatiga del material; y los molestos y dañinos ruidos, que influyen muy negativamente en el bienestar de las personas, que se encuentran en el entorno de las máquinas que los producen.

Las vibraciones aparecen en las máquinas a causa de los desbalances residuales, que siempre estarán presentes en las piezas rotatorias, aunque se hayan realizado cuidadosos procesos de balanceo de estas piezas, durante su fabricación. Incluso, en ocasiones los desbalances aparecen en el proceso de ensamblaje de los conjuntos que forman dicha máquina, aunque las piezas que los componen hayan sido bien balanceadas. Estos desbalances engendran fuerzas de inercia rotatorias, que producen reacciones variables sobre los apoyos, causantes de las vibraciones. En el caso de las piezas que efectúan movimientos de traslación alternativos, las fuerzas de inercia variables surgen a causa de las aceleraciones, presentes en dichos movimientos. Aquí no se puede hablar de balanceo de la pieza, sino del mecanismo o máquina, de la que forma parte, proceso que siempre deja significativos desbalances residuales, (Harker, 2003).

Pero los desbalances no son la única causa de las vibraciones de una máquina o sistema mecánico. Casi todas las posibles fallas (desgaste, desalineación, etc.), que surgen durante la explotación de una máquina, engendran o incrementan las vibraciones en esta. También las fuerzas variables, provenientes del medio, pueden engendrar vibraciones en estos sistemas. En las plantas o talleres, las vibraciones mecánicas se transmiten, a través del suelo, de las estructuras portantes,

de elementos de enlace (tuberías, cables, etc.), e incluso del aire, de unas máquinas a otras, perturbándose mutuamente, (Thomson, 1953).

Pero no todo acerca de las vibraciones mecánicas es negativo. Se conocen aplicaciones muy efectivas de los movimientos vibratorios para compactar, remover, separar y trasladar materiales en diferentes campos de la industria. Se utilizan las vibraciones mecánicas para compactar las mezclas de moldeo en la obtención de moldes en los talleres de fundición y para separar la arena de las piezas solidificadas en dichos talleres. Para separar los materiales de construcción por el tamaño de sus granos o partículas, se utilizan zarandas vibratorias. Para separar la tierra de los tubérculos o raíces cosechados, se utilizan transportadores de varillas, en los que se aprovechan los movimientos vibratorios que aparecen durante su funcionamiento. Para obtener piezas prefabricadas de hormigón de gran densidad y resistencia, se someten estas al efecto de las vibraciones mecánicas, (Seto, 2004).

Este curso ha estado enfocado, involuntariamente, a destacar solamente los efectos negativos de las vibraciones mecánicas, en correspondencia con la opinión general al respecto; pero no debemos olvidar los ejemplos, en los que intervienen estas con efectos totalmente positivos.

A continuación se expondrán varios ejemplos de procedimientos y fenómenos, relacionados con los movimientos vibratorios, que surgen en los sistemas mecánicos, durante su funcionamiento o engendrados por otros sistemas aledaños, en los que se aplicarán los conocimientos expuestos hasta el momento en este curso.

2. Aislamiento de las vibraciones.

En la práctica, con frecuencia, observamos la utilización de suspensiones elásticas, que consisten en la intercalación de elementos elásticos entre las máquinas y los puntos de apoyo (suelo, fundamento, chasis, etc.); pero su aplicación no es tan simple, como se podría pensar, y su eficacia no se logra si no es a través de un profundo estudio. El tipo de soporte y sus especificidades, su número y su distribución estarán en función de las características de conjunto dadas a la suspensión para obtener los resultados buscados.

Se puede proyectar o escoger una gran variedad de suspensiones elásticas; pero, por sus objetivos, estas se pueden dividir en tres grupos: suspensiones elásticas directas, suspensiones elásticas indirectas y suspensiones semirrígidas, (Thomson, 2002).

Suspensión elástica directa.

Es una suspensión que tiene por objeto impedir a una máquina transmitir sus vibraciones a los apoyos.

(Lafita Babio, Felipe;1968.)El sistema máquina-suspensión debe trabajar en el régimen de aislamiento vibratorio ($\omega/\omega_n > 1,41$), es decir, fuera de la zona de magnificación; pero esto no es eficaz más que contra la transmisión de las vibraciones; no impide que la máquina vibre; por el contrario, sus amplitudes pueden incrementarse, ya que estará “liberada” en cierta forma de sus apoyos fijos.

En la figura 1 se muestra un esquema de esta suspensión. Un ejemplo es el caso del motor flotante de los vehículos automotores, en los cuales la suspensión elástica impide que las vibraciones se transmitan a la cabina y a los pasajeros, pero mediante una movilidad incrementada del motor.

Si no se pueden tolerar amplitudes excesivas, no hay más que un medio de reducirlas: aumentar la masa suspendida. Para una excitación dada, las amplitudes son, en efecto, inversamente proporcionales a la masa. Las máquinas que generan grandes fuerzas excitadoras de vibraciones, tales como motores, compresores de émbolos, centrífugas, etc., frecuentemente son fijadas rígidamente sobre chasis o fundamentos, y estos últimos son los que se suspenden elásticamente, (Mobley, 1999).

Figura 1 Suspensión Directa

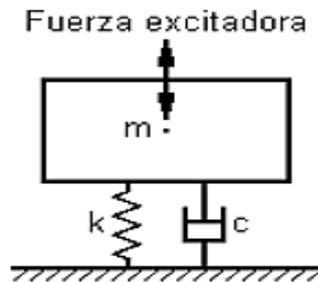


Ilustración: Héctor Terán

Suspensión elástica indirecta.

Esta suspensión se aplica, por el contrario, para proteger una máquina de las vibraciones que provienen del ambiente. En la figura 2 se presenta un esquema de esta suspensión. La utilización de una suspensión suficientemente suave garantiza que las aceleraciones transmitidas a la máquina sean muy débiles y, como ésta no está sometida a ninguna solicitud, quedará prácticamente inmóvil, es decir, que las amplitudes de vibración de sus apoyos serán absorbidas por los soportes elásticos, (Kelly, 2000).

Figura 2 Suspensión Indirecta

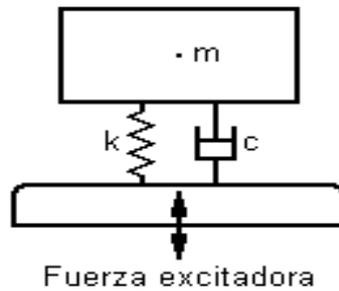


Ilustración: Héctor Terán

Suspensión semirrígida.

Se denominan así las suspensiones, cuyo régimen de trabajo se sitúa en la zona de magnificación de las vibraciones, es decir, en las que la razón de frecuencias es menor que la raíz de dos ($\omega/\omega_n < 1,41$). Según lo estudiado anteriormente, una suspensión de este tipo no sería recomendable, ya que conduce no a una atenuación, sino a una amplificación de las amplitudes de las vibraciones; sin embargo, puede dar bastante buenos resultados, si se tiene en cuenta lo expuesto en el siguiente párrafo.

Los sistemas reales se caracterizan por poseer infinitos grados de libertad, cada uno con una frecuencia natural (o mejor dicho, de resonancia) determinada. El acoplamiento de los movimientos vibratorios tiene el efecto de disminuir las más bajas frecuencias propias y de elevar las más altas. Si no es posible atenuar la amplitud de las vibraciones de más baja frecuencia, se pueden atenuar las amplitudes de las más elevadas, generalmente las más peligrosas.

En la figura 3 se muestra la curva de comportamiento del coeficiente de transmisibilidad de un sistema de dos grados de libertad, en la que se notan dos máximos. La característica de amplitud y frecuencia también presentará tantos máximos (picos de resonancia), como grados de libertad tenga el sistema. El punto de trabajo de la máquina se situará entre dos de esos máximos, cuidando de no dejarlo caer en una u otra zona de resonancia.

Las fuerzas o momentos excitadores de vibraciones (variables en el tiempo), con una frecuencia fundamental " ω ", rara vez son puros; se caracterizan por estar acompañados de componentes armónicas de frecuencias múltiplos de la fundamental (2ω , 3ω , etc.).

Si no es posible realizar el aislamiento vibratorio para la frecuencia fundamental (ω), será posible hacerlo para las restantes componentes armónicas, lo que puede ser muy importante, ya que frecuentemente

Figura 3 Transmisibilidad de un sistema de dos grados de libertad

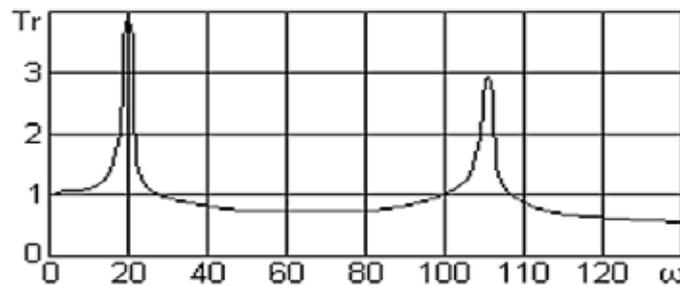


Ilustración: Héctor Terán

las bajas frecuencias son inaudibles y corresponden a aceleraciones débiles, mientras que las frecuencias elevadas generalmente generan ruidos molestos y dañinos.

En lo expuesto hasta el momento se ha supuesto que la máquina no está vinculada con el exterior más que por medio de la suspensión elástica. Frecuentemente existirán otros elementos absolutamente necesarios, tales como tubos de alimentación, de escape, de enfriamiento, cables eléctricos, mandos a distancia, etc., que poseen características elásticas y disipativas. En tales casos, es necesario asegurar que estos elementos sean suficientemente suaves y que no sufran sobrecargas, para:

- Evitar cualquier rotura (atención particular a las roturas de los tubos).
- No alterar el aislamiento vibratorio por la introducción de una rigidez suplementaria.
- No transmitir a través de esas conexiones vibraciones que se deben suprimir.

Soportes flexibles.

Los elementos flexibles o aisladores, que frecuentemente se utilizan en las suspensiones elásticas, son los soportes elastoméricos (de goma) y los resortes o muelles metálicos, que se pueden diseñar, o escoger, dentro de una gran variedad de ellos.

Soportes elastoméricos.

En la práctica tienen una gran difusión los soportes elastoméricos, porque los mismos poseen muchas ventajas como elementos aisladores de vibraciones. Varios tipos de elastómeros son utilizados para satisfacer requerimientos específicos de ingeniería. (Pain, 2005)

Los elastómeros pueden ser moldeados prácticamente en cualquier forma y dimensión y la rigidez puede ser variada dentro de límites relativamente amplios. Además, estos materiales pueden ser fácilmente unidos a los metales por medio de determinados adhesivos. Los tres materiales mostrados en la tabla 1.2.1 poseen buenas combinaciones de las propiedades que se requieren para la fabricación de soportes o aisladores de vibraciones.

Tabla 1 Propiedades relativas de los materiales para soportes elastoméricos

| Propiedad | Goma natural | Neopreno | Base Silicón |
|---|--------------|-----------|--------------|
| Adhesión al metal. | Excelente | Excelente | Buena |
| Resistencia a la tracción. | Excelente | Excelente | Buena |
| Resistencia a la rotura. | Buena | Buena | Regular |
| Resistencia a la compresión. | Buena | Buena | Regular |
| Factor de amortiguamiento. | 0.04 | 0.04 | 0.15 |
| Máxima temperatura de trabajo. | 93.3 °C | 93.3 °C | 176.66 °C |
| Aumento de la rigidez a 18.33 °C. | 10X | 10X | 2X |
| Resistencia a los aceites. | Mala | Buena | Regular |
| Resistencia al ozono. | Mala | Buena | Excelente |
| Resistencia al envejecimiento por la luz. | Mala | Muy buena | Excelente |
| Costo. | Bajo | Moderado | Alto |

Elaborado por: Héctor Terán

Ciertos elastómeros, como la goma natural y el neopreno, poseen propiedades de amortiguamiento poco acentuadas, lo que los hace aplicables en máquinas que operan momentáneamente en la zona de resonancia durante la puesta en marcha y la parada. Otros elastómeros poseen alto grado de amortiguamiento y pueden utilizarse cuando se operan las máquinas a la frecuencia de resonancia por largos períodos de tiempo. La mayoría de los elastómeros se usan satisfactoriamente en el amortiguamiento de ondas estables de alta frecuencia, cuando la atenuación del ruido es un factor importante, (Pain, 2005).

También pueden construirse aisladores de choque de materiales elastoméricos, porque poseen una capacidad relativamente grande de almacenar energía, por unidad de volumen, y porque es posible, utilizando moldes de formas convenientes, fabricar aisladores con los que se consiga la linealidad o no-linealidad requerida, para obtener el aislamiento necesario de los choques. Los elastómeros tienen también algunas limitaciones o desventajas. Por ejemplo, cuando un aislador elastomérico se somete a temperaturas extremas durante largos períodos de tiempo, se acorta su vida útil.

Cualquiera que sea el material elastomérico a utilizar para aislar las vibraciones, los soportes se pueden escoger dentro de una gran variedad

de soluciones técnicas, que responden, en mayor o menor grado, a las necesidades particulares de cada caso. A continuación se exponen los tipos de soportes elastoméricos más difundidos en la técnica, teniendo en cuenta, principalmente, las características geométricas y estructurales.

Soportes tipo almohadilla y tapón.

Son los soportes más simples por su estructura y geometría, pues consisten en bloques de goma de sección circular o rectangular, que poseen dos caras de apoyo, planas y paralelas (figura 4).

Estos elementos se colocan entre la superficie de apoyo (chasis, base, etc.) y los puntos de apoyo de la máquina (orejas de apoyo). En el primer caso (figura 4 a), se fijan por medio de tornillos y, en el otro (figura 4 b), se colocan dentro de agujeros hechos para tal fin.

Soportes tipo “sándwich”.

Estos soportes, por su sencillez y eficacia, están ampliamente difundidos en la práctica. Son bloques elastoméricos (de goma), análogo

Figura 4 Almohadilla (a) y tapón (b)

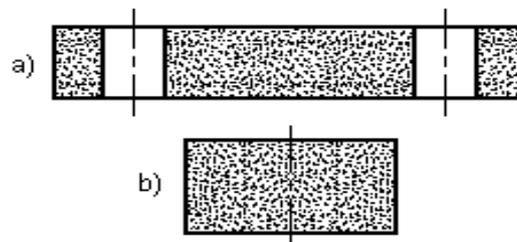


Ilustración: Héctor Terán

gos a los anteriores, pero poseen en las superficies de apoyo placas metálicas planas, atravesadas por agujeros para el paso de pernos de fijación (figura 5 a) o de placas provistas de barras roscadas, para ese mismo propósito, (figura 5 b). Además, ambos esquemas sirven de base a una gran diversidad de soluciones constructivas

Estos aisladores poseen gran rigidez cuando la carga está aplicada en la dirección axial “A” (debe ser en el centro geométrico) y poca rigidez cuando está aplicada en la dirección transversal “T”. En la figura 5 (c) se representan gráficamente estas características, que deben ser tenidas en cuenta a la hora de proponer una solución práctica, ante un determinado problema de aislamiento de las vibraciones mecánicas, (Hartog, 1964).

Figura 5 Soporte de caja cilindrada simple

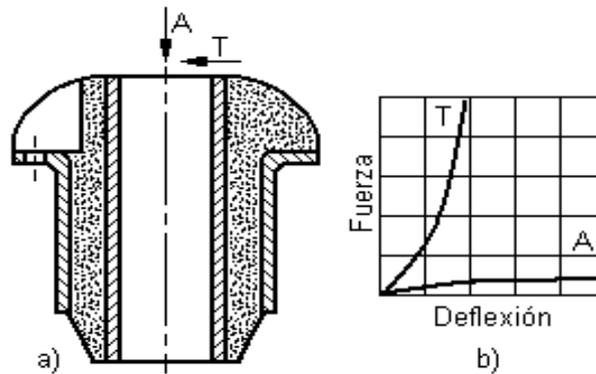


Ilustración: Héctor Terán

Soportes de caja.

Estos soportes están constituidos, esquemáticamente, por un casquillo de caucho adherido entre dos armaduras metálicas tubulares. Las armaduras metálicas pueden combinar formas cilíndricas o cónicas, dependiendo de la disposición que se necesite, para la asimilación de las cargas actuantes. Las formas cónicas favorecen la asimilación de cargas combinadas elevadas.

El soporte del ejemplo de la figura 5 (a) eleva muy poco la máquina sobre la base y presenta una alta rigidez en la dirección transversal; pero poca rigidez en la dirección axial (figura 5 b).

En otros casos, con la brida inferior de cuatro agujeros de fijación y su almohadilla superior embutida, permiten un montaje fácil y rápido. Provistos en su base de una suela de caucho acanalada, hacen posible una simple colocación en el suelo sin empotramiento (figura 6 a). Estos soportes poseen alta rigidez, tanto axial, como transversal (Figura 6 b); pero elevan la máquina significativamente sobre la base.

Los soportes de caja cilíndrica, en general, aseguran a la máquina suspendida una buena guía vertical y una fuerte resistencia a los esfuerzos transversales, por lo que pueden ser utilizados, con excelentes resultados, en la suspensión de equipos que estén sometidos a grandes empujes transversales, como los producidos por las transmisiones flexibles (por correas o cadenas).

También la transportación de máquinas, montadas sobre plataformas móviles, engendra fuertes empujes transversales sobre los soportes, debido a las fuerzas de inercia, que surgen durante el arranque y frenado de dichas plataformas.

Figura 6 Soporte de caja cilindrada con suela acalanada

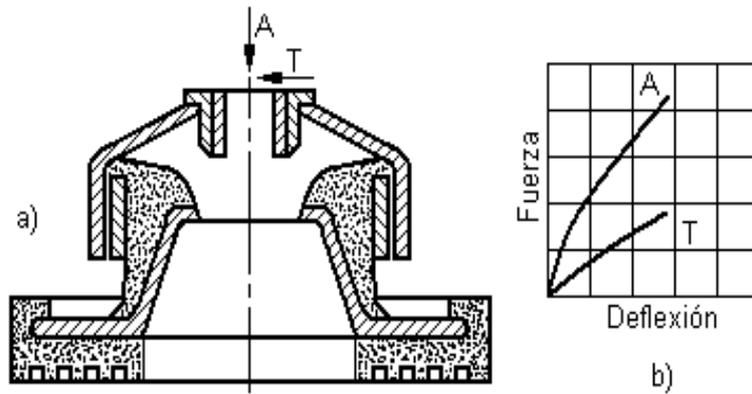


Ilustración: Héctor Terán

Soportes de igual frecuencia (de equifrecuencia).

Son soportes a los cuales se les da una forma geométrica y estructura apropiadas, para que la flexibilidad (o rigidez) sea sensiblemente igual en todas las direcciones, de modo que la frecuencia propia de las vibraciones, en esas diversas direcciones, sea la misma.

Estos soportes son eficaces cualquiera que sea la orientación de las vibraciones. Algunos tienen armaduras tubulares (figura 7 a), y otros no planas (figura 7 b). Las tubulares tienen una mayor flexibilidad axial y en particular son mucho más convenientes para la protección de aparatos ligeros y frágiles.

Figura 7 Soporte de equifrecuencia

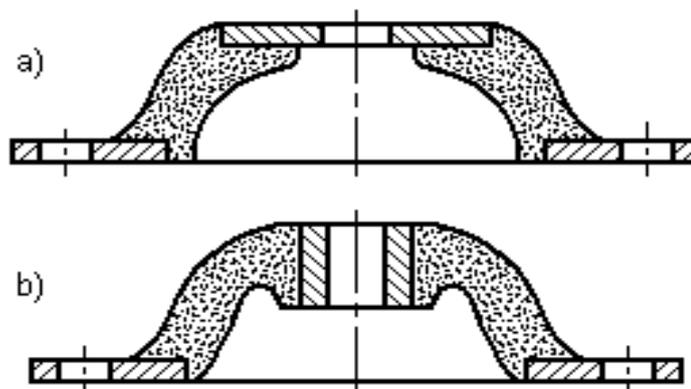


Ilustración: Héctor Terán

Soportes de junta o pila.

Son elementos elásticos del tipo “sándwich”, que presentan sobre sus caras superiores e inferiores salientes y cavidades que permiten superponerlos en serie, y la flexibilidad del conjunto es proporcional al número de elementos aplicados. Algunos elementos (figura a) son en forma de discos, con nervaduras de junta circular, montados en pilas.

Constituyen soportes de gran desplazamiento, susceptibles de almacenar importantes cantidades de energía, que pueden, de este modo, reemplazar ventajosamente a los resortes helicoidales de acero. Son, por tanto, empleados con éxito en las suspensiones suaves amortiguadoras de gran absorción (ferrocarriles, minas, puentes rodantes, etc.).

Otros (figura 8 b), de placas en forma rectangular, con nervaduras de junta en forma de cruz, ejecutadas en mezcla de neopreno, para resistir bien el envejecimiento cuando estén a la intemperie, sirven de apoyos elásticos a puentes y otras obras de ingeniería civil.

Figura 8 Soporte de equifrecuencia

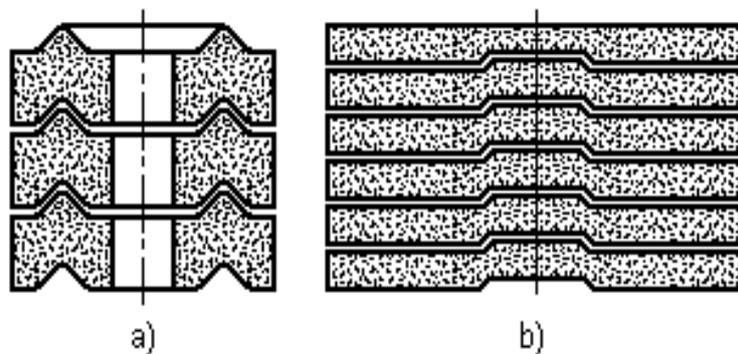


Ilustración: Héctor Terán

Soportes especiales.

Existen soportes que están destinados a proteger de las vibraciones exteriores a los aparatos relativamente ligeros. Este es el caso de algunos soportes utilizados en suspensiones en voladizo de instrumentos sensibles, contra una pared vertical. En la figura 10 se muestra un ejemplo de este tipo de aislador

Figura 9 Soporte especial

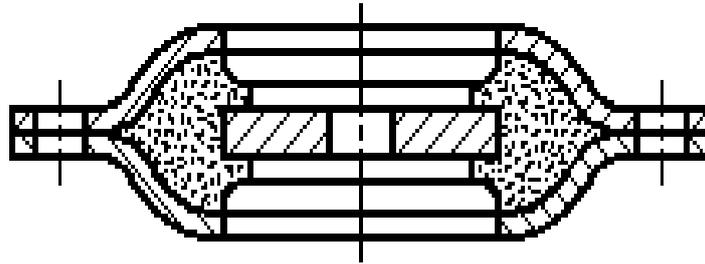


Ilustración: Héctor Terán

Limitadores de desplazamiento (parachoques).

En este caso no podemos hablar propiamente de soportes, sino de elementos de limitación de los desplazamientos, que atenúan los efectos de los choques. Entre ellos se distinguen dos tipos:

Los limitadores de desplazamiento simples (figura 10 a), con frente de ataque plano y sección aproximadamente constante. En estos la fuerza elástica de reacción a las deformaciones varía linealmente (dentro de los límites admitidos), es decir, que el coeficiente de rigidez es constante, (Panovko, 1971).

- Los limitadores de desplazamiento progresivos (figura 10 b), cuyo frente de ataque es en forma de un elipsoide de revolución y su sección variable, lo que proporciona una variación de la fuerza elástica de reacción a las deformaciones no lineal, es decir, que el coeficiente de rigidez aumenta, a medida que aumenta la deformación.

Figura 10 Parachoques o limitadores de desplazamiento

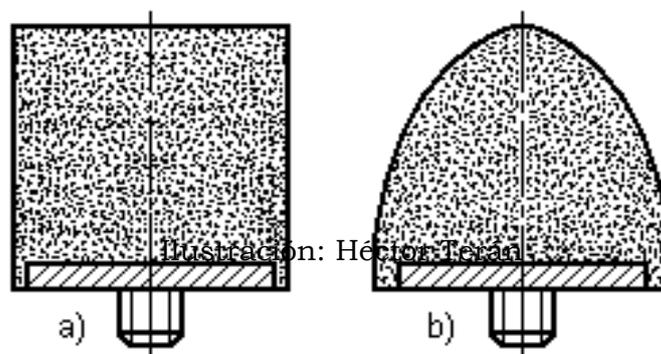


Ilustración: Héctor Terán

Ilustración: Héctor Terán

Figura 11 Soporte de resortes helicoidales

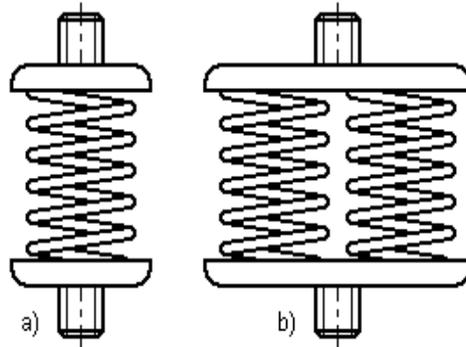


Ilustración: Héctor Terán

Soportes de muelles (resortes)

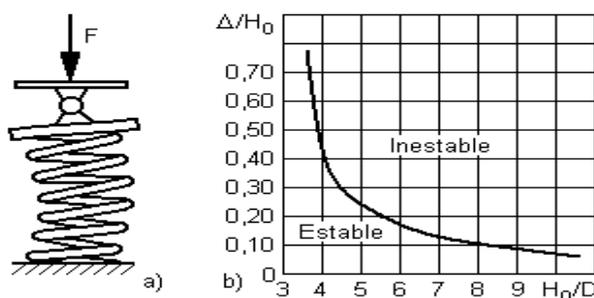
Los resortes helicoidales (muelles) son otros de los elementos que suelen emplearse para el aislamiento de las vibraciones (figura 11). Estos muelles pueden ser cargados a tracción, pero es más conveniente cargarlos a compresión. La máquina se coloca encima de los soportes por medio de tornillos, que a la vez sirven de guías, logrando así la alineación del equipo. Cada soporte puede estar compuesto por un resorte, como se muestra en la figura 11 a), o por varios resortes en paralelo. En la figura 11 b), se presenta un soporte compuesto por dos resortes; pero la cantidad de resortes puede ser mucho mayor.

Las ventajas de los resortes consisten, principalmente, en su capacidad de sufrir grandes deformaciones, conservando constante su coeficiente de rigidez, es decir, que se comportan linealmente dentro de un amplio rango de deformación.

Los soportes de muelles son usados para el aislamiento de las vibraciones, principalmente, cuando estas son de baja frecuencia, por consiguiente, la deflexión estática de los muelles debe ser relativamente mayor, en comparación con las sufridas por los aisladores de goma. Esto conlleva el peligro de la inestabilidad, con la posibilidad de que el equipo montado sobre los resortes pueda irse hacia los lados, si no se toman las medidas necesarias para evitar este fenómeno. La inestabilidad se debe, frecuentemente, a que la rigidez lateral del resorte es pequeña, o que la deflexión es muy grande, (Erchart y Salermo, 1972).

Dependiendo del tipo de fijación de los extremos del resorte, que puede permitir la rotación o traslación lateral de dichos extremos, la experiencia ha establecido determinados valores límites de la relación (H_0/D) entre la longitud libre del resorte, y el diámetro medio de este, a partir de los cuales se hace necesario controlar la estabilidad lateral. (Fig. 12).

Figura 12 Estabilidad del resorte helicoidal



Δ : Deflexión del resorte
 D : Diámetro del resorte
 H_0 : Longitud del resorte sin carga

Ilustración: Héctor Terán

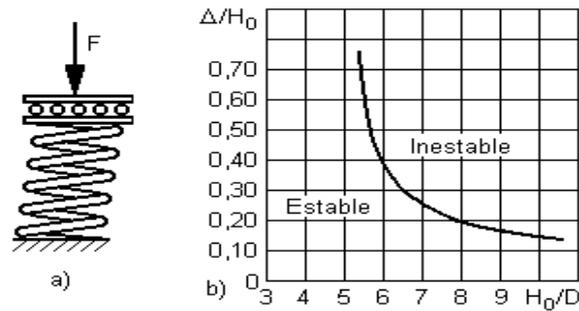
Cuando los extremos se fijan por medio de articulaciones, que permiten su rotación, el valor límite de la relación entre la longitud libre del resorte y el diámetro medio de este es de 2,5. Una equivalencia común de articulación es la del resorte apoyado sobre una bola, como, por ejemplo, en una válvula de bola.

Cuando los extremos se fijan rígidamente a superficies paralelas, que no permiten su rotación, el valor límite de la relación entre la longitud libre del resorte y el diámetro medio de este se puede elevar hasta 5. En la literatura especializada se observan marcadas diferencias entre los valores límites recomendados, para dicha relación, por diferentes autores. También se debe destacar que, en el montaje de un resorte dado, se pueden combinar dos tipos de fijación de sus extremos, según sea necesario y posible, como se muestra en las figuras 13 a) y 14 a). En tales casos, los valores límites de la relación longitud libre/diámetro medio tomarán valores intermedios entre los dos casos extremos analizados anteriormente.

Para uso práctico, se han confeccionado curvas que muestran la dependencia de la razón deflexión (D) entre longitud libre del resorte (H_0) con respecto a la razón longitud libre del resorte (H_0) entre el diámetro medio (D), como se presenta en las figuras 13 b) y 14 b). Estas curvas dividen el gráfico en dos regiones: una, en la que la combinación de los parámetros da por resultado un resorte estable; y otra, cuya combinación proporciona un resorte inestable.

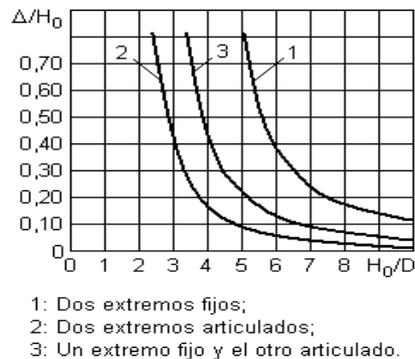
En la figura 14, se presenta otro ejemplo de gráfico de valoración de la estabilidad de los resortes, que contiene los dos casos límites (ambos extremos fijos y ambos extremos articulados), no contenidos en las figuras 12 y 13.

Figura 13 Estabilidad del resorte helicoidal



Δ : Deflexión del resorte
 D : Diámetro medio
 H_0 : Longitud del resorte sin carga
 Ilustración: Héctor Terán

Figura 14 Estabilidad de los resortes según la fijación



Δ : Deflexión del resorte
 D : Diámetro medio
 H_0 : Longitud del resorte sin carga
 Ilustración: Héctor Terán

Cuando sea necesario utilizar un resorte con una relación longitud libre/diámetro medio, que pueda implicar la aparición de inestabilidad lateral, se puede añadir un vástago guía dentro del resorte, o colocar el resorte en un agujero, que limiten los desplazamientos laterales de las espiras. Estas soluciones, ampliamente utilizadas en la práctica, introducen rozamiento entre el resorte y la guía, con pérdida de energía y el desgaste consecuente, (Meirovitch, 2001).

Además de las desventajas expuestas anteriormente, debe agregarse que los soportes de muelles prácticamente no poseen propiedades amortiguadoras, por tanto, las amplitudes y la transmisibilidad en la zona de resonancia son extremadamente altas. Por otro lado, el hecho de que permitan el paso de señales de alta frecuencia hace que para esas frecuencias se produzcan ruidos excesivos.

Selección y proyección de los soportes flexibles.

Como se ha visto en varios ejemplos, en la práctica, con frecuencia, es necesario instalar un sistema o máquina, generador de vibraciones, sobre una estructura, en la cual estas son perjudiciales. También se da el caso en el que la máquina instalada debe ser aislada de las vibraciones que provienen del medio. En ambos casos, aunque con objetivos totalmente diferentes, se deben utilizar soportes flexibles.

El logro de un buen aislamiento de las vibraciones depende de la correcta selección o proyección de los soportes a utilizar, así como de su cantidad y disposición. En la figura 15, se muestra un ejemplo frecuente. En este caso, buscando una buena alineación entre el motor y la máquina de trabajo, ambos se fijan rígidamente a una plataforma común. Entonces el sistema se aísla de la base, colocándolo sobre soportes flexibles.

En el ejemplo que se muestra se utilizan cuatro soportes iguales, distribuidos uniformemente a ambos lados del eje longitudinal de simetría y colocados a iguales distancias de los extremos de la plataforma; pero esto no es un esquema de obligatorio cumplimiento. En las aplicaciones reales puede ser necesario utilizar cantidades mayores o menores de soportes, diferentes entre sí, y distribuidos no uniformemente.

Los soportes flexibles se ofertan en una gran variedad, que prácticamente cubre cualquier necesidad concreta. Como conocemos, cualquier elemento flexible se caracteriza por su coeficiente de rigidez y la máxima deformación (deflexión) que puede experimentar. El coeficiente de rigidez, conjuntamente con la masa que está suspendida sobre el elemento elástico, determina la frecuencia natural del sistema, que constituye un importante parámetro.

Figura 15 Máquina sobre soportes elásticos

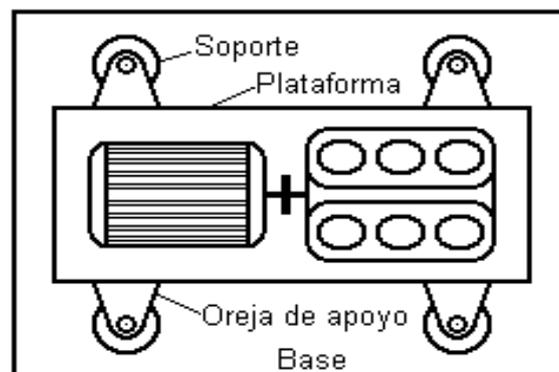


Ilustración: Héctor Terán

En la práctica, sin embargo, con frecuencia se utiliza la deflexión estática, que sufre el soporte flexible bajo la acción de la parte del peso de la masa suspendida, que le corresponde, en lugar de la constante de rigidez. Esto se debe a que entre la deflexión estática y el coeficiente de rigidez hay una estrecha relación, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\Delta_{est} = \frac{P}{k} \Rightarrow k = \frac{P}{\Delta_{est}} \quad (1)$$

En la expresión anterior:

Δ_{est} Deflexión estática, que sufre el soporte, bajo la acción de la fuerza P

P Parte del peso de la masa suspendida, que le corresponde al soporte.

k Coeficiente de rigidez del soporte.

La frecuencia natural de un sistema masa-resorte, como se expuso anteriormente, se obtiene por medio de la expresión:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en la fórmula (2), se obtiene:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{P/\Delta_{est}}{P/G}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{est}}} \quad (3)$$

Donde “g” es la aceleración de la gravedad. ($g = 9,81 \text{ m/s}$, en el SI de Unidades).

En la práctica, se utiliza frecuentemente la unidad de velocidad angular “revoluciones por minuto” (rpm), que no corresponde al Sistema Internacional de Unidades. Para llevar la frecuencia natural de “radianes por segundo” (rad/s) a “revoluciones por minuto” (rpm), y trabajar con la deflexión estática en milímetros (mm), la expresión (3) toma la forma:

$$n_n = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81}{\Delta_{est}/1000}}$$

Simplificando, se obtiene:

$$n_n = \frac{946}{\sqrt{\Delta_{est}}} [rpm] \quad (4)$$

En la expresión (4), la deflexión estática se introduce en milímetros (mm) y la “frecuencia angular natural” se obtiene en revoluciones por minuto (rpm). El razonamiento expuesto acompañado de las expresiones 1 hasta 4, demuestra la simplificación significativa del problema, cuando se utiliza la deflexión estática, para el cálculo de la “velocidad angular natural”. Es necesario añadir, que la deflexión estática debe ir acompañada del peso que la produce (P), para que pueda servir como un criterio en la selección o proyección de los soportes.

Selección de los soportes flexibles.

La metodología de selección de los soportes flexibles se desarrollará sobre la base del ejemplo práctico de la figura 15.

Se supone que se deben seleccionar los soportes para aislar las vibraciones de una máquina de una tonelada de peso ($W = 10\,000$ Newton = 1000 kgf), que rota con una velocidad angular (n) de 1500 rpm. La superficie que contendrá los puntos de apoyo es de forma rectangular y la proyección del centro de gravedad coincide con el centro geométrico de dicha superficie. A continuación se muestran los pasos a seguir.

a. Fijar todos los datos necesarios.

En el ejemplo propuesto, con toda intención, se suministran los datos básicos:

Peso de la máquina: $W = 10000$ N = 1000 kgf; y

Velocidad angular: $n = 1500$ rpm.

Cantidad de soportes. Generalmente los diseñadores tratan de colocar los conjuntos en la máquina, y los puntos de apoyo (orejas de apoyo), de forma que se logre una distribución equitativa del peso en los puntos de apoyo. Los puntos u orejas de apoyo, frecuentemente, se colocan en los vértices y lados de rectángulos.

En el caso de un nuevo diseño, la cantidad de puntos de apoyo se selecciona de acuerdo a la forma y dimensiones de la superficie de apoyo de la máquina; al peso de esta; y a las posibilidades de que ocurran deformaciones mayores que las permisibles. En el caso que nos ocupa, de la figura se ve que la cantidad de soportes es igual a cuatro: $C_{sop} = 4$.

b. Determinación de la parte del peso de la máquina, que corresponde a cada soporte.

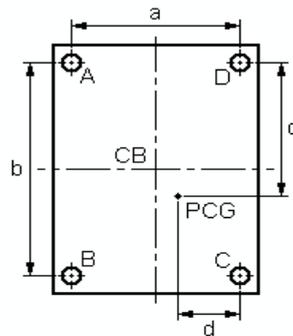
Los diseñadores deben tratar de distribuir los conjuntos de la máquina de forma tal, que la proyección vertical del centro de gravedad coincida con el centro geométrico de la base, para que el peso se distribuya equitativamente entre los soportes. Si no se puede lograr esa condición, entonces el peso (W) de la máquina no se distribuirá por igual en los soportes, si estos se colocan en los vértices y lados de un rectángulo, como se muestra en la figura 16.

Es importante tratar de obtener, hasta donde sea posible, la misma deflexión estática en todos los soportes, seleccionando las dimensiones y coeficientes de rigidez adecuados, para equilibrar el peso en cada punto de apoyo.

Supóngase el caso general, en que la proyección vertical del centro de gravedad (punto PCG) no coincide con el centro geométrico de la base (punto CB). En aras de la simplificación, y sin perder generalidad, los cuatro puntos de apoyo se colocan según un rectángulo (ABCD), como se muestra en la figura 16.

Teniendo en cuenta la posición de la proyección vertical del centro de gravedad (punto PCG), la parte (P) del peso, que corresponde a cada soporte será:

Figura 16 Asimetría del peso



$$P_A = W \cdot \frac{(b-c)}{b} \cdot \frac{d}{a} \quad (5)$$

$$P_B = W \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{a} \quad (6)$$

$$P_C = W \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{(a-d)}{a} \quad (7)$$

$$P_D = W \cdot \frac{(b-c)}{b} \cdot \frac{(a-d)}{a} \quad (8)$$

Con frecuencia, en aras de la simplificación, y por las dificultades que se presentan para determinar la posición exacta del centro de gravedad, se considera que la proyección vertical de este coincide con el centro geométrico de la superficie de apoyo. Así, el peso se distribuye por igual en los soportes. Este es el caso de la máquina que se analiza (figura 15).

En este ejemplo, el peso, que recae en cada soporte (P), se obtiene dividiendo el peso total entre la cantidad de soportes, como se muestra en la siguiente expresión:

$$P = W / C_{sop} \quad (9)$$

Sustituyendo:

$$P = \frac{10000N}{4} \Rightarrow P = 2500N \Rightarrow P = 250 \text{ kgf}$$

c. Determinación de la deflexión estática preliminar de los soportes. (Enfoque gráfico).

El enfoque gráfico implica la utilización de curvas para determinar la deflexión de resonancia, y para comprobar que la combinación de velocidad angular y deflexión inicial garantiza el trabajo de la máquina suspendida en la zona de aislamiento vibratorio.

Para determinar la deflexión inicial, primeramente se determina la deflexión de resonancia, a partir de los gráficos, que se muestran en la figura 17. Las curvas de dicha figura no son más que la representación gráfica de la expresión (4), tomando dos escalas diferentes para las abscisas, para lograr una buena apreciación, tanto en las altas frecuencias, como en las bajas.

Estas curvas permiten obtener la deflexión estática de los soportes, que produciría una frecuencia propia (de resonancia) igual a la velocidad angular de trabajo de la máquina. Al gráfico se entra con la velocidad angular de trabajo (en rpm), por el eje de las ordenadas. Se traza una línea horizontal hacia la derecha, hasta encontrar la curva de resonancia. Desde el punto de intercepción, se traza una línea vertical hacia abajo, hasta el eje de las abscisas. Así se determina la deflexión de resonancia Δ_{res} (en milímetros).

Figura 17 Frecuencias propias en función de las deflexiones estáticas

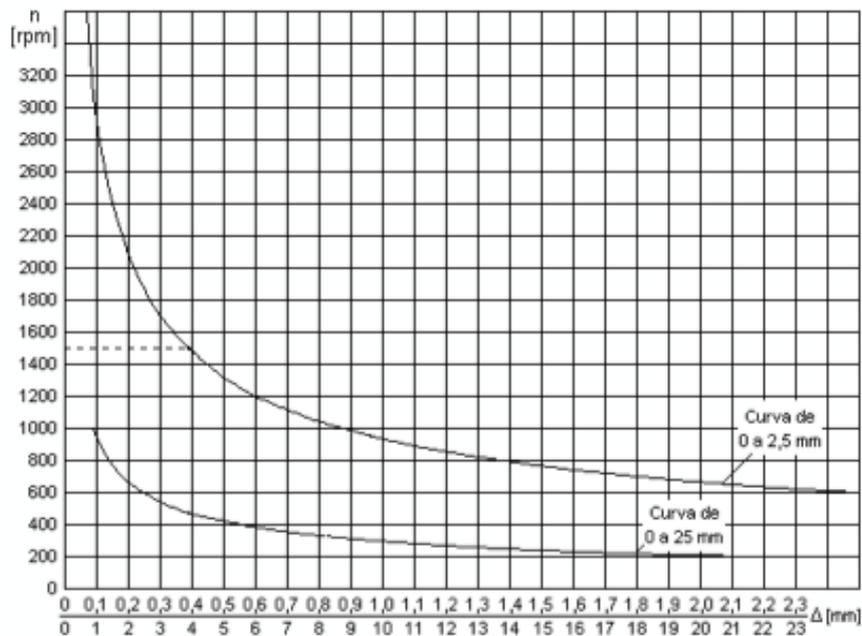


Ilustración: Héctor Terán

En este ejemplo, dada la velocidad angular de trabajo de la máquina ($n = 1500$ rpm), se obtiene una deflexión de resonancia:

$$\Delta_{res} = 0,4mm$$

Como el sistema debe trabajar fuera del pico de resonancia, se deben escoger soportes más suaves, es decir, que sufran una deformación mayor bajo la acción de la carga estática. Para tratar de lograr esto, se escoge una deflexión estática inicial mayor que la deflexión estática de resonancia. Debe ser, por lo menos, el doble:

$$\Delta_{in} = 2 \cdot \Delta_{res} \quad (10)$$

Sustituyendo en la expresión (10), se obtiene:

$$\Delta_{in} = 2 \cdot 0,4mm \Rightarrow \Delta_{in} = 0,8mm$$

El paso anterior no garantiza que el sistema trabaje fuera de la zona de resonancia. Esto se comprueba por medio de los gráficos de las figuras 19, para velocidades angulares superiores a las 600 rpm, y 20, para velocidades angulares inferiores a las 600 rpm.

Figura 18 Posibles zonas de trabajo del sistema máquina-soportes

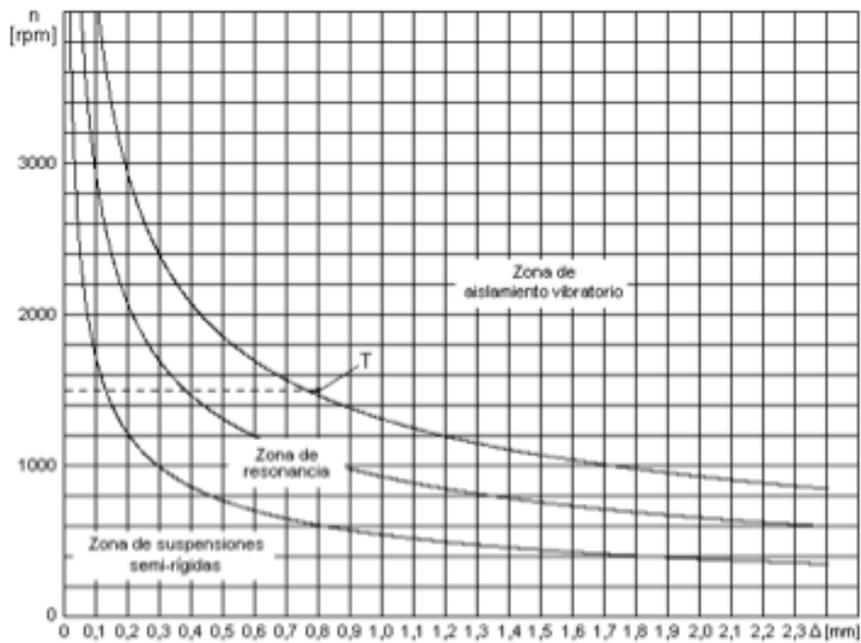


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 18, con la deflexión inicial y la velocidad angular de trabajo, como un par coordinado (punto T), se observa si el sistema estará trabajando en la zona de resonancia o fuera de dicha zona. Si el punto de trabajo cae en la zona de resonancia, se deben escoger soportes más suaves, es decir, que la deflexión estática debe ser mayor, para que el sistema trabaje en la zona de aislamiento vibratorio.

En dicha figura, con la deflexión inicial (0,8 mm) y la velocidad angular de trabajo (1500 rpm), se observa que el sistema estará trabajando en el límite entre la zona de resonancia y la zona de aislamiento vibratorio (punto T). Para que el sistema trabaje bien entrado en la zona de aislamiento vibratorio, se deben escoger soportes más suaves, es decir, que la deflexión estática debe ser mayor. Para lograr esto, se escoge una deflexión estática preliminar mayor que la deflexión inicial. Debe ser el doble o mayor. En este caso se escogerá el doble:

$$\Delta_{estp} = 2 \cdot \Delta_{in} \tag{11}$$

Sustituyendo:

$$\Delta_{estp} = 2 \cdot 0,8mm \Rightarrow \Delta_{estp} = 1,6mm$$

En este caso, la deflexión estática obtenida sitúa el punto de trabajo fuera de la zona de resonancia, y bien entrado en la zona de aislamiento vibratorio, que es el objetivo.

Figura 19 Posibles zonas de trabajo del sistema máquina-soportes

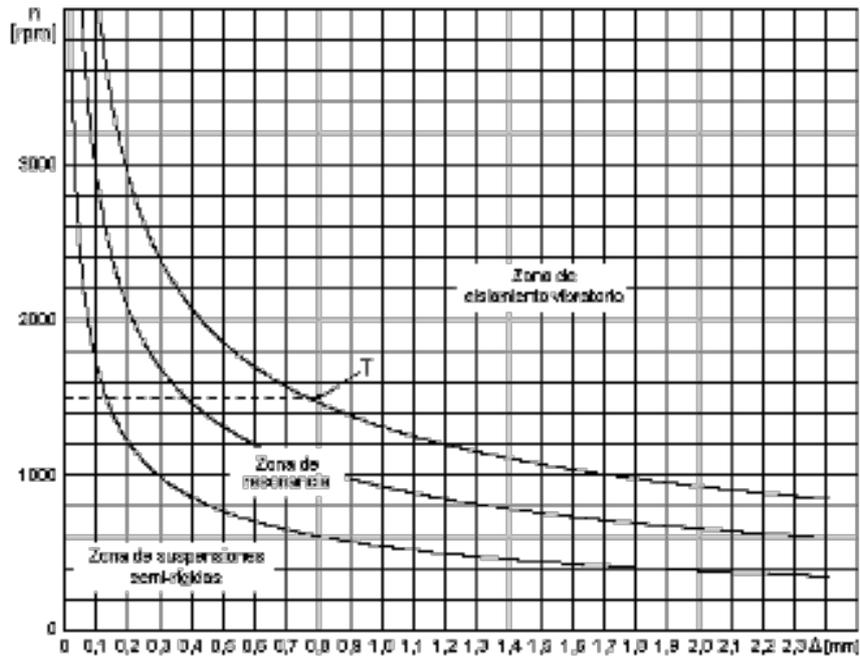


Ilustración: Héctor Terán

El enfoque gráfico presenta la dificultad, relacionada con la complejidad y tamaño de los gráficos, en que se basa. Además, el fijar una determinada deflexión estática preliminar no da una idea exacta de la frecuencia natural preliminar, que se logrará con esta.

Determinación analítica de la deflexión estática preliminar. (Enfoque analítico).

En la figura 20, se presenta el gráfico de comportamiento de la transmisibilidad (adimensional), en función de la relación de frecuencias, para varias relaciones de amortiguamiento diferentes. En el gráfico se pueden resaltar determinados puntos e intervalos en el eje de las abscisas, y definir los siguientes detalles de interés:

- B: punto que corresponde a una relación de frecuencias igual a raíz de dos ($\omega/\omega_n \approx 1,41$). Para este valor de la relación de frecuencias, las curvas se cruzan, y cualquiera que sea la relación de amortiguamiento, la transmisibilidad será igual a uno. A partir de este punto hacia la derecha, cualquiera que sea la relación de amortiguamiento, la transmisibilidad será menor que la unidad.
- O-A: zona anterior a la resonancia, denominada zona de suspensiones semirrígidas. El punto A corresponde a una relación de frecuencias igual a dos menos la raíz de dos ($\omega/\omega_n \approx 0,59$). En esta zona, la

Figura 20 Zona de aislamiento vibratorio en el gráfico de transmisibilidad

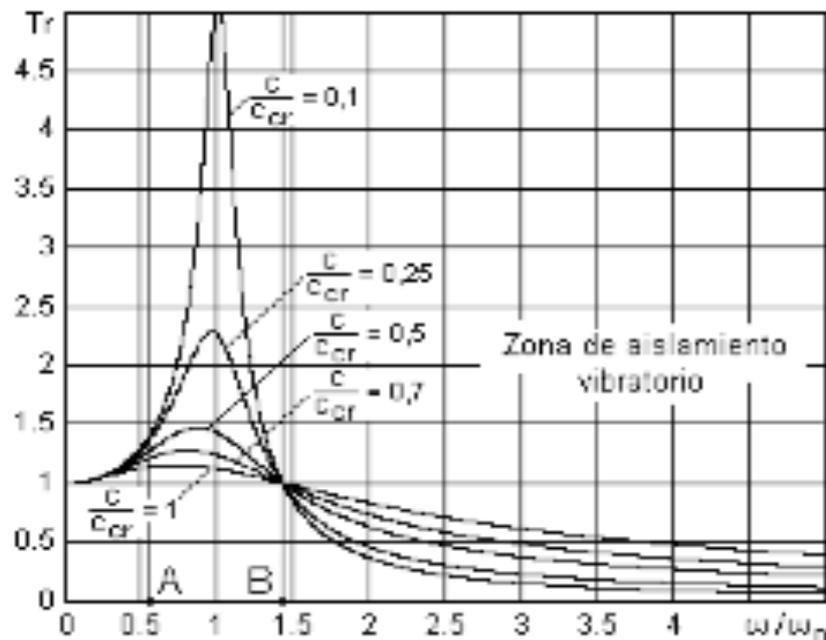


Ilustración: Héctor Terán

transmisibilidad, cualquiera que sea la relación de amortiguamiento, siempre será ligeramente mayor que uno. De forma similar se comporta la amplitud.

- A-B: zona de resonancia, en la que aparecen valores muy altos de la transmisibilidad. De forma similar se comporta la amplitud.
- Desde B hacia la derecha: zona de aislamiento vibratorio. La relación de frecuencia será mayor que la raíz de dos ($\omega/\omega_n > 1,41$). A medida que aumenta la relación de frecuencias, disminuye la transmisibilidad, acercándose asintóticamente a cero. De forma similar se comporta la amplitud.

A las suspensiones elásticas se le exigen coeficientes de transmisibilidad pequeños ($Tr \approx 0,10$). Para las relaciones de amortiguamiento de los soportes elastoméricos, estos valores de la transmisibilidad se alcanzan para relaciones de frecuencias entre tres y cuatro ($\omega/\omega_n = 3 \div 4$), como se nota en la figura 19. Para la determinación de la frecuencia natural preliminar, que debe caracterizar al sistema máquina-suspensión, se puede tomar el valor medio de ese intervalo ($\omega/\omega_n = 3,5$).

Para seleccionar o proyectar los soportes elastoméricos, es necesario conocer la velocidad angular de trabajo de la máquina (ω). Así se puede determinar la frecuencia natural preliminar, despejando de la relación de frecuencias, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\omega_{np} = \frac{\omega}{3,5} \quad (12)$$

Con esa frecuencia natural, se puede determinar la deflexión estática preliminar, despejando de la expresión (4.2.3). También, se pueden realizar los dos pasos en uno, despejando de la expresión (3) y sustituyendo la frecuencia natural, obtenida en la expresión anterior (12), como se muestra a continuación:

$$\omega_{np} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{estp}}} \Rightarrow \Delta_{estp} = \frac{g}{\left(\frac{\omega}{3,5}\right)^2} \Rightarrow \Delta_{estp} = 12,25 \frac{\omega}{3,5}$$

Para la velocidad angular de la máquina del ejemplo analizado, se obtiene una deflexión estática preliminar:

$$\Delta_{estp} = 4,87 \text{ mm}$$

Como puede notarse, en este ejemplo la deflexión estática preliminar, obtenida analíticamente, es significativamente mayor que la obtenida gráficamente. Como se verá más adelante, el valor obtenido analíticamente se acerca mucho más al valor real de este parámetro.

Los datos $P=2500\text{N}$ y $\Delta_{estp} = 1,6\text{mm}$ (según el enfoque gráfico) o $\Delta_{estp} = 4,8\text{mm}$ (según el enfoque analítico) son suficientes para solicitar un soporte elástico de un tipo determinado, a un proveedor. A partir de estos datos, también se pueden proyectar y fabricar los soportes elastoméricos.

Consideraciones generales en la selección.

Si se trata de una máquina, cuya velocidad angular de trabajo es muy baja, se pueden presentar problemas para realizar el aislamiento. En estos casos, es posible recurrir a suspensiones semirrígidas, escogiendo los soportes de forma tal, que conlleven a un régimen de trabajo del sistema situado en la zona comprendida entre la curva inferior y los ejes de coordenadas, en la figura 19.

No se deben sobrecargar los soportes, en lo que concierne a las cargas estáticas. Tampoco es conveniente tomar el coeficiente de seguridad superior a 1,5, ya que las cargas dinámicas, resultantes del funcionamiento de la máquina, son, por lo general, pequeñas en comparación con las cargas estáticas.

Con los datos anteriores (carga y deflexión estática), se seleccionará en los catálogos el soporte adecuado. Evidentemente, no se impone un tipo de soporte determinado para una máquina dada. En muchos casos, se puede escoger dentro de una determinada variedad de soportes elásticos y el tipo concreto de soporte se seleccionará en función de otros criterios también importantes, como:

- Seleccionar los soportes que presentan la mayor suavidad en la dirección de las vibraciones preponderantes.
- Tratar de lograr que los esfuerzos exteriores actúen sobre la goma a compresión.
- Utilizar los soportes de caja cilíndrica para las máquinas que soportan empujes o tracciones horizontales de una correa, de una tubería, etc., y para las máquinas montadas sobre vehículos automotores o ferroviarios, que soportan esfuerzos de inercia debido a las aceleraciones y al frenado.

La selección definitiva se realizará teniendo en cuenta todos los criterios, mencionados anteriormente, además de tener en cuenta el amortiguamiento necesario y las facilidades de montaje.

Proyección de los soportes elastoméricos.

La metodología de proyección de los soportes elastoméricos se desarrollará sobre la base del mismo ejemplo práctico, tomado para la selección de los soportes.

En este caso, se supone que se deben diseñar los soportes para aislar las vibraciones de la máquina de la figura 15, de una tonelada de peso ($W = 10\ 000$ Newton = 1000 kgf), que rota con una velocidad angular (n) de 1500 rpm.

La metodología a utilizar se expondrá sobre la base de la proyección de un soporte tipo “sándwich”, aunque esta puede ser aplicada a cualquier tipo, con las adaptaciones correspondientes. A continuación se muestran los pasos a seguir.

a. Fijar todos los datos necesarios.

En el ejemplo propuesto, con toda intensidad, se suministran los datos básicos. Pero, para la proyección de los soportes, son necesarios otros datos más, que se deben fijar al comienzo de la solución del problema. A continuación se repiten los datos básicos, y se añaden los restantes.

Peso de la máquina: $W = 10000 \text{ N} = 1000 \text{ kgf}$; y
Velocidad angular: $n = 1500 \text{ rpm}$
 (Williams y Flannery, 1989).

Consideraciones generales en la selección.

Si se trata de una máquina, cuya velocidad angular de trabajo es muy baja, se pueden presentar problemas para realizar el aislamiento. En estos casos, es posible recurrir a suspensiones semirrígidas, escogiendo los soportes de forma tal, que conlleven a un régimen de trabajo del sistema situado en la zona comprendida entre la curva inferior y los ejes de coordenadas, en la figura 19.

No se deben sobrecargar los soportes, en lo que concierne a las cargas estáticas. Tampoco es conveniente tomar el coeficiente de seguridad superior a 1,5, ya que las cargas dinámicas, resultantes del funcionamiento de la máquina, son, por lo general, pequeñas en comparación con las cargas estáticas.

Con los datos anteriores (carga y deflexión estática), se seleccionará en los catálogos el soporte adecuado. Evidentemente, no se impone un tipo de soporte determinado para una máquina dada. En muchos casos, se puede escoger dentro de una determinada variedad de soportes elásticos y el tipo concreto de soporte se seleccionará en función de otros criterios también importantes, como:

- Seleccionar los soportes que presentan la mayor suavidad en la dirección de las vibraciones preponderantes.
- Tratar de lograr que los esfuerzos exteriores actúen sobre la goma a compresión.
- Utilizar los soportes de caja cilíndrica para las máquinas que soportan empujes o tracciones horizontales de una correa, de una tubería, etc., y para las máquinas montadas sobre vehículos automotores o ferroviarios, que soportan esfuerzos de inercia debido a las aceleraciones y al frenado.

La selección definitiva se realizará teniendo en cuenta todos los criterios, mencionados anteriormente, además de tener en cuenta el amortiguamiento necesario y las facilidades de montaje.

Proyección de los soportes elastoméricos.

La metodología de proyección de los soportes elastoméricos se desarrollará sobre la base del mismo ejemplo práctico, tomado para la selección de los soportes.

En este caso, se supone que se deben diseñar los soportes para aislar las vibraciones de la máquina de la figura 15, de una tonelada de peso ($W = 10\,000\text{ Newton} = 1000\text{ kgf}$), que rota con una velocidad angular (n) de 1500 rpm.

La metodología a utilizar se expondrá sobre la base de la proyección de un soporte tipo “sándwich”, aunque esta puede ser aplicada a cualquier tipo, con las adaptaciones correspondientes. A continuación se muestran los pasos a seguir.

a. Fijar todos los datos necesarios.

En el ejemplo propuesto, con toda intensidad, se suministran los datos básicos. Pero, para la proyección de los soportes, son necesarios otros datos más, que se deben fijar al comienzo de la solución del problema. A continuación se repiten los datos básicos, y se añaden los restantes.

Peso de la máquina: $W = 10000\text{ N} = 1000\text{ kgf}$; y

Velocidad angular: $n = 1500\text{ rpm}$.

Cantidad de soportes. Se tienen en cuenta los mismos factores, que se mencionaron para la selección. En el caso que nos ocupa, de la figura se ve que la cantidad de soportes es igual a cuatro: $C_{\text{sop}} = 4$.

Transmisibilidad máxima. De acuerdo al tipo de máquina y al ambiente, en el que va a trabajar esta, se establece la transmisibilidad máxima permisible. Los valores máximos permisibles están alrededor del 10 %, es decir 0,10. En este caso, se establecerá una transmisibilidad máxima permisible: $T_{\text{max}} = 0,14$.

Otros datos necesarios.

Material (elastómero). El material se escoge de la tabla 1.2.1, según las condiciones de trabajo, y teniendo en cuenta los factores económicos. Al material seleccionado le corresponde una determinada relación de amortiguamiento (R_{am}). En este caso se escoge neopreno, con una relación de amortiguamiento: $R_{\text{am}} = 0,04$.

Dureza del elastómero. La dureza servirá de base para determinar el módulo de elasticidad del material. En este ejemplo, se asume un material con un valor de 45 “Shore A”.

Ángulo de inclinación de los soportes. Si los soportes son inclinados, es necesario dar el ángulo de inclinación. En este ejemplo los soportes no son inclinados: $\alpha = 0$.

Datos derivados de los anteriores.

Masa de la máquina. Si el peso de la máquina está dado en kgf, la masa será, numéricamente, igual al peso. Si el peso está dado en Newton, entonces la masa se obtiene dividiendo entre la constante de la gravedad (g). En este caso: $m_{maq} = 1000 \text{ kg}$.

Frecuencia de trabajo de la máquina. La velocidad angular de trabajo de la máquina se dió en revoluciones por minuto (rpm). Si se desea obtener la frecuencia angular (en radianes por segundo), será necesario hacer la transformación:

$$\omega_{tr} = n \cdot \frac{2\pi}{60} \implies \omega_{tr} = 1500 \cdot \frac{2\pi}{60} \implies \omega_{tr} = 157.08 \text{ rad/s}$$

Módulo de elasticidad (módulo de Young) del elastómero (E₀).

El módulo de Young (E₀) se puede determinar mediante su relación con la dureza del elastómero, cualquiera que sea este. Para ello se utiliza la tabla 1.2.2, a la que hay que entrar con la dureza del elastómero. Por lo general, la dureza de los elastómeros, usados con este fin, oscila en el rango de 30 a 75 en la escala "Shore A".

Tabla 2 Parámetros característicos de los elastómeros.

| Dureza Shore A | Módulo de Young (E ₀) | | Módulo a cizallamiento (G) | | Constante (K) de corrección | Módulo de compresibilidad (E _{c3}) | |
|-------------------|--------------------------------------|---------------------|-------------------------------|---------------------|-----------------------------------|---|---------------------|
| | lbf/plg ² | kgf/cm ² | lbf/plg ² | kgf/cm ² | | lbf/plg ² | kgf/cm ² |
| 30 | 130 | 9,2 | 43 | 3,5 | 0,93 | 142 000 | 10 000 |
| 35 | 168 | 11,8 | 53 | 3,7 | 0,89 | 142 000 | 10 000 |
| 40 | 213 | 15,0 | 64 | 4,5 | 0,85 | 142 000 | 10 000 |
| 45 | 256 | 18,0 | 76 | 5,4 | 0,80 | 142 000 | 10 000 |
| 50 | 310 | 22,0 | 90 | 6,4 | 0,73 | 146 000 | 10 300 |
| 55 | 460 | 32,5 | 115 | 8,1 | 0,64 | 154 000 | 10 900 |
| 60 | 630 | 44,5 | 150 | 10,6 | 0,57 | 163 000 | 11 500 |

| Dureza Shore A | Módulo de Young (E ₀) | | Módulo a cizallamiento (G) | | Constante (K) de corrección | Módulo de compresibilidad (E _{c3}) | |
|-------------------|--------------------------------------|---------------------|-------------------------------|---------------------|-----------------------------------|---|---------------------|
| | lbf/plg ² | kgf/cm ² | lbf/plg ² | kgf/cm ² | | lbf/plg ² | kgf/cm ² |
| 65 | 830 | 58,5 | 195 | 13,7 | 0,54 | 171 000 | 12 100 |
| 70 | 1040 | 73,5 | 225 | 17,3 | 0,53 | 180 000 | 12 700 |
| 75 | 1340 | 94,0 | 317 | 22,2 | 0,52 | 189 000 | 13 300 |

Elaborado por: Héctor Terán

Para el ejemplo que se analiza, se tomará una dureza de 45 “Shore A”. Con esa dureza, en la tabla 1.2.2 obtenemos el valor del módulo de Young (E_0):

$$E_0 = 18,0 \text{ kgf/cm}^2$$

Además, en la misma tabla se obtiene la constante de corrección adimensional (K), que en este ejemplo es:

$$K = 80,0$$

b. Determinación de la parte del peso de la máquina, que corresponde a cada soporte.

Al igual que para la selección, el peso que recae en cada soporte (P) se obtiene dividiendo el peso total entre la cantidad de soportes, como se muestra en la siguiente expresión:

$$P = W/C_{sop}$$

Sustituyendo:

$$P = \frac{10000N}{4} \implies P = 2500N \implies P = 250\text{kgf}$$

c. Determinación de la deflexión estática preliminar de los soportes.

La determinación de la deflexión estática preliminar se realiza de la misma forma que en el caso de la selección, por lo que sólo se recordarán los resultados obtenidos.

Según el enfoque gráfico:

$$\Delta_{estp} = 1,6 \text{ mm}$$

Según el enfoque analítico:

$$\Delta_{estp} = 4,87 \text{ mm}$$

Los datos $P=250\text{kgf}$ (2500 N) y $\Delta_{estp}=1,6 \text{ mm}$ (o $\Delta_{estp}=4,87 \text{ mm}$) sirven de partida para proyectar y fabricar los soportes elastoméricos.

d. Seleccionar la forma y dimensiones básicas del soporte.

Si se decide tomar una forma cilíndrica para el soporte, para garantizar la estabilidad a compresión, se debe tomar una relación diámetro/altura (D/H), dentro del rango recomendado:

$$\frac{D}{H} \geq 1,50 \div 1,65 \quad ==> \quad H \leq \frac{D}{1,50 \div 1,65} \quad (13)$$

Se tomará, en este ejemplo, la relación diámetro/altura igual a 1,65. El diámetro se asume tentativamente, de acuerdo a la experiencia. Si se asume un diámetro:

$$D=10\text{cm}$$

Entonces la altura:

$$H \leq \frac{10\text{cm}}{1,65} \quad ==> \quad H \leq 6,06 \text{ cm}$$

Teniendo en cuenta el criterio anterior, se escoge la altura del soporte:

$$H=5\text{cm}$$

e. Determinación del factor de forma (S) del soporte.

Se conoce que los elastómeros son muy incompresibles en toda su masa, por lo que su volumen cambia poco al aplicársele una carga. Por otra parte, si se trata de restringir la libertad de la goma para variar las dimensiones transversales (con respecto a la dirección de aplicación de la carga), su rigidez puede alterarse (Cady, Walter G; y otros; 1956.)

En general, cuando la goma está libre para variar sus dimensiones transversales (figura 21), la rigidez de un bloque depende del factor de forma (S), que se define como:

$$S = \frac{\text{Área cargada}}{\text{área libre de carga}} \quad (14)$$

Figura 21 Bloques elastoméricos de sección rectangular (a) y circular (b)

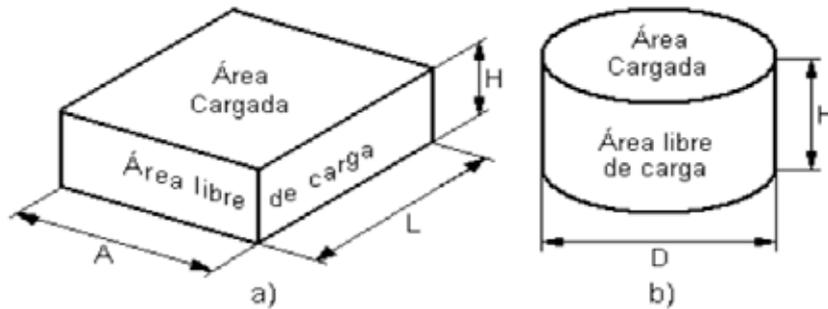


Ilustración: Héctor Terán

El factor de forma de un bloque de sección rectangular (figura 21 a), será:

$$S = \frac{L \cdot A}{2 \cdot (L + A) \cdot H} \tag{15}$$

Si se trata de un cilindro (figura 21 b):

$$S = \frac{\pi D^2 / 4}{\pi D H} \implies S = \frac{D}{4H} \tag{16}$$

Como en este caso se decidió tomar una forma cilíndrica para el soporte, el factor de forma será:

$$S = \frac{D}{4H} = \frac{10 \text{ cm}}{4 \cdot 4.5 \text{ cm}} \implies S = 0,5$$

f. Determinación del módulo efectivo en compresión (E_c) del soporte.

En la práctica el valor del módulo efectivo en compresión se determina por medio de la expresión:

$$E_c = E_0 (1 + 2 \cdot K \cdot S^2) \tag{17}$$

En el ejemplo que se analiza, el módulo efectivo en compresión será:

$$E_c = 18,0 (1 + 2 \cdot 0,8 \cdot (0,5)^2)$$

Calculando:

$$E_c = 25,20 \text{kgf/cm}^2$$

Si el soporte es inclinado, se utiliza el módulo de elasticidad equivalente (E_{eq}) en la expresión anterior (17).

g. Determinación de la deflexión estática real para el soporte proyectado. Teniendo en cuenta la Resistencia de Materiales, se puede plantear que la deflexión estática real será:

$$\Delta_{estr} = \frac{P.H}{\text{Área} \cdot E_c} \quad (18)$$

En el ejemplo que se analiza, el área cargada (Área) será:

$$\text{Área} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \implies \text{Área} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \implies \text{Área} = 78,54 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo los parámetros necesarios en la expresión (5.4.14), se obtiene:

$$\Delta_{estr} = \frac{250 \text{kgf} \cdot 5 \text{cm}}{78,54 \text{cm}^2 \cdot 25,20 \text{kgf/cm}^2} \implies \Delta_{estr} = 0,631 \text{cm}$$

La deflexión estática real, en milímetros, será:

$$\Delta_{estr} = 6,31 \text{mm}$$

La deflexión estática real, obtenida para el soporte diseñado, debe garantizar el trabajo de la máquina en la zona de aislamiento vibratorio. Si la deflexión estática real obtenida es mayor que la deflexión estática preliminar, el sistema estará trabajando bien entrado en la zona de aislamiento vibratorio, por lo que los resultados son satisfactorios.

Si la deflexión estática real es menor que la deflexión estática preliminar, se debe volver a los gráficos de las figuras 1.2.19, para velocidades angulares superiores a las 600 rpm, ó 1.2.20, para velocidades angulares inferiores a las 600 rpm, para observar cuan cercano a la zona de resonancia estará trabajando el sistema. Si el sistema va a estar trabajando en la zona de resonancia, o cercana a esta, será necesario rediseñar los soportes.

Si la deflexión estática preliminar se determina analíticamente, entonces será necesario calcular la relación de frecuencias real, para comprobar si esta se encuentra en el intervalo entre tres y cuatro (3 y 4). Si no fuera así, habría que calcular la transmisibilidad, para comprobar si se cumple el requisito establecido en este aspecto. El cálculo de ambos parámetros se realiza más adelante en esta metodología.

Rediseño de los soportes puede contemplar la variación del diámetro (D) y la altura (H) del bloque elastomérico; o escoger otro elastómero de dureza diferente. Una solución puede ser la variación de la cantidad de soportes, si el sistema lo permite. Luego se obtienen los nuevos resultados, repitiendo los cálculos desde el paso necesario.

En el ejemplo que se analiza, la deflexión estática real (6,31 mm), obtenida para el soporte diseñado, es significativamente mayor que la deflexión estática preliminar (1,6 mm, o 4,87 mm), fijada sobre la base del régimen de trabajo en la zona de aislamiento vibratorio. Esto significa que el soporte diseñado posee una constante de rigidez menor que la supuesta al inicio (es más suave), y por lo tanto, el sistema trabajará bien entrado en la zona de aislamiento vibratorio.

Si se desea que el soporte diseñado no sufra una deflexión estática tan grande, se aumenta el diámetro (D) del bloque elastomérico, o se disminuye la altura (H) de este. Otra posible medida sería escoger otro elastómero de mayor dureza (con un módulo de elasticidad mayor), para el soporte. Luego se comprueban los resultados obtenidos, repitiendo los cálculos desde el paso necesario.

Comprobación de las exigencias establecidas.

A continuación se obtienen otros parámetros de la suspensión, necesarios para comprobar si el coeficiente de transmisibilidad real es menor que el establecido en las exigencias, que se plantean a dicha suspensión. Otra exigencia pudiera estar relacionada con la limitación de la amplitud de las vibraciones del sistema. Los próximos pasos se consideran dentro de la metodología seguida hasta el momento, por lo que se continúa con el orden de los incisos.

h. Coeficiente de rigidez total de los soportes.

La constante de rigidez de cada soporte (kS) se determina por medio de la relación entre fuerza y deformación, que en este caso será la relación entre la parte del peso que cae en cada soporte y la deflexión estática real que produce. Transformando la expresión (18), se tendrá que:

$$k_s = \frac{P}{\Delta_{estr}} = \frac{\text{Área} \cdot E_c}{H} \implies k_s = \frac{\text{Área} \cdot E_c}{H} \quad (19)$$

En el ejemplo que se analiza:

$$k_s = \frac{78,54 \text{ cm}^2 \cdot 25,20 \text{ kgf/cm}^2}{5 \text{ cm}} \implies k_s = 395,84 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}} = 395840,0 \text{ N/m}$$

La constante de rigidez total se obtiene considerando que los soportes se encuentran en paralelo, por lo que se deben sumar los coeficientes de rigidez de todos los soportes. Como en este caso todos los soportes son iguales, se multiplica la cantidad de soportes por la constante de rigidez de un soporte, como se muestra a continuación:

$$k = C_{sop} \cdot k_s$$

Sustituyendo, para los valores concretos de este ejemplo:

$$k = 4 \cdot 395840,0 \frac{\text{N}}{\text{m}} \implies k = 1583366,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

i. Frecuencia natural del sistema suspendido sobre los soportes.

Si el peso de la máquina está dado en kgf, la masa en kilogramos será, numéricamente, igual al peso. Si el peso está dado en Newton, entonces la masa se obtiene dividiendo entre la constante de la gravedad (g). Seguidamente se puede obtener la frecuencia natural, por medio de la expresión:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sustituyendo, para los valores concretos de este ejemplo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1583366,0 \text{ N/m}}{1000 \text{ kg}}} \implies \omega_n = 39,79 \text{ rad/s}$$

j. Relación de frecuencias.

La relación de frecuencias será:

$$R_f = \frac{\omega_{tr}}{\omega_n} = \frac{157,08 \text{ rad/s}}{39,79 \text{ rad/s}} \implies R_f = 3,94$$

La relación de frecuencias real ($Rf = 3,94$) se encuentra en el rango establecido ($3 \div 4$), que garantiza valores bajos del coeficiente de transmisibilidad.

k. Coeficiente de transmisibilidad de la suspensión.

El coeficiente de transmisibilidad se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega_{tr}}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{tr}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega_{tr}}{\omega_n}\right)^2}}$$

Sustituyendo, para los valores concretos de este ejemplo:

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0,04 \cdot 3,94)^2}}{\sqrt{(1 - (3,94)^2)^2 + (2 \cdot 0,04 \cdot 3,94)^2}} \implies Tr = 0,07$$

El coeficiente de transmisibilidad obtenido debe ser menor o igual al coeficiente de transmisibilidad máximo permisible, que se haya establecido para el problema concreto, que se esté resolviendo. Si no cumple la condición establecida, se debe rediseñar la suspensión. En este ejemplo se cumple, con buen margen, esa condición.

Soportes inclinados.

Para lograr determinados objetivos, como puede ser una gran estabilidad del sistema suspendido, se pueden colocar los soportes de goma con determinada inclinación, con respecto a la dirección de la fuerza aplicada. En estos casos, generalmente, se montan pares de soportes (uno frente al otro, a una determinada distancia) con el ángulo de inclinación igual y de sentido contrario. Esto trae como consecuencia que el elastómero esté cargado simultáneamente a compresión y a cizallamiento.

Para lograr los mejores resultados, las deflexiones axiales y transversales deben ser casi iguales, lo que depende de las características del elastómero, de la geometría del soporte y del ángulo de inclinación del eje del soporte, con respecto a la dirección de la fuerza. No obstante, se analizará un caso general, en el que el ángulo de inclinación del soporte es cualquiera.

Figura 22 Soporte inclinado

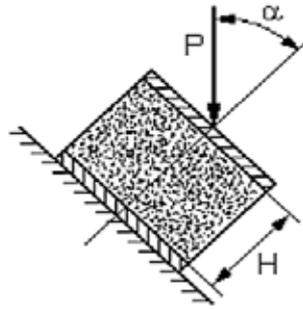


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 22, se muestra un soporte inclinado, y se hace la observación de que sólo el movimiento en la dirección vertical será objeto de estudio. La deflexión vertical, que sufre el soporte debido a la fuerza aplicada, depende de la resistencia a ser deformado axialmente (módulo de elasticidad a tracción – compresión: E_c) y transversalmente (módulo de elasticidad a cizallamiento: G), es decir, que ambos módulos de elasticidad hacen un determinado aporte a la rigidez del bloque elastomérico en la dirección vertical.

En las siguientes expresiones matemáticas, se utilizarán los siguientes símbolos:

E_c : Módulo de elasticidad a compresión del bloque elastomérico (después de considerar el factor de forma y la constante de corrección).

G : Módulo de elasticidad a cortante del elastómero.

α : Ángulo de inclinación del soporte.

El aporte del módulo de elasticidad a tracción – compresión, a la rigidez en la dirección vertical del soporte inclinado, será:

$$E_v = E_c \cdot \cos^2 \alpha \quad (20)$$

El aporte del módulo de elasticidad a cizallamiento, a la rigidez en la dirección vertical del soporte inclinado, será:

$$G_v = G \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = G \cdot \sin^2 \alpha \quad (21)$$

El módulo de elasticidad total o equivalente en la dirección vertical será la suma de ambos aportes:

$$E_{eq} = E_c \cos^2 \alpha + G \cdot \sin^2 \alpha \quad (22)$$

Soluciones y detalles constructivos.

En las figuras de la 23 hasta la 26, se muestran varias soluciones constructivas, a tener en cuenta en el diseño y fabricación de los soportes elastoméricos.

La solución de la figura 23 a) es mala porque el bloque elastomérico está pegado al mismo nivel del borde de la pieza metálica, que le sirve de base. La solución del inciso b), de la misma figura, es buena, porque la sección del bloque elastomérico es menor que la de la pieza metálica y se produce una transición suave entre ambas, por medio de un radio de acuerdo.

La solución del inciso c), de esa figura, también representa una buena solución, porque la sección del bloque elastomérico es mayor que la de la pieza metálica, y entonces el elastómero cubre el borde redondeado de la pieza metálica.

En la figura 24, se muestran soluciones, para aquellos casos, en los que es necesario colocar tornillos sobre las placas metálicas de los soportes, que servirán para su fijación posterior.

La solución del inciso a) es mala, porque la cabeza hexagonal del tornillo, dentro del bloque elastomérico, presenta aristas agudas (filosas) y ocupa un gran volumen. La solución del inciso b) es buena, porque la cabeza del tornillo se ha hecho redondeada, ocupa un pequeño volumen dentro del bloque elastomérico y no presenta aristas agudas (filosas).

Figura 23 Soluciones constructivas para pegado de soportes

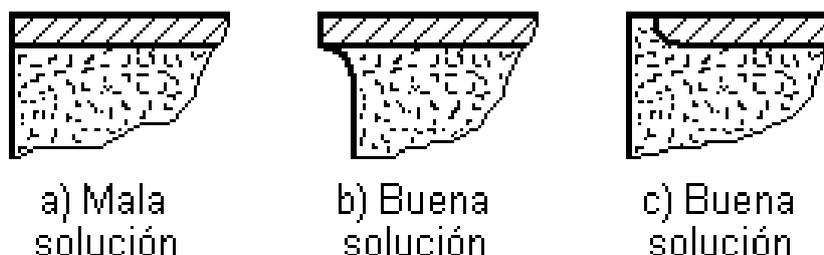


Ilustración: Héctor Terán

La solución del inciso c) es muy buena, porque el tornillo se ha soldado en la superficie exterior de la placa metálica, por lo que no afecta de ninguna forma al bloque elastomérico.

En la figura 25, se muestran soluciones, para aquellos casos, en los que es necesario colocar casquillos con roscado interior, sobre las placas metálicas de los soportes, para la fijación posterior por medio de tornillos.

Figura 24 Fijación de tornillos en los soportes elastoméricos



Fig. 4.2.25. Fijación de tornillos en los soportes elastoméricos.

La solución del inciso a) es mala, porque el casquillo dentro del bloque elastomérico, presenta aristas agudas (filosas) y se afecta un gran volumen de este.

La solución del inciso b) es buena, porque se han eliminado las aristas agudas (filosas) del escalón del casquillo, y este afecta un volumen menor del elastómero. La solución del inciso c) es muy buena, porque el casquillo con roscado interior se ha soldado en la superficie exterior de la placa metálica, por lo que no afecta de ninguna forma al bloque elastomérico.

Figura 25 Fijación de casquillos con roscado interior en los soportes elastoméricos

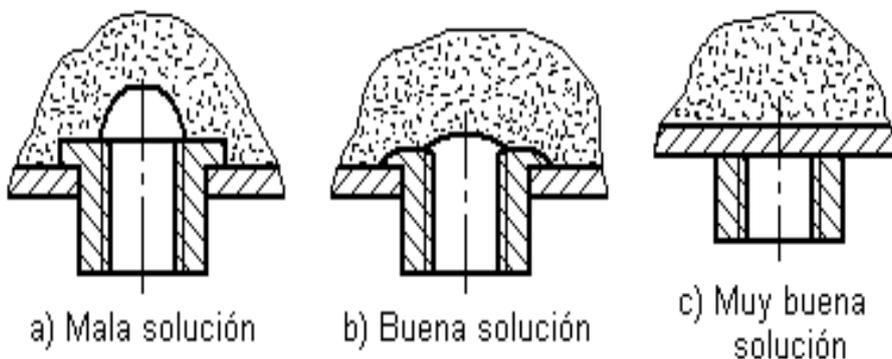


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 26, se muestran soluciones, para aquellos casos, en los que se colocan tornillos pasantes, para la fijación de los soportes. La solución del inciso a) es mala, porque se han hecho los agujeros, tanto en las placas metálicas, como en el bloque elastomérico, de un mismo diámetro, lo que producirá rozamiento y golpes entre el tornillo o pasador y dichas placas.

La solución del inciso b) es buena, porque se han hecho los agujeros en las placas metálicas de un diámetro mayor que el del agujero del bloque elastomérico, lo que garantiza el contacto sólo entre el tornillo o pasador y el bloque elastomérico, eliminando la posibilidad de roces y golpes metal-metal.

La solución del inciso c) es muy buena, porque se ha eliminado la posibilidad de movimientos relativos entre las placas metálicas y los tornillos o pasadores, al fijar cada placa independientemente y rígidamente, por medio de pasadores o tornillos, que quedarán fuera del bloque elastomérico.

En las figuras 28 y 29, se muestran varios detalles constructivos, a tener en cuenta en el diseño y fabricación de los soportes elastoméricos.

En la figura 27, se muestran las medidas, que se deben tomar, cuando es necesario pegar un bloque elastomérico entre dos piezas metálicas, que poseen una sección (área) mayor, como se muestra en el inciso a).

El inciso b) muestra una solución, que consiste en diseñar el bloque elastomérico con escalones de poco espesor, en ambos extremos, por los que será pegado posteriormente a las piezas metálicas. Esto garantiza una transición suave entre las secciones y un aumento considerable del área de pegado.

Figura 26 Fijación de soportes por medio de tornillos pasantes

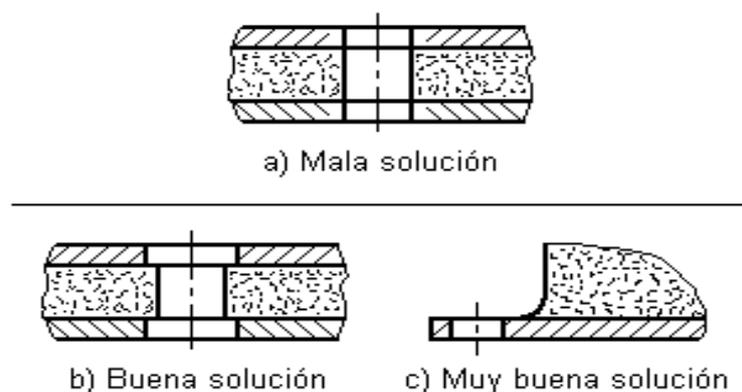
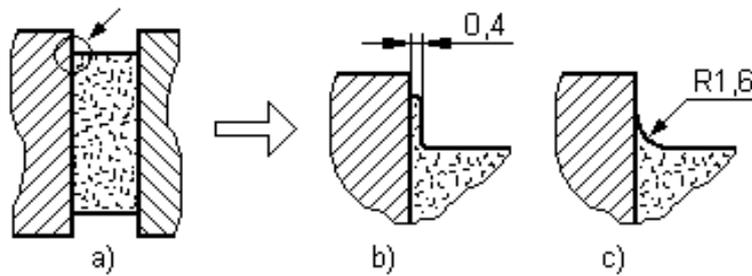


Fig. 4.2.27. Fijación de soportes por medio de tornillos pasantes.

Figura 27 Transición suave para el pegado del bloque elastomérico



Nota: Las cotas en milímetros (mm).

Ilustración: Héctor Terán

Fig. 4.2.28. Transición suave para el pegado del bloque elastomérico.

El inciso
sición suave

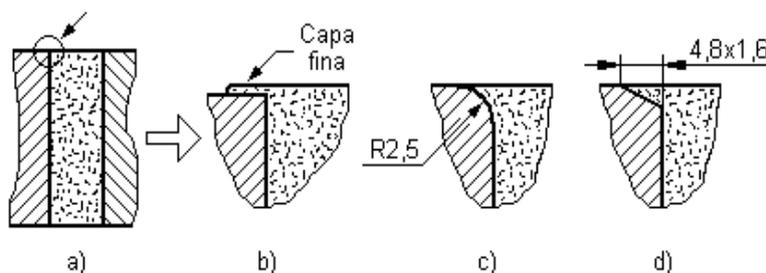
acuerdo en cada extremo del bloque elastomérico, con resultados semejantes a los del inciso b).

En la figura 28, se muestran las medidas, que se deben tomar, cuando es necesario pegar un bloque elastomérico entre dos piezas metálicas, que poseen una sección igual a la de él, como se muestra en el inciso a). El inciso b) muestra una solución, que consiste en diseñar el bloque elastomérico con una sección ligeramente mayor, de forma que una fina capa del elastómero cubra el borde de cada pieza metálica, en ambos extremos. Esto garantiza un buen centrado del conjunto y un aumento considerable del área de pegado.

El inciso c) muestra una solución, que consiste en redondear las aristas del borde de las piezas metálicas, donde será pegado posteriormente el bloque elastomérico. Con esto se logra eliminar las aristas filosas, además de lograr un buen centrado y un aumento de la superficie de pegado.

En el inciso d), en lugar de redondear las aristas de los bordes, se utiliza un chaflán, cuyos objetivos son los mismos del caso anterior (inciso c). En este último caso, quedan aristas; pero no son filosas (o agudas).

Figura 28 Pegado del bloque elastomérico cuando su sección es igual a la de la pieza metálica



Nota: Las cotas en milímetros (mm).

Fig. 4.2.29. Pegado del bloque elastomérico cuando su sección es igual a la de la pieza metálica.

3. Vibraciones laterales en árboles

Como es conocido, a ciertas velocidades de rotación, los árboles se vuelven dinámicamente inestables, pudiendo aparecer vibraciones laterales de gran amplitud. Este fenómeno se debe a los efectos del desbalance de las fuerzas de inercia, que actúan sobre la masa del árbol o sobre masas de piezas colocadas sobre dicho árbol. Es muy común en la práctica, que sobre los árboles se coloquen piezas tales como poleas, ruedas dentadas, rotores, etc., que, por problemas de fabricación o de heterogeneidad del material, no estén perfectamente balanceadas, es decir, que en ellas no coinciden el centro de masas y el centro geométrico o eje de rotación. Estas masas desbalanceadas engendrarán fuerzas de inercia, cuyo efecto será el mencionado anteriormente. La figura geométrica básica de las piezas, relacionadas anteriormente, es un disco, por lo que para simplificar el estudio de este fenómeno, se considerará que sobre los árboles están montados discos a lo largo de su eje.

Árbol con un disco.

A fin de excluir del análisis el efecto del peso del árbol, y de este modo hacer el problema tan simple como sea posible, se tomará un árbol de sección circular, perfectamente balanceado, con un disco de masa (m) montado entre sus dos apoyos. Por problemas de fabricación, el eje del disco y el centro de masas de este no coinciden, es decir se presenta una cierta excentricidad (e), como se muestra en la figura 29.

Al comenzar a rotar el árbol, a causa de la excentricidad (e), sobre el disco comenzará a actuar una fuerza centrífuga:

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot e$$

Figura 29 Vibraciones laterales de un árbol

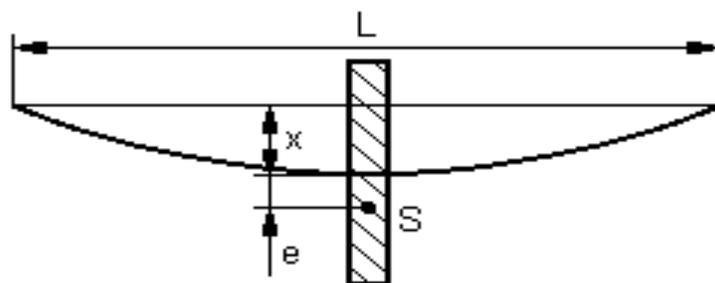


Ilustración: Héctor Terán

Esa fuerza centrífuga producirá una determinada deflexión (x) del árbol, que se suma a la excentricidad, de forma que, durante la rotación a una determinada velocidad angular, la fuerza centrífuga real será:

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot (x + e)$$

La magnitud de la deflexión (x) puede ser fácilmente obtenida de la condición de equilibrio de la fuerza centrífuga y de la fuerza reactiva (P) del árbol flexionado. Esta última fuerza es proporcional a la flecha (x), y puede ser representada en la siguiente forma:

$$P = -k \cdot x$$

Es posible calcular la magnitud del factor k , siempre que sean conocidas las dimensiones del árbol y las condiciones de los apoyos. Suponiendo, por ejemplo, que el árbol tiene una sección uniforme, que está simplemente apoyado y que el disco está montado en el centro, entre los apoyos, se tiene que:

$$k = 48 \cdot E \cdot I / L^3$$

Donde:

E : Módulo de elasticidad del material.

I : Momento de inercia de la sección del árbol a flexión.

L : Distancia entre los apoyos del árbol.

La condición de equilibrio, que nos permite determinar la deflexión (x), se expresará por la siguiente ecuación:

$$m \cdot \omega^2 \cdot (x + e) - k \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot \omega^2 \cdot (x + e) = k \cdot x \quad (23)$$

Desarrollando en la ecuación (1.3.1):

$$m \cdot \omega^2 \cdot x + m \cdot \omega^2 \cdot e = k \cdot x \quad \Rightarrow \quad m \cdot \omega^2 \cdot e = x(k - m \cdot \omega^2)$$

Dividiendo entre $m\omega^2$ y despejando, se obtiene:

$$x = \frac{e}{\frac{k}{m\omega^2} - 1} \quad (24)$$

Recordando que $k/m = \omega_n^2$, la expresión (24) toma la forma:

$$x = \frac{e}{\frac{\omega_n^2}{\omega^2} - 1} \quad (25)$$

De la expresión (25) puede concluirse que la deflexión (x) tiende a aumentar rápidamente, al aproximarse la frecuencia de rotación del árbol (ω) a la frecuencia natural de vibración de dicho árbol en flexión (ω_n), es decir, cuando se acerca el fenómeno de la resonancia. A la velocidad de rotación del árbol, a la cual se presenta este fenómeno de resonancia, se le denomina velocidad crítica del árbol, por lo que esta estará dada por la misma expresión de la frecuencia natural, es decir, por la expresión:

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (26)$$

Es interesante notar que a velocidades superiores a la crítica, se logrará nuevamente el funcionamiento estable del árbol. Los experimentos demuestran que en este caso el centro de gravedad (S) estará situado entre la línea que une los apoyos y el eje flexionado del árbol, como se muestra en la figura 30.

La ecuación de equilibrio entonces será:

$$m\omega^2(x - e) - k \cdot x = 0 \quad (27)$$

Y la expresión (24) toma la forma:

$$x = \frac{e}{1 - \frac{k}{m \cdot \omega^2}} \quad (28)$$

La expresión (25), entonces tomará la forma:

$$x = \frac{e}{1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2}} \quad (29)$$

De la expresión (1.3.7) se nota que ahora, al aumentar la velocidad de rotación del árbol, la deflexión (x) se hace cada vez más pequeña,

Figura 30 Vibraciones laterales, pasada la resonancia

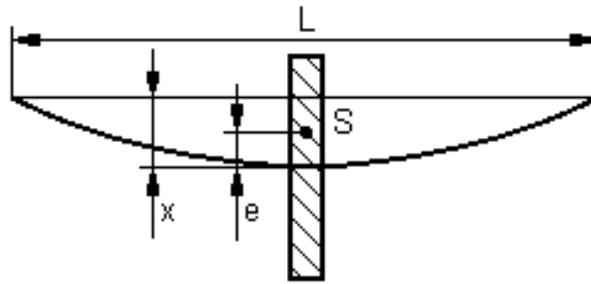


Fig. 41.5. Vibraciones laterales,

tendiendo a alca: **pasada la resonancia.** que quiere decir, que el árbol tend... a gran amplitud... gravedad del disco. La estabilidad de este movimiento depende de innumerables factores, tanto característicos del árbol, como de su montaje y explotación, por lo que en la práctica, por lo general, se trata de que dichos elementos trabajen a velocidades inferiores a la crítica.

Árbol con varios discos.

En árboles cargados con varios discos, como se muestra en la figura 31, o con una distribución continua de masa, existen tantas velocidades críticas, como frecuencias naturales de vibración en flexión tengan dichos árboles, coincidiendo además con ellas. El cálculo exacto de estas frecuencias es relativamente sencillo con una masa, bastante complejo con dos masas y requiere métodos de aproximaciones sucesivas con más de dos masas. Por ello, y dado que en la mayoría de los casos sólo se requiere conocer la primera velocidad crítica, para no alcanzarla, se han desarrollado métodos aproximados para el cálculo de la primera velocidad crítica.

Figura 31 Vibraciones laterales de un árbol con varios grados de libertad

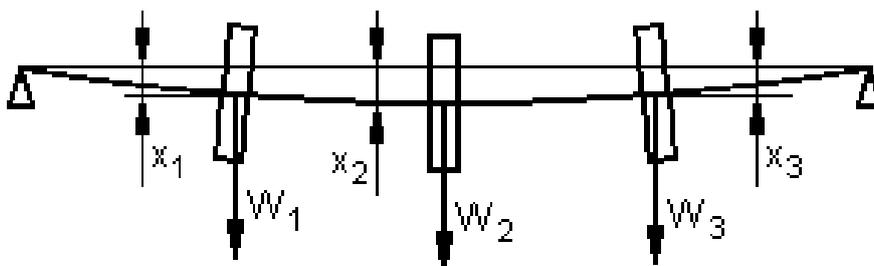


Ilustración: Héctor Terán

Uno de estos, es el método aproximado de Rayleigh, que consiste en suponer conocida la configuración de deformación, con lo cual, cualquiera que sea el número de masas, el problema queda reducido a un solo grado de libertad. La clave estriba en tener bastante “vista” para escoger una configuración, que se ajuste bien a la del modo normal, que se quiere analizar. Si el acierto es total, la exactitud es total.

Rayleigh supone que la configuración del primer modo de vibración es semejante a la deformación del árbol, bajo la acción de los pesos de las piezas, montadas sobre el, como se presenta en la figura 31.

La suposición anterior no es exacta, ya que en la configuración real las cargas sobre el árbol son las fuerzas de inercia ($m \cdot \omega^2 \cdot x$), mientras que en la configuración de la gravedad son de la forma de los pesos (mg), que no dependen de las deflexiones (x).

Supóngase que se tiene el árbol de la figura anterior, y en él se conocen las masas de los discos (m_i) y las deflexiones o flechas estáticas (X_i), que se producen bajo la acción de los pesos de estas masas. Entonces la energía potencial máxima de deformación, almacenada en el árbol durante la flexión, será:

$$EP_{max} = \frac{1}{2} m_1 \cdot g \cdot X_1 + \frac{1}{2} m_2 \cdot g \cdot X_2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot g \cdot X_3 \quad (30)$$

Como supone el método de Rayleigh, la curva de deflexión estática puede tomarse como una buena aproximación a la curva de deflexión del árbol, durante la vibración. Por tanto, los desplazamientos verticales de las masas pueden expresarse como:

$$x_1 = X_1 \cdot \cos \omega_n t; \quad x_2 = X_2 \cdot \cos \omega_n t; \quad x_3 = X_3 \cdot \cos \omega_n t; \quad (31)$$

Como se conoce, en un ciclo de cualquier vibración la energía se transforma de totalmente potencial (en la máxima deflexión y velocidad cero) a totalmente cinética (cuando la masa pasa por la posición media o de deflexión cero y velocidad máxima). Para esta última posición, de las expresiones (31) se advierte que las velocidades máximas de las masas serán:

$$\omega_n = X_1; \quad \omega_n = X_2; \quad \omega_n = X_3; \quad (32)$$

La energía cinética del sistema estará dada por:

$$EC_{max} = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega_n^2 \cdot X_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \omega_n^2 \cdot X_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \omega_n^2 \cdot X_3^2 \quad (33)$$

Igualando las energías potencial (30) y cinética (33) del sistema en las dos posiciones extremas:

$$\frac{1}{2} \omega_n^2 (m_1 \cdot X_1^2 + m_2 \cdot X_2^2 + m_3 \cdot X_3^2) = \frac{1}{2} g (m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3)$$

De donde se obtiene que:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g(m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3)}{(m_1 \cdot X_1^2 + m_2 \cdot X_2^2 + m_3 \cdot X_3^2)}} \quad (34)$$

Las deflexiones del árbol, en los puntos donde están montados los discos (X_1, X_2, \dots, X_n), se obtienen cargándolo con los pesos de dichos discos y aplicando la teoría de Resistencia de Materiales.

Se tomó como ejemplo, para ilustrar el método, un árbol, sobre el que están montados tres discos; pero, en caso de un número mayor de discos, el procedimiento es el mismo, con la única diferencia de que la cantidad de sumandos bajo el radical de la expresión (1.3.12) será mayor (igual a la cantidad de discos o masas).

4. Vibraciones laterales (de flexión) de vigas

Planteamiento del problema.

Las vibraciones de flexión de vigas constituyen uno de los problemas clásicos de infinitos grados de libertad, debido a la distribución de la masa de forma continua, a todo lo largo de estos elementos. En este caso, como en los anteriores, partimos de la hipótesis fundamental de deformaciones pequeñas.

En la figura 32, se presenta el esquema de una viga sometida a flexión alternativa, en la que se ha aislado un elemento de longitud " ∂y ", situado a una distancia " y " del extremo (A), que se toma como origen de coordenadas.

Figura 32 Viga sometida a flexión alternativa

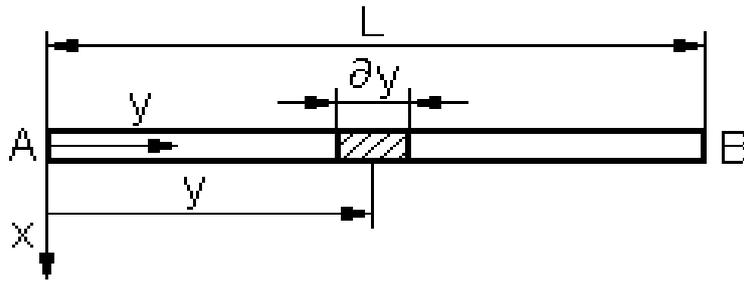


Ilustración: Héctor Terán

Con el objetivo de delimitar el alcance de los siguientes análisis y conclusiones, basados en la presencia de vibraciones de flexión en un plano fijo (plano vertical), sin acoplamientos con torsión compresión-torsión o flexiones en otro plano, se hacen las siguientes suposiciones:

- La viga tiene un eje elástico recto, considerado en el sentido de que, cargas que pasan por él, no producen torsión de ninguna sección.
- Las secciones perpendiculares al eje elástico tienen sus ejes principales dirigidos vertical y horizontalmente.
- El eje de gravedad, lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones, coincide con el eje elástico.
- Las cargas aplicadas se consideran verticales y pasan por el eje elástico.
- Las perturbaciones iniciales se consideran en dirección vertical, siendo de igual valor para cualquier punto de una sección, que las dadas al centro de cortadura.

Con las hipótesis anteriores la viga vibrará, flexionando en el plano vertical. Debido al peso de la viga, existirá una deformación inicial, que suponemos pequeña, y en torno de la cual consideraremos las vibraciones del sistema, pudiendo prescindir de las fuerzas de la gravedad y de las fuerzas elásticas debidas a los esfuerzos iniciales, que forman un sistema de fuerzas equilibrado en todo instante.

En la figura 33 se presenta, ampliado, el elemento de la viga de la figura 32, cargado con las fuerzas externas e internas, que servirá de base para los siguientes razonamientos.

Figura 33 Elemento de una viga que vibra

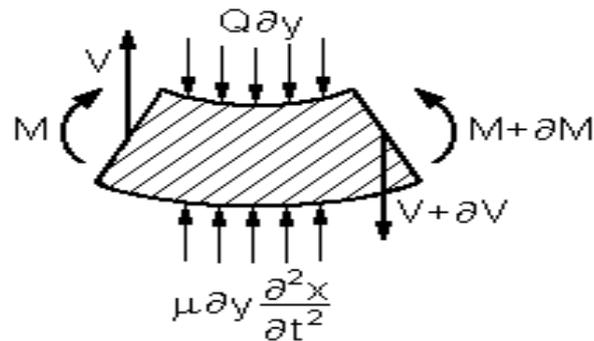


Ilustración: Héctor Terán

Sea:

 μ : masa por unidad de longitud; EI : módulo de rigidez a flexión; Q : carga excitadora por unidad de longitud; V : la fuerza cortante; M : el momento flector; x : la deflexión vertical, a partir de la posición de equilibrio estático; y : la coordenada que describe el desplazamiento a lo largo de la viga.

Del equilibrio del elemento de viga (figura 32), haciendo suma de fuerzas en el eje "x" igual a cero, se tiene:

$$\partial V + Q \cdot \partial y - \mu \cdot \partial y \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (35)$$

Haciendo suma de momentos, con respecto a la sección de la derecha del elemento de viga, igual a cero, se tiene:

$$\partial M - V \cdot \partial y + Q \cdot \partial y \cdot \frac{1}{2} \partial y - \mu \cdot \partial y \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{2} \partial y = 0 \quad (36)$$

En el límite (cuando $\partial y \rightarrow 0$), los términos que contienen el producto de dos diferenciales se hacen despreciables frente a los restantes términos, por lo que, de las ecuaciones (35) y (36) se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -Q + \frac{\mu \partial^2 x}{\partial t^2}; \quad y \quad \frac{\partial M}{\partial y} = V \quad (37)$$

Combinando las dos expresiones de (37), se obtiene:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -Q + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (38)$$

El momento flector esta relaciona con la curvatura de la viga por medio de la ecuación de la curva elástica, que en este caso toma la forma:

$$M = -EI \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \quad (39)$$

Sustituyendo la expresión (39) en la expresión (38), se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-EI \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \right) = -Q + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (40)$$

Reorganizando la expresión anterior, se obtendrá que:

$$EI \left(\frac{\partial^4 x}{\partial y^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = Q \quad (41)$$

La ecuación (41) constituye la ecuación diferencial, que describe las vibraciones de la viga, en su forma más general.

Si las características elásticas y másicas (y) son constantes a lo largo de la longitud de la viga, y la carga excitadora es armónica, lo cual constituirá el caso a considerar en lo que sigue, la expresión (41) toma la forma:

$$c^2 \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = q \text{ sen}(\omega t) \quad (42)$$

Siendo $c^2 = \frac{E \cdot I}{\mu}$, una constante del sistema, y $q = \frac{Q}{\mu}$.

Condiciones iniciales y de contorno. El problema queda definido al completar la ecuación diferencial con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno. Las condiciones iniciales están determinadas al dar la perturbación inicial mediante dos funciones $F(y), f(y)$ de forma tal que:

$$\text{Para } t = 0: \quad x(y, 0) = F(y); \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{t=0} = f(y);$$

Las condiciones de contorno varían con las correspondientes restricciones en los apoyos, y serán dadas para cada uno de los casos, uno de los cuales estudiaremos a continuación.

Viga apoyada en dos puntos.

Consideremos las vibraciones libres y, por tanto, respondiendo a la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales, de cuarto orden y homogénea:

$$c^2 \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (43)$$

En los apoyos, se deben cumplir las siguientes condiciones de contorno:

$$\text{Para } y = 0: \quad x(0, t) = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0;$$

$$\text{Para } y = L: \quad x(L, t) = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \right)_{y=L} = 0;$$

Para hallar la integral general seguimos el método de Bernoulli, ensayando soluciones particulares armónicas.

$$x(y, t) = a(y) \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Derivando dos veces con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 a(y) \text{sen}(\omega t + \varphi); \quad (44)$$

Al derivar con respecto a la coordenada “y”, se obtendrá:

$$\frac{\partial^n x}{\partial y^n} = \frac{\partial^n a}{\partial y^n} \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (45)$$

Sustituyendo las expresiones (44) y (45) en la ecuación (43), se obtiene:

$$c^2 \frac{\partial^4 a}{\partial y^4} \text{sen}(\omega t + \varphi) - \omega^2 a \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) = 0 \quad (46)$$

Simplificando (46), se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria, que permite calcular :

$$\frac{\partial^4 a}{\partial y^4} - \frac{\omega^2}{c^2} a = 0 \quad (47)$$

Las condiciones en los límites serán:

$$\begin{array}{lll} \text{Para } y = 0: & a(0) = 0; & \left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0; \\ \text{Para } y = L: & a(L) = 0; & \left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right)_{y=L} = 0; \end{array}$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial (47) tiene las cuatro raíces siguientes:

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{c}}; \quad a = -\sqrt{\frac{\omega}{c}}; \quad a = i\sqrt{\frac{\omega}{c}}; \quad a = -i\sqrt{\frac{\omega}{c}};$$

Se puede obtener , por tanto , las cuatro soluciones exponenciales:

$$e^{\sqrt{\frac{\omega}{c}}}; \quad e^{-\sqrt{\frac{\omega}{c}}}; \quad e^{+i\sqrt{\frac{\omega}{c}}}; \quad e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{c}}};$$

Resulta más cómodo pasar a funciones trigonométricas e hiperbólicas. Así tenemos como solución:

$$a(y) = A_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot y + A_2 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot y + A_3 \operatorname{senh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot y + A_4 \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot y$$

Al derivar dos veces con respecto a la coordenada “y”, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \frac{\omega}{c} (-A_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot y - A_2 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot y + A_3 \operatorname{senh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot y + A_4 \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot y)$$

Al aplicar las condiciones de contorno, se obtiene el siguiente sistema:

$$A_2 + A_4 = 0$$

$$-A_2 + A_4 = 0$$

$$A_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L + A_2 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L + A_3 \operatorname{senh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L + A_4 \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L = 0$$

$$-A_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L - A_2 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L + A_3 \operatorname{senh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L + A_4 \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L = 0$$

Este sistema, para el cálculo de los A_i , se presenta compatibilidad, y da soluciones distintas de la trivial nula, si

$$\operatorname{sen} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L = 0$$

Es decir, si:

$$\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L = k \cdot \pi \quad (48)$$

Donde “k” es un número entero. Así, se obtiene que $A_2=A_3=A_4=0$ y para A_1 , una infinidad de valores posibles.

La ecuación anterior de autovalores (48) proporciona las frecuencias naturales del sistema:

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 c \quad ; \quad \omega_2 = 2^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 c \quad \omega_3 = 3^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 c \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \omega_n = n^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 c$$

A los autovalores anteriores les corresponden las autofunciones, que constituyen los llamados modos naturales:

$$a_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{L} y\right); \quad a_2 \operatorname{sen} \left(2\frac{\pi}{L} y\right); \quad a_3 \operatorname{sen} \left(3\frac{\pi}{L} y\right) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad a_n \operatorname{sen} \left(n\frac{\pi}{L} y\right)$$

En la figura 34 se presentan el modo fundamental de vibración de una viga y los armónicos correspondientes. Los modos son idénticos a los de vibración de cuerdas, pero no así las frecuencias.

Figura 34 Armónicos de una viga simplemente apoyada

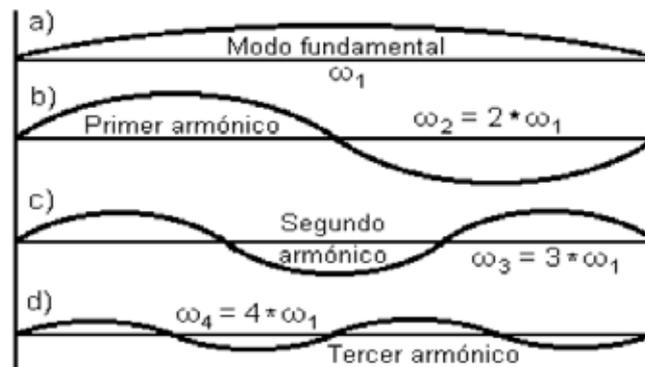


Ilustración: Héctor Terán

Las frecuencias, siendo proporcionales a $\frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$, nos indican cómo a mayor masa menor frecuencia y a menor rigidez a flexión o mayor esbeltez (para una sección de radio de inercia dado) también menor frecuencia. Los resultados anteriores son comparables cualitativamente a los obtenidos en el esquema de un grado de libertad, formado por una masa y un resorte, (Bernoulli, 1967).

Por combinación lineal de las soluciones particulares anteriores, se tiene la **solución general**:

$$x(y, t) = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} y\right) \cdot \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \operatorname{sen}\left(2 \frac{\pi}{L} y\right) \cdot \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$$

$$\dots + a_n \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} y\right) \cdot \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi_n) \tag{49}$$

Donde la doble infinidad de constantes a_i y φ_i se determinan, a partir de las condiciones iniciales, para cada solución particular.

Para ello, se realiza un desarrollo en senos en el intervalo $(0, L)$ de $F(y)$ y $f(y)$ y, consecuentemente, determinamos las constantes anteriores, (Kendall, 1978).

Vibraciones forzadas.

Pasando al caso, más general, de vibración forzada, de una forma armónica, tendremos la ecuación diferencial no homogénea siguiente:

$$c^2 \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = q(y) \operatorname{sen}(\omega t) \tag{50}$$

La solución general estará formada por la solución general de la homogénea correspondiente más una solución particular, que satisfaga a ésta no homogénea y a las condiciones de contorno. Es decir:

$$x(y, t) = S. g. h. + X(y, t)$$

Ensayando con:

$$X(y, t) = A(y)\text{sen}(\omega t)$$

Determinaremos $A(y)$ de forma que satisfaga a:

$$c^2 \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} - \omega^2 A = q; \quad A(0) = A(L) = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right)_{y=L} = 0$$

Como las condiciones en los extremos quedan satisfechas por las funciones sinusoidales $\left(i \frac{\pi}{L} y \right)$, para encontrar la solución expresamos $A(y)$ en serie de estas funciones ortogonales, en la forma:

$$A(y) = A_1 \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} y \right) + A_2 \text{sen} \left(2 \frac{\pi}{L} y \right) + \dots + A_n \text{sen} \left(n \frac{\pi}{L} y \right)$$

Y desarrollando $q(y)$ en serie de las mismas funciones:

$$q(y) = q_1 \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} y \right) + q_2 \text{sen} \left(2 \frac{\pi}{L} y \right) + \dots + q_n \text{sen} \left(n \frac{\pi}{L} y \right)$$

Se determinan los coeficientes A_i haciendo que la solución $A(y)$ satisfaga la ecuación diferencial; de donde:

$$(\omega_i^2 - \omega^2)A_i = q_i \Rightarrow A_i = \frac{q_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)}$$

Por tanto, finalmente, la solución general será:

$$x(y, t) = S. g. h. + \left(\frac{q_1}{-\omega^2 + \omega_1^2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} y \right) + \frac{q_2}{-\omega^2 + \omega_2^2} \text{sen} \left(2 \frac{\pi}{L} y \right) + \dots \right) \left(\dots + \frac{q_n}{-\omega^2 + \omega_n^2} \text{sen} \left(n \frac{\pi}{L} y \right) \right) \text{sen}(\omega t) \quad (51)$$

Es decir, que:

$$x(y, t) = \sum a_i \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right) \cdot \operatorname{sen}(\omega_i t + \varphi_i) + \sum \frac{q_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right) \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

La velocidad será:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \sum a_i \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right) \cdot \omega_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) + \sum \frac{q_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right) \cdot \omega \cos \omega t$$

Para las condiciones iniciales:

$$x(y, 0) = \sum a_i \omega_i \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right) \cdot \operatorname{sen} \varphi_i = \sum F_i \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum a_i \omega_i \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right) \cdot \cos \varphi_i + \sum \frac{q_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \omega \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right) = \sum f_i \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right)$$

De donde:

$$a_i \operatorname{sen} \varphi_i = F_i; \quad a_i \omega_i \cos \varphi_i + \frac{q_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \omega = f_i$$

Luego, la solución particular será:

$$\begin{aligned} x(y, t) &= \sum \left(F_i \cos \omega_i t + \frac{f_i}{\omega_i} \operatorname{sen} \omega_i t \right) \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right) + \dots \dots \\ &\dots \dots + \sum \frac{q_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \left(\operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega}{\omega_i} \operatorname{sen} \omega_i t \right) \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right) \end{aligned}$$

Si las condiciones iniciales son nulas, $F(y)=f(y)=0$ se tiene

$$x(y, t) = \sum \frac{q_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \left(\operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega}{\omega_i} \right) \operatorname{sen}\left(i \frac{\pi}{L} y\right)$$

5. Vibraciones en máquinas móviles

Planteamiento del problema

La historia de las máquinas móviles comenzó ante todo con las máquinas de transporte, por lo que la mayoría de las investigaciones realizadas pertenecen al campo de los automóviles, locomotoras y carros del ferrocarril, máquinas especiales y luego, mucho más tarde, aparecieron investigaciones, relacionadas con las máquinas agrícolas móviles.

Los métodos de valoración de las cargas de explotación que actúan sobre las máquinas móviles, que tienen un carácter casual, comenzaron a introducirse intensivamente con el desarrollo de la dinámica estadística y de la teoría de la fiabilidad de dichas máquinas. Los trabajos sobre este problema pueden dividirse en dos direcciones fundamentales.

La primera dirección se basa en las investigaciones teóricas y experimentales de la dinámica del desplazamiento de las máquinas móviles. En esta dirección han sido desarrollados los conceptos básicos de la dinámica del movimiento de los automóviles. Como los principales resultados en esta dirección se pueden considerar: la elección de los parámetros óptimos del sistema de aislamiento de las vibraciones y la valoración de la longevidad de los elementos de la suspensión y del sistema de marcha o propulsor, (Migulin y Medvedev, 2002).

La segunda dirección se basa en los métodos teóricos y experimentales de investigación de la dinámica de las máquinas agrícolas y otras máquinas móviles, con el objetivo de determinar las cargas y los estados tensionales de los sistemas portantes (estructuras metálicas o chasis). En esta dirección han sido desarrollados métodos de análisis de las cargas de explotación, de resistencia, de pronóstico de fiabilidad y longevidad, etc., basados en los resultados de investigaciones teóricas y experimentales, (Castillo, 1977).

En la mayoría de las investigaciones se llega a la conclusión de que, la principal causa de las cargas que actúan en las piezas de los sistemas propulsores y portantes de las máquinas móviles la constituyen las irregularidades de las superficies (carreteras, caminos, campos, rieles, etc.), por las que estas se desplazan durante el trabajo. Esto significa que el eslabón común en ambas direcciones es la suspensión de la máquina, a través de la cual las fuerzas se transmiten hacia el sistema propulsor y hacia la estructura portante.

En este punto se debe hacer una aclaración importante, relacionada con el concepto de suspensión, que ayudará en los análisis futuros. Este concepto tiene dos acepciones: una estrecha, cuando nos referimos a los elementos especialmente introducidos para mejorar la suavidad de marcha, tales como resortes y amortiguadores; y una más amplia, que contempla los elementos anteriores y las ruedas, que también poseen cualidades elásticas y amortiguadoras. (Hartman, 1960).

Por lo antes expuesto, es que la suspensión de las máquinas móviles juega un importante papel en el desempeño del trabajo que les está encomendado a estas, en la durabilidad de las piezas y, en particular en las que transportan pasajeros, en la comodidad de estos. Las cualidades de la suspensión se manifiestan por la suavidad de marcha, que es la capacidad del vehículo de amortiguar los choques y la amplitud de las vibraciones, que surgen durante su desplazamiento por superficies no planas (con baches y ondulaciones).

Una suavidad de marcha insuficiente se manifiesta por el surgimiento de vibraciones desagradables y nocivas, que afectan la seguridad de tráfico, el rendimiento y la economía del trabajo, la comodidad del conductor y la durabilidad de la máquina. (Harris y Crede, 1976).

Las vibraciones que surgen en los cuerpos de los vehículos son producidas por dos causas: una interna, que la constituyen las fuerzas de inercia desbalanceadas de los mecanismos propios de la máquina; y una externa, que la constituyen las irregularidades de la superficie, por la que se desplaza el vehículo.

Las fuerzas de inercia desbalanceadas engendran vibraciones de alta frecuencia, cuya influencia en las cargas y en los pasajeros no es tan notable; en cambio, las irregularidades de las vías producen vibraciones de baja frecuencia, desagradables y nocivas para las cargas y pasajeros. Por eso, estas últimas serán las que se tomarán en cuenta en esta ocasión.

Movimientos vibratorios en las máquinas móviles

El sistema vibratorio del automóvil está compuesto de las masas suspendidas y no suspendidas, los elementos elásticos (ballestas, resortes, barras de torsión, etc.) y los amortiguadores. En forma esquemática, el sistema vibratorio del vehículo está representado en la figura 35.

Figura 35 Esquema de la suspensión de un automóvil

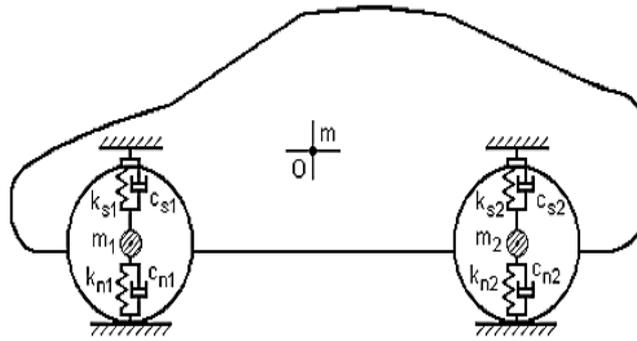


Ilustración: Héctor Terán

Para la investigación de las vibraciones, las masas del vehículo se dividen en dos grupos: **masas suspendidas** y **masas no suspendidas**. Las masas suspendidas son aquellas, cuyos pesos se transmiten a los elementos elásticos (resortes) de la suspensión y contemplan la carrocería y el bastidor, con los mecanismos fijados a ellos. Las masas de las ruedas, los puentes y piezas fijadas a ellos, constituyen masas no suspendidas. Hay piezas (elementos de la suspensión, árboles cardán, etc.) que están simultáneamente unidas a las masas suspendidas y a las no suspendidas, cuyas masas se sustituyen por masas concentradas equivalentes en sus extremos.

En la figura 35 las masas suspendidas están representadas por la masa “m”, situada en el centro de gravedad “0”; y las masas no suspendidas están representadas por las masas “m₁” y “m₂”, de las cuales, la primera reúne las masas de las ruedas delanteras, con las piezas asociadas a ella, y la segunda la de las ruedas traseras y las piezas asociadas a ellas.

La relación de las masas suspendidas a las masas no suspendidas es una característica importante del sistema vibratorio del vehículo y se cuantifica por el **coeficiente de las masas suspendidas**.

En correspondencia con el esquema de la figura anterior, este coeficiente estará dado por:

$$\mu_m = \frac{m}{m_1 + m_2} \quad (52)$$

La reducción del peso de las masas no suspendidas disminuye las fuerzas, generadas por el paso sobre las irregularidades del camino, que se transmiten a las masas suspendidas, mientras que el aumento del peso de las masas suspendidas reduce su sensibilidad a estas perturbaciones.

Por ello, el valor del coeficiente de las masas suspendidas debe ser aumentado, en primer lugar, a cuenta de la disminución del peso de las masas no suspendidas. En los automóviles de turismo el coeficiente de las masas suspendidas se halla en los límites $\mu_m = 6,5/7,5$ y en los camiones $\mu_m = 4/5$. Estos valores corresponden al vehículo con plena carga. El desplazamiento con carga incompleta o nula empeora la suavidad de marcha, lo que se puede apreciar al comparar las dos condiciones de viaje en un camión, es decir, con carga completa y sin carga.

Antes de continuar, es necesario señalar que, aunque se haga referencia a elementos elásticos y amortiguadores, como elementos independientes, las ruedas (neumáticos) poseen también cualidades elásticas y amortiguadoras, que aunque no tan notables, deben ser reflejados en los modelos, que se tomen como base para los análisis. Estos elementos tienen la capacidad de absorber y amortiguar, durante su deformación, pequeñas irregularidades y accidentes agudos de la superficie del camino.

La rigidez de la suspensión en los automóviles es varias veces menor que la de los neumáticos, por ello, la influencia de estos últimos en la rigidez total es pequeña; ellos la disminuyen, en comparación con la rigidez de la suspensión, sólo en un 15-20 %. En aquellas máquinas, en las que no hay suspensión elástica especial, como en tractores y otras máquinas agrícolas y de la construcción, el papel de los neumáticos es muy importante, ya que son los únicos elementos con cualidades elásticas y amortiguadoras, que determinan la suavidad de marcha.

Aunque limitados por las barras estabilizadoras, los elementos de la suspensión y los neumáticos, y otros elementos adicionales introducidos para absorber los esfuerzos que surgen durante la marcha, la parte suspendida del vehículo, como cualquier cuerpo libre en el espacio, posee seis grados de libertad y puede realizar los movimientos vibratorios, que se muestran en la figura 36.

Vibraciones lineales:

- A lo largo del eje Z..... saltos.
- A lo largo del eje X..... tirones.
- A lo largo del eje Y..... balanceo.

Vibraciones angulares:

- Alrededor del eje X..... vaivén.
- Alrededor del eje Y..... galopado.
- Alrededor del eje Z..... sacudimiento.

Figura 36 Movimiento vibratorios de la carrocería del automóvil

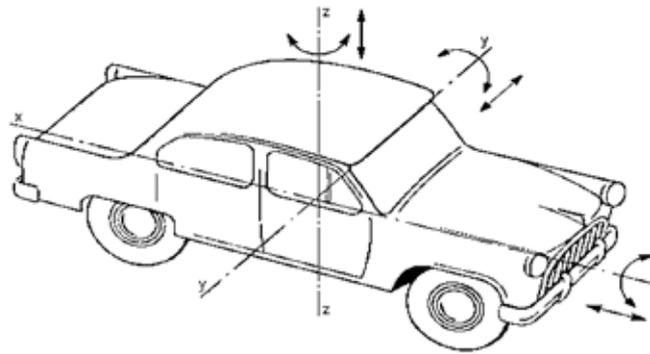


Ilustración: Héctor Terán

A causa de la complejidad de investigar el sistema con muchos grados de libertad, generalmente durante el análisis elemental de la suavidad de marcha, sólo se examinan las vibraciones lineales a lo largo del eje Z y las angulares alrededor del eje Y, es decir, los saltos y el galopado.

Modelo dinámico de la suspensión.

Aunque en estudios profundos de las vibraciones que surgen en los vehículos, se deben utilizar modelos espaciales, en virtud de la simetría de estas máquinas y para la investigación de los saltos y el galopado, puede servir el modelo plano, obtenido a partir del esquema mostrado en la figura 35 y que se presenta en la figura 37.

En este caso, sólo es necesario sustituir la masa (m) suspendida, por dos masas concentradas equivalentes (m_A y m_B), colocadas en los puntos correspondientes del chasis, sobre los puentes.

Figura 37 Modelo dinámico de la suspensión de un automóvil

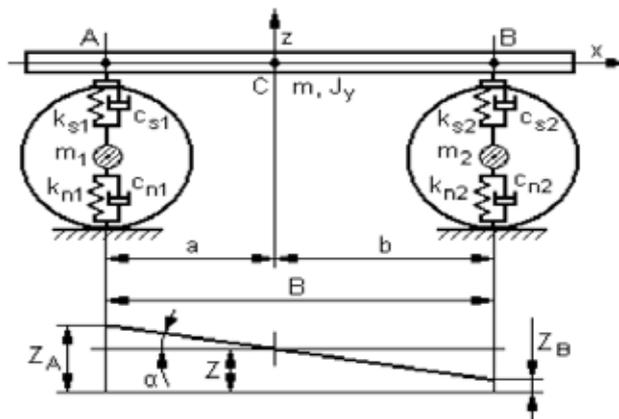


Ilustración: Héctor Terán

Estas masas concentradas equivalentes se determinan por las siguientes expresiones:

$$m_A = m \cdot \frac{b}{B} \quad ; \quad m_B = m \cdot \frac{a}{B} \tag{53}$$

Los símbolos utilizados son:

A: distancia del puente delantero al centro de gravedad.

B: distancia del puente trasero al centro de gravedad.

M: masa suspendida de la máquina.

J_y: momento de inercia de la máquina, con respecto al eje Y.

B: Distancia entre los puentes (batalla).

Para los desplazamientos, se utilizarán los siguientes símbolos:

Z₁: Desplazamiento vertical de la masa no suspendida del puente delantero.

Z₂: Desplazamiento vertical de la masa no suspendida del puente trasero.

Z_A: Desplazamiento vertical de la masa suspendida concentrada en el punto A.

Z_B: Desplazamiento vertical de la masa suspendida concentrada en el punto B.

Se considera que las causas de las vibraciones son las irregularidades (h₁ y h₂) de la superficie, por la que se desplaza la máquina.

Ecuaciones de las vibraciones.

El sistema de ecuaciones diferenciales, que describe las vibraciones, es el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_{n1} \dot{z}_1 + k_{n1} z_1 + c_{s1} (\dot{z}_1 - \dot{z}_A) + k_{s1} (z_1 - z_A) &= c_{n1} h_1 + k_{n1} h_1 \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_{n2} \dot{z}_2 + k_{n2} z_2 + c_{s2} (\dot{z}_2 - \dot{z}_A) + k_{s2} (z_2 - z_A) &= c_{n2} h_2 + k_{n2} h_2 \\ m_A \ddot{z}_A + c_{s1} (\dot{z}_A - \dot{z}_1) + k_{s1} (z_A - z_1) &= 0 \\ m_B \ddot{z}_B + c_{s2} (\dot{z}_B - \dot{z}_2) + k_{s2} (z_B - z_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{54}$$

Para observar con claridad los coeficientes de cada variable, se deben desarrollar todos los términos, en los que se mezclan dos variables o sus derivadas, por lo que el sistema de ecuaciones diferenciales (54) quedará de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_{n1} \dot{z}_1 + k_{n1} z_1 + c_{s1} (\dot{z}_1 - \dot{z}_A) + k_{s1} (z_1 - z_A) &= c_{n1} h_1 + k_{n1} h_1 \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_{n2} \dot{z}_2 + k_{n2} z_2 + c_{s2} (\dot{z}_2 - \dot{z}_A) + k_{s2} (z_2 - z_A) &= c_{n2} h_2 + k_{n2} h_2 \\ m_A \ddot{z}_A + c_{s1} \dot{z}_A - c_{s1} \dot{z}_1 + k_{s1} z_A - k_{s1} z_1 &= 0 \\ m_B \ddot{z}_B + c_{s2} \dot{z}_B - c_{s2} \dot{z}_2 + k_{s2} z_B - k_{s2} z_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ordenando los términos por el índice de la variable:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_{n1} \dot{z}_1 + k_{n1} z_1 + c_{s1} (\dot{z}_1 - \dot{z}_A) + k_{s1} (z_1 - z_A) &= c_{n1} h_1 + k_{n1} h_1 \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_{n2} \dot{z}_2 + k_{n2} z_2 + c_{s2} (\dot{z}_2 - \dot{z}_A) + k_{s2} (z_2 - z_A) &= c_{n2} h_2 + k_{n2} h_2 \\ -c_{s1} \dot{z}_1 - k_{s1} z_1 + m_A \ddot{z}_A + c_{s1} \dot{z}_A + k_{s1} z_A &= 0 \\ -c_{s2} \dot{z}_2 - k_{s2} z_2 + m_B \ddot{z}_B + c_{s2} \dot{z}_B + k_{s2} z_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Después de esta operación, se pueden escribir las siguientes matrices, que conformarán los operadores propios del sistema:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_B \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_{n1} + c_{s1} & 0 & -c_{s1} & 0 \\ 0 & c_{n2} + c_{s2} & 0 & -c_{s2} \\ -c_{s1} & 0 & c_{s1} & 0 \\ 0 & -c_{s2} & 0 & c_{s2} \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} k_{n1} + k_{s1} & 0 & -k_{s1} & 0 \\ 0 & k_{n2} + k_{s2} & 0 & -k_{s2} \\ -k_{s1} & 0 & k_{s1} & 0 \\ 0 & -k_{s2} & 0 & k_{s2} \end{bmatrix}$$

Las matrices de los operadores de las acciones exteriores serán:

$$c_h = \begin{bmatrix} c_{n1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{n2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad k_h = \begin{bmatrix} k_{n1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{n2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices columnas de los desplazamientos y de las acciones exteriores serán:

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_A \\ z_B \end{Bmatrix} \quad h = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (55) se puede escribir en forma matricial compacta, como se muestra a continuación:

$$[m] \cdot [\ddot{z}] + [c] \cdot [\dot{z}] + [k] \cdot [z] = [c_h] \cdot [\dot{h}] + [k_h] \cdot [h]$$

Utilizando la transformada de Laplace, se pasa de las ecuaciones diferenciales a sus imágenes en el campo de la variable compleja "s", con lo que la ecuación (56) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} p_{11}(s) & 0 & p_{1A}(s) & 0 \\ 0 & p_{22}(s) & 0 & p_{2B}(s) \\ p_{A1}(s) & 0 & p_{AA}(s) & 0 \\ 0 & p_{B2}(s) & 0 & p_{BB}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_A(s) \\ z_B(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (57)$$

Los operadores propios del sistema $p_{mn}(s)$ estarán dados por las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} p_{11}(s) &= m_1 s^2 + (c_{n1} + c_{s1})s + k_{n1} + k_{s1} \\ p_{22}(s) &= m_2 s^2 + (c_{n2} + c_{s2})s + k_{n2} + k_{s2} \\ p_{AA}(s) &= m_A s^2 + c_{s1}s + k_{s1} \\ p_{BB}(s) &= m_B s^2 + c_{s2}s + k_{s2} \\ p_{1A}(s) &= p_{A1}(s) = -c_{s1}s - k_{s1} \\ p_{2B}(s) &= p_{B2}(s) = -c_{s2}s - k_{s2} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Los operadores de las acciones exteriores $a_{mn}(s)$ estarán dados por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(s) &= c_{n1}s + k_{n1} \\ a_{22}(s) &= c_{n2}s + k_{n2} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

La ecuación (57) se puede escribir de forma compacta como:

$$[D(s)] \cdot \{z(s)\} = [a(s)] \cdot \{h(s)\} \quad (60)$$

En la ecuación (60), $[D(s)]$ como se había visto en el Capítulo 3, es la matriz de los operadores propios del sistema. Recordamos también, que la variable compleja "s" se puede sustituir por la expresión "i ω ", lo que permite, igualando el determinante de dicha matriz a cero, obtener la ecuación característica del sistema y, con ello, las frecuencias de resonancia.

Resolviendo la ecuación (60), se obtiene:

$$\{z(s)\} = [D(s)]^{-1} \cdot [a(s)] \cdot \{h(s)\} \quad (61)$$

En este caso, la matriz resultante del producto $[D(s)]^{-1} \cdot [a(s)] = [W(s)]$ es la matriz de las funciones de transferencia. Entonces la ecuación compacta (61), teniendo en cuenta el concepto de funciones de transferencia, se puede escribir en forma desplegada, como se muestra a continuación:

$$\begin{Bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_A(s) \\ z_B(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{1A}(s) & W_{1B}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & W_{2A}(s) & W_{2B}(s) \\ W_{A1}(s) & W_{A2}(s) & W_{AA}(s) & W_{AB}(s) \\ W_{B1}(s) & W_{B2}(s) & W_{BA}(s) & W_{BB}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Hasta este momento, hemos considerado las irregularidades de la superficie, por la que se desplaza la máquina, para las ruedas delantera $[h_1(s)]$ y trasera $[h_2(s)]$, como independientes entre sí. Para las máquinas, cuyo ancho del puente trasero es igual al ancho del puente delantero, en realidad las irregularidades que actúan sobre las ruedas del puente trasero son las mismas que actuaron sobre las ruedas del puente delantero un instante antes, es decir, que la misma acción sobre las ruedas del puente delantero se repite sobre las ruedas del puente trasero con un cierto retraso. El tiempo de retraso se obtiene fácilmente, si se conoce la velocidad de desplazamiento y la batalla (distancia entre el puente delantero y trasero) de la máquina, y se determina por la siguiente expresión:

$$T = B/v \quad (63)$$

Donde:

τ : tiempo de retraso.

B: batalla de la máquina.

v: velocidad de desplazamiento de la máquina.

Teniendo en cuenta el tiempo de retraso, la irregularidad, bajo la rueda del puente trasero, se puede dar en función de la irregularidad, bajo la rueda del puente delantero, por medio de la siguiente expresión:

$$h_2(t) = h_1(t - T) \quad (64)$$

Entonces, al aplicar la transformada de Laplace a la expresión (64), se obtendrá:

$$L[h_2(t)] = L[h_1(t - T)] \rightarrow h_1(s) \cdot e^{-sT} \quad (65)$$

Donde

L Significa “imagen de”, al aplicar la Transformada de Laplace (1867).

Al sustituir (65) en la expresión (57), la expresión (59) tomará la forma:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(s) &= c_{n1}s + k_{n1} \\ a_{22}(s) &= (c_{n2}s + k_{n2})e^{-sT} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Y, entonces, la matriz de columna de las acciones exteriores tomará la forma:

$$\{h(s)\} = \begin{Bmatrix} h_1(s) \\ h_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h(s) \\ h(s) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (67)$$

Esto acarrea una gran ventaja, que consiste en que sólo se trabaja con una función, que actúa sobre las ruedas delanteras y traseras, haciéndolo en estas últimas con un cierto retraso. Estas últimas consideraciones afectarán las funciones de transferencia $[W(s)]$, teniendo en cuenta los operadores dados en (66), que sustituyen a los operadores (59) en la expresión $[D(s)]^{-1} \cdot [a(s)] = [W(s)]$.

La ecuación (62), que contempla dos irregularidades diferentes para la rueda delantera y trasera, o la nueva ecuación, que se obtenga al considerar el retraso en la acción de una misma irregularidad, proporcionan la salida del sistema en forma de desplazamientos de las masas suspendidas y no suspendidas. Esto resulta ya de una gran utilidad; pero, a partir de estas ecuaciones, se pueden obtener otras salidas, que resultan también de gran utilidad, como son los momentos de resistencia a la rodadura.

Salida en forma de momento de resistencia a la rodadura.

Como se conoce, el momento de resistencia a la rodadura estará dado por la expresión:

$$M_r = R_d \cdot f_r \cdot G_r$$

Donde:

R_d : radio dinámico de la rueda.

f_r : coeficiente de resistencia a la rodadura.

G_r : carga radial sobre la rueda.

Durante el desplazamiento de la máquina, la carga radial sobre la rueda puede descomponerse en una parte constante, que depende del peso que soporta la rueda, y una parte variable, que depende de las deformaciones radiales que sufre la rueda. Esta parte variable estará dada por la expresión:

$$G_v = k_i \cdot (h - z_i) \quad (68)$$

Donde:

k_i : coeficiente de rigidez radial de la rueda.

h : altura de la irregularidad de la superficie debajo de la rueda.

z_i : Desplazamiento vertical del eje de la rueda.

$h - z_1$: Deformación radial de la rueda.

Supongamos que, en el caso que nos ocupa, deseamos determinar el comportamiento del momento de resistencia a la rodadura en la rueda delantera de la máquina, que surge al pasar sobre las irregularidades del terreno. Entonces, la deformación radial se determina por medio de la expresión:

$$h(s) - z_1(s) = h(s) - W_{11}(s) \cdot h(s) \Rightarrow h(s) - z_1(s) = [1 - W_{11}(s)] \cdot h(s)$$

La parte variable del momento de resistencia a la rodadura estará dado por:

$$M_v(s) = R_d \cdot f_r \cdot [1 - W_{11}(s)] \cdot h(s) \quad (69)$$

Y la función de transferencia de la rueda delantera, para una salida en forma de la parte variable del momento de resistencia a la rodadura, podrá expresarse como:

$$W_{11}^M(s) = R_d \cdot f_r \cdot [1 - W_{11}(s)] \quad (70)$$

Entonces, en forma compacta, la expresión (69) se puede escribir como:

$$M_V(s) = W_{11}^M(s) \cdot h(s) \quad (71)$$

Si se conocen las características estadísticas de las irregularidades de la superficie, entonces se pueden determinar las características estadísticas del momento de resistencia a la rodadura. Por ejemplo, la densidad espectral de este momento estará dada por la expresión:

$$E_M(\omega) = |W_{11}^M(i\omega)|^2 \cdot E_h(\omega) \quad (72)$$

Donde:

$E_M(\omega)$: Densidad espectral del momento de resistencia a la rodadura.

$|W_{11}^M(i\omega)|$: Módulo de la función de transferencia.

$E_h(\omega)$: Densidad espectral de las irregularidades de la superficie.

En la expresión (72) se ha sustituido la variable compleja “s” por la expresión “i ω ”. La densidad espectral de las irregularidades se obtiene en función de “ ω ”, por lo que al ser multiplicada por el cuadrado del módulo de la función de transferencia, resulta la densidad espectral del momento, también en función de “ ω ”.

Teniendo la densidad espectral del momento de resistencia a la rodadura, se puede obtener la dispersión de este momento, que es también una importante característica estadística de cualquier parámetro variable de un proceso determinado. La dispersión se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$D_M = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty E_M(\omega) d\omega \quad (73)$$

El momento de resistencia a la rodadura, que constituye la salida del sistema en este caso que analizamos, puede constituir, a la vez, la entrada al sistema vibratorio de la transmisión, si la rueda analizada es una rueda motriz de la máquina móvil. Si la rueda no es motriz, entonces no es necesario trabajar con el momento de resistencia a la rodadura en ella, (Williams y Flannery, 1989).

Problemas resueltos.

Problema 1. Suspensión de una motobomba.

Una motobomba de 150 kgf de peso total rota a 1200 rpm. El impelente, que está desbalanceado, pesa 20 kgf y presenta una excentricidad de 1 mm. La motobomba debe ser montada sobre un fundamento (bloque de hormigón) de 210 kgf de peso, el cual, a la vez, se coloca sobre seis soportes elastoméricos iguales, para evitar la transmisión de las vibraciones al piso de la planta, durante su funcionamiento, como se muestra en la figura 38. La proyección del centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la base.

Como elastómero, se cuenta con neopreno, con 40 “Shore A” de dureza. El coeficiente de transmisibilidad no debe ser superior a 0,12. Projete los soportes adecuados.

Figura 38 Motobomba

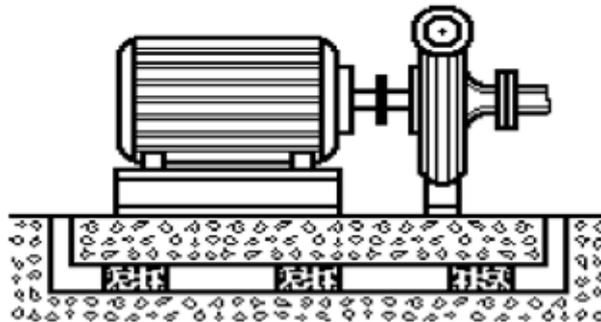


Ilustración: Héctor Terán

Figura 39 Modelo del sistema vibratorio

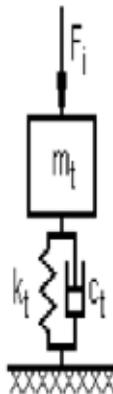


Ilustración: Héctor Terán

Notas aclaratorias:

- Como los seis soportes serán iguales y están colocados de forma que el peso se distribuya uniformemente entre ellos, este sistema se puede analizar como un sistema de un grado de libertad, como se muestra en la figura 39.
- Para proyectar los soportes se seguirá la metodología expuesta en el epígrafe 1.2, de este material didáctico, para una forma cilíndrica y tipo “sándwich”. Se deben seguir los siguientes pasos.

Solución.

a. El primer paso que se debe dar es definir claramente los datos iniciales:

- Peso de la motobomba: $W = 150$ kgf.
- Peso del fundamento: $W_f = 210$ kgf.
- Peso total suspendido: $W_t = 360$ kgf.
- Peso del impelente desbalanceado: $W_d = 20$ kgf.
- Excentricidad del impelente: $e_x = 1$ mm.
- Número de revoluciones del impelente: $n = 1200$ rpm.
- Cantidad de soportes: $C_s = 6$.
- Material (elastómero): Neopreno.
- Dureza del elastómero: $Dur = 40$ “Shore A”.
- Coeficiente de transmisibilidad máximo permisible durante el trabajo: $T_{rmax} = 0,12$.

De los datos iniciales, se pueden obtener otros datos necesarios:

- Masa total suspendida: $m_t = 360$ kg.
- Masa del impelente desbalanceado: $m_d = 20$ kg.
- Relación de amortiguamiento: $R_{am} = 0,04$.
- Velocidad angular de trabajo del impelente:

$$\omega_{tr} = n \frac{2\pi}{60} \Rightarrow \omega_{tr} = 125,66 \text{ rad/s}$$

- El módulo de Young (E_o) y la constante de corrección (K) se determinan en la tabla 1.2.2 (Ramón Martínez, “Vibraciones Mecánicas”), a la que hay que entrar con la dureza del elastómero. Con la dureza, dada en los datos, en la tabla se obtiene el valor del módulo de Young y la constante de corrección (K).

$$E_o = 15 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \qquad K = 0,85$$

b. Determinación de la parte del peso del sistema, que cae en cada soporte.

Como la proyección del centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la base, el peso, que corresponde a cada soporte (P), se obtiene dividiendo el peso total entre la cantidad de soportes, como se muestra en la siguiente expresión:

$$P = \frac{Wt}{C_s} \Rightarrow P = \frac{360 \text{ kgf}}{6} \Rightarrow P = 60 \text{ kgf}$$

c. Determinación de la deflexión estática preliminar de los soportes.

La deflexión estática preliminar se obtiene analíticamente por medio de la siguiente expresión:

$$\Delta \text{ estp} = \left(\frac{946}{\frac{n}{3,5}} \right)^2 \Rightarrow \Delta \text{ estp} = \frac{(3,5 - 946)^2}{n^2} = \frac{10962721}{(1200)^2} \Rightarrow \Delta \text{ estp} = 7,61 \text{ mm}$$

Esta deflexión estática preliminar debe ser comprobada más adelante, cuando ya se tengan las dimensiones del bloque elastomérico.

d. Seleccionar la forma y dimensiones básicas del soporte.

Como el bloque elastomérico será cilíndrico, se debe fijar el diámetro (D) tentativamente, y luego determinar la altura (H), de forma que el soporte sea estable, como se muestra a continuación:

- Se fija el diámetro (D) a una razón aproximada de un (1) centímetro por cada 25 kgf de peso, que corresponde al soporte. Para 60 kgf de peso, se escoge aproximadamente un diámetro:

$$D=3\text{cm}$$

- Se fija altura, teniendo en cuenta la estabilidad, como se muestra a continuación:

$$H \leq \frac{D}{1,65} \Rightarrow H \leq \frac{3 \text{ cm}}{1,65} \Rightarrow H \leq 1,81 \text{ cm} \quad \text{Se escoge: } H = 1,6 \text{ cm}$$

e. Determinación del factor de forma (S) del soporte.

La rigidez de un bloque elastomérico depende del factor de forma (S), que se define como:

$$S = \frac{\text{Área cargada}}{\text{Área libre de carga}}$$

Como se trata de un cilindro:

$$S = \frac{D}{4.H} \Rightarrow S = \frac{3 \text{ cm}}{4.1,6 \text{ cm}} \Rightarrow S = 0,46875$$

f. Determinación del módulo efectivo en compresión (E_c)

En la práctica el valor del módulo efectivo en compresión se determina por medio de la expresión:

$$E_c = E_o(1 + 2.K.K^2) \Rightarrow E_c = 15 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \cdot (1 + 2.0,85 - (0,46875)^2) \Rightarrow E_c = 20,26 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

g. Determinación de la deflexión estática real de los soportes.

Para esto hace falta el área de la sección transversal del bloque elastomérico (Área), que será:

$$\text{Área} = \frac{\pi.D^2}{4} \Rightarrow \text{Área} = \frac{\pi.(3 \text{ cm})^2}{4} \Rightarrow \text{Área} = 7,06 \text{ cm}^2$$

Teniendo en cuenta la resistencia de materiales, se puede plantear que la deflexión estática real será:

$$\Delta_{\text{estr}} = \frac{P.H}{\text{Área}.E_c} \Rightarrow \Delta_{\text{estr}} = \frac{60 \text{ kgf} \cdot 1,6 \text{ cm}}{7,06 \text{ cm}^2 \cdot 20,60 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}} \Rightarrow \Delta_{\text{estr}} = 6,59 \text{ mm}$$

La deflexión estática real obtenida, para el soporte proyectado, debe garantizar el trabajo de la máquina en la zona de aislamiento vibratorio, en el intervalo de bajos coeficientes de transmisibilidad. Si la deflexión estática obtenida es mayor que la deflexión estática de partida, el sistema estará trabajando bien entrado en la zona de aislamiento vibratorio, por lo que los resultados, hasta el momento, son satisfactorios.

Si la deflexión estática real obtenida es menor que la deflexión estática de partida, entonces se debe regresar a volver a proyectar los bloques elastoméricos. Esto puede contemplar la variación del diámetro (D) y la altura (H) de los bloques elastoméricos; o escoger otro elastómero de dureza diferente. Una solución puede ser la variación de la cantidad de soportes, si el sistema lo permite. Luego se obtienen los nuevos resultados, repitiendo los cálculos desde el paso necesario.

En este caso, la deflexión estática real obtenida es ligeramente inferior a la deflexión estática preliminar, por lo que se continúa la solución del problema, sin regresar a variar las dimensiones básicas de los bloques elastoméricos.

h. Constante de rigidez total de la suspensión.

La constante de rigidez de cada soporte (k_s) se determina por medio de la relación entre fuerza y deformación, que en este caso será la relación entre la parte del peso que cae en cada soporte y la deflexión estática que produce. Despejando en la expresión de la deflexión estática, se tendrá que:

$$k_s = \frac{P}{\Delta_{est}} = \frac{\text{Área} \cdot E_c}{H} \Rightarrow k_s = \frac{\text{Área} \cdot E_c}{H}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$k_s = \frac{7,06 \text{ cm}^2 \cdot 20,60 \text{ kgf/cm}^2}{1,6 \text{ cm}} \Rightarrow k_s = 90897,5 \text{ N/m}$$

La constante de rigidez total se obtiene considerando que los soportes se encuentran en paralelo, por lo que se debe multiplicar la cantidad de soportes por la constante de rigidez de cada soporte, como se muestra a continuación:

$$k_t = C_s \cdot k_s \Rightarrow k_t = 6 \cdot 90897,5 \text{ N/m} \Rightarrow k_t = 545385 \text{ N/m}$$

i. Frecuencia natural del sistema suspendido sobre los soportes.

Seguidamente se puede obtener la frecuencia natural, por medio de la expresión:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{m_t}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{564300 \text{ N/m}}{360 \text{ kg}}} \Rightarrow \omega_n = 38,92 \text{ rad/s}$$

j. Relación de frecuencias para la frecuencia de trabajo del sistema.

La relación de frecuencias será:

$$R\omega = \frac{\omega_{tr}}{\omega_n} \Rightarrow R\omega = \frac{125,66 \text{ rad/s}}{39,59 \text{ rad/s}} \Rightarrow R\omega = 3,228$$

Esa relación de frecuencias sitúa el punto de trabajo en la zona de aislamiento vibratorio, y en el intervalo de bajos coeficientes de transmisibilidad, por lo que los resultados son satisfactorios, hasta el momento.

k. Determinación del coeficiente de transmisibilidad de la suspensión.

El coeficiente de transmisibilidad, a la frecuencia de trabajo, se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$Tr = \frac{\sqrt{1+(2.Ram.R\omega)^2}}{\sqrt{(1-R\omega^2)^2+(2.Ram.R\omega)^2}} \Rightarrow Tr = \frac{\sqrt{1+(2.Ram.R\omega)^2}}{\sqrt{(1-(3,228)^2)^2+(2.0,04.3,228)^2}} \Rightarrow Tr = 0,11$$

El coeficiente de transmisibilidad, para la frecuencia de trabajo, debe ser menor que el máximo permisible, que se da en los datos. Si no cumple la condición establecida, se debe rediseñar la suspensión.

l. Determinación del coeficiente de magnificación de la suspensión.

El coeficiente de magnificación, para la frecuencia de trabajo, se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$Cm = \frac{md}{mt} \cdot \frac{R\omega^2}{\sqrt{(1-R\omega^2)^2+(2.Ram.R\omega)^2}}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$Cm = \frac{20\text{kg}}{360\text{kg}} \cdot \frac{(3,228)^2}{\sqrt{(1-(3,228)^2)^2+(2.0,04.3,228)^2}} \Rightarrow Cm = 0,061$$

El coeficiente de magnificación reviste una gran importancia, ya que da una determinada medida de la magnitud de la amplitud, a la frecuencia de trabajo.

m. Obtención del gráfico de la relación de amplitudes (coeficiente de magnificación).

Para esto se evalúa el comportamiento de la relación de amplitudes (coeficiente de magnificación), por medio de la siguiente expresión, en el intervalo de posible variación de la frecuencia angular (0 a 150 rad/s), para las más bajas frecuencias de trabajo. El gráfico se muestra en la figura 40.

Figura 40 Comportamiento del coeficiente de magnificación

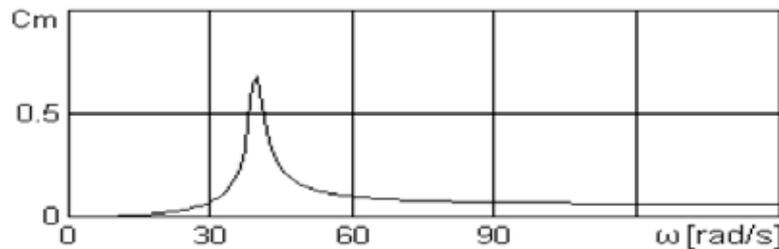


Ilustración: Héctor Terán

$$Cm(\omega) = \frac{md}{mt} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot Ram \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

En el gráfico se observa claramente la zona de resonancia, en la que el coeficiente de magnificación alcanza los mayores valores, aunque en este caso no son muy grandes.

n. Gráfico del coeficiente de transmisibilidad.

Para esto se evalúa el comportamiento del coeficiente de transmisibilidad, en el intervalo de posible variación de la frecuencia angular, que se definió en el paso anterior.

$$Tr(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \cdot Ram \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot Ram \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

El gráfico se muestra en la figura 41. En este se observan los grandes valores que el coeficiente de transmisibilidad alcanza en la zona de resonancia, con la caída posterior, a medida que aumenta la frecuencia de excitación de la fuerza de inercia, que surge en el impelente, durante su rotación.

Figura 41 Comportamiento del coeficiente de transmisibilidad

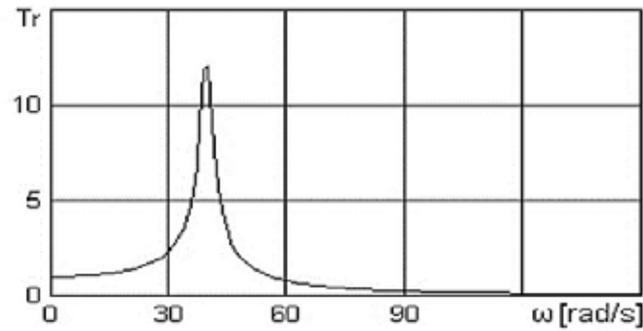


Ilustración: Héctor Terán

Después de haber observado los resultados obtenidos, se puede arribar a la conclusión de que la suspensión diseñada cumple perfectamente con las exigencias, que fueron establecidas al comenzar el problema, ya que tanto la transmisibilidad como las amplitudes de las vibraciones, son pequeñas en la zona de trabajo de la motobomba.

Problema 2. Conjunto motor-ventilador sobre soportes elastoméricos.

En un edificio de oficinas se debe instalar un conjunto motor-ventilador de un sistema de ventilación forzada. La sala del sistema de ventilación se encuentra sobre las oficinas, por lo que el aislamiento de las vibraciones debe ser igual o mayor al 90 %, es decir, la transmisibilidad debe ser igual o menor a 0,1.

La velocidad angular de operación del motor va desde 900 rpm a 2700 rpm. El peso del conjunto motor-ventilador es de 160 kgf y su base cuenta con cuatro puntos de apoyo. La masa rotatoria desbalanceada es de 15 kg, y presenta una excentricidad de 0,5 mm.

Es posible utilizar cuatro soportes elastoméricos de neopreno, con una dureza 35 “Shore A”, y con una sección rectangular de dos centímetros de ancho, por tres centímetros de largo, por uno de alto, para conformar la suspensión, como se muestra en la figura 42. Si esa suspensión no cumple las exigencias establecidas, proponga otra solución, valorando la posibilidad de utilizar un fundamento de concreto.

Figura 42 Moto-ventilador

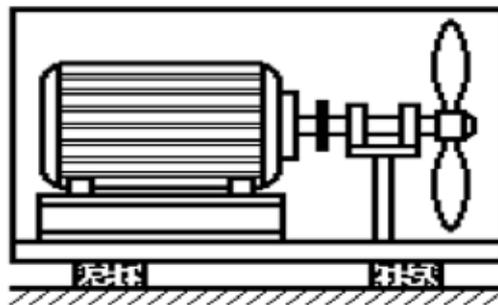


Ilustración: Héctor Terán

Notas aclaratorias:

- Cuando la velocidad de trabajo oscila en un determinado rango, para la proyección de la suspensión se debe tomar como referencia la velocidad angular más baja.
- Como los cuatro soportes son iguales y están distribuidos uniformemente en la base, este sistema se puede analizar como un sistema de un grado de libertad, como se muestra en la figura 43, con la consiguiente simplificación de los cálculos.

Figura 43 Modelo del sistema vibratorio

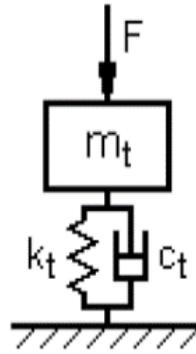


Ilustración: Héctor Terán

Solución (comprobación de los soportes).

La comprobación se realizará siguiendo la metodología para la proyección de soportes elastoméricos. Se deben seguir los siguientes pasos:

a. El primer paso es definir claramente los datos iniciales:

- Peso total del conjunto motor-ventilador: $W_v = 160$ kgf.
- Peso de la pieza rotatoria desbalanceada: $m_d = 15$ kgf.
- Excentricidad: $e_x = 0,5$ mm.
- Número de revoluciones de la pieza desbalanceada: $n = 900 - 2700$ rpm.
- Cantidad de soportes: $C_s = 4$.
- Ancho del bloque elastomérico: $A_b = 2$ cm.
- Largo del bloque elastomérico: $L_b = 3$ cm.
- Altura del bloque elastomérico: $H_b = 1$ cm.
- Material (elastómero): Neopreno.
- Dureza del elastómero: 35 "Shore A".
- Número de revoluciones de la pieza desbalanceada: $n = 900 - 2700$ rpm.
- Coeficiente de transmisibilidad máximo permisible durante el trabajo: $T_{rmax} = 0,1$.

De los datos iniciales, se pueden obtener otros datos necesarios:

- Masa total del conjunto motor - ventilador: $m_t = 160$ kg.
- Masa de la pieza rotatoria desbalanceada: $m_d = 15$ kg.
- Velocidad angular de trabajo (inferior):

$$\omega_{tr} = 900 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi}{60} \Rightarrow \omega_{tr} = 94.24 \text{ rad/s}$$

- Para el neopreno $(c/c_{cr})_{Ram} = 0.04$.
- Módulo de elasticidad (módulo de Young) (E_o) y constante de corrección (K) del elastómetro. Para ello se utiliza la tabla 1.2.2 (Ramón Martínez, "Vibraciones Mecánicas"), a la que hay que entrar con la dureza del elastómero. Se obtienen:

$$E_o = 11,8 \frac{kgf}{cm^2} \quad k = 0,89$$

b. Determinación de la parte del peso del sistema que corresponde a cada soporte.

El peso, que corresponde a cada soporte (P), se obtiene dividiendo el peso total entre la cantidad de soportes, como se muestra en la siguiente expresión:

$$P = \frac{Wt}{Cs} \Rightarrow P = \frac{160 \text{ kgf}}{4} \Rightarrow P = 40 \text{ kgf}$$

c. Determinación de la deflexión estática preliminar de los soportes.

La deflexión estática preliminar se obtiene analíticamente por medio de la siguiente expresión:

$$\Delta_{estp} = \left(\frac{946}{\frac{n}{3,5}} \right)^2 \Rightarrow \Delta_{estp} = \frac{(3,5 \cdot 946)^2}{n^2} = \frac{1096721}{(900)^2} \Rightarrow \Delta_{estp} = 13.53 \text{ mm}$$

Esta deflexión estática preliminar debe ser comprobada más adelante, cuando ya se tengan las dimensiones del bloque elastomérico.

d. Seleccionar la forma y dimensiones básicas del soporte.

En los datos se fijaron la forma (ortoédrica) y dimensiones de los bloques elastoméricos:

$$Ab = 2 \text{ cm}; Lb = 3 \text{ cm}; Hb = 1 \text{ cm}$$

e. Determinación del factor de forma (S) del soporte.

La rigidez de un bloque elastomérico depende del factor de forma (S), que se define como:

$$S = \frac{\text{Área cargada}}{\text{Área libre de carga}}$$

Como se trata de un bloque de sección rectangular, el factor de forma será:

$$S = \frac{Ab \cdot Lb}{2 \cdot Hb \cdot (Ab + Lb)} \Rightarrow S = \frac{2cm \cdot 3cm}{2 \cdot 1cm \cdot (2cm + 3cm)} \Rightarrow S = 0,6$$

f. Determinación del módulo efectivo en compresión (E).

En la práctica el valor del módulo efectivo en compresión se determina por medio de la expresión:

$$Ec = Eo(1 + 2 \cdot k \cdot S^2) \Rightarrow Ec = 11,8kgf/cm^2(1 + 2 \cdot 0,89 \cdot (0,6)^2)$$

Resolviendo:

$$Ec = 19,36 kgf/cm^2$$

g. Determinación de la deflexión estática real de los soportes.

Para esto hace falta el área cargada (Área), que será:

$$\text{Área} = Ab \cdot Lb \Rightarrow \text{Área} = 2cm \cdot 3cm \Rightarrow \text{Área} = 6cm^2$$

Teniendo en cuenta la resistencia de materiales, se puede plantear que la deflexión estática real será:

$$\Delta_{estp} = \frac{P \cdot Hb}{\text{Área} \cdot Ec} \Rightarrow \Delta_{estp} = \frac{40kgf \cdot 1cm}{6cm^2 \cdot 19,36 kgf/cm^2} = 3,433 mm$$

La deflexión estática obtenida, para el soporte diseñado, debe garantizar el trabajo de la máquina en la zona de aislamiento vibratorio. Si la deflexión estática obtenida es mayor que la deflexión estática de partida, el sistema estará trabajando bien entrado en la zona de aislamiento vibratorio, por lo que los resultados, hasta el momento, serían satisfactorios.

Si la deflexión estática real obtenida es menor que la deflexión estática de partida, como en este caso, los soportes, con que se cuenta, no reúnen las condiciones, para garantizar el coeficiente de transmisibilidad exigido.

En este caso se continuará el ejercicio, para demostrar que los soportes no cumplen con la exigencia, que se establece al coeficiente de transmisibilidad.

h. Constante de rigidez total de los soportes.

La constante de rigidez de cada soporte (k) se determina por medio de la relación entre fuerza y deformación, que en este caso será la relación entre la parte del peso que cae en cada soporte y la deflexión estática que produce. Despejando en la expresión de la deflexión estática, se tendrá que:

$$k_s = \frac{P}{\Delta_{estr}} = \frac{\text{Área} \cdot E_c}{Hb} \Rightarrow k_s = \frac{\text{Área} \cdot E_c}{Hb}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$k_s = \frac{6\text{cm}^2 \cdot 19,36 \text{ kgf/cm}^2}{1 \text{ cm}} \Rightarrow k_s = 113900 \text{ N/m}$$

La constante de rigidez total se obtiene considerando que los soportes se encuentran en paralelo, por lo que se debe multiplicar la cantidad de soportes por la constante de rigidez de cada soporte, como se muestra a continuación:

$$k_s = C_s \cdot k_s \Rightarrow k = 4 \cdot 113900 \text{ N/m} \Rightarrow k = 455700 \text{ N/m}$$

i. Frecuencia natural del sistema suspendido sobre los soportes.

Seguidamente se puede obtener la frecuencia natural, por medio de la expresión:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{mt}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{455700 \text{ N/m}}{160 \text{ kg}}} \Rightarrow \omega_n = 53,367 \text{ rad/s}$$

j. Relación de frecuencias para la frecuencia de trabajo del sistema.

La relación de frecuencias será:

$$R\omega = \frac{\omega_{tr}}{\omega_n} \Rightarrow R\omega = \frac{94,248 \text{ rad/s}}{53,367 \text{ rad/s}} \Rightarrow R\omega = 1,766$$

La relación de frecuencias obtenida no garantiza el trabajo del sistema en el intervalo adecuado ($R\omega = 3 \div 4$) de la zona de aislamiento vibratorio. Esto traerá problemas para el cumplimiento de la exigencia en cuanto al coeficiente de transmisibilidad. No obstante, se continuará la solución, para comprobar el cumplimiento de esa exigencia.

k. Determinación del coeficiente de transmisibilidad de la suspensión.

El coeficiente de transmisibilidad se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot Ram \cdot R\omega)^2}}{\sqrt{(1 + R\omega^2)^2 + (2 \cdot Ram \cdot R\omega)^2}}$$

Sustituyendo y resolviendo

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0,04 \cdot 1,766)^2}}{\sqrt{(1 + (1,766)^2)^2 + (2 \cdot 0,04 \cdot 1,766)^2}} \Rightarrow Tr = 0,478$$

El coeficiente de transmisibilidad, para la frecuencia de trabajo, debe ser menor que el máximo permisible, que se da en los datos. Si no se cumple la condición establecida, como se demuestra en este caso, se debe volver a proyectar la suspensión o tomar otras medidas, como se mostrará más adelante.

l. Determinación del coeficiente de magnificación de la suspensión.

El coeficiente de magnificación se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$Cm = \frac{md}{mt} \cdot \frac{R\omega^2}{\sqrt{(1 - R\omega^2)^2 + (2 \cdot Ram \cdot R\omega)^2}}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$Cm = \frac{15kgf}{160kgf} \cdot \frac{(1,766)^2}{\sqrt{(1 - (1,766)^2)^2 + (2 \cdot 0,04 \cdot 1,766)^2}} \Rightarrow Cm = 138$$

El coeficiente de magnificación reviste una gran importancia, ya que da una determinada medida de la magnitud de la amplitud, a la frecuencia de trabajo.

Después de haber observado los resultados obtenidos, se puede arribar a la conclusión de que la suspensión no cumple con las exigencias, que fueron establecidas al comenzar el problema, ya que el coeficiente de transmisibilidad es significativamente superior al máximo coeficiente de transmisibilidad permisible. Por tanto, debe ser asumida otra solución, para la suspensión del conjunto motor-ventilador.

Propuestas de soluciones:

- Diseñar los soportes adecuados para la suspensión, que implicará el cambio de la sección transversal del bloque elastomérico.
- Añadir un fundamento de hormigón, con el peso adecuado, para lograr el coeficiente de transmisibilidad exigido.

Propuesta de un fundamento de hormigón.

Esta solución, en esencia, consiste en añadir una masa adicional al conjunto motor-ventilador, para disminuir la frecuencia natural del sistema, de forma tal, que este trabaje más entrado en la zona de aislamiento vibratorio, a la frecuencia de trabajo más baja. Para los cálculos preliminares, se considerará que el amortiguamiento es despreciable, lo que simplifica significativamente el problema. El coeficiente de transmisibilidad se obtiene, en general, por la expresión:

$$Tr = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega tr}{\omega n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega tr^2}{\omega n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{\omega tr}{\omega n}\right)^2}}$$

En el caso de amortiguamiento despreciable, para la zona de aislamiento vibratorio ($\frac{\omega tr}{\omega n} > 1,41$) y cambiando el signo en el denominador, para evitar los valores negativos, que no tienen sentido, la expresión del coeficiente de transmisibilidad tomará la forma aproximada:

$$Tr = \frac{1}{\frac{\omega tr^2}{\omega n^2} - 1}$$

Transformando:

$$\frac{\omega tr^2}{\omega n^2} - 1 = \frac{1}{Tr} \Rightarrow \frac{\omega tr^2}{\omega n^2} = \frac{1}{Tr} + 1 \Rightarrow \frac{\omega tr^2}{\omega n^2} = \frac{1 + Tr}{Tr}$$

De la expresión anterior, se puede obtener la frecuencia natural preliminar adecuada, para lograr el aislamiento deseado de las vibraciones. Despejando la frecuencia natural preliminar:

$$\omega np^2 = \frac{Trmax \cdot \omega tr^2}{1 + Trmax} \Rightarrow \omega np = \omega tr \cdot \sqrt{\frac{Trmax}{1 + Trmax}}$$

Introduciendo los datos, se obtiene:

$$\omega_{np} = 94,248 \text{ rad/s} \cdot \sqrt{\frac{0,1}{1 + 0,1}}$$

Resolviendo:

$$\omega_{np} = 28,417 \text{ rad/s}$$

En el siguiente paso, lo que se hace es determinar la masa del fundamento (m_{fp}), que se debe adicionar a la del conjunto suspendido, para que el sistema posea una frecuencia natural igual o inferior a la obtenida en el paso anterior, es decir, se debe cumplir que:

$$\sqrt{\frac{kt}{mt + m_{fp}}} = \omega_{np}$$

Transformando y despejando:

$$\frac{kt}{mt + m_{fp}} = \omega_{np}^2 \Rightarrow mt + m_{fp} = \frac{kt}{\omega_{np}^2} \Rightarrow m_{fp} = \frac{kt}{\omega_{np}^2} - mt$$

Introduciendo los datos correspondientes, se obtiene que:

$$m_{fp} = \frac{455700 \text{ N/m}}{(28,417 \text{ rad/s})^2} - 160 \text{ kg} \Rightarrow m_{fp} = 404,313 \text{ kg}$$

En este caso, se escoge la masa del fundamento:

$$m_f = 450 \text{ kg}$$

La frecuencia natural real será:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{mt + m_f}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{455700 \text{ N/m}}{160 \text{ kg} + 460 \text{ kg}}} \Rightarrow \omega_n = 27,332 \text{ rad/s}$$

Y la relación de frecuencias, para el régimen de trabajo, será:

$$R\omega = \frac{\omega_{tr}}{\omega_n} \Rightarrow R\omega = \frac{94,248 \text{ rad/s}}{27,332 \text{ rad/s}} \Rightarrow R\omega = 3.448$$

El coeficiente de transmisibilidad real, para el régimen de trabajo, se obtiene por medio de la expresión (2.7.5):

$$T_{rr} = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot Ram \cdot R\omega)^2}}{\sqrt{(1 + R\omega^2)^2 + (2 \cdot Ram \cdot R\omega)^2}}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$T_{rr} = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0,04 \cdot 3.448)^2}}{\sqrt{(1 + (3.448)^2)^2 + (2 \cdot 0,04 \cdot 3.448)^2}} \Rightarrow T_{rr} = 0,097$$

Cuando se añade la masa del fundamento, el coeficiente de transmisibilidad real, para el régimen de trabajo, es menor que el máximo permisible (T_{rmax}). Si no se cumpliera esta condición, sería necesario aumentar la masa del fundamento, para disminuir, aún más, la frecuencia natural.

Obtención del gráfico de la relación de amplitudes (coeficiente de magnificación).

Para esto se evaluará el comportamiento de la relación de amplitudes (coeficiente de magnificación), por medio de la siguiente expresión, en el intervalo de cero a la mínima frecuencia angular de trabajo (0 a 100 rad/s), como se muestra en la figura 44.

$$C_m(\omega) = \frac{md}{mt} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot Ram \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Figura 44. Gráfico del coeficiente de magnificación

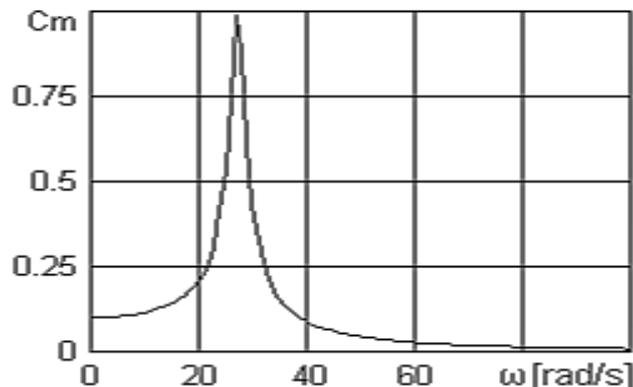


Ilustración: Héctor Terán

En el gráfico se observa claramente la zona de resonancia, en la que el coeficiente de magnificación alcanza los mayores valores, aunque en este caso no son muy grandes.

Además, el coeficiente de magnificación decae con rapidez cuando la frecuencia de excitación se acerca a la mínima frecuencia de trabajo, alcanzando valores pequeños, que acarrearán también pequeñas amplitudes de las vibraciones, a partir de dicha frecuencia.

Gráfico del coeficiente de transmisibilidad.

Para esto se evaluará el comportamiento del coeficiente de transmisibilidad, en el intervalo de posible variación de la frecuencia angular, que se definió en el paso anterior.

$$Tr(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \cdot Ram \cdot \frac{\omega}{\omega n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot Ram \cdot \frac{\omega}{\omega n}\right)^2}}$$

En este se observan los grandes valores que el coeficiente de transmisibilidad alcanza en la zona de resonancia, con la caída posterior, a medida que aumenta la frecuencia de excitación de la fuerza de inercia, que surge en el impelente, durante su rotación. Ver la figura 45.

Además, la transmisibilidad decae con rapidez cuando la frecuencia de excitación se acerca a la mínima frecuencia de trabajo, alcanzando valores pequeños, adecuados para el aislamiento de las vibraciones, a partir de dicha frecuencia.

El gráfico demuestra que los soportes, con que se cuentan, en combinación con el fundamento propuesto, pueden arrojar buenos resultados, en lo relacionado con el aislamiento de las vibraciones.

Figura 45 Gráfico del coeficiente de transmisibilidad

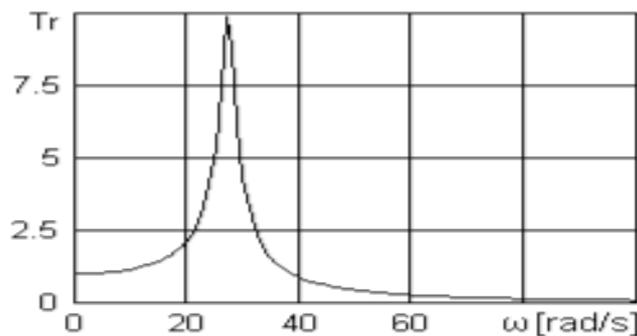


Ilustración: Héctor Terán

Problema 3. Máquina agrícola.

Una máquina agrícola de movimiento lento se desplaza por un camino con irregularidades idealizadas como sinusoidales, con una amplitud “H” y una longitud de onda “L”. Los puentes están unidos rígidamente al chasis, por lo que los únicos elementos elásticos y amortiguadores son los neumáticos. El centro de gravedad no está situado en el centro geométrico de la base de la máquina.

Figura 46 Modelo dinámico de una máquina agrícola

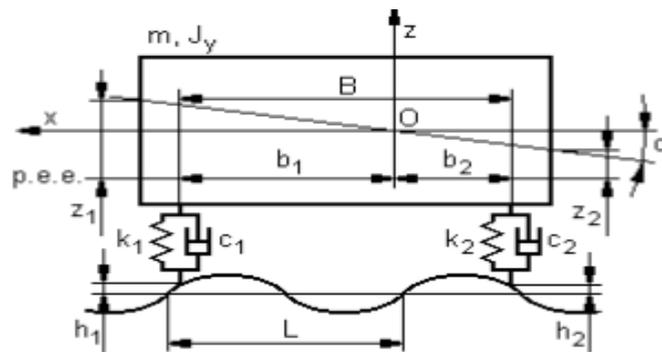


Ilustración: Héctor Terán

Notas aclaratorias:

- Una máquina móvil, en realidad, posee seis grados de libertad; pero, dada la simetría de esta, y que para tramos largos, las irregularidades de la 168 superficie poseen iguales características estadísticas, se puede utilizar el modelo plano, que se presenta en la figura 46, con la consiguiente simplificación del problema.
- Como los neumáticos delanteros y traseros son diferentes y el centro de masas no coincide con el centro geométrico, la máquina se analizará como un sistema de dos grados de libertad.

Solución.

El primer paso es definir claramente los datos iniciales:

- Masa de la máquina: $m = 1600 \text{ kg}$.
- Momento de inercia del cuerpo de la máquina: $J_y = 2400 \text{ kg m}^2$.
- Batalla de la máquina: $B = 3 \text{ m}$.
- Distancia de la rueda delantera al centro de gravedad: $b_1 = 2 \text{ m}$.
- Distancia de la rueda trasera al centro de gravedad: $b_2 = 1 \text{ m}$.
- Constante de rigidez de la rueda delantera: $k_1 = 20\,000 \text{ N/m}$.
- Constante de rigidez de la rueda trasera: $k_2 = 30\,000 \text{ N/m}$.
- Constante de amortiguamiento de la rueda delantera: $c_1 = 600 \text{ N.s/m}$.

- Constante de amortiguamiento de la rueda trasera: $c_2 = 800 \text{ N.s/m}$.
 - Altura máxima (amplitud) de las irregularidades de la superficie: $H = 0,01 \text{ m}$.
 - Longitud de onda de las irregularidades de la superficie: $L = 1,25 \text{ m}$
- Las ordenadas de las irregularidades en el neumático delantero y trasero se representarán con los símbolos h_1 y h_2 . Los desplazamientos verticales del cuerpo de la máquina en los puentes delantero y trasero se representan con los símbolos z_1 y z_2 y el desplazamiento angular del cuerpo con el símbolo α .

Responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué movimientos vibratorios realiza el cuerpo de la máquina y qué fuerzas excitan estas vibraciones?
- Escriba la expresión para determinar la frecuencia angular de las fuerzas excitadoras.
- Escriba las expresiones para determinar las ordenadas de las irregularidades y sus derivadas.
- Escriba las ecuaciones diferenciales del equilibrio dinámico del cuerpo de la máquina.
- ¿Cuáles serían las frecuencias naturales del sistema si fuera libre no amortiguado?
- ¿A qué velocidades de desplazamiento de la máquina aparecería la resonancia si el sistema fuera no amortiguado?

Respuestas

- a. Movimientos vibratorios**, que realiza el cuerpo de la máquina, y fuerzas que los engendran.

En el plano vertical, que contiene el modelo de la máquina, esta puede realizar dos movimientos vibratorios:

- Desplazamiento lineal vertical del cuerpo (según el eje Z).
- Rotación del cuerpo en el plano vertical (alrededor del eje Y o del punto O).

Las fuerzas que excitan estas vibraciones son:

- Fuerzas elásticas de deformación de los neumáticos al pasar sobre las irregularidades.
- Fuerzas de amortiguamiento de los neumáticos al pasar sobre las irregularidades.

- b. Expresión para determinar la **frecuencia angular de las fuerzas excitadoras**.

La longitud de onda de las irregularidades de la superficie es uno de los parámetros conocidos, por lo que se puede determinar la frecuencia de estas irregularidades (en ciclos/metro), como el inverso de dicha longitud de onda. Así se tendrá que:

$$f = \frac{1}{L} \Rightarrow f = \frac{1}{1,25[m]} \Rightarrow f = 0,8 \left[\frac{\text{ciclos}}{\text{metro}} \right]$$

$$[\text{ciclos/metro}] = \left[\frac{1}{m} \right] = [m^{-1}]$$

La frecuencia de las fuerzas excitadoras depende de la velocidad de desplazamiento (v) de la máquina sobre las irregularidades y se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$n = f \cdot v \Rightarrow n = 0,8 \left[\frac{1}{m} \right] \cdot v \left[\frac{m}{s} \right] \Rightarrow n = 0,8 \cdot v [1/s]$$

$$[1/s] = [s^{-1}] = [Hz]$$

Capítulo II



MODELOS DINÁMICOS DE LOS SISTEMAS VIBRATORIOS

ESPACIO EN BLANCO

1. Modelos dinámicos de los sistemas vibratorios.

Para realizar un estudio útil de los fenómenos vibratorios, que ocurren en un determinado sistema mecánico, y para que los resultados sirvan de base para la toma de decisiones al respecto, el éxito depende, en gran medida, del análisis y síntesis realizados para la “representación esquemática simplificada” de dicho sistema. La “representación esquemática simplificada”, que contiene los parámetros fundamentales, que intervienen en los fenómenos vibratorios del sistema, se denomina modelo dinámico del sistema vibratorio.

El modelo dinámico del sistema vibratorio debe ser lo más simple posible, para que muestre fácilmente las relaciones entre los parámetros propios de dicho sistema y los movimientos vibratorios que aparecen en este; pero, a la vez, debe ser lo suficientemente complejo y contener la mayor cantidad posible de información, que permitan realizar un estudio profundo de los fenómenos vibratorios que ocurren en este. A continuación se da un conjunto de procedimientos y expresiones matemáticas, que permiten obtener los modelos dinámicos vibratorios de los sistemas mecánicos, que se necesita analizar desde este punto de vista.

Sustitución de masas por masas concentradas equivalentes.

Aunque es posible analizar la dinámica de los sistemas mecánicos, con las masas de los elementos distribuidas en todo su volumen, en determinados casos es más cómodo, desde el punto de vista analítico, trabajar con masas concentradas en varios puntos de dichos elementos, sin que los resultados pierdan veracidad. En los sistemas mecánicos aparecen muchos ejemplos de elementos, que forman pares cinemáticos u otros tipos de uniones, con otros elementos, compartiendo a la vez los diferentes movimientos de estos.

El caso más común es el de la biela del mecanismo de manivela-biela-corredera, en el que un extremo de la biela comparte el movimiento de rotación de la manivela, mientras que el otro extremo comparte el movimiento de traslación de la corredera. Tal es el caso también del árbol cardán de los automóviles, que posee un apoyo en la caja de velocidades (puede ser en el chasis) y otro en el puente motriz.

Para el estudio de la dinámica de los elementos, descritos en los párrafos anteriores, es de gran utilidad la sustitución de masas por masas concentradas equivalentes, unidas rígidamente entre sí, ya que se simplifica significativamente el análisis a realizar.

Figura 47 Sustitución de masas por masas concentradas equivalentes

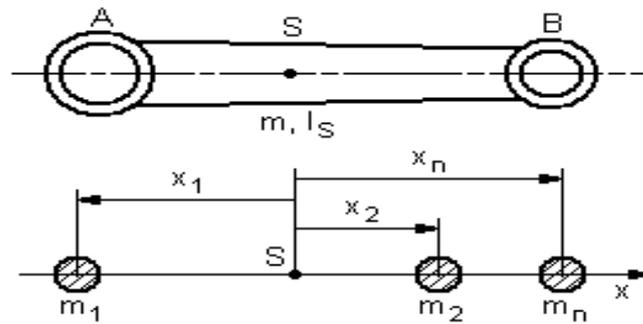


Ilustración: Héctor Terán

Consideremos un elemento de masa “ m ”, de longitud “ L ”, con un momento de inercia “ I_S ”, y en el que se conoce la posición del centro de masas (S), como se muestra en la figura 47. Se han colocado todas las masas concentradas sobre una línea recta, para trabajar con un solo eje coordenado (eje x), lo que simplifica las ecuaciones a utilizar

Para que se cumpla la equivalencia del sistema de masas concentradas, con respecto al elemento real, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- La suma de las masas concentradas debe ser igual a la masa del elemento. Esto se expresa como:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = m \quad (73)$$

- El centro de masas del sistema de masas concentradas debe coincidir con el centro de masas del elemento. Esto se expresa como:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = 0 \quad (74)$$

- La suma de los momentos de inercia de las masas concentradas debe ser igual al momento de inercia del elemento. Esto se expresa como:

$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2 = I_S \quad (75)$$

Si no se necesita una gran exactitud, se puede trabajar sólo con las dos primeras condiciones (2.1.1 y 2.1.2), realizando entonces la sustitución estática. Si se desea una gran exactitud, entonces se debe trabajar con las tres condiciones, y se realiza la sustitución dinámica.

Como se puede ver, en cada punto se tendrán dos incógnitas: una masa concentrada y una coordenada; por lo que la cantidad total de incógnitas será igual a $2n$, donde n es el número de masas concentradas. Sin embargo, en la sustitución estática se contará con dos ecuaciones, y en la sustitución dinámica, con tres, lo que obligará a fijar determinados parámetros, dejando solamente un número de incógnitas igual al número de ecuaciones a utilizar. En el caso de la sustitución estática, habrá que fijar $2n-2$ parámetros; y el caso de sustitución dinámica, $2n-3$ parámetros.

Esto no constituye un gran problema, ya que generalmente se elige un número pequeño de masas (no puede ser inferior a dos), colocadas en los puntos notables del elemento, tales como los pares cinemáticos, los puntos de unión con otros elementos y el centro de masas. Recordemos que el objetivo es simplificar los análisis.

Supóngase que en el ejemplo de la figura 48, se realiza la sustitución dinámica por tres masas concentradas, colocadas en los pares cinemáticos (en los extremos) y en el centro de masa. Entonces las ecuaciones (73, 74 y 75) tomarán la forma:

$$m_A + m_B + m_S = m \tag{76}$$

$$-m_A \cdot a + m_B \cdot b = 0 \tag{77}$$

$$m_A \cdot a^2 + m_B \cdot b^2 = I_S \tag{78}$$

De la ecuación (77) se obtiene:

$$m_B = \frac{m_A \cdot a}{b} \tag{79}$$

Figura 48 Sustitución dinámica y estática

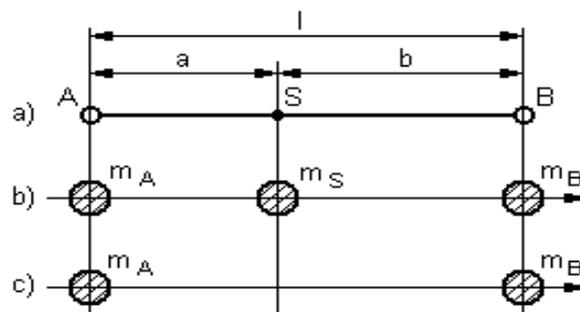


Ilustración: Héctor Terán

Sustituyendo (79) en la ecuación (78):

$$m_A \cdot a^2 + \frac{m_A \cdot a}{b} \cdot b^2 = I_S$$

Simplificando la expresión anterior, se obtiene:

$$m_A(a^2 + a \cdot b) = I_S$$

Despejando:

$$m_A = \frac{I_S}{(a^2 + a \cdot b)} = \frac{I_S}{a \cdot (a + b)} \quad (80)$$

Sustituyendo (80) en la ecuación (79):

$$m_B = \frac{I_S}{a \cdot (a + b)} \cdot \frac{a}{b} = \frac{I_S}{b \cdot (a + b)} \quad (81)$$

Sustituyendo las expresiones (80) y (81) en la ecuación (76):

$$\frac{I_S}{a \cdot (a + b)} + \frac{I_S}{b \cdot (a + b)} + m_S = m$$

Despejando:

$$m_S = m - \frac{I_S}{a \cdot (a + b)} - \frac{I_S}{b \cdot (a + b)} = \frac{m \cdot a \cdot b \cdot (a + b) - I_S(b + a)}{a \cdot b \cdot (a + b)}$$

Simplificando:

$$m_S = m - \frac{I_S}{a \cdot b} \quad (82)$$

Teniendo en cuenta que la suma de las distancias a y b es igual a la distancia L , finalmente las expresiones (80), (81) y (82) toman la forma:

$$m_A = \frac{I_S}{a \cdot L}; \quad m_B = \frac{I_S}{b \cdot L}; \quad m_S = m - \frac{I_S}{a \cdot b} \quad (83)$$

Hagamos ahora, en el mismo ejemplo anterior, la sustitución estática a dos puntos. En este caso, se escogerán los pares cinemáticos (A y B), cuyas posiciones se conocen. El sistema de ecuaciones, que se obtiene al aplicar las dos primeras condiciones de sustitución, será:

$$m_A + m_B = m \quad (84)$$

$$-m_A \cdot a + m_B \cdot b = 0 \quad (85)$$

Despejando en la ecuación (85):

$$m_B = \frac{m_A \cdot a}{b} \quad (86)$$

Sustituyendo (86) en (84):

$$m_A + \frac{m_A \cdot a}{b} = m \Rightarrow \frac{m_A \cdot b + m_A \cdot a}{b} = m \Rightarrow \frac{m_A(b+a)}{b} = m$$

De la expresión anterior, se obtiene:

$$m_A = m \cdot \frac{b}{(b+a)} \quad (87)$$

Sustituyendo (87) en (86):

$$m_B = m \cdot \frac{a}{(b+a)} \quad (88)$$

Teniendo en cuenta que la suma de las distancias a y b es igual a la distancia L , finalmente las expresiones (2.1.15) y (2.1.16) toman la forma:

$$m_A = m \cdot \frac{b}{L}; \quad m_B = m \cdot \frac{a}{L} \quad (89)$$

La sustitución de masas por masas concentradas equivalentes constituye una útil herramienta en la obtención de los modelos dinámicos de los sistemas vibratorios, proporcionando una significativa simplificación de dichos sistemas. Se debe hacer énfasis en que, aunque la masa de un elemento se sustituya por varias masas concentradas, se sigue considerando como un elemento íntegro, es decir, que las masas concentradas estarán unidas rígidamente entre sí, (Bendat y Piersol, 1971).

2. Reducción de masas y momentos de inercia.

En el análisis del trabajo de las máquinas y en particular en el estudio de las vibraciones, que surgen en estas, es mucho más cómodo trabajar, no con las masas y momentos de inercia reales de los elementos, que se mueven con velocidades lineales y angulares diferentes cada uno, sino con masas o momentos de inercia equivalentes, reducidos a algún elemento real de dicha máquina, o incluso a un elemento ficticio, escogido con un objetivo determinado. Este proceso se denomina reducción de masas y momentos de inercia, y el elemento, al que se han trasladado las masas y momentos de inercia equivalentes, elemento de reducción.

Se debe señalar que, partiendo de un mecanismo que esté formado por elementos rotatorios (con ciertos momentos de inercia), elementos con movimiento de traslación (con ciertas masas) y por elementos con movimiento plano compuesto (con masas y momentos de inercia), según el tipo de modelo que se desea obtener, se puede obtener una masa reducida (modelo dinámico de traslación) o un momento de inercia reducido (modelo dinámico de rotación).

La condición de equivalencia del mecanismo real y el modelo dinámico se basa en la igualdad de la energía cinética de ambos, es decir, que la masa reducida o el momento de inercia reducido, según sea el caso, moviéndose con el elemento de reducción, deben tener una energía cinética igual a la suma de las energías cinéticas de los elementos de dicho mecanismo. (Golubev.1979). Para el modelo dinámico de traslación:

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} m_r v_r^2 \quad (90)$$

Despejando la masa reducida:

$$m_r = \sum_i m_i \frac{v_i^2}{v_r^2} + \sum_i I_i \frac{\omega_i^2}{v_r^2} \quad (91)$$

Para el modelo dinámico de rotación:

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_r \omega_r^2 \quad (92)$$

Despejando el momento de inercia reducido:

$$I_r = \sum_i m_i \frac{v_i^2}{\omega_r^2} + \sum_i I_i \frac{\omega_i^2}{\omega_r^2} \quad (93)$$

Dependiendo del modelo escogido, se obtiene el parámetro correspondiente. En las expresiones anteriores se utilizan las relaciones de velocidades $\frac{v_i}{v_r}, \frac{w_i}{w_r}, \frac{v_i}{w_r}$ y $\frac{w_i}{w_r}$, las cuales son funciones periódicas de la posición del mecanismo, por lo que los parámetros reducidos (m_r e I_r) poseen las siguientes características:

- Son funciones periódicas de la posición del mecanismo.
- No dependen de la velocidad del mecanismo.
- Son siempre positivos.

Figura 49 Mecanismo de manivela-biela-corredera

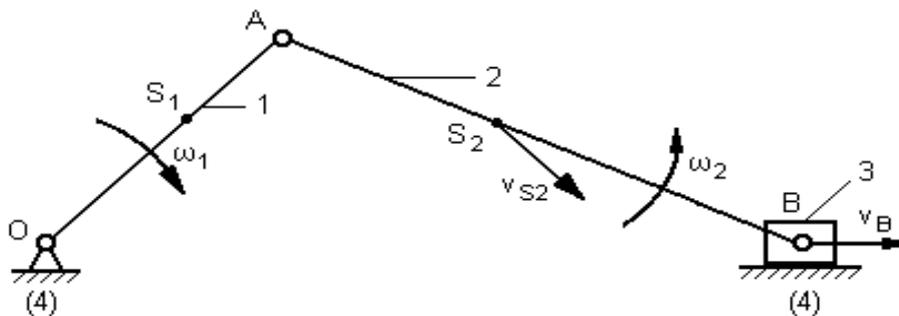


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 49 se presenta un mecanismo de manivela-biela-corredera, en el que se hará la reducción de masas y momentos de inercia, en la posición dada, tomando como elemento de reducción el elemento 1.

Para realizar la reducción de masas y momentos de inercia, es necesario conocer las velocidades lineales de los centros de masa de todos los elementos y las velocidades angulares de los elementos que rotan, por tanto se considera que ya ha sido realizado el análisis cinemático del mecanismo.

Como el elemento 1 es el elemento de reducción, se tendrá que $\omega_r = \omega_1$ y el momento de inercia reducido será:

$$I_r = I_1 \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2} + m_2 \frac{v_{S2}^2}{\omega_1^2} + I_{S2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + m_3 \frac{v_B^2}{\omega_1^2}$$

Se deben destacar los siguientes detalles:

- Como el elemento de reducción es el elemento 1, su momento de inercia pasa íntegramente a formar parte del momento de inercia reducido.
- El elemento 1 tiene movimiento de rotación puro, por lo que se considera que su momento de inercia está dado con respecto a su centro de rotación, y su energía cinética no contempla el desplazamiento de su centro de masa.
- El elemento 2 tiene movimiento plano-compuesto, por lo que su energía cinética está integrada por una parte en la traslación de su centro de masa y otra parte en la rotación alrededor del centro de masa.
- El elemento 3 desarrolla un movimiento rectilíneo, por lo que su energía cinética contiene solamente la componente para este movimiento.
- Como las relaciones de las velocidades dependen de la posición del mecanismo, el valor de este momento de inercia reducido sólo es válido para la posición analizada.

En mecanismos tales como cajas de velocidades, reductores, transmisiones por correa y por cadena, etc., todos los elementos efectúan movimientos de rotación con relaciones de las velocidades constantes (independientes de la posición), por lo que en estos tipos de mecanismos el momento de inercia reducido será constante (independiente de la posición).

3. Consideración de las masas de los elementos elásticos.

En los razonamientos teóricos y, con frecuencia, en los cálculos prácticos, no se tienen en cuenta las masas de los elementos elásticos, que forman parte de los sistemas vibratorios, aduciendo que dichas masas son pequeñas, en comparación con las masas principales del sistema. En realidad, esas masas tienen una determinada influencia en el comportamiento del sistema, y cuando se desea realizar cálculos exactos, se deben tener en cuenta, (Beards, 1995).

Masa acoplada al extremo de un resorte.

En la figura 50, se muestra un sistema, formado por un cuerpo, acoplado al extremo de un resorte, de forma que dicho cuerpo tiene la posibilidad de vibrar longitudinalmente, en la dirección horizontal.

Figura 50 Sistema masa resorte

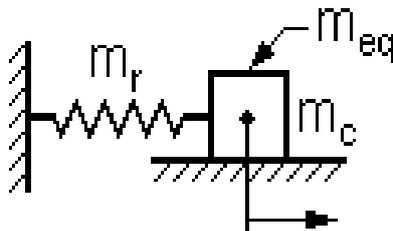


Ilustración: Héctor Terán

Si se tiene en cuenta la masa del resorte, se trabajará con una masa equivalente, colocada en el extremo de este, cuyo valor estará dado por la siguiente expresión:

$$m_{eq} = m_c + \frac{m_r}{3} \quad (94)$$

Donde:

m_{eq} : masa equivalente, colocada en el extremo del resorte.

m_c : masa del cuerpo o masa principal del sistema.

m_r : masa del resorte.

Masa colocada en el extremo de una viga en voladizo.

Figura 51 Masa en viga empotrada

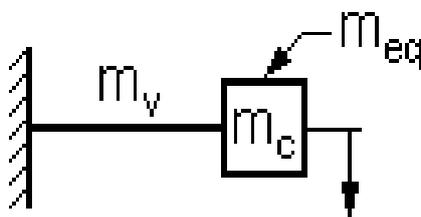


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 51, se muestra un sistema, formado por un cuerpo, colocado en el extremo de una viga en voladizo, de forma que dicho cuerpo tiene la posibilidad de vibrar longitudinalmente, en la dirección vertical.

Si se tiene en cuenta la masa de la viga, se trabajará con una masa equivalente, colocada en el extremo de esta, cuyo valor estará dado por la siguiente expresión:

$$m_{eq} = m_c + 0.23 \cdot m_v \quad (95)$$

Donde:

m_{eq} : masa equivalente, colocada en el extremo de la viga.

m_c : masa del cuerpo o masa principal del sistema.

m_v : masa de la viga.

Masa colocada en el centro de una viga simplemente apoyada.

Figura 52 Viga simplemente apoyada

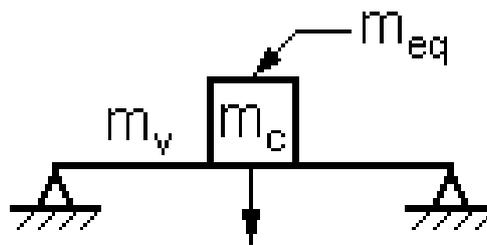


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 52, se muestra un sistema, formado por un cuerpo, colocado en el centro de una viga simplemente apoyada, de forma que dicho cuerpo tiene la posibilidad de vibrar longitudinalmente, en la dirección vertical. Si se tiene en cuenta la masa de la viga, se trabajará con una masa equivalente, colocada en el centro de esta, cuyo valor estará dado por la siguiente expresión:

$$m_{eq} = m_c + 0.5 \cdot m_v \quad (96)$$

Donde:

m_{eq} : masa equivalente, colocada en el centro de la viga.

m_c : masa del cuerpo o masa principal del sistema.

m_v : masa de la viga.

Varias masas colocadas sobre una barra articulada.

Figura 53 Barra con varias masas

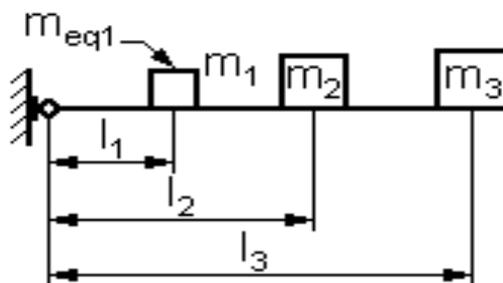


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 53, se muestra un sistema, formado por varios cuerpos, distribuidos arbitrariamente a lo largo de una barra articulada. La masa equivalente, en este caso, se puede colocar en varias posiciones. Si se desea colocar dicha masa junto a la masa del primer cuerpo, entonces la masa equivalente estará dada por la siguiente expresión:

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 \cdot m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 \cdot m_3 \tag{97}$$

Donde:

m_{eq1} : masa equivalente, colocada junto al cuerpo 1.

m_1 ; m_2 ; m_3 : masas de los cuerpos.

l_1 ; l_2 ; l_3 : longitudes que fijan la posición de los cuerpos.

Masa que se traslada y masa rotacional acoplada.

Figura 54 Mecanismo de cremallera

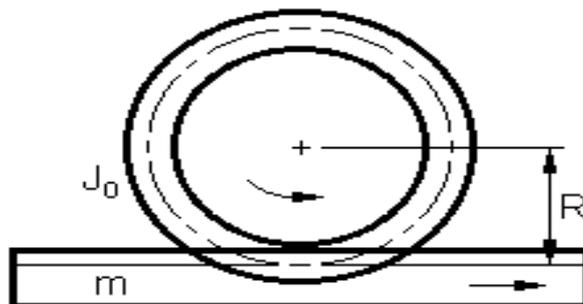


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 54, se muestra un sistema, formado por una masa que se traslada y una masa rotacional acopladas, como ocurre en un mecanismo de cremallera. En este caso, se puede obtener una masa equivalente, colocada en el cuerpo que se traslada, o un momento de inercia equivalente, colocada sobre el cuerpo que rota. Las expresiones a utilizar, para ambas posibilidades, se dan a continuación:

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2} \quad (98)$$

$$J_{eq} = J_0 + m \cdot R^2 \quad (99)$$

Donde:

m_{eq} : masa equivalente, colocada sobre el cuerpo que se traslada.

J_{eq} : momento de inercia equivalente, colocado sobre el cuerpo que rota.

m : masa del cuerpo que se traslada.

J_0 : momento de inercia del cuerpo que rota.

R : radio primitivo del cuerpo que rota.

4. Reducción de fuerzas y momentos de fuerzas.

De forma semejante a como se realiza la reducción de masas y momentos de inercia, así también se realiza la reducción de fuerzas y momentos de fuerzas, obteniendo una fuerza reducida o un momento de fuerza reducido, cuyo efecto es equivalente al efecto conjunto de todas las fuerzas y momentos de fuerzas, aplicados en diferentes puntos y elementos del mecanismo.

La condición que debe cumplirse para la equivalencia del modelo con respecto al mecanismo real es la igualdad de la potencia, desarrollada por la fuerza reducida o por el momento de fuerza reducido, con respecto a la suma de las potencias, desarrolladas por las fuerzas y momentos de fuerzas aplicados en los puntos y elementos de dicho mecanismo. Eso se expresa de la siguiente forma:

Para el modelo dinámico de traslación:

$$N = \sum_l F_l v_l \cos(F_l \wedge v_l) + \sum_l M_l \omega_l = F_r v_r \quad (100)$$

Despejando:

$$F_r = \sum_l F_l \frac{v_l}{v_r} \cos(F_l \wedge v_l) + \sum_l M_l \frac{\omega_l}{v_r} \tag{101}$$

Para el modelo dinámico de rotación:

$$N = \sum_l F_l v_l \cos(F_l \wedge v_l) + \sum_l M_l \omega_l = M_l \omega_l \tag{102}$$

Despejando:

$$M_r = \sum_l F_l \frac{v_l}{\omega_r} \cos(F_l \wedge v_l) + \sum_l M_l \frac{\omega_l}{\omega_r} \tag{103}$$

Dependiendo del modelo escogido, se obtiene el parámetro reducido correspondiente.

En la figura 55 se presenta el mecanismo de manivela-biela-corredera, cargado con las fuerzas y momentos de fuerzas exteriores, y se obtendrá el momento de fuerza reducido, tomando como elemento de reducción al elemento 1.

En este caso, como también el elemento 1 es el elemento de reducción, se tendrá un modelo dinámico de rotación y la velocidad de reducción será la velocidad angular de dicho elemento. Así se obtendrá el momento de fuerza reducido:

$$M_r = P_i \frac{v_{S2}}{\omega_1} \cos \alpha - M_i \frac{\omega_2}{\omega_1} - Q \frac{v_B}{\omega_1}$$

Figura 55 Mecanismo con las fuerzas aplicadas

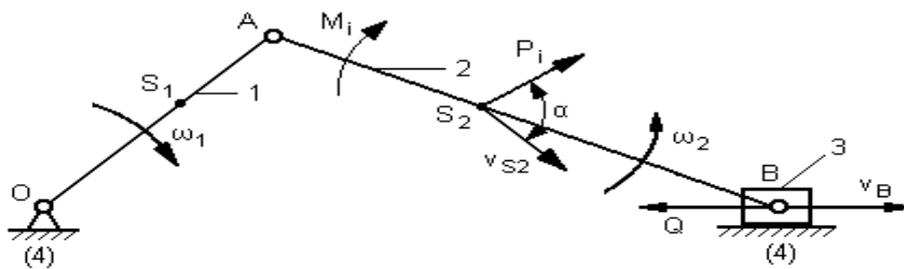


Fig. 5.4.1. Mecanismo con las fuerzas aplicadas.

Ilustración: Héctor Terán

Se deben destacar los siguientes detalles:

- En las máquinas tecnológicas se determina el momento de fuerza resistivo reducido, mientras que en las máquinas energéticas se determina el momento de fuerza motriz reducido. El primero desarrollará un trabajo negativo, resultando por lo general con signo negativo, mientras que el segundo desarrolla un trabajo positivo y resulta por lo general con signo positivo.
- En este caso, tanto las fuerzas, como las relaciones de velocidades, son funciones periódicas de la posición del mecanismo, por lo que el momento de fuerza reducido será también una función periódica de la posición del mecanismo.
- Como las fuerzas de inercia, y por lo general las fuerzas tecnológicas, dependen de la velocidad del mecanismo, el momento de fuerza reducido dependerá también de dicha velocidad.
- Como las relaciones de las velocidades dependen de la posición del mecanismo, el valor de este momento de fuerza reducido sólo es válido para la posición analizada.

Al elemento principal de la máquina, después de haber llevado a este la masa o momento de inercia reducido, y la fuerza o momento de fuerza reducido, se le denomina modelo dinámico, y sirve de base para realizar el análisis dinámico de dicha máquina.

Este permite conocer la irregularidad de rotación del árbol principal (en el caso de movimiento de rotación, que es el más frecuente) o determinar el momento de inercia del volante, que se ha de montar en la máquina, para disminuir el coeficiente de irregularidad de rotación hasta un valor permisible.

El coeficiente irregular de rotación permisible depende de los mecanismos que forman la máquina y del trabajo que le está encomendado a esta.

Además, los momentos de inercia reducidos de las máquinas, unidos con los elementos elásticos, tales como transmisiones y árboles, forman sistemas vibratorios, en los que las fuerzas y momentos de fuerzas variables excitan vibraciones torsionales.

Figura 56 Resorte de característica lineal

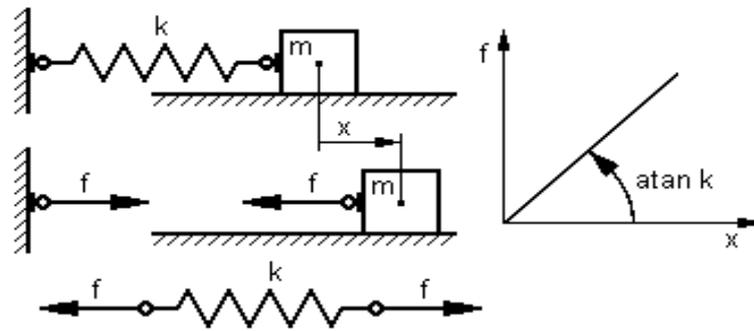


Ilustración: Héctor Terán

5. Parámetros de rigidez.

Resortes lineales.

Supongamos una masa fija al extremo libre de un resorte, como se muestra en la figura 56. Si desplazamos la masa una distancia (x) de su posición de equilibrio, la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa es:

$$\vec{f} = -k \vec{x} \tag{104}$$

Siendo:

k : coeficiente de rigidez del resorte.

x : desplazamiento de la masa.

En el caso de un resorte, en el que la fuerza y el desplazamiento estén relacionados por una expresión como la (104), puede admitirse que la rigidez (k) es constante dentro de ciertos límites del desplazamiento (x). En este caso se dice que es un resorte de característica lineal o, abreviadamente, un resorte lineal.

A continuación se presentan varios ejemplos de resortes, que se consideran lineales, para los cálculos prácticos.

Rigidez de un resorte helicoidal.

En la figura 57 se presentan dos resortes helicoidales: uno cargado a tracción, y uno cargado a compresión. Según la resistencia de materiales, para pequeñas deformaciones, se debe cumplir que:

$$k = \frac{f}{x} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} \tag{105}$$

Figura 57 Resortes helicoidales

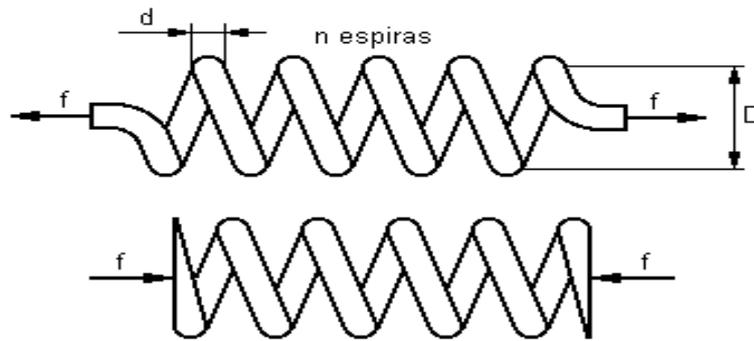


Ilustración: Héctor Terán

Siendo (G) el módulo de elasticidad transversal. (Para el acero: $G = 1,9 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$).

Obsérvese que, cuantas más espiras (n) tiene el resorte, es menos rígido. La longitud del resorte (L) no influye en la rigidez, siempre que el número de espiras sea el mismo. En cambio influye en la máxima deformación que admite el resorte.

Compárese la rigidez de dos resortes geoméricamente semejantes (figura 58).

Debe cumplirse que:

$$n_2 = n_1 \quad \text{y} \quad \frac{d_2}{d_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{L_2}{L_1} = 2 \Rightarrow k_2 = 2k_1$$

La rigidez del mayor es sólo el doble; pero también admite una deformación máxima doble.

Figura 58 Resortes semejantes

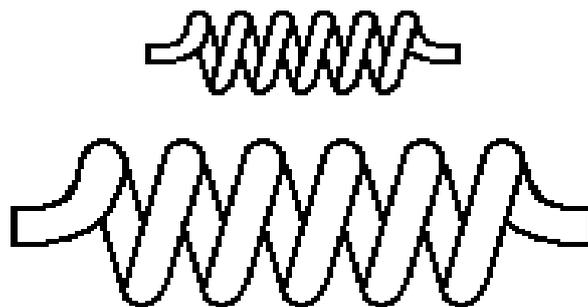


Ilustración: Héctor Terán

Rigidez de un resorte de lámina.

Figura 59 Resorte de lámina

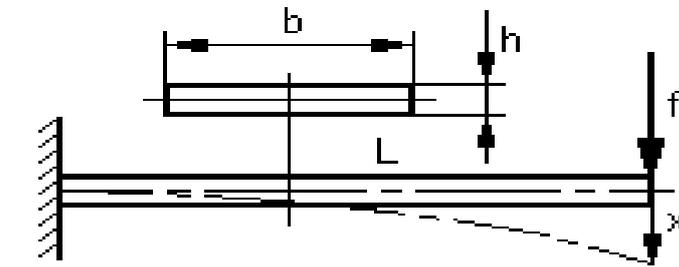


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 59 se muestra un resorte de lámina, consistente en una lámina de sección rectangular, empotrada en un bastidor.

Según la resistencia de materiales, para pequeñas deformaciones, se debe cumplir que:

$$k = \frac{f}{x} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (5.5.3) \quad (106)$$

Siendo E el módulo de elasticidad (para el acero $E=20,6 \cdot 10^{10}$ N/m²), e I el momento de inercia de la sección.

Para una sección rectangular: $I = \frac{bh^3}{12}$

Y para una sección circular: $I = \frac{\pi d^4}{64}$

Compárese la rigidez de dos resortes de lámina geoméricamente semejantes (figura 60). La rigidez del mayor es sólo el doble, pero también admite una flecha máxima doble.

Figura 60 Resortes de lámina semejantes

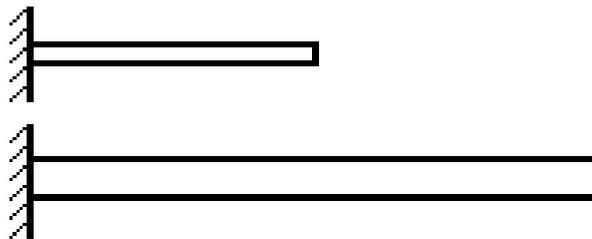


Ilustración: Héctor Terán

Rigidez angular.

Figura 61 Barras de torsión

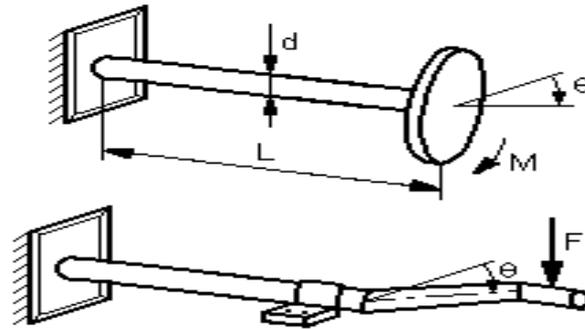


Ilustración: Héctor Terán

Supongamos un volante fijado en el extremo libre de una barra cilíndrica (figura 61). Si giramos el volante un ángulo θ desde su posición de equilibrio, la barra queda retorcida y ejerce sobre el volante un par:

$$M = -K\theta$$

Siendo K el coeficiente de rigidez angular de la barra. Si K se mantiene constante dentro de ciertos límites de θ , se dice que la barra es un resorte angular lineal. Veamos algunos ejemplos.

En las barras de la figura 61, según la resistencia de materiales:

$$M = \frac{M}{\theta} = \frac{G I_0}{L}$$

Siendo I_0 el momento polar de inercia. Para una barra cilíndrica maciza:

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

Espirales de torsión

Figura 62 Resortes espirales de torsión

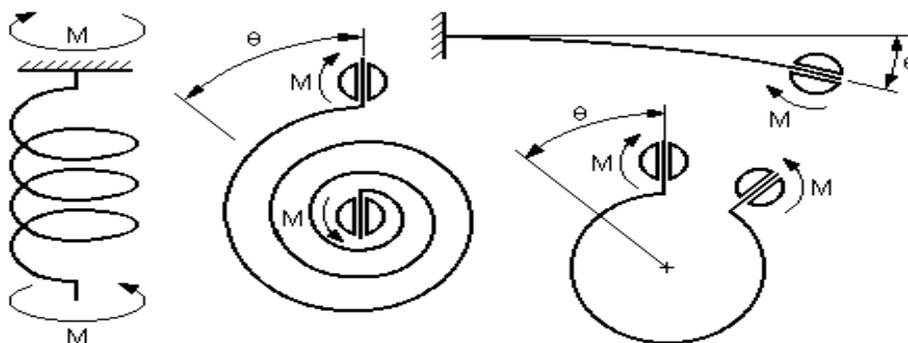


Ilustración: Héctor Terán

En los cuatro casos de la figura 62, el alambre o lámina está sometido únicamente a flexión, y el par flector es el mismo en toda su longitud. A los efectos del ángulo (θ), girado por el extremo libre, el resultado es el mismo que si el alambre fuera rectilíneo. La constante de rigidez del resorte estará dada por la expresión:

$$K = \frac{M}{\theta} = \frac{EI}{L} \quad (107)$$

Siendo:

E: Módulo de elasticidad del material. Para el acero: $E = 20,6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

L: Longitud del alambre o lámina;

I: Momento de inercia de la sección.

Para sección circular: $I = \frac{\pi d^4}{64}$; y para sección rectangular: $I = \frac{bh^3}{12}$.

Donde: d es el diámetro del alambre; b es el ancho de la lámina; y h es el espesor de esta.

Ballesta semielíptica simétrica.

Figura 63 Esquema de una ballesta semielíptica simétrica

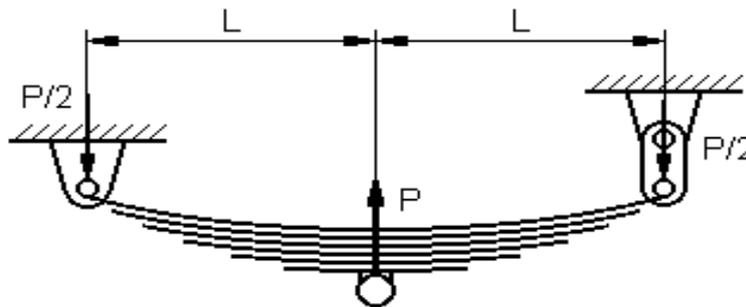


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 63, se muestra un esquema de una ballesta semielíptica simétrica, que sirve de base para lo que se expone a continuación. La hoja maestra se hace de un mayor espesor, para aumentar la resistencia. Las restantes hojas se dividen en grupos de diferentes espesores. La cantidad de grupos, incluyendo la hoja maestra, es de alrededor de tres, y la relación de los espesores de las hojas en los grupos extremos no es mayor de 1,5.

Al calcular la ballesta, se determina la flecha de flexión “x” de la hoja maestra, donde esta alcanza su valor máximo. Aproximadamente, la flecha se calcula por la fórmula:

$$x = \delta \frac{P \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I_0} \quad (108)$$

Donde:

P: Carga total sobre la ballesta [kgf];

E: Módulo de elasticidad de primer orden (); 26cm/kgf101,2·

I0: Momento de inercia de todas las hojas en la sección media de la ballesta, [cm4];

L: Brazo de cálculo de la ballesta, [cm].

El coeficiente “ δ ”, que entra en esta fórmula, depende de la estructura y disposición de las bridas, que unen las hojas de la ballesta; de la distancia entre las bridas, que fijan la ballesta a la viga del puente; y, en grado considerable, de la forma, que tienen los extremos de las hojas de la ballesta. Si los extremos están cortados en forma de trapecio y la segunda hoja es mucho más corta que la maestra, se toma $\delta = 1,4$; cuando la segunda hoja se emplea para reforzar la maestra, se toma $\delta = 1,2$; al cortar los extremos de las hojas en forma de óvalo, con la disminución simultánea del espesor de las hojas por los extremos, la ballesta es más flexible y el coeficiente “ δ ” respectivamente aumenta.

El momento de inercia de todas las hojas de la ballesta, en la sección media:

$$I_0 = \frac{b}{12} (n_1 \cdot h_1^3 + n_2 \cdot h_2^3 + \dots + n_m \cdot h_m^3) \quad (109)$$

Siendo:

n1: cantidad de hojas de espesor “h1”; n2: cantidad de hojas de espesor “h2”; etc.

La expresión (2.5.4), se puede transformar de la siguiente forma:

$$\frac{P}{x} = \frac{6 \cdot E \cdot I_0}{\delta \cdot L^3}$$

La relación entre la fuerza aplicada y la flecha no es más que el coeficiente de rigidez de la ballesta, (Paolo y Ferrari, 2003).

$$k = \frac{6 \cdot E \cdot I_0}{\delta \cdot L^3} \quad (110)$$

Resorte a líquido.

Figura 64 Resorte a líquido

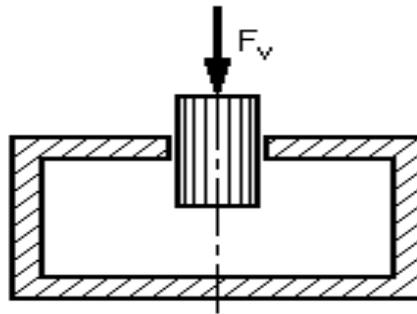


Ilustración: Héctor Terán

En máquinas pesadas, que deben ser suspendidas sobre elementos elásticos con una gran rigidez y resistencia, se pueden utilizar los resortes a líquido, que cumplen perfectamente tales exigencias. En la figura 64, se presenta un esquema de dicho resorte. Partiendo de que las presiones, antes y después de la compresión, están relacionadas por la expresión:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{A_v \cdot x}{V_1} \quad (111)$$

Donde:

p_1 : presión inicial del líquido; x : desplazamiento del vástago.

p_2 : presión del líquido después del desplazamiento del vástago.

β : coeficiente de compresibilidad (módulo de elasticidad volumétrica) del líquido.

A_v : área de la sección transversal del vástago;

V_1 : volumen del líquido dentro del cilindro.

Figura 65 Resorte a líquido diferencial

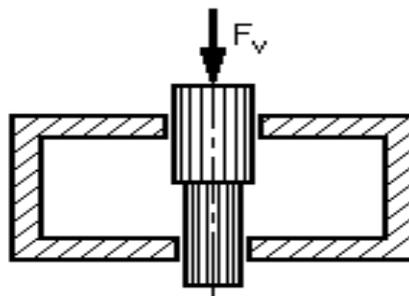


Ilustración: Héctor Terán

Multiplicando por el área de la sección transversal del vástago (A_v) ambos miembros de (108), se tiene que las fuerzas en el vástago, antes y después de la compresión, están relacionadas por la expresión:

$$F_{V2} = F_{V1} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{A_v^2 \cdot x}{V_1} \quad (112)$$

Donde:

F_{V1} y F_{V2} : fuerzas en el vástago antes y después de la compresión.

La expresión (2.5.8) no es más que la ecuación de una línea recta, con una pendiente:

$$k = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{A_v^2}{V_1} \quad (113)$$

Teniendo en cuenta (110), la expresión (109) puede escribirse como:

$$F_{V2} = F_{V1} + k \cdot x \quad (114)$$

La pendiente k caracteriza la variación de la fuerza en el vástago, en dependencia del desplazamiento, por lo que es equivalente a la constante de rigidez de un resorte o muelle mecánico.

Cuando se necesita un coeficiente de rigidez menor, se puede utilizar un resorte a líquido diferencial, como el que se presenta en la figura 65. En este caso se debe trabajar con la diferencia de las áreas de las secciones mayor y menor del vástago.

Coeficientes de rigidez equivalentes de barras y vigas.

Con frecuencia, en la práctica, se utilizan elementos elásticos especializados, como son los resortes, las ballestas, los soportes elastoméricos (de goma), etc., pero en ocasiones, en la composición de los sistemas entran elementos elásticos no especializados, como barras, vigas, árboles, etc. Como se conoce de Resistencia de Materiales, estos elementos ejercen una determinada resistencia a ser deformados, que puede ser caracterizada por un coeficiente de rigidez equivalente, como se mostrará a continuación.

Barra sometida a carga axial.

Figura 66 Barra cargada axialmente

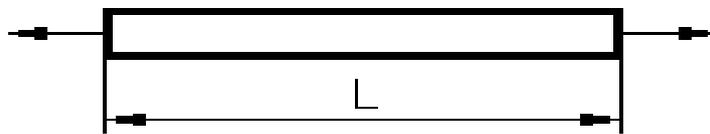


Ilustración: Héctor Terán

$$k_{eq} = \frac{E \cdot A}{L} \quad (115)$$

Donde:

 k_{eq} : coeficiente de rigidez equivalente.

E: módulo de elasticidad a tracción del material.

A: área de la sección transversal de la barra.

L: longitud de la barra.

Barra cónica sometida a carga axial.

En la figura 67, se muestra una barra cónica (de sección variable) sometida a carga axial. En este caso, el coeficiente de rigidez equivalente se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$k_{eq} = \frac{\pi \cdot E \cdot D \cdot d}{4 \cdot L} \quad (116)$$

Donde:

 k_{eq} : coeficiente de rigidez equivalente.

E: módulo de elasticidad a tracción del material.

A: área de la sección transversal de la barra.

L: longitud de la barra.

Figura 67 Barra cónica con cargas axiales

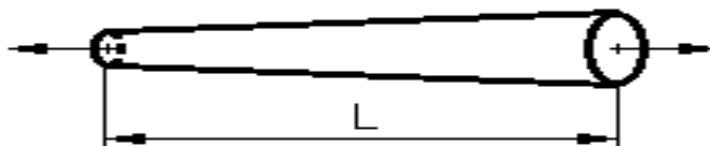


Ilustración: Héctor Terán

Viga simplemente apoyada con carga en el centro.

Figura 68 Viga simplemente apoyada

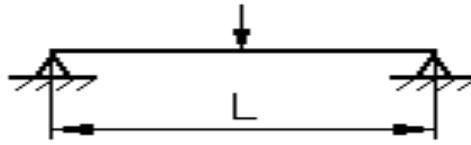


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 68, se muestra una viga simplemente apoyada con una carga en el centro, entre ambos apoyos, de forma que el punto de aplicación de dicha carga se puede desplazar verticalmente. En este caso, el coeficiente de rigidez equivalente se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$k_{eq} = \frac{48 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (117)$$

Donde:

k_{eq} : coeficiente de rigidez equivalente.

E: módulo de elasticidad a tracción del material.

I: momento de inercia de la sección transversal de la viga.

L: longitud de la viga.

Para sección circular: $I = \frac{\pi d^4}{64}$;

y para sección rectangular: $I = \frac{bh^3}{12}$.

Viga doblemente empotrada con carga en el centro.

Figura 69 Viga doblemente empotrada

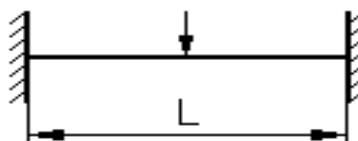


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 69, se muestra una viga doblemente empotrada con una carga en el centro, entre ambos empotramientos, de forma que el punto de aplicación de dicha carga se puede desplazar verticalmente. En este caso, el coeficiente de rigidez equivalente se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$k_{eq} = \frac{192 \cdot E \cdot I}{L^3} \tag{118}$$

Donde:

k_{eq} : coeficiente de rigidez equivalente.

E: módulo de elasticidad a tracción del material.

I: momento de inercia de la sección transversal de la viga.

L: longitud de la viga.

Para sección circular: $I = \frac{\pi d^4}{64}$;

y para sección rectangular: $I = \frac{bh^3}{12}$.

Combinaciones de resortes.

Resortes en paralelo.

Figura 70 Resortes en paralelo

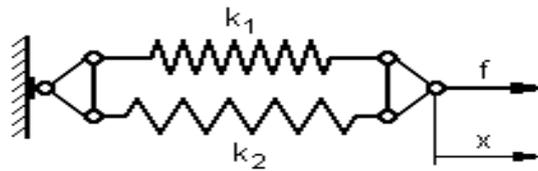


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 70 se muestra una combinación de resortes en paralelo. En este caso el desplazamiento (x) es común para ambos resortes, por lo que se puede plantear que:

$$f_1 = k_1 \cdot x; \quad f_2 = k_2 \cdot x$$

Como la fuerza total:

$$f = f_1 + f_2 = (k_1 + k_2) \cdot x$$

La rigidez conjunta o equivalente es:

$$k = k_1 + k_2 \tag{119}$$

Resortes en serie.

Figura 71 Resortes en serie

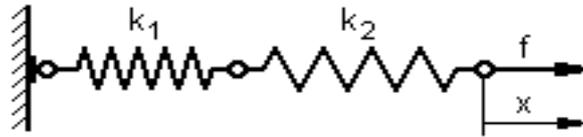


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 71 se muestra una combinación de resortes en serie. En este caso, sobre cada resorte actúa la misma fuerza (f), y los desplazamientos serán:

$$x_1 = \frac{f}{k_1}; \quad x_2 = \frac{f}{k_2}$$

El desplazamiento total (x) es la suma de los desplazamientos de cada resorte:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{f}{k} = \frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2}$$

La rigidez conjunta o equivalente se obtiene de:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Una consecuencia de esto es que, un resorte helicoidal, fabricado del mismo alambre que otro, pero de doble longitud y doble número de espiras, tiene la mitad de la rigidez que este. En cambio, admite doble alargamiento.

6. Coeficientes de amortiguamiento equivalentes.

En las máquinas, frecuentemente, se producen pérdidas de energía en aquellos lugares, en los que aparecen movimientos relativos entre superficies que interactúan. Estas pérdidas de energía se pueden caracterizar por medio de coeficientes de amortiguamiento equivalentes a los coeficientes de amortiguamiento de los amortiguadores viscosos especializados.

Desplazamiento relativo entre dos placas paralelas lubricadas.

Figura 72 Superficies paralelas

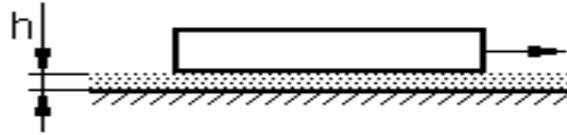


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 72, se muestran dos placas paralelas lubricadas, que pueden desplazarse una con respecto a la otra. En este caso, el coeficiente de amortiguamiento equivalente se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$c_{eq} = \frac{\mu \cdot A}{h} \quad (120)$$

Donde:

c_{eq} : coeficiente de amortiguamiento equivalente.

μ : viscosidad del lubricante.

A : área de la superficie de la placa menor.

h : espesor de la capa de lubricante, entre las dos placas.

Émbolo con movimiento axial dentro de un cilindro, con huelgo.

En la figura 73, se muestra un émbolo que se mueve a lo largo de un cilindro, que está relleno con un fluido. El diámetro exterior del émbolo es menor que el diámetro interior del cilindro, de forma que el fluido puede desplazarse por el huelgo correspondiente. Este sistema es semejante a un dispositivo amortiguador especializado.

Figura 73 Émbolo y cilindro

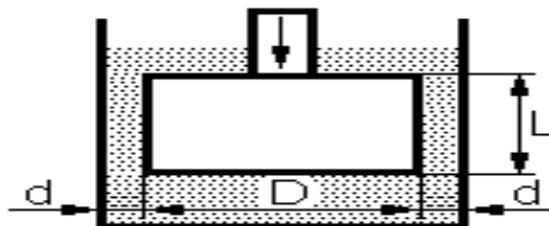


Ilustración: Héctor Terán

En este caso, el coeficiente de amortiguamiento equivalente se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$c_{eq} = \frac{\mu \cdot 3 \cdot \pi \cdot D^3 \cdot L}{4 \cdot d^3} \left(1 + \frac{2 \cdot d}{D} \right) \quad (121)$$

Donde:

c_{eq} : coeficiente de amortiguamiento equivalente.

μ : viscosidad del fluido.

D: diámetro exterior del émbolo.

d: diámetro interior del cilindro.

L: longitud del émbolo.

Émbolo que rota dentro de un cilindro, con huelgo.

Figura 74 Amortiguadores torsionales

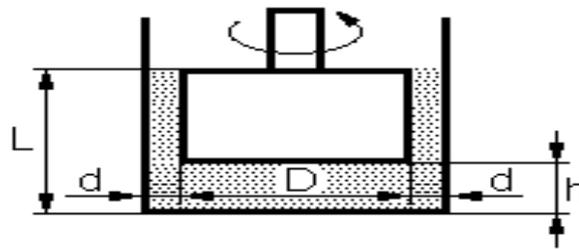


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 74, se muestra un émbolo que rota dentro de un cilindro, que está relleno con un fluido. El diámetro exterior del émbolo es menor que el diámetro interior del cilindro, de forma que existe un huelgo grande entre ambos cuerpos. Este sistema es semejante a un dispositivo amortiguador rotatorio especializado. En este caso, el coeficiente de amortiguamiento equivalente se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$c_{eq} = \frac{\mu \cdot \pi \cdot D^2 \cdot (L-h)}{2 \cdot d} + \frac{\mu \cdot \pi \cdot D^3}{32 \cdot h} \quad (122)$$

Donde:

c_{eq} : coeficiente de amortiguamiento equivalente.

μ : viscosidad del fluido.

D: diámetro exterior del émbolo.

d: diámetro interior del cilindro.

L: distancia de la culata del cilindro hasta la cara más alejada del émbolo.

h: distancia de la culata del cilindro hasta la cara más cercana del émbolo.

Fricción seca.

Figura 75 Rozamiento seco



Ilustración: Héctor Terán

En la figura 75, se muestra un cuerpo que vibra a lo largo de una superficie seca (sin lubricación). En este caso, el coeficiente de amortiguamiento equivalente se obtendrá por medio de la siguiente expresión:

$$c_{eq} = \frac{4 \cdot f \cdot N}{\pi \cdot \omega \cdot X} \quad (123)$$

Donde:

c_{eq} : coeficiente de amortiguamiento equivalente.

f : coeficiente de fricción entre las superficies en contacto.

N : fuerza normal entre las superficies en contacto.

ω : frecuencia angular de las vibraciones del sistema.

X : amplitud de las vibraciones del sistema.

7. Parámetros de rigidez torsional en transmisiones mecánicas.

Las transmisiones mecánicas están presentes en la mayoría de las máquinas, alcanzando en ocasiones grandes complejidades, como es el caso de las cajas de velocidades de las máquinas herramientas y de los automóviles. Dichas transmisiones consisten en grandes cantidades de ruedas dentadas, poleas, estrellas (ruedas dentadas para cadenas), etc., unidas entre si por elementos elásticos tales como árboles, correas, cadenas, etc. Incluso las uniones fijas y móviles entre elementos de máquinas poseen determinadas cualidades elásticas (o de rigidez, que es el inverso).

Las fuerzas y momentos de fuerzas, que actúan sobre los elementos antes mencionados, son variables, manteniendo por lo general un valor medio y teniendo oscilaciones alrededor de este. También, los propios elementos de las transmisiones, debido a los errores de fabricación, engendran cargas variables sobre si mismos y sobre los restantes elementos del sistema.

Bajo la influencia de todos los factores antes mencionados, en las transmisiones mecánicas surgirán movimientos vibratorios, que se superponen al movimiento de rotación nominal de estas, provocando el deterioro prematuro de los elementos que componen dichas transmisiones. Por eso, el conocimiento de las características elásticas de tales elementos juega un importante papel en el estudio de los procesos dinámicos, que ocurren en estos sistemas, (Butenin y Neimark, 2003).

Elasticidad torsional de árboles.

Los árboles pueden presentar secciones diferentes, como se muestra en las siguientes figuras. En cada caso se tendrán coeficientes de rigidez o de elasticidad torsionales diferentes, como se verá a continuación.

En muchas ocasiones, en lugar de utilizar el coeficiente de rigidez torsional de los árboles, que caracteriza su resistencia a ser deformado, se utiliza el parámetro inverso, es decir, la elasticidad torsional, que nos proporciona la tendencia de un elemento a ser deformado por la acción de los momentos torsores. En determinadas etapas de los cálculos es más simple trabajar con la elasticidad y en otras etapas ocurre lo mismo con la rigidez. El paso de una a otra es muy simple, ya que, como se dijo anteriormente, son inversos, lo que se puede expresar como sigue:

$$k = \frac{1}{e} \Rightarrow e = \frac{1}{k}$$

Donde “e” es el coeficiente de elasticidad torsional del elemento. En esta ocasión se darán las expresiones que permiten determinar los coeficientes de elasticidad torsional de los árboles o tramos de ellos, cuyas secciones son las mostradas en las siguientes figuras.

Árbol cilíndrico macizo.

Figura 76 Árbol macizo

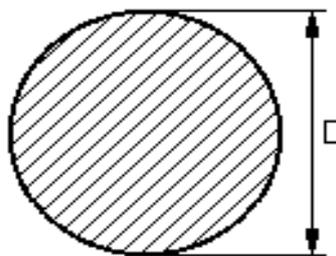


Ilustración: Héctor Terán

La sección de un árbol cilíndrico macizo se presenta en la figura 76. En este caso el coeficiente de elasticidad estará dado por la siguiente expresión:

$$e = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{L}{D^4} \quad (124)$$

Donde:

G: módulo de elasticidad a cortante o cizallamiento del material.

D: diámetro del árbol o del tramo de este que se analiza.

L: longitud del árbol o del tramo de este que se analiza.

Árbol cilíndrico con un agujero axial.

Figura 77 Árbol con agujero axial

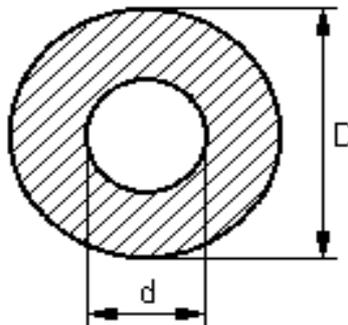


Ilustración: Héctor Terán

La sección de un árbol cilíndrico con un agujero axial se presenta en la figura 77. En este caso el coeficiente de elasticidad estará dado por la siguiente expresión:

$$e = \frac{32}{\pi G} \cdot k_c \cdot \frac{L}{D^4}$$

$$k_c = \frac{1}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4} \quad (125)$$

Donde:

G: módulo de elasticidad a cortante o cizallamiento del material.

D: diámetro exterior del árbol o del tramo de este que se analiza.

d: diámetro interior del árbol o del tramo de este que se analiza.

L: longitud del árbol o del tramo de este que se analiza.

Árbol con un chavetero.

Figura 78 Árbol con chavetero

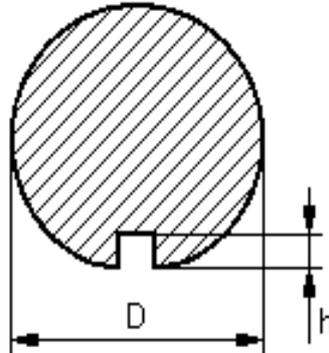


Ilustración: Héctor Terán

La sección de un árbol cilíndrico con un chavetero se presenta en la figura 78. En este caso el coeficiente de elasticidad estará dado por la siguiente expresión:

$$e = \frac{32 \cdot L}{\pi G \cdot D_1^4}$$

$$D_1 = D - 0,5 \cdot h$$
(126)

Donde:

G: módulo de elasticidad a cortante o cizallamiento del material.

D: diámetro exterior del árbol o del tramo de este que se analiza.

h: profundidad del chavetero.

L: longitud del árbol o del tramo de este que se analiza.

Árbol con dos chaveteros

Figura 79 Árbol con dos chaveteros

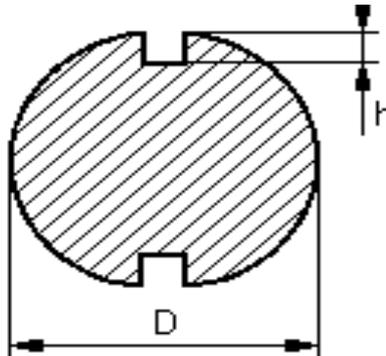


Ilustración: Héctor Terán

La sección de un árbol cilíndrico con dos chaveteros se presenta en la figura 79. En este caso el coeficiente de elasticidad estará dado por la siguiente expresión:

$$e = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{L}{D_1^4}$$

$$D_1 = D - 1,2 \cdot h \quad (127)$$

Donde:

G: módulo de elasticidad a cortante o cizallamiento del material.

D: diámetro exterior del árbol o del tramo de este que se analiza.

h: profundidad del chavetero.

L: longitud del árbol o del tramo de este que se analiza.

Árbol estriado.

Figura 80 Árbol estriado

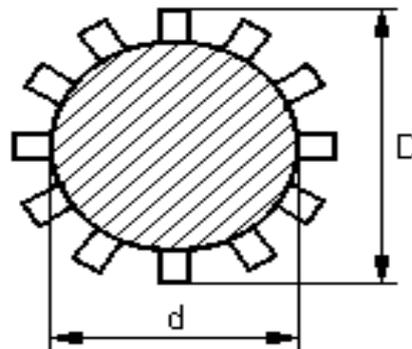


Ilustración: Héctor Terán

La sección de un árbol cilíndrico estriado se presenta en la figura 80. En este caso el coeficiente de elasticidad estará dado por la siguiente expresión:

$$e = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{L}{d^4} \quad (128)$$

Donde:

G: módulo de elasticidad a cortante o cizallamiento del material.

d: diámetro del árbol o del tramo de este que se analiza, medido por el fondo del estriado.

L: longitud del árbol o del tramo de este que se analiza.

Árbol de sección arbitraria.

Figura 81 Árbol de sección arbitraria

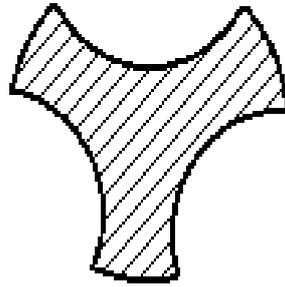


Ilustración: Héctor Terán

Un árbol con sección arbitraria se presenta en la figura 81. En este caso el coeficiente de elasticidad estará dado por la siguiente expresión:

$$e = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{4 \cdot I_p \cdot L}{F^4} \quad (129)$$

Donde:

G: módulo de elasticidad a cortante o cizallamiento del material.

IP: momento polar de inercia de la sección.

F: área de la sección.

L: longitud del árbol o del tramo de este que se analiza.

Elasticidad de las uniones.

a. Coeficiente de elasticidad de la unión árbol-cubo.

$$e = \frac{K}{d^2 \cdot L \cdot h \cdot z} \quad (130)$$

K: coeficiente que depende del tipo de unión.

K = 6,4 · 10⁵ cm³ / kgf - para unión con chaveta prismática.

K = 13,6 · 10⁵ cm³ / kgf - para unión con chaveta de segmentos.

K = 4 · 10⁵ cm³ / kgf - para unión estriada.

d: diámetro de la unión (para la unión estriada es el diámetro medio). L: longitud de la unión.

h: altura activa de la chaveta o de la estría. z: número de chavetas o de estrías.

Obsérvese que el coeficiente “K “ es dimensional, por lo que se deben expresar los restantes parámetros en unidades compatibles con las de este coeficiente.

b. Coeficiente de elasticidad de la unión cardán.

$$e = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{D^3} \left[\frac{\text{rad}}{\text{kgf} \cdot \text{cm}} \right] \quad (131)$$

D: diámetro de los árboles en cm

c. Coeficiente de elasticidad del embrague de levas.

$$e = \frac{4 \cdot K_1}{D_m^2 \cdot K_2 \cdot z \cdot b \cdot h} \left[\frac{\text{rad}}{\text{kgf} \cdot \text{cm}} \right] \quad (132)$$

D_m: diámetro medio del embrague.

z: número de levas.

b, h: ancho y altura de trabajo de las levas.

$K_1 = (0.3 \div 0.4) \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{kgf}} \right]$ coeficiente de elasticidad de contacto.

$K_2 = (0.3 \div 0.5)$ considera la cantidad real de levas que transmiten el momento torsor.

Elasticidad de las transmisiones.

a. Coeficiente de elasticidad de las transmisiones por engranajes.

El coeficiente de elasticidad de las transmisiones por engranajes estará dada por la expresión:

$$e = \frac{K}{b \cdot R^2 \cdot \cos^2 \alpha} \left[\frac{\text{rad}}{\text{kgf} \cdot \text{cm}} \right]$$

K: deformación elástica de un par de dientes, bajo la acción de la presión normal unitaria, aplicada en la unidad de ancho del diente.

$$K = 6 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{kgf}} \right] - \text{para ruedas de acero de dientes rectos}$$

$$K = 3,6 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{kgf}} \right] - \text{para ruedas de acero de dientes inclinados}$$

$$K = 4,4 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{kgf}} \right] - \text{para ruedas de acero de dientes de chevrón.}$$

b: ancho de trabajo de las ruedas [cm].

R: radio primitivo de la rueda, a la que se lleva la elasticidad de la transmisión [cm].

α : ángulo de engranaje.

b. Coeficiente de elasticidad de las transmisiones por correas.

En la figura 82 se muestra un esquema sencillo de una transmisión por correa, en la que se señalan los parámetros geométricos básicos para determinar la elasticidad de dicha transmisión.

Figura 82 Trasmisión por correa

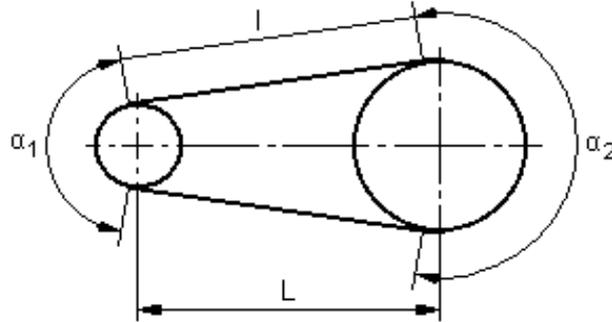


Ilustración: Héctor Terán

El coeficiente de elasticidad se obtiene por la siguiente expresión:

$$e = \frac{L_{ef}}{a \cdot R^2 \cdot F \cdot E} \left[\frac{\text{rad}}{\text{kgf} \cdot \text{cm}} \right] \quad (133)$$

L_{ef} : longitud efectiva de cálculo de la rama de la correa entre las poleas [cm].

La longitud efectiva se calcula por medio de la expresión

$$L_{ef} = L + \frac{v}{100} (R_1 \cdot \alpha_1 + R_2 \cdot \alpha_2) = L + \frac{v}{100} \left[\pi(R_1 + R_2) + \frac{2(R_1 - R_2)^2}{l} \right]$$

l : distancia entre los puntos de contacto de la correa con las poleas [cm].

$$l = \sqrt{L^2 + (R_1 - R_2)^2}$$

v : velocidad de la correa [m/s].

R_1, R_2 : radios de las poleas [cm].

L : distancia entre centros de la transmisión [cm].

α_1, α_2 : ángulos de abrace de la correa en las poleas [rad].

a : coeficiente adimensional, que considera la influencia de la tensión previa (P_0).

$$P < 2P_0$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$P \approx 2P_0$$

$$\Rightarrow a = 1,5$$

$$P > 2P_0$$

$$\Rightarrow a = 1$$

Para transmisiones por correa trapezoidal: $a = 2$

R: radio de la polea [cm], montada sobre el árbol, al que se reduce la elasticidad de la transmisión.

F: área de la sección transversal de la correa [cm²]. E: módulo de elasticidad de la correa [kgf/cm²].

Para correas planas:

| | |
|-----------------------------------|---|
| De cuero..... | $E = (15 + 2,5) \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \right]$ |
| Cauchotadas y textiles..... | $E = (20 + 3,5) \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \right]$ |
| De caprón con carga estática..... | $E = (\approx 6,0) \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \right]$ |
| De caprón con carga dinámica..... | $E = (\approx 15,0) \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \right]$ |
| De tejido cord..... | $E = (2,5 + 4,0) \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \right]$ |
| De cordones cord..... | $E = (5,0 + 6,0) \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \right]$ |

c. Coeficiente de elasticidad de las transmisiones por cadena.

La elasticidad del ramal conductor de la cadena estará dada por la siguiente expresión:

$$e = \frac{L}{E_c F} \left[\frac{m}{\text{kgf}} \right] \tag{134}$$

L: longitud del ramal conductor [m]

F: superficie de proyección de la articulación [mm²].

Para las cadenas de rodillos: $F = d \cdot B$

d: diámetro del eje.

B: ancho del eslabón interior.

Para las cadenas dentadas: $F = 0,76 \cdot d \cdot B$
 d: diámetro del eje.
 B: ancho de la cadena.

Ec: Módulo de elasticidad del material de la cadena $\left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \right]$

Para cadenas de rodillos $E_c = (2,1+2,5) \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \right]$

Para cadenas dentadas $E_c = (18) \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \right]$

8. Reducción de los parámetros inerciales, de rigidez y de amortiguamiento.

Los esquemas cinemáticos no son más que modelos de los mecanismos reales, en los que se recogen los parámetros, que interesan para el análisis de la transmisión y transformación del movimiento en dichos mecanismos. Pero, para el análisis de los movimientos vibratorios, estos esquemas no son adecuados, ya que sus elementos se mueven con diferentes desplazamientos, velocidades y aceleraciones, lo que haría muy difícil el estudio de estos movimientos vibratorios.

En la figura 83 se muestra el esquema cinemático de una transmisión dentada, que se tomará como ejemplo para exponer el proceso de obtención del modelo dinámico, que se utilizará para el estudio de las vibraciones en estos mecanismos.

Figura 83 Trasmisión dentada de tres escalones

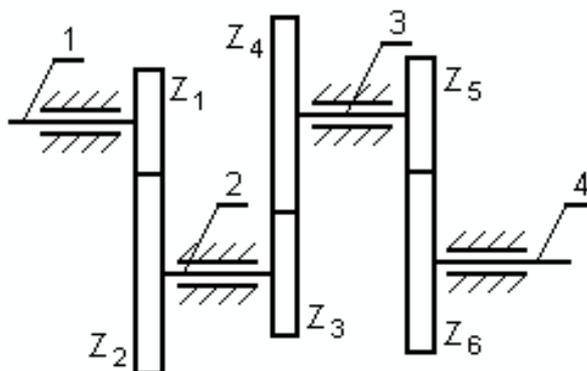


Ilustración: Héctor Terán

Esta transmisión consta de cuatro árboles y tres pares de ruedas dentadas, que transmiten y transforman el movimiento de entrada, caracterizado por una velocidad angular (ω_1) y un momento torsor (M_1), en un movimiento de salida con una velocidad angular (ω_4) y un momento torsor (M_4), correspondientemente diferentes en el caso general. De igual forma, en los árboles intermedios estos parámetros serán diferentes a los de entrada y a los de salida. Todo esto hace muy complejo el estudio de las vibraciones torsionales en este sistema, dificultad que puede ser eliminada con una simplificación adecuada de dicho sistema, sin perder sustancialmente las cualidades de este.

En la figura 84 se muestra nuevamente el esquema cinemático de la transmisión dentada, en el que se han añadido los coeficientes de elasticidad de los árboles, de las uniones árbol-cubo y de los pares engranados, además de los coeficientes de amortiguamiento en los cojinetes.

Figura 84 Parámetros másicos de rigidez y amortiguamiento de transmisiones

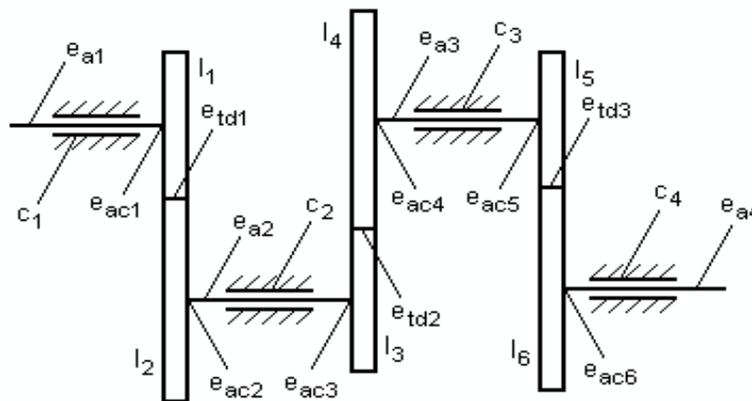


Ilustración: Héctor Terán

En la figura se han utilizado los siguientes símbolos:

e_a : coeficiente de elasticidad de los árboles (se le ha añadido un número en el subíndice, que es del elemento correspondiente).

e_{ac} : coeficiente de elasticidad de la unión árbol-cubo (el número en el subíndice es el número de orden).

e_{td} : coeficiente de elasticidad de los pares engranados (el número en el subíndice es del par).

C : coeficiente de amortiguamiento (el subíndice es el número del cojinete).

Es necesario añadir todos los coeficientes de amortiguamiento, que son de importancia en el mecanismo, como los que representan la energía perdida por el movimiento de las piezas dentro del aceite de lubricación, que en este ejemplo no se han añadido, para no hacerlo más complejo. El conocimiento o determinación de los coeficientes de amortiguamiento en un sistema vibratorio es una de las principales dificultades, con la que se tropieza el especialista en la práctica, al realizar el estudio de las vibraciones en los mecanismos.

Se debe recordar que los parámetros de rigidez de los pares engranados, cuando se determinan, pueden ser llevados a uno de los dos árboles, sobre los que están montadas las ruedas dentadas, lo que constituye una primera reducción.

Para lograr que todos los elementos de un modelo dinámico, durante el movimiento uniforme, se muevan con iguales desplazamientos, velocidades y aceleraciones, se realiza el proceso de reducción de sus parámetros de inercia, de rigidez y de amortiguamiento. Esto consiste en elegir uno de los árboles de la transmisión y llevar a él todos los parámetros de inercia, de rigidez y de amortiguamiento, teniendo en cuenta que el sistema obtenido debe ser equivalente al real, lo que se logra con el cumplimiento de determinadas condiciones, que se estudiarán a continuación.

El próximo paso que se debe realizar es elegir el árbol, al cual se reducirán los parámetros de inercia, de rigidez y de amortiguamiento. Este árbol, incluso, puede ser ficticio. Supongamos que se ha elegido este árbol, que rota con una velocidad angular (ωr).

Reducción de los momentos de inercia.

En el epígrafe 2.2 se trató la reducción de masas y momentos de inercia en los mecanismos, dando la condición de equivalencia, que es la igualdad de las energías cinéticas del modelo dinámico, con respecto al mecanismo real. En aquella oportunidad se obtenía un parámetro (masa o momento de inercia) reducido, que equivalía a todas las masas y momentos de inercia de los elementos del mecanismo.

En esta oportunidad, la condición es la misma, con la diferencia de que aquí se mantienen separados los momentos de inercia de cada elemento, unidos entre sí por medio de los elementos elásticos y amortiguadores correspondientes, como se muestra en la figura 85.

Figura 85 Modelo dinámico de la transmisión

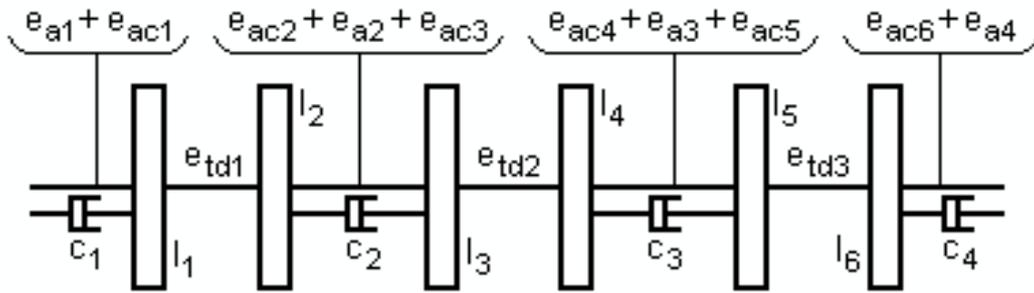


Ilustración: Héctor Terán

Partiendo de la condición de igualdad de la energía cinética, que debe cumplirse, el momento de inercia reducido (I_{ir}), equivalente al momento de inercia real (I_i), se obtiene por la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} \cdot I_{ir} \cdot \omega_r^2 = \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \omega_i^2 \Rightarrow I_{ir} = I_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_r} \right)^2$$

Reducción de los parámetros de rigidez.

Antes de exponer las expresiones para realizar la reducción de estos parámetros, se debe señalar un importante detalle. Como se ha notado, en lugar de utilizar los coeficientes de rigidez (K_i) de los elementos elásticos de la transmisión, se han utilizado los coeficientes de elasticidad, que son los inversos de estos.

Como se recuerda, cuando se debía determinar el coeficiente de rigidez equivalente en una unión en serie de resortes, la expresión se hacía algo compleja; sin embargo, en este tipo de unión, que es la que predomina en las transmisiones mecánicas, la determinación del coeficiente de elasticidad equivalente es muy sencilla, ya que sólo es necesario sumar los coeficientes de elasticidad parciales, como se muestra en la figura 85. No obstante, se darán las expresiones para la determinación, tanto de los coeficientes de rigidez reducidos, como de elasticidad reducida.

La condición que debe cumplirse en la reducción de los parámetros de rigidez es la igualdad de la energía potencial del modelo dinámico, con respecto al mecanismo real. Como los ángulos de rotación de los elementos de la transmisión, para cualquier intervalo de tiempo, son directamente proporcionales a sus velocidades angulares, entonces se sustituirán dichos ángulos por las velocidades angulares correspondientes.

Si se trabaja con los coeficientes de rigidez, entonces los coeficientes de rigidez reducidos se obtienen por la expresión:

$$\frac{1}{2} \cdot k_r \cdot \omega_r^2 = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow k_r = k_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_r} \right)^2$$

Si se trabaja con los coeficientes de elasticidad, entonces los coeficientes de elasticidad reducidos se determinan por la expresión:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e_1} \cdot \omega_r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e_1} \cdot \omega_1^2 \Rightarrow e_r = e_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_r} \right)^2$$

Reducción de los parámetros de amortiguamiento.

La condición que debe cumplirse en la reducción de los parámetros de amortiguamiento es la igualdad de la energía disipada en el modelo dinámico, con respecto a la energía disipada en el mecanismo real. Entonces los coeficientes de amortiguamiento reducidos se obtienen por la siguiente expresión:

Figura 86 Modelo dinámico en forma de cadena

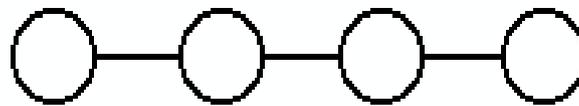


Ilustración: Héctor Terán

$$\frac{1}{2} \cdot c_r \cdot \omega_r^2 = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow c_r = c_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_r} \right)^2$$

Figura 87 Modelo dinámico en forma de anillo

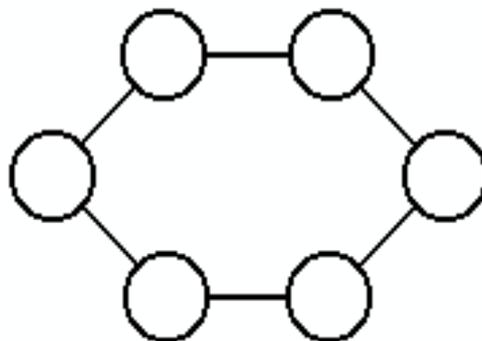


Ilustración: Héctor Terán

Una vez determinados todos los parámetros de inercia, de rigidez y de amortiguamiento reducidos, el modelo dinámico toma el aspecto de la figura 85, en el que el sistema se representa como un largo árbol, formado por la suma de todos los elementos elásticos reducidos, sobre el que están montados los momentos de inercia reducidos.

En este caso, que tomamos como ejemplo, se dice que el modelo es en **forma de cadena**, ya que todos los elementos están colocados uno a continuación del otro (como en la figura 86). En sistemas con otras características, se pueden obtener modelos en **forma de anillo** (Fig. 87), **ramificados** (Fig. 88 a) o **combinados** (Fig. 88 b).

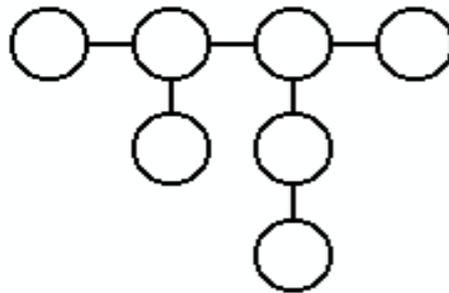


Figura 88 a. Modelo dinámico ramificado

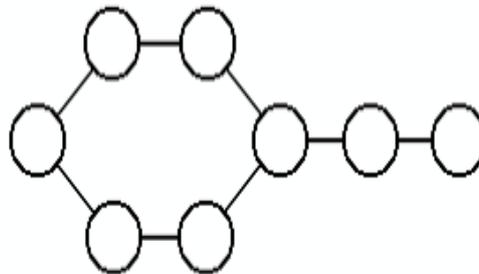


Figura 88 b. Modelo dinámico combinado

Ilustraciones: Héctor Terán

En las figuras de la 86 a la 88 se muestran las formas, que pueden tomar los modelos dinámicos. No se han representado los elementos amortiguadores, en favor de la simplicidad de las figuras. Si se representaran estos elementos, se colocarían en paralelo con los elementos elásticos, o de los momentos de inercia hasta el bastidor, según sea el caso.

9. Simplificación de los modelos dinámicos.

Si se observa el modelo dinámico de la figura 85, obtenido para la transmisión dentada de la figura 83, se nota que, aunque presenta una complejidad media, esta resulta alta en comparación con el mecanismo que representa. Para mecanismos con más elementos, los modelos dinámicos primarios resultan ser extremadamente complejos, acarreado un gran volumen de trabajo para el análisis de su comportamiento, si no son simplificados adecuadamente.

Tratando de disminuir el volumen de trabajo y de lograr la manipulación de pocos resultados concretos y fiables, se desea siempre trabajar con modelos dinámicos simples, pero que reflejen con exactitud el comportamiento del sistema real. Es por esto, que la simplificación de los modelos dinámicos primarios es un paso de una gran importancia y cuidado en el proceso de obtención de un sencillo modelo dinámico final, que debe conservar los rasgos básicos del sistema original y que servirá de base para el pronóstico de indicadores vitales de dicho sistema, como son las posibilidades de resonancia durante el trabajo en determinados regímenes de explotación, la transmisión de los esfuerzos a través de los elementos, las sobrecargas que surgirán, la longevidad de los elementos, etc.

Cualquiera que sea la complejidad y la forma del modelo dinámico primario, puede descomponerse en sistemas parciales de dos tipos como se muestra en la figura 89:

- a) $e_i - 1 - l_i - e_i$
- b) $l_i - e_i - l_{i+1}$

La gran ventaja de esta descomposición es la posible conversión de un subsistema o sistema parcial de un tipo en el otro, como veremos más adelante. Para poder realizar esta conversión se debe cumplir determinada condición, que generalmente está relacionada con la coincidencia o cercanía de la frecuencia natural del sistema parcial analizado, con la frecuencia de las fuerzas o momentos de fuerzas excitadores exteriores. Si la frecuencia de los esfuerzos excitadores coincide o es cercana a la frecuencia natural del sistema parcial analizado, entonces no se debe realizar la conversión, ya que este subsistema tendrá una gran influencia en el comportamiento del sistema real y se afectarían considerablemente los resultados. Si no coinciden

o no están cercanas las frecuencias de los esfuerzos excitadores y la frecuencia natural del sistema parcial analizado, entonces se puede realizar la conversión, lo que puede constituir una simplificación sustancial. Se debe añadir, además, que no deben convertirse sistemas parciales, sobre cuyos elementos estén aplicados momentos de fuerzas excitadores exteriores.

Un ejemplo concreto de lo expuesto en el párrafo anterior, lo constituye el límite inferior, impuesto a la frecuencia natural de los sistemas parciales, que componen el sistema vibratorio de la transmisión mecánica del sistema de traslación de la cosechadora de caña KTP, para poder ser convertidos. En este caso, se tomaba como límite inferior de dicha frecuencia natural la frecuencia de la octava armónica del momento torsor del motor de combustión interna. Si la frecuencia natural del sistema parcial analizado era mayor que la frecuencia de la octava armónica, entonces se realizaba la conversión. Si no se cumplía esta condición, no se realizaba la conversión. Este límite se estableció tomando en consideración que las amplitudes de la octava armónica y las de orden superior del momento torsor del motor eran despreciables y las frecuencias de los restantes momentos de fuerzas excitadores eran mucho menores que las de estas.

De lo antes expuesto, se llega a la conclusión de que primeramente se deben determinar las frecuencias naturales de los sistemas parciales del modelo dinámico primario, suponiendo que se conocen las frecuencias de las fuerzas y momentos de fuerzas excitadores. Las frecuencias naturales de los subsistemas de la figura 89 se obtienen por las siguientes expresiones:

Figura 89 Sistemas parciales del modelo dinámico

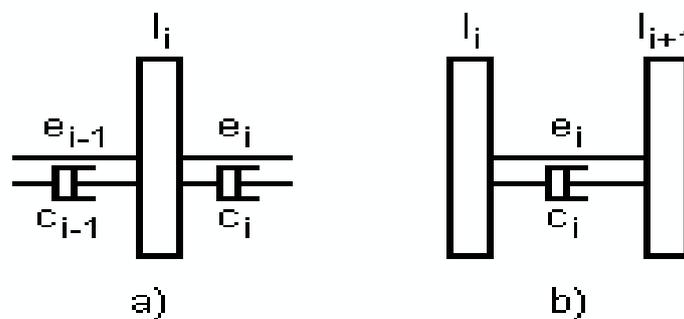


Ilustración: Héctor Terán

Para el sistema parcial del tipo a) $e_{i-1} - I_i - e_i$:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{l_i \frac{e_{i-1} \cdot e_i}{e_{i-1} + e_i}}}$$

Para el sistema parcial del tipo b) $I_i - e_i - I_{i+1}$:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{e_i \frac{l_i l_{i+1}}{l_i + l_{i+1}}}} \tag{135}$$

Lógicamente, la conversión de un sistema parcial en otro o la sustitución de un sistema parcial por otro, como también se le denomina a esta transformación, acarrea cambios en los parámetros de inercia, de rigidez y de amortiguamiento. Los nuevos parámetros se obtienen por las expresiones, que se exponen a continuación.

Si se convierte un sistema parcial del tipo a) en uno del tipo b) (figura 90), entonces:

$$l'_i = \frac{e_i}{e_{i-1} + e_i} l_i \qquad l'_{i+1} = \frac{e_{i+1}}{e_{i-1} + e_i} l_i$$

$$e'_i = e_{i-1} + e_i \qquad c'_i = \frac{c_{i-1} \cdot c_i}{c_{i-1} + c_i}$$

En este caso, los nuevos momentos de inercia, obtenidos como consecuencia de la conversión del sistema parcial analizado, se suman a los momentos de inercia anterior y posterior a dicho sistema parcial, correspondientemente. Así, el nuevo momento de inercia l'_i se sumará al momento de inercia l_{i-1} del modelo de partida y el nuevo momento de inercia l'_{i+1} se sumará al momento de inercia l_{i+1} del modelo de partida

Figura 90 Conversión de un sistema simple a compuesto

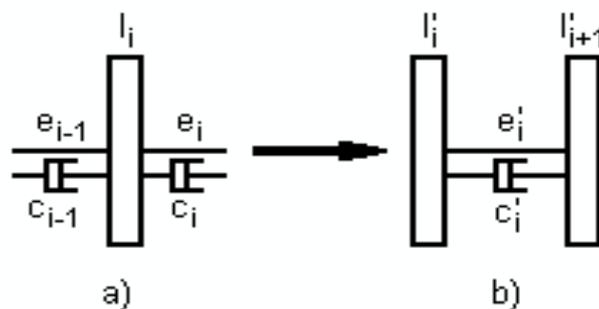


Ilustración: Héctor Terán

Se utiliza el término “modelo de partida” en lugar de “modelo primario”, debido a que ya el modelo primario puede haber sido objeto de una anterior simplificación y se desea hacerlo aún más simple.

Figura 91 Conversión de un sistema parcial b) en uno a)

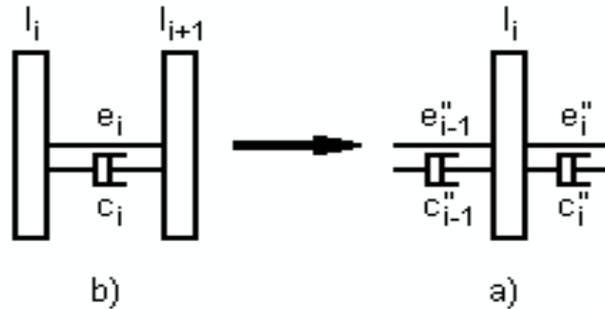


Ilustración: Héctor Terán

Si se convierte un sistema parcial del tipo b) en uno del tipo a) (figura 91), entonces:

$$l_i = l_i + l_{i+1}; e_l \frac{l_i \cdot l_{i+1}}{l_i + l_{i+1}} e_l; e_l \frac{l_i}{l_i + l_{i+1}} ;$$

$$c_{l-1} = \frac{l_i \cdot l_{i+1}}{l_{i+1}} ; c_l = \frac{l_i \cdot l_{i+1}}{l_i}$$

En este caso, los nuevos coeficientes de elasticidad, obtenidos como consecuencia de la conversión del sistema parcial analizado, se suman a los coeficientes de elasticidad anterior y posterior a dicho sistema parcial, correspondientemente. Así, el nuevo coeficiente de elasticidad e''_{i-1} se sumará al coeficiente de elasticidad e_{i-1} del modelo de partida, y el nuevo coeficiente de elasticidad e''_i se sumará al coeficiente de elasticidad e_{i+1} del modelo de partida.

Los nuevos coeficientes de amortiguamiento, obtenidos producto de la conversión del sistema parcial analizado, estarán unidos en serie con los coeficientes de amortiguamiento anterior y posterior a dicho sistema parcial, correspondientemente. Los coeficientes de amortiguamiento equivalentes de cada enlace, se obtienen por las siguientes expresiones:

Para la unión en serie de los coeficientes de amortiguamiento C'' y C_{i-1} , se tendrá:

$$\frac{1}{C_{(i-1)eq}} = \frac{1}{C_{i-1}} = \frac{1}{C_{i-1}} = C_{(i-1)eq} = \frac{C_{i-1} \cdot C_{i-1}}{C_{i-1} + C_{i-1}}$$

Para la unión en serie de los coeficientes de amortiguamiento C_1 y C_{i+1} se tendrá

$$\frac{1}{C_{(l+1)eq}} = \frac{1}{C_{l+1}} = \frac{1}{C_{l+1}} = C_{(l+1)eq} = \frac{C_{l+1} \cdot C_l}{C_{l+1} + C_l}$$

Como puede verse, este proceso de conversión de sistemas parciales de un tipo en sistemas parciales del otro tipo tiene una gran efectividad, ya que en cada conversión se elimina un momento de inercia, es decir, se disminuye un grado de libertad del modelo de partida. En este proceso juegan un importante papel la experiencia y la intuición del individuo, que está llevando a cabo el análisis del sistema, ya que debe elegir adecuadamente los sistemas parciales a ser convertidos, teniendo en cuenta los valores de los parámetros de inercia y de rigidez de estos.

Una vez simplificado al máximo posible el modelo dinámico primario, se debe tener cuidado de definir perfectamente los valores de los parámetros de inercia, de rigidez y de amortiguamiento de los elementos, que forman el modelo dinámico definitivo a utilizar, para evitar la introducción de errores, que distorsionarían los resultados. Además, se deben aplicar los momentos de fuerzas excitadores reducidos en los elementos correspondientes de dicho modelo dinámico. Después del paso anterior, se procede a escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento vibratorio de cada momento de inercia del modelo dinámico, como se hizo en el epígrafe 3.8.

10. Fuentes excitadoras de vibraciones

En los últimos años, dentro de la Explotación de los Sistemas Mecánicos, se ha desarrollado una rama, denominada Mantenimiento Predictivo, muchos de cuyos procedimientos se basan, en gran medida, en la comparación de los niveles de vibración de la máquina en un momento dado, con los niveles de vibración de dicha máquina, cuando se encontraba en perfecto estado técnico. Esto ha obligado a caracterizar una gran variedad de fuentes de vibraciones, para poder localizar las fallas, es decir, para poder diagnosticar el grado de los daños, desgastes o desviaciones de los parámetros, que han sufrido las piezas o conjuntos de la máquina.

La razón principal para analizar y diagnosticar el estado de una máquina es determinar las medidas necesarias para corregir los defectos que engendran las vibraciones, es decir, reducir el nivel de las fuerzas excitadoras de vibraciones no deseadas y no necesarias. De manera que, al estudiar los datos, el interés principal deberá ser la identificación de las amplitudes y frecuencias predominantes de las vibraciones, la determinación de las causas, y la corrección del problema, que las engendra, (Thomson, 1988).

A continuación se muestran las fuentes excitadoras de vibraciones más comunes, cuyo conocimiento ayudará en la interpretación de los datos que se pueden obtener en los sistemas mecánicos, para localizar dichas fuentes, según los parámetros básicos de las vibraciones, y buscar así la debida corrección de las fallas que se presentan.

Desbalance estático de piezas rotatorias.

El desbalance estático de las fuerzas de inercia, que surgen en las piezas rotatorias de las máquinas, es una de las causas más comunes de las vibraciones. Este tipo de desbalance es más notable en piezas con forma de disco, tales como poleas, ruedas dentadas, impelentes de bombas, etc., en los que la longitud es pequeña en comparación con el diámetro. En estas piezas, las fuerzas de inercia aparecen cuando existe una determinada excentricidad, es decir, cuando no coincide el centro (o eje) de rotación con el centro de masa de dicha pieza.

Las causas más comunes del desbalance estático son: desigualdad de la densidad del material en diferentes partes de la pieza, sopladuras, inclusiones no metálicas y errores de fabricación. Aunque las piezas deben salir balanceadas de la fábrica, en muchos casos el uso trae como consecuencia desgastes desiguales o desprendimiento de pequeñas porciones, que producen desbalance después de un determinado tiempo de explotación.

Figura 92 Fuerza de inercia debida a desbalance estático

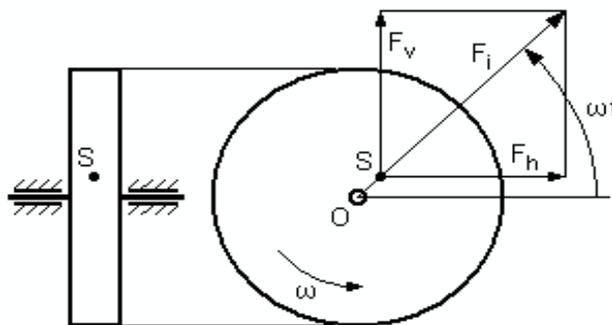


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 92 se muestra una pieza rotatoria desbalanceada estáticamente, en la que se destaca la no coincidencia del centro o eje de rotación con el centro de masa. La excentricidad será:

$$e = L_{os}$$

En este caso la fuerza de inercia normal (fuerza centrífuga) es de módulo constante (para una frecuencia angular constante); pero variable en dirección y sentido, ya que rota con la pieza. El módulo de dicha fuerza será:

$$F_i m \cdot e \cdot \omega^2 \quad (136)$$

En una posición determinada, dada por el ángulo " ωt " como se muestra en la figura 83, la fuerza de inercia tendrá dos componentes, cuyos efectos son diferentes. En el plano horizontal la componente de la fuerza de inercia estará dada por la expresión:

$$F_h = F_1 \cos \omega t \quad (137)$$

En el plano vertical, la componente será:

$$F_v = F_1 \sin \omega t \quad (138)$$

Que se trabaje con una u otra componente depende del análisis que se esté realizando. Si se estudian las vibraciones en el plano vertical, entonces la componente en ese plano es la que reviste interés y viceversa. Se debe añadir, que la posición del eje de referencia, para medir el ángulo de rotación de la pieza, es convencional, es decir, se escoge según los criterios del que realiza el estudio.

Lo expuesto en los párrafos anteriores y las investigaciones realizadas indican que:

- La frecuencia angular de las vibraciones, excitadas por la fuerza de inercia de una pieza desbalanceada, es igual a la frecuencia angular de rotación de dicha pieza ($1 \times \omega$).
- La amplitud de las vibraciones es proporcional a la magnitud del desbalance.
- La amplitud de las vibraciones es normalmente mayor en la dirección radial, es decir, en la dirección perpendicular al eje de rotación de la pieza desbalanceada.

Figura 93 Rotor saliente

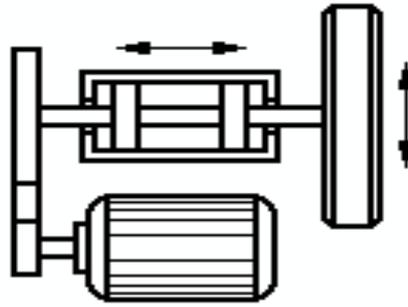


Ilustración: Héctor Terán

El desbalance de un rotor saliente (en voladizo), como se muestra en la figura 93, frecuentemente trae como consecuencia una notable excitación de vibraciones en dirección axial, además de las vibraciones en sentido radial.

En las piezas rotatorias, el balanceo estático de las fuerzas de inercia se puede realizar, con un determinado grado de exactitud, con relativa facilidad, por medio de la colocación de contrapesos (en el lado contrario del centro de masas) o por la eliminación de masa (por medio de agujeros en el mismo lado del centro de masas).

El problema estriba en la detección de la posición y módulo del desbalance. Por medio de sencillas máquinas de balanceo estático, se puede detectar la posición y módulo del desbalance, con una exactitud, que en sistemas con exigencias poco rigurosas en este aspecto, puede resultar satisfactoria. Cuando se desean mejores resultados, se repite el proceso de detección del desbalance residual, después de atenuar el desbalance inicial.

A pesar de que se haya realizado un balanceo muy cuidadoso, incluso con máquinas sofisticadas, siempre quedará un determinado desbalance residual, que constituye una fuente de excitación de vibraciones.

Desbalance dinámico de piezas rotatorias.

En muchos casos de piezas rotatorias con forma de cilindro, tales como rotores de motores eléctricos, rotores de compresores de paletas, etc., en las que la longitud es grande en comparación con el diámetro, se observa que, aunque estén balanceadas estáticamente, al rotar engendran cargas variables, que hacen surgir vibraciones notables. Esto se debe al desbalance dinámico, cuyas causas son las mismas del desbalance estático.

En la figura 94 se muestra un rotor desbalanceado dinámicamente, que servirá de base para la explicación. Por algunas de las causas antes expuestas, la masa del rotor no está distribuida uniformemente a ambos lados del eje de rotación, por lo que en cada lado se tendrá un centro de masas parcial (S_1 , S_2), aunque el centro de masas de toda la pieza (S) se encuentre sobre dicho eje, como se muestra en la figura. Este defecto hace que se engendre un par de fuerzas de inercia, con momento dado por la expresión:

$$M = F_i L \quad (139)$$

Al igual que en el caso anterior, al rotar las fuerzas de inercia, su proyección en el plano horizontal y vertical serán variables, por lo que engendrarán momentos variables en dichos planos. El momento, en el plano horizontal, estará dado por la expresión:

$$M_h = F_1 \cos\omega t. L \quad (140)$$

El momento, en el plano vertical, será:

$$M_v = F_1 \sen\omega t. L \quad (141)$$

La detección del desbalance dinámico de los rotores requiere del ensayo de estos en máquinas más o menos complejas, que existen en los talleres de fabricación o en laboratorios de dinámica. La eliminación (o disminución, que es lo que realmente se logra) del desbalance dinámico, en última instancia, se alcanza con la colocación de contrapesos o la eliminación de masa de determinadas partes de la pieza, como en el caso del desbalance estático.

Figura 94 Desbalance dinámico

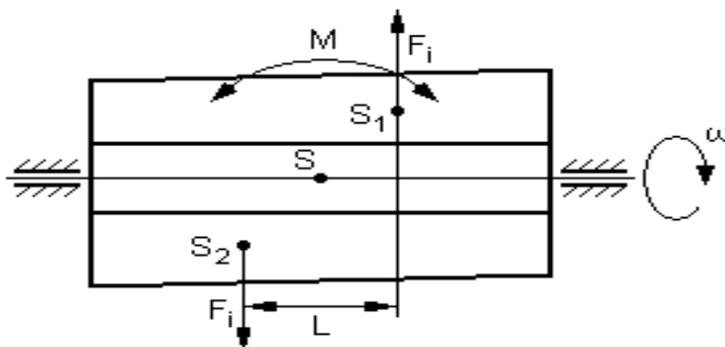


Ilustración: Héctor Terán

Desbalance de mecanismos con elementos que realizan un movimiento de traslación.

En muchas máquinas se presentan piezas con movimiento de traslación alternativo, como en el caso de motores de combustión interna, compresores de pistones, bombas de pistones, seguetas mecánicas, limadoras, mortajadoras, etc., en las que el balanceo total de las fuerzas de inercia implicaría complejas soluciones técnicas. En dichas máquinas se balancean solamente las fuerzas de inercia de mayores módulos, dejando sin balancear determinadas fuerzas o componentes.

Para ilustrar este caso, se tomará el mecanismo de manivela-biela-corredera, que está presente en muchas de las máquinas mencionadas anteriormente. En la figura 95 se presenta dicho mecanismo.

La masa de la biela se sustituye por dos masas concentradas equivalentes: una en el par cinemático con la manivela (punto A), y otra en el par cinemático con la corredera (punto B).

La masa concentrada en el punto A, que realiza un movimiento de rotación, se puede balancear fácilmente, junto a la masa de la manivela, por medio de la colocación de un contrapeso (m_C a un radio r_C) en la prolongación de dicho elemento.

La masa de la biela concentrada en el punto B, junto a la masa de la corredera, realiza un movimiento de traslación rectilíneo alternativo (con aceleraciones variables en módulo y sentido), por lo que su balanceo resulta difícil.

La aceleración del punto B se puede dar por medio de una serie de sumandos, como se muestra a continuación:

$$a_B = r\omega^2[A_1\cos\omega t + 4A_2\cos 2\omega t + 16A_4\cos 4\omega t + 36A_6\cos 6\omega t + \dots] \quad (142)$$

Figura 95 Balanceo de un mecanismo de manivela biela corredera

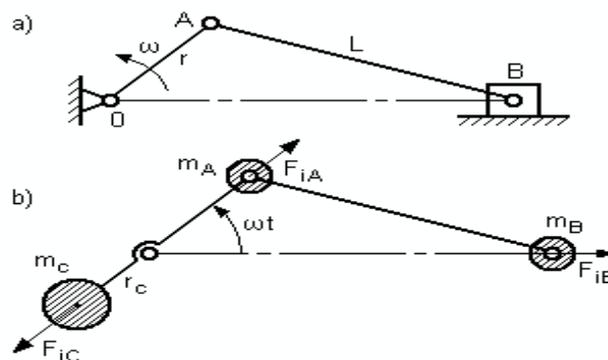


Ilustración: Héctor Terán

Los coeficientes constantes (A_k) se obtienen por las expresiones:

$$A_1 = -1$$

$$A_2 = -\left(\frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{16\lambda^3} + \frac{15}{512\lambda^5} + \dots +\right)$$

$$A_4 = \frac{1}{64\lambda^3} + \frac{3}{256\lambda^5} + \dots$$

$$A_6 = -\left(\frac{15}{512\lambda^5} + \dots\right)$$

En las expresiones (2.10.8), el parámetro “ λ ” es la relación de la longitud de la biela con respecto a la longitud de la manivela, como se expresa a continuación:

$$\lambda = L / r \quad (143)$$

Los sumandos de la expresión (2.10.7) decrecen rápidamente a medida que aumenta su orden, ya que los coeficientes constantes (A_k) decrecen muy rápidamente con el aumento de dicho orden. Por eso, en muchos casos prácticos, es suficiente trabajar solamente con los primeros sumandos. Como se nota, alcanzan valores diferentes de cero los sumandos de órdenes pares, excepto el sumando de primer orden, que además es el de mayor módulo de todos.

La fuerza de inercia, como recordamos, está dada por la expresión:

$$F_i = -(m_B + m_P)a_B \quad (144)$$

Donde:

m_B : Parte de la masa de la biela, concentrada en la corredera o pistón. m_P : Masa de la corredera o pistón.

Sustituyendo (2.10.7) en (2.10.10), se obtiene:

$$F_1 = (m_B + m_P)r\omega^2[A_1\cos\omega t + 4A_2\cos 2\omega t + 16A_4\cos 4\omega t + 36A_6\cos 6\omega t] \quad (145)$$

De la expresión (145) se nota que la fuerza de inercia también se puede dar por medio de una serie de sumandos, cuya cantidad depende del grado de exactitud que se necesita. En la práctica sólo se tienen en cuenta los sumandos de los primeros órdenes (en la mayoría de los casos, sólo los dos primeros), ya que los de los órdenes superiores son despreciables.

Teniendo en cuenta la expresión (145), se pueden calcular las fuerzas de inercia de diferentes órdenes por separado, como se muestra a continuación:

$$F_{i1} = (m_B + m_P) r \omega^2 A_1 \cos \omega t \dots\dots\dots \text{Fuerza de inercia de primer orden.}$$

$$F_{i2} = (m_B + m_P) r \omega^2 4A_2 \cos 2\omega t \dots\dots\dots \text{Fuerza de inercia de segundo orden.}$$

$$F_{i4} = (m_B + m_P) r \omega^2 16A_4 \cos 4\omega t \dots\dots\dots \text{Fuerza de inercia de cuarto orden.}$$

$$F_{i6} = (m_B + m_P) r \omega^2 36A_6 \cos 6\omega t \dots\dots\dots \text{Fuerza de inercia de sexto orden.}$$

Se puede aumentar el orden infinitamente, teniendo en cuenta que sólo los órdenes pares alcanzan valores diferentes de cero; pero no es necesario, ya que, como señalamos anteriormente, sólo se trabaja con las fuerzas de inercia de los primeros órdenes. En las expresiones de las fuerzas de inercia de diferentes órdenes, se nota que estas fuerzas varían con una frecuencia angular, que es un múltiplo, igual al orden de la fuerza, de la frecuencia angular de rotación de la manivela. Esto se puede expresar por la siguiente expresión, donde “k” es el orden de la fuerza de inercia:

$$\omega_k = K \cdot \omega \tag{146}$$

Fuerzas de inercia desbalanceadas en mecanismos múltiples.

En la práctica, para lograr comportamientos dinámicos menos severos de las máquinas, se pueden utilizar mecanismos iguales colocados en paralelo, dando lugar a los denominados mecanismos múltiples. El uso de estos mecanismos presenta dos ventajas muy importantes:

- Se distribuyen más uniformemente las acciones de las fuerzas motrices y resistivas, en todo el ciclo de movimiento o de trabajo, logrando en cada instante una situación más cercana al equilibrio entre dichas fuerzas. Con esto se logra una marcha más uniforme, lo que hace más fácil la disminución del coeficiente de irregularidad de rotación hasta los valores permisibles.

- Con la colocación adecuada de los mecanismos individuales en el mecanismo múltiple, se pueden eliminar mutuamente las fuerzas de inercia, que surgen en estos, sin tener que añadir elementos adicionales (contrapesos u otros).

El caso más conocido, de aprovechamiento de estas dos ventajas, es el motor de combustión interna múltiple. También se aprovechan dichas ventajas en compresores y bombas de pistones de varios cilindros. En los casos, que se analizarán a continuación, no se tendrá en cuenta la primera ventaja, sino sólo una parte de la segunda.

A partir de ahora, para simplificar las expresiones, todas las masas concentradas en el pistón ($m_B + m_p$) las representaremos por “m”.

- **Mecanismo doble.**

En la figura 96 (a) se presenta un mecanismo de manivela-biela-corredera doble, con las manivelas colocadas a 180 grados, una de la otra.

La fuerza de inercia de primer orden, en el primer pistón, será:

$$F_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cos \omega t \quad (147)$$

La fuerza de inercia de primer orden, en el segundo pistón, será:

$$F_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cos(\omega t + 180^\circ) \quad (148)$$

La fuerza de inercia de primer orden total será la suma de las dos anteriores (147) y (148)

$$F_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 [\cos \omega t + \cos(\omega t + 180^\circ)] \quad (149)$$

Figura 96 Mecanismo manivela biela corredera doble

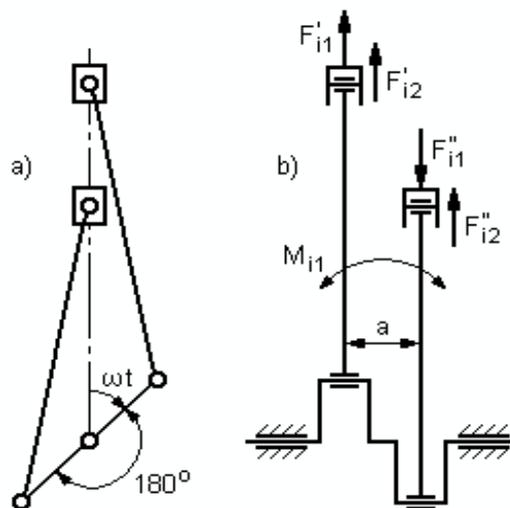


Ilustración: Héctor Terán

Teniendo en cuenta las características del coseno, la expresión (149) toma la forma:

$$F_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 [\cos\omega t - \cos\omega t] = 0 \quad (150)$$

De la expresión anterior se deduce que, en el mecanismo de manivela-biela-corredera doble, con las manivelas colocadas a 180 grados una de la otra, las fuerzas de inercia de primer orden se anulan mutuamente (b).

Debido a la disposición de los mecanismos, a una distancia “a” uno del otro, aparece el momento de las fuerzas de inercia de primer orden, que estará dado por:

$$M_{i1} = a \cdot m \cdot r \cdot \omega^2 \cos\omega t \quad (151)$$

Este momento excita vibraciones angulares de la máquina, en el plano que contiene a las fuerzas de inercia. Su frecuencia angular de variación es la misma que la de las fuerzas de inercia de primer orden.

La fuerza de inercia de segundo orden, en el primer pistón, será:

$$F'_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cos 2\omega t \quad (152)$$

La fuerza de inercia de segundo orden, en el segundo pistón, será:

$$F''_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cos 2(\omega t + 180^\circ) \quad (153)$$

La fuerza de inercia de segundo orden total será la suma de las dos anteriores (2.10.18 y (153)).

$$F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} [\cos 2\omega t + \cos(2\omega t + 360^\circ)] \quad (154)$$

Teniendo en cuenta las características del coseno, la expresión (154) toma la forma:

$$F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} [\cos 2\omega t + \cos 2\omega t] = 2 \cdot m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cos 2\omega t \quad (155)$$

De la expresión (155) se deduce que, en el mecanismo de manivela-biela-corredera doble, con las manivelas colocadas a 180 grados una de la otra, las fuerzas de inercia de segundo orden no se anulan mutuamente; sino que se suman, para dar una fuerza de inercia doble, comparada con la del mecanismo simple. Las fuerzas de inercia de segundo orden no producen momento, ya que ambas poseen el mismo módulo y actúan en el mismo sentido.

- **Mecanismo triple.**

En la figura 97 se presenta un mecanismo de manivela-biela-corredera triple, en el que las manivelas se colocan a 120 grados una de otra (a).

La fuerza de inercia de primer orden, en el primer pistón (b), será:

$$F'_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cos \omega t \quad (156)$$

La fuerza de inercia de primer orden, en el segundo pistón, será:

$$F''_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cos(\omega t + 120^\circ) \quad (157)$$

La fuerza de inercia de primer orden, en el tercer pistón, será:

$$F'''_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cos(\omega t + 240^\circ) \quad (158)$$

La fuerza de inercia de primer orden total será la suma de las tres anteriores (156, 157 y 158).

$$F_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 [\cos \omega t + \cos(\omega t + 120^\circ) + \cos(\omega t + 240^\circ)] \quad (159)$$

Figura 97 Mecanismo de manivela-biela-corredera triple

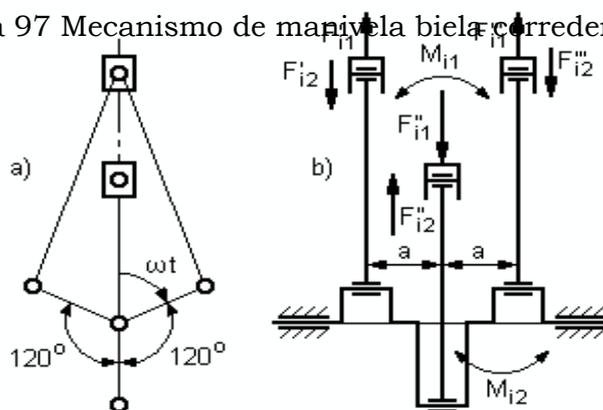


Fig. 5.10.6. Mecanismo de manivela-biela-corredera triple.

Ilustración: Héctor Terán

Desarrollando los cosenos de las sumas de dos ángulos, se obtiene que:

$$\cos(\omega t + 120^\circ) = \cos \omega t \cdot \cos 120^\circ - \sin \omega t \cdot \sin 120^\circ = -0.5 \cos \omega t - 0.866 \sin \omega t$$

$$\cos(\omega t + 240^\circ) = \cos \omega t \cdot \cos 240^\circ - \sin \omega t \cdot \sin 240^\circ = -0.5 \cos \omega t - 0.866 \sin \omega t$$

Sustituyendo (158) en (159), se obtiene:

$$F_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 [\cos \omega t - 0.5 \cos \omega t - 0.866 \sin \omega t - 0.5 \cos \omega t + 0.866 \sin \omega t] \quad (160)$$

Simplificando, la expresión (160) toma la forma:

$$F_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 [\cos \omega t - 0.5 \cos \omega t - 0.5 \cos \omega t] = 0 \quad (161)$$

De la expresión (161) se deduce que, en el mecanismo de manivela-biela-corredera triple, con las manivelas colocadas a 120 grados una de la otra, las fuerzas de inercia de primer orden se anulan mutuamente.

Debido a la disposición de los mecanismos, a una distancia “a” uno del otro, y a la diferencia de los módulos de las fuerzas de inercia con respecto al mecanismo del centro, aparece el momento de las fuerzas de inercia de primer orden, que estará dado por:

$$M_{i1} = 1,5 \cdot a \cdot m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t \quad (162)$$

Este momento excita vibraciones angulares de la máquina, en el plano que contiene las fuerzas de inercia. Su frecuencia angular de variación es la misma que la de las fuerzas de inercia de primer orden. La fuerza de inercia de segundo orden, en el primer pistón, será:

$$F'_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cos 2\omega t \quad (163)$$

La fuerza de inercia de segundo orden, en el segundo pistón, será:

$$F''_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cos 2(\omega t + 120^\circ) \quad (164)$$

La fuerza de inercia de segundo orden, en el tercer pistón, será:

$$F''_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cos 2(\omega t + 240^\circ) \quad (165)$$

La fuerza de inercia de segundo orden total será la suma de las tres anteriores (163, 164 y 165), como se muestra a continuación:

$$F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} [\cos 2\omega t + \cos(2\omega t + 240^\circ) + \cos(2\omega t + 480^\circ)] \quad (166)$$

Desarrollando los cosenos de las sumas de dos ángulos, se obtiene que:

$$\cos(\omega t + 240^\circ) = \cos 2\omega t \cdot \cos 240^\circ - \sin 2\omega t \cdot \sin 240^\circ = -0.5 \cos 2\omega t - 0.866 \sin \omega t$$

$$\cos(\omega t + 480^\circ) = \cos 2\omega t \cdot \cos 480^\circ - \sin 2\omega t \cdot \sin 480^\circ = -0.5 \cos 2\omega t - 0.866 \sin \omega t$$

Sustituyendo (166) en la expresión (165), se obtiene:

$$F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{\lambda} [\cos 2\omega t - 0.5 \cos 2\omega t - 0.866 \sin 2\omega t - 0.5 \cos 2\omega t + 0.866 \sin 2\omega t]$$

Simplificando, la expresión anterior toma la forma:

$$F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} [\cos 2\omega t - 0.5 \cos 2\omega t - 0.5 \cos 2\omega t] = 0 \quad (167)$$

De la expresión (167) se deduce que, en el mecanismo de manivela-biela-corredera triple, con las manivelas colocadas a 120 grados una de la otra, las fuerzas de inercia de segundo orden también se anulan mutuamente.

Igual a como ocurre para las fuerzas de inercia de primer orden, debido a la disposición de los mecanismos y a la diferencia entre los módulos de las fuerzas de inercia con respecto al mecanismo del centro, aparece el momento de las fuerzas de inercia de segundo orden, que estará dado por:

$$M_{i2} = 1.5 \cdot a \cdot m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \cos 2\omega t \quad (168)$$

Este momento también excita vibraciones angulares de la máquina, en el plano que contiene a las fuerzas de inercia, y su frecuencia angular de variación es la misma que la de las fuerzas de inercia de segundo orden.

- **Mecanismo cuádruple.**

En la figura 98 se presenta el esquema de un mecanismo múltiple, formado por cuatro mecanismos de manivela-biela-corredera en paralelo.

Este mecanismo se analiza como la unión de dos mecanismos dobles, de forma tal, que el segundo mecanismo queda invertido, con respecto a la posición original. Como en el mecanismo doble, en el mecanismo cuádruple también se anulan las fuerzas de inercia de primer orden, como se observa en la figura 2.10.7. Gracias a la simetría del mecanismo, con respecto al apoyo central, se anulan los momentos de dichas fuerzas de inercia.

Las cuatro fuerzas de inercia de segundo orden actúan en el mismo sentido, por lo que no se anulan. Sin embargo, estas fuerzas no producen momento, por tener el mismo módulo todas y estar colocadas simétricamente con respecto al apoyo central del mecanismo.

Colocar los mecanismos de otra forma no sería lógico, desde el punto de vista del balanceo de las fuerzas de inercia de primer orden. Esto sólo se justificaría, si se persiguiera otro propósito. Entonces sería necesario un balanceo independiente de los mecanismos parciales, o permitir que las fuerzas de inercia de primer orden queden desbalanceadas.

Figura 98 Mecanismo de manivela biela corredera cuádruple

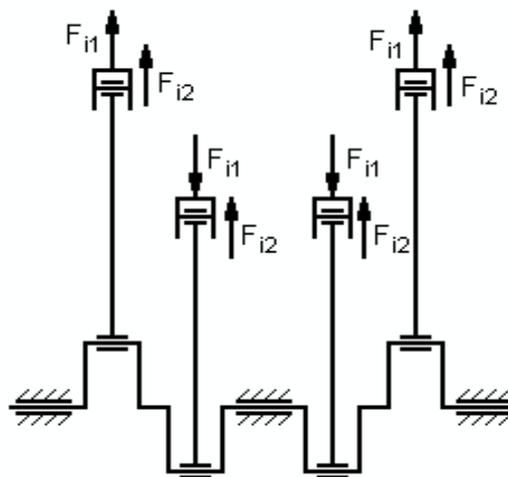


Ilustración: Héctor Terán

- **Mecanismo séxtuple.**

En la figura 99, se muestra el esquema de un mecanismo múltiple, formado por seis mecanismos de manivela-biela-corredera en paralelo.

Este mecanismo se analiza como la unión de dos mecanismos triples, de forma tal, que el segundo mecanismo queda invertido, con respecto a la posición original. Como en el mecanismo triple, en el mecanismo séxtuple también se anulan las fuerzas de inercia de primer orden y de segundo orden, como se observa en la figura 99. Gracias a la simetría del mecanismo, con respecto al apoyo central, también se anulan los momentos de las fuerzas de inercia de primer orden y de segundo orden.

Las buenas cualidades dinámicas de este mecanismo múltiple lo llevaron a tener una gran difusión en la fabricación de motores de combustión interna para automóviles de todo tipo.

Todos los razonamientos anteriores los hemos hecho sobre la base de que los mecanismos, que se unen para formar un mecanismo múltiple, son idénticos. En realidad, tanto las dimensiones de los elementos, como sus masas, difieren en mayor o menor grado, con respecto a las proyectadas.

Esto quiere decir, que aún con el más cuidadoso balanceo de las fuerzas de inercia, siempre quedarán desbalances residuales, que constituirán fuentes de excitación de vibraciones. En dependencia del tipo de máquina, del trabajo que realiza y del ambiente donde funciona, las exigencias al respecto serán más o menos rigurosas.

Figura 99 Mecanismo de manivela biela corredera séxtuple

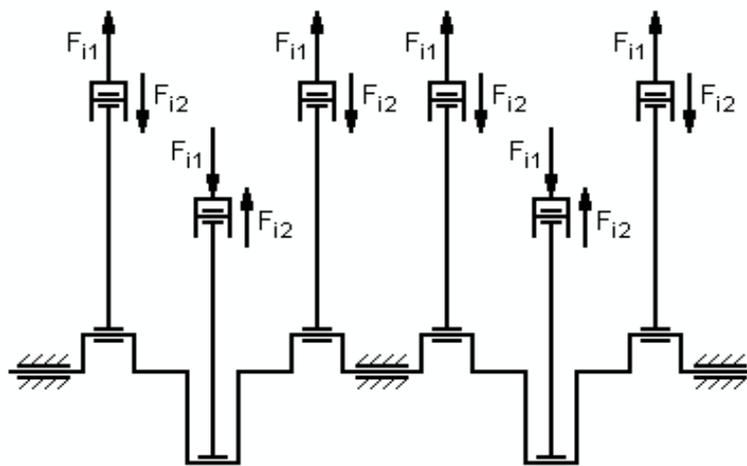


Ilustración: Héctor Terán

• **Mecanismo doble en “V”.**

En la práctica, se utiliza frecuentemente el mecanismo de manivela-biela-corredera doble, con las directrices o guías de las correderas a 90 grados una de otra, en el mismo plano, como se muestra en la figura 100.

La fuerza de inercia de primer orden, en la corredera de la izquierda, que estará dirigida según la línea guía de esa corredera, variará según la expresión:

$$F'_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cos \omega t \tag{169}$$

La fuerza de inercia de primer orden, en la corredera de la derecha, que estará dirigida según la línea guía de esa corredera, variará según la expresión:

$$F''_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 \cos(\omega t + 270^\circ) = m \cdot r \cdot \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{170}$$

La fuerza de inercia total de primer orden será la suma vectorial de las fuerzas anteriores (169 y 170), por lo que se debe cumplir que:

$$F_{i1}^2 = (m \cdot r \cdot \omega^2 \cos \omega t)^2 + (m \cdot r \cdot \omega^2 \operatorname{sen} \omega t)^2 = (m \cdot r \cdot \omega^2)^2 \cdot (\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t)$$

Simplificando la expresión anterior, se obtiene:

$$F_{i1} = m \cdot r \cdot \omega^2 \tag{171}$$

Figura 100 Mecanismo de manivela biela corredera doble en V

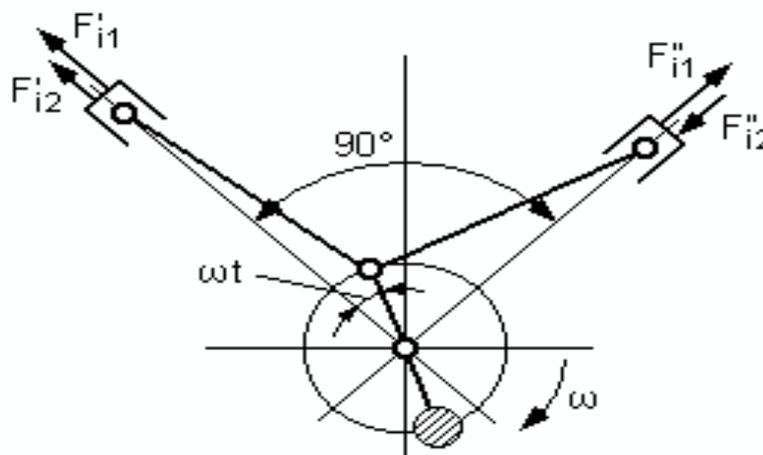


Ilustración: Héctor Terán

Como se puede notar en la expresión (171), el módulo de la fuerza de inercia total de primer orden, de las masas con movimiento de traslación, es constante, y dicha fuerza se comporta como si correspondiera a una masa rotatoria, lo que quiere decir que puede ser balanceada con facilidad, colocando un contrapeso adicional en la prolongación de la manivela.

La fuerza de inercia de segundo orden, en la corredera de la izquierda, que estará dirigida según la línea guía de esa corredera, variará según la expresión:

$$F'_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \cos 2\omega t \quad (172)$$

La fuerza de inercia de segundo orden, en la corredera de la derecha, que estará dirigida según la línea guía de esa corredera, variará según la expresión:

$$F''_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \cos 2(\omega t + 270) = -m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \cos 2\omega t \quad (173)$$

La fuerza de inercia total de segundo orden será la suma vectorial de las fuerzas anteriores (172 y 173), por lo que se debe cumplir que:

$$F_{i2}^2 = \left(m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \cos 2\omega t \right)^2 + \left(-m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \cos 2\omega t \right)^2 = \left(m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \right)^2 \cdot (2 \cos^2 2\omega t)$$

Simplificando la expresión anterior, se obtiene:

$$F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \sqrt{2} \cos 2\omega t \quad (174)$$

Como se observa en la expresión (174), las fuerzas de inercia de segundo orden no se anulan, por lo que constituirán una fuente de excitación de vibraciones.

Las líneas directrices de las correderas se encuentran en un plano y se cortan en un punto, situado en el eje de la manivela (centro de rotación), por lo que las fuerzas de inercia de todos los órdenes no producen momento en este mecanismo.

- Mecanismo múltiple, formado por cuatro mecanismos dobles en “V”.** Este mecanismo tuvo una amplia difusión en motores de combustión interna (motores “V8”), debido a las buenas cualidades dinámicas y compacidad, que lo caracterizan. Las manivelas del cigüeñal espacial asimétrico de este mecanismo están dispuestas en dos planos perpendiculares entre si, como se muestra en la figura 101. Las líneas directrices de las correderas también están dispuestas en dos planos a 90 grados, de forma tal, que el mecanismo total puede ser analizado como la suma de cuatro mecanismos dobles en “V”, distribuidos a lo largo del cigüeñal. Los contrapesos, colocados en las prolongaciones de las manivelas, balancean las fuerzas de inercia de las masas rotatorias y las fuerzas de inercia de primer orden de las masas que se trasladan, al igual que en el mecanismo doble en “V”. La suma de los momentos de las fuerzas de inercia, antes mencionadas, también es igual a cero. Las fuerzas de inercia de segundo orden, en los mecanismos dobles, serán:

- Primer mecanismo doble: $F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \sqrt{2} \cos 2\omega t$
- Segundo mecanismo doble: $F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \sqrt{2} \cos 2(90^\circ + \omega t)$
- Tercer mecanismo doble: $F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \sqrt{2} \cos 2(270^\circ + \omega t)$
- Cuarto mecanismo doble: $F_{i2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \frac{1}{\lambda} \sqrt{2} \cos 2(180^\circ + \omega t)$

Figura 101 Cigüeñal de un motor de ocho cilindros en V

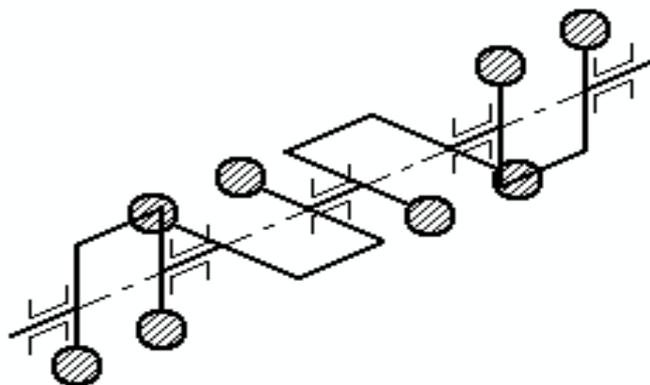


Ilustración: Héctor Terán

Las funciones coseno, en las expresiones anteriores, guardan las siguientes relaciones:

$$\cos(90 + \omega t) = \cos(180 + 2\omega t) = -\cos 2\omega t$$

$$\cos(270 + \omega t) = \cos(360 + 2\omega t) = \cos(360 + 180 + 2\omega t) = -\cos 2\omega t$$

$$\cos(180 + \omega t) = \cos(360 + 2\omega t) = \cos 2\omega t$$

De las expresiones anteriores, se deduce que las fuerzas de inercia de segundo orden poseen iguales módulos y dirección; pero se anulan por pares, según el signo. La disposición de las manivelas trae también la ventaja de que se anula el momento de las fuerzas de inercia de segundo orden del primer y segundo mecanismos, con el que aparece en el tercer y cuarto mecanismos.

Excentricidad (en máquinas rotatorias).

Cuando se analizaron las vibraciones debidas a desbalances estáticos, se introdujo el término “excentricidad”, que se entendía como la no coincidencia del centro de rotación con el centro de masa de la pieza; pero en este caso no se trata de la excentricidad en ese sentido, sino en el sentido de falta de coincidencia del eje de rotación con la línea central geométrica de la pieza, lo que trae como consecuencia una variación cíclica de las fuerzas motrices o tecnológicas.

En la figura 102 se muestra una bomba, en la que el impelente es excéntrico, ya que no coincide el centro de rotación con el centro geométrico de dicho rotor.

Figura 102 Bomba con excéntrico

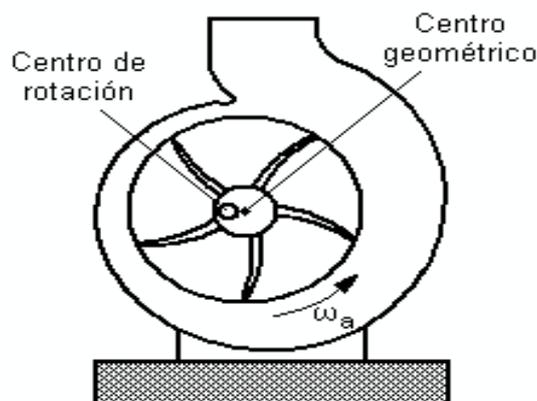


Ilustración: Héctor Terán

Este defecto trae como consecuencia que la distancia del impelente a la carcasa, en cada punto de esta, varía cíclicamente, con las consecuentes variaciones de los esfuerzos en los elementos. Estas variaciones de los esfuerzos excitan vibraciones de la máquina, tanto lineales en dirección radial, como angulares, en el árbol, que soporta al impelente.

Por ejemplo, la excentricidad del inducido del motor eléctrico es una de las causas comunes de aparición de vibraciones en la maquinaria rotativa. La excentricidad en rodetes o rotores de ventiladores, sopladores, bombas y compresores, también puede crear fuerzas excitadoras de vibraciones.

En esos casos, las fuerzas excitadoras son el resultado de las variaciones de las fuerzas magnéticas, aerodinámicas e hidráulicas, que actúan contra el rotor, en cada revolución. La frecuencia angular de las vibraciones es igual a la frecuencia angular de rotación ($1 \times \omega$) del elemento, que presenta excentricidad. Por eso este defecto es fácilmente confundible con el desbalance.

En la figura 103 se presenta otro ejemplo de rotor excéntrico. En este caso es el rotor de una máquina desmenuzadora, cuyas cuchillas cortarían trozos más largos, cuando el centro geométrico se coloque a la derecha del centro de rotación, y más cortos, cuando se coloque a la izquierda de dicho centro. El esfuerzo en las cuchillas, que es la suma de los esfuerzos de corte y lanzamiento del material, varía con la variación de la longitud de los trozos cortados, por lo que en este caso también aparecerán vibraciones lineales de la máquina, como un todo, en dirección radial, y vibraciones angulares en el árbol que acciona el rotor, que se añaden a las producidas por los impactos del corte en cada cuchilla.

Figura 103 Desmenuzadora con rotor excéntrico

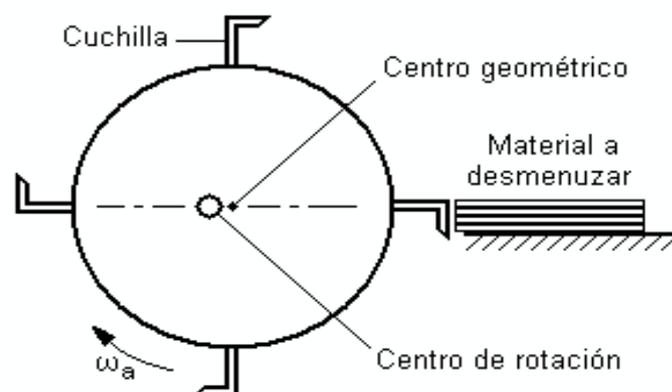


Ilustración: Héctor Terán

Figura 104 Polea excéntrica

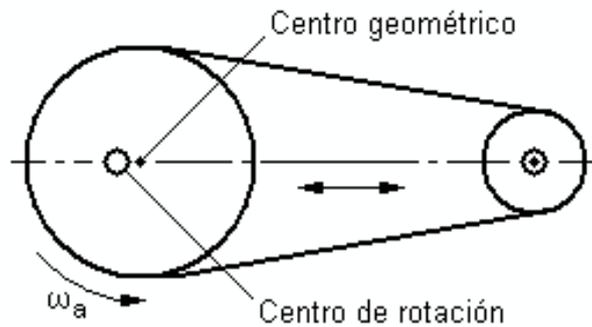


Ilustración: Héctor Terán

Este defecto también se manifiesta cuando el centro de rotación no coincide con el centro geométrico de las poleas, en las transmisiones de este tipo, como se muestra en la figura 104. En este caso, cuando el centro geométrico de la polea excéntrica se coloque a la derecha del centro de rotación, la tensión de la correa disminuirá, y cuando se coloque a la izquierda, aumentará. Esto traerá como consecuencia que las correas estén sometidas a grandes variaciones de la tensión, que se repiten en cada revolución, por lo que las mayores amplitudes de las vibraciones se observarán en la dirección de la línea de los centros de las poleas, que conforman la transmisión.

Falta de alineación en árboles acoplados coaxialmente.

Los tres tipos básicos de falta de alineación en los acoplamientos son: **angular**, **en paralelo** y una **combinación** de ambos.

En la figura 2.10.14 se muestra el caso de **falta de alineación angular**. Este defecto excita, principalmente, vibraciones axiales en los árboles de las máquinas motriz y movida, con una frecuencia igual a la frecuencia de rotación de dichos árboles ($1x\omega$).

Figura 105 Desalineación angular (a) y espectro (b) de las vibraciones

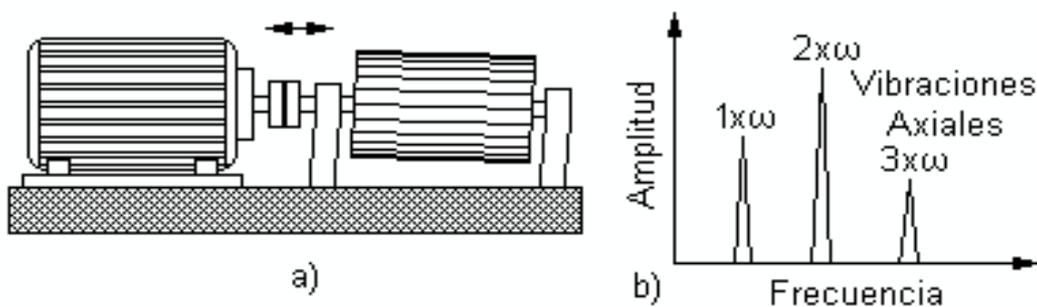


Ilustración: Héctor Terán

Figura 106 Desalineación en paralelo (a) y espectro (b) de las vibraciones

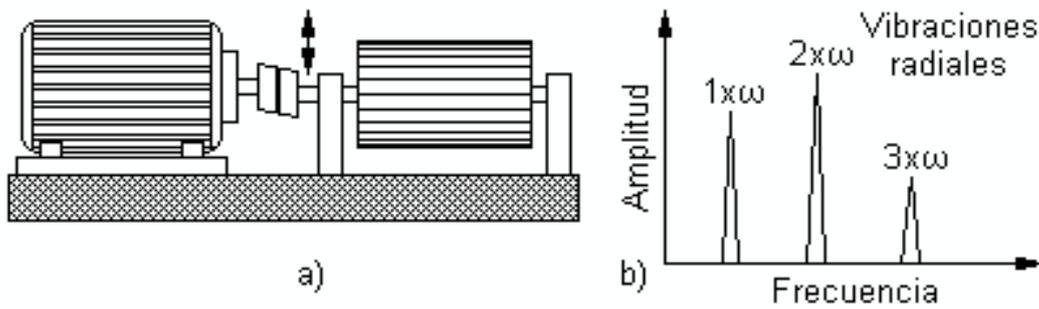


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 2.10.15 se presenta el esquema de un sistema con falta de **alineación en paralelo**. En este caso se excitan, principalmente, vibraciones radiales, con una frecuencia igual al doble de la frecuencia de rotación de los árboles ($2x\omega$).

En la mayoría de los casos, los datos obtenidos en sistemas, en los que se presenta falta de alineación, indican lo siguiente:

La frecuencia de las vibraciones es igual a la frecuencia de rotación de los árboles desalineados ($1x\omega$); pero se presentan también vibraciones con frecuencia igual al doble de la frecuencia de rotación ($2x\omega$), e incluso, al triple de dicha frecuencia ($3x\omega$), en los casos de una grave falta de alineación.

- La amplitud de las vibraciones puede ser alta, tanto en sentido radial, como axial.
- La falta de alineación, aún con acoplamientos flexibles, produce fuerzas variables tanto radiales, como axiales que excitan vibraciones en ambas direcciones

Uno de los indicios más importantes de problemas debidos a falta de alineación y a ejes torcidos es la presencia de una elevada amplitud de las vibraciones en ambas direcciones, radial y axial. En general, cada vez que la amplitud de las vibraciones axiales sea mayor que la mitad de la amplitud radial más alta, hay un buen motivo para sospechar la existencia de un problema de alineación o eje torcido.

Cojinetes de rodamiento defectuosos. Tonos de rodamiento.

En la figura 107 se muestran los elementos de un cojinete de rodamiento, de los más comunes utilizados en la práctica. Los primeros estados de las fallas de los cojinetes de rodamiento producirán frecuencias de vibración no síncronas, que se denominan “tonos de rodamiento”, y sus armónicos.

Figura 107 Elementos de un cojinete de rodamiento

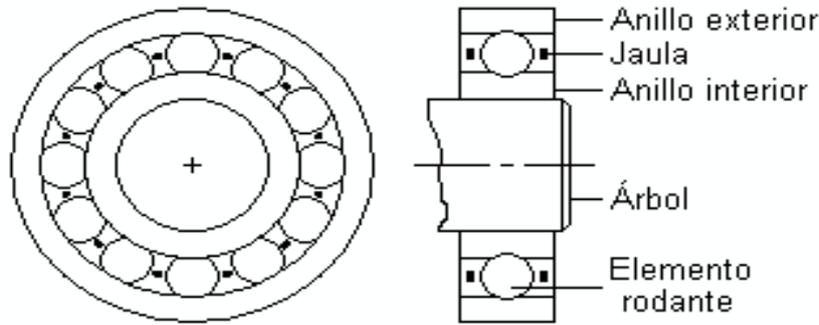


Ilustración: Héctor Terán

En ocasiones un rodamiento nuevo produce un tono de rodamiento, posiblemente debido a daños sufridos durante la instalación, el transporte o a defectos de fabricación.

Los defectos en las pistas, en las jaulas en los elementos rodantes de los cojinetes de este tipo excitan vibraciones de alta frecuencia, dentro de las que puede haber componentes con frecuencias, que no son múltiplos enteros de la frecuencia de rotación del árbol. La amplitud de las vibraciones dependerá de la gravedad de la falla del rodamiento.

Si el defecto del cojinete de rodamiento es de tamaño muy pequeño, como una grieta en uno de los anillos, el espectro de vibración tendrá armónicos del tono de rodamiento y habrá poca o ninguna frecuencia fundamental. Si el defecto comienza como una astilla en un área más grande del anillo, la amplitud para la frecuencia fundamental del tono de rodamiento estará a un nivel más alto que los armónicos. A medida que el defecto empeora, el nivel general de tonos de rodamiento se va a incrementar y también el nivel general de ruido de banda ancha.

A continuación se analizan los defectos más frecuentes en los cojinetes y se proponen las expresiones (2.10.43, 2.10.44, 2.10.45, 2.10.46) para el cálculo de las frecuencias fundamentales de los tonos de rodamiento, a partir de la geometría de dichos cojinetes. La exactitud de los resultados se ve afectada por la carga axial y el deslizamiento, cuyos efectos son impredecibles. En dichas fórmulas, se utilizarán los siguientes símbolos:

d_b = Diámetro del elemento rodante.

D_m = Diámetro medio del cojinete (El doble de la distancia desde el centro del árbol hasta el centro del elemento rodante).

n = Cantidad de elementos rodantes.

φ = Ángulo de inclinación de la normal en el punto de contacto entre la bola y la pista.

ω_a = Frecuencia angular de rotación del árbol.

Figura 108 Jaula deteriorada (a) y espectro (b) de las vibraciones

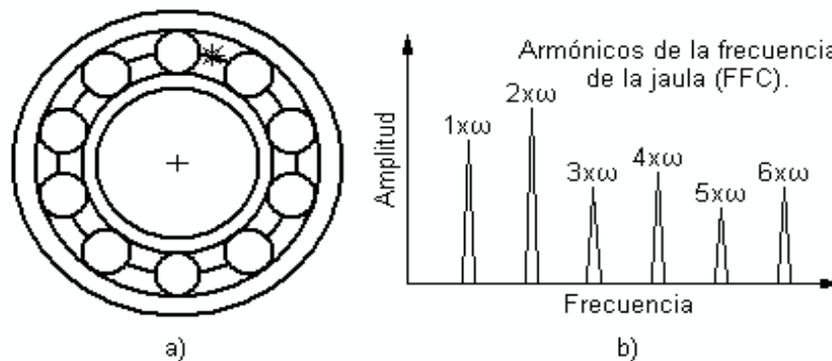


Ilustración: Héctor Terán

- **Deterioro de la jaula.**

Deformación o rotura de la jaula (canastillo), que es el elemento que mantiene separados y uniformemente distribuidos los elementos rodantes en las circunferencias de las pistas. En la figura 108 se muestra un cojinete con un defecto en la jaula y el espectro de las vibraciones, que excita.

A la frecuencia de las vibraciones, generadas por este elemento, se le denomina frecuencia fundamental del cojinete (FFC). En la literatura aparece con las siglas FTF (Fundamental Train Frequency), y no es más que la frecuencia de rotación de este elemento, que se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$FFC = \frac{1}{2} \left(\frac{d_b}{D_m} \cos \phi \right) \cdot \omega_a \quad (175)$$

Como se ve en la figura 108, aparecen armónicos de la frecuencia de rotación de la jaula, en dirección radial o axial, estando los picos predominantes en 1x y 2x de dicha frecuencia. La frecuencia fundamental del cojinete de rodamiento (FFC), como tal, aparece raramente en los espectros de vibraciones de dichos cojinetes. Por lo general, está involucrada con la presencia de bandas laterales.

- **Defecto en la pista interna.**

Agrietamiento, picadura o astillamiento del material en la pista interna, producido por errores de ensamble, esfuerzos anormales, corrosión, partículas externas o lubricación deficiente.

En la figura 109 que se incluye a continuación, se muestra un cojinete con este defecto y el espectro de las vibraciones que excita.

Figura 109 Pista deteriorada (a) y espectro de las vibraciones (b)

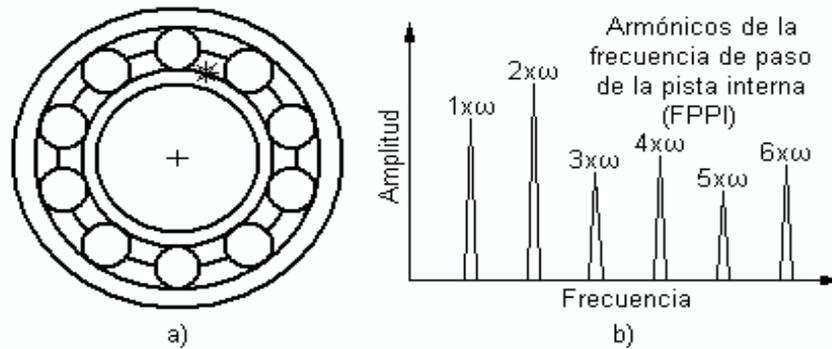


Ilustración: Héctor Terán

La frecuencia de paso de los elementos rodantes, por un defecto de la pista del anillo interior, será:

$$FPPI = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{d_b}{D_m} \cos \phi \right) \cdot \omega_a \quad (176)$$

Esta frecuencia es conocida en la literatura con las siglas **BPFI** (Ball Pass Frequency of the Inner Race).

Como se observa en la figura 109, en el espectro aparecen armónicos, en dirección radial, estando los picos predominantes en 1x y 2x de la frecuencia de excitación (FPPI), que engendra el defecto en la pista interna. Además, el contacto metal – metal, entre los elementos rodantes y las pistas, produce pulsos en el dominio del tiempo, con frecuencias del orden de 1-10 kHz.

- **Defecto en la pista externa.**

Agrietamiento, picadura o astillamiento del material en la pista externa, producido por errores de ensamble, esfuerzos anormales, corrosión, partículas externas o lubricación deficiente. En la figura 110 se muestra un cojinete con este defecto y el espectro de las vibraciones, que excita.

La frecuencia de paso de los elementos rodantes, por un defecto de la pista del anillo exterior, será:

$$FPPE = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{d_b}{D_m} \cos \phi \right) \cdot \omega_a \quad (177)$$

Esta frecuencia es conocida en la literatura con las siglas **BPFO** (Ball Pass Frequency of the Outer Race).

Figura 110 Pista exterior deteriorada (a) y espectro (b) de las vibraciones

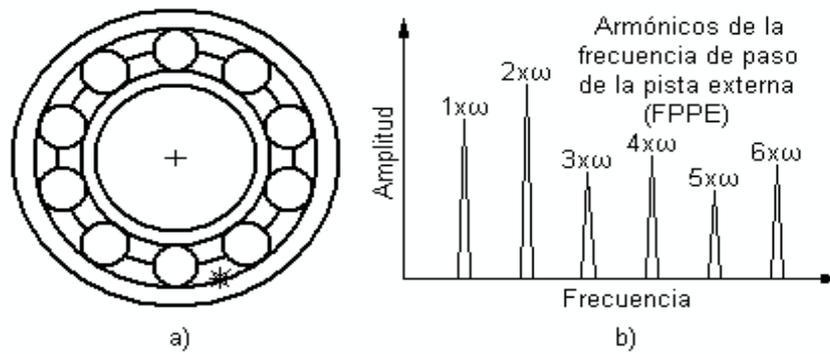


Ilustración: Héctor Terán

Como se observa en la figura 110, en el espectro aparecen armónicos en dirección radial, y los picos predominantes están en 1x y 2x de la frecuencia de excitación del defecto de la pista externa (FPPE). Además, el contacto metal – metal, entre los elementos rodantes y las pistas, produce pulsos en el dominio del tiempo del orden de 1-10 kHz.

• **Defectos en los elementos rodantes.**

Agrietamiento, picadura o astillamiento del material en los elementos rodantes, producido por errores de ensamble, esfuerzos anormales, corrosión, partículas externas o lubricación deficiente. En la figura 110 se muestra un cojinete con este defecto y el espectro de las vibraciones, que excita.

La frecuencia de rotación de los elementos rodantes, que será la frecuencia de manifestación de este defecto, se obtiene por la expresión:

$$FER = \frac{n}{2 \cdot d_b} \left(1 - \left(\frac{d_b}{d_m} \right)^2 \cos^2 \phi \right) \cdot \omega_a \tag{178}$$

Figura 111 Elemento rodante deteriorado (a) y espectro (b) de las vibraciones

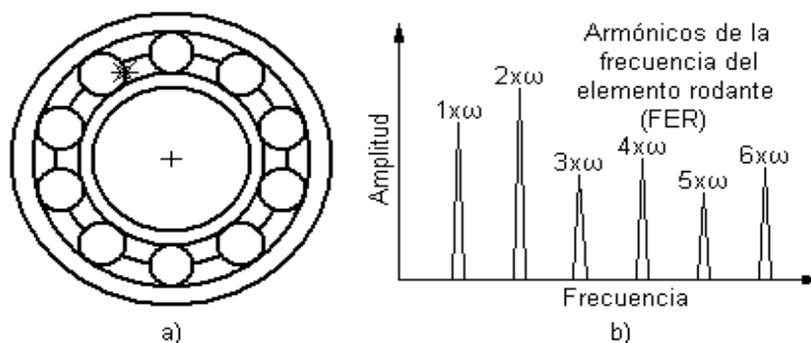


Ilustración: Héctor Terán

Esta frecuencia es conocida en la literatura con las siglas **BSF** (Ball Spin Frequency).

Como se observa en la figura 111, en el espectro aparecen armónicos en dirección radial, con picos predominantes en $1x$ y $2x$ de la frecuencia de excitación del defecto de los elementos rodantes (FER). Además, el contacto metal – metal, entre los elementos rodantes y las pistas, produce pulsos en el dominio del tiempo, con frecuencias del orden de 1-10 kHz.

• Rodamiento desalineado

En la figura 112 se muestra un cojinete con este defecto y el espectro de las vibraciones, que excita. El rodamiento ha sido montado torcido en su alojamiento o en su árbol o eje interior.

Como se nota en la figura, se generan armónicos a $1x$, $2x$ y $3x$ de la frecuencia de rotación del árbol (ω_a), en dirección axial, con el armónico predominante en $2x$.

A continuación se dan expresiones aproximadas para el cálculo de las frecuencias de los tonos, para los cojinetes de rodamiento más comunes.

Frecuencia Fundamental del Cojinete de Rodamiento

$$FFC = 0,4 * \omega_a$$

Frecuencia por falla en el anillo interior

$$FPPI = 0,6 * \omega_a * n$$

Frecuencia por falla en el anillo exterior

$$FPPE = 0,4 * \omega_a * n$$

Figura 112 Cojinete de deslizamiento (a) y espectro (b) de las vibraciones

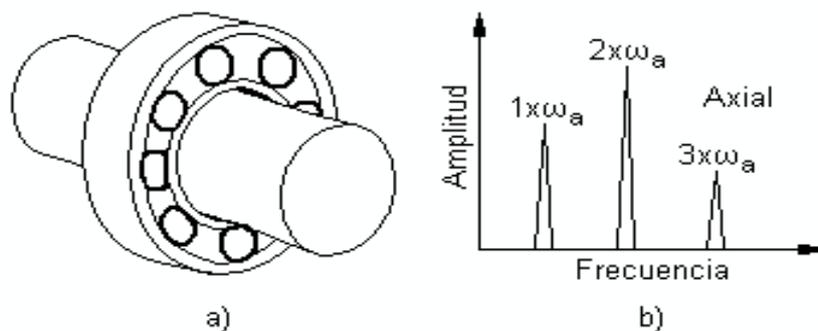


Ilustración: Héctor Terán

El número de elementos rodantes (n), en la mayoría de los cojinetes de rodamiento, está entre 8 y 12; pero en cojinetes con un diámetro muy grande, el número de elementos rodantes puede ser más alto.

También se pueden proporcionar expresiones relativas aproximadas, para las frecuencias de paso de los elementos de un cojinete de rodamiento común, que sirven como una orientación, para hacer valoraciones preliminares. Así se tendrá que, por cada revolución del árbol:

- 4,6 elementos rodantes pasan sobre un defecto del anillo exterior.
- Cada elemento rodante rotará 2,02 revoluciones.
- 7,4 elementos rodantes pasan sobre un defecto del anillo interior.
- La jaula realizará una rotación de 0,383 revoluciones.

Las vibraciones, generadas por los cojinetes de rodamiento, normalmente no son transmitidas a otros puntos de la máquina. Por lo tanto, el rodamiento defectuoso es generalmente el que se encuentra más cerca del punto, donde ocurre el mayor nivel de vibraciones de este tipo.

Cojinetes de contacto plano defectuosos.

Elevados niveles de vibración, ocasionados por cojinetes de contacto plano defectuosos, son generalmente el resultado de una holgura excesiva (causada por desgaste debido a una acción de barrido o por erosión química), aflojamientos mecánicos, metal blanco suelto en el alojamiento, o problemas de lubricación.

a. Holgura excesiva entre árbol y cojinete.

Un cojinete de contacto plano, con holgura excesiva, hace que un defecto de relativamente menor importancia, tal como un leve desbalance o una pequeña falta de alineación, u otra fuente de fuerzas vibratorias, se transformen como resultado en aflojamientos mecánicos o en golpes repetidos (machacado). En tales casos el cojinete en si no es el que crea las vibraciones; pero la amplitud de las mismas seria mucho menor, si la holgura del cojinete fuera correcta. (Broch, Jens Tramp; 1980.)

En la figura 113 se muestra un cojinete de contacto plano con holgura excesiva y el espectro de las vibraciones, que excita. El espectro muestra la presencia de todos los armónicos de la frecuencia angular del árbol, en dirección radial, con predominio del segundo armónico ($2x\omega_a$).

Figura 113 Juego en cojinete plano (a) y espectro (b) de las vibraciones

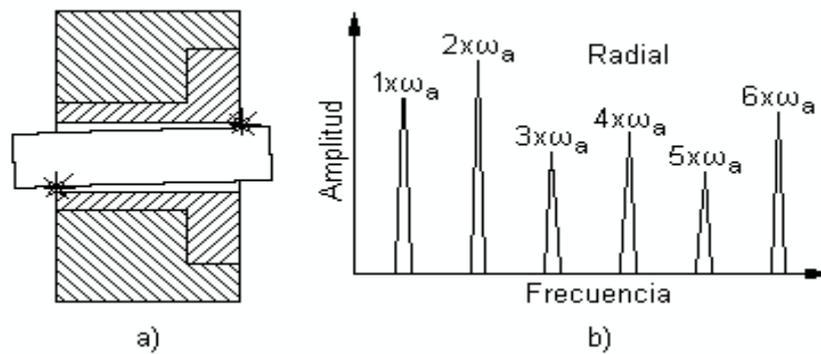


Ilustración: Héctor Terán

A menudo se puede detectar un cojinete de contacto plano desgastado por “barrido”, efectuando una comparación de las amplitudes de las vibraciones horizontales y verticales. Las máquinas que están montadas firmemente sobre una estructura o cimentación rígidas revelarán, en condiciones normales, una amplitud de las vibraciones ligeramente más alta en dirección horizontal.

b. Torbellino (remolino) de aceite.

Las vibraciones, excitadas por esta causa, ocurren solamente en máquinas equipadas con cojinetes de contacto plano lubricados a presión, y que funcionan a velocidades relativamente altas, normalmente por encima de la segunda velocidad crítica del árbol. En la figura 114 se muestra este defecto y el espectro de las vibraciones, que excita.

Las vibraciones, debidas a torbellinos de aceite, a menudo son muy pronunciadas, pero se reconocen fácilmente, por su frecuencia fuera de lo común. Dicha frecuencia es ligeramente menor que la mitad de la frecuencia de rotación del árbol (generalmente en el orden de 0,46 a 0,48 de esta).

Figura 114 Remolino de aceite (a) y espectro (b) de las vibraciones

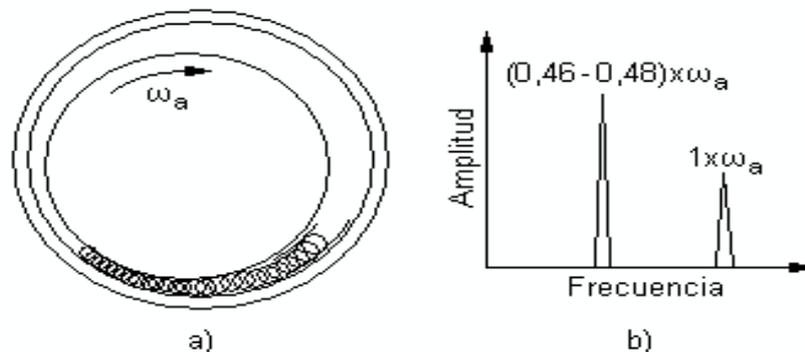


Ilustración: Héctor Terán

El problema de los torbellinos de aceite normalmente se atribuye a un diseño incorrecto del cojinete de contacto plano, desgaste excesivo de este, aumento de la presión del lubricante o cambio de la viscosidad del aceite.

Se pueden hacer correcciones temporales modificando la temperatura del aceite (con lo que varía la viscosidad), introduciendo un leve desbalance o una falta de alineamiento, de manera que aumente la carga sobre el cojinete, o rascando y/o ranurando los costados de este, para romper la “cuña” de lubricante. Desde luego, una solución más duradera es reemplazar el cojinete con uno que haya sido diseñado correctamente, de acuerdo a las condiciones operativas de la máquina, o con uno que esté diseñado para reducir la posibilidad de formación de torbellinos de aceite.

Los cojinetes con ranuras axiales usan las ranuras para aumentar la resistencia a la formación de torbellinos de aceite, en tres puntos espaciados uniformemente. Esta configuración está limitada a las aplicaciones más ligeras, tales como en turbinas de gas ligeras y turbocargadores.

Los cojinetes de contacto plano de lóbulos brindan estabilidad contra los torbellinos de aceite, al proporcionar tres puntos de concentración de la película de aceite bajo presión, que sirven para centrar el árbol. Los cojinetes de riñón basculante son comúnmente utilizados para las máquinas industriales más grandes, que funcionan a velocidades más altas.

Hay dos causas comunes de vibraciones, que pueden inducir un torbellino de aceite en un cojinete de contacto plano:

- **Vibraciones provenientes de máquinas ubicadas en las cercanías.** Pueden ser transmitidas al cojinete a través de estructuras rígidas, tales como tuberías y cimentaciones. A este fenómeno se le conoce como torbellino inducido desde el exterior.
- **Vibraciones ocasionadas por otros elementos de la misma máquina.** Toda vez que se detectan las vibraciones características del torbellino de aceite, se deberá realizar una completa investigación de las vibraciones en toda la instalación, incluyendo las fuentes de vibraciones circunvecinas, las estructuras de cimentación y las tuberías relacionadas. Se podrá así, quizás, descubrir una causa interna de los problemas de torbellino de aceite.

c. **Torbellino por Histéresis.**

Estas vibraciones son similares a las vibraciones ocasionadas por el torbellino de aceite, pero aparecen a frecuencias diferentes, cuando el árbol gira a una velocidad angular superior a la primera velocidad crítica.

Un árbol que funcione por encima de la velocidad crítica tiende a flexionarse, o arquearse, de forma tal que el centro de masas (punto pesado de desbalance) ocupe una posición intermedia entre el eje geométrico flexionado de dicho árbol y la línea que une los dos apoyos. La amortiguación interna debida a la histéresis, o sea la amortiguación de la fricción interna del material, normalmente limita la deflexión a niveles aceptables. Sin embargo, cuando ocurre un torbellino por histéresis, las fuerzas amortiguadoras se encuentran en fase con el desplazamiento, y por lo tanto, aumentan la deflexión del árbol.

Cuando dicho árbol está funcionando por encima de la primera velocidad crítica, pero por debajo de la segunda, el torbellino por histéresis ocurre a una frecuencia exactamente igual a la primera velocidad crítica del árbol (ω_{cr}).

Cuando la máquina funciona a velocidades superiores a la segunda velocidad crítica del árbol, las vibraciones ocasionadas por un torbellino por histéresis tendrán las mismas características que las ocasionadas por un torbellino de aceite, es decir, que severas vibraciones se producirán a una frecuencia levemente menor que la mitad de la frecuencia de rotación del árbol ($< 0,5 \times \omega_a$).

El torbellino por histéresis es controlado normalmente por la acción de amortiguación, provista por los cojinetes de contacto plano. Sin embargo, cuando esta amortiguación es baja en comparación con la amortiguación interna del árbol, es probable que se presenten problemas.

La solución usual para este problema es aumentar la amortiguación de los cojinetes y de la estructura de soporte de los mismos, lo que puede lograrse instalando un cojinete de riñón basculante o de algún cojinete de diseño especial.

En algunos casos, el problema puede ser solucionado reduciendo la amortiguación del árbol, sencillamente, cambiando un acoplamiento de engranajes con una versión sin fricción; por ejemplo, con un acoplamiento de disco flexible.

Figura 115 Latigazo de aceite (a) y espectro (b) de las vibraciones

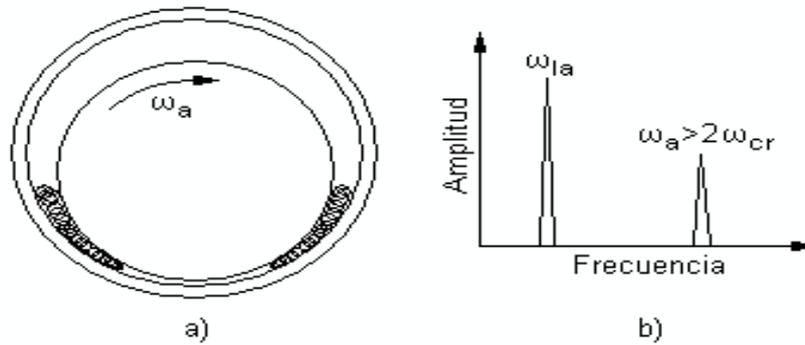


Ilustración: Héctor Terán

d. Lubricación inadecuada “latigazo de aceite”).

Una inadecuada lubricación, incluyendo la falta de lubricación y el uso de lubricantes incorrectos, unida a una alta velocidad de rotación del árbol, puede ocasionar problemas de vibraciones en un cojinete de contacto plano. En semejantes casos la lubricación inadecuada causa excesiva fricción entre el cojinete fijo y el árbol rotante, y dicha fricción induce vibraciones en el cojinete y en las demás piezas relacionadas. Este fenómeno vibratorio se denomina “látigo seco” (“dry whip”, en inglés), y es muy parecido al pasar de un dedo húmedo sobre una superficie de vidrio seca. En la figura 115, se muestra este fenómeno vibratorio y el espectro de las vibraciones, que produce.

La frecuencia de las vibraciones, debidas al “látigo seco”, generalmente es muy alta y produce el sonido “chillón”, característico de los cojinetes que están funcionando en seco. No es muy probable que dicha frecuencia sea algún múltiplo entero de la frecuencia de rotación del árbol, de manera que no es de esperarse ningún patrón significativo. En este aspecto, las vibraciones, ocasionadas por el “látigo seco”, son similares a las vibraciones producidas por un cojinete antifricción en mal estado. Cuando se sospeche que un látigo seco es la causa de las vibraciones en la máquina, se deberá inspeccionar el lubricante, el sistema de lubricación y la holgura del cojinete.

e. Aflojamiento mecánico.

Las vibraciones pueden ser el resultado de pernos de montaje sueltos, de holgura excesiva en los cojinetes, de fracturas en la estructura o en el pedestal de soporte. El aflojamiento mecánico y la acción de golpeo (machacado) resultante producen vibraciones a una frecuencia que a menudo es el doble de la frecuencia de rotación ($2x$), y también a múltiplos más elevados de dicha frecuencia.

Figura 116 Aflojamiento del anclaje (a) y espectro (b) de las vibraciones

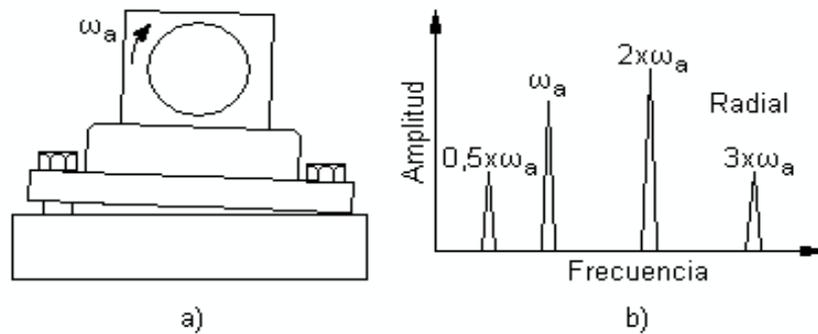


Ilustración: Héctor Terán

En la figura 116, se presenta este defecto y el espectro de las vibraciones, que excita. Las vibraciones características de un aflojamiento mecánico son generadas por alguna otra fuerza de excitación, como un desbalance o una falta de alineamiento. Sin embargo, el aflojamiento mecánico empeora la situación, transformando magnitudes relativamente pequeñas de desbalance o falta de alineación en amplitudes de vibración excesivamente altas.

Corresponde, por lo tanto, plantear que el aflojamiento mecánico permite que aparezcan mayores amplitudes de las vibraciones, de las que ocurrirían de por sí, derivadas de otros problemas.

Cuando la amplitud de las vibraciones, a una frecuencia doble de la frecuencia de trabajo ($2x a$), es más de la mitad de la amplitud a dicha frecuencia, es probable que el aflojamiento mecánico excesivo sea la causa primaria del problema.

f. **Fatiga estructural.**

Aparece por el ablandamiento o desplazamiento excesivo del pié de la máquina, por holgura en los pernos de la base o por deterioro de los componentes de la sujeción.

El espectro presenta un pico de amplitud a la frecuencia angular de rotación del árbol ($1x\omega_a$) en la base de la máquina, con desfase de 180 grados entre los elementos sujetos al anclaje. Es altamente direccional en la dirección de la sujeción.

En la figura 117, se muestra este defecto y el espectro de las vibraciones, que engendra.

Figura 117 Fatiga estructural del anclaje (a) y espectro de las vibraciones

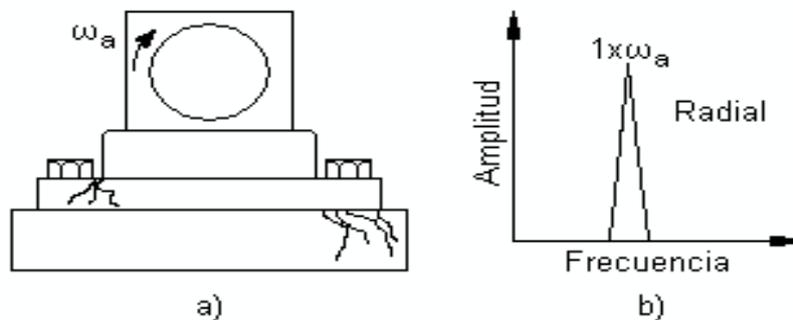


Ilustración: Héctor Terán

Defectos en las transmisiones por correas.

Las correas, tanto trapezoidales, como planas, gozan de mucha popularidad para la transmisión del movimiento de rotación, puesto que tienen una alta capacidad de absorción de golpes, choques y vibraciones. Los problemas de vibraciones, asociados con las correas, se producen generalmente por:

- Reacción de la correa a otras fuerzas, originadas por el equipo, que causan alteraciones.
- Vibraciones creadas por problemas de la correa en sí.

Las correas son consideradas, a menudo, como fuentes excitadoras de vibraciones, porque es muy común verlas saltar y sacudirse entre las poleas. Por lo general, el reemplazo de las correas es a menudo una de las primeras tentativas de corrección de los problemas de vibración. Sin embargo, es muy posible que la correa esté, sencillamente, reaccionando a otras fuerzas presentes en la máquina. En tales casos, las vibraciones de las correas son solamente un indicador de que hay otros problemas, (Timoshenko y Young, 1966).

La frecuencia de las vibraciones de las correas es el factor clave en la determinación de la naturaleza del problema. Si la correa está sencillamente reaccionando a otras fuerzas de excitación, tales como desbalance o excentricidad en las poleas, la frecuencia de las vibraciones de la correa será, probablemente, igual a la frecuencia de la fuerza excitadora. Esto significa que la pieza de la máquina, que realmente está causando el problema, aparecerá estacionaria bajo la luz estroboscópica del analizador.

Si el defecto es de la correa, la frecuencia de las vibraciones será un múltiplo entero ($1x$, $2x$, $3x$ ó $4x$) de su frecuencia de rotación (que no es la frecuencia de rotación de ninguna de las poleas, que forman la

transmisión). El múltiplo entero verificado dependerá de la naturaleza del problema y de la cantidad de poleas, sean de accionamiento o locas, presentes en el sistema.

La frecuencia de rotación de una correa se determina por la siguiente expresión:

$$\omega_c = \frac{\pi \cdot D_p \cdot \omega_p}{L_c} \quad (179)$$

Donde:

ω_c : Frecuencia de rotación de la correa.

D_p : Diámetro de la polea escogida como referencia.

ω_p : Frecuencia angular de rotación de la polea escogida como referencia.

L_c : Longitud de la correa.

A continuación se presentan **varios problemas**, característicos de las transmisiones por correas, que excitan vibraciones en las máquinas.

Desalineación en poleas.

Puede ocurrir porque los árboles, donde están montadas las poleas, no son paralelos, o porque las poleas no fueron bien alineadas, o tienen defectos. También pueden ocurrir ambos casos simultáneamente. En la figura 118, se muestra este defecto y el espectro de las vibraciones, que excita.

Este defecto produce vibraciones de grandes amplitudes, en dirección axial y radial, a una frecuencia igual a la frecuencia angular de rotación del árbol ($1 \times \omega_a$) de la polea conductora o de la conducida, generalmente de la conducida.

Figura 118 Poleas desalineadas (a) y espectro de las vibraciones

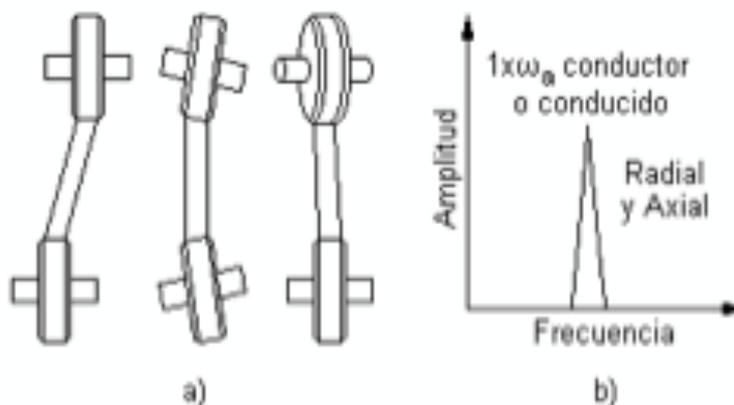


Ilustración: Héctor Terán

Distensión de la correa.

Es la pérdida de la tensión de la correa por sobrepaso de su vida útil, o por desgaste excesivo de la misma. La frecuencia de rotación de la correa (ω_c) siempre está por debajo de la frecuencia angular de rotación del motor o de la máquina conducida. En el espectro normalmente se encuentran cuatro picos y generalmente predomina el de segundo orden ($2\omega_c$). Tienen amplitudes inestables.

Excentricidad de las poleas.

Este defecto ya se introdujo cuando se trató la excentricidad, como causa común de las vibraciones. Ocurre cuando el centro de rotación no coincide con el centro geométrico en una polea (o en ambas) de una transmisión. En la figura 119, se muestra este caso.

Como se nota en el espectro, aparecen grandes amplitudes a una frecuencia igual a la frecuencia angular de rotación del árbol ($1\omega_a$), que sostiene la polea excéntrica. Las amplitudes son mayores que las amplitudes de las vibraciones, que aparecen a la frecuencia de rotación de la correa.

Figura 119 Poleas excéntricas (a) y espectro (b) de las vibraciones

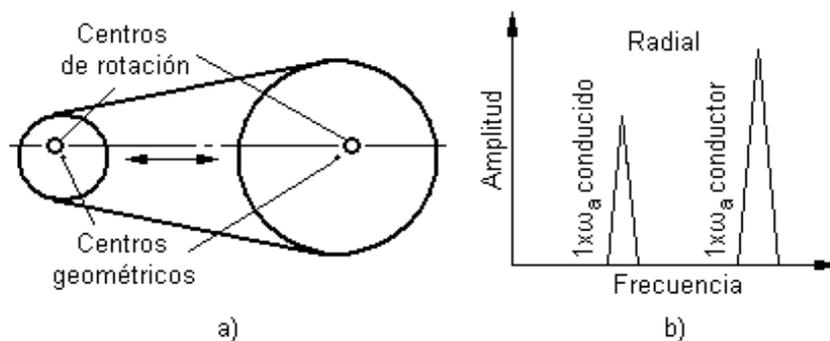


Ilustración: Héctor Terán

Resonancia de la correa.

Sucede si la frecuencia angular de rotación del motor o de la máquina conducida (frecuencia de excitación) coincide o se aproxima a la frecuencia natural de la correa. En la figura 120, se presenta este fenómeno y el espectro de las vibraciones, que produce.

El espectro muestra grandes amplitudes de las vibraciones a la frecuencia de resonancia y a la frecuencia angular de excitación de la correa; pero predominan las amplitudes a la frecuencia de resonancia.

Figura 120 Resonancia de la correa en una transmisión

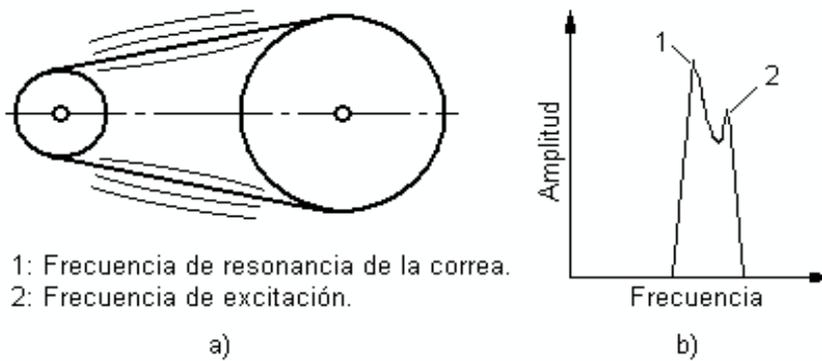


Ilustración: Héctor Terán

Defectos en los engranajes.

Un engranaje en buen estado, aunque haya sido fabricado con una alta exactitud, engendra vibraciones de alta frecuencia (en comparación con la frecuencia de rotación de las ruedas dentadas, que lo forman), excitadas por la entrada en contacto y la salida de este de los pares de dientes conjugados. Esto se debe a pequeños errores en el paso, en los perfiles de los dientes, etc.

A la frecuencia de entrada en contacto de los dientes de las ruedas se le denomina “frecuencia de engrane” (FE). Esta frecuencia aparece en la literatura, frecuentemente, como “**GMF**”, sigla en inglés de “Gear Mesh Frequency”.

Se obtiene por la siguiente expresión:

$$FE = Z \omega \quad (180)$$

Donde:

FE: Frecuencia de engrane.

Z: Número de dientes de la rueda, que se toma para el cálculo.

ω : Frecuencia angular de rotación de la rueda, que se tome para el cálculo.

Que se tome una rueda o la otra, para el cálculo, no influye en el resultado, ya que los números de dientes y las velocidades angulares guardan una dependencia inversa en cada rueda, manteniéndose su producto igual en ambas ruedas. Es decir, se cumple que:

$$FE = Z_1 \cdot \omega_1 = Z_2 \cdot \omega_2$$

Figura 121 Diente defectuoso (a) y espectro de (b) de las vibraciones

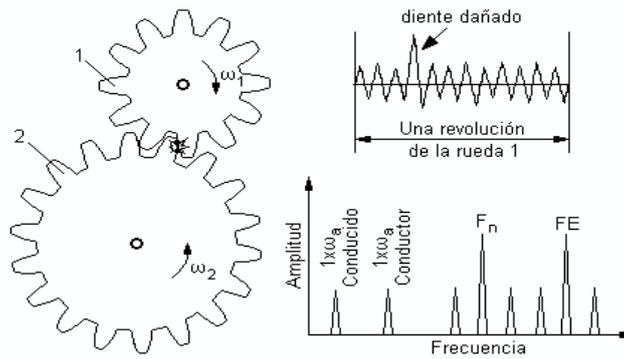


Ilustración: Héctor Terán

Dientes cariados, desgastados o deformados.

Entre los problemas más comunes de los engranajes, que traen como resultado vibraciones a una frecuencia cercana a la frecuencia de engrane (o igual a esta), están: el desgaste excesivo de los dientes, presencia de picaduras por contacto en las superficies deformaciones de algunos dientes, fallos de lubricación y materias extrañas atrapadas entre los dientes.

En la figura 121, se presenta un engranaje con un defecto de este tipo, el registro de las vibraciones que excita y el espectro de dichas vibraciones. Se ha señalado un solo diente afectado, para destacar la manifestación de este en el registro de las vibraciones. En el espectro se presenta el caso general, que se caracteriza por la aparición de bandas laterales alrededor de la frecuencia natural de vibración (F_n) de la rueda defectuosa. El espaciamiento de las bandas laterales es igual a la frecuencia de rotación ($1x\omega$) de dicha rueda. Si el desgaste es avanzado, hay sobreexcitación de las vibraciones a la frecuencia de engrane (FE), por lo que el pico a esta frecuencia se hace más notable.

La frecuencia de las vibraciones, excitadas por este tipo de defecto, depende de la cantidad de dientes afectados. Se puede obtener por la expresión:

$$F_{def} = Z_{def} \omega \quad (181)$$

Donde:

F_{def} : Frecuencia de las vibraciones excitadas por el defecto.

Z_{def} : Número de dientes con defectos.

ω : Frecuencia angular de rotación de la rueda.

De la expresión (181) se puede deducir que mientras mayor sea la cantidad de dientes afectados, más se acercará la frecuencia de las vibraciones excitadas a la frecuencia de engrane, obtenida por la expresión (180).

Figura 122 Engranaje sobrecargado (a) y espectro (b) de las vibraciones

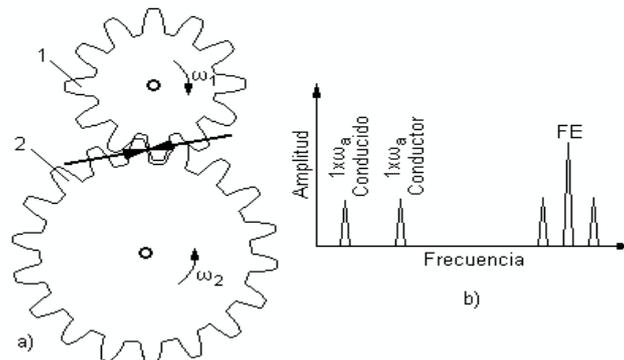


Ilustración: Héctor Terán

Sobrecarga en las ruedas.

Este caso se da cuando las ruedas transmiten un momento torsor alto, que hace que todos los dientes, al entrar en contacto, reciban una fuerte sobrecarga. En la figura 122, se presenta un engranaje bajo este régimen y el espectro de las vibraciones que genera. En el espectro se nota que la amplitud de las vibraciones, a la frecuencia de engrane (FE), es altamente excitada.

Engranaje desalineado.

Se presenta cuando las ruedas dentadas fueron montadas con errores de alineación o cuando los árboles no son perfectamente paralelos. En la figura 123, se presenta un esquema, donde se observa este defecto, y el espectro de las vibraciones, que produce.

Casi siempre se excitan los armónicos de segundo ($2x$) o mayor orden de la frecuencia de engrane (FE), con bandas laterales a una distancia igual a la frecuencia de rotación de la rueda conductora o conducida, según sea el caso. Las amplitudes de las vibraciones con las frecuencias $2xFE$ (segundo armónico) y $3xFE$ (tercer armónico) dominan el espectro.

Figura 123 Engranaje desalineado (a) y espectro de las vibraciones (b)

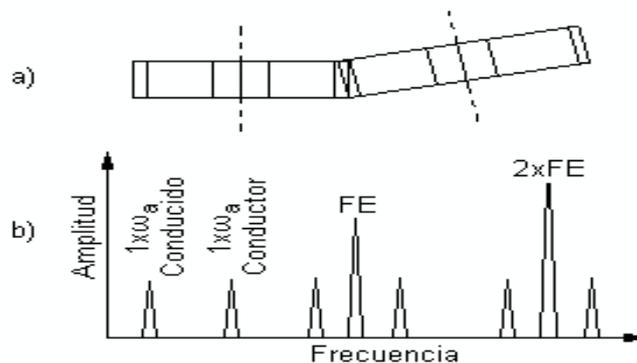


Ilustración: Héctor Terán

Figura 124 Rueda excéntrica (a) y espectro de las vibraciones (b)

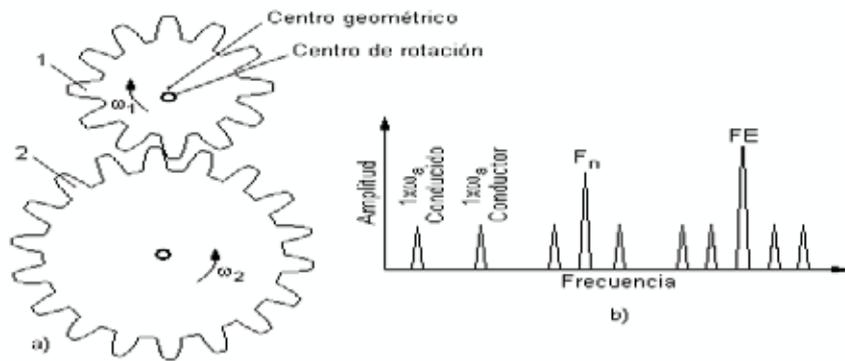


Ilustración: Héctor Terán

Excentricidad de las ruedas.

La excentricidad ocurre cuando el centro geométrico (de simetría radial) no coincide con el centro de rotación, lo que trae como consecuencia que en una parte del ciclo de movimiento los dientes penetren demasiado, mientras que en la otra parte, el contacto se ve afectado de forma tal, que al terminar el contacto entre dos dientes, los dos siguientes no entran inmediatamente en contacto.

En la figura 124, se muestra una transmisión dentada con este defecto y el espectro de las vibraciones que excita. El espectro muestra un aumento considerable de las bandas laterales alrededor de la frecuencia natural de vibración de la rueda correspondiente (F_n), y de la frecuencia de engrane (FE).

Interferencia.

Problemas leves en la manufactura o manipulación indebida generan vibraciones de choque, cuando dos dientes específicos de la rueda conductora y conducida se encuentran.

Figura 125 Interferencia (a) y espectro (b) de las vibraciones

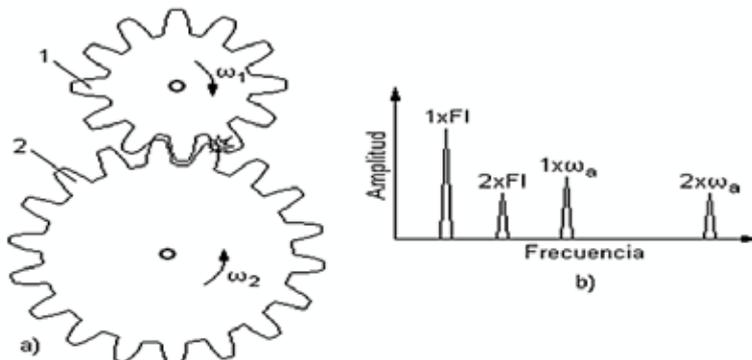


Ilustración: Héctor Terán

Este defecto genera vibraciones de gran amplitud, a bajas frecuencias (por debajo de los 10 Hz). La máxima manifestación del defecto ocurre, aproximadamente, cada 15 revoluciones de la rueda conductora, y suele escucharse como un gruñido.

En la figura 125, se presenta un engranaje con este defecto y el espectro de las vibraciones que produce.

Además, para el caso general, se debe añadir que en los engranajes, en condiciones de baja carga, pueden aparecer vibraciones de amplitud y frecuencia inestables, debido a la transmisión irregular de los esfuerzos entre los perfiles de los dientes.

Funcionamiento de sopladores.

En los sopladores pueden engendrarse vibraciones, a causa de desbalance o de excentricidad del impelente, que constituyen fuentes generales de excitación de vibraciones y ya fueron analizadas anteriormente. Pero además de esas, el propio principio de funcionamiento de los sopladores, al interactuar el impelente con el gas impulsado, puede producir vibraciones.

Figura 126 Soplador (a) y espectro (b) de las vibraciones

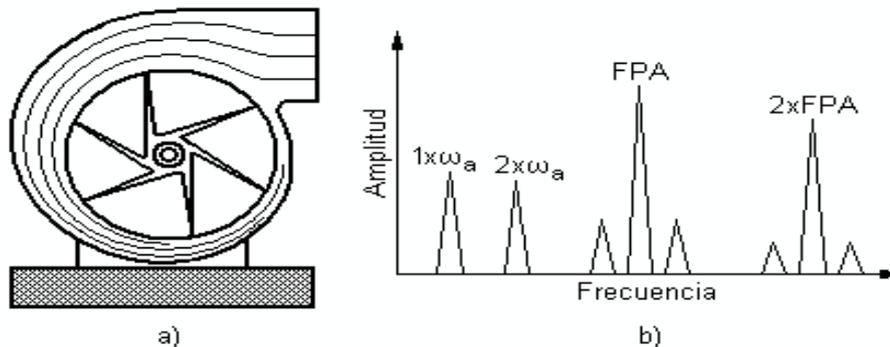


Ilustración: Héctor Terán

Paso de aspas.

El espacio entre el impelente y el cuerpo del soplador es variable, coincidiendo en un punto la máxima sección (por donde sale el flujo de gas impulsado) y la mínima sección (donde comienza a aumentar el espacio entre el impelente y el cuerpo del soplador). El cambio brusco de las condiciones entre las dos secciones hace que el paso de cada aspa, por ese punto, produzca un pulso. El resultado será la aparición de vibraciones, con una frecuencia denominada “frecuencia de paso de aspas” (FPA), que no es más que la frecuencia, a la cual las aspas pasan por un punto de la cubierta.

Esta frecuencia se obtiene por la siguiente expresión:

$$\text{FPA} = n\omega \quad (182)$$

Donde:

n : Cantidad de aspas o álabes del impelente.

ω : Frecuencia angular de rotación del impelente.

En la figura 128, se muestra un soplador y el espectro de las vibraciones que produce el paso de las aspas. Además de los picos a frecuencias múltiplos de la frecuencia de rotación, en el espectro se nota la aparición de picos a la frecuencia del paso de aspas (FPA) y al doble de dicha frecuencia (primer armónico). Este fenómeno se incrementa al ocurrir obstrucciones o cambios abruptos de la dirección del flujo.

Turbulencia del flujo.

La turbulencia en los flujos de gases puede ser la causa de aparición de vibraciones a bajas frecuencias, en los sopladores. Se crea por las variaciones de velocidad o presión del aire, que pasa a través de un ventilador o red de ventilación. En la figura 127, se presenta este fenómeno y el espectro de las vibraciones, que produce.

En el espectro se nota la aparición de vibraciones aleatorias a frecuencias entre 0,3 y 30 Hz, siempre más bajas que la de rotación del soplador, sin predominio de una frecuencia determinada.

Figura 127 Turbulencia (a) y espectro (b) de las vibraciones

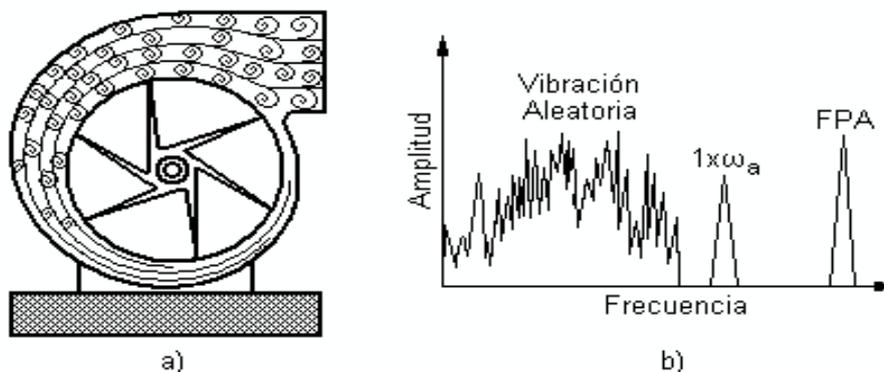


Ilustración: Héctor Terán

Bombas centrífugas.

En las bombas, al igual que en los sopladores, pueden engendrarse vibraciones, a causa de desbalance o de excentricidad del impelente, que constituyen fuentes generales de excitación de vibraciones y ya fueron analizadas anteriormente. Además de esas, en este caso también, a causa del principio de funcionamiento de las bombas de impelente, al interactuar este con el líquido impulsado, pueden aparecer vibraciones.

Paso de aspas.

En este aspecto, las bombas de impelente tienen una estructura y un comportamiento iguales a los de los sopladores, por lo que aquí también el cambio brusco de las condiciones entre las dos secciones extremas del espacio entre el impelente y la carcasa hace que el paso de cada aspa, por ese punto, produzca un pulso.

La frecuencia de paso de aspas (FPA), que no es más que la frecuencia, a la cual pasan las aspas o álabes por un punto de la carcasa, se obtiene por la siguiente expresión:

$$\text{FPA} = n \cdot \omega \quad (183)$$

Donde:

n : Cantidad de aspas o álabes del impelente.

ω : Frecuencia angular de rotación del impelente.

En la figura 128, se muestra una bomba y el espectro de las vibraciones, que produce el paso de las aspas o álabes. Exactamente igual al caso del soplador, además de los picos a frecuencias múltiplos de la frecuencia de rotación, en el espectro se nota la aparición de picos a la frecuencia del paso de aspas (FPA) y al doble de dicha frecuencia. Este fenómeno se incrementa en presencia de obstrucciones, cambios abruptos de dirección del flujo o desgaste de juntas.

Figura 128 Bomba centrífuga (a) y espectro (b) de las vibraciones

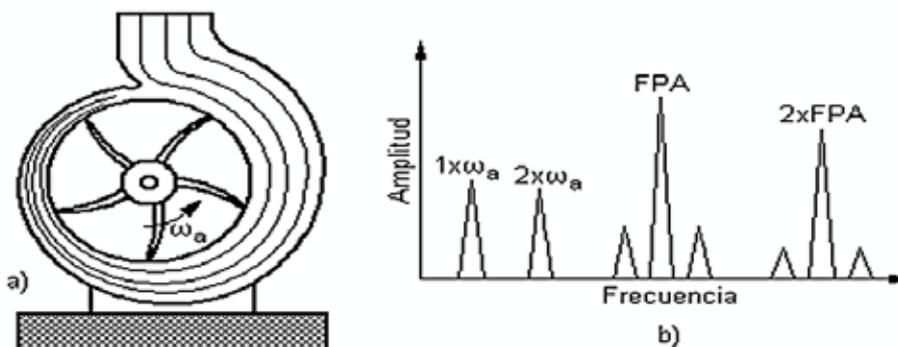


Ilustración: Héctor Terán

Figura 129 Cavitación (a) y espectro (b) de las vibraciones

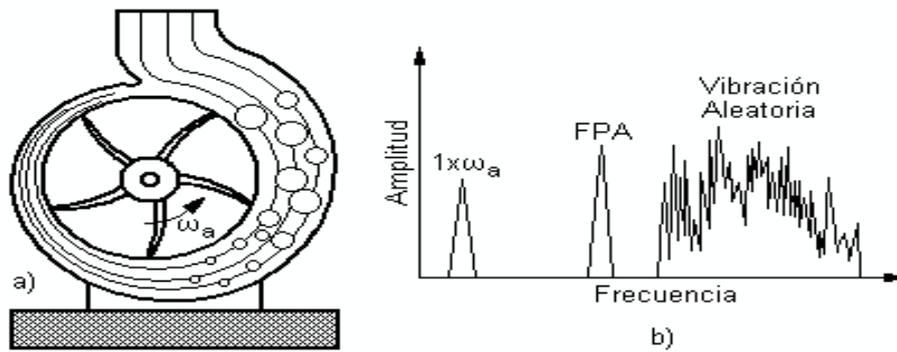


Ilustración: Héctor Terán

Cavitación.

La cavitación es un fenómeno que aparece en los flujos de líquidos, que puede constituir la causa de aparición de vibraciones a altas frecuencias, en las bombas. Consiste en la vaporización del líquido dentro de la bomba, cuando la presión es menor que la presión de vapor a la temperatura dada. En la figura 129, se presenta este fenómeno y el espectro de las vibraciones, que produce.

Cuando aparece este fenómeno, el espectro muestra la presencia de vibraciones aleatorias, a frecuencias (alrededor de 2000 Hz) más altas que la frecuencia de paso de aspas (FPA), que suelen ser muy dañinas, para el equipo, ya que causarán erosión a las partes internas de la bomba, (Newland, 1993).

Fallas en motores eléctricos.

Las fallas en los motores eléctricos generan vibraciones, que son normalmente el resultado de fuerzas magnéticas desiguales que actúan sobre el rotor o sobre el estator de dichos motores, lo que puede deberse a:

- Rotor que no es perfectamente cilíndrico.
- Cojinetes del rotor excéntricos.
- Falta de alineamiento entre el rotor y el estator (entrehierro no uniforme).
- Estator con superficie interior no cilíndrica.
- Devanados abiertos o en corto circuito.
- Hierro del rotor en corto circuito.

Por lo general, la frecuencia de las vibraciones resultantes de los problemas de índole eléctrica será igual a la frecuencia de rotación del rotor ($1 \times \omega_m$), y por tanto, estos problemas se asemejarán a los debidos a desbalances.

Una manera sencilla de hacer una prueba, para verificar la presencia de vibraciones por problemas eléctricos, es observar el cambio de la amplitud de las vibraciones en el instante en el cual se desconecta la corriente de alimentación del motor. Si la **vibración desaparece en el mismo instante en que se desconecta la corriente**, el problema, con toda posibilidad, será eléctrico. Si **solo decrece gradualmente**, a medida que decrece la velocidad angular, el problema será de naturaleza mecánica.

Las vibraciones, ocasionadas por los problemas eléctricos, responden generalmente a la magnitud de la carga, acoplada al motor. A medida que se modifica la carga, la amplitud o las lecturas de fase de las vibraciones pueden experimentar cambios significativos. Esto explica por qué los motores eléctricos, que han sido probados y balanceados en condiciones sin carga, muestran cambios drásticos de los niveles de las vibraciones, cuando vuelven a ser puestos en servicio.

Flexión de árboles.

Aparece más comúnmente en árboles largos, por la aplicación de esfuerzos excesivos. Genera vibraciones axiales de gran amplitud, con diferencia de fase de 180 grados, medida en los dos soportes del árbol. Si la mayor deformación está cercana al centro de la distancia entre los apoyos, la frecuencia dominante es de $1 \times \omega_a$; si la mayor deformación está cerca de uno de los cojinetes, es de $2 \times \omega_a$.

Holgura eje-agujero (árbol-cubo) excesiva.

Aparece por aflojamiento de uniones árbol-cubo o tolerancias de manufactura inadecuadas

(con juego). Causa un truncamiento en la forma de onda en el dominio del tiempo. La falla genera múltiples armónicos y subarmónicos de la frecuencia de rotación del árbol ($1 \times \omega_a$), destacándose los armónicos fraccionarios ($0,33 \times \omega_a$, $0,5 \times \omega_a$, $1,5 \times \omega_a$, $2,5 \times \omega_a$).

Excitación de vibraciones torsionales.

Prácticamente todas las fuentes (fuerzas de inercia, engranajes, cojinetes de rodamiento, correas, cadenas, acoplamientos, impelentes de bombas y sopladores, etc.), que engendran vibraciones lineales, también excitan vibraciones torsionales. No obstante, por su importancia, se prestará atención a los momentos motrices o resistivos, que sufren grandes variaciones en el ciclo de trabajo de las máquinas.

El motor de combustión interna es un ejemplo de máquina, en la que el momento motriz que entrega sufre grandes variaciones en el ciclo de trabajo. Como se conoce, de las cuatro fases (tiempos) del funcionamiento del motor (admisión, compresión, explosión y escape), sólo en la explosión se entrega energía a la máquina, mientras, en las restantes, se consume parte de esa energía para mantener el movimiento. Además, la presión sobre el émbolo es variable en cada fase, dependiendo del desplazamiento de este por la camisa, haciendo variar el volumen de gas entre su cabeza y la tapa.

El uso de motores múltiples (de varios cilindros), en los que las explosiones se distribuyen más uniformemente, así como la inclusión de volantes en estos, tiene el objetivo de lograr momentos motrices más uniformes; pero siempre aparecerán variaciones de mayor o menor amplitud, que constituyen fuentes de excitación de vibraciones.

En las máquinas que realizan un determinado trabajo en la producción, también surgen momentos de resistencia variables. Por ejemplo, en las máquinas mortajadoras, limadoras (acepilladoras), prensas, seguetas mecánicas, etc., en una parte del ciclo se realiza la acción sobre el objeto de trabajo, mientras en la otra parte de dicho ciclo, se realiza la carrera de vacío, para volver a llevar el elemento de trabajo a la posición inicial. Así, en cada ciclo el momento resistivo sufrirá grandes variaciones, excitadoras de vibraciones. (Baranov.1985)

Figura 130 Descomposición del momento de un motor de combustión interna en armónico

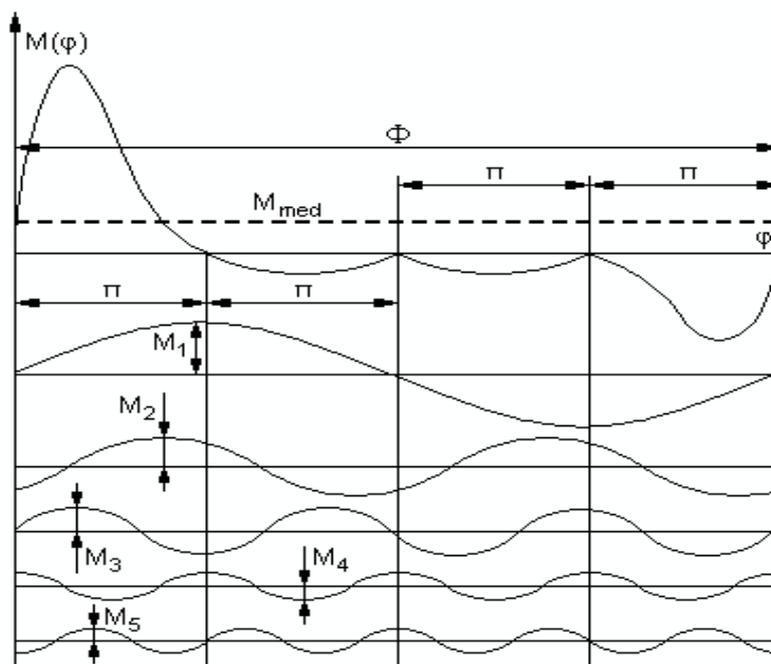


Ilustración: Héctor Terán

En esos casos, se utiliza la descomposición del momento correspondiente (motriz o resistivo) en una parte constante, que es el valor medio, a la que se superponen (suman) componentes, con frecuencias de variación, que son múltiplos de la frecuencia angular de rotación del árbol principal (árbol de reducción) de la máquina. Como se conoce, la primera componente es la fundamental, y las restantes reciben la denominación de armónicas, aunque con frecuencia a todas se les denomina armónicas. En la figura 130, se muestra el momento motriz de un motor de combustión interna de un cilindro y las primeras cinco componentes armónicas de dicho momento.

Para lograr la descomposición de funciones (que en este caso son los momentos de fuerzas), se utilizan las series de Fourier, que expresan que:

$$M(\phi) = M_{med} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\Phi} k \phi \right) + B_k \text{cos} \left(\frac{2\pi}{\Phi} k \phi \right) \right] \quad (2.10.52)$$

En la expresión (2.10.52), el símbolo “ Φ ” es el ángulo que rota el árbol principal de la máquina, para completar un ciclo de trabajo. En muchas máquinas, el ciclo de trabajo coincide con el ciclo de movimiento, y es igual a una vuelta (2π) del árbol principal. Sin embargo, en los motores de combustión interna de cuatro tiempos, el ciclo de trabajo comprende dos ciclos de movimiento (dos vueltas = 4π) del cigüeñal. Los demás parámetros, que entran en la expresión (2.10.52), se obtienen de:

$$\begin{aligned} M_{med} &= \frac{1}{\Phi} \int_0^{\Phi} M(\phi) \, d\phi \\ A_k &= \frac{2}{\Phi} \int_0^{\Phi} M(\phi) \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\Phi} k \phi \right) \, d\phi \\ B_k &= \frac{2}{\Phi} \int_0^{\Phi} M(\phi) \text{cos} \left(\frac{2\pi}{\Phi} k \phi \right) \, d\phi \end{aligned} \quad (184)$$

De los tres parámetros, que se obtienen por las expresiones (2.10.53), el primero es el momento medio; los dos restantes, son los

coeficientes (amplitudes) de cada una de las componentes armónicas de la serie de Fourier. El subíndice “k” da el orden de la componente armónica. También se pueden sumar geoméricamente los dos términos de un mismo orden (en senos y en cosenos), para simplificar la expresión (2.10.52) y trabajar con una sola función, por ejemplo, con términos que contengan senos. Entonces se debe determinar la amplitud suma de cada componente y el ángulo de fase con respecto a la posición inicial. Para esto se cuenta con las siguientes dependencias:

$$M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (185)$$

$$\delta_k = \arctan \left[\frac{B_k}{A_k} \right] \quad (186)$$

Entonces la expresión (182) toma la forma:

$$M(\phi) = M_{med} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[M_k \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi} k \phi + \delta_k \right) \right] \quad (187)$$

Donde:

M_k : Amplitud de cada componente armónica del momento.

δ_k : Ángulo de fase (inicial) de cada componente armónica del momento.

Es de destacar que, en el caso de que coincida el ciclo de trabajo con el ciclo de movimiento, las frecuencias angulares de variación de las componentes del momento son múltiplos enteros de la frecuencia angular de rotación del árbol principal ($1 \times \omega$, $2 \times \omega$, $3 \times \omega$, etc.); pero, en el caso de que el ciclo de trabajo se complete en dos revoluciones del árbol principal, entonces las frecuencias de variación de las componentes del momento son múltiplos de la mitad de la frecuencia angular de rotación de dicho árbol ($0,5 \times \omega$, $1 \times \omega$, $1,5 \times \omega$, etc.).

En muchos casos, en la práctica, no se cuenta con expresiones matemáticas (fórmulas), que describan exactamente el comportamiento de los momentos de fuerzas en todo el ciclo de trabajo, por lo que no se pueden determinar, ni el momento medio, ni los coeficientes de la serie de Fourier, por las expresiones (2.10.53). En tales casos, se puede obtener el comportamiento de dichos momentos experimentalmente o calcularlos para un número determinado (finito) de posiciones del árbol principal. En ambos casos se contará con un gráfico (curva) de comportamiento, como se muestra en la figura 131. El gráfico debe estar representado a escala.

Figura 131 Momento calculado para un número finito de posiciones obtenido experimentalmente

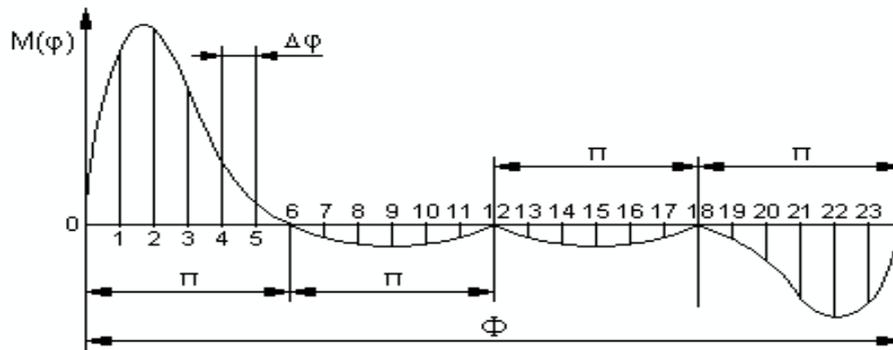


Ilustración: Héctor Terán

En estos casos, se procede de la siguiente forma:

- Se divide el eje de las abscisas en una determinada cantidad (n) de partes (ángulos) iguales ($\Delta\varphi$). Mientras mayor sea la cantidad de partes, más se aproximarán los resultados a la realidad. Comúnmente se divide cada revolución (2π) del árbol en 12 partes.
- Por el límite de cada parte, se levanta una perpendicular al eje de las abscisas, hasta que alcance la curva. La distancia desde el eje de las abscisas hasta la curva (multiplicada por la escala de momento) será la ordenada o momento (M_i) correspondiente a esa parte. De esta forma se puede obtener una tabla o arreglo (array) de los valores de las ordenadas contra el ángulo ($i \cdot \Delta\varphi$).
- Las integrales (2.10.53) se sustituyen por las siguientes sumas, que dan resultados aproximados:

$$\begin{aligned}
 M_{med} &= \frac{1}{\Phi} \sum_{i=1}^n M_i \Delta\varphi \\
 A_k &= \frac{2}{\Phi} \sum_{i=1}^n M_i \Delta\varphi \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\Phi} k i \Delta\varphi \right) \\
 B_k &= \frac{2}{\Phi} \sum_{i=1}^n M_i \Delta\varphi \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\Phi} k i \Delta\varphi \right)
 \end{aligned} \tag{188}$$

Después de obtener el momento medio y los coeficientes (amplitudes) de las componentes armónicas, se puede trabajar con la serie completa en senos y cosenos (183) o con la serie simplificada, por ejemplo, en senos, utilizando las expresiones (185), (186) y (187).

Las series de Fourier comprenden una cantidad infinita de sumandos; pero en la práctica, por lo general, se trabaja sólo con las primeras componentes armónicas, que son las de mayor amplitud. Incluso, se puede afirmar que el valor de la suma no reviste importancia, sino la amplitud y la frecuencia angular de cada componente armónica por separado, para valorar la amplitud de las vibraciones, que engendrará en el sistema, y las posibilidades de resonancia.

ESPACIO EN BLANCO

Capítulo III



INFLUENCIA DE LAS VIBRACIONES EN LA SALUD HUMANA

ESPACIO EN BLANCO

1. Introducción.

A las oscilaciones verticales el hombre se acostumbra desde la niñez, desde que comienza a caminar, por lo que las vibraciones próximas por su amplitud y frecuencia a las que surgen al caminar, las asimila con facilidad, (Migulin y Medvedev, 2002).

El paso promedio del hombre es igual a 0,75 metros y generalmente se desplaza a una velocidad entre 3 y 4 kilómetros por hora, por lo que la frecuencia de las vibraciones, que sufre al caminar, será:

$$f = \frac{(3 \div 4)[\text{km/h}] \cdot 1000 [\text{m/km}]}{0,75 [\text{m/paso}] \cdot 3600 [\text{seg/h}]} = (111 \div 1,48) [\text{pasos/seg}] = (111 \div 1,48) [\text{Hz}]$$

Al caminar a una velocidad entre 4 y 5 kilómetros por hora, la frecuencia aumenta hasta 1,48-1,85 Hz.

Al someterse a vibraciones, con una frecuencia inferior a las que produce el caminar, el hombre puede sufrir sensaciones de mareo. Las vibraciones con frecuencias superiores a las producidas por el caminar, se perciben como sacudidas desagradables. Notablemente mal se asimilan las vibraciones con frecuencias entre los 3,33 y 5,00 Hz, ya que estas se encuentran en el intervalo de las frecuencias naturales de los órganos del cuerpo humano.

En el diseño de los automóviles de pasajeros, se trata de lograr que la frecuencia de las vibraciones propias (naturales) de la masa suspendida esté entre 1 y 1,33 Hz, para obtener un alto confort. En los camiones es necesario reforzar la suspensión, por lo que la frecuencia de las vibraciones propias estará entre 1,66 y 2,16 Hz.

No sólo las vibraciones verticales producen afectaciones al organismo humano. La exposición a vibraciones en otras direcciones, como en determinadas partes del cuerpo aisladas, también pueden provocar daños.

2. Máquinas que someten el cuerpo humano a la acción de vibraciones.

Este riesgo lo generan máquinas motorizadas que transmiten vibraciones de cierto nivel al cuerpo del operador. Las más comunes son:

- Herramientas portátiles motorizadas (eléctricas o neumáticas).
- Máquinas motorizadas que se lleven y/o guíen manualmente.
- Máquinas móviles, conducidas por un operador, que se sienta sobre la máquina permanece de pie sobre la misma, (Barker, 1964).

En lo relativo a información sobre exposición a vibraciones, la documentación de la máquina debe indicar:

- Prescripciones relativas a la instalación y el montaje, dirigidas a reducir el ruido y las vibraciones, si fuera necesario.
- Emisión de vibraciones a que se ven sometidos los miembros superiores, en forma del valor cuadrático medio de la aceleración, si se superan los $2,5 \text{ m/s}^2$. Si no se superan, indicación expresa de ello.
- Para máquinas dotadas de asiento para el operador o sobre las que éste trabaje de pie, emisión de vibraciones a que se ve sometido el cuerpo completo, en forma del valor cuadrático medio de la aceleración, si se superan los $0,5 \text{ m/s}^2$. Si no se superan, indicación expresa de ello, (Smith, 2003).

3. Riesgos que conlleva la exposición a vibraciones.

En el supuesto de que se utilicen máquinas o equipos de trabajo, que generen vibraciones, es posible que se produzca una transmisión de estas al sistema mano-brazo del operador. Además, en el tercer grupo de máquinas (las móviles), puede haber transmisión de vibraciones al cuerpo completo. (Gray, B. F.; 1979.)

La transmisión de vibraciones al sistema mano-brazo puede llevar a una serie de trastornos neuro-vasculares, conocidos en conjunto como “síndrome de vibración en mano-brazo”, “síndrome de dedo blanco”, o “enfermedad de Raynaud (1897)”, caracterizada en sus etapas iniciales por un entumecimiento de los dedos, pérdida de sensación de control y palidez de los dedos. En algunos casos (síndrome de Dart (1905)), se produce en cambio una inflamación y enrojecimiento de los dedos. También puede aumentar el riesgo de trastornos osteoarticulares, como artrosis en el codo y lesiones de muñeca.

Las vibraciones que afectan al cuerpo completo, pueden tener efectos perniciosos sobre la columna vertebral, provocando o agravando lesiones de los discos intervertebrales, lumbalgias, pinzamientos, lesiones lumbo-ciáticas y raquídeas menores. Aunque en sus primeras etapas estos efectos son reversibles, pueden dar lugar a lesiones crónicas o incapacitantes, si el individuo se expone a las vibraciones en un tiempo largo.

4. Medidas preventivas básicas para atenuar el efecto de las vibraciones.

Si se aplican las siguientes medidas, se pueden resolver o atenuar los problemas.

Medida Preventiva 1: Verificación en la compra o recepción del equipo previa a su utilización.

La máquina debe disponer de manual de instrucciones en un idioma oficial en la zona de utilización. Las instrucciones del equipo u otra documentación que le acompañe, deben leerse con atención, y ser archivadas en un lugar apropiado que permita su consulta posterior.

La máquina debe disponer de marcado con siglas. Este tipo de marcado garantiza el cumplimiento de las normas y disposiciones de seguridad en vigor. Debe estar grabado sobre el equipo o impreso en una placa de características, adherida sobre el mismo, de forma que sea bien legible. Asimismo, la documentación o las instrucciones del equipo vendrán acompañadas por la declaración de conformidad, que es complementaria al marcado mencionado, (Cyril y Allan, 2002).

Las máquinas portátiles y guiadas a mano, deben disponer de asideros adecuados. Como recomendación general orientativa, los asideros deben tener una longitud mínima de al menos 9 cm y un diámetro o dimensión equivalente de entre 3 y 6 cm. Puede ser conveniente en máquinas pesadas la dotación de un segundo asidero que permita su manejo con dos manos. No deben presentar cantos abruptos, rebabas o cualquier punto que cause una presión intensa localizada en la palma de la mano o los dedos. El material del mango puede ser ligeramente compresible, pero no demasiado acolchado. Los órganos de accionamiento deben estar dispuestos de forma que no sea necesario soltar los asideros para accionarlos. (Baxter, R. L. Y D. L. Bernhard. 1978)

Debe haber información relativa a los aspectos de seguridad en el manual de instrucciones o la documentación que acompañe a la máquina. Esta información puede ser relativa a la puesta en servicio, instalación, utilización, manutención, mantenimiento, montaje y desmontaje, reglaje, o cualquier otra condición previsible de uso.

Estas instrucciones deben consultarse y aplicarse. Se debe prestar especial atención a los siguientes aspectos:

- » Condiciones de utilización.
- » Contraindicaciones de empleo (si existieran).
- » Información de riesgos.
- » Si se requiere formación especial.
- » Instrucciones de aprendizaje (si existieran).
- » Si es necesario el empleo de equipos de protección individual.
- » Instrucciones para efectuar sin riesgo: la puesta en servicio, la utilización, manutención, instalación, montaje y desmontaje, el reglaje, mantenimiento, etc.
- » Características de herramientas que puedan acoplarse a la máquina (en caso necesario).

Medida Preventiva 2. Durante el uso de las herramientas o máquinas.

Deben consultarse y respetarse todas las indicaciones sobre riesgos que figuran en el manual de instrucciones de la máquina, no sólo las referidas a la utilización normal de la misma, sino también en la instalación, manutención, mantenimiento o cualquier otra condición de uso que pueda darse.

Las máquinas no deben ser alteradas o modificadas respecto a su condición de fabricación. Puede ser especialmente peligrosa la alteración de sus mangos o asideros, o de sus accesorios originales. El recubrimiento de sus mangos con materiales acolchados no suele ser efectivo para atenuar las vibraciones más peligrosas transmitidas a las manos (las de baja frecuencia), e incluso puede ser contraproducente si se hace con un material demasiado acolchado. No deben utilizarse accesorios o herramientas que no hayan sido especialmente fabricados para las máquinas.

Deben estar sometidas a un mantenimiento adecuado. Si por avería o desgaste, se produce una condición de falta de equilibrado en las máquinas, en especial en las que giran a alta velocidad, puede incrementarse significativamente la emisión de vibraciones transmitidas al cuerpo del operador. En este caso deben ser reparadas por servicios técnicos o personal preparado para ello. Si se producen roturas en sus accesorios, éstos deben ser sustituidos inmediatamente. En especial en máquinas rotativas de alta velocidad, la rotura parcial o total de un accesorio que gira, puede aumentar significativamente la

emisión de vibraciones al cuerpo del operador, al provocar una falta de equilibrado (balanceo) del conjunto.

Para máquinas portátiles, en especial las de gran peso, puede ser efectivo para disminuir la transmisión de vibraciones a la mano y el brazo, siempre que la operación lo permita, el uso de accesorios de sustentación (tensores) o su apoyo en superficies de trabajo, carros u otros elementos que permitan sostener parte o todo el peso de la herramienta. No está probada la eficacia de los denominados “guantes antivibraciones” para herramientas portátiles. Aunque en algún caso el usuario pueda tener la sensación de que atenúa la transmisión de las vibraciones, en la práctica sólo atenúan las frecuencias de vibración más inocuas. Pueden ser incluso contraproducentes si se utilizan modelos muy acolchados, pues pueden aumentar la fuerza de agarre efectiva de la herramienta y la consecuente transmisión de vibraciones a la mano, (Silva, 2000).

En el caso de herramientas portátiles que sometan al usuario a un alto nivel de vibraciones en el sistema mano-brazo, el riesgo que conllevan puede ser agravado por el frío. El uso de guantes sí puede ser recomendable en este caso, pero sólo como medida de protección contra el frío o las agresiones mecánicas, no por su uso como aislante de vibraciones.

5. Limitación de la exposición a las vibraciones.

Aunque hasta la fecha de redacción de este documento no existen disposiciones de obligatorio cumplimiento, que fijen el valor límite de la exposición a las vibraciones, sí es posible realizar recomendaciones en este sentido, basadas en normas técnicas y otras fuentes. El tiempo en que es factible usar una máquina, que provoca una transmisión acusada de vibraciones, es función de dos factores: el valor de la aceleración transmitida y el tiempo de exposición o de manejo de la misma.

Lo usual es indicar valores de aceleración límite para 8 horas de exposición, pero es factible manejar máquinas con aceleraciones superiores a los valores límite si se manejan menos tiempo, de forma que la energía transmitida al cuerpo sea menor o equivalente al valor límite para 8 horas. Cuando se utilizan varias máquinas con transmisión de vibraciones, es necesario considerar su efecto total. Pueden considerarse dos tipos de límite, que se exponen a continuación.

Umbral de acción.

Si se supera el umbral de acción, sería necesario dar información a los trabajadores sobre el mismo, y formación sobre medidas de control, así como establecer un programa de medidas técnicas y administrativas para reducir la exposición. Sería equivalente a que durante 8 horas actuara una aceleración de: $2,5 \text{ m/s}^2$, para vibraciones del sistema mano-brazo; y de $0,5 \text{ m/s}^2$, para el cuerpo completo.

Límite de exposición.

El límite de exposición es el valor límite que no debe ser superado, es decir, el valor prohibido. Sería equivalente a que durante 8 horas actuara una aceleración de: 5 m/s^2 , para vibraciones del sistema mano-brazo; y de 1 m/s^2 , para el cuerpo completo. Para poder calcular, en una máquina dada, el tiempo máximo que podría ser manejada, se puede utilizar el valor de la aceleración equivalente que indica su manual de instrucciones y la tabla 3.

Tabla 3. Limitación de la exposición a las vibraciones.

| Tiempo máximo de exposición a vibraciones en dependencia de la aceleración. | | | | |
|---|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| | Mano-brazo | | Cuerpo completo | |
| Tiempo (horas) | Aceleración umbral (m/s^2) | Aceleración límite (m/s^2) | Aceleración umbral (m/s^2) | Aceleración límite (m/s^2) |
| 10 | 2,2 | 4,5 | 0,45 | 0,9 |

| Tiempo máximo de exposición a vibraciones en dependencia de la aceleración. | | | | |
|---|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| | Mano-brazo | | Cuerpo completo | |
| Tiempo (horas) | Aceleración umbral (m/s^2) | Aceleración límite (m/s^2) | Aceleración umbral (m/s^2) | Aceleración límite (m/s^2) |
| 8 | 2,5 | 5 | 0,5 | 1 |
| 6 | 2,9 | 5,8 | 0,58 | 1,2 |
| 4 | 3,5 | 7,1 | 0,71 | 1,4 |
| 2 | 5 | 10 | 1 | 2 |
| 1 | 7,1 | 14,1 | 1,41 | 2,8 |
| 30 minutos | 10 | 20 | 2 | 4 |
| <=10 minutos | 17,3 | 34,6 | 3,46 | 6,9 |

La combinación de aceleración-tiempo de exposición, no debería superar en ningún caso el valor límite indicado por la tabla. Lo más seguro es no superar incluso el valor de aceleración umbral. Si nos encontramos entre ambos límites, además de instaurar las medidas citadas anteriormente, sería preciso someter a control médico a los trabajadores que presenten algún síntoma de lesión, relacionado con las vibraciones.

Referencias.

- Meirovitch, Leonard. Fundamentals of vibrations. McGraw-Hill. New York. 2001.
- Bernoulli, Daniel. Hydrodynamics & Neumatycs, New York. 1967
- Castillo, G. Teoría de Mecanismos y Máquinas: dinámica de máquinas. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1977.
- Kelly, S. Graham. Fundamentals of mechanical vibrations. Second Edition. McGraw-Hill. New York. 2000.
- Silva, Clarence W. de. Vibration: fundamentals and practice. CRC Press. 2000.
- Mobley, R. Keith. Vibration Fundamentals. Butterworth-Heinemann. MA. 1999.
- Newland, D. E. An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis. Third edition. Longman Scientific & Technical. 1993.
- Pain, H. J. The physics of vibrations and waves. Sixth Edition. John Wiley & Sons, Ltd. 2005.
- Paolo L. Gatti and Vittorio Ferrari. Applied Structural and Mechanical Vibrations. Taylor & Francis Group LLC. 2003.
- C. F. Beards. Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems. Edward Arnold. London. 1995.
- J. Derek Smith. Gear noise and vibrations. Second Edition. Marcel Dekker, Inc. New York. 2003.
- Cyril M. Harris and Allan G. Piersol. Harris' shock and vibration handbook. Fifth Edition. McGraw-Hill. New York. 2002.
- Thomson, William T. Teoría de Vibraciones. 2002.
- Seto, William W. Vibraciones Mecánicas. 2004.
- Harker, Ralph J. Generalized methods of vibration analysis. 2003.
- Migulin, V. V.; Medvedev, V. I.; Mustel, E. R. ; Parygin, V. N. Basic theory of Oscillations. 2002.
- Butenin, N. V.; Neimark, Y. I.; Fufaev, N. A. Introducción a la teoría de las oscilaciones no lineales. 2003.
- Timoshenko, S. y D. H. Young. Problemas de Vibraciones en Ingeniería. Edición Revolucionaria. La Habana. 1966.
- Hartman, James B. Dynamics of Machinery. McGraw Hill. 1960
- T. Thomson. Mechanical Vibrations. New York 1953.
- Kendall E. Atkinson. Numerical Solution of System of Linear Equations. An Introduction to Numerical Analysis. John Wiley & Sons. N. Y. 1978
- P. Williams, B. P. Flannery, A. T. Saul, T. V. Williams. Fourier Transform Spectral Methos.
- Proceeding of Numerical Recipes in Pascal. Cambridge 1989.
- S. Bendat, A.G. Piersol. Measurement and Analysis of Random Data. New York. 1971.
- T. Thomson. Vibration Random Data. Theory and Applications. London 1988.
- Harris, Cyril M.; Crede, C. M.; "Shock and Vibration Handbook", 1976.
- Panovko, Ya.; "Elements of applied theory of elastic vibration", 1971.

- Barker, John Robert; "Mechanical and electrical vibrations", New York. 1964.
Hartog. D., Jacob P.; "Mecánica de las vibraciones", 1964.
Erchart Robert y Salermo Charles M.. Isolating vibration in fundamentals of machine design. McGraw Hill. 1972.

Bibliografía

- Baranov, G. G. Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas. Segunda Edición. Editorial MIR. Moscú. 1985.
Golubev, Yuri. Teoría de Máquinas y Mecanismos. Ed. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1979.
Lafita Babio, Felipe; "Introducción a la teoría de las vibraciones mecánicas", 1968.
Broch, Jens Tramp; "Mechanical vibration and shock measurements", 1980.
Gray, B. F.; "Measurements, instrumentation and data transmission", 1979.
Allen Lindley and Paine. Use of rubber in Engineering. McLaren and Sew. LTD. London. 1965.
Baxter, R. L. Y D. L. Bernhard. Vibrations and Indicating Tools in Mechanical Engineering. March. 1978.

Autores

Ramón Esteban Martínez Batista,

Ingeniero Mecánico, Centro Universitario de Holguín; Doctor en Ciencias Técnicas, Instituto Superior de Construcción de Máquinas Agrícolas de Rostov del Don, en Rusia. . Investiga en temas: Vibraciones Mecánicas; Diseño Mecánico; Maquinaria Agrícola; Maquinaria Agrícola.

Julio Cesar Pino Tarragó,

Ingeniero Mecánico, Universidad de Holguín “Oscar Lucero Moya”, Holguín, Cuba y Doctor en Ciencias Técnica por la Politécnica de Madrid. Investiga en temas: Evaluaciones de la explotación y mantenimiento de máquinas agrícolas; Energía renovable para comunidades agrícolas; Procesamiento industrial de alimentos, Evaluación de Máquinas y Equipos Agrícolas. Actualmente profesor de la Universidad Estatal del Sur de Manabí.

Héctor Cochise Terán Herrera,

Ingeniero Electromecánico, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Master en Gestión de Energías y Master en Seguridad Industrial y Riesgos del trabajo. Investiga en temas: Mecanizado en Máquinas Herramientas convencionales y de Control Numérico Computarizado, Procesos de soldadura , Metalurgia y Tecnología de la Fundición ,Energías renovables, Automatización Industrial.

Oscar Bladimir Arteaga López.

Ingeniero Mecánico, Escuela Politécnica del Chimborazo ESPOCH. Magister en Tecnología de la Información y Multimedia Educativa. Magister en Gestión de Energía. Investiga en temas: Diseño y Construcción de Bastidores y Carrocerías para Vehículos de competición (FORMULA STUDENT), Diseño y Construcción de vehículos blindados 4X4. Diseño y construcción de prótesis robóticas.



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

ISBN: 978-9942-765-19-2



9 789942 765192