



**Demostraciones geométricas, Euclídeas y no Euclídeas, mediadas por software dinámico y evaluadas
bajo el modelo de Van Hiele en el proceso de nivelación emblemática**

Llerena Aguilar, Carlos Vicente

Vicerrectorado de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología

Centro de Posgrados

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Trabajo de titulación, previo a la obtención del título de Magíster en Enseñanza de la Matemática

PhD. Tlapanco Limón, Juan Francisco

3 de agosto de 2020



Document Information

Analyzed document	TESIS-CARLOS-LLERENA-14_07_2020.pdf (D76448171)
Submitted	7/16/2020 9:37:00 PM
Submitted by	
Submitter email	luis.walke@kiorn.edu.ec
Similarity	3%
Analysis address	luis.walke@kiorn@analysis.arkund.com

Sources included in the report

SA	Repaldo del marco teórico web.pdf Document Repaldo del marco teórico web.pdf (D69841212)		3
W	URL: http://www.xtec.cat/~molla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-four.pdf Fetched: 7/16/2020 9:28:00 PM		3
W	URL: https://sites.google.com/site/aprendamosobrelosangulos/assignments Fetched: 7/16/2020 9:28:00 PM		2
SA	TFM Dalba J. Moran.pdf Document TFM Dalba J. Moran.pdf (D76294625)		1
SA	ROSA IRIS SAUCEDO.pdf Document ROSA IRIS SAUCEDO.pdf (D74866688)		2
W	URL: https://sites.google.com/site/geogebra1112/características-de-geogebra Fetched: 7/16/2020 9:28:00 PM		1
W	URL: https://docplayer.es/26665890-Propuesta-didactica-para-la-compresion-del-concepto-... Fetched: 1/11/2020 12:42:49 AM		3
W	URL: http://sisca.usach.cl/sites/tesis/files/tesis_cocarbamaza_rolandoroyes-2012.pdf Fetched: 7/16/2020 9:28:00 PM		6
W	URL: https://foriddocincincias.unam.mx/antefiores/verla26/verla300_01_la_curma_de_los_a... Fetched: 11/29/2019 7:43:08 PM		1
W	URL: https://docplayer.es/49038800-Diseño-de-actividades-geométricas-interactivas-en-el-... Fetched: 11/29/2019 7:18:33 AM		2
W	URL: https://pithus.udel.edu.pe/bitstream/11042/2728/2/EDUC_052.pdf.txt Fetched: 12/26/2019 4:45:58 PM		1
SA	ESTRATEGIA DIDÁCTICA APOYADA EN KAHOOT PARA FORTAL.pdf Document ESTRATEGIA DIDÁCTICA APOYADA EN KAHOOT PARA FORTAL.pdf (D74021095)		1

.....
Tlapanco Limón, Juan Francisco
DIRECTOR



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de titulación, "Demostraciones geométricas, Euclídeas y no Euclídeas, mediadas por software dinámico y evaluadas bajo el modelo de Van Hiele en el proceso de nivelación emblemática" fue realizado por el señor Llerena Aguilar, Carlos Vicente el mismo que ha sido revisado y analizado en su totalidad, por la herramienta de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 03 de agosto de 2020

Tlapanco Limón, Juan Francisco

Director

C.C.: 1757558257



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA

Yo **Llerena Aguilar, Carlos Vicente**, con cédula de ciudadanía n° 1803743606, declaro que el contenido, ideas y criterios del trabajo de titulación: **Demostraciones geométricas, Euclídeas y no Euclídeas, mediadas por software dinámico y evaluadas bajo el modelo de Van Hiele en el proceso de nivelación emblemática** es de mi autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 03 de agosto de 2020

Llerena Aguilar, Carlos Vicente
C.C.: 1803743606



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA

CENTRO DE POSGRADOS

AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Yo **Llerena Aguilar, Carlos Vicente** autorizo a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de titulación: **Demostraciones geométricas, Euclídeas y no Euclídeas, mediadas por software dinámico y evaluadas bajo el modelo de Van Hiele en el proceso de nivelación emblemática** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi responsabilidad.

Sangolquí, 03 de agosto de 2020

.....
Llerena Aguilar, Carlos Vicente
C.C.: 1803743606

DEDICATORIA

Este trabajo de titulación se lo dedico con mucho cariño a mi familia y de manera especial a la dueña de mi corazón y compañera de toda mi vida Dora Torres y a mis tres preciosos hijos: Neymar, Thiago y Celeste.

AGRADECIMIENTO

A Dios por brindar la fortaleza suficiente para llegar a esta etapa tan importante de mi vida profesional.

A la Universidad Regional Amazónica IKIAM y al Instituto Tecnológico Superior Tena por dar cabida al desarrollo de esta investigación.

Y un infinito agradecimiento a los Docentes Investigadores tutores de la investigación: Juan Francisco Tlapanco y Fabrizio Logiurato, por brindar su tiempo y sus valiosos conocimientos en el desarrollo de esta tesis.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Análisis Urkund	2
Certificación.....	3
Responsabilidad de Autoría.....	4
Autorización de Publicación.....	5
Dedicatoria.....	6
Agradecimiento	7
Índice de Contenidos.....	8
Índice de Tablas.....	11
Índice de Figuras	12
Resumen	14
Abstract.....	15
Capítulo I.....	16
El Problema	16
Planteamiento del Problema	16
Formulación del Problema.....	18
Justificación e Importancia	18
Objetivos.....	19
Objetivo General.....	19
Objetivos Específicos.....	19
Hipótesis	20

	9
Operacionalización de las Variables	20
Capítulo II	21
Marco Teórico	21
Antecedentes	21
Fundamentación Teórica	22
Didáctica de la Geometría	22
Aspectos Relevantes de la Geometría	32
Prueba de Hipótesis	40
Capítulo III	41
Metodología	41
Enfoque de la Investigación	41
Estrategia de Investigación	41
Población y Muestra	41
Instrumentos	42
Proceso de Investigación	42
Etapa de Experimentación Euclideana	42
Etapa de experimentación Hiperbólica	57
Capítulo IV	59
Análisis e Interpretación de Resultados	59
Análisis Estadístico URAI	60
Evaluación Inicial URAI	61
Discusión de los resultados URAI	68

	10
Análisis Estadístico IT	69
Evaluación Inicial IT	69
Evaluación Final IT	73
Discusión de resultados IT	77
Análisis Estadístico IES	78
Discusión de resultados IES	81
Análisis de las Hipótesis H2 Y H3	83
Conclusión de La Hipótesis H1, H2 Y H3	84
Capítulo V	86
Conclusiones y Proyecciones	86
Bibliografía	89
Apéndices	93

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Niveles del modelo de razonamiento de Van Hiele	25
Tabla 2 Pruebas de Hipótesis por Comparación.....	40
Tabla 3 Distribución de la Población.....	42
Tabla 4 Resumen de la evaluación inicial URAI.H0.....	63
Tabla 5 Resumen de la prueba de hipótesis URAI.H0.....	64
Tabla 6 Resumen de la evaluación final URAI.H1.	67
Tabla 7 Resumen de la prueba de hipótesis URAI.H1.....	68
Tabla 8 Resumen de la evaluación inicial IT.H0.....	72
Tabla 9 Resumen de la prueba de hipótesis IT.H0.....	73
Tabla 10 Resumen de la evaluación final IT.H1.	76
Tabla 11 Resumen de la prueba de hipótesis IT.H1.....	77
Tabla 12 Resumen de las evaluaciones realizadas en las IES.	79
Tabla 13 Resumen de las pruebas de hipótesis IES.H0.....	80
Tabla 14 Resumen de las pruebas de hipótesis IES.H1.....	81

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Niveles de logro alcanzados en el componente matemático	17
Figura 2 Creación y utilización de un modelo educativo	23
Figura 3 Representación del Teorema de Pitágoras en el entorno de Geogebra	30
Figura 4 Dinamización del Teorema de Pitágoras de forma dinámica por medio de polígonos... 31	
Figura 5 Derivación de las geometrías no euclidianas.....	35
Figura 6 Rectas convergentes.....	36
Figura 7 Rectas divergentes (Paralelas)	37
Figura 8 Representación del quinto postulado y líneas paralelas en el Disco de Poincaré.	37
Figura 9 Representación analítica del Disco de Poincaré.....	38
Figura 10 Representación de rectas en el plano superior de Poincaré.	39
Figura 11 Representación esquemática de la estrategia de investigación El.	44
Figura 12 Representación de un triángulo en el entorno de Geogebra.	45
Figura 13 Teorema dinámico de la suma de los ángulos internos de todo triángulo.....	46
Figura 14 Casilla de control de la pregunta 1.	50
Figura 15 Casilla de control de la pregunta 2.	51
Figura 16 Casilla de control de la pregunta 3.	52
Figura 17 Casilla de control de la pregunta 4 y 5.....	53
Figura 18 Representación de la evaluación inicial del grupo de control URAI.....	61
Figura 19 Representación de la evaluación inicial del grupo experimental URAI.	62
Figura 20 Representación de la evaluación final del grupo de control URAI.	65
Figura 21 Representación de la evaluación final del grupo experimental URAI.	66
Figura 22 Representación de la evaluación inicial del grupo de control IT.....	70

Figura 23 Representación de la evaluación inicial del grupo experimental IT.....	71
Figura 24 Representación de la evaluación final del grupo de control IT.....	74
Figura 25 Representación de la evaluación final del grupo experimental IT.	75
Figura 26 Resultados de los grupos en el proceso de investigación de las IES.....	82
Figura 27 Representación de la evaluación final de los grupos de investigación de las IES.	84

RESUMEN

La presente investigación se enmarca en el campo de la enseñanza de la geometría Euclidiana y no Euclidiana, enfocada en el desarrollo de las demostraciones geométricas. Este trabajo involucra la puesta en marcha de una estructura de enseñanza-aprendizaje, basada fundamentalmente en el uso del software dinámico Geogebra y el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. La metodología aplicada en el desarrollo de la investigación se dio mediante un enfoque cualitativo y cuantitativo. El enfoque cualitativo fue usado para describir e interpretar los niveles de razonamiento geométrico, alcanzados por los grupos de experimentación. Mientras que el enfoque cuantitativo fue aplicado en la recolección de datos, tabulación, interpretación de resultados y prueba de hipótesis, al momento de probar la funcionalidad de la propuesta. Por medio de dos etapas de experimentación se probó la efectividad de la metodología de enseñanza-aprendizaje en el tratamiento de las demostraciones geométricas. Los resultados alcanzados por nuestra propuesta, muestran que, al final de su aplicación, más del 50% de estudiantes desarrollaron capacidades para demostrar teoremas de forma rudimentaria, y que más del 30% lograron demostrarlos de forma justificada. La metodología algorítmica desarrollada en este proceso, es flexible y brinda la posibilidad de crear nuevos recursos dinámicos para las demostraciones de otros teoremas en el campo de la geometría elíptica, proyectiva y fractal.

PALABRAS CLAVES:

- **DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS**
- **SOFTWARE DINÁMICO GEOGEBRA**
- **MODELO DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE**

ABSTRACT

This research is framed in the field of teaching Euclidean and non-Euclidean geometry. It is focused on the development of geometric demonstrations. This work involves the implementation of a teaching-learning structure, based fundamentally on the use of the dynamic Geogebra software and Van Hiele's geometric reasoning model. The methodology applied in the development of the research was given through a qualitative and quantitative approach. The qualitative approach was used to describe and interpret the levels of geometric reasoning reached by the experimental groups. While the quantitative approach was applied in data collection, tabulation, interpretation of results and hypothesis testing, at the moment of testing the functionality of the proposal. Through two stages of experimentation, the effectiveness of the teaching-learning methodology in the treatment of geometric demonstrations was tested. On the one hand the results achieved by our proposal showed that, at the end of its application, more than 50% of students developed skills to demonstrate theorems in a rudimentary way, on the other hand more than 30% managed to demonstrate them in a justified way. The algorithmic methodology developed in this process is flexible and offers the possibility of creating new dynamic resources for the proofs of other theorems in the field of elliptical, projective and fractal geometry.

KEYWORDS:

- **GEOMETRIC DEMONSTRATIONS**
- **DYNAMIC GEOGEBRA SOFTWARE**
- **VAN HIELE'S GEOMETRIC REASONING MODEL**

CAPÍTULO I

El Problema

Planteamiento del Problema

La Geometría fue considerada por los filósofos antiguos de la escuela de Atenas, como una de las artes tal que el espíritu humano tenía que desafiarse, para adquirir las cualidades de lógica y rigor necesarias para elevar la razón hacia al "bien supremo": el conocimiento de la verdad absoluta y de los Dioses. Contribuidora de la formalización de la matemática por más de 2000 años, la Geometría se ha constituido en un pilar fundamental para el desarrollo de las ingenierías, la arquitectura y el arte. Por muchos años ha estado inmersa en los currículos matemáticos de los países latinoamericanos. Sin embargo, a pesar de su trascendencia, hoy en día los docentes restan importancia a los contenidos geométricos, privilegiando contenidos aritméticos o algebraicos (Sánchez e Iglesias, 2012).

El aprendizaje de la Geometría aporta a los estudiantes habilidades como: visualización, intuición, descubrimiento, modelización, argumentación y demostración, además contribuye al desarrollo del pensamiento cognitivo y el razonamiento espacial (Aravena & Caamaño, 2013). No obstante, en la actualidad estas habilidades están limitadas para los estudiantes, cuando se sigue utilizando una metodología de enseñanza tradicional, donde los profesores exponen la teoría, resuelven ejercicios en clases y envían tareas de refuerzo (Gamboa, 2010).

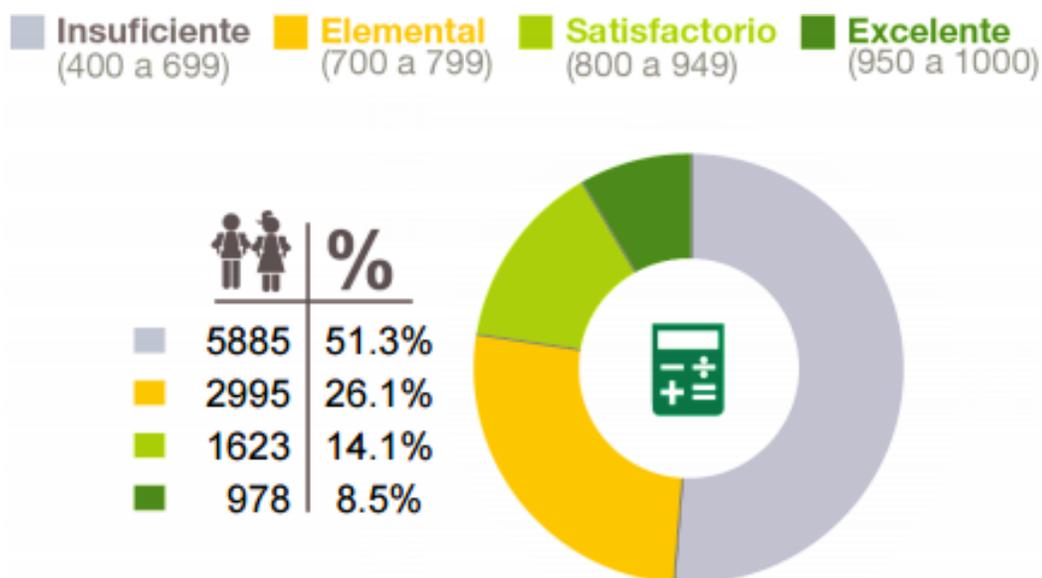
La Geometría se fundamenta en la demostración, pero aprender a demostrar proposiciones es tan difícil para el estudiante, como lo es para el profesor enseñarlas (Ruiz, 2014). Las investigaciones realizadas por Lárez (2002) en Puerto Rico y Crespo y Ponteville (2003) en Argentina, coinciden en que gran parte de los docentes del bachillerato no promueven procesos

de demostración. Y es que la demostración forma parte de uno de los mayores problemas que se enfrentan los docentes a la hora de enseñar matemáticas (Bravo, 2012).

Una parte de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en el Ecuador, se refleja en las evaluaciones estandarizadas “Ser Bachiller”, que son receptadas a todos los estudiantes de los terceros años del bachillerato ecuatoriano, previo a la obtención del título. Estas evaluaciones constituyen el mecanismo de ingreso a las Instituciones de Educación Superior y son de preocupación para las unidades educativas, ya que reflejan los niveles de logros educativos alcanzados en conocimiento y razonamiento. El rendimiento matemático de los estudiantes de la provincia de Napo se ha ubicado entre los últimos sitios en las Evaluaciones Ser Bachiller de los años 2015, 2016 y 2017.

Figura 1

Niveles de logro alcanzados en el componente matemático



Nota. Tomado de Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2016) obtenido de <https://cloud.evaluacion.gob.ec/dagireportes/sbciclo16/zona/2.pdf>

En la figura 1, se presentan los resultados de los logros alcanzados por los estudiantes de la Zona 2 en la evaluación “Ser Bachiller 2017”. En los mismos se aprecia que el nivel logro predominante es insuficiente. Contexto que induce a preguntar, sí los estudiantes están preparados para abordar una carrera que involucre un elevado componente matemático, sí tienen habilidades cognitivas para adaptarse al currículo de educación superior y sí pueden utilizar el razonamiento matemático como medio de deducción. Las instituciones de Educación Superior de la localidad (Universidad Regional Amazónica IKIAM y el Instituto Tecnológico Superior Tena), piensan en la práctica de la geometría como un medio que ayude a tratar los cuestionamientos anteriores.

Formulación del Problema

¿Contribuye la enseñanza-aprendizaje de demostraciones geométricas por medio del software Geogebra y el modelo de Van Hiele al mejoramiento del razonamiento geométrico de acuerdo a los requerimientos de la nivelación de las Instituciones de Educación Superior?

Justificación e Importancia

La presente investigación aporta a la innovación de la enseñanza-aprendizaje de la geometría Euclidea y no Euclidea en los niveles de educación media y superior, fomenta el estudio de las olvidadas demostraciones geométricas en el Ecuador, incluye la generación de material didáctico en la carrera de ciencias experimentales, aprovecha la tecnología como un medio de visualización y validación de conjeturas, contribuye a la comunidad educativa con la generación de recursos didácticos los cuales se visualizan a través de biblioteca online de Geogebra y finalmente permite a los estudiantes interactuar, explorar y desarrollar sus capacidades de deducción e inferencia lógica.

Nuestra investigación es de interés de la Universidad IKIAM, porque se alinea a la visión institucional y de forma particular del departamento de Educación en Ciencias Experimentales, espacio donde se forman los futuros docentes. Por otro lado, esta es importante para el Instituto Tecnológico Superior Tena, porque permite aportar al descriptor de investigación e innovación del Plan de Fortalecimiento Institucional. Finalmente, esta propuesta es de interés para los docentes y coordinadores de los programas de nivelación porque ayudaría a establecer un modelo metodológico de enseñanza-aprendizaje que contribuya a elevar el rendimiento académico de los estudiantes.

Objetivos

Objetivo General

- Establecer una metodología de enseñanza-aprendizaje que contribuya al mejoramiento del razonamiento geométrico de acuerdo a los requerimientos de la nivelación de las Instituciones de Educación Superior.

Objetivos Específicos

- Diseñar un modelo esquemático de generación de recursos didácticos-tecnológicos, por medio del uso del software Geogebra, para facilitar la creación de las clases aplicables sobre los grupos de experimentación.
- Adecuar un modelo de enseñanza-aprendizaje en base al modelo de razonamiento de Van Hiele que sea compatible con el entorno del software Geogebra, con el fin de facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje en los grupos experimentales.
- Establecer un diseño estructural que permita la ejecución, evaluación y control del proceso experimental.

Hipótesis

- H1. El nivel de razonamiento geométrico del grupo experimental es mayor que el de control, medido según la escala del modelo de Van Hiele, luego del proceso de experimentación.
- H2. El 50% de estudiantes del grupo experimental alcanzan o superan el nivel 3, según la escala del modelo de Van Hiele, luego del proceso de experimentación.
- H3. El 30% de estudiantes del grupo experimental alcanzan el nivel 4, según la escala del modelo de Van Hiele, luego del proceso de experimentación.

Operacionalización de las Variables

La investigación cuenta con dos variables; la primera variable independiente, denominada **metodología de enseñanza-aprendizaje**, es aplicada sobre los grupos experimental y control. La metodología de enseñanza-aprendizaje del grupo experimental es creada mediante la utilización del software Geogebra, el modelo de razonamiento de Van Hiele y el enfoque constructivista. La metodología del grupo de control es de tipo tradicional (utilización de regla y compás). La segunda variable dependiente, denominada **nivel de razonamiento geométrico alcanzado**, permite determinar el cambio generado en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele por la variable independiente.

$$\text{Nivel de razonamiento alcanzado} = f(\text{metodología de enseñanza aprendizaje})$$

CAPÍTULO II

Marco Teórico

Antecedentes

De los trabajos realizados por Quintero (2014) en la Universidad del Turabo, sobre estudiantes universitarios futuros maestros de matemática del nivel secundario de Puerto Rico, y Gutiérrez (2011) en la Universidad de Valencia en España, sobre profesores de matemáticas en la práctica cotidiana, se destaca la preocupación en las metodologías que usan los docentes al momento de enseñar demostraciones geométricas. Los investigadores priorizan el trabajo progresivo de la conjetura, introduciendo la actividad argumentativa entremezclada con la justificación, con el fin de hallar una cadena lógica. Ellos enfatizan en un cambio hacia la introducción de nuevas prácticas metodológicas que integran el uso de software dinámico.

Igualmente, de los trabajos realizados por Mariotti (2015), en una escuela secundaria de Italia, sobre la medición de una dinámica entorno de software, y Gutiérrez (2018), sobre geometría, demostración y ordenadores, se establece una convergencia en que el software de geometría dinámica es una herramienta que contribuye a comprender demostraciones. Los investigadores remarcan que el software dinámico puede funcionar como un mediador semiótico, donde activa la motivación y participación del sujeto.

Además, el artículo desarrollado por Arrieta & Bravo (2003) sobre la didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas, presenta un proceso de investigación experimental realizado sobre profesores cubanos en etapa de formación. La investigación busca generar habilidades en los docentes al momento de demostrar un problema geométrico y aplica un sistema de siete acciones metodológicas independientes, ordenadas y completas, con las cuales los investigadores consiguieron generar un clima de debate y reflexión. Ellos reportan

resultados favorables en el ascenso de motivación e interés por el estudio de los problemas geométricos de demostración.

También como resultado de la evaluación del sistema educativo de México, se destaca el trabajo realizado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2008), sobre la enseñanza de la geometría, y la investigación de Fouz (2005), sobre el Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. Ellos tratan de esclarecer procesos y mecanismos que los docentes de primaria deben conocer antes de enseñar geometría. Estos trabajos enfatizan que el modelo de Van Hiele es una herramienta útil para organizar el currículo geométrico y el desarrollo en clases.

Finalmente, una de las investigaciones que más se relaciona con nuestra propuesta, es la desarrollada por Laurito (2011). Este investigador busca determinar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes en la resolución de conjeturas y demostraciones geométricas usando el software Cabri Géométry. Los resultados fueron categorizados en el modelo de Van Hiele y evidencian la elevación de los niveles de razonamiento geométrico espacial en estudiantes de VI semestre que cursan la asignatura Geometría II en la Especialidad de Matemática.

Fundamentación Teórica

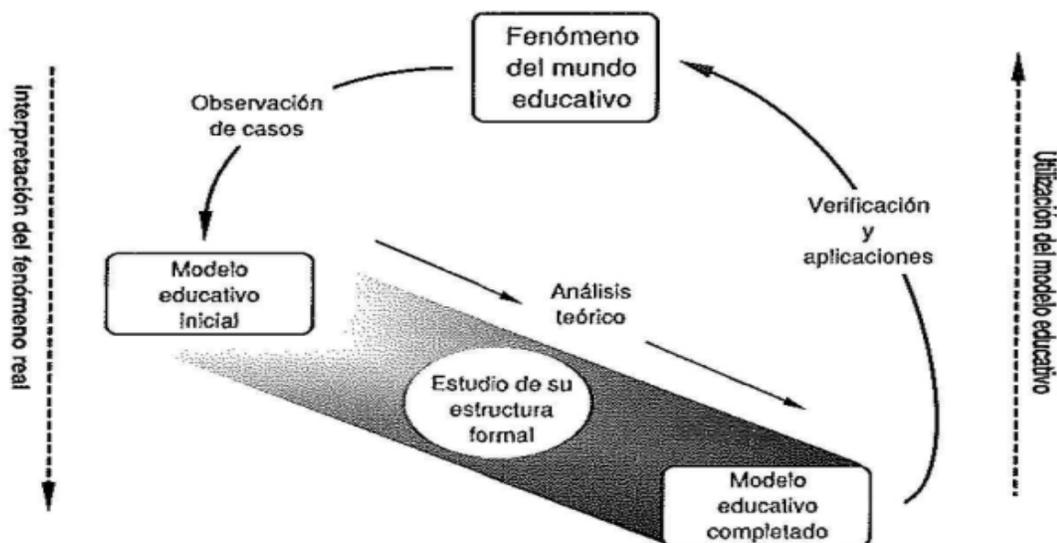
Didáctica de la Geometría

Modelos Didácticos de la Enseñanza-Aprendizaje de la Geometría. No existe un solo camino para conseguir el éxito pedagógico, sino más bien hay que considerar las interacciones dinámicas con las metas cognoscitivas y sociales. En este sentido aparecen los modelos de enseñanza-aprendizaje. Estos consisten en estructurar un plan que configure el currículo, para diseñar materiales de enseñanza y para orientar esas enseñanzas en el aula (Varcarcél, 2004). Un esquema recomendado por los reconocidos investigadores en didáctica de

la matemática Adela y Gutiérrez, para la creación de un modelo de enseñanza-aprendizaje en cualquier campo de la matemática.

Figura 2

Creación y utilización de un modelo educativo



Nota. Tomado de Adela & Gutierrez, (2009).

La figura 2 reproduce un esquema general que permite generar un modelo educativo. Parte de la detección del fenómeno educativo y sus características, posteriormente se genera un modelo inicial considerando las principales causas que lo ocasionan, luego se busca completar el modelo por medio de la fundamentación teórica. Finalmente, se realiza la verificación del modelo mediante varias pruebas de ensayo y error las cuales permitirán validarlo.

Existen algunos modelos de razonamiento geométrico como el de ubicación espacial de Saiz (1997), que estudia el vocabulario espacial y la evolución de las concepciones en niños de los primeros años de estudio. El aprendizaje acerca del espacio de Bishop (1983), que consiste en reflexionar sobre las razones de porque enseñar geometría y trata de matematizar el espacio. Las manipulaciones geométricas de Brenes (1997), que trata de mostrar que la utilización de

figuras geométricas ayuda a desarrollar la percepción espacial. Y al final el que es objeto de nuestro estudio: el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, que consiste en explicar cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes. (Paz, 2012).

El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele. Cuando se habla de razonamiento matemático, uno de los modelos más citados en la literatura es el de Van Hiele. El modelo tiene su origen en 1957, en las disertaciones doctorales de Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele en la Universidad de Utrecht, Holanda. En la actualidad es usado como objeto de estudio, para organizar unidades de enseñanza, evaluar procesos de los estudiantes y aportar pautas para la organización del currículo bajo el enfoque constructivista (Gutiérrez, 2011).

El modelo consta de cinco niveles consecutivos ascendentes: 1) visualización, 2) análisis, 3) deducción informal, 4) deducción formal y 5) la deducción de rigor. El estudiante se ubica en un nivel de acuerdo a las características detectadas en el momento de evaluación, avanza de nivel a medida que vaya cumpliendo objetivos y desarrollando habilidades geométricas. El modelo de Van Hiele proporciona pautas para organizar el currículo educativo y así ayudar al estudiante a pasar de un nivel a otro (Gamboa, 2010).

Si miramos las formas de aprender, trabajar y expresarse en geometría por parte de los estudiantes en los diferentes niveles educativos, se identificará rápidamente las diferencias que existen entre los niños de educación básica, los jóvenes del bachillerato y los de universidad. Los niños trabajan de forma visual con los objetos básicos geométricos, representan conceptos y propiedades básicas generales y abstractas. Ellos no podrían ser capaces de realizar razonamientos formales (demostraciones), que son habilidades de cursos de enseñanza media y superior (Adela & Gutierrez, 2009).

Para comprender cómo evolucionan los razonamientos geométricos, los esposos Van Hiele han organizado la información en un modelo compuesto por niveles que son escalados de forma secuencial y progresiva. Un estudiante puede pasar por los niveles solo si ha adquirido las destrezas del nivel precedente. El progreso (o su falta) de un nivel a otro depende más del contenido y método de instrucción recibido que de la edad: ningún método educativo permite a un estudiante saltarse un nivel; algunos métodos favorecen el progreso, mientras otros retrasan o bloquean el movimiento entre niveles.

Tabla 1

Niveles del modelo de razonamiento de Van Hiele

Procesos	Nivel 1 Visualización	Nivel 2 Análisis	Nivel 3 Clasificación	Nivel 4 Deducción formal
Reconocimiento Descripción	Atributos físicos (posición, forma, tamaño)	Propiedades matemáticas	_____	_____
Uso de definiciones	_____	Definiciones con estructura simple	Definiciones con estructura matemática compleja	Aceptar definiciones equivalente
Formulación de definiciones	Listado de propiedades físicas	Listado de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias suficientes	Prueba la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusiva, basado en atributos físicos	Exclusiva, basado en atributos matemáticos	Con diferentes definiciones, Exclusivas e Inklusivas	_____
Demostración	_____	Verificación con ejemplos Demostraciones empíricas	Demostraciones lógicas informales	Demostración matemática formal

Nota: La tabla muestra las cualidades y propiedades características de los primeros cuatro niveles de razonamiento de Van Hiele.

Fuente: (Aravena & Caamaño, 2013).

La tabla 1 muestra cuatro de los cinco niveles propuestos por Van Hiele. El nivel 1 enfatiza en la visualización y comparación de objetos, es el nivel más elemental. El nivel 2 se caracteriza por el reconocimiento de propiedades y establecimiento de relaciones. El nivel 3 considera la detección de regularidades, propiedades y explicación del trabajo realizado. El nivel 4 trata de aplicación de conocimientos a situaciones nuevas, comparación de estructuras, problemas complejos con una o más soluciones, permite la consolidación de las etapas anteriores.

El estudiante que ha alcanzado los primeros niveles (del 1 al 2), estará lejos de realizar una demostración formal en geometría. En estos niveles los estudiantes comienzan a generalizar propiedades con las cuales inician el razonamiento geométrico. Serán capaces de señalar figuras que cumplen una determinada propiedad matemática, pero siempre considerará las propiedades como independientes, por tanto no se establecen relaciones entre propiedades equivalentes.

Cuando el estudiante llega al nivel 3 de Ordenación o Clasificación, alcanza una deducción parcial de la demostración y no la construye en toda su estructura. Esto se debe a que su nivel de razonamiento lógico es capaz de seguir pasos individuales de un razonamiento, pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia impide al estudiante asimilar la naturaleza axiomática de la geometría (Fouz, 2005).

En el nivel 4, el estudiante alcanza un alto nivel de razonamiento lógico y es capaz de realizar deducciones y demostraciones lógicas formales. Él tiene la capacidad de formalizar en sistemas axiomáticos y comprende el uso de diferentes premisas para alcanzar mismos resultados. En este nivel el estudiante puede deducir demostraciones geométricas de manera abstracta, sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzando un alto nivel de razonamiento. Pero el desarrollo de habilidades deductivas y de formas de razonamiento lógico de estructuras complejas que exige este nivel, es una tarea difícil para muchos estudiantes. Cuando ellos no han

alcanzado los niveles anteriores, puede carecer de importancia o relevancia el esfuerzo de llegar al nivel 4, por el simple hecho de que no están preparados para asimilarlo (Fouz, 2005).

Procesos de Demostración en el Modelo de Van Hiele. Para demostrar un teorema hace falta una cadena finita de proposiciones verdaderas, que se obtienen con ayuda de reglas de inferencia lógicas. El punto de inicio de este proceso son proposiciones cuya verdad es conocida, obtenidas del enunciado del teorema. El punto final de la cadena es el teorema a demostrar. Cada miembro de la cadena se obtiene del anterior mediante reglas de inferencia lógica. El modelo de Van Hiele permite diferenciar entre demostraciones basadas en la verificación de ejemplos (nivel 2), informales (nivel 3) y formales (nivel 4) (Gutiérrez, 2011).

Las demostraciones formales son una especie de esquemas de alto-nivel escritos en lenguaje formal dentro de un sistema axiomático. Ellas dejan en evidencias las interrelaciones y roles de los términos indefinidos, axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones. Mientras que las demostraciones informales, son los resultados obtenidos empíricamente usando técnicas deductivas. Los estudiantes pueden demostrar un teorema de manera informal, cuando utilizan las representaciones físicas de las figuras más como una forma de verificar el teorema, que como un medio para demostrarlo (Corberán, 1994).

Software de Geometría Dinámica. La aparición de las tecnologías digitales revolucionó a la humanidad y por ende a la educación. En este sentido, el software dinámico permite generar un ambiente que cambia la naturaleza de los objetos, lo cual perfila a la geometría dinámica como un espacio para cuestionar el saber matemático. De acuerdo a Teresa (2011), el software dinámico permite dibujar figuras en función de sus relaciones geométricas y no de su apariencia, sus construcciones son dinámicas, es decir, permiten interactuar (mover, modificar...) con las construcciones realizadas, haciendo que las relaciones geométricas se mantengan.

Existen varios softwares de geometría dinámica, entre los más conocidos se tiene: Geonext, Regla y Compás, CarMetal, Cabri Geometry y Geogebra, siendo estos dos últimos los más utilizados. Cabri Geometry es el más antiguo, posee una gran cantidad de recursos que pueden ser utilizados o editados por los usuarios, además se puede apreciar en investigaciones especialmente realizadas en países europeos. Por otro lado, Geogebra se ha convertido en los últimos años en una comunidad rápida en expansión con millones de usuarios en todos los países. La principal diferencia entre Cabri Geometry y Geogebra es la licencia, en el segundo caso esta es libre y gratuita.

El Ministerio de Educación del Ecuador promueve el uso responsable de la tecnología, propinando recursos de enseñanza-aprendizaje alineados al software libre. La promoción involucra el uso de applets, calculadoras y software, acompañadas de instrucciones y estrategias metodológicas plasmadas en guías, que permiten a los docentes apoyar la labor de enseñanza-aprendizaje. El software libre Geogebra se introduce en el currículo matemático de educación básica y bachillerato como un recurso de apoyo y complemento en el desarrollo de las destrezas. Además, la utilización de Geogebra en el aula es promovida constantemente por la Universidad Nacional de Educación por medio de cursos y charlas.

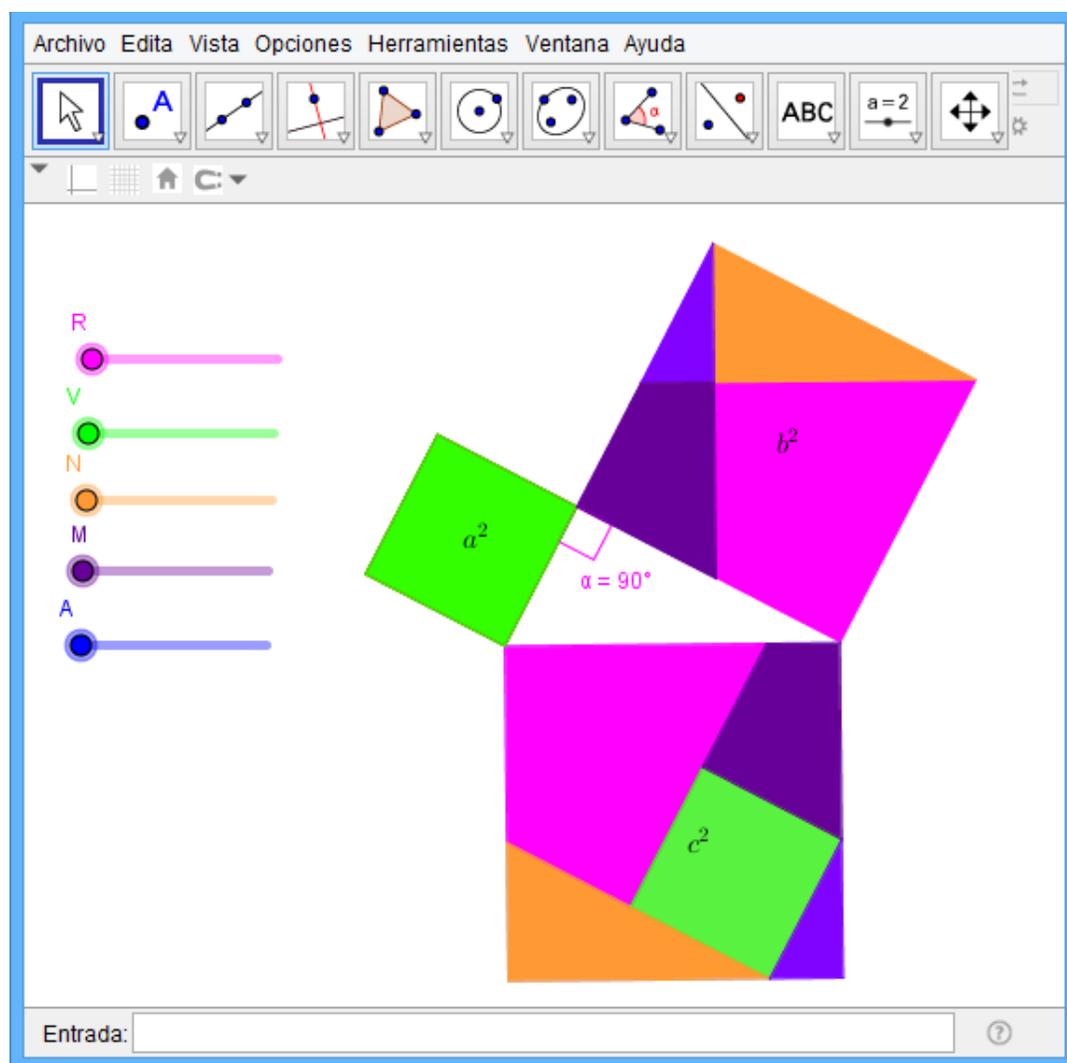
Descripción del Software Geogebra. El software libre GeoGebra es un laboratorio virtual donde los usuarios, profesores y alumnos, pueden experimentar, descubrir, analizar, investigar, relacionar y aprender haciendo de una forma visual y natural. Esto permite realizar construcciones dinámicas, fácilmente exportables a aplicaciones web, en las que podemos manipular las expresiones (geométricas, numéricas, algebraicas o tabulares) y observar la naturaleza de las relaciones y propiedades matemáticas a partir de las variaciones producidas por nuestras propias acciones.

Geogebra tiene sus orígenes en la tesis de Markus Hohenwarter, con el objeto de crear una calculadora de uso libre para trabajar el Álgebra y la Geometría. Fue un proyecto que se inició en el 2001 en un curso de Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria). Actualmente, Geogebra continúa su desarrollo en la Universidad de Boca Raton, Florida Atlantic University (USA). Su utilización dinamiza el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en todos sus niveles educativos. El software combina geometría, álgebra, análisis y estadística y permite realizar diversas representaciones de los objetos desde cada una de sus perspectivas (International GeoGebra Institute, 2017).

El entorno de interfaz de Geogebra posee una barra de menú con íconos de archivo, edición, vista, opciones, herramientas, ventana y ayuda. Además, tiene una barra de herramientas con la que el usuario puede dibujar figuras directamente sobre la ventana gráfica. También, posee una vista algebraica que convierte las acciones realizadas con las herramientas sobre la ventana gráfica en símbolos algebraicos. Asimismo, una barra de entrada que transforma texto algebraico en elementos o figuras que se visualizarán en la ventana gráfica.

Figura 3

Representación del Teorema de Pitágoras en el entorno de Geogebra

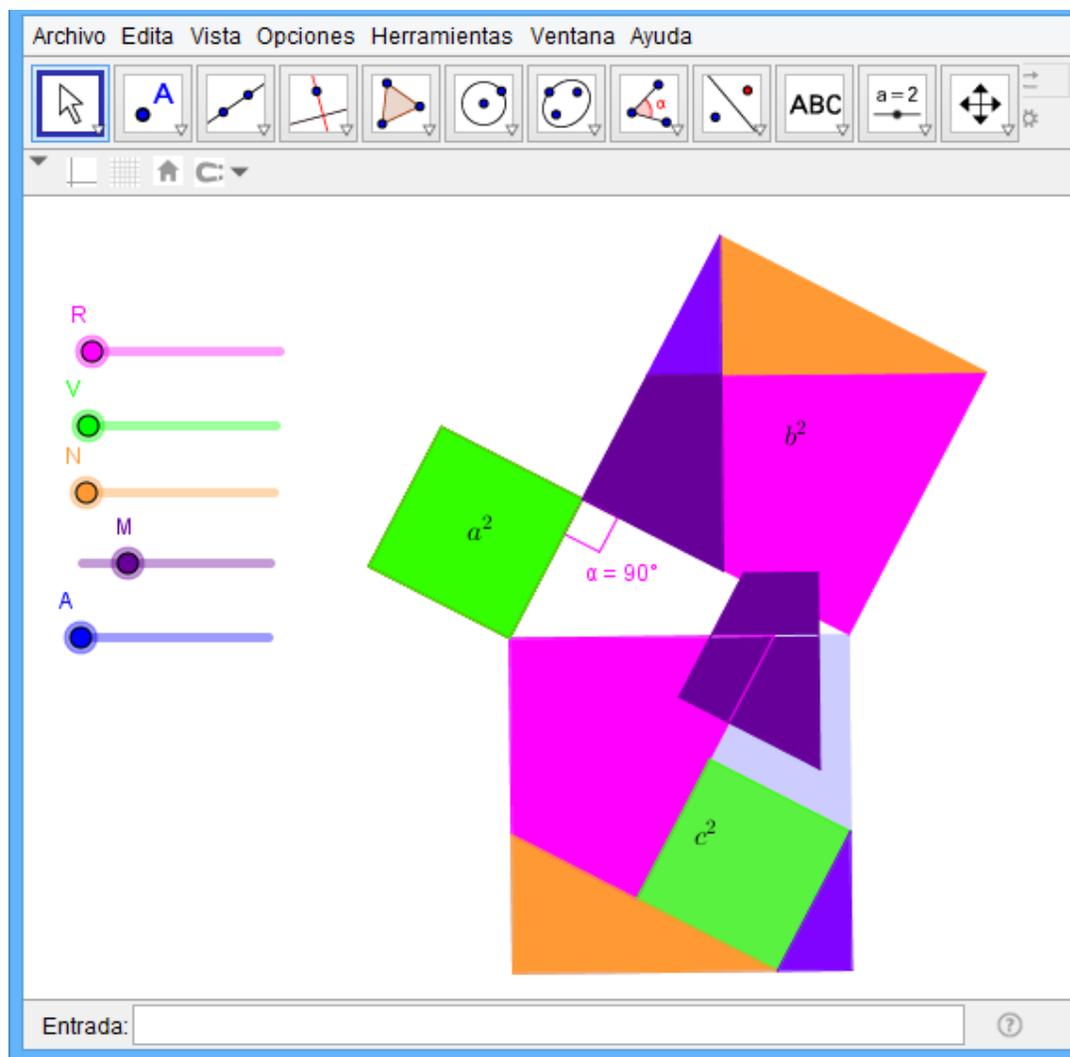


Nota: Construcción geométrica Tomada de la plataforma virtual de Recursos GeoGebra. Obtenido de <https://www.geogebra.org/m/GQwrmyhq>

Un ejemplo de los recursos que se pueden crear con el software Geogebra se puede apreciar en la figura 3. La construcción muestra de forma geométrica la representación del Teorema de Pitágoras, en donde la hipotenusa y los catetos son representados por polígonos segmentados como si fuera un rompe cabezas.

Figura 4

Dinamización del Teorema de Pitágoras de forma dinámica por medio de polígonos.



Nota: Construcción geométrica Tomada de la plataforma virtual de Recursos GeoGebra. Obtenido de <https://www.geogebra.org/m/GQwrmyhq>

En la figura 4 se observan 5 barras de colores denominadas deslizadores. Cada barra controla el movimiento de uno de los polígonos que constituyen el Teorema. Por ejemplo, el deslizador M de color morado permite desplazar de forma dinámica el polígono del mismo color, desde el cuadrado de la hipotenusa c , hacia el cuadrado del cateto b . Con la dinamización de los

polígonos se puede evidenciar de una forma visual que “El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.

Applets de Geogebra. El Applet es un dibujo realizado en el programa Geogebra, el cual sé que puede incrustarse en un documento HTML (página Web). Cuando un Navegador carga una página Web que contiene un Applet, éste se descarga en el navegador Web y comienza a ejecutarse, lo cual permite crear programas que cualquier usuario puede ejecutar (Elvira Mifsud, 2010). Una construcción plana se puede convertir en un Applets de Geogebra cargándola directamente en el sitio www.geogebra.org. La figura se dinamiza de forma interactiva, permitiendo realizar modificaciones directamente en Internet.

Aspectos Relevantes de la Geometría

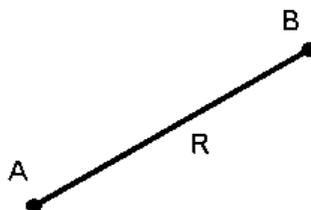
Elementos de Euclides. Los Elementos de Euclides constituyen un sistema geométrico axiomático que ha formado parte de siglos de matemática. Su autor Euclides inicia describiendo una lista de términos, con los cuales construye definiciones. El sistema se desarrolla de forma constructiva a partir de estos términos, llamados términos primitivos que no se definen por medio de otros términos. La idea intuitiva de estos se genera por medio de la observación del entorno y solamente podemos hacer representaciones concretas de ellos (Joice, 2013).

Geometría Euclidiana. Es la rama de la geometría basada en los términos primitivos y postulados de Euclides. Se desarrolla en espacio plano y en el tridimensional, siendo este último una representación intuitiva sobre la geometría del universo. Existen tres enfoques que se le asignan a la geometría Euclidiana. El primero sigue una línea histórica que toma como referente a Euclides y su libro Los Elementos. El segundo es un método sintético que involucra el aspecto algebraico-analítico. Finalmente, un tercero estudia las invariantes de las isometrías en un espacio

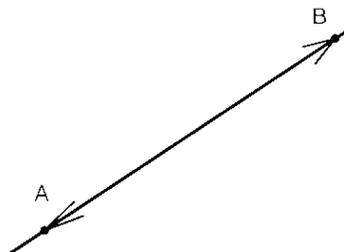
euclidiano (espacio vectorial real de la dimensión finita, dotado de un producto escalar) (Wikismat, s.f.).

Postulados de Euclides. Un postulado es una proposición no evidente por sí misma, ni demostrada, pero que se acepta, ya que no existe otro principio al que pueda ser referida. Los 5 postulados planteados por Euclides para la formación de la geometría Euclideana se describen a continuación:

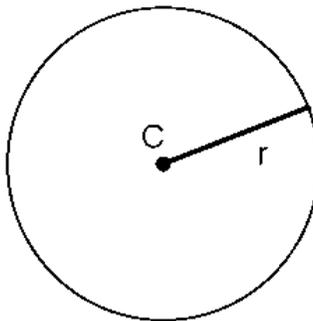
Postulado I. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.



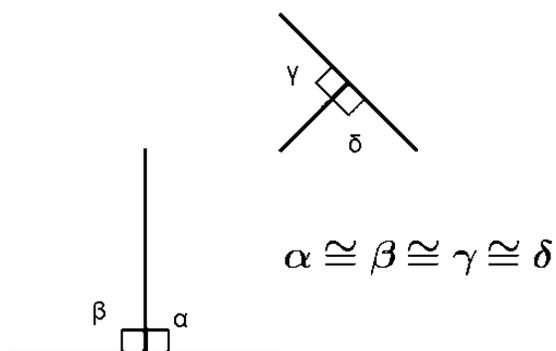
Postulado II. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.



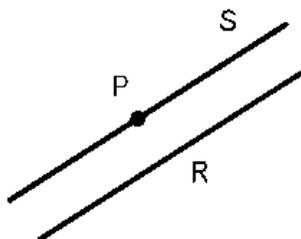
Postulado III. Dados un punto C y un segmento r, es posible trazar una circunferencia con dicho punto como centro y con dicho segmento como radio.



Postulado IV. Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.



Postulado V. Dado un punto P y una recta R ajena al punto, es posible trazar una y solo una recta S paralela a la recta R pasando por el punto P.



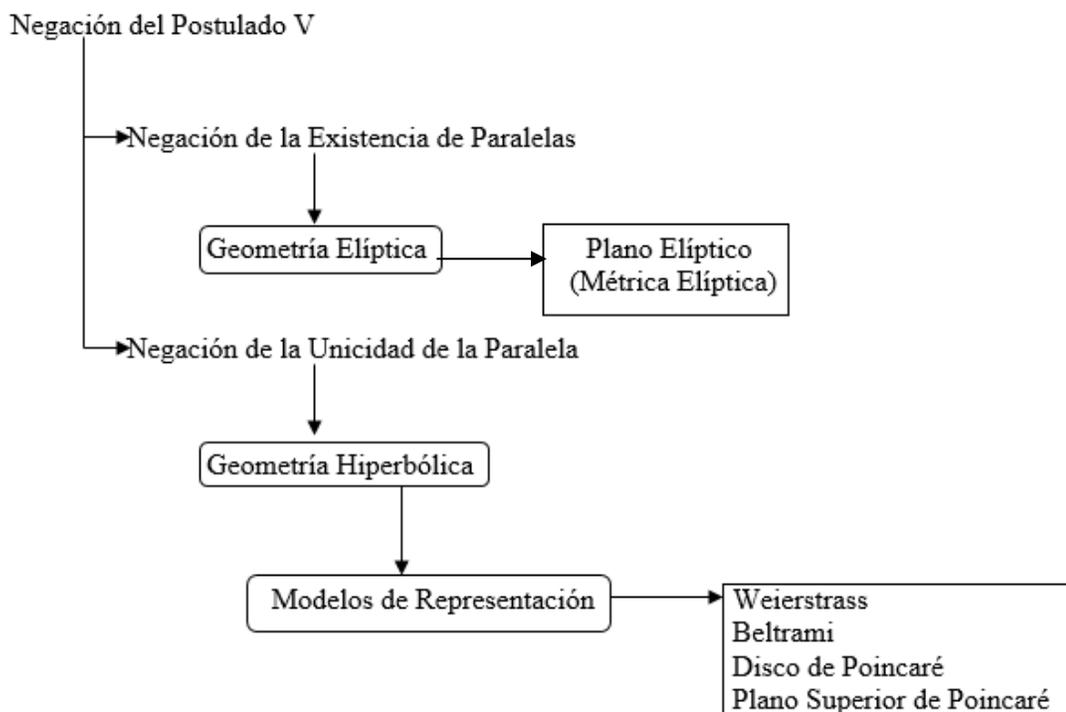
Geometría No Euclidiana. La Geometría no Euclideana se inicia en 1697 con el trabajo desarrollado por el italiano Girolamo Saccheri. Él introdujo la idea de mantener los cuatro postulados de Euclides fijos y sustituir el quinto por otro que le contradijera. La primera persona que llegó a comprender más claramente el pensamiento de Saccheri fue Gauss (1777- 1855), según el cual: "En la teoría de las paralelas ni siquiera ahora estamos mucho más lejos que Euclides. Ésta es una parte vergonzosa de las matemáticas...". En 1813 Gauss desarrolló una nueva geometría denominada geometría antieuclídea, que más adelante la bautizaría como geometría no euclídea.

Posteriormente, Gauss en 1817 demostró que el quinto postulado era independiente de los otros cuatro y estudió las consecuencias que se pudieran derivar de su negación. Pensó en lo que podría suceder, si se pueden trazar más de una línea paralela a una recta dada y que pasa por

un punto exterior a ésta, llegando a la conclusión que tal suposición era perfectamente aplicable al espacio físico (Carrión, 2013).

Figura 5

Derivación de las geometrías no euclidianas



La figura 5 muestra el apareamiento de las geometrías elíptica e hiperbólica a partir de la negación del quinto postulado de Euclides. La geometría elíptica considera como base un plano elíptico (superficie de una esfera), sobre el cual se adecuan los cuatro postulados de Euclides y el postulado que dice “por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela”. De manera similar la geometría hiperbólica también adopta como base los cuatro postulados de Euclides y el postulado que dice “por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela”. Esta geometría se la puede representar en cuatro modelos o planos hiperbólicos.

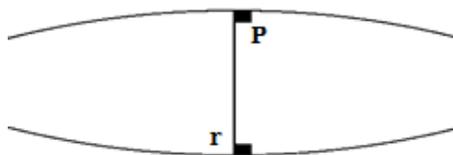
La geometría euclidiana y no euclidiana (elíptica e hiperbólica) se diferencia por la definición del quinto postulado. Mientras la geometría euclideana satisface los cinco postulados

de Euclides y se modela en variedades riemannianas de curvatura cero, la geometría hiperbólica satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides y se modela en variedades riemannianas de curvatura negativa. Por otro lado, la geometría elíptica satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides y se modela en variedades riemannianas de curvatura positiva (Barbe, 2012).

Geometría Elíptica (Riemann). La geometría elíptica es un modelo de geometría no euclidiana de curvatura constante positiva que satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides. El quinto postulado es sustituido por el siguiente postulado: “Dada una recta r y un punto P externo a la recta, todas las rectas que pasan por el punto P intersecan a la recta r ”. Esto quiere decir que no existen líneas paralelas.

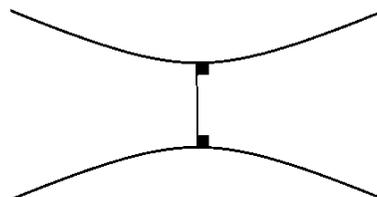
Figura 6

Rectas convergentes

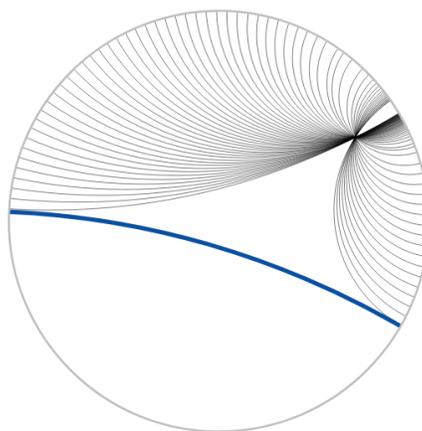


Nota: Tomado de Bautista (1995).

Geometría Hiperbólica (Lobachevsky). La geometría hiperbólica desarrollada por Lobachevsky, reemplaza el quinto postulado por el axioma de Bolyai: “Por un punto exterior a una recta pasan al menos dos rectas paralelas”. Una vez que Lobachevski admite que por un punto exterior a una recta, y en el plano por ella determinado, existe más de una recta paralela a la recta considerada, él demuestra que el número de tales paralelas es infinito. Además Lobachevsky demuestra que dos rectas divergentes cualesquiera poseen una perpendicular común, que mide la distancia mínima entre ellas, y a partir de la cual divergen y se alejan una de la otra indefinidamente en ambas direcciones.

Figura 7*Rectas divergentes (Paralelas)**Nota: Tomado de Bautista (1995).*

El Quinto Postulado en el Modelo del Disco de Poincaré. En el modelo de disco de Poincaré del plano hiperbólico, las líneas están representadas por arcos circulares ortogonales al límite del cierre del disco. Las líneas negras delgadas se encuentran en un punto común y no se cruzan con la línea azul gruesa, lo que ilustra que en el plano hiperbólico hay infinitas líneas paralelas a una línea determinada que pasa por el mismo punto.

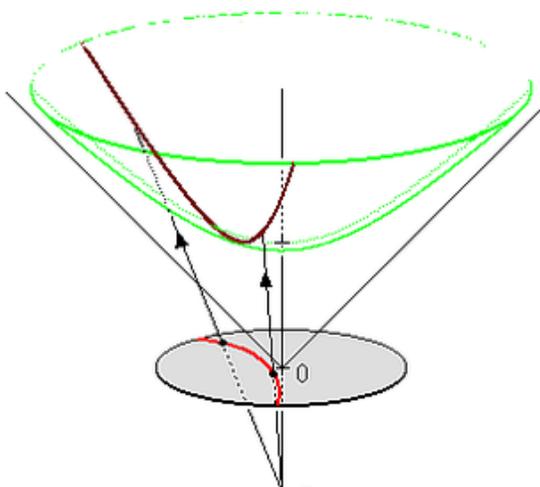
Figura 8*Representación del quinto postulado y líneas paralelas en el Disco de Poincaré.**Nota: Disco Tomado de http://web1.kcn.jp/hp28ah77/us40_mode.htm*

El modelo de disco de Poincaré, se forma a partir de una proyección ortográfica de un hiperboloide de ecuación $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ sobre el plano $z=0$. Para obtener una recta hiperbólica en el modelo de Poincaré, basta con proyectar estereográficamente una hipérbola

tomada de la parte superior del hiperboloide hacia el plano $z=0$ haciendo foco el punto $z=-1, x=0$ y $y=0$.

Figura 9

Representación analítica del Disco de Poincaré.

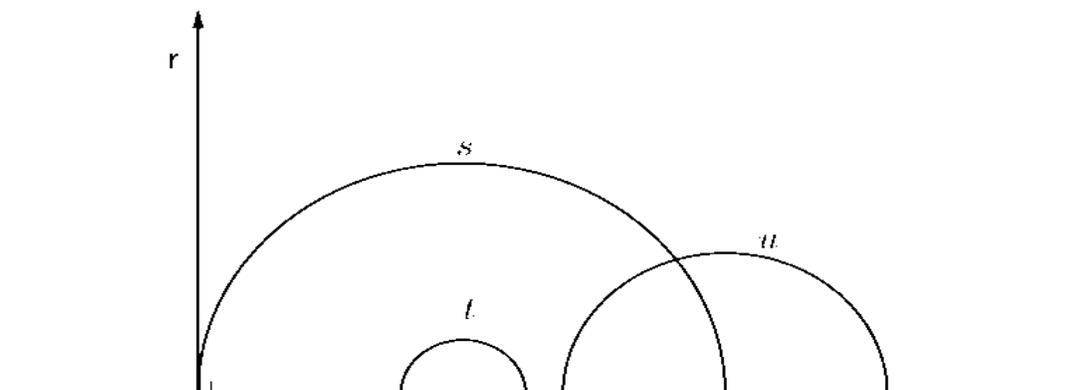


Nota: La hipérbola marrón del hiperboloide verde es proyectada sobre el disco de Poincaré plateado en forma de una recta hipérbólica de color rojo. Fuente: http://web1.kcn.jp/hp28ah77/us40_mode.htm

Modelo del Plano Medio Superior de Poincaré (H^+). Este modelo consiste en tomar un sistema de coordenadas Cartesianas rectangulares (x,y) como las que se visualizan en geometría analítica. El eje horizontal x dividirá al plano bidimensional en dos partes, la parte superior que corresponde a valores positivos medidos a lo largo de la coordenadas $\{(x,y) \mid y > 0\}$, forma el espacio de modelo (figura10). Las "rectas" en este modelo son semicircunferencias euclidianas, cuyos centros están sobre el eje real, y semirectas euclidianas verticales, que podemos considerar como semicircunferencias de radio infinito.

Figura 10

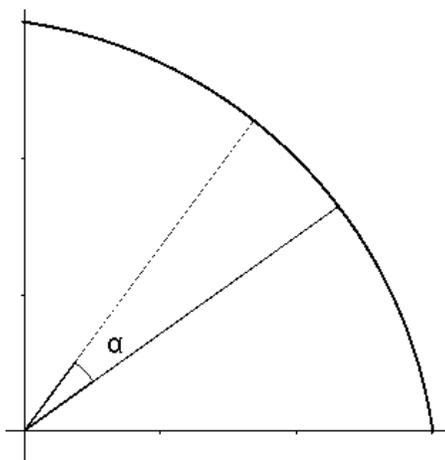
Representación de rectas en el plano superior de Poincaré.



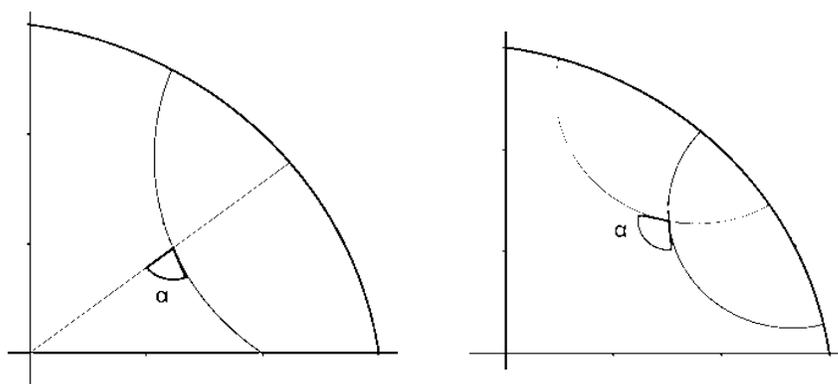
Nota: Las rectas s y u son secantes. r , t y u son divergentemente paralelas y las rectas r y s son asintóticamente paralelas. Fuente: (Márquez, 2016).

Ángulo hiperbólico. Definimos el ángulo hiperbólico entre dos rectas de la siguiente manera:

Si ambas rectas son rayos, se define el ángulo hiperbólico como el ángulo euclídeo que determinan.



Si una o ambas son circunferencias ortogonales, se define el ángulo hiperbólico como el ángulo euclídeo que determinan las dos rectas tangentes en su punto de intersección.



Prueba de Hipótesis

“Procedimiento estadístico que, a través del estudio de una muestra aleatoria, permite determinar el cumplimiento de una hipótesis planteada sobre alguna característica de la población” (Flórez, 2012). La selección de la prueba de hipótesis depende de cuatro criterios; el primero relacionado al tipo de problema, este puede ser de comparación o asociación, el segundo relacionado al tipo de muestra (esta puede ser independiente o dependiente), el tercero relacionado al número de grupos (estos pueden ser dos grupos o más de dos grupos) y el cuarto criterio relacionado al tipo de variable (este puede ser nominal, ordinal, de intervalo y de razón). La tabla 2 describe los criterios para la selección de la prueba de hipótesis, sí el problema es de comparación.

Tabla 2

Pruebas de Hipótesis por Comparación

Niveles de Medición	Muestras Independientes		Muestras Relacionadas	
	Dos muestras	Más de dos muestras	Dos muestras	Más de dos muestras
Intervalar o de Razón	T de Student	Análisis de Varianza	T de Student m. relacionadas	Análisis de Varianza para medidas repetidas
Ordinal	U de Mann Whitney	Kruskall-Wallis	Wilcoxon	Friedman
Nominal	χ^2 , Fisher (dicotómica)	χ^2	McNemar (dicotómica)	Q de Cochran (dicotómica)

Nota: La tabla permite determinar la prueba de hipótesis de comparación entre variables de dos o más muestras. Tomado de (Villatoro, 2007).

CAPÍTULO III

Metodología

Enfoque de la Investigación

El enfoque dado al desarrollo de la investigación fue de carácter cualitativo y cuantitativo. El primero fue usado para describir e interpretar los niveles de razonamiento geométrico, alcanzados por los grupos de experimentación. El segundo fue aplicado en la recolección de datos, tabulación, interpretación de resultados y prueba de hipótesis, al momento de probar la funcionalidad de la propuesta.

Estrategia de Investigación

En el desarrollo de la investigación se establecieron dos etapas. La primera encaminada a probar la funcionalidad de un modelo de enseñanza-aprendizaje que involucra el software dinámico y el modelo de razonamiento de Van Hiele, aplicado sobre la enseñanza de las demostraciones de la geometría euclideana. La segunda orientada a sentar bases sobre un modelo de enseñanza-aprendizaje que involucra el software dinámico y el modelo de razonamiento de Van Hiele, aplicado sobre demostraciones de la geometría no euclideana (inicios de la geometría hiperbólica), sin llegar a probar la efectividad en el aula.

Población y Muestra

La investigación se ejecutó en el transcurso del segundo período del año 2017, tomando como población objetivo a los alumnos y docentes de los cursos de Nivelación Emblemática de la Universidad Regional Amazónica IKIAM. Con el fin de comprobar los resultados obtenidos, el primer semestre del año 2018, se realizó una segunda experimentación con estudiantes de los primeros semestres del Instituto Tecnológico Superior Tena (ITST).

Tabla 3*Distribución de la Población*

Institución	Grupo	Número de Estudiantes
IKIAM	Control	5
IKIAM	Investigación	16
ITST	Control	12
ITST	Investigación	12
Total		45

Nota: La tabla describe la construcción de la población objeto tomada de la Universidad Regional Amazónica IKIAM y el Instituto Tecnológico Superior Tena.

Instrumentos

El instrumento utilizado como medio de evaluación y verificación de los resultados fue la adaptación de la prueba formal de dos columnas. Esta consistió técnicamente en mostrar una construcción geométrica. En una columna se plantearon preguntas relacionadas con los niveles de razonamiento de Van Hiele, en orden ascendente, mientras que en la otra, el estudiante las desarrollaba.

Proceso de Investigación

Para presentar de una forma clara el proceso de investigación, cada una de las etapas de investigación se la describe de forma separada:

Etapas de Experimentación Euclídeana

Esta sección estaba encaminada a probar la efectividad de nuestra propuesta sobre la enseñanza de las demostraciones de la geometría euclídeana. Esta etapa incluyó la selección de población y muestra, instrumentos de evaluación (descritos en los apartados 3.4 y 3.5), contenidos temáticos y la creación de una estructura de investigación.

Contenidos Temáticos Euclideos. La elección de los temas para el proceso de experimentación fueron tomados en función al contenido temático y texto guía (Geometría Plana de G. Calvache) descritos en el sílabo de matemáticas del programa de Nivelación de la Universidad IKIAM. El contenido seleccionado fue el siguiente:

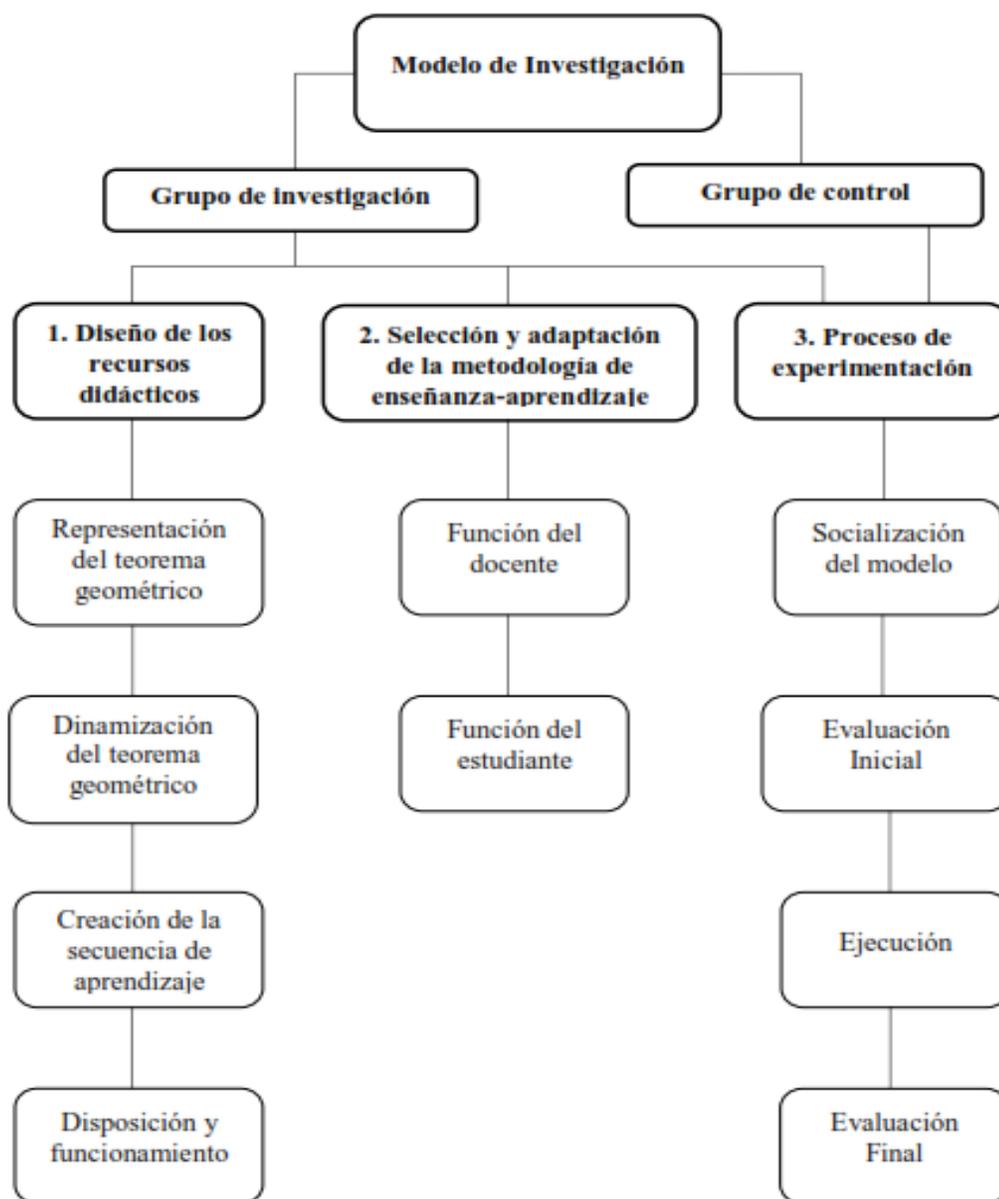
- Ángulos Complementarios (Apéndice E).
- Ángulos Suplementarios (Apéndice F).
- Teorema 1: Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes (Apéndice G).
- Teorema 2: Si en un plano, dos rectas son cortadas por una transversal y si la suma de las medidas de los ángulos internos formados por un mismo lado es igual a π radianes, las dos rectas son paralelas; caso contrario las dos rectas se intersecan entre sí (Apéndice H).
- Teorema 3: Los ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes, formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal, son congruentes (Apéndice I).
- Teorema 4: Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares entre sí (Apéndice J).
- Teorema 5: En un triángulo, la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a 180° o π rad (Apéndice K).
- Teorema 6: El ángulo α formado por las bisectrices es igual a $\pi/2$ más la mitad del ángulo B (Apéndice L).
- Teorema 7: Relación del ángulo X con el ángulo α (Apéndice M).

Estructura de Investigación. Con el objetivo de generar un modelo de enseñanza-aprendizaje que pueda ser utilizado por los docentes y a futuro replicado en otros niveles que

impartan la asignatura de geometría, se establecieron tres líneas investigativas. Las dos primeras involucraron solo al grupo experimental y una tercera compartida con el grupo de control. La esquematización del modelo de investigación propuesto se muestra en la figura 11.

Figura 11

Representación esquemática de la estrategia de investigación EI.

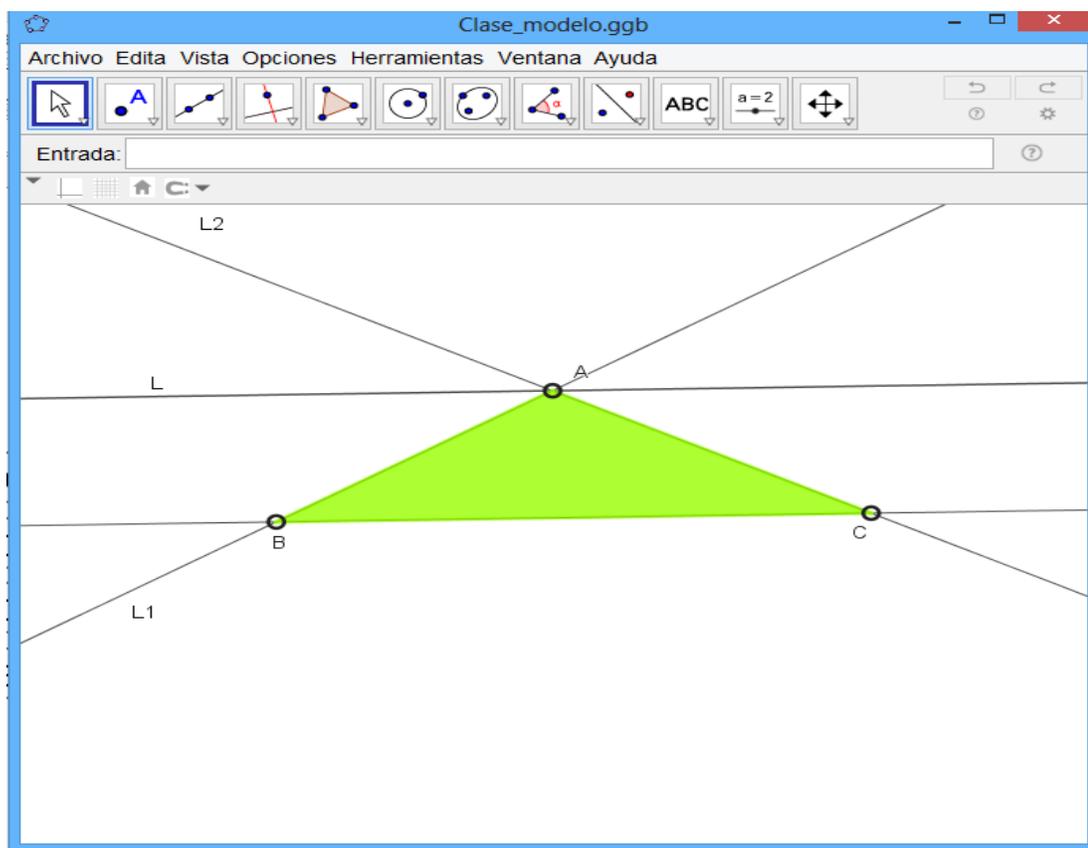


Diseño de Recursos Didácticos. Los recursos didácticos conforman el eje central del modelo de enseñanza-aprendizaje del proceso investigativo. Mientras que para el grupo de control se estableció una metodología tradicional con el uso de instrumentos geométricos (regla, adras, graduador compás), para el grupo experimental se reemplazó los instrumentos geométricos por el software dinámico Geogebra. La utilización del programa y la construcción de los recursos didácticos se sintetiza en las sigue fases:

Representación del Teorema Geométrico. El axioma o teorema geométrico es representado por una figura plana construida directamente en la interfaz gráfica de Geogebra, con ayuda de los íconos de la barra de herramientas.

Figura 12

Representación de un triángulo en el entorno de Geogebra.

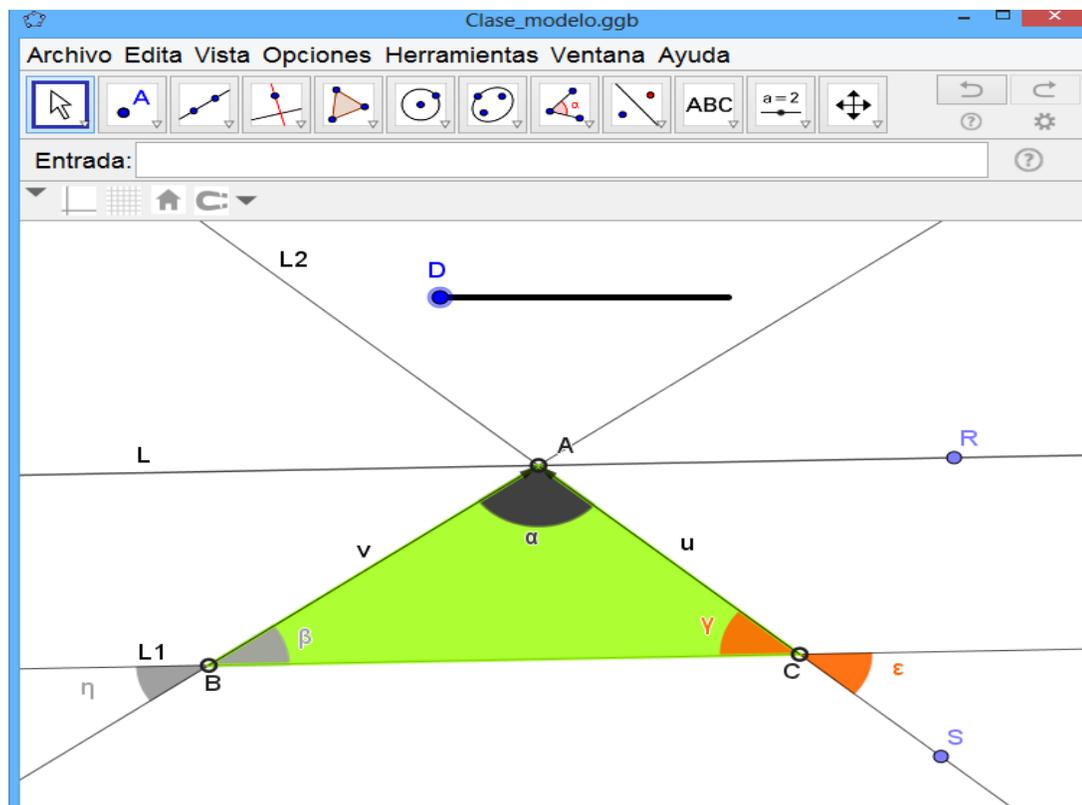


La figura 12 muestra un triángulo formado por tres puntos A, B y C, que son creados tomando el ícono punto y pinchado en la vista gráfica de Geogebra. A partir de allí, se trazan con el “ícono recta”, tres rectas infinitas L1, L2 y BC. Con ayuda del “ícono paralela” se pincha en la recta BC y en punto A, para formar un triángulo limitado por dos rectas paralelas. Utilizando el “ícono polígono” se construye una superficie triangular, pinchando los puntos A, B y C. Posteriormente con un clic derecho sobre el triángulo e ingresando a “propiedades” puede agregar el color.

Dinamización del Teorema Geométrico. La construcción geométrica plana desarrollada en el entorno de Geogebra es dinamizada por medio de áreas, líneas, segmentos de rectas, ángulos y puntos, que son controlados por medio de deslizadores.

Figura 13

Teorema dinámico de la suma de los ángulos internos de todo triángulo.



En la figura 13 se puede apreciar un triángulo que dinamiza sus ángulos η y ϵ hacia α , permitiendo observar que la suma de los ángulos es equivalente a la medida angular de la mitad de una circunferencia (180°). Para dinamizar los ángulos η y ϵ , se crean dos vectores u y v seleccionando el “ícono vector” y pinchando en los puntos B, A y C, A. Posteriormente con el ícono “deslizador”, se pincha en la pantalla gráfica, donde se muestra una segunda pantalla que le permite agregar el nombre D y establecer los valores de recorrido del objeto a ser deslizado; (para el efecto, seleccionar mín=0, máx=1 e incremento=0.1, para asociar los vectores al deslizador, ingresar en la barra de entrada $u \cdot D$ y $v \cdot D$).

Como resultado se observará en la pantalla gráfica dos nuevos vectores, los cuales permitirán guiar el movimiento. Utilizando el ícono traslación se pincha en la recta BC y en uno de los nuevos vectores, generando así una recta paralela que va a ser controlada con el deslizador D. Finalmente, se crean dos puntos auxiliares R y S, en la nueva recta generada y en L2, respectivamente. Con la ayuda del “ícono ángulo” y los puntos R, S e intersección se crea un área angular. De manera similar se debe realizar con la nueva recta generada y L1. Las líneas y puntos auxiliares se pueden ocultar pinchando click derecho sobre los objetos y desactivando la opción objeto visible.

Creación de la Secuencia de Aprendizaje. En función del teorema geométrico se diseñan preguntas abiertas. Cada pregunta garantiza al estudiante, escalar por los niveles de razonamiento de Van Hiele: visualización, análisis, clasificación y deducción formal. Las preguntas deben inducir al estudiante a explorar, descubrir, caracterizar, conjeturar y demostrar atributos y propiedades de la construcción geométrica.

A continuación se muestra un ejemplo de preguntas aplicado al teorema “la suma de los ángulos internos de todo triángulo euclideo es igual a 180° ”.

- 1.- ¿Qué figuras geométricas y términos no definidos observa?
- 2.- ¿Describe algunas propiedades geométricas de la construcción?
- 3- Manipulando los puntos móviles y el deslizador, responde; ¿qué propiedad geométrica ocultan los ángulos?
- 4- ¿Cuál es el teorema implícito en la construcción geométrica?
- 5.- Formalice la demostración.

La pregunta 1 representa el primer nivel de razonamiento de Van Hiele: busca que los estudiantes observen, identifiquen y describan propiedades basadas en sus apariencias globales, aunque sean imprecisas. Por ejemplo, en la figura 13 los estudiantes pueden mencionar que; “se visualiza un triángulo, formado por líneas y puntos”.

La pregunta 2 representa el segundo nivel de razonamiento de Van Hiele: los estudiantes son conscientes de que las figuras geométricas están por partes y propiedades matemáticas. Pueden describir sus partes y enunciar sus propiedades de manera informal, utilizando vocabulario adecuado para componentes y relaciones. Por ejemplo, de la figura 13 ellos pueden mencionar que “se visualiza ángulos”, “se visualiza ángulos opuestos”, “se visualiza ángulos opuestos iguales”, “se visualiza intersecciones entre las rectas”, o “se visualiza líneas que se cortan en un punto en común”.

La pregunta 3 y 4 representan el tercer nivel de razonamiento de Van Hiele: los estudiantes comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático; son capaces de reconocer propiedades que se deducen de otras, utilizan las representaciones físicas para verificar sus deducciones. Por ejemplo, en la figura 13 ellos pueden manipular el deslizador D y mencionar que “los ángulos internos de un triángulo suman 180° ”, “Los ángulos η , α y ϵ suman 180° ”.

El enunciado 5 representa el cuarto nivel de razonamiento de Van Hiele: los estudiantes pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales, realizan demostraciones con varios pasos justificados, pueden construir, no sólo memorizar demostraciones, ven la posibilidad de realizar demostraciones de distintas formas.

Por ejemplo, en la figura 13, los estudiantes podrían demostrar así:

Hipótesis: $\triangle ABC$

Dado un triángulo plano de vértices A, B y C.

Tesis: $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ$

Demostrar que la suma de los ángulos internos del triángulo es igual a 180° .

Demostración:

$\overline{L} \parallel \overline{BC}$

Por construcción: la recta L es paralela a la recta BC.

$\sphericalangle \eta = \sphericalangle \beta$

Por ángulos opuestos: el ángulo η es igual al ángulo β .

$\sphericalangle \varepsilon = \sphericalangle \gamma$

Por ángulos opuestos: el ángulo ε es igual al ángulo γ .

$\sphericalangle \eta + \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \varepsilon = 180^\circ$

Por construcción: los ángulos η , α y ε desplazados a la parte superior del triángulo suman 180° .

De donde:

$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ$

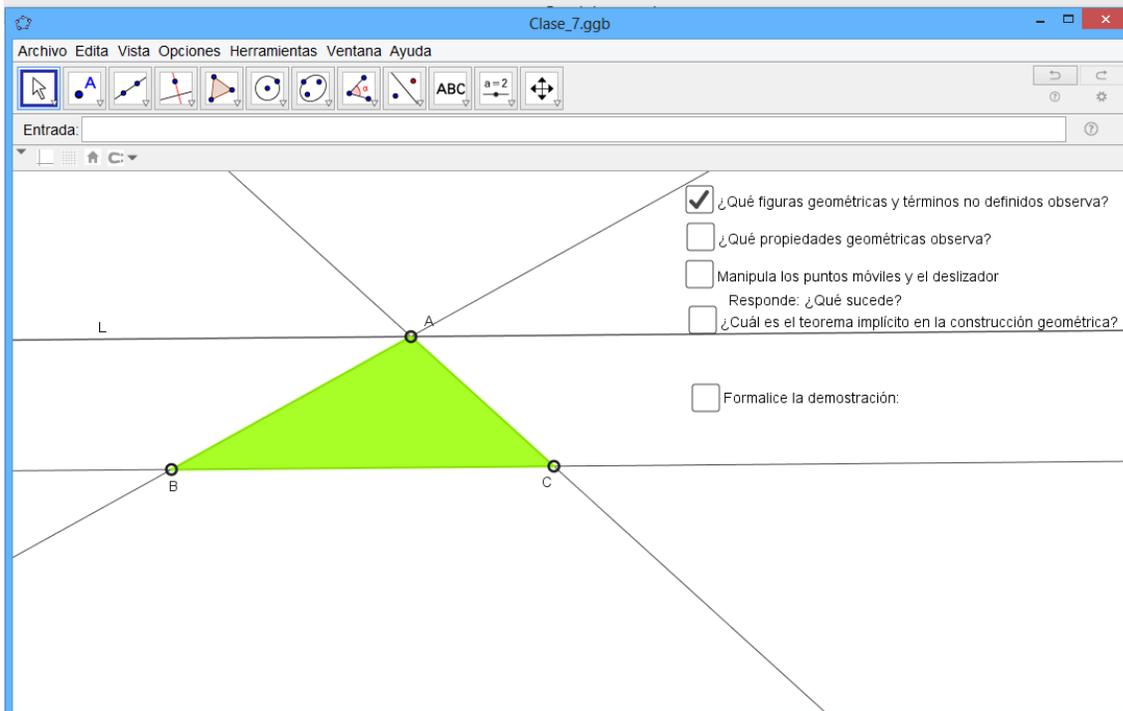
Sustituyendo los valores se ha llegado a demostrar la tesis.

Disposición y funcionamiento de la secuencia de aprendizaje. La metodología propuesta involucra preguntas abiertas que están ligadas al teorema geométrico y buscan descubrir axiomas y propiedades hasta llegar a la demostración. Para tener una visión conjunta, se ha dispuesto su ubicación en el área gráfica del entorno de Geogebra, al costado derecho de la construcción geométrica, evitando intersecciones con las líneas. Cada pregunta está regulada por una casilla de control que permite encriptar información de la construcción o de su respuesta. Las preguntas

deben ser activadas de forma secuencial, dando un tiempo para que el alumno razone y exponga sus ideas.

Figura 14

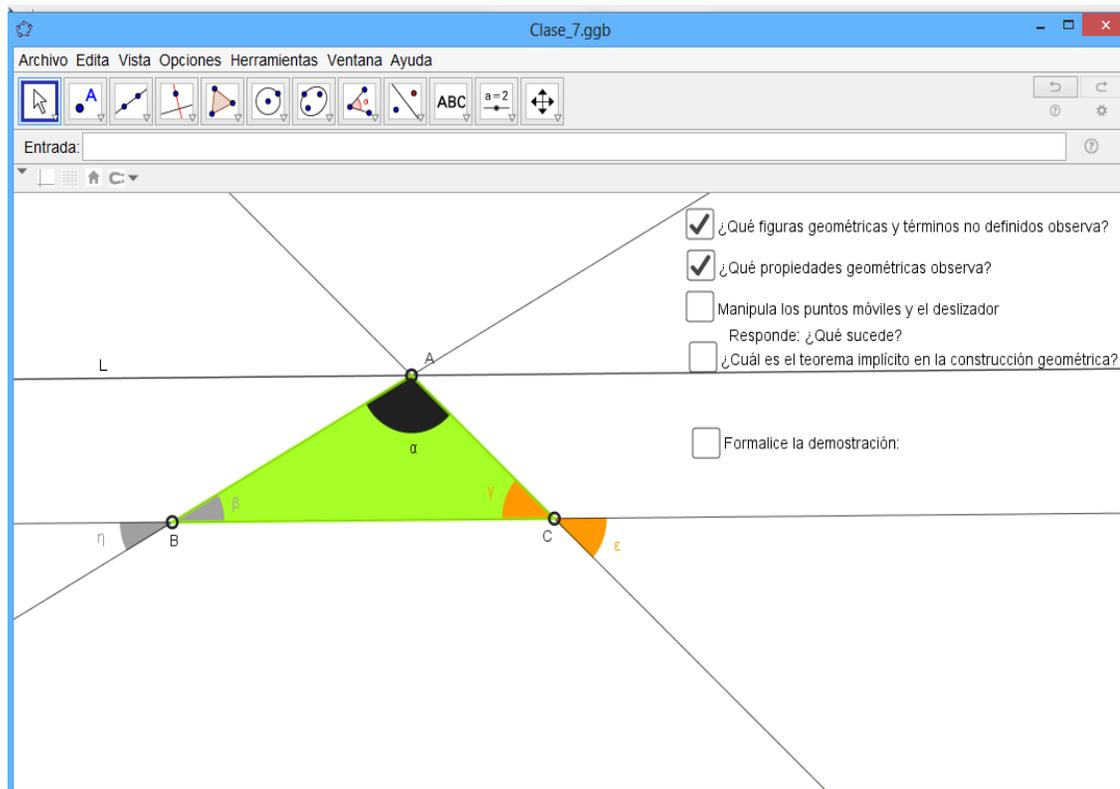
Casilla de control de la pregunta 1.



La figura 14 muestra la disposición de las preguntas en el entorno gráfico de Geogebra. Cuando los estudiantes pulsan la casilla 1 aparecerá en la pantalla una construcción geométrica sin detalles como axiomas y propiedades. La idea principal es que los mismos estudiantes visualicen, identifiquen y describan propiedades globales de la construcción.

Figura 15

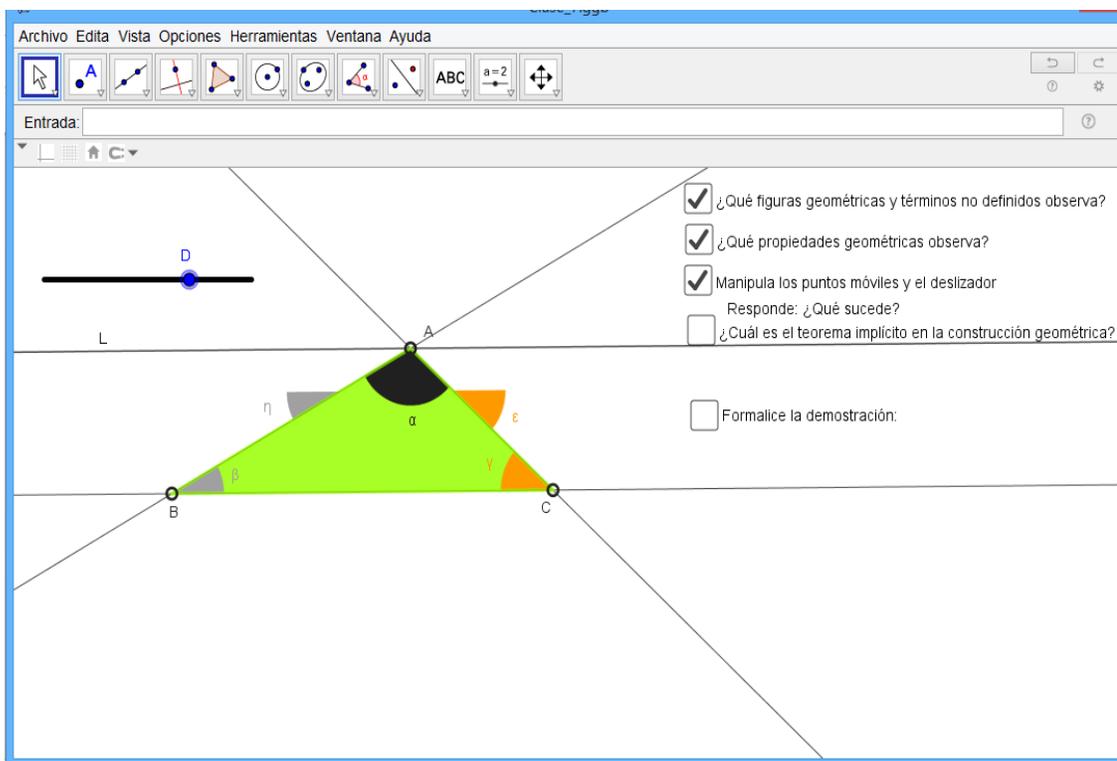
Casilla de control de la pregunta 2.



En la figura 15 se visualiza activas la primera y segunda casilla; la segunda casilla encripta los ángulos internos α , β , γ y los ángulos opuestos al vértice η y ϵ del triángulo. Con estos elementos y propiedades se brinda a los estudiantes un recurso que contribuirá a guiar su razonamiento y pasar al nivel superior del Modelo de Razonamiento de Van Hiele.

Figura 16

Casilla de control de la pregunta 3.



La figura 16 muestra activas la primera, segunda y tercera casilla. La tercera casilla encierrta el deslizador D que permite movilizar los ángulos η y ϵ por las rectas BA y CA, respectivamente. Al final del recorrido los estudiantes pueden visualizar que los ángulos η , α y ϵ unidos, representan la medida angular de la mitad de una circunferencia. Para garantizar que no sea un caso particular los estudiantes pueden movilizar los puntos B y C, que permiten cambiar las medidas de los ángulos y lados del triángulo. De esta forma se trata de dejar en evidencia que para todos los triángulos euclideos la suma de sus ángulos internos es igual a 180° .

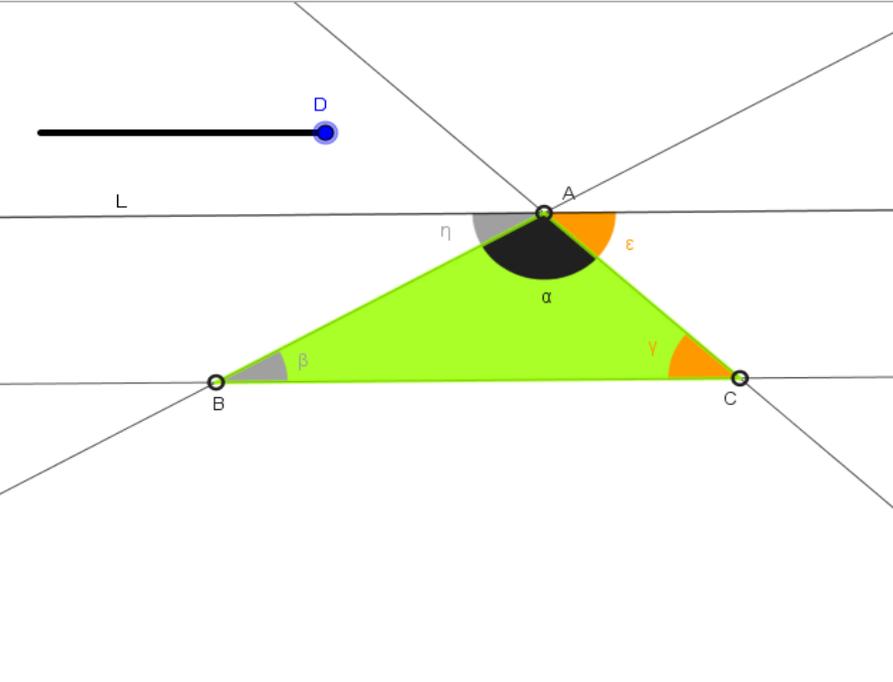
Figura 17

Casilla de control de la pregunta 4 y 5.

Clase_7.ggb

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Entrada:



- ¿Qué figuras geométricas y términos no definidos observa?
- ¿Qué propiedades geométricas observa?
- Manipula los puntos móviles y el deslizador
Responde: ¿Qué sucede?
- ¿Cuál es el teorema implícito en la construcción geométrica?

En un triángulo, la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a 180° o π rad.

- Formalice la demostración:

Hipótesis: $\triangle ABC$

Tesis: $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180^\circ$

Demostración: $\bar{L} \parallel \overline{BC}$ por construcción

$\angle\eta = \angle\beta$ $\angle\epsilon = \angle\gamma$ por ángulos opuestos

$\eta + \alpha + \epsilon = 180^\circ$ por ángulos correspondientes

De donde :

$$\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ$$

En la figura 17 se visualiza activas la primera, segunda, tercera, cuarta y quinta casilla. La cuarta encripta el enunciado del teorema, mientras que la quinta encripta la formalización del teorema. La información que esconden estas casillas sólo tienen a disposición los recursos diseñados para la enseñanza de los docentes.

Selección y Adaptación de la Metodología de Enseñanza-Aprendizaje. Para establecer la metodología de enseñanza-aprendizaje fue necesario seleccionar y adaptar un enfoque educativo, que pueda ser abordado por el docente. El enfoque constructivista cognitivo forma parte de la corriente actual, además es el más promovido en las guías metodológicas del Ministerio de Educación del Ecuador. Concibe el aprendizaje como un proceso autorregulado por la actividad explorativa, creativa e interpretativa del estudiante. Parte de los conocimientos previos, para acceder de forma progresiva y secuencial hacia una meta educativa (nociones geométricas, deducciones de axiomas y propiedades, demostraciones). Una vez seleccionado el enfoque educativo, se relacionó las funciones del estudiante y el docente en el marco de la investigación.

Función del Estudiante en el Proceso de Aprendizaje. El estudiante construye su conocimiento de forma activa. Él no se limita simplemente recibir y copiar conceptos que le brinda su maestro, sino que asume un rol activo, vivo, que le permita interactuar, generar, transferir y a su vez, gestionar conocimiento, de manera colectiva y cooperativa, estableciendo control sobre dicho proceso, teniendo como referente principal a la experiencia, propia y de su maestro. Según el modelo constructivista, un estudiante ideal tiene que cumplir con el siguiente comportamiento:

- Participa activamente en solución de las preguntas.
- Observa características y atributos de la construcción geométrica.
- Comparte sus ideas con sus compañeros.
- Defienda ideas geométricas de forma justificada.

- Acepta e integra las ideas geométricas de sus compañeros y docente.
- Dinamiza y explora cambios en las propiedades geométricas.
- Descubra axiomas y teoremas.
- Pregunta para comprender y clarificar.
- Proponga demostraciones no formales y formales.
- Escucha la guía del docente facilitador.

Funciones del Docente en el Proceso de Enseñanza. El docente es modelador del aprendizaje, busca generar el interés del alumno en todo el desarrollo del proceso educativo. Para poder lograr esto, el docente debe contar con una serie de competencias, a nivel metodológico, pedagógico, didáctico y humano, que le permitan establecer una relación de confianza, entendimiento, respeto, considerando las particularidades de cada estudiante, realimentando su avance y retándolo a “construir con otros”. El papel del docente cumplía las siguientes funciones:

- Motiva constantemente buscando que los estudiantes superen cada una de las preguntas de la secuencia de aprendizaje.
- Promueva el uso adecuado de los términos geométricos.
- Jerarquiza los razonamientos emitidos por los estudiantes en post del descubrimiento del teorema.
- Modela los razonamientos emitidos por los estudiantes en cada una de las preguntas.

Proceso de Experimentación. Una vez construido los recursos didácticos con el software dinámico Geogebra y realizado la selección y adaptación de la metodología de enseñanza-aprendizaje del grupo experimental, se estableció un conjunto de actividades para guiar la experimentación.

Socialización del Modelo. Desarrollada de forma presencial en las instalaciones de la Universidad Regional Amazónica IKIAM, en un tiempo de duración de cuatro horas, contó con la presencia de cuatro docentes y un coordinador, pertenecientes al proceso de Nivelación Emblemática, dos docentes tutores y el proponente de la investigación. Se enfocó en la descripción del uso del software dinámico Geogebra en la demostración geométrica, el funcionamiento de los niveles de razonamiento del modelo geométrico de Van Hiele, la estrategia de investigación haciendo énfasis en el uso del recurso didáctico, las funciones del estudiante y el docente y el proceso que guió la investigación.

Evaluación Inicial. Para la aplicación de la evaluación inicial se diseñó una prueba formal de dos columnas (Apéndice A). Esta consistió en mostrar una figura geométrica anexa a cuatro preguntas abiertas relacionadas con los niveles del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. La primera pregunta relacionada con el primer nivel (visualización), la segunda pregunta se equiparada con el segundo nivel (análisis), la tercera pregunta equivalente al tercer nivel (clasificación) y cuarta pregunta diseñada en correspondencia al cuarto nivel (deducción formal).

Ejecución. La etapa de ejecución involucró el abordaje de un conjunto de teoremas inversos en la geometría euclideana y no euclideana, por medio de dos enfoques metodológicos de enseñanza-aprendizaje, aplicados sobre los grupos de experimentación y de control. En el primer caso, se lo abordó por medio de una metodología constructivista, tomando como recurso de aprendizaje los teoremas pre-diseñados en el entorno de Geogebra. En el segundo caso se utilizó una metodología tradicional, tomando como recurso de aprendizaje la utilización de reglas, escuadras, graduador y compás. El tiempo utilizado para el desarrollo de las clases fue el mismo en los dos casos.

Evaluación final. La evaluación final estaba constituida por dos ejercicios con cuatro preguntas cada uno (Apéndice B). Las preguntas 1.1 y 2.1 representaron el primer nivel (visualización), mientras que la pregunta 1.2 y 2.2 constituyeron el segundo nivel (análisis), por otra parte las preguntas 1.3 y 2.3 representaron el tercer nivel (clasificación) y las preguntas 1.4 y 2.4 constituyeron el nivel 4 del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

Etapa de experimentación Hiperbólica

Orientada a sentar bases sobre un modelo de enseñanza-aprendizaje que involucra el software dinámico y el modelo de razonamiento de Van Hiele, aplicado sobre demostraciones de la geometría no euclidea (hiperbólica), sin llegar a probar su funcionalidad. Esta etapa involucró: la delimitación del campo de estudio, selección de los contenidos temáticos y la creación de una estructura de investigación.

Delimitación del Campo de Estudio. El estudio de la geometría no euclidea es amplio y posee contenidos temáticos con diferentes niveles de complejidad, de los cuales no todos pueden ser trasladados a construcciones geométricas concretas. Razón por la cuales las temáticas abordadas en este trabajo son delimitadas y tomadas solamente en el campo de la geometría hiperbólica, representadas sobre el disco y el plano superior de Poincaré. Es importante mencionar que el software Geogebra ya incluye herramientas que permiten trabajar con las representaciones geométricas en el modelo de Poincaré.

Contenidos Temáticos Hiperbólicos. Los abordados en este apartado son:

- Teorema 1: Equivalencia de la brújula (Apéndice N).
- Teorema 2: Los ángulos de cumbre de un cuadrilátero de Saccheri son congruentes (Apéndice O).

- Teorema 3: El segmento que une los puntos medios de la base y la cumbre de un cuadrilátero de Saccheri es perpendicular tanto a la base como a la cumbre (Apéndice P).
- Teorema 4: La suma de los ángulos internos de triángulo hiperbólico es menor a 180 grados (Apéndice Q).

Estructura de investigación. La estructura desarrollada en esta etapa investigativa, incluye el diseño de los recursos didácticos y la selección y adaptación de la metodología de enseñanza-aprendizaje (figura 11), pero excluye el proceso de experimentación debido a la limitación de tiempo y espacio dentro de los programas curriculares de Nivelación de IKIAM y primer semestre del Instituto Tecnológico Superior Tena.

CAPÍTULO IV

Análisis e Interpretación de Resultados

En este capítulo se presenta los resultados obtenidos en el diseño experimental, siguiendo la secuencia de las hipótesis planteadas al inicio de la investigación. En primera instancia, se muestra los resultados obtenidos en la experimentación realizada en las instalaciones de la Universidad Regional Amazónica IKIAM (URAI). En segunda instancia, se muestra los resultados obtenidos en la experimentación desarrollada en las aulas del Instituto Tecnológico Superior Tena (IT). Finalmente, se muestra los resultados acumulados de las experimentaciones realizadas en las dos Instituciones de Educación Superior (IES).

Para garantizar los resultados obtenidos en las hipótesis de la investigación H1, H2 y H3, se creó la hipótesis de partida H0, con el fin de probar la homogeneidad del razonamiento geométrico de los grupos de control e investigación al inicio de la investigación. La hipótesis H0, H1, H2 y H3, que se probaron en este capítulo y dirigieron la presentación de resultados, se describen a continuación:

H1. El nivel de razonamiento geométrico del grupo experimental es mayor que el de control, medido según la escala del modelo de Van Hiele, luego del proceso de experimentación.

H2. El 50% de estudiantes del grupo experimental alcanzan o superan el nivel 3, según la escala del modelo de Van Hiele, luego del proceso de experimentación.

H3. El 30% de estudiantes del grupo experimental alcanzan el nivel 4, según la escala del modelo de Van Hiele, luego del proceso de experimentación.

Para validar las hipótesis H0 y H1, se fijó las características del diseño experimental (problema de tipo comparativo, grupo de control e investigación, muestras independientes y variable ordinal), criterios que permitieron seleccionar el modelo estadístico de prueba no

paramétrica “U de Mann-Whitney”. Para validar las hipótesis H2 y H3, se agruparon los datos de las evaluaciones finales receptadas a los grupos de investigación y se analizaron por medio de la frecuencia porcentual. Para ejecutar el estadístico de prueba no paramétrica U de Mann-Whitney, se utilizó la versión de prueba del software estadístico SPSS 22.0 IBM.

La prueba de dos columnas se constituyó en el instrumento utilizado para la recolección de datos en la evaluación de partida y final de la investigación. Las pruebas adaptadas con preguntas abiertas de acuerdo a los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele (Apéndice A y B), permitieron de forma inmediata categorizar la muestra en los niveles de razonamiento.

Análisis Estadístico URAI

El desarrollo del proceso experimental realizado en IKIAM se rigió a condiciones que se presentaron al momento de aplicar la propuesta, las cuales se describen a continuación:

- El proceso de experimentación fue introducido en la parte final del curso de matemáticas del programa de nivelación, con el fin de mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes que tenían que rendir el examen supletorio.
- Los grupos inmersos en la investigación, fueron constituidos por dos cursos que laboraban en jornada matutina y vespertina a cargo del docente colaborador. Solamente se tomaron en cuenta a los estudiantes que se quedaron a rendir el examen supletorio de los grupos, situación que origino grupos de experimentación y control de tamaño diferente.
- Las jornadas laborables permitieron llevar las clases entre los grupos de investigación de forma paralela, en cuatro sesiones de trabajo de una hora cada una.
- De manera aleatoria se designó al grupo de la jornada matutina como grupo experimental y al grupo de la jornada vespertina como grupo de control.

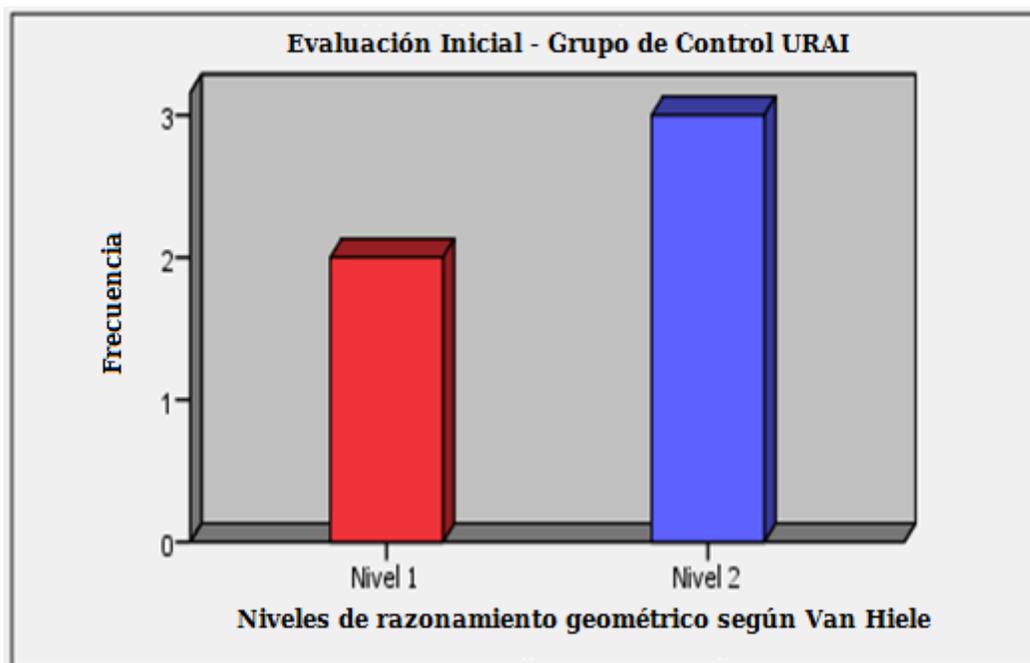
- La metodología de trabajo fue planificada, dirigida y socializada por el docente investigador hacia el docente colaborador en una sesión de dos horas de duración, con el fin de esclarecer dudas.

Evaluación Inicial URAI

Bajo las condiciones anteriores se receptó la evaluación de partida (Apéndice A) a los grupos de control e investigación, obteniendo datos que posteriormente fueron categorizados según los niveles de razonamiento de Van Hiele (tabla 1 y Apéndice C), los mismos que contribuyeron a validar la *hipótesis de partida H0*. Los resultados se muestran a continuación.

Figura 18

Representación de la evaluación inicial del grupo de control URAI.

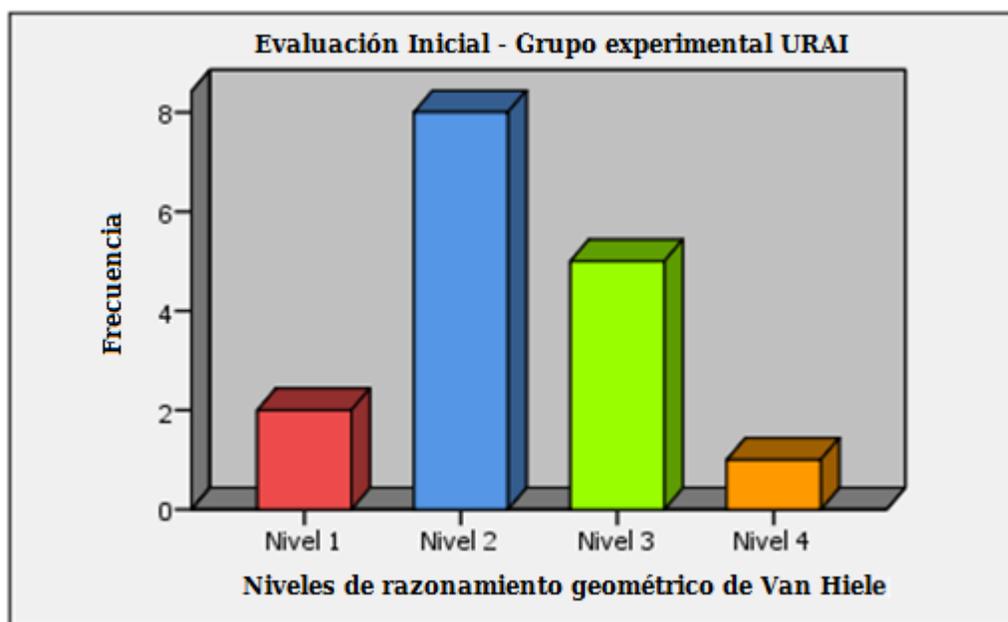


En la figura 18 se presenta un diagrama de barras de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, alcanzados por los 5 estudiantes del grupo de control de IKIAM en la evaluación inicial. La barra de color rojo indica que 2 estudiantes tan solo pueden reconocer la

forma geométrica de la figura, mientras que la barra de color azul que 3 estudiantes reconocen la forma y describen alguna propiedad matemática.

Figura 19

Representación de la evaluación inicial del grupo experimental URAI.



En la figura 19 se muestra un diagrama de barras de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, alcanzados por los 16 estudiantes del grupo experimental de IKIAM, en la evaluación inicial. La barra de color rojo indica que 2 estudiantes tan solo pueden reconocer la forma geométrica de la figura, la barra de color azul que 8 estudiantes reconocen la forma y describen alguna propiedad matemática, la barra de color verde que 5 estudiantes reconocen la forma, describen alguna propiedad matemática y demuestran de manera informal el teorema implícito y la barra de color naranja que 1 estudiante reconoce la forma, describe alguna propiedad matemática y demuestra de manera formal el teorema implícito.

El conjunto de datos obtenidos en la evaluación inicial de los grupos de control e investigación, fueron categorizados según los niveles de razonamiento geométrico del modelo de Van Hiel.

Tabla 4

Resumen de la evaluación inicial URAI.HO.

Grupos	Evaluación				Frecuencia
	Niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele				
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	
Control	2	--	--	--	2
	--	3	--	--	3
Total	2	3	--	--	5
Experimental	--	--	--	1	1
	2	--	--	--	2
	--	--	5	--	5
Total	--	8	--	--	8
	2	8	5	1	16
Total	4	11	5	1	21

Nota: URAI= Universidad Regional Amazónica IKIAM. Grupos de diferente tamaño.

La tabla 4 muestra los resultados de la evaluación inicial del grupo de control y experimental de IKIAM, categorizados según el nivel de razonamiento geométrico de Van Hiele. Estos niveles muestran que los estudiantes del grupo de control sólo alcanzan niveles de razonamiento 1 y 2, mientras que los estudiantes del grupo experimental se distribuyen en todos los niveles. Sin embargo en los dos grupos se puede apreciar una mayor concentración de estudiantes en el nivel 2.

Utilizando el modelo estadístico de prueba no paramétrica U de Mann-Whitney con estos valores, se obtienen los siguientes resultados.

Tabla 5

Resumen de la prueba de hipótesis URAI.H0.

Datos de Entrada	Planteamiento de hipótesis	Ho=H0: El razonamiento geométrico del grupo experimental es similar que el de control, antes de la aplicación de la propuesta metodológica.
		Ha: El razonamiento geométrico del grupo experimental es diferente que el de control, antes de la aplicación de la propuesta metodológica.
	Nivel de significancia	$\alpha = 5\% = 0,05$
	Modelo estadístico de prueba	U de Mann-Whitney
Valores calculados	Valor U calculado	20
	Valor de p calculado	0,071
Regla de decisión		$p > 0,05$ se acepta Ho $p \leq 0,05$ se rechaza Ho y se acepta Ha
Resultados		$p = 0,071 > 0,05 \Rightarrow$ se acepta Ho

Nota: U es la suma de los rangos de la muestra de mayor magnitud. Ho= Hipótesis nula, Ha= Hipótesis alternativa.

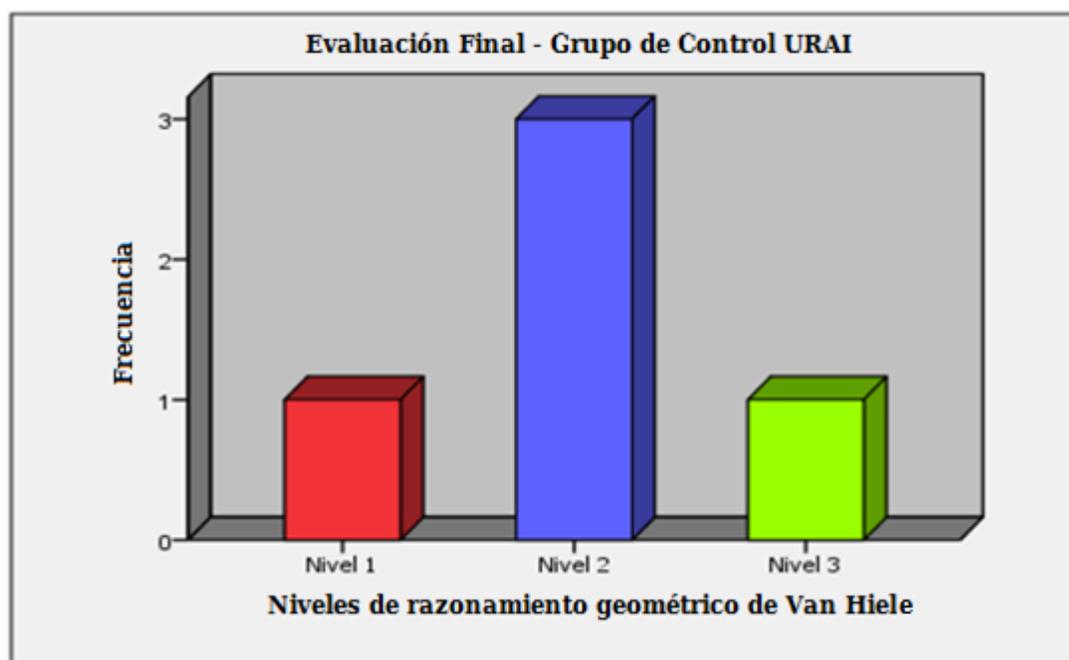
De la tabla 5 se establece que la muestra proporciona evidencia suficiente para asegurar con un 5% de error que el razonamiento geométrico del grupo experimental es similar al de control. Entonces, los grupos partieron con niveles de razonamiento geométrico homogéneos, permitiendo proceder a la ejecución de la experimentación.

Evaluación Final URAI

Luego de haber receptado la evaluación final (Apéndice B) a los grupos de control e investigación, los datos fueron categorizados en los niveles de razonamiento de Van Hiele (tabla 1 y Apéndice D), con el fin de validar la *hipótesis de investigación H1*. Los resultados se muestran a continuación:

Figura 20

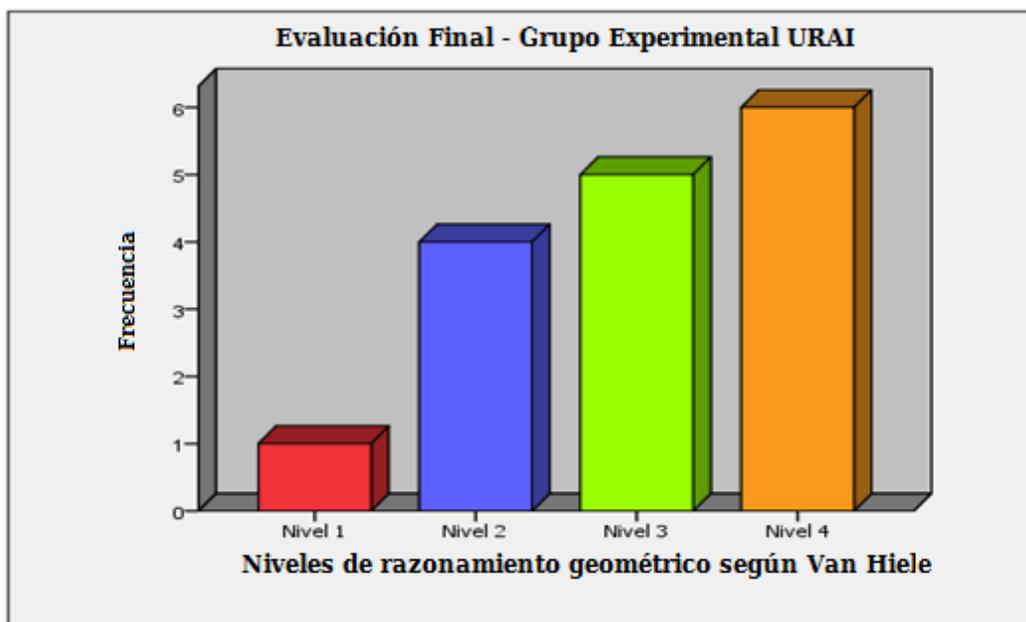
Representación de la evaluación final del grupo de control URAI.



En la figura 20 se muestra un diagrama de barras de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, alcanzados por los 5 estudiantes del grupo de control de IKIAM en la evaluación final. La barra de color rojo indica que 1 estudiante tan solo puede reconocer la forma geométrica de la figura, la barra de color azul que 3 estudiantes reconocen la forma y describen alguna propiedad matemática y la barra de color verde que 1 estudiante reconoce la forma, describe alguna propiedad matemática y demuestra de manera informal el teorema implícito.

Figura 21

Representación de la evaluación final del grupo experimental URAI.



En la figura 21 se muestra un diagrama de barras de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, alcanzados por los 16 estudiantes del grupo experimental de IKIAM, en la evaluación final. La barra de color rojo indica que 1 estudiante tan solo puede reconocer la forma geométrica de la figura, la barra de color azul que 4 estudiantes reconocen la forma y describen alguna propiedad matemática, la barra de color verde que 5 estudiantes reconocen la forma, describen alguna propiedad matemática y demuestran de manera informal el teorema implícito y la barra de color naranja que 6 estudiantes reconocen la forma, describen alguna propiedad matemática y demuestran de manera formal el teorema implícito. El conjunto de datos obtenidos de los grupos de control e investigación en la evaluación final se resume en la tabla 6.

Tabla 6*Resumen de la evaluación final URAI.H1.*

Grupos	Evaluación				Frecuencia
	Niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele				
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	
Control	1	--	--	--	1
	--	--	1	--	1
Total	--	3	--	--	3
	1	3	1	--	5
Experimental	1	--	--	--	1
	--	4	--	--	4
	--	--	5	--	5
Total	--	--	--	6	6
	1	4	5	6	16
Total	2	7	6	6	21

Nota: URAI= Universidad Regional Amazónica IKIAM. Grupos de diferente tamaño.

La tabla 6 muestra un total de 5 estudiantes que integraron el grupo de control y 16 el grupo experimental, haciendo un total de 21 estudiantes categorizados según los niveles de razonamiento de Van Hiele en la evaluación final. Los resultados reportan una concentración de estudiantes en el nivel 2 en el grupo de control, mientras que la concentración de estudiantes en el grupo experimental se ubica en los niveles superiores. Utilizando el modelo estadístico de prueba no paramétrica U de Mann-Whitney con estos valores, se obtienen los resultados descritos en la tabla 7.

Tabla 7

Resumen de la prueba de hipótesis URAI.H1.

Datos de Entrada	Planteamiento de hipótesis	de	Ho: El razonamiento geométrico del grupo experimental es similar que el de control, después de la aplicación de la propuesta metodológica.
			Ha=H1: El razonamiento geométrico del grupo experimental es superior que el de control, después de la aplicación de la propuesta metodológica.
	Nivel de significancia		$\alpha = 5\% = 0,05$
Valores calculados	Estadístico de prueba		U de Mann-Whitney
	Valor U calculado		17
	Valor de p calculado		0,047
Regla de decisión			$p > 0,05$ se acepta Ho $p \leq 0,05$ se rechaza Ho y se acepta Ha
Resultados			$p = 0,047 < 0,05 \Rightarrow$ se rechaza Ho y se acepta Ha

Nota: U es la suma de los rangos de la muestra de mayor magnitud. Ho= Hipótesis nula, Ha= Hipótesis alternativa.

De la tabla 7 se establece que la muestra proporciona evidencia suficiente para asegurar con un 5% de error que el razonamiento geométrico del grupo experimental es superior al de control. Entonces los grupos finalizaron con niveles de razonamiento geométrico heterogéneos.

Discusión de los resultados URAI

Del proceso de experimentación realizado en el campus de la Universidad Regional Amazónica IKIAM, se obtuvieron los datos de la evaluación inicial, que permitieron aplicar el estadístico de prueba y probar la hipótesis H_0 . Además, se obtuvieron los datos de la evaluación final, que permitieron aplicar el estadístico de prueba y probar la hipótesis H_1 . A partir de los resultados de las hipótesis H_0 e hipótesis H_1 , se puede inferir que la investigación partió con similar razonamiento geométrico en los grupos experimentales y finalizó con un razonamiento geométrico favorable al grupo experimental. Entonces se establece que la metodología

desarrollada en el grupo experimental con uso de software dinámico, proporciona un mayor aporte que el método de enseñanza tradicional al momento de elevar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes. Permitió cambiar la concentración de estudiantes de los niveles de razonamiento geométrico inferiores 1 y 2 a los niveles superiores 3 y 4, contribuyó a que 6 estudiantes equivalente al 37,50% alcancen el nivel más alto del modelo de razonamiento de Van Hiele.

Análisis Estadístico IT

El desarrollo del proceso experimental, realizado en Instituto Tecnológico Superior Tena, se rigió a condiciones que se planificaron antes de aplicar la propuesta, las cuales se enlistan a continuación:

- El proceso de experimentación fue ejecutado externo al programa curricular con el fin de establecer independencia del contenido matemático.
- Los grupos inmersos en la investigación, fueron constituidos por estudiantes voluntarios de los primeros semestres de la sección matutina y vespertina.
- La conformación de los grupos experimental y de control se dio posterior a la aplicación de la evaluación de partida, mediante la distribución de estudiantes con similares niveles de razonamiento geométrico.
- Las clases fueron abordadas de manera simultánea en ocho sesiones de una hora cada una en el horario de la tarde.

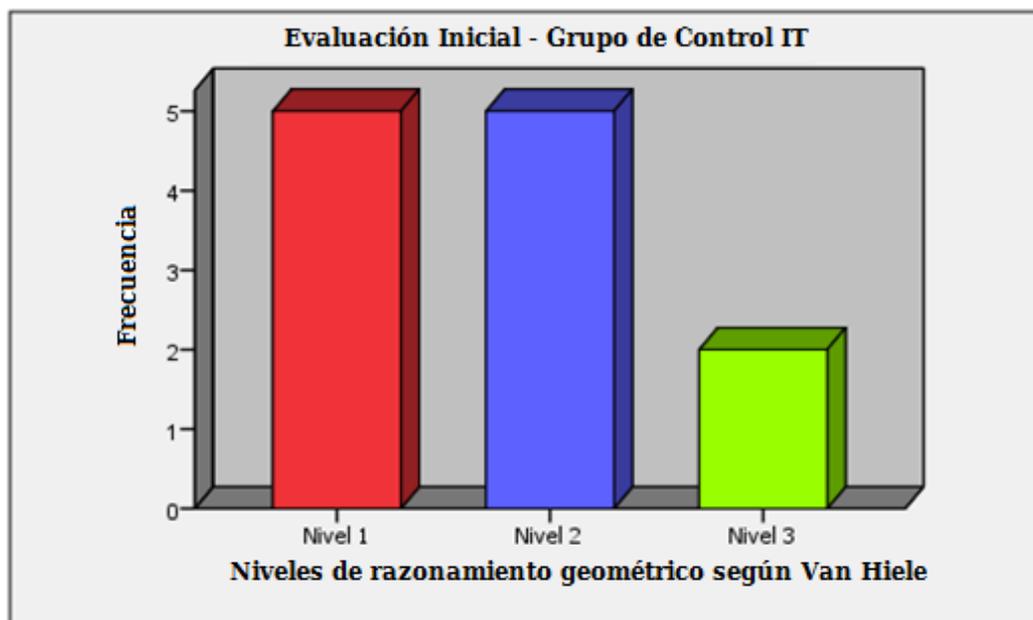
Evaluación Inicial IT

Bajo las condiciones anteriores se receptó la evaluación de partida (Apéndice A) a todos los estudiantes incluidos en la investigación, obteniendo datos que fueron categorizados según los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele (tabla 1 y Apéndice C), con el fin de validar

la hipótesis de partida H_0 . Los resultados de la evaluación se presentan distribuidos en grupos experimental y control, con el fin de observar las características.

Figura 22

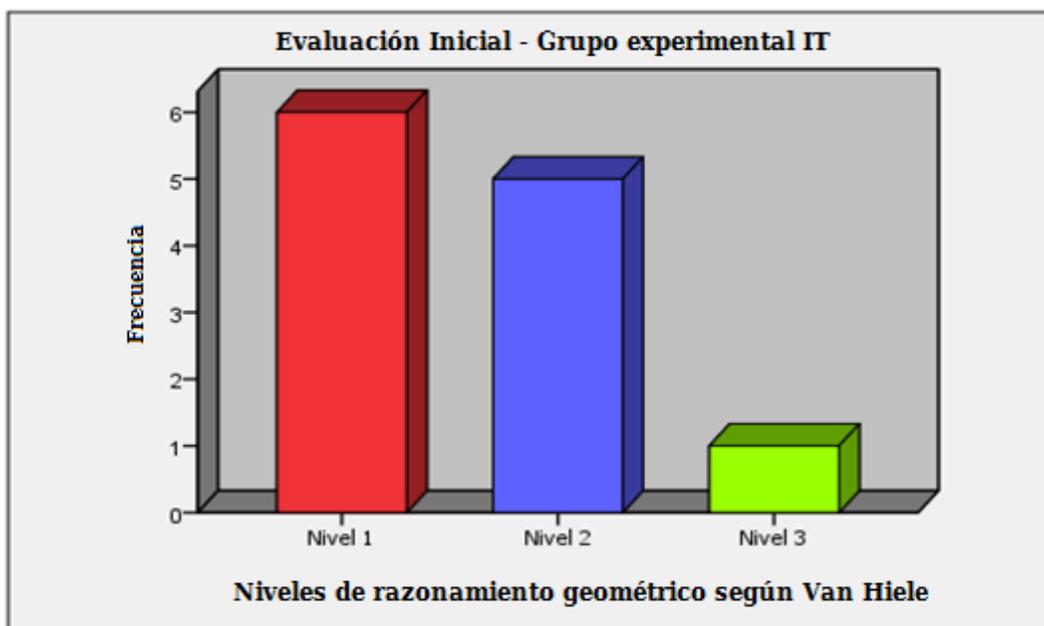
Representación de la evaluación inicial del grupo de control IT.



En la figura 22 se presenta un diagrama de barras de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, alcanzado por los 12 estudiantes del grupo de control del Instituto Tecnológico Superior Tena en la evaluación inicial. La barra de color rojo indica que 5 estudiantes tan solo pueden reconocer la forma geométrica de la figura, la barra de color azul que 5 estudiantes reconocen la forma y describen alguna propiedad matemática, la barra de color verde que 2 estudiantes reconocen la forma, describen alguna propiedad matemática y demuestran de manera informal el teorema implícito.

Figura 23

Representación de la evaluación inicial del grupo experimental IT.



En la figura 23 se muestra un diagrama de barras de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, alcanzado por los 12 estudiantes del grupo experimental en la evaluación inicial. La barra de color rojo indica que 6 estudiantes tan solo pueden reconocer la forma geométrica de la figura, la barra de color azul que 5 estudiantes reconocen la forma y describen alguna propiedad matemática, la barra de color verde que 1 estudiante reconoce la forma, describe alguna propiedad matemática y demuestra de manera informal el teorema implícito.

El conjunto de datos obtenidos en la evaluación inicial de los grupos de control e investigación, fueron categorizados según el modelo de razonamiento de Van Hiele y se resume en la tabla 8.

Tabla 8*Resumen de la evaluación inicial IT.H0.*

Grupos	Evaluación				Frecuencia
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	
Control	--	--	2	--	2
	5	--	--	--	5
	--	5	--	--	5
Total	5	5	2	--	12
Investigación	--	--	1	--	1
	--	5	--	--	5
	6	--	--	--	6
Total	6	5	1	--	12
Total	11	10	3	--	24

Nota: IT= Instituto Tecnológico Superior Tena. Grupos de igual tamaño.

La tabla 8 presenta los resultados de la evaluación inicial organizados en grupo de control e investigación del Instituto Tecnológico Superior Tena, categorizados según el nivel de razonamiento geométrico de Van Hiele. Como los grupos fueron organizados buscando una homogeneidad, se puede apreciar similitudes entre las cantidades de estudiantes que se encuentran en niveles de los grupos de control e investigación.

Utilizando el modelo estadístico de prueba no paramétrica U de Mann-Whitney con estos datos se obtienen los siguientes resultados.

Tabla 9

Resumen de la prueba de hipótesis IT.H0.

Datos de Entrada	Planteamiento de hipótesis	de	Ho=H0: El razonamiento geométrico del grupo experimental es similar que el de control, <i>antes</i> de la aplicación de la propuesta metodológica.
			Ha: El razonamiento geométrico del grupo experimental es diferente que el de control, <i>antes</i> de la aplicación de la propuesta metodológica.
	Nivel de significancia		$\alpha = 5\% = 0,05$
Valores calculados	Estadístico de prueba		U de Mann-Whitney
	Valor U calculado		63,50
	Valor de p calculado		0,590
Regla de decisión			$p > 0,05$ se acepta Ho $p \leq 0,05$ se rechaza Ho y se acepta Ha
Resultados			$p = 0,590 > 0,05 \Rightarrow$ se acepta Ho

Nota: U es la suma de los rangos de la muestra de mayor magnitud. Ho= Hipótesis nula, Ha= Hipótesis alternativa.

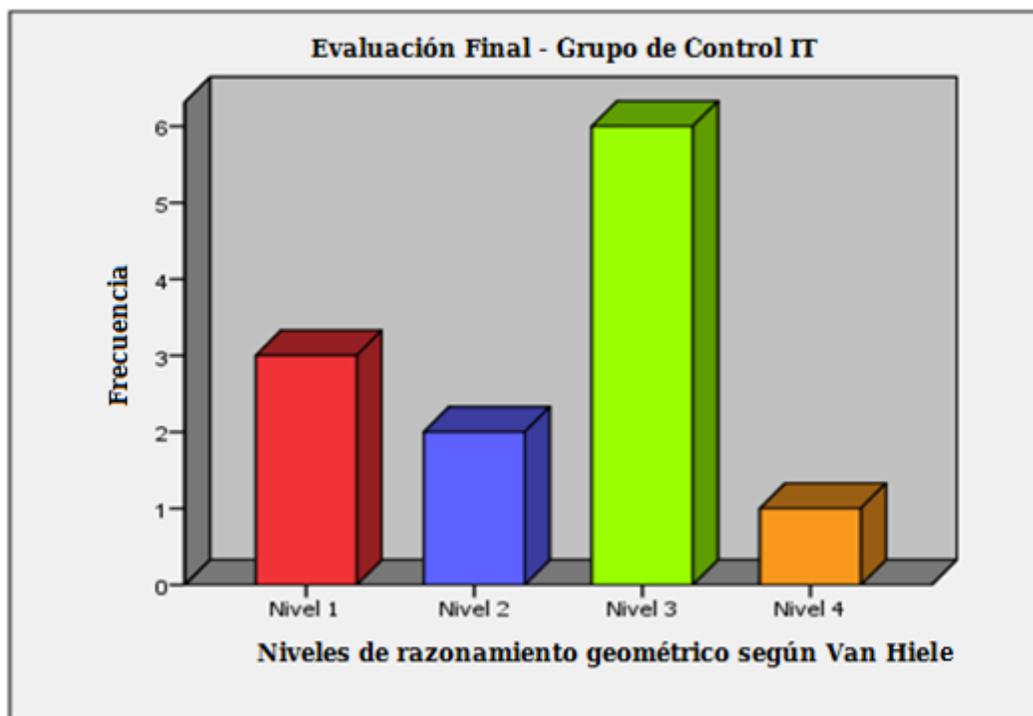
De la tabla 9 se establece que la muestra proporciona evidencia suficiente para asegurar con un 5% de error que el razonamiento geométrico del grupo experimental es similar al de control. Entonces los grupos partieron con niveles de razonamiento geométrico homogéneos, permitiendo proceder al proceso de ejecución de experimentación.

Evaluación Final IT

Luego de haber receptado la evaluación final (Apéndice B) a los grupos de control e investigación, los datos fueron categorizados en los niveles de razonamiento de Van Hiele (tabla 1 y Apéndice D), con el fin de validar la *hipótesis de investigación H1*. Los resultados se muestran a continuación.

Figura 24

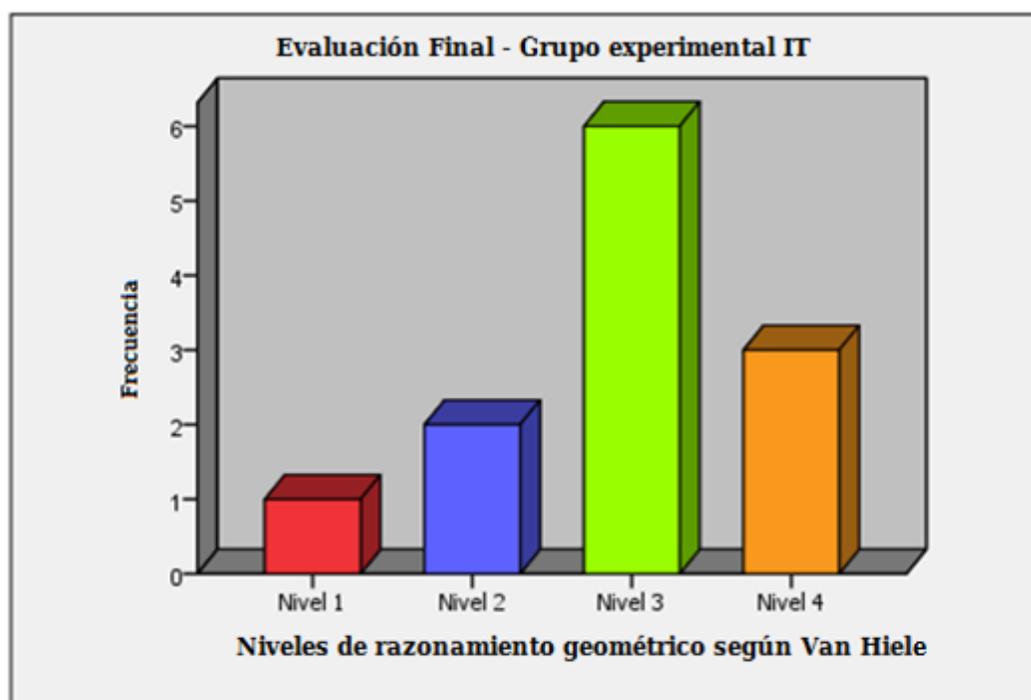
Representación de la evaluación final del grupo de control IT.



En la figura 24 se presenta un diagrama de barras de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, alcanzado por los 12 estudiantes del grupo de control del Instituto Tecnológico Superior Tena en la evaluación final. La barra de color rojo indica que 3 estudiantes tan solo pueden reconocer la forma geométrica de la figura, la barra de color azul que 2 estudiantes reconocen la forma y describen alguna propiedad matemática, la barra de color verde que 6 estudiantes reconocen la forma, describen alguna propiedad matemática y demuestran de manera informal el teorema implícito y la barra de color naranja que 1 estudiante reconoce la forma, describe alguna propiedad matemática y demuestra de manera formal el teorema implícito.

Figura 25

Representación de la evaluación final del grupo experimental IT.



En la figura 25 se muestra un diagrama de barras de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, alcanzado por los estudiantes del grupo experimental del Instituto Tecnológico Superior Tena en la evaluación final. La barra de color rojo indica que 1 estudiante tan solo puede reconocer la forma geométrica de la figura, la barra de color azul que 2 estudiantes reconocen la forma y describen alguna propiedad matemática, la barra de color verde que 6 estudiantes reconocen la forma, describen alguna propiedad matemática y demuestran de manera informal el teorema implícito y la barra de color naranja que 3 estudiantes reconocen la forma, describen alguna propiedad matemática y demuestran de manera formal el teorema implícito.

El conjunto de datos obtenidos de la evaluación final de los grupos de control e investigación se resume en la tabla 10.

Tabla 10*Resumen de la evaluación final IT.H1.*

Grupos	Evaluación				Frecuencia
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	
Control	--	--	--	1	1
	--	2	--	--	2
	3	--	--	--	3
Total	--	--	6	--	6
	3	2	6	1	12
Investigación	1	--	--	--	1
	--	2	--	--	2
	--	--	--	3	3
Total	--	--	6	--	6
	1	2	6	3	12
Total	4	4	12	4	24

Nota: IT= Instituto Tecnológico Superior Tena. Grupos de igual tamaño.

La tabla 10 muestra un total de 12 estudiantes que integraron el grupo de control y 12 el grupo experimental, haciendo un total de 24 estudiantes categorizados según los niveles de razonamiento de Van Hiele en la evaluación final. En los dos grupos se aprecia igual número de estudiantes en los niveles 2 y 3, mientras que varía en los niveles 1 y 4.

Utilizando el modelo estadístico de prueba no paramétrica U de Mann-Whitney con estos datos se obtienen los siguientes resultados.

Tabla 11

Resumen de la prueba de hipótesis IT.H1.

Datos de Entrada	Planteamiento de hipótesis	Ho: El razonamiento geométrico del grupo experimental es similar que el de control, <i>después</i> de la aplicación de la propuesta metodológica.
		Ha=H1: El razonamiento geométrico del grupo experimental es superior que el de control, <i>después</i> de la aplicación de la propuesta metodológica.
	Nivel de significancia	$\alpha = 5\% = 0,05$
Valores calculados	Estadístico de prueba	U de Mann-Whitney
	Valor U calculado	52
	Valor de p calculado	0,214
Regla de decisión		$p > 0,05$ se acepta Ho $p \leq 0,05$ se rechaza Ho y se acepta Ha
Resultados		$p = 0,214 > 0,05 \Rightarrow$ se acepta Ho

Nota: U es la suma de los rangos de la muestra de mayor magnitud. Ho= Hipótesis nula, Ha= Hipótesis alternativa.

De la tabla 11 se establece que la muestra proporciona evidencia suficiente para asegurar con un 5% de error que el razonamiento geométrico del grupo experimental es similar que el de control. Entonces los grupos finalizaron con niveles de razonamiento geométrico homogéneo. Sin embargo, se puede observar en la tabla 10 que en la metodología tradicional desarrollada en el grupo de control, tan solo 1 estudiante alcanza el nivel más alto del modelo de razonamiento de Van Hiele, mientras en la misma tabla se observa que la metodología propuesta con software dinámico, 3 estudiantes alcanzan el nivel más alto del modelo de razonamiento de Van Hiele.

Discusión de resultados IT

Del proceso de experimentación realizado en el campus del Instituto Tecnológico Superior Tena, se obtuvieron los datos de la evaluación inicial, posteriormente se aplicó el estadístico de prueba y se probó la hipótesis H_0 y con los datos arrojados en la evaluación final, se aplicó el estadístico de prueba y se probó la hipótesis H_1 . A partir de los resultados de las hipótesis H_0 e

hipótesis H1, se puede inferir que la investigación partió con similar razonamiento geométrico en los grupos experimentales y finalizó con un razonamiento geométrico similar de acuerdo al modelo estadístico de prueba.

Sin embargo en la evaluación final se evidencia que la concentración de estudiantes en los niveles de razonamiento geométrico inferiores 1 y 2 del grupo de control fue de 5 equivalentes al 41,67% del total, mientras que en el grupo experimental fue de 3 equivalentes al 25% del total y la concentración de estudiantes en los niveles de razonamiento geométrico superiores 2 y 3 del grupo de control fue de 7 equivalentes al 58,33% del total, mientras que en el grupo experimental fue de 9 equivalentes al 75% del total. Resultados que al final favorecen a la metodología desarrollada en el grupo de investigación con uso de software dinámico.

Análisis Estadístico IES

Con el fin de generalizar los resultados alcanzados en el diseño experimental de las dos Instituciones de Educación Superior, se acumularon los datos obtenidos en las experimentaciones realizadas en la Universidad Regional Amazónica IKIAM y en el Instituto Tecnológico Superior Tena.

Tabla 12

Resumen de las evaluaciones realizadas en las IES.

			Evaluación		Total
			Inicial	Final	
Control	Nivel de razonamiento según Van Hiele	Nivel 1 Frecuencia	7	4	11
		Porcentaje	41,18%	23,53%	
	Nivel 2	Frecuencia	8	5	13
		Porcentaje	47,06%	29,41%	
	Nivel 3	Frecuencia	2	7	9
		Porcentaje	11,76%	41,18%	
	Nivel 4	Frecuencia	0	1	1
		Porcentaje	0,00%	5,88%	
Total		Frecuencia	17	17	34
Experimental	Nivel de razonamiento según Van Hiele	Nivel 1 Frecuencia	8	2	10
		Porcentaje	28,57%	7,14%	
	Nivel 2	Frecuencia	13	6	19
		Porcentaje	46,43%	21,43%	
	Nivel 3	Frecuencia	6	11	17
		Porcentaje	21,43%	39,29%	
	Nivel 4	Frecuencia	1	9	10
		Porcentaje	3,57%	32,14%	
Total		Frecuencia	28	28	56

Nota: IES= Instituciones de Educación Superior. Compendio de las experimentaciones realizadas en IKIAM y en el Instituto Tecnológico Superior Tena.

La tabla 12 muestra los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele, alcanzado por los grupos de control e investigación de la Universidad Regional Amazónica

IKIAM y el Instituto Tecnológico Superior Tena, en la evaluación inicial y final. Utilizando el modelo estadístico de prueba no paramétrica U de Mann-Whitney con estos datos se obtienen los siguientes resultados.

Tabla 13

Resumen de las pruebas de hipótesis IES.H0.

Datos de Entrada	Planteamiento de hipótesis	Ho=H0: El razonamiento geométrico de los grupos experimentales es similar que los de control, antes de la aplicación de la propuesta metodológica.
		Ha: El razonamiento geométrico de los grupos experimentales es diferente que los de control, antes de la aplicación de la propuesta metodológica.
	Nivel de significancia	$\alpha = 5\% = 0,05$
Valores calculados	Estadístico de prueba	U de Mann-Whitney
	Valor U calculado	192,000
	Valor de p calculado	0,244
Regla de decisión		$p > 0,05$ se acepta Ho $p \leq 0,05$ se rechaza Ho y se acepta Ha
Resultados		$p = 0,244 > 0,05 \Rightarrow$ se acepta Ho

Nota: IES= Instituciones de Educación Superior. U es la suma de los rangos de la muestra de mayor magnitud. Ho= Hipótesis nula, Ha= Hipótesis alternativa.

De la tabla 13 se establece que, de acuerdo a los datos agrupados de la evaluación inicial, la muestra proporciona evidencia suficiente para asegurar con un 5% de error que el razonamiento geométrico de los grupos de investigación es similar que los grupos de control, entonces de la agrupación de datos de las dos Instituciones de Educación Superior, se deduce que los grupos de investigación y control presentaron niveles de razonamiento geométrico homogéneos.

Además, de la tabla 12 se tomaron los valores totales de las evaluaciones finales de los grupos de control e investigación y posteriormente expuestos a la prueba estadística U de Mann-Whitney obteniendo los resultados representados en la tabla 14.

Tabla 14

Resumen de las pruebas de hipótesis IES.H1.

Datos de Entrada	Planteamiento de hipótesis	Ho: El razonamiento geométrico de los grupos experimentales es similar que los de control, después de la aplicación de la propuesta metodológica.
		Ha=H1: El razonamiento geométrico de los grupos experimentales es superior que los de control, después de la aplicación de la propuesta metodológica.
	Nivel de significancia	$\alpha = 5\% = 0,05$
Valores calculados	Estadístico de prueba	U de Mann-Whitney
	Valor U calculado	147,000
	Valor de p calculado	0,025
Regla de decisión		p > 0,05 se acepta Ho p ≤ 0,05 se rechaza Ho y se acepta Ha
Resultados		p = 0,025 < 0,05 => se rechaza Ho y se acepta Ha

Nota: IES= Instituciones de Educación Superior. U es la suma de los rangos de la muestra de mayor magnitud. Ho= Hipótesis nula, Ha= Hipótesis alternativa.

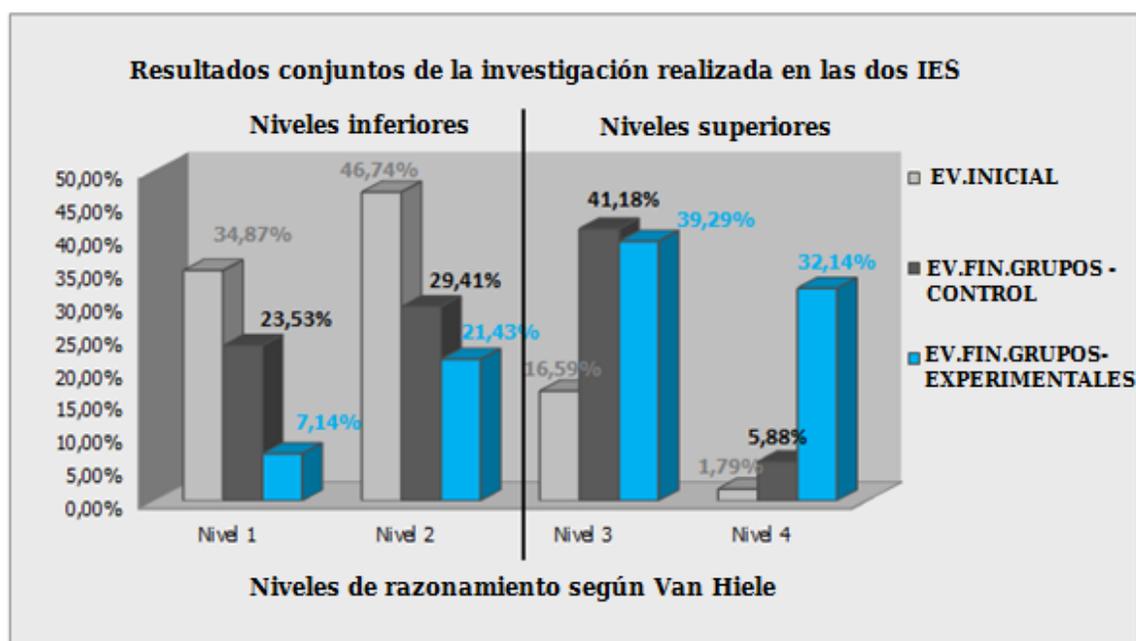
De la tabla 14 se establece que de acuerdo a los datos agrupados de la evaluación final. La muestra proporciona evidencia suficiente para asegurar con un 5% de error que el razonamiento geométrico de los grupos de investigación es superior que los de control. Entonces de la agrupación de datos de las dos Instituciones de Educación Superior, se deduce que los grupos de investigación y control finalizaron con niveles de razonamiento geométrico heterogéneo.

Discusión de resultados IES

De las experimentaciones realizadas en las dos Instituciones de Educación Superior se probó que inicialmente los grupos de control e investigación, formaron parte de un mismo grupo de estudio y que luego de la aplicación de las metodologías de enseñanza-aprendizaje los grupos se diferenciaron en el nivel de razonamiento geométrico.

Figura 26

Resultados de los grupos en el proceso de investigación de las IES.



Nota: IES= Instituciones de Educación Superior. EV= Evaluación. FIN= Final.

En la figura 26 se aprecia en la evaluación final que la concentración de estudiantes en los niveles de razonamiento geométrico 1 y 2 de los grupos de control fue de 9 estudiantes equivalentes al 52,94% del total, mientras que la suma de los grupos de investigación fue de 8 estudiantes equivalentes al 28,57% del total y la concentración de estudiantes en los niveles de razonamiento geométrico superiores 3 y 4 del grupo de control fue de 8 estudiantes equivalentes al 47,18% del total, mientras que en el grupo experimental fue de 20 estudiantes equivalentes al 71,43% del total. Entonces al momento de elevar el razonamiento geométrico, la metodología con uso de software dinámico, desarrollada en el grupo experimental, difiere de forma favorable en un 24,37% frente a la metodología tradicional desarrollada con el grupo de control.

En la misma figura se puede visualizar que en promedio más del 75 % del total de estudiantes que participaron en la evaluación inicial se ubicaron en los niveles inferiores del

modelo de razonamiento de Van Hiele, mientras que en la evaluación final del grupo de control este porcentaje se reduce alrededor de 50%, pero en la evaluación final del grupo experimental este porcentaje se reduce a más del 30%.

La metodología con uso de software dinámico, desarrollada en el grupo experimental, permite variar aproximadamente un 45% de los niveles inferiores a los niveles superiores del modelo de razonamiento de Van Hiele, aproximadamente 20% más que la metodología tradicional. Adicionalmente aporta a ubicar a más del 50% de los estudiantes en los niveles superiores del modelo de Van Hiele y a más del 30% en el nivel máximo.

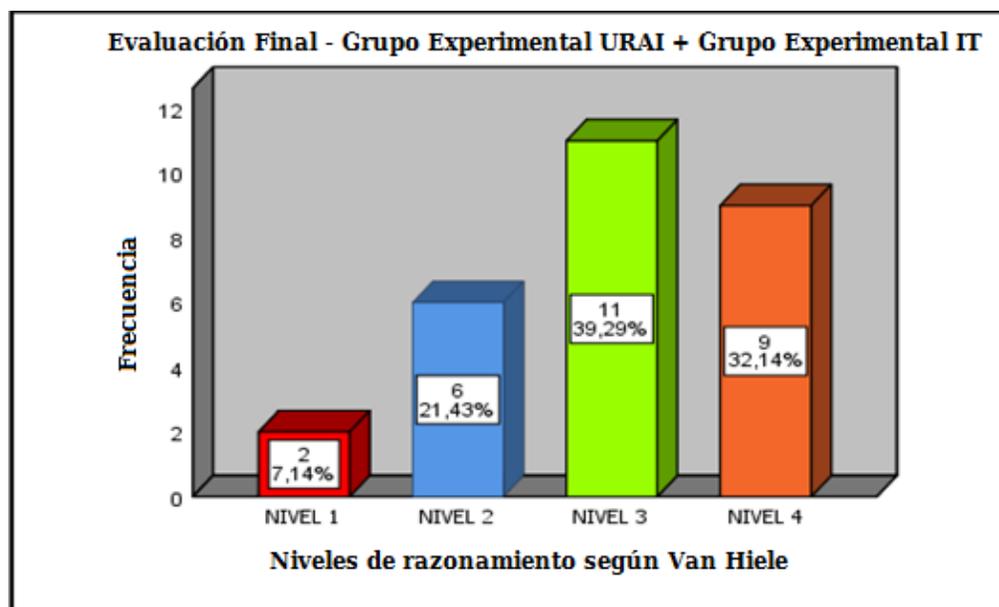
Análisis de las Hipótesis H2 Y H3

Para probar la hipótesis H2 (El 50% de estudiantes de los grupos de investigación alcanzan o superan el nivel 3, según el modelo de Van Hiele) y H3 (El 30% de estudiantes de los grupos de investigación alcanzan el nivel 4, según el modelo de Van Hiele), se utilizaron los datos acumulados de la evaluación final de los grupos de investigación de las dos Instituciones de Educación Superior de la tabla 12.

A partir de la figura 27 se infiere que la hipótesis H2 se cumple, en vista que en el porcentaje de estudiantes de los grupos de investigación que alcanzan o superan el nivel 3 y 4 en la evaluación final es mayor que 50% ($71,43\% > 50\%$). De igual forma la hipótesis H3 se cumple, en vista que en el porcentaje de los estudiantes del grupo experimental que superan el nivel 3 en la evaluación final es mayor que 30% ($32,14\% > 30\%$).

Figura 27

Representación de la evaluación final de los grupos de investigación de las IES.



Conclusión de La Hipótesis H1, H2 Y H3

A partir de las dos experimentaciones realizadas en las Instituciones de Educación Superior (Universidad Regional Amazónica IKIAM y en el Instituto Tecnológico Superior Tena), se probó con los datos agrupados de la evaluación final, la hipótesis H1. Mediante el estadístico de prueba no paramétrica U de Mann-Whitney, se obtuvo que el nivel de razonamiento geométrico de los grupos de investigación fue superior que el nivel de razonamiento geométrico de los grupos de control. Por lo tanto, la metodología de enseñanza de las demostraciones geométricas por medio de software dinámico, contribuye en mayor medida a elevar el nivel de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele.

La mayor parte de estudiantes que ingresan a la Universidad Regional Amazónica IKIAM y al Instituto Tecnológico Superior Tena, provienen de una población de bajo rendimiento académico en el componente matemático, como se mostró en la figura 1, información que se

corroborar con los resultados de la evaluación inicial de los grupos de control y experimental de la figura 24. A pesar de este contexto desfavorable, se logró establecer una metodología con uso de software dinámico, que se proporcionó un mayor nivel de razonamiento geométrico, brindó la capacidad de realizar demostraciones geométricas formales e informales a la mayor proporción de estudiantes y permitió que cerca de las tres cuartas partes dominen el complicado desarrollo de las demostraciones elementales de la geometría Euclídea.

CAPÍTULO V

Conclusiones y Proyecciones

Mediante el desarrollo de nuestra investigación se adaptó una metodología de enseñanza- aprendizaje para el abordamiento de las demostraciones geométricas Euclideas y no Euclideas, basada en el uso del software dinámico Geogebra, el enfoque constructivista y el modelo de razonamiento de Van Hiele. Se diseñó un esquema algorítmico para la construcción de los recursos didácticos-tecnológicos, que permitió representar los teoremas geométricos Euclideos y no Euclideos, por medio del software dinámico Geogebra. En los recursos didáctico-tecnológicos, creados en el entorno de Geogebra, se incluyeron preguntas relacionadas con los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele, cada pregunta se convirtió en un peldaño para escalar en los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele. Por medio de dos etapas de experimentación se probó la efectividad de la metodología de enseñanza-aprendizaje en el tratamiento de las demostraciones Euclideas.

En este contexto se establecieron las siguientes conclusiones y proyecciones:

- Nuestra metodología desarrollada con uso de software dinámico, permite ubicar a más del 50% de los estudiantes en los niveles superiores del modelo de Van Hiele. Esto quiere decir que más del 50% de estudiantes han desarrollado habilidades de razonamiento geométrico y capacidades para demostrar teoremas de la geometría Euclidea. Además, la nueva metodología permite ubicar a más del 30% de los estudiantes en el nivel superior del modelo de Van Hiele. Esto quiere decir que más del 30% de estudiantes han desarrollado habilidades de razonamiento geométrico y capacidades para demostrar de manera formal teoremas de la geometría Euclidea.

- Nuestro trabajo de investigación generó un útil recurso didáctico-tecnológico de 10 teoremas Euclideos y 5 teoremas no Euclideos de inicios de la geometría hiperbólica, desarrollados con el software Geogebra. Nuestra metodología algorítmica es flexible y brinda la posibilidad de crear nuevos recursos de cualquier teorema que pueda ser representado por medio de una figura.
- Con el desarrollo de nuestra propuesta metodológica de enseñanza-aprendizaje, se establece el inicio del tratamiento de las demostraciones geométricas hiperbólicas, por medio del software dinámico y el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Además, se proyecta como una investigación interesante el extender este trabajo al abordaje de las demostraciones en el campo de la geometría elíptica, descriptiva, espacial, proyectiva y fractal.
- Las habilidades y destrezas adquiridas en la elaboración de los recursos dinámicos en el software Geogebra a lo largo de la investigación, se proyecta a formar parte del desarrollo de elementos dinámicos, como praxis de las asignaturas de matemáticas en el programa de formación de profesores de la Universidad Regional Amazónica IKIAM en el año 2019.
- Como resultado de nuestro trabajo investigativo sobre las demostraciones en el área de la geometría Euclidea se presentó la ponencia denominada: “Una propuesta para la enseñanza de la Geometría basado en el modelo de razonamiento de Van Hiele y el software dinámico Geogebra”, en el VIII Simposio de Matemática y Educación Matemática, que se realizó del 9 al 10 de febrero del 2018, en la sede de Federman, de la Universidad Antonio Nariño de Bogotá. Además, se está trabajando en la ponencia denominada: “Desarrollo de recursos dinámicos para la enseñanza de elementos de

geometría no euclidiana”, la misma que será remitida a la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 33) a desarrollarse el 7 al 12 de julio de 2019 en la Universidad de Ciencias Informáticas, la Habana, Cuba.

BIBLIOGRAFÍA

- Adela, J., & Gutierrez, A. (2009). *Una Propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiel*. Sevilla: Alfar.
- Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de Establecimientos Municipalizados. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(2), 173.
- Arrieta, J., & Bravo, M. (2003). Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas. *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 135-160.
- Barbe, J. (2012). *UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE*. Recuperado el 05 de 05 de 2018, de DEPARTAMENTO DE FÍSICA: http://fisica.usach.cl/sites/fisica/files/tesis_oscarbarraza_rolandoreyes-2012.pdf
- Bautista, J. (1995). Lobachevski Descubridor de la Geometría Hiperbólica. *Teoría y Aplicaciones*, 12.
- Bravo, M. (2012). *Cómo enseñar las demostraciones geométricas*. Madrid : Academia española.
- Cantoral, R. (1989). Tipogénesis de un concepto matemático: La Serie de Taylor. *Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa*, 8.
- Carrión, D. P. (2013). Geometría Hiperbólica en la Obra de Escher. *VII CIBEM*, 12.
- Corberán, G. A. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la enseñanza secundaria. Basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Secretaría General Técnica Centros de Publicaciones.

Elvira Mifsud. (28 de 06 de 2010). *Observatorio Tecnológico*. Recuperado el 05 de 06 de 2018, de

Matemáticas y las TIC - GEOGEBRA:

<http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/fr/equipamiento-tecnologico/didactica-de-la-tecnologia>

Flórez, A. (Febrero de 2012). *Campus Virtual Univalle*. Obtenido de

http://campusvirtual.univalle.edu.co/moodle/pluginfile.php/369396/mod_resource/content/0/Clases/Pruebas_de_hipotesis.pdf

Fouz, F. (2005). *Generalitat de Catalunya*. Recuperado el 02 de 06 de 2018, de XTEC - Xarxa

Telemàtica Educativa de Catalunya:

<http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-fouz.pdf>

Gamboa, R. (05 de 12 de 2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la

perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 14(2), 18.

Gamboa, R. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de

los estudiantes. *Educare*, 17.

Geogebra. (s.f). *Iniciación al Geogebra*. Recuperado el 11 de 04 de 2018, de Características de

Geogebra: <https://sites.google.com/site/geogebra1112/caracteristicas-de-geogebra>

Gutiérrez, Á. (07 de 11 de 2011). *Universidad de Los Andes*. Recuperado el 20 de 02 de 2017, de

Repositorio Digital de documentos en Educación Matemática:

<file:///C:/Users/USER/Desktop/TESIS%20IKIAM/GUTIERRES.pdf>

Gutiérrez, A. (2018). *Cefire*. Recuperado el 02 de 06 de 2018, de Conselleria de Educación,

Investigación, Cultura y Deporte:

file:///C:/Users/USER/Documents/Downloads/geometria_demostracion_ordenadores.pdf

IKIAM. (02 de 2017). *Proyectos de Investigación*. Recuperado el 20 de 03 de 2017, de Educación:

<http://ikiam.edu.ec/index.php/es/educacion>

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2016). *Ser Bachiller*. Obtenido de Resultados por año

lectivo Zona : <https://cloud.evaluacion.gob.ec/dagireportes/sbciclo16/zona/2.pdf>

International GeoGebra Institute. (2017). *Geogebra*. Recuperado el 03 de 02 de 2017, de ¿Qué es

GeoGebra?: <https://www.geogebra.org>

Izepe, C. (2003). Geometría Elíptica y Geometría Esférica. *XI Congreso de Investigación Científica de UNICAMP*, 15.

Joice, D. (2013). *Clark University*. Recuperado el 05 de 06 de 2018, de Euclid's Elements :

<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/book1/def11.html>

Jorge Ferrer, V. G. (01 de 02 de 2016). *Curso de HTML*. Recuperado el 28 de 06 de 2017, de

<http://html.mx/index.html>

(2010). *Ley Orgánica de Educación Superior*. Informe Oficial, Quito.

Márquez, J. (2016). *El Plano Hiperbólico: Historia y Fundamentos*. Sevilla: Universidad de Sevilla.

Martín, J., Murillo, J., & Fortuny, J. (24 de 01 de 2013). *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Recuperado el 17 de 02 de 2017, de El Aprendizaje Colaborativo y la Demostración Matemática:

<http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/MartinMurilloF02.pdf>

Morales, S. (2015). Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea. *Amazonía Investiga*, 14.

Paz, J. (2012). *Aprendamos sobre Ángulos*. Obtenido de Teorías Pedagógicas para el Aprendizaje de la Geometría:

<https://sites.google.com/site/aprendamosobrelosangulos/assignments>

- Quintero, O. (2014). Un modelo pedagógico de enseñanza de la geometría. *Congreso Iberoamericano de ciencia, tecnología, innovación y educación*, 22.
- (2015). *Reglamento del Sistema Nacional de Nivelación y Admisión*. Acuerdo Ministerial, Quito.
- Ruiz, R. (2014). La enseñanza de la demostración geométrica en la escuela: retos. *EduSol*, 12.
- Saiz, I. (02 de 08 de 1997). *Revista de educación matemática*. Obtenido de La ubicación espacial en los primeros años de escolaridad:
<http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/2/06Saiz.pdf>
- Secretaría de Educación Ciencia, Tecnología e Innovación. (2017). Acuerdo N° 2015-172, Quito.
- SENPLADES. (2018). *Secretaría Nacional de Planificación y Desarrollo*. Recuperado el 15 de 05 de 2018, de <http://www.planificacion.gob.ec/>
- Universidad Politécnica de Madrid. (01 de 02 de 2014). *Geometría y Topología* . Recuperado el 22 de 06 de 2017, de Introducción a la Geometría no Euclidiana:
<http://ocw.upm.es/geometria-y-topologia/geometria-de-ayer-y-hoy/contenidos/unidad4/unidad41.htm/?searchterm=None>
- Varcarcél, N. (2004). Los modelos de enseñanza y la práctica de aula. *Enseñanza Aprendizaje, Evaluación y Memoria Educativa*, 19.
- Vega, L. (1985). Sobre la Intención Griega de la Idea de Demostración. 25.
- Villatoro, J. (04 de 06 de 2007). *Instituto Nacional de Psiquiatría Ramón de la Fuente Muñiz*. Obtenido de Elección de la prueba estadística:
http://www.uade.inpsiquiatria.edu.mx/pagina_contenidos/seminario/
- Wikismat. (s.f.). *Wikismat*. Recuperado el 05 de 05 de 2018, de Proyecto Matemático:
<https://wikismat.wikispaces.com/GEOMETR%C3%8DA+EUCLIDIANA>

APÉNDICES