

**ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO  
DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

**CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**



**PROYECTO DE GRADO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO EN  
INGENIERÍA**

**“DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES  
CLÁSICOS Y EN EL ESPACIO DE ESTADOS PARA EL  
SISTEMA SERVOMOTOR DEL LABORATORIO DE  
SERVOMEKANISMOS”**

**ENRIQUE JAVIER CHACÓN HIDALGO**

**SANGOLQUÍ - ECUADOR**

**2010**

**“DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES  
CLÁSICOS Y EN EL ESPACIO DE ESTADOS PARA EL  
SISTEMA SERVOMOTOR DEL LABORATORIO DE  
SERVOMECANISMOS”**

## **CERTIFICACIÓN**

Certificamos que el presente Proyecto de Grado titulado “DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES CLÁSICOS Y EN EL ESPACIO DE ESTADOS PARA EL SISTEMA SERVOMOTOR DEL LABORATORIO DE SERVOMEKANISMOS”, ha sido desarrollado en su totalidad por el señor: Enrique Javier Chacón Hidalgo, y elaborado bajo nuestra dirección como requisito previo para la obtención del Título en Ingeniería Electrónica, Automatización y Control.

Sangolquí, 27 de Abril del 2010.

---

Ing. Víctor Proaño  
DIRECTOR

---

Ing. Rodolfo Gordillo  
CODIRECTOR

## **AGRADECIMIENTO**

A mis padres, Enrique y Marina por darme todo su apoyo y quererme por sobre todas las cosas.

A mis abuelitos, Telmo y Maura por darme su amor, apoyo y confianza.

A mis hermanas, Gabi y Nati por siempre estar a mi lado apoyándome y brindándome su comprensión y cariño.

A mis tíos Oswaldo y María por siempre darme buenos consejos.

A Freddy y Germmy por brindarme su apoyo y amistad incondicional.

A Rosy por compartir momentos importantes en mi vida y darme su apoyo para terminar este proyecto.

Un agradecimiento especial a mi director de tesis el Ing. Víctor Proaño por ayudarme a hacer posible esta tesis gracias a su conocimiento y paciencia, a mi codirector el Ing. Rodolfo Gordillo quien colaboró desinteresadamente en la elaboración del proyecto, gracias por el apoyo brindado.

A mis compañeros de clases y amigos quienes me acompañaron en esta trayectoria de aprendizaje y conocimientos.

Javier

## **DEDICATORIA**

La presente tesis se la dedico a mi familia que gracias a su apoyo pude concluir mi carrera.

A mis padres y hermanas por su apoyo y confianza. Gracias por ayudarme a cumplir mis objetivos como persona y estudiante. A mi padre por brindarme los recursos necesarios y estar a mi lado apoyándome y aconsejándome siempre. A mi madre por hacer de mi una mejor persona a través de sus consejos, enseñanzas y amor. A mis hermanas por estar siempre presentes, acompañándome para poderme realizar. A mis abuelitos por brindarme su amor y consejos y a toda la gente que me ayudó de alguna manera a terminar este proyecto y realizarme profesionalmente.

Javier

# PRÓLOGO

## **Antecedentes.**

La ESPE ha realizado la adquisición de varios sistemas de control automático. El sistema de servomotor es uno de estos sistemas. El control de un sistema de servomotor es un problema clásico.

El sistema de servomotor es un equipo listo para experimentar, es una herramienta ideal para el desarrollo e implementación de experimentos en tiempo real utilizando MATLAB y Simulink. El manual de usuario del sistema servomotor viene con documentación de esquemas de control como PID, regulador cuadrático lineal, controlador dead beat y otros. El problema de los mismos es que su proceso de diseño no se realiza de acuerdo a la teoría que se estudia en las asignaturas de sistemas de control.

El diseño de un sistema de control se realiza a partir del modelo matemático de la planta. En el control clásico este modelo constituye una función de transferencia que define la relación de las transformadas de Laplace de la salida versus la entrada. A partir de la función de transferencia es factible aplicar distintos métodos de análisis y diseño como son: los diagramas de Bode, los criterios de estabilidad de Routh-Hurwitz, los diagramas de Nyquist para establecer los márgenes de estabilidad relativos y el lugar geométrico de las raíces. Con estos métodos se logra obtener un controlador que satisface especificaciones de diseño definidas para una entrada tipo escalón unitario. Estas especificaciones incluyen estabilidad del lazo cerrado, tiempo de establecimiento, máximo sobrepico, tiempo de subida, coeficiente de amortiguamiento. De todas estas especificaciones la principal es la estabilidad.

El control en el espacio de estado el modelo matemático constituyen las ecuaciones de estado que describen el sistema mediante matrices que relacionan la primera derivada de cada estado con los estados y las entradas del sistema. Esta formulación permite enfrentar problemas de diseño de sistemas de control con múltiple entrada y múltiple salida (MIMO). El sistema servomotor precisamente puede ser considerado un sistema de múltiples salidas puesto que se miden el ángulo (mediante un codificador) y la velocidad (mediante un tacómetro), y de entrada única que es la señal de control entregada al motor. A partir de la formulación matricial es factible aplicar los métodos de realimentación completa de estados para ubicación de polos, así como también el método de control para ubicación de polos mediante observadores de estado que se usa cuando no se pueden medir todos los estados.

### **Justificación e Importancia.**

El Departamento de Eléctrica y Electrónica tiene como una de sus tareas el desarrollo de investigación. El presente proyecto se enmarca dentro de la línea de investigación de Automatización Industrial. El proyecto, permitirá la mejor difusión y uso de las herramientas informáticas para el diseño de controladores clásicos. Se tendrá un documento de fácil acceso para el estudio de la temática de controladores. El documento generado como resultado del proyecto se constituirá en una valiosa herramienta para el estudio de los controladores clásicos aplicados a una planta tangible como es el sistema de servomotor, el texto podrá ser utilizado como un texto guía para la realización de prácticas en el laboratorio de servomecanismos.

En el documento se detallará de manera clara y concreta el diseño, implementación y resultados de la aplicación de estos controladores al sistema de servomotor. El diseño de los controladores clásicos se realizará ajustado a la temática de la asignatura de sistemas de control, esto es aplicando los métodos de respuesta de frecuencia y lugar geométrico de las raíces.

## **Alcance del proyecto**

Se realizará el estudio del sistema de servomotor para determinar las posibilidades y limitaciones del sistema que serán descritas en el documento del proyecto.

Se realizará el proceso completo de diseño de controladores clásicos, compensador en adelanto, compensador adelanto-atraso, y un controlador PID. Luego se procederá a realizar compensadores en el espacio de estado. En este ámbito se diseñará un compensador de realimentación completa de estados para luego realizar un compensador con estimación de estados.

Se realizará la simulación de los sistemas de control en MATLAB y se implementará los controladores en el sistema de servomotor, registrando los resultados que se obtienen.

## **Objetivo General**

Diseñar e implementar controladores clásicos y en el espacio de estados para el Sistema de Servomotor del laboratorio de Servomecanismos.

## **Objetivos Específicos**

- Diseñar e implementar un compensador en adelanto para el servomotor.
- Diseñar e implementar un compensador en adelanto y retraso para el servomotor.
- Diseñar e implementar un controlador PID para el servomotor.
- Diseñar e implementar un controlador LQ (realimentación completa de estados) para el servomotor.

- Diseñar e implementar un controlador con estimación de estados para el servomotor.
- Analizar los resultados de la implementación de dichos controladores.

# INDICE DE CONTENIDOS

<b>CAPÍTULO 1.....</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SERVOMOTOR .....	1
<b>1.1.1 COMPONENTES DEL SISTEMA SERVOMOTOR .....</b>	<b>2</b>
1.2. MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA PLANTA .....	4
1.2.1 <i>Modelo Lineal.....</i>	4
1.2.2 <i>Modelo No Lineal.....</i>	7
1.3. REPRESENTACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO DE LA PLANTA MEDIANTE ECUACIONES DE VARIABLES DE ESTADO.....	8
1.4. MODELOS DE SIMULACIÓN.....	9
1.5. ESTABILIDAD DEL SISTEMA.....	10
1.5.1 <i>Estabilidad del sistema en lazo abierto.....</i>	11
1.5.2 <i>Estabilidad del sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria.....</i>	11
<b>CAPÍTULO 2.....</b>	<b>13</b>
<b>TECNOLOGÍAS DE CONTROL.....</b>	<b>13</b>
2.1 CONTROL CLÁSICO .....	13
2.1.1 <b>COMPENSACIÓN EN ADELANTO .....</b>	<b>15</b>
2.1.1.1 DISEÑO DE BODE .....	16
2.1.1.2 DISEÑO MEDIANTE LUGAR DE LAS RAÍCES.....	18
2.1.1.3 MÉTODO GEOMÉTRICO.....	19
2.1.2 <b>COMPENSACIÓN EN ATRASO .....</b>	<b>20</b>
2.1.2.1 DISEÑO DE BODE.....	21
2.1.2.2 DISEÑO MEDIANTE LUGAR DE LAS RAÍCES.....	22
2.1.3 <b>CONTROLADOR PID.....</b>	<b>22</b>
2.1.3.1 MÉTODO ZIEGLER-NICHOLS .....	22
2.1.3.2 MÉTODO ANALÍTICO PARA CONTROLADOR PID .....	23
2.2 CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS.....	24
2.2.1 <b>FORMAS CANÓNICAS PARA LA REPRESENTACIÓN DE LAS ECUACIONES DE VARIAB LES DE ESTADO .....</b>	<b>25</b>
2.2.2 <b>REALIMENTACION COMPLETA DE ESTADOS .....</b>	<b>30</b>
2.2.3 <b>ESTIMADOR COMPLETO DE ESTADOS.....</b>	<b>31</b>
2.2.4 <b>ESTIMADOR REDUCIDO DE ESTADOS.....</b>	<b>34</b>
<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>38</b>
<b>DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADORES.....</b>	<b>38</b>
3.1 CONTROLADOR EN ADELANTO .....	38
3.1.1 <b>SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR EN ADELANTO.....</b>	<b>47</b>

3.2 CONTROLADOR ADELANTO-ATRASO .....	51
3.2.1 SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR EN ADELANTO-ATRASO .....	60
3.3 CONTROLADOR PID .....	63
3.3.1 Método Ziegler-Nichols .....	63
3.3.2 Método Analítico .....	65
3.3.3 SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR PID .....	68
3.4 CONTROLADOR CON REALIMENTACION COMPLETA DE ESTADOS LQ .....	71
3.4.1 Sistema con Tracking .....	76
3.4.2 SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR LQ .....	77
3.5 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN DE ESTADOS .....	79
3.5.1 ESTIMADOR COMPLETO .....	79
3.5.2 SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN ESTIMADOR COMPLETO DE ESTADOS .....	81
3.6 ESTIMADOR REDUCIDO .....	84
3.6.1 SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN ESTIMADOR REDUCIDO DE ESTADOS .....	86
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>90</b>
<b>IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS .....</b>	<b>90</b>
4.1 CONTROLADOR EN ADELANTO .....	90
4.1.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR EN ADELANTO (TIEMPO REAL) .....	90
4.2 CONTROLADOR ADELANTO-ATRASO .....	92
4.2.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR EN ADELANTO-ATRASO (TIEMPO REAL) .....	92
4.3 CONTROLADOR PID .....	94
4.3.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR PID (TIEMPO REAL) .....	94
4.4 CONTROLADOR CON REALIMENTACION COMPLETA DE ESTADOS LQ .....	96
4.4.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR LQ (TIEMPO REAL) .....	96
4.5 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN DE ESTADOS .....	98
4.5.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN ESTIMADOR COMPLETO DE ESTADOS (TIEMPO REAL) .....	98
4.6 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN REDUCIDA DE ESTADOS .....	102
4.6.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN ESTIMADOR REDUCIDO DE ESTADOS (TIEMPO REAL) .....	102
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>106</b>
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>106</b>
5.1 CONCLUSIONES .....	106
5.2 RECOMENDACIONES .....	107

---

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

#### 1.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SERVOMOTOR

El Sistema Modular de Servomotor (MSS) consiste en un servomecanismo y de un software de arquitectura abierta para experimentos de control en tiempo real.

El objetivo principal del Sistema de Servomotor es la creación de un camino rápido y directo desde el diseño del sistema de control a la implementación del hardware.

El sistema es compatible para el diseño en tiempo real e implementación de métodos avanzados de control utilizando MATLAB y herramientas de Simulink, además utiliza sistemas operativos Microsoft Windows y plataformas computacionales basadas en procesadores INTEL o AMD.

Está compuesto por varios módulos los cuales están sobre un riel de metal acoplados con pequeñas agarraderas.

El software integrado es compatible con todas las fases de desarrollo de un sistema de control:

- Proceso de identificación en línea.
- Modelado, diseño y simulación de sistemas de control.
- Implementación de algoritmos de control en tiempo real.

#### **Componentes:**

#### **Hardware:**

Los siguientes elementos son los componentes de hardware del Sistema Servomotor:

- Motor DC con tacogenerador
- Módulo de Inercia (masa)
- Módulo de freno magnético
- Potenciómetro de entrada
- Codificador Digital (sensor de posición angular)
- Caja de cambios con disco a la salida
- Backlash (reacción violenta)
- Tarjeta RT-DAC/PCI
- Interfaz de potencia

### Software:

Los tipos de software que utiliza el Sistema Servomotor son los siguientes:

- MS Windows® 2000/XP
- MATLAB® 7 (R14 SP2/SP3), R2006a/b, R2007a/b
- Simulink®, Real Time Workshop y Real Time Windows Target toolboxes
- MSS (Modular Servo System) Control/Simulation Toolbox

### 1.1.1 COMPONENTES DEL SISTEMA SERVOMOTOR

La siguiente figura muestra los componentes del servomotor y la forma en que se ensamblan entre sí.

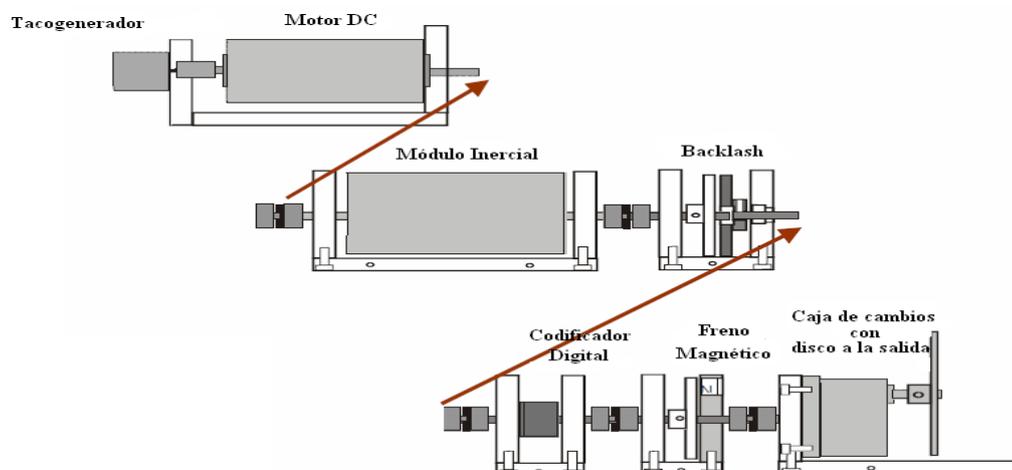


Figura. 1.1. Componentes del Sistema Servomotor

**Funcionamiento:**

El motor DC junto con el tacogenerador inicia el sistema mientras que la caja de cambios con disco a la salida finaliza el sistema. El módulo del potenciómetro está ubicado fuera del sistema. El motor DC puede activar los siguientes módulos:

- Inercia
- Backlash
- Codificador digital
- Freno magnético
- Caja de cambios con disco a la salida

El ángulo de rotación del eje del motor DC se mide utilizando un codificador incremental. En cualquier lugar que sea necesario la medición del ángulo de rotación se puede colocar el codificador. Un tacogenerador está conectado directamente al motor DC y genera una señal de tensión proporcional a la velocidad angular.

El servomecanismo está conectado a una computadora donde se realiza el algoritmo de control basado en mediciones de ángulo y velocidad angular. El sistema no tiene realimentación interior para compensación de la zona muerta. La precisión de la medición de la velocidad es de 5%, mientras que la precisión de la medida del ángulo es de 0,1%. El voltaje inducido del motor DC está controlado por una señal PWM. La señal de control adimensional es el voltaje de entrada escalonado  $u(t) = v(t)/v_{\max}$ . El control admisible satisface  $|u(t)| \leq 1$  y  $v_{\max} = 12$  [V].

El sistema de medición se basa en una tarjeta de adquisición RTDAC/ PCI equipada con convertidores A/D.

La tarjeta I/O se comunica con la unidad de interfaz de energía. Toda la lógica necesaria para activar y leer las señales del codificador y generar la secuencia adecuada de pulsos PWM para controlar el motor DC se configura en el chip Xilinx® de la tarjeta RTDAC/PCI.

Todas las funciones de la tarjeta pueden ser accedidas desde el Modular Servo Toolbox, que opera directamente en MATLAB® / Simulink®.

## 1.2. MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA PLANTA

### 1.2.1 Modelo Lineal

Para el modelamiento de la planta el valor de la inductancia se lo considera como despreciable.

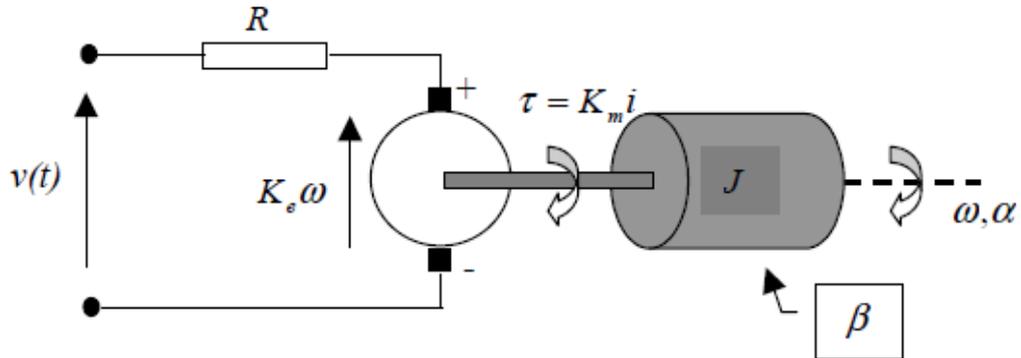


Figura. 1.2. Diagrama para el modelamiento matemático de la planta

El modelamiento está descrito por dos ecuaciones básicas:

#### La Eléctrica:

$$v(t) = R * i(t) + K_e \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

#### La Mecánica:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = K_m i(t) - \beta \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$$

Donde:

$v(t)$  → voltaje de entrada

$i(t)$  → corriente en la armadura

$\omega$  → velocidad angular del rotor

- $\alpha$  → posición angular del rotor  
 $R$  → resistencia de la armadura  
 $J$  → momento de inercia de las piezas móviles  
 $\beta$  → coeficiente de amortiguación debido a la fricción viscosa  
 $K_e \omega(t)$  → fuerza electromotriz  
 $\tau = K_m i(t)$  → torque electromecánico

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} - \frac{K_e}{R} \frac{d\alpha}{dt} \quad (1)$$

$$K_m i(t) - \beta \frac{d\alpha}{dt} = J \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (2)$$

Se reemplaza ecuación (1) en la ecuación (2)

$$K_m \left( \frac{v(t)}{R} \right) - \frac{K_m K_e}{R} \frac{d\alpha}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt} = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$K_m v(t) - K_m K_e \frac{d\alpha}{dt} - R\beta \frac{d\alpha}{dt} = RJ \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$K_m v(t) - (K_m K_e + R\beta) \frac{d\alpha}{dt} = RJ \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\frac{K_m}{K_m K_e + R\beta} v(t) - \frac{d\alpha}{dt} = \frac{RJ}{K_m K_e + R\beta} \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$T_s = \frac{RJ}{K_m K_e + R\beta} \quad K_{sm} = \frac{K_m}{K_m K_e + R\beta}$$

Donde:

$T_s$  → constante de tiempo del motor

$K_{sm}$  → ganancia del motor

$$T_s \frac{d^2\alpha}{dt^2} = K_{sm} v(t) - \frac{d\alpha}{dt}$$

## Función de Transferencia

$$T_s * s^2 * \alpha(s) = K_{sm} v(s) - s * \alpha(s)$$

### Función de transferencia de la posición angular

$$\frac{s * \alpha(s)}{v(s)} = \frac{K_{sm}}{T_s * s + 1}$$

$$\frac{\alpha(s)}{v(s)} = \frac{K_{sm}}{s(T_s * s + 1)}$$

### Función de transferencia de la velocidad angular

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{K_{sm}}{(T_s * s + 1)}$$

Se asume la señal de control adimensional como una escala de voltaje,  $u(t) = v(t)/V \max$ , esto satisface el control  $|u(t)| \leq 1$

$$\frac{\omega(s)}{u(s)} = \frac{K_{sm} * V \max}{T_s * s + 1} \qquad \frac{\alpha(s)}{u(s)} = \frac{K_{sm} * V \max}{s(T_s * s + 1)}$$

$$K_s = K_{sm} * V \max$$

### Función de transferencia de la posición angular

$$\frac{\alpha(s)}{u(s)} = \frac{K_s}{s(T_s * s + 1)}$$

### Función de transferencia de la velocidad angular

$$\frac{\omega(s)}{u(s)} = \frac{K_s}{(T_s * s + 1)}$$

### 1.2.2 Modelo No Lineal

Los pequeños cambios en las variables de estado se los asumen como despreciables, por lo que se considera al sistema servomotor como un modelo lineal.

Sin embargo hay algunas aplicaciones no lineales en el lazo de control en las cuales se debe tomar en cuenta a dichos cambios.

Las características estáticas no lineales tales como la histéresis y la saturación pueden ocurrir si se aplican los siguientes dispositivos: amplificadores operacionales, actuadores, longitud de palabra finita en convertidores A/D y D/A.

El modelo no lineal para el sistema de Servomotor resulta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= c(u - g(x_2)) \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -cg \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} u(t) \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

La función  $g$  representa la característica inversa de estado estacionario del sistema, que puede ser determinada experimentalmente. Una característica interesante de esta función es que es discontinua en cero y muestra los distintos efectos de fricción seca en las proximidades del origen.

El valor del coeficiente  $c$  es 206 [rad/s].

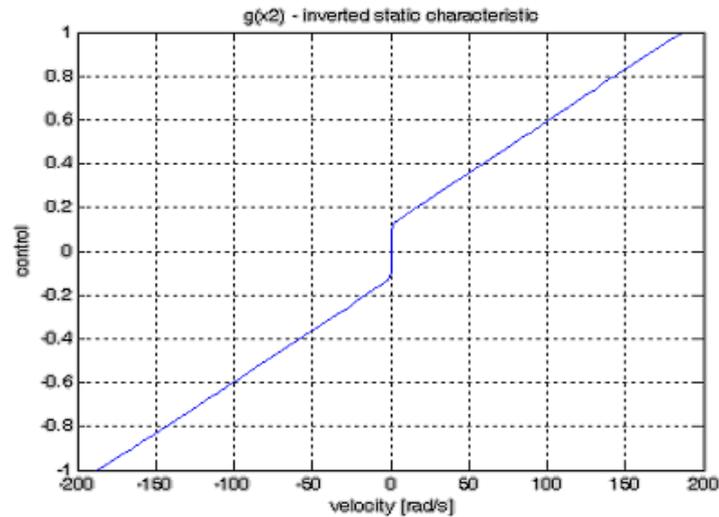


Figura. 1.3. Gráfica de la característica inversa de estado estacionario del sistema

### 1.3. REPRESENTACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO DE LA PLANTA MEDIANTE ECUACIONES DE VARIABLES DE ESTADO

Haciendo:

$$x_1 = \alpha \qquad x_2 = \omega$$

Se tiene que las ecuaciones en el espacio de estados son:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = ax_2 + bu(t)$$

$$T_s \dot{x}_2 = K_s * u(t) - x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_s} x_2 + \frac{K_s}{T_s} u(t) \qquad a = -\frac{1}{T_s} \qquad b = \frac{K_s}{T_s}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_s} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_s}{T_s} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Para expresar numéricamente las funciones de transferencia y las ecuaciones de estado se toman los valores que han sido identificados por el fabricante, los cuales han sido encontrados mediante experimentos realizados en el equipo.

$$V_{\max} = 12[V]$$

$$T_s = 1.04[s]$$

$$K_s = 186[rad / s]$$

$$a = -0.961[s^{-1}]$$

$$b = 178.8[rad / s^2]$$

Las funciones de transferencia tanto para la posición y velocidad angular quedan descritas de la siguiente manera:

$$\frac{\alpha(s)}{u(s)} = \frac{186}{s(1.04s + 1)} \qquad \frac{\omega(s)}{u(s)} = \frac{186}{1.04s + 1}$$

La representación en el espacio de estados es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.961 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 178.8 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Este sistema puede ser clasificado como tipo SIMO (Single Input, Multiple Output), ya que posee dos variables de estado que pueden ser medidas (ángulo y velocidad) y una variable de control.

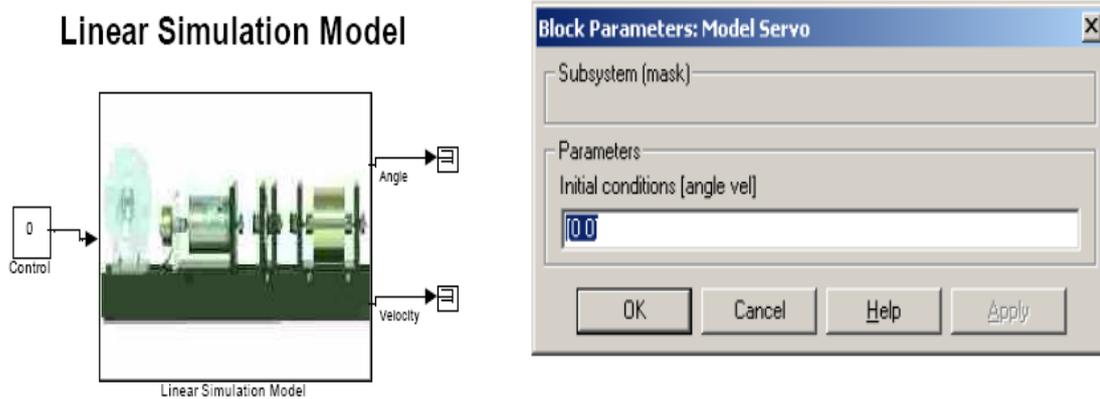
#### 1.4. MODELOS DE SIMULACIÓN

Existen dos tipos de modelos de simulación disponibles para el sistema de servomotor: el lineal y el no lineal

**Lineal.**\_ Es usado para el diseño de los controladores.

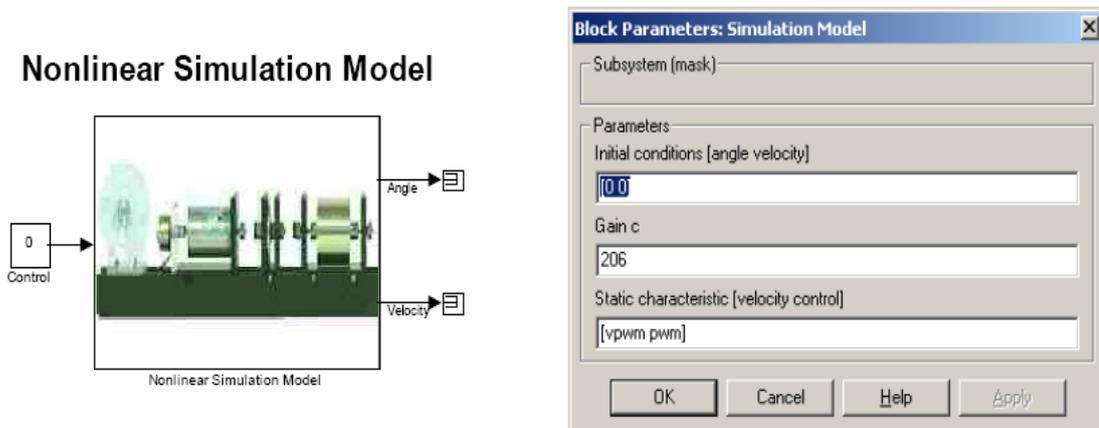
**No lineal.**\_ Es usado para verificar la calidad del diseño de los controladores.

La siguiente figura muestra la interfaz en Simulink del Modelo de Simulación Lineal



**Figura. 1.4. Modelo de Simulación Lineal**

La siguiente figura muestra la interfaz en Simulink del Modelo de Simulación no Lineal



**Figura. 1.5. Modelo de Simulación no Lineal**

## 1.5. ESTABILIDAD DEL SISTEMA

Para analizar la estabilidad del sistema de Servomotor se utilizará el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.

### 1.5.1. Estabilidad del sistema en lazo abierto

Para la posición angular del motor

$$G(s) = \frac{186}{s(1.04s + 1)}$$

Del análisis se determina que al tener la función de transferencia de la posición angular un integrador hace que el sistema se vuelva marginalmente estable.

Para la velocidad del motor

$$G(s) = \frac{186}{(1.04s + 1)}$$

Del análisis se determina que la función de transferencia de la velocidad al no tener ningún integrador el sistema es estable.

### 1.5.2. Estabilidad del sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria

Para la posición angular del motor

$$G(s) = \frac{186}{s(1.04s + 1)}$$

Para el sistema en lazo cerrado

$$\frac{KG}{1 + KG} = \frac{K \left( \frac{186}{s(1.04s + 1)} \right)}{1 + K \left( \frac{186}{s(1.04s + 1)} \right)} = \frac{\frac{186K}{s(1.04s + 1)}}{\frac{1.04s^2 + s + 186K}{s(1.04s + 1)}} = \frac{186K}{1.04s^2 + s + 186K}$$

Ec. característica

$$1 + KG = 0$$

$$1.04s^2 + s + 186K = 0$$

$$s^2 \quad 1.04 \quad 186K$$

$$s^1 \quad 1$$

$$s^0 \quad 186K$$

$$b_1 = -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1.04 & 186K \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 * (-186K) = 186K$$

El sistema es estable mientras  $K \geq 0$

### Para la velocidad del motor

$$G(s) = \frac{186}{(1.04s + 1)}$$

Para el sistema en lazo cerrado

$$\frac{KG}{1 + KG} = \frac{K \left( \frac{186}{(1.04s + 1)} \right)}{1 + K \left( \frac{186}{(1.04s + 1)} \right)} = \frac{\frac{186K}{(1.04s + 1)}}{\frac{1.04s + 1 + 186K}{(1.04s + 1)}} = \frac{186K}{1.04s + 1 + 186K}$$

Ec. característica

$$1 + KG = 0$$

$$1.04s + 1 + 186K = 0$$

$$s^1 \quad 1.04 \quad 0$$

$$s^0 \quad 186K + 1$$

El sistema es estable mientras  $K \geq -\frac{1}{186}$

## CAPÍTULO 2

### TECNOLOGÍAS DE CONTROL

#### 2.1 CONTROL CLÁSICO

##### Exactitud de estado estable en sistemas con realimentación unitaria

En la mayoría de sistemas de control una de las características que se presta mayor atención es el error de estado estable que presenta el sistema a su salida.

El error de estado estable se lo define como:

$$ess = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$

La siguiente figura muestra un sistema de control en lazo cerrado con realimentación unitaria

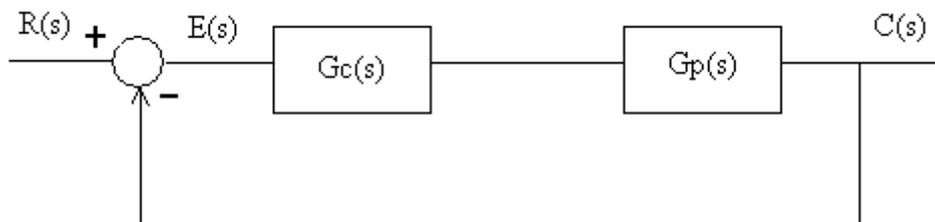


Figura. 2.1. Sistema de control en lazo cerrado con realimentación unitaria

La función de transferencia de la figura 2.1 que relaciona la salida con la entrada del sistema es la siguiente:

$$C(s) = \frac{Gc(s)Gp(s)}{1 + Gc(s)Gp(s)} R(s)$$

El producto  $Gc(s)Gp(s)$  se lo escribe en el formato:

$$Gc(s)Gp(s) = \frac{F(s)}{S^N Q_1(s)} \quad \text{donde: ni } F(s), \text{ ni } Q_1(s) \text{ tienen raíces en } s = 0$$

Aquí se define a:

$N$  es el # de integradores libres en la función de transferencia.

$N$  define el tipo de sistema, es decir el tipo del sistema es el número de integradores en la función de lazo abierto.

### Teorema del valor final de la transformada de Laplace

Permite encontrar el error de estado estable a partir de:

$$ess = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad ess = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Donde:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + Gc(s)Gp(s)} \quad ess = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + Gc(s)Gp(s)}$$

### Error de estado estable para una señal tipo paso

Usando las ecuaciones antes descritas se tiene que para una señal paso:

$$ess = \frac{1}{1 + Kp} \quad Kp = \lim_{s \rightarrow 0} Gc(s)Gp(s)$$

Donde:

$Kp \rightarrow$  constante de error de posición

De donde:

Si  $N \geq 1$  ;  $Kp \rightarrow \infty$  ;  $ess = 0$

Si  $N = 0$  ;  $ess = \frac{1}{1 + Kp}$

## Error de estado estable para una señal tipo rampa

Usando las ecuaciones antes descritas se tiene que para una señal rampa:

$$ess = \frac{1}{Kv} \qquad Kv = \lim_{s \rightarrow 0} sGc(s)Gp(s)$$

Donde:

$Kv \rightarrow$  constante de error de velocidad

De donde:

Si  $N \geq 2$  ;  $Kv \rightarrow \infty$  ;  $ess = 0$

Si  $N = 1$  ;  $ess = \frac{1}{Kv}$

Si  $N = 0$  ;  $Kv \rightarrow 0$  ;  $ess = \infty$

### 2.1.1 COMPENSACIÓN EN ADELANTO

La función de transferencia general para este compensador es:

$$K(s) = Kc \frac{s - z_0}{s - p_0}$$

Donde:

$Kc \rightarrow$  ganancia del compensador en adelanto

$z_0 \rightarrow$  cero

$p_0 \rightarrow$  polo

#### Características del compensador:

- El cero ocurre antes del polo  $|z_0| < |p_0|$ , el cero está más pegado al eje imaginario que el polo.
- El procedimiento asume que la planta puede describirse por un par de polos dominantes.
- Aumenta la estabilidad relativa, aumentando el margen de fase.

- Para una ganancia dada  $K_c$  el compensador de adelanto aumenta el error de estado estable ( $ess$ ), debido que  $K_c \frac{z_0}{p_0} < K_c$ .
- Al aumentar la frecuencia de cruce de ganancia compensada ( $\omega_{gc}$ ) conduce a un aumento del ancho de banda del lazo cerrado.

### 2.1.1.1 DISEÑO DE BODE

La idea básica en el diseño de Bode es construir la función de transferencia en lazo abierto del sistema de manera que se pueda conseguir una ganancia de baja frecuencia deseada (para error de estado estable o perturbaciones), una ganancia de frecuencia de cruce (para velocidad en la respuesta) y un adecuado margen de estabilidad.

La forma general del compensador en adelanto con diseño de Bode es:

$$K_1(s) = \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \quad ; \quad K(s) = K_c K_1(s)$$

Donde:

$K_c \rightarrow$  ganancia del compensador en adelanto

### Contribución de magnitud y ángulo del compensador

La fase del compensador en adelanto es:

$$\angle K_1(j\omega) = \tan^{-1} \alpha T \omega - \tan^{-1} T \omega$$

Para facilitar el diseño se añade la máxima fase posible a  $\omega = \omega_{gc}$ .

Donde:

$\omega \rightarrow$  frecuencia natural de lazo cerrado

$\omega_{gc} \rightarrow$  frecuencia de cruce de ganancia compensada

La frecuencia a la que se tiene el máximo adelanto de fase se obtiene derivando la ecuación de la fase del compensador y resulta:

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} * T}$$

El máximo adelanto de fase es:

$$\angle K_1(j\omega_{\max}) = \angle K_1(j\omega_{gc}) = \Phi = \tan^{-1} \sqrt{\alpha} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Mediante leyes trigonométricas se encuentra la relación entre  $\alpha$  y  $\Phi$

$$\text{sen}\Phi = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \qquad \alpha = \frac{1 + \text{sen}\Phi}{1 - \text{sen}\Phi}$$

La magnitud adicional en dB con que contribuye  $K_1$  al lazo es:

$$M = |K_1(j\omega_{\max})|_{dB} = |K_1(j\omega_{gc})|_{dB} = 10 \log \alpha$$

### Procedimiento utilizando el diseño de Bode para el compensador en adelanto

1. Seleccionar  $K_c$  para satisfacer el error de estado estable ( $ess$ ).
2. Dibujar el diagrama de Bode de  $K_c G(j\omega)$  (lazo abierto), y determinar el margen de fase ( $MF$ ) de  $K_c G(j\omega)$ .
3. Determinar el ángulo de adelanto de fase requerido ( $\Phi$ ).
4. Añadir unos pocos grados al ángulo de adelanto de fase para encontrar el ángulo óptimo con el cual se va a trabajar.
5. Calcular  $\alpha = \frac{1 + \text{sen}(\Phi)}{1 - \text{sen}(\Phi)}$
6. Encontrar la frecuencia a la que la ganancia de  $K_c G(j\omega) = -10 \log \alpha$ ; esta será la frecuencia de cruce de ganancia compensada ( $\omega_{gc}$ ).
7. Calcular  $T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} * \omega_{gc}}$

8. Dibujar el diagrama de Bode de  $K(j\omega)G(j\omega)$  para confirmar el diseño.
9. Cerrar el lazo y determinar las respuestas.

La razón por la que se añade unos pocos grados ( $5^\circ$ ) al ángulo de adelanto de fase es para obtener el margen de fase deseado, esto añade un cero en el compensador lo que causa que la frecuencia de cruce de ganancia compensada se incremente.

### 2.1.1.2 DISEÑO MEDIANTE LUGAR DE LAS RAÍCES

Es una reforma del lugar de las raíces del sistema mediante la adición de polos y ceros para forzar que el lugar de las raíces pase a través de puntos deseados.

Los siguientes son los pasos generales a seguir para este tipo de diseño:

1. Determinar la ubicación deseada de los polos complejos,  $s_1$  a partir de las especificaciones.
2. Ubicar el cero del compensador.
3. Determinar la ubicación del polo usando la propiedad del ángulo.
4. ¿Satisface la ganancia del sistema en  $s_1$  el error de estado estable ( $ess$ ) requerido?, sino cambiar el punto  $s_1$  y repetir el diseño.
5. Cerrar el lazo y determinar si se cumplieron las especificaciones.

#### Criterio del ángulo

$$GH = b_m \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_m)}$$

$$\angle GH = (\angle s - z_1 + \angle s - z_2 + \dots + \angle s - z_m) - (\angle s - p_1 + \angle s - p_2 + \dots + \angle s - p_m) = 180^\circ$$

$$GH = -1 \quad ; \quad |GH| \angle GH = 1 \angle 180^\circ$$

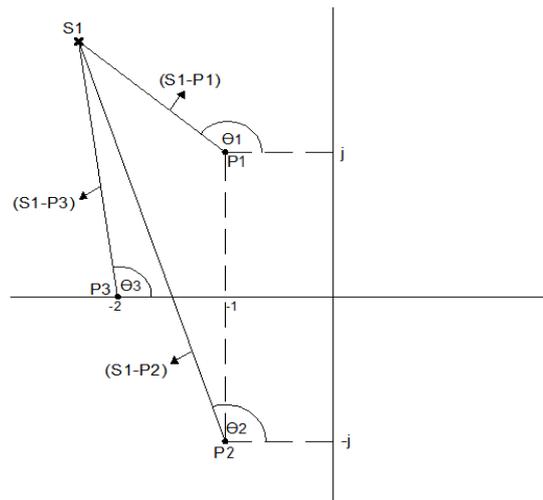


Figura. 2.2. Criterio del ángulo en el diseño mediante lugar de las raíces

### 2.1.1.3 MÉTODO GEOMÉTRICO

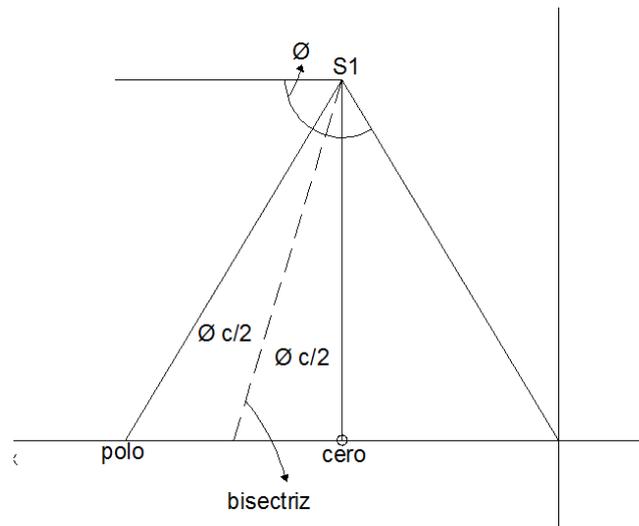
Dibujar una línea desde el origen al punto  $s_1$  y una horizontal desde  $s_1$ . Encontrar el ángulo  $\phi_c$  formado por estas dos líneas y dividirlo en 2 partes iguales. Las líneas desde el cero deseado y el polo forman un ángulo  $\phi_{c/2}$  con la bisectriz.

Este procedimiento reduce la distancia entre la ubicación del cero y el polo, lo cual minimiza la ganancia  $K_c$  del compensador.

$$\phi_c = 180^\circ - \angle GH(s_1)$$

$\phi_c \rightarrow$  ángulo de compensación

$$\phi_c > 0$$



**Figura. 2.3. Método Geométrico para el diseño mediante lugar de las raíces**

Una técnica puramente analítica se puede derivar del método geométrico la cual se muestra a continuación:

1. Seleccionar la ubicación deseada del punto  $s_1$  a partir de las especificaciones.
2. Definir  $\phi = \angle(s_1)$  y  $\phi_c = 180^\circ - \angle G(s_1)$ .
3. Definir  $\theta_p = \frac{\phi - \phi_c}{2}$  y  $\theta_z = \frac{\phi + \phi_c}{2}$ .
4. Encuentre la ubicación del polo  $p_c = -b = \text{Re}(s_1) - \frac{\text{Im}(s_1)}{\tan \theta_p}$
5. Encuentre la ubicación del cero  $z_c = -a = \text{Re}(s_1) - \frac{\text{Im}(s_1)}{\tan \theta_z}$
6. Encuentre  $Kc = \frac{1}{|G(s_1)K(s_1)|}$ .
7. Si  $Kc$  no cumple con los requerimientos de error de estado estable, escoger un nuevo punto  $s_1$  y repetir el procedimiento.

### 2.1.2 COMPENSACIÓN EN ATRASO

La función de transferencia general para este compensador es:

$$K(s) = Kc \frac{s - z_0}{s - p_0}$$

Donde:

$K_c \rightarrow$  ganancia del compensador en atraso

$z_0 \rightarrow$  cero

$p_0 \rightarrow$  polo

### Características del compensador en atraso:

- El cero ocurre después del polo  $|z_0| > |p_0|$ , el polo está más pegado al eje imaginario que el cero.
- Reduce la ganancia mejorando los márgenes de estabilidad.
- Reduce el error de estado estable (*ess*), debido que  $K_c \frac{z_0}{p_0} > K_c$ .
- Reduce la frecuencia de cruce de ganancia compensada ( $\omega_{gc}$ ), lo cual a su vez reduce el ancho de banda del lazo cerrado.
- Ayuda a eliminar el efecto del ruido de medición.
- Puede actuar como un filtro pasabajo.
- Es desestabilizante porque añade atraso de fase al sistema.

#### 2.1.2.1 DISEÑO DE BODE

La forma general del compensador en atraso con diseño de Bode es:

$$K_1(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} ; \alpha < 1 \quad ; \quad K(s) = K_c K_1(s)$$

Donde:

$K_c \rightarrow$  ganancia del compensador en adelanto

### Procedimiento utilizando el diseño de Bode para el compensador en atraso

1. Seleccionar  $K_c$  para satisfacer el error de estado estable (*ess*).
2. Dibujar el diagrama de Bode de  $K_c G(j\omega)$  (lazo abierto).

3. Determinar el margen de fase ( $MF$ ), si es insuficiente encontrar la frecuencia a la que el margen de fase ( $MF$ ) es satisfecho (añadir  $5^\circ$ ), esta frecuencia será la frecuencia de corte de ganancia compensada ( $\omega_{gc}$ ).
4. Encontrar la ganancia de  $KcG(j\omega)$  en  $\omega = \omega_{gc}$ .

$$GR = -|KcG(j\omega_{gc})|_{dB} \rightarrow \alpha = 10^{GR/20}$$

5. Para minimizar el efecto de la fase  $T = \frac{10}{\alpha\omega_{gc}}$
6. Dibujar el diagrama de Bode de  $K(j\omega)G(j\omega)$  para confirmar el diseño.
7. Cerrar el lazo y determinar las respuestas.

### 2.1.2.2 DISEÑO MEDIANTE LUGAR DE LAS RAÍCES

Los siguientes son los pasos a seguir para proceder con este diseño:

1. Determinar la ubicación deseada de los polos complejos,  $s_1$  a partir de las especificaciones.
2. Dibujar el lugar de las raíces de la planta,  $G(s)$ .
3. Determinar el valor de  $Kc$  que cumpla con las especificaciones del punto  $s_1$  ó mediante el error de estado estable dado.
4. Escoger una relación entre los ceros y polos del sistema.
5. Se debe cumplir la condición  $|z| \ll s_1$ .
6. Cerrar el lazo y verificar las respuestas.

### 2.1.3 CONTROLADOR PID

#### 2.1.3.1 MÉTODO ZIEGLER-NICHOLS

Este método está desarrollado para sintonizar un controlador PID basado en un simple análisis de estabilidad.

Primero, se coloca  $Kd = Ki = 0$ , luego se incrementa la ganancia proporcional hasta que el sistema empiece a oscilar justamente antes de que se vuelva inestable en el eje imaginario ( $j\omega$ ).

La ganancia proporcional se la multiplica por un factor constante de 0.6, y las otras dos ganancias se las calcula mediante las siguientes ecuaciones:

$$Kp = 0.6Km$$

$$Kd = \frac{Kp * \pi}{4 * \omega_m}$$

$$Ki = \frac{Kp * \omega_m}{\pi}$$

Donde:

$K_m \rightarrow$  ganancia a la cual el sistema empieza a oscilar

$\omega_m \rightarrow$  frecuencia de oscilación.

Con este método no se puede cumplir con especificaciones de la planta, ya que este método es sólo una aproximación de los resultados.

### 2.1.3.2 MÉTODO ANALÍTICO PARA CONTROLADOR PID

La técnica analítica puede ser desarrollada para cumplir parámetros específicos en un controlador PID, dados el error de estado de estable ( $ess$ ) y especificaciones de desempeño.

La ecuación de un controlador PID está dada por:

$$\left( K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right) G(s)$$

Si la planta  $G(s)$  es de Tipo  $n$ , el sistema compensado será de Tipo  $n+1$ . La constante de error es igual al inverso del error de estado estable y está dado por:

$$K_{n+1} = s^n K_t G(s) |_{s=0} = \frac{1}{ess}$$

De las especificaciones en el dominio del tiempo como el sobrepico ( $POS$ ) y el tiempo de establecimiento ( $T_{ss}$ ), se pueden determinar el coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ) y la frecuencia natural de lazo cerrado ( $\omega_n$ ), así como otras características como son el tiempo de subida ( $Tr$ ), el tiempo pico ( $Tp$ ), el margen de fase ( $MF$ ).

$$\text{Tiempo de estabilización} \rightarrow T_{ss} = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

$$\text{Sobrepico} \rightarrow POS = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} * 100\%$$

$$\text{Margen de fase} \rightarrow MF = \frac{\xi}{0.01}$$

$$\text{Tiempo de subida} \rightarrow Tr = \frac{\pi - \sqrt{1-\xi^2}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\text{Tiempo pico} \rightarrow Tp = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

## 2.2 CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS

Todos los sistemas de control pueden ser representados mediante su función de transferencia ó mediante ecuaciones de variables de estado.

La representación en espacio de estado puede también usarse para sistemas con múltiple entradas y salidas (MIMO).

A continuación se muestra la representación general de un sistema en el espacio de estados

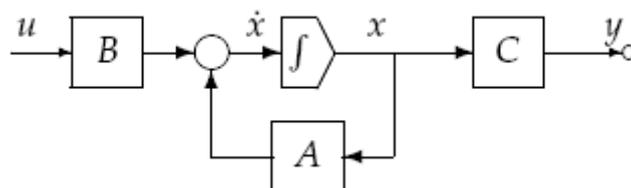


Figura. 2.4. Representación general de un sistema en el espacio de estados

## Representación general de las ecuaciones de variables de estado

Una representación de espacios de estados es un modelo matemático de un sistema físico descrito mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden.

Esta representación relaciona la primera derivada de cada estado con los estados y las entradas del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\mu \\ y &= Cx + D\mu \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= [A] * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [B]\mu \\ y &= [C] * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [D]\mu \end{aligned}$$

Donde:  $x \rightarrow$  estados  
 $y \rightarrow$  salida  
 $\mu \rightarrow$  entrada

### 2.2.1 FORMAS CANÓNICAS PARA LA REPRESENTACIÓN DE LAS ECUACIONES DE VARIABLES DE ESTADO

Existen cinco formas canónicas para la representación de sistemas en espacio de estado y son las siguientes:

- Canónica Controlador
- Canónica Observador
- Canónica de Controlabilidad
- Canónica de Observabilidad
- Canónica Modal

La siguiente función de transferencia es de un sistema cualquiera:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

### Forma Canónica Controlador

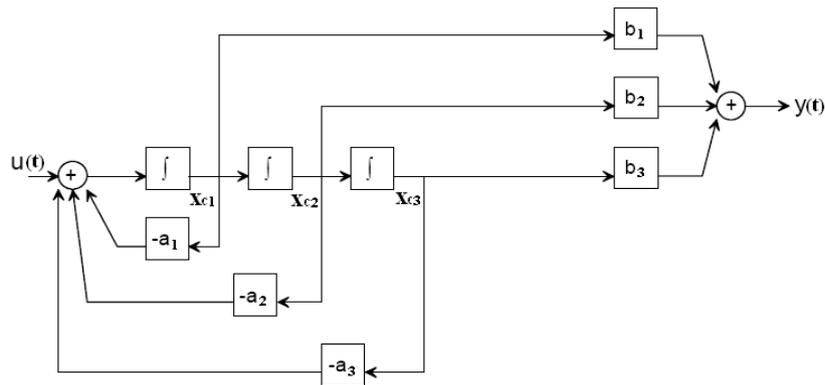


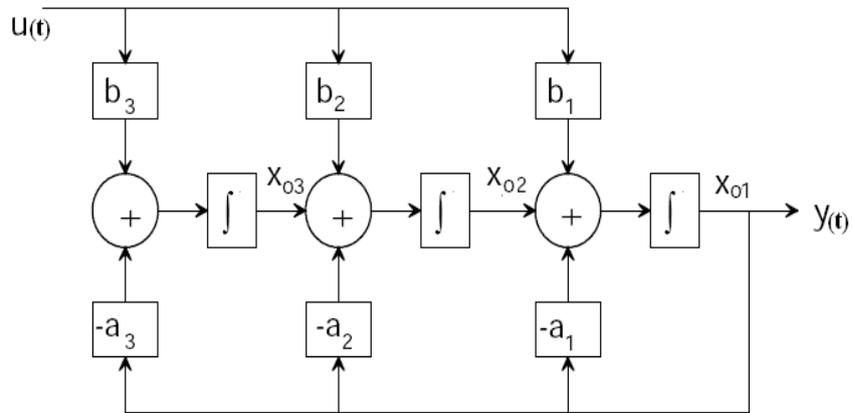
Figura. 2.5. Forma Canónica Controlador

En forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{c1}(t) \\ \dot{x}_{c2}(t) \\ \dot{x}_{c3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \end{bmatrix}$$

**Forma Canónica Observador**



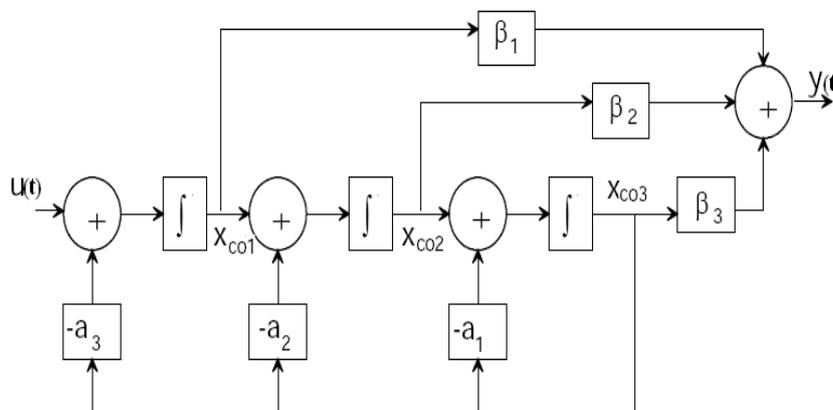
**Figura. 2.6. Forma Canónica Observador**

En forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{o1}(t) \\ \dot{x}_{o2}(t) \\ \dot{x}_{o3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{o1}(t) \\ x_{o2}(t) \\ x_{o3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \mu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{o1}(t) \\ x_{o2}(t) \\ x_{o3}(t) \end{bmatrix}$$

**Forma Canónica de Controlabilidad**



**Figura. 2.7. Forma Canónica de Controlabilidad**

En forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co1}(t) \\ \dot{x}_{co2}(t) \\ \dot{x}_{co3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co1}(t) \\ x_{co2}(t) \\ x_{co3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t)$$

$$y(t) = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] \begin{bmatrix} x_{co1}(t) \\ x_{co2}(t) \\ x_{co3}(t) \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\beta_1 = b_1$$

$$\beta_2 = b_2 - b_1 a_1$$

$$\beta_3 = b_3 - b_2 a_1 + b_1 (a_1^2 - a_2)$$

### Forma Canónica de Observabilidad

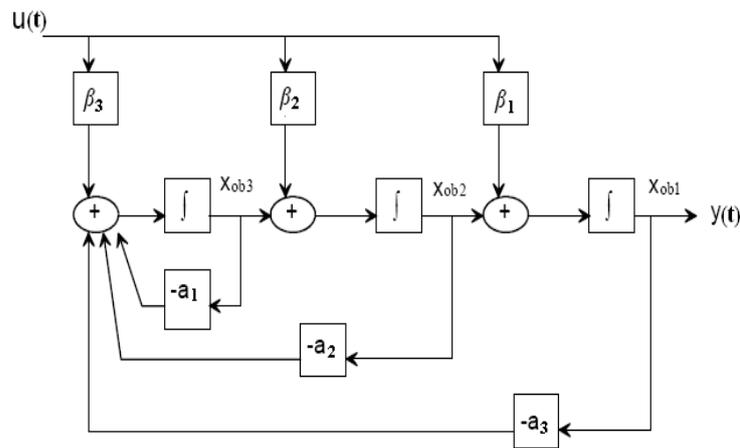


Figura. 2.8. Forma Canónica de Observabilidad

En forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{ob1}(t) \\ \dot{x}_{ob2}(t) \\ \dot{x}_{ob3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ob1}(t) \\ x_{ob2}(t) \\ x_{ob3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \mu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ob1}(t) \\ x_{ob2}(t) \\ x_{ob3}(t) \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\beta_1 = b_1$$

$$\beta_2 = b_2 - b_1 a_1$$

$$\beta_3 = b_3 - b_2 a_1 + b_1(a_1^2 - a_2)$$

### Forma Canónica Modal

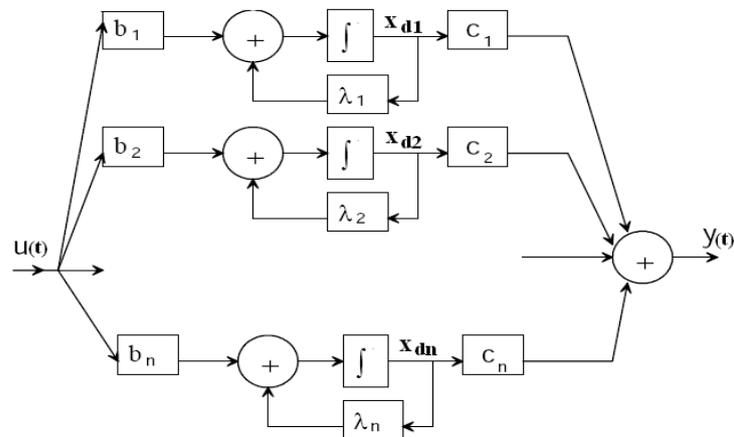


Figura. 2.9. Forma Canónica Modal

En forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{d1}(t) \\ \dot{x}_{d2}(t) \\ \dot{x}_{dn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{d1}(t) \\ x_{d2}(t) \\ x_{dn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \mu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{d1}(t) \\ x_{d2}(t) \\ x_{dn}(t) \end{bmatrix}$$

Mediante la representación en espacios de estados se pueden aplicar métodos para el diseño de controladores tales como:

- Realimentación completa de estados para ubicación de polos.
- Estimadores de estado.

### 2.2.2. REALIMENTACION COMPLETA DE ESTADOS

El esquema de un sistema de realimentación completa de estado es el siguiente:

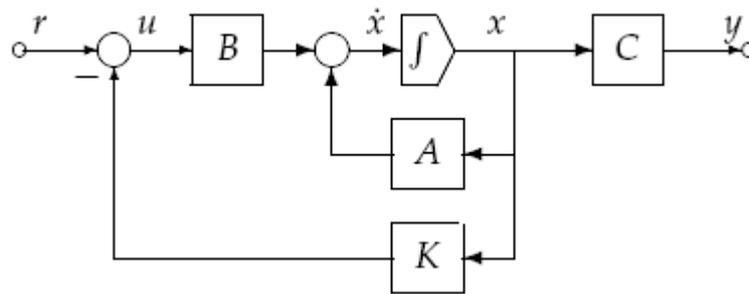


Figura. 2.10. Esquema de un sistema de control con realimentación completa de estados

## DISEÑO MEDIANTE LA LEY DE CONTROL

La ley de control involucra  $n$  ganancias con suficientes grados de libertad para colocar  $n$  polos de lazo cerrado en cualquier lugar deseado en el plano  $s$ .

### Ley de Control

$$\mu = -Kx = -[K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]x$$

### Polinomio característico deseado

$$\alpha_c(s) = (s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n)$$

$$\alpha_c(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n$$



## Ley de Control

$$\mu = -K\hat{x} = -[K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]\hat{x}$$

Donde:

$\hat{x} \rightarrow$  estado estimado

Un método para estimar los estados es construir un modelo de orden completo de la dinámica de la planta. El estimador será satisfactorio si se puede obtener la condición inicial correcta  $x(0)$  y colocar  $\hat{x}(0)$  de igual valor.

Para estudiar la dinámica del estimador se define el error de estimación  $\tilde{x} \cong x - \hat{x}$ , la condición inicial está dada por  $\tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$ .

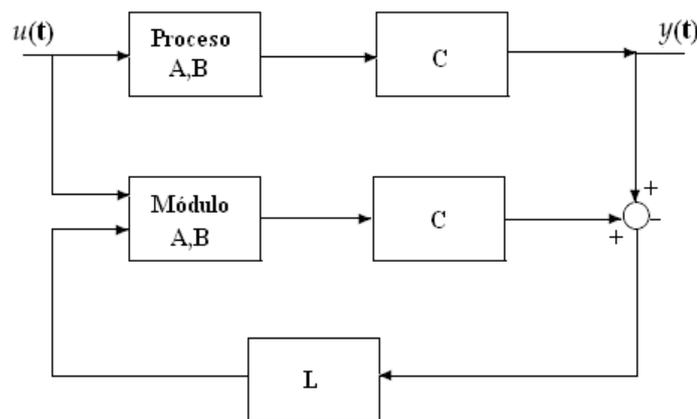


Figura. 2.12. Esquema alternativo del estimador completo de estados

La ecuación del estimador completo es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\mu + L(y - C\hat{x})$$

La dinámica del error del sistema está dada por:  $\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$ .

La ecuación característica del error está dada por:

$$\det(sI - (A - LC)) = 0$$

Aquí  $L$  es una ganancia proporcional y se escoge para alcanzar características de error satisfactorias, está definida como:

$$L = [L_1, L_2, \dots, L_n]^T$$

La selección de  $L$  puede aproximarse exactamente de la misma manera que  $K$  es seleccionada en el diseño de la ley de control.

Mediante el comando de Matlab “acker” se puede encontrar de manera más fácil los valores de la ganancia  $L$ .

$$L = \text{acker}(A', C', \text{dep})'$$

Donde:

$A, C \rightarrow$  matrices del sistema.

$\text{dep} \rightarrow$  polos del estimador

### Combinación del estimador y la ley de control

Si se usan los estados estimados y la ley de control se tiene el regulador capaz de rechazar perturbaciones pero no sigue una señal de referencia.

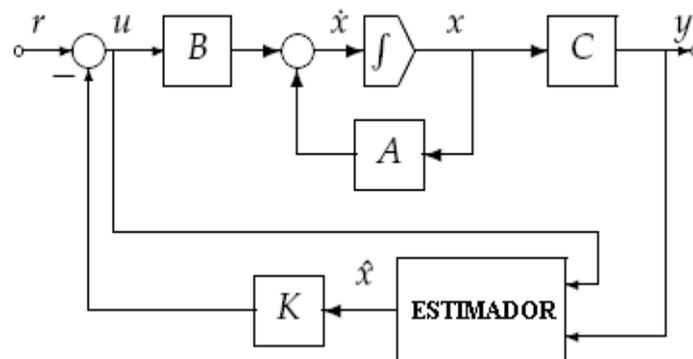


Figura. 2.13. Esquema de la combinación entre la ley de control y el estimador de estados

La dinámica global en forma de estados es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\cdot} \\ x \\ \dot{\cdot} \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

La ecuación característica del sistema es:

$$\det(sI - A + BK) * \det(sI - A + LC) = 0$$

Esto significa que el diseño de la ley de control y del estimador pueden hacerse independientemente.

El conjunto de polos del sistema combinado consiste de la unión de los polos de control y los polos de estimación.

#### 2.2.4. ESTIMADOR REDUCIDO DE ESTADOS

Si la salida del sistema es ya una de las variables de estado, y además esta medición no es ruidosa, es completamente innecesario realizar una estimación de dicha variable.

Si la señal de medición es ruidosa el estimador de orden completo actuaría como filtro de dicha variable.

Entonces, en el caso que la medición no es ruidosa es conveniente construir un estimador de dimensión menor que solo estime los estados no medidos.

Se divide el vector de estados en:

$$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

Donde:

$x_a \rightarrow$  estados medidos

$x_b \rightarrow$  estados a estimarse

Por lo tanto la representación por variables de estado podrá ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aaa & Aab \\ Aba & Abb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ba \\ Bb \end{bmatrix} \mu$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

La dinámica de las variables de estado no medidas es:

$$\dot{x}_b = Abbx_b + \underbrace{Abax_a + Bb\mu}_{\text{entrada.conocida}}$$

Pueden considerarse como una entrada a la dinámica  $x_b$ .

La dinámica de las variables de estado medidas es:

$$\dot{x}_a = \dot{y} = Aaay + Aabx_b + Ba\mu$$

$$\underbrace{\dot{y} - Aaay - Ba\mu}_{\text{medidas.conocidas}} = Aabx_b$$

Así se obtiene una relación entre cantidades conocidas en el lado izquierdo, que se considera como medidas y variables de estado desconocidas a la derecha.

Con esto se pueden establecer las siguientes sustituciones en las ecuaciones originales del estimador para obtener un estimador de  $x_b$ .

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow x_b & \\ A \rightarrow Abb & \\ B\mu \rightarrow Abay + Bb\mu & \dot{x} = Ax + B\mu \\ y \rightarrow \dot{y} - Aaay - Ba\mu & y = Cx \\ C \rightarrow Aab & \end{array}$$

Las ecuaciones del estimador de orden reducido serán:

$$\dot{\hat{x}}_b = Abbx_b + \underbrace{Abay + Bb\mu}_{\text{entrada}} + L \underbrace{(y - Aaay - Ba\mu - Aab\hat{x}_b)}_{\text{medida}}$$

Si se define el error del estimador como  $\tilde{x}_b \equiv x_b - \hat{x}_b$ , la dinámica del error será:

$$\dot{\tilde{x}}_b = (Abb - LAab)\tilde{x}_b$$

Las ecuaciones del estimador reducido pueden ser rescritas de la siguiente forma:

$$\dot{\hat{x}}_b = (Abb - LAab)\hat{x}_b + (Aba - LAaa)y + (Bb - LBa)\mu + L\dot{y}$$

La ecuación característica del sistema está dada por:

$$\det[sI - (Abb - LAab)] = 0$$

Es conocido que la diferenciación amplifica el ruido, así que si  $y$  (salida) es ruidoso, el uso de  $\dot{y}$  es inaceptable. Para evitar esta dificultad se define el estado del nuevo controlador:

$$x_c \equiv \hat{x}_b - Ly$$

En términos de este nuevo estado la implementación del estimador reducido es:

$$\dot{x}_c = (Abb - LAab)\hat{x}_b + (Aab - LAaa)y + (Bb - LBa)\mu$$

La ganancia del estimador reducido puede encontrarse así:

$$L = ac \ker(Abb', Aab', pe)'$$

Donde:

$pe \rightarrow$  polos del estimador

La representación en diagramas de bloque es la siguiente:

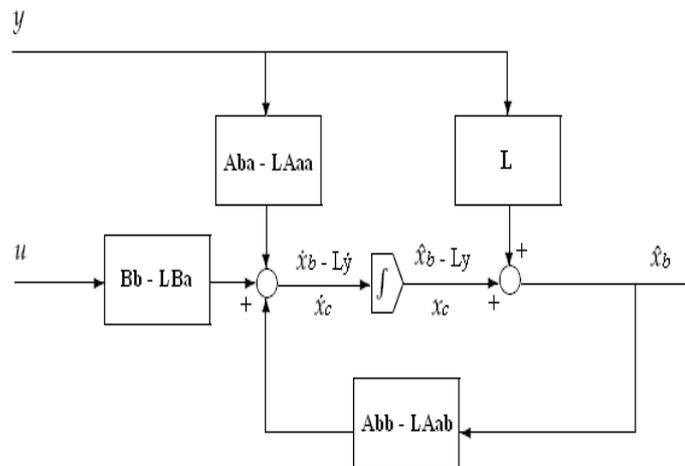


Figura. 2.14. Esquema del estimador reducido de estados

## CAPÍTULO 3

### DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADORES

#### 3.1. CONTROLADOR EN ADELANTO

El método de diseño para este controlador es mediante la respuesta de frecuencia utilizando diagramas de Bode.

Para este diseño se utilizará la función de transferencia de la posición angular del servomotor:

$$G(s) = \frac{186}{s(1.04s + 1)}$$

Se requiere que el controlador cumpla las siguientes especificaciones: error de estado estable para una entrada tipo rampa del 3%, margen de fase de  $55^\circ$  y tiempo de estabilización del sistema de 2.5 segundos.

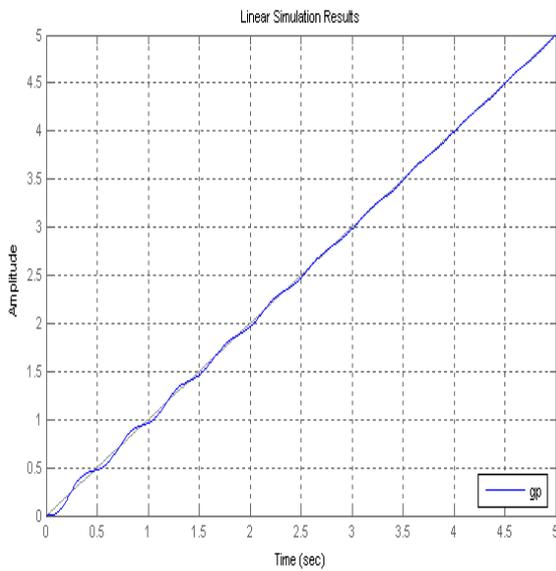
Especificaciones:  $ess_{\%} \leq 3\%$ ,  $MF = 55^\circ$   $T_s \leq 2.5s$

Si se considera que el compensador es una ganancia unitaria  $G_c = 1$ , la función de transferencia de lazo cerrado del sistema será:

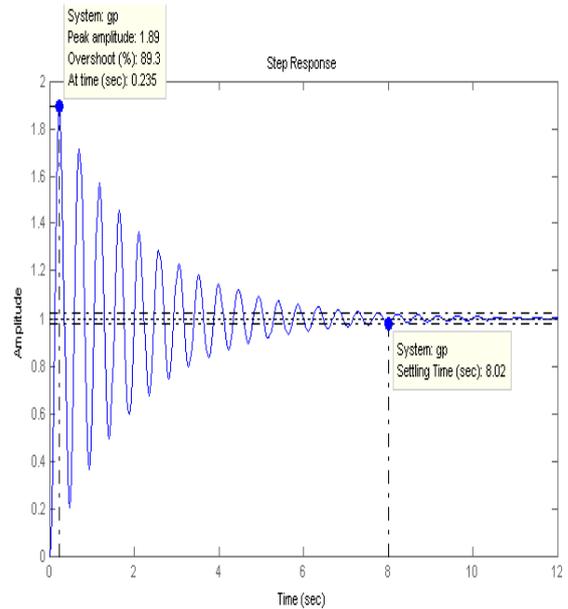
$$G(s) = \frac{186}{1.04s^2 + s + 186}$$

Esta respuesta se la nombra como sistema sin compensar.

## Respuestas del sistema sin compensar para una señal rampa y una señal paso



**Figura. 3.1.** Gráfica del sistema sin compensar (señal rampa)



**Figura. 3.2.** Gráfica del sistema sin compensar (señal paso)

Se puede observar en las gráficas que el tiempo de estabilización del sistema es de aproximadamente 5s para una señal tipo rampa y de 8s para una señal tipo paso, pero una de las especificaciones del controlador es que el tiempo de estabilización sea inferior o igual a 2.5s por lo que se tendrá que utilizar un compensador en adelante.

### Determinación de $K_c$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)K_c$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{186}{s(1.04s + 1)} \right] K_c$$

$$K_v = 186K_c$$

$$ess = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{186K_c}$$

$$0.03 = \frac{1}{186K_c} \Rightarrow K_c = 0.179$$

**Cálculo del coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ )**

$$MF = \frac{\xi}{0.01}$$

$$\xi = 0.55$$

**Cálculo del sobrepico (POS)**

$$POS = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} * 100\%$$

$$POS = 12.63\%$$

**Cálculo de la frecuencia natural de lazo cerrado ( $\omega_n$ )**

$$Ts = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

$$\omega_n = 2.9 \text{ rad / s}$$

**Cálculo del tiempo de subida ( $Tr$ )**

$$Tr = \frac{\pi - \sqrt{1 - \xi^2}}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$Tr = 0.95 \text{ s}$$

**Cálculo del tiempo pico ( $Tp$ )**

$$Tp = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$Tp = 1.29 \text{ s}$$

**Función de transferencia de lazo abierto**

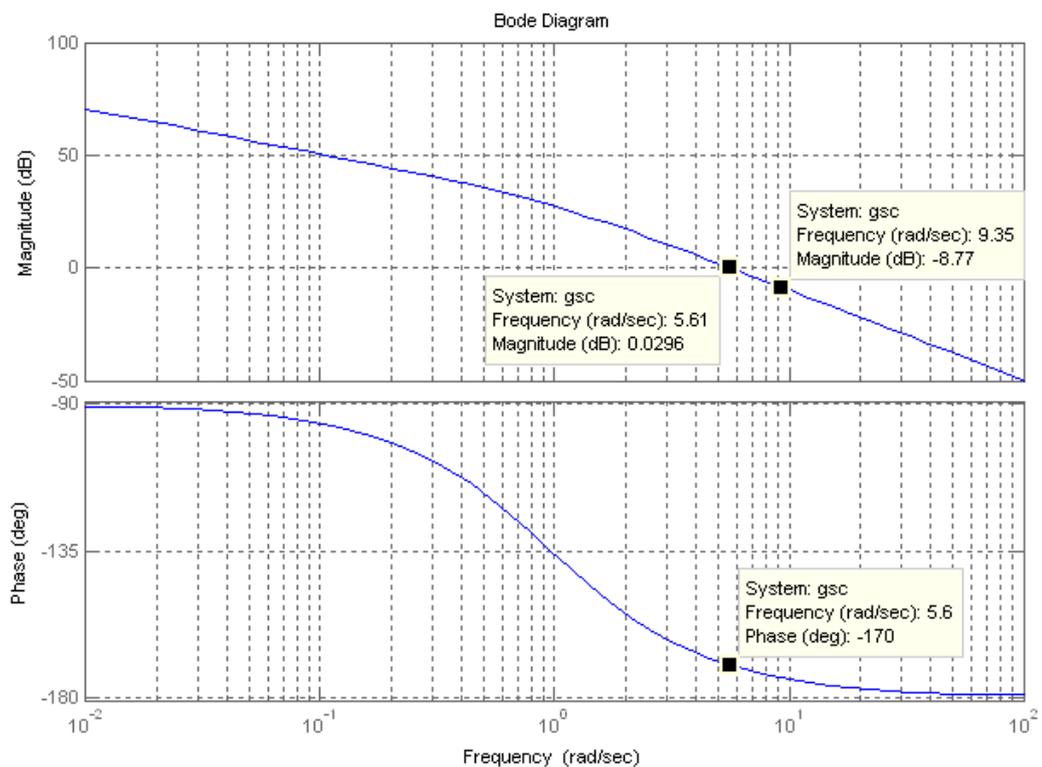
$$KcG(s) = 0.179 * \frac{186}{s(1.04s + 1)}$$

## Diagrama de Bode del sistema en lazo abierto

A continuación se procede a graficar el diagrama de Bode del sistema en lazo abierto.

Se utilizó el siguiente código:

```
num=[186]
den=[1.04 1 0]
Kc=0.179
g=tf(num,den)
gsc=(Kc*g)
bode(gsc)
```



**Figura. 3.3. Diagrama de Bode del sistema en lazo abierto (sistema sin compensar)**

Se ubica en la gráfica de la magnitud exactamente el cruce por la ganancia de 0 dB y a su vez se encuentra la fase del sistema en lazo abierto.

**Cálculo del ángulo de adelanto de fase ( $\Phi$ )**

$$180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$$

$$\Phi = 55^\circ - 10^\circ$$

$$\Phi = 45^\circ + 5^\circ$$

$$\Phi = 50^\circ$$

**Cálculo de  $\alpha$** 

$$\alpha = \frac{1 + \text{sen}(\Phi)}{1 - \text{sen}(\Phi)}$$

$$\alpha = \frac{1 + \text{sen}(50^\circ)}{1 - \text{sen}(50^\circ)}$$

$$\alpha = 7.548$$

**Cálculo de la ganancia ( $G$ ) y la frecuencia de cruce de ganancia compensada ( $\omega_{gc}$ )**

$$G = -10 \log \alpha$$

$$G = -10 \log(7.548)$$

$$G = -8.778 \text{ dB}$$

$$\omega_{gc} = 9.35 \text{ rad / s}$$

**Cálculo de  $T$** 

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} * \omega_{gc}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{7.548} * 9.35}$$

$$T = 0.038$$

**Función de transferencia del compensador**

$$K(s) = K_c * K_1$$

$$K_1 = \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1}$$

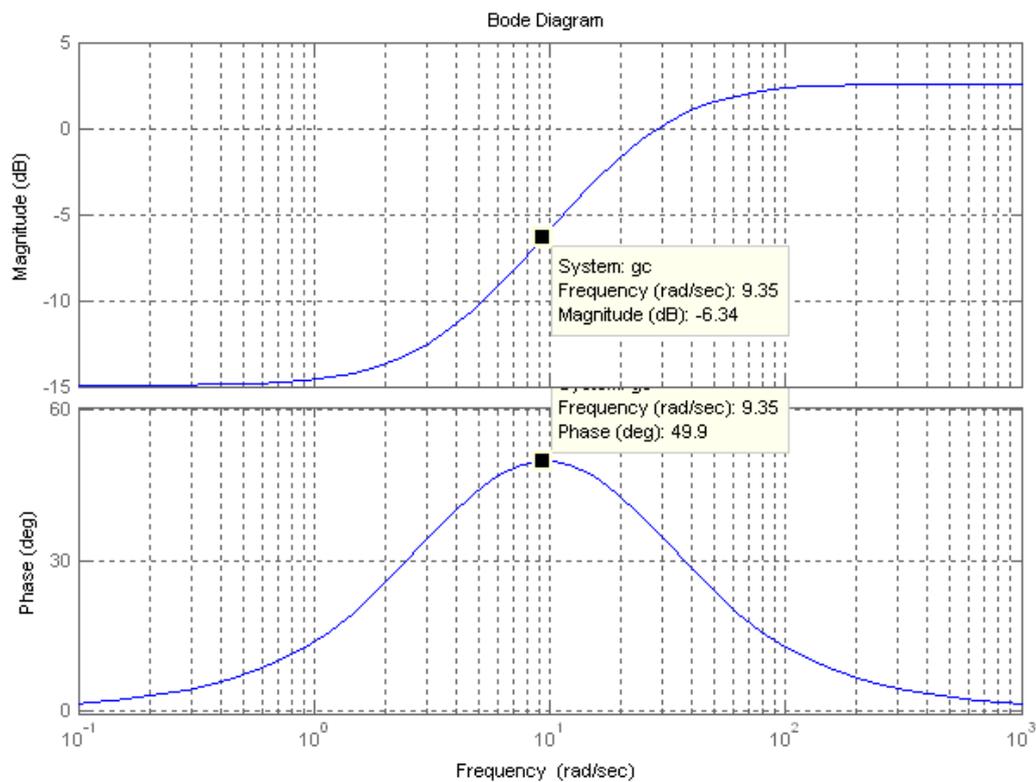
$$K_1 = \frac{0.286s + 1}{0.038s + 1}$$

$$K(s) = 0.179 * \frac{0.286s + 1}{0.038s + 1}$$

## Diagrama de Bode del compensador

Se utilizó el siguiente código:

```
numc=[0.286 1]
denc=[0.038 1]
Kc=0.179
gc1=tf(numc,denc)
gc=Kc*gc1
bode(gc)
```



**Figura. 3.4. Diagrama de Bode del compensador en adelanto**

Se puede observar en la gráfica que al aumentar la frecuencia de cruce de ganancia compensada ( $\omega_{gc}$ ) conduce a un aumento del ancho de banda del sistema en lazo cerrado.

## Función de transferencia del sistema compensado

$$K(s)G(s) = \left( \frac{33.294}{1.04s^2 + s} \right) \left( \frac{0.286s + 1}{0.038s + 1} \right)$$

$$K(s)G(s) = \left( \frac{9.486s + 33.294}{0.039s^3 + 1.078s^2 + s} \right)$$

## Diagrama de Bode del sistema compensado

Se utilizó el siguiente código:

```
nump=[9.486 33.294]
denp=[0.039 1.078 1 0]
gp=tf(nump,denp)
bode(gp)
```

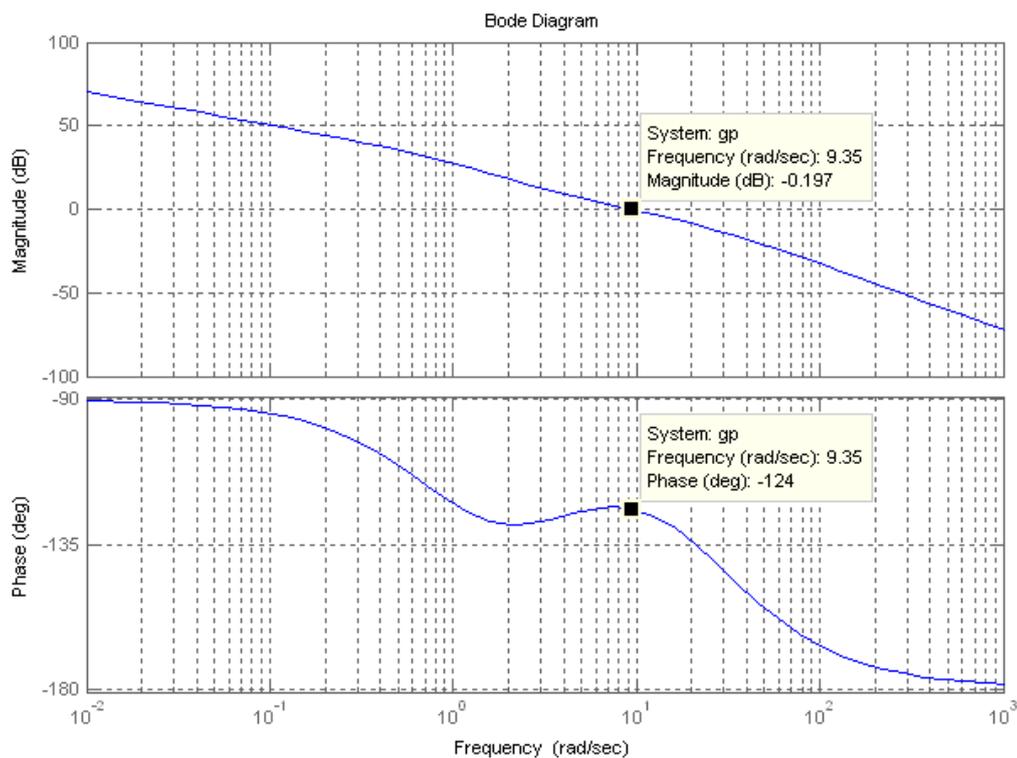


Figura. 3.5. Diagrama de Bode del sistema compensado

Se observa en la gráfica que el compensador en adelanto aumenta la estabilidad relativa del sistema, aumentando su margen de fase.

### Diagrama de Bode del sistema sin compensar y compensado

Se utilizó el siguiente código:

```
bode (gsc, gp)
```

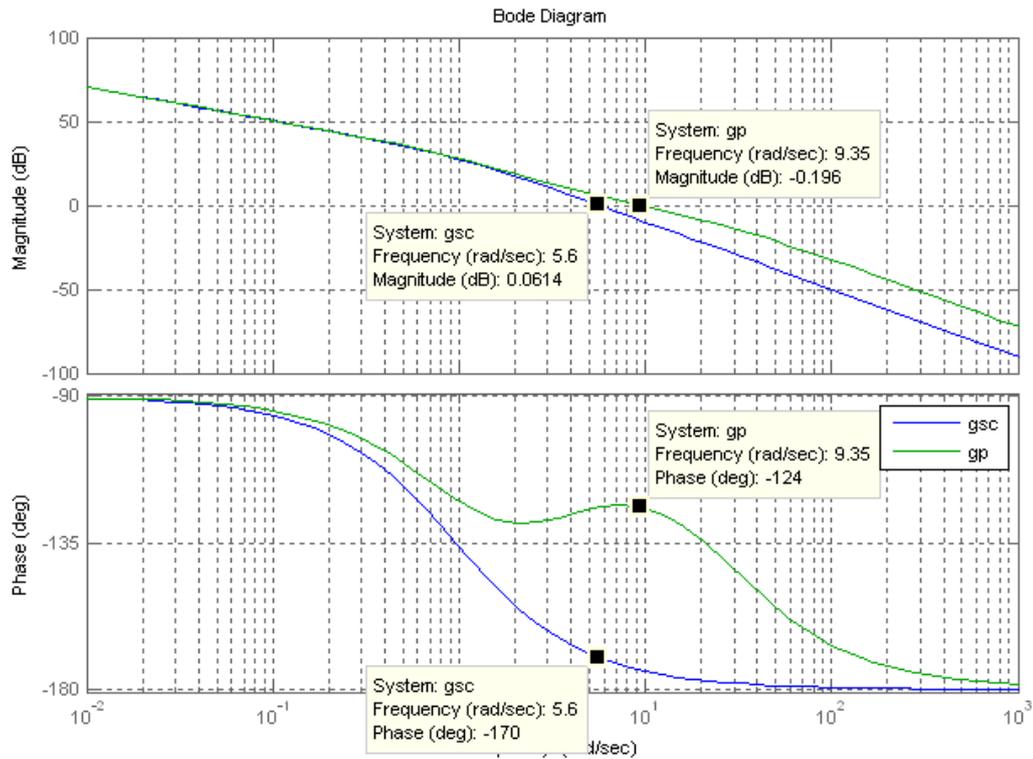


Figura. 3.6. Diagrama de Bode del sistema sin compensar y compensado

### Comparación entre el sistema sin compensar y compensado

	Sin compensar	Compensado
$\omega_{gc}(rad/s)$	5.6	9.35
$Fase(^{\circ})$	-170	-124

Tabla. 3.1. Comparación entre el sistema sin compensar y compensado

Se cumple con el margen de fase de las especificaciones de 55°.

## Código en Matlab

```
num=[9.486 33.294]
den=[0.039 1.078 1 0]
gp=tf(num,den)
gt=feedback(gp,1)
u=0:0.01:10;
t=u;
figure (1)
lsim(gt,u,t)
figure (2)
step(gt)
```

## Respuesta del sistema compensado a una señal tipo rampa

La siguiente figura muestra la respuesta del sistema con el compensador en lazo cerrado para una señal tipo rampa.

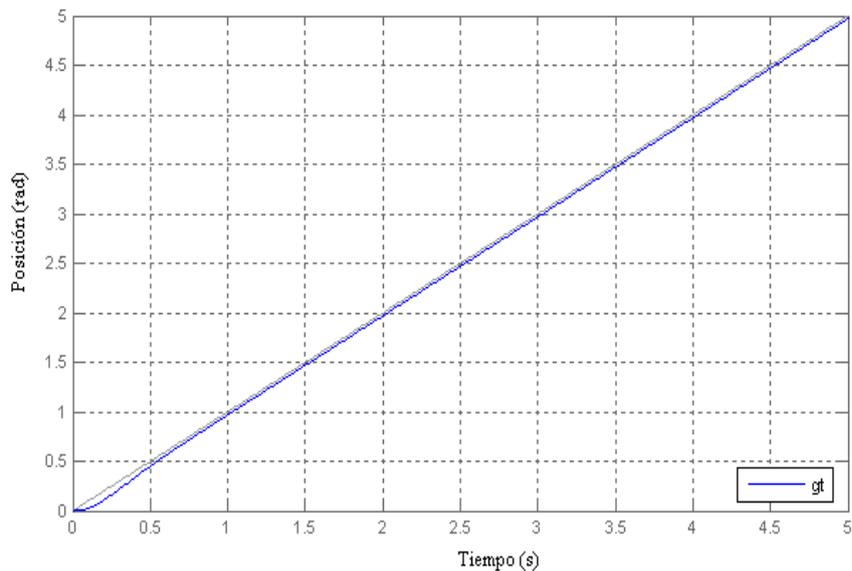


Figura. 3.7. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)

El  $T_s$  del sistema es aproximadamente de 1s, se ha logrado un  $POS$  de 18.9% y el error de estado estable es del 3%.

## Respuesta del sistema compensado a una señal tipo paso

La siguiente figura muestra la respuesta del sistema con el compensador en lazo cerrado para una señal tipo paso.

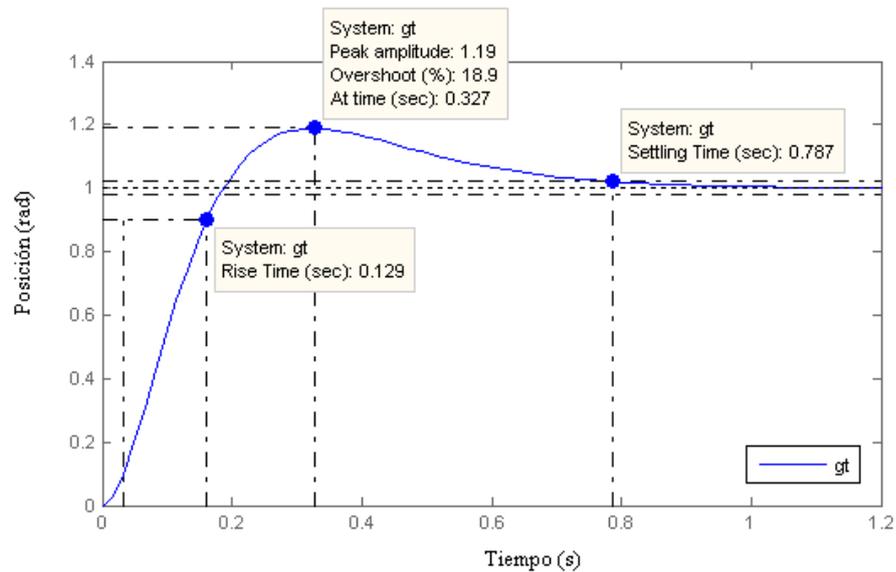


Figura. 3.8. Gráfica del sistema compensado (señal paso)

El  $T_s$  es de 0.787s se logró un POS de 18.9%, el  $T_r$  es de 0.129s y el  $T_p$  es de 0.327s.

### 3.1.1. SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR EN ADELANTO

#### Sistema Servomotor sin compensar

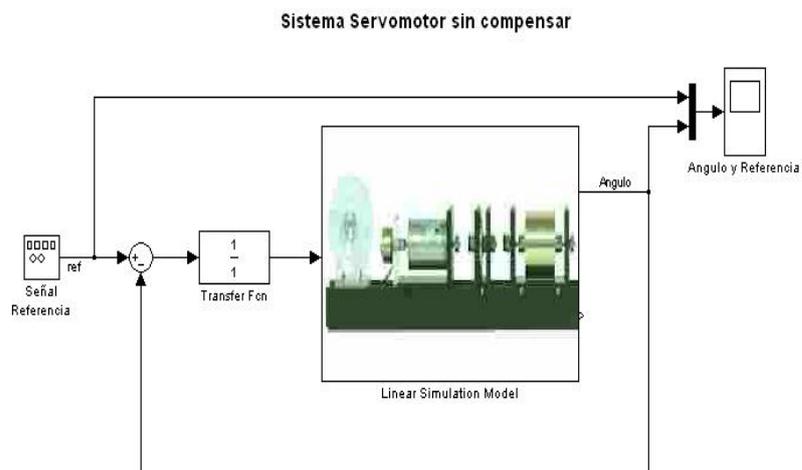
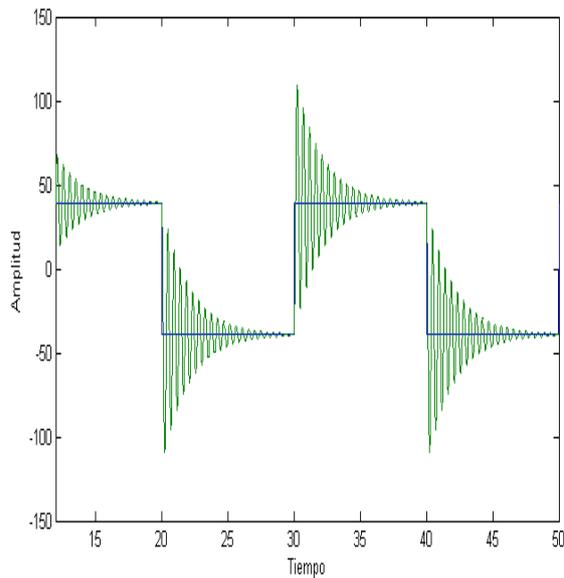
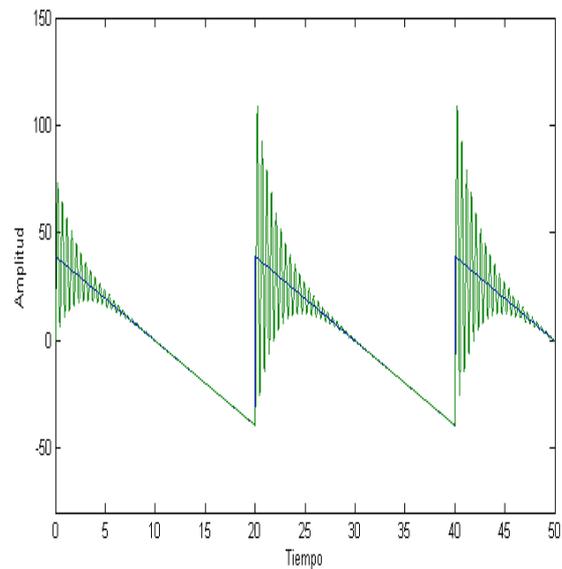


Figura. 3.9. Diagrama de Simulación del sistema sin compensar (Modelo Lineal)

### Respuesta del sistema sin compensar a una señal rampa y a una señal paso



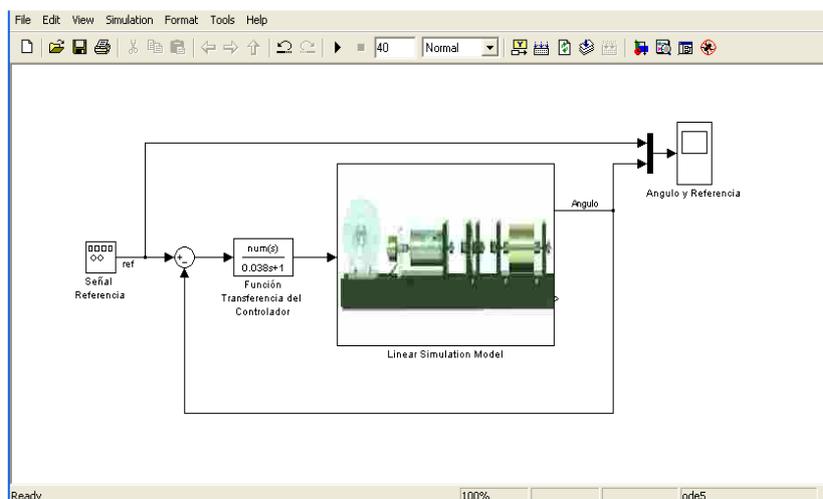
**Figura. 3.10. Gráfica del sistema sin compensar para una señal paso Simulación (Modelo Lineal)**



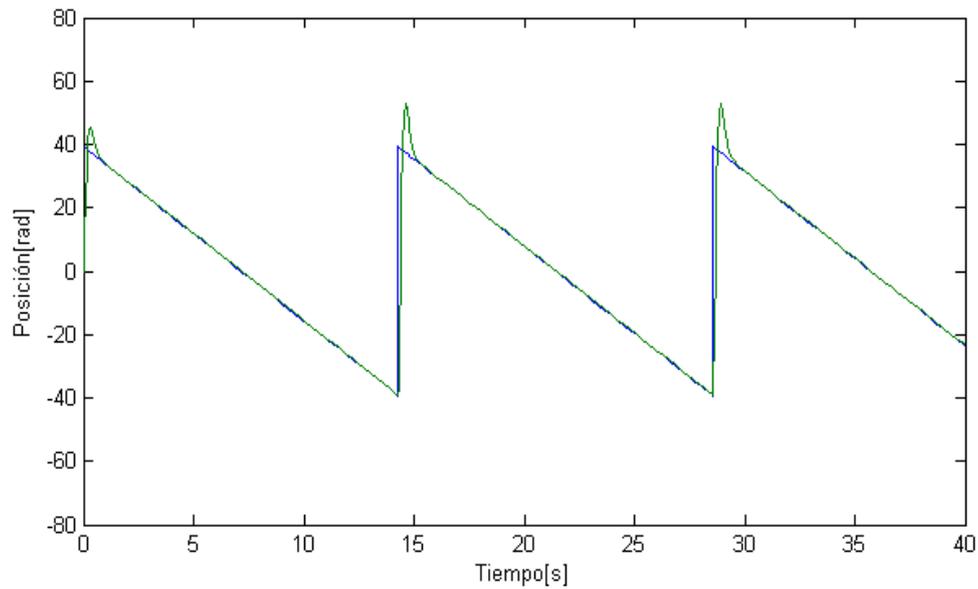
**Figura. 3.11. Gráfica del sistema sin compensar para una señal rampa Simulación (Modelo Lineal)**

Se observa en las gráficas de las simulaciones del sistema servomotor sin compensar que los tiempos de estabilización son demasiado altos aproximadamente de 10s y con sobrepicos alrededor del 89% por lo que se procedió a acoplar un compensador en adelanto para mejorar dichas características.

### Sistema Servomotor con compensador en adelanto (Modelo lineal)

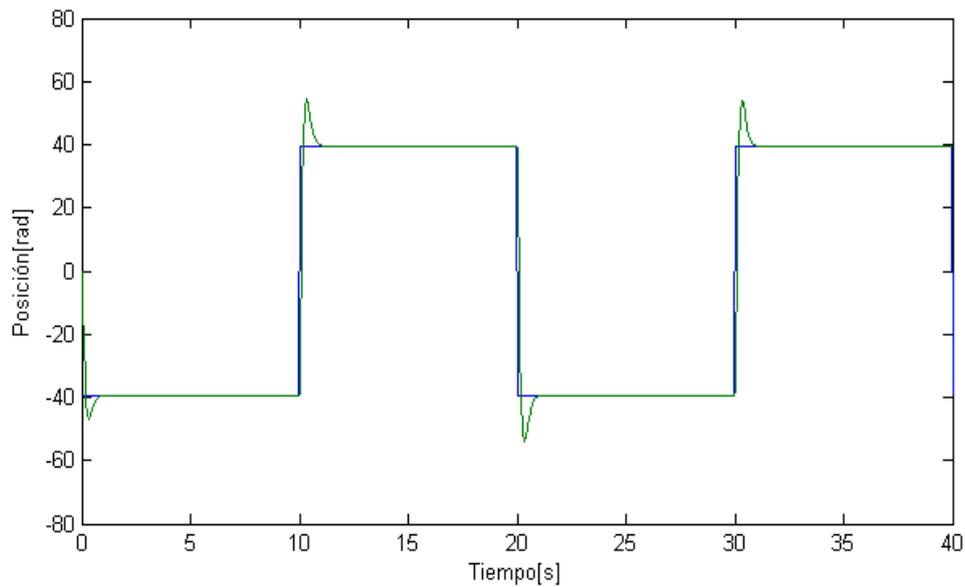


**Figura. 3.12. Diagrama de Simulación del compensador en adelanto (Modelo Lineal)**

**Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (Modelo lineal)**

**Figura. 3.13.** Gráfica del sistema compensado (señal rampa)  
Simulación (Modelo Lineal)

Se obtuvo un  $T_s$  de 1.2s,  $POS$  de 18.9%.

**Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (Modelo lineal)**

**Figura. 3.14.** Gráfica del sistema compensado (señal paso)  
Simulación (Modelo Lineal)

Se obtuvo un  $T_s$  de 0.787s,  $POS$  de 18.9%,  $Tr$  de 0.129s y  $Tp$  de 0.327s.

### Sistema Servomotor con compensador en adelanto (Modelo no lineal)

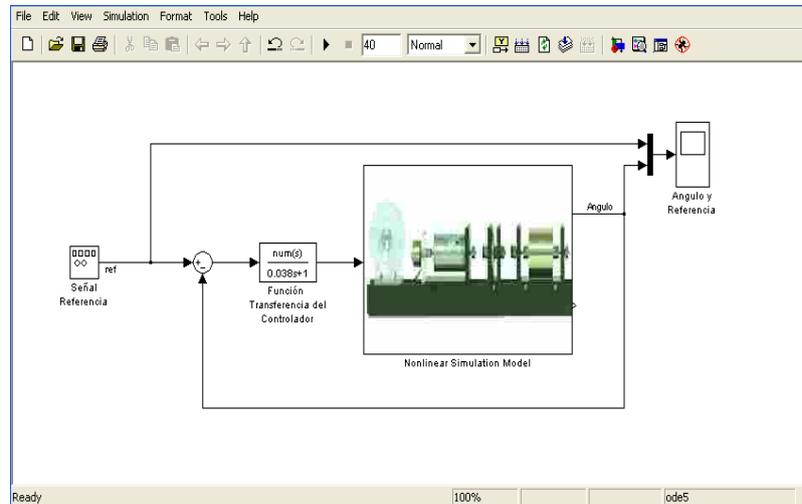


Figura. 3.15. Diagrama de Simulación del compensador en adelanto (Modelo no Lineal)

### Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (Modelo no lineal)

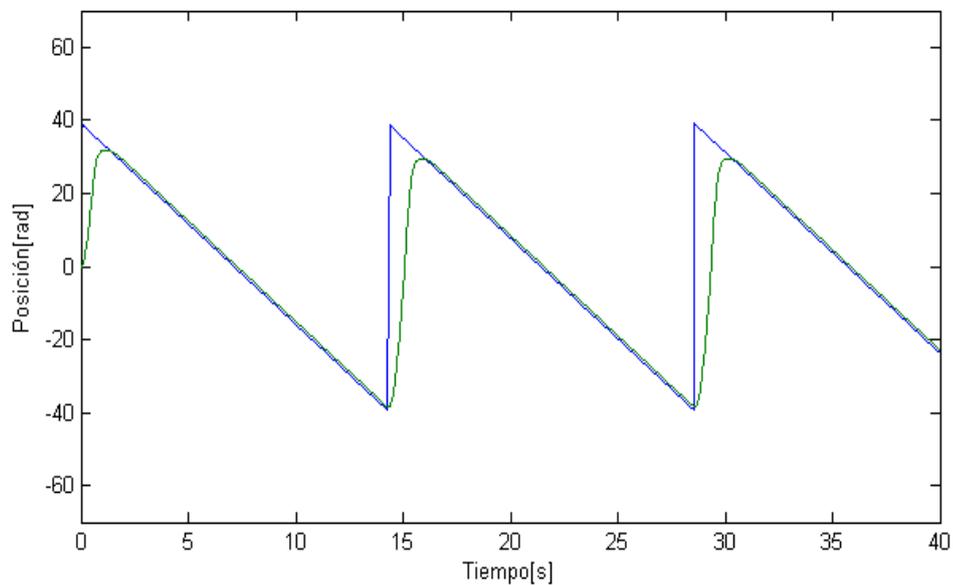
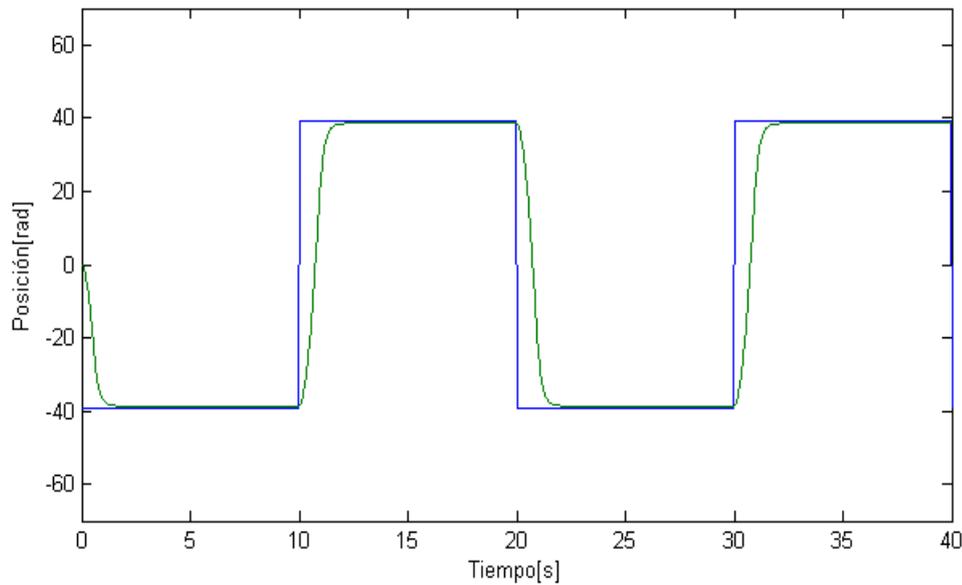


Figura. 3.16. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)  
Simulación (Modelo no Lineal)

Se obtuvo un  $T_s$  de 1.8s,  $POS$  de 0%.

### Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (Modelo no lineal)



**Figura. 3.17. Gráfica del sistema compensado (señal paso)  
Simulación (Modelo no Lineal)**

Se obtuvo un  $T_s$  de 2.3s,  $POS$  de 0% y  $Tr$  de 0.8s.

## 3.2. CONTROLADOR ADELANTO-ATRASO

### Diseño del controlador en adelanto

El procedimiento de diseño para este controlador es mediante el lugar de las raíces utilizando el método geométrico.

Para este diseño se utilizará la función de transferencia de la posición angular del servomotor:

$$G(s) = \frac{186}{s(1.04s + 1)}$$

Se requiere que el controlador cumpla las siguientes especificaciones: error de estado estable para una entrada tipo rampa del 1%, un sobrepico máximo del 20% y una frecuencia natural de lazo cerrado mayor o igual a 4 rad/s.

Especificaciones:  $ess_{\%} \leq 1\%$ ,  $POS \leq 20\%$   $\omega_n \geq 4 \text{ rad/s}$

### Cálculo del coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ )

$$POS = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} * 100\%$$

$$\xi = 0.45$$

### Cálculo del tiempo de estabilización ( $T_s$ )

$$T_s = \frac{4}{\omega_n * \xi}$$

$$T_s = 2.22s$$

### Cálculo del tiempo de subida ( $T_r$ )

$$T_r = \frac{\pi - \sqrt{1-\xi^2}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_r = 0.63s$$

### Cálculo del tiempo pico ( $T_p$ )

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_p = 0.88s$$

### Cálculo del margen de fase ( $MF$ )

$$MF = \frac{\xi}{0.01}$$

$$MF = 45^\circ$$

### Cálculo del punto deseado ( $s_1$ )

$$\omega_n = 4 \text{ rad/s}$$

$$\xi\omega_n = (0.45)(4) = 1.8$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - (\xi\omega_n)^2} = 3.57i$$

$$s_1 = -1.8 + 3.57i$$

Se obtiene los ángulos de cada polo

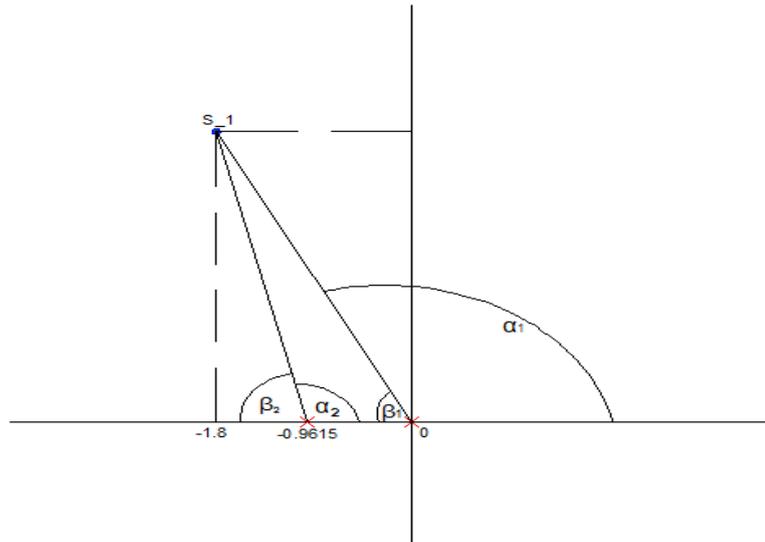


Figura. 3.18. Gráfica de la obtención de los ángulos de cada polo

$$\beta_1 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3.57}{-1.8}\right)$$

$$\beta_1 = -63.24^\circ$$

$$\alpha_1 = -63.24^\circ + 180^\circ$$

$$\alpha_1 = 116.75^\circ$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - \beta_2$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - 76.79^\circ = 103.21^\circ$$

$$\beta_2 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3.57}{1.8 - 0.9615}\right)$$

$$\beta_2 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3.57}{0.838}\right)$$

$$\beta_2 = 76.79^\circ$$

Ubicación del polo y cero

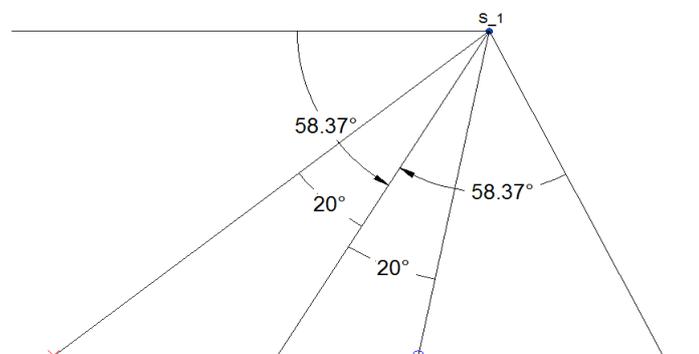


Figura. 3.19. Gráfica de ubicación del polo y cero del controlador

$$\alpha_1 / 2 = 58.37^\circ$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 116.75^\circ + 103.21^\circ = 219.96^\circ$$

$$\phi_c = 219.96^\circ - 180^\circ = 39.96^\circ$$

$$\phi_{c/2} \cong 20^\circ$$

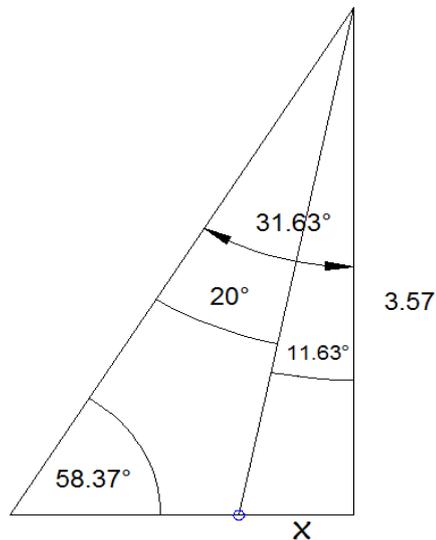


Figura. 3.20. Obtención del cero del controlador

$$90^\circ - 58.37^\circ = 31.63^\circ$$

$$31.63^\circ - 20^\circ = 11.63^\circ$$

$$\operatorname{tg} 11.63^\circ = \frac{x}{3.57}$$

$$x = 0.734$$

$$\text{cero} = -(0.734 + 1.8)$$

$$\text{cero} = -2.534$$

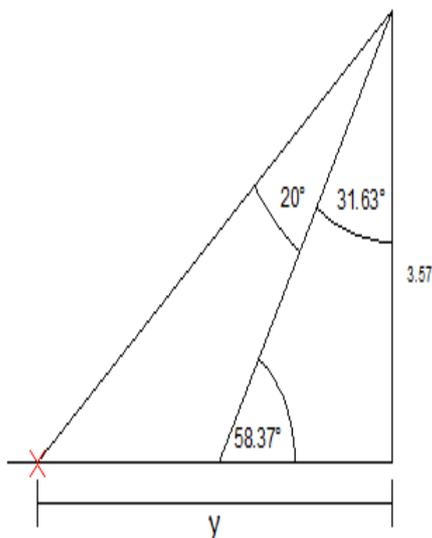


Figura. 3.21. Obtención del polo del controlador

$$\operatorname{tg} 51.63^\circ = \frac{y}{3.57}$$

$$y = 4.5$$

$$\text{polo} = -(4.5 + 1.8)$$

$$\text{polo} = -6.3$$

### Determinación de $K_c$

$$K_c = \frac{1}{|G(s_{-1}) * K(s_{-1})|}$$

$$K_c = \frac{1}{\left| \left[ \frac{186}{-11.68 - 9.79i} \right] \left[ \frac{0.73 + 3.57i}{4.5 + 3.57i} \right] \right|} = 0.129$$

Para que el punto de trabajo  $s_{-1}$  se logre, se requiere que  $K_c$  sea 0.129 por lo que el compensador de adelanto queda de la forma:

$$K_1(s) = 0.129 \left( \frac{s + 2.53}{s + 6.3} \right)$$

El sistema con el compensador en adelanto queda de la forma:

$$Gp_1(s) = K_1(s) * G(s)$$

$$Gp_1(s) = 0.129 \left( \frac{s + 2.53}{s + 6.3} \right) \left( \frac{186}{s(1.04s + 1)} \right)$$

### Diseño del controlador en atraso

Se debe hallar la constante de proporcionalidad  $K_{at}$  del compensador en atraso mediante el error de estado estable.

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)K_1(s) \\ &= s \left( \frac{186}{s(1.04s + 1)} \right) \left( \frac{s + 2.53}{s + 6.3} \right) 0.129 K_{at} \\ &= 9.63 K_{at} \end{aligned}$$

$$ess = \frac{1}{K_v}$$

$$0.01 = \frac{1}{9.63 K_{at}} \Rightarrow K_{at} = 10.38$$

### Relación entre los ceros y los polos del sistema

$$\frac{z}{p} = 10.38$$

Se debe cumplir la condición  $|z| \ll s_{-1}$

$$z = \left( \frac{-1.8}{5} \right) = -0.36$$

$$p = \left( \frac{-0.36}{10.38} \right) = -0.034$$

El compensador en atraso es:

$$K_2(s) = \left( \frac{s + 0.36}{s + 0.034} \right)$$

El compensador adelanto-atraso para el sistema es el siguiente:

$$K(s) = \left( \frac{s + 2.53}{s + 6.3} \right) \left( \frac{s + 0.36}{s + 0.034} \right) 0.129$$

El sistema compensado queda de la forma:

$$Gp(s) = \left( \frac{186}{s(1.04s + 1)} \right) \left( \frac{s + 2.53}{s + 6.3} \right) \left( \frac{s + 0.36}{s + 0.034} \right) 0.129$$

### Código en Matlab

```
numc=conv([1 2.53],[1 0.36]);
denc=conv([1 6.3],[1 0.034]);
numc1=0.129*numc;
gc=tf(numc1,denc)
g=tf([186],[1.04 1 0])
gt=series(gc,g)
gp=feedback(gt,1)
```

```
u=0:0.01:10;  
t=u;  
figure (1)  
lsim(gp,u,t)  
figure (2)  
step(gp)
```

### Respuesta del sistema compensado a una señal tipo rampa

La siguiente figura muestra la respuesta del sistema con el compensador en lazo cerrado para una señal tipo rampa.

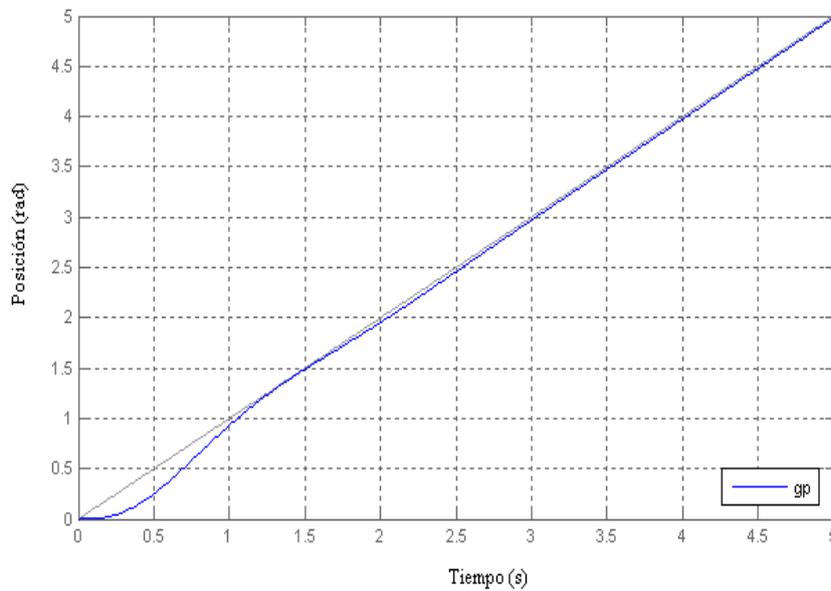
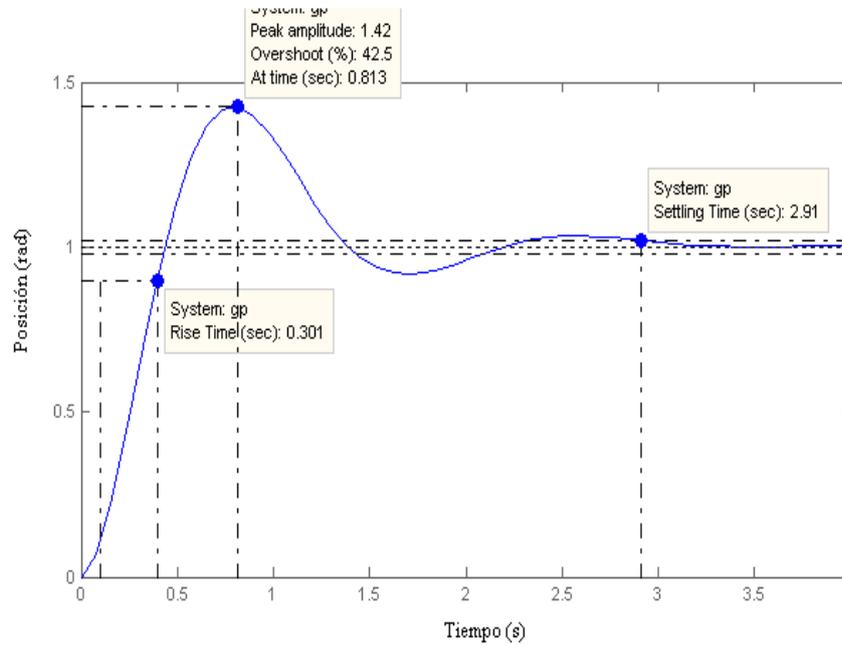


Figura. 3.22. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)

El  $T_s$  del sistema es aproximadamente de 1.8s, se ha logrado un  $POS$  de 42.5% con un error de estado estable del 1%.

## Respuesta del sistema compensado a una señal tipo paso

La siguiente figura muestra la respuesta del sistema con el compensador en lazo cerrado para una señal tipo paso.



**Figura. 3.23.** Gráfica del sistema compensado (señal paso)

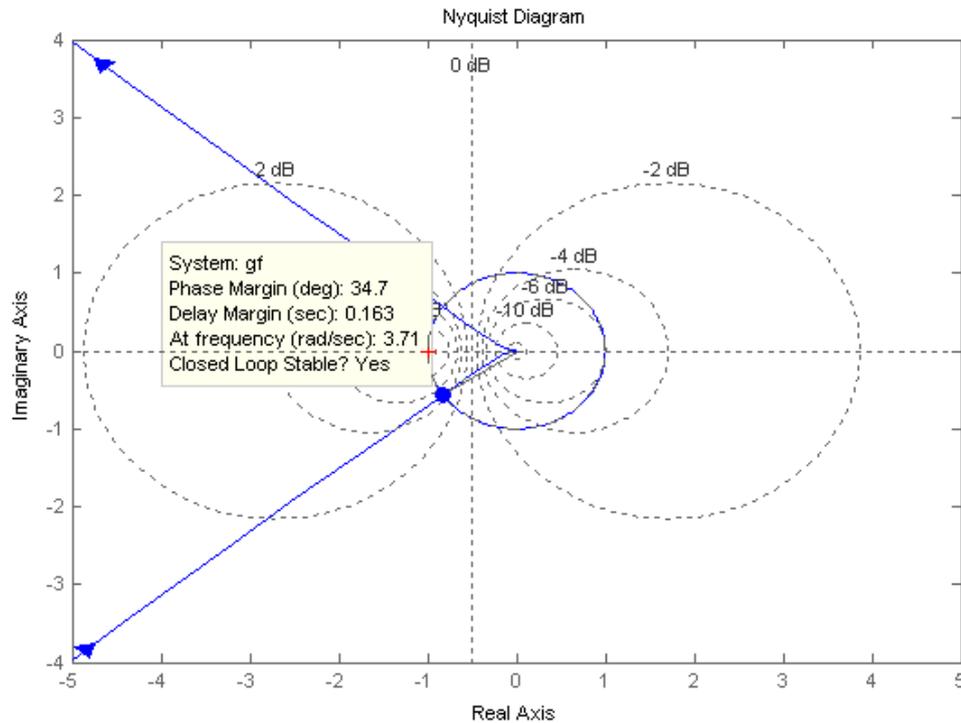
El  $T_s$  es de 2.91s se logró un  $POS$  de 42.5%, el  $Tr$  es de 0.3s y el  $Tp$  es de 0.813s.

## Diagrama de Nyquist

### Código en Matlab

```
angle=0:0.01*pi:2*pi;
x=cos(angle);
y=sin(angle);
plot(x,y)
hold on
gp=tf([186],[1.04 1 0])
gc=tf([0.129 0.3728 0.1175],[1 6.334 0.2142])
gf=series(gp,gc)
nyquist(gf)
axis equal
```

La siguiente figura muestra el diagrama de Nyquist del sistema compensado:



**Figura. 3.24. Diagrama de Nyquist del sistema compensado**

El sistema en lazo cerrado es estable si el número de las raíces del denominador de la planta con las partes reales positivas es igual al número de circunvalaciones con respecto al punto -1.

Se debe cumplir la siguiente condición:

$$N = P \rightarrow \text{estabilidad}$$

$P = \#$  de raíces positivas del denominador de la planta

$N = \#$  circunvalaciones al punto -1

Para el sistema servomotor se tiene:

$$P = 0$$

$$N = 0$$

$$\therefore N = P$$

El sistema es estable

El margen de fase es de  $34.7^\circ$

### 3.2.1. SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR EN ADELANTO-ATRASO

#### Sistema Servomotor con compensador en adelanto-atraso (Modelo lineal)

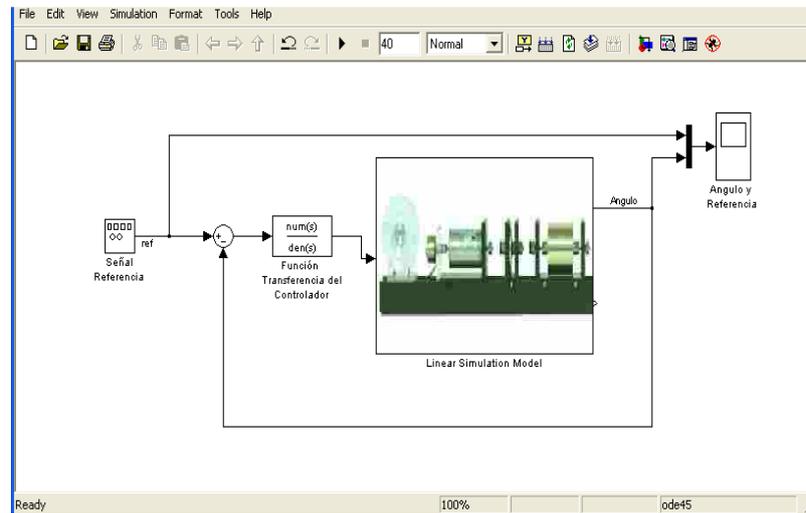


Figura. 3.25. Diagrama de Simulación del compensador en adelanto-atraso (Modelo Lineal)

#### Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (Modelo lineal)

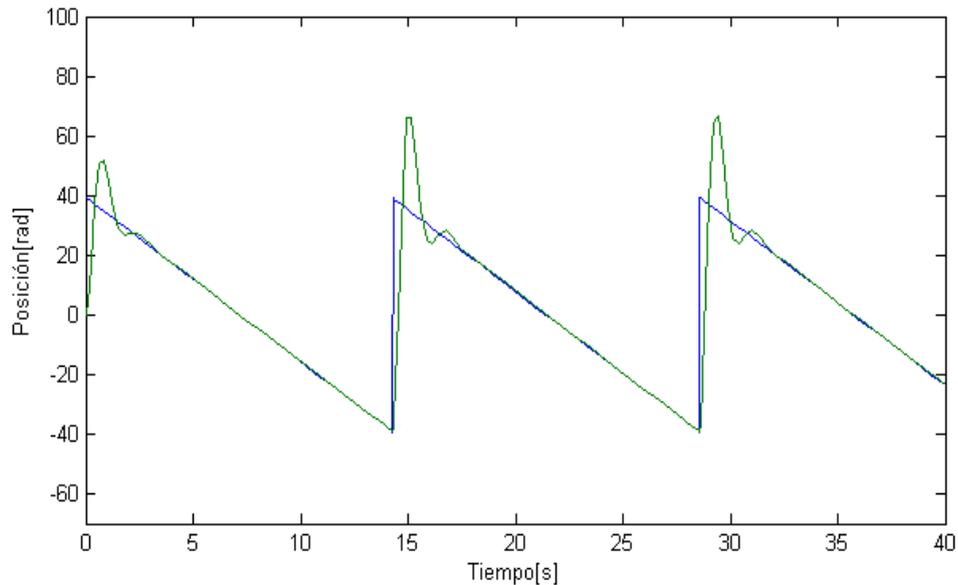


Figura. 3.26. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) Simulación (Modelo Lineal)

Se obtuvo un  $T_s$  de 2.7s,  $POS$  de 42.5%.

### Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (Modelo lineal)

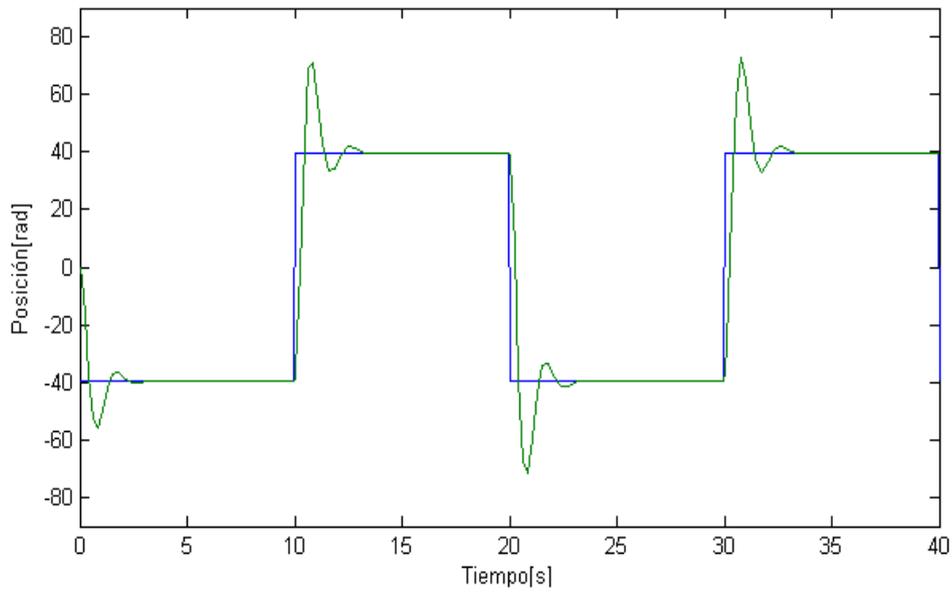


Figura. 3.27. Gráfica del sistema compensado (señal paso)  
Simulación (Modelo Lineal)

Se obtuvo un  $T_s$  de 2.91s,  $POS$  de 42.5%,  $Tr$  de 0.3s y  $Tp$  de 0.813s.

### Sistema Servomotor con compensador en adelanto-atraso (Modelo no lineal)

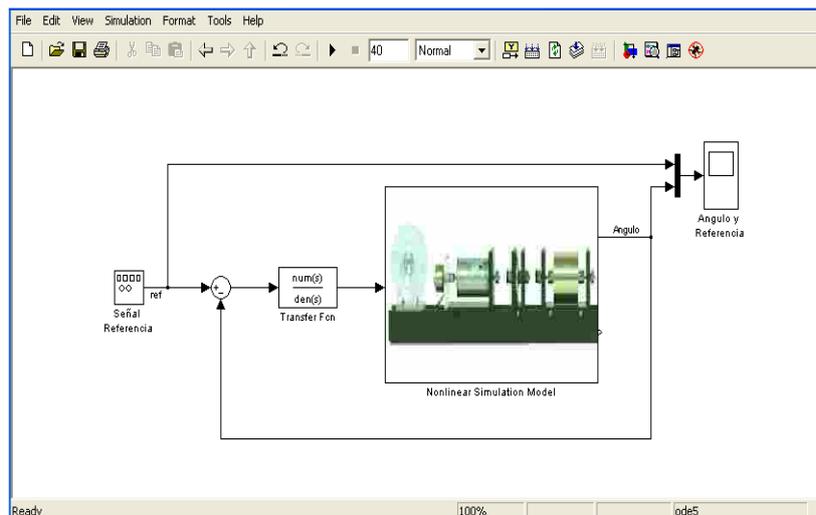
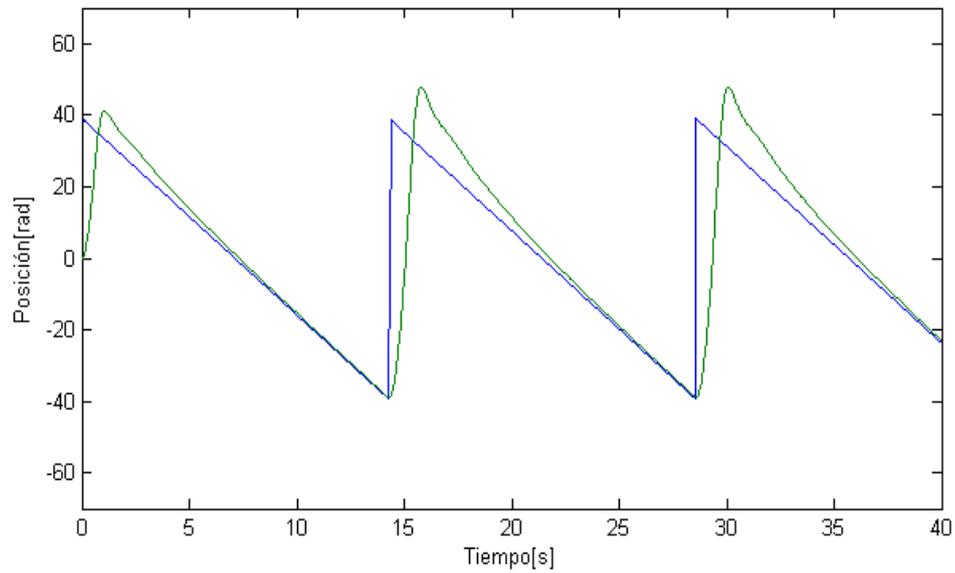
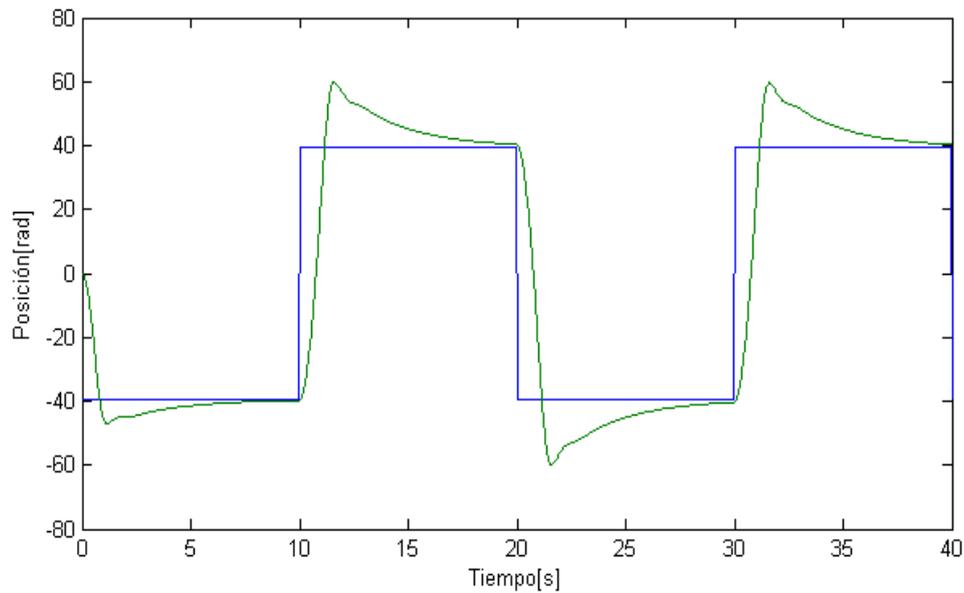


Figura. 3.28. Diagrama de Simulación del compensador en adelanto-atraso (Modelo no Lineal)

**Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (Modelo no lineal)**

**Figura. 3.29. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)  
Simulación (Modelo no Lineal)**

Se obtuvo un  $T_s$  de 7.8s,  $POS$  de 42.5%.

**Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (Modelo no lineal)**

**Figura. 3.30. Gráfica del sistema compensado (señal paso)  
Simulación (Modelo no Lineal)**

Se obtuvo un  $T_s$  de 8.2s,  $POS$  de 42.5%,  $Tr$  de 1.3s y  $Tp$  de 1.66s.

### 3.3 CONTROLADOR PID

Para el diseño de este controlador se van a utilizar dos métodos:

Método Ziegler-Nichols y el método Analítico

#### 3.3.1. Método Ziegler-Nichols

Para la función de transferencia de la velocidad del servomotor

$$G(s) = \frac{186}{1.04s + 1}$$

Se utilizó el siguiente código en Matlab :

```
num=[186]
den=[1.04 1]
gp=tf(num,den)
rlocus(gp)
```

La siguiente figura muestra el lugar de las raíces de la función de transferencia de la velocidad del servomotor.

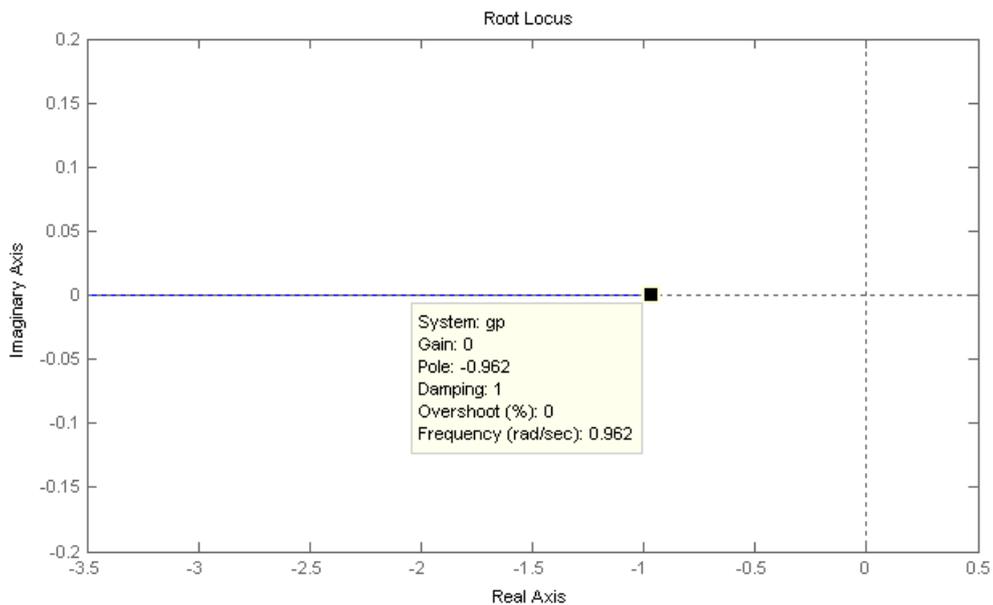


Figura. 3.31. Lugar de las raíces para la velocidad del servomotor

El sistema nunca se vuelve inestable por lo que no se puede aplicar el método Ziegler-Nichols para encontrar las constantes del controlador PID.

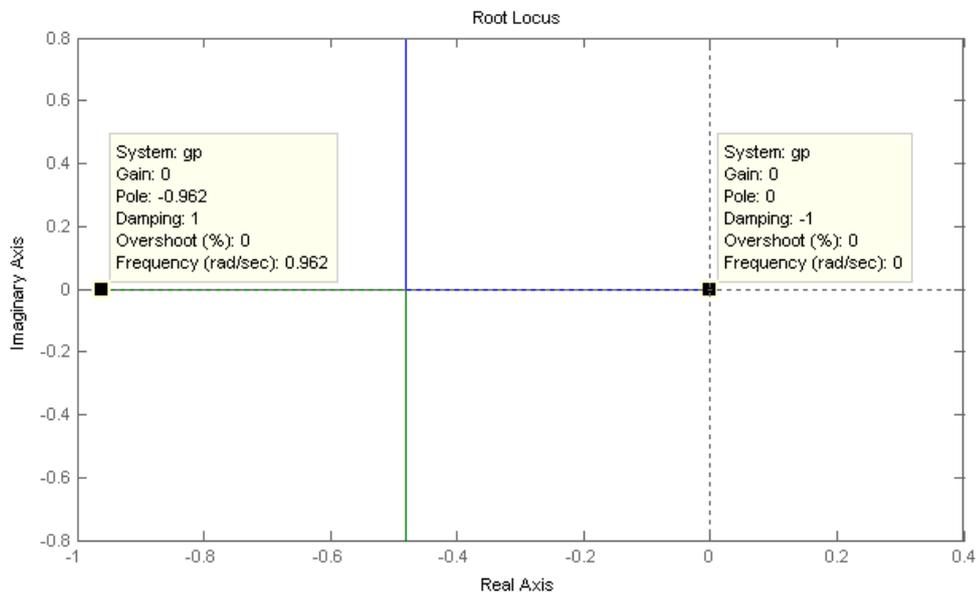
Para la función de transferencia de la posición angular del servomotor

$$G(s) = \frac{186}{s(1.04s + 1)}$$

Se utilizó el siguiente código en Matlab:

```
num=[186]
den=[1.04 1 0]
gp=tf(num,den)
rlocus(gp)
```

La siguiente figura muestra el lugar de las raíces de la función de transferencia de la posición angular del servomotor.



**Figura. 3.32.** Lugar de las raíces para la posición angular del servomotor

El sistema nunca se vuelve inestable por lo que no se puede aplicar el método Ziegler-Nichols para encontrar las constantes del controlador PID.

### 3.3.2 Método Analítico

Para este diseño se utilizará la función de transferencia de la velocidad del servomotor:

$$G(s) = \frac{186}{1.04s + 1}$$

Se requiere que el controlador cumpla las siguientes especificaciones: error de estado estable para una entrada tipo paso del 3%, un sobrepico máximo del 10% y tiempo de estabilización del sistema de 2 segundos

Especificaciones:  $ess_{\%} \leq 3\%$ ,  $POS \leq 10\%$   $T_s \leq 2s$

#### Cálculo del coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ )

$$POS = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} * 100\%$$

$$\xi = 0.59$$

#### Cálculo del margen de fase (MF)

$$MF = \frac{\xi}{0.01} = \frac{0.59}{0.01}$$

$$MF = 59^\circ$$

#### Cálculo de la frecuencia natural de lazo cerrado ( $\omega_n$ )

$$\omega_n = \frac{4}{T_s * \xi} = \frac{4}{2 * 0.59}$$

$$\omega_n = 3.39 \text{ rad / s}$$

#### Cálculo del tiempo de subida (Tr)

$$Tr = \frac{\pi - \sqrt{1 - \xi^2}}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$Tr = 0.85s$$

### Cálculo del tiempo pico ( $T_p$ )

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$T_p = 1.147 s$$

### Cálculo de la constante de error de estado estable

La función de transferencia del sistema es de Tipo 0, por lo que la constante puede ser encontrada de la siguiente manera:

$$K_{n+1} = \lim_{s \rightarrow 0} s^n K_i G(s) = \frac{1}{e_{ss}}$$

Para este caso  $n = 0$  ∴

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} K_i G(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} K_i \left( \frac{186}{1.04s + 1} \right)$$

$$= 186K_i = \frac{1}{e_{ss}} \Rightarrow 186K_i = \frac{1}{0.03} \Rightarrow K_i = 0.179$$

### Cálculo de las constantes $K_p$ y $K_d$

Para encontrar las constantes  $K_p$  y  $K_d$  se utilizó un programa en Matlab el cual requiere ingresar datos como el numerador y denominador de la planta (ng,dg), la constante de error de estado estable (ki), el margen de fase (dpm) y la frecuencia de cruce de ganancia compensada(wgc).

### Código en Matlab

```
%analitico pid
function[kp, kd]=pid(ng, dg, ki, dpm, wgc)
ngv=polyval(ng, j*wgc)
dgv=polyval(dg, j*wgc)
g=ngv/dgv
thetar=(dpm-180)*pi/180
ejtheta=cos(thetar)+j*sin(thetar)
```

```
eqn=(ejtheta/g)+j*(ki/wgc)
x=imag(eqn)
r=real(eqn)
kp=r
kd=x/wgc
```

## Resultados del programa

$$K_p = 0.0135$$

$$K_d = 0.0113$$

$$K_i = 0.179$$

## Función de transferencia del controlador

$$G_c(s) = 0.0135 + 0.0113s + \frac{0.179}{s}$$

## Respuesta del sistema compensado a una señal tipo rampa

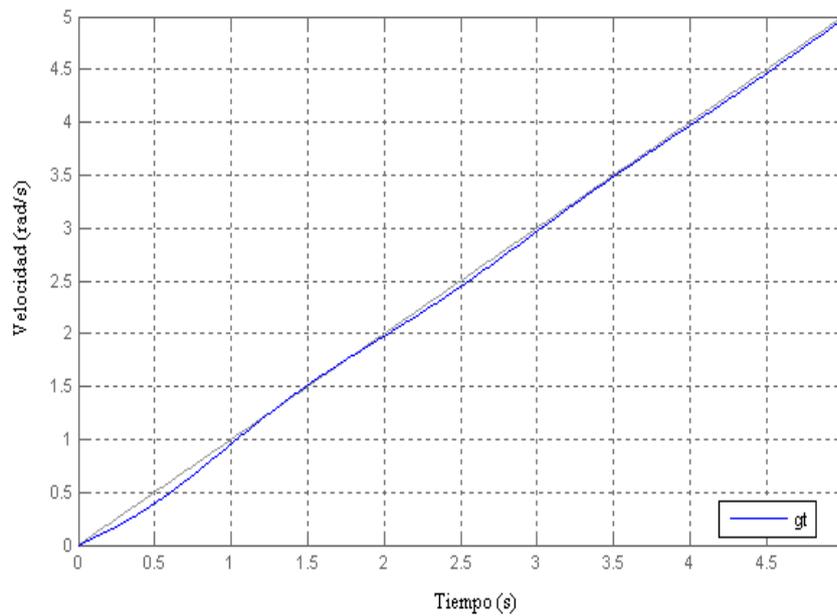


Figura. 3.33 Gráfica del sistema compensado (señal rampa)

El  $T_s$  del sistema es aproximadamente de 1.7s, se ha logrado un  $POS$  de 19.2% con un error de estado estable del 3%.

### Respuesta del sistema compensado a una señal tipo paso

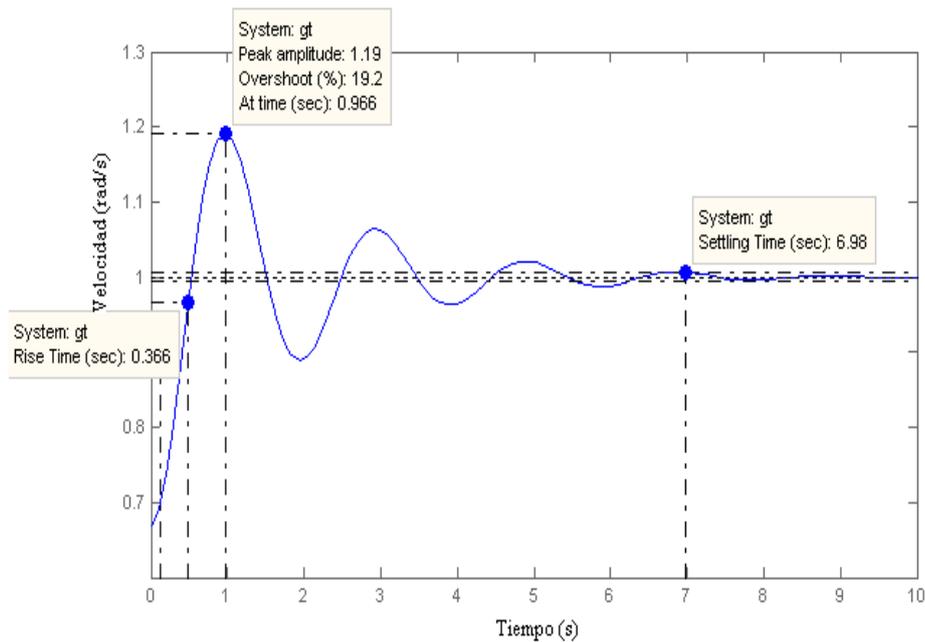


Figura. 3.34. Gráfica del sistema compensado (señal paso)

El  $T_s$  es de 6.98s se logró un  $POS$  de 19.2%, el  $T_r$  es de 0.366s y el  $T_p$  es de 0.96s.

### 3.3.3 SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR PID

#### Sistema Servomotor con controlador PID (Modelo lineal)

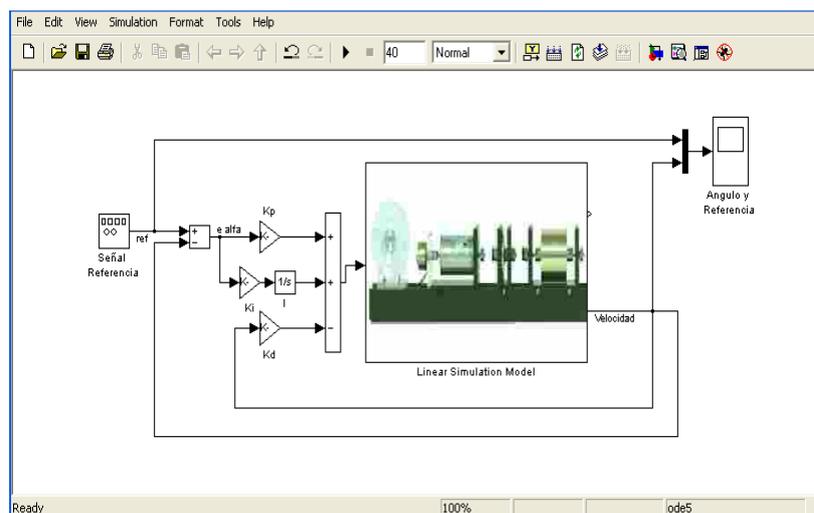
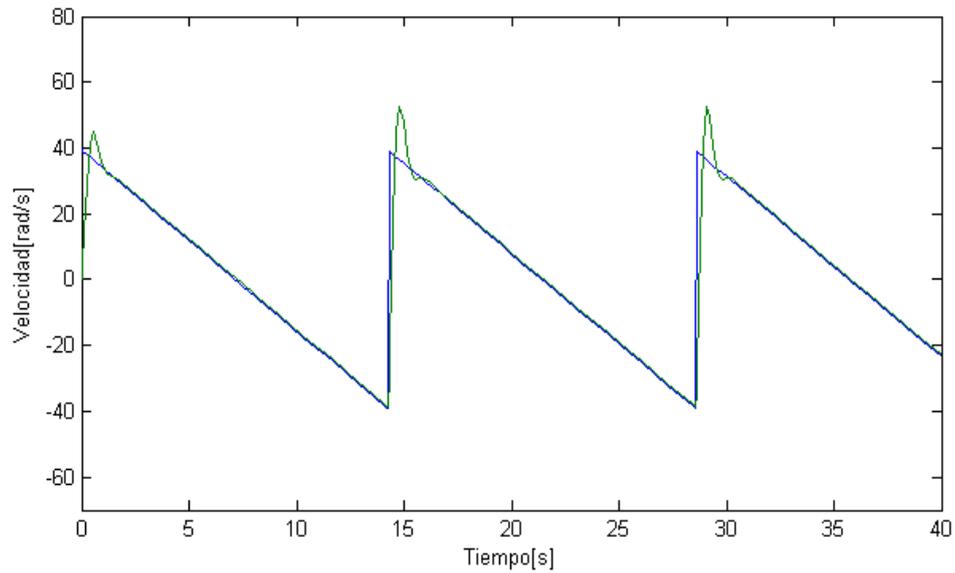


Figura. 3.35. Diagrama de Simulación del controlador PID (Modelo Lineal)

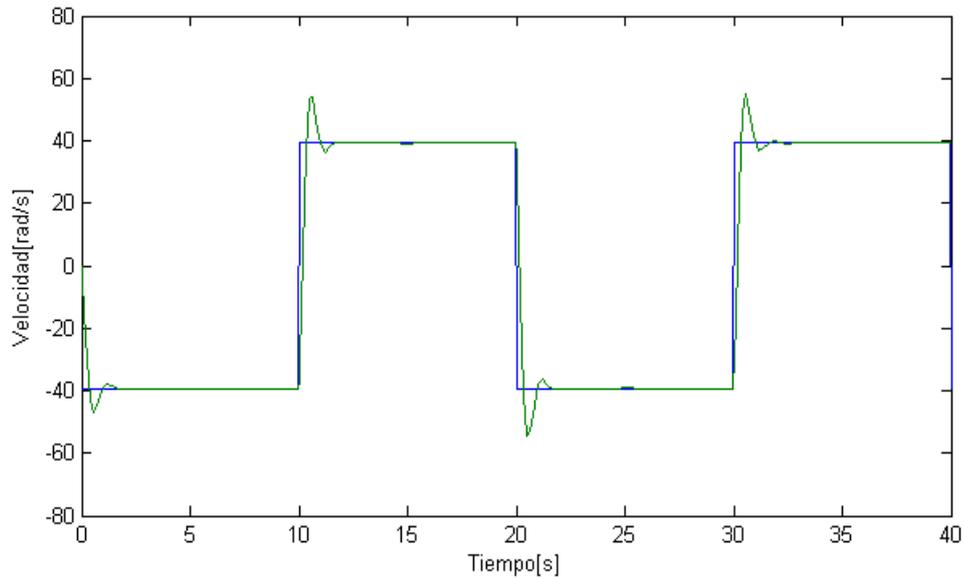
### Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (Modelo lineal)



**Figura. 3.36.** Gráfica del sistema compensado (señal rampa)  
Simulación (Modelo Lineal)

Se obtuvo un  $T_s$  de 2s,  $POS$  de 19.2%.

### Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (Modelo lineal)



**Figura. 3.37.** Gráfica del sistema compensado (señal paso)  
Simulación (Modelo Lineal)

Se obtuvo un  $T_s$  de 1.7s,  $POS$  de 19.2%,  $Tr$  de 0.36s y  $Tp$  de 0.96s.

### Sistema Servomotor con controlador PID (Modelo no lineal)

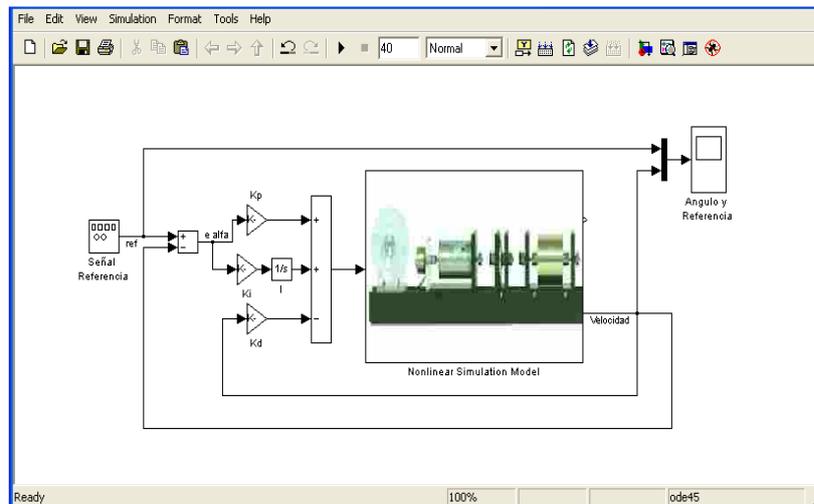


Figura. 3.38. Diagrama de Simulación del controlador PID (Modelo no Lineal)

### Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (Modelo no lineal)

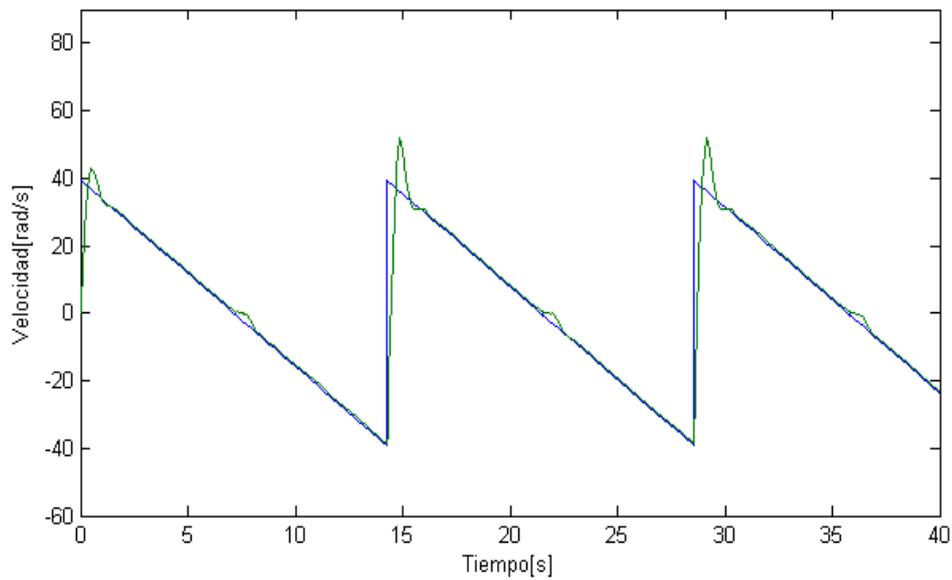
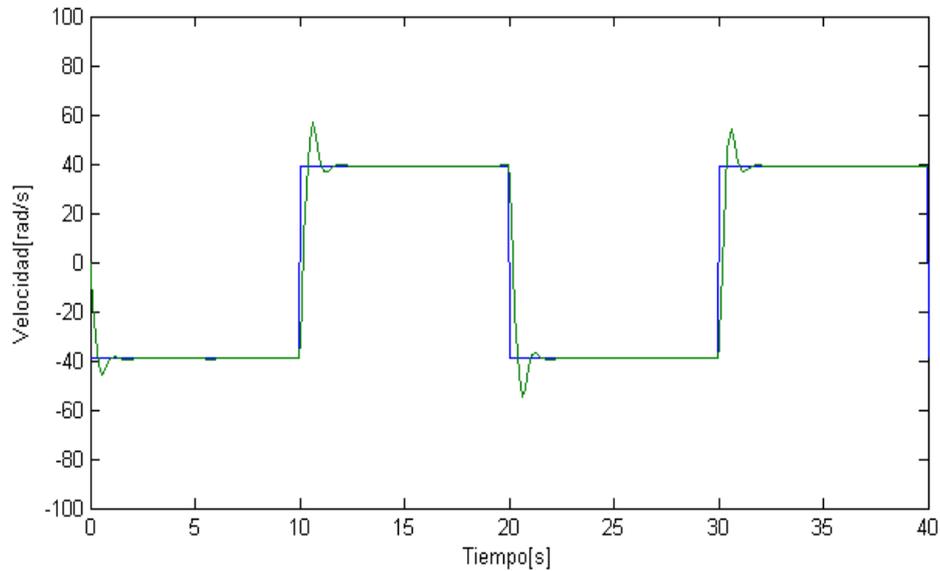


Figura. 3.39. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)  
Simulación (Modelo no Lineal)

Se obtuvo un  $T_s$  de 1.9s,  $POS$  de 19.2%.

### Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (Modelo no lineal)



**Figura. 3.40. Gráfica del sistema compensado (señal paso)  
Simulación (Modelo no Lineal)**

Se obtuvo un  $T_s$  de 1.9s,  $POS$  de 19.2%,  $Tr$  de 0.4s y  $Tp$  de 0.85s.

## 3.4 CONTROLADOR CON REALIMENTACION COMPLETA DE ESTADOS LQ

### Ecuaciones de estado del sistema servomotor

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.961 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 178.8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Se requiere que el controlador cumpla las siguientes especificaciones: margen de fase de  $40^\circ$  y tiempo de estabilización del sistema de 2 segundos.

Especificaciones:  $MF = 40^\circ$   $T_s \leq 2s$

### Cálculo del coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ )

$$MF = \frac{\xi}{0.01}$$

$$\xi = 0.4$$

**Cálculo del sobrepico (POS)**

$$POS = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} * 100\%$$

$$POS = 25.38\%$$

**Cálculo de la frecuencia natural de lazo cerrado ( $\omega_n$ )**

$$\omega_n = \frac{4}{\xi * T_s}$$

$$\omega_n = \frac{4}{0.4 * 2} = 5 \text{ rad / s}$$

**Cálculo del tiempo de subida ( $Tr$ )**

$$Tr = \frac{\pi - \sqrt{1 - \xi^2}}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$Tr = 0.48s$$

**Cálculo del tiempo pico ( $Tp$ )**

$$Tp = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$Tp = 0.68s$$

**Cálculo del punto deseado ( $s_{-1}$ )**

$$\xi\omega_n = (0.4)(5) = 2$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - (\xi\omega_n)^2} = 4.58i$$

$$s_{-1} = -2 \pm 4.58i$$

Se forma la ecuación característica con el punto  $s_{-1}$

$$p1 = -2 + 4.58i$$

$$p2 = -2 - 4.58i$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_c(s) &= (s - p1)(s - p2) \\
 &= s^2 - (p1 + p2)s + p1p2 \\
 &= s^2 - (-2 + 4.58i - 2 - 4.58i)s + (-2 + 4.58i)(-2 - 4.58i) \\
 &= s^2 + 4s + 25
 \end{aligned}$$

### Cálculo de la ecuación característica de lazo cerrado

$$a_k(s) = \det(SI - A + BK)$$

$$\begin{aligned}
 SI - A + BK &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.961 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 178.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + 0.961 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 178.8K_1 & 178.8K_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 178.8K_1 & s + 0.961 + 178.8K_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_k(s) &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 178.8K_1 & s + 0.961 + 178.8K_2 \end{vmatrix} \\
 &= (s)(s + 0.961 + 178.8K_2) - (-1)(178.8K_1) \\
 &= s^2 + (0.961 + 178.8K_2)s + 178.8K_1
 \end{aligned}$$

Se compara la ecuación característica deseada con la ecuación característica de lazo cerrado

$$\begin{aligned}
 \alpha_c(s) &= s^2 + 4s + 25 \\
 a_k(s) &= s^2 + (0.961 + 178.8K_2)s + 178.8K_1
 \end{aligned}$$

Se igualan los coeficientes

$$0.961 + 178.8K_2 = 4$$

$$K_2 = \frac{4 - 0.961}{178.8}$$

$$K_2 = 0.0169$$

$$178.8K_1 = 25$$

$$K_1 = 0.139$$

$$K = [0.139 \quad 0.0169]$$

### Sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = (A - BK)x + B\mu$$

$$y = Cx$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24.85 & -3.982 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 178.8 \end{bmatrix} [\mu]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Mediante el siguiente programa en Matlab se pueden calcular las ganancias  $K$  para el controlador.

### Código en MATLAB

```
A=[0 1;0 -0.961];  
B=[0;178.8];  
C=[1 0];  
D=[0];  
p1=-2+4.58i;  
p2=-2-4.58i;  
K=acker(A,B,[p1 p2])
```

### Resultados del programa

$$K = [0.139 \quad 0.0169]$$

### Respuesta del sistema a una señal paso (para posición angular y velocidad angular)

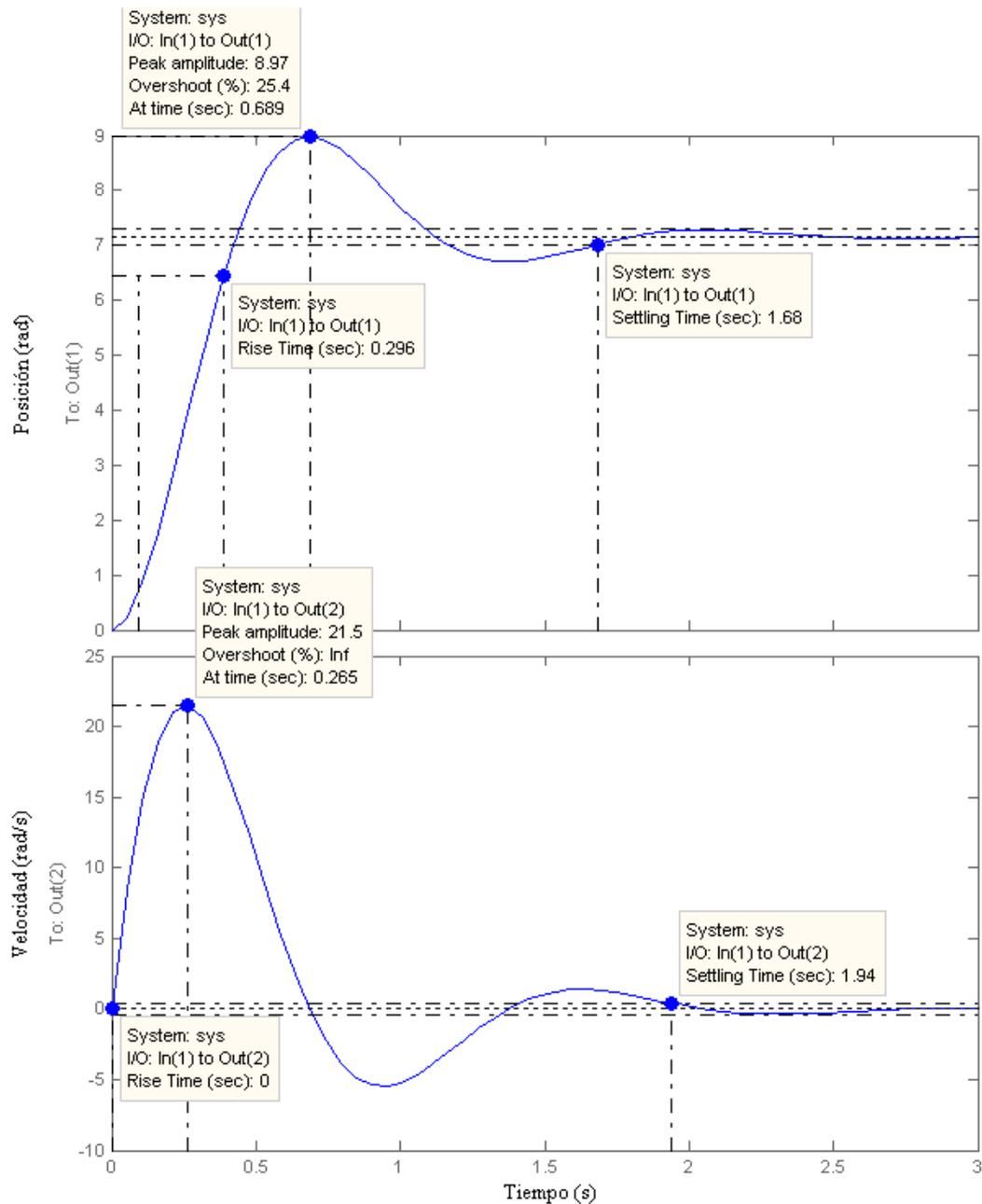


Figura. 3.41. Gráfica del sistema compensado para posición angular y velocidad angular (señal paso)

Para la posición angular se obtuvo un  $T_s$  de 1.68s,  $POS$  de 25.4%,  $Tr$  de 0.296s y  $T_p$  de 0.689s.

Para la velocidad angular se obtuvo un  $T_s$  de 1.94s.

En el sistema de lazo cerrado se cumplen especificaciones transitorias y de sobrepico pero se nota que no hay seguimiento puesto que la salida aparece amplificada 7 veces.

Para resolver este problema se completa el sistema con un precompensador que se calcula en la siguiente sección.

### 3.4.1 Sistema con Tracking

$$\begin{bmatrix} Nx \\ Nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si el sistema es Tipo 1 ó mas alto el  $Nu = 0$

En este caso el sistema es Tipo 1

$$Nu = 0$$

$$Nx = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = Nu + KNx$$

$$\bar{N} = 0.139$$

### Código en Matlab

```
%realimentación completa tracking
pc=[-2+4.58*j;-2-4.58*j];
A=[0 1;0 -0.961];
B=[0;178.8];
C=[1 0];
D=0;
K=acker(A,B,pc)
Nt=inv([A B;C D])*[0;0;1]
Nx=Nt(1:2,1)
Nu=0
Nf=K*Nx
a=A-B*K;
b=B*Nf;
syscl=ss(a,b,C,D)
step(syscl)
```

### Respuesta del sistema con tracking para una señal paso

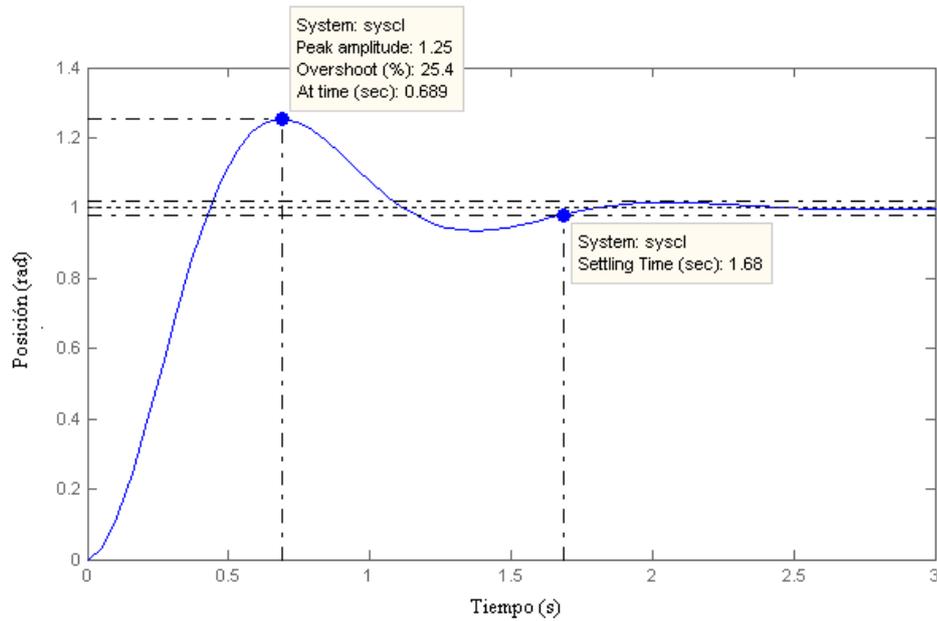


Figura. 3.42. Gráfica del sistema con tracking (señal paso)

Para la posición angular se obtuvo un  $T_s$  de 1.68s,  $POS$  de 25.4%,  $Tr$  de 0.296s y  $T_p$  de 0.689s.

### 3.4.2 SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR LQ

#### Sistema Servomotor con controlador LQ

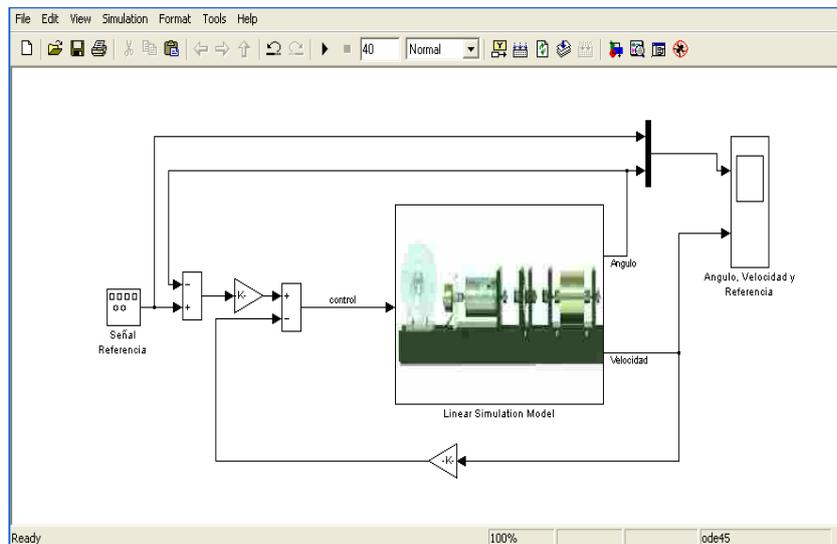
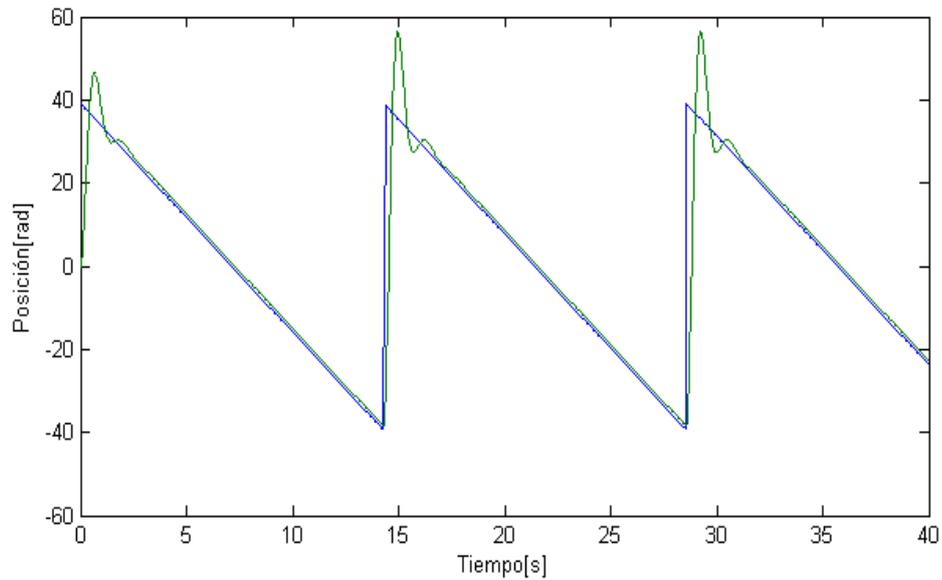
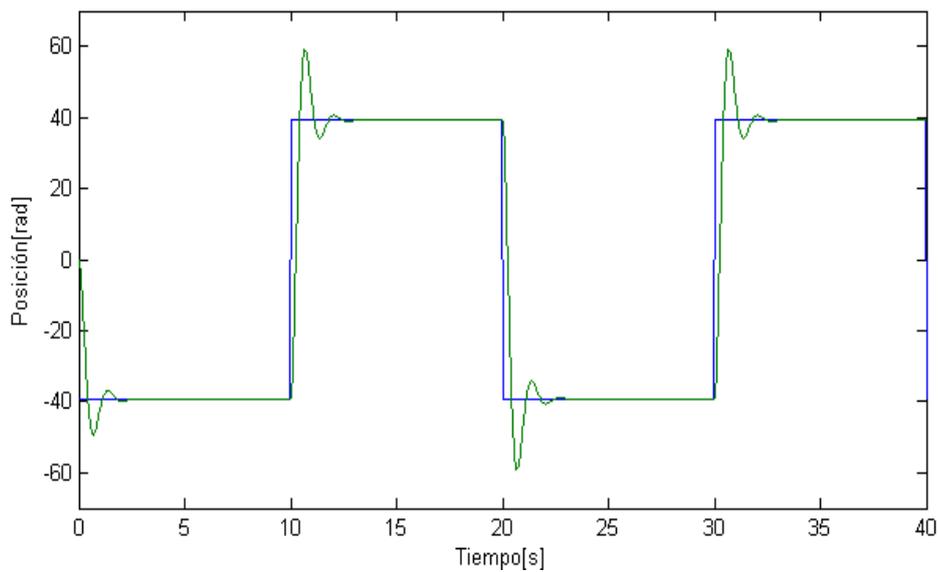


Figura. 3.43. Diagrama de Simulación del controlador LQ (Modelo Lineal)

**Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (posición angular)**

**Figura. 3.44. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)  
Simulación (Modelo Lineal)**

Se obtuvo un  $T_s$  de 2.3s,  $POS$  de 25.4%.

**Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (posición angular)**

**Figura. 3.45. Gráfica del sistema compensado (señal paso)  
Simulación (Modelo Lineal)**

Se obtuvo un  $T_s$  de .168s,  $POS$  de 25.4%,  $Tr$  de 0.296s y  $Tp$  de 0.689s.

## 3.5 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN DE ESTADOS

### 3.5.1 ESTIMADOR COMPLETO

Para el diseño del estimador completo de estados se utilizó el siguiente código en Matlab.

#### Código en Matlab

```
%ubicación de polos mediante SRL
%servomotor
disp('srl_servo')
pause
clear all

%modelo lineal
close all
Ks=186;
Ts=1.04;
x=-1/Ts;
y=Ks/Ts;
a=[0 1;0 x]
b=[0;y]
c=[1 0]
d=0
%fin modelo lineal

numGG=[186]
denGG=conv([1.04 1 0],[1.04 -1 0])
sysGG=tf(numGG,denGG)
rlocus(sysGG)
[k,poles]=rlocfind(sysGG) %con esto se ubica los polos y se encuentra la ganancia

pause
pc=poles(3:4) %con esto se escogen solo los polos estables
pc=pc
```

```

A=a
B=b
C=c
ccl=C
K=acker(A,B,pc)

pe=4*pc
Lt=acker(A',C',pe) %se hallan las ganancias para el estimador
L=Lt'
b=[b L]
c=[1 0 ; 0 1]
d=zeros(2,2)

acl=A-B*K
Nt=inv([A B;C 0])*[0;0;1]
Nx=Nt(1:2,1)
Nu=0
Nf=K*Nx+Nu %precompensador para el tracking
bcl=B*Nf
syscl=ss(acl,bcl,ccl,0)
step(syscl)

```

### Respuesta del sistema a una señal paso

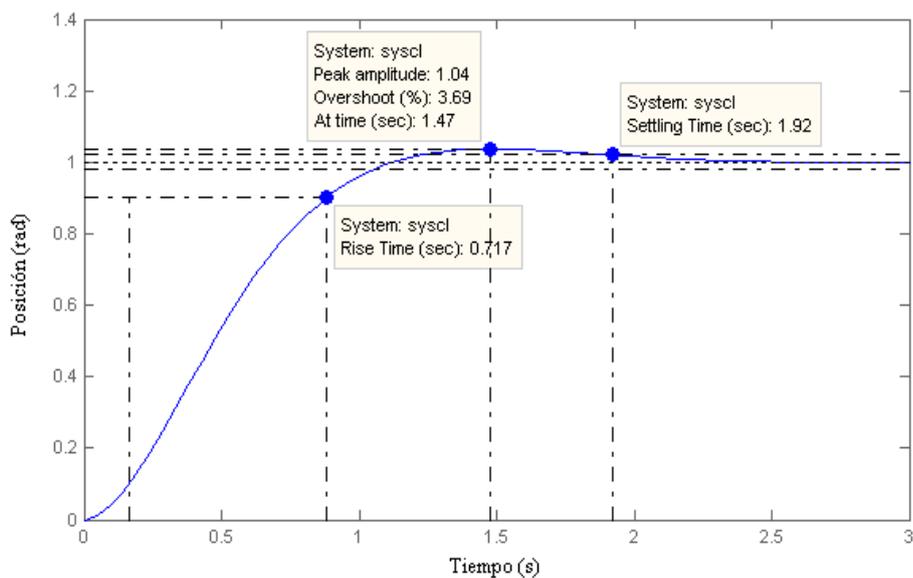


Figura. 3.48. Gráfica del sistema compensado (señal paso)

### 3.5.2 SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN ESTIMADOR COMPLETO DE ESTADOS

#### Sistema Servomotor con estimador completo

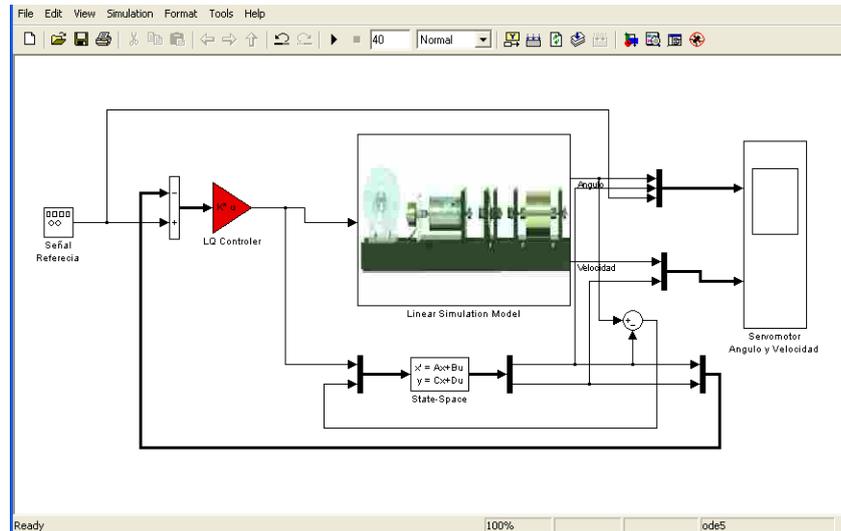


Figura. 3.49. Diagrama de Simulación del estimador completo de estados (Modelo Lineal)

#### Condiciones iniciales de ángulo y velocidad

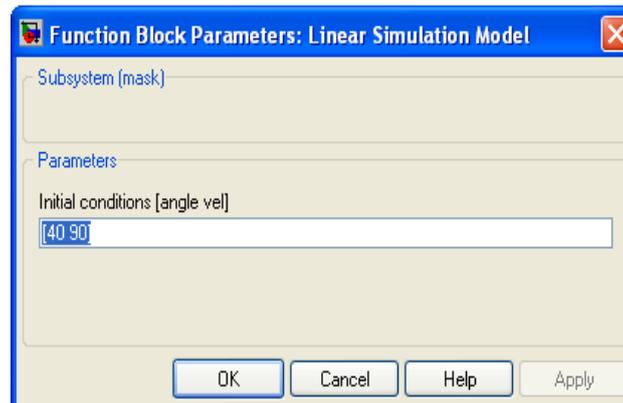
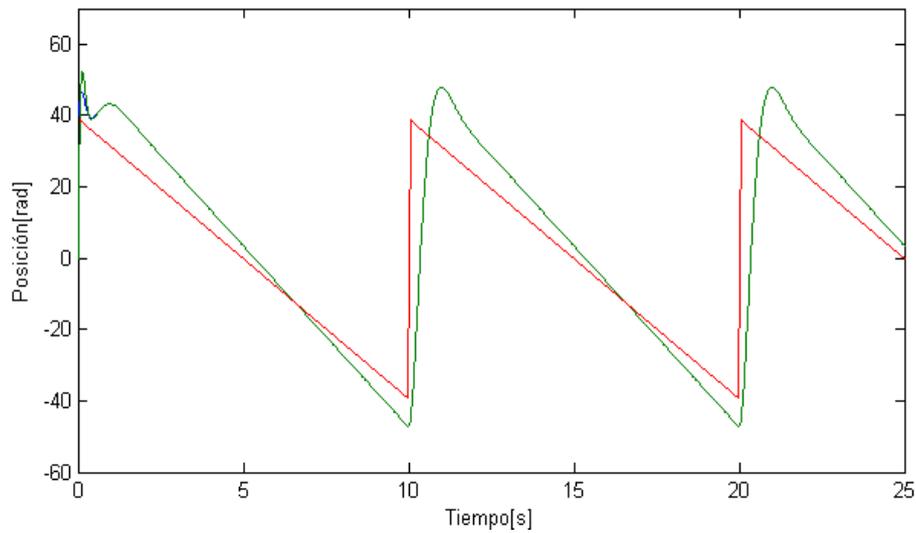


Figura. 3.50. Condiciones iniciales de ángulo y velocidad

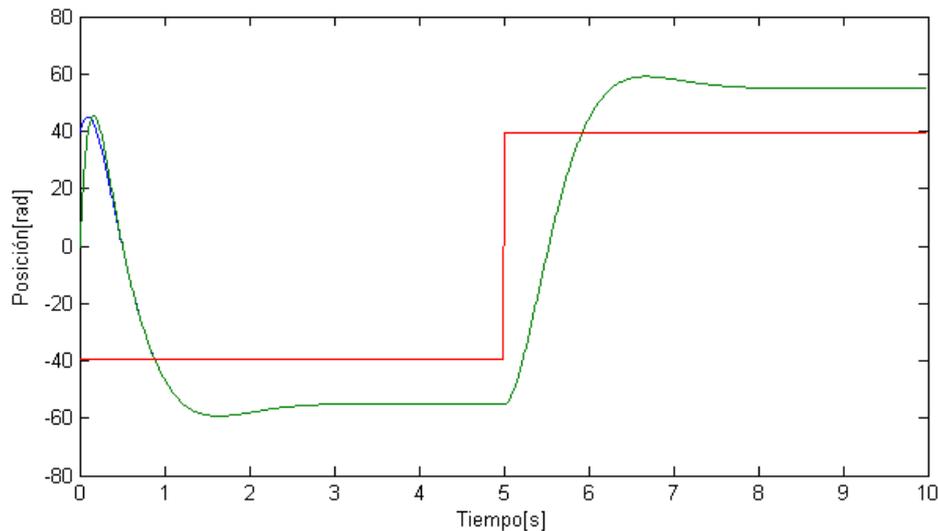
### Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (posición angular)



**Figura. 3.51. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)  
Simulación (Modelo Lineal)**

Se puede observar en la gráfica que el estado estimado (azul) hace un seguimiento al estado medido (verde) obteniendo un  $T_s$  de 6.2s, un  $POS$  de 3.69%.

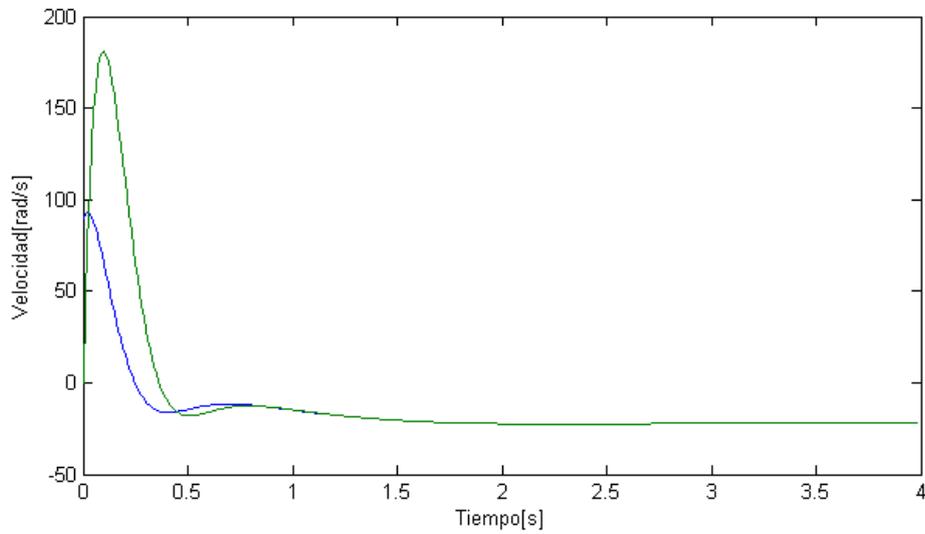
### Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (posición angular)



**Figura. 3.52. Gráfica del sistema compensado (señal paso)  
Simulación (Modelo Lineal)**

Se puede observar en la gráfica que el estado estimado (azul) hace un seguimiento al estado medido (verde) obteniendo un  $T_s$  de 1.92s, un  $POS$  de 3.69%,  $T_r$  de 0.717s y  $T_p$  de 1.47s.

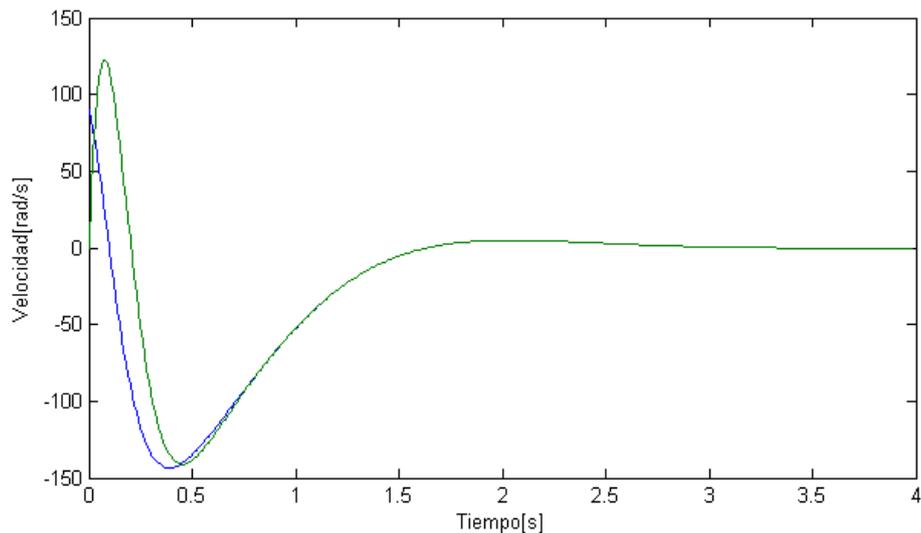
### Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (velocidad angular)



**Figura. 3.53.** Gráfica de la velocidad del servomotor (señal rampa)  
Simulación (Modelo Lineal)

El estado estimado (azul) hace un seguimiento al estado medido (verde) estabilizando al sistema con un  $T_s$  de 1s.

### Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (velocidad angular)



**Figura. 3.54.** Gráfica de la velocidad del servomotor (señal paso)  
Simulación (Modelo Lineal)

El estado estimado (azul) hace un seguimiento al estado medido (verde) estabilizando al sistema con un  $T_s$  de 0.75s.

### 3.6 ESTIMADOR REDUCIDO

Para el diseño del estimador reducido de estados se utilizó el siguiente código en Matlab

#### Código en Matlab

```
%ubicación de polos mediante SRL

%servomotor
disp('srl_servo_red')
pause
clear all

%modelo lineal
close all
Ks=186;
Ts=1.04;
x=-1/Ts;
y=Ks/Ts;
a=[0 1;0 x]
b=[0;y]
c=[1 0]
d=0
%fin modelo lineal

numGG=[186]
denGG=conv([1.04 1 0],[1.04 -1 0])
sysGG=tf(numGG,denGG)
rlocus(sysGG)
[k,poles]=rlocfind(sysGG) %con esto se ubica los polos y se encuentra la ganancia

pause
pc=poles(3:4) %con esto se escogen solo los polos estables
pc=pc

A=a
B=b
C=c
ccl=C
```

---

```
K=acker(A,B,pc)

%cálculo del estimador reducido

Aaa=A(1,1)
Aab =A(1,2)
Aba=A(2,1)
Abb=A(2,2)
Ba=B(1,1)
Bb=B(2,1)

pe=[4*pc(1,1)] %para q los polos estables se vuelvan más rápidos al estimar
Lt=acker(Abb',Aab',pe) %se calculan las ganancias para el estimador reducido
L=Lt'

%ecuaciones para encontrar las matrices del estimador reducido

aer=Abb-L*Aab
ber1=(Abb-L*Aab)*L+Aba-L*Aaa
ber2=Bb-L*Ba
ber=[ber1 ber2]
cer=[1]
der=[L zeros(1,1)]

acl=A-B*K
Nt=inv([A B;C 0])*[0;0;1]
Nx=Nt(1:2,1)
Nu=0
Nf=K*Nx+Nu %precompensador para el tracking
bcl=B*Nf
syscl=ss(acl,bcl,ccl,0)
step(syscl)
```

## Respuesta del sistema a una señal paso

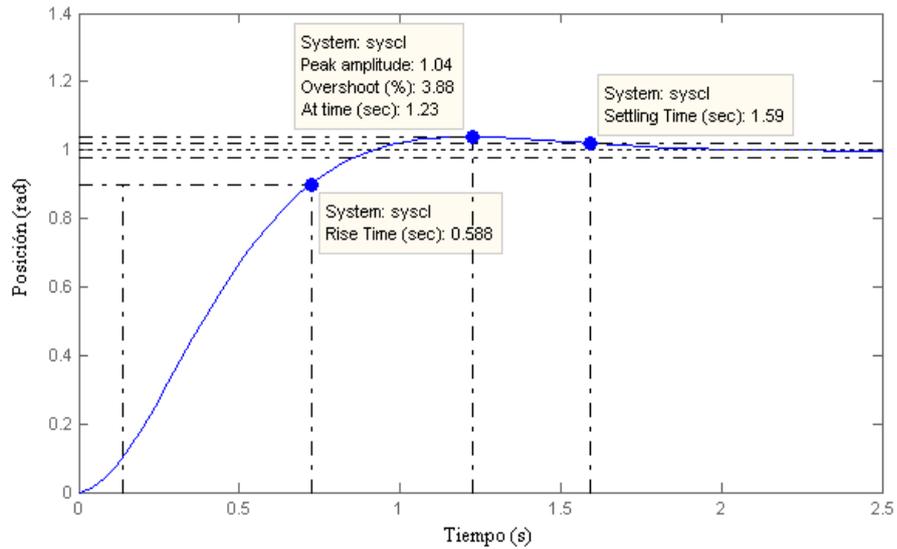


Figura. 3.55. Gráfica del sistema compensado (señal paso)

### 3.6.1 SIMULACIÓN EN SIMULINK DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN ESTIMADOR REDUCIDO DE ESTADOS

#### Sistema Servomotor con estimador reducido

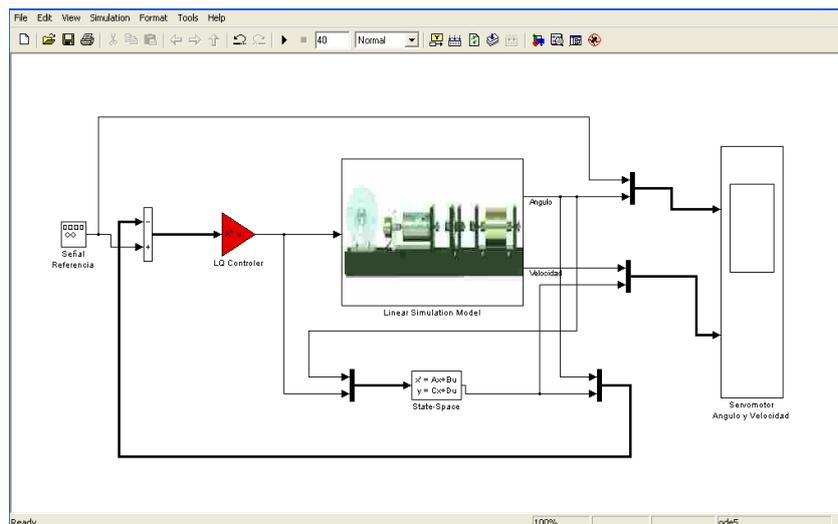


Figura. 3.56. Diagrama de Simulación del estimador reducido de estados (Modelo Lineal)

## Condiciones iniciales de ángulo y velocidad

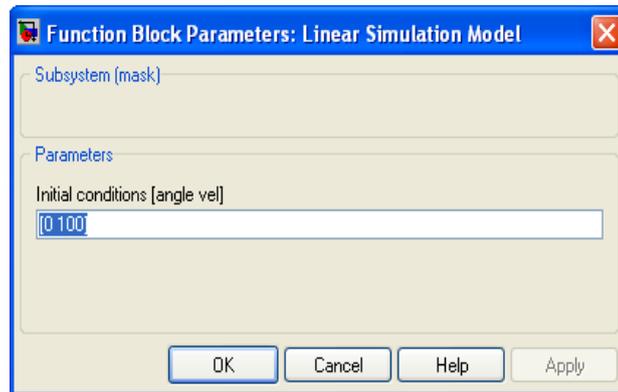


Figura. 3.57. Condiciones iniciales de ángulo y velocidad

## Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (posición angular)

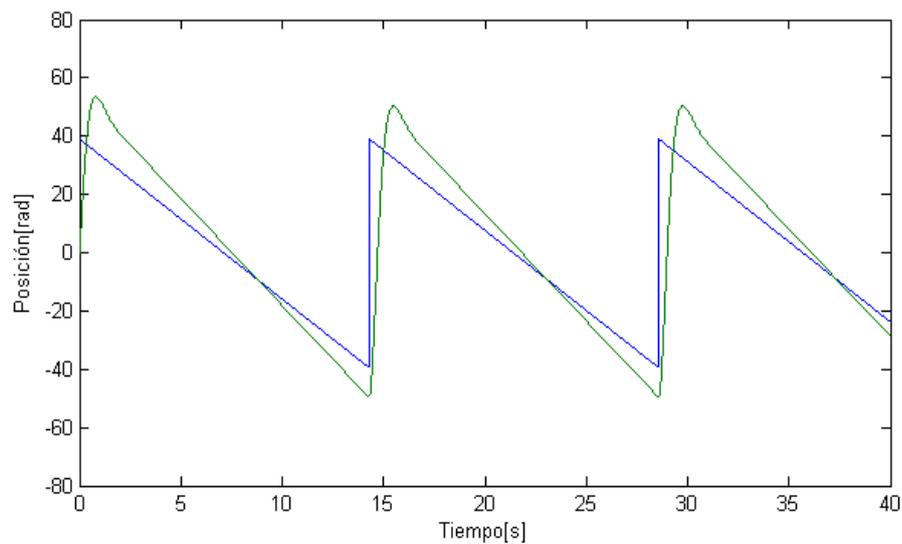
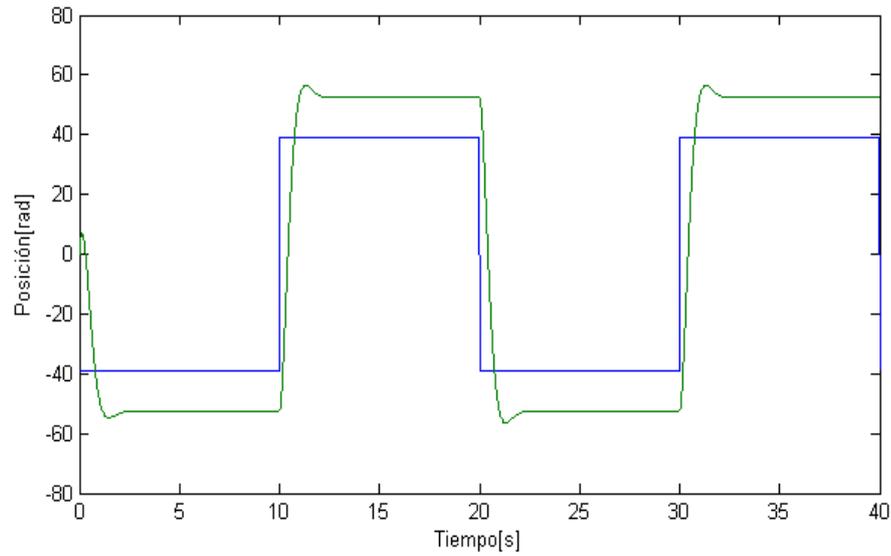


Figura. 3.58. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)  
Simulación (Modelo Lineal)

Se obtiene un  $T_s$  de 6.2s, un  $POS$  de 3.88%.

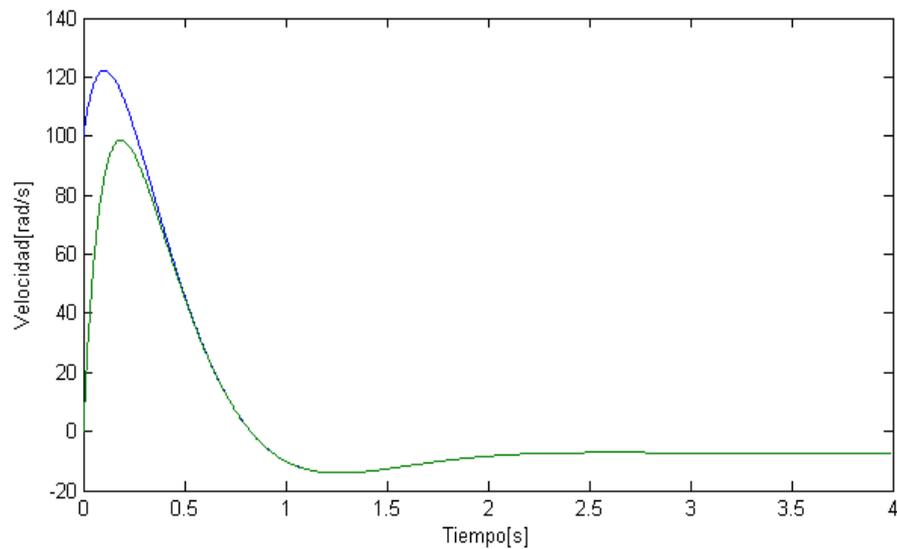
### Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (posición angular)



**Figura. 3.59. Gráfica del sistema compensado (señal paso)**  
**Simulación (Modelo Lineal)**

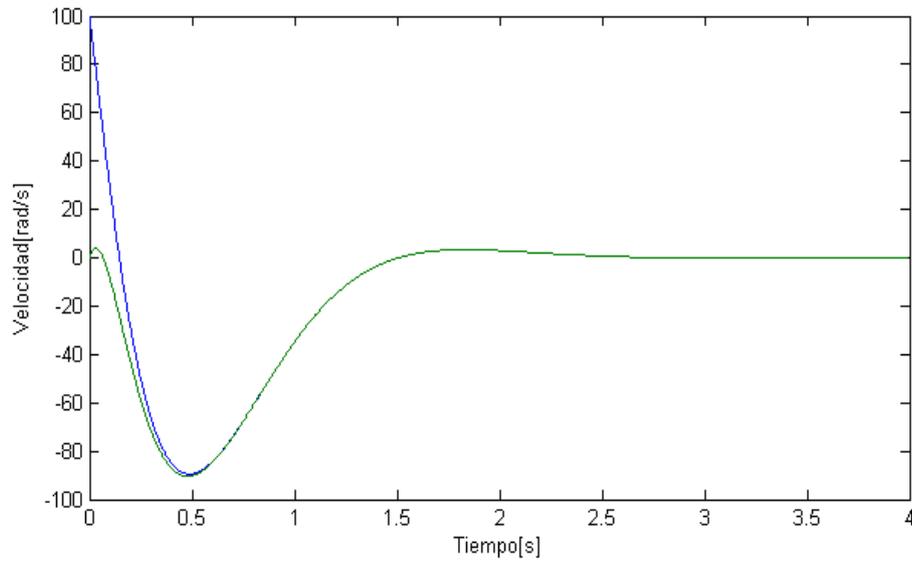
Se obtiene un  $T_s$  de 1.59s, un  $POS$  de 3.88%,  $T_r$  de 0.58s y  $T_p$  de 1.23s.

### Respuesta del sistema a una entrada tipo rampa (velocidad angular)



**Figura. 3.60. Gráfica de la velocidad del servomotor (señal rampa)**  
**Simulación (Modelo Lineal)**

El estado estimado (azul) hace un seguimiento al estado medido (verde) estabilizando al sistema con un  $T_s$  de 0.45s.

**Respuesta del sistema a una entrada tipo paso (velocidad angular)**

**Figura. 3.61. Gráfica de la velocidad del servomotor (señal paso)  
Simulación (Modelo Lineal)**

El estado estimado (azul) hace un seguimiento al estado medido (verde) estabilizando al sistema con un  $T_s$  de 0.55s.

## CAPÍTULO 4

### IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

#### 4.1. CONTROLADOR EN ADELANTO

##### 4.1.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR EN ADELANTO (TIEMPO REAL)

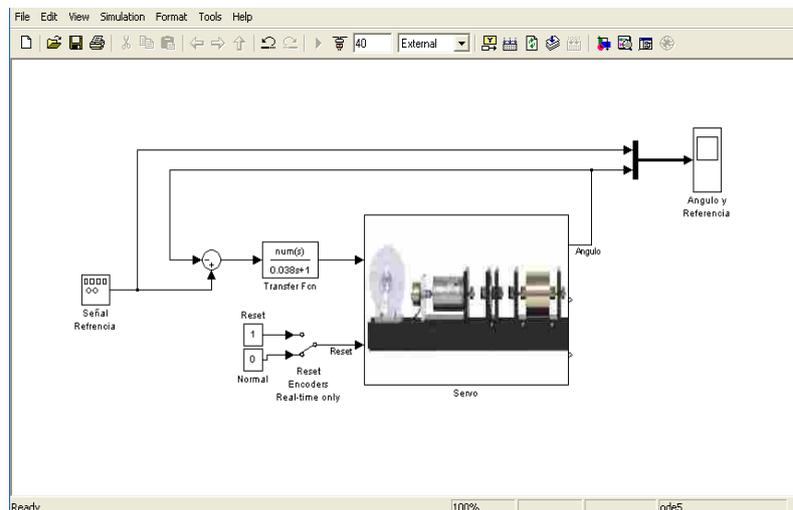


Figura. 4.1. Implementación del controlador en adelanto

#### Bloque de la función de transferencia del controlador

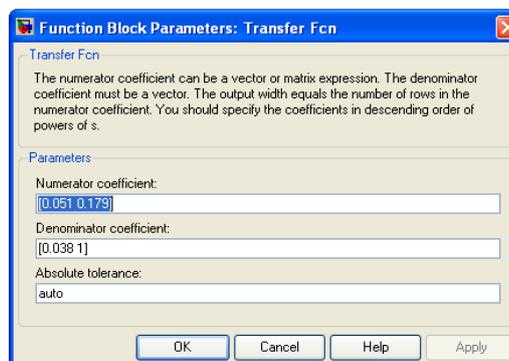
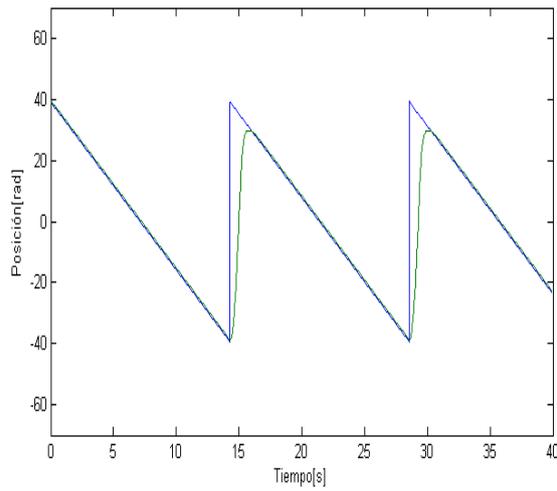
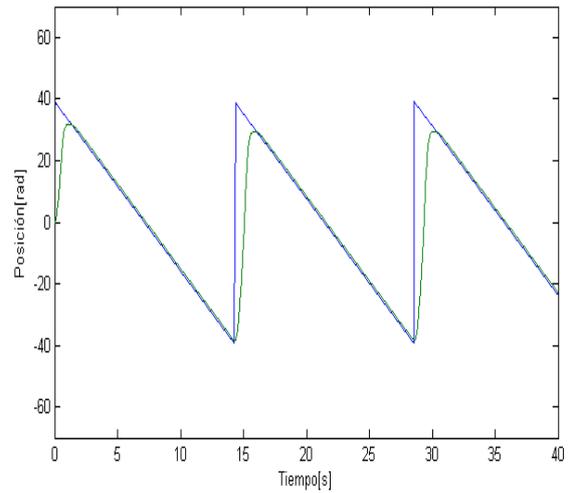
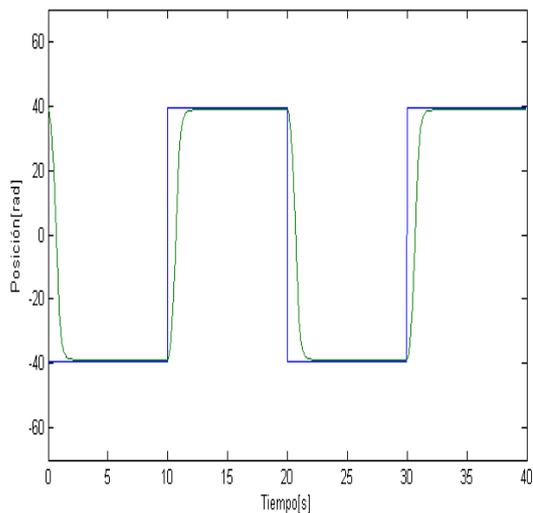
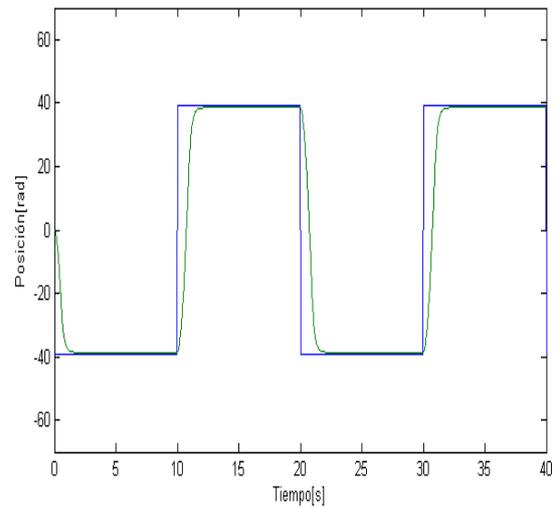


Figura. 4.2. Bloque de la función de transferencia del controlador

**Resultados gráficos de la implementación del controlador en adelanto (señal rampa)****Figura. 4.3. Gráfica del sistema compensado Implementación (Tiempo Real)****Figura. 4.4. Gráfica del sistema compensado Simulación (Modelo no Lineal)**

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 1.6s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 1.8s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.2s.

**Resultados gráficos de la implementación del controlador en adelanto (señal paso)****Figura. 4.5. Gráfica del sistema compensado Implementación (Tiempo Real)****Figura. 4.6. Gráfica del sistema compensado Simulación (Modelo no Lineal)**

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 2.2s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 2.3s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.1s. El  $T_r$  en la implementación se logró a 0.6s mientras que en la simulación es de 0.8s por lo que se cumplió el objetivo con un error de 0.2s.

## 4.2. CONTROLADOR ADELANTO-ATRASO

### 4.2.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR EN ADELANTO-ATRASO (TIEMPO REAL)

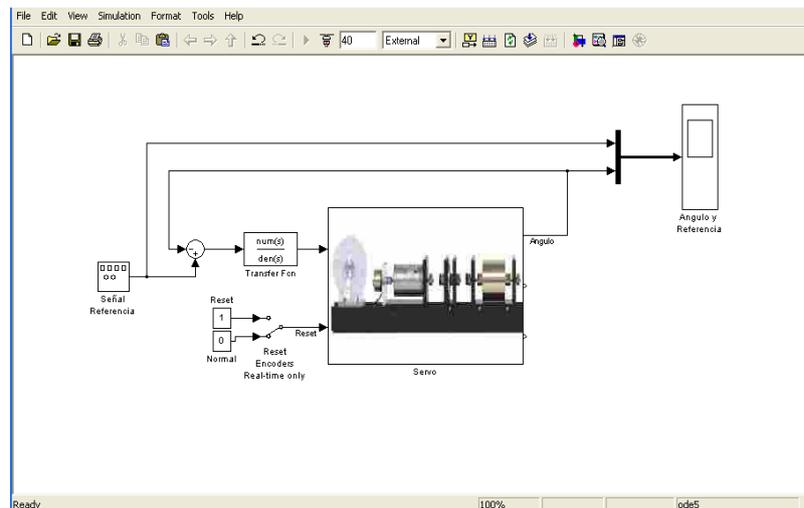


Figura. 4.7. Implementación del controlador en adelanto-atraso

### Bloque de la función de transferencia del controlador

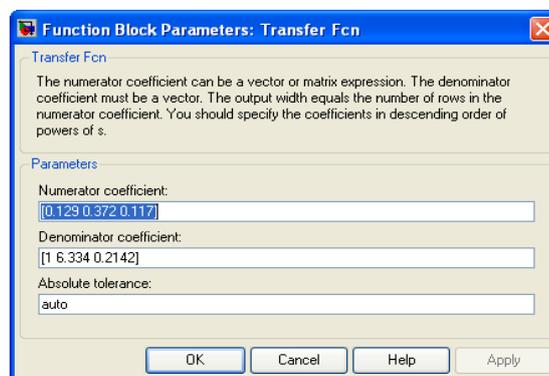
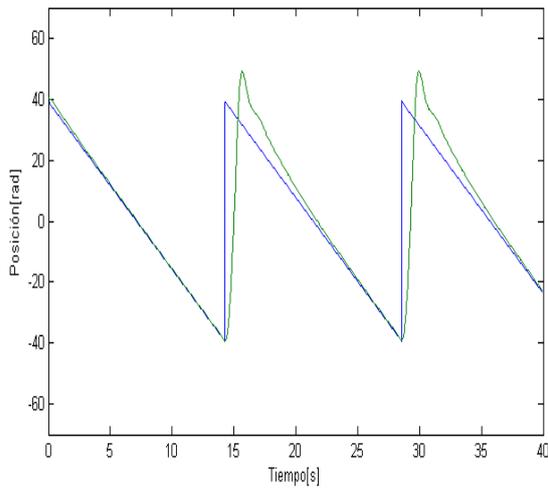
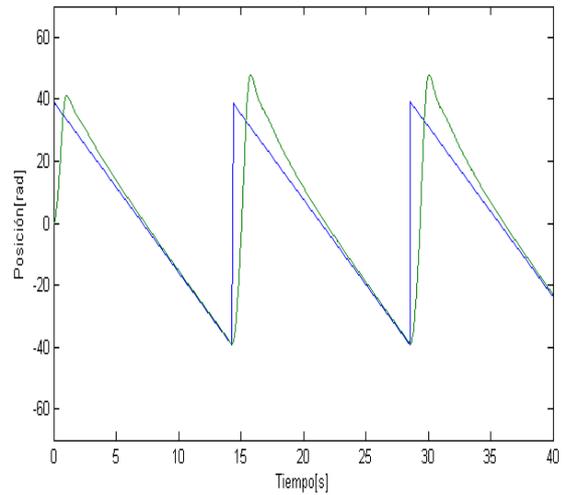


Figura. 4.8. Bloque de la función de transferencia del controlador

### Resultados gráficos de la implementación del controlador en adelanto-atraso (señal rampa)



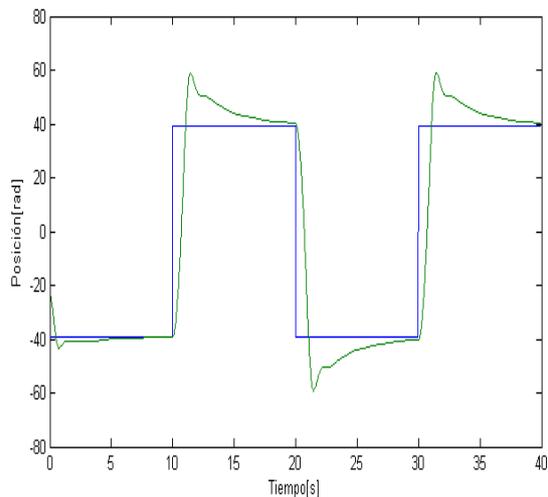
**Figura. 4.9. Gráfica del sistema compensado Implementación (Tiempo Real)**



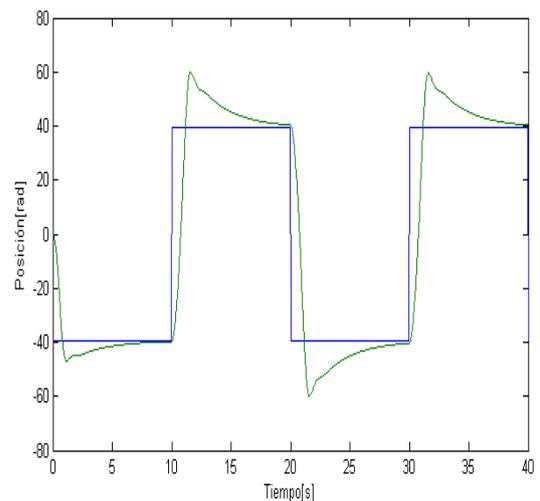
**Figura. 4.10. Gráfica del sistema compensado Simulación (Modelo no Lineal)**

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 7.5s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 7.8s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.3s.

### Resultados gráficos de la implementación del controlador en adelanto-atraso (señal paso)



**Figura. 4.11. Gráfica del sistema compensado Implementación (Tiempo Real)**



**Figura. 4.12. Gráfica del sistema compensado Simulación (Modelo no Lineal)**

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 7.9s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 8.2s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.3s. El  $T_r$  en la implementación se logró a 1.1s mientras que en la simulación es de 1.3s por lo que se cumplió el objetivo con un error de 0.2s. El  $T_p$  en la implementación se alcanzó a los 1.45s y en la simulación es de 1.66s por lo que se logró el objetivo con un error de 0.21s.

### 4.3 CONTROLADOR PID

#### 4.3.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR PID (TIEMPO REAL)

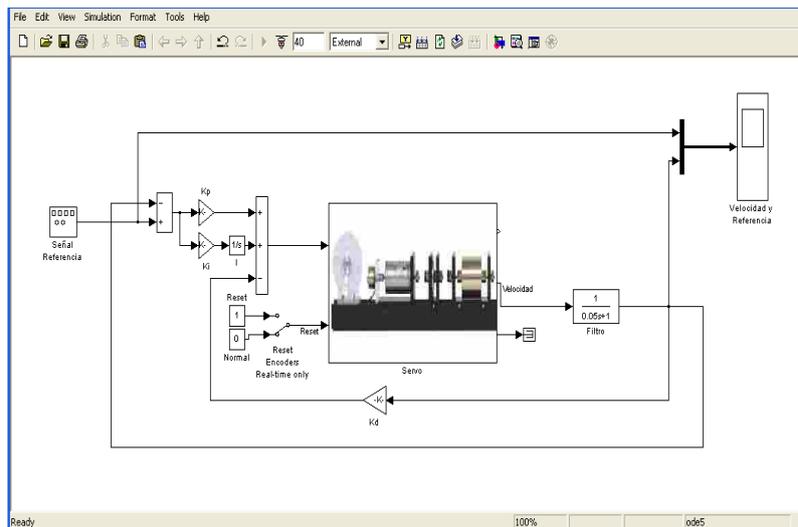


Figura. 4.13. Implementación del controlador PID

#### Bloques de la función de transferencia del controlador

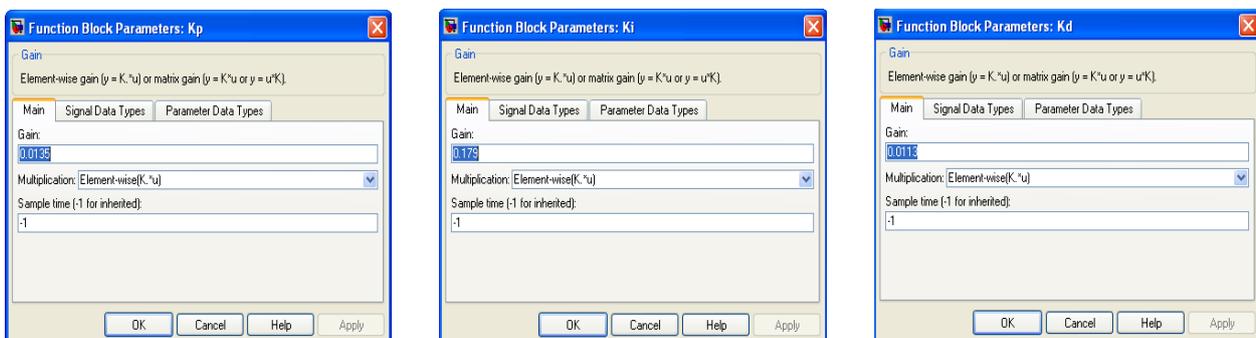
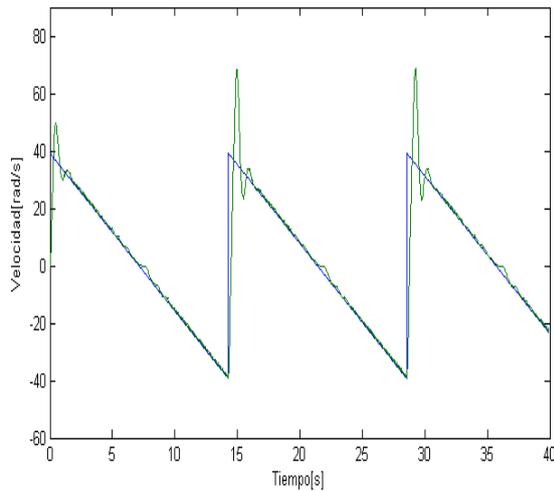
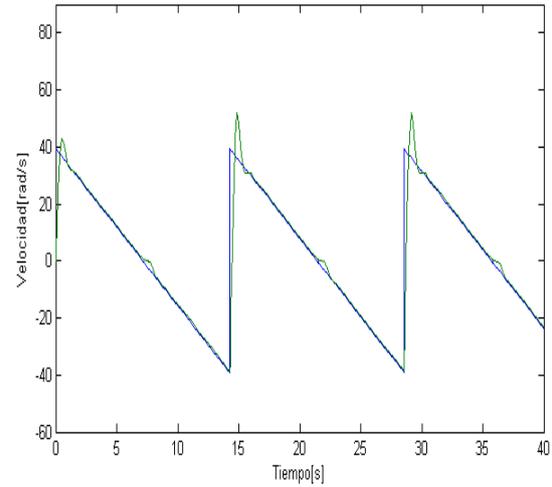


Figura. 4.14. Bloques de la función de transferencia del controlador

### Resultados gráficos de la implementación del controlador PID (señal rampa)



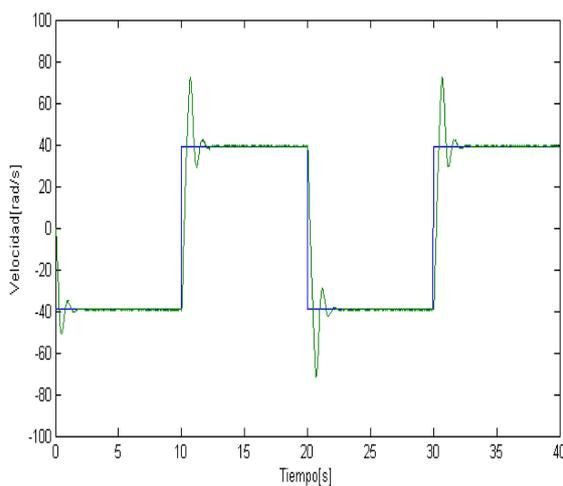
**Figura. 4.15.** Gráfica del sistema compensado Implementación (Tiempo Real)



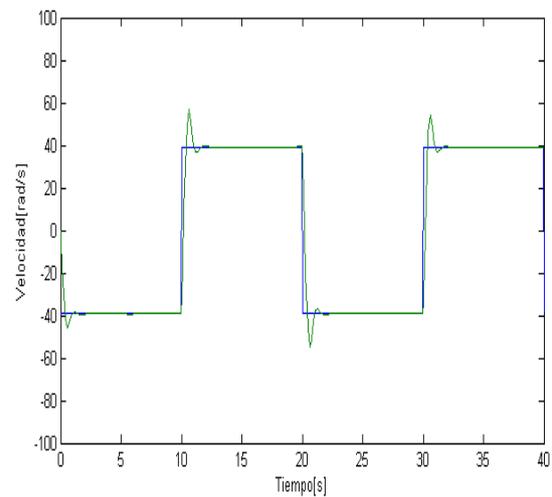
**Figura. 4.16.** Gráfica del sistema compensado Simulación (Modelo no Lineal)

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 2.4s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 1.9s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.5s.

### Resultados gráficos de la implementación del controlador PID (señal paso)



**Figura. 4.17.** Gráfica del sistema compensado Implementación (Tiempo Real)



**Figura. 4.18.** Gráfica del sistema compensado Simulación (Modelo no Lineal)

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 2.2s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 1.9s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.3s. El  $T_r$  en la implementación se logró a 0.6s mientras que en la simulación es de 0.4s por lo que se cumplió el objetivo con un error de 0.2s. El  $T_p$  en la implementación se alcanzó a los 1.1s y en la simulación es de 0.85s por lo que se logró el objetivo con un error de 0.25s.

#### 4.4 CONTROLADOR CON REALIMENTACION COMPLETA DE ESTADOS LQ

##### 4.4.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN CONTROLADOR LQ (TIEMPO REAL)

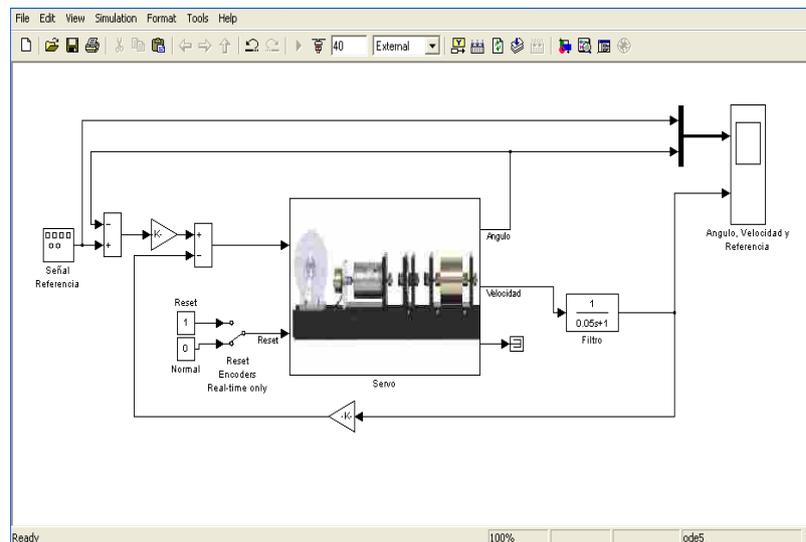


Figura. 4.19. Implementación del controlador LQ

#### Bloques de la ganancia $K$ del controlador

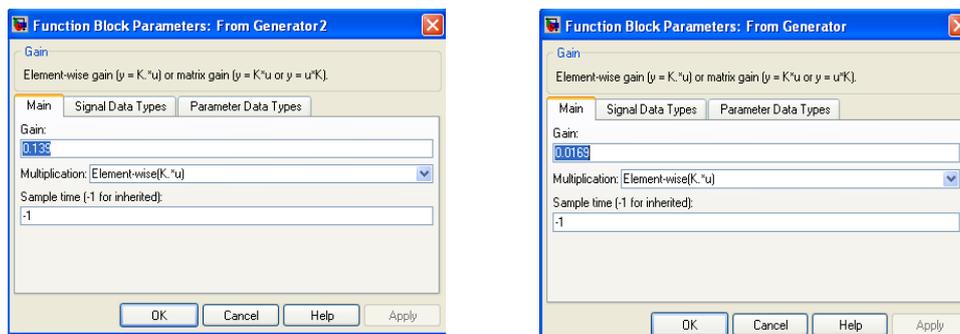
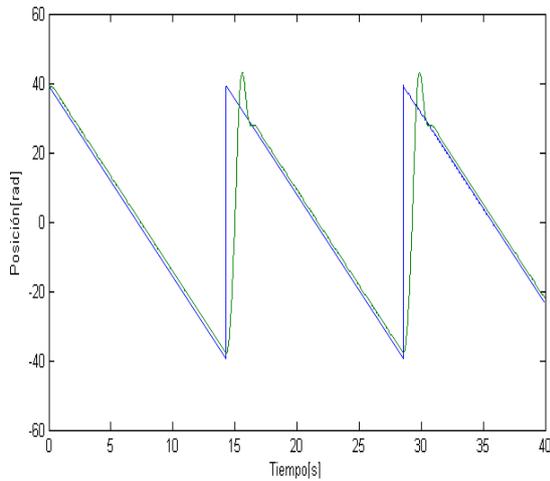
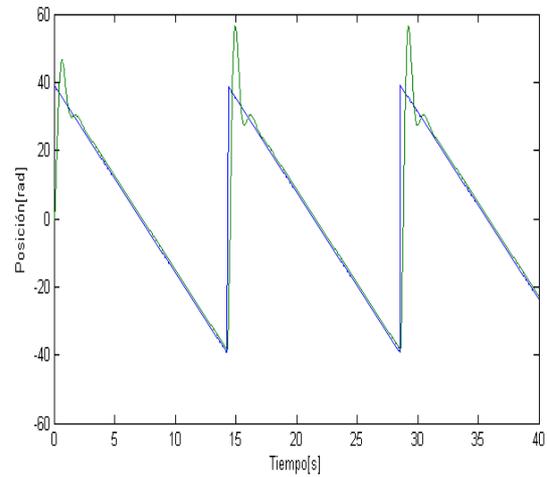


Figura. 4.20. Bloques de la ganancia  $K$  del controlador

## Resultados gráficos de la implementación del controlador LQ (posición angular)

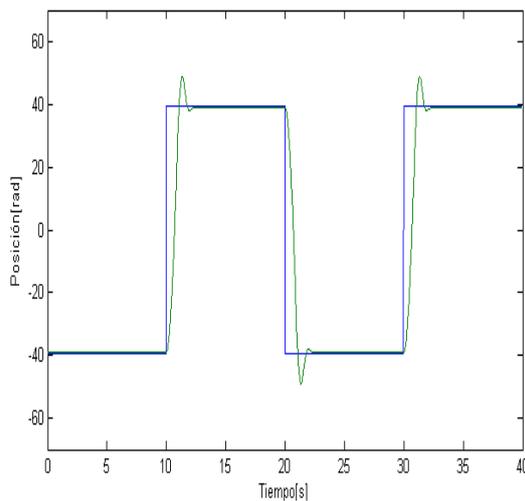


**Figura. 4.21. Gráfica del sistema compensado  
señal (rampa)  
Implementación (Tiempo Real)**

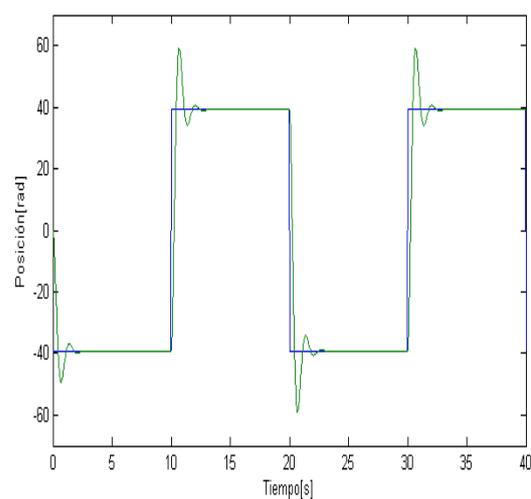


**Figura. 4.22. Gráfica del sistema compensado  
señal (rampa)  
Simulación (Control Continuo)**

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 2.25s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 2.4s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.15s.



**Figura. 4.23. Gráfica del sistema compensado  
señal (paso)  
Implementación (Tiempo Real)**



**Figura. 4.24. Gráfica del sistema compensado  
señal (paso)  
Simulación (Control Continuo)**

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 1.25s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 1.68s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.43s. El  $T_r$  en la implementación se logró a 0.85s mientras que en la simulación es de 0.296s por lo que se cumplió el objetivo con un error de 0.55s. El  $T_p$  en la implementación se alcanzó a los 1.1s y en la simulación es de 0.689s por lo que se logró el objetivo con un error de 0.41s.

## 4.5 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN DE ESTADOS

### 4.5.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN ESTIMADOR COMPLETO DE ESTADOS (TIEMPO REAL)

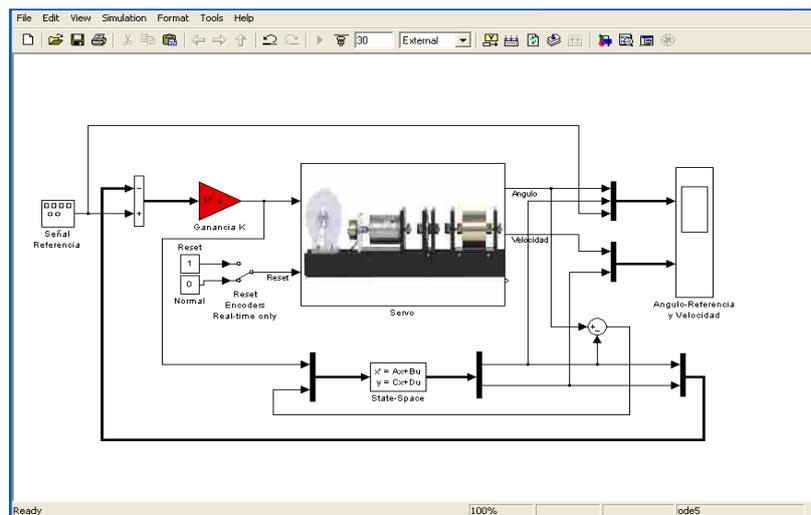
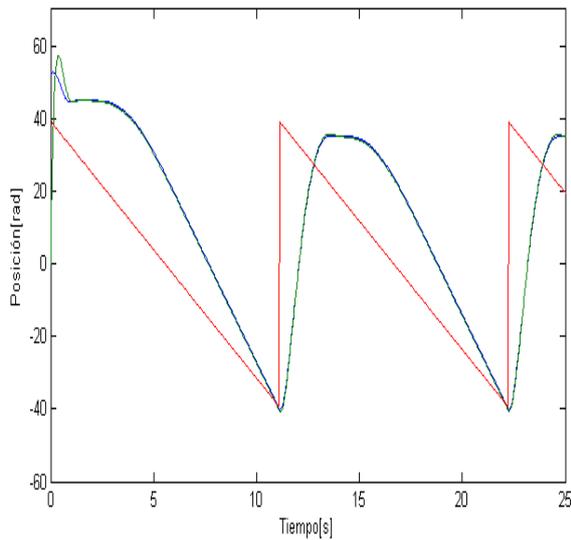
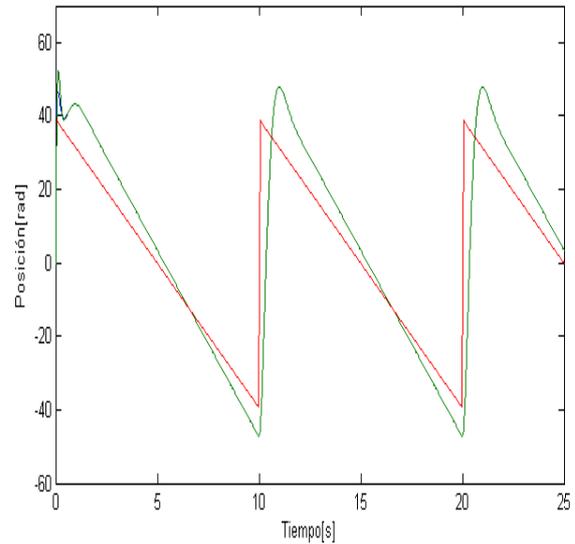


Figura. 4.29. Implementación del estimador completo de estados

## Resultados gráficos de la implementación del estimador completo de estados (posición angular)

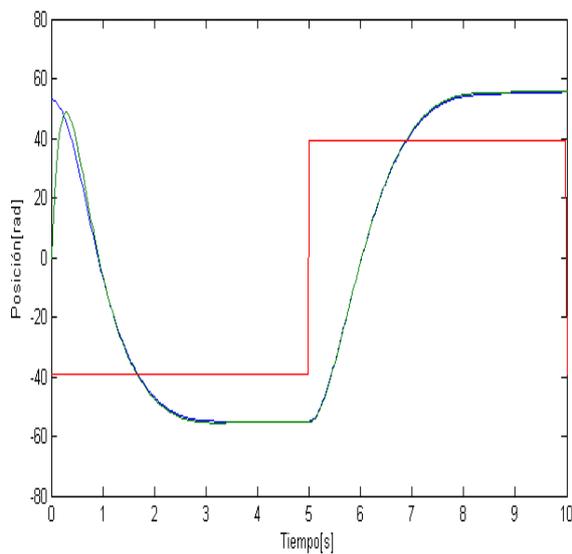


**Figura. 4.30. Gráfica del sistema compensado señal (rampa) Implementación (Tiempo Real)**

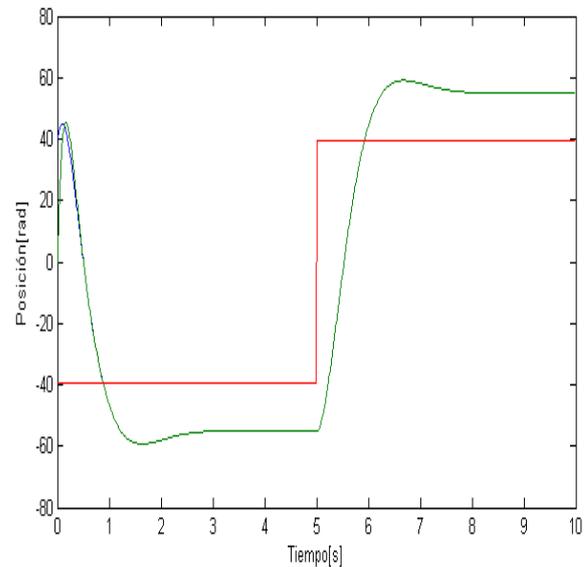


**Figura. 4.31. Gráfica del sistema compensado señal (rampa) Simulación (Modelo Lineal)**

Se puede observar en la implementación que el estado estimado (azul) consigue hacer el seguimiento al estado medido (verde) logrando la estabilización del sistema en un tiempo de 6.8s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 6.2s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.6s.



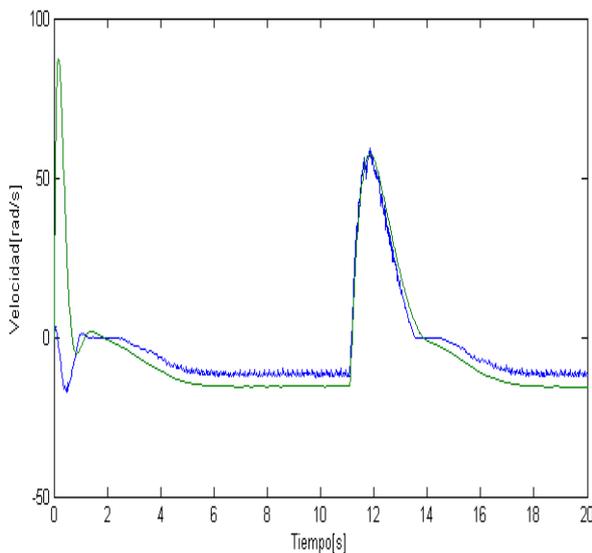
**Figura. 4.32. Gráfica del sistema compensado señal (paso) Implementación (Tiempo Real)**



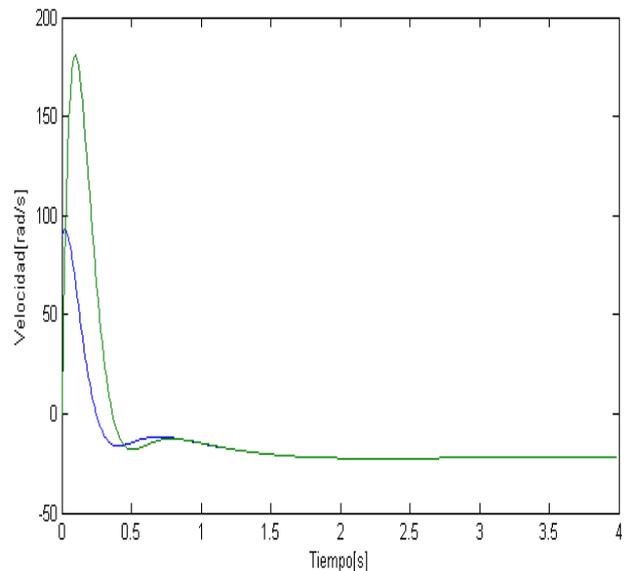
**Figura. 4.33. Gráfica del sistema compensado señal (paso) Simulación (Modelo Lineal)**

Se puede observar en la implementación que el estado estimado (azul) consigue hacer el seguimiento al estado medido (verde) logrando la estabilización del sistema en un tiempo de 1.75s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 1.92s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.17s. El  $T_r$  en la implementación se logró a 1.2s mientras que en la simulación es de 0.717s por lo que se cumplió el objetivo con un error de 0.483s. El  $T_p$  en la implementación se alcanzó a los 2.6s y en la simulación es de 1.47s por lo que se logró el objetivo con un error de 1.13s.

### Resultados gráficos de la implementación del estimador completo de estados (velocidad angular)

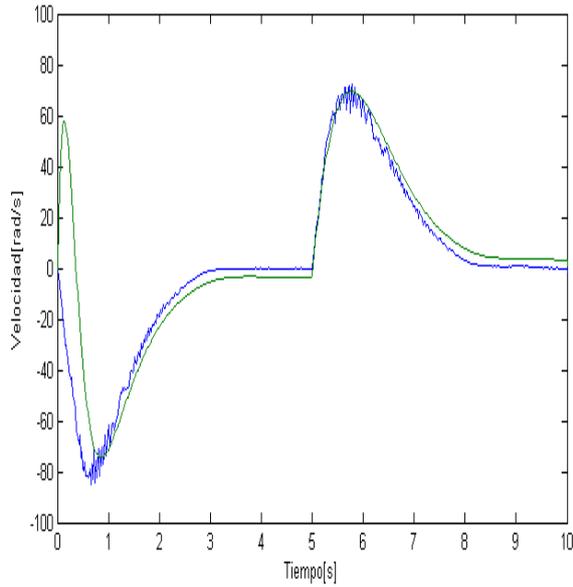


**Figura. 4.34. Gráfica del sistema compensado señal (rampa) Implementación (Tiempo Real)**

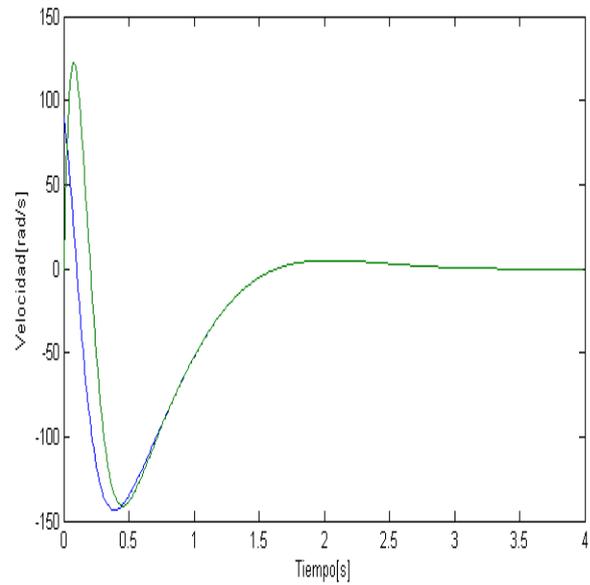


**Figura. 4.35. Gráfica del sistema compensado señal (rampa) Simulación (Modelo Lineal)**

Se puede observar en la implementación que el estado estimado (azul) consigue hacer el seguimiento al estado medido (verde) logrando la estabilización del sistema en un tiempo de 2.3s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 1s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 1.3s.



**Figura. 4.36. Gráfica del sistema compensado  
señal (paso)  
Implementación (Tiempo Real)**



**Figura. 4.37. Gráfica del sistema compensado  
señal (paso)  
Simulación (Modelo Lineal)**

Se puede observar en la implementación que el estado estimado (azul) consigue hacer el seguimiento al estado medido (verde) logrando la estabilización del sistema en un tiempo de 1.3s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 0.75s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.55s.

## 4.6 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN REDUCIDA DE ESTADOS

### 4.6.1 IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA SERVOMOTOR UTILIZANDO UN ESTIMADOR REDUCIDO DE ESTADOS (TIEMPO REAL)

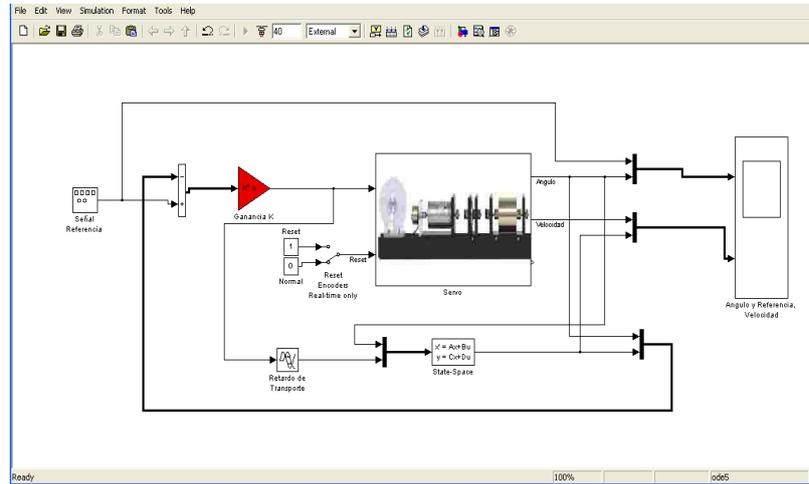


Figura. 4.38. Implementación del estimador reducido de estados

### Resultados gráficos de la implementación del estimador reducido de estados (posición angular)

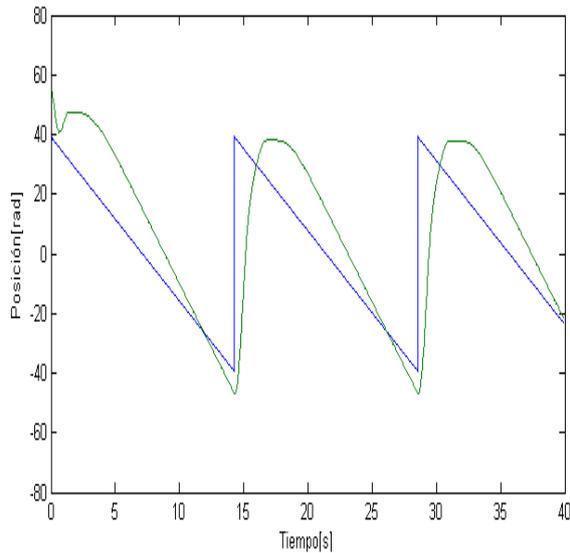


Figura. 4.39. Gráfica del sistema compensado señal (rampa) Implementación (Tiempo Real)

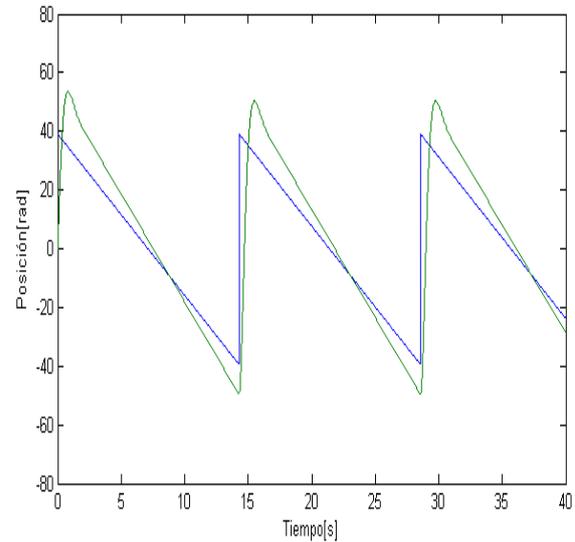
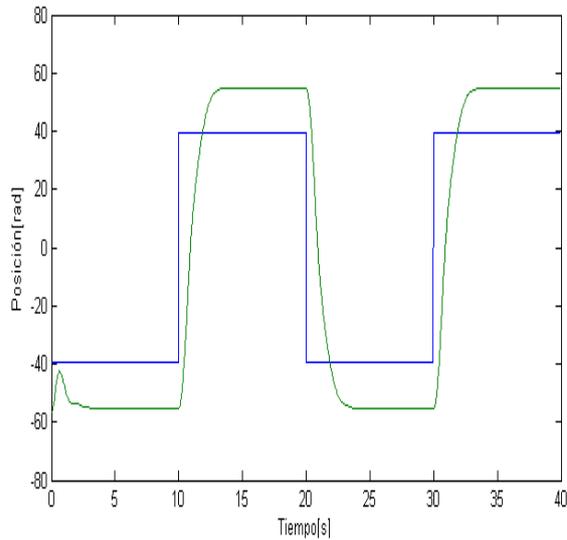
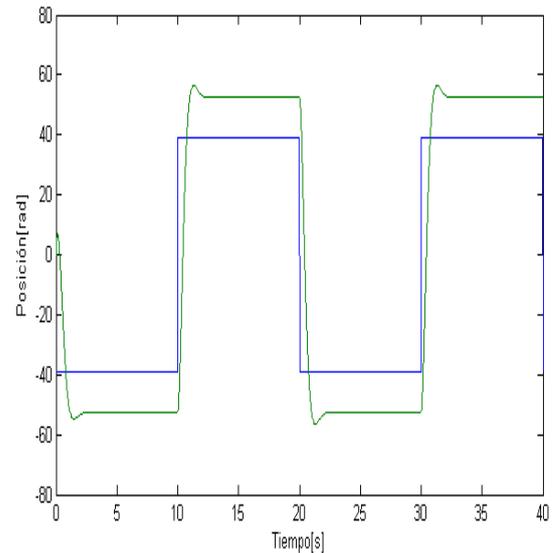


Figura. 4.40. Gráfica del sistema compensado señal (rampa) Simulación (Modelo Lineal)

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 6.8s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 6.2s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.6s.



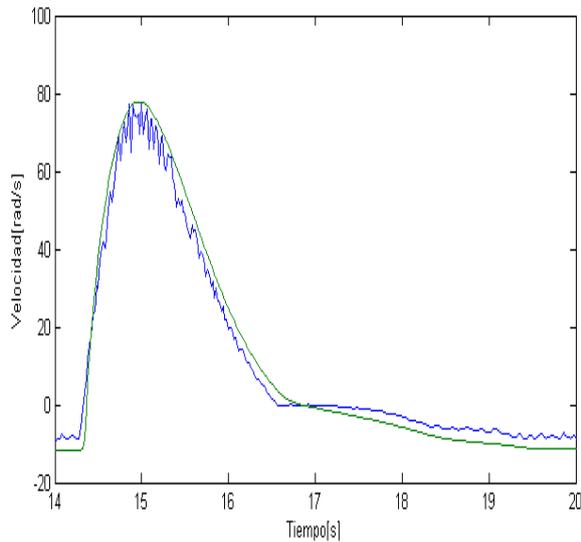
**Figura. 4.41. Gráfica del sistema compensado señal (paso) Implementación (Tiempo Real)**



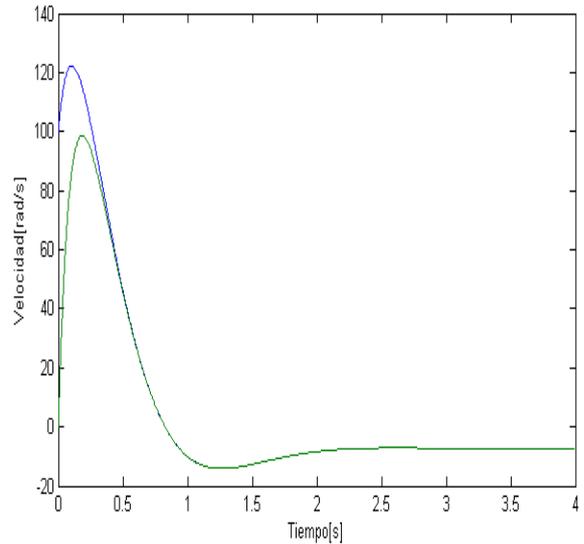
**Figura. 4.42. Gráfica del sistema compensado señal (paso) Simulación (Modelo Lineal)**

Se puede observar que en la implementación se consiguió la estabilización del sistema en un tiempo de 2.3s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 1.59s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.71s. El  $T_r$  en la implementación se logró a 0.9s mientras que en la simulación es de 0.58s por lo que se cumplió el objetivo con un error de 0.32s. El  $T_p$  en la implementación se alcanzó a los 2.1s y en la simulación es de 1.23s por lo que se logró el objetivo con un error de 0.87s.

### Resultados gráficos de la implementación del estimador reducido de estados (velocidad angular)

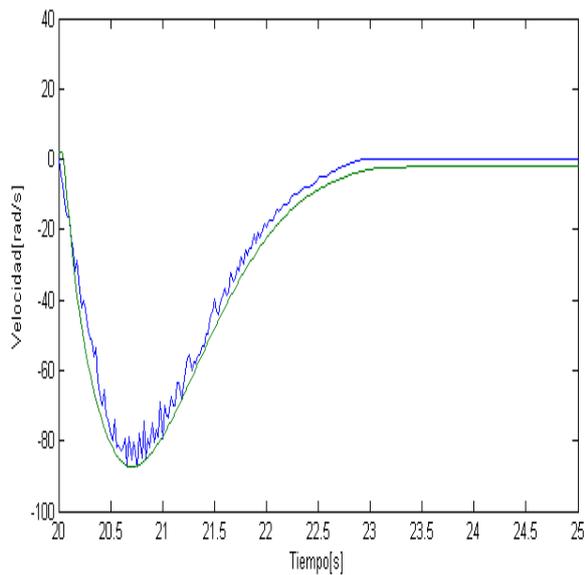


**Figura. 4.43. Gráfica del sistema compensado señal (rampa) Implementación (Tiempo Real)**

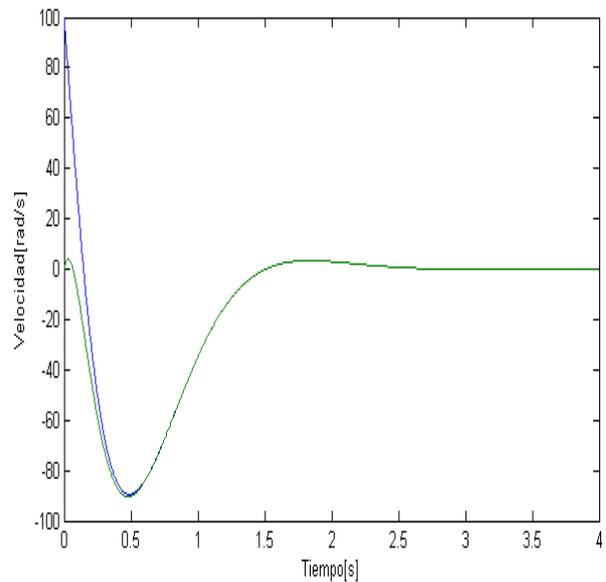


**Figura. 4.44. Gráfica del sistema compensado señal (rampa) Simulación (Modelo Lineal)**

Se puede observar en la implementación que el estado estimado (azul) consigue hacer el seguimiento al estado medido (verde) logrando la estabilización del sistema en un tiempo de 0.9s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 0.45s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.45s.



**Figura. 4.45. Gráfica del sistema compensado señal (paso) Implementación (Tiempo Real)**



**Figura. 4.46. Gráfica del sistema compensado señal (paso) Simulación (Modelo Lineal)**

Se puede observar en la implementación que el estado estimado (azul) consigue hacer el seguimiento al estado medido (verde) logrando la estabilización del sistema en un tiempo de 0.75s, mientras que en la simulación se consiguió la estabilización en 0.55s, por lo que se logró los objetivos deseados con un error de 0.2s.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 5.1. CONCLUSIONES

- El diseño del controlador en adelanto se lo realizó mediante el método de la respuesta de frecuencia utilizando diagramas de Bode en el que para su cálculo se trabaja con el sistema en lazo abierto, en vista de que el Sistema Servomotor es estable se pudo comprobar que este tipo de controlador aumenta la estabilidad relativa del sistema, aumentando también su margen de fase.
- Para el diseño del controlador en adelanto-atraso se combinó dos tipos de controladores, el primero en adelanto utilizando el lugar de las raíces mediante el método geométrico el cual aplicando conocimientos básicos de geometría se puede calcular de manera fácil el controlador y el segundo en atraso, también utilizando el lugar de las raíces el cual hallando la relación entre los ceros y polos del sistema se logra calcular el controlador.
- El método de Ziegler-Nichols para diseñar controladores PID está basado en análisis de estabilidad es decir se debe sintonizar al sistema, por lo que este diseño no sirve para cumplir con especificaciones del controlador, además el Sistema Servomotor nunca se vuelve inestable es decir que sus polos se encuentran siempre en el semiplano izquierdo por lo que no se pudo aplicar este método de diseño.
- Para el diseño del controlador con realimentación completa de estados (LQ) se trabajó con la ecuación característica deseada que se la obtiene aplicando fórmulas que están dadas por las especificaciones del controlador y se la

comparó con la ecuación característica de lazo cerrado del sistema para poder encontrar las ganancias  $K$  del controlador.

- El estimador completo y el estimador reducido de estados son una aproximación de las variables reales, por lo que se colocó a los polos estables cuatro veces más rápido para que de esta manera las variables antes mencionadas respondan de mejor forma ante perturbaciones, para la ubicación de los polos se utilizó la técnica SRL.
- En las gráficas de implementación y simulación de los estimadores se nota que la señal a controlar no hace un seguimiento tan efectivo a la señal deseada esto es debido a que en estos controladores sólo se realiza un control proporcional.
- Se pudo observar que las gráficas de las simulaciones de los controladores comparadas con las gráficas de las implementaciones de los mismos son parecidas teniendo márgenes de error no muy grandes con lo que se cumplió con uno de los objetivos del proyecto.
- La implementación de los controladores en el Sistema Servomotor se la realiza de una forma fácil y sencilla, ya que sólo se necesita crear en el programa Simulink el sistema de control con el controlador que se desea probar, esto permite tener un acceso rápido y directo al Sistema Servomotor lo cual era otro de los objetivos de este proyecto.

## 5.2. RECOMENDACIONES

- Para cuestiones de diseño se recomienda tomar de  $50^\circ$  a  $60^\circ$  como margen de fase para los controladores clásicos.
- Los diagramas de Bode deben ser utilizados para sistemas estables ya que predice el comportamiento del lazo cerrado del sistema, así como su error de estado estable, ancho de banda y márgenes de estabilidad.

- Para el diseño del estimador reducido se recomienda añadir el bloque de retardo de transporte (Transport Delay), ya que con esto se consigue eliminar los errores producidos por los lazos algebraicos.
- En la simulación de los estimadores de estado se recomienda colocar condiciones iniciales al sistema ya que sin esto no se puede apreciar de manera correcta los estados medidos de los estados estimados.
- Como regla, los polos del estimador deben escogerse de 2 a 6 veces más rápidos que los polos del controlador para que la velocidad de respuesta del sistema esté definida por el controlador.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Franklin, Powell & Emami-Noemi, **Feedback Control of dynamic Systems** 4th edn Prentice Hall 2002
- Phillips, Charles & Harbor Royce, **Feedback Control Systems** third edn Prentice Hall 1996
- Burns, Roland, **Advanced Control Engineering first edn Butterworth – Heinemann** 2001
- Shahian, Bahram & Hassul Michael, **Control System Desing Using MATLAB** Prentice-Hall 1993
- Teoría de espacio de estados, [www.mame.mu.oz.au/~mcg/ctrl433/](http://www.mame.mu.oz.au/~mcg/ctrl433/)
- Diseño en el espacio de estados, [www.ib.cnea.gov.ar/~dsc/capitulo8/Capitulo8.htm](http://www.ib.cnea.gov.ar/~dsc/capitulo8/Capitulo8.htm)
- Realimentación de estados y estimadores, [iaci.unq.edu.ar/materias/control2/web/clases/Cap8.pdf](http://iaci.unq.edu.ar/materias/control2/web/clases/Cap8.pdf)

## INDICE DE FIGURAS

- Figura. 1.1. Componentes del Sistema Servomotor
- Figura. 1.2. Diagrama para el modelamiento matemático de la planta
- Figura. 1.3. Gráfica de las características inversas de estado estacionario del sistema
- Figura. 1.4. Modelo de Simulación Lineal
- Figura. 1.5. Modelo de Simulación no Lineal
- Figura. 2.1. Sistema de control en lazo cerrado
- Figura. 2.2. Criterio del ángulo en el diseño mediante lugar de las raíces
- Figura. 2.3. Método Geométrico para el diseño mediante lugar de las raíces
- Figura. 2.4. Representación general de un sistema en el espacio de estados
- Figura. 2.5. Forma Canónica Controlador
- Figura. 2.6. Forma Canónica Observador
- Figura. 2.7. Forma Canónica de Controlabilidad
- Figura. 2.8. Forma Canónica de Observabilidad
- Figura. 2.9. Forma Canónica Modal
- Figura. 2.10. Esquema de un sistema de control con realimentación completa de estados
- Figura. 2.11. Esquema del estimador completo de estados
- Figura. 2.12. Esquema alternativo del estimador completo de estados
- Figura. 2.13. Esquema de la combinación entre la ley de control y el estimador de estados
- Figura. 2.14. Esquema del estimador reducido de estados
- Figura. 3.1. Gráfica del sistema sin compensar (señal rampa)
- Figura. 3.2. Gráfica del sistema sin compensar (señal paso)
- Figura. 3.3. Diagrama de Bode del sistema en lazo abierto (sistema sin compensar)
- Figura. 3.4. Diagrama de Bode del compensador en adelanto
- Figura. 3.5. Diagrama de Bode del sistema compensado
- Figura. 3.6. Diagrama de Bode del sistema sin compensar y compensado
- Figura. 3.7. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)
- Figura. 3.8. Gráfica del sistema compensado (señal paso)
- Figura. 3.9. Diagrama de Simulación del sistema sin compensar (Modelo Lineal)

Figura. 3.10. Gráfica del sistema sin compensar para una señal paso - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.11. Gráfica del sistema sin compensar para una señal rampa - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.12. Diagrama de Simulación del compensador en adelanto (Modelo Lineal)

Figura. 3.13. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.14. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.15. Diagrama de Simulación del compensador en adelanto (Modelo no Lineal)

Figura. 3.16. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 3.17. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 3.18. Gráfica de la obtención de los ángulos de cada polo

Figura. 3.19. Gráfica de ubicación del polo y cero del controlador

Figura. 3.20. Obtención del cero del controlador

Figura. 3.21. Obtención del polo del controlador

Figura. 3.22. Gráfica del sistema compensado (señal rampa)

Figura. 3.23. Gráfica del sistema compensado (señal paso)

Figura. 3.24. Diagrama de Nyquist del sistema compensado

Figura. 3.25. Diagrama de Simulación del compensador en adelanto-atraso (Modelo Lineal)

Figura. 3.26. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.27. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.28. Diagrama de Simulación del compensador en adelanto-atraso (Modelo no Lineal)

Figura. 3.29. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 3.30. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 3.31. Lugar de las raíces para la velocidad del servomotor

Figura. 3.32. Lugar de las raíces para la posición angular del servomotor

Figura. 3.33 Gráfica del sistema compensado (señal rampa)

Figura. 3.34. Gráfica del sistema compensado (señal paso)

Figura. 3.35. Diagrama de Simulación del controlador PID (Modelo Lineal)

Figura. 3.36. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.37. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.38. Diagrama de Simulación del controlador PID (Modelo no Lineal)

Figura. 3.39. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 3.40. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 3.41. Gráfica del sistema compensado para posición angular y velocidad angular (señal paso)

Figura. 3.42. Gráfica del sistema con tracking (señal paso)

Figura. 3.43. Diagrama de Simulación del controlador LQ (Modelo Lineal)

Figura. 3.44. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.45. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.46. Gráfica de la velocidad del servomotor (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.47. Gráfica de la velocidad del servomotor (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.48. Gráfica del sistema compensado (señal paso)

Figura. 3.49. Diagrama de Simulación del estimador completo de estados (Modelo Lineal)

Figura. 3.50. Condiciones iniciales de ángulo y velocidad

Figura. 3.51. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.52. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.53. Gráfica de la velocidad del servomotor (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.54. Gráfica de la velocidad del servomotor (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.55. Gráfica del sistema compensado (señal paso)

Figura. 3.56. Diagrama de Simulación del estimador reducido de estados (Modelo Lineal)

Figura. 3.57. Condiciones iniciales de ángulo y velocidad

Figura. 3.58. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.59. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.60. Gráfica de la velocidad del servomotor (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 3.61. Gráfica de la velocidad del servomotor (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal)

Figura. 4.1. Implementación del controlador en adelanto

Figura. 4.2. Bloque de la función de transferencia del controlador

Figura. 4.3. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Implementación (Tiempo Real)

Figura. 4.4. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 4.5. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Implementación (Tiempo Real)

Figura. 4.6. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 4.7. Implementación del controlador en adelanto-atraso

Figura. 4.8. Bloque de la función de transferencia del controlador

Figura. 4.9. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Implementación (Tiempo Real)

Figura. 4.10. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 4.11. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Implementación (Tiempo Real)

Figura. 4.12. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 4.13. Implementación del controlador PID

Figura. 4.14. Bloques de la función de transferencia del controlador

Figura. 4.15. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Implementación (Tiempo Real)

Figura. 4.16. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 4.17. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Implementación (Tiempo Real)

Figura. 4.18. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo no Lineal)

Figura. 4.19. Implementación del controlador LQ

Figura. 4.20. Bloques de la ganancia K del controlador

Figura. 4.21. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Implementación (Tiempo Real) – posición angular

Figura. 4.22. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal) - posición angular

Figura. 4.23. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Implementación (Tiempo Real) - posición angular

Figura. 4.24. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal) - posición angular

Figura. 4.25. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Implementación (Tiempo Real) – velocidad angular

Figura. 4.26. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal) - velocidad angular

Figura. 4.27. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Implementación (Tiempo Real) - velocidad angular

Figura. 4.28. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal) - velocidad angular

Figura. 4.29. Implementación del estimador completo de estados

Figura. 4.30. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Implementación (Tiempo Real) – posición angular

Figura. 4.31. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal) - posición angular

Figura. 4.32. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Implementación (Tiempo Real) - posición angular

Figura. 4.33. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal) - posición angular

Figura. 4.34. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Implementación (Tiempo Real) – velocidad angular

Figura. 4.35. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal) - velocidad angular

Figura. 4.36. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Implementación (Tiempo Real) - velocidad angular

Figura. 4.37. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal) - velocidad angular

Figura. 4.38. Implementación del estimador reducido de estados

Figura. 4.39. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Implementación (Tiempo Real) – posición angular

Figura. 4.40. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal) - posición angular

Figura. 4.41. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Implementación (Tiempo Real) - posición angular

Figura. 4.42. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal) - posición angular

Figura. 4.43. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Implementación (Tiempo Real) – velocidad angular

Figura. 4.44. Gráfica del sistema compensado (señal rampa) - Simulación (Modelo Lineal) - velocidad angular

Figura. 4.45. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Implementación (Tiempo Real) - velocidad angular

Figura. 4.46. Gráfica del sistema compensado (señal paso) - Simulación (Modelo Lineal) - velocidad angular

## **INDICE DE TABLAS**

Tabla. 3.1. Comparación entre el sistema sin compensar y compensado

## **GLOSARIO**

### **MSS**

Siglas en inglés del Sistema Modular de Servomotor

### **RTWT**

Siglas en inglés de Real Time Windows Target es una herramienta de Matlab que permite trabajar en tiempo real.

### **CONTROLADOR PID**

Controlador Proporcional Integrativo Derivativo

### **PWM**

Modulación por ancho de pulso

**Fecha de entrega:**

---

Sr. Enrique Javier Chacón Hidalgo

Autor

---

Ing. Víctor Proaño

Coordinador de Carrera