

# Sistema de Reconocimiento Automático de Micro sismos Volcánicos basado en Redes Neuronales Convolucionales

Fernando Lara

29 de septiembre de 2021



**ESPE**  
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Quito, Ecuador



# Agenda I

- 1 Introducción
  - Trabajo de Investigación
  - Marco Teórico
- 2 Preprocesamiento
- 3 Detección
  - Modificación STA/LTA
  - Detección con CNN
- 4 Clasificación
  - Análisis de Frecuencia
  - Redes Neuronales Convolucionales
- 5 Prototipo
- 6 Conclusiones

1 Introducción

2 Preprocesamiento

3 Detección

4 Clasificación

5 Prototipo

6 Conclusiones





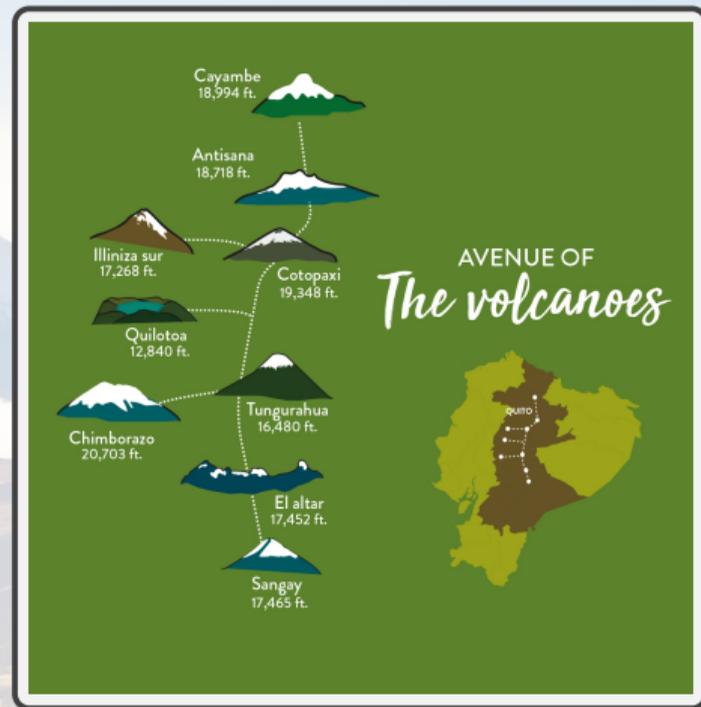
# Antecedentes



Volcán Guagua Pichincha / Reventador



Volcán Tungurahua / Wolf

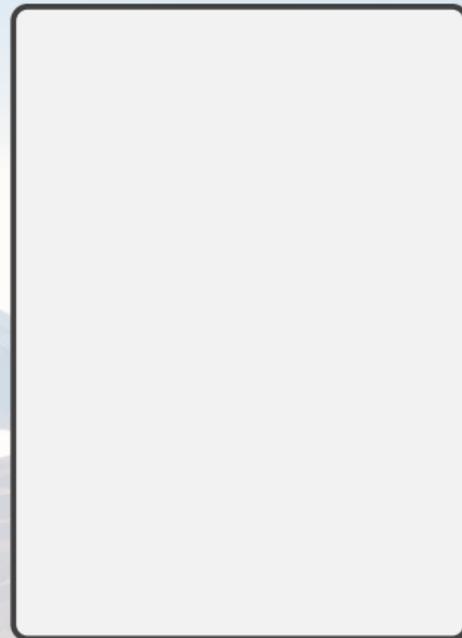




# Volcán Cotopaxi



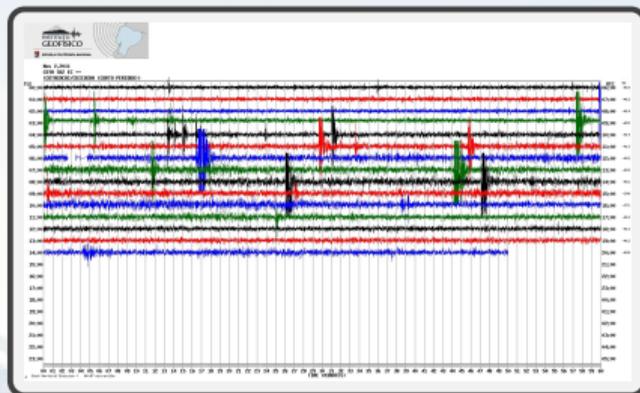
Volcán Cotopaxi



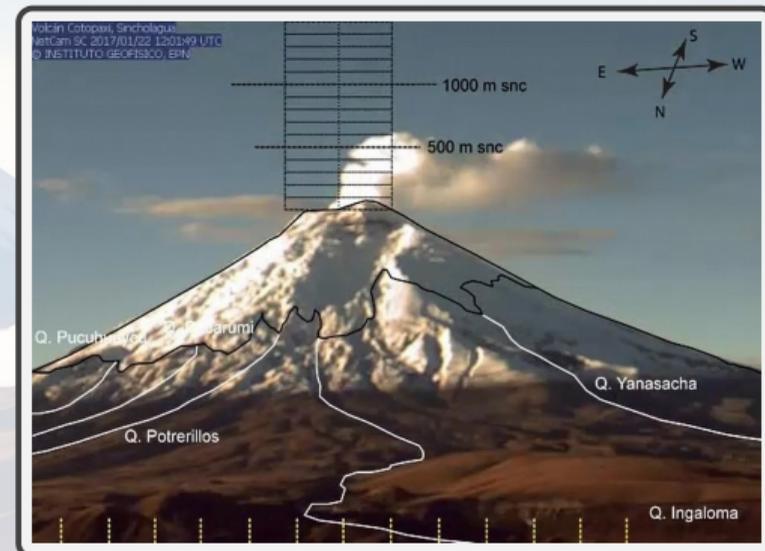
Posible flujo de lahares



# Monitorización volcánica



- 1 Registra la actividad sísmica
- 2 Niveles de dióxido de sulfuro ( $SO_2$ )
- 3 Registro de emisión de gases
- 4 Anomalías térmicas.





# Importancia

- Determinar niveles críticos de actividad sísmica
- Sistema de alerta temprana
- Nuevos tipos de micro eventos clasificados
- Acelerar el proceso de toma de decisiones por entidades gubernamentales

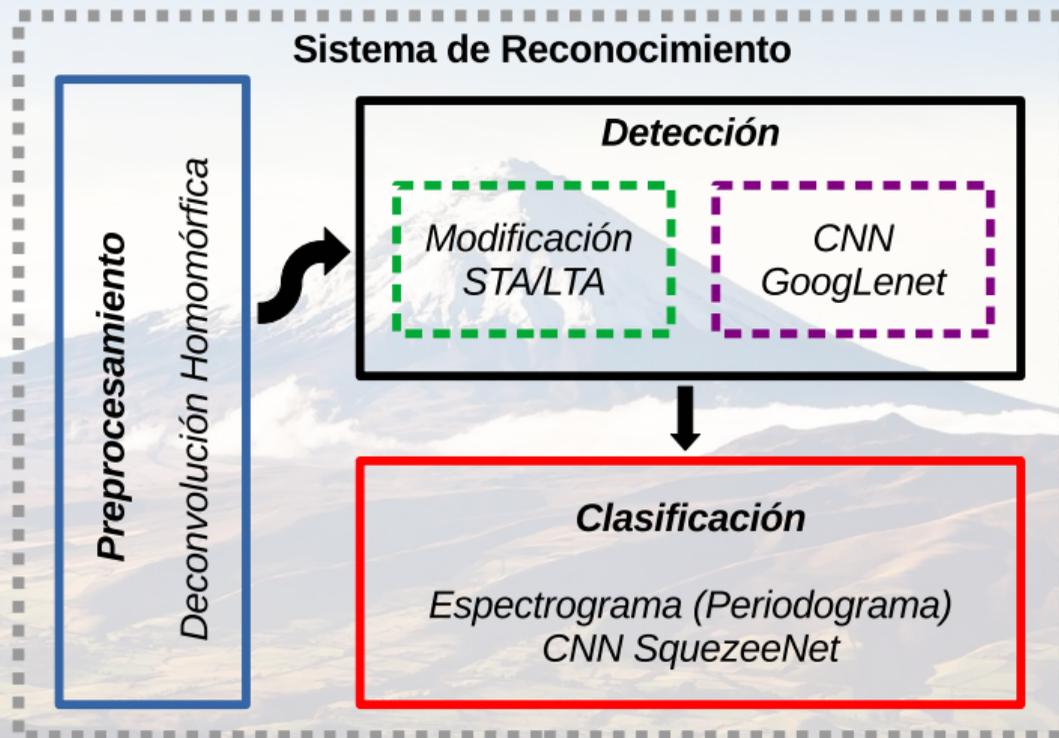


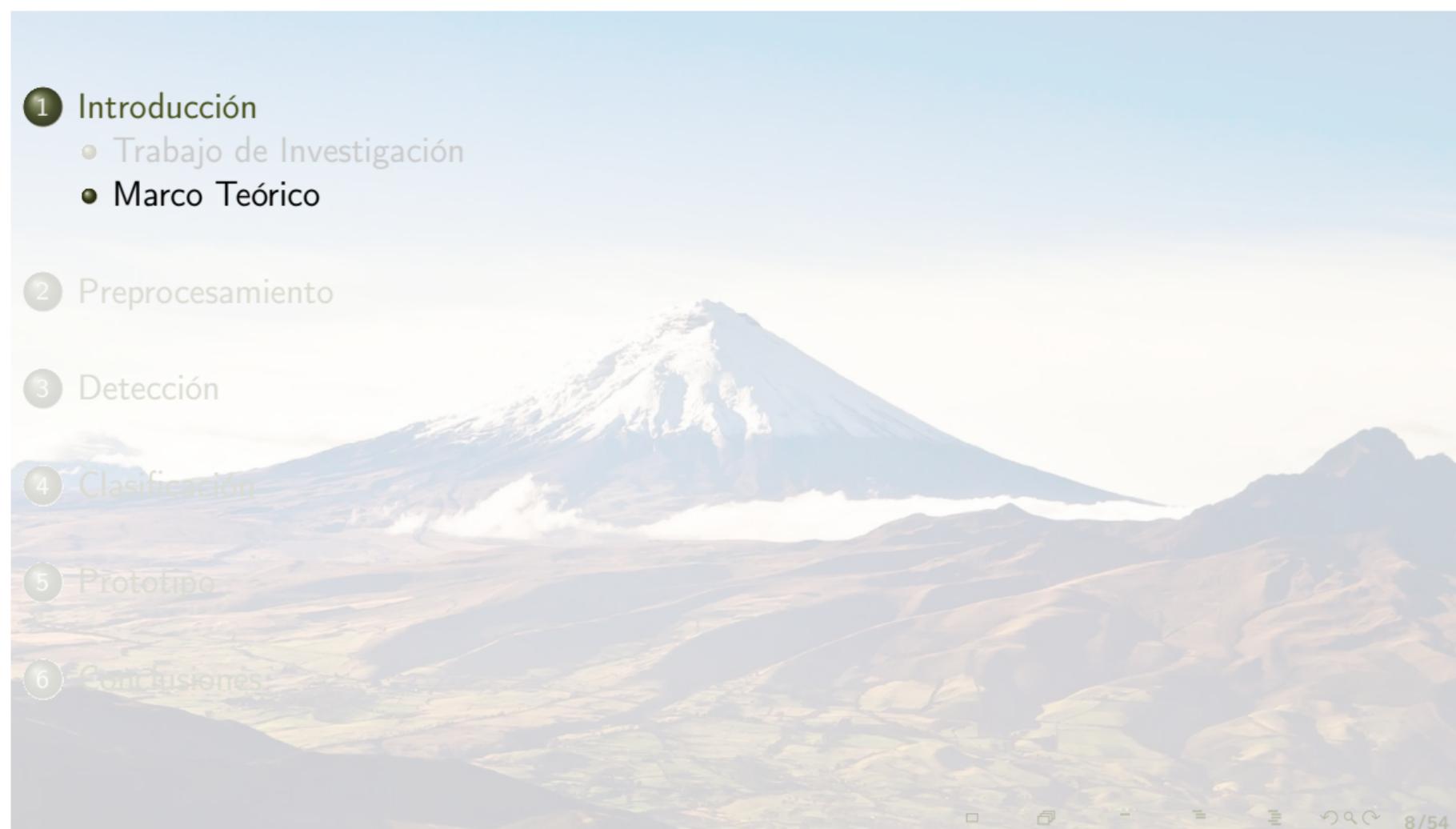
# Objetivos

- Objetivo General
  - Desarrollar un sistema de reconocimiento de microsismos de baja energía basado en redes neuronales convolucionales.
- Objetivos Específicos
  - Estimar la señal de la fuente sísmica.
  - Utilizar representación en tiempo-frecuencia de señales sísmicas que resalten la presencia de eventos sísmicos.
  - Implementar el concepto de transferencia de aprendizaje para entrenar las redes neuronales convolucionales.
  - Evaluar el desempeño del sistema propuesto y comparar los nuevos resultados con anteriores propuestas



# Propuesta General



- 
- 1 **Introducción**
    - Trabajo de Investigación
    - **Marco Teórico**

- 2 Preprocesamiento

- 3 Detección

- 4 Clasificación

- 5 Prototipo

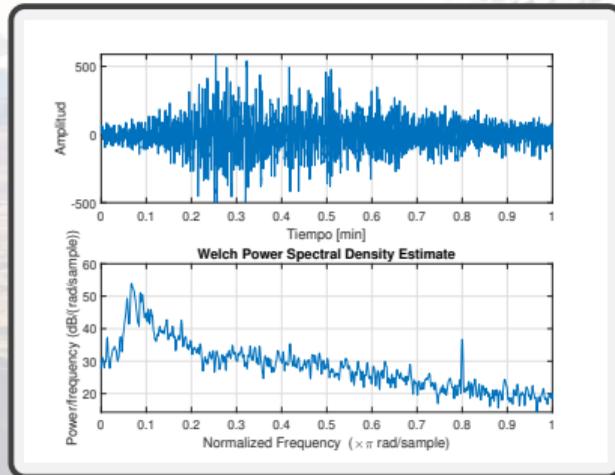
- 6 Conclusiones



# Micro sismos

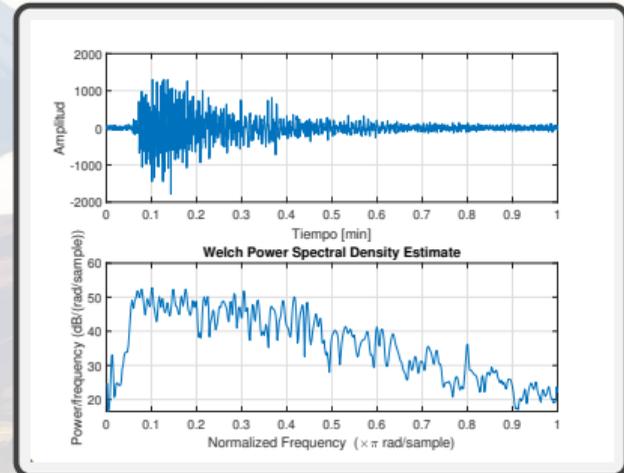
## Long Period

- ① Formación de burbujas de magma y su colapso
- ② Movimientos de magma a través de conductos



## Volcano Tectónico

- ① Fallas de cizallamiento
- ② Colapsos en estructuras internas





# Micro sismos

## Híbridos

- Eventos conjuntos LP y VT
- Colapso de cavidades de fluidos (magma)

## Tremores

- Son eventos de larga duración, eventos consecutivos

## Explosiones

- Acompañan a las erupciones
- Banda de frecuencia entre 1 – 5Hz (Choque de aire)

## Regional

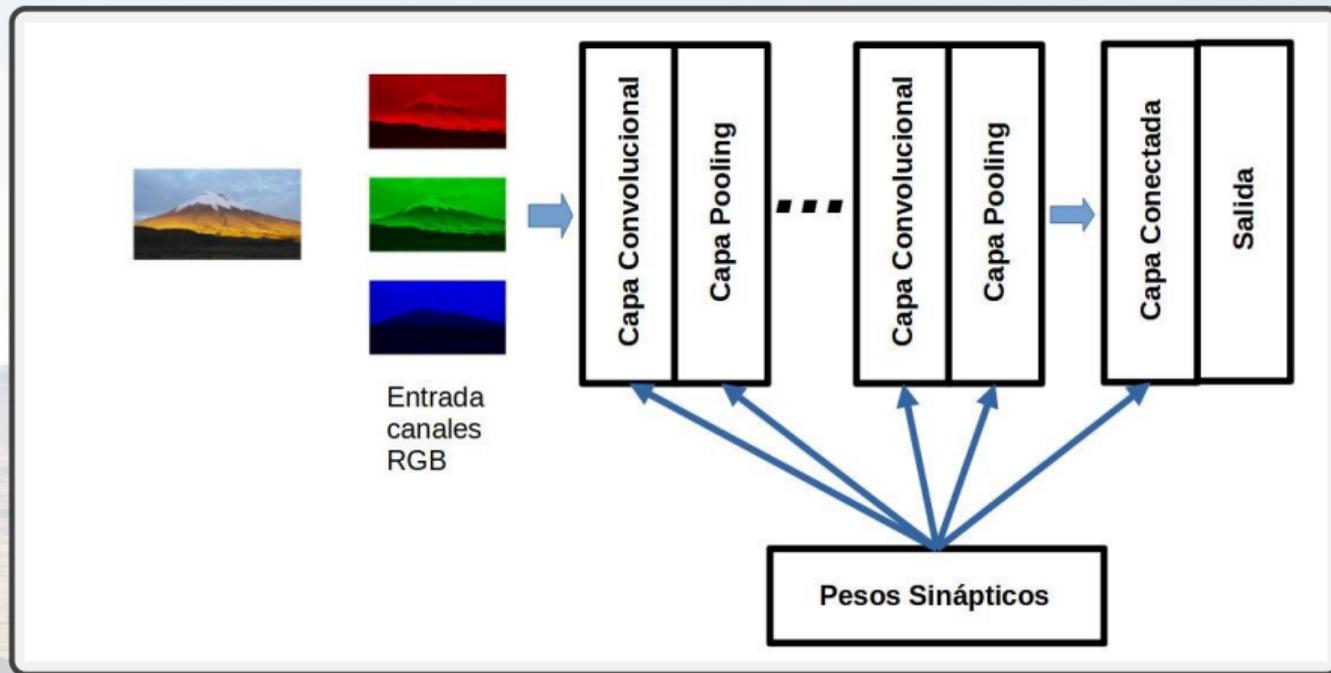
- Originados en placas tectónicas

## Icequake

- Zonas superficiales a causa de fracturas de hielo
- Banda de frecuencia hasta 10Hz



# Redes neuronales convolucionales





# Redes neuronales convolucionales

## Capa Convolutional

- Uso de filtros, para extraer información





# Redes neuronales convolucionales

## Capa Pooling

- Reducir gradualmente la dimensión de la entrada

## Capa totalmente conectada

- Un red neuronal totalmente conectada.

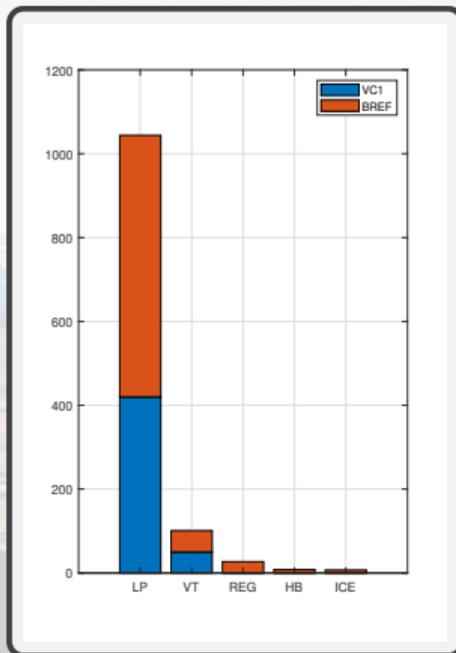
Los pesos sinápticos de todas las capas de la CNN se encuentran con descenso de gradiente estocástico, minimizando el error entre las categorías reales y las predichas.



# Bases de Datos

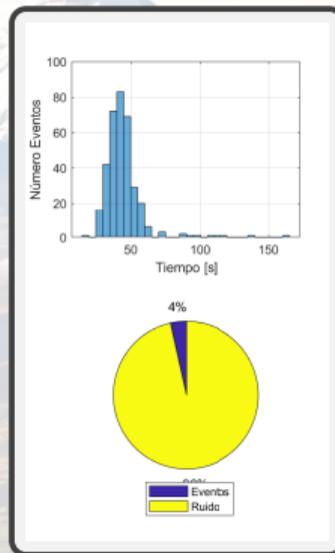
## e-Seismic

Total eventos: 1187

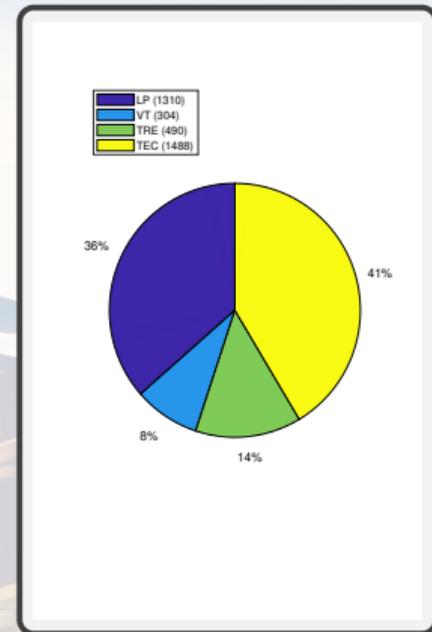


## IGEPN

- Registro 7000 minutos, 350 Eventos

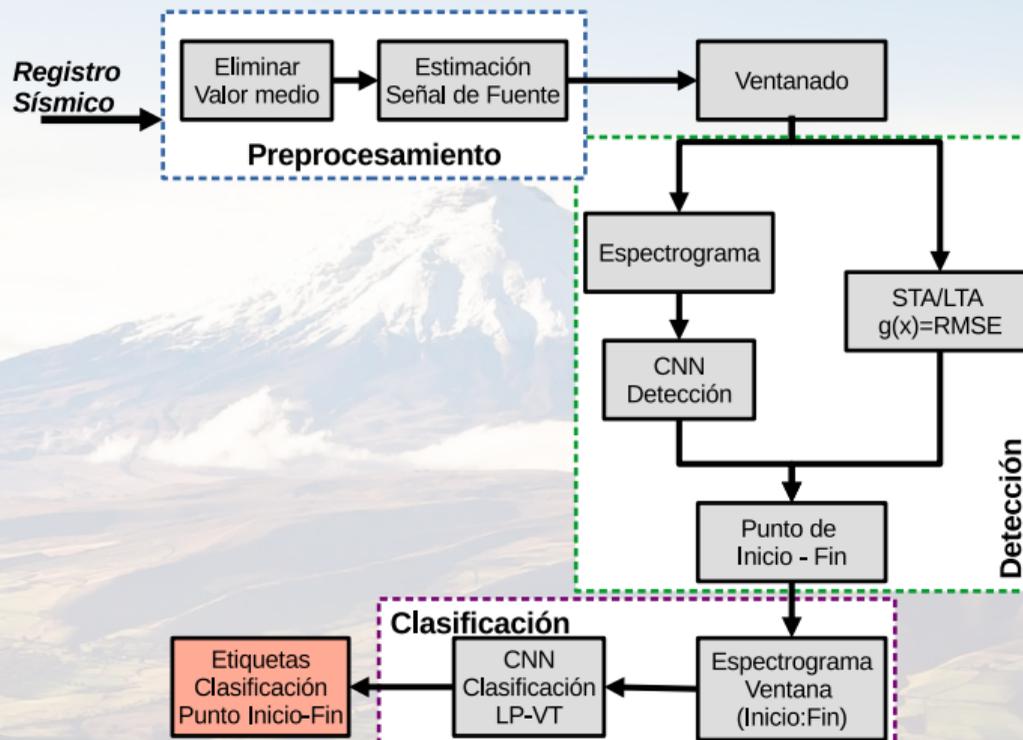


## OVDAS





# Propuesta



1 Introducción

2 Preprocesamiento

3 Detección

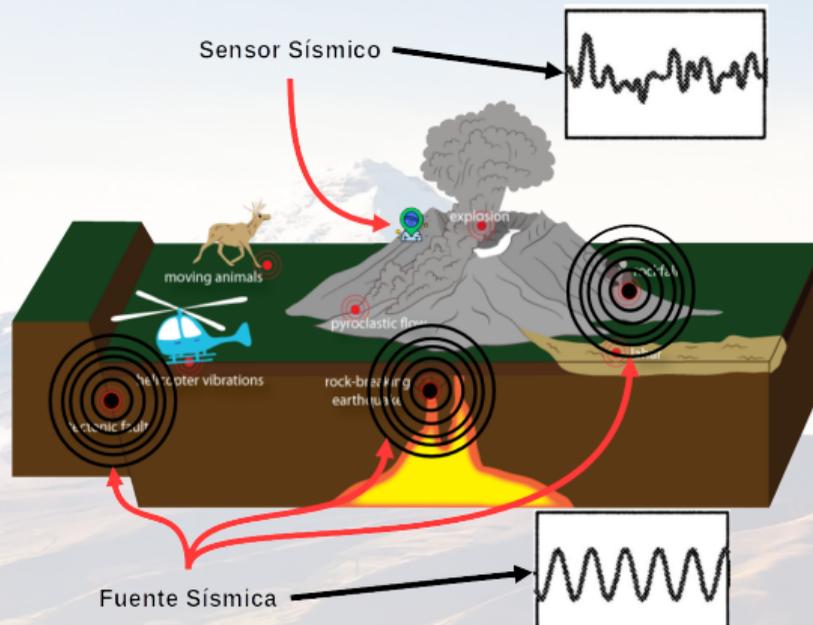
4 Clasificación

5 Prototipo

6 Conclusiones



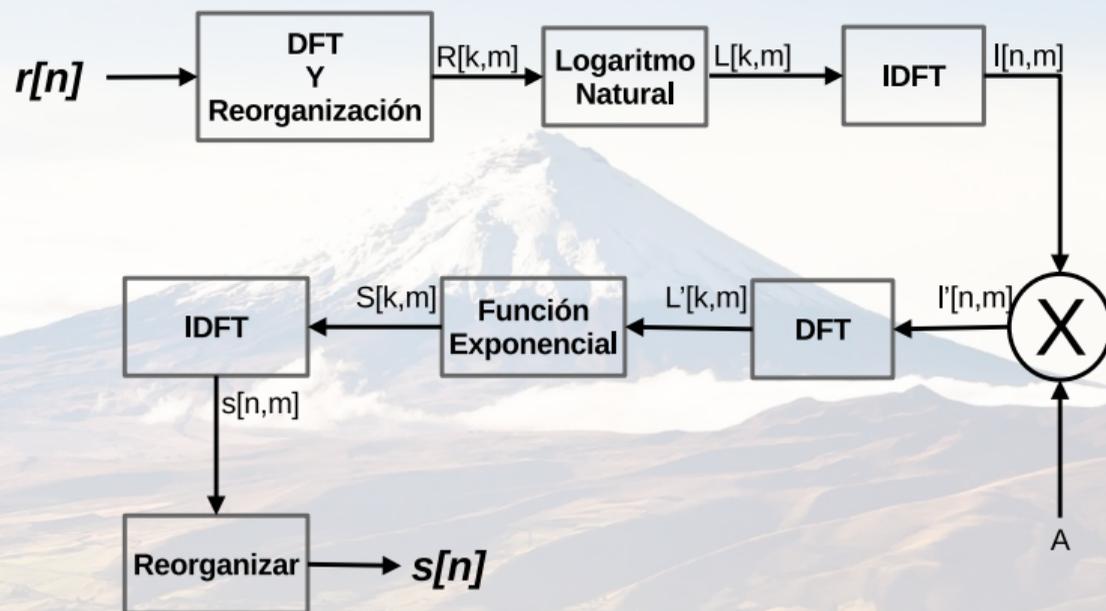
# Modelo del Canal



$$r[n] = s[n] \otimes h_T[n]$$

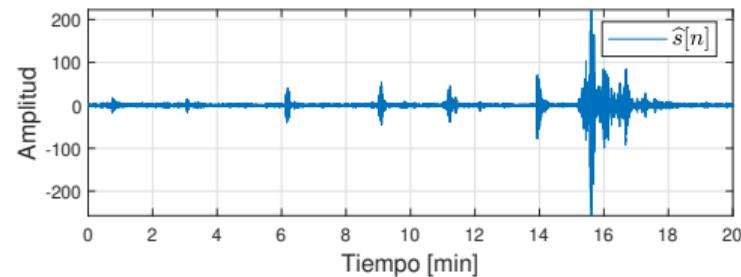
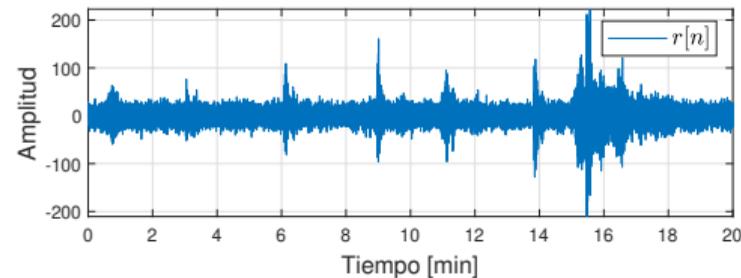
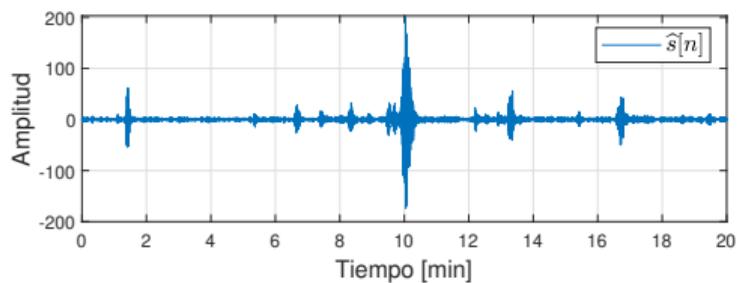
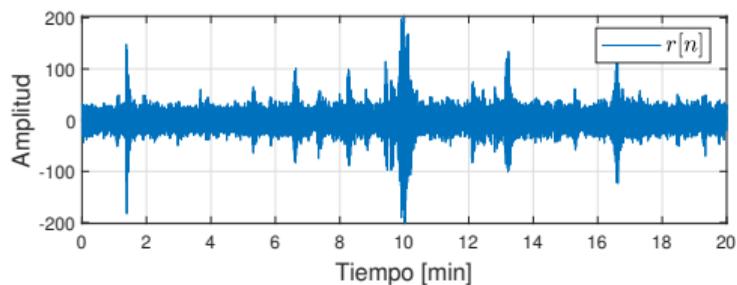


# Deconvolución Homomórfica



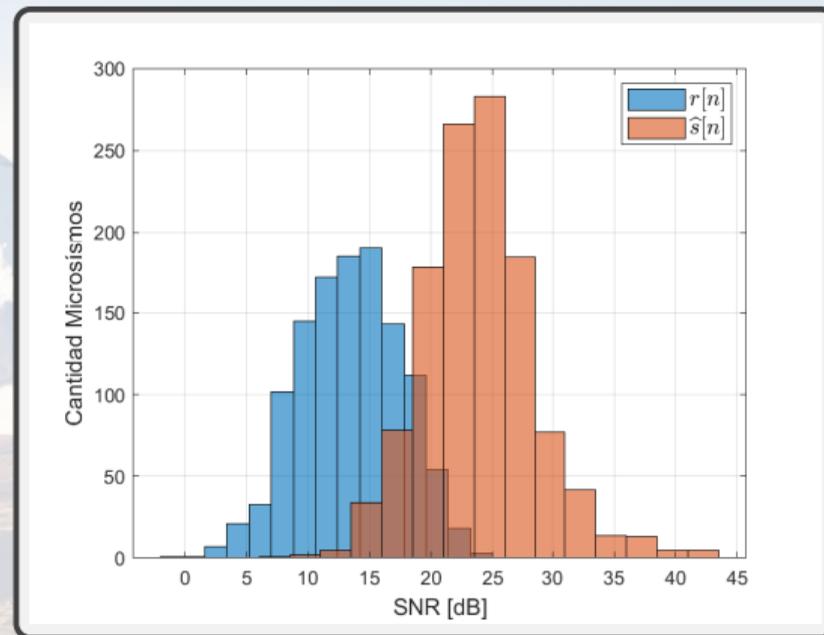
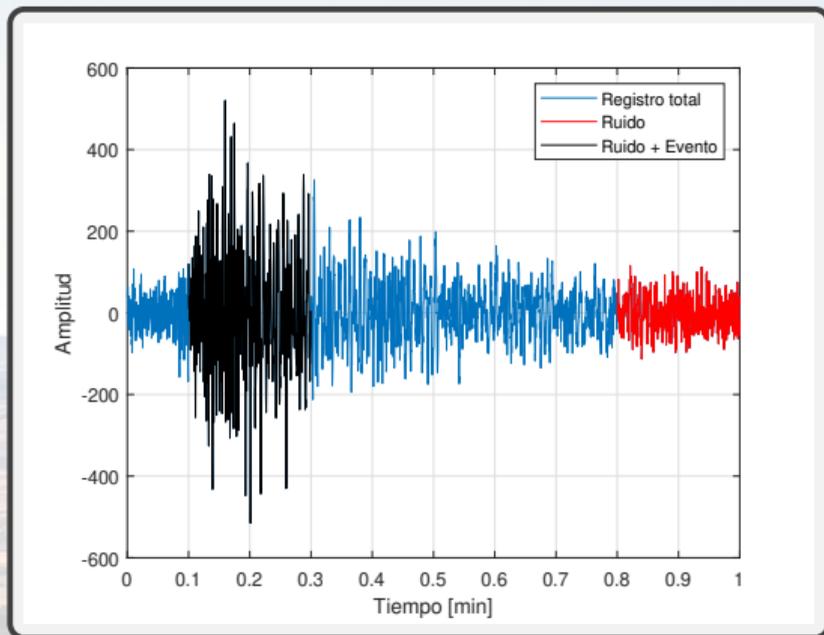


# Deconvolución Homomórfica



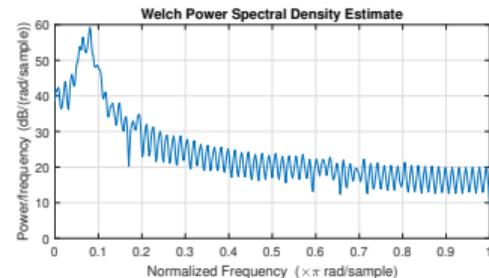
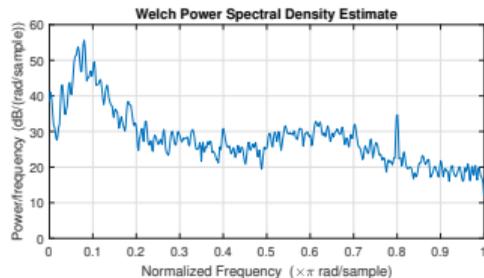
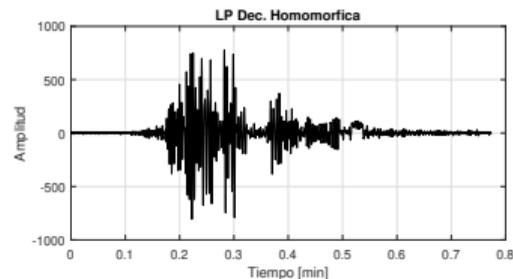
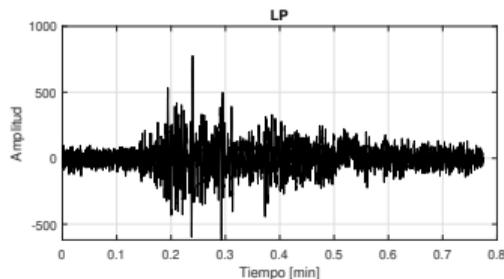


# Ganancia SNR



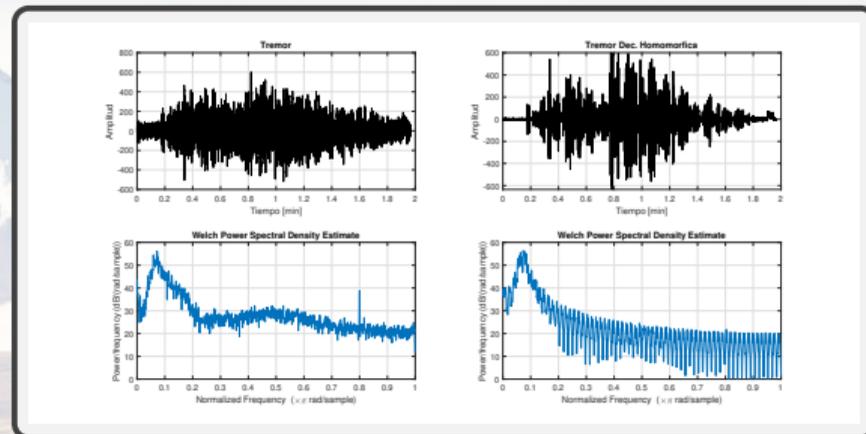
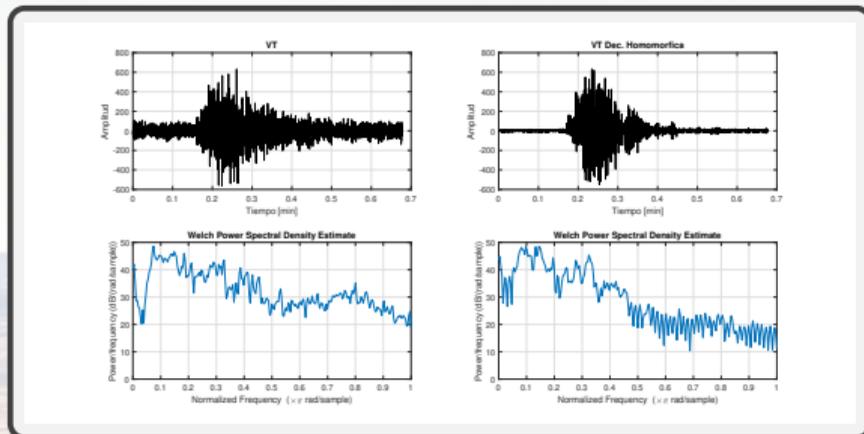


# Análisis cambios en frecuencia





# Análisis cambios en frecuencia





# Preprocesamiento

- 1 Filtro 25Hz
- 2 Filtro 0.5Hz
- 3 Eliminar valor medio

1 Introducción

2 Preprocesamiento

3 Detección

4 Clasificación

5 Prototipo

6 Conclusiones

1 Introducción

2 Preprocesamiento

3 Detección

- **Modificación STA/LTA**
- Detección con CNN

4 Clasificación

5 Prototipo

6 Conclusiones

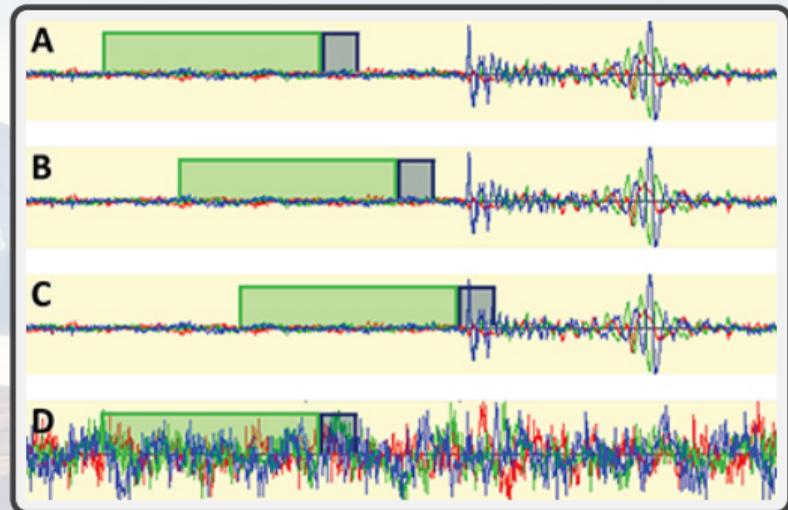


## STA/LTA

$$STA = \frac{1}{N_S} \sum_{n=1}^{N_S} g(r[n])$$

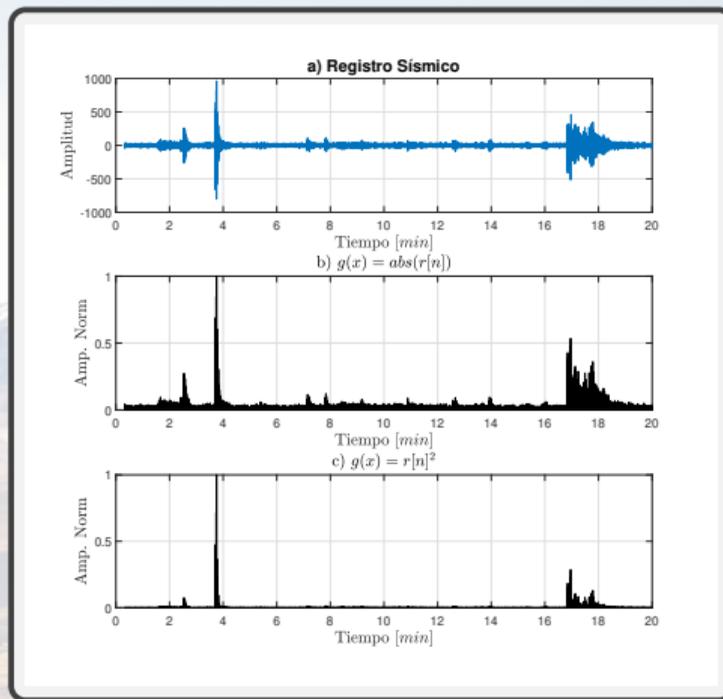
$$LTA = \frac{1}{N_L} \sum_{n=-N_L}^0 g(r[n])$$

$$SL = \frac{STA}{LTA}$$



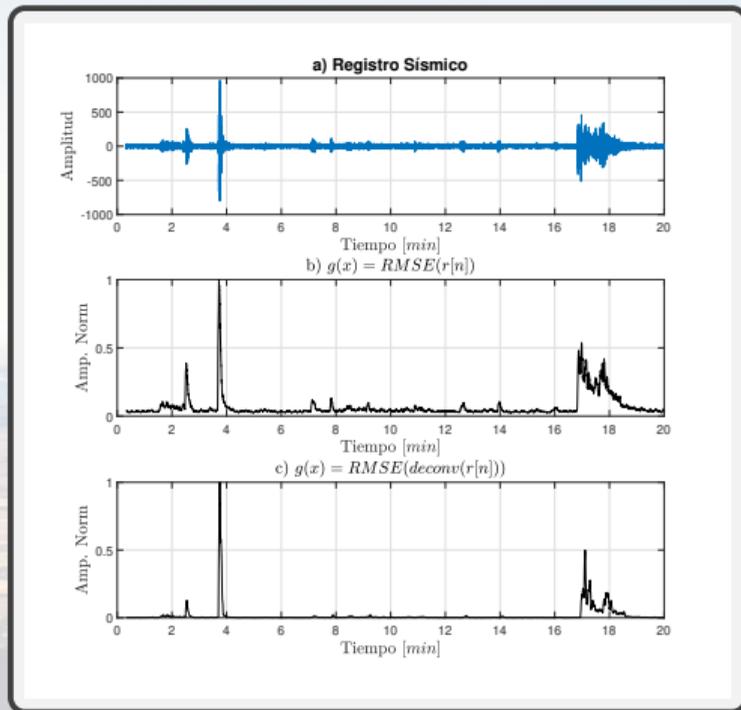


# STA/LTA





# Función $g(r[n])$



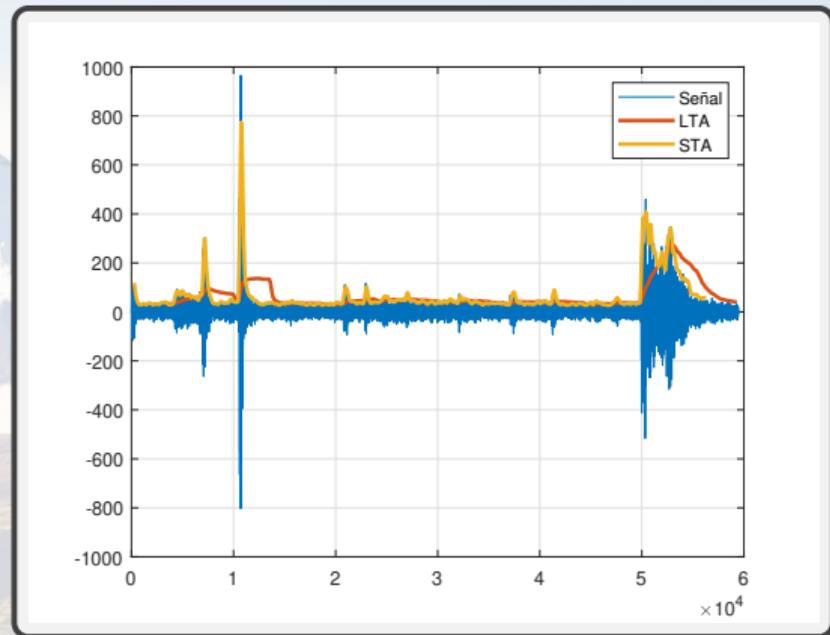
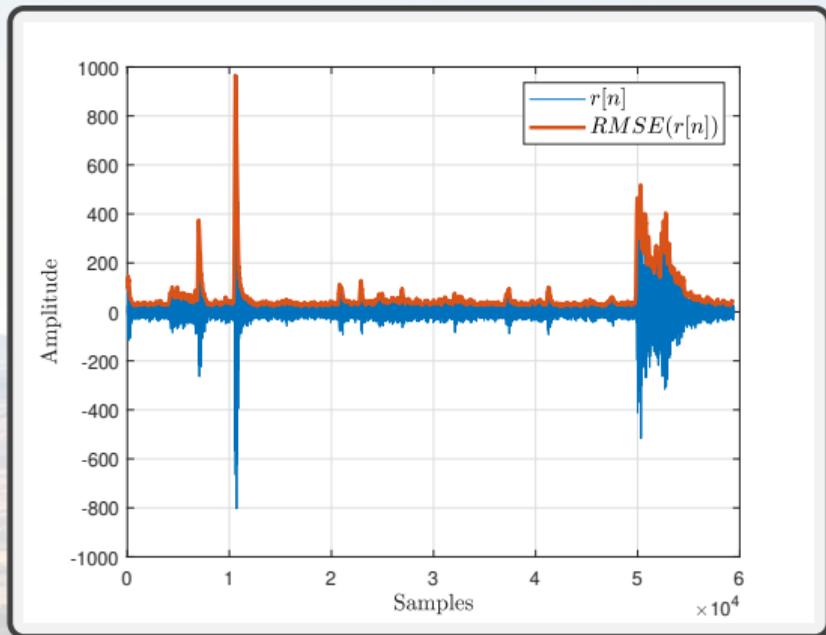
$$g(r[n]) = y = RMSE(deconv(r[n]))$$

$$g(\hat{s}[n]) = RMSE(\hat{s}[n])$$

$$y_R[m] = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=mN}^{(m+1)N-1} |\hat{s}[n]|^2}$$

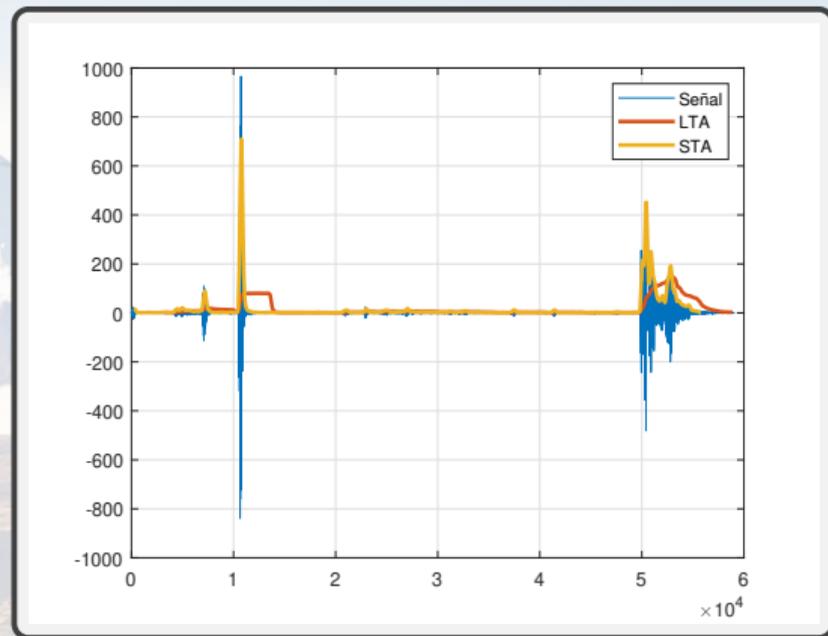
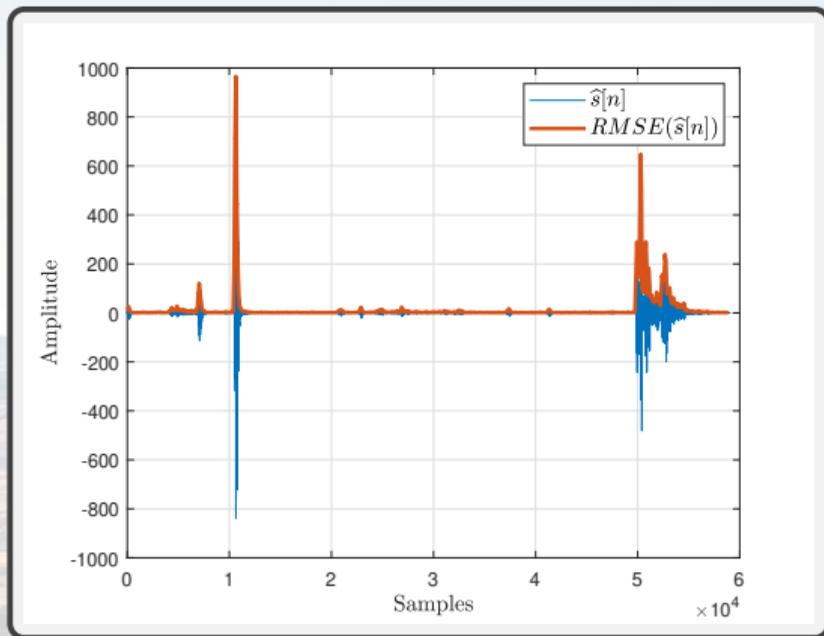


# Función $g(r[n]) = RMSE(r[n])$



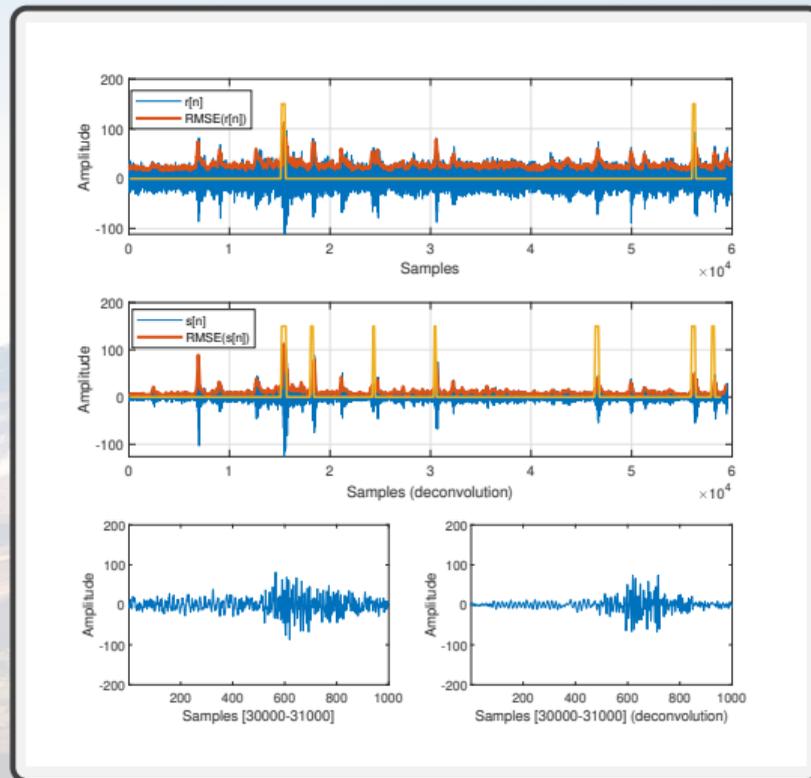


Función  $g(r[n]) = RMSE(\hat{s}[n])$





# Implementación





# Métricas

$$A_c(\%) = \frac{N_c}{N_v} \times 100$$

$$P_r(\%) = \frac{N_{TP}}{N_{TP} + N_{FP}} \times 100$$

$$S_e(\%) = \frac{N_{TP}}{N_{TP} + N_{FN}} \times 100$$

$$S_p(\%) = \frac{N_{TN}}{N_{TN} + N_{FP}} \times 100$$

$$BER = 1 - \frac{S_p + S_e}{2 \times 100}$$

Parámetros	Valores
Exactitud	99,31 %
Precisión	88,43 %
Sensibilidad	98,29 %
Especificidad	99,36 %
BER	0,01179

1 Introducción

2 Preprocesamiento

3 Detección

- Modificación STA/LTA
- **Detección con CNN**

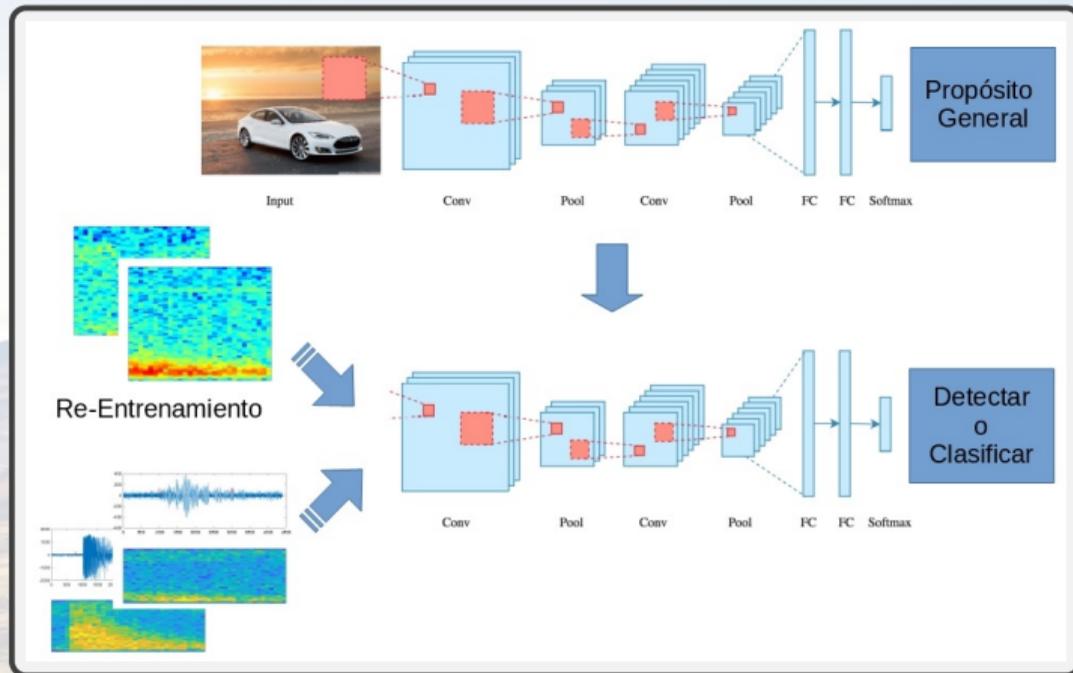
4 Clasificación

5 Prototipo

6 Conclusiones

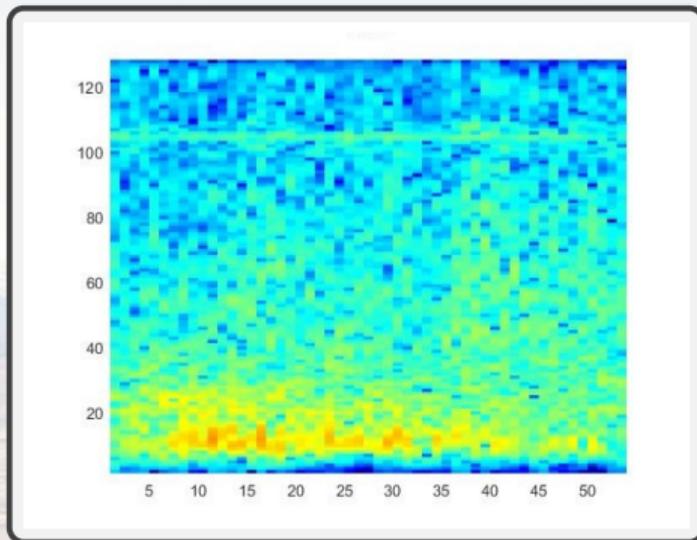


# Transferencia de Aprendizaje





# Espectrograma



- Etiquetas evento/ no evento
- Duración 5 segundos

## Entrenamiento

- 1 Sin solapamiento

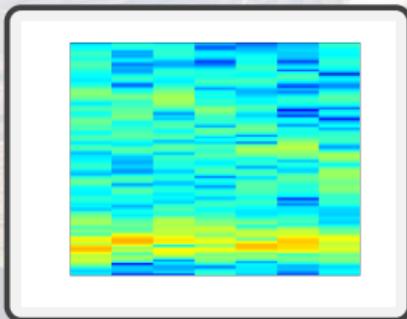
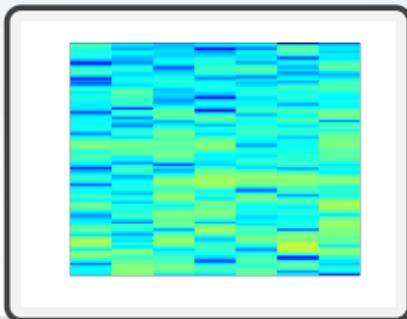
## Detección

- 1 Saltos de 1 segundo, 4 segundos de solapamiento

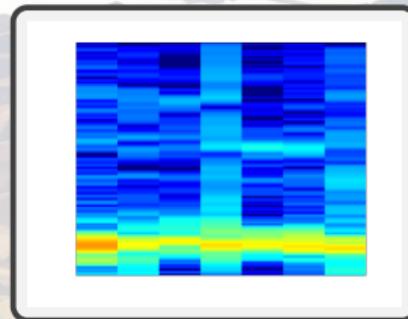
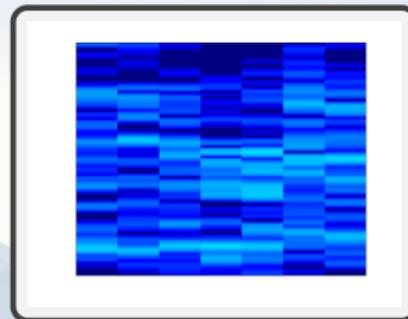


# Espectrograma

$r[n]$  Con y sin Evento sísmico



$\hat{s}[n]$  Con y sin Evento sísmico



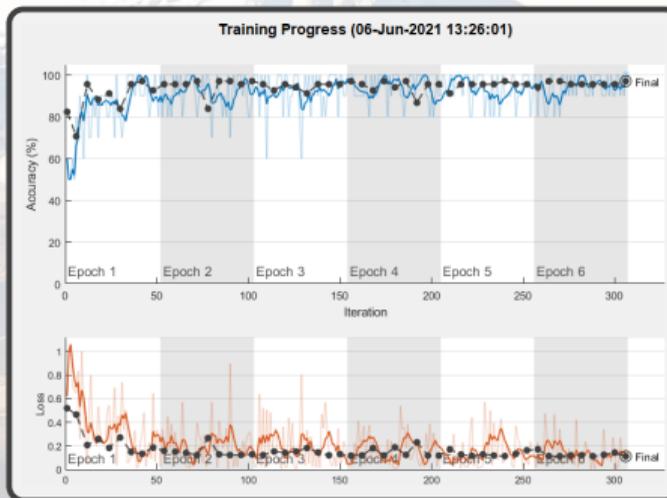
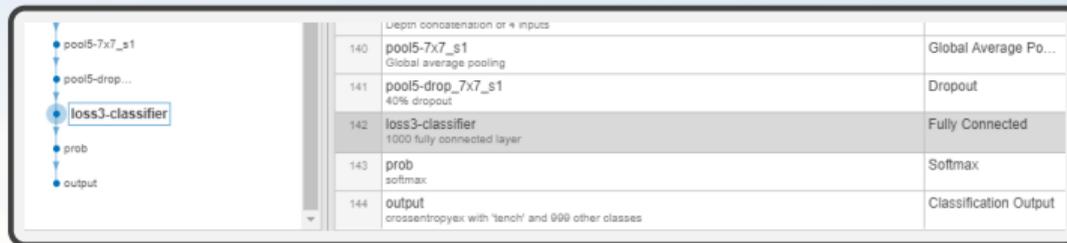


# Modificación GoogLeNet

ANALYSIS RESULT			
Name	Type	Activations	Learnables
128 inception_5b-3x3_reduce 192 1x1x832 convolutions with stride [1 1] and padding [0 0 0 0]	Convolution	7*7*192	Weights 1*1*832*192 Bias 1*1*192
129 inception_5b-relu_3x3_reduce ReLU	ReLU	7*7*192	-
130 inception_5b-3x3 384 3x3x192 convolutions with stride [1 1] and padding [1 1 1 1]	Convolution	7*7*384	Weights 3*3*192*384 Bias 1*1*384
131 inception_5b-relu_3x3 ReLU	ReLU	7*7*384	-
132 inception_5b-5x5_reduce 48 1x1x832 convolutions with stride [1 1] and padding [0 0 0 0]	Convolution	7*7*48	Weights 1*1*832*48 Bias 1*1*48
133 inception_5b-relu_5x5_reduce ReLU	ReLU	7*7*48	-
134 inception_5b-5x5 128 5x5x48 convolutions with stride [1 1] and padding [2 2 2 2]	Convolution	7*7*128	Weights 5*5*48*128 Bias 1*1*128
135 inception_5b-relu_5x5 ReLU	ReLU	7*7*128	-
136 inception_5b-pool 3x3 max pooling with stride [1 1] and padding [1 1 1 1]	Max Pooling	7*7*832	-
137 inception_5b-pool_proj 128 1x1x832 convolutions with stride [1 1] and padding [0 0 0 0]	Convolution	7*7*128	Weights 1*1*832*128 Bias 1*1*128
138 inception_5b-relu_pool_proj ReLU	ReLU	7*7*128	-
139 inception_5b-output Depth concatenation of 4 inputs	Depth concatenation	7*7*1024	-
140 pool5-7x7_s1 Global average pooling	Global Average Po...	1*1*1024	-
141 pool5-drop_7x7_s1 40% dropout	Dropout	1*1*1024	-
142 Nueva_Capa_Integracion 2 fully connected layer	Fully Connected	1*1*2	Weights 2*1024 Bias 2*1
143 prob softmax	Softmax	1*1*2	-
144 Cotopaxi_ClassLayer crossentropies with classes 'Evento' and 'NoEvento'	Classification Output	-	-

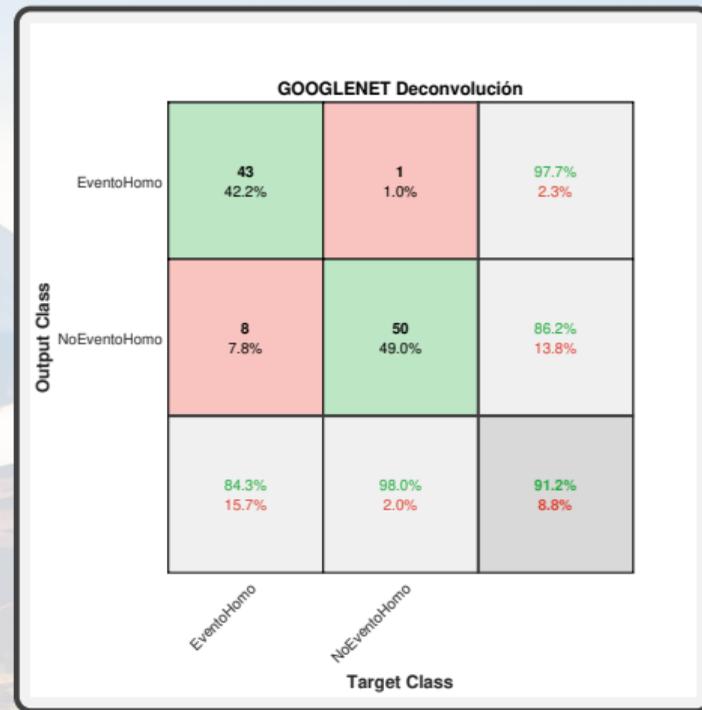
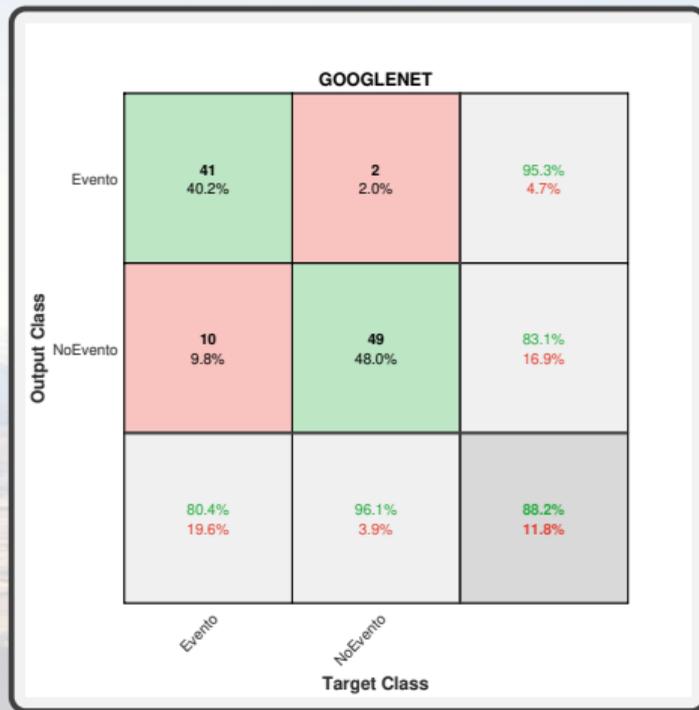


# Entrenamiento GoogLeNet





# Evaluación

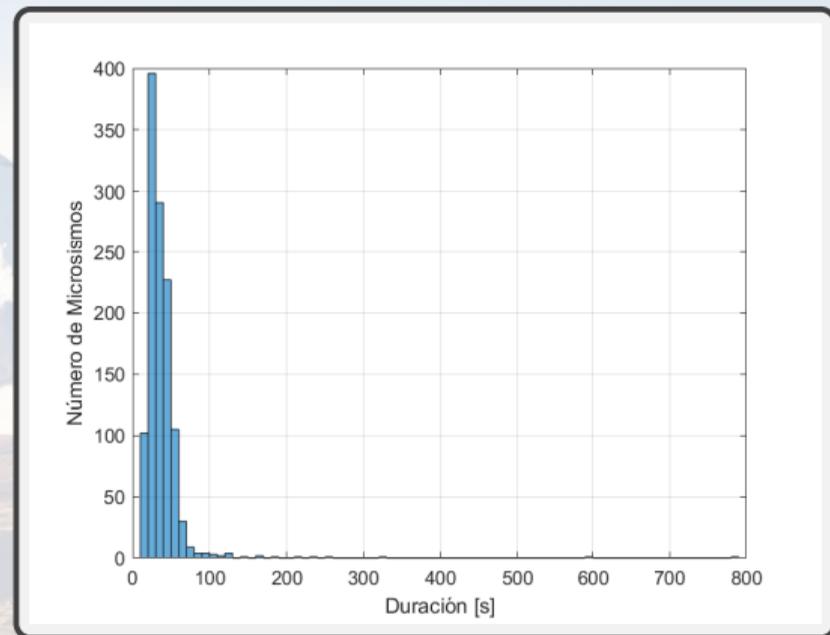




# Evaluación

Parámetros	C2N $r[n]$	C2N $\hat{s}[n]$
Exactitud	88 %	91 %
Precisión	95 %	97 %
Sensibilidad	80 %	84 %
Especificidad	96 %	98 %
BER	0,11	0,08

$$P_d = 1 - \prod_{n=1}^{N_w} (1 - S_e)$$



1 Introducción

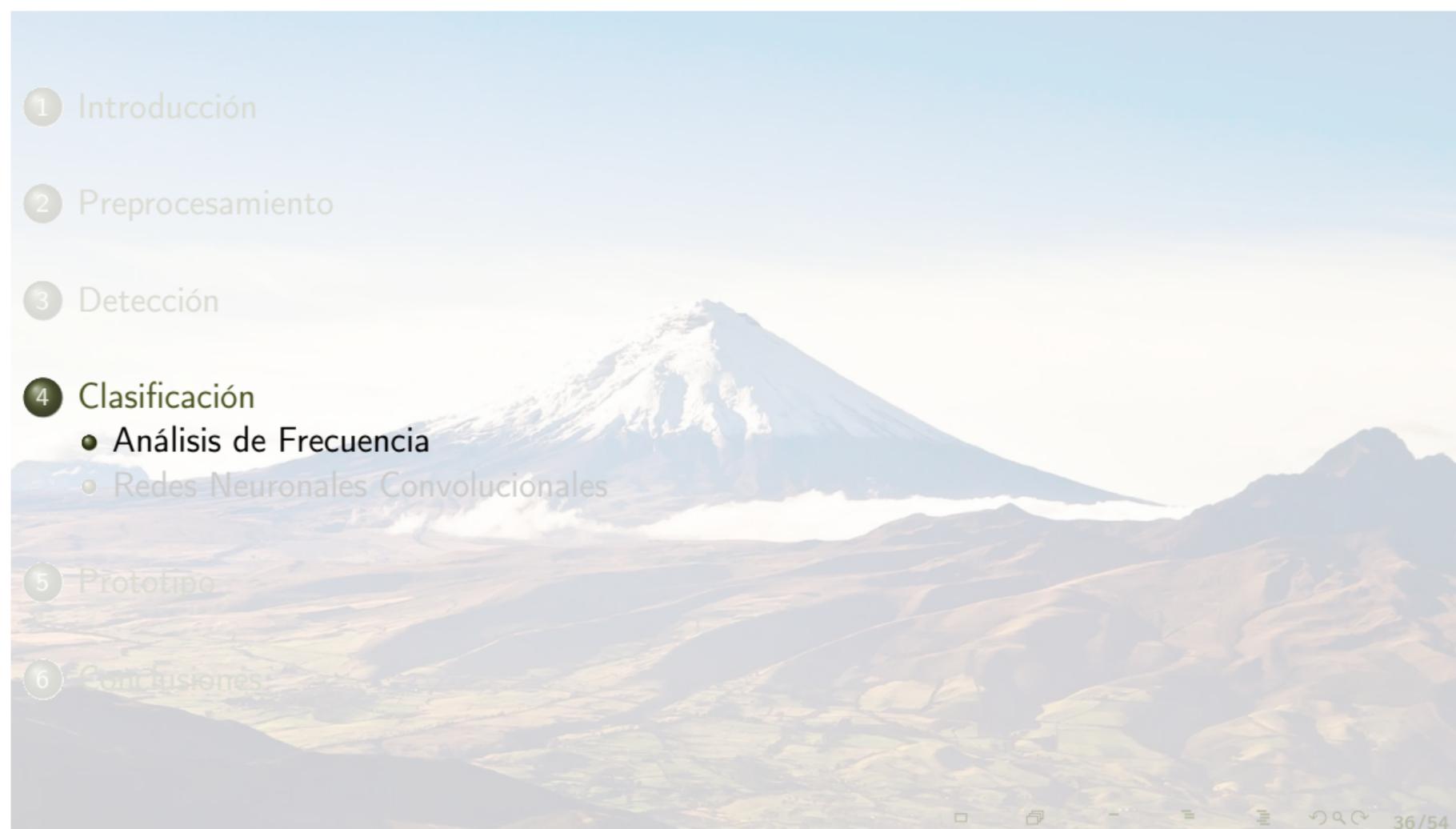
2 Preprocesamiento

3 Detección

**4 Clasificación**

5 Prototipo

6 Conclusiones



1 Introducción

2 Preprocesamiento

3 Detección

4 **Clasificación**

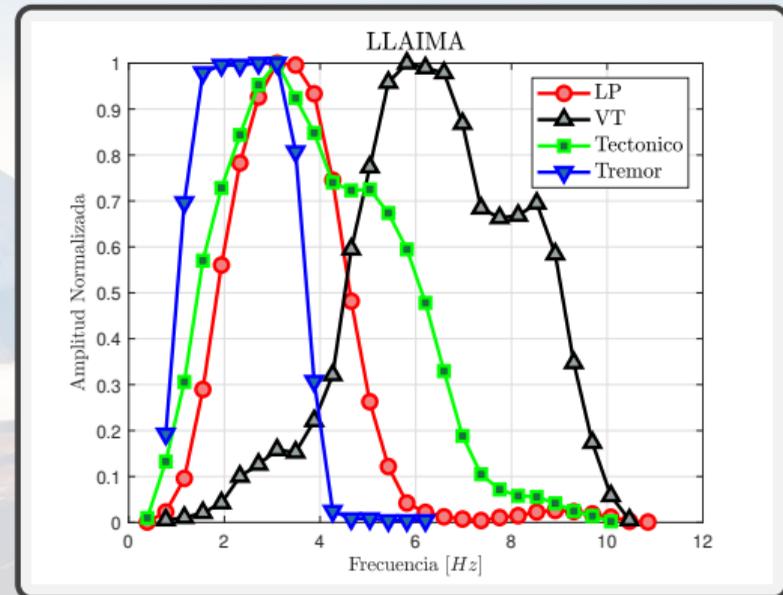
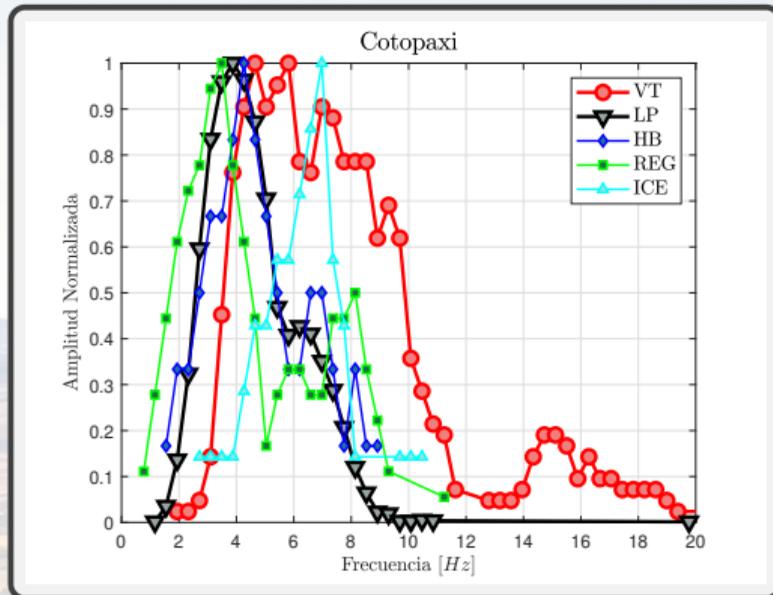
- **Análisis de Frecuencia**
- Redes Neuronales Convolucionales

5 Prototipo

6 Conclusiones



# Bandas de Frecuencia





# Bandas de Frecuencia

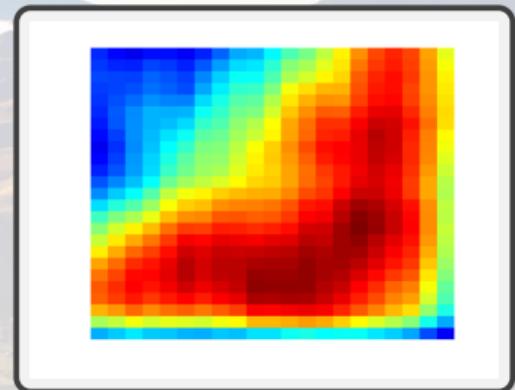
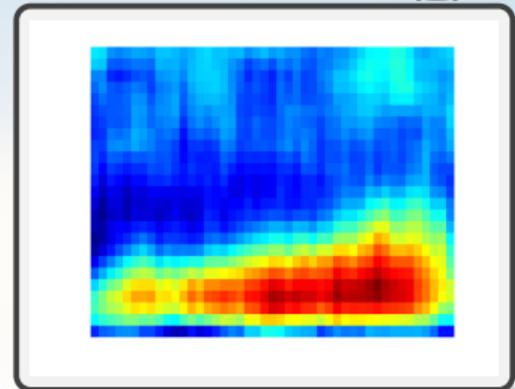
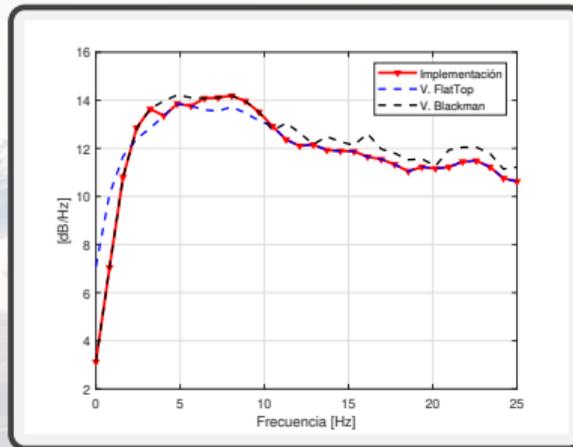
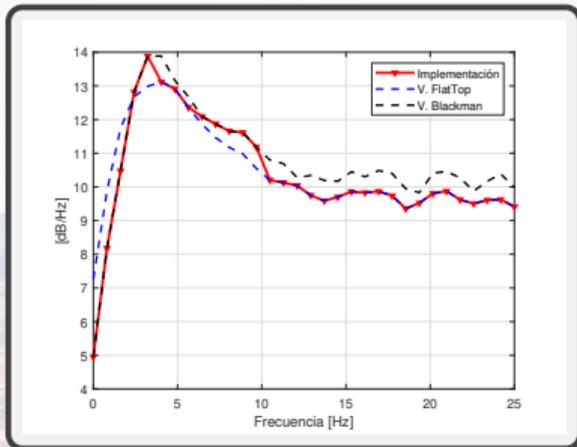
Evento	V. Cotopaxi	V. Llaima	Caract.
LP	2,1 – 5,9Hz	1,8 – 4,5Hz	1 – 5Hz
VT	3,5 – 10Hz	4,3 – 9,2Hz	5 – 15Hz
Tremor	-	0,9 – 3,9Hz	2 – 3Hz
Icequake	4,9 – 8Hz	-	1 – 10Hz

Evento	Inicial	Final
LP	2,1Hz	5,9Hz
VT	3,5Hz	10Hz
Híbrido	2,1Hz	7,5Hz
Regional	1,7Hz	8,2Hz
Icequake	4,9Hz	8Hz

Evento	Inicial	Final
LP	1,8Hz	4,5Hz
VT	4,3Hz	9,2Hz
Tremor	0,9Hz	3,9Hz
Tectónico	1,2Hz	6,2Hz

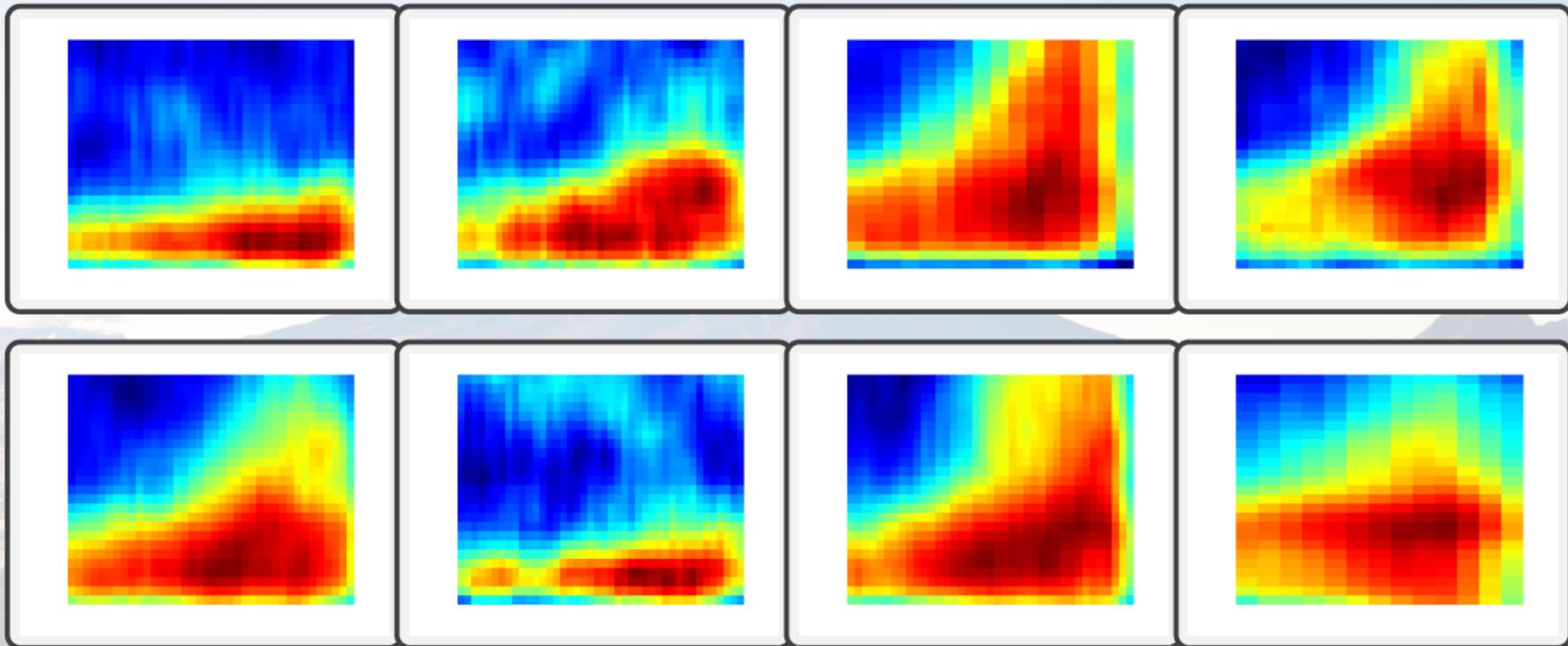


# Espectrograma





## Colección



1 Introducción

2 Preprocesamiento

3 Detección

**4 Clasificación**

- Análisis de Frecuencia
- **Redes Neuronales Convolucionales**

5 Prototipo

6 Conclusiones



# CNN SqueezeNet

**Cotopaxinet**

Analysis date: 07-Jun-2021 22:09:22

**68** layers

**0** warnings

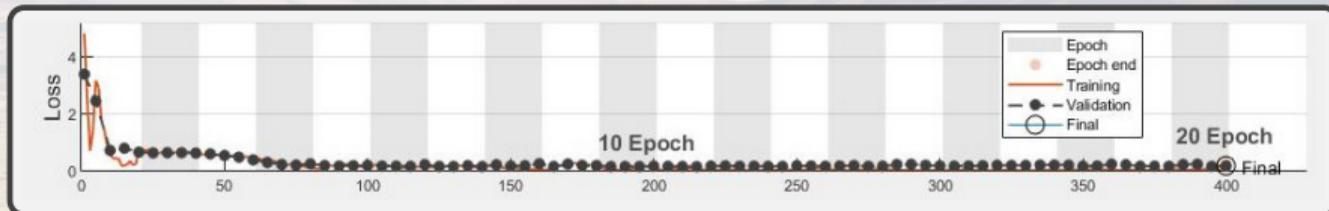
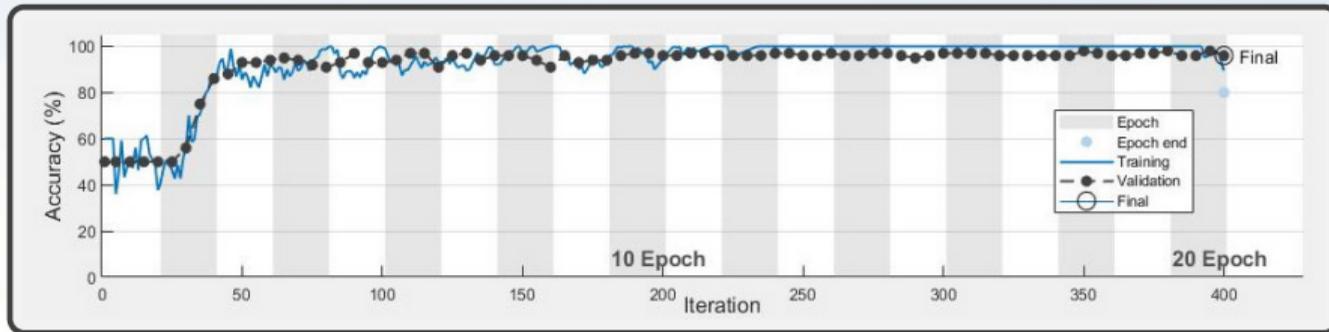
**0** errors

**ANALYSIS RESULT**

Name	Type	Activations	Learnables
52 fire8-reliu_expand1x1 ReLU	ReLU	14×14×256	-
53 fire8-expand3x3 256 3x3x64 convolutions with stride [1 1] and padding [1 1 1 1]	Convolution	14×14×256	Weights 3×3×64×256 Bias 1×1×256
54 fire8-reliu_expand3x3 ReLU	ReLU	14×14×256	-
55 fire8-concat Depth concatenation of 2 inputs	Depth concatenation	14×14×512	-
56 fire9-squeeze1x1 64 1x1x512 convolutions with stride [1 1] and padding [0 0 0 0]	Convolution	14×14×64	Weights 1×1×512×64 Bias 1×1×64
57 fire9-reliu_squeeze1x1 ReLU	ReLU	14×14×64	-
58 fire9-expand1x1 256 1x1x64 convolutions with stride [1 1] and padding [0 0 0 0]	Convolution	14×14×256	Weights 1×1×64×256 Bias 1×1×256
59 fire9-reliu_expand1x1 ReLU	ReLU	14×14×256	-
60 fire9-expand3x3 256 3x3x64 convolutions with stride [1 1] and padding [1 1 1 1]	Convolution	14×14×256	Weights 3×3×64×256 Bias 1×1×256
61 fire9-reliu_expand3x3 ReLU	ReLU	14×14×256	-
62 fire9-concat Depth concatenation of 2 inputs	Depth concatenation	14×14×512	-
63 drop9 50% dropout	Dropout	14×14×512	-
64 NuevaConv10 2 1x1x512 convolutions with stride [1 1] and padding [0 0 0 0]	Convolution	14×14×2	Weights 1×1×512×2 Bias 1×1×2
65 relu_conv10 ReLU	ReLU	14×14×2	-
66 pool10 Global average pooling	Global Average Po...	1×1×2	-
67 prob softmax	Softmax	1×1×2	-
68 Cotopaxi_ClassLayer crossentropytx with classes 'LP' and 'VT'	Classification Output	-	-



# Entrenamiento SqueezeNet





# Matriz de Confusión

Matriz de confusión balanceado



Matriz de confusión No balanceado



Matriz de confusión No balanceado (Prueba Balanceada)





# Métricas CNN Clasificación

Parámetros	Balanceado	No Balanceado	No Balanceado (Conj. prueba Bal.)
Exactitud	93,8 %	97,5 %	97,5 %
Precisión	90,70 %	96,43 %	100,0 %
Sensibilidad	97,50 %	100,0 %	95,00 %
Especificidad	90,00 %	92,50 %	100,0 %
BER	0,0625	0,0375	0,0250

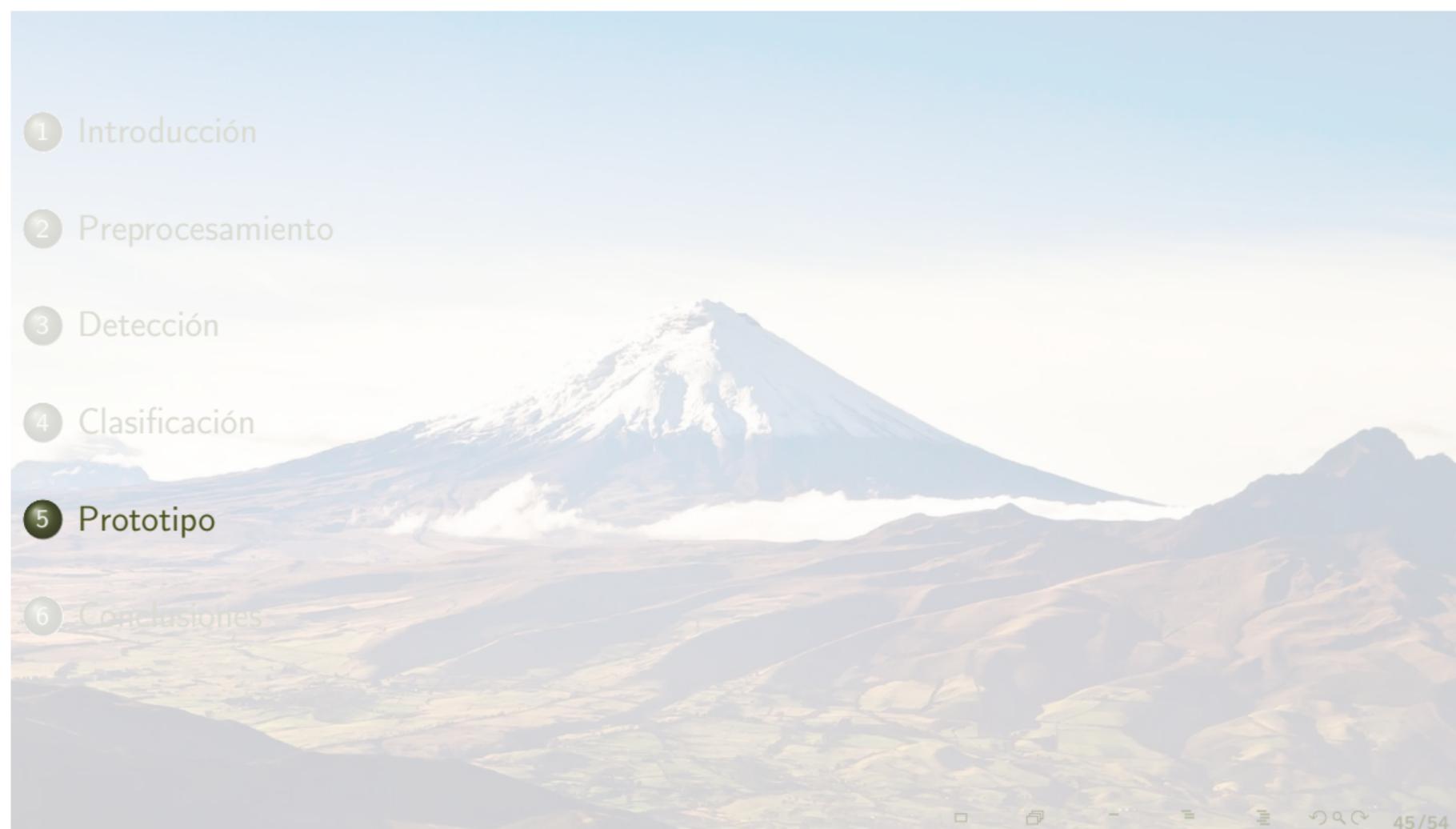


# Prueba 4 etiquetas

**SQUEEZENETNET**

Output Class	LP	TC	TR	VT	
LP	503 35.0%	2 0.1%	2 0.1%	11 0.8%	97.1% 2.9%
TC	7 0.5%	576 40.1%	7 0.5%	4 0.3%	97.0% 3.0%
TR	6 0.4%	4 0.3%	187 13.0%	0 0.0%	94.9% 5.1%
VT	8 0.6%	13 0.9%	0 0.0%	107 7.4%	83.6% 16.4%
	96.0% 4.0%	96.8% 3.2%	95.4% 4.6%	87.7% 12.3%	95.5% 4.5%
	LP	TC	TR	VT	

**Target Class**

- 
- 1 Introducción
  - 2 Preprocesamiento
  - 3 Detección
  - 4 Clasificación
  - 5 Prototipo**
  - 6 Conclusiones



# Pantalla de Configuración

Rutas

- Configuración
- Señales
- Procesamiento
- Historico
- Acerca de

## Configuración de operación automática.

En configuración... ●



**ESPE**  
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS  
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN DE APLICACIONES MILITARES**  
Universidad de las Fuerzas Armadas  
**ESPE**

**Definir parámetros de archivos a procesar**

Nombre

Rutas

- Ruta Señales
- Ruta Redes Neuronales
- Ruta Operación

Numeración

Inicial

Final

<p>Formato</p> <p><input checked="" type="radio"/> *.mat</p> <p><input type="radio"/> *.seed</p>	<p>Detección Rápida</p> <p><input type="radio"/> Si</p> <p><input checked="" type="radio"/> No</p>
--	--

**Cambio automatico de archivo**

Tiempo [min]

**Seleccione el detector a utilizar**

Detector

- Homomorfo
- C2N

Ventana

**Coordenadas Volcán**

Latitud

Longitud

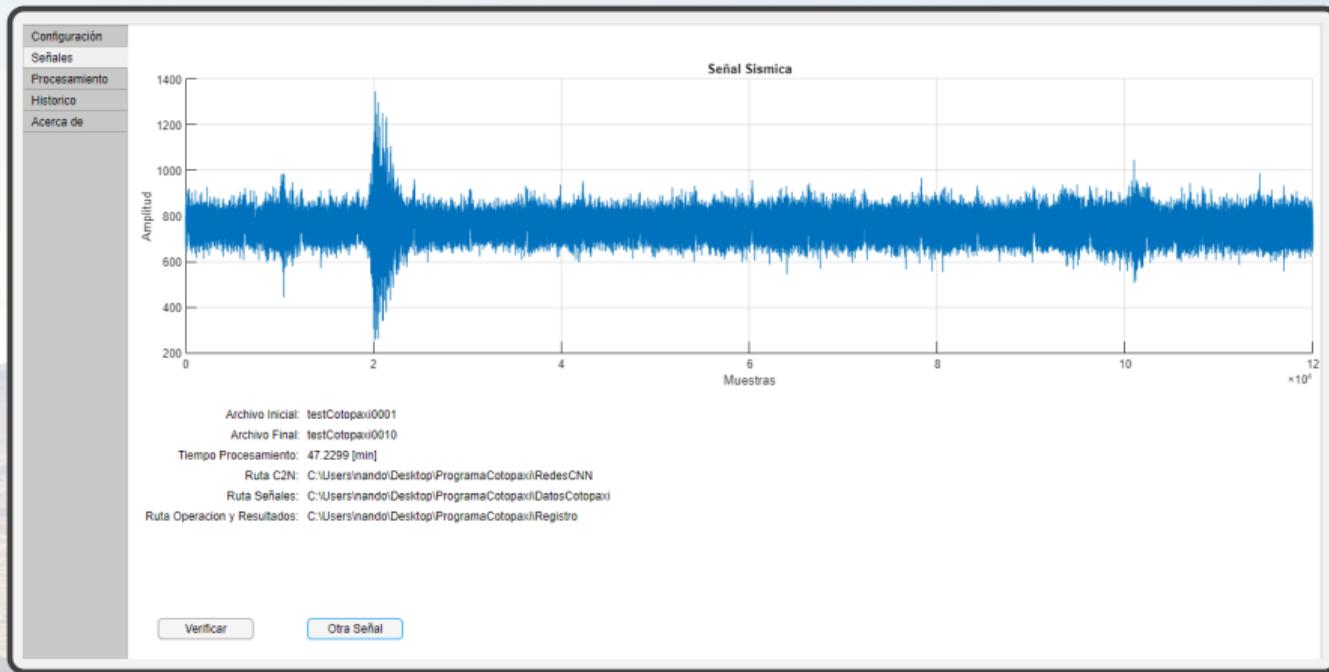
Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE - Fernando Lara - nando9571@gmail.com [Información](#)

Volcán Cotopaxi



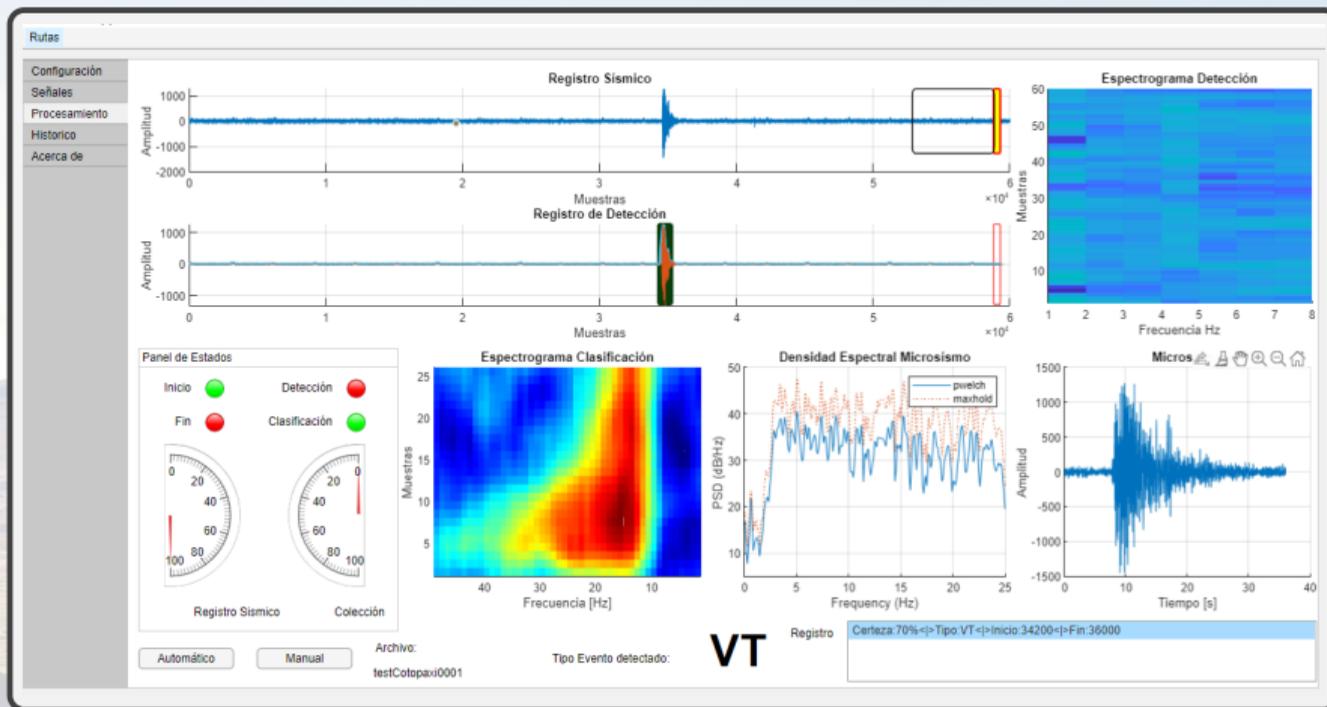


# Pantalla de Verificación



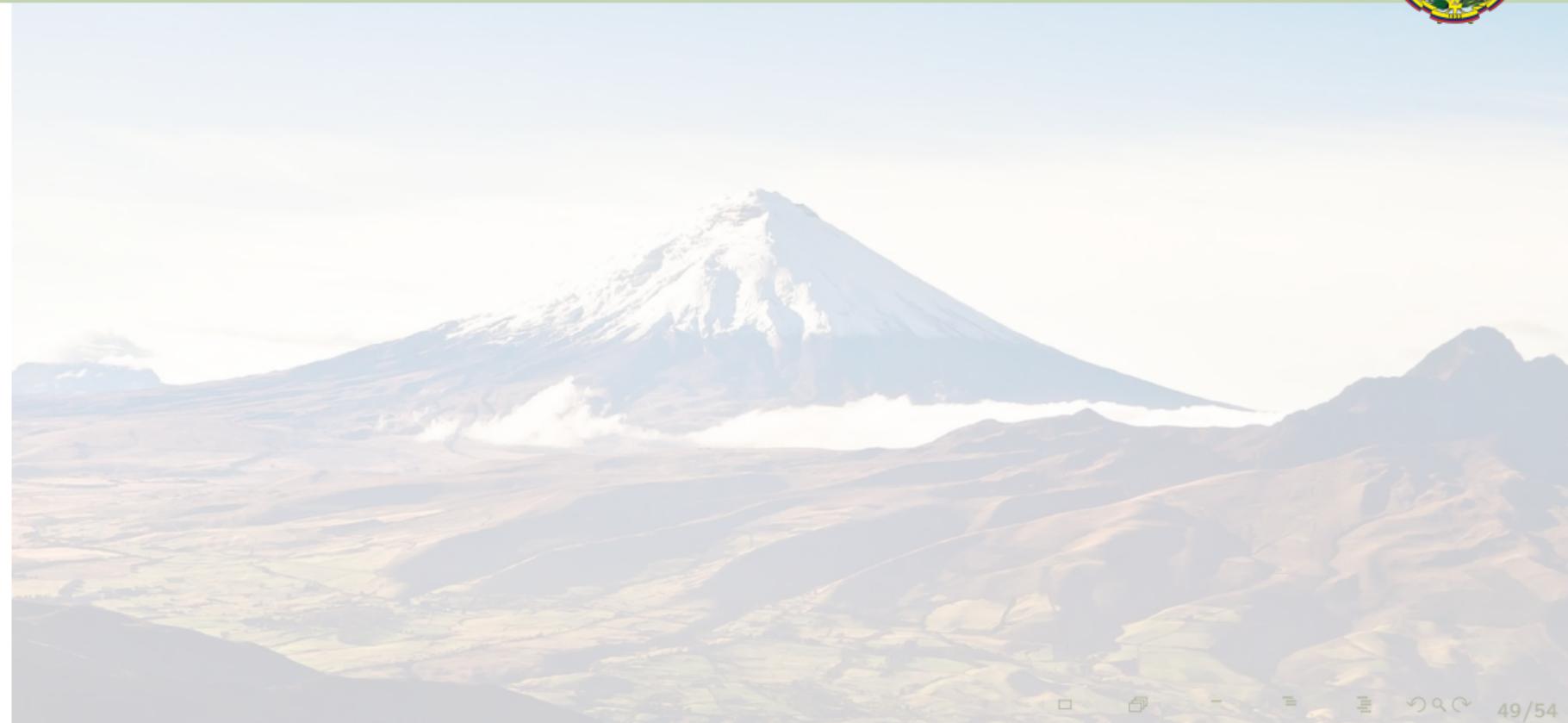


# Pantalla de Procesamiento I





# Pantalla de Procesamiento II





# Pantalla de Registros

Configuración

Señales

Procesamiento

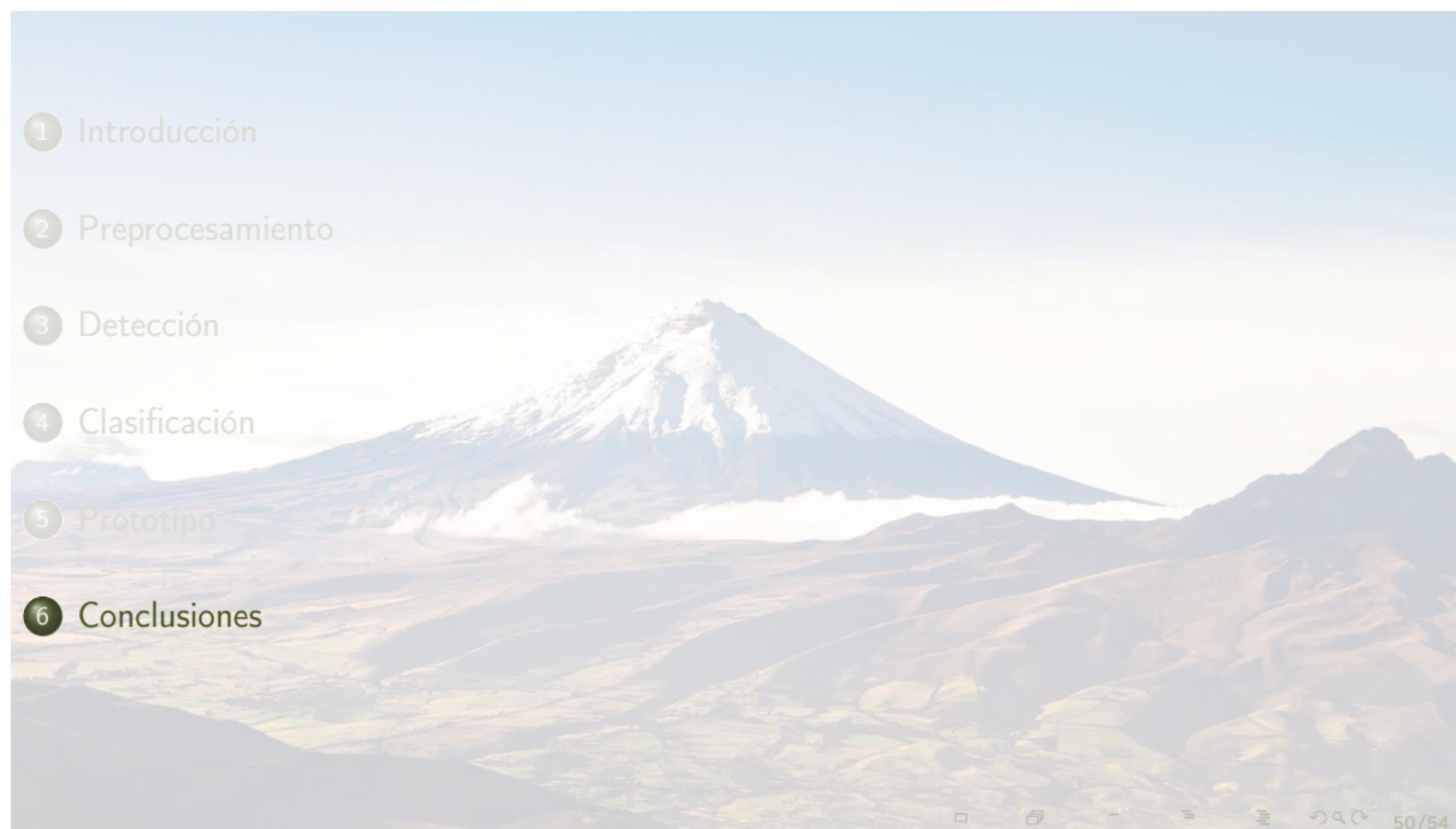
Historico

Acerca de

Datos de microsismos reconocidos

Inicio	Fin	Tipo	Duración	Archivo	Número
0	0	ND	0	NA	0
34200	36000	VT	36	testCotopaxi0001	1
54600	56400	LP	36	testCotopaxi0002	1
9600	11600	LP	40	testCotopaxi0003	1
36200	38300	LP	42	testCotopaxi0004	1
20300	22400	VT	42	testCotopaxi0005	1

Estado ●

- 
- 1 Introducción
  - 2 Preprocesamiento
  - 3 Detección
  - 4 Clasificación
  - 5 Prototipo
  - 6 Conclusiones**



# Conclusiones I

- La deconvolución homomórfica incrementa la SNR con una ganancia de  $10,5dB$  (incremento 77%), mejorando la detección de microsismos y da la posibilidad de descubrir microsismos de baja energía que están ocultos en el ruido.
- La generación de los espectrogramas para detección y clasificación permite el uso de CNN, con métricas aceptadas por el IGEPN.
- Se probó con éxito la capacidad de entrenamiento con transferencia de aprendizaje con un conjunto de entrenamiento de 80 imágenes.
- El sistema de reconocimiento propuesto cumple con las métricas solicitadas por el IGEPN, y presenta métricas superiores a las del estado del arte.



## Conclusiones II

- El detector **MarGra** propuesto basado en una modificación del clásico STA/LTA presenta una exactitud de 99,31 % y un BER de 0,01179, lo cual, se encuentra dentro de los rangos exigidos por el IGEPN.
- El detector C2N presenta una exactitud de 88,20 % cuando se generan los espectrogramas con  $r[n]$ , y 91,20 % cuando se usa  $\hat{s}[n]$ , presentando una mejora de 3,2 % al utilizar la deconvolución homomórfica. Además, al reducir el tamaño de ventana a 5s y utilizar solapamiento se incrementa la probabilidad de detección de microsismos de 91,20 % a 99 %.



## Conclusiones III

- El proceso de entrenamiento de las CNN con un conjunto de datos no balanceado, tiene una mejora en las métricas evaluadas, teniendo un incremento de 3,7 % en la exactitud
- Las CNN tienen un alto desempeño para clasificar eventos LP, cometiendo el mayor número de errores al etiquetar eventos VT como LP, esto se ve reflejado con la métrica de precisión (90,70 %, 96,43 % y 100,0 %).
- El sistema es robusto para clasificar múltiples etiquetas, si se mantiene el número mínimo de eventos para aplicar la técnica de transferencia de aprendizaje, en el caso probado al incrementar a 4 etiquetas (LP, TC, TR y VT) se tuvo una reducción de apenas el 2 %, frente al sistema de dos etiquetas presentado (LP - VT).



# Contribuciones I



F. Lara, R. Lara-Cueva, J. Larco, E. Carrera y R. León, "A deep learning approach for automatic recognition of seismo-volcanic events at the Cotopaxi volcano," *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 409, pág. 107-142, 2021, ISSN: 0377-0273. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2020.107142>. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377027320305783>.



F. Lara, R. Leon, R. Lara-Cueva, A. Tinoco y M. Ruiz, "Detection of volcanic microearthquakes based on homomorphic deconvolution and STA/LTA (En Revisión)," *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 2021, ISSN: 0377-0273.



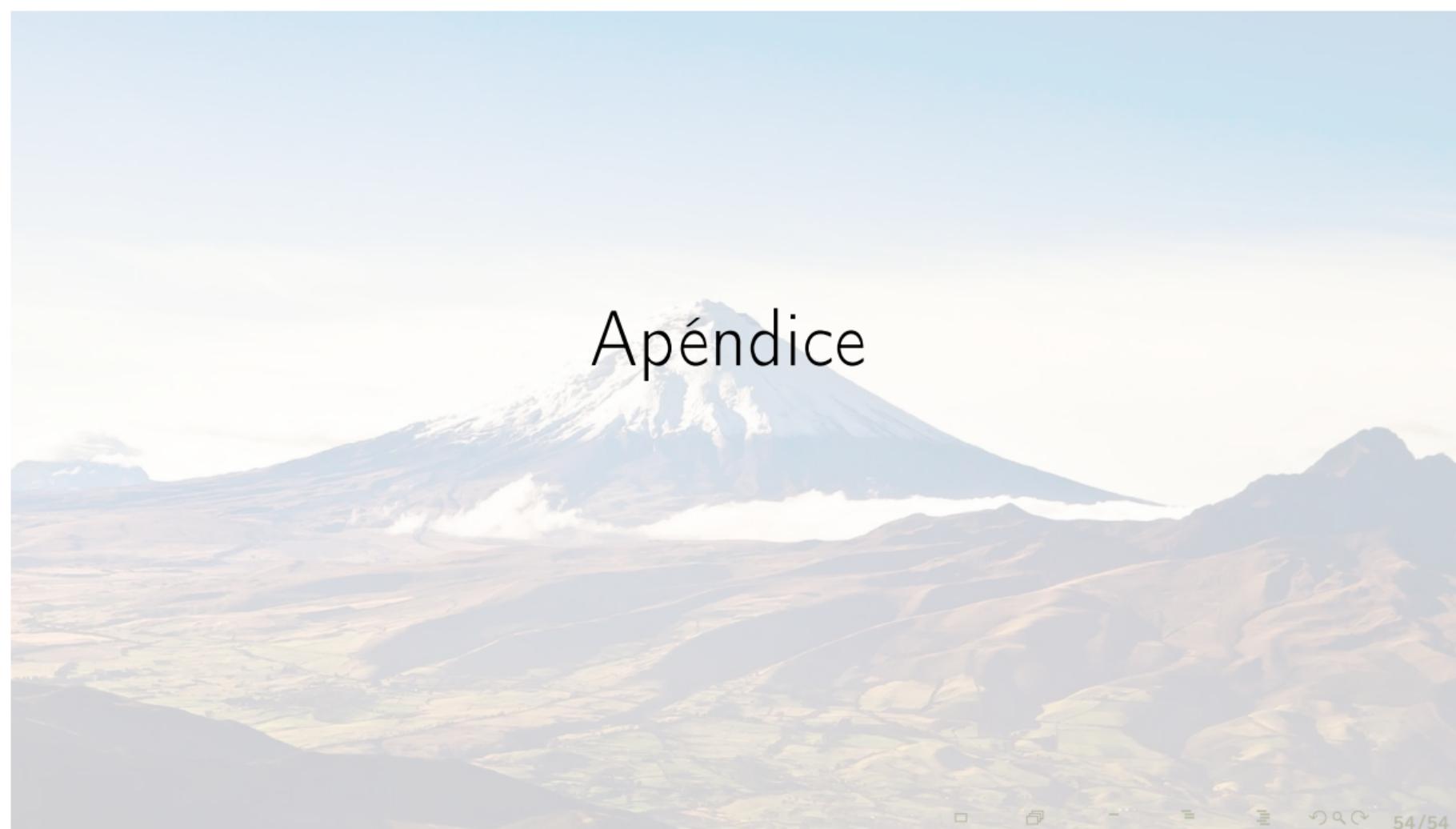
F. Lara, R. León, R. Lara-Cueva, A. Tinoco y M. Ruiz, "A brief frequency analysis of various types of volcanic microearthquakes (En Revisión)," *2021 IEEE CHILEAN Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies (CHILECON)*, 2021.



## Recomendaciones

- Al mejorar la SNR se tiene un mayor número de eventos de baja energía, por lo que, es importante utilizar información de varias estaciones para garantizar que sean sismos de origen volcánico.
- Analizar las componentes de frecuencia de las bases de datos disponibles de distintos volcanes para extrapolar la metodología de clasificación de micro eventos presentada en este trabajo.
- Realizar pruebas utilizando el proceso de deconvolución predictiva y comparar el posible incremento de SNR, con la propuesta de deconvolución homomórfica.
- Evaluar el desempeño de la transferencia de aprendizaje, transfiriendo el conocimiento de una red entrenada para un volcán a otro, con lo que se podría incrementar los conjuntos de datos al combinar señales de varios volcanes para el entrenamiento.

# Apéndice





# Convolución

- La convolución se define:

$$c[m, n] = x[m, n] \otimes w[t, j] = \sum_n \sum_m x[m, n] w[t - m, j - n]$$



# Pesos Sinápticos

$$(\omega^i)^{t+1} = (\omega^i)^t - \eta \frac{\partial z}{\partial (\omega^i)^t}$$



# Deconvolución Homomórfica

$$R[k] = DFT_N[r[n]] = \sum_{n=0}^{N-1} r[n] W_N^{kn}$$

$$R[k, m] = \sum_{n=mN}^{(m+1)N-1} r[n] W_N^{k(n-mN)}$$

$$L[k, m] = \ln(R[k, m])$$

$$l[n, m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} L[k, m] W_N^{-kn}$$

$$A = [l_1^T[j], l_2^T[j], \dots, l_m^T[j]]$$

$$L'[k, m] = \sum_{n=0}^{N-1} l'[n, m] W_N^{kn}$$

$$\hat{S}[k, m] = \exp(L'[k, m])$$

$$\hat{s}[n, m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{S}[k, m] W_N^{-kn}$$



## Estimación SNR

$$x_s = \begin{cases} x_r + x_e, & H_1 \\ x_r, & H_0 \end{cases}$$

$P_e = E[x_e^2]$  y  $P_r = E[x_r^2]$  \*se tiene media 0

$$P_e \approx E[(x_r + x_e)^2] - E[x_r^2]$$

$$SNR \approx \frac{P_e}{P_r}$$

$$SNR_{dB} \approx 10 \times \log_{10} \left( \frac{P_e}{P_r} \right)$$



# Periodograma de Welch

$$x^{(p)}[n] = w[n]x[n + pS]$$

$$X^{(p)}(f) = T \sum_{n=0}^{D-1} x^{(p)}[n] \exp(-j2\pi fnT)$$

$$P_{xx}^{(p)}(f) = \frac{1}{E_w} \frac{1}{D \times T} \left| X^{(p)}(f) \right|^2$$

$$P_W(f) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} P_{xx}^{(p)}(f)$$



# Funciones de $g(x)$

$$g(r[n]) = |r[n]|$$

$$g(r[n]) = r^2[n]$$

$$g(r[n]) = \sqrt{r^2[n] + h(r[n])^2}$$



# Espectrograma

$$\bar{x}_i = [x_{i,1}^T, x_{i,2}^T, \dots, x_{i,j}^T]^T$$

$$S_{p,j} = g_S(x_{i,j})$$

$$\bar{S}_p = [S_{p,1}^T, S_{p,2}^T, \dots, S_{p,j}^T]^T$$

$$X_p\{k\} = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$|X_p\{k\}| = \sqrt{\Re\{X_p\{k\}\}^2 + \Im\{X_p\{k\}\}^2}$$

$$S_w = \ln |X_p\{k\}|$$