

ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO

DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y
ELECTRÓNICA

CARRERA DE INGENIERÍA EN
ELECTRÓNICA,
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

PROYECTO DE GRADO PARA LA
OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERÍA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE
CONTROLADORES CLÁSICOS Y EN EL
ESPACIO DE ESTADOS PARA EL ÁNGULO
DE ELEVACIÓN DEL SISTEMA
AERODINÁMICO TRAS

JAVIER ISMAEL CHICAIZA MONTAGUANO

SANGOLQUÍ – ECUADOR

2011

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente proyecto de grado **“Diseño e Implementación de Controladores Clásicos y en el Espacio de Estados para el Ángulo de Elevación del Sistema Aerodinámico TRAS”**, fue desarrollado en su totalidad por el señor Javier Ismael Chicaiza Montaguano, bajo nuestra dirección.

Atentamente,

Ing. Víctor Proaño

Director

Ing. Edwin Aguilar

Codirector

RESUMEN

La ESPE ha hecho la adquisición de varios sistemas mecatrónicos para el diseño de sistemas de control en tiempo real que se encuentran en el laboratorio de servomecanismos de los cuales el sistema aerodinámico TRAS es uno de ellos. Este proyecto parte del modelo no lineal matemático que se encuentra en el manual de usuario de dicho sistema y presenta un desarrollo completo de la obtención del modelo lineal matemático para el ángulo de elevación del sistema aerodinámico TRAS. Se halla la función de transferencia y se obtiene las ecuaciones de estados que describen el sistema mediante matrices de estado. Además se diseñan de manera sencilla y clara controladores clásicos como: compensadores en adelanto, atraso, atraso adelanto y un controlador PID realizados por el método de respuesta en frecuencia. También se realiza el diseño de un controlador con realimentación completa de estados y un controlador con estimación de estados. En cada controlador se explica paso a paso el proceso de diseño que incluye simulación así como su implementación en tiempo real. El trabajo constituye un estudio del sistema aerodinámico TRAS y una determinación de las posibilidades y limitaciones del sistema en cada uno de los diseños implementados y simulados.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar a Jehová Dios por llenar mi vida de bendiciones y alegrías, también por enseñarme a través de su organización el camino en que debo andar en la vida.

Que este mensaje de gratitud y amor llegue a mis padres Jorge y Ángela que con abnegación y sacrificio supieron hacer posible la culminación de esta etapa estudiantil. Gracias papá y mamá por darme una carrera para mi futuro en este sistema de cosas, también por el ánimo y apoyo que me han dado a pesar de lo difícil que fue llegar hasta aquí y de que alguna vez quise desistir de hacerlo, por todo esto les agradezco de todo corazón que estén conmigo a mi lado.

Agradezco a mi hermano Christian por la compañía y el apoyo me brindaste. Sé que cuento contigo siempre.

A mis profesores, quienes fueron los que labraron el camino y supieron darme un porvenir.

A mis compañeros y compañeras de clase por el apoyo y motivación que de ellos he recibido.

DEDICATORIA

Dedico la presente tesis con cariño a mis padres Jorge y Ángela quienes me dieron la vida y han estado a mi lado en todo momento. A mí querido hermano Christian por apoyarme. Quiero compartir con ellos la alegría de haber culminado con éxito mis estudios.

A mis abuelitos, familia, amigos y hermanos que han estado pendientes de cómo estoy.

A mis profesores y para todos los que me conocen.

PRÓLOGO

La ESPE ha realizado la adquisición del sistema aerodinámico TRAS cuyo comportamiento es similar al de un helicóptero, es un sistema MIMO no lineal de grado superior con acoplamientos significativos que es controlado por medio de un PC y está listo para experimentar, cuya implementación se realiza en tiempo real a través de Simulink de Matlab. El modelo es no lineal lo cual representa una dificultad para aplicar los conceptos de control clásico que requieren función de transferencia.

El Departamento de Eléctrica y Electrónica tiene como una de sus tareas el desarrollo de investigación. La presente Tesis se enmarca dentro de la línea de investigación de Automatización Industrial específicamente en el campo de control clásico y la teoría de control en el espacio de estados ya que para realizar un diseño de un sistema de control es necesario partir del modelo no lineal matemático de la planta que se encuentra en el manual de usuario luego, se analiza por completo la obtención del modelo lineal matemático para el ángulo de elevación del sistema TRAS, tanto para hallar la función de transferencia como la obtención de las ecuaciones de estado que describen el sistema mediante matrices de estado que relacionan la primera derivada de cada estado con los estados y las entradas del sistema. Se realizó de manera clara el proceso completo de diseño de controladores clásicos, compensador en adelanto, atraso, compensador atraso adelante, y un controlador PID. Luego se diseñó un compensador con realimentación completa de estados y finalmente un compensador con estimación de estados. Con estos diseños se procedió a realizar la simulación de los sistemas de control en MATLAB y se implementó los controladores en el sistema aerodinámico TRAS, registrando los resultados obtenidos.

El diseño de los controladores clásicos se realiza ajustado a la temática de la asignatura de sistemas de control, esto es aplicando los métodos de respuesta en frecuencia. De manera similar con los controladores en espacio de estados que se ajusta a la temática de diseño en espacio de estados. También se determinó las posibilidades y limitaciones de cada uno de los diseños implementados y simulados en el sistema aerodinámico TRAS.

Este trabajo, permite la mejor difusión y uso de las herramientas informáticas para el diseño de sistemas de control. Además es un documento de fácil acceso para el estudio de la temática de controladores clásicos y en el espacio de estados aplicados a una planta

tangible como es el sistema aerodinámico TRAS, así podrá ser utilizado como un texto guía para la realización de prácticas en el laboratorio de servomecanismos.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN	11
1.1 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA AERODINÁMICO TRAS	11
1.1.1 Ventana de control TRAS	14

CAPÍTULO II

MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA AERODINÁMICO TRAS	18
2.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA EL CONTROL DEL ÁNGULO DE ELEVACIÓN DEL SISTEMA AERODINÁMICO TRAS	18
2.1.1 Modelo y parámetros.....	18
2.1.2 Modelo no lineal matemático.....	20
2.1.3 Parámetros físicos	24
2.1.4 Características de empuje del Rotor Principal	25
2.1.5 Aproximación de la fuerza y la velocidad rotacional del rotor principal	26
2.1.6 Procedimiento de linealización	28
2.1.7 Obtención del modelo matemático a partir del diagrama de simulación del TRAS	30
2.2 MODELO EN ESPACIO DE ESTADOS	39

CAPÍTULO III

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADORES	40
3.1 CONTROLADOR EN ADELANTO.....	40
3.1.1 Compensador en Adelanto de fase mediante la repuesta en frecuencia.....	40
3.1.2 Procedimiento para el diseño de un compensador en adelanto de fase.....	42
3.1.3 Simulación del compensador en adelanto de fase	47
3.1.4 Doble compensador en adelanto de fase	48
3.1.5 Diseño del compensador doble en adelanto de fase	49
3.1.6 Simulación del compensador doble en adelanto de fase	53
3.2 CONTROLADOR EN ATRASO	55
3.2.1 Compensador en atraso de fase mediante la respuesta en frecuencia	55
3.2.2 Procedimiento para el diseño de un compensador en atraso de fase.....	57
3.2.3 Simulación del compensador en atraso de fase	62
3.2.4 Doble compensador en atraso de fase	64
3.2.5 Diseño del compensador doble en atraso de fase	64

3.2.6 Simulación del compensador doble en atraso de fase 68

3.3 CONTROLADOR ATRASO ADELANTO70

3.3.1 Compensador en atraso adelanto mediante la respuesta en frecuencia 70

3.3.2 Procedimiento para el diseño de un compensador atraso adelanto 71

3.2.6 Simulación del compensador atraso adelanto 78

3.2.7 Diseño de un compensador atraso adelanto con un compensador en atraso y un doble compensador en adelanto 80

3.2.8 Simulación del compensador atraso adelanto con un compensador en atraso y un doble compensador en adelanto 87

3.4 CONTROLADOR PID89

3.4.1 Compensador PID mediante la repuesta en frecuencia 89

3.4.2 Procedimiento para el diseño de un compensador PID 92

3.4.3 Simulación del compensador PID 95

3.5 CONTROLADOR CON REALIMENTACIÓN COMPLETA DE ESTADOS LQR96

3.5.1 Lugar geométrico de las raíces, ley de control y entrada de referencia para la realimentación completa de estados..... 96

3.5.2 Simulación y procedimiento de diseño de un controlador con realimentación completa de estados LQR..... 99

3.6 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN DE ESTADOS104

3.6.1 Diseño del estimador de orden completo 104

3.6.2 Simulación y procedimiento de diseño de un controlador con estimador de orden completo de estados 106

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS113

4.1 ASPECTOS PRELIMINARES PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS CONTROLADORES EN EL TRAS.....113

4.2 CONTROLADOR EN ADELANTO.....116

4.2.1 Doble compensador en adelanto de fase 117

4.3 CONTROLADOR EN ATRASO119

4.3.1 Doble compensador en atraso de fase 120

4.4 CONTROLADOR ATRASO ADELANTO122

4.4.1 Compensador atraso adelanto con un compensador en atraso y un doble compensador en adelanto 123

4.5 CONTROLADOR PID125

4.6 CONTROLADOR CON REALIMENTACIÓN COMPLETA DE ESTADOS LQR127

4.7 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN DE ESTADOS129

CAPÍTULO V

CAPÍTULO V	132
5.1 CONCLUSIONES	132
5.2 RECOMENDACIONES	133
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	135
ANEXOS.....	¡Error! Marcador no definido.
ÍNDICE DE FIGURAS.....	¡Error! Marcador no definido.
ÍNDICE DE TABLA.....	¡Error! Marcador no definido.
GLOSARIO.....	¡Error! Marcador no definido.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA AERODINÁMICO TRAS

El sistema aerodinámico de dos rotores TRAS (*Two Rotor Aero-dynamical System*) es un laboratorio para experimentos de control. En ciertos aspectos este comportamiento se asemeja al de un helicóptero. Desde el punto de vista del control ejemplifica un sistema MIMO no lineal de grado superior con acoplamientos significativos. El sistema es controlado desde una PC. Por tanto es entregado con un hardware y software que puede ser fácilmente instalado y montado en un laboratorio. La unidad mecánica viene con una fuente de poder e interface al PC con una tarjeta de adquisición RT-DAC/PCI I/O configurada en la tecnología Xilinx. El software opera en tiempo real bajo MS Windows XP con MATLAB 7 (R14), utiliza la herramienta RTW (*Real Time Workshop*) de MATLAB.

Los experimentos de control son programados y ejecutados en tiempo real en el ambiente Simulink de MATLAB. Por lo que es muy recomendado estar familiarizado con la herramienta RTW. El usuario tiene que saber cómo utilizar los modelos adjuntos y cómo crear sus propios modelos.

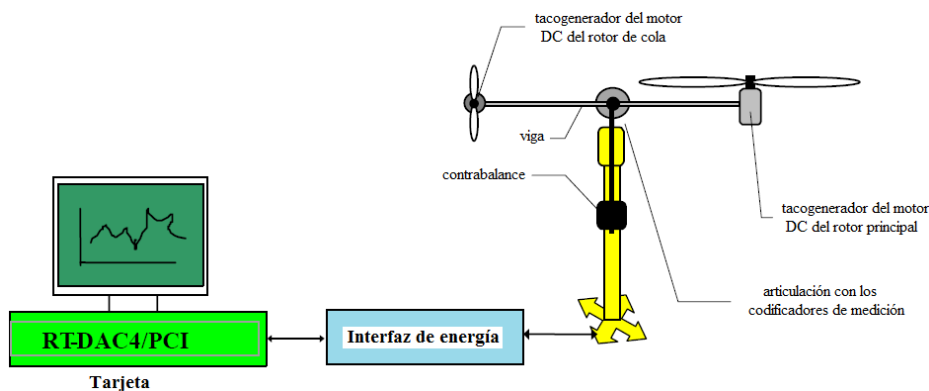


Figura. 1. 1 Configuración de laboratorio: helicóptero como el sistema

Un diagrama esquemático de la configuración del laboratorio se muestra en la figura 1.1. El TRAS consta de una viga articulada en la base de tal manera que puede girar libremente al mismo tiempo en el plano vertical y horizontal. En ambos extremos de la viga hay dos rotores, el principal y el de la cola, estos son impulsados por motores de corriente continua. Un brazo de contrapeso con un peso en su extremo se fija a la viga en el pivote. El estado de la viga es descrito por cuatro variables de proceso: ángulos

horizontales y verticales medidos por los sensores instalados en la posición de pivote, y dos correspondientes a velocidades angulares. Las dos últimas variables de estado son las velocidades angulares de los rotores, medidos por taco generadores acoplados al los motores de corriente continua. La descripción de los sensores usados en este proyecto para el control del ángulo de elevación se muestra en la siguiente tabla.

Tabla. 1. 1 Descripción de los sensores del TRAS

	Encoder	Tacogenerador
Descripción	Encoder ópticos: Un haz que la luz emitida por una fuente LED pasa a través de de un disco perforado formando dos anillos. Los orificios tienen una diferencia de tratamiento de la fase, por lo que las salidas eléctricas de los receptores son ondas rectangulares con una diferencia de fase. El signo de la diferencia de fase permite determinar la dirección de la rotación.	Es un dispositivo que se utiliza para medir la velocidad de un eje y convertir en un voltaje de modo que se puede medir. Además es un dispositivo electromecánico capaz de producir energía eléctrica a partir de energía mecánica, por el giro de un eje.
Tipo de señal	-0.5 a Vcc Resolución de 4096 cuentas por revolución	0 a 10 Voltios
Alimentación eléctrica	5 Vcc, 5 pines (canal A,B, Vcc, Tierra, sentido de rotación)	2 hilos, salida Vcc y GND

En un helicóptero la fuerza aerodinámica es controlada por cambios en el ángulo de ataque de los rotores. El laboratorio establecido en la figura 1.1 es construido de manera que se fija el ángulo de ataque. La fuerza aerodinámica se controla variando la velocidad de los rotores. Por lo tanto, las entradas de control son las tensiones de alimentación de los motores de corriente continua. Un cambio en los resultados de valor de la tensión es un cambio de la velocidad de rotación de la hélice, lo que resulta en un cambio de la posición correspondiente de la viga. Un acoplamiento cruzado importante es observado entre las acciones de los rotores: cada uno de los rotores influye en sus ángulos de posición. El diseño de la estabilización de los controladores para dicho sistema se basa en el

desacoplamiento. Para un sistema desacoplado una entrada de control independiente puede ser aplicado para cada coordenada del sistema.

Una computadora puede usarse para el control de tiempo real del sistema TRAS. El equipo tiene una tarjeta de interface (RT – DAC /PCI). La figura 1.2 muestra los detalles de la configuración del hardware de control para el sistema aerodinámico TRAS.

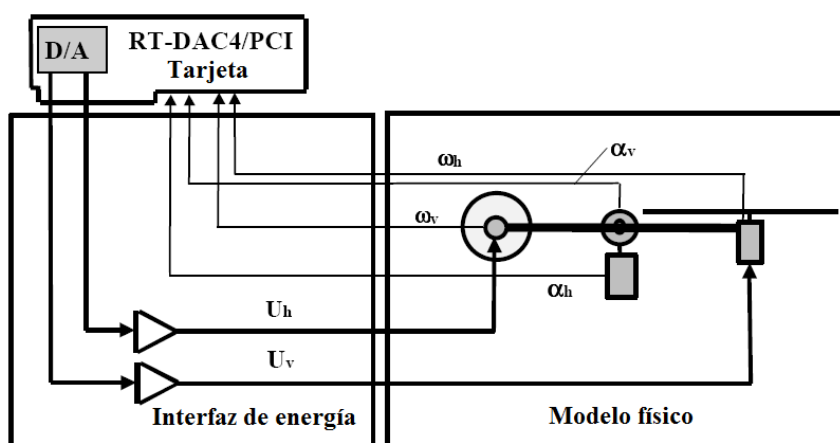


Figura. 1. 2 Configuración del hardware del TRAS

El software de control para el sistema TRAS está incluido en *TRAS toolbox*. Esta caja de herramientas usa el RTWT y la caja de herramientas RTW desde MATLAB.

TRAS toolbox es una colección de funciones M, modelos MDL y código C que se desarrolla en el entorno de MATLAB para resolver problemas y diseño de control del sistema aerodinámico TRAS. El software integrado suministra todos los parámetros para el desarrollo de sistemas de control como: identificación del proceso en línea, modelado del sistema, diseño, simulación e implementación en tiempo real de algoritmos de control.

El hardware consiste de la unidad mecánica TRAS, interfaz de poder y cables de conexión eléctricos para la instalación del TRAS, una tarjeta RT-DAC/PCI I/O que viene equipado con un FPGA dedicado al diseño lógico, y una computadora personal.

El software para el desarrollo del proyecto y la construcción automática de los programas en tiempo real consiste de un sistema operativo Microsoft Windows XP y MATLAB versión 7 con Simulink. El *TRAS toolbox* incluye los controladores especializados para el sistema TRAS. Estos controladores son los responsables de la comunicación entre MATLAB y las mediciones RT-DAC/PCI y la tarjeta de control.

Ventana de control TRAS

El sistema TRAS es de tipo abierto. Esto significa que el usuario puede diseñar y resolver cualquier problema de control TRAS sobre la base del hardware y el software adjunto. También, la ventana de control TRAS presenta un rápido acceso a las funciones básicas del sistema lo que incluye: identificación, controlador, modelo de simulación y ejemplos de aplicación. Para abrir la ventana se digita y acepta el comando “tras” en la pantalla de comandos de Matlab (ver figura 1.3).

La pantalla de control TRAS contiene: herramientas de pruebas, controladores, modelos y aplicaciones de demostración, el usuario tiene un acceso rápido a todas las funciones básicas del sistema de control TRAS desde esta pantalla de control. Dentro del grupo de herramientas tenemos el botón de prueba básica donde se comprueba el ensamblado mecánico y los cables de conexión que estén correctamente instalados, así se rastrea alguna falla que existiera. También existe el botón detección de la tarjeta RT-DAC/PCI, este verifica si esta correctamente instalado la tarjeta. Otros botones son los de reajuste de configuración de ángulo y comprobar ángulos, estos nos sirve para almacenar la posición inicial de la viga en la tarjeta de interface y mover la viga en cualquier dirección observando la medida en la pantalla del computador.

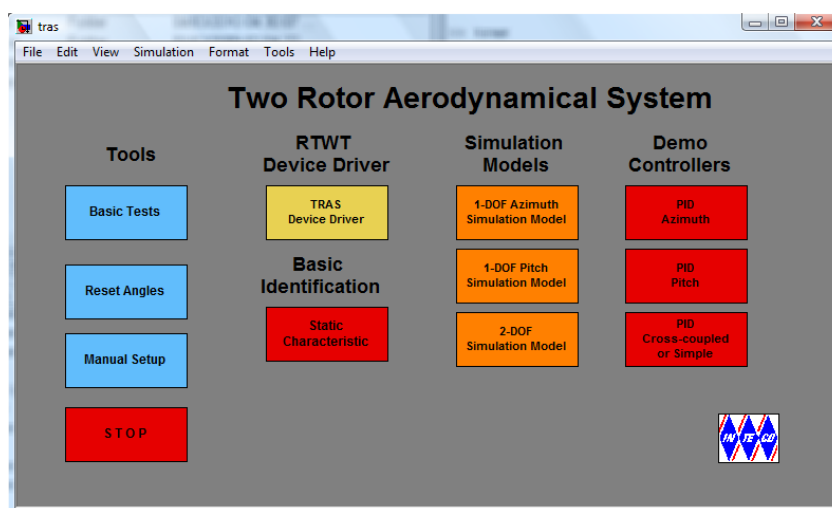


Figura. 1. 3 Ventana de control TRAS

El experimento puede ser detenido en cualquier momento, haciendo doble clic en el botón parada de la ventana de control TRAS. Si desea detener el proceso de visualización, haga clic una vez sobre la barra de herramienta en el botón parada de la ventana de simulación, o puede pulsar el interruptor de emergencia en cualquier momento.

El botón configuración manual de la figura 1.3 de la ventana TRAS, permite el acceso a los parámetros básicos de configuración como: tarjeta, control, pre escalador PWM, velocidad, etc. Los datos medidos del sistema TRAS pasan a la tarjeta RT-DAC/PCI y pueden ser mostrados en pantalla.

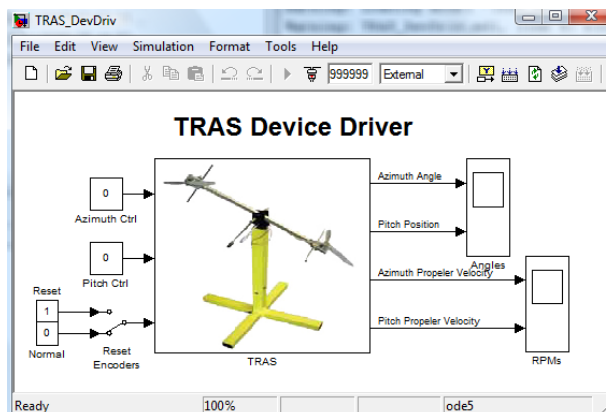


Figura. 1. 4 Controlador de dispositivo RTWT

El control de dispositivo RTWT de la figura 1.4 es un software intermediario para el entorno en tiempo real de Matlab y la tarjeta RT-DAC/PCI, es donde el control y las mediciones son transferidas. Para el diseño de compensadores para el ángulo de elevación copiamos el dispositivo RTWT en una nueva ventana y lo implementamos. Como solo se usa el movimiento del plano vertical, se asegura la parte mecánica del azimut en la posición cero y por software se envía un cero en la entrada de control azimut del bloque RTWT del TRAS. Con esto se aísla el azimut y se controla la posición del pitch del sistema aerodinámico TRAS.

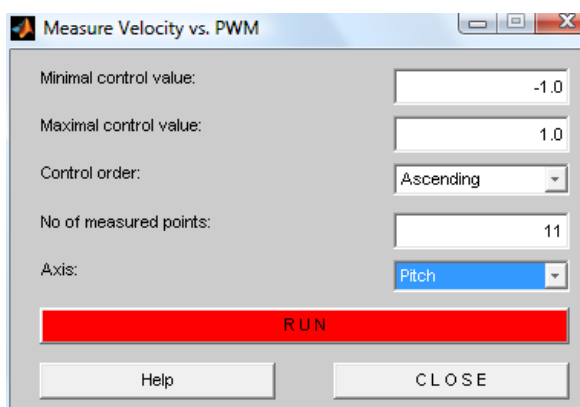


Figura. 1. 5 Recogiendo los puntos de la característica estática del pitch.

La característica de entrada no lineal determina la dependencia de la velocidad de rotación del motor de corriente continua en función del voltaje de entrada (características

de RPM): $\omega_v = H_v(U_v)$. Para medir esta característica, se da doble clic en el botón características estáticas de la ventana de control del TRAS. En esta ventana mostrada en la figura 1.5 se define el control de los valores mínimo y máximo y un número de puntos medidos. El orden de control se puede programar como: ascendente, descendente o inverso. También se puede escoger las características estáticas del pitch o del azimut. Hay que tener en cuenta que la señal de control se normaliza y los cambios en el rango $[-1,+1]$ corresponden al rango de voltaje $[-24,+24]$ de la entrada del motor de corriente continua. Antes de empezar el experimento se escoge el eje del pitch y luego se da clic en el botón rojo de correr. El valor constante del control activa el motor de corriente continua siempre y cuando se consiga un estado estacionario de la velocidad angular. Entonces, la velocidad se mide y el valor del control se cambia al valor constante que viene, y el motor de corriente continua se activa de nuevo. Este paso se repiten hasta el final del rango de control. Simultáneamente, las mediciones son mostradas en una gráfica en pantalla.

Otra característica no lineal es determinada por la dependencia del empuje de la hélice de motor de corriente continua de velocidad de rotación (característica de empuje): $F_v = F_v(\omega_v)$. Las características empuje estático de la hélice se debe medir en el caso de que las hélices fueran cambiadas por un usuario. En este caso, con una balanza electrónica adecuada mide la fuerza creada por los movimientos de rotación de las hélices.

El controlador de dispositivo TRAS cuenta con dos entradas de control, una para el pitch que es el que se usara en este proyecto y la otra para el azimut. La señal de control estará entre -1 y 1. Para el correcto funcionamiento de los programas desarrollados en Simulink es necesario colocar un cero en la entrada de reinicio. La entrada de reinicio trabaja solo cuando se ejecuta el código de tiempo real.

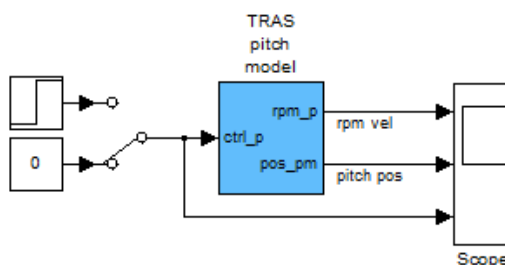


Figura. 1. 6 Modelo de simulación del Pitch

El software del sistema aerodinámico de dos motores tiene tres modelos de simulación. El primero es modelo 1 – DOF (un grado de libertad) para el azimut. Este

modelo simula el comportamiento del sistema en el plano horizontal. Por otro lado el segundo modelo 1 – DOF es para el pitch, que describe el comportamiento en el plano vertical. El modelo de simulación del pitch que se muestra en la figura 1.6 y se va utilizar en muchos diseños de compensadores a lo largo de este proyecto. Y por último tenemos el modelo de simulación completo 2 – DOF que describe movimientos en ambos planos con una interacción entre el eje del pitch y azimut. Estos modelos de simulación son muy prácticos para realizar diversas pruebas de diseños y observar su comportamiento antes de implementarlo con el controlador de dispositivo RTWT, este procedimiento permite corregir errores en el diseño de los compensadores.

CAPÍTULO II

MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA AERODINÁMICO TRAS

2.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA EL CONTROL DEL ÁNGULO DE ELEVACIÓN DEL SISTEMA AERODINÁMICO TRAS

2.1.1 Modelo y parámetros

La figura 2.1 se muestra el sistema aerodinámico que se analiza en el presente proyecto. En ambos extremos de la viga hay dos hélices impulsadas por motores de corriente continua, unida en su base a una articulación. Esta articulación permite girar de forma tal que sus extremos se mueven sobre la superficie esférica. Hay un contrapeso fijo en medio de la viga que determina una posición de equilibrio estable. El sistema es equilibrado de tal manera que, cuando los motores se apagan, el rotor principal de la viga se cae. El control del sistema es la tensión de suministro del motor.

Las señales medidas son: la posición de la viga en el espacio, que es un ángulo de posición y la velocidad angular del rotor principal. Las velocidades angulares de la viga son reconstruidas por software para diferenciar y filtrar las mediciones de la posición de los ángulos de la viga.

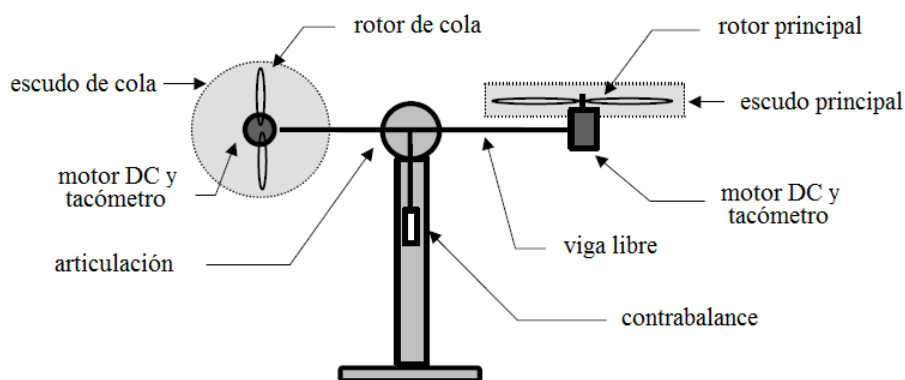


Figura. 2. 1 Modelo aerodinámico del TRAS

Se va a controlar el ángulo de elevación del sistema aerodinámico TRAS por medio de la entrada U_v que manipula corriente continua del motor principal a través de un PWM. La rotación de la hélice genera un momento angular que, de acuerdo a la ley de conservación del momento angular, debe ser compensado por el cuerpo restante de la viga del TRAS. Esto se traduce en la interacción entre la función de transferencia representada por el momento de inercia de la hélice del rotor k_{hv} . Esta interacción influye directamente

en la velocidad de la viga en el plano vertical. La fuerza F_v , multiplicada por la longitud del brazo de l_v es igual al torque que actúan en el brazo.

La siguiente notación es usada en la figura 2.2:

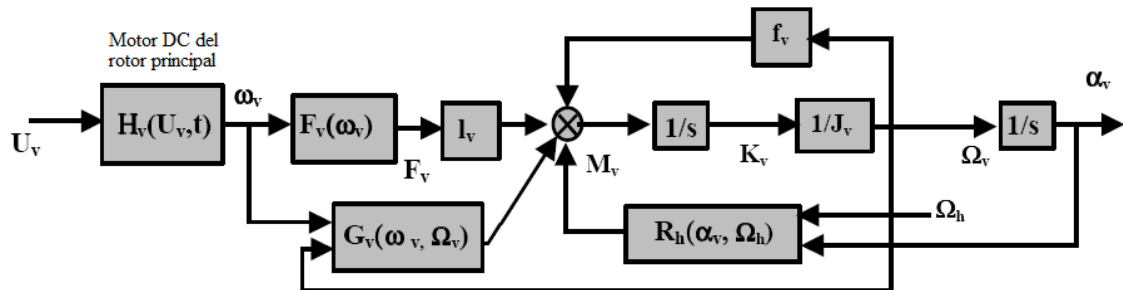


Figura. 2. 2 Diagrama de bloques del ángulo de elevación

α_v es la posición vertical (posición del pitch) de la viga TRAS [rad],

Ω_v es la velocidad angular (velocidad del pitch) de la viga TRAS [rad/s],

U_v entrada de control (dado por el voltaje PWM) del motor vertical,

ω_v es la velocidad rotacional del rotor principal, función no lineal $\omega_v = H_v(U_v, t)$ [rad/s],

F_v es la fuerza aerodinámica del rotor principal, función no lineal $F_v = F_v(\omega_v)$ [N],

l_v brazo efectivo de la fuerza aerodinámica del rotor principal [m],

J_v momento de inercia respecto al eje horizontal [kg m²],

M_v momento de retorno vertical (par de giro vertical) [Nm],

K_v momento angular vertical [Nms],

f_v momento de la fuerza de fricción del eje horizontal [Nm],

R_v es el momento de retorno vertical $R_h = f_{cf} + f_g = R_h(\alpha_v, \Omega_h)$ [Nm],

J_{hv} momento angular vertical del rotor de cola [Nms],

H_v es la ecuación diferencial $\omega_v = H_v(U_v, t)$,

G_v es el torque de amortiguamiento de la aerodinámica del rotor principal $G_v(\omega_v, \Omega_v)$

2.1.2 Modelo no lineal matemático

El modelo matemático se ha desarrollado con algunas suposiciones que lo simplifican. En primer lugar, se supone que la dinámica del subsistema de hélices puede ser descrita por ecuaciones diferenciales de primer orden. Además, se supone que la fricción en el sistema es de tipo viscoso. También se supone que el subsistema aire hélice puede describirse de acuerdo con los postulados de la teoría de flujo.

Los supuestos anteriores nos permiten definir claramente el problema. En primer lugar, considerar la rotación de la viga en el plano vertical, es decir alrededor del eje horizontal. Teniendo en cuenta que los momentos de dirección son producidos por la rotación de la hélice, la rotación de la viga puede ser descrita como el movimiento de un péndulo. De la segunda ley de la dinámica de Newton, obtenemos:

$$M_v = J_v \frac{d^2 \alpha_v}{dt^2}$$

Donde:

M_v es el momento total de fuerzas en el plano vertical,

J_v es la suma de los momentos de inercia con respecto al eje horizontal.

α_v es el ángulo de elevación de la viga.

Entonces:

$$M_v = \sum_{i=1}^6 M_{vi}, \quad J_v = \sum_{i=1}^8 J_{vi}$$

Para determinar los momentos de las fuerzas aplicadas a la viga que la hacen girar alrededor del eje horizontal, se toma en consideración las fuerzas de gravedad del sistema aerodinámico TRAS correspondientes al torque de retorno que determina la posición de equilibrio del sistema (ver figura 2.3).

$$M_{v1} = g \left\{ \left[\left(\frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t - \left(\frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m \right] \cos \alpha_v - \left[\frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right] \sin \alpha_v \right\}$$

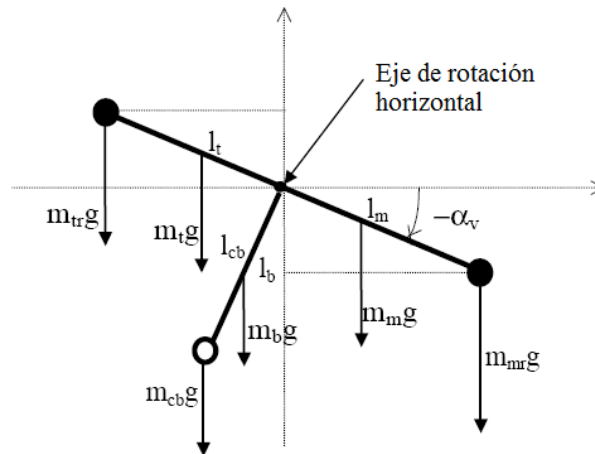


Figura. 2. 3 Las fuerzas de gravedad en TRAS

$$M_{v1} = g[(A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v]$$

Donde:

$$A = \left(\frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t$$

$$B = \left(\frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m$$

$$C = \left[\frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right]$$

Donde:

M_{v1} es el torque de retorno correspondiente a las fuerzas de la gravedad,

m_{mr} es la masa del motor principal DC con rotor principal,

m_m es la masa de la parte principal del brazo,

m_{tr} es la masa del motor con rotor de la cola,

m_t es la masa de la cola del brazo,

m_{cb} es la masa del contrapeso,

m_b es la masa del brazo del contrapeso,

m_{ms} es la masa del escudo principal,

m_{ts} es la masa del escudo de cola,

l_m es la longitud de la parte principal del brazo,

l_t es la longitud de la parte de la cola del brazo,

l_b es la longitud de la viga del contrapeso,

l_{cb} es la distancia entre el contrapeso y la unión,

g es la aceleración gravitacional,

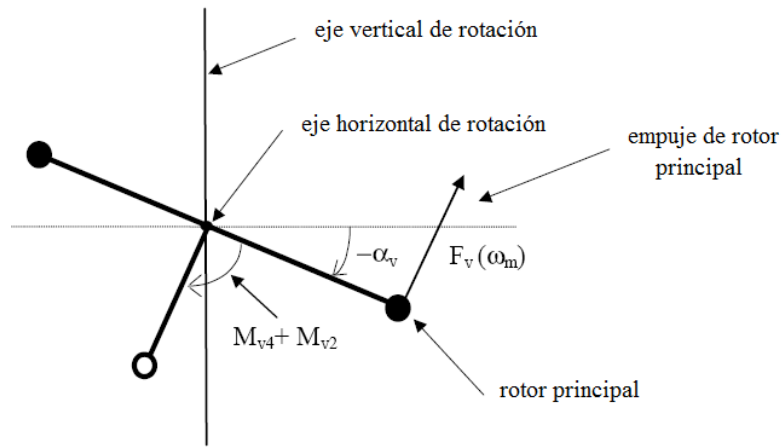


Figura. 2. 4 Momento de fuerza propulsiva y momento de fricción del TRAS

$$M_{v2} = l_m F_v(\omega_v)$$

M_{v2} es el momento de la fuerza de propulsión producida por el rotor principal,

ω_v es la velocidad angular del rotor principal,

$F_v(\omega_v)$ denota la dependencia de la fuerza de propulsión sobre la velocidad angular del rotor.

$$M_{v3} = -\Omega_h^2 \left[\left(\frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m + \left(\frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t + m_{cb} l_{cb} + \frac{m_b}{2} l_b \right] \sin \alpha_v \cos \alpha_v$$

Simplificando la ecuación tiene la siguiente forma:

$$M_{v3} = -\Omega_h^2 (A + B + C) \sin \alpha_v \cos \alpha_v$$

M_{v3} es el momento de las fuerzas centrífugas correspondientes al movimiento del brazo alrededor del eje vertical,

$$M_{v4} = -\Omega_v f_v$$

M_{v4} es el momento de rozamiento en función de la velocidad angular de la viga sobre el eje horizontal.

Donde: $\Omega_v = \frac{d\alpha_v}{dt}$

Ω_v es la velocidad angular alrededor del eje horizontal,

f_v es una constante,

M_{v5} es el momento de cruce a partir de U_h , $M_{v5} = U_h k_{hv}$,

k_{hv} es una constante,

M_{v6} es el torque de amortiguamiento de rotación de la hélice $M_{v6} = -a_1 \Omega_v \text{abs}(\omega_v)$

a_1 es una constante.

Según la figura 2.4 se puede determinar componentes del momento de inercia con respecto al eje horizontal. Nótese que este momento es independiente de la posición de la viga.

$$J_{v1} = m_{mr} l_m^2, \quad J_{v2} = m_m \frac{l_m^2}{3}, \quad J_{v3} = m_{cb} l_{cb}^2$$

$$J_{v4} = m_b \frac{l_b^2}{3}, \quad J_{v5} = m_{tr} l_t^2, \quad J_{v6} = m_t \frac{l_t^2}{3},$$

$$J_{v7} = \frac{m_{ms}}{2} r_{ms}^2 + m_{ms} l_m^2, \quad J_{v8} = m_{ts} r_{ts}^2 + m_{ts} l_t^2,$$

r_{ms} es el radio del escudo principal,

r_{ts} es el radio del escudo de cola.

A partir de la ecuación de momentos total de las fuerzas en el plano vertical se describe el movimiento del pitch como sigue:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\alpha_v}{dt} \right) = \frac{M_v}{J_v}$$

$$\frac{d\Omega_v}{dt} = \frac{l_m F_v(\omega_v) - \Omega_v f_v + g[(A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v] \dots}{J_v}$$

$$\dots \frac{-\frac{1}{2} \Omega_h^2 (A + B + C) \sin 2\alpha_v + U_h k_{hv} - a_1 \Omega_v \text{abs}(\omega_v)}{J_v}$$

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = \Omega_v$$

La ecuación que describe el movimiento del motor es:

$$I_v \frac{d\omega_v}{dt} = U_v - H_v^{-1}(\omega_v)$$

I_v es el momento de inercia del rotor principal.

El modelo anterior de la dinámica del motor de la hélice se obtiene sustituyendo el sistema no lineal por una conexión en serie de un sistema de dinámica lineal y no lineal estático.

2.1.3 Parámetros físicos

Con el objetivo de adquirir los valores de los coeficientes del modelo es necesario realizar algunas mediciones. En primer lugar, las dimensiones geométricas y las masas en movimiento de TRAS deben ser medidos. Los siguientes resultados son tomados del manual de referencia del sistema TRAS.

$$l_t = 0.216 \text{ [m]}$$

$$m_{tr} = 0.154 \text{ [Kg]}$$

$$l_m = 0.202 \text{ [m]}$$

$$m_{mr} = 0.199 \text{ [Kg]}$$

$$l_b = 0.15 \text{ [m]}$$

$$m_{cb} = 0.024 \text{ [Kg]}$$

$$l_{cb} = 0.15 \text{ [m]}$$

$$m_t = 0.031 \text{ [Kg]}$$

$$r_{ms} = 0.145 \text{ [m]}$$

$$m_{mt} = 0.029 \text{ [Kg]}$$

$$r_{ts} = 0.10 \text{ [m]}$$

$$m_b = 0.011 \text{ [Kg]}$$

$$m_{ts} = 0.061 \text{ [Kg]}$$

$$m_{ms} = 0.083 \text{ [Kg]}$$

Utilizando las mediciones de arriba para el momento de inercia del eje horizontal se puede calcular como:

$$J_v = \sum_i^8 J_{vi} = 0.02421 \text{ [Kg m}^2\text{]}$$

Este término de la suma es calculado a partir de las leyes físicas elementales

$$J_{v1} = m_{tr} l_t^2 = 0.00718 \text{ [kg m}^2\text{]}$$

$$J_{v6} = m_b l_b^2 / 3 = 0.00008 \text{ [kg m}^2\text{]}$$

$$J_{v2} = m_{cb} l_{cb}^2 = 0.00054 \text{ [kg m}^2\text{]}$$

$$J_{v7} = m_{ms} (r_{ms}^2 / 2 + l_m^2) \\ = 0.00426 \text{ [kg m}^2\text{]}$$

$$J_{v3} = m_{mr} l_m^2 = 0.00811 \text{ [kg m}^2\text{]}$$

$$J_{v4} = m_t l_t^2 / 3 = 0.00049 \text{ [kg m}^2\text{]}$$

$$J_{v8} = m_{ts} (r_{ts}^2 / 2 + l_t^2) \\ = 0.00315 \text{ [kg m}^2\text{]}$$

$$J_{v5} = m_m l_m^2 / 3 = 0.00040 \text{ [kg m}^2\text{]}$$

2.1.4 Características de empuje del Rotor Principal

Para realizar las mediciones correctamente, coloque la balanza electrónica debajo de la viga sujetado a una cuerda de tal manera que sea arrastrado por la hélice hacia arriba. Para equilibrar la viga en la posición horizontal adjuntar un peso a la viga tal como se muestra en la figura 2.5, estos datos que se obtienen de sistema físico deben ingresar el computador para posteriormente obtener un polinomio.

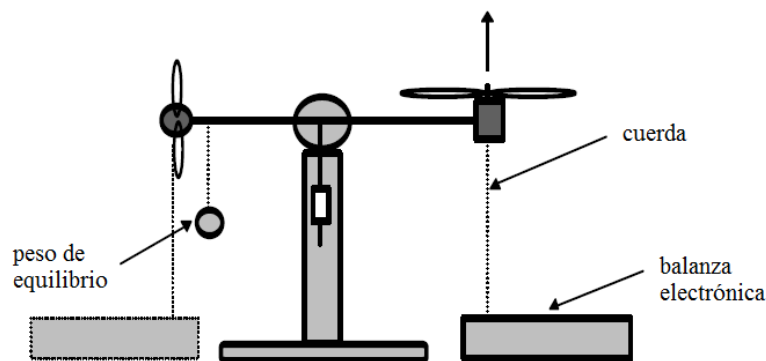


Figura. 2. 5 Medición de las características del empuje del rotor principal.

A favor de nuevas aplicaciones las medidas características deben ser reemplazadas por sus aproximaciones polinómicas. Para estos efectos se puede utilizar la función de MATLAB *polyfit.m*. Con esta función los polinomios obtenidos tienen la siguiente forma:

$$\tilde{F}_v = -1.8 * 10^{-18} \omega_v^5 - 7.8 * 10^{-16} \omega_v^4 + 4.1 * 10^{-11} \omega_v^3 + 2.7 * 10^{-8} \omega_v^2 + 3.5 * 10^{-5} \omega_v - 0.014$$

La velocidad rotacional del motor principal ω_v se obtiene a partir de la velocidad de rotación del motor de corriente continua en función del voltaje de entrada, el rango de control es de -1 a +1 y su polinomio tiene la siguiente forma:

$$\tilde{\omega}_v = -5.2 * 10^3 U_v^7 - 1.1 * 10^2 U_v^6 + 1.1 * 10^4 U_v^5 + 1.3 * 10^2 U_v^4 - 9.2 * 10^3 U_v^3 - 31 U_v^2 + 6.1 * 10^3 U_v - 4.5$$

2.1.5 Aproximación de la fuerza y la velocidad rotacional del rotor principal

Previo a la obtención del modelo matemático es necesario hacer una aproximación del polinomio de la fuerza vertical F_v y de la misma manera con el polinomio de la velocidad de rotación del rotor principal ω_v . Para ello se utilizó un programa hecho en matlab en donde se parte de datos tomados de la fuerza, control, y rpm del pitch de sistema aerodinámico. El empuje en función de la velocidad de rotación del rotor principal contiene ochenta y un datos para la aproximación, estos son los mismos para la simulación del pitch. En el segundo caso la velocidad de rotación del rotor principal en función de la entrada de voltaje tiene cuarenta y dos datos tomados de la planta real del sistema aerodinámico de dos rotores. Estos datos junto con los coeficientes dados por el manual de la fuerza de empuje y de la velocidad de rotación del rotor principal se aproximan a un nuevo polinomio que es con el que se desarrolla la obtención del modelo matemático.

En cuanto a la aproximación del empuje los programas hechos en matlab *aprox_funw.m*¹ y *calc_ctes.m*² en conjunto calculan los coeficientes del polinomio y presenta gráficamente el resultado como se muestra en la figura 2.6. La curva de líneas con guiones es la original mientras que la otra es la aproximada que va tomando diferentes formas hasta conseguir la mejor aproximación.

¹ Ver anexo A1.1.1 página 136

² Ver anexo A1.1.2 página 137

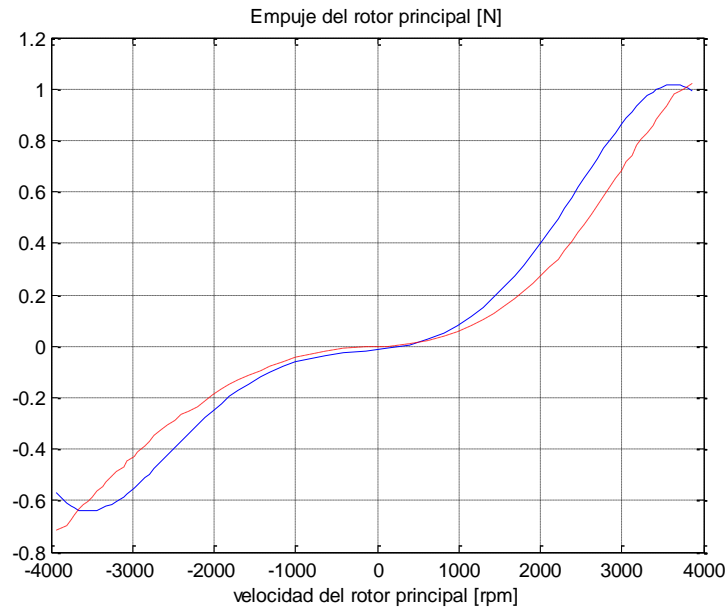


Figura. 2. 6 Inicio de la aproximación del polinomio de empuje

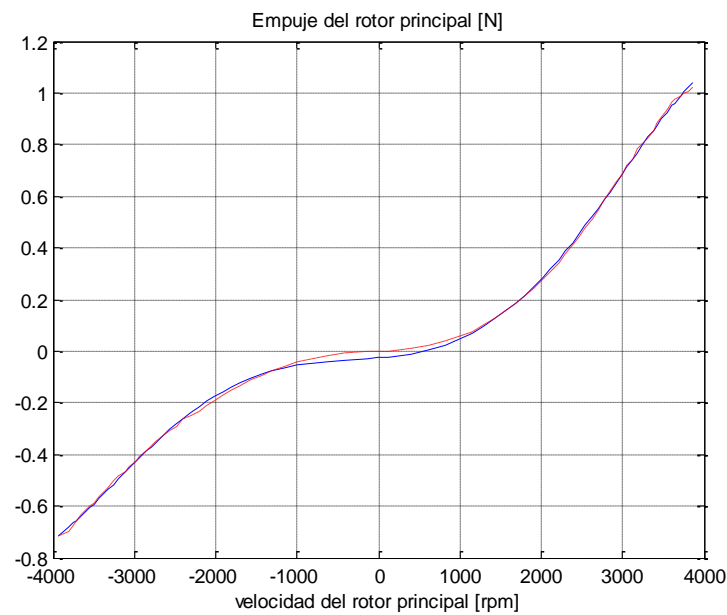


Figura. 2. 7 Aproximación del polinomio de empuje

Después de varias interacciones se obtiene en la figura 2.7 la aproximación deseada, donde se tiene el siguiente polinomio correspondiente al empuje del rotor principal:

$$\tilde{F}_v = -7.54 * 10^{-19} \omega_v^5 - 6.18 * 10^{-16} \omega_v^4 + 2.45 * 10^{-11} \omega_v^3 + 2.26 * 10^{-8} \omega_v^2 + 2.70 * 10^{-5} \omega_v - 0.026$$

Del mismo modo se procede con la aproximación de la velocidad rotacional del motor principal en función de la entrada de voltaje. Así mismo se utiliza los programas `aprox_funw2.m`³ y `calc_ctes2.m`⁴ para realizar el cálculo aproximado de los coeficientes a partir de los datos tomados de la planta física del TRAS y de los coeficientes dados por el manual.

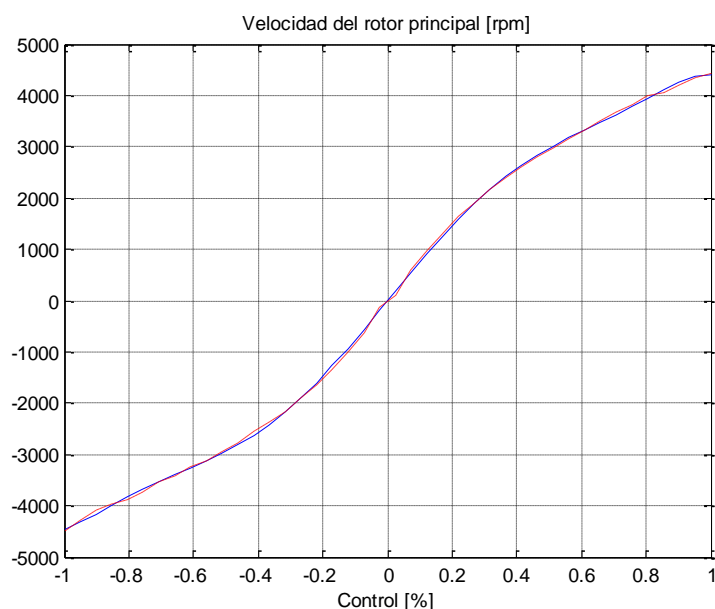


Figura. 2. 8 Aproximación del polinomio de la velocidad del rotor principal

Como en el caso anterior después de varios intentos se obtiene el resultado mostrado en la figura 2.8, donde se observa una curva de grado siete, este polinomio corresponde a la velocidad del rotor principal y esta dado por:

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_v = & -4.89 * 10^3 U_v^7 - 499.9 U_v^6 + 1.14 * 10^4 U_v^5 + 472.56 U_v^4 - 9.77 * 10^3 U_v^3 \\ & + 11.57 U_v^2 + 7.71 * 10^3 U_v - 8.95 \end{aligned}$$

2.1.6 Procedimiento de linealización

En las figuras 2.7 y 2.8 se observa que las funciones que controlan el empuje y la velocidad del rotor principal son no lineales, esto dificulta el control del ángulo de elevación del pitch, para ello es necesario linealizar estas funciones, lo que significa reemplazar una función no lineal por otra lineal que representen el mismo proceso y además es un modelo razonablemente preciso en una región pequeña de la operación.

³ Ver anexo A1.1.3 página 137

⁴ Ver anexo A1.1.4 página 139

La figura 2.9 ilustra cómo se realiza la aproximación de una función no lineal. Se va a aproximar alrededor del punto $(x_o, f(x_o))$ representado por el círculo negro, la función no lineal está representada por la línea continua, y la línea entre cortada es la función linealizada. El círculo negro es donde se realiza la linealización de la función no lineal. Esta aproximación es válida dentro de la circunferencia grande que debe ser lo más pequeño posible. Por otro lado la linealización es válida en un solo punto y no en todo el intervalo de la función no lineal.

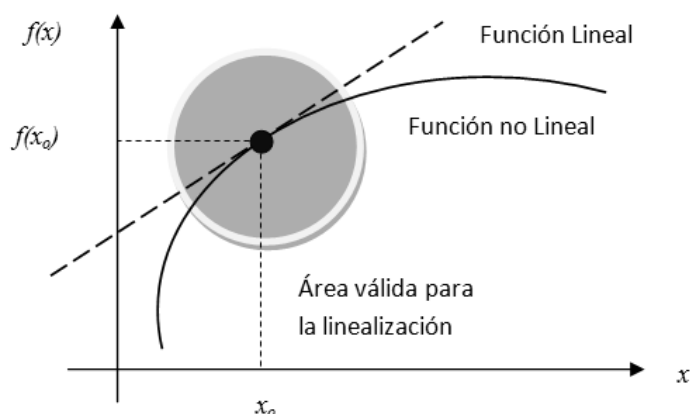


Figura. 2. 9 Linealización

Ahora bien supongamos que $f(x)$ es una función no lineal con una variable y se desea aproximar alrededor del punto x_o . A partir de la expansión de la serie de Taylor, la aproximación lineal es:

$$f(x) \cong f(x_o) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_o} (x - x_o)$$

Para los valores de x para los que la serie converge, en el caso de x cuando está muy cerca de x_o , se puede ignorar los términos de orden superior de la derivada de esta expansión. La variable de desviación será: $\bar{x} = x - x_o$

A continuación se muestra un ejemplo con una parábola centrada en el origen que se abre hacia arriba, la función es: $f(x) = x^2$ y su derivada $\frac{dy}{dx} = 2x$, aplicando la aproximación en el punto $x_o = 2$ tenemos:

$$f(x) \cong 2^2 + 2x|_{x=2}(x - 2) = 4 + 4(x - 2) \approx x^2$$

$$f(2.1) = 4 + 4(2.1 - 2) = 4.4$$

$$f(1.9) = 4 + 4(1.9 - 2) = 3.6$$

$$f(3) = 4 + 4(3 - 2) = 8$$

$$f(1) = 4 + 4(1 - 2) = 0$$

Así queda demostrado que mientras más cerca esta del punto $x_o = 2$ mejor es la aproximación. Por otra parte cuando se tienen más de dos variables la ecuación a seguir es la siguiente:

$$f(x, y) \cong f(x_o, y_o) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_o} (x - x_o) + \left. \frac{df(y)}{dy} \right|_{y=y_o} (y - y_o)$$

Con esta ecuación que resume el procedimiento de linealización y se tiene todas las herramientas listas para obtener la función de transferencia del ángulo de elevación del sistema aerodinámico TRAS.

2.1.7 Obtención del modelo matemático a partir del diagrama de simulación del TRAS

El objetivo principal de esta sección es hallar la matriz de estados y posteriormente la función de transferencia que es muy útil para realizar diversos diseños de compensadores. Para iniciar se escoge un punto de operación en la figura 2.8, con este punto se trabaja la obtención del modelo matemático. Así se ha escogido $\omega_{vo} = 1900$ y $U_{vo} = 0.2701$ porque en estos valores la viga aproximadamente permanece horizontal (ver figura 2.15). Además la viga del sistema aerodinámico tiene que mantenerse en equilibrio y no debe moverse verticalmente, esto se logra con una posición vertical y velocidad angular igual a cero ($\alpha_{vo} = 0$, $\Omega_{vo} = 0$). Luego se toma los modelos de simulación para obtener las expresiones y constantes que permiten linealizar el sistema.

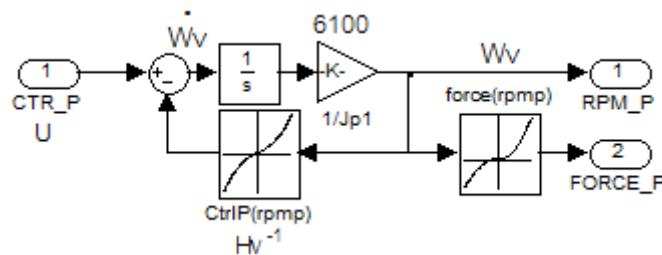


Figura. 2. 10 DCP del pitch

En primer lugar se parte del diagrama de simulación DCP del pitch mostrado en la figura 2.10, que expresa de manera grafica la siguiente ecuación:

$$(U_v - H_v^{-1}(\omega_v)) \frac{1}{s} * K = \omega_v$$

Donde: $U_v = H_v^{-1}(\omega_v)$ así,

$$s * \omega_v = K(U_v - H_v^{-1}(\omega_v))$$

$$\dot{\omega}_v = K(U_v - H_v^{-1}(\omega_v))$$

Recordando el polinomio de la velocidad del rotor principal:

$$\begin{aligned} \omega_v = g(U_v) = & -4.89 * 10^3 U_v^7 - 499.9 U_v^6 + 1.14 * 10^4 U_v^5 + 472.56 U_v^4 - 9.77 \\ & * 10^3 U_v^3 + 11.57 U_v^2 + 7.71 * 10^3 U_v - 8.95 \end{aligned}$$

Aplicando el concepto de linealización.

$$g(U_v) = g(U_{v0}) + \left. \frac{dg(U_v)}{dU_v} \right|_{U_v=U_{v0}} (U_v - U_{v0})$$

$$g(U_v) - g(U_{v0}) = \left. \frac{dg(U_v)}{dU_v} \right|_{U_v=U_{v0}} (U_v - U_{v0})$$

$$\frac{\Delta \omega_v}{\Delta U_v} = \frac{\omega_v - \omega_{v0}}{U_v - U_{v0}} = \frac{g(U_v) - g(U_{v0})}{U_v - U_{v0}} = \left. \frac{dg(U_v)}{dU_v} \right|_{U_v=U_{v0}} = L$$

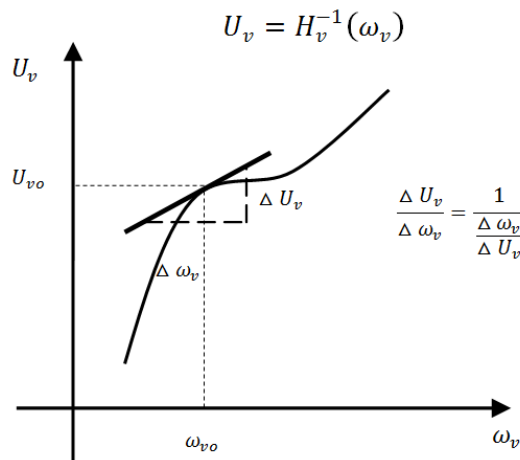


Figura. 2. 11 H_v inversa

Como se muestra en la figura 2.11 es posible hallar el coeficiente de ω_v a partir de la derivada del polinomio de la velocidad del rotor principal evaluado en $U_{vo} = 0.2701$ cuya constante se la llama L, entonces el coeficiente de ω_v será $-K*1/L$. A continuación la explicación matemática:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dg(U_v)}{dU_v} \right|_{U_v=U_{vo}} &= (7) * (-4.89 * 10^3) U_{vo}^6 - (7) * (499.9) U_{vo}^5 \\ &+ (5) * (1.14 * 10^4) U_{vo}^4 + (4) * (472.56) U_{vo}^3 - (3) * (9.77 * 10^3) U_{vo}^2 \\ &+ (2) * (11.57) U_{vo} + 7.7 * 10^3 = L = 5.902 * 10^3 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta \omega_v}{\Delta U_v} = L$$

$$\Delta \omega_v = L * \Delta U_v$$

$$\Delta U_v = \frac{1}{L} * \Delta \omega_v$$

$$\Delta U_v = \frac{1}{5.902 * 10^3} * \Delta \omega_v$$

$$\Delta \omega_v = 5.902 * 10^3 * \Delta U_v$$

Del diagrama de simulación de la figura 2.10 se desprende la constante $K = 6100$ donde:

$$\dot{\omega}_v = K \left(U_v - \frac{\omega_v}{L} \right)$$

$$\dot{\omega}_v = 6100 \left(U_v - \frac{\omega_v}{5.902 * 10^3} \right)$$

$$\boxed{\dot{\omega}_v = -1.03\omega_v + 6100U_v}$$

En segundo lugar, como en el caso anterior las expresiones se basan el diagrama de simulación del pitch de la figura 2.12, aquí se observa los momentos de las fuerzas aplicadas a la viga, estos se suman para dar como resultado la derivada de la velocidad del ángulo de elevación en función del tiempo.

$$\frac{d\Omega_v}{dt} = \frac{1}{J_v} [M_{v1} + M_{v2} + M_{v3} + M_{v4} + M_{v5} + M_{v6}]$$

Algunos momentos como el momento de las fuerzas centrífugas M_{v3} correspondientes al movimiento del brazo alrededor del eje vertical es igual a cero porque no hay movimiento en derredor de dicho eje.

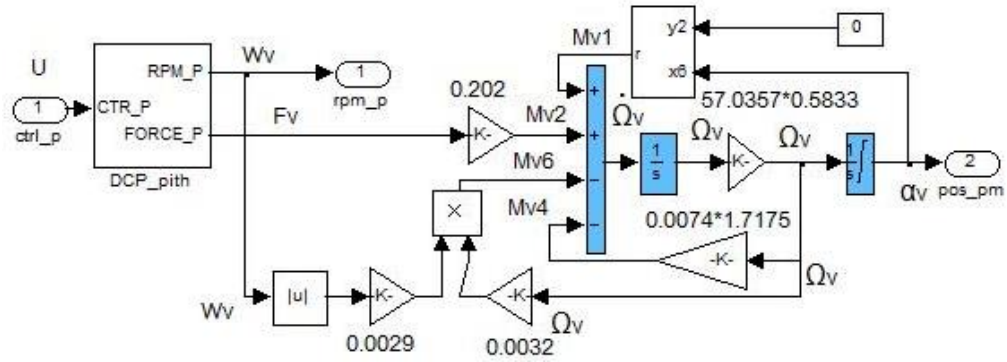


Figura. 2. 12 Modelo de simulación del pitch

De manera similar sucede con el momento de cruce M_{v5} es igual a cero porque no se usa la entrada de control horizontal, solo hay movimiento de arriba hacia abajo y viceversa.

Así mismo se linealiza cada uno de los momentos de la derivada de la velocidad del pitch. La expresión matemática del torque de retorno correspondiente a las fuerzas de la gravedad M_{v1} se encuentra dentro del bloque r de la figura 2.12 y es:

$$M_{v1} = -(0.0292 * \cos(\alpha_v) + 0.0546 * \sin(\alpha_v)) * 1.7143$$

$$M_{v1}(\alpha_v) = M_{v1}(\alpha_{v0}) + \left. \frac{dM_{v1}(\alpha_v)}{d\alpha_v} \right|_{\alpha_v=\alpha_{v0}} (\alpha_v - \alpha_{v0})$$

Donde $(\alpha_v - \alpha_{v0})$ es mi variable de estado α_v

$$M_{v1}(\alpha_{v0}) = -(0.0292 * \cos(\alpha_{v0}) + 0.0546 * \sin(\alpha_{v0})) * 1.7143 = -0.0501$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dM_{v1}(\alpha_v)}{d\alpha_v} \right|_{\alpha_v=\alpha_{v0}} &= -(0.0292 * (-\sin(\alpha_{v0})) + 0.0546 * \cos(\alpha_{v0})) * 1.7143 \\ &= -0.0936 \end{aligned}$$

$$M_{v1}(\alpha_v) = -0.0936\alpha_v$$

El momento de la fuerza de propulsión que produce el rotor principal M_{v2} será:

$$M_{v2} = l_m F_v(\omega_v)$$

$$F_v(\omega_v) = F_v(\omega_{v0}) + \left. \frac{dF(\omega_v)}{d\omega_v} \right|_{\omega_v=\omega_{v0}} (\omega_v - \omega_{v0})$$

La variable de estado ω_v es $(\omega_v - \omega_{v0})$

$$F_v(\omega_{v0}) = -7.54 * 10^{-19} \omega_{v0}^5 - 6.18 * 10^{-16} \omega_{v0}^4 + \\ 2.45 * 10^{-11} \omega_{v0}^3 + 2.26 * 10^{-8} \omega_{v0}^2 + 2.70 * 10^{-5} \omega_{v0} - 0.026$$

$$F_v(\omega_{v0}) = 0.2486$$

$$\left. \frac{dF(\omega_v)}{d\omega_v} \right|_{\omega_v=\omega_{v0}} = (5) * (-7.54 * 10^{-19}) \omega_{v0}^4 - (4) * (6.18 * 10^{-16}) \omega_{v0}^3$$

$$+ (3) * (2.45 * 10^{-11}) \omega_{v0}^2 + (2) * (2.26 * 10^{-8}) \omega_{v0} + 2.70 * 10^{-5}$$

$$\left. \frac{dF(\omega_v)}{d\omega_v} \right|_{\omega_v=\omega_{v0}} = 3.1225 * 10^{-4}$$

$$M_{v2}(\omega_v) = 0.202 * 3.1225 * 10^{-4} * \omega_v = 6.3075 * 10^{-5} \omega_v$$

Así mismo el momento de rozamiento en función de la velocidad angular de la viga M_{v4} tendrá el siguiente procedimiento:

$$M_{v4} = -\Omega_v f_v$$

$$M_{v4}(\Omega_v) = M_{v4}(\Omega_{v0}) + \left. \frac{dM_{v4}(\Omega_v)}{d\Omega_v} \right|_{\Omega_v=\Omega_{v0}} (\Omega_v - \Omega_{v0})$$

$(\Omega_v - \Omega_{v0})$ Es la variable de estado Ω_v

$$M_{v4}(\Omega_{v0}) = -\Omega_{v0} * f_v = 0$$

$$\left. \frac{dM_{v4}(\Omega_v)}{d\Omega_v} \right|_{\Omega_v=\Omega_{v0}} = f_v$$

$$M_{v4}(\Omega_v) = -0.0074 * 1.7175 * \Omega_v = -0.0127\Omega_v$$

El último momento es el torque de amortiguamiento de rotación de la hélice

$$M_{v6} = -a_1\Omega_v abs(\omega_v)$$

$$M_{v6}(\Omega_v, \omega_v) = M_{v6}(\Omega_{v0}, \omega_{v0}) + \left. \frac{dM_{v6}(\Omega_v)}{d\Omega_v} \right|_{\Omega_v=\Omega_{v0}} (\Omega_v - \Omega_{v0}) \\ + \left. \frac{dM_{v6}(\omega_v)}{d\omega_v} \right|_{\omega_v=\omega_{v0}} (\omega_v - \omega_{v0})$$

Abriendo los casos del valor absoluto la expresión anterior tendrá la siguiente forma

$$M_{v6}(\Omega_v, \omega_v) \\ = \begin{cases} M_{v6}(\Omega_{v0}, \omega_{v0}) + \frac{(-a1)}{J_v} (\omega_v)(\Omega_v - \Omega_{v0}) + \frac{(-a1)}{J_v} (\Omega_{v0})(\omega_v - \omega_{v0}) & \omega_v > 0 \\ M_{v6}(\Omega_{v0}, \omega_{v0}) + \frac{(-a1)}{J_v} (-\omega_v)(\Omega_v - \Omega_{v0}) - \frac{(-a1)}{J_v} (\Omega_{v0})(\omega_v - \omega_{v0}) & \omega_v < 0 \end{cases}$$

Se escoge $\omega_v > 0$ y se desecha el otro caso porque la velocidad rotacional del rotor principal tiene que ser positiva, el motor principal gira en un solo sentido y no en sentido contrario por esta razón se escoge los valores positivos de ω_v que son utilizados para desarrollar todos los diseños del presente proyecto. Por tanto el momento vertical seis tendrá la siguiente expresión:

$$M_{v6}(\Omega_v, \omega_v) = -0.0029 * 0.0032 * \omega_{v0} * \Omega_v - 0.0029 * 0.0032 * \Omega_{v0} * \omega_v$$

$$M_{v6}(\Omega_v, \omega_v) = -0.0176\Omega_v + 0 * \omega_v$$

$$M_{v6}(\Omega_v, \omega_v) = -0.0176\Omega_v$$

Una vez realizado la linealización de cada uno de los momentos se procede a obtener la derivada de la velocidad del pitch.

$$\frac{d\Omega_v}{dt} = \frac{1}{J_v} [M_{v1}(\alpha_v) + M_{v2}(\omega_v) + M_{v4}(\Omega_v) + M_{v6}(\Omega_v, \omega_v)]$$

$$\dot{\Omega}_v = \frac{1}{J_v} [-0.0936\alpha_v + 6.3075 * 10^{-5}\omega_v - 0.0127\Omega_v - 0.0176\Omega_v]$$

$$\dot{\Omega}_v = -3.11\alpha_v - 1.01\Omega_v + 0\omega_v$$

Finalmente en tercer lugar la derivada de la posición del pitch en función del tiempo es la velocidad del pitch y esta es la última expresión que define la matriz de estados.

$$\dot{\alpha}_v = \Omega_v$$

Así pues la matriz de estados es⁵:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_v \\ \dot{\Omega}_v \\ \dot{\omega}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.11 & -1.01 & 0 \\ 0 & 0 & -1.03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_v \\ \Omega_v \\ \omega_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6100 \end{bmatrix} U_v$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \alpha_v \\ \Omega_v \\ \omega_v \end{bmatrix}$$

Por consiguiente para hallar la matriz función de transferencia se utiliza el comando de matlab ss2tf que convierte de espacio de estados a función de transferencia.

[num,den] = ss2tf(A, B, C, D) Calcula la función de transferencia con:

$$H(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Del siguiente sistema.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Así pues

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.11 & -1.01 & 0 \\ 0 & 0 & -1.03 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6100 \end{bmatrix}$$

⁵ Véase anexo A1.1.5 página 140

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$D = [0]$$

Las respuestas son coeficientes en potencias descendentes de s

$$num = [0 \quad -0.0000 \quad -0.0000 \quad 12.8100]$$

$$den = [1.0000 \quad 2.0431 \quad 4.1575 \quad 3.2187]$$

Por lo tanto la función de transferencia para el ángulo de elevación del sistema aerodinámico TRAS es:

$$G(s) = \frac{12.81}{s^3 + 2.04s^2 + 4.16s + 3.22}$$

A esta función de transferencia se la somete a una función escalón, la respuesta se aprecia gráficamente en la figura 2.13. Se observa que al dar un pulso de amplitud uno a la salida se obtiene una amplitud de aproximadamente cuatro.

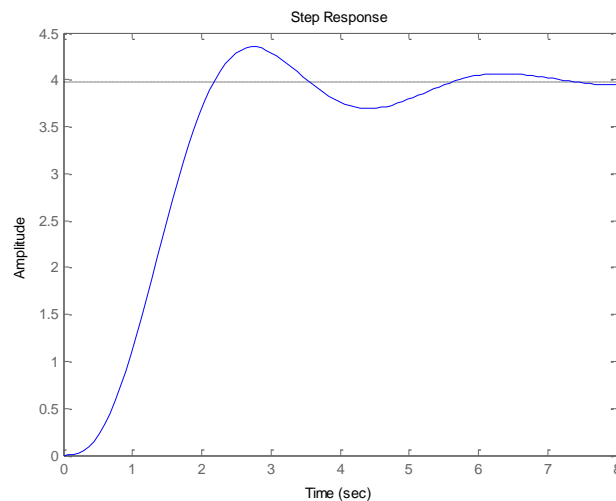


Figura. 2. 13 Respuesta paso del la función de trasferencia del pitch

A continuación se procede a realizar este mismo procedimiento en Simulink valiéndose del bloque del modelo de simulación del pitch.

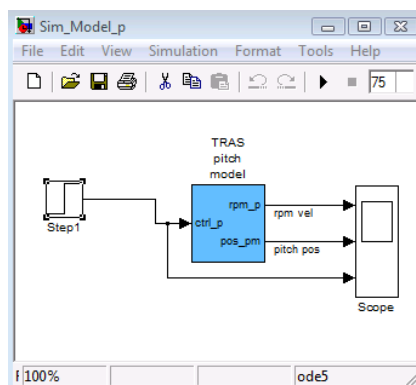


Figura. 2. 14 Simulación de una entrada escalón

El modelo de simulación del pitch tiene en su entrada un bloque step y en su salida en bloque scope para visualizar el comportamiento de la entrada escalón como se puede observar en la figura 2.14. Dentro de los parámetros del bloque del step se configuro que el pulso escalón se inicie a los treinta segundos con un valor inicial de 0.2701 y un valor final de 0.2801. El tiempo total de simulación es de setenta y cinco segundos. La figura 2.15 muestra la respuesta de la función paso en donde la amplitud de la posición del pitch es de 0.04 puesto que la entrada escalón tuvo una amplitud de 0.01.

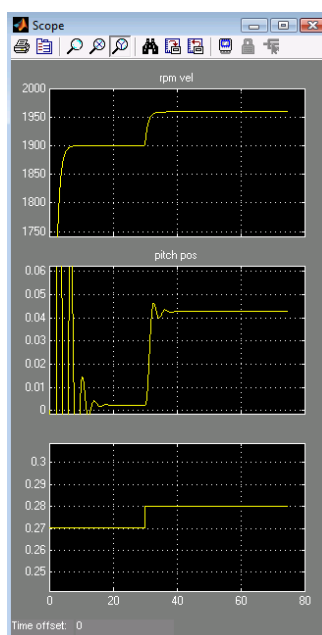


Figura. 2. 15 Gráfica de la respuesta a la entrada escalón

Comparando la figura 2.15 con la figura 2.13 se observa que al dar un pulso escalón en la entrada del modelo de simulación y de la misma manera en la entrada de la función de transferencia calculada se aprecia que ambos tienen una ganancia aproximada de uno a cuatro. Además los dos modelos son aproximadamente iguales con la misma grafica e

igual forma de comportarse frente a misma entrada. Estos resultados muestran que el desarrollo de todo el proceso matemático es correcto en consecuencia la función de transferencia del pitch es adecuada para realizar diseños de compensadores y observar cómo se comporta frente a cada uno de ellos.

2.2 MODELO EN ESPACIO DE ESTADOS

El tema que se propone tratar con esta parte ya se lo resolvió en la sección anterior, pero resta decir que para obtener la representación en espacio de estados se partió de ecuaciones físicas, luego se planteo ecuaciones diferenciales de primer orden y se las reemplaza por variables de estado. Como es un sistema no lineal se linealizó alrededor de un punto de operación. Las variables de estado son:

$\alpha_v = x_1$ es la posición del pitch

$\Omega_v = x_2$ es la velocidad del pitch

$\omega_v = x_3$ es la velocidad rotacional del motor principal

Pues de esto se desprende que la matriz de estados es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.11 & -1.01 & 0 \\ 0 & 0 & -1.03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6100 \end{bmatrix} U_v$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Así mismo la respuesta a la función paso es la misma de la figura 2.13 y la simulación igual que la figura 2.15 por lo tanto el modelo en espacio de estados obtenido es apropiado para realizar todos cálculos y simulaciones que en teoría de control se requieran.

CAPÍTULO III

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADORES

3.1 CONTROLADOR EN ADELANTO

3.1.1 Compensador en Adelanto de fase mediante la repuesta en frecuencia

El compensador en adelanto de fase mejora la respuesta transitoria y modifica un poco la exactitud de estado estacionario. Tiene la forma de un filtro pasa alto es decir en altas frecuencias amplifica y las bajas frecuencias las atenúa. El controlador introduce ganancia a altas frecuencias, que en general desestabiliza.

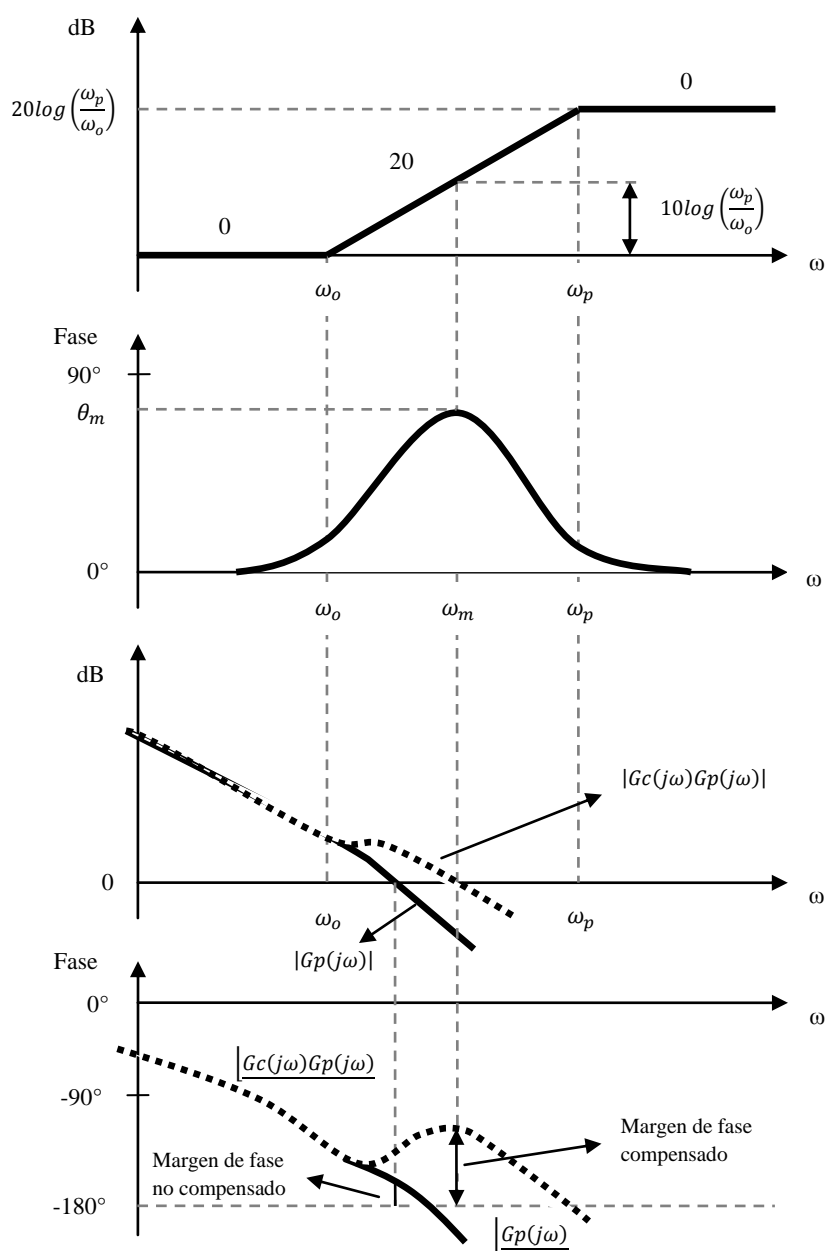


Figura. 3. 1 Diagrama de Bode y diseño del compensador en adelanto de fase

La figura 3.1 muestra el diagrama de bode característico del compensador en adelanto que es el método de diseño empleado en el sistema aerodinámico TRAS. La función de transferencia de la planta multiplicada por el compensador en adelanto se observa con líneas de puntos cuadrados y se ve que adelanta a la G_p que es la planta.

Se utiliza la siguiente función de transferencia para el compensador en adelanto:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

Donde $\omega_0 < \omega_p$

El cero es $\omega_0 = \frac{1}{T}$ el polo es $\omega_p = \frac{1}{\alpha T}$ $0 < \alpha < 1$

Así

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} = \frac{1 + \frac{s}{\frac{1}{T}}}{1 + \frac{s}{\frac{1}{\alpha T}}} = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

$$\therefore G_c(s) = K_c * \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

α y T se determinan a partir de la deficiencia del ángulo y K_c se halla a partir del requisito de ganancia de lazo abierto. El diagrama polar del compensador es:

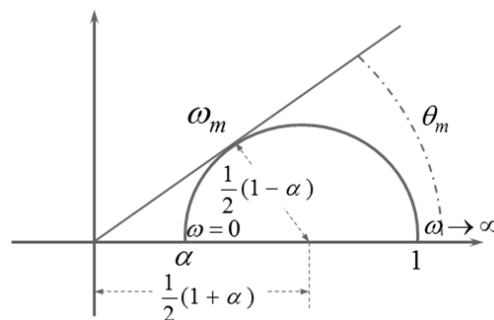


Figura. 3. 2 Diagrama polar del compensador en adelanto de fase

$$G_c(j\omega) = K_c * \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1}$$

El ángulo de fase máximo se observa en la figura 3.2, por la recta tangente a la gráfica polar y que pasa por el origen. Este ángulo máximo dependerá del valor del factor de atenuación α , cuando α disminuye el ángulo máximo aumenta. La expresión matemática es la siguiente:

$$\sin \theta_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

Despejando el factor de atenuación alfa tenemos:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \theta_m}{1 + \sin \theta_m}$$

De la grafica de bode de la figura 3.1 se observa que la frecuencia de cruce de ganancia ω_m es la media geométrica de las frecuencias ω_0 y ω_p .

$$\log \omega_m = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right) \rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} = \omega_{cg}$$

El compensador en adelanto desplaza la frecuencia de cruce de ganancia hacia la derecha disminuyendo el margen de fase, por lo que es necesario adicionar de 5° a 12° al ángulo de adelanto de fase.

$$\varphi_m = Mf \text{ deseado} - Mf \text{ original} + 5^\circ$$

3.1.2 Procedimiento para el diseño de un compensador en adelanto de fase

Diseñe un compensador en adelanto de fase que tenga un error de estado estable menor al cinco por ciento y un margen de fase de cincuenta grados para la función de transferencia del pitch del sistema aerodinámico TRAS.

1.- Suponga el siguiente compensador $G_c(s) = Kc * \alpha \frac{T_s+1}{\alpha T_s+1} \rightarrow K = Kc * \alpha$

$$G_c(s) = K \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1}$$

2.-Se determine la ganancia K que satisface el requerimiento sobre la constante de error estático solicitado.

$$ess = 4\% = 0.04$$

$$ess = \frac{1}{1 + Kp}$$

$$Kp = \frac{1}{ess} - 1 = \frac{1}{0.04} - 1 = 24$$

$$Kp = \lim_{s \rightarrow 0} Gc(s) * Gp(s)$$

$$24 = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} * \frac{12.81}{s^3 + 2.04s^2 + 4.16s + 3.22}$$

$$24 = \frac{K * 12.81}{3.22} \quad \therefore \quad K = 6.04$$

3.- Con esta ganancia multiplicada por la función de transferencia del pitch, se traza el diagrama de bode en lazo abierto y se determina el margen de fase del sistema. Para esto utilizamos el comando de matlab bode y se obtiene la gráfica.

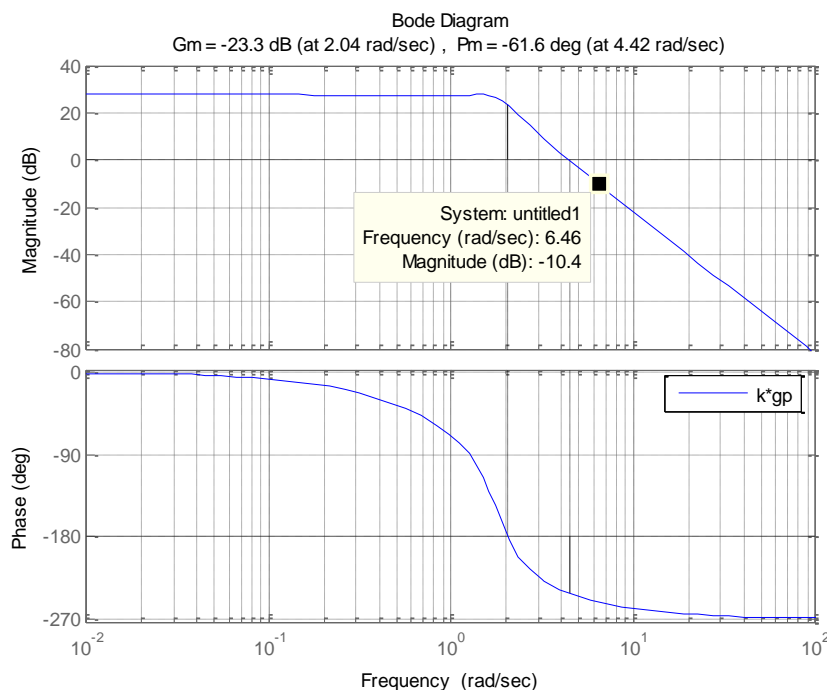


Figura. 3. 3 Diagrama de bode de k*Gp del compensador en adelanto de fase

El margen de fase es de -61.6° a 4.42 rad/seg como se observa en la figura 3.3.

4.- Calcular el margen de fase que se necesita agregar el sistema. A este valor se le agrega de 5° a 12° debido al desplazamiento de la magnitud.

$$\varphi_m = Mf \text{ deseado} - Mf \text{ original} + 12^\circ$$

$$\varphi_m = 50^\circ - (-61.6^\circ) + 12^\circ = 123.6^\circ$$

5.- Con el ángulo se determina el factor de atenuación teniendo en cuenta que el ángulo debe estar en radianes.

$$\alpha = \frac{1 - \sin \theta_m}{1 + \sin \theta_m}$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin(123.6 * \pi/180)}{1 + \sin(123.6 * \pi/180)} = 2.15$$

6.- Determinar la frecuencia en que la magnitud del sistema no compensado es igual a $-20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$. Esta frecuencia corresponde a $\omega_{cg} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$ que es la nueva frecuencia de cruce de ganancia y el máximo desplazamiento de fase que se produce a esa frecuencia.

$$dB = -20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2.15}}\right) = -10.4$$

En la figura 3.3 se muestra la frecuencia de cruce de ganancia que corresponde a -10.4 dB que es $\omega_{cg} = 6.46$ rad/seg. Luego se hace que a esta frecuencia ocurra el máximo aumento de fase donde ω_{cg} es la frecuencia media entre el cero y el polo.

7.- Despejo T de la formula de frecuencia de cruce de ganancia.

$$T = \frac{1}{\omega_{cg}\sqrt{\alpha}}$$

$$T = \frac{1}{6.46\sqrt{2.15}} = 0.51$$

8.- Determinar las frecuencias cruce del compensador en adelante de fase y cálculo el valor de Kc.

$$\text{Cero } \omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.51} = 1.95 \qquad \text{Polo } \omega_p = \frac{1}{\alpha T} = \frac{1}{2.15 * 0.51} = 21.4$$

$$Kc = \frac{K}{\alpha} = \frac{6.04}{2.15} = 66.21$$

9.- Por último el compensador en adelanto de fase es:

$$G_c(s) = 66.21 \frac{1 + \frac{s}{1.95}}{1 + \frac{s}{21.4}} = \frac{33.95s + 66.21}{0.05s + 1}$$

Todo el proceso de diseño del compensador en adelanto de fase se realizó en Matlab con el programa C_af1.m⁶ y se obtuvieron los siguientes resultados.

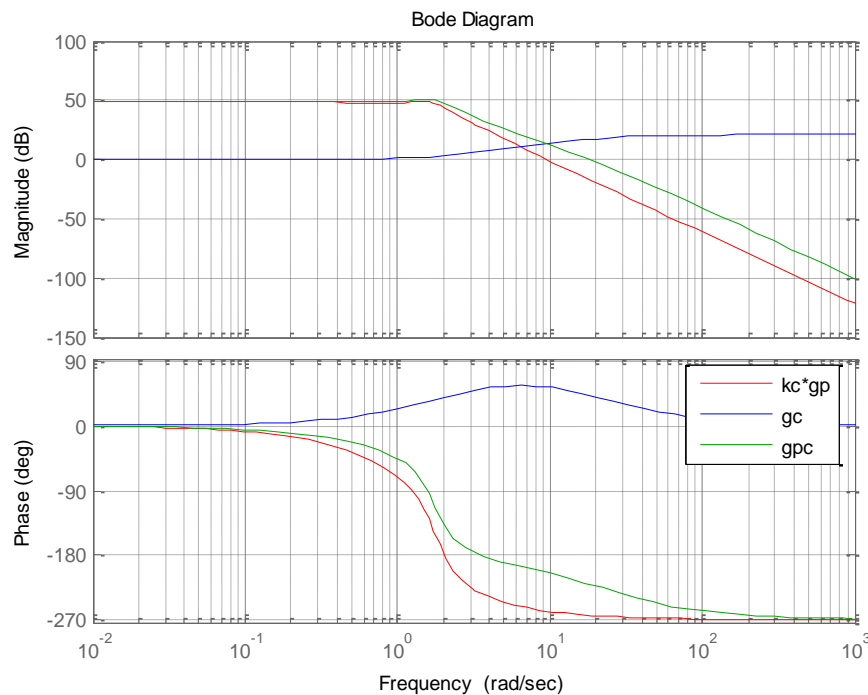


Figura. 3. 4 Diagrama de bode del diseño del compensador en adelanto de fase

En la figura 3.4 se muestra un compensador en adelanto de fase g_c que cumple con lo que se dice en la teoría de control clásico. Por otro lado en la figura 3.5 se observa el diagrama de bode del compensador multiplicado por la función de transferencia del pitch con un margen de fase de -40.2° , este es insuficiente porque no llega a los 50° propuestos en el problema planteado al principio. Además en la figura 3.6 se puede ver la repuesta a la función paso de todo el sistema en lazo cerrado, como se observa el comportamiento del compensador no es el que se espera.

⁶ Véase anexo A1.2.1 página 143

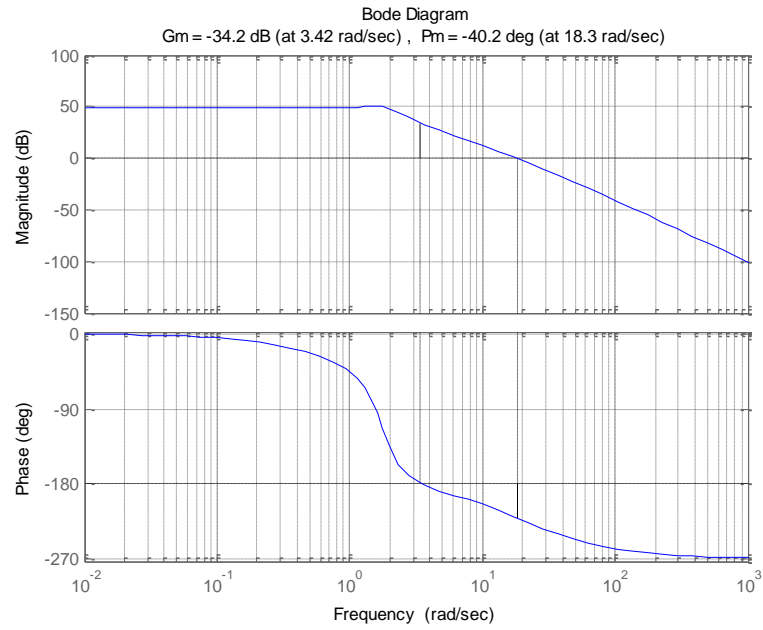


Figura. 3. 5 Margen de fase y ganancia del sistema compensado para la compensación en adelanto

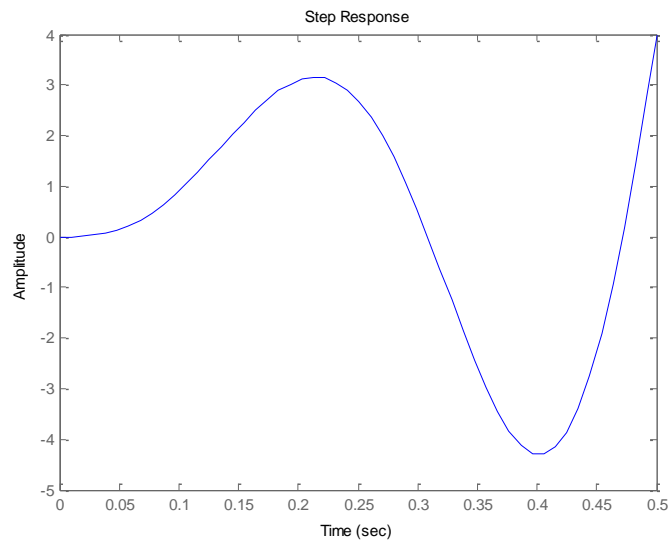


Figura. 3. 6 Respuesta a una señal escalón del sistema compensado en lazo cerrado de un compensador en adelanto de fase

3.1.3 Simulación del compensador en adelanto de fase

El sistema de control para el compensador en adelanto de fase del pitch es el representado por la figura 3.7, este diagrama es realizado en Simulink de Matlab. A la entrada tiene un generador de onda cuadrada con un amplitud de 0.1 radianes y una frecuencia de 0.04 Hertz, a esto se le suma un desplazamiento de 0.1 en el eje vertical. Su salida es monitoreada con un scope que grafica el comportamiento del la velocidad y posición del pitch ante la variación de la entrada. Además se le suma un desplazamiento a la salida del compensador para alinear la posición del ángulo de elevación con la señal del generador.

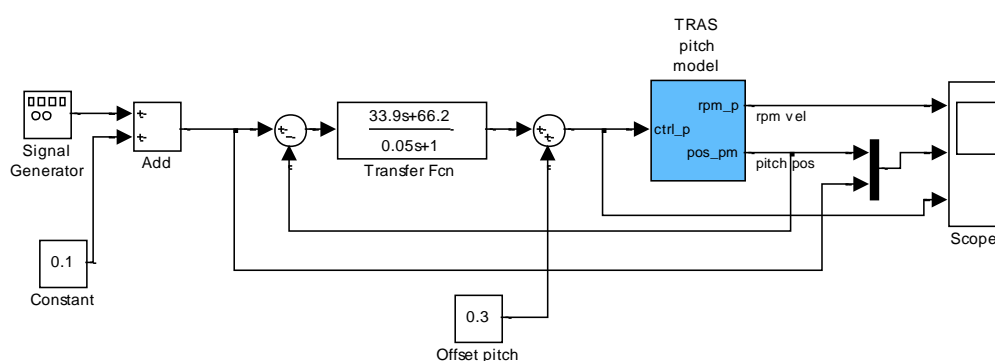


Figura. 3. 7 Sistema de control en lazo cerrado para el compensador en adelanto de fase

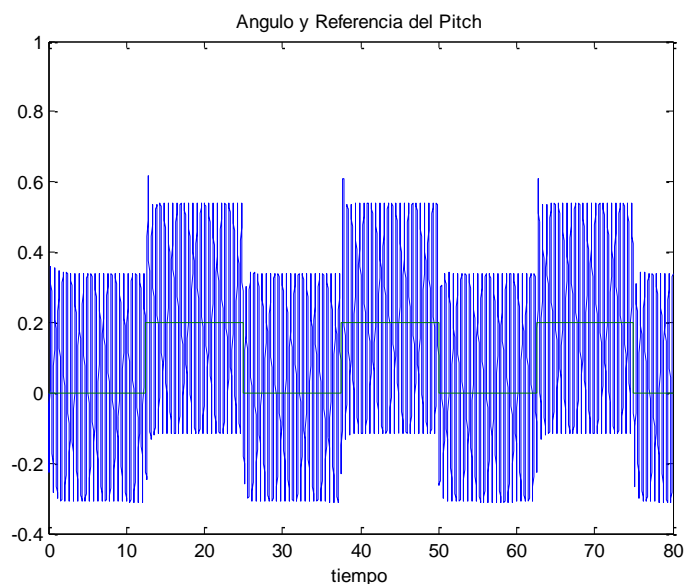


Figura. 3. 8 Referencia de entrada y ángulo del pitch del compensador en adelanto de fase

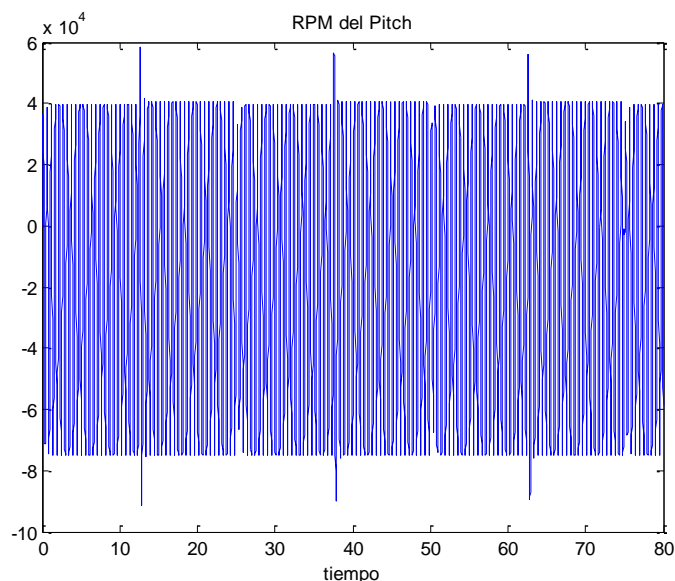


Figura. 3. 9 Velocidad rotacional del pitch del compensador en adelanto de fase

Las figuras 3.8 y 3.9 muestran los resultados del comportamiento del ángulo de elevación del sistema aerodinámico TRAS. De acuerdo con estos, se deduce que una red de adelanto de fase no logra estabilizar el sistema, ni mucho menos mejorar sus parámetros de desempeño. Se procede entonces a diseñar una red doble de compensación de adelanto de fase.

3.1.4 Doble compensador en adelanto de fase

Como se observó en la sección anterior el diseño de un compensador en adelanto para el ángulo de elevación del sistema aerodinámico TRAS no es el adecuado por lo tanto se diseña un doble compensador en adelanto. A este compensador también se le conoce como un compensador en cascada o serie. El diseño es muy similar al del compensador en adelanto con la diferencia que el ángulo de fase se le divide para dos y se duplica la ganancia $dB = -40 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$.

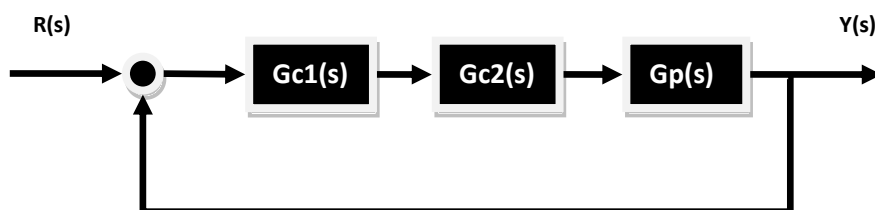


Figura. 3. 10 Sistema de control de un doble compensador en adelanto (lazo cerrado)

Para la implementación de este tipo de controlador se obtiene el compensador $G_c(s)$ explicado anteriormente con las modificaciones de fase y ganancia, se multiplica por sí mismo y se tiene el compensador en cascada listo para la implementación. La expresión matemática es la siguiente:

$$G_c(s) = G_{c1}(s) = G_{c2}(s) \therefore G_{c_{cascada}} = G_{c1}(s) * G_{c2}(s)$$

3.1.5 Diseño del compensador doble en adelanto de fase

Diseñar un compensador doble en adelanto de fase que tenga un error de estado estable menor al cinco por ciento y un margen de fase de cincuenta grados para la función de transferencia del pitch del sistema aerodinámico TRAS.

Para el diseño del un compensador doble en adelanto de fase se sigue los siguientes pasos:

1.- Suponga el siguiente compensador en adelanto de fase

$$G_c(s) = K \frac{1 + \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

2.- Para hallar la constante K se parte del coeficiente de error estático de cuatro por ciento. Este paso es el mismo del procedimiento de diseño del compensador en adelanto de fase, donde $K=6.04$

3.- En la figura 3.11 se muestra el margen de fase de -61.6° a 4.42 rad/seg que se observa del diagrama de bode de la función de transferencia del pitch multiplicada por K.

4.- Se calcula el margen de fase necesario para agregar al sistema. En este caso se sumara 12° como margen de seguridad.

$$\varphi_m = Mf_{deseado} - Mf_{original} + 12^\circ$$

$$\varphi_m = 50^\circ - (-61.6^\circ) + 12^\circ = 123.6^\circ$$

5.- Para el compensador en cascada el margen de fase hallado se divide para dos.

$$\varphi_{m/2} = \left(123.6 * \frac{\pi}{180}\right) / 2 = 1.08$$

6.- El factor de atenuación es:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \theta_{m/2}}{1 + \sin \theta_{m/2}}$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin(1.08)}{1 + \sin(1.08)} = 0.06$$

7.- Otra modificación al diseño del compensador en adelanto de fase es duplicar los dB para el compensador en cascada de adelanto de fase.

$$dB = -40 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$dB = -40 \log\left(\frac{1}{\sqrt{0.06}}\right) = -24$$

Luego con esta ganancia se determina la frecuencia de cruce de ganancia correspondiente a -24 dB

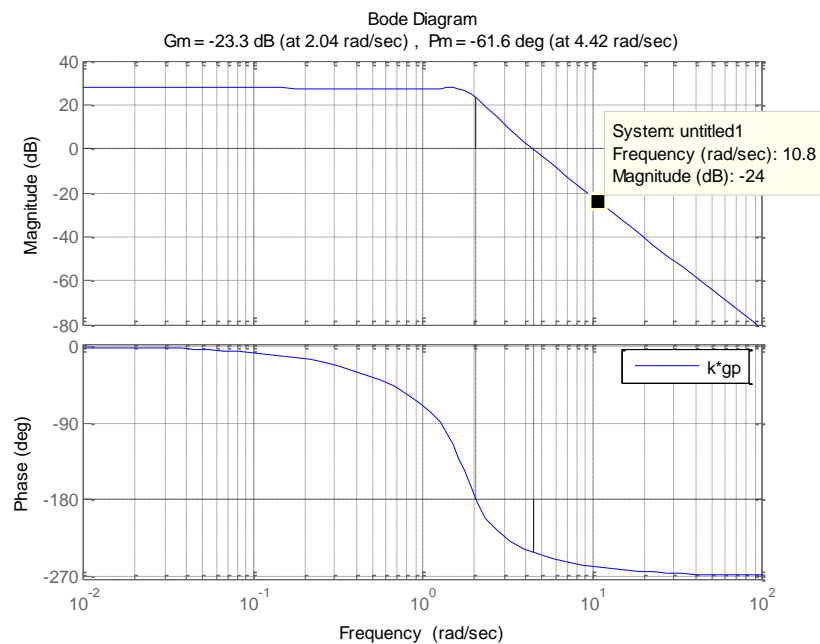


Figura. 3. 11 Diagrama de bode de k*Gp del compensador doble en adelanto

La frecuencia de cruce de ganancia mostrada en la figura 3.11 es $\omega_{cg} = 10.8$ rad/seg, esta frecuencia es la media entre el polo y el cero.

8.- Halla T con la frecuencia de cruce de ganancia y el factor de atenuación

$$T = \frac{1}{\omega_{cg}\sqrt{\alpha}}$$

$$T = \frac{1}{10.8\sqrt{0.06}}$$

$$T = 0.37$$

9.- Se calcula el cero y el polo.

$$\text{Cero } \omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.37} = 2.7 \quad \text{Polo } \omega_p = \frac{1}{\alpha T} = \frac{1}{0.06 \cdot 0.37} = 42.9$$

10.- El compensador en adelante de fase es:

$$Gc(s) = 6.04 \frac{0.37s + 1}{0.02s + 1}$$

11.- Por último se halla el doble compensador en adelante de fase multiplicando dos veces Gc(s) y por la ganancia. La expresión es la siguiente:

$$Gc(s) = Gc1(s) = Gc2(s)$$

$$Gc_{cascada} = K * Gc(s) * Gc(s)$$

$$Gc_{cascada}(s) = 6.04 * \frac{0.37s + 1}{0.02s + 1} * \frac{0.37s + 1}{0.02s + 1}$$

$$Gc_{cascada}(s) = \frac{0.8s^2 + 4.5s + 6.04}{0.0005s^2 + 0.05s + 1}$$

Los cálculos del proceso de diseño del compensador doble en adelante de fase se realizaron en el programa C_af2.m⁷ de Matlab donde se puede apreciar las siguientes graficas.

⁷ Véase anexo A1.2.3 página 146

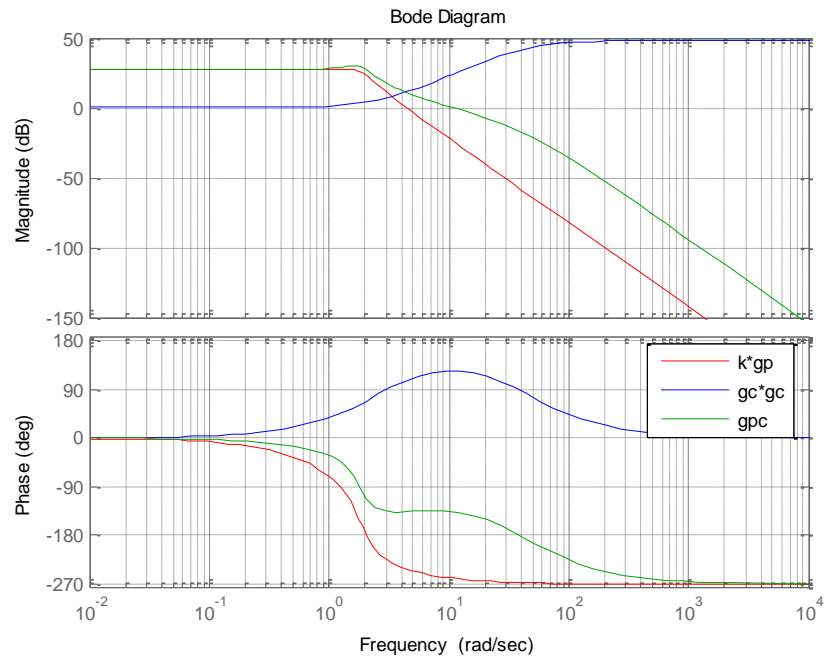


Figura. 3. 12 Diagrama de bode del doble compensador en adelanto de fase

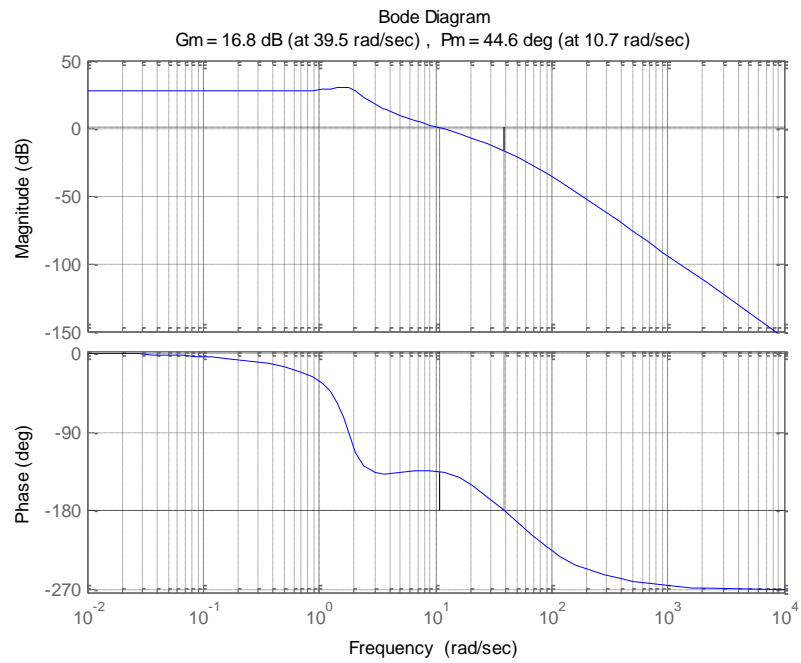


Figura. 3. 13 Margen de fase y ganancia del doble compensador en adelanto de fase

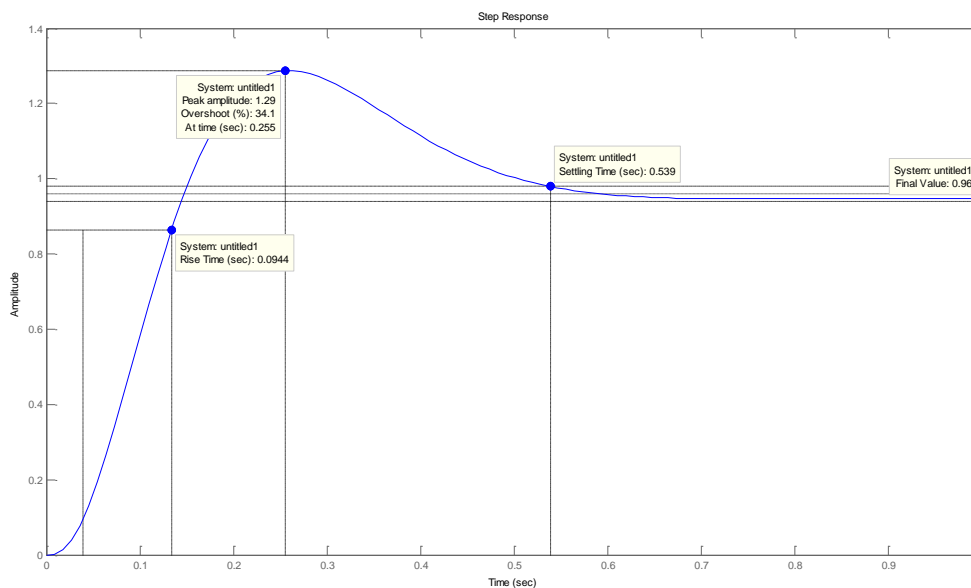


Figura. 3. 14 Respuesta a una señal escalón del sistema compensado en lazo cerrado de un compensador doble en adelante

Se observa por la figura 3.12 que el doble compensador obedece a la teoría de control clásico. Por otro lado la figura 3.13 muestra una fase de 44.6° a 10.7 rad/seg que se acerca al problema de diseño planteado. Y al final la figura 3.14 presenta una respuesta a la señal escalón muy rápida con los siguientes resultados:

Tiempo de establecimiento 0.54 segundos

Tiempo pico 0.26 segundos

Una amplitud pico de 1.29

Un sobrepico de 34.1%

Tiempo de subida 0.09 segundos.

3.1.6 Simulación del compensador doble en adelante de fase

La figura 3.15 muestra un sistema de control en lazo cerrado con un doble compensador en adelante de fase para el sistema aerodinámico TRAS hecho en Simulink de Matlab la entrada tiene un generador de onda cuadrada con una frecuencia de 0.04 Hertz y amplitud 0.1 radianes, adicionalmente se suma un desplazamiento de 0.1 sobre el eje vertical. Además se le suma un offset para alinear el pitch con el generador de onda.

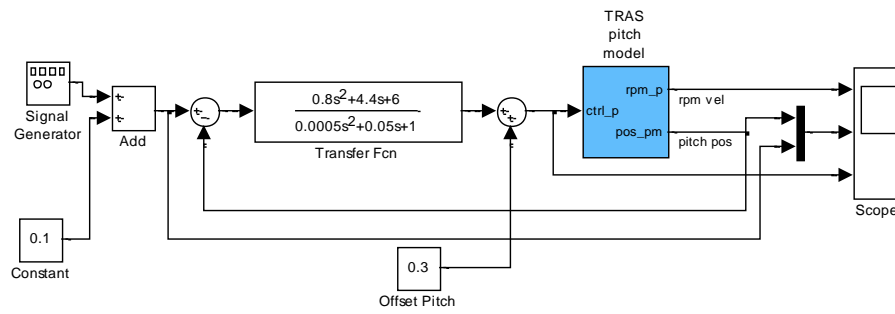


Figura. 3. 15 Sistema de control en lazo cerrado para el doble compensador en adelanto

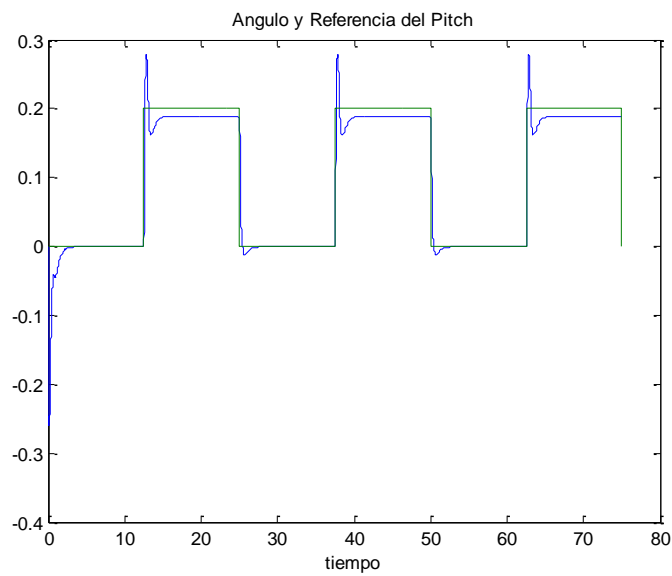


Figura. 3. 16 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el doble compensador en adelanto

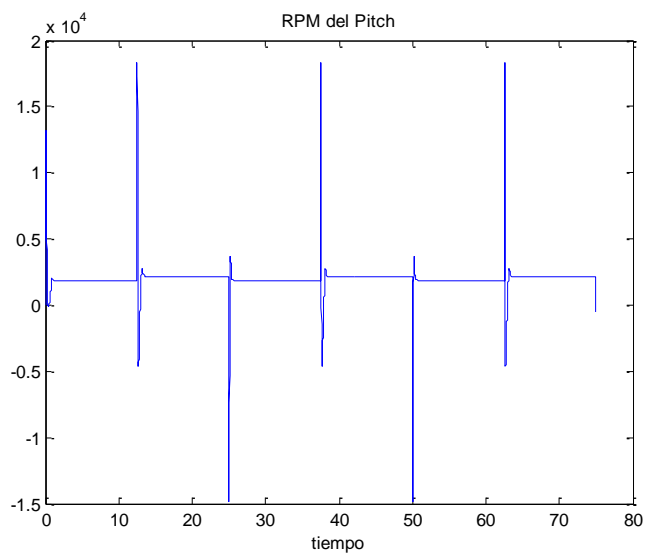


Figura. 3. 17 Velocidad rotacional del pitch del doble compensador en adelanto

El ángulo y la referencia del pitch se muestran en la figura 3.16 donde el pitch sigue la onda cuadrada con un pico al inicio de cada cambio de posición. La posición tiene un error del 6%. Por otro lado la velocidad del pitch tiene sobrepicos en los cambios de posición.

De los resultados obtenidos al diseñar los diferentes controladores en adelante se puede concluir que el sistema es difícil de compensar con redes de compensación en adelanto de fase por respuesta en frecuencia, debido a las características que el sistema presenta.

A continuación se procede entonces a compensar el sistema mediante una red de atraso de fase con lo cual se espera mejorar las características de régimen transitorio como también de régimen permanente.

3.2 CONTROLADOR EN ATRASO

3.2.1 Compensador en atraso de fase mediante la respuesta en frecuencia

El compensador en retraso de fase mejora la precisión a costa del aumento de tiempo de la respuesta transitoria. Es un filtro pasa bajo, es decir, atenúa los efectos de ruido a altas frecuencias. El controlador reduce la ganancia a frecuencias mayores e introduce fase en retraso. La frecuencia máxima de fase es $\omega_m = \sqrt{\omega_p * \omega_o}$ y el ángulo debe ser negativo en cada frecuencia $\theta_m < 90^\circ$. La reducción de ganancia tendrá a estabilizar el sistema y la fase en retraso tendrá a desestabilizar el sistema por eso es necesario ser cuidadosos al colocar la fase de retraso en un rango de frecuencias que estabilice el sistema y no lo afecte indebidamente.

Se puede apreciar en la figura 3.18 el diagrama de bode característico del compensador en atraso de fase, es otro método que se aplica al sistema aerodinámico TRAS para el control del ángulo de elevación. La función de transferencia del pitch multiplicada por el compensador en atraso se observa con líneas de puntos cuadrados y se aprecia que está retrasada de la curva G_p que es la planta.

El compensador en atraso de fase tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_o}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

Donde $\omega_0 > \omega_p$

El cero es $\omega_0 = \frac{1}{T}$ el polo es $\omega_p = \frac{1}{\beta T}$ $\beta > 1$ y $\frac{\omega_p}{\omega_0} > 1$

Así

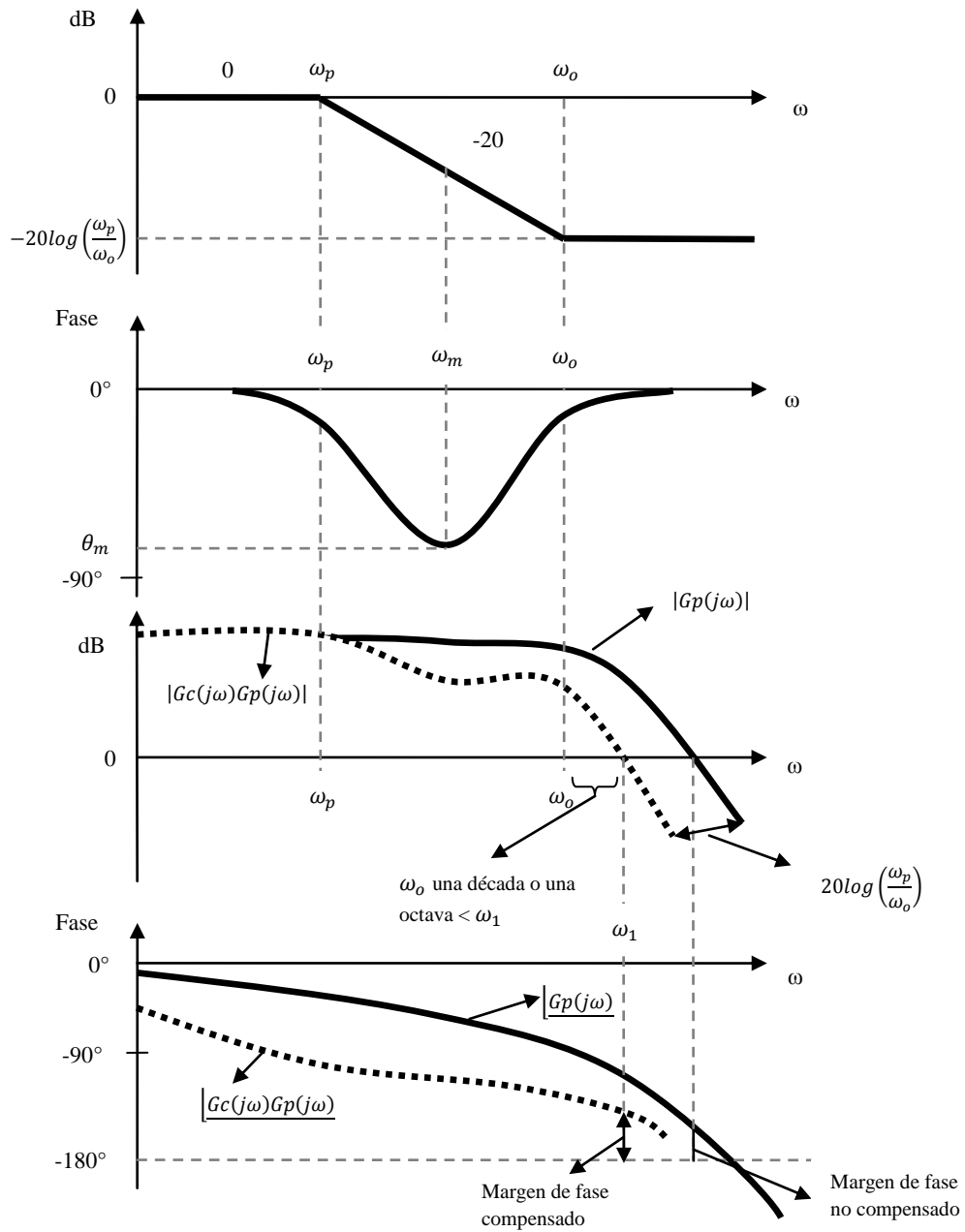


Figura. 3. 18 Diagrama de Bode y diseño del compensador en atraso de fase

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} = \frac{1 + \frac{s}{\frac{1}{T}}}{1 + \frac{s}{\frac{1}{\beta T}}} = \frac{1 + Ts}{1 + \beta Ts}$$

$$\therefore G_c(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

Asumiendo que la magnitud del cero ω_0 y asimismo la del polo ω_p es pequeño comparado con la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 , la ganancia del compensador a esta frecuencia es:

$$G_c(j\omega_1) = \frac{1 + \frac{j\omega_1}{\omega_0}}{1 + \frac{j\omega_1}{\omega_p}} \approx \frac{\omega_p}{\omega_0}$$

Desde

$$|Kc * G_c(j\omega_1)G_p(j\omega_1)| = 1$$

Entonces

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{1}{|Kc * G_p(j\omega_1)|}$$

Así se tiene una ecuación con dos incógnitas desconocidas ω_0 y ω_p

$$\omega_0 = 0.1\omega_1$$

Esto es para asegurar que el compensador introduce una muy pequeña fase en retardo a la frecuencia de cruce de ganancia. Esta constante puede ser entre una década y una octava por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia. Las ecuaciones anteriores deben ser resueltas para hallar el polo y el cero del compensador en atraso de fase.

3.2.2 Procedimiento para el diseño de un compensador en atraso de fase

Diseñe un compensador en atraso de fase que tenga un error de estado estable menor al cinco por ciento y un margen de fase de cincuenta grados para la función de transferencia del pitch del sistema aerodinámico TRAS.

El procedimiento para el diseño de un compensador en atraso de fase es:

1.- Suponga el siguiente compensador.

$$G_c(s) = K_c \frac{1 + \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

2.- Se halla la ganancia K_c en lazo abierto que satisface el error estático solicitado.

$$ess = 4\% = 0.04$$

$$ess = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$K_p = \frac{1}{ess} - 1 = \frac{1}{0.04} - 1 = 24$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) * G_p(s)$$

$$24 = \lim_{s \rightarrow 0} K_c \frac{T_s + 1}{\beta T_s + 1} * \frac{12.81}{s^3 + 2.04s^2 + 4.16s + 3.22}$$

$$24 = \frac{K_c * 12.81}{3.22}$$

$$K_c = 6.04$$

3.- Hallo la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 a la que el ángulo $K_c * G_p(j\omega)$ es igual a $\varphi_m = -180^\circ + Mf \text{ deseado} + 12^\circ$ que es el margen de fase calculado y los 12° se añaden como seguridad.

$$\varphi_m = -180^\circ + 50^\circ + 12^\circ$$

$$\varphi_m = -118^\circ$$

En el diagrama de bode se busca la fase de -118° y según la figura 3.19 la frecuencia de cruce de ganancia es:

$$\omega_1 = 1.52 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

La magnitud en dB es:

$$dB = 27.7$$

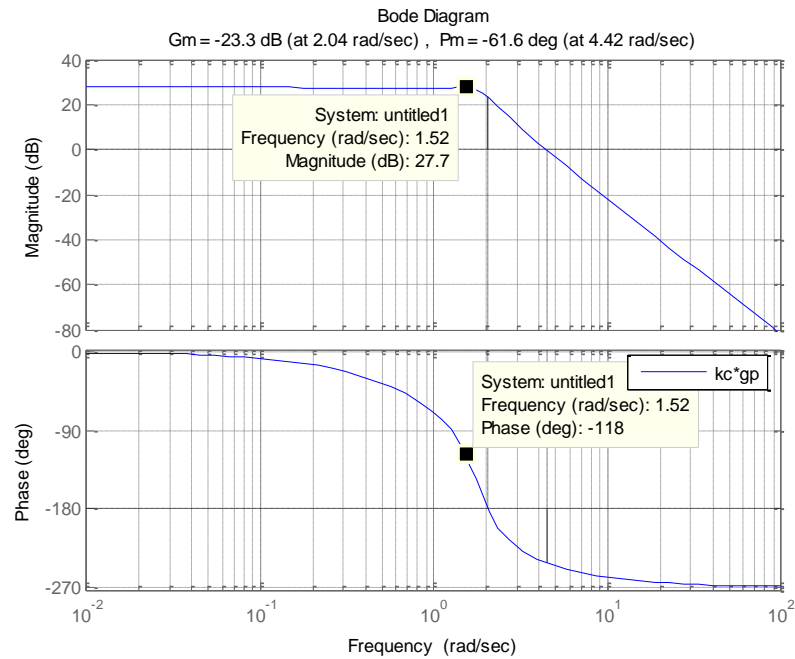


Figura. 3. 19 Diagrama de bode de $Kc \cdot G_p$ del compensador en atraso de fase

4.- La magnitud del cero esta dado por:

$$\omega_o = 0.125\omega_1$$

$$\omega_o = 0.125 * 1.52 = 0.19$$

Para este ejercicio se considera que la frecuencia del polo debe estar una octava por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia.

5.- Para hallar el polo del compensador esta dado por la siguiente expresión

$$\frac{\omega_p}{\omega_o} = \frac{1}{|Kc * G_p(j\omega_1)|}$$

Así

$$\omega_p = \frac{0.1\omega_1}{|Kc * G_p(j\omega_1)|}$$

Donde

$$|Kc * G_p(j\omega_1)| = 10^{\frac{dB}{20}}$$

$$|Kc * G_p(j\omega_1)| = 10^{\frac{27.7}{20}} = 24.27$$

$$|Kc * G_p(j\omega_1)| = 24.27$$

Entonces

$$\omega_p = \frac{0.1\omega_1}{24.27}$$

$$\omega_p = \frac{0.1 * 1.52}{24.27} = 0.01$$

$$\omega_p = 0.01$$

6.- La función de transferencia del compensador en atraso de fase es

$$Gc(s) = Kc * \frac{\frac{s}{\omega_0} + 1}{\frac{s}{\omega_p} + 1}$$

$$Gc(s) = 6.04 * \frac{\frac{s}{0.19} + 1}{\frac{s}{0.01} + 1}$$

$$Gc(s) = 6.04 * \frac{5.26 s + 1}{127.7 s + 1}$$

$$Gc(s) = \frac{31.76 s + 6.04}{127.7 s + 1}$$

Las gráficas y todo el proceso de diseño para el compensador en retraso de fase se realizaron en el programa C_rf1.m⁸ de Matlab y se obtuvo los siguientes resultados.

⁸ Véase anexo A1.2.5 página 149

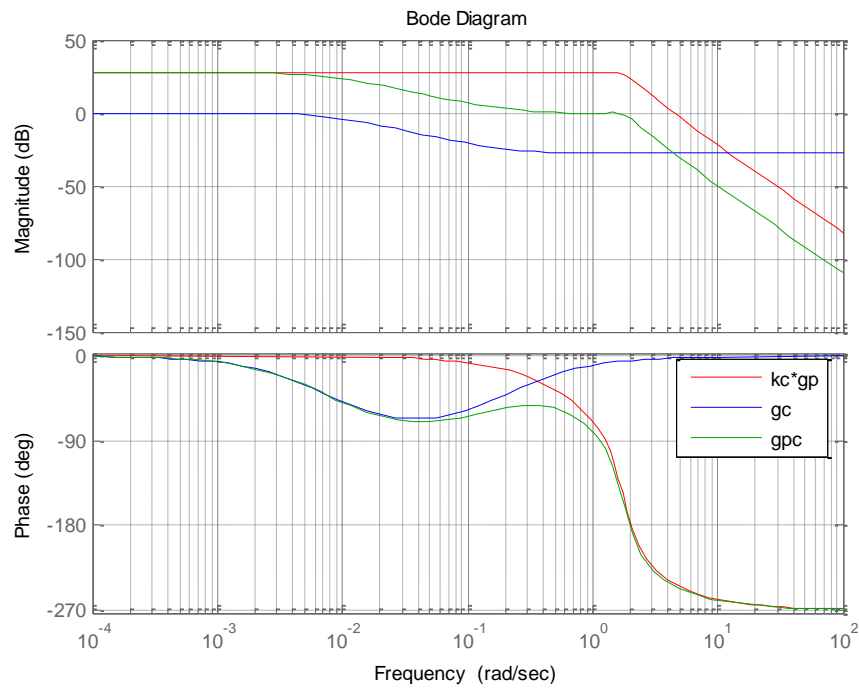


Figura. 3. 20 Diagrama de bode del diseño del compensador en atraso de fase

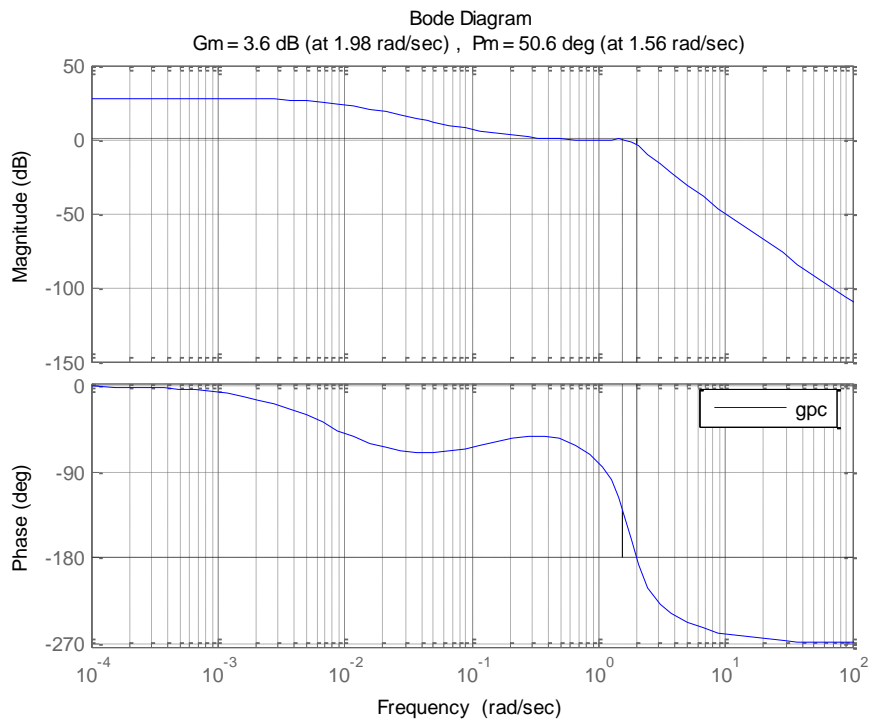


Figura. 3. 21 Margen de fase y ganancia del compensador en atraso de fase

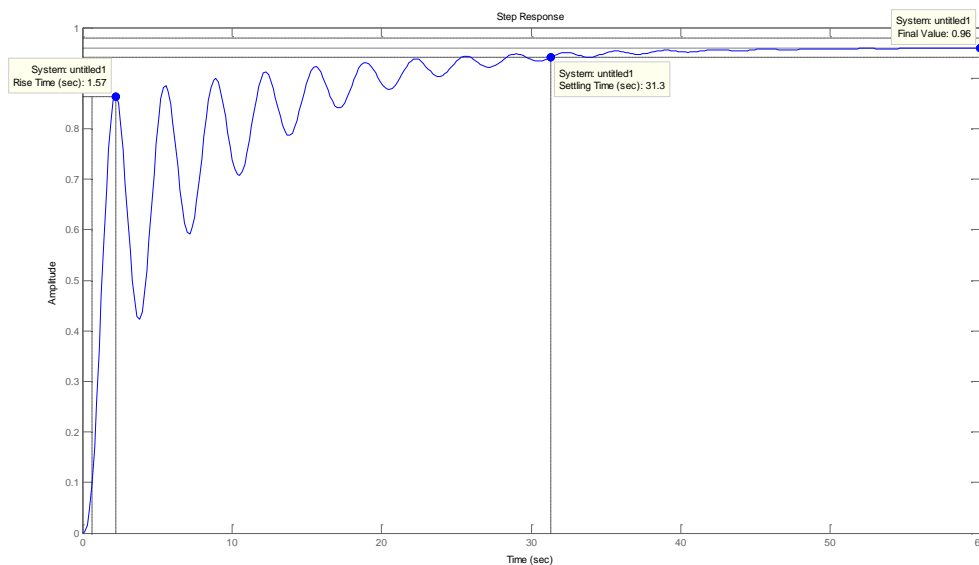


Figura. 3. 22 Respuesta a una señal escalón del sistema compensado en lazo cerrado de un compensador en atraso de fase

El diagrama de bode de la figura 3.20 muestra la gráfica del compensador en atraso de fase junto al sistema compensado del pitch gpc y el sistema multiplicado por la constante K_c , como se puede ver cumple con la teoría. La figura 3.21 muestra el margen de fase y ganancia, donde la fase es 50.6° a 1.56 rad/seg que es justo la fase que se plantea en el problema de diseño. Por último la figura 3.22 presenta la respuesta a la señal escalón del sistema en lazo cerrado se puede ver que es muy lenta. Los siguientes son los resultados:

Tiempo de establecimiento 31.3 segundos.

Tiempo de subida 1.57 segundos.

3.2.3 Simulación del compensador en atraso de fase

Para la simulación del sistema compensado en atraso de fase del pitch es necesario colocar a la entrada un generador de onda cuadrada con una amplitud de 0.2 radianes y una frecuencia de 0.0067 Hertz, sumado un desplazamiento vertical de 0.1. La salida se la monitorea con un scope que grafica el comportamiento del la velocidad y posición del pitch frente a variaciones de entrada. Adicionalmente se suma un desplazamiento a la salida del compensador para alinear el pitch con la señal del generador. La figura 3.23 muestra el diagrama de simulación del compensador en atraso de fase para pitch del sistema aerodinámico TRAS

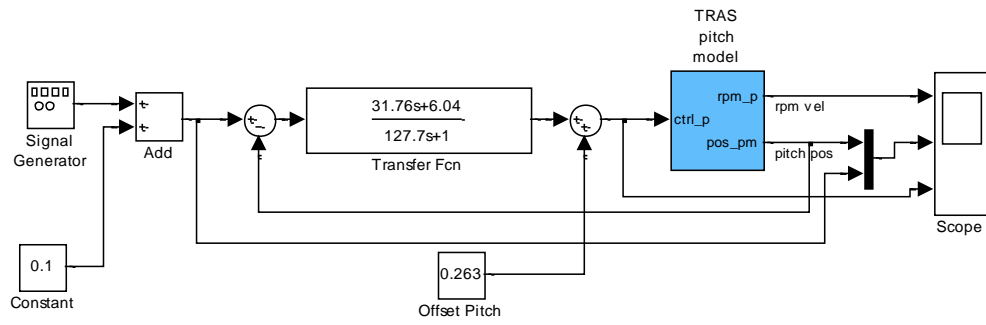


Figura. 3. 23 Sistema de control en lazo cerrado para el compensador en atraso de fase

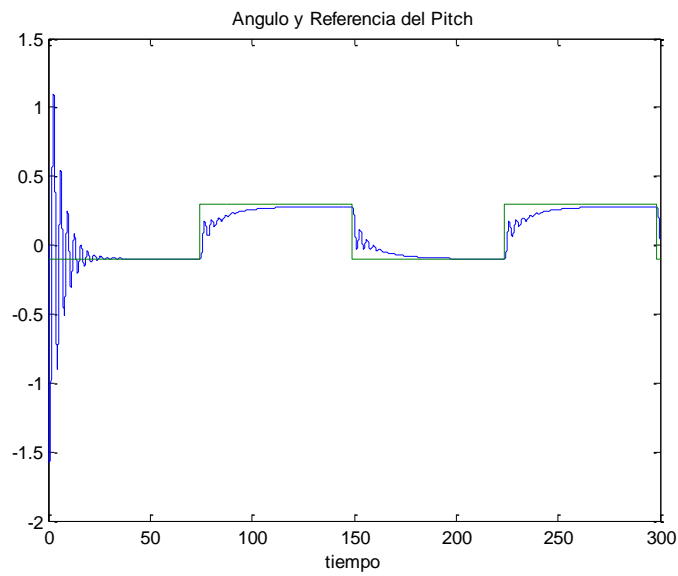


Figura. 3. 24 Referencia de entrada y ángulo del pitch del compensador en atraso de fase

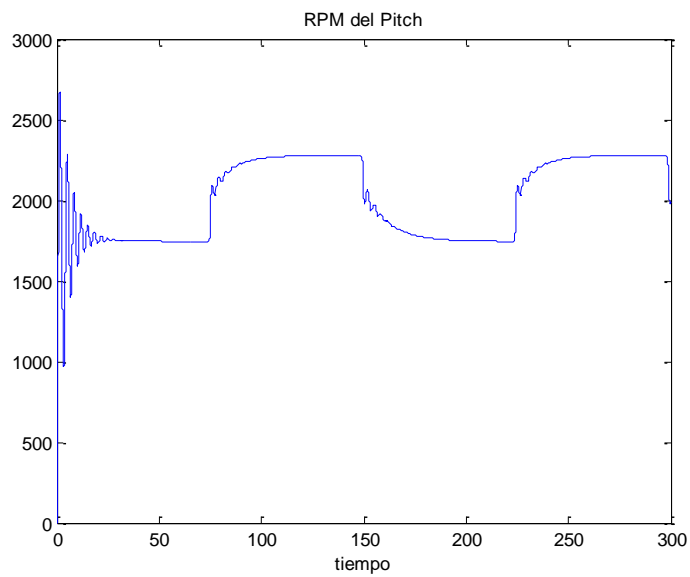


Figura. 3. 25 Velocidad rotacional del pitch del compensador en atraso de fase

La figura 3.24 muestra como el pitch del sistema aerodinámico TRAS sigue la señal de referencia, pero el seguimiento del mismo es muy lento, con un error aproximado del 7%. Por otra parte la figura 3.25 muestra la velocidad del motor con este tipo de compensador que es estable y no sufre picos de altos a excepción del inicio del proceso. Además las características de régimen transitorio y permanente son mejoradas, con una sola red en atraso.

3.2.4 Doble compensador en atraso de fase

Para conocer como es el desempeño de un doble compensador en atraso para el sistema aerodinámico TRAS, se procede a duplicar la ganancia $dB = 40 \log(\beta)$.

El diagrama de bloques del doble compensador en atraso es el mismo que se muestra en la figura 3.10 donde:

$$Gc(s) = Gc1(s) = Gc2(s) \therefore Gc_{cascada} = Gc1(s) * Gc2(s)$$

3.2.5 Diseño del compensador doble en atraso de fase

Diseñar un compensador doble en atraso de fase que tenga un error de estado estable menor al cinco por ciento y un margen de fase de cincuenta grados para la función de transferencia del pitch del sistema aerodinámico TRAS.

Los pasos de diseño son los siguientes:

1.-Suponga el siguiente compensador en atraso de fase

$$Gc(s) = Kc \frac{1 + \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

2.- La ganancia Kc en lazo abierto que satisface el error estático solicitado es $Kc = 6.04$, la misma ganancia calculada en el compensador en atraso.

3.- Se halla la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 a la que el ángulo $Kc * G_p(j\omega)$ es igual a $\varphi_m = -180^\circ + Mf \text{ deseado} + 12^\circ$ que es el margen de fase calculado y los 12° se añaden como seguridad.

$$\varphi_m = -180^\circ + 50^\circ + 12^\circ$$

$$\varphi_m = -118^\circ$$

En el diagrama de bode se busca la fase de -118° y según la figura 3.19 la frecuencia de cruce de ganancia es:

$$\omega_1 = 1.52 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

La magnitud en dB es:

$$dB = 27.7$$

4.- La magnitud del cero esta una octava por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia así:

$$\omega_o = 0.125\omega_1$$

$$\omega_o = 0.125 * 1.52$$

$$\omega_o = 0.19$$

5.- El polo del compensador esta dado por:

$$\frac{\omega_p}{\omega_o} = \frac{1}{|Kc * G_p(j\omega_1)|}$$

Así

$$\omega_p = \frac{0.1\omega_1}{|Kc * G_p(j\omega_1)|}$$

En esta parte se duplica la ganancia para obtener un compensador en cascada

$$|Kc * G_p(j\omega_1)| = 10^{\frac{dB}{40}}$$

$$|Kc * G_p(j\omega_1)| = 10^{\frac{27.7}{40}} = 4.93$$

$$|Kc * G_p(j\omega_1)| = 4.93$$

Entonces

$$\omega_p = \frac{0.1\omega_1}{4.93}$$

$$\omega_p = \frac{0.1 * 1.52}{4.93} = 0.04$$

$$\omega_p = 0.04$$

6.- Por último se halla la función de transferencia del doble compensador en atraso de fase.

$$Gc(s) = Gc1(s) = Gc2(s)$$

$$Gc_{cascada} = K * Gc(s) * Gc(s)$$

$$Gc_{cascada}(s) = Kc * \frac{\frac{s}{\omega_0} + 1}{\frac{s}{\omega_p} + 1} * \frac{\frac{s}{\omega_0} + 1}{\frac{s}{\omega_p} + 1}$$

$$Gc(s) = 6.04 * \frac{\frac{s}{0.19} + 1}{\frac{s}{0.04} + 1} * \frac{\frac{s}{0.19} + 1}{\frac{s}{0.04} + 1}$$

$$Gc(s) = 6.04 * \frac{5.26 s + 1}{25.93 s + 1} * \frac{5.26 s + 1}{25.93 s + 1}$$

$$Gc(s) = \frac{167.2 s^2 + 63.5 s + 6.04}{672.2 s^2 + 51.9 s + 1}$$

Todo el proceso de diseño del compensador doble en atraso de fase para el sistema aerodinámico TRAS se lo realizo mediante un programa hecho en Matlab llamado $C_rf2.m^9$, al correr dicho programa se obtienen los siguientes resultados.

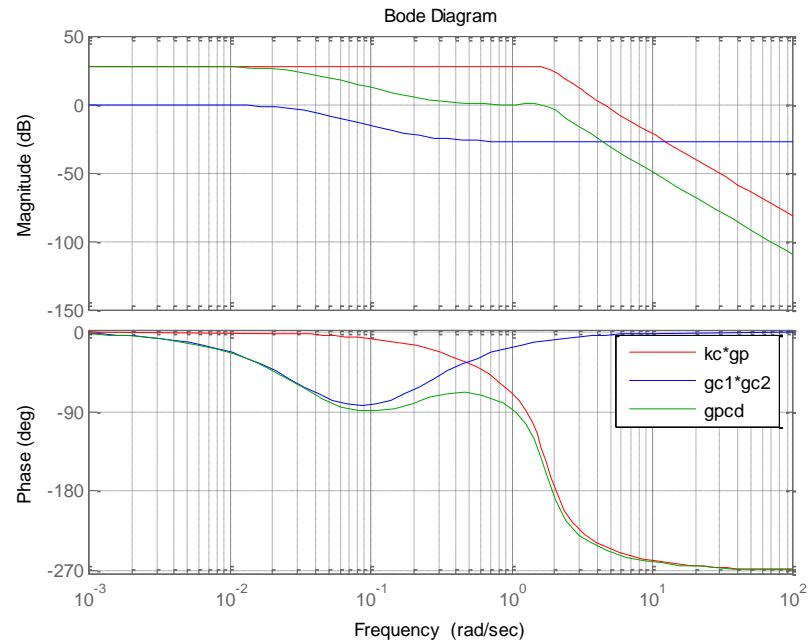


Figura. 3. 26 Digrama de bode del doble compensador en atraso de fase

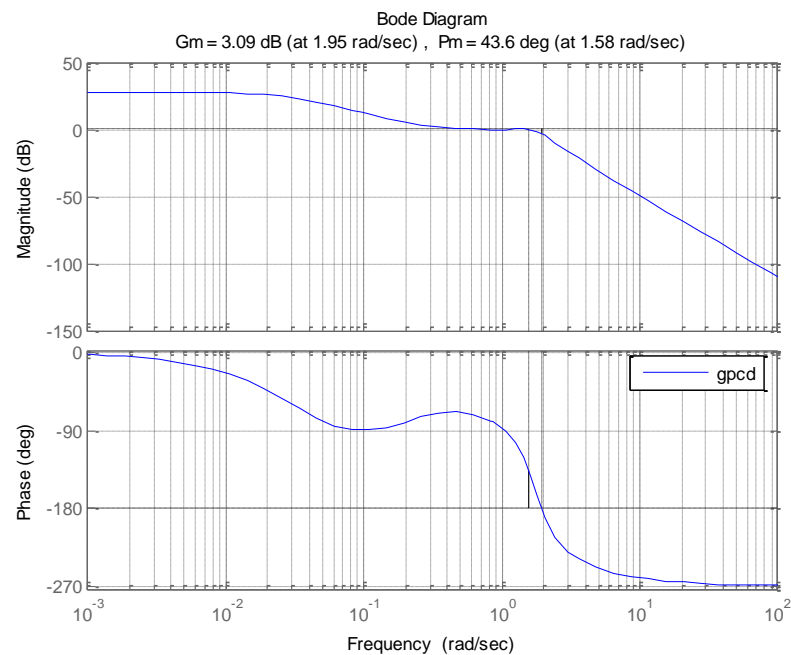


Figura. 3. 27 Margen de fase y ganancia del doble compensador en atraso de fase

⁹ Véase anexo A1.2.7 página 152

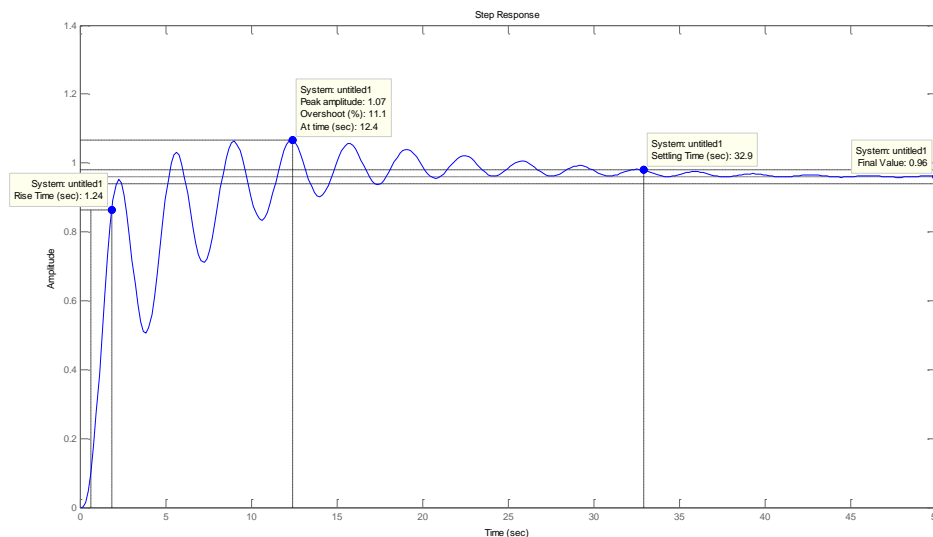


Figura. 3. 28 Respuesta a una señal escalón del sistema compensado en lazo cerrado de un doble compensador en atraso

Se verifica mediante la figura 3.26 que el doble compensador en atraso cumple con lo que dice la teoría. La figura 3.27 muestra el diagrama de bode de la red en atraso, con una fase de 43.6° a 1.58 rad/seg. En la figura 3.28 se observa la respuesta del sistema compensado a la señal escalón y arroja los siguientes resultados:

Tiempo de subida 1.24 segundos.

Amplitud pico 1.07 y un sobre pico de 11.1 % a 12.4 segundos

Tiempo de establecimiento 32.9 segundos.

3.2.6 Simulación del compensador doble en atraso de fase

La simulación se la realizó en Simulink de Matlab y se muestra en la figura 3.29. Como se observa, a su entrada tiene un generador de onda cuadrada con un amplitud de 0.2 radianes y una frecuencia de 0.01 Hertz, con un desplazamiento de 0.1 sobre el eje vertical. Se monitorea las salidas con un scope, donde se grafica la velocidad y la posición del pitch ante la variación de su entrada. También se suma un desplazamiento a la salida del compensador para alinear la posición del ángulo de elevación con la señal del generador. La figura 3.30 muestra como el pitch del sistema TRAS sigue la señal de referencia lentamente y tiene un error de estado estable aproximado de 7%. Por otra parte la velocidad rotacional de la figura 3.31 presenta una trayectoria parecida a la señal del generador. También se puede ver en la figura 3.28, que se forma un sobre pico en el

régimen transitorio del doble compensador en atraso de fase, este no afecta mucho la respuesta de la simulación.

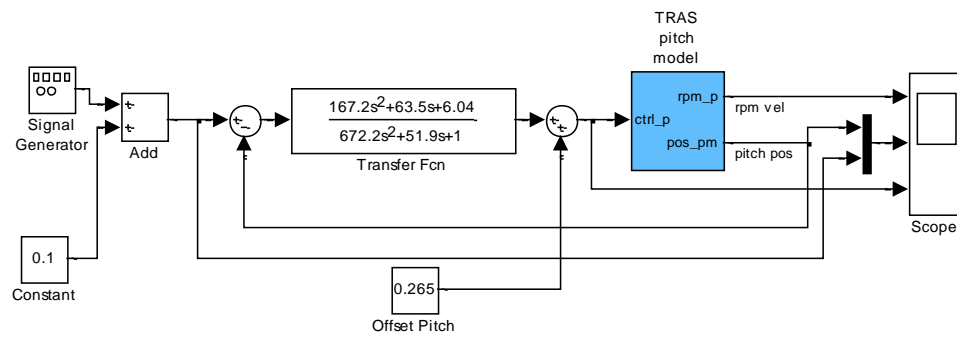


Figura. 3. 29 Sistema de control en lazo cerrado para el doble compensador en atraso

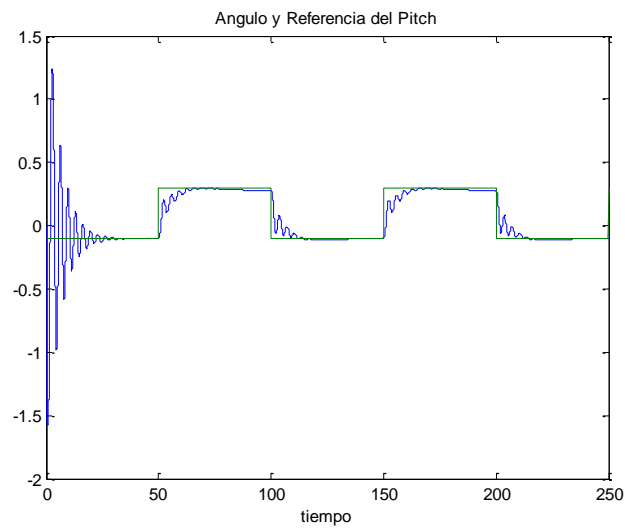


Figura. 3. 30 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el doble compensador en atraso

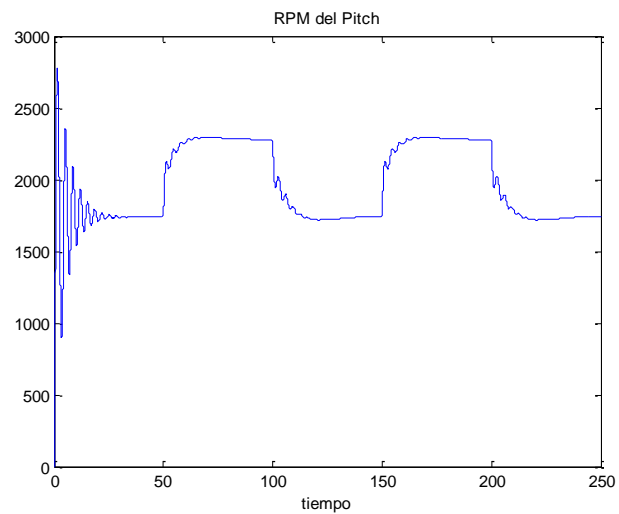


Figura. 3. 31 Velocidad rotacional del pitch para el doble compensador en atraso de fase

3.3 CONTROLADOR ATRASO ADELANTO

3.3.1 Compensador en atraso adelanto mediante la respuesta en frecuencia

El compensador en atraso adelanto posee las características de estos dos controladores por lo que aumenta la complejidad del sistema y combina las ventajas de los mismos. Mejora la respuesta transitoria así como la respuesta estacionaria. La fase en atraso y adelanto se produce a diferentes frecuencias.

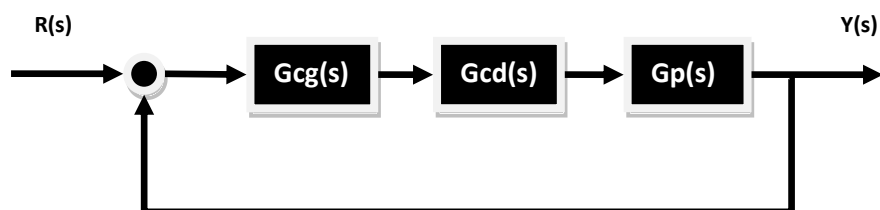


Figura. 3. 32 Diagrama de bloques de un compensador atraso adelanto

Se muestra en la figura 3.32 el diagrama de bloques de un sistema compensado atraso adelanto en lazo cerrado donde G_{cg} es el compensador en atraso y G_{cd} es el compensador en adelanto.

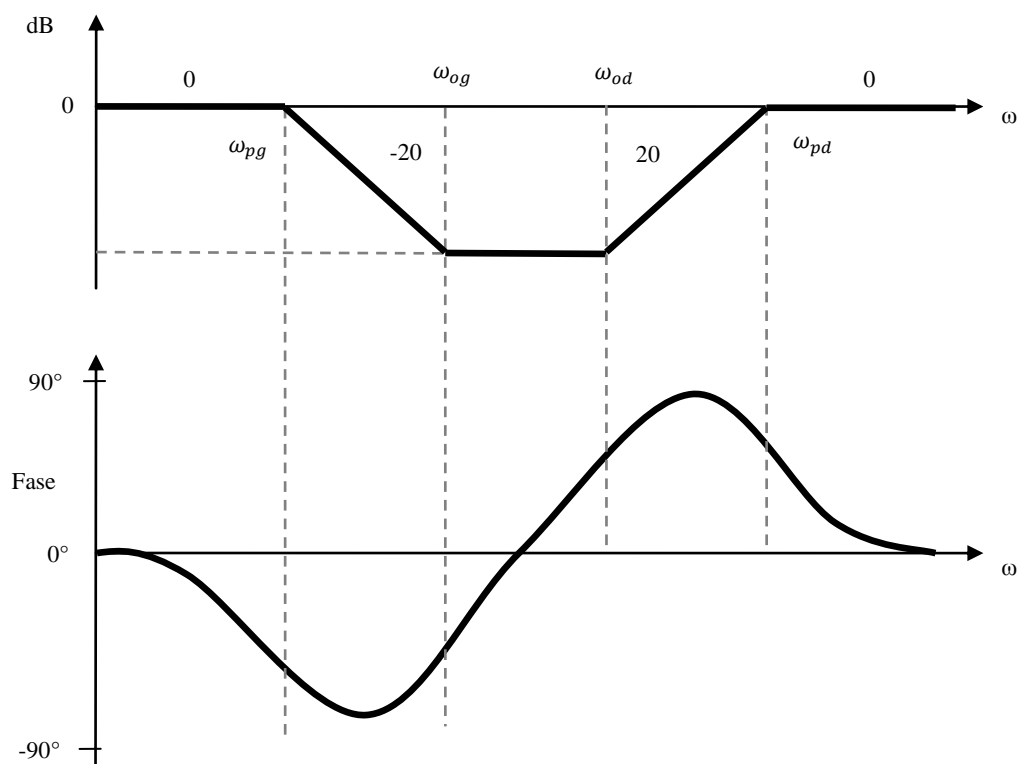


Figura. 3. 34 Diagrama de bode del compensador atraso adelanto

En la figura 3.34 se observa el diagrama de bode, la combinación de los compensadores atraso y adelanto. La frecuencia ω_1 se obtiene de:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_g T_d}}$$

A la frecuencia ω_1 el ángulo de fase es cero.

Para $0 < \omega < \omega_1$ es un compensado en atraso

Para $\omega_1 < \omega < \infty$ es un compensado en adelanto

La función de transferencia del compensador atraso adelanto es:

$$Gc(s) = Gcg(s) * Gcd(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_{og}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pg}}} * \frac{1 + \frac{s}{\omega_{od}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pd}}}$$

3.3.2 Procedimiento para el diseño de un compensador atraso adelanto

Diseñe un compensador en atraso adelanto de fase que tenga un error de estado estable menor al cinco por ciento y un margen de fase de sesenta grados para la función de transferencia del pitch del sistema aerodinámico TRAS.

Para el diseño de un compensador en atraso adelanto primero se procede a diseñar el compensador en atraso de fase su resultado sirve como planta del próximo diseño que es el compensador en adelanto de fase donde la constante k_d es uno. La idea para este diseño es realizar un compensador en atraso de fase con diez grados y posteriormente un compensador en adelanto de fase con sesenta grados. El procedimiento es:

En primer lugar se diseña la sección en atraso de fase.

1.- Suponga el siguiente compensador.

$$Gcg(s) = K \frac{1 + \frac{s}{\omega_{og}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pg}}}$$

2.- Se halla la ganancia K en lazo abierto que satisface el error estático solicitado.

$$ess = 4\% = 0.04$$

$$ess = \frac{1}{1 + Kp}$$

$$Kp = \frac{1}{ess} - 1 = \frac{1}{0.04} - 1 = 24$$

$$Kp = \lim_{s \rightarrow 0} Gcg(s) * Gp(s)$$

$$24 = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{1 + \frac{s}{\omega_{og}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pg}}} * \frac{12.81}{s^3 + 2.04s^2 + 4.16s + 3.22}$$

$$24 = \frac{K * 12.81}{3.22}$$

$$K = 6.04$$

3.- Hallo la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 a la que el ángulo $K * G_p(j\omega)$ es igual a $\varphi_m = -180^\circ + Mf \text{ deseado} + 12^\circ$ que es el margen de fase calculado y los 12° se añaden como seguridad.

$$\varphi_m = -180^\circ + 10^\circ + 12^\circ$$

$$\varphi_m = -158^\circ$$

En el diagrama de bode se busca la fase de -158° y según la figura 3.35 la frecuencia de cruce de ganancia es:

$$\omega_1 = 1.83 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

La magnitud en dB es:

$$dB = 25.8$$

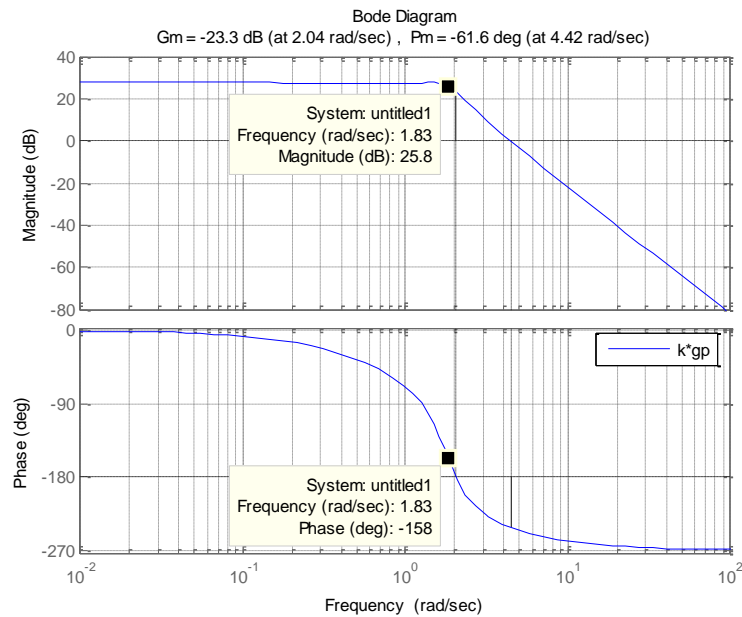


Figura. 3. 35 Diagrama de bode $K \cdot G_p$ del la parte en atraso del compensador atraso adelanto

4.- La magnitud del cero esta dado por:

$$\omega_{og} = 0.1\omega_1$$

$$\omega_{og} = 0.1 * 1.83 = 0.18$$

Para este ejercicio se considera que la frecuencia del polo debe estar una décima por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia.

5.- Para hallar el polo del compensador esta dado por la siguiente expresión

$$\frac{\omega_{pg}}{\omega_{og}} = \frac{1}{|K * G_p(j\omega_1)|}$$

Así

$$\omega_{pg} = \frac{0.1\omega_1}{|K * G_p(j\omega_1)|}$$

Donde

$$|K * G_p(j\omega_1)| = 10^{\frac{dB}{20}}$$

$$|K * G_p(j\omega_1)| = 10^{\frac{25.8}{20}} = 19.5$$

$$|K * G_p(j\omega_1)| = 19.5$$

Entonces

$$\omega_{pg} = \frac{0.1\omega_1}{19.5}$$

$$\omega_{pg} = \frac{0.1 * 1.83}{19.5} = 0.01$$

$$\omega_{pg} = 0.01$$

6.- La función de transferencia del compensador en atraso de fase es

$$G_c(s) = K * \frac{\frac{s}{\omega_{0g}} + 1}{\frac{s}{\omega_{pg}} + 1}$$

$$G_c(s) = 6.04 * \frac{\frac{s}{0.18} + 1}{\frac{s}{0.01} + 1}$$

$$G_c(s) = 6.04 * \frac{5.46 s + 1}{106.5 s + 1}$$

La función de transferencia anterior es el compensador en atraso de fase.

En segundo lugar se diseña la sección en adelanto de fase.

1.- Suponga el siguiente compensador

$$G_{cd}(s) = K_d \frac{1 + \frac{s}{\omega_{od}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pd}}}$$

2.-La constante K_d es igual a uno, es un criterio de diseño para el compensador atraso adelante.

3.- Con esta ganancia K_d multiplicada por la función de transferencia del pitch y multiplicada por el compensador en atraso de fase junto con su constante K , se traza el diagrama de bode en lazo abierto y se determina el margen de fase del sistema. Para esto utilizamos el comando de matlab bode y se obtiene la grafica de la figura 3.36.

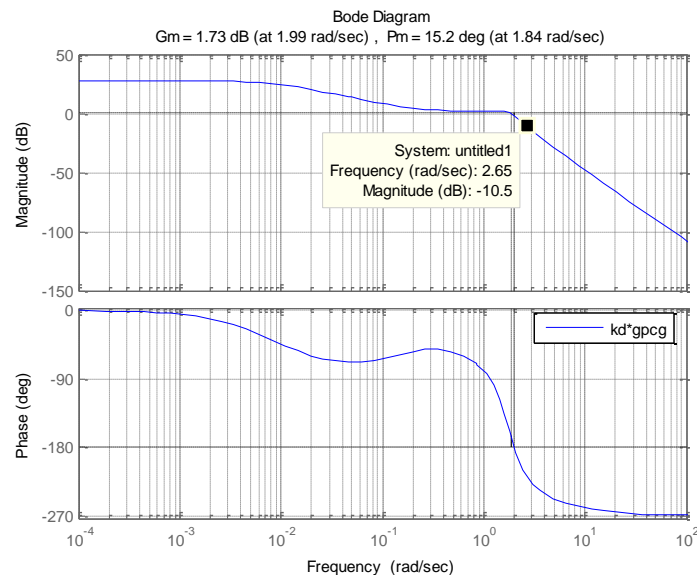


Figura. 3. 36 Diagrama de bode $K^*G_{cg}^*G_p^*K_d$ del la parte en adelanto de fase del compensador atraso adelanto

4.- Calcular el margen de fase que se necesita agregar el sistema. A este valor se le agrega de 5° a 12° debido al desplazamiento de la magnitud. El margen de fase original es 15.2° como se observa en la figura 3.36

$$\varphi_m = Mf_{deseado} - Mf_{original} + 12^\circ$$

$$\varphi_m = 60^\circ - (15.2^\circ) + 12^\circ = 56.8^\circ$$

5.- Con el ángulo se determina el factor de atenuación teniendo en cuenta que el ángulo debe estar en radianes.

$$\alpha = \frac{1 - \sin \theta_m}{1 + \sin \theta_m}$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin(56.8 * \pi/180)}{1 + \sin(56.8 * \pi/180)} = 0.09$$

6.- Determinar la frecuencia en que la magnitud del sistema no compensado es igual a $-20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$. Esta frecuencia corresponde a $\omega_{cga} = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$ que es la nueva frecuencia de cruce de ganancia y el máximo desplazamiento de fase que se produce a esa frecuencia.

$$dB = -20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{0.09}}\right) = -10.51$$

En la figura 3.36 se muestra la frecuencia de cruce de ganancia que corresponde a -10.5 dB que es $\omega_{cga} = 2.65$ rad/seg. Luego se hace que a esta frecuencia ocurra el máximo aumento de fase donde ω_{cga} es la frecuencia media entre el cero y el polo.

7.- Despejo T de la formula de frecuencia de cruce de ganancia.

$$Td = \frac{1}{\omega_{cga} \sqrt{\alpha}}$$

$$Td = \frac{1}{2.65 \sqrt{0.09}} = 1.27$$

8.- Determinar las frecuencias cruce del compensador en adelanto de fase.

$$\text{Cero } \omega_{0d} = \frac{1}{Td} = \frac{1}{1.27} = 0.79$$

$$\text{Polo } \omega_{pd} = \frac{1}{\alpha Td} = \frac{1}{0.09 * 1.27} = 8.89$$

9.- La parte en adelanto de fase es:

$$Gcd(s) = 1 * \frac{1 + \frac{s}{0.79}}{1 + \frac{s}{8.89}} = \frac{1.27 s + 66.21}{0.11 s + 1}$$

Por último se obtiene el compensador adelanto atraso multiplicando la parte en atraso con la de adelanto es:

$$Gct(s) = K * Gcg(s) * Gcd(s) = K * \frac{1 + \frac{s}{\omega_{og}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pg}}} * \frac{1 + \frac{s}{\omega_{od}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pd}}}$$

$$Gct(s) = 6.04 * \frac{5.46 s + 1}{106.5 s + 1} * \frac{1.27 s + 66.21}{0.11 s + 1}$$

$$Gct(s) = \frac{41.74 s^2 + 40.62 s + 6.04}{11.99 s^2 + 106.7 s + 1}$$

Este procedimiento de diseño del compensador atraso adelanto se lo realizó con el programa C_RAF1.m¹⁰ de Matlab y se obtuvieron los siguientes resultados.

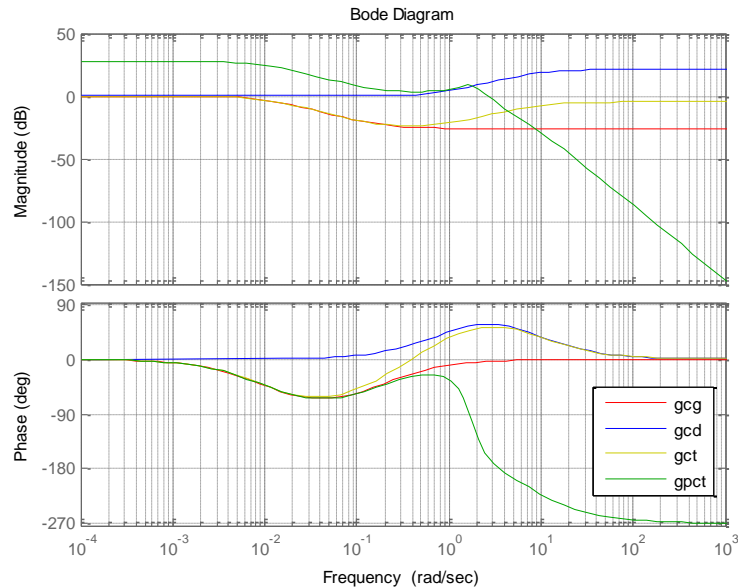


Figura. 3. 37 Diagrama de bode del compensador atraso adelanto

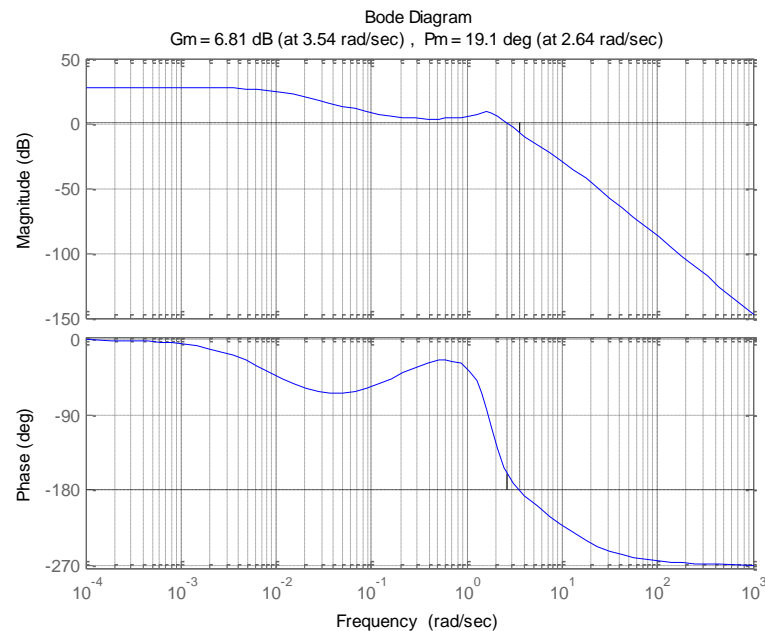


Figura. 3. 38 Margen de fase y ganancia del compensador atraso adelanto

¹⁰ Véase anexo A1.2.9 página 155

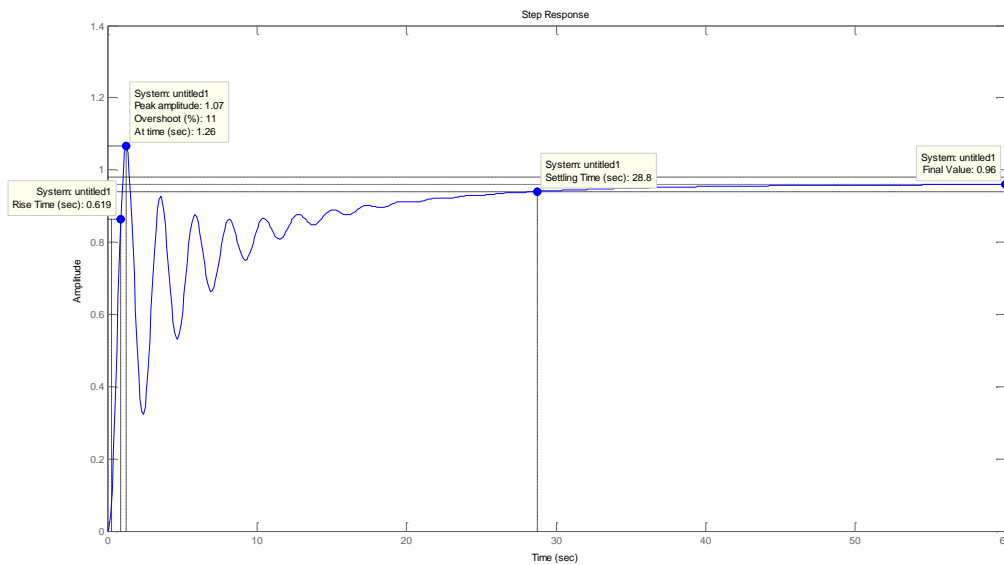


Figura. 3. 39 Respuesta a una señal escalón del sistema compensado en lazo cerrado del compensador atraso adelanto

Se observa en la figura 3.37 el diagrama de bode del compensador atraso adelanto que cumple con la teoría de control clásico. La fase mostrada en la figura 3.38 es de 19.1° , mientras que se planteo una fase de 60 grados para el compensador atraso adelanto. Los resultados de la figura 3.39 son:

Tiempo de establecimiento 28.8 segundos

Tiempo pico 1.26 segundos

Amplitud pico 1.07

Un sobrepico de 11%

Tiempo de subida 0.62 segundos

3.2.6 Simulación del compensador atraso adelanto

En Simulink de Matlab se realiza la simulación del controlador atraso adelanto para el sistema aerodinámico TRAS como se ve en la figura 3.40, el diagrama tiene un generador de onda cuadrada de 0.008 Hertz y una amplitud de 0.2 radianes. Junto al generador se suma un desplazamiento de 0.1 hacia arriba del eje vertical. A la salida se encuentra el scope donde se gráfica el comportamiento del ángulo de elevación del pitch y la velocidad del rotor.

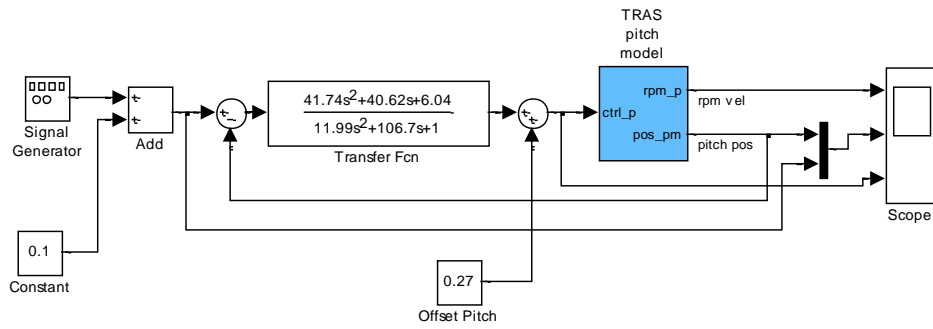


Figura. 3. 40 Sistema de control en lazo cerrado para el compensador atraso adelanto

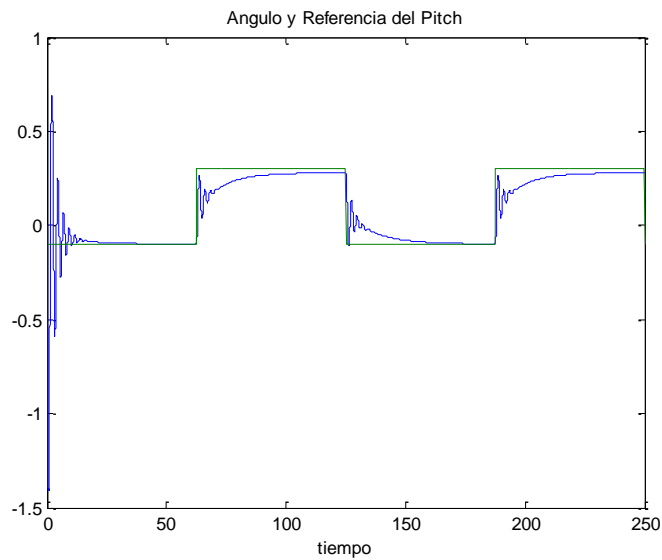


Figura. 3. 41 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el compensador atraso adelanto

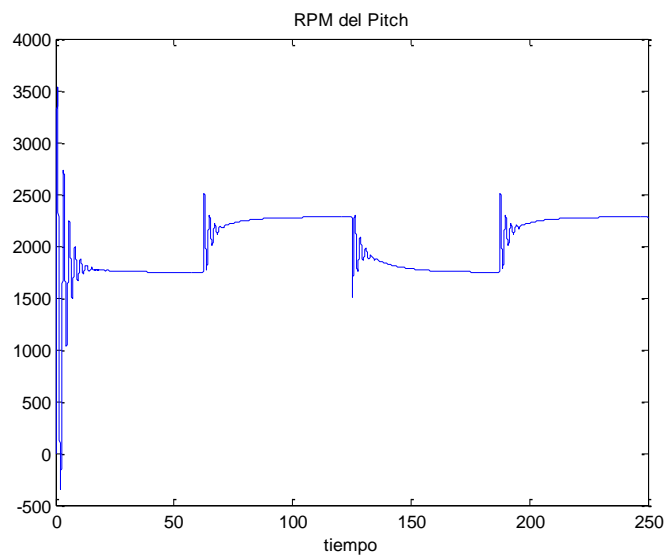


Figura. 3. 42 Velocidad rotacional del pitch del compensador atraso adelanto

Además se suma un desplazamiento a la salida del compensador para alinear la posición del ángulo de elevación con la señal del generador. La figura 3.41 se observa el pitch del sistema aerodinámico TRAS, este se demora en seguir la señal de referencia y tiene un error de estado estable aproximado de 7%. Por otro lado la figura 3.42 muestra como se desempeña el rotor principal para un controlador atraso adelanto.

3.2.7 Diseño de un compensador atraso adelanto con un compensador en atraso y un doble compensador en adelanto

Este tipo de diseño parte de la necesidad de hallar los sesenta grados de fase que se planteo en el problema de diseño anterior. El proceso de diseño es igual al de la sección 3.3.2, primero se diseña un compensador en atraso, luego un compensador doble en adelanto. La idea para este diseño es llegar con un compensador en atraso de fase a cincuenta grados y complementar con un compensador doble en adelanto de fase hasta los sesenta grados.

El problema de diseño planteado es un compensador en atraso adelanto de fase que tenga un error de estado estable menor al cinco por ciento y un margen de fase de sesenta grados para la función de transferencia del pitch del sistema aerodinámico TRAS.

En primer lugar se diseña la sección en atraso de fase.

1.- Suponga el siguiente compensador.

$$Gc(s) = K \frac{1 + \frac{s}{\omega_{og}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pg}}}$$

2.- Se halla la ganancia K en lazo abierto que satisface el error estático solicitado.

$$ess = 4\% = 0.04$$

$$ess = \frac{1}{1 + Kp}$$

$$Kp = \frac{1}{ess} - 1 = \frac{1}{0.04} - 1 = 24$$

$$Kp = \lim_{s \rightarrow 0} Gc(s) * Gp(s)$$

$$24 = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{1 + \frac{s}{\omega_{og}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pg}}} * \frac{12.81}{s^3 + 2.04s^2 + 4.16s + 3.22}$$

$$24 = \frac{K * 12.81}{3.22}$$

$$K = 6.04$$

3.- Hallo la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 a la que el ángulo $K * G_p(j\omega)$ es igual a $\varphi_m = -180^\circ + Mf \text{ deseado} + 12^\circ$ que es el margen de fase calculado y los 12° se añaden como seguridad.

$$\varphi_m = -180^\circ + 50^\circ + 12^\circ$$

$$\varphi_m = -118^\circ$$

En el diagrama de bode se busca la fase de -118° y según la figura 3.43 la frecuencia de cruce de ganancia es:

$$\omega_1 = 1.52 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

La magnitud en dB es:

$$dB = 27.7$$

4.- La magnitud del cero esta dado por:

$$\omega_{og} = 0.1\omega_1$$

$$\omega_{og} = 0.1 * 1.52 = 0.15$$

Para este ejercicio se considera que la frecuencia del polo debe estar una décima por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia.

5.- Para hallar el polo del compensador esta dado por la siguiente expresión

$$\frac{\omega_{pg}}{\omega_{og}} = \frac{1}{|K * G_p(j\omega_1)|}$$

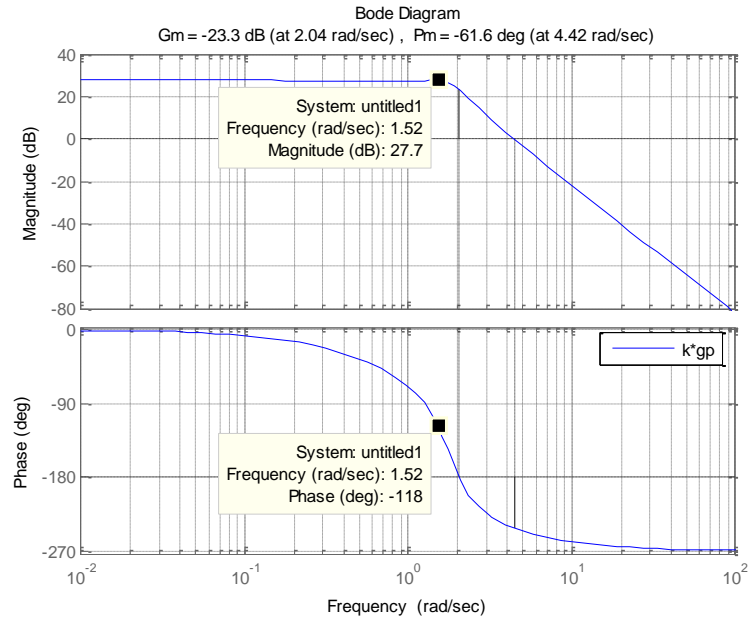


Figura. 3. 43 Diagrama de bode $K*G_p$ de la parte en atraso del compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un doble compensador en adelante

Así

$$\omega_{pg} = \frac{0.1\omega_1}{|K * G_p(j\omega_1)|}$$

Donde

$$|K * G_p(j\omega_1)| = 10^{\frac{dB}{20}}$$

$$|K * G_p(j\omega_1)| = 10^{\frac{27.7}{20}} = 24.27$$

Entonces

$$\omega_{pg} = \frac{0.1\omega_1}{24.27}$$

$$\omega_{pg} = \frac{0.1 * 1.52}{24.27} = 0.01$$

$$\omega_{pg} = 0.01$$

6.- La función de transferencia del compensador en atraso de fase es

$$G_{cg}(s) = K * \frac{\frac{s}{\omega_{0g}} + 1}{\frac{s}{\omega_{pg}} + 1}$$

$$G_{cg}(s) = 6.04 * \frac{\frac{s}{0.15} + 1}{\frac{s}{0.01} + 1}$$

$$G_{cg}(s) = 6.04 * \frac{6.58 s + 1}{159.6 s + 1}$$

La función de transferencia anterior es el compensador en atraso de fase.

En segundo lugar se diseña la sección en adelanto de fase.

1.- Suponga el siguiente compensador doble en adelanto de fase

$$G_{cd}(s) = K_d \frac{1 + \frac{s}{\omega_{0d}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pd}}}$$

2.- Un criterio de diseño para el compensador atraso adelanto con un compensador en atraso y un doble compensador en adelanto es asignar uno a K_d

3.- En la figura 3.44 se muestra el margen de fase de 53.3° a 1.55 rad/seg que se observa del diagrama de bode de la función de transferencia del pitch multiplicada por K_d y multiplicada por el compensador en atraso de fase junto con su constante K en lazo abierto.

4.- Directamente se coloca la fase $\varphi_m = 120^\circ$ duplicando los sesenta grados que tenemos de dato, este criterio parte del procedimiento de diseño del doble compensador en adelanto de la sección 3.1.5 paso 4, donde quiere tener las mismas características de ese compensador para el presente diseño.

5.- Para el compensador en cascada el margen de fase hallado se divide para dos.

$$\varphi_{m/2} = \left(120 * \frac{\pi}{180}\right) / 2 = 1.05$$

6.- El factor de atenuación es:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \theta_{m/2}}{1 + \sin \theta_{m/2}}$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin(1.05)}{1 + \sin(1.05)} = 0.07$$

7.- Otra modificación al diseño del compensador en adelanto de fase es duplicar los dB para el compensador en cascada de adelanto de fase.

$$dB = -40 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$dB = -40 \log\left(\frac{1}{\sqrt{0.07}}\right) = -22.89$$

Luego con esta ganancia se determina la frecuencia de cruce de ganancia correspondiente a -22.89 dB

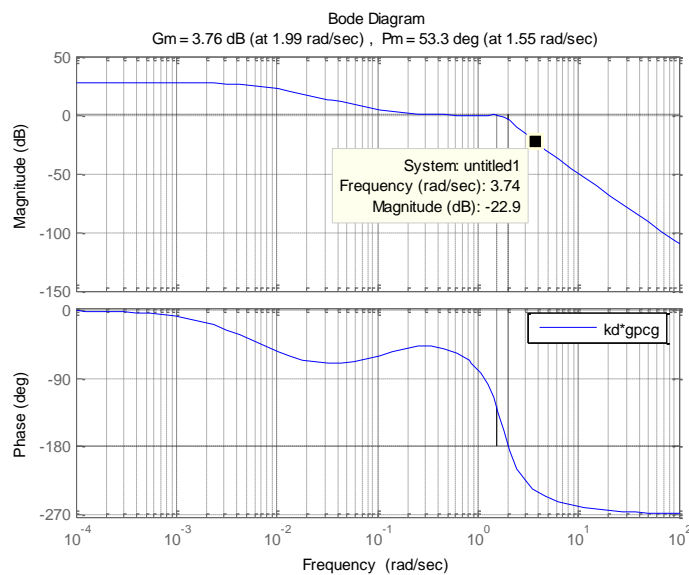


Figura. 3. 44 Diagrama de bode $K*Gcg*Gp*Kd$ del la parte doble adelanto de fase del compensador atraso adelanto

La frecuencia de cruce de ganancia mostrada en la figura 3.44 es $\omega_{cg} = 3.74$ rad/seg, esta frecuencia es la media entre el polo y el cero.

8.- Hallo T con la frecuencia de cruce de ganancia y el factor de atenuación

$$Td = \frac{1}{\omega_{cg}\sqrt{\alpha}}$$

$$Td = \frac{1}{3.74 \sqrt{0.07}}$$

$$Td = 0.99$$

9.- Se calcula el cero y el polo.

$$\text{Cero } \omega_{0d} = \frac{1}{Td} = \frac{1}{0.99} = 1. \quad \text{Polo } \omega_{pd} = \frac{1}{\alpha Td} = \frac{1}{0.07 * 0.99} = 13.96$$

10.- El compensador en adelanto de fase es:

$$Gcd(s) = \frac{0.99 s + 1}{0.07 s + 1}$$

11.- Se halla el doble compensador en adelanto de fase multiplicando dos veces $Gcd(s)$ y por la ganancia. La expresión es la siguiente:

$$Gcd(s) = Gc1(s) = Gc2(s)$$

$$Gcd_{cascada} = Kd * Gcd(s) * Gcd(s)$$

$$Gcd_{cascada}(s) = \frac{0.99 s + 1}{0.07 s + 1} * \frac{0.99 s + 1}{0.07 s + 1}$$

$$Gcd_{cascada}(s) = \frac{0.99 s^2 + 1.99 s + 1}{0.01 s^2 + 0.14 s + 1}$$

Por último se multiplica la ganancia por el compensador en atraso y por el compensador doble en adelanto, así

$$Gct(s) = K * Gcg(s) * Gcd_{cascada}(s)$$

$$Gct(s) = 6.04 * \frac{6.56 s + 1}{159.6 s + 1} * \frac{0.99 s^2 + 1.99 s + 1}{0.01 s^2 + 0.14 s + 1}$$

$$Gct(s) = \frac{39.5 s^3 + 85.3 s^2 + 51.8 s + 6.04}{0.8 s^3 + 22.9 s^2 + 159.8 s + 1}$$

El programa C_RAF2.m¹¹ de Matlab contiene el procedimiento de diseño del compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un doble compensador en adelante. Los resultados obtenidos son los siguientes.

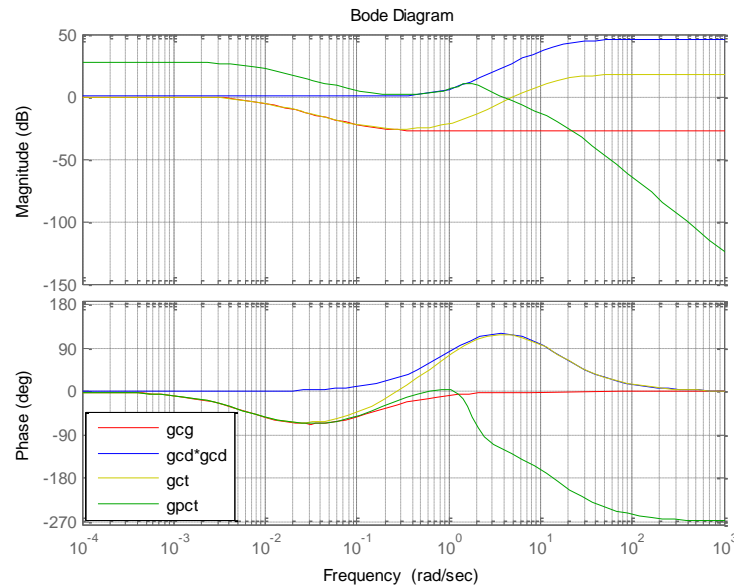


Figura. 3. 45 Diagrama de bode del compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un doble compensador en adelante

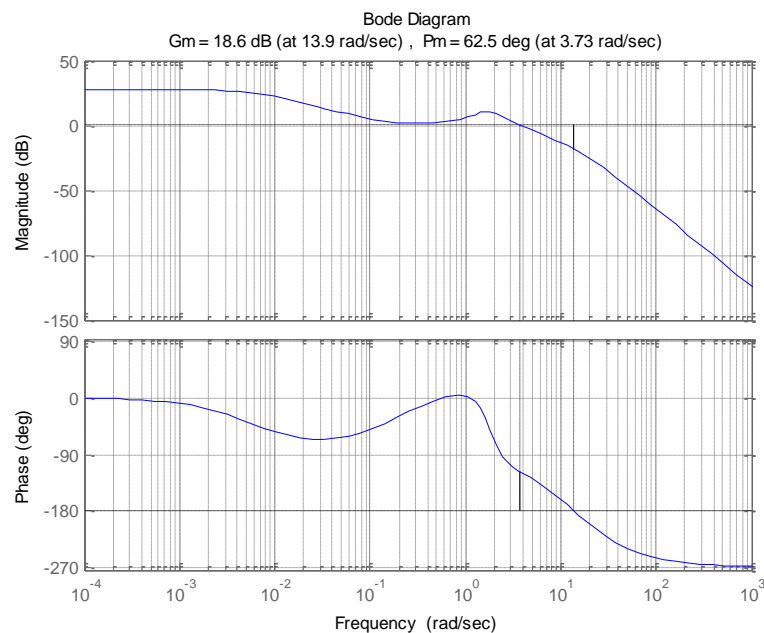


Figura. 3. 46 Margen de fase y ganancia del compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un compensador doble en adelante

¹¹ Véase anexo A1.2.11 página 160

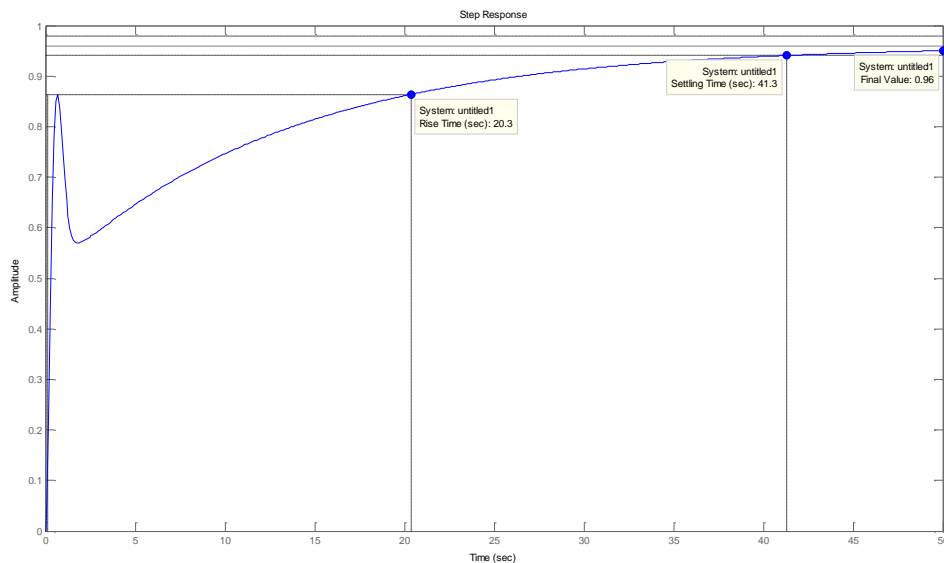


Figura. 3. 47 Respuesta a una señal escalón en lazo cerrado del compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un compensador doble en adelante

La figura 3.45 muestra cada uno de los controladores junto al compensador atraso adelante que cumple con la teoría de control. Por otro lado la fase del compensador es de 62.5° a 3.73 rad/seg como se muestra en la figura 3.46, esta es la fase deseada para el problema planteado. En cuanto a la figura 3.47 los resultados son los siguientes.

Tiempo de subida 20.3 segundos

Tiempo de establecimiento 41.3 segundos

3.2.8 Simulación del compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un doble compensador en adelante

La simulación se la realizo en Simulink de Matlab y se muestra en la figura 3.48, donde la entrada tiene un generador de onda cuadrada con una amplitud de 0.2 radianes y una frecuencia de 0.008 Hertz, adicionalmente la señal de entrada se la desplaza 0.1 en sentido vertical. Su salida se la monitorea a través de un scope donde se registra las gráficas del ángulo de elevación junto a la señal de referencia, como se ve en la figura 3.49, además se suma un desplazamiento a la salida del compensador para alinear la posición del ángulo de elevación con la señal del generador. El ángulo del pitch tiene un error de 9% y se demora mucho tiempo en actuar frente a un cambio de posición de la señal de referencia. Por otro lado la velocidad el rotor de figura 3.50 varía mucho en cada cambio de posición de la señal de referencia.

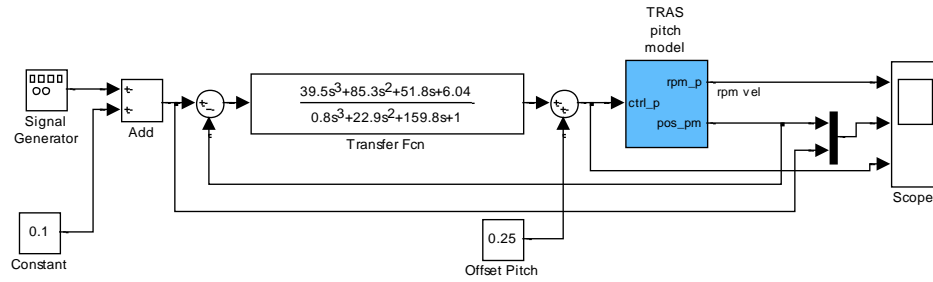


Figura. 3. 48 Sistema de control en lazo cerrado para el compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un compensador doble en adelante

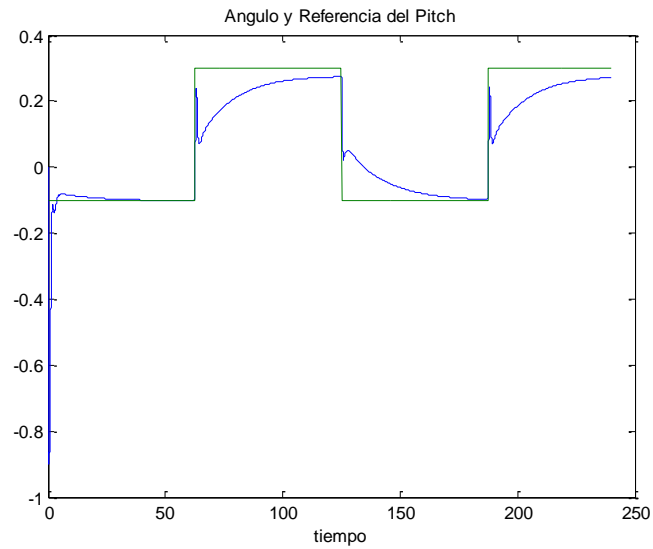


Figura. 3. 49 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un compensador doble en adelante

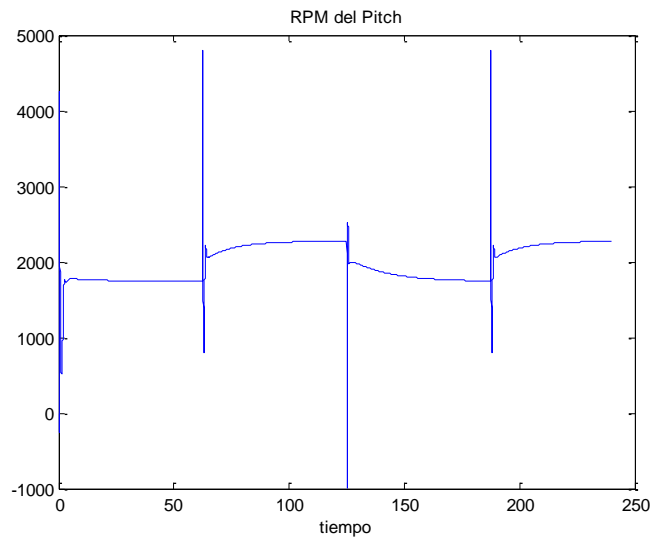


Figura. 3. 50 Velocidad rotacional del pitch del compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un compensador doble en adelante

Del diseño de compensadores atraso adelante hechos anteriormente se puede concluir que la red de atraso de fase mejora las características de régimen transitorio y permanente, mientras que la red de adelanto resulta difícil de compensar por bode debido a las características del sistema, disminuyendo los resultados esperados. Por otro lado, al colocar una red en atraso junto con una doble red en adelanto mejora las características de régimen transitorio y margen de fase.

3.4 CONTROLADOR PID

3.4.1 Compensador PID mediante la respuesta en frecuencia

Es el compensador más usado en la industria por ser el más robusto en muchas aplicaciones, su diagrama se muestra en la figura 3.51.

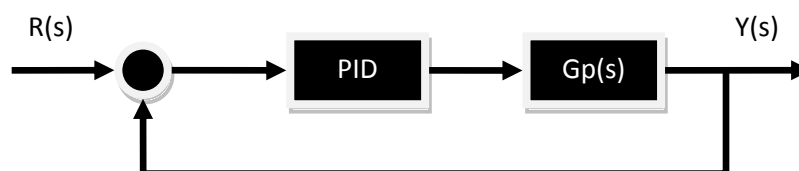


Figura. 3. 51 Diagrama de bloques PID

El controlador PID tiene tres acciones que son: proporcional (P), integral (I) y derivativa (D). La función de transferencia del PID está dada por:

$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Como se describe, el término integral es semejante a la fase en atraso y la parte derivativa es semejante a la fase en adelanto de ahí que el término integral contribuye al efecto de baja frecuencia y el término derivativo contribuye a efectos de alta frecuencia. El diagrama de bode de esta combinación se muestra en la figura 3.52.

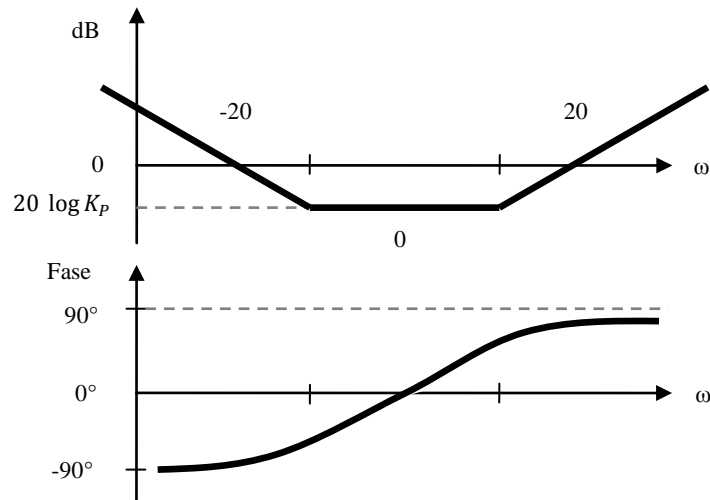


Figura. 3. 52 Diagrama de Bode del controlador PID

Note la similitud del diagrama de Bode del compensador PID con el de la figura 3.34 que es el diagrama de Bode del compensador atraso adelanto. De allí vemos que el compensador PID tiene la forma del compensador atraso adelanto, con tres parámetros que se pueden escoger.

Para el diseño analítico del controlador PID se asume que el compensador pasa por el punto $1 \mid \underline{-180^\circ + \varphi_m}$, del diagrama de Nyquist, donde ω_1 es la frecuencia donde ocurre el margen de fase φ_m .

$$G_c(j\omega_1)G_p(j\omega_1) = 1 \mid \underline{-180^\circ + \varphi_m}$$

El ángulo de $G_c(j\omega_1)$ es denotado por θ

$$\theta = \arg G_c(j\omega_1) = -180^\circ + \varphi_m - \arg G_p(j\omega_1)$$

Donde

$$K_p + j \left(K_D \omega_1 - \frac{K_I}{\omega_1} \right) = |G_c(j\omega_1)| (\cos \theta + j \sin \theta)$$

Así

$$|G_c(j\omega_1)| = \frac{1}{|G_p(j\omega_1)|}$$

Igualando la parte real tenemos

$$K_P = \frac{\cos \theta}{|G_P(j\omega_1)|}$$

Y también igualando la parte imaginaria produce

$$K_D \omega_1 - \frac{K_I}{\omega_1} = \frac{\sin \theta}{|G_P(j\omega_1)|}$$

$$K_D = \frac{\sin \theta}{\omega_1 |G_P(j\omega_1)|} + \frac{K_I}{\omega_1^2}$$

Los valores de K_D y K_I son dependientes el uno del otro. Si K_I se hace más grande el valor de K_D también será más grande. Dos efectos se pueden ver al hacer más grande K_I . Primero, más retraso se introduce en el sistema: así, el tiempo de respuesta también se presentarán con más sobre pico y tendrá un tiempo de establecimiento más largo. El segundo efecto es que el sistema se convertirá en condicionalmente estable, como se muestra en la figura 3.53. En este diagrama de Nyquist, el retraso de fase añadido a bajas frecuencias es suficiente para hacer que el diagrama cruce el eje a -180° en dos puntos donde la magnitud de la función compensada en lazo abierto es mayor que la unidad. Hay que tener en cuenta, que el sistema sigue siendo estable, pero que, una reducción de la ganancia del lazo o un incremento en la ganancia del lazo hará que el sistema se vuelva inestable. Este tipo de sistema se llama condicionalmente estable.

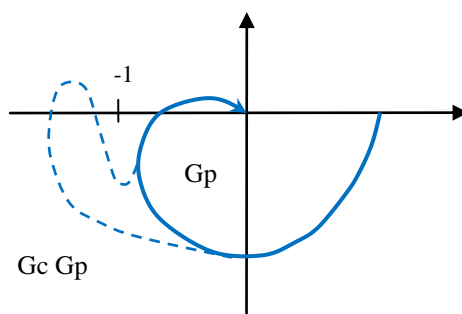


Figura. 3. 53 Diagrama de Nyquist del sistema condicionalmente estable

Las especificaciones de tiempo de establecimiento y margen de fase puede ser expresado mediante.

$$\omega_1 = \frac{8}{T_s \tan \varphi_m}$$

3.4.2 Procedimiento para el diseño de un compensador PID

Diseñar un compensador PID para el sistema aerodinámico TRAS que tenga un tiempo de establecimiento de cuatro segundos con un margen de fase de cincuenta grados.

Los datos del problema son:

$$\varphi_m = 50^\circ$$

$$T_s = 4 \text{ seg}$$

Se halla la frecuencia ω_1

$$\omega_1 = \frac{8}{4 * \tan 50^\circ}$$

$$\omega_1 = 1.68$$

De la función de transferencia del pitch del sistema aerodinámico TRAS se obtiene la magnitud y la fase a la frecuencia ω_1

$$G_p(j\omega_1) = \frac{12.81}{(j\omega_1)^3 + 2.04(j\omega_1)^2 + 4.16(j\omega_1) + 3.22}$$

$$G_p(j\omega_1) = -2.82 - 2.51j$$

$$|G_p(j\omega_1)| = 3.78 \quad \angle G_p(j\omega_1) = -138.41^\circ$$

El ángulo θ es

$$\theta = -180^\circ + \varphi_m - \arg G_p(j\omega_1)$$

$$\theta = -180^\circ + 50^\circ - (-138.41^\circ) = 8.41^\circ$$

Halla K_P

$$K_P = \frac{\cos \theta}{|G_p(j\omega_1)|}$$

$$K_P = \frac{\cos 8.41}{3.78} = 0.26$$

La acción de estabilización del controlador puede ser entonces dividido entre el termino integral y el termino derivativo. Si K_I se escoge grande K_D debe ser mucho más grande. Por lo tanto K_I se escoge 0.5 así K_D es:

$$K_D = \frac{\sin \theta}{\omega_1 |G_P(j\omega_1)|} + \frac{K_I}{\omega_1^2}$$

$$K_D = \frac{\sin 8.41}{1.68 * 3.78} + \frac{0.5}{1.68^2} = 0.2$$

Entonces la función de transferencia del compensador PID será

$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

$$G_C(s) = 0.26 + \frac{0.5}{s} + 0.2 s$$

El proceso de diseño del compensador PID se lo realizo en el programa C_PID.m¹² de Matlab y se obtuvieron los siguientes resultados.

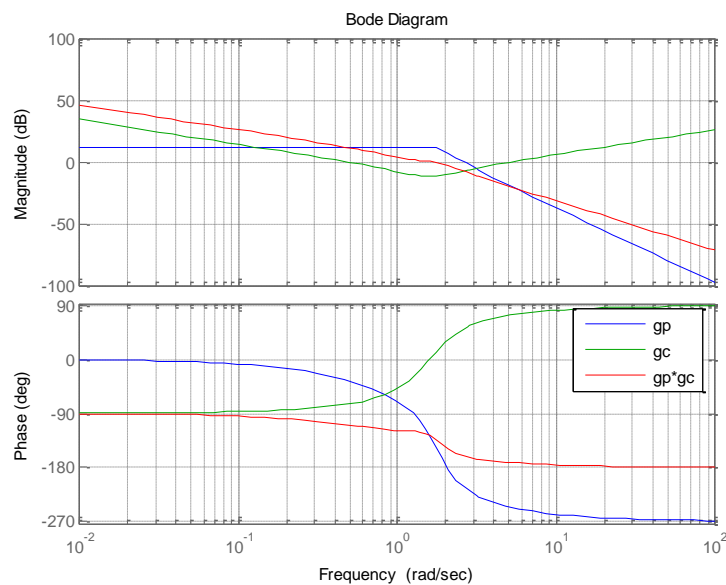


Figura. 3. 54 Diagrama de bode del compensador PID

¹² Véase anexo A1.2.13 página 165

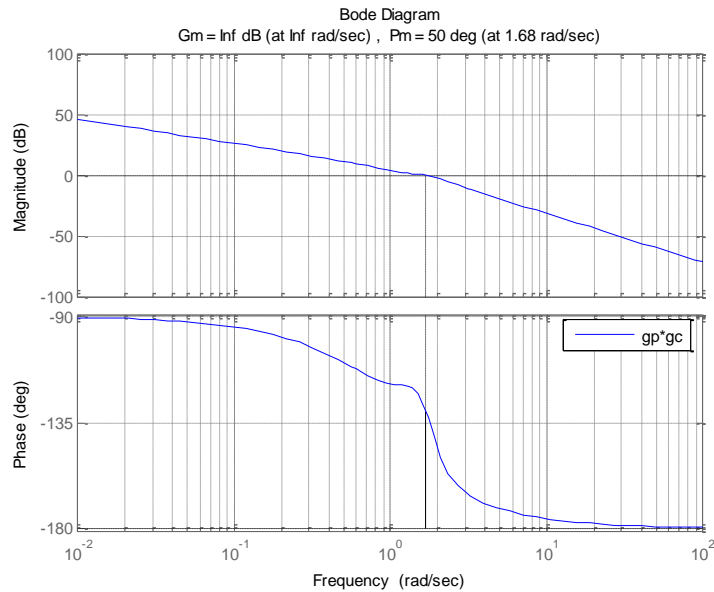


Figura. 3. 55 Margen de fase y ganancia del compensador PID

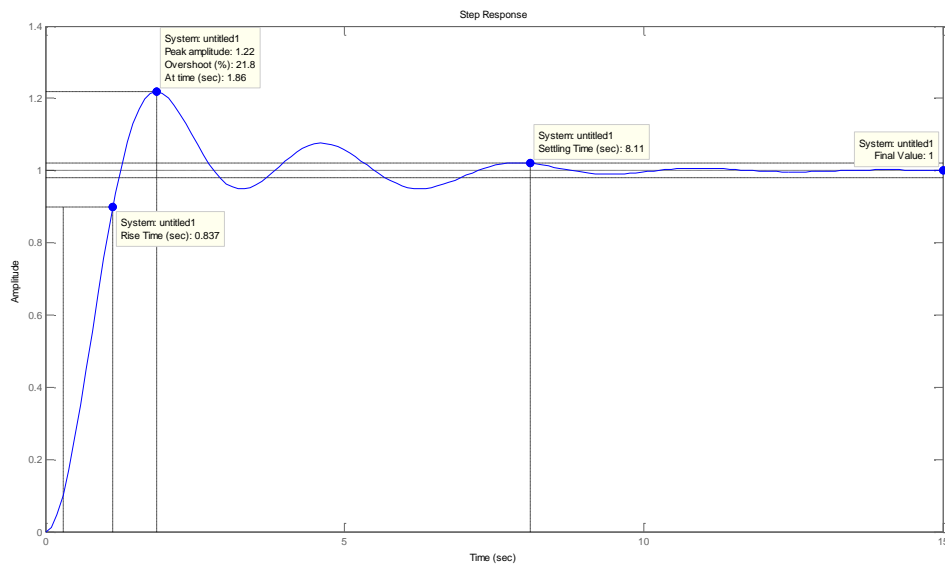


Figura. 3. 56 Respuesta a una señal escalón en lazo cerrado del compensador PID

La figura 3.54 muestra el comportamiento del compensador PID, cumpliendo con lo que dice la teoría de control, su fase como se aprecia en la figura 3.55 es de 50° a 1.68 rad/seg que es la frecuencia ω_1 a la cual ocurre el margen de fase deseado. Los resultados del sistema a la señal escalón se ve en la figura 3.56 y son:

Tiempo de subida 0.837 segundos.

Tiempo pico 1.86 segundos.

Amplitud pico 1.22 con un sobrepico de 21.8%

Tiempo de establecimiento 8.11 segundos.

3.4.3 Simulación del compensador PID

La figura 3.57 tiene un bloque PID donde se coloca las constantes K_P , K_I , K_D del controlador, la entrada tiene un generador de onda cuadrada con una amplitud de 0.2 radianes y una frecuencia 0.025 Hertz, dicha señal es desplazada 0.1 en sentido vertical. Además se le suma un desplazamiento a la salida del compensador para alinear la posición del ángulo de elevación con la señal del generador. Los resultados de la simulación son captados a través del scope y se ve un excelente seguimiento del pitch a la señal de referencia como lo muestra la figura 3.58. También la velocidad rotacional no sufre sobrepicos y se mantiene estable como lo muestra la figura 3.59.

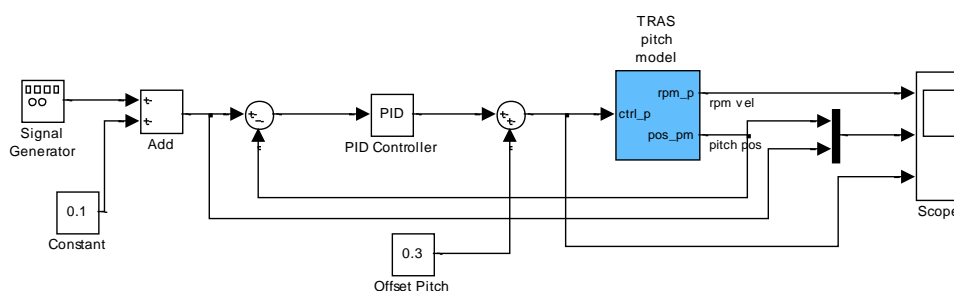


Figura. 3. 57 Sistema de control en lazo cerrado para el compensador PID

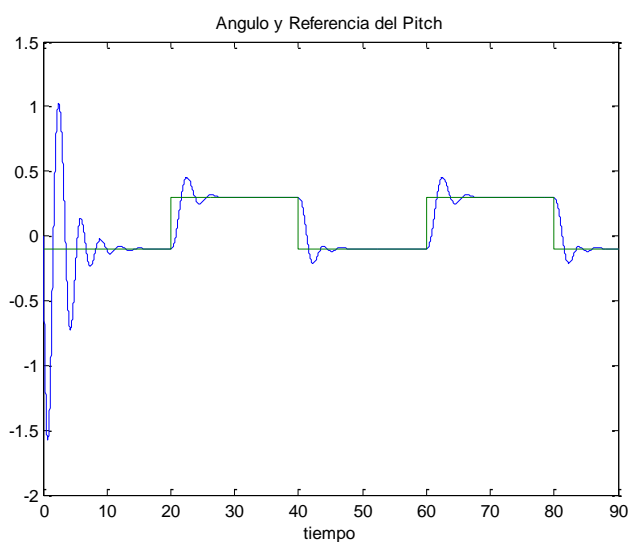


Figura. 3. 58 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el compensador PID

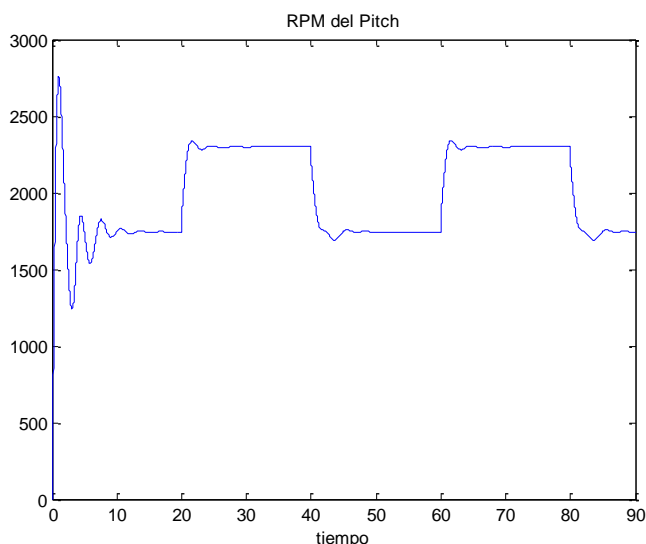


Figura. 3. 59 Velocidad rotacional del pitch del compensador PID

3.5 CONTROLADOR CON REALIMENTACIÓN COMPLETA DE ESTADOS LQR

3.5.1 Lugar geométrico de las raíces, ley de control y entrada de referencia para la realimentación completa de estados.

Es la técnica ampliamente usada y eficiente del diseño de sistemas de control lineal, esta técnica es el regulador cuadrático lineal (*linear quadratic regulator* LQR). La versión simplificada del problema LQR es encontrar el control tal que el índice de rendimiento es minimizado por el sistema. El problema será buscar la ubicación de las raíces del sistema retroalimentado por variable de estado que minimice el siguiente funcional:

$$J = \int_0^{\infty} [\rho z^2(t) + u^2(t)] dt$$

Para el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$z = C_1 x$$

Donde ρ balancea el efecto del error z con la acción de control u . La variable z , debe escogerse como un error que se quiere minimizar en conjunto con la acción de control, y dicho error se puede calcular como una combinación lineal de los estados de la planta. El control caro es el caso cuando $\rho \rightarrow 0$ y principalmente penaliza el uso del control de energía. Por otro lado el control barato es cuando $\rho \rightarrow \infty$ en este caso el control de energía

no es importante y el esfuerzo de control arbitrario puede ser usado por la ley de control óptimo.

Kailath (1980) demostró que los polos de lazo cerrado que minimizan J son las raíces estables de la ecuación:

$$1 + \rho G_o(s)G_o(-s) = 0$$

Esta ecuación se la define como el lugar de las raíces simétrico al eje imaginario con respecto al parámetro ρ . Note también que s y $-s$ afectan de la misma manera, por lo tanto, para cualquier raíz s_o de la ecuación, también habrá una raíz en $-s_o$. A este resultado se le llama lugar simétrico de las raíces (*symmetric root locus SRL*). Donde existe una simetría con respecto al eje imaginario. De este modo, se escoge los polos óptimos del lazo cerrado, en primer lugar seleccionando la matriz C_1 , que definen el error de seguimiento y que el diseñador desea mantener pequeño, y luego elegir ρ , que equilibra la importancia de este error de seguimiento contra el esfuerzo de control. La selección del conjunto de polos estables de la solución de la ecuación anterior resultan en polos deseados de lazo cerrado, que luego se puede utilizar en el cálculo de la ubicación de polos con la formula de Ackermann para obtener K .

$G_o(s)$ es la función de transferencia en lazo abierto de la entrada u del sistema al error z , que está definida como:

$$G_o(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = C_1(sI - A)^{-1}B = \frac{N(s)}{D(s)}$$

La formula de Ackermann se la determina como:

$$K = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(A)$$

Donde \mathcal{C} es la matriz de controlabilidad y esta tiene que ser invertible así:

$$\mathcal{C} = [B \ A * B \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]$$

Y $\alpha_c(A)$ es el polinomio característico que define las raíces deseadas de la ley de control, que se evalúa en la matriz A del sistema su expresión es la siguiente:

$$\alpha_c(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n I$$

La ley de control es una combinación lineal de las variables de estado y se expresa como el siguiente producto de vectores:

$$u = -Kx = -[K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Para el diseño de la ley de control se cuenta en todo momento con el valor de los estados de la planta a controlar y se determina la acción de control u como una combinación lineal de los estados. En el diagrama de bloques de la figura 3. 60 se puede apreciar de mejor manera. Se nota que a la entrada tiene una señal de referencia, esto se lo hace con el fin de estudiar la respuesta transitoria del diseño de lugar de raíces y para esto es necesario introducir una señal de referencia dentro del sistema.

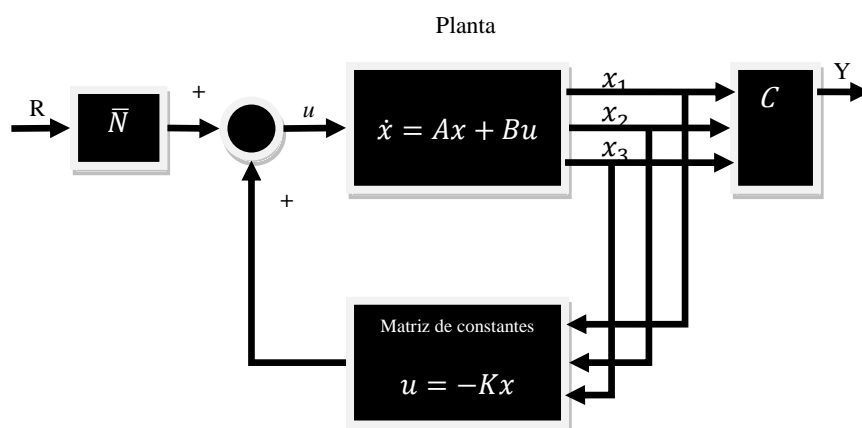


Figura. 3. 60 Entrada de referencia y ley de control con realimentación completa de estados

Para calcular la ganancia para la referencia de entrada se elabora el siguiente arreglo de matrices:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación puede ser resuelta para N_x y N_u así:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación de control con referencia de entrada es:

$$u = N_u r - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{N}_x r)$$

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + (N_u - \mathbf{K}\mathbf{N}_x)r$$

El coeficiente de r en paréntesis es una constante que puede ser calculada de antemano y se le asigna el símbolo \bar{N} .

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \bar{N}r$$

Donde

$$\bar{N} = N_u - \mathbf{K}\mathbf{N}_x$$

3.5.2 Simulación y procedimiento de diseño de un controlador con realimentación completa de estados LQR

El problema sería diseñar un controlador con realimentación completa de estados LQR para el pitch del sistema aerodinámico TRAS.

Como se tiene la función de transferencia del pitch no es necesario convertir las matrices del sistema, por lo tanto se halla la conjugada de la siguiente función del pitch.

$$G(s) = \frac{12.81}{s^3 + 2.04s^2 + 4.16s + 3.22}$$

Su conjugada es

$$G(-s) = \frac{-12.81}{s^3 - 2.04s^2 + 4.16s - 3.22}$$

Se halla el producto $G_o(s)G_o(-s)$ y se dibuja el lugar de las raíces como se observa en la figura 3.61.

$$G_o(s)G_o(-s) = \frac{-163.8}{s^6 + 4.14s^4 - 4.44e^{-0.16}s^3 + 4.13s^2 - 10.36}$$

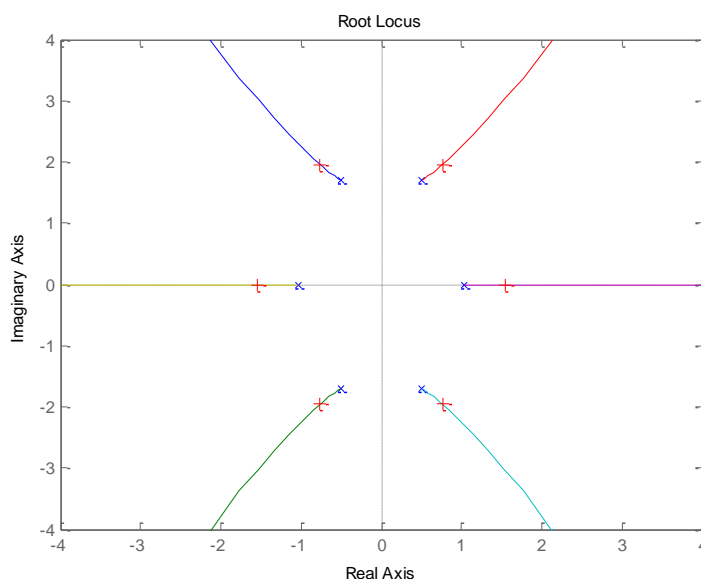


Figura. 3. 61 Lugar simétrico de las raíces para el pitch del TRAS

Para realizar este gráfico se utiliza el comando de Matlab *rlocus* que dibuja y calcula el lugar de las raíces, dicho diagrama se utiliza para analizar el ciclo de retroalimentación negativa unitaria y muestra las trayectorias de los polos en lazo cerrado. Este comando se ayuda de *rlocfind* que busca de manera interactiva la ganancia a partir de la raíz del diagrama del lugar geométrico de las raíces generado por *rlocus*. Con el comando *rlocfind* se pone el cursor en la ventana de gráfico y se escoge un punto en el lugar de las raíces existentes, este comando devuelve la ganancia asociada al punto seleccionado junto con todos los polos. Este procedimiento se lo realizó con el programa *LQRdiseno.m*¹³ de Matlab donde se obtuvo el siguiente resultado.

$$\text{Punto seleccionado} = -2.06 + 3.86i$$

$$k1 = 38.18$$

$$p = [-4.1; -2.07 + 3.86i; -2.07 - 3.86i; 2.07 + 3.86i; 2.07 - 3.86i; 4.1]$$

El vector *p* contiene todos los polos como resultado de la selección de gráfico de la figura 3.61 pero solo se necesitan los polos que se encuentran en el semiplano izquierdo del lugar geométrico de las raíces así:

$$pc = [-4.1; -2.07 + 3.86i; -2.07 - 3.86i]$$

¹³ Véase anexo A1.2.15 página 167

Para hallar el vector K se utiliza el comando *acker* que contiene el algoritmo de la formula de Ackermann, donde calcula la ganancia de la matriz de realimentación K .

$$K = \text{acker}(A, B, p_c)$$

Donde

$$A = [0 \ 1 \ 0; -3.11 \ -1.01 \ 0; 0 \ 0 \ -1.03]$$

$$B = [0; 0; 6100]$$

$$K = [4.42 \ 2.01 \ 0]$$

Ahora se calculan los valores N_x y N_u de la entrada de referencia

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.11 & -1.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.03 & 6100 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$N_x = 1e^3 * \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 1.483 \end{bmatrix}$$

$$N_u = [0.25]$$

$$\bar{N} = N_u - \mathbf{K}N_x$$

$$\bar{N} = 0.25 + [4.42 \ 2.01 \ 0] * 1e^3 * \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 1.483 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = 6.18$$

Con estos datos obtenidos se procede a realizar el diagrama de simulación en Simulink de Matlab. El tercer estado que se necesita del bloque de simulación del pitch se lo muestra en la figura 3.62, después de realizar ese cambio se guarda el modelo.

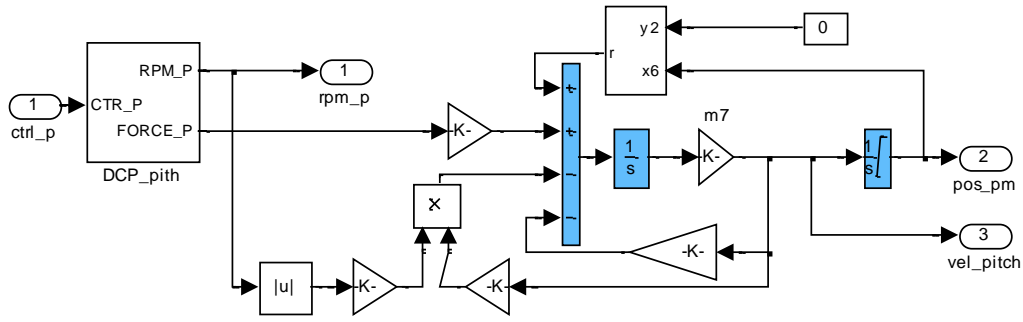


Figura. 3. 62 Diagrama del modelo del simulación con el tercer estado del pitch

Con el nuevo modelo se procede a realizar el diagrama de simulación que se muestra en la figura 3.63 donde se observa el bloque de simulación del pitch que tiene tres salidas, estas representan las tres variables de estado del sistema aerodinámico TRAS. Cada una de las salidas del bloque de simulación tiene ganancia menos uno y antes de ingresar a la matriz de ganancia K pasa por un multiplexor para finalmente retroalimentarse positivamente al bloque de simulación del pitch. A la salida se monitorean las tres variables de estado para ver su comportamiento en función de lo que ingresa a la entrada. Adicionalmente el diagrama cuenta con un generador de onda cuadrada con una amplitud de 0.2 rad/seg que representa el ángulo el cual va a desplazarse el vástago a una frecuencia de 0.05 Hertz, a esta señal se le suma una constante de 0.1 para que la misma se desplace ese valor hacia arriba. Esta señal desplazada es ingresada a través de un bloque de ganancia constante Nr que representa la entrada de referencia, la salida de este bloque ingresa a la entrada del bloque de simulación TRAS sumado a una constante de 2.21 para asegurar que el pitch siga a la señal de referencia y sirve para sincronizar las dos señales ingresadas.

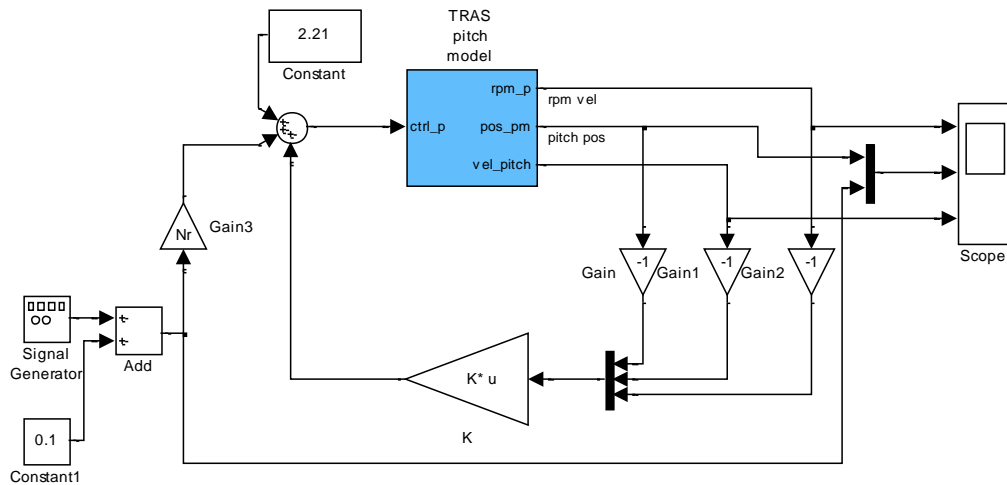


Figura. 3. 63 Diagrama de simulación del controlador con realimentación completa de estados LQR

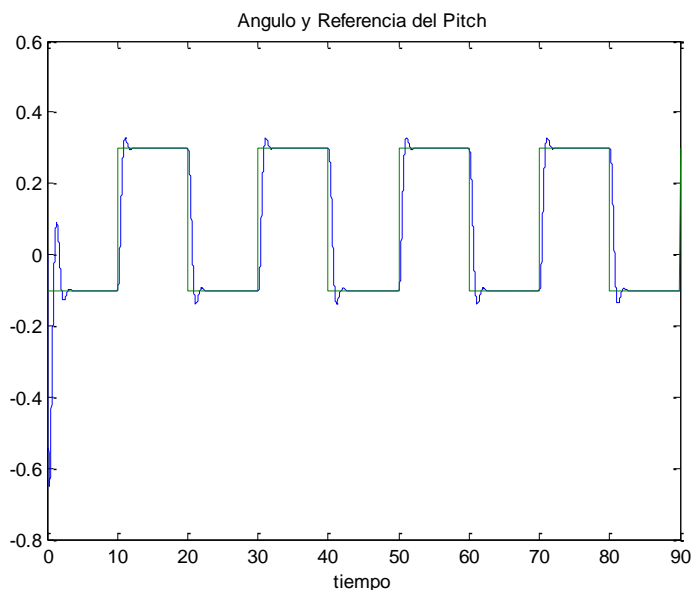


Figura. 3. 64 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el controlador con realimentación completa de estados LQR

En la figura 3.64 se muestra la referencia de entrada junto al ángulo de elevación y existe un perfecto seguimiento de la señal del generador de ondas. Al inicio se ve que tiene un pico que no tiene tanta influencia en el seguimiento de la onda cuadrada. Por otro lado se observa en la figura 3.65 la velocidad rotacional del motor del pitch para el controlador LQR, esta sigue la trayectoria de una onda cuadrada, con unos sobrepicos en cada cambio de posición.

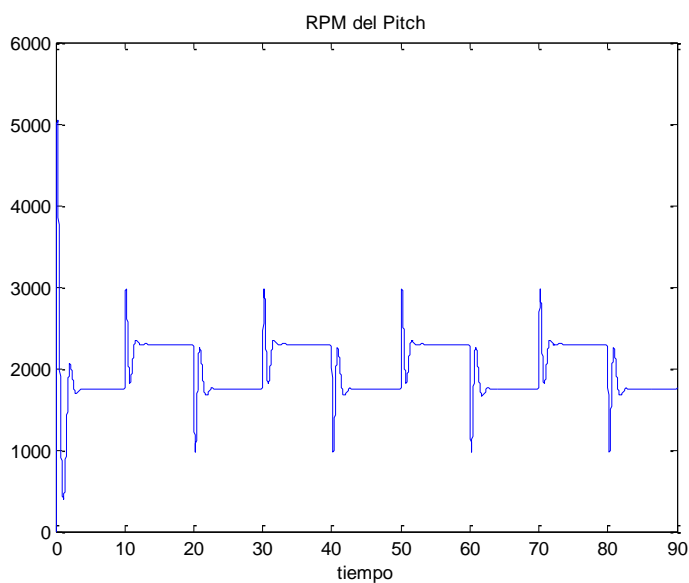


Figura. 3. 65 Velocidad rotacional del pitch para el controlador con realimentación completa de estados LQR

3.6 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN DE ESTADOS

3.6.1 Diseño del estimador de orden completo

Algunas plantas dinámicas no cuentan con todas las variables de estado para la implementación de la ley de control, para ello se construye un estimador u observador encargado de estimar los valores de las variables de estado x en cada instante de tiempo en función de la salida de la planta y que es la medición, y la acción de control u . El resultado del observador es la variable de estado estimada \hat{x} . En resumen un estimador realiza una simulación del modelo de la planta del sistema para determinar el valor de las variables de estado estimadas.

La ecuación de la planta real es:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Y la ecuación del estimador es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du$$

El error de estimación es $\tilde{x} \triangleq x - \hat{x}$ entonces la dinámica de este error del sistema está dada por

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}, \quad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$$

El error converge a cero para un sistema estable (A estable), pero no se tiene capacidad de influir en la tasa al que la estimación converge al estado de la situación real. Por otra parte, el error está convergiendo a cero a la misma tasa que la dinámica natural de A .

Considere la posibilidad de retroalimentación de la diferencia entre la salida medida y la estimada y la corrección del modelo continuo con esta señal de error. La ecuación de este sistema, que se muestra en la figura 3.66, es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \text{ Es la ecuación del estimador}$$

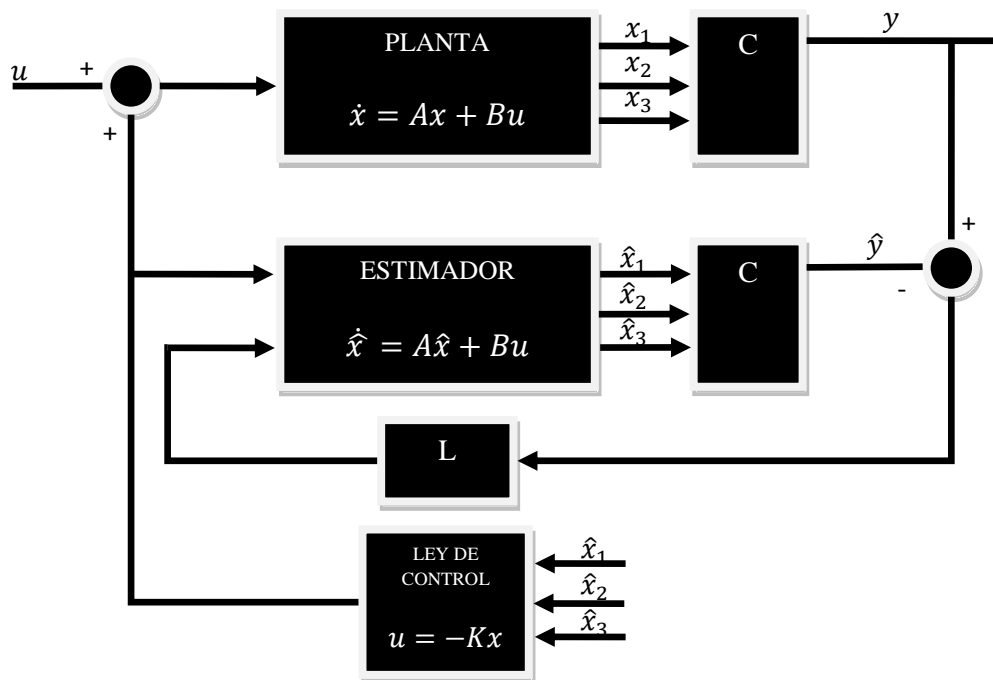


Figura. 3. 66 Diagrama de bloques en lazo cerrado del estimador

De la ecuación anterior L es un vector columna que se elegirá de tal manera que el error de estimación converja convenientemente, donde L es una ganancia proporcional así

$$L = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n]^T$$

La dinámica del error se obtiene restando la ecuación del estimador y la ecuación de la planta real, el procedimiento es el siguiente

$$\dot{\hat{x}} - \dot{x} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) - (Ax + Bu)$$

$$y = Cx$$

$$\dot{\hat{x}} - \dot{x} = A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x}) - Ax - Bu$$

$$\dot{\hat{x}} - \dot{x} = A\hat{x} + Bu + LCx - LC\hat{x} - Ax - Bu$$

$$\dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A - LC)\hat{x} + (LC - A)x$$

$$\dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A - LC)\hat{x} - (A - LC)x$$

$$\dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A - LC)(\hat{x} - x)$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

$(A - LC)$ Son los valores propios que definen los polos del sistema del estimador en donde el estimador debe ser mucho más rápido que el propio sistema, para ello es necesario situar los polos cinco veces más a la izquierda de los polos dominantes del sistema.

El error de estimación convergerá con una dinámica que estará dada por la ecuación característica:

$$\det[sI - (A - LC)] = 0$$

La ecuación característica deseada es:

$$\alpha_e \triangleq (s - \beta_1)(s - \beta_2) \cdots (s - \beta_n)$$

Donde β_i son las ubicaciones deseadas de los polos del estimador. Igualando las dos ecuaciones anteriores se obtiene los valores de L.

Si el sistema es observable se puede hallar todos los componentes de L. La matriz observable es la siguiente:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

La fórmula de Ackerman resuelve de manera rápida este problema, ya que los valores de una matriz son los mismos que los valores de la matriz traspuesta. En la fórmula de Ackerman hay que reemplazar la matriz A por su traspuesta, la matriz B por la matriz C traspuesta, y el vector K por el vector L traspuesto. De esta manera, la matriz que hay que invertir es la matriz observable traspuesta.

3.6.2 Simulación y procedimiento de diseño de un controlador con estimador de orden completo de estados

A continuación se explicara el diseño de un controlador con estimador de orden completo de estados para el sistema aerodinámico TRAS.

El procedimiento de diseño inicial es similar al regulador cuadrático lineal con realimentación completa de estados, después se calcula los polos del estimador, el vector L , y un arreglo de matrices para hallar el estimador de orden completo de estados. Además no hay que olvidar la introducción de la entrada de referencia.

Las matices que describen el ángulo de elevación del sistema aerodinámico TRAS son:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.11 & -1.01 & 0 \\ 0 & 0 & -1.03 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6100 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$D = [0]$$

La función de transferencia del pitch es:

$$G(s) = \frac{12.81}{s^3 + 2.04s^2 + 4.16s + 3.22}$$

Su conjugada es

$$G(-s) = \frac{-12.81}{s^3 - 2.04s^2 + 4.16s - 3.22}$$

Se halla el producto $G_o(s)G_o(-s)$ y se dibuja el lugar de las raíces como se ve en la figura 3.61. Este grafico es realizado por el comando *rlocus* de Matlab donde se observa el lugar geométrico de las raíces y junto al comando *rlocfind* se halla un punto en dicho lugar donde se obtiene una ganancia junto con sus polos.

$$G_o(s)G_o(-s) = \frac{-163.8}{s^6 + 4.14s^4 - 4.44e^{-0.16}s^3 + 4.13s^2 - 10.36}$$

En el programa `Estimacion_e.m`¹⁴ de Matlab contiene todo el procedimiento de diseño del controlador con estimador completo de estados y los resultados son los siguientes

El punto seleccionado en la gráfica es $-1.53 - 0.04i$

$k1 = 0.21$

$p = [-0.76 + 1.95i; -0.76 - 1.95i; -1.53; 0.76 + 1.95i; 0.76 - 1.95i; 1.53]$

Este vector contiene los polos seleccionados de la figura 3.61, pero solo se necesitan los polos que se encuentran en el semiplano izquierdo, así se obtiene p_c

$p_c = [-0.76 + 1.95i; -0.76 - 1.95i; -1.53]$

El vector K se halla a partir del comando `acker` de Matlab

$K = \text{acker}(A, B, p_c)$ el resultado es $K = [0.03 \quad 0.12 \quad 0]$

Para calcular la ganancia del estimador L es necesario que los polos del estimador sean cinco veces más rápidos que los polos dominantes del sistema. También es necesario transponer las matrices A y C al aplicar el comando `acker` de Matlab. El resultado de este paso se transpone y se halla el vector L , así se tiene:

$p_e = 5 * p_c$

$p_e = [-3.79 + 9.76i; -3.79 - 9.76i; -7.6]$

$L_t = \text{acker}(A', C', p_e)$

$L_t = 1.0e+005 * [0.0001 \quad 0.0014 \quad 3.2318]$

$L = L_t'$

$L = 1.0e+005 * [0.0001; \quad 0.0014; \quad 3.2318]$

El arreglo para hallar las matrices del estimador es

¹⁴ Véase anexo A1.2.17 página 169

$$Ae = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.11 & -1.01 & 0 \\ 0 & 0 & -1.03 \end{bmatrix}$$

$$Be = [B \quad L] = 1.0e + 005 * \begin{bmatrix} 0 & 0.0001 \\ 0 & 0.0014 \\ 0.0610 & 3.2318 \end{bmatrix}$$

$$Ce = eye(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$De = zeros(3,2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El cálculo de la entrada de referencia o seguidor es

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.11 & -1.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.03 & 6100 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$N_x = 1e^3 * \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 1.483 \end{bmatrix}$$

$$N_u = [0.25]$$

$$\bar{N} = N_u - \mathbf{K}N_x$$

$$\bar{N} = 0.25 + [0.03 \quad 0.12 \quad 0] * 1e^3 * \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 1.483 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = 0.52$$

El diagrama de simulación se realiza con estos datos. Con respecto al tercer estado del bloque de simulación del TRAS, hay que tener en cuenta de cambiarlo y guardar los cambios. La figura 3.62 muestra de donde sale la velocidad del pitch que es el tercer estado del sistema aerodinámico TRAS. Por otro lado la figura 3.67 muestra otra forma de representar al estimador donde no se encuentra el bloque L, porque está implícito dentro del bloque del estimador de estados en $Be = [B \quad L]$.

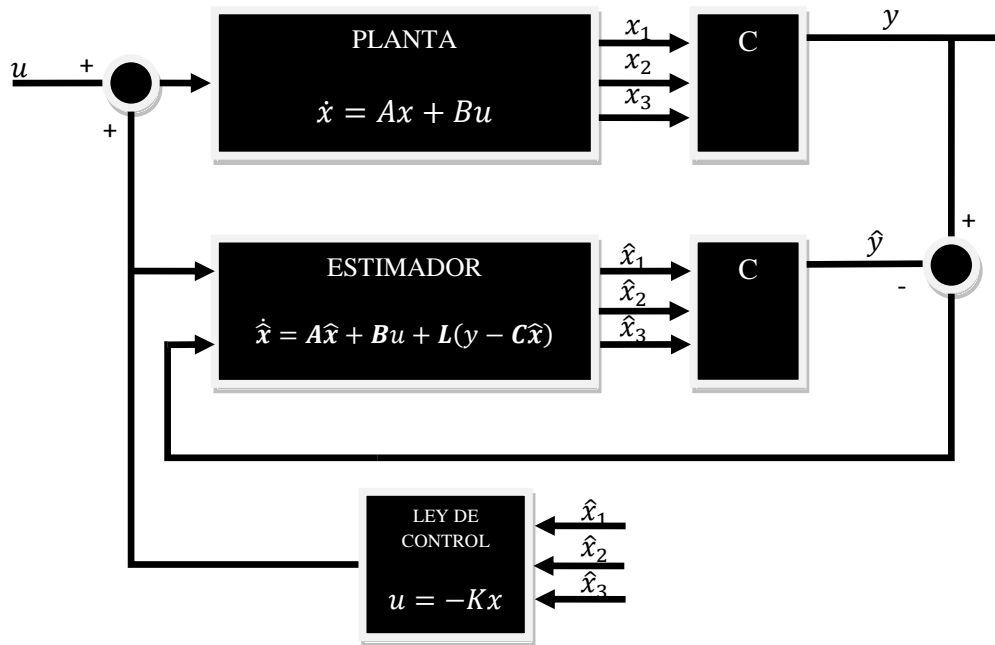


Figura. 3. 67 Diagrama de bloques del estimador sin el bloque L

El diagrama de bloques de la figura 3.67 es la que se implementa en Simulink de Matlab y dicha implementación se observa en la figura 3.68. Donde se puede apreciar el bloque de espacio de estados que representa al bloque del estimador de estado y dentro de este bloque se encuentran las matrices del estimador. A la salida de este bloque estimador se encuentran las tres variables de estado estimadas que pasan cada una por un bloque de ganancia menos uno y posteriormente se integra en un multiplexor para ingresar a la matriz de ganancia de K, la salida de este bloque ingresa al estimador y a la entrada del bloque del modelo del Pitch. Otra entrada del estimador proviene del la diferencia entre la posición del pitch del la salida del modelo de simulación TRAS y la posición estimada de la salida del bloque estimador, esta diferencia se retroalimenta y ingresa al bloque estimador de estado.

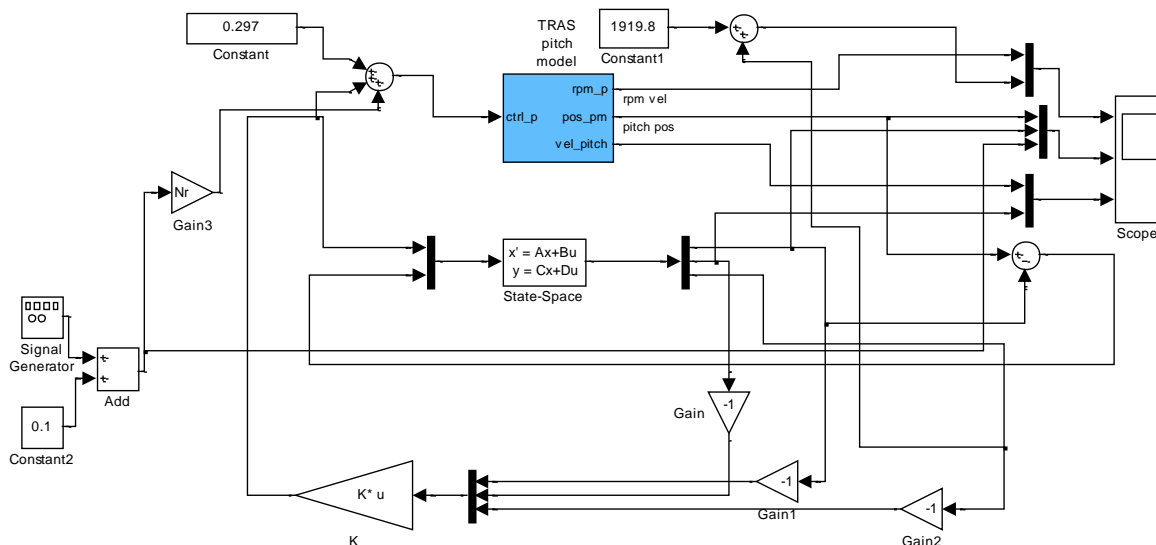


Figura. 3. 68 Diagrama de simulación del controlador con estimador de orden completo de estados

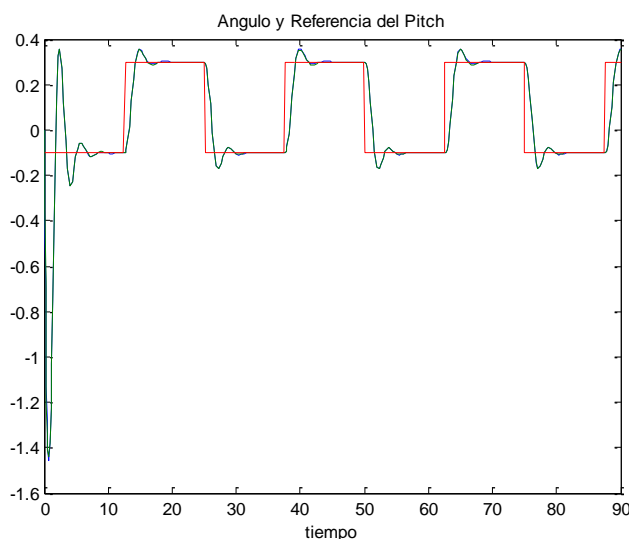


Figura. 3. 69 Ángulo estimado y simulado del pitch para el controlador con estimador de orden completo de estados

La entrada del modelo del pitch es la suma de varias entradas. En primer lugar, ingresa una constante de 0.297 para sincronizar el pitch con la señal de referencia. En segundo lugar, ingresa la salida del vector de ganancia K , que representa la ley de control. Y en último lugar, se tiene un generador de onda cuadrada con una frecuencia de 0.04 Hertz y una amplitud de 0.2 rad/seg, a esta señal se suma un desplazamiento de 0.1 hacia arriba. Esta señal desplazada pasa a través de un bloque de ganancia constante Nr que previamente fue calculado e ingresando a la entrada del bloque del modelo de simulación del pitch.

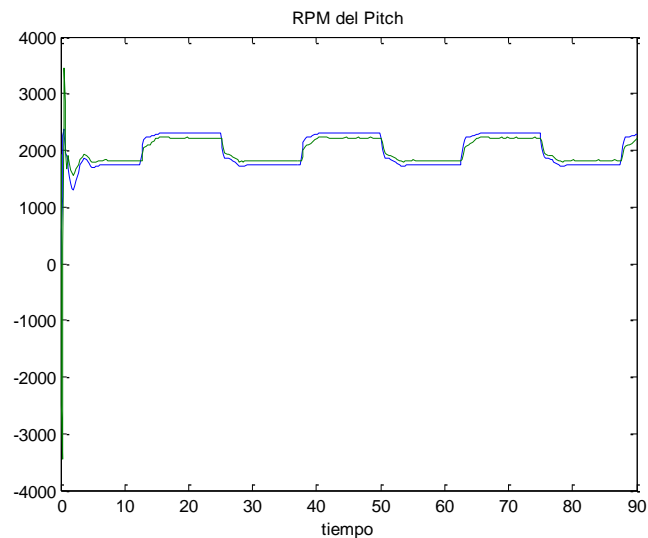


Figura. 3. 70 Velocidad rotacional estimado y simulado del pitch para el controlador con estimador de orden completo de estados

El ángulo estimado y el ángulo de elevación del TRAS se muestran en la figura 3.69 donde se puede apreciar que el pitch del sistema aerodinámico TRAS y el ángulo estimado son los mismos, porque se estima el ángulo que va a tener el pitch. Al mismo tiempo estas señales siguen la onda cuadrada del generador. En cambio en la figura 3.70 se ve la velocidad rotacional del pitch estimada y simulada para el controlador con estimador y se observa que existe una diferencia entre las dos. Esta diferencia de la velocidad rotacional estimada y simulada es por la variable de desviación que existe en la estimación de la velocidad entre el valor de la velocidad rotacional estimada más una constante de 1919.8, este proceso es necesario para ubicar la gráfica de la velocidad rotacional estimada junto a la gráfica de la velocidad rotacional que sale del bloque del modelo de simulación del pitch y así comparar las dos señales.

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

4.1 ASPECTOS PRELIMINARES PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS CONTROLADORES EN EL TRAS

Para observar el comportamiento de cada uno de los controladores en la práctica, es importante hacer unos ajustes al sistema aerodinámico TRAS. Al construir un sistema que opera en tiempo real es necesario crear un modelo en Simulink de un sistema de control que consiste de un controlador de dispositivo TRAS y otros bloques que se escogen de la librería de Simulink. También se construye un archivo ejecutable dentro del RTWT, para ello se pulsan las teclas Ctrl+B o se va al menú desplegable *Tools* luego a *Real Time Workshop* y se da un clic en *Build Model*. Además para iniciar el código en tiempo real se va al menú desplegable *Simulation* luego en *Start real time code*. De esta manera el sistema se ejecuta en tiempo real.

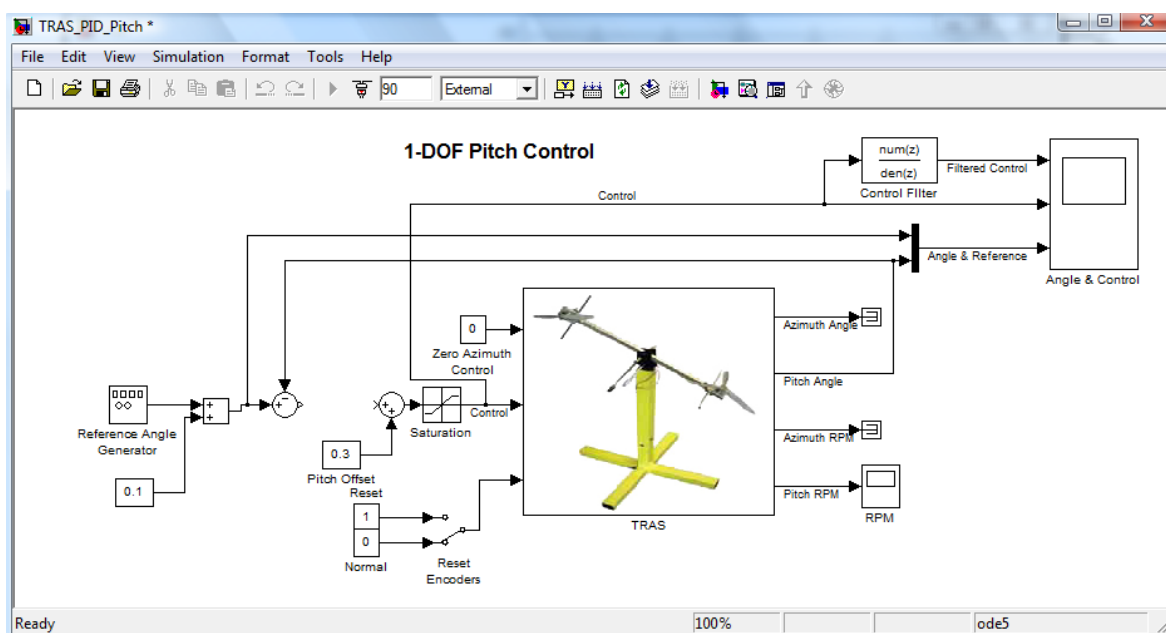


Figura. 4. 1 Modelo en Simulink de la implementación previa del pitch

La forma más sencilla de crear un modelo de un sistema de control en Simulink es usar una plantilla incluida en la ventana de control del TRAS. Por ejemplo se da un clic en el botón PID pitch que es un controlador demo de la ventana de control del TRAS, a continuación se guarda el modelo con otro nombre. Con este paso realizado se tiene total libertad para modificar o desarrollar un controlador para el pitch. En la figura 4.1 se muestra los bloques básicos necesarios para cualquier sistema de control que se desee

implementar. Adicionalmente en la figura se ve un Offset pitch que es una constante necesaria para sincronizar la señal del pitch con la señal del generador de ondas, esta constante varía en cada controlador.

Para almacenar todos los datos que generan las graficas en tiempo real se sigue el siguiente procedimiento. Al dar doble clic en el *scope* rotulado con *Angle & Control* aparece la ventana donde se grafica el ángulo, control, y el control filtrado. En la parte superior izquierda se encuentra el botón *params*, al hacer clic en ese botón y posteriormente en la pestaña *Data history* se presenta la ventana mostrada en la figura 4.2.

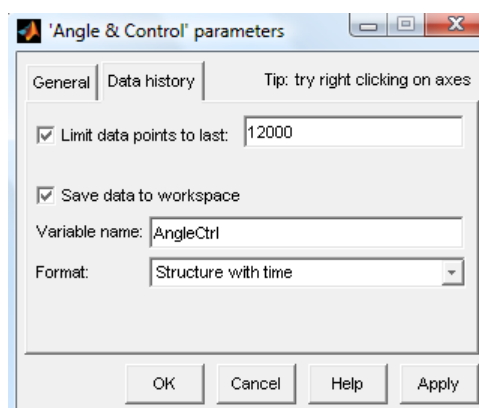


Figura. 4. 2 Variable y formato del historial de datos de la grafica

Así pues, en la figura 4.2 hay que colocar un visto en las cajas de verificación de *Limit data points to last* y en *Save data to workspace*. Es importante tener en cuenta el nombre de la variable, ya que esta tiene todos los datos para reproducir y guardar las graficas realizadas en tiempo real del área de trabajo. Esta variable debe tener el formato *Structure with time* para después realizar un programa en Matlab que permita visualizar las graficas en cualquier momento sin la necesidad de estar junto a la planta física.

Una vez que el sistema de control diseñado en Simulink se haya ejecutado completamente se procede a tomar los datos del área de trabajo del Matlab, como se muestra a continuación

```
tiempo1=AngleCtrl.time;
```

```
anglereference1=AngleCtrl.signals(3).values;
```

```
rpm1=RPM.signals.values;
```

En cuanto a guardar los datos que se encuentran en el espacio de trabajo al directorio actual de Matlab se usa el comando *save* junto a una variable, el código es el que sigue

```
save tiempo1
```

```
save anglereference1
```

```
save rpm1
```

Ahora para visualizar los datos almacenados en el directorio actual se usa el comando *load* encargado de transferir los datos guardados anteriormente a la misma variable y usarla en el área de trabajo, el código es el siguiente:

```
load tiempo1
```

```
load anglereference1
```

```
load rpm1
```

Para graficar el ángulo y referencia en una figura y la velocidad de rotación del motor principal en otra figura se usa el siguiente código

```
figure(1)
```

```
plot(tiempo1,anglereference1)
```

```
title('Angulo y Referencia')
```

```
xlabel('tiempo')
```

```
figure(2)
```

```
plot(tiempo1,rpm1)
```

```
title('RPM del Pitch')
```

```
xlabel('tiempo')
```

Con estos aspectos preliminares en mente se procede a realizar la implementación de todos los diseños hechos en el capítulo tres con sus respectivos resultados

4.2 CONTROLADOR EN ADELANTO

La implementación del sistema de control en adelanto para el sistema aerodinámico TRAS se muestra en la figura 4.3, en donde se requiere desplazar el pitch un ángulo de 5.73° o lo que es lo mismo 0.1 rad/seg . Para observar el desplazamiento varias veces se genera una onda cuadrada con el desplazamiento antes mencionado a una frecuencia de 0.04 Hertz y con un desplazamiento vertical de 0.1 . Las salidas son monitoreadas con un scope y se muestran en las figuras 4.4 y 4.5. Estos datos implementados en el dispositivo junto con el diagrama hecho en Simulink son los mismos que los diseñados en el capítulo tres y hace posible comparar el desplazamiento real con el simulado.

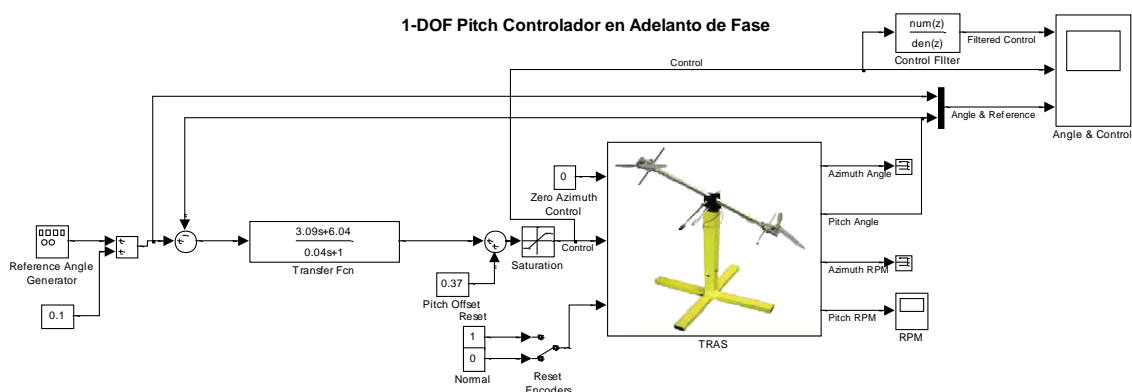


Figura. 4. 3 Implementación del sistema de control en lazo cerrado para el compensador en adelanto de fase

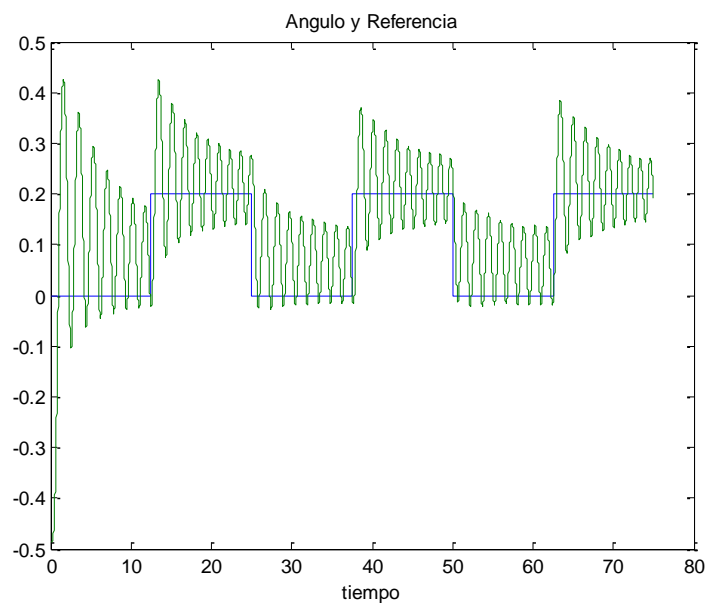


Figura. 4. 4 Referencia de entrada y ángulo del pitch del compensador en adelanto de fase implementado

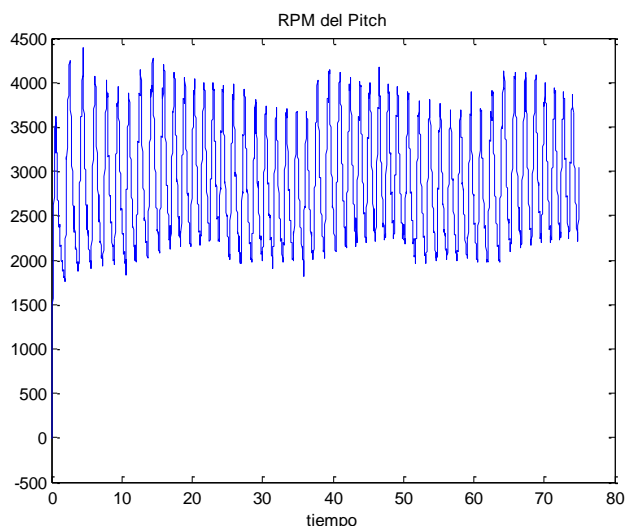


Figura. 4. 5 Velocidad rotacional del pitch del compensador en adelanto de fase implementado

Se muestra el ángulo y la referencia del pitch en las figuras 3.8 y 4.3 donde el sistema es difícil de controlar con el diseño de respuesta en frecuencia de un controlador en adelanto de fase, debido a las características que el sistema presenta. Por otro lado en la figura 3.9 se observa la oscilación de la velocidad rotacional del pitch en un rango de -65000 a 40000 rpm aproximadamente en la parte simulada mientras que en la parte práctica en la figura 4.5 se observa lo mismo pero en el rango de 2000 y 4000 rpm esta reducción es por tiempo de respuesta del motor y por el bloque de saturación que se coloca después del bloque de control. No obstante, el controlador en adelanto de fase diseñado no logra que el pitch siga la señal de referencia.

4.2.1 Doble compensador en adelanto de fase

Con el fin de mejorar la respuesta anterior se procede a implementar un compensador doble que se muestra en la figura 4.6, en donde se va a desplazar 5.73° el pitch con un generador de onda cuadrada para que se note el cambio, a una frecuencia de 0.04 Hertz. La señal inyectada al controlador está desplazada 0.1 hacia arriba y la salida de la planta está conectada a un scope para observar el comportamiento de la misma. En la figura 4.7 se ve que el pitch intenta seguir la señal de referencia y se demora un poco en estabilizarse. Además comparando con la figura 3.16 no existe un sobrepico en cada cambio de posición. En cambio la velocidad rotacional del pitch de la figura 3.17 tiene cambios súbitos de velocidad entre -15000 hasta casi 20000 rpm, mientras que la figura 4.8 se observa un rango de 2000 a 3500 aproximadamente, encontrándose dentro de los parámetros normales y no exige mucho al motor del pitch.

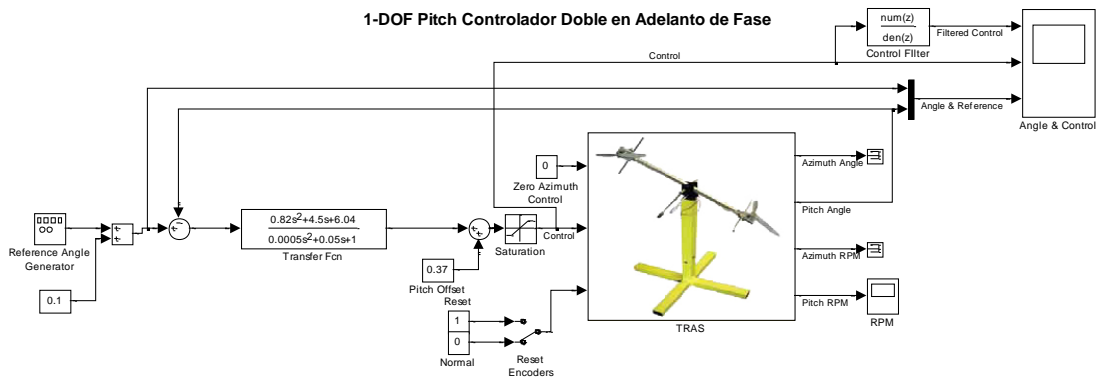


Figura. 4. 6 Implementación del sistema de control en lazo cerrado para el doble compensador en adelante

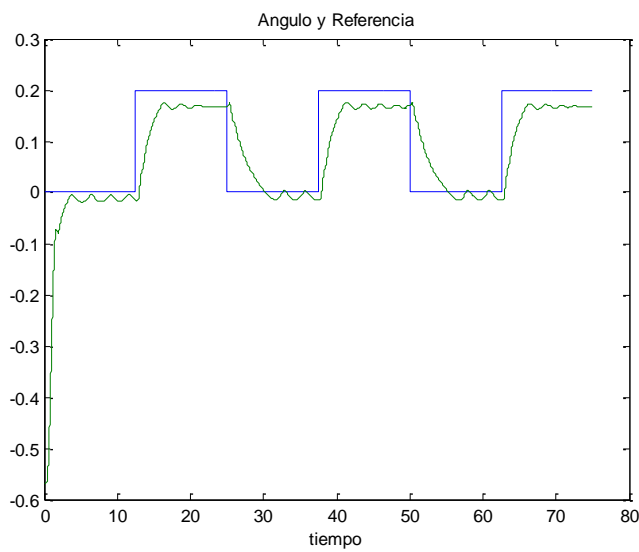


Figura. 4. 7 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el doble compensador en adelante implementado

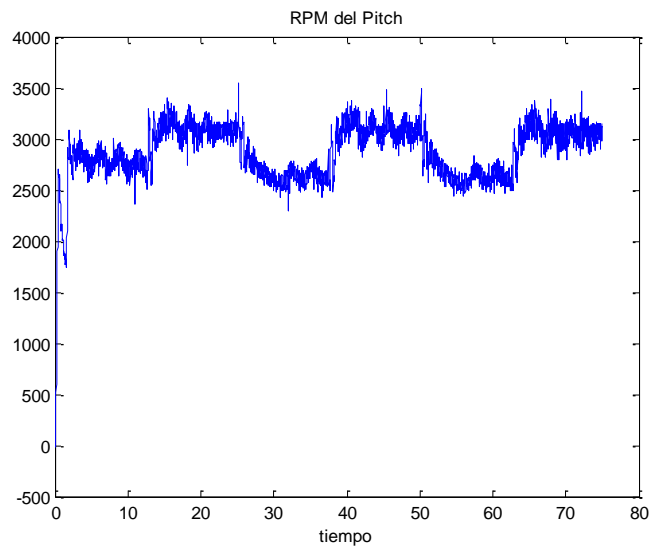


Figura. 4. 8 Velocidad rotacional del pitch del doble compensador en adelante implementado

4.3 CONTROLADOR EN ATRASO

Para la implementación de un compensador en retraso de fase se procede a realizar lo que se muestra en la figura 4.9 donde se desea que el pitch del sistema aerodinámico TRAS se desplace 0.2 radianes es decir, 11.46 grados, para ello se utiliza un generador de onda cuadrada con una frecuencia de 0.007 Hertz. La señal inyectada tiene un desplazamiento de 0.1 en el eje vertical y su comportamiento se observa en las figuras 4.10 y 4.11.

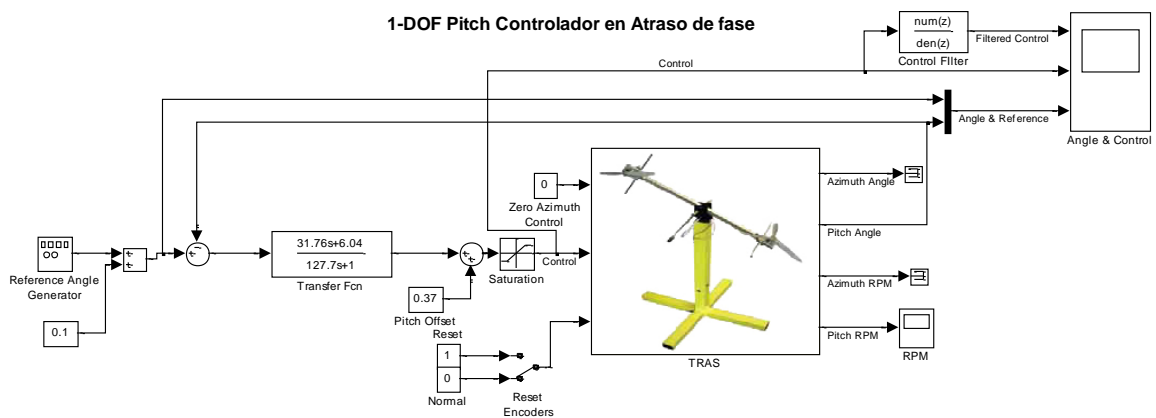


Figura. 4. 9 Implementación del sistema de control en lazo cerrado para el compensador en atraso de fase

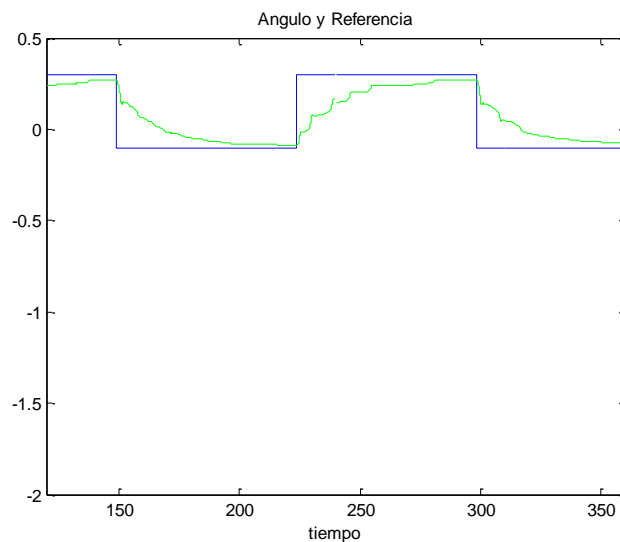


Figura. 4. 10 Referencia de entrada y ángulo del pitch del compensador en atraso de fase implementado

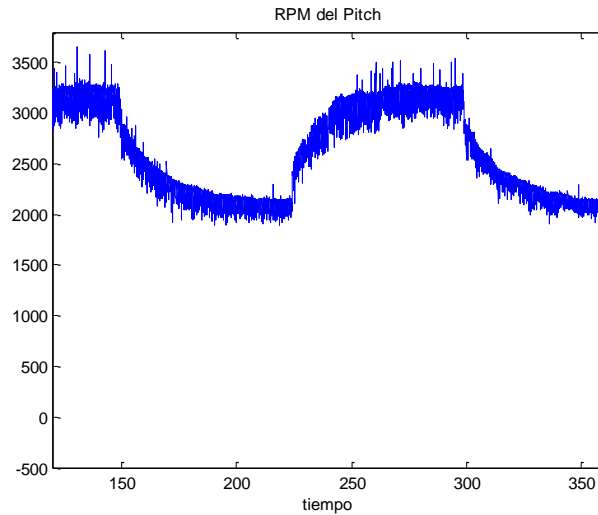


Figura. 4. 11 Velocidad rotacional del pitch del compensador en atraso de fase implementado

Con respecto a la referencia de entrada y ángulo del pitch de la figura 3.24 es similar al de la figura 4.10 porque tienen el mismo periodo y el gráfico del pitch real es parecido al simulado. Además la velocidad rotacional del pitch de la figura 4.11 tiene muchas variaciones de revoluciones en cortos espacios de tiempo pero siguen una misma trayectoria y difiere de la figura 3.25 simulada. Este tipo de controlador tiene una respuesta muy lenta tanto en simulación como en la práctica, pero se mejora las características de régimen transitorio y permanente con una sola red en atraso.

4.3.1 Doble compensador en atraso de fase

En la figura 4.12 se muestra la implementación realizada en Simulink del doble compensador en atraso de fase para el sistema aerodinámico TRAS.

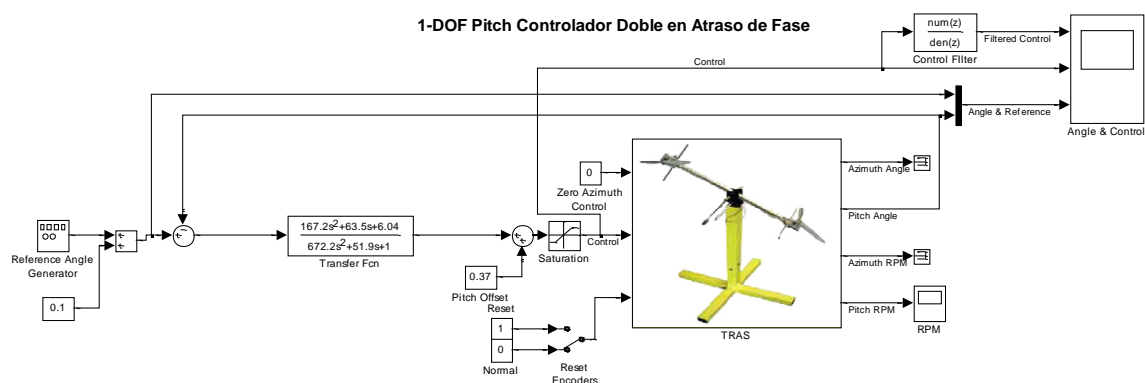


Figura. 4. 12 Implementación del sistema de control en lazo cerrado para el doble compensador en atraso

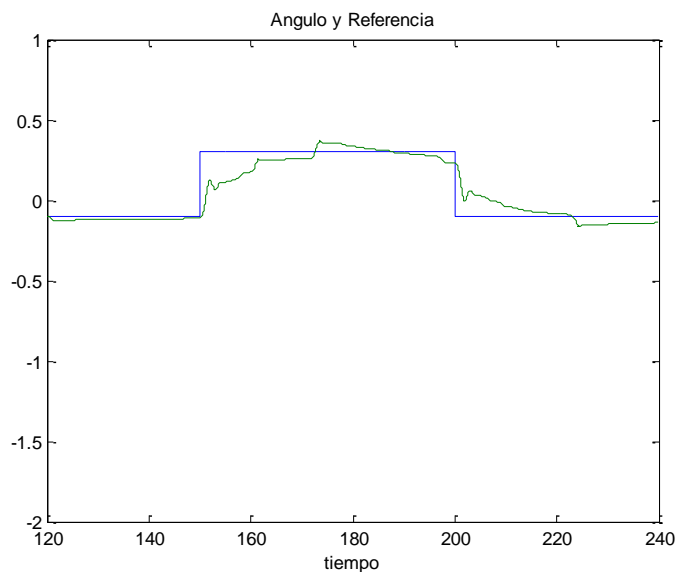


Figura. 4. 13 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el doble compensador en atraso implementado

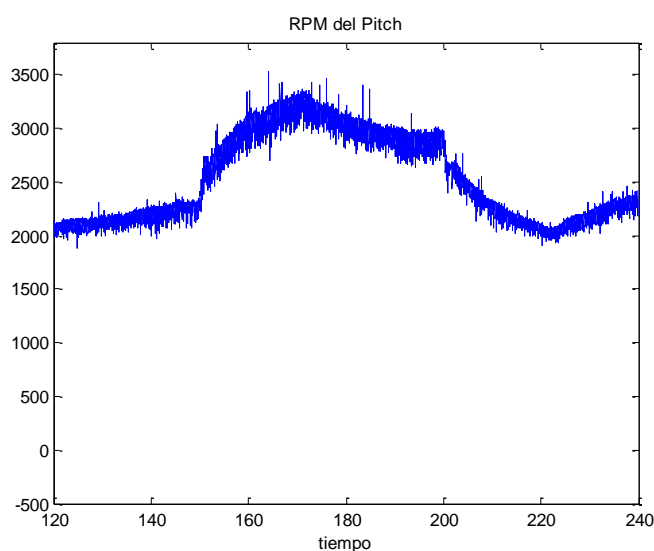


Figura. 4. 14 Velocidad rotacional del pitch para el doble compensador en atraso de fase implementado

Como se observa el pitch se desplaza 11.46 grados o 0.2 radianes en sentido vertical y para ver el comportamiento se coloca a su entrada un generador de onda cuadrada con una frecuencia de 0.01 Hertz. La señal que ingresa por el generador tiene un desplazamiento vertical de 0.1 donde el pitch intenta seguir la señal guía como se muestra en las figuras 4.13 y 4.14. Comparando la referencia de entrada y ángulo del pitch de la figura 4.13 real con la figura 3.30 simulada, se observa que la señal real sobrepasa la señal de referencia en el escalón, mientras que la señal simulada se encuentra por debajo de la señal de referencia. De manera similar al comparar la velocidad rotacional del pitch de la

figura 4.14 real con la figura 3.31 simulada, se ve que la señal real tiene muchas variaciones de velocidad al seguir la señal de referencia, mientras que la simulada tiene una trayectoria limpia y similar a la señal de referencia. Este controlador tiene una respuesta muy lenta, pero es un poco más rápido que el controlador en atraso de fase, también se ve afectada en una disminución de fase y en el régimen transitorio.

4.4 CONTROLADOR ATRASO ADELANTO

La implementación del controlador adelanto atraso para el sistema aerodinámico TRAS se presenta en la figura 4.15 y las graficas del comportamiento del mismo se muestran en las figuras 4.16 y 4.17.

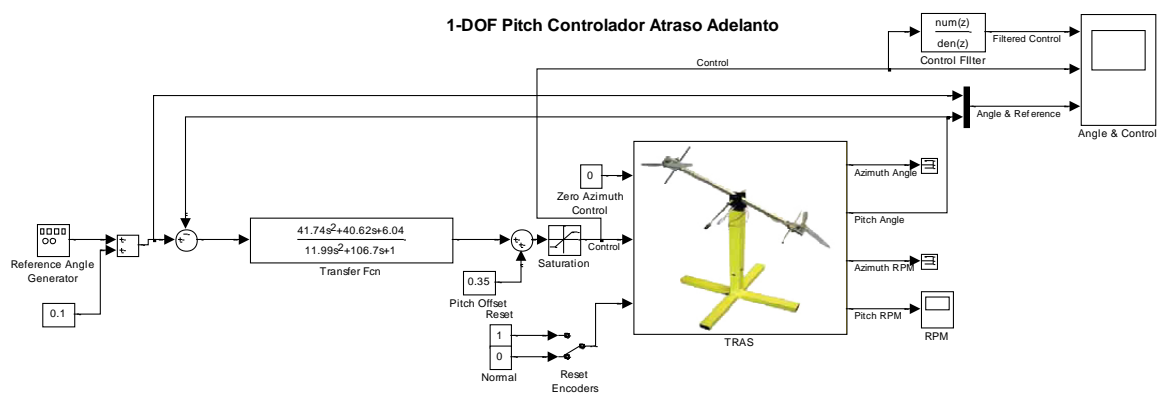


Figura. 4. 15 Implementación del sistema de control en lazo cerrado para el compensador atraso adelanto

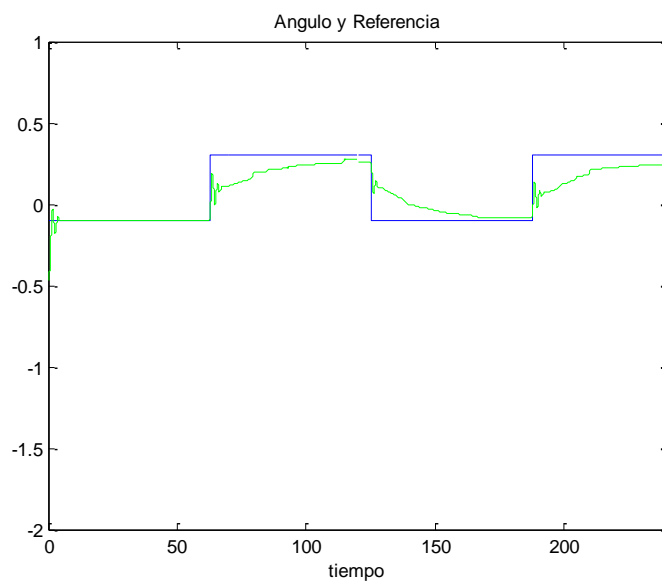


Figura. 4. 16 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el compensador atraso adelanto implementado

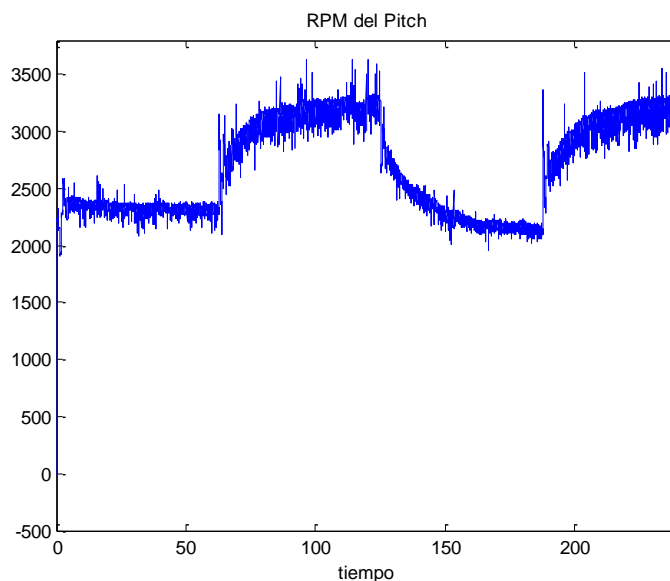


Figura. 4. 17 Velocidad rotacional del pitch del compensador atraso adelante implementado

La entrada de este controlador tiene un generador de onda cuadrada para apreciar los 11.46 grados que se desplaza el pitch, cabe mencionar que la señal de referencia esta desplazada una constante de 0.1 hacia arriba para mantener el rotor principal girando cuando inicie el proceso. Al comparar la referencia de entrada y ángulo del pitch de la figura 4.16 con la figura 3.41 simulada se nota que el pitch real trata de seguir la señal de referencia al igual que la simulación, además se nota que posee una oscilación al inicio de la simulación y esto no sucede con la implementación real. Por otro lado al mirar las figuras 4.17 y 3.42 correspondientes a la velocidad rotacional del pitch real y simulado respectivamente, se nota que hay muchas variaciones de la velocidad rotacional en la implementación real, mientras que en la simulación se tiene una trayectoria sin variaciones de velocidad seguidas solo se observa oscilaciones al inicio y en cada cambio de posición del pitch simulado. Este tipo de controlador tiene una repuesta lenta al cambio de posición y no llega a la fase que se desea.

4.4.1 Compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un doble compensador en adelante

La implementación de este tipo de controlador se muestra en la figura 4.18 donde se ingresa a la entrada del controlador una señal cuadrada de amplitud 11.46 grados. Dicha onda se encuentra desplazada una constante de 0.1 hacia la parte positiva del eje vertical, con una frecuencia de 0.008 Hertz.

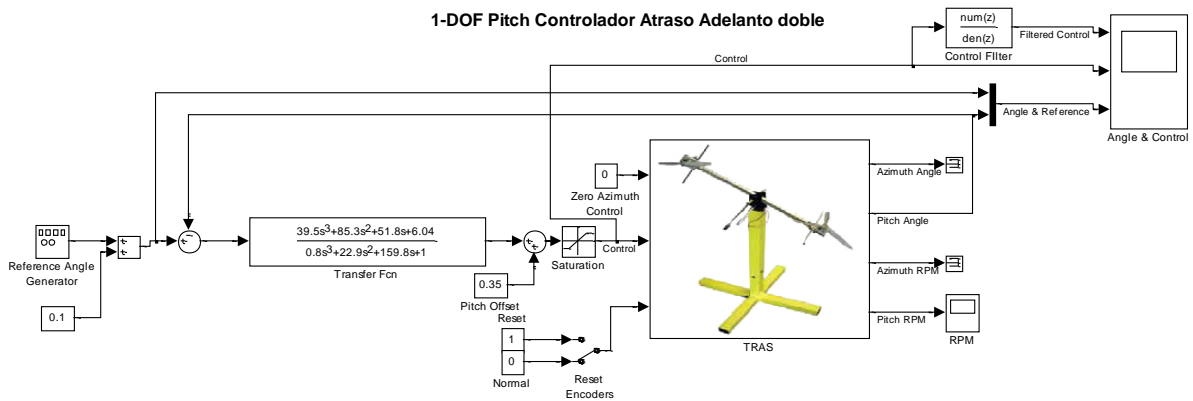


Figura. 4. 18 Implementación del sistema de control en lazo cerrado para el compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un compensador doble en adelante

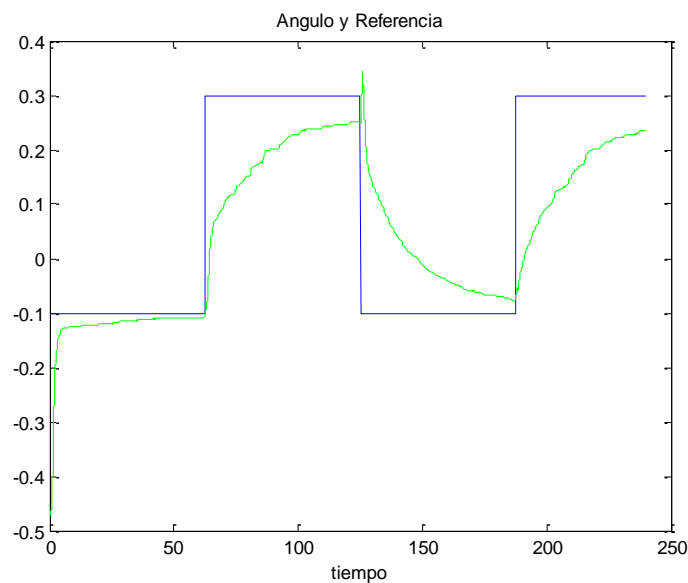


Figura. 4. 19 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el compensador atraso adelante con un compensador en atraso y un compensador doble en adelante implementado

Al comparar la referencia de entrada y ángulo del pitch de la figura 3.49 con la figura 4.19 se observa que el pitch real tiene un sobre pico al descender de un nivel alto a un bajo y no alcanza el valor deseado mientras dura el pulso. En cambio al pasar de un nivel bajo a un nivel alto el pitch real aumenta de manera progresiva y lenta, esto no sucede con el pitch simulado ya que tiene un pico en este cambio de un nivel bajo a un nivel alto y no alcanza el valor deseado en cada pulso de la onda cuadrada. Por otra parte las figuras 3.50 y 4.20 muestra la velocidad rotacional del pitch y en particular, el pitch simulado en cada cambio de nivel de la onda cuadrada se ve picos que pasan los 4000 rpm cuando sube y pasa los -1000 rpm cuando desciende es decir el rotor del pitch gira en sentido contrario. Esto no sucede con el pitch real como se observa en la figura 4.20 donde el rotor del pitch

muestra una trayectoria similar a la posición. Se observa también que la simulación de la velocidad rotacional es diferente de la real.

De los controladores adelanto atraso implementados anteriormente se puede concluir que la red de atraso de fase mejora las características de régimen transitorio y permanente, mientras que la red de adelanto resulta difícil de compensar por bode debido a las características del sistema, disminuyendo los resultados esperados. Por otro lado, al colocar una red en atraso junto con una doble red en adelanto mejora las características de régimen transitorio y margen de fase.

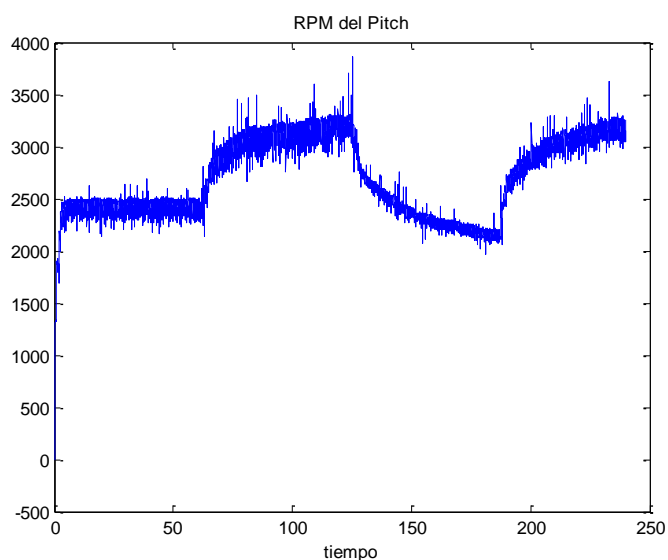


Figura. 4. 20 Velocidad rotacional del pitch del compensador atraso adelanto con un compensador en atraso y un compensador doble en adelanto implementado

4.5 CONTROLADOR PID

Para la implementación de este tipo de controlador en el sistema aerodinámico TRAS, se busca un bloque de simulación llamado PID que tiene en su interior las constantes K_P , K_I , K_D . A su entrada se ingresa una onda cuadrada de 0.2 radianes que desplaza al pitch un ángulo de 11.46° a una frecuencia de 0.025 Hertz. La señal se encuentra desplazada en el eje vertical por una constante de 0.1.

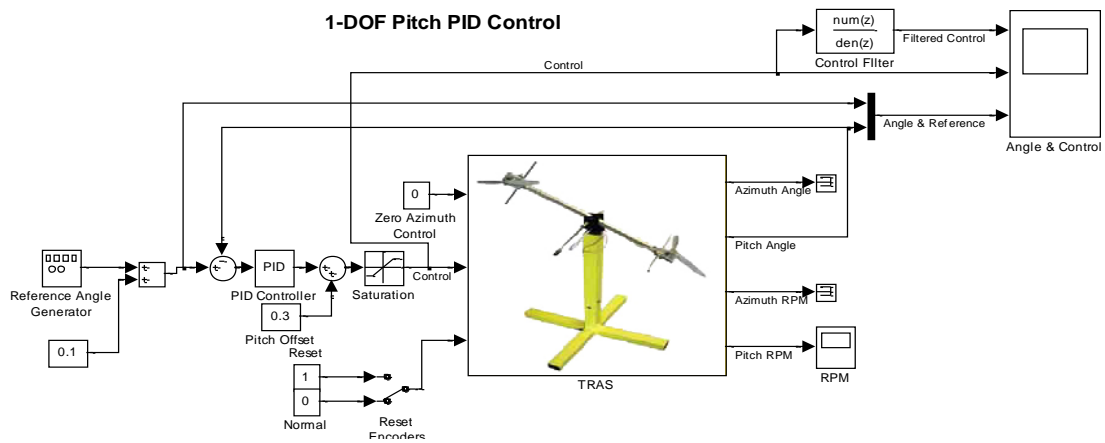


Figura. 4. 21 Implementación del sistema de control en lazo cerrado para el compensador PID

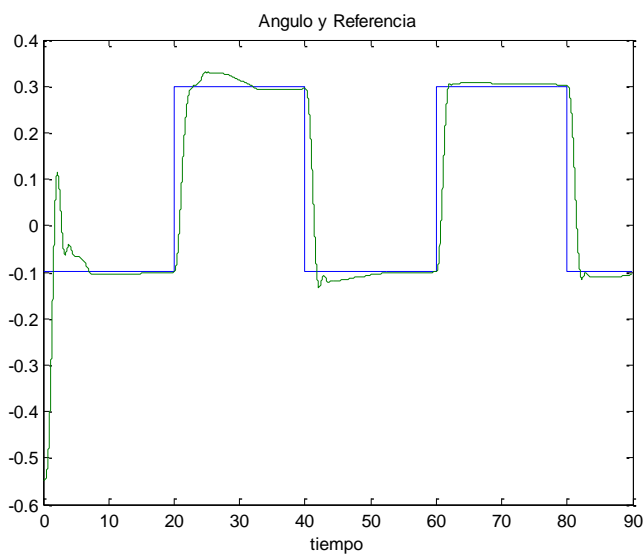


Figura. 4. 22 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el compensador PID implementado

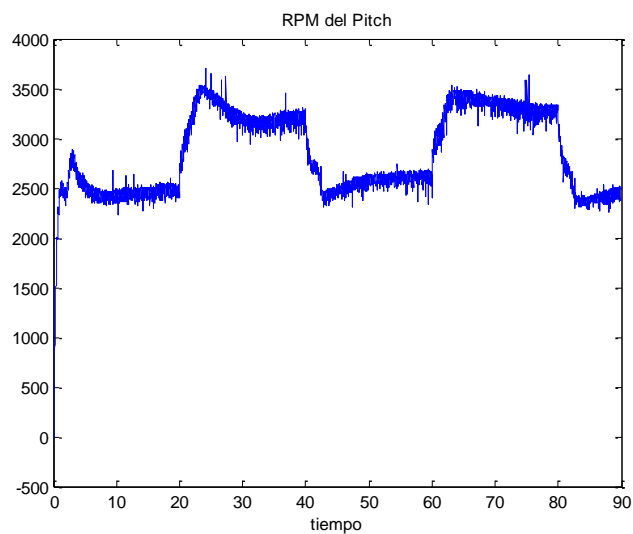


Figura. 4. 23 Velocidad rotacional del pitch del compensador PID implementado

Las salidas de la planta se encuentran monitoreadas por un scope para ver el comportamiento del ángulo y la velocidad rotacional del pitch. La implementación del controlador PID se muestra en la figura 4.21. Al comparar la referencia de entrada y ángulo del pitch de la figura 4.22 con la figura 3.58 simulada se observa que en la práctica al iniciar el proceso tiene un sobre pico pequeño en comparación con la simulada donde se observa que el pico de inicio llega hasta uno, pero hablando de la práctica llega un poco más de 0.1 radianes es decir 5.73° . En los cambios de alto a bajo existe poca variación. Por otro lado la velocidad rotacional de la figura 4.23 comparada con la figura 3.59 se observa mayor número de revoluciones que en la simulación y además al inicio del proceso en la simulación existe un pico alto mientras que en la práctica existe un pico mucho menor. A parte de todo la anterior el controlador PID, hace un buen control del ángulo de elevación del sistema aerodinámico TRAS.

4.6 CONTROLADOR CON REALIMENTACIÓN COMPLETA DE ESTADOS LQR

En la figura 4.24 se muestra la implementación de un controlador LQR en el sistema aerodinámico TRAS el cual tiene a su entrada un generador de onda, que emite una señal cuadrada con una amplitud de 0.2 radianes a una frecuencia de 0.05 Hertz, dicha señal esta desplazada verticalmente por una constante de 0.1, luego ingresa a la entrada de referencia Nr. Las salidas de la planta TRAS son el ángulo, las revoluciones por minuto del motor principal y la velocidad del pitch que se obtiene de la derivada del ángulo del pitch, todas estas se multiplican por -1 y por la matriz de ganancia K para luego sumarse a la entrada de referencia y a una constante que sincroniza la señal del generador con la del ángulo de elevación para su posterior comparación.

Hay otra constante que se suma a la velocidad rotacional del pitch que es el offset y se la usa como una variable de desviación. Cada una de las salidas del sistema TRAS ingresa a un scope que es el encargado de graficar cada uno de los datos de las variables de estado para observar que sucede con cada uno.

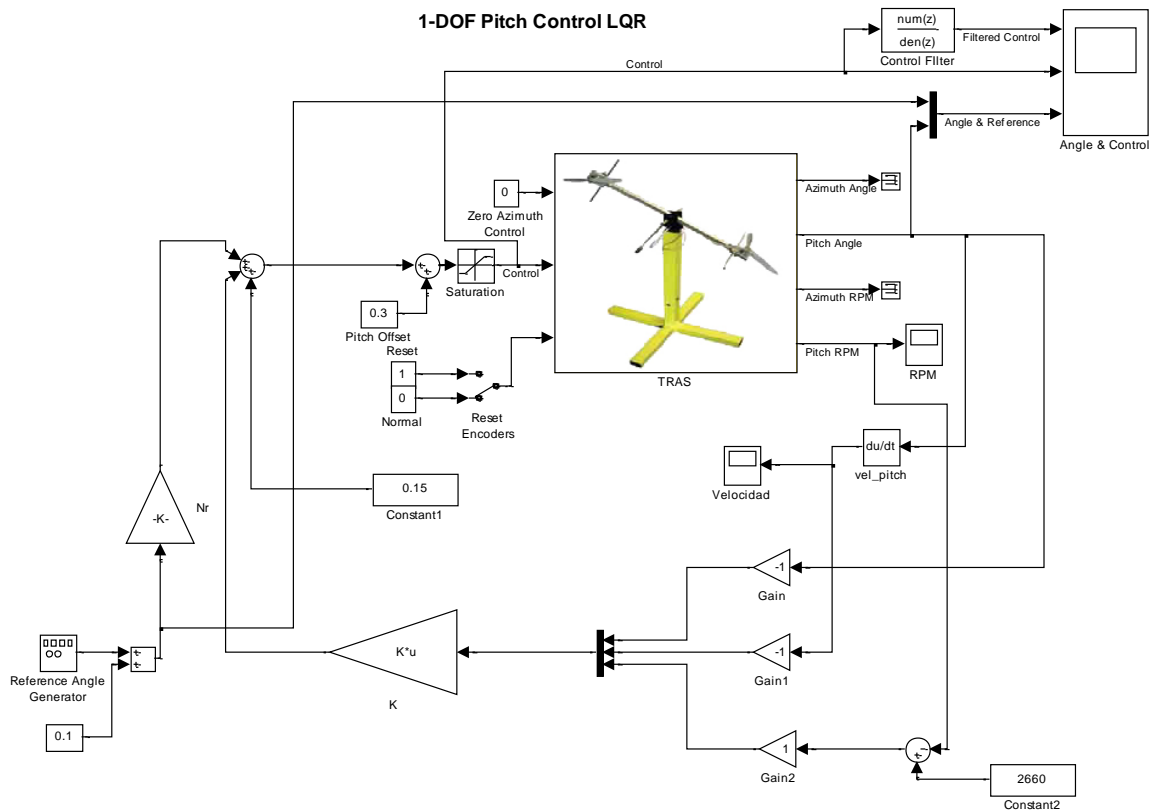


Figura. 4. 24 Implementación del diagrama de simulación del controlador con realimentación completa de estados LQR

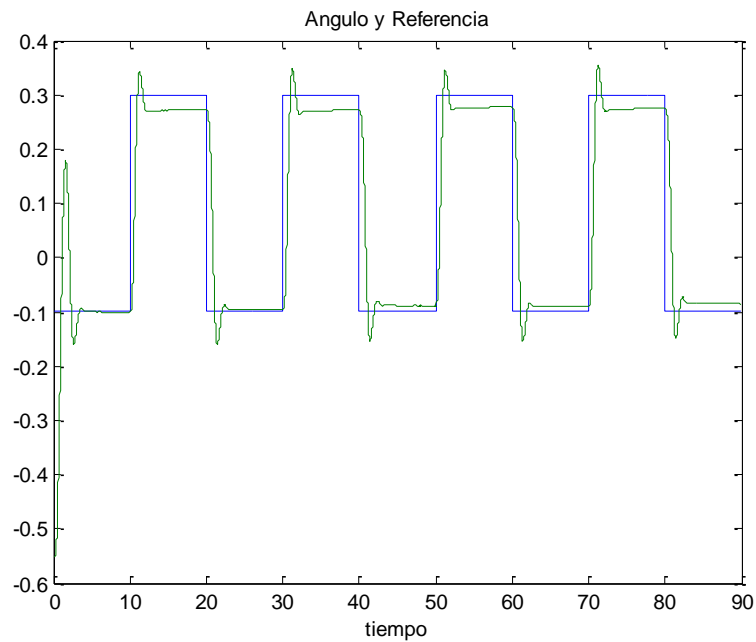


Figura. 4. 25 Referencia de entrada y ángulo del pitch para el controlador con realimentación completa de estados LQR implementado

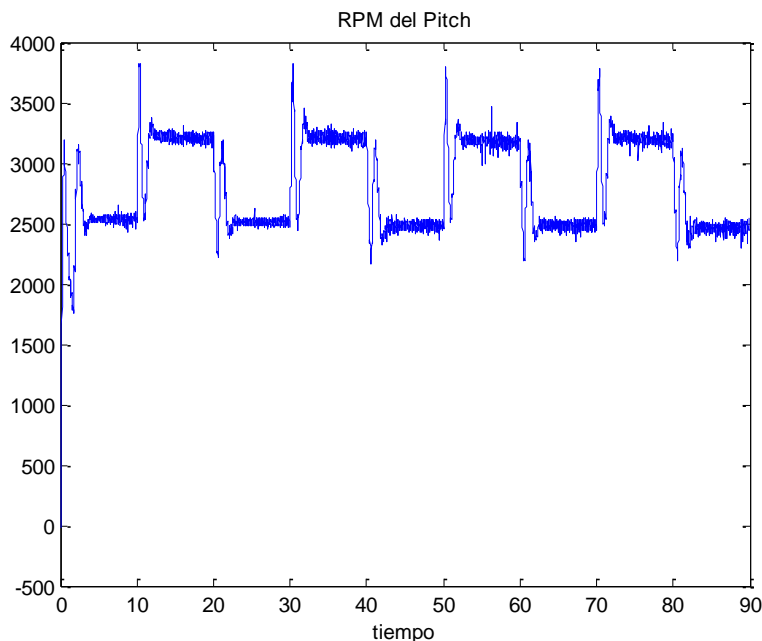


Figura. 4. 26 Velocidad rotacional del pitch para el controlador con realimentación completa de estados LQR implementado

En la figura 4.25 se muestra la referencia de entrada del ángulo de elevación junto a la posición real del pitch y se observa que no llega a la posición que se desea esto se debe a que hay que buscar un adecuado punto en el lugar geométrico de las raíces para obtener un óptimo valor de K . Al comparar el ángulo de elevación con la figura 3.64 se ve que la simulación es más óptima por lo que es necesario calcular otro valor diferente de K para la implementación práctica. Por otra parte la velocidad rotacional del pitch de la figura 4.26 muestra que el motor principal se encuentra trabajando dentro de los parámetros normales, con un sobre pico en cada cambio de posición, esta grafica es similar a la figura 3.65 pero en otro rango de revoluciones.

4.7 CONTROLADOR CON ESTIMACIÓN DE ESTADOS

La implementación de un estimador de orden completo de estados en el sistema aerodinámico TRAS se muestra en la figura 4.27. A la entrada del estimador se ingresa una onda cuadrada de 0.05 Hertz con una amplitud de 0.2 radianes y un desplazamiento vertical de 0.1, esta señal entra a un bloque de ganancia N_r que es el seguidor y se suma a una constante que sincroniza la señal del generador con la del ángulo de elevación para su posterior comparación. Las salidas del bloque TRAS son monitoreadas por un scope y para tener la velocidad se deriva la posición del pitch, para esto se utiliza un bloque derivativo que tiene el Simulink.

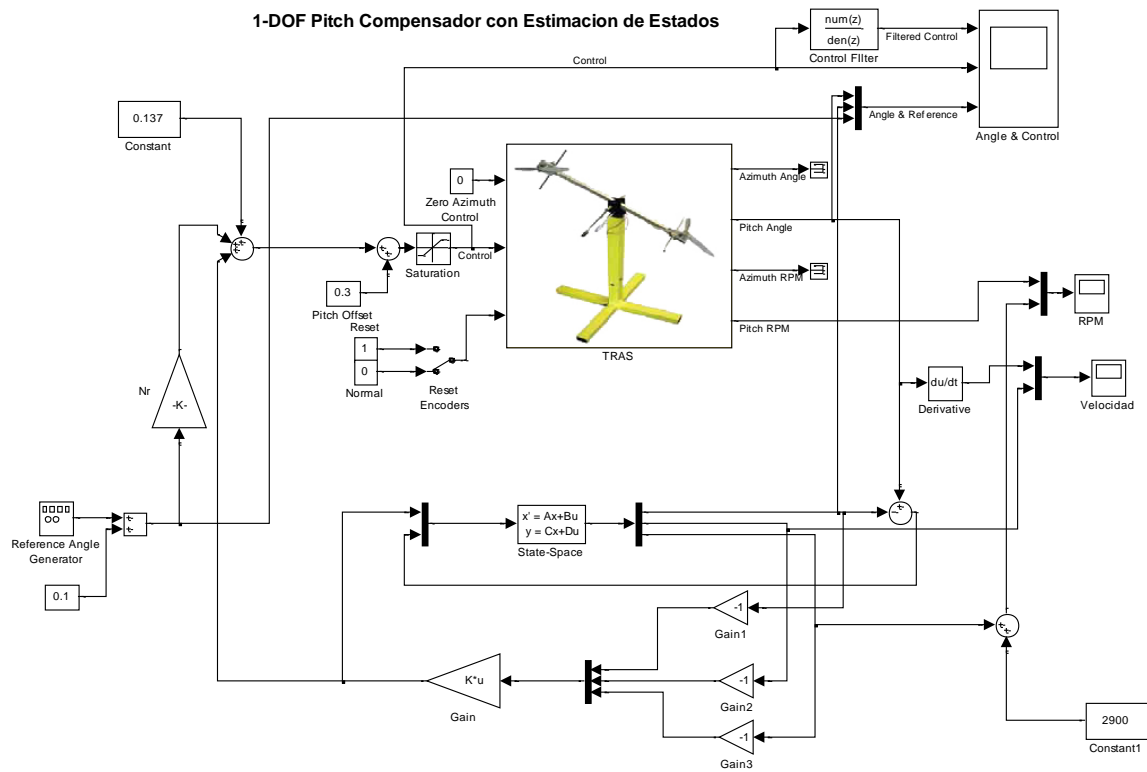


Figura. 4. 27 Implementación del diagrama de simulación del controlador con estimador de orden completo de estados

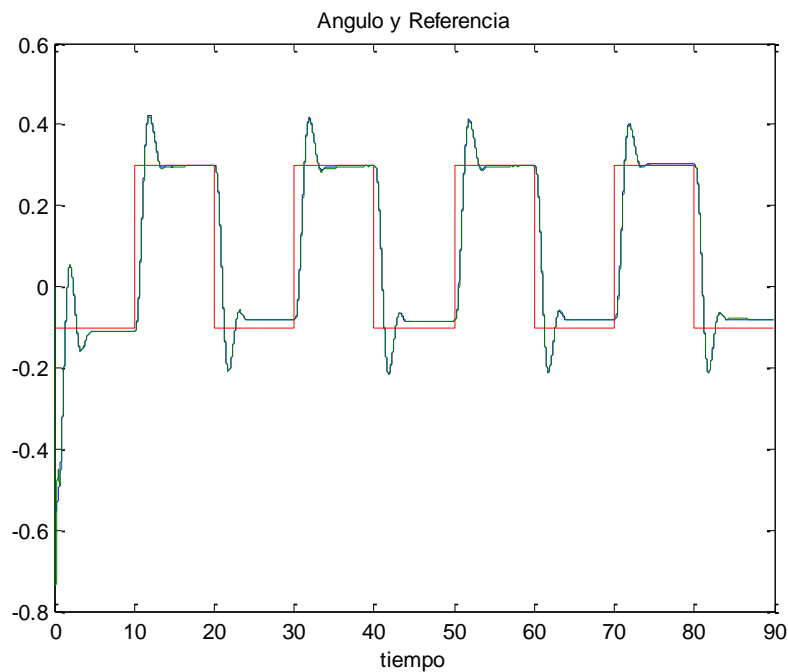


Figura. 4. 28 Ángulo estimado y real del pitch para el controlador con estimador de orden completo de estados implementado

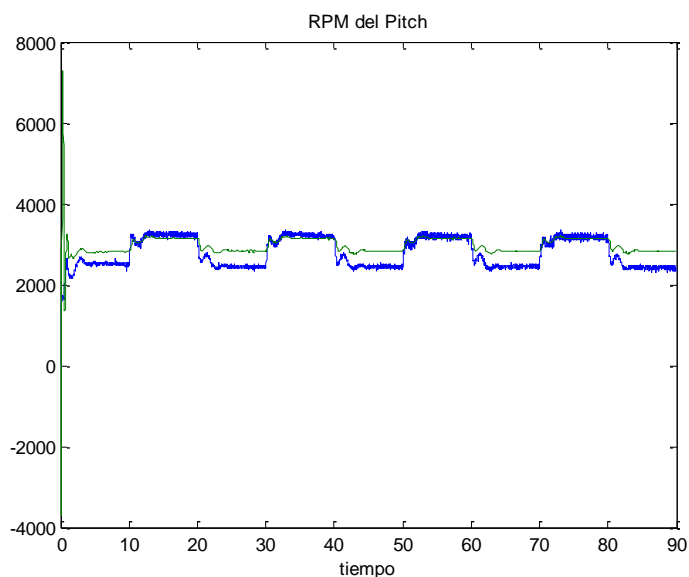


Figura. 4. 29 Velocidad rotacional estimado y real del pitch para el controlador con estimador de orden completo de estados implementado

La posición real del sistema aerodinámico TRAS se resta a la posición estimada del sistema y se realimenta al bloque estimador de estados junto a la ley de control. A la ley de control ingresa cada una de las variables estimadas como son la posición, velocidad del pitch y velocidad rotacional del motor principal, estas antes de ingresar al bloque de ganancia K son multiplicadas por un bloque de ganancia -1 . La salida de la ley de control ingresa a la planta es decir al bloque TRAS y también al bloque estimador. En la salida estimada de la velocidad rotacional se le suma una constante que es una variable de desviación para comparar las rpm reales y estimadas. Por otra parte la figura 4.28 muestra el ángulo estimado y real del pitch donde se observa que existe una muy buena coordinación de ambas señales esto es similar a la simulación de la figura 3.69. Además la figura 4.29 muestra la velocidad rotacional estimada donde se observa una pequeña diferencia entre las dos señales, esta diferencia es por la variable de desviación, pero en general el motor principal del sistema aerodinámico TRAS gira dentro de los parámetros normales sin sobre picos grandes. En este tipo de controlador con estimador de estados de orden completo implementado en este sistema, se puede escoger un punto en el lugar geométrico de las raíces y según este valor se calcula N_r , K , y las matrices del estimador de estados, para ello es necesario escoger bien este punto y se recomienda hacer algunas pruebas con puntos cercanos y lejanos a -1 del gráfico del lugar geométrico de las raíces del pitch para satisfacer el ángulo requerido, esto también es necesario cuando se realiza simulaciones.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

- Para obtener un correcto modelo matemático se debe partir del diagrama de simulación del pitch para poder obtener expresiones que permitan linealizar el sistema.
- La linealización realizada a partir de la expansión de la serie de Taylor facilita el desarrollo de los cálculos matemáticos ya que se puede ignorar los términos de orden superior de la derivada de esta expansión.
- La velocidad rotacional del pitch real es diferente a la velocidad rotacional simulada.
- El diseño de un controlador en adelanto de fase por el método de respuesta en frecuencia para el sistema aerodinámico TRAS es difícil de compensar con una sola red debido a las características que presenta el sistema.
- Un compensador en atraso de fase diseñado por el método de respuesta en frecuencia, al ingresarle una señal escalón, resulta en un desempeño lento del ángulo de elevación, por esta razón el pitch se demora en alcanzar la posición que se desea.
- El compensador en serie o cascada es más fácil de realizar sin embargo necesita más energía.
- Dentro de los controladores clásicos el compensador que mejor se desempeña con el sistema aerodinámico es el PID
- Al diseñar un controlador con estimador de orden completo de estados hay que tener en cuenta que el estimador debe ser mucho más rápido que el propio sistema para ello se debe situar los polos cinco veces más a la izquierda de los polos dominantes del sistema.

- La ubicación de los polos del compensador en espacio de estados debe ser elegida con mucho cuidado ya que si no están lo suficientemente alejados de los polos del sistema, la respuesta del mismo se vuelve oscilatoria.
- En un controlador en espacio de estados, tomando los polos de lazo cerrado cercanos al eje Y se induce un control fuerte porque entre más cerca están del eje imaginario más fuerte es el control. Por otro lado entre más fuerte es el control menor es el rango de estabilidad del sistema controlado ya que los polos intervienen en mayor medida en la respuesta de la planta.
- Al implementar se espera hacer algoritmos más complejos que mejoran el control del sistema aerodinámico TRAS, ya que se usa un computador y el diseño se lo realiza en Simulink de Matlab por lo que es fácil la implementación del controlador que realizar un circuito electrónico.
- Se espera que en el futuro se pueda inventar una manera o dispositivos que permitan realizar controladores complejos como un control difuso y así tener un control más exacto.

5.2 RECOMENDACIONES

- Se recomienda aproximar los polinomios del empuje y velocidad rotacional con los programas mencionados en la sección 2.1.5 para conseguir una mejor aproximación y de esta manera seleccionar un punto y obtener la matriz de estados junto a la función de transferencia apropiada y parecida a la planta real para el diseño de los controladores.
- Cada vez que se vaya probar un controlador en el área de trabajo en tiempo real siempre hay que reiniciar los encoders del sistema aerodinámico TRAS.
- Al ejecutar una aplicación en tiempo real, el ancho de presentación de la gráfica es de 120 segundos y cada 120 segundos se borra la gráfica anterior y presenta una nueva. Por lo tanto es necesario que el tiempo que dura la simulación en tiempo real sea menos o igual a 120 segundos.

- Para la implementación práctica en el área de trabajo en tiempo real siempre colocar un limitador de valores tanto superior como inferior para no forzar o dañar la planta física del sistema aerodinámico TRAS.
- Al colocar una señal de referencia en la implementación de un sistema de control para el sistema aerodinámico TRAS es recomendable que se desplace una constante positiva hacia arriba para garantizar que al inicio del proceso el rotor principal se encuentre girando en un solo sentido y de este manera evitar que el rotor parta del reposo o girando en sentido contrario para luego cambiar de giro repentinamente.
- En un controlador con estimación de estados o en un LQR se recomienda hacer pruebas con puntos cercanos y lejanos a -1 del lugar geométrico de las raíces del pitch para elegir un punto que sea óptimo y así hallar los valores de N_r , K , y las matrices del estimador de estados necesarios para satisfacer el ángulo del pitch requerido según sea el caso.
- Se recomienda la utilización de comandos de Matlab para la obtención de las ecuaciones lineales de los sistemas complejos, esto facilita el diseño de los controladores.
- Para experimentar y facilitar el diseño de los distintos tipos de controladores se recomienda usar los programas que se encuentran en anexos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Inteco, *Two Rotor Aero-dynamical System User's Manual*, pp 5-40
- Avago Technologies, Data Sheet HEDM-55xx, pp 2-3
- Flores, Antonio, *Linealización de Funciones No Lineales*, Enero 23, 2007, pp 3-5
- Phillips, Charles & Harbor Royce, *Feedback Control Systems* third edn Prentice Hall 1996, pp 361-402
- Katsuhiko, Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, Tercera Edición, Pearson Prentice Hall, pp 609-635
- Kuo, Benjamín, *Sistemas de control Automático*, Séptima Edición, pp 714- 759
- Departamento de Control, División de Ingeniería Eléctrica Facultad de Ingeniería UNAM, México D.F. *Compensación utilizando Métodos de respuesta en frecuencia*, Diapositivas, 6 de Noviembre de 2006
- Powell, Colin L, & Emami - Noemi, *Feedback Control of dynamic Systems*, 4th edn, Prentice Hall 2002, pp 492-564
- Matlab version 7 (R14) & Simulink
- www.mame.mu.oz.au/~mcg/ctrl433/
- www.ib.cnea.gov.ar/~control2/
- www.ib.cnea.gov.ar/~dsc/capitulo8/Capitulo8.htm
- www.allaboutcircuits.com/vol_1/chpt_9/4.html
- es.wikipedia.org